Ф. А ОРЕХОВ

ГРАФИЧЕСКИЕ ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ ПО ГЕОМЕТРИИ

Пособие для учителей VI—VII классов

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ПРОСВЕЩЕНИЕ»
Москва • 1964

Предлагаемые в настоящем пособии задания для выполнения графических лабораторных работ по геометрии на уроках в VI и VII классах разработаны и опробованы на практике автором. Ф. А. Орехов, учитель математики средней школы № 8 г Магнитогорска, на занятиях с учениками в течение четырех лет применял эти задания.

В результате сближения теоретического изучения программы с самостоятельными наблюдениями над геометрическими фигурами и их видоизменениями ученики сознательно овладевали материалом. Они получили прочные умения и навыки по геометрии на основе хорошо развитого пространственного воображения.

СОДЕРЖАНИЕ

Рукопись рецензировалась доцентом *Прочухаевым В. Г.* и учителем *Фаворским П. А.*

Редактор *А. А. Свечников*. Обложка художника *Г С. Богачёва*.
Художественный редактор *В. И. Рывчин* Технический редактор *И. Г. Крейс*.
Корректор *Т Н Смирнова*

Сдано в набор 17/VII-1963 г. Подписано к печати 1/XI 1963 г. 84×108 1/32.
Печ. л. 7 (5,74). Уч.-изд. л. 5,38 Тираж 30000 экз. Тем. план 1964 г. № 361.

Издательство «Просвещение» Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.
Полиграфкомбинат им. Якуба Коласа Государственного комитета Совета Министров БССР по печати. Минск, Красная, 23.
Зак. 2021. Цена 15 коп.

ВВЕДЕНИЕ

> «... какое пышное развитие мог бы получить ум, какая энергия убеждений родилась бы в человеке и слилась со всем существом его, если бы его с первых лет приучали *думать* о том, что делает, если бы каждое дело совершалось ребенком с сознанием его необходимости и справедливости, если бы он привык сам отдавать себе отчет в своих действиях и исполнять то, что другими велено не из уважения к приказавшей личности, а из убеждения в правде самого дела!»
>
> *(Добролюбов Н. А.)*

Перестройка системы народного образования в стране на основе Закона об укреплении связи школы с жизнью и о дальнейшем развитии системы народного образования в СССР требует повышения математического образования учащихся. Особого внимания заслуживает математическое развитие учащихся, в частности при обучении их геометрии.

В школьной программе по математике, отражающей требования закона о перестройке, записано: «Максимальное развитие должны получить методы преподавания, способствующие повышению интереса у учащихся к изучению математики, сознательному усвоению ими математических знаний, стимулирующие активность учащихся, воспитывающие у них навыки самостоятельной работы, умение рационально и творчески выполнять полученные задания» [1]. Программа предусматривает постоянное обращение к пространственным формам окружающего мира, к геометрическим моделям, к измерительным работам, к непосредственному опыту и постепенное приобретение учащимися навыков инструментальных построений, решения практических задач.

---

[1] «Программы восьмилетней школы. Математика», Учпедгиз, 1963, стр. 5.

Выполнить эти требования программы можно только при систематических поисках эффективных приемов и методов обучения детей.

Наряду с усовершенствованием методов преподавания наши усилия должны быть направлены на организацию и совершенствование процесса учения детей.

Видеть перед собой каждого ребенка, представлять его деятельность в классе и дома, заботиться о его учебном труде — вот те вопросы, о которых не должен забывать учитель.

Если учитель создаст условия, при которых дети будут конструировать геометрические образы, самостоятельно строить чертежи фигур, исследовать образовавшиеся формы, высказывать собственные суждения, то тем самым он вызовет к активному действию органы чувств и мышление детей, активизирует их учебную деятельность.

Одним из методов, способствующих организации эффективного процесса изучения геометрии, являются графические лабораторные работы. На основе этого метода и разработана предлагаемая система заданий для VI и VII классов восьмилетней школы.

I. ГРАФИЧЕСКИЕ ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ

§ 1. Сущность и особенности графических лабораторных работ

Графические лабораторные работы по геометрии представляют собой вид учебной деятельности школьников под руководством учителя, в процессе которой геометрия изучается путем конструирования и построения геометрических образов, путем учебно-теоретического и практического исследования образовавшихся фигур и соотношений в них.

Этот метод имеет свои особенности.

Первой из них является эксперимент с геометрическими моделями, во время которого конструируются и рассматриваются подлежащие изучению фигуры. В некоторых случаях этот эксперимент заменяется демонстрациями геометрических тел.

В начале эксперимента или демонстрации воспроизводится материал, изученный ранее и необходимый для приобретения новых знаний, затем ставится учебная проблема и намечается план ее решения.

Второй особенностью является эксперимент, в ходе которого строятся чертежи фигур, проводятся учебно-теоретические и практические исследования. Сюда входит сравнение, сопоставление и исследование фактов, их обобщение, формулирование определений вводимых понятий и теорем и устное доказательство теорем.

Следующей особенностью является применение полученных знаний к решению задач и проверка соответствия практических результатов теоретическим выводам. При этом широко используется чертеж как средство решения задач. Например, графическим методом можно с шестиклассниками определять различные элементы треугольников, которые нельзя вычислить аналитическим путем из-за недостатка у учащихся знаний.

По своему учебному назначению графические лабораторные работы разбиваются на три группы: подготовительные, основные и прикладные.

С помощью подготовительных работ воспроизводятся те вопросы, которые необходимы для изучения нового материала, ставится учебная проблема в доступной для детей форме.

Выполняя основные работы, ученики рассматривают и и доказывают свойства изучаемых фигур.

Прикладные работы имеют целью применение полученных выводов к решению практических и теоретических задач, в результате чего углубляются и расширяются знания детей.

В настоящее время при изучении геометрии учитель обычно заставляет учащихся рассматривать готовые чертежи и редко предлагает им создавать собственные чертежи и проводить учебно-теоретические и практические исследования свойств фигур. Графические работы в известной мере восполняют этот пробел, они благотворно влияют на усвоение учеником сущности геометрических форм и количественных соотношений в них, на применение полученных знаний к решению различных практических и теоретических задач. С их помощью геометрические формы рассматриваются в процессе возникновения, изменения и развития. Графические работы на конкретном материале развивают у школьника творческое мышление, способности научного предвидения и фантазию. Статические чертежи учебника и задачника ограничивают мысль ученика, его умение и навыки выделять отдельные конструктивные элементы чертежа, часто необходимые при решении задач. Имея перед глазами только статический чертеж, ученик привыкает видеть то, что лежит на поверхности. У него не воспитывается в достаточной мере стремления проникнуть вглубь, в «недра», и поискать там новое, до сих пор не известное.

Без конструктивного подхода к изучению геометрии учащимся трудно уяснить идеи преобразования, почувствовать красоту геометрических форм и взаимоотношений между их элементами. Многое из трудного в геометрии перестало бы быть трудным, если бы принцип конструктивного подхода имел широкое применение в школе.

Умение рассматривать геометрические образы на плоскости является основой пространственных представлений и пространственного воображения. Развить у школьника геометрическое зрение, научить его «видеть» геометрическую форму трудно без выполнения достаточно большого числа чертежей самим учеником.

Существенным пробелом в работе нашей школы является слабая взаимосвязь между действиями учителя и учащихся в процессе преподавания. Анализ работы многих учителей показывает, что, тщательно продумывая содержание и порядок своей работы на уроке, они мало внимания уделяют разработке действий учащихся. Вследствие того что для учащихся редко разрабатывается программа их действий на уроке и дома, процесс их учения организуется слабо.

На уроках математики учащиеся чаще всего видят и слышат то, что сказал и показал учитель или ученик, но им редко приходится что-либо делать своими руками, проводить маленькие исследования, излагать собственные мысли, делать собственные обобщения и выводы.

Графические лабораторные работы в большей мере, чем другие методы, позволяют преодолеть указанные недостатки в изучении геометрии. Они обеспечивают единство действий учащихся и учителя.

Недостатки в обучении геометрии усугубляются также и тем, что конкретно-наглядный и формально-логический методы преподавания не всегда сочетаются в должной мере.

Формально-логическое изучение геометрии приводит к слабой практической подготовке учащихся, увлечение же конкретно-наглядными методами вызывает снижение геометрического образования учащихся.

Органическое единство этих двух методов в изучении геометрии создает условия, при которых у детей на основе их самостоятельной работы возникают собственные суждения. Вместо пересказа чужих мыслей и заучивания готового доказательства теорем учащиеся высказывают свои предположения и доказывают их. Графические лабораторные работы способствуют такому единству.

Немаловажное значение в учебном процессе имеет принцип перспективности.

Его сущность заключается в том, что при изучении любого материала целесообразно подготавливать ученика к изучению последующего не только конечным результатом, но также содержанием упражнений, накоплением запаса представлений. Недостаточное использование принципа перспективности задерживает создание у школьника запаса собственных представлений о геометрических формах. У него не вырабатывается автоматических навыков построения основных фигур, поэтому, выполняя геометрические построения, ученик непомерно много времени тратит на выполнение чертежей и у него не остается времени для изучения самих форм и соотношений в них. А кроме того, ученик, затратив много времени и усилий на построение чертежа, мало получает с его помощью выводов.

Стремление получить с помощью созданного чертежа все, что нужно для изучения свойств определенной фигуры, является характерной особенностью метода графических работ.

Построение правильных чертежей дает возможность многократно, в различных вариациях и сочетаниях воспроизводить основные геометрические образы и их элементы.

Наконец, нельзя не отметить и того, что в графических лабораторных работах сочетаются повторение ранее известного и изучение нового материала, создаются необходимые предпосылки для изучения последующих тем, на основе накопления геометрических представлений. Ученики, выполняя графические работы, приобретают прочные знания, умения и навыки.

§ 2. Организация и методика проведения графических лабораторных работ

Оборудование. Для выполнения чертежей учащиеся должны иметь простую и масштабную линейки, угольники, циркуль, измеритель, транспортир. В кабинете математики целесообразно иметь несколько запасных комплектов чертежных инструментов для тех учеников, которые по каким-либо причинам не принесут свои. Желательно, чтобы для каждого ученика была чертежная доска малого формата. В крайнем случае можно воспользоваться картонными и фанерными подкладками.

Работы выполняются на отдельных нелинованых листах бумаги формата 203×288 *мм* или в альбомах. Небольшие размеры форматки заставляют детей более экономно вести записи.

Для правки карандашей на каждой парте следует иметь фанерки с наклеенной на них наждачной бумагой (точилки.)

В кабинете математики необходимо иметь набор наглядных пособий для демонстрации свойств изучаемых фигур, а также демонстрационные чертежи, подобные тем, которые будут выполняться учащимися. Особенно полезен универсальный прибор по планиметрии. Упрощенная модель этого прибора состоит из щита размером 700 *мм* × 800 *мм* × 20 *мм*. В нем через каждые 50 *мм* просверлены насквозь отверстия диаметром 2—3 *мм*. В эти отверстия вставляются гвоздики со шляпкой. На гвоздики накидывается шнуровая резина, с помощью которой моделируют все теоремы планиметрии. На обороте щита чертится окружность диаметром 25—30 *см*. Он необходим для демонстрации фигур, связанных с кругом и окружностью. Хорошо, если подобный прибор меньшего размера учащиеся изготовят каждый для себя. Для этого надо взять шестислойную фанеру размером 12 *см* × 25 *см* и просверлить в ней отверстия диаметром 1—2 *мм* через каждые 2 *см*.

Для выполнения чертежей на классной доске дежурный ученик приготавливает отточенные лопаточкой белые и цветные мелки, длинную линейку, треугольники, транспортир, измеритель, циркуль, лекала, поперечный масштаб, широкую (25—30 *см*) двустороннюю линейку, штангенциркуль и другие необходимые приборы.

Оформление работ.

К каждому уроку дети заранее готовят форматки.

Все надписи на чертежах ученики выполняют аккуратно карандашом, отделяя одну букву от другой небольшим интервалом.

В целях выделения главного в чертеже основные линии хорошо обвести цветными карандашами или линиями большей толщины. Дополнительные построения стирать не следует, чтобы видеть ход работы.

Чертежи выполняются наиболее целесообразными приемами. Если ученик найдет лучший и правильный прием построения, то он заслуживает поощрения.

Организация урока.

На графические работы, предназначенные для изучения нового материала, целесообразно отводить целый урок, на тренировочные и проверочные — 10—15 минут. Если урок посвящен изучению нового материала, все учащиеся сразу же после звонка приступают к подготовке форматки, делят ее по указанию учителя на 4, 6 или 8 частей. Учитель в это время проверяет готовность учащихся к уроку, отмечает отсутствующих, готовит доску, просматривает выполнение домашних заданий. Затем учитель сообщает детям задание, проводит беседу. Во время беседы с демонстрацией моделей учащиеся внимательно слушают учителя и участвуют в беседе, стараясь разобраться во всех деталях предстоящей работы.

В процессе выполнения учениками задания учитель помогает учащимся, организует их взаимную помощь. Полезно разрешать ученикам на уроке обмен мнениями и взаимную помощь, с тем чтобы дети учили друг друга.

Контроль за работой учащихся является неотъемлемой частью урока. Отметка в журнале выставляется учителем в результате его наблюдений в процессе всего урока за действиями учеников.

Указывая на сильные и слабые стороны работы учащихся, учитель стимулирует их деятельность. Сильным ученикам после выполнения основного задания предлагаются дополнительные, более сложные работы. Важное значение имеет поощрение учащихся за прилежание, за выполнение работы раньше срока и за хорошее качество выполнения ее.

Между выполнением отдельных работ полезны паузы, которые дадут возможность отставшим ученикам догнать своих товарищей. Сокращая постепенно паузы, можно выработать ровный и достаточно быстрый темп работы учеников всего класса. Паузы можно использовать для самопроверки, взаимной проверки работ и взаимной помощи учеников.

Нетрудно видеть, что при выполнении графических лабораторных работ учитель является подлинным организатором и руководителем процесса учения детей. Учащиеся это хорошо понимают и, не стесняясь, обращаются к учителю за помощью и советом.

Сообщение плана и содержания заданий.

Текст задания сообщается различными приемами: записывается на доске с одновременным нанесением эскиза, заранее напечатанный текст раскладывается на парты дежурным учеником или диктуется учителем по частям перед выполнением каждой работы. Форма сообщения зависит от содержания задания и приемов выполнения.

Объяснение задания должно быть кратким, ясным и вместе с тем исчерпывающим. Вводная беседа позволяет поставить и определить конечные цели проблем, подлежащих раз-решению, а также разобрать основные этапы, необходимые для разрешения их. Она дает возможность представить проблему в целом, выяснить, что достоверно известно, о чем можно догадываться и каким путем следует идти к решению проблемы. Таким образом, вводная беседа имеет целью наметить практический и логический план всей работы. Она может быть заменена рассказом учителя о целях и способах выполнения работы на уроке и дома. Так, перед изучением признаков параллелограммов учитель в беседе ставит перед учениками задачу найти признаки параллелограмма, по которым можно выделить его среди других четырехугольников, используя для этого известные свойства параллелограмма, т. е. выделить необходимые и достаточные признаки параллелограмма. Беседа сопровождается демонстрацией моделей.

В процессе выполнения заданий может возникнуть необходимость уточнить отдельные положения. В этом случае учитель дает краткие разъяснения по ходу выполнения работы, а в некоторых работах предлагает одному из лучших учеников выполнить часть задания на доске и дать к нему подробное объяснение. Такой прием полезен не только тем, кто работает у доски, но и тем учащимся, которые будут слушать товарища. Сопоставляя свою работу с работой товарища, слушая объяснения его, ученики будут анализировать свои действия и наметят правильный путь собственных размышлений.

Если учитель видит, что многие учащиеся затрудняются, то он непременно должен провести сопроводительную беседу для всех учащихся. Выяснив затруднения, учитель конкретизирует намеченный ранее план выполнения задания. В отдельных случаях беседа превратится в индивидуальную помощь ученику, испытывающему затруднение.

Заключительные беседы проводятся после выполнения всего задания. Эти беседы обобщают наблюдения и выводы, а в отдельных случаях раскрывают перспективу изучения ближайших тем программы. В них рассматриваются логические положения, на которых строится изучение материала, наиболее рациональные приемы рассуждений. Анализируя результаты работы, полезно рассказать о том, что можно вычислить, определить, построить и доказать с помощью полученных знаний, показать теоретическое и практическое значение изученных положений.

В заключительной беседе можно рассказать более подробно о тех вопросах, которые интересуют не всех, а только наиболее любознательных учащихся. Существует, видимо, грань между двумя положениями: учить всех детей основам знаний и учить тех из них, кто в будущем, возможно, посвятит свою жизнь математике и физике. Вероятно, учителя могут и должны на уроках иногда переходить эту грань, чтобы ученикам, интересующимся математикой, дать пищу для их пытливого ума. Не проходят бесследно такие отступления и для других учащихся. У некоторых из них именно в это время пробуждается интерес к математике.

Воспроизведение и повторение основного материала.

Чертежи на форматках и аналогичные им демонстрационные чертежи дают возможность организовать систематическое воспроизведение основного материала. Ученики, пользуясь чертежами, связно и последовательно рассказывают о сущности работы и о полученных результатах.

При таком приеме не только восстанавливается в памяти учеников основной материал, но знания их совершенствуются, а кроме того, развивается речь и мысль каждого ученика.

Работы для заключительного повторения представляют собой тематический отчет учащихся. Например, после изучения треугольников можно предложить учащимся проверочную работу следующего содержания.

1. Даны три числа: 160, 120 и 80. Установить, можно ли построить треугольник, у которого эти числа обозначали бы длины сторон в миллиметрах ($AC = 160$ *мм*, $AB = 120$ *мм*, $BC = 80$ *мм*).

2. Провести в нем высоты красным карандашом, медианы — синим, биссектрисы — зеленым. Измерить их.

3. Определить тип треугольника в зависимости от величины его углов. Можно ли это сделать, не измеряя углов?

4. Составьте математическое сочинение о зависимостях между элементами треугольника, включая и его замечательные линии. Укажите, какие зависимости вы можете обосновать, а о каких можете высказать предположение на основе опыта.

Сброшюрованные в виде альбома форматки с выполненными заданиями представляют своеобразную геометрию в чертежах, они могут служить хорошим пособием для повторения изученного материала.

Графические работы и учебник. Графические лабораторные работы органически связаны с работой по учебнику. После введения понятий и их определений учащиеся отыскивают соответствующие определения в учебнике и запоминают их. Во время работы над формулировками новых теорем и определений ученикам предлагается, не глядя в учебник, самим составить формулировку и только потом сверить ее с той, которая дана в учебнике. Эта работа интересна для большинства учащихся. Такой прием обеспечивает осознанное запоминание определений и теорем.

При самостоятельном выполнении работ материал учебника служит своеобразным описанием к лабораторным работам. Учащимся в таких случаях предлагается раскрыть учебник и пользоваться им.

Иногда учащимся рекомендуется копировать из учебника отдельные чертежи. В процессе копирования дети вникают в сущность изучаемого материала и приобретают практические навыки.

Дома учащиеся сопоставляют доказательства и выводы, полученные в классе, с текстом учебника, анализируют ход доказательства и отмечают логическую стройность изложения в учебнике.

Время от времени можно часть материала, имеющегося в учебнике, дать учащимся для самостоятельного изучения, на основе чего они дополнят свои графические работы. Большинство учащихся с удовольствием и интересом выполняют такую работу.

Показ лучших работ. Целесообразно время от времени проводить показ лучших работ: тетрадей, отдельных чертежей, оригинальных образцов решения задач, изготовленных учащимися наглядных пособий и пр. Организовать такую выставку можно на стендах и витринах. На эту работу не нужно много времени. У учителя всегда найдутся помощники, которые с удовольствием будут по его указанию обновлять экспонаты выставки.

Графические лабораторные работы в системе преподавания геометрии. Метод лабораторных графических работ, как разновидность лабораторного метода, следует сочетать с другими методами.

Предлагаемые в настоящем пособии задания для учеников VI—VII классов представляют собой возможные варианты графических работ, из которых учитель может отобрать наиболее важные для использования на том или ином уроке. Из отдельных заданий могут быть взяты не все, а лишь несколько рекомендуемых работ.

Разрабатывая задания для лабораторных работ, мы стремились показать широкие возможности применения их на уроках геометрии. Учителю следует помнить, что важно не то, сколько работ выполнено, а в значительной мере то, как они выполнены. Число работ, отобранных учителем, должно быть таким, чтобы ученики без спешки, тщательно могли выполнить их и получить от этого наибольшую пользу. Это значит, что на уроках должны быть проделаны работы, содержащие принципиальные вопросы. Если основа будет тщательно рассмотрена на уроке, тогда второстепенные вопросы могут быть легко и с интересом выполнены учениками дома. Легко потому, что основа уже усвоена, а с интересом потому, что есть где проявить самостоятельность, собственное творчество.

Лабораторные занятия, как и всякий другой метод, не самоцель, а средство математического образования учащихся. Поэтому элементы этого метода целесообразно включать всюду, где он может дать плодотворные результаты.

Время, ушедшее на выполнение графического задания на уроке, обычно с лихвой окупается тем, что школьники получают четкие, ясные представления о геометрических фигурах и их свойствах.

§ 3. Решение задач

Задачи на доказательство. По чертежам, полученным в результате построений, ученики решают задачи на доказательство. Так, например, после построения равнобочной трапеции им предлагается доказать равенство углов, прилегающих к ее основанию, равенство диагоналей и другие свойства, не включенные в программу, но имеющие значение для развития логического мышления.

Полезна и такая работа, когда ученики, самостоятельно выполнив чертеж, сами откроют некоторые свойства фигуры, сформулируют эти свойства в виде теорем и докажут их. Например, можно предложить учащимся высказать предложение о свойстве углов, прилегающих к боковой стороне трапеции, сформулировать его и доказать. Важно предлагать и такие задачи: всмотреться в чертеж и подметить новые свойства данной фигуры.

Чертежи, предлагаемые в заданиях, позволяют ученикам составлять и решать задачи на доказательство. При этом чертеж помогает конкретизировать абстрактные свойства фигуры. Сильным ученикам полезно предложить дома подумать над более трудными вопросами, которые можно разрешить с помощью выполненных в классе чертежей.

В настоящее время учителя уделяют много внимания решению задач на доказательство по готовым чертежам. Нельзя отрицать положительной роли такого использования готовых чертежей, но следует обратить особое внимание на чертежи, выполненные учениками. Готовые чертежи не толкают ученика выяснить все взаимосвязи между элементами фигуры так, как чертежи, выполненные ими самими. На чертежах, выполняемых школьниками, ученики могут производить необходимые дополнительные построения для решения задач на доказательство. Понимание всех деталей конструкции вызывает более четкую и активную мыслительную деятельность ученика.

Задачи на построение. В методической литературе отмечается слабое умение учеников решать задачи на построение. Одной из причин этого недостатка является то, что задачи обычно решаются в отрыве от изучения теории и не решаются при создании конструкций соответствующих геометрических образов, в процессе изучения свойств фигур. Решение задач не сочётается органически с изучением геометрических фигур, а обычно выносится в конце изучения темы. В результате из геометрии «исчезает» геометрия, а остается лишь тренировка памяти.

Особенности предмета геометрии, природное стремление детей к деятельности требуют, чтобы задачи на построение были органической частью курса геометрии. Такой подход обосновывается и диалектической теорией познания, требующей изучать факты в их возникновении, изменении и развитии.

В предлагаемых нами заданиях содержатся почти все основные задачи на построение изучаемых в VI—VII классах геометрических фигур в различных вариантах. Так, построив параллелограмм по одним элементам, тут же ставится вопрос о построении параллелограмма, равного данному по другим элементам. Выполненный чертеж используется для получения новых знаний и для решения задач.

Построение основных фигур по различным данным ведется в органической связи с изучением этих фигур. При этом построение выполняется учениками довольно быстро и у них остается время для самостоятельного решения задач, для самостоятельных размышлений.

Самостоятельному решению учащимися задач на построение должно предшествовать конструирование соответствующих образов с помощью спиц и реек. Эта работа особенно важна в начале усвоения приемов решения задач на построение. Например, при решении задачи на построение треугольника по двум сторонам и высоте, проведенной к третьей стороне, прежде всего целесообразно сконструировать на спицах модель этого треугольника. При этом перед учащимися встает вопрос, с чего начинать собирать конструкцию, чтобы детали сразу ложились на свое место. После сборки конструкции из спиц ученики легко построят треугольник на чертеже с соответствующим обоснованием. Если задача допускает различные решения, то и в этом случае предварительная сборка конструкции поможет ученикам разобраться в сущности решения задачи. При таком подходе к решению задач построение будет являться оформлением результатов конструктивных изысканий. В процессе их, естественно, осуществляется анализ решения задачи. Осмысленность построения пробуждает способности учащихся к решению такого рода задач, вырабатывает у них навыки конструирования, развивает пространственные представления и воображение на конкретно осознанном материале. В последующем конструирование с помощью реек и спиц заменится выполнением эскиза.

Все задачи на построение целесообразно выполнять на форматках. Основные построения выполняются линиями нормальной толщины, дополнительные построения — линиями в два раза тоньше.

На одной форматке можно решить 4—6 задач на построение на одну какую-либо тему или на разные темы. Данные записываются так, как это принято в учебнике. Не нужно вести многочисленные записи при решении задач на построение, а порядок построения элементов следует указывать цифрами, обведенными кружочками. Например, строится $\triangle ABC$ по сторонам a, b и $\angle (ab)$. После построения на чертеже цифрами 1, 2, 3, 4

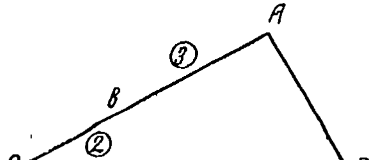


Рис. 1.

указывается порядок построения. Этот порядок можно показать иначе, записав в строчку все элементы в той последовательности, в которой они строились: $BC = a$; $\angle C = \angle (ab)$; $CA = b$; AB.

При объяснении задания целесообразно там, где это возможно, указывать условия построения вполне определенной фигуры. Замена одних данных для построения другими повышает у пытливых учащихся интерес к работе.

Задачи, допускающие несколько решений, целесообразно давать так, чтобы на чертежах получались всевозможные случаи. Вот пример такой задачи. Постройте треугольник по двум сторонам и острому углу против одной из них. Рассмотреть различные случаи:

1) $a = 45$; $b = 50$; $\angle A = 60°$; 4) $a = 40$; $b = 50$; $\angle A = 60°$;
2) $a = 50$; $b = 50$; $\angle A = 60°$; 5) $a = 30$; $b = 50$; $\angle A = 60°$.
3) $a = 60$; $b = 50$; $\angle A = 60°$;

Задачи на вычисление. В практической деятельности человека ему часто приходится решать геометрические задачи, которые могут иметь самую различную форму и редко даются в том виде, в каком мы их встречаем в сборниках задач, т. е. в виде условия и вопроса. Очень часто условие задачи дается в форме чертежа или самой детали. Необходимые числовые данные приходится отыскивать путем измерения или из справочников, таблиц и других источников. Некоторые чертежи, полученные в результате построения фигур для изучения нового материала или решения задач на построение, могут быть использованы при решении задач на вычисление. В этих целях в заданиях даются значения одних элементов фигур и предлагается вычислить другие. После вычисления значений искомых элементов полезно измерить их и сравнить результаты вычисления и измерения.

По другим чертежам можно предложить ученикам сформулировать условия задач для определения тех или иных элементов и решать эту задачу. Ученики с интересом составляют задачи, для которых чертеж служит основой. Ясное представление чертежа дает возможность сосредоточить внимание учеников только на составлении условия задачи, отодвинув чертеж в сторону.

В ряде случаев целесообразно поставить задачу в общем виде — в виде небольшого исследования или обобщения. Можно, например, предложить ученикам указать, какие условия необходимы, чтобы найти определенный элемент фигуры. В отдельных случаях такие задачи явятся основой для изучения теорем.

Задачи по готовым чертежам дают возможность за короткий промежуток времени отработать вычисление отдельных элементов, необходимых для решения более сложных задач, лучше и глубже понять свойства изучаемых фигур. Соответствие чертежа условию задач способствует выработке навыков не только в расчетах, но и в изображении фигур по их описаниям.

Правильно выполненные чертежи дают возможность во многих случаях устанавливать соотношения между геометрическими фигурами и их элементами чисто геометрическим путем, без вычислений. Как пример можно указать 5-ю работу задания № 21 из темы «Окружность», где ученики геометрически сравнивают площади правильных треугольника и шестиугольника, вписанных в одну и ту же окружность.

Графическое решение геометрических задач.

Подготовка учащихся восьмилетней школы не позволяет им вычислять многие элементы геометрических фигур. В практической же деятельности людей довольно часто встречается необходимость определить такие элементы. Преодолеть это затруднение можно с помощью графического решения геометрических задач. В этих целях чертежи геометрических фигур, построенных по определенным данным, представляют собой частные номограммы и позволяют найти все остальные элементы фигуры. Точность результатов зависит от аккуратности и точности построений и во многих случаях отвечает потребностям практики.

Графические способы решения расширяют число задач, разнообразят виды их и позволяют с первых уроков геометрии ввести своеобразную графическую пропедевтику, необходимую для изучения графиков в последующих классах. У учащихся воспитывается правильное отношение к графикам и графическому решению задач.

Измерения величин имеют большое значение для образования, воспитания и подготовки учащихся к практической деятельности. Чтобы измерения приносили пользу, необходимо проводить их в школе так, как это делается в жизни, в практической деятельности людей. Это означает, что измерения должны быть целенаправленными и проводиться с определенной степенью точности.

Очень полезны измерения отрезков и углов после доказательства соответствующих теорем. Цель этой работы заключается в проверке точности построений путем сравнения результатов измерения с теоретическими выводами. Такая работа воспитывает у ребят потребность в самопроверке, причем эта потребность воспитывается постепенно, вначале в виде непосредственного интереса, а затем остается в характере ребенка как привычка все проверять.

Измеряя, ученики более отчетливо представляют форму фигур и соотношения между элементами их, а это значит лучше усваивают основы геометрии.

Работая с измерительными инструментами, школьники овладевают навыками измерения, усваивают понятия длины, площади, объема. Измерения помогут ученикам освоиться с понятием точности измерений. Обработка результатов измерений даст возможность более конкретно изучать приближенные вычисления.

Измерения помогут выработать навык в глазомерной оценке размеров тел.

Измерение данных отрезков с помощью поперечного масштаба можно производить с точностью до 0,1 *мм*, а обычной линейкой с точностью до 0,5 *мм*. Отрезки, которые получаются в процессе построения, целесообразно измерять с точностью до 1 *мм*. Более точное измерение не улучшит результата из-за неточности чертежных инструментов и погрешностей в отсчетах.

Особую ценность представляют задачи на конструирование пространственных форм, различных комбинаций из тех тел, которые изучаются в школе. Задачи такого типа можно широко использовать не только в восьмилетней, но и в средней школе. В мастерских силами учеников под руководством учителей можно изготовить большое количество пособий для проведения лабораторных работ по моделям. Для этого одной группе учеников можно, например, предложить рассчитать, выполнить чертежи и изготовить прямую призму, в основании которой лежит треугольник, другой группе — призму, в основании которой лежит параллелограмм, третьей — с трапецией в основании и т. д.

Очень полезны задания, в которых учащимся предлагается самим выбрать данные, сконструировать фигуру, оформить, дать обоснование и составить отчет о проделанной работе. Можно, например, предложить ученикам сконструировать модель, состоящую из комбинации известных им тел, выполнить чертежи конструктивных элементов модели и изготовить ее. Для начала можно предложить учащимся сконструировать модель, состоящую из нескольких спичечных коробок. Учащиеся VII класса по нашему заданию изготовили из спичечных коробок довольно сложные модели, определили площадь поверхности и объем каждого тела, оклеили модели цветной бумагой, определили расход бумаги. Это задание вызвало у школьников большой интерес.

Подобные задачи, связанные с расчетами расхода материала на изготовление модели, будут носить не только математический, но и практический характер. Решение одной такой задачи бывает полезнее нескольких трафаретных задач. Преодоление посильных трудностей при выполнении работы, получение конечных результатов воспитывают у ученика волю, упорство, стремление доводить всякое дело до конца.

II. СИСТЕМА ГРАФИЧЕСКИХ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ В VI КЛАССЕ

§ 1. Основные понятия

Подготовительное задание. Построение орнаментов, состоящих из известных учащимся геометрических фигур.

Содержание. Лист бумаги, разлинованный на клеточки, разделите на четыре части.

В первой части постройте и раскрасьте один-два орнамента, состоящих из квадратиков.

Во второй части постройте и раскрасьте один-два орнамента, состоящих из прямоугольников, треугольников и квадратов.

В третьей части постройте и раскрасьте один-два орнамента, состоящих из кругов и их частей.

В четвертой части постройте орнамент, состоящий из кубиков, брусков.

В каждом случае назовите известные вам фигуры и их элементы.

Методические замечания. Работа дается на первом уроке геометрии. После краткой беседы о предмете геометрии и о геометрических фигурах целесообразно продемонстрировать ученикам несколько разноцветных геометрических орнаментов. При демонстрации указать на практическую ценность орнаментов. Важно подчеркнуть соотношения между элементами орнаментов. После беседы, сопровождающей демонстрацию, ученикам предлагается создать орнаменты из известных им геометрических фигур.

Учитель должен сделать необходимые указания о пользовании чертежными инструментами и принадлежностями, предложить учащимся каждый день носить все принадлежности и использовать их там, где встретится необходимость.

Каждый ученик выполняет 4—7 орнаментов. Учитель показывает расположение орнаментов на форматке. Демонстрационные орнаменты не убираются. Но копировать их детям не разрешается.

В процессе работы учитель изучает представления учеников по геометрии, их навыки и умения в построениях, в пользовании инструментами.

На уроке выполняются две-три работы. Четвертая работа и часть третьей выполняются дома.

На следующем уроке учитель проводит анализ выполнения задания. В процессе анализа он обращает внимание учащихся на те фигуры, из которых были составлены орнаменты, на существование зависимостей между элементами орнаментов, ставит задачу о необходимости изучения геометрических фигур и их свойств. Здесь же можно показать практическую пользу знания форм и соотношений между ними для создания новых орнаментов. Можно продемонстрировать чертежи производственных и строительных конструкций, планы земельных участков.

В процессе рассмотрения орнаментов и различных тел вводятся понятия линии, точки, плоскости, отрезка, луча.

Первый урок геометрии, проведенный в таком плане, производит на учеников неизгладимое впечатление. Многие учащиеся при последующем изучении геометрии стремятся находить красивые сочетания фигур и в конечном итоге находят истинную красоту геометрии в строгости ее форм и логических выводов.

За выполнение работы учитель должен поставить оценки.

З а д а н и е № 1. Прямая. Луч. Отрезок.

Содержание. П е р в а я р а б о т а. Постройте четыре различно направленные прямые линии. Обозначьте их соответственно: a, b, AB и CD. Пометьте точку M, лежащую на прямой a, и точку E, не лежащую на этой прямой. Сколько точек может принадлежать данной прямой? Пометьте точки F и H, через которые проходит прямая b. Пометьте точки O и K, лежащие по разные стороны от AB. На прямой CD пометьте три точки M, N и P так, чтобы точка P лежала между точками M и N.

Составьте устный рассказ о расположении прямых на плоскости, о взаимном расположении прямой и точек.

Вторая работа. Поставьте точку A. Проведите через нее несколько прямых. Сколько прямых проходит через одну точку? Возьмите вторую точку B. Проведите несколько прямых, проходящих через нее. Проведите прямую, проходящую через точки A и B. Сколько таких прямых, по вашему мнению, можно провести? Найдите соответствующий вывод в учебнике и заучите его. Это утверждение называется аксиомой прямой.

Проведите две прямые MN и PQ. Можно ли эти прямые совместить? Как это можно сделать? Сформулируйте кратко вывод о возможности совмещения двух прямых.

Пометьте точку O. Проведите через нее прямую. Постройте вторую прямую, проходящую через эту точку. Сделайте вывод о том, сколько общих точек имеют эти прямые. Сформулируйте кратко вывод о пересечении двух прямых, указав число точек пересечения.

Пометьте три произвольные точки A, B и C. Проведите прямую, проходящую через них. Если это не удастся, проведите прямую, проходящую через две из этих точек. Сделайте вывод о возможности проведения прямых через одну, две и большее число точек.

Дома начертите прямую KL и проверьте с ее помощью вашу линейку. Соответствующие указания прочтите в третьем параграфе учебника.

Третья работа. Постройте прямую AB. Пометьте на ней точку O. Прямая разделилась на две части OA и OB, которые называются лучами.

Пометьте точку O и постройте луч, выходящий из этой точки. Обозначьте его OB. Сформулируйте определение луча.

Начертите три луча различно направленных. Обозначьте их малыми буквами a, b и c.

Начертите два луча, выходящих из одной точки M и различно направленных. Какая из известных вам фигур получилась?

Начертите две прямые, пересекающиеся в точке O. Обозначьте и запишите все образовавшиеся лучи.

Четвертая работа. Постройте прямую, пометьте на ней две точки A и B. Выделите часть прямой между A и B цветным или более мягким карандашом. AB — отрезок. Сформулируйте определение отрезка.

Постройте три различных и различно направленных отрезка. Обозначьте их малыми буквами a, b, c.

Постройте произвольную прямую. Пометьте на ней точку A. От этой точки, как от начала, отложите с помощью измерителя отрезок, равный a. Вдумайтесь в процесс построения равных отрезков и на основе этого сформулируйте определение равных отрезков. Сравните вашу формулировку с формулировкой учебника. Прибавьте к отрезку a отрезки b и c. Составьте устный план сложения отрезков. Запишите в символах: сумма отрезков a, b и c равна отрезку AB.

Постройте дома одну-две фигуры, у которых есть равные отрезки. Пометьте на чертеже равные отрезки.

П я т а я р а б о т а. Постройте несколько различных и различно направленных отрезков так, чтобы конец предыдущего был началом последующего. Такая фигура называется ломаной линией. Сформулируйте ее определение Обозначьте ее вершины большими буквами.

Постройте ломаную линию из пяти отрезков так, чтобы она замкнулась. Получите замкнутую ломаную линию.

Постройте замкнутые ломаные линии, состоящие из 3 и 4 отрезков. Затушуйте внутренние области их. Если знаете, то запишите названия этих фигур.

Ш е с т а я р а б о т а. Возьмите две точки A и B. Постройте ломаную линию так, чтобы точки A и B были ее концами, с помощью лекала постройте часть кривой линии с началом в A и концом в B, постройте отрезок AB. Сравните длину отрезка с длиной ломаной и кривой, соединяющих его концы. Укажите кратчайшее расстояние между двумя данными точками A и B.

Методические замечания. Перед выполнением задания с помощью резиновых шнуров можно продемонстрировать прямые линии пересекающиеся, проходящие через одну и две точки; ломаные линии, замкнутые ломаные линии, т. е. все то, что будет изображено на форматке. Резиновый шнур дает возможность показать неограниченность прямой линии.

Демонстрация сопровождается беседой, в которой представления учащихся о линии и ее частях уточняются и расширяются.

Задание выполняется фронтально всеми учениками и сопровождается объяснением учителя Учеников необходимо предупредить о большом количестве чертежей, которые будут выполнены в каждой работе, и об экономном расположении их на форматке.

По третьему пункту четвертой работы может возникнуть вопрос: «Как можно заставлять ученика строить равные отрезки, не вводя понятия равных отрезков?» Это недоразумение исчезает, если мы вспомним основную идею графических работ: конструктивный подход к изучению геометрии. Из сопоставления отрезков, выполненных по второму пункту этой работы, естественно возникает вопрос о равенстве и неравенстве отрезков, а отсюда и о возможности их построения. Интуитивно дети уже знают, как это сделать. Задача учителя состоит в том, чтобы облечь все это в определенные формальные рамки.

Задание № 2. Действие с отрезками.

Содержание. В верхней части форматки выделите полоску шириной в 4 *см* и на ней постройте следующие фигуры: произвольный четырехугольник, треугольник, прямоугольник, квадрат.

На произвольной прямой постройте сумму сторон (периметр) четырехугольника. Измерьте образовавшийся отрезок с точностью до 1 *мм*. Измерьте каждую сторону с точностью до 1 *мм* и сложите полученные числа. Сравните результаты. Какой результат следует признать более точным и почему? Составьте устный план сложения нескольких отрезков. Определите размеры сторон земельного участка такой формы, как на чертеже, если план выполнен в масштабе 1 : 500. Запишите периметр в символах, обозначив стороны a, b, c и d, а периметр P.

Сравните сумму двух сторон треугольника с третьей. Сравните также разность двух сторон треугольника с третьей. Сделайте заключение по результатам сравнения.

Задание для желающих: докажите ваши предположения путем рассуждения.

Запишите формулу периметра прямоугольника с основанием a и боковой стороной b. Постройте периметр. Измерьте стороны и вычислите периметр прямоугольника.

Запишите формулу периметра квадрата. Постройте периметр квадрата. Составьте устно план умножения отрезка на число. Измерьте сторону и вычислите периметр квадрата.

Постройте квадрат, периметр которого равен периметру четырехугольника, изображенного на чертеже 1. Деление произведите приближенно с точностью до 1 *мм* или с помощью измерителя методом проб. Составьте устный план деления отрезка на число.

Изобразите в плане размер крышки школьной парты. Масштаб выберите сами такой, чтобы чертеж вместился на свободной части форматки.

З а д а н и е н а д о м. Постройте на обороте форматки треугольник, у которого основание равно 40 *мм*. Измерьте остальные стороны. Постройте прямоугольник со сторонами 3 и 4 *см*. Соедините противоположные вершины. Измерьте расстояние между ними.

Методические замечания. В краткой вводной беседе с помощью спиц и шнура установить возможность сложения и вычитания отрезков, умножения и деления их на число. Спицы помогут понять сложение, вычитание и умножение отрезков, шнур — представить деление отрезков.

Задание выполняется фронтально после проведения небольшой вступительной беседы о равных отрезках и об измерении отрезков. В процессе выполнения задания учащиеся усваивают все необходимые сведения о действиях над отрезками. Вторая работа не только учит детей оперировать с отрезками, но и готовит их перспективно к изучению соответствующей теоремы.

На последующих уроках в порядке кратковременных работ полезно предложить учащимся выполнить следующие работы:

Начертить три неравных между собой отрезка $a>b>c$.
Начертить отрезок l больше отрезка a на отрезок c.
Начертить отрезок d меньше отрезка a на отрезок c.
Начертить отрезок m, больший отрезка c в три раза.

Начертить отрезок n, больший (меньший) суммы отрезков a и c в два раза и т. д.

Целесообразно в порядке выполнения кратковременных работ решать задачи, связанные со свойствами фигур, которые будут в последующем изучаться. Примеры: Разделить две какие-либо стороны треугольника пополам, соединить их середины, сравнить этот отрезок с противоположной стороной. Задача решается по уже имеющимся у учащихся чертежам треугольника. Постройте диагонали прямоугольника. Сравните их, сравните отрезки каждой из диагоналей, на которые диагональ разделилась точкой пересечения. Соедините последовательно середины сторон произвольного прямоугольника. Постройте в нем диагонали. Сравните периметр вновь образовавшегося четырехугольника с суммой диагоналей. Сравните каждую из сторон с диагональю, с которой она не пересекается. Сравните между собой противоположные стороны нового четырехугольника.

Задание № 3. Углы. Сравнения их. Действия с ними.

Оборудование. Помимо постоянно имеющегося оборудования, у учащихся должны быть шаблоны трех углов или чертежные треугольники с углами в 30° и 45°.

Содержание. Первая работа. Слева вверху пометьте точку *A*. Совместите с ней вершину меньшего угла треугольника и в направлении его сторон постройте два луча. Получите угол *A*. Сформулируйте определение угла. Обозначьте на чертеже элементы угла и под чертежом запишите его символическое обозначение.

Будем конструировать различные углы путем вращения одной стороны угла около его вершины.

Пометьте правее угла *A* точку *B* и постройте угол *B*, равный углу *A*. Как можно убедиться, что эти углы равны? В какой последовательности следует накладывать один угол на другой? Проделайте это наложение с помощью шаблона. Расскажите о порядке мысленного наложения одного угла на другой. Сформулируйте определение равных углов.

Постройте угол, равный большему углу треугольника. Обозначьте его цифрой *1*. Затушуйте его внутреннюю область. Сравните этот угол с углом *A*. Обратите внимание при наложении на то, как расположатся вторые стороны углов. Запишите в символах соотношение между углами *A* и *1*.

Постройте в этой же части угол, больший угла *1*. Затушуйте его внутреннюю область. Обозначьте его буквой *a* и запишите в символах соотношение между ним и углом *1*. Расскажите, как можно убедиться в том, что $\angle a$ больше $\angle 1$.

Пометьте правее угла *a* точку *O* и проведите из нее два противоположно направленных луча *OA* и *OB*. Пометьте стрелкой внутреннюю область угла *AOB*. Этот угол называется развернутым. Сформулируйте определение развернутого угла. Запишите соотношение между $\angle AOB$ и $\angle a$.

Постройте $\angle AMB$ так, чтобы он был больше $\angle AOB$. Пометьте в нем внутреннюю область. Запишите в символах соотношение между $\angle AMB$ и $\angle AOB$. Этот угол называется углом, большим развернутого.

Постройте $\angle ABC$ так, чтобы лучи *AB* и *CB* совместились. Получим полный угол. Пометьте стрелкой его внутреннюю область. Запишите соотношение между полным углом и углом больше развернутого.

Вторая работа. Начертите два развернутых угла AMB и COD. Сформулируйте ваши предположения о величине развернутых углов. Докажите его. Запишите в символах равенство развернутых углов.

Ниже начертите два полных угла ABC и OMP. Сформулируйте предложение о величине полных углов, докажите его. Запишите в символах равенство углов.

Сравните полный и развернутый углы. Запишите в символах соотношение между этими углами.

Третья работа. С помощью изготовленных дома шаблонов углов 1, 2, 3, из которых $\angle 1 > \angle 2 > \angle 3$, постройте $\angle 4$, равный сумме второго и третьего углов. Запишите в символах результат сложения. Дома запишите все соотношения между углами 4, 2 и 3.

Постройте $\angle 5$, равный разности между $\angle 1$ и $\angle 2$. Запишите в символах результат вычитания. Дома запишите все соотношения между углами 5, 2 и 1.

Постройте $\angle 6$, в четыре раза больший, чем $\angle 3$. Запишите в символах результат умножения. Дома запишите все соотношения между $\angle 6$ и его частями.

Четвертая работа. Постройте $\angle AOC = \angle 3$; прибавьте к $\angle AOC$ равный ему $\angle COB$. Запишите третий угол, образовавшийся на чертеже. Луч OC называется биссектрисой (равноделящей) угла AOB. Сформулируйте определение биссектрисы. Запишите в символах, что OC — биссектриса. Скажите, как можно получить биссектрису угла, вырезанного из бумаги.

Постройте развернутый угол. Разделите его с помощью бумажного шаблона пополам. Получите прямой угол. Сформулируйте определение прямого угла. Сформулируйте предположение о сравнительной величине всех прямых углов. Докажите его.

В первой работе $\angle A$ — острый, $\angle a$ — тупой. Сформулируйте их определение. Запишите соотношение между прямым углом и развернутым, между прямым и полным. Величина прямого угла обозначается d.

Дома на обратной стороне форматки сравните углы чертежного треугольника. Запишите в символах соотношение между парами углов, между всеми углами треугольника. Сложите все углы треугольника. Если у вас есть два различных по типу треугольника, то проделайте эту работу для обоих треугольников. Постройте треугольник, у которого углы были бы равны углам чертежного треугольника. Постройте четырехугольник, у которого было бы два прямых угла. С помощью чертежного треугольника установите вид остальных двух углов. Постройте четырехугольник с двумя равными противоположными углами.

Методические замечания. В предварительной беседе учитель сообщает ученикам, что на этом уроке необходимо провести конструирование и построение новых геометрических образов, используя уже известные понятия. Главными элементами для конструирования будут точки и лучи. После такого краткого введения учитель демонстрирует на универсальном приборе все, что относится к первой работе, обращая внимание на предельные случаи. Затем упражнения заносятся на форматку.

Задание № 4. Перпендикуляр к прямой.

Содержание. Первая работа. Постройте две пересекающиеся прямые MN и KL так, чтобы один из углов, образовавшийся при их пересечении, был острым. Выскажите ваши предположения о других углах, образовавшихся при пересечении этих прямых. Запишите их в символах.

Вторая работа. Постройте с помощью треугольника две прямые AB и CD, которые, пересекаясь в точке O, образуют прямой угол. Сделайте вывод о величине других углов, образовавшихся при пересечении прямых AB и CD. Эти прямые называются взаимно перпендикулярными. Сформулируйте определение взаимно перпендикулярных прямых. Каждая из этих прямых по отношению к другой называется перпендикуляром. Сделайте вывод, как можно убедиться в том, что две прямые взаимно перпендикулярны.

Проведите через точку пересечения O прямую KM так, чтобы она не совпала ни с одной из данных прямых. Всмотритесь в чертеж и путем рассуждений докажите, что KM не может быть перпендикулярна к AB. Сформулируйте на этой основе вывод о возможности проведения двух перпендикуляров к данной прямой, проходящих через какую-либо точку, не лежащую на этой прямой.

Запишите в символах соотношения, показывающие взаимное положение прямых, имеющихся на чертеже.

Третья работа. Постройте прямую AB. Пометьте на ней точку M. Постройте с помощью треугольника $KM \perp AB$.

Четвертая работа. Постройте $\triangle ABC$. Найдите с помощью измерителя (методом проб) или с помощью линейки с делениями середины его сторон. Постройте с помощью чертежного треугольника перпендикуляры к сторонам треугольника через их середины. При точном построении они должны пересечься в одной точке O. Так ли у вас? Сравните измерителем расстояния от точки O до вершин A, B и C. Запишите все соотношения между элементами чертежа в символах.

Пятая работа. Проведите прямую MN и пометьте вне ее точку A. Постройте с помощью треугольника $AO \perp MN$. Точка O лежит на MN и называется основанием перпендикуляра. В дальнейшем будет доказано, что через точку A можно провести только один перпендикуляр к прямой. AO называется расстоянием от точки до прямой. Измерьте AO. Составьте устный план, как найти расстояние от точки до прямой.

Пометьте еще две точки. одну над MN, другую под MN Найдите расстояние этих точек до прямой MN. Измерьте их.

Шестая работа Постройте произвольный треугольник ABC. Опустите из каждой вершины перпендикуляр на противоположную сторону. Обозначьте их основания. Запишите в символах перпендикулярность отрезков. При точном построении все три перпендикуляра пересекутся в одной точке. Так ли у вас?

Седьмая работа. Постройте произвольный пятиугольник. Пометьте внутри него точку M. Постройте и измерьте расстояния от этой точки до каждой стороны. Пометьте на чертеже прямые углы.

Восьмая работа. Постройте две-три различные фигуры, имеющие взаимно перпендикулярные стороны. Сравните остальные углы этих фигур с прямым углом. Запишите результат сравнения в символах.

Методические замечания. Перед первой работой этого задания на универсальном приборе демонстрируются две пересекающиеся прямые. В процессе демонстрации учитель обращает внимание на особенности взаимного расположения прямых, выделяя случай пересечения под прямым углом. Устанавливаются понятия взаимно перпендикулярных линий. После этого учитель предлагает вычертить на формате два случая пересечения прямых. Доказательство единственности перпендикуляра целесообразно провести коллективно.

С практической точки зрения целесообразно в этом задании ввести понятие расстояния от точки до прямой. При таком подходе понятие о перпендикуляре, проведенном из точки к прямой, сразу начинает «работать», а не повисает в воздухе.

Задание № 5. Смежные и вертикальные углы.

Содержание. Первая работа. Постройте с помощью шаблона два равных угла. Затушуйте у каждого из них небольшую часть внутренней области. Продолжите за вершину у первого угла одну, а у другого другую сторону. Отметьте для каждого угла смежный ему угол. Затушуйте цветным карандашом небольшую внутреннюю часть вновь получившихся углов. Сформулируйте определение смежных углов. Обозначьте углы большими буквами. Всмотритесь в один из чертежей и выскажите ваши предположения о сумме смежных углов. Сформулируйте кратко ваш вывод. Запишите вывод в символах. Запишите соотношения между смежными углами и их суммой. Сравните по величине смежные углы, полученные для равных углов на первых двух чертежах. Сформулируйте кратко ваш вывод.

Постройте прямую AB. Пометьте на ней точку O. Проведите в каком-либо направлении луч OC. Укажите на этом чертеже смежные углы и запишите их свойства. Составьте устно план построения смежных углов.

Вторая работа. Постройте $\angle AOB$. Постройте для него два смежных угла $\angle DOA$ и $\angle COB$ с общей вершиной O. Затушуйте небольшую часть внутренней области этих смежных углов каким-либо цветным карандашом. На чертеже образовались две пары вертикальных углов: $\angle COD$ и $\angle AOB$; $\angle AOD$ и $\angle BOC$. Сформулируйте определение вертикальных углов. Сравните между собой вертикальные углы. Сформулируйте кратко ваше предположение о величине вертикальных углов. Докажите его. Определите сумму всех четырех углов. Составьте устный план определения всех углов, образовавшихся при пересечении двух прямых, если известен один из них.

Постройте острый, прямой и тупой углы. Постройте для них только с помощью линейки равные им углы. Пометьте дугами равные углы.

Третья работа. Постройте прямую AB. Пометьте на ней точку O и от нее вверх проведите три различных луча. Обозначьте образовавшиеся углы цифрами *1*, *2*, *3*, *4*. Определите сумму всех четырех углов. Сформулируйте ваш вывод кратко и запишите его в символах. Составьте устный план, как найти один из углов по сумме углов и другим слагаемым. Запишите соотношение для $\angle 3$.

Постройте с помощью чертежного треугольника его меньший угол, равный $\frac{1}{3}d$, и обозначьте его DOC (DO — нижняя сторона). Прибавьте к нему $\angle COB = d$ (используйте прямой угол чертежного треугольника), затем прибавьте $\angle BOA = \frac{2}{3}d$, равный большему острому углу чертежного треугольника. Докажите, что точки D, O и A лежат на одной прямой.

Четвертая работа. Пометьте точку O и от нее в различных направлениях постройте 5 лучей. Обозначьте углы, образовавшиеся вокруг точки O цифрами *1*, *2*, *3*, *4*, *5*. Определите сумму всех пяти углов. Сформулируйте вывод и запишите его в символах. Составьте устно план нахождения угла по сумме и всем остальным углам. Запишите выражение для угла *5*.

Методические замечания. В предварительной беседе учитель ставит перед учениками задачу изучить углы, имеющие общую вершину. В краткой беседе демонстрируются все случаи, которые будут рассмотрены, намечается план классной и домашней работы.

Затем выполняются фронтально одна работа за другой

Третья и четвертая работы могут быть оставлены для домашнего выполнения

В анализе необходимо подчеркнуть, что работы дают возможность рассчитывать углы. С помощью первой работы можно доказать, что сумма двух смежных углов равна $2d$. Вторая и первая работы дают возможность строить равные углы. Третья работа позволяет доказывать теоремы о принадлежности трех точек одной прямой.

Задание № 6. Окружность.

Содержание. Первая работа. Пометьте точку O и вокруг нее произвольно на различных расстояниях точки M_1, M_2, M_3, M_4. Поставьте острие циркуля в точку O, раздвиньте его так, чтобы карандаш совместился с точкой M_3. Вращайте карандаш циркуля вокруг O, пока не получите замкнутой линии Это будет окружность.

Сформулируйте определение окружности. OM_3 — радиус. Сформулируйте определение радиуса. Скажите, как расположились точки M_1, M_2 и M_4 относительно окружности. Затушуйте внутреннюю область окружности. Получите круг. Сформулируйте определение круга. Скажите, что надо знать, чтобы доказать, что точка лежит на окружности, вне круга, внутри его. Запишите в символах соотношение между радиусом и расстоянием от точек M_1, M_2, M_3, M_4 до центра. Мысленно вращайте круг так, чтобы центр O сохранял первоначальное положение. Где при этом будет располагаться точка M_3? Как можно построить окружность, равную данной? Что для этого необходимо знать?

Вторая работа Постройте окружность, равную той, которая изображена на первом чертеже. Проведите в ней радиус. Поместите на окружности две точки и соедините их. Получите хорду. Сформулируйте определение хорды. Постройте хорду, проходящую через центр. Получите диаметр. Установите соотношение между диаметром и радиусом. Запишите это соотношение в символах, обозначьте радиус через R, а диаметр через D.

Третья работа Постройте окружность по ее диаметру $AB = 60$ *мм*. Затушуйте часть окружности, лежащую по одну сторону диаметра Выскажите ваше предположение о величине затушеванной и незатушеванной части окружности Сформулируйте его кратко и докажите. Как совместить обе части окружности?

Четвертая работа Пометьте точку A. Постройте окружность O, проходящую через эту точку. Проведите хорду AB, не проходящую через центр, и диаметр BC. Сравните хорду с радиусом, с суммой двух радиусов, с диаметром. Как можно сравнить два отрезка? Какие дополнительные построения здесь необходимы? Сформулируйте вывод о сравнении хорды с диаметром, запишите его в символической форме.

Пятая работа. Пометьте центр O и постройте часть окружности. Получите дугу. Обозначьте ее $\smile AC$.

Постройте окружность радиусом 25 *мм* и выделите на ней дугу AB. Соедините точки A и B. Получите хорду AB. Постройте недалеко от AB хорду $CD = AB$. Как можно

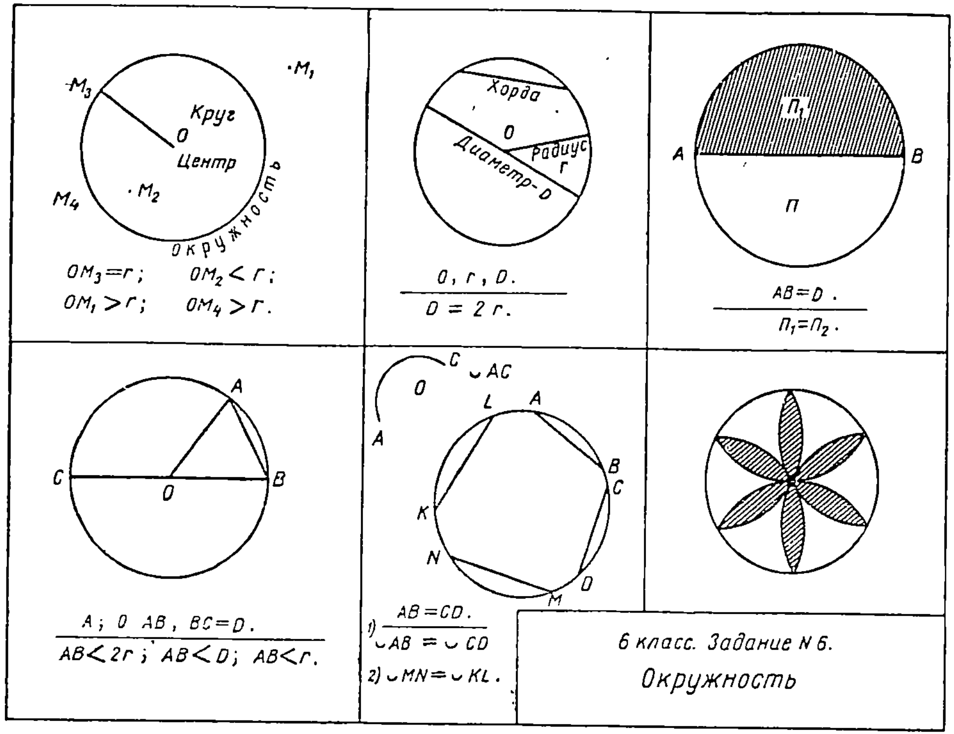

M1
M3
Круг
O
Центр
M4
M2
окружность
OM3=r; OM2<r;
OM1>r; OM4>r.
Хорда
O
Радиус
r
Диаметр-D
O, r, D.
D = 2 r.
A
B
П1
П
AB=D.
П1=П2.
A
C
B
O
A; O AB, BC=D.
AB<2r; AB<D; AB<r.
C
◡AC
O
A
L
A
B
C
K
N
D
M
1) AB=CD.
◡AB = ◡CD
2) ◡MN=◡KL.
6 класс. Задание N 6.
Окружность

Рис. 2.

совместить эти хорды? Что произойдет с дугами? Такие дуги называются равными. Сформулируйте определение равенства дуг и составьте устный план доказательства равенства дуг. Постройте на этой же окружности равные дуги MN и KL. Дома выпишите несколько дуг, образовавшихся на этом чертеже; обозначьте их тремя буквами, крайние из которых должны указывать начало и конец дуги

Шестая работа. Начертите окружность. Пометьте на окружности точку и от этой точки отложите измерителем последовательно шесть хорд, равных радиусу (Хорды чертить не следует, а концы их пометьте проколом иглы измерителя.) Не изменяя раствора циркуля, приняв первую отмеченную вами точку за центр новой дуги, проведите дугу так, чтобы она соединяла две точки окружности и проходила через центр ее. Проделайте то же около каждой из шести отмеченных на окружности точек. Получите шестилепестковую розетку. Раскрасьте ее дома цветными карандашами или красками. Запишите равные дуги, образовавшиеся на чертеже.

Задание для желающих: нарисуйте несколько орнаментов, состоящих из окружностей отрезков, углов и их частей. Попытайтесь найти в них соотношения между элементами.

Методические замечания. Работы выполняются фронтально. Целесообразно иметь круг, сделанный из плексигласа, равный кругу, который имеется на демонстрационном приборе. С помощью этих кругов можно показать ученикам основные модели для работы по этому заданию.

После первой работы целесообразно ввести определение равных окружностей и тут же использовать его для построения окружности во второй части форматки. В третьей работе учащиеся знакомятся со свойствами диаметра и учатся строить окружность по данному диаметру. Полезно показать два способа совмещения полуокружностей. В четвертой работе окружность строится по иному условию. Здесь уместно поставить вопрос о числе окружностей, проходящих через точку A.

В пятой работе целесообразно показать способ построения равных дуг, иначе это понятие о равенстве дуг останется продолжительное время без применения.

Шестая работа закрепляет навыки учащихся, носит в известной мере занимательный характер и в то же время дает возможность детям научиться делить окружность на шесть равных частей (без обоснования). Этот прием будет полезен во многих последующих работах.

При анализе выполнения работ целесообразно показать конструктивное значение окружности для нахождения точек, равноудаленных от данной точки.

Задание № 7. Центральный угол. Измерение углов.

Содержание. Первая работа. Первую часть форматки разделите на 4 части взаимно перпендикулярными линиями.

В каждой из получившихся частей постройте окружность радиусом 15 *мм*. В первой окружности с центром O проведите два радиуса OA и OB. Получите центральный угол AOB. Сформулируйте определение центрального угла. Дуга AB называется соответствующей ему дугой Во второй окружности проведите два радиуса так, чтобы получился полный угол. Ему соответствует окружность В третьей окружности проведите два радиуса так, чтобы получился развернутый угол. Какая дуга ему соответствует? В четвертой окружности проведите два взаимно перпендикулярных диаметра. Какая дуга соответствует прямому углу?

Вторая работа. Постройте окружность диаметром в 5 *см*. С помощью шаблона или треугольника постройте в ней два равных центральных угла AOB и COD Запишите, что вам достоверно известно Всмотритесь в чертеж и выскажите ваши предположения о величине дуг, соответствующих этим углам. Запишите ваши предположения под заголовком «Доказать». Как можно доказать равенство дуг? Докажите равенство дуг.

Третья работа. Постройте окружность, равную окружности второй части. Постройте в ней две равные дуги Запишите, что вам достоверно известно Постройте центральные углы, соответствующие этим дугам Выскажите ваше предположение о величине этих углов Запишите его в символической форме. Докажите. Как можно доказать равенство углов? Как удобнее наложить один угол на другой? Измерьте углы и запишите результат измерения.

Сопоставьте предыдущую и эту теоремы. В чем отличие их?

Четвертая работа. Постройте окружность максимального диаметра, который позволяет эта часть форматки. Постройте в ней углы в 1, 5, 10, 30° с помощью транспортира. Выделите соответствующие им дуги. Постройте на этом же чертеже окружности с тем же центром O радиусами в 1, 2, 3 *см*. Всмотритесь в чертеж. Сделайте вывод о величине дуг, соответствующих одному и тому же углу, в зависимости от величины радиуса. Является ли неизменной величина дугового градуса? Запишите, чему равна величина дуги в 1° у земного шара. Везде ли она одинакова?

Пятая работа Постройте произвольные треугольник и четырехугольник. Измерьте у них внутренние углы с точностью до 1° Найдите сумму внутренних углов у каждой фигуры.

С помощью транспортира разделите углы треугольника пополам и проведите биссектрисы углов При точном построении они должны пересечься в одной точке. Так ли у вас?

Шестая работа. Постройте треугольник с равными сторонами, измерьте его углы. Вычислите их сумму. Постройте прямоугольный треугольник, у которого один катет в два раза меньше гипотенузы Измерьте углы Постройте прямоугольный треугольник с острым углом в 45°, измерьте другой угол. Постройте квадрат, проведите в нем диагонали, измерьте все углы, образовавшиеся на чертеже. Сравните углы.

Домашнее задание. Измерьте смежные и вертикальные углы (задание № 5). Проверьте точность построения путем сопоставления результатов измерения с теоретическими выводами. Определите погрешности. Заполните отчетную таблицу.

№ работы	Углы	Результат измерения	Теоретический результат	Погрешность
1	$\angle ABC$ $\angle ABD$ Их сумма			
2				

Методические замечания. На универсальном приборе с помощью подвижного и неподвижного кругов демонстрируются различные центральные углы, равные центральные углы, равные дуги. После этого выполняются все работы задания фронтально.

Вторую и третью работы целесообразно выполнить на разных чертежах, для того чтобы подчеркнуть особенности прямой и обратной теорем.

Четвертая работа выполняется после введения понятия градуса и знакомства с транспортиром.

Пятая, помимо непосредственного значения для измерения углов, имеет перспективное значение. Обычно сами ученики приходят к выводам и с интересом делятся своими результатами друг с другом. В классе то и дело слышишь: «А у нас получилось 180°», «И у нас столько же», «А почему у всех одно и то же число получается?» У детей появляется радость открытия.

§ 2. Треугольник

Задание № 8. Многоугольник, треугольник.

Содержание. Первая работа. Постройте выпуклую замкнутую ломаную линию, состоящую из пяти отрезков, и затушуйте часть плоскости, ограниченную этой линией. Получите выпуклый пятиугольник. Аналогично можно получить любой многоугольник. Сформулируйте определение многоугольника. Измерьте стороны с точностью до 1 *мм* и определите периметр. Запишите величину периметра в символах. Составьте план нахождения любой стороны по периметру и остальным сторонам. Запишите формулу для определения одной из сторон через периметр и другие стороны.

Продолжите каждую из сторон. Затушуйте угол, образованный одной из сторон и продолжением другой. Это будет внешний угол. Образуйте все внешние углы многоугольника. Сколько внешних углов можно образовать около одной вершины. Обозначьте внешние углы цифрами и запишите равные из них.

Соедините вершины через одну. Получите диагонали. Постройте все диагонали.

Вторая работа. Постройте треугольник. Обозначьте его вершины большими буквами A, B, C. Затушуйте простым карандашом его внутренние углы. Постройте внешние углы. Затушуйте их цветным карандашом. Запишите периметр треугольника. Измерьте дома все внутренние углы треугольника и найдите их сумму. Измерьте около каждой вершины по одному внешнему углу и найдите их сумму.

Определите, на сколько градусов вы повернетесь, если, начав путь из точки, расположенной на стороне треугольника, обойдете его по контуру. Запишите равные внешние углы.

Третья работа. Постройте $\triangle ABC$. Из каждой вершины на противоположную сторону опустите перпендикуляры AM, BD, CE (M, D и C — точки пересечения перпендикуляров с противоположными сторонами). AM, BD, CE называются высотами. Сформулируйте определение высоты. При точном построении высоты пересекутся в одной точке. Так ли у вас? Обозначьте высоты буквами h_a, h_b, h_c. Измерьте высоты с точностью до 1 *мм*.

Четвертая работа. Постройте $\triangle ADC$. Найдите с помощью измерителя или линейки середины его сторон. Соедините середины их с противоположными вершинами. Получите медианы. Сформулируйте определение медианы. Обозначьте медианы m_a, m_d, m_c, где a, d, c обозначают стороны, к которым проведены медианы. Измерьте медианы с точностью до 1 *мм*. Запишите равные отрезки, образовавшиеся на чертеже. Медианы при точном построении пересекаются в одной точке O. Так ли у вас? Измерьте меньшие отрезки медианы, на которые разделила их точка пересечения. Определите, какую часть (в десятичных дробях) составляет меньшая часть от всей медианы. Сравните с помощью измерителя меньшую часть с большей частью медианы.

Пятая работа. Постройте $\triangle ADK$ с тупым углом A. С помощью транспортира разделите каждый угол пополам. Проведите биссектрисы углов AM, KB, DE, где M, B, и E — точки пересечения биссектрис углов с противоположными сторонами. AM, KB и DE называются биссектрисами треугольника. Обозначьте биссектрисы l_A, l_K, l_D, где A, K и D — углы, для которых проведены биссектрисы. При точном построении биссектрисы пересекутся в одной точке. Так ли у вас? Запишите равные углы, образовавшиеся на чертеже. Измерьте расстояния от точки пересечения биссектрис до сторон треугольника.

Шестая работа. Постройте $\triangle ABC$ так, чтобы его основание AC было больше каждой из боковых сторон, а одна боковая сторона больше другой. Проведите из вершины B к основанию медиану, высоту и биссектрису. Подметьте, в каком порядке они расположены. Измерьте углы, которые образовала медиана с боковыми сторонами. Подметьте зависимость между величиной каждого этого угла и величиной стороны, к которой этот угол прилегает. Аналогично проделайте работу с углами, которые образует высота с боковыми сторонами. На основе этого выскажите предположение об относительном расположении медианы, высоты и биссектрисы. В дальнейшем ваши предположения можно будет доказать.

Методические замечания. В предварительной беседе даются понятия о выпуклых и невыпуклых многоугольниках, треугольниках и проводится на универсальном приборе небольшой эксперимент о взаимном положении треугольника и прямой линии. На основе этого эксперимента устанавливается положение в треугольнике медиан, биссектрис и высот.

Задание выполняется фронтально.

Шестая работа преследует цели развития геометрического зрения, пространственных представлений.

В порядке закрепления изученного материала в процессе кратковременных работ полезно предлагать учащимся строить высоты различных фигур, измерять углы. Все это целесообразно делать на тех фигурах, которые будут изучаться впоследствии.

Задание № 9. Виды треугольников.

Содержание. Первая работа. Постройте с помощью циркуля и линейки треугольник со сторонами 6, 5, 3 *см*. Такой треугольник называется разносторонним. Сформулируйте определение разностороннего треугольника. Запишите формулу для расчета его периметра. Вычислите его периметр. Измерьте его высоты.

Вторая работа. Постройте треугольник, у которого основание 4 *см*, а боковые стороны по 5 *см*. Подобные треугольники называются равнобедренными. Сформулируйте определение равнобедренных треугольников. Запишите формулу его периметра, если основание обозначить через a, а боковые стороны через b. Вычислите периметр. Постройте его медианы и измерьте их.

Третья работа. Постройте треугольник, у которого каждая сторона равна 5 *см*. Такого типа треугольники называются равносторонними. Сформулируйте определение равносторонних треугольников. Запишите формулу его периметра, обозначив сторону через a. Проведите в нем все биссектрисы и измерьте их.

Четвертая работа. Постройте треугольник, у которого углы острые. Такого типа треугольники называются остроугольными. Сформулируйте определение остроугольных треугольников. Измерьте стороны этого треугольника с точностью до 1 *мм*.

Пятая работа. Постройте треугольник с прямым углом. Такие треугольники называются прямоугольными. Сформулируйте определение прямоугольных треугольников. Измерьте остальные два угла. Измерьте медиану, проведенную из вершины прямого угла, и сравните ее с гипотенузой.

Шестая работа. Постройте $\triangle ADC$ с тупым углом D. Такого типа треугольники называются тупоугольными. Сформулируйте их определение. Измерьте все стороны и углы. Опустите из вершин A и C высоты, измерьте их с точностью до 1 *мм*.

Задание для желающих. Сконструируйте прибор для демонстрации всех видов треугольников так, чтобы периметр оставался постоянным, а стороны и углы менялись. Продемонстрируйте на этом приборе все виды треугольников.

Методические замечания. В предварительной беседе учитель ставит перед учащимися задачу о конструировании различных треугольников на спицах или на планках по трем сторонам и о построении по этим элементам треугольников на бумаге с помощью циркуля и линейки. Выясняется возможность построения треугольников по трем сторонам. Одному из учащихся дается комплект спиц и предлагается сконструировать треугольник, у которого эти планки будут представлять стороны. Планки могут оказаться и таких размеров, при которых треугольник не получится. А вообще задача решается без труда. В процессе конструирования формулируется и доказывается теорема о зависимости между сторонами треугольника. Далее рассматривается вопрос о построении треугольника на бумаге. В беседе выясняется, каким образом можно получить на чертеже третью вершину, и вводится понятие геометрического места точек, равноудаленных от данной точки. (В этом случае «работает» определение окружности, которое было недавно введено). Не следует бояться разговора с учащимися на эту тему: им все это будет понятно. Закрепив концы двух планок в точках, ограничивающих основание треугольника, и вращая их, ребята найдут необходимые предпосылки для построения на чертеже третьей вершины с помощью циркуля. Аналогичные работы после этого будут выполняться осознанно.

Для закрепления материала можно предложить учащимся определить виды треугольников на готовых чертежах. Эти чертежи могут быть заранее подготовлены учащимися дома. Полезна комплексная работа: даны три отрезка, соответственная длина которых 6, 8, 10 *см*. Выяснить, возможно ли построить треугольник по этим сторонам. Построить его. Определить тип. Построить в нем все высоты, медианы и биссектрисы. Измерить их. Такого типа работу с постепенным усложнением можно и полезно предлагать несколько раз.

Задание № 10. Симметрия относительно прямой.

Содержание. Первая работа. В середине первой части форматки проведите сверху вниз осевую линию MN. Отметьте справа от MN точку A, проведите из нее перпендикуляр к прямой MN. Пусть точка O — основание перпендикуляра. Продолжите перпендикуляр за точку O на расстояние $OA_1 = OA$. Точка A_1 называется симметричной A относительно прямой MN. Пометьте справа от MN точку B. Постройте ей симметричную точку B_1. Соедините A с B и A_1 с B_1, получите симметричные отрезки AB и A_1B_1. Выскажите ваше предположение о величине отрезков. Как можно его доказать? Сформулируйте его кратко в виде теоремы. Укажите еще симметричные отрезки. Отметьте в правой части от MN третью точку C. Постройте ей симметричную точку C_1 относительно MN. Соедините точку C с точками A и B, а точку C_1 с точками A_1 и B_1. Получите треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, симметричные относительно MN. Выскажите ваше предположение о величине этих треугольников. Докажите его. Сформулируйте его в виде теоремы. Запишите соотношения между отрезками и углами, образовавшимися на чертеже. Сформулируйте определение симметричных фигур и их свойства.

Вторая работа. Пометьте две точки A и A_1. Постройте для них ось симметрии. Запишите соотношения между отрезками и углами, образовавшимися на чертеже.

Постройте отрезок AB и постройте для него ось симметрии. Запишите соотношения между отрезками и углами, образовавшимися на чертеже.

Третья работа. Проведите горизонтальную прямую и примите ее за ось симметрии MN. Отметьте на ней точку O. Постройте луч OA, лежащий выше оси, постройте луч OA_1, симметричный OA. Составьте устно план выполнения работы. Сравните углы AON и A_1ON. Как называется линия ON по отношению к углу AOA_1? Составьте план построения биссектрисы угла без транспортира. Запишите равные углы и отрезки, образовавшиеся на чертеже.

Четвертая работа. Постройте равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$). Проведите в нем ось симметрии BM (M — точка на AC). Запишите равные отрезки и углы, образовавшиеся на чертеже. Сформулируйте свойство углов при основании. Как можно назвать отрезок BM? Запишите ваши выводы в символах в виде теоремы, выделив, что достоверно известно и что требуется доказать. Докажите теоремы о свойствах равнобедренного треугольника. Измерьте углы при основании. Докажите, что BM есть биссектриса, медиана и высота

Пятая работа. Постройте равносторонний треугольник. Проведите в нем оси симметрии. Запишите все соотношения между углами и отрезками, образовавшимися на чертеже. Сформулируйте свойство углов равностороннего треугольника. Докажите его. Измерьте углы. Сформулируйте свойство биссектрис углов равностороннего треугольника. Сравните их и измерьте.

Шестая работа. Постройте окружность. Проведите в ней ось симметрии AB (A и B — точки, лежащие на окружности). Постройте точки C и C_1, симметричные относительно AB. O — точка пересечения AB и CC_1. Запишите равные отрезки, углы и дуги, образовавшиеся на чертеже. Докажите их равенство.

Дома на обороте форматки постройте известные вам фигуры, в которых можно провести оси симметрии. Исследуйте соотношения между углами и отрезками. Сформулируйте эти соотношения в виде теорем и докажите некоторые из них.

Задание для желающих. Начертите из известных вам фигур орнаменты, имеющие одну или несколько осей симметрии. Попробуйте установить соотношения между элементами орнаментов.

Методические замечания. В предварительной беседе с помощью кляксограммы устанавливается понятие симметричных относительно оси фигур. Работу выполняют все ученики. Далее используется пособие для демонстрации симметричных точек, отрезков и треугольников. Прибор состоит из двух частей. Первая часть представляет лист чертежной бумаги, наклеенный на фанеру. На этом листе проведена общая ось симметрии и нанесены две симметричные точки, два симметричных отрезка и два симметричных треугольника. Вторая часть прибора состоит из отмытой фотопленки размером в половину листа. На пленке изображена только половина чертежа. Пленка может совмещаться то с правой, то с левой частью чертежа на ватмане. Она может быть закреплена так, чтобы свободно вращалась вокруг оси.

После демонстраций работы выполняются фронтально. Построение на первом чертеже симметричных точек, затем отрезков и треугольников обеспечивает незамедлительное применение только что введенных понятий и экономит время.

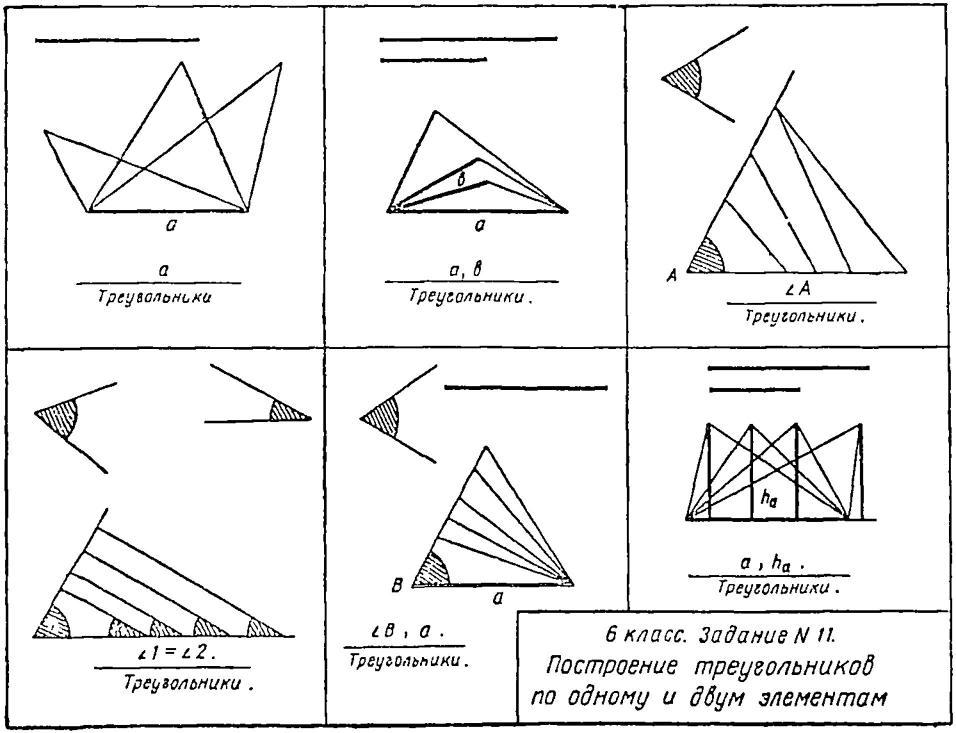
В последующих работах решаются задачи, обратные первой, и на основе этого изучаются многие свойства фигур. Особо тесно связаны работы 3 и 4. Без третьей работы было бы трудно выполнить четвертую работу. Помимо усвоения осевой симметрии, учащиеся повторят ранее изученный материал. Работы 1, 2 и 3 расположены в определенной системе, обеспечивающей понимание последующего материала. В анализе необходимо указать, что с помощью осевой симметрии доказывается равенство отрезков, углов, фигур, строятся многие фигуры, что это один из методов, дающий возможность с минимальной затратой времени изучить многие теоретические положения геометрии, решать различные конструктивные задачи. Все это можно показать в общем плане с демонстрацией заранее заготовленных чертежей и моделей, с которыми учащиеся будут работать на ближайших уроках.. Эти чертежи можно приготовить заблаговременно (перечертить их из школьного учебника и задачника в увеличенном виде).

Полезно указать учащимся, что с помощью осевой симметрии точка преобразуется в точку, прямая в прямую.

З а д а н и е н а д о м. Постройте на обороте форматки квадрат со стороной 4 *см* и в нем оси симметрии. Постройте прямоугольник со сторонами 4 и 5 *см* и в нем оси симметрии.

Задание № 11. Построение треугольников по двум элементам.

Содержание. Постройте в каждой части форматки несколько треугольников по тем элементам, которые указаны в каждой из них. Сделайте в каждом случае вывод о числе треугольников, которые можно построить. Построение произведите по следующим элементам: в первой части форматки по одной стороне, во второй части — по двум сторонам, в третьей



a
a
Треувольники
a
a, в
Треугольники.
A
∠A
Треугольники.
∠1 = ∠2.
Треувольники.
B
a
∠B, a.
Треугольники.
h_a
a, h_a.
Треугольники.
6 класс. Задание N 11.
Построение треугольников по одному и двум элементам

Рис. 3.

части — по углу, в четвертой — по двум углам, в пятой — по стороне и углу, прилегающему к ней, в шестой — по основанию и высоте к основанию. Выбранные вами элементы начертите или запишите вверху каждой части. На чертежах данные элементы выделите. Сделайте общий вывод о построении вполне определенных треугольников по двум элементам.

Методические замечания. Построения носят чисто экспериментальный характер. Первую работу целесообразно выполнить фронтально, при этом следует показать, как расположить данные, какие отрезки и углы на чертеже. Остальные работы выполняются самостоятельно. Учащимся разрешается пользоваться учебником.

Текст задания и данные к каждой работе записываются на доске. В конце урока проводится обобщающая беседа. На дом учащимся следует дать задание вырезать треугольник, у которого были бы вполне определенные стороны $a = 40$ *мм*, $b = 30$ *мм* и угол между ними 60°. Такой треугольник будет строиться на следующем уроке для изучения признака равенства треугольников.

Задание № 12. Построение треугольников по двум сторонам и углу между ними. Равенство таких треугольников.

Содержание. Первая работа. Постройте отрезки $a = 40$ *мм*, $b = 30$ *мм*, $\angle (ab) = 60°$ (60° имеет больший острый угол чертежного треугольника). Постройте два рядом расположенных треугольника по этим элементам. Пометьте или запишите порядок построения. Сделайте вывод о возможности построения треугольников. Запишите, что вам достоверно известно, выскажите ваше предположение о величине этих треугольников. Запишите его под заголовком «Доказать». Докажите теорему путем наложения, используя шаблоны треугольников. Измерьте и сравните все соответственные элементы обоих треугольников.

Вторая работа. Постройте треугольник по стороне $a = 6{,}4$ *см*, $b = 4{,}6$ *см*, $\angle (ab) = 68°$. Определите измерением с точностью до 0,1 *см* высоту, биссектрису, медиану, проведенные из вершины, и третью сторону.

Третья работа. Постройте равнобедренный треугольник по боковой стороне $b = 4{,}8$ *см* и углу при вершине в 70°. Проведите в нем медианы к боковым сторонам. Пометьте на чертеже равные отрезки и углы. Сравните медианы. Выскажите ваше предположение по результатам сравнения. Докажите ваше предположение. Измерьте медианы. Проверьте точность построений.

Четвертая работа. Постройте прямоугольный треугольник по двум его катетам $a = 40$ *мм*, $b = 30$ *мм*. Сформулируйте признак равенства прямоугольных треугольников по этим элементам. Измерьте гипотенузу и острые углы. Найдите сумму острых углов треугольника.

Дома постройте выпуклый четырехугольник, состоящий из двух треугольников, равных тому, что на чертеже во второй работе. Запишите соотношения между углами и сторонами получившегося четырехугольника.

Методические замечания. В краткой вводной беседе учитель ставит перед учениками задачу о конструировании и построении вполне определенных треугольников. Эта задача непосредственно вытекает из построений на прошлом уроке, когда во всех случаях получался не один, а множество треугольников. Дома учащиеся должны приготовить шаблон треугольника, равного тому, который будет построен в первой работе. Такое задание необходимо дать накануне. Желательно, чтобы треугольник был вырезан из плотной бумаги или картона.

Первая работа выполняется фронтально. Последующие работы выполняются самостоятельно, частично в классе, частично дома.

Задание № 13. Построение треугольников по стороне и двум углам, прилежащим к ней. Равенство таких треугольников.

Содержание. Первая работа. Постройте два рядом расположенных треугольника по стороне $a = 3{,}4$ *см* и двум углам $\angle 1 = 42°$, $\angle 2 = 58°$, прилежащим к этой стороне. Сделайте вывод о возможности построения. Пометьте порядок построения. Запишите, что вам достоверно известно. Выскажите ваше предположение о величине образовавшихся треугольников. Запишите его под заголовком «Доказать». Докажите теорему способом наложения, соблюдая при этом ту же последовательность, что и при построении. Составьте устный план воображаемого наложения одного треугольника на другой. Измерьте в каждом треугольнике третий угол и стороны. Сравните соответственные стороны и углы.

Вторая работа. Постройте треугольник по основанию $a = 5{,}2$ *см* и двум прилегающим углам $C = 30°$ и $B = 125°$. Определите измерением все высоты треугольника. Измерьте остальные стороны и третий угол.

Третья работа. Постройте равнобедренный треугольник по основанию $a = 5{,}7$ *см* и углу при основании в 48°. Проведите в нем биссектрисы углов при основании. Сравните их. Сформулируйте ваше предположение об их величине. Докажите ваше предположение. Измерьте биссектрисы с точностью до 0,1 *см*, проверьте этим точность построения.

Четвертая работа. Постройте прямоугольный треугольник по катету $a = 60$ *мм* и острому углу в 30°, прилежащему к этому катету. Сформулируйте признак равенства прямоугольных треугольников, построенных по этим элементам, измерьте в треугольнике другой катет и гипотенузу. Сравните их. Измерьте другой острый угол.

Методические замечания. Первая работа выполняется фронтально, теорема доказывается в процессе беседы с учениками. Остальные работы выполняются самостоятельно.

Задание № 14. Построение треугольников по трем его сторонам. Равенство таких треугольников.

Содержание. Первая работа. Постройте произвольный треугольник ABC (AC — основание). Постройте треугольник AB_1C, симметричный треугольнику ABC относительно основания AC. Соедините симметричные точки B и B_1. Всмотритесь в чертеж. Запишите все образовавшиеся треугольники. Пометьте на чертеже равные элементы, укажите виды образовавшихся треугольников. Запишите соотношения между величинами треугольников ABC и AB_1C. Сформулируйте признак равенства треугольников по трем сторонам. Составьте план доказательства равенства двух данных треугольников. Измерьте и сравните соответственные углы обоих треугольников.

Вторая работа. Постройте два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ по их сторонам $a = 44$ *мм*, $b = 38$ *мм*, $c = 30$ *мм*. Установите возможность построения. Запишите, что вам достоверно известно. Докажите равенство этих треугольников способом приложения второго к первому, с учетом составленного вами плана доказательства в первой работе. Для приложения используйте приготовленный вами дома шаблон треугольника.

Третья работа. Постройте $\triangle ABC$ по сторонам $a = 4{,}5$ *см*, $b = 7{,}2$ *см*, $c = 6{,}5$ *см*. Постройте в нем все биссектрисы и измерьте их.

Четвертая работа. Постройте $\triangle ABC$ по данным, приведенным во второй работе. К нему приложите $\triangle A_1B_1C_1$ из этой же работы так, чтобы образовался выпуклый четырехугольник. Вершину A_1 совместите с вершиной C, а вершину C_1 — с вершиной A. Установите свойства образовавшегося выпуклого четырехугольника $ABCD$ (D поставьте вместо B_1).

Методические замечания. Первая и вторая работы выполняются фронтально и сопровождаются пояснениями учителя, остальные работы могут быть выполнены учениками самостоятельно в классе или дома.

Первая работа дает возможность повторить осевую симметрию и подготовить учащихся ко второй работе. Для выполнения второй работы необходим шаблон. Ведь мы должны построить $\triangle ABC$, равный $\triangle A_1B_1C_1$, поэтому нужен шаблон $\triangle A_1B_1C_1$. Мы прикладываем его к $\triangle ABC$ и строим $\triangle AB_2C$. После этого доказываем либо симметричность точек B и B_2, либо равенство отрезков AB и AB_2, BC и B_2C. Применение осевой симметрии облегчает доказательство. После выполнения второй работы можно провести анализ теоремы.

Перед общими упражнениями полезен анализ всех признаков равенства треугольников, причем полезно обратить внимание на конструирование и построение с помощью треугольников различных многоугольников. Целесообразно подобрать такие случаи, когда из двух треугольников получались бы различные параллелограммы и трапеции. Можно предложить, например, такие упражнения.

1. Сконструировать и построить из двух равных треугольников новый треугольник. Записать соотношения между его элементами.

2. Сконструировать и построить треугольник из двух неравных треугольников. Установить опытным путем и с помощью рассуждений условия, которые должны быть выполнены при этом.

3. Сконструировать и построить из двух равных тре-

угольников выпуклый четырехугольник. Записать соотношения между элементами этого четырехугольника.

4. Сконструировать и построить из двух неравных треугольников выпуклый четырехугольник. Установить условия, которые должны быть выполнены при этом.

Аналогичных задач можно подобрать много.

Задание № 15. Проверочная работа по теме «Треугольники».

Содержание. 1. Даны три отрезка: 160, 120 и 80 *мм*. Установить, можно ли построить треугольник, приняв эти отрезки за стороны.

2. Построить по данным сторонам треугольник. Провести в нем высоты красным карандашом, медианы — синим, биссектрисы — зеленым. Измерить их.

3. Определить тип треугольника в зависимости от величины его углов. Можно ли это сделать, не измеряя углов?

4. Запишите известные вам соотношения между элементами треугольника. Укажите, какие из них можете обосновать, а о каких можете высказать предположения, основанные на опыте.

Задание № 16. Внешний угол треугольника. Его свойство.

Содержание. Первая работа. Постройте остроугольный треугольник ABC. Постройте его внешний угол BCD. Сравните внутренний угол BAC с внешним углом BCD. Постройте прямоугольный треугольник B_1AC с тем же основанием AC и прямым углом B_1CA. Сравните его внутренний угол B_1AC с внешним углом B_1CD Постройте с тем же основанием AC треугольник B_2AC с тупым углом ACB_2. Какое предположение можно высказать в этом случае о сравнительной величине внутреннего угла B_2AC и внешнего угла B_2CD? Сформулируйте теорему, которую мы должны будем доказать в общем виде.

Вторая работа. Постройте $\triangle ABC$, у которого $AC = 22$ *мм*, $AB = 54$ *мм*, $BC = 44$ *мм* (AC — основание). Постройте внешний угол BC. Проведите в треугольнике медиану AO и продолжите ее на расстояние $OE = AO$. Соедините точки E и C. Всмотритесь в чертеж. Запишите, какие из фигур, образовавшихся на чертеже, равны. Сравните внешний угол DCB с углом B. Сформулируйте на основе этого сравнения вывод в виде теоремы. Запишите теорему в символах. Докажите ее. Измерьте внешний угол и внутренние, с ним не смежные. Сравните внешний угол с суммой внутренних, с ним не смежных.

Третья работа. Постройте тупоугольный треугольник. Постройте внешний угол около вершины тупого угла. Обозначьте все углы цифрами и запишите соотношения между ними. Сделайте вывод о числе тупых углов в треугольнике.

Четвертая работа. Постройте прямоугольный треугольник. Постройте около вершины прямого угла внешний угол. Обозначьте углы и запишите все соотношения между ними. Сделайте вывод о числе прямых углов в треугольнике.

Пятая работа. Проведите прямую линию MN и пометьте точку A, не лежащую на этой прямой. Постройте с помощью чертежного треугольника $AO \perp MN$. (O лежит на прямой MN.) Проведите AB, где B лежит на MN. Запишите соотношение между углами, образовавшимися на чертеже. Докажите, что AB не может быть перпендикулярна к MN. Сформулируйте вывод в виде теоремы.

Шестая работа. Постройте такой же треугольник ABC, как и во второй части. Выполните дополнительные построения и докажите, что внешний угол больше угла A. Медиану проведите из вершины B.

Методические замечания. В предварительной беседе учитель демонстрирует на универсальном приборе подвижную модель треугольника с выделенным внешним углом. Вначале демонстрируется остроугольный треугольник. Обращается внимание учащихся на величину внешнего угла и углов внутренних, с ним не смежных. В этом случае вывод очевиден. Затем треугольник постепенно преобразовывается в прямоугольный. Учащиеся следят за изменением выделенных углов. Для прямоугольного треугольника вывод очевиден. Затем треугольник преобразовывается в тупоугольный. В этом случае все выделенные углы острые и просто на глаз нельзя сказать, какой из них больше, нужно доказательство Соответствующие чертежи выполняются во второй работе.

Вторая работа выполняется фронтально. По чертежу доказывается теорема для $\angle B$. Остальные работы относятся к анализу теоремы.

Задание № 17. Построение и равенство прямоугольных треугольников.

Содержание. Форматку разделите на шесть частей, так, чтобы вторая часть была шириной 9 *см* и высотой 10 *см*.

Первая работа. Постройте два прямоугольных треугольника ABC и BCD, симметричных относительно катета BC. Всмотритесь в чертеж и запишите равенство для углов и отрезков. Сформулируйте несколько задач на построение прямоугольных треугольников, равных $\triangle ABC$ по различным элементам.

Вторая работа. Постройте дома прямоугольный треугольник по двум катетам $a = 60$ *мм* и $b = 80$ *мм*. Сформулируйте признаки равенства треугольников, построенных по этим элементам. Сравните вашу формулировку с учебником. Измерьте гипотенузу.

Третья работа. Постройте прямоугольный треугольник по катету $a = 4{,}7$ *см* и острому углу $B = 45°$. Сформулируйте признак равенства треугольников, построенных по этим элементам. Измерьте катет и другой угол. Эту работу можно предложить выполнить дома.

Четвертая работа. Постройте два прямоугольных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ по гипотенузе $c = 4$ *см* и $\angle A = 30°$. Сформулируйте и докажите признак равенства треугольников, построенных по этим элементам. Определите a, $\angle B$, b. Сравните a и c. Запишите или пометьте на чертеже порядок построения и учтите его при доказательстве теоремы.

Пятая работа. Постройте два прямоугольных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ по гипотенузе $c = 50$ *мм* и катету $b = 40$ *мм*. Сформулируйте признак равенства треугольников, построенных по таким элементам. Запишите теорему в символах, докажите ее способом приложения. Для составления плана используйте конструкцию чертежа из первой работы.

Шестая работа. Постройте отрезок AB, проведите через его середину перпендикуляр к нему (середину обозначьте буквой O). Отметьте на этом перпендикуляре несколько точек C, D, M. Сравните расстояние каждой точки от концов отрезка AB. Сформулируйте вывод. Запишите теорему в символах и докажите ее. Пометьте точку K, не лежащую на перпендикуляре. Для полноты доказательства покажите, что она неодинаково удалена от концов отрезка AB. Подумайте, как можно доказать, что один отрезок больше другого. Какие для этого необходимо сделать дополнительные построения?

Методические замечания. Первая работа выполняется фронтально. В процессе беседы устанавливаются условия, по которым можно построить вполне определенный треугольник. Целесообразно записать все предложения учащихся на доске, затем проанализировать их, выделить различные случаи, записать для каждого из них в символах данные и цель работы. После этого можно приступить к выполнению задания. Работы 2 и 3 следует выполнить дома, так как работы, аналогичные им, ученики уже выполняли. Работы 4, 5 и 6 целесообразно рассмотреть в классе, часть на этом же уроке, а часть на следующем. Эти работы выполняются фронтально. Необходимо учитывать, что порядок наложения соответствует ходу построения, а потому процесс воображаемого наложения не вызовет у учащихся особых затруднений.

Задачу на деление отрезка пополам и проведение перпендикуляра через его середину можно предложить учащимся выполнить самостоятельно, воспользовавшись при этом чертежом из учебника.

Задание № 18. Соотношение между сторонами и углами в треугольнике.

Содержание. Первая работа. Постройте равнобедренный треугольник ABC (AC — основание). Обозначьте угол A цифрой *1*, а угол C — цифрой *2*. Запишите соотношение между углами, лежащими против равных сторон. Сформулируйте это соотношение в виде теоремы, в которую вошли бы слова: *треугольник, равные углы, равные стороны, лежат против.*

Продолжите AC в сторону C и из точки B, как из центра, радиусом, большим BC, сделайте засечку на продолжении AC. Обозначьте образовавшуюся точку буквой D. Соедините B и D. Обозначьте $\angle BDC$ цифрой *3*. Зная, что $BD > BA$, сравните $\angle 3$ и $\angle 1$. Сформулируйте соотношение между сторонами AB и BD и углами *1* и *3* в треугольнике ABD.

Из точки B, как из центра, радиусом, меньшим BC, сделайте засечку на стороне AC. Обозначьте образовавшуюся точку буквой E. Обозначьте $\angle BEA$ цифрой *4*. Соедините B и E. Зная, что $BE < AB$, сравните $\angle 4$ и $\angle 1$. Сформулируйте соотношение между этими углами и лежащими против них сторонами в виде теоремы.

Вторая работа. Постройте $\triangle ABC$, у которого основание $BC = 60$ *мм*, а медиана $AD = 35$ *мм*. Пометьте порядок построения. Начертите линию, на которой будут располагаться вершины A треугольников, удовлетворяющих данным условиям. Сравните $\angle B$ и $\angle BAD$, $\angle C$ и $\angle CAD$. Измерьте углы и проверьте соответствие результатов измерения теоретическим выводам.

Третья работа. Постройте $\triangle ABC$, если $a = 6$ *см*, $b = 5$ *см*, $c = 4$ *см*. Проведите в нем $AD = h_a$. Сравните AD и AC, AD и AB. Постройте все высоты и сравните их сумму с периметром треугольника. Измерьте высоты, определите их сумму и сопоставьте результат с теоретическим выводом.

Четвертая работа. Постройте прямоугольный треугольник по катетам $a = 30$ *мм* и $b = 40$ *мм*. Сформулируйте и докажите следствие из предыдущей теоремы о сравнительной длине любого катета и гипотенузы. Измерьте гипотенузу. Соответствует ли результат измерения теоретическим выводам?

Пятая работа Скопируйте второй чертеж из задания 16. Сравните части, на которые медиана разделила угол треугольника. Зная, что $AC < AB$, сформулируйте вывод, в какой зависимости находятся части угла от величины сторон, к которым они примыкают. Запишите вывод в символах. Проверьте опытным путем ваш вывод на треугольниках разных типов.

Шестая работа. Постройте разносторонний треугольник ABC с основанием AC. Проведите из вершины B медиану, высоту и биссектрису. Установите взаимное положение их, сравнивая части угла B, на которые каждая из них делит его.

Методические замечания. На универсальном приборе демонстрируются различные треугольники с целью подметить зависимость между сторонами и углами. Начинается демонстрация с равнобедренного треугольника. В процессе ее делается первый вывод, соответствующий первой работе. Затем стороны изменяются. Учащиеся следят за изменением углов. На основе наблюдений формулируется в виде предположения зависимость величины углов от величины сторон, против которых они лежат. После этого выполняются работы. Первая работа выполняется самостоятельно, вторая и третья — фронтально, четвертая, пятая и шестая — самостоятельно.

После выполнения шестой работы полезно сделать обобщение о делении угла биссектрисой, медианой и высотой. Каждая из этих линий делит угол на части своеобразно. В равнобедренном треугольнике все эти линии совпадают и поэтому угол при вершине делится пополам. С нарушением равенства боковых сторон нарушается и соотношение между частями угла. В порядке упражнения полезно предложить по чертежу 4 доказать теорему о том, что сумма двух сторон треугольника больше третьей. Для этого следует предложить учащимся продолжить сторону AC на расстояние $CD = CB$ и, соединив точки D и B, рассмотреть чертеж.

Задание № 19. Перпендикуляр и наклонная к прямой.

Содержание. Форматку разделить на 6 частей так, чтобы вторая часть по ширине была равна приблизительно 10 *см*.

Первая работа. Проведите прямую MN. Возьмите вне ее точку A, постройте $AO \perp MN$. Точка O называется основанием перпендикуляра. Проведите через точку A другую прямую, которая пересечет MN в точке B. Отрезок AB называется наклонной, точка B — основанием наклонной. Сравните перпендикуляр AO и наклонную AB. Сформулируйте вывод в форме теоремы. Запишите ее в символах и докажите. Сформулируйте обратную теорему.

Вторая работа. Проведите произвольную прямую MN. Постройте несколько равных отрезков, длиной каждый по 15 *мм*, различно расположенных относительно MN. Спроектируйте эти отрезки на MN (найдите проекции отрезков на MN), измерьте их проекции. Выскажите ваше предположение (без доказательства) о сравнительной длине отрезков и их проекций, о сравнительной длине проекций между собой. Выделите наибольшую и наименьшую из проекций.

Третья работа. Постройте две равные наклонные AB и BC к одной и той же прямой MN. Спроектируйте их. Сравните их проекции. Сформулируйте теорему о длине проекций. Запишите ее в символах. Докажите теорему. Измерьте проекции с точностью до 1 *мм*.

Четвертая работа. Выполните построения для теоремы, обратной предыдущей. Запишите эту теорему в символах. Сформулируйте и докажите ее. Измерьте наклонные.

Пятая работа Проведите произвольную прямую MN и пометьте точку B вне ее. Опустите из точки B перпендикуляр BO на MN. Постройте три наклонные, у которых проекциями были бы отрезки $OC = OK$; $OA > OC$. Сравните наклонную BA с другими наклонными. Сформулируйте вывод в виде теоремы Запишите теорему с помощью символов и докажите ее. Измерьте наклонные.

Шестая работа. Выполните построения для доказательства теоремы, обратной предыдущей. Наклонные постройте по разные стороны от перпендикуляра. Сформулируйте теорему, запишите ее в символах и докажите. Измерьте проекции наклонных.

Работа для желающих. Исследуйте в разностороннем треугольнике взаимное расположение высоты и боковых сторон, имеющих с высотой общую вершину. Сделайте вывод, проекция какой из сторон меньше. Докажите. Постройте в этом же треугольнике медиану и биссектрису. Сделайте вывод о взаимном положении медианы, высоты и биссектрисы, выходящих из одной и той же вершины.

Методические замечания. Предварительная беседа сопровождается демонстрацией подвижной модели, состоящей из нескольких наклонных, резиновых шнуров и отвеса. Все наклонные выходят из одной и той же точки A и проведены к прямой MN. Точка A может свободно перемещаться по прямой, параллельной MN, в результате чего нить отвеса может совпадать то с одной, то с другой из натянутых резинок.

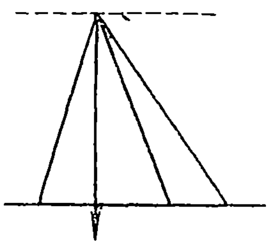


Рис. 4.

На модели демонстрируются все теоремы, относящиеся к данному заданию. Для первой работы важно выделить, что перпендикуляр меньше всякой наклонной и наоборот: если мы нашли самое короткое расстояние от точки до прямой, то этот отрезок будет обязательно перпендикуляром к данной прямой.

После этого выполняется вторая работа.

Для демонстрации проекции точки полезно использовать свободно падающий шар. Для демонстрации проекции равных отрезков (вообще отрезка) полезно использовать подвижную модель отрезка с отвесами на его концах. Отрезок AB может вращаться и занимать различные положения, в том числе и пересекать CD. Полезно обратить внимание учащихся на то, что это еще один вид преобразования.

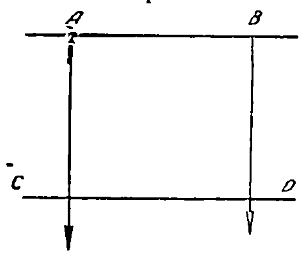


Рис. 5

После демонстрации модели необходимо предложить учащимся перенести все возможные случаи на бумагу. Одному из учащихся можно предложить выполнить работу на доске.

Третья работа выполняется фронтально. Доказательство ведется устно. Четвертую работу учащиеся выполняют самостоятельно. Пятая и шестая работы выполняются фронтально.

Задание № 20. Геометрическое место точек. Свойства окружности, перпендикуляра к отрезку, проведенному через середину, биссектрисы угла.

Содержание. Первая работа. На форматке пометьте точку O и несколько точек M, M_1 и M_2, одинаково удаленных от нее. Множество точек, обладающих одинаковым свойством с точкой M, называют геометрическим местом точек, обладающих этим свойством. Сформулируйте определение окружности как геометрического места точек. Пометьте точку A, лежащую вне круга, и точку B, лежащую внутри круга. Запишите в символах, что эти точки не обладают свойством точки M. Составьте устный план доказательства принадлежности какой-либо точки данной окружности.

Вторая работа. Пометьте две точки A и B. На основе первой работы найдите несколько точек M, M_1 и M_2, равноудаленных от этих двух точек. Постройте геометрическое место точек, равноудаленных от A и B. Сформулируйте определение его. Пометьте точку K, не принадлежащую этому геометрическому месту точек. Как доказать, что K не удовлетворяет условию точек M? Запишите математическими знаками то, что надо доказать. Докажите.

Третья работа. Поставьте три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой. Постройте точку O, равноудаленную от A, B и C. Проверьте измерителем точность построений. Составьте устно план нахождения точки O. Постройте окружность, проходящую через эти точки. Измерьте радиус окружности. Соедините последовательно A, B и C, получите $\triangle ABC$, около которого описана окружность. По этому чертежу составьте план нахождения центра окружности. Дома начертите окружность произвольного радиуса так, чтобы ее центра не было видно. Найдите его построением.

Четвертая работа. Постройте окружность с центром O и радиусом 15 *мм*. Возьмите две точки A и B вне круга. Найдите на окружности точку M, одинаково удаленную от A и B. Проверьте измерителем точность построения. Сформулируйте условия, которым удовлетворяет точка M.

Пятая работа. Постройте угол O. Пометьте на его сторонах точки A и B такие, что $OA = OB$. Постройте $MA \perp OA$ и $MB \perp OB$. Всмотритесь в образовавшийся чертеж. Найдите равные углы и равные отрезки. Запишите равенство их. Определите положение точки M относительно сторон угла O. Постройте еще две точки M_1 и M_2, обладающие таким же свойством, что и точка M. Постройте геометрическое место точек, обладающих общим свойством с точками M_1, M_2 и M. Пометьте точку P, не лежащую на общей прямой с точками M, M_1 и M_2. Запишите в символах, что надо доказать, чтобы убедиться в том, что точка P не обладает свойством точек M, M_1 и M_2. Выполните необходимые построения и докажите ваше предположение. Составьте план построения биссектрисы угла.

Шестая работа. Скопируйте чертеж 180 из учебника и устно составьте план построения биссектрисы с помощью линейки и циркуля.

Седьмая работа. Постройте $\angle O = 42°$ и пометьте две произвольные точки A и B. Найдите точку M на биссектрисе $\angle O$, одинаково удаленную от точек A и B. Проверьте измерителем точность построений.

Восьмая работа. Постройте $\triangle ABC$ со сторонами $a = 5{,}2$ *см*, $b = 4{,}2$ *см*, $c = 3{,}8$ *см*. Найдите внутри треугольника точку O, одинаково удаленную от всех его сторон. Составьте устно план нахождения такой точки. Измерьте расстояния от точки O до сторон угла. Точность проверьте измерителем. Постройте окружность с центром в точке O и радиусом, равным расстоянию от точки O до сторон угла. Такая окружность называется вписанной в треугольник.

Методические замечания. В предварительной беседе учитель подводит учеников к мысли о существовании точек, обладающих определенными свойствами.

Ставится задача об изучении ряда геометрических мест точек. Полезно указать школьникам, что они будут иметь дело с фигурами, уже известными им, но при этом будет введен ряд новых названий.

Затем учитель диктует текст первой работы. Учащиеся последовательно выполняют ее. Вторая работа выполняется фронтально. Третья и четвертая работы выполняются самостоятельно. Пятая — фронтально, а остальные — самостоятельно.

§ 3. Параллельные прямые

Задание № 21. Взаимное положение прямых на плоскости.

Содержание. Первая работа. Проведите слева направо прямую MN, а над ней — вторую прямую так, чтобы она могла при продолжении пересечься с прямой MN. Пометьте на второй прямой точки A и B. Постройте третью прямую, симметричную прямой AB относительно MN. Обозначьте через C и D точки, соответственно симметричные точкам A и B. Продолжите AC и BD в обе стороны. Всмотритесь в чертеж. Устно составьте рассказ о взаимном расположении образовавшихся на чертеже прямых. Укажите на чертеже точки пересечения симметричных прямых. Если таких точек нет, то укажите, как их получить.

Прямые AC и BD называются параллельными. Сформулируйте определение параллельных прямых. Докажите, что AC и BD не имеют общей точки. Устно составьте план построения и доказательства параллельности двух прямых, перпендикулярных третьей.

Вторая работа. Постройте с помощью двухсторонней линейки и угольника прямоугольник; квадрат; четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие — нет; четырехугольник с попарно параллельными сторонами. Обозначьте фигуры буквами и запишите с помощью символов параллельность их сторон.

Третья работа. Проведите произвольную прямую EF. Постройте две прямые AB и CD, которые, пересекаясь с EF в разных точках, образовали бы соответственно углы в 80 и 60°. Обозначьте все углы цифрами. Выделите внутренние накрест лежащие углы. Сравните их. Запишите, как взаимно расположатся прямые AB и CD. Найдите точку пересечения прямых AB и CD.

Четвертая работа. Постройте две прямые AB и CD, которые, пересекаясь с прямой EF, образовали бы углы в 30°. Выделите накрест лежащие углы. Сравните их. Выскажите ваше предположение о взаимном положении прямых AB и CD.

Сравните в третьей и четвертой работах, как взаимное положение прямых AB и CD зависит от величины накрест лежащих углов, которые образованы при пересечении двух прямых третьей. Сформулируйте на основе ваших наблюдений признак параллельности двух прямых. Запишите его в символах. На основе первой работы выполните дополнительные построения и докажите признак параллельности прямых. Устно составьте план построения двух параллельных прямых Как это можно сделать с помощью только треугольника? Постройте на обороте форматки две параллельные прямые. Запишите, на чем основывается параллельность построенных вами прямых.

Методические замечания. На универсальном приборе учитель демонстрирует различные случаи взаимного положения прямых, изображенных резиновыми шнурами Во время беседы устанавливаются особенности взаимного положения прямых, формулируются определения пересекающихся и параллельных прямых и показываются знаки для обозначения их. Затем учитель ставит перед учащимися задачу: построить соответствующие линии и доказать существование параллельных прямых.

Первая работа выполняется фронтально. Проводится анализ теоремы, в котором выделяются способы построения двух параллельных и метод доказательства параллельности двух прямых.

Вторая работа выполняется самостоятельно. Ее роль — закрепление навыков построения параллельных прямых на основе первой работы и построение параллельных с помощью двухсторонней линейки. Последний прием дается без обоснований, чисто практически.

Третья работа и конструктивная часть четвертой выполняются учащимися в классе и дома самостоятельно. Учащиеся при их выполнении должны прочитать в учебнике параграф, касающийся названия углов, образующихся при пересечении двух прямых третьей. Назначение этих работ — подготовить учеников к доказательству первого признака параллельности прямых на следующем уроке.

Задание № 22. Второй и третий признаки параллельности.

Содержание. Первая работа. Постройте две прямые AB и CD, которые, пересекаясь с третьей прямой EF, образуют равные соответственные углы. Для конкретности возьмем их равными 30°. Выскажите ваше предположение о взаимном положении прямых AB и CD. Запишите математическими символами, что вам достоверно известно, и ваше предположение. Сформулируйте второй признак параллельности. Докажите его. Выпишите все пары соответственных углов. Устно составьте план построения параллельных прямых на основе второго признака.

Вторая работа. Проведите прямую MN и пометьте вне ее точку K. С помощью чертежного треугольника и линейки на основе второго признака постройте прямую, параллельную MN и проходящую через K. Выделите на чертеже равные соответственные углы, которые вы использовали для построения.

Третья работа. Постройте $\angle ABC = 40°$. Пометьте в его внутренней области точку K. Постройте две прямые, проходящие через точку K, так, чтобы одна из них была параллельна AB, другая —BC, и которые пересекли бы стороны угла. Обозначьте точки пересечения. Выделите на чертеже равные соответственные углы, которые вы использовали для построения параллельных прямых. Пометьте на чертеже другие углы, которые оказались равными в результате построения. Докажите их равенство. Выделите образовавшийся на чертеже четырехугольник. Запишите в символах соотношения между его углами и взаимное положение его сторон.

Четвертая работа. Выполните построения, описанные в учебнике, для доказательства третьего признака параллельности двух прямых. Запишите признак параллельности в символах, докажите его. Измерьте один угол. Определите все углы, образовавшиеся на чертеже.

Методические замечания. Первая и вторая работы выполняются фронтально, третья — самостоятельно в классе, а четвертая может быть выполнена учащимися дома.

Задание № 23. Аксиома параллельности. Зависимость между углами, образованными двумя параллельными прямыми и секущей.

Содержание. Первая работа. Постройте прямую CD. Пометьте вне ее точку M и проведите через нее прямую $AB \parallel CD$. Проведите через точку M две прямые KL и EF, отличные от AB. Выскажите ваше предположение о их взаимном положении с прямой CD. Прямая AB — единственная прямая, параллельная CD. Сформулируйте это положение, учитывая, что AB проходит через точку M. Запишите все данные и утверждение с помощью математических знаков. Сопоставьте вашу формулировку с аксиомой параллельности, имеющейся в учебнике.

Вторая работа. Постройте две параллельные прямые AB и CD и секущую MN. Запишите, что вам достоверно известно. Обозначьте углы. Сравните два каких-либо соответственных угла. Выскажите ваше предположение о их величинах. Сформулируйте ваше предположение в виде теоремы и запишите его. Докажите теорему. Дополнительные построения сделайте аналогично тому, как они выполнены в учебнике. Измерьте один из соответственных углов и определите все остальные углы вычислением. Сформулируйте обратные теоремы для признаков параллельности. Объедините их в одну с общим условием, но с различными заключениями.

Третья работа. Выполните построения в соответствии со следующим условием:

$$AB \parallel CD; \quad MN \parallel CD$$

и сделайте выводы относительно взаимного положения AB и MN. Сформулируйте теорему (следствия из первых двух теорем).

Постройте секущую EF для всех трех прямых. Обозначьте точки пересечения. Выделите несколько пар углов с параллельными сторонами и запишите соотношения между этими углами. Устно составьте план построения угла, равного данному.

Четвертая работа. Выполните построения в соответствии со следующей записью:

$$AB \perp MN; \quad CD \parallel AB.$$

Сформулируйте вывод о взаимном положении CD и MN в виде теоремы. (Второе следствие из первых двух работ.)

Пятая работа. Постройте с помощью линейки выпуклый четырехугольник с попарно параллельными сторонами. Сравните его противоположные углы. Запишите ваше предположение в символах. Докажите его. Определите сумму всех внутренних углов.

Постройте выпуклый четырехугольник, у которого только две стороны параллельны, а две другие нет. Определите сумму его внутренних углов. Определите сумму двух углов, прилегающих к какой-либо из непараллельных сторон.

Шестая работа. Постройте две прямые a и b, точка пересечения которых лежит за правым краем форматки. Измерьте угол между этими прямыми.

Методические замечания. После первой работы учитель проводит краткую беседу об аксиоме параллельности. Вторая работа выполняется фронтально. Третья и четвертая работы выполняются самостоятельно учащимися. В анализе необходимо указать, что материал этого задания дает возможность строить равные углы, доказывать равенство углов, находить углы, которые в сумме составляют $2d$, складывать углы геометрически.

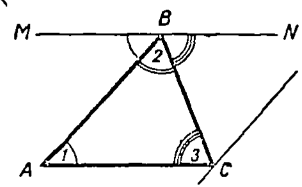
Задание № 24. Сумма внутренних углов треугольника.

Содержание. Первая работа. Постройте отрезок AC. Пометьте точку B вне этого отрезка. Постройте прямую $MN \parallel AC$ и проходящую через точку B. Проведите две секущие AB и BC. Всмотритесь в чертеж и выделите равные углы. Запишите равенство их. Выделите $\triangle ABC$. Определите сумму его внутренних углов. Сформулируйте теорему о сумме внутренних углов треугольника. Запишите ее в символах. Докажите теорему, сложив геометрически углы при вершине C. Выразите каждый угол как разность суммы и других углов. Измерьте углы с точностью до 1°. Сложите полученные при измерении результаты. Найдите погрешность.

Вторая работа. Постройте $\triangle ABC$ и его внешний угол BCD. Постройте внутри этого угла $\angle ECD = \angle A$. Запишите другие равные углы, образовавшиеся на чертеже. Сравните сумму $\angle A$ и $\angle B$ с $\angle BCD$. Сформулируйте ваш вывод. Докажите его.

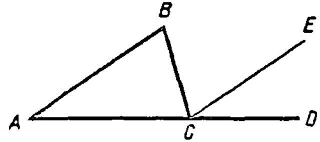
Составьте на основе полученного чертежа план второго способа сложения внутренних углов треугольника с помощью параллельных прямых. Измерьте $\angle A$, $\angle B$ и $\angle BCD$ с точностью до 1°. Проверьте точность построений.

6 класс. Задание N 24.
Сумма внутренних углов



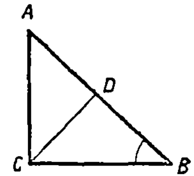
AC; B вне AC; $MBN \parallel AC$, AB, BC.

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 =$; $\angle 1 =$, $\angle 2 =$
$\angle 3 =$



$\triangle ABC$, $\angle BCD$ – внешний; $\angle ECD = \angle A$.

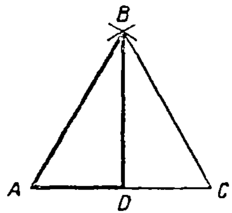
$\angle A + \angle B =$; $\angle A =$; $\angle B =$;
$\angle BCD =$



$a = 40$ мм; $\angle C = 90°$, $\angle B = 40°$.

1) $\angle A =$ с вычислением
$\angle A =$ с измерением

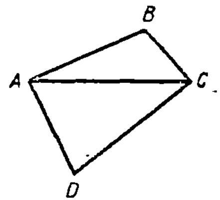
2) $CD \perp AB$, $\angle DCB =$; $\angle DCA =$



$\triangle ABC$; $AB = BC = AC$

1) $\angle A =$, $\angle B =$; $\angle C =$

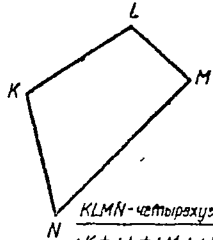
2) $BD \perp AC$; $\angle ABD =$;
$AD =$; $AB =$



$\triangle ABC$, $\triangle ADC$;

$ABCD$ – выпуклый четырехугольник.

$\angle DAB + \angle B +$
$+ \angle BCD + \angle D =$



$KLMN$ - четырехугольник

$\angle K + \angle L + \angle M + \angle N =$

Третья работа. Постройте прямоугольный треугольник по катету $a = 40$ *мм* и $\angle B = 40°$, прилегающему к этому катету. Запишите последовательность построений. Вычислите второй острый угол треугольника. Сделайте вывод о сумме острых углов прямоугольного треугольника. Измерьте второй острый угол. Сравните результат вычисления и измерения. Какой из них следует считать более точным? Почему?

Постройте высоту из вершины прямого угла. Определите углы, на которые разделился прямой угол высотой.

Четвертая работа. Постройте равносторонний треугольник ABC. Определите каждый его угол.

Постройте $BD \perp AC$. Определите углы, образовавшиеся при вершине B. Выделите $\triangle ABD$. Определите его вид. Сравните AD и AB. Сформулируйте вывод в форме теоремы, учитывая, что AD лежит в $\triangle ABD$ против угла в 30°. Измерьте AD и AB, сравните результаты.

Пятая работа. Постройте $\triangle ABC$. Дополните его до четырехугольника. Определите сумму внутренних углов выпуклого четырехугольника $ABCD$.

Шестая работа. Постройте произвольный выпуклый четырехугольник. Определите сумму его внутренних углов. Сформулируйте теорему о сумме внутренних углов любого четырехугольника.

Методические замечания. Первая и вторая работы выполняются фронтально, остальные — самостоятельно учащимися. Первые работы помогают сделать анализ теорем о зависимости между углами, образованными параллельными прямыми и секущей. Но эти работы имеют и самостоятельное значение. В первых трех работах можно обратить внимание учеников на взаимное положение сторон равных углов, что послужит подготовкой к изучению углов с соответственно параллельными сторонами.

Задание № 25. Углы с соответственно параллельными или перпендикулярными сторонами.

Содержание. Первая работа. Постройте с помощью только линейки две пары взаимно пересекающихся параллельных прямых $AB \parallel CD$ и $MN \parallel EF$. Обозначьте точки пересечения. Найдите два острых и два тупых угла, стороны которых параллельны. Запишите соотношения между следующими углами: двумя острыми, двумя тупыми, одним острым и одним тупым. Докажите эти соотношения. Сформулируйте на основе этого теорему об углах с соответственно параллельными сторонами. Измерьте пару каких-либо углов и проверьте точность построений.

Вторая работа. Постройте острый угол, образованный лучами a и b, $\angle (ab)$. Постройте на основе первой работы различными способами два угла, равных данному, и два, составляющих с данным $2d$. Составьте устно план построения таких углов и план доказательства равенства углов, а также доказательства того, что два угла вместе составляют $2d$.

Третья работа. Постройте острый угол (ab) и другой острый угол (cd), имеющий с первым общую вершину и стороны, соответственно перпендикулярные сторонам первого угла. Сравните эти углы. Выскажите ваше предположение об их величине.

Постройте тупой угол (af) и второй тупой угол (cb) так, чтобы стороны их были соответственно перпендикулярны. Сравните углы, сформулируйте вывод и докажите его. Объедините выводы первой и второй работ в общую теорему. Измерьте углы, проверьте точность построений.

Постройте острый угол (ab) и второй тупой угол (mn), имеющий с первым общую вершину, а стороны, соответственно перпендикулярные сторонам острого угла. Внутренние области углов не должны пересекаться. Запишите сумму всех углов, образовавшихся около общей вершины. Определите сумму построенных вами углов. Сформулируйте вывод в виде теоремы. Докажите ее.

Постройте один острый угол (ab), другой тупой угол $(кр)$ с общей вершиной и с соответственно перпендикулярными сторонами так, чтобы внутренняя область тупого угла содержала в себе внутреннюю область острого угла. Определите сумму этих углов. Сформулируйте и докажите вывод.

Четвертая работа. Постройте $\triangle ABC$, у которого $b=40$ *мм*, $\angle A=60°$, $\angle C=90°$. Постройте высоту из вершины $\angle C$. Всмотритесь в чертеж и отметьте равные углы. Определите величину их. Запишите образовавшиеся треугольники с равными углами. Определите вычислением или измерением стороны этих треугольников.

Постройте $\angle A$, поместьте во внутренней области его точку C. Постройте $\angle C$ так, чтобы его стороны были перпендикулярны сторонам $\angle A$. Определите сумму углов A и C и сумму всех внутренних углов образовавшегося четырехугольника.

III. СИСТЕМА ГРАФИЧЕСКИХ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ В VII КЛАССЕ

§ 1. Четырехугольники

Задание № 1. Сумма внутренних углов четырехугольника.

В процессе выполнения задания предусматривается повторение теорем о равенстве треугольников, о сумме внутренних углов треугольника, о признаках параллельности прямых и способах построения параллельных прямых.

Содержание. Первая работа. Постройте треугольник по трем сторонам a, b и c. Сделайте необходимые дополнительные построения, с помощью которых можно определить сумму внутренних углов треугольника. Сформулируйте соответствующую теорему.

Вторая работа. Постройте произвольный четырехугольник. На основе предыдущей работы определите сумму внутренних углов данного четырехугольника. Сформулируйте теорему и запишите в символической форме ее доказательство. Измерьте углы с точностью до 1°, сложите полученные результаты. Определите погрешность при построении.

Третья работа. Постройте два треугольника, имеющих соответственно по две равные стороны и по равному углу между данными сторонами. Сформулируйте теорему о равенстве таких треугольников. Измерьте и сравните величины неизвестных углов и сторон. Проверьте точность построений.

Четвертая работа. Постройте треугольник по стороне и двум прилежащим к ней углам и по этим же данным — второй треугольник. Сформулируйте теорему о равенстве таких треугольников. Измерьте в треугольниках неизвестные стороны и углы. Сравните их и проверьте точность построений.

П я т а я р а б о т а. Проведите произвольную прямую AB, возьмите точку M, не лежащую на этой прямой, и через точку M проведите прямую, параллельную AB. Проведите секущую к этим двум прямым и запишите с помощью символов условие параллельности двух прямых.

Р а б о т а д л я ж е л а ю щ и х. Постройте четырехугольник $ABCD$ с $\angle A = \angle C = 90°$. Докажите, что биссектрисы двух других углов параллельны или совпадают.

Начертите несколько четырехугольников, у которых биссектрисы параллельны, и несколько таких, у которых они совпадают. Выскажите ваши предположения об условиях совпадения и параллельности биссектрис.

Методические замечания. Задание выполняется самостоятельно учащимися с использованием учебника. В предварительной беседе полезно вспомнить приемы построения равных углов и способы их геометрического сложения. Беседу целесообразно сопровождать выполнением эскизов и показом моделей. Перед учащимися ставится вопрос: «Как построить угол, равный данному?» Учащиеся вспомнят углы с параллельными и перпендикулярными сторонами, вертикальные углы, углы, образованные пересечением двух параллельных прямых третьей, углы при основании в равнобедренном треугольнике. За этим вопросом следует другой: «Как геометрически сложить два или несколько углов?» Учитель должен подвести учащихся к мысли о построении углов, имеющих общую вершину и равных сумме данных углов.

З а д а н и е № 2. Параллелограмм и его свойства.

Содержание. П е р в а я р а б о т а. Постройте две параллельные прямые, а две другие параллельные между собой прямые проведите так, чтобы они пересекали первую пару в точках A, B, C и D. Фигура $ABCD$ — параллелограмм. Сформулируйте определение параллелограмма, запишите определение в символической форме. Запишите известные вам свойства параллелограмма как четырехугольника. Установите соотношение между углами параллелограмма, прилегающими к каждой из его сторон. Сформулируйте это соотношение в форме теоремы. Проведите диагонали параллелограмма. Запишите, какие элементы достаточно знать, чтобы построить параллелограмм, равный данному.

В т о р а я р а б о т а. Постройте параллелограмм, равный предыдущему по двум сторонам и диагонали.

Сформулируйте теорему о равенстве треугольников, образовавшихся при построении. Докажите ее. На основе этой теоремы найдите свойства противоположных углов и сторон параллелограмма. Сформулируйте их. Измерьте стороны и углы. Сопоставьте результаты измерения с теоретическими выводами, проверьте точность построений измерением. Составьте таблицу сравнения результатов. Напишите формулу периметра параллелограмма, вычислите периметр. Составьте план проверки правильности построения параллелограмма.

Третья работа. Постройте параллелограмм, равный первому, по двум сторонам и углу между ними. Проведите диагонали. Всмотритесь в чертеж, отметьте равные отрезки, выразите устно свойство диагоналей. Сформулируйте это свойство в виде теоремы и докажите его. Запишите теорему в символах. Произведите измерения соответствующих отрезков, сопоставьте результаты измерения с теоретическими выводами. Дома составьте таблицу сравнения результатов. Составьте устно план построения параллелограмма по двум диагоналям.

Четвертая работа. Постройте параллелограмм, равный предыдущему, по основанию a, диагонали d и углу между ними.

Определите периметр получившегося параллелограмма. Измерьте в параллелограмме высоты, другую диагональ и отрезки диагоналей, образовавшиеся при их пересечении.

Методические замечания. По времени задание рассчитано на один урок и на 30 минут домашней работы. Вначале полностью выполняется первая работа, затем — вторая и т. д. Текст задания для каждой части учитель пишет на доске, используя математические символы, непосредственно перед выполнением задания.

Первую работу один из учеников выполняет на доске одновременно с выполнением ее всеми учащимися на своих форматках. Полученный четырехугольник учитель называет параллелограммом и предлагает ученикам самостоятельно дать его определение. После корректировки определение записывается в символической форме: $ABCD$ — параллелограмм, если $AB \parallel DC$ и $AD \parallel BC$. Полезно задать ученикам вопрос: «Что надо знать, чтобы построить параллелограмм, равный данному?» Так выясняется возможность построения вполне определенного параллелограмма. Здесь же полезно спросить о тех свойствах параллелограмма, которые ученикам известны. Многие ученики скажут, что сумма внутренних углов параллелограмма равна $4d$, другие назовут свойства, еще не доказанные. Последние учитель использует для постановки новых задач. На этом же чертеже доказывается теорема об углах параллелограмма, прилегающих к одной стороне. Она естественно вытекает из построения, и поэтому откладывать ее доказательство не следует.

Вторую работу ученики в состоянии выполнить самостоятельно. После того как один из учеников первым сделает работу у себя на формате, его можно вызвать к доске для контрольного выполнения этой части задания. При этом все операции ученик объясняет. Полезно не давать размеров сторон и диагоналей. Пусть у учащихся получатся параллелограммы различных видов, тогда может возникнуть полезный разговор о их форме.

Пока ученики выполняют вторую работу, учитель пишет задание для третьей работы. Она тоже может быть выполнена учащимися самостоятельно. Четвертая работа выполняется дома.

Задание № 3. Признаки параллелограммов.

Содержание. Первая работа. Постройте четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно равны. Докажите, что этот четырехугольник является параллелограммом. Сформулируйте на основе этого признак, по которому можно отличить параллелограмм от других видов четырехугольников. Проверьте правильность построения на основе определения параллелограмма.

Вторая работа. Постройте четырехугольник, у которого две противоположные стороны параллельны и одновременно равны. Докажите, что построенный четырехугольник — параллелограмм. Сформулируйте на основе этого признак параллелограмма. Проверьте правильность построения, используя первый признак.

Третья работа. Постройте две прямые, пересекающиеся под произвольным углом в точке O. Отложите на одной из них отрезки $AO = OC = a$, на другой отрезки $DO = OB = b$. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм. Сформулируйте этот признак параллелограмма. Проверьте правильность построения с помощью второго признака. Размеры каких элементов, кроме диагоналей, надо знать, чтобы построить точно такой же параллелограмм? Измерьте выбранный вами элемент и постройте по двум диагоналям и выбранному вами элементу параллелограмм, равный данному.

Четвертая работа. Постройте четырехугольник $ABCD$, у которого $\angle A + \angle B = 2d$; $\angle B + \angle C = 2d$. Запишите ход построения. Докажите, что построенный четырехугольник является параллелограммом. Проверьте точность построений с помощью третьего признака параллелограммов.

Методические замечания. Для закрепления признаков параллелограмма полезно провести небольшую практическую работу, в которой учащиеся по чертежам или моделям различных четырехугольников определяют их вид. Среди фигур имеются параллелограммы, трапеции, четырехугольники, имеющие по две равные стороны; произвольные четырехугольники.

Задание № 4. Центральная симметрия (центральная симметрия точки, отрезка, треугольника, параллелограмма. Повторение осевой симметрии).

Содержание. Первая работа. Проведите сверху вниз ось симметрии MN и справа от нее постройте точку, рядом — отрезок, затем — треугольник. Постройте фигуры, симметричные данным. Назовите свойства фигур, симметричных относительно оси. Докажите эти свойства.

Вторая работа. Постройте точку O. Проведите прямую через эту точку и отложите на этой прямой на равном расстоянии от точки O точки A и A_1. Точки A и A_1 называются симметричными относительно центра O. Сформулируйте определение точек, симметричных относительно центра, и их свойства. Постройте в другом направлении на некотором расстоянии от A вторую точку B. Затем постройте точку B_1, симметричную точке B относительно центра O. Соедините точку A с точкой A_1, а точку B с точкой B_1. Получите центрально-симметричные отрезки AB и A_1B_1. Сформулируйте свойство центрально-симметричных отрезков. Постройте в третьем направлении недалеко от точки A третью точку C и затем постройте симметричную ей точку C_1. Соедините точки A, B и C, а также точки A_1, B_1 и C_1. Получите центрально-симметричные треугольники. Сформулируйте и докажите их свойство. Измерьте и сравните соответственные стороны этих треугольников. Запишите взаимное положение симметричных отрезков.

Третья работа. Возьмите две точки A и C. Найдите для них центр симметрии O. Постройте в другом направлении еще две точки B и D, симметричные относительно центра O. Соедините последовательно точки A, B, C и D. Определите вид получившегося четырехугольника. Найдите на основаниях этого четырехугольника две точки, симметричные относительно O. Найдите такие же точки на боковых сторонах. Точка O является центром симметрии параллелограмма Сделайте вывод о наличии в параллелограмме других точек, симметричных относительно O. Расскажите, как можно доказать равенство отрезков и фигур на основе центральной симметрии.

Четвертая работа. Постройте произвольный параллелограмм, найдите его центр симметрии, проведите через центр симметрии прямую так, чтобы она пересекла стороны параллелограмма. Прямая разделила параллелограмм на два четырехугольника. Сопоставьте их, выскажите предположение о их величине. Докажите ваше предположение. Сформулируйте на основе этого задачу на доказательство. Сделайте вывод о свойстве прямой, проходящей через центр симметрии параллелограмма. Измерьте и сравните соответственные стороны образовавшихся четырехугольников.

Дома просмотрите учебник, выберите из фигур, известных вам, фигуры, имеющие оси и центры симметрии. Постройте в них оси и центры симметрии В образовавшихся конструкциях отметьте равные элементы.

Работа для желающих. На основе свойств осевой и центральной симметрии докажите несколько теорем, изученных ранее. Работу оформите в виде доклада.

Методические замечания. Вначале кратко повторяется осевая симметрия. Учитель обращает внимание учеников на то, что с помощью осевой симметрии производится преобразование фигур и что это не единственный способ преобразования.

После этого рассматриваются модели центрально-симметричных точек, отрезков и треугольников. Эти модели можно изготовить заранее На отдельных листах бумаги изображены две точки, два отрезка и два треугольника, симметричных относительно центра. Пленка с изображением одной половины чертежа крепится в центре симметрии так, что при повороте пленки на 180° чертеж совпадает то с левой, то с правой частью фигуры, изображенной на бумаге. С помощью этой модели устанавливаются определения и демонстрируются свойства центрально-симметричных фигур. После просмотра моделей учащиеся переходят к построениям и логическим доказательствам.

Построение на одном чертеже центрально-симметричных точек, отрезков и треугольников дает возможность без лишней затраты времени уяснить сущность центральной симметрии. Симметрия точки, отрезка и треугольника в этом случае органически сочетаются. Ученикам конкретно видна роль симметричных точек и отрезков. Подвижная модель помогает ученикам ощутить это.

Задание № 5. Частные виды параллелограммов: прямоугольник, ромб, квадрат.

Содержание. П е р в а я р а б о т а. Постройте параллелограмм по двум сторонам a и b и углу между ними 90°. Полученная фигура называется прямоугольником. Сформулируйте определение прямоугольника. Запишите свойства прямоугольника, которые вытекают из его принадлежности к параллелограммам, а также из определения. Для выяснения свойств сделайте необходимые дополнительные построения. Проанализируйте получившуюся конструкцию чертежа, сравните элементы фигуры и подметьте свойства прямоугольника, не принадлежащие всякому параллелограмму. Докажите эти свойства. Измерьте диагонали и сравните их Постройте оси и укажите центр симметрии прямоугольника. Запишите формулу периметра. Выразите каждую сторону из этой формулы.

В т о р а я р а б о т а. Постройте прямоугольник, равный данному, взяв вместо b какой-либо другой элемент. Данные укажите над чертежом. Пометьте цифрами порядок построения.

Т р е т ь я р а б о т а. Постройте параллелограмм, у которого все стороны равны a. Полученная фигура называется ромбом. Сформулируйте определение ромба. Запишите в символической форме все его свойства, которые вытекают из принадлежности ромба к параллелограмму, а также из определения. Для этого выполните необходимые дополнительные построения. Постройте оси и центр симметрии ромба Проанализируйте конструкцию получившегося чертежа, сравнив ее элементы: углы, отрезки и их взаимное расположение. Подметьте свойства, присущие только ромбу. Докажите эти свойства. Измерьте углы, образовавшиеся при пересечении диагоналей, сравните их, запишите формулу периметра.

Четвертая работа. Постройте ромб, равный данному. Данные выберите сами. Проведите в нем две высоты, выходящие из одной вершины, сравните их. Докажите, что они равны.

Пятая работа. Постройте прямоугольник, все стороны которого равны между собой и равны a. Такая фигура называется квадратом. Сформулируйте определения квадрата как параллелограмма, как прямоугольника и как ромба. Запишите свойства квадрата. Начертите оси и укажите центр симметрии. Сопоставьте свои чертежи с чертежами учебника. Запишите формулу периметра.

Шестая работа. Постройте ромб по двум диагоналям:

$d_1 = 8\,см$, $d_2 = 6\,см$. Определите измерением его стороны и высоты, проведенные из одной вершины. Вычислите периметр.

Методические замечания. На универсальном приборе демонстрируются преобразования параллелограмма в прямоугольник, ромб и квадрат. В процессе демонстрации вводятся понятия прямоугольника, ромба и квадрата. Эта работа не вызывает затруднений у учащихся, так как они уже знакомы с этими фигурами из курса арифметики, геометрии и из практики. После этого учитель записывает текст задания и предлагает ученикам выполнить работы самостоятельно.

Вторую и четвертую работы учащиеся выполняют дома. Работы такого рода очень хороши для обобщений. Каждый учащийся выберет для построения различные данные, а в общей массе могут получиться всевозможные случаи построения фигур данного вида. Это позволит в заключительной беседе разобрать все эти случаи.

Задание № 6. Свойство отрезков, отсекаемых параллельными прямыми на сторонах угла.

Содержание. Первая работа. Постройте произвольный угол ABC. Отложите на верхней стороне BC три равных отрезка $BM = MK = KE$. Через точки M, K и E

проведите параллельные прямые, пересекающие вторую сторону угла в точках D, P, O. Через точки M и K проведите прямые, параллельные AB. Точки пересечения этих прямых с KP и EO обозначьте соответственно N и T.

Проанализируйте конструкцию чертежа, сопоставьте элементы ее между собой, найдите равные среди них отрезки и сделайте вывод о величине отрезков BD, DP и PO. Сформулируйте теорему о делении сторон угла параллельными прямыми. Запишите доказательство. Измерьте и сравните отрезки BD, DP и PO. Измерьте отрезки BM, MK, KE. Сравните отрезки, получившиеся на верхней стороне, с отрезками нижней стороны угла. В каком случае отрезки верхней стороны будут равны отрезкам нижней стороны?

Вторая работа. Начертите две произвольные прямые MN и PQ, которые при своем продолжении могут пересечься. На одной из этих прямых отложите два равных между собой отрезка $AB = BC$ и через точки деления проведите параллельные между собой прямые, которые пересекут вторую сторону в точках D, M и K. На основе предыдущей работы сформулируйте и докажите теорему об отрезках, которые получились на второй прямой. Измерьте отрезки, проверьте точность построений сравнением отрезков.

Третья работа. Постройте отрезок произвольной длины. Используя выводы первой работы, разделите его на 5 равных частей, не прибегая к непосредственному измерению. Составьте план деления отрезка на несколько равных частей. Измерьте и сравните получившиеся части отрезка.

Четвертая работа. Постройте $\triangle ABC$ со сторонами $AC = 9{,}8$ *см*, $BC = 5{,}6$ *см*, $AB = 7{,}6$ *см*. Проведите медианы AE и BD. Точку их пересечения обозначьте через O. Разделите сторону BC на четыре части и через точки деления проведите прямые, параллельные медиане AE. Рассмотрите образовавшийся чертеж, найдите равные отрезки. Сравните между собой отрезки медианы BD. Запишите соотношение между OD и BD. Сформулируйте вывод в виде теоремы. Сделайте дополнительные построения, которые давали бы возможность разделить аналогично медиану AE. Запишите соотношение между отрезками медианы AE. Соответствуют ли они выводам, сделанным вами для медианы BD. Постройте третью медиану. Докажите, что она пройдет через точку O и для нее выполняются те же соотношения, что и для первых двух медиан. Сформулируйте ваши выводы в виде теоремы. Измерьте медианы и их части. Проверьте точность построений. Отношения меньшего отрезка медианы ко всей медиане во всех случаях выразите в десятичных дробях с точностью до 0,01.

Методические указания. В предварительной беседе учитель демонстрирует на универсальном приборе модель угла, у которого на верхней стороне через равные промежутки подвешены отвесы так, что их шнуры пересекают нижнюю сторону угла. Изменяя положение верхней стороны, можно получить множество случаев деления нижней стороны на равные части. В беседе выясняется взаимное положение подвесов, высказывается предположение о величине отрезка, который отсекается подвесами на нижней стороне, намечается план заполнения форматки. Для получения формулировки теоремы учитель предлагает ученикам кратко описать ход создания конструкции модели. Такой прием получения формулировки теоремы понятен и доступен каждому ученику. Не беда, что формулировка будет немного громоздкой.

Затем учитель раздает или записывает текст задания и класс приступает к работе. Первая работа выполняется фронтально. После построения угла и проведения через точки параллельных между собой прямых целесообразно записать, что дано, что достоверно известно и что следует доказать. Можно не давать указаний о проведении через точки M и K прямых, параллельных BC, а поставить перед учениками вопрос о том, как можно доказать равенство отрезков, образовавшихся на нижней стороне угла. В поисках и придет мысль о построении параллелограммов.

Во второй работе строится такой же угол, затем от него убирается часть, начиная от вершины B и до прямой MD. На оставшейся части повторяется доказательство теоремы с новой формулировкой. Эта часть работы может быть выполнена учащимися дома.

Работу третью целесообразно выполнить в классе после выполнения работы первой. После построения данного отрезка учитель предлагает всмотреться в конструкцию чертежа № 1 и наметить план деления отрезка на 5 равных частей. Для выполнения работы на доске можно вызвать ученика.

Четвертая работа выполняется в классе. Для ее выполнения учитель записывает на доске то, что требуется от учащихся выполнить на форматке. Вот одна из возможных форм записи условия задания. Чертится эскиз треугольника. Далее идет запись:

$\triangle ABC$; $AC = 9{,}8$ *см*; $BC = 5{,}6$ *см*; $AB = 7{,}6$ *см*; $AD = DC$; $BE = EC$. O — точка пересечения медиан; $BM1 = ME = EK = KC$; $MN \parallel AE$; $KD \parallel AE$; OD? BD; OD? OB.

Вывод.

Задание № 7. Средняя линия треугольника.

Содержание. Первая работа. Постройте параллелограмм по нижнему основанию AD, боковой стороне AB и углу между ними A. Постройте $\triangle ADK$, который имеет с параллелограммом общее основание AD и угол A. Сторона DK треугольника проходит через середину M верхнего основания BC параллелограмма. Проанализируйте полученный чертеж, сопоставьте его элементы, найдите среди них равные. Запишите равенства этих элементов. Запишите с помощью символов взаимное расположение элементов чертежа.

Вторая работа. Постройте произвольный треугольник ABC. Найдите середины боковых сторон AB и BC. Обозначьте их соответственно через M и K и соедините прямой. Отрезок MK называется средней линией треугольника. Дайте определение средней линии треугольника. Сопоставив последний чертеж с первым, сделайте дополнительные построения и найдите соотношение между средней линией и основанием треугольника. Выскажите ваше предположение о взаимном расположении средней линии MK и стороны AC. Сформулируйте оба заключения в виде теоремы. Докажите теорему и запишите доказательство. Измерьте среднюю линию и соответствующую сторону. Сравните, проверьте точность построения. Проверьте параллельность, укажите основание для проверки.

Третья работа. Постройте треугольник по двум сторонам и средней линии, соединяющей середины этих сторон. Постройте все средние линии, не прибегая к делению третьей стороны пополам. Вычислите периметр треугольника, образованного средними линиями. Найдите на чертеже равные между собой отрезки. Запишите взаимное положение отрезков. Докажите с помощью образовавшегося чертежа, что каждая средняя линия равна половине соответствующей стороны. Параллельность средней линии и основания считается доказанной. Докажите с помощью образо-

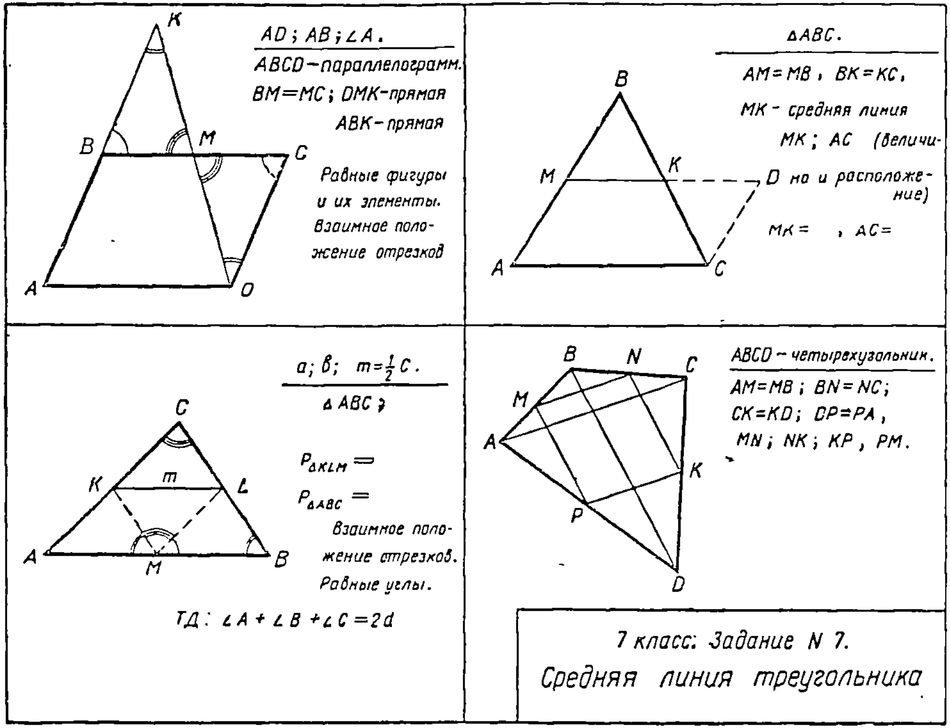

AD; AB; ∠A.
ABCD—параллелограмм.
BM=MC; DMK-прямая
ABK-прямая
Равные фигуры
и их элементы.
Взаимное поло-
жение отрезков
K
B
M
C
A
D
ΔABC.
AM=MB, BK=KC,
MK - средняя линия
MK; AC (величи-
на и расположе-
ние)
MK= , AC=
B
M
K
D
A
C
a; в; m=½c.
ΔABC ?
$P_{\Delta KLM}$ =
$P_{\Delta ABC}$ =
Взаимное поло-
жение отрезков.
Равные углы.
ТД: ∠A + ∠B + ∠C = 2d
C
K
m
L
A
M
B
ABCD – четырехугольник.
AM=MB; BN=NC;
CK=KD; DP=PA,
MN; NK; KP, PM.
B
N
C
M
A
K
P
D
7 класс: Задание N 7.
Средняя линия треугольника

Рис. 7.

вавшегося чертежа теорему о сумме внутренних углов треугольника.

Четвертая работа. Постройте произвольный четырехугольник $ABCD$. Соедините последовательно середины его сторон? Докажите, что образовавшийся четырехугольник есть параллелограмм. Вычислите периметр, измерив для этого только его диагонали. Сформулируйте на основе решения этой задачи задачу на доказательство о сравнительной длине периметра вновь полученного четырехугольника и диагоналей данного четырехугольника.

Эту работу можно сформулировать иначе: «Постройте произвольный четырехугольник. Найдите середину одной из его сторон. На основе свойств средней линии треугольника путем дополнительных построений найдите середины других сторон четырехугольника. Определите вид четырехугольника, вершинами которого являются середины сторон данного четырехугольника». Дальше, как в тексте.

Работа для желающих. Исследуйте форму фигур, которые получаются, если соединить середины сторон любого известного вам четырехугольника. Результаты работы оформите в виде доклада, с чертежами.

Задание № 8. Трапеция.

Содержание. Первая работа. Разделите форматку на четыре части так, чтобы первая часть была больше второй. В первой части постройте четырехугольник $ABCD$, у которого стороны AD и BC параллельны, а две другие AB и CD не параллельны.

Фигура $ABCD$ — трапеция. Сформулируйте определение трапеции. Запишите свойства трапеции, которые вытекают из определения. Найдите середины боковых сторон трапеции. Обозначьте их буквами M и K, проведите через них прямую. MK есть средняя линия трапеции. Сформулируйте ее определение Всмотритесь в чертеж, подметьте особенности расположения средней линии. Докажите подмеченное вами свойство средней линии, использовав свойство средней линии треугольника. Для доказательства постройте на этом чертеже такой треугольник, у которого средней линией был бы отрезок MK. Сравните величину средней линии с суммой оснований. Сформулируйте теорему, которая включала бы величину средней линии и ее расположение относительно оснований. Докажите теорему в целом. Измерьте среднюю линию и сравните ее с суммой оснований. Найдите погрешность. Запишите, какие элементы надо знать для построения трапеции, равной данной.

В т о р а я р а б о т а. Постройте трапецию с равными боковыми сторонами (равнобедренную), с нижним основанием $a = 60$ *мм*, боковой стороной $b = 34$ *мм* и углом между ними в 60°. Сформулируйте определение равнобедренной трапеции. Докажите равенство ее диагоналей. Определите все углы трапеции. Сделайте вывод о свойстве углов равнобедренной трапеции, сформулируйте этот вывод в виде теоремы. Докажите ее. Вычислите верхнее основание. Измерьте высоту.

Т р е т ь я р а б о т а. Постройте трапецию $ABCD$ ($AD \parallel BC$) с прямым углом A. (Для определенности возьмите $\angle D = 60°$.) Такая трапеция называется прямоугольной. Сформулируйте ее определение. Запишите свойства этой трапеции. Составьте задачу на вычисление по этому чертежу.

Ч е т в е р т а я р а б о т а. Постройте трапецию по двум основаниям $a = 6{,}8$ *см*, $b = 4{,}9$ *см*, боковой стороне $c = 3{,}8$ *см* и углу (ac) в 50°. Обозначьте порядок построения. Постройте в полученной трапеции среднюю линию, измерьте и сравните ее длину с суммой длин оснований. Измерьте расстояние между основаниями.

Методические замечания. В вводной беседе учитель предлагает ученикам сконструировать новые типы четырехугольников, отличных от тех, которые уже рассмотрены. Беседа сопровождается демонстрациями соответствующих моделей. На универсальном приборе целесообразно показать все типы трапеций и поставить перед учениками задачу об исследовании свойств новой фигуры.

Первую работу целесообразно выполнить фронтально. После того как будет предложено учащимся всмотреться в чертеж и подметить особенности средней линии трапеции, многие ученики скажут, что средняя линия параллельна основанию. Можно пока этим и ограничиться и предложить учащимся доказать это свойство. Для этого ставится вопрос, как можно доказать параллельность двух прямых. Перебираются возможные случаи, пока не будет указана предыдущая теорема о параллельности средней линии треугольника и основания. Возникает задача получить такие треугольники, у которого MK была бы средней линией. После ряда проб ученики находят нужный треугольник и с его помощью доказывают параллельность средней линии основаниям трапеции, равенство ее полусумме оснований. Затем формулируется вся теорема и записывается ее доказательство.

Третья и четвертая работы выполняются учащимися дома.

§ 2. Площадь многоугольника.

Поверхность и объем прямой призмы

Задание № 9. Измерение площадей фигур палеткой.

Задание имеет целью повторить и закрепить имеющиеся представления у учащихся об измерении площадей, уяснить сущность измерения площадей и подготовить их к изучению площади прямоугольника.

Содержание. Первая работа. Постройте прямоугольник со сторонами 4 *см* и 5 *см*. Наложите на него палетку и подсчитайте число квадратных сантиметров, содержащихся в нем.

Вторая работа. Постройте прямоугольник со сторонами 5,5 *см* и 4 *см*. Наложите на него палетку и подсчитайте число квадратных сантиметров, содержащихся в этом прямоугольнике. Как можно быстро подсчитать число квадратных сантиметров, полностью укладывающихся в прямоугольнике? Как можно подсчитать площадь, занимаемую неполными квадратами? Заполните отчетную таблицу.

ОТЧЕТНАЯ ТАБЛИЦА

Число неполных квадратов $n =$
Площадь неполных квадратов $S_2 =$
Площадь полных квадратов $S_1 =$
Площадь прямоугольника $S =$

Третья работа. Постройте прямоугольник со сторонами 5,5 *см* и 3,5 *см*. Наложите на него палетку и подсчитайте число квадратных сантиметров, укладывающихся в нем. Как можно быстро подсчитать площадь неполных квадратных сантиметров? Заполните отчетную таблицу, аналогичную предыдущей.

Четвертая работа. Постройте произвольный пятиугольник. Наложите на него палетку и подсчитайте число квадратных сантиметров, содержащихся в нем.

6 Зак 2021

Составьте отчетную таблицу, аналогичную тем, которые имеются в предыдущих работах.

П я т а я р а б о т а. Начертите разрез реки в масштабе 1 : 100 (чертеж выполняется в классе). Поверхность реки изобразите параллельно нижнему краю форматки, дно — произвольно. Наложите на чертеж палетку, определите площадь фигуры, получившейся на чертеже. Вычислите с учетом масштаба площадь сечения реки в натуральную величину в квадратных метрах. Заполните таблицы.

ОТЧЕТНАЯ ТАБЛИЦА

Площадь фигуры на чертеже. Число неполных квадратов $n =$

Площадь неполных квадратов $S_1 =$
Площадь полных квадратов $S_2 =$
Вся площадь фигуры $S =$

Площадь сечения реки в натуральную величину:
1 *кв. см* на чертеже соответствует ... *кв м* в действительности
... *кв. см* на чертеже соответствует ... *кв м* в действительности.
Ответ ... *кв. м*.

Ш е с т а я р а б о т а. Скопируйте дома листок какого-либо растения и вычислите его площадь. Отчетную таблицу составьте сами.

Методические замечания. Задание выполняется после краткой беседы учителя об измерении площадей. Каждый учащийся должен иметь палетку. Ее можно приготовить на кальке. Для показа целесообразно иметь демонстрационную палетку. Она состоит из прямоугольной рамки с натянутой сеткой. Каждый квадратик этой палетки представляет собой квадратный дециметр. Помимо объяснения, как пользоваться палеткой, эта модель используется при опросе и повторении. С ее помощью можно определить площади фигур, начерченных на доске.

Для вычисления площадей фигур непосредственным подсчетом очень удобна доска, разграфленная в клетку. На ней можно быстро начертить фигуру с криволинейным контуром и подсчитать уложившиеся квадраты. Аналогично используется тетрадь или бумага с разлиновкой в клеточку.

После выполнения второй работы полезно спросить учащихся, как можно быстро подсчитать площадь прямоугольника. Желательно навести их на мысль, что к числу полных квадратиков надо прибавить половину неполных, результат дает приближенную площадь прямоугольника. Аналогичную работу полезно проделать и после выполнения третьей части задания.

Все работы выполняют учащиеся самостоятельно.

Задание № 10. Площадь прямоугольника.

Содержание. Первая работа. Постройте прямоугольник со сторонами 4 *см* и 6 *см*. Разграфите его на квадратные сантиметры и подсчитайте число их. Обозначьте основание через a, а высоту через h. Запишите формулу для вычисления площади прямоугольника при целых значениях a и h:

$$S = ? \qquad (1)$$

Вторая работа. Постройте прямоугольник по сторонам $a = 6{,}5$ *см* и $b = 3{,}5$ *см*. Разграфите его на квадратные сантиметры, подсчитайте число их. Вычислите площадь по формуле (1), полученной в первой работе. Сравните результаты непосредственного подсчета и вычисления по формуле. Сделайте вывод о применении формулы (1) в этом случае.

Третья работа. Постройте прямоугольник по сторонам $a = 5{,}4$ *см* и $h = 3{,}2$ *см*. Подсчитайте площадь, постепенно заполняя отчетную таблицу.

ОТЧЕТНАЯ ТАБЛИЦА

Основание $a = 5{,}4$ *см* = ... *мм*
Высота $h = 3{,}2$ *см* = ... *мм*
Площадь, выраженная в квадратных миллиметрах,

$$S = \ldots\ мм \times \ldots\ мм = \ldots\ кв.\ мм.$$

Площадь, выраженная в квадратных сантиметрах,

$$S = \frac{\ldots\ кв\ мм}{100} = \frac{\ldots\ мм}{10} \times \frac{\ldots\ мм}{10} =$$

$$= (\ldots\ см) \times (\ldots\ см) = \ldots\ кв\ см.$$

Вычислите площадь прямоугольника по формуле (1)

Сопоставьте результаты и сделайте вывод о применении формулы (1) для случая, когда стороны прямоугольника выражены дробными числами.

Четвертая работа. Постройте прямоугольник по диагонали $d = 6{,}4$ *см* и углу, образованному диагональю со стороной, равному 30°. Вычислите площадь этого прямоугольника.

Постройте прямоугольник, площадь которого равна 720 *кв. мм*. Составьте таблицу нескольких возможных размеров его сторон.

Методические замечания. Задание дается на дом для закрепления материала, изученного в классе, хотя можно отдельные работы дать для самостоятельного выполнения в классе. В заключительной беседе по этому заданию следует обратить внимание на логичность рассуждений при выводе формулы для площади прямоугольника с любыми измерениями.

Задание № 11. Теорема Пифагора.

Содержание. Первая работа. Форматку разделите пополам вертикальной линией, вторую половину — еще пополам горизонтальной линией. В первой части постройте прямоугольный треугольник по двум его катетам $a = 4$ *см*, $b = 3$ *см*. Постройте на сторонах треугольника три квадрата. Разграфите каждый квадрат на квадратные сантиметры и подсчитайте в каждом из них число квадратных сантиметров. Попробуйте установить зависимость между этими числами. Сформулируйте эту зависимость и запишите ее в виде формулы (гипотенузу обозначьте через c).

Вторая работа. На двух других частях форматки постройте квадраты со стороной, равной сумме катетов $(a + b)$ построенного треугольника. Выполните в этих квадратах построения, показанные в учебнике геометрии Н. Н. Никитина на чертежах 268, 269. Докажите, что все треугольники, образовавшиеся на чертеже, равны между собой. Докажите, что внутренний четырехугольник, образовавшийся на третьем чертеже, есть квадрат. Сделайте вывод о равенстве площади квадрата со стороной c сумме площадей квадратов со сторонами a и b. Вырежьте квадраты, изображенные на чертежах 2 и 3, разрежьте их на части и проделайте опыт, соответствующий теореме Пифагора.

Методические замечания. В предварительной беседе учитель сообщает учащимся о необходимости более глубокого изучения основной фигуры геометрии — треугольника, об установлении соотношений между его элементами. Указывает на важность изучения соотношений между элементами прямоугольного треугольника. На модели прямоугольного треугольника с подвижной гипотенузой демонстрирует зависимость между гипотенузой и катетами. Здесь же возникает вопрос, как установить эту зависимость. Естественно, что для изучения этой зависимости нужно построить треугольник. Так появляется необходимость в построении первого чертежа. Затем демонстрируется модель, соответствующая конструкции чертежей 267, 268, 269 учебника геометрии. Желательно заранее заготовить 20 комплектов таких моделей, сделанных из картона или фанеры. Эти модели раздает дежурный ученик, по комплекту на парту. После разбора упражнения с моделями целесообразно приступить к выполнению чертежей, а затем провести рассуждения и сделать выводы. Полезно провести рассуждения, пользуясь демонстрационным чертежом. Повторное доказательство ученики могут выполнить дома, используя учебник.

Задание № 12. Площадь параллелограмма.

Содержание. Первая работа. Постройте параллелограмм по двум сторонам $a = 5{,}6$ *см*, $b = 3{,}4$ *см* и углу между ними, равному 42°. Разбейте его на части, из которых можно было бы составить равновеликий ему прямоугольник. Начертите этот прямоугольник, перенесенную часть параллелограмма покажите пунктиром. Докажите, что площадь параллелограмма равна площади полученного прямоугольника. Запишите формулу площади параллелограмма. Высоту обозначьте через h. Вычислите площадь параллелограмма. Постройте и измерьте вторую высоту параллелограмма, выходящую из вершины B. Вычислите площадь по этой высоте и соответствующему основанию.

Вторая работа. По основанию $a = 2$ *см*, боковой стороне $b = 7{,}5$ *см* и высоте $h = 7$ *см* постройте параллелограмм. Пристройте к параллелограмму прямоугольный треугольник так, чтобы он вместе с параллелограммом образовал прямоугольную трапецию (боковая сторона параллелограмма будет служить гипотенузой треугольника). Рядом в этой же части форматки постройте прямоугольник по основанию $a = 2$ *см* и высоте $h = 7$ *см*. Дополните прямоугольник до прямоугольной трапеции, равной той, что получилась в левой части.

Рассмотрите полученные чертежи, сопоставьте площади образовавшихся параллелограмма и прямоугольника. Выведите с помощью этих чертежей формулу площади параллелограмма. Устно составьте рассказ о проделанной вами работе, включив в него и выводы. Укажите сходства и различия в выводе формулы площади параллелограмма в первой и второй работах.

Третья работа. Постройте параллелограмм по его диагоналям, равным 4 *см* и 6 *см*, и углу между ними, равному 150°. Вычислите его площадь. Недостающие данные получите непосредственно измерением.

Четвертая работа. Рассчитайте и постройте параллелограмм, площадь которого равна 28 *кв. см*. Опишите ход работы. Составьте таблицу нескольких возможных значений a и h. Постройте в параллелограмме вторую высоту и докажите, что большей высоте соответствует меньшее основание.

Изготовьте из плотного картона или другого материала такой параллелограмм. Проверьте, правильно ли вы выполнили работу, укажите способ проверки.

Методические замечания. В предварительной беседе учитель знакомит учащихся с приемами вывода формул площадей фигур. Данная фигура преобразуется в такую равновеликую ей, площадь которой мы умеем вычислять. Преобразование производится путем разбиения данной фигуры на части, из которых и составляется новая фигура. Второй прием заключается в том, что данную фигуру и фигуру, площадь которой уже вычислялась, дополняют до равных между собой фигур. На основании сравнения площадей выводится формула площади данной фигуры. Беседа сопровождается демонстрацией соответствующих моделей. Вслед за этим вывешивается демонстрационная таблица, на которой имеются чертежи, аналогичные тем, что должны быть на форматках. По этим чертежам проводится беседа о вычислении площади параллелограмма. Затем учащиеся приступают к самостоятельному выполнению графических работ.

После необходимой подготовки задание выполняется учениками с интересом и пониманием. Такие работы углубляют и закрепляют знания учащихся, служат своеобразным повторением изученного.

Задание № 13. Площадь треугольника.

Содержание. Первая работа. Постройте параллелограмм по двум его сторонам $a = 4{,}6$ *см*, $b = 2{,}8$ *см* и диагонали $d = 5{,}5$ *см*. Сравните площадь параллелограмма и каждого из образовавшихся в процессе построения треугольников. Обозначьте высоту параллелограмма h, запишите формулу площади параллелограмма и на основе ее выведите формулу для вычисления площади треугольника. Вычислите площадь треугольника.

Вторая работа. Постройте треугольник по двум боковым сторонам $b = 4$ *см*, $c = 5$ *см* и средней линии $m = 3$ *см*, соединяющей эти стороны. Проведите в нем высоту. С помощью дополнительных построений преобразуйте полученный треугольник в равновеликий ему прямоугольник с таким же основанием, как у треугольника, но вдвое меньшей высотой, чем у треугольника. Выведите на основе этого преобразования формулу площади треугольника. Устно составьте рассказ о проделанной работе. Вычислите площадь треугольника.

Третья работа. Постройте прямоугольный треугольник по катетам $a = 3{,}4$ *см* и $b = 4{,}5$ *см*. Дополните треугольник до прямоугольника и на основе полученного чертежа выведите формулу для вычисления площади треугольника. Сопоставьте эту формулу с предыдущими формулами. Вычислите площадь треугольника.

Постройте ромб по диагоналям $d_1 = 40$ *мм* и $d_2 = 60$ *мм*. Вычислите площадь этого ромба, используя только диагонали. Выведите формулу площади ромба, в которую входили бы только диагонали. Измерьте высоты и стороны. Вычислите площадь ромба по ним. Сравните результаты.

Четвертая работа. Рассчитайте и постройте треугольник, площадь которого равна 18 *кв. см*. Опишите ход работы. Составьте таблицу нескольких возможных значений a и h. Изготовьте из плотного картона или другого материала такой треугольник и сдайте его в кабинет математики. Докажите, что если в треугольнике $a > b$, то $h_a < h_b$ и $\frac{a}{b} = \frac{h_b}{h_a}$.

Методические замечания. После повторения основных положений о порядке вывода формул для вычисления площадей учитель на моделях показывает несколько случаев преобразования треугольника в равновеликий ему прямоугольник и параллелограмм. Вслед за этим вывешиваются демонстрационные чертежи, и по ним ведется беседа о возможных вариантах вывода формулы для определения площади треугольника.

Затем учитель предлагает ученикам самостоятельно проделать все работы, записать формулу площади треугольника.

Полезно провести кратковременную проверочную работу на вычисление площадей треугольников. Для этого ученикам даются заготовленные на отдельных карточках чертежи различных треугольников в разнообразных положениях. Ученикам предлагается сделать необходимые построения, измерения, записать формулу и вычислить площадь. На работу дается 10 минут.

Задание № 14. Площадь трапеции.

Содержание. Первая работа. Постройте трапецию $ABCD$ ($AD \parallel BC$) по двум ее основаниям $a = 6{,}5$ *см*, $b = 2{,}9$ *см*, диагонали $d = 5{,}4$ *см* и боковой стороне $c = 3{,}2$ *см*. Всмотритесь в полученный чертеж, сделайте необходимые дополнительные построения и выведите формулу для вычисления площади трапеции. Высоту обозначьте через h. Вычислите площадь построенной трапеции.

Вторая работа. Скопируйте из учебника чертеж трапеции, с помощью которой изучалось свойство средней линии трапеции. Всмотритесь в чертеж и выведите с его помощью формулу для вычисления площади трапеции. Укажите те элементы, которые положены вами в основу при построении трапеции, равной данной. Пометьте порядок построения. Запишите формулу площади трапеции через среднюю линию m и высоту h. Вычислите площадь.

Третья работа. Постройте равнобедренную трапецию $ABCD$ ($AD \parallel BC$) по основаниям $AD = 5$ *см*, $BC = 4{,}2$ *см* и $\angle ADB = 30°$, между нижним основанием и диагональю. Вычислите ее площадь. Недостающие данные получите путем измерения.

Четвертая работа. Рассчитайте и постройте трапецию площадью в 60 *кв. см*. Составьте таблицу нескольких возможных значений a, b и h. Опишите ход работы. Изготовьте дома по этому чертежу трапецию.

Методические замечания. В предварительной беседе учитель подчеркивает роль треугольника как главной фигуры при выводе ряда формул и при решении задач. После этого полезно продемонстрировать несколько моделей трапеций и разбиение их на треугольники, прямоугольники и треугольники, треугольник и параллелограмм. Затем показать получение с помощью двух равных трапеций параллелограмма и деление параллелограмма на две равные трапеции. Учитель обращает внимание учащихся на то, что любое из этих преобразований можно использовать для вывода формулы площади трапеции. К работе № 3 полезно дать небольшие разъяснения или наметить план решения в классе, а само построение ученики выполнят дома. Полезно сконструировать трапецию из планок, показать параллельный перенос. После разбора задача не вызовет у учащихся затруднений.

Задание № 15. Площадь многоугольника.

Содержание. Первая работа. Выполните построения к задаче № 558 из стабильного сборника задач и вычислите площадь образовавшейся фигуры. Отчетную таблицу составьте сами. Данные: $a = 58$ *мм*, $b = 40$ *мм*, $c = 40$ *мм*, $d = 45$ *мм*, $\angle(ab) = 65°$, $\angle(bc) = 125°$, $\angle(cd) = 140°$

Вторая работа Постройте четырехугольник по сторонам $a = 6{,}3$ *см*, $b = 6{,}8$ *см*, $c = 4{,}0$ *см* и углам $\angle(ab) = 52°$, $\angle(bc) = 108°$.

При построении вы должны получить, что четвертая сторона $d = 4{,}0$ *см*, а $\angle(cd) = 90°$. Измерьте эти элементы на чертеже и сопоставьте результаты с приведенными данными. Рассчитайте и измерьте четвертый угол, сопоставьте результаты. Из данного четырехугольника требуется вырезать прямоугольник площадью 16 *кв. см*. Сделайте разметку (построение) прямоугольника, определите процент полезно используемого материала. Результаты занесите в отчетную таблицу

ОТЧЕТНАЯ ТАБЛИЦА

Площадь частей четырехугольника:

Формула площади первой части $S_1 = \ldots$
Результаты измерения величин, входящих в формулу:
Площадь первой части $S_1 = \ldots$
Формула площади второй части $S_2 =$
Результаты измерения величин, входящих в формулу:
Площадь второй части $S_2 = \ldots$

Площадь всего четырехугольника $S = \ldots$
Размеры сторон прямоугольника: основание $a = \ldots$
высота $h = \ldots$
Площадь прямоугольника $S_{пр} = \ldots$
Часть площади четырехугольника использованная для прямоугольника

$\frac{S_{пр}}{S} = \ldots$ (Отношение вычислите с точностью до 0,01)

Процент полезно использованной площади. . . (с точностью до 1%).

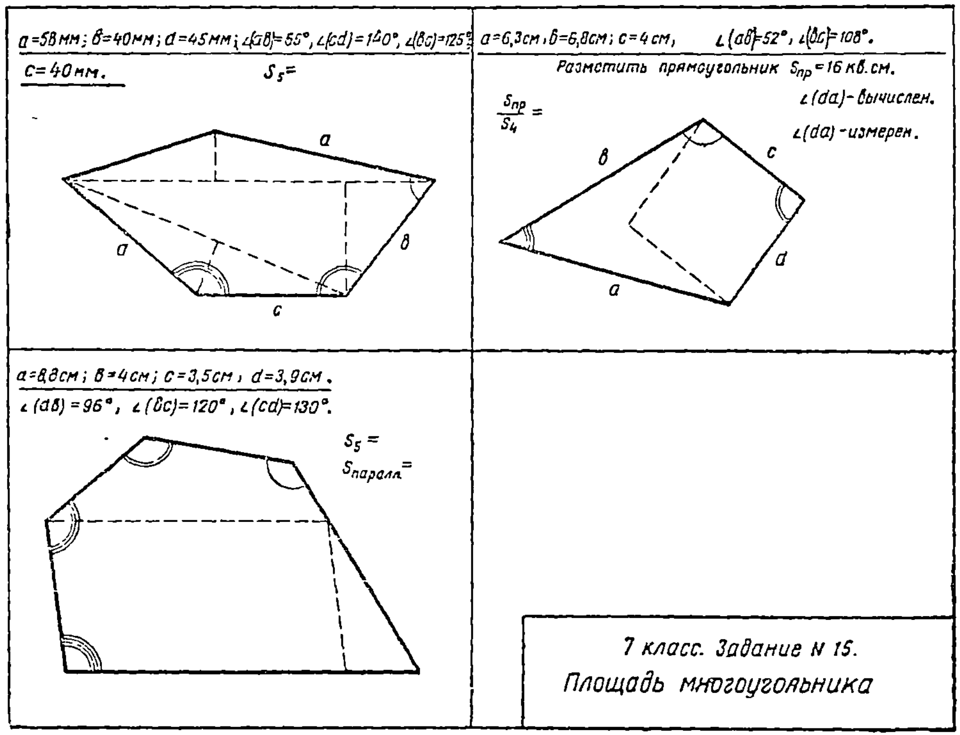

a=58 мм; в=40 мм; d=45 мм; ∠(ав)=55°, ∠(cd)=140°, ∠(вс)=125°
с=40 мм.
S₅=
a
в
a
c
a=6,3 см, в=6,8 см; с=4 см, ∠(ав)=52°, ∠(вс)=108°.
Разметить прямоугольник Sпр=16 кв.см.
Sпр/S₄ =
∠(da)-вычислен.
∠(da)-измерен.
в
c
d
a
a=8,8 см; в=4 см; с=3,5 см, d=3,9 см.
∠(ав)=96°, ∠(вс)=120°, ∠(cd)=130°.
S₅ =
Sпарал =
7 класс. Задание N 15.
Площадь многоугольника

Рис. 8.

Третья работа. Постройте пятиугольник по сторонам $a = 9{,}9$ *см*, $b = 4$ *см*, $c = 3{,}5$ *см*, $d = 3{,}9$ *см* и углам

$$\angle(ab) = 90°, \angle(bc) = 120°, \angle(cd) = 130°.$$

Измерьте остальные углы и пятую сторону, сравните результаты с контрольными значениями: $\angle(de) = 135°$,

$$\angle(ea) = 59°, e = 6{,}6 \text{ см}.$$

Из данного пятиугольника надо выкроить параллелограмм по возможности большей площади. Сделайте разметку параллелограмма. Вычислите площади пятиугольника и параллелограмма. Определите отход материала в квадратных сантиметрах и процентах Составьте и заполните отчетную таблицу.

Четвертая работа. Рассчитайте и постройте пятиугольник, площадь которого равна 40 *кв. см*. Опишите ход работы. Изготовьте сконструированный вами пятиугольник из плотной бумаги или картона

Методические замечания. В начале урока учитель проводит небольшую беседу о приемах вычисления площадей многоугольников. После этого вывешивает таблицу, на которой имеются 2—4 чертежа данного задания. Недостающую часть текста задания учитель записывает на доске, и после этого учащиеся приступают к самостоятельному выполнению работ.

Третья работа заставит детей задуматься над существованием максимальных значений, и у пытливых учащихся возникнет желание попробовать предусмотреть, рассчитать эти значения. В результате появится возможность дать учащимся задачи на максимум и минимум, которые можно решить опытным путем. В житейской практике довольно часто мастерам различных профессий приходится разрешать подобного рода задачи, не прибегая к расчетам. В школе важно дать ученикам понятие о такого рода задачах и предложить им попробовать решить их опытным путем. Это натолкнет сообразительных учеников на поиски более рациональных приемов решения задач, приемов, основанных на расчетах.

По выполненным разметкам полезно предложить учащимся вырезать соответствующие фигуры из плотного картона, кусочков плексигласа, битых патефонных пластинок или другого материала. Эти пособия пригодятся на занятиях с учащимися для проведения кратковременных проверочных работ по вычислению площадей и других работ, связанных с измерением и расчетами по моделям. При достаточном запасе этих материалов можно раздать кусочки материалов ученикам и предложить им произвести на них разметку определенных фигур, а на уроках труда вырезать их. Работа должна быть предварительно выполнена на бумаге, проверена учителем математики, а после изготовления оценена учителем математики и труда.

Таким способом учитель математики может пополнить кабинет математики достаточным количеством раздаточного дидактического материала.

Задание № 16. Площадь поверхности куба.

Содержание. Внимательно изучите форму и размеры данного тела. Установите с помощью измерений сторон и углов форму граней, соответствуют ли форма и размеры граней граням куба. Измерения производите с точностью до 0,1 *см*. Начертите на форматке развертку тела, нанесите необходимые размеры и вычислите площадь поверхности. Заполните отчетную таблицу.

ОТЧЕТНАЯ ТАБЛИЦА

Характерные особенности тела как куба . . . . .
. . . .
Длина ребра $a_1 = \ldots$
Формула площади одной грани $S_1 = \ldots$
Площадь одной грани $S_1 = \ldots$
Формула площади поверхности куба $S = \ldots$
Площадь поверхности куба $S = \ldots$

Рассчитайте и сделайте на обороте форматки развертку куба. Вычислите поверхность.

СХЕМА ДЛЯ РАСЧЕТА

Длина форматки $l_1 = \ldots$
Число ребер, которые должны уложиться по длине форматки, $n_1 = \ldots$
Возможная длина ребра $a_1 = \ldots$
Ширина форматки $l_2 = \ldots$
Число ребер которые должны уложиться в ширине форматки, $m = \ldots$
Принятая длина ребра $a =$
Формула площади поверхности $S = \ldots$
Площадь поверхности $S = \ldots$

Методические замечания. Каждому ученику дается кубик из детского набора «Строитель». Учитель имеет у себя демонстрационный куб. Перед выполнением работы проводится беседа, во время которой повторяются особенности куба и уясняется сущность вычисления площади поверхности. Затем учитель предлагает ученикам приступить к выполнению работы. Текст задания и схемы, отчетной и расчетной таблиц желательно записать на доске на перемене.

После проверки и оценки задания полезно предложить ученикам по развертке изготовить куб.

Задание № 17. Площадь поверхности прямой призмы.

Содержание. Внимательно изучите форму и размеры данного тела. Установите с помощью измерения и угольника форму и размеры граней, соответствуют ли форма и размеры граней граням прямой призмы. Измерения производите с точностью до 0,1 *см*. Начертите на форматке развертку тела, нанесите на чертеж необходимые размеры и вычислите площадь поверхности.

ОТЧЕТНАЯ ТАБЛИЦА

Характерные особенности тела как прямой призмы . . . .
. . . .

Площадь оснований: сторона основания $a = \ldots$

Высота основания $h = \ldots$

Формула площади основания $S_0 = \ldots$

Площадь одного основания $S_0 = \ldots$

Площадь двух оснований $S_2 = \ldots$

Площадь боковых граней:

Номера граней	Измерения граней		Формула площади граней	Площадь граней
	a	b		
1				
2				

Формула площади боковых граней $S_б = \ldots$

Площадь боковых граней $S_б = \ldots$

Формула площади поверхности прямой призмы $S_п = \ldots$

Площадь поверхности прямой призмы $S_п = \ldots$

Рассчитайте и сделайте на обороте форматки развертку прямой n-угольной призмы, имеющей площадь поверхности . . . *кв. см.*

Опишите ход расчетов.

Методические замечания. Задание дается после рассмотрения с учащимися прямой призмы и служит в известной мере проверочной работой по этому разделу. Каждому учащемуся дается одна из призм. Тексты задания и схемы отчета записываются на доске до урока.

Задание № 18. Объем прямоугольного параллелепипеда.

Содержание. С помощью измерения чертежного треугольника убедитесь, что данное тело есть прямоугольный параллелепипед. Выполните чертеж параллелепипеда в кабинетной проекции в масштабе 1:1. Нанесите на чертеж необходимые размеры. Выделите на нижнем основании слой, состоящий из кубических сантиметров, подсчитайте их число. Подсчитайте число кубических сантиметров, которые уложатся во всем параллелепипеде. Запишите формулу для вычисления объема параллелепипеда. Заполните отчетную таблицу.

ОТЧЕТНАЯ ТАБЛИЦА

Измерения параллелепипеда $a =$ см
$b =$ см
$c =$ см
Уложатся в одном ряду по ширине куб см
Уложатся по всему основанию . . куб см
Уложатся во всем параллелепипеде . . . куб см
Формула объема параллелепипеда $V =$ . . . куб см для целых значений a, b и c.

Рассчитайте и вычертите кабинетную проекцию прямоугольного параллелепипеда объемом в 72 *куб см*. Запишите кратко ход измерений параллелепипеда

Методические замечания. Задание выполняется учащимися самостоятельно. первая часть — в классе, а вторая — дома. Изображение куба в кабинетной проекции преследует развитие пространственных представлений и абстрактного мышления. Необходимо учитывать, что учащиеся к этому времени на уроках черчения уже познакомились с кабинетной и прямоугольной проекциями.

После проверки лучшие работы целесообразно передать в школьные мастерские для изготовления по ним деталей Наиболее удачные из этих деталей следует взять в кабинет математики.

Задание № 19. Вычислить площадь поверхности и объем тела по изображению его в прямоугольной проекции.

Содержание. Изучите форму и размеры данного вам тела. Установите соответствие его прямоугольному параллелепипеду, применив для этого чертежный треугольник и измерив необходимые ребра. Измерения произведите с точностью до 1 *мм*. Вычертите три проекции прямоугольного параллелепипеда в масштабе 1:1. Нанесите на чертеж необходимые размеры. Запишите формулы для вычисления площадей оснований, боковых граней, полной поверхности и объема. Вычислите их. Составьте и заполните отчетную таблицу.

Первый вариант проверочной работы. Рассчитайте и изобразите в прямоугольных проекциях в натуральную величину прямоугольный параллелепипед объемом в 108 *куб. см.* Вычислите площадь его поверхности. Составьте расчетную схему.

Второй вариант проверочной работы. Рассчитайте и изобразите в прямоугольных проекциях в натуральную величину прямоугольный параллелепипед, у которого площадь полной поверхности равна 168 *кв. см.* Вычислите его объем Составьте расчетную схему.

Методические замечания. Задание является контрольной работой по теме. Первая часть ее выполняется в классе, а вторая — дома. Набор тел состоит из 8—10 параллелепипедов различных размеров В классе всего три-четыре ученика работают с равными телами. На дом дается два варианта. Полезно предупредить учащихся о возможных вариантах конструкций параллелепипеда и о желательности большого количества этих конструкций, о необходимости самостоятельных расчетов.

После проверки наиболее удачные работы целесообразно передать учителю труда для изготовления соответствующих тел. Об этом учащиеся должны знать. Лучшие модели следует отобрать для пополнения кабинета математики.

Задания для занятий в кружке. 1. Постройте всевозможные виды параллелограммов, имеющих одинаковые периметры. Вычислите площадь каждого из них. Сравните эти площади и сделайте предположение, у какой из фигур одинакового периметра наибольшая площадь. Результаты работы изложите в виде небольшого доклада. Чертежи выполните на форматке.

2. Постройте всевозможные виды параллелограммов,

имеющих одинаковую площадь. Измерьте их периметры. Сравните эти периметры и сделайте предположение, у какой из фигур наименьший периметр.

3. Постройте равносторонний, равнобедренный и разносторонний треугольники, имеющие одинаковые периметры. Вычислите их площади Сравните эти площади и сделайте предположение, у какого из треугольников наибольшая площадь. Результаты работ изложите в форме небольшого математического сочинения.

4. Постройте равносторонний, равнобедренный и разносторонний треугольники, имеющие равные площади. Измерьте их периметры. Сравните эти периметры и сделайте предположение, у какого треугольника наименьший периметр.

Все эти задания носят расчетно-конструктивный характер. Учащиеся сами должны выбрать все необходимое для расчетов и для построения фигур. Естественно, что все это потребует от них достаточного напряжения, работы мысли. Ученикам нужно указать литературу для более детального изучения этих вопросов

§ 3. Окружность и круг. Цилиндр.

Задание № 20. Построение окружности по трем данным точкам.

Содержание. Первая работа. Постройте несколько окружностей, проходящих через данную точку M. Запишите длину их радиусов Сделайте вывод о расположении центров окружностей.

Вторая работа Постройте несколько окружностей, проходящих через две данные точки A и B Сделайте вывод об их числе и о расположении их центров. Определите радиус наименьшей окружности, проходящей через эти точки.

Третья работа. Постройте окружность, проходящую через три даные точки A, B и C. Как найти центр этой окружности? Можно ли еще построить окружность, проходящую через эти точки? Сформулируйте и докажите теорему о возможности построения окружности, проходящей через три данные точки. Сопоставьте свои выводы с выводами в учебнике.

Четвертая работа. Постройте произвольный треугольник. Постройте окружность, проходящую через его вершины. Что означает описать окружность около треугольника? Сформулируйте вывод о расположении центра описанной около треугольника окружности. Сформулируйте теорему о пересечении перпендикуляров, проведенных через середины сторон треугольника. Запишите соотношение между отрезками и их взаимном расположении. Измерьте радиус.

Пятая работа. Постройте окружность так, чтобы ее центра не было видно. При вычерчивании подложите под острие циркуля резинку. С помощью построений определите центр окружности, измерьте радиус и сравните его с выбранным вами радиусом. Запишите или пометьте на чертеже ход построения.

Шестая работа. Постройте дугу так, чтобы ее центра не было видно. С помощью построений определите ее центр, измерьте радиус и сравните его с выбранным вами радиусом.

Задание № 21. Зависимость между хордами и дугами.

Содержание. Форматку разделите на 6 частей. В каждой части постройте окружность радиусом примерно 2—2,5 *см*.

На чертеже 1 постройте с помощью транспортира две равные дуги AB и CD. Постройте хорды, которые стягивают эти дуги. Сравните эти хорды. Сформулируйте теорему о сравнительной величине хорд. Запишите, что вам было достоверно известно, что требовалось доказать. Докажите теорему. Измерьте хорды и дуги.

На чертеже 2 постройте две равные хорды. Сравните дуги, которые стягиваются этими хордами. Сформулируйте теорему о величине дуг. Запишите, что достоверно известно и что надо доказать. Докажите теорему. Измерьте центральные углы. С их помощью определите дуги. Сравните результаты.

На чертеже 3 постройте две неравные дуги. Постройте хорды, стягивающие эти дуги, сравните хорды. Сформулируйте и докажите теорему о величине хорд.

На четвертом чертеже пометьте дугу AB. Постройте дугу BC, равную AB. Проведите хорды AB, BC и AC. Сравните хорды AB и AC. Сформулируйте ваши выводы. Можно ли считать, что хорды изменяются пропорционально изменению соответствующих дуг? Измерьте хорды и дуги.

Пятую окружность разделите на 6 равных частей, зная, что хорда, равная радиусу, стягивает дугу в 60°. Соедините точки окружности последовательно. Получите правильный шестиугольник. Соедините точки окружности через одну. Получите равносторонний треугольник. Докажите, что треугольник будет равносторонним. Измерьте углы треугольника. Сравните величину угла треугольника с числом градусов дуги, на которую этот угол опирается. Сравните площади равностороннего треугольника и шестиугольника. Запишите соотношение между S_3 и S_6. Вычислите площади, проверьте точность ваших измерений и расчетов.

Шестую окружность разделите на 5 равных частей (приближенно, методом проб). Подумайте, на сколько приблизительно надо увеличить длину стягивающей хорды по сравнению с предыдущим чертежом, где окружность делилась на 6 равных частей. Определите образовавшиеся дуги. Соедините точки через одну. Получите пятиконечную звезду. Измерьте угол звезды. Сопоставьте число его градусов с числом градусов дуги, на которую он опирается.

Методические замечания. Две первые работы могут быть выполнены учащимися самостоятельно. Третью и четвертую работы целесообразно рассмотреть фронтально. Все задание может быть выполнено в течение одного урока.

Задание № 22. Диаметр, хорды и дуги.

Содержание. Первая работа. Постройте окружность радиусом 2,5—3 *см*. Затем постройте хорду AB и с помощью чертежного треугольника — диаметр CD, перпендикулярный этой хорде. Обозначьте через M пересечение хорды и диаметра. Запишите, что достоверно известно. Сравните отрезки хорды AM и MB, части AD и DB дуги ADB, части AC и CB дуги ACB. Запишите в символической форме свои предположения о сравнительной величине отрезков хорды и частей дуг под заголовком «Доказать». Докажите ваши предположения. Сформулируйте соответствующую теорему. Измерьте отрезки хорд, сравните их.

Вторая работа. Постройте такую же окружность, проведите в ней хорду AB. Найдите середину этой хорды и через нее проведите диаметр CD. Запишите, что достоверно известно. Всмотритесь в чертеж и выскажите свои предположения о взаимном расположении диаметра и хорды, о величине частей AD и DB дуги ADB и частей AC и CB

дуги ACB. Запишите свои предположения под заголовком «Доказать». Докажите их. Сформулируйте соответствующую теорему.

Третья работа. Постройте такую же окружность. Возьмите в нижней части точку D. С помощью равных хорд постройте на окружности две равные дуги AD и DB, расположенные по разные стороны от точки D. Постройте хорду AB. Проведите через точку D диаметр CD. Запишите, что достоверно известно. Всмотритесь в чертеж, сравните отрезки AM и MB хорды и выскажите свои предположения о длине этих отрезков и о взаимном расположении диаметра и хорды. Запишите ваши предположения под заголовком «Доказать». Докажите их. Сформулируйте соответствующую теорему.

Проанализируйте все три теоремы. Укажите, что в них общего, что их различает. Подготовьте устный рассказ об этих трех теоремах, укажите главные составные части каждой теоремы, возможность взаимной замены их частей, последовательность логических рассуждений, приемы доказательства.

Четвертая работа. Скопируйте чертеж 316 из учебника геометрии Н. Н. Никитина. Затем запишите, что достоверно известно, что требуется доказать. Далее выполните дополнительные построения и запишите доказательство в символической форме. Порядок выполнения работы должен быть примерно таким, как и в первых трех работах.

Пятая работа. Разделите окружность на 6 равных частей. Соедините точки последовательно, а затем через одну. Проведите диаметр. Определите все углы, образовавшиеся на чертеже. Сопоставьте число градусов углов с числом градусов дуг, на которые они опираются. Заполните таблицу.

Величина углов	Величина дуг, на которые они опираются

Методические замечания. В начале урока учитель проводит небольшую вводную беседу, сопровождая ее демонстрацией на универсальном приборе различных случаев взаимного расположения диаметра и хорды. При этом обращается внимание на сравнительную величину элементов чертежа.

Задание № 23. Взаимное расположение прямой и окружности.

Содержание. Первая работа. Постройте окружность радиусом 20 *мм* с центром O. Постройте прямую, проходящую на расстоянии 27 *мм* от центра окружности. Запишите, используя знаки неравенства, соотношение между радиусом и расстоянием прямой от центра. На этом же чертеже постройте прямую, проходящую на расстоянии 15 *мм* от центра. Сколько общих точек с окружностью имеет эта прямая? Ее называют секущей. Сформулируйте определение секущей. Запишите неравенством соотношение между радиусом и расстоянием прямой до центра. На этом же чертеже постройте прямую, проходящую на расстоянии 20 *мм* от центра окружности. Сколько общих точек с окружностью имеет эта прямая? Ее называют касательной. Сформулируйте определение касательной. Обозначьте точку касания через C. Запишите соотношение между радиусом и расстоянием прямой от центра окружности. Запишите, как взаимно расположены радиус и касательная. Сформулируйте это в виде теоремы. Возьмите на окружности точку K, постройте касательную к окружности в этой точке. Запишите, что надо знать, чтобы быть уверенным в том, что данная прямая есть касательная. Докажите, что построенная вами прямая есть касательная.

Вторая работа. Вверху постройте прямую и пометьте на ней точку A. Постройте радиусом $r=25$ *мм* окружность, которая касалась бы прямой в точке A. Сформулируйте задачу в общем виде. В этой же части постройте прямую BC, не имеющую с окружностью общих точек, и проведите касательную параллельно этой прямой.

Третья работа. Постройте окружность, равную той, что в первой работе. Над окружностью постройте $\angle ABC$, стороны которого не имеют с окружностью общих точек. Постройте касательную, которая была бы параллельна одной из сторон угла. Внизу проведите прямую MD, не имеющую общих точек с окружностью. Постройте касательную, которая образовала бы с прямой MD угол в 30°. Сформулируйте задачу в общем виде.

Четвертая работа. Постройте окружность радиусом 20—25 *мм* и центром O. Пометьте на окружности две точки A и B. С помощью треугольника постройте две касательные AM и BM. Соедините точки A, B и M с центром O.

Сравните AM и BM. Выскажите предположение об их сравнительной длине. Запишите, что вам достоверно известно и что требуется доказать. Докажите ваше предположение. Сформулируйте его в форме теоремы. Запишите соотношение между углами. Сравните $\angle AMO$ и $\angle BMO$. Сформулируйте в виде теоремы местоположение центра окружности относительно сторон угла, образованного двумя касательными, проведенными к этой окружности из одной точки Объедините две теоремы в одну и запишите ее с помощью математических знаков. Измерьте AM и BM, $\angle AMO$ и $\angle BMO$. Проверьте точность построений.

Постройте вторую окружность так, чтобы ее центра не было видно, и с помощью биссектрисы прямого угла чертежного треугольника найдите центр.

П я т а я р а б о т а. Постройте $\angle A = 60°$. Впишите в него окружность. Составьте устный план построения вписанной в угол окружности. Сколько таких окружностей можно вписать? Где будут располагаться их центры? Пометьте на чертеже ход построения. Измерьте радиус окружности и вычислите все остальные отрезки, образовавшиеся на чертеже.

Ш е с т а я р а б о т а. Постройте произвольный равносторонний треугольник. Впишите в него окружность. Соедините точки касания Получите другой, меньший треугольник, вписанный в окружность. Сопоставьте элементы этих треугольников. Сравните их площади, не производя вычисления. Произведите необходимые измерения и вычислите площадь.

Р а б о т а д л я ж е л а ю щ и х. Исследуйте практически и сделайте посильные выводы о возможности построения вписанной окружности в известные вам четырехугольники и треугольники. Чертежи выполните на форматке, а текстовые записи — в тетради в форме небольшого сочинения.

Методические замечания. Вначале урока на универсальном приборе демонстрируются все случаи взаимного расположения прямой и окружности. Сперва целесообразно показать окружность и секущую. Затем, поворачивая прямую около одной из ее точек, находящуюся за пределом окружности, демонстрируется сближение точек пересечения прямой и окружности. Особое внимание обращается на предельный случай, когда эти две точки сольются в одну. После этого показывается случай, когда прямая и окружность не имеют общих точек. Параллельно с демонстрациями вводятся соответствующие определения.

Далее класс работает фронтально. Читая задание, пункт за пунктом, учитель предлагает учащимся выполнить те построения, о которых он говорит. Для корректировки вызываются поочередно отдельные учащиеся, которые выполняют задание на доске. Целесообразно вызывать к доске учащихся с хорошей подготовкой. Та часть задания, которая не будет выполнена в классе, остается на дом. Дома учащиеся дополняют задание текстовыми записями, которые не были сделаны в классе.

Задание № 24. Взаимное расположение двух окружностей.

Содержание. Скопируйте из учебника геометрии Н. Н. Никитина чертежи 322—327. Обозначьте радиус большой окружности через R, а радиус меньшей окружности — через r. Запишите неравенствами или равенствами соотношение между расстоянием OO_1 и суммой или разностью радиусов.

Работа для желающих. Докажите несколько предложений этого задания. Запишите доказательство в краткой форме.

1. Построить окружность, огибающую три равных, касающихся друг друга круга.

2. Построить окружность радиусом 10 *мм*. Вокруг нее построить таким же радиусом окружности, касающиеся данной окружности и двух соседних. Постройте огибающую внешних окружностей. На основе этого построения составьте план разметки образовавшегося большого круга на 7 равных кругов.

Методические замечания. Работы могут быть даны для самостоятельного выполнения дома или в классе. До выполнения работы учитель на универсальном приборе демонстрирует всевозможные случаи взаимного расположения двух окружностей. Помимо окружности, имеющейся на демонстрационном приборе, необходимо иметь окружность, начерченную на отмытой фотопленке. Последняя может свободно перемещаться и занимать различные положения относительно окружности, начерченной на приборе. Наблюдая, ученики делают выводы о числе общих точек окружностей, сравнивают расстояния между центрами с суммой или разностью радиусов. В беседе даются понятия об окружностях, касающихся внутренне и внешне, а также о концентрических окружностях. Таким образом, задание является закреплением и оформлением того, что учащиеся видели в процессе демонстраций, повторным воспроизведением представлений и понятий, с которыми они только что познакомились. Несомненно, что такая работа принесет пользу и легко будет выполнена учащимися.

Тем ученикам, которые докажут некоторые положения из этого материала, полезно дать возможность высказаться на уроке.

Задание № 25. Окружность и углы.

Содержание. Первая работа. Постройте смежные углы AOB и BOD. Отложите $OD = OB$. Постройте AB. Запишите соотношения между углами, образовавшимися на чертеже. Постройте окружность с центром, совпадающим с вершиной угла O, и радиусом $R = OB = OD$. Угол A называется вписанным в окружность. Сравните числа градусов $\angle A$ и $\smile BD$, на которую угол опирается. Определите с помощью транспортира $\smile BD$ и $\angle A$. Сравните результаты измерения.

Вторая работа. Постройте окружность и на ней постройте дугу в 40° и впишите угол, опирающийся на эту дугу так, чтобы одна из его сторон была диаметром. Сделайте дополнительные построения и определите величину угла. Сделайте вывод о соотношении между величиной вписанного угла и величиной дуги, на которую он опирается. Измерьте угол.

Третья работа. Начертите окружность и постройте диаметр BA (A — нижняя точка диаметра). От точки A влево отложите дугу $AC = 20°$ и вслед за ней дугу $CD = 40°$. Точки C и D соедините с точкой B. Определите величину каждого из образовавшихся углов. Сделайте выводы о соотношении между величиной $\angle CBD$ и величиной дуги, на которую он опирается. Измерьте $\angle CBD$.

Четвертая работа. Начертите окружность и постройте диаметр AB, по обе стороны от его нижней точки A отложите две дуги: одну $AC = 10°$, другую $AD = 30°$. Концы дуг соедините с верхней точкой диаметра. Определите величину каждого из полученных углов. Сделайте вывод о соотношении между величиной вписанного угла CBD и величиной дуги CAD, на которую он опирается. Измерьте угол.

На основании всех трех задач сформулируйте общую теорему об измерении вписанных углов

Пятая работа Постройте произвольную окружность и впишите в нее несколько углов, опирающихся на одну и ту же дугу. Сформулируйте вывод о величине этих углов Измерьте углы

Шестая работа Постройте окружность произвольного радиуса, проведите в ней диаметр и постройте несколько вписанных углов, опирающихся на него Сделайте вывод о величине этих углов Измерьте углы Проверьте их с помощью чертежного треугольника

Седьмая работа Постройте окружность и в ней проведите две пересекающиеся хорды Пометьте какой-либо из получившихся вертикальных углов с вершиной внутри круга. Пусть дуга, на которую он опирается, будет равна m°, а дуга, заключенная между продолжением его сторон, будет равна n°. Выразите величину угла через m° и n°.

Восьмая работа. Постройте окружность и в ней угол, образованный касательной AB и хордой AC, $\angle ABC$. Установите зависимость между величиной угла и величиной дуги, заключенной между его сторонами. Сформулируйте теорему

Работа для желающих. Исследуйте практически и сделайте выводы о возможности построения описанных окружностей около известных вам четырехугольников Чертежи выполните на форматках, а текстовые записи произведите в тетрадях в форме доклада

Методические замечания. Перед изучением этого раздела целесообразно на доске универсального прибора сконструировать все случаи взаимного положения углов и окружностей При конструировании необходимо обращать внимание на зависимость между величинами углов и дуг, на которые опираются углы, или дуг, заключенных между его сторонами. В двух случаях такая зависимость уже известна. касательная перпендикулярна к диаметру, а дуга, заключенная между ними, имеет 180°; угол, образованный пересечением двух диаметров, измеряется дугой, на которую опирается, или полусуммой дуг, заключенных между его сторонами Естественно, возникает вопрос о наличии зависимостей и в других случаях

В процессе демонстраций устанавливаются соответствующие понятия и вводятся их определения. Затем учащиеся под диктовку учителя выполняют последовательно работы-задания.

Для каждой работы строится окружность радиусом 20—25 *мм*. Для корректировки работы выполняются и на доске.

После решения четырех первых задач целесообразно провести обобщающую беседу. Затем необходимо рассмотреть шестую часть задания. Четвертую и пятую работы ученики в состоянии выполнить дома. Учителю необходимо сделать замечание о форме отчетных записей по этим работам.

Задание № 26. Длина окружности.

Содержание. Проведите три произвольные прямые примерно на расстоянии 2 *см* друг от друга. Возьмите тело цилиндрической формы, оберните его форматкой и бумагу проколите иглой так, чтобы прокол совпал с первой прямой. На этой прямой отложится длина окружности. Измерьте длину окружности и диаметр основания этого цилиндра с точностью до 1 *мм*, вычислите отношение длины окружности к диаметру. Запишите результаты измерения в отчетную таблицу. Проделайте то же самое с двумя другими телами цилиндрической формы, отложив длины их окружностей на двух других прямых. Заполните отчетную таблицу.

Номер	Длина окружности C	Диаметр D	Отношение $C:D$ (с точностью до 0,01)
1			
2			
3			

Сумма трех отношений . . .
Среднее арифметическое трех отношений . . .
Вывод. Значение отношения $C:D=$ . . . (из опытов)
Точное значение отношения $C:D=3{,}14159$ . . . (бесконечная непериодическая десятичная дробь).

Сравните полученный вами результат с приближенными значениями числа π (с точностью до сотых).

Запишите формулу для числа π (отношение длины окружности к своему диаметру). Запишите формулу окружности C через D и π. Выразите диаметр через радиус и запишите формулу длины окружности через π и радиус.

На обороте форматки постройте окружность, длина которой равна длине рабочего поля форматки. Результаты измерения и расчеты запишите рядом с чертежом. Форму записи отчетной таблицы выберите сами.

Методические замечания. Задание выполняется в классе. Каждый ученик получает по три предмета, имеющих форму цилиндра (шайбы, кольца из труб, небольшие по размерам цилиндры и т. п.). Для измерения диаметров полезно иметь штангенциркули. Все измерения и расчеты заносятся в отчетную таблицу, которая чертится внизу форматки. Целесообразно записать на доске средние результаты, полученные несколькими учащимися, и уже для этих результатов найти среднее значение. Это покажет более точное значение отношения.

Задание № 27. Площадь круга.

Содержание. Форматку разделите на 4 части и в каждой из них постройте окружность примерно радиусом 4 *см*.

Первую окружность разделите на три равные части. Для этого разделите ее сперва на 6 равных частей и пометьте точки через одну. Полученные три точки соедините между собой и с центром круга *O*. Получатся три равных между собой треугольника. Найдите общую площадь этих треугольников. Затушуйте эти треугольники.

На втором чертеже разделите окружность на 6 равных частей, начертите правильный шестиугольник, проведите диаметры, являющиеся одновременно и диагоналями шестиугольника. Затушуйте образовавшиеся треугольники, найдите их общую площадь.

На третьем чертеже разделите окружность на 12 равных частей. Для этого разделите сперва на 6 равных частей, а потом, применив теорему о диаметре, перпендикулярном хорде, разделите окружность на 12 частей. Соедините точки деления между собой и с центром окружности. Затушуйте образовавшиеся треугольники, найдите их общую площадь.

На четвертом чертеже разделите окружность на 24 равные части. Соедините точки деления между собой и с центром круга. Затушуйте все полученные треугольники.

Сравните площади правильных треугольника, шестиугольника и двенадцатиугольника, вписанных в одну и ту же окружность.

Сопоставьте на глаз во всех четырех случаях разность между площадью круга и общей площадью треугольников. Как будет изменяться эта разность, если число треугольников будет удваиваться?

В старших классах будет доказано, что площадь круга равна сумме площадей треугольников, если их число неограниченно удваивается. На основе этой теоремы выведите формулу для вычисления площади круга. Для этого вычислите площадь каждого из 12 треугольников, образовавшихся на чертеже 3. За основание каждого треугольника примите хорду, а за высоту — расстояние от центра до хорды. Найдите сумму площадей всех треугольников. Заполните отчетную таблицу.

ОТЧЕТНАЯ ТАБЛИЦА

Основание треугольника $a =$ ..
Высота треугольника $h =$
Формула площади треугольника $S_1 = \ldots$
Площадь треугольника $S_1 =$
Число треугольников $n =$
Формула суммы площадей 12 треугольников $S_{12} = \ldots$
Сумма площадей 12 треугольников $S_{12} = \ldots$

На основе предложения (без доказательства), что сумму площадей треугольников, образующихся при неограниченном удвоении числа сторон вписанного многоугольника, можно принять за площадь круга, заполните продолжение таблицы.

Формула суммы площадей n треугольников $S_n = \ldots$
При неограниченном удвоении числа треугольников, в этой формуле высота h заменится . . (указать чем)
сумма оснований заменится . . . . . . (указать чем)
сумма площадей всех треугольников . . . заменится . . .
Формула площади круга, выраженная через радиус $S_{кр} = \ldots$
Формула площади круга, выраженная через диаметр $S_{кр} = \ldots$

Методические замечания. Выполнение чертежей ведется фронтально. Для контроля задание выполняется на доске. Отчетную таблицу учитель заполняет под диктовку учащихся. При проведении анализа формулы целесообразно подчеркнуть те допущения, которые были приняты при выводе формулы. Полезно записать формулу в таком виде: $S = 0{,}78\ D^2$, и показать, как она получается. Важно подчеркнуть особенности и показать целесообразность применения каждой из трех формул.

Дома учащиеся производят сравнение результатов работы с тем, что имеется в учебнике.

Задание № 28. Проверочная работа. Площадь круга.

Содержание. Форматку разделите на 6 частей. Постройте в каждой из них последовательно треугольник, параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат и трапецию. Размеры произвольные. Из этих фигур надо вырезать 6 кругов по возможности большого диаметра. Сделайте разметку таких кругов. Вычислите площадь построенных фигур и размеченных кругов. Сравните эти площади для каждого чертежа отдельно. Заполните отчетные таблицы.

ПРИМЕРНАЯ ОТЧЕТНАЯ ТАБЛИЦА ДЛЯ ТРЕУГОЛЬНИКА

Размеры треугольника, необходимые для вычисления его площади . . .

Формула площади треугольника $S_\triangle = \ldots$
Площадь треугольника $S_\triangle = \ldots$
Формула площади круга $S_{кр} = \ldots$
Площадь круга $S_{кр} = \ldots$
Отношение площади круга к площади треугольника $\frac{S_{кр}}{S_\triangle} = \ldots$ (до 0,01)
Процент полезно использованного материала для изготовления круга . . . (до 1%)

Отчетные таблицы для остальных фигур составьте подобно приведенной. Укажите, в каких случаях центр получается единственный. Чем это, по-вашему, определяется?

Задание № 29. Площадь поверхности цилиндра.

Содержание. Из каких частей состоит поверхность цилиндра? Найдите размеры данного вам цилиндра. Измерения производите с точностью до 1 *мм*. На основе полученных результатов начертите развертку цилиндра в натуральную величину. Вычислите площадь поверхности цилиндра. Заполните отчетную таблицу.

ОТЧЕТНАЯ ТАБЛИЦА

Высота цилиндра $H = \dots$
Радиус основания $r = \dots$
Длина окружности основания $C = \dots$
Длина прямоугольника в развертке $a = \dots$
Формула площади боковой поверхности $S_{бок} = \dots$
Площадь боковой поверхности $S_{бок} = \dots$
Формула площади основания $S_0 = \dots$
Площадь одного основания $S_0 = \dots$
Формула площади полной поверхности $S_п = \dots$
Площадь полной поверхности цилиндра $S_п = \dots$

Рассчитайте развертку цилиндра, которую можно выкроить из форматки. Выполните на обороте форматки чертеж этой развертки. Определите полную поверхность цилиндра по этой развертке. Расчеты и обоснования к ним запишите на отдельном листе.

Начертите развертку цилиндра, у которого площадь полной поверхности равна 220 *кв. см*. Расчеты и обоснования к ним запишите на отдельном листе бумаги, который приложите к форматке.

Методические замечания. Каждому ученику дается цилиндр. Для измерения диаметра полезно иметь в классе несколько штангенциркулей. Учитель разъясняет цель, записывает схему отчетной таблицы на доске и предлагает ученикам выполнить первую работу в классе. Вторую и третью работы ученики могут выполнить дома. Целесообразно разъяснить семиклассникам технику расчета размеров развертки цилиндра, чтобы выполнить ее на ограниченном листе бумаги. Анализ формулы полной поверхности подскажет, что размер цилиндра, а следовательно, и его развертка определяются двумя величинами: диаметром основания и высотой цилиндра. Поэтому при расчете развертки прежде всего надо определить диаметр основания и высоту цилиндра, затем рассчитать и все остальные элементы для выполнения развертки. Величина диаметра и высоты определяется размерами листа бумаги, на котором нужно расположить чертеж, и самим расположением развертки. В случае расчета развертки с определенной площадью поверхности цилиндра один из размеров цилиндра, диаметр или высота, задаются самим учеником заранее, а вторая величина получается из формулы площади поверхности, как неизвестное при решении уравнения. Здесь же необходимо показать учащимся, что для определения r следует решить квадратное уравнение. Поэтому легче опытным путем, исходя из размеров бумаги, сначала выбрать величину радиуса, а потом уже из уравнения определить значение высоты. В комплексе эти три работы создадут у семиклассников достаточно полные представления о цилиндре и его развертке. Особое значение имеет работа по конструированию развертки. В ней, как в зеркале, отразятся знания, умения и навыки учащихся, связанные с цилиндром. Уметь рассчитать, выбрать самому необходимые данные, изобразить на чертеже разработанную конструкцию — все эти элементы чрезвычайно важны для развития пространственных представлений, логического мышления, выработки умений и навыков в расчетах и конструировании. Учащиеся с особым интересом выполняют такие работы.

Задание № 30. Объем цилиндра.

Содержание. Первая работа. Найдите размеры данного вам цилиндра, произведите необходимые измерения для изображения его в прямоугольных проекциях и вычисления объема. Постройте прямоугольные проекции цилиндра. Нанесите на чертеж необходимые размеры. Вычислите объем цилиндра. Заполните отчетную таблицу.

ОТЧЕТНАЯ ТАБЛИЦА

Высота цилиндра $H=$. .
Диаметр цилиндра $D=$. . .
Радиус основания цилиндра $r=$. . .
Формула площади основания $S_0=$. . .
Площадь основания $S_0=$. . .
Формула объема цилиндра $V=$. . .
Объем цилиндра $V=$. . .

Вторая работа. Рассчитайте размеры цилиндра объемом в 238 *куб. см*. На обороте форматки изобразите его в прямоугольных проекциях. Расчеты и их обоснование запишите на отдельном листе.

Методические замечания. Каждому ученику дается цилиндр. Диаметр измеряется штангенциркулем. Работа проводится после ознакомления учащихся с формулой объема цилиндра. Первая работа выполняется самостоятельно учащимися в классе, вторая дается на дом. Чтобы показать ученикам метод расчета размеров цилиндра с определенным объемом, полезно провести анализ формулы его объема.

Задание № 31. Проверочная работа на вычисление площади поверхности и объема цилиндра.

Содержание. Рассчитайте размеры цилиндра объемом в 240 *куб. см*. Начертите развертку цилиндра и изобразите его в параллельных проекциях, использовав для этого обе стороны форматки. Вычислите полную поверхность цилиндра. Составьте отчетную таблицу. Расчеты, обоснования к ним и таблицу запишите на отдельном листе бумаги в форме небольшого математического сочинения.

Методические замечания. Задание дается как классная или домашняя контрольная работа. В классе всю работу учащиеся выполнить не смогут, они закончат ее дома. На уроке можно предложить ученикам выполнить все расчеты и эскизы, а дома обработать материал и написать сочинение. При таком порядке учитель может проследить, как работают ученики, и помочь тем из них, которые испытывают те или иные затруднения, поощрить тех, кто успешно самостоятельно трудится. Всем учащимся будет ясна сущность задания.

Задания для занятий в кружке. 1. Рассчитайте размеры и постройте равносторонний треугольник, квадрат и круг, имеющие одинаковые длины контурных линий. Вычислите площадь каждой из этих фигур. Сравните эти площади. Какая из фигур имеет наибольшую площадь?

2. Рассчитайте размеры и постройте равносторонний треугольник, квадрат и круг, имеющие одинаковую площадь. Вычислите периметр у первых двух фигур и длину окружности у третьей. Сравните их. У какой из фигур наименьшая длина контурной линии? Каково, по вашему мнению, практическое использование фигур с наименьшим периметром и максимальной площадью?

3. Составьте описание геометрических фигур, использованных в велосипеде. Рассчитайте, какое расстояние пройдет велосипед от одного оборота педалей? Сколько оборотов надо сделать педалями для того, чтобы скорость передвижения на велосипеде была равна 15 *км* в час?

Изобразите колеса и шестерни велосипеда на форматке в определенном масштабе, сохранив их относительное расположение. Начертите раму велосипеда, определите углы ее. Составьте несколько геометрических задач с данными, полученными при измерении деталей велосипеда.

4. Рассчитайте и выполните развертки прямоугольного параллелепипеда, прямой треугольной призмы и цилиндра, имеющих равновеликие основания и разные высоты, т. е. имеющих равные объемы. Вычислите их боковые поверхности, сравните их и запишите, у какого из тел площадь поверхности наименьшая. Какую из трех данных форм целесообразно выбрать для постройки здания заданного объема с наименьшим расходом материалов? Почему заводские трубы делают цилиндрическими или конусообразными?

* * *

Применяя те или иные методы обучения, никогда нельзя впадать в крайности. Чувство меры должно быть у каждого преподавателя. Рекомендуя настоящие задания, мы не предполагаем, что учитель весь процесс обучения на уроке будет строить только на использовании графической работы школьников и отбросит все остальные методы изучения теоретического материала.

Вероятно, каждый учитель, ознакомившись с предлагаемыми заданиями и краткими замечаниями к ним, найдет разумную меру сочетания этого вида деятельности учащихся с другими широко известными методами изучения геометрии.

В заключение хочется подчеркнуть большое значение графических лабораторных работ. Они создают условия для активной деятельности учащихся в процессе внимательного наблюдения геометрических образов, направляют мысль, намечают путь в ходе умозаключений и выводов. Словом, ученики учатся не только со слов учителя и не только по учебнику, а руководствуясь собственными размышлениями в поисках решения поставленной проблемы.