Проф. И. И. ЧИСТЯКОВ

МЕТОДИКА АЛГЕБРЫ

ДЛЯ ВЫСШИХ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ И ДЛЯ ПРЕПОДАВАТЕЛЕЙ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

Допущено Наркомпросом РСФСР

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА — 1934

ВВЕДЕНИЕ.

§ 1. Предмет методики алгебры.

Методика алгебры имеет своим предметом разработку и изложение системы целесообразных методов и приемов преподавания элементарной алгебры как учебного предмета средней школы. Являясь ветвью методики общего курса элементарной математики, она имеет важное и самостоятельное значение ввиду положения алгебры как центрального и объединяющего предмета среди других математических дисциплин. Но в то же время она представляет наименее разработанную область методики элементарной математики. Так, в настоящее время на русском языке не имеется ни одного руководства, посвященного методике алгебры; весьма мало их и на иностранных языках. Крайне бедна и литература по отдельным вопросам преподавания алгебры как у нас, так и за границей. Такое неудовлетворительное положение дела объясняется тем, что алгебра всегда являлась предметом преподавания в средней школе, которое поручалось почти исключительно лицам, кончившим физико-математические факультеты университетов. Но, по господствовавшему тогда предрассудку, методическая и даже вообще педагогическая подготовка для лиц, окончивших университеты, считалась излишней ввиду полученного ими высшего образования. Такой взгляд был распространен как среди преподавателей, так и в органах народного просвещения еще в начале XX в., а в некоторых странах, например во Франции, держится еще и теперь. Поэтому в России только в 1909 г. были открыты первые одногодичные курсы для подготовки преподавателей средней школы по различным предметам, в том числе и по математике, при управлениях учебных округов, и лишь в 1912 г. в Москве был открыт единственный в России педагогический институт им. Шелапутина. Такое печальное положение дела не могло содействовать развитию методической литературы по математике. Конец ему положила только Октябрьская революция, после которой СССР покрылся сетью педвузов и педтехникумов, была признана совершенная необходимость специальной педагогической литературы и положено начало разработке общей и частной методики всех учебных предметов средней школы.

§ 2. О подготовке преподавателей алгебры.

В противоположность упомянутому дореволюционному взгляду о ненужности для преподавателей с высшим образованием особой педагогической подготовки, в настоящее время в СССР признается совершенно необходимым, чтобы все лица, посвящающие себя преподавательской деятельности, имели возможно лучшую как научную, так и педагогическую подготовку. Поэтому мы и остановимся на вопросе, какова должна быть подготовка будущих преподавателей алгебры.

Совершенно ясно, что для них прежде всего необходимо иметь возможно более полное и глубокое знание той науки, которую они будут преподавать, т. е. математики. Это знание приобретается в вузе, где изучаются различные отделы высшей математики. Однако лица, посвящающие себя преподаванию математики, не должны ограничиваться, как это, к сожалению, часто бывает, тем ознакомлением с высшей математикой, которое они вынесли из вуза. Даже в тех случаях, когда преподавание в высшей школе было поставлено наилучшим образом, однократного прохождения высшей математики совершенно недостаточно для надлежащего понимания и усвоения ее основ. Принимая же еще во внимание, что преподавание высшей математики обычно ведется в высшей школе без обращения внимания на те ее стороны, которые особенно ценны для будущих преподавателей, становится совершенно очевидной необходимость для них повторного самостоятельного прохождения прослушанных курсов, в особенности тех, которые имеют наиболее близкое отношение к элементарной математике и, в частности, к алгебре. Такими науками являются: аналитическая геометрия, анализ, т. е. диференциальное и интегральное исчисления, высшая алгебра с теорией детерминантов и теория чисел. По каждой из этих дисциплин желательно изучение хотя одного курса, в особенности из служащих пособиями для физико-математических факультетов университета, а также приобретение возможно большего навыка в решении задач. Так, по аналитической геометрии полезно проработать курсы проф. Б. К. Млодзеевского: „Основы аналитической геометрии на плоскости и в пространстве", 1924, или какой-либо другой университетский курс. Из других руководств можно рекомендовать: С. С. Бюшгенс, Аналитическая геометрия (вышел 1-й концентр), 1933, вып. I и II; Н. М. Бескин, Курс аналитической геометрии для втузов, ч. I, 1933, и др.

Для решения задач могут служить сборники проф. К. А. Андреева, Адамова, Булыгина и др., ч. I, 1930.

По введению в анализ полезно изучить: Д. К. Лахтин, Энциклопедия математики, ч. I, 1925, или Г. Ковалевский, Введение в исчисление бесконечно малых, пер. под ред. С. О. Шапуновского, 1909.

Анализ можно изучать по многим курсам, прежним и новым, в частности: К. Поссе, Курс диференциального и интегрального исчислений; Э. Чезаро, Элементарный учебник алгебраического анализа и исчисления бесконечно малых, пер. Поссе, ч. I и II, 1913; Коялович, Лекции по высшей математике, вып. I и II.

Для еще более углубленного изучения анализа могут быть рекомендованы: Р. Курант, Курс диференциального и интегрального исчислений, ч. I и II, 1931; Валле-Пуссен, Курс анализа бесконечно малых, т. I и II, 1933.

Из курсов, в которых аналитическая геометрия излагается в связи с анализом, могут быть указаны: А. К. Власов, Курс высшей математики, т. I и II, 1914; Н. Семенов, Основы высшей математики, вып. I, 1933.

Изучение высшей математики должно сопровождаться решением большого количества примеров и задач, для чего могут служить сборники задач и упражнений, изданные под редакцией проф. Н. Гюнтера и Р. Кузьмина, ч. I и II, под ред. проф. Кояловича и другие.

Высшая алгебра может быть изучена по книге: Б. Млодзиевский, Основы высшей алгебры, 1929. Более подробными являются курсы: Д. Граве, Элементы высшей алгебры, 1914, и А. Сушкевич, Основы высшей алгебры, 1931.

По теории детерминантов могут быть указаны книги: С. П. Виноградов, Основания теории детерминантов; Е. Нетто, Начала теории определителей, пер. С. Шапуновского, 1912; В. Каган, Основания теории определителей, 1922.

Для упражнений могут служить общие сборники задач по высшей математике, а также „Сборник задач по высшей алгебре" А. Журавского.

Теория чисел и эволюция понятия о числе могут быть изучены по книгам: А. В. Васильев, Введение в анализ, ч. I и II, 1908; Лежен-Дирихле, Теория чисел, пер. Назаревского; Д. Ф. Егоров, Элементы теории чисел, 1923.

Для более подробного ознакомления могут служить книги: П. Чебышев, Теория сравнений, 1901; Д. Граве, Элементарная теория чисел, 1913; И. Чистяков, Теория чисел (для заочных педтехникумов), 1934.

Не менее важным, чем знание высшей математики, является для будущего преподавателя математики полное и всестороннее знание элементарной математики. Нередко бывает, что, изучая в высшей школе элементы высшей математики, студенты в то же время сильно забывают элементарную математику, и начинающий преподаватель приступает к своей работе с тем скудным багажом сведений, который уцелел у него от средней школы. Ясно, что ему непременно нужно освежить и пополнить свои сведения в элементарной математике, начиная как с минимума с объема материала, установленного программами средней школы, и продолжая непрестанно углублять и расширять свое математическое образование во все время своей преподавательской деятельности. С этой целью им должны быть тщательно изучены как стабильные учебники, так и наиболее подробные руководства преподаваемых в школе дисциплин, примером каковых, например, в области алгебры могут служить: Е. Пржевальский, Элементарная алгебра, 1908; Н. Маракуев, Элементарная алгебра, в 3 ч. (несколько устарела); Ж. Бертран, Алгебра, пер. Пирожкова, 1908. Точно так же преподаватель должен приобрести полный навык в решении задач, вплоть до наиболее трудных, для чего могут служить распространенные ранее большие собрания задач и упражнений, в частности, например, по алгебре: Е. Пржевальский, Собрание алгебраических задач для учеников старших классов средних учебных заведений в 4 т., 1908—1914.

Однако, как уже было упомянуто, для преподавателя недостаточно знания своей дисциплины, как бы оно обширно и глубоко ни было, но он должен иметь еще общую педагогическую подготовку и специальную — в области преподаваемого предмета. Последняя должна вестись в трех следующих направлениях. Во-первых, так как методы преподавания учебного предмета, в частности алгебры, должны соответствовать методам самой науки, то преподаватель должен быть знаком с ее методологией, в частности с применяемыми в ней общими и частными методами исследования, определениями основных понятий, способами доказательств теорем и решения задач и пр. Далее, так как обучение какому-либо предмету для учащихся является как бы сокращенным переживанием истории развития соответствующей науки, происходящим под руководством специалиста, то необходимо, чтобы руководитель пользовался уроками, которые дает история эволюции предмета, устраняя то, что задерживало эту эволюцию, и выдвигая приемы, способствующие ее уяснению и прогрессу. Отсюда вытекает необходимость хорошего знакомства с историей математики и, в частности, элементарной алгебры. Наконец, он должен знать практические приемы и способы преподавания всех разделов и отдельных вопросов преподаваемого предмета, что составляет в собственном смысле слова частную методику или дидактику данного предмета. Рассмотрение наиболее важных вопросов последнего рода и является главною целью настоящей книги; однако попутно мы будем касаться вопросов методологии и истории алгебры.

Книг, которые были бы специально посвящены изложению какого-либо из указанных трех разделов общей методики алгебры, на русском языке в настоящее время не имеется. Можно, однако, указать некоторые пособия, содержащие необходимый к указанным разделам материал. Так, методологические вопросы алгебры частично выдвинуты и освещены в книгах: С. Виноградов, Повторительный курс алгебры, 1914; Вебер и Велльштейн, Энциклопедия элементарной математики, пер. В. Кагана, т. I, 1906. Имеется подходящий материал и в книгах: Г. Бархов, Руководство алгебры, 1915; Д. Граве, Начала алгебры, 1915.

Нет специальных сочинений и по истории алгебры, но частично для знакомства с ней могут быть использованы следующие книги и общие курсы по истории математики: В. Каган, Что такое алгебра, 1910; Ф. Кеджори, История элементарной математики, пер. под ред. Тимченко, 1910; Г. Фаццари, Краткая история математики, 1923; Г. Попов, Очерки по истории математики, 1923; Г. Цейтен, История математики в древности и в средние века, 1932; Г. Цейтен, История математики в XVI и XVII вв., 1933.

За отсутствием специальных руководств по методике алгебры, указания методического характера могут быть почерпнуты из общих курсов по методике математики: Дж. А. Юнг, Как преподавать математику, пер. А. Кулишера, 1912; Сборник программ и инструкций по преподаванию математики в Западной Европе, пер. под ред. Д. Синцова, 1914.

Для той же цели могут быть полезны некоторые учебники алгебры, в которых изложение является методически обработанным. Такими являются учебники алгебры, составленные Н. Ф. Лебединцевым, а также курс элементарной алгебры Н. А. Извольского, ч. I и II, 1924.

Из задачников методически обработанным является: Сборник упражнений и задач по элементарному курсу алгебры Бема, Волкова и Струве, представляющий переработку немецкого задачника Бардей.

Много полезных статей и заметок по методике и истории алгебры можно найти в издававшихся ранее журналах: „Вестник опытной физики и элементарной математики“ и „Математическое образование“, а также в издающихся в настоящее время сборниках: „Математика и физика в средней школе“, Учпедгиз, 1934.

ГЛАВА I.

ЦЕЛИ И МЕТОДЫ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ.

§ 3. Формальная и материальная цели преподавания математики.

Непосредственной целью преподавания алгебры является сообщение учащимся и усвоение ими материала, установленного учебною программой этого предмета. Но так как алгебра является одной из ветвей элементарной математики, то эта цель должна быть согласована с общими целями преподавания математики в средней школе. Однако по вопросу о целях преподавания математики в разные времена были выдвинуты и проводились два различных основных взгляда.

По первому из них, который официально проводился в России до революции, а на Западе в общем держится и сейчас, главной целью преподавания математики в школе должно быть формальное умственное развитие учащихся, т. е. повышение у них способности к правильному формально-логическому мышлению. Основанием для такого взгляда выставлялись специальные особенности математики как науки, которые в известной мере позволяют ей приписать подобное воздействие на мыслительную способность учащихся, как: простота и общность ее основных понятий, строгость и последовательность выводов и доказательств, точность получаемых результатов, возможность самопроверки и контроля в практических приложениях и пр.

Особенно такое понятие о математике как науке, развивающей ум, держалось по отношению к геометрии и обязано своим возникновением знаменитому сочинению — „Начала" Евклида. Этот труд, написанный еще в III в. до н. э., благодаря своим высоким достоинствам в течение свыше двух тысяч лет был главным учебником математики для человечества и не потерял своего научного значения и до настоящего времени. В нем содержатся сведения из геометрии, теоретической арифметики и алгебры (в геометрической форме), но особенно важно изложение собственно геометрии, которая приведена в строгую и стройную систему, развиваемую из немногих основных положений: определений, аксиом и постулатов. Приводимые доказательства основных истин отличаются замечательной ясностью и точностью, из доказанных положений выводятся новые следствия и теоремы и т. д., так что все изложение может служить образцом последовательного, строгого и точного изложения геометрии. Ввиду этих достоинств „Начал" за геометрией в особенности и за математикой вообще установилась репутация науки, особенно развивающей человеческий ум.

Однако это развивающее значение математического образования долгое время понималось слишком узко и односторонне: предполагалось, что в нем наибольшую ценность имеет чисто логическая сторона, а потому обучение математике сводилось главным образом к разучиванию доказательств математических истин, на самое же содержание их обращалось менее внимания, а на приложения их на практике совсем не обращалось внимания. Опыт, накопившийся в течение веков, показал в конце концов бесплодность подобного преподавания математики, преследующего исключительно цели гимнастики ума. Выяснилось, что при таком безжизненном преподавании математика не оказывает на ум учащихся того развивающего влияния, которое ей приписывалось, и что лица, даже отлично усвоившие логическую цепь математических теорем и доказательств, не переносят привычку к точному мышлению на другие области науки и жизни, а нередко оказываются слабыми даже и в математическом развитии, например в области пространственных представлений. Поэтому постепенно признание главной целью математического образования формального умственного развития учащихся стало ослабевать, и в него, в особенности с середины прошлого XIX в., были внесены существенные изменения.

Главной причиною изменения во взглядах на цель математического образования был быстрый рост промышленного капитализма, так как развитие промышленности требовало огромного числа лиц, обладающих математическими знаниями и умеющих применять их на практике. В связи с этим, особенно с середины прошлого XIX в., на первый план стало выдвигаться не формальное, а материальное значение математического образования, т. е. непосредственная ценность математики для познания объективной действительности и практической жизни. В самом деле, математика имеет неоспоримую цену как орудие для изучения и покорения человеком природы, ибо она имеет своим предметом исследование количественных соотношений и пространственных форм материального мира. Благодаря применению математики в XIX—XX вв. достигли блестящего развития все так называемые точные науки: механика, физика, астрономия (создание математической физики, электромагнитная теория света, теория электронов, статистическая механика, теория квант, теория относительности и пр.). Но и науки, сравнительно далее стоящие от математики, каковы: химия, физиология и др., тоже получают от применения в них математических методов все бóльшую и бóльшую силу. И наоборот, все эти науки способствуют развитию и прогрессу самой математики, так как ставят ей ряд вопросов и задач, выдвигаемых изучением природы. Так, в связи с практическими приложениями в математике возникли и выросли многие новые дисциплины и отделы, каковы: приближенные вычисления, номография, теория векторов и пр., имеющие в то же время и большое значение для дальнейшего развития самой математики.

Благодаря этому величайший технический прогресс, достигнутый человечеством к XX в., существенным образом зависит от математики. Без нее немыслимы инженерное дело, авиация, мореплавание и вообще какая бы то ни была техническая деятельность. Отсюда и вытекает вторая цель преподавания математики: оно должно дать учащимся сумму сведений, необходимых и полезных для жизни. Однако и эта цель нередко понималась слишком односторонне и узко — как прямое сообщение непосредственно применимых сведений, с игнорированием образовательного значения математики. Такое ведение преподавания тоже является не достигающим цели, так как несистематические знания, не основанные на глубоком знакомстве с предметом, не могут быть в полной мере применимы в практике и легко могут быть утрачены. Таким образом, формальная и материальная цели преподавания математики в правильном их понимании не могут быть достигнуты независимо друг от друга, но лишь при совместном соединении, ибо при правильном понимании формальная цель преподавания математики означает задачу дать учащимся систематические знания основ математики, а материальная — научить учащихся применять полученные знания.

В таком смысле вопрос о задачах и целях преподавания математики был исчерпывающим образом разрешен в СССР в 1931—1932 гг. в исторических постановлениях ЦК ВКП(б), установивших систематическое обучение на политехнической основе. Руководствуясь указанием Ленина, что „политехнический принцип не требует обучения всему, но требует обучения основам современной индустрии вообще" (запись Ленина на III сессии ВЦИК 7 созыва 26/27 сентября 1920 г. по докладу Наркомпроса), постановления ЦК ВКП(б) ставят в непосредственную и живую связь обучение основам наук с производительным трудом. Ясно, что в СССР, где развитие техники и индустриализации страны идет невиданными темпами, подобное ведение преподавания математики должно иметь наиболее плодотворные результаты.

Следует, однако, отметить, что поставленная таким образом задача математического образования не может быть достигнута односторонним воздействием преподавателя на учащихся, но непременно требует живого и деятельного участия в этой работе самих учеников. Отсюда естественным стремлением преподавателя является — вызвать активность со стороны учащихся, зажечь в них любовь и интерес к математике и ее приложениям и вообще всячески способствовать и содействовать развитию в них живого математического мышления.

Для ознакомления с различными постановками вопроса о целях и методах преподавания математики могут быть рекомендованы следующие статьи: А. Власов, Какие стороны элементарной математики представляют ценность для общего образования, 1914, „Математическое образование"; И. Чистяков, Цели и методы преподавания математики в новой школе, „Математика в школе", 1918; К. Лебединцев, Введение в современную методику математики, 1925.

§ 4. Абстрактно-дедуктивный и конкретно-индуктивный методы преподавания математики.

В соответствии с различными взглядами на цели преподавания математики менялись и методы ее преподавания. Так, в связи с распространенным мнением о важности изучения математики для формального умственного развития как на Западе, так и у нас до Октябрьской революции господствовал почти безраздельно абстрактно-дедуктивный метод ее преподавания. Сущность его состоит в том, что истины, составляющие содержание какой-либо науки, изучаются в систематическом порядке, причем они выводятся при помощи строгих умозаключений из немногих основных определений и положений, принимаемых без доказательства. Кроме этих основных положений все прочие истины доказываются, хотя бы их справедливость казалась учащимся ясной и без доказательства.

Способ преподавания при этом приближается к лекционному; учащиеся должны, прослушав преподавателя, усвоить изложенную теорию и уметь воспроизводить ее в своих ответах; упражнениям придается лишь второстепенное значение — служить для лучшего усвоения теории. Особенно полно абстрактно-дедуктивный метод проводился в преподавании геометрии, которая прорабатывалась весьма близко к изложению „Начал" Евклида, отличающемуся, как уже было упомянуто, большою степенью логического совершенства. Но и в других ветвях математики — арифметике, алгебре и пр. — особое внимание обращалось на выводы и доказательства, получавшие перевес над конкретным содержанием науки. Отдельные части и статьи каждого предмета излагались и изучались тем же методом перехода от общих понятий к частным выводам. Например, статья об уравнениях в „Алгебре" А. Малинина и Буренина, 1908 г., излагается после полного прохождения отделов: о буквенных обозначениях, относительных числах, действиях над целыми одночленами, многочленами и алгебраическими дробями и начинается с самых общих определений равенства, тождества и уравнения. Далее приводится полная классификация уравнений: разделение их на алгебраические и трансцендентные, рациональные и иррациональные, в частности рациональных — по степеням, на числовые и буквенные и пр. Затем излагаются общие *теоремы о равносильности уравнений* и о способах их преобразования, и уже после этого авторы переходят к решению числовых уравнений первой степени с одним неизвестным.

Применению строго дедуктивного метода в преподавании математики придавалось весьма важное научное и педагогическое значение. Даже самая достоверность математических истин приписывалась употреблению этого метода. В педагогическом же отношении указывалось на значение его для развития внимания у учащихся, так как вследствие тесной логической связи между собой излагаемых истин невнимание к излагаемому материалу даже на короткое время ведет к полному его непониманию. Далее считалось, что непрерывное применение дедукции развивает в учащихся способность к отвлечению и обобщению и к правильным суждениям вообще. В практическом отношении считалось ценным, что при этом методе можно в короткое время проходить большое количество систематически изложенного материала.

Особенно много сторонников дедуктивный метод имеет во Франции, где преподавание математики стоит на большой высоте, но отличается тенденцией твердо держаться установленных традиций и не считаться с силами учащихся.

Начиная с середины XIX в., увлечение абстрактно-дедуктивным методом в школе стало ослабевать.

Непосредственной причиной отклонения от дедуктивного метода преподавания математики, в особенности на первых ступенях обучения, *была явная неуспешность занятий* по математике и, в частности, по геометрии, несмотря на самое серьезное его проведение в школе. Оказалось, что этот метод слишком труден для учащихся, которые по своему возрасту и развитию часто не могут не только оценить логическую строгость математических доказательств и выводов, а даже понять их сущность и нередко стараются заучить их без понимания. Педагогически неправильным является также то, что при этом остается неиспользованной интуиция учащихся, т. е. способность непосредственного усмотрения истины без логических доказательств. Эта способность у учащихся младшего и среднего возрастов развита гораздо сильнее, чем логическая работа ума, и потому пренебрежение ею должно принести определенный вред обучению. Наконец, при дедуктивном методе лишь в самой слабой мере может проявиться самодеятельность учащихся, пробуждение и развитие которой является, как мы видели, необходимым условием успешности преподавания математики.

В частности, недостатком дедуктивного метода для преподавания является то, что он не стоит в соответствии со способами научной математической работы. Действительно, рассмотрение этой последней показывает, что открытие научных истин в математике лишь в очень редких случаях получается дедуктивным путем, т. е. выводом их из ранее полученных общих положений. Обычный же путь открытий как раз обратный: исследователь сначала наблюдает ряд частных фактов, в которых при помощи интуиции усматривает общую закономерность; далее он проверяет предполагаемое общее положение и старается дать ему строгое доказательство. Такой метод научной работы, совершаемый путем перехода от частных случаев к общему закону, называется индуктивным; он является действительным методом научной работы; дедуктивный же метод является необходимым и ценным для приведения полученных результатов в логическую систему и изложения их в последовательном и стройном порядке. Таким образом, индукция и дедукция взаимно дополняют друг друга, и обе необходимы в научной работе.

Пусть, например, составляя ряд квадратов первых натуральных чисел, 1, 4, 9, 16,..., и беря ряд последовательных их разностей, т. е. 3, 5, 7, 9,..., мы замечаем, что эти разности представляют собою последовательные нечетные числа. Это наводит нас на мысль, что подобного рода свойством обладают вообще все разности квадратов чисел натурального ряда. Поэтому мы стараемся дать замеченному свойству логическое доказательство, например применяя общие алгебраические формулы для выражения квадратов последовательных чисел:

$$n^2-(n-1)^2=2n-1; \quad (n+1)^2-n^2=2n+1,$$

но $2n-1$ и $2n+1$ — последовательные нечетные числа. Пусть мы рассматриваем трехчлен x^2+x+11 и замечаем, что при $x=1, 2, 3, 4,\ldots$ он дает соответственно абсолютно простые числа: 13, 17, 23, 31,... Это может навести нас на мысль, что данный трехчлен дает только абсолютно простые числа при целых значениях. Однако, пытаясь доказать замеченное свойство в общем виде, мы здесь не сможем этого сделать и, наоборот, очень скоро убедимся, что предполагаемое свойство не имеет места; так, при $x=11$ трехчлен, очевидно, дает число составное.

Итак, открытому индуктивным путем положению должно быть затем дано дедуктивное доказательство. История науки дает множество примеров подобного получения и обоснования математических истин; так, теорема Пифагора была известна для частных случаев, например прямоугольного треугольника со сторонами 3, 4, 5, египтянам и другим народам Востока, заметившим, конечно, ее правильность из опыта на частных случаях, но только у греков, в частности у Евклида, мы находим ее строгое доказательство дедуктивным методом.

Являясь отображением процесса научной математической работы, метод преподавания математики в школе на основании изложенного должен быть преимущественно конкретно-индуктивным, т. е. учащиеся, под руководством преподавателя сначала знакомятся с изучаемым материалом на частных примерах и специально подобранных конкретных задачах, а затем уже переходят к выводу общих теорем и правил действий. Такой метод соответствует переходу от конкретного к абстрактному, дает широкий простор интуиции учащихся и их самостоятельной активной работе.

Так, например, изучение уравнений, в противоположность вышеприведенному изложению его из алгебры А. Малинина и Буренина, должно начинаться не с общих определений равенства уравнения вообще и его свойств и т. д., а с конкретных задач, приводящих к составлению уравнений; эти уравнения сначала решаются учащимися не по установленным правилам, а по соображению, на основании свойств арифметических действий; уж после этого могут быть выведены и установлены общие свойства уравнений и правила для их решения.

Однако с повышением математического развития учащихся дедукция в преподавании математики должна занимать все больше места.

§ 5. Синтетический и аналитический методы.

Более элементарными методами научной работы, чем дедукция и индукция, являются синтез и анализ, представляющие основные пути всякого математического исследования, а потому широко применяемые и в преподавании математики. Слово „синтез" означает сопоставление или соединение и представляет собою такой метод рассуждения, когда оно начинается от какого-либо известного положения и постепенно, путем ряда промежуточных выводов и заключений, приводит к выводу неизвестного ранее положения или решению поставленного вопроса. Так, при доказательстве этим методом теоремы начинают с какой-нибудь ранее установленной и известной истины, выводят из нее ряд непосредственно вытекающих следствий и с их помощью доходят до доказательства требуемого положения. При решении задачи производят ряд действий над данными числами и постепенно подходят к определению требуемого неизвестного числа. Примерами применения синтетического метода могут служить приводимые обычно в систематических курсах геометрии доказательства геометрических теорем, а в учебниках арифметики — решения задач. Приведем еще пример из алгебры. Пусть требуется доказать теорему, что среднее арифметическое двух неравных положительных чисел a и b более их среднего геометрического, т. е. что $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$. Для доказательства исходят из положения, что квадрат всякого действительного числа есть величина положительная, значит:

$$(a-b)^2 > 0, \quad \text{или} \quad a^2 - 2ab + b^2 > 0.$$

Прибавляя к обеим частям этого неравенства по $4ab$, получаем:

$$a^2 + 2ab + b^2 > 4ab, \quad \text{или} \quad (a+b)^2 > 4ab,$$

откуда

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 > ab \quad \text{и} \quad \frac{a+b}{2} > \sqrt{ab},$$

что и требовалось доказать.

Эту же теорему можно было бы доказать, взяв за исходное положение тождество:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = ab.$$

Тогда

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = ab + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2,$$

следовательно

$$\frac{a+b}{2}=\sqrt{ab+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2}$$

и, значит,

$$\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}.$$

Возьмем еще задачу: куплены гуси по 15 руб. штука и куры по 12 руб. за штуку. За гусей и за кур уплачено поровну, но кур было куплено на 10 больше, чем гусей. Сколько куплено тех и других?

Для решения узнаем, на сколько рублей гусь стоил дороже курицы; получим:

$$15-12=3 \text{ руб.}$$

Далее предположим, что куплено еще 10 гусей, и узнаем, сколько они будут стоить; получим:

$$15\cdot 10=150 \text{ руб.}$$

Таким образом, гуси, будучи куплены в равном числе с курами, стоят на 150 руб. дороже, следовательно их было:

$$150:3=50,$$

т. е. при покупке было 40 гусей и 50 кур. Проверка решения дает

$$15\cdot 40=12\cdot 50=600.$$

Из этих примеров видно, что синтетический метод в краткой и неоспоримой форме дает доказательство требуемого положения или решение поставленной задачи, но он обычно мало удовлетворяет учащихся, у которых возникают вопросы, почему именно взяты те, а не иные исходные положения, произведены именно указанные, а не другие промежуточные действия. Причина такой неудовлетворительности заключается в том, что синтетический метод действительно представляет начальные и промежуточные действия в готовой форме; он их лишь указывает, но не объясняет. И действительно, вообще этот метод не может быть творческим методом математического исследования, так как, не зная, какие именно известные положения или данные следует принять за исходные при доказательстве теоремы или решения задачи, а также какие промежуточные действия могут нам помочь, можно сделать множество бесплодных попыток дойти до результата и все же не достигнуть цели. Значение синтеза поэтому не в нахождении новых истин, а в удобном изложении полученных результатов.

В аналитическом методе, который является одним из главнейших методов научного исследования, мы в противоположность синтезу идем от неизвестного к известному. Так, желая доказать какое-либо новое положение, мы принимаем его временно за известное и выводим вытекающие из него следствия. Если какое-нибудь из них окажется известным ранее, то вопрос будет решен; в противном случае мы выводим из полученных следствий новые, пока не дойдем до какого-нибудь известного установленного положения, подтверждающего правильность исходного положения, которое мы доказываем. Слово „анализ", которым называется этот метод, буквально означает разложение или расчленение.

Так, для доказательства вышеприведенной теоремы о том, что среднее арифметическое двух неравных положительных чисел более их среднего геометрического, мы начинаем прямо с этого последнего положения. Итак, пусть справедливо, что

$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab};$$

тогда должны быть справедливы и непосредственно вытекающие из этого неравенства следствия:

$$a+b > 2\sqrt{ab}; \quad (a+b)^2 > 4ab.$$

Из последнего неравенства отнятием от обеих частей по $4ab$ получаем, что должно быть справедливо неравенство:

$$a^2-2ab+b^2 > 0, \quad \text{или} \quad (a-b)^2 > 0,$$

но это неравенство безусловно верно, так как квадрат всякого действительного числа более нуля, а следовательно, верна и доказываемая теорема. Сравнивая весь ход аналитического доказательства приведенной теоремы с синтетическим, видим, что они являются взаимно обратными по отношению друг к другу.

Точно так же для решения вышеприведенной задачи о купленных гусях и курах мы неизвестное число купленных птиц, например гусей, примем за известное и обозначим через x. Оперируя далее с ним как с известным, мы можем выразить стоимость купленных гусей через $15x$. С другой стороны, число купленных кур будет, очевидно, $x+10$, а стоимость их $12(x+10)$. Так как „за гусей и кур было заплачено поровну, то приходим к уравнению:

$$15x = 12(x+10),$$

откуда найдем $x=40$, т. е. гусей было куплено 40, а кур —50.

Таким образом, широко применяемое в алгебре для решения задач с конкретным содержанием составление и решение уравнений является прямым применением аналитического метода; в арифметике больше для той же цели применяется синтетический метод, более доступный для учащихся младшего возраста по их развитию и применимый к решению несложных задач. В геометрии метод анализа имеет важнейшее значение при решении геометрических задач на построение. Но наиболее широкое применение анализа из ветвей элементарной математики — в алгебре, которая иногда даже называется алгебраическим анализом. Поэтому при преподавании алгебры надо особенно приучать учащихся к аналитическому мышлению, отводя весьма важное место всякому исследованию вопросов, выводу следствий из полученных результатов и пр. Но анализ всегда должен сопровождаться синтезом: полученное аналитическим путем доказательство или решение задачи должно быть затем представлено в связном и последовательном синтетическом изложении.

§ 6. Метод доказательства от противного и метод математической индукции.

Способ доказательства от противного сравнительно редко, но с большой пользой применяется в алгебре. Он иначе называется методом приведения к нелепости (к абсурду) и состоит в том, что для доказательства желаемого положения мы допускаем справедливость противоположного ему положения и выводим затем из этого допущения следствия, которые доказывают его неправильность и, следовательно, подтверждают справедливость доказываемого положения. Этот способ широко применяется в геометрии при доказательстве различных теорем; приведем примеры применения его в алгебре. Так, желая доказать, что квадратный корень из целого числа, не являющегося точным квадратом, не может быть выражен дробью, мы допускаем, что последнее возможно, т. е. что $\sqrt{N}=\frac{a}{b}$, где $\frac{a}{b}$ — несократимая дробь. Но, возвышая обе части этого предполагаемого равенства в квадрат, получим:

$$N=\frac{a^2}{b^2},$$

что невозможно, так как целое число N не может быть равно несократимой дроби $\frac{a^2}{b^2}$, а потому сделанное допущение неправильно и доказываемая теорема верна.

Пусть еще на частных примерах мы заметили, что два последовательных целых числа, например 8 и 9, всегда взаимно простые, т. е. не имеют общего делителя, отличного от 1. Чтобы доказать это свойство в общем виде, допустим, наоборот, что числа N и $(N+1)$ могут иметь общего делителя d, не равного 1. Но тогда и разность их

$$(N+1)-N=1$$

должна делиться на d, что невозможно. Поэтому доказываемое положение является правильным.

Доказательство от противного, ввиду его простоты и убедительности, было одним из первых, которым стали пользоваться греческие ученые для доказательства геометрических истин за много веков до нашей эры. Открытие всех трех методов: синтетического, аналитического и приведения к абсурду определенно приписывается философу П л а т о н у (429—348 гг. до н. э.), но несомненно, что они применялись и ранее его. Платон главным образом разработал и выдвинул в науку как основной — метод анализа.

Метод математической индукции, называемый еще методом доказательства от n к $n+1$, состоит в том, что, желая доказать справедливость какой-либо теоремы для любого числа n, мы доказываем правильность ее для какого-нибудь определенного значения n, например $n=1$, а потом доказываем, что если она имеет место для какого-нибудь значения n, то будет справедлива и для числа, на 1 большего, т. е. $n+1$, и, следовательно, вообще справедливо.

Для примера докажем этим способом, что разность одинаковых степеней двух чисел a^n-b^n делится без остатка на их разность, т. е. $a-b$. С этою целью заметим, что разности первых степеней $a-b$ и квадратов a^2-b^2 делятся на $a-b$.

Допустим теперь, что разность n-ных степеней, т. е. $a^n - b^n$, делится на $a - b$, и докажем, что тогда и $a^{n+1} - b^{n+1}$ тоже разделится на $a - b$. Для этого последнюю разность представим в виде:

$$a^{n+1} - b^{n+1} = a^{n+1} - a^n b + a^n b - b^{n+1},$$

или

$$a^n (a - b) + b (a^n - b^n).$$

Но каждое слагаемое здесь делится на $a - b$, а потому и сумма их делится на $a - b$. Итак, если теорема верна для разности n-ных степеней двух чисел, то она будет верна и для степеней, на 1 больших. Но мы видели правильность ее для первых и вторых степеней, значит она будет верна и для 3-х степеней, 4-х и т. д., т. е. и вообще будет справедлива.

Изложенный метод применяется преимущественно в последних отделах программы алгебры, как бином Ньютона, непрерывные дроби, свойства уравнений высших степеней и пр. Но он имеет важнейшее значение при обосновании учения о числе и об арифметических действиях; так, с помощью его доказываются основные законы действий сложения и умножения, т. е. *переместительности, сочетательности и распределительности*. Открытие способа доказательства от n к $(n + 1)$ принадлежит новому времени; одним из первых ввел его в употребление Паскаль; полное обоснование дал ему Я. Бернулли (XVII в.).

ГЛАВА II.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ВЕДЕНИЕ ПРЕПОДАВАНИЯ АЛГЕБРЫ.

§ 7. Урок.

Организация преподавания математики, как и других учебных предметов в средней школе, установлена постановлением ЦК ВКП(б) от 25/VIII 1932 г. Согласно этому постановлению основной формой учебной работы в школе должен быть урок с данным классом учащихся по строго определенному расписанию. Ввиду этого первой заботой преподавателя, приступающего к преподаванию какого-либо отдела математики, в частности алгебры, должно быть детальное ознакомление с программою и составление предварительного плана прохождения назначенного материала как на весь учебный год, так и на ближайшие сроки: на полугодие и на месяц. Согласно этому плану преподаватель и должен заняться своей общей предварительной подготовкой к ведению преподавания всех отделов своего предмета. Но особенно необходимой является подготовка к каждому отдельному уроку. Как бы ни был опытен преподаватель, он всегда должен составить план предстоящего занятия, расположить в строгом порядке предположенный к изучению материал, установить связь его с ранее пройденным, продумать формы и способы его прохождения, подобрать необходимые примеры и задачи, предусмотреть, по возможности, вопросы со стороны учащихся и пр.

Самое ведение урока естественно разделить на две части: в первой половине устанавливается связь даваемого урока с предыдущим, для чего главным образом служат спрашивание учеников и коллективная проработка заданного и ранее пройденного материала; во второй половине разрабатывается новый материал. Однако обе эти части должны быть органически связаны между собою, и урок должен представлять собою цельную и связную работу преподавателя с классом.

При спрашивании теории вопросы преподавателя должны быть ясны, просты и точны; такой же правильности, точности и ясности выражений он должен добиваться и от учеников, ибо в математике, в частности в алгебре, правильность и точность определений, формулировок и вообще выражений имеют первостепенное значение. Вопросы, предлагаемые отвечающему ученику, должны иметь интерес и значение для всего класса, привлекая его к работе, и спрашивание ни в каком случае не должно превращаться в диалог между учителем и учеником. Главной целью спрашивания должен быть не только контроль за занятиями учащихся, а возможно лучшая проработка материала и в то же время проверка степени усвоения и понимания учащимися проходимых отделов. При затруднениях ученика или всего класса учитель должен оказывать им помощь наводящими вопросами, подходящими примерами и пр. Предлагаемые задачи и упражнения должны быть заранее тщательно подобраны и итти от более легких к более трудным. Материал, прорабатываемый в классе, должен записываться в классных тетрадях, которые должны содержаться учащимися в порядке и служить отражением всей проделываемой работы.

Спрашивание учащихся должно быть соединено с проверкою выполнения заданных на дом работ. Эти последние работы не должны быть особенно сложны или трудны; цель их — служить для закрепления прорабатываемого материала и приобретения твердых навыков в решении задач. Поэтому задания на дом должны быть невелики по объему и доступны по трудности для решения всем учащимся класса. Но необходимо требовать, чтобы эти задания выполнялись регулярно и тщательно; при спрашивании каждый вызванный ученик должен представить для просмотра преподавателю свою тетрадь с домашними упражнениями. За краткостью времени этот просмотр может быть по необходимости лишь беглым, но один раз в полугодие, а по возможности и чаще, преподаватель должен брать к себе для просмотра тетради всех учеников, тщательно их проверять, исправлять и делать оценку этим работам.

Вторая часть урока посвящается изучению нового материала. Она не должна сводиться, как это имело место в дореволюционной школе, исключительно к объяснениям учителя, носящим лекционный характер и пассивно воспринимаемым учениками. Наоборот, она должна представлять собою живую и деятельную работу преподавателя совместно с классом над изучаемым материалом. Не давая изучаемой теории или правил для действий в готовом виде, преподаватель при помощи ряда целесообразно подобранных вопросов и задач должен достигнуть того, чтобы учащиеся на этом материале сами дошли до требуемых выводов, которые он в заключение лишь формулирует и резюмирует в окончательном виде. Такой прием обучения называется эвристическим; он особенно пригоден для возбуждения интереса к предмету со стороны учеников и проявления их активности и самодеятельности.

§ 8. Учебные книги и пособия.

Изучение проходимого материала на уроке должно представлять его полную и развернутую проработку как с теоретической, так и с практической стороны, и все, что было сделано, должно быть записано, как уже упоминалось, в классных тетрадях учеников. Однако это не исключает пользы и даже необходимости введения определенного учебника, который должен быть у каждого из учеников класса.

Действительно, наличность учебника освобождает преподавателя от диктовки теорем и правил, которая поглощает много времени. Учащиеся в учебнике могут найти в строго систематическом изложении весь тот материал, который в развернутом виде был проработан в классе, и по нему воспроизвести и усвоить изучение с преподавателем. Пользуясь учебником, они могут охватить весь пройденный за определенный период материал и повторить его в систематическом порядке; при этом они усваивают точный и правильный способ выражения математических истин, что имеет весьма важное значение. Для учеников, почему-либо пропустивших урок, учебник дает возможность восполнить пропущенное. Нередко в учебнике учащийся может найти иные варианты изложения преподавателя; это дает полезное разнообразие в трактовке одного и того же материала. Однако преподавателю не следует слишком далеко отклоняться от изложения учебника, и он должен тщательно разметить и указать в учебнике параграфы, содержащие пройденный материал, отмечая в случае необходимости отличие своего изложения от даваемого в книге, а также примеры из учебника, которые должны быть проделаны. Вообще способ пользования учебником учащимся должен быть подробно и тщательно разъяснен.

Существенно важно, чтобы каждый учащийся имел на руках и задачник, из которого преподаватель мог бы давать задачи и примеры для классного и домашнего решения; при этом он должен их тщательно подбирать и располагать в порядке трудности. Как пользоваться задачником, преподаватель тоже должен разъяснить учащимся, задавая задачи и примеры на дом или в классе. В частности, изданные в качестве стабильных пособий по алгебре руководство алгебры А. Киселева, ч. I и II и переработанный сборник задач Шапошникова и Вальцева в общем удовлетворяют требованиям, которые могут быть предъявлены к учебным книгам по алгебре, но сам преподаватель должен быть ознакомлен, по возможности, со всею учебной литературою по алгебре, из которой он может рекомендовать наиболее успевающим ученикам и иные учебники и собрания задач.

§ 9. Учет успеваемости по алгебре.

Учет успеваемости учащихся производится по общей совокупности результатов работы каждого учащегося в классе и дома, но кроме того особым средством для него служат еще классные письменные работы. Они устраиваются после прохождения больших отделов программы, приблизительно раз в месяц, и состоят в решении задач и примеров на пройденные статьи. Предлагаемые при этом вопросы и задачи должны быть средней трудности, не требующие особенной изобретательности и доступные для решения всем учащимся класса; самое решение должно выполняться без помощи учебника или записей в классной тетради и т. п. Классные работы имеют важное значение не только контрольного, но и педагогического свойства; они приучают учащихся к вполне самостоятельному решению задач и вопросов в отведенное для этого время. Необходимо требовать при этом, чтобы эти классные работы выполнялись аккуратно и тщательно; вычисления, в особенности логарифмические, должны располагаться в правильном и стройном порядке, чертежи должны выполняться правильно и тщательно, действия в надлежащих случаях должны быть объяснены и сопровождаться поверкой и исследованием решений и пр.

Для преподавателя, который обязан самым подробным и тщательным образом исправлять классные письменные работы, они представляют весьма ценный материал для суждения о степени усвоения как всем классом, так и отдельными учащимися пройденного отдела. Если большинство работ окажется слабым, то это будет служить указанием, что силы класса были переоценены и что соответствующий материал проработан недостаточно. Особенно часто встречающиеся ошибки, а также наиболее характерные частые промахи и погрешности в решении должны быть разобраны и разъяснены в классе на ближайших занятиях. Те же работы обычно служат для оценки успеваемости учащихся, но им при этом не должно придавать решающего значения, как это делалось в старой школе, и окончательный учет успеваемости каждого ученика должен быть выведен, как уже упоминалось, из совокупности всех имеющихся данных о его работе за весь отчетный период.

§ 10. Обозрение программы алгебры в средней школе.

Часть I. По утвержденной программе для средней школы изучение алгебры начинается в 5-м классе, причем на этом году даются лишь самые первоначальные сведения о буквенной символике и ее применении в арифметике и геометрии, которые составляют главное содержание программы этого года. Таким образом, прохождение алгебраических сведений в программе 5-го класса носит пропедевтический характер.

Систематическое изучение алгебры начинается в 6-м классе. Здесь получает развитие понятие о числе, вынесенное из арифметики, знакомством с отрицательными числами и общим понятием об относительных числах и действиях над ними; пополняются сведения из области буквенной символики изучением действий над целыми одночленами и многочленами вплоть до формул сокращенного умножения включительно, а также с одночленными дробями; наконец, учащиеся знакомятся с понятием об уравнении, его свойствах и способах решения уравнения первой степени с одним неизвестным, а также системы двух и трех уравнений с числовыми коэфициентами. Отметим, что в программу помещено и решение простейших буквенных уравнений; однако ввиду того, что для этого сведений у учащихся вследствие малого знакомства с алгебраическими дробями и разложением алгебраических выражений на множители явно недостаточно, его лучше перенести на следующий год обучения. Кроме того в программе этого и следующих лет нет упоминания о пропорциях в алгебре; этот пропуск должен быть пополнен преподавателем.

В курсе 7-го класса продолжается и заканчивается изучение действий над многочленами и алгебраическими многочленными дробями, что делает возможным решение введенных здесь уравнений первой степени с буквенными коэфициентами. Кроме того здесь учащиеся знакомятся со способами точного и приближенного извлечения квадратного корня и с решением численных квадратных уравнений.

Ввиду того что в этом году заканчивается изучение уравнений первой степени, нам кажется необходимым ввести в программу этого же класса и понятие о неравенствах первой степени и их решении, которое, очевидно по недоразумению, отнесено к 9-му классу, хотя надобность в понятии о неравенстве может представиться уже и в курсе алгебры 6-го класса, а также и в геометрии и в физике. К алгебре имеет отношение введенное в программу геометрии этого же года построение простейших алгебраических выражений.

Программа по алгебре 6-го и 7-го классов представляет определенный круг сведений, составляющих первую часть курса. Этой части соответствуют стабильный учебник А. Киселева, Алгебра, ч. I и сборник алгебраических задач А. Шапошникова и Н. Вальцова, ч. I.

Часть II. Вторая часть программы алгебры содержит сведения, проходимые в 8-м и 9-м классах. В 8-м классе отдел буквенной символики и алгебраических преобразований пополняется тождественными преобразованиями со степенями и корнями. Понятие о числе расширяется сведениями об иррациональных числах и действиях над ними и понятием о мнимом числе. Отдел об уравнениях пополняется общей теорией квадратных уравнений со способами их решения и исследованием, а также сведениями о системах уравнений второй степени и об уравнениях высших степеней, приводящихся к квадратным.

Новым вводимым понятием здесь является понятие о функции, причем рассматриваются способы представления функции, в особенности графический способ, и детально изучаются линейная функция, функция второй степени и функция, выражающая обратную пропорциональность.

Отметим, что о графиках функции линейной и квадратной упоминается еще в программах 6-го года обучения, но там они явно не могут иметь значения; поэтому правильно, что в первую часть стабильного учебника А. Киселева они не включены.

В программе 9-го класса отдел об алгебраических преобразованиях и буквенной символике заключает в себе количества с нулевым, отрицательными и дробными показателями и действия над ними, прогрессии, теорию соединений и бином Ньютона. Рекомендуется изучение непрерывных дробей, но едва ли на него останется время. Изучение понятия о числе заканчивается изучением чисел мнимых и комплексных и действий над ними. Понятие об уравнениях дополняется исследованием решения одного уравнения с одним неизвестным первой и второй степени и систем двух линейных уравнений, а также некоторыми сведениями об уравнениях высших степеней и изучением неопределенных уравнений. Наконец, понятие о функции расширяется изучением логарифмической и показательной функций и применением логарифмов к вычислениям. В общем эти сведения из программ 8-го и 9-го классов составляют вторую часть курса, которой соответствуют вторая часть стабильного учебника и вторая часть сборника задач.

Общее обозрение программы показывает, что основными математическими понятиями, изучаемыми в курсе алгебры средней школы, являются понятия о числе, об уравнении и о функции; средствами для их изучения являются алгебраическая символика и теория тождественных преобразований.

§ 11. Определения предмета алгебры.

Перечисленные в рассмотренной программе алгебры советской средней школы отделы входят в программу математики также под именем „алгебры" в ряде других стран, например во Франции и Англии. Но в некоторых других странах, например в Германии и Австрии, тот же материал носит название „арифметики". Отсюда уже видна трудность дать точное определение предмету алгебры. Эта трудность имеет место и по существу дела, так как провести строго определенную границу, с одной стороны, между алгеброй и арифметикой, с другой — между алгеброй и высшим анализом, оказывается невозможным. Сверх того, содержание курса школьной алгебры неоднократно подвергалось изменению; так, понятие о функции было введено в него уже в текущем XX в. Поэтому определения алгебры, которые разные авторы давали этой науке в начале своих учебников, были обычно неполны и неудовлетворительны; таковы, например, определения: „Наука, занимающаяся составлением общих решений различных задач и вообще решением вопросов относительно чисел в общем виде, называется алгеброй" („Руководство алгебры" А. Малинина и К. Буренина, 1908); „Алгебра учит рассуждать о величинах. При этом она изображает их буквами и обозначает особыми знаками зависимость между ними" („Начальная алгебра" проф. А. Давыдова, 1897); „Алгебра прежде всего указывает способы, посредством которых одно алгебраическое выражение может быть преобразовано в другое, тождественное ему. О другом назначении алгебры будет сказано впоследствии" („Элементарная алгебра" А. Киселева, 1916; впоследствии же сказано, что „алгебра имеет целью указать способы решения уже составленных уравнений"). Ясно, что все эти определения не соответствуют установленному материалу элементарной алгебры. Не более удачны и определения, даваемые алгебре в некоторых иностранных руководствах; например: „Алгебра есть ветвь математики, в которой вместо чисел употребляются символы" (The new explicit algebra" by James I. O'Dea, 1906); „Алгебра имеет целью сокращать, упрощать и в особенности обобщать решение вопросов, которые могут быть предложены относительно чисел. Чтобы достигнуть этой цели, алгебра употребляет буквы и знаки" („Traité d'algèbre" par I. Bertrand, 1904). Эти определения, помещаемые в самом начале курса, совершенно не охватывая всего содержания алгебры, в то же время ничего не говорят учащемуся, приступающему к ее изучению и еще не знакомому с предметом. Но начинающим этих определений давать и не нужно, а прямо следует переходить к изучению предмета по существу, приводя его в органическую связь с арифметикой. Поэтому в новейших курсах по алгебре определения ее не дается. Учащимся, которые, приступая к ее изучению, все же захотели бы узнать, что это за наука, можно сказать, что ее целью является расширение тех сведений о числах, которые они имеют из арифметики, и приложение этих сведений к решению задач, так как, действительно, этой цели служит и буквенная символика, и развитие понятия о числе, и понятия об уравнении и о функции. Учащимся же, которые уже изучили элементарную алгебру, можно сообщить то определение алгебры, которое дается в науке.

Это определение говорит, что одной из задач высшей алгебры является изучение целых рациональных алгебраических функций. Такое определение полностью не охватывает содержания высшей алгебры, но до известной степени сможет удовлетворить учащихся. В элементарной же алгебре под него подходит только изучение линейной и квадратной функций; сверх того дается понятие о показательной и *логарифмической* функциях. Весь же остальной материал элементарной алгебры наука относит теперь к области арифметики.

ГЛАВА III.

КРАТКИЙ ИСТОРИЧЕСКИЙ ОЧЕРК РАЗВИТИЯ ОСНОВНЫХ ПОНЯТИЙ АЛГЕБРЫ.

§ 12. Древнейший период.

Как было упомянуто во введении, для успешного преподавания всякой науки имеет важное значение *знакомство преподавателя с историей* ее развития. Оно позволяет ему, с одной стороны, установить правильный взгляд на естественную последовательность излагаемого учащимся материала и способы его изложения, а с другой — дает возможность оживлять преподавание и поднимать к нему интерес у учеников, сообщая им факты из области истории науки. Поэтому мы в настоящей главе и рассмотрим вкратце историю развития тех основных понятий алгебры, которые изучаются в курсе алгебры средней школы, т. е. понятий о числе, об уравнении и о функции.

Обычно принято думать, что создание алгебры как особой ветви математических знаний принадлежит арабам, которые и дали название этой науке. Однако более точные исследования показывают, что такое мнение неправильно и что зачатки тех сведений, которые мы теперь относим к алгебре, можно проследить уже в весьма отдаленные времена, причем они еще не отделяются от арифметики и геометрии.

Так, в дошедших до нас древнейших письменных памятниках египетской математической науки, именно в папирусе Райнда, а также в недавно расшифрованном папирусе московского Музея изящных искусств [1]), написанных за 1700—2000 лет до нашей эры, мы находим вопросы и задачи, относящиеся, по современной терминологии, к составлению и решению уравнений первой степени с одним неизвестным. Там же и в других папирусах имеются задачи и примеры, требующие возведения чисел в квадрат и извлечения из них квадратного корня, а также на арифметическую и геометрическую прогрессии. В не менее древних халдейских (ассиро-вавилонских) математических памятниках, открытых во второй половине XIX в., найдены таблицы квадратов и кубов натуральных чисел и квадратных и кубических корней, примеры на разложение чисел на сумму квадратов и кубов, а также задачи на пропорции и прогрессии. В последнее же время оказалось, что халдеи могли решать не только уравнения первой степени, но и квадратные и даже системы квадратных уравнений [2]).

Весьма замечательны результаты, достигнутые в области алгебры греческими учеными, хотя они разрабатывали главным образом геометрию.

---

[1]) См. проф. И. И. Чистяков, О новейших исследованиях в области древнеегипетской математики, „Математическое образование", 1928, № 4.

[2]) См „Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik", B. I., 1929; B. II, 1930.

Так, в школе знаменитого греческого философа Пифагора (VI в. до н. э.) разрабатывалось учение о пропорциях и о прогрессиях: арифметической, геометрической и гармонической, о разных видах целых чисел: совершенных, дружественных, фигурных и др., а также были открыты несоизмеримые числа.

В упомянутых уже „Началах" Евклида во II книге развито учение об алгебраических количествах и о действиях над ними в своеобразной геометрической форме. Так, формулы $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a+b)c = ac + bc$ и т. п. доказываются геометрически. Там же дается решение при помощи геометрического построения некоторых уравнений первой и второй степеней. Такой же способ решения был применен греческими учеными к решению знаменитых задач об удвоении куба и трисекции угла, приводящих к уравнениям высших степеней. Наконец, у Диофанта, греческого ученого IV в., мы находим зачатки учения об отрицательных числах, попытки обозначать числа буквами, а действия над ними — особыми знаками, и решение множества отдельных уравнений — определенных и, в особенности, неопределенных как первой, так и более высоких степеней, и притом нередко весьма большой трудности.

Индусы, наука которых развивалась отчасти под влиянием греческих ученых, в начале средних веков самостоятельно выработали приемы для решения уравнений первой и второй степеней, а также ввели в употребление иррациональные и отрицательные числа, которыми греческие ученые не решались пользоваться.

Таким образом, время возникновения и первоначального развития алгебры отодвигается в глубь веков, и корни алгебраических знаний мы должны искать в донаучном периоде развития математики. Исследования же, относящиеся к этому вопросу, показывают, что и арифметика и алгебра развились, как из зерна, из одного общего начала, именно из попыток определения неизвестного числа по каким-либо известным числам. Как требования практической жизни, так и обусловленное ими стремление человека к познанию природы постоянно приводили его к вопросам количественного характера. Эти вопросы могут быть двух родов: или искомое число требует для своего нахождения выполнения каких-либо заранее известных действий над данными числами, например сложения, умножения и пр., или же эти действия неясны приступающему к решению задачи и их еще необходимо предварительно определить.

В первом случае задача сводится к выработке наиболее удобных способов для производства действий над числами. Она и повела к возникновению арифметики в тесном смысле слова, к изобретению десятичной системы счисления и индусской системы письменной нумерации, к созданию правил для производства арифметических действий над целыми и дробными числами, а в более позднюю эпоху — к введению десятичных дробей, способам извлечения квадратного и кубического корней, изобретению логарифмов, введению метрической системы мер и пр. Все эти вопросы многовековой работой над ними человечества были разрешены и постепенно привели к созданию современной арифметики. Но когда средства для вычисления в большей или меньшей степени были выработаны, решение задач, в которых ход действий был заранее ясен, могло производиться синтетическим путем, идя от известных чисел к неизвестным искомым, и не представляло уже затруднений.

Гораздо более трудной является вторая задача, когда действия, необходимые для нахождения неизвестного числа по данным, заранее неизвестны решающему задачу и их нужно еще выяснить. Здесь неизбежно пользование аналитическим методом, т. е. переходом от неизвестного к известному; из решения этой второй проблемы и выросла постепенно современная алгебра, справедливо иногда называемая еще алгебраическим анализом.

Изучение истории этого вопроса показывает, что уже в донаучный период люди для решения подобных задач стремились, хотя и бессознательно, применять методы, аналогичные современному составлению и решению уравнений. Так, и в вышеупомянутых египетских папирусах — в задачах об определении неизвестного числа („хау", что означает кучу), и в древнеславянских рукописях,— например при решении известной старинной задачи о стаде летящих гусей и т. п., — мы в скрытой форме имеем составление и решение уравнений. При этом рассмотрение применявшихся приемов для решения показывает, что древнейшим способом для решения составленных уравнений был метод попыток. Он состоял в том, что решающие задачу старались найти, или, вернее, угадать неизвестное число просто подбором и подстановкою в условие задачи различных чисел. Очевидно, что метод попыток может быть применяем при решении всякой задачи и при несложном условии и малых числах может довольно скоро привести к решению.

Однако в более сложных случаях для нахождения подходящего числа может потребоваться весьма большое число попыток, и этот метод может вовсе не привести к желанному результату. Поэтому постепенно возникло естественное стремление сократить число делаемых попыток и вообще урегулировать применение этого метода, для чего естественно было обратить внимание на зависимость результата подстановки как от испытываемых чисел, так и от данных в условии задачи. Первая зависимость, особенно при решении уравнений первой степени, часто оказывается прямою пропорциональностью, откуда открывается возможность получить верный ответ на задачу определенным изменением подставляемого числа. Отсюда получили начало методы решения задач при помощи так называемого предположения. Так, в упомянутом папирусе Райнда для решения задачи: „Найти кучу, которая вместе со своею седьмою частью составляет 19", т. е., по современному обозначению, для решения уравнения $x+\frac{x}{7}=19$, рекомендуется испробовать $x=7$; подставляя, мы получим: $7+1=8$, а нужно 19, следовательно взятое число 7 надо увеличить в отношении $19:8$, получим: $x=\frac{7\cdot 19}{8}=16\frac{5}{8}$. Впоследствии было замечено, что наиболее просто ответ получается, если исходить от подстановки вместо неизвестного — единицы. Так, в Кахунском папирусе предлагается задача: „Разложить квадрат, площадь которого 100 кв. ед., на сумму площадей двух квадратов, стороны которых относятся, как $1:\frac{3}{4}$". Для решения рекомендуется сторону одного квадрата принять за единицу, тогда сторона другого будет $\frac{3}{4}$; сумма их площадей равна $1+\frac{9}{16}=\frac{25}{16}$, а сторона соответствующего квадрата равна

$\sqrt{\frac{25}{16}}=\frac{5}{4}$. Но так как сторона данного квадрата не $\frac{5}{4}$, а 10, то сторону, принятую нами за единицу, надо увеличить в отношении $10:\frac{5}{4}$; получим 8; итак, сторона одного квадрата 8, а другого $8\cdot\frac{3}{4}=6$. Таким принятием неизвестного за 1 решаются, как известно, и теперь некоторые арифметические задачи, например „на бассейны"; ясно, что этот способ не отличается по существу от составления уравнения из условий задачи с обозначением неизвестного вместо x через 1. Наблюдение же зависимости результата подстановки от чисел, данных в условии задачи, повело к выработке способов определения неизвестного числа только через данные числа, т. е. в функции коэфициентов уравнения. Такими способами являются употребляемые ныне перенесение членов из одной части уравнения в другую, освобождение от знаменателя и пр. Подобные приемы были отчасти известны еще Диофанту, но достигли своего полного развития у индусских и в особенности у арабских математиков к IX в. С этих пор метод попыток при решении уравнений постепенно вышел из употребления, но он остается и до настоящего времени в некоторых арифметических действиях, например при определении цифры частного в случае деления многозначного числа на многозначное, при разложении чисел на множители, при извлечении квадратных и кубических корней и пр.; он же лежит и в основании способов приближенного вычисления корней алгебраических уравнений высших степеней.

§ 13. Отделение алгебры от арифметики.

Моментом завершения упомянутой разработки индусскими и арабскими математиками нормальных приемов для решения уравнений можно считать появление в 825 г. сочинения арабского ученого Магомета-ибн-Муза Альхуаризми (т. е. Магомета из Хорезмы, или теперешней Хивы) под заглавием: „Альджебр уаль мукабала", что буквально означает восстановление и противоположение. Первым термином „альджебр" автор обозначает перенесение отрицательных членов уравнения в другую его часть, чтобы сделать их положительными, как это всегда делалось арабскими учеными; второй термин „мукабала" означал приведение подобных членов уравнения, имеющих противоположные знаки, в один член. Так, если имеем уравнение

$$x^2-3x=5x+20,$$

то с помощью „альджебр" мы можем придать ему вид

$$x^2=5x+3x+20,$$

а с помощью „мукабала"

$$x^2=8x+20.$$

От слова „альджебр" и получила свое название наука „алгебра". Заметим еще, что от прозвища „Альхуаризми" произошел термин „алгоритм", или алгорифм, означающий порядок или схему какого-либо вычисления, например алгорифм нахождения общего наибольшего делителя двух чисел, алгорифм разложения в ряд функции и т. п. В алгебре Альхуаризми даются способы той эпохи для решения уравнений первой и второй степеней. Предварительно же указываются правила для сложения, вычитания и умножения выражений, содержащих неизвестную величину или квадратный корень из нее, и дается правило знаков при умножении. Решение квадратных уравнений, а также правила, относящиеся к сложению и вычитанию количеств, поясняются на геометрических чертежах. Рассматриваемая книга Альхуаризми содержит и современные ему сведения по геометрии.

Одновременно с алгеброй Магомет Альхуаризми написал книгу, специально посвященную арифметике, в которой он излагает принцип десятичной письменной системы индусской нумерации (благодаря чему она стáла неправильно называться арабской), дает правила для производства действий над числами и указывает различные способы для решения арифметических задач. Поэтому в названных сочинениях Альхуаризми мы можем видеть момент отделения алгебры от арифметики, с которой она до тех пор была в неразрывной связи. И действительно, далее алгебра получает самостоятельное развитие, которое совершилось уже у европейских народов.

В 1140 и 1150 гг. алгебра Альхуаризми была переведена на латинский язык.

В 1202 г. ученый Леонард Пизанский в своей книге „Об абаке" перенес заимствованные у арабов сведения по алгебре вместе с десятичной индусской системой письменной нумерации в Европу, причем дополнил их собственными исследованиями. В 1494 г. была издана первая печатная книга по математике, составленная Лукою Пачиоло *и содержащая полное изложение* сведений по математике того времени, в том числе и по алгебре, причем автор прибавил много своих исследований о решении уравнений первой и второй степеней и об уравнениях высших степеней, приводимых к квадратным. Книга Пачиоло имела большое влияние на развитие математики сперва в Италии, где учеными Тартальи, Карданом, Феррари и др. в XVI в. были найдены способы для решения уравнений третьей и четвертой степеней, а потом и в других европейских странах. Приведение сведений из области элементарной алгебры в стройную систему впервые было сделано в Италии Рафаэлем Бомбелли; в направлении углубления и разработки уже найденного материала много сделали Виета (XVI в.) и, особенно, Декарт. Творцы анализа бесконечно малых — Ньютон и Лейбниц — также оказали громадные услуги и развитию алгебры. Моментом завершения разработки элементарной алгебры в XVIII в. было появление в 1770 г. „Алгебры" Эйлера, которая послужила образцом для позднейших учебников, вплоть до современных нам. В XIX в. появилось множество учебников алгебры; классическим между ними является руководство элементарной алгебры Ж. Бертрана, в 2 ч., переведенное и на русский язык. В XX в. особенностью новых учебников элементарной алгебры является более четкое изучение понятия о числе и введение понятия о функции.

§ 14. Развитие понятия о числе.

Необходимость отыскания неизвестного числа с помощью данных ... повела, как мы видели, к возникновению понятия об ... неизбежно должна была привести ... Действительно.

уже задача о делении одного числа на другое, [illegible] нию уравнения вида $ax = b$, постоянно встречающаяся на практике, не могла быть решена с помощью целых чисел, когда делимое не является кратным делителя, а требует введения новых, дробных чисел. Поэтому дробные числа весьма рано вошли в математику, причем для них были выработаны способы их представления и производства над ними действий. Эти способы первоначально были весьма разнообразны; так, египтяне употребляли дроби с числителем, равным единице (аликвотные дроби), халдеи пользовались шестидесятиричными дробями, римляне — дробями с знаменателем 12; наконец, индусы положили начало употреблению простых дробей в современной их форме, которая была позже усвоена и европейскими народами, разработавшими затем еще систему десятичных дробей.

Гораздо медленнее развивалось понятие о числах *отрицательных*. Получая их в качестве корней при решении алгебраических уравнений, древнегреческие ученые, в том числе даже Диофант, отбрасывали их как невозможные. Затруднением для принятия их за настоящие решения уравнений было отсутствие способов для их реального представления и истолкования. Такая интерпретация была найдена индусскими математиками, которые стали толковать их как долг, а обычные числа (положительные) как капитал. С этих пор отрицательные решения уже не отбрасываются индусскими учеными, хотя математик Бхаскара (XII в.) все же говорит, что „люди не одобряют абсолютных отрицательных чисел". Но позже арабы совершенно не признавали отрицательных чисел; отвергали их и европейские ученые вплоть до XVI в., когда понятие об этих числах стало все более утверждаться в математике и было совершенно определенно проведено в „Арифметике" Михаила Штифеля (1544 г.). Однако полное право гражданства отрицательные числа получили со времен Декарта (1637 г. — издание аналитической геометрии), который дал им конкретное и наглядное истолкование при помощи отрезков, откладываемых на прямой в противоположном направлении по отношению к отрезкам, выражающим положительные числа. Громадный успех идей Декарта в области аналитической геометрии повел к признанию отрицательных чисел равноправными с положительными и к выработке правил действий над ними, которая завершилась уже в XVIII в. в „Алгебре" Эйлера. Однако строгая научная теория этих чисел и действий над ними была выработана в XIX в.

Иррациональные числа, как уже было упомянуто, были открыты много раньше отрицательных, а именно еще в школе Пифагора в VI в. до н. э. На эти числа пифагорийцы натолкнулись при попытке вычисления диагонали квадрата по его стороне, что равносильно решению уравнения $x^2 = 2$, а также и некоторых других, несоизмеримых с единицею отрезков. Однако, не найдя возможности выразить такие отрезки ни целыми, ни дробными числами, греческие ученые не признали их за числа новой природы, а лишь за особые свойства непрерывных величин. С этой точки зрения греческие ученые отделяли изучение непрерывно изменяющихся величин, каковы отрезки, от изучения целых и дробных чисел, изменяющихся прерывно. Пользуясь геометрическим истолкованием квадратных корней, Евклид в V и в X книгах своих „Начал" геометрии дал весьма замечательную теорию иррациональных чисел. В то же время греки умели приближенно вычислять квадратные корни из чисел, и в особенности Архимед (*III в. до н. э.*) *вычислял их* с большой степенью точности. Индусы и арабы, в том числе и Аль-хуаризми, уже смотрели на иррациональные числа как на числа нового вида, но, не задаваясь целью глубоко изучить их свойства, довольствовались их приближенным вычислением и производили над ними приближенные действия. Арабы дали этим числам название: „глухие" числа, и оно было принято затем европейскими учеными, а в английском языке осталось до сих пор. Действия над иррациональными числами постепенно были выработаны к концу XVIII в. и, в частности, вошли в „Алгебру" Эйлера, но строгая *теория их принадлежит уже концу* XIX в.

Следующим обобщением понятия о числе явилось понятие о числах *мнимых*, или, точнее, комплексных. Эти числа, как известно, появляются при решении квадратных уравнений, в частности при извлечении квадратного корня из отрицательного числа. Мнимые числа встречались при решении квадратных уравнений уже Диофанту, например при решении задачи: „Найти стороны прямоугольного треугольника, периметр которого 12, а площадь 7", приводящейся к квадратному уравнению с мнимыми корнями. Диофант указывает, что такое уравнение невозможно, не делая, однако, общего вывода о мнимых корнях. Индусские ученые более определенно высказывались о подобных решениях как о невозможных, говоря, что отрицательное число не может быть квадратом никакого числа. Так же смотрели на мнимые числа арабские и европейские ученые до XVIII в., которые считали уравнения с мнимыми корнями невозможными. Первым ученым, занявшимся изучением мнимых количеств, был Кардан, который стал исследовать их в связи с решением уравнений (1545 г.), причем указал, что, будучи „фиктивными", они все же уравнению удовлетворяют; так, например, решая задачу: „Разделить 10 на две части, произведение которых равно 40", мы получаем корни: $x_1 = 5 + \sqrt{-15}$ и $x_2 = 5 - \sqrt{-15}$, произведение которых действительно равно 40. Затем этими числами занимались почти все великие ученые XVII и XVIII вв., однако понятие сущности их медленно подвигалось вперед. Тем не менее ученые пользовались ими с большим успехом при исследовании многих вопросов высшей алгебры и анализа. Так, Жирар (XVII в.) высказал теорему, доказанную вполне лишь в XIX в., о том, что если принимать во внимание мнимые корни, то всякое алгебраическое уравнение имеет столько корней, сколько единиц в его степени. Эйлер, пользуясь мнимыми числами, установил знаменитое соотношение между показательными и тригонометрическими функциями: $e^{xi} = \cos x + i \sin x$.

Он же дал и первое формальное изложение производства действий над этими числами в своем введении в анализ. Но, подобно отрицательным числам, мнимые числа долго не получали распространения отчасти потому, что не было найдено для них конкретного и наглядного представления. Такая геометрическая интерпретация их с помощью векторов на плоскости была дана разными учеными в конце XVIII и начале XIX вв., в частности Арганом и Гауссом; после этого комплексные числа получили доминирующее значение в высшей алгебре и в анализе, где легли в основу теории функций. Строгая аналитическая теория комплексных чисел была дана в 1837 г. Гамильтоном; геометрическое представление их повело к созданию в XX в. общей теории векторов.

§ 15. Развитие алгебраической символики.

Развитие способов решения уравнений, эволюция понятия о числе, а также решение вопросов, связанных с различными отношениями между числами, необходимо должны были повести к изобретению знаков и способов для сокращенного обозначения чисел и действий. И действительно, уже в египетских папирусах мы видим знаки для обозначения действий сложения, вычитания и равенства чисел, а также специальный иероглиф для обозначения неизвестного числа (куча, или „хау"). Диофант употреблял особый знак для вычитания; кроме того, обозначал первыми буквами соответствующих греческих слов названия степеней неизвестного количества: первая степень, квадрат, куб и т. д. до x^6; он же употреблял особую букву для обозначения равенства. Индусы обозначали особым значком отрицательные числа и пользовались некоторыми знаками для обозначения действий. Но арабы не воспользовались никакими способами сокращения и символических обозначений, а все действия излагали исключительно словами, что вело к чрезвычайно длинному изложению материала. Леонард Пизанский и другие европейские ученые, заимствовавшие свои алгебраические сведения от арабов, первое время тоже пользовались чисто словесным изложением алгебраических действий; однако постепенно необходимость символических обозначений для количества и действий над ними стала совершенно неизбежной, и они постепенно вошли в алгебру. Так, были введены знаки для обозначения шести алгебраических действий: сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня, а в конце XVII в. появились и буквенные обозначения для чисел. Заслуга введения букв в алгебру принадлежит французскому ученому Виета, который в своей книге, вышедшей в 1591 г., ввел для обозначения неизвестных чисел гласные буквы A, E, I ..., а для обозначения известных чисел — согласные буквы B, C, D и т. д.; кроме того он пользовался и знаками для действий. Но окончательно буквенная символика утвердилась в алгебре благодаря Декарту, который с ее помощью и посредством введенного им метода координат создал аналитическую геометрию, а кроме того сделал ряд блестящих открытий в высшей алгебре. Со времени Декарта неизвестные количества принято обозначать последними буквами алфавита — x, y, z ..., а известные первыми буквами — a, b, c .... Введение символических обозначений для чисел, которые предполагаются переменными (под a, b, x и т. д. мы можем понимать любые числа), и особых знаков — для действий над ними с необходимостью вытекало из существа дела и имело колоссальную важность для алгебры, так как дало ей могучее орудие для исследования — общий язык формул, позволяющий кратко и ясно выражать всевозможные соотношения между числами. Этим орудием затем стали пользоваться и другие ветви математики.

§ 16. Понятие о функции.

Позднее других основных математических понятий было введено и развилось понятие о функции. Явно оно появилось лишь в конце XVII в., в связи с развитием анализа бесконечно малых; термин „функция" впервые был применен одним из творцов диференциального исчисления, Лейбницем, и первоначально употреблялся в смысле просто степени переменной величины. Позже понятие о функции употреблялось в смысле выражения, составленного из некоторой переменной величины *и нескольких постоянных.* Первое строго научное определение этого понятия было дано Эйлером во „Введении в анализ бесконечно малых" в 1748 г., согласно которому функция считается данной, если указан конечный или бесконечный ряд арифметических действий, которые надо произвести над переменным, чтобы вычислить значение функции. Впоследствии Дирихле дал более общее определение функции, по которому y называется функцией от x, если каждому данному значению x соответствует определенное значение y.

Понятие функции сыграло важнейшую роль в *истории развития* алгебры и анализа. Однако и это понятие получило свое начало в связи с определением неизвестного числа, т. е. с решением уравнений. Действительно, как уже было упомянуто, решая уравнения методом попыток, люди знакомились с прямою пропорциональностью и другими видами зависимости величин. Обычные приемы решения уравнений первой и второй степеней суть не что иное как разыскание неизвестного числа в функции от данных количеств. Начало графическому представлению функций положили греки, представляя числа с помощью отрезков прямой. Метод координат Декарта, введенный им для изучения свойств кривых линий с помощью алгебры, оказался могущественным средством и для представления и изучения функций с помощью изображающих их кривых, т. е. графиков. Но в алгебре вообще предметом исследования являются только целые рациональные алгебраические функции, т. е. выражаемые уравнениями вида:

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ \dots\ +a_{n-1}x+a_n,$$

где a_0, a_1, ..., a_n — целые коэфициенты. В элементарную же алгебру входит только изучение линейной и квадратной функций, т. е. функции вида $y=ax+b$ и $y=ax^2+bx+c$, а из трансцендентных функций — *показательной и логарифмической.* Введение изучения понятия о функции в программу средней школы последовало в самом начале текущего столетия: во Франции — в 1902 г., в других странах — еще позже.

§ 17. Общие выводы.

Изложенный исторический очерк позволяет сделать некоторые выводы относительно преподавания алгебры в школе. Так, в дореволюционное время это преподавание начиналось после изучения всей арифметики или при прохождении последних ее отделов, но без всякой связи с арифметикой. При этом указывалось, что предметом алгебры является составление общих решений однотипных арифметических задач и что главным отличием ее от арифметики является пользование буквенными обозначениями для чисел. Поэтому в дальнейшем шло изложение действий над целыми и дробными буквенными выражениями, учение об отрицательных числах, всевозможные тождественные преобразования алгебраических выражений и уже после всего этого — уравнения первой степени с одним и многими неизвестными. Ясно, что такое начало и расположение материала не соответствует историческому ходу развития алгебры, которое происходило на основе решения жизненных задач в тесном единении с арифметикой и в связи с геометрией и в котором центральную роль играло понятие об уравнении. Наоборот, является естественным и полезным уже при прохождении арифметики в начальной школе упражнять учащихся наряду с решением примеров и задач вычислительного характера в решении вопросов с конкретным содержанием, требующих нахождения неизвестного числа путем некоторого анализа данных задачи, а также в решении числовых примеров, содержащих неизвестное x.

Такие примеры и задачи должны решаться учащимися по соображению, на основании устанавливаемой зависимости между данными и искомыми числами, а также на основании соотношений, существующих между числами, входящими в то или иное арифметическое действие. И в дальнейшем изучение всех проходимых отделов алгебры должно сопровождаться решением подходящих типов уравнений, сперва по соображению, а затем уже на основании выработанных и установленных правил.

Подобно уравнениям, в курсе арифметики могут и должны найти место и буквенные обозначения чисел. Введение их с пользою может быть применено к выражению основных свойств арифметических действий, каковы: переместительность и сочетательность сложения; переместительность, сочетательность и распределительность умножения, а также к выводу правил для производства действий, например над дробными числами, к доказательству основного свойства членов геометрической пропорции и пр. На буквах же легко могут быть выражены и удержаны учащимися в памяти некоторые геометрические формулы и теоремы, например о площадях прямолинейных фигур. Наконец, алгебраическими формулами могут быть выражены решения однотипных арифметических задач.

При решении задач на определение неизвестного числа представляется естественным и возможным ознакомить учащихся и с отрицательными числами. При этом необходимо выяснить, что введение их не носит какого-нибудь искусственного характера, но является естественным и необходимым для решения некоторых задач практического характера, например для выражения итогов прихода и расхода и т. п., на которые было бы невозможно дать ответ при помощи ранее введенных, т. е. обыкновенных чисел. Наряду с этим следует выяснить необходимость появления отрицательных чисел при решении некоторых вопросов геометрического содержания, например о движении точки в двух направлениях по прямой линии, откуда вытекает известный способ геометрического представления относительных чисел. Подобный же конкретный характер должно носить и выяснение действий над относительными числами с помощью целесообразно подобранных задач.

Что касается понятия об иррациональном (несоизмеримом) числе, то первоначально оно может быть тоже связано с решением арифметической задачи — о разложении числа, не являющегося точным квадратом, на два равных множителя, и геометрической — о нахождении стороны квадрата, площадь которого не выражается точным квадратом. Иррациональное число явится тогда как результат извлечения квадратного корня из неточного квадрата. В дальнейшем учащиеся могут ознакомиться с другими видами иррациональных чисел и способами производства действий над ними. Мнимые числа лишь весьма мало могут быть затронуты в элементарной алгебре, именно при прохождении квадратных уравнений, но желательно более глубокое ознакомление с ними учащихся после прохождения тригонометрии с интерпретацией их с помощью векторов и с указанием на связь их с вопросом о существовании корня у алгебраического уравнения и о числе корней.

Как и другие основные математические понятия, и понятие о функции может быть введено в преподавание довольно рано и конкретно — еще в начальном курсе арифметики, в связи с измерением каких-нибудь изменяющихся величин и записью получаемых результатов в таблицу; к этому могут быть присоединены наглядные представления результатов с помощью диаграмм. Далее, в систематическом курсе арифметики имеются задачи на прямую и обратную пропорциональность величин, что может уже быть представлено с помощью графиков. В связи с прохождением уравнений первой степени может быть аналитически и графически изучена линейная функция, а в связи с квадратными уравнениями — трехчлен второй степени и график этой функции. В дальнейшем понятие о функции завершается знакомством с функциями показательной и логарифмической.

ГЛАВА IV.

НАЧАЛЬНОЕ ОБУЧЕНИЕ АЛГЕБРЕ.

§ 18. Методологические сведения.

По программам, утвержденным для средней школы, обучение алгебре начинается в 5-м классе, причем учащиеся знакомятся только с буквенной символикой алгебры. Это знакомство применяется в проходимом в том же классе систематическом курсе арифметики, которая является главным предметом обучения. Кроме того в том же классе изучается начальный курс геометрии. Упомянутые сведения из алгебры поставлены в самом конце программы 5-го класса, но ясно, что они должны проходиться одновременно с соответствующими статьями из арифметики, для которых они должны давать буквенное выражение. Такое одновременное прохождение алгебры и арифметики является, как мы видели из исторического очерка развития алгебры, наиболее правильным и нормальным.

Изучаемые при этом сведения теоретического характера из области арифметики, по программе, должны явиться основанием для вывода правил производства действий над целыми и дробными числами, но не менее важное значение они имеют и для дальнейшего изучения алгебры. Поэтому преподавателю совершенно необходимо иметь знакомство с теми основами арифметики, которые в дальнейшем являются и основанием для развития всего алгебраического учения. Ввиду этого мы здесь вкратце приведем характеристику основных понятий и действий, развиваемых в арифметике.

В основании не только арифметики, но и всей математики вообще лежит понятие о целом числе. Это понятие в настоящее время рассматривается либо как понятие количественное (числа кардинальные), либо как порядковое (числа ординальные). Согласно первому взгляду понятие о целом числе связывается с понятием о счете предметов. Счет же, или счисление, понимается как мыслительный процесс, при помощи которого мы даем себе ответ на вопрос, сколько предметов в каком-нибудь собрании их, или, как принято говорить, во множестве их.

Как все познавательные процессы, он носит относительный характер. „Сосчитать предметы, — говорится в большой современной энциклопедии математических наук [1]), — значит: понимая их как однородные, мысленно соединить их вместе и привести их в однозначное соответствие с другою группою элементов, которую мы считаем в количественном отношении известной для себя и однородной; результатом такого процесса является число". Так, мы можем сосчитать людей в каком-либо собрании по пальцам, приводя в соответствие первое лицо — с первым пальцем, второе — со вторым и т. д. Пусть людей оказалось столько, сколько пальцев на одной руке, тогда мы знаем их количество; полученный результат есть число, ему можно дать название на разных языках разное: пять, fünf, cinq и т. п., или обозначение: V, 5 и пр. Полученные таким образом количественные числа: один, два, три,... могут быть затем употреблены и для распределения предметов какого-нибудь собрания в определенном порядке: ими можно, например, перенумеровать дома, улицы, страницы книги и пр.; последний номер будет одновременно указывать количество всех предметов.

Согласно другому взгляду, число, наоборот, есть понятие порядкового свойства. По этому воззрению, нашему сознанию свойственно понятие о последовательности во времени, идею которого дает нам последовательность наблюдаемых событий во внешнем мире. Числа с этой точки зрения — просто некоторые значки, или символы, которые мы удерживаем в уме одной совершенно определенной последовательности. Такими значками могут быть пальцы рук, буквы алфавита a, b, c,..., но чаще всего являются слова: один, два, три,... или цифры: 1, 2, 3,..., которые мы всегда мыслим в определенном порядке. При счете предметов мы сопоставляем их с элементами ряда наших значков. Последнее из взятых чисел и будет результатом счета; от его порядкового характера мы можем сделать заключение и о количестве сосчитанных предметов. *Последний взгляд на число был* проведен в особенности Гельмгольцем, Кронекером и Дедекиндом. Подробно с ним можно ознакомиться по книгам: С. П. Виноградов, Повторительный курс алгебры; А. В. Васильев, Введение в анализ, ч. II; В. Н. Комаров, Теоретические основы арифметики и алгебры и др. На основании его создалось чрезвычайно глубокое учение о *числе и действиях над числами, излагаемое в* названных книгах и заслуживающее внимания и изучения каждого преподавателя. Но первый взгляд, вытекающий из более конкретных и привычных соображений, является более подходящим для целей преподавания. Ему посвящены книги известного французского ученого и педагога Ж. Таннери „Основные понятия математики", пер. Евреинова, и „Курс арифметики", пер. Котляревского, а также „Арифметика" Фербера, пер. Д. Бема и Р. Струве и др.

После определения понятия числа устанавливается понятие о ряде натуральных чисел и выводятся признаки для суждения о том, когда два числа равны и когда одно из них больше или меньше другого. Для чисел натурального ряда 1, 2, 3, ... легко установить, что более то число, которое далее стоит от начала ряда, или, иначе, которое содержит более единиц. Далее устанавливаются понятия о прямых арифметических действиях: сложении и умножении, и доказываются основные свойства этих действий: для сложения — свойства переместительности и сочетательности, выражаемые формулами:

$$a+b=b+a;\quad a+b+c=(a+b)+c=(a+c)+b\ldots,$$

а для умножения — свойства переместительности, сочетательности и распределительности, выражаемые формулами:

$$a\cdot b=b\cdot a;\quad abc=(ab)c=(ac)b;\quad (a+b)c=ac+bc.$$

Действия: вычитание и деление определяются как обратные по отношению к сложению и умножению. Сложение и вычитание называются прямым и обратным действиями первой ступени; умножение и деление — второй. Опыт показывает, что эти обратные действия выполнить не всегда возможно; так, нельзя вычесть большее число из меньшего или разделить меньшее число на большее. Однако невозможность выполнения действий здесь нужно понимать в относительном смысле: нельзя вычесть 7 из 5 или 3 разделить на 4 в области чисел натурального ряда. Но можно ввести новые числа, при которых устраняется указанная

[1]) Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften, B. I.

невозможность. Именно, для устранения невозможности выполнения вычитания вводятся нуль и отрицательные числа, а при делении — дробные числа. Таким образом, введение нуля, отрицательных и дробных чисел имеет источником изучение обратных действий первых двух ступеней, а целью — устранение невозможности их выполнения.

Вычисления со вновь введенными числами должны быть установлены вновь, т. е. для четырех действий над этими числами и должны быть даны соответствующие определения и правила выполнения. Так, умножить 3 на 2 значит повторить 3 слагаемым два раза, но это определение не может быть применимо к умножению 3 на $\frac{2}{5}$. При выборе новых определений для прямых действий: сложения и умножения, стремятся сохранить за этими действиями не только названия, но и возможно большее число свойств, так как при каждом новом развитии понятия числа прежние числа должны входить в новый более обширный класс как частный случаи, а потому действия над этими новыми числами должны обладать теми же свойствами, как и ранее, т. е. сложение их и умножение должны подчиняться законам переместительности, сочетательности и распределительности.

Покажем в частности, как, исходя из этих оснований, могут быть введены в арифметику дробные числа. Необходимость в них, как известно, является тогда, когда приходится делить одно число на другое, причем частное не может быть выражено целым числом. Поэтому понятие о них должно быть выведено, исходя из рассмотрения свойств частного двух чисел, когда деление на целое невозможно. Но если два частных от деления двух пар целых чисел (или, иначе, два отношения) равны, т. е. если

$$a:b=c:d, \quad \text{то} \quad ad=bc;$$

при этом первое частное будет более второго, если $ad>bc$, и менее, если $ad<bc$. Ввиду этого под дробным числом разумеют любую пару чисел (a,b), или, по принятому обозначению, $\frac{a}{b}$, взятую из натурального ряда чисел 1, 2, 3, 4, ..., и устанавливают для этих чисел условия равенства или неравенства подобные вышеприведенным, именно:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}, \text{ если } ad=bc; \quad \frac{a}{b}>\frac{c}{d} \text{ при } ad>bc; \quad \frac{a}{b}<\frac{c}{d} \text{ при } ad<bc.$$

Из первого условия выводится следствие, что новые числа $\frac{a}{b}$ не изменяются от умножения или деления обоих членов дроби на одно и то же число. Действительно, можно утверждать, что

$$\frac{a}{b}=\frac{am}{bm}, \text{ так как } a\cdot bm=b\cdot am.$$

На этом свойстве основано сокращение дробей и приведение их к одному знаменателю. Далее принимают, что дробные числа включают в себя целые как частный случай, когда второй член (знаменатель) равен 1. Действительно, например, из равенства дробей $\frac{6}{3}=\frac{2}{1}$ и равенства частных целых чисел $\frac{6}{3}=\frac{2}{1}=2$ следует, что $\frac{2}{1}=2$, т. е. вообще $\frac{a}{1}=a$. Под суммою двух дробей с одинаковым знаменателем понимают новую дробь с тем же знаменателем, числитель которой равен сумме числителей слагаемых дробей:

$$\frac{a}{m}+\frac{b}{m}=\frac{a+b}{m}.$$

При неравных знаменателях дроби могут быть приведены к общему знаменателю. Легко видеть, что при таком определении сложения дробных чисел оно обладает свойством переместительности и сочетательности.

Для умножения дробей принимается такое определение: под произведением двух дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ разумеют новую дробь, числитель которой равен произведению числителей, а знаменатель — произведению знаменателей данных дробей.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Из этого определения умножения дробных чисел легко вывести, что оно подчиняется законам переместительности, сочетательности и распределительности.

На основании этих определений и условий выводятся все преобразования и правила действий над дробными числами.

Таким образом, ряд чисел, первоначально состоявший только из целых чисел: 1, 2, 3, ..., расширяется в ряд новых чисел, целых и дробных, в совокупности называемых рациональными, положительными числами. Переход от целых чисел к рациональным, кратко охарактеризованный в предыдущем изложении, является первым этапом в развитии понятия о числе. Из него можно вывести много заключений, полезных для преподавателя математики. Так, из него видна необходимость ряда новых определении при развитии понятия о числе и действиях над новыми числами. Таковы, например, обычные правила для сложения и умножения дробей, которые учащие и учащиеся нередко пытаются доказать, тогда как они являются определениями. Следует, однако, выяснить, что упомянутые определения не носят произвольного характера, а вводятся для обоснования и обобщения результатов, которые уже ранее были получены и выработаны человеком путем попыток решения вопросов и задач, выдвигаемых реальною действительностью и жизнью.

Изложенные здесь в самом сжатом виде теоретические основания учения о числе, знание которых весьма важно для преподавателя, не могут, конечно, быть предлагаемы учащимся, только еще знакомящимся с предметом. Наоборот, для них существенно необходимо указывать на связь изучаемого материала с жизнью и реальною действительностью. Так, понятие о целом числе удобнее выводить из конкретного рассмотрения собрания предметов. Такое же конкретное истолкование должны получить и действия над числами и законы, которым эти числа подчиняются. Например, сложение чисел не является специально придуманным математическим действием, но отвечает постоянно производимому реальному факту соединения однородных предметов двух или нескольких групп в одно множество, причем требуется узнать число всех предметов в этом последнем собрании. Вопрос может быть решен пересчитыванием предметов, но удобнее решается на основании законов этого действия: переместительности и сочетательности и десятичного состава чисел. Эти законы тоже не являются искусственно введенными, но отвечают существу реального процесса — соединению предметов двух или нескольких собраний в одно. Такое же реальное происхождение имеет и другое прямое действие — умножение и соответствующие ему законы переместительности, сочетательности и распределительности. Переходя к вычитанию и делению, также легко обнаружить, что первоначальное их происхождение чисто эмпирическое. Действительно, нам часто приходится отнимать от какого-нибудь собрания некоторое число элементов или делить собрание предметов на равные части. Но, в противоположность прямым действиям, эти обратные действия оказываются не всегда возможными. А так как задачи реального характера, из которых эти действия возникают, требуют все же своего разрешения, то явилась необходимость во введении в математику в дополнение к числам натурального ряда чисел нового рода, которыми могли бы быть выражены и в этом случае ответы. Так, задача о разделении целого числа на равные части, в том случае, когда это деление не совершается нацело, требует введения понятия о сложной единице, способной делиться на любое число равных частей, и приводит к понятию о дробных числах. Невозможность вычитания большего числа из меньшего, требующегося в некоторых практических задачах, например при определении имущества какого-либо лица по величине его капитала и долга, требует введения нуля и отрицательных чисел и т. п.

Такой жизненный и реальный подход должен проникать, по возможности, все преподавание математики, и там, где строгих доказательств или выводов учащимся предложить по их подготовке и развитию еще невозможно, их должны заменить наглядные представления и реальные истолкования изучаемых понятий.

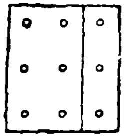
§ 19. Первоначальное преподавание алгебры.

Согласно установленной программе для 5-го класса средней школы учащиеся должны быть ознакомлены в этом году с употреблением буквенных выражений, применением их для записи основных законов арифметических действий и к составлению буквенных формул для решения арифметических задач. Этот материал должен служить введением к систематическому курсу алгебры, который начинается в 6-м классе. Несмотря на небольшой объем и простоту указанного в программе материала, изучение его имеет весьма важное значение для всего последующего обучения алгебре, а потому мы остановимся подробнее на способах его прохождения.

Как уже было упомянуто, при начале обучения алгебре нет надобности давать определения этой науке; однако необходимо указать на связь ее с арифметикой и отличия ее от арифметики. Именно в арифметике мы изучаем целые и дробные числа и действия над ними. Каждое число при этом имеет определенное значение и изображается при помощи определенного знака, чаще всего с помощью так называемых арабских цифр. Например, 7; $\frac{3}{4}$; $0{,}5$ — обозначения совершенно определенных и известных для нас чисел. Задачи, решаемые в арифметике, также имеют условия с совершенно определенными числовыми данными.

Алгебра, подобно арифметике, тоже занимается изучением свойств чисел и решением задач, но в ней все вопросы и задачи рассматриваются не для частных случаев, а в общем виде. Поэтому числа в ней обозначаются буквами обыкновенно французской азбуки: a, b, c, ... и под каждой буквой можно понимать какое угодно число. Так, под буквой a можно подразумевать числа; 5; 0; $\frac{3}{7}$; $0{,}4$ и т. п. Благодаря этому мы можем выражать алгебраически свойства чисел и действия над ними независимо от их величины, а также представлять решения сходных по условию задач в общем виде.

После этих общих разъяснений можно перейти к примерам приложения буквенной символики. Первым приложением ее можно избрать запись при ее помощи основных законов действий сложения и умножения: переместительности, сочетательности и распределительности. Но ввиду важности этих законов полезно их предварительно иллюстрировать. С этою целью особенно удобна графическая интерпретация этих законов, предложенная Ж. Таннери. Пусть на чертеже 1 имеются два собрания предметов, из которых первое содержит 6, а второе 3 предмета. Для соединения их в одно собрание было бы достаточно на чертеже стереть черту, разделяющую эти собрания. Общее число предметов в получившемся одном собрании есть сумма чисел $6+3$; ясно, что эта сумма не зависит от порядка, в каком мы производим сложение: итак,



Черт. 1.

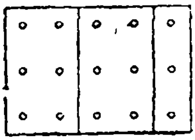
$$6+3=3+6,$$

или, в общем виде на буквах,

$$a+b=b+a$$

— выражение закона переместительности: сумма не изменяется от перестановки слагаемых.

Подобным же образом, беря три собрания предметов, можно графически представить и закон сочетательности при сложении. Так, на чертеже 2 мы имеем 3 собрания: из 6, 6 и 3 предметов. Соединить их в одно собрание можно или сразу, стерев обе разделяющие их черты, или же сначала стирая одну черту, причем два собрания соединяются в одно, а потом, стирая оставшуюся черту, присоединить третье собрание — во всех случаях сумма не изменится. Итак:



Черт. 2.

$$6+6+3=(6+6)+3=6+(6+3), \quad \text{т. е.} \quad 15=12+3=6+9,$$

или, в общем виде на буквах,

$$a+b+c=(a+b)+c=a+(b+c)=(b+c)+a\ldots$$

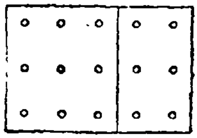
— выражение закона сочетательности: слагаемые можно соединить в произвольные группы, произвести сложение к каждой группе и потом найти общую сумму.

Подобным же образом из рассмотрения собраний могут быть выведены и основные законы умножения. Так, рассматривая все собрание, представленное на чертеже 3, как состоящее из 3 столбцов по 5 элементов в каждом, мы найдем, что общее число элементов равно $5\cdot 3$, а рассматривая его же как составленное из 5 строк по 3 элемента в каждой, — что оно равно $3\cdot 5$, но так как число всех элементов не изменяется от нашего способа подсчета, то

$$5\cdot 3=3\cdot 5,$$

и вообще на буквах:

$$a\cdot b=b\cdot a,$$



Черт. 3.

что представляет собою выражение закона переместительности: произведение не изменяется от перестановки его сомножителей.

Точно так же, рассматривая ту же таблицу как состоящую из двух частей: правой, содержащей три строки по два элемента в каждой, и левой, содержащей три строки по три элемента в каждой, мы можем все число элементов представить как сумму:

$$2 \cdot 3 + 3 \cdot 3,$$

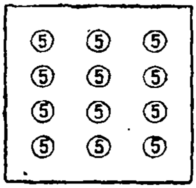
с другой стороны, в каждой строке всего $(2+3)$ элементов, а потому все число их равно $(2+3) \cdot 3$. Итак,

$$(2+3) \cdot 3 = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3,$$

или, в общем виде на буквах,

$$(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

— выражение закона распределительности умножения: чтобы умножить сумму на какое-нибудь число, следует каждое слагаемое умножить на это число и полученные произведения сложить.



Черт. 4.

Наконец рассматривая чертеж 4, на котором представлено три столбца по 4 пятикопеечных монеты в каждом, мы можем вычислить общую сумму положенных денег как произведение $5 \cdot 3 \cdot 4 = 60$ коп., но можно вычислить сперва сумму, лежащую в каждой строке, т. е. $5 \cdot 3 = 15$, и умножить ее на 4; получим:

$$(5 \cdot 3) \cdot 4 = 15 \cdot 4 = 60,$$

или же сначала найти сумму денег в каждом столбце: $5 \cdot 4 = 20$, и повторить ее три раза:

$$(5 \cdot 4) \cdot 3 = 60;$$

можно также сначала определить число всех монет: $3 \cdot 4 = 4 \cdot 3 = 12$, и затем узнать всю сумму денег:

$$5 \cdot (4 \cdot 3) = 5 \cdot (3 \cdot 4) = 5 \cdot 12 = 60.$$

Отсюда

$$5 \cdot 3 \cdot 4 = (5 \cdot 4) \cdot 3 = (5 \cdot 3) \cdot 4 = 5 \cdot (3 \cdot 4),$$

или вообще:

$$a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c = (a \cdot c) \cdot b = a \cdot (b \cdot c),$$

что выражает закон сочетательности: при умножении нескольких множителей можно сомножителей соединить в группы — произвести умножение в каждой группе и затем полученные произведения перемножить. Основные законы сложения и умножения можно было бы еще пояснить из рассмотрения площади прямоугольника и объема прямоугольного параллелепипеда.

Подобным же образом можно применить буквенные обозначения для выражения упоминаемых в программе 5-го класса других результатов арифметических действий: вычитания суммы и разности, деления суммы и разности на какое нибудь число и пр., а также для выражения в общем виде правил действия над обыкновенными дробями.

Наконец, можно представить формулами входящие в программу того же года обучения выражения площадей: квадрата, прямоугольника, поверхности куба, треугольника и прямоугольного параллелепипеда и объемов тех же тел.

После перечисленных применений буквенного обозначения к выражениям, известным учащимся из арифметики и геометрии, можно перейти к составлению формулы для решения однотипных арифметических задач. Как пример можно привести следующую задачу: „Через сколько времени встретятся два парохода, идущие навстречу друг другу из двух мест, расстояние между которыми 420 *км*, если первый проходит в час 40 *км*, а второй 30 *км*?"

Учащиеся без труда сообразят, что сначала надо узнать, на сколько километров оба парохода приближаются друг к другу в один час, для чего надо сложить их скорости; получим: $40+30=70$ *км*, а потом следует узнать, сколько раз это расстояние содержится в 420 *км*, для чего надо 420 разделить на 70; получим $420:70=6$, т. е. встреча пароходов произойдет через 6 час. Затем следует изменить данные числа в условии задачи; пусть, например, скорости пароходов равны соответственно 40 и 50 *км* в час, а расстояние между пунктами отправления — 630 *км*, тогда тоже придется сложить скорости пароходов и все расстояния разделить на полученную сумму. Найдем:

$$40+50=90; \quad 630:90=7 \text{ час.},$$

т. е. хотя данные в задаче числа изменились, но способ решения ее остался прежний. Поэтому для всех задач с подобным содержанием можно дать одно общее решение на буквах. Именно, обозначим расстояние между пунктами, из которых отправляются пароходы, через d километров, а их скорости в час — через a и b километров; тогда искомая встреча произойдет через

$$x=d:(a+b), \quad \text{или} \quad x=\frac{d}{a+b} \text{ час.}$$

После этого полезно решить с учащимися хотя одну-две задачи того же типа прямо по полученной формуле, а также иные задачи, приводящие к общей формуле решения.

§ 20. Алгебраические действия и знаки.

Из рассмотренных примеров учащиеся замечают, что в алгебре при решении задач и выводе формул употребляются те же действия, что и в арифметике, т. е. сложение, вычитание, умножение и деление, причем для обозначения их употребляются и те же знаки, что в арифметике. В дополнение к этому остается только указать, что при умножении буквенных количеств знак умножения обычно опускается; так, вместо $a \cdot b$ пишется ab (учащиеся должны объяснить, почему этого нельзя сделать в арифметике). Точно так же обычно опускается знак умножения между числовыми и буквенными множителями: например вместо $4 \cdot a$ пишут $4a$. В этом случае числовой множитель, который всегда пишется впереди буквенного, называется коэфициентом. Для обозначения равенства и неравенства алгебраических количеств также употребляются те же знаки, что и в арифметике: $=$ (равенства); $>$ (больше) и $<$ (меньше); например:

$$a=b; \quad a>b; \quad a<b.$$

Но далее учащимся следует сообщить, что в алгебре употребляются еще два действия: возведение в степень и извлечение корня. Именно, указав, что в алгебре весьма часто приходится умножать одно и то же число само на себя два или несколько раз, например $2 \cdot 2 = 4$, $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ и т. п., надо разъяснить, что подобное умножение числа самого на себя рассматривается как новое действие, называемое возведением в степень, и что для него существует особая запись с помощью показателя степени. Что касается действия извлечения корня, то оно нередко пропускается в начале алгебры; однако в интересах полноты и симметрии изложения желательно дать и о нем некоторое понятие как о действии, обратном предыдущему, указать способ его обозначения и правило для нахождения: чтобы извлечь корень из числа, надо разложить его на столько равных множителей, сколько единиц в показателе степени корня, и взять один из них. Так, чтобы извлечь квадратный корень из 64, надо разложить это число на два равных множителя, найдем: $64 = 8 \cdot 8$; $\sqrt{64} = 8$; а чтобы извлечь из него кубический корень, надо разложить его на три равных множителя; будем иметь: $64 = 4 \cdot 4 \cdot 4$ и $\sqrt[3]{64} = 4$. Учащиеся скоро заметят, что из многих чисел, в том числе из всех *простых, корня извлечь невозможно*. После этого можно сообщить, что все действия в алгебре разделяются на три ступени: *сложение и вычитание — действия 1-й ступени; умножение и деление — 2-й, возвышение в степень и извлечение корня — действия 3-й ступени.*

После ознакомления с алгебраическими действиями и обозначениями учащиеся знакомятся с понятием об алгебраическом выражении как соединении чисел и буквенных количеств с помощью знаков действий, которые над ними должны быть произведены, и со способом вычисления числовой величины алгебраических выражений. При этом особенно важно указать, что при вычислении действия высшей ступени должны предшествовать действия низших ступеней, т. е., в первую очередь должны быть произведены возведение в степень и извлечение корня, затем умножение и деление и, наконец, сложение и вычитание. Точно так же должно быть выяснено значение скобок и способы их раскрытия.

В общем курс алгебры 5-го года обучения представляет собою переход от арифметики к алгебре, а потому должен проходиться в тесной связи с арифметикой. Этот характер связи с арифметикой должен проводиться и в подборе соответствующих упражнений. Так, как уже было упомянуто, буквенная символика должна применяться для выражения результатов основных арифметических задач из систематического курса, каковы задачи на отыскание неизвестного члена пропорции, среднего арифметического нескольких чисел, задачи на проценты и пропорциональное деление и пр. Необходимо проделать также ряд упражнений на выражение различных свойств чисел, в особенности написанных по десятичной системе. При этом тоже должна удерживаться связь с арифметикой. Например: написать три последовательных целых числа, начиная с 5; найти три последовательных целых числа, начиная с a; написать число, содержащее 3 десятка и 4 единицы. Найти число, содержащее a десятков и b единиц; написать трехзначное число, у которого m — цифра сотен, n — цифра десятков и p — цифра единиц; изобразить число, написанное теми же цифрами, но в обратном порядке, и т. д.

При прохождении понятия о степени следует указать значение его для десятичной системы счисления, на применение его при нахождении общего наибольшего делителя и общего наименьшего кратного нескольких чисел. Необходимо также выяснить, когда число от возведения в степень увеличивается или уменьшается.

Особенно тесная связь между арифметикой и алгеброй устанавливается при нахождении числовой величины алгебраических выражений. При этом следует упражнять учащихся в предварительном правильном чтении данного выражения, в разборе порядка, в каком должны быть произведены вычисления, а также должно быть обращено внимание на возможность сокращений и арифметическую правильность результатов.

ГЛАВА V.

ОТНОСИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА.

§ 21. Методологические сведения.

Программа алгебры для 6-го класса содержит отделы: об относительных числах, о целых и простейших дробных алгебраических выражениях и об уравнениях первой степени с числовыми коэфициентами. Основным и важнейшим из этих отделов является учение об относительных числах, которое представляет для учащихся обычно большие трудности ввиду его новизны и отвлеченности и потому должно быть проработано особенно тщательно. Ввиду этого предварительно преподаватель сам должен овладеть полностью этим вопросом как с его методологической, научной стороны, так и с чисто методической и дидактической.

Подобно тому как дробные числа были введены в математику с целью дать возможность выразить результат деления двух целых чисел, когда делимое не является кратным делителя, точно так же введение отрицательных или, точнее, относительных чисел явилось результатом стремления, как уже упоминалось, выразить разность двух чисел в том случае, когда уменьшаемое менее вычитаемого. Поэтому обоснование учения об относительных числах должно исходить из рассмотрения свойств разности двух целых чисел, когда это вычитание возможно. Но если разности двух пар целых чисел $a-b$ и $c-d$, или, иначе, их арифметические отношения, равны, т. е.

$$a-b=c-d, \quad \text{то} \quad a+d=b+c,$$

и, наоборот, когда такое равенство имеет место, то упомянутые разности будут равны. Далее, если

$$a+d>b+c, \quad \text{то} \quad a-b>c-d,$$

а если

$$a+d<b+c, \quad \text{то и} \quad a-b<c-d.$$

Например, разности $(5-1)$ и $(7-3)$ равны, так как $5+3=$ $=7+1$; разность $(5-1)$ более разности $(8-6)$, ибо $5+6>8+1$, а разность $(5-4)$ менее разности $(8-6)$, так как $5+6<8+4$.

Когда при вычитании двух чисел уменьшаемое равно вычитаемому, то разность принимается равной нулю. Поэтому натуральный ряд чисел прежде всего дополняется нулем и получает вид: 0, 1, 2, 3...

Свойства нуля, соответствующие этому *определению*, *таковы*: *он* меньше любого натурального числа; от прибавления или вычитания нуля число не изменяется; далее видим, что произведение нуля на какое-либо число или любого числа на нуль равно нулю:

$$a - a = 0; \quad 0 < a; \quad a + 0 = a; \quad a - 0 = a; \quad a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0.$$

Затем все числа натурального ряда соединяются во всевозможные пары (a, b) или, по принятому обозначению, $a - b$, где a может быть и более, и менее, и равно b. Для этих новых чисел, называемых парами первой ступени, вводятся те же определения равенства и неравенства, которые имеют место в случае возможности вычитания в обеих парах, т. е. $a - b \gtreqless c - d$, если соответственно $a + d \gtreqless b + c$. Из этих определений равенства и неравенства пар легко выводятся их свойства. Так, от прибавления к каждому члену пары одного и того же числа и от отнятия от каждого из них по одному и тому же числу пара не изменяется:

$$a - b = (a + m) - (b + m);$$

действительно, по основному признаку:

$$a + (b + m) = b + (a + m).$$

Например, $3 - 7 = 8 - 12$, потому что $3 + 12 = 7 + 8$. Это дает возможность упрощать пары, приводя их члены к наименьшей величине. Так, отнимая от членов пары $7 - 5$ по 3, найдем: $7 - 5 = 4 - 2$. Всего проще привести первый или второй член пары к нулю:

$$7 - 5 = 2 - 0; \quad 4 - 9 = 0 - 5.$$

Числа вида $2 - 0$, или вообще $a - 0$, принимаются за ранее введенные, т. е. обыкновенные арифметические числа; в их выражении 0 может быть опущен: $2 - 0 = 2$; $a - 0 = a$. Числа же $0 - 5$, или вообще $0 - a$, носят название отрицательных чисел: в них нуль тоже опускается, и они записываются просто со знаком минус:

$$0 - 5 = -5; \quad 0 - a = -a.$$

В противоположность отрицательным числам, ранее введенные числа, которые можно представить под видом $a - 0$ или просто a, получают название положительных чисел. Таким образом, введенные нами пары чисел дают происхождение двум видам чисел: положительным, которые совпадают с прежде введенными числами и которые мы будем обозначать, ставя перед ними знак плюс, или без всякого знака, и новым отрицательным, которые всегда будем писать со знаком минус. Обыкновенное арифметическое число, которое получается из положительного или отрицательного числа, если опустить его знак, мы будем называть абсолютной величиной данного числа; так абсолютная величина числа (-4) есть 4. (Абсолютная величина числа a часто обозначается $|a|$.) Пользуясь общими условиями для выражения равенства и неравенства пар, можно заключить, что два отрицательных числа равны только тогда, когда равны их абсолютные величины. Действительно, если

$$0 - a = 0 - b, \text{ то } 0 + b = a + 0,$$

или

$$b = a.$$

Подобным же образом можно убедиться, что всякое отрицательное число менее нуля и что из двух отрицательных чисел более то, у которого абсолютная величина меньше.

Правило для сложения введенных нами новых чисел принимается то же, как и для обыкновенных арифметических разностей, т. е.:

$$(a-b)+(a_1-b_1)=(a+a_1)-(b+b_1),$$

т. е. сумма пар равна новой паре, у которой предыдущий член равен сумме предыдущих членов, а последующий — сумме последующих. На основании этого определения могут быть введены правила для сложения двух отрицательных чисел и отрицательного числа с положительным:

$$(0-a)+(0-b)=(0+0)-(a+b),$$

или

$$(-a)+(-b)=-(a+b),$$

т. е. при сложении двух отрицательных чисел складываются их абсолютные величины и перед суммой ставится знак минус. Точно так же:

$$(a-0)+(0-b)=(a+0)-(0+b)=a-b;$$

если $a>b$, этот результат будет положительным; если $a<b$, то отрицательным; тогда его можно представить в виде $-(b-a)$. Следовательно, при сложении отрицательного числа с положительным надо из большей абсолютной величины вычесть меньшую абсолютную величину и перед разностью поставить знак слагаемого с большей абсолютной величиной; например:

$$(-3)+(+5)=5-3=+2; \quad (-10)+(+4)=-(10-4)=-6.$$

Точно так же можно было бы вывести, что сумма положительного числа и отрицательного с одинаковой абсолютной величиной равна нулю. Исходя из того же определения сложения пар, можно доказать, что оно обладает свойствами переместительности и сочетательности, а также вывести правила для вычитания пар и, в частности, отрицательных чисел, рассматривая вычитание как действие, обратное сложению.

Умножение пар, по определению, также производится по тому же правилу, по которому можно составить произведение положительных разностей, т. е. $(a-b)(c-d)$, когда $a>b$, $c>d$.

Но это последнее произведение можно составить так: пусть $c-d=m$, тогда по правилам умножения и вычитания разностей, выводимых в арифметике, имеем:

$$(a-b)\,m=am-bm,$$

а, заменяя m его значением:

$$am-bm=a(c-d)-b(c-d)=(ac-ad)-(bc-bd)=$$
$$=ac-ad-bc+bd,$$

т. е.

$$(a-b)(c-d)=(ac+bd)-(bc+ad).$$

Ту же формулу можно было бы получить геометрически, составляя площадь прямоугольника с измерениями $(a-b)$ и $(c-d)$.

Применяя это правило например, к умножению пар $(3-5)\cdot(2-6)$, получим:

$$(3\cdot2+5\cdot6)-(2\cdot5+3\cdot6)=36-28=+8,$$

или

$$(-2)\cdot(-4)=+8.$$

Из него можно вывести правило для умножения положительного числа на отрицательное и отрицательного на отрицательное. Так,

$$(+a)(-b)=(0+a)(0-b)=(a\cdot0+0\cdot b)-(a\cdot b+0\cdot0)=-ab;$$

точно так же:

$$(-a)(-b)=(0-a)(0-b)=(0\cdot0+a\cdot b)-(0\cdot b+0\cdot a),$$

т. е.

$$(-a)(-b)=+ab.$$

Отсюда получается вывод, что при умножении двух чисел с одинаковыми знаками к произведению их абсолютных величин надо приписать знак плюс, а с различными знаками — минус. Легко можно было установить, что перемножение по принятому условию пар, а, стало быть, положительных и отрицательных чисел, сохраняет свойства переместительности, сочетательности и распределительности. Наконец, можно показать, что от умножения всякого числа на нуль получается нуль; действительно:

$$(a-a)(c-d)=(ac+ad)-(ac+ad)=0,$$

или

$$0(c-d)=0.$$

Таким образом, введенные нами новые числа, пары первой ступени, в частности отрицательные, удовлетворяют всем требованиям, поставленным для развития понятия о числе, а потому могут быть включены в общий числовой ряд. Отрицательные числа могут, конечно, быть и целыми и дробными. Натуральный ряд целых чисел, со включением нуля и отрицательных чисел, получает вид:

$$\ldots-5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ldots;$$

между целыми числами может быть вставлено сколько угодно дробных; все они вместе составляют совокупность рациональных или соизмеримых чисел. Вообще же числа со знаками, т. е. положительные и отрицательные, включая в эту область и несоизмеримые числа, называются относительными числами (по отношению к арифметическим числам, являющимся их абсолютными значениями).

Изложенный здесь краткий очерк учения об отрицательных числах показывает, что для строгого обоснования их является необходимость принятия ряда новых определений, именно относительно их равенства и неравенства и производства над ними основных прямых действий: сложения и умножения. Эти определения не являются, однако, совершенно произвольными, а вводятся для обоснования тех результатов, которые уже ранее были интуитивно получены человеком из решения соответственных конкретных и жизненных задач. Для преподавателя знакомство с основами изложенного учения важно потому, что он будет знать, что в разделе об относительных числах может быть строго доказано и что является результатом определения. *Так, например, правило* знаков при умножении относительных чисел является определением этого действия и не может быть доказано. Поэтому в руководствах алгебры, особенно в дореволюционный период, основы учения об относительных числах нередко излагались применительно к научному обоснованию этого учения. В частности, в отделе об умножении относительных чисел прямо давалось определение: „Произведением двух относительных чисел называется произведение их абсолютных величин, взятое со знаком + в том случае, когда перемножаемые числа имеют одинаковые знаки, и со знаком — в том случае, когда они противоположных знаков". (А. Киселев, Элементарная алгебра, изд. до 1912 г.). Однако такая условность и абстрактность изложения учения об относительных числах *неприемлемы для учащихся, по возрасту ищущих конкретного и убедительного знакомства с новыми для них понятиями. Поэтому в новейшее* время это учение излагается более наглядно и естественно, с заменою строгих логических определений и доказательств конкретными и наглядными примерами и возможно более простыми выводами. Такое преподавание соответствует историческому ходу знакомства человечества с относительными числами, которое вынесло сведения о них не из школы или учебы, а из реальной жизни.

§ 22. Преподавание учения об относительных числах.

Согласно высказанной выше точке зрения относительно необходимости конкретного подхода к изучению относительных чисел следует, приступая к изучению этого отдела, остановить внимание учащихся на том, что известных им из арифметики целых и дробных чисел недостаточно для решения некоторых конкретных задач. Такова, например, задача об игроке, который выигрывает и проигрывает, которую следует предложить учащимся в трех вариантах:

1) Игрок выиграл 10 руб., а затем проиграл 7 руб. Как велик его выигрыш? Учащиеся без труда сообразят, что задача решается вычитанием, и получат ответ: выигрыш игрока равен: $10-7=3$ руб.

2) Пусть тот же игрок сначала выиграл 10 руб., а потом проиграл также 10 руб. Каков теперь его выигрыш? Вычитанием найдем $10-10=0$ руб. Оказывается, что игрок ничего не выиграл и не проиграл. Полезно обратить внимание учащихся на то, что знак „нуль", который ранее был введен при изучении нумерации для обозначения отсутствия *какого-нибудь десятичного* разряда, здесь фигурирует уже как число, равноправное с любым другим числом.

3) Наконец, пусть игрок выиграл 10 руб., а проиграл 15 руб. Как велик выигрыш в этом случае? Задача и здесь должна решаться вычитанием, но вычесть 15 из 10 невозможно. Однако от этого она не теряет своей актуальности. С другой стороны, и ответ на нее учащимся совершенно понятен и известен: игрок не только не выиграл в этом случае, *а, наоборот, проиграл 5 руб.* Чтобы дать ответ на задачу и в этом случае, мы должны ввести новое *число, обозначающее недостачу* или проигрыш; всего естественнее обозначить такое число знаком минус. Итак, $10-15=-5$; здесь число -5 является примером отрицательного числа.

Необходимо привести еще задачу и на движение тела или точки в двух направлениях. Например: человек проплыл по реке против течения 20 *м*, а течением его снесло вниз на 13 *м*; в каком расстоянии он находится от места отплытия? Ответ: $20 - 13 = 7$ *м*, т. е. пловец находится на 7 *м* выше точки отправления. Затем изменяем условие в том смысле, что течение снесло пловца вниз на 20 *м*; тогда искомое расстояние будет $20-20=0$ *м*, т. е. пловец оказался в месте отправления. Наконец, если пловец отплыл против течения на 20 *м*, а оно снесло его вниз на 27 *м*, то для решения задачи надо будет вычесть из 20 число 27, что арифметически невозможно. Однако поставленная задача остается реальной, и ответ на нее для учащихся очевиден; пловец окажется по другую сторону от места отплытия, ниже его на расстоянии 7 *м*. И здесь естественно принять разность $20-27$ равную новому, отрицательному числу: $20 - 27 = -7$.

Из этих и подобных примеров учащиеся убеждаются, что существует множество конкретных вопросов и задач, в которых является необходимость вычитания большего числа из меньшего. Общий характер всех таких вопросов тот, что величины, относительно которых они ставятся, могут изменяться в двух противоположных смыслах или направлениях. Таковы: выигрыш и проигрыш, капитал и долг, движение вперед и назад или вверх и вниз и т. д. Обыкновенные арифметические числа дают в таких задачах ответ на поставленный вопрос в прямом обычном смысле слова, т. е. обозначают выигрыш, капитал, движение вперед или вверх и т. п.; отрицательные же числа — в противоположном смысле: они означают проигрыш, долг, движение назад или вниз и т. п. Первым числам придается название положительных и знак плюс, или же они пишутся без знака; перед вторыми же, т. е. отрицательными числами, всегда ставится знак минус. Число, сопровождаемое знаком $+$ или $-$, дает, таким образом, понятие не только о величине ответа, но и о прямом или обратном смысле, в котором нужно его понимать. Так, если речь идет о температуре, то ответ $+3^\circ$ означает градусы тепла, а -3° — градусы холода; когда говорят об изменении уровня воды в реке, то $+4$ *м* означает поднятие ее на 4 *м*, а -3 *м* — опускание на 3 *м* ниже установленного уровня и пр. Таким образом, ряд чисел, известных из арифметики, расширяется; числам приписываются знаки $+$ и $-$; все такие числа со знаками называются относительными числами. В отличие от относительных чисел обыкновенные числа без знаков называются абсолютными, т. е. безотносительными; абсолютное число, входящее в состав относительного, называется его абсолютной величиной; так, абсолютная величина чисел $+4$ и -4 есть 4.

Следствием введения в математику относительных, в частности отрицательных, чисел является, как показывают разобранные примеры, выражение всякой разности двух чисел, даже в том случае, когда вычитаемое больше уменьшаемого, некоторым числом. В последнем случае это число будет отрицательным. Для получения его нужно узнать, на сколько единиц уменьшаемое менее вычитаемого, т. е. вычесть из вычитаемого уменьшаемое и результат написать со знаком минус: $5 - 8 = -3$; $1 - 10 = -9$ и т. п.

Далее необходимо выяснить вопрос о сравнительной величине двух относительных чисел. К нему тоже можно сначала подойти от конкретных примеров. Так, температура двух помещений будет одинакова, если она выражается не только одинаковым числом градусов, но и одинаковым знаком, например $+4^\circ$ и $+4^\circ$ или -3° и -3°. Отсюда заключаем, что два относительных числа равны, когда они имеют одинаковую абсолютную величину и одинаковый знак. Подобным же образом сравнивая имущество двух лиц, из которых одно имеет 100 руб. капитала, а другое — 50 руб. долгу, т. е. числа $+100$ и -50, приходим к заключению, что всякое положительное число более любого отрицательного; на подобных же примерах можно убедиться, что любое отрицательное число менее нуля. Наконец, сравнивая имущество двух лиц, имеющих: один 70 руб. долгу, а другой 100 руб. долгу, убеждаемся, что, так как первое, очевидно, более состоятельно, чем второе, то $-70 > -100$, т. е. из двух отрицательных чисел более то, у которого абсолютная величина меньше. К подобному же заключению придем, сравнивая количество тепла в двух помещениях, имеющих температуру, например, -4° и -6° и т. п. Но под это непосредственное и конкретное усмотрение условий равенства и неравенства относительных чисел можно подвести и более солидное математическое основание. Именно, можно указать, что на относительные числа естественно распространять то свойство вычитания, согласно которому разность двух чисел с увеличением вычитаемого уменьшается. Но, вычитая, например, из 4 числа 1,2,3 ..., будем иметь

$$4-1=3; \quad 4-2=2; \quad 4-3=1; \quad 4-4=0;$$
$$4-5=-1; \quad 4-6=-2; \quad 4-7=-3;\ldots,$$

следовательно мы должны считать, что

$$3>2>1>0>-1>-2>-3\ldots,$$

откуда вытекают ранее приведенные соотношения по величине относительных чисел.

Полезно также дать наглядное представление об относительных числах с помощью числовой прямой, откладывая от произвольно избранной начальной точки 0 в произвольно избранном масштабе отрезки, изображающие положительные числа — в правую сторону, а отрицательные — в левую. Точка 0 при этом изобразит нуль. Обозначая длину каждого отрезка числом, поставленным у его конца (черт. 5) мы видим, что по мере движения от точки 0 вправо числа возрастают; держась того же принципа и по отношению к числам, представленных отрезками, отложенными от 0 влево, найдем, что $0>-1$; $-1>-2$; $-2>-3$ и т. д., вообще что из положительных чисел больше то, у которого абсолютная величина больше, а из отрицательных — то, у которого она меньше; что всякое отрицательное число менее любого положительного числа и менее нуля.

Черт. 5.

§ 23. Сложение относительных чисел.

Пользуясь конкретным представлением относительных чисел, учащиеся легко могут вывести по соображению правила для сложения их во всех могущих представиться случаях. Для примера может быть взята задача об определении суммы денег, составившейся у игрока после двух сыгранных партий, причем выигрыш считается положительной величиной, а проигрыш — отрицательной.

Так, если игрок сначала выиграл 6 руб., а потом 4 руб., то, решая эту задачу сложением, найдем: $6+4=10$ руб., т. е. игрок выиграл 10 руб. Следовательно:

$$(+6)+(+4)=+10.$$

Точно так же, если игрок сначала проиграл 6 руб., а затем еще 4 руб., то по соображению мы заключаем, что общий его проигрыш равен $6+4=10$ руб., значит:

$$(-6)+(-4)=-10.$$

Далее, если игрок сперва выиграл 6 руб., а потом проиграл 4 руб., то у него составится выигрыш $6-4=2$ руб., т. е.:

$$(+6)+(-4)=+2.$$

Наконец, если он сначала проиграл 6 руб., а затем выиграл 4 руб., то он будет в проигрыше на $6-4=2$ руб., следовательно:

$$(-6)+(+4)=-2.$$

В частности, если игрок сначала выиграл 6 руб., а потом проиграл 6 руб., то ясно, что он ничего не выиграл и не проиграл, ибо $6-6=0$, и значит:

$$(+6)+(-6)=0.$$

Из этого и подобных конкретных примеров можно заключить:

1) что при сложении относительных чисел с одинаковыми знаками надо сложить их абсолютные величины и к сумме приписать общий знак;

2) при сложении двух относительных чисел с разными знаками надо вычесть их абсолютные величины — из большей меньшую — и к разности приписать знак числа с большей абсолютной величиной;

3) сумма двух относительных чисел с равной абсолютной виличиной, но различными знаками равна нулю.

Эти же выводы можно получить графически из рассмотрения относительных чисел как отрезков на числовой прямой. Однако этот способ дает простой и наглядный вывод только для случая сложения относительных чисел с одинаковыми знаками, в других же случаях не дает достаточно простой интерпретации, так что пользоваться им не представляется удобным.

Эти выводы, первоначально полученные учащимися интуитивно из рассмотрения частных примеров, затем закрепляются резюмирующим заключением преподавателя, что действительно таковы именно правила, принятые в алгебре для сложения относительных чисел. Их можно выразить формулами:

$$(+a)+(+b)=+(a+b);$$
$$(-a)+(-b)=-(a+b);$$
$$(+a)+(-b)=+(a-b), \text{ если } a>b;$$
$$(+a)+(-b)=-(b-a), \text{ если } a<b;$$
$$(+a)+(-a)=0.$$

Из рассмотренных примеров и выведенных правил можно сделать ряд заключений, полезных для выполнения сложения относительных чисел на практике. Так, прежде всего из рассмотрения всех случаев, представившихся при решении задачи о выигрыше и проигрыше игрока, мы заключаем, что слагаемые могли бы быть переставлены без изменения величины суммы, т. е. что сложение относительных чисел обладает свойством переместительности. Далее, замечая, что по смыслу задачи запись решения в первом случае

$$(+6)+(+4)=+10$$

совершенно равносильна записи

$$+6+4=10, \text{ или } 6+4=10,$$

а в третьем случае:

$$(+6)+(-4)=+2$$

равносильна записи $+6-4=+2$, или $6-4=2$, мы заключаем, что при сложении относительных чисел в этих случаях можно опустить скобки и знак сложения между ними, а писать слагаемые подряд с их знаками:

$$(+a)+(+b)=a+b; \quad +a+(-b)=a-b.$$

Ввиду удобства такой записи условились распространять ее и на остальные случаи сложения двух относительных чисел:

$$(-6)+(-4)=-6-4=-10;$$
$$(-6)+(+4)=-6+4=-2,$$

т. е. чтобы сложить два относительных числа, их надо написать рядом с их знаками и затем поступать по вышеприведенному правилу. Те же записи приводят к выводу, что прибавить к какому-нибудь числу положительное число — значит прибавить его абсолютную величину, а прибавить отрицательное число — значит отнять его абсолютную величину. Наконец, из тех же примеров видно, что от прибавления положительного числа данное число увеличивается, а отрицательного — уменьшается.

Переходя к сложению нескольких относительных чисел, следует указать, что основной смысл его такой: следует сложить два первых числа, к полученной сумме прибавить третье число, к найденному результату — четвертое и т. д. Однако легко видеть на любом конкретном примере — например на записи и подсчете результатов игры игрока или дохода и расхода какого-нибудь лица, — что слагаемые могут быть переставлены без изменения величины суммы, т. е. сложение скольких угодно относительных чисел обладает свойством переместительности, а также можно слагаемые соединять в произвольные группы, производить сложение сначала в этих группах, а затем сложить полученные результаты, т. е. оно же обладает и свойством сочетательности. Наконец, следует указать, что на практике для сложения нескольких относительных чисел применяется тот же упрощенный способ записи, который был принят для случая двух слагаемых, именно — все слагаемые пишутся рядом с их знаками, затем берется сумма всех положительных слагаемых и всех отрицательных, из большей по абсолютной величине суммы вычитается меньшая и к разности приписывается знак большей суммы: Так:

$$(+15)+(-12)+(-6)+(+4)+(-3)=15-12-6+4-3=$$
$$=(15+4)-(12+6+3)=19-21=-2.$$

Для приобретения навыка учащиеся должны проделать возможно большее число подобных примеров с соответствующими пояснениями.

Необходимо затем указать учащимся, что, рассматривая предыдущее равенство в обратном порядке, т. е.

$$15-12-6+4-3=(+15)+(-12)+(-6)+(+4)+(-3),$$

приходим к заключению, что в алгебре возможно ряд слагаемых и вычитаемых чисел заменить суммой относительных чисел; такая сумма называется алгебраической. В частности, любая арифметическая разность может быть заменена алгебраической суммой:

$$10-4=10+(-4); \quad a+(-b)=a-b.$$

Из предыдущего видно, что алгебраическая сумма обладает, подобно арифметической, свойствами переместительности и сочетательности.

§ 24. Вычитание относительных чисел.

Различные случаи, которые могут представиться при вычитании относительных чисел, так же как и при сложении, могли бы быть рассмотрены на конкретных задачах или с помощью графического метода — на отрезках. Однако в этом случае этот способ требует больших натяжек и искусственных толкований, в общем мало удовлетворяющих учащихся, а потому ему предпочитают другой путь, более строгий и в научном отношении, именно — вычитанию дается определение как действию, обратному сложению. Как и в арифметике, вычитание рассматривается как действие, с помощью которого по сумме (уменьшаемому) и одному слагаемому (вычитаемому) находится другое слагаемое (разность). Рассмотрим сначала те случаи, когда вычитается положительное число, а потом — когда отрицательное:

1) $(+7)-(+2)$.

Этот случай не представляет затруднений: очевидно, чтобы получить положительное число 7, надо к положительному же числу 2 добавить 5 положительных единиц. Решение соответствует арифметическому действию вычитания: $7-2=5$.

2) $(-7)-(+2)$.

Обозначим временно разность через x, тогда $x+2=-7$
Чтобы сумма искомого числа и $(+2)$ была равна отрицательному числу (-7), необходимо, чтобы x было отрицательным. В нем должны содержаться 2 отрицательные единицы, чтобы покрыть две положительные единицы, и еще 7 отрицательных единиц, чтобы составилось (-7). Итак:

$$x=(-7)+(-2)=-7-2=-9.$$

Следовательно:

$$(-7)-(+2)=-7-2=-9,$$

3) $(+7)-(-2)$.

Обозначая снова искомое число через x, получим:

$$x+(-2)=+7.$$

Искомое число должно быть положительным; оно должно содержать 2 положительные единицы, которые уничтожили бы 2 отрицательные, и еще 7 положительных единиц. Следовательно:

$$x=(+7)+(+2), \quad \text{или} \quad x=7+2;$$

значит

$$(+7)-(-2)=7+2=9.$$

4) $(-7)-(-2)$.

Полагая и здесь искомую разность равной x, имеем:

$$x+(-2)=-7.$$

Требуемое число должно быть отрицательным. Его можно составить, взяв 2 положительные единицы, чтобы уничтожить (-2), и еще 7 отрицательных единиц. Итак:

$$x=(-7)+(+2)=-7+2=-5.$$

Сопоставляя все случаи вместе, получим:

$$(+7)-(+2)=(+7)+(-2)=7-2=5;$$
$$(-7)-(+2)=(-7)+(-2)=-7-2=-9;$$
$$(+7)-(-2)=(+7)+(+2)=7+2=9;$$
$$(-7)-(-2)=(-7)+(+2)=-7+2=-5.$$

Отсюда можно вывести следующие общие заключения: 1) чтобы вычесть из данного числа какое-нибудь другое число, надо к данному числу прибавить число, противоположное по знаку уменьшаемому; поэтому вычитание относительных чисел приводится к сложению, правила которого уже были установлены; 2) практически действие выполняется так: надо у уменьшаемого и вычитаемого опустить скобки, уменьшаемое написать без изменения его знака, приписать к нему вычитаемое с обратным знаком и вычислить результат; 3) от вычитания положительного числа данное число уменьшается, а отрицательного — увеличивается; 4) переписывая вышеприведенную таблицу в обратном порядке, т. е. $(+7)+(-2)=(+7)-(+2)$ и пр., можно заключить, что всякое сложение относительных чисел может быть заменено вычитанием, для чего достаточно перед скобками вычитаемого числа поставить минус, а внутри скобок знак изменить на обратный.

После вывода правил для вычитания относительных чисел следует закрепить знание их решением достаточного числа примеров, а потом предложить учащимся проделать ряд примеров, в которые входят одновременно сложение и вычитание; например:

$$(-5)+(+10)-(-4)+(+20)+(-16)-(+2).$$

Учащиеся должны приобрести твердый навык в раскрытии скобок в подобных выражениях. Написав его сперва в виде:

$$-5+10+4+20-16-2,$$

они должны далее подсчитать отдельно сумму положительных и отрицательных чисел и найти общий результат. Подобные вычисления можно располагать в столбцах.

$$\begin{array}{rr} + & - \\ 10 & 5 \\ 4 & 16 \\ 20 & 2 \\ \hline 34 & 23 \\ \hline 11 & \end{array} \quad \text{т. е. } 34 - 23 = 11.$$

§ 25. Умножение и деление относительных чисел.

Изучение умножения относительных чисел в наших учебниках алгебры — стабильном учебнике А. Киселева, руководствах Извольского, Лебединцева и др. — начинается с разбора задачи о движении поезда или точки в двух направлениях, причем ставится вопрос о том, где будет находиться поезд или точка в определенный момент времени. Так как и расстояния и промежутки времени по смыслу задачи здесь могут быть и положительными и отрицательными, то рассматриваемая задача действительно дает возможность конкретной проверки правила знаков при умножении относительных чисел. Однако сама задача не отличается достаточной простотой; кроме того она оперирует с геометрическими и механическими понятиями, еще не вполне привычными для учеников, и не имеет прямой связи с арифметикой. Поэтому полученные результаты им кажутся искусственными и случайными, а вывод из них общего правила знаков — трудным и недостаточно обоснованным. Ввиду этого желательно наряду с изложенным наглядным выводом правила умножения относительных чисел дать ему более убедительное и обоснованное изложение, поставив его в связь с умножением в арифметике. Именно — можно припомнить с учащимися первоначальное определение умножения: умножить одно число на другое — значит повторить множимое слагаемым столько раз, сколько единиц во множителе:

$$4 \cdot 3 = 4 + 4 + 4 = 12.$$

Далее следует напомнить, что когда изучают умножение на дробь, то это определение оказывается неприменимым и его приходится заменить новым: умножить число на дробь — значит взять часть от множимого, выражаемую данной дробью, для чего надо умножить множимое на числителя дроби и разделить на ее знаменателя:

$$4 \cdot \frac{3}{4} = \frac{4 \cdot 3}{4} = 3.$$

Переходя к умножению относительных чисел, естественно держаться прежнего определения. Прилагая его к умножению положительного и отрицательного чисел на положительное, получим:

$$(+4) \cdot (+3) = +4 + 4 + 4 = +12;$$
$$(-4) \cdot (+3) = (-4) + (-4) + (-4) = -4 - 4 - 4 = -12.$$

Приступая же к умножению числа на отрицательный множитель, мы видим, что здесь прежнее определение умножения непригодно, так как в арифметике такого случая нет. Поэтому необходимо дать умножению для этого случая новое определение. В связи со смыслом отрицательных чисел, как противоположных положительным арифметическим, естественнее всего определить это действие так: умножить какое-нибудь число на отрицательное — значит взять его столько раз *вычитаемым* (из другого числа или из нуля), сколько во множителе отрицательных единиц. Тогда для двух оставшихся случаев умножения будем иметь:

$$(+4)\cdot(-3) = -(+4)-(+4)-(+4) = -4-4-4 = -12;$$
$$(-4)\cdot(-3) = -(-4)-(-4)-(-4) = +4+4+4 = +12.$$

Если отрицательный множитель — дробное число, то определение понимается в том смысле, что вычитаемым берется определенная часть множимого. В результате имеем все четыре возможных случая умножения:

$$(+4)\cdot(+3) = +12; \quad (+4)\cdot(-3) = -12;$$
$$(-4)\cdot(+3) = -12; \quad (-4)\cdot(-3) = +12,$$

откуда выводится правило знаков при умножении относительных чисел: если множимое и множитель имеют одинаковые знаки, то в произведении надо поставить плюс, а если разные, то минус.

Конкретное истолкование полученному правилу можно дать, например, следующее. Будем попрежнему рассматривать процесс игры и обозначать выигрыш одного из игроков знаком + (плюс), проигрыш — знаком — (минус). В процессе игры могут или делаться новые записи или стираться (зачеркиваться) старые. Будем число делаемых новых записей считать положительным, а стираемых — отрицательным. Тогда вышеприведенная таблица может дать полное понятие об изменении капитала игрока. Так, первый случай показывает, что он сделал три записи на выигрыш по 4 руб., следовательно его имущество увеличилось на 12 руб. Во втором случае ему пришлось записать три проигрыша по 4 руб., следовательно его сумма денег уменьшилась на 12 руб. В третьем случае он должен был снять три имевшихся выигрыша по 4 руб., что тоже уменьшает его деньги на 12 руб. Наконец, в четвертом случае ему удалось снять три своих проигрыша по 4 руб., что дало ему увеличение капитала на 12 руб.

Окончательно правило знаков следует записать на буквах:

$$(+a)\cdot(+b) = +ab; \quad (+a)\cdot(-b) = -ab;$$
$$(-a)\cdot(+b) = -ab; \quad (-a)\cdot(-b) = +ab.$$

Необходимо проделать достаточное число упражнений на умножение относительных чисел, включая примеры с простыми и десятичными дробями. От двух множителей следует затем перейти к трем и большему их числу, причем учащиеся сами должны будут вывести правило знаков для случаев четного и нечетного числа сомножителей. Наконец, следует применить то же правило к возведению относительных чисел в степень и выяснить знак результата для отрицательного числа в случае четного и нечетного показателей степени. Особенно важно подчеркнуть, что всякое число, не равное 0, в квадрате будет числом положительным, т. е. $a^2 > 0$. Полезно также для дальнейшего заметить, что (-1) в любой четной степени равна $(+1)$, а в нечетной (-1):

$$(-1)^{2n} = 1; \quad (-1)^{2n+1} = -1.$$

При рассмотрении произведения сначала двух, а потом нескольких множителей необходимо выяснить, что умножение относительных чисел подчиняется основным законам переместительности, сочетательности и распределительности, установленным в арифметике для целых и дробных чисел.

Особо следует отметить, что если хотя один из множителей равен нулю, произведение обращается в нуль.

Изучение деления относительных чисел, подобно вычитанию, следует вести, исходя не из конкретных примеров, а из определения этого действия, как обратного по отношению к умножению, при помощи которого по данному произведению и одному из сомножителей находят другой сомножитель. Пользуясь этим определением, легко вывести правило знаков для деления, которое оказывается одинаковым с правилом знаков для умножения, т. е. частное от деления двух чисел с одинаковыми знаками есть число положительное, а с разными — отрицательное. Выведенное правило деления относительных чисел должно быть закреплено решением достаточного числа примеров, в том числе на простые и десятичные дроби, что одинаково полезно для усвоения и арифметики и алгебры.

Отдельно должен быть проработан вопрос о результате деления, когда делимое или делитель или оба они вместе — нули.

Держась прежнего определения и для этого случая, легко показать, что в первом случае частное равно нулю, как это легко вывести и из конкретного примера деления.

Во втором случае мы должны признать деление невозможным, так как произведение любого частного на делитель нуль может дать в произведении только нуль.

Наконец, в третьем случае частное остается неопределенным и может быть положено равным любому положительному, отрицательному числу или нулю.

После изучения всех действий над относительными числами следует, конечно, проделать ряд упражнений, в которые входили бы и более сложные примеры со скобками. Полезно также проделать ряд примеров на решение простейших уравнений, в которые входили бы и отрицательные числа, например:

$$x+(-3)=-5;\quad x-(-3)=7;\quad (-3)-x=10;$$

$$4x=-20;\quad -\frac{x}{3}=6;\quad -\frac{3}{8}x=60 \text{ и т. п.}$$

ГЛАВА VI.

ДЕЙСТВИЯ НАД ЦЕЛЫМИ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ ВЫРАЖЕНИЯМИ.

§ 26. Предварительные замечания.

... об относительных числах важно, ... развития поня- ... действий алгебры. . . . .

Приступая к изучению ...
что вследствие введения понятия об относит...
и смысл буквенных обозначений; именно в то время как ра...
вами a, b, c... мы обозначали только арифметические, т. е. положительные, числа, теперь они могут обозначать любые числа: положительные, нуль и отрицательные, как целые, так и дробные. Знаки $+$ и $-$, стоящие перед буквами, поэтому обозначают не истинные знаки соответствующих чисел, а являются знаками производимых над ними действий; так, знак $+$ (плюс) означает, что написанное при нем число надо прибавить к другому (в частности — к нулю), а $-$ (минус) — что его надо отнять от другого числа или от нуля. Но так как мы видели, что при сложении относительных чисел знак прикладываемого числа остается без перемены, а при вычитании он меняется у вычитаемого числа на обратный знак, то заключаем, что обозначение, например, $+p$ можно рассматривать как выражение этого числа с его истинным знаком, а $-p$ — с противоположным. Действительно, по правилам сложения и вычитания относительных чисел, если абсолютная величина p равна 3, мы имеем:

$$+(+3)=+3;\quad +(-3)=-3;$$
$$-(+3)=-3;\quad -(-3)=+3.$$

Иначе, выражение $+p$ можно рассматривать как это самое число а $-p$ как число, противоположное по знаку. Отсюда открываетс возможность рассматривать знаки перед числами, обозначенными бук вами, как знаки самих этих чисел и производить действия над ним по тем же правилам, как над относительными числами, отвлекаясь с истинных знаков, которые могут при них быть. Так, действительн и производятся в алгебре и в математике вообще все действия н алгебраическими выражениями; этот способ действия, как было выяснен вполне соответствует существу дела и имеет источником реальные со ношения между величинами, наблюдаемые в действительности. Да следует заметить, что буквы, обозначающие числа, иногда (услов называются алгебраическими или буквенными количествами; соедин их и чисел с помощью знаков действий, например $4x^2y$, x^2-3xy и т. п., называется *алгебраическим выражением*, а соединение алгебраических выражений с помощью знаков равенства или нерав называется *формулой*. Некоторые формулы должны быть известны учащимся из курсов 5-го года обучения; другие можно указать вывести вновь.

Например: $N=2m+1$ есть формула нечетного числа; $S=$ формула площади прямоугольника; $a+\frac{1}{a}\geqslant 2$ — формула, пока щая, что сумма двух взаимнообратных чисел всегда более или р и т. п. Алгебраические выражения, не содержащие в себе де первой ступени, т. е. сложения и вычитания, называются *одноч* например x^2, $-3ab^3$; $\frac{5xy}{m}$ и т. п. — одночлены. В более ш ...ысле слова одночленами называются иногда и такие выражени рые содержат *действия сложения и вычитания*, если только они согласно установленному порядку действий в данном выражении не являются последними, например $3(a+b)^2$, $\frac{5x-3y}{27}$, $\frac{a-b}{(a+b)^2}$ и пр. Одночлену всегда стараются придать наиболее простой вид, произведя в нем все указанные действия и возможные сокращения и упрощения; так, одночлен $(-4)\cdot a\cdot\frac{1}{2}b\cdot a\cdot 5b\cdot a\cdot$ можно на основании закона переместительности умножения представить в виде:

$$-4\cdot\frac{1}{2}\cdot 5\cdot a\cdot a\cdot a\cdot b\cdot b, \text{ или, короче, } -10a^3b^2.$$

При этом, как учащимся уже известно из курса 5-го года обучения, числовой множитель, который пишется всегда ранее буквенных количеств, называется *коэфициентом*. Принимая во внимание значение положительных и отрицательных чисел, можно определить коэфициент как число, показывающее, сколько раз буквенное количество или какая-нибудь часть его берется слагаемым или вычитаемым:

$$-3ab=-ab-ab-ab;$$
$$+\frac{3}{4}xy=\frac{xy}{4}+\frac{xy}{4}+\frac{xy}{4}.$$

В случае, когда коэфициент при буквенном выражении не обозначен, он равен $+1$ или -1, например:

$$x^2y=1\cdot x^2y;\quad -a^2b^3=(-1)\cdot a^2b^3.$$

Если одночлен не содержит действия деления на *буквенное* количество, он называется *целым*, в противном случае — *дробным*. Так, $5x^3y$; $-\frac{3a^b}{4}$; $0{,}2xy^2$ — целые одночлены, а $\frac{m}{n}$; $-\frac{4pq}{x}$; $\frac{3a^2b}{2cd^2}$ — дробные.

Алгебраическое выражение, составленное из нескольких одночленов с помощью действий сложения и вычитания, называется *многочленом*; входящие в его состав одночлены называются его членами. Те из них, перед которыми стоит знак плюс $(+)$, называются *положительными*, а те, перед которыми минус $(-)$, — *отрицательными*. Многочлен, составленный только из целых одночленов, называется *целым*; таков, например, многочлен $3x^2-\frac{3}{4}xy+\frac{5y^2}{7}-\frac{1}{2}$, но многочлен $\frac{3a^2b}{2c}-5ab^2+\frac{3c^2}{ab}-$ $-\frac{1}{a^2+2}$, содержащий буквенные выражения в знаменателе, не будет целым; он называется *дробным*.

В дальнейшем изучаются только целые одночлены и многочлены.

Как и одночлену, многочлену всегда стараются придать возможно более простой вид. При этом все преобразования основываются на том, что *всякий многочлен можно рассматривать как алгебраическую сумму его членов*. Действительно, принимая во внимание вышеприведенное условие, что знакам при буквенных выражениях придается такой же смысл, как и при числах, а соединение чисел знаками $+$ и $-$, как мы видели, можно заменить алгебраической суммой, то мы можем последовательность членов всякого многочлена представить в виде ряда слагаемых; например, многочлен $2a-3b+5c-1$ представить в виде

$$2a+(-3b)+(5c)+(-1).$$

Следовательно, каждый многочлен обладает свойствами переместительности и сочетательности. На этом основывается известное правило приведения подобных членов в многочлене, т. е. таких, которые содержат буквенные количества в одинаковых степенях и отличаются только коэфициентами и знаками. Например, если имеем многочлен

$$2ax^2 - 5a^2x - 3ax^2 + x^4 - ax^2,$$

то по свойствам переместительности и сочетательности ему можно придать вид:

$$(2ax^2 - 3ax^2 - ax^2) - 5a^2x + x^4.$$

По закону распределительности умножения сумма членов, заключенная в скобки, может быть представлена в виде

$$ax^2 \cdot (2 - 3 - 1) \quad \text{и равна} \quad ax^2 \cdot - 2, \quad \text{или} \quad - 2ax^2$$

а потому многочлен примет более простой вид:

$$- 2ax^2 - 5a^2x + x^4.$$

Необходимо, чтобы учащиеся приобрели прочные навыки в приведении подобных членов, для чего должно быть проделано большое количество примеров с целыми и дробными коэфициентами и разными знаками у приводимых одночленов.

Далее, из свойств многочлена необходимо еще указать на то, что с переменою знаков у всех его членов на обратные абсолютная численная величина его не изменяется, знак же изменится на обратный. Действительно, при таком изменении знаков все входившие в него положительные числа сделаются отрицательными и наоборот, а потому сумма положительных членов станет отрицательной, а отрицательная — положительной. Поэтому общий результат вычисления изменит свой знак на обратный. Например:

$$(-5 + 3 + 4) = + 2; \quad (5 - 3 - 4) = - 2.$$

В завершение этого введения в отдел о действиях над целыми алгебраическими выражениями учащиеся должны проделать ряд примеров на нахождение *числовой величины изучаемых алгебраических выражений*. Хотя такого рода упражнения входят уже в курс 5-го года обучения, но там буквам придаются только положительные и целые числовые значения; здесь же эти буквы могут быть заменяемы и целыми и дробными, как положительными, так и отрицательными числами, что даст большую практику в действиях с относительными числами, способствуя в то же время навыку в арифметических вычислениях.

§ 27. Сложение и вычитание целых алгебраических выражений.

Приступая к изучению алгебраических действий над одночленами и многочленами, следует выяснить смысл, придаваемый в этом случае термину „действие". Так как под буквами можно подразумевать какие угодно числа, то действия над ними не могут быть выполнены на самом деле до конца, как в арифметике, а лишь указываются соответствующими знаками. Например, чтобы выразить сумму двух количеств a и b, пишут $a+b$. Но часто записанному таким образом выражению можно придать более простой вид. Такое упрощение носит название алгебраического действия. При этом новое преобразованное выражение должно быть тождественно равно прежнему, т. е. обе формы его — прежняя и новая — должны давать одинаковые числовые результаты при всякой подстановке в них вместо букв каких-нибудь чисел. Так, например, выражения $(a+b)c$ и $ac+bc$ тождественно равны при всяких числовых значениях букв a, b и c, ибо $(a+b)c=ac+bc$ по закону распределительности умножения, справедливому для относительных чисел. Ввиду этого алгебраические действия называются также *тождественными преобразованиями* алгебраических выражений.

Переходя к сложению одночленов, мы на основании данного выше определения многочлена заключаем, что суммою нескольких одночленов является многочлен, который получится, если данные одночлены напишем подряд с их знаками, поставив между ними знак плюс. Так, суммой одночленов $-2x^2$, $3xy$, $4x^2$, $-2xy$ и x^2 будет многочлен:

$$(-2x^2)+(+3xy)+(+4x^2)+(-2xy)+(+x^2),$$

или, освобождаясь по общему правилу от скобок при сложении,

$$-2x^2+3xy+4x^2-2xy+x^2.$$

Делая затем приведение подобных членов, получим сумму:

$$3x^2+xy.$$

Итак, для сложения одночленов надо написать их подряд с их знаками и затем, если возможно, сделать приведение подобных членов.

Исходя из того же определения многочлена как алгебраической суммы всех его членов и принимая во внимание, что, на основании свойства сочетательности сложения, для прибавления суммы можно прибавить к данному числу каждое слагаемое в отдельности, мы приходим к заключению, что для того, чтобы приложить многочлен, например $(a+b-c)$, к какому-либо одночлену или вообще алгебраическому выражению P, надо все члены прилагаемого многочлена приписать к первому слагаемому с их знаками. Например:

$$P+(a+b-c)=P+a+b-c.$$

Отсюда по свойству переместительности

$$(a+b-c)+P=a+b-c+P.$$

Предполагая затем, что P — тоже многочлен, например $P=(m+n-p)$, видим, что

$$(a+b-c)+(m+n-p)=a+b-c+m+n-p,$$

откуда вытекает известное правило для сложения многочленов: надо все члены слагаемых многочленов переписать подряд с их знаками и затем, если можно, сделать приведение подобных членов.

На практике при этом следует подобные члены слагаемых многочленов подписывать друг под другом так, чтобы они стояли в одном столбце. Например, при сложении многочленов

$$(3a-5b+2c)+(2a+3b-d)+(-4a+2b)$$

действие располагаем так:

$$\begin{array}{r} 3a-5b+2c \\ +2a+3b-d \\ -4a+2b \\ \hline a+2c-d \end{array}$$

т. е. ответ будет: $a+2c-d$.

В частных случаях в результате сложения многочленов может получиться нуль.

При вычитании одночленов мы исходим из правила вычитания относительных чисел, согласно которому нужно к уменьшаемому прибавить вычитаемое с обратным знаком. Прилагая его, например, к вычитанию одночленов

$$2a-(+3b);\quad 3a^2-(-5b^2);\quad -4x^2-(-5x^2),$$

получим:

$$2a-(+3b)=2a-3b;\quad 3a^2-(-5b^2)=3a^2+5b^2;$$
$$-4x^2-(-5x^2)=-4x^2+5x^2=x^2,$$

т. е. в последнем случае оказалось возможным сделать приведение подобных членов.

Точно так же для вычитания из какого-либо одночлена или вообще алгебраического выражения P целого алгебраического многочлена мы должны прибавить к P величину вычитаемого многочлена с обратным знаком. Но мы видели, что знак многочлена изменится, если мы изменим знаки на обратные у всех его отдельных членов. Отсюда, например,

$$P-(a+b-c)=P+(-a-b+c)=P-a-b+c,$$

т. е. чтобы вычесть из какого-либо алгебраического выражения многочлен, надо приписать к уменьшаемому все члены вычитаемого с обратными знаками и затем, если можно, сделать приведение подобных членов. При выводе этого правила полезно, чтобы учащиеся убедились в его справедливости еще и поверкою; так, в предыдущем примере имеем:

$$P-a-b-c+(a+b+c)=P-a-b-c+a+b+c=P.$$

На практике и в этом случае следует члены вычитаемого многочлена подписать под подобными им членами уменьшаемого, затем у всех членов вычитаемого изменить знаки на обратные, надписывая их **над** старыми знаками (но отнюдь не переправляя старых знаков), и затем сделать приведение подобных членов. Например имеем:

$$(x^2-5xy+3)-(-2xy+y^2-4x^2+1);$$

действие располагаем так:

$$\begin{array}{r} -\quad x^2-5xy+3 \\ \overset{+}{-}4x^2\overset{+}{-}2xy\overset{-}{+}y^2\overset{-}{+}1 \\ \hline 5x^2-3xy-y^2+2 \end{array}$$

Непосредственным следствием выведенных правил для сложения и вычитания многочленов являются правила для раскрытия скобок, служащих для обозначения этих действий над многочленами. Эти правила можно формулировать так:

1) если перед скобками стоит знак плюс (+), то этот знак и скобки следует опустить, а члены многочлена переписать с их знаками без изменения;

2) если перед скобками стоит минус (—), то этот знак и скобки можно опустить, а члены многочлена переписать с обратными знаками.

А из этих правил вытекают обратные правила для заключения членов многочлена в скобки:

1) чтобы заключить в скобки несколько членов многочлена, перед которым мы хотим поставить знак плюс (+), надо поставить их в скобки с имеющимися у них знаками;

2) чтобы заключить в скобки несколько членов многочлена, перед которыми мы желаем поставить знак минус (—), надо поставить их в скобки, переменив знаки у всех членов на обратные.

Умение обращаться со скобками является чрезвычайно важным для усвоения техники алгебраических преобразований. Поэтому ему должно быть уделено много внимания и времени для упражнений. При этом должны проделываться и примеры, в которые входят скобки нескольких видов. Необходимо, чтобы учащиеся могли раскрывать их, идя как от внешних скобок к внутренним, так и наоборот. Например, преобразуя первым способом выражение:

$$8-\{5x+[x^2-(y+2z-x)+3]-y\},$$

последовательно получим:

$$\begin{aligned}&8-5x-[x^2-(y+2z-x)+3]+y=\\&=8-5x-x^2+(y+2z-x)-3+y=\\&=8-5x-x^2+y+2z-x-3+y=\\&=5-6x-x^2+2y+2z.\end{aligned}$$

Если же начнем вычисление от внутренних скобок, то последовательно получим:

$$\begin{aligned}&8-\{5x+[x^2-y-2z+x+3]-y\}=\\&=8-\{5x+x^2-y-2z+x+3-y\}=\\&=8-5x-x^2+y+2z-x-3+y=\\&=5-6x-x^2+2y+2z.\end{aligned}$$

§ 28. Умножение одночленов и многочленов.

При изучении умножения алгебраических выражений следует указать, что и в этом случае мы фактически не можем выполнить действие, как в арифметике, а можем лишь обозначить его; так, чтобы умножить a на b, мы пишем $a\cdot b$, или, короче, ab. Но во многих случаях оказывается возможным результат представить в более простом и кратком виде. Первый случай такого упрощения представляет перемножение степеней одного количества, правило для которого могут вывести и сами учащиеся: основываясь на понятии о степени, имеем:

$$a^2\cdot a^3=(a\cdot a)\cdot(a\cdot a\cdot a)=aaaaa=a^5,$$

или

$$a^2\cdot a^3=a^{2+3}=a^5,\quad \text{и вообще}\quad a^m\cdot a^n=a^{m+n},$$

т. е. при умножении показатели одинаковых степеней складываются. Так как учащиеся склонны в этом случае перемножать показатели, то вывод этого правила, несмотря на его простоту, имеет важное значение. Далее, пользуясь свойствами переместительности и сочетательности умножения, подобным же образом устанавливаем общее правило умножения одночленов:

$$-3a^2b\cdot 4ab^2x=(-3\cdot 4)\cdot(a^2\cdot a)\cdot(b\cdot b^2)\,x=-12a^3b^3x,$$

т. е., чтобы умножить одночлен на одночлен, надо перемножить их коэфициенты, сложить показатели одинаковых букв и оставить без перемены те множители, которые входят только в один из сомножителей. На упражнениях следует выяснить, что то же правило прилагается и к произведению нескольких сомножителей. При этом следует сначала брать примеры с целыми коэфициентами, а потом уже и с дробными. Затем, пользуясь свойством распределительности умножения, выводим аналогичное правило для умножения многочлена на одночлен:

$$(a-b+c)\cdot m=a\cdot m-b\cdot m+c\cdot m;$$

по закону переместительности то же правило остается в силе и для умножения одночлена на многочлен:

$$m\cdot(a-b+c)=ma-mb+mc.$$

Например:

$$(x^4-x^2+2x+7)(-2x^2)=-2x^6+2x^4-4x^3-14x^2.$$

Полезно отметить, что число членов произведения, в случае, когда в многочлене нет подобных членов, будет такое же, как и в многочлене.

Наконец, для вывода правила умножения многочлена на многочлен, например

$$(x+y-z)\cdot(a-b),$$

временно принимаем множимое за одно количество:

$$x+y-z=P;$$

применяя предыдущее правило, найдем:

$$P(a-b)=Pa-Pb,$$

или

$$\begin{aligned}P(a-b)&=(x+y-z)\,a-(x+y-z)\,b=\\&=xa+ya-za-xb-yb+zb,\end{aligned}$$

т. е. при умножении двух многочленов надо все члены одного многочлена умножить последовательно на все члены другого многочлена и полученные произведения сложить. Попутно следует заметить, что число полученных членов произведения до приведения подобных членов будет равно произведению чисел членов в каждом из многочленов; так, в предыдущем примере оно равно $3\cdot 2=6$; после приведения, которое необходимо сделать, если имеются подобные члены, оно уменьшается.

Для дальнейшего весьма важно ввести понятие о расположении всех членов многочлена по возрастающим или убывающим степеням одного какого-нибудь буквенного количества, принимаемого за главное. По аналогии с арифметикой удобнее всегда придерживаться расположения многочлена по убывающим степеням какой-либо буквы. Такой порядок расположения членов в многочленах позволяет при их умножении применять способ записи, подобный употребляемому в арифметике при умножении многозначных чисел, например:

$$\begin{array}{r}
\times\begin{array}{r} 3a^2-5ab+b^2 \\ 2a^2-4ab \end{array} \\
\hline
6a^4-10a^3b+2a^2b^2 \\
-12a^3b+20a^2b^2-4ab^3 \\
\hline
6a^4-22a^3b+22a^2b^2-4ab^3
\end{array}$$

Этот способ записи показывает, между прочим, что высший и низший члены произведения не имеют себе подобных, а потому не могут сократиться при приведении, что возможно для промежуточных членов. Поэтому после приведения в произведении многочленов должно остаться, по крайней мере, два члена. Полезно привести примеры подобного рода; например:

$$(a^3+a^2b+ab^2+b^3)\cdot(a-b)=a^4-b^4.$$

В записи промежуточных членов при умножении многочленов буквенные множители для сокращения можно написать лишь один раз, как видно из следующего примера:

$$\times\begin{array}{r} a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 \\ a^2-2ab+b^2 \end{array}$$

a^5-3	a^4b+3	a^3b^2-1	a^2b^3	ab^4-b^5
-2	$+6$	-6	$+2$	
	$+1$	-3	$+3$	

$$a^5-5a^4b+10\ a^3b^2-10\ a^2b^3+5ab^4-b^5$$

В случае, когда оба многочлена содержат только одно буквенное количество и большее число членов, для производства действия можно применить еще более сокращенный способ записи, принятый в английских учебниках алгебры и называемый способом *отделения коэфициентов*.

Пусть дано, например, умножить (x^3-3x+1) на (x^2-x+2); мы видим заранее, что высший член произведения будет 5-й степени, остальные же пойдут, понижая ь по степеням на единицу, до последнего, который совершенно не будет содержать x. Поэтому при умножении запишем лишь коэфициенты:

$$\begin{array}{rrrrrr}
\times\ 1 & 0 & -3 & 1 & & \\
 & 1 & -1 & 2 & & \\
\hline
1 & 0 & -3 & 1 & & \\
 & -1 & 0+3 & -1 & & \\
 & & 2 & 0 & -6 & 2 \\
\hline
1 & -1 & -1+4 & -7 & 2 &
\end{array}$$

т. е. произведение будет

$$x^5-x^4-x^3+4x^2-7x+2.$$

Когда перемножаются многочлены с дробными коэфициентами, то можно поступать, как было приведено выше, например:

$$\begin{array}{r l}
 & \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y \\
\times & \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y \\
\hline
 & \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{9}xy \\
 & \qquad + \frac{1}{8}xy - \frac{1}{12}y^2 \\
\hline
 & \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{72}xy - \frac{1}{12}y^2
\end{array}$$

Однако удобнее в этом случае привести дроби к общему числовому знаменателю и представить многочлены в виде дробей с численными знаменателями; получим:

$$\frac{3x-2y}{6}\cdot\frac{4x-3y}{12}=\frac{(3x-2y)\ (4x+3y)}{72}.$$

Затем следует перемножить числители, как целые одночлены; найдем произведение:

$$\frac{12x^2+xy-6y^2}{72}.$$

Последний способ явно легче первого. Полезно при этом указать, что тот же результат может быть записан в виде:

$$\frac{1}{72}(12x^2+xy-6y^2).$$

Вообще, пользуясь при действиях над одночленами дробными коэфициентами, необходимо выяснить, что знаменатель дроби может быть отнесен ко всему одночлену, например:

$$\frac{1}{4}x^2=\frac{x^2}{4};\quad \frac{2}{3}a^2b=\frac{2a^2b}{3};$$

первоначально учащихся в таких преобразованиях встречают затруднения. Поэтому более широкое пользование выражениями второго года следует отложить до прохождения алгебраических дробей.

§ 29. Формулы сокращенного умножения.

Формулы сокращенного умножения имеют важнейшее значения для всего дальнейшего курса алгебры, а потому им при прохождении умножения многочленов должно быть уделено особенно серьезное внимание. Приступая к их изучению, следует указать учащимся, что, подобно тому, как в арифметике для облегчения умножения чисел пользуются таблицей умножения, которую каждый учащийся знает наизусть, точно так же и в алгебре есть несколько формул, которые упрощают и облегчают дальнейшие вычисления и которые необходимо запомнить, чтобы постоянно применять на практике.

Учащиеся сами под руководством преподавателя должны сначала вывести формулы второй степени:

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2; \quad (a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$$

и

$$(a+b)(a-b) = a^2-b^2;$$

что касается требуемых программой формул для куба суммы и разности двух чисел, то они имеют менее важное значение и могут быть пройдены после полного усвоения учащимися первых трех формул. После алгебраического вывода учащиеся должны усвоить их совершенно точную словесную формулировку, в частности не смешивая „квадрат разности" и „разность квадратов". Полезно указать геометрическую интерпретацию этих формул при помощи площадей, в особенности первой формулы, как наиболее простую, предложивши наиболее успевающим и интересующимся из учащихся дать истолкование по чертежу и формулам:

$$(a-b)^2 \quad \text{и} \quad (a+b)(a-b).$$

Затем следует закрепить знание этих формул на ряде упражнений более сложного вида, например:

$$(4x^2y-3y^2x)^2; \quad (2a^2b-3ab^2)(3ab^2+2a^2b) \text{ и т. п.;}$$

при этом временно следует входящие одночлены заменить одной буквой:

$$4x^2y = a; \quad 3y^2x = b,$$

произвести действия и уже в получившемся результате заменить a и b их значениями. После достаточной практики можно требовать выполнения указанных действий и без подобной замены. Далее можно перейти к распространению формул сокращенного умножения на трехчлен; например:

$$(x+y+z)^2 = [(x+y)+z]^2;$$
$$(a+b+c)(a+b-c) = (a+b)^2-c^2$$

и т. п., причем тоже временно можно рекомендовать замену алгебраической суммы двух каких-либо членов одной буквой, например $x+y=m$, которую потом после получения результата следует заменить ее значением:

$$\begin{aligned}(x+y+z)^2 &= (m+z)^2 = m^2+2mz+z^2 = \\ &= (x+y)^2+2(x+y)z+z^2 = \\ &= x^2+2xy+y^2+2xz+2yz+z^2.\end{aligned}$$

На этом примере, расположив его в виде:

$$(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz,$$

можно предложить ученикам формулировать правило для возведения в квадрат трехчлена (или многочлена) и сделать несколько соответствующих примеров.

Особую группу весьма полезных упражнений на те же формулы представляют подходящие примеры из арифметики вида:

$$91^2 = (90+1)^2; \quad 68^2 = (70-2)^2;$$
$$52 \cdot 48 = (50+2)(50-2) = 50^2-2^2 \text{ и т. п.}$$

Они обычно интересуют учащихся и должны быть широко использованы.

От двух множителей следует перейти к трем и большему их числу; например:

$$(a-x)(a+x)(a-x); \quad (x+1)(x-1)(x-1)(x+1),$$

причем учащиеся должны уметь проделать их несколькими способами и указать при этом наиболее выгодный порядок действий. Вообще, во всех случаях необходимо обращать внимание на выбор наиболее простых и удобных примеров для производства вычислений.

Наконец, полезным видом упражнений на формулы сокращенного умножения является проверка тождества, в которые эти формулы входят, например:

$$(a^2+b^2)(m^2+p^2)=(am+bp)^2+(bm-ap)^2;$$
$$(x+y)^2-(x-y)^2=4xy;$$
$$(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)=a^4+a^2b^2+b^4 \text{ и пр.}$$

После усвоения трех основных формул сокращенного умножения мы рекомендуем остановиться еще на перемножении двучленов, различающихся вторыми слагаемыми, т. е. вида:

$$(x+a)(x+b).$$

На ряде частных числовых примеров, как:

$$(x+8)(x+7)=x^2+8x+7x+56=x^2+15x+56,$$
$$(x-8)(x-7)=x^2-8x-7x+56=x^2-15x+56 \text{ и т. д.,}$$

учащиеся видят, что такие произведения состоят из трех членов, причем первый член представляет произведение первых членов обоих двучленов, третий — вторых, а коэфициент среднего члена представляет алгебраическую сумму вторых членов:

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab.$$

Замечая, что окончательный результат получается расположенным по степеням первой буквы, учащиеся скоро приучаются писать его сразу, находя коэфициент среднего члена в уме:

$$(x+2)(x+3)=x^2+5x+6;$$
$$(x-3)(x+4)=x^2+x-12;$$
$$(x-4y)(x-10y)=x^2-14xy+40y^2.$$

По той же формуле могут быть перемножаемы в уме числа, содержащие одинаковое число десятков и различное число единиц:

$$23\cdot 25=400+(3+5)\,20+15=575.$$

Упражнения в применении указанной общей формулы произведения двучленов, различающихся вторыми слагаемыми, весьма полезны для дальнейшего курса, в частности, для изучения квадратного трехчлена и подхода к биному Ньютона. Можно показать еще, что три основные формулы, выведенные ранее, могут быть получены из последней формулы как частные случаи.

Далее подобным же образом выводятся, формулируются и закрепляются упражнениями в памяти и понимании учащихся формулы для куба суммы и разности двух количеств.

Подобно тому как формула для $(a \pm b)^2$ удобно интерпретируется на чертеже площадью квадрата со стороною $(a+b)$, формула $(a+b)^3$ может быть наглядно представлена моделью разборного куба с ребром $(a+b)$; такой куб может быть изготовлен на уроках труда.

Применение последних формул к частным буквенным и числовым примерам должно ограничиваться лишь самыми несложными случаями, например $(x \pm 1)^3$; $(x \pm 10)^3$; $(2a \pm 3b)^3$ и т. п., а также к числам: 11^3, 19^3, 102^3 и пр.

К формулам сокращенного умножения должны быть отнесены и формулы, выражающие сумму и разность кубов двух чисел:

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3;$$
$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3,$$

которые в интересах дальнейшего их приложения к разложению алгебраических выражений на множители и делению удобнее читать, начиная с правой части: сумма кубов двух чисел равна произведению их суммы на неполный квадрат разности, а разность кубов двух чисел равна произведению их разности на неполный квадрат суммы, где под неполным квадратом условно подразумевается не удвоенное, а простое произведение данных чисел, сложенное с суммою квадратов их.

§ 30. Деление одночленов и многочленов.

Изучение действия деления следует вести на основании определения его как действия, обратного умножению. Прилагая это определение к случаю деления одночлена на одночлен, учащиеся сами легко приходят к правилу, что для этого коэфициенты одночленов надо разделить, а показателей буквенных количеств в делителе вычесть из показателей тех же букв в делимом. Особенности здесь представляют только те случаи, когда показатель какой-либо буквы в делителе равен или больше показателя той же буквы в делимом. В первом случае следует указать, что частное не меняется от разделения делимого и делителя на одно и то же число, а потому если в делимом и делителе есть буквенное количество в одной и той же степени, то на него мы предварительно оба одночлена можем сократить, а потому оно в частное совсем не войдет; например:

$$4x^3y^3z^5:2x^3yz=4y^2z^5:2yz=2yz^4.$$

В этом случае говорят, что деление выполняется нацело.

Во втором случае следует сказать, что деление не может быть ыполнено нацело, а только обозначено в виде дроби:

$$5a^2b:a^5x=\frac{5a^2b}{a^5x},$$

подобно тому, как, например, в арифчетике деление 5:7 приводит к дроби $\frac{5}{7}$.

Пользуясь тем же определением действия деления в случае деления многочлена на одночлен, например:

$$(16a^4b^3c - 8a^3b^2c + 12a^2bc):4abc,$$

мы заключаем, что в частном должен получиться многочлен, притом такой, что от умножения его первого, второго и третьего членов на $4abc$ мы должны получить соответственно первый, второй и третий члены делимого; значит, чтобы получить эти члены частного, надо последовательно каждый член делимого разделить на делителя:

$$(16a^4b^3c - 8a^3b^2c + 12a^2bc):4abc = 4a^3b^2 - 2a^2b + 3a,$$

что и может быть проверено обратным действием — умножением. Подобным же рассуждением приходим к заключению, что деления одночлена на многочлен выполнить нельзя, так как нельзя найти одночлена, который, будучи умножен на многочлен, дал бы в произведении одночлен, так что в этом случае частное должно быть обозначено дробью; например:

$$3a^2:(2ab + 5b^2) = \frac{3a^2}{2ab + 5b^2}.$$

Подобно этому можно ожидать, что деление многочлена на многочлен не всегда может быть выполнено нацело. Однако при умножении многочленов, расположенных по убывающим степеням какой-нибудь буквы, в произведении получается многочлен; при этом процесс умножения имеет большую аналогию с умножением многозначных чисел в арифметике. Поэтому и при делении многочленов может получиться целый многочлен. Действие начинают с расположения делимого и делителя по нисходящим степеням главной буквы и пользуются способом деления и обозначением, аналогичным употребляемым в арифметике при делении многозначного числа на многозначное: пусть дано разделить

$$(a^4 - 2a^3 + 3a^2 - 2a + 1) \text{ на } (a^2 - a + 1);$$

так как высший член произведения получается от перемножения высших членов сомножителей, то, назвав высший член частного через q, имеем:

$$a^4 = a^2q, \text{ т. е. } q = a^4:a^2 = a^2;$$

следовательно, чтобы найти высший член частного, надо высший член делимого разделить на высший член делителя. Далее, аналогично с арифметическим делением, умножаем все члены делителя на найденный высший член частного и вычитаем из делимого; получим остаток, который представляет собою произведение делителя на все члены частного, начиная со второго. Высший член остатка будет произведением высшего члена делителя на высший из ненайденных членов частного; поэтому, чтобы найти следующий член частного, делим высший член остатка на высший член делителя. Таким образом, отыскиваем последовательно все члены частного; если при продолжении действия дойдем до такого остатка, у которого степень высшего члена менее степени высшего члена делителя, то деления далее продолжать нельзя, т. е. оно совершается с остатком.

Примеры:

1)
$$
\begin{array}{l|l}
a^4 - 2a^3 + 3a^2 - 2a + 1 & a^2 - a + 1 \\
\underline{- a^4 \pm a^3 \mp a^2} & \overline{a^2 - a + 1} \\
\quad - a^3 + 2a^2 - 2a & \\
\quad \underline{\pm a^3 \mp a^2 \pm a} & \\
\qquad a^2 - a + 1 & \\
\qquad \underline{- a^2 + a \mp 1} & \\
\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

2)
$$
\begin{array}{l|l}
a^5 - 5a^4b + 8a^3b^2 - 6a^2b^3 + 3ab^4 & a^3 - 2a^2b \\
\underline{- a^5 \pm 2a^4b} & \overline{a^2 - 3ab + 2b^2} \\
\quad - 3a^4b + 8a^3b^2 & \\
\quad \underline{\pm 3a^4b \mp 6a^3b^2} & \\
\qquad 2a^3b^2 - 6a^2b^3 & \\
\qquad \underline{- 2a^3b^2 \pm 4a^2b^3} & \\
\text{Остаток } - 2a^2b^3 + 3ab^4 &
\end{array}
$$

Заметим, что действие иногда, например в английских руководствах и задачниках по алгебре, располагается несколько иначе, именно: делитель пишется слева от делимого, а частное — справа. Например:

$$
\begin{array}{lll}
x + 7) & x^3 + 3x^2 - 23x + 36 & (x^2 - 4x + 5 \\
 & \underline{- x^3 \mp 7x^2} & \\
 & \quad - 4x^2 - 23x & \\
 & \quad \underline{\pm 4x^2 \pm 28x} & \\
 & \qquad\quad 5x + 35 & \\
 & \qquad\quad \underline{- 5x \mp 35} & \\
 & \qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

Так же, как и в случае умножения, при делении в Англии принят способ отделенных коэфициентов, т. е. для краткости буквенные количества не пишутся, а действие производится над коэфициентами.

1) Пусть, например, требуется разделить многочлен

$(8x^6 + 8x^5 - 20x^4 + 40x^3 - 50x^2 + 30x - 10)$ на $(2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 6x - 8)$;

действие располагают так:

$$
\begin{array}{l|l}
8 + 8 - 20 + 40 - 50 + 30 - 10 & 2 + 3 - 4 + 6 - 8 \\
\underline{8 + 12 - 16 + 24 - 32} & \overline{4 - 2 + 1} \\
\quad - 4 - 4 + 16 - 18 + 30 & \\
\quad \underline{- 4 - 6 + 8 - 12 + 16} & \\
\qquad\quad 2 + 8 - 6 + 14 - 10 & \\
\qquad\quad \underline{2 + 3 - 4 + 6 - 8} & \\
\qquad\qquad 5 - 2 + 8 - 2 &
\end{array}
$$

т. е. частное равно $4x^2 - 2x + 1$, а остаток равен $5x^3 - 2x^2 + 8x - 2$.

2) Пусть дано разделить $x^5 - 1$ на $x - 1$. Применяя способ отделенных коэфициентов, получим:

$$
\begin{array}{l|l}
1+0+0+0+0-1 & 1-1 \\
\underline{+1-1} & \overline{1+1+1+1+1} \\
\qquad +1+0 & \\
\qquad \underline{+1-1} & \\
\qquad\qquad +1+0 & \\
\qquad\qquad \underline{+1-1} & \\
\qquad\qquad\qquad +1+0 & \\
\qquad\qquad\qquad \underline{+1-1} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad +1-1 & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{+1-1} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

т. е. частное будет $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.

Схема действия показывает, что разность одинаковых степеней двух чисел делится на их разность без остатка.

Очевидно, способ отделенных коэфициентов особенно удобен при делении многочленов с большим количеством членов.

Уяснив с учащимися самый процесс деления многочлена на многочлен, следует остановиться на признаках невозможности деления нацело, из которых совершенно очевидны два, именно: 1) если высшая степень главной буквы в делимом ниже высшей степени той же буквы в делителе, то деление невозможно, и 2) если низшая степень главной буквы в делимом ниже низшей степени той же буквы в делителе, то деление тоже невозможно. Однако вытекающие отсюда признаки делимости многочленов являются необходимыми, но еще недостаточными, и при наличности их деление все же может дать остаток; например, хотя высший и низший члены многочленов $(x^3 - 2x^2 + 5x + 2)$ и $(x^2 - x + 1)$ соответствуют условию возможности деления, однако оно производится с остатком:

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 - 2x^2 + 5x + 2 & x^2 - x + 1 \\
\underline{-x^3 \pm x^2 \mp x} & \overline{x - 1} \\
\qquad -x^2 + 4x + 2 & \\
\qquad \underline{\pm x^2 \mp x \pm 1} & \\
\qquad\qquad +3x + 3 &
\end{array}
$$

Итак, в остатке получается $3x + 3$; следует указать, что, как в арифметике, частное в этом случае записывается в виде целого многочлена и дроби:

$$(x^3 - 2x^2 + 5x + 2):(x^2 - x + 1) = x - 1 + \frac{3x + 3}{x^2 - x + 1}.$$

Иногда в руководствах алгебры говорится, что делимое и делитель следует располагать либо по нисходящим либо по восходящим степеням главной буквы, так как частное в обоих случаях будет одинаково. Однако это верно только тогда, когда деление совершается без остатка. Если же деление дает остаток, то при расположении обоих многочленов по восходящим степеням главной буквы частное изменяется и деление становится неограниченным. Так, располагая в последнем примере делимое и делитель по восходящим степеням x, получим:

$$
\begin{array}{l|l}
2+5x-2x^2+x^3 & 1-x+x^2 \\
\underline{-2\pm 2x\mp 2x^2} & \overline{2+7x+3x^2-3x^3\ldots} \\
\quad 7x-4x^2+x^2 & \\
\quad \underline{-7x\pm 7x^2\mp 7x^3} & \\
\qquad 3x^2-6x^3 & \\
\qquad \underline{-3x^2\pm 3x^3\mp 3x^4} & \\
\qquad \mp 3x^3-3x^4 & \\
\qquad \underline{-3x^3+3x^4-3x^5} & \\
\qquad\qquad -6x^4-3x^5\ldots &
\end{array}
$$

Ввиду того что заранее нельзя сказать, будет ли данное деление давать остаток или нет, следует делимое и делитель располагать всегда по нисходящим степеням главной буквы, подобно тому, как в арифметике деление многозначных чисел всегда производится начиная с высших разрядов. В случае деления многочленов с дробными коэфициентами следует предварительно все дроби в каждом многочлене привести к общему знаменателю и делить получившиеся дробные выражения по правилу деления дробей в арифметике, деля отдельно числителя на числителя, например пусть дан многочлен $\frac{1}{4}x^2+\frac{11}{12}x-\frac{1}{3}$ и надо его разделить на двучлен $\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}$. Приведя в делимом и делителе дроби к общему знаменателю, получим:

$$\frac{1}{12}(3x^2+11x-4):\frac{1}{4}(3x-1)=\frac{4}{12}\frac{(3x^2+11x-4)}{(3x-1)}=\frac{1}{3}\frac{3x^2+11x-4}{3x-1},$$

далее имеем:

$$
\begin{array}{l|l}
3x^2+11x-4 & 3x-1 \\
\underline{-3x^2\pm x} & \overline{x+4} \\
\qquad 12x-4 & \\
\qquad \underline{-12x\pm 4} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

значит, искомое частное равно $\frac{1}{3}(x+4)$.

Из частных случаев деления многочлена на многочлен необходимо рассмотреть деление суммы и разности одинаковых степеней двух чисел на их сумму или разность, т. е. двучленов вида $(x^m\pm a^m)$ на $(x\pm a)$ Удобнее всего начать как с основного со случая деления разности одинаковых степеней двух чисел на разность их первых степеней.

Разобрав примеры:

$$
\begin{aligned}
&(a-b):(a-b)=1;\\
&(a^2-b^2):(a-b)=a+b;\\
&(a^3-b^3):(a-b)=a^2+ab+b^2;\\
&(a^4-b^4):(a-b)=a^3+a^2b+ab^2+b^3,
\end{aligned}
$$

учащиеся придут к заключению, что разность одинаковых степеней двух количеств всегда делится на разность первых степеней, и заметят закон составления частного. Преподаватель тогда может сообщить, что такое заключение действительно правильно (доказательство его, которое, конечно, в это время еще не может быть сообщено учащимся, приведено выше в § 6). Затем подобным же образом рассматриваются три других случая деления двучленов:

$$(a^m - b^m):(a + b) \text{ — делится при } m \text{ четном;}$$
$$(a^m + b^m):(a + b) \text{ — делится при } m \text{ нечетном;}$$
$$(a^m + b^m):(a - b) \text{ — не делится.}$$

Из этих признаков делимости достаточно *запомнить лишь первый*, т. е. что $(a^m - b^m)$ всегда делится на $(a - b)$. Из частных примеров желательно рассмотреть те случаи, когда второе число есть единица, в особенности делимость $(x^m - 1)$ на $(x - 1)$, причем обратить внимание на состав частного:

$$(x^m - 1):(x - 1) = x^{m-1} + x^{m-2} + \ldots + x + 1.$$

Отсюда может быть выведена формула для суммирования членов геометрической прогрессии.

Полезно получить путем прямого деления формулу, выражающую частное от деления $(x^m - a^m)$ на $(x - a)$:

$$x^m - a^m = (x - a)(x^{m-1} + x^{m-2}a + x^{m-3}a^2 + \ldots + xa^{m-2} + a^{m-1}).$$

Можно проделать и ряд арифметических примеров, вроде:

$$8001:21 = (20^3 + 1^3):(20 + 1) = 20^2 - 20\cdot 1 + 1 = 400 - 20 + 1 = 381;$$
$$7999:19 = (20^3 - 1):(20 - 1) = 20^2 + 20 + 1 = 421 \text{ и т. п.}$$

§ 31. Методологические замечания о действиях над целыми алгебраическими выражениями.

Изучение действий сложения, вычитания и умножения над целыми алгебраическими многочленами (и в частном случае, одночленами) приводит к заключению, что после приведения подобных членов они всегда возможны и дают определенный и единственный результат. В этом отношении *они представляют полную аналогию* с соответствующими арифметическими действиями над целыми числами, и к ним могут быть применены свойства переместительности и сочетательности при сложении и переместительности, сочетательности и распределительности при умножении. Обозначая многочлены буквами P, Q, R, можно, производя по выведенным правилам действия над ними, убедиться в справедливости для них тождеств:

$$P + Q = Q + P; \quad (P + Q) + R = P + (Q + R);$$
$$P\cdot Q = Q\cdot P; \quad (P\cdot Q)\cdot R = P\,(Q\cdot R);$$
$$(P + Q)\cdot R = P\cdot R + Q\cdot R$$

и других, являющихся следствиями этих основных тождеств.

Однако при более строгом изложении теории названных действий возникает вопрос, являются ли они однозначными, т. е. не представляется ли возможным получить каким-нибудь образом многочлены иного состава, тождественно равные получаемым нами обычным способом при всевозможных значениях входящих букв. Такой вопрос возможен потому, что, как известно, есть действия, дающие двузначный или даже многозначный результат, например:

$$\sqrt{a^2-2ab+b^2}=(a-b) \text{ и } (b-a).$$

Вполне обоснованный утвердительный ответ об единственности результатов действия сложения, вычитания и умножения многочленов может быть дан на основании теории о свойствах многочленов, доказываемых в высшей алгебре[1]). Если ограничиться целыми алгебраическими многочленами, расположенными по степеням одной буквы, т. е. вида:

$$P=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_{m-1}x+a_m,$$

то этих теорем две:

1. Чтобы многочлен P тождественно, т. е. при всяких значениях буквы x, равнялся нулю, необходимо и достаточно, чтобы все коэфициенты его были нули, т. е.

$$a_0=a_1=\ldots=a_{m-1}=a_m=0.$$

2. Два многочлена P и Q могут быть тождественны, т. е. при всяких значениях буквы x равны только тогда, когда коэфициенты их при соответствующих степенях x равны. Следовательно, если имеем:

$$P=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_{m-1}x+a_m,$$
$$Q=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_{m-1}x+b_m$$
$$\text{и } P=Q,$$

то

$$a_0=b_0,\quad a_1=b_1,\ldots,\quad a_{m-1}=b_{m-1},\quad a_m=b_m.$$

На основании этих теорем легко доказать однозначность действий сложения, вычитания и умножения многочленов помощью метода доказательства от противного. Так, чтобы доказать однозначность сложения двух многочленов $A+B$, допустим, что мы по обычным правилам получили в сумме их многочлен C, т. е. $A+B=C$, а, с другой стороны, существует тождественно представляющий ту же сумму многочлен C'; тогда тождественно $C=C'$, а это на основании второй теоремы возможно только тогда, когда все коэфициенты этих многочленов при одинаковых степенях главной буквы равны, следовательно, многочлены C и C' ничем, кроме разве порядка членов, не отличаются друг от друга, и, значит, сложение есть действие однозначное. Подобным же образом можно доказать однозначность вычитания и умножения многочленов.

Переходя к делению многочленов, расположенных по нисходящим степеням x, мы должны дать этому действию определение, которое обнимало бы и случай деления с остатком. Таким определением является следующее: разделить многочлен A на многочлен B, значит — найти два новых многочлена Q и R — таких, чтобы тождественно имело место равенство:

$$A=BQ+R,$$

причем степень многочлена R должна быть ниже степени B. В частном случае, когда $R=O$, деление совершается без остатка. Мы видели, как

[1]) См. J. Tannery, Leçons d'algèbre et d'analyse; на русском языке упрощенное изложение: А. Киселев, Элементарная алгебра, изд. 28-е, 1916.

на практике получаются многочлены Q и R: докажем, что в указанном смысле деление есть действие однозначное. С этой целью допустим, что возможно при том же делении другое частное Q' и другой остаток R', т. е.

$$A = BQ' + R'.$$

Но тогда

$$BQ + R = BQ' + R', \text{ следовательно } B(Q - Q') = R' - R.$$

Но здесь степень разности многочленов, стоящих в правой части, менее, чем степень B, так как степень каждого из них менее степени m; степень же выражения, стоящего в левой части, более или, по крайней мере, равна степени многочлена B. Поэтому полученное равенство не может быть тождеством, и, следовательно, предположение о возможности второго результата деления данных многочленов оказывается неправильным, т. е. деление многочленов, соответствующее данному выше определению, есть действие тоже однозначное.

Ввиду изложенного и действие деления многочленов представляет большую аналогию с действием деления многозначных чисел.

Однако полезно выяснить с учащимися и особенности алгебраического деления сравнительно с арифметическим. Так, в то время, как цифры частного при делении многозначного числа на многозначное должны быть целыми, коэфициенты частного при делении многочленов могут быть и дробными. Точно так же в арифметике цифры частного не должны быть более 9, тогда как в алгебре коэфициенты частного могут быть какими угодно. Наконец, в арифметике остаток должен быть менее делителя; в алгебре же только степень остатка должна быть менее степени делителя. Поэтому при подстановке в случае алгебраического деления вместо главной буквы какого-нибудь числа остаток может оказаться больше делителя.

Так, мы видели (§ 29), что при делении $(x^3 - 2x^2 + 5x + 2)$ на $(x^2 - x + 1)$ в частном получается $(x - 1)$ и в остатке $(3x + 3)$:

$$(x^3 - 2x^2 + 5x + 2) = (x^2 - x + 1)(x - 1) + 3x + 3.$$

Подставляя в делимое и делитель $x = 10$, получим: $852 : 91 = 9$ и остаток 33, что в арифметическом смысле верно. Но, полагая $x = 3$, получим: $26 : 7 = 2$ и остаток 12, что не соответствует арифметическому делению, при котором остаток должен быть менее делителя.

§ 32. О делимости многочлена, целого относительно x, на двучлен первой степени.

Важнейшим случаем деления многочленов как по своему теоретическому значению, так и по приложениям, является деление многочлена, расположенного по убывающим степеням, на двучлен первой степени $(x - a)$. Как известно, соответствующая теорема гласит, что остаток при делении многочлена $P_x = a_0x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \ldots + a_{m-1}x + a_m$ на двучлен $(x - a)$ равен результату подстановки в делимый многочлен вместо x количества a, т. е.:

$$R = P_a = a_0a^m + a_1a^{m-1} + a_2a^{m-2} + \ldots + a_{m-1}a + a_m.$$

Доказательство, обычно приводимое в курсах алгебры и принадлежащее д'Аламберу, состоит в том, что данный многочлен P делят на $(x-a)$; обозначая многочлен, помещающийся в частном, через Q, а остаток, который, на основании приведенного в предыдущем параграфе определения деления, может содержать x только в нулевой степени, т. е. представляет постоянное число, через R, приходят к тождеству:

$$P = Q(x-a) + R.$$

Полагая в этом тождестве $x = a$, получаем:

$$P_a = Q_a(a-a) + R_a,$$

где через Q_a обозначен результат подстановки в частное вместо x количества a. Так как согласно теореме, доказываемой в высшей алгебре, при конечном a величина P_a не может обращаться в бесконечность, то первое слагаемое в правой части последнего равенства есть нуль, и мы получим: $R = P_a$, что и требовалось доказать.

Это доказательство, весьма замечательное по его краткости и остроумию, вполне отвечает той методологической точке зрения на действия над целыми алгебраическими многочленами, которая изложена в предыдущем параграфе. Являясь вполне научным, оно, однако, несколько затрудняет учеников выпускного класса средней школы, где оно проходится. Именно, неудобной стороной его является то, что употребляемый в нем прием для доказательства нигде более в алгебре не встречается, почему оно производит на учащихся впечатление большой искусственности. Поэтому предлагаем другое доказательство той же теоремы, более простое и естественное, которое можно давать учащимся ранее или параллельно с классическим доказательством д'Аламбера [1]).

Именно, учащиеся уже знают, что разность одинаковых степеней двух количеств, т. е. $x^p - a^p$, делится на разность этих количеств, т. е. $(x-a)$ (см. § 6). Отнимая теперь от многочлена P многочлен R и прибавляя к нему R, представим P в виде:

$$\begin{array}{r}
a_0x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \ldots + a_{m-1}x + a_m \\
+ -(a_0a^m + a_1a^{m-1} + a_2a^{m-2} + \ldots + a_{m-1}a + a_m) \\
a_0a^m + a_1a^{m-1} + a_2a^{m-2} + \ldots + a_{m-1}a + a_m \\
\hline
\end{array}$$

$$P = [a_0(x^m - a^m) + a_1(x^{m-1} - a^{m-1}) + a_2(x^{m-2} - a^{m-2}) + \ldots + a_{m-1}(x-a)] + (a_0a^m + a_1a^{m-1} + a_2a^{m-2} + \ldots + a_{m-1}a + a_m.$$

Здесь сумма членов в квадратных скобках делится на $(x-a)$, а потому второе слагаемое, в круглых скобках, представляет остаток от деления P на $(x-a)$, что и требовалось доказать. Предлагаемая форма доказательства имеет еще то удобство, что позволяет легко написать и частное от данного деления. Действительно, учащимся должно быть известно (см. § 30), что:

$$(x^m - a^m):(x-a) = x^{m-1} + x^{m-2}a + x^{m-3}a^2 + \ldots + xa^{m-2} + a^{m-1},$$

---

[1]) См. И. Чистяков. Одно из доказательств теоремы Безу. „Математическое образование", 1916, № 3, стр. 56.

поэтому очевидно, что искомое частное имеет вид:

$$a_0(x^{m-1}+x^{m-2}a+\cdots+xa^{m-2}+a^{m-1})+a_1(x^{m-2}+x^{m-3}a+\cdots+ \\ +xa^{m-3}+a^{m-2})+\cdots+a_{m-2}(x-a)+a_{m-1},$$

или, если расположить его по степеням x,

$$a_0x^{m-1}+(a_0a+a_1)x^{m-2}+(a_0a^2+a_1a+a_2)x^{m-2}+\cdots+a_0a^{m-1}+ \\ +a_1a^{m-2}+\cdots+a_{m-2}a+a_{m-1}.$$

Для получения остатка от деления многочлена P на двучлен $(x+a)$ представляем последний в виде $x-(-a)$; получим:

$$R_1=a_0(-a)^m+a_1(-a)^{m-1}+\cdots+a_{m-1}(-a)+a_m;$$

аналогично можно получить выражение и частного.

Полезно, чтобы учащиеся проверили доказанную теорему на числовых примерах; так, многочлен

$$P=x^4-3x^2+5x-1$$

при делении на $(x-2)$ дает остаток

$$R=2^4-3\cdot 2^2+5\cdot 2-1=13,$$

а при делении на $(x+3)$ остаток

$$R_1=(-3)^4-3(-3)^2+5(-3)-1=38,$$

что следует проверить непосредственным делением P на $(x-2)$ и на $(x-3)$. Следует отметить, что остаток может быть и отрицательным числом.

Важнейшим следствием доказанной общей теоремы является *теорема Безу*, состоящая в том, что если a есть корень многочлена P, т. е. P обращается при подстановке в него вместо x количества a в нуль, то P делится на $(x-a)$ без остатка. Действительно, тогда $R=P_a=0$. И обратно, — если P делится на a, то упомянутая подстановка обращает остаток R в нуль и, значит, $x=a$ есть корень данного многочлена. Теорема Безу, как известно, имеет важнейшее значение в теории уравнений высших степеней, а при решении числовых уравнений легко позволяет находить их соизмеримые корни.

Та же теорема позволяет точно установить признаки делимости двучленов вида $x^m\pm a^m$ на $x\pm a$. Так,

1) x^m-a^m делится на $x-a$, потому что в этом случае $R=a^m-a^m=0$;

2) x^m+a^m не делится на $(x-a)$, ибо здесь $R=a^m+a^m=2a^m$;

3) x^m+a^m при m нечетном, т. е. $(x^{2n+1}+a^{2n+1})$, делится на $(x+a)$, так как здесь $R=(-a)^{2n+1}+a^{2n+1}=0$, но не делится при m четном, т. е. $x^{2n}+a^{2n}$ не делится на $(x+a)$, так как тогда $R=(-a)^{2n}+a^{2n}=2a^{2n}$;

4) (x^m-a^m) делится на $(x+a)$ при m четном, ибо тогда имеем $P=x^{2n}-a^{2n}$ и $R=(-a)^{2n}-a^{2n}=a^{2n}-a^{2n}=0$, и не делится при n нечетном, когда $P=x^{2n-1}-a^{2n-1}$ и $R=(-a)^{2n-1}-a^{2n-1}=-2a^{2n-1}$.

Кроме многочисленных применений в алгебре теорема Безу может иметь некоторые применения и в арифметике. Так, с ее помощью могут быть выведены общий и частные признаки делимости чисел. В самом деле, пусть в многочлене P_x — целое число, a — коэфициенты, $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — целые числа, меньшие x; тогда многочлен P можно рассматривать как целое число, представленное по системе счисления с основанием x. Теорема Безу дает признак делимости этого числа на числа $(x-a)$ и $(x+a)$, где a — целое число, именно в первом случае R, а во втором R_1 должно равняться 0 или числу, кратному делителя. Так, полагая $x=10$ и $a=1$, получим $x-a=9$.

$$R=a_0+a_1+a_2+\ldots+a_m,$$

т. е. число разделится на 9, если сумма его цифр разделится на 9. Во втором случае $x+a=11$;

$$R_1=a_m-a_{m-1}+a_{m-2}+\ldots+(-1)^m a_0$$

или

$$R_1=(a_m+a_{m-2}+\ldots)-(a_{m-1}+a_{m-3}+\ldots),$$

т. е. из суммы цифр чисел, стоящих на нечетных местах, следует вычесть сумму цифр, стоящих на четных местах; если остаток разделится на 11, то и все число разделится.

§ 33. Разложение алгебраических выражений на множители.

Разложение алгебраических выражений на множители является весьма важным действием для всего дальнейшего курса алгебры. На нем основываются: действия над алгебраическими дробями, нахождение общего наибольшего делителя и наименьшего кратного алгебраических выражений, решение уравнений с буквенными коэфициентами, уравнений высших степеней и пр. С другой стороны, упражнение, в особенности в разложении на множители многочленов, является естественным дополнением к отделу о действиях над одночленами и многочленами и позволяет учащимся наилучшим образом уяснить себе и окончательно закрепить знание основ этого отдела. Сверх того, так как для разложения алгебраических выражений на множители нет таких прямых правил и указаний, как для основных действий, но оно требует от решающего задачу некоторой сообразительности и находчивости, то соответствующая практика в решении примеров сильно способствует математическому развитию учащихся. Поэтому прохождению этого отдела должно быть уделено *специальное внимание. Однако при первоначальном изучении* алгебры не следует касаться слишком сложных и трудных примеров, которые часто встречаются в учебниках и задачниках по алгебре и требуют нередко искусственных приемов для решения, а достаточно ограничиться наиболее простыми и необходимыми случаями, разобрав их с полной подробностью и основательностью.

Приступая к прохождению этого отдела, полезно припомнить разложение чисел на множители в арифметике и основное определение его: „*разложить число на множители — значит представить его в виде произведения нескольких чисел*“.

Далее можно напомнить случаи, когда такое действие в арифметике является необходимым и применяется на практике, а также, что обычно требуется разложение произвести на простые множители. Аналогично и в алгебре — разложение алгебраического выражения на множители тоже есть представление его в виде произведения двух или нескольких возможно более простых множителей; это действие, очевидно, обратно умножению, а потому при нем особенно важно знать правила и свойства умножения и деления алгебраических выражений.

Проще всего разложить на множители одночлен, который по самому своему определению представляет произведение нескольких множителей, например:

$$4x^2a = 4 \cdot x^2 \cdot a = 4x \cdot x \cdot a = 4ax \cdot a$$

и пр.; необходимо отметить, что множители можно брать и с различными знаками, лишь бы знак произведения не менялся:

$$4x^2a = 4 \cdot (-x)^2 \cdot (\pm a).$$

Не представляет обычно трудности для учащихся и разложение многочлена на множители путем *вынесения за скобки* общего множителя, входящего во все члены, например:

$$ab + ac - ad = a(b + c - d).$$

Необходимо только указать, что многочлен в скобках получается путем деления данного многочлена на вынесенный член:

$$12x^3y - 4x^2y^2 + 4y = 4y(3x^3 - x^2y + 1).$$

Важно отметить, что перед вынесенным за скобки общим множителем всегда можно поставить и минус; так, в предыдущем примере

$$12x^3y - 4x^2y^2 + 4y = -4y(-3x^3 + x^2y - 1).$$

Подобным же образом *разлагаются многочлены*, содержащие *в каждом* члене какой-нибудь двучленный или многочленный общий множитель. Примеры:

$$a(x - 2y) + b(x - 2y) = (x - 2y)(a + b);$$
$$1 - a + x(1 - a) = (1 - a) \cdot 1 + x(1 - a) = (1 - a)(1 + x).$$

Если возможно, в оставшемся после вынесения общего множителя за скобки выражении следует сделать дальнейшие упрощения, например

$$(x - y)(a^2 + b^2) - (x + y)(a^2 + b^2) = (a^2 + b^2)[(x - y) - (x + y)] =$$
$$= (a^2 + b^2)(x - y - x - y) = -2y(a^2 + b^2);$$
$$by(x - a) - bx(y - a) = b[y(x - a) - x(y - a)] = b(ax - ay) =$$
$$= ab(x - y) \text{ и т. п.}$$

Особенно важны те случаи, когда члены многочлена содержат общего множителя, но с различными знаками. Тогда ранее взятия общего множителя за скобку необходимо у какого-либо из членов разлагаемого выражения изменить знак на обратный, так:

$$x^2(1 - m) - y^2(m - 1) = x^2(1 - m) + y^2(1 - m) = (1 - m)(x^2 + y^2);$$
$$m(q - p) - (p - q) = -m(p - q) - (p - q) \cdot 1 = (p - q)(-1 - m) =$$
$$= -(p - q)(1 + m).$$

Следующим приемом для разложения алгебраических выражений на множители является *метод группировки*, применяемый тогда, когда во всех членах многочлена не имеется общего множителя, но он может быть разбит на группы членов, имеющих общий множитель, который затем может быть вынесен за скобки как общий для всех групп:

$$2a+2b+ax+bx=2(a+b)+x(a+b)=(a+b)(2+x).$$

При группировке иногда необходимо для получения общего множителя перед группою членов изменить знак на обратный:

$$x^2-xy-xz+yz=(x^2-xy)-(xz-yz)=x(x-y)-z(x-y)=$$
$$=(x-y)(x-z).$$

Способ группировки, как видно из этого примера, можно соединить со способом вынесения общего множителя из отдельных членов за скобки. Вот еще пример:

$$(2a-b)^2+4ax-2bx=(2a-b)^2+2x(2a-b)=$$
$$=(2a-b)(2a-b+2x).$$

Дальнейшие приемы разложения алгебраических выражений на множители основываются на формулах *сокращенного умножения*, которые при этом должны быть предварительно повторены:

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)(a+b)=(a+b)^2;$$
$$a^2-2ab+b^2=(a-b)(a-b)=(a-b)^2;$$
$$a^2-b^2=(a-b)(a+b).$$

Первые две формулы выражают разложение на множители трехчленов. Для применения их на практике учащиеся должны обратить внимание на то, что первый член трехчлена должен быть квадратом первого члена двучлена, а третий — квадратом второго члена. Для проверки следует убедиться, что средний член представляет удвоенное произведение первого и третьего членов. Наличность этих признаков имеет место, например, в трехчлене x^2+6x+9, а потому:

$$x^2+6x+9=(x+3)^2=(x+3)(x+3).$$

Рассматривая затем трехчлен $4x^2-4xy+y^2$, видим, что первый член его может быть представлен либо как $(2x)^2$, либо как $(-2x)^2$, точно так же и y^2 можно рассматривать и как $(+y)^2$ и как $(-y)^2$. Но средний член указывает, что крайние члены должны быть противоположных знаков, а потому

$$4x^2-4xy+y^2=(2x-y)(2x-y)=(2x-y)^2$$

или

$$4x^2-4xy+y^2=(y-2x)(y-2x)=(y-2x)^2.$$

Таким образом, здесь имеется двойственность решения, на которую непременно следует указать учащимся. Она основывается на двойственности действия извлечения квадратного корня, о которой в данном месте говорить учащимся преждевременно, но необходимо указать, что

$$a^2-2ab+b^2=\begin{cases}(a-b)(a-b)=(a-b)^2;\\(b-a)(b-a)=(b-a)^2.\end{cases}$$

Конечно, точно так же

$$a^2+2ab+b^2=\begin{cases}(a+b)(a+b)=(a+b)^2;\\(-a-b)(-a-b)=(-a-b)^2;\end{cases}$$

но последняя формула не имеет никакого практического приложения.

Применение обеих вышеприведенных формул, так же как и третьей формулы сокращенного умножения, т. е.

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b),$$

к частным примерам обычно несколько затрудняет учащихся, так как, по существу, оно ведет к действию извлечения квадратного корня. Поэтому достаточно проделать на них не очень сложные примеры, вроде следующих:

$$a^2 - 10a + 25 = (a - 5)(a - 5) = (a - 5)^2;$$
$$16x^2 + 40xy + 25y^2 = (4x + 5y)^2;$$
$$-4x^2 + 20x - 25 = -(4x^2 - 20x + 25) =$$
$$= -(2x - 5)^2 = -(2x - 5)(2x - 5);$$
$$25x^2 - 9 = (5x + 3)(5x - 3);$$
$$a^2x^2 - \frac{1}{4}b^2 = (ax)^2 - \left(\frac{1}{2}b\right)^2 = \left(ax + \frac{1}{2}b\right)\left(ax - \frac{1}{2}b\right);$$
$$32m^4n - 2n^3 = 2n(16m^4 - n^2) = 2n(4m^2 + n)(4m^2 - n).$$

Необходимо указать также на применение третьей формулы к нахождению разности квадратов двух чисел; например:

$$86^2 - 14^2 = (86 + 14)(86 - 14) = 100 \cdot 72 = 7200.$$

Таким образом, здесь разность квадратов двух чисел получается без возведения этих чисел в квадрат. Такой прием особенно удобен при вычислении катета прямоугольного треугольника по гипотенузе и другому катету с помощью теоремы Пифагора, а также при решении некоторых квадратных уравнений и в других случаях.

Применение формул куба суммы и куба разности двух чисел, т. е.

$$a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)^3,$$

к разложению алгебраических выражений на множители требует, по существу, извлечения кубического корня, а потому должно быть ограничено лишь наиболее простыми примерами, вроде следующих:

$$1000x^3 + 300x^2 + 30x + 1 = (10x + 1)^3;$$
$$a^3 - 12a^2 + 48a - 64 = (a - 4)^3 \text{ и т. п.}$$

Большее приложение в дальнейшем могут найти разложения суммы и разности кубов двух чисел:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2);$$
$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2);$$

например:

$$x^3 + 8y^3 = x^3 + (2y)^3 = (x + 2y)[x^2 - x \cdot 2y + (2y)^2] =$$
$$= (x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2);$$
$$a^3 - 64 = a^3 - 4^3 = (a - 4)(a^2 + 4a + 16);$$
$$a^6 - b^6 = (a^2)^3 - (b^2)^3 = (a^2 - b^2)[(a^2)^2 + a^2b^2 + (b^2)^2] =$$
$$= (a^2 - b^2)(a^4 + a^2b^2 + b^4).$$

Последнее выражение можно было бы разложить сперва как разность двух квадратов, а потом каждый из множителей снова разложить по вышеприведенным формулам:

$$a^6 - b^6 = (a^3 + b^3)(a^3 - b^3) =$$
$$= (a + b)(a^2 - ab + b^2)(a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

Ввиду того что учащиеся склонны разлагать на множители сумму квадратов двух алгебраических количеств, необходимо обратить внимание их на то, что такое разложение выражения $(a^2 + b^2)$ алгебраически невозможно, хотя при подстановке в него вместо a и b чисел могут получиться составные числа, например: $3^2 + 1^2 = 9 + 1 = 10 = 2 \cdot 5$. На этом примере можно пояснить различие между разложением чисел на множители в арифметике и в алгебре.

§ 34. Разложение на множители трехчлена второй степени.

Для дальнейшего, в частности при изучении квадратного уравнения и квадратной функции, требуется умение разлагать на множители трехчлены второй степени. Поэтому на этом вопросе необходимо отдельно остановиться.

Такое разложение является обратным действием по отношению к сокращенному умножению двучленов, различающихся вторыми слагаемыми (см. § 29), а потому оно может быть выполнено на основании формулы:

$$x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b).$$

Она показывает, что в разложении будет два двучленных множителя, причем в каждом первым слагаемым будет x, а вторым слагаемым являются множители свободного члена ab, выбранные так, что алгебраическая сумма их является коэфициентом при x.

Поэтому при разложении таких трехчленов надо подобрать два множителя свободного члена так, чтобы они в сумме давали коэфициент при x в первой степени. Учащиеся обыкновенно подбирают эти множители наудачу; в руководствах алгебры не указывается планомерных способов для их подбора. Между тем можно названное действие производить так, что всякая случайность в нем будет исключена. С этою целью заметим прежде всего, что если свободный член в трехчлене положителен, то вторые множители будут оба иметь одинаковые знаки, а потому коэфициент среднего члена будет представлять сумму абсолютных величин вторых слагаемых, взятую со знаком плюс или минус; если же свободный член отрицателен, то вторые множители будут разных знаков, а потому коэфициент при среднем члене будет представлять разность абсолютных величин вторых слагаемых, взятую со знаком плюс или минус. Поэтому для разложения трехчленов первого рода надо коэфициент свободного члена разложить всевозможными способами на два множителя и составить из них суммы, а во втором — разности, и выбрать из полученных комбинаций чисел такую пару, которая дает и свободный член и коэфициент при среднем члене уравнения. Если такой пары чисел не получается, то задача разложения трехчлена на два рациональных множителя невозможна. Поясним этот способ примерами.

1) $x^2+8x+15$.

Здесь свободный член положителен; разлагая его на два множителя и составляя их суммы, имеем:

$$15=1\cdot15, \quad \text{или} \quad 3\cdot5,$$

их суммы будут:

$$1+15=16; \quad 3+5=8;$$

вторая пара чисел удовлетворяет задаче; так как коэфициент при среднем члене положителен, то в произведении вторые слагаемые надо взять со знаком плюс:

$$x^2+8x+15=(x+3)(x+5).$$

2) $x^2-11x+24$;

$$24=1\cdot24=2\cdot12=3\cdot8=4\cdot6;$$

$$1+24=25; \quad 2+12=14; \quad 3+8=11; \quad 4+6=10;$$

задаче удовлетворяет пара чисел 3 и 8; так как средний член трехчлена отрицателен, то их надо взять с минусом:

$$x^2-11x+24=(x-3)(x-8).$$

3) $x^2+5x-24$.

Здесь, разложив 24 на множители, мы должны составить затем их разности; получим:

$$24=24\cdot1=2\cdot12=3\cdot8=4\cdot6;$$

$$24-1=23; \quad 12-2=10; \quad 8-3=5; \quad 6-4=2.$$

Вопросу удовлетворяет пара чисел, 8 и 3, которые нужно взять с разными знаками; так как сумма их положительна, то большее по абсолютной величине число 8 надо взять с плюсом; получим:

$$x^2+5x-24=(x+8)(x-3).$$

4) $x^2-4x-60$.

Разлагая свободный член на два множителя и составляя их разности, будем иметь:

$$60=1\cdot60=2\cdot30=3\cdot20=4\cdot15=5\cdot12=6\cdot10;$$

$$60-1=59; \quad 30-2=28; \quad 20-3=17;$$

$$15-4=11; \quad 12-5=7; \quad 10-6=4.$$

Здесь вопросу удовлетворяет последняя пара чисел, 10 и 6, которые надо взять с противоположными знаками; так как их алгебраическая сумма равна -4, то большее число надо взять отрицательным, а меньшее положительным; получим:

$$x^2-4x+60=(x-10)(x+6).$$

5) $x^2-7x+16$.

Разлагая 16 на два множителя, получим произведения: $1\cdot16$; $2\cdot8$; $4\cdot4$; суммы их будут 17; 10; 8. Так как ни одна сумма не равна среднему коэфициенту трехчлена 7, то разложение данного трехчлена на рациональные множители невозможно.

Подобными же способами можно разлагать, конечно, и трехчлены более сложного вида, например:

$$x^2-3xy-28y^2=(x+4y)(x-7y).$$

В сборниках задач нередко даются примеры на разложение трехчленов вида ax^2+bx+c, где $a>1$; однако указаний на то, как выполнять такие разложения, не встречается ни в руководствах алгебры ни в задачниках. Между тем этот вопрос имеет значение при решении квадратных уравнений. Поэтому рассмотрим его, исходя из умножения линейных двучленов относительно x:

$$(kx+l)(mx+n)=kmx^2+(lm+kn)x+ln.$$

Правая часть этого равенства показывает, что первый член произведения равен произведению первых членов множителей, последний — вторых, а коэфициент среднего члена равен сумме произведений коэфициента при x одного двучлена на свободный член другого. Отсюда, чтобы разложить трехчлен ax^2+bx+c на множители, мы должны разложить всеми способами на два множителя коэфициент a и коэфициент c и выбрать из них такие множители, чтобы сумма их парных произведений равнялась коэфициенту b, т. е. если $k\cdot m=a$, $l\cdot n=c$ и в то же время $lm+kn=b$, то $ax^2+bx+c=(kx+l)(mx+n)$. Так, например, желая разложить трехчлен $6x^2+19x+10$, мы разлагаем на множители $6=1\cdot 6=2\cdot 3$; $10=1\cdot 10=2\cdot 5$ и составляем суммы:

$$1\cdot 10+6\cdot 1=16;\quad 1\cdot 1+10\cdot 6=61;\quad 1\cdot 5+2\cdot 6=17;$$
$$1\cdot 2+5\cdot 6=32;\quad 2\cdot 10+1\cdot 3=23;\quad 2\cdot 1+10\cdot 3=32;$$
$$2\cdot 5+2\cdot 3=16;\quad 2\cdot 2+3\cdot 5=19.$$

Последняя комбинация чисел дает средний член трехчлена, а потому

$$6x^2+19x+10=(2x+5)(3x+2).$$

Однако такой способ является слишком сложным. Поэтому предлагаем следующий прием: желая разложить трехчлен $P=ax^2+bx+c$, умножим все члены его на a, т. е. составим трехчлен вида

$$a\cdot P=a^2x^2+abx+ac$$

и разложим его на множителей; для этого положим $ax=y$, тогда

$$aP=y^2+by+ac.$$

Этот последний трехчлен разложим вышеприведенным способом на множители. Пусть

$$aP=(y+\alpha)(y+\beta),$$

следовательно

$$\alpha+\beta=b,\quad \alpha\beta=ac,$$

тогда

$$P=\frac{(y+\alpha)(y+\beta)}{a}\quad \text{или}\quad P=\frac{(ax+\alpha)(ax+\beta)}{a}.$$

Так как при перемножении двучленов в числителе мы получим:

$$P=\frac{a^2x^2+\alpha ax+\beta ax+\alpha\beta}{a},$$

причем все слагаемые, в том числе и $\alpha\beta$, делятся на a, то P приведется к целому алгебраическому выражению. Мы его можем представить в двух видах:

$$\text{или}\quad P=\left(x+\frac{\alpha}{a}\right)(ax+\beta)\quad \text{или}\quad P=(ax+\alpha)\left(x+\frac{\beta}{a}\right);$$

причем после преобразований P представится в виде произведения двучленов с целыми коэфициентами.

Для примера возьмем прежний трехчлен

$$P = 6x^2 + 19x + 10;$$

умножая все члены его на 6, получим:

$$6P = 36x^2 + 19 \cdot 6x + 60:$$

полагая $6x = y$, будем иметь:

$$6P = y^2 + 19y + 60;$$

разлагая последний трехчлен на множители, получим:

$$6P = (y + 4)(y + 15)$$

или

$$6P = (6x + 4)(6x + 15),$$

откуда

$$P = \frac{(6x + 4)(6x + 15)}{6}$$

или, по сокращению,

$$P = (3x + 2)(2x + 5),$$

как мы нашли ранее.

Итак, здесь для разложения трехчлена второй степени общего вида мы его преобразовали и воспользовались затем способом подстановки. Тем же способом могут решаться и задачи, гораздо более сложные.

Пусть, например, требуется разложить на множители выражение:

$$P = (x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) - 24.$$

Перемножая первый двучлен с четвертым, а второй с третьим, получим

$$P = (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) - 24.$$

Обозначая первый из трехчленных множителей через y, получим:

$$P = y(y + 2) - 24, \text{ или } P = y^2 + 2y - 24.$$

Разлагая последний трехчлен обычным приемом на множители, найдем:

$$P = (y + 6)(y - 4)$$

или

$$P = (x^2 + 5x + 10)(x^2 - 5x),$$

т. е. окончательно

$$P = x(x + 5)(x^2 + 5x + 10).$$

Другим искусственным приемом, служащим для разложения трехчленов и двучленов на множители, является прибавление и отнятие одного и того же количества, обычно квадрата какого-нибудь числа, с целью получить потом разность квадратов двух чисел. Например,

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^4 + 2x^2 + 1) - x^2 = (x^2 + 1)^2 - x^2 =$$
$$= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1);$$
$$a^4 + 64 = (a^4 + 16a^2 + 64) - 16a^2 =$$
$$= (a^2 + 8)^2 - (4a)^2 = (a^2 + 4a + 8)(a^2 - 4a + 8).$$

ГЛАВА VII.

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДРОБИ.

§ 35. Основные понятия.

В программе математики средней школы отдел об алгебраических дробях разделен на две части: дроби с одночленными знаменателями изучаются в 6-м, а с многочленными — в 7-м классе. Однако методику изучения алгебраических дробей в интересах единства изложения мы будем излагать без этого разделения, как сделал это и автор стабильного учебника А. П. Киселев.

Приступая к изучению алгебраических дробей, следует припомнить с учащимися важнейшие моменты учения о дробях в арифметике. Прежде всего должно быть указано, что дроби необходимо появляются в тех случаях, когда одно число не может разделиться на другое нацело, например $\frac{26}{5}$; однако потом таким же *обозначением нередко пользуются* вообще для обозначения деления одного числа на другое, даже и тогда, когда деление могло бы быть выполнено, например $\frac{25}{5}$. Подобно этому и в алгебре, как уже упоминалось при делении алгебраических выражений, тоже пользуются обозначением *дробного числа прежде всего* в тех случаях, когда результат деления двух целых одночленов или многочленов не *может быть представлен также* целым выражением; например: $\frac{a}{b}$, $\frac{7a^2}{13b^2}$, $\frac{a+b}{a-b}$, $\frac{x^2+xy-1}{y+3}$ и т. п.

Однако оказывается удобным применять принятое для дробей обозначение и в таких случаях, когда деление *могло быть выполнено* нацело, например $\frac{a^2-b^2}{a-b}$; $\frac{10xy}{2x}$ и пр., так что и здесь обозначение алгебраической дроби указывает на то, что одно алгебраическое выражение (числитель) должно быть разделено на другое (знаменатель). Но ввиду того что буквенные количества могут иметь какие угодно значения, не только целые и положительные, но и дробные и отрицательные, то смысл алгебраической дроби сказывается неизмеримо шире, чем в арифметике, где числитель и знаменатель суть целые числа. Единственным ограничением *для алгебраической дроби*, так же как для арифметической, является требование, чтобы знаменатель ее был отличен от нуля; дробь $\frac{a}{0}$ является невозможной; дробь вида $\frac{0}{a}$ принимается, как и в арифметике, равной нулю.

Так же, как и при изучении действий над целыми алгебраическими выражениями, следует отметить, что фактически действия над алгебраическими дробями не могут быть доведены до конца, как в арифметике, а только представляют собою преобразования одних выражений в другие, тождественные им, т. е. принимающие одинаковые числовые значения при всевозможных числовых значениях входящих в них букв.

Так как члены дроби могут быть и с одинаковыми и с различными знаками, то следует выяснить, что знак всей дроби определяется правилом знаков при делении: $\frac{+a}{+b}=\frac{a}{b}$; $\frac{-a}{-b}=\frac{a}{b}$; $\frac{+a}{-b}=-\frac{a}{b}$; $\frac{-a}{+b}=-\frac{a}{b}$ и, наоборот, дробь $\frac{a}{b}$ может быть тождественно заменена дробью $\frac{+a}{+b}$, или $\frac{-a}{-b}$, а также $-\frac{a}{-b}$ и $-\frac{-a}{b}$, т. е. что дробь не изменится, если одновременно изменить знак у самой дроби и у одного из ее членов. Подобно этому можно заменить дробь $-\frac{a}{b}$ любой из дробей $\frac{a}{-b}$ или $\frac{-a}{b}$.

Далее следует указать, что так же, как в арифметике, дробь не изменяется, если числитель и знаменатель ее умножить или разделить на одно и то же число; в алгебре также принимается, что дробь, получающаяся из данного через умножение или деление ее членов на одно и то же число, равна данной, т. е. $\frac{am}{bm}=\frac{a}{b}$ и $\frac{\frac{a}{m}}{\frac{b}{m}}=\frac{a}{b}$ при всяком значении m, кроме $m=0$. Основанием для признания равенства написанных дробей является то, что они, действительно, при всяких числовых значениях входящих в них букв принимают равные значения и, следовательно, являются тождественными. Это свойство алгебраической дроби является основным; из него вытекает возможность сокращения алгебраических дробей и приведения их к общему знаменателю. Эти действия над одночленными дробями совершаются вполне аналогично тем же действиям над арифметическими дробями, а потому обычно не затрудняют учащихся. Необходимо все же проделать ряд наиболее типичных примеров, вроде следующих:

1) сократить дроби:

$$\frac{abc}{bcd}=\frac{a}{d};\quad \frac{x^5}{x^3}=\frac{x^2}{1}=x^2;\quad \frac{p^4}{p^6}=\frac{1}{p^2};\quad \frac{-8a^4b^3c^2}{12a^5b^3c}=-\frac{2c}{3a}.$$

В последнем примере сокращение можно сделать в несколько приемов.

2) Привести к общему знаменателю;

a) $\frac{a}{m}, \frac{b}{n}, \frac{c}{p}$; получим: $\frac{anp}{mnp}, \frac{bmp}{mnp}, \frac{cmn}{mnp}$;

b) $\frac{m}{xy}, \frac{n}{xz}, \frac{p}{yz}$; соответственно будем иметь: $\frac{mz}{xyz}, \frac{ny}{xyz}, \frac{px}{xyz}$.

c) $\frac{a}{2b}, \frac{c}{4b^2}, \frac{d}{4b^3}$; получим: $\frac{2ab^2}{4b^3}, \frac{cb}{4b^3}, \frac{d}{4b^3}$.

Здесь, следовательно, имеют место те же три случая, как и в арифметике, т. е. знаменатели отдельных дробей могут быть или числами взаимно простыми, или иметь общих делителей, или один знаменатель может делиться на все прочие. Во всех случаях общим знаменателем берется наименьшее кратное отдельных знаменателей, и к нему приводятся все дроби с помощью умножения их на дополнительные множители. Желательно, чтобы в более легких случаях учащиеся проделывали эти действия в уме и прямо писали готовый результат.

Гораздо сложнее обстоит дело с сокращением и приведением к общему знаменателю многочленных дробей. При сокращении их у учащихся является желание сокращать отдельные члены числителя и знаменателя, например в дроби $\frac{ab+1}{a^2+2}$ произвести сокращение первых слагаемых числителя и знаменателя на a. Необходимо поэтому выяснить, что многочленная дробь, так же как и одночленная, может быть сокращена **только** на общих множителей, имеющихся в числителе и знаменателе, и требовать всякий раз предварительного разложения их на *множители*. При этом повторяются приемы разложения многочленов на множители; соответствующие примеры можно брать в том же порядке, в каком изучались эти приемы.

Примеры:

1) $\frac{2a+2b}{a^2+ab}=\frac{2(a+b)}{a(a+b)}=\frac{2}{a}$ (вынесение общего множителя за скобку);

2) $\frac{a+b+ax+bx}{ac+bc+ad+bd}=\frac{(a+b)+(a+b)x}{(a+b)c+(a+b)d}=\frac{(a+b)(1+x)}{(a+b)(c+d)}=\frac{1+x}{c+d}$ (метод группировки);

3) $\frac{x^2-y^2}{x^2-2xy+y^2}=\frac{(x+y)(x-y)}{(x-y)^2}=\frac{x+y}{x-y}$ (разложение по формулам сокращенного умножения);

4) $\frac{x^2-5x+6}{x^2-10x+16}=\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-8)}=\frac{x-3}{x-8}$ (разложение трехчленов второй степени) и т. п.

Особое внимание следует обратить на те случаи, когда сокращение становится возможным, если у какого-нибудь из членов дроби изменить *знак на обратный*, например:

$$\frac{a-b}{b-a}=-\frac{a-b}{-(b-a)}=-\frac{a-b}{a-b}=-1;$$

$$\frac{9-x^2}{x^2-7x+12}=\frac{(3+x)(3-x)}{(x-3)(x-4)}=-\frac{(3+x)(x-3)}{(x-3)(x-4)}=-\frac{3+x}{x-4}.$$

Те же замечания должны быть приняты и при приведении дробей к общему знаменателю. Однако заниматься приведением дробей к общему знаменателю отдельно от их сложения и вычитания нецелесообразно, и удобнее соединить его с этими действиями.

§ 36. Сложение и вычитание алгебраических дробей.

Приступая к изучению сложения и вычитания алгебраических дробей, следует напомнить, что при *сложении и вычитании арифметических* дробей с одинаковыми знаменателями складываются или вычитаются их числители, а знаменатель остается тот же самый. Такое же правило принято и в алгебре, т. е.

$$\frac{a}{m}+\frac{b}{m}-\frac{c}{m}=\frac{a+b-c}{m}.$$

Действительно, подставляя вместо входящих в это равенство букв любые числовые значения, мы в обеих частях его получим одинаковые числа, так что оно представляет собою тождественное преобразование. Можно также при объяснении этого правила исходить из деления многочлена на одночлен, которое мы распространяем и на тот случай, когда члены делимого не делятся нацело на делитель:

$$\frac{a+b-c}{m}=\frac{a}{m}+\frac{b}{m}-\frac{c}{m};$$

читая это равенство справа налево, получим то же самое правило. Очевидно, что если складываемые или вычитаемые одночленные дроби имеют разные знаменатели, их надо предварительно привести к общему знаменателю; например:

$$\text{a)}\quad \frac{2}{x}-\frac{a}{x}+\frac{3}{x}=\frac{2-a+3}{x}=\frac{5-a}{x};$$

$$\text{b)}\quad \frac{a}{b^2c}+\frac{d}{bc^2}=\frac{ac}{b^2c^2}+\frac{bd}{b^2c^2}=\frac{ac+bd}{b^2c^2}.$$

Обычно сложение и вычитание одночленных дробей не представляет затруднений для учащихся. Гораздо труднее ими усваиваются приемы сложения и вычитания многочленных дробей. Поэтому проработку этого отдела следует вести постепенно, в следующем порядке нарастающей трудности.

1. Сначала сложение и вычитание дробей с многочленными числителями и числовыми знаменателями. Эти дроби по существу не являются алгебраическими, но представляют прекрасный материал для основных приемов действий; например:

$$\frac{2x-5y}{4}-\frac{3x-y}{5}+\frac{x+3y}{10}.$$

Приводя к общему знаменателю все дроби, учащиеся получат:

$$\frac{5(2x-5y)}{20}-\frac{4(3x-y)}{20}+\frac{2(x+3y)}{20}=\frac{10x-25y}{20}-\frac{12x-4y}{20}+\frac{2x+6y}{20}=$$

$$=\frac{(10x-25y)-(12x-4y)+(2x+6y)}{20}=\frac{10x-25y-12x+4y+2x+6y}{20}=$$

$$=\frac{-15y}{20}=-\frac{3y}{4}.$$

Обычная ошибка учащихся состоит в том, что при вычитании дробей с многочленным числителем они упускают из виду, что дробная черта заменяет собою скобки, и относят знак минус перед дробью не ко всему числителю, а лишь к первому его члену, забывая изменить на обратные знаки у остальных членов, так что в приведенном примере могут написать:

$$\frac{10x-25y-12x-4y}{20};$$

необходимо бороться с этой распространенной ошибкой, заставляя до приобретения твердого навыка писать складываемые и вычитаемые числители в скобках, как это сделано в приведенном примере.

2. Сложение и вычитание дробей с многочленными числителями и одночленными знаменателями; например:

$$\frac{2a+1}{6a^2}-\frac{b+2}{3ab}+\frac{3+a}{2b^2}=\frac{2ab^2+b^2}{6a^2b^2}-\frac{2ab^2+4ab}{6a^2b^2}+\frac{9a^2+3a^3}{6a^2b^2}=$$

$$=\frac{(2ab^2+b^2)-(2ab^2+4ab)+(9a^2+3a^3)}{6a^2b^2}=$$

$$=\frac{2ab^2+b^2-2ab^2-4ab+9a^2+3a^3}{6a^2b^2}=\frac{b^2-4ab+9a^2+3a^3}{6a^2b^2}.$$

3. Сложение и вычитание дробей с многочленными числителями и знаменателями. В этом случае необходимо требовать для приведения дробей к общему знаменателю предварительного разложения знамена-

телей отдельных дробей на множители, а после производства действия — возможного упрощения и сокращения полученной дроби; например:

$$1)\quad \frac{1}{x^2-x}+\frac{2}{1-x^2}+\frac{1}{x^2+x}=\frac{1}{x(x-1)}+\frac{2}{(1+x)(1-x)}+\frac{1}{x(x+1)}.$$

Изменяя знак второй дроби на обратный, получаем:

$$\frac{1}{x(x-1)}-\frac{2}{(x+1)(x-1)}+\frac{1}{x(x+1)}=\frac{x+1-2x+x-1}{x(x+1)(x-1)}=\frac{0}{x(x^2-1)}=0;$$

$$2)\quad \frac{1+3x}{4(1+x)(1+2x)}-\frac{1+2x}{(1+x)(1+3x)}+\frac{1+x}{4(1+2x)(1+3x)}=$$

$$=\frac{(1+3x)^2-4(1+2x)^2+(1+x)^2}{4(1+2x)(1+x)(1+3x)}=\frac{-2(1+4x+3x^2)}{4(1+x)(1+2x)(1+3x)}=$$

$$=-\frac{2(1+x)(1+3x)}{4(1+x)(1+2x)(1+3x)}=-\frac{1}{2(1+2x)}.$$

Подобных примеров следует проделать возможно больше, однако при этом следует избегать примеров, требующих слишком сложных и искусственных преобразований.

§ 37. Умножение и деление алгебраических дробей.

Приступая к умножению и делению алгебраических дробей, также следует вспомнить правила для этих действий, применяемые в арифметике, и указать, что они же применяются и в алгебре, т. е.

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd};\qquad \frac{m}{n}:\frac{p}{q}=\frac{mq}{np}.$$

Основанием для такого применения правил, установленных в арифметике, также и к алгебраическим дробям, является то, что если мы вместо букв будем в написанные равенства подставлять какие угодно числа, то на основании арифметических правил будем получать равные числа, следовательно эти равенства представляют собою формулы тождественных преобразований.

Применение этих правил к умножению и делению одночленных дробей обычно не затрудняет учащихся. Следует, однако, требовать, чтобы до окончательного перемножения входящих одночленов учащиеся делали возможные сокращения числителя со знаменателем. Например, умножая по правилу дроби, получаем:

$$\frac{5x^3y^2}{3ab^4}\cdot\frac{3a^2b}{4x^2y}=\frac{5x^3y^2\cdot 3a^2b}{3ab^4\cdot 4x^2y}.$$

Но ранее чем производить умножение, сокращаем, постепенно или сразу, получившуюся дробь на $3\cdot a\cdot b\cdot x^2\cdot y$; получим: $\frac{5xya}{4b^3}$.

Точно так же:

$$\frac{10a^2b}{9x^2y^2}:\frac{5ab^2}{3xy^3}=\frac{10a^2b\cdot 3xy^3}{9x^2y^2\cdot 5ab^2};$$

сокращая последовательно на множители $15\cdot a\cdot b\cdot x\cdot y^2$, получим: $\frac{2ay}{3bx}$.

При умножении и делении дробей с многочленными числителями и знаменателями необходимо предварительно разложить числителей и знаменателей на множителей, затем, обозначив, но еще не выполняя действия умножения и деления, произвести все возможные сокращения и уже после этого выполнить действия. Например:

$$1) \quad \frac{6(a^2-b^2)}{x^2-y^2}\cdot\frac{(x+y)^2}{3(a-b)^2}=\frac{6(a+b)(a-b)}{(x+y)(x-y)}\cdot\frac{(x+y)(x+y)}{3(a-b)(a-b)}=$$
$$=\frac{2(a+b)(x+y)}{(x-y)(a-b)}.$$

В получившемся результате нет надобности производить умножение в числителе и знаменателе, так как оно не дало бы для них более простого выражения.

$$2) \quad \frac{4(a^2-ab)}{(a+b)^2}:\frac{6a}{a^2-b^2}=\frac{4a(a-b)}{(a+b)(a+b)}:\frac{6a}{(a+b)(a-b)}=$$
$$=\frac{4a(a-b)(a-b)}{(a+b)\cdot 6a}=\frac{2(a-b)^2}{3(a+b)}.$$

Заметим, что если числитель и знаменатель одной дроби соответственно делятся на числителя и знаменателя другой, то для разделения первой из этих дробей на вторую можно разделить числителя первой на числителя второй и знаменателя первой на знаменателя второй. Действительно, из формулы $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$ следует, что

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{c}:\frac{b}{d}=\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{d}}.$$

Например:

$$\frac{a^2-x^2}{b^2-x^2}:\frac{a-x}{b-x}=\frac{a+x}{b+x}.$$

После изучения всех действий над одночленными и многочленными дробями следует, конечно, проделать возможно большее количество примеров на все действия, в которые входили бы дробные выражения вместе с целыми, а также с числами, выбирая, однако, такие упражнения, которые допускают возможно большие упрощения и ведут к наиболее простому результату.

ГЛАВА VIII.

УРАВНЕНИЯ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ

§ 38. Общие замечания к методике уравнений.

Как было выяснено в историческом обзоре развития основных понятий алгебры, вопрос об определении неизвестного числа и связанное с ним понятие об уравнении повели к возникновению и постепенному развитию алгебры как особой науки. Поэтому учение об уравнениях занимает в алгебре одно из важных мест. Ввиду этого весьма важно выяснить вопрос о надлежащем месте уравнений в курсе алгебры и способах их изучения. Вопросы эти, в частности о времени, когда надо приступать к изучению уравнений, в учебной литературе как у нас, так и на Западе не имеют окончательного и определенного решения. Последняя программа алгебры для средней школы отводит уравнениям место в 6-м классе, причем теория одного уравнения первой степени с одним неизвестным проходится после изучения действий над целыми алгебраическими одночленами и многочленами; затем изучаются одночленные алгебраические дроби, после чего проходятся простейшие уравнения с буквенными коэфициентами и системы двух и трех уравнений первой степени с числовыми коэфициентами. Затем, в 7-м классе изучается сначала разложение алгебраических выражений на множители и действия над алгебраическими дробями с многочисленными числителями и знаменателями, а потом возобновляется изучение уравнений первой степени, заканчиваясь ознакомлением с системами буквенных уравнений. О том, что уравнения могут быть введены в изучение курса алгебры ранее прохождения действия над целыми алгебраическими выражениями, ни в программе алгебры, ни в объяснительной записке упоминания не встречается, так что, повидимому, оно не предполагается. В этом отношении программа близка к программе алгебры, применявшейся в гимназиях дореволюционного периода, согласно которой числовые уравнения первой степени проходились после изучения четырех основных действий над одночленами и многочленами и одночленными алгебраическими дробями, а также к программам французской школы, в которой уравнения первой степени изучаются и теперь после ознакомления с действиями над целыми и дробными алгебраическими выражениями.

Однако по многим основаниям можно признать возможным и желательным более раннее ознакомление учащихся с уравнениями, чем указанное в программе средней школы. Поэтому в существующей учебной литературе по алгебре имеются многочисленные учебники и пособия, рекомендующие изучать уравнения с самого начала прохождения алгебры. Особенно сильна такая тенденция в Англии, где, как известно, нет единой обязательной учебной программы для всех школ. Но и у нас можно указать некоторые систематические курсы алгебры, в которых понятие об уравнении вводится и изучается с самого начала обучения, таковы: А. П. Киселев, Элементарная алгебра, 31-е изд., 1922 г.; К. Ф. Лебединцев, Руководство алгебры, 4-е изд., 1922 г. и др., не говоря уже о многочисленных рабочих книгах по математике. При этом нередко, особенно в английских учебниках, понятие об уравнении является стержнем, около которого постепенно кристаллизуются и группируются все остальные части курса. (На русском языке подобный характер носит курс элементарной алгебры для средних учебных заведений Д. Левитуса.) Признавая подобное построение курса алгебры уже крайностью, вредящей систематическому изучению буквенной символики и других частей курса, необходимо, однако, обратить внимание на то, что понятием об уравнении и его решении учащиеся уже фактически пользуются при прохождении арифметики и решении многих арифметических задач. Так, в стабильных учебниках и сборниках задач для начальной школы Н. С. Поповой мы уже встречаем числовые примеры, содержащие неизвестное число x. В стабильных учебниках арифметики: И. Попова — для средней школы и Н. Чулицкого — для рабфаков и педтехникумов — мы находим применение буквы x для обозначения неизвестного числа, т. е. фактически решение уравнений при выводе некоторых теоретических положений, например частного от деления обыкновенных дробей, при определении неизвестного члена пропорции, пропорциональном делении, нахождении процентов от числа и т. д. Таким образом, учащиеся из курса арифметики выносят уже некоторые понятия об уравнении и его решении, и потому желательно в дальнейшем его развить и укрепить. Помимо числовых примеров можно уже при решении арифметических задач давать и задачи с условиями, требующие решения алгебраическим путем, т. е. предварительного составления и решения несложного уравнения. Такими могут быть вопросы на нахождение неизвестного числа, над которым проделаны некоторые действия и получился известный результат, а также задачи того же типа, но с конкретным содержанием, вроде традиционной задачи о стаде летящих гусей и пр. Особенно желательно решение таких задач на 5-м году обучения при прохождении основных законов арифметических действий. Здесь учащиеся могут найти обширный материал для применения сведений о зависимости между данными и результатами действий. Далее, по мере приобретения алгебраических сведений можно расширять и область решаемых уравнений. Так, ими можно пользоваться при выводе формул решения однотипных арифметических задач и нахождении числовой величины арифметических выражений. Пока учащиеся незнакомы еще с отрицательными числами, получение отрицательных решений можно считать признаком невозможности задачи, но после прохождения относительных чисел отрицательные решения тоже могут быть включены в область решаемых уравнений. В дальнейшем как материалом для решения соответствующих уравнений можно воспользоваться сведениями, приобретенными учащимися об одночленах, о применении скобок, об одночленных и многочленных дробях с численными знаменателями и пр. Собрание задач подобного характера можно найти в книге: Сборник упражнений и задач по элементарному курсу алгебры Д. Бем, А. Волкова и Р. Струве, 1914 г. и позднейшие издания. Решение названных примеров и задач, с одной стороны, содействует закреплению сведений о буквенной символике, изучаемой в это время учащимися, а с другой — подготовляет их к изучению уравнений и вообще весьма способствует их математическому развитию.

§ 39. Систематическое изучение уравнений.

Приступая к систематическому изучению уравнений, учащиеся будут уже знакомы с понятиями о тождестве — из прохождения глав о тождественных преобразованиях и об уравнениях — из определенных ранее примеров; однако необходимо уяснить с ними точное значение и различие этих понятий. Для этого предварительно устанавливается общее понятие о равенстве и об основных его свойствах: далее указывается, что равенства могут быть двух родов: или тождества, которые остаются справедливыми при всяких значениях входящих в них букв, или уравнения, которые верны только для некоторых значений входящих в них буквенных количеств. Примером тождества может служить любая формула из области известных учащимся ранее тождественных преобразований; тождествами называют также и правильные числовые равенства, не содержащие букв, например $3 + 4 = 7$. Примером уравнения следует взять какое-нибудь наиболее простое уравнение первой степени с одним неизвестным, явно представляющее собою равенство, справедливое при одном каком-нибудь значении неизвестного и неправильное при всяких других, например $x+5=8$. При этом следует указать, что те значения неизвестного, которые удовлетворяют ему, называемые его решениями, или **корнями**, играют особенно важную роль при решении различных вопросов и задач с конкретным содержанием, давая ответ на поставленный вопрос. В подтверждение можно решить какую-либо задачу на составление уравнений, сходную с решавшимися уже ранее, чтобы избежать технических затруднений при решении, или же новую, но несложную задачу. Относительно решения следует указать, что иногда оно может быть найдено в уме, как, например, в предыдущем уравнении $x+5=8$, где неизвестное, очевидно, равно 3. В других случаях оно получается путем постепенного преобразования данного уравнения в другие, имеющие иной вид, но эквивалентные или равносильные данному, т. е. имеющие те же самые корни. В связи с этим следует выяснить два основных свойства уравнений, на которых основывается возможность преобразования их в эквивалентные, именно: 1) что к обеим частям уравнения можно прибавить или отнять по равному числу и 2) что обе части уравнения можно умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю. Доказательства этих теорем от учащихся приступающих только к изучению уравнений, требовать не следует, так как они оказываются для них трудными по их очевидности, но необходимо применить их к выводу основных преобразований в уравнениях, какими являются: перенесение членов из одной части уравнения в другую и освобождение уравнения от дробей. Целью всех преобразований является получение такого уравнения, эквивалентного данному, решение которого очевидно. Например, решением уравнения

$$x+\frac{1}{4}(15-x)=7\frac{1}{2}$$

будет $x=5$. Заметим, что последнее равенство учащиеся не склонны признавать за уравнение и иногда считают даже тождеством; разрушить этот предрассудок легко, предложив им подставить в уравнение вместо $x=5$ любые другие числа и проверить, будут ли равны при этих подстановках правая и левая части его. Еще следует обратить внимание на то, чтобы в процессе решения все уравнения были только с двумя частями, ибо учащиеся очень склонны соединять получаемые результаты в любом числе знаком равенства, причем иногда получаются явно абсурдные равенства. Наконец, следует приучать учащихся к решению задач и вопросов, где неизвестное обозначается не только через x, но и другими буквами, и, наоборот, не видеть непременно в равенстве, содержащем x, уравнение. Так, в равенствах

$$(x+1)+3(x+3)=2(2x+5)$$

или

$$\frac{x+0{,}5}{2+\frac{1}{x}}=\frac{1}{2}x$$

учащиеся непременно видят уравнение; между тем — это тождества, в чем можно убедиться преобразованием их. Наконец, следует указать что могут быть уравнения, не имеющие никаких решений, например

$$3(a+1)+5(a+3)=4(2a+10),$$

приводящееся после преобразований к виду $0=22$ (бесконечные решения при этом мы, конечно, оставляем в стороне).

Ознакомившись с правилами для решения числовых уравнений первой степени с одним неизвестным, учащиеся, конечно, должны закрепить эти сведения возможно большим количеством решенных примеров. При этом полезно указать, что решение уравнений допускает проверку подстановкою найденного корня в заданное уравнение, что исключает надобность в ответах на решаемые примеры и дает возможность контроля собственной работы. Необходимо, чтобы в числе решаемых примеров были не только уравнения с целыми и положительными решениями, но и с дробными, отрицательными и нулевыми, например уравнение

$$\frac{3x+1}{2}-\frac{2x+1}{3}=\frac{2x+1}{6}$$

имеет корень $x=0$; в случае нулевых и отрицательных решений поверка их особенно желательна ввиду представляемой ею практики в действиях над относительными числами. Полезно проделать хотя небольшое количество примеров на доказательство тождеств, причем можно ознакомить учащихся с употребляемым для тождеств специальным знаком равенства из 3 черточек. Так, можно доказать два вышеприведенных тождества путем их преобразования или, например, тождества:

$$(x+1)(x+3)\equiv(x+2)^2-1$$

$$(a+1)(a^2-a-1)\equiv(a+1)^3-3a(a+1) \text{ и т. п.}$$

В числе примеров на уравнения первой степени могут быть, конечно, и такие, в которых входит неизвестное во второй и высших степенях, которые при преобразованиях сокращаются; например:

$$3(2x+3)(3x+2)-2(3x+1)^2=43(x-1) \text{ и т. п.}$$

Такие примеры полезно проделывать ради практики в алгебраических преобразованиях.

Наконец, переходя к буквенным уравнениям, например

$$a^2x+b=b^2x+a,$$

нам приходится расширить понятие о коэфициенте и выяснить, что в более общем смысле название „коэфициент" означает не только числовой, но вообще всякий множитель при буквенном количестве; так, коэфициентом при x в левой части уравнения является a^2, а в правой b^2. Сохраняя обычный способ решения уравнения, мы переносим известные члены в правую часть, а неизвестные — в левую; получим:

$$a^2x-b^2x=a-b.$$

Обычно, дальнейшее решение несколько затрудняет учеников, и им приходится напомнить о возможности разложить левую часть уравнения на множителей по способу вынесения общего множителя за скобки; получим:

$$(a^2-b^2)x=a-b;$$

здесь роль коэффициента при x играет уже двучленное количество; разделив на него обе части уравнения в предположении, конечно, что a не равно b, найдем:

$$x=\frac{a-b}{a^2-b^2},$$

Полученный результат должен быть упрощен. Сокращая полученную дробь, будем иметь:

$$x=\frac{a-b}{(a+b)(a-b)}; \quad x=\frac{1}{a+b}.$$

Решение возможно большего числа буквенных упражнений, в особенности сопровождаемое проверкою решений, является полезнейшим упражнением как для усвоения буквенной символики, так и для окончательного закрепления методов решения уравнений.

Уравнения, содержащие неизвестное в знаменателях. В числе примеров, помещаемых в сборниках алгебраических задач и в учебниках алгебры, нередко встречаются уравнения, содержащие неизвестное в знаменателе. Такие уравнения, по существу, не являются уравнениями первой степени, так как вообще степень уравнения определяется степенью наивысшего его члена, когда уравнение приведено к виду целого многочлена, приравненного к нулю; так уравнение

$$a_0x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\ldots+a_{m-1}x+a_m=0$$

будет уравнением m-й степени. Уравнение же, содержащее неизвестное в знаменателях, после приведения всех дробей к общему знаменателю и перенесения членов в левую часть получает вид $\frac{P}{Q}=0$, т. е. дробного выражения, причем еще P и Q вообще не будут первой степени. Поэтому включение подобных уравнений в главу об уравнениях первой степени является неуместным. Тем не менее, многие из них, действительно, приводятся к уравнениям первой степени и могут быть решены обычным приемом; однако их особенностью является возможность появления посторонних корней, т. е. корней, не принадлежащих данному уравнению.

Действительно, по 2-му условию преобразования уравнений можно обе части уравнения $A=B$ только тогда умножить на одно и то же число m, когда оно не равно нулю, т. е. уравнение $Am=Bm$ будет эквивалентно уравнению $A=B$ только если $m\gtrless 0$, ибо при $m=0$ уравнение $Am=Bm$ представляет собою тождество. Поэтому нельзя обе части уравнения умножать на алгебраическое выражение, содержащее неизвестное, так как такой множитель может при некоторых значениях неизвестного обратиться в нуль, что может повести к получению корня, не принадлежащего данному уравнению. Так, обе части уравнения $A=B$ нельзя вообще умножить на $(x-3)$, ибо уравнение

$$A(x-3)=B(x-3)$$

удовлетворяется при $x=3$, тогда как $A=B$ может и не иметь корня 3. Между тем при освобождении дробного уравнения от знаменателя приходится умножать обе части его на выражение, содержащее неизвестное. Поэтому, освободив его от знаменателя, мы должны еще проверить, не ввели ли мы посторонних решений.

Так, решая уравнение

$$\frac{4}{x+2}+\frac{7}{x+3}=\frac{37}{x^2+5x+6},$$

мы видим, что общим знаменателем всех дробей будет (x^2+5x+6); умножая на него обе части уравнения, получим:

$$4(x+3)+7(x+2)=37$$

или

$$11x=11, \quad \text{откуда } x=1.$$

Здесь множитель (x^2+5x+6) обращается в нуль при $x=-2$ и $x=-3$, следовательно мы могли бы ввести только эти числа в качестве посторонних корней; корень $x=1$ отличен от них и не является посторонним, что могло бы быть проверено подстановкою. Но, поступая подобным же образом с уравнением

$$\frac{4}{x+2}+\frac{7}{x+3}=\frac{4}{x^2+5x+6},$$

получим после освобождения от знаменателя и приведения подобных членов,

$$11x=-22, \quad \text{откуда} \quad x=-2.$$

Это число является корнем знаменателя (x^2+5x+6), а потому может быть посторонним для данного уравнения. Подставляя его в начальное уравнение, получим:

$$\frac{4}{0}+\frac{7}{-1}=\frac{37}{0},$$

т. е., действительно, $x=-2$ есть посторонний корень для данного уравнения, которое оказывается вообще невозможным.

§ 40. Составление уравнений из условий задачи.

Решение задач на составление уравнений имеет чрезвычайно важное значение не только для усвоения учащимися сведений из алгебры, но главным образом для развития у них вообще математического мышления. Как было уже упомянуто (§ 5), оно необходимым и естественным образом требует применения аналитического метода работы и потому способствует развитию способности к анализу, необходимой для изучения всякой ветви математики и ценной для умственного развития учащихся вообще. При этом задачи на составление уравнений обычно возбуждают у учеников больший интерес, чем какие-либо другие; они видят в них уже явную пользу и приложение изученных сведений на практике: убедившись, что с помощью алгебры легко решаются такие задачи, которые при помощи арифметики решаются с большим трудом или даже вовсе не могут быть разрешены, учащиеся чувствуют, что ими сделаны несомненные успехи и достижения в области математического образования, и в них вспыхивает интерес и стремление к дальнейшему изучению математики. Несомненно, что у многих лиц, сделавшихся впоследствии видными работниками в области науки и техники, пробуждение интереса и любви к точному знанию было связано с удачным решением задач на составление уравнений.

Поэтому прохождению этого отдела преподавателем должно быть уделено самое тщательное внимание. Известно, что он всегда вначале затрудняет учащихся уже потому, что определенных правил для составления уравнений из условий задачи нет, и они должны проявить в этом случае собственную инициативу и сообразительность. Но кроме того причиною затруднений является и методическая неразработанность этого отдела, так как обычно в учебниках даются лишь общие указания на способы составления уравнений и несколько поясняющих примеров, а в задачниках перемешаны легкие и трудные примеры; кроме того часто задачи, естественно требующие составления двух или трех уравнений, относятся к отделу задач с одним уравнением. Благодаря этому обычно отдел задач на составление одного уравнения с одним неизвестным сильно разрастается, тогда как материала на составление и решение систем уравнений дается гораздо меньше. В частности, например, задача: „Найти два числа, зная их сумму и разность", которая просто и естественно решается двумя уравнениями с двумя неизвестными, обычно включается в число задач на одно уравнение с одним неизвестным, причем решение ее и подобных с помощью двух уравнений иногда считается даже неправильным. Кроме того нередко задачи на составление уравнений отделяются от решения уравнений и даются после того, как соответствующий отдел о решении уравнений уже пройден. Так, задачи на составление одного уравнения первой степени с одним неизвестным начинают решать только после полного прохождения этих уравнений. Такое расположение материала нельзя считать правильным и удачным; несомненно, что задачи на составление уравнений полезно решать уже попутно с изучением самих уравнений, выбирая такие примеры, которые почти не требуют особенного соображения относительно выбора неизвестного и составления уравнения. Таковы многие задачи на нахождение неизвестного числа, которое можно прямо принять за неизвестное; например такова традиционная задача о стаде летящих гусей и встретившемся гусе или задача: „Я задумал число. Если его упятерить, к результату прибавить 125 и все, что получится, разделить на 6, то получится 115. Какое число я задумал?" Введение таких несложных задач с конкретным содержанием поднимает у учащихся интерес к изучению уравнений и уясняет его важное значение. Однако задачам на составление уравнений должно быть отведено и специальное время и внимание. При этом должны быть четко выяснены четыре стадии в решении подобных задач:

1. Выбор неизвестного и его обозначение буквою.
2. Составление уравнения по условиям задачи.
3. Решение уравнения.
4. Исследование полученного решения по отношению к уравнению и условиям задачи.

Для облегчения выбора неизвестных первоначально следует давать такие задачи, в которых фигурирует одна неизвестная величина или же самый текст условия показывает, что именно надо принять за неизвестное. При этом часто необходимо бывает определить, в каких мерах выражается неизвестное, так как в условии задачи могут упоминаться меры различных наименований, например рубли и копейки, метры и сантиметры или километры и т. п.; в таких случаях необходимо, чтобы и все известные величины выражались в тех же единицах. Кроме того во многих задачах необходимо определить и направление, или знак величины, принимаемой за неизвестную: так, если речь идет о движении навстречу друг другу двух путешественников, то надо установить, какое направление мы будем считать за положительное; если задача касается промежутка времени двух событий, то от какого из них будет вестись отсчет и считаться нами за положительный, и т. п. После решения достаточного числа задач, в которых неизвестное одно, или выбор его и составление уравнения подсказывается самим текстом условия, надо перейти к несложным задачам, в которых фигурируют два неизвестных, но выбор одного из них за основное нетруден или безразличен. Например: „Найти два числа, сумма которых 84, если одно из них более другого на 10“. Здесь можно большее из чисел принять за x, и тогда меньшее будет $(x-10)$, а сумма обоих

$$x+(x-10)=84,$$

откуда

$$2x-10=84;\quad 2x=94;\quad x=47;\quad x-10=37.$$

Но можно принять за x меньшее число, тогда большее будет $(x+10)$, а уравнение получит вид:

$$x+(x+10)=84;\quad 2x=74,$$

откуда

$$x=37;\quad x+10=47.$$

В более сложных случаях выбор неизвестного стоит в тесной связи с составлением уравнения из условий задачи. Эта важнейшая часть решения требует выражения всех фигурирующих в вопросе чисел через избранное неизвестное и установления между ними связи — в виде равенства, составленного на основании условия задачи. Таким образом, составление уравнения по данным задачи правильно иногда называется переводом ее условия на математический язык. Так как задач с конкретным содержанием может быть множество, то общего правила для составления уравнений, пригодного для всех случаев, дать невозможно. В общем, однако, можно рекомендовать при решении таких задач прежде всего прочитать самым внимательным образом условие задачи и уяснить себе ее содержание, затем принять какое-нибудь из неизвестных чисел, которые требуется найти в задаче, за основное неизвестное число и обозначить его буквою x или иною; потом выразить через выбранное неизвестное другие неизвестные числа, фигурирующие в задаче. Наконец, на основании зависимостей между данными и *искомыми числами*, вытекающих из условий задачи, устанавливаем равенство между входящими в условие величинами; оно и будет требуемым уравнением. В соответствии с характером аналитического метода — итти от неизвестных величин к известным — при составлении уравнения следует с выбранным неизвестным x поступать так, как будто это число уже найдено и мы производим поверку решения задачи.

Пример 1. В ящике находятся карандаши, причем одна треть всего их числа — красные, одна шестая — синие, а остальные 15 — черные. Сколько карандашей всего в ящике и каждого цвета в отдельности?

Здесь естественно принять число всех карандашей за основное неизвестное x; выражая через него числа красных и синих карандашей,

найдем на основании условий задачи, что красных карандаш...
$\frac{1}{3}x$, а синих $\frac{1}{6}x$. Если бы мы уже нашли x и хотели бы сделать поверку решения, то мы должны были бы сложить $\frac{1}{3}x$, $\frac{1}{6}x$ и 15 и получили бы x. По этому способу мы и составляем равенство для неизвестного x, которое и будет искомым уравнением:

$$\frac{1}{3}x+\frac{1}{6}x+15=x,$$

решив его, найдем $x=30$, т. е. число всех карандашей было 30, но необходимо дать ответы на все поставленные в задаче вопросы; найдем, что красных карандашей было 10 и синих 5. Поверка дает, действительно,

$$10+5+15=30$$

Пример 2. Три рубля разменены на 15- и 20-копеечные монеты, причем получено всего 17 монет. Сколько было 15-копеечных и сколько 20-копеечных монет?

Здесь необходимо установить, в каких единицах будем составлять равенство — в копейках или рублях; возможно то и другое. Чтобы не вводить дробей, выразим три рубля в копейках и примем за основное неизвестное x число 20-копеечных монет, тогда число 15-копеечных будет $(17-x)$. Составляемая 20-копеечными монетами сумма будет $20x$ коп., а 15-копеечными — $(17-x)\,15$ коп., а вся сумма — 300 коп. Поэтому:

$$20x+(17-x)\,15=300;$$

деля все члены этого уравнения на 5, получаем более простое уравнение:

$$4x+(17-x)\,3=60,$$

или

$$4x-3x=60-51,$$

т. е. $x=9$, а $(17-x)=8$ и, следовательно, монет по 20 коп. было 9, а по 15 коп. — 8 штук. Поверка дает

$$20\cdot9+15\cdot8=300.$$

Пример 3. Периметр прямоугольника равен 60 *см*, а периметр одного из 4 треугольников, на которые прямоугольник разбивается диагоналями, более периметра соседнего с ним треугольника на 4 *см*. Найти стороны прямоугольника. Здесь и в подобных задачах необходимо учитывать специальные условия задания. Рассматривая два треугольника COD и BOC, образованные пересечением в точке O диагоналей AC и BD прямоугольника, мы замечаем, что они оба равнобедрен... ...ными боковыми сторонами, а потому их периметры различаются ... DC и BC. Принимая последнюю за неизвест-

Пример ч. ...
сов, чтобы получить раствор ... .

Так как число градусов показывает проц...
спирта в растворе, то в каждом литре 75° спирта будет 0,7... , 86 *л* — 0,75·86. Полагая, что прилить воды нужно x литров, мы найдем, что смеси всего будет $(86+x)$ литров, а чистого спирта в ней будет $0{,}43(86+x)$ литров. Так как общее количество спирта в растворе осталось прежнее, то составляем уравнение:

$$0{,}75 \cdot 86 = 0{,}43(86+x).$$

Для решения уравнения освобождаем его сначала от десятичных дробей, умножив обе части на 100; получим:

$$75 \cdot 86 = 43(86+x);$$

сокращая далее обе части на 43, будем иметь:

$$150 = 86 + x, \quad \text{откуда } x = 64 \text{ л}.$$

Решение составленного уравнения должно заключаться исследованием полученного корня в отношении соответствия его конкретным условиям задачи. Может оказаться, что хотя уравнение решено правильно, но полученное значение неизвестного не удовлетворяет вопросу, так как по смыслу задачи оно должно удовлетворять каким-нибудь дополнительным условиям, которые не могли быть выражены уравнением.

Пример 5. Сумма в 50 коп. уплачена 8 монетами в 5 и в 2 коп.; сколько монет каждого рода было дано?

Обозначим число 5-копеечных монет через x; тогда 2-копеечных будет $(8-x)$; вся уплаченная сумма выразится $5x+2(8-x)$, но он... составляет 50 коп.; следовательно, имеем уравнение:

$$5x + 2(8-x) = 50;$$

решая его, найдем:

$$5x + 16 - 2x = 50; \quad 3x = 34; \quad x = 11\frac{1}{3}.$$

Но это решение, удовлетворяя уравнению, не удовлетворяет пост... ленному вопросу, так как число пятикопеечных монет должно б... целым, и задача, следовательно, невозможна. Иногда невозможн... задачи обнаруживается из невозможности решить уравнение, состав... ное из ее условий.

Пример 6. Найти число, зная, что разность между его полов... и третьей частью более $\frac{1}{6}$ его части на 10.

Из условия задачи получается уравнение:

$$\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}x = \frac{1}{6}x + 10;$$

решая его, имеем:

$$3x - 2x = x + 60; \quad 3x - 3x = 60; \quad 0 \cdot x = 60.$$

Такое уравнение не имеет решений, и задача, следовательно, невозможна. Легко усмотреть и причину этой невозможности, заметив, что разность $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$, следовательно правая часть уравнения явно больше левой.

Весьма полезно предлагать учащимся в случае получения невозможных решений исправить условие задачи так, чтобы она стала возможной, а также указать причину невозможности решения.

Особенного внимания заслуживают нулевые, отрицательные и неопределенные решения задач, обнаруживающие в условии задачи какие-либо особенности.

Пример 7. Найти, какое число надо прибавить к числителю и знаменателю дроби $\frac{91}{104}$, чтобы она превратилась в $\frac{7}{8}$.

Означая искомое число через x, найдем уравнение:

$$\frac{91+x}{104+x}=\frac{7}{8}, \quad \text{откуда} \quad 728+8x=728+7x \quad \text{и} \quad x=0.$$

Ответ показывает, что ничего прибавлять не нужно; значит, дробь $\frac{91}{104}$ уже равна $\frac{7}{8}$, в чем можно убедиться, сократив ее на 13.

Пример 8. Отцу 60 лет, а сыну 34 года. Через сколько лет возраст отца будет вдвое более возраста сына?

Обозначим искомое число лет, которое должно пройти, начиная от данного момента, через x; получим, согласно условию задачи, уравнение:

$$60+x=2(34+x),$$

или

$$60+x=68+2x, \quad \text{откуда} \quad x=-8.$$

Такой ответ показывает, что требуемое число лет должно быть отсчитано не вперед, а назад, т. е. что отец уже был вдвое старше сына за 8 лет до данного момента. Делая поверку, найдем действительно:

$$60-8=52; \quad 34-8=26; \quad 52:26=2.$$

Пример 9. Найти дробь со знаменателем 10, которая не изменяется, если к числителю прибавить 0,1, а к знаменателю — дробь, обратную ее числителю.

Согласно условию задачи, примем за неизвестное числитель данной дроби, который и обозначим через x.

Составляя уравнение, получим:

$$\frac{x+0,1}{10+\frac{1}{x}}=\frac{x}{10}.$$

Освобождая это уравнение от дробей, получим:

$$10x+1=10x+1,$$

т. е. тождество. Следовательно, поставленному условию удовлетворяет всякое число. И действительно, данное уравнение представляет собою частный случай одной формулы тождественного преобразования, именно:

$$\frac{a+\frac{1}{b}}{b+\frac{1}{a}}=\frac{a}{b}, \text{ что легко проверить.}$$

В заключение сказанного о составлении уравнений заметим, что давать учащимся задачи из этой области слишком трудные не следует, а достаточно ограничиться темами средней трудности.

§ 41. Уравнения первой степени со многими неизвестными.

Методологические замечания. Одному уравнению со многими неизвестными после освобождения его от дробей и других упрощений можно придать вид:

$$ax+by+cz+\ldots+kt=q,$$

где $x, y, z, \ldots, t$ — неизвестные числа, а $a, b, c, \ldots, k$ — некоторые целые коэфициенты. Легко видеть, что одно уравнение со многими неизвестными может иметь бесчисленное множество решений. Действительно, давая неизвестным $y, z, \ldots, t$ соответственно произвольные числовые значения $l, m, \ldots, n$, мы получим одно уравнение с одним неизвестным:

$$ax+bl+cm+\ldots+kn=q,$$

из которого найдем определенное значение для x. Давая затем тем же неизвестным какие-нибудь другие значения, получим из того же уравнения новое значение для x и т. д. Поэтому для определенности задачи при нескольких определяемых неизвестных должно быть дано и несколько уравнений, причем ставится требование, чтобы одни и те же значения неизвестных удовлетворяли всем данным уравнениям. Такая совокупность уравнений называется системой уравнений первой степени со многими неизвестными или, иначе, — системою линейных уравнений. Легко показать, что необходимым условием, хотя и не всегда достаточным для того, чтобы система имела определенные решения, является требование, чтобы число данных уравнений было равно числу определяемых неизвестных. Чтобы это доказать, припомним, что решение одного уравнения первой степени состоит в постепенном преобразовании его к виду такого уравнения, решение которого очевидно, т. е. к виду $x=a$. Точно так же и решение системы линейных уравнений сводится к постепенному преобразованию ее в такую систему, чтобы в каждое уравнение входило только по одному неизвестному числу. Возможность получения такой системы основывается на следующей общей теореме: **если имеем систему уравнений первой степени:**

$$(\mathrm{I})\quad \begin{cases} P_1=q_1, \\ P_2=q_2, \\ \ldots \\ P_{m-1}=q_{m-1}, \\ P_m=q_m, \end{cases}$$

то она будет равносильна такой системе уравнений:

$$(\mathrm{II})\quad \begin{cases} P_1=q_1, \\ P_2=q_2, \\ \ldots \\ P_{m-1}=q_{m-1}, \\ k_1P_1+k_2P_2+\ldots+k_{m-1}P_{m-1}+k_mP_m= \\ =k_1q_1+k_2q_2+\ldots+k_{m-1}q_{m-1}+k_mq_m, \end{cases}$$

где $k_1, k_2, \ldots, k_m$ — произвольные числа, причем, по крайней мере последнее из них k_m, не равно нулю. Ясно, что все значения неизвестных, удовлетворяющие системе (I), будут удовлетворять и системе (II). И, наоборот, значения неизвестных, удовлетворяющие системе (II), будут удовлетворять и (I), ибо из нее вытекает, что $k_mP_m=k_mq_m$ и, так как k_m не равно 0, то $P_m=q_m$, т. е. все уравнения системы (I) будут удовлетворяться значениями неизвестных, удовлетворяющих системе (II). Последнее уравнение этой системы носит название линейного сочетания, или линейной комбинации из уравнений системы (I). Таким образом, доказанная теорема позволяет получать при помощи линейного сочетания данных уравнений новые системы уравнений, равносильные данной системе. Все методы решения системы линейных уравнений и сводятся к тому, что из них составляются линейные комбинации с меньшим числом неизвестных, из этих комбинаций, в случае надобности, составляются новые и т. д., причем одновременно пользуются всякими упрощениями и, в конце концов, приходят к системе уравнений, равносильной данной, но такой, что в каждом уравнении входит лишь одно из определяемых неизвестных. Таким способом является способ уравнивания коэфициентов при каком-нибудь из неизвестных с последующим исключением этого неизвестного при помощи сложения или вычитания уравнений. Но и другие способы — подстановки, сравнения неизвестных величин и др. — все имеют в основе постепенное уменьшение числа неизвестных, входящих в данные уравнения, при помощи их линейных сочетаний.

Отсюда можно заключить, что для определенности решения системы уравнений с n неизвестными необходимо, чтобы уравнений было тоже n. Действительно, пользуясь, например, для решения способом уравнивания коэфициентов, мы можем, комбинируя первое уравнение с каждым из остальных, получить $(n-1)$ уравнений с $(n-1)$ неизвестными. С этой системой поступаем аналогичным образом и приходим к системе $(n-2)$ линейных уравнений с таким же числом неизвестных и т. д. В конце концов придем к одному уравнению с одним неизвестным, которое и найдем, а подставляя его значение в предыдущие системы, найдем значения и всех прочих неизвестных. Ясно, что если бы мы поступили так с системою, в которой число уравнений было бы менее числа неизвестных, то пришли бы к одному уравнению с несколькими неизвестными, т. е. неопределенному, вследствие чего подобная система линейных уравнений оказывается неопределенной. Наоборот, если у нас уравнений более, чем неизвестных, то можно найти значения неизвестных, не использовавши всех данных уравнений, и найденные значения неизвестных могут не удовлетворять оставшимся уравнениям. В таком случае данная система линейных уравнений будет несовместной, или противоречивой. Итак, действительно, для возможности определенных решений система линейных уравнений должна содержать столько же уравнений, сколько в них неизвестных. Однако и в этих случаях она может оказаться неопределенной или противоречивой. Подробное исследование этих вопросов дается в курсах по теории детерминантов, и с ним необходимо быть знакомым каждому преподавателю алгебры.

§ 42. Решение систем линейных уравнений.

Приступая к изучению отдела об уравнениях первой степени со многими неизвестными, следует прежде всего установить, что одно уравнение с *двумя и более неизвестными есть неопределенное*, т. е. может иметь бесчисленное множество решений. Для этого следует дать задачу с наиболее простым конкретным содержанием, приводящую к подобному уравнению, например: „Двое имеют вместе 100 руб.; сколько денег имеет каждый?“ Задача приводит к уравнению:

$$x+y=100;$$

учащиеся легко подметят ее неопределенность и установят, что одному из неизвестных, например x, можно дать любое числовое значение, тогда для y будут получаться совершенно определенные значения. Полезно составить их таблицу:

x	y
1	99
2	98
3	97
...	...

Подобным же образом можно убедиться, что если неизвестных будет три или более, то задача тем более будет неопределенной, например уравнение: $x+y+z=100$ тоже может иметь бесчисленное число решений. Далее следует к первой задаче добавить второе условие: пусть, например, относительно денег двух упомянутых лиц известно еще, что один имеет денег на 20 руб. более другого; тогда получим систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$x+y=100; \quad x-y=20.$$

Можно сначала предложить учащимся найти сумму денег каждого лица по соображению; они без труда найдут, что у первого было 60 руб., а у второго — 40. Таким образом, выяснится, что система двух уравнений с двумя неизвестными есть уже система определенная. После этого можно указать, что решение по соображению может быть легким только в самых простых случаях; для более сложных задач разработаны приемы, сущность которых заключается в том, что мы от двух уравнений с двумя неизвестными переходим к одному уравнению с одним неизвестным, или, как говорят, исключаем одно неизвестное. В данном случае, например, для этого достаточно данные уравнения сложить; при этом y сократится; получим:

$$2x=120; \quad x=60 \text{ руб.}$$

Подставляя это число вместо x в какое-нибудь из уравнений, например первое, получим:

$$60+y=100; \quad y=40 \text{ руб.}$$

Полезно сделать проверку. Из этого примера выясняется способ решения системы при помощи исключения неизвестного, входящего в оба уравнения с одинаковыми коэфициентами. Можно потом дать задачу несколько более сложную, решаемую при помощи почленного вычитания уравнений, например: „За 7 чашек и 9 стаканов заплачено 4 р. 10 к., а за 5 чашек и 9 стаканов уплачено 3 р. 70 к. Сколько стоит чашка и сколько стакан?“ И эту задачу учащиеся могут решить сначала арифметически, по соображению, но и составление уравнений здесь не представляет затруднения; получим:

$$7x+9y=410; \quad 5x+9y=370;$$

способ исключения одного из неизвестных очевиден: надо исключить y при помощи вычитания второго уравнения из первого; будем иметь:

$$2x=40; \quad x=20 \text{ коп.},$$

подставляя это значение, например, во второе уравнение, получим:

$$9y=270; \quad y=30 \text{ коп.}$$

После этих частных примеров, в которых коэфициенты при одном из неизвестных одинаковы и имеют одинаковые или разные знаки, можно перейти к случаям, когда требуется коэфициенты предварительно уравнять умножением их на некоторые множители. При этом, так как фактически приходится составлять наименьшее кратное коэфициентов при исключаемом неизвестном, то полезно держаться того же порядка, в котором обычно решаются задачи на приведение дробей к общему знаменателю, т. е. рассмотреть три случая: когда коэфициенты — числа взаимно простые, когда один из них является кратным другого и когда они имеют общие делители, т. е. последовательно решить системы такого вида:

$$\begin{array}{l|l|l} 3x+5y=8 & 9x+10y=65 & 4x-15y=42; \\ 4x+7y=11 & 3x+5y=25 & 6x-25y=38. \end{array}$$

Важно указать, что уравнивать следует коэфициенты при том неизвестном, для коэфициентов которого общее наименьшее кратное самое меньшее. Затем следует заняться решением систем, в которых предварительно решаемые уравнения надо привести в простейший вид с помощью освобождения их от знаменателя, раскрытия скобок и пр. Кроме систем с числовыми коэфициентами следует сделать ряд упражнений на решение уравнений с буквенными коэфициентами, избегая, однако, примеров большой сложности.

Решение системы двух уравнений с двумя неизвестными методом уравнивания коэфициентов носит синтетический характер и потому наиболее легко дается учащимся. Значительно более аналитическим характером проникнут метод решения их же с помощью подстановки. Действительно, в нем мы временно одно из неизвестных считаем за известное и выражаем через него другое неизвестное с помощью одного из данных уравнений; полученное выражение вставляем в другое из данных уравнений, благодаря чему одно из неизвестных исключается, и мы приходим к уравнению с одним неизвестным. Примером может служить система уравнений:

$$2x+3y=16; \quad 3x-7y=1.$$

Определяя из первого уравнения x через y, которое считаем как бы известным, найдем:

$$x=\frac{16-3y}{2}; \quad 3\left(\frac{16-3y}{2}\right)-7y=1;$$

далее имеем:

$$48-9y-14y=2; \quad 23y=46; \quad y=2,$$

а подставляя этот результат в выражение для x, будем иметь:

$$x=\frac{16-6}{2} \quad \text{или} \quad x=5.$$

Способ подстановки благодаря своему аналитическому характеру труднее дается учащимся, чем способ уравнивания коэфициентов; однако он имеет важное принципиальное значение и в дальнейшем значительно большее употребление, а потому необходимо, чтобы учащиеся приобрели в нем твердый навык. *Важно указать, что его непременно следует* применять тогда, когда коэфициент одного из неизвестных в данных уравнениях равен единице. Точно так же его преимущественно следует применять при решении буквенных уравнений.

3) Третьим способом решения системы двух уравнений с двумя неизвестными является способ сравнения неизвестных величин, не введенный в программу средней школы и в стабильный учебник алгебры А. П. Киселева, но тем не менее имеющий применение в разных вопросах и заслуживающий ознакомления с ним учащихся. Как известно,

он состоит в том, что какое-либо из неизвестных выражают через другое неизвестное из обоих уравнений и, так как полученные выражения представляют одно и то же число, то их приравнивают. Тем самым одно из неизвестных исключается, и получается одно уравнение с одним неизвестным. Так, решая этим способом предыдущую систему уравнений:

$$2x + 3y = 16; \quad 3x - 7y = 1,$$

найдем:

$$x = \frac{16 - 3y}{2} \quad \text{и} \quad x = \frac{1 + 7y}{3},$$

и так как x в обоих уравнениях означает одно и то же число, то можем написать:

$$\frac{16 - 3y}{2} = \frac{1 + 7y}{3},$$

т. е. получим одно уравнение с одним, неизвестным y. Решая, его будем иметь:

$$48 - 9y = 2 + 14y; \quad 23y = 46;$$
$$y = 2; \quad x = 5,$$

как и прежде. Наконец, полезно ознакомить учащихся со способом решения системы двух уравнений с двумя неизвестными при помощи детерминантов, который позволяет сразу написать значения обоих определяемых неизвестных. Этот способ обычно возбуждает большой интерес у учащихся. Для получения соответствующих формул надо решить каким-либо из приведенных выше способов систему двух уравнений с двумя неизвестными первой степени в общем виде:

$$a_1x + b_1y = c_1; \quad a_2x + b_2y = c_2;$$

получим такие результаты:

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}; \quad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

Рассматривая эти решения, мы видим, что знаменатели у x и y одинаковы и содержат четыре количества: a_1, b_1, a_2, b_2, т. е. коэфициенты при неизвестных; эти количества перемножаются перекрестно:

$$\begin{matrix} a_1 & & b_1 \\ & \times & \\ a_2 & & b_2, \end{matrix}$$

и второе произведение вычитается из первого. Выражение, составленное подобным образом из четырех количеств, называется детерминантом второго порядка и обозначается всеми входящими в него количествами в виде квадратной таблицы, заключенной в прямые скобки:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

В числителях у x и y стоят, очевидно, тоже детерминанты:

$$\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

так что

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

Рассматривая эти выражения, видим, что в знаменателях обеих формул стоит детерминант, составленный из коэфициентов при неизвестных данной системы, а в числителях — подобные же детерминанты, но с заменою столбца коэфициентов при определяемом неизвестном столбцом известных чисел, стоящих во второй части данных уравнений.

Так, решая при помощи детерминантов вышеприведенную систему уравнений, т. е.

$$2x + 3y = 16; \quad 3x - 7y = 1,$$

получим:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 16 & 3 \\ 1 & -7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -7 \end{vmatrix}} = \frac{(16 \cdot -7) - (3 \cdot 1)}{(2 \cdot -7) - (3 \cdot 3)} = \frac{-112 - 3}{-14 - 9} = \frac{-115}{-23} = 5;$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 16 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -7 \end{vmatrix}} = \frac{2 \cdot 1 - 3 \cdot 16}{-23} = \frac{-46}{-23} = 2.$$

Еще пример:

$$2x - 3y = 1; \quad 3x + y = 18;$$

получим:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 18 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1 + 54}{2 + 9} = \frac{55}{11} = 5;$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 18 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{36 - 3}{2 + 9} = \frac{33}{11} = 3.$$

Решение задач на составление системы двух уравнений с двумя неизвестными обычно не затрудняет учащихся и даже дается им легче, чем составление из условий задачи одного уравнения с одним неизвестным, которое обычно требует более глубокого анализа. Исследование решений системы двух уравнений с двумя неизвестными не требуется программою 7-го класса, но все же следует показать учащимся примеры систем несовместных уравнений, как, например, система:

$$2x + 5y = 10; \quad 4x + 10y = 19,$$

решение которой оказывается невозможным, так как уравнения явно противоречат друг другу, а также примеры систем неопределенных, например

$$2x + 5y = 10; \quad 4x + 10y = 20,$$

где второе уравнение, по существу, не отличается от первого, в которое обращается по сокращении на 2, так что здесь имеется фактически лишь одно уравнение с двумя неизвестными, допускающее бесчисленное множество решений.

§ 43. Уравнения с тремя и большим числом неизвестных.

Переход от системы двух уравнений с двумя неизвестными к системе трех и большего числа уравнений в общем обычно не затрудняет учащихся. Полезно сначала при этом взять полную систему трех уравнений с тремя неизвестными и решить ее последовательно всеми тремя основными способами: уравниванием коэфициентов, подстановкой и способом сравнения неизвестных величин. Но далее особенно важно остановиться на тех случаях, которые допускают различные упрощения и сокращения при их решении, а также и искусственные приемы. Такие случаи особенно часто представляются при решении систем уравнений, в которые входят не все неизвестные. Внимательное рассмотрение состава уравнений в подобных случаях нередко позволяет применением одновременно нескольких приемов решения или какими-либо искусственными преобразованиями быстрее и проще решить данные уравнения, чем каким-либо одним основным приемом. Упражнения подобного рода очень способствуют развитию инициативы и математического мышления учащихся.

Так, систему уравнений

$$x - z = 3; \quad y - x = -2; \quad 3z - y = 1$$

можно начать решать по способу подстановки; определяя из первого уравнения x, найдем:

$$x = z + 3.$$

Подставляя это значение во второе уравнение, будем иметь:

$$y - (z + 3) = -2, \quad \text{или} \quad y - z = 1.$$

Решая это уравнение совместно с оставшимся третьим уравнением, будем иметь:

$$y - z = 1; \quad -y + 3z = 1,$$

откуда, складывая почленно эти уравнения, найдем:

$$2z = 2, \quad z = 1 \quad \text{и} \quad y = 2,$$

а подставляя значение z в формулу для x, найдем: $x = 4$. Однако, внимательно всмотревшись в состав коэфициентов всех трех уравнений, мы видим, что если сложить все три данных уравнения почленно, то сразу исключаются неизвестные x и y. Поэтому такой способ в данном случае и будет наиболее простым. Складывая все три данных уравнения, действительно получим: $2z = 2$, откуда $z = 1$; подставляя это значение в первое уравнение, получим $x = 4$, а подставив это значение x во второе уравнение, найдем: $y = 2$.

С помощью предварительного сложения решается также система уравнений, обычно приводимая во всех учебниках алгебры:

$$x + y = a; \quad y + z = b; \quad z + x = c;$$

действительно, из нее следует:

$$x + y + z = \frac{a + b + c}{2},$$

и далее:

$$x = \frac{b + c - a}{2}; \quad y = \frac{a + c - b}{2}; \quad z = \frac{a + b - c}{2}.$$

Однако в учебниках не указывается, что подобный способ решения применим только к аналогичным системам уравнений с **нечетным** числом неизвестных и неприменим к системам с четным числом неизвестных, как, например,

$$x+y=a;\quad y+z=b;\quad z+t=c;\quad t+x=d,$$

которая оказывается либо несовместной, либо неопределенной.

Особого внимания заслуживает способ **замены неизвестных** новыми неизвестными, который часто упрощает решение системы уравнений.

Примеры:

1) $5(x+y)-3(x-y)=12;$
$7(x+y)+2(x-y)=23.$

Здесь для решения системы надо было бы раскрыть в обоих уравнениях скобки, сделать приведение подобных членов и пр., но короче будет ввести вместо x и y временно новые неизвестные, полагая $x+y=m,\quad x-y=n;$ получим:

$$5m-3n=12;\quad 7m+2n=23.$$

Решив эту систему, найдем:

$$m=3,\quad n=1.$$

Следовательно,

$$x+y=3;\quad x-y=1,$$

откуда найдем значения:

$$x=2,\quad y=1.$$

Способ замены неизвестных, в частности, с удобством применяется к уравнениям, содержащим неизвестные в знаменателях дробей.

2) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{4};\quad \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{5}{18};\quad \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{7}{36}.$

Следует заметить, что данные уравнения не являются линейными, однако решение их может быть приведено к решению системы линейных уравнений, если введем новые неизвестные:

$$\frac{1}{x}=m;\quad \frac{1}{y}=n;\quad \frac{1}{z}=p.$$

Получим уравнения обыкновенного типа:

$$m+n=\frac{1}{4};\quad m+p=\frac{5}{18};\quad n+p=\frac{7}{36};$$

откуда найдем:

$$m=\frac{1}{6};\quad n=\frac{1}{12}\quad \text{и}\quad p=\frac{1}{9};$$

следовательно,

$$x=6;\quad y=12;\quad z=9.$$

3) $\frac{3}{x+y+z}+\frac{6}{2x-y}+\frac{1}{y-32}=1;\quad \frac{6}{x+y+z}+\frac{4}{2x-y}+\frac{1}{y-32}=3;$
$\frac{15}{x+y+z}-\frac{2}{2x-y}-\frac{3}{y-32}=5.$

Полагая здесь

$$\frac{3}{x+y+z}=u; \quad \frac{2}{2x-y}=v; \quad \frac{1}{y-32}=t,$$

мы приведем данные уравнения к более простому виду:

$$u+3v+t=1; \quad 2u+2v-t=3; \quad 5u-v-3t=5.$$

Решая эту систему, получим:

$$u=\frac{1}{2}, \quad v=\frac{1}{2}; \quad t=-1.$$

Заменяя затем u, v и t их выражениями через x, y, z, найдем:

$$x+y+z=6; \quad 2x-y=4; \quad y-32=-1,$$

откуда

$$x=3; \quad y=2; \quad z=1.$$

Таким образом, здесь способ замены неизвестных дал возможность просто решить систему, которую обычными приемами решить было бы крайне затруднительно.

Из уравнений с буквенными коэфициентами при решении систем уравнений с несколькими неизвестными достаточно ограничиться лишь самыми несложными примерами вроде следующего:

$$x+y+z=3a+b+c; \quad x+y+t=a+3b+c;$$
$$x-z-t=a+b-c; \quad y+z-t=3a-b-c.$$

Здесь исключение неизвестных может быть достигнуто различными способами. Вычитая, например, второе уравнение из первого, получим:

$$z-t=2a-2b;$$

подставляя этот результат в последнее уравнение, найдем:

$$y=3a-b-c-(2a-2b)=a+b+c.$$

Складывая затем два последних уравнения, будем иметь:

$$x+y-2t=4a-2c,$$

а вычитая из этого уравнения второе, найдем:

$$-3t=3a-3b-3c,$$

следовательно

$$t=b+c-a.$$

Поэтому

$$z=2a-2b+t=2a-2b+b+c-a; \quad z=a-b+c,$$

и, наконец,

$$x=3a+b+c-y-z=a+b+c.$$

ГЛАВА IX.

ИЗВЛЕЧЕНИЕ КВАДРАТНОГО КОРНЯ.

§ 44. Общие замечания.

Приступая к прохождению отдела программы об извлечении квадратного корня, следует, конечно, припомнить с учащимися определение этого действия как обратного по отношению к возведению в степень

(§ 20); если же это понятие не было ранее установлено, то дать его вновь с соответствующими числовыми примерами. Способом для нахождения корней из чисел здесь является разложение подкоренного числа на столько равных множителей, сколько единиц в показателе корня, так: $\sqrt[3]{8}=2$, ибо $8=2\cdot2\cdot2$; $\sqrt{25}=5$, так как $25=5\cdot5$, и т. п.

Далее следует указать, что найденные таким образом корни, представляющие результат извлечения корня из положительного числа и выражающиеся сами положительными числами, называются *арифметическими*. Но так как в алгебре рассматриваются относительные числа, могущие быть и положительными и отрицательными, то необходимо рассмотреть правило знаков при извлечении корня в общем случае. При этом выясняются три следующих основных случая:

1. Если извлекается корень нечетной степени из положительного или отрицательного числа, то полученное число будет иметь такой же знак, как и подкоренное количество, например:

$$\sqrt[3]{27}=+3, \text{ ибо } (+3)^3=+27;$$
$$\sqrt[3]{-27}=-3, \text{ ибо } (-3)^3=-27.$$

2. Если извлекается корень четной степени из положительного числа, то результат может быть взят и со знаком $+$, и со знаком $-$, например $\sqrt{25}$ равен и $+5$ и -5, так как

$$(+5)^2=+25 \text{ и } (-5)^2=25.$$

Точно так же $\sqrt[4]{16}$ может быть и $(+2)$ и (-2), ибо и то и другое число, возведенное в 4-ю степень, дает $+16$. Поэтому корни четной степени из положительных чисел пишутся с двойными знаками:

$$\sqrt{25}=\pm5; \quad \sqrt[4]{16}=\pm2.$$

3. Корень четной степени из отрицательного количества не может быть выражен ни положительным, ни отрицательным числом, так как ни то, ни другое число, будучи возведено в четную степень, не может дать отрицательного числа. Таким образом, $\sqrt{-25}$ или $\sqrt[4]{-16}$ не могут быть найдены. Поэтому корни четной степени из отрицательного числа называются *мнимыми* числами; все прочие числа называются действительными, или вещественными.

Далее разрабатываются приемы извлечения квадратного корня из чисел, причем имеется в виду исключительно получение арифметического корня.

В качестве задачи с конкретным содержанием, которая приводит к необходимости извлечь квадратный корень из числа, можно взять какой-либо вопрос об определении стороны квадрата по данной его площади, например: площадь квадратной комнаты, занимаемой жильцом, содержит 16 *м*²; какова длина одной ее стороны? Сперва подобные задачи следует давать с числами, представляющими точные квадраты; способ решения, ясный для учащихся, — разложение данного числа на два равных множителя. Далее следует перейти к случаям, когда корень точно не извлекается, и показать, что в этих случаях задача может быть решена приближенно, например, если площадь комнаты равна 50 *м*², то сторону ее можно приближенно принять равной 7, т. е. числу, квадрат которого ближе всего подходит к 50. Необходимо указать, что таких приближенных значений квадратного корня из неточного квадрата может быть два, с недостатком и с избытком, и сообразно с конкретным условием задачи иногда более точное решение дает первое из них, а иногда второе. Например, в вышеприведенной задаче вполне удобно было принять за $\sqrt{50}$ число 7, но если бы требовалось извлечь квадратный корень из 99, то ясно, что более точный ответ дается корнем с избытком, т. е. приближенно $\sqrt{99}=10$. Таким образом, задача об извлечении квадратного корня из неточного квадрата всегда имеет два решения — с недостатком и с избытком, например:

$$5<\sqrt{30}<6;$$

разность между этими приближенными значениями равна 1, следовательно каждое из них отличается от определяемого корня менее, чем на 1; поэтому говорят, что они выражают приближенно искомый корень с точностью до единицы.

Далее следует выяснить, что нахождение квадратных корней из чисел с помощью разложения их на два равных множителя возможно лишь при очень малых числах; вообще же оно требует иных, более сложных приемов вычисления.

Для вывода этих приемов прежде всего устанавливается способ определения числа цифр в квадратном корне из данного числа. Это делается с помощью обратного действия — возведения в квадрат чисел однозначных, двузначных, трехзначных и т. д. Так как однозначные числа заключаются в пределах от 1 до 10, то их квадраты заключаются в пределах между 1^2 и 10^2, т. е. между 1 и 100, следовательно имеют или одну или две цифры. Подобным же образом, беря двузначные числа, т. е. заключающиеся между 10 и 100, видим, что их квадраты заключаются между 10^2 и 100^2, т. е. между 100 и 10 000, и, значит, имеют или три или четыре цифры, и т. д. Отсюда заключаем, что квадрат всякого целого числа заключает или вдвое большее число цифр или вдвое большее без одной, т. е. если в числе n цифр, в его квадрате будет или $2n$ или $2n-1$ цифр. Поэтому и, наоборот, по числу цифр числа можно узнать число цифр в его квадратном корне; так, если в числе две или одна цифра, то корень выражается однозначным числом; если четыре или три — двузначным и т. д.; вообще корень из числа, имеющего $2n$ или $2n-1$ цифр, будет содержать n цифр. Отсюда вытекает практическое правило для предварительного определения числа цифр, которое должно получиться при извлечении корня из данного числа: надо разделить это число на грани, по две цифры в каждой грани, от правой руки к левой; в последней грани может быть и одна цифра. Число граней и покажет число цифр в корне; так, $\sqrt{5'81}$ содержит две цифры, $\sqrt{71'6'85'34}$ — четыре цифры и т. д.

§ 45. Практика извлечения квадратного корня.

Переходя к извлечению на практике корня из многозначных чисел, следует объяснить, что так как заранее нельзя узнать, извлечется ли точно корень из данного числа или нет, то в последнем случае мы будем находить его приближенно, с точностью до единицы, с недостатком, т. е. согласно с предыдущим, будем находить корень из наибольшего квадрата, содержащегося в данном числе. Удобнее всего начать с извлечения корня из трехзначного или четырехзначного числа, чтобы получить в результате двузначное число. Пусть, например, надо извлечь квадратный корень из числа 2401; в нем, очевидно, будут две цифры: цифра десятков и цифра единиц. Обозначая первую из них x, а вторую y, видим, что искомый корень представится в виде

$$\sqrt{2401} = 10x + y,$$

а потому само число 2401 представится в виде

$$2401 = (10x + y)^2,$$

или

$$2401 = 100x^2 + 2 \cdot 10x \cdot y + y^2. \tag{1}$$

Полученное равенство фактически представляет собою уравнение второй степени с двумя неизвестными; однако из него x и y легко могут быть найдены на основании чисто арифметических соображений.

Действительно, мы можем искать цифры искомого числа постепенно: сперва цифру десятков x, потом цифру единиц y. Но один десяток в квадрате дает сотню; x десятков в квадрате дают x^2 сотен, поэтому квадрат десятков может содержаться только в сотнях данного числа, т. е. в числе 24. Отсюда видим, что для нахождения числа десятков искомого квадратного корня мы должны извлечь его из сотен данного числа. При этом важно показать, что этот корень мы должны извлечь с недостатком, с точностью до единицы, т. е. взять $\sqrt{24} = 4$. Действительно, если бы мы взяли тот же корень с избытком, т. е., положим, $x = 5$, то корень был бы равен или более 50, что невозможно, так как $50^2 = 2500$, т. е. больше данного числа. Но, с другой стороны, нельзя положить и $x = 3$, так как сколько бы при трех десятках ни было единиц, квадрат такого числа был бы менее 40^2, т. е. 1600, но и это число менее данного. Поэтому, вопрос об определении числа десятков искомого квадратного корня имеет единственное и вполне определенное решение: для нахождения его надо извлечь квадратный корень из наибольшего точного квадрата, содержащегося в числе, которое получается после отделения в данном числе десятков и единиц. Итак, $x = 4$; после этого в нашем уравнении (1) оставшееся неизвестное число единиц y могло бы быть найдено путем замены x его значением, однако и y мы находим из простых арифметических соображений. Именно мы получаем:

$$2401 = 1600 + 2 \cdot 4 \cdot y \cdot 10 + y^2;$$

вычитая из 2401 квадрат десятков 1600, найдем:

$$801 = 8y \cdot 10 + y^2. \tag{2}$$

В этом равенстве мы сравниваем число десятков в правой и левой частях; в последней их 80, в правой же части $8y$, но несколько десятков может оказаться и в квадрате единиц, т. е. в y^2. Поэтому для нахождения y следует отделить в полученном остатке 801 последнюю цифру справа, т. е. 1, и оставшееся число 80 делить на удвоенную цифру десятков, т. е. 8; получим $80:8=10$, но искомое число должно быть однозначным, поэтому берем $y=9$. Однако и это число может быть велико, так как десятки числа, как было упомянуто, могут содержаться в члене y^2; поэтому найденное число единиц y подвергают проверке. Эта проверка делается удобнее всего, если уравнение (2) преобразовать к виду:

$$801=(8\cdot 10+y)\cdot y,$$

т. е. найденное число единиц корня приписывают к числу десятков и полученное таким образом двузначное число умножают на число единиц. Так, в данном случае имеем:

$$801=(80+9)\cdot 9; \quad \text{или} \quad 801=89\cdot 9,$$

т. е. цифра 9 действительно удовлетворяет задаче. Но если бы она оказалась велика, ее следует уменьшить на единицу, или даже постепенно на несколько единиц, пока последнее умножение не даст число, равное остатку от вычитания из данного числа квадрата десятков или меньшее его; в последнем случае данное число не представляет собою точного квадрата, и корень из него будет лишь приближенным, с точностью до единицы.

В результате приведенных рассуждений и получается известное практическое правило для извлечения квадратного корня из чисел и соответствующая запись:

$$\begin{array}{r|l}
 & \sqrt{24'01}=49. \\
 & \underline{16} \\
89 & 80'1 \\
9 & \underline{80\,1} \\
 & 0
\end{array}$$

Еще пример, где цифру единиц, даваемую делением, приходится уменьшить на 1:

$$\begin{array}{r|l}
 & \sqrt{33'02}\approx 57. \\
 & \underline{25} \\
107 & 802 \\
7 & \underline{749} \\
 & 53
\end{array}$$

Здесь корень не извлекается точно; ответ: $57<\sqrt{3302}<58$.

Необходимо проделать достаточное число примеров на извлечение корня из двузначных и трехзначных чисел, точно и приближенно, чтобы учащиеся приобрели в этом действии прочный навык.

Переходя к извлечению корня из чисел, больших 10 000, т. е. к тому случаю, когда в корне должно получиться более двух цифр, следует указать, что всякое многозначное число можно рассматривать как состоящее из десятков и единиц, например в числе 842 содержится 84 десятка и 2 единицы. Поэтому, если дано число, квадратный корень из которого должен содержать несколько цифр, то можно искать сначала число десятков корня, а потом единиц. Пусть требуется извлечь корень из числа 51 529. Разбивая его на грани по две цифры, заключаем, что корень будет числом трехзначным, т. е. содержать сотни, десятки и единицы, сотни же можно превратить в десятки и рассматривать корень как состоящий только из десятков и единиц. Но квадрат десятков содержится в сотнях; поэтому для определения их числа надо извлечь корень из числа сотен данного числа, т. е. из 515. Извлечение корня из этого числа учащимся уже известно из предыдущего; он будет равен 22, причем в остатке получается 31; присоединив сюда последнюю грань, получим число 3129, в котором заключается удвоенное произведение десятков на единицы и квадрат единиц. Как и в предыдущем случае, удвоенное произведение десятков на единицы содержится в десятках этого остатка, а потому нужно в нем отделить цифру единиц, т. е. взять только число 312 и делить его на удвоенное найденное число десятков, т. е. на 44. В частном получится 7. Приписав ее к удвоенному числу десятков, умножаем полученное число 447 на 7 с целью проверки, не будет ли эта цифра слишком велика. Проверка показывает, что она оказывается правильной. Действия располагаются совершенно аналогично основному случаю:

$$\sqrt{5'15'29} = 227.$$

$$\begin{array}{r|l} & 4 \\ \hline 42 & 11'5 \\ 2 & 8\,4 \\ \hline 447 & 3\,12'9 \\ 7 & 3\,12\,9 \\ \hline & \quad 0 \end{array}$$

Подобным же образом первоначальное правило распространяется на извлечение квадратных корней из чисел с каким угодно числом цифр. Полезно проделать возможно большее число примеров, в том числе и такие, в которых в данном числе или в его корне встречаются нули; например:

$$\sqrt{14'46'28'09} = 3809.$$

$$\begin{array}{r|l} & 9 \\ \hline 68 & 546 \\ 8 & 544 \\ \hline 7603 & 22809 \\ 3 & 22809 \\ \hline & \quad 0 \end{array}$$

Примеры следует брать и на точное извлечение корня и с остатком. Желательно, чтобы учащиеся сами вывели признак невозможности извлечения квадратного корня из чисел, оканчивающихся на цифры 2, 3, 7, 8 и один нуль. В результате большого количества проделанных примеров учащиеся должны не только вполне сознательно производить извлечение квадратного корня из целых чисел, но и приобрести в этом действии твердый навык и безошибочное уменье.

§ 46. Приближенное извлечение квадратного корня из чисел.

Приступая к извлечению квадратных корней из чисел с приближением, следует прежде всего установить, что если квадратный корень из целого числа не может быть выражен целым числом, то его нельзя выразить и дробью. Это легко доказать способом доказательства от противного: полагая, что $\sqrt{A}=\frac{a}{b}$, где $\frac{a}{b}$ — несократимая дробь, приходим к заключению, что $A=\frac{a^2}{b^2}$, т. е. что целое число равно квадрату несократимой дроби, что невозможно. Поэтому $\sqrt{A}$, где A — неточный квадрат, есть число особой природы, так называемое иррациональное, которое не может быть точно выражено ни целым, ни дробным числом. Но мы уже видели, что такие квадратные корни могут быть выражены приближенно, с точностью до 1; именно, за приближенный корень может быть принято любое из двух последовательных целых чисел, между квадратами которых заключается число, из которого извлекают корень. Так, $\sqrt{11}$ приближенно, с точностью до 1, равен 3 — с недостатком и 4 — с избытком, т. е. $3<\sqrt{11}<4$, так как $3^2<11<4^2$, или $9<11<16$. Это понятие о точности до одной целой единицы может быть легко распространено на извлечение корня с точностью до любой дроби $\frac{1}{n}$: именно, будем под приближенным квадратным корнем из A понимать каждое из двух чисел $\frac{x}{n}$ и $\frac{x+1}{n}$, различающихся между собой на $\frac{1}{n}$: между квадратами которых заключается число A; т. е. будем считать

$$\frac{x}{n}=\sqrt{A} \text{ или } \frac{x+1}{n}=\sqrt{A},$$

$$\text{если } \frac{x^2}{n^2}<A<\frac{(x+1)^2}{n^2}.$$

Но если мы умножим все три входящих в эти неравенства числа на n^2, получим:

$$x^2<An^2<(x+1)^2,$$

что показывает, что x есть квадратный корень из An^2 с точностью до 1. Поэтому данная задача сводится к предыдущей, т. е. к извлечению корня с недостатком и с избытком из числа An^4 до единицы. Отсюда вытекает и способ нахождения корня из A с точностью до $\frac{1}{n}$; надо A умножить на n^2, извлечь из An^2 корень с точностью до 1 и результат разделить на n. Например, если надо извлечь корень из 3 с точностью до $\frac{1}{5}$, надо 3 умножить на 5^2, получим 75; извлекая из этого числа квадратный корень с точностью до 1, найдем:

$$8<\sqrt{75}<9,$$

а деля полученные числа на 5, будем иметь:

$$\frac{8}{5}<\sqrt{3}<\frac{9}{5} \quad \text{или} \quad 1\frac{3}{5}<\sqrt{3}<1\frac{4}{5}.$$

Однако чаще всего приходится находить квадратные корни из неточного квадрата с каким-либо десятичным приближением: до 0,1, или до 0,01 и т. д. В таких случаях надо предварительно умножить подкоренное число на 10^2 или 100^2 и т. п., извлечь корень с точностью до 1 и результат разделить на 10, 100 и т. п. Например, извлекая корень из 3 с точностью до $\frac{1}{10}$, будем иметь:

$$17<\sqrt{300}<18,$$

откуда

$$1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8;$$

корень из того же числа с точностью до $\frac{1}{100}$ найдем, умножив его на 100^2, т. е. на 10 000. Но

$$173 < \sqrt{30\,000} < 174,$$

откуда

$$1{,}73 < \sqrt{3} < 1{,}74.$$

Часто при этом нули к данному числу приписываются не сразу, а во время самого процесса извлечения корня, причем всякий раз приписывается к остатку при вычислении корня по два нуля; например:

$$\begin{array}{r|r}
\multicolumn{2}{c}{\sqrt{19} = 4{,}35,} \\
83 & 30'0 \\
3 & 24\,9 \\
\hline
865 & 5100 \\
5 & 4325 \\
\hline
 & 675
\end{array}$$

так что $4{,}35 < \sqrt{19} < 4{,}36$.

§ 47. Извлечение квадратного корня из дробей.

Подобно тому как, приступая к изучению способов извлечения квадратного корня из целых чисел, необходимо начать с рассмотрения прямого действия — возведения их в квадрат, так и подходом к извлечению корня из дроби должно быть рассмотрение действия возведения дроби в квадрат. Но, возводя дробь $\frac{a}{b}$ в квадрат, имеем:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a^2}{b^2},$$

т. е. для возведения дроби в квадрат необходимо отдельно возвести во вторую степень ее числителя и знаменателя и первое число разделить на второе, например

$$\left(\frac{3}{7}\right)^2 = \frac{9}{49}, \quad \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9} = 2\frac{7}{9}$$

и т. п.

Отсюда приходим к предположению, что и, наоборот, при извлечении квадратного корня из дроби надо отдельно извлечь его из числителя и знаменателя и первое число разделить на второе. Это предположение может быть и доказано; действительно, допуская, что

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}},$$

и возвышая обе части этого предполагаемого равенства в квадрат, придем к тождеству $\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$, что доказывает нашу теорему.

Далее способом доказательства от противного убеждаемся, что если дробь $\frac{a}{b}$ несократима и члены ее в отдельности не представляют собою точных квадратов, то корень из нее не может быть выражен ни целым числом, ни дробью. Действительно, полагая $\sqrt{\frac{a}{b}}=A$, получим $\frac{a}{b}=A^2$, что невозможно, так как целое число не может равняться несократимой дроби. Точно так же, полагая $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{m}{n}$, где $\frac{m}{n}$ — дробь несократимая и m и n не представляют точных квадратов целых чисел, будем иметь $\frac{a}{b}=\frac{m^2}{n^2}$, что при несократимости дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{m}{n}$ требует равенств: $a=m^2$, $b=n^2$, что невозможно, так как a и b не суть точные квадраты. Итак, если числитель и знаменатель дроби не являются точными квадратами, то корень из дроби точно не извлекается и является числом иррациональным. Поэтому в указанных случаях приходится корень извлекать приближенно, с определенной степенью точности. Так как всякая простая дробь может быть обращена в десятичную, то прежде всего следует рассмотреть вопрос об извлечении точных и приближенных корней из десятичных дробей.

Пусть требуется найти $\sqrt{0{,}1444}$. Так как

$$0{,}1444=\frac{1444}{10\,000}, \text{ то } \sqrt{\frac{1444}{10\,000}}=\frac{38}{100}=0{,}38.$$

Еще примеры: $\sqrt{1{,}1449}=1{,}07$; $\sqrt{0{,}120409}=0{,}347$.

Здесь корни извлекаются точно. Но, извлекая, например, $\sqrt{0{,}374}$, или $\sqrt{\frac{374}{1000}}$, видим, что корень из знаменателя не может быть точно извлечен; поэтому, умножая числителя и знаменателя на 10, получим:

$$\sqrt{\frac{3740}{10\,000}}=\frac{\sqrt{3740}}{100},$$

и так как $61<\sqrt{3740}<62$, то $\sqrt{0{,}374}$ равен 0,61, или 0,62, с точностью до 0,01. Подобно этому, найдем: $\sqrt{3{,}5}=1{,}8708$, с точностью до 0,0001.

Из рассмотрения сделанных примеров видим, что для извлечения квадратного корня из десятичной дроби или из целого числа с десятичной дробью должно сделать число десятичных знаков в ней четным, приписав, если оно нечетное, справа один или вообще нечетное число нулей; потом, не обращая внимания на запятую, извлечь квадратный корень, как из целого числа, и в полученном корне отделить запятою от правой руки к левой вдвое менее десятичных знаков, чем их имеется под корнем.

Число приписываемых нулей зависит от заданной степени точности и должно быть вдвое более требуемого числа десятичных знаков. Например, если требуется найти $\sqrt{8}$ с точностью до 0,01, т. е. с двумя десятичными знаками, то мы приписываем к 8 четыре нуля; получим $\sqrt{80000}=282$ (с недостатком), следовательно

$$2{,}82<\sqrt{8}<2{,}83.$$

Для нахождения с тою же точностью $\sqrt{3,5}$ приписываем к подкоренному числу три нуля; будем иметь: $\sqrt{3,5000}=1,87$ (с недостатком).

Квадратные корни из простых дробей, как было упомянуто, могут быть получены с помощью обращения их в десятичные. Однако, если знаменатель дроби есть точный квадрат или его легко превратить в квадрат, то вычисление может быть сделано проще. Так, чтобы найти $\sqrt{\frac{7}{36}}=\frac{\sqrt{7}}{6}$, можно извлечь корень с требуемой степенью точности, например до 0,01, и результат разделить на 6, от этого степень точности только увеличится; получим:

$$\sqrt{7}=2,64,$$

следовательно

$$\sqrt{\frac{7}{36}}=\frac{2,64}{6}=0,44, \text{ с точностью до } \frac{1}{600}.$$

Точно так же

$$\sqrt{\frac{2}{3}}=\sqrt{\frac{6}{9}}=\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{2,449}{3}=0,816;$$

$$\sqrt{\frac{5}{8}}=\sqrt{\frac{10}{16}}=\frac{\sqrt{10}}{4}=\frac{3.16}{4}=0,79.$$

Ввиду важного практического значения приближенного извлечения квадратных корней с данной степенью точности, необходимо, чтобы учащиеся ясно поняли сущность этого действия и безупречно производили его на практике.

§ 48. Пропедевтический курс квадратных уравнений.

Решение квадратных уравнений с числовыми коэфициентами, которым заканчивается программа алгебры 7-го класса, естественнее всего поставить в связь с извлечением квадратного корня из чисел. С этою целью следует предложить учащимся для решения какое-либо уравнение, приводящееся к двучленному квадратному вида $z^2=q$, например: $\frac{x+3}{x-3}+\frac{x-3}{x+3}=\frac{5}{2}$; по упрощении оно приводится к виду $x^2=81$, следовательно для решения его надо извлечь квадратный корень из 81 — получим 9. Но надо подчеркнуть, что здесь требуется найти не арифметический, а алгебраический корень из 81, а потому он должен иметь два знака, т. е. равен ± 9; $x_1=9$, $x_2=-9$. Таким образом, квадратное уравнение вида $x^2=q$ имеет два корня: $x_1=+\sqrt{q}$ и $x_2=-\sqrt{q}$, причем корень $\sqrt{q}$ — арифметический. В частности, если q — число отрицательное, то оба корня становятся мнимыми, например если $x^2+25=0$, то $x^2=-25$ и $x=\pm\sqrt{-25}$. Если же $q=0$, то уравнение $x^2=0$ имеет оба корня, равные нулю.

Двучленное уравнение $x^2=q$ является исходным при изучении квадратных уравнений более общего типа: видов $x^2+px+q=0$ и $ax^2+bx+c=0$. Первое из этих уравнений можно привести к двучленному при помощи преобразований $x^2+px=q$, $x^2+2\cdot\frac{p}{2}x+\frac{p^2}{4}=\frac{p^2}{4}-q$, или

$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\frac{p^2}{4}-q$, приводимых во всех учебниках алгебры и дающих решение:

$$x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q} \quad \text{и} \quad x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

Однако ту же формулу можно получить и следующим образом, не встречающимся в курсах алгебры: положим, $x=y-\frac{p}{2}$; будем иметь:

$$\left(y-\frac{p}{2}\right)^2+p\left(y-\frac{p}{2}\right)+q=0,$$

или

$$y^2-py+\frac{p^2}{4}+py-\frac{p^2}{2}+q=0; \text{ т. е. } y^2=\frac{p^2}{4}-q,$$

откуда

$$y=\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

а следовательно

$$x=y-\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}-\frac{p}{2},$$

или, окончательно

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

Необходимо, чтобы учащиеся знали безукоризненно известное словесное выражение этой формулы. Затем следует отдельно рассмотреть случаи, когда коэфициент p — четный и когда он — нечетный. В первом случае формула упрощается, ибо, полагая $p=2p'$, найдем:

$$x=-p'\pm\sqrt{p'^2-q}.$$

Например, решая по этой формуле уравнение $x^2-14x+48=0$, найдем

$$x=7\pm\sqrt{49-48}; \quad x=7\pm1; \quad x_1=8; \quad x_2=6.$$

В этом последнем случае уравнение решается особенно просто, если средний член представляет собою круглые десятки, т. е. p оканчивается нулем. Действительно, в этом случае $\frac{p}{2}$ оканчивается цифрою 5, но такие числа особенно просто возводить в квадрат. В самом деле, пусть $N=10n+5$, тогда $N^2=100n^2+100n+25$ или $N^2=100n(n+1)+25$, следовательно, квадрат N содержит $n(n+1)$ сотен и 25 единиц. Отсюда такое правило: чтобы возвысить в квадрат число, оканчивающееся цифрою 5, надо умножить число десятков в нем (в данном случае n) на число, единицею большее, и приписать к произведению 25. Например: $35^2=1225$; $85^2=7225$; $695^2=483\,025$ и т. п. И наоборот, если оказывается что необходимо извлечь квадратный корень из числа, оканчивающегося на 25, причем число его сотен разлагается на два множителя, из которых один более другого на единицу, то следует взять этот меньший множитель и приписать к нему 5. Например,

$$\sqrt{5625}=75; \quad \sqrt{2025}=45; \quad \sqrt{990\,025}=995 \text{ и т. п.}$$

Применяя эти выводы, например, к квадратным уравнениям

1) $x^2+30x+176=0$, найдем:

$$x=-15\pm\sqrt{225-176};\ x=-15\pm7;\ x_1=-8;\ x_2=-22;$$

2) $x^2-48x-49=0$;

$$x=24\pm\sqrt{576+49};\quad x=24\pm\sqrt{625}.$$

Так как здесь под корнем число десятков $6=2\cdot3$, то

$$\sqrt{625}=25 \text{ и } x=24\pm25;\quad x_1=-1;\quad x_2=49.$$

Отсюда вытекает и удобный способ решения квадратного уравнения $x^2+px+q=0$, когда коэффициент p — нечетное число. Действительно, в этом случае $\frac{p}{2}$ есть целое число с половиною, т. е. $\frac{p}{2}=n+\frac{1}{2}$, где n — целое. Но тогда,

$$\frac{p^2}{4}=\left(n+\frac{1}{2}\right)^2=n^2+n+\frac{1}{4}=n(n+1)+\frac{1}{4},$$

т. е., чтобы возвести в квадрат какое-либо целое число с половиною в квадрат, надо умножить его на число, единицею большее, и увеличить на $\frac{1}{4}$, или же на 0,25. Например:

$$\left(7\frac{1}{2}\right)^2=7\cdot8+\frac{1}{4}=56\frac{1}{4}=56{,}25.$$

$$\left(19\frac{1}{2}\right)^2=19\cdot20+\frac{1}{4}=380\frac{1}{4}=380{,}25 \text{ и т. п.}$$

Поэтому, прилагая, например, это правило к решению уравнений:

1) $x^2-19x+90=0$; $x=9\frac{1}{2}\pm\sqrt{90\frac{1}{4}-90}$, найдем:

$$x=9\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2};\quad x_1=10;\quad x_2=9.$$

2) $x^2+15x+44=0$; $\quad x=-7{,}5\pm\sqrt{56{,}25-44}$;

$$x=-7{,}5\pm\sqrt{12{,}25}.$$

Так как $12=3\cdot4$, то $\sqrt{12{,}25}=3{,}5$ и

$$x=-7{,}5\pm3{,}5;\quad x_1=-4;\quad x_2=-11.$$

Следует возможно более решить уравнений на применение основной формулы решения уравнения $x^2+px+q=0$ и вышеприведенных частных, пока учащиеся не приобретут в решении твердый навык. При этом следует рассмотреть и те случаи, когда корни уравнений будут иррациональными, равными и мнимыми. Например:

1) $x^2-50x+120=0$; $\quad x=25\pm\sqrt{625-120}$;

$$x_1=25+\sqrt{505};\quad x_2=25-\sqrt{505},$$

здесь корни могут быть найдены с приближением.

2) $x^2 - 16x + 64 = 0$; $x = 4 \pm \sqrt{0}$; $x_1 = x_2 = 4$.

Здесь корни равные, что можно было предвидеть, так как левая часть его может быть представлена в виде $(x-4)^2 = 0$.

3) $x^2 - 6x + 10 = 0$; $x = 3 \pm \sqrt{9-10}$; $x_1 = 3 + \sqrt{-1}$;
$x_2 = 3 - \sqrt{-1}$,

т. е. оба корня мнимые.

Переходя к выводу формулы для решения уравнения самого общего вида, т. е. $ax^2 + bx + c = 0$, где $a > 1$, заметим, что ее можно получить, приведя уравнение к предыдущему виду, для чего достаточно все члены его разделить на a, как это делается во всех учебниках алгебры. Но можно получить ту же формулу следующим способом, не встречающимся в руководствах: умножим все члены неприведенного уравнения на a; будем иметь:

$$a^2x^2 + abx + ac = 0, \quad \text{или} \quad (ax)^2 + b(ax) + ac = 0;$$

полагая здесь $ax = y$, получим уравнение: $y^2 + by + ac = 0$.

Решая его, найдем:

$$y = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - ac}, \quad \text{или} \quad y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2},$$

а так как $x = \frac{y}{a}$, то $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Например:

$$3x^2 + 5x - 8 = 0; \quad x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 96}}{6}; \quad x = \frac{-5 \pm \sqrt{121}}{6};$$

$$x_1 = \frac{-5 + 11}{6} = 1; \quad x_2 = \frac{-5 - 11}{6} = -\frac{16}{6} = -\frac{8}{3}.$$

Уравнение $ax^2 + bx = 0$ является частным случаем предыдущего и может быть решено по общей формуле; получим:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2}}{2a}, \text{ т. е. } x_1 = 0, \; x_2 = -\frac{b}{a}.$$

Однако чрезвычайно важно показать и другой способ его решения, основанный на разложении на множители его левой части:

$$x(ax + b) = 0.$$

Но когда произведение нескольких множителей равно нулю, то какой-нибудь из них непременно должен равняться нулю. Полагая, что первый множитель равен нулю, найдем один корень уравнения, именно $x_1 = 0$, а полагая второй множитель равным нулю, найдем:

$$ax + b = 0, \text{ откуда } x_2 = -\frac{b}{a},$$

т. е. мы получили те же корни, что и прежде. Например, решая уравнение:

$$(x + 4)^2 = 2x + 16;$$

получим:

$$x^2 + 8x + 16 = 2x + 16; \quad x^2 + 6x = 0;$$
$$x(x + 6) = 0; \quad x_1 = 0; \quad x_2 = -6.$$

Здесь важно отметить, что один из корней рассматриваемого вида непременно равен нулю. Указанный способ решения уравнения

$$ax^2 + bx = 0$$

разложением на множители, как известно, прилагается к решению уравнений высших степеней.

Решением числовых уравнений второй степени заканчивается программа алгебры 7-го класса. Так как возможно, что часть учащихся ограничится обучением в неполной средней школе, то необходимо, чтобы они уже в ней приобрели знание и навык в решении примеров и задач, приводящихся к квадратным уравнениям.

ГЛАВА X.

ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СО СТЕПЕНЯМИ И КОРНЯМИ.

§ 49. Общие сведения.

Программа 8-го класса начинается с систематического изучения действий возведения в степень и извлечения корня из чисел и из алгебраических выражений. Эти действия уже частично известны учащимся из курса предыдущего года обучения, но здесь они приводятся в систему и им дается более строгое обоснование.

Так, из правил умножения выводится правило знаков и известные правила возведения в степень алгебраических выражений: произведения, степени и дроби, откуда вытекает общее правило для возведения в какую-нибудь степень алгебраического одночлена, именно, надо коэфициент его возвести в данную степень, а показателей всех буквенных множителей умножить на показателя данной степени, например:

$$(-5a^2b^3c)^2 = 25a^4b^6c^2; \quad \left(\frac{3a^2b}{4xy^3}\right)^3 = \frac{27a^6b^3}{64x^3y^9}.$$

Сверх того, программа содержит указание на проработку и возведение в квадрат многочлена. Соответствующее правило легко может быть выведено самим учащимся из распространения формулы:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

на квадрат суммы трех слагаемых следующим образом: в выражении $(a + b + c)^2$ обозначим сумму $(a + b)$ через m, тогда

$$(a + b + c)^2 = [(a + b) + c]^2 = (m + c)^2 = m^2 + 2mc + c^2,$$

а заменяя m обратно через $(a + b)$, получим:

$$\begin{aligned}(a + b + c)^2 &= (a + b)^2 + 2(a + b)c + c^2 = \\ &= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2,\end{aligned}$$

или окончательно:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$$

Можно было бы подобным же образом найти $(a + b + c + d)^2$, после чего по аналогии формулировать общее правило: чтобы возвести многочлен в квадрат, надо сложить сумму квадратов всех его членов с суммою удвоенных произведений каждого члена на каждый из последующих за ним.

Строгое доказательство этой формулы, которое на этой стадии обучения не может быть сообщено учащимся, *но должно быть известно* преподавателю, требует применения способа математической индукции, или перехода от n к $n+1$. Именно, положим, что теорема верна для многочлена, состоящего из n членов: $P=x+y+\ldots+u$, и докажем, что она будет верна и для многочлена, содержащего $n+1$ членов: $Q=x+y+\ldots+u+v$. Действительно, так как $Q=P+v$, то, возведя в квадрат, имеем:

$$Q^2=P^2+2Pv+v^2,$$

т. е.

$$Q^2=(x+y+\ldots+u)^2+2(x+y+\ldots+u)v+v^2$$

или

$$Q^2=(x+y+\ldots+u)^2+2xv+2yv+\ldots+2uv+v^2,$$

т. е. к сумме квадратов всех прежних слагаемых присоединяется и квадрат нового слагаемого v^2, а к удвоенным произведениям членов прежнего многочлена — удвоенные произведения их же на новый член v. Значит, если правило верно для n членов, оно останется верным для $n+1$ членов. Но мы непосредственно видели, что оно верно для квадрата суммы трех членов, значит оно правильно для квадрата суммы 4 членов, а, будучи верно для четырехчлена, оно будет верно для многочлена из 5 членов и т. д., т. е. вообще будет справедливо.

На это правило необходимо, конечно, проделать достаточное количество примеров, с разным числом слагаемых и различными знаками; например:

$$(1+x+x^2)^2=1+x^2+x^4+2x+2x^2+2x^3=$$
$$=1+2x+3x^2+2x^3+x^4;$$
$$(a^3+2a^2+2a-1)^4=a^6+4a^4+4a^2+1+4a^5+4a^4-$$
$$-2a^3+8a^3-4a^2-4a=a^6+4a^5+8a^4+6a^3-4a+1.$$

На основании правил, установленных для возведения одночленных выражений в степень, *выводятся правила для извлечения из них корней*. При этом следует иметь в виду, что здесь речь идет исключительно об арифметических корнях и в основу кладется определение действия извлечения корня как обратного возведению в степень, т. е. тождество:

$$(\sqrt[n]{a})^n=a.$$

Самое доказательство правил ведется с помощью их проверки. Так, желая доказать, что для извлечения корня из произведения следует извлечь его из каждого сомножителя в отдельности и результаты перемножить, мы допускаем, это что правило верно, т. е. что

$$\sqrt[n]{abc}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\cdot\sqrt[n]{c},$$

и затем возводим обе части предлагаемого равенства в степени n. Прилагая общее правило возведения в степень произведения, получим в обеих частях равные величины, т. е. предположенное правило, действительно, справедливо. Подобным же образом с помощью проверки устанавливаем правила для извлечения корня из дроби и из степени алгебраического количества, результатом чего получается общее правило для извлечения корня из одночлена: надо извлечь корень из коэфициента данного одночлена, а показателей букв в подкоренном выражении разделить на показателя корня; например:

$$\sqrt[5]{\frac{32a^{10}b^5}{243x^5y^{15}}}=\frac{2a^2b}{3xy^3}.$$

Но в большинстве случаев показатели буквенных количеств не делятся на показателя корня и извлечь корни оказывается невозможным. В таком случае знак корня оставляется при алгебраическом выражении для обозначения действия извлечения корня, подобно тому, как при сложении двух буквенных выражений, например a и b, между ними ставится знак плюс: $a+b$, хотя выполнить до конца данное действие мы не можем. Подобного рода выражения, содержащие знак корня, называются иррациональными, а не содержащие его — рациональными. Учащиеся должны приобрести навык в преобразовании иррациональных выражений, подобно тому, как ранее они должны были усвоить технику тождественных преобразований рациональных выражений.

Простейшими из таких преобразований являются выведение множителей из-под знака корня и подведение их под знак корня.

Оба эти преобразования основываются на тождестве:

$$\sqrt[n]{a^nb}=a\sqrt[n]{b}, \tag{I}$$

которое может быть проверено возведением обеих частей написанного равенства в n-ю степень; получим:

$$\left(\sqrt[n]{a^nb}\right)^n=a^nb \quad \text{и} \quad \left(a\sqrt[n]{b}\right)^n=a^n\left(\sqrt[n]{b}\right)^n=a^nb.$$

Так как здесь корни имеются в виду арифметические, т. е. имеющие только одно положительное значение, то, получив от возведения их в одну и ту же n-ю степень равные положительные числа, мы заключаем, что и числа, которые возводились в степень, были равны, т. е. тождество (I) справедливо. Читая его слева направо, мы имеем правило для выведения множителей из-под знака радикала, а читая справа налево, — правило для подведения множителей под знак корня; например:

1) $\sqrt[3]{32a^{11}b^6}=\sqrt[3]{(2^3\cdot a^9\cdot b^6)\,2^2a^2}=2a^3b^2\sqrt[3]{4a^2}$,

2) $5xy^2\sqrt{4xy}=\sqrt{4xy\cdot 25x^2y^4}=\sqrt{100x^3y^5}$.

Оба эти действия имеют большое применение для приведения иррациональных выражений к более простому виду. Так, выведение множителей из-под знака радикала прямо придает подкоренному количеству более простой вид. Подведение множителей под знак радикала тоже может способствовать упрощению иррационального выражения, в особенности, когда он содержит дроби; например:

$$4a\sqrt{\frac{3}{2}\,a^3b}=\sqrt{16a^2\cdot\frac{3}{2}\,a^3b}=\sqrt{24a^5b}.$$

С помощью того же преобразования можно сравнивать числовую величину двух иррациональных числовых выражений; например, чтобы определить, какое из чисел $2\sqrt{5}$ или $3\sqrt{2}$ более, подводим множители, стоящие перед корнем, под радикал и получаем:

$$2\sqrt{5}=\sqrt{20};\quad 3\sqrt{2}=\sqrt{18},$$

т. е. первое иррациональное число более второго.

Наконец, подведение множителей под корень необходимо при вычислении квадратных корней из чисел с данною точностью, если при корне имеется множитель, т. е. выражений вида $a\sqrt{b}$. Действительно, если подобное выражение надо найти с точностью до $\frac{1}{n}$ и мы извлекли бы с такою точностью корень из b, а результат умножили бы на a, то погрешность была бы равна $\frac{a}{n}$, т. е. точность была бы менее требуемой. Поэтому следует данное выражение предварительно превратить в тождественное ему $\sqrt{a^2b}$ и извлечь из него корень с точностью до $\frac{1}{n}$. Например, желая вычислить $3\sqrt{2}$ с точностью до 0,01, подводим 3 под корень; получим:

$$3\sqrt{2}=\sqrt{18}=4{,}24.$$

Более глубокие преобразования иррациональных выражений основываются на том их свойстве, что величина иррационального выражения не изменится, если показателя корня и показателя степени подкоренного количества одновременно умножить или разделить на одно и то же число, т. е.

$$\sqrt[m]{a^n}=\sqrt[mp]{a^{np}}.$$

Это свойство, подобно предшествующим, тоже может быть доказано проверкою, именно — возведением обеих частей написанного равенства в mp-ю степень. Действительно, в правой части получим:

$$\left(\sqrt[mp]{a^{np}}\right)^{mp}=a^{np}.$$

В левой же части мы произведем возведение в степень mp в два приема: сначала в степень m, а потом в степень p. Будем иметь:

$$\left(\sqrt[m]{a^n}\right)^m=a^n;\quad (a^n)^p=a^{np}.$$

Таким образом, доказываемое правило верно. На нем основываются действия сокращения иррациональных выражений и приведение их к общему показателю корня, представляющие аналогию с сокращением дробей и приведением их к общему знаменателю в арифметике; например:

$$\sqrt[4]{9a^6b^2}=\sqrt{3a^3b};\quad \sqrt[6]{8a^3b^6}=\sqrt{2ab^2}=b\sqrt{2a}.$$

При приведении иррациональных выражений к общему показателю корня удобнее всего брать этот общий показатель как наименьшее кратное всех показателей, а потому здесь могут представиться три случая, аналогичные тем, которые рассматриваются в арифметике при нахождении общего наименьшего кратного нескольких чисел. Так, приводя к общему наименьшему кратному корни $\sqrt{2a}$, $\sqrt[3]{a^2}$, $\sqrt[4]{3a^3}$, получим:

$$\sqrt[12]{2^6a^6};\quad \sqrt[12]{a^8};\quad \sqrt[12]{3^3a^9} \quad \text{или} \quad \sqrt[12]{64a^6};\quad \sqrt[12]{a^8};\quad \sqrt[12]{27a^9}.$$

Если же даны корни:

$$\sqrt[6]{2x^3};\quad \sqrt{xy};\quad \sqrt[3]{x^2y^2},$$

найдем:

$$\sqrt[6]{2x^3};\quad \sqrt[6]{x^3y^3};\quad \sqrt[6]{x^4y^4}$$

и т. п.

Полезно применить приведение иррациональных выражений к общему показателю для сравнения величины корней из чисел: например, сравнивая $\sqrt{3}$ и $\sqrt[3]{5}$, имеем:

$$\sqrt{3}=\sqrt[6]{3^3}=\sqrt[6]{27};\quad \sqrt[3]{5}=\sqrt[6]{25},$$

итак,

$$\sqrt{3}>\sqrt[3]{5}.$$

§ 50. Основные действия над иррациональными выражениями.

Изучение действий над иррациональными выражениями может вестись по тому же плану, как и над рациональными одночленами и многочленами. Так, прежде всего следует установить понятие о подобных радикалах, т. е. о таких иррациональных выражениях, в которых корни имеют одинаковые показатели и извлекаются из одинаковых количеств. так что они отличаются только коэфициентами; например,

$$3\sqrt{ab},\ -\frac{2}{5}\sqrt{ab},\quad 4{,}5\sqrt{ab}.$$

При этом приходится расширить понятие о коэфициенте и считать коэфициентом не только числовой, но и буквенный множитель при иррациональном выражении; например,

$$2a\sqrt[3]{3x^2y} \quad \text{и} \quad -5b\sqrt[3]{3x^2y},$$

имеющие коэфициентами $2a$ и $-5b$, будут подобными иррациональными выражениями. *При этом следует обратить внимание на то, что часто* выражения, которые сначала кажутся различными, могут после некоторых преобразований оказаться подобными; например, радикалы

1) $4\sqrt{5x^7}$; 2) $\sqrt{80x^9}$; 3) $\sqrt[6]{125x^9}$,

имеющие различный вид, оказываются подобными после сокращения и вынесения из подкоренных выражений множителей за знак корня, именно:

1) $4x^3\sqrt{5x}$; 2) $4x^4\sqrt{5x}$; 3) $\sqrt[6]{5^3(x^3)^3}=\sqrt{5x^3}=x\sqrt{x5}$.

Точно так же радикалы

1) $\sqrt[3]{\frac{5}{9}y}$; 2) $\sqrt[3]{15y^4}$; 3) $\sqrt[6]{\frac{9y^2}{625}}$

подобны, ибо могут быть преобразованиями приведены к виду:

1) $\frac{1}{3}\sqrt[3]{15y}$; 2) $y\sqrt[3]{15y}$; 3) $\sqrt[3]{\frac{3y}{25}}=\sqrt[3]{\frac{3y\cdot 5}{25\cdot 5}}=\frac{1}{5}\sqrt[3]{15y}$.

Над подобными иррациональными выражениями может быть произведено приведение, аналогично приведению подобных алгебраических одночленов; например:

$$2\sqrt{3b}-5\sqrt{3b}+0{,}2\sqrt{3b}=-2{,}8\sqrt{3b};$$

$$4x\sqrt{5y}-2\sqrt{5y}+7\sqrt{5y}-x\sqrt{5y}=3x\sqrt{5y}+5\sqrt{5y}=$$
$$=(3x+5)\sqrt{5y}.$$

Точно так же действия: сложение и вычитание иррациональных выражений производятся по тем же правилам, как и над рациональными, причем предварительно следует все выражения возможно более упростить; например:

$$1)\ \sqrt{150}+\sqrt{\frac{2}{3}}-4\sqrt[6]{216}+\sqrt{6}=$$
$$=5\sqrt{6}+\frac{1}{3}\sqrt{6}-4\sqrt{6}+\sqrt{6}=2\frac{1}{3}\sqrt{6};$$

$$2)\ \left(\frac{2}{3}a\sqrt{a}+6a\sqrt{\frac{a}{4}}\right)-\left(3\sqrt{a^3}-2\sqrt{a^7}+a^3\sqrt{4a}\right)=$$
$$=\frac{2}{3}a\sqrt{a}+3a\sqrt{a}-3a\sqrt{a}+2a^3\sqrt{a}-2a^3\sqrt{a}=\frac{2}{3}a\sqrt{a}.$$

Переходя к умножению, припоминаем, что корень из произведения нескольких чисел равен произведению корней из сомножителей:

$$\sqrt[n]{abc}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\cdot\sqrt[n]{c}.$$

Читая это равенство справа налево, выводим правило, что *для умножения иррациональных выражений с одинаковым показателем корня должно перемножить подкоренные величины и из произведения извлечь корень той же степени.* Конечно, если перед радикалами будут коэфициенты, то их надо перемножить; например:

$$\sqrt{\frac{2a^2x^3}{5by^3}}\cdot\sqrt{\frac{30ax}{b^2y}}=\sqrt{\frac{60a^3x^4}{5b^3y^6}}=\sqrt{12\cdot\frac{a^3x^4}{b^3y^6}}=\frac{2ax^2}{b^2y^3}\sqrt{3ab}.$$

Если перемножаемые иррациональные количества имеют различные показатели корней, то их предварительно приводят к одному показателю; например:

$$1)\ \sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[4]{a^3}=\sqrt[12]{a^6}\cdot\sqrt[12]{a^8}\cdot\sqrt[12]{a^9}=\sqrt[12]{a^{23}}=a\sqrt[12]{a^{11}};$$

$$2)\ 2\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{4}=2\sqrt[8]{2^4}\cdot\sqrt[8]{2^2}\cdot\sqrt[8]{2^2}=2\sqrt[8]{2^8}=4.$$

Подобно умножению, деление иррациональных выражений основывается на правиле извлечения корня из дроби, т. е. на формуле:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

Читая это равенство справа налево, заключаем, что *при делении иррациональных выражений с одинаковым показателем надо разделить подкоренные количества и из частного извлечь корень той же степени;* например:

$$1)\ \sqrt{32}:\sqrt{18}=\sqrt{\frac{32}{18}}=\sqrt{\frac{16}{9}}=\frac{4}{3};$$

2) $(\sqrt{72}+\sqrt{32}-4):2\sqrt{2}=3+2-\sqrt{2}=5-\sqrt{2}.$

Если надо разделить корни с различными показателями степени, то их предварительно приводят к общему показателю; например:

1) $2\sqrt[3]{a^2}:\sqrt[4]{a}=2\sqrt[12]{2^8}:\sqrt[12]{a^3}=2\sqrt[12]{a^5}.$

Возведение иррациональных выражений в степень является частным случаем умножения:

$$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{a}\cdot\ldots\sqrt[n]{a}\quad (m \text{ раз}),$$

т. е.:

$$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}=\sqrt[n]{a^m},$$

т. е. для возведения иррационального выражения в степень надо возвести в нее подрадикальное количество, оставив корень с прежним показателем; например:

1) $\left(\sqrt[5]{\frac{2}{3}}\right)^6=\sqrt[5]{\left(\frac{2}{3}\right)^6}=\frac{2}{3}\sqrt[5]{\frac{2}{3}};$

2) $(1-\sqrt{3})^3=1-3\sqrt{3}+9-3\sqrt{3}=10-6\sqrt{3}.$

Наконец, чтобы вывести правило для извлечения корня из иррационального количества, положим:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=x;$$

возведя обе части этого равенства в степень m, будем иметь:

$$\sqrt[n]{a}=x^m,$$

а возведя еще раз в степень n, найдем:

$$a=x^{mn},$$

следовательно, чтобы найти x, надо из a извлечь корень mn-й степени, получим $x=\sqrt[mn]{a}$; т. е. чтобы извлечь корень из корня, надо показателей корней перемножить, а подкоренное количество оставить без изменения; например:

$$\sqrt{\sqrt[5]{4a^4b^2}}=\sqrt[10]{4a^4b^2}=\sqrt[5]{2a^2b}.$$

Из этого правила следует, что извлечение корня, показатель которого — составное число, может быть заменено последовательным извлечением нескольких корней, показатели которых равны множителям этого числа; например:

$$\sqrt[6]{15\ 625}=\sqrt[3]{\sqrt{15\ 625}}=\sqrt[3]{125}=5.$$

Точно так же на основании свойства переместительности умножения можно заключать, что при последовательном извлечении из какого-либо числа нескольких корней различных степеней порядок извлечения роли не играет и может быть изменен. Так:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}}}=\sqrt[m]{\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}}}=\sqrt[p]{\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}}=\sqrt[mnp]{a}.$$

Важным применением тождественных преобразований иррациональных выражений является освобождение дробей от иррациональности в знаменателе. Такое преобразование, действительно, придает дроби более простой вид, а в случае числового знаменателя делает более простым приближенное вычисление ее значения. Достигается такое преобразование умножением числителя и знаменателя дроби на одно и то же иррациональное выражение, делающее знаменателя рациональным. Заметим, что мы здесь принимаем без доказательства, что величина дроби не изменяется от умножения числителя и знаменателя ее на одно и то же иррациональное число; это положение является следствием условия введения иррациональных чисел, согласно которому они обладают всеми свойствами рациональных чисел. Так, для вычисления приближенного значения дроби $\frac{2}{\sqrt{5}}$ пришлось бы найти приближенное значение знаменателя и делить на него 2, что было бы сложно и неудобно в отношении определения степени точности. Умножая же числитель и знаменатель той же дроби на $\sqrt{5}$, получим $\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}=0{,}4\sqrt{5}$ — выражение, более удобное для вычисления.

Вообще, чтобы освободить от иррациональности в знаменателе дробь $\frac{a}{\sqrt[m]{b}}$, умножаем ее числителя и знаменателя на дополнительный множитель $\sqrt[m]{b^{m-1}}$ и получим:

$$\frac{a}{\sqrt[m]{b}}=\frac{a\sqrt[m]{b^{m-1}}}{b}.$$

В частных случаях могут быть сделаны упрощения; например:

$$\frac{5}{\sqrt[4]{8}}=a\frac{5\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{16}}=\frac{5\sqrt[4]{2}}{2}=2{,}5\sqrt[4]{2}.$$

Если знаменатель двучленный, то дополнительный множитель для освобождения от иррациональности в знаменателе выбирают так, чтобы получилась сумма или разность одинаковых степеней двух количеств, т. е. применяются формулы деления двучленов вида $(x^m \pm a^m)$ на $(x \pm a)$.

В частности, если в знаменателе стоит двучлен с квадратными радикалами, то числителя и знаменателя умножают на сопряженное выражение; например:

$$1)\quad \frac{a}{m\sqrt{b}+n\sqrt{c}}=\frac{a(m\sqrt{b}-n\sqrt{c})}{(m\sqrt{b}+n\sqrt{c})\,(m\sqrt{b}-n\sqrt{c})}=\frac{a(m\sqrt{b}-n\sqrt{c})}{m^2b-n^2c};$$

$$2)\quad \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}{3-2}=3+2\sqrt{6}+2=5+2\sqrt{6}.$$

Если в знаменателе квадратных радикалов несколько, то предыдущий прием прилагается несколько раз:

$$\frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\frac{2[(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}]}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2}=\frac{2(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})}{2+2\sqrt{6}+3-5}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{6}}=\frac{1}{6}(\sqrt{12}+\sqrt{18}-\sqrt{30})=\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{30}}{6}.$$

Для освобождения от иррациональности дроби $\frac{a}{\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}$ пользуемся формулой разложения на множители суммы кубов двух чисел:

$$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2);$$

будем иметь:

$$\frac{a}{\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}=\frac{a(\sqrt[3]{b^2}-\sqrt[3]{bc}+\sqrt[3]{c^2})}{b+c}.$$

Заметим, что в дальнейших частях курса алгебры и в анализе иногда приходится освобождать дроби от иррациональности в числителе; например, найти предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2-\sqrt{4-x}}{x}.$$

Эта дробь при $x=0$ имеет неопределенное значение, но, освобождая ее от иррациональности в числителе, получим:

$$\frac{(2-\sqrt{4-x})(2+\sqrt{4-x})}{x(2+\sqrt{4-x})}=\frac{4-4+x}{x(2+\sqrt{4-x})}=\frac{1}{2+\sqrt{4-x}};$$

откуда видно, что при $x\to 0$ величина дроби стремится к $\frac{1}{4}$.

Рассмотрим еще способ преобразования двойных радикалов вида $\sqrt{a\pm\sqrt{b}}$. Обычно для вывода соответствующих формул предлагается сложный способ, основанный на решении двух уравнений с двумя неизвестными. Предлагаем поэтому следующий более простой вывод: с помощью возведения в квадрат находим тождества (полагаем $a>0$; $a^2>b$):

$$\left(\sqrt{a+\sqrt{b}}+\sqrt{a-\sqrt{b}}\right)^2=2\left(a+2\sqrt{a^2-b}\right);$$
$$\left(\sqrt{a+\sqrt{b}}-\sqrt{a-\sqrt{b}}\right)^2=2\left(a-2\sqrt{a^2-b}\right);$$

отсюда:

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}+\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{2(a+\sqrt{a^2-b})};$$
$$\sqrt{a+\sqrt{b}}-\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{2(a-\sqrt{a^2-b})}.$$

Складывая и вычитая эти равенства почленно, найдем:

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}};$$
$$\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}-\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

Если a^2-b окажется точным квадратом, то двойной радикал представится с помощью двух простых:

$$\sqrt{3+\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{3+\sqrt{9-5}}{2}}+\sqrt{\frac{3-\sqrt{9-5}}{2}}=\sqrt{\frac{5}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}.$$

§ 51. Иррациональные числа.

Методологические замечания. В программе средней школы по математике в 8-м классе понятие об иррациональных числах связано с понятием об извлечении квадратного корня из неточного квадрата, в связи с теоремою, что если корень из целого числа не может быть выражен целым числом, то он не может быть выражен и дробью. Но уже и ранее упоминание об иррациональном числе встречается в программе 8-го класса — тоже в связи с извлечением квадратного корня. Кроме того в программе 8-го класса упоминается о месте иррационального числа на числовой оси и смысле действий над иррациональными числами. Таким образом, этому понятию, имеющему первостепенную важность в научном и общеобразовательном отношении, отведено чрезвычайно мало места и притом без надлежащей последовательности изложения. Несомненно, что введение учения об иррациональных числах и действиях над ними в курсе средней школы в полном его объеме и развитии невозможно; однако очень многие элементы этого учения могут и должны быть включены в курс алгебры, так как они имеют ценное образовательное и практическое значение при обучении математике.

Ввиду этого приобретает важное значение знакомство преподавателя с историей возникновения и развития понятия об иррациональном числе и о современных его теориях. Краткие исторические сведения об иррациональных числах были приведены выше, в очерке развития понятия о числе. Из него видно, что эти числа были замечены уже греческими учеными при определении несоизмеримых отрезков, в частности диагонали квадрата со стороною 1. Выразить эту диагональ, равную $\sqrt{2}$, целыми или дробными числами оказалось невозможным; поэтому явилась необходимость либо расширить числовую область, определив новый вид чисел так, чтобы с его помощью можно было выразить числом уже всякий отрезок, либо отказаться от измерения отрезков и других геометрических величин числами. В высшей степени замечательно, что греки избрали именно этот последний путь, и Эвклид создал свою знаменитую геометрическую теорию отношений и несоизмеримых чисел в V и X книгах своих „Начал“, причем он трактует эти числа как результат построения их из других отрезков с помощью циркуля и линейки. Но реальная действительность неизбежно требовала иного решения этого вопроса, именно: арифметизации, введения чисел для выражения результатов всякого измерения. Поэтому, хотя и без достаточного научного обоснования, их стали вводить в вычисления, в виде приближенных их значений, сперва индусские и арабские математики, а затем средневековые математики и, наконец, величайшие ученые нового времени — Декарт, Ньютон, Лейбниц и др., положившие начало прочному употреблению их в науке.

Однако полная и строгая теория этих чисел была дана лишь в самое недавнее время — во второй половине XIX в. — сразу несколькими крупнейшими учеными: Дедекиндом, Кантором, Вейерштрассом и др. Эти ученые предложили различные способы рассматривать иррациональные числа как пределы бесконечных рядов, составленных из рациональных чисел, причем устанавливается связь между теми и другими и указывается возможность распространить на иррациональные числа все действия, которые производятся над рациональными числами. Из этих теорий наибольшей простотой и отчетливостью отличается теория Дедекинда, который определил иррациональное число как общую границу двух рядов чисел.

Эта теория нашла большее распространение в русской математической литературе: так, имеется перевод посвященного изложению этой теории сочинения самого Дедекинда: Р. Дедекинд, Непрерывность и иррациональные числа. Одесса, 1923. Кроме того эта теория излагается в книге проф. Л. К. Лахтина Энциклопедия математики, ч. I, введение в анализ, 1924; С. П. Виноградова, Повторительный курс алгебры, и во многих других книгах: Вебер и Вельштейн, Энциклопедия элементарной математики, 1909, а также в более пространных учебниках алгебры, например Г. Бархов, Руководство алгебры, 1915.

Согласно другому взгляду, основанному на идеях Г. Кантора, иррациональное число можно рассматривать как бесконечную непериодическую десятичную дробь. Изложение теории иррациональных чисел и действий над ними с этой точки зрения можно найти в сочинениях: М. Пирожков, Арифметика иррациональных чисел, 1898; проф. Д. Селиванов, Бесконечные десятичные дроби и иррациональные числа, 190?; А. Киселев, Иррациональные числа, рассматриваемые как бесконечные непериодические десятичные дроби, 1923, а также в „Учебнике алгебры" проф. Д. Граве. 1915.

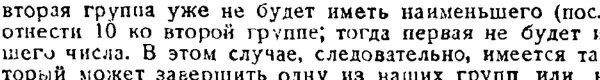
Необходимо, чтобы преподаватель был знаком с обоими названными способами изложения теории иррациональных чисел, в особенности же с теорией Дедекинда, которая нашла некоторое отражение в программе алгебры средней школы, а также в стабильном учебнике А. Киселева, ч. II.

Сущность этой теории, которую Дедекинд ставит в связь с идеей непрерывности, вкратце состоит в следующем: ряд рациональных чисел различными способами может быть разделен на две группы так, что каждое число одной группы будет больше любого числа из второй группы. Так, мы можем отнести к одной группе все рациональные числа меньше 10, а к другой все числа больше 10; тогда каждое число второй группы будет больше каждого числа первой группы. Такое разделение ряда рациональных групп чисел на две группы Дедекинд назвал **сечением**. Само число 10 может быть отнесено к первой группе; тогда вторая группа уже не будет иметь наименьшего (последнего) числа. Но можно отнести 10 ко второй группе; тогда первая не будет иметь последнего наибольшего числа. В этом случае, следовательно, имеется такой элемент, число 10, который может завершить одну из наших групп или начать другую. Число 10 как бы производит подобное разделение, или рассечение, чисел на две группы; для краткости само это число, замыкающее одну группу и начинающее другую, называется „сечением".

Однако существуют сечения другого рода, в которых такого замыкающего числа, как 10 в предыдущем примере, не имеется. Так, можно разделить все рациональные числа на две группы таким образом, что к первой будут отнесены все числа, квадраты которых менее 2, а ко второй — все числа, квадраты которых больше двух. Тогда ни первая, ни вторая группа не будут иметь замыкающего числа: первая группа не будет иметь наибольшего числа, а вторая — наименьшего. Действительно, произведя приближенное вычисление $\sqrt{2}$ с любою степенью точности, мы получим два ряда чисел, из которых один будет содержать все числа, квадраты которых менее 2, а другой — квадраты которых больше 2; например:

1-я группа: 1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142...;
2-я группа: 2; 1,5; 1,4 ; 1,415; 1,4143....

Таким образом, ряд рациональных чисел имеет в данном случае, по сравнению с предыдущим примером, пробел: мы не имеем рационального числа, производящего рассечение двух групп наших чисел. Замечая, однако, что разности между числами первой и второй групп все уменьшаются (они равны 1; 0,1; 0,01 и т. д.), представляется совершенно естественным ввести новое число, которое мы будем считать производящим сечение в ряду взятых рациональных чисел, подобно тому, как в предыдущем случае мы взяли для той же цели число 10. Это новое число, $\sqrt{2}$, будет иррациональным числом.



Черт. 6.

Эти рассуждения легко пояснить на чертеже. Взяв прямую линию OX (черт. 6) и отложив от начала O в определенном масштабе отрезки, изображающие числа первой группы:

$$OA_1 = 1; \quad OA_2 = 1{,}4; \quad OA_3 = 1{,}41; \quad OA_4; \quad OA_5...$$

и числа второй группы:

$$OB_1 = 2; \quad OB_2 = 1{,}5; \quad OB_3 = 1{,}42; \quad OB_4; \quad OB_5...$$

Разности между соответствующими числами обоих рядов

$$OB_1 - OA_1; \quad OB_2 - OA_2; \quad OB_3 - OA_3...$$

все время уменьшаются и могут быть сделаны менее всякого произвольного числа, хотя и остаются всегда положительными.

При таких условиях естественно предположить существование некоторого предельного отрезка OC, большего каждого из отрезков первой группы и меньшего каждого из отрезков второй группы, графически представляющего $\sqrt{2}$.

Таким образом, введение понятия об иррациональном числе получает полную общность и определенность, но оно оказывается сложнее определения, например, отрицательного или дробного числа: в то время как для этих чисел требуется введение пары чисел, для определения иррационального числа нужно два бесконечных ряда чисел.

Установив понятие об иррациональных числах, мы должны, как и в других случаях введения новых чисел, установить критерии для сравнения их по величине. Равными называются иррациональные числа, которые определяются одинаковыми рядами рациональных чисел, т. е. одинаковым распределением их по двум группам. Но если в числах первой группы совокупности чисел выражающей первое рациональное число, найдется какое-нибудь число, большее одного из чисел из второй группы совокупности чисел, выражающей второе иррациональное число, то первое иррациональное число мы будем считать более второго. Например, определяя число $\sqrt{3}$, мы имеем два ряда чисел:

1-я группа: 1; 1,7; 1,73; 1,732; 1,7320...;
2-я группа: 2; 1,8; 1,74; 1,733; 1,7321...;

здесь в первом ряду, начиная с числа 1,7, имеются числа, большие соответственных чисел 1,5 и пр. второй группы чисел, выражающих $\sqrt{2}$, а потому $\sqrt{3}>\sqrt{2}$. Аналогично можно выразить признак того, что одно иррациональное число менее другого, а также сравнивать иррациональные числа по величине с рациональными.

Суммою двух иррациональных чисел, например ($\sqrt{2}+\sqrt{3}$), называется число, которое определяется рядом чисел, получаемых от сложения попарно соответствующих чисел первой группы и второй группы каждого из слагаемых; так как $\sqrt{2}$ определяется рядами:

1-я группа: 1; 1,4; 1,41; 1,414...;
2-я группа: 2; 1,5; 1,4 ; 1,415...;

а $\sqrt{3}$ — рядами:

1-я группа: 1; 1,7; 1,73; 1,732...;
2-я группа: 2; 1,8; 1,74; 1,733...;

то сумма $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ определяется рядами:

1-я группа: $1+1$; $1,4+1,7$; $1,41+1,73$; $1,414+1,732$...;
2-я группа: $2+2$; $1,5+1,8$; $1,42+1,74$; $1,415+1,733$...

Аналогично определяется произведение двух иррациональных чисел. При этом оказывается возможным доказать, что основные законы, установленные для действий сложения и умножения рациональных чисел, сохраняют свою силу и для иррациональных, определенных вышеуказанным образом с помощью сечений; например, из предыдущего прямо видно, что

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{3}+\sqrt{2}.$$

Полезно при этом сравнить действия над иррациональными числами с действиями над рациональными, представляемыми тоже с помощью сечений. В результате получается заключение, что вновь вводимые числа заключают в себе ранее изученные рациональные числа как частный случай и подчиняются тем же основным законам действий над ними. Вместе с тем, устанавливается важное свойство числовой прямой: все ее точки можно рассматривать как выражение чисел, одни точки при этом соответствуют ранее изученным рациональным числам, другие — иррациональным.

§ 52. Методика преподавания иррациональных чисел.

Как было уже замечено, учение об иррациональных числах в его систематическом изложении, например в вышеприведенной форме теории Дедекинда, не может преподаваться в средней школе. Однако понятие о них непременно должно быть дано, но вместо формального подхода к их определению и изучению должен быть выбран, как и в других подобных случаях, конкретный и реальный путь. Таким методом является геометрический метод.

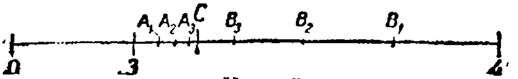
Касаться понятия об иррациональных числах до изучения действия извлечения квадратного корня из чисел не представляется надобности. В этом же последнем случае следует сначала пройти извлечение квадратного корня из точных квадратов, а потом определение и способы извлечения квадратного корня с данным приближением. После этого учащимся может быть предложена задача следующего содержания:

„В строящемся санатории устраиваются для больных квадратные комнаты площадью в 10 *м*² каждая. Каковы должны быть длина и ширина комнаты?"

Так как длина и ширина комнаты должны быть равны, то 10 надо разложить на два равных множителя, но этого сделать нельзя. Необходимо извлечь квадратный корень; но из предыдущего учащимся известно, что $\sqrt{10}$ не может быть выражен точно ни целым числом, ни дробью. Поэтому обращаемся к приближенному извлечению корня. Учащиеся уже знают, что приближенное извлечение корня всегда имеет два ответа: с недостатком и с избытком. Извлекая корень с точностью до 0,1; 0,01; 0,001..., будем иметь:

$$\left.\begin{matrix} 3 \\ 3{,}1 \\ 3{,}16 \\ 3{,}162 \end{matrix}\right\} < \sqrt{10} < \left\{\begin{matrix} 4 \\ 3{,}2 \\ 3{,}17 \\ 3{,}163 \end{matrix}\right.$$

Разность между приближенными значениями, взятыми для выражения корня, все уменьшается: сперва она равна 1, потом 0,1; затем 0,01; 0,001 и т. д., вообще она может быть сделана как угодно малой. Это нас наводит на мысль, что мы, беря приближенные значения корня с недостатком и с избытком, все с большею степенью точности подходим к какой-то общей границе, к некоторому определенному числу, которое хотя и не может быть выражено определенно, но, несомненно, существует. Это число и есть иррациональное число $\sqrt{10}$. Разумеется, для поставленной практической задачи достаточно взять его приближенное значение с небольшой точностью, например 3,16 или 3,17 *м*, т. е. сторона комнаты может быть 316 или 317 *см*. Мы можем представить себе существование этого числа более наглядно, если будем откладывать приближенные значения его на числовой прямой. Так (черт. 7), откладывая от начальной точки O отрезки OA_1; OA_2; OA_3..., выражающие $\sqrt{10}$ с недостатком, и отрезки OB_1; OB_2; OB_3 — с избытком, мы видим, что точки A_1, A_2, A_3... и точки B_1, B_2, B_3... все сближаются и расстояние между ними может быть сделано как угодно мало.



Черт. 7.

Это показывает, что на линии существует точка C, положение которой мы точно определить указанным способом не можем, но к которой все время приближаемся с двух сторон. Однако возможно найти положение той же точки и совершенно точно другим путем, именно — при помощи геометрии. Как раз в курсе геометрии 7-го класса проходится теорема Пифагора и применение ее к построению алгебраических выражений видов $\sqrt{a^2+b^2}$ и $\sqrt{ab}$. Применяя первый способ, мы можем представить $\sqrt{10}$ как $\sqrt{3^2+1^2}$, т. е. как гипотенузу прямоугольного треугольника с катетами 3 и 1, а по второму можно положить $\sqrt{10}=$ $=\sqrt{2\cdot 5}$ и строить этот корень как среднее пропорциональное между отрезками 2 и 5. Тем или иным способом мы найдем с помощью построения точную длину отрезка $OC=\sqrt{10}$.

Таким образом, учащиеся наглядно убеждаются в существовании иррационального числа и в способе его представления как общей границы двух рядов рациональных чисел, выражающих это число с недостатком и с избытком, причем разность между каждыми двумя соответственными приближенными значениями может быть сделана как угодно малой. В связи с этим полезно указать учащимся способы построения квадратных корней из любого целого и дробного числа с помощью циркуля и линейки. Так, по теореме Пифагора для построения корня из любого неточного квадрата нужно не более двух построений; действительно, корень из нечетного числа вида $2n-1$ может быть выражен по формуле: $\sqrt{2n-1}=\sqrt{n^2-(n-1)^2}$, например $\sqrt{21}=\sqrt{11^2-10^2}$, а корень из нечетного числа получается из предыдущего прибавлением 1, например $\sqrt{22}=\sqrt{(\sqrt{21})^2+1^2}$. С помощью же построения средней пропорциональной любой корень может быть получен одним приемом. Корень из дробного числа может быть предварительно преобразован освобождением знаменателя дроби от иррационального, например $\sqrt{\frac{7}{3}}=\sqrt{\frac{7\cdot 3}{3^2}}=\frac{\sqrt{21}}{3}$, после этого строим $\sqrt{21}$ и делим его на 3.

Для построения корней 4-й, 8-й и т. д. степеней, применяем двукратное или многократное построение средней пропорциональной, например $\sqrt[4]{21}=\sqrt{\sqrt{21}}=\sqrt{1\cdot\sqrt{21}}$ и т. п. Таким образом, у учащихся понятие об иррациональном числе будет соединяться с представлением о некотором отрезке. Далее можно показать, что иррациональные числа могут быть встречены не только при нахождении квадратных корней, но вообще при извлечении корней из неточных степеней. Для примера можно привести знаменитую в истории математики делийскую задачу об удвоении куба. Она приводится к вычислению $\sqrt[3]{2}$. Приближенные значения этого корня можно найти, производя его извлечение или найдя их в таблицах; подобно предыдущему, можно составить два ряда чисел, выражающих его с недостатком или с избытком с точностью до 1; 0,1; 0,01; 0,001 и т. д., получим:

$$\left.\begin{matrix}1\\1{,}2\\1{,}25\\1{,}259\end{matrix}\right\}<\sqrt[3]{2}<\left\{\begin{matrix}2\\1{,}3\\1{,}26\\1{,}260\end{matrix}\right.$$

Подобно предыдущему, видим, что $\sqrt[3]{2}$ является общей границей двух рядов чисел, разность между соответственными числами которых может быть сделана как угодно малой, а потому он существует, хотя и не может быть выражен определенным рациональным числом. Можно к этому прибавить, что $\sqrt[3]{2}$ и всякий другой кубический и вообще корень из неточной степени *целого числа может быть построен геометрически*, но уже не при помощи циркуля и линейки, а гораздо более сложными приемами. Наконец, необходимо упомянуть, что существует множество иррациональных чисел, кроме квадратных и иных корней; таковы, например, логарифмы чисел; таково и известное в это время учащимся число π, выражающее отношение длины окружности к диаметру, которое тоже не может быть выражено точно ни целым, ни дробным числом.

Геометрическое представление иррациональных чисел позволяет легко установить понятие о равенстве между ними: два иррациональных числа равны, если равны выражаемые ими отрезки, что алгебраически может быть выражено определением: два иррациональных числа считаются равными, если равны их соответствующие приближенные значения, взятые по недостатку или по избытку с любою степенью точности. Если приближенное значение одного иррационального числа больше соответствующего приближенного значения другого числа, взятого с той же степенью точности, то первое число более второго, в противном случае — менее.

Точно так же с геометрической точки зрения становится совершенно ясным, что над иррациональными числами можно производить действия сложения и вычитания; так, можно составить сумму $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, сводящуюся к построению суммы двух отрезков. При этом очевидно, что сложение иррациональных чисел подчиняется законам переместительности, сочетательности и распределительности:

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{3}+\sqrt{2};$$
$$\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}=(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{5}=\sqrt{2}+(\sqrt{3}+\sqrt{5}).$$

Практически сложение иррациональных чисел сводится к сложению их приближенных значений, вычисленных по недостатку или по избытку, с любой но одинаковою степенью точности. В результате мы получим два ряда сумм, из которых один представляет приближенные значения $(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ по недостатку, а другой по избытку: разность между соответствующими значениями членов этих двух рядов может быть сделана как угодно малой; значит, сумма двух, *а также и нескольких иррациональных чисел* тоже является некоторым иррациональным числом. Этот результат может быть принят за определение сложения иррациональных чисел.

Подобным же образом могут встретиться задачи, требующие перемножения иррациональных чисел: такова, например, задача об определении площади прямоугольника со сторонами $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$. Так как подобный прямоугольник может быть построен, то его площадь и, значит, выражающее ее число произведение $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$ — существуют. Для практического вычисления искомого произведения придется взять соответствующие приближенные значения обоих корней, вычисленные с произвольной, но одинаковою степенью точности. В результате мы имеем опять два ряда чисел — произведений, составленных из произведений приближенных значений данных корней, выраженных с одинаковою степенью точности по недостатку и по избытку, причем разность между соответствующими произведениями двух рядов может быть сделана как угодно малой. Поэтому произведение иррациональных чисел — тоже иррациональное число. Прилагая к этому случаю общее правило, выведенное для умножения алгебраических выражений, найдем $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{6}$. Предыдущее получение произведения иррациональных чисел с помощью их приближенных значений может быть принято за определение произведения иррациональных чисел. Легко убедиться, что законы переместительности, сочетательности и распределительности справедливы и по отношению к иррациональным числам.

Наконец, реальные задачи могут привести к необходимости возведения иррационального числа в степень. Такова задача: найти объем куба, ребро которого равно $\sqrt{2}$. Так как такой куб может быть построен, то его объем и, следовательно, выражающее его число $(\sqrt{2})^3$ — существуют. Практически, вычисление этого выражения сведется к возведению в 3-ю степень приближенных значений $\sqrt{2}$, т. е. к их перемножению и, следовательно, по предыдущему, некоторому иррациональному числу. Прилагая здесь общее правило для возведения иррациональных чисел в степень, можем этому числу придать вид $\sqrt{2^3}$, или $\sqrt{8}$.

Вычитание, деление и извлечение корня определяются для иррациональных чисел, так же как и для рациональных, как обратные. Рассмотрение всех действий показывает, что в результате действий над иррациональными числами получаются вообще тоже иррациональные числа, но в частных случаях могут получиться рациональные числа, примеры чего были приведены в предыдущей главе и могут быть еще увеличены; например:

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}=6;\quad \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}=2;\quad \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}-2\sqrt{2}=3 \text{ и т. п.}$$

ГЛАВА XI.

ПОНЯТИЕ О ФУНКЦИИ.

§ 53. Методологические замечания.

Третьим основным понятием, изучаемым в алгебре, после понятий о числе и об уравнении, является, как было упомянуто в начале настоящего курса, понятие о функции. Это понятие является в настоящее время одним из центральных и основных в математической науке; около него группируются другие математические понятия; изучение различных функций повело к развитию самых различных математических методов. Понятие о функции в его основном виде и в частных формах служит могущественным средством для изучения природы и общественной жизни. Выяснение понятия о функции ведет к пониманию самых существенных сторон математики; овладеть методами исследования функциональной зависимости — значит овладеть одной из самых существенных частей математического метода. Отсюда ясна важность всестороннего знакомства с основными свойствами этого понятия для преподавателя математики. Эти свойства изучаются в анализе. Мы здесь вкратце остановимся на важнейших свойствах понятия о функции, имеющих связь с преподаванием тех элементов учения о функции, которые включены в программу средней школы.

Главнейшее значение понятия о функции и о функциональной зависимости в том, что оно вводит в изучение математики вместо статического динамический принцип; вместо рассмотрения постоянных величин вводится изучение величин изменяющихся, находящихся во взаимной связи. Этим понятие о функции наиболее отвечает основной задаче математики — изучать количественные связи, существующие в явлениях внешнего мира.

Поэтому понятие о функции всегда предполагает наличность некоторого процесса изменений. Всякий раз, когда мы имеем величину, значение которой зависит от значений других величин, мы имеем функцию, и изучение различных зависимостей есть не что иное, как изучение функций. Ввиду изложенного приобретает существенное значение определение, которое дается понятию о функции. Ему обычно предпосылается понятие о постоянных и переменных величинах: постоянными называются такие величины, которые в пределах данного исследования сохраняют одно и то же значение; переменными же — те, которые могут принимать при том же исследовании несколько значений — по крайней мере два. Какие из рассматриваемых величин постоянные и какие переменные, определяется существом данного вопроса, и величины, которые при одном исследовании были постоянными, при другом могут оказаться переменными. Так, при исследовании зависимости времени колебания маятника от его длины ускорение силы тяжести в данной точке земной поверхности будет величиною постоянной, а длина маятника и время его колебания — переменными; если же изучают изменения длины секундного маятника в различных точках земной поверхности, то время качания будет величиною постоянной, а длина его и ускорение силы тяжести — величинами переменными. Для переменной величины существенным является указание области ее изменения, т. е. какие она может принимать значения и в каком именно порядке. Так, могут быть величины, значения которых могут изменяться только в определенных пределах, например от -1 до $+1$, или только по целым числам и пр. Некоторые величины могут только увеличиваться, например возраст человека; другие — только уменьшаться, например расстояние падающего камня от земли. Особенно важно свойство некоторых величин изменяться непрерывно между данными пределами, т. е. принимать все числовые значения (как соизмеримые, так и несоизмеримые, лежащие между двумя данными числами).

Определение функции, которое установилось и принято в науке, обыкновенно выражается так: если две переменные величины x и y связаны между собою так, что каждому значению переменного x соответствует одно определенное значение переменного y, то x называется независимым переменным, или аргументом, а y — его функцией. Зависимость между x и y называется при этом функциональной зависимостью. Это определение было дано в 1829 г. Леженом—Дирихле. Если y есть функция x, то это обычно записывается в виде равенства $y=f(x)$, которое является уравнением, связывающим переменные x и y.

Примеров функциональной зависимости может быть приведено бесконечно много. Так, если x и y связаны между собою такой зависимостью, что x принимает всевозможные значения, большие нуля и меньшие 1 $(0<x<1)$, а y в то же время при всяком рациональном значении x становится равным 1, а при иррациональном — нулю, то y есть определенная функция x.

Согласно приведенному определению Дирихле мы, имея функцию $y=f(x)$, можем представить себе, независимо от того, можно ли это осуществить полностью на практике, что существует таблица вроде таблицы квадратов чисел или таблицы значений натуральных тригонометрических величин, в которой даны значения функций y для соответствующих значений x. Поэтому определение Дирихле носит название *табличного* определения функции. По этому определению вычисляются значения функции, соответствующие заданным значениям аргумента, и результаты вычисления располагаются в виде таблицы из двух столбцов, причем в одном записываются значения аргумента, а в другом — соответствующие им значения функции; например:

x	y
1	1
2	1,41
3	1,73
4	2
5	2,23

Определение Дирихле весьма важно в том отношении, что оно устанавливает идею соответствия между значениями независимого переменного и функции. В практическом отношении составленные таблицы часто позволяют сделать определенные заключения относительно характера изменений функции в связи с изменением независимого переменного. Так, рассматривая таблицу, дающую число простых чисел в каждом из первых шести миллионов чисел натурального ряда (см. таблицу), мы видим, что это число с каждым новым миллионом неизменно уменьшается, откуда является мысль, что ряд простых чисел где-нибудь оканчивается, и необходимость исследования этого вопроса, которое, как известно, показало, что ряд простых чисел бесконечен. Однако для вычисления значений функции табличное определение ее имеет и существенные неудобства, так как всегда страдает неполнотой и не дает возможности для всякого значения аргумента получить соответствующее значение функции, а также судить о степени точности представленных в таблице значений функции и пр. Эти неудобства были бы устранены, если бы мы имели возможность, независимо от таблицы, прямо вычислять функцию по данному ее аргументу. Это приводит к другому определению функции, именно к а н а л и т и ч е с к о м у ее определению: значения функции могут быть вычислены, если известно уравнение, связывающее независимое переменное с функцией. Это определение было предложено в 1748 г. Эйлером в его „Введении в анализ бесконечно малых“: „Функция переменного количества есть аналитическое выражение, составленное каким бы ни было образом из этого переменного количества и из чисел или постоянных количеств“. Таким образом, в то время как определение Дирихле, выдвигая на первый план соответствие между частными значениями независимого переменного и функции, совер-

Миллионы	Число простых чисел
1	78 499
2	70 433
3	67 885
4	66 329
5	65 369
6	64 336

шенно не касается вопроса о средствах, при помощи которых это соответствие осуществляется, т. е. при помощи каких формул мы по данному значению независимого переменного находим значение функции, определение Эйлера приводит вычисление функции к ряду определенных действий над аргументом. Поэтому оно иногда называется оперативным. Так, зная, что в вышеприведенной таблице значения независимого переменного и функции связаны между собою уравнением $y=\sqrt{x}$, мы можем продолжить самую таблицу неопределенно далеко; можем найти значение y для всякого значения x с любою степенью точности и т. д. Таким образом, аналитическое выражение функции имеет большое преимущество перед табличным, уступая ему, однако, в отношении наглядности. Но табличное определение оказывается незаменимым в тех случаях, когда связь между x и y нельзя выразить с помощью уравнения. Например, легко составить табличное выражение функции, которая обращается в 1 для всякого простого целого числа и в нуль для всякого составного; однако мы не умеем выразить эту функцию аналитически. В подобных случаях необходимо прибегать к составлению таблицы и из возможно большего числа членов. В частных случаях может оказаться как при табличном, так и при аналитическом выражении функции, что она имеет постоянное значение, например функция:

$$y=\frac{x+1}{x-1}+1+\frac{x-1}{x+1}-\frac{2(1+x)^2}{x^2-1}$$

при всяком значении x сохраняет постоянное значение, равное 1, в чем нетрудно убедиться, произведя сложение данных дробей. Отсюда является возможность рассматривать постоянное число как частный случай переменного. Заметим еще, что оперативное определение функции в более широком смысле включает в себя в числе вычислительных операций для получения значений функций как особое действие и переход к пределу, благодаря чему оно распространяется на функции, представленные бесконечными сходящимися рядами. С присоединением этого действия к шести основным алгебраическим действиям мы можем вычислить значение любой функции по ее аналитическому выражению с помощью уравнения для всякого значения аргумента.

Как было упомянуто в историческом очерке развития основных понятий алгебры, понятие о функции стало развиваться особенно с тех пор, когда для него было найдено наглядное представление с помощью введенного в науку Декартом метода координат. Действительно, с помощью, например, системы прямоугольных координат каждая пара чисел выражается определенной точкой на плоскости, а совокупность всех пар чисел, подчиненных некоторой функциональной зависимости — прямою или кривою линией. Такое представление функции обладает тем преимуществом, что оно позволяет наглядно представить полную картину изменения функции. Кривая, называемая графиком функции, прямо уже своим видом говорит нам о возрастании или убывании функции, о наибольших или наименьших достигаемых ею значениях и пр. С помощью графика мы можем получить и значение функции для любого значения аргумента, отложив его на оси абсцисс от начала координат и восставив из полученной точки перпендикуляр до пересечения его с кривой, причем длина перпендикуляра и будет выражать искомое значение функции. В частности, те точки на оси абсцисс, в которых график пересекается с этой осью, выражают нулевые значения функции, т. е. если функция дана уравнением $y=f(x)$, то упомянутые точки дают значения корней уравнения $f(x)=0$. Таким образом, выражение функции при помощи чертежа позволяет наглядно уяснять ее свойства и графическим путем находить ее частные значения. Следует отметить, однако, что эти определения вообще не могут быть произведены с надлежащей степенью точности, так что в этом отношении графический способ уступает аналитическому методу выражения функции.

Указанные три способа представления функций являются основными для изучения понятия о функции как в науке, так и в школе.

Более подробное рассмотрение вопроса можно найти в докладах проф С. Н. Бернштейна на I и II Всероссийских съездах преподавателей математики в 1912 и 1914 гг.

§ 54. Изучение понятия о функции.

Как было упомянуто в историческом очерке развития основных понятий алгебры, введение понятия о функции в программу математики средней школы последовало в начале XX в. и является методическим завоеванием и достижением первостепенной важности. Действительно, только с этого момента проникают в среднюю школу начала высшей математики: анализа бесконечно малых и аналитической геометрии, которые своим возникновением и развитием беспредельно углубили и расширили область математической науки и ее приложений. С введением понятия о функции, графического представления функций и (в старших классах школы) основ анализа и аналитической геометрии прекратился разрыв между школьной и научной математикой, который длился в течение трех столетий и который привел к тому, что основные идеи высшей математики, имеющие колоссальную важность как для общего умственного развития каждого человека, так и для практических приложений, были слишком мало распространены и известны в обществе. С другой стороны, до тех пор имел место разрыв в области математического обучения между высшей и средней школой, так как студент, поступая в высшее учебное заведение, встречался там с совершенно новыми для него понятиями, которых он не встречал в средней школе и основным из которых является понятие о функциональной зависимости переменных величин.

Первой на путь введения понятия о функции в программу средней школы встала Франция, где это введение последовало в 1902 г. Но там оно было вызвано принятой во Франции системой строгих конкурсов при приеме в высшие учебные заведения, заставляющей все время повышать требования к поступающим абитуриентам средней школы. Принципиальное же его обоснование является главным образом заслугою известного германского математика Ф. Клейна (1849—1925), с замечательной энергией в течение многих лет пропагандировавшего идею введения начал высшей математики и, в первую очередь, понятия о функциональной зависимости в среднюю школу; Ф. Клейн добился даже учреждения особой международной комиссии для обсуждения вопроса о реформе математического образования. Работы этой комиссии, прерванные вследствие мировой войны, а также доклады и труды самого Клейна повели к общему признанию действительной необходимости введения основ высшей математики в среднюю школу. По мнению Клейна, понятие о функциональном изменении величин должно явиться основным и центральным в преподавании математики и потому должно проводиться систематически во всех классах, в результате чего учащиеся должны приучиться к функциональному мышлению. В 1906 г. германскими учеными педагогами была выработана особая программа преподавания математики, известная под именем меранской, соответствующая идеям Клейна. Введение этой программы полностью в школы до сих пор оказалось неосуществимым, однако она сыграла важнейшую роль для проведения реформистских идей Клейна на практике и, в частности, для введения понятия о функции во всех странах в школьные программы математики[1]).

Хотя основная цель, которую Клейн ставит новому преподаванию математики: пробудить и развить в учащихся так называемое „функциональное мышление“, т. е. приучить смотреть на все трактуемые величины как на изменяющиеся, иначе — статический характер мышления заменить динамическим, явно страдает преувеличением и не может быть достигнута в средней школе, тем не менее крайне полезно во всех случаях, где только можно сосредоточивать внимание учащихся на способности величин изменяться и на характере этого изменения. Так, уже при прохождении арифметики в 5-м классе подобный материал представляет изучение зависимости изменения результатов действий над числами от изменения входящих величин, а также изменения дроби в связи с изменением ее числителя и знаменателя и др., но в особенности важны в этом отношении учение о величинах прямо и обратно пропорциональных и решение соответствующих задач, позволяющее на конкретных примерах проследить зависимость между взаимно изменяющимися величинами. Так как в том же году обучения в курсе геометрии проходится отдел о пропорциональных отрезках, подобии фигур и об измерении площадей, то много примеров прямой и обратной пропорциональности можно почерпнуть из этого геометрического материала. Но можно также брать примеры из области физики, например: связь между временем и пройденным пространством при равномерном движении, между высотою жидкости в цилиндрическом сосуде и ее весом и пр. Наряду с этим должны быть рассмотрены такие примеры, где зависимость между величинами не сводится к прямой или обратной пропорциональности, какова, например, связь между временем и температурой воздуха в различные часы дня, между ростом человека и его весом, стороной и площадью квадрата и пр. Желательно, чтобы учащиеся сами приводили примеры прямо и обратно изменяющихся величин. В 5-м классе весьма подходящий материал для углубления понятия о функциональной зависимости величин представляет вычисление числовой величины алгебраических выражений, которое без такого использования представляет мало интереса для учащихся. В курсе 6-го и 7-го классов также найдется ценный материал для развития понятия о функциональной зависимости двух взаимно изменяющихся величин, как, например, рассмотрение решения одного уравнения первой степени с двумя неизвестными, извлечение квадратного корня из чисел и пр.

---

[1]) Сведения о меранской программе и реформе Клейна математического образования см. в книге: Э. Борель, Элементарная математика, ч. I, Арифметика и алгебра, введение проф. В. Ф. Кагана, изд. 2-е, 1923.

Под все эти предварительные сведения учащихся о функциональной зависимости величин и подводится прочный базис в 7-м классе, где понятие о функции и самый термин функция уже явно включены в программу. Здесь учащиеся сперва знакомятся с понятием о постоянных и переменных величинах. Примером первых могут служить: длина метра, число минут в одном часе, отношение длины окружности к диаметру, т. е. число π, и пр.; примером вторых — высота ртути в барометре или в термометре, число жителей какого-нибудь города, стоимость товара и пр. Затем устанавливается понятие о функциональной зависимости двух величин, как о связи, при которых одна из величин может принимать какие угодно значения (независимая переменная), а другая изменяется в зависимости от изменения первой (функция). Это понятие должно быть разъяснено на достаточном числе примеров, заимствованных из различных областей: практической жизни, геометрии, физики, механики и пр. Так, цена товара есть функция его количества; площадь круга — функция радиуса, а объем куба — функция длины ребра; высота ртути в термометре — функция температуры, а в барометре — функция давления; расстояние свободно падающего тела от земли — функция времени и т. п. Желательно, чтобы учащиеся и сами привели ряд примеров подобного рода. После этого учащиеся знакомятся с тремя видами выражения функциональной зависимости: с помощью таблицы, формулы и графика. Примером табличного выражения функции может служить прейскурант цен на какие-нибудь однородные предметы, например цена бочек различной вместимости:

Вместимость бочек в *л*	50	100	150	200	250
Цена в руб.	30	56	76	90	98

По подобной таблице удобно находить цену бочек, вместимость которых в ней указана, например бочка 150 *л* стоит 76 руб., но если мы хотели бы узнать, сколько стоит бочка вместимостью в 180 *л*, то мы можем сказать только, что цена ее заключается между 76 и 90 руб., но точной стоимости ее при помощи данной таблицы узнать нельзя. Из таких примеров мы приходим к заключению о недостаточности таблицы определения функции для ее вычисления и о необходимости знать закон, устанавливающий зависимость между аргументом и функцией. Примером другого рода могут служить таблицы Барлоу, изд. ГТТИ, 1933, в которых даны значения квадратов, кубов, корней квадратных, корней кубических и обратных величин целых чисел от 1 до 10 000. С помощью этих таблиц мы можем непосредственно находить, например, значения функции $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ для всех целых значений x, но, если бы нам потребовалось найти значения той же функции для x, состоящего из целого числа с дробью, мы, зная способы извлечения квадратного корня из всякого числа, нашли бы и в этом случае требуемое значение функции. Итак, второй способ определения значения функции — аналитический, с помощью формулы, связывающей функцию и аргумент. Он менее нагляден, чем табличный способ, но имеет несравненно более широкое применение. Особенно удобно соединение обоих этих способов, как это мы видим из примера таблиц Барлоу. Наконец, третьим способом является графический способ, представляющий картину изменения функции в связи с изменением функции особенно наглядно. Приступая к нему, надо припомнить с учащимися способ изображения чисел при помощи отрезков на числовой прямой, затем перейти к ознакомлению их с системою прямоугольных координат на плоскости и способом представления при помощи ее значений независимого переменного — абсциссами и функции — ординатами соответствующих точек. В качестве примера можно взять ранее рассмотренную задачу о стоимости бочек в зависимости от их вместимости; строя соответствующие точки при помощи системы координат на миллиметровой бумаге, получим последовательность точек, которая дает наглядное изображение зависимости цены бочек от их объема. Соединяя эти точки непрерывной кривой, мы получим график соответствующей функциональной зависимости, по которому можно приблизительно определить цену бочек и для промежуточных значений их объема. Подобным образом можно предложить учащимся составить графики для целого ряда функциональных зависимостей величин, заимствованных из физики, механики, географии, техники и других областей знания. При этом следует требовать возможно более тщательного выполнения чертежей. Обычно учащихся такие упражнения очень интересуют, и они выполняют их с большой охотой. В этих упражнениях мы имеем соединение табличного способа представления функции с графическим; соответствующие кривые *линии здесь не имеют определенного математического значения*, но своим видом прямо дают возможность судить о возрастании и убывании функции и о ее частных значениях между фиксированными значениями независимого переменного.

Примеры. 1. Представить графически изменение расстояний, проходимых пешеходом, если он проходит:

Часы	1	2	3	4	5	6	7	8
Километры	6	11	16	21	26	31	36	42

Какое расстояние будет им пройдено в $3\frac{1}{2}$ часа?

2. Составить график изменения температуры в зимний день:

Часы	8	10	12	2	4	6	8
Градусы С.	—16	—24	—26	—28	—32	—34	—38

Какая температура была (приблизительно) в 11 час. и в $6\frac{1}{2}$ час. вечера?

3. Население города в тысячах было следующее:

Годы	1900	1905	1910	1915	1920	1925	1930
Число жителей	67	69	73	81	97	129	180

Вычертить график роста населения и определить количество населения в 1914 и 1923 гг.

Подобных примеров можно, конечно, составить любое количество.

Простейшие алгебраические функции. Наиболее целесообразным при изучении функций является соединение аналитического метода с графическим. Этот метод, согласно программе, прилагается прежде всего к изучению простейших видов функциональной зависимости: прямой пропорциональности, обратной пропорциональности и линейной функции.

Приступая к изучению прямой пропорциональности величин, следует, конечно, напомнить учащимся то определение этой зависимости, которое дается в арифметике, и конкретные ее примеры. Из рассмотрения этого определения и примеров можно вывести заключение, что функция y и независимое переменное x будут между собою в прямой пропорциональной зависимости тогда, когда отношение двух их соответствующих значений постоянно. Обозначая величину этого постоянного отношения через k, найдем соответствующую формулу для аналитического выражения данной зависимости:

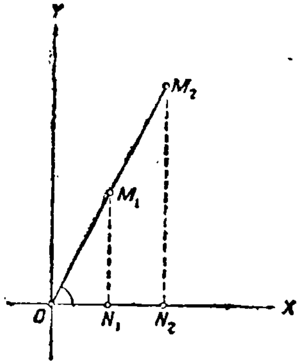
$$\frac{y}{x}=k \quad \text{или} \quad y=kx.$$

Коэфициент k носит название коэфициента пропорциональности. Весьма важно выяснить его смысл. Так как чем больше k, тем более значение y при данном значении x, то ясно, что этот коэфициент выражает быстроту возрастания (или убывания) функции. В частности, когда $x=1$, из предыдущей формулы получается $y=k$. Это показывает, что коэфициент пропорциональности равен тому значению данной функции, которое соответствует значению $x=1$. Так, например, функция $y=2\pi x$ выражает длину окружности y при радиусе x; здесь коэфициент пропорциональности $k=2\pi=6{,}28$; это же число получится, если в предыдущей формуле положить $x=1$, тогда $y=2\pi$. Приступая затем к графическому представлению прямой пропорциональности, следует сначала на любом частном примере убедиться, что соответствующий график будет прямая линия, проходящая через начало координат. Действительно, полагая, например, $y=2x$ и давая x значения $0, 1, 2, \ldots$, получим $y=0, 2, 4, \ldots$. Строя соответствующие двум последним значениям x точки M_1 и M_2, получим треугольники, (черт. 8) M_1ON_1 и M_2ON_2, которые будут подобны вследствие пропорциональности катетов, так как

$$\frac{M_2N_2}{M_1N_1}=\frac{ON_2}{ON_1}=2.$$

Но в таком случае $\angle M_2ON_2=\angle M_1ON_1$, т. е. линии OM_1 и OM_2 составляют одну прямую, которая и является графиком данной функции. Подобным же образом убеждаемся, что вообще график функции $y=kx$

есть прямая, проходящая через начало координат. Приведенное доказательство соответствует геометрическим сведениям учащихся, так как учение о подобии треугольника проходится уже в 7-м классе. Задачей с конкретным содержанием, которая могла бы служить примером прямой пропорциональной зависимости величин, можно выбрать вопрос об определении длины, проходимой движущейся точкою при равномерном движении. Например, пусть тело движется со скоростью 4 *м/сек*, тогда связь между скоростью тела и пройденным пространством выразится уравнением $y=4x$. Давая x значения 2 сек., 3 сек. и т. д., получим для y значения: 8 *м*, 12 *м* и т. д. Построив график движения, можно по чертежу найти расстояние, которое пройдет движущееся тело в $1\frac{1}{2}$ сек., в 5 сек. и т. д.

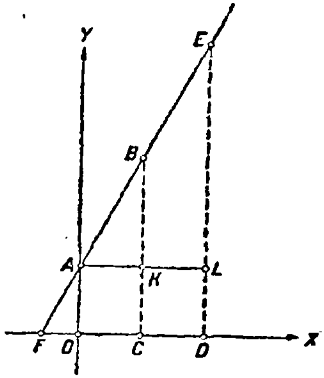


Черг. 8.

Наиболее важным моментом в рассматриваемом вопросе с методической точки зрения является выяснение коэфициента пропорциональности k. При $k=1$ имеем простейшую функцию $y=x$; графиком ее является прямая, делящая координатный угол пополам; у каждой точки этой прямой абсцисса равна ординате. С возрастанием k в 2, 3.... раза, ордината графика, выражающая значение функции, будет увеличиваться во столько же раз, т. е. коэфициент k действительно характеризует быстроту изменения функции. С другой стороны, с увеличением коэфициента k возрастает, с уменьшением — убывает (но непропорционально!) угол наклона прямой к положительному направлению оси OX; поэтому часто k называется угловым коэфициентом. Если в это время учащиеся уже ознакомились из тригонометрии с понятием о тангенсе угла, то можно объяснить, что k есть не что иное как тангенс угла наклонения графика данной функции с положительным направлением оси абсцисс, и произвести исследование положения прямой при различных значениях k тригонометрическим путем.

От графического представления прямой пропорциональности весьма легок переход к изучению функции, выражаемой формулой $y=kx+b$. И здесь конкретным примером подобной зависимости может служить задача на равномерное движение тела или точки, но с тем видоизменением, что до рассматриваемого момента тело уже прошло некоторое расстояние от точки отправления.

Например: тело прошло 3 *м* и далее двигается со скоростью 4 *м/сек*. Какое расстояние пройдет оно через x сек.? Здесь связь между временем x и пройденным пространством y выразится формулой: $y=3+4x$. Давая значения $x=0, 1, 2, 3\ldots$, получим $y=3, 7, 11, 15\ldots$. Построив соответствующие точки, найдем, что график движения снова выражается прямою линией (черт. 9); эта прямая уже не проходит через начало координат, но пересекает ось OY в точке A, так что $OA=3$; далее имеем: $BC=7$; $DE=11$ и т. д. Что точки $A, B, E\ldots$ лежат на одной прямой, убеждаемся, проведя через A прямую $AL \parallel OX$ и рассматривая треугольники AKB и ALE, которые по пропорциональности катетов будут подобны, а потому точки A, B, E лежат на одной прямой. Итак, функция $y = kx + b$ имеет графиком прямую, проходящую через точку, лежащую на оси ординат OY в расстоянии OA от начала; наклонена она к оси OX так же, как график прямой $y = kx$, т. е. k попрежнему является угловым коэфициентом, характеризующим наклон прямой к оси OX ($k = \operatorname{tg} \alpha$, где $\alpha = \angle EFX$). Отсюда и название рассматриваемой функции — линейная функция.



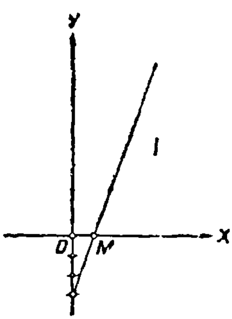
Черт. 9.

Линейная функция должна быть исследована по отношению к обоим входящим в нее коэфициентам: k и b. Легко показать, что если $b = 0$, то рассматриваемая функция выражает прямую пропорциональность и представляемая ею прямая проходит через начало координат. При $b > 0$ прямая пересекает ось OY выше, а при $b < 0$ — ниже начала координат. Если $k = 0$, функция принимает вид $y = b$, и выражающая ее прямая проходит параллельно оси OX на расстоянии, равном b. Когда $k > 0$, график функции поднимается над осью OX и изображает возрастание данной функции, а при $k < 0$ график представляется опускающейся прямой и соответствует убыванию функции. Полезно проверить возрастание и убывание линейной функции, построив графики соответствующих функций, например: I) $y = 4x - 3$ и II) $y = 7 - 2x$. Чертежи их будут вида (черт. 10 и 11).

Вычисление дает:

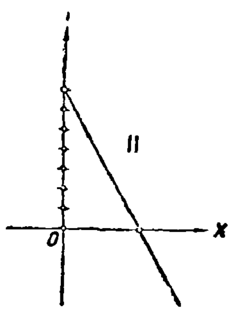
I) при	$x = -2$	$y = -11$	II) при	$x = -2$	$y = 11$
„	$x = -1$	$y = -7$	„	$x = -1$	$y = 9$
„	$x = 0$	$y = -3$	„	$x = 0$	$y = 7$
„	$x = 1$	$y = 1$	„	$x = 1$	$y = 5$
„	$x = 2$	$y = 5$	„	$x = 2$	$y = 3$
„	$x = 3$	$y = 9$	„	$x = 3$	$y = 1$
			„	$x = 4$	$y = -1$

т. е. функция возрастает с возрастанием x. | т. е. функция убывает с возрастанием x.



Черт. 10.

Из других свойств линейной функции следует обратить внимание учащихся на то, что в ней значения y изменяются не пропорционально x, в чем можно убедиться путем сравнения двух каких либо значений хотя бы выше рассмотренной функции I. Так, при $x = 1$ имеем $y = 1$, а при $x = 3$ $y = 9$. Но приращения функции оказываются прямо пропорциональными приращениям независимого переменного. В этом



Черт. 11.

можно убедиться как из чертежа, представляющего функцию I, сравнив приращения ординаты при $x=1$, $x=2$, $x=3$, так и путем вычисления, ибо соответствующие значения для y будут равны: 1, 5 и 9; приращения аргумента будут: $2-1=1$, $3-1=2$, а приращения функции: $5-1=4$; $9-1=8$, но $1:2=4:8$, т. е., действительно, приращения значений линейной функции прямо пропорциональны приращениям значений независимого переменного. Из общей формулы линейной функции $y=$ $=kx+b$ это станет ясным, если представим ее в виде $y-b=kx$, откуда следует, что коэфициент пропорциональности здесь равен k.

Из приложения понятия о линейной функции, почему-то не вошедшего в программу, следует ознакомить учащихся с приложениями ее к решению уравнений первой степени с одним и двумя неизвестными. Прежде всего как с помощью аналитического, так и графического представления линейной функции учащиеся снова и наглядно убеждаются, что одно уравнение с двумя неизвестными имеет бесчисленное число решений. Далее важно показать, что одно уравнение с одним неизвестным есть лишь частный случай линейной функции, именно тот, когда значение функции равно нулю. Действительно, всякому уравнению первой степени с одним неизвестным можно придать вид $kx+b=0$, но это уравнение получается из формулы для линейной функции $y=kx+b$ при $y=0$. Отсюда открывается способ графического решения одного уравнения первой степени с одним неизвестным: надо, приведя его к виду $kx+b=0$, построить прямую, графически представляющую функцию $y=kx+b$, и найти точку пересечения ее с осью OX; в этой точке *ордината y равна нулю, а абсцисса дает соответствующее значение x*, т. е. корень уравнения. При небольших коэфициентах уравнения первой степени такое решение его оказывается довольно точным и обычно очень интересует учащихся. Так, график построенной выше линейной функции I ($y=4x-3$) пересекает ось OX в точке с абсциссой $x=\frac{3}{4}$, а график функции II ($y=7-2x$) дает подобным же образом корень уравнения $7-2x=0$, именно $x=3\frac{1}{2}$. Таким образом, здесь уже закладывается важное для дальнейшего понятие о корнях уравнения как о нулевых значениях соответствующей функции.

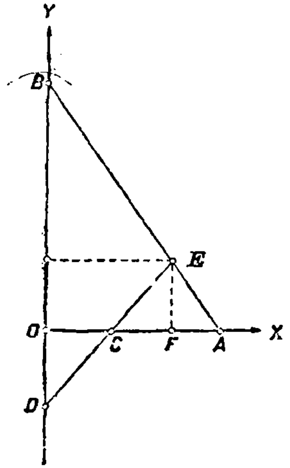
Другим приложением графического представления функций, тоже не упомянутым в программе, но представляющим большое теоретическое значение и обычно интересующим учащихся, является графический способ решения системы двух уравнений с двумя неизвестными. Принцип его состоит в том, что каждое из данных уравнений представляют графически с помощью соответствующей кривой; тогда координаты точек пересечения обеих кривых будут выражать значения неизвестных, одновременно удовлетворяющих обоим уравнениям, т. е. их решения. Так, чтобы решить этим способом систему двух уравнений первой степени с двумя неизвестными:

$$3x+2y=21; \quad 5x-4y=13,$$

мы прежде всего вычерчиваем графики первого и второго уравнений. Для этого находим точки пересечения соответствующих прямых линий с осями координат. Так, полагая в первом уравнении $x=0$, получаем

$y = 10\frac{1}{2}$, а полагая $y = 0$, найдем $x = 7$. Итак, чтобы построить первую прямую (черт. 12), откладываем на оси абсцисс $OA = 7$, а на оси ординат $OB = 10\frac{1}{2}$ и отложенные точки соединяем прямой. Чтобы построить вторую прямую, полагаем во втором уравнении $x = 0$, тогда $y = -\frac{13}{4}$; затем $y = 0$; найдем $x = \frac{13}{5}$; итак, для проведения второй прямой надо отложить на оси абсцисс отрезок $OC = \frac{13}{5}$, а на оси ординат $OD = -\frac{13}{4}$ и провести прямую через эти точки. Координаты точки пересечения E обеих прямых будут представлять значения неизвестных, удовлетворяющих обоим уравнениям; измерив их, найдем:

$$OF = x = 5; \quad EF = y = 3.$$



Черт. 12.

Для проверки можно решить те же уравнения алгебраически и найти те же корни.

Ввиду недостаточной точности этот способ не может иметь практического значения. Но ознакомление с ним учащихся является крайне полезным для уяснения сущности решения системы двух уравнений с двумя неизвестными и связи понятий о функции и об уравнении.

ГЛАВА XII.

КВАДРАТНОЕ УРАВНЕНИЕ И КВАДРАТНАЯ ФУНКЦИЯ.

§ 55. Вывод и исследование основных формул.

Изучение квадратных уравнений в курсе 7-го класса средней школы носит пропедевтический характер и имеет в виду главным образом практическую цель — научить решать числовые уравнения второй степени. Поэтому, как мы видели, прохождение отдела о квадратных уравнениях в 7-м классе должно быть непосредственно связано с предшествующей главой алгебры — об извлечении квадратного корня из чисел, а вывод соответствующих формул для решения квадратного уравнения основывается на приведении его к двучленному виду. В курсе 8-го класса эти имеющиеся уже у учащихся сведения дополняются более углубленным изучением свойств квадратного уравнения и общих свойств квадратной функции.

Приступая к прохождению названного отдела, конечно, необходимо повторить с учащимися известный им уже из предыдущего года материал, в частности — вывод основных формул решения приведенного и неприведенного квадратных уравнений, и решить необходимое число примеров и задач на составление квадратных уравнений. Но далее следует снова систематически рассмотреть решение всех видов квадратных уравнений, начиная с неполных: $ax^2=0$, $ax^2=q$, $ax^2+bx=0$ и кончая полными вида: $x^2+px+q=10$ и $ax^2+bx+c=0$, причем везде $a>0$. Для вывода основных формул при этом втором прохождении квадратного уравнения вместо приведения его к двучленному виду следует применить имеющий более общее и важное значение метод разложения левой части уравнения на множители. Из предыдущего учащиеся уже знают, что таким способом может быть решено неполное квадратное уравнение вида: $ax^2+bx=0$; теперь можно показать, что тем же способом могут быть найдены и корни неполного квадратного уравнения вида $x^2=q$; именно, давая ему вид $x^2-q=0$, можем представить его в форме $(x+\sqrt{q})(x-\sqrt{q})=0$, откуда $x_1=+\sqrt{q}$, $x_2=-\sqrt{q}$.

Переходя к полным квадратным уравнениям, полезно сначала показать, что многие уравнения могут быть решены непосредственным разложением трехчлена, стоящего в левой части уравнения, на линейные множители. Учащиеся при этом должны припомнить и применять способы, известные им из отдела о разложении алгебраических выражений на множители (см. § 34). Для примера могут быть приравнены нулю те трехчлены второй степени, которые приведены в вышеупомянутой главе, или еще следующие уравнения:

1) $x^2+x-2=0$.

Разлагая левую часть на множители, имеем:

$$(x-1)(x+2)=0,$$

откуда:

$$x-1=0 \text{ или } x+2=0,$$

и, следовательно,

$$x_1=1, \quad x_2=-2.$$

2) $9x^2-12x+4=0$.

Здесь левая часть уравнения может быть представлена в виде

$$(3x-2)^2=0,$$

откуда

$$(3x-2)(3x-2)=0,$$

т. е.

$$x_1=\frac{2}{3} \text{ и } x_2=\frac{2}{3},$$

и, значит, данное уравнение имеет два равных корня.

3) $6x^2+17x+12=0$;

умножая все члены уравнения на 6, приведем его к виду:

$$(6x)^2+17(6x)+72=0$$

или, полагая $6x=y$, к виду:

$$y^2+17y+72=0.$$

Разлагая этот трехчлен обычным способом на множители, найдем:

$$(y+8)(y+9)=0, \text{ или: } (6x+8)(6x+9)=0,$$

следовательно

$$6x+8=0 \quad \text{или} \quad 6x+9=0;$$

откуда

$$x_1 = -\frac{4}{3}, \quad x_2 = -\frac{3}{2}.$$

После таких упражнений можно вывести и общую формулу для решения квадратного уравнения с помощью разложения на множители. Для этого надо взять уравнение в приведенной форме:

$$x^2 + px + q = 0$$

и представить левую часть его в виде разности двух квадратов с помощью таких преобразований:

$$x^2 + px + q = x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2}x + q = x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2}x + q + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 =$$
$$= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left[\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q\right] = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right)^2.$$

Следовательно, данное уравнение может быть представлено в виде:

$$\left[x + \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right]\left[x + \frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right] = 0;$$

приравнивая каждый из двух множителей к нулю, получаем два корня:

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \text{ и } x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q},$$

которые могут быть объединены в общую формулу:

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Следствием приведенного вывода формулы для решения квадратного уравнения является то, что уравнение (1) можно представить в виде:

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0, \quad \text{или} \quad x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2);$$

другими словами, трехчлен второй степени $x^2 + px + q$ всегда может быть разложен на два множителя первой степени относительно x, из которых каждый равен разности между x и одним из корней соответствующего квадратного уравнения.

Подобным же образом можно было бы с помощью разложения левой части на множители получить решение и уравнения неприведенного вида:

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Это можно сделать различными способами; так, умножая обе части уравнения на $4a$, последовательно получим:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0; \quad 4a^2x^2 + 4abx + b^2 - b^2 + 4ac = 0,$$

или

$$(2ax + b)^2 - (b^2 - 4ac) = 0; \quad (2ax + b)^2 - (\sqrt{b^2 - 4ac})^2 = 0,$$

откуда

$$(2ax + b + \sqrt{b^2 - 4ac})(2ax + b - \sqrt{b^2 - 4ac}) = 0,$$

следовательно

$$2ax + b + \sqrt{b^2 - 4ac} = 0,$$

или

$$2ax + b - \sqrt{b^2 - 4ac} = 0,$$

откуда два решения:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Но те же формулы можно было бы получить и при помощи преобразования данного неприведенного уравнения в приведенное; например, деля все члены его на a, получим:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0,$$

откуда

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}} \quad \text{или} \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Так так на основании предыдущего уравнение (I) может быть представлено в виде:

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0,$$

то

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = (x - x_1)(x - x_2),$$

и, значит,

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

т. е. трехчлен второй степени с коэфициентом a при x^2 может быть представлен в виде произведения указанных трех множителей.

После вывода основных формул решения квадратного уравнения следует припомнить с учащимися известное им уже из курса предыдущего года разделение получающихся корней квадратного уравнения на действительные, равные и мнимые. Здесь это исследование корней может быть произведено на основании выведенных формул для решения приведенного и неприведенного квадратных уравнений. *При этом необходимо указать*, что вопрос о характере корней полностью решается по знаку подкоренного выражения, стоящего в полученных формулах и называемого *дискриминантом* (т. е. „различителем"). Так, для приведенного уравнения

$$x^2 + px + q = 0, \ x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

у которого дискриминант $D = \frac{p^2}{4} - q$, могут быть 3 случая:

1) При $D > 0$, т. е. $\frac{p^2}{4} > q$, в формуле решения под корнем стоит величина положительная, следовательно уравнение имеет два действительных и неравных корня.

2) При $D = 0$ имеем $\frac{p^2}{4} = q$, и уравнение имеет два действительных и равных корня: $x_1 = x_2 = -\frac{p}{2}$.

3) При $D < 0$, т. е. при $\frac{p^2}{4} < q$, под корнем будет стоять отрицательное число, следовательно уравнение будет иметь два мнимых корня.

Подобно этому, для неприведенного уравнения

$$ax^2+bx+c=0,$$

откуда

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

дискриминантом является выражение:

$$D_1=b^2-4ac,$$

и если $D_1>0$, уравнение имеет два действительных и неравных корня, при $D_1=0$ — два действительных и равных корня и при $D_1<0$ — два мнимых корня.

Необходимо обратить внимание учащихся на то, что если $c<0$, или $q<0$, то дискриминант будет непременно числом положительным, а потому в этом случае сразу можно по виду уравнения заключить, что оно имеет два действительных и неравных корня. Так, уравнения $x^2+5x-6=0$; $4x^2+x-5=0$; $ax^2+bx-10=0$, в которых свободный член отрицателен, имеют действительные и неравные корни. Когда же свободный член уравнения положителен, то о характере его корней можно сделать заключение, не решая уравнения, по знаку его дискриминанта. Так, исследуя уравнение $x^2-12x+35=0$, видим, что $D=6^2-35=1$, т. е. $D>0$; заключаем, что оно должно иметь два действительных и неравных корня.

Для уравнения $x^2-12x+36=0$ дискриминант $D=36-36=0$, и оно имеет два действительных и равных корня.

Уравнение $x^2-12x+37=0$ имеет дискриминант $D=-1$, следовательно корни его мнимые.

Подобно этому дискриминант уравнения: $6x^2+17x+12=0$, т. е. $D_1=17^2-4\cdot6\cdot12=289-288=1$; $D_1>0$, и корни его будут действительны и неравны.

Уравнение же $9x^2+12x+4=0$ имеет дискриминант $D_1=144-4\cdot9\cdot4=0$, т. е. корни его равны.

Наконец, уравнение $3x^2-5x+4=0$, дискриминант которого $D_1=25-4\cdot3\cdot4=-23$, т. е. $D<0$, имеет мнимые корни.

Необходимо, чтобы учащиеся проделали возможно большее число подобных примеров с последующей проверкой сделанных заключений при помощи решения уравнений.

§ 56. Сумма и произведение корней квадратного уравнения.

Для дальнейшего исследования корней квадратного уравнения, а также для последующего изучения квадратной функции имеют первостепенную важность формулы, позволяющие находить сумму и произведение корней данного квадратного уравнения, т. е. (x_1+x_2) и x_1x_2, без решения последнего. Но сумма и произведение двух количеств не изменяются от их перестановки; действительно:

$$x_1+x_2=x_2+x_1, \quad x_1x_2=x_2x_1.$$

Как известно из высшей алгебры, если функция нескольких переменных не меняет своего вида ни при какой перестановке переменных, то она называется симметрическою функцией этих переменных. Таковы, например, функции трех переменных:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \quad x_1 x_2 x_3 \text{ и пр.}$$

В высшей алгебре далее доказывается, что всякая симметрическая функция корней алгебраического уравнения может быть рационально выражена через его коэфициенты (формулы Ньютона). Поэтому и упомянутые выражения суммы и произведения корней квадратного уравнения, представляющие простейшие симметрические функции корней, должны рационально выражаться через его коэфициенты. Эти выражения проще всего получить так: мы видели, что уравнение

$$x^2 + px + q = 0$$

может быть представлено в виде:

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

где x_1 и x_2 — корни данного уравнения. Производя умножение, придадим последнему уравнению вид:

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0,$$

так как это уравнение тождественно с уравнением (I), то

$$x_1 + x_2 = -p \quad \text{и} \quad x_1 x_2 = q,$$

т. е. сумма корней приведенного квадратного уравнения равна коэфициенту в нем при неизвестном в первой степени, взятому с обратным знаком, а произведение их равно свободному члену. Подобным же образом найдем, что в неприведенном уравнении

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Но те же формулы можно получить и непосредственно из формул, выражающих корни x_1 и x_2 приведенного и неприведенного уравнений, путем их сложения и перемножения, как это доказывается во всех учебниках алгебры. Следует заметить, что учащиеся весьма часто усваивают только первую из этих формул и, например, на вопрос, чему будут равны сумма и произведение корней квадратного уравнения $4x^2 + x - 5 = 0$, отвечают, что: $x_1 + x_2 = -1$; $x_1 x_2 = -5$, вместо $-\frac{1}{4}$ и $-\frac{5}{4}$. Поэтому следует возможно основательнее изучить вывод этих формул и проделать достаточное число примеров на оба вида уравнений.

Далее, весьма полезным упражнением является нахождение симметрических функций корней приведенного уравнения $x^2 + px + q = 0$ более сложного вида, чем сумма и произведение, например сумма квадратов, кубов, обратных степеней корней и пр. Учащимся в таких случаях приходится сообразить, как данную функцию выразить через элементарные, т. е. сумму и произведение. Например:

a) $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = p^2 - 2q,$

b) $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3(x_1 + x_3)x_1 x_3 = -p^3 + 3pq,$

c) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=-\frac{p}{q}$,

d) $x_1^4-x_1^2x_2^2+x_2^4=(x_1^2+x_2^2)^2-3x_1^2x_2^2=(p^2-2q)^2-3q^2=p^4-$
$-4p^2q+q^2$.

Формулы, выражающие сумму и произведение корней квадратного уравнения через его коэфициенты, могут быть использованы для составления квадратного уравнения приведенного вида по его корням. Действительно, полагая, что уравнение будет иметь вид: $x^2+px+q=0$ и что данные корни его суть x_1 и x_2, имеем для определения коэфициентов p и q равенства: $x_1+x_2=-p$; $x_1x_2=q$; отсюда $p=-(x_1+x_2)$, $q=x_1x_2$, и уравнение будет иметь вид:

$$x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0.$$

Например, если $x_1=5$, $x_2=6$, то $p=-(5+6)=-11$; $q=5\cdot6=$ $=30$, и уравнение будет иметь вид:

$$x^2-11x+30=0.$$

Приведем более сложные примеры.

1) Составить уравнение по данным корням $x_1=\frac{2}{3}$ и $x_2=-\frac{3}{5}$. Составляя коэфициенты, получим:

$$p=-\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{5}\right)=-\frac{1}{15};\quad q=\frac{2}{3}\cdot-\frac{3}{5}=-\frac{2}{5},$$

и уравнение будет иметь вид:

$$x^2-\frac{1}{15}x-\frac{2}{5}=0 \text{ или } 15x^2-x-6=0.$$

2) Составить уравнение, корни которого $\frac{2\pm\sqrt{5}}{3}$,

здесь $p=-\frac{4}{3}$, $q=-\frac{1}{9}$. Уравнение будет:

$$x^2-\frac{4}{3}x-\frac{1}{9}=0 \quad\text{или}\quad 9x^2-12x-1=0.$$

Однако более удобно для составления квадратного уравнения по его корням пользоваться разложением левой части его на множители первой степени. Как мы видели, для приведенного уравнения такое разложение имеет вид:

$$(x-x_1)(x-x_2)=0,$$

где x_1 и x_2 — корни уравнения. Поэтому, например, уравнение, корни которого $x_1=7$ и $x_2=3$, будет иметь вид:

$$(x-7)(x-3)=0, \quad\text{или}\quad x^2-10x+21=0.$$

При данных $x_1=\frac{a}{b}$ и $x_2=-\frac{b}{a}$ получим:

$$\left(x-\frac{a}{b}\right)\left(x+\frac{b}{a}\right)=0,\ \text{т. е.}\ x^2-\frac{ax}{b}+\frac{bx}{a}-1=0,$$

или, по упрощении:

$$abx^2-(a^2-b^2)x-ab=0.$$

Если $x_1 = x_2 = 3$, уравнение получит вид:

$$(x-3)^2 = 0, \quad \text{или} \quad x^2 - 6x + 9 = 0.$$

Следует проделать возможно большее число подобных упражнений, приводящих как к полным, так и к неполным уравнениям.

Разложением левой части квадратного уравнения на линейные множители можно воспользоваться, чтобы доказать, что уравнение второй степени не может иметь более двух корней. Способ доказательства — от противного; допуская, что кроме корней x_1 и x_2 уравнение имеет еще третий, не равный им корень x_3, мы заключаем, что он должен удовлетворять уравнению $(x - x_1)(x - x_2) = 0$, но, подставляя в это уравнение $x = x_3$, получаем:

$$(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) = 0.$$

Однако это равенство невозможно, так как ни одна из разностей в левой части уравнения не равна нулю, а потому и произведение их не может равняться нулю. Следовательно, приведенное квадратное уравнение не может иметь более двух корней. Подобным же рассуждением убеждаемся, что и неприведенное квадратное уравнение, которое может быть представлено в виде $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$, тоже не может иметь более двух корней.

Теоремы о сумме и произведении корней квадратного уравнения позволяют продолжить и уточнить исследование его корней в том случае, когда они действительны. Именно, зная, что произведение корней равно свободному члену, мы заключаем, что если он — число положительное, то корни уравнения имеют оба одинаковые знаки, если же отрицательное, то разные. Обращаясь к коэфициенту при x в первой степени, мы можем определить, какие именно знаки имеют корни уравнения, если они одинаковы. Действительно, так как знак этого коэфициента противоположен знаку суммы корней, то если коэфициент при x положительный, то оба корня имеют одинаковые знаки, если отрицательный, то разные. Если же в уравнении свободный член отрицателен и корни его, следовательно, имеют разные знаки, то по коэфициенту при x в первой степени можно сделать заключение о том, у какого из корней абсолютная величина будет больше; именно, если средний член положителен, то большую абсолютную величину имеет отрицательный корень и наоборот.

Примеры: 1) В уравнении $x^2 - 30x + 200 = 0$ свободный член — положительный, следовательно знаки корней одинаковы. Обращаясь к коэфициенту при x, видим, что он отрицателен, значит оба корня положительны. Проверка решением дает действительно $x_1 = 20$, $x_2 = 10$.

2) Уравнение $x^2 + 5x - 6 = 0$ имеет свободный член отрицательный, значит, знаки у его корней разные. Рассматривая коэфициент при x, видим, что он положителен, значит сумма корней отрицательна, а потому бо́льшую абсолютную величину имеет отрицательный корень. Действительно, решая уравнение, найдем $x_1 = 1$, $x_2 = -6$.

После рассмотрения подобных примеров необходимо проделать с учащимися ряд задач на полное исследование квадратного уравнения по его внешнему виду. При этом учащиеся должны твердо усвоить порядок такого исследования. Оно должно начинаться с рассмотрения дискриминанта уравнения, которое должно установить, будут ли корни действительными, равными или мнимыми. Если окажется, что они действительны, то следует перейти к свободному члену и по нему определить, будут ли корни иметь одинаковые или разные знаки. Далее надо перейти к рассмотрению коэфициента при неизвестном в первой степени, которое в первом случае позволит определить, какие именно знаки у корней, а во втором — какой из корней, положительный или отрицательный, будет иметь бо́льшую абсолютную величину.

Наконец, теоремы о сумме и произведении корней квадратного уравнения могут быть использованы для того, чтобы учащиеся привыкали решать несложные квадратные уравнения в уме. Так, имея квадратное уравнение $x^2-5x+6=0$, учащиеся легко могут сообразить, разлагая свободный член на множители, что корнями его могут быть либо числа 1 и 6, либо 2 и 3. Обращаясь к коэфициенту при x, видим, что он представляет собою сумму чисел 2 и 3 с обратным знаком, следовательно $x_1=2$, $x_2=3$. Подобным образом могут быть решаемы несложные уравнения и неприведенного вида. Особенно просто решить квадратное уравнение при помощи соотношений между его коэфициентами и корнями, когда один из его корней усматривается непосредственно. Так, имея уравнение: $5x^2+x-6=0$, замечаем, что ему удовлетворяет $x_1=1$; так как $x_1x_2=-\frac{6}{5}$, то $x_2=-\frac{6}{5}$, что может быть оправдано проверкою. Вообще в процессе решения квадратного уравнения следует приучать учащихся избегать излишнего многописания, к чему они бывают склонны, а переносить несложные вычисления на умственную работу. В частности, весьма полезно знание квадратов чисел от 1 до 20, наиболее часто встречающихся при решении квадратных уравнений.

§ 57. Трехчлен второй степени.

Выражение, стоящее во второй части неприведенного квадратного уравнения, т. е. ax^2+bx+c, носит название *трехчлена второй степени*; приравнивая его к y, получим равенство: $y=ax^2+bx+c$, из которого видно, что с изменением x будет изменяться и y, т. е. y есть функция x. Ввиду того что x здесь входит во второй степени, y называется квадратной функцией x. Так как свойства этой функции имеют важное значение как для алгебры, так и для других ветвей математики, а также для физики и механики, изучению ее свойств должно быть уделено большое внимание. Оно должно быть проведено в порядке возрастающей сложности трехчлена, стоящего в правой части последнего равенства, параллельно алгебраическим и графическим путем. Изучение функции должно сопровождаться практическими приложениями.

Простейшей и основной функцией второй степени является $y=x^2$; с нее и надо начать ознакомление с квадратными функциями. Сначала следует составить таблицу значений, которые принимает y, когда $x=0, 1, 2, \ldots$, а также $x=-1, -2, -3\ldots$. Рассмотрение этой таблицы показывает, что значения функции, начиная от нуля, все время возрастают, оставаясь положительными и равными при одинаковых по абсолютной величине значениях аргумента, так что наименьшее значение $y=0$, далее же оно возрастает до бесконечности. Полезно сравнить характер получающейся функциональной зависимости с известной учащимся ранее прямой пропорциональной зависимостью. Можно далее показать, что составленная таблица может служить для двух взаимно обратных действий: возведения чисел в квадрат и извлечения из них квадратных корней, причем в последнем случае получаются два значения результата, равных по величине, но противоположных по знаку.

После алгебраического изучения функции $y=x^2$ следует приступить к ее графическому изучению. Для этого нужно с помощью прямоугольной системы координат построить возможно больше точек, соответствующих данным значениям аргумента, и соединить их непрерывной линией. Полученная кривая будет параболой с вершиной в начале координат; она будет симметрична относительно оси ординат; ветви ее будут круто подниматься в сторону положительных ординат и уходить в бесконечность. Учащимся следует сообщить, что парабола имеет большое значение при изучении явлений природы: так, многие кометы движутся вокруг солнца по параболе; тело, брошенное под острым углом к горизонту в безвоздушном пространстве, тоже описывает параболу; струя воды, вытекающая из отверстия в боковой стенке сосуда, имеет форму параболы и пр. На полученном чертеже параболы следует снова рассмотреть все свойства функции $y=x^2$, а также применить его для приближенного нахождения квадратов чисел и извлечения из них квадратных корней.

Следующей функцией, подлежащей рассмотрению, должна быть $y=ax^2$. При этом сначала надо взять несколько значений коэфициента $a>0$. Алгебраическое исследование показывает, что при $a>0$ функция y изменяется в том же смысле, как и аргумент x, т. е. если x возрастает, то y тоже будет возрастать, и наоборот. В частности, сравнивая изменения этой функции с изменениями $y=x^2$, убедимся, что при $a>1$ она возрастает быстрее, чем эта функция; а при $a<1$ — медленнее. Так, функция $y=2x^2$ растет быстрее, а $y=\frac{1}{4}x^2$ медленнее, чем $y=x^2$. Графическое представление функции $y=ax^2$ дает нам кривую с теми же свойствами, как и $y=x^2$, т. е. параболу с вершиною в начале координат, симметрично расположенную относительно оси ординат, но при $a>1$ более круто, а при $a<1$ более отлого уходящую ветвями в бесконечность. Затем следует рассмотреть случай $a<0$, характеризующийся тем, что функция получает отрицательные значения, а соответствующая кривая располагается в отрицательной области, вниз от начала координат. В частности, необходимо рассмотреть случай $a=-1$, тогда функция выразится уравнением $y=-x^2$. Соответствующий график будет парабола, совершенно такого же вида, как и для функции $y=x^2$, но расположенная полностью в области отрицательных ординат.

После этого следует рассмотреть квадратную функцию вида $y=ax^2+m$. Изменения этой функции легко могут быть выяснены сравнением ее с функцией $y=ax^2$. Ясно, что при одном и том же значении переменного x значения второй функции будут отличаться от значений первой на m. Графически это будет значить, что мы получим параболу такую же, как в предыдущем случае, но при $m>0$ — поднятую вверх на величину m, а при $m<0$ — опущенную вниз на m. Необходимо, чтобы учащиеся вычертили графики подобных функций, например: $y=\frac{1}{2}x^2$; $y=\frac{1}{2}x^2+2$; $y=\frac{1}{2}x^2-2$, и убедились, что во всех случаях получается одна и та же парабола, но она перемещается параллельно самой себе во втором примере на 2 единицы вверх, а в третьем — на 2 единицы вниз.

Затем следует перейти к изучению функции вида $y=a(x+m)^2$ сначала на частных примерах, при $a=1$, например $y=(x+2)^2$ и $y=(x-2)^2$.

Полагая в первом уравнении $x=-2, -1, 0, 1, 2, \ldots$, получим $y=0, 1, 4, 9, 16, \ldots$, т. е. те же самые значения, которые получает функция $y=x^2$ при $x=0, 1, 2\ldots$. Это показывает, что функция $y=(x+2)^2$ графически представляется такою же параболой, как и $y=x^2$, но передвинутой по оси абсцисс вершиною на два деления влево. Рассматривая подобным же образом график функции $y=(x-2)^2$, убедимся, что и здесь она представляет такую же параболу, как и функция $y=x^2$, но передвинутую вершиною по оси абсцисс на 2 деления вправо. Таким образом, вообще функция $y=(x+m)^2$ представляет графически такую же параболу, как и $y=x^2$, но сдвинутую вправо или влево на m делений. Переходя затем к изучению функции более общего вида $y=a(x+m)^2$ при $a>1$, следует тоже сначала взять несколько частных примеров:

$$y=\frac{1}{2}x^2; \tag{I}$$

$$y=\frac{1}{2}(x+2)^2; \tag{II}$$

$$y=\frac{1}{2}(x-2)^2 \tag{III}$$

и вычислить значения всех этих трех функций; при $x=-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\ldots$, получим:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
I	$\frac{9}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{9}{2}$
II	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{9}{2}$	8	$\frac{25}{2}$
III	$\frac{25}{2}$	8	$\frac{9}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$

Рассмотрение этой таблицы показывает, что все три функции получают одни и те же значения: $0, \frac{1}{2}, 2, \frac{9}{2}, 9\ldots$, но при различных начальных значениях x: (I) — начиная с $x=0$; (II) — с $x=-2$ и (III) — с $x=+2$. Следовательно, все три функции и в этом случае изобразятся одною и тою же параболой, имеющей вершину на оси OX, но вторая из них передвинута от начала координат вершиною на 2 единицы влево, а третья — на 2 единицы вправо сравнительно с параболой, представляющей функцию $y = \frac{1}{2}x^2$. Аналогично, можно сделать общее заключение относительно функции $y = a(x + m)^2$; она тоже представляется такой же параболой, как и функция $y = ax^2$, но сдвинутой параллельно самой себе вправо или влево по оси абсцисс, в зависимости от знака m.

От рассмотрения этих частных случаев можно, наконец, перейти к графическому представлению полных функций второй степени, т. е. функций вида

$$y = x^2 + px + q,\ y = ax^2 + bx + c,$$

где ни один коэфициент не равен нулю. Первая из них может быть представлена в виде:

$$y = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p^2}{4} - q\right)$$

и представляет параболу вида, соответствующую функции $y = x^2$, но передвинутую по оси абсцисс вправо или влево, в зависимости от знака p, на расстояние $\frac{p}{2}$ и поднятую или опущенную по направлению оси ординат на расстояние $\left(\frac{p^2}{4} - q\right)$, в зависимости от знака этого двучлена. Например, рассматривая функцию $y = x^2 - 5x + 6$, мы можем представить ее в виде:

$$y = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{25}{4} - 6\right), \quad \text{или} \quad y = \left(x - 2\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4},$$

и следовательно, график ее представляет параболу такого же вида, как и для функции $y = x^2$, но передвинутую вниз вправо на $2\frac{1}{2}$ деления и опущенную вниз на $\frac{1}{4}$. Точно так же функцию $y = x^2 + 3x + 2$ можно представить в виде

$$y = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{9}{4} - 2\right),$$

и она изобразится подобною же параболой, но сдвинутой на $\frac{3}{2}$ деления влево и опущенной вниз на $\frac{1}{4}$.

Аналогично функцию вида $y = ax^2 + bx + c$ можно представить в виде:

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right),$$

и, следовательно, она представится такою же параболой, как и функция $y = ax^2$, но сдвинутой вправо или влево на расстояние $\frac{b}{2a}$ и опущенной или поднятой на расстояние $\left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)$, в зависимости от знаков этих количеств. Так, представляя функцию $y = 2x^2 - 5x + 3$ в виде уравнения

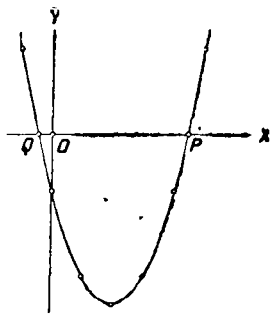
$$y = 2\left[\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \left(\frac{25}{16} - \frac{3}{2}\right)\right] = 2\left[\left(x - 1\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}\right],$$

видим, что оно представляет параболу $y=2x^2$, передвинутую вправо на $1\frac{1}{4}$ и опущенную вниз на $\frac{1}{16}$ деления.

Необходимо, чтобы учащиеся, проходя данный отдел, исследовали возможно больше функций второй степени различного состава с помощью вычерчивания их графиков на миллиметровой бумаге.

§ 58. Графическое решение квадратных уравнений.

Выведенными свойствами графиков трехчлена второй степени можно воспользоваться для графического решения квадратных уравнений. Хотя этот способ, так же как и в применении к решению уравнений первой степени, не дает возможности находить корни уравнения с большой степенью точности, однако ознакомление с ним учащихся имеет важное значение, так как способствует наилучшему пониманию свойств квадратного уравнения и квадратной функции. Кроме того оно по своей простоте и наглядности обычно возбуждает у учащихся большой интерес.



Черт. 13.

Способов для графического решения квадратных уравнений может быть несколько. Пусть имеем уравнение $x^2+px+q=0$; приравнивая левую часть его функции y, получим: $y=x^2+px+q$. Решить данное уравнение — значит найти такие значения x, при которых данная функция y обращается в нуль. Поэтому можно начертить график функции y и искать его пересечение с осью абсцисс, так как именно для всех точек этой оси $y=0$. Если это пересечение будет в двух точках, то уравнение имеет 2 действительных корня; если график только коснется оси абсцисс в одной точке, то — 2 равных корня, и если совсем не пересечет, — 2 мнимых корня.

Так, имея уравнение $x^2-4x-2=0$, мы можем построить график функции $y=x^2-4x-2$ по точкам:

$$x=-1,\quad 0,\quad 1,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\quad 5,\ldots;$$

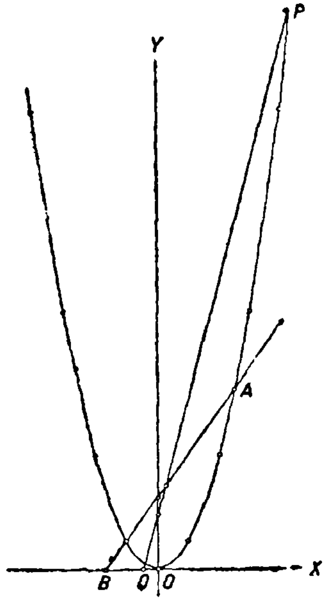
будем иметь

$$y=3,\quad -2,\quad -5,\quad -6,\quad -5,\quad -2,\quad 3\ldots$$

Построив соответственные точки и соединив их непрерывной линией, будем иметь график данной функции (черт. 13). Этот график пересекает оси абсцисс в точках P и Q, абсциссы которых приблизительно равны 4,4 и —0,4. Поэтому корни уравнения будут $x_1=4{,}4$ и $x_2=-0{,}4$.

Но можно уравнение $x^2+px+q=0$ решать и иначе. Именно, представим его в виде $x^2=-px-q$ и составим две функции: $y=x^2$ и $y=-px-q$. Те значения x, при котором обе функции получают равные значения, и будут корнями данного уравнения. Но первое уравнение графически изображается параболой $y=x^2$, а второе прямою $y=-px-q$; следовательно, корни уравнения будут служить абсциссами общих точек обеих линий, т. е. точек их пересечения. Решая, например, этим способом вышеприведенное уравнение $x^2-4x-2=0$, получим $x^2=4x+2$; полагая $y=x^2$ и $y=4x+2$, построим параболу по первому уравнению и прямую по второму (черт. 14). В точках пересечения ординаты обоих графиков попарно будут одинаковы; абсциссы же их будут приблизительно те же, что и при первом способе решения, т. е. $x_1=4{,}4$ или $x_2=-0{,}4$. Преимущество этого второго способа решения состоит в том, что один из графиков, именно парабола, остается без изменения при решении всех подобных задач; его можно начертить на миллиметровой бумаге и, вырезав, применять для решения всех уравнений вида $x^2+px+q=0$. Так, для решения уравнения $2x^2-3x-5=0$, или $x^2-\frac{3}{2}x-\frac{5}{2}=0$, составляем функции $y=x^2$ и $y=\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}$ и, пользуясь прежним чертежом параболы, проводим на нем линию, выражаемую уравнением $y=\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}$, пересекающую параболу в точках A и B. Абсциссы этих точек будут корнями данного уравнения; получим:

$$x_1=\frac{5}{2},\ x_2=-1.$$



Черт. 14.

Наконец, третий способ графического решения квадратного уравнения $x^2+px+q=0$ состоит в том, что мы придаем ему вид

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p^2}{4}-q\right)=0, \quad \left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\frac{p^2}{4}-q,$$

и вводим функции:

$$y=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 \quad \text{и} \quad y=\frac{p^2}{4}-q.$$

Первая из них представляет параболу, такую же, как и $y=x^2$, но передвинутую, в зависимости от знака p, вправо или влево на расстояние $\frac{p}{2}$, а вторая — прямую, проходящую параллельно оси абсцисс на расстоянии, равном $\frac{p^2}{4}-q$, точки их пересечения и будут иметь абсциссы, равные корням данного уравнения. Так, решая этим способом то же уравнение $x^2-4x-2=0$, имеем:

$$(x-2)^2-6=0 \quad \text{или} \quad (x-2)^2=6.$$

Графическое решение сводится к построению параболы: $y=(x-2)^2$ и прямой: $y=6$ (черт. 15). Пересечение этих линий в точках P и Q дает корни данного уравнения снова приблизительно:

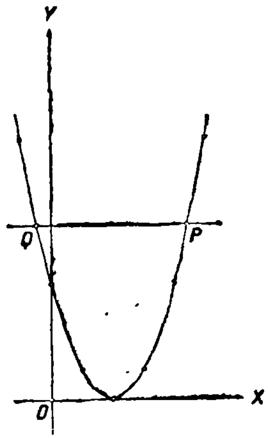
$$x_1=4{,}4 \quad \text{и} \quad x_2=-0{,}4.$$

Решая одним из изложенных способов уравнение $x^2-2x+9=0$, найдем, что парабола и прямая не пересекаются, откуда заключаем, что уравнение имеет мнимые корни.

В случае, когда прямая коснется параболы, корни уравнения будут равными. Необходимо проделать с учащимися возможно большее число примеров на все перечисленные случаи графического решения квадратных уравнений, отметив, что получить мнимые корни этим способом нельзя.

§ 59. Биквадратные уравнения.

Изучив способы решения уравнений первой и второй степеней, учащиеся обычно интересуются вопросом, как же решаются уравнения более высоких степеней. Ответом на эту естественную любознательность может быть указание преподавателя на то, что хотя общие способы для решения уравнений высших степеней по их трудности в средней школе изучены быть не могут, однако многие уравнения степени выше второй могут быть решены при помощи известных учащимся приемов решения уравнений первой степени и квадратных. Так как при решении уравнений высших степеней элементарными приемами выясняются многие их основные свойства, то названный отдел имеет важное научное и педагогическое значение. При прохождении его должны быть выдвинуты и подчеркнуты следующие основные приемы для решения уравнений высших степеней: 1) метод подстановки, 2) метод разложения на множители, 3) соединение вместе двух названных методов.



Черт. 15.

Начинается изучение уравнений высших степеней с биквадратного уравнения, т. е. уравнения вида: $ax^4+bx^2+c=0$ или, в приведенной форме: $x^4+px^2+q=0$.

Сначала следует решить несколько несложных биквадратных уравнений с числовыми коэфициентами, причем учащиеся обычно сами легко догадываются, что для решения данного уравнения необходимо в нем квадрат неизвестного x^2 принять за новое неизвестное количество y, после чего биквадратное уравнение приводится к квадратному. Затем следует указать, что такая подстановка, действительно, в самом общем случае решает вопрос. Подстановка $y=x^2$ приводит биквадратное уравнение $x^4+px^2+q=0$ к квадратному: $y^2+py+q=0$, решив которое, получим два корня:

$$y_1=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q} \quad \text{и} \quad y_2=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},$$

а заменив этими значениями y в равенстве $y=x^2$, получим для x четыре корня:

$$x_1=\sqrt{-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}}; \quad x_2=\sqrt{-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}};$$

$$x_3=-\sqrt{-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}}; \quad x_4=-\sqrt{-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}}.$$

Аналогично могут быть выведены формулы для решения неприведенного биквадратного уравнения $ax^4+bx^2+c=0$. Отсюда учащиеся видят, что уравнение четвертой степени, в данном случае биквадратное, имеет 4 корня. Преподаватель может при этом напомнить, что уравнение первой степени имеет один корень, а квадратное — два, и сообщить без доказательства общую теорему алгебры о том, что всякое уравнение имеет столько корней, сколько единиц в показателе наивысшей степени неизвестного. Далее следует приступить к исследованию корней биквадратного уравнения, пользуясь для этого рассмотрением корней вспомогательного уравнения, содержащего y. Здесь могут представиться три основных случая:

1) Если $\frac{p^2}{4}-q<0$, то корни вспомогательного уравнения будут мнимыми, а потому и все корни биквадратного уравнения — мнимые. Например, уравнение $x^4-6x^2+25=0$, приводящееся к квадратному уравнению $y^2-6y+25=0$, имеющему мнимые корни $y=3\pm\sqrt{-16}$, само имеет мнимые корни.

2) Если $\frac{p^2}{4}-q=0$, то $x_1=x_3$ и $x_2=x_4$, т. е. в этом случае корни биквадратного уравнения будут попарно равными. При этом, в зависимости от знака p, они будут или все действительные, или все мнимые. Например, уравнение $x^4-6x^2+9=0$, у которого вспомогательное уравнение $y^2-6y+9=0$ имеет равные корни $y_1=y_2=3$, имеет попарно равные корни:

$$x_1=x_3=\sqrt{3};\quad x_2=x_4=-\sqrt{3}.$$

3) Если $\frac{p^2}{4}-q>0$, то оба корня вспомогательного уравнения действительны. Но при этом они могут быть или оба положительны, или оба отрицательны, или один — положительный, а другой — отрицательный. В первом случае все четыре корня биквадратного уравнения будут действительные, во втором — все мнимые, а в третьем — два корня действительных и два мнимых.

Примеры:

1) $x^4-13x^2+36=0$.

Здесь корни вспомогательного уравнения $y^2-13y+36=0$ — положительны, $y_1=9$, $y_2=4$, а потому все корни биквадратного уравнения действительны:

$$x_1=3,\quad x_2=-3;\quad x_3=2,\quad x_4=-2;$$

2) $x^4+5x^2+6=0$.

Корни вспомогательного уравнения $y^2+5y+6=0$ оба отрицательны, именно: $y_1=-2$; $y_2=-3$, следовательно, корни биквадратного уравнения мнимы:

$$x_1=\sqrt{-2},\quad x_2=-\sqrt{-2};\quad x_3=\sqrt{-3};\quad x_4=-\sqrt{-3}.$$

3) $x^4-5x^2-6=0$.

Здесь $y_1=6$; $y_2=-1$, а потому данное уравнение имеет два действительных корня:

$x_1=\sqrt{6}$, $x_2=-\sqrt{6}$, и два мнимых: $x_3=\sqrt{-1}$ и $x_4=-\sqrt{-1}$.

Из этого исследования выводится заключение, что корни биквадратного уравнения могут быть или все действительные, или два мнимых и два действительных, или все четыре — мнимые. Отсюда вытекает, что мнимые корни в уравнениях высших степеней, как и в квадратном уравнении, могут быть лишь попарно *сопряженными*. Другое заключение, вытекающее из непосредственного рассмотрения корней, то, что они всегда входят попарно равными, но с противоположными знаками. Последнее замечание позволяет немедленно вывести заключение, что сумма всех корней биквадратного уравнения всегда равна нулю. С другой стороны, так как произведение корней биквадратного уравнения должно быть равно произведению корней вспомогательного квадратного уравнения $y^2+py+q=0$, а произведение корней последнего уравнения равно его свободному члену, то и произведение всех корней приведенного биквадратного уравнения равно свободному его члену. Для неприведенного биквадратного уравнения $ax^4+bx^2+c=0$ будем иметь:

$$x_1+x_2+x_3+x_4=0 \quad \text{и} \quad x_1x_2x_3x_4=\frac{c}{a}.$$

Наконец, замечая, что

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=(\sqrt{y_1})^2+(-\sqrt{y_1})^2+(\sqrt{y_2})^2+(-\sqrt{y_2})^2=$$
$$=2(y_1+y_2),$$

и имея в виду, что $y_1+y_2=-p$, находим, что для уравнения ax^4+ $+bx^2+c=0$ сумма квадратов всех корней равна $-\frac{2b}{a}$, а для приведенного $x^4+px^2+q=0$ имеем $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=-2p$, т. е. и здесь симметрические функции корней уравнения выражаются рационально через его коэфициенты.

Рассматривая более подробно общую формулу решения биквадратного уравнения $x=\pm\sqrt{-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}}$, мы видим, что она выражает неизвестное при помощи двойного радикала, т. е. в довольно сложной форме. Но мы видели (стр. 130), что в некоторых случаях двойной квадратный радикал может быть заменен суммою или разностью двух простых квадратных радикалов. Именно, мы имели:

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}},$$
$$\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}-\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}},$$

причем условием, чтобы двойной радикал распался на два простых квадратных радикала, является требование, чтобы a^2-b было полным квадратом. Прилагая это условие к предыдущей формуле для x, видим, что в данном случае

$$a=-\frac{p}{2}, \quad b=\frac{p^2}{4}-q,$$

откуда

$$a^2-b=\frac{p^2}{4}-\left(\frac{p^2}{4}-q\right)=q,$$

т. е. свободный член биквадратного уравнения должен быть полным квадратом для того, чтобы двойной радикал в формуле для решения квадратного уравнения мог быть представлен в виде суммы двух квадратных корней.

То же самое условие можно вывести и непосредственно, решая биквадратное уравнение способом разложения левой его части на множители. Действительно, имея уравнение $x^4+px^2+q=0$, можно представить его в виде:

$$(x^2+q)^2-(2qx^2-px^2)=0$$

или

$$(x^2+q)^2-x^2(2q-p)=0;$$

разлагая левую часть на множители, имеем:

$$\left(x^2+q+x\sqrt{2q-p}\right)\left(x^2+q-x\sqrt{2q-p}\right)=0,$$

откуда найдем:

$$x^2+x\sqrt{2q-p}+q=0 \quad \text{и} \quad x^2-x\sqrt{2q-p}+q=0,$$

и корни биквадратного уравнения представятся действительно алгебраическою суммою двух квадратных корней:

$$x_{1,2}=-\frac{\sqrt{2q-p}}{2}\pm\sqrt{\frac{2q-p}{4}-q},$$

$$x_{3,4}=+\frac{\sqrt{2q-p}}{2}\pm\sqrt{\frac{2q-p}{4}-q}.$$

Ввиду этого, когда свободный член биквадратного уравнения есть полный квадрат, уравнение следует решать не способом подстановки, а приведенным способом разложения на множители, дающим результат в более простом виде. Так, решая уравнение $x^4-14x^2+9=0$ подстановкою $y=x^2$, получим:

$$x=\pm\sqrt{7\pm\sqrt{40}}.$$

Прилагая же способ разложения на множители, найдем:

$$x^4-14x^2+9=(x^2+3)^2-(14x^2+6x^2)=(x^2+3)^2-20x^2;$$

поэтому данное уравнение можно представить в виде:

$$\left(x^2+x\sqrt{20}+3\right)\left(x^2-x\sqrt{20}+3\right)=0,$$

откуда

$$x^2+x\sqrt{20}+3=0 \quad \text{и} \quad x^2-x\sqrt{20}+3=0.$$

Решая эти уравнения, найдем:

$$x_{1,2}=-\sqrt{5}\pm\sqrt{2}, \quad x_{3,4}=\sqrt{5}\pm\sqrt{2}.$$

Еще пример:

$$x^4-4ax^3+[2(a-n)]^2=0.$$

Представляем уравнение в виде:

$$[x^2+2(a-n)]^2-4x^2[a-(a-n)]=0$$

или

$$[x^2+2(a-n)]^2-4nx^2=0.$$

Разлагая на множители, имеем:

$$[x^2+2(a-n)+2x\sqrt{n}][x^2+2(a-n)-2x\sqrt{n}]=0,$$

откуда

$$x_{1,2}=-\sqrt{n}\pm\sqrt{2a-n}, \quad x_{3,4}=+\sqrt{n}\pm\sqrt{2a-n}.$$

§ 60. Уравнения высших степеней.

Методы подстановки и разложения на множители, прилагаемые при решении биквадратных уравнений, прилагаются и для решения весьма большого числа уравнений высших степеней. При этом часто решение может быть получено различными способами; иногда оно требует от учащихся некоторой изобретательности и находчивости, а потому уравнения высших степеней представляют полезнейший учебный материал для усвоения алгебры.

Рассмотрим примеры решения уравнений методом подстановки:

1) $\left(\frac{5x-3}{3x+1}\right)^4-3\left(\frac{5x-3}{3x+1}\right)^2+2=0.$

Это уравнение, напоминающее обыкновенное биквадратное, очевидно, должно решаться аналогичною подстановкой

$$y=\left(\frac{5x-3}{3x+1}\right)^2.$$

Сделав подстановку, получим уравнение $y^2-3y+2=0$, корни которого $y_1=1, y_2=2$. Далее имеем:

$$\left(\frac{5x-3}{3x+1}\right)^2=1, \text{ откуда } \frac{5x-3}{3x+1}=\pm 1;$$

это дает $x_1=2$, $x_2=\frac{1}{4}$; затем, полагая

$$\frac{5x-3}{3x+1}=\pm\sqrt{2},$$

получим еще два корня:

$$x_3=\frac{1}{7}(9-4\sqrt{2}) \quad \text{и} \quad x_4=\frac{1}{7}(9+4\sqrt{2}).$$

2) $(x^2+2x-3)^2+3(x^2+2x+2)-13=0.$

Здесь следует положить $x^2+2x=y$; получим:

$$(y-3)^2+3(y+2)-13=0, \quad \text{или} \quad y^2-3y+2=0.$$

Корни этого уравнения, как и в предыдущем примере:

$$y_1=1, \ y_2=2,$$

а потому получаем два уравнения:

$$x^2+2x=2, \quad \text{откуда} \quad x_{1,2}=-1\pm\sqrt{3},$$

и

$$x^2+2x=1, \quad \text{откуда} \quad x_{3,4}=-1\pm\sqrt{2}.$$

Решение последнего уравнения при помощи раскрытия скобок привело бы учащегося к уравнению четвертой степени, решаемого весьма сложно. Иногда, однако, раньше чем сделать подстановку, необходимо в уравнении раскрыть скобки и произвести некоторые преобразования.

3) Найти четыре целых последовательных числа, произведение которых равно 120.

Обозначая первое из искомых чисел x, составим уравнение:

$$x(x+1)(x+2)(x+3)=120.$$

Перемножим между собою крайние и средние множители; получим:

$$(x^2+3x)(x^2+3x+2)=120.$$

Здесь, очевидно, следует прибегнуть к подстановке: $x^2+3x=z$; получится уравнение: $z(z+2)=120$, корни которого легко найти в уме: $z_1=10$; $z_2=-12$. Следовательно, или $x^2+3x-10=0$, откуда $x_1=2$, $x_2=-5$ или $x^2+3x+12=0$, дающее мнимые корни.

Следовательно, четыре искомых числа будут 2, 3, 4, 5 или же $-5, -4, -3, -2$; произведение их, действительно, 120.

Рассмотрим теперь примеры уравнений, решаемых методом разложения на множители:

4) $x^3-x^2-x+1=0$.

Применяя метод группировки, можем представить уравнение в виде

$$(x^3-x^2)-(x-1)=0 \text{ или } x^2(x-1)-(x-1)=0,$$

иначе:

$$(x-1)(x^2-1)=0.$$

Отсюда имеем уравнение $x-1=0$, дающее корень $x_1=1$ и уравнение $x^2-1=0$, откуда получим еще два корня $x_2=1$ и $x_3=-1$. Итак, данное уравнение имеет 3 корня, из которых два, x_1 и x_2, оказываются равными.

5) $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0$.

Разлагая левую часть на множителей, имеем:

$$x^4(x+1)+x^2(x+1)+(x+1)=(x+1)(x^4+x^2+1)=0,$$

откуда

$$x+1=0 \quad \text{и} \quad x^4+x^2+1=0.$$

Из первого уравнения имеем корень $x_1=-1$. Второе уравнение — биквадратное; так как в нем свободный член есть полный квадрат, то решаем и его разложением на множители. Будем иметь:

$$x^4+x^2+1=(x^2+1)^2-x^2=(x^2+x+1)(x^2-x+1).$$

Отсюда

$$x^2+x+1=0; \quad x_{2,3}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$$

и

$$x^2+x+1=0; \quad x_{4,5}=\frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}.$$

Таким образом, данное уравнение пятой степени имеет 5 корней, из которых один — действительный и 4 мнимых. Последнее можно было предвидеть, так как уравнение: $x^4+x^2+1=0$, где в левой части его стоит сумма трех квадратов, а в правой — нуль, очевидно, не может удовлетворяться никакими действительными числами.

Иногда для разложения левой части уравнения на множители оказывается необходимым какой-нибудь член его разбить на два или сделать какое-либо иное преобразование.

6) $9x^3 - 13x - 6 = 0$.

Разбивая средний член уравнения на два, представим его в виде:

$$(9x^3 - 4x) - (9x + 6) = 0;$$

далее имеем:

$$(9x^2 - 4)x - 3(3x + 2) = 0,$$

или

$$(3x + 2)(3x - 2)x - 3(3x + 2) = 0,$$

откуда

$$(3x + 2)[(3x - 2)x - 3] = 0,$$

что ведет к двум уравнениям:

$$3x + 2 = 0 \text{ и } 3x^2 - 2x - 3 = 0,$$

решив которые, найдем корни

$$x_1 = -\frac{2}{3},\ x_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{10}}{3}.$$

Из приведенных примеров видно, что решение уравнений высших степеней методом разложения на множители требует хорошего знания разложения на множители алгебраических выражений, а потому полезно перед решением уравнений высших степеней названный отдел повторить. В частности, необходимо повторить формулы сокращенного умножения, в том числе разложение на множители суммы и разности кубов двух количеств.

7) $ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$.

Это уравнение, особенность которого та, что в нем *коэфициенты* членов, равноотстоящих от начала и конца, равны между собой, называется *возвратным*. Разлагая левую часть его на множители, имеем:

$$a(x^3 + 1) + bx(x + 1) = 0,$$

или

$$a(x + 1)(x^2 - x + 1) + bx(x + 1) = 0,$$

иначе:

$$(x + 1)[ax^2 + (b - a)x + a] = 0,$$

отсюда

$$x + 1 = 0; \quad x_1 = -1$$

и

$$ax^2 + (b - a)x + a = 0,$$

что дает корни:

$$x_{2,3} = \frac{a - b \pm \sqrt{b^2 - 2ab - 3a^2}}{2a}.$$

Особый вид уравнений, при решении которых применяется разложение на множители, представляют уравнения двучленные, т. е. уравнения вида:

$$ax^m + b = 0.$$

Деля обе части его на a, можно придать ему вид $x^m = -\frac{b}{a}$, а, обозначая *абсолютную величину* этой дроби через c, привести к одному из двух видов:

$$x^m = c \quad \text{или} \quad x^m = -c.$$

Полагая затем $x = y\sqrt[m]{c}$, где $\sqrt[m]{c}$ — арифметический корень, можно эти уравнения по сокращении на c привести к виду:

$$y^m = 1 \quad \text{и} \quad y^m = -1.$$

Итак, двучленному уравнению всегда можно придать вид:

$$x^m = \pm 1.$$

В высшей алгебре дается общий способ для решения двучленных уравнений и разъясняются их свойства. Однако и способами элементарной алгебры многие из этих уравнений тоже могут быть решены. В частности, в средней школе необходимо рассмотреть решение двучленных уравнений второй, третьей и четвертой степеней.

a) Уравнение $x^2 - 1 = 0$ имеет корни $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, а уравнение $x^2 + 1 = 0$ — корни $x_{1,2} = \pm\sqrt{-1}$.

b) Уравнение $x^3 - 1 = 0$ разложением на множители приводится к виду:

$$(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0,$$

т. е. к двум уравнениям $x - 1 = 0$ и $x^2 + x + 1 = 0$, корни которых:

$$x_1 = 1; \quad x_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}.$$

c) Точно так же, решая разложением на множители уравнение $x^3 + 1 = 0$, найдем три корня:

$$x_1 = -1; \quad x_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}.$$

d) Уравнение $x^4 - 1 = 0$ разложением на множители приводится к виду:

$$(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1) = 0$$

и имеет четыре корня:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = \sqrt{-1} \quad \text{и} \quad x_4 = -\sqrt{-1}.$$

e) Уравнение $x^4 + 1 = 0$ можно представить в виде:

$$(x^4 + 2x^2 + 1) - 2x^2 = 0,$$

или

$$(x^2 + 1)^2 - (x\sqrt{2})^2 = 0,$$

откуда имеем два квадратных уравнения:

$$x^2 + x\sqrt{2} + 1 = 0 \quad \text{и} \quad x^2 - x\sqrt{2} + 1 = 0$$

из которых получаем 4 корня:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-1}}{\sqrt{2}} \quad \text{и} \quad x_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{-1}}{\sqrt{2}}.$$

Подобно этим уравнениям, разложением на множители могут быть решены и многие двучленные уравнения более высоких степеней, например $x^6 \pm 1 = 0$, $x^8 \pm 1 = 0$ и др.

Некоторые уравнения более сложного вида простыми преобразованиями могут быт приведены к двучленным, например:

$$x^3 + 3ax + 3a^2x = b^3.$$

Прибавляя к обеим частям уравнения по a^3, имеем:

$$(x + a)^3 = a^3 + b^3,$$

полагая $x + a = y$; $a^3 + b^3 = q$, приведем его к двучленному уравнению $y^3 = q$, т. е. разобранному выше уравнению вида b. Решениями его будут:

$$x_1 = -a + \sqrt[3]{a^3 + b^3}; \quad x_{2,3} = -a + \frac{\sqrt[3]{a^3 + b^3}\,(-1 \pm \sqrt{-3})}{2}.$$

К решению двучленных уравнений приводится, в свою очередь, решение трехчленных уравнений, т. е. имеющих вид $ax^{2m} + bx^m + c = 0$. Частным видом этого уравнения, при $m = 2$, является биквадратное уравнение. Для решения его применяется подстановка $x^m = y$, которая приводит его к квадратному уравнению:

$$ay^2 + by + c = 0.$$

Найдя отсюда значения y_1 и y_2, подставляем их поочередно в уравнение $x^m = y$, причем получим два двучленных уравнения:

$$x^m = y_1 \quad \text{и} \quad x^m = y_2.$$

Примеры:

1) $x^6 - 19x^3 - 216 = 0$.

Полагая здесь $x^3 = y$, получим:

$$y^2 - 19y - 216 = 0,$$

откуда $y_1 = 27$ и $y_2 = -8$. Поэтому имеем два **двучленных уравнения**:

$$x^3 = 27 \quad \text{и} \quad x^3 = -8.$$

Из первого уравнения найдем:

$$x_1 = 3; \quad x_{2,3} = \frac{3(-1 \pm \sqrt{-\ })}{2},$$

из второго:

$$x_4 = -2; \quad x_{5,6} = -(1 \pm \sqrt{-3}).$$

2) $x^8 - 3x^4 - 208 = 0$.

Полагая $x^4 = y$, получим квадратное уравнение:

$$y^2 - 3y - 208 = 0, \quad \text{откуда} \quad y_1 = 16, \quad y_2 = -13.$$

Подставляя последовательно эти значения вместо y в уравнение $x^4 = y$, получим два двучленных уравнения четвертой степени, из которых найдем 8 корней:

$$x_{1,2} = \pm 2; \quad x_{3,4} = \pm\sqrt{-2}; \quad x_{5,6} = \pm\sqrt[4]{-13};$$

$$x_{7,8} = \pm\sqrt{-\sqrt{-13}};$$

ГЛАВА XIII.

МНИМЫЕ И КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА.

§ 61. Понятие о мнимых числах.

Уже при извлечении корня из чисел учащиеся узнают, что квадратный корень из отрицательного числа не может быть выражен ни положительным, ни отрицательным числом, а потому представляет собою число некоторой новой природы, называемое *мнимым*. При решении двучленных квадратных уравнений они снова неизбежно сталкиваются с мнимыми числами, а при изучении полных квадратных уравнений — с числами комплексными, составленными из действительной и мнимой части. Более подробное изучение квадратных уравнений и, в особенности, уравнений высших степеней требует уже до некоторой степени и уменья производить действия над мнимыми комплексными числами (например находить сумму комплексных корней квадратного или биквадратного уравнения и т. п.). Ввиду этого, хотя полная теория мнимых чисел и действий над ними не может быть введена в программу средней школы, основные сведения о них непременно должны быть сообщены учащимся. Сами же преподаватели, кроме тех сведений, которые обычно сообщаются в высшей школе в курсах введения в анализ и высшей алгебры, должны ознакомиться еще с учением о комплексных числах как о парах чисел третьей ступени. Такое ознакомление необходимо для завершения знакомства с развитием понятия о числе на основании учения о парах чисел. Это учение излагается в указанных уже выше книгах: А. В. В а с и л ь е в, Введение в анализ, ч. II; С. П. В и н о г р а д о в, Повторительный курс алгебры; В е б е р и В е л л ь ш т е й н, Энциклопедия элементарной математики, ч. I; В. К о м а р о в, Теоретические основы арифметики и алгебры и др.

В программу математики в средней школе введено в 8-м классе только понятие о мнимых корнях квадратного уравнения, а в 9-м классе мнимые и комплексные количества, действия над ними и их геометрическое представление. Ясно, что так как в программу 8-го класса включены не только квадратные, но и биквадратные, двучленные и трехчленные уравнения, требующие более широкого знакомства с учением о мнимых числах, то элементы его должны излагаться уже в 8-м классе. Это и не представит какого-либо затруднения для учащихся, так как элементарная теория мнимых чисел отличается большою простотой.

Приступая к ее изучению, преподаватель должен напомнить учащимся, что в связи с невозможностью выполнить обратное действие при изучении алгебры уже много раз приходилось вводить числа нового рода; такое введение требовалось не только теоретическими соображениями, но и практическою потребностью решения различных реальных и жизненных задач. Таким образом, были введены числа дробные, отрицательные и иррациональные. Решение квадратных уравнений и, в частности, действие извлечения квадратного корня требуют в целях общности введения чисел еще нового рода — мнимых и комплексных, которые оказываются полезными и в ряде практических вопросов и задач, хотя практические приложения их и не могут быть выявлены в достаточной степени в элементарной математике. После этого следует напомнить учащимся известное им уже ранее определение мнимого числа, именно, что мнимым числом называется корень четной степени из отрицательного количества, например:

$$\sqrt{-16},\quad \sqrt{-3};\quad \sqrt[6]{-5};$$

вообще $\sqrt[2n]{-a}$, где $a>0$, суть мнимые числа. Однако можно показать, что, распространяя на мнимые числа правила действия извлечения квадратного корня из алгебраических количеств, можно всякое мнимое число привести к одному и тому же виду, именно к $\sqrt{-1}$. Так,

$$\sqrt{-16}=4\sqrt{-1},\qquad \sqrt{-3}=\sqrt{+3}\,\sqrt{-1},\quad \sqrt[6]{-5}=\sqrt[3]{\sqrt{5}\sqrt{-1}},$$

вообще

$$\sqrt[2n]{-a}=\sqrt[n]{\sqrt{a}\cdot\sqrt{-1}},$$

где $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{a}$ — арифметические корни. Поэтому выражение $\sqrt{-1}$ является основным в теории мнимых чисел, оно называется мнимою единицей и обозначается специальным символом i (от французского слова *imaginaire* — мнимый; в электротехнике, где буква i используется для обозначения силы тока, оно обозначается j). Поэтому вышеприведенные мнимые числа могут быть представлены так:

$$4i;\quad i\sqrt{3};\quad \sqrt[3]{i\sqrt{5}};\quad \text{вообще}\quad \sqrt[n]{i\sqrt{a}}.$$

Символ i вводится под условием, что $i^2=-1$, поэтому четыре первых степени этого числа имеют следующие значения:

$$i^1=i;\quad i^2=-1;\quad i^3=i^2\cdot i=-i;\quad i^4=(i^2)^2=1,$$

прочие же степени его приводятся к одной из первых четырех, например $i^{26}=-1$.

В противоположность мнимым числам все ранее введенные в алгебру числа: целые, дробные, положительные, отрицательные, рациональные и иррациональные — называются действительными, или вещественными. При решении полных квадратных уравнений могут получиться, как известно, числа, представляющие собою соединение действительного числа с мнимым; например, решая уравнение $x^2-4+13=0$, получим $x=2\pm 3i$. Такие числа называются *комплексными*, т. е. составленными. Общий их вид $a+bi$, где a и b — числа действительные. Когда $a=0$, из общего выражения комплексного числа получаем bi — чисто мнимое число; когда $b=0$, имсем a — число действительное. Таким образом, комплексное число является общим видом по отношению к числам действительным и мнимым, обнимая их как частные случаи, так что здесь мы имеем новое обобщение понятия о числе.

Введя новые числа, мы должны, так же как и в других случаях, дать определение их равенства и неравенства, а также установить правила производства над ними основных действий: сложения и умножения. Так как комплексное число $a+bi$ представляет собою соединение двух разнородных чисел — действительного a и мнимого bi, которые слиться между собою не могут, то равенство двух комплексных чисел естественно определяется условием, чтобы их действительные части и коэфициенты при мнимых частях были равны, т. е. $a+bi=a_1+b_1i$

тогда, когда $a = a_1$ и $b = b_1$. Отсюда, в частности, следует, что $a + bi = 0$, когда в отдельности $a = 0$ и $b = 0$, так как в этом случае мы можем положить $a + bi = 0 + 0i$. Комплексные числа вида $a + bi$ и $a - bi$, которые отличаются только знаками при мнимой части, называются сопряженными. Понятия „больше" и „меньше" относительно величин мнимых и комплексных чисел не устанавливаются.

§ 62. Действия над комплексными числами.

Основные действия — сложение и умножение комплексных чисел — условились производить по тем же правилам, как над алгебраическими двучленами, заменяя при этом i^2, как уже было упомянуто, через (-1); исходя из этого, легко видеть, что эти действия удовлетворяют законам переместительности, сочетательности и распределительности, а также что все действия над комплексными числами приводят, в общем случае, к выражениям тоже комплексного вида.

Так, составляя сумму двух комплексных чисел, имеем:

$$(a + bi) + (a_1 + b_1 i) = (a + a_1) + (b + b_1) i = M + Ni,$$

т. е. также комплексное число. Очевидно, то же будет иметь место и при сложении нескольких комплексных чисел, а также при вычитании. В частных случаях может получиться действительный результат; например:

$$(3 + 5i) + (7 - 5i) = 10;$$

сумма двух сопряженных комплексных чисел — всегда величина действительная:

$$(a + bi) + (a - bi) = 2a.$$

Подобным же образом, перемножая два комплексных числа, имеем:

$$(a + bi)(a_1 + b_1 i) = (aa_1 - bb_1) + (ab_1 + a_1 b) i = M + Ni,$$

т. е. число такого же вида; например:

$$(3 + 2i)(4 - i) = 14 + 5i.$$

Теорема, очевидно, может быть распространена на несколько множителей:

$$(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i)(a_3 + b_3 i) \ldots = M + Ni.$$

В частности, произведение двух сопряженных комплексных чисел — величина действительная:

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2.$$

Возведение комплексного числа в целую и положительную степень представляет собою частный случай умножения, именно — перемножение нескольких одинаковых множителей также приводит к комплексному числу; например:

$$(a + bi)^3 = (a^3 - 3ab^2) + (3a^2 b - b^3) i,$$

но в частных случаях и здесь может получиться действительный результат; например:

$$(1 + i\sqrt{3})^3 = -8.$$

Производя далее деление двух комплексных чисел, найдем:

$$\frac{a+bi}{a_1+b_1i}=\frac{(a+bi)(a_1-b_1i)}{a_1^2+b_1^2}=\frac{aa_1+bb_1}{a_1^2+b_1^2}+i\,\frac{a_1b-ab_1}{a_1^2+b_1^2}=M+Ni,$$

т. е. тоже комплексное число. В частном случае, когда $\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}$, будем иметь $N=0$ и результат деления будет действительным; например:

$$\frac{3+5i}{6+10i}=\frac{1}{2}.$$

Наконец легко убедиться, что извлечение корня из комплексного числа приводит к результату того же вида. Здесь проще всего дать доказательство от противного. Допустив, например, что

$$\sqrt[m]{a+bi}=A,$$

где A — число действительное, мы, возведя обе части равенства в m-ю степень, получили бы $a+bi=A^m$, что невозможно, так как всякая степень действительного числа есть количество действительное.

После изложения предыдущей теории необходимо проделать с учащимися ряд примеров на действия с мнимыми и комплексными числами, останавливаясь в особенности на тех случаях, когда в результате получается величина действительная.

Примеры:

1) $\sqrt{-27}+12\sqrt{-\frac{1}{3}}-5\sqrt{-3}=2i\sqrt{3};$

2) $\frac{a+bi}{a-bi}+\frac{a-bi}{a+bi}=\frac{2(a^2-b^2)}{a^2+b^2};$

3) $\frac{(a+bi)^2}{a-bi}-\frac{(a-bi)^2}{a+bi}=\frac{2b(3a^2-b^2)}{a^2+b^2}\,i;$

4) $\frac{9-i}{(1+i)^3}+\frac{9+i}{(1-i)^3}=-2;$

5) $(1+i)^4=-4;$

6) $\frac{(2+3i)^2}{2+i}=\frac{1}{5}(2+29i).$

После ознакомления учащихся с алгебраическими действиями над комплексными числами следует ознакомить их с геометрическим представлением мнимых чисел с помощью прямоугольной системы координат. Именно, комплексное количество $(a+bi)$ изображается на плоскости точкой M с координатами (a, b), причем соблюдается известное из тригонометрии и алгебры правило знаков. Таким образом, все действительные числа изобразятся точками, лежащими на оси абсцисс, все чисто мнимые — на оси ординат, комплексные же числа представятся точками плоскости координат. Желательно также дать учащимся понятие о геометрическом представлении суммы двух комплексных чисел с помощью точки, лежащей на конце диагонали параллелограма, построенного как на сторонах на линиях, соединяющих с началом координат точки, изображающие слагаемые. Таким образом, комплексные числа слагаются по общему правилу сложения векторов, применяемому в физике и механике.

§ 63. Приложение мнимых чисел.

В заключение отдела о мнимых числах следует разъяснить учащимся, что с их помощью могут быть решаемы различные вопросы относительно действительных чисел. В качестве примера возьмем произведение:

$$(a_1 + b_1 i)(a_1 - b_1 i)(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i).$$

Перемножая эти множители попарно в том порядке, как они написаны, мы получим,

$$(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2).$$

Если же умножим первый двучлен на третий, а второй на четвертый, то будем иметь:

$$[(a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i][(a_1 a_2 + b_1 b_2) - (a_1 b_2 + a_2 b_1) i] =$$
$$= (a_1 a_2 - b_1 b_2)^2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)^2.$$

Следовательно,

$$(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2)^2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)^2.$$

Это равенство показывает, что произведение двух чисел, из которых каждое есть сумма квадратов двух чисел, само представляет сумму двух квадратов; например, полагая

$$a_1 = 3; \quad b_1 = 1; \quad a_2 = 4; \quad b_2 = 3,$$

имеем:

$$(9 + 1)(16 + 9) = (12 - 3)^2 + (9 + 4)^2,$$

т. е. $10 \cdot 25 = 81 + 169$, что правильно.

В частности, если в предыдущей формуле положить $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$, она примет вид:

$$(a_1^2 + b_1^2)^2 = (a_1^2 - b_1^2)^2 + (2a_1 a_2)^2,$$

т. е. если какое-нибудь число представляет сумму двух квадратов, то и квадрат его также есть сумма двух квадратов; например:

$$10 = 3^2 + 1^2, \quad \text{и} \quad 10^2 = 6^2 + 8^2.$$

Подобным же образом можно было бы доказать, что произведение двух чисел, из которых каждое есть сумма четырех квадратов, само представляет сумму четырех квадратов, а также много других интересных теорем о действительных и, в частности, целых числах.

ГЛАВА XIV.

ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ.

§ 64. О равносильных уравнениях.

Из уравнений, приводящихся к квадратным, иррациональные уравнения имеют особенно важное значение, так как решение их требует рассмотрения существенно важного вопроса об эквивалентности уравнений. Поэтому при прохождении этого отдела необходимо пройти основные теоремы о равносильности уравнений. Из предыдущего учащиеся уже знают, что решение всякого уравнения сводится к постепенному преобразованию его в новое, более простое уравнение, имеющее те же корни; это преобразование продолжается до тех пор, пока не получится такое уравнение, корень которого очевиден. Преобразованиями, которые могут привести к этой цели, являются: прибавление к обеим частям или вычитание из них по одному и тому же количеству, умножение или деление обеих частей уравнения на одно и то же число, не равное нулю, возведение их в одинаковую степень и извлечение из них корня одной и той же степени. Приступая к изучению иррациональных уравнений, необходимо систематически и в общем виде рассмотреть применения указанных действий к уравнениям. При этом следует дать определение, что два уравнения мы называем равносильными, или эквивалентными, если все корни первого уравнения удовлетворяют и второму и, наоборот, все корни второго уравнения удовлетворяют первому. После этого доказываются следующие теоремы.

I. Если к обеим частям уравнения придать по одному количеству, безразлично — содержащему или не содержащему определяемое неизвестное количество, то новое уравнение будет равносильно прежнему. Действительно, обозначая основное уравнение $P=Q$, имеем после прибавления к обеим частям его по R, уравнение $P+R=Q+R$. Рассматривая это последнее уравнение, видим, что так как $R=R$ при всяких значениях неизвестного, то все те значения неизвестного, которые удовлетворяют первому уравнению, удовлетворяют и второму, а все значения, удовлетворяющие второму уравнению, удовлетворяют и первому, а потому оба уравнения эквивалентны. Доказав эту теорему, следует напомнить учащимся, что на ней основано перенесение членов уравнения из одной его части в другую с обратными знаками и, в частности, приведение его к виду $S=0$.

II. Если обе части уравнения умножить на количество, не равное нулю, то получится новое уравнение, равносильное прежнему. Действительно, умножая обе части уравнения $P=Q$ на некоторое число R, не равное нулю, и рассматривая получившееся уравнение $PR=QR$, видим, что они эквивалентны, так как первое из них можно представить в виде $P-Q=0$, а второе $(P-Q)R=0$, откуда ясно, что все те значения неизвестного, которые удовлетворяют первому уравнению, удовлетворяют и второму, и наоборот; значит, оба уравнения эквивалентны. В связи с этим следует напомнить учащимся, что на указанном свойстве уравнения основывается освобождение уравнений от дробей, сокращение обеих частей уравнения на одно и то же число и перемена знаков у всех членов уравнения на обратные. Но затем следует указать, что нельзя умножать обе части уравнения на нуль. Действительно, тогда мы из основного уравнения $P=Q$ получим $P\cdot 0=Q\cdot 0$, но это равенство есть тождество; правая и левая части его становятся равными при всяком значении неизвестного количества, так как произведение всякого числа на нуль есть нуль. Важнейшим следствием отсюда является то, что при умножении или делении обеих частей уравнения на выражение, содержащее неизвестное, мы получаем вообще уравнение, не равносильное данному. Так, если R содержит неизвестное количество, то уравнения $P=Q$ и $PR=QR$ не будут эквивалентны. Действительно, представляя последнее в виде $(P-Q)R=0$, мы видим, что оно удовлетворяется не только теми значениями неизвестного, которые обращают в нуль $P-Q$, но и теми, которые обращают в нуль R, т. е. корнями не только данного уравнения, но и уравнения $R=0$, которые могут и не быть корнями данного уравнения. Поэтому, умножив обе части уравнения на множителя, содержащего неизвестное количество, мы можем получить посторонние корни, не принадлежащие данному уравнению. Например, имея уравнение $x^2=4$ и умножив обе части его на $(x-1)$, получим уравнение: $x^2(x-1)=4(x-1)$ или $(x^2-4)\cdot(x-1)=0$, корнями которого будут $x_1=2$; $x_2=-2$ и $x_3=1$, тогда как корни первого уравнения суть $x_1=2$ и $x_2=-2$. Таким образом, третий полученный корень $x_3=1$ данному уравнению не принадлежит, а явился в результате умножения обеих частей его на функцию неизвестного, обращающуюся в 0 при $x=1$. Но умножение обеих частей уравнения на функцию неизвестного становится необходимым в тех случаях, когда неизвестное входит в знаменатель уравнения и мы от него освобождаемся; поэтому в таких случаях нужно, как это было уже упомянуто в § 38 этой книги, производить поверку полученных решений. Наоборот, разделив обе части уравнения на функцию неизвестного количества, мы рискуем потерять его некоторые корни. Поэтому вообще нельзя сокращать обе части уравнения на выражение, содержащее неизвестное. Например, если мы обе части уравнения $x^2(x-1)=4(x-1)$, корни которого, как мы видели, суть $2, -2$ и 1, сократим на $(x-1)$, то мы потеряем его корень $x=1$. Поэтому, сокращая обе части уравнения $PR=QR$ на функцию неизвестного R, надо к полученным корням оставшегося уравнения $P=Q$ присоединить и корни уравнения $R=0$.

III. Если обе части уравнения возвести в квадрат или вообще в одну и ту же степень m, то полученное уравнение в общем случае не будет эквивалентно прежнему. Действительно, возводя обе части уравнения $P=Q$ в квадрат, получим уравнение $P^2=Q^2$ или $(P+Q)(P-Q)=0$, следовательно имеем два уравнения: $P=-Q$ и $P=Q$; последнее уравнение совпадает с данным, но корни первого, $P=-Q$, могут и не удовлетворять данному уравнению. Поэтому и здесь необходимо полученные решения проверять подстановкою в данное уравнение. Возводя, например, в квадрат обе части уравнения $3x=4$, корнем которого является $x=\frac{4}{3}$, получим уравнение $9x^2=16$, у которого будет два корня $x_1=\frac{4}{3}$ и $x_2=-\frac{4}{3}$, причем второй корень является для данного уравнения посторонним.

Точно так же, возводя обе части того же уравнения $P=Q$ в какую-нибудь целую m-ю степень, мы получим уравнение $P^m=Q^m$, или $P^m-Q^m=0$, что можно представить в виде:

$$(P-Q)(P^{m-1}+P^{m-2}Q+P^{m-3}Q^2+\ldots+Q^{m-1})=0,$$

что ведет к двум уравнениям:

$$P=Q \text{ и } P^{m-1}+P^{m-2}Q+\ldots+Q^{m-1}=0.$$

Корни первого уравнения суть корни данного уравнения, но корни второго уравнения вообще не будут ему удовлетворять. Так, возведя обе части уравнения $x=1$ в четвертую степень, получим $x^4=1$, которое будет иметь 4 корня: $+1, -1, +i, -i$, тогда как данному уравнению удовлетворяет только первый из них. Наоборот, извлечение корня какой-либо степени из обеих частей уравнения $x^m = 1$ может привести к потере корней. Например, извлекая из обеих частей уравнения $x^3 = 1$ кубический корень, мы получим один корень $x = 1$, тогда как это уравнение, как было найдено в предыдущей главе, имеет еще корни $x = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

§ 65. Методы решения иррациональных уравнений.

Основным методом решения иррациональных уравнений является освобождение их от радикалов, т. е. приведение к рациональному виду. Общий способ освобождения уравнения от радикалов излагается в высшей алгебре. Однако и в элементарной алгебре имеется ряд способов для решения этой задачи. Главным из них является последовательное возведение обеих частей уравнения в одну и ту же степень до тех пор, пока все входящие в уравнение радикалы не уничтожатся. Так как при этом могут получиться посторонние решения, то полученные корни затем должны быть непременно проверены последующей подстановкою, и те из них, которые ему не удовлетворяют, должны быть отброшены. При этом для определенности корни, входящие в уравнение, рассматриваются как арифметические, т. е. берутся с теми знаками, с которыми они входят в уравнение. Может случиться, что ни один из полученных корней не удовлетворяет данному уравнению. Примеры последнего рода, к сожалению, почти не встречаются в наших учебных книгах по алгебре. Точно так же обычно в них приводятся только примеры освобождения уравнений лишь от квадратных радикалов. Поэтому далее мы приводим достаточно большое число примеров на уравнения различных типов, которые могут быть освобождены от иррациональности как возведением обеих частей в одну и ту же степень, так и разными искусственными приемами.

Примеры:

1) $\sqrt{x} - 3 = 0$.

Наиболее употребительным приемом для решения уравнения является уединение или изолирование радикала в какой-нибудь части уравнения. Перенося с этою целью известный член данного уравнения в правую сторону, имеем уравнение $\sqrt{x} = 3$, а возведя обе части его в квадрат, находим $x = 9$. Этот корень, очевидно, удовлетворяет данному уравнению.

2) $2\sqrt{x-1} + \sqrt{4x+5} = 9$.

Здесь полезно разъединить радикалы; получим:

$$2\sqrt{x-1} = 9 - \sqrt{4x+5}.$$

Возводя обе части этого уравнения в квадрат, найдем:

$$4(x-1) = 81 - 18\sqrt{4x+5} + 4x + 5;$$

откуда, уединяя радикал, найдем:

$$18\sqrt{4x+5}=90$$

или

$$\sqrt{4x+5}=5; \quad 4x+5=25.$$

Следовательно, $x=5$. Подстановкою убеждаемся, что и здесь корень удовлетворяет уравнению.

3) $\sqrt{36+x}=18+\sqrt{x}.$

От возведения обеих частей уравнения в квадрат получим:

$$36+x=324+36\sqrt{x}+x,$$

или, по упрощении, $\sqrt{x}=-8$. Отсюда $x=64$. Но, подставляя его в данное уравнение, получим:

$$\sqrt{36+64}=18+\sqrt{64}, \quad \text{или} \quad 10=26,$$

т. е. найденный корень не удовлетворяет данному уравнению, которое оказывается невозможным.

4) $\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{10}{3}.$

Возводя обе части уравнения в квадрат, имеем:

$$x+2+\frac{1}{x}=\frac{100}{9}, \quad \text{или} \quad x^2+2x+1=\frac{100}{9}x,$$

т. е.

$$x^2-\frac{82}{9}x+1=0,$$

откуда

$$x=\frac{41}{9}\pm\sqrt{\frac{1681}{81}-1},$$

следовательно

$$x_1=9, \quad x_2=\frac{1}{9}.$$

Здесь подстановка показывает, что оба корня пригодны для данного уравнения.

5) $x+\sqrt{x+5}=7.$

Уединяя корень, найдем:

$$\sqrt{x+5}=7-x,$$

отсюда

$$x+5=49-14x+x^4,$$

или

$$x^2-15x+44=0;$$

решая, имеем:

$$x_1=11; \quad x_2=4.$$

При подстановке этих корней убеждаемся, что уравнению удовлетворяет только $x_2=4$; первый же корень, $x_1=11$, является посторонним.

6) $\sqrt{4x+8}+\sqrt{3x-2}=2.$

Поступая по предыдущему, получим:

$$\sqrt{4x+8}=2-\sqrt{3x-2};$$

$$4x+8=4-4\sqrt{3x-2}+3x-2;$$

$$x+6=4\sqrt{3x-2}; \quad x^2+12x+36=48x-32,$$

или

$$x^2-36x+68=0.$$

Решая это уравнение, найдем два корня:

$$x_1=34; \quad x_2=2,$$

но они оба для данного уравнения, как легко видеть, являются посторонними.

7) $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}-\sqrt[3]{2x-3}=0.$

Отсюда

$$\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}=\sqrt[3]{2x-3};$$

$$x-1+3\sqrt[3]{(x-1)^2(x-2)}+3\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}+x-2=2x-3,$$

или, по сокращении,

$$\sqrt[3]{(x-1)^2(x-2)}+\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}=0;$$

разъединяя радикалы и возводя обе части уравнения в куб, будем иметь:

$$(x-1)^2(x-2)=-(x-1)(x-2)^2,$$

или

$$(x-1)(x-2)[(x-1)+(x-2)]=0,$$

т. е.

$$(x-1)(x-2)(2x-3)=0,$$

откуда находим три корня:

$$x_1=1 \quad x_2=2; \quad x_3=\frac{3}{2}.$$

Проверяя эти корни подстановкою, убеждаемся, что все они данному уравнению удовлетворяют.

Из искусственных способов решения иррациональных уравнений часто употребляется способ введения нового неизвестного. Так, полагая в примере 4

$$\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{10}{3}$$

$\sqrt{x}=y$, получим уравнение:

$$y+\frac{1}{y}=\frac{10}{3} \quad \text{или} \quad y^2-\frac{10}{3}y+1=0,$$

откуда

$$y=\frac{5}{3}\pm\sqrt{\frac{25}{9}-1}.$$

Следовательно,

$$y_1=3; \quad y_2=\frac{1}{3}.$$

Подставляя эти значения вместо y в уравнение $y=\sqrt{x}$, найдем

$$x_1=9,\quad x_2=\frac{1}{9},$$

как и прежде.

8) $x^2-\frac{1}{2}x+\sqrt{2x^2-3x+5}=x+15.$

Упрощая это уравнение, найдем:

$$2x^2-3x+2\sqrt{2x^2-3x+5}=30.$$

Полагая $2x^2-3x=y$, будем иметь:

$$y+2\sqrt{y+5}=30 \quad \text{или} \quad 2\sqrt{y+5}=30-y;$$

решив это уравнение, найдем корни $y_1=44$; $y_2=20$, из которых только второй удовлетворяет уравнению. Следовательно,

$$2x^2-3x=20,$$

откуда

$$x_1=4,\quad x_2=-\frac{5}{2};$$

оба эти корня удовлетворяют данному уравнению.

9) $\sqrt{x+6}+\sqrt{x+1}=5.$

Замечая, что $(x+6)-(x+1)=5$, разделим обе части этого тождества почленно *на обе части данного уравнения*; получим:

$$\sqrt{x+6}-\sqrt{x+1}=1.$$

Складывая затем почленно последнее уравнение с данным, будем иметь:

$$2\sqrt{x+6}=6;\quad \sqrt{x+6}=3;\quad x=3.$$

Если же те же уравнения почленно вычесть, получим:

$$2\sqrt{x+1}=4;\quad \sqrt{x+1}=2;\quad x=3.$$

Подстановкою убеждаемся, что корнем уравнения, действительно, будет $x=3$.

10) $\sqrt{3x^2-4x+34}+\sqrt{3x^2-4x-11}=9.$

Умножая обе части уравнения на разность тех же корней, будем иметь:

$$(3x^2-4x+34)-(3x^2-4x-11)=$$
$$=9\left(\sqrt{3x^2-4x+34}-\sqrt{3x^2-4x-11}\right),$$

или, по упрощении,

$$\sqrt{3x^2-4x+34}-\sqrt{3x^2-4x-11}=5.$$

Складывая последнее уравнение с данным, найдем:

$$\sqrt{3x^2-4x+34}=7,$$

откуда

$$3x^2-4x+34=49;\quad 3x^2-4x-15=0;$$

решив это уравнение, получим

$$x_1 = 3, \quad x_2 = -\frac{5}{3};$$

эти корни удовлетворяют данному уравнению.

11) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = 2.$

Возводя обе части уравнения в квадрат, получим:

$$2x - 2\sqrt{x^2 - 4(x-1)} = 4,$$

или

$$2x - 2(x-2) = 4,$$

т. е. тождество, которому удовлетворяет любое значение x. Данное уравнение, являясь ветвью этого тождества, удовлетворяется тоже бесчисленным множеством значений x, однако не всевозможными, например $x = 1$ ему не удовлетворяет. Произвольно заданное значение x удовлетворяет или данному уравнению, или аналогичному, отличающемуся от данного знаками при входящих радикалах. Полагая $x = m^2 + 1$, где m — целое число, можно получить бесчисленное множество целых решений данного уравнения, при которых корни в левой части уравнения извлекаются [1]).

ГЛАВА XV.

СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ.

§ 66. Общие способы решений.

Система двух уравнений с двумя неизвестными второй степени в общем случае имеет вид:

$$\left.\begin{array}{l} Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \\ A_1x^2 + B_1xy + C_1y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0 \end{array}\right\};$$

чтобы решить ее, необходимо из этих двух уравнений исключить одно из неизвестных, например y, и решить получившееся уравнение относительно x. Но из высшей алгебры известно, что результат исключения одного неизвестного из системы двух уравнений, из которых одно m-й, а другой n-й степени, будет mn-й степени. Поэтому результатом исключения из приведенной системы неизвестного будет уравнение четвертой степени относительно x, в общем не разрешимое элементарными способами. Для учащихся достаточно обнаружить это на примерах. Возьмем, например, систему уравнений:

$$x^2 + y = 5; \quad y^2 + x = 3.$$

Для решения ее выразим из первого уравнения y, получим: $y = 5 - x^2$ подставляя это значение во второе уравнение, найдем:

$$(5 - x^2)^2 + x = 3 \quad \text{или} \quad 25 - 10x^2 + x^4 + x = 3,$$

т. е.

$$x^4 - 10x^2 + x + 22 = 0.$$

---

[1]) Об этом уравнении см. статью Л. Ладыженского в журнале „Математическое образование", № 5, 1929 г.

Это уравнение четвертой степени, не разрешимое обычными приемами.

Ввиду этого в элементарной алгебре рассматриваются только частные случаи систем уравнений второй степени, из которых, однако, многие могут быть решены элементарно.

В частности, всегда может быть разрешена система двух уравнений с двумя неизвестными, из которых *одно — первой, а другое — второй* степени, т. е. система вида

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0;$$
$$mx + ny = p.$$

Основным способом для решения здесь может служить способ подстановки. Действительно, определяя из второго уравнения, например, y, получим:

$$y = \frac{p - mx}{n};$$

подставив это значение в первое уравнение, получим квадратное уравнение относительно x, из которого найдем два корня, x_1 и x_2, а подставив их во второе уравнение, *найдем 2 значения для* y: y_1 и y_2.

Примеры:

1) $x^2 + y^2 = 74, \quad x - y = 2,$

отсюда $y = x - 2$; подставляя это значение в первое уравнение, имеем:

$$x^2 + (x - 2)^2 = 74 \quad \text{или} \quad 2x^2 - 4x - 70 = 0,$$

т. е.

$$x^2 - 2x - 35 = 0,$$

откуда

$$x_1 = 7; \quad x_2 = -5,$$

а следовательно

$$y_1 = 5; \quad y_2 = -7.$$

Но наряду с общим методом решения подобных систем с помощью подстановки употребляется много частных приемов, для которых нельзя указать общих приемов и которые сводятся к различным предварительным преобразованиям данных уравнений, например их почленному сложению, возведению в степень и пр. Так, предыдущую систему уравнений можно было бы решить так: возведем обе части второго из данных уравнений в квадрат *и вычтем из первого; будем иметь* $2xy = 70$; прикладывая это уравнение почленно к первому данному, найдем:

$$x^2 + 2xy + y^2 = 144, \quad \text{откуда} \quad x + y = \pm 12.$$

Итак, имеем две системы уравнений первой степени:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 12 \\ x - y = 2 \end{array}\right\} \quad \text{и} \quad \left.\begin{array}{l} x + y = -12 \\ x - y = 2 \end{array}\right\},$$

из которых найдем две системы решений

$$\begin{array}{l} x_1 = 7, \\ y_1 = 5, \end{array} \quad \text{и} \quad \begin{array}{l} x_2 = -5 \\ y_2 = -7. \end{array}$$

2) $x+y=7$; $xy=12$.

Это уравнение можно было бы решить способом подстановки или способом предварительного возведения первого уравнения в квадрат и почленного вычитания из него учетверенного второго; получили бы $(x-y)^2=1$, откуда решение свелось бы к системе уравнений:

$$\left.\begin{matrix} x+y=7 \\ x-y=\pm 1 \end{matrix}\right\}$$

что дает решения:

$$\begin{matrix} x_1=4, \\ y_1=3, \end{matrix} \quad \text{или} \quad \begin{matrix} x_2=3 \\ y_2=4. \end{matrix}$$

Но для данной системы существует еще особый способ решения, имеющий важное теоретическое значение. Именно, зная сумму и произведение искомых чисел, мы можем рассматривать их как корни некоторого квадратного уравнения, которое легко составить. Именно, обозначая неизвестное в нем через z, получим:

$$z^2-7z+12=0;$$

решая его, найдем:

$$z_1=3, \quad z_2=4,$$

т. е. решениями данной системы будут

$$x_1=3, \quad y_1=4 \quad \text{или} \quad x_2=4, \quad y_2=3.$$

§ 67. Искусственные приемы решения.

Еще большее разнообразие представляют искусственные приемы, применяемые при решении системы двух уравнений с двумя неизвестными второй степени. Однако и здесь можно выделить некоторые категории уравнений, к которым приложимы общие приемы решений, к сожалению, совершенно не упоминаемые в наших учебниках алгебры. Отметим прежде всего, что в некоторых случаях при решении систем двух уравнений второй степени с двумя неизвестными возможно применение способа подстановки, именно тогда, когда в одном из уравнений какое-либо из неизвестных входит только в первой степени.

1) $3x^2+xy=18$, $2xy-y^2=3$.

Здесь в первом уравнении y, а во втором x входят лишь в первой степени. Поэтому можно или выразить из первого уравнения y и подставить во второе или найти из второго уравнения x и подставить в первое. Применяя последнее, найдем:

$$2xy=y^2+3; \quad x=\frac{y^2+3}{2y},$$

отсюда

$$3\left(\frac{y^2+3}{2y}\right)^2+\frac{y^2+3}{2}=18,$$

или, после упрощения, $5y^4-48y^2+27=0$.

Отсюда

$$y_{1,2}=\pm 3; \quad y_{3,4}=\pm\sqrt{\frac{3}{5}},$$

подставляя эти значения в выражение для x, найдем:

$$x_{1,2} = \pm 2; \quad x_{3,4} = \pm 3\sqrt{\frac{3}{5}}.$$

Итак, имеем 4 системы решений данных уравнений:

$$\begin{array}{c|c|c|c} x_1 = 2 & x_2 = -2 & x_3 = 3\sqrt{\frac{3}{5}} & x_4 = -3\sqrt{\frac{3}{5}} \\ y_1 = 3 & y_2 = -3 & y_3 = \sqrt{\frac{3}{5}} & y_4 = -\sqrt{\frac{3}{5}} \end{array}$$

2) Однако та же система уравнений и подобные ей могут быть решены и совершенно другим методом, именно как уравнения однородные, одного, именно второго, измерения. По этому поводу следует напомнить учащимся, что измерением одночлена называется сумма показателей входящих в них букв; так, измерение одночлена $3a^2bc^3$ равно 6, а измерение одночлена $\frac{3}{4}\,m^2n$ равно 3 и т. п.; многочлен, в котором все члены одного и того же измерения, называется однородным. Решение системы уравнений, в которой в левых частях стоят однородные многочлены, производится с помощью подстановки $y = tx$ или $\frac{y}{x} = t$, т. е. за новое неизвестное принимается отношение прежних. В данном случае после указанной подстановки уравнения примут вид:

$$x^2(3 + t) = 18, \quad x^2(2t - t^2) = 3.$$

Так как x, очевидно, не может равняться нулю, то мы делим почленно первое уравнение на второе; получим:

$$\frac{3 + t}{2t - t^2} = 6 \quad \text{или} \quad 6t^2 - 11t + 3 = 0.$$

Отсюда найдем $t_1 = \frac{3}{2}$; $t_2 = \frac{1}{3}$. Подставляя эти значения поочередно в первое уравнение, найдем 4 значения для x:

$$x_{1,2} = \pm 2; \quad x_{3,4} = \pm 3\sqrt{\frac{3}{5}},$$

а подставив значения t и x в выражение $y = tx_1$, получим 4 значения для y:

$$y_{1,2} = \pm 3; \quad y_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{3}{5}}.$$

3) Следующий класс уравнений, разрешаемых общим методом и тоже не упоминаемых в наших учебниках, но встречающихся в сборниках задач, представляют уравнения симметричные относительно x и y, т. е. такие, которые не изменяются, если x заменить через y и y через x. Такими, например, уравнениями являются приведенные во 2-м примере уравнения $x + y = 7$, $xy = 12$. Подобные уравнения для решения представляют то удобство, что, найдя пару каких-нибудь решений $x = \alpha, y = \beta$, мы затем непосредственно получаем и решения $x = \beta$, $y = \alpha$. Что касается самого способа решения, то обычно x и y заменя-

ются двумя новыми неизвестными u и v, которые связаны с x и y какими-либо простыми соотношениями; чаще всего полагают:

$$x+y=u; \quad xy=v.$$

Система уравнений, *полученная путем такой замены, обычно более простая*, чем первоначальная. Найдя u и v, например $u=\alpha$, $v=\beta$, будем иметь:

$$x+y=\alpha, \quad xy=\beta,$$

следовательно x и y будут корнями квадратного уравнения:

$$z^2-\alpha z+\beta=0.$$

4) $x^4+x^2y^2+y^4=133, \quad x^2-xy+y^2=7.$

Полагая $x+y=u$, $xy=v$, имеем:

$$u^2=x^2+y^2+2xy,$$

следовательно

$$x^2+y^2=u^2-2v,$$

а возводя это равенство в квадрат, имеем:

$$x^4+2x^2y^2+y^4=u^4-4u^2v+4v^2,$$

вычитая отсюда $x^2y^2=v^2$, найдем:

$$x^4+x^2y^2+y^4=u^4-4u^2v^2+3v^2.$$

Таким образом, данная система принимает более простой вид:

$$u^4-4u^2v+3v^2=133, \quad u^2-3v=7.$$

Так как в последнее уравнение v входит в первой степени, то далее применяем способ подстановки:

$$v=\frac{u^2-7}{3}, \quad u^4-\frac{4u^2(u^2-7)}{3}+\frac{(u^2-7)^2}{3}=133.$$

Упрощая это уравнение, найдем:

$$14u^2=350; \quad u^2=25; \quad u=\pm 5;$$

отсюда $v=\frac{u^2-7}{3}=6$. Беря далее $u=5$ и $v=6$, составляем квадратное уравнение:

$$z^2-5z+6=0,$$

откуда

$$z_1=2, \quad z_2=3,$$

следовательно

$$x_1=2, \quad y_1=3 \text{ или } x_2=3, \quad y_2=2.$$

Если же возьмем уравнения $u=-5$, $v=6$, получим:

$$z^2+5z+6=0,$$

что дает

$$z_1=-2, \quad z_2=-3,$$

т. е.

$$x_3=-2, \quad y_3=-3 \quad \text{или} \quad x_4=-3, \quad y_4=-2.$$

Заметим, что та же система уравнений могла бы быть решена еще следующим искусственным приемом: замечая, что

$$x^4+x^2y^2+y^4=(x^2+xy+y^2)\ (x^2-xy+y^2),$$

и деля первое уравнение почленно на второе, найдем:

$$x^2+xy+y^2=19, \quad x^2-xy+y^2=7,$$

отсюда, вычитая, имеем $xy=6$.

Прикладывая это уравнение почленно к первому, найдем:

$$x^2+2xy+y^2=25 \quad \text{и} \quad x+y=\pm 5.$$

Далее уравнения решаются по предыдущему.

Подобным же образом, подстановкой $x+y=u$, $xy=v$, решаются многие симметричные уравнения и более высоких степеней, ибо суммы x^m+y^m для не очень больших значений m легко выразить через $(x+y)$ и (xy). Так:

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=u^2-2v;$$
$$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy\,(x+y)=u^3-3uv;$$
$$x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2\,(xy)^2=u^4-4u^2v+2v^2;$$
$$x^5+y^5=(x^3+y^3)\,(x^2+y^2)-(xy)^2\cdot(x+y)=u^5-5u^3v+5uv^2$$

и т. д.

5) $x^5+y^5=33;\quad x+y=3.$

Полагая $x+y=u$, $xy=v$, получим, согласно предыдущему:

$$u\,(u^4-5u^2v+5v^2)=33, \quad u=3,$$

или

$$5v^2-45v+70=0, \quad v^2-9v+14=0;$$

отсюда находим $v_1=2$, $v_2=7$.

Следовательно,

$$\left.\begin{aligned} x+y&=3 \\ xy&=2 \end{aligned}\right\} \quad \text{или} \quad \left.\begin{aligned} x+y&=3 \\ xy&=7 \end{aligned}\right\}$$

Решая эти системы, найдем 4 системы решений:

$$x_1=1, \quad x_2=2, \quad x_3=\frac{3+i\sqrt{19}}{2}, \quad x_4=\frac{3-i\sqrt{19}}{2};$$
$$y_1=2, \quad y_2=1, \quad y_3=\frac{3-i\sqrt{19}}{2}; \quad y_4=\frac{3+i\sqrt{19}}{2}.$$

6) Еще большей сложностью и искусственностью приемов решения отличаются системы трех и большего числа уравнений второй степени с несколькими неизвестными. Поэтому достаточно ограничиться решением с учащимися таких систем, которые требуют наиболее простых преобразований. Наиболее применимыми способами решения и здесь является способ подстановки, а также сложения или перемножения данных уравнений.

$$\left.\begin{aligned} (x+y)\,(x+z)&=56, \\ (y+z)\,(y+x)&=63, \\ (z+x)\,(z+y)&=72. \end{aligned}\right\}$$

Перемножая все уравнения почленно, найдем:

$$[(x+y)(y+z)(x+z)]^2=56\cdot63\cdot72=7^2\cdot8^2\cdot9^2,$$

откуда

$$(x+y)(y+z)(x+z)=\pm504.$$

Деля это уравнение почленно поочередно на каждое из данных, будем иметь:

$$y+z=\pm9;\quad x+y=\pm7;\quad x+z=\pm8.$$

Так как вторые части данных уравнений положительны, то в последних уравнениях надо брать одновременно либо все вторые части положительными, либо отрицательными. В первом случае получим:

$$x_1=3,\quad y_1=4,\quad z_1=5,$$

во втором —

$$x_2=-3,\quad y_2=-4,\quad z_2=-5.$$

7) $\left.\begin{aligned} x+y+z&=13\\ x^2+y^2+z^2&=61\\ 2yz&=x(z+y)\end{aligned}\right\}$

Возводя обе части первого уравнения в квадрат, имеем:

$$x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz=169;$$

заменяя здесь $(x^2+y^2+z^2)$ и $2yz$ их значениями из второго и третьего уравнений, получим:

$$3xy+3xz=108\quad\text{или}\quad x(y+z)=36,$$

но из первого уравнения имеем: $y+z=13-x$, следовательно, $x(13-x)=36$, или $x^2-13x+36=0$, отсюда $x_1=4$, $x_2=9$. Подставляя x_1 в первое и третье уравнения, найдем:

$$\begin{aligned} y+z&=9\\ yz&=2(z+y)\end{aligned}\quad\text{или}\quad\begin{aligned} y+z&=9\\ yz&=18\end{aligned}$$

откуда $y_1=3$, $z_1=6$ или $y_2=6$, $z_2=3$.

Подставляя в первое уравнение и в третье x_2, получим:

$$y+z=4;\quad 2yz=9(y+z),$$

или

$$\left.\begin{aligned} y+z&=4\\ yz&=18\end{aligned}\right\}$$

Поэтому y и z можно принять за корни квадратного уравнения:

$$t^2-4t+18=0,$$

решая которое, мы найдем еще два мнимых корня для y и z.

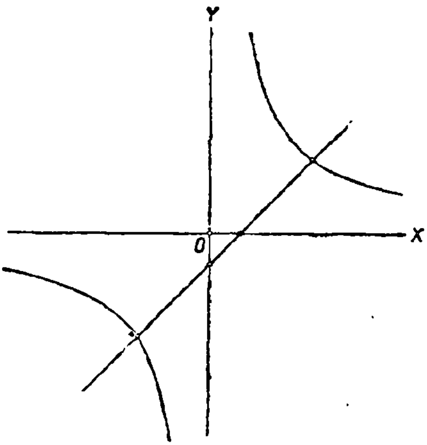
§ 68. Графическое решение систем квадратных уравнений.

Подобно системам уравнений первой степени, и системы двух квадратных уравнений с 2 неизвестными могут быть решены графическим путем. Для этого надо построить по точкам графики каждого из двух данных уравнений и найти точки их пересечения; координаты этих точек и будут решениями данных уравнений. Конечно, этим способом можно найти только действительные решения данной системы уравнений; если построенные кривые не пересекаются, это значит, что данная система не имеет действительных корней. Если же кривые касаются в какой-нибудь точке, система имеет равные корни. Этот способ, как и для случая совместных уравнений первой степени, не дает большой точности, однако является очень поучительным, так как позволяет находить графически корни и таких уравнений, которые алгебраически решены быть не могут.

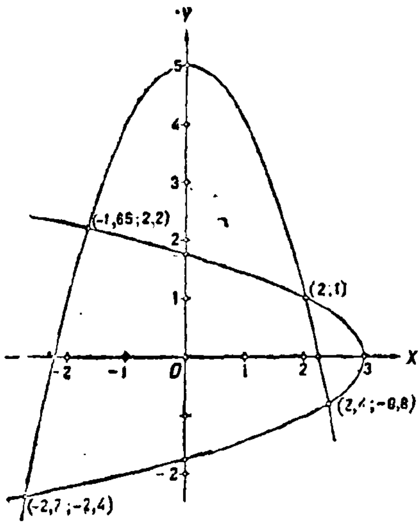
Примеры:

$$1)\quad \left.\begin{aligned} x-y&=2\\ xy&=35 \end{aligned}\right\}$$

Графиком первого уравнения является прямая, проходящая через точку $(0, -2)$ и составляющая с осью OX угол в 45°. Графиком второго уравнения служит гипербола, знакомая учащимся как кривая, выражающая обратную пропорциональность двух величин.



Черт. 16.



Черт. 17.

Точки пересечения прямой и гиперболы будут $Q(7, 5)$ и $S(-5, -7)$ (черт. 16). Алгебраическое решение подтверждает правильность графического.

$$2)\quad \left.\begin{aligned} x^2+y&=5\\ y^2+x&=3 \end{aligned}\right\}$$

Эти уравнения, как мы видели в начале настоящей главы, не могут быть решены алгебраическим методом. Построив их графики, видим, что они представляют собою две параболы; осью симметрии первой служит ось OY, а вершина ее находится на расстоянии 5 от начала координат; ... имеет осью симметрии OX, а вершина ее находится на 3 деления ... начала координат. Ветви первой параболы идут от вершины вниз, а второй — влево. Точки пересечения обеих парабол, представляющие корни уравнений данной системы, следующие:

$$\begin{array}{l|l|l|l} x_1 = 2 & x_2 = -1{,}65 & x_3 = -2{,}7 & x_4 = 2{,}4, \\ y_1 = 1 & y_2 = 2{,}2 & y_3 = -2{,}4 & y_4 = -0{,}8 \end{array}$$

Первая пара — корни точные, а прочие — приближенные. Подстановкой можно убедиться, что первая пара точно, а прочие — приближенно удовлетворяют системе данных уравнений (черт. 17).

§ 69. Задачи на составление квадратных уравнений.

При составлении задач на квадратные уравнения применяются те же методы, как и при составлении уравнений первой степени. Но квадратные уравнения и уравнения более высоких степеней имеют два или несколько решений; притом эти решения могут быть действительными, равными или мнимыми; поэтому полученные решения непременно требуют исследования в смысле соответствия их конкретным условиям вопроса. Богатый материал для составления и исследования уравнений второй степени дают геометрические задачи на вычисление.

Пример 1. Найти два целых положительных числа, сумма которых 15, а разность обратных им чисел равна $\frac{1}{18}$.

Пусть искомые числа x и $15 - x$; составляя уравнение по второму условию задачи, найдем:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{15 - x} = \frac{1}{18} \quad \text{или} \quad 18(15 - x) - 18x = x(15 - x),$$

иначе

$$x^2 - 51x + 270 = 0,$$

откуда

$$x_1 = 6; \quad x_2 = 45.$$

Поэтому искомые числа должны быть 6 и 9 или 45 и — 30. Так как по условию задачи искомые числа должны быть целыми и положительными, то вторая пара чисел непригодна для задачи; следовательно, искомые числа суть 6 и 9; действительно,

$$\frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{1}{18}.$$

Пример 2. Некто, продав часы за a рублей, получил столько процентов убытку, сколько ему самому рублей стоили часы. Какая была стоимость часов?

Обозначая стоимость часов чрез x, получаем, что понесенный продавцом часов убыток был $\frac{x^2}{100}$ рублей, поэтому уравнение будет такое:

$$x - \frac{x^2}{100} = a \quad \text{или} \quad x^2 - 100x + 100a = 0.$$

Решая, найдем:

$$x = 50 \pm \sqrt{2500 - 100a} \quad \text{или} \quad x = 50 \pm 10\sqrt{25 - a};$$

условием действительности корней будет:

$$a \leqslant 25.$$

При $a > 25$ задача не имеет решений; при $a = 25$ — имеет одно решение и при $a < 25$ — два решения.

Пример 3. Полная поверхность правильной четырехугольной призмы $22 см^2$, а диагональ ее $3\sqrt{3} см$. Найти сторону основания и высоту призмы. Обозначая сторону основания призмы через x, а высоту ее через y, на основании условия задачи составляем уравнения.

$$2x^2 + 4xy = 22; \quad 2x^2 + y^2 = 27.$$

Для решения этой системы сложим данные уравнения почленно; будем иметь:

$$4x^2 + 4xy + y^2 = 49; \quad (2x + y)^2 = 49,$$

отсюда $2x + y = 7$ (по геометрическому смыслу задачи $2x + y = -7$ брать нельзя). Отсюда $y = 7 - 2x$; подставляя во второе уравнение, имеем:

$$2x^2 + 49 - 28x + 4x^2 = 27, \quad \text{или} \quad 6x^2 - 28x + 22 = 0,$$

отсюда

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 33}}{3}; \quad x_1 = \frac{11}{3}, \ x_2 = 1.$$

Следовательно,

$$y_1 = 7 - \frac{22}{3} = -\frac{1}{3}, \quad y_2 = 7 - 2 = 5.$$

По смыслу задачи подходит только пара решений:

$$x_2 = 1; \quad y_2 = 5.$$

Пример 4. Определить стороны прямоугольного треугольника, периметр которого $24 см$, а площадь $24 см^2$. Пусть катеты треугольника x и y; уравнения для решения задачи будут:

$$x + y + \sqrt{x^2 + y^2} = 24, \quad \frac{xy}{2} = 24.$$

Из первого уравнения получаем:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 24 - x - y$$

или

$$x^2 + y^2 = 576 + x^2 + y^2 - 48x - 48y + 2xy$$

или

$$48x + 48y - 2xy = 576; \quad 24x + 24y - xy = 288;$$

заменяя xy через 48, будем иметь:

$$24x + 24y = 336, \quad \text{или} \quad x + y = 14.$$

Итак $x + y = 14$ и $xy = 48$; принимая x и y за корни квадратного уравнения, найдем:

$$z^2 - 14z + 48 = 0; \quad z = 7 \pm 1, \quad z_1 = 8, \quad z_2 = 6.$$

Следовательно, катеты треугольника 6 и 8 *см*, а гипотенуза его

$$\sqrt{6^2 + 8^2} = 10 см.$$

ГЛАВА XVI.

ПРОГРЕССИИ.

§ 70. Арифметическая прогрессия.

Отдел алгебры о прогрессиях обычно учащимися считается одним из самых легких; кроме всего он всегда их очень интересует. Действительно, по ясности определений, простоте основных формул и интересному содержанию соответствующих задач отдел о прогрессиях представляет весьма удобный и благодарный материал для того, чтобы вызвать в учащихся живой интерес как к проходимой теории, так и к решению задач, в результате чего обычно учение о прогрессиях легко и прочно ими усваивается. Ввиду легкости этого отдела в программах по математике французских лицеев прогрессии даже включены в арифметику. И действительно, предварительные сведения о них, в особенности об арифметической прогрессии, могут быть сообщены уже в курсе арифметики. В частности, это удобно сделать при ознакомлении с основными законами сложения: переместительностью и сочетательностью, для чего может служить задача о суммировании чисел натурального ряда; пусть требуется найти

$$S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 12,$$

что может быть, конечно, выполнено непосредственно, но учащимся следует предложить для сложения найти более удобный и быстрый способ, и обычно они его находят, складывая равноотстоящие члены от концов ряда, т. е. пользуясь законами переместительности и сочетательности сложения: $(1+12)+(2+11)+\ldots$, так как всего слагаемых пар будет $\frac{12}{2}=6$, то вся сумма будет равна $(1+12)\cdot 6$ или $\frac{(1+12)\,12}{2}=78$. Вместо этого способа можно навести их на мысль сложить еще раз те же числа в обратном порядке, т. е. взять две суммы:

$$S = 12 + 11 + \ldots + 3 + 2 + 1,$$

тогда

$$S = 1 + 2 + \ldots + 10 + 11 + 12;$$

$$2S = (12+1)+(11+2)+\ldots+(3+10)+(2+11)+(1+12)$$

и

$$S = \frac{(1+12)\,12}{2} \quad \text{и вообще} \quad S = \frac{(1+n)\,n}{2}.$$

Можно затем предложить учащимся вывести сумму чисел от 1 до 100 и т. п.

Для вывода формулы суммы чисел натурального ряда существуют и другие способы, например графические [1]). Эту формулу весьма полезно вывести и использовать в пропедевтическом курсе алгебры в 5-м классе.

Приступая в 9-м классе к систематическому изучению арифметической прогрессии, следует дать определение ее как бесконечного ряда чисел, из которых каждое последующее получается из предыдущего через прибавление одного и того же постоянного числа, называемого раз-

[1]) См. И. Чистяков, Суммирование одинаковых степеней чисел натурального ряда, „Математическое образование". № 5—8 1917

ностью прогрессии и обозначаемого чаще всего d. Так как d может быть положительным и отрицательным, то арифметические прогрессии могут быть возрастающими и убывающими. Следует предложить учащимся самим составить примеры тех и других, а также дать примеры на нахождение разности в данных прогрессиях. Затем надо перейти к выводу основных формул для общего члена l и суммы S определенного числа членов, т. е. формул:

$$l = a + d(n-1),$$
$$S = \frac{(a+l)n}{2}.$$

Выводу последней формулы нередко предпосылается доказательство леммы, что сумма членов арифметической прогрессии, одинаково отстоящих от ее крайних членов, равна сумме крайних членов. Однако можно обойтись без особого доказательства этого свойства, указав, что оно вытекает из неизменяемости суммы при одновременном прибавлении к ней и отнятии от нее одного и того же числа. Так, в прогрессии 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, переходя от суммы крайних членов $(2+14)$ к сумме вторых членов от начала и конца, видим, что первое слагаемое 2 возрастает на 2, а второе 14 уменьшается на то же число, от чего сумма не изменяется: $2+14=4+12=6+10$ и т. д. На этом свойстве и основывается вывод формулы для суммы и членов прогрессии, т. е.

$$S = \frac{(a+l)n}{2},$$

но его можно получить и иными способами [1]. Так, если учащимся ранее была известна формула для суммы n членов натурального ряда, т. е.

$$S = \frac{n(n+1)}{2},$$

то формулу для суммы членов прогрессии можно вывести непосредственно из ее выражения:

$$S = a + [a+d] + [a+2d] + \ldots + [a+(n-2)d] + [a+(n-1)d],$$

именно, раскрывая скобки и делая упрощения, получим:

$$S = na + [1+2+\ldots+(n-2)+(n-1)]\ d.$$

Находя сумму чисел натурального ряда, стоящих в квадратных скобках, получим:

$$1+2+\ldots+(n-2)+(n-1) = \frac{[1+(n-1)](n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2},$$

значит

$$S = na + \frac{n(n-1)}{2}d,$$

что может быть представлено еще в виде

$$S = \frac{[2a+d(n-1)]n}{2};$$

---

[1]) См., например, И. И. Чистяков, Несколько замечаний о прогрессиях, методический сборник „Математика и физика в средней школе", 1934, № 1.

из этой последней формулы легко получить формулу:

$$S=\frac{[a+a+d(n-1)]n}{2} \quad \text{или} \quad S=\frac{(a+l)n}{2}.$$

Наоборот, если последняя формула была выведена ранее, то предыдущую можно вывести из нее путем подстановки $l=a+d(n-1)$. Итак, учащиеся должны знать три главные формулы:

$$l=a+d(n-1); \quad S=\frac{(a+l)n}{2}; \quad S=\frac{[2a+d(n-1)]n}{2},$$

причем должно быть выяснено, что основными из них являются только две, третья же является производной. Поэтому в задачах на арифметическую прогрессию из 5 количеств, a, d, l, n, S, должны быть даны 3; тогда остальные могут быть найдены при помощи двух основных формул. Всех задач, очевидно, может быть столько, сколько можно сделать сочетаний из 5 элементов по 3, т. е.

$$C_5^3=C_5^2=\frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}=10.$$

Из этих задач две, именно: по данным a, d и S найти l и n и по данным l, d и S найти a и n, приводят к решению квадратных уравнений, остальные же — к уравнениям первой степени. Из задач многие представляют интерес для вывода разных свойств чисел натурального ряда, так, находя сумму n последовательных нечетных чисел, получим:

$$1+3+\ldots+(2n-1)=n^2,$$

т. е. сумма n первых нечетных чисел представляет собою точный квадрат. Отсюда вытекает возможность извлечения квадратного корня из любого целого числа N с точностью до 1 при помощи простейших действий — сложения и счета; именно, для этого следует складывать нечетные числа, начиная от 1, пока не получим N или большее число; тогда число взятых слагаемых дает $\sqrt{N}$ точно или с избытком. Например, желая найти $\sqrt{121}$, складываем числа

$$1+3+5+7+9+11+13+15+17+19+21=121;$$

так как всех слагаемых здесь 11, то $\sqrt{121}=11$.

Но то же свойство суммы ряда нечетных чисел позволяет вывести сумму квадратов ряда натуральных чисел, которая в курсах алгебры выводится в главе об арифметической прогрессии иначе. Именно, пусть

$$S_2=1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2+n^2;$$

заменяя каждое слагаемое суммою нечетных чисел, найдем:

$$S_2=1+(1+3)+(1+3+5)+\ldots+[1+3+\ldots+(2n-3)]+$$
$$+[1+3+\ldots+(2n-3)+(2n-1)],$$

или, группируя вместе все одинаковые нечетные числа:

$$S_2=1\cdot n+3\cdot(n-1)+5(n-2)+\ldots+(2n-3)2+(2n-1);$$

с другой стороны:

$$2S_2=2n^2+2(n-1)^2+2(n-2)^2+\ldots+2\cdot 2^2+2\cdot 1^2;$$

складывая оба равенства почленно, найдем:

$$3S_2 = n(2n+1) + (n-1)(2n+1) + \ldots + 2(2n+1) + 1(2n+1)$$

или

$$3S_2 = (2n+1)[n + (n-1) + \ldots + 2 + 1] = \frac{(2n+1)(n+1)n}{2}.$$

$$S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Например,

$$1^2 + 2^2 + \ldots + 10^2 = \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} = 385.$$

При изучении арифметической прогрессии полезно еще указать связь ее с арифметической пропорцией, именно, что каждые три смежных члена прогрессии составляют непрерывную арифметическую пропорцию, так, в прогрессии: 3, 5, 7, 9, 11, 13... имеем:

$$3-5=5-7,\ 5-7=7-9;\ 9-11=11-13\ldots;$$

поэтому каждый член арифметической прогрессии есть среднее арифметическое двух смежных с ним членов:

$$5 = \frac{1}{2}(3+7),\quad 7 = \frac{1}{2}(5+9) \text{ и т. д.}$$

В связи с этим стоит приводимая во многих курсах алгебры задача: между двумя данными числами a и b вставить n средних арифметических. Она приводится к составлению прогрессии по данным: a, l и числу членов $n+2$ и решается без труда, например, если $a=3$, $l=21$ и $n=5$, то $n+2=7$ и искомая прогрессия будет 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21.

§ 71. Геометрическая прогрессия.

Подобно изучению арифметической прогрессии, при прохождении геометрической прогрессии следует начать с определения ее как бесконечного ряда чисел, из которых каждое последующее получается из предыдущего через умножение на одно и то же число q, называемое знаменателем прогрессии, а также указания, что, в связи с тем, будет *ли* $q>1$, *или* $q<1$, *или, наконец,* $q<0$, прогрессия может быть возрастающей, убывающей или знакопеременной. Полезно, чтобы учащиеся сами составили по нескольку прогрессий каждого рода, а также умели находить знаменатель данной уже прогрессии делением какого-либо из ее членов на предыдущий. Далее следует перейти к выводу основных формул для общего члена l и суммы S для n членов прогрессии, т. е. формул:

$$l = aq^{n-1};\quad S = \frac{lq-a}{q-1},$$

причем полезно указать, что последняя формула удобна, когда $q>1$, для убывающей же прогрессии удобнее в числителе и знаменателе изменить знаки на обратные, т. е. писать:

$$S = \frac{a-lq}{1-q}.$$

Для вывода формулы суммы членов геометрической прогрессии существует несколько способов; приведем еще следующий метод, не встречающийся в учебниках, но вытекающий непосредственно из выражения для суммы членов: мы имеем:

$$S = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1}$$

или

$$S = a(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}),$$

но из предыдущего учащимся известно, что разность одинаковых степеней двух количеств $(q^n - 1)$ делится на их разность $(q - 1)$ и что частное будет:

$$\frac{q^n - 1}{q - 1} = q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots + q^2 + q + 1,$$

отсюда прямо видно, что $S = a\frac{q^n - 1}{q - 1}$. Из этой формулы можно получить формулу

$$S = \frac{lq - a}{q - 1};$$

и, наоборот, если последняя формула была получена ранее, то из нее можно получить предыдущую, подставив в нее значение $l = aq^{n-1}$. В результате учащиеся должны знать три главные формулы:

$$l = aq^{n-1}; \quad S = \frac{lq - a}{q - 1}; \quad S = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1},$$

причем им должно быть известно, что основными из них являются только две, третья же является производной. Поэтому в задачах на геометрическую прогрессию из 5 количеств, a, q, l, n, S должны быть даны 3; тогда остальные два могут быть найдены при помощи двух основных формул. Здесь, следовательно, тоже могут быть, как и в арифметической прогрессии, 10 видов различных задач. Эти задачи приводят к уравнениям первой степени и к двучленным, но в частности две задачи: по данным a, n, S найти q и l и по данным n, l и S найти a и q — приводят к уравнениям n-й степени, которые могут оказаться неразрешимыми элементарными приемами. Заслуживает внимания задача: найти произведение всех членов геометрической прогрессии, для решения которой можно воспользоваться тем свойством геометрической прогрессии, что произведение членов, равноотстоящих от ее крайних членов, равно произведению крайних; действительно, обозначая члены прогрессии

$$a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n,$$

имеем:

$$a_1 \cdot a_n = a \cdot aq^{n-1} = a^2q^{n-1}; \; a_2 \cdot a_{n-1} = aq \cdot aq^{n-2} = a^2q^{n-1} \text{ и т. д.}$$

Поэтому, обозначив произведение n членов прогрессии через P и написав его два раза в обратном порядке, получим:

$$P = a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n$$

и

$$P = a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1,$$

откуда

$$P^2 = (a_1 a_n)(a_2 a_{n-1}) \ldots (a_n a_1)$$

или

$$P^2 = (a_1 a_n)^n, \text{ откуда } P = \pm\sqrt{(a_1 a_n)^n},$$

или

$$P = \pm\sqrt{(a^2 q^{n-1})^n} = \pm a^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Это произведение, конечно, при рациональных членах прогрессии всегда будет рациональным; знак его будет зависеть от числа и отрицательных членов прогрессии; если оно нечетное, то произведение членов прогрессии будет отрицательным, в противном случае — положительным.

Изучение геометрической прогрессии полезно поставить в связь с изучением геометрической пропорции; именно — каждые три члена геометрической прогрессии составляют непрерывную геометрическую пропорцию; например, в геометрической пропорции: 2, 6, 18, 54, ..., имеем $2:6 = 6:18$, $6:18 = 18:54$ и т. д.; следовательно, каждый член геометрической пропорции есть среднее геометрическое между двумя смежными членами. В некоторых задачах требуется между двумя данными числами, a и l, вставить m средних геометрических, т. е. таких, которые вместе с данными числами a и l составили бы геометрическую пропорцию. Значит, в этой задаче надо составить прогрессию по данным крайним членам a и l и числу членов $n = m + 2$. Из условия задачи имеем:

$$l = aq^{m+2}, \text{ откуда } q = \sqrt[m+2]{\frac{l}{a}}.$$

Найдя q, можно написать все члены прогрессии: a, aq, aq^2 и т. д.

§ 72. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия.

В программе 9-го класса в средней школе вопрос о бесконечно убывающей геометрической прогрессии и ее свойствах выпущен и отнесен к курсу 10-го класса, где в программу входит теория пределов. Мы полагаем, однако, что учащихся полезно познакомить с вопросом о нахождении предела суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, заменив совершенно строгие выводы более интуитивными и наглядными.

Для этого мы представляем формулу для суммы членов убывающей геометрической прогрессии так:

$$S = \frac{a - aq^n}{1 - q}$$

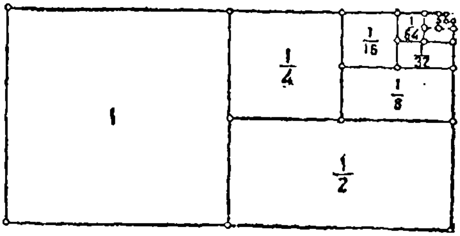
или

$$S = \frac{a}{1-q} - \frac{a}{1-q}\cdot q^n = \frac{a}{1-q}(1 - q^n).$$

Здесь с увеличением числа членов первый множитель не изменяется; уменьшаемое в скобках тоже не меняется, но q^n уменьшается с возрастанием n, так как $q < 1$. Учащимся следует при этом напомнить, что правильная дробь уменьшается при возведении в степень, и они на наглядных примерах могут убедиться, что это уменьшение продолжается безгранично. Поэтому для них интуитивно станет ясно, что вычитаемое в последней формуле стремится к нулю, а потому, предполагая, что число членов прогрессии бесконечно возрастает, ее можно представить в виде $S=\frac{a}{1-q}$. При этом следует разъяснить, что здесь применяется понятие о пределе суммы всех членов, подобно тому как они пользуются понятием о пределе в курсе геометрии в 8-м классе при определении длины окружности и площади круга. Затем следует проделать ряд примеров, начиная с прогрессии

$$S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots,$$

как допускающей особенно легкую проверку выведенной формулы. Действительно, в данном случае предел $S=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$. Но беря сумму 1, 2, 3 и т. д. членов, получим 1, $1\frac{1}{2}$, $1\frac{3}{4}$, $1\frac{7}{8}$ и т. д., т. е. числа, которые от 2 отличаются на 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ и т. д., подходят к пределу суммы как угодно близко. Тот же предел еще более наглядно можно представить геометрически, построив квадрат со стороною 1 и площадью 1 кв., затем пристроив к нему его половину, потом $\frac{1}{4}$, далее $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$ *и* т. д. (черт. 18). Чертеж ясно показывает, что сумма площадей построенных квадратов будет тем менее отличаться от 2 квадратов, чем больше будет их число.



Черт. 18.

Затем следует проделать и ряд других примеров, в том числе с геометрическим содержанием, обычно очень интересующих учащихся. Предварительное, хотя и не вполне строгое изложение данного вопроса в 9-м классе мы считаем тем более желательным, что не все ученики, окончившие девятилетнюю школу, поступят в 10-й класс.

ГЛАВА XVII.

ЛОГАРИФМЫ.

§ 73. Обобщение понятия о показателе степени.

Согласно программе математики знакомству с логарифмами в 9-м классе должно предшествовать распространение понятия о показателе степени на показатели нулевые, отрицательные, дробные и иррациональные. Такое распространение, конечно, совершенно необходимо для дальнейшего изучения логарифмов. Приступая к нему, необходимо напомнить учащимся основное понятие о показателе степени как о числе, показывающем, сколько перемножается одинаковых множителей. По существу показатель степени — число непременно целое и положительное. В дальнейшем, над показателями степеней производятся, при различных действиях, четыре основные действия: при умножении алгебраических количеств — сложение показателей, при делении — вычитание, при возведении в степень — умножение и при извлечении корня — деление.

Ясно, что в то время как прямые действия — сложение и умножение — дают всегда возможный и вполне определенный результат, обратные действия — вычитание и деление показателей — могут и не дать положительного и целого показателя степени, и тогда возникает необходимость или ограничить употребление показателей, так как оно оказывается не всегда возможным, или же дать новым получаемым символам соответствующее и целесообразное определение. Алгебра, в целях общности своих выводов, должна была стать на второй путь.

Первым обобщением понятия о степени является введение нулевого показателя. Необходимость его представляется, если мы хотим правило деления степеней одного и того же количества распространить и на те случаи, когда показатели степеней равны. Такой случай представляется, например, при сокращении дроби: $\frac{a^3b^5cd}{4a^2bcx}$; вычитая по общему правилу показатели степеней буквенных множителей делителя из показателей тех же букв в делимом, мы получаем дробь $\frac{ab^4c^0d}{4x}$; здесь приходится дать истолкование символу c^0. Оно оказывается в данном случае очень просто: зная, что всякое количество, деленное само на себя, равно 1, мы должны принять c^0 означающим единицу. Таким образом, всякое количество с нулевым показателем обозначает единицу. Необходимо, чтобы учащиеся усвоили мысль о том, что $c^0 = 1$ есть просто условное и удобное для приложений обозначение 1 и что в буквальном смысле нельзя возвести количество в нулевую степень; между тем они иногда неправильно смотрят на установление этого определения как на доказываемую теорему.

Подобным же образом устанавливается и понятие об отрицательном показателе как об условном символе, изображающем единицу, деленную на то же количество с положительным показателем степени, и удобном при различных преобразованиях действий над степенями. Затем доказывается, что все действия над количествами с отрицательными показателями производятся по тем же правилам, как и над количествами с показателями положительными. Для этого достаточно заменить количества с дробными показателями соответствующими дробями, произвести над ними требуемые действия, а потом вновь перейти в полученном результате к количествам с отрицательными показателями. После этих теоретических разъяснений следует для большей привычки к новым показателям проделать ряд примеров; в частности следует указать на употребление отрицательных показателей в физике для обозначения весьма малых величин:

заряд электрона $E = 1{,}59 \cdot 10^{-19}$ кулона,

масса атома водорода $1{,}65 \cdot 10^{-24}$ *г* и пр.

Далее аналогично устанавливается понятие о дробном показателе $\frac{m}{n}$ как об условном символическом обозначении корня *n*-й степени из количества, возведенного в *m*-ю степень, удобном для производства различных преобразований иррациональных выражений: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$. Необходимо подчеркнуть, что корни при этом подразумеваются арифметические. Затем устанавливается, что вновь вводимый символ $a^{\frac{m}{n}}$ сохраняет одно и то же значение при замене дроби $\frac{m}{n}$ любой равной ей дробью $\frac{p}{q}$, и доказывается, что правила действий над степенями с дробными показателями остаются те же, какие установлены для действий с целыми показателями. После этого необходимо для приобретения навыка в действиях с количествами, имеющими дробные показатели, проделать ряд примеров как на производство различных действий над многочленами, так и на решение уравнений. Например:

1) $(x - 3x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} + y)(2x^{\frac{1}{2}} - 5y^{\frac{1}{2}}) = 2x^{\frac{3}{2}} - 11xy^{\frac{1}{2}} + 17x^{\frac{1}{2}}y - 5y^{\frac{3}{2}}$.

2) $(2x^{\frac{3}{2}} - 17xy^{\frac{1}{2}} + 17x^{\frac{1}{2}} - 15y^{\frac{3}{2}}):(2x^{\frac{1}{2}} - 15y^{\frac{1}{2}}) = x - x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} + y$.

3) Решить уравнение:

$$x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}} = (0{,}3)^{-1}.$$

Наконец, понятие об иррациональном показателе может быть дано лишь в самых общих чертах. Точное определение его такое: степень с несоизмеримым показателем a^m, причем $a > 1$, есть предел, к которому стремятся степени этого числа, когда и показатели стремятся к m, увеличиваясь или уменьшаясь. Учащимся можно дать понятие о несоизмеримом показателе на числовом примере, например, чтобы объяснить смысл количества $a^{\sqrt{3}}$, следует взять значения $\sqrt{3}$ с недостатком и с избытком:

$$\begin{matrix} 1{,}7 & 1{,}73 & 1{,}732, \\ 1{,}8 & 1{,}74 & 1{,}733. \end{matrix}$$

Под $a^{\sqrt{3}}$ разумеется общий предел, к которому стремятся количества

$$a^{1,7} \quad a^{1,73} \quad a^{1,732}\ldots \quad \text{и} \quad a^{1,8} \quad a^{1,74} \quad a^{1,733}\ldots$$

Относительно действий над количествами с иррациональными показателями придется сообщить учащимся уже без доказательства, что они производятся по тем же правилам, как и над количествами с рациональными показателями, например $a^{\sqrt{2}} \cdot a^{\pi} = a^{\sqrt{2}+\pi}$, приближенно:

$$a^{\sqrt{2}+\pi} \approx a^{1,41+3,14} \approx a^{4,55}.$$

§ 74. Понятие о логарифме.

Научная теория логарифмов по ее сложности не может быть предметом изучения в средней школе; очень многие положения этой теории могут быть сообщены учащимся только догматически. Цель прохождения логарифмов в средней школе главным образом практическая — дать удобное средство для производства сложных вычислений. Тем не менее все, что возможно в этой теории элементарно обосновать и доказать, должно быть обосновано и доказано; где нельзя привести совершенно строгих доказательств, следует давать, по крайней мере, примеры, наглядные доказательства и пр. Первоначальное понятие о логарифме удобнее всего связать с рассмотрением двух прогрессий: геометрической и арифметической, как это имело место и в истории учения о логарифмах. Пусть имеем ряд чисел, идущих в геометрической прогрессии:

$$2^0,\quad 2^1,\quad 2^2,\quad 2^3,\quad 2^4,\quad 2^5\ \ldots$$

или

$$1,\quad 2,\quad 4,\quad 8,\quad 16,\quad 32\ \ldots,$$

обращая внимание на показатели их степеней, видим, что они составляют арифметическую прогрессию. Продолжив более или менее далеко оба написанных ряда, можно воспользоваться первым рядом для того, чтобы упрощенным способом производить действия умножения и деления над числами второго ряда. Так, желая перемножить $32 \cdot 256$, мы замечаем, что $32 = 2^5$, а $256 = 2^8$; вместо перемножения данных чисел можно перемножить $2^5 \cdot 2^8$, что ведет к сложению их показателей; получим 2^{13}; в нижнем ряду таблицы найдем соответствующее число 8192. Таким образом, можно показать, что с помощью написанных двух рядов можно над входящими в них числами производить действия упрощенно, именно: заменять умножение чисел сложением показателей числа 2, деление — вычитанием, возведение в степень — умножением и извлечение корня — делением показателя степени числа 2 на показатель корня. Написанная таблица из двух рядов дает понятие о логарифмах и пользе употребления их для вычислений; учащимся можно разъяснить, что числа верхнего ряда называются логарифмами чисел нижнего ряда при основании 2; следовательно, логарифмом числа N при данном основании a называется показатель степени x, в которую надо возвести a, чтобы получить N, так что $a^x = N$; это записывается так: $x = \lg_a N$. Например, из предыдущей таблицы следует, что $\lg_2 64 = 6$: $\lg_2 16 = 4$ и т. п.; рассмотрение написанной таблицы показывает, что употребление логарифмов позволяет существенно упростить вычисления, сведя более сложные к более простым. Недостатком приведенной таблицы является то, что в ней отсутствует весьма много чисел, над которыми может потребоваться произвести вычисление. По этому поводу можно разъяснить, что возможно составить такие таблицы логарифмов, которые содержали бы все числа до определенного предела и их логарифмы так, что ими можно пользоваться для производства действий в определенных границах. Так, вышеприведенная таблица логарифмов при основании 2 может быть расширена вставкою между каждыми двумя смежными числами среднего геометрического, тогда между логарифмами этих чисел появятся средние арифметические; будем иметь числа:

$$1,\quad \sqrt{2},\quad 2,\quad \sqrt{8},\quad 4,\quad \sqrt{32},\quad 8,$$

и их логарифмы:

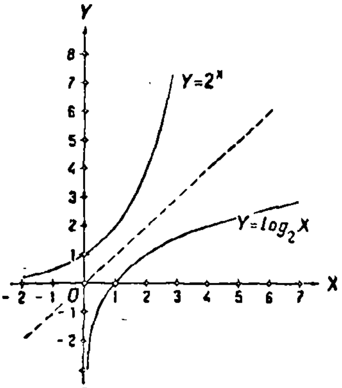
$$0,\quad \frac{1}{2},\quad 1,\quad \frac{3}{2},\quad 2,\quad \frac{5}{2},\quad 3\ \ldots$$

Но можно вставить между двумя числами не одно, а сколько угодно средних геометрических, тогда между их логарифмами получатся соответствующие средние арифметические. Вставляя между каждыми двумя числами по одинаковому числу средних геометрических, мы получим таблицу их логарифмов, представляющих одну арифметическую прогрессию. Таким образом, вставлением средних геометрических можно составить весьма полную таблицу чисел, имеющих соответствующие логарифмы, но она все же не будет охватывать всех чисел данного промежутка, а только те, которые имеют рациональные логарифмы, т. е. рациональные показатели основания. Напомнив учащимся, что показатели основания можно брать и иррациональные, можно догматически сообщить учащимся, что всякому числу в определенных пределах при данном основании соответствует единственный вполне определенный рациональный или иррациональный логарифм. Далее можно пояснить, что для практической цели — упростить способы вычислений над числами — безразлично, какое именно число принять за основание, но обычно таким основанием принимается число 10.

Заметим, что ввиду трудности учения о логарифмах возможно держаться при прохождении его концентрического метода изучения. Именно, после изложенного введения можно прямо перейти к десятичным логарифмам, установив понятие о логарифме как о показателе степени, в которую надо возвести 10, чтобы получить данное число. Далее можно доказать основные теоремы о логарифме произведения, частного, степени и корня и перейти затем к детальному изучению свойств десятичных логарифмов чисел и к употреблению логарифмических таблиц для вычисления. На базе ознакомления с десятичными логарифмами и их практическим применением возможно затем с большим успехом пройти общую теорию логарифмов уже с точки зрения функциональной зависимости двух величин. Такое двухстепенное прохождение учения о логарифмах применяется в английских школах, где в первом концентре даются лишь весьма краткие теоретические сведения о логарифмах, но тщательно изучается практика логарифмических вычислений, а затем уже много позже, когда учащиеся приобретут полное знание элементарной алгебры и тригонометрии, подробно изучается логарифмическая функция. Во Франции также при первоначальном прохождении логарифмов они тоже определяются как последовательные члены арифметической прогрессии, соответствующие последовательным членам некоторой геометрической прогрессии; из этого определения непосредственно выводятся свойства десятичных логарифмов, правила логарифмирования и приложение их к производству действий, причем учащиеся пользуются таблицами логарифмов и антилогарифмов с четырьмя десятичными знаками. И лишь во втором цикле и в специальных классах снова проходится уже систематический курс учения о логарифмах. Есть попытки двухстепенного прохождения логарифмов и в русской учебной литературе, например в учебнике: В. Г. Фридман, Концентрический учебник алгебры, ч. II, 1913. Программа математики в 9-м классе не предусматривает двухстепенного прохождения логарифмов. Однако ввиду некоторой перегруженности этого года учебным материалом все же полезно такую концентричность провести. В случае, если времени окажется недостаточно для выполнения всей программы, учащиеся получат краткое, но законченное ознакомление с понятием логарифма и практикой логарифмических вычислений. Если же времени будет достаточно, пройденный первый концентр явится основой для систематического курса учения о логарифмах.

§ 75. Показательная и логарифмическая функции.

Современное учение о логарифмах, нашедшее свое отражение в программе математики 9-го класса, исходит, согласно всему направлению современной математики и ее преподавания, из понятия о функции. Основанием для него является изучение свойств показательной функции $y = a^x$, которое и предпосылается изучению логарифмов. Его следует провести как алгебраическим, так и графическим способом. Именно, основываясь на понятии об обобщении показателя степени, придают показателю x различные значения и исследуют, какие при этом значения принимает y. При этом достаточно ограничиться случаем $a > 1$. В результате оказывается, что при непрерывном изменении x от $-\infty$ до $+\infty$ функция $y = a^x$ непрерывно возрастает от 0 до $+\infty$. Полезно проследить отдельные этапы этого изменения, рассматривая возрастание x 1) от $-\infty$ до -1, 2) от -1 до 0, 3) от 0 до 1, 4) от 1 до $+\infty$, чему будет соответствовать возрастание y: 1) от 0 до $\frac{1}{a}$, 2) от $\frac{1}{a}$ до 1, 3) от 1 до a, 4) от a до $+\infty$. Все эти изменения можно наглядно изучить на графике показательной функции, представляющем собою кривую, располагающуюся всеми точками в области положительных ординат, асимптотически приближающуюся к оси OX в отрицательной области абсцисс, пересекающую ось ординат на расстоянии от начала, равном 1, и затем уходящую вверх в бесконечность. Заметим, что изучение свойств показательной функции имеет большое значение для математического развития учащихся даже и независимо от ее применения к учению о логарифмах.



Черт. 19.

От показательной функции легко сделать переход к понятию о логарифмической функции, которая является обратной по отношению к ней и выражается уравнением $x = \lg_a y$. Зная свойства показательной функции, можно вывести все основные свойства логарифмов чисел при основании $a > 1$: 1) отрицательные числа логарифмов не имеют; 2) логарифм 1 есть 0; 3) логарифмы чисел, больших 1, положительны, а меньших — отрицательны; 4) логарифм основания равен 1; 5) большему числу соответствует и больший логарифм; 6) $\lg 0 = -\infty$; $\lg(+\infty) = +\infty$. Все эти свойства можно вывести и из рассмотрения графика логарифмической функции, который легко построить, имея график показательной функции, именно — он представит собою кривую такого же вида, как и график показательной функции, но располагающуюся в первом и четвертом координатных углах, симметрично к показательной кривой по отношению к равноделящей первого прямого координатного угла (черт. 19).

Эти сведения о логарифмах должны быть уяснены и закреплены рядом соответствующих упражнений на нахождение логарифма данного числа при данном основании, числа по данному основанию и логарифму и основания по данному числу и его логарифму. После этого следует изучить теоремы о логарифмировании произведения, частного, степени и корня и проделать ряд примеров на логарифмирование различных выражений и на обратное действие — потенцирование, представляющее обратный переход от логарифма какого-нибудь выражения к этому самому выражению. При этом, однако, следует избегать слишком сложных и искусственных формул, которые часто еще встречаются в наших задачниках, не приносящих пользы учащимся, но отнимающих у них много времени.

§ 76. Десятичные логарифмы.

После ознакомления с основными свойствами логарифмов следует перейти к приложению их к вычислениям, именно к свойствам десятичных логарифмов и употреблению таблиц. Такое изучение десятичных логарифмов полезно даже и в том случае, если в предварительном прохождении логарифмов учащиеся с употреблением таблиц для вычислений были ознакомлены. Последовательно изучаются логарифмы степеней числа 10, чисел, не представляющих собою точных степеней числа 10, но больших 1, и, наконец, десятичных дробей. При этом желательно пользоваться пятизначными таблицами, тогда как в пропедевтическом курсе более уместны таблицы четырехзначные. Необходимо отчетливое усвоение понятий о характеристике и мантиссе десятичного логарифма как целых, так и дробных чисел и о характере их изменения. Далее идет ознакомление с устройством таблиц и применением их для вычислений. Оно начинается с нахождения логарифма данного числа, причем последовательно учащиеся знакомятся с логарифмами трехзначных и четырехзначных чисел, мантиссы которых находятся в таблицах, а потом и пятизначных, для которых в таблицах мантисс прямо не дано, а их еще надо найти с помощью интерполирования. При этом учащимся должно быть сообщено, что разности между числами, большими 1000 и различающимися между собой не более, как на 1, приблизительно пропорциональны разностям между их логарифмами, что и делает возможным нахождение соответствующей поправки при помощи пропорции, или же, еще короче, при помощи маленьких табличек пропорциональных частей. Далее следует перейти к нахождению логарифмов чисел из 6 и большего числа цифр, причем следует указать, что логарифмы таких чисел по пятизначным таблицам находятся недостаточно точно, а потому принято приводить их к пятизначным, заменяя все цифры, следующие за пятой, нулями, если шестая цифра менее пяти, и увеличивая при этом пятую цифру на 1, если шестая цифра представляет 5 или большее число. Так, вместо $\lg 127{,}54213$ ищем $\lg 127{,}54$, но вместо $\lg 0{,}1238771$ ищем $\lg 0{,}12388$.

При этом следует приучать учащихся к крайне аккуратной записи находимых мантисс и делаемых поправок. После этого в аналогичном порядке изучается вопрос о нахождении числа по данному логарифму с помощью таблиц.

Далее идет вычислительная практика с таблицами, причем также должно быть обращено внимание на тщательность и аккуратность записей соответствующих вычислений. Особенное внимание должно быть обращено на действия с отрицательными характеристиками, которые первоначально затрудняют учащихся, в особенности деление логарифма с отрицательной характеристикой на целое число в том случае, когда характеристика на это число не делится, например

$$\bar{3},84684:4.$$

В этом случае прибавляют к характеристике столько отрицательных единиц, чтобы образовавшееся отрицательное число делилось на данный делитель, а к мантиссе прибавляют *столько же положительных* единиц. В данном случае будем иметь:

$$-3+0,84684=-4+1,84684;$$

деля каждое слагаемое отдельно, найдем:

$$(-4+1,84684):4=-1+0,46171=\bar{1},46171.$$

Но можно также в подобных случаях применять следующий прием, не встречающийся в наших учебниках, но полезный в особенности при тригонометрических вычислениях с логарифмами: надо прибавить к данному логарифму и отнять от него столько десятков, сколько единиц в делителе, и делить отдельно уменьшаемое и вычитаемое, например в данном случае

$$\bar{3},84684:4=(37,84684-40):4=9,46171-10=\bar{1},46171.$$

Применение этого способа обычно очень легко усваивается учащимися и гарантирует их от ошибок при подобных вычислениях. Наконец, полезно ознакомить учащихся с заменою вычитаемых логарифмов слагаемыми при помощи дополнений; однако, если этот способ затрудняет учащихся, можно не настаивать на его употреблении. Логарифмические вычисления применяются затем учащимися при решении задач на сложные проценты, *которые обычно учащимся не доставляют затруднений.*

§ 77. Показательные и логарифмические уравнения.

Небольшой отдел программы о показательных и логарифмических уравнениях имеет то значение, что в нем учащиеся знакомятся с простейшими видами трансцендентных уравнений, не встречающихся больше в курсе алгебры, и со способами их решения. При этом повторяются приемы решения обыкновенных уравнений и действия с логарифмами. Многие из показательных и логарифмических уравнений требуют искусственных способов решения, способствующих развитию у учащихся изобретательности в преобразовании алгебраических выражений и тщательности в исследовании получающихся результатов.

Показательными называются такие уравнения, в которых неизвестное встречается *в показателе степени*, а *логарифмическими* — в которых оно входит под знаком логарифма. Так, уравнения:

$$a^x=b;\quad (5x^2+x-2)^{3-x}=1;\quad 2^x=4x \text{ и т. п.}$$

— показательные, а уравнения:

$$\lg x=2\lg 21-\lg 7;\quad \lg\left(64\sqrt[24]{2^{x^2+40x}}\right)=0;\quad \frac{\lg(x^3-6x^2+11x-6)}{\lg(x-1)}=3$$

— логарифмические. Подобные уравнения решаются элементарным путем только в частных случаях, причем приходится основываться на следующих двух началах, вытекающих из теории логарифмов: 1) если числа равны, то при одном и том же основании, не равном 1, равны и их логарифмы; 2) если логарифмы при одном и том же основании, не равном 1, равны, то равны и соответствующие им числа.

Простейшим типом показательного уравнения, с которого следует начать изучение этого отдела, является уравнение $a^x = b$. Беря логарифмы от обеих его частей, найдем:

$$x \lg a = \lg b, \text{ откуда } x = \frac{\lg b}{\lg a}.$$

Примеры.

1) $1{,}2^x = 1{,}1$.

Логарифмируя обе части, имеем:

$$x \cdot \lg 1{,}2 = \lg 1{,}1 \quad \text{или} \quad x \cdot 0{,}07918 = 0{,}04139,$$

откуда

$$x = \frac{0{,}04139}{0{,}07918} = 0{,}52276.$$

Рассмотренный тип уравнений особенно легко решается, когда a и b могут быть представлены как степени некоторого третьего числа c. Тогда данное уравнение может быть решено без применения логарифмических таблиц. Действительно, пусть $a = c^p$; $b = c^q$, тогда имеем: $(c^p)^x = c^q$; $c^{px} = c^q$; логарифмируя, имели бы: $px \lg c = q \lg c$; так как $\lg c$ не равен нулю, то, сокращая на него, найдем: $px = q$ и $x = \frac{q}{p}$. Здесь можно было и непосредственно от уравнения $c^{px} = c^q$ перейти от равенства степеней к равенству показателей: $px = q$. Заметим, что учащиеся в этом случае нередко говорят: „сократим обе части уравнения на c“, что представляет грубую ошибку, так как c здесь не является множителем.

2) $9^{4x^2 - 3x} = \frac{1}{3}$.

Приводя обе части уравнения к одному и тому же основанию 3, найдем:

$$3^{2(4x^2 - 3x)} = 3^{-1};$$

приравнивая показатели степеней в обеих частях уравнения, получим

$$8x^2 - 6x + 1 = 0,$$

откуда найдем 2 решения:

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{1}{4}.$$

3) $(x^2 - 5x + 7)^{x-3} = 1$.

Логарифмируя, имеем:

$$(x - 3) \lg (x^2 - 5x + 7) = 0.$$

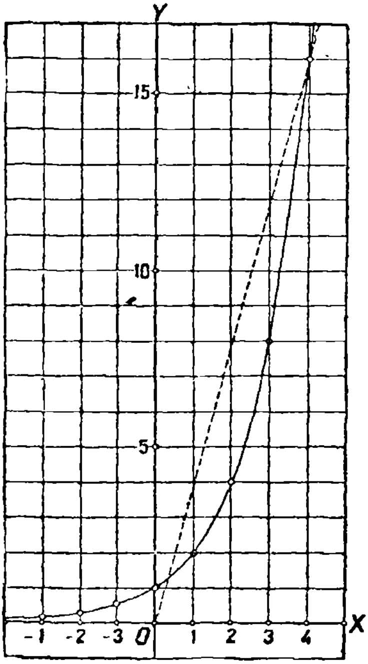
Отсюда имеем: или $x - 3 = 0$, что дает первый корень $x_1 = 3$; или

$$\lg (x^2 - 5x + 7) = 0,$$

иначе:

$$x^2 - 5x + 7 = 1; \quad \text{откуда} \quad x_2 = 2, \ x_3 = 3.$$

Весьма полезным во многих случаях оказывается способ подстановки, приводящий показательное уравнение к обыкновенному алгебраическому.



Черт. 20.

4) $2^{2x+1} - 9 \cdot 2^{x-1} + 1 = 0$.

Полагая здесь $2^x = y$, получим,

$$2y^2 - \frac{9}{2}y + 1 = 0;$$

решая это уравнение, получим:

$$y_1 = 2, \; y_2 = \frac{1}{4},$$

следовательно

$$2^x = 2, \quad \text{или} \quad 2^x = \frac{1}{4},$$

откуда

$$x_1 = 1 \;\text{ и }\; x_2 = 2.$$

5) В тех случаях, когда показательное уравнение не может быть решено алгебраически, возможно применение графического метода. Таково уравнение $2^x = 4x$, которое обычно очень интересует учащихся. Очевидным корнем его является $x = 4$. Для графического решения строим график показательной функции $y = 2^x$ и прямую $y = 4x$. Для построения первого уравнения даем $x - y$ различные значения: -3, -2, -1..., и вычисляем соответствующие значения y:

x	-3	-2	-1	0	0,5	1	1,5	2	3	4...
y	0,11	0,25	0,5	1	1,4	2	2,8	4	8	16... (черт. 20).

Чертеж обнаруживает, что обе линии пересекаются в двух точках (0,31; 1,24) и (4; 16), т. е. уравнение имеет два корня:

$$x_1 = 0{,}31; \quad x_2 = 4.$$

Для решения логарифмического уравнения надо в обеих частях его выполнить потенцирование, т. е. переход от логарифмов к соответствующим числам.

6) $\lg x = 2 \lg 21 - \lg 7$, отсюда $x = \frac{21^2}{7} = 3 \cdot 21 = 63$.

7) $\frac{\lg(x^3 - 6x^2 + 11x - 6)}{\lg(x - 1)} = 3$.

Преобразуя, имеем:

$$\lg(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) = 3 \lg(x - 1),$$
$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1)^3,$$

откуда, раскрывая скобки и упрощая, найдем:

$$3x^2 - 8x + 5 = 0,$$

и, следовательно, $x_1 = \frac{5}{3}$; $x_2 = 1$.

8) $\lg(64 \sqrt[24]{2^{x^2-40x}}) = 0$.

Потенцируя, имеем:

$$64 \sqrt[24]{2^{x^2-40x}} = 1 \text{ или } 2^6 \cdot 2^{\frac{x^2-40x}{24}} = 2^0;$$

т. е. имеем уравнение: $x^2 - 40x + 144 = 0$, корни которого $x_1 = 36$, $x_2 = 4$.

9) $\lg 20x - \frac{1}{2}\lg(220x - 117) = 1 - \lg 5$.

Заменяя 1 через $\lg 10$ и потенцируя, найдем:

$$\frac{20x}{\sqrt{220x - 117}} = 2; \quad 400x^2 - 4(220x - 117) = 0,$$

упрощая, имеем:

$$x^2 - 2{,}2x + 1{,}17 = 0,$$

откуда

$$x = 1{,}1 \pm 0{,}2 \text{ и } x_1 = 1{,}3, \quad x_2 = 0{,}9.$$

ГЛАВА XVIII.

ТЕОРИЯ СОЕДИНЕНИЙ И БИНОМ НЬЮТОНА.

§ 78. Теория соединений.

Теория соединений имеет обширные применения в высших частях математики, в особенности в теории рядов, где ею определяется состав коэфициентов разложений. В элементарной алгебре она находит в этом отношении применение в биноме Ньютона. Но кроме того она имеет большие приложения в разных практических вопросах, в частности — в теории вероятностей и ее прикладных областях, каковы: математическая статистика, теория страхования и т. п. Поэтому ознакомление с нею в элементарной математике является вполне уместным и желательным; сверх того, с ее помощью могут быть решаемы многие задачи, которые по своему особому характеру, способам решения и получаемым результатам обыкновенно очень интересуют учащихся. Однако изучение теории соединений нередко затрудняет учеников; происходит это от некоторой абстрактности ее изложения в учебниках, тонкости различий между разными видами соединений и не вполне удачной терминологии. Поэтому при прохождении этого отдела преподаватель должен давать возможно больше конкретного материала, наиболее простые и наглядные доказательства и совершенно понятные примеры и задачи.

Приступая к прохождению теории соединений, следует указать, что целью ее является подсчет числа групп или соединений различного вида, которые можно составить из имеющегося количества каких-нибудь элементов. Такими элементами могут быть какие-нибудь реальные объекты: вещи, люди и пр., или абстрактные понятия: числа, фигуры и т. п.

Составляемые группы при одном и том же числе отобранных элементов могут различаться или входящими элементами, или их порядком, или одновременно как входящими элементами, так и их порядком. Элементы обозначаются чаще всего буквами алфавита a, b, c..., соединение их выражается записью отбираемых элементов подряд друг с другом ab, abc... и т. п., чего отнюдь не надо смешивать с алгебраическим умножением.

Начинать изучение теории соединений принято с определения числа размещений из m элементов по n, т. е. A_m^n (arrangements), хотя можно было бы начать его и с определения числа перестановок, т. е. P_m (permutations). Держась первого пути, следует выяснить, что размещениями из данных соединений называются такие соединения их в группы с одинаковым числом элементов, которые отличаются одна от другой или самими элементами или их порядком. Так, размещения из четырех элементов a, b, c, d по два будут

$$ab,\ ac,\ ad,\ bc,\ bd,\ cd,\ ba,\ ca,\ cb,\ da,\ db,\ dc.$$

Чтобы вывести формулу, выражающую число размещений из m элементов по n, следует взять сначала задачу с конкретным содержанием, например: „Имеется 7 цветных полос, окрашенных в цвета спектра, т. е. красная, оранжевая, желтая, зеленая, голубая, синяя и фиолетовая; сколько можно из них изготовить различных флагов: одноцветных, двухцветных, трехцветных и т. д.?" Число возможных одноцветных флагов определяется без труда, оно равно числу полос, т. е $A_7^1 = 7$. Для определения числа двухцветных флагов заметим, что, взяв одну какую-нибудь цветную полосу, например красную, мы можем подшить к ней каждую из шести остальных, так что из каждого одноцветного флага можно получить шесть двухцветных, а всего, следовательно, двухцветных флагов будем иметь $A_7^2 = 7 \cdot 6 = 42$.

Таким образом, мы получим всевозможные двухцветные флаги, различающиеся как цветами полос, так и порядком их расположения.

Переходя от двухцветных к трехцветным флагам, видим, что к каждому двухцветному флагу мы можем присоединить любую из остальных 5 полос, так что число всевозможных трехцветных флагов, т. е. A_7^3 будет равно $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ флагов. Подобным же рассуждением убедимся, что $A_7^4 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$ и т. п.; вообще число размещений из 7 элементов по какому-нибудь числу будет равно произведению стольких же последовательно уменьшающихся чисел, начиная с 7. Последним будет число, определяющее число всевозможных семицветных флагов, которые можно сделать из 7 цветных полос, оно будет равно

$$A_7^7 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040.$$

После одного или нескольких таких примеров можно перейти к выводу общей формулы числа размещений, приводимому в учебниках, т. е.:

$$A_m^n = m(m-1)(m-2)\ldots.[m-(n-1)],$$

причем учащиеся должны твердо усвоить, что она содержит произведение n последовательно уменьшающихся чисел, начиная с m.

От формулы для числа размещений из m элементов по n весьма просто перейти к числу перестановок из m элементов, т. е. к P_m. Предварительно следует определить перестановки как такие соединения данных

m элементов, при которых изменяется лишь их порядок, самые же элементы остаются без изменения. Ясно, что эта задача — частный случай предыдущей; именно $P_m = A_m^m$. Конкретно, такая задача уже представлялась в предыдущем разобранном примере, именно — при определении числа всевозможных семицветных флагов, которые можно сделать из 7 полос, причем получившееся число можно представить как

$$A_7^7 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7,$$

т. е. произведение ряда последовательных целых чисел от 1 до 7. Подобным же образом полагаем в общей формуле A_m^n число n равным m, тогда последний множитель примет вид $[m-(m-1)] = 1$, и, следовательно, $P_m = A_m^m = m(m-1)(m-2)\ldots 2 \cdot 1$, или $P_m = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (m-1)m$, число всевозможных перестановок из m элементов, равно произведению ряда натуральных чисел от 1 до m. Такое число часто называется „факториал m" и обозначается в английских учебниках сокращенно через $\angle m$, а в других странах и у нас $m!$. Последнее обозначение можно объяснить тем, что число P_m с возрастанием m растет необычайно быстро, что всегда вызывает удивление среди впервые с ним встречающихся. Так, $P_1 = 1$; $P_2 = 2$; $P_3 = 6$; $P_4 = 24$; $P_5 = 120$; $P_6 = 720$ и т. д., а, например, $P_{12} = 12! = 479\,001\,600$.

Еще пример: сколькими способами можно переставлять на полке 19 книг? Здесь ответ:

$$P_{19} = 19! = 12\,164\,510\,040\,883\,200.$$

Примеры и задачи подобного рода обычно очень интересуют учащихся. Так, оказывается, что если нужно произвести всевозможными способами пересадку 12 лиц на одной скамейке, причем эту пересадку производить ежеминутно в течение 11 часов в сутки, то, считая, что пересадка производится в году 365 дней, с отдыхом на один день в високосные годы, окажется, что на все пересадки потребуется 1988 лет 140 дней! Если сделать всевозможные перестановки из 75 букв обыкновенного шрифта и напечатать их в виде книги формата учебника алгебры А. Киселева, то толщина книги окажется значительно больше, чем расстояние от Земли до Солнца, и т. п.

Заметим, что формула для числа всевозможных перестановок могла бы быть установлена ранее числа размещений или независимо от нее. С этою целью рассмотрим, как изменится число перестановок, если к переставляемым элементам присоединить еще один элемент. Пусть число перестановок из $(m-1)$ элементов есть P_{m-1}; представим себе, что одна из них написана: $a'c\ldots k$. Новый m-й элемент l в этой перестановке может быть поставлен или перед каждым из $(m-1)$ написанных, т. е. перед a, b $c, \ldots, k$, или же после всех, т. е. после k, и, значит, он может занимать m различных мест, так что из каждой прежней перестановки можно получить m новых. Следовательно, имеем соотношение: $P_m = m \cdot P_{m-1}$. Полагая здесь $m = 2, 3, \ldots, (m-1), m$, получим:

$$P_2 = 2 \cdot P_1,$$
$$P_3 = 3 \cdot P_2,$$
$$P_4 = 4 \cdot P_3,$$
$$P_m = m \cdot P_{m-1}.$$

Перемножая эти равенства почленно, получим:

$$P_2 \cdot P_3 \cdot P_4 \cdot \ldots \cdot P_m = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot m \cdot P_1 P_2 P_3 \ldots P_{m-1},$$

что по сокращении даст $P_m = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot m$ Знакомство учащихся с формулою $P_m = m \cdot P_{m-1}$ полезно в том отношении, что здесь они встречаются с примером редукционной формулы, т. е. такой, которая вычисление искомого числа сводит на вычисление числа, единицей меньшего. Такой прием вывода формул имеет большое применение в высшей математике, но он может быть применен и в элементарной алгебре, в частности в ряде вопросов из теории соединений.

Последний вид соединений представляет сочетания из m элементов по n; это такие соединения, которые различаются друг от друга только самими входящими элементами, порядок же в них не играет роли. Конкретным примером для учащихся может быть задача: сколькими способами можно выбрать из 20 учащихся в ученический комитет 4 старост? Ясно, что здесь надо составить группу из данных 20 элементов в 4 элемента, но порядок избранных элементов при этом не играет никакой роли. Чтобы определить число сочетаний из m элементов по n, обозначаемое C_m^n (combinaisons), проще всего сопоставить новый вид соединений с прежними, т. е. с размещениями и перестановками. Так, сочетания, например, по 4 элемента нетрудно получить из размещений по 4 элемента, для чего достаточно из всего числа размещений по 4 элемента сохранить только какое-нибудь одно, остальные же отбросить. Так как всех размещений из 4 одних и тех же букв может быть столько, сколько можно сделать перестановок из 4 элементов, т. е. $P_4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$, то число сочетаний из 20 элементов можно получить, взяв число размещений A_{20}^4 и уменьшив его в P_4 раза, т. е.

$$C_{20}^4 = \frac{A_{20}^4}{P_4} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 4845.$$

Подобным же образом устанавливается и общая формула числа сочетаний из m элементов по n:

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{P_m} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots[m-(n-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}.$$

Учащиеся должны усвоить и запомнить, что в последнем выражении число множителей в числителе и знаменателе одинаково, именно n; в числителе они представляют ряд уменьшающихся последовательных целых чисел, начиная с m, а в знаменателе ряд натуральных чисел от 1 до n. Так,

$$C_{10}^3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120; \qquad C_{12}^5 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 792.$$

Формула, выведенная для числа сочетаний, является важнейшей по своим приложениям и свойствам среди других формул из теории соединений, а потому необходимо выяснить ее главнейшие свойства. Прежде всего следует обратить внимание учащихся на то, что, несмотря на свой вид дроби, она выражает целое число, так как число сочетаний может быть только целым. Отсюда вытекает важное следствие, что произведение n последовательных целых чисел всегда делится нацело на произведение n натуральных целых чисел. Так, например,

$$\frac{7\cdot8\cdot9\cdot10}{1\cdot2\cdot3\cdot4}=210.$$

Действительно, это число можно рассматривать как C_{10}^4, т. е. целое.

Далее полезно дать выражение числу сочетаний через число перестановок. С этой целью умножим числитель и знаменатель выражения C_m^n на произведение чисел от 1 до $(m-n)$, получим:

$$C_m^n=\frac{m(m-1)\ldots[m-(n-1)](m-n)(m-n-1)\ldots2\cdot1}{1\cdot2\cdot3\ldots n\cdot1\cdot2\ldots(m-n)},$$

или

$$C_m^n=\frac{P_m}{P_n\cdot P_{m-n}}.$$

Из этой формулы можно вывести важное следствие, прилагая ее к выводу C_m^{m-n}; именно, заменяя n через $m-n$, получим:

$$C_m^{m-n}=\frac{P_m}{P_{m-n}P_n};\ \text{т.е.}\ C_m^n=C_m^{m-n}.$$

Однако эту последнюю формулу лучше доказать учащимся наглядно, без вычислений. Именно, пусть имеем какое-нибудь число предметов, например 10 шариков, и составляем из них сочетания по 3. Определив первую тройку шариков, мы видим, что этому сочетанию соответствует сочетание из оставшихся 7 шариков; если мы отделим какую-нибудь другую тройку шариков, то останется также другая группа и 7 шариков и т. д., так что всякому сочетанию из 10 по 3 элемента соответствует одно сочетание из 10 по 7 элементов, так что

$$C_{10}^3=C_{10}^7\quad\text{или}\quad C_{10}^3=C_{10}^{10-3},\ \text{и вообще}\ C_m^n=C_m^{m-n}.$$

Это соотношение позволяет упрощать вычисление числа сочетаний в том случае, когда $n>\frac{m}{2}$. Так:

$$C_{10}^7=C_{10}^3=\frac{10\cdot9\cdot8}{1\cdot2\cdot3}=120.$$

Полезно еще раз рассмотреть изменение C_m^n в зависимости от n. Рассматривая значения C_m^1, $C_m^2\ldots$, видим, что эти числа возрастают с увеличением n, но формула $C_m^n=C_m^{m-n}$ показывает, что это возрастание идет только до некоторого предела. Чтобы его выяснить, рассмотрим отношение $\frac{C_m^{n-1}}{C_m^n}$, получим.

$$\frac{C_m^n}{C_m^{n-1}}=\frac{m(m-1)\ldots[m-(n-1)]}{1\cdot2\ldots(n-1)n}:\frac{m(m-1)\ldots[m-(n-2)]}{1\cdot2\ldots(n-1)}=\frac{m-(n-1)}{n},$$

т. е. каждое последующее сочетание получается из предыдущего через умножение на дробь $\frac{m-n+1}{n}$. Следовательно, чтобы последующее сочетание было более предыдущего, необходимо, чтобы $\frac{m-n+1}{n}>1$, отсюда $m+1>2n$, т. е. $n<\frac{m+1}{2}$. Итак, при постоянном m число сочетаний C_m^n возрастает только до тех пор, пока n менее половины числа m, увеличенного на 1, а затем начинает убывать, принимая ранее полученные значения в обратном порядке.

Изучение теории соединений следует, конечно, закончить решением и разбором задач разнообразных типов, обращая внимание на то, чтобы учащиеся отчетливо умели различать виды соединений и вычислять их число.

§ 79. Бином Ньютона.

Подробное изучение свойств символа C_m^n позволяет легко вывести формулу, известную под именем бинома Ньютона и позволяющую возводить двучленное количество в любую степень. Подготовкой для вывода этой формулы является рассмотрение произведения двучленов, различающихся вторыми членами, т. е.

$$(x+a)\ (x+b)\ (x+c)\ \ldots\ (x+k).$$

Как было упомянуто в I части настоящего курса, желательно уже при прохождении умножения целых алгебраических выражений проделывать ряд упражнений подобного рода; приступая же к изучению бинома Ньютона, следует проделать подробно перемножение двух, трех и четырех двучленов подобного рода; получим:

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab;$$
$$(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x+abc;$$
$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=x^4+(a+b+c+d)x^3+$$
$$+(ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2+(abc+abd+acd+bcd)x+$$
$$+abcd.$$

Рассмотрение полученных выражений показывает, что полученные произведения представляют собой многочлены, расположенные по степеням первого члена всех двучленов, т. е. x, причем первый член содержит эту букву в степени числа множителей, а показатели прочих членов постепенно понижаются на единицу, и, наконец, последний член не содержит x.

Особенно важно рассмотрение коэфициентов при степенях x в полученном произведении; оно показывает, что коэфициент первого члена равен 1; коэфициент при втором члене представляет собою сумму всех вторых слагаемых; коэфициент третьего члена — сумму всевозможных парных произведений вторых слагаемых; коэфициент четвертого члена — сумму произведений их по три и т. д.; последний член равен произведению вторых членов Полагая, что число всех перемножаемых двучленов m, можем этот результат сокращенно записать в виде:

$$(x+a)(x+b)(x+c)\ldots(x+k)=x^m+S_1x^{m-1}+S_2x^{m-2}+S_3x^{m-3}+$$
$$+\ldots+S_{m-1}x+S_m,$$

где

$$S_1=a+b+c+\ldots+k;\ S_2=ab+ac+\ldots,\ S_3=abc+\ldots,$$
$$S_m=abc\ldots k.$$

Весьма важно обратить здесь же внимание на число слагаемых в каждой сумме. Так как они представляют собою произведения вторых членов по два, по три и т. д., то они являются сочетаниями; следовательно, число слагаемых во втором члене произведения равно C_m^1, или m; в третьем члене — C_m^2, т. е. $\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}$, в четвертом — C_m^3, т. е. $\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}$ и т. д., в последнем, как и в первом, имеем одно слагаемое. Это замечание, не делаемое почему-то в этом месте в учебниках алгебры, позволяет затем легко вывести формулу бинома Ньютона. Для этого, как известно, предварительно доказывается с помощью математической индукции, т. е. перехода от m перемножаемых биномов к $m+1$, что если предыдущая формула верна для какого-либо числа биномов, то она будет верна и для $(m+1)$ членов; это доказательство помещено во всех учебниках. Затем в том же равенстве все слагаемые делаются равными первому, т. е. $a=b=c=\ldots=k$, после чего левая часть принимает вид $(x+a)^m$. Тогда сделанные ранее замечания о коэфициентах в произведении биномов, различающихся вторыми частями, позволяют вывести все свойства биномиальных коэфициентов. Именно, прежде всего самое разложение получает вид:

$$(x+a)^m = x^m + C_m^1 x^{m-1}a + C_m^2 x^{m-2}a^2 + \ldots + C_m^n x^{m-n}a^n + \ldots + a^m,$$

или в развернутом виде:

$$(x+a)^m = x^m + mx^{m-1}a + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^{m-2}a^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^{m-3}a^3 + \\ + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots[m-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}x^{m-n}a^n + \ldots + a^n.$$

Таким образом, коэфициенты разложения все могут быть получены как числа сочетаний. Однако для практики может быть указан более удобный способ для получения биномиальных коэфициентов, основанный на переходе от C_m^{n-1} к C_m^n. Как было выяснено в предыдущем параграфе, этот переход делается при помощи умножения C_m^{n-1} на $(m-n+1)$ и деления его на n. Но так как $(m-n+1)$ является степенью x в n-м члене бинома, то отсюда вытекает следующее простое практическое правило для получения коэфициента какого-нибудь члена: надо коэфициент предыдущего члена умножить на показатель степени x в том же члене и произведение разделить на число членов, предшествующих определяемому, или иначе на номер предшествующего члена. Так, чтобы получить последовательно все члены разложения $(x+a)^7$ пишем первые два его члена $(x+a)^7 = x^7 + 7x^6a + \ldots$, для получения третьего члена составляем произведение $7\cdot 6$, которое делим на 2, получим $21x^5a^2$; чтобы получить четвертый член, берем произведение $21\cdot 5$ и делим его на 3, получим $35x^4a^3$; поступая таким образом далее, можем получить все члены данного разложения. Однако другие свойства символа C_m^n позволяют еще более упростить вычисление членов разложения; именно, как было установлено, числа C_m^n возрастают только до $n < \frac{m+1}{2}$, т. е. до середины разложения, а далее начинают убывать, принимая ранее полученные значения в обратном порядке. Поэтому, дойдя до середины разложения указанным способом, прочие члены можно затем уже писать непосредственно, следуя обратному порядку коэфициентов первой половины. Так, в вышеприведенном примере, получив половину членов разложения $(x+a)^7$, т. е.

$$(x+a)^7=x^7+7x^6a+21x^5a^2+35x^4a^3+....,$$

мы без вычисления коэфициентов пишем вторую половину разложения:

$$+35x^3a^4+21x^2a^5+7xa^6+a^7.$$

Следует обратить внимание учащихся на то, что средних членов, имеющих наибольший коэфициент, будет один или два, в зависимости от четности или нечетности показателя m.

Другие свойства разложения бинома Ньютона обычно не вызывают затруднений у учащихся. Необходимо только проделать достаточное число примеров, избегая, однако, показателей степени, больших 10—12, а также разных искусственных задач, которые в особенности были распространены в дореволюционных сборниках и являлись излюбленными темами на экзаменах зрелости, выпускных и т. п.

ГЛАВА XIX.

НЕРАВЕНСТВА.

§ 80. Основные свойства неравенств.

Отделу неравенств при прохождении алгебры в средней школе часто не уделяется особенно большого внимания, однако он его заслуживает по своему весьма важному значению. Действительно, неравенства являются важнейшим орудием при исследовании всевозможных математических вопросов; в частности, они применяются при исследовании решений уравнений, в приближенных вычислениях, при нахождении максимума и минимума переменных величин, в теории рядов, в вопросах геометрии, тригонометрии, физики и т. д.; поэтому прохождение отдела о неравенствах должно быть достаточно подробным и углубленным. По программе они отнесены к 9-му классу средней школы; однако, как уже было упомянуто при обозрении программы (§ 13), учащиеся с основными свойствами неравенств и решением простейших неравенств первой степени должны быть ознакомлены уже в 6-м классе после изучения уравнений первой степени, с которыми они имеют очень много общих свойств. В 9-м классе отдел о неравенствах может быть пройден систематически.

Приступая к нему, полезно припомнить те сведения о неравенствах, которые у учащихся уже имеются, а затем дать определение, что, подобно равенству, неравенства составляют два выражения, соединенные при помощи знака неравенства. Общим знаком неравенства является перечеркнутый знак равенства $\neq$, в частности употребляются знаки: более ($>$) и менее ($<$); эти знаки пишутся так, что острие угла направлено к меньшему числу; $a\neq b$; $5>2$; $1<3$; иногда оба знака пишутся вместе: $a\gtrless b$. Подобно равенствам, в неравенствах различают правую и левую части. Аналогично с равенствами, которые делятся на тождества, справедливые при всевозможных значениях входящих количеств, и на уравнения, которые верны только при некоторых значениях этих количеств, и неравенства можно разделить на безусловные, справедливые при всяких значениях входящих в них букв, и условные, которые верны лишь в некоторых пределах. Так, неравенства $x^2+1>0$, $x^2+\frac{1}{x^2}>1$ справедливы при всяких значениях x; неравенство: $x-3>5$ справедливо лишь при $x>8$; неравенство $\frac{x-2}{x-5}<0$ верно лишь для значений x, заключающихся в пределах $2<x<5$, но неверно, например, при $x=7$ или $x=1$.

Неравенства первого рода могут быть доказываемы, а второго — решаемы аналогично уравнениям. Доказательство и решение неравенств основываются на их свойствах, которые аналогичны свойствам уравнений. Исходным пунктом принимается определение понятия большего и меньшего чисел: число A считается большим B, если разность между ними положительна, т. е. $A>B$, если $A-B>0$, и $A<B$, если $A-B<0$. Так как понятия „больше" и „меньше" к мнимым числам не прилагаются, то в учении о неравенствах рассматриваются только действительные значения входящих чисел. Основными свойствами неравенств всех видов являются следующие:

I. Если $A>B$ и $B>C$, то $A>C$. Действительно, здесь $A-B>0$ и $B-C>0$, значит $(A-B)+(B-C)>0$, или $A>C$.

II. Если к обеим частям неравенства прибавить или от обеих частей неравенства отнять по одному и тому же количеству, то новое неравенство будет иметь тот же знак и будет равносильно прежнему, т. е. будет удовлетворяться теми же значениями входящих в него букв.

Действительно, пусть имеем неравенство $A>B$; прибавив к обеим частям его по m, получим $A+m>B+m$, т. е. знак неравенства измениться не может, так как первое неравенство можно представить в виде $A-B>0$, а второе в виде $(A+m)-(B+m)>0$, что после вычитания имеет тот же вид. Следовательно, те значения входящих букв, которые удовлетворяют первому неравенству, будут удовлетворять и второму. Например, если $x>5$, то и $x+1>5+1$ или $x+1>6$. На этом свойстве так же, как и в уравнениях, основано перенесение членов из одной части неравенства в другую с обратными знаками.

III. Если обе части неравенства умножить (или разделить) на одно и то же положительное количество, то новое неравенство будет равносильно прежнему.

Умножая обе части неравенства $A>B$ на $m>0$, имеем $Am>Bm$, или $(A-B)m>0$; так как второй множитель — число положительное, то и первый должен быть числом положительным, т. е. $A-B>0$, значит, действительно, $Am>Bm$ равносильно неравенству $A>B$. На этом свойстве основано освобождение неравенств от дробей; например, имея неравенство $\frac{x}{2}+\frac{1}{6}>\frac{x}{3}+\frac{1}{4}$, можно после приведения всех дробей к общему знаменателю и умножения на него обеих частей неравенства придать ему вид: $6x+2>4x+3$; или, проще, $2x>1$; $x>\frac{1}{2}$. Возможно также сокращать обе части неравенства, деля их на положительный делитель; так, имея неравенство $8(x^2-2x+2)(x^2+2x+1)(x-2)>0$, можно разделить обе части его на произведение первых трех множителей, так как при всяком x они являются числами положительными;

действительно:

$$x^2-2x+2=(x-1)^2+1; \quad x^2+2x+1=(x+1)^2.$$

После сокращения неравенство примет более простой вид: $x-2>$ >0, или $x>2$.

IV. Если обе части неравенства умножить (или разделить) на одно и то же отрицательное число, то полученное новое неравенство будет равносильно основному только в том случае, если знак самого неравенства будет изменен на обратный. Действительно, здесь, если $A>B$ и $m<0$, то $A-B>0$, но $(A-B)m<0$; так как произведение положительного числа $(A-B)$ на отрицательное m будет отрицательным, то $Am<Bm$. Например, $5>2$, но, умножая обе части этого неравенства на -3, получим правильное неравенство: $-15<-6$. На этом свойстве основана возможность перемены знаков у всех членов неравенства вместе с одновременной переменой знака на обратный у самого неравенства; например, из неравенства $2-3x>x-5$ получим: $-2+$ $+3x<5-x$, и далее: $3x+x<5+2$; $4x<7$.

Это последнее свойство отличается от аналогичного свойства уравнений, а потому учащиеся часто забывают при перемене знаков у всех членов неравенства изменить и его знак на обратный. Поэтому необходимо, чтобы они ясно поняли сущность последнего преобразования и пользовались им безошибочно.

Здесь же следует обратить внимание учащихся на то, что обе части неравенства нельзя умножить на количество, равное нулю, так как оно при этом переходит в тождество. Поэтому, если обе части неравенства умножаются на множитель, содержащий неизвестное количество, то новое неравенство будет равносильно прежнему и будет иметь тот же самый знак лишь в том случае, когда при всех значениях неизвестного упомянутый множитель остается положительным. В противном случае новое неравенство может оказаться неравносильным первому и иметь посторонние решения. Например, имея неравенство $x>3$ и умножая его на множитель $(1+x)^2$, который при всех значениях x положителен, получим неравенство: $(1+x)^2x>3(1+x)^2$, или $x^3+3x^2+x-3>0$, которое, как легко убедиться проверкой, справедливо, как и первое, при $x>3$; но, умножая то же неравенство, например, на множитель $(x-1)$, который не может быть всегда положительным, получим неравенство $x^2-4x+3>0$, которое удовлетворяется при $x=0$, $x=2$ и другими числами, не удовлетворяющими первому неравенству.

V. Возведение обеих частей неравенства в одну и ту же целую положительную степень дает неравенство, равносильное данному лишь в том случае, когда обе части его положительны при всяких значениях входящих букв; в противном случае могут получиться посторонние решения.

Для учащихся достаточно показать правильность этой теоремы на частных примерах. Так, возвышая в квадрат обе части неравенства с положительными членами $5>3$, получим правильный результат: $25>9$. Но возводя в квадрат обе части неравенства $5>-5$, получим нелепое неравенство $25>25$; точно так же от возведения в квадрат неравенства $-5<-2$ получим неправильный вывод $25<4$.

Общее доказательство теоремы V такое: пусть $A>B$ или $A-B>0$. Возводя обе части первого неравенства в целую и положительную степень m, получим $A^m > B^m$, или $A^m - B^m > 0$, что можно представить в виде:

$$(A - B)(A^{m-1} + A^{m-2}B + A^{m-3}B^2 + \dots + B^{m-1}) > 0,$$

но, по условию, A и B — всегда положительны; значит, второй множитель в левой части уравнения — положителен; сокращая на него неравенство, имеем $A - B > 0$, т. е. новое неравенство равносильно прежнему.

§ 81. Решение неравенств первой степени с одним неизвестным.

На основании изложенных свойств и производится решение неравенств первой степени с одним неизвестным приемами, вполне аналогичными приемам для решения уравнений.

Примеры.

1) $(x + 3)(x + 2) > x^2 + 4x + 10$.

Раскрывая скобки и упрощая, получим:

$$x^2 + 5x + 6 > x^2 + 4x + 10,$$

откуда $x > 4$. Следовательно, x может равняться $4\frac{1}{2}$, 5, 6, ... , но не может быть равным 4, 3, 2, $1\frac{1}{2}$ и т. д., что полезно проверить подстановкой этих значений в данное неравенство.

2) $\frac{x-4}{5} > \frac{3x+5}{2} - \frac{x+7}{3}$.

Освобождая неравенство от дробей, найдем:

$$6(x - 4) > 15(3x + 5) - 10(x + 7),$$

далее последовательно получим:

$$6x - 24 > 45x + 75 - 10x - 70,$$

$$6x - 45x + 10x > 24 + 75 - 70;$$

$$-29x > 29, \text{ откуда } 29x < -29 \text{ и } x < -1.$$

Таким образом, x может равняться любому отрицательному числу, абсолютная величина которого более 1.

Из разобранных примеров следует, что в общем случае неравенство первой степени может быть приведено к виду $ax + b > 0$, или $ax > -b$. Отсюда, если $a > 0$, получим решение $x > -\frac{b}{a}$, если же $a < 0$, то $x < -\frac{b}{a}$. Таким образом, все преобразования неравенства при его решении имеют целью привести к виду такого неравенства, решение которого очевидно.

Полезно истолковать решение неравенства $ax + b > 0$ с геометрической точки зрения. Так как $y = ax + b$ имеет графиком прямую линию, то решить неравенство — значит найти те значения абсциссы x, при которых ординаты точек прямой, соответствующей линейной функции

$y = ax + b$, имеют положительные значения. В первом из вышеприведенных примеров ответ $x > 4$ показывает, что вопросу удовлетворяют все точки, лежащие по оси OX вправо от точки, абсцисса которой равна 4; во втором — все точки, лежащие по оси абсцисс влево от точки с абсциссой, равной — 1.

Во многих задачах для определения границ изменения неизвестного количества даются два неравенства. В этом случае необходимо, решив неравенства, подвергнуть исследованию получившиеся результаты, причем они могут быть трех родов, которые удобнее всего выяснить на частных примерах.

Примеры.

1) $2x - 5 > 3$; $3x + 1 < 2x + 10$.

Решая эти неравенства, получим: $x > 4$, $x < 9$, т. е. x заключается в пределах между 4 и 9:

$$4 < x < 9.$$

Здесь получились для x два предела: верхний и нижний, между которыми и можно брать его значения; так, x может равняться $4\frac{1}{2}$, 5,6,..., но не может равняться $3\frac{4}{5}$, 2,0,—4 и т. д.

2) $3x + 1 > 10$; $12x - 3 < 5$.

Отсюда получаем $x > 3$ и $x < \frac{2}{3}$. В этом случае пределы для x противоречат друг другу, и задача невозможна.

3) $5x - 4 < 6$; $13 - 2x > 1$.

Отсюда имеем $x < 2$ и $x < 6$. Здесь первый предел уже заключает в себе второй, который может быть опущен. Для x можно взять значения меньше 2, например $x = 1\frac{1}{2}$, 1, 0, — 5 и т. д.

Решение и исследование системы двух неравенств первой степени тоже полезно рассмотреть с учащимися с геометрической точки зрения.

§ 82. *Доказательство неравенств.*

Как было упомянуто, тождествам в области уравнений соответствуют в области неравенств такие неравенства, которые справедливы при всяких значениях входящих в них букв. Такие неравенства требуют доказательства, сводящегося к ряду преобразований, приводящих доказываемое неравенство к такому, правильность которого очевидна. Обычно при этом исходным или заключительным положением бывает то бесспорное неравенство, что всякое действительное число в квадрате положительно, т. е. более нуля. Доказательство справедливости неравенств является весьма полезным упражнением, представляющим ценный материал для исследования различных вопросов. Желательно, чтобы, где возможно, алгебраическое исследование соединялось при этом с геометрическим. Классическим примером доказательства неравенства является доказательство теоремы о том, что среднее арифметическое двух неразных чисел a и b, т. е. $\frac{a+b}{2}$, более их среднего геометрического, т. е. $\sqrt{ab}$. Доказательства этого положения синтетическим и аналитическим методом были даны в *этой книге*, в § 5. К алгебраическому доказательству можно присоединить геометрическое; именно, считая a и b отрезками прямой, опишем на сумме их $(a+b)$, как на диаметре радиусом $\frac{a+b}{2}$ полуокружность и в точке соединения отрезков a и b восставим к диаметру перпендикуляр до пересечения с полуокружностью. Тогда длина этого перпендикуляра, как известно из геометрии, и будет $\sqrt{ab}$; он, очевидно, менее радиуса $\frac{a+b}{2}$ и будет равен ему только тогда, когда $a=b$. Приведем еще примеры.

I. Доказать, что если a,b,c — неравные положительные числа, то

$$a^2+b^2+c^2>ab+ac+bc.$$

Для доказательства воспользуемся очевидным положением, что квадрат разности всяких двух неравных действительных чисел есть величина положительная, т. е. $(a-b)^2>0$; $(b-c)^2>0$; $(a-c)^2>0$. Отсюда

$$a^2+b^2>2ab,\quad b^2+c^2>2bc,\quad a^2+c^2>2ac.$$

Каждое из этих неравенств легко можно было бы доказать и геометрически. Складывая их почленно, получим, по сокращении на 2, требуемое неравенство:

$$a^2+b^2+c^2>ab+bc+ac.$$

II. Показать, что если a,b,c — числа, большие 1, то

$$(a+1)(b+1)(a+c)(b+c)>16\,abc.$$

Так как среднее арифметическое двух чисел более их среднего геометрического, то

$$\frac{a+1}{2}>\sqrt{a};\quad \frac{b+1}{2}>\sqrt{b};\quad \frac{a+c}{2}>\sqrt{ac};\quad \frac{b+c}{2}>\sqrt{bc}.$$

Перемножая все эти неравенства почленно, найдем:

$$\frac{(a+1)(b+1)(a+c)(b+c)}{16}>\sqrt{a^2b^2c^2},$$

откуда и вытекает справедливость доказываемого неравенства.

III. Доказать, что при N целом и большем 2

$$N^{N+1}>(N+1)^N.$$

Представим отдельно левую и правую части в виде суммы:

$$N^{N+1}=N^N\cdot N=N^N+N^N+N^N+\cdots+N^N;$$

$$(N+1)^N=N^N+N\cdot N^{N-1}+\frac{N(N-1)}{2}N^{N-2}+\cdots+1.$$

Первые два члена в обеих суммах равны, но, начиная с третьего члена, слагаемые второго ряда при $N>2$ будут менее соответствующих слагаемых первого на некоторое целое число. Поэтому, хотя во второй сумме и имеется сравнительно с первой одно меньшее слагаемое, именно 1, она оказывается менее первой, начиная с $N=3$.

ГЛАВА XX.

ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ.

§ 83. Значение исследования уравнений.

При изучении уравнений первой степени в 6-м классе и уравнений второй степени в 7-м классе решение их, как было упомянуто в соответствующих отделах этой книги, должно сопровождаться исследованием полученных результатов. Однако тогда оно еще не может быть вполне глубоким и исчерпывающим как по недостаточности еще у учащихся математических сведений, так и по сравнительно малой степени их математического развития. Поэтому является целесообразным, как это сделано в программе средней школы, в заключение прохождения курса алгебры еще раз вернуться к центральному и важнейшему ее пункту — учению об уравнениях, именно к исследованию уравнений. При этом повторяются способы решения уравнений и составления их по данным условиям. Ввиду трудности для учащихся чисто абстрактного исследования уравнений полезно, чтобы оно сопровождалось достаточным числом конкретных примеров, допускающих простое и наглядное истолкование. В дальнейшем мы и приводим подобные примеры на все случаи исследования.

Приступая к прохождению данного отдела, следует выяснить учащимся, что исследование уравнений может носить либо общий либо частный характер.

Именно, когда уравнение дано в общем виде, т. е. с буквенными коэфициентами, то исследовать его — значит выяснить, при каких значениях букв решение его будет возможно или невозможно, какое число решений может быть получено, а также какие особенно замечательные случаи могут представиться при решении.

Если же уравнение дано в числах и составлено из условий задачи, то исследование имеет целью выяснить, насколько полученные корни соответствуют конкретным условиям данной задачи. Так, например, решая задачу, в которой требуется найти число рабочих, и получив ответ $10\frac{1}{4}$, мы должны заключить, что задача невозможна, так как искомое число должно быть целым.

§ 84. Исследование уравнений первой степени.

Переходя к исследованию уравнений первой степени с одним неизвестным, следует напомнить учащимся, что после всех упрощений уравнение первой степени может быть приведено к виду $ax = b$.

Для нахождения x мы должны обе части его разделить на a. Предполагая, что число a конечно и не равно нулю, получаем от деления:

$$x = \frac{b}{a}.$$

Это решение может быть либо положительным, когда знаки у b и a одинаковые, либо отрицательным, если они разные. Но если коэфициент $a = 0$, деление на него обеих частей уравнения невозможно, и необходимо исследовать, каково будет решение уравнения при этом условии, в частности при b не равном и равном нулю.

Положительные решения. Когда в уравнении $ax = b$, a и b конечны и имеют одинаковые знаки, то $x = \frac{b}{a}$ будет положительным числом. По отношению к задачам конкретного содержания положительные решения обыкновенно дают удовлетворительный ответ на вопрос задачи; однако и они могут не удовлетворять задаче, если искомое число должно быть подчинено каким-либо дополнительным условиям. Пусть, например, дана задача: „Коллектив из 12 лиц внес в пользу беспризорных детей 45 руб., при этом каждый мужчина внес по 5 руб., а каждая женщина по 3 руб. Сколько было мужчин и женщин?"

Обозначив число мужчин через x, а женщин $12 - x$, составим уравнение:

$$5x + (12 - x)\,3 = 45, \quad \text{откуда} \quad 5x + 36 - 3x = 45, \quad 2x = 9;$$

отсюда $x = 4\frac{1}{2}$, т. е. мужчин было $4\frac{1}{2}$, а женщин $7\frac{1}{2}$. Эти решения удовлетворяют уравнению, но не подходят для ответа как дробные, что показывает на невозможность задачи.

Отрицательные решения. Когда в уравнении числа a и b не равны нулю и имеют противоположные знаки, например $a > 0$ и $b < 0$ или $a < 0$ и $b > 0$, то $x = \frac{a}{b}$ будет числом отрицательным.

Отрицательные решения показывают либо на невозможность задачи либо по основному смыслу этих чисел, что вопрос, поставленный в задаче, должен быть изменен в противоположном смысле. Последнее бывает тогда, когда величина, упоминаемая в задаче, может изменяться в двух противоположных смыслах. В частности, это имеет место в задачах с геометрическим содержанием.

Пример 1. Найти двузначное число, сумма цифр которого равна 6; если же прибавить к этому числу 72, то получим новое число, написанное теми же цифрами, но в обратном порядке.

Обозначая число десятков искомого числа через x, а единиц через $(6 - x)$, составим уравнение:

$$10x + (6 - x) + 72 = 10\,(6 - x) + x,$$

или

$$9x + 78 = 60 - 9x, \quad 18x = -18,$$

откуда $x = -1$. Это решение показывает на невозможность задачи, так как x должно быть числом положительным.

Пример 2. В одном классе 42 учащихся, а в другом — 24. По скольку учащихся нужно прибавить в каждый из этих классов, чтобы в первом учеников стало вдвое более, чем во втором.

Полагая, что надо прибавить по x учеников, составим уравнение:

$$42 + x = 2\,(24 + x); \quad -x = 6, \quad x = -6.$$

Это решение показывает, что вопрос должен быть изменен в противоположном смысле: не только не надо прибавлять учащихся, но, наоборот, надо взять из каждого класса по 6 учеников; действительно, тогда получим в первом классе 36 учеников, а во втором 18, т. е. вдвое менее.

В задачах геометрического характера получение отрицательного решения чаще всего может быть истолковано как откладывание отрезка в направлении, противоположном предполагаемому в задаче. Если же отрицательными числами выражаются такие величины, как площадь или объем, то задача невозможна.

Нулевые решения. Когда в уравнении $ax = b$ число $b = 0$, а $a \neq 0$, то $x = \frac{0}{a} = 0$. Такое решение, называемое нулевым, иногда дает ответ на вопрос задачи; иногда же указывает на невозможность ее.

Пример 1. По какому числу надо прибавить к числителю и знаменателю дроби $^{17}/_{51}$, чтобы она обратилась в $^{1}/_{3}$?

Обозначая прибавляемое число через x, имеем:

$$\frac{17 + x}{51 + x} = \frac{1}{3}; \quad 51 + 3x = 51 + x; \quad 2x = 0 \text{ и } x = 0.$$

Решение показывает, что в данном случае ничего не нужно прибавлять к членам дроби, ибо она и так уже равна $\frac{1}{3}$, в чем можно убедиться, сократив ее.

Пример 2. На перевыборы сельсовета в 1-й день пришли все избиратели и 23 человека посторонних, а во 2-й день $74^0/_0$ избирателей и 46 посторонних, причем во 2-й день всех собравшихся было вдвое более, чем в 1-й. Найти число избирателей.

Обозначая число избирателей через x, составим из условий задачи уравнение:

$$(x + 23)\,2 = \frac{74}{100}\,x + 46, \quad \text{или} \quad 2x + 46 = \frac{74}{100}x + 46; \quad \frac{26}{100}\,x = 0,$$

откуда

$$x = 0.$$

Полученный ответ в данном случае показывает, что задача невозможна.

Бесконечные решения. Когда в уравнении $ax = b$ число $a = 0$, а $b \lessgtr 0$, то $x = \frac{b}{0}$. Так как деление на 0 невозможно, то полученный результат показывает, что уравнение нельзя удовлетворить никаким конечным числом. Это же видно и из уравнения, так как произведение любого конечного числа x на $a = 0$ должно дать 0, а не b. Чтобы уяснить себе смысл полученного решения, будем брать вместо a числа, не равные 0, но весьма малые, стремящиеся уменьшаться до 0, тогда легко видеть, что частное $\frac{b}{a}$ будет все увеличиваться и стремиться к бесконечно большому значению. Действительно, пусть, например, $b = 5$, полагая $a = \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \ldots$ найдем:

$$x = 5 : \frac{1}{10} = 50; \quad x = 5 : \frac{1}{100} = 500, \quad x = 5 : \frac{1}{1000} = 5000 \text{ и т. д.}$$

Поэтому символ $\frac{b}{0}$ принимается равным бесконечности и обозначается знаком ∞. Итак, $x = \frac{b}{0} = \infty$.

В задачах бесконечные решения указывают на невозможность вопроса, если по его смыслу решение должно быть конечным.

Пример 1. По какому числу надо прибавить к членам дроби $^3/_5$, чтобы она превратилась в 1?

Обозначая искомое число через x, получим уравнение:

$$\frac{3+x}{5+x}=1;\quad 3+x=5+x;\quad x-x=5-3;\quad 0\cdot x=2;\ x\ \frac{2}{0}=\infty.$$

Это решение показывает, что задача невозможна, но что чем более будет прибавляемое число, тем полученное число будет ближе к 1. Действительно, прибавляя, например, к числителю и знаменателю по 1000, получим $^{1003}/_{105}$, прибавляя по 1 000 000, найдем

$$x=\frac{1\,000\,003}{1\,000\,005}$$ — числа, явно приближающиеся к 1.

В задачах геометрического характера бесконечное решение может встретиться при определении расстояния точки пересечения двух прямых от какой-нибудь точки, лежащей на одной из них. В этом случае оно легко истолковывается в том смысле, что прямые нигде не пересекаются, т. е. они параллельны.

Неопределенные решения. Когда $a=0$ и $b=0$, $x=\frac{0}{0}$. Чтобы выяснить смысл этого решения, заметим, что в этом случае уравнению удовлетворяет всякое число, ибо любое число x, умноженное на 0, дает в произведении 0. Значит в данном случае уравнение $ax=b$ представляет собой тождество. Поэтому решение $\frac{0}{0}$ указывает на неопределенность задачи.

В вопросах с конкретным содержанием неопределенные решения показывают, что ответом на предложенную задачу может быть любое число.

Пример 1. Найти дробь с знаменателем 5, которая не изменится, если к числителю ее прибавить 0,2, а к знаменателю — величину, обратную числителю.

Обозначая числитель дроби через x, находим, что она имеет вид $\frac{x}{5}$; составляя уравнение, получим:

$$\frac{x+0{,}2}{5+\frac{1}{x}}=\frac{x}{5},\quad \text{откуда}\quad 5x+1=5x+1,\quad x=\frac{0}{0}.$$

Этот ответ показывает, что задаче удовлетворяет всякое число, в чем легко убедиться подстановкой.

Пример 2. Во сколько раз нужно увеличить числитель и знаменатель дроби $\frac{29}{87}$, чтобы она превратилась в $\frac{1}{3}$?

Составляя уравнение $\frac{29x}{87x}=\frac{1}{3}$, найдем $87x=87x$, $x=\frac{0}{0}$.

Это решение показывает, что задаче удовлетворяет всякое число. Действительно, сократив дробь, видим, что она равна $\frac{1}{3}$ и не может измениться по величине от умножения на любое число.

Рассмотрение приведенных и других подобных задач важно в том отношении, что учащиеся знакомятся с новым для них символом $\frac{0}{0}$, означающим неопределенность.

§ 85. Исследование уравнений с буквенными коэфициентами.

Как было упомянуто, если задача предложена в общем виде, т. е. данные числа выражены буквами, исследование решения уравнения имеет целью выяснить, какие значения должно придать этим буквам, чтобы задача была возможна, а также какие особенные случаи могут представиться при ее решении.

Пример. По какому числу x надо прибавить к числителю и знаменателю дроби $\frac{a}{b}$, чтобы она сделалась равной дроби $\frac{m}{n}$?

Обозначая искомое число через x, составим уравнение:

$$\frac{a+x}{b+x}=\frac{m}{n},$$

откуда

$$an+nx=bm+mx; \quad x(m-n)=an-bm;$$

$$x=\frac{an-bm}{m-n}.$$

Исследование. Пусть $m \neq n$. Тогда, чтобы решение x было положительным, необходимо, чтобы одновременно соблюдались неравенства:

$$1)\ \begin{matrix} an>bm, \\ m>n \end{matrix} \quad \text{или} \quad 2)\ \begin{matrix} an<bm, \\ m<n \end{matrix}$$

В первом случае 1-е неравенство может быть представлено в виде: $\frac{a}{b}>\frac{m}{n}$, и в силу 2-го неравенства имеем $a>b$. Отсюда выводим заключение, что неправильная дробь $\frac{a}{b}$ от прибавления к ее числителю и знаменателю по одному и тому же числу x уменьшается.

Во втором случае имеем $\frac{a}{b}<\frac{m}{n}$ и в силу 2-го неравенства видим, что $a<b$. Поэтому заключаем, что правильная дробь $\frac{a}{b}$ от прибавления к ее членам одного и того же числа x увеличивается.

Чтобы x был отрицательным, нужно, чтобы

$$1)\ \begin{matrix} an>bm, \\ m<n \end{matrix} \quad \text{или} \quad 2)\ \begin{matrix} an<bm, \\ m>n, \end{matrix}$$

т. е. иначе

$$\begin{cases} \frac{a}{b}>\frac{m}{n}, \\ m<n \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \frac{a}{b}<\frac{m}{n}. \\ m>n \end{cases}$$

Рассуждая, как в предыдущем случае, видим, что от вычитания из членов правильной дроби по одному и тому же числу x она уменьшается, неправильная же увеличивается.

Нулевое решение $x=0$ будет иметь место, когда $m \neq n$ и $an-bm=0$. Отсюда имеем $\frac{a}{b}=\frac{m}{n}$, что возможно, когда a и b пропорциональны m и n. Следовательно, нулевое решение означает, что первоначальная дробь должна быть равна измененной, отличаясь от нее только видом.

Полагая $m=n$ и в то же время $am \neq bn$, найдем $x=\infty$.

Так как в этом случае $\frac{m}{n}=1$, а $\frac{a}{b} \neq 1$, то бесконечное решение показывает, что дробь не может обратиться в 1 ни при каком прибавлении по одинаковому числу к ее членам, но будет стремиться к 1 по мере увеличения прибавляемого числа x.

Когда $m=n$ и в то же время $am=bn$, получим:

$$x=\frac{0}{0}.$$

Для истолкования этого решения заметим, что $\frac{m}{n}=1$, а так как $\frac{a}{b}=\frac{m}{n}=1$, то заключаем, что в данном случае и основная и измененная дроби равны 1. Очевидно, что в таком случае от прибавления любого числа x к членам дроби она не изменится.

Ввиду важности упражнений на исследование уравнений и недостаточного выбора их в существующих у нас сборниках задач предлагаем примеры на разобранные случаи.

Положительные решения. 1) Партия рабочих из 40 человек заработала в 6 дней 4600 руб., причем каждый мужчина зарабатывал в день по 20 руб., а женщина по 15 руб. Сколько было мужчин и женщин?

2) Велосипедист от города A до города B ехал 3 дня, проезжая каждый день по 8 часов, а от B до C — 4 дня, причем всего был в дороге 124 часа. Сколько часов ежедневно ехал он между B и C?

Отрицательные решения. 1) Из двух игроков A и B первый имеет 100 руб. а второй 24 руб.; после игры оказалось, что A имеет денег втрое более, чем B. Сколько он выиграл?

2) На прямой от точки M отложены в одну сторону отрезки $MN=3$ *м* и $MP=5$ *м*. Найти на продолжении той же прямой за точкой P такую точку Q, чтобы NQ было средним пропорциональным между MQ и PQ.

Нулевые решения. 1) Найти дробь, числитель которой вдвое более знаменателя и которая обращается в $\frac{1}{2}$, если к числителю прибавить 3, а к знаменателю 6.

2) Общество из 10 человек истратило 80 руб., причем каждый мужчина дал по 8 руб., а каждая женщина по 6 руб. Сколько было мужчин и женщин?

Бесконечные решения. 1) Найти дробь, числитель которой на 5 менее знаменателя и которая в сумме с обращенной дробью дает 2.

2) Отрезок AC разделен в точке B на две части в 3 и 2 *см*. Найти на продолжении AC точку M, такую, чтобы $\frac{AM}{CM}=\frac{5}{2}$.

Неопределенные решения. 1) Одна библиотека имеет 3000 книг и получает ежегодно 450 новых книг; другая имеет 1500 и получает ежегодно новых 225 книг. Через сколько лет первая будет иметь книг вдвое более второй?

2) Пароход прошел расстояние от города A до города B в течение суток; на обратном пути он шел 15 час. со скоростью, на 2 *км* меньшей, а затем 9 час. со скоростью, на 3 *км* большей, чем прежде, и пришел в город C, отстоящий от A на 3 *км*. Определить скорость парохода.

Исследование уравнений с буквенными коэфициентами. 1) Разделить число a на две части так, чтобы сумма частных от деления первой части на m, а второй на n равнялась бы числу b.

2) Отцу a лет от роду, а сыну b. Через сколько лет отец будет в m раз старше сына?

3) На прямой линии даны две точки A и B, расстояние между которыми равно d. Найти на той же прямой точку C, такую, чтобы $\frac{AC}{BC}=\frac{m}{h}$.

4) Сумма цифр двузначного числа равна a. Если увеличить это число на b единиц, то получится новое число, написанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найти число.

5) Сколько следует взять товару каждого сорта ценой в a руб. за килограмм и b руб. за килограмм, чтобы составить m килограммов смеси ценою c руб. за килограмм?

6) Два велосипедиста выезжают одновременно и по одному направлению из двух мест, расстояние между которыми d километров, причем первый движется в m раз скорее второго. Где он догонит второго?

§ 86. Исследование системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными.

Приступая к изучению этого отдела, следует припомнить с учащимися, что система двух уравнений с двумя неизвестными может быть представлена в следующем общем виде:

$$ax+by=c, \quad a_1x+b_1y=c_1. \tag{1}$$

Решая ее, получим:

$$x=\frac{cb_1-bc_1}{ab_1-ba_1}; \quad y=\frac{ac_1-ca_1}{ab_1-ba_1}. \tag{2}$$

Эти формулы при различных значениях входящих букв дают величины для неизвестных, из которых некоторые могут представлять особенности. Поэтому исследуем их, рассматривая отдельно два случая: 1. Когда общий знаменатель ab_1-ba_1 не равен нулю. 2. Когда он равен нулю.

1. Если $ab_1-ba_1\neq 0$, то величины неизвестных будут конечными числами, положительными, отрицательными или равными нулю. Последний случай заслуживает особого внимания; он будет иметь место только в том случае, когда $c=0$ и $c_1=0$. Действительно, подставляя в уравнения (1) $x=0$ и $y=0$, получим:

$$a\cdot 0+b\cdot 0=c, \text{ откуда } c=0;$$
$$a_1\cdot 0+b_1\cdot 0=c_1, \text{ откуда } c_1=0.$$

Например, решая систему: $3x-2y=0$ и $5x+y=0$, найдем $x=0$ и $y=0$.

2. Если $ab_1-ba_1=0$, то величины неизвестных могут быть бесконечными или неопределенными. Рассмотрим отдельно эти случаи.

1) Пусть $ab_1-ba_1=0$, но ни один из числителей дробей уравнений (2) не равен нулю, т. е.

$$cb_1-bc_1\neq 0; \quad ac_1-ca_1\neq 0.$$

Тогда, согласно определению символа $\frac{m}{0}$, найдем:

$$x=\frac{cb_1-bc_1}{0}=\infty; \quad y=\frac{ac_1-ca_1}{0}=\infty.$$

Чтобы выяснить, какой смысл имеет этот случай, уравняем в данных уравнениях коэфициенты при одном из неизвестных, например при x. Получим:

$$aa_1x+ba_1y=ca_1, \quad aa_1x+ab_1y=ac_1.$$

ОГЛАВЛЕНИЕ.

Введение.

Глава I.

Цели и методы преподавания математики.

Глава II.

Практическое ведение преподавания алгебры.

Глава III.

Краткий исторический очерк развития основных понятий алгебры.

Глава IV.

Начальное обучение алгебре.

Глава V.

Относительные числа.

Глава XII.

Стр.

Квадратное уравнение и квадратная функция.

Глава XIII.

Мнимые и комплексные числа.

Глава XIV.

Иррациональные уравнения.

Глава XV.

Системы уравнений второй степени.

Глава XVI.

Прогрессии.

Глава XVII.

Логарифмы.

Глава XVIII.

Теория соединений и бином Ньютона.

Глава XIX.

Неравенства.

Глава XX. *Стр.*

Исследование уравнений.

Ответственный редактор *В. Н. Молодший.*
Технический редактор *И. И. Кутин.*

Сдано в набор 28/IV 1933 г. Подписано к печ. 10/IX 1934 г.

Формат бумаги 62×94 1/16. Тираж 30000 экз.
Изд. листов 15. Бум. листов 7 1/2. Авт. листов 19,8. 109344 печ. зн. в 1 бум. листе.

Учпедгиз № 6254. Зак. № 3365.
Уполн. Главлита № Б-39295

1-я Образцовая типография Огиза РСФСР треста „Полиграфкнига". Москва, Валовая, 28.