В. Г. ЧИЧИГИН

МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ АРИФМЕТИКИ

ДЛЯ УЧИТЕЛЬСКИХ ИНСТИТУТОВ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ

Утверждено
Министерством просвещения РСФСР

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
МОСКВА * 1952

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данная работа предназначается в качестве учебного пособия для студентов учительских институтов и учителей средней школы. Она посвящена разработке основных вопросов методики преподавания арифметики дробей. Особенности построения и изложения данного курса такие:

1) Учение о делимости чисел излагается не как самостоятельная тема, а в непосредственной связи с изучением дробей — сравнением их, сокращением и приведением их к общему знаменателю. Но весь этот материал по указанной теме легко может быть выделен из общего текста и пройдён отдельно.

2) Кратное отношение двух чисел определяется как частное, полученное при делении одного числа на другое, и рассматривается в непосредственной связи с делением дробей.

3) Проценты рассматриваются как особый вид десятичных дробей.

4) Пропорции изучаются в самом конце курса арифметики после изучения пропорциональных величин.

В основу данной работы положен непосредственный опыт преподавания в средней школе самого автора, руководство педагогической практикой студентов физико-математического факультета педагогического и учительского институтов, наблюдение за работой молодых учителей, только что окончивших педагогический институт, некоторое обобщение опыта лучших учителей, под руководством которых проводилась и проводится педагогическая практика студентов, и обработка лекций по курсу методики преподавания математики в педагогическом институте.

Во втором издании книги основное содержание её сохранилось полностью; в некоторых местах в текст внесены небольшие дополнения, изменения и уточнения; весь текст подвергся тщательной редакционной обработке; исправлены замеченные ошибки и опечатки в первом издании.

Все замечания и пожелания, касающиеся этой книги, прошу направлять по адресу: Москва, Чистые пруды, 6, Министерство просвещения, Учпедгиз, редакция математики.

Автор.

ВВЕДЕНИЕ

I. ШКОЛЬНЫЙ КУРС АРИФМЕТИКИ

1. Учебный план и программа по арифметике

Арифметика в средней школе по своему удельному весу занимает одно из первых мест в учебном плане. Так, в начальной школе на изучение арифметики отводится по 7 часов в неделю во II и IV классах и по 6 часов в I и III классах, что в общей сложности составляет около 860 часов; в средней школе в V классе отводится 7 часов и в VI — 2 часа в неделю, что составляет около 290 часов.

Курс арифметики в средней школе имеет вполне определённое содержание: в первых четырёх классах в основном изучается арифметика целых чисел и арифметика именованных чисел; там же вводится ознакомление учащихся с простейшими обыкновенными дробями и с процентами. В V классе изучается систематический курс обыкновенных и десятичных дробей и проценты; в VI классе основная работа по арифметике состоит в решении задач в связи с изучением пропорции и пропорциональных величин.

Время от времени в программы по арифметике вносятся некоторые изменения, но они не касаются основного содержания этого курса [1].

2. Цели преподавания математики вообще и арифметики в частности

В постановлении ЦК ВКП(б) о школе от 5 сентября 1931 г. указывается задача средней школы: «Дать достаточный объём общеобразовательных знаний и подготовить... вполне грамотных людей, хорошо владеющих основами наук и усвоивших точно очерченный круг систематизированных знаний». В другом поста-

---

[1] Программы средней школы. *Математика*, 1951 г., и программы начальной школы, 1951 г

новлении ЦК ВКП (б) о начальной и средней школе от 25 августа 1932 г. говорится, что «...школа знакомит учащихся как в теории, так и на практике со всеми главными отраслями производства...». Наконец, в программе ВКП (б) сказано: «Школа должна быть... проводником идейного организационного воспитательного влияния в целях воспитания поколения, способного окончательно установить коммунизм».

Из этих трёх документов вытекают общие цели, которые ставятся перед каждым учебным предметом, в том числе и перед математикой, в частности, перед арифметикой: воспитательные, образовательные и практические.

а) Воспитательные цели. Один из принципов советской дидактики состоит в том, чтобы обучение в школе было воспитывающим. Поэтому при обучении математике школа должна:

1) развить диалектико-материалистическое мировоззрение, чувство национальной гордости и советского патриотизма;

2) воспитать волю и настойчивость, уважение к истине;

3) развить логическое мышление, привычку критически относиться к собственным и чужим суждениям;

4) развить воображение, внимание, аккуратность в выполнении работы.

б) Образовательные цели состоят в том, чтобы дать учащимся ряд математических понятий и знаний, приведённых в определённую и стройную систему.

Математика изучается в средней школе во всех её классах. По учебному плану на неё отводится большое количество часов. Учащиеся получают огромное количество понятий и знаний, которые должны быть приведены в определённую и стройную систему. Поэтому в процессе обучения надо научить учащихся соответствующим образом обрабатывать получаемые знания, объединять и обобщать создаваемые понятия, приводить их в систему.

В процессе обучения математике надо научить учащихся в каждой задаче, понимая последнюю в самом широком смысле этого слова, различать, что дано, что надо найти и как это сделать.

Всё это, вместе взятое, должно помогать развитию и повышению способности учащихся к правильному, логическому мышлению.

в) Практические цели:

1) научить учащихся приобретённые знания и навыки применять в практической повседневной жизни при решении разного рода задач;

2) приучить их распознавать математическую сущность в явлениях окружающей жизни.

Помимо общих целей, имеются ещё специальные цели, которые обусловливают введение в учебный план на определённой ступени обучения каждого отдельного математического предмета — арифметики, алгебры, геометрии и тригонометрии. Эти специальные цели обычно излагаются в объяснительной записке к программам по математике.

Так, в объяснительной записке к программе по арифметике в начальной школе сказано: «Преподавание арифметики должно содействовать развитию логического мышления детей, уменью устанавливать зависимости между величинами, делать правильные умозаключения». И дальше: «Около половины всего времени, отведённого в школе на классные уроки и домашние работы по арифметике, должно быть использовано для решения арифметических задач. Уменье решать арифметические задачи составляет одну из основных сторон общеобразовательного значения арифметики. При решении задач развивается математическое мышление учащихся, их сообразительность» [1].

В объяснительной записке к программе по арифметике в средней школе сказано: «Преподавание арифметики имеет целью научить учащихся сознательно, быстро, уверенно и наиболее рационально производить действия с целыми и дробными числами и применять знания к решению задач и выполнению простейших расчётов практического характера» [2].

Ко всему этому следует добавить ещё две цели: 1) возбуждение интереса к количественной стороне явлений окружающего мира и 2) подготовка к изучению дальнейших отделов математики.

Действительно, при преподавании арифметики надо прежде всего возбуждать интерес учащихся к ней, а это возможно сделать в том случае, если изучаемый материал по арифметике будет вытекать из решения тех задач, которые даёт окружающая жизнь (конечно, в упрощённой и доступной форме), а приобретённые знания и навыки будут немедленно и непосредственно прилагаться к решению новых задач, содержание которых может быть заимствовано из других школьных предметов — из географии, истории, естествознания и т. п. Но при этом надо иметь в виду, чтобы интерес учащихся был обращён не только к форме и конкретному содержанию задачи, а и к количественной стороне тех или иных явлений и фактов, к выяснению зависимости между величинами, к «великанам и карликам в мире чисел» и к соответствующим конкретным представлениям, которые характеризуются этими числами.

Преподавание арифметики имеет целью также подготовить учащихся к восприятию и изучению других школьных предметов, в первую очередь математических — алгебры, геометрии и тригонометрии. Арифметика указывает правила и приёмы выполнения тех действий, которые в алгебре и в других математических дисциплинах только обозначаются. Арифметика нужна и при изучении таких предметов, как физика, химия, биология и социально-экономические науки.

В арифметике впервые проводится «различение конечного процесса и бесконечного»: натуральный ряд чисел, бесконечный процесс деления, бесконечные десятичные дроби. Эти факты сами по себе

---

[1] Программы начальной школы, 1951 г.
[2] Программы средней школы, 1951 г.

составляют очень ценную сторону математического мышления и расширяют кругозор учащихся. Введение буквенной символики при изучении арифметики, хотя бы в очень ограниченных размерах, и подстановка числовых значений букв в данный комплекс их подводит учащихся к понятию функциональной зависимости (например, изменение результатов действий при изменении компонентов) [1].

3. Задачи методики арифметики

Первое и самое главное требование к каждому человеку, который посвящает себя деятельности преподавателя, состоит в том, что он должен знать свой предмет. В настоящее время этого мало: преподавание есть такое дело, которому надо много и упорно учиться и в котором надо всё время упражняться (Гербарт). Даже самый талантливый преподаватель, как и самый даровитый художник, нуждается не только в предварительном обучении и руководстве, но и в дальнейшем самосовершенствовании, в глубоком и упорном изучении своего дела. Методика преподавания каждого школьного предмета и является одним из таких руководств после изучения психологии, общей педагогики и истории педагогики, которое помогает будущему или начинающему преподавателю ознакомиться с основными методами, приёмами и средствами преподавания данного школьного предмета. К методическому руководству обращается иногда и опытный преподаватель, как к справочнику, в тех случаях, когда он встречает неожиданные затруднения в своей преподавательской работе.

Таким образом, основная задача методики арифметики состоит в том, чтобы быть руководством для практической работы преподавателя в школе. Это чисто практическая задача, разрешение которой составляет основное содержание методических руководств по арифметике. В них разрешается преимущественно один вопрос — вопрос о том, как следует преподавать арифметику, т. е. какими методами, приёмами и средствами надо пользоваться при обучении арифметике.

В соответствии с этим основное содержание методики арифметики состоит:

1) в создании и разработке методов, приёмов и средств преподавания арифметики на научной, психологической, педагогической и дидактической базе; в основу этих методов и приёмов должно быть положено требование, чтобы учащиеся *понимали* изучаемый материал и *сознательно* усваивали его с наименьшей затратой необходимых усилий;

2) в создании и разработке приёмов и средств для развития и закрепления необходимых навыков;

3) в создании и разработке приёмов *применения* усвоенных

---

[1] *Власов*, Доклады на II Всероссийском съезде преподавателей математики в 1913 г., стр. 26.

знаний и приобретённых навыков к решению разного рода задач в школе и в повседневной жизни.

Но этим не может быть исчерпано всё содержание методики арифметики. Помимо указанного вопроса о том, **как** надо преподавать, встаёт ещё и такой вопрос: **почему** при обучении арифметике надо пользоваться теми или иными методами и приёмами, **почему** изучаемый материал надо проходить в той или иной последовательности. Ответ на вопрос **почему**? является второй основной задачей методики арифметики. Решение этой задачи должно составить общее введение в эту методику, а также введение в методику преподавания каждой отдельной, более или менее значительной темы школьного курса арифметики. Это даст возможность подготовить будущего или начинающего преподавателя к надлежащему пониманию специальной, чисто практической части методики, поможет ему более сознательно отнестись к отдельным методическим деталям и вызовет более значительный интерес ко всему педагогическому процессу в целом.

В задачу методики арифметики, наконец, входят ещё два вопроса: что надо преподавать и зачем данный предмет входит в учебный план школы. Ответы на эти вопросы даны в программах школьного курса арифметики и в предыдущем изложении (цели обучения).

II. МЕТОДЫ И ПРИЕМЫ, ПРИМЕНЯЕМЫЕ ПРИ ОБУЧЕНИИ АРИФМЕТИКЕ

Преподавание математики в средней школе, особенно арифметики, представляет собою очень сложный процесс. Не менее сложным и трудным делом является проведение даже одного урока по арифметике на ту или иную тему. В последнем случае преподаватель при подготовке к уроку ставит перед собою такие вопросы: 1) тема урока (чёткая формулировка её); 2) методы, которыми будет сделан необходимый вывод; 3) каким приёмом будет излагаться учебный материал урока; 4) какой потребуется числовой задачный материал; 5) какие вспомогательные средства потребуются на уроке для того, чтобы учебный материал сделать понятным и доходчивым до учащихся; 6) как создавать, развивать и закреплять практические навыки учащихся? Решение первого вопроса в этой многогранной подготовительной работе преподавателя вытекает из того плана, который составляет каждый преподаватель на определённый период (чаще всего на одну четверть учебного года). Второй вопрос — подбор числового или задачного материала — будет подробно разобран в дальнейшем изложении методики преподавания отдельных тем. То же самое следует сказать о шестом вопросе. В данном месте более подробно будут рассмотрены третий, четвёртый и пятый вопросы.

Какими методами будет сделан необходимый вывод? Оставляя в стороне философское истолкование термина «метод», можно ограничиться общеизвестным определением этого термина в дидактике: метод — это путь, заранее намечаемый для достижения поставленной цели. Метод — это последовательность тех шагов, которые делаются по направлению к намеченной цели. Действовать методично — значит действовать последовательно: правильно располагать употребляемые средства, целесообразно и экономно сочетать их.

Объём понятия «метод» в области преподавания математики составляют: индукция и дедукция, анализ и синтез и аналогия. Это — три группы научных методов, при помощи которых на протяжении тысячелетий создавалась и развивалась математика. Эти же три группы методов применяются и при преподавании математики в средней школе, в частности, при преподавании арифметики.

1. Научные методы

Из истории математики известно, что она на первых этапах своего развития создавалась преимущественно индуктивным путём. Изучение арифметики в школе можно рассматривать как процесс создания её, а потому изучение очень многих вопросов курса арифметики, если не всех, целесообразно начинать тоже индуктивным путём.

Индуктивный метод получил своё название от слова индукция, что в переводе с латинского языка означает наведение. В логике под индукцией разумеется умозаключение от частного к общему. Сущность этого метода в школьном применении состоит в следующем: 1) учащиеся получают ряд однотипных задач или примеров (по нескольку дробей со знаменателем 10, со знаменателем 100 и т.п.); 2) они выявляют в них общие и существенные характерные признаки (знаменатели у всех дробей первой группы 10, второй группы $100 = 10 \cdot 10$ и т. д.) и 3) формулируют общий вывод (определение десятичной дроби). Ещё пример: вводится понятие о простых и составных числах. Преподаватель даёт учащимся ряд чисел и предлагает им определить, на какие числа делится каждое из данных чисел без остатка (пользуясь известными признаками делимости чисел или непосредственным делением на такие числа как 7, 11, 19 и т. п.). Учащиеся выполняют эту работу и по предложению преподавателя распределяют все данные числа на три группы: единица, простые и составные числа. Затем они сами придумывают числа для пополнения двух последних групп и составляют определения, какие числа называются простыми и какие — составными.

Процесс этот довольно трудный и требует большого напряжения и внимания со стороны учащихся и самого преподавателя. Последний всё время должен руководить работой: он указывает учащимся объекты наблюдения, сосредоточивает их внимание на нужных признаках, помогает выделять существенные признаки и делать общий вывод. Но эта трудность вполне окупается полученными результатами: 1) учащиеся принимают самое активное участие во всех этапах работы; 2) благодаря этому они понимают весь ход работы по частям и в целом; 3) они приучаются к аналитической работе (выделение существенных признаков); 4) приучаются к творческой работе (придумывают сами соответствующие примеры или задачи); 5) прочно усваивают изучаемый материал.

Но это только одна сторона работы. Полученные общие выводы или правила учащиеся тотчас же применяют к решению соответствующих задач. Так, в приведённом примере с помощью индукции было создано общее понятие о простых и составных числах. Теперь учащиеся могут решать задачи об отнесении каждого нового числа в группу простых или составных чисел (с помощью таблицы простых чисел или непосредственным делением). Этот процесс подведения частных случаев — данных чисел — под известное общее понятие есть простейший пример другого научного метода — дедукции. В развёрнутом виде предыдущее решение задачи может быть представлено так: 1) единица делится только на единицу, все простые числа делятся только на единицу, и каждое из них «само на себя», а все составные числа, кроме того, делятся и на другие числа; 2) данное число, отличное от единицы, делится только на единицу и «само на себя» (или делится и на другие числа); 3) следовательно, данное число — простое (или составное). Приведённое рассуждение есть пример дедуктивного умозаключения (от общего к частному) и называется силлогизмом.

Дедукция в переводе с латинского языка означает подведение (частных случаев под общее понятие). Как видно из приведённого примера, дедукция тоже может и должна применяться в школьном преподавании арифметики. Те общие выводы и заключения, которыми располагает дедукция, подводя под них новые частные случаи, могут быть предварительно получены описанным индуктивным путём, а в отдельных случаях могут быть сообщены учащимся в готовом виде самим преподавателем или же взяты ими непосредственно из учебника. Дедуктивные заключения в форме силлогизма очень трудны для учащихся пятых и даже более старших классов. Поэтому преподаватель должен оказывать им всемерную помощь в этом деле: на первых порах он требует от них связной формулировки только каждой отдельной посылки или отдельного суждения, например: какие числа называются простыми? На что делится данное число? Как можно назвать данное число? В связи с решением большого числа задач учащиеся будут постепенно приучаться строить и полные силлогизмы в простейших случаях.

Индукция и дедукция в школьном применении их не должны противопоставляться одна другой, а должны сопутствовать друг другу: индуктивным путём учащиеся создают бо́льшую часть общих выводов или общих заключений, под которые потом они дедуктивным путём подводят частные случаи.

Итак, с помощью индукции и дедукции в процессе школьного обучения создаётся весь тот материал, который составляет основное содержание школьного курса арифметики.

Другая группа научных методов, которые применяются и должны применяться при обучении арифметике, — это анализ и синтез.

Анализ — греческое слово; в буквальном переводе означает разделение объекта, вещественного или логического, на его составные части... В логике анализ заключается в расчленении понятия, мысли (суждения) или целой логической концепции (совокупности суждений) на составляющие понятия или суждения [1]. Под анализом подразумевают также ход мысли от **неизвестного** (целого) к известному (частям целого).

Когда учащийся решает вопрос о том, делится ли данное число на 4 или нет, он разбивает его на два слагаемых — на **сотни** и десятки с единицами, потому что число, состоящее только из сотен, делится на 4; затем он рассматривает второе слагаемое и определяет делимость или неделимость его на 4. При сложении и вычитании дробей с разными знаменателями учащийся должен сначала привести их к общему знаменателю. С этой целью он сосредоточивает своё внимание только на знаменателях данных дробей, как бы отделяя их от числителей; затем он всматривается в структуру каждого знаменателя (например, $\frac{5}{12} \pm \frac{7}{24}$; $\frac{11}{12} \mp \frac{11}{18}$ и т. п.) и только после этого намечает наиболее рациональный приём для того, чтобы сделать знаменатели дробей равными. Всё это — примеры простейших случаев применения анализа. При решении сложных арифметических задач тоже иногда применяется аналитический метод, когда рассуждения начинаются с основного вопроса данной задачи (от неизвестного к известному); в результате такой работы получается план решения задачи. Аналитический метод при обучении арифметике заставляет учащихся принимать самое активное участие в общеклассной работе. Благодаря этому они понимают каждый отдельный этап работы, цель и значение её; с помощью предварительного анализа они приучаются составлять план своей работы.

В то же время этот метод требует от учащихся очень большого напряжения сил и внимания, вследствие чего они быстро утомляются. Это обстоятельство преподаватель должен учитывать при применении аналитического метода.

Синтез — тоже греческое слово; в переводе оно означает соединение (разрозненных частей в одно целое); синтезом называется также ход мысли от **известного** (частей целого) к неизвестному (целому).

В школьном обучении арифметике синтез имеет очень широкое применение. Так, в большинстве случаев сложные арифметические задачи решаются синтетическим способом, когда из всей совокупности данных чисел выбирается одна пара их и к ней подбирается соответствующий вопрос (с помощью известных данных находится искомое число). Синтетически излагается решение задачи и в том случае, когда предварительно был составлен план решения её с помощью анализа.

---

[1] Большая советская энциклопедия, т. 2, стр. 583.

Изложение учебного материала в учебниках арифметики (как и в других учебниках математики) почти всегда имеет синтетическую форму. Общий обзор пройденного материала, подведение итогов, формальное изложение доказательств или обоснований в общеклассной работе тоже проводится в синтетической форме.

Эта форма с внешней стороны характеризуется плавностью и связностью изложения, логической последовательностью и стройностью. Она приучает учащихся к слушанию связной речи или к чтению её по учебнику, заставляет их самостоятельно улавливать и устанавливать связи между отдельными суждениями. Отвечая заданный урок, учащиеся и сами должны стараться излагать его в синтетической форме.

Применение синтетического. метода в школьном преподавании имеет и отрицательные стороны. Учащиеся только слушают, а потому отсутствует активное участие их в работе в обычном смысле этого слова. Они упускают иногда связи между отдельными суждениями, вследствие чего им становится не всегда понятным дальнейшее изложение.

Эти отрицательные качества синтетического метода можно в значительной мере ослабить или совсем изжить, если в школьном преподавании он будет в той или иной степени предваряться или сопровождаться аналитическим методом, с помощью которого сначала намечается план работы, а затем — выполнение плана в синтетическом изложении.

Третий научный метод — аналогия — тоже имеет широкое применение в процессе обучения арифметике. Аналогия — это сходство понятий или предметов. Умозаключение по аналогии или по сходству состоит в отыскании некоторых общих свойств, характеризующих понятия или предметы. Так при решении задач одного и того же типа учащиеся обнаруживают сходство этих задач, имеющих различное конкретное содержание, что помогает им применить известный приём при решении данной задачи. Правила выполнения действий над десятичными дробями аналогичны соответствующим правилам действий над целыми числами и т. д.

2. Приёмы преподавания арифметики

Различают два основных приёма, которые применяются при обучении арифметике тем или иным методом: монологический — в форме рассказа преподавателя, и диалогический — в форме вопросов и ответов. Надо заметить, что всё программное содержание курса арифметики в V и VI классах даёт очень мало учебного материала для изложения его монологически, в форме рассказа. Так, преподаватель может на уроке сообщать отдельные исторические сведения в связи с изучением некоторых вопросов программы, например о дробях, которыми пользовались древние египтяне или халдеи, о нуле и вообще об истории цифр. После изучения той или иной значительной темы преподаватель может в форме рассказа или лекции сделать сводку и обобщение накопившегося материала, уже знакомого учащимся, например, общий обзор признаков делимости чисел, способов приведения дробей к общему знаменателю, обзор задач на пропорциональное деление, на процентные вычисления.

Такие лекции по арифметике в V и VI классах могут длиться не более 10—15 минут, чтобы не ослабевало внимание учащихся. С той же целью во время рассказа или лекции преподаватель задаёт учащимся контрольные вопросы, чтобы поддерживать интерес к тому, о чём идёт речь, поддерживать внимание и подчёркивать наиболее важные моменты в своём изложении. Попутно с рассказом преподаватель на классной доске может делать краткие записи в определённом порядке: план содержания или схему выводов (например, схему задач на процентные вычисления, на пропорциональное деление), собственные имена, новые трудные слова, хронологические даты. Эти записи учащиеся переносят в свои тетради, что будет способствовать более прочному и отчётливому запоминанию излагаемого материала.

Но бо́льшая часть материала по арифметике в классе изучается в диалогической форме — в форме вопросов и ответов, или, как иногда говорят, в форме беседы. Наиболее часто применяется так называемый **эвристический** прием. Он состоит в том, что преподаватель предлагает учащимся целый ряд соответственно подобранных текстовых задач или числовых примеров; затем или в процессе решения, или по окончании решения их он ставит целый ряд вопросов, последовательно связанных между собой, чтобы, во-первых, помочь учащимся выявить общие признаки, характеризующие эти задачи или решение их, и, во-вторых, подвести их к необходимому выводу. Вопросы преподавателя должны быть только наводящими, но не подсказывающими; они не должны выходить за пределы общего развития учащихся на данной ступени обучения. Ответы на эти вопросы по форме могут быть полными или краткими; иногда они могут быть даже однословными. Например, изучается приведение дробей к общему знаменателю в связи с сравнением величины их (сравнение дробей с равными знаменателями уже известно учащимся): 1) преподаватель предлагает последовательно одну группу дробей за другой, а учащиеся должны сравнить их величины (например: $\frac{5}{12}$ и $\frac{11}{24}$; $\frac{3}{7}$ и $\frac{10}{21}$ и т. п.); 2) при решении первой задачи ставятся вопросы: а) какие дроби вообще можно сравнивать (с равными знаменателями), б) какие знаменатели в данных дробях (разные: 12 и 24), в) какая зависимость между этими числами (24 делится на 12 без остатка, или 24 есть число, кратное 12), г) можно ли знаменатели этих дробей сделать равными (можно), д) как это сделать (или 12 умножить на 2, или 24 разделить на 2), е) как изменится величина дроби в каждом из этих случаев (в первом случае дробь уменьшится в два раза, а во втором — увеличится в два раза), ж) как можно сохранить величину каждой дроби, если будет изменён знаменатель (надо соответственно числитель первой дроби умножить на 2, а числитель второй — разделить на 2), з) какой приём из двух указанных нужно применить (5 умножить на 2 можно, а 11 разделить на 2 без остатка нельзя). После умножения числителя и знаменателя первой дроби на 2 учащиеся сравнивают обе дроби, пользуясь уже известным правилом. При решении второго и следующих примеров описанный процесс постепенно сокращается. Затем преподаватель помогает учащимся сделать общий обзор этой работы и сформулировать выводы.

Применение эвристического приёма требует значительно больше времени в общеклассной работе по сравнению с монологическим приёмом, особенно на первых порах. Но как только учащиеся привыкнут к нему, излишне затраченное время окупится, и дальнейшая работа пойдёт более быстрыми темпами. Особенно большая ценность этого приёма состоит в том, что он всё время поддерживает активность учащихся, постепенно приучает их анализировать данные условия и формулировать выводы.

При подготовке к уроку преподаватель должен особенно тщательно подбирать необходимый задачный материал, вдумчиво формулировать вопросы, последовательно располагать их и предвидеть возможные ответы учащихся. В ходе урока преподаватель должен быть готовым к изменению намеченного плана урока, если в этом будет надобность, особенно в связи с некоторыми неожиданными ответами учащихся или их вопросами.

Существует ещё одна разновидность диалогического приёма, известная под именем *сократического* или *сократовского приёма*. Сущность этого приёма заключается в том, что преподаватель задаёт учащимся ряд последовательных вопросов, на которые они дают ответы, приходя в конце концов к ложному утверждению. Вот пример применения сократического приёма. Преподаватель предлагает задачу такого содержания: «Производительность труда рабочих повысилась на 25%; как изменится время выполнения той же работы?» Обычно учащиеся, не задумываясь, сразу же отвечают, что и время сократится на 25%. Преподаватель даёт новые варианты той же задачи: как изменится время, потребное для выполнения той же работы, если производительность труда рабочих повысится на 50%? на 75%? на 100%? на 200%? Учащиеся сначала продолжают отвечать, как и раньше: время уменьшится на 50%, на 75%, на 100% и потом сообразят, что пришли к нелепости. Примерно такая же картина получается при изучении главного свойства дроби, когда учащимся предлагается задача: «Как изменится правильная дробь, если к числителю и знаменателю её прибавить по равному числу?» Учащиеся тоже сначала могут дать ответ, что величина дроби не изменится...

В предыдущем изложении были описаны монологический и диалогический приёмы преподавания в их чистом виде. При изучении арифметики монологический приём, как было сказано раньше, применяется сравнительно редко и небольшими дозами (не более 10—15 минут). Но отсюда нельзя сделать вывода о том, что во всех остальных случаях применяется только диалогический приём. Преподавание в школе — дело живое, а потому уложить весь процесс преподавания в строго намеченные рамки не только нельзя, но иногда это будет даже вредно. На практике обычно у вдумчивого преподавателя на одном и том же уроке переплетаются разные приёмы: от небольшого сообщения в форме рассказа преподаватель переходит к постановке ряда вопросов; ответы учащихся дают новый материал для обобщения и выводов, которые опять делаются и самим преподавателем и учащимися по вопросам первого.

3. Вспомогательные средства при обучении арифметике

Успех работы по арифметике, как и по другим предметам, в значительной мере зависит от того, в какой мере в процессе обучения возбуждается и поддерживается интерес учащихся. С этой целью преподаватель на каждом уроке должен давать им нечто новое; даже при повторении программного материала надо возбуждать и поддерживать интерес новизной — или освещая этот материал с новой точки зрения, или несколько расширяя рамки его, если это понятно и доступно учащимся.

Второе требование для возбуждения интереса и поддержания его заключается в том, чтобы в процессе обучения арифметике сами учащиеся принимали активное участие. Индуктивный метод и эвристический приём в значительной мере отвечают этому требованию. Той же цели служат такие могучие вспомогательные средства, как наглядность и лабораторные работы учащихся.

Один из основных принципов дидактики гласит: обучение должно быть наглядным. Принцип наглядности означает требование, чтобы знания учащихся основывались на живом и непосредственном восприятии ими самими изучаемых явлений или их изображений.

В. И. Ленин дал знаменитый тезис о диалектико-материалистическом развитии мышления: «От живого созерцания к абстрактному мышлению и от него к практике — таков диалектический путь познания истины, познания объективной реальности».

У всякого человека есть потребность «видеть» — видеть всё своими глазами; эта потребность имеется и у детей. Школа удовлетворяет эту потребность, применяя при обучении детей **наглядные пособия**. Наглядные пособия по арифметике можно подразделить на **естественные**, представляющие собою отдельные предметы или совокупности их в окружающей обстановке (пальцы рук, столы, стулья, окна, двери и т. п.), и **искусственные**; последние в свою очередь можно подразделить на **вещественные** и **графические**. Вещественные наглядные пособия: 1) счётные палочки, 2) пучки, связанные из этих палочек, 3) арифметический ящик, 4) счёты и другие счётные приборы (например, абак),

5) эталоны мер длины, площади, объёма, веса. Графические наглядные пособия: 1) таблицы (сложения, умножения, простых чисел, преобразования обыкновенных дробей в десятичные и в проценты), 2) диаграммы (линейные, круговые, фигурные).

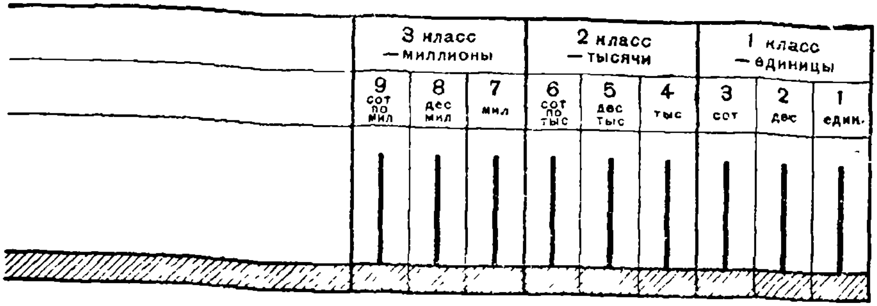
Для того чтобы наглядные пособия достигали тех целей, ради которых они употребляются при обучении арифметике, нужно, чтобы они обладали такими свойствами: 1) по своему устройству и форме были просты, а по окраске достаточно ярки; 2) были достаточно велики, чтобы их могли видеть все учащиеся; 3) были легко переносимы.

При обучении арифметике в V классе применяются те же наглядные пособия, которые применялись и в начальной школе, а именно: арифметический ящик, разрядная сетка, абак, классные и торговые счёты, дробные палочки и круги, процентный транспортир; в кружковой работе большой интерес представляют «палочки Непера».

Арифметический ящик имеется в каждой школе. Он, как известно, имеет форму куба и заполняется деревянными кубиками, брусками и пластинами. В начальной школе он широко применяется при счёте единицами и группами, при изучении нумерации и при измерении объёмов. В V классе то же пособие применяется при повторении нумерации целых чисел и при изучении нумерации десятичных дробей (не более чем с тремя десятичными знаками), когда каждая пластина принимается за одну десятую часть объёма куба, полный брусок — за одну сотую (или за один процент), единичный кубик — за одну тысячную (или промилле). Из деталей арифметического ящика можно легко конструировать различные модели параллелепипедов.

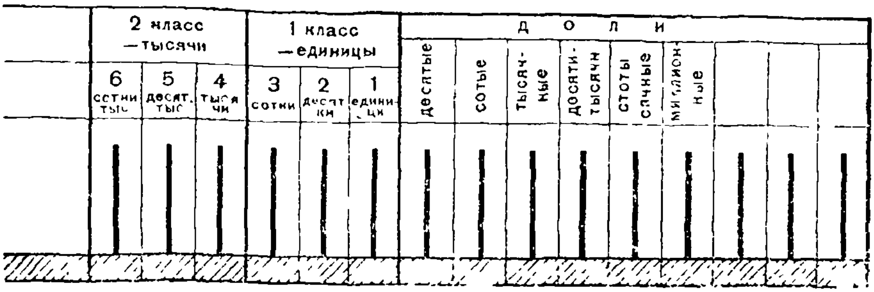
При изучении нумерации как целых чисел, так и десятичных дробей большое значение имеет прибор, известный под именем абака. В настоящее время основные элементы этого прибора имеются на больших классных счётах: на верхней горизонтальной планке основной рамы укрепляются вертикально металлические штифты (проволочки) на расстоянии 5 *см*, на которые можно надевать те же косточки — шашки, которые имеются на обыкновенных счётах. Если этот прибор применяется при изучении или при повторении нумерации целых чисел, то для большей наглядности и отчётливости к горизонтальной планке надо прикрепить широкую ленту с делениями через 15 *см* и в каждом делении выше штифтов сделать надписи классов: 1-й класс — единицы, 2-й класс — тысячи, 3-й — миллионы и т. д. Если ленту разграфить ещё через 5 *см*, то на ней можно отметить и классы, и разряды (черт. 1).

При изучении нумерации десятичных дробей тот же прибор видоизменяется так: на разграфлённой ленте (через каждые 5 *см*) классы целых чисел и разряды их проставляются не с правого конца, а примерно с середины ленты влево, а справа отмечаются десятичные доли — десятые, сотые, тысячные (см. черт. 2).



Черт. 1.

При изучении нумерации целых чисел и десятичных дробей с успехом может применяться ещё один интересный прибор, называемый разрядной сеткой. По существу это тоже абак, но он сконструирован в очень удобной и портативной форме. В каждой



Черт. 2.

школе такую разрядную сетку можно легко сделать или в виде переносной классной доски небольшого размера (100 *см* × 50 *см*) или соответствующим образом разграфить часть основной классной доски, как это делается для координатной сетки или для чистописания в первых классах начальной школы (черт. 3).

2 класс — тысячи			1 класс — единицы			доли							
6	5	4	3	2	1	десятые	сотые	тысячные	десятитысячные	стотысячные	миллионные		
				3	8	2	4	5					
			1	8	0	5	0	7	2				

Черт. 3.

На такой разграфлённой доске учащиеся пишут цифры мелом, затем анализируют запись, учитывая поместное значение цифр, и переносят эту запись на классную доску и в тетради.

Той же цели — освоению нумерации, а также решению задач на сложение и вычитание целых чисел и десятичных дробей — служат общеизвестные классные счёты и индивидуальные торговые счёты.

При изучении обыкновенных дробей, в частности, при сравнении величины их, а также при преобразовании дробей из одного вида в другой, хорошим пособием являются «дробные палочки» и «дробные круги». Первые представляют собой набор палочек или брусков равной длины; каждый брусок принимается за единицу. Одни из них поперечными полосками разбиваются на половинки, другие — на трети, третьи — на четверти и т. д. Дробные круги — круги из фанеры или из картона одинаковых радиусов, каждый из которых разделён на секторы — половинки, трети, четверти и т. д.

Процентный транспортир применяется преимущественно для построения круговых диаграмм в IV классе начальной школы.

Вторым вспомогательным средством при обучении арифметике являются лабораторные работы учащихся в классе и дома. Эти занятия и работы удовлетворяют второй потребности каждого человека и ребёнка «что-нибудь делать», принимать активное участие в общей работе. Лабораторные занятия помогают развивать самостоятельность и самодеятельность учащихся, дают им возможность проявить своё творчество.

Лабораторные занятия позволяют в некоторых случаях показать опытное происхождение элементарной математики. При лабораторных занятиях отводится почётное место опыту, наблюдению, глазомеру, приближённым вычислениям, индукции, интуиции и здравому смыслу. Лабораторные занятия дают возможность построить обучение арифметике, идя от конкретного к абстрактному.

Если в классной обстановке нельзя широко развернуть лабораторные занятия, то имеется возможность перенести их в домашние занятия, давая учащимся определённые задания с подробными указаниями.

Некоторые виды лабораторных занятий:

1) непосредственные измерения и вычисления (размеров отдельных предметов, классной комнаты, коридоров, окон, дверей, школьного двора);

2) изготовление моделей (эталонов мер длины, площади, объёма, счётных линеек и т. п.);

3) составление таблиц (сравнительного роста учащихся данного класса, таблиц простых чисел, преобразования обыкновенных дробей в десятичные и в проценты и т. п.);

4) черчение диаграмм (линейных, прямоугольных, круговых).

III. УРОК КАК ОСНОВНАЯ ФОРМА ЗАНЯТИЙ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

«Урок с данной группой учащихся, по строго определённому расписанию занятий и с твёрдым составом учащихся — основная форма организации учебной работы в школе» [1].

[1] Постановление ЦК ВКП(б) от 25 августа 1932 г.

Уроки по арифметике в V и VI классах могут иметь очень разнообразную целевую установку. Наиболее часто проводятся уроки, посвящённые изучению нового теоретического материала. Но могут быть уроки, основным содержанием которых является развитие вычислительных навыков, навыков комбинационной работы (решение сложных числовых примеров и сложных текстовых задач), повторение программного материала в связи с опросом учащихся, контрольные работы и т. п. Несмотря на такое большое разнообразие типов уроков, общая структура их должна быть примерно одинакова, чтобы выработать у учащихся определённый уклад школьной жизни и работы. Структура урока может быть намечена следующей схемой:

а) организационные мероприятия (установление полного внешнего порядка, проверка по журналу наличного состава учащихся, проверка наличия общеклассного оборудования урока, индивидуального инвентаря у учащихся); б) проверка домашнего задания (решение задач и теория); в) основная часть урока (изучение нового материала, развитие навыков, опрос и т. п.); г) задание на дом. На эту примерную схему ни в коем случае не следует смотреть как на установленный раз навсегда стандарт. Однако изменять последовательность только ради того, чтобы внести разнообразие, не следует. Надо помнить, что организационные мероприятия в начале каждого урока в значительной мере обеспечивают успех его; поэтому с них всегда надо начинать каждый урок.

Домашняя работа учащихся по арифметике обычно состоит, как правило, из решения численных примеров и текстовых задач, а также повторения теоретического материала одного или нескольких предыдущих уроков. С первых же дней нового учебного года преподаватель должен организовать учебную работу так, чтобы заставить учащихся выполнять домашние задания к каждому уроку и выполнять чисто, старательно, аккуратно и правильно. С этой целью надо тщательно и повседневно проверять выполнение домашнего задания от начала до конца, особенно в первой четверти учебного года, затем можно в классе проверять только некоторые задачи на выбор с тем, чтобы остальные задачи проверять во внеклассное время по тетрадям. Для проверки усвоения теоретического материала и для индивидуального опроса учащихся очень полезно ввести систему письменных заданий по билетику: каждый опрашиваемый учащийся у доски получает от преподавателя билетик, в котором записано задание — один теоретический вопрос из материала предыдущего урока, одна задача (небольшая текстовая или численный пример) и вопрос из ранее пройденного материала. Двa-три человека, получившие такие билетики, на отведённой части классной доски выполняют свои задания, а преподаватель в это время проверяет выполнение домашних заданий с остальными учениками. Затем проводится проверка заданий на классной доске с привлечением всех остальных учащихся. По окончании этой проверки полезно ещё раз задать те же теоретические вопросы (и другие) всему классу, требуя ответы на них от отдельных учащихся, чтобы убедиться, что все учащиеся проработали домашнее задание по теории.

Задание на дом надо давать всегда в урочное время — в начале урока, в середине его или в конце, но до звонка, возвещающего окончание урока. Преподаватель записывает на классной доске параграфы учебника и номера задач, учащиеся делают то же в своих тетрадях или в дневниках. В некоторых случаях преподаватель предлагает учащимся отыскать в книгах указанные параграфы, прочитать те или иные абзацы (определение, правило или описание процесса), припомнить изложение их на уроке, указывая сходство и различие; таким образом, учащиеся постепенно будут приучаться пользоваться математической книгой. Примерно так же поступают с более трудными задачами: учащиеся читают одну из заданных задач и, если надо, намечают в устной форме план решения её. Такой способ задания работы на дом облегчает учащимся выполнение её, а это в значительной мере способствует развитию интереса к арифметике.

Об основной части урока говорилось уже раньше и подробно будет идти речь при изложении методики изучения отдельных тем программы.

IV. ОБЩАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ ПРЕПОДАВАНИЯ АРИФМЕТИКИ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

1. Изучение программного и учебного материала

При нормальных условиях жизни и работы школы распределение занятий между преподавателями на следующий учебный год производится весной в конце текущего учебного года. Преподаватель, получивший работу в V или VI классах по арифметике, прежде всего должен самым тщательным образом изучить программу данного класса, а также и примыкающих классов — предшествующего и следующего, чтобы отчётливо знать, с чем могут прийти учащиеся в данный класс и что они будут делать в следующем учебном году.

Затем следует изучить учебники и задачники, которые будут руководствами для учащихся, с целью ознакомления с ними и внесения в них тех или иных изменений, если преподаватель найдёт нужным это сделать (изменение последовательности изучения некоторых вопросов, изменение формулировок некоторых определений и правил и т. п.).

Но этого мало: преподаватель должен знать по каждому вопросу программы больше того, что есть в основном учебнике и что будут знать учащиеся; поэтому он должен основательно изучить дополнительные пособия по арифметике — более полные учебники и курсы по теоретической арифметике и по теории чисел; для классной работы надо наметить задачи из других сборников задач.

За этим следует ознакомиться с методической литературой по арифметике — книжной и статейной (в журналах и сборниках), с исторической и занимательной литературой.

2. Составление плана работы

Перед началом учебного года преподаватель в соответствии с учебным планом данного класса разбивает весь программный материал по учебным четвертям: перечень *тем и число часов на каждую* тему в каждой четверти учебного года. Затем составляется подробный календарный рабочий план на предстоящую четверть. Понятно, что этот план можно составлять по любой форме и даже без всякой формы; но в него должны входить определённые виды работы. Ниже приводится примерная схема календарного плана на четверть.

Календарный план занятий по арифметике в... классе, в... четверти учебного года

Месяц	Число	Содержание занятия	Число часов	Задачи на уроке	Задание на дом		Повторение	Замечания
					Теория	Задачи		
Сентябрь	1	. . . . . .	1	(Автор) №	(Автор) §	(Автор) №	(Автор) §	
	7	. . . . . .	2					

Как видно из этой примерной схемы, календарный план желательно составлять на каждый день занятий поурочно. Задачи на уроке и на дом в плане помещаются ориентировочно: это значит, что преподаватель может в ходе работы пополнить этот перечень задач или изменить его. Повторение надо ввести в план занятий с первого урока нового учебного года. Но здесь имеется в виду то повторение программного материала, на которое не отводится особое время в учебном плане и в программе. Поэтому в графу «Повторение» в первой четверти включается основной материал прошлого учебного года, а примерно со второй четверти — материал предыдущей четверти; таким образом, к концу учебного года весь материал будет повторен. В последней графе «Замечания» преподаватель после каждого урока вносит для памяти пометки, которые могут быть использованы при составлении плана в следующем учебном году. Контрольные работы, опрос учащихся вносятся в графу «Содержание занятия».

3. Ведение письменных работ

При организации учебной работы в классе по арифметике, как и по другим математическим предметам, желательно установить такой порядок, чтобы весь материал на уроке, который с той или иной целью записан на классной доске, был в том же виде записан и в тетрадях учащихся (за исключением тех записей, которые делают опрашиваемые учащиеся в порядке повторения уже пройденного материала). Сверх того, в классных тетрадях учащихся могут быть записи определений, правил, если преподаватель находит нужным изменить формулировки учебника; совсем не надо вносить в классные тетради те формулировки, которые имеются в учебнике и не требуют изменений. Такая классная тетрадь будет полностью отражать всю учебную классную работу учащегося и служить для него потом ценным пособием при повторении.

Для выполнения домашних заданий учащиеся должны иметь вторые тетради по арифметике.

Наконец, для контрольных работ можно в начале учебного года выделить ещё по одной тетради, в которых учащиеся будут писать контрольные работы в течение всего учебного года; они должны храниться у преподавателя.

4. Учёт знаний и навыков учащихся

Успех преподавания арифметики в V и VI классах в значительной мере зависит от того, как организован учёт знаний и навыков учащихся. С первого же урока в новом учебном году преподаватель должен поставить перед собой задачу — отчётливо выяснить степень подготовки каждого учащегося, общее развитие его, отдельные пробелы в знаниях и недостатки в применении вычислительных навыков. Такое изучение учащихся продолжается и в процессе всей дальнейшей работы по арифметике. С этой целью преподаватель тщательно проверяет знания и навыки учащихся на каждом уроке — повседневный учёт; по окончании изучения темы — тематический учёт; в конце учебной четверти года — четвертной учёт и в конце учебного года — годовой учёт.

Наиболее важное значение имеет повседневный учёт работы учащихся в классе и дома. На каждом уроке преподаватель должен опросить возможно большее количество учащихся в порядке проверки усвоения ими пройденного материала и выполнения домашних заданий. При подготовке к уроку в план своей работы он включает список тех учащихся, которых надо проверить: одних с более подробным опросом у классной доски по особому заданию, других — с места. В классе надо создать такой порядок, чтобы каждый учащийся ожидал своего опроса на каждом уроке. Если учащийся по той или иной причине не усвоил материала или не выполнил домашнего задания в срок, преподаватель выясняет причину этого и в зависимости от результата или откладывает опрос до следующего урока, или заставляет выполнить работу в тот же день после учебных занятий под своим наблюдением.

По окончании изучения целой темы преподаватель на заключительном занятии путём устного опроса учащихся, который сопровождается решением соответствующих текстовых задач или численных примеров, повторяет пройденный материал, выделяя в нём наиболее важные моменты, обобщает всю тему, связывая её с предыдущим материалом. При этом полезно иногда давать учащимся особые задания в письменном виде для того, чтобы они предварительно самостоятельно восстановили в памяти и в сознании всю тему в целом; пособиями могут служить записи в классных тетрадях и намеченные параграфы в учебнике.

Тематический учёт завершается контрольной письменной работой. В последние годы утвердился хороший порядок: давать контрольные работы в виде письменных индивидуальных заданий (не менее двух вариантов на класс). Содержание контрольных работ по арифметике составляют обычно одна или две текстовые задачи и численные примеры. Первые служат для учёта общего развития учащихся, а вторые — для учёта знаний и навыков по данной теме. После проверки всех письменных работ преподаватель в классе даёт общую характеристику всей работы, а затем подробно анализирует работу каждого учащегося и типичные, наиболее распространённые ошибки. В связи с этим он намечает и проводит ряд мероприятий для ликвидации пробелов в знаниях и для искоренения ошибок: одни учащиеся получают дополнительные задания для домашней самостоятельной работы; другие соединяются в особую группу для выполнения той же работы по дополнительному заданию под руководством преподавателя в школе во внеурочное время; наиболее серьёзные пробелы и распространённые ошибки служат материалом для занятий со всеми учащимися в классе.

Четвертной учёт, как и тематический, проводится в виде устного опроса по материалу, пройденному за четверть, и в виде комбинированной контрольной работы, в которую обязательно входит текстовая сложная задача и числовые примеры на разные темы.

В повседневном учёте знаний и навыков учащихся преподаватель должен особое внимание уделять менее подготовленным учащимся: чаще спрашивать их во время урока и проверять их домашнюю самостоятельную работу в индивидуальном порядке. Но и сильные учащиеся должны быть в поле зрения преподавателя: он даёт им дополнительные задания, особо проверяет их во внеклассное время; этим он развивает и поддерживает их усиленный интерес к арифметике.

Годовой учёт связывается с повторением всей годовой программы, на что отводятся особые часы в конце учебного года; это повторение сопровождается устным опросом учащихся и контрольными работами. Завершается годовой учёт экзаменами, которые проводятся по особым инструкциям.

5. Организация математического кружка

Во время классной работы сплошь и рядом по инициативе самих учащихся возникают побочные вопросы, которые не входят в программу курса. Преподаватель должен всячески поддерживать и поощрять такие вопросы. В одних случаях он сразу же даёт исчерпывающий ответ на них, если на это не требуется много времени. В других случаях он даёт краткое пояснение вопроса, чтобы поддержать интерес к нему, а более подробное освещение предлагает перенести на внеклассные занятия в порядке кружковой работы. На первом таком занятии преподаватель более подробно характеризует поставленный вопрос, намечает отдельные темы и поручает разработку их учащимся.

Поводом для организации кружковых занятий иногда служат особые задачи, которые преподаватель может давать в порядке домашней самостоятельной работы только для желающих. Для проверки решения этих задач, а также для разрешения тех или иных затруднений при решении их организуются внеклассные занятия. На этих занятиях возникают иногда и теоретические вопросы, которые включаются в план кружковой работы.

Каждый член кружка, имеющий задание для самостоятельной работы, получает от преподавателя подробные указания для выполнения её: 1) что надо прочитать; 2) как составить план изложения на основании прочитанной литературы; 3) как изложить в сжатой форме содержание темы по намеченному плану; 4) какие подготовить чертежи, рисунки, модели, таблицы.

В промежутке между двумя занятиями кружка преподаватель следит за выполнением работы и продолжает помогать своими советами.

Очень полезно одну и ту же тему давать не одному, а двум или трём членам кружка; каждый из них работает самостоятельно и на общем собрании делает сообщение о своей работе, после чего идёт обсуждение этой работы [1].

6. Организация математического кабинета в школе

Каждая школа должна иметь математический кабинет. В качестве филиала его должен быть и кабинет по арифметике. Оборудование последнего составляется из тех наглядных пособий, которые применяются при преподавании арифметики и речь о которых была раньше, а также из материалов, полученных при лабораторных занятиях. Чтобы последние сделать пригодными для

[1] В дальнейшем изложении указываются некоторые вопросы и задачи, которые могут быть предметом для занятий в кружке. Подробный перечень тем с указанием необходимой литературы даётся в книге под заглавием «Программы кружковых занятий» (Учпедгиз, 1935). Там же имеется объяснительная записка, в которой говорится о составе кружков, о цели и задаче их, о форме работы в кружке и приводится перечень методической литературы.

употребления их в классной работе, пополнив таким образом основную коллекцию наглядных пособий, преподаватель может дать особое задание отдельным учащимся — изготовить в течение учебного года одно такое пособие в большом масштабе и сдать его в математический кабинет. Такое пополнение набора наглядных пособий ведётся из года в год: изготовляются новые пособия, старые экземпляры заменяются более совершенными новыми. Так можно в течение нескольких лет создать богатый математический кабинет по курсу арифметики.

ГЛАВА I

ПОВТОРИТЕЛЬНЫЙ КУРС АРИФМЕТИКИ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

В программу V класса в самом начале нового учебного года вводится повторение основных вопросов арифметики целых чисел, на что выделяется 21 час [1]: нумерация целых чисел, четыре действия над многозначными числами и решение задач на все действия.

При повторении каждого арифметического действия следует особо выделять такие моменты: 1) задачи или вопросы, решаемые каждым действием; 2) основные свойства действий; 3) обоснования *правил для выполнения* их; 4) особые случаи при действиях с нулём и с единицей; 5) особые приёмы при выполнении действий; 6) изменение результатов действий при изменениях компонентов; 7) проверка результата действия.

Сложение и вычитание целых чисел, как самые простые арифметические действия, потребуют для повторения основного содержания меньше времени, чем умножение, а это последнее меньше, чем деление (на сложение и вычитание по 2—3 урока, на умножение 3—5 уроков, на деление 5—7 уроков).

Под основным содержанием в данном случае подразумеваются моменты, стоящие в пунктах 1, 2 и 3. Такие моменты, как особые случаи действия (с нулём и с единицей), могут быть рассмотрены в течение 5—10 минут урока, посвящённого другой теме. Особые приёмы выполнения действия, изменение результатов действия при изменениях компонентов следует проводить почти исключительно в порядке устного счёта на каждом уроке. Эти упражнения маленькими дозами в течение длительного времени помогут отчётливо усвоить материал и прочно закрепить навыки.

Типовые задачи на целые числа при повторении того же курса учащиеся решают преимущественно в порядке домашней самостоятельной работы с последующей проверкой их в классе. При этой проверке, а также при задании задач на дом преподаватель даёт отдельные указания, касающиеся способов решения и оформления записей.

---

[1] См. программу по математике на 1951 г.

Более трудные типы, как задачи на предположение, на сравнение, учащиеся решают сначала в классе. Изучение их продолжается при прохождении дробей, сначала обыкновенных, а потом и десятичных.

Таким образом, решение сложных арифметических задач должно входить в основное содержание всей работы по арифметике в течение всего учебного года.

Если в процессе работы преподаватель обнаружит достаточно хорошую предварительную подготовку учащихся, он может сокращать время, предназначенное на повторение того или иного материала, и соответственно увеличивать время на прохождение другого материала, более важного и необходимого с его точки зрения.

При этом следует напомнить, что к основным моментам каждого действия над целыми числами придётся ещё возвращаться при изучении действий над обыкновенными, а потом и десятичными дробями.

I. НУМЕРАЦИЯ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

Первоначальные и простейшие сведения о нумерации целых чисел учащиеся получают ещё в начальной школе при изучении чисел первого десятка, первых двух десятков, первой сотни и первой тысячи, а затем и бóльших чисел. Главная задача изучения нумерации в начальной школе состоит в том, чтобы научить учащихся писать заданные числа и читать их. Основная идея как устной, так и письменной нумерации остаётся в тени.

Повторение основных вопросов арифметики целых чисел в V классе, приведение их в определённую систему естественно начинать именно с нумерации целых чисел, что и требуется современной программой. Учащиеся V класса имеют более широкое развитие и смогут понять и в той или иной мере оценить основную идею нумерации.

Содержание этой темы составляют такие вопросы: понятие натурального числа; процесс счёта; натуральный ряд чисел; число 10 как основание системы счисления; задача и сущность устной или словесной нумерации; письменная нумерация. Очень полезно при этом познакомить учащихся с другими системами счисления, например с пятиричной, показать приёмы записи чисел и простейших действий над числами, записанными по этой системе. Последнюю работу трудно провести на уроке со всем классом (за недостатком времени), зато она вызовет очень большой интерес в математическом кружке.

1. Понятие о счёте и натуральном числе

Учащиеся умеют считать. На вопрос преподавателя, что можно считать, они отвечают, что можно считать предметы, входящие в любое собрание или в любую совокупность их, например: парты, столы, книги, тетради и т. п. По предложению преподавателя учащиеся считают некоторые совокупности предметов в классе (парты или книги), а затем под руководством преподавателя анализируют процесс счёта: каждому отдельному предмету при счёте присваивается некоторое название, состоящее из одного, двух или нескольких слов (например: один, два, три, двадцать четыре, сто тридцать два и т. п., или первый, второй, двадцать четвёртый и т. п.); иначе говоря, к каждому предмету как бы приклеивается ярлык с этим названием. Последнее название, присвоенное последнему предмету совокупности, характеризует или оценивает всю совокупность данных предметов, отвечая на вопрос сколько? (например: сколько парт в классе?) или который? (например: который по списку ученик?). При этом преподаватель обращает внимание учащихся на тот факт, что предметы любой совокупности можно считать в каком угодно порядке; во всех случаях будут повторяться все те же слова-названия и счёт будет оканчиваться одним и тем же названием последнего предмета, которое характеризует или оценивает данную совокупность, отвечая на один из вопросов: сколько? или который? Эта характеристика или оценка данной совокупности предметов, выраженная названием последнего предмета (восемь, двадцать три, сто сорок пятый), называется **натуральным** числом.

Таким образом, устанавливается, что натуральное число получается в результате счёта, и выясняется самый процесс счёта (как он описан выше, но не в форме определения).

Затем учащиеся под руководством преподавателя выявляют второй источник получения натуральных чисел — при измерении величин. С этой целью преподаватель предлагает перечислить некоторые из известных величин (длина, площадь, объём, вес, время и т. п.) и выполнить несколько простейших измерений, например: длины классной комнаты, длины доски площади крышки классного стола и т. п. Учащиеся сами выбирают соответствующую единицу меры: метр, сантиметр, квадратный дециметр и т. п., и выполняют процесс измерения. Преподаватель помогает им проанализировать эту работу и установить наличие двух процессов одновременно: откладывание единицы измерения в измеряемой величине и счёт отложенных единиц. В результате счёта получается натуральное число, которое характеризует измеряемую величину и является ответом на вопрос сколько?

Итак, натуральные числа получаются в результате счёта предметов или измерения величин. В первом случае они характеризуют или оценивают данную совокупность предметов и в практике повседневной жизни сопровождаются названием тех предметов, которые составляли совокупность, например: 12 парт, 3 стола и т. п.

Во втором случае натуральные числа, полученные при измерении величин, сопровождаются названием единицы измерения, например: 6 метров, 15 килограммов, 7 часов и т. п.

2. Натуральный ряд чисел и его свойства

В заключение предыдущей работы преподаватель предлагает учащимся выписать в естественной последовательности известные им натуральные числа, начиная с единицы, замечая, что этот процесс нигде не может оборваться:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14,...

Преподаватель сообщает, что эта совокупность натуральных чисел называется **натуральным рядом** чисел. Затем он помогает учащимся выяснить и сформулировать основные свойства ряда натуральных чисел: 1) он имеет начало (единица); 2) не имеет конца, так как после каждого числа можно поместить новое число, на единицу большее (поэтому за последним записанным числом обычно всегда ставят многоточие); 3) в этом ряду можно найти сколь угодно большое число, если продолжить ряд, но в нём нет самого большого числа (почему?); 4) нет в нём двух или больше равных чисел.

3. Устная и словесная нумерация натуральных чисел

В краткой вводной беседе под руководством преподавателя учащиеся отмечают такие факты: 1) натуральных чисел очень много («бесчисленное множество»); 2) люди широко пользуются ими в повседневной жизни, т. е. или называют их словами, или записывают их. Встаёт такой вопрос: если чисел очень много, то сколько же надо особых слов для названия каждого из них и сколько надо знаков для записи каждого из них? Второй вопрос не затруднит учащихся, а на первый они могут ответить, что и слов потребуется очень много. Эти ответы учащихся и послужат поводом к тому, чтобы поставить такие задачи: 1) как много слов надо для того, чтобы назвать любое число в пределе 1 000, 1 000 000, 1 000 000 000 и т. д.? и 2) почему для записи их достаточно только 10 значков?

Для разрешения этих задач надо установить ещё одно общее правило — правило счёта. Учащиеся с большим интересом и удивлением узнают, что они считают, строго говоря, только до 10: сначала считают простые единицы до 10 (например: спички, палочки, зёрна гороха и т. п.), выделяя каждый вновь полученный десяток в пучок или в кучку; затем считают десятки, как простые единицы, тоже до 10, выделяя таким образом каждую вновь полученную сотню; дальше считают сотни, тысячи, десятки тысяч и т. д., как простые единицы, и тоже до 10, выделяя каждый раз вновь полученную группу или совокупность (из сотен — тысячи, из тысяч — десятки тысяч и т. п.). Из этого нового обзора процесса счёта следуют выводы: 1) практически мы считаем только до 10; 2) число 10 называется **основанием** системы счисления, или нумерации, 3) поэтому наша система счисления, или нумерация, называется десятичной; 4) мы одним и тем же способом считаем единицы (отдельные предметы), десятки, сотни, тысячи и т. п.; поэтому единицы, десятки, сотни, тысячи и т. д. называются **счётными** единицами; 5) эти же счётные единицы называются ещё **разрядными** единицами. Простые единицы составляют первый разряд — разряд единиц, десятки составляют второй разряд — разряд десятков, сотни — третий разряд — разряд сотен, и т. д.

Всю эту работу полезно сопровождать применением классных и торговых счётов, а ещё лучше — абака, о котором была речь раньше.

Затем переходят к выяснению ранее поставленного основного вопроса: сколько надо знать разных слов, чтобы назвать любое число в пределе тысячи, миллиона, биллиона и т. д.? По предложению преподавателя учащиеся постепенно составляют таблицу чисел первого разряда — единиц, второго разряда — десятков, и т. д., записывая их цифрами, попутно называют словами каждое число и отмечают, когда появляются новые слова.

В процессе составления этой таблицы учащиеся убеждаются, что для наименования всех чисел от единицы до десяти требуется десять особых слов (один, два..., десять). Для названия всех чисел, составленных из десятков, требуется только одно новое слово — сто или сотня (слово «сорок» по аналогии с названиями других разрядов можно заменить словом четыредесят и сообщить учащимся, что это слово «сорок» — остаток давно отжившей системы счисления у славян, когда, например, шкурки соболя считались партиями по сорок штук: сорока, полсорока); остальные названия (двадцать, тридцать, ... шестьдесят и т. д.) образуются из прежних слов с помощью особых грамматических форм. То же самое наблюдают учащиеся при наименовании чисел, состоящих из сотен. В дальнейшем новые слова появляются только для названия первого числа каждого нового класса (миллион, биллион и т. д.). Таким образом, устанавливается знаменательный факт, что для

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	10 слов	Все слова новые
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	11 слов	Новое слово «сто или сотня»
100	200	300	400	500	600	700	800	900	1 000	12 слов	Новое слово «тысяча»
1 000	2 000	. . . .						9 000	10 000		Новых слов нет
10 000	20 000	. . . .						90 000	100 000		« « «
100 000	200 000	. . . .						900 000	1 000 000	13 слов	Новое слово «миллион»
		. . . .							10 000 000		Новых слов нет
		. . . .							100 000 000		« « «
		. . . .							1 000 000 000	14 слов	Новое слово «биллион»

наименования всех разрядных чисел первого класса требуется только 11 особых слов, а для наименования всех разрядных чисел каждого нового класса — класса тысяч, миллионов и т. д. — требуется введение в каждом классе только одного нового слова.

Затем учащиеся убеждаются, что для наименования любого числа, состоящего из единиц разных разрядов, не требуется новых слов. С этой целью они на классных счётах или на абаке откладывают разные числа, называют их и анализируют эти названия с грамматической стороны (11, 12, 38, 79, 257, 5 689 и т. д.).

Таким образом разрешается основная задача устной или словесной нумерации: создание правил для наименования каждого натурального числа с помощью наименьшего числа необходимых слов и особых грамматических форм.

4. Письменная нумерация

Чтобы отчётливо выяснить учащимся сущность нашей письменной нумерации, преподаватель может в краткой вводной беседе рассказать им о разных способах записи чисел и показать образцы этих записей: словами — словопись (что сохранилось и в настоящее время при записи суммы денег, даты рождения в метрических выписях), картинками или рисунками — иероглифы, буквами алфавита (у греков, у славян), римскими цифрами (например, на циферблате часов) и, наконец, индусскими или, как их часто называют, арабскими цифрами, которые хорошо известны учащимся.

Идея поместного значения цифр выясняется с помощью абака и разрядной сетки (последнюю можно до урока начертить на классной доске). Учащиеся на абаке набирают разные числа по заданию преподавателя примерно в такой последовательности: 7 единиц (на первом справа штифте), 7 десятков (на втором справа штифте), 7 сотен и т. д.; те же числа последовательно записываются в разрядной сетке в соответствующей колонке: первое число — на первой горизонтальной строчке, второе — на второй и т. д.

Учащиеся обращают внимание на такие два факта: 1) один и тот же значок (7) имеет разное значение в зависимости от места, занимаемого им в разрядной сетке (*единицы, если стоит в первой справа колонке*, десятки, если стоит во второй справа колонке, и т. д.); 2) при записи 7 десятков, 7 сотен и т. д. справа остаются пустые колонки, что указывает на отсутствие соответствующих разрядов в числе. Как записать те же числа без разрядной сетки? Учащиеся тотчас же запишут: 7, 70, 700 и т. д. Сопоставляя эти записи с записями тех же чисел в разрядной сетке, учащиеся замечают такое сходство: единицы пишутся на первом месте справа, десятки — на втором, сотни — на третьем и т. д., а пустые колонки в сетке в последних записях обозначаются нулями. Из этого можно заключить, что если бы мы всегда писали числа только в разрядной сетке, то не нужна была бы цифра нуль. Следовательно, цифра нуль служит для обозначения отсутствующих разрядов в данном числе.

Затем учащиеся на том же абаке *последовательно набирают* ряд произвольных чисел — двузначных, трёхзначных и иных многозначных — и записывают их отдельными строчками в разрядной сетке. Всматриваясь в структуру каждого числа на абаке и в записи на разрядной сетке, учащиеся делают вывод, что каждое многозначное число состоит из совокупности разрядных чисел, например: 3 миллиона 8 сотен тысяч 5 десятков тысяч 2 тысячи 9 сотен 4 десятков и 7 единиц. Как можно записать это число без разрядной сетки и этим показать, что каждая совокупность разрядных чисел составляет одно число?

Первая запись (всё число записывается в виде суммы разрядных чисел):

$$3 \text{ милл.} + 8 \text{ сот. тыс.} + 5 \text{ дес. тыс.} + 2 \text{ тыс.} + 9 \text{ сот.} + 4 \text{ дес.} + 7 \text{ ед.}$$

В этой записи слова — названия разрядов можно заменить записью разрядных единиц (вторая запись):

$$3 \cdot 1\,000\,000 + 8 \cdot 100\,000 + 5 \cdot 10\,000 + 2 \cdot 1\,000 + 9 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 7 \cdot 1.$$

Наконец, эту запись можно заменить новой:

$$3\,000\,000 + 800\,000 + 50\,000 + 2\,000 + 900 + 40 + 7.$$

Последние две записи многозначных чисел, как и представление их на абаке и запись на разрядной сетке, подтверждают мысль о том, что всякое многозначное число есть сумма разрядных чисел. Как можно короче записать это число? Раньше было уже установлено, что единицы записываются на первом месте справа, десятки — на втором и т. д. Поэтому последнюю запись можно заменить новой:

$$3\,000\,000 + 800\,000 + 50\,000 + 2\,000 + 900 + 40 + 7 = 3\,852\,947.$$

Так учащиеся обрабатывают несколько чисел; некоторые из них не имеют тех или иных разрядных чисел, например:

$$80\,000 + 6\,000 + 0 + 90 + 3 = 86\,093;$$
$$5 \cdot 100\,000 + 2 \cdot 10\,000 + 0 \cdot 1\,000 + 9 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 0 = 520\,930.$$

Под руководством преподавателя по отдельным вопросам его учащиеся формулируют выводы:

1) Для записи любого числа в десятичной системе счисления достаточно девяти значащих цифр и нуля.

2) Значение цифры в записи числа зависит от места, которое она занимает: на первом месте справа — единицы, на втором — десятки и т. д.

3) Нуль в записи чисел служит для обозначения отсутствующих разрядных чисел.

4) Всякое многозначное число можно записать в виде суммы разрядных чисел.

5) Последнюю запись можно заменить более простой и общепринятой, для чего надо условиться: а) опустить все знаки «плюс», б) опустить записи разрядных единиц в виде единицы с последующими нулями или только в виде нулей, стоящих вправо от значащей цифры и в) сохранить тот же порядок цифр, который они занимают в этой сумме.

В заключительной беседе учащиеся повторяют основные положения десятичной нумерации: основание системы счисления (10), сущность устной или словесной нумерации и сущность письменной нумерации и решают соответствующие задачи.

В той же беседе преподаватель может рассказать о том, что не все люди и не всегда пользовались десятичной системой счисления и что по образцу её можно создавать и другие системы счисления, например пятиричную, если за основание её принять число 5, т. е. ввести правило счёта только до 5: считаются простые единицы до 5, потом пятки до 5, пятки пятков до 5 и т. д. Число, состоящее из пяти пятков, потребует введения нового слова для его названия. Сколько надо значков или цифр для записи любого числа в пятиричной системе? Учащиеся с изумлением узнают, что число 5 в пятиричной системе будет записано так: $10_{(5)}$, $6 - 11_{(5)}$ и т. д. Эти краткие сведения могут вызвать большой интерес у учащихся и привлечь их к работе в математическом кружке. С той же целью отдельным учащимся можно дать соответствующую литературу (например Беллюстин, Как постепенно дошли люди до настоящей арифметики, 1940, стр. 10).

II. СЛОЖЕНИЕ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

1. Вопрос об определении сложения целых чисел

Изучение действия сложения натуральных чисел в школьном курсе арифметики в огромном большинстве пособий по этому предмету начиналось и начинается с определения этого действия. В одних учебниках сложение определяется как присчитывание к одному числу всех единиц второго числа (Рашевский и др.). Это определение роднит процесс сложения с процессом счёта. В других учебниках сложение рассматривается как «действие, при помощи которого узнают новое число, содержащее столько единиц, сколько их во всех данных числах вместе» (Васильев, Пясецкий, Извольский и др.). В определениях этой группы ничего не говорится о том, как «узнают новое число, содержащее...» и т. д. Если же вскрыть этот способ, то дело опять сведётся к присчитыванию. Наконец, имеются такие учебники, в которых сложение определяется как «действие, при помощи которого определяется сумма двух или нескольких чисел» (Бертран, Борель, Киселёв, а также Чулицкий и Попова). В некоторых учебниках этой группы в связи с определением сложения вводится и определение суммы как «числа, содержащего столько единиц, сколько их заключается во всех данных числах вместе» (Киселёв и др.); из этого последнего видно, что третья группа определений сложения ничем не отличается от второй группы.

Шохор-Троцкий определяет сложение как отыскание суммы двух чисел, пользуясь только таблицей сложения как средством, отличным от простого счёта[1].

[1] Шохор-Троцкий, Методика арифметики, 1936.

Из предыдущего обзора определений действия сложения натуральных чисел приходится сделать вывод о том, что ни одно определение нельзя назвать определением в логическом смысле; каждое из них вызывает серьёзные сомнения в правильности его, а потому следует совсем отказаться от мысли заставлять учащихся заучивать эти спорные определения[1].

2. Решение задач на сложение

Преподаватель предлагает учащимся одну за другой две простые текстовые задачи:

1. «В школьный сарай привезли и там сложили сначала 37 *куб. м* дров, потом ещё 8 *куб. м*. Сколько дров сложили в сарае?»

2. «В конце учебного года в классе было 34 человека, а в начале нового учебного года стало на 7 человек больше. Сколько человек стало в классе?»

Учащиеся записывают схематически условие задачи, дают ответ на вопрос её, записывают решение: 37 *куб. м* + 8 *куб. м* = 45 *куб. м* (так они приучены записывать в начальной школе). По вопросам преподавателя они называют данные числа слагаемыми и результат суммой, описывают процесс вычисления, в котором преподаватель подчёркивает, что они складывают просто числа, а не кубометры, почему названия чисел в записи решения можно не писать, а результат можно выписать отдельно с названием ($37+8=45$; 45 *куб. м* дров сложили в сарае). Попутно они характеризуют конкретное содержание задачи — соединение двух групп или совокупностей в одну, и придумывают сами задачи с таким же содержанием.

Затем учащиеся решают вторую задачу примерно по такому же плану, но содержание задачи характеризуется иначе: одно число (учащихся) увеличивается на другое. Они сами придумывают две-три задачи, в которых надо увеличить одно число на другое.

Так учащиеся приходят к выводу, что сложением решаются задачи двух типов: когда приходится соединить две или больше совокупностей или групп в одну или когда требуется одно число увеличить на другое.

По отдельным вопросам преподавателя учащиеся особо отмечают, что для сложения могут быть заданы любые числа; преподаватель предлагает записать эту мысль так: первое слагаемое обозначить буквой a, второе — буквой b, сумму — буквой S ($a+b=S$). Так же можно записать сумму трёх и более слагаемых ($m+n+p=S$ и т. д.). Под буквами a, b и т. д. можно подразумевать любые целые числа, а число, записанное буквой S, будет получаться после выполнения действия сложения. Учащиеся сами дают число-

[1] Более подробно об этом см. Извольский, Определение сложения, «Математический вестник», 1916, № 1, стр. 10.

вые значения буквам a, b и т. д. и решают полученные числовые примеры.

3. Основные свойства и законы сложения

Из последней работы учащиеся под руководством преподавателя могут сделать вывод о том, что действие сложения **всегда выполнимо** в области натуральных чисел.

Затем преподаватель даёт один-два примера на сложение двух многозначных чисел и предлагает учащимся **проверить** результат сложением. Учащиеся припоминают, что для этого надо переменить места слагаемых и вновь сложить (например: $27\,423 + 7\,837 = 35\,260$ и $7\,837 + 27\,423 = 35\,260$). На основании этих примеров они формулируют переместительный закон сложения, а преподаватель помогает им записать его в общем виде ($a + b = b + a$).

Преподаватель даёт новую задачу: $274 + 1\,722 + 26$, и предлагает решить её наиболее удачным способом, всматриваясь в числовой состав задачи. Учащиеся без труда дадут такое решение: $274 + 1\,722 + 26 = (274 + 26) + 1\,722 = 2\,022$; затем они проанализируют его: 1) слагаемое 26 перенесли на 2-е место; 2) непосредственно складывать можно только два числа, 3) а поэтому при сложении трёх и более чисел их собирают попарно в группы (это **сочетательный** закон). После решения двух-трёх таких примеров можно ввести буквенную запись этого закона: $a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c)$. Учащиеся опять проверяют справедливость этого закона и записи его, давая буквам произвольные числовые значения и выполняя указанные действия.

4. Правила сложения натуральных чисел

В процессе описанной работы преподаватель особо подчёркивает применение обоих законов сложения: при проверке действия сложения (переместительный закон) и при практических вычислениях (переместительный и сочетательный законы). Оба закона сложения особенно широко применяются при устных вычислениях, когда данные числа записываются на классной доске; учащиеся внимательно всматриваются в них, устно комбинируют их наиболее удачным способом и устно производят вычисления (например: $361 + 5\,608 + 539 + 92 = 900 + 5\,700 = 6\,600$).

Дальнейшее применение основных законов сложения приведёт к составлению правил для устного и письменного сложения натуральных чисел разной структуры: двузначных и однозначных, двузначных и двузначных, трёхзначных и однозначных или двузначных (это для устного счёта), а затем любых многозначных чисел (для письменного сложения). Соответствующие правила хорошо известны учащимся; в данном месте повторительного обзора надо обосновать эти правила с помощью применения обоих законов сложения. С этой целью учащиеся решают устно два-три примера на сложение с подробным объяснением, а преподаватель подчёркивает моменты, когда применяются эти законы, например:

1) $23+6=20+3+6=20+(3+6)=20+9=29$ (без перехода через десяток)[1]; 2) $138+59=100+30+8+50+9=$ $=100+(30+50)+(8+9)=100+80+17=100+(80+10)+$ $+7=100+90+7=197$ (с переходом через десяток)[1].

Подробные записи приведены вместо словесных объяснений; фактически вся работа выполняется устно; могут быть записаны иногда только данные числа.

Правило письменного сложения двух и нескольких многозначных чисел мало чем отличается от правила устного сложения их. Но преподаватель должен и в этом случае показать, что известное правило сложения создаётся с помощью обоих законов сложения.

$$\begin{aligned}3\,728+4\,269&=3\,000+700+20+8+4\,000+200+60+9=\\&=(3\,000+4\,000)+(700+200)+(20+60)+(8+9)=\\&=7\,000+900+80+17=\\&=7\,000+900+(80+10)+7=7\,997.\end{aligned}$$

Учащиеся под руководством преподавателя записывают этот процесс сложения, указывают применяемые законы — переместительный и сочетательный — и формулируют известное правило.

Дальше сами учащиеся укажут, что такой процесс очень утомителен, а потому принято на практике не писать это разложение на слагаемые, а подписывать числа одно под другим известным образом (единицы под единицами и т. д.).

При решении численных примеров необходимо указать, что процесс сложения можно начинать с любых разрядов; на нескольких примерах учащиеся убедятся в справедливости этого указания, но предпочтут всё-таки начинать с единиц, чтобы не производить лишних пересчётов при сложении других разрядов, что приводит к исправлению полученных частных сумм.

При письменном сложении двух многозначных чисел следует указать учащимся, что в этих случаях нет никакой необходимости подписывать слагаемые числа одно под другим; можно записать задачу в виде строчки и производить процесс сложения по тому же правилу, записывая частные суммы в правой части равенства:

$$73\,865+4\,673=78\,538.$$

При письменном решении текстовых задач и числовых примеров на сложение можно рекомендовать располагать запись всех данных слагаемых в одну строчку, а не в столбик, имея в виду, что в дальнейшем при сложении и вычитании дробей, а потом и при

[1] Этот термин: «без перехода через десяток», как и следующий: «с переходом через десяток», учащимся не сообщается.

изучении тождественных преобразований в курсе алгебры все первоначальные записи располагаются в одну строчку.

Для выполнения вспомогательных вычислений все слагаемые, кроме одного, подписывают в столбик под этим последним и складывают по общему правилу; полученная сумма переписывается в той же строчке за знаком равенства:

$$3\,754+839+4\,175+368=9\,136.$$

$$\begin{array}{r} 839 \\ +4\,175 \\ 368 \\ \hline 9\,136 \end{array}$$

5. Изменение суммы при изменении слагаемых

Повторение действия сложения завершается решением задач на определение характера изменения суммы при изменении одного, двух или нескольких слагаемых. При подборе задач надо соблюдать определённую последовательность в нарастании трудностей: сначала увеличивается или уменьшается только одно слагаемое, потом два-три и больше слагаемых; затем рассматривается случай, когда одно слагаемое увеличивается, а другое уменьшается; наконец, вводится увеличение одних слагаемых и уменьшение других (когда имеется три и более слагаемых).

Решение подобных задач на сложение и на другие действия вообще представляет много затруднений для учащихся. Зато те же задачи дают богатый материал для развития так называемого функционального мышления: учащиеся имеют возможность наблюдать, как изменяется результат при том или ином изменении одного, двух или нескольких компонентов. Развитие того или иного приёма мышления достигается в течение более или менее продолжительного времени. Поэтому намеченная работа должна иметь место на протяжении достаточно длинного отрезка времени.

С этой целью задачи на изменение суммы можно давать в порядке устного счёта и позднее при повторении других действий, уделяя этому 3—5 минут на уроке.

Когда учащиеся достаточно хорошо станут решать эти задачи, полезно повысить трудность их, увеличивая или уменьшая сначала одно, а потом и два слагаемых в несколько раз, например: «Как изменится сумма, если одно слагаемое увеличить вдвое, втрое, вчетверо (или: если одно слагаемое умножить на 2, на 3, на 4)?»

Последний вывод формулируется так: «если одно слагаемое увеличить втрое (или умножить на 3), то сумма увеличится на два таких же слагаемых».

Более трудные задачи, когда одно слагаемое делится на 2, на 3 и т. д., следует оставить до более позднего времени, в частности, до тех пор, когда будут изучаться действия над дробями.

6. Проверка действия сложения

Проверка действия сложения обычно не встречает никаких затруднений: учащиеся хорошо знают, что сложение можно проверять сложением данных чисел, но в другом порядке, а также вычитанием: однократным при двух слагаемых и последовательным многократным вычитанием из суммы всех слагаемых, кроме одного.

III. ВЫЧИТАНИЕ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

Повторение действия вычитания натуральных чисел следует начинать с истолкования этой операции с помощью соответствующих задач с конкретным содержанием, как это было сделано при повторении действия сложения, а затем уже можно дать определение вычитания как действия, обратного сложению. Такое определение действия вычитания будет повторяться и при изучении дальнейшего курса математики — арифметики, алгебры и других отделов её: при изучении вычитания дробей, относительных чисел, вещественных и комплексных чисел.

Примерный план повторения действия вычитания тот же, что был намечен и при повторении действия сложения с добавлением одного нового пункта: запись особых случаев сложения и вычитания.

1. Решение задач на вычитание

Задача 1. «В начале учебного года в классе было 43 учащихся. К концу года выбыло 5 человек. Сколько учащихся осталось в классе к концу учебного года?»

Учащиеся готовят ответ на вопрос задачи, указывают действие и объясняют процесс вычисления. Преподаватель вновь сосредоточивает внимание учащихся на условии данной задачи и предлагает записать это условие так: 1) искомое число учащихся к концу учебного года обозначим буквой x; 2) прибавим к нему число выбывших учащихся $(x+5)$; 3) эта сумма по условию задачи равна 43, т. е. $x+5=43$. Таким образом, условие задачи записано в виде сложения, но одно слагаемое неизвестно; чтобы найти его, надо из суммы (43) вычесть другое слагаемое (5), т. е. $43-5=x$, или $x=38$. Чтобы проверить правильность полученного результата, надо подставить его в ранее написанное условие задачи в виде суммы вместо x; получим верное равенство $(38+5=43)$.

Итак, данная задача решается вычитанием; этим действием находится искомое число, как слагаемое, по сумме и другому слагаемому.

Учащиеся припоминают названия всех чисел при действии вычитания, указывая их значение и в прямом действии (в сложении): уменьшаемое (сумма), вычитаемое (одно из слагаемых, известное) и остаток (второе слагаемое, искомое). Преподаватель подводит итоги: в данной задаче требуется определить число учащихся, оставшихся в классе к концу учебного года, т. е. найти **остаток** действием вычитания; при этом отмечается, что искомое число, или остаток, меньше уменьшаемого.

Задача 2. «В одной школе было 22 класса, а в другой на 4 класса меньше. Сколько классов было во второй школе?»

Условие задачи можно записать так: $x+4=22$. Дальше повторяется процесс, описанный выше при решении первой задачи.

Сопоставляя содержание первой и второй задач, учащиеся замечают, что в первой задаче требуется найти остаток, а во второй — надо **уменьшить** одно число на другое.

Задача 3. «В одном классе было 39 учащихся, а в другом 34. На сколько человек в одном классе было больше, чем в другом?» Условие задачи можно записать так: $34+x=39$. Искомое число x опять служит одним из двух слагаемых и определяется вычитанием ($39-34=x$, или $x=5$). Преподаватель помогает учащимся охарактеризовать содержание последней задачи как **сравнение** двух чисел, оценивающих состав обоих классов.

В порядке повторного беглого обзора всех трёх задач, которые записаны на классной доске и в тетрадях, учащиеся перечисляют те вопросы, которые решаются действием вычитания, формулируют это действие как обратное сложению, повторяют названия компонентов по обоим действиям: вычитанию и сложению.

Теперь действие вычитания можно записать в более общем виде с помощью букв, начиная с условия задач: в каждой из них искомое число обозначалось буквой x, которое после сложения его с одним из данных чисел (a или b) в сумме давало другое данное число: $a+x=S$, или $x+b=S$; искомое число, как слагаемое, равно сумме без другого слагаемого: $x=S-a$, или $x=S-b$.

Учащиеся подставляют числовые значения вместо букв S, a и b и выполняют вычисления. При этом они должны наблюдать за тем, чтобы вычитание было всегда выполнимым, т. е. чтобы вычитаемое было меньше уменьшаемого.

2. Свойства вычитания

В связи с последней работой учащиеся непосредственно подходят к основному свойству действия вычитания: оно **ограниченно выполнимо**, формулируют его и на частных примерах иллюстрируют его.

Некоторые из этих примеров записываются на классной доске и в тетрадях ($47-39=8$, $54-52=2$ и т. п.), а затем вводится новая запись действия вычитания на буквах: уменьшаемое и вычитаемое в этих примерах задаются разными числами; обозначив уменьшаемое буквой a, вычитаемое — буквой b, действие вычитания можно записать так: $a-b=d$.

Вместо букв a и b опять можно подставлять любые числа, но с условием, чтобы a было больше b.

Затем учащиеся припоминают, что сумма натуральных чисел обладает свойством переместительности (полезно заставить написать соответствующую формулу: $a+b=b+a$). Можно ли это же самое сказать про действие вычитания, т. е. про разность двух чисел? Первый же численный пример вычитания (например: 54—32) покажет, что менять места уменьшаемого и вычитаемого нельзя. После этого преподаватель предлагает решить такие примеры:

$$54-(15+17)=(54-15)-17=(54-17)-15=22.$$
$$54-(17-15)=(54-17)+15=(54+15)-17=52.$$
$$54+(17-15)=(54+17)-15=(54-15)+17=56.$$

Учащиеся решают эти примеры, вычисляя результат каждого варианта (выше эти результаты записаны только в конце каждой строчки), и убеждаются, что при вычитании суммы и разности двух чисел, а также при сложении числа и разности двух чисел переместительный закон имеет место и при действии вычитания, но только по отношению к вычитаемым. Закон переместительный имеет место и в том случае, когда требуется последовательно прибавить или вычесть сумму или разность трёх и более чисел. При решении тех же примеров, что были даны в трёх вышенаписанных строчках, учащиеся должны заметить, что и сочетательный закон сохраняет силу при вычитании натуральных чисел. Но при этом следует иметь в виду, что, произвольно перемещая и группируя числа, данные для сложения и вычитания, надо следить за тем, чтобы действие вычитания было выполнимо; например:

$$172-(204-52)=172+52-204=20,$$

или

$$345-(35+20)-(500-220)=(345-35)-20-(500-220)=$$
$$=(310-20)-(500-220)=(290+220)-500=510-500=10.$$

3. Правила вычитания

Преподаватель предлагает учащимся примеры на вычитание сначала однозначных чисел из двузначных, потом двузначных чисел из двузначных и трёхзначных и проводит с ними анализ их вычислительной работы:

$$73-25=(70+3)-(20+5)=(60+13)-(20+5)=$$
$$=(60-20)+(13-5)=40+8=48.$$

Здесь отчётливо видно применение обоих законов: переместительного и сочетательного. То же самое учащиеся наблюдают при письменных вычислениях, например:

$$5\,726-3\,654=(5\,000+700+20+6)-(3\,000+600+50+4)=$$
$$=(5\,000+600+120+6)-(3\,000+600+50+4)=$$
$$=(5\,000-3\,000)+(600-600)+(120-50)+(6-4)=$$
$$=2\,000+0+70+2=2\,072.$$

Из рассмотрения этих и подобных им записей решений подтверждается известное правило вычитания (тысячи вычитаются из тысяч, сотни из сотен, десятки из десятков, единицы из единиц), в силу которого очень удобно подписывать вычитаемое число под уменьшаемым известным образом и начинать процесс вычитания с единиц. Но учащиеся должны отчётливо понимать и знать, что процесс вычитания можно начинать и с высших разрядов, но при этом иногда встречаются неудобства (какие?), а иногда этих неудобств и не бывает (в каких случаях?).

При решении задач на вычитание можно рекомендовать запись решения делать в строчку, как и запись сложения, а вспомогательные вычисления располагать в столбик, например:

$$3\,758-965=2\,793.$$

$$\begin{array}{r} 3\,758 \\ -\;\;965 \\ \hline 2\,793 \end{array}$$

4. Проверка вычитания

Проверка вычитания обычно производится с помощью сложения, что учащиеся хорошо знают и применяют ещё в начальных классах средней школы и что они делали при решении первых задач на вычитание.

5. Запись особых случаев сложения и вычитания

При повторении действия вычитания надо рассмотреть совершенно особый случай вычитания, когда уменьшаемое равно вычитаемому, например: 23—23.

В результате получается число, которое не входит в натуральный ряд чисел. В самом деле, нуль не есть натуральное число, так как он не может быть получен в результате счёта. Значок «0» пишется и слово «нуль» употребляется тогда, когда хотят отметить полное отсутствие предметов или единиц в той или иной совокупности. Как видно из предыдущего примера, нуль получается при вычитании, когда уменьшаемое равно вычитаемому ($a-a=0$).

Следует условиться нуль считать тоже целым числом, которое помещают в самом начале натурального ряда чисел:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ldots$$

Таким образом, введение нуля в область целых чисел есть первый шаг на пути расширения понятия числа, в частности, расширение натурального ряда чисел.

Теперь надо разобрать особые случаи сложения и вычитания, когда одно или оба данные числа суть нули. Сначала рассматриваются особые случаи сложения вида: $0+b$, $a+0$ и $0+0$. Например:

$$0+82=82.$$

Учащиеся сами скажут, что на самом деле они никакого действия сложения здесь не производили; преподаватель им сообщает, что эту запись условились считать записью действия сложения.

Примерно так же можно рассмотреть второй вид записи сложения, например:

$$27+0=27.$$

Последний вид записи ($0+0=0$) носит ещё более формальный характер, но учащиеся достаточно подготовлены предыдущей работой и примут её как условную запись сложения.

Теперь остаётся рассмотреть записи особых случаев вычитания, когда только вычитаемое задано нулём и когда уменьшаемое и вычитаемое нули. Так, если имеется запись вида $a-0$ (например: $38-0$), то учащиеся сначала скажут, что здесь «нечего вычитать», но всё-таки на вопрос преподавателя ответят, что при этом вычитании получится 38. Преподаватель поможет им обосновать этот ответ, пользуясь определением вычитания как обратного действия, т. е. $38-0=38$, так как $0+38=38$, или $38+0=38$, что уже известно учащимся из предыдущей работы.

Последний особый вид записи вычитания, когда уменьшаемое и вычитаемое нули ($0-0=0$), как и соответствующий вид записи сложения ($0+0=0$), носит исключительно формальный характер; но её можно обосновать, пользуясь определением вычитания: $0-0=0$, так как $0+0=0$.

Случай, когда только уменьшаемое равно нулю, в курсе арифметики не рассматривается.

6. Изменение разности при изменении данных чисел

Повторение вычитания заканчивается решением задач на определение изменения результата вычитания при изменении одного или двух компонентов. Решение соответствующих задач надо проводить в порядке устного счёта в течение длительного отрезка времени, уделяя этой работе хотя бы по 5 минут на каждом уроке; отдельных уроков отводить для этой работы не следует. При этом надо следить за тем, чтобы вычитание было всегда выполнимо, т. е. чтобы изменённое уменьшаемое было не меньше изменённого вычитаемого.

Полезно решать задачи и более трудных типов, когда один или оба компонента увеличиваются в несколько раз (или умножаются на целое число), например: «Как изменится разность, если уменьшаемое увеличить вдвое или втрое (или умножить на 2 или на 3)?»

$$28-9=19.$$

$$(28\cdot3)-9=28+28+28-9=(28-9)+28+28=$$
$$=19+(28+28)=75.$$

IV. УМНОЖЕНИЕ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

1. Понятие об умножении

Сложение натуральных чисел есть самое простое арифметическое действие, которое считается действием первой ступени.

Таблица ступеней арифметических действий:

$$\frac{a \cdot b = p}{p : a = b \text{ или } p : b = a}$$

$$\frac{a + b = S}{S - a = b \text{ или } S - b = a.}$$

Вычитание как действие, обратное сложению, считается тоже действием первой ступени. Умножение натуральных чисел хотя и является по существу действием сложения, когда все слагаемые равны, но оно выполняется другими приёмами (с помощью таблицы умножения); поэтому умножение есть действие более высокого порядка, оно считается действием второй ступени и располагается на второй ступени таблицы ступеней действий — лестницы.

При повторении умножения натуральных чисел преподаватель должен всё время требовать от учащихся чёткой формулировки самого действия с ударением на то, что речь идёт об умножении на целое число, чтобы постепенно прочно и отчётливо закрепить в сознании учащихся вполне определённый смысл и определённое истолкование действия умножения как сложения равных слагаемых. Это поможет при изучении умножения дробей, в частности, умножения на правильную дробь, подчеркнуть новый смысл действия умножения как нахождение части числа.

Повторение умножения натуральных чисел строится по такому же плану, как и повторение предыдущих двух действий.

2. Решение задач на умножение

Задачи с конкретным содержанием являются лучшим средством для выяснения и истолкования смысла умножения натуральных чисел, точнее говоря, умножения на целое число. Как известно, умножением на целое число решаются два рода задач: 1) когда по прямому смыслу задачи надо одно число повторить слагаемым нескольк раз и 2) когда требуется определить число в несколько раз большее данного.

Задача 1. «Для материального обеспечения своего летнего отдыха в июле месяце рабочий делал вклады в сберкассу ежемесячно по 120 рублей, начиная с января и по июнь. Сколько денег накопилось в сберкассе к первому июля, не считая процентов?»

Учащиеся сообщают ответ на вопрос задачи (720 руб.) и указывают решение её умножением. Преподаватель, одобрив то и другое, предлагает учащимся в соответствии с условием задачи записать последовательный ход накопления этой суммы:

$$120+120+120+120+120+120=720.$$

Учащиеся сами скажут, что эту запись можно заменить другой, более короткой: $120 \cdot 6=720$, и что это есть запись действия умножения. На вопросы преподавателя учащиеся ответят, что «умножение на целое число есть сложение равных слагаемых» или «умножить данное число на целое число значит повторить данное число слагаемым столько раз, сколько единиц в другом целом числе», а также назовут оба данные числа и результат.

Учащиеся сравнивают полученное произведение с множимым (720 и 120) и высказывают общее утверждение, что при умножении на целое число произведение всегда должно быть больше множимого, так как сумма больше каждого слагаемого.

Этот факт приводит к решению задач на умножение второго типа, когда требуется найти число, в несколько раз большее данного.

Задача 2. «В одной книге 136 страниц, а в другой в четыре раза больше. Сколько страниц в другой книге?»

Учащиеся дают ответ на вопрос задачи, указывают, что задача решается умножением, и записывают решение. Преподаватель предлагает истолковать смысл этого действия (что значит умножить 136 на 4?) как сложение равных слагаемых:

$$136 \cdot 4=544;$$
$$136+136+136+136=544.$$

Так создаётся, подтверждается и закрепляется определение умножения данного числа на целое число. Учащиеся сами придумывают задачи на умножение по образцу первой и второй задач. Затем действие умножения записывается с помощью букв: $a \cdot b=p$. Учащиеся подставляют числовые значения вместо букв a и b и производят вычисления, определяя числовые значения p. Очень полезно при этом записать с помощью букв и смысл умножения на целое число как сложение равных слагаемых:

$$\underbrace{a+a+a+\ldots+a}_{b \text{ слагаемых}}=a \cdot b=p.$$

3. Основные свойства и законы умножения

По вопросам преподавателя учащиеся отвечают, что действие сложения всегда выполнимо (что это значит?), вычитание ограниченно выполнимо (указывают условие выполнимости и объясняют, что это значит); легко делается вывод, что умножение на целое число всегда выполнимо, так как оно представляет собою сложение равных слагаемых.

Изучение основных законов умножения удобно начинать с распределительного закона, который связывает два прямых действия: сложение и умножение. Для выяснения сущности и применения этого закона учащиеся решают задачи или численные примеры на умножение сначала двузначных, потом трёхзначных и многозначных чисел на однозначное число.

Умножение однозначных чисел, как известно, производится по таблице умножения, которую учащиеся заучивают наизусть ещё в начальной школе.

В порядке устного счёта учащиеся решают задачу или численный пример на умножение двузначного числа на однозначное, например:

$$37 \cdot 6 = 222.$$

После получения верного ответа преподаватель предлагает учащимся рассказать, как они решали этот пример: $30 \cdot 6 = 180$, затем $7 \cdot 6 = 42$, $180 + 42 = 222$; или так: $7 \cdot 6 = 42$, $30 \cdot 6 = 180$, $180 + 42 = 222$.

Преподаватель обращает внимание учащихся на то, что они для вычисления разбили двузначное число на два слагаемых, умножали каждое слагаемое отдельно на 6 и полученные произведения сложили, что можно записать так:

$$37 \cdot 6 = (30 + 7) \cdot 6 = 30 \cdot 6 + 7 \cdot 6 = 180 + 42 = 222.$$

Преподаватель подчёркивает второе и третье звено в этой записи и предлагает учащимся прочитать сначала второе звено (сумма двух чисел умножается на третье число), потом третье, а затем формулируется распределительный закон.

Анализ решения двух-трёх таких же примеров по приведённому образцу даст возможность закрепить формулировку распределительного закона для суммы двух слагаемых и подчеркнуть, что умножение двузначного числа на однозначное производится именно на основании этого закона и таблицы умножения.

Нетрудно показать уже без промежуточных записей, что умножение трёхзначных и любых многозначных чисел на однозначные числа производится таким же образом.

Распределительный закон можно теперь записать в более общей форме с помощью букв:

1) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$

2) $(m + n + p) \cdot q = m \cdot q + n \cdot q + p \cdot q.$

Учащиеся подставляют вместо букв разные числа и убеждаются в справедливости этого закона.

Переместительный закон умножения очень хорошо выясняется на задачах примерно такого содержания: «Сколько цветов на прямоугольной клумбе, если они рассажены в три ряда по 8 штук в каждом ряду?»

Задачу можно иллюстрировать рисунком.

На нём легко показать, что вычисление можно производить двумя способами: $8 \cdot 3$ и $3 \cdot 8$; результаты будут равны; $8 \cdot 3 = 3 \cdot 8 = 24$. Учащиеся формулируют переместительный закон и применяют его при решении соответствующих задач.

Переместительный закон можно записать в более общем виде буквами:

1) $a \cdot b = b \cdot a.$

2) $m \cdot n \cdot p = n \cdot m \cdot p = p \cdot n \cdot m$ и т. п.

С помощью подстановки чисел вместо букв учащиеся убеждаются в справедливости этих равенств.

Сочетательный закон умножения выявляется тоже в связи с решением соответствующей задачи, например:

«Рабочий вынимает в день 8 *м*³ земли; сколько земли он вынет в 3 месяца, считая в среднем по 26 рабочих дней в каждом месяце?»

Учащиеся решают задачу двумя способами:

1) $8 \cdot 26 = 208$;	2) $26 \cdot 3 = 78$;
$208 \cdot 3 = 624$.	$8 \cdot 78 = 624$.

Ответ. Рабочий в 3 месяца вынет 624 *м*³.

Отвечая на вопросы преподавателя, учащиеся замечают, что задача решается двумя действиями умножения: первое произведение, полученное при умножении двух данных чисел, вновь умножается на третье число. Поэтому преподаватель предлагает решение задачи записать в виде одной строчки:

$$(8 \cdot 26) \cdot 3 = 624, \text{ или } 8 \cdot (26 \cdot 3) = 624.$$

Так как результаты равны, то обе записи можно соединить в одну: $(8 \cdot 26) \cdot 3 = 8 \cdot (26 \cdot 3) = 624$.

После решения ещё двух-трёх числовых примеров на умножение трёх и более сомножителей учащиеся могут сформулировать сочетательный или собирательный закон. Потом его можно записать в более общем виде, обозначая числа буквами: $a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

Чтобы показать применение последних двух законов, преподаватель в порядке устного счёта предлагает такие числовые примеры:

1) $74 \cdot 25 \cdot 4 = 74 \cdot (25 \cdot 4) = 74 \cdot 100 = 7\,400$.

2) $125 \cdot 80 = 125 \cdot 8 \cdot 10 = 1\,000 \cdot 10 = 10\,000$.

4. Правила умножения натуральных чисел

Умножение однозначных чисел выполняется с помощью таблицы умножения, которую учащиеся знают наизусть.

Умножение многозначных чисел на однозначное выполняется на основании распределительного закона, о чём уже была речь раньше.

Запись умножения рекомендуется располагать всегда в строчку, а не в столбик.

$32\,212 \cdot 3 = 96\,636$ (порядок умножения безразличен — с высших или с низших разрядов).

$5\,274 \cdot 8 = 42\,192$ (удобнее начинать умножение с низших разрядов).

Строчечная запись на практике потребует от учащихся предварительного расчёта места для записи произведения.

Умножение многозначных чисел на двузначное и вообще на многозначное число почти всегда производится письменно, кроме некоторых частных случаев. Вывод правила довольно громоздкий, но познакомить учащихся с ним необходимо.

Преподаватель даёт пример $472 \cdot 59$ и предлагает учащимся решить его. Затем с помощью вопросов он заставляет их подробно описать весь процесс, на основании чего составляется следующая запись:

$$472 \cdot 59 = 472 \cdot (50+9) = 472 \cdot 50 + 472 \cdot 9 =$$
$$= (400+70+2) \cdot 50 + (400+70+2) \cdot 9 =$$
$$= 400 \cdot 50 + 70 \cdot 50 + 2 \cdot 50 + 400 \cdot 9 + 70 \cdot 9 + 2 \cdot 9 \text{ и т. д.}$$

Из этой записи выводится правило: «Все разряды множимого надо умножить последовательно на каждый разряд множителя и полученные произведения сложить».

И в этих случаях рекомендуется запись умножения располагать в строчку, а не в столбик; все промежуточные вычисления или частные произведения записываются под множимым и множителем в столбик для сложения их.

Примеры:

1) $87 \cdot 34 = 2\,958.$

$$\begin{array}{r} 348 \\ 261 \\ \hline 2\,958 \end{array}$$

2) $368 \cdot 79 = 29\,072.$

$$\begin{array}{r} 3\,312 \\ 2\,576 \\ \hline 29\,072 \end{array}$$

При строчечной записи умножения учащиеся освобождаются от необходимости решать по существу совсем ненужные вопросы о том, как подписывать множитель в том случае, когда число цифр во множимом и во множителе разное, ли как подписывать множитель, если в записи его имеются на конце нули, и т. п.

Особое внимание надо уделить тем случаям умножения многозначных чисел, когда в записи последних имеются нули. При этом надо различать случаи, когда нули стоят в середине записи числа и в конце его. Если нули стоят в середине записи множимого (например: $4\,908 \cdot 382$), то это не вызывает никаких затруднений. Но если нули стоят в середине записи множителя (например: $5\,238 \cdot 4\,006$), то учащиеся нередко делают одну и ту же ошибку в записи частных произведений: не подписывают их под соответствующими разрядами. Во избежание подобных ошибок полезно приучить учащихся при умножении многозначных чисел называть разрядное число, которое получается в каждом частном произведении: при умножении на единицы множителя получаются единицы, при умножении на десятки получаются десятки и т. п., что будет служить напоминанием о том, где надо подписывать каждое вновь полученное частное произведение (например, в последнем случае 5 238 умножаем на 6 единиц и получим единицы, затем 5 238 умножаем на 4 тысячи и получим тысячи и т. д.).

Если в записи одного или обоих сомножителей нули стоят в конце, то учащиеся обычно хорошо знают, что эти нули «переносятся в произведение». В повторительном курсе надо отчётливо осмыслить и осознать этот приём. Например: $386 \cdot 10$, т. е. $(300 + 80 + 6) \cdot 10 = 300 \cdot 10 + 80 \cdot 10 + 6 \cdot 10$. Другое объяснение: $386 \cdot 10$, т. е. 386 повторить слагаемым 10 раз; каждая единица, повторенная слагаемым 10 раз, даст десяток, а все 386 единиц дадут 386 десятков, или 3 860 единиц; следовательно, $386 \cdot 10 = 3\,860$.

При умножении данного числа на 100, на 1 000 и т. д. ведутся такие же рассуждения. На основании полученных результатов учащиеся повторяют известное правило умножения данного целого числа на 10, на 100, на 1 000 и т. д.

Очень полезно дать учащимся обратную задачу: число, записанное с нулями на конце, т. е. справа, представить в виде произведения двух множителей, один из которых должен быть записан единицей с последующими нулями, например: $520 = 52 \cdot 10$; $47\,900 = 479 \cdot 100$ и т. п.

Эти задачи подготовят учащихся к умножению любых чисел, в записи которых имеются нули справа.

Надо рассмотреть три разных случая: 1) когда нули имеются только в конце записи первого сомножителя, 2) когда нули имеются только в конце записи второго сомножителя и 3) когда нули стоят в конце записи каждого сомножителя.

1) $6\,480 \cdot 27 = (648 \cdot 10) \cdot 27 = (648 \cdot 27) \cdot 10 = 174\,960$.

$$\begin{array}{r} 4\,536 \\ 1\,296 \\ \hline 17\,496 \end{array}$$

2) $37 \cdot 5\,400 = 37 \cdot (54 \cdot 100) = (37 \cdot 54) \cdot 100 = 199\,800$.

$$\begin{array}{r} 148 \\ 185 \\ \hline 1\,998 \end{array}$$

3) $87\,100 \cdot 32\,000 = (871 \cdot 100) \cdot (32 \cdot 1\,000) = (871 \cdot 32) \cdot 100 \cdot 1\,000 = 2\,787\,200\,000$.

$$\begin{array}{r} 1\,742 \\ 2\,613 \\ 27\,872 \end{array}$$

Понятно, что при решении числовых примеров в дальнейшем учащиеся будут пользоваться только правилом, благодаря чему значительно сократится запись решения. Например:

$$\begin{array}{r} 72\,040 \cdot 5\,300 = 381\,812\,000. \\ \hline 21\,612 \\ 36\,020 \\ \hline 381\,812 \end{array}$$

В связи с только что описанными приёмами умножения многозначных чисел следует познакомить учащихся ещё с некоторыми наиболее полезными приёмами практических вычислений, преимущественно устных. Так, большое практическое значение имеют приёмы умножения данных чисел на 5, на 50, на 25, на 125.

1) Чтобы умножить данное число на 5 или на 50, надо умножить его на 10 или на 100 и полученное произведение разделить на 2 (т. е. взять половину этого произведения), что всегда легко сделать в уме, например;

1) $469 \cdot 5 = 4\,690 : 2 = 2\,345$.
2) $724 \cdot 50 = 72\,400 : 2 = 36\,200$ и т. п.

2) Чтобы умножить данное число **на 25 или на 125, надо умножить** его соответственно на 100 или на 1 000 **и полученное произведение разделить на** 4 или на 8, например:

1) $729\cdot 25=72\,900:4=18\,225$.

2) $365\cdot 125=365\,000:8=45\,625$ и т. п.

Необходимо указать учащимся приём **умножения данных чисел на** числа, которые записываются одной цифрой 9: на 9, ***на 99, на 999 и т. п., а также*** на 11 и вообще на числа, близкие к разрядным:

1) $564\cdot 9=564\cdot(10-1)=5\,640-564=5\,076$.

2) $87\cdot 99=87\cdot(100-1)=8\,700-87=8\,613$ и т. п.

3) $538\cdot 11=538\cdot(10+1)=538\cdot 10+538\cdot 1=5\,380+538=5\,918$.

4) $398\cdot 12=(400-2)\cdot 12=400\cdot 12-2\cdot 12=4\,800-24=4\,776$.

5) $54\cdot 19=54\cdot(20-1)=54\cdot 20-54\cdot 1=1\,080-54=1\,026$.

Указанные приёмы умножения далеко не исчерпывают тех возможностей, которые имеются в практике соответствующих вычислений для упрощения их. При дальнейшем изучении математики преподаватель должен поощрять учащихся применять наиболее выгодные приёмы умножения, чтобы развивать культуру вычислений, особенно устных.

5. Запись особых случаев умножения

При повторении умножения натуральных чисел, как и при повторении сложения и вычитания их, следует остановиться на таких случаях умножения, когда сомножителями являются единица и нуль: $1\cdot a$, $0\cdot a$, $a\cdot 1$, и $a\cdot 0$.

Истолкование первых двух случаев не вызывает никаких затруднений:

$$1\cdot 28=\underbrace{1+1+1+\ldots+1+1}_{28\ \text{раз}}=28.$$

$$0\cdot 28=\underbrace{0+0+0+\ldots+0+0}_{28\ \text{раз}}=0.$$

Эти записи подходят под общее установленное истолкование умножения данных чисел (1 и 0) на целое число как сложение равных слагаемых (1 и 0).

Вторые два случая ($a\cdot 1$ и $a\cdot 0$) значительно труднее понимаются и усваиваются учащимися, так как они не вытекают из решения обычных задач. Действительно, нельзя придумать задачи с конкретным содержанием, решение которых приводилось бы к таким случаям умножения.

Для лучшего понимания учащимися подобных случаев умножения в данном числовом примере можно менять численное значение множителя, уменьшая его, и довести его таким образом до единицы, потом до нуля; при этом попутно надо давать истолкование каждого отдельного случая умножения на целое число как сложение равных слагаемых:

$28\cdot7=196 \quad 28\cdot7=28+28+28+28+28+28+28$
$28\cdot5=140 \quad 28\cdot5=28+28+28+28+28$
$28\cdot2=\ \ 56 \quad 28\cdot2=28+28$
$28\cdot1=\ \ 28$
$28\cdot0=\ \ \ \ 0$

Когда множитель станет единицей, привычное истолкование умножения на целое число становится непригодным. Преподаватель сообщает, что хотя в этом примере и нет сложения равных слагаемых, однако такую запись ($28\cdot1=28$) употребляют и считают её записью особого случая умножения; за произведение принимается множимое.

Последний случай умножения, когда множитель равен нулю, подавно не может быть истолкован как сложение равных слагаемых. Преподаватель опять говорит, что и эту запись тоже иногда употребляют (вернее сказать, она иногда непосредственно получается при некоторых преобразованиях) и принимают её за символ нуля, что и записывают в виде равенства ($28\cdot0=0$).

Вслед за этим преподаватель предлагает учащимся самим составить несколько числовых примеров, содержащих умножение на единицу и на нуль (в них могут быть не два, а три и больше множителей). После этого можно эти особые случаи умножения записать в более общем виде с помощью букв:

1) $a\cdot1=a$; $a\cdot b\cdot1=a\cdot b$; $m\cdot n\cdot p\cdot1=m\cdot n\cdot p$.
2) $a\cdot0=0$; $a\cdot b\cdot0=0$; $m\cdot n\cdot p\cdot0=0$ и т. п.

6. Изменение произведения при изменении сомножителей

Задачи на изменение результатов действий можно давать в одной из двух редакций: когда один или оба сомножителя увеличиваются или уменьшаются в несколько раз (арифметическая запись условия задачи), или когда они умножаются или делятся на целое число (объяснение характера изменения компонентов).

Для вывода соответствующих правил учащиеся должны провести целый ряд наблюдений при решении данных задач, пользуясь известными им основными законами произведения.

Полезно рассмотреть те задачи, в которых множимое или множитель увеличивается или уменьшается на некоторое число. Эти задачи труднее предыдущих, особенно трудна формулировка выводов об изменении произведения. Решение некоторых задач можно записывать более подробно:

1) $38\cdot23=874.$
$$\begin{array}{r} 114 \\ 76 \\ \hline 874 \end{array}$$

$$(38+2)\cdot23=(38\cdot23)+(2\cdot23)=874+(23\cdot2).$$

Вывод. Если множимое увеличить на 2, то произведение увеличится на удвоенный множитель.

2) $\begin{array}{l} 43\cdot 37=1\,591. \\ \hline 301 \\ 129 \\ \hline 1\,591 \end{array}$

$$43\cdot(37+3)=43\cdot 37+43\cdot 3=1\,591+43\cdot 3.$$

3) $(43-6)\cdot 37=43\cdot 37-6\cdot 37=1\,591-6\cdot 37.$

Сделанные выводы учащиеся применяют при устном решении соответствующих задач, которые даются в разной формулировке: 1) как изменится произведение, если множимое увеличить в 5 раз (или умножить)? 2) как изменится произведение, если от множителя отнять 4 (или множитель уменьшить на 4)? и т. п.

7. Проверка умножения

Учащиеся из курса арифметики начальной школы знают, что умножение можно проверять как действием умножения, пользуясь переместительным и сочетательным законами умножения (последний закон применяется в тех случаях, когда число сомножителей больше двух), так и делением произведения на один из двух сомножителей. Эти же приёмы проверки умножения применяются и теперь.

V. ДЕЛЕНИЕ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

При делении целых чисел возникают двоякого рода трудности— технические и логические. Действительно, при решении разного рода задач на деление целых чисел учащиеся в своей вычислительной работе прежде всего и больше всего встречают именно технические затруднения. И это вполне понятно: самый процесс деления многозначных чисел много сложнее, а потому и труднее, чем процесс любого другого арифметического действия.

Большие технические трудности для учащихся встречаются, между прочим, в тех случаях деления, когда в середине записи частного получаются нули.

Обычно указывают три логические трудности при изучении деления целых чисел: 1) определение действия деления, 2) двоякий смысл, придаваемый слову «деление»: деление на равные части и деление по содержанию и, наконец, 3) необходимость в обобщении обоих случаев деления в одном «общем понятии деления».

При этом говорят, что не всегда можно определить действие деления, как нахождение числа, на которое надо умножить второе данное число (делитель), чтобы в произведении получить число, равное первому данному числу (делимому). Здесь имеется в виду деление с остатком. Это логическое затруднение может полностью отсутствовать; если учащиеся своевременно будут различать точное и неточное частное и понимать, что все известные свойства частного имеют место только при точном частном. Затем при изучении каждого нового действия после ознакомления с ним сразу же ставится вопрос о том, всегда ли выполнимо это действие в данной области чисел или при каких условиях оно выполнимо.

Сложение и умножение, как известно, всегда выполнимы в области натуральных чисел, а вычитание и деление ограниченно выполнимы. За частное от деления одного целого числа на другое принимается такое целое число, которое при умножении его на делитель в произведении даёт число, равное делимому; это частное называется точным частным. Деление же с остатком считается незаконченным делением (не разделён остаток, так как он меньше делителя); понятно, что к такому делению нельзя применить вышеприведённое определение деления без известного добавления (самое общее определение деления: $a:b=x$ (ост. r), откуда $b \cdot x+r=a$; при $r=0$ получается первое определение).

При повторительном обзоре деления целых чисел следует подчёркивать ту мысль, что технический процесс деления на равные части и по содержанию остаётся один и тот же, потому что это действие, как и все остальные арифметические действия, производится фактически над числами, независимо от того, имеют ли эти числа наименования по условию задачи или нет. В силу этого совсем отпадает необходимость различать эти два вида деления. К тому же переместительный закон умножения снимает вопрос о различии между множимым и множителем; это также позволяет снять вопрос о существовании двух видов деления.

План повторения деления тот же, что был и при повторении предыдущих действий; в конце повторения подробно рассматривается вопрос о делении с остатком.

1. Задачи на деление целых чисел

Умножение на целое число в начальной стадии рассматривается как последовательное сложение равных слагаемых, а затем как нахождение числа в несколько раз больше данного. Деление есть действие, обратное умножению. Поэтому естественно показать, что в начальной стадии изучения деления тоже решаются сначала задачи на последовательное вычитание равных вычитаемых, а затем уже те задачи, в которых требуется найти число в несколько раз меньше данного. При решении этих задач надо устанавливать связь действия деления с умножением, как это делалось при повторении вычитания.

Задача 1. «Служащий ежемесячно вносил в сберкассу по 120 руб. и накопил сумму в 720 руб. (без процентов) для летнего отдыха. Сколько месяцев он делал взносы?»

Учащиеся дают ответ на вопрос задачи (6 месяцев) и указывают решение её (720 руб. разделить на 120 руб.). Преподаватель, одобрив то и другое, предлагает им внимательно вдуматься в условие задачи, выяснить, что в ней дано или известно и что надо определить, и затем спрашивает: «как шло накопление этой суммы?» Учащиеся без труда запишут этот процесс: $120+120+120+120+120+120=720$, сопровождая его такими вычислениями: в первый месяц 120 руб., да во второй 120 руб., всего 240 руб., да в третий 120 руб., всего 360 руб. и т. д. Уже из этой записи видно, что искомое число взносов 6. Преподаватель спрашивает опять: как можно найти число взносов иным путём? Проще всего это можно сделать так:

от общей суммы 720 руб. последовательно отнимать ежемесячные взносы по 120 руб. до тех пор, пока не исчерпается вся сумма.

$$720-120-120-120-120-120-120=0;$$

при этом ведётся счёт: $720-120=600$; $600-120=480$ и т. д. Таким путём определяется, сколько раз 120 содержится в 720; столько же было и ежемесячных взносов.

Сами учащиеся скажут, что так решать эту задачу очень долго и что её можно «проще» решить делением. Преподаватель соглашается с этим, но спрашивает: на каком основании можно заменить последовательное вычитание равных вычитаемых делением уменьшаемого на вычитаемое? Чтобы выяснить это, он вновь предлагает обратиться к условию данной задачи и записать его, рассуждая таким образом: один взнос 120 руб., а x взносов составит сумму в x раз больше ($120 \cdot x$), что по условию задачи равно 720 руб., т. е. $120 \cdot x=720$. Таким образом, условие данной задачи записано в виде умножения. Искомое число x — число взносов — служит здесь одним из сомножителей. Чтобы определить его, надо произведение 720 разделить на другой сомножитель, на 120, т. е. $720:120=x$. Раньше то же искомое число было найдено последовательным вычитанием с помощью записи: $720-120-120-120-120-120-120=0$; а теперь эту запись можно заменить более короткой $720:120=x$, или $720:120=6$ (6 раз 120 содержится в 720; столько же будет и взносов).

Учащиеся сами могут установить следующую аналогию, пользуясь некоторой помощью преподавателя: сложение равных слагаемых заменяется действием умножения, а вычитание равных вычитаемых заменяется делением; этим последним действием решается вопрос: сколько раз делитель-вычитаемое 120 содержится в делимом-уменьшаемом 720?

Преподаватель вновь выписывает условие данной задачи в виде умножения и решение задачи в виде деления и предлагает сопоставить их.

$$\begin{array}{ll} 120 \cdot x=720; & \text{или } 720:120=6; \\ 720:120=x; & 120 \cdot 6=720. \end{array}$$

Учащиеся легко обнаруживают, что с помощью деления по произведению и множимому находится множитель, т. е. такое число (6), на которое надо умножить число 120, чтобы в произведении получить число 720.

Так создаётся первое представление о делении как о действии, обратном умножению; особо подчёркивается, что в данной задаче разрешается такой вопрос: сколько раз меньшее число (120) содержится в большем числе (720)?

Учащиеся ещё решают одну-две задачи на деление по содержанию, вкратце повторяют основные моменты описанного процесса: решение последовательным вычитанием, запись условия задачи умножением с неизвестным множителем и запись решения в виде деления.

После этого делается краткий общий обзор решённых задач с записью условия и решения их в общем виде (условие задачи: $a \cdot x=p$, решение её: $p:a=x$) и составляется определение действия деления в двух редакциях: 1) по произведению и множимому находится множитель; 2) находится число, на которое надо умножить делитель, чтобы в произведении получить число, равное делимому. Названия данных чисел и результат деления связываются с названиями данных чисел и результатом умножения:

делимое p — произведение,
делитель a — множимое,
частное x — множитель.

Задача 2. «В магазин доставили 720 *кг* конфет в 120 одинаковых пакетах. Сколько килограммов конфет было в каждом пакете?»

Учащиеся дают ответ на вопрос задачи (6 *кг*) и указывают решение её (делением). Преподаватель предлагает учащимся сначала обратиться к условию задачи, выяснить, что известно (общее количество 720 *кг* и число пакетов 120) и что неизвестно (вес конфет в одном пакете—x *кг*) и записать условие, рассуждая так: в одном пакете — x *кг*, а в 120 пакетах в 120 раз больше ($x \cdot 120$), что составляет 720 *кг*, т. е. $x \cdot 120 = 720$.

Условие задачи записано в виде умножения, но теперь множимое является неизвестным числом. Как его найти? Проще всего это сделать вычитанием, рассуждая таким образом: если из общего веса 720 *кг* в каждый из 120 пакетов положено по 1 *кг*, то останется 600 *кг* (720—120); если в них положить ещё по 1 *кг*, то в общем весе останется 480 *кг* (600—120=480) и т. д.; запись примет такой вид: 720 — 120 —120 —120 — 120 — 120 — 120=0. Таким образом, учащиеся будут подведены к выводу: сколько раз 120 содержится в 720, столько же будет килограммов конфет в каждом пакете. Учащиеся сами могут предложить заменить вычитание равных вычитаемых делением уменьшаемого на вычитаемое: $720 : 120 = x$, или $720 : 120 = 6$ (6 *кг* в пакете). Сопоставляя последнюю запись деления с записью условия задачи в виде умножения, учащиеся опять убеждаются в том, что деление есть действие, обратное умножению.

Затем учащиеся решают одну-две задачи на деление на равные части (такие задачи могут придумывать и сами учащиеся), вкратце повторяя описанный процесс; затем с помощью букв записывается условие этих задач и решение их: $x \cdot b = p$ и $p : b = x$.

Под руководством преподавателя учащиеся сравнивают первую и вторую группу решённых задач на деление, выписывают общие формулы решения:

$$1)\ a \cdot x = p; \quad p : a = x,$$
$$2)\ x \cdot b = p; \quad p : b = x,$$

и формулируют выводы (по вопросам преподавателя):

1) Условие каждой задачи записывается в виде умножения чисел, а решение — делением их.

2) Все задачи решаются делением: по произведению и одному из сомножителей находится другой сомножитель.

3) Во всех задачах решается один и тот же арифметический вопрос: сколько раз меньшее число содержится в большем.

4) Действие деления во всех задачах выполняется над данными числами, независимо от наименования их по условию задачи.

5) Поэтому при записи решения задач нет никакой необходимости писать наименования данных чисел и искомого; последнее выписывается с соответствующим наименованием отдельно, как ответ на вопрос задачи.

6) В общем виде с помощью букв деление можно записать так: $a : b = q$, причём $b \cdot q = a$ и $q \cdot b = a$, т. е. $b \cdot q = q \cdot b$.

2. Свойства деления

При делении одного натурального числа на другое не всегда можно найти такое натуральное число, которое, будучи умножено на делитель, даст в произведении число, равное делимому. Эту мысль об ограниченности выполнения деления в области натуральных чисел учащиеся должны усвоить очень прочно и отчётливо, чтобы потом лучше понять и усвоить введение дробей, с помощью которых снимается ограничение с действия деления, кроме деления на нуль.

Затем учащиеся припоминают основные законы произведения двух и нескольких сомножителей и пытаются применить их к делению. Оказывается, что переместительный закон вообще не имеет места при делении, как и при вычитании, в чём легко можно убедиться: $48:16=3$ (деление выполняется), но при делении 16 на 48 нельзя найти частное в виде целого числа (т. е. деление не выполняется).

Можно показать справедливость распределительного закона при делении суммы или разности чисел на целое число:

1) $963:3=(900+60+3):3=300+20+1=321.$

2) $882:9=(900-18):9=900:9-18:9=100-2=98.$

При решении этих и подобных им примеров учащиеся сначала делят всю сумму или разность данных чисел на указанный делитель, потом каждое слагаемое (или уменьшаемое и вычитаемое) порознь на соответствующий делитель; полученные равные результаты убеждают в справедливости распределительного закона при делении натуральных чисел.

После решения нескольких примеров можно этот закон записать с помощью букв:

1) $(a+b):c=a:c+b:c.$

2) $(a-b):c=a:c-b:c.$

Учащиеся подбирают численные значения входящих букв так, чтобы деление было выполнимо.

В непосредственной связи с только что выведенным свойством надо познакомить учащихся с правилом деления произведения нескольких чисел на данное число с помощью решения задач вида: $(24\cdot18):6$ и $(56\cdot72\cdot12):8$ и данного числа на произведение нескольких чисел, например: $324:(2\cdot9\cdot3)=[(324:2):9]:3$.

3. Правила деления натуральных чисел

В первую очередь рассматриваются все случаи деления на однозначное число: 1) деление однозначных чисел; 2) деление двузначных чисел при однозначном и двузначном частном; 3) деление трёхзначных чисел; 4) деление любых многозначных чисел; 5) деление любых многозначных чисел, когда в записи частного получаются нули в середине.

Первый и второй случаи деления на однозначное число при однозначном частном выполняются по таблице умножения.

Деление двузначного числа на однозначное при двузначном частном уже вводит учащихся в общий процесс деления: устанавливается порядок записи деления только в строчку (обозначение этого действия двумя точками; в процессе деления не делается никаких промежуточных записей, кроме записи частного).

Преподаватель предлагает учащимся числовые примеры на деление и перед решением каждого примера спрашивает, как они будут выполнять деление; процесс деления в одном или в двух первых примерах можно подробно записать на классной доске и в тетрадях:

1) $84:4=(80+4):4=80:4+4:4=20+1=21$.

2) $72:6=(70+2):6=(60+12):6=60:6+12:6=10+2=12$.

Учащиеся убеждаются, что деление в этом случае производится на основании распределительного закона (сумма делится на однозначное число).

Надо показать учащимся, что иногда бывает очень выгодно делимое представить не в виде суммы, как это было в приведённых примерах, а в виде разности, например:

3) $76:4=(80-4):4=80:4-4:4=20-1=19$.

В дальнейшей работе все подобные примеры решаются только устно; способ решения некоторых из них по заданию преподавателя тоже описывается устно.

В следующем третьем случае рассматривается деление трёхзначных чисел на однозначное; причём могут быть два случая, когда получается трёхзначное и двузначное частные. Необходимости в подробной записи теперь уже нет; зато учащиеся должны в устной форме подробно излагать весь процесс.

При делении более сложных многозначных чисел на однозначное подробные устные объяснения можно требовать только изредка, чтобы не тормозить работу и не делать её скучной и однообразной.

Особое внимание следует уделить последней группе примеров, когда при делении многозначного числа на однозначное в частном при записи его встречаются нули в середине. Эти примеры в классе надо решать обязательно с подробным устным объяснением; в последнем учащиеся должны говорить, какое разрядное число они делят и какое разрядное число получается в частном.

Пример. $165\,648:8=20\,706$.

Объяснение. 16 десятков тысяч разделим на 8 и получим в частном 2 десятка тысяч; 5 тысяч разделим на 8 и получим в частном 0 тысяч; 56 сотен разделим на 8 и получим в частном 7 сотен; 4 десятка разделим на 8 и получим в частном 0 десятков; 48 единиц разделим на 8 и получим в частном 6 единиц.

Во втором этапе работы рассматриваются случаи деления многозначных чисел на двузначные. Деление двузначных чисел на двузначные сводится к нахождению однозначных частных, что не представляет накаких затруднений для учащихся; да и число таких примеров очень незначительное; результат находится быстро и тотчас же проверяется умножением.

При изучении деления трёхзначных чисел на двузначные рассматривают два случая: при однозначном частном и при двузначном. В обоих случаях рекомендуется запись располагать в строчку, действие деления обозначать двоеточием. В первом случае все вычисления производятся устно, записывается только частное.

Примеры.

1) $423:47=9$.

Объяснение. Частное может быть только однозначное, потому что наименьшее двузначное число 10 при умножении его на 47 даст в произведении 470, а делимое 423; чтобы определить частное, надо в делимом и в делителе отделить единицы и разделить 42 десятка на 4 десятка, что в частном даст 9; умножив 47 на 9, получим 423, т. е. делимое.

2) $595:85=7$.

3) $632:79=8$ и т. п.

При определении однозначного частного надо заставлять учащихся учитывать число отделяемых единиц в делителе; если их больше 6, то иногда приходится в частном брать число на единицу меньше (см. 1-й и 3-й примеры).

При изучении второго случая деления трёхзначных чисел на двузначные при двузначном частном надо заставлять учащихся предварительно определять, что частное получится двузначное (*умножением делителя на* 10; если произведение будет меньше делимого или равно ему, то частное получится двузначное), т. е. оно будет составлено из десятков и единиц; поэтому сначала надо найти число десятков частного делением числа десятков делимого на делитель (т. е., как говорят, в делимом надо слева отделить десятки).

Пример.

$$\begin{array}{r l} - \begin{array}{r} 989 \\ 86 \\ \hline 129 \\ 129 \\ \hline 0 \end{array} & \!\!\!\!\begin{array}{l} :43=23. \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Объяснение. Частное будет двузначное число, так как $43 \cdot 10 = 430 < 989$; в делимом отделяем слева две цифры—число десятков и делим их на делитель 43; в частном получим число десятков (2); умножаем это число на делитель (43), чтобы узнать, какое число десятков мы разделили (86); полученное произведение вычитаем из десятков делимого, чтобы узнать, сколько десятков осталось неразделённых (12); этот остаток десятков раздробляем в единицы (120) и складываем с числом единиц делимого (9); полученный остаток единиц (129) делим на делитель (43).

В общей классной работе обязательно надо проводить такое объяснение, особенно при решении первых примеров, чтобы учащиеся отчётливо и прочно усвоили этот алгорифм деления натуральных чисел; в дальнейшей вычислительной работе не следует требовать такого подробного объяснения каждого примера, но время от времени надо вновь возвращаться к нему.

Деление любого многозначного числа на двузначное производится точно таким же образом. Предварительно можно дать учащимся целый ряд примеров на деление разных многозначных чисел на двузначные и предложить им определить a priori, сколькими цифрами будет записано каждое частное, для чего они должны устно умножать каждый делитель на 10, 100, 1 000 и т. д. и сравнивать полученное произведение с делимым: если оно при умножении на 10 будет меньше делимого, а при умножении на 100 больше него, то частное будет двузначным; если при умножении на 100 произведение меньше делимого, а при умножении на 1 000 больше него, то частное будет трёхзначное число, и т. д. Эти заключения о значности частного можно записать во второй колонке против каждого примера с тем, чтобы проверить их после выполнения деления.

Примеры.

1) 8 526:87=	двузначное
2) 43 092:76=	трёхзначное
3) 96 432:49=	четырёхзначное
4) 314 064:54=	четырёхзначное

Примерное расположение записей (устное объяснение см. выше при делении на однозначный делитель при двузначном частном):

$$
\begin{array}{l}
-96\,432:49=1\,968. \\
\;\;\underline{49} \\
\;-\underline{474} \\
\;\;\;\underline{441} \\
\;\;\;-333 \\
\;\;\;\;\;\underline{294} \\
\;\;\;\;-392 \\
\;\;\;\;\;\;\underline{392} \\
\;\;\;\;\;\;\;\;0
\end{array}
$$

Деление на двузначное число завершается рассмотрением таких случаев, когда в частном при записи его в середине встречаются нули. Если требовать от учащихся в общей классной работе подробное объяснение процесса деления, то этим можно предупреждать возможные пропуски нулей (пример: 579 768 : 28 = 20 706).

На третьем этапе повторения деления натуральных чисел рассматриваются случаи деления на трёхзначные и другие многозначные числа. Предшествующая работа должна подготовить учащихся к успешному разрешению вновь поставленных задач. План изучения остаётся тот же самый, что был и раньше.

1) Деление трёхзначных и четырёхзначных чисел на трёхзначные при однозначном частном, например:

984 : 328 = 3 (умножение делителя на частное надо сделать, а писать произведение не надо).

Предварительное определение значности частного производится теми же способами: умножением делителя на 10, 100, 1 000 и т. д. и сравнением полученного произведения с делимым.

2) Деление четырёх- и пятизначных чисел на трёхзначные при двузначном частном, например:

$$7\,498:326=23;$$
$$13\,543:467=29.$$

3) Деление любых многозначных чисел на трёхзначные и другие многозначные числа. Особое внимание надо опять обратить на те случаи деления, когда в частном при записи его получаются в середине нули.

На этом же этапе работы следует рассмотреть те случаи деления, когда делимое при записи его оканчивается одним или несколькими нулями, например:

14 910 : 35 или 14 910 : 426.

$$
\begin{array}{l}
\;\;48\,000:75=640 \\
-\underline{450} \\
\;\;\;\;300 \\
\;\;\;\;\underline{300} \\
\;\;\;\;\;\;0
\end{array}
$$

4) Деление данных чисел на 10, 100, 1 000 и т. д.

74 300 : 10 = 7 430
82 000 : 100 = 820
53 000 : 1 000 = 53

В этих задачах решается вопрос, сколько десятков, сотен, тысяч и т. д. содержится в делимом числе.

5) Деление данных чисел на такие числа, которые записываются значащими цифрами с одним или несколькими нулями справа.

При рассмотрении этих случаев деления надо воспользоваться переместительным и сочетательным свойствами деления и предыдущим правилом.

При решении этих и подобных им примеров учащиеся формулируют известное им правило: в записи делимого и делителя справа зачеркнуть (или опустить) по равному числу нулей, а затем делить по известным уже правилам. Но надо твёрдо помнить, что это правило имеет место только при делении без остатка.

Примеры.

1) $7\,420:20=7\,420:(2\cdot 10)=(7\,420:2):10=3\,710:10=371;$
$7\,420:20=(7\,420:10):2=742:2=371.$

2) $48\,000:640=48\,000:(64\cdot 10)=(48\,000:10):64=4\,800:64=75.$

$$\begin{array}{r} 448 \\ \hline 320 \\ 320 \\ \hline 0 \end{array}$$

4. Запись особых случаев деления

Сюда относятся те случаи деления, когда делитель есть 1 или 0. С этой целью учащиеся решают несколько примеров на деление и истолковывают смысл деления в каждом случае:

$12:6=2$	$2\cdot 6=12$	$12:2=6$	$6\cdot 2=12$
$12:4=3$	$3\cdot 4=12$	$12:1=12$	$12\cdot 1=12$
$12:3=4$	$4\cdot 3=12$	$12:0=$	

В последнем примере учащиеся тоже могут допустить, что в частном получится некоторое число (они часто говорят, что получится делимое, т. е. в данном случае 12), например x; тогда $x\cdot 0=0$, а не 12 (при любом численном значении x).

Следовательно, делить на нуль нельзя, и самая запись деления на нуль не имеет смысла (так как нет такого числа, которое, будучи умножено на нуль, в произведении даст число, равное делимому, когда последнее не равно нулю).

При этом учащиеся могут сами поставить вопрос о том, можно ли нуль разделить на целое число? Преподаватель должен объяснить, что эту операцию можно записать: $0:5=0$, так как $0\cdot 5=0$.

Попутно полезно заметить, что единицу можно разделить только на единицу, т. е. $1:1=1$ (в соответствии с вышеприведённой записью $a:1=a$).

5. Деление с остатком

Повторение деления с остатком представляет некоторые особые затруднения как при истолковании этой операции, так и в технике выполнения её.

Деление с остатком в арифметике натуральных чисел с точки зрения ранее принятого определения деления как действия, обратного умножению, является невыполнимой операцией, так как в этом случае нельзя найти такое число, которое при умножении его на делитель в произведении даст число, равное делимому. Но в практической жизни, как известно, почти всегда возникают именно такие задачи, в которых приходится выполнять деление с остатком. Например: «Школа на 882 учащихся в начале учебного года получила 5 700 тетрадей. Сколько тетрадей в среднем приходится на одного учащегося?»

Задача решается делением.

$$\begin{array}{r} 5\,700:882=6. \\ \underline{5\,292} \\ 408 \end{array}$$

В частном получили число 6; следовательно, на каждого учащегося приходится по 6 тетрадей, но 408 тетрадей в школе остались неразделёнными.

После решения нескольких задач на деление с остатком учащиеся под руководством преподавателя делают выводы: 1) во всех предыдущих задачах на деление остаток был равен нулю; 2) в последних задачах он больше нуля, но всегда меньше делителя, почему и прекращается деление; 3) при проверке деления делитель умножается на частное, как и раньше, но в произведении получается число меньше делимого (следовательно, это не точное частное; оно называется приближённым частным с недостатком); 4) если к этому произведению прибавить остаток, то получится число, равное делимому, например: $6\cdot882+408=5\,292+$ $+408=5\,700$.

Деление с остатком и последние выводы можно записать с помощью букв, если это не вызовет особых затруднений:

1) $a:b=q$ (ост. r).
2) r — остаток; $r<b$.
3) $q\cdot b<a$ или $b\cdot q<a$.
4) $q\cdot b+r=a$.

Последняя буквенная запись (4) и последний вывод (4) дают возможность сказать, что деление с остатком тоже можно рассматривать как действие, обратное умножению; но в этом действии находится число, которое после умножения его на делитель, а затем после сложения полученного произведения с остатком в сумме даёт число, равное делимому. Из последней буквенной записи (4) можно определить первое слагаемое по сумме и другому слагаемому: $q \cdot b = a - r$; теперь можно определить q как сомножитель: $q = (a - r) : b$ или $(a - r) : b = q$. Из этих последних записей видно, что искомое число q — частное — можно найти делением делимого без остатка $(a - r)$ на делитель (b) и что оно, будучи умножено на делитель (b), даст в произведении число, равное делимому без остатка.

Эти выводы учащиеся могут проверить во всех случаях деления данных чисел с остатком. При этом можно показать, что при делении без остатка все эти рассуждения и выводы сохраняют силу. В самом деле, в последнем случае получается последний остаток, равный нулю, следовательно: $a : b = q$, откуда: $q \cdot b + 0 = a$ или $q \cdot b = a$ или, наконец, $(a - 0) : b$, что можно записать и так: $a = b \cdot q$.

Ещё раз надо напомнить, что последние рассуждения, сопровождаемые буквенной записью, ни в коем случае не являются обязательными; можно ограничиться числовыми вычислениями, как это и предлагается дальше.

При дальнейшем решении задач на деление с остатком для развития прочных навыков и для более отчётливого осознания действия деления надо заставлять учащихся по окончании деления время от времени записывать, чему равно делимое $(a = bq + r)$ и чему равно произведение делителя на частное $(b \cdot q = a - r)$; например:

$$
\begin{array}{r}
14\,240 : 37 = 384; \\
\underline{111} \\
314 \\
\underline{296} \\
180 \\
\underline{148} \\
32
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
14\,240 = 37 \cdot 384 + 32 \\
\text{и } 37 \cdot 384 = 14\,240 - 32.
\end{array}
$$

Теперь остаётся рассмотреть такие случаи деления **с остатком**, когда делителями являются числа 10, 100, 1 000 и т. д. **или числа**, записанные значащими цифрами с нулями в конце записи.

1) $183 : 10 = (180 + 3) : 10 = 18$ (ост. 3).

Объяснение. На 10 делятся числа, состоящие только из десятков; в данном делимом 18 десятков и 3 единицы; при делении 18 десятков на 1 десяток в частном получится 18, а 3 будет остатком, откуда: $183 = 10 \cdot 18 + 3$, или $183 = 18 \cdot 10 + 3$.

2) $5\,642 : 100 = (5\,600 + 42) : 100 = 56$ (ост. 42).

3) $73\,854 : 1\,000 = (73\,000 + 854) : 1\,000 = 73$ (ост. 854).

Объяснение аналогично приведённому выше.

При решении подобных задач в дальнейшем вторая запись опускается, а учащиеся постепенно выясняют, а потом и формулируют правило: в частном записывается делимое без стольких цифр справа, сколько нулей в делителе, а в остатке — цифры делимого, не вошедшие в частное.

Деление с остатком на числа, записанные значащими цифрами с нулями в конце записи, надо рассмотреть в двух вариантах: когда в конце записи делимого нет нулей и когда они там имеются.

П р и м е р ы.

$$\begin{array}{rl} 1)\ 3\,729:240 = 15. \\ 240 \\ \hline 1\,329 \\ 1\,200 \\ \hline 129 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 2)\ 73\,568:3\,500 = 21. \\ 7\,000 \\ \hline 3\,568 \\ 3\,500 \\ \hline 68 \end{array}$$

Задачи первого варианта, как видно из приведённых примеров, не вызывают никаких новых затруднений. Задачи второго варианта сплошь и рядом приводят учащихся к грубым ошибкам при получении остатка: учащиеся в записях делимого и делителя отбрасывают по равному числу нулей справа, как это было установлено при делении без остатка, производят деление, получают верное частное, а в остатке сохраняют тот остаток, который фактически получился при этом делении.

Вот пример подобной неправильной работы:

$$\begin{array}{r} 497\,500:2\,400 = 4\,975:24 = 207. \\ 175 \\ 168 \\ \hline 7 \end{array}$$

За остаток при этом делении учащиеся принимают 7 вместо 700. Как предупреждать подобные ошибки, которые имеют очень широкое распространение? Прежде всего, когда впервые вводится приём «отбрасывания» по равному числу нулей в записи делимого и делителя, надо напомнить учащимся, что это возможно делать только тогда, когда мы уверены, что деление будет без остатка; при рассмотрении *таких же случаев деления*, но с остатком, надо опять напомнить им об этом. Наконец, очень полезно и даже необходимо в этих случаях по окончании деления проверить результат умножением и затем сложением произведения с остатком.

Например, после решения вышеприведённой задачи (497 500 : 2 400) надо записать указанную зависимость:

$$497\,500 = 2\,400 \cdot 207 + 7.$$

При первом внимательном взгляде на эту запись учащиеся скажут, что она неверна (так как произведение $2\,400 \cdot 207$ при записи его оканчивается двумя нулями, а сумма будет оканчиваться цифрой 7, тогда как делимое оканчивается двумя нулями). Произведя вычисления, учащиеся убедятся, что остаток будет не 7, а 700; следовательно, «отброшенные» в делимом и делителе нули должны быть приписаны справа к остатку.

Таким образом, теперь встаёт вопрос: как наиболее рационально следует производить деление чисел в том случае, когда делимое и делитель записываются значащими цифрами с нулями в конце? Можно ли во всех подобных случаях деления сохранить и применять приём «отбрасывания» по равному числу нулей справа в делимом и делителе? Конечно, можно и даже должно это делать, чтобы упростить процесс деления, но в записи последнего остатка справа надо дописывать «отброшенные» нули в том же количестве. Запись деления при этом можно располагать так:

1) $888\,000:3\,700=240.$ 2) $74\,500:2\,300=32$ (ост. 900).

$$\begin{array}{r} 8\,880:37=240 \\ -74 \\ \hline 148 \\ 148 \\ \hline 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 745:23=32 \\ -69 \\ \hline 55 \\ -46 \\ \hline 9 \end{array}$$

6. Изменение частного при изменениях данных чисел

Изучение изменений частного при увеличении или уменьшении делимого или делителя или обоих этих данных чисел представляет очень большие затруднения. Они связаны с тем, что изучение изменений частного в арифметике целых чисел возможно только в том случае, когда данное делимое делится на делитель без остатка и когда это деление совершается нацело и после изменения одного или двух данных чисел.

Сначала рассматриваются простейшие случаи, когда делимое увеличивается или уменьшается в несколько раз, следовательно, оно умножается или делится на целое число. В этих случаях соответствующее изменение частного можно определить, руководствуясь простейшими соображениями.

Несколько труднее осознаётся и усваивается учащимися характер изменения частного при увеличении и уменьшении делителя в несколько раз (т. е. при умножении или делении делителя на целое число, если после этого деление выполняется без остатка). Например:

$324:36=9.$
$324:(36\cdot 3)=(324:36):3=9:3.$
$324:(36:6)=(324:36)\cdot 6=9\cdot 6.$

Только в очень редких случаях разрешима в арифметике целых чисел задача определения характера изменения частного при одновременном увеличении или уменьшении делимого и делителя в разное число раз. Преподаватель может подобрать такие числовые примеры и решить их в классе.

Примеры.
$256:64=4;$
$(256\cdot 6):(64\cdot 2)=(256:64)\cdot(6:2)=4\cdot(6:2)=4\cdot 3;$
$(256\cdot 6):(64:2)=(256:64)\cdot(6\cdot 2)=4\cdot(6\cdot 2)=4\cdot 12;$
$(256:2):(64:4)=(256:64):2\cdot 4=4\cdot(4:2)=4\cdot 2;$
$(256\cdot 3):(64\cdot 3)=(256:64)\cdot(3:3)=4\cdot(3:3)=4\cdot 1=4;$
$(256:2):(64:2)=(256:64):2\cdot 2=4:2\cdot 2=4.$

При объяснении каждой задачи в устной форме учащиеся, конечно, будут опираться на предыдущие выводы, например, при решении первой задачи они будут сначала рассуждать так: при увеличении делимого в шесть раз частное тоже увеличится в шесть раз; при увеличении делителя в два раза новое частное уменьшится в два раза; а дальше очень часто следует путаница в их выводах; поэтому приведённая запись с применением переместительного и сочетательного законов деления поможет учащимся в этих случаях делать необходимые выводы.

Если будет дана задача на деление с остатком, то почти все предыдущие выводы об изменении частного при кратном изменении делимого или делителя уже не будут применимы полностью. Вот несколько примеров:

1) $25:3=8$; ост. 1 — а) $(25\cdot 2):3=8\cdot 2$; ост. 2
б) $(25\cdot 3):3=(8\cdot 3)+1$.

2) $42:8=5$; ост. 2 — а) $(42:3):8=5\cdot 3$; ост. 6
б) $(42\cdot 4):8=(5\cdot 4)+1$.

3) $27:5=5$; ост. 2 — а) $(27\cdot 2):5=5\cdot 2$; ост. 4
б) $(27\cdot 3):5=(5\cdot 3)+1$. ост. 1

4) $38:4=9$; ост. 2 — а) $38:(4\cdot 2)=4$; ост. 6
б) $38:(4\cdot 3)=3$. ост. 2

Из этих примеров видно, что если делимое увеличить в несколько раз, то частное не обязательно увеличится во столько же раз; то же самое приходится сказать и об изменении частного при увеличении делителя.

7. Проверка деления

Учащимся хорошо известно ещё из курса арифметики начальной школы, что деление проверяется обычно умножением частного на делитель.

Тот же способ проверки применяется и при делении с остатком, но тогда полученное произведение складывается с остатком, и сумма должна быть равна делимому. При двузначном и многозначном частных деление проверяется тем же способом. Можно проверять деление и делением: из делимого вычитается остаток и полученное число делится на частное; при этом новое частное должно быть равно делителю.

ГЛАВА II

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДРОБИ

I. ОСНОВНЫЕ ВОПРОСЫ МЕТОДИКИ ПРЕПОДАВАНИЯ ДРОБЕЙ

В учебной и методической литературе, а также в педагогической практике имеется несколько особых вопросов, связанных с изучением систематического курса дробей в средней школе, которые разрешались различно разными авторами. К таким вопросам относятся: 1) истолкование и определение дроби; 2) последовательный порядок изучения обыкновенных и десятичных дробей; 3) периодические дроби и приближённые вычисления; 4) изучение делимости чисел.

1. Истолкование и определение дроби

На первом месте стоит самый важный вопрос, имеющий не только методическое, но и методологическое значение, — это вопрос о том, что такое дробь и как раскрывается это понятие в школьном курсе арифметики.

Первые сведения *о простейших дробях* $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}\right)$ вводятся в IV классе начальной школы[1]. Представления о них создаются в процессе решения таких задач с конкретным содержанием, когда учащиеся фактически на уроке разрезают бумажные круги, ленты, верёвки на 2, 3, 4, 5 и т. д. равных долей и составляют из этих долей разные совокупности; за этим следует запись полученных результатов в виде дробей и чтение их.

Таким образом, создаётся и постепенно закрепляется такое истолкование дроби: одна или несколько равных долей единицы. Это истолкование затем применяется при обосновании всех простейших преобразований дробей, а также при сложении и вычитании их.

При изучении систематического курса арифметики дробей в V классе средней школы сначала полностью сохраняется и применяется то же самое истолкование их. Можно даже сказать, что такой взгляд на дробь при решении практических задач остаётся у людей на всю их последующую жизнь. Однако при дальнейшем изучении того же систематического курса значительно расширяется круг представлений, связанных с понятием дроби. Так, прежде всего отчётливо выясняется тот факт, что основным источником получения дробей является измерение величин. Затем вскрывается и второй источник получения дробей — деление одного целого числа на другое (в частности, деление числителя на знаменатель), когда результат деления записывается особым символом: $a : b = \frac{a}{b}$; где a и b целые числа и $b \neq 0$; этот результат, по опреде-

[1] Программы начальной школы, 1951 г.

лению действия деления, как и точное частное в виде целого числа, при умножении его на делитель в произведении даёт число, равное делимому $\left(\frac{a}{b}\cdot b=a\right)$. Наконец, устанавливается третий факт: над новыми символами, которые называются дробями $\left(\frac{a}{b}\right)$, производятся не только действия первой ступени — сложение и вычитание их, как и над всякими однородными величинами, но и действия второй ступени — умножение и деление их, как и над целыми числами.

Эти свойства новых символов — дробей — позволяют считать их числами, но числами новой области и новой природы — дробными числами. Это расширение и обобщение понятия числа связано с истолкованием дроби как частного, полученного при делении одного целого числа на другое. Такое истолкование дроби даёт возможность снять ограничение с операции деления целых чисел, т. е. теперь можно считать, что деление одного целого числа на другое всегда выполнимо, но в новой расширенной области чисел — в области дробей; целые числа «a» входят в эту область как частный случай дроби вида $\frac{ak}{k}$, где k — целое число.

Вопрос об определении и истолковании дроби в разных учебниках по арифметике трактуется по-разному. Но почти в каждом из них первое понятие о дроби даётся как о числе, состоящем из одной или нескольких равных долей единицы. Некоторые учебники таким истолкованием дроби и ограничиваются[1]. Большинство учебников после первого определения дроби дают и второе опрелеңие её. Так, в одном из очень старых учебников арифметики понятие о дроби создаётся таким образом: сначала описывается «происхождение дроби от измерения» («дробь есть число, показывающее, сколько раз и какая именно доля единицы уложилась в измеряемой величине»), а потом «происхождение дроби от деления» («дробь есть частное, происходящее от деления числителя на знаменатель»)[2]. В новом издании одного из самых распространённых учебников арифметики введён специальный параграф под заглавием «Получение дробных чисел при разложении целого числа на равные части», в котором говорится: «Чтобы разделить целое число на несколько равных частей, достаточно взять это целое число числителем дроби, а знаменателем написать другое число, показывающее, на сколько равных частей делится целое число»[3].

То же самое имеет место в учебниках настоящего времени[4].

---

[1] Киселёв, Систематический курс арифметики, 15 изд., 1903.

[2] Малинин и Буренин, Арифметика, 21 изд., 1900, стр. 114; Бертран, Арифметика, пер. Пирожкова, 1901, стр. 108 и 109.

[3] **Киселёв**, Систематический курс арифметики, под ред. проф. Хинчина, 1937.

[4] Тулинов и Чекмарёв, Арифметика для педагогических училищ, 1946, стр. 153.

2. Последовательность изучения обыкновенных и десятичных дробей

Второй вопрос при изучении систематического курса арифметики дробей — это вопрос о том, в какой последовательности надо изучать дроби: сначала обыкновенные, а потом десятичные как частный случай обыкновенных дробей, или же наоборот, сначала изучать десятичные дроби как «своего рода расширение нашей десятичной системы обозначения», а потом и обыкновенные как более общий случай.

В начале XX в., когда в широких кругах стало развиваться так называемое «реформистское движение» в области преподавания математики в средней школе, сторонники этого движения совершенно определённо выставляли требование о том, чтобы изучение дробей начинать именно с десятичных, связывая их с уже известными целыми числами, а не с обыкновенными дробями. В связи с этим высказывались даже крайние взгляды о полном исключении курса простых дробей из средней школы.

В пользу такого порядка приводились следующие соображения.

1) Десятичные дроби под именем десятичных чисел составляют естественное и простейшее продолжение нумерации целых чисел, нумерации «вправо».

2) Действия над десятичными дробями проще соответствующих действий над обыкновенными дробями, так как они аналогичны действиям над целыми числами.

3) Десятичные дроби имеют гораздо большее практическое значение и применение, чем обыкновенные, так как они органически связаны с метрической системой мер и с получением приближённых значений при делении целых чисел.

Правда, сторонники предварительного изучения десятичных дробей сами не скрывали некоторых трудностей при реализации своих основных положений, особенно при умножении и делении на десятичную дробь.

После Великой Октябрьской социалистической революции, когда у нас декретом правительства была введена метрическая система мер в обязательное употребление, в советской школе наметился путь почти к полному исключению обыкновенных дробей из школы. Вот что сказано в объяснительной записке к программе по арифметике для семилетней единой трудовой школы на 1921 г.:

«Десятичные дроби вследствие сравнительной простоты операций с ними и широкого распространения десятичных мер постепенно вытесняют простые дроби. При упражнениях с десятичными дробями можно не стесняться размерами знаменателя, но аналогичные упражнения с простыми дробями должны быть скромными». И в последующих программах по арифметике, начиная с 1927 г., можно наблюдать такую картину: десятичные дроби рассматриваются в тесной связи с целыми числами как десятичные числа; им отдаётся явное предпочтение перед простыми дробями.

Можно указать ряд пособий и руководств по элементарному курсу математики для разного типа средних школ, которые были построены именно по такой системе[1].

[1] 1. Сборник арифметических задач для средних учебных заведений, составленный Грохольским, Ляминым и Сваричевским, 1914.

Такое распределение материала при изучении систематического курса дробей существовало в советской трудовой школе до постановления ЦК ВКП(б) «О школе»[1], которое резко осудило все нелепые отклонения в организации средней школы и потребовало, чтобы учащиеся средней школы изучали «основы наук», а не суррогаты их. Это постановление восстановило в правах гражданства среднюю школу и отдельные школьные предметы; в частности, была восстановлена в своих правах и арифметика, бывшая в загоне много лет. Новые программы по арифметике уже были построены по типу систематического курса; в них был твёрдо установлен порядок изучения дробей: сначала обыкновенные дроби, а потом десятичные как частный случай обыкновенных дробей.

Дореволюционная русская школа имела такое же распределение материала *при изучении курса дробей*.

Сторонники этого направления высказывали такие соображения.

1. Дробь $\frac{7}{9}$ предполагает такое же понятие о дроби, как и дробь $\frac{7}{10}$.

2. Правила сложения и вычитания десятичных дробей могут быть уяснены с большим трудом; правила умножения и деления вовсе не могут быть уяснены.

3. Десятичные дроби очень мало пригодны для устных вычислений.

4. Без нужды не следует отступать от исторического хода развития понятия о дроби.

5. Причина и следствие меняются ролями: десятичная система мер есть следствие десятичных дробей, а не наоборот.

6. Ученики не понимают огромного значения десятичных дробей и не оценивают лёгкости действий над ними, коль скоро они не знают, как трудны действия над обыкновенными дробями. Десятичные дроби обладают свойством не менять своей величины, если справа приписать к ним один и несколько нулей. Это свойство дроби непосредственно вытекает из общеизвестного положения в учении о дробях, что значение дроби не изменяется, если умножить числитель и знаменатель её на одно и то же число, и понять его можно только по ознакомлении с обыкновенными дробями.

7. Ученики не поймут, зачем они потом (после изучения десятичных дробей) столько трудятся над обыкновенными дробями; было бы более последовательно ограничить изучение обыкновенных дробей решением только одной задачи — обращение обыкновенной дроби в десятичную.

К этому можно добавить ещё следующее.

1) Независимо от того или иного порядка прохождения обыкновенных и десятичных дробей никогда нельзя замалчивать самую сущность и смысл действий над дробями, особенно смысл умножения и деления на дробь.

2) Преодоление этих трудностей легче сделать в курсе обыкновенных дробей с небольшими числами, чем при изучении десятичных дробей, где знаменатели и числители обычно выражены большими числами; или же это придётся делать два раза.

3) Изучение десятичных дробей очень важно для всей практической деятельности человека; в школе их надо очень хорошо и основательно изучать, но как частный случай обыкновенных дробей.

---

2. Рабочая книга по математике для 5-го года обучения, составленная Бергом, Знаменским и др., изд. 7, 1929, гл. II.

3. Сборник задач и упражнений по математике для 5-го года обучения в городской школе, составленный И. Слудским, Ротенштейн, Федорович и Штраус, Москва 1930.

[1] Постановление ЦК ВКП(б) о начальной и средней школе от 5 сентября 1931 г.

3. Периодические дроби и приближённые вычисления

Есть ещё один вопрос, касающийся содержания курса дробей,— вопрос о роли и значении периодических дробей в курсе арифметики. Этот вопрос по существу своему тесно связан с другим вопросом — с вопросом о приближённых вычислениях.

Судьба периодических дробей в курсе средней школы очень изменчива. Было время, когда они занимали очень почётное место в курсах арифметики и в задачниках. В учебниках с большей или меньшей подробностью разбирался вопрос «обращения простой дроби в десятичную периодическую дробь и обратно». Зато в этих же руководствах или совсем не было никакого упоминания о приближённых вычислениях, или же это ограничивалось только указанием на «отбрасывание» цифр справа. В задачниках было достаточно большое количество упражнений на обращение обыкновенных дробей в периодические и обратно и очень много текстовых задач, в которых данные были выражены периодическими дробями.

После Великой Октябрьской социалистической революции в советской трудовой школе периодические дроби были совсем изъяты и заменены приближёнными вычислениями; при этом, понятно, никакой теории приближённых вычислений не давалось, а всё дело ограничивалось практикой: округление чисел и четыре действия над ними (преимущественно по правилу «подсчёта цифр»)[1].

После преобразования трудовой школы в среднюю в программу опять был внесён вопрос о периодических дробях в связи с обращением обыкновенных дробей в десятичные. Кроме того, как известно, бесконечные десятичные периодические дроби очень часто получаются также при делении целых чисел. Поэтому совсем исключить из школьного курса арифметики понятие периодической дроби нет никакой возможности. Да этого и не следует делать, так как ознакомление учащихся с этим понятием имеет большое образовательное и практическое значение.

В настоящее время программа по арифметике ограничивается только «понятием о периодических дробях»[2]. Этим указывается, что самая трудная часть учения о периодических дробях в школе, а именно, обращение их в обыкновенные, исключается из курса арифметики по двум причинам: 1) эта задача непонятна и непосильна учащимся пятых классов; 2) это преобразование не имеет никакого практического значения: ни в одной задаче, взятой из практической жизни или из научной области, не встречаются данные в виде периодических дробей; а задачи, помещённые в школьных задачниках, составлены только с одной целью — дать упражнения для преобразования периодических дробей.

---

[1] Берг, Знаменский и др. Рабочая книга по математике для 5-го года обучения, 1928.

Брадис, Как надо вычислять. Для 5-го года обучения, 1932.

[2] Программы средней школы. Математика, 1951.

В практике периодические дроби всегда заменяются приближёнными значениями их. Так же поступают и с конечными десятичными дробями, если в них имеется много десятичных знаков. Вот с этим преобразованием дробей и надо знакомить учащихся не только при изучении курса арифметики, но и в следующих классах при изучении алгебры, геометрии и тригонометрии. Поэтому в *программе по арифметике за введением понятия* о периодических дробях даётся «Округление данных и результатов действий», что и является первым шагом к получению приближённых чисел. К сожалению, как в самой программе, так и в объяснительной записке к ней ничего не говорится в явной форме о действиях над приближёнными числами. Практически в школе это приводит к тому, что знакомство с приближёнными вычислениями почти совсем не имеет места.

Поэтому учащиеся средней школы слепо верят во всякое число, полученное при измерении; так же слепо верят они и в результаты, полученные при операциях с этими числами. Они даже не всегда понимают, зачем вообще нужно отбрасывать одну или несколько цифр в полученном числе; больше того, они считают иногда это недопустимым, так как математика есть «точная наука».

В то же время требование программы об «округлении данных» можно понимать как требование ввести простейшие приёмы приближённых вычислений над этими «округлёнными» данными, что *можно* культивировать в течение всего учебного года в V классе, начиная с повторения действий над целыми числами и кончая совместными действиями над обыкновенными и десятичными дробями. Эту работу естественно продолжать и в следующих классах при изучении алгебры, геометрии и тригонометрии.

4. Учение о делимости чисел в школьном курсе арифметики

В настоящее время учение о делимости чисел в программе по арифметике V класса средней школы стоит сразу же после повторения арифметики целых чисел и предшествует теме «Обыкновенные дроби». Так же расположен материал и в учебнике Киселёва[1]: первый отдел посвящён отвлечённым целым числам, второй — учению о делимости чисел, третий — измерению величин, четвёртый — обыкновенным дробям и т. д. Во втором отделе этого учебника в порядке предварительного замечания сказано: «обстоятельное рассмотрение свойств дробных чисел может быть выполнено только тогда, когда предварительно уяснены некоторые свойства целого числа. Эти свойства, главным образом, касаются условий, при которых одно число делится на другое без остатка. Поэтому учению о дробях необходимо предпослать отдел, посвящённый делимости чисел».

---

[1] Киселёв, Систематический курс арифметики, под ред. проф. Хинчина, 1937, стр. 44.

В соответствии с этим преподаватели арифметики в V классе сначала проходят учение о делимости чисел, а потом уже переходят к курсу обыкновенных дробей. В течение трёх недель учащиеся изучают делимость чисел, решают задачи на применение признаков делимости чисел, разлагают числа на простые множители, находят наибольший общий делитель и наименьшее кратное их. Однако преподаватель не может объяснить необходимость этого материала и связь его с последующим и даже с предыдущим. Конечно, нельзя отрицать того, что само по себе учение о делимости чисел содержит очень интересный материал для учащихся V класса. Но этого одного мало: изучаемый материал должен немедленно применяться к решению соответствующих задач; такое применение в свою очередь повысит интерес учащихся.

При существующем способе изучения делимости чисел в отрыве от дробей сплошь и рядом бывает так, что когда учащиеся доходят до сокращения дробей, то на первых порах они с большими затруднениями догадываются применять известные им признаки делимости чисел при последовательном сокращении дробей; применение же наибольшего общего делителя для той же цели остаётся долгое время, если не навсегда, непонятным и ненужным приёмом.

Ещё хуже обстоит дело с применением наименьшего общего кратного: учащиеся долго не могут усвоить ту мысль, что общий наименьший знаменатель нескольких дробей и наименьшее общее кратное знаменателей тех же дробей — одно и то же. Таким образом, практические выводы и навыки, полученные при изучении делимости чисел, очень редко с успехом применяются в дальнейшем курсе дробей, особенно на первых порах. Это и понятно: учение о делимости чисел совершенно не связано с изучением дробей. Ещё Шохор-Троцкий писал по этому поводу:

«Если не вносить в статьи о признаках делимости своевременных упражнений, хотя бы только в сокращении дробей, то ученик во всё время, в течение которого он проходил признаки делимости чисел, находится в положении человека, которому дают в руки некоторое орудие, не научив его пользоваться этим орудием с пользой для какого-нибудь дела»[1].

К. Ф. Лебединцев предлагает из всей главы «О делимости чисел» оставить только признаки делимости чисел; «изучение же теории общего наибольшего делителя и наименьшего кратного чисел следовало бы отнести к курсу теоретической арифметики, которому место в последнем классе средней школы»[2], так как при решении задач приходится пользоваться дробями с небольшими знаменателями, которые легко «по соображению» сокращаются со своими числителями и для которых легко находится наименьшее кратное более простыми способами.

Такое требование Лебединцева надо признать крайностью, которая не вызывается интересами курса. Зато более тесное слияние

[1] Шохор-Троцкий, Методика арифметики, 1935, стр. 150.
[2] Лебединцев, Методика обучения математике, стр. 49.

этих двух глав арифметики (учения о делимости чисел и обыкновенных дробей), даже подчинение первой темы интересам второй, надо признать совершенно необходимым в курсе V класса.

Подобные попытки совместного изучения этих двух тем имеются в целом ряде учебников и задачников по арифметике как в дореволюционное, так и в наше время.

В советской средней школе основным костяком курса арифметики V класса является арифметика дробей, в частности арифметика обыкновенных дробей. Учение о делимости целых чисел в теоретическом отношении содержит трудный материал, который не может быть должным образом усвоен и даже понят учащимися V класса. А потому из него выбираются только те вопросы, которые нужны в курсе арифметики дробей. Следовательно, эти избранные вопросы носят прикладной, служебный характер; выделять их в самостоятельную тему, как это делается до сих пор, нет особой необходимости. Напротив, весь этот материал надо распределить соответствующим образом в курсе арифметики обыкновенных дробей: признаки делимости чисел, разложение на множители и составление общих делителей (включая и составление наибольшего общего делителя двух чисел) следует объединить с изучением сокращения дробей, составление кратных чисел и наименьшего общего кратного — с приведением дробей к наименьшему общему знаменателю. Что касается наибольшего общего делителя двух и нескольких чисел, то, как известно, при сокращении дробей, особенно тех дробей, которые встречаются в практической жизни и в школьных задачах с конкретным содержанием, он никогда не применяется. Но познакомить с ним учащихся необходимо как с одним из интересных и практически полезных свойств целых чисел: после сокращения дроби на наибольший общий делитель получается несократимая дробь (таким образом, впервые встречается понятие о взаимно простых числах).

В связи с высказанным взглядом подробное изложение методики преподавания темы «О делимости чисел» даётся дальше в курсе арифметики дробей при изучении сравнения их.

Преподаватели в соответствии с программой и учебником могут проходить ту же тему отдельно от дробей; весь приведённый дальше материал легко можно выделить в самостоятельную тему.

II. НОВЫЕ ИДЕИ, СВЯЗАННЫЕ С ИЗУЧЕНИЕМ ДРОБЕЙ

1. Изучение систематического курса дробей вводит учащихся впервые в новую числовую область — в область дробных чисел или просто дробей.

Каждая дробь теперь рассматривается как частное, полученное при делении одного целого числа на другое. Благодаря этому снимается ограничение с действия деления: теперь оно всегда выполнимо, кроме деления на нуль, а целое число является частным случаем дроби вида $\frac{ak}{k}$ при $k=1, 2, 3...$

2. Изучая последовательно десятичную систему счисления в пределах 10, 20, 100, 1 000 и т. д. и действия над числами в этих границах, учащиеся постепенно переходили от счёта отдельных единиц (отдельных объектов) к счёту совокупностей их — двоек, троек, пятёрок, десятков, сотен, тысяч и т. д. Так постепенно расширялся круг представлений о счётных единицах в области натуральных чисел: можно считать не только единицы, но и группы их.

При измерении величин очень часто случается, что единица измерения не укладывается целое число раз в измеряемой величине, и получается неизмеренный остаток. Тогда единицу измерения делят на несколько равных частей или долей; одна из них принимается за новую единицу измерения и откладывается в остатке; попутно ведётся счёт долей единицы. Таким образом, ёще больше расширяется круг представлений о счётных единицах: можно считать не только целые единицы, не только группы их (десятки, сотни, тысячи и т. д.), можно считать равные доли одной и той же, а затем и нескольких единиц.

В результате последнего счёта, как и в результате всякого конкретного счёта, также получается число, но оно состоит не из целых единиц, а из одной или из нескольких равных долей единицы; его условились называть дробью.

3. В процессе изучения дроби как нового числа учащиеся постепенно обнаруживают новые свойства. Так, например, они хорошо знают, что между двумя целыми числами 2 и 5 можно вставить только два целых числа 3 и 4, каждое из которых больше 2, но меньше 5, а дробей в том же промежутке можно вставить бесконечное множество; между двумя последовательными целыми числами также можно вставить множество дробей, каждая из которых больше предыдущего числа, но меньше следующего (очень наглядно это можно представить на числовой оси).

4. Совершенно новый смысл приобретают действия второй ступени в области дробей: старые и привычные выражения «умножить» и «разделить» при умножении и делении данного числа на правильную дробь, когда получается произведение меньше множимого, а частное — больше делимого, в новой числовой области приобретают иной смысл; поэтому умножение и деление на дробь требуют нового истолкования и определения этих действий.

5. Учащиеся впервые знакомятся с применением принципа перманентности, в силу которого на сложение и умножение дробных чисел распространяются основные свойства (или законы) сложения и умножения натуральных чисел.

ГЛАВА III

ИЗУЧЕНИЕ ДРОБИ КАК НОВОГО ЧИСЛА

Введение понятия о дроби при изучении систематического курса арифметики в V классе является первым этапом изучения большой темы курса элементарной математики — развитие понятия о числе.

Основательное изучение дробей возможно только тогда, когда попутно или предварительно будут уяснены некоторые свойства целых чисел, которые касаются, главным образом, тех условий, при которых одно число делится на другое без остатка,— это учение о делимости чисел. Раньше уже была речь о том, что все вопросы, входящие в школьный курс учения о делимости чисел, целесообразнее проходить в непосредственной связи с изучением обыкновенных дробей, а потому в последующем изложении тема о делимости чисел полностью включается в план изучения дробей.

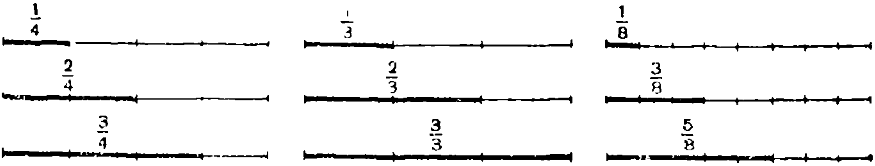
План дальнейшего изучения дробей можно построить следующим образом.

1. Выяснение понятия дроби.
2. Классификация дробей.
3. Сравнение дробей (первый цикл).
4. Главное свойство дроби.
5. Сокращение дробей.
6. Признаки делимости чисел и применение их при последовательном сокращении дробей.
7. Наибольший общий делитель нескольких чисел и применение его к сокращению дробей.
8. Приведение дробей к наименьшему общему знаменателю. Понятие о наименьшем общем кратном двух и нескольких чисел.

I. ВЫЯСНЕНИЕ ПОНЯТИЯ ДРОБИ

Первые представления о простых или обыкновенных дробях даются учащимся ещё в начальной школе. Это изучение дробей ограничивается в буквальном смысле слова «простейшими дробями», преимущественно с однозначными знаменателями, и сводится к самым необходимым преобразованиям их, а также к сложению и вычитанию дробей с равными и кратными знаменателями. Никаких теоретических обоснований не даётся; все задачи разрешаются только «по соображению».

Приступая к изучению систематического курса дробей, преподаватель должен прежде всего восстановить в памяти и в сознании учащихся V класса весь тот запас знаний о дробях и навыки в преобразовании их, которые они получили в начальной школе. С этой целью он даёт им ряд соответствующих повторных задач, приводящих к получению дробей на первых порах с конкретной иллюстрацией их: учащиеся фактически делят некоторые объекты на 2, 3, 4, 6, 8 равных долей (нитку или верёвку, лист бумаги или бумажную ленту, разрезной деревянный брус на равные бруски и т. п.), называют в каждом случае отдельные доли (половина, треть и т. п.), составляют из них разные совокупности по заданию преподавателя (две, три, четыре восьмых), полученные результаты записывают в виде дробей, читают их, называют члены дробей и объясняют значение каждого из них, начиная со знаменателя ($\frac{3}{8}$; знаменатель 8 показывает, что единица разделена на 8 равных долей, и т. д.). Как видно из вышеприведённых примеров, делить или дробить можно любые величины (длину, площадь, объём), но легче и проще всего делить длину, которую графически можно представить в виде прямолинейного отрезка. С помощью таких же отрезков можно иллюстрировать и другие величины — вес, время, объём, площадь. Благодаря этому, во-первых, можно графически воспроизводить самый процесс деления или дробления, во-вторых, создавать отчётливые зрительные образы различных долей одной и той же единицы и совокупностей их (см. черт. 4).



Черт. 4.

Поэтому с первого же урока, посвящённого изучению дробей. преподаватель может и должен ввести графические иллюстрации, Это даст возможность самим учащимся принимать деятельное участие в создании более отчётливых и прочных представлений о дроби и вызовет более значительный интерес к содержанию работы. Графические иллюстрации будут постепенно отвлекать учащихся от конкретных объектов, каждый из которых теперь представлен графически в виде отрезка.

В процессе той же работы преподаватель обращает внимание учащихся на тот факт, что совокупности равных долей, которые называются дробями, получаются в результате счёта, как и натуральные числа. Учащиеся с помощью преподавателя припоминают разные счётные единицы: единицы, десятки, сотни и т. д., а также пятки, дюжины, и когда они применяются (например, пуговицы считаются дюжинами, как и карандаши, а яблоки, огурцы часто считают пятками или десятками и т. п.). Теперь и равные доли единицы тоже можно считать. Так постепенно продолжает расширяться понятие о счётной единице (в начальной школе — единицы, пары, тройки, пятки, десятки, сотни и т. д., теперь — равные доли единицы, в VI классе — отрицательные единицы и т. д.).

За этим несколько расширенным повторением имеющихся сведений о дробях преподаватель переходит к измерению величин, когда в результате измерения получаются дроби.

Самым доступным объектом для практических занятий учащихся в классе, в школе и вне школы является непосредственное измерение длины. Преподаватель даёт задание: измерить длину или ширину класса, высоту окна или стола и стула, ширину подоконника и толщину стены (в оконном разрезе). Учащиеся в каждом отдельном задании сами выбирают соответствующую единицу измерения — метр, дециметр или сантиметр, а преподаватель должен подчеркнуть ту мысль, что метр, дециметр и сантиметр суть тоже длины отрезков; следовательно, при измерении длины за единицу измерения принимается длина того или иного отрезка (полезно в нескольких словах напомнить учащимся, как в своё время был создан метр и какие меры длины, отличные от метрических, существуют ещё в настоящее время, например в Англии), для измерения веса — вес литра воды при определённых условиях и т. п. Часто бывает так, что при измерении остаётся некоторый остаток, в котором принятая единица измерения не укладывается полностью. В таком случае сами учащиеся могут сказать, что для измерения этого остатка надо единицу измерения (например, метр) разделить на несколько равных долей (в метрической системе мер принято делить метр на 10 или на 100 равных долей — на дециметры или на сантиметры) и одну из них принять за новую единицу измерения. Затем повторяется процесс измерения: новая единица измерения откладывается на остатке и попутно ведётся счёт; в результате счёта опять получается число, например 7 (7 дециметров, или семь десятых долей метра). Таким образом, в результате измерения, например, длины класса получается число 9 метров и 7 дециметров, или 9 метров и семь десятых долей метра, что записывается так:

$\left(9+\frac{7}{10}\right)$ *м*, или $9\frac{7}{10}$ *м* (в записи опускается знак «плюс»); это число $\left(9\frac{7}{10}\right)$ называется смешанным числом (оно состоит из целого числа и дроби).

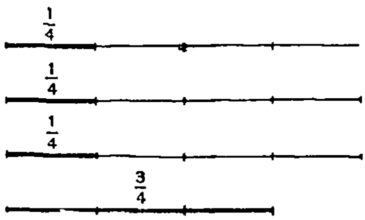
В процессе решения этих и подобных задач учащиеся убеждаются в том, что при измерении длины очень часто получаются дроби; дроби могут получаться также и при измерении других величин (например, при измерении веса: $3\frac{1}{4}$ *кг* и $\frac{7}{10}$ *кг*, времени: $\frac{2}{3}$ суток и $3\frac{5}{12}$ часа и т. п.). Следовательно, дробь, или дробное число, можно рассматривать как результат измерения величин.

При решении задач первой группы в связи с повторением, когда требовалось одну единицу разделить на несколько равных долей и составлять разные совокупности или группы из этих равных долей, получались преимущественно правильные дроби; таким же путём могли быть получены дроби и вида $\frac{a}{a}$. При описанном процессе измерения длины получаются или правильные дроби, или смешанные числа.

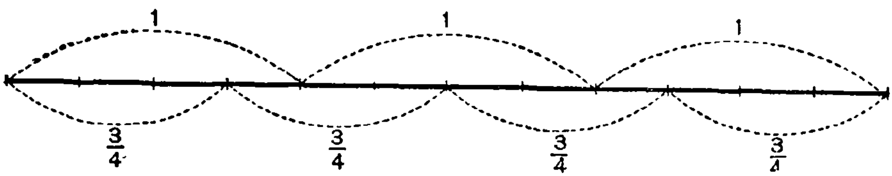
Надо сообщить учащимся, что в производственно-технической практике очень часто величины измеряются мелкими долями, например: размеры верхней крышки стола, оконные пролёты и т. п. измеряются сантиметрами, т. е. сотыми долями метра. По предложению преподавателя учащиеся выполняют несколько таких измерений и могут получить примерно такие результаты: длина стола 129 сантиметров, что иначе можно записать в виде дроби $\frac{129}{100}$ метра, длина оконного пролёта 183 сантиметра, или $\frac{183}{100}$ метра и т. п.; это — неправильные дроби.

На следующем этапе работы учащиеся должны познакомиться с новым источником получения дробей — при делении одного целого числа на другое. С этой целью преподаватель предлагает учащимся целый ряд задач с конкретным содержанием, запись решения которых приводит к записи деления одного целого числа на другое; результат записывается в виде дроби.

Задача 1. «Три листа бумаги надо разделить поровну четырём учащимся. Сколько бумаги получит каждый из них?» Учащиеся могут дать такое практическое решение этой задачи: каждый лист бумаги разделить на 4 равные доли или на четверти; всего получится 12 четвертей; после разделения их на 4 равных пая, каждый учащийся получит три четверти листа бумаги; решение задачи можно записать так: $3:4=\frac{3}{4}$ (ответ: $\frac{3}{4}$ листа бумаги получит каждый из четырёх учащихся). Могут быть и иные варианты практического решения этой задачи, но запись решения во всех случаях будет по существу одна и та же: $3:4=\frac{3}{4}$. Здесь же уместно графически иллюстрировать решение этой задачи: 1) например, в соответствии с первым практическим вариантом можно начертить три отрезка равной длины один под другим (по числу листов бумаги), каждый разделить на 4 равные доли и выделить те доли, которые получит один учащийся, другой и т. д. (см. черт. 5), или 2) построить один большой отрезок, равный сумме трёх таких же отрезков (по числу листов бумаги), каждый из них разделить на 4 равные доли, а потом весь большой отрезок разделить на 4 равные доли по числу пайщиков — учащихся (см. черт. 6).



Черт. 5.



Черт. 6.

Итак, практически эта задача может решаться разными способами, а запись решения во всех случаях будет одна и та же: $3:4=\frac{3}{4}$; следовательно, можно сказать, что данная задача решается действием деления одного целого числа на другое. Но полученный результат, который во всех других случаях деления целых чисел раньше был всегда только целым числом и назывался частным, теперь записан в виде дроби.

Задача 2. «Верёвку длиной 5 *м* разрезали на 8 равных частей. Какой длины получились отрезки верёвки?»

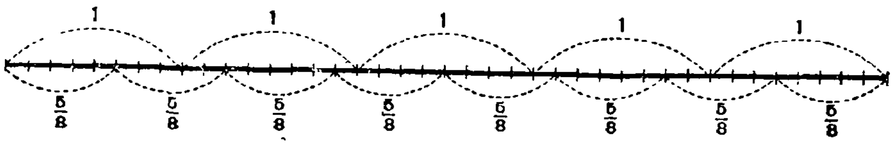
Учащиеся без затруднений расскажут, как практически можно разделить верёвку на 8 равных долей (троекратным последовательным перегибанием пополам), под руководством преподавателя дадут графическую иллюстрацию решения и ответа примерно с таким объяснением: мысленно разделим каждый метр верёвки на 8 равных долей, всего получится 40 таких восьмых долей (8·5), и разделим их на 8 равных частей; каждая часть будет содержать пять восьмых долей метра (см. черт. 7).

Без труда учащиеся запишут решение задачи делением: $5:8 = \frac{5}{8}$; ($\frac{5}{8}$ *м* — длина каждого отрезка верёвки). И в данном случае частное записано в виде дроби.

После решения нескольких задач, подобных этим двум, учащиеся на основании своих наблюдений могут сделать такой вывод: при делении одного целого числа на другое — меньшего на большее — частное записывается в виде дроби, числитель которой есть делимое, а знаменатель — делитель.

Затем преподаватель даёт учащимся несколько задач, для решения которых надо делить большее число на меньшее; результаты деления могут быть записаны или в виде неправильной дроби, или в виде целого и смешанного числа.

Задача 3. «В течение недели израсходовано 40 *кг* картофеля. Сколько картофеля в среднем расходовали в один день?»



Черт. 7.

Учащиеся сразу скажут, что задачу надо решать делением, так как по условию задачи 40 *кг* картофеля требуется поровну распределить на 7 дней недели, т. е. 40 разделить на 7 равных долей:

$$40:7.$$

Как это можно сделать? Учащиеся сами или под руководством преподавателя из 40 выделяют наибольшее целое число, которое нацело делится на 7; другими словами, они делимое 40 представят в виде суммы двух слагаемых $(35 + 5)$ и запишут это преобразованием: $40 : 7 = (35 + 5) : 7$.

Теперь задача свелась к делению суммы двух чисел на 7 (распределительный закон деления), что уже знакомо учащимся:

$$40:7=(35+5):7=35:7+5:7=5+\frac{5}{7}=5\frac{5}{7}$$

Учащиеся дают ответ на вопрос задачи: $5\frac{5}{7}$ *кг* картофеля расходовали в среднем в день.

То же самое деление можно выполнить несколько иначе: 40 разделить на 7 равных долей, значит, от 40 надо найти и взять одну седьмую долю; это можно сделать так: от каждой из 40 единиц найти и взять одну седьмую долю, что составит сорок седьмых долей, и записать это:

$$40:7=\frac{40}{7}.$$

Из последней записи видно, что и в данном случае, когда надо делить большее число на меньшее, результат деления — частное — тоже можно записать в виде дроби, числитель которой есть делимое, а знаменатель — делитель. Сопоставляя полученные результаты деления 40 на 7, учащиеся устанавливают новый факт, что смешанное число можно рассматривать как частное, которое получается при делении большего числа *на меньшее.*

Решение нескольких задач даст возможность закрепить последнее заключение.

При подборе числового материала для решения численных примеров и задач на деление целых чисел преподаватель даёт и такие парные комбинации их, когда большее число нацело делится на меньшее, требуя записи частных в виде дроби и в виде целых чисел, например:

$$1)\ \left.\begin{aligned}84:28&=\frac{84}{28}\\ 84:28&=3\end{aligned}\right\}\ \frac{84}{28}=3. \qquad 2)\ \left.\begin{aligned}168:24&=\frac{168}{24}\\ 168:24&=7\end{aligned}\right\}\ \frac{168}{24}=7.$$

При сопоставлении получаемых результатов учащиеся приходят к выводу, что некоторые дроби совпадают с целыми числами. В связи с этим преподаватель предлагает и обратную задачу: данное целое число представить и записать в виде нескольких разных дробей, например:

$$9=\frac{18}{2}=\frac{45}{5}=\frac{81}{9} \text{ и т. п.}$$

$$14=\frac{14}{1}=\frac{42}{3}=\frac{70}{5} \text{ и т. п.}$$

Так постепенно в сознании учащихся будет накапливаться запас соответствующих представлений и создаваться понятие о новой, более расширенной области чисел, среди которых целые числа будут частными случаями дробей.

В заключительной беседе преподаватель путём постановки соответствующих вопросов помогает учащимся восстановить в памяти всё пройденное при выяснении понятия о дроби.

В этой же заключительной беседе устанавливается, что каждую дробь можно рассматривать или как совокупность равных долей одной единицы, или как совокупность равных долей, полученных при дроблении нескольких единиц, или, наконец, как одну долю некоторого целого числа, состоящего из одной или из нескольких единиц, полученную в результате деления (например, $\frac{7}{12}$: а) единица разделена на 12 равных долей, и взято 7 таких долей; б) каждая из 7 единиц разделена на 12 равных долей, и из них взято по одной доле; в) 7 единиц разделены на 12 равных долей).

При этом полезно дать учащимся несколько дробей с тем, чтобы они рассмотрели с указанных точек зрения происхождение или образование каждой из них, сопровождая свои рассуждения графической иллюстрацией, например дробь $\frac{3}{8}$:

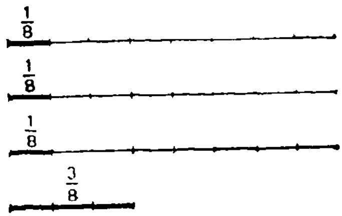
1) одна единица делится на 8 равных долей, из которых составляется группа, содержащая три такие доли (см. черт. 8);

2) каждая из трёх равных единиц делится на 8 равных долей, и от каждой единицы берётся по одной такой доле (см. черт. 9);

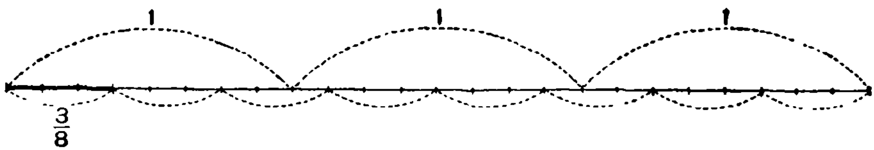
3) число, состоящее из трёх единиц, делится на 8 равных долей, и результат записывается в виде дроби (см. черт. 10) $3 : 8 = \frac{3}{8}$.

В связи с этим можно дать учащимся задание на дом: выбрать из задачника или самостоятельно составить три задачи с конкретным содержанием; в результате решения каждой из них должна получиться одна и та же дробь.

Черт. 8.



Черт. 9.



Черт. 10.

Наконец, очень полезно ввести ещё один вид задач — построение чисел на числовой оси; приняв одну точку прямой линии за начальную точку отсчёта и выбрав единицу масштаба, построить числа:

а) целые: 1; 2; 3; 4; и т. д.;

б) дроби:

$$\frac{1}{5}; \frac{1}{4}; \frac{1}{3}; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \ldots$$

$$1\frac{1}{2}; \quad 1\frac{1}{3}; \quad 1\frac{1}{4}; \quad 1\frac{1}{5}; \ldots$$

$$2\frac{1}{6}; \quad 2\frac{1}{3}; \quad 2\frac{1}{2}; \quad 2\frac{2}{3}; \quad 2\frac{3}{4}; \quad 2\frac{5}{6}; \ldots$$

При выполнении этой работы надо обратить внимание учащихся на то, что каждое данное число — целое или дробное — на числовой оси изображается **точкой**, расстояние которой от начальной точки измеряется данным числом. На тех же числовых прямых или осях учащиеся будут видеть, что между двумя точками, которые изображают на числовой оси два последовательных целых числа, например: 0 и 1, 1 и 2, 2 и 3 и т. д., можно вставить очень много других точек, которые будут изображать дроби или смешанные числа. С помощью таких упражнений учащиеся постепенно будут осваивать применение числовых осей (горизонтальных и вертикальных) для построения на них любых чисел, а также усваивать ту мысль, что между двумя последовательными целыми числами нельзя вставить ни одного целого числа, а дробных чисел можно вставить между ними очень много («бесчисленное множество»).

Эти упражнения следует применять время от времени при устном счёте. Наряду с ними, тоже в порядке устного счёта, преподаватель должен давать учащимся задачи на перевод дробных именованных чисел в целые и наоборот, например:

1. Сколько сантиметров в $\frac{1}{2}$ *м*? в $\frac{1}{4}$ *м*? в $\frac{1}{10}$ *м*? в $\frac{1}{5}$ *м*?
2. Сколько минут в $\frac{1}{3}$ часа? в $\frac{1}{5}$ часа? и т. п.
3. Сколько граммов в $\frac{3}{10}$ *кг*? в $\frac{1}{8}$ *кг*? в $\frac{3}{8}$ *кг*?
4. Сколько копеек в $\frac{1}{4}$ руб.? в $\frac{1}{5}$ руб.? в $\frac{3}{5}$ руб.?
5. Какую часть года составляет 1 месяц? 5 месяцев? 7 месяцев?
6. Какую часть суток составляет 1 час? 5 час.?
7. Какую часть рубля составляют 10 коп.? 20 коп.? 40 коп.?

II. КЛАССИФИКАЦИЯ ДРОБЕЙ И ПЕРВЫЕ ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ИХ

При выяснении понятия дроби на первых же уроках учащиеся постепенно приучаются различать правильные и неправильные дроби, смешанные числа. Поэтому постановка вопроса о классификации дробей имеет целью, во-первых, систематизировать и обобщить накопленные представления, во-вторых, установить и сформулировать отличительные признаки правильных и неправильных дробей, в-третьих, ввести общие правила для преобразования неправильных дробей (исключение целого числа), а также смешанных и целых чисел (обращение их в неправильные дроби). Вся эта работа проводится на таком задачном материале, который применялся при выяснении понятия дроби, особенно в заключительной беседе.

Так, например, преподаватель даёт задание: записать в виде дроби результаты, которые получатся при делении следующих чисел:

5:8
7:12
15:38 и т. п.

Учащиеся указывают внешнюю характеристику полученных дробей (в каждой дроби числитель меньше знаменателя) и внутреннюю (каждая дробь меньше единицы). Затем учащиеся сами придумывают и записывают дроби, числители которых меньше знаменателя: $\frac{2}{3}$, $\frac{12}{25}$, $\frac{39}{40}$ и т. п., и описывают процесс образования некоторых из них; при этом некоторые дроби можно иллюстрировать графиками. На основании своих наблюдений учащиеся формулируют характеристику последних дробей: числитель меньше знаменателя и каждая из них меньше единицы. Такие дроби называются п р а в и л ь н ы м и.

После этого полезно дать учащимся самостоятельную работу сначала в классе, а потом и дома: в одном столбике написать ряд правильных дробей, а в другом — разности между единицей и соответствующей дробью, например:

$\frac{7}{12}$ и $\frac{5}{12}$;

$\frac{12}{25}$ и $\frac{13}{25}$;

$\frac{43}{50}$ и $\frac{7}{50}$.

Объяснения учащиеся дают в устной форме: в целой единице $\frac{12}{12}$ долей, в данной дроби взято $\frac{7}{12}$, следовательно, от единицы осталось ещё пять двенадцатых долей, и т. п.

Примерно так же оформляется и закрепляется понятие неправильной дроби. Но, как известно, неправильные дроби могут быть трёх видов: $\frac{a}{a}$, $\frac{ak}{a}$ и $\frac{a}{b}$ при $a > b$. Сначала рассматриваются дроби вида $\frac{a}{a}$. Будет ли такая дробь получена в результате деления или каким-либо другим способом (в последнем случае очень полезны задачи на размен денег, например рубля на пятачки, что даёт дробь $\frac{20}{20}$, на гривенники — $\frac{10}{10}$, на двугривенные — $\frac{5}{5}$ и т. п.), учащиеся легко сформулируют характеристику этих дробей: числитель равен знаменателю и каждая дробь равна единице. Такие дроби называются н е п р а в и л ь н ы м и; каждая из них может быть заменена единицей. Полезно при этом давать учащимся обратную задачу: записать единицу в виде нескольких дробей с различными знаменателями:

$$\left(1 = \frac{5}{5} = \frac{8}{8} = \frac{11}{11} \text{ и т. п.}\right).$$

Дроби вида $\frac{ak}{a}$ целесообразно сначала получать в результате деления одного числа на другое (например, $24:8$); учащиеся по заданию преподавателя пишут результат в виде дроби $\left(\frac{24}{8}\right)$, потом в виде целого числа. Они замечают, что числители в этих дробях больше знаменателя и делятся без остатка на знаменатель. Такие дроби тоже называются н е п р а в и л ь н ы м и; их можно заменять целыми числами, для чего надо числитель разделить на знаменатель (например, $\frac{24}{8} = 3$). Учащиеся придумывают сами такие же неправильные дроби, у которых числители делятся на знаменатели без остатка, и заменяют их целыми числами (например, $\frac{63}{9} = 7$) с такими объяснениями: дробь состоит из девятых долей, девять девятых долей составляют одну единицу, а 63 девятых составят столько целых единиц, сколько раз 9 содержится в 63, а это можно узнать делением 63 на 9, т. е. делением числителя на знаменатель. Такое преобразование дроби называется **исключением** целого числа из неправильной дроби. Учащиеся решают соответствующие числовые примеры и формулируют правило исключения целого числа из неправильной дроби.

В связи с этим необходимо решать и обратные задачи: данное целое число представить в виде дроби с определённым знаменателем, например: $6=\frac{18}{3}$, или $6=\frac{42}{7}$ и т. п. Учащиеся сопровождают решение этих задач объяснением: в одной единице семь седьмых долей, а в шести единицах в 6 раз больше, т. е. $\frac{42}{7}$, следовательно, чтобы число 6 представить в виде дроби, состоящей из седьмых долей, надо знаменатель (7) умножить на целое число (6) и полученное произведение записать числителем, а знаменатель будет данный. Это преобразование целых чисел называется **обращением** целого числа в неправильную дробь с заданным знаменателем. Вышеприведённое правило в учебниках арифметики иногда даётся в несколько изменённой редакции:

«данное число умножается на знаменатель» (т. е. $6\cdot 7=42$); в таком случае надо объяснить учащимся, что эта разница несущественная, так как произведение чисел не изменяется от перестановки сомножителей.

Точно таким же образом рассматривается последний вид неправильной дроби $\left(\frac{a}{b}\text{ при } a>b\right)$, когда числитель больше знаменателя, но не делится на него без остатка. По внешнему виду они ничем не отличаются от дробей вида $\frac{ak}{a}$. Поэтому при преобразовании их, т. е. при исключении целого числа, учащиеся без колебания будут делить числитель на знаменатель $\left(\text{например, } \frac{35}{8}\right)$; при этом получится остаток меньше знаменателя, который показывает, сколько остаётся долей, не составляющих полной единицы; этот остаток прибавляется к целому частному $\left(\frac{35}{8}=4+\frac{3}{8}\right)$. Эта форма записи уже знакома учащимся, а потому они сами предложат записать результат без знака «плюс» $\left(4\frac{3}{8}\right)$ и назовут его **смешанным** числом (состоит из целого числа и дроби). После решения достаточного числа примеров учащиеся формулируют правило исключения целого числа из неправильной дроби.

Обратная задача — обращение смешанного числа в неправильную дробь — представляет больше затруднений для учащихся. Чтобы облегчить понимание этого преобразования, полезно сначала повторить задачу обращения целого числа в неправильную дробь с любым заданным знаменателем (решить несколько примеров). И только после этого следует приступить к решению основной задачи, например обратить $9\frac{5}{7}$ в неправильную дробь. Учащиеся будут решать эту задачу так: в одной единице 7 седьмых долей, в девяти единицах — в девять раз больше, т. е. $7 \cdot 9$, да в числе имеется ещё 5 седьмых; всего будет $7 \cdot 9 + 5$ седьмых долей, т. е. $9\frac{5}{7} = \frac{7 \cdot 9 + 5}{7} = \frac{68}{7}$. После решения нескольких задач преподаватель обращает внимание учащихся на промежуточную запись, которая даёт возможность сформулировать правило обращения смешанного числа в неправильную дробь.

В заключительной беседе подводятся некоторые итоги предыдущей работы.

1. До введения дробей деление одного целого числа на другое было не всегда выполнимо (примеры).

2. Благодаря введению дробей всегда возможно записать результат, полученный при делении одного целого числа на другое (кроме деления на 0, что всегда невозможно).

3. Результат деления может быть записан или целым числом (при каком условии?), или дробным — правильной дробью (при каком условии?), или неправильной (при каком условии?).

4. Неправильную дробь можно преобразовать—исключить из неё целое число. В результате может быть или только целое число (при каком условии?), или смешанное число (при каком условии?).

5. Целое число можно преобразовать или обратить в неправильную дробь с любым знаменателем (как это можно сделать?).

6. Смешанное число тоже можно обратить в неправильную дробь (как это сделать?).

Каждый из этих выводов сопровождается примерами, которые придумывают сами учащиеся.

Вся эта работа может быть завершена составлением и записью схемы новой расширенной области чисел — дробных чисел:

$$
\begin{array}{c}
\text{Дробные числа (дроби)} \\
\swarrow \qquad\qquad \searrow \\
\text{целые числа} \qquad\qquad \text{дроби} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \swarrow \qquad\qquad \searrow \\
\qquad\qquad\qquad \text{неправильные дроби} \qquad \text{правильные дроби}
\end{array}
$$

III. СРАВНЕНИЕ ДРОБЕЙ (ПЕРВЫЙ ЦИКЛ)

При изучении арифметики целых чисел в начальной школе, а также из опыта повседневной жизни учащиеся постепенно и незаметно для себя приобретают прочные и уверенные навыки сравнения целых чисел.

При решении вопроса, какая из двух данных дробей больше или меньше, требуется предварительная работа над двумя дробями, данными для сравнения (сокращение их или приведение их к общему числителю или к общему знаменателю), и анализ их структуры $\left(\text{например, при сравнении дробей } \frac{5}{9} \text{ и } \frac{7}{15}\right)$.

В теоретической арифметике, а иногда и при изучении алгебраических дробей (в курсе алгебры) для сравнения их вводится особый критерий: дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ равны, если $ad=bc$[1] и $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, если $ad > bc$. В V классе, где впервые изучается систематический курс дробей, учащиеся не имеют ещё достаточного математического развития, а потому они не смогут принять и понять должным образом введение такого критерия. Поэтому изучение сравнения дробей становится такой методической проблемой, которая заслуживает особого внимания. Всю эту работу надо построить так, чтобы постепенно приучать учащихся внимательно всматриваться в каждую данную дробь, тщательно изучать структуру её, чтобы выбрать наиболее удачный критерий для сравнения двух или нескольких дробей. Большую помощь при этом может оказать графическая иллюстрация дробей.

Вот примерный план изучения первого цикла сравнения дробей.

1. Сравнение двух и нескольких дробей с равными знаменателями $\left(\frac{a}{m} \text{ и } \frac{b}{m}\right)$.

2. Сравнение двух и нескольких дробей с равными числителями $\left(\frac{a}{m} \text{ и } \frac{a}{n}\right)$.

Эти типы дробей ещё не охватывают всего многообразия их. Но этого в данном месте курса пока вполне достаточно для того чтобы, во-первых, поставить этот вопрос и заострить внимание учащихся на нём, во-вторых, приучить их всматриваться в структуру каждой дроби и подмечать сходство и различие между ними. Для сравнения дробей каждого из намеченных типов не надо делать никаких преобразований их, а ограничиться только устным объяснением того или иного ответа на поставленный вопрос на основании наблюдений над ними.

1. Сравнение дробей с равными знаменателями

Учащиеся в начальной школе решали такие задачи, а потому при повторении следует на этом остановиться только для того, чтобы восстановить в памяти учащихся известное им объяснение и применить новый приём сравнения дробей — графическую иллюстрацию. На всё это потребуется очень мало времени.

---

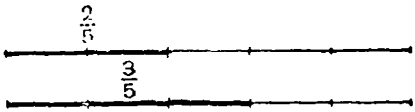
[1] Если все числа a, b, c и d имеют одинаковые знаки, т. е. или они положительные или отрицательные.

Сначала преподаватель даёт несколько пар дробей с равными знаменателями, потом учащиеся сами придумывают такие же примеры; те и другие записываются в столбик. Учащиеся сравнивают дроби каждой пары и записывают результаты во втором столбике:

$\frac{2}{5}$ и $\frac{3}{5}$; $\quad \frac{2}{5} < \frac{3}{5}$.

$\frac{8}{11}$ и $\frac{5}{11}$; $\quad \frac{8}{11} > \frac{5}{11}$

и т. п.



Черт. 11.

При этом они дают такие объяснения: каждая дробь первой пары состоит из пятых долей: в первой дроби две пятых доли, а во второй — три пятых; следовательно, первая дробь меньше второй.

Как сказано было раньше, некоторые задачи следует сопровождать графической иллюстрацией (см. черт. 11); эти чертежи можно располагать в третьем столбике против соответствующей задачи.

После решения нескольких задач учащиеся могут сформулировать правило для сравнения дробей с равными знаменателями, которое затем и будут применять при решении соответствующих задач; устные объяснения при этом они будут давать только по особому требованию преподавателя.

2. Сравнение дробей с равными числителями

Эта работа требует от учащихся большого напряжения внимания и мышления. Поэтому на сравнении дробей с равными числителями надо остановиться дольше.

Сначала сравниваются дроби с числителем единица $\left(\frac{1}{n}\right)$. Работу полезно начать с графической иллюстрации дробей, данных для сравнения.

Учащиеся записывают заданные для сравнения дроби, потом строят графики и, наконец, записывают результаты в виде неравенств (см. таблицу и черт. 12):

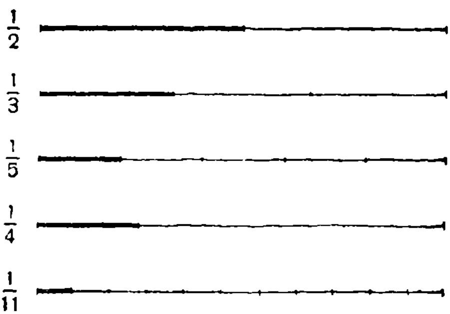
1) $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$;

$\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$.

2) $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{11}$;

$\frac{1}{4} > \frac{1}{5} > \frac{1}{11}$

и т. п.



Черт. 12.

Графические иллюстрации помогают создавать отчётливые представления о сравнительной величине дробей с числителем, равным единице. С помощью таких зрительных восприятий учащимся не так трудно будет понять и в устной форме объяснить решение каждой задачи, например: четвёртые доли единицы крупнее пятых и одиннадцатых, пятые тоже крупнее одиннадцатых; взято от каждой единицы по одной такой доле; следовательно, та дробь больше, у которой доли крупнее, т. е. знаменатель меньше.

После такой подготовки учащиеся сравнительно легко будут решать задачи на сравнение дробей вида $\frac{a}{m}$ и $\frac{a}{n}$ (с равными числителями, отличными от единицы), например:

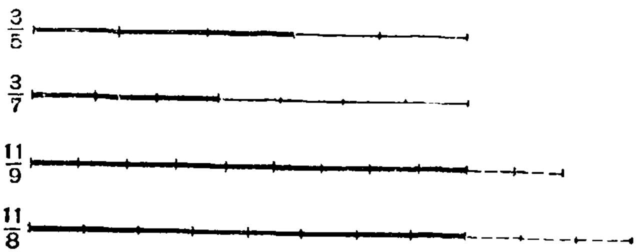
$\frac{3}{5}$ и $\frac{3}{7}$;

$\frac{3}{5} > \frac{3}{7}$.

$\frac{11}{9}$ и $\frac{11}{8}$;

$\frac{11}{9} < \frac{11}{8}$

и т. п.



Черт. 13.

Учащиеся дают объяснения: в первой дроби пятые доли, а во второй — седьмые: пятые доли крупнее седьмых, число же их в обеих дробях одинаковое, следовательно, первая дробь больше второй (см. черт. 13).

После решения нескольких примеров учащиеся анализируют с помощью преподавателя записанные выводы, подмечают внешний признак и составляют правило сравнения дробей с равными числителями. Затем учащиеся решают примеры на применение нового правила для развития навыков; в заданиях следует предлагать для сравнения не две, а три и более дробей с равными числителями или с равными знаменателями.

На уроках в порядке устного счёта наряду со сравнением дробей двух указанных видов полезно давать и дроби вида

$$\frac{m \pm 1}{m} \text{ и } \frac{n \mp 1}{n},$$

например:

$$\frac{7}{8} \text{ и } \frac{13}{12} \text{ или } \frac{15}{14} \text{ и } \frac{29}{30}$$

и т. п. Цель этой работы — приучить учащихся внимательно всматриваться в структуру данных дробей и подмечать особенности их. Той же цели служат и дроби, близкие к половине единицы, например: $\frac{7}{12}$ и $\frac{4}{9}$ или $\frac{15}{31}$ и $\frac{11}{20}$ и т. п.

IV. ГЛАВНОЕ СВОЙСТВО ДРОБИ

Учащиеся обычно довольно легко усваивают и запоминают главное или основное свойство дроби. Но при этом иногда оказывается, что они недостаточно отчётливо понимают самую сущность этого преобразования дробей и потому допускают очень грубые ошибки; например, при сокращении дробей ошибочно пишут

$$\frac{24+3}{12}=\frac{\overset{2}{\cancel{24}}+3}{\underset{1}{\cancel{12}}}=5.$$

Поэтому преподаватель при первом ознакомлении учащихся с главным свойством дроби может не задерживаться долго на этом вопросе; зато при дальнейшем применении его (сокращение дробей и приведение их к общему знаменателю) время от времени он должен задавать контрольные вопросы, чтобы заставить учащихся сознательно выполнять необходимое преобразование дроби на основании главного свойства её.

Для вывода этого свойства учащиеся продолжают решать задачи на сравнение дробей.

Примерный план этой работы.

1. Изменение величины дроби при изменении числителя её.
2. Изменение величины дроби при изменении знаменателя её.
3. Одновременное изменение числителя и знаменателя дроби.

1. Изменение величины дроби при изменении числителя её

Предварительно преподаватель предлагает выяснить характер изменения дроби при увеличении и уменьшении числителя её на целое число, например:

$$\frac{5}{9} \text{ и } \frac{5+2}{9}=\frac{7}{9}, \quad \left(\frac{5}{9}<\frac{7}{9}\right); \quad \frac{9}{14} \text{ и } \frac{9+4}{14}=\frac{13}{14}, \quad \left(\frac{9}{14}<\frac{13}{14}\right);$$

$$\frac{11}{19} \text{ и } \frac{11-3}{19}=\frac{8}{19}, \quad \left(\frac{11}{19}>\frac{8}{19}\right) \text{ и т. д.}$$

Учащиеся без особого труда сами будут составлять такие задачи и потом легко сформулируют вывод.

Затем преподаватель несколько видоизменяет характер задач, увеличивая или уменьшая числитель дроби в два, три и т. д. раз, что можно записывать как умножение или деление числителя дроби на целое число, например:

$\frac{2}{11}$ и $\frac{2\cdot2}{11}=\frac{4}{11}$; $\frac{4}{11}>\frac{2}{11}$ в два раза; $\frac{2\cdot3}{11}=\frac{6}{11}$; $\frac{6}{11}>\frac{2}{11}$ в три раза и т. п.

Объяснение. Доли остались те же, а число их увеличилось вдвое: следовательно, дробь $\frac{4}{11}$ больше $\frac{2}{11}$ в два раза.

Полезно ту же задачу решить графически (см. черт. 14).

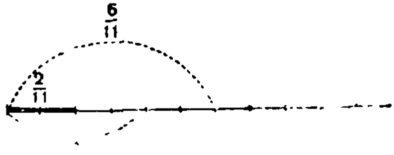
После решения нескольких задач учащиеся формулируют вывод (если числитель дроби увеличить в несколько раз, то и дробь увеличится во столько же раз) и закрепляют его решением задач (задачи они могут придумывать сами).

Точно так же решаются такие задачи: «Как изменится величина дроби, если числитель её уменьшится в несколько раз?»

Например:

$$\frac{12}{13} \text{ и } \frac{12:2}{13} = \frac{6}{13}; \quad \frac{6}{13} < \frac{12}{13}$$

(объяснение аналогично предыдущему). Учащиеся сами составляют подобные задачи, решают их и потом формулируют вывод об изменении величины дроби при уменьшении числителя её в несколько раз.



Черт. 14.

В заключительной беседе под руководством преподавателя учащиеся делают общий обзор решённых задач и замечают, что полученные выводы о характере изменения величины дроби при увеличении и уменьшении числителя её можно сформулировать несколько иначе, а именно: при умножении или делении числителя дроби на целое число величина дроби соответственно увеличивается или уменьшается (во столько раз, сколько единиц во множителе или в делителе). Поэтому в дальнейшем соответствующие задачи можно давать в двух редакциях: «Как изменится дробь, если числитель её умножить или разделить на целое число?» или: «Как изменится дробь, если числитель её увеличить или уменьшить в несколько раз?»

При решении задач — «Что надо сделать, чтобы увеличить или уменьшить дробь в несколько раз?» — учащиеся тоже могут давать ответы в двух редакциях: 1) умножить или разделить числитель дроби на целое число или 2) увеличить или уменьшить числитель дроби во столько же раз.

2. Изменение величины дроби при изменении знаменателя её

Как и в предыдущей работе, преподаватель сначала предлагает выяснить характер изменения величины дроби при увеличении и уменьшении знаменателя её на несколько единиц, например:

$$\frac{7}{12} \text{ и } \frac{7}{12+1} = \frac{7}{13}; \quad \frac{7}{12} > \frac{7}{13}; \quad \frac{7}{12-3} = \frac{7}{9} > \frac{7}{12}.$$

Затем он меняет характер задач, вводя увеличение или уменьшение знаменателя дроби в несколько раз, что записывается умножением или делением знаменателя дроби на целое число. Например: $\frac{3}{5}$ и $\frac{3}{5 \cdot 2} = \frac{3}{10}$; $\frac{3}{10} < \frac{3}{5}$ в два раза. Эту задачу можно решить графически (см. черт. 15).

Учащиеся сами могут составлять подобные задачи и решать их с объяснением.

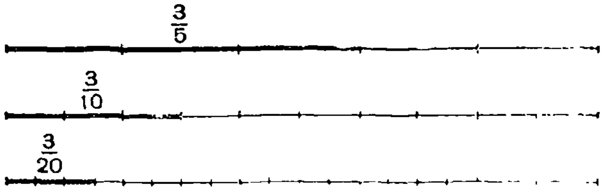
Затем они формулируют вывод об изменении дроби при увеличении знаменателя её в несколько раз или при умножении знаменателя на целое число.

Точно так же рассматривается изменение дроби при уменьшении знаменателя её в несколько раз с формулировкой вывода.

Для закрепления полученных выводов следующие задачи даются в одной из двух редакций: 1) Как изменится дробь, если знаменатель её умножить или разделить на целое число?» и

2) «Как изменится дробь, если знаменатель её увеличить или уменьшить в несколько раз?»

Решение задачи: «Что надо сделать со знаменателем данной дроби, чтобы уменьшить или увеличить её в несколько раз?» тоже может быть дано в одной из двух редакций: 1) умножить или разделить знаменатель на целое число или 2) увеличить или уменьшить его во столько же раз.



Черт. 15.

При решении предыдущих задач, в которых только один из членов дроби умножали или делили на целое число, чтобы получить соответствующий вывод об изменении дроби, числовой материал в задачах надо подбирать сначала так, чтобы изменённая дробь оставалась несократимой и чтобы учащиеся видели зависимость между изменением одного из членов дроби и изменением величины дроби. После того как выводы будут сделаны и усвоены учащимися, в новые задачи надо вводить такой числовой материал, чтобы учащиеся имели возможность выбирать ту или иную операцию при увеличении или уменьшении дроби.

Учащиеся сначала сопоставляют и объединяют только что сделанные выводы об изменении величины дроби при умножении и делении одного из членов её на целое число, применяя их к решению задач.

1. Как изменится дробь $\frac{7}{12}$, если

а) числитель её умножить на 3 или увеличить в три раза?
б) знаменатель её разделить на 3 или уменьшить в три раза?
Ответ. В том и другом случае дробь увеличится в три раза:

$$\frac{7}{12} \text{ и } \frac{7\cdot3}{12}=\frac{21}{12}; \quad \frac{7}{12}<\frac{21}{12} \text{ (увеличилась в три раза);}$$

$$\frac{7}{12:3}=\frac{7}{4}; \quad \frac{7}{12}<\frac{7}{4}.$$

2. Как изменится дробь $\frac{8}{15}$, если

а) числитель её разделить на 4 или уменьшить в 4 раза?
б) знаменатель её умножить на 4 или увеличить в 4 раза?

Ответ. В том и другом случае дробь уменьшится в 4 раза:

$$\frac{8}{15} \text{ и } \frac{8:4}{15} = \frac{2}{15}; \quad \frac{8}{15} > \frac{2}{15} \quad \text{(уменьшилась в четыре раза)};$$

$$\frac{8}{15 \cdot 4} = \frac{8}{60}; \quad \frac{8}{15} > \frac{8}{60}.$$

После решения нескольких задач первого и второго типа учащиеся составляют обобщённые выводы об изменении дроби:

1) чтобы данную дробь увеличить в несколько раз, надо или числитель её увеличить во столько же раз (иначе: числитель умножить на целое число), или знаменатель уменьшить в то же число раз (иначе: разделить его на целое число);

2) чтобы уменьшить дробь в несколько раз, надо или числитель её уменьшить во столько же раз (иначе: разделить его на целое число), или знаменатель увеличить во столько же раз (иначе: знаменатель умножить на целое число).

После этого учащиеся решают примеры:

увеличить в два раза каждую из следующих дробей:

$$\frac{1}{3}, \frac{5}{6}, \frac{3}{7}, \frac{5}{12}, \frac{7}{18}, \frac{4}{15};$$

$$\frac{1}{3}, \frac{1 \cdot 2}{3} = \frac{2}{3};$$

$$\frac{5}{6}; \frac{5 \cdot 2}{6} = \frac{10}{6} \text{ и } \frac{5}{6:2} = \frac{5}{3},$$

$$\frac{3}{7}; \frac{3 \cdot 2}{7} = \frac{6}{7} \text{ и т. д.};$$

увеличить в три раза каждую из следующих дробей:

$$\frac{5}{8}, \frac{7}{12}, \frac{11}{39}, \frac{4}{11}, \frac{5}{24};$$

уменьшить в пять раз каждую из следующих дробей:

$$\frac{10}{13}, \frac{8}{15}, \frac{3}{2}, \frac{15}{23}, \frac{25}{8}.$$

При решении каждого примера в последних трёх задачах учащиеся должны внимательно всматриваться в данную дробь, чтобы применить наиболее удачный приём (в результате получить дробь с наименьшими числами в числителе и в знаменателе).

В процессе этой работы учащиеся убеждаются в том, что для увеличения дроби в несколько раз всегда можно умножить числитель её на целое число и только в редких случаях можно разделить знаменатель её на такое же число (что и следует делать в подобных случаях); подобный же вывод можно сделать при уменьшении дроби в несколько раз: знаменатель всегда можно умножить на целое число, а числитель можно разделить очень редко.

Полезно дать учащимся такое задание: выбрать из задачника или придумать самостоятельно такие дроби, чтобы для увеличения одних дробей можно было делить знаменатель, а для уменьшения других — делить числитель.

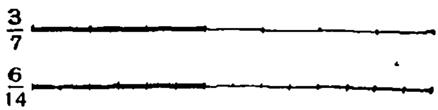
3. Одновременное изменение обоих членов дроби

Главное или основное свойство дроби теперь можно обосновать очень легко в связи с решением задач на основании только что сделанных выводов. Преподаватель даёт учащимся ряд дробей и предлагает в каждой из них сначала увеличить числитель в несколько раз и указать, как изменится дробь, а затем увеличить знаменатель полученной дроби в то же число раз с указанием, как изменится эта дробь, и сравнить вновь полученную дробь с данной:

$$\frac{3}{7};\quad \frac{3\cdot 2}{7};\quad \frac{3\cdot 2}{7\cdot 2}=\frac{6}{14};\quad \frac{3}{7}=\frac{6}{14};$$

$$\frac{27}{35},\quad \frac{27}{35\cdot 4};\quad \frac{27\cdot 4}{35\cdot 4}=\frac{108}{140};\quad \frac{27}{35}=\frac{108}{140}.$$

В данной дроби $\left(\frac{3}{7}\right)$ седьмые доли и их взято три; в дроби $\left(\frac{6}{14}\right)$ доли вдвое мельче (четырнадцатые), но их взято 6 (вдвое больше), следовательно, дроби $\frac{3}{7}$ и $\frac{6}{14}$ равны по величине, но имеют разный внешний вид; аналогично сравниваются дроби $\frac{27}{35}$ и $\frac{108}{140}$. Некоторые примеры полезно сопровождать графической иллюстрацией (см. черт. 16).



Черт. 16.

Просматривая таблицу решения последних задач, учащиеся формулируют вывод: если числитель и знаменатель дроби увеличить в одно и то же число раз, то величина дроби не изменится, хотя изменится внешний вид её.

В связи с последним добавлением (изменится внешний вид дроби) преподаватель уточняет его: оба члена новой дроби выражены бо́льшими числами, чем члены данной дроби (дробь стала более громоздкой и более трудной).

Затем учащиеся тот же вывод формулируют несколько иначе: если числитель и знаменатель дроби умножить на одно и то же целое число, то...

Точно таким же образом учащиеся выводят и формулируют второй вывод: если числитель и знаменатель дроби уменьшить в несколько раз (или разделить на одно и то же целое число, не равное нулю), то величина дроби не изменится, изменится же только внешний вид её (она станет проще, так как числитель и знаменатель её выражены меньшими числами).

Для закрепления этих выводов учащиеся решают задачи такого типа: данную дробь выразить в определённых долях (при этом, понятно, надо тщательно подбирать соответствующий числовой материал), например: 1) дробь $\frac{2}{3}$ выразить в шестых, в двенадцатых, в шестидесятых и т. п. долях или 2) дробь $\frac{8}{24}$ выразить в двенадцатых, в шестых, в третьих долях.

V. СОКРАЩЕНИЕ ДРОБЕЙ

Сокращение дробей, как упрощение их, непосредственно вытекает из второго вывода главного свойства дроби (неизменяемость величины дроби при делении числителя и знаменателя её на одно и то же целое число) и является наиболее понятным и целесообразным преобразованием внешнего вида дроби при сохранении величины её. Для объяснения этого преобразования дробей преподаватель предлагает учащимся несколько задач с конкретным *содержанием, например:*

«*У* меня имеется 60 коп. пятачками. Надо все пятачки обменять на гривенники или на двугривенные. Выразить эту сумму — 60 коп. — в соответствующих долях рубля». Учащиеся в устной форме дают решение этой задачи и затем записывают его: $\frac{12}{20}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$. По этой записи учащиеся характеризуют процесс преобразования первой дроби $\left(\frac{12}{20}\right)$: числитель и знаменатель её уменьшили в два раза (или разделили на 2), затем числитель и знаменатель новой дроби $\frac{6}{10}$ опять уменьшили в два раза (или разделили на 2). Преподаватель показывает, как можно условно записать это преобразование: $\frac{\overbrace{12}^{2}}{20}=\frac{\overbrace{6}^{2}}{10}=\frac{3}{5}$, и сообщает, что это преобразование дроби называют **сокращением** дроби. Учащиеся решают ещё несколько задач, например:

$$\frac{\overbrace{64}^{2}}{96}=\frac{\overbrace{32}^{2}}{48}=\frac{\overbrace{16}^{2}}{24}=\frac{\overbrace{8}^{4}}{12}=\frac{2}{3},$$

и по вопросам преподавателя формулируют выводы:

1) чтобы сократить дробь, надо числитель и знаменатель её разделить на одно и то же число;

2) каждая вновь полученная дробь проще предыдущей (так как члены её выражены меньшими числами);

3) последнюю дробь нельзя больше сократить (почему?), она называется несократимой;

4) первая дробь и все промежуточные дроби называются сократимыми дробями (что это значит?);

5) сократить дробь — значит упростить её (в чём состоит это упрощение?).

Для развития навыков в последовательном сокращении дробей учащиеся должны решать достаточное число задач-примеров (в классе и дома); в задание надо включать и простейшие несократимые дроби (например, $\frac{9}{16}$, $\frac{12}{25}$ и т. п.), чтобы учащиеся постепенно приучались с первого взгляда на такие простейшие дроби определять сократимость или несократимость их.

Первым и непосредственным применением сокращения дробей могут быть задачи на сравнение сократимых дробей:

1. «Какая дробь больше: $\frac{2}{3}$ или $\frac{160}{240}$? $\frac{3}{4}$ или $\frac{72}{96}$?» и т. п.

2. «Во сколько раз первая дробь больше или меньше второй:

$$\frac{4}{5} \text{ и } \frac{24}{60}? \quad \frac{15}{18} \text{ и } \frac{90}{216}?\text{» и т. п.}$$

3. «Следующие дроби расположить в порядке их возрастания:

$$\frac{3}{5},\ \frac{24}{60} \text{ и } \frac{36}{45}\text{».}$$

В процессе решения этих и подобных им задач учащиеся в достаточной мере поймут самый смысл сокращения дробей и процесс этого преобразования (понятно пока на простейших дробях).

Затем преподаватель может дать и такие дроби, числители и знаменатели которых суть двузначные и трёхзначные числа, сократимость или несократимость которых по внешнему виду их установить не так легко, как это было раньше, например: $\frac{35}{95}$, $\frac{315}{936}$, $\frac{495}{1155}$, $\frac{91}{769}$ и т. п. Если первые три дроби учащиеся после более или менее удачных попыток сумеют сократить, то последняя приведённая дробь оказывается несократимой. Естественно, встаёт вопрос: нельзя ли знать такие приметы, или признаки, по которым можно точно и достаточно быстро определить, на какие числа делится числитель и знаменатель дроби (сначала устанавливается только такая цель, а потом эта задача будет разрешена и в более широком масштабе, т. е. для любого данного целого числа)? Несколько простых примеров дадут возможность убедиться в пользе таких примет (сократить дроби: $\frac{128}{320}$, $\frac{256}{384}$ и т. п.). Преподаватель предварительно спрашивает учащихся: «Какие числа называются чётными? Назовите все однозначные чётные числа; назовите несколько двузначных и трёхзначных чётных чисел»; затем учащиеся переходят к сокращению первой дроби: числитель и знаменатель её — чётные числа, а потому дробь можно сократить на 2 и т. д.:

$$\frac{128}{320} \overset{2}{=} \frac{64}{160} \overset{2}{=} \frac{32}{80} \overset{2}{=} \frac{16}{40} \overset{2}{=} \frac{8}{20} \overset{2}{=} \frac{4}{10} \overset{2}{=} \frac{2}{5}.$$

На этом примере учащиеся убеждаются в том, что они уже знают примету или признак делимости чисел на 2. Теперь надо узнать признаки делимости чисел на другие числа, а именно: на 3, на 4, на 5, на 8, на 10, на 12 и т. п.

Таким образом, изучение сокращения дробей совершенно естественно и с достаточной необходимостью подводит к вопросу изучения признаков делимости целых чисел и применения этих признаков к сокращению дробей.

VI. ПРИЗНАКИ ДЕЛИМОСТИ ЧИСЕЛ

1. Предварительные сведения

Признаки делимости чисел составляют первую главу учения о делимости чисел. В эту же главу предварительно включаются такие основные понятия, как понятия о кратном числе и точном делителе в отличие от понятия делимого и делителя как данных чисел в действии деления.

Преподаватель предлагает учащимся решить два примера на деление целых чисел.

$$1)\ 592:37=16.\qquad \begin{array}{r} -\,592 \\ 37 \\ \hline -\,222 \\ 222 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$2)\ 592:38=15.\qquad \begin{array}{r} -\,592 \\ 38 \\ \hline -\,212 \\ 190 \\ \hline 22 \end{array}$$

Учащиеся называют все данные числа и полученные результаты: 592 — делимое в обоих примерах; 37 и 38 — делители в каждом действии; 16 и 15 — частные, 0 и 22 — остатки при делении. Затем по вопросам преподавателя учащиеся указывают разницу между первым и вторым делением: в первом примере деление совершается нацело, или без остатка (иначе говоря, остаток равен 0), во втором — деление с остатком, хотя в обоих примерах делится одно и то же число 592. Преподаватель предлагает учащимся разделить то же число 592 на 74, на 148, на 296, а также на 2, 4, 8, 16. Оказывается, что 592 делится на все эти числа без остатка. А вот на 38 и на целый ряд других чисел 592 не делится нацело (учащиеся убеждаются в этом непосредственным делением на названные числа), хотя во всех этих случаях число 592 служит делимым, как и в предыдущих примерах. После этого преподаватель сообщает, что число 592 обладает таким свойством: оно делится нацело, или без остатка, на 2, 4, 8, 16, 37, 74, 148, 296, а также на 592 и на 1 (последние два числа могут назвать сами учащиеся); это свойство условились выражать так: 592 есть кратное 2, 4, 8 и т. д. А эти последние числа (2, 4, 8 и т. д.), на которые 592 делится без остатка, называются точными делителями числа 592, или просто делителями его.

Можно ли сказать, что 592 есть кратное 38? Нет, потому что оно не делится на 38 без остатка. Можно ли 38 назвать делителем числа 592? Нет (по той же причине).

Преподаватель разъясняет: в действии деления (592 : 38) число 38 является делителем, но оно не обладает свойством делить число 592 без остатка.

Для закрепления этих сведений преподаватель предлагает учащимся такие задачи:

1) назвать числа, кратные 2, 3, 5, 12, 23 и т. п.;

2) 42 есть кратное каких чисел?

3) назвать все делители чисел: 12, 15, 18, 30 и т. п.

После этого можно перейти к изучению тех теорем, на которых основаны признаки делимости чисел. Эти теоремы в данном месте курса арифметики обычно называются свойствами суммы, разности и произведения. Эти свойства не следует давать все сразу; сначала можно ограничиться только свойствами суммы и разности, которые тотчас же непосредственно применяются к выводу первых признаков делимости чисел.

Свойство 1. Если каждое слагаемое делится на какое-либо число, то и сумма разделится на то же число.

Если каждое из трёх слагаемых делится на 3, это значит, что каждое из них состоит из троек, а потому и вся сумма тоже будет состоять из троек, следовательно, она будет делиться на 3 (например, $12 + 15 + 21 = 48$).

Хорошо, если сами учащиеся будут составлять примеры или задачи на приведённое свойство.

После этого необходимо обратить внимание учащихся на одно очень важное обстоятельство: высказанное условие о делимости суммы является только достаточным условием, но не является необходимым; другими словами, обратная теорема не всегда бывает верна, т. е. если сумма нескольких чисел делится на какое-либо число, то слагаемые могут и не делиться на это число, например: $10 + 17 = 27$ — сумма делится на три, а слагаемые в отдельности не делятся на это число. Подобно этому следует привести ряд таких же примеров.

Свойство 2. Если уменьшаемое и вычитаемое делятся на одно и то же число, то и разность разделится на то же число.

Доказывается это свойство так же, как и первое свойство: если каждое из двух чисел делится на 7, то можно сказать, что каждое из них состоит из семёрок; вычитание первого числа из второго сведётся к вычитанию всех семёрок второго числа из числа семёрок первого; поэтому разность тоже будет состоять из семёрок, следовательно, будет делиться на 7.

Это свойство иногда формулируют иначе: если сумма и одно из слагаемых делятся на одно и то же число, то и другое слагаемое разделится на то же число.

Свойство 3. Если одно слагаемое не делится на какое-либо число, а все остальные делятся на него, то и сумма не разделится на это число.

Доказательство основывается на втором свойстве: если каждое слагаемое, кроме одного, *делится на одно и то же число, то и* сумма тех же слагаемых без одного будет делиться на то же число; если допустить, что вся сумма делится на то же число, то и первое слагаемое должно бы делиться на него, а по условию этого нет; значит, сумма не делится на то же число.

Все признаки делимости чисел, которые изучаются в школьном курсе арифметики, можно разбить на такие четыре группы: 1) признаки делимости на 2, 4 и 8; 2) на 5, 25 и 125; 3) на 9 и 3; 4) на 10, 100 и т. д. и на 6, 12, 15 и т. п.

Изучение этих признаков должно быть тесно связано с продолжением изучения дробей. В частности, каждый вновь выведенный признак делимости учащиеся должны тотчас же применять к последовательному сокращению дробей, а это последнее надо связать с вопросом сравнения дробей. Такая тесная увязка между признаками делимости чисел и сокращением дробей в связи со сравнением величины их даёт возможность сознательно и прочно усвоить весь этот материал.

При выводе каждого отдельного признака делимости чисел надо указывать учащимся на справедливость и обратного признака, например, если данное число делится на 9, то и сумма цифр его делится на 9 и т. п. Этим будет подчёркиваться и закрепляться мысль о том, что каждый признак делимости чисел является необходимым и достаточным признаком делимости на данное число.

2. Первая группа признаков делимости чисел (на 2, 4, 8 и т. д.)

Признак делимости чисел на 2. Учащиеся, в сущности, уже знают признак делимости чисел на 2 (на 2 делится всякое чётное число) и в самостоятельной работе пользуются им (в частности, при сокращении дробей). Теперь надо систематизировать их знания, сформулировать признак, обосновать его.

С этой целью преподаватель предлагает учащимся назвать и записать все однозначные чётные числа (0, 2, 4, 6, 8); затем по вопросам преподавателя учащиеся формулируют известные им истины о том, что число 10 делится на 2, так как состоит из 5 двоек ($10 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 2 \times 5$), и всякое число, состоящее из десятков, тоже делится на 2 (на основании первого свойства суммы). Преподаватель потом даёт целый ряд двузначных чисел, а учащиеся определяют делимость или неделимость их на 2 с подробным объяснением:

1) $56 = 50 + 6$ (состоит из 5 десятков и 6 единиц): десятки делятся на 2,

и второе слагаемое — 6 единиц — тоже делится на 2, следовательно, и сумма их, т. е. данное число делится на 2;

2) $87 = 80 + 7$: слагаемое — десятки — делится на 2, а второе слагаемое — единицы — не делится на 2; поэтому число 87 не разделится на 2 (третье свойство суммы). Так же решаются задачи с трёхзначными, потом с многозначными числами. В заключительной беседе учащиеся описывают приём для определения делимости или неделимости данного числа на 2 (оно разбивается на 2 слагаемых — десятки и единицы, например: $375\,489 = 375\,480 + 9$) и формулируют признак: на 2 делятся те числа, у *которых единицы делятся на 2* или иначе: на 2 делятся те числа, которые при записи их оканчиваются чётной цифрой (принимая и нуль за чётную цифру).

П р и з н а к д е л и м о с т и на 4. Основной приём для определения делимости или неделимости данного числа на 4 тот же, а именно: данное число разбивается на два слагаемых — сотни и десятки с единицами. Для вывода этого признака полезно сначала составить таблицу однозначных и двузначных чисел, делящихся на 4.

Учащиеся выписывают все однозначные числа, кратные 4 (0, 4 и 8), и все двузначные числа, состоящие из десятков; из последней группы они вычёркивают все числа, не делящиеся на 4 (*состоящие из нечётного числа десятков*), и затем составляют все возможные суммы из десятков и единиц, делящиеся на 4:

0,	4,	8						
10,	20,	30,	40,	50,	60,	70,	80,	90
12	24	32	44	52	64	72	84	92
16	28	36	48	56	68	76	88	96

В полученной табличке в с е однозначные и двузначные числа, делятся на 4.

Наконец, без всяких затруднений учащиеся скажут, что 100 делится на 4 (так как состоит из 25 четвёрок: $100 = 4 \cdot 25$) и всякое число, состоящее из сотен, тоже делится на 4. Поэтому, чтобы узнать, делится ли данное число на 4, надо разбить его на два слагаемых — на сотни (потому что сотни всегда делятся на четыре) и десятки с единицами: если второе слагаемое данного числа — десятки и единицы делятся на 4, то и всё данное число разделится на 4 (на основании первого свойства). После решения нескольких примеров учащиеся могут сформулировать признак делимости на 4: *на 4 делятся те числа, у которых десятки и единицы составляют число, делящееся на 4* или иначе: на 4 делятся те числа, при записи которых последние *две цифры справа обозначают число, делящееся на 4.*

Если признак делимости чисел на 2 был давно известен учащимся и они довольно широко им пользовались раньше, то признак делимости на 4 для них новый; а потому для развития навыков применения его надо давать учащимся достаточное число примеров преимущественно на сокращение дробей, а это последнее можно связать с задачей сравнения дробей; например, сравнить дроби $\frac{320}{512}$ и $\frac{112}{128}$. Предоставленные самим себе, учащиеся могут последовательно сокращать эти дроби на 2; по окончании всей работы преподаватель должен вернуть их к исходным дробям и предложить провести сокращение их на 4, применяя только что выведенный признак:

$$\frac{320}{512} \overset{4}{=} \frac{80}{128} \overset{4}{=} \frac{20}{32} \overset{4}{=} \frac{5}{8}; \qquad \frac{5}{8} < \frac{7}{8};$$

$$\frac{112}{128} \overset{4}{=} \frac{28}{32} \overset{4}{=} \frac{7}{8}; \qquad \text{следовательно, } \frac{320}{512} < \frac{112}{128}.$$

Признак делимости на 8. Этот признак, хотя и простой, но не имеет большого практического применения, и учащиеся редко им пользуются при сокращении дробей. Но вывод его с методической точки зрения поможет учащимся более основательно осознать и прочнее закрепить основной приём применения всех этих признаков.

По вопросам преподавателя учащиеся сначала повторяют, что всякое число, состоящее из десятков, делится на 2, состоящее из сотен, делится на 4 (почему?), и вновь устанавливают, что число, состоящее из тысяч, делится на 8 (так как одна тысяча состоит из 125 восьмёрок, т. е. $1\,000 = 8 \cdot 125$, а потому и всякое число, состоящее из тысяч, тоже состоит из восьмёрок и делится на 8). Затем по вопросам преподавателя учащиеся описывают основной приём для определения делимости или неделимости данного числа на 2 и 4. Теперь по аналогии они легко сообразят, что для определения делимости или неделимости данного числа на 8 надо разбить его тоже на два слагаемых — на тысячи (потому что они делятся на 8) и на сотни, десятки и единицы вместе; если последнее слагаемое, состоящее из сотен, десятков и единиц вместе, делится на 8, то и всё данное число разделится на 8 (почему?).

3. Вторая группа признаков делимости чисел (на 5, 25, 125 и т. п.)

Вывод этих признаков служит прекрасным материалом для повторения и закрепления предыдущей работы и потребует очень мало классного времени.

Признак делимости на 5. Учащиеся называют и записывают однозначные числа, делящиеся на 5 (0 и 5), потом указывают, что 10 и всякое число, состоящее из десятков, делится на 5 (почему?). Поэтому при определении делимости или неделимости числа на 5 его разбивают на два слагаемых — на десятки и единицы; исходя из этого, формулируется признак делимости на 5 (если в данном числе единицы делятся на 5 или если данное число при записи его оканчивается нулём или пятёркой).

Признак делимости на 25. На вопросы преподавателя учащиеся отвечают, что на 25 делятся только три двузначных числа: 25, 50 и 75, а 100, как и всякое число, состоящее из сотен, делится на 25. Поэтому испытуемое число разбивается на два слагаемых — на сотни и десятки с единицами; делимость или неделимость данного числа зависит от второго слагаемого (формулируется известный признак). Признак делимости на 125 учащиеся могут вывести сами, перечислив сначала все трёхзначные числа, делящиеся на 125 (125, 250, 375, 500, 625, 750 и 875).

4. Третья группа признаков делимости чисел (на 3 и на 9)

Признак делимости на 9. Прежде всего полезно заметить, что все числа, записанные только цифрой 9, делятся на 9 (9, 99, 999 и т. п.), в чём легко убедиться с помощью непосредственного деления или ссылкой на первое свойство суммы: $99 = 90 + 9$ и $99:9 = (90 + 9):9 = ...$

Затем преподаватель предлагает учащимся составить таблицу:

$$10=9+1$$
$$100=99+1$$
$$1\,000=999+1$$
$$10\,000=9\,999+1$$
$$100\,000=99\,999+1$$
и т. д.

Из этой таблицы видно, что каждое разрядное число, записанное единицей с одним или несколькими нулями, при делении на 9 даёт в остатке 1.

Затем составляются ещё такие примерные таблицы:

$20=2\cdot9+2$	$50=5\cdot9+5$	$80=8\cdot9+8$
$200=2\cdot99+2$	$500=5\cdot99+5$	$800=8\cdot99+8$
$2\,000=2\cdot999+2$	$5\,000=5\cdot999+5$	$8\,000=8\cdot999+8$
и т. д.	и т. д.	и т. д.

Из этих таблиц делается вывод: каждое разрядное число, записанное значащей цифрой с нулями, при делении на 9 в остатке даёт число, записанное той же значащей цифрой. После этого преподаватель даёт некоторое число, например 275 238, которое разбивается на разрядные слагаемые:

$$275\,238=200\,000+70\,000+5\,000+200+30+8.$$

По образцу предыдущих таблиц каждое разрядное слагаемое учащиеся вновь разбивают на два слагаемых:

$$200\,000=2\cdot99\,999+2$$
$$70\,000=7\cdot9\,999+7$$
$$5\,000=5\cdot999+5$$
$$200=2\cdot99+2$$
$$30=3\cdot9+3$$
$$8=0\cdot9+8$$

Теперь данное число можно записать так:

$$275\,238=2\cdot99\,999+2+7\cdot9\,999+7+5\cdot999+5+2\cdot99+2+3\cdot9+3+8.$$

Применяя переместительное и сочетательное свойство суммы, то же число можно представить так:

$$275\,238=(2\cdot99\,999+7\cdot9\,999+5\cdot999+2\cdot99+3\cdot9)+(2+7+5+2+3+8).$$

Сумма, заключённая в первых скобках, делится на 9 (почему?). Если сумма, заключённая во вторых скобках, разделится на 9, то и данное число разделится на 9 (почему?). В данном случае вторая сумма равна 27, а это число делится на 9. Поэтому данное число 275 238 делится на 9.

Итак, делимость или неделимость данного числа на 9 зависит только от слагаемого во вторых скобках, а это слагаемое есть сумма остатков, записанных цифрами данного числа.

Учащиеся решают ещё одну-две такие задачи, после чего можно легко сформулировать признак делимости чисел на 9: на 9 делятся те числа, у которых сумма чисел, записанных цифрами данного числа, делится на 9. Эта сумма чисел, записанных цифрами данного числа, обычно называется просто «суммой цифр».

Это совершенно новый признак для учащихся, а потому для закрепления его надо решать много задач на сокращение дробей.

Признак делимости на 3. Вывод этого признака делимости чисел представляет собой повторение предыдущей работы. Это повторение весьма полезно и необходимо. В порядке упражнений для закрепления навыков применения обоих последних признаков следует заставлять учащихся определять делимость или неделимость данного числа на 9 и на 3, с тем чтобы потом сделать вывод, что если число делится на 9, то оно делится и на 3, а если оно делится на 3, то далеко не всегда делится на 9.

5. Четвёртая группа признаков делимости чисел (на 10, 100 и т. д. и на 6, 12, 15 и т. д.).

В эту группу входят признаки делимости чисел на 10, на 100, на 1 000 и т. д., а также на такие числа, которые являются парными произведениями тех однозначных чисел, признаки делимости на которые уже выведены. Но при этом следует иметь в виду, чтобы в каждое такое произведение входили только такие числа, которые не имеют общих множителей (т. е. числа взаимно простые), например: $10 = 2 \cdot 5$, $6 = 2 \cdot 3$, $12 = 3 \cdot 4$, $15 = 3 \cdot 5$, $18 = 2 \cdot 9$, $24 = 3 \cdot 8$, $36 = 4 \cdot 9$ и т. п.

Это требование в V классе принимается без доказательства и подтверждается только целым рядом примеров. Так, признак делимости, например, на 12 нельзя сводить к делимости данного числа на 2 и 6, исходя из того, что $12 = 2 \cdot 6$, так как 2 и 6 *имеют общий множитель 2; поэтому*, хотя каждое из чисел 18, 30, 42, 54 и т. п. делится на 2 и на 6, но не делится на 12 (простое и вполне доступное доказательство можно найти в учебниках арифметики).

Признаки делимости чисел на 10, на 100, на 1 000 и т. п. уже известны учащимся. Они могут дать готовые формулировки этих признаков и применять их при решении задач.

Признаки делимости чисел на 6, на 12, на 15 и т. п. выводятся на основании известной арифметической истины: чтобы данное число разделить на произведение двух, трёх и более множителей, надо разделить его сначала на один сомножитель, полученное частное разделить на второй сомножитель и т. д.:

$$a:(b \cdot c) = (a:b):c.$$

Это формальное обоснование указанных признаков. Но их можно обосновать несколько иначе, проще и доступнее для учащихся.

Так, если данное число (например, 726) делится на 6, то оно состоит из шестёрок, что можно записать так:

$$726 = 6 + 6 + 6 + \ldots + 6 + 6.$$

А каждая шестёрка состоит из трёх двоек или из двух троек:

$$726 = (2 + 2 + 2) + (2 + 2 + 2) + \ldots + (2 + 2 + 2) \text{ и}$$
$$726 = (3 + 3) + (3 + 3) + \ldots + (3 + 3).$$

Из предпоследней записи видно, что данное число 726 состоит из двоек и поэтому делится на 2; из последней записи видно, что то же число 726 состоит из троек, а потому оно делится на три[1].

Учащиеся повторяют этот процесс два-три раза на других числах и формулируют вывод — признак делимости на 6.

При выводе признака делимости на 12 преподаватель имеет возможность показать учащимся, что вышеприведённое рассуждение не является достаточным. Рассуждая по предыдущему, можно сказать, что если число делится на 12, то оно делится на 2 и на 6; но обратное заключение будет не всегда верно: 42 делится на 2 и на 6, но не делится на 12. Приходится вводить ещё одно необходимое условие: делитель разбивается на такие сомножители, которые не имеют общих делителей ($6 = 2 \cdot 3$; $12 = 3 \cdot 4$; $15 = 3 \cdot 5$ и т. п.).

В соответствии с собственными взглядами и с учётом общего развития учащихся данного класса преподаватель может обосновать признаки делимости на 6, на 12, на 15 и т. д. более формально, пользуясь вышеприведённой теоремой: $a:(b \cdot c) = (a:b):c = (a:c):b$. С этой целью он предлагает учащимся задачу, для решения которой надо число 726 разделить на 6, и помогает им записать решение задачи так:

$$726:6 = 726:(2 \cdot 3).$$

Учащиеся вспоминают соответствующее арифметическое правило деления данного числа на произведение двух чисел. В связи с формулировкой этого правила и применением его к данному случаю, естественно, встаёт вопрос о том, делится ли данное число на 2 и на 3; утвердительный ответ даётся на основании уже известных признаков. После этого делается вывод: так как число 726 делится на 2 и на 3, то оно будет делиться и на 6; непосредственным делением учащиеся убеждаются в справедливости сделанного вывода. Преподаватель предлагает ещё несколько чисел, кратных и некратных 6, а учащиеся повторяют процесс испытания их, дают заключение о делимости или неделимости их на 6 и непосредственным делением потом подтверждают заключение. После решения нескольких задач учащиеся формулируют признак делимости чисел на 6.

Теперь учащиеся могут уже сами сообразить, как вывести признаки делимости чисел на 12, на 15, на 18 и т. п.

Свои заключения они применяют к решению соответствующих задач и проверяют их непосредственным делением.

Преподаватель вновь может вернуться к признакам делимости чисел на 10, на 100 и т. п. и предложить учащимся истолковать их в том же смысле: на 10 делятся те числа, которые делятся на 2 и на 5, а это возможно только в том случае, когда испытуемое число при записи его оканчивается нулём; на 100 делятся те числа, которые делятся на 4 и на 25 и т. п.

Теперь можно перейти к более рациональным приёмам сокращения дробей с помощью общих делителей, в частности, с помощью наибольшего общего делителя. Чтобы ввести это понятие и пользоваться им, надо предварительно ввести более общее понятие о делителях одного числа и об общих делителях двух и нескольких данных чисел (в частности, об общих делителях числителя и знаменателя дроби). А эти последние, как и наибольший общий делитель, составляются, как известно, из простых делителей или множителей данных чисел; следовательно, требуется ввести ещё одно новое преобразование чисел — разложение их на

[1] Киселёв, Систематический курс арифметики, 1937.

простые множители или делители; а это последнее преобразование в свою очередь связано с введением понятия о простых и составных числах. Таким образом, намечается следующий план дальнейшего изучения делимости чисел в связи с тем же преобразованием дробей — сокращением их.

VII. СОСТАВЛЕНИЕ ДЕЛИТЕЛЕЙ ДАННЫХ ЧИСЕЛ

1. Разложение чисел на множители или делители.
2. Простые или первоначальные числа.
3. Составные числа и разложение их на простые множители.
4. Составление делителей данных чисел.
5. Применение наибольшего общего делителя к сокращению дробей.

1. Разложение чисел на множители или делители

В порядке обобщения всей последней работы преподаватель проводит с учащимися подробный анализ последовательного сокращения дробей на примере:

$$\overset{2}{\frac{364}{420}} = \overset{2}{\frac{182}{210}} = \overset{7}{\frac{91}{105}} = \frac{13}{15}\,.$$

1. Для сокращения дроби числитель и знаменатель её делят на одно и тоже число, определяя последнее с помощью известных признаков делимости чисел или непосредственным делением на 7, на 11, на 13 и т. д.; полученную дробь вновь сокращают тем же способом и так продолжают до тех пор, пока последняя дробь станет *несократимой*.

2. Числа 2, 2 и 7 в этом процессе являются *общими делителями* числителя и знаменателя дроби. Это последнее можно показать ещё таким образом:

1) записать порознь процессы деления числителя и знаменателя на те же числа:

$364:2=182;$	$420:2=210;$
$182:2=91;$	$210:2=105;$
$91:7=13;$	$105:7=15;$

2) на основании известного соотношения — делимое равно делителю, умноженному на частное — можно записать:

$364=2\cdot182;$ $182=2\cdot91;$ $91=7\cdot13;$	$364=2\cdot2\cdot91=2\cdot2\cdot7\cdot13;$ $364=2\cdot2\cdot7\cdot13;$
$420=2\cdot210;$ $210=2\cdot105;$ $105=7\cdot15;$	$420=2\cdot2\cdot105=2\cdot2\cdot7\cdot15;$ $420=2\cdot2\cdot7\cdot15;$

3) числитель и знаменатель данной дроби теперь представлены в виде произведения четырёх множителей или делителей (так как каждый множитель в то же время является и делителем данного числа); такое преобразование числа называется разложением его на множители;

4) числитель и знаменатель данной дроби можно заменить теперь полученными произведениями:

$$\frac{364}{420}=\frac{2\cdot2\cdot7\cdot13}{2\cdot2\cdot7\cdot15}.$$

Теперь отчётливо видно, что оба члена дроби имеют общие делители 2, 2 и 7, на которые была сокращена данная дробь.

Поэтому при решении следующих задач, чтобы ясно видеть, на что можно сокращать дробь, надо числитель и знаменатель её предварительно разложить на множители, т. е. представить их в виде произведения нескольких чисел — сомножителей; общие множители, входящие в числитель и знаменатель, являются в то же время и общими делителями числителя и знаменателя; на каждый из них можно сократить дробь.

При решении следующей задачи на сокращение дроби $\frac{462}{770}$ преподаватель предварительно с помощью наводящих вопросов выясняет такие положения:

1) чтобы сократить дробь, надо знать общие делители числителя и знаменателя её;

2) для этой цели надо оба члена дроби разложить на множители путём деления их на соответствующие числа:

$462:2=231$ $231:3=77$ $77:7=11$	$462=2\cdot231$ $231=3\cdot77$ $77=7\cdot11$	$462=2\cdot3\cdot7\cdot11$
$770:2=385$ $385:5=77$ $77:7=11$	$770=2\cdot385$ $385=5\cdot77$ $77=7\cdot11$	$770=2\cdot5\cdot7\cdot11$

3) данную дробь теперь можно записать так:

$$\frac{462}{770}=\frac{2\cdot3\cdot7\cdot11}{2\cdot5\cdot7\cdot11};$$

4) теперь отчётливо видно, что числа 2, 7, 11 являются общими делителями числителя и знаменателя, на них и можно сократить данную дробь;

5) после сокращения дробь примет наиболее простой вид:

$$\frac{462}{770}=\frac{3}{5},$$

и станет несократимой.

Эти и подобные им задачи дают возможность выяснить самую сущность разложения чисел на множители и значение этого преобразования.

2. Простые или первоначальные числа

Для выяснения понятия простого числа преподаватель возвращается к решению одной из последних задач, например ко второй $\left(\frac{462}{770}\right)$, в частности, к процессу деления числителя и знаменателя дроби на ряд чисел, и спрашивает, почему учащиеся прекратили процесс деления и не стали дальше делить 11. Ответ может быть такой: 11 делится только на 11 и на 1. Обзор других множителей в той же второй задаче приведёт учащихся к такому выводу: числа 2, 3, 5, 7, 11 делятся только на 1, и каждое из них ещё делится само на себя. Обзор всех множителей числителя и знаменателя дроби $\left(\frac{364}{420}\right)$ (кроме 15) приведёт к такому же выводу; а число 15 делится на 1, на 15 и, кроме того, ещё на 3 и 5. По требованию преподавателя учащиеся приводят примеры чисел, которые делятся только на 1 и сами на себя; они называются *простыми*, или *первоначальными*. При этом преподаватель обращает внимание учащихся на единицу, которую не считают простым числом.

Приведённое ранее число 15 делится не только на 1 и само на себя, но и на другие числа (на 3 и на 5). Учащиеся приводят ещё примеры таких же чисел и называют их *составными*, или *сложными*.

Преподаватель даёт несколько чисел, а учащиеся относят их в группу простых или составных чисел и убеждаются, что эта работа требует много времени и труда. Преподаватель предлагает также сократить несколько дробей, среди которых могут быть несократимые дроби (один или оба члена их — простые числа); учащиеся после целого ряда бесплодных попыток убедятся, что эти дроби несократимые. Подобные задачи приведут к мысли, что для более успешной работы в дальнейшем необходимо, во-первых, знать наизусть таблицу небольших простых чисел и, во-вторых, иметь под руками более обширную таблицу их.

В связи с этим преподаватель рассказывает учащимся, что ещё в далёком прошлом очень остроумно была составлена такая таблица простых чисел, известная под названием «решето Эратосфена». Учащиеся под руководством преподавателя в классе составляют такую таблицу простых чисел до 100, а в порядке самостоятельной домашней работы потом продолжают её сначала до 200, потом до 300 и т. д. По окончании работы все найденные простые числа выписываются на отдельной странице тетради в виде таблицы. К этой таблице учащиеся и должны обращаться во всех случаях, когда потребуется решать вопрос, простое или составное данное число. Учащиеся знакомятся также с более обширными таблицами простых чисел, которые обычно помещаются в учебниках арифметики и в задачниках. Следует в классе иметь большую стенную таблицу простых чисел, чтобы постепенно приучать учащихся к пользованию ею. С этой целью в порядке устного счёта и при опросе учащихся надо давать им просто ряд чисел для распределения их по группам на простые и составные числа или примеры на сокращение дробей, один или оба члены которых — простые числа. При этом надо обратить внимание учащихся на то, что если данное многозначное число больше последнего числа в таблице простых чисел, то для разрешения вопроса о том, будет ли это число простым или составным, нужно это число непосредственно делить на простые числа (на 2, 3, 5, 7, 11 и т. д.) до тех пор, пока в частном не получится целое число, меньшее делителя; если при этом остаток не будет равен нулю, то данное число простое.

3. Составные числа и разложение их на простые множители

Если данное число не простое, а составное, то, естественно, встаёт вопрос о том, на какие числа оно может делиться, кроме единицы и числа, равного данному числу. Получить ответ на этот вопрос можно, если данное число разложить на простые множители, каждый из которых в то же время является и делителем данного числа.

Теперь надо познакомить учащихся с более рациональным и коротким приёмом разложения составных чисел на простые множители. С этой целью преподаватель даёт число, предлагая учащимся разложить его на множители известным им способом и помогает им проанализировать этот процесс, выделив в нём основные этапы:

1) по признакам делимости чисел определяется наименьшее простое число, на которое делится данное число; последнее и делится на это первое простое число;

2) первое полученное частное, как и данное число, опять делится на меньшее простое число, определяемое по признакам делимости чисел;

3) так же поступают со вторым частным, с третьим и т. д. до тех пор, пока в частном будут получаться составные числа (на 7, 11, 13 деление производится непосредственно, без предварительных признаков);

4) все делители и последнее частное — простое число — записываются в одну строчку, как множители; произведение их будет равно данному числу.

После этого анализа преподаватель показывает более короткую запись этого процесса:

$$\begin{array}{l} 2\,310 = 2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11 \\ 1\,155 \\ 385 \\ 77 \\ 11 \end{array}$$

1. За знаком равенства пишутся простые делители, на которые делится данное число или полученное частное; они соединяются точками — знаками умножения.

2. Каждое полученное частное для памяти записывается под данным числом и вновь делится на наименьшее простое число.

Если полученные частные легко держать в памяти и легко определять делимость их на простые числа, то нет никакой необходимости записывать их под данным числом, например:

$$360 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5.$$

Так как разложение на простые множители на практике применяется преимущественно при преобразованиях дробей, а члены дроби в огромном большинстве случаев бывают выражены сравнительно небольшими числами (однозначными, двузначными, реже трёхзначными и очень редко четырёхзначными), то разложение на простые множители можно записывать преимущественно сразу в виде строчки и без всяких промежуточных записей получаемых частных.

Наконец, можно записывать только первые многозначные частные, пока их трудно держать в памяти.

Например:

$$\begin{array}{r l}
41\,472 = & 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3. \\
20\,736 & \\
10\,368 & \\
5\,184 & \\
2\,592 & \\
1\,296 & \\
648 & \\
324 &
\end{array}$$

(Последние частные 162, 81, 27, 9 и 3 легко запоминаются, и их можно не записывать.)

В произведении простых множителей, которое получается в результате разложения составного числа на множители (это произведение иногда называется просто разложением числа), очень часто некоторые множители повторяются по нескольку раз (например, $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$ или $80 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$ и т. п.). В таких случаях иногда вводится запись повторяющихся множителей в виде степени: $24 = 2^3 \cdot 3$ или $80 = 2^4 \cdot 5$ и т. п. Чтобы учащиеся более отчётливо и основательно овладели этой символикой, необходимо ввести в практику прямые и обратные задачи, т. е. запись повторяющихся множителей в виде степени и запись степени в виде произведения равных множителей; при этом учащиеся должны отчётливо формулировать зависимость между числом равных сомножителей и показателем степени. С помощью таких упражнений, которые надо давать при проведении устного счёта и при опросе учащихся у доски, можно добиться того, что учащиеся хорошо осознают символ степени с целым показателем и не будут путать показатель степени с множителем (что является довольно распространённой *ошибкой среди учащихся*).

4. Составление делителей данных чисел

Разложение составных чисел на простые множители даёт возможность получить все делители данного числа. Например, после разложения числителя и знаменателя на простые множители выявляются те **общие делители**, на которые и сокращается данная дробь.

В связи с этим сами учащиеся замечают, что после разложения числителя и знаменателя дроби на простые множители можно сокращать дробь не только на отдельные общие делители, но и сразу на группы их (на произведение двух, трёх и нескольких общих делителей). Таким образом, учащиеся постепенно приходят к мысли, что делителями данного числа могут быть не только простые, но и составные числа, полученные перемножением двух или нескольких простых множителей, входящих в разложение данных чисел. В связи с этим, естественно, встаёт вопрос о нахождении **всех** делителей данного составного числа.

Учащиеся уже поняли, что можно составлять делители данного числа перемножением простых множителей, входящих в разложение его. Задача преподавателя теперь состоит в том, чтобы научить это делать планомерно, а это достигается, как известно, комбинированием всех простых множителей, входящих в разложение данного составного числа, по одному, по два, по три и т. д., перемножением их в каждой группе (единичные группы составляют из простых делителей без повторения их; они дополняются ещё одним делителем — единицей).

Примерный план этой работы.

1. Разложение данного числа на простые множители:

$$72=2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3.$$

2. Составление таблицы всех делителей числа 72 по группам:
   а) единичные группы: 1; 2; 3;
   б) парные группы: 4; 6; 9;
   в) тройные группы: 8; 12; 18;
   г) четверные группы: 24; 36;
   д) пятерные группы: 72.
3. Составление общей таблицы делителей числа 72:

Д. (72) :1; 2; 3; 4; 6; 8; 9; 12; 18; 24; 36; 72.

(Символ Д.(72) надо понимать, как «делители числа 72».)

В классной работе достаточно рассмотреть ещё только один такой пример (составить таблицу всех делителей данного числа, например 108), так как вопрос не представляет для учащихся каких-либо затруднений; развитие необходимых навыков следует перенести на самостоятельную работу учащихся, преимущественно домашнюю. Попутно можно указать учащимся, что таблицу всех делителей данного числа можно сразу записывать, минуя записи делителей по группам.

Составление таблицы всех делителей данного числа представляет собой только подготовительную работу. Более важное значение имеет дальнейшая работа — выделение **общих делителей** двух данных чисел, а среди них — **наибольшего общего делителя** их. Чтобы внести целесообразность в эту работу, следует взять сократимую дробь, например $\frac{72}{96}$, составить таблицу всех делителей каждого члена её, выписать все **общие делители** их; на каждый из них можно сократить дробь.

Примерный ход этой работы:

$$\frac{72}{96}$$

1) $72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$.
   $96 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$.
2) Д. (72): 1; 2; 3; 4; 6; 8; 9; 12; 18; 24; 36; 72.
   Д. (96): 1; 2: 3; 4; 6; 8; 12; 16; 24; 32; 48; 96.
3) О. Д. (72 и 96): 1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24.

Учащиеся сокращают данную дробь $\frac{72}{96}$ на каждый из этих общих делителей и убеждаются в том, что только при сокращении её на наибольший общий делитель числителя и знаменателя получается в результате несократимая дробь $\left(\frac{3}{4}\right)$.

Преподаватель обращает внимание учащихся на то, что для сокращения дроби нужны не все делители числителя и знаменателя, а только общие, а из общих особо важное значение имеет наибольший общий делитель (почему?). Как же можно найти его? Нетрудно догадаться, что каждый общий делитель составляется из общих простых множителей, входящих в разложения числителя и знаменателя дроби. Учащиеся выписывают общие простые множители из обоих разложений и, комбинируя их по одному, по два, по три и по четыре, действительно получают все общие делители 72 и 96: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$; О. Д. (72 и 96): 1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24.

При этом особо отмечается, что наибольший общий делитель составляется из всех общих простых множителей, входящих в разложение и числителя, и знаменателя дроби. В связи с этим полезно ещё раз подчеркнуть, что после сокращения дроби на наибольший общий делитель числителя и знаменателя, т. е. на все общие простые множители их, в числителе и в знаменателе больше не останется общих множителей или делителей, а потому в результате и получается несократимая дробь. Члены такой дроби называются взаимно простыми числами, т. е. не имеющими общих делителей.

Решение двух-трёх таких же задач подтверждает, что выгоднее всего дробь сокращать на наибольший общий делитель числителя и знаменателя её, после чего сразу получается несократимая дробь. Как его найти или составить? Преподаватель с помощью последовательно поставленных вопросов помогает учащимся сделать следующие выводы:

1) сокращение дроби производится делением числителя и знаменателя её на общие делители;

2) наибольший общий делитель, как общий делитель, состоит из общих простых множителей, а как наибольший — состоит из всех общих множителей, которые входят в разложения числителя и знаменателя дроби;

3) поэтому, чтобы найти наибольший общий делитель числителя и знаменателя данной дроби, надо:

а) разложить каждый из них на простые множители;

б) выписать все общие простые множители из обоих разложений и перемножить их; произведение их является наибольшим общим делителем;

в) числитель и знаменатель дроби разделить на наибольший общий делитель.

Для закрепления и развития необходимых навыков учащиеся решают задачи: а) на сокращение дробей, б) на сравнение сократимых дробей и в) на нахождение наибольшего общего делителя трёх и более данных чисел. При этом необходимо заставлять учащихся внимательно всматриваться в данные числа, чтобы без лишних операций сразу находить наибольший общий делитель таких чисел: 300 и 500, 450 и 600, 36 и 24, 48 и 16 и т. п.

В заключение следует напомнить, что при сокращении многозначных дробей тем или иным способом учащиеся должны предварительно внимательно всматриваться в данные числа, которые являются членами дроби, проверять по таблице простых чисел, к какой группе чисел они относятся — простых или составных, и только после этого наметить наиболее целесообразный приём для сокращения дроби, если она сократимая. При этом надо приучать учащихся пользоваться известными признаками делимости чисел.

VIII. ПРИВЕДЕНИЕ ДРОБЕЙ К НАИМЕНЬШЕМУ ОБЩЕМУ ЗНАМЕНАТЕЛЮ И СОСТАВЛЕНИЕ НАИМЕНЬШЕГО ОБЩЕГО КРАТНОГО НЕСКОЛЬКИХ ЧИСЕЛ

Изучение делимости чисел в школьном курсе арифметики завершается введением понятия наименьшего общего кратного нескольких чисел. Это понятие затем, как известно, применяется при приведении дробей к наименьшему общему знаменателю, а это последнее непосредственно связано со сложением и вычитанием дробей.

Приведение дробей к наименьшему общему знаменателю является весьма трудным делом, которое требует от учащихся ясного и отчётливого понимания этого преобразования и хорошего развития соответствующих навыков. И то и другое они могут приобрести только при условии большой работы над этим материалом и в течение достаточно длительного времени.

В соответствии с этим приведение дробей к наименьшему общему знаменателю изучается в школе три раза: тотчас же после сокращения дробей, как непосредственное применение главного свойства дроби (до сложения и вычитания дробей), затем при изучении сложения дробей и, наконец, при вычитании их. Эффективность этой работы значительно усилится, если при первом прохождении этого преобразования дробей учащиеся будут иметь возможность теснейшим образом связать понятие наименьшего общего знаменателя дробей с понятием наименьшего общего кратного нескольких чисел, как это и будет сделано в дальнейшем изложении. Больше всего затруднений учащиеся испытывают при нахождении наименьшего общего кратного знаменателей всех данных дробей. Здесь им приходится усвоить и слить воедино два новых понятия: понятие наименьшего общего знаменателя данных дробей и понятие наименьшего общего кратного нескольких чисел.

Основная очередная задача в курсе арифметики — это приведение дробей к наименьшему общему знаменателю; с разрешения её и надо начинать работу. Попутно будет постепенно выявляться свойство общего знаменателя как наименьшего кратного знаменателей. В связи с этим встаёт такой вопрос: чем оправдать в сознании учащихся необходимость этого нового преобразования дробей, если сложение и вычитание их ёще не изучается? Задачи на сравнение дробей с разными числителями и знаменателями в большинстве случаев для своего разрешения требуют приведения их к наименьшему общему знаменателю или числителю. Эти задачи и следует теперь поставить на очередь: они будут служить стимулом для введения нового преобразования дробей — приведения их к наименьшему общему знаменателю; решение этих задач будет служить также средством для развития и закрепления соответствующих навыков. Таким образом, сохраняется достаточно строгая последовательность в изучении курса дробей в тесной и непосредственной связи с необходимыми понятиями, составляющими содержание школьного курса учения о делимости чисел.

Преподаватель предлагает в порядке повторения две-три задачи на сравнение дробей с равными знаменателями $\left(\frac{5}{21}\text{ и }\frac{11}{21}\text{ или }\frac{9}{28},\ \frac{19}{28}\text{ и }\frac{13}{28}\right)$; учащиеся решают их с устными объяснениями и повторяют формулировку правила. Затем для этой же цели даются дроби, у которых числители и знаменатели разные, но знаменатель одной из них делится без остатка на знаменатели других дробей, например: $\frac{5}{7}$ и $\frac{9}{14}$ или $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{12}$ и $\frac{11}{24}$. Учащиеся внимательно всматриваются в каждую дробь первой задачи и приходят к заключению, что эти дроби непохожи на те, которые были в предыдущих задачах (у них разные числители и разные знаменатели, и каждая дробь несколько меньше половины единицы), а потому к решению этой задачи нельзя применить ни одно из известных правил. Тогда преподаватель предлагает учащимся ещё раз обратить особое внимание на знаменатели данных дробей: они замечают, что второй знаменатель вдвое больше первого, а потому он делится на первый без остатка.

«Можно ли в этих дробях знаменатели сделать равными?» — (Можно: для этого надо или 7 умножить на 2 или 14 разделить на 2), «Как изменится при этом каждая дробь и почему?»

Учащиеся выполняют намеченное преобразование первой дроби и получают решение задачи:

$$\begin{array}{c|c|l} \frac{5}{7} & \frac{5\cdot 2}{7\cdot 2}=\frac{10}{14} & \frac{10}{14}>\frac{9}{14}\text{; следовательно, и }\frac{5}{7}>\frac{9}{14}. \\ \frac{9}{14} & \frac{9}{14} & \end{array}$$

Точно также они решают вторую задачу, повторяя предыдущие рассуждения и преобразования, потом третью, четвёртую и т. д.

Под руководством преподавателя учащиеся делают общий обзор решения последних задач, запись которых должна сохраняться на классной доске, и по отдельным вопросам формулируют выводы:

1. Данные дроби имели разные числители и разные знаменатели.

2. Наибольший знаменатель был числом, кратным всем остальным знаменателям.

3. Вследствие этого в каждой задаче можно было уравнять все знаменатели, умножая оба члена дроби на особый дополнительный множитель.

4. Это уравнивание знаменателей данных дробей называют приведением дробей к общему знаменателю.

5. Наибольший знаменатель одной из данных дробей в каждой задаче и служит общим знаменателем всех данных дробей в этой задаче.

6. Тот же наибольший или общий знаменатель, который делится на каждый из остальных знаменателей, является наименьшим числом, кратным всем знаменателям (например: во второй задаче 24— наименьшее число, которое делится без остатка на 8, 12 и 24, так как существует ещё множество других чисел, делящихся на те же числа, как-то: 48, 72, 96 и т. п.).

Такое число называют наименьшим общим кратным данных чисел — всех знаменателей данных дробей, и кратко записывают это так: НОК. (7;14) = 14; НОК (8; 12; 24) = 24.

7. Следовательно, общий знаменатель двух или нескольких данных дробей в то же время является наименьшим общим кратным всех знаменателей данных дробей.

8. Поэтому общий знаменатель данных дробей точнее называют наименьшим общим знаменателем и записывают так: НОЗ.

9. Уравнение знаменателей в данных дробях называют приведением дробей к наименьшему общему знаменателю.

После этого учащиеся решают ещё несколько задач на сравнение дробей с помощью приведения их к наименьшему общему знаменателю, каковым служит наибольший знаменатель одной из данных дробей. Но весь процесс теперь значительно сокращается. Попутно преподаватель путём отдельных вопросов заставляет учащихся объяснять новые понятия НОК и НОЗ (например, почему общий знаменатель в каждой задаче называется наименьшим? Общим? Кратным?).

Затем преподаватель даёт новые задачи на сравнение дробей иной структуры: наибольший знаменатель одной из них не есть число, кратное всем остальным знаменателям, но его легко можно сделать таковым после удвоения или утроения, например: $\frac{7}{12}$ и $\frac{11}{18}$. Как и при решении предыдущих задач, учащиеся сразу обратятся к большему знаменателю 18, но он не делится на 12. Как же уравнять знаменатели этих дробей? Если никто из учащихся не догадается, как это можно сделать, то преподаватель подаёт мысль о том, что во второй дроби можно доли сделать вдвое мельче, а число их — вдвое больше без изменения величины дроби (как это можно сделать?). Тогда учащиеся увидят, что вновь полученный знаменатель 36 будет наименьшим общим знаменателем (почему?); дальнейшее решение задачи известно:

			Так же решаются задачи:
$\frac{7}{12}$	$\frac{7\cdot3}{12\cdot3}=\frac{21}{36}$	$\frac{21}{36}<\frac{22}{36}$	$\frac{11}{15}$ и $\frac{7}{10}$ или
		следовательно,	
$\frac{11}{18}$	$\frac{11\cdot2}{18\cdot2}=\frac{22}{36}$	$\frac{7}{12}<\frac{11}{18}$	$\frac{5}{6}$ и $\frac{19}{21}$ и т. п.

В следующих задачах того же типа трудности постепенно возрастают: или увеличивается число дробей, данных для сравнения их (три, четыре и больше дробей), или увеличивается число попыток при нахождении НОЗ посредством умножения наибольшего из них на целые числа, например: $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{12}$ и $\frac{9}{16}$ или $\frac{4}{15}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{5}{12}$ и $\frac{5}{6}$ и т. п. При решении первой из этих задач учащиеся опять выделяют больший знаменатель 16, но он не делится на второй знаменатель без остатка; после удвоения его получается число 32, которое делится опять только на 8, но не делится на 12; и только после утроения получится число 48, кратное 8 и 12. Во второй задаче больший знаменатель 15 только после умножения его на 4 в произведении даст число 60, кратное всем знаменателям; оно и будет НОЗ.

Долго задерживаться на таких задачах не следует, так как решение их указанным способом по мере возрастания трудности становится громоздким и утомительным, а потому и нерациональным. Эти задачи зато помогают выявить основную цель работы: в сознании учащихся создаётся отчётливое представление о том, что такое НОЗ нескольких дробей и что он является НОК всех знаменателей данных дробей; достаточно хорошо также усваивается самый процесс приведения дробей к общему знаменателю, в частности, нахождение д о п о л н и т е л ь н ы х множителей.

На следующем этапе работы учащиеся продолжают решать задачи того же содержания (сравнение дробей); в них входят дроби последнего типа. Но приведение дробей к общему знаменателю выполняется более общим приёмом с помощью простых множителей, на которые предварительно разлагаются все знаменатели данных дробей. С этой целью преподаватель может или взять одну из последних решённых задач или предложить новую задачу и решить её иным способом.

Если преподаватель выбирает первый вариант и, в частности, берёт задачу, в которой знаменателями были числа 6, 10, 12 и 15, то на ряд его вопросов учащиеся в порядке повторного обзора уже решённой задачи дают такие ответы:

1. Для сравнения данные дроби надо привести к наименьшему общему знаменателю.

2. НОЗ данных дробей есть в то же время и НОК всех знаменателей тех же дробей.

3. Это значит, что НОК делится на каждый знаменатель в отдельности, т. е. на 6, 10, на 12 и на 15, а потому делится и на каждый простой множитель, входящий в разложение каждого знаменателя.

4. Следовательно, НОК всех знаменателей должно состоять из всех простых множителей, каждый из которых входит в разложение хотя бы одного знаменателя.

5. Поэтому для нахождения НОК всех знаменателей данных дробей надо знаменатель каждой дроби разложить на простые множители:

$$6=2\cdot3.$$
$$10=2\cdot5.$$
$$12=2\cdot2\cdot3.$$
$$15=3\cdot5.$$

6. Чтобы искомое число, т. е. НОК всех знаменателей делилось на 6, на 10, на 12 и на 15, в него должны входить все те простые множители, которые в отдельности входят хотя бы в один знаменатель, т. е. 2 и 3 из первого знаменателя, 5 — из второго и 2 — из третьего (учащиеся подчёркивают указанные множители в каждом разложении).

После перемножения всех выделенных множителей получится число 60 — наименьшее общее кратное всех знаменателей данных дробей (что это значит?):

$$\text{НОК }(6,\ 10,\ 12,\ 15)=2\cdot3\cdot5\cdot2=60.$$

7. Это число 60 есть и НОЗ данных дробей, который был найден раньше иным путём (как?).

8. Чтобы привести все дроби к общему знаменателю 60, надо оба члена каждой дроби умножить на особый дополнительный множитель, который находится для каждой дроби делением числа 60 на знаменатель этой дроби.

Учащиеся решают достаточное число таких же задач на сравнение дробей с помощью приведения их к НОЗ для развития и закрепления навыков.

Дополнительные множители для каждой дроби на первых порах можно находить так, как это было сделано в предыдущих задачах, — делением НОК на знаменатель соответствующей дроби, этот способ является самым простым и понятным для учащихся и не требует никаких дополнительных записей. В дальнейшей работе можно указать и другой прием определения дополнительных множителей с помощью сравнения разложения НОК с разложениями каждого из знаменателей, произведение всех простых множителей, которые входят в разложение НОК, за исключением тех множителей, которые входят в разложение того или иного знаменателя дроби, есть дополнительный множитель соответствующей дроби.

Например:

$\frac{29}{104}$	$104 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 13;$	$5 \cdot 3 \cdot 3 = 45$ — доп. множ. 1-й дроби
$\frac{31}{130}$	$130 = 2 \cdot 5 \cdot 13;$	$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 36$ — доп множ. 2 й дроби
$\frac{37}{117}$	$117 = 3 \cdot 3 \cdot 13.$	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 40$ — доп множ. 3-й дроби

$$\text{Н.О.К.}\ (104,\ 130,\ 117) - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 13 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 = 2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 3 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5.$$

Этот способ наиболее практичный и при некотором навыке не требует никаких дополнительных записей, но он оказывается довольно трудным для учащихся. Поэтому в самостоятельной работе можно предоставить им полную свободу при выборе того или иного приема для нахождения дополнительных множителей.

Имеется ещё одна группа дробей, требующая особого внимания к себе: это — дроби, знаменатели которых суть числа взаимно простые.

Для решения задачи на сравнение дробей $\frac{5}{12}$ и $\frac{12}{25}$ учащиеся тем или иным способом найдут НОК обоих знаменателей (300) и дополнительные множители для каждой дроби, при этом они легко заметят, что всю эту операцию можно было сделать значительно проще и короче: общий знаменатель есть произведение обоих знаменателей данных дробей, а дополнительным множителем для каждой дроби служит знаменатель другой дроби Преподаватель выясняет причину этого: разложив знаменатели обеих дробей на простые множители, можно увидеть, что в этих разложениях нет ни одного общего множителя, поэтому при составлении НОК знаменателей данных дробей выписываются все множители обоих разложений как «недостающие». Такие числа, которые не имеют общих множителей или делителей, называются **взаимно простыми** (учащиеся приводят примеры таких чисел и припоминают, что числитель и знаменатель несократимой дроби тоже называются взаимно простыми числами).

Эта группа дробей с взаимно простыми знаменателями рассматривается после того, как учащиеся познакомятся со всеми способами приведения дробей к общему знаменателю. В школьной практике нередки случаи, когда преподаватели именно с этих дробей начинают изучение приведения их к наименьшему общему знаменателю, исходя из того соображения, что в данном случае это преобразование дробей производится очень просто. Но эта кажущаяся легкость и простота обманчивы и нередко приводят к нежелательным последствиям. после знакомства с этим простым приемом учащиеся очень недружелюбно относятся к другим способам того же преобразования (в частности, с помощью разложения всех знаменателей данных дробей на простые множители), считая их ненужными. При этом они не всегда отчетливо устанавливают связь между общим знаменателем данных дробей и наименьшим общим кратным всех знаменателей тех же дробей, т. е. они не усваивают мысль, что с помощью перемножения всех знаменателей дробей хотя и получается общий знаменатель, но он очень редко бывает при этом наименьшим.

В дальнейшем преподаватель дает задачи на приведение дробей к наименьшему общему знаменателю так называемого «смешанного характера»; при решении их учащиеся должны предварительно проводить тщательный анализ знаменателей данных дробей, чтобы наметить наиболее удачный способ для разрешения поставленной задачи.

В порядке закрепления навыков приведения дробей к наименьшему общему знаменателю, а также нахождения наименьшего общего кратного двух или нескольких чисел необходимо познакомить учащихся с простейшими приемами сравнения дробей с помощью приведения их к общему числителю. Такое преобразование дробей в школьной практике обычно совсем не применяется; нет таких задач и в школьных задачниках.

Однако, если встретится задача, в которой надо сравнить две дроби $\frac{13}{56}$ и $\frac{26}{105}$, то учащиеся вынуждены будут для решения её или вести очень громоздкие рассуждения, или привести эти дроби к общему знаменателю, что тоже представляет большие затруднения в данном случае. В тоже время сравнение числителей этих дробей сразу и очень легко приводит к решению задачи без всяких письменных выкладок.

Приведение дробей к наименьшему общему числителю в дальнейшем курсе арифметики применяется очень редко; но следует иметь в виду, что одна из задач школьного курса арифметики состоит в том, чтобы подготовить учащихся к изучению дальнейшего курса математики и смежных с нею дисциплин (физики, химии и др.), а там такие случаи могут иметь место, например при решении системы неравенства первой степени ($5x > 3$ и $16x > 9$), а также при решении неравенств второй и выше второй степени, например: $(3x - 6) \cdot (17x - 9) < 0$ или $(5x - 2) \cdot (9x - 4) \cdot (21x - 10) > 0$. Кроме того, приведение дробей к наименьшему общему числителю хотя бы в простейших случаях служит дополнительным и целесообразным поводом к постановке новых задач, связанных с нахождением наименьшего общего кратного нескольких чисел

Достаточно познакомить учащихся с самим существом дела: 1) дроби можно приводить не только к наименьшему общему знаменателю, но и к наименьшему общему числителю; 2) выполняется это теми же приёмами, которые известны учащимся; 3) это преобразование дробей имеет иногда практическое значение при сравнении некоторых видов дробей.

Особых уроков на это отводить не следует, а в задачи на сравнение дробей, которые обычно решаются приведением их к наименьшему общему знаменателю, надо включать и такие дроби, которые более удобно сравнивать с помощью приведения их к наименьшему общему числителю.

С этой целью преподаватель даёт задачу: какая из двух дробей больше $\frac{11}{14}$ или $\frac{22}{29}$? Можно с уверенностью сказать, что учащиеся приведут эти дроби к НОЗ и дадут требуемый ответ $\left(\frac{319}{406} > \frac{308}{406}\right)$. Преподаватель предлагает обратить внимание на числители данных дробей. Учащиеся замечают, что числитель второй дроби вдвое больше числителя первой дроби. Можно предположить, что учащиеся сами догадаются **уравнять** числители обеих дробей без и менения величины их, в крайнем случае к этому преобразованию подведёт преподаватель с помощью вопросов), решение получается в таком виде:

$\frac{11}{14}$	$\frac{11\cdot 2}{14\cdot 2}=\frac{22}{28}$;	$\frac{22}{28}>\frac{22}{29}$; следовательно:
$\frac{22}{29}$	$\frac{22}{29}$;	$\frac{11}{14}>\frac{22}{29}$.

Всю эту работу учащиеся могут провести устно без всяких записей. Они убеждаются в простоте этого приёма

Решение следующих задач того же типа можно проводить в порядке устного счета. После некоторого навыка такие задачи даются вперемежку с задачами, которые решаются с помощью привед ния данных дробей к НОЗ. Это заставит учащихся внимательно производить предварительный анализ структуры данных дробей, чтобы наметить тот или иной рациональный приём решения задачи.

В заключение ещё раз следует напомнить, что в приведённом изложении всё учение о делимости чисел было тесно связано с изучением дроби, в частности, с изучением сравнения дробей, и первое было подчинено второму. Благодаря этому учение о делимости чисел в сознании учащихся приобретает достаточно конкретный и непосредственно применимый характер. Но это ни в какой мере не исключает возможности иного порядка изучения обеих этих тем: сначала учение о делимости чисел, а потом дроби, как этот материал расположен в существующих учебниках арифметики.

ГЛАВА IV

ДЕЙСТВИЯ НАД ОБЫКНОВЕННЫМИ ДРОБЯМИ

Изучение первых четырёх арифметических действий над обыкновенными дробями должно быть организовано так, чтобы учащиеся всё время видели непосредственное и естественное продолжение предыдущей работы — изучение действий над целыми числами. С этой целью изучение каждого действия над обыкновенными дробями надо начинать с краткого обзорного повторения того же действия над целыми числами.

Благодаря этому преподаватель может восполнить те пробелы в знаниях и навыках учащихся, которые он будет обнаруживать в процессе работы. С другой стороны, при изучении действий над обыкновенными дробями учащиеся должны отчётливо понимать и всё то новое, что содержит арифметика дробей по сравнению с арифметикой целых чисел; так, они должны хорошо усвоить мысль, что: 1) при сложении и вычитании дробей с равными знаменателями складываются и вычитаются только числители при сохранении общего знаменателя; 2) при выполнении тех же действий над дробями с разными знаменателями требуется предварительное преобразование дробей — приведение их к наименьшему общему знаменателю; 3) наконец, они должны знать новое истолкование действий умножения и деления чисел в тех случаях, когда множителем и делителем являются правильные дроби, а затем смешанные числа.

Эти новые идеи в курсе арифметики дробей представляют для учащихся большие затруднения, которые возникают в связи с новым истолкованием прямых действий над дробями — сложения и умножения их. Сложение дробей имеет, в сущности, тот же смысл, что и сложение целых чисел; однако запись дробей в виде двух целых чисел (числитель и знаменатель) иногда приводит учащихся к нелепым ошибкам. при сложении дробей они складывают не только числители, но и знаменатели их. Большие технические трудности бывают при сложении и вычитании дробей с разными знаменателями, когда приходится предварительно приводить дроби к наименьшему общему знаменателю. Умножение дробей и смешанных чисел на целое число сохраняет прежний смысл — повторение данного числа слагаемым несколько раз; а вот умножение данных чисел на правильную дробь требует уже особого нового истолкования операции умножения, что и является, пожалуй, наибольшей трудностью при изучении дробей. Вычитание и деление в арифметике дробей определяются и истолковываются как действия, обратные сложению и умножению дробей.

Чтобы подвести учащихся к необходимости изучения того или иного действия над дробями, надо для этой цели давать им так называемые «целесообразные задачи» с конкретным содержанием. Эти задачи обязательно должны быть простыми, т. е. содержать только одно действие над двумя данными числами. С помощью таких задач выясняется основной смысл того или иного действия. Для вывода соответствующего правила и осознания его, а также для развития необходимых навыков применения правила следует давать числовые примеры. При подборе и составлении таких задач числовой материал в них располагается в определённой и строгой последовательности: 1) для вывода правила числовой материал даётся примерно одной и той же структуры, чтобы учащиеся по записи действия могли сами сделать некоторые наблюдения и создать соответствующий вывод; 2) для развития навыков числовой материал подбирается в порядке постепенного нарастания трудностей. Изучение каждого действия завершается решением как текстовых задач, так и численных примеров.

I. СЛОЖЕНИЕ ДРОБЕЙ

Для изучения сложения дробей можно наметить такой примерный план:

1) краткий повторительный обзор сложения целых чисел;

2) сложение двух и нескольких дробей с равными, потом с разными знаменателями;

3) частные случаи сложения дробей;

4) основные свойства сложения дробей и суммы их

1. Краткий повторительный обзор сложения целых чисел

Преподаватель предлагает одну-две задачи с конкретным содержанием: «В первый день заготовительной кампании на ссыпной пункт было сдано сначала 2 139 *ц* зерна, потом ещё 868 *ц*, а во второй день — на 1 567 *ц* больше, чем в первый день. Сколько зерна было сдано на ссыпной пункт во второй день?» (Такую сложную задачу преподаватель может дать и в виде двух простых задач.) Учащиеся без затруднений записывают решение этой задачи двумя строчками:

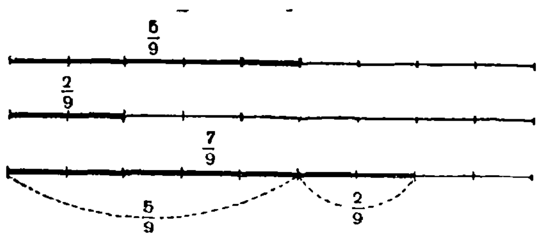
$$2\,139 + 868 = 3\,007; \ (3\,007 \ ц \text{ сдано в первый день});$$
$$3\,007 + 1\,567 = 4\,574; \ (4\,574 \ ц \text{ сдано во второй день}).$$

По вопросам преподавателя они называют слагаемые и сумму, формулируют правило сложения многозначных чисел и основные свойства действия сложения (оно всегда выполнимо) и суммы (переместительный и сочетательный законы). Всё это сопровождается буквенными записями: $a + b = s$; $a + b = b + a$ и т. п.

2. Сложение двух, трёх и более дробей

Учащиеся умеют складывать дроби с равными или с кратными знаменателями (по курсу начальной школы). Это уменье и надо сделать отправным пунктом.

Сначала решаются задачи (текстовые и числовые примеры) на сложение двух и нескольких дробей с равными знаменателями. Эти решения сопровождаются подробными устными объяснениями, например: $\frac{5}{9} + \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$; пять девятых долей на две такие же доли составят в сумме семь девятых долей (ударение делается на том слове, которое характеризует количество долей). Для предупреждения возможности появления той ошибки, о которой была речь раньше (сложение не только числителей, но и знаменателей), один-два примера надо решить графически (см. черт. 17).



Черт. 17.

Затем учащиеся решают задачи на сложение нескольких дробных слагаемых, например:

«На новом участке весной разделана земля под посевы и посадки: $\frac{4}{15}$ *га* под огурцы, $\frac{2}{15}$ *га* под капусту, $\frac{7}{15}$ *га* под картофель, $\frac{8}{15}$ *га* под ягоды и $\frac{1}{15}$ *га* под цветы. Сколько обработано земли?»

На вопросы преподавателя учащиеся отвечают:

1. Задача решается действием сложения (и записывают это действие):

$$\frac{4}{15} + \frac{2}{15} + \frac{7}{15} + \frac{8}{15} + \frac{1}{15} =$$

2. Все дроби имеют равные знаменатели, т. е. составлены из одинаковых долей (из пятнадцатых).

3. Сложить эти дроби — значит сложить их числители (подсчитать число одинаковых долей во всех слагаемых дробях):

$$\frac{4}{15}+\frac{2}{15}+\frac{7}{15}+\frac{8}{15}+\frac{1}{15}=\frac{4+2+7+8+1}{15}=\frac{22}{15}.$$

4. Полученная сумма дробей есть неправильная дробь; поэтому надо исключить из неё целое число: $\frac{22}{15}=1\frac{7}{15}$.

5. Ответ на вопрос задачи записывается особо.

Ответ. $1\frac{7}{15}$ *га обработано* земли.

После решения задач даётся несколько числовых примеров, которые решаются с таким же подробным объяснением.

Последующий обзор решения всех этих задач позволяет учащимся сделать вывод правила сложения дробей с равными знаменателями.

Для закрепления и развития навыков учащиеся решают числовые примеры, применяя выведенное правило и постепенно заучивая его. Такое же задание они получают в порядке самостоятельной работы в классе и дома.

Обобщается работа буквенной записью:

$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}+\frac{d}{b}=\frac{a+c+d}{b}$, и проверяется числовыми подстановками с последующим вычислением результата.

Сложение дробей с разными знаменателями начинается с того случая, когда наибольший знаменатель одной из дробей есть и наименьшее общее кратное всех знаменателей данных дробей.

Сначала учащиеся решают простую текстовую задачу, в которой требуется сложить две дроби, например: $\frac{11}{18}$ и $\frac{8}{9}$. Они записывают условия задачи, выясняют смысл её, определяют действие, которым она решается, и записывают решение:

$$\frac{11}{18}+\frac{8}{9},$$ но указывают, что

1) эти дроби имеют разные знаменатели (у них разные доли);

2) складывать можно только дроби с равными знаменателями, т. е. дроби, состоящие из равных долей;

3) поэтому обе дроби надо привести к общему знаменателю, т. е. выразить их в одинаковых долях;

4) наибольший знаменатель (18) делится на 9 и на 18, следовательно, он может быть и общим знаменателем;

5) числитель и знаменатель второй дроби надо умножить на 2, чтобы выразить её в восемнадцатых долях;

6) обе дроби имеют теперь равные знаменатели и их можно сложить по известному правилу:

$$\frac{11}{18}+\frac{8}{9}=\frac{11}{18}+\frac{8\cdot 2}{9\cdot 2}=\frac{11}{18}+\frac{16}{18}=\frac{11+16}{18}=\frac{27}{18}=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}.$$

В процессе решения этой задачи и нескольких числовых примеров на сложение трёх и более дробей (например, $\frac{16}{27}+\frac{7}{18}+\frac{31}{54}$) учащиеся составляют правило сложения.

Дальнейшее усложнение работы состоит в том, что слагаемые дроби, как и раньше, имеют разные знаменатели, но их Н. О. З. найти нетрудно, хотя он и не совпадает с наибольшим знаменателем.

$$\frac{5}{12}+\frac{7}{18}$$

Прежде всего учащиеся должны отметить, что в таком виде эти дроби сложить нельзя (почему?). Надо предварительно привести их к общему знаменателю. Наибольший знаменатель (18) не может быть общим знаменателем (почему?). Как же быть? Некоторые учащиеся, вспоминая такой же случай при сравнении дробей, могут предложить умножить 18 на 2, что даёт в произведении число 36, которое и можно принять за общий знаменатель (почему?). Дальнейший ход работы будет ясен для всех учащихся:

$$\frac{5\smile^{3}}{12}+\frac{7\smile^{2}}{18}=\frac{15}{36}+\frac{14}{36}=\frac{15+14}{36}=\frac{29}{36}.$$

Учащиеся решают такие примеры в достаточном количестве до тех пор, пока не усвоят полностью этого процесса. В заключительной беседе они просматривают несколько последних решений и опять в устной форме составляют правило сложения таких дробей по отдельным вопросам преподавателя; затем правило закрепляется с помощью решения числовых примеров.

Чтобы перейти к наиболее общему случаю сложения дробей с разными знаменателями, преподаватель даёт один или два числовых примера, в которых наименьший общий знаменатель данных дробей получается только после ряда попыток найти его подбором; например:

$$\frac{37}{80}+\frac{19}{36}.$$

Учащиеся сами могут предложить иной способ для нахождения наименьшего общего знаменателя в этом случае — с помощью простых множителей, на которые разлагается предварительно каждый знаменатель. Запись этой работы примет такой вид:

$$\frac{37}{80}+\frac{19}{36}=\frac{37\smile^{9}}{80}+\frac{19\smile^{20}}{36}=\frac{333}{720}+\frac{380}{720}=\frac{333+380}{720}=\frac{713}{720}.$$

$80=2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot5.$ | Н.О.З.: $2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot5\cdot3\cdot3=720.$
$36=2\cdot2\cdot3\cdot3.$

Хотя этот процесс тоже длительный, но учащиеся довольно скоро оценивают его по заслугам и охотно применяют при сложении и вычитании дробей.

В дальнейшем надо заставлять учащихся каждую новую задачу начинать с анализа структуры данных дробей, сопоставляя их знаменатели, с тем, чтобы наметить наиболее удобный приём для приведения всех данных дробей к наименьшему общему знаменателю. С этой целью преподаватель в число упражнений для развития и закрепления навыков включает дроби, требующие применения рассмотренных правил.

Последнюю группу дробей с разными знаменателями составляют те дроби, знаменатели которых суть числа взаимно простые (например: $\frac{5}{9}+\frac{5}{14}$). Учащиеся выясняют, что знаменатели дробей не содержат общих простых множителей или делителей, указывают рациональный приём для приведения таких дробей к наименьшему общему знаменателю, что им известно из предыдущей работы.

Решение следующих задач на сложение дробей с такими же знаменателями требует от учащихся более внимательного предварительного анализа данных дробей, с постановкой дополнительного вопроса: имеют ли знаменатели дробей общие множители? Понятно, что ответ на этот вопрос можно получить только в простейших случаях, применяя известные признаки делимости чисел, а также пользуясь таблицей простых чисел.

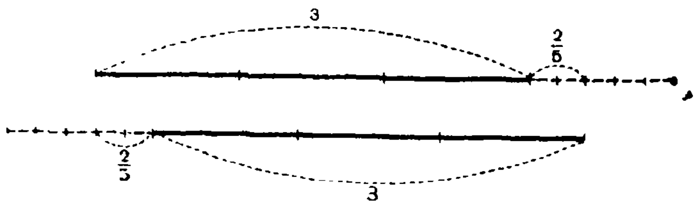
3. Частные случаи сложения дробей

Сложение дробей с равными и с разными знаменателями, в сущности, исчерпывает всё содержание данной темы — сложение дробей. В самом деле, если хотя бы одно из слагаемых будет целым или смешанным числом, то в самом общем случае каждое из них можно обратить в неправильную дробь, и таким образом, работа опять сведётся к сложению дробей.

Понятно, что практически при решении задач никто так не делает и делать этого не следует. Поэтому с учащимися надо рассмотреть те частные случаи, которые могут встретиться на практике.

1. Сложение целых чисел и правильных дробей. Преподаватель предлагает учащимся простую текстовую задачу на сложение двух чисел, например $16+\frac{3}{4}$. Решение записывается в виде суммы двух чисел — целого и правильной дроби. Учащиеся уже знают, что эту запись условились заменять укороченной записью, опуская знак плюс: $16+\frac{3}{4}=16\frac{3}{4}$; полученный результат называется смешанным числом.

Затем преподаватель даёт или текстовую задачу, или числовые примеры на сложение целого числа с дробью, а затем на сложение той же дроби и того же целого числа (например: $3+\frac{2}{5}$ и $\frac{2}{5}+3$). Очень полезно графически решить эти задачи см. черт. 18).



Черт. 18.

Получается один и тот же результат (вычислением и графически):

$$3+\frac{2}{5}=3\frac{2}{5} \text{ и } \frac{2}{5}+3=3\frac{2}{5}.$$

Преподаватель обращает внимание учащихся на то обстоятельство, что в последних двух задачах сумма целого числа и дроби обладает свойством переместительности, как и сумма двух целых чисел. Эту мысль можно записать в более общем виде: $a+\frac{b}{c}=\frac{b}{c}+a$ с последующей подстановкой числовых значений и с вычислениями. При этом надо сообщить учащимся, что при буквенной записи знак плюс не опускается, как это делают при числовой записи.

2. Сложение целых и смешанных чисел не вызывает никаких затруднений у учащихся. При решении первых примеров смешанное число рекомендуется

переписать в виде суммы целого числа и дроби $\left(\text{например: } 27+35\frac{3}{5}=27+\right.$ $\left.+35+\frac{3}{5}\right)$. Учащиеся, руководясь здравым смыслом, сами наметят приём сложения: сначала складывают целые числа, потом полученную сумму и дробь, что может быть записано так:

$$27+35\frac{3}{5}=27+35+\frac{3}{5}=(27+35)+\frac{3}{5}=62+\frac{3}{5}=62\frac{3}{5}.$$

После решения двух-трёх примеров учащиеся формулируют правило, которое и применяют при решении следующих задач.

При выводе правила преподаватель опять обращает внимание учащихся на то, что здесь имеет место сочетательный закон сложения чисел.

При сложении смешанного числа и целого приходится применять последовательно два закона сложения — переместительный и сочетательный:

$$32\frac{4}{7}+19=32+\frac{4}{7}+19=32+19+\frac{4}{7}=(32+19)+\frac{4}{7}=51\frac{4}{7}.$$

Буквенная запись $\left(a+\frac{b}{c}\right)+d=(a+d)+\frac{b}{c}$ проверяется с помощью числовых подстановок.

3. Сложение смешанного числа и правильной дроби. В первых работах учащиеся могут смешанные числа писать в виде суммы целого числа и дроби; затем они постепенно будут сокращать записи. Подбор числовых примеров надо делать так, чтобы иметь возможность в процессе этой и следующей работы ещё раз повторить наиболее трудные случаи, которые были замечены при сложении дробей. Примеры записей:

$$1)\ 15\frac{3}{8}+\frac{7}{12}=15+\frac{3^{3}}{8}+\frac{7^{2}}{12}=15+\frac{9+14}{24}=15+\frac{23}{24}=15\frac{23}{24}.$$

$$2)\ 39\frac{7}{15}+\frac{3}{10}=39\ \frac{7^{2}}{15}+\frac{3^{3}}{10}=39\ \frac{14+9}{30}=39\ \frac{23}{30}.$$

4. Сложение смешанных чисел есть повторение уже известных правил.

$$3\frac{7}{12}+8\frac{3}{8}+5\frac{9}{16}=3+\frac{7^{4}}{12}+8+\frac{3^{6}}{8}+5+\frac{9^{3}}{16}=(3+8+5)+$$
$$+\frac{28+18+27}{48}=16+\frac{73}{48}=16+1\frac{25}{48}=17\frac{25}{48}.$$

После составления и формулировки правил запись можно значительно сократить, например:

$$42\frac{8}{15}+5\frac{5}{6}+28\frac{2}{5}=75\ \frac{16+25+12}{30}=75\ \frac{53}{30}=76\ \frac{23}{30}.$$

Для закрепления и развития навыков учащиеся решают текстовые задачи и числовые примеры на сложение дробей; при этом надо добиваться того, чтобы каждая задача решалась наиболее рациональным приёмом; это потребует от учащихся не механического применения того или иного общего приёма, а предварительной характеристики данных дробей, в частности, их знаменателей.

4. Основные свойства сложения и суммы дробей

Вся работа по изучению сложения дробей завершается выяснением основного свойства действия сложения дробей и основных свойств суммы дробей. С этой целью преподаватель заставляет учащихся вспомнить, что действие сложения целых чисел всегда выполнимо в области целых чисел (что это значит?), а потом ставит такой же вопрос относительно сложения дробей. Учащиеся рассуждают так: 1) если дроби имеют равные знаменатели, то для сложения их надо сложить только их числители, что всегда выполнимо (так как числители суть целые числа), и сохранить общий знаменатель; 2) если дроби имеют разные знаменатели, то всегда можно преобразовать их — привести к наименьшему общему знаменателю, что всегда можно выполнить, а потом можно их сложить по предыдущему; следовательно, действие сложения дробей всегда выполнимо в области дробных чисел.

Затем преподаватель заставляет учащихся припомнить, что сумма целых чисел обладает свойствами переместительности и сочетательности (учащиеся формулируют эти свойства, записывают их буквами, приводят соответствующие примеры и применение этих свойств при вычислениях), и попутно спрашивает, что наблюдалось при сложении целых чисел и дробей (результат — сумма не изменялась при перемене мест слагаемых). После этого преподаватель даёт такие задачи на сложение дробей, которые можно решать, применяя различную группировку слагаемых и перемещение их; учащиеся убеждаются, что умелое применение этих свойств значительно сокращает процесс вычисления.

Покажем это на примере:

$$12\frac{1}{2}^{\,7}+\frac{3}{14}+1\frac{1}{2}^{\,7}+\frac{5}{14}+\frac{3}{7}^{\,2}=13\frac{7+3+7+5+6}{14}=13\frac{28}{14}=15.$$

Так будет решать этот пример большинство учащихся. По получении ответа преподаватель предлагает ещё раз внимательно просмотреть все слагаемые и переместить их наиболее удобным образом; учащиеся сами могут предложить такой порядок:

$$12\frac{1}{2}+\frac{3}{14}+1\frac{1}{2}+\frac{5}{14}+\frac{3}{7}=\left(12\frac{1}{2}+1\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{3}{14}+\frac{5}{14}\right)+\frac{3}{7}.$$

Теперь виден план дальнейшей работы:

$$12\frac{1}{2}+\frac{3}{14}+1\frac{1}{2}+\frac{5}{14}+\frac{3}{7}=\left(12\frac{1}{2}+1\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{3}{14}+\frac{5}{14}\right)+$$
$$+\frac{3}{7}=14+\frac{4}{7}+\frac{3}{7}=14+1=15.$$

Все вычисления и преобразования производятся устно. Результат получается тот же. Учащиеся просматривают весь ход работы: сначала переместили слагаемые, затем сгруппировали их и выполнили сложение; таким образом, выясняется, что сумма дробей не меняет своей величины от перемены мест слагаемых и от различной группировки их.

Учащиеся решают ещё несколько подобных примеров.

Теперь они сразу начнут искать члены с одинаковыми знаменателями и в определённом порядке их группировать, все вычисления можно вести устно с последующей записью результатов.

Таким образом, учащиеся убеждаются не только в том, что сумма дробей не меняется от перестановки слагаемых и различной группировки их, но и в том, что применение этих свойств имеет большое практическое значение, упрощая все процессы вычисления.

Каждый закон можно записать в общем виде (с помощью букв) с последующей подстановкой числовых значений и вычислением:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b} \text{ и т. д.}$$

$$\frac{m}{n}+\frac{p}{q}+\frac{r}{s}=\left(\frac{m}{n}+\frac{p}{q}\right)+\frac{r}{s}=\frac{m}{n}+\left(\frac{p}{q}+\frac{r}{s}\right).$$

Наряду с этими двумя свойствами суммы следует отметить и изменения суммы в связи с изменениями величин слагаемых. Правда, эти изменения последних пока очень однообразны (к каждому из слагаемых можно прибавлять числа — целые или дробные), но важно отметить факт, что при изменении одного из слагаемых и сумма дробей изменяется так же, как и сумма целых чисел.

II. ВЫЧИТАНИЕ ДРОБЕЙ

При изучении вычитания дробей следует сохранить план работы, который был установлен при изучении сложения.

Преподаватель предлагает учащимся несколько текстовых простых задач с конкретным содержанием на вычитание целых чисел, каждая из которых содержит один из вопросов, решаемых вычитанием (найти остаток или разность или уменьшить данное число на другое число).

Учащиеся решают и выделяют основной вопрос задачи, устанавливают связь действия вычитания с действием сложения. При записи действия учащиеся называют каждое данное число и результат, а также устанавливают факт, что действие вычитания выполнимо только в том случае, когда уменьшаемое не меньше вычитаемого. Учащиеся с помощью преподавателя вспоминают и повторяют определение вычитания как действия, обратного сложению.

С помощью букв это можно записать так:

$$a+x=s, \text{ откуда: } s-a=x;$$

$$x+b=s, \text{ откуда: } s-b=x.$$

Меняя числовые данные в тех же задачах и примерах, можно перейти к вычитанию дробей и рассмотреть:

1) вычитание дробей с равными и с разными знаменателями;
2) частные случаи вычитания дробей.

Учащиеся решают текстовую простую задачу или числовой пример на вычитание дробей, повторяя тот процесс, который был описан при повторном обзоре вычитания целых чисел.

Например:

«На земельном участке в $\frac{7}{10}$ *га* отведено под посадку разных овощей $\frac{3}{10}$ *га*; остальная часть земли оставлена под травой. Сколько земли занято под травой?»

Под руководством преподавателя учащиеся записывают сначала условие задачи: под овощи отведено $\frac{3}{10}$ *га*, а под траву x, а всего будет $\frac{3}{10}+x=\frac{7}{10}$. Чтобы найти неизвестное слагаемое, надо из суммы $\frac{7}{10}$ вычесть известное слагаемое $\frac{3}{10}$, т. е.

$$\frac{7}{10}-\frac{3}{10}=\frac{7-3}{10}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5} \qquad \left(\frac{2}{5}\ \text{га оставлено под траву}\right).$$

При вычитании дробей с равными знаменателями в упражнения надо вводить не только правильные, но и неправильные дроби, задавая ими преимущественно уменьшаемое; в частности, обязательно надо включать дроби вида $\frac{a}{a}$ $\left(\text{например: } \frac{12}{12}-\frac{7}{12}=\frac{5}{12}\right)$, чтобы подготовить учащихся к вычитанию правильных дробей из единицы.

Буквенные записи вычитания дробей и числовые подстановки в них с последующими вычислениями имеют особенно важное значение — они заставляют учащихся при числовых подстановках следить за тем, чтобы вычитание было всегда выполнимым:

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}; \qquad \frac{b}{b}-\frac{c}{b}=\frac{b-c}{b}.$$

Изучение всех случаев вычитания дробей с разными знаменателями ничем не отличается от изучения соответствующих случаев сложения дробей. При решении каждого примера преподаватель требует, чтобы учащиеся внимательно всматривались во все данные числа и только после этого намечали определённый способ для приведения данных дробей к общему знаменателю. В процессе работы постепенно оформляется вывод того или другого правила. Каждое правило закрепляется решением соответствующих примеров. Основная трудность заключается в приведении дробей к наименьшему общему знаменателю, но этот вопрос изучался при сравнении дробей (или при приведении их к общему знаменателю) и при сложении дробей. Теперь нет надобности подробно останавливаться на нём, ограничившись небольшим числом особо трудных примеров.

Частные случаи вычитания дробей

Можно наметить такую последовательность работы:

а) вычитание целого числа из смешанного;

б) вычитание правильной дроби из целого числа;

в) вычитание правильной дроби из смешанного числа;

г) вычитание смешанных чисел.

Вычитание целого числа из смешанного так просто, что ему достаточно уделить один-два примера.

Вычитание правильной дроби из целого числа сводится к вычитанию дроби из единицы, что уже подготовлено предыдущей работой $\left(1-\frac{5}{9}=\frac{9}{9}-\frac{5}{9}=\frac{4}{9}\right)$. От учащихся надо требовать, чтобы они сразу писали результат как дополнение вычитаемой дроби до единицы. С этой целью в порядке устного счёта следует давать соответствующие задачи: 1) найти разность $1-\frac{a}{b}$, где $a < b$; или 2) найти дополнение дроби $\frac{m}{n}$ до единицы, если $m < n$. Следующие задачи на вычитание правильной дроби из любого целого числа решаются устно с последующей записью результата: $18-\frac{5}{11}=17\frac{6}{11}$.

Вычитание смешанного числа из целого подготовлено предыдущими задачами:

$$39-27\frac{3}{5}=39-\left(27+\frac{3}{5}\right)=(39-27)-\frac{3}{5}=12-\frac{3}{5}=11\frac{2}{5}.$$

Такую запись можно провести только при решении первых двух-трёх примеров, чтобы составить и сформулировать правило; в дальнейшем всю работу надо проводить устно с записью только данного условия и результата, например: $54-37\frac{7}{10}=16\frac{3}{10}$.

При изучении вычитания правильной дроби из смешанного числа сначала надо рассмотреть случаи, когда вычитаемая дробь меньше дроби, входящей в смешанное число, чтобы можно было обходиться «без займа». При подборе числового материала надо в той или иной мере соблюдать порядок постепенного нарастания трудностей, начиная с таких дробей, у которых знаменатели равные или кратные, например:

$$29\frac{7}{12}-\frac{5}{12}=29\frac{2}{12}=29\frac{1}{6};$$

$$16\frac{3}{8}-\frac{5}{16}=16\frac{6}{16}-\frac{5}{16}=16\frac{1}{16};$$

$$24\frac{8}{15}-\frac{3}{10}=24\frac{16}{30}-\frac{9}{30}=24\frac{7}{30} \text{ и т. д.}$$

После того как учащиеся освоятся с этими приёмами, можно перейти и к более трудным случаям вычитания, когда вычитаемая дробь больше дроби, входящей в смешанное число, например:

$$12\frac{5}{8}-\frac{7}{8}=11\frac{13}{8}-\frac{7}{8}=11\frac{6}{8}=11\frac{3}{4};$$

$$21\frac{5^{\,3}}{12}-\frac{11^{\,2}}{18}=21\frac{15}{36}-\frac{22}{36}=20\frac{51}{36}-\frac{22}{36}=20\frac{29}{36}.$$

Приведённые записи ни в коем случае нельзя считать единственно правильными; можно применять иные записи по усмотрению преподавателя, например:

$$31\frac{5^{\smile 4}}{24}-\frac{17^{\smile 3}}{32}=31\,\frac{20-51}{96}=30\,\frac{116-51}{96}=30\,\frac{65}{96}\,.$$

(Эта запись наиболее удобная.)

Вычитание смешанных чисел теперь полностью подготовлено предыдущей работой; никаких новых затруднений учащиеся больше не встретят. Примеры записей:

$$25\frac{7^{\smile 2}}{12}-15\,\frac{5^{\smile 3}}{8}=25\frac{14}{24}-15\,\frac{15}{24}=24\,\frac{38}{24}-15\,\frac{15}{24}=9\,\frac{23}{24}\,;$$

$$43\,\frac{5}{6}-21\frac{7}{15}=(43-21)+\left(\frac{5^{\smile 5}}{6}-\frac{7^{\smile 2}}{15}\right)=22+\frac{25-14}{30}=22\,\frac{11}{30}\,.$$

Очень полезно познакомить учащихся с особым приёмом вычитания смешанных чисел, когда один из компонентов — вычитаемое — дополняется до целого числа, например:

$$21\frac{7}{12}-13\,\frac{7}{8}=21\,\frac{7}{12}-\left(14-\frac{1}{8}\right)=21\,\frac{7}{12}-14+\frac{1}{8}=$$

$$=7\,\frac{7}{12}+\frac{1}{8}=7\,\frac{14+3}{24}=7\,\frac{17}{24}\,.$$

Применяя тот или иной приём записи, надо строго следить за тем, чтобы при непрерывном преобразовании данных чисел не нарушалось равенство, что иногда имеет место в письменных работах учащихся.

Встречается, например, неправильная запись следующего вида:

$$17\,\frac{5}{9}-5\,\frac{2}{3}=17-5=12\frac{5-6}{9}=11\,\frac{14-6}{9}=11\,\frac{8}{9}\,.$$

(Это замечание относится и к сложению смешанных чисел.)

Для развития и закрепления навыков учащиеся решают текстовые задачи и числовые примеры на сложение и вычитание дробей.

В процессе этой работы, особенно при решении сложных числовых примеров, преподаватель время от времени обращает внимание учащихся на то, что все свойства суммы и разности целых чисел распространяются на сумму и разность дробей: переместительный и сочетательный законы суммы уже были установлены при сложении дробей, теперь выводятся и формулируются правила вычитания из данного числа суммы двух и нескольких дробей, а также прибавления и вычитания разности двух дробей; при этом учащиеся должны следить за тем, чтобы действие вычитания всегда было выполнимо.

Наряду с этим надо решать задачи, в которых требуется определить характер изменения разности дробей в зависимости от изменения того или иного компонента. Числовой материал должен подбираться так, чтобы вычитание было всегда выполнимо. Примеры (записи можно делать только в некоторых случаях).

$$\frac{11}{12}-\frac{1}{6}=\frac{11}{12}-\frac{2}{12}=\frac{11-2}{12}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4};$$

$$\left(\frac{11}{12}+\frac{2}{3}\right)-\frac{1}{6}=\left(\frac{11}{12}-\frac{1}{6}\right)+\frac{2}{3}=\frac{3}{4}+\frac{2}{3};$$

$$\frac{11}{12}-\left(\frac{1}{6}+\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{11}{12}-\frac{1}{6}\right)-\frac{2}{3}=\frac{3}{4}-\frac{2}{3};$$

$$\left(\frac{11}{12}+\frac{3}{4}\right)-\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\right)=\left(\frac{11}{12}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\right)=$$

$$=\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}.$$

III. УМНОЖЕНИЕ ДРОБЕЙ

Умножение дробей в систематическом курсе арифметики имеет совершенно особое значение. Если умножение на целое число рассматривается попрежнему как сложение равных слагаемых, то умножение на правильную дробь «представляет поворотный пункт — эпоху в курсе арифметики и математики вообще»[1]. При изучении умножения на правильную дробь учащиеся должны полностью отказаться от привычного истолкования самих терминов «умножение» и «умножить».

На протяжении первых четырёх лет обучения в школе учащиеся прочно усвоили понятие об умножении на целое число: 1) это есть сложение равных слагаемых и 2) полученный результат — произведение — всегда больше множимого (в арифметике целых чисел больше каждого из сомножителей); поэтому самый термин «умножение» был связан с понятием «увеличение». Совсем иная картина получается при умножении на правильную дробь: здесь нет сложения равных слагаемых, а в произведении получается число меньше множимого. Новым является для учащихся и двойное действие, которое производится при умножении данного числа на дробь: деление на знаменатель дроби и умножение на числитель её. Правда, при этом преподаватель может и должен помочь учащимся вспомнить, что они не впервые встречаются с условным значением термина «умножить»: умножение на единицу и умножение на нуль тоже являются условными обозначениями и ни в какой мере не согласованы с первоначальным смыслом этого действия.

Наконец, умножение на смешанное число имеет и «смешанное» истолкование: это повторение данного числа слагаемым столько раз, сколько единиц в целой части смешанного числа, и определение части того же числа указанной дробью смешанного числа

[1] Шохор-Троцкий, *Методика арифметики*, 1935, стр. 176.

В учении об умножении дробей центральное место занимает изучение умножения на правильную дробь. Только эта часть работы составляет «поворотный пункт — эпоху в курсе арифметики», только в этом месте курса учащиеся обобщают и расширяют известные понятия: «умножение» и «умножить». Поэтому вполне понятно, что и с методической стороны главное внимание сосредоточивается на методике преподавания умножения чисел на правильную дробь.

При изучении каждого нового действия ставятся и разрешаются такие основные вопросы: 1) истолкование или определение действия в связи с решением соответствующих задач, 2) правила выполнения действия, 3) свойства его. В частности, при изучении умножения данных чисел на правильную дробь особое внимание уделяется разрешению двух вопросов: 1) что значит умножить данное число на правильную дробь и какие задачи решаются этим действием? и 2) как выполняется это действие? Учащиеся обычно очень легко запоминают и усваивают правило умножения на дробь, даже если оно сообщается им в догматической форме, и очень скоро приучаются правильно применять его при решении соответствующих числовых примеров. Со стороны техники выполнения этого действия затруднения начинаются только после того, как учащиеся познакомятся с делением на правильную дробь: если они только запомнили правило умножения на дробь, но не усвоили самый смысл этого действия (а следовательно, не усвоили и смысл действия деления на правильную дробь), то даже при решении числовых примеров они будут смешивать правила умножения на дробь и деления на дробь и путать их применение. Ещё больше затруднений будет при решении задач с конкретным содержанием, которые требуют применения умножения на дробь: не понимая смысла этого действия, учащиеся не смогут применять его при решении данных задач; в лучшем случае они будут решать такие задачи двумя действиями, как это делали в начальной школе.

1. Истолкование и определение умножения на дробь

Как в учебной, так и в методической литературе много места и внимания уделялось вопросу изучения умножения на дробь: как истолковать самый смысл этого умножения и как научить применять это действие при решении задач.

В старой дореволюционной школе .долгое время было в ходу так называемое «общее» определение умножения, данное в своё время Коши: умножить одно число на другое значит из множимого составить новое число так, как множитель составлен из единицы. Иногда это определение формулировалось несколько иначе: умножить одно число на другое значит над множимым произвести последовательно все те действия, которые надо в той же последовательности произвести над единицей, чтобы получить множитель. Чаще всего это определение сообщалось догматически, проверялось на нескольких частных примерах умножения на целое число и распространялось на случай умножения на дробь. По этому определению умножить 8 на $\frac{3}{4}$ — это значит, что надо взять восьмёрку (как и единицу), разделить её на четыре равные доли (как была разделена и единица) и повторить эту долю слагаемым три раза (как была повторена слагаемым $\frac{1}{4}$):

$$8:4=\frac{8}{4},\ \frac{8}{4}+\frac{8}{4}+\frac{8}{4}=\frac{8\cdot 3}{4}=6.$$

Хотя это определение с внешней стороны очень сложно и громоздко, однако некоторые авторы[1] ввели это определение в своих учебниках арифметики даже при истолковании умножения на целое число. Против этого можно высказать несколько замечаний: 1) С логической стороны это определение не вполне удовлетворительно, так как в нём совсем не оговорено, каким способом должен быть составлен множитель из единицы, например, при умножении $\left(8\cdot\frac{3}{4}\right)$ можно рассуждать так: а) число $\frac{3}{4}$ составлено из единицы так: взята единица слагаемым три раза, затем она же повторена слагаемым 4 раза, и первое полученное число 3 разделено на 4 (или иначе сказать: число 3 сделано числителем дроби, а 4 — знаменателем её); б) по такому же способу составляется новое число из восьмёрки: она повторяется слагаемым сначала три раза $(8\cdot 3)$, потом ещё четыре раза $(8\cdot 4)$, первое полученное число $(8\cdot 3)$ делится на второе $(8\cdot 4)$ (или иначе: первое число записывается числителем, второе — знаменателем); после выполнения действий (в частности, после сокращения дроби) получится $\frac{3}{4}$, а не 6. Множитель $\frac{3}{4}$ можно составить из единицы различными способами; но для решения данной задачи не все они пригодны при составлении нового числа из восьмёрки. Поэтому общее определение умножения Коши можно принять, но с указанием того способа, который применялся при составлении множителя из единицы. 2) Приведённое истолкование умножения ставит своей целью обобщить смысл умножения на любое число. Но в курсе арифметики это делать вообще рано, так как умножение на правильную дробь есть только первый случай расширения понятия умножения; в дальнейшем курсе элементарной математики будут новые случаи расширения этого понятия при умножении отрицательных чисел, иррациональных и т. п. Кроме того, надо заметить, что на данной ступени обучения (в V классе средней школы) такое обобщение понятия умножения просто ещё недоступно учащимся, да пока и не нужно им. 3) Как было сказано раньше, это общее определение умножения может

---

[1] Извольский, Арифметика, ч. II, 1914, стр. 62; Аменицкий, Арифметика в связи с методами преподавания, 1915, стр. 214.

быть дано только в догматической форме; в лучшем случае учащиеся могут заучить его, но это мало поможет при решении задач. Помимо того, надо помнить, что догматическое сообщение знаний в средней школе противоречит основным требованиям дидактики.

Довольно широкое распространение имел в своё время другой приём для объяснения умножения данного числа на дробь, основанный на известных свойствах произведения, установленных для целых чисел: чтобы 8 умножить на $\frac{3}{4}$, надо умножить 8 сначала на 3, вследствие чего полученное произведение (8·3) будет вчетверо больше искомого (так как множимое 8 умножили не на $\frac{3}{4}$, а на 3, т. е. на число, вчетверо большее данного); чтобы получить искомое произведение, надо первое произведение уменьшить в 4 раза делением его на 4 (на знаменатель); в результате получится $\frac{8\cdot 3}{4}=6$[1]. Все рассуждения в этом приёме понятны учащимся. Однако он вызывает серьёзные возражения с логической стороны: 1) без всяких оснований свойства произведения, установленные для целых чисел, произвольно переносятся на произведение дробей; 2) произведение двух целых чисел (8·3) сравнивается с искомым произведением $\left(8\cdot\frac{3}{4}\right)$, которое ещё не найдено и даже ещё неизвестно, существует ли оно; 3) в процессе объяснения, между прочим, высказывается утверждение, что 3 вчетверо больше $\frac{3}{4}$, а это можно утверждать только после изучения деления на дробь.

Тот же автор (А. Б. Сахаров) в третьем издании своей книги (1912 г.) даёт совершенно иное объяснение умножения на дробь, как он говорит в предисловии к этому изданию, «более трудное, но зато более научное»: сначала рассматривается умножение дроби на целое число; $\frac{9}{13}\cdot 7=\frac{63}{13}=4\frac{11}{13}$. Потом говорится: «Так как от перемены мест множителей произведение не меняется, то и при умножении целого числа на дробь нужно поступать так же, т. е.:

$$8\cdot\frac{13}{27}=\frac{13}{27}\cdot 8=\frac{13\cdot 8}{27}=\frac{104}{27}=3\frac{23}{27}\text{»}^{*}.$$

Порочным здесь является то, что применяется переместительный закон произведения целого числа на дробь до определения самого произведения.

Существовал ещё один способ для объяснения умножения на дробь — способ, основанный на определении дроби как частного, полученного при делении одного целого числа на другое: сначала рассматривается умножение данного числа на целое число, напри-

[1] Сахаров, Арифметика. Опыт методического изложения предмета, изд. 1 и 2.

* Там же, изд. 3, стр. 152.

мер на 6; потом на целом ряде примеров показывают, что 6 можно рассматривать как частное, полученное при делении одного числа на другое, например: $6=12:2=18:3$ и т. п.; в силу этого умножение на 6 можно заменить умножением на соответствующее частное (на $12:2$ или $18:3$ и т. п.) и применить правило умножения на частное, известное из курса арифметики целых чисел (данное число умножается на делимое, а потом делится на делитель); после этого нетрудно любой целый множитель записать в виде частного, а это последнее — в виде дроби и перефразировать правило умножения на частное от деления одного числа на другое, заменяя в нём термины — частное, делимое и делитель — соответствующими терминами: дробь, числитель и знаменатель. Затем делается обобщение, что это правило применяется при умножении на любую дробь[1].

По поводу этого способа Ф. И. Егоров справедливо замечает, что «такая постановка была бы до известной степени правильной, если бы всё учение о дробях было построено на понимании дроби как частного от деления числителя на знаменатель».

Нельзя обойти молчанием ещё один приём, безупречный с логической стороны, который имеет место в теоретической арифметике; он состоит в том, что сразу вводится определение: «за произведение двух дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ принимается дробь вида $\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$ (т. е. такая дробь, числитель которой есть произведение числителей данных дробей, а знаменатель — произведение знаменателей их)». С методической стороны это определение умножения на дробь в курсе арифметики неприемлемо по следующим причинам: 1) оно может быть дано только в догматической форме, а это противоречит основным положениям дидактики, о чём речь была и раньше; 2) оно может быть только заучено без понимания смысла операции, и потому будет смешиваться с правилом деления на дробь; 3) это определение умножения на дробь сразу вводит в практику только умножение дроби на дробь, а это вынуждает в дальнейшем всякое множимое число записывать в виде дроби, даже такое множимое, которое задано целым числом, что значительно усложнит процесс умножения, а надобности в этом на практике нет.

Общий недостаток всех перечисленных приёмов истолкования умножения данного числа на дробь заключается в том, что ни одно из них не даёт конкретного истолкования этого действия, вследствие чего учащиеся лишены возможности применять это действие при решении задач; учащийся при этих объяснениях действия умножения на дробь овладевает только техникой выполнения этого действия. Поэтому ещё В. А. Евтушевский — один из первых русских методистов — рекомендовал умножение на дробь выводить из решения задач с конкретным содержанием. С этой целью он даёт учащимся простую текстовую задачу с конкретным

[1] Егоров, Методика арифметики, изд. 7, 1917, стр. 393 и след.

содержанием, которая решается действием умножения; данные величины в ней задаются сначала целыми числами, а потом одно из них — множитель — последовательно заменяется смешанным числом и правильной дробью.

Пример.

«Килограмм кофе стоит 80 рублей. Сколько стоят 4 *кг*? $2\frac{1}{2}$ *кг*? $\frac{3}{4}$ *кг*?»

Учащиеся решают первую задачу, рассуждая привычным способом: 1 *кг* кофе стоит 80 руб., а 4 *кг* будут стоить в 4 раза дороже, поэтому решение задачи надо записать в виде действия умножения. Решая вторую задачу, они повторяют то же рассуждение: $2\frac{1}{2}$ *кг* будут стоить в $2\frac{1}{2}$ раза больше (так как подобные выражения можно часто слышать на практике: в полтора раза больше, в три с половиной раза больше и т. п.), а потому задачу можно решить тем же действием — умножением. При решении третьей задачи учащиеся могут уже по привычке тоже сказать, что «$\frac{3}{4}$ *кг* будут стоить в $\frac{3}{4}$ раза больше», и, не замечая нелепости сказанного, предложить записать решение в виде действия умножения. При выполнении последнего решения ведётся обычное рассуждение: $\frac{1}{4}$ *кг* стоит в 4 раза меньше, чем 1 *кг*, а потому надо $80:4$; $\frac{3}{4}$ *кг* будут стоить в 3 раза больше, чем $\frac{1}{4}$ *кг*, а потому надо $(80:4)\cdot 3$; затем выводится и формулируется известное правило умножения на дробь. Можно ли утверждать, что учащиеся поняли смысл этого действия? Конечно, нет: постановка последнего вопроса свидетельствует об этом. А если учащиеся поставили бы иной вопрос, то они не могли бы предложить решение задачи в виде умножения.

Предлагая такой способ объяснения умножения на дробь, автор исходил из той мысли, что всякая задача с конкретным содержанием решается только одним вполне определённым действием; а поэтому, если в данной задаче изменить числа, определяющие данные в ней величины, то она попрежнему будет решаться тем же действием.

Интересно отметить, что много лет спустя после Евтушевского подобный приём объяснения того же действия появился в книге Бореля-Штеккеля, но только для случая умножения дроби на дробь. Умножение же целого числа на дробь в той же книге определяется «требованием, чтобы при составлении произведения двух чисел порядок их не имел значения»[1].

Большого внимания заслуживает истолкование умножения на дробь в книге Серре[2]. «Умножить какое-нибудь число на дробь

[1] Борель-Штеккель, Элементарная математика. Арифметика и алгебра, 1911, стр. 94.

[2] Серре, Курс арифметики, 1899, стр. 126.

значит разделить это число на столько равных частей, сколько единиц в знаменателе дроби, и взять столько таких частей, сколько единиц в числителе». Например: $4 \cdot \frac{5}{7}$. Надо 4 разделить на 7 равных частей $\left(\frac{4}{7}\right)$ и повторить одну такую часть 5 раз $\left(\frac{4}{7} \cdot 5\right)$. Здесь автор считает необходимым дать особое определение действию умножения на дробь, которое указывает конкретный смысл этого действия, а потому может быть легко применено к решению соответствующих задач.

Того же взгляда держится Ф. И. Егоров[1], который тоже считает, что умножение на дробь требует особого самостоятельного определения, независимо от определения умножения на целое число. С этой целью он даёт учащимся целый ряд задач на нахождение части данного числа; эти задачи решаются двумя действиями: делением на знаменатель дроби и умножением на числитель её, и записываются так:

1) Найти $\frac{5}{8}$ от 56:

$$(56:8) \cdot 5 = 7 \cdot 5 = 35.$$

2) Найти $\frac{5}{7}$ от $\frac{14}{15}$:

$$\left(\frac{14}{15}:7\right) \cdot 5 = \frac{2}{15} \cdot 5 = \frac{2}{3}.$$

«Из этих примеров, — пишет автор,— делается вывод: чтобы найти часть какого-либо числа, надо это число разделить на знаменатель дроби (чтобы определить одну долю данного числа) и полученное частное умножить на числитель той же дроби (чтобы определить требуемое число частей)». И дальше: «Пользуясь этим выводом, преподаватель сообщает, что определение части числа считается умножением на дробь...»

Рекомендуемый автором приём истолкования умножения на дробь с логической стороны не вызывает накаких возражений; и только последний этап этой работы, когда автор «сообщает, что определение части числа считается умножением на дробь», может вызвать в сознании учащихся недоумённый вопрос: почему определение части числа считается умножением, а не делением на дробь, так как задача решается двумя этими действиями. Учащиеся вполне поймут это соглашение, если оно будет связано с решением конкретных задач и непосредственно вытекать из него, как это предложено было в своё время В. А. Евтушевским.

Такие же конкретные истолкования умножения на дробь даются в целом ряде учебников арифметики.

1. «Умножить на дробь значит найти такую часть множимого, какая выражена множителем»[2].

2. «Умножить на дробь значит найти часть множимого, указываемую дробным множителем»[3], и т. п.

---

[1] Егоров, Методика арифметики, 1917, стр. 395.
[2] Никульцев, Арифметика, 1907, стр. 139.
[3] Очаповский, Дроби. Курс арифметики, 1914.

Достаточно подробная и последовательная разработка того же вопроса была дана Шохор-Троцким[1]. Он, как и другие авторы, сначала рассматривает умножение чисел на целое число, затем деление их тоже на целое число, «чтобы дальнейшее усвоение умножения было основано на достаточно наглядных представлениях». Дальше он переходит к нахождению одной доли числа: «От деления на целое число надо перейти к делению, формулированному несколько иначе: «найти некоторую долю данного числа» и выполняемому, конечно, только с помощью деления». Затем с помощью ряда «целесообразных» задач вводится новое «название» для нахождения одной доли числа: вместо того чтобы говорить: «найти одну четверть семнадцати» говорят: «17 помножить на $\frac{1}{4}$». На следующем этапе работы учащиеся решают задачи на нахождение нескольких одинаковых долей числа, на основании чего составляется определение умножения на дробь и правило для выполнения этого действия.

Из этого обзорного перечня различных способов и приёмов объяснения и истолкования действия умножения числа на дробь можно сделать следующие выводы:

1) умножение числа на дробь представляет собой первый этап в развитии и расширении понятия умножения чисел;

2) это действие требует особого истолкования его с указанием конкретного смысла этого действия, чтобы учащиеся могли вполне сознательно применять его при решении задач с конкретным содержанием и правильно и сознательно выполнять его;

3) это истолкование и определение умножения на дробь, а также техника выполнения этого действия создаются и вырабатываются в процессе решения соответствующих задач с конкретным содержанием;

4) при выборе и составлении задач надо соблюдать последовательность в подборе числового материала — от простого к более сложному, варьируя числовые данные величин, входящих в задачу, сначала той из них, которая служит множителем (целые числа, дроби вида $\frac{1}{n}$ и, наконец, дроби более общего вида $\frac{a}{b}$, где $a<b$), а затем и другой, которая служит множимым;

5) в процессе работы следует подчёркивать особый, новый, условный характер записи действия умножения на дробь, сопоставляя его с ранее известными, тоже условными записями умножения данного числа на 1 и на 0.

Весь процесс изучения умножения дробей можно разбить на три основных этапа в зависимости от характера множителя: 1) умножение чисел — целых, дробных и смешанных — на целое число, 2) умножение тех же чисел на правильную дробь и 3) умножение их на неправильные дроби и на смешанные числа.

---

[1] Шохор-Троцкий, Методика арифметики, изд. 4, 1916 г. и более позднее 1935 г.

Но умножение данных чисел на дробь выполняется двумя действиями — делением на знаменатель и умножением на числитель; следовательно, для вполне осознанного выполнения этого действия учащиеся предварительно должны изучить деление данных чисел на целое число. Поэтому в только что намеченный план требуется ввести ещё один пункт — изучение деления данных чисел на целое число, поставив его на втором месте.

2. Умножение данных чисел на целое число

Умножение на целое число не вносит, по существу, ничего нового в сознание учащихся. Основная цель этого первого этапа работы состоит в том, чтобы напомнить смысл умножения на целое число как сложение равных слагаемых — целых чисел, дробей и смешанных чисел, повторить основные сведения об умножении целых чисел (задачи, решаемые умножением на целое число, определение этого действия, свойства его), а также вывести правила умножения дроби и смешанного числа на целое число и выработать необходимые навыки.

Для выполнения этой работы можно наметить такой план: 1) умножение целых чисел, 2) умножение дробей и 3) умножение смешанных чисел.

Умножение целых чисел в данном месте курса имеет повторный обзорный характер, а потому проводится быстро. Преподаватель предлагает учащимся две-три простые задачи с конкретным содержанием, а затем учащиеся сами придумывают задачи на сложение нескольких равных слагаемых и на увеличение данного числа в несколько раз.

При этом учащиеся припоминают и воспроизводят буквенные записи основных понятий: $a \cdot b = p$; $a \cdot b = b \cdot a$; $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ и т. д.

Затем учащиеся сами могут придумывать задачи на сложение равных дробей и на увеличение дроби в несколько раз (или преподаватель даёт их). Первоначальная запись решения соответствует условию задачи — или в виде суммы равных дробей, или в виде произведения дроби на целое число последующей заменой этих записей иными, чтобы учащиеся отчётливо усвоили смысл действия умножения на целое число.

Примеры.

1) $\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}=\frac{1+1+1+1+1+1+1}{9}=\frac{1 \cdot 7}{9}=\frac{7}{9}$;

$\frac{1}{9} \cdot 7=\frac{1 \cdot 7}{9}=\frac{7}{9}$.

2) $\frac{5}{8}+\frac{5}{8}+\frac{5}{8}=\frac{5+5+5}{8}=\frac{5 \cdot 3}{8}=\frac{15}{8}=1\frac{7}{8}$; $\frac{5}{8} \cdot 3=\frac{5 \cdot 3}{8}=\frac{15}{8}=1\frac{7}{8}$.

3) $\frac{4}{11} \cdot 5=\frac{4 \cdot 5}{11}=\frac{20}{11}=1\frac{9}{11}$; $\frac{4}{11}+\frac{4}{11}+\frac{4}{11}+\frac{4}{11}+\frac{4}{11}=\frac{4+4+4+4+4}{11}=$

$=\frac{4 \cdot 5}{11}=\frac{20}{11}=1\frac{9}{11}$ и т. п.

На основании этих примеров учащиеся убеждаются, что смысл умножения на целое число сохраняется; затем они составляют правило умножения дроби на целое число, которое и применяют в дальнейшей работе при решении числовых примеров. Учащиеся опять подмечают, что произведение получается больше множимого.

При составлении и подборе числовых примеров для вывода правила умножения дроби на целое число надо следить за тем, чтобы знаменатель дроби и множитель не имели общих делителей, следовательно, чтобы в произведении всегда получалась несократимая дробь. Это делается с той целью, чтобы при выводе правила не отвлекалось внимание учащихся от основной цели промежуточными сокращениями. И только после того, как правило будет выведено и достаточно усвоено, в упражнения надо вводить такие числовые данные, которые допускают промежуточные сокращения, например:

$$\frac{15}{8}\cdot 4=\frac{15\cdot \overset{1}{4}}{\underset{2}{8}}=\frac{15}{2}=7\frac{1}{2}.$$

При этом следует иметь в виду, что учащиеся очень неохотно и даже вначале враждебно относятся к требованию производить промежуточное сокращение дроби, считают это «мазнёй».

Лучший способ борьбы с таким консерватизмом состоит в том, чтобы примеры содержали достаточно большие числа, ненужное перемножение которых и деление затрудняло бы весь процесс вычисления; например:

$$\frac{87}{128}\cdot 64=\frac{87\cdot \overset{1}{64}}{\underset{2}{128}}=\frac{87}{2}=43\frac{1}{2}.$$

Упорствующие учащиеся при решении этого примера сначала перемножат два числа 87 и 64 и полученное произведение 5568 разделят на 128, после чего будут иметь искомый результат $43\frac{1}{2}$. Они же увидят, что пример решается без всяких письменных вычислений, если предварительно сократить полученную дробь. Целый ряд таких примеров убедит самых упорных из учащихся в огромных преимуществах промежуточных сокращений.

В число упражнений для развития навыков надо включать такие числовые примеры, в которых множителем будет знаменатель дроби, например:

$\frac{7}{11}\cdot 11=\frac{7\cdot \overset{1}{11}}{\underset{1}{11}}=7.$ При решении можно предложить учащимся сразу после записи задачи писать произведение, которое равно числителю дроби без промежуточных записей. Такие же примеры полезно давать в порядке устного счёта.

Учащиеся могут теперь записать решение всех предыдущих задач в более общем виде с помощью букв, исходя из следующего правила: дробь можно записать, как $\frac{p}{q}$, а целое число — буквой m; тогда $\frac{p}{q}\cdot m=\frac{p\cdot m}{q}$ (а эту запись можно истолковать так:

$$\underbrace{\frac{p}{q}+\frac{p}{q}+\ldots+\frac{p}{q}}_{m\ \text{слагаемых}}=\frac{\overbrace{p+p+\ldots+p}^{m\ \text{слагаемых}}}{q}=\frac{p\cdot m}{q}\Bigg).$$

Подстановка числовых значений вместо букв p, q и m и выполнение вычислений помогут лучше понять и осознать этот процесс.

Умножение смешанных чисел на целое число проводится по тому же плану: преподаватель и учащиеся предлагают простые текстовые задачи с конкретным содержанием, которые приводят или к сложению равных слагаемых — смешанных чисел, или к увеличению одного смешанного числа в несколько раз.

Например, по условию задачи требуется сложить несколько равных смешанных чисел:

$$2\frac{3}{8}+2\frac{3}{8}+2\frac{3}{8}+2\frac{3}{8}+2\frac{3}{8}.$$

Учащиеся вспоминают, что всякое смешанное число можно представить как сумму целого числа и дроби, что при сложении можно переменить места слагаемых и соответствующим образом сгруппировать их (применение переместительного и сочетательного законов суммы) и сложить отдельно целые числа и отдельно дроби, а это приведёт к умножению целого числа, а потом и дроби на целое число:

$$2\frac{3}{8}+2\frac{3}{8}+2\frac{3}{8}+2\frac{3}{8}+2\frac{3}{8}=2+\frac{3}{8}+2+\frac{3}{8}+2+\frac{3}{8}+2+\frac{3}{8}+2+$$
$$+\frac{3}{8}=(2+2+2+2+2)+\left(\frac{3}{8}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}\right)=2\cdot5+\frac{3}{8}\cdot5=$$
$$=10+\frac{15}{8}=11\frac{7}{8}.$$

Но сложение равных слагаемых можно записать короче в виде умножения смешанного числа на целое число, а техника вычисления уже указана; поэтому:

$$2\frac{3}{8}\cdot5=2\cdot5+\frac{3}{8}\cdot5=10+\frac{15}{8}=11\frac{7}{8}.$$

Если по условию задачи требуется смешанное число увеличить в несколько раз, то решение её записывается сразу в виде умножения смешанного числа на целое число, а эту запись по определению умножения на целое число можно заменить другой записью в виде суммы нескольких равных слагаемых, что приводит к решению такой же задачи, как и первая.

Например: $5\frac{3}{11}\cdot4=5\frac{3}{11}+5\frac{3}{11}+5\frac{3}{11}+5\frac{3}{11}=5\cdot4+\frac{3}{11}\cdot4=$

$$=22+\frac{12}{11}=21\frac{1}{11}.$$

На основании решения этих и подобных им задач учащиеся составляют и формулируют правило умножения смешанного числа на целое число, которое в письменном виде можно представить так:

$$12\frac{3}{7}\cdot 6=\left(12+\frac{3}{7}\right)\cdot 6=12\cdot 6+\frac{3}{7}\cdot 6=72+\frac{18}{7}=74\frac{4}{7}.$$

В практике школ и отдельных преподавателей до сих пор ещё иногда встречается обязательное требование при умножении смешанного числа на целое первое из них обращать в неправильную дробь. Это требование усложняет работу, так как отдельное умножение целого числа и дроби на целое число проще и короче; обычно все вычисления при этом способе производятся устно без всяких записей. Особенно интересны для устного счёта такие числовые примеры, в которых множителем является знаменатель дроби, входящей в смешанное число, например: $23\frac{3}{4}\cdot 4$ и т. п.

Этот процесс может быть записан и с помощью букв:

$$\left(a+\frac{p}{q}\right)\cdot m=a\cdot m+\frac{q}{q}\cdot m.$$

Числовые подстановки и выполнение вычислений помогут закрепить правило умножения смешанного числа на целое.

В заключительной беседе учащиеся под руководством преподавателя делают выводы:

1) умножением на целое число решаются задачи двух типов (когда требуется сложить несколько равных чисел или одно число увеличить в несколько раз); на каждый из них учащиеся приводят конкретные примеры;

2) умножение на целое число есть сложение равных слагаемых (или иначе: умножить данное число на целое число значит повторить его слагаемым столько раз, сколько единиц во множителе);

3) чтобы умножить дробь на целое число, надо числитель дроби умножить на целое число и полученное произведение разделить на знаменатель дроби;

4) чтобы смешанное число умножить на целое число, надо отдельно умножить целое число, потом дробь на целое число и полученные результаты сложить;

5) если целый множитель и знаменатель дроби имеют общие множители, то сразу после записи произведения числителя на целое число и ещё до вычисления произведения надо сократить полученную дробь (множитель и знаменатель разделить на общие делители или на наибольший общий делитель);

6) при умножении на целое число произведение всегда получается больше множимого.

Учащиеся решают примеры и задачи на сложение и вычитание дробей и на умножение их на целое число. В эти задачи и примеры надо включать данные, требующие промежуточных предварительных сокращений, например:

$$\frac{17}{39}\cdot 26;\quad \frac{23}{34}\cdot 51;\quad \frac{29}{36}\cdot 54 \text{ и т. п.}$$

Умножение дроби на целое число можно значительно упростить, если помнить, что для увеличения дроби в несколько раз надо или числитель её умножить на целое число, или знаменатель разделить на то же число. Например: $\frac{9}{16}\cdot 8=\frac{9}{16:8}=\frac{9}{2}=4\frac{1}{2}$. Здесь решение получилось более изящное. На этом основании учащиеся могут внести дополнение в правило умножения дроби на целое число: чтобы дробь умножить на целое число, надо или числитель её умножить на целое число, сохранив тот же знаменатель, или знаменатель разделить на целое число, сохранив тот же числитель. После достаточной практики учащиеся сделают вывод: числитель дроби всегда можно умножить на целое число, а знаменатель редко делится на то же число, поэтому первый приём — умножение числителя дроби на целое число при сохранении знаменателя — всегда применим, а второй приём — деление знаменателя на целое число — применяется сравнительно редко, но зато упрощает работу.

Теперь имеет смысл повторить требование о том, чтобы учащиеся при решении каждой задачи внимательно всматривались в данные числа, изучая структуру каждого из них, сравнивая их с той или иной точки зрения, чтобы подметить такую особенность их, которая может быть с успехом использована для наиболее простого и быстрого решения поставленной задачи. Эти навыки предварительного анализа данных чисел в арифметике учащиеся будут потом применять и при дальнейшем изучении математики.

3. Деление данных чисел на целое число

Общий обзор и более подробная методическая разработка всей темы о делении дробей будут даны позднее. В данном же месте курса речь идёт только о делении целых, дробных и смешанных чисел на целое число. Эта часть общей большой темы самым непосредственным и тесным образом связана с умножением дробей, помогает учащимся понять и усвоить важнейший этап изучения дробей — умножение данных чисел на правильную дробь. В самом деле, последняя операция, как известно, применяется при решении задач на нахождение части данного числа, указанной дробью, и выполняется двумя действиями — делением данного числа на знаменатель дроби, чтобы определить одну долю данного числа, и умножением на числитель дроби, чтобы определить или найти всю искомую дробь данного числа. Как числитель, так и знаменатель дробного множителя суть целые числа. Второе действие — умножение любого данного числа на числитель дробного множителя, как на целое число, — уже известно учащимся. Поэтому для выполнения всей операции умножения данных чисел на правильную дробь надо научить учащихся делить те же числа на знаменатель дробного множителя, т. е. на целое число, с каковой целью и вводится указанная тема в данном месте курса.

Изучение этой темы даёт возможность создать более общее представление дроби или определение её как частного при делении одного числа на другое. Действительно, как известно, за точное частное при делении одного числа на другое принимается такое число, которое при умножении его на делитель в произведении даёт число, равное делимому (или такое число, на которое надо умножить делитель, чтобы в произведении получилось число, равное делимому). Теперь и только теперь учащиеся могут непосредственно убедиться в том, что при делении любого данного числа на целое число в результате всегда получится такое число (целое, дробное или смешанное), которое 1) всегда может быть записано в виде дроби (что подтверждается решением соответствующих упражнений) и, 2), будучи умножено на делитель (на целое число), в произведении даёт число, равное делимому (что теперь тоже может быть проверено с помощью тех же упражнений). Таким образом, теперь создаётся возможность всякую дробь рассматривать как частное, полученное при делении числителя на знаменатель.

Преподаватель сначала повторяет с учащимися деление целых чисел при целом точном частном. С этой целью учащиеся решают задачи: «Завод по плану ежемесячно выпускал некоторое количество станков определённого типа; в год он выпустил 864 станка. Сколько станков в месяц в среднем выпускал завод?» или: «4 000 апельсинов уложены в ящики по 250 штук в каждом. Сколько потребовалось ящиков?»

Учащиеся решают эти задачи, записывая условия их ($x \cdot 12 = 864$ и $250 \cdot x = 4\,000$), а потом и решение.

После этого учащиеся повторяют определение деления, названия чисел при действии деления и умножения. При этом учащиеся отмечают и тот факт, что частное при делении на целое число всегда меньше делимого, и легко объясняют это.

Основные понятия записываются в виде формул с помощью букв $a \cdot b = p$ и $p : a = b$ или $p : b = a$.

Теперь можно перейти к обобщению понятия частного. С этой целью в задачи на деление надо включать такие пары чисел, которые при делении одного из них на другое в частном будут давать правильные, а потом неправильные дроби или смешанные числа; например:

1. 5 *л* керосина сжигается в течение недели. Сколько керосина сгорает в среднем ежедневно?

2. 32 *кг* картофеля расходуется в семье в течение 15 дней. Сколько картофеля расходуется в среднем каждый день?

С помощью преподавателя учащиеся записывают условие и решение каждой задачи, проводя уже известные рассуждения:

1) $x \cdot 7 = 5$	$5:7 = \frac{5}{7}$	$\frac{5}{7}$ *л*	$\frac{5}{7} \cdot 7 = 5$
2) $x \cdot 15 = 32$	$32:15 = 2\frac{2}{15}$	$2\frac{2}{15}$ *кг*	$2\frac{2}{15} \cdot 15 = 32$

Преподаватель обращает внимание учащихся на то, что при решении каждой задачи 1) результат деления записывается или в виде правильной дроби $\left(\frac{5}{7}\right)$, или в виде смешанного числа $\left(2\frac{2}{15}\right)$; 2) каждый результат, будучи умножен на делитель, в произведении даёт число, равное делимому $\left(\frac{5}{7} \cdot 7 = 5\right.$ и $\left.2\frac{2}{15} \cdot 15 = 32\right)$; 3) следовательно, каждый результат деления можно принять за точное частное; 4) поэтому всякую дробь, правильную и неправильную, и смешанное число (которое всегда можно представить в виде неправильной дроби) можно рассматривать как частное, полученное при делении одного числа на другое (числителя на знаменатель). Таким образом, деление одного целого числа на другое, которое в арифметике целых чисел было ограниченно выполнимым (что это значит?), благодаря введению дробей, становится всегда выполнимым в арифметике дробных чисел.

Учащиеся записывают эту мысль в общем виде:

$$a:b = \frac{a}{b} \text{ и } \frac{a}{b} \cdot b = a;$$

они подставляют разные числовые значения букв и проверяют вычислением.

В ту же группу задач на деление целых чисел преподаватель включает и задачи, которые в большом количестве решали учащиеся ещё в начальной школе, например: «Из общего урожая картофеля в 420 *ц* седьмая часть его была выделена на семена. Сколько центнеров картофеля выделено на семена?»

В этой задаче требуется найти часть данного числа ($\frac{1}{7}$ часть 420), для чего надо целое число (420) разделить на другое целое число (на 7). Примером этой задачи устанавливается иная редакция вопроса, который решается действием деления; найти одну из равных частей данного числа.

Деление дроби на целое число

Преподаватель предлагает учащимся задачи, которые решаются делением на целое число, изменяя в них числовые значения делимого (сначала они задаются целыми числами, а потом — дробями).

Например: «Лошадь пробегает в 5 минут 2 *км*, 1 *км*, $\frac{11}{12}$ *км*, $\frac{8}{9}$ *км*, $\frac{5}{6}$ *км*. Сколько она пробегает в 1 минуту?»

Применяя уже знакомые рассуждения и известные записи, учащиеся решают сначала две первые задачи:

$x\cdot5=2$	$2:5=\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$ *км* в 1 мин.	$\frac{2}{5}\cdot5=2$
$x\cdot5=1$	$1:5=\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$ *км* в 1 мин.	$\frac{1}{5}\cdot5=1$

Учащиеся устанавливают, что задачи решаются делением на целое число, а условия их можно записать в виде умножения с одним неизвестным сомножителем. Точно также они записывают решение и остальных вариантов:

$x\cdot5=\frac{11}{12}$	$\frac{11}{12}:5=\frac{11}{12\cdot5}=\frac{11}{60}$	$\frac{11}{60}$ *км* в 1 мин.	$\frac{11}{60}\cdot5=\frac{11\cdot5}{\underset{12}{60}}=\frac{11}{12}$
$x\cdot5=\frac{8}{9}$	$\frac{8}{9}:5=\frac{8}{45}$	$\frac{8}{45}$ *км* в 1 мин.	$\frac{8}{45}\cdot5=\frac{8\cdot5}{\underset{9}{45}}=\frac{8}{9}$
$x\cdot5=\frac{5}{6}$	$\frac{5}{6}:5=\frac{5:5}{6}=\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$ *км* в 1 мин.	$\frac{1}{6}\cdot5=\frac{5}{6}$

Из записи первого условия видно, что для определения искомого результата (x), как одного из двух сомножителей, надо произведение $(\frac{11}{12})$ разделить на другой известный сомножитель (5), т. е. $\frac{11}{12}:5$. Как это можно сделать?

Из предыдущего известно, что делением данного числа на целое число первое число уменьшается во столько раз, сколько единиц в делителе; следовательно, $\frac{11}{12}:5$ — это значит $\frac{11}{12}$ надо уменьшить в 5 раз, а чтобы дробь уменьшить в 5 раз, надо или числитель разделить на 5 (что не всегда возможно), или знаменатель её умножить на 5 (что всегда возможно).

С помощью таких рассуждений создаётся и формулируется правило деления дроби на целое число, которое затем закрепляется решением численных примеров и завершается буквенной записью $\frac{p}{q}:m=\frac{p}{qm}$, с последующими числовыми подстановками и выполнением вычислений.

Деление смешанных чисел на целое число требует особого к себе внимания. Дело в том, что в практике школы до сих пор смешанное число при делении обязательно предварительно преобразовывается в неправильную дробь, что в большинстве случаев чрезвычайно затрудняет работу и принуждает выполнять её письменно.

В практике могут встретиться следующие типы соответствующих задач:

1) $39\frac{2}{5}:13=3\frac{2}{5\cdot13}=3\frac{2}{65}$; $3\frac{2}{65}\cdot13=39\frac{2\cdot13}{\underset{5}{65}}=39\frac{2}{5}$.

2) $4\frac{2}{5}:15=\frac{22}{5}:15=\frac{22}{5\cdot15}=\frac{22}{75}$; $\frac{22}{75}\cdot15=\frac{22\cdot\overset{1}{15}}{\underset{5}{75}}=4\frac{2}{5}$.

3) $39\frac{2}{5}:17=2+5\frac{2}{5}:17=2+\frac{27}{5\cdot17}=2\frac{27}{85}$; $2\frac{27}{85}\cdot17=34\frac{27\cdot\overset{1}{17}}{\underset{5}{85}}=39\frac{2}{5}$.

В первом типе целое число без остатка делится на делитель, поэтому нет никакой надобности преобразовывать смешанное число; во втором типе целое число делимого меньше делителя; поэтому здесь требуется предварительное преобразование смешанного числа в неправильную дробь; в третьем типе целое число делимого больше делителя, но не делится нацело, поэтому его можно делить на делитель, а остаток вместе с дробью надо обратить в неправильную дробь и это сделать много легче, чем предварительно обращать в неправильную дробь всё смешанное число.

Чтобы развить соответствующие навыки, учащиеся должны решить достаточное количество примеров, внимательно анализируя числовую структуру делимого и делителя, чтобы заранее наметить наиболее выгодный приём решения.

4. Умножение данных чисел на правильную дробь

Эта часть является центральной частью всей темы, при изучении которой происходит «переоценка» известных ценностей, связанных с понятием «умножение» и «умножить».

Общий план работы остаётся прежний.

1. Решение задач с конкретным содержанием, требующих умножения данных чисел — целых, дробных и смешанных — на правильную дробь.

2. Истолкование действия умножения данного числа на правильную дробь как нахождение части данного числа, указанной дробью.

3. Техника выполнения умножения на дробь.

4. Развитие навыков с помощью решения текстовых задач и числовых примеров.

Первые три пункта этого плана реализуются совместно, т. е. в процессе решения задачи выясняется и смысл операции умножения на правильную дробь, и техника выполнения этого действия. Последнее обычно легко усваивается учащимися. Зато выяснение смысла новой операции требует большого напряжения со стороны учащихся и самого преподавателя. Поэтому при подборе числового материала в предлагаемых учащимся задачах надо соблюдать определённую последовательность: множимое задаётся сначала целыми числами, потом дробями и, наконец, смешанными числами.

Умножение целых чисел на правильную дробь

Преподаватель предлагает учащимся задачу:

«1 *м* материи стоит 36 рублей. Сколько рублей стоят 12 *м*? 9 *м*? 5 *м*? 3 *м*? 2 *м*?»

Учащиеся решают эти задачи, располагая записи, примерно, в таком виде:

Условие задачи	Решение	Ответ
1 *м* стоит 36 руб.		
12 *м* стоят *x* руб.	$36 \cdot 12 = 432$	432 руб. стоят 12 *м*
9 *м* » *x* руб.	$36 \cdot 9 = 324$	324 руб. » 9 *м*
5 *м* » *x* руб.	$36 \cdot 5 = 180$	180 руб. » 5 *м*
3 *м* » *x* руб.	$36 \cdot 3 = 108$	108 руб. » 3 *м*
2 *м* » *x* руб.	$36 \cdot 2 = 72$	72 руб. » 2 *м*

Под руководством преподавателя учащиеся делают общий обзор решения всех этих задач и формулируют выводы.

1) В каждой задаче даны две величины — цена и количество; надо найти стоимость.

2) Во всех задачах сохраняется цена и изменяется (уменьшается) количество.

3) Независимо от этого каждая задача решается умножением.

4) В связи с уменьшением множителя уменьшается и произведение.

5) Но во всех задачах произведение больше множимого (почему?).

Итак, при всех числовых изменениях количества материи задача решается умножением.

Преподаватель предлагает узнать, сколько стоит 1 *м*?

На это может последовать возражение со стороны некоторых учащихся («Тут нет никакой задачи, так как из условия задачи известна стоимость 1 *м*»). Преподаватель подтверждает справедливость этого возражения и одобряет его, но подчёркивает, что до сих пор при уменьшении количества материи задача решалась и это решение записывалось в виде умножения; поэтому естественно поставить и теперь вопрос о том, чтобы записать решение последнего варианта задачи тоже действием умножения:

$$36 \cdot 1 = 36;\ 36 \text{ руб. стоит } 1 \text{ м}.$$

Учащиеся убеждаются, что эта запись решения — вполне справедливая и законная и не противоречит смыслу задачи. При этом они припоминают, что и раньше они встречались с такой записью умножения на единицу и условились считать её справедливой и законной, хотя никакого действия здесь фактически нет (понимая умножение на целое число, как сложение равных слагаемых). Они подчёркивают также, что произведение при умножении на единицу равно множимому (что в данном случае соответствует смыслу задачи).

Теперь естественно продолжить числовые изменения количества материи, *учитывая предыдущие выводы*, т. е. решать такие задачи: «1 *м* материи стоит 36 рублей; сколько стоит $\frac{1}{2}$ *м*? $\frac{1}{3}$ *м*? $\frac{1}{4}$ *м*? $\frac{1}{5}$ *м*? $\frac{2}{3}$ *м*? $\frac{3}{4}$ *м*? $\frac{2}{5}$ *м*?

Запись условия и решение располагается в том же виде, как и раньше, составляя непосредственное продолжение предыдущей записи:

1 *м* стоит 36 руб.	$36 \cdot 1 = 36$	36 руб. стоит 1 *м*
$\frac{1}{2}$ *м* » x руб.	$36 \cdot \frac{1}{2} = \frac{36}{2} = 18$	18 руб. » $\frac{1}{2}$ *м*
$\frac{1}{3}$ *м* » x руб.	$36 \cdot \frac{1}{3} = \frac{36}{3} = 12$	12 руб. » $\frac{1}{3}$ *м*
$\frac{1}{4}$ *м* » x руб.	$36 \cdot \frac{1}{4} = \frac{36}{4} = 9$	9 руб. » $\frac{1}{4}$ *м*
$\frac{1}{5}$ *м* » x руб.	$36 \cdot \frac{1}{5} = \frac{36}{5} = 7\frac{1}{5}$	$7\frac{1}{5}$ руб. » $\frac{1}{5}$ *м*

$\frac{2}{3}$ *м* стоят x руб.	$36 \cdot \frac{2}{3} = \frac{36 \cdot 2}{3} = 24$	24 руб. стоят $\frac{2}{3}$ *м*
$\frac{3}{4}$ *м* » x руб.	$36 \cdot \frac{3}{4} = \frac{36 \cdot 3}{4} = 27$	27 руб. » $\frac{3}{4}$ *м*
$\frac{2}{5}$ *м* » x руб.	$36 \cdot \frac{2}{5} = \frac{36 \cdot 2}{5} = 14\frac{2}{5}$	$14\frac{2}{5}$ руб. » $\frac{2}{5}$ *м*
$\frac{3}{5}$ *м* » x руб.	$36 \cdot \frac{3}{5} = \frac{36 \cdot 3}{5} = \frac{108}{5} = 21\frac{3}{5}$	$21\frac{3}{5}$ руб. » $\frac{3}{5}$ *м*

З а м е ч а н и е. Все эти варианты данной задачи, как и предыдущие варианты, даются не сразу, а последовательно, один вариант за другим; поэтому и записи решения тоже появляются последовательно.

Учащиеся без малейшего затруднения решат первый вариант задачи, дадут правильный ответ (18 рублей стоит $\frac{1}{2}$ *м*) и укажут решение: «36 надо разделить на 2». Преподаватель с помощью чётко поставленных вопросов заставляет учащихся выяснить, что:

1) до сих пор при всех изменениях количества материи решение задачи записывалось в виде умножения одного числа (цены) на другое (на количество);

2) в последнем решении, которое дали учащиеся ($36:2=18$), имеются два отступления: а) решается задача не умножением, а делением, б) в решении появилось новое число, которого не было дано в задаче (2 вместо $\frac{1}{2}$).

Подчёркивая эти «отступления», преподаватель предлагает, во-первых, сохранить в силе ранее сделанный вывод о том, что при разных численных значениях количества материи решение задачи записывается умножением (цены на количество), во-вторых, припомнить и особо заметить, что в предыдущем варианте, когда надо было определить стоимость одного метра, было введено соглашение, чтобы и в этом случае решение задачи записать в виде умножения (цены на количество). Поэтому и в данном варианте надо ввести соглашение, чтобы решение задачи записать в виде умножения (цены на количество):

$$36\cdot\frac{1}{2}.$$

А чтобы выполнить это действие, надо использовать способ, предложенный учащимися, т. е. 36 разделить на 2 — на знаменатель дроби (почему?):

$$36\cdot\frac{1}{2}=36:2=18 \text{ или } 36\cdot\frac{1}{2}=\frac{36}{2}=18$$

(обе записи справедливы).

Учащиеся по предложению преподавателя отмечают, что в последнем варианте решения задачи произведение получается меньше множимого; но это теперь им понятно: находится стоимость одной половины метра — части его.

Точно так же решаются и следующие варианты задачи, в которых требуется найти стоимость одной части или доли метра.

Затем преподаватель предлагает учащимся сделать обзор решения всех последних вариантов задачи по записям на классной доске и в тетрадях и сформулировать выводы:

1) в каждой задаче требуется найти стоимость одной части метра;

2) решение каждой задачи записывается в виде умножения данного числа (цены) на дробь, выражающую искомую часть той же цены;

3) чтобы выполнить умножение данного числа на дробь с числителем единица, надо данное число разделить на знаменатель дроби;

4) произведение в этом случае всегда получается меньше множимого (так как часть меньше целого).

После этого учащиеся переходят к решению следующих вариантов той же задачи, когда требуется определить стоимость не одной, а нескольких равных долей метра (в первом случае $\frac{2}{3}$ *м*). Учащиеся могут дать полное решение задачи двумя действиями, как они делали это ещё в начальной школе, а именно: 1 *м* стоит 36 руб., $\frac{1}{3}$ *м* стоит в три раза меньше т. е. $36:3=12$ (руб.), а $\frac{2}{3}$ *м* будут стоить не 12 руб., а в два раза больше, т. е. $12\cdot 2=24$. Преподаватель подтверждает правильный ответ и верное решение задачи, одобряет всё это, а затем возвращается к задаче в целом и спрашивает, как же можно в данном случае записать решение задачи? До сих пор, как видно из таблицы, решение записывалось умножением (цены на количество). Целесообразно и в данном случае ввести соглашение о том, чтобы решение задачи записывать одним действием — умножением (цены на количество): $36 \cdot \frac{2}{3}$. А чтобы выполнить это действие, надо поступать так же, как это было описано самими учащимися, а именно: надо сначала найти стоимость $\frac{1}{3}$ *м*, для чего, по предыдущему (см. таблицу решения), надо данное число 36 уменьшить в три раза, разделив его на знаменатель дроби $\left(\frac{36}{3}\right)$; чтобы найти стоимость $\frac{2}{3}$ *м*, надо полученный результат $\left(\frac{36}{3}\right)$ увеличить в два раза, умножив его на 2, для чего числитель дроби надо умножить на 2:

$$36 \cdot \frac{2}{3} = \frac{36 \cdot 2}{3} = 24 \qquad \left(24 \text{ рубля стоят } \frac{2}{3} \text{ м}\right).$$

Учащиеся должны отметить, что произведение получается меньше множимого, и объяснить этот факт.

Точно таким же образом решаются следующие варианты задачи (см. таблицу).

Затем под руководством преподавателя учащиеся опять делают общий обзор решения всех последних вариантов данной задачи, когда требуется определить стоимость части метра, указанной дробью вида $\frac{a}{b}$ при $a < b$, и формулируют выводы:

1) Во всех последних задачах требовалось определить стоимость части метра, указанной дробью.

2) Решение каждой такой задачи записывается в виде умножения данного числа (цены) на дробь (количество).

3) Умножение данного числа на дробь выполняется так: данное число делится на знаменатель дроби, чтобы найти одну долю искомой части, указанной дробью, а полученный результат умножается на числитель дроби, чтобы найти искомую часть, указанную дробью.

4) При умножении данного числа на правильную дробь произведение всегда получается меньше множимого (так как часть меньше целого).

После этого полезно сделать обзор всех решений данной задачи, пользуясь таблицей на классной доске и в ученических тетрадях, и сформулировать выводы:

1) при всех числовых изменениях количества материи решение задачи записывается в виде умножения (цены на количество);

2) при умножении на целое число произведение получается больше множимого (почему?);

3) при умножении на единицу получается произведение, равное множимому (почему?);

4) при умножении на правильную дробь получается произведение меньше множимого (почему?);

5) умножение на целое число применяется тогда, когда надо данное число повторить слагаемым несколько раз или увеличить его в несколько раз;

6) умножение на правильную дробь применяется тогда, когда надо найти часть данного числа, указанную дробью (или короче, когда надо найти дробь данного числа);

7) умножение на дробь выполняется двумя действиями: делением данного числа на знаменатель дроби (зачем?) и умножением его на числитель той же дроби (зачем?)[1].

---

[1] Некоторые из этих выводов учащиеся по предложению преподавателя могут записать в тетради, например 2, 4, 6, 7.

Чтобы обобщить полученное представление об умножении на дробь, связанное с решением только одной задачи (нахождение стоимости материи по данной цене и количеству), надо в классе решить *ещё хотя бы одну задачу, имеющую другое конкретное* содержание, и провести все те же рассуждения, но в более краткой форме. Для этого преподаватель даёт начало такой задачи: «Поезд в среднем может пройти 48 *км* в час». Учащиеся продолжают составление задачи, ставя сначала только основной вопрос: «Сколько километров пройдёт он за 8 час.?» А затем они изменяют числовые значения, измеряющие время непрерывного движения (за 6 час.? за 5 час.? за 3 часа? за 2 часа?). Они решают все созданные ими варианты, располагая записи по образцу предыдущей задачи, и вкратце воспроизводят некоторые выводы. Затем они продолжают вариации числовых значений, измеряющих время движения, уже в области дробей и решают каждый вариант, сопровождая решения подробными рассуждениями, аналогичными рассуждениям предыдущей задачи.

После этого можно дать в порядке домашней работы ещё одну задачу с новым конкретным содержанием и готовыми числовыми вариантами той величины, значения которой служат множителем.

В связи с проверкой этой работы на следующем уроке учащиеся повторяют основные выводы.

Пользуясь этими выводами, учащиеся теперь могут решать простые текстовые задачи с разным конкретным содержанием, в которых требуется найти часть данного числа, указанную дробью. Они записывают решение сразу одним действием (умножением данного числа на дробь) и выполняют умножение с объяснением каждой операции. Например: «1 *кг* чаю стоит 96 рублей. Сколько стоят $\frac{3}{8}$ *кг*?»

— Что известно в задаче?

— Стоимость 1 *кг* чаю (96 руб.).

— Что требуется узнать в задаче?

— Стоимость $\frac{3}{8}$ *кг*.

— Как это можно высказать иначе?

— Надо найти стоимость $\frac{3}{8}$ частей 1 *кг*.

— Каким действием можно записать нахождение стоимости части килограмма?

— Умножением данного числа на дробь (делается запись $96 \cdot \frac{3}{8}$).

— Как выполняется это действие?

— 96 надо разделить на 8, чтобы найти стоимость одной восьмой части килограмма, а потом полученный результат умножить на 3, чтобы найти стоимость трёх таких частей (записывается):

$$96 \cdot \frac{3}{8} = \frac{96}{8} \cdot 3 = \frac{96 \cdot 3}{8} = 36; \qquad \left(36 \text{ рублей стоят } \frac{3}{8} \text{ кг}\right).$$

Дальнейшее развитие навыков умножения данных чисел на правильные дроби и истолкование нового смысла этого умножения проводится на решении числовых примеров. При этом надо время от времени сравнивать получаемые произведения с множимым и объяснять результаты сравнения. Перед решением каждого числового примера в классной работе учащиеся должны прежде всего указывать смысл данного действия.

При повторении основных выводов учащиеся могут записать этот случай деления в общем виде и решать задачи, полученные при замене букв числовыми значениями их: $a \cdot \frac{m}{n} = \frac{a \cdot m}{n}$.

Умножение дроби и смешанного числа на правильную дробь

До сих пор решение задач на нахождение части данного числа и решение числовых примеров сводилось к умножению только целого числа на дробь. Теперь можно перейти к решению таких задач, в которых требуется найти часть дробного числа, а потом и смешанного.

Задача: «Огород занимает площадь $\frac{15}{16}$ *га*; $\frac{3}{4}$ всей площади отведено под картофель. Сколько земли отведено под картофель?» С помощью преподавателя учащиеся устанавливают, что в задаче требуется найти площадь, отведённую под картофель, что под него отведено $\frac{3}{4}$ всей земли огорода, т. е. только часть всей площади, а часть числа находится действием умножения данного числа на дробь; данное число, измеряющее площадь огорода, есть $\frac{15}{16}$, следовательно, для решения задачи надо $\frac{15}{16}$ умножить на $\frac{3}{4}$ (делается запись: $\frac{15}{16} \cdot \frac{3}{4}$). В этом месте надо напомнить и подчеркнуть, что учащиеся умеют находить часть данного числа, указанную дробью; сначала надо найти одну четверть площади огорода делением её на 4 $\left(\frac{15}{16} : 4 = \frac{15}{16 \cdot 4}\right)$; а затем и три четверти умножением результата на 3 $\left(\frac{15}{16 \cdot 4} \cdot 3 = \frac{15 \cdot 3}{16 \cdot 4}\right)$; вся запись принимает такой вид: $\frac{15}{16} \cdot \frac{3}{4} = \frac{15 \cdot 3}{16 \cdot 4} = \frac{45}{64}$ $\left(\frac{45}{64} \text{ га отведено под картофель}\right)$.

Учащиеся решают ещё несколько таких же задач и убеждаются в том, что решение задач, в которых требуется найти часть данного числа, записывается одним действием умножения, что правило умножения на дробь как целого числа, так и дробного остаётся без изменения и что произведение данного числа на правильную дробь всегда меньше данного множимого числа—целого или дроби. В этом месте изучения умножения дробей пока нет никакой необходимости создавать особое правило умножения дроби на дробь, так как основная цель всей текущей работы, как и ближайшей последующей, состоит в том, чтобы возможно полнее и отчётливее истолковать новый смысл умножения на дробь, как нового действия для нахождения искомой части данного числа — целого или дробного. Эту работу не следует пока осложнять созданием особого правила для умножения дроби на дробь. Когда будет полностью закончено изучение умножения дробей, можно сделать общий обзор всех частных случаев: умножение целого числа на дробь, умножение дроби на дробь и умножение смешанного числа на дробь, и в связи с этим ввести частные правила умножения дробей, не рискуя затуманить новый и совершенно особый смысл этой операции.

Развитие навыков применения умножения на дробь целых и дробных чисел достигается решением текстовых задач, простых и сложных, а развитие навыков выполнения этих действий — решением достаточного количества числовых примеров. В процессе этой работы преподаватель должен требовать более или менее быстрого применения известных правил при выполнении действий и время от времени повторять и проверять смысл этих правил:

1) Что значит умножить данное число на дробь? на целое число? 2) Как выполняется умножение данного числа на дробь? Почему сначала при этом данное число делится на знаменатель дроби? и т. п. Вся работа опять завершается буквенной записью и числовыми подстановками с последующим выполнением вычислений:

$$\frac{p}{q}\cdot\frac{m}{n}=\frac{p\cdot m}{q\cdot n}.$$

В дальнейшей работе учащиеся не встретят уже никаких особых и новых затруднений при умножении смешанного числа на правильную дробь. Новое появляется только в том предварительном преобразовании смешанного числа, благодаря которому значительно облегчается дальнейшее выполнение умножения на дробь, это обращение смешанного числа в неправильную дробь.

Задача. «Из имеющегося запаса мяса в $12\frac{3}{4}$ *кг* израсходовали $\frac{2}{3}$ всего количества. Сколько килограммов мяса израсходовали?»

Для осознания, а затем и успешного решения такой задачи, учащиеся должны только понять, что требуется найти часть запаса (или дробь: $\frac{2}{3}$ его), а запись решения таких задач и выполнение необходимых действий им уже известны ($12\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}$). Как выполнить это действие?

Учащиеся могут вспомнить известные им правила деления и умножения смешанного числа на целое число и применить их:

$$12\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}=\left(12\frac{3}{4}:3\right)\cdot 2=4\frac{1}{4}\cdot 2=8\frac{1}{2}.$$

При этом подборе чисел работа проходит довольно гладко и просто. Можно дать учащимся и ещё несколько таких же удачных числовых примеров, чтобы убедиться в том, что ранее выведенные правила умножения и деления смешанных чисел на целое число сохраняют свою силу и при умножении смешанного числа на дробь. Но затем надо дать и такие числовые примеры, решение которых тем же способом будет весьма громоздко.

Например: $12\frac{7}{8}\cdot\frac{3}{5}=\left(12\frac{7}{8}:5\right)\cdot 3$ и т. д.

Если сами учащиеся не догадаются преобразовать смешанное число в неправильную дробь, то эту мысль подаёт им преподаватель, и тогда вся работа будет сведена к известным приёмам умножения дроби на дробь: $12\frac{7}{8}\cdot\frac{3}{5}=\frac{103}{8}\cdot\frac{3}{5}$ и т. д. Учащиеся убеждаются, что при самой подробной записи последнее решение будет всё-таки более коротким и простым.

Всё предыдущее изучение умножения данного числа на правильную дробь имело целью помочь учащимся понять новый смысл действия умножения на правильную дробь, научить их применять это действие при решении задач, в которых требуется найти часть данного числа и выработать одно общее правило для умножения данного числа на дробь. Этим объясняется отбор числовых данных, который даёт возможность учащимся в самой записи процесса умножения на дробь видеть правило умножения. Когда же учащиеся поймут и усвоят этот процесс, надо научить их при решении некоторых частных случаев умножения на дробь применять особые приёмы, которые дадут возможность значительно упростить весь процесс умножения. Одним из самых важных приёмов является промежуточное сокращение дробей до фактического выполнения умножения числителей и знаменателей их. Преподаватель составляет такие примеры или задачи, в которых промежуточные сокращения ускоряют ход работы и упрощают вычисления. Вот несколько примеров:

1) $96\cdot\frac{7}{12}$.   3) $\frac{13}{24}\cdot\frac{12}{23}$.

2) $324\cdot\frac{23}{54}$.   4) $\frac{36}{49}\cdot\frac{35}{54}$.

5) $22\frac{1}{5}\cdot\frac{5}{37}$ и т. п.

В заключительной беседе, посвящённой обзору нового действия — умножения данного числа на правильную дробь, — учащиеся ещё и ещё раз отчётливо формулируют как правило умножения данного числа на дробь, так и ту задачу, которая решается действием умножения: нахождение *части данного числа*, указанной дробью. Преподаватель сообщает им, что эту задачу иногда формулируют несколько иначе, более коротко, а именно: нахождение дроби данного числа (так как искомая часть задаётся всегда в виде дроби).

5. Умножение данных чисел на неправильную дробь и на смешанное число

При дальнейшем изучении умножения дробей (умножения на неправильную дробь и на смешанное число) надо расширить, углубить и ещё отчётливее выяснить и истолковать смысл умножения чисел в зависимости от характера множителя: когда он — целое число, отличное от единицы, когда он единица и когда он дробь — правильная и неправильная. С этой целью по окончании изучения последней подтемы при решении задач или примеров необходимо требовать от учащихся, чтобы они ещё до выполнения умножения старались охарактеризовать произведение, сравнивая его с множимым; для этого они должны внимательно всматриваться во множитель и определять характер дроби множителя: если множитель есть правильная дробь, то произведение будет меньше множимого; если множитель неправильная дробь, произведение будет или равно множимому, или больше его.

Работа опять начинается решением конкретной задачи. Числовой материал подбирается в той же последовательности, как это было при изучении первых двух подтем: множимым сначала является целое число, потом дробь и, наконец, смешанное число; множителями в каждом из этих случаев берутся дроби — правильные и неправильные.

Пусть в некоторой задаче с тем или иным конкретным содержанием дано число 24 и требуется найти следующие дроби его:

$$\frac{5}{6}, \quad \frac{7}{12}, \quad \frac{25}{8}, \quad \frac{5}{3} \quad \text{и т. п.}$$

Учащиеся последовательно записывают и решают одну задачу за другой, давая необходимые пояснения.

Данное число 24;

$$\frac{5}{6} \text{ его} \ldots x \qquad \left|\quad 24\cdot\frac{5}{6}=\frac{\overset{4}{24}\cdot 5}{6}=20\right.$$

$$\frac{7}{12} \text{ его} \ldots x \qquad \left|\quad 24\cdot\frac{7}{12}=\frac{\overset{2}{24}\cdot 7}{\underset{1}{12}}=14\right.$$

Первые два варианта — хорошо знакомые задачи.

Также легко учащиеся могут решить и третий вариант:

$$24\cdot\frac{25}{8}=\frac{\overset{3}{24}\cdot 25}{\underset{1}{8}}=75.$$

Учащиеся сравнивают полученное произведение с множимым и отмечают, что первое больше второго. С помощью преподавателя они выясняют причину этого факта: множитель — неправильная дробь (в $3\frac{1}{8}$ раза больше единицы), и полученное произведение в $3\frac{1}{8}$ раза больше множимого (что легко проверить в порядке устного счёта). То же будет получаться при решении следующих вариантов.

Затем учащиеся решают задачи на умножение дробей и смешанных чисел на дроби (правильные и неправильные) и сравнивают полученные произведения с соответствующими множимыми.

При изучении умножения данных чисел на смешанное число можно ограничиться решением только примеров. При умножении целого числа на смешанное ($18\cdot 3\frac{2}{3}$) учащиеся могут поступать двояко: или предварительно смешанное число обратить в неправильную дробь

$$\left(18\cdot 3\,\frac{2}{3}=18\cdot\frac{11}{3}=\frac{18\cdot 11}{3}=66\right),$$

или сначала умножить на целое число, потом на дробь и полученные произведения сложить $\left(18\cdot 3\frac{2}{3}=18\cdot 3+18\cdot\frac{2}{3}=54+\right.$ $\left.+\frac{18\cdot 2}{3}=66\right)$. Второй способ имеет то преимущество, что все вычисления можно выполнить устно.

При умножении дробей и смешанных чисел на смешанное число учащиеся сами предложат все смешанные числа предварительно обращать в неправильные дроби.

В дальнейшей работе при решении текстовых задач, а особенно при решении примеров, надо широко вводить промежуточные сокращения, о чём упоминалось и раньше.

В заключительной беседе, посвящённой итогам изучения умножения дробей, надо при решении примеров время от времени выяснять самый смысл действия умножения: когда множитель — целое число, правильная дробь $\frac{m}{n}$ при $m<n$ или неправильная дробь вида $\frac{a}{b}$ при $a>b$ и, наконец, смешанное число. Полезно давать учащимся такие упражнения: данное число a (целое, дробное или смешанное) умножить на такую дробь, чтобы произведение получилось или меньше a, или равно a, или больше a.

В той же заключительной беседе можно ввести и особые правила умножения дробей, а также буквенные записи этих правил:

1) $a\cdot b=p$

$$\frac{p}{q}\cdot m=\frac{p\cdot m}{q}$$

$$\left(a+\frac{p}{q}\right)\cdot m=a\cdot m+\frac{p}{q}\cdot m$$

2) $a\cdot\frac{m}{n}=\frac{a\cdot m}{n}$

$$\frac{p}{q}\cdot\frac{m}{n}=\frac{p\cdot m}{q\cdot n}$$

$$\left(a+\frac{b}{c}\right)\cdot\frac{m}{n}=a\cdot\frac{m}{n}+\frac{b}{c}\cdot\frac{m}{n}$$

или:

$$\left(a+\frac{b}{c}\right)\cdot\frac{m}{n}=\frac{p}{q}\cdot\frac{m}{n}=\ldots,$$

где

$$\frac{p}{q}=a+\frac{b}{c}$$

6. Основные свойства умножения и произведения дробей

По окончании изучения умножения дробей надо обратить внимание учащихся на то, что все основные свойства произведения целых чисел распространяются и на произведение дробей и что эти свойства или законы произведения имеют большое применение в вычислительной практике.

Выявление этих свойств произведения дробей имеет также большое образовательное значение: хорошо знакомые понятия «умножение» и «умножить» получили новое истолкование сравнительно с тем, которое придавалось этим понятиям при целом множителе, отличном от нуля и от единицы. Однако, оказывается, что основные свойства произведения сохраняются и в этом новом истолковании умножения.

Следует обратить внимание учащихся при решении ими задач и примеров, что действие умножения дробей всегда выполнимо, т. е. какие бы дроби ни умножали, в произведении всегда получится некоторая дробь (при этом надо заметить, что понятие «дробь» рассматривается в самом широком смысле этого слова, т. е. и всякое целое число может быть представлено как дробь с любым знаменателем, отличным от нуля, в простейшем случае со знаменателем единица). Это свойство можно записать в общем виде с помощью букв:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

Нетрудно убедиться в справедливости переместительного свойства произведения дробей. Учащиеся сначала припоминают переместительное свойство произведения целых чисел и записывают его с помощью букв ($a\cdot b=b\cdot a$ и $a\cdot b\cdot c=b\cdot a\cdot c=c\cdot a\cdot b$). Затем преподаватель напоминает, что они уже имели возможность убедиться в справедливости этого свойства при изучении умножения смешанного числа на целое и наоборот. Но это — частные случаи. Надо показать справедливость этого свойства в общем виде. Для этого достаточно решить несколько примеров на умножение двух, трёх и более дробей, перемещая сомножители в произвольном порядке и сравнивая соответствующие произведения. Например:

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{8}=\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{4}, \text{ так как } \frac{3}{4}\cdot\frac{5}{8}=\frac{3\cdot5}{4\cdot8} \text{ и } \frac{5}{8}\cdot\frac{3}{4}=\frac{5\cdot3}{8\cdot4}.$$

В произведениях получаются равные дроби, так как числители и знаменатели этих дробей соответственно равны, как произведения целых чисел, отличающиеся только порядком сомножителей. То же самое можно показать и на произведении трёх и более дробей. Если среди сомножителей окажутся целые или смешанные числа, то их предварительно можно обратить в неправильные дроби, и данное произведение опять будет рассматриваться как произведение дробей.

Переместительное свойство можно записать с помощью букв:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{c}{d}\cdot\frac{a}{b}.$$

Преподаватель предлагает учащимся вспомнить сочетательное свойство произведения целых чисел, записать его с помощью букв и указать применение его при вычислениях. Затем ставится вопрос, будет ли справедливо это свойство в отношении произведения дробей. Сами учащиеся могут задать числовой пример на умножение трёх или более дробей: $\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{7}{12}$. На вопрос, как можно вычислить это произведение, учащиеся могут предложить такие варианты:

$$\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{7}{12}=\left(\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{5}\right)\cdot\frac{7}{12};$$

$$\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{7}{12}=\frac{3}{8}\cdot\left(\frac{2}{5}\cdot\frac{7}{12}\right);$$

$$\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{7}{12}=\frac{3\cdot2\cdot7}{8\cdot5\cdot12};$$

$$\left(\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{5}\right)\cdot\frac{7}{12}=\frac{3\cdot2}{8\cdot5}\cdot\frac{7}{12}=\frac{3\cdot2\cdot7}{8\cdot5\cdot12};$$

$$\frac{3}{8}\cdot\left(\frac{2}{5}\cdot\frac{7}{12}\right)=\frac{3}{8}\cdot\frac{2\cdot7}{5\cdot12}=\frac{3\cdot2\cdot7}{8\cdot5\cdot12}.$$

Они вычисляют каждое произведение в отдельности. Все три произведения равны, так как у них соответственно числители равны и знаменатели равны, как произведения одних и тех же целых чисел.

Так же легко показать, что и распределительное свойство произведения целых чисел распространяется на произведение дробей. Учащиеся сначала припоминают это свойство произведения целых чисел, формулируют его словами и записывают в общем виде, а также припоминают различные применения его. Затем они припоминают, что это свойство в частном случае уже наблюдалось при умножении смешанного числа на целое число, о чём напоминает соответствующее правило. Чтобы убедиться в справедливости распределительного свойства произведения дробей в более общих случаях, надо взять пример:

$$\left(\frac{3}{7}+\frac{5}{14}\right)\cdot\frac{5}{6}=\frac{3}{7}\cdot\frac{5}{6}+\frac{5}{14}\cdot\frac{5}{6};$$

$$\left(\frac{3}{7}+\frac{5}{14}\right)\cdot\frac{5}{6}=\frac{3\cdot2+5}{14}\cdot\frac{5}{6}=\frac{(3\cdot2+5)\cdot5}{14\cdot6}=\frac{3\cdot2\cdot5+5\cdot5}{14\cdot6};$$

$$\frac{3}{7}\cdot\frac{5}{6}+\frac{5}{14}\cdot\frac{5}{6}=\frac{3\cdot5}{7\cdot6}+\frac{5\cdot5}{14\cdot6}=\frac{3\cdot5\cdot2}{14\cdot6}+\frac{5\cdot5}{14\cdot6}=\frac{3\cdot5\cdot2+5\cdot5}{14\cdot6}.$$

В заключение распределительное свойство произведения записывается в общем виде с помощью букв:

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)\cdot\frac{e}{f}=\frac{a}{b}\cdot\frac{e}{f}+\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}.$$

Наконец, следует напомнить учащимся, что особые случаи умножения в арифметике целых чисел ($0 \cdot a = 0$; $a \cdot 0 = 0$ и $a \cdot 1 = a$) остаются в силе и в арифметике дробей, а именно:

1) $0 \cdot \frac{2}{3} = \frac{0 \cdot 2}{3} = 0$

2) $\frac{5}{7} \cdot 0 = 0$

3) $\frac{7}{12} \cdot 1 = \frac{7}{12} \cdot \frac{5}{5} = \frac{7 \cdot 5}{12 \cdot 5} = \frac{7}{12}$

Эти записи можно дать и с помощью букв:

1) $0 \cdot \frac{a}{b} = 0$

2) $\frac{m}{n} \cdot 0 = 0$

3) $\frac{p}{q} \cdot 1 = \frac{p}{q}$

7. Изменение произведения при изменении данных чисел

Теперь надо показать, что характер изменения произведения сохраняется и в том случае, когда один или оба сомножители — дробные числа (целые и смешанные числа можно преобразовать в дроби); для чего следует рассмотреть:

1) Увеличение и уменьшение одного из сомножителей в несколько раз.

2) Увеличение или уменьшение обоих сомножителей в несколько раз.

3) Умножение одного или двух сомножителей на дробь.

IV. ДЕЛЕНИЕ ДРОБЕЙ

Деление есть одно из самых трудных арифметических действий в области целых чисел. Трудным остаётся это действие и в арифметике дробей, где вводится новое истолкование деления на правильную дробь. Этот новый смысл и является главной трудностью при изучении деления дробей. Нередки бывают также случаи, когда учащиеся путают технику деления на дробь с техникой умножения на дробь.

После изучения умножения дробей кругозор учащихся значительно расширяется: они теперь хорошо знают, что столь знакомое им слово «умножение» надо понимать в каждом отдельном случае по-разному в зависимости от того, каким числом является множитель. Это в значительной мере облегчает задачу преподавателя при изучении деления дробей, особенно в случае, когда делителем является правильная дробь.

1. Истолкование и определение деления дробей

В учебниках арифметики почти всегда деление определяется как действие, обратное умножению, в котором по произведению и одному из двух сомножителей находится другой сомножитель или посредством которого находится такое число, которое при умножении его на делитель в произведении даст число, равное делимому. Это определение остаётся в силе и при дальнейшем развитии понятия о числе — при изучении деления относительных, вещественных и комплексных чисел.

Процесс изучения этой темы можно развить на три этапа в зависимости от того, каким числом является делитель: деление данных чисел на целое число, деление их на правильную дробь и, наконец, деление на неправильную дробь и на смешанное число; завершением всей темы является изучение кратных отношений чисел.

Деление на целое число не вносит чего-либо нового в сознание учащихся: запись точного частного в виде обыкновенной дроби при делении двух любых целых чисел (кроме деления на нуль) знакома учащимся из первых уроков курса арифметики дробей; деление дроби и смешанного числа на целое число применяется при решении тех вопросов, которые вообще решаются делением на целое число.

Деление на правильную дробь вводит учащихся в круг новых идей. Прежде всего они становятся перед новым фактом: при делении на правильную дробь частное получается больше делимого. Определение деления на правильную дробь, как действия, обратного умножению на правильную дробь, в значительной степени облегчает учащимся понимание и осознание этого факта: сопоставляя эти два взаимно обратные действия, учащиеся сравнительно легко усваивают особый смысл деления на дробь и применение этого действия при решении соответствующих задач, а в связи с этим они сознательно овладевают и правилом деления на дробь.

Третий этап, в котором изучается деление на неправильную дробь и на смешанное число, уже не содержит новых понятий. Но при изучении этой подтемы учащиеся должны уверенно решать вопрос о том, какой смысл имеет деление в зависимости от того, каким числом является делитель — целым числом, правильной дробью, неправильной дробью или смешанным числом.

При изучении всей темы деления дробей, исходя из общего определения этого действия, надо каждый этап этой работы самым тесным образом связывать с соответствующими этапами изучения умножения дробей.

2. Деление данных чисел на целое число

Первая подтема — деление данных чисел на целое число — уже рассмотрена в связи с изучением умножения на правильную дробь. Теперь для связи с последующим материалом преподаватель должен в краткой беседе вспомнить с учащимися основные понятия и приёмы, которые были введены, сопровождая и подкрепляя их решением соответствующих текстовых задач и примеров: определение действия деления, истолкование смысла деления на целое число (т. е. вопросы, решаемые этим действием), правила деления дроби и смешанного числа на целое число.

3. Деление данных чисел на правильную дробь

Деление на правильную дробь рассматривается как действие, обратное умножению на правильную дробь. Если последнее применяется при нахождении части или дроби данного числа, то деление на правильную дробь надо рассматривать как действие для нахождения всего числа по заданной части или дроби его. Основная задача преподавателя при этом состоит в том, чтобы помочь учащимся, во-первых, отчётливо понять и осознать, что деление на правильную дробь есть действие, обратное умножению на такую же дробь, во-вторых, уметь истолковывать самый смысл этого действия, чтобы потом применять его при решении соответствующих задач, и, в-третьих, научиться правильно выполнять это действие.

Общий характер всей работы остаётся прежний: учащиеся решают текстовую простую задачу с конкретным содержанием на деление сначала с целочисленными данными, затем изменяют числовые значения той величины, которая в записи деления служит делителем, переходя от целых чисел к дробям сначала вида $\frac{1}{n}$, а потом $\frac{m}{n}$ при $m < n$, выясняют смысл деления как при целом, так и при дробном делителе и технику выполнения действия с отчётливым устным объяснением. Наконец, точно так же изменяются числовые значения делимого, переходя от целых чисел к дробям и к смешанным числам; попутно создаются правила деления на дробь.

Примерная методическая разработка.

Задача. «Сколько стоит 1 *м* материи, если за 12 *м* её заплатили 72 руб.?» Учащиеся записывают условие задачи и обычное решение её:

12 *м* стоят 72 руб.; $72:12=6$;
1 *м* стоит *x* руб.; 6 руб. стоит 1 *м*.

Преподаватель одобряет это решение и предлагает записать его иначе, проводя такие рассуждения: стоимость одного метра неизвестна (x), стоимость 12 *м* в 12 раз больше ($x \cdot 12$), что по условию задачи составляет 72 рубля, т. е. $x \cdot 12 = 72$. Такая запись хорошо известна учащимся, поэтому они свободно указывают обратное действие для нахождения одного из сомножителей по произведению и другому сомножителю:

$$72:12=6;$$
$$6 \cdot 12 = 72.$$

Затем изменяются числа, измеряющие количество материи, и решаются полученные варианты задачи; записи располагаются таким образом:

Данные числа в задаче	Запись условия задачи	Запись решения задачи	Ответ на вопрос задачи	Проверка
12 *м* стоят 72 руб.	$x \cdot 12=72$	$72:12=6$	6 руб. стоит 1 *м*	$6 \cdot 12=72$
8 *м* » 72 руб.	$x \cdot 8=72$	$72:8=9$	9 руб. » 1 *м*	$9 \cdot 8=72$
6 *м* » 72 руб.	$x \cdot 6=72$	$72:6=12$	12 руб. » 1 *м*	$12 \cdot 6=72$
4 *м* » 72 руб.	$x \cdot 4=72$	$72:4=18$	18 руб. » 1 *м*	$18 \cdot 4=72$
3 *м* » 72 руб.	$x \cdot 3=72$	$72:3=24$	24 руб. » 1 *м*	$24 \cdot 3=72$
2 *м* » 72 руб.	$x \cdot 2=72$	$72:2=36$	36 руб. » 1 *м*	$36 \cdot 2=72$

В связи с обзором всей таблицы решений учащиеся по вопросам преподавателя делают следующие выводы:

1) условие *каждой задачи* записывается в виде умножения, а решение в виде обратного действия — деления;

2) при всех числовых изменениях количества материи характер задачи сохраняется, что видно по записи условия и решения;

3) при сохранении числового значения делимого и при уменьшении делителя частное увеличивается, но всё-таки остаётся меньше делимого (почему?).

По предложению преподавателя учащиеся продолжают создание новых вариантов задачи, уменьшая количество материи. Можно предположить, что они примут количество купленной материи равным 1 *м*; встанет такой вопрос: можно ли записать условие и решение задачи в этом случае? Оказывается, что это можно сделать:

$$x \cdot 1 = 72; \quad 72:1 = 72; \quad (72 \text{ руб. стоит } 1 \text{ } м).$$

Учащиеся припоминают, что это — особые случаи умножения и деления на 1; как произведение, так и частное при этом будут равны соответственно множимому и делимому.

Следующие варианты той же задачи будут такие: «Сколько стоит 1 *м* материи, если 72 руб. заплачено за $\frac{1}{2}$ *м*? $\frac{1}{3}$ *м*? $\frac{1}{4}$ *м*? и т. д».

Учащиеся дают ответ на вопрос задачи первого варианта (144 руб. стоит 1 *м*), а преподаватель предлагает записать сначала условие задачи с таким объяснением: стоимость, или цена, 1 *м* материи неизвестна (x), а стоимость $\frac{1}{2}$ *м* находится с помощью действия умножения $(x \cdot \frac{1}{2})$, что, по условию задачи, составляет 72 руб., т. е. $x \cdot \frac{1}{2} = 72$.

Опять получили запись действия умножения, в котором один из сомножителей неизвестен; чтобы найти его, надо произведение (72) разделить на другой сомножитель: $72:\frac{1}{2}$. Как выполнить это действие? Объяснение очень простое: если $\frac{1}{2}$ *м* стоит 72 руб., то целый метр стоит вдвое больше, т. е. $72 \cdot 2 = 144$. Поэтому $72:\frac{1}{2} = 72 \cdot 2 = 144$ (144 руб. стоит 1 *м*).

Точно так же решаются следующие варианты задачи, а записи располагаются в такой таблице:

1 *м* стоит 72 руб.	$x \cdot 1 = 72$	$72:1 = 72$	72 руб. стоит 1 *м*	$72 \cdot 1 = 72$
$\frac{1}{2}$ *м* » 72 руб.	$x \cdot \frac{1}{2} = 72$	$72:\frac{1}{2} = 72 \cdot 2 = 144$	144 руб. » 1 *м*	$144 \cdot \frac{1}{2} = 72$
$\frac{1}{3}$ *м* » 72 руб.	$x \cdot \frac{1}{3} = 72$	$72:\frac{1}{3} = 72 \cdot 3 = 216$	216 руб. » 1 *м*	$216 \cdot \frac{1}{3} = 72$
$\frac{1}{4}$ *м* » 72 руб.	$x \cdot \frac{1}{4} = 72$	$72:\frac{1}{4} = 72 \cdot 4 = 288$	288 руб. » 1 *м*	$288 \cdot \frac{1}{4} = 72$

Учащиеся просматривают всю эту таблицу и приходят к следующим выводам:

1) при всех числовых изменениях количества купленной материи характер решений всех вариантов задачи остаётся прежний: условие задачи записывается в виде умножения с одним неизвестным сомножителем, а решение — в виде деления данного числа (стоимости) на дробь (на количество);

2) при делении на правильную дробь с числителем 1 частное получается больше делимого, так как этим действием находится искомое число, если известна одна его доля, заданная дробью (а число всегда больше своей части);

3) чтобы данное число разделить на дробь с числителем единица, надо умножить данное число на знаменатель этой дроби.

Дальше учащиеся могут сами составлять новые варианты той же задачи, задавая количество купленной материи дробями вида $\frac{a}{b}$ при $a < b$ $\left(\frac{2}{3}\text{ } м, \frac{3}{4}\text{ } м, \frac{5}{6}\text{ } м \text{ и т. п.}\right)$.

Они решают первый вариант, рассуждая примерно так: цена, или стоимость, 1 *м* неизвестна (x), а стоимость $\frac{2}{3}$ *м* находится умножением $(x \cdot \frac{2}{3})$, что по условию задачи составляет сумму в 72 руб., т. е. $x \cdot \frac{2}{3} = 72$. Чтобы найти неизвестный сомножитель, надо произведение разделить на известный сомножитель: $72 : \frac{2}{3}$. Дальнейшее рассуждение такое: по условию задачи $\frac{2}{3}$ *м* стоят 72 руб.; стоимость $\frac{1}{3}$ *м* вдвое меньше (т. е. 72:2, или $\frac{72}{2}$), а стоимость целого метра, т. е. $\frac{3}{3}$ *м*, втрое больше $(\frac{72}{2} \cdot 3 = \frac{72 \cdot 3}{2})$; вся запись примет следующий вид:

$$72 : \frac{2}{3} = \frac{72 \cdot 3}{2} = 108; \quad 108 \text{ руб. стоит } 1 \ м.$$

Следующие варианты решаются так же.

$\frac{2}{3}$ *м* стоят 72 руб.	$x \cdot \frac{2}{3} = 72$	$72 : \frac{2}{3} = \frac{72 \cdot 3}{2} = 108$
$\frac{3}{4}$ *м* » 72 руб.	$x \cdot \frac{3}{4} = 72$	$72 : \frac{3}{4} = \frac{72 \cdot 4}{3} = 96$
$\frac{5}{6}$ *м* » 72 руб.	$x \cdot \frac{5}{6} = 72$	$72 : \frac{5}{6} = \frac{72 \cdot 6}{5} = 86\frac{2}{5}$

108 руб. стоит	1 *м*	$108 \cdot \frac{2}{3} = \frac{108 \cdot 2}{3} = 72$
96 руб. »	1 *м*	$96 \cdot \frac{3}{4} = \frac{96 \cdot 3}{4} = 72$
$86\frac{2}{5}$ руб. »	1 *м*	$86\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{6} = \frac{432 \cdot 5}{5 \cdot 6} = 72$

Делая обзор полученной таблицы под руководством преподавателя, учащиеся ещё раз повторяют выводы, которые были сделаны перед этим, внося в них некоторые изменения; например, последний теперь формулируется так: чтобы данное число разделить на дробь, надо разделить его сначала на числитель дроби (найти одну часть или долю), а затем полученный результат умножить на знаменатель той же дроби (чтобы найти всё искомое число).

При этом полезно особо сформулировать ту мысль, что делением данного числа на дробь находится всё число по известной его части, заданной дробью.

Весь довольно подробно описанный процесс решения предыдущей задачи со всеми основными рассуждениями и выводами, но в более кратком виде, необходимо ещё раз повторить при решении другой текстовой задачи.

Для этой цели можно дать задачу, например, на движение.

З а д а ч а. «Какое расстояние проходит тело в 1 час, если в 16 час. оно проходит 48 *км*?»

Решив эту задачу, учащиеся составляют новые варианты с дробными делителями.

Преподаватель и на дом даёт подобную же работу, но с определёнными вариантами. После этого можно перейти к развитию и закреплению навыков. С этой целью в краткой беседе, посвящённой обзору решений последних задач, вводится и буквенная запись решения их: $a : \frac{p}{q} = \frac{a\,q}{p}$. Подставляя числовые значения входящих букв, учащиеся будут получать разные числовые примеры и решать их для развития и закрепления навыков.

Для развития навыков применения деления целых чисел на правильную дробь учащиеся в классе и дома решают текстовые задачи с конкретным содержанием, а для развития и закрепления навыков выполнения этого действия решаются соответствующие числовые примеры. Как устная, так и письменная редакция этих примеров теперь может и должна быть двоякая: или «разделить целое число a на дробь $\frac{m}{n}$, где $m < n$», или «найти число x, если дробь $\frac{m}{n}$ этого числа x составляет a (или равна a)». Например: «разделить 15 на $\frac{3}{5}$» или: «найти число x, если $\frac{3}{5}$ x равны 15 (или: $\frac{3}{5}$ x составляют 15)». При решении задач в первой редакции на первых порах (а затем только время от времени) надо требовать от учащихся чёткого указания того, что делением на дробь находится всё искомое число по известной части его, заданной дробью. В задачах второй редакции учащиеся должны указывать, что подобные задачи решаются делением данного числа на дробь.

К делению дроби на правильную дробь надо приступать только после того, как преподаватель убедится, что учащиеся отчётливо поняли смысл деления на правильную дробь и прочно усвоили навыки выполнения этого действия с объяснением каждой операции. Работу следует опять начинать с решения текстовой задачи с конкретным содержанием, в которой требуется найти число по известной его части; делитель сразу задаётся правильной дробью, а числовые значения делимого изменяются: сначала целые числа, а потом дроби — правильные и неправильные. Два-три целых значения делимого служат переходной ступенью от известных вариантов задачи к неизвестным, когда делимое будет дробным числом.

З а д а ч а. «Как велик был в семье запас картофеля, если $\frac{5}{8}$ этого запаса составляли 35 *кг*? 15 *кг*? 2 *кг*? 1 *кг*? $\frac{7}{12}$ *кг*? $\frac{9}{16}$ *кг*? и т. п.». Первые четыре варианта задачи ничем не отличаются от предыдущих задач, поэтому учащиеся решают их без всяких затруднений, сразу указывая способ записи решения: $35 : \frac{5}{8} = \frac{35 \cdot 8}{5} = 56$ (запас был в 56 *кг*) и т. д. Таким образом, у них создаётся убеждение, что это задача на отыскание всего числа по заданной части его. Поэтому переход к дробному делимому в той же задаче будет естественным, простым и понятным. Так, при решении пятого варианта учащиеся будут рассуждать попрежнему: «В задаче требуется найти весь запас картофеля (x), если известно, что $\frac{5}{8}$ этого запаса составляют $\frac{7}{12}$ *кг*, что можно записать так: $\frac{5}{8} \cdot x = \frac{7}{12}$; решение задачи надо записать делением: $\frac{7}{12} : \frac{5}{8}$. Чтобы выполнить это действие, надо делимое $\frac{7}{12}$ сначала разделить на числитель дробного делителя, чтобы найти $\frac{1}{8}$ часть запаса ($\frac{5}{8}$ запаса составляют $\frac{7}{12}$, а $\frac{1}{8}$ в 5 раз меньше), а затем полученный результат умножить на знаменатель дробного делителя (так как $\frac{1}{8}$ запаса составляет $\frac{7}{12 \cdot 5}$, а весь запас, т. е. $\frac{8}{8}$, в 8 раз больше)»; запись примет следующий вид:

$$\frac{5}{8} \cdot x = \frac{7}{12}.$$

$$\frac{7}{12} : \frac{5}{8} = \frac{7 \cdot \overset{2}{8}}{\underset{3}{12} \cdot 5} = \frac{14}{15}; \quad \frac{14}{15} \textit{ кг составляли запас.}$$

Учащиеся могут убедиться в справедливости результата: если умножить его на делитель, то в произведении получится число, равное делимому:

$$\frac{14}{15} \cdot \frac{5}{8} = \frac{\overset{7}{14} \cdot 5}{\underset{3}{15} \cdot \underset{4}{8}} = \frac{7}{12}.$$

После решения остальных вариантов задачи учащиеся просматривают все записи, подмечают тот факт, что частное при делении на правильную дробь больше делимого, что они замечали и раньше. Они убеждаются, что во всех случаях деление на дробь выполняется двумя действиями: данное число — целое или дробь — делится на числитель дробного делителя (зачем?) и полученный результат умножается на знаменатель того же делителя (зачем?). Особого правила деления дроби на дробь пока вводить не следует, чтобы в дальнейшей работе дать возможность учащимся более отчётливо понять смысл деления на дробь, связывая его с техникой выполнения действия.

С помощью буквенной записи решений последних задач учащиеся получат более отчётливое представление о делении дроби на дробь; числовые подстановки дадут материал для развития навыков:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

Деление смешанных чисел на правильную дробь непосредственно связывается с решением разных вариантов предыдущей задачи. Задание делимого неправильной дробью не меняет характера задачи, которая решается делением на правильную дробь. Не изменится характер задачи и в том случае, если делимое будет задано смешанным числом, которое всегда может быть представлено в виде неправильной дроби.

В заключительной беседе, посвящённой итогам изучения подтемы «деление данных чисел на правильную дробь», преподаватель ещё раз заставляет учащихся повторить основные выводы о том, что деление на целое число и на правильную дробь определяется как действие, обратное умножению; какие вопросы задачи решаются делением на целое число и делением на правильную дробь; сравнение частного с делимым в этих обоих случаях; правило деления на целое число (дроби и смешанного числа) и на правильную дробь. Все эти сведения потребуются в следующей работе при изучении последней подтемы.

4. Деление данных чисел на неправильную дробь и на смешанное число

Преподаватель предлагает учащимся текстовую задачу, например:

«Сколько километров пробегает лошадь в 1 час, если в $\frac{3}{5}$ часа она пробегает 8 *км*? в $\frac{7}{8}$ часа пробегает 14 *км*? в $\frac{4}{3}$ часа 20 *км*? в $\frac{11}{5}$ часа $25\frac{2}{3}$ *км*? в $1\frac{1}{4}$ часа 20 *км*? и т. п.».

Учащиеся решают первый и второй варианты:

$\frac{3}{5}\cdot x=8$; $8:\frac{3}{5}=\frac{8\cdot 5}{3}=13\frac{1}{3}$; $13\frac{1}{3}$ *км* пробегает лошадь в 1 час;

$\frac{7}{8}\cdot x=14$; $14:\frac{7}{8}=\frac{\overset{2}{\cancel{14}}\cdot 8}{\underset{1}{\cancel{7}}}=16$; 16 *км* пробегает лошадь в 1 час.

Каждое частное больше делимого (почему?).

Затем они решают следующий вариант:

$$\frac{4}{3}x=20; \quad 20:\frac{4}{3}=\frac{\overset{5}{\cancel{20}}\cdot 3}{\underset{1}{\cancel{4}}}=15 \text{ (ответ: 15 } км).$$

При сравнении частного с делимым оказывается, что оно меньше делимого. Почему? Учащиеся должны подметить, что в этом варианте задачи, как и в предыдущих двух, требуется найти путь, который пробегает лошадь в 1 час, если известен путь в 20 *км*, который она пробегает в $\frac{4}{3}$ часа; а $\frac{4}{3}$ часа больше одного часа; поэтому в 1 час лошадь пробежит меньший путь, чем в $\frac{4}{3}$ часа. Объяснение отдельных операций при делении на $\frac{4}{3}$ остаётся прежним.

После решения всех намеченных вариантов учащиеся под руководством преподавателя делают обзор всех последних решений по записи их на классной доске и в тетрадях и формулируют выводы:

1) во всех вариантах данной задачи требовалось найти всё искомое число по известной «части» его (заданной дробью или смешанным числом);

2) выражение «часть искомого числа, заданная дробью или смешанным числом», принято заменять таким выражением: «дробь искомого числа»;

3) решение каждой такой задачи записывается в виде деления данного числа — целого, дроби или смешанного — на заданную дробь или на смешанное число;

4) деление на дробь выполняется двумя действиями — делением на числитель (зачем?) и умножением на знаменатель (зачем?);

5) частное при делении получается или больше делимого (когда и почему?), или меньше делимого (когда и почему?), или равно делимому (когда и почему?).

Для развития соответствующих навыков числовой материал надо подбирать так, чтобы учащиеся могли применять промежуточные сокращения дробей. При этом надо требовать, чтобы все

эти сокращения учащиеся производили только после того, как будут записаны все операции, требуемые тем или иным действием, например:

$$\frac{9}{35}\cdot\frac{7}{15}=\frac{\overset{3}{9}\cdot\overset{1}{7}}{\underset{5}{35}\cdot\underset{5}{15}}=\frac{3}{25}\text{; или }\frac{9}{35}:\frac{3}{7}=\frac{\overset{3}{9}\cdot\overset{1}{7}}{\underset{5}{35}\cdot\underset{1}{3}}=\frac{3}{5},$$

и не допускать эти сокращения в таком виде:

$$\frac{\overset{3}{9}}{\underset{5}{35}}\cdot\frac{\overset{1}{7}}{\underset{5}{15}}=\frac{3}{25}\text{ или }\frac{\overset{3}{9}}{\underset{5}{35}}:\frac{\overset{1}{3}}{\underset{1}{7}}=\frac{3}{5}.$$

Последние «сокращения» дробей прежде всего нарушают основное требование ко всем записям арифметических действий, которое состоит в том, чтобы в первой основной записи действия данные числа как целые, так и дробные сохранялись в неприкосновенном виде.

В процессе той же работы при развитии навыков деления дробей, когда учащиеся хорошо усвоили и поняли смысл деления дробей при любом числовом делителе (кроме нуля), своевременно ввести частные правила деления целого числа и дроби на дробь.

С этой целью можно вновь записать с помощью букв все основные случаи деления на целое число, на дробь и на смешанное число; по этим записям легко составляются отдельные правила:

1) $a:b=\frac{a}{b}$

$$\frac{p}{q}:m=\frac{p}{q\cdot m}=\frac{p:m}{q}$$

$$\left(a+\frac{b}{c}\right):m=a:m+\frac{b}{c}:m$$

или:

$$\left(a+\frac{b}{c}\right):m=\frac{p}{q}:m,$$

где

$$\frac{p}{q}=a+\frac{b}{c}$$

2) $a:\frac{m}{n}=\frac{a\cdot n}{m}$

$$\frac{p}{q}:\frac{m}{n}=\frac{p\cdot n}{q\cdot m}$$

$$\left(a+\frac{b}{c}\right):\frac{m}{n}=\frac{p}{q}:\frac{m}{n},$$

где

$$\frac{p}{q}=a+\frac{b}{c}$$

3) $d:\left(a+\frac{b}{c}\right)=d:\frac{p}{q}$;

$$\frac{m}{n}:\left(a+\frac{b}{c}\right)=\frac{m}{n}:\frac{p}{q};$$

$$\left(a+\frac{b}{c}\right):\left(d+\frac{e}{f}\right)=\frac{p}{q}:\frac{m}{n},$$

где $\frac{p}{q}=a+\frac{b}{c}$ и

$$\frac{m}{n}=d+\frac{e}{f}.$$

Теперь учащиеся должны решать задачи, требующие применения всех четырёх действий над целыми числами и над дробями, в особенности же умножения и деления на дробь. При решении этих задач и примеров учащиеся должны пользоваться готовыми формулировками правил без промежуточных объяснений, чтобы не задерживать всего хода основной работы. Но время от времени преподаватель должен задавать отдельные вопросы учащимся с целью выяснить, в какой мере они понимают производимые ими операции (например, почему при умножении на дробь данное число сначала делится на знаменатель, а потом умножается на числитель, или когда при делении частное получается больше делимого, и т. п.).

5. Основные свойства деления дробей

Чтобы завершить изучение деления дробей, надо рассмотреть основные свойства этой операции. Прежде всего учащиеся с помощью преподавателя припоминают, что в арифметике целых чисел деление бывает не всегда выполнимо (что это значит?), указывают, когда именно оно выполнимо. Благодаря введению дробей действие деления теперь становится всегда выполнимым в арифметике дробей (кроме деления на нуль); дробь теперь определяется или истолковывается как частное, и она обладает всеми свойствами точного частного.

Деление дробей рассматривается как действие, обратное умножению. Умножение дробей обладает свойствами переместительным, сочетательным и распределительным. Обладает ли этими свойствами деление дробей? Деление целых чисел, как известно, не обладает свойством переместительности. Можно легко убедиться в том, что и деление дробей не обладает этим свойством. Учащиеся решают две-три пары таких задач:

$$16:11=\frac{16}{11} \text{ и } 11:16=\frac{11}{16};$$

$$\frac{5}{9}:\frac{2}{5}=\frac{25}{18} \text{ и } \frac{2}{5}:\frac{5}{9}=\frac{18}{25} \text{ и т. п.}$$

и видят, что при перемещении делимого и делителя в частном получаются взаимно обратные числа $\left(\frac{16}{11} \text{ и } \frac{11}{16};\ \frac{25}{18} \text{ и } \frac{18}{25} \text{ и т. п.}\right)$. Они ещё придумывают такие же задачи и пары взаимно обратных чисел, потом попарно перемножают их и таким образом выявляют свойство взаимно обратных чисел. Те же задачи они записывают в общем виде: $a:b=\frac{a}{b}$ и $b:a=\frac{b}{a}$; $\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=1$.

В связи с этим преподаватель может ввести, если найдёт нужным; довольно распространённое правило деления на дробь (замена деления на дробь умножением на число, обратное делителю):

$$a:\frac{m}{n}=a\cdot\frac{n}{m}=\frac{a\cdot n}{m} \text{ и}$$

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}.$$

Но, это можно сделать только в том случае, когда учащиеся основательно поняли и усвоили смысл деления на дробь.

На ряде числовых примеров можно показать справедливость распределительного свойства деления дробей — деление суммы и разности чисел на любое число (кроме нуля) проверкой и сравнением результатов:

1) $27\frac{7}{8}:7=\left(28-\frac{1}{8}\right):7=28:7-\frac{1}{8}:7=4-\frac{1}{56}=3\frac{55}{56}$; $\quad 27\frac{7}{8}:7=$

$$=3+\frac{55}{8}:7=3+\frac{55}{56}=3\frac{55}{56}.$$

2) $\left(\frac{11}{15}+\frac{7}{12}\right):\frac{2}{3}=\frac{11}{15}:\frac{2}{3}+\frac{7}{12}:\frac{2}{3}$.

6. Изменение частного при изменении данных чисел

При изменении делимого или делителя, или обоих компонентов частное от деления дробных чисел изменяется так же, как и точное частное при делении целых чисел.

Обычно рассматриваются такие случаи:

1) Увеличение или уменьшение делимого или делителя в несколько раз и

2) увеличение или уменьшение делимого и делителя в одно и то же число раз.

По мере изучения нового материала о дробях, особенно каждого нового действия над ними, преподаватель постепенно вводит изменения данных чисел, а учащиеся должны обоснованно указать, как изменится результат. Учащиеся постепенно сами могут создавать разные задачи на изменение компонентов. Преподаватель всемерно должен развивать такую инициативу и поддерживать её; но в то же время он должен держать все подобные задачи в определённом русле: учащиеся могут задавать такие изменения компонентов, которые в данном месте курса будут непосильными; в таком случае следует снять эту задачу и перенести её на более позднее время учебного года или в математический кружок.

После изучения умножения дробей, в частности умножения на дробь, можно рассмотреть вопрос о характере изменения суммы и разности при умножении одного из данных чисел на правильную и неправильную дроби, а также и на смешанное число; например: 1) как изменится сумма, если одно слагаемое умножить на 3? на 2? на $\frac{1}{2}$? на $\frac{2}{3}$? и т. п.; 2) как изменится разность, если уменьшаемое или вычитаемое умножить на $\frac{3}{5}$? на $\frac{5}{3}$? и т. п.; 3) в последней задаче встаёт и новый вопрос: всегда ли возможно в данном числовом примере на вычитание уменьшаемое или вычитаемое умножить на правильную дробь и на неправильную дробь?

После изучения деления дробей, особенно деления на дробь, можно ставить вопрос о характере изменения суммы и разности при делении того или иного из данных чисел на правильную и неправильную дробь.

Очень полезно рассмотреть вопрос об изменении дроби в том случае, когда к обоим членам её прибавляется одно и то же число (или от обоих членов отнимается одно и то же число до тех пор, пока это возможно). Такой вопрос иногда вызывает быстрый и дружный ответ: «дробь не изменится». Этот ответ может быть верным, когда дробь вида $\frac{m}{m}$, и будет неверным, когда дробь вида $\frac{p}{q}$ при $p \neq q$. Сначала учащиеся рассматривают изменение правильных дробей, когда к обоим членам её прибавляется одно и то же число, например: $\frac{7}{11}$ и $\frac{7+4}{11+4}=\frac{11}{15}$. Удобнее всего сравнивать эти две дроби с помощью их дополнений до 1 (так как разность между знаменателем и числителем при таких изменениях обоих членов дроби сохраняется постоянной): в первой дроби до 1 нехватает $\frac{4}{11}$, а во второй $\frac{4}{15}$, а $\frac{4}{11}>\frac{4}{15}$, следовательно, $\frac{7}{11}<\frac{11}{15}$, поэтому дробь увеличилась. После решения достаточного числа таких задач учащиеся формулируют характер изменения дроби: правильная дробь увеличится, если к обоим членам её прибавить одно и то же число.

Затем учащиеся рассматривают изменение неправильных дробей вида $\frac{p}{q}$ при $p>q$, сравнивая их избытки над целым числом.

Для развития прочных навыков в различных преобразованиях дробей и в выполнении действий над ними учащиеся должны решать много числовых примеров без скобок и со скобками. Порядок выполнения этих работ можно сохранить прежний, т. е. последовательно выполнять действия в соответствии с записью их и соблюдать нормальный порядок действий.

V. ОТНОШЕНИЯ

1. Истолкование и определение отношения

Понятие «отношение» играет огромную роль в самой математике и в её приложениях. Накопление необходимых представлений, обобщение которых приводит к созданию понятия «отношение», происходит при решении разного рода задач на протяжении всего периода обучения в начальной школе и затем в V классе. Это те задачи, в которых в явной или в неявной форме ставится вопрос о сравнении однородных величин или о сравнении чисел: во сколько раз одна величина больше другой или какую часть одна величина составляет от другой, а также во сколько раз одно число больше другого или какую часть одно число составляет от другого. Например, во сколько раз длина одного предмета (24 *м*) больше длины другого (8 *м*), вес одного предмета (15 *кг*) больше веса другого (3 *кг*) и т. п. Над однородными величинами, как известно, можно производить только два действия — сложение и вычитание их. А указанные выше вопросы разрешаются действием деления — делением одного числа на другое. Но известно также, что каждую величину можно измерить: в результате измерения получается число, которое называется числовым значением величины. Поэтому сравнение величин практически сводится к сравнению чисел, измеряющих эти величины, что и указано в приведённых примерах (24 *м* и 8 *м*; 15 *кг* и 3 *кг*). А сравнение чисел, т. е. нахождение ответа на вопрос, во сколько раз одно число больше другого или какую часть одно число составляет от другого, производится делением одного числа на другое. В результате деления получается число, которое называется или частным (преимущественно тогда, когда оно целое число), или дробью, или, наконец, отношением.

Таким образом, отношением двух чисел называется частное, полученное при делении одного числа на другое. Если делимое и делитель суть числа, полученные при измерении двух однородных величин одной и той же единицей меры, то отношение этих чисел принимается и за отношение двух данных однородных величин. Поэтому под термином «отношение» подразумевается или отношение двух однородных величин, или отношение двух чисел. Отношение находится действием деления: $a:b=q$, где a и b или данные числа, или числа, полученные при измерении двух однородных величин одной и той же единицей меры, а число q, как и $a:b$, — частное или отношение.

Поэтому в программе по арифметике для V класса учение об отношении двух чисел непосредственно следует за делением дробей. В объяснительной записке по этому поводу сказано: «Отношение двух чисел определяется как частное от деления одного числа на второе. Все свойства отношения при этом получаются без нового обоснования, как уже известные учащимся свойства частного» [1].

Совсем иная картина имеет место в учебниках арифметики и в арифметических задачниках, даже в тех, которые в настоящее время находятся в школе на руках у учащихся: учение об отношениях стоит после изучения арифметики обыкновенных и десятичных дробей и непосредственно связано с последующим изучением пропорций [2].

При изучении арифметики в дореволюционной школе отношения имели очень широкое применение в задачах на разного рода «правила»: «тройное правило», «правило процентов», «правило смешения» и т. п. [3].

---

[1] Программы средней школы на 1951 г.

[2] Березанская, Сборник задач и упражнений по арифметике.

[3] Киселёв, Систематический курс арифметики, издания до 1937 г.; Тулинов и Чекмарёв, Арифметика для педагогических училищ, 1946.

Авторы разных учебников по арифметике по-разному определяли и определяют понятие отношения. Так, одни из них определяли отношение как результат, полученный при сравнении двух однородных величин или двух чисел [1].

Другие (и таких большинство) определяют отношение как частное, полученное при делении одного числа на другое [2]. Некоторые из них при этом считают деление как «способ начертания» отношений или как действие, с помощью которого находится отношение [3].

Наконец, имеются учебники, в которых отношение определяется как число, на которое надо умножить одно из данных чисел, чтобы получить другое данное число [4].

Из этого схематического обзора следует, что в огромном большинстве учебников по арифметике отношение двух чисел определяется как частное, полученное при делении одного числа на другое. Но при этом многие авторы учебников добавляют, что не всякое частное можно принять за отношение. Это ограничение связывается с понятием о двух видах деления — деление на равные части и деление по содержанию; за отношение ими принимается только частное, полученное при делении по содержанию.

Профессор А. Я. Хинчин [5] по этому поводу говорит, что в школьной арифметике, которую он называет «физико-математической пропедевтикой», где действия производятся преимущественно над именованными числами, по старой традиции всё ещё говорится о двух видах деления: «деление по содержанию» и «деление на равные части». «Но математика вообще не знает понятия именованного числа»; математика знает только одно единое деление. Два вида деления — это просто два типа конкретных практических задач, решаемых одним и тем же действием деления. Поэтому разделение всевозможных частных на два типа, являющихся и не являющихся отношениями, ничего общего с математикой не имеет. Арифметические операции мы производим только над отвлечёнными числами и с этим актом абстракции, уничтожающим множество неясностей и недомолвок, мы знакомим наших детей очень рано. Именно поэтому современный математик или физик, имея перед собой выражение $\frac{a}{b}$, в подавляющем большинстве случаев совершенно независимо от имеющихся наименований (т. е. от кон-

---

[1] Малинин и Буренин, Арифметика, изд. 21, 1910. Извольский, Арифметика, изд. 3, 1914.

[2] Киселёв, Систематический курс арифметики, изд. 13 и более ранние, а также под ред. проф. Хинчина; Билибин, Теоретическая арифметика, 1916; Будаевский, Арифметика, изд. 5, 1914; Шохор-Троцкий, Учебник арифметики, изд. 2, 1922; Никульцев, Арифметика.

[3] Глаголев. Теоретическая арифметика, 1914.

[4] Таннери, Теоретическая и практическая арифметика, 1913.
Киселёв, Систематический курс арифметики, изд. 14 и 15;
Егоров, Методика арифметики, 1917;

[5] А. Я. Хинчин, О понятии отношения.

кретного истолкования чисел a и b в данной задаче) назовёт его отношением a к b... Именно благодаря тому, что школьная арифметика уже отвоевала одну из важнейших позиций научной арифметики — производить действия только над отвлечёнными числами — мы не можем встретить никаких затруднений в отождествлении, как это делает в подавляющем большинстве случаев современная наука, термина «отношение» с термином «частное». Дальше тот же автор разбирает конкретный пример записи $\left(\frac{20\ \textit{кг}}{5}\right)$ и говорит, что даже вопрос не может возникнуть о том, чтобы это выражение назвать отношением, потому что «само записанное действие не может встретиться». Его можно записать иначе: $\frac{20}{5}$ (*кг*). «Эта запись означает, что искомое число килограммов равно отношению числа 20 к числу 5. Такое истолкование этой записи со всех точек зрения безупречно». Следовательно, можно сказать, что «отношение» есть частное, полученное при делении одного числа на другое; если это были даны числа, то частное будет «отношением двух чисел»; если же это были числа, полученные при измерении двух однородных величин одной и той же единицей меры, то полученное частное будет и «отношением двух чисел», и «отношением двух однородных величин».

Поэтому на отношение распространяются все свойства частного и дроби, которая тоже определяется как частное. С методической *точки зрения такое истолкование отношения* значительно упрощает всю работу по выяснению этого понятия и применению его к решению соответствующих задач. Этим вполне определяется изучение отношений в курсе арифметики в связи с изучением деления обыкновенных дробей. Ничего нового по существу в этом вопросе учащиеся не получают; зато они имеют возможность повторить старый и известный материал в новой форме и в связи с решением простых и сложных задач с конкретным и отвлечённым содержанием на нахождение отношений и членов отношения.

При введении нового термина «отношение» преподаватель заставляет учащихся припомнить, какие вопросы-задачи решаются делением на целое число, затем делением на дробь, что эти вопросы зависят преимущественно от конкретного содержания задач. Если же во всех задачах на деление оставить только числа без наименования, отбросив их конкретное истолкование, то при делении одного числа на другое разрешается, в сущности, только один из двух вопросов: сколько раз одно число — меньшее — содержится в большем (при делении большего числа на меньшее), или какую часть одно число — меньшее — составляет от другого числа (при делении меньшего числа на большее). Последний вопрос можно сформулировать иначе, зная, что частное при делении меньшего числа на большее всегда может быть записано дробью: какую дробь меньшее число составляет от большего? Но известно, что частное при делении большего числа на меньшее тоже всегда может быть записано дробью. Поэтому два последних вопроса, которые решаются делением одного числа на другое, можно заменить одним вопросом: какую дробь одно число составляет от другого? Ответ на этот общий вопрос, который находится действием деления, и условились называть отношением одного числа к другому.

При дальнейшем развитии понятия числа уже в курсе элементарной алгебры членами отношения могут быть не только целые и дробные положительные числа, но и числа каждой новой области — положительные и отрицательные, рациональные и иррациональные.

При изучении десятичных дробей, в частности, при изучении деления их, надо опять ставить вопрос о нахождении отношений чисел, заданных десятичными дробями. Затем при изучении процентов продолжается изучение отношений в связи с нахождением процентных отношений.

Таким образом, изучение отношений в собственном смысле этого слова начинается в связи с делением обыкновенных дробей и продолжается при дальнейшем изучении десятичных дробей и процентов. Это понятие затем широко применяется в решении арифметических задач, содержащих пропорциональные величины и при изучении пропорций. Такое построение курса даёт возможность в течение достаточно большого отрезка времени основательно освоиться с одним из важнейших понятий математики — отношением.

2. Примерный план методической обработки темы

При изучении отношения в непосредственной связи с делением дробей основная задача преподавателя состоит в том, чтобы помочь учащимся отчётливо выяснить самое понятие «отношение», как частное или дробь, необходимость и целесообразность этого нового обобщения понятия частного. С этой целью преподаватель предлагает учащимся целый ряд задач на деление одного числа на другое с конкретным и отвлечённым содержанием, исчерпывающим те конкретные вопросы, которые обычно решаются делением. При решении каждой задачи подчёркивается основной арифметический вопрос, который решается делением большого числа на меньшее и меньшего числа на большее, независимо от конкретного содержания задачи. Частное, полученное делением одного числа на другое, называется отношением первого числа ко второму. Обозначив первое число буквой a, второе — буквой b, можно записать это так: $a:b$ или $\frac{a}{b}$. Давая этим буквам любые числовые значения (кроме $b=0$), учащиеся получат числовые отношения и вычислят их с истолкованием смысла каждого результата, например: $15:5=3$ (15 больше 5 в три раза или 5 содержится в 15 три раза) или $2:5=\frac{2}{5}$ (2 составляет дробь $\frac{2}{5}$ от 5) и т. п. После этих упражнений преподаватель сообщает учащимся, что если частное рассматривается как отношение, то делимое и делитель называются членами отношения: делимое — предыдущий член (a), делитель — последующий член (b); попутно учащиеся припоминают, что если частное записывается в виде дроби, то делимое и делитель тоже называются уже иначе — членами дроби (числитель и знаменатель).

Дальнейшее изучение отношений будет не чем иным, как повторением всех основных свойств частного и дроби, но в новой словесной формулировке: умножение или деление обоих членов отношения на одно и то же число, не равное нулю, и основные соотношения между членами отношения (чему равен предыдущий или последующий член). На основании этих свойств учащиеся решают задачи на сокращение отношений и на замену отношения дробных чисел отношением целых чисел.

Вся работа завершается применением полученных новых знаний и навыков к решению задач, в которых требуется найти отношение двух чисел, измеряющих данные величины, или одно из этих чисел, зная отношение и другое число.

Запись отношения с помощью букв полезно применять и дальше при изучении отношений:

$a : b = q$ или $\frac{a}{b} = q$ — запись отношений, где

a — предыдущий член, b — последующий член,

q — отношение, $a : b$ или $\frac{a}{b}$ — тоже отношения;

$$(a \cdot m) : (b \cdot m) = a : b \text{ или } \frac{a \cdot m}{b \cdot m} = \frac{a}{b} \text{ (основное свойство);}$$

$$a = b \cdot q \text{ и } b = a : q.$$

3. Общий арифметический смысл задач, решаемых действием деления

1) Преподаватель предлагает учащимся первую группу задач, решаемых делением большего числа на меньшее («деление по содержанию»).

Задача 1. «Местком приобрёл для своих членов путёвки в дома отдыха стоимостью по 900 руб. каждая на общую сумму в 3 600 руб. Сколько путёвок приобрёл местком?»

Учащиеся решают эту и следующие задачи, сопровождая их необходимыми пояснениями:

1 путёвка стоит 900 руб.	$3\,600 : 900 = 4$;
x путёвок стоят 3 600 руб.	4 путёвки приобрёл местком.

Задача 2. «Отцу $52^1/_2$ года, а сыну $10^1/_2$ лет. Во сколько раз отец старше сына?»

Возраст отца $52\frac{1}{2}$ года.	$52\frac{1}{2} : 10\frac{1}{2} = 5$.
Возраст сына $10\frac{1}{2}$ лет.	Отец в 5 раз старше сына.

Под руководством преподавателя учащиеся каждое решение сопровождают объяснениями, а затем делают обзор этих задач и решения их и устанавливают общий характер их:

а) каждая задача решается делением большего числа на меньшее;

б) в каждой задаче действием деления разрешается один и тот же вопрос: сколько раз меньшее число содержится в большем (примерное объяснение решения первой задачи: для покупки одной путёвки надо из общей суммы 3 600 руб. взять 900 руб., для покупки второй путёвки надо ещё взять 900 руб. и т. д.; всего будет куплено столько путёвок, сколько раз 900 содержится в 3 600, что можно узнать, разделив 3 600 на 900).

в) полученное частное служит ответом на поставленный вопрос; оно же служит ответом и на вопрос задачи в зависимости от конкретно-практического содержания её.

2) Вторая группа задач, решаемых делением большего числа на меньшее («деление на равные части»).

З а д а ч а 3. «Для пошивки костюмов воспитанникам интерната куплено 900 *м* материи на сумму 3 600 руб. Сколько рублей стоит 1 *м* материи?»

Учащиеся решают эту задачу:

900 *м* стоят 3 600 руб.	$3\,600:900=4$;
1 *м* стоит x руб.	4 рубля стоит 1 *м*

После решения её с обычным объяснением преподаватель ещё раз останавливается на этом решении и выясняет, что и в данной задаче разрешается тот же основной вопрос, что и в предыдущих задачах: сколько раз меньшее число содержится в большем? Соответствующее рассуждение ведётся таким образом: если бы 1 *м* материи стоил один рубль, то 900 *м* стоили бы 900 руб.; в задаче же сказано, что 900 *м* стоили не 900 руб., а 3 600 руб., т. е. больше; если бы 1 *м* стоил 2 руб., то 900 *м* стоили бы не 900 руб., а в два раза больше ($900\cdot 2 = 1\,800$), т. е. 1 800 руб., и т. д.; таким образом, 1 *м* материи будет стоить столько рублей, сколько раз 900 содержится в 3 600, что можно узнать делением 3 600 на 900.

З а д а ч а 4. «Туристы прошли путь в $52\frac{1}{2}$ *км* за $10\frac{1}{2}$ час. Сколько километров в среднем они проходили в 1 час?»

$52\frac{1}{2}$ *км* прошли за $10\frac{1}{2}$ час.	$52\frac{1}{2}:10\frac{1}{2}=5$;
x » » » 1 »	5 *км* туристы проходили в 1 час.

Преподаватель помогает учащимся убедиться в том, что в этой задаче действием деления решается тот же основной вопрос: сколько раз $10\frac{1}{2}$ содержится в $52\frac{1}{2}$ (рассуждение ведётся так же, как и в предыдущей задаче)?

Учащиеся просматривают содержание и решение последних задач и делают те же выводы, которые были сделаны после решения первых задач.

3) Третья группа задач, решаемых делением меньшего числа на большее.

З а д а ч а 5. «В классе 39 учащихся, из которых 13 мальчиков. Какую часть всего числа учащихся в классе составляют мальчики?»

В классе учащихся 39.	$13:39=\frac{1}{3}$;
В » мальчиков 13.	$\frac{1}{3}$ всего числа учащихся в классе составляют мальчики.

З а д а ч а 6. «Какую часть 5 составляет от 12?»

$$5:12=\frac{5}{12}\ ;\ \left(5 \text{ составляет } \frac{5}{12} \text{ от } 12\right).$$

Учащиеся отмечают, что и эти задачи решаются делением, но основной вопрос, разрешаемый этим действием, иной: какую часть одно число (меньшее) составляет от другого (большего)? Частное в этих задачах всегда записывается в виде дроби почему?), а потому последний вопрос можно сформулировать иначе: какую дробь составляет одно число от другого?

Преподаватель помогает учащимся вспомнить, что и при решении первых задач частное можно записывать в виде дроби, например:

$$3\,600:900=\frac{3\,600}{900}\ ;\quad 52\frac{1}{2}:10\frac{1}{2}=\frac{105}{2}:\frac{21}{2}=\frac{105\cdot\overset{1}{2}}{21\cdot\underset{1}{2}}=\frac{105}{21}\ \text{и т. д.}$$

Поэтому и в первых задачах основной вопрос, разрешаемый действием деления, можно сформулировать так же, как и в последних задачах (какую дробь составляет одно число от другого?).

Таким образом, устанавливается факт, что действием деления решается в сущности только один вопрос, сформулированный раньше, который может быть истолкован по-разному в зависимости от данных для деления чисел.

4. Определение отношения

После этого преподаватель предлагает учащимся записать действие деления в общем виде с помощью букв ($a:b$); частное может быть записано в виде дроби $\left(\frac{a}{b}\right)$, т. е. $a:b=\frac{a}{b}$. На вопросы преподавателя учащиеся отвечают, что 1) $\frac{a}{b}$ — частное; 2) оно является ответом на вопрос: какую дробь число a составляет от числа b; 3) $\frac{a}{b}$ может быть ответом и на следующие вопросы: во сколько раз число a больше числа b (иначе: сколько раз число b содержится в числе a), если $a>b$, или какую часть число a составляет от числа b, если $a<b$. Преподаватель сообщает учащимся, что это частное $\left(\frac{a}{b}\right)$ условились называть о т н о ш е н и е м числа a к числу b. Затем учащиеся по вопросам преподавателя формулируют определение отношения двух чисел как частного, полученного при делении одного числа на другое, и повторяют основные вопросы, которые решаются делением.

Учащиеся знают, что вместо букв можно подставлять любые числа (в данном случае кроме $b=0$; почему?). По заданию преподавателя они вместо a и b подставляют произвольные числа, получают числовые отношения и читают их в соответствии с тем вопросом, который решается делением в данном случае, например:

$$12:4=3\quad (12\ \text{больше}\ 4\ \text{в три раза});$$

$$5:2=2\frac{1}{2}\quad \left(5\ \text{больше}\ 2\ \text{в}\ 2\frac{1}{2}\ \text{раза}\right);$$

$$7:15=\frac{7}{15}\quad \left(7\ \text{составляет}\ \frac{7}{15}\ \text{от}\ 15\right)\ \text{и т. п.}$$

Преподаватель напоминает, что вместо букв a и b можно подразумевать любые числа, не только целые, но и дробные, а также смешанные, например:

$$\frac{8}{15} : \frac{1}{3};$$

$$2\frac{1}{3} : 1\frac{3}{4} \text{ и т. п.}$$

Затем преподаватель сообщает учащимся, что в арифметике принято отношение обозначать не в виде дроби, а одной буквой, чаще всего буквой q, т. е. $a : b = q$ или $\frac{a}{b} = q$; как видно из предыдущих числовых примеров, q может принимать различные числовые значения: целые и дробные $\left(3,\ 2\frac{1}{2},\ \frac{7}{12}\right)$. При этом надо более отчётливо уточнить понятие «отношение» в тех случаях, когда $q > 1$ (тогда $a > b$; учащиеся должны привести примеры таких чисел и однородных величин), $q = 1$ (тогда $a = b$; опять приводятся соответствующие числовые и конкретные примеры), $q < 1$ ($a < b$; примеры).

Теперь надо ещё раз напомнить, что отношением считается не только q — результат, полученный при делении a на b, но и самая запись $a : b$ или $\frac{a}{b}$. С этой целью учащиеся записывают известные им формулы суммы, разности, произведения и частного или отношения *с помощью* букв: $a + b = S$; $a - b = d$; $a - b = p$; $a : b = q$ или $\frac{a}{b} = q$.

В первой записи буквой S обозначается сумма двух чисел a и b; преподаватель сообщает, что в математике принято и запись $(a + b)$ считать не только записью требования произвести сложение двух чисел, но и записью полученного результата этого действия, т. е. суммы, как и S; точно так же вводится условие: запись $(a - b)$ считать не только записью действия вычитания, но и записью результата вычитания, т. е. разности, как и d; так же устанавливается, что запись $a \cdot b$ считается записью не только действия умножения, но и записью результата действия умножения, т. е. произведения, как и p; ясно, что и последняя запись ($a : b$ или $\frac{a}{b}$) принимается не только за запись действия деления, но и за запись результата этого действия, т. е. за запись частного и отношения.

Теперь остаётся ввести особые названия чисел, данных в отношении. Записав опять действие деления или отношение в общем виде ($a : b = q$ или $\frac{a}{b} = q$), учащиеся припоминают, что числа a и b при делении назывались делимое (a) и делитель (b); с введением понятия дроби, когда частное стали записывать в виде дроби $\left(\frac{a}{b}\right)$, те же числа стали называться членами дроби — числитель (a) и знаменатель (b); теперь, когда частное принимается за отношение, числа a и b условились называть так: a — предыдущий член, b — последующий член, а вместе a и b — члены отношения; q, как и $a:b$, или $\frac{a}{b}$ — отношения.

Затем учащиеся решают задачи: «Найти отношение следующих пар чисел, записать их и прочитать:

15 и 3	$15:3=5$	15 больше 3 в 5 раз
21 и 14	$21:14=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$	21 больше 14 в $1\frac{1}{2}$ раза
16 и 32	$16:32=\frac{1}{2}$	16 составляет $\frac{1}{2}$ от 32

и т. п.» .

5. Преобразование отношений

Учащиеся знают основное или главное свойство точного частного или дроби. Ясно, что и отношение, как точное частное или дробь, обладает тем же самым свойством (учащиеся формулируют это свойство), которое записывается потом в общем виде с помощью букв:

$a:b=q$	$\frac{a}{b}=q$
$(a\cdot m):(b\cdot m)=q$	$\frac{a\cdot m}{b\cdot m}=q$
$(a:m):(b:m)=q$	$\frac{a:m}{b:m}=q$

Учащиеся решают числовые примеры, в которых требуется оба члена отношения умножить или разделить на одно и то же число:

$90:20=4\frac{1}{2}$	$270:60=4\frac{1}{2}$	$45:10=4\frac{1}{2}$	$9:2=4\frac{1}{2}$
$\frac{35}{15}=2\frac{1}{3}$	$\frac{70}{30}=2\frac{1}{3}$	$\frac{7}{3}=2\frac{1}{3}$	

После этого они сами приходят к мысли о возможности сокращения отношений по аналогии с таким же преобразованием дробей.

Другое преобразование отношений — замена отношения дробей отношением целых чисел — не имеет соответствующей аналогии ни при делении целых чисел, ни при изучении дробей. Следовательно, этому новому виду преобразования отношений надо уделить больше внимания и времени. Значение этих преобразований учащиеся могут оценить в связи с решением соответствующих примеров. Числовой материал надо подбирать так, чтобы постепенно возрастала трудность преобразований: 1) сначала даются такие примеры, в которых имеется только один дробный член — предыдущий или последующий, а затем вводятся два дробных члена; 2) в последнем случае соблюдается известная последовательность в подборе знаменателей, какая была в своё время указана при изучении приведения дробей к наименьшему общему знаменателю.

Числовые примеры (отношение дробей заменить отношением целых чисел):

1) $\frac{3}{5}:4=3:20.$	4) $\frac{3}{4}:\frac{1}{2}=3:2.$	
2) $5:\frac{2}{3}=15:2.$	5) $\frac{5}{12}:\frac{3}{8}=10:9.$	7) $4\frac{3}{7}:1\frac{2}{3}=93:35$
3) $\frac{4}{3}:\frac{5}{3}=4:5.$	6) $\frac{1}{4}:\frac{2}{3}=3:8.$	и т. п.

В этой примерной таблице приведены только образцы числовых примеров; на каждый из указанных случаев надо давать достаточное число соответствующих задач.

Решение каждого нового примера сопровождается необходимыми объяснениями. При решении первого примера $\left(\frac{3}{5}:4\right)$ учащиеся отмечают, что предыдущий член дробный, а последующий — целое число; с помощью преподавателя учащиеся прежде всего говорят, что если дробь $\frac{3}{5}$ умножить на 5, то в произведении получится целое число 3; чтобы не изменилась величина отношения, надо и последующий член умножить тоже на 5; в результате получится отношение целых чисел, которое по форме проще данного отношения и в то же время равно ему (для большей убедительности в справедливости последнего утверждения можно вычислить данное отношение $\frac{3}{20}$ и новое $\frac{3}{20}$).

В четвёртом примере учащиеся сначала указывают, что больший знаменатель (4) есть наименьшее общее кратное обоих знаменателей и что если умножить на 4 обе дроби — предыдущий и последующий члены отношения,— то получится отношение целых чисел.

При решении следующих примеров учащиеся под руководством преподавателя постепенно усваивают мысль, что для замены отношения дробей отношением целых чисел надо оба члена отношения умножить на наименьшее общее кратное знаменателей обеих дробей; предварительное приведение дробей к общему знаменателю *в этих преобразованиях не является обязательным.*

6. Применение отношений к решению задач

По предложению преподавателя учащиеся пишут формулы отношений: $a:b=q$ или $\frac{a}{b}=q$, и придумывают задачи, которые могут вытекать из этих формул, пользуясь известными соотношениями между делимым, делителем и частным. Прежде всего они припоминают, что при делении всегда даются два числа, а третье находится по первым двум: зная делимое и делитель, можно найти частное; зная делимое и частное, можно найти делитель; зная делитель и частное, можно найти делимое.

Преподаватель помогает записать эти три типа задач в общем виде с помощью букв:

1) $a:b=x$	$\frac{a}{b}=x$	$x=a:b$
2) $a:x=q$	$\frac{a}{x}=q$	$x=a:q$
3) $x:b=q$	$\frac{x}{b}=q$	$x=b\cdot q$

1) частное равно делимому, делённому на делитель; 2) делитель равен делимому, делённому на частное; 3) делимое равно делителю, умноженному на частное.

Учащиеся формулируют эти задачи.

Затем они рассматривают эти формулы, как формулы отношений, в которых неизвестно отношение или последующий член, или, наконец, предыдущий член, и формулируют соответствующие задачи в новой редакции: 1) отношение равно предыдущему члену, делённому на последующий; 2) последующий член отношения равен предыдущему члену, делённому на отношение; 3) предыдущий член отношения равен последующему члену, умноженному на отношение.

Затем учащиеся решают соответствующие текстовые задачи и числовые примеры.

Задача 1. «В классе 15 мальчиков и 20 девочек. Найти отношение числа мальчиков к числу девочек».

Мальчиков — 15	$15:20=x$	(Отношение находится действием деления.
Девочек — 20	$x=\frac{15}{20}$	Отношение числа мальчиков
Отношение — x	$x=\frac{3}{4}$	к числу девочек равно $\frac{3}{4}$)

Задача 2. «Длина комнаты $11\frac{3}{5}$ *м*; отношение длины комнаты к ширине её равно $\frac{4}{3}$. Найти ширину комнаты».

Длина $11\frac{3}{5}$ *м*	$11\frac{3}{5}:x=\frac{4}{3}$
Ширина x	$x=11\frac{3}{5}:\frac{4}{3}$
Отношение длины к ширине $\frac{4}{3}$	$x=\frac{58}{5}:\frac{4}{3}$; $x=174:20$
	$x=8\frac{7}{10}$ (ширина комнаты $8\frac{7}{10}$ *м*)

Задача 3. «В латуни отношение веса меди к весу цинка равно $1\frac{1}{2}$. Определить вес меди в куске латуни, если в нём $5\frac{4}{5}$ *кг* цинка».

Вес меди — x *кг*	$x:5\frac{4}{5}=1\frac{1}{2}$
Вес цинка — $5\frac{4}{5}$ *кг*	$x=5\frac{4}{5}\cdot 1\frac{1}{2}$
Отношение — $1\frac{1}{2}$	$x=\frac{29}{5}\cdot\frac{3}{2}$; $x=\frac{29\cdot 3}{5\cdot 2}$
	$x=8\frac{7}{10}$ (в куске латуни меди $8\frac{7}{10}$ *кг*)

После решения каждой задачи надо давать соответствующие числовые примеры для развития вычислительных навыков и для закрепления выведенных формулировок, особенно после решения 2-й и 3-й задач, например:

$$18:x=\frac{7}{12};\quad x:2\frac{1}{2}=1\frac{2}{5} \text{ и т. п.}$$

При решении задач и примеров в классе надо требовать от учащихся соответствующих формулировок: последующий член отношения равен... и т. д. или: предыдущий член отношения равен... и т. д.

В заключение ещё раз надо напомнить, что изучение отношений, поставленное в общий план изучения обыкновенных дробей, ни в коем случае не должно оканчиваться здесь, именно в этой главе. При дальнейшем изучении арифметики десятичных дробей и процентов надо продолжать решение задач с применением отношений, членами которых могут быть в дальнейшем и десятичные дроби.

ГЛАВА V

ДЕСЯТИЧНЫЕ ДРОБИ

I. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЕСЯТИЧНОЙ ДРОБИ

Определения десятичной дроби, которые имеются в учебниках арифметики, можно разбить на две группы. Одни из них составлены так, что в определение входит, кроме родового признака «десятичная дробь есть дробь», только один видовой признак, характеризующий десятичную дробь, знаменатель которой есть степень 10. Другие определения содержат, кроме указанных признаков еще и второй видовой признак: — «десятичные дроби пишутся без знаменателя» [1].

В настоящее время в нашей учебной литературе имеет место первое определение (учебники арифметики Киселёва под ред. проф. Хинчина, И. Попова и Н. Чулицкого). Это находится в полном соответствии и с программами по арифметике для средней школы.

В определение десятичной дроби совсем нельзя включать случайный признак её, что она записывается без знаменателя, случайный потому, что дробь остаётся десятичной и в том случае, когда она записана со знаменателем или совсем не записана.

II. ИЗУЧЕНИЕ ДЕСЯТИЧНЫХ ДРОБЕЙ

Метрические меры, а также подразделения рубля представляют хорошо знакомый конкретный материал для иллюстрации десятичных дробей: ребёнок с ранних лет слышит о десятых, сотых и даже тысячных долях метра, а также о десятых и сотых долях рубля.

При изучении курса десятичных дробей надо особое внимание уделить двум вопросам, которые стоят в конце программы: «запись десятичных дробей в виде обыкновенных» и «обращение обыкновенных дробей в десятичные». Следует с самого первого урока

---

[1] Вебер и Велльштейн, Энциклопедия элементарной математики, т. I, 1911, стр. 71.

В. Г. Фридман, К вопросу об определении десятичной дроби, «Математическое образование», 1917, № 3—4.

развивать навыки записи десятичных дробей в виде обыкновенных: это даёт возможность строить всё изучение десятичных дробей на базе курса обыкновенных дробей.

С первых же уроков следует приучать учащихся свободно преобразовывать простейшие обыкновенные дроби со знаменателями 2 и 4, 5 и 25, 20 и 40 в десятичные, руководясь здравым смыслом (в половине пять десятых долей, в четверти 25 сотых и т. п.).

В теме «обращение обыкновенных дробей в десятичные» следует подытожить всю предыдущую работу, повторить и обобщить приём применения дополнительных множителей и ввести новый приём преобразования обыкновенных дробей в десятичные — деление числителя на знаменатель, когда в состав знаменателя обыкновенной несократимой дроби будут входить простые множители, отличные от 2 и 5.

Общий план изучения курса десятичных дробей такой:

1) Определение десятичной дроби.
2) Нумерация десятичных дробей.
3) Основное свойство их.
4) Сравнение десятичных дробей.
5) Сложение и вычитание их.
6) Умножение десятичных дробей.
7) Деление десятичных дробей.
8) Обращение обыкновенных дробей в десятичные.
9) Периодические дроби.

1. Определение десятичных дробей и нумерация их

При изучении систематического курса десятичных дробей надо всё внимание учащихся сосредоточить на том, что десятичные дроби суть обыкновенные дроби, которые были только что подробно изучены перед этим. Преподаватель предлагает учащимся написать в одной колонке ряд обыкновенных дробей сначала со знаменателем 10, потом в другой со знаменателем 100, в третьей со знаменателем 1 000 и т. д. Затем учащиеся характеризуют дроби первой, второй и следующих колонок в зависимости от знаменателя их: у всех дробей первой колонки знаменатель 10, во второй колонке знаменатель 100 (т. е. состоит только из множителей 10), в третьей знаменатель 1 000 и т. д. Следовательно, у всех дробей, записанных в каждой колонке, знаменателем является число, равное 10 или состоящее только из множителей, равных 10 (иначе: число 10 или степень 10). На этом основании все записанные дроби называются **десятичными дробями**. Учащиеся формулируют определение и несколько раз повторяют его.

Чтобы выяснить основные принципы новой записи десятичных дробей, преподаватель предварительно повторяет с учащимися основные понятия нумерации целых чисел и приводит их в связь с записью десятичных дробей.

Попутно учащиеся упражняются и в чтении десятичных дробей.

При записи всевозможных десятичных дробей учащиеся должны установить и запомнить соответствие между числом десятичных знаков и числом нулей в записи знаменателя, т. е. при первом взгляде на запись десятичной дроби они должны сразу же определять знаменатель её или название наименьших долей, например: 0,57 — сотые доли, 12,7548 — десятитысячные и т. п. Поэтому при чтении десятичных дробей преподаватель на первых порах может заставлять учащихся сначала определять знаменатель дроби по числу десятичных знаков в ней; потом они читают целое число и всё число, записанное десятичными знаками, как целое число, добавляя название наименьших долей. Если в записи десятичной дроби сразу после запятой стоят нули — один, два и более, то преподаватель требует определения знаменателя дроби, чтения целого числа и отдельно чтения числа, записанного значащими цифрами, стоящими вправо от запятой, с добавлением названия наименьших долей.

Если в десятичной дроби имеется много десятичных знаков, то, как и при чтении целых многозначных чисел, число, записанное десятичными знаками, разбивают на грани, или классы, и читают по граням, добавляя в конце название наименьших долей. Наиболее употребительные десятичные дроби содержат обычно не более трёх-четырёх десятичных знаков, редко шесть. Поэтому учащиеся свободно и легко могут заучить названия долей, соответствующих наиболее употребительным десятичным знаменателям, что облегчит чтение любой десятичной дроби.

ПРИМЕРНАЯ МЕТОДИЧЕСКАЯ РАЗРАБОТКА

На классной доске и в тетрадях учащиеся пишут в одну колонку обыкновенные дроби со знаменателем 10 (придумывают примеры сами учащиеся, а преподаватель может только пополнить таблицу):

$\frac{1}{10}=0,1$ $\quad\frac{7}{10}=0,7$ $\quad\frac{33}{10}=3\frac{3}{10}=3,3$ $\quad\frac{153}{10}=15\frac{3}{10}=15,3$

$\frac{3}{10}=0,3$ $\quad\frac{19}{10}=1\frac{9}{10}=1,9$ $\quad\frac{89}{10}=8\frac{9}{10}=8,9$ $\quad\frac{2549}{10}=254,9$ и т. п.

Они указывают общую особенность всех записанных дробей (имеют знаменатель 10), сами называют эти дроби десятичными и формулируют частное определение десятичной дроби (дроби со знаменателем 10).

Затем переходят к дробям со знаменателем 100 (план тот же):

$\frac{1}{100}=0,01$ $\quad\frac{47}{100}=0,47$ $\quad\frac{6359}{100}=63\frac{59}{100}=63,59$ $\quad\frac{2304}{100}=23,04$

$\frac{11}{100}=0,11$ $\quad\frac{2352}{100}=23\frac{52}{100}=23,52$ $\quad\frac{54873}{100}=548\frac{73}{100}=548,73$ $\quad11\frac{7}{100}=11,07$.

Учащиеся опять дают общую характеристику всех записанных дробей (знаменатель 100). Преподаватель указывает, что $100=10\cdot10$, т. е. 100 состоит из множителей 10, почему дроби со знаменателем 100 тоже называются **десятичными**.

Общий вид записи десятичных дробей без знаменателя очень напоминает общий вид записи целых чисел (пример записи целого числа $66\,666=60\,000+6\,000+600+60+6=6\cdot10\,000+6\cdot1\,000+6\cdot100+6\cdot10+6$).

С помощью такой записи учащиеся вспоминают основные понятия письменной десятичной нумерации (особенно принцип поместного значения цифр), записывают числитель одной из заданных дробей в виде суммы разрядных чисел и затем преобразовывают эту дробь:

$$\frac{54873}{100}=\frac{5\cdot 10\,000+4\cdot 1\,000+8\cdot 100+7\cdot 10+3}{100}=\frac{5\cdot 10\,000}{100}+\frac{4\cdot 1\,000}{100}+\frac{8\cdot 100}{100}+$$

$$+\frac{7\cdot 10}{100}+\frac{3}{100}=5\cdot 100+4\cdot 10+8+7\cdot 0,1+3\cdot 0,01.$$

В последней записи слагаемое 8 означает единицы, $4\cdot 10$ — десятки, $5\cdot 100$ — сотни, $7\cdot 0,1$ — десятые доли (7 десятых), $3\cdot 0,01$ — сотые доли (3 сотых); десятые и сотые доли вместе называются **десятичными долями.**

Учащиеся сравнивают последнюю запись с записью целого числа, устанавливают сходство и различие между ними, ещё раз подчёркивают идею поместного значения цифр и записывают последнюю дробь (опуская знаки плюсы в записи разрядных единиц, сохраняя места, занимаемые цифрами, отделяя запятой десятичные доли от единиц):

$$5\cdot 100+4\cdot 10+8+7\cdot 0,1+3\cdot 0,01=548,73.$$

Точно так же преобразуется предпоследняя дробь $\frac{2304}{100}=\frac{2\cdot 1\,000+3\cdot 100+0\cdot 10+4}{100}=$ $=2\cdot 10+3+0\cdot 0,1+4\cdot 0,01=23,04$.

При записи и чтении десятичных дробей учащиеся наблюдают и постепенно запоминают, что в записи десятичной дроби всегда бывает столько десятичных знаков, сколько имеется нулей в записи знаменателя её.

Для развития навыков учащиеся на классной доске и в своих тетрадях решают такие задачи: 1) записать без знаменателя дроби, записанные на доске в виде обыкновенных, т. е. со знаменателями 10 и 100; 2) записать с помощью запятой следующие десятичные дроби под диктовку (по слуху). В связи *с этим необходимо решать и обратные задачи:* записать данную десятичную дробь в виде обыкновенной или со знаменателем; если десятичная дробь будет неправильная, то надо указывать, в каком виде должен быть результат: в виде смешанного числа или в виде неправильной дроби,

например: $37,6=37\frac{6}{10}=\frac{376}{10}$; $\quad 124,39=124\frac{39}{100}=\frac{12\,439}{100}$.

Чтение десятичных дробей со знаменателем 10 и 100 не затруднит учащихся. После нескольких упражнений опять надо отметить, что они читаются, как и обыкновенные дроби, т. е. читается число, записанное десятичными знаками, как целое или как числитель дроби, и добавляется название долей.

Таким же образом ведётся работа по ознакомлению учащихся с десятичными дробями, имеющими знаменатели 1 000, 10 000 и т. д.

После общего обзора всех рассмотренных дробей учащиеся формулируют определение десятичной дроби.

Для записей этих дробей без знаменателя в особо трудных случаях учащиеся могут опять предварительно преобразовывать данную дробь в сумму разрядных чисел; это особенно полезно делать в тех случаях, когда в записи обыкновенных неправильных дробей имеются нули в середине (например, $\frac{75\,002}{1\,000}$) или в записи числителя правильной дроби смешанного числа меньше цифр, чем нулей в записи знаменателя (например, $13\frac{53}{10\,000}$). В последнем случае можно сделать так:

$$13\frac{53}{10\,000}=13+\frac{5\cdot 10+3}{10\,000}=13+5\cdot 0,001+3\cdot 0,0001.$$

Из предыдущей работы учащиеся знают, что на 2-м месте справа пишутся десятые доли, на 3-м — сотые, на 4-м — тысячные, а на 5-м — десятитысячные; поэтому данная дробь будет записана так: $13\frac{53}{10\,000}=13,0053$.

Постепенно учащиеся обобщают свои наблюдения о полном соответствии между числом нулей в записи знаменателя дроби и числом всех десятичных знаков в записи её без знаменателя. Это даёт возможность им до фактической записи десятичной дроби указать, какие десятичные доли надо обозначать нулями.

В процессе этой работы на основании своих наблюдений учащиеся делают ещё один очень важный вывод правила для записи неправильной десятичной дроби без знаменателя: в числителе дроби, которая записывается без знаменателя, справа отделяется запятой столько десятичных знаков, сколько нулей в записи знаменателя дроби (например, $\frac{34083}{100}=340,83$ и т. п.). В связи с этим необходимо вспомнить правило деления любых целых чисел на 10, на 100, и т. д. (в частном записывается делимое, в котором справа отделяется запятой один, два, три знака и т. д.).

В заключительной беседе преподаватель вместе с учащимися подводит итоги всей работы: повторяется определение десятичной дроби, особый способ записи её без знаменателя с помощью запятой (упражнения), чтение десятичных дробей и виды их — правильные и неправильные.

2. Основные преобразования десятичных дробей

Приступая к изучению десятичных дробей, полезно вспомнить с учащимися преобразования обыкновенных дробей (это можно дать в порядке домашней самостоятельной работы — по учебнику и по записям в тетрадях): 1) исключение целого числа из неправильной дроби и обратная задача, 2) сокращение дробей, 3) приведение их к общему знаменателю, 4) а также повторить сравнение дробей. При этом учащиеся указывают, что сокращение дробей и приведение их к общему знаменателю выполняются на основании главного свойства дроби.

После записи двух-трёх разных десятичных дробей в общепринятой форме (т. е. с помощью запятой 0,384; 2,50; 154,3) учащиеся повторяют определение десятичной дроби, подчёркивают основной признак её (она есть дробь) и делают вывод, что к ней должны быть применимы все вышеперечисленные преобразования дробей. Учащиеся сразу же обнаруживают, что вопрос об исключении целого числа из неправильной десятичной дроби совсем отпадает, если последняя записана без знаменателя: запятая и служит для отделения целого числа от десятичных долей. Обращение смешанного числа в неправильную дробь тоже отпадает, если данная десятичная дробь записана в общепринятой форме, т. е. с помощью запятой. Таким образом, десятичные дроби в отношении этих преобразований много проще обыкновенных дробей.

Сокращение дробей и приведение их к общему знаменателю, как сказано было, основано на главном свойстве дроби. Преподаватель предлагает учащимся сформулировать это свойство, записать произвольную десятичную дробь без знаменателя (3,56) и подумать, можно ли применить это свойство к десятичной дроби и как это сделать. Со стороны отдельных учащихся на первый вопрос могут быть отрицательные ответы («потому что нет знаменателя»); можно предположить, что большинство их с этим не согласится. Написав данную дробь в виде обыкновенной дроби ($3,56=3\frac{56}{100}=\frac{356}{100}$), все учащиеся увидят, что оба члена дроби можно разделить на одно и то же число; величина дроби не изменится. По указанию преподавателя они выявляют при этом новый факт: при делении обоих членов дроби на 2 и на 4 данная дробь преобразуется из десятичной в обыкновенную $\frac{356}{100}=\frac{178}{50}=\frac{89}{25}$; то же самое происходит и при умножении обоих членов и произвольное число. Преподаватель особо подчёркивает этот факт и разъясняет, что при данном преобразовании десятичная дробь должна оставаться десятичной, т. е. знаменатель её всё время должен записываться единицей с нулями. Можно ли и как это можно сделать? Теперь не так трудно догадаться, что оба члена дроби надо умножить на 10, 100, 1 000 и т. д.

$$\frac{356}{100}=\frac{3\,560}{1\,000}=\frac{35\,600}{10\,000}=\frac{356\,000}{100\,000}=\ldots$$

Если каждую дробь, начиная с данной, записать теперь без знаменателя по известному правилу, то получится: 3,56=3,560=3,5600=3,56000 и т. д. Так представляется основное или главное свойство десятичной дроби, записанной без знаменателя: справа можно приписать произвольное число нулей в качестве десятичных знаков, например: 12,475=12,4750=12,47500=... Читая каждую дробь по разрядам, т. е. называя отдельно десятичные доли (12 целых 4 десятых 7 сотых и т. д.), учащиеся убеждаются, что величина дроби действительно осталась неизменной.

Иногда учащиеся ставят вопрос о том, можно ли слева приписывать нули в записи десятичной дроби без знаменателя. Приписав несколько нулей, учащиеся опять читают полученные дроби по предыдущему и убеждаются, что и это делать можно (что потом будет использовано при делении десятичных дробей на 10, на 100 и т. д.). Попутно встанет вопрос и о том, можно ли в целом числе приписывать нули слева и справа. Например: 874=0874=00 874 и т. д. или 874= =874,0=874,00 и т. д. Учащиеся легко убеждаются, что слева можно приписывать нули, так как поместное значение цифр данного числа сохраняется (4 единицы, 7 десятков и т. д.); на том же основании можно и справа приписывать нули, как десятичные знаки, отделив их запятой от целого числа.

Какое применение имеет главное или основное свойство десятичной дроби? Учащиеся говорят, что на основании главного свойства обыкновенной дроби производится сокращение их и приведение к общему знаменателю. Возникает вопрос: можно ли сокращать десятичные дроби и приводить их к общему знаменателю? Целесообразнее сначала поставить последнее преобразование: приведение десятичных дробей к наименьшему общему знаменателю, например: 9,53 и 12,6894. Учащиеся указывают, что в первой дроби знаменатель 100, а во второй 10 000. Общим может быть только наибольший знаменатель, как число кратное 100, т. е. 10 000. Учащиеся без труда скажут, что знаменатель первой дроби надо умножить на 100, чтобы получить 10 000, следовательно, и числитель её тоже надо умножить на 100, т. е. приписать справа два нуля: 9,5300 и 12,6894.

Для того, чтобы сделать очевидным это преобразование, можно предварительно каждую десятичную дробь записать в виде обыкновенной дроби, потом привести их к общему знаменателю, затем опять записать без знаменателя. После решения нескольких задач учащиеся формулируют правило приведения десятичных дробей к общему знаменателю. В порядке упражнений можно давать такие отвлечённые задачи: «Сколько всего десятых или сотых, или тысячных, или десятитысячных долей в числе 5,37?» и т. п.

В связи с решением таких задач учащиеся высказывают ещё одно подтверждение возможности и справедливости приписывания нулей справа во всякой десятичной дроби: в данном числе 5,37—537 сотых долей, а в числе 5,370—5370 тысячных: число долей увеличилось в 10 раз, зато доли стали мельче в 10 раз, поэтому величина десятичной дроби не изменилась.

Учащиеся решают соответствующие задачи, которые следует давать в разных редакциях:

1) Умножить числитель и знаменатель десятичной дроби 4,58 на 1 000.

2) Как изменится дробь 12,645, если справа приписать три нуля?

3) Дробь 2,83 раздробить в миллионные доли.

4) Раздробить в десятые, или в сотые, или в тысячные доли следующие числа: 6; 12; 38 и т. д.

Последние задачи будут приучать учащихся рассматривать и целые числа, как десятичные дроби.

Уже из того факта, что во всякой десятичной дроби можно справа приписывать произвольное число нулей, очень легко сделать вывод, что нули, стоящие справа на месте десятичных знаков, можно зачёркивать или «отбрасывать», не изменяя величины дроби. Как надо понимать это преобразование десятичной дроби (например, 3,74000=3,74)? Некоторые учащиеся могут ответить на этот вопрос. Преподаватель помогает всем учащимся понять это: заданную дробь переписывают в виде обыкновенной и сокращают её на 1 000, а затем опять записывают без знаменателя: $3{,}74000 = \frac{374\,000}{100000} = 3{,}74$. Таким образом выявляется правило сокращения десятичных дробей, но только таких, у которых в записи их справа стоят нули. Полезно заставить учащихся и сокращение десятичных дробей объяснить так (в последнем случае): дробь 3,74000 имела 374000 стотысячных долей, а вновь полученная 3,74 — только 374 сотых доли; число долей уменьшилось в 1 000 раз, зато доли стали крупнее в 1 000 раз.

В заключительной беседе, посвящённой общему обзору тождественных преобразований десятичных дробей, учащиеся решают числовые примеры, а преподаватель заставляет их сравнивать эти преобразования с соответствующими преобразованиями обыкновенных дробей и отмечать удивительную простоту всех тождественных преобразований десятичных дробей. Эта простота и оправдывает отдельное изучение десятичных дробей.

3. Сравнение десятичных дробей

Преимущества десятичных дробей перед обыкновенными, сравнительная простота их особенно отчётливо выявляются при изучении сравнения десятичных дробей, т. е. при разрешении вопроса о том, какие десятичные дроби считаются равными, а если они не равны, то которая из них больше. Учащиеся бывают довольно долго склонны считать ту десятичную дробь больше, у которой число десятичных знаков больше. Преподаватель должен не только бороться с таким ошибочным взглядом учащихся, но поставить дело изучения этой темы так, чтобы не допустить их до этой ошибки.

Прежде всего на целом ряде примеров преподаватель заставляет учащихся вспомнить основной приём сравнения обыкновенных дробей — приведение их к общему знаменателю — и затем сравнение их числителей. Так как десятичные дроби суть дроби, то сравнение их производится приведением их к общему знаменателю или, иначе, приписыванием нулей справа («уравнивание» числа десятичных знаков) и сравнением полученных чисел. В процессе дальнейшей работы, однако, учащиеся путём многократных наблюдений убеждаются в том, что приписывание справа нулей при сравнении десятичных дробей особого практического значения не имеет, а потому можно этого не делать.

Сравнение дробей удобно начинать со сравнения правильных десятичных дробей.

Сначала надо давать для сравнения десятичные дроби только с одними десятыми долями, затем с одними сотыми (например, 0,08 и 0,05), дальше с десятыми и сотыми (0,57 и 0,49) и т. д. При решении этих задач учащиеся замечают, что сравниваются десятичные дроби с равными знаменателями или, иначе говоря, с равным числом десятичных знаков, и формулируют известное правило (из двух правильных десятичных дробей с одинаковым числом десятичных знаков та больше, у которой числитель больше, т. е. больше число, записанное десятичными знаками). В процессе этой начальной работы учащиеся уже должны подметить, что сравнение таких дробей, в сущности, сводится к сравнению целых чисел, записанных десятичными знаками, а сравнение целых чисел, как известно, удобно начинать со сравнения их старших разрядов; то же самое следует делать и при сравнении десятичных дробей — начинать сравнение их с наиболее крупных долей — с десятых, если они есть, или с сотых и т. п.

Затем можно перейти к сравнению таких десятичных дробей, из которых одна содержит только десятые доли, а другая — десятые и сотые или только сотые, т. е. дробей с разным числом десятичных знаков. Учащиеся характеризуют эти дроби, как имеющие разные знаменатели; а потому для сравнения их надо привести их к общему знаменателю приписыванием нулей справа.

Примеры.

1) 0,8 и 0,79   0,80 > 0,79
2) 0,4 и 0,09   0,40 > 0,09
3) 0,62 и 0,6158   0,6200 > 0,6158

и т. п.

При решении этих задач учащиеся опять видят, что фактически достаточно сравнить только наиболее крупные доли (в последнем примере — сотые, так как десятые доли равны).

Сравнение неправильных десятичных дробей производится точно так же, но практически сравнение начинается с целых чисел; если же целые числа равны, то с десятых или с сотых долей, и т. д.

Особое внимание надо уделить таким примерам:

1,001 и 0,989569
2,01 и 2,0089964
15,1 и 14,99898999 и т. п.

III. ДЕЙСТВИЯ НАД ДЕСЯТИЧНЫМИ ДРОБЯМИ

В средней школе десятичные дроби рассматриваются как частный случай обыкновенных дробей. Этим взглядом определяется и место их в курсе арифметики (они изучаются после обыкновенных дробей), и способ изучения их. В частности, изучение всех действий над десятичными дробями строится на основании известных правил действий над обыкновенными дробями.

При этом надо заметить, что для вывода правила выполнения того или иного действия над десятичными дробями последние можно предварительно переписывать в виде обыкновенных дробей, т. е. со знаменателями, чтобы представить данную задачу в более знакомом и отчётливом виде.

Пользуясь уже известными правилами, учащиеся выполняют требуемые действия над обыкновенными дробями. При этом они подмечают, что указанные действия фактически производятся только над числителями, что особенно отчётливо видно при сложении и вычитании дробей, когда равные знаменатели остаются без изменения. Числители же записаны в виде целых чисел теми же цифрами и в том же порядке, как были записаны и данные десятичные дроби. Отсюда и делается вывод о том, что действия сложения и вычитания над десятичными дробями выполняются как над целыми числами с последующей постановкой запятой в полученном результате на определённом месте.

Те же правила действий над десятичными дробями можно вывести и без перехода к записи их со знаменателем. Так, при сложении дробей 0,72 и 0,41 можно рассуждать таким образом: 72 сотых и 41 сотых в сумме составят 113 сотых или одну единицу и 13 сотых, т. е. $0{,}72+0{,}4=1{,}13$; при умножении 0,12 на 0,7 получится в произведении 84 тысячных, т. е. $0{,}12\cdot 0{,}7=0{,}084$ (предварительно даются подготовительные упражнения). Приведённые устные рассуждения тоже основаны на известных правилах действий над обыкновенными дробями, но последние не записаны в явном виде.

Какой из этих способов следует предпочесть в практике школы? Если учащиеся данного класса не имеют достаточного общего развития, то лучше предварительно десятичные дроби переписывать в виде обыкновенных и применять известные правила действий над обыкновенными дробями. Однако более целесообразно применять комбинированный способ: сначала требуемое действие выполняется над десятичными дробями без изменения внешнего вида их, а потом для подтверждения правильности сделанного вывода некоторые дроби иногда записываются в виде обыкновенных, выполняется указанное действие и отмечается, что действие фактически произведено только над числителями, как над целыми числами. При рассмотрении отдельных случаев преподаватель может ограничиться только одним из этих выводов, если учащиеся отчётливо поняли и усвоили его.

Изучение действий над десятичными дробями теснейшим образом связано с изучением действий над целыми числами и обыкновенными дробями. Поэтому в последующей работе, в связи с изучением каждого отдельного действия над десятичными дробями, необходимо бегло и сжато повторить основные сведения о том же действии над целыми числами и над обыкновенными дробями. Это даст возможность, во-первых, повторить основной изучаемый материал, во вторых, показать учащимся связанность всего курса арифметики и различных отделов его, в третьих, отчётливо и прочно обосновать каждое действие над десятичными дробями и, наконец, при сравнении последних действий с соответствующими действиями над целыми и дробными числами убедиться в целесообразности введения десятичных дробей, действия над которыми выполняются по правилам действий над целыми числами с последующей постановкой запятой на определённом месте и много проще соответствующих действий над обыкновенными дробями.

Общий план изучения действий над десятичными дробями можно наметить такой:

1) повторение действия над целыми числами и над обыкновенными дробями;

2) вывод правила выполнения действия;
3) развитие навыков.

1. Сложение десятичных дробей

Для повторения сложения целых чисел преподаватель даёт учащимся два-три числовых примера на сложение двух и нескольких многозначных чисел, при решении которых восстанавливает в памяти учащихся основные свойства суммы, применение их и особенно процесс сложения многозначных чисел.

Затем повторяется сложение обыкновенных дробей.

Значительную часть этой работы можно дать учащимся в порядке самостоятельной домашней работы с постановкой некоторых контрольных вопросов, на которые учащиеся должны подготовить устные ответы, например: правило сложения дробей с равными знаменателями, общее правило приведения дробей к наименьшему общему знаменателю и т. п.

1) Сложение целых чисел и правильных десятичных дробей.

1-й вариант.

1) $12+0,43=12,43$
2) $0,693+384=384,693$.

Можно быть уверенным в том, что подобные задачи учащиеся решат без всяких затруднений, пользуясь только правилом записи десятичных дробей без знаменателя.

Если же всё-таки обнаружатся некоторые затруднения, то можно применить предварительную запись десятичных дробей в виде обыкновенных.

2-й вариант.

$$12+0,43=12+\frac{43}{100}=12\frac{43}{100}=12,43.$$

2) Сложение целых чисел и неправильных десятичных дробей.

1) $15+8,6=23,6$
2) $83+12,57=95,57$
и т. п.

Учащиеся могут рассуждать так: сначала складываются целые числа, а потом к сумме прибавляются десятичные дроби (как в предыдущих примерах).

Но те же задачи можно решить иначе, например:

$$1)\ 15+8,6=15+8\frac{6}{10}=23\frac{6}{10}=23,6.$$

$$2)\ 694+7298,385=694+7298\frac{385}{1000}=7992\frac{385}{1000} \text{ и т. п.}$$

$$\begin{array}{r} 7298 \\ +\ 694 \\ \hline 7992 \end{array}$$

Преподаватель предлагает подчеркнуть начало и конец работы в каждой задаче и спрашивает, как можно короче получить результат. Ответ. Сложить целые числа. В последнем случае в уме трудно это сделать, а потому надо записать сложение так:

$$694+7\,298,385=7\,992,385.$$

$$\begin{array}{r} 7\,298,385 \\ +694 \\ \hline 7\,992,385 \end{array}$$

Так как складываются только целые числа, то одно из них и подписывается под целым числом другого.

3) Сложение правильных десятичных дробей с равными знаменателями (или с одинаковым числом десятичных знаков): 0,6+0,3.

Учащиеся рассказывают: 6 десятых и 3 десятых в сумме составляют 9 десятых, что и записывается: 0,6+0,3=0,9. Потом преподаватель предлагает записать каждую данную дробь со знаменателем, и учащиеся убеждаются, что результат получается тот же:

$$0,6+0,3=\frac{6}{10}+\frac{3}{10}=\frac{6+3}{10}=\frac{9}{10}=0,9.$$

Преподаватель обращает внимание на третий этап работы в последней записи $\frac{6+3}{10}$, где приходится складывать только числители дробей — целые числа — при сохранении общего знаменателя; то же самое было и при первом объяснении, когда складывались те же целые числа (6 + 3) с названием долей.

Так же рассуждают учащиеся при решении такого примера: 0,57 + 0,79 = 1,36, затем решение того же примера записывается так:

$$0,57+0,79=\frac{57}{100}+\frac{79}{100}=\frac{57+79}{100}=\frac{136}{100}=1,36.$$

При решении следующих примеров рассуждения останутся те же, но сложение трёхзначных чисел надо записать так, как это делается при сложении целых многозначных чисел:

$$0,896+0,527=1,423.$$

$$\begin{array}{r} +\,0,896 \\ 0,527 \\ \hline 1,423 \end{array}$$

И этот пример можно решить иначе:

$$0,896+0,527=\frac{896}{1000}+\frac{527}{1000}=\frac{896+527}{1000}=\frac{1423}{1000}=1,423.$$

Из третьего этапа записи последнего решения видно, что и в этом случае приходится складывать *числители — целые числа, которые указывают число десятичных долей в каждой данной дроби.*

Из решения этих примеров учащиеся могут сделать вывод правила для сложения десятичных дробей с равным числом десятичных знаков (или с равными знаменателями) и решать следующие задачи, применяя это правило, например:

$$0,5974+0,3819=0,9793.$$

$$\begin{array}{r} +\,0,5974 \\ \hline 0,9793 \end{array}$$

4) Сложение правильных десятичных дробей с разными знаменателями (или с разным числом десятичных знаков). Числовые примеры подбираются сначала с одним и с двумя десятичными знаками, с двумя и с тремя и т. д., потом с одним и тремя *десятичными знаками, с двумя и четырьмя и т. д.*

Решение таких примеров учащиеся могут вести по образцу предыдущей работы, например: *0,7 + 0,26 (7 десятых и 26 сотых сложить нельзя, так как это различные доли); десятые доли раздробляются в сотые доли (70 сотых); дальнейшее рассуждение известно:*

$$0,7+0,26=0,70+0,26=0,96.$$

Учащиеся сами могут дать и другое решение:

$$0,7+0,26=\frac{7}{10}+\frac{26}{100}=\frac{70}{100}+\frac{26}{100}=\frac{70+26}{100}=\frac{96}{100}=0,96.$$

При решении следующих примеров предыдущие рассуждения **повторяются,** но сложение фактически придётся выполнять письменно:

$$0,68+0,746=0,680+0,746=1,426;$$

$$\begin{array}{r} 0,680 \\ \hline 1,426 \end{array}$$

$$0,754+0,7859=0,7540+0,7859=1,5399.$$

$$\begin{array}{r} 0,7859 \\ \hline 1,5399 \end{array}$$

Учащиеся формулируют правило сложения десятичных дробей (привести дроби к общему знаменателю, т. е. уравнять число десятичных знаков приписыванием нулей, подписать одно число под другим так, чтобы... и т. д., и складывать как целые числа).

Некоторые из этих примеров надо заставить учащихся решить с помощью предварительной записи данных десятичных дробей в виде обыкновенных, например:

$$0,8+0,627=\frac{8}{10}+\frac{627}{1000}=\frac{800}{1000}+\frac{627}{1000}=\frac{800+627}{1000}=\frac{1427}{1000}=1,427.$$

Особое внимание надо обратить на такие задачи, в которых данные десятичные дроби имеют один или несколько нулей сразу после запятой, например:

1) $0,00758+0,84564=0,85322.$

$$\begin{array}{r} +\,0,00758 \\ 0,84564 \\ \hline 0,85322 \end{array}$$

2) $0,071681+0,000319=0,072003.$

$$\begin{array}{r} 0,071684 \\ \hline 0,072003 \end{array}$$

5) Сложение неправильных десятичных дробей не содержит ничего существенно нового. Каждую неправильную десятичную дробь можно называть смешанным числом, а сложение смешанных чисел известно (складываются отдельно целые числа и отдельно дроби). Поэтому предыдущее правило сохраняется:

$$815,32+6,7932=815,3200+6,7932=822,1132.$$

$$\begin{array}{r} 6,7932 \\ 822,1132 \end{array}$$

Решение тех же задач с помощью обыкновенных дробей подкрепляет выведенное правило:

$$815,32+6,7932=\frac{81532}{100}+\frac{67932}{10000}=\frac{8153200}{10000}+\frac{67932}{10000}=\frac{8153200+67932}{10000}=$$
$$=\frac{8221132}{10000}=822,1132.$$

Сложение трёх и более десятичных дробей не вызывает никаких новых затруднений.

При решении задач с помощью установленных правил учащиеся сами могут заметить, что при сложении десятичных дробей предварительное приведение их к общему знаменателю (иначе: уравнивание числа десятичных знаков приписыванием нулей справа) не имеет особого практического значения, а потому они могут этого и не делать.

Почти во всех учебниках арифметики и в курсах методики арифметики сложение и вычитание десятичных дробей излагается очень коротко и ограничивается рассмотрением решения только одного примера (исключением являются книги Извольского и Шохор-Троцкого[1]). Мотивируется это тем соображением, что указанные действия выполняются очень просто и не вызывают никаких затруднений у учащихся. Такая же практика имеет место

[1] Извольский, Арифметика, ч. II, изд. 3, 1914, стр. 98; Шохор-Троцкий, Методика арифметики, 1935, стр. 208.

и в школе. Однако учащиеся время от времени поражают преподавателей теми необычайно грубыми ошибками, которые они делают в вычислительной практике с десятичными дробями (эти данные относятся к февралю 1934 г., но подобные ошибки имеют место и теперь)[1]:

$3{,}12+1=3{,}22$	$1{,}7+0{,}5=1{,}12$	$17+0{,}11=0{,}28$
$3{,}12+1=3{,}13$	$10{,}7+0{,}8=10{,}15$	$15{,}78-0{,}2=13{,}78$
$0{,}3+0{,}8=0{,}11$	$10{,}25-3=10{,}22$	

Появление таких и подобных им ошибок при сложении и вычитании десятичных дробей можно объяснить только тем, что при изучении этих операций преподаватели, считая вопрос очень простым, не уделили достаточно времени и внимания этой работе, не связывали её со сложением и вычитанием обыкновенных дробей, а учащиеся мало решали соответствующих задач.

2. Вычитание десятичных дробей

Изучение этого действия, как и сложения, начинается с краткого повторительного обзора действия вычитания целых чисел на решении примеров и текстовых задач.

За этим следует повторение вычитания обыкновенных дробей. Большую часть этой повторительной работы можно провести в порядке домашней самостоятельной работы учащихся с последующей проверкой её в классе.

Общий план изучения вычитания десятичных дробей сохраняется тот же, по которому шло изучение сложения их.

Общий характер объяснений и рассуждений при выводе каждого частного правила тот же, что был и при сложении десятичных дробей. К отдельным моментам работы необходимо сделать несколько замечаний.

1) При вычитании правильных десятичных дробей из целых чисел (например, $15-0{,}5724$) сначала надо приучить учащихся находить д о п о л н е н и е правильной десятичной дроби до 1, что в дальнейших вычислениях имеет очень широкое применение (в частности, при нахождении дополнения логарифма): $1-0{,}3=0{,}7$; $1-0{,}36=0{,}64$; $1-0{,}938=0{,}062$ и т. п; такую работу надо проводить на уроках в порядке устного счёта; полезно ввести и самый термин д о п о л н е н и е до 1 с объяснением происхождения его и с формулировкой правила получения его (для всех разрядов берётся дополнение до 9, а для последнего справа—до 10).

Следующая работа пойдёт очень легко, например:

$$23-0{,}7=22{,}3;\ 89-0{,}55=88{,}45;\ 754-0{,}5817=753{,}4183 \text{ и т. д.}$$

(объяснение: из целого числа берётся 1, из которой вычитается дробь по предыдущему, т. е. составляется дополнение до 1).

2) Примерные записи вычитания десятичных дробей:

а) $0{,}832-0{,}54=0{,}832-0{,}540=0{,}292$;

$$\begin{array}{r} -\ 0{,}540 \\ 0{,}292 \end{array}$$

---

[1] Б е р е з а н с к а я, Методика арифметики, 1934, стр. 173.

б) $0{,}72-0{,}3874=0{,}7200-0{,}3874=0{,}3326$;

$$\begin{array}{r} +\,0{,}3874 \\ \hline 0{,}3326 \end{array}$$

в) $21{,}5642-0{,}87=21{,}5642-0{,}8700=20{,}6942$;

$$\begin{array}{r} +\;\;0{,}8700 \\ \hline 20{,}6942 \end{array}$$

г) $523{,}7-0{,}932=523{,}700-0{,}932=522{,}768$;

$$\begin{array}{r} +\;\;0{,}932 \\ \hline 522{,}768 \end{array}$$

д) $25{,}384-11{,}569=13{,}815$;

$$\begin{array}{r} -\,11{,}569 \\ \hline 13{,}815 \end{array}$$

е) $482{,}6184-5{,}73=482{,}6184-5{,}7300=476{,}8884$.

$$\begin{array}{r} 5{,}7300 \\ \hline 476{,}8884 \end{array}$$

Преподаватель может в некоторых случаях при выводе правила вычитания десятичных дробей заставлять учащихся предварительно записывать десятичные дроби в виде обыкновенных и, пользуясь правилом вычитания последних, подтверждать сделанные ранее выводы.

При решении числовых примеров для развития навыков учащиеся могут сами заметить, что если в вычитаемом меньше десятичных знаков, чем в уменьшаемом, то приписывание нулей справа не имеет особого практического значения.

В течение всего времени изучения сложения и вычитания десятичных дробей, а особенно по окончании этой работы, учащиеся решают примеры и текстовые задачи для развития навыков. В эти примеры и задачи надо включать не только десятичные, но и обыкновенные дроби, чтобы приучать учащихся к выполнению сложения и вычитания тех и других дробей. При этом проводится такая мысль: так как сложение и вычитание десятичных дробей значительно проще, чем те же действия над обыкновенными дробями (чем проще?), то предпочтительно в этих случаях обыкновенные дроби преобразовывать в десятичные, пользуясь для этого способом дополнительных множителей. Понятно, что в этих задачах обыкновенные дроби могут быть только несократимые и со знаменателями, состоящими из двоек или пятёрок или из тех и других в неравном количестве.

Примеры.

1) $\frac{1}{2}+0{,}41=0{,}5+0{,}41=0{,}91$

$\frac{1}{2}=\frac{1\cdot 5}{2\cdot 5}=\frac{5}{10}=0{,}5$

2) $\frac{3}{4}+1{,}237=0{,}75+1{,}237=1{,}987$

$\frac{3}{4}=\frac{3\cdot 25}{4\cdot 25}=\frac{75}{100}=0{,}75$

3) $12{,}3-\frac{1}{5}$

4) $0{,}893-\frac{2}{5}$ и т. п.

Решая такие примеры и задачи, учащиеся будут постепенно овладевать преобразованиями обыкновенных дробей в десятичные, подмечать свойство знаменателей этих дробей; можно обратить внимание их на зависимость числа десятичных знаков от числа двоек или пятёрок, входящих в состав знаменателя обыкновенной дроби. При этом учащиеся могут начать составлять таблицу преобразования обыкновенных дробей в десятичные и заучивать наиболее употребительные дроби.

3. Умножение десятичных дробей

Перед изучением умножения десятичных дробей учащиеся сначала повторяют умножение целых чисел и обыкновенных дробей.

Учащиеся вспоминают, что означает умножение на целое число и умножение на дробь, правила умножения целых многозначных чисел, правила умножения дробей, сравнение произведения с множимым. Изучение умножения десятичных дробей разделяется на два этапа: 1) умножение десятичных дробей на целое число и 2) умножение их на десятичную дробь. Это разделение всей работы на два этапа в зависимости от характера множителя даёт возможность ещё раз и последний раз в курсе арифметики отчётливо истолковать смысл умножения на целое число и особый смысл умножения на дробь.

В первом этапе надо выделить особые случаи умножения на 0 и на 1 и на такие числа, как 10, 100, 1 000 и т. п. А во втором этапе соответственно выделяются особые приёмы умножения на 0,1; 0,01; 0,001, а также на 0,5; 0,25 и т. п. Эти приёмы умножения особенно широко должны культивироваться в устном счёте.

Умножение десятичных дробей на целое число

Сначала рассматривается умножение десятичных дробей на 10, 100, 1 000 и т. д. Множители этого вида — 10^k при $k = 1, 2, 3\ldots$ — всегда выделяются в особую группу в курсе арифметики десятичных чисел.

Если множимое — целое число, то произведение вычисляется просто (приписывание нулей справа).

Нумерация десятичных дробей представляет непосредственное продолжение нумерации целых чисел; поэтому умножение таких дробей на 10, 100, 1 000 и т. д. производится очень просто («перенесение» запятой вправо).

Преподаватель предлагает учащимся припомнить, какие задачи решаются умножением на целое число, и придумать соответствующие примеры. Затем он даёт числовые примеры: 8,12·10; 24,537·100; 0,0813·1 000 и т. п.

Учащиеся решают их, сводя к умножению обыкновенных дробей, и дают объяснение каждой операции.

$$8,12\cdot 10=\frac{812}{100}\cdot 10=\frac{812\cdot \cancelto{1}{10}}{\cancelto{10}{100}}=\frac{812}{10}=81,2;$$

$$24{,}537\cdot 100=\frac{24537}{1000}\cdot 100=\frac{24537\cdot \overset{1}{100}}{1000}=2453{,}7;$$

$$0{,}0813\cdot 1000=\frac{813}{10000}\cdot 1000=\frac{813\cdot 1000}{10000}=\frac{813}{10}=81{,}3.$$

Попутно они сравнивают данные дроби и полученные произведения и замечают, что последние записаны теми же цифрами и в том же порядке, что и данные дроби, но запятая передвинута или перенесена вправо на столько цифр, сколько нулей во множителе. Учащиеся сравнивают записи множимого и произведения и убеждаются, что при перенесении запятой вправо каждый разряд множимого увеличивается в 10, 100, 1 000 и т. д. раз, а потому и всё число увеличивается во столько же раз.

Ещё отчётливее эту мысль можно выразить, если записать решение таким образом:

$$8{,}12\cdot 10=(8+0{,}1+0{,}02)\cdot 10=8\cdot 10+0{,}1\cdot 10+0{,}02\cdot 10=80+1+0{,}2=81{;}2.$$

В этой записи ясно видно, что каждый разряд множимого увеличился в 10 раз.

Учащиеся решают подобные примеры, убеждаются в справедливости ранее сделанных наблюдений и формулируют правило умножения десятичных дробей на 10, 100, 1 000 и т. д., которое и применяют без промежуточных преобразований.

Имеется ещё один особый случай умножения десятичных дробей на 10, 100, 1 000 и т. д., когда исчезает запятая, например: $0{,}8\cdot 10 = 8$ или $36{,}2\cdot 100 = 3\,620$. Учащиеся припоминают основное свойство десятичной дроби и приписывают во множимом справа произвольное число нулей например: $0{,}8\cdot 10 = 0{,}800\cdot 10 = 8{,}00 = 8$ и $36{,}2\cdot 100 = 36{,}2000\cdot 100 = 3620{,}00 = 3\,620$. Справедливость этих фактов можно подтвердить и предварительной записью десятичных дробей в виде обыкновенных:

$$0{,}8\cdot 10=\frac{8}{10}\cdot 10=\frac{8\cdot \overset{1}{10}}{\underset{1}{10}}=8 \text{ и т. п.}$$

Наконец, надо остановиться и на случае умножения целых чисел на 10, 100, 1 000 и т. д., который тоже сводится к «перенесению» запятой, например: $24\cdot 100 = 24{,}000\cdot 100 = 2400{,}0 = 2\,400$.

В заключительной беседе учащиеся по вопросам преподавателя формулируют выводы об умножении десятичных дробей на 10, на 100 и т. д.

В дальнейшей работе соответствующие задачи можно формулировать по-разному: данную десятичную дробь 1) умножить на 10, 100, 1 000 и т. д., 2) увеличить в 10, 100, 1 000 и т. д. раз или 3) в данной десятичной дроби «перенести» запятую вправо на один, два и т. д. десятичных знаков.

Это свойство десятичной дроби изменять свою величину в 10, 100, 1 000 и т. д. раз при перенесении запятой вправо на один, два, три и т. д. знаков даёт возможность широко применять его при раздроблении именованных чисел, выраженных в метрических мерах. Так, 2,384 *м* легко выразить в дециметрах (23,84 *дм*), в сантиметрах (238,4 *см*), в миллиметрах (2 384 *мм*) перенесением запятой вправо, так как эти меры находятся в десятичных соотношениях.

Умножение десятичных дробей на целое число, отличное от чисел вида 10^k, производится письменно, как умножение многозначных чисел. Поэтому основной упор в этой работе делается на письменное оформление умножения десятичных дробей.

Если условиться множимое, множитель и произведение записывать в одну строку, то этим будет навсегда изжит спор о том, как надо подписывать данные числа при умножении десятичных дробей[1].

[1] Шохор-Троцкий, Методика арифметики, 1935, стр. 214.

Изучение умножения десятичных дробей на целое число строится в такой последовательности: умножение на однозначное, потом на двузначное и на любое многозначное число.

При умножении на однозначное число произведение вычисляется без всяких промежуточных записей: 1) $0,8 \cdot 7 = 5,6$ (объяснение: 8 десятых умножить на 7, получится 56 десятых, или 5 целых единиц и 6 десятых долей); 2) $3,82 \cdot 8 = 30,56$ (объяснение то же).

Решение тех же примеров можно записать и так:

$$1)\quad 0,8 \cdot 7 = \frac{8}{10} \cdot 7 = \frac{8 \cdot 7}{10} = \frac{56}{10} = 5,6.$$

$$2)\quad 3,82 \cdot 8 = \frac{382}{100} \cdot 8 = \frac{382 \cdot 8}{100} = \frac{3056}{100} = 30,56.$$

$$3)\quad 3,24 \cdot 83 = \frac{324}{100} \cdot 83 = \frac{324 \cdot 83}{100} = \frac{26892}{100} = 268,92.$$

$$\begin{array}{r} 324 \cdot 83 = 26\,892 \\ \hline 972 \\ 2592 \\ \hline 26892 \end{array}$$

Учащиеся видят, что решение сводится к умножению целых чисел и что в произведении получается столько десятичных знаков, сколько их было во множимом. Запись решения может быть расположена так:

$$\begin{array}{r} 3,24 \cdot 83 = 268,92. \\ \hline 972 \\ +\,2592 \\ \hline 26892 \end{array}$$

Учащиеся решают ещё несколько примеров, записывают весь процесс работы в той или иной редакции (т. е. в виде обыкновенных дробей или в виде десятичных) и выводят правило умножения десятичных дробей на целое число.

То же правило подтверждается при умножении на трёхзначные и любые многозначные целые числа.

Пользуясь тем, что дробь определяется как частное, полученное при делении одного числа на другое (в силу чего она обладает всеми свойствами частного), можно вывести правило умножения десятичной дроби на целое число ещё таким образом: отбросив запятую во множимом, мы увеличим его в 10, 100, 1 000 и т. д. раз, а потому и произведение увеличится во столько же раз; зато теперь надо умножать только целые числа; полученное произведение надо уменьшить во столько же раз, во сколько увеличили множимое, отделив в нём справа соответствующее число десятичных знаков (в практике вычислений запятая не отбрасывается и не зачёркивается).

Умножение на десятичную дробь

Прежде чем приступить к изучению этой темы, надо подготовить учащихся к более отчётливому и ясному пониманию всего процесса работы. С этой целью надо рассмотреть в данном месте курса деление десятичных дробей на 10, 100, 1 000 и т. д. и умножение их на 0,1; 0,01; 0,001 и т. д.

Деление десятичных дробей на 10, 100, 1 000 и т. д. можно рассматривать как действие, обратное умножению на те же числа. А потому учащиеся под руководством преподавателя могут a priori сказать, что при делении десятичных дробей на 10, 100, 1 000 и т. д. каждый разряд десятичной дроби соответственно уменьшится в 10, 100, 1 000 и т. д. раз, следовательно, и всё данное число уменьшится во столько же раз, а запятая будет перенесена влево на один, два и т. д. знаков.

Этот вывод проверяется на примерах:

$$1)\ 24{,}8:10=\frac{248}{10}:10=\frac{248}{10\cdot10}=\frac{248}{100}=2{,}48.$$

$$2)\ 3846{,}2:100=\frac{38462}{10}:100=\frac{38462}{1000}=38{,}462 \text{ и т. п.}$$

Полученные результаты сравниваются с данными дробями, отмечаются одинаковый цифровой и порядковый состав их и «перенос» запятой влево. Отмечается, что данные дроби действительно при этом уменьшаются, что можно проследить по тем местам, которые занимали и занимают одни и те же цифры в записях делимого и частного. Затем составляется соответствующее правило деления.

Особое внимание надо обратить на те случаи деления, когда нехватает знаков для «переноса» запятой влево и, в частности, на деление целых чисел на 10, 100, 1 000 и т. д., пользуясь правилом «переноса» запятой влево.

Новое правило переноса запятой влево применяется при решении задач на превращение именованных чисел, выраженных в метрических мерах: 2753,8 *кг* = 27,538 *ц* = 2,7538 *т*.

Следующая подготовительная ступень работы состоит в изучении умножения десятичных дробей на 0,1; 0,01; 0,001 и т. д. например:

$$1)\ 57{,}2\cdot0{,}1=\frac{572}{10}\cdot\frac{1}{10}=\frac{572}{100}=5{,}72.$$

$$2)\ 3{,}56\cdot0{,}01=\frac{356}{100}\cdot\frac{1}{100}=\frac{356}{10000}=0{,}0356 \text{ и т. п.}$$

Перед решением каждого из этих примеров учащиеся на вопросы преподавателя отвечают, что умножить данное число на 0,1, на 0,01 и т. п. — значит найти одну десятую, одну сотую и т. д. часть данного числа, для чего надо разделить его на 10, на 100, на 1 000 и т. п., а это можно сделать «переносом» запятой влево на соответствующее число знаков, т. е. $57{,}2\cdot0{,}1=5{,}72$ или, $3{,}56\cdot0{,}01=0{,}0356$ и т. п. Те же результаты получаются и в том случае, когда задача будет сведена к умножению обыкновенных дробей. Таким образом, даётся истолкование умножения данных чисел на правильную десятичную дробь. Учащиеся решают ещё несколько примеров и составляют правило умножения данного числа на 0,1; 0,01; 0,001 и т. д. (надо перенести запятую влево). Необходимо решать и такие числовые примеры, как 0,1·0,1; 0,01·0,1; 0,01·0,01 и т. д.

Теперь можно приступить к изучению умножения десятичных дробей на любую десятичную дробь. Но и здесь надо особо выделять те случаи, когда множителем будет правильная десятичная дробь. Учащиеся могут вывести соответствующее правило умножения, применяя правило умножения обыкновенных дробей.

$$1)\ 0{,}743 \cdot 0{,}36 = \frac{743}{1000} \cdot \frac{36}{100} = \frac{743 \cdot 36}{100000} = \frac{26748}{100000} = 0{,}26748;$$

$$\begin{array}{r} 743 \cdot 36 \\ \hline 4458 \\ +\ 2229 \\ \hline 26748 \end{array} \qquad \text{или иначе:} \qquad \begin{array}{r} 0{,}743 \cdot 0{,}36 = 0{,}26748. \\ \hline 4458 \\ +\ 2229 \\ 26748 \end{array}$$

$$2)\ 5{,}12 \cdot 3{,}6 = \frac{512}{100} \cdot \frac{36}{10} = \frac{512 \cdot 36}{1000} = \frac{18432}{1000} = 18{,}432;$$

$$\begin{array}{r} 512 \cdot 36 \\ \hline 3072 \\ +\ 1536 \\ 18432 \end{array} \qquad \text{или иначе:} \qquad \begin{array}{r} 5{,}12 \cdot 3{,}6 = 18{,}432. \\ \hline 3072 \\ +\ 1536 \\ \hline 18432 \end{array}$$

Перед решением каждого примера учащиеся сначала определяют величину произведения по сравнению его с множимым. После выполнения решения в первой редакции (как умножение обыкновенных дробей), они сравнивают полученное произведение с множимым, проверяя своё предварительное заключение, просматривают ход решения и формулируют выводы:

1) Умножение десятичных дробей сводится к умножению их числителей (целых чисел) и знаменателей.

2) Произведение числителей можно получить непосредственным перемножением данных десятичных дробей, как целых чисел (т. е. не обращая внимания на запятые).

3) В полученном произведении справа отделяется столько десятичных знаков, сколько их было в обоих сомножителях.

4) При умножении на правильную десятичную дробь произведение получается меньше множимого (почему?), а при умножении на неправильную дробь произведение больше множимого (почему?).

После этого легко сформулировать правило умножения десятичных дробей.

Особые приёмы умножения на 0,5; 0,25 и т. п., как задачи на определение дроби данного числа, рассматриваются при изучении деления десятичных дробей.

Помимо простых задач и примеров, содержащих только по одному действию, учащиеся должны решать и сложные задачи и примеры, содержащие по два и больше действий (сложение, вычитание и умножение целых чисел, десятичных и обыкновенных дробей). С помощью этих задач и примеров учащиеся продолжают развивать вычислительные навыки, осознают значение скобок, изменяющих нормальный порядок действий, приучаются преобразовывать простейшие дроби из одного их вида в другой (обыкновенные в десятичные и обратно) и определять целесообразность этих преобразований. Так, если раньше культивировалась мысль, что при сложении и вычитании обыкновенных и десятичных дробей выгодно обыкновенные дроби обращать в десятичные, так как указанные действия с такими дробями значительно проще и легче, то совсем нельзя этого утверждать при умножении обыкновенных и десятичных дробей: умножение десятичных дробей, как многозначных чисел, более громоздко, чем умножение обыкновенных дробей, члены которых чаще бывают однозначными или двузначными числами; произведение можно легко найти в порядке устного счёта.

Например: $1{,}75 \cdot \frac{3}{4} = 1{,}75 \cdot 0{,}75 = 1{,}3125$ или:

$$\begin{array}{r} 875 \\ 1225 \\ \hline 13125 \end{array}$$

$$1{,}75 \cdot \frac{3}{4} = 1\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{7}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{21}{16} = 1\frac{5}{16}.$$

Правда, в данном случае не учитывается вопрос о том, в каком виде должно быть произведение — в виде десятичной или обыкновенной дроби. Чтобы эта работа носила вполне целесообразный характер, надо соответствующим образом подбирать весь числовой материал. Так, приведённый пример может быть частью такой задачи:

$$1{,}75 \cdot \frac{3}{4} + 1\frac{3}{16} = \ldots = \frac{21}{16} + \frac{19}{16} = \frac{21+19}{16} = \frac{40}{16} = 2\frac{1}{2}.$$

В этих задачах знаменатели несократимых обыкновенных дробей могут содержать множители, отличные от 2 и 5, что не даёт возможности обратить их в конечную десятичную дробь; а десятичные дроби после записи их в виде обыкновенной и после сокращения могут в числителе и в знаменателе содержать однозначные или двузначные числа.

4. Деление десятичных дробей

Изучение действия деления десятичных дробей по сравнению с изучением первых трёх арифметических действий над теми же дробями представляет некоторые особенности. Определение деления как действия, обратного умножению, а также истолкование смысла этого действия при целом и дробном делителях полностью сохраняются. Особенности же этого действия выявляются, главным образом, в процессе выполнения его. Правило деления десятичных дробей в сущности сводится к требованию, чтобы делитель был целым числом. Поэтому изучение этого действия сводится к изучению деления на целое число. При этом последний остаток при делении может быть равен нулю и точное частное выразится конечной десятичной дробью; чаще же при делении на целое число ни один остаток при делении не равен нулю и частное записывается в виде бесконечной десятичной дроби. Внешним признаком такой дроби является многоточие, которое ставится справа вместо повторяющихся следующих десятичных знаков. С этим новым арифметическим знаком надо познакомить учащихся. Учащиеся должны вполне отчётливо понимать, что дробь 1,6666 есть конечная десятичная дробь, а 0,222...— или бесконечная десятичная дробь, или же некоторая конечная десятичная дробь, последние десятичные знаки которой отброшены. Это истолкование данной символики довольно трудно усваивается учащимися. Бесконечный процесс деления, бесконечная десятичная дробь — это новые понятия для учащихся. Новым является для них и понятие о приближённом значении как бесконечных десятичных дробей, так и конечных дробей с большим числом десятичных знаков. Учащиеся должны знать и отчётливо понимать, что при решении практических задач вычисления производятся обычно над десятичными дробями с одним, двумя, тремя десятичными знаками и очень редко с бо́льшим числом их. Поэтому, если имеется десятичная дробь — конечная или бесконечная — с большим числом десятичных знаков, то при вычислении берётся приближённое значение её с определённой степенью точности. Понятие степени точности — тоже новое понятие для учащихся пятых классов. Нельзя обойти молчанием и тот факт, что частное, полученное при делении одного числа на другое в виде бесконечной десятичной дроби, может быть выражено и вполне определённой обыкновенной дробью (например: $3:7=0,428571428571...=\frac{3}{7}$)

При выводе правила деления десятичных дробей нет особой необходимости обращаться к записи данных десятичных дробей в виде обыкновенных; все рассуждения при этом могут ограничиваться кругом целых чисел. Поэтому довольно подробное повторение деления целых чисел является крайней необходимостью; особенно подробно надо повторить процесс деления многозначных чисел.

Однако в некоторых случаях следует тот или иной числовой пример на деление десятичных дробей решать с помощью записи последних в виде обыкновенных дробей, чтобы подкрепить правильность сделанных выводов.

Общий план изучения деления десятичных дробей можно построить так:

1) деление данных чисел — целых и десятичных дробей — на целое число;

2) деление тех же чисел на десятичную дробь.

Деление на целое число

Изучение этого раздела данной темы можно построить по следующему плану:

1) конечный процесс деления:

а) деление целых чисел при целом частном;

б) деление десятичных дробей и целых чисел при дробном частном (в виде конечной десятичной дроби);

2) бесконечный процесс деления:

а) получение частных в виде бесконечных десятичных дробей;

б) приближённые значения их с определённой степенью точности.

Деление целых чисел при целом частном является повторением уже известного действия. Учащиеся должны припомнить определение этого действия и условие выполнимости его в области целых чисел. Главное внимание в процессе повторения надо сосредоточить на процессе деления многозначных чисел при однозначном, двузначном и многозначном делителях. Во всех этих случаях учащиеся должны отчётливо выполнять процесс деления, сопровождая каждый этап работы объяснением. Примеры для повторения подбираются так, чтобы постепенно возрастала трудность работы: деление целого многозначного числа на однозначное, потом на двузначное, и, наконец, на многозначное число. При делении на однозначное число надо требовать в обязательном порядке только «строчечное» расположение записей и получение частного, пользуясь только таблицей деления, например: $20\,321:7=2\,903$.

В классе же следует подробно разобрать решение нескольких примеров деления многозначных чисел на двузначное и многозначное числа с полным объяснением: нахождение старшего разряда частного, умножение делителя на это разрядное число и вычитание. И в этих случаях рекомендуется делимое, делитель и частное записывать в одну строчку и деление обозначать двоеточием, а не углом.

Деление десятичных дробей на целое число впервые приводит к получению частного в виде десятичной дроби.

При составлении и подборе примеров для упражнения в классной работе надо иметь в виду следующее: на первых порах при однозначном делителе надо выбирать только такие случаи, когда нет надобности раздроблять единицы одного или нескольких разрядов делимого в единицы следующего низшего разряда.

Вот решение нескольких примеров:

1) $8462{,}6:2=4231{,}3;$	2) $953{,}6:4=238{,}4;$
$848{,}48:4=212{,}12;$	$12{,}84:6=2{,}14;$
$966{,}369:3=322{,}123.$	$21{,}784:7=3{,}112.$

При решении примеров 2-й группы приходится прибегать к раздроблению единиц одного разряда в единицы следующего низшего разряда.

Более общие случаи (делители — многозначные числа):

3) 651,6 : 12 = 54,3.
51
36
0

4) 768,45 : 235 = 3,27.
705
634
470
1645
1645
0

Теперь очень легко перейти к следующему этапу работы и рассмотреть деление целых чисел при целом делителе и точном частном в виде десятичной дроби.

Вот примерные типы соответствующих упражнений и их решение:

1) 108 : 8 = 13,5.

2) 308 : 25 = 12,32.
58
80
50
0

3) 13509 : 375 = 36,024.
1125
2259
2250
900
1500
0

Эти примеры не требуют никаких новых приёмов. При решении их преподаватель должен обратить внимание учащихся на то, что частное в виде десятичной дроби *может получаться не только* при делении десятичных дробей, но и при делении целых чисел.

В короткой заключительной беседе учащиеся подводят некоторые итоги:

1) во всех предыдущих примерах делимое было задано целым числом или десятичной дробью;

2) во всех решённых задачах в частном получалось целое число или десятичная дробь;

3) делителем всегда было целое число — однозначное, двузначное или многозначное;

4) деление десятичных дробей на целые числа производится так же, как и деление целых чисел.

Затем учащиеся решают примеры и текстовые задачи.

Бесконечный процесс деления

В порядке продолжения предыдущей работы преподаватель предлагает учащимся такую группу числовых примеров, в которых делителями являются числа, состоящие только из множителей 2 и 5 (например, 5 : 2; 11 : 4; 27 : 8; 39 : 5; 0,78 : 25 и т. п.).

Учащиеся решают эти и подобные им примеры; в частном получаются десятичные дроби, а последние остатки равны нулю. По предложению преподавателя учащиеся сами задают совершенно произвольные числа, делят их на любой из вышеприведённых делителей и убеждаются в том, что деление выполняется, а в частном получаются или целые числа, или десятичные дроби. В заключение обращается внимание учащихся на состав делителей в каждом числовом примере: они состоят только из множителей 2 и 5.

Затем преподаватель даёт вторую группу числовых примеров, в которых делителями являются однозначные числа 3, 6, 7, 9 или двузначные, имеющие в своём составе простые множители, отличные от 2 и 5, например: $1\,374:3$; $423:9$; $0,252:9$; $5:3$; $4,5:11$; $12:37$ и т. п. При решении четвёртой задачи ($5:3$) учащиеся впервые сталкиваются с фактом бесконечного процесса деления ($5:3=1,6666...$). Прежде всего они обращают внимание на то, что: 1) в процессе деления повторяется один и тот же остаток (2), вследствие чего процесс деления будет бесконечным; 2) в записи результата деления повторяется один и тот же десятичный знак (6), поэтому в конце записи этого результата ставится многоточие (три точки).

В связи с последним встаёт такой вопрос: если полученный результат деления умножим на делитель, получится ли в произведении число, равное делимому? Непосредственным умножением учащиеся убеждаются в том, что в произведении получаются числа, не равные делимому, но чем больше мы возьмём десятичных знаков, тем ближе будет подходить произведение к нему ($1,6\cdot 3=4,8$; $1,66\cdot 3=4,98$; $1,666\cdot 3=4,998$ и т. д.); чтобы подтвердить это, они вычисляют разности между делимым и каждым произведением ($5-4,98=0,02$; $5-4,998=0,002$ и т. д.). Почему каждое произведение меньше делимого? Потому что при умножении мы берём не весь результат деления, а только часть его, записанную единицей и первыми десятичными знаками.

В заключение преподаватель сообщает учащимся, что такое деление, в котором повторяется один и тот же остаток, не равный нулю, называется бесконечным делением; результат его записывается в виде десятичной дроби, в которой повторяется один и тот же десятичный знак, что принято записывать многоточием (тремя точками) после двух-трёх повторений ($5:3=1,666...$). Этот результат условились называть бесконечной десятичной дробью и считать точным частным (в данном месте курса можно пока особо не подчёркивать периодический характер дроби).

Наконец, по предложению преподавателя или по инициативе самих учащихся результат того же деления записывается в виде обыкновенной дроби и смешанного числа ($5:3=\frac{5}{3}=1\frac{2}{3}$). Это наводит на мысль, что $\frac{5}{3}$ и $1\frac{2}{3}$ соответственно равны бесконечной десятичной дроби ($\frac{5}{3}=1\frac{2}{3}=1,666...$) и наоборот: бесконечная десятичная дробь может быть заменена обыкновенной дробью или смешанным числом.

Затем учащиеся решают следующий пример ($4{,}5:11 = 0{,}4090909\ldots$), где последовательно повторяются два остатка (1 и 10), а в частном — два десятичных знака (0 и 9); при этом повторяются и все предыдущие рассуждения. При решении следующего примера ($12:37$) оказывается, что последовательно повторяются три остатка (12, 9 и 16), а в частном — три десятичных знака (3,2 и 4) и т. д.

После решения этих и подобных им примеров учащиеся по вопросам преподавателя формулируют выводы:

1) деление десятичных дробей на целое число производится так же, как и деление целых чисел;

2) в одних случаях процесс деления заканчивается, так как последний остаток равен нулю; в частном получается или целое число, или *конечная* десятичная дробь;

3) в других случаях деление можно продолжать сколь угодно долго, так как ни один остаток не равен нулю (*бесконечный процесс деления*);

4) при бесконечном делении остатки повторяются в определённом порядке;

5) частное в этих случаях записывается тоже в виде десятичной дроби, в которой повторяются один или несколько десятичных знаков в определённом порядке. Это частное называют *бесконечной десятичной дробью*.

Решая примеры первой и второй группы, учащиеся без особых затруднений придут к заключению, что бесконечный процесс деления зависит от делителя: если в разложение делителя входят только простые множители 2 и 5, то процесс деления будет всегда *конечным*; если же в состав делителя входят простые множители, отличные от 2 и 5, то процесс деления *может быть бесконечным* (вдаваться в более тонкие подробности в данном месте курса не следует).

Учащиеся проверяют эти выводы решением новых примеров на деление; последние даются в «смешанном порядке»: когда делители состоят только из множителей 2 и 5 и когда в разложение их входят и другие простые множители.

Перед решением некоторых примеров полезно требовать от учащихся предварительное заключение о том, какого характера *будет* или *может быть* частное.

В связи с той же работой преподаватель неоднократно подчёркивает важное значение нового символа — *многоточия*, которое ставится в записи бесконечной десятичной дроби. С этой целью можно решить такие примеры:

1) $166:18 = 9{,}222\ldots$
2) $4611:500 = 9{,}222$

Сопоставляя частные в первом и во втором примерах, учащиеся видят, что они в обоих случаях записаны одними и теми же цифрами, в одной и той же последовательности. В то жённое **значение** с точностью до 1, то надо найти и знать десятые доли, если с точностью до 0,1, то надо знать сотые доли, и т. д.

Деление на десятичную дробь

Деление целых чисел и десятичных дробей на десятичную дробь сводится, как известно, к делению на целое число. Основная и единственная новая задача при этом состоит только в том, чтобы научить учащихся заменять деление на десятичную дробь делением на целое число. Эту замену можно производить двумя способами: 1) делимое и делитель увеличивается в 10, 100, 1 000 и т. д. раз умножением их на те же числа, пользуясь неизменяемостью точного частного при таком изменении данных чисел; множитель выбирается таким образом, чтобы делитель стал целым числом (это увеличение делимого и делителя производится перенесением запятой вправо на одинаковое число десятичных знаков); 2) делимое и делитель или только последний, если делимое — целое число, переписываются в виде обыкновенных дробей, над которыми производится действие деления по известным правилам; десятичные знаменатели при этом сокращаются полностью или частично;

$$32{,}6:5{,}43=\frac{326}{10}:\frac{543}{100}=\frac{326\cdot 100}{\underset{1}{10}\cdot 543}=\frac{3260}{543}=3\,260:543=\ldots$$

$$7{,}82:2{,}3\ =\frac{782}{100}:\frac{23}{10}=\frac{782\cdot \overset{1}{10}}{100\cdot 23}=\frac{782}{10}:23=78{,}2:23=\ldots$$

Из приведённых примеров видно, что во втором случае после сокращения десятичных знаменателей работа сводится к делению целого числителя на произведение двух целых чисел (10·23); выполняется это так, как показано в записи решения, благодаря чему опять достигается поставленная цель: сделать делитель целым числом. Последние записи сравниваются с первыми и делается вывод, что делимое и делитель в обоих примерах увеличены в 100 и 10 раз и что частное при этом сохраняет свою величину.

Первый способ более короткий, легко и быстро приводит к выводу правила; учащимся понятно и обоснование этого преобразования.

Второй способ более громоздкий, требует от учащихся большего напряжения и внимания при выводе правила деления; зато он даёт возможность выдержать установленный взгляд на десятичную дробь, как на обыкновенную дробь, и все тождественные преобразования их выводить из соответствующих преобразований обыкновенных дробей.

Преподаватель хорошо сделает, если для вывода правила деления на десятичную дробь не ограничится только одним способом, а познакомит учащихся с обоими.

Для вывода правила деления на десятичную дробь примеры должны быть построены так, чтобы частные сначала получались только в виде конечных десятичных дробей, и только после достаточного развития прочных навыков можно давать для решения примеры, в которых частные могут быть и бесконечными десятичными дробями. Можно наметить примерно такую последовательность в подборе числового материала: деление на однозначный делитель, потом на двузначный, трёхзначный и т. д.; делимое задаётся целыми числами и десятичными дробями. Чтобы сосредоточить внимание учащихся на самом характере тождественного преобразования, можно в некоторых примерах сохранить один и тот же состав значащих цифр и только менять место запятой.

Первая группа числовых примеров (при однозначном делителе):

1) $637:7=91$.

2) $637:0,7=6\,370:7—910$, или $637:0,7=637:\frac{7}{10}=\frac{637\cdot10}{7}=\frac{6\,370}{7}=910$.

3) $637:0,07=637:\frac{7}{100}=\frac{637\cdot100}{7}=\frac{63\,700}{7}=$
$=63\,700:7=9\,100$.

4) $637:0,007=$ и т. д.

При решении этих примеров преподаватель предварительно задаёт вопросы о том, каково будет частное по сравнению с делимым и почему. Благодаря этому учащиеся сразу будут должным образом истолковывать смысл деления на целое число и на правильную десятичную дробь

Учащиеся решают следующие примеры и убеждаются в правильности сделанных ранее заключений:

1) $63,7:7=9,1$.
2) $63,7:0,7=637:7=91$.
3) $63,7:0,07=6370:7=910$ и т. д.

1) $6,37:7=0,91$.
2) $6,37:0,7=63,7:7=9,1$.
3) $6,37:0,07=637:7=91$ и т. д.

В короткой беседе, посвящённой обзору всех решённых числовых примеров, учащиеся по вопросам преподавателя формулируют выводы:

1) деление на десятичную дробь можно заменить делением на целое число;

2) для этой цели в делимом и в делителе запятая переносится вправо на столько десятичных знаков, сколько их было в делителе;

3) при этом переносе запятой делимое и делитель увеличиваются в 10, 100, 1 000 и т. д. раз, а точное частное не изменяется.

Затем учащиеся решают вторую группу примеров (при двузначном делителе); 504 делится на 21, на 2, 1, на 0,21 на 0,021 и т. д., потом на те же числа делятся 50,4, 5,04 и т. п. Учащиеся применяют первый или второй способ для сведения каждой задачи к делению на целое число, сопровождая свою работу объяснением:

$$50,4:0,21=5\,040:21=240 \text{ и } 5,04:2,1=\frac{504}{100}:\frac{21}{10}=\frac{\overset{1}{504}\cdot\cancel{10}}{100\cdot21}=50,4:21=2,4.$$

При этом сравнивается полученное частное с соответствующим делимым и даётся то или иное объяснение.

Точно так же учащиеся решают числовые примеры при трёхзначном и вообще при любом многозначном делителе: 76 845 разделить на 235, на 23,5, на 2,35 и т. д., а также 768,45 разделить на те же числа и т. п.

Приведённое примерное распределение упражнений ни в коем случае не следует считать обязательным: во-первых, можно значительно сократить число их; во-вторых, в каждом новом примере можно давать и новые числа; в третьих, можно изменить порядок упражнений и т. п.

В заключительной беседе повторяются те же выводы, которые были сделаны раньше. При этом подчёркивается, что частное может быть или больше делимого, или меньше его, или равно ему (с соответствующим объяснением).

Все записи рекомендуется вести в строчечном порядке, например:

$$
\begin{array}{l}
155{,}496 : 3{,}72 = 15549{,}6 : 372 = 41{,}8. \\
\phantom{155{,}496 : 3{,}72 = }\underline{1488\phantom{{,}6}} \\
\phantom{155{,}496 : 3{,}72 = 1}669 \\
\phantom{155{,}496 : 3{,}72 = 1}\underline{372} \\
\phantom{155{,}496 : 3{,}72 = 1}2976 \\
\phantom{155{,}496 : 3{,}72 = 1}\underline{2976} \\
\phantom{155{,}496 : 3{,}72 = 1549{,}}0
\end{array}
$$

Деление на десятичную дробь, когда в частном получается бесконечная десятичная дробь, теперь не встретит никаких затруднений, так как процесс деления на целое число достаточно хорошо изучен и усвоен учащимися. После деления каждую бесконечную десятичную дробь учащиеся заменяют приближённым значением с заданной точностью, например: $2{,}3717171... \approx 2$; $2{,}4$; $2{,}37$ и т. д.

При изучении деления на десятичную дробь особого внимания заслуживают ещё две группы числовых примеров. В первую группу входят те из них, в которых делителями являются числа 0,1, 0,01, 0,001 и т. д. Перед решением этих примеров полезно напомнить истолкованием смысла деления на такие числа (нахождение всего числа по известной одной десятичной доле его), например: $32{,}54 : 0{,}1$; $0{,}328 : 0{,}01$ и т. п. Учащиеся могут рассуждать так: делением на дробь находится искомое число, дробь которого, заданная делителем, составляет данное число — делимое; следовательно, 0,1 искомого числа равна 32,54, а всё искомое число будет в 10 раз больше, т. е. 325,4; таким образом, $32{,}54 : 0{,}1 = 325{,}4$. Тот же пример можно решить и по общему правилу: $32{,}54 : 0{,}1 = 325{,}4 : 1 = 325{,}4$. Полезно научить учащихся сразу писать результат, находя его перенесением запятой; например: $5{,}2 : 0{,}01 = 520$ (объяснение: 0,01 искомого числа равна 5,2, а всё это число будет в 100 раз больше, т. е. 520).

Эти задачи надо время от времени сопоставлять с задачами на умножение, когда множителями служат те же числа: 0,1; 0,01; 0,001 и т. д. Подобные задачи на умножение и деление служат хорошим материалом для устного счёта.

Во вторую особую группу входят те задачи, в которых делителями являются числа: 0,2; 0,5; 0,25 и 0,125. Чтобы успешно выполнять эти вычисления на основании предыдущего опыта, приобретённого при выполнении совместных действий над обыкновенными и десятичными дробями, учащиеся должны хорошо знать, что $0{,}2 = \frac{1}{5}$; $0{,}5 = \frac{1}{2}$ и т. д. Поэтому при решении следующих задач они сначала указывают, что требуется данное число разделить на дробь, следовательно, найти искомое число, если известна дробь его ($\frac{1}{5}$, $\frac{1}{2}$ и т. д.), для чего надо данное число (делимое) умножить соответственно на 5, на 2 и т. д.

Примеры.

$21 : 0{,}2 = 105$ (0,2 или $\frac{1}{5}$ искомого числа составляют 21, а всё число в 5 раз больше);

$3{,}7 : 0{,}5 = 7{,}4$ (0,5 или $\frac{1}{2}$ искомого числа равна 3,7, а всё число вдвое больше).

В связи с этой работой надо решать и обратные задачи — умножение разных чисел на 0,2; 0,5; 0,25 и т. д. Эти задачи сводятся к делению данных чисел на 5, на 2, на 4 и т. д.

IV. СОВМЕСТНЫЕ ДЕЙСТВИЯ НАД ОБЫКНОВЕННЫМИ И ДЕСЯТИЧНЫМИ ДРОБЯМИ

1. Обращение обыкновенных дробей в конечные десятичные дроби

«Запись десятичных дробей в виде обыкновенных. Обращение обыкновенной дроби в десятичную (конечную и бесконечную). Понятие о периодической дроби» — эти три темы в программе по арифметике стоят особняком после темы «Четыре действия над десятичными дробями»[1]; ничего не сказано о прохождении этих тем и в объяснительной записке к той же программе. Поэтому в школе изучение указанных тем практически тоже ставится в самом конце курса арифметики десятичных дробей, когда полностью закончено изучение всех четырёх действий над ними.

Более целесообразным надо признать другой порядок изучения этих тем программы, непосредственно связав их с изучением отдельных действий над десятичными дробями. При этом главное внимание учащихся надо сосредоточить на совместных действиях над дробями обоих видов, а преобразование их из одного вида в другой рассматривать как средство для выполнения этих действий. Совместные действия над обыкновенными и десятичными дробями надо начинать сразу же после изучения сложения и вычитания десятичных дробей.

---

[1] Программы средней школы. Математика, 1951, стр. 17.

С этой целью как в текстовые задачи, так и в примеры вводятся не только десятичные дроби, но и обыкновенные; последние с такими знаменателями, которые содержат только простые множители — двойки или пятёрки. Такой числовой состав в задачах заставит учащихся сначала оценивать всю обстановку, а потом уже решать основной вопрос: как выполнить сложение или вычитание дробей разных видов?

Вот несколько таких примеров:

1) $\frac{1}{2}+0{,}411+3{,}27+\frac{1}{5}=$

2) $\frac{1}{4}+5{,}12+\frac{3}{5}=$

3) $6\frac{1}{8}+1{,}19+\frac{2}{5}=$

4) $15{,}71-2\frac{3}{4}=$

5) $7{,}8-3\frac{4}{5}=$ и т. п.

Можно предположить, что первый пример сами учащиеся, предоставленные собственным силам, станут решать так: они сложат сначала обыкновенные дроби

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{5}=\frac{7}{10}\right),$$

потом десятичные $(0{,}411+3{,}27=3{,}681)$, а затем первую сумму $\frac{7}{10}$ запишут без знаменателя и завершат всю работу $(0{,}7+3{,}681=4{,}381)$. Таким образом, учащиеся увидят, что в конечном итоге решение примера сводилось к сложению десятичных дробей. Преподаватель предлагает сразу же всю работу свести к этому, с каковой целью надо все обыкновенные дроби сначала представить в виде десятичных. Как это сделать?

Учащиеся выписывают отдельно первую дробь $\left(\frac{1}{2}\right)$ и под руководством преподавателя легко схватывают основную задачу — дробь $\frac{1}{2}$ представить в десятичных долях; в единице 10 десятых долей, а в половине 5 десятых, т. е. $\frac{1}{2}=\frac{5}{10}=0{,}5$. Легко заметить, что тот же результат можно получить, умножив числитель и знаменатель данной дроби на 5: $\frac{1}{2}=\frac{1\cdot5}{2\cdot5}=\frac{5}{10}=0{,}5$.

Точно так же преобразуется вторая дробь $\left(\frac{1}{5}\right)$; в целой единице 10 десятых долей, а в одной пятой — в пять раз меньше, т. е. 2 десятых; следовательно,

$$\frac{1}{5}=\frac{2}{10}=0{,}2 \text{ или } \frac{1}{5}=\frac{1\cdot2}{5\cdot2}=\frac{2}{10}=0{,}2.$$

Данная задача теперь будет записана так:

$$\frac{1}{2}+0{,}411+3{,}27+\frac{1}{5}=0{,}5+0{,}411+3{,}27+0{,}2=4{,}381.$$

$$\begin{array}{r}0{,}50\\0{,}411\\0{,}2\\\hline 4{,}381\end{array}$$

При решении следующих примеров продолжается та же работа. Так преобразуется дробь $\frac{1}{4}$, цель преобразования — выразить дробь $\frac{1}{4}$ в десятичных долях: в десятых долях нельзя, так как в единице 10 десятых, а 10 на 4 не делится без остатка; в сотых долях можно, так как в единице 100 сотых, а в одной четверти 25 сотых; т. е. $\frac{1}{4}=\frac{25}{100}=0{,}25$, или

$$\frac{1}{4}=\frac{1\cdot25}{4\cdot25}=\frac{25}{100}=0{,}25.$$

Чтобы в дальнейшей работе при решении задач, содержащих обыкновенные и десятичные дроби, не повторять весь процесс преобразования обыкновенных дробей в десятичные, учащиеся должны на отдельной странице в своих тетрадях заносить каждое вновь полученное преобразование обыкновенной дроби в таком виде:

$\frac{1}{2}=0{,}5$	$\frac{1}{8}=0{,}125$	$\frac{1}{5}=0{,}2$
$\frac{1}{4}=0{,}25$	$\frac{3}{8}=0{,}375$	$\frac{2}{5}=0{,}4$
$\frac{3}{4}=0{,}75$	$\frac{5}{8}=0{,}625$	
	$\frac{7}{8}=0{,}875$	

и т. д.

Такую же таблицу, но в крупном масштабе полезно вывешивать около классной доски. На первых порах учащиеся будут пользоваться ею и постепенно заучат наизусть.

В процессе этой работы учащиеся: 1) прочно усваивают преобразование простейших обыкновенных дробей в десятичные с помощью дополнительных множителей; 2) постепенно заучивают результаты этих преобразований; 3) убеждаются в том, что при сложении и вычитании дробей разного вида проще и легче всю работу сводить к сложению и вычитанию десятичных дробей.

Чтобы заучить наизусть вышеприведённую таблицу преобразований, учащиеся должны запомнить, в сущности, только преобразование основных или начальных дробей: $\frac{1}{4}=0{,}25$, $\frac{1}{8}=0{,}125$, $\frac{1}{5}=0{,}2$ и т. д., так как преобразование остальных дробей можно получать путём умножения десятичной дроби на 2, на 3, на 4 и т. д. (например, $\frac{1}{4}=0{,}25$, а $\frac{3}{4}=0{,}75$; $\frac{1}{5}=0{,}2$, а $\frac{4}{5}=0{,}8$ и т. д.).

После изучения умножения десятичных дробей учащиеся опять решают текстовые задачи и более сложные примеры на выполнение первых трёх арифметических действий над обыкновенными и десятичными дробями без скобок и со скобками. Если при этом необходимо сложить и вычесть обыкновенные и десятичные дроби, то учащиеся будут преобразовывать обыкновенные дроби в десятичные, пользуясь таблицей или воспроизведут весь известный им процесс преобразования с помощью дополнительного множителя.

То же самое учащиеся будут делать на первых порах по собственному почину и при умножении обыкновенных и десятичных дробей, например:

$$1{,}75\cdot\frac{2}{5}+0{,}625\cdot5\frac{3}{5}=\frac{1{,}75\cdot0{,}4}{0{,}700}+\frac{0{,}625\cdot5{,}6}{3750}=0{,}7+3{,}5=4{,}2.$$

$$\begin{array}{l}3\,125\\ 3{,}5000\end{array}$$

Однако необходимо рассмотреть другой способ решения той же задачи: предварительно преобразовать десятичные дроби в обыкновенные, пользуясь той же таблицей (в данном случае это возможно), а затем выполнить указанные действия над обыкновенными дробями:

$$1{,}75\cdot\frac{2}{5}+0{,}625\cdot5\frac{3}{5}=1\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{5}+\frac{5}{8}\cdot5\frac{3}{5}=$$

$$=\frac{7}{4}\cdot\frac{2}{5}+\frac{5}{8}\cdot\frac{28}{5}=\frac{7}{10}+\frac{7}{2}=\frac{42}{10}=4{,}2.$$

Сравнивая первое и второе решения одной и той же задачи, учащиеся увидят, что процесс умножения легче и проще выполняется над обыкновенными дробями, чем над десятичными, так как при этом числа бывают сравнительно малы, а потому почти все вычисления можно выполнить устно.

Таким образом, в связи с умножением обыкновенных и десятичных дробей учащиеся начинают решать и обратные задачи — преобразование десятичных дробей в обыкновенные. В одних случаях они будут пользоваться таблицей, если преобразуемые десятичные дроби входят в неё. В большинстве же случаев придётся записывать десятичную дробь в виде обыкновенной со знаменателем, а потом сокращать её, если это будет возможно. В задачи теперь можно включать и такие обыкновенные несократимые дроби, в состав знаменателей которых входят множители, отличные от 2 и 5, но преимущественно в тех случаях, когда эти дроби служат сомножителями, например:

$$\left(3{,}16+1\frac{2}{5}\right)\cdot\frac{5}{6}=(3{,}16+1{,}4)\cdot\frac{5}{6}=\frac{\overset{\overset{38}{76}}{\cancel{456}}\cdot\overset{1}{\cancel{5}}}{\underset{\underset{10}{20}}{\cancel{100}}\cdot\underset{1}{\cancel{6}}}=\frac{38}{10}=3{,}8.$$

Решение таких примеров приучит учащихся производить предварительный анализ чисел, данных для вычисления, чтобы вполне сознательно выбрать тот или иной приём для выполнения вычислений, — где производить вычисления с десятичными дробями и где — с обыкновенными.

Примеры.

I. $\left(1\frac{3}{8}+1\frac{3}{4}-0{,}411\right):0{,}59=(1{,}375+1{,}75-0{,}411):0{,}59=2{,}714:0{,}59=$

$=271{,}4:59=4{,}6.$

$$\begin{array}{r}1{,}75\\ \hline 3{,}125\\ 0{,}411\\ \hline 2{,}714\end{array}\qquad\qquad\begin{array}{r}236\\ \hline 35{,}4\\ 35{,}4\\ \hline 0\end{array}$$

Тот же пример $\left(1\frac{3}{8}+1\frac{3}{4}-0,411\right):0,59=4,6$ можно решить по частям отдельными задачами:

1) $1\frac{3}{8}+1\frac{3}{4}=1,375+1,75=3,125.$

$$\begin{array}{r} 1,375 \\ 1,75 \\ \hline 3,125 \end{array}$$

2) $3,125-0,411=2,714.$

$$\begin{array}{r} 3,125 \\ 0,411 \\ \hline 2,714 \end{array}$$

3) $2,714:0,59=271,4:59=4,6.$

$$\begin{array}{r} 271,4 \\ 236 \\ \hline 35,4 \\ 35,4 \\ \hline 0 \end{array}$$

Первый способ — цепочкой — значительно труднее для учащихся и более громоздок, так как некоторые числа без всякого использования их переписываются несколько раз.

II. $$\frac{3,5+4\frac{2}{3}+2\frac{2}{15}}{1\frac{1}{20}+4,1}=2.$$

1) $3,5+4\frac{2}{3}+2\frac{2}{15}=3\frac{1}{2}^{\,15}+4\frac{2}{3}^{\,10}+2\frac{2}{15}^{\,2}=9\frac{15+20+4}{30}=9\frac{39}{30}=10\frac{3}{10}=10,3.$

2) $1\frac{1}{20}+4,1=1,05+4,1=5,15.$

3) $10,3:5,15=1030:515=2.$

III. $$\frac{\left[\left(7,625+11\frac{3}{8}\right)-\left(9\frac{48}{125}+3,116\right)\right]\cdot(20,001-9,986)}{4\frac{2}{3}\cdot 0,15+0,3675:\frac{7}{50}-1,7}=40,06.$$

1) $7,625+11\frac{3}{8}=7,625+11,375=19.$

2) $9\frac{48}{125}+3,116=9,384+3,116=12,5.$ 3) $19-12,5=6,5.$

4) $20,001-9,986=10,015.$

5) $6,5\cdot 10,015=65,0975.$

$$\begin{array}{r} 50\,075 \\ 60090 \\ \hline 65,0975 \end{array}$$

6) $4\frac{2}{3}\cdot 0,15=4\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{20}=\frac{14\cdot 3}{3\cdot 20}=\frac{7}{10}=0,7.$

7) $0,3675:\frac{7}{50}=0,3675:0,14=36,75:14=2,625.$

$$\begin{array}{r} 87 \\ 35 \\ 70 \\ 0 \end{array}$$

8) $0,7+2,625=3,325.$

9) $3,325-1,7=1,625.$

10) $65,0975:1,625=65097,5:1625=40,06.$

$$\begin{array}{r} 6500 \\ \hline 9750 \\ 9750 \\ \hline 0 \end{array}$$

По окончании изучения всех действий над десятичными дробями в связи с решением сложных текстовых задач и примеров на совместные действия с обыкновенными и десятичными дробями преподаватель повторяет с учащимися известный им приём преобразования обыкновенных дробей в десятичные с помощью дополнительных множителей. С этой целью учащиеся сначала составляют таблицу разложения десятичных знаменателей на простые множители:

$$10 = 2\cdot5$$
$$100 = 2\cdot2\cdot5\cdot5$$
$$1\,000 = 2\cdot2\cdot2\cdot5\cdot5\cdot5$$

и т. д.

Из этой таблички видно, что 1) каждый десятичный знаменатель состоит только из простых множителей — двоек и пятёрок, взятых по равному числу; 2) число двоек и пятёрок равно числу нулей в записи десятичного знаменателя.

Учащиеся просматривают свои ранее составленные таблицы преобразования обыкновенных дробей в десятичные и убеждаются в том, что если знаменатель обыкновенной дроби состоит только из простых множителей — двоек (пятёрок), то дополнительный множитель составляется из такого же числа пятёрок (двоек).

Попутно подтверждается и второй вывод о том, что число десятичных знаков в десятичной дроби будет равно числу двоек или пятёрок в разложении знаменателя обыкновенной дроби.

Преподаватель предлагает учащимся несколько задач на преобразование обыкновенных дробей со знаменателями 16, 32, 125, например: $\frac{1}{16}$, $\frac{5}{16}$, $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{125}$, $\frac{7}{125}$ и т. п.

Решение каждой задачи теперь начинается с разложения знаменателя данной дроби на простые множители, что даёт возможность сразу же составить и дополнительный множитель:

$$\frac{1}{16} = \frac{1}{2\cdot2\cdot2\cdot2} = \frac{1\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5}{2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5} = \frac{625}{10\,000} = 0{,}0625;$$

$$\frac{1}{125} = \frac{1}{5\cdot5\cdot5} = \frac{1\cdot2\cdot2\cdot2}{5\cdot5\cdot5\cdot2\cdot2\cdot2} = \frac{8}{1000} = 0{,}008 \text{ и т. д.}$$

Теперь преподаватель может расширить круг дробей, которые можно преобразовать в конечные десятичные дроби; знаменатели этих дробей должны состоять из простых множителей — двоек и пятёрок, взятых не в равных количествах (20, 40, 80, 50, 250 и т. п.). Преобразование таких дробей можно производить двояко: 1) или знаменатель данной дроби разлагается на простые множители — двойки и пятёрки, а затем **уравнивается** число тех и других введением дополнительного множителя, состоящего только из двоек или пятёрок, например:

$$\frac{7}{20}=\frac{7}{2\cdot2\cdot5}=\frac{7\cdot5}{2\cdot2\cdot5\cdot5}=\frac{35}{100}=0{,}35;$$

2) или в знаменателе той же дроби сначала выделяется десятичный множитель (чаще всего 10), а потом составляется дополнительный множитель из двоек или из пятёрок, например:

$$\frac{13}{40}=\frac{13}{10\cdot4}=\frac{13\cdot25}{10\cdot4\cdot25}=\frac{325}{1000}=0{,}325;$$

$$\frac{23}{50}=\frac{23}{10\cdot5}=\frac{23\cdot2}{10\cdot5\cdot2}=\frac{46}{100}=0{,}46 \text{ и т. п.}$$

Попутно учащиеся замечают, что в полученной десятичной дроби число десятичных знаков будет равно наибольшему числу двоек или пятёрок в разложении *знаменателя данной обыкновенной* дроби.

Результаты последних преобразований учащиеся опять заносят в свои таблицы.

В заключительной беседе учащиеся делают общий обзор своих таблиц и формулируют по отдельным вопросам преподавателя вывод о том, что всякая обыкновенная несократимая дробь со знаменателем, состоящим только из множителей двоек или пятёрок или из тех и других, преобразуется или обращается в конечную десятичную дробь с определённым числом десятичных знаков в зависимости от наибольшего числа множителей — двоек или пятёрок — в разложении знаменателя данной обыкновенной дроби.

При решении следующих задач на те же преобразования преподаватель может и должен предварительно спрашивать учащихся, сколько десятичных знаков будет иметь десятичная дробь.

После этого можно познакомить учащихся и с другим способом обращения обыкновенной дроби в десятичную, исходя из определения дроби как частного, полученного при делении числителя на знаменатель.

2. Понятие о периодических дробях

В связи с последними выводами ставится вопрос о том, можно ли всякую обыкновенную дробь преобразовать в десятичную? Чтобы получить ответ на этот вопрос, преподаватель предлагает учащимся задачу: дробь $\frac{1}{3}$ обратить в десятичную. Учащиеся сначала пробуют подыскать дополнительный множитель к знаменателю данной дроби, но этого сделать нельзя. Тогда они прибегают ко второму способу — делению числителя на знаменатель: $\frac{1}{3}=1:3=0{,}3333\ldots$ Процесс деления оказывается бесконечным, и в результате получается бесконечная десятичная дробь.

При решении следующих аналогичных задач в процессе деления учащиеся особо подчёркивают повторяющиеся остатки и продолжают наблюдать зависимость между числом повторяющихся остатков и числом повторяющихся десятичных знаков в записи результата деления:

$$\frac{2}{3}=2:3=0{,}666\ldots \qquad \frac{1}{11}=1:11=0{,}090909\ldots$$

$$\frac{1}{9}=1:9=0{,}111\ldots \qquad \frac{2}{11}=2:11=0{,}181818\ldots$$

$$\frac{2}{9}=2:9=0{,}222\ldots \qquad \frac{3}{11}=3:11=0{,}272727\ldots$$

$$\frac{8}{9}=8:9=0{,}888\ldots \qquad \frac{10}{11}=10:11=0{,}909090\ldots$$

$$\frac{1}{37}=1:37=0{,}027027\ldots$$

$$\frac{2}{37}=2:37=0{,}054054\ldots$$

. . . .

. . . .

Можно предсказать, что если при делении будут повторяться четыре разных остатка, то в частном будут повторяться четыре десятичных знака (например, $\frac{23}{101}=23:101=0{,}22772277\ldots$).

Полезно дать учащимся ещё одну задачу — обратить дробь $\frac{3}{7}$ в десятичную. Учащиеся по вопросам учителя проводят анализ и устанавливают, что следует ожидать: а) $\frac{3}{7}$ обратится в бесконечную десятичную дробь (почему?); б) остатков при делении может быть не больше 6 (так как остаток всегда меньше делителя и не равен 0); в) в бесконечной десятичной дроби могут повторяться не более 6 десятичных знаков. После этого учащиеся решают эту задачу и убеждаются в справедливости рассмотренных предположительных выводов ($\frac{3}{7}=0{,}428571428571\ldots$).

После обзора всех решённых задач делаются выводы:

1) Знаменатель каждой обыкновенной несократимой дроби не содержит множителей 2 и 5.

2) Каждая из этих дробей обращается в бесконечную десятичную дробь.

3) Процесс деления числителя на знаменатель тоже бесконечный, что вызывается повторением остатков в определённом порядке.

4) От повторения остатков при делении зависит повторение десятичных знаков в частном, т. е. в бесконечной десятичной дроби (в определённом порядке).

5) Совокупность повторяющихся десятичных знаков в беско-

нечной десятичной дроби обозначает число, которое называется **периодом** дроби, а сама дробь, содержащая период,— **периодической** (полнее: бесконечной десятичной **периодической дробью**).

На основании первого вывода (см. выше) учащиеся могут сделать заключение, что в бесконечную десятичную периодическую дробь обращается только такая обыкновенная дробь, в состав знаменателя которой не входят множители 2 и 5. Преподаватель даёт ряд несократимых дробей, в состав знаменателей которых входят множители 2 или 5 и иные числа, отличные от 2 и 5.

Например: $\frac{5}{6} = 0,8333...$; $\frac{7}{12} = 0,58333...$; $\frac{15}{88} = 0,1704545...$;

$\frac{4}{15} = 0,2666...$; $\frac{23}{75} = 0,30666...$ и т. п.

Учащиеся решают эти задачи и убеждаются в том, что и эти обыкновенные дроби обращаются в бесконечные десятичные периодические дроби, но период начинается не сразу после запятой, а после одного, двух и более десятичных знаков; вводится понятие о **смешанных** периодических дробях в отличие от **чистых** периодических дробей. Учащиеся могут подметить в последних решениях, что до периода стоит столько десятичных знаков, сколько раз 2 или 5 повторяется множителем в знаменателе несократимой дроби.

Вся предыдущая работа, посвящённая периодическим дробям, сопровождается решением сложных текстовых задач и примеров на совместные действия с обыкновенными и десятичными дробями. Числовые данные подбираются так, чтобы при решении было выгодно все или некоторые вычисления производить над десятичными дробями, с каковой целью обыкновенные дроби обращаются в конечные десятичные, если это возможно; в других задачах числовые данные надо подбирать так, чтобы все или некоторые вычисления выгодно было производить над обыкновенными дробями. К последней группе относятся все те задачи, в которых заданы обыкновенные несократимые дроби со знаменателями, содержащими простые множители, отличные от 2 и 5, которые, как теперь известно, могут быть преобразованы только в бесконечные десятичные дроби.

Преобразование обыкновенных дробей в бесконечные десятичные дроби не имеет особого практического значения. Те же преобразования дробей зато имеют большое теоретическое и образовательное значение: 1) обобщается понятие о том, что всякую обыкновенную дробь можно преобразовать в десятичную, — в конечную или в бесконечную; 2) сопоставляя между собой обыкновенные несократимые дроби, одни из которых обращаются в конечные десятичные дроби, а другие — в бесконечные, учащиеся более отчётливо осознают и прочнее запоминают условие, при котором обыкновенная дробь может быть преобразована в конечную десятичную дробь. Знание этих признаков поможет учащимся при совместных действиях разрешать вопрос о том, какие дроби следует в данной задаче преобразовать — обыкновенные в десятичные или десятичные в обыкновенные.

В заключительной беседе окончательно формулируется необходимый и достаточный признак для обращения обыкновенной дроби в конечную или в бесконечную десятичную периодическую дробь. Здесь же сообщается особый сокращённый способ записи периодических дробей: $0{,}3838... = 0,(38)$ и $0{,}2531531... = 0{,}2(531)$.

В соответствии с требованиями современной программы по арифметике изучение бесконечных десятичных периодических дробей в средней школе этим и ограничивается («Понятие о периодических дробях» [1]). Практическое использование их было изложено раньше при изучении деления десятичных дробей. Время от времени в программу арифметики включалась и обратная задача — обращение бесконечной десятичной периодической дроби в обыкновенную. В настоящее время это не требуется. Но в математическом кружке такая задача является благодарным материалом для любознательных учащихся.

Существуют разные способы решения этой задачи. Удачный способ изложен в учебнике Киселёва [2]. Там же даётся и более строгое теоретическое разрешение её.

ГЛАВА VI

ПРОЦЕНТЫ

I. ИЗУЧЕНИЕ ПРОЦЕНТОВ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

Только в XIX в. процентные вычисления стали применяться в самых разнообразных областях человеческой жизни и деятельности. Знание процентов, уменье свободно и широко пользоваться ими в повседневной жизни стало обязательным требованием к каждому гражданину Советского Союза как к участнику великого социалистического строительства. Советская средняя школа должна выполнить и эту огромной важности задачу — научить своих учащихся понимать процентные расчёты и самостоятельно производить их.

В учебной литературе по арифметике в дореволюционное время процентные вычисления занимали очень почётное место. Но применялись они почти исключительно в области коммерческих расчётов и тесно связаны были с решением особого рода задач на так называемый учёт векселей (коммерческий и математический учёты). Соответствующие задачи большей частью решались по «правилу пропорций». Поэтому изучение процентов помещалось в самом конце курса арифметики, в конце так называемых «приложений арифметики»; эта тема носила характерное название «правило процентов», что и подтверждалось содержанием её.

---

[1] Программы средней школы. Математика, 1951.

[2] Киселёв, Систематический курс арифметики, 1937, стр. 110.

Первые программы советской трудовой школы тоже уделили большое внимание процентным вычислениям и отвели им почётное место. Но эта тема была наполнена совершенно иным содержанием: все денежные и коммерческие расчёты, связанные с процентными вычислениями, полностью были исключены из этой темы; зато вся окружающая жизнь стала давать огромный задачный материал для изучения процентов, в частности, процентных отношений; поэтому и сама тема (проценты) была перенесена в другую, более широкую тему — в учение об отношениях [1].

В последних программах по арифметике для советской средней школы тема «Проценты» теперь поставлена непосредственно за учением о десятичных дробях; этим подчёркивается тесная органическая связь процентов с десятичными дробями.

Первое понятие о процентах учащиеся получают ещё в начальной школе в связи с изучением обыкновенных дробей в IV классе: «Понятие о процентах. Нахождение одного и нескольких процентов данного числа» [2]. Поэтому в V классе в течение всего учебного года надо продолжать решение задач на процентные вычисления, особенно в связи с изучением умножения и деления дробей — сначала обыкновенных, а потом и десятичных: нахождение дроби числа и процентов его, нахождение числа по известной дроби его и по данным процентам его, нахождение отношения и процентного отношения двух чисел. В конце же курса V класса вновь ставится вопрос о процентах с целью повторения и обобщения понятия процента и выработки умения решать более сложные задачи на процентные вычисления.

Понятие процента — очень простое понятие. Каждый человек — взрослый, подросток — в разговоре употребляет термин «проценты», хотя бы повторяя слышанные или вычитанные сведения из газет и журналов. Однако всем известны факты, что как только дело доходит до практического выполнения процентных вычислений или применения понятия процента к решению соответствующих задач, то учащиеся даже старших классов средней школы оказываются очень часто совершенно беспомощными. В чём причина этого?

Прежде всего следует обратить внимание на определение и истолкование самого понятия «процент». Фербер так начинает статью о процентах: «Под „процентами" понимают то вознаграждение, которое выдают за пользование денежной суммой, заимообразно взятой на определённый срок». И дальше: «r денежных единиц составляют проценты на единицу капитала в единицу времени» [3], где $r = \frac{p}{100}$ и p называется процентной таксой и обозначается $p\%$. В том же освещении определяется процент во

---

[1] **Берг, Знаменский** и др., Рабочая книга по математике для пятого года обучения, изд. 7, 1929, стр. 132.

[2] Программы начальной школы, 1951.

[3] **Фербер**, Арифметика, 1914, стр. 285.

многих иностранных учебниках арифметики: «Прибыль, получаемая со 100 франков, рублей и т. п. в год, называется процентами» [1].

Точно так же истолковывается и определяется понятие процента в некоторых старых русских учебниках, например: «Если кто-нибудь занимает деньги, то он платит за это... определённое количество рублей со 100; эта плата и показывает количество или таксу процентов» [2]. В большей части русских учебников по арифметике «процентом называется сотая часть какого-либо числа (или величины)»; в некоторых из них тотчас же добавляется мысль о том, что процентные вычисления применяются преимущественно при денежных и коммерческих операциях [3].

Таким образом, в приведённых выдержках понятие процента в явной или неявной форме связано преимущественно с денежными и коммерческими вычислениями.

В математической и справочной литературе недавнего прошлого и настоящего времени тому же термину «проценты» даются более отвлечённые определения и истолкования:

1) «Процентом или процентной таксой называют дробь, знаменатель которой 100, а числитель некоторое число... целое или дробное. Таксу обыкновенно принято изображать без знаменателя; так вместо $\frac{4}{100}$ или 0,04 пишут 4%, вместо 0,05—5%, вместо 0,045—4,5%. Такса служит мерой измерения каждой единицы величины» [4].

2) Проценты представляют собою особый вид дробей, или скорее, особый род десятичных дробей, у которых знаменатель всегда равен 100... $0{,}875 = \frac{87{,}5}{100} = 87{,}5\%$» [5].

3) «Процентом называется сотая часть. Запись 1% означает 0,01; 27% = 0,27 и т. д.» [6].

4) «Некоторые наиболее употребительные доли единицы получили особые сокращённые наименования; так, одну вторую называют половиной и т. д. Подобным же образом одну сотую долю называют процентом» [7].

5) «Процентом к а к о г о-л и б о ч и с л а называется с о т а я часть э т о г о числа» [8].

Как в первой, так и во второй группе определений и истолкований понятия и термина «проценты» имеется общее содержание: процент есть с о т а я часть... Затем начинается расхождение: в од-

[1] Ж е л е н, Элементарный курс арифметики, 1896, стр. 235; Б е р т р а н, Арифметика, 1901, стр. 209; С е р р е и К у м б е р у с, Курс арифметики, 1887, стр. 175.

[2] М а л и н и н и Б у р е н и н, Арифметика, 1900, стр. 182.

[3] К и с е л ё в, Систематический курс арифметики, изд. 15.

[4] Г л а г о л е в, Теоретическая арифметика, 1914, стр. 240.

[5] Н о р р и с и С м и т, Практическая арифметика, 1922, стр. 59.

[6] В ы г о д с к и й, Справочник по элементарной математике, 1941, стр. 68.

[7] Х и н ч и н, БСЭ, т. 47, стр. 437.

[8] К и с е л ё в. Систематический курс арифметики, 1937, стр. 131.

них определениях особо подчёркивается, что процент есть сотая часть **числа** или **величины**; в других — понятие «процент» отождествляется с понятием дроби, в частности, с понятием десятичной дроби со знаменателем 100. Это незначительное расхождение в определении понятия «процент» вызывает довольно значительные затруднения в методике преподавания этой темы. Так, в прежних учебниках арифметики, а потому и в практике школы, в употреблении было только первое определение: процент есть сотая часть числа (или величины). Этим резко подчёркивалась особая роль и особое значение процентов, отличные от роли и значения десятичных дробей. А это, в свою очередь, приводило к необходимости создавать особые приёмы и правила для решения задач на проценты. Поэтому во многих прежних учебниках арифметики, в школьных задачниках и в программах по арифметике самая тема озаглавливалась так: «Правило процентов»; она изучалась в самом конце курса арифметики после пропорций.

С другой стороны, если понятие «процент» отождествляется с понятием десятичной дроби, знаменатель которой есть 100, то всё учение о десятичных дробях переносится и на проценты, начиная с особого способа записи их. Тогда так называемые «задачи на проценты» теряют своё особое значение, и учащиеся только повторяют давно и хорошо известный им материал в несколько иной форме, но имеющий то же самое содержание. При таком взгляде на проценты нет никакой надобности в особых правилах при решении соответствующих задач.

Понятие процента, как и первоначальное понятие всякой дроби, несомненно имеет конкретное истолкование: 35% или 0,35 некоторой величины, как и $\frac{5}{8}$ некоторой величины; так как каждая величина имеет числовое значение, или, как говорят, она измеряется некоторым числом, то понятие процента и дроби переносится и на числа: 35% некоторого числа и $\frac{5}{8}$ некоторого числа. В арифметике дробей последнее выражение часто заменяется таким выражением: «дробь $\left(\frac{5}{8}\right)$ некоторого числа». Нет никаких возражений к тому, чтобы и первое выражение заменить таким же выражением: «дробь (0,35) некоторого числа или 35% некоторого числа». В этом можно видеть далеко идущую аналогию между понятием процента и понятием десятичной дроби со знаменателем 100.

Эта аналогия даёт возможность при решении практических задач рассматривать проценты вообще как десятичные дроби со знаменателем 100, а в некоторых случаях — даже как простейшие обыкновенные дроби, что значительно упрощает и облегчает все процентные вычисления (например, 10%, или 0,1; 20%, или $\frac{1}{5}$, 25%, или $\frac{1}{4}$ и т. п.) и что обычно делается в повседневной практической жизни. Та же аналогия значительно упрощает вопрос о методике преподавания процентов, так как изучение их сводится к повторению некоторых основных понятий арифметики десятичных дробей. Этим объясняется тот факт, что тема «Проценты» в программе по арифметике стоит теперь сразу же после изучения десятичных дробей, а не в конце курса арифметики.

Необходимо иметь в виду, что обособление процентов в курсе арифметики и отсутствие указаний на аналогию между процентами и десятичными дробями служит одной из причин, затрудняющих изучение их в школе и отчётливое понимание их учащимися.

Вторая причина заключается в том, что в существующих задачниках по арифметике почти все задачи на процентные вычисления помещаются в конце книги под соответствующим заглавием. Поэтому учащиеся пятых классов в течение всего учебного года не решают задач на процентные вычисления до изучения темы «проценты». В более старших классах очень редко «попадаются» задачи в курсе алгебры на составление уравнений, в которых имеются данные, выраженные в процентах. И только в IX классе на короткое время вновь возвращаются к этому понятию в связи с вычислением сложных процентов. Затем к этому вопросу больше уже не возвращаются.

Чтобы заставить учащихся сродниться с понятием процента и выработать прочные навыки процентных вычислений, необходимо культивировать задачи на проценты на протяжении всего курса *изучения математики, начиная* с IV *класса начальной* школы.

В V и VI классах задачи на процентные вычисления должны занять прочное место в ряде других арифметических задач. Это так называемые сложные задачи на процентные вычисления, которые решаются преимущественно письменно. Они должны в достаточном количестве входить и в задачи по алгебре на составление уравнений во всех классах.

Кроме того, задачи на процентные вычисления должны занять прочное место среди задач, которые решаются устно, как и задачи на определение части числа, указанной дробью, и всего числа по известной дроби его. К таким задачам полезно возвращаться время от времени и в старших классах.

II. ВЫЯСНЕНИЕ ПОНЯТИЯ О ПРОЦЕНТАХ

Простейшие представления о процентах учащиеся получают ещё в начальной школе. Эти знания учащихся и имеющиеся у них навыки надо использовать при систематическом изучении процентов.

В короткой вступительной беседе преподаватель подчёркивает, что ради упрощения вычислений из множества всех обыкновенных дробей выделяются десятичные дроби, которые записываются по общей десятичной нумерации с помощью запятой; все действия над ними производятся, как и соответствующие действия над целыми числами, что вносит значительные упрощения при выполнении этих действий (приводятся примеры).

Продолжая беседу, преподаватель говорит, что ради тех же целей, т. е. чтобы упростить использование некоторых видов десятичных дробей, которые чаще других встречаются в практике повседневной жизни, были выделены десятичные дроби со знаменателем 100 — дроби, которые можно назвать **сотенными**. Житейская практика показала, что именно эти дроби со знаменателем 100 наиболее удобны из всех десятичных дробей (тогда как десятые доли ещё довольно крупные доли, тысячные, десятитысячные и т. п. доли уж очень мелки): сотые доли рубля — копейки, сотые доли франка — сантимы, сотые доли метра — сантиметры, сотые доли гектара — ары и т п.

Эти десятичные дроби со знаменателем 100 условились записывать ещё проще, чем десятичные дроби: как целые числа с особым значком справа (%). Они называются **процентами**. Это слово латинского происхождения: pro centum, что можно перевести на русский язык так: за сто, со ста, на сто и т. п.

Эти доли оказались практически столь удобными, что их стали применять при расчётах, связанных с самыми разнообразными величинами: учёт численного состава населения, учёт выработки продукции и т. п.

Примерный ход урока.

Преподаватель предлагает учащимся *записать в столбик на классной доске и в тетрадях* несколько десятичных дробей со знаменателем 100:

$0{,}03 = 3\%$
$\frac{17}{100} = 17\%$
$0{,}87 = 87\%$
$1{,}53 = 153\%$
$25{,}89 = 2589\%$
и т. д.

На вопросы преподавателя учащиеся отвечают:

1) *сотая доля числа называется иначе процентом;*

2) сотые доли, или проценты, записываются в виде целых чисел с особым значком.

Затем все эти дроби записываются в виде процентов, и составляется правило: «надо перенести запятую вправо на два десятичных знака и справа поставить особый значок». При этом преподаватель может рассказать учащимся происхождение этого значка (pro centum, pro cento, p cento, cento, cto, %).

Во вторую колонку учащиеся записывают десятичные дроби со знаменателем 10, например:

$0{,}3 = 0{,}30 = 30\%$
$3{,}2 = 3{,}20 = 320\%$
$24{,}7 = 24{,}70 = 2470\%$

Как их записать в виде процентов? Что это значит? Учащиеся без труда выполнят эту работу и убедятся в сохранении предыдущего правила.

В третью группу включаются целые числа, которые записываются в третью колонку. Учащиеся записывают их в виде процентов, например: $2 = 2{,}00 = 200\%$, $37 = 37{,}00 = 3\,700\%$ и т. п.

Следующую, четвёртую группу составляют десятичные дроби со знаменателями 1 000, 10 000 и т. п. Чтобы *записать их в виде процентов надо выделить в них сотые доли* перенесением запятой вправо на два десятичных знака: $0{,}273 = 27{,}3\%$; $16{,}036 = 1603{,}6\%$ и т п.

В последнюю очередь даются такие обыкновенные дроби, которые обращаются в конечные или в бесконечные десятичные дроби, например:

$\frac{3}{5} = 0{,}6 = 60\%$ $\qquad$ $\frac{5}{6} = 0{,}8333\ldots \approx 0{,}83 = 83\%$

$1\frac{3}{4} = 1{,}75 = 175\%$ $\qquad$ $\frac{5}{11} = 0{,}4545\ldots \approx 0{,}455 = 45{,}5\%$

$\frac{9}{20} = 0{,}45 = 45\%$ $\qquad$ . . . .

. . . . $\qquad$ . . . .

. . . . $\qquad$ и $3{,}075483 \approx 3{,}075 = 307{,}5\%$ и т. п.

По окончании этой работы проводится общий обзор её и повторяются такие сведения, как определение процентов, запись их, запись разных чисел в виде процентов.

После этого учащиеся переходят к решению обратных задач: к записи процентов в виде дробей — десятичных или обыкновенных: 1%, 9%, 60%, 151% и т. д. Учащиеся решают эти задачи, сопровождая их объяснениями:

1% есть одна сотая доля, т. е. 1% = 0,01;

10% есть десять сотых, т. е. 10% = 0,10 = 0,1 и т. д.

Затем они формулируют правило: «надо запятую перенести влево на два знака и опустить значок (%)».

Помимо письменных упражнений на каждом уроке надо вводить устный счёт — решение прямой и обратной задачи (выражение дроби в процентах и процентов в виде дроби). В устном счёте надо добиться того, чтобы учащиеся совершенно свободно переводили наиболее употребительные дроби (десятичные и обыкновенные) в проценты и наоборот.

Вот примерная таблица переводов (полезно её вывешивать около доски на стену):

$\frac{1}{2} = 0{,}50 = 50\%$	$\frac{3}{4} = 0{,}75 = 75\%$
$\frac{1}{4} = 0{,}25 = 25\%$	$\frac{3}{8} = 0{,}375 = 37{,}5\%$
$\frac{1}{8} = 0{,}125 = 12{,}5\%$	$\frac{5}{8} = 0{,}625 = 62{,}5\%$
$\frac{1}{5} = 0{,}20 = 20\%$	$\frac{2}{5} = 0{,}40 = 40\%$
$\frac{1}{25} = 0{,}04 = 4\%$	$\frac{3}{5} = 0{,}60 = 60\%$
	$\frac{4}{5} = 0{,}80 = 80\%$

III. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА ПРОЦЕНТЫ

Обычно рассматривают три основных типа задач на проценты: 1) нахождение процентов данного числа, 2) нахождение числа по известным процентам его и 3) нахождение процентного отношения одного числа к другому. Решение каждого типа этих задач хорошо известно учащимся из курса дробей — обыкновенных и десятичных. Новым для них является только словесная формулировка задач (например, «найти 12 процентов от 54» вместо «найти 0,12 от 54»).

Порядок изучения решения этих задач не имеет существенного значения: можно начинать решение их с любого типа. Обычно их располагают в том порядке, какой был указан вначале.

1. Решение задач первого типа (нахождение процентов данного числа)

Сначала учащиеся устно решают задачи с конкретным содержанием на определение процентов данных чисел, а потом отвлечённые числовые примеры. Решение выполняется двумя действиями; данные числа можно записывать на классной доске.

Задача. Сберкасса выплачивает 3% годовых по бессрочным вкладам и 5% по срочным. Сколько выплатила касса по бессрочным вкладам в год: за 700 руб.? за 400 руб.? за 1 200 руб.? и т. п. и по срочным вкладам: за 4 000 руб.? за 3 600 руб.? и т. д.»

Учащиеся устно решают задачи первого варианта:

1) 3% от 700 руб.?	1%, или 0,01, от 700 руб. составляет 7 руб. 3%, » 0,03, » 700 руб. » 21 руб.
2) 5% от 4 000 руб.?	Никаких записей, кроме условия задачи, не делается

Так же учащиеся могут решать задачи и второго варианта.

Преподаватель указывает им и другие способы: 1) 5% составляют $^1/_{20}$, а потому 4 000 надо разделить на 20; 2) 5% составляют половину 10%, а 10%, или 0,1, от 4 000 руб. составляют 400 руб., а 5%—200 руб.

Вычислительные навыки приобретаются, главным образом, в процессе решения примеров. Помимо общего приёма решения подобных задач—деление на 100 и умножение на число процентов — надо всемерно развивать сообразительность учащихся, давая им в порядке устного счёта задачи на нахождение 10%, 20%, 25%, $33\frac{1}{3}$%, 50% не общим приёмом, а делением данного числа соответственно на 10, на 5, на 4, на 3 и на 2.

В краткой беседе, посвящённой обзору решения этих задач, учащиеся формулируют общий приём устного решения этих задач — деление на 100 (зачем?) и умножение на число процентов; припоминают, что так решаются задачи на нахождение части или дроби данного числа; следовательно, нахождение процентов от данного числа есть задача нахождения дроби данного числа, выраженной в процентах, т. е. в сотых долях.

После такой подготовки учащиеся переходят к письменному решению задач того же типа.

Учащиеся решают задачу с конкретным содержанием, в которой требуется найти 36% от 1 240. Они записывают условие задачи (36% от 1 240), излагают план устного решения её — нахождение одного процента, потом 36%, и на основании этого определяют тип задачи — нахождение дроби числа, выраженной в процентах, т. е. в сотых долях. А решение таких задач записывается одним действием — умножением данного числа на дробь. Поэтому решение этой задачи можно записать так:

$$1240 \cdot 0{,}36 = 446{,}4, \text{ где } 0{,}36 = 36\%.$$

$$\begin{array}{r} 7740 \\ 3720 \\ \hline 446{,}40 \end{array}$$

Учащиеся решают достаточное количество таких задач. Потом в заключительной беседе можно ввести запись решения этих задач в общем виде, т. е. с помощью букв. С этой целью учащиеся анализируют условие всех решённых задач и выясняют, что во всех задачах даётся некоторое число (a) и требуется найти от него несколько процентов (p%), что можно записать так:

$p\%$ от a?

$p\% = \frac{p}{100}$

$a \cdot \frac{p}{100} = \frac{a \cdot p}{100}$

Решение задачи записывается умножением. Полученная формула отчётливо показывает ход устного решения этих задач (деление данного числа на 100 и умножение на p, т. е. на число процентов). Подставляя вместо a и p числовые значения из решённых задач, учащиеся убеждаются в справедливости этой буквенной записи. Потом они могут в ту же формулу вставлять различные числовые значения и производить указанные вычисления.

2. Решение задач второго типа (нахождение числа по процентам)

Ко второму типу задач на проценты относятся те, в которых требуется найти число по его дроби, выраженной в процентах. И эту работу лучше начинать с устного решения задач, подбирая в них числа так, чтобы учащиеся могли легко, свободно и быстро находить ответы. Например: найти число, если известно, что:

1) 1% его равен: 17; 37; 84,5; 96,75 и т. п.
2) 2% его равны: 12; 25; 120; 1 000 и т. п.
3) 3% его равны: 12; 27; 63; 1 500 и т. п.

Все эти задачи можно наполнить конкретным содержанием.

Как и раньше, данные числа можно записывать на классной доске, чтобы не отягощать память учащихся; искомое число следует обозначать буквой x. Например:

6% x — 18 *кг*
1% x — 3 *кг*
100% x — 300 *кг*

Всё решение выполняется устно с таким объяснением: а) 6% искомого числа, т. е. 0,06 его, составляют 18 *кг*; б) 1% того же числа, или 0,01 часть его, составляет 3 *кг*; в) всё искомое число составляет 100% или сто сотых, т. е. целую единицу, и равно 300 *кг*.

Когда учащиеся поймут, в чём заключается сущность этих задач и овладеют техникой устного решения их, следует сформулировать основные выводы:

1) в каждой задаче требуется найти искомое число, зная некоторую часть его, выраженную в процентах;

2) каждая задача решается устно двумя действиями: делением данного числа на число процентов (нахождение одного процента) и умножением полученного результата на 100 (нахождение ста процентов, т. е. всего искомого числа);

3) таким же образом решаются задачи на нахождение числа по его части, заданной дробью;

4) следовательно, нахождение числа по нескольким его процентам есть задача нахождения всего числа по его дроби, выраженной в процентах, т. е. в сотых долях; решение записывается делением данного числа на дробь.

После этих выводов учащиеся сначала опять решают устно такие же задачи, попутно проверяют сделанные выводы и закрепляют их.

В число последних необходимо включить и те задачи, в которых требуется найти число, зная 50% его, $33\frac{1}{3}$%, 25%, 20%, 10% и т. п.

Письменное оформление решения задач данного типа вызывается той же причиной, которая была указана при изучении письменного решения задач первого типа.

Даётся такая задача: «В классе отсутствовало 4 человека, что составляет 12,5% всех учащихся этого класса. Сколько всего учащихся в классе?»

Чтобы схематически записать условие задачи, учащиеся должны рассуждением установить, что: 1) в задаче требуется определить число учащихся в классе; 2) это искомое число можно пока обозначить буквой x; 3) тогда по условию задачи известно, что 12,5% x составляют 4.

Решение этой задачи сопровождается таким объяснением: а) по условию задачи известно, что 12,5% искомого числа x равны 4, т. е. известна часть искомого числа x, выраженная в процентах (12,5%) или в сотых долях; б) искомое число по известной части его находится действием деления данного числа на дробь; в) для решения этой задачи надо данное число 4 разделить на дробь, выраженную в процентах:

$$4:0,125=4000:125=32, \text{ где } 0,125=12,5\%$$
$$x=32 \text{ (в классе 32 ученика).}$$

После решения достаточного числа задач надо сделать обзор их и сформулировать выводы.

Учащиеся опять записывают условие задачи с помощью букв, а потом и решение её:

Условие.	Решение.
Найти x, если $p\%$ x составляют a, $p\% = \frac{p}{100}$	$a:\frac{p}{100}=\frac{a\cdot 100}{p}$

Учащиеся проверяют справедливость этой формулы, подставляя вместо a и p числовые значения из любой решённой задачи; затем они составляют новые задачи, давая a и p различные числовые значения. Наконец, учащиеся сравнивают последнюю формулу с первой, указывают разницу в ходе решения и объясняют смысл той и другой формулы.

Когда учащиеся в достаточной мере овладеют решением задач второго типа, надо перейти к решению сложных задач, которые разбиваются на простые задачи первого и второго типов.

Например: «Вес сливок, полученных из молока, составляет 21% веса молока; масло, полученное из сливок, составляет 23% веса сливок. Сколько нужно взять молока (с точностью до 1 *кг*), чтобы получить 7 *кг* масла?»

Схематическая запись условия задачи:

Вес сливок — 21% веса молока
Вес масла — 23% » сливок
x *кг* молока — 7 *кг* масла.

Решение задачи состоит в том, чтобы сначала узнать, сколько процентов составляет вес полученного масла от веса молока, зная, что вес масла составляет 23% веса сливок, а последний вес составляет 21% веса молока; эта задача первого типа — нахождение процентов (23%) от числа (от 21%):

$$0{,}21\cdot0{,}23=0{,}0483=4{,}83\%,\ \text{где}\ 0{,}21=21\%\ \text{и}\ 0{,}23=23\%.$$

Вторая задача, которая выделяется из данной, будет сформулирована так: сколько надо взять молока, чтобы получить 7 *кг* масла, зная, что вес полученного масла составляет 4,83% веса взятого молока; а это задача второго типа — нахождение числа (веса молока) по известной его части, выраженной в процентах, т. е. 4,83% x составляют 7 *кг*, или $0{,}0483\,x=7$; $x=7:0{,}0483=\approx144,\dots,\approx145$.

$$x=7:0{,}0483=70\,000:483\approx144,\dots\approx145.$$

$$\begin{array}{r}
483\\
\hline
2170\\
1932\\
\hline
2380\\
1932\\
\hline
448
\end{array}$$

$x\approx145$ *кг* (надо взять 145 *кг* молока, чтобы получить 7 *кг* масла).

3. Решение задач третьего типа (нахождение процентных отношений)

К этой группе задач относятся те из них, в которых требуется найти процентное отношение двух чисел или двух величин, измеряемых данными числами.

Кратные отношения впервые были изучены в связи с делением обыкновенных дробей.

После окончания изучения десятичных дробей вновь следует вернуться к более подробному повторному обзору кратных отношений.

Вся эта работа должна строиться на решении простых текстовых задач и числовых примеров с соответствующим подбором чисел — целые числа, обыкновенные и десятичные дроби.

Примеры.

1) Сократить отношение: 62,4 : 40; 7,8 : 5,2.

2) Заменить отношение дробных чисел отношением целых чисел:

$$7{,}5:1{,}84;\quad 750:1{,}84;\quad 3{,}75:9{,}2.$$

Естественным продолжением этой повторной работы будет решение задач на нахождение процентных отношений. Учащиеся сначала решают задачи с конкретным или отвлечённым содержанием на нахождение отношений, которые записываются теперь в виде десятичных дробей — точных или приближённых с заданной точностью.

1) Найти отношения с точностью до 0,1:

$8:21=0{,}38\ldots\approx0{,}4.$ $\qquad$ $1{,}3:5{,}2=13:52=0{,}25\approx0{,}2;\ (\approx0{,}3).$

$0{,}7:9{,}9=7:9=0{,}77\ldots\approx0{,}8.$ $\qquad$ $1{,}45:0{,}9=145:90=1{,}61\ldots\approx1{,}6.$

2) Найти отношения с точностью до 0,01:

$1632:158 = 10,329\ldots \approx 10,33.$ $\quad 3,68:2,19 = 368:219 = 1,680\ldots \approx 1,68.$

```
1632:158            368:219
 520                219
  460               1490
 1440               1314
                     1760
                     1752
                        80
```

3) Найти отношения:

3 *дм*$:2$ *см*$=30:2=15;$
$1,2$ *км*$:8$ *м*$=1\,200:8=150;$
$0,5$ *кг*$:20$ *г*$=500:20=25$ и т. п.

Затем преподаватель предлагает учащимся задачи того же типа, но в условии указывается новое требование: найти отношение одного числа к другому и выразить его в процентах (или иначе: найти процентное отношение одного числа к другому).

Сначала в порядке устного счёта учащиеся решают задачи и постепенно осваиваются с понятием «процентное отношение».

1) Найти отношение одного данного числа к другому и выразить его в процентах:

$2\frac{1}{2}$ и 5
3 и 15
7 и 28
и т. п.

Прежде чем решать первую задачу, преподаватель спрашивает: 1) «Что значит найти отношение одного числа к другому? 2) Каким действием находится отношение? 3) Что значит выразить отношение в процентах? (Значит, выразить его в сотых долях.)» Учащиеся решают первый пример: $2\frac{1}{2}:5=0,50=50\%$ и $5:2\frac{1}{2}=2,00=200\%$; затем второй, третий и т. д. Эти решения выполняются или только устно с объяснением, или тоже устно, но с последующей записью решения некоторых задач, чтобы создать зрительное представление нового понятия — п р о ц е н т н о г о отношения.

2) Сколько процентов одно число составляет от другого:

150 от 600
150 от 200
24 от 60
80 *кг* от 400 *кг*
и т. п.

Перед решением первой задачи преподаватель опять выясняет сначала смысл задачи: 1) узнать, сколько сотых долей одно число составляет от другого; 2) задача решается делением первого числа на второе; 3) следовательно, это задача тоже на нахождение отношения, но его надо выразить в сотых долях, иначе сказать — в процентах

Учащиеся решают эти задачи сначала устно, а потом некоторые из них записывают:

$$150:600=\frac{1}{4}=0,25=25\%;$$
$$150:200=\frac{3}{4}=0,75=75\%;$$
$$24:\ 60=\frac{2}{5}=0,4\ =40\%;$$
$$80\text{ кг}:400\text{ кг}=1:5=0,2=20\%$$

и т. п.

3) Какой процент одно число составляет от другого (5 от 40; 7 руб. от 21 руб. и т. п.)?

Эта задача повторяет предыдущую задачу; учащиеся знакомятся только с новой формулировкой её, а решение выполняется, как и раньше: 1) 5 составляет

$\frac{1}{8}$ от 40, или 0,125 от 40, или 12,5% от 40; 2) 7 руб. составляют $\frac{1}{3}$ от 21 руб., т. е. 0,333..., или 33,3% (с точностью до 0,1%), что можно записать так: 7 руб. : 21 руб. $= \frac{1}{3} = 0{,}333\ldots \approx 33{,}3\%$.

В заключительной беседе учащиеся отмечают, что во всех задачах трёх последних групп надо было найти отношение одного числа к другому и выразить его в процентах, т. е. в сотых долях. Преподаватель сообщает им, что во всех этих задачах требовалось найти процентное отношение одного числа к другому, т. е. найти отношение в процентах или в сотых долях.

После этого переходят к письменному решению задач на нахождение процентных отношений. Все эти задачи должны отличаться от предыдущих только числовым материалом (более громоздкие числа, осложняющие вычисления). Текст их, как и в предыдущих задачах, формулируется по-разному, чтобы приучить учащихся видеть одно и то же арифметическое содержание в разной словесной формулировке его: а) найти процентное отношение двух чисел; б) какой процент одно число составляет от другого? в) как относится одно число к другому?

Письменное решение этих задач состоит в записи деления одного числа на другое с дополнительным требованием представить частное — отношение сначала в виде десятичной дроби, а потом в виде процентов.

Примеры.

1) $38{,}74 : 905\frac{1}{4} = 38{,}74 : 905{,}25 = 3\,874 : 90\,525 = 0{,}042\ldots \approx 0{,}04 = 4\%$ (с точностью до 1%).

$$\begin{array}{r} 387\,400 \\ 362\,100 \\ \hline 253\,000 \\ 181\,050 \\ \hline 71\,950 \end{array}$$

2) $160 : 10\frac{4}{5} = 160 : 10{,}8 = 1\,600 : 108 = 14{,}8148\ldots \approx 14{,}815 = 1\,481{,}5\%$ (с точностью до 0,1%).

$$\begin{array}{r} 520 \\ \hline 880 \\ \hline 160 \\ \hline 520 \\ \hline 880 \\ \hline 16 \end{array}$$

Завершается вся эта работа решением сложных текстовых задач в два, три и более действий, в которые могут входить простые задачи на процентные вычисления всех трёх типов как составные части.

Например: «В семье работают отец, мать и сын. Сын зарабатывает 150 рублей, что составляет 120% заработка матери и 75% заработка отца. Какой процент общесемейного заработка даёт сын?» [1].

[1] Чекмарёв и Филичев, Сборник арифметических задач, 1939, № 2799.

В эту задачу входят две простые задачи на проценты (нахождение числа по его проценту) и одна задача на нахождение процентного отношения.

Условие задачи.

150 руб. составляют 120% заработка матери.
150 руб. » 75% » отца.
150 руб. » x% » всей семьи.

Решение.

1) $150:1{,}20=1500:12=125$ где $1{,}20=120\%$.
125 руб.—заработок матери.

2) $150:0{,}75=15\,000:75=200$, где $0{,}75=75\%$.
200 руб.—заработок отца

3) $150+125+200=475$.
475 руб.—заработок семьи.

4) $150:475=0{,}3157\ldots\approx 31{,}6\%$ (с точностью до 0,1%).
31,6% общесемейного заработка составляет заработок сына.

$$\begin{array}{r} 1500 \\ \underline{1425} \\ 750 \\ \underline{475} \\ 2750 \\ \underline{2375} \\ 3750 \\ \underline{3325} \\ 425 \end{array}$$

В заключительной беседе вводится буквенная запись задач третьего типа и решения их с последующими упражнениями на подстановку числовых значений вместо букв a и b и выполнение вычислений: $a:b=q\%$.

Какое конкретное содержание может входить в задачи на проценты?

В связи с развитием сети сберегательных касс, кооперативных объединений (промысловых, потребительских, жилищностроительных), выпуском займов — процентных и выигрышных — процентные вычисления в применении к денежным операциям должны входить в содержание задач курса арифметики.

В настоящее время эти задачи должны занимать видное место в советских задачниках. Богатый материал на процентные вычисления дают сводки, помещаемые в ежедневных газетах, отчёты в периодической литературе о ходе социалистического строительства в самых разнообразных областях хозяйственной жизни всей страны, той или иной отдельной республики, области или района и т. п.

В заключение следует обратить внимание на некоторые задачи, которые при беглом прочтении их кажутся учащимся очень простыми. «Как изменится время выполнения плана работы, если производительность труда рабочих повысится на 25%?»

Всем преподавателям известны «моментальные» ответы учащихся на вопрос этой задачи: «Время выполнения плана сократится на 25%». Только с помощью «приведения к нелепости» удаётся заставить учащихся задуматься над решением этой задачи, задавая им последовательно такие вопросы: 1) как изменится время выполнения плана, если производительность труда рабочих возрастёт на 50%? 2) на 75%? 3) на 100%? 4) на 200%? и т. д.

Истолкование ответов, аналогичных первому, убедит учащихся **в том, что они дают** всё время неправильные ответы.

Решение этой задачи, как и целого ряда подобных ей, следует отнести к тому времени, когда будет проработано изучение пропорциональных величин и решение соответствующих задач методом приведения к единице или методом пропорций.

Производительность труда рабочих:	Время выполнения плана:	Решение.
100%	100%	$x:100=100:125;$
125%	x	$x=\frac{100\cdot 100}{125}.$
		$x=80;\quad 80\%.$

Ответ. Время выполнения плана сократилось до 80%, следовательно, уменьшилось на 20%.

IV. *ПРОМИЛЛЕ И ВЫЧИСЛЕНИЯ С ПРОМИЛЛЕ*

Изучение процентов и процентных вычислений в курсе арифметики будет неполным, если не познакомить учащихся с понятием промилле и с вычислениями их. Это понятие хотя и не имеет такого широкого применения в повседневной практике, как проценты, однако в промышленности и в статистике вычисления в промилле имеют место (пробы сплавов, крепость растворов, статистика рождаемости и смертности и т. п.). Ознакомление учащихся с промилле имеет двоякую цель: 1) научить их решать задачи, в которые входят промилле, и 2) повторить и прочнее закрепить само понятие процента и сущность процентных вычислений.

План этой работы тот же, что был принят при изучении основной темы о процентах: введение понятия «промилле», запись десятичных дробей и процентов в промилле и обратная задача, три основных типа задач на вычисления в промилле.

В беседе, посвящённой этому вопросу, преподаватель заставляет учащихся припомнить те причины практического характера, которые заставили ввести проценты. Затем он приводит несколько примеров-задач на составление сплавов, содержащих те или другие редкие и ценные металлы — золото, серебро, платину, на составление слабых растворов, содержащих сильно действующие вещества, а также на статистическую обработку некоторых материалов (например, число рождений или смертей в год на тысячу жителей и др.). Для характеристики получаемых при этом результатов проценты, или сотые доли, являются очень крупными долями, вследствие чего приходится часто опять применять десятые доли процента, т. е. писать проценты в виде десятичных дробей. Чтобы упростить подобные записи и по возможности избежать в этих случаях появления дробей, в употребление вводятся десятичные дроби со знаменателями 1 000, которые пишут, как и проценты, в виде целых чисел или дробей с постановкой справа особого значка ($^0/_{00}$) и называют их промилле (pro mille — на тысячу) или промилль.

После этой беседы преподаватель предлагает учащимся записать в столбик ряд десятичных дробей со знаменателем 1 000, а потом каждую из них записать в виде промилле, т. е. без знаменателя (например: $0,375=375^0/_{00}$, $0,038=38^0/_{00}$, $0,009=9^0/_{00}$, $2,025=2025^0/_{00}$ и т. д.). Учащиеся составляют правило (надо перенести запятую вправо на три десятичных знака и справа поставить знак $^0/_{00}$) и применяют его к решению следующих задач:

а) $0,24=0,240=240‰$;
$3,02=3,02=3020‰$;

б) $0,8=0,800=800‰$;
$1,3=1,300=1300‰$.

в) $2=2,000=2000‰$.

г) $\frac{2}{5}=0,4=0,400=400^0/_{00}$.

д) $\frac{5}{6}=0,8333\ldots\approx 0,833=833^0/_{00}$.

е) $23\%=0,23=0,230=230‰$;
$8,2\%=0,082=82^0/_{00}$;
$0,54\%=0,0054=5,4‰$.

Затем они решают обратные задачи—запись промилле в виде дроби (например:

$920‰=0,920=\frac{92}{100}=\frac{23}{25}$, $750‰=0,750=\frac{75}{100}=\frac{3}{4}$ и т. п.)

После этого можно приступить к решению основных задач на вычисление: 1) нахождение промилле от данного числа; 2) нахождение числа по его промилле; 3) нахождение отношения в промилле. Решение задач перечисленных типов ничем не отличается от решения подобных задач с процентами.

Решение каждого типа этих задач надо начинать с устных вычислений. После краткого анализа этих решений учащиеся переходят к письменному решению соответствующих задач.

1-й тип.

Задача 1 «В городе 60 000 жителей. Ежегодно умирает $60^0/_{00}$. Сколько человек умирает в год?»

60 000 чел. — 1 000‰ $\quad$ $1‰=0,001$ составляют 60 чел.
x » — 6‰. $\quad$ $6‰=0,006$ » $60\cdot 6=360$ чел.

Задача 2. «Слиток золота 560-й пробы весит 2,4 *кг*. Сколько в нём чистого золота?»

2,4 *кг* — 1 000‰ $\quad$ $2,4\cdot 0,560=1,344$ (1,344 *кг* чистого золота).
x — $560^0/_{00}$

$$\begin{array}{r} 144 \\ 120 \\ \hline 13440 \end{array}$$

Объяснение. Проба выражается в промилле, т. е. $560‰=0{,}560$; чистое золото в слитке составляет $560‰$, или $0{,}560$ веса слитка; вес его можно найти умножением.

2-й тип.

Задача 3. Найти число, если $3‰$ его составляют 33? $8‰$ составляют 24? и т. д.»

$3‰ x — 33.$
$3‰ x$, или $0{,}003x$, составляют 33.
$1‰ x$ » $0{,}001x$ » $33:3=11$.
$1\,000‰ x$ » x » $11\cdot 1\,000=11\,000$.

Задача 4[1]: «В 1905 г. из всего состава лиц, зачисленных на военную службу в России, было $420‰$ неграмотных, или 167 508 человек. Сколько было зачисленно всего на военную службу в 1905 г.?»
x — общее число зачисленных в армию.
$420‰\, x$ — 167 508 чел. неграмотных.

Объяснение. $420‰\, x$, или $0{,}420\, x$, составляют 167 508 чел.; чтобы найти искомое число x, надо 167 508 разделить на 0,420:

$$167\,508:0{,}420=16\,750\,800:42\approx 398\,828\approx 398\,829.$$

```
16 750 800 : 42
126
 415
 378
  370
  336
   348
   336
    120
     84
    360
    336
     24
```

Ответ: 398 829 человек было зачислено в армию.

3-й тип.

Задача 5. «Сколько промилле составляет число 12 от 48? 5 от 125? и т. д.»

$$12:48=\frac{1}{4}=0{,}250=250‰;$$

$$5:125=\frac{1}{25}=0{,}040=40‰ \text{ и т. д.}$$

Задача 6. «Определить пробу серебряного слитка в промилле, если известно, что чистого серебра в него входит 2 688 *г*, а лигатуры 512 *г*».

$2688+512=3200$ (3200 *г* весит слиток).
$2688:3200=0{,}840=840‰$.

```
26880
25600
 12800
 12800
     0
```

Ответ. Проба слитка 0,840 или $840‰$.

[1] Народная энциклопедия, т. X, изд. 1910, стр. 125.

ГЛАВА VII

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ, СОДЕРЖАЩИХ ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

I. ОБ ИЗУЧЕНИИ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОЙ ЗАВИСИМОСТИ В КУРСЕ АРИФМЕТИКИ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

1. Место темы в программе по арифметике

В учебной и методической литературе по арифметике по-разному решался и до сих пор решается вопрос о том, в какой последовательности надо вести изучение двух тем, стоящих в программе арифметики, — пропорции и пропорциональные величины. В программах арифметики для русской дореволюционной школы и в огромном большинстве учебников той же эпохи был принят такой порядок: сначала стояло изучение отношений, потом пропорции и, наконец, решение задач, содержащих пропорциональные величины на «правила»: тройное (простое и сложное), процентов (с учётом векселей), цепное, товарищества, смешения (двух родов) и т. п. В начале XX в. под влиянием «реформистского движения» на первый план было выдвинуто требование о том, чтобы весь курс элементарной математики в средней школе был пронизан одной и той же идеей — идеей функциональной зависимости.

Пропорциональная зависимость между двумя переменными величинами есть простейший вид функциональной зависимости, которая имеет место в огромном большинстве задач, решаемых в начальной школе, начиная с I класса, например:

«2 *кг* сахару стоят 12 руб. Сколько стоят 3 *кг* сахару?»

При решении подобных задач даже во II, а затем и в более старших классах преподаватель постепенно обращает внимание учащихся, во-первых, на то, что в этих задачах всегда даны две величины, например, количество товара и стоимость его, во-вторых, если по условию задачи количество товара увеличилось в несколько раз, то и стоимость его тоже должна увеличиться во столько же раз, и, в-третьих, решение этих задач всегда начинается с определения единичного значения одной из входящих величин.

Таким образом, учащиеся *постепенно накапливают запас* представлений о таких величинах, которые связаны между собой определённой зависимостью: с изменением одной из них в несколько раз и другая изменяется во столько же раз.

Эти задачи в начальной *школе решаются приведением* к единице, т. е. точно так же, как они решаются и в практической повседневной жизни (двумя действиями).

В круг этих задач в начальной школе входят задачи на тройное правило и на пропорциональное деление (так называемые задачи на части).

Изучение специальной темы о пропорциональных величинах в самом конце курса арифметики имеет целью во-первых, систематизировать весь накопившийся за предыдущие годы материал, связанный с понятием о пропорциональных величинах, во-вторых, ввести чёткое истолкование понятия пропорциональной зависимости величин (прямая и обратная пропорциональность), в-третьих, ознакомить учащихся с новой формой записи решения простых и сложных задач, содержащих пропорциональные величины. Круг задач остаётся прежний. Но структура их усложняется: вводятся задачи на так называемое сложное тройное правило и более сложные задачи на пропорциональное деление (например, деление данного числа пропорционально не одному, а двум рядам данных чисел).

Какими способами следует решать эти задачи теперь при изучении всей темы в целом?

Применение пропорций при решении этих задач совсем не является обязательным. Больше того, решение задач на сложное тройное правило с помощью пропорций становится громоздким и утомительным, тогда как те же задачи очень легко и просто решаются приведением к единице. Кроме того, способ пропорций, как правило, требует письменного оформления решения задачи — запись самой пропорции и затем решение её, а приведение к единице во многих случаях допускает устное решение.

В то же время введение числовых пропорций в курс арифметики чаще всего мотивируется тем, что пропорции применяются при решении задач, содержащих пропорциональные величины — задачи на «тройное правило», на «правило процентов». Конечно, эти задачи можно решать с помощью пропорций, но вообще в этом нет никакой настоятельной необходимости: практика обучения свидетельствует о том, что все основные типы задач, относящиеся к только что перечисленным «правилам», в большом количестве решаются ещё задолго до изучения пропорций и без всякого применения последних. Есть, конечно, небольшой круг задач, которые очень просто решаются с помощью пропорций и значительно труднее — без применения последних, но таких задач очень мало. Поэтому применение числовых пропорций, как особого способа решения задач, содержащих пропорциональные величины, не имеет большого практического значения в арифметике, и особенно усиленно культивировать этот способ при решении арифметических задач нет необходимости.

В советской трудовой школе были отдельные попытки исключить числовые пропорции из курса арифметики. Так, в объяснительной записке к программе по математике на 1921/22 учебный год сказано: «Отношения, пропорции и все так называемые «правила»... всё это категорически и определённо изъято». И дальше: «Теорию числовых отношений и пропорций следует отнести к систематическому курсу алгебры» [1].

---

[1] Программы семилетней единой трудовой школы, 1921, стр. 109

При решении задач на тройное правило и на пропорциональное деление вполне можно ограничиться сначала только способом приведения к единице, сохраняя полностью весь известный процесс устных рассуждений и только по-новому оформляя запись решения их.

Позднее, после того как учащиеся в достаточной мере освоятся с основным способом решения задач на тройное правило — приведением к единице, надо ознакомить их и со вторым способом решения — с помощью пропорций. С этой целью преподаватель предлагает задачи на тройное правило, которые решаются двумя способами; учащиеся имеют возможность сравнить эти способы и составить характеристику их. Затем надо предложить несколько таких задач, которые легче решаются способом пропорций. В дальнейшей работе преподаватель может предоставить учащимся возможность пользоваться любым из этих способов по их собственному усмотрению.

На основании приведённых соображений можно высказать утверждение, что изучение темы о пропорциях более целесообразно поставить после изучения темы о пропорциональной зависимости величин, как очень полезное обобщение и завершение предыдущей темы. В связи с этим явится возможность ввести и новый способ решения задач, содержащих пропорциональные величины, — способ пропорций. Против этого иногда выдвигается такое возражение: «Так как основным свойством пропорциональности величин является наличие равенства отношений двух пар соответствующих их значений (пропорция), то правильнее исходить именно из этого свойства пропорциональных величин, поясняющего учащимся и самый термин «пропорциональные»; кроме того, более последовательно от изучения отношения перейти к изучению равенства двух отношений — пропорции, не разрывая этих двух вопросов новым, требующим тщательной проработки понятием функциональной зависимости»[1]. В настоящее время почти все положения приведённого возражения отпадают: а) понятие функциональной зависимости, лежащее в основе учения о пропорциональных величинах, нельзя назвать «новым» вопросом, так как учащиеся за несколько лет обучения уже накопили большой запас представлений о пропорциональных величинах; б) изучение кратных отношений стоит в конце темы обыкновенных дробей; в) совершенно справедливо последнее утверждение, что «основным свойством пропорциональности величин является наличие равенства отношений двух пар соответствующих их значений». В самом деле, понятие о пропорциональных величинах, о пропорциональной зависимости между величинами становится более отчётливым благодаря записи этой зависимости с помощью пропорции. Самые термины — «пропорциональная зависимость» двух переменных величин и «пропорциональные величины» — могут быть лучше и отчётливее выяснены с помощью записи равных отношений в виде пропорции.

---

[1] Березанская, Методика арифметики, 1934, стр. 201.

Но при этом необходимо иметь в виду следующее обстоятельство: если понятие пропорции вводить на первых порах как равенство двух равных отношений, то пропорции могут быть введены в программу сразу после изучения отношений и до введения понятия о пропорциональных величинах. В таком случае пропорции могут быть применены к выяснению понятия пропорциональной зависимости величин, как очень удобная форма записи этой зависимости.

Если же новое понятие пропорции вводить в связи с решением «целесообразных задач»[1], имеющих конкретное содержание, то учащиеся должны будут при решении указанных задач сразу осваивать два таких широких понятия, как 1) пропорциональные величины и пропорциональная зависимость между ними и 2) понятие пропорции как формы записи этой зависимости. С общедидактической точки зрения этого делать не следует: каждое новое понятие учащиеся должны осваивать отдельно, последовательно связывая его с ранее изученными и уже известными понятиями.

Более рациональным надо признать такой порядок: после изучения пропорциональной зависимости между переменными величинами вполне естественно можно ввести понятие и об особой форме записи этой зависимости в виде пропорции, и дальнейшее применение нового понятия к решению соответствующих задач.

Все высказанные по этому вопросу соображения дают возможность преподавателю самостоятельно планировать подлежащий изучению материал: сначала поставить изучение пропорциональных величин, а потом пропорций или наоборот.

2. Примерный план изучения пропорциональных величин

Изучение этой темы в конце курса арифметики имеет троякую цель:

1) собрать и обобщить тот огромный материал, который накоплен учащимися в повседневной жизни и при решении задач в школе, именно таких задач, в которых уже встречались пропорциональные величины;

2) расширить объём этих знаний, ввести понятие о пропорциональной зависимости на основе имеющихся уже представлений об этом, как о частном случае функциональной зависимости (не давая последнего термина), сопоставить примеры пропорциональных величин с целым рядом других величин, которые не связаны пропорциональной зависимостью; наконец,

3) всю эту работу завершить решением более сложных задач, в которых имеется более двух пропорциональных величин (сложное тройное правило, пропорциональное деление), и научить сокращённой записи решения их.

Преподаватель предлагает решить достаточное число задач, содержащих прямо пропорциональные величины.

[1] Шохор-Троцкий, Методика арифметики, 1936, стр. 9, 12—13.

В последующей беседе он заставляет учащихся сделать выводы о том, что величины бывают переменные и постоянные и что между некоторыми переменными величинами существует определённая числовая зависимость: с изменением одной из них изменяется и другая. Это легко можно проследить по той таблице числовых значений каждой переменной величины, которую составляют сами учащиеся при решении данных задач. Таким образом выясняется основной смысл этой зависимости и создаётся формулировка определения пропорциональной зависимости между двумя переменными величинами.

После этого учащиеся сами приводят целый ряд примеров величин, связанных пропорциональной зависимостью, а преподаватель даёт примеры таких величин, которые или совсем не связаны никакой зависимостью (например, количество людей и пройденный ими путь), или эта зависимость иного характера, отличная от пропорциональности. Учащиеся сами могут привести немало таких примеров.

Вслед за этим преподаватель даёт задачи на так называемое «прямое» тройное правило, т. е. такие задачи, в которые входят только две прямо пропорциональные величины. Учащиеся решают их сначала «в два вопроса», как и раньше. Потом с помощью преподавателя они анализируют решение, устанавливают факт, что в первом вопросе они всегда узнают числовое значение одной величины, соответствующее единичному значению другой («приведение к единице»). Преподаватель помогает им записать всё решение в одну строку в виде дроби. Так выясняется сущность метода решения задач, который называется методом приведения к единице, и укороченная запись этого решения.

Затем преподаватель переходит к выяснению понятия об обратной пропорциональной зависимости между двумя переменными величинами тоже с помощью решения задач и последующей беседы. При этом обнаруживается разница между прямой и обратной пропорциональными зависимостями, вводятся соответствующие термины — прямая пропорциональная зависимость и обратная — и формулируются определения. Решением задач, содержащих обратно пропорциональные величины, с сокращённой записью его в виде одной строки завершается изучение обратно пропорциональных величин.

За этим следует решение «смешанных» задач, одна из которых содержит прямо пропорциональные, а другая обратно пропорциональные величины. В процессе этой работы выясняется, в какой мере учащиеся усвоили общее понятие о пропорциональной зависимости и умеют ли они отличать прямую пропорциональность от обратной.

Когда преподаватель удостоверится, что учащиеся научились различать каждый вид пропорциональной зависимости, он может перейти к решению задач на «сложное тройное правило».

Вся работа завершается решением задач на пропорциональное деление. При этом особенное внимание надо обратить на то, чтобы учащиеся хорошо понимали такие выражения, как «разделить число в данном отношении», «разделить его в отношении двух и нескольких данных чисел», «разделить число пропорционально данным числам», и могли одно из этих выражений заменить другим.

II. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА ТРОЙНОЕ ПРАВИЛО

1. Понятие о прямой пропорциональной зависимости

В беседе, посвящённой этому вопросу, преподаватель предлагает учащимся решить несколько задач с разным содержанием, в которые входят прямо пропорциональные величины.

1. «Метр материи стоит 6 руб. Сколько стоят 4 *м* той же материи? 8 *м*? 20 *м*? 32 *м*? и т. д.»

2. «Поезд идёт со средней скоростью 48 *км* в час. Сколько километров он пройдёт за 6 час.? за 12 час.? за 30 час.? и т. д.»

3. «На пошивку 24 костюмов в мастерской идёт 100 *м* материи. Сколько метров той же материи пойдёт на пошивку 12 таких же костюмов? 8 костюмов? 6? и т. д.»

Учащиеся решают первую задачу, предварительно записав условие её:

1 *м*	стоит	6	руб.					
4 *м*	стоят	x	руб.		4 *м*	стоят	24	руб.
8 *м*	»	x	руб.		8 *м*	»	48	руб.
20 *м*	»	x	руб.		20 *м*	»	120	руб.
32 *м*	»	x	руб.		32 *м*	»	192	руб.
	и т. д.					и т. д.		

Они сами могут продолжить составление задач и решение их, а преподаватель рекомендует им изменять числовые значения одной из входящих величин только в одном направлении, т. е. или только увеличивая их, или только уменьшая. Затем учащиеся под руководством преподавателя делают общий обзор решения всех частных задач и формулируют выводы.

1) В задаче дана цена материи (6 руб.), которая остаётся неизменной.

2) Количество материи увеличивается (4 *м*, 8 *м*, 20 *м*, 32 *м* и т. д.).

3) Соответственно увеличивается и стоимость материи (24 руб., 48 руб., 120 руб., 192 руб. и т. д.), т. е. с увеличением количества вдвое и стоимость увеличивается вдвое и т. д.

4) Количество материи по условию задачи изменяется, т. е. задаётся разными числами; поэтому оно называется **переменной величиной**.

5) Стоимость материи тоже изменяется, т. е. выражается разными числами, и тоже называется **переменной величиной**.

6) Цена одного метра остаётся неизменной, а потому она называется **постоянной величиной** в данной задаче.

При решении этой первой задачи вводится пока только одно понятие — понятие о том, что величины бывают **переменные** и **постоянные**: первые измеряются разными числами, а вторые — равными или, как иногда говорят, одинаковыми числами. Для данной цели этих выводов вполне достаточно.

Однако те же выводы очень полезно сопровождать записями отношений, которые характеризуют изменения величин, входящих в задачу:

4 *м*	стоят	24 руб.				
8 *м*	»	48 руб.		$8:4=2$	$48:24=2$	$8:4=48:24$
20 *м*	»	120 руб.		$20:4=5$	$120:24=5$	$20:4=120:24$
32 *м*	»	192 руб.		$32:4=8$	$192:24=8$	$32:4=192:24$
	и т. д.					

Записи в 4-й колонке составляются только в **том случае, если учащиеся** уже знакомы с понятием пропорции.

Точно так же решаются вторая и третья задачи.

Затем сначала преподаватель, потом и учащиеся придумывают задачи, в которые входят разные переменные величины (число рабочих и заработная плата их, если они получают одинаковую плату, объём однородного тела и вес его и т. п.). Попутно учащиеся приводят примеры и постоянных величин: длина 1 *м*, вес 1 *кг*, площадь 1 *м*^{2} и т. п. Полезно устно решить одну или две задачи для той же цели примерно такого содержания:

«Автомобиль идёт со скоростью 80 *км* в час; какой путь он пройдёт в течение 3 час.? 8 час.? 10 час.? и т. д.»

Учащиеся устанавливают, что в этой задаче время и путь суть переменные величины, а скорость выражается одним и тем же постоянным числом (80 *км* в час.). При этом сами учащиеся могут высказать такое соображение, что скорость автомобиля может быть в условии задачи задана иным числом, например 60 *км* в час. Преподаватель подтверждает это соображение, но в то же время указывает, что при решении той же задачи с новым условием числовое значение скорости автомобиля опять останется неизменным.

Вся эта работа завершается приведением ещё целого ряда примеров постоянных и переменных величин.

После этого можно перейти к выяснению нового понятия, связанного с понятием переменных величин, понятия о зависимости между переменными величинами (если таковая между данными величинами имеется).

Для этой цели можно или воспользоваться решением предыдущих задач, или же решить две-три новые задачи, например:

1. «Из 2,5 *кг* муки получается 3,5 *кг* печёного хлеба. Сколько хлеба может получиться из 5 *кг* такой же муки? из 10 *кг*? из 15 *кг*? из 20 *кг* и т. п.».

2. «24 *м* ленты стоят 64 руб. Сколько стоят 12 *м* той же ленты? 8 *м*? 6 *м*? 4 *м*? и т. д.».

Учащиеся решают сначала первую задачу, располагая все записи, как и раньше (в первых трёх колонках):

Из 2,5 *кг* муки 3,5 *кг* хлеба			
Из 5 *кг* » 7 *кг* »	5:2,5=2	7:3,5=2	5:2,5= 7:3,5
Из 10 *кг* » 14 *кг* »	10:2,5=4	14:3,5=4	10:2,5=14:3,5
Из 15 *кг* » 21 *кг* »	15:2,5=6	21:3,5=6	15:2,5=21:3,5
Из 20 *кг* » 28 *кг* »	20:2·5=8	28:3,5=8	20:2,5=28:3,5
и т. д.			

Последняя колонка записывается только в том случае, если пропорции уже знакомы учащимся.

Преподаватель ставит ряд вопросов, на которые учащиеся дают соответствующие ответы.

1) Назовите величины, входящие в данную задачу.
2) Как можно назвать каждую из этих величин? (Переменной величиной.)
3) Почему их так можно назвать?
4) Как получаются числовые значения этих величин? (Количество муки

задаётся в условии задачи, а количество печёного хлеба вычисляется соответствующим образом в зависимости от количества муки.)

5) Как мы вычисляли количество печёного хлеба? (Если количество муки увеличивалось в 2, 4, 6 и т. д. раз, то и количество печёного хлеба мы тоже увеличивали в 2, 4, 6 и т. д. раз.)

6) Таким образом, оказывается, что обе величины в этой задаче изменяются во взаимной зависимости одна от другой: чем больше муки, тем больше получается и печёного хлеба.

7) Такую зависимость между двумя переменными величинами условились называть **пропорциональной зависимостью**, а переменные величины называют **пропорциональными величинами**. Это значит, что с увеличением значений одной из них в несколько раз значения другой увеличиваются во столько же раз.

Если учащиеся уже знают, что такое пропорция, то именно на этом этапе работы они и заполняют четвёртую колонку в предыдущих записях решения задач — составляют пропорции из каждой пары равных отношений. Эти записи пропорций дадут возможность учащимся сформулировать последний вывод (п. 7) ещё и по-другому: так как зависимость между переменными величинами в каждой из данных задач (например, количество муки и количество печёного хлеба) записывается в виде пропорции, то эти переменные величины условились называть пропорциональными величинами, а самую зависимость между ними — пропорциональной зависимостью.

Однако надо заметить, что такое формальное истолкование и определение этих новых понятий и терминов ни в коем случае не должно заменять и заслонять первое истолкование и определение их, данное в предыдущих выводах (см. п. 6 и 7).

Точно так же решается вторая задача.

В заключительной беседе учащиеся формулируют определение пропорциональных величин и определение пропорциональной зависимости между ними с помощью вопросов преподавателя.

Для полного осознания и закрепления понятия о пропорциональных величинах преподаватель и учащиеся приводят ещё целый ряд примеров прямо пропорциональных величин (самый термин «прямо пропорциональные» величины пока не вводится до тех пор, пока учащиеся не приступят к изучению обратно пропорциональных величин), а затем, в противовес им, преподаватель даёт несколько задач шуточного и серьёзного характера, которые содержат величины или не связанные между собой никакой зависимостью, или же эта зависимость особого вида[1].

Эти задачи помогут учащимся вдумчиво относиться к определению зависимости между величинами и не давать нелепых и опрометчивых ответов.

2. Решение задач, содержащих прямо пропорциональные величины

Вновь введённое понятие о прямой пропорциональной зависимости между переменными величинами имеет огромное практическое значение. Последнее осуществляется применением полученных знаний к решению соответствующих задач сначала на простое тройное правило и на пропорциональное деление.

---

[1] Лямин, Физико-математическая хрестоматия, т. I. Арифметика.

Учащиеся умеют решать задачи обоих указанных типов способом приведения к единице; каждое решение они записывают в виде двух и более действий. Теперь они должны ознакомиться с более рациональным приёмом записи решения этих задач и с применением промежуточных упрощений в процессе вычисления.

Преподаватель предлагает такую задачу:

«На выпечку 360 *кг* хлеба требуется 261 *кг* муки. Сколько пойдёт муки на выпечку 840 *кг* хлеба того же сорта?»

Учащиеся самостоятельно решают эту задачу по вопросам и записывают полностью решение её в своих тетрадях и на классной доске.

Условие задачи (схема).

360 *кг* хлеба из 261 *кг* муки

840 *кг* » » x *кг* »

1) $261:360=0{,}725$

$$\begin{array}{r} 2610 \\ -\ 2520 \\ \hline 900 \\ \hline 1800 \\ \hline 0 \end{array}$$

(0,725 *кг* **муки требуется для выпечки одного килограмма** хлеба).

2) $0{,}725 \cdot 840 = 609$

$$\begin{array}{r} 2900 \\ 5800 \\ 609{,}000 \end{array}$$

Ответ. 609 *кг* муки **требуется** для выпечки 840 *кг* хлеба.

Затем они просматривают решение задачи в целом и по вопросам преподавателя устанавливают, что:

1) Задача решается двумя действиями — делением и умножением.

2) При делении определяется количество муки для выпечки одного килограмма хлеба, а при умножении — количество муки для выпечки 840 килограммов хлеба.

3) При решении первого вопроса одно данное число делится на другое данное число (261 : 360), а для решения второго вопроса полученное частное умножается на третье данное число (0,725·840).

4) Запись решения задачи можно укоротить, для чего сначала надо записать оба действия, не производя никаких промежуточных вычислений:

1) $261:360$;

2) $(261:360)\cdot 840 = x$, или

$$\frac{261\cdot 840}{360}=x.$$

5) Такая запись и последующие сокращения дроби упрощают вычисления:

$$\frac{\overset{\scriptstyle 87}{261}\cdot \overset{\scriptstyle 7}{840}}{\underset{\scriptstyle 1}{\underset{\scriptstyle 3}{360}}}=x; \qquad x=609.$$

6) Процесс решения задачи остаётся тот же самый, что был и в самостоятельной работе учащихся, когда они решали её в два действия, но запись решения иная, и все вычисления проще и легче.

Так как решение подобных задач уже известно учащимся, а новым является только запись решения их, то преподаватель может сообщить учащимся название описанного способа решения — приведение к единице — и разъяснить сущность его: сначала определяется единичное значение одной величины, а потом и всё искомое число.

После этого в классе решается ещё одна или две задачи с подробной записью. В процессе этой работы надо приучить учащихся:

1) записывать схему условия задачи;

2) выявлять характер зависимости между величинами (пока только прямую пропорциональность);

3) формулировать эту зависимость словами;

4) схематически записывать решение задачи «в одну строчку» в виде дроби;

5) давать объяснения каждой операции;

6) производить промежуточные преобразования (главным образом, сокращение дроби);

7) выписывать ответ на вопрос задачи.

Преподаватель опять подчёркивает сущность применяемого способа — сначала определяется единичное значение одной из величин и т. д.

3. Понятие об обратной пропорциональной зависимости между двумя переменными величинами

До сих пор шла речь только о прямо пропорциональных величинах. Когда учащиеся достаточно освоят это новое, чрезвычайно важное понятие в математике и научатся вполне сознательно применять его при решении соответствующих задач, можно перейти к дальнейшему изучению пропорциональной зависимости и ввести новое понятие об сбратной пропорциональности. Этот вид зависимости между переменными величинами труднее усваивается учащимися. Надо решить большое число задач, привести много примеров обратно пропорциональных величин, сопоставляя их с примерами прямо пропорциональных величин и ввести в употребление термины: «прямо пропорциональные величины» и «прямая пропорциональная зависимость», «обратно пропорциональные величины» и «обратно пропорциональная зависимость».

Преподаватель предлагает, например, такую задачу:

«Артель рабочих в 12 человек выполняет некоторую работу в 18 дней. Во сколько дней ту же работу может выполнить артель рабочих такой же квалификации в 6 человек? в 4 человека? в 3 человека? в 2 человека? в 24 человека? в 36 человек? в 72 человека? и т. д.»

Учащиеся решают эту задачу устно, записывая данные числа и полученные результаты[1].

---

[1] Надо помнить, что записи в 4-й колонке составляются, если тема «Пропорции» пройдена.

12 человек в 18 дней	12:6=2	36:18=2	12:6= 36:18
6 » » 36 »	12:4=3	54:18=3	12:4= 54:18
4 человека » 54 дня	12:3=4	72:18=4	12:3= 72:18
3 » » 72 »	12:2=6	108:18=6	12:2=108:18
2 » » 108 дней	. . . .	. . . . .	. . . . . .
и т. д.			

24 человека в 9 дней	24:12=2	18:9=2	24:12=18:9
36 » » 6 »	36:12=3	18:6=3	36:12=18:6
72 » » 3 дня	72:12=6	18:3=6	72:12=18:3
108 » » 2 »	108:12=9	18:2=9	108:12=18:2
и т. п.	. . . . .	. . . .	. . . .

Учащиеся составляют, а потом просматривают сначала только левую первую таблицу, в которой отчётливо выступает характер изменения каждой из двух величин, входящих в задачу, и по вопросам преподавателя они формулируют выводы.

1) В задачу входят две величины — количество рабочих и время, потребное для выполнения работы.

2) Обе эти величины переменные (почему?).

3) Изменение времени на выполнение работы зависит от изменения количества рабочих: чем меньше рабочих, тем больше времени потребуется для выполнения одной и той же работы, и наоборот: чем больше рабочих, тем меньше надо времени (если на данной работе могут успешно работать большое и малое количество рабочих).

4) Иная формулировка этой зависимости: с уменьшением в несколько раз числа рабочих увеличивается во столько же раз время, и наоборот.

5) Эти две величины — количество рабочих и время, необходимое для выполнения работы — тоже называются пропорциональными величинами.

6) Но эта пропорциональность иная: с увеличением значений одной величины в несколько раз значения другой величины уменьшаются во столько же раз, и наоборот. Такие две величины называются обратно пропорциональными величинами, а зависимость между ними называется обратной пропорциональностью, или обратной пропорциональной зависимостью.

7) Ранее изученные пропорциональные величины теперь можно назвать прямо пропорциональными, а зависимость между ними — прямой пропорциональностью.

Сравнивая первое числовое значение каждой из входящих величин с остальными числовыми значениями той же величины, учащиеся записывают изменение каждой величины в виде отношений, которые характеризуют изменения их: во второй колонке — изменения количества рабочих, а в третьей — изменение времени. Эти таблицы подтверждают только что сделанные выводы. Они же дают материал для составления пропорций, характеризующих зависимость между двумя данными переменными величинами, что в свою очередь служит основанием для характеристики и определения данных величин и зависимости между ними (последняя работа проводится, если учащиеся уже знакомы с понятием пропорции).

В связи с этими выводами повторяется определение прямой пропорциональности, обратной пропорциональности, приводятся примеры прямо пропорциональных и обратно пропорциональных величин. В порядке домашней самостоятельной работы очень полезно дать учащимся большой набор разных величин с тем, чтобы они выбрали из них пары прямо пропорциональных величин, обратно пропорциональных и пары таких величин, которые не связаны пропорциональной зависимостью или совсем не имеют между собой никакой зависимости.

4. Решение задач, содержащих обратно пропорциональные величины

Распознавание обратно пропорциональной зависимости между переменными величинами представляет большие затруднения для учащихся. Поэтому следует особо и достаточно долго остановиться на решении задач, содержащих только обратно пропорциональные величины («обратное» тройное правило). Общий характер и план этой работы тот же, что был при решении задач, содержащих только прямо пропорциональные величины. («прямое» тройное правило): а) самостоятельное решение первой задачи учащимися по вопросам в два действия; б) анализ решения задачи и составление укороченной записи в одну строчку в виде дроби; в) решение второй задачи с объяснением способа «приведения к единице» и с двойной записью; г) выводы те же, что были и раньше; д) закрепление полученных знаний и развитие навыков в применении их к решению задач с укороченной записью в виде дроби, но с подробным объяснением каждой операции в устной форме.

Пример.

«Колхоз имеет запас сена *на* 60 дней для 120 коров. На сколько дней хватит этого запаса, если в колхозном стаде будет 144 коровы?»

$$\left.\begin{array}{l}120 \text{ коров} — 60 \text{ дней} \\ 144 \text{ коровы} \quad x \quad » \end{array}\right\}$$

1) $60 \cdot 120 = 7\,200$ (на 7 200 дней хватит запаса сена для одной коровы).

2) $7\,200 : 144 = 50$ (на 50 дней хватит запаса сена для 144 коров).

Просматривая решение задачи в целом, учащиеся описывают способ решения её и вводят укороченную запись «в одну строчку»:

$$x = \frac{60 \cdot 120}{144};$$

$$x = 50.$$

Полезно решить ещё одну или две задачи с объяснением и двойным способом записи, после чего можно перейти к решению таких же задач с укороченной записью, но с устным объяснением.

5. Решение смешанных задач на простое тройное правило

Когда учащиеся овладеют общим понятием о пропорциональной зависимости между двумя *переменными величинами* и будут отчётливо понимать различие между прямо пропорциональыми и обратно пропорциональными величинами, иллюстрируя эти понятия соответствующими примерами, следует перейти к решению таких задач, чтобы одни из них содержали прямо пропорциональные, а другие — обратно пропорциональные величины. Это постепенно будет приучать учащихся в каждой задаче сначала выявлять характер зависимости между данными величинами, а потом уже приступать к решению её.

При решении этих задач бывают такие случаи, когда учащиеся, решая задачу на тройное правило способом приведения к единице, иногда получают нелепые промежуточные результаты. Например:

Задача 1. «Швейная мастерская затребовала 60 *м* материи для пошивки 18 одинаковых костюмов на продажу. Со склада было прислано 80 *м* той же материи. Сколько таких же костюмов можно сшить из присланной материи?»

$$\left.\begin{array}{l}\text{Из 60 } м \text{ 18 костюмов} \\ \text{Из 80 } м \ \ x \quad » \\ \text{Прямая пропорциональность}^{1}\end{array}\right\} x=\frac{18}{60}\cdot\ldots$$

Учащиеся, записав первое действие делением $\left(\frac{18}{60}\right)$, задают себе вопрос: сколько костюмов можно сшить из 1 *м*, и обнаруживают, что из 1 *м* материи нельзя сшить ни одного костюма намеченного размера.

Преподаватель помогает учащимся разобраться в этом вопросе так:

1) он предлагает им сначала продолжить и закончить начатое решение.

Полученный результат является ответом на вопрос задачи и не вызывает никаких недоумений. Поэтому в данной задаче можно не пытаться истолковывать промежуточный результат.

2) Преподаватель указывает иные способы решения той же задачи, а именно:

а) число 60 состоит из шести десятков
» 80 » восьми »

По условию задачи:

Из 6 десятков метров материи получается 18 костюмов

из 1 десятка » » « $\frac{18}{6}=3$

из 8 десятков » » » $\frac{18\cdot 8}{6}=24.$

б) Ту же задачу можно решить иначе:

на 18 костюмов требуется 60 *м* материи

на 1 костюм » $\frac{60}{18}$ *м* »

Из 80 *м* материи можно сшить столько костюмов, сколько раз $\frac{60}{18}$ содержится в 80, т. е. $80:\frac{60}{18}=\frac{80\cdot 18}{60}=24.$

Каждый из двух последних способов решения данной задачи есть тоже «приведение к единице»: а) в последнем случае за единичный размер принята та величина, которая задана только одним числом (количество костюмов); благодаря

[1] Некоторые преподаватели требуют в самую запись условия задачи включать характер зависимости между переменными величинами.

этому и промежуточный результат имеет реальное истолкование; такой способ решения задачи называется «обратным приведением к единице»; б) в первом случае имеет место, как сказано раньше, тоже «приведение к единице», в частности, «прямое приведение к единице», но за единичный размер величины (количество материи) принята «сложная единица» — 10 *м*; благодаря этому промежуточный результат опять имеет вполне реальное истолкование: из 10 *м* материи можно сшить 3 костюма; такой способ решения задачи называется «приведением к сложной единице». Этим способом довольно часто пользуются при устном решении подобных задач.

Итак, если промежуточный результат не имеет разумного реального истолкования при обычном прямом приведении к единице, то можно это решение заменить или обратным приведением к единице или приведением к сложной единице, но можно этого и не делать по той простой причине, что промежуточный результат при укороченной записи решения задачи в виде дроби не имеет никакого практического значения; поэтому можно вполне обойтись только одним способом решения задач — прямым приведением к единице. Однако при устном решении задач надо приучать учащихся пользоваться и способом приведения к сложной единице (пары, тройки, пятки, десятки, дюжины, полдюжины и т. п.).

Задача 2. «Артель рабочих в 18 человек может выполнить некоторую работу, если ежедневно будет работать по 8 час. По скольку часов в день должна работать артель в 27 человек, чтобы выполнить ту же работу?»

В заключительной беседе преподаватель ещё раз заставляет учащихся повторить те выводы, которые характеризуют задачи на простое тройное правило и способы решения их — приведение к единице (простой или сложной):

1) в каждой задаче имеются две переменные величины;

2) одна из них задана двумя числами, другая — одним; таким образом, в каждой задаче задаются три числа, а требуется найти четвёртое — второе числовое значение другой величины (поэтому в очень давнее время такие задачи назывались задачами на «тройное» правило, так как решались по готовым заученным правилам; теперь это название употребляется, но оно имеет только исторический интерес);

3) между данными величинами в задаче имеется или прямая пропорциональная зависимость (что это значит?), или обратная пропорциональная зависимость (что это значит?);

4) каждая задача в этом случае решается способом приведения к единице (описывается этот способ).

III. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА СЛОЖНОЕ ТРОЙНОЕ ПРАВИЛО

Если учащиеся в процессе предыдущей работы научились определять характер зависимости между переменными величинами, то они не встретят больших затруднений при решении и таких задач, в которые входят три, четыре и более пропорциональных величин (так называемые задачи на «сложное тройное правило»). При подборе этих задач надо внимательно следить за тем, чтобы постепенно и последовательно возрастали трудности при решении их. Можно предложить примерно такую схему подбора задач на сложное тройное правило:

1) задачи, содержащие только три прямо пропорциональные величины;

2) задачи, содержащие три величины: одна парная комбинация их находится в прямой пропорциональной зависимости, а другая — в обратной;

3) задачи, содержащие 4 величины;

4) задачи, содержащие 5 величин и т. д.

Первую задачу, содержащую три прямо пропорциональные величины, учащиеся решают сначала самостоятельно как всякую сложную задачу «по вопросам».

«5 насосов в течение 3 час. выкачали 1 800 вёдер воды. Сколько воды выкачают 4 таких же насоса в продолжение 4 час.?»[1].

5 насосов — 3 часа — 1800 вёдер
4 насоса 4 » x »

1) 1 800 : 3 = 600	600 вёдер выкачают 5 насосов в 1 час
2) 600 · 4 = 2 400	2 400 » » 5 » » 4 часа
3) 2 400 : 5 = 480	480 » выкачает 1 насос » 4 »
4) 480 · 4 = 1 920	1 920 » выкачают 4 насоса » 4 »

Преподаватель с помощью вопросов заставляет учащихся проанализировать весь ход решения и вновь записать его, не вычисляя промежуточных результатов.

1) В первой задаче узнаётся число вёдер воды, которое могут выкачать 5 насосов в 1 час (делением): 1 800 : 5.

2) Полученный результат — частное — умножается на 4, чтобы определить количество воды, которое могут выкачать те же 5 насосов в 4 часа:

$$(1800:3)\cdot 4.$$

3) Новый результат — произведение — делится на 5, чтобы определить количество воды, которое выкачает один насос в течение четырёх часов:

$$[(1800:3)\cdot 4]:5.$$

4) Этот результат — частное — умножается на 4, чтобы узнать, сколько воды выкачают 4 насоса в 4 часа:

$$\{[(1800:3)\cdot 4]:5\}\cdot 4.$$

5) Вся запись значительно упростится, если деление записать в виде дроби:

$$\frac{\overset{120}{\cancel{1\,800}}\cdot 4\cdot 4}{\underset{1}{\cancel{3}}\cdot\underset{1}{\cancel{5}}}=1920.$$

Ответ. 1920 вёдер выкачают 4 насоса в течение 4 часов.

Вторую задачу учащиеся решают тоже «по вопросам», подробно записывают всё решение задачи, но без вычисления промежуточных результатов.

[1] Березанская, Сборник задач и упражнений по арифметике, 1938 № 1890.

«В книге 156 страниц, на каждой странице 42 строки, в каждой строке 27 букв. На скольких страницах будет напечатана та же книга, если на странице будет 54 строки и в строке будет 36 букв?»[1].

Решение задачи можно записать в одну строчку, сопровождая его устными рассуждениями:

$$x = \frac{156 \cdot 42 \cdot 27}{54 \cdot 36}\text{; и вычислить } x = 91.$$

Решение последующих задач будет теперь записываться именно таким образом. Увеличение числа величин, входящих в одну задачу до 4, 5 и больше, не внесёт новых затруднений. Запись решения их в виде одной дроби позволяет не производить промежуточных вычислений, даёт возможность широко использовать сокращение дробей до выполнения вычислений, благодаря чему очень часто все вычисления могут производиться устно.

IV. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА ПРОПОРЦИОНАЛЬНОЕ ДЕЛЕНИЕ

Задачи на пропорциональное деление, как и задачи на тройное правило, вообще не являются новым типом задач для учащихся, изучающих пропорциональные величины: при изучении целых чисел, обыкновенных и десятичных дробей (включая и отношения) было много так называемых задач «на части», которые относятся к задачам на пропорциональное деление. Например:

«Число 32 (или 25) разделить на два слагаемых так, чтобы одно из них было втрое больше другого», или ещё:

«В сплаве весом 108 *кг* содержится медь и олово; медь составляет 4 весовые части сплава, а олово 5. Сколько меди и олова содержится в сплаве?»

Это простейшие задачи, входящие в большой класс задач на пропорциональное деление. Решение их основано на применении отношений. Задачи этого отдела очень разнообразны по содержанию, структуре и по степени трудности. Поэтому преподаватель должен тщательно произвести отбор соответствующих задач, распределить их по определённой системе в зависимости от степени трудности решения их. Можно указать такой примерный перечень типов задач на пропорциональное деление.

1 тип. Задачи, в которых число a надо разделить в данном отношении:

1) двух чисел: m и n;
2) трёх » : m, n и p;
3) четырёх » : m, n, p и q и т. д.

Например:

Задача 1. «Число 342 разделить на два слагаемых так, чтобы отношение их было равно 4 : 5 (или чтобы отношение их было равно отношению чисел 4 и 5)».

Задача 2. «Число 342 разделить на три слагаемых так, чтобы они относились, как 2, 3 и 4 (или: как 2 : 3 : 4)».

[1] Березанская, Сборник задач и упражнений по арифметике, 1938, № 1898.

Задача 3. «Число 342 разделить на три части так, чтобы они относились, как $1 : \frac{3}{2} : 2$ (или на 4 части так, чтобы они относились, как 1,1; 0,9; 0,5 и 1,3).

Эта схема и приведённые примеры задач показывают, что трудности нарастают прежде всего в зависимости от числа частей, на которые делится данное число: на две, на три, на четыре или более частей. Затем трудности увеличиваются в связи с изменением числовых значений m, n, p и q: сначала они задаются целыми числами, потом обыкновенными и десятичными дробями и, наконец, смешанными числами.

Примерное решение задачи 2 (см. выше).

Разделить 342:

I — x	По условию задачи:
II — y	$x : y : z = 2 : 3 : 4$.
III — z	

Основная трудность при решении этой задачи, как и подобных ей, состоит в том, что учащиеся на первых порах не понимают смысла записи данного сложного отношения. Поэтому преподаватель должен много времени и внимания уделить разъяснению смысла этой записи. Для этого можно поступать примерно так:

1) на классной доске в сделанной записи $x:y:z = 2:3:4$ закрыть руками или двумя книжками члены z и 4 и заставить учащихся прочитать и истолковать полученную запись (надо помнить при этом, что учащиеся могут ещё не знать пропорций, которые здесь уже имеют место):

$$x:y = 2:3;$$

первая часть меньше второй во столько же раз, во сколько 2 меньше 3; значит, если первая часть будет содержать 2 пая, то на вторую придётся 3 таких же пая, т. е.

x — 2 пая;
y — 3 пая;

2) потом так же закрыть члены x и 2 и заставить прочитать и истолковать полученный результат:

$y:z = 3:4$;
y — 3 пая;
z — 4 пая;

3) можно ту же работу ещё раз повторить, закрывая в записи y и 3:

$x:z = 2:4$; т. е.
x — 2 пая;
z — 4 пая.

В последнем случае учащиеся увидят, что они не получили ничего нового, поэтому последний вариант можно принять только для проверки первых выводов.

Две первые выводные записи сводятся в одну:

x — 2 пая;
y — 3 пая;
z — 4 пая.

Дальнейший ход решения задачи вполне ясен:

$2+3+4=9$ (9 паёв в числе 342);
$342:9=38$ (38 приходится на 1 пай).

$x=38\cdot 2=76$	I — 76
$y=38\cdot 3=114$	II — 114
$z=38\cdot 4=152$	III — 152

Если хотя бы один из членов отношения был задан дробным числом (что имеет место в 3-й задаче), надо первую такую задачу решить двумя способами: 1) в результате истолкования сложной записи учащиеся будут иметь:

$x:y:z=1:\frac{3}{2}:2$ (задача 3)

x — 1 пай y — $1\frac{1}{2}$ пая z — 2 пая	$1+1\frac{1}{2}+2=4\frac{1}{2}$ $342:4\frac{1}{2}=\frac{342\cdot 2}{9}=76$

$x=76$	I — 76
$y=76\cdot 1\frac{1}{2}=114$	II — 114
$z=76\cdot 2=152$	III — 152

2) преподаватель обращает внимание учащихся на то, что один член отношения — дробь и напоминает о преобразовании такого отношения заменой дробных членов отношения целыми числами, для чего надо все члены отношения умножить на 2:

$$x:y:z=2:3:4.$$

Учащиеся видят, что эта задача уже была раньше решена (задача 2).

Затем учащиеся решают новые задачи, в которых два, три и более членов отношения будут заданы обыкновенными или десятичными дробями.

Для решения каждой задачи надо складывать несколько дробей. Если же заменить отношение дробных чисел отношением целых чисел, то число паёв в каждой части будет выражаться целыми числами и подсчёт всех паёв сведётся к сложению целых чисел; это упростит и облегчит дальнейший ход решения задачи: деление данного числа на ц е л о е число паёв проще, чем деление на дробь, и умножение на ц е л о е число паёв проще умножения на дробь. Благодаря такому предварительному анализу учащиеся вполне сознательно будут заменять отношение дробных чисел отношением целых чисел.

II т и п. Задачи, в которых число a надо разделить на части так, чтобы:

1) $x:y=m:n$, а $y:z=n:p$.
2) $x:y=m:n$, а $y:z=p:q$ или:
$x:y=m:n$, а $x:z=p:q$.

Задачи первой группы этого типа ничем не отличаются от задач I типа. При решении их надо только научить учащихся два отношения сводить в одну запись, что подготовит их к решению задач второй группы.

Задачи второй группы этого типа представляют большие затруднения для учащихся тем, что при решении их приходится «уравнивать» число паёв в одной и той же части.

Примерное решение задачи «Верёвку длиной в 12,4 *м* разрезали на 3 части так, что длина первой части относится к длине второй, как 3 : 5, а длина второй части относится к длине третьей, как 2 : 3. Найти длину каждой части верёвки».

Длина верёвки 12,4 *м*.

I — x	По условию задачи:
II — y	$x:y=3:5$
III — z	$y:z=2:3$

Учащиеся читают и истолковывают каждую запись и делают следующие выводы о числе паёв:

x — 3 пая;
y — 5 паёв;
y — 2 пая;
z — 3 пая.

Они сразу же замечают, что паи в первом отношении и в паи во втором отношении разные по величине, так как вторая часть (y) содержит 5 паёв (по первому отношению), она же содержит 2 пая (по второму отношению); значит, 5 паёв первого отношения равны 2 паям второго отношения. Из этого делается вывод, что в первом и втором отношениях надо «уравнять» паи. *Если сами учащиеся не догадаются, как это* можно сделать, то преподаватель приходит на помощь, напоминая основное свойство отношения; члены первого отношения умножают на 2, а второго — на 5

$$\begin{array}{l|c|l} x:y=3:5 & 2 & ;\ x:y=6:10 \\ y:z=2:3 & 5 & ;\ y:z=10:15 \end{array}$$

Теперь учащиеся видят, что эти два отношения можно записать одним сложным отношением:

$$x:y:z=6:10:15.$$

Дальнейший ход решения задачи ясен.

III тип. Задачи, в которых требуется число a разделить на части, находящиеся в отношении, обратном данным числам:

1) m и n;
2) m, n и p.

Особенность, свойственная задачам этого типа, состоит в том, что учащиеся с трудом осваиваются с выражением «разделить на части, находящиеся в отношении, обратном данным числам». Решение двух-трёх задач с объяснением даст возможность учащимся успешно решать эти задачи самостоятельно.

Например:

Задача 1. «Число 25 разделить на две части так, чтобы они были в отношении, обратном числам 49 и 26».

*Прежде всего преподаватель разъясняет выражения «в отношении, обратном числам 49 и 26», заменяя это выражение другим: «в отношении чисел, обратных данным числам 49 и 26». Это даёт возможность записать условие задачи так:

$$x:y=\frac{1}{49}:\frac{1}{26}.$$

Преобразовывая это отношение умножением обоих членов на (49·26), учащиеся получают такое выражение:

$$x:y=26:49.$$

Теперь дальнейший ход решения задачи известен.

После решения двух-трёх таких задач учащиеся подмечают возможность сразу писать заданное отношение обратных чисел, что бывает особенно практично в тех случаях, когда членов отношения только два и они заданы дробными числами. Например:

Задача 2. «Число 329 разделить в отношении, обратном числам 0,2 и 0,5». Учащиеся записывают условие:

$$329; \quad x:y=\frac{1}{0,2}:\frac{1}{0,5}=\frac{10}{2}:\frac{10}{5}=5:2.$$

Когда учащиеся поймут смысл этой задачи, они смогут сразу написать данное отношение $x:y=5:2$.

Задача 3. «Число 680 разделить на три части, находящиеся в отношении, обратном числам $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ и $\frac{5}{6}$.

Условие	Решение
680	$x:y:z=30:20:18$
I—x	x—30 паёв
II—y	y—20 »
III—z	z—18 »

$x:y:z=2:\frac{4}{3}:\frac{6}{5}$	$30+20+18=68$	$x=10\cdot30=300$	I—300
	$680:68=10$	$y=10\cdot20=200$	II—200
		$z=10\cdot18=180$	III—180

Все задачи первых трёх типов можно объединить в одну группу задач на деление числа в данном отношении. Следующие типы задач относятся к группе задач на пропорциональное деление в собственном смысле этого слова. По самому существу своему задачи второй группы ничем не отличаются от задач первой группы в процессе решения их. Только условие этих задач сформулировано несколько иначе: в них требуется данное число разделить пропорционально числам — двум, трём и более. Такая формулировка задачи чаще встречается как в науке и её приложениях, так и в практической жизни (например, «найти четвёртый пропорциональный к трём данным отрезкам», оплата выигрышей по облигациям займа пропорциональна стоимости облигаций и т. п.). Поэтому основная работа при решении этих задач сводится к тому, чтобы научить учащихся понимать выражение «разделить число пропорционально данным числам». Это следует сделать в связи с решением соответствующих задач.

IV тип. Задачи, в которых число a надо разделить прямо пропорционально числам:

1) m и n;
2) m, n и p;
3) m, n, p и q и т. д.

Пример решения первой задачи этого типа:

«Число 720 разделить прямо пропорционально числам 13 и 5».

Прежде чем приступить к решению этой задачи, учащиеся повторяют, какие величины называются прямо пропорциональными, приводят целый ряд примеров таких величин, подробно объясняют, какая зависимость между двумя величинами в каждом примере. Затем преподаватель выбирает несколько примеров, приведённых учащимися: путь, пройденный движущимся телом, и время, стоимость материи и количество её и т. п., и сообщает им, что зависимость между переменными величинами иногда выражают так: путь пропорционален времени (т. е. изменение пути зависит от изменения времени: с увеличением времени в несколько раз и путь увеличивается во столько же раз, и наоборот), стоимость материи пропорциональна количеству её (опять пояснить) и т. п. Таким образом вводится термин «пропорционально». Теперь надо истолковать его в том смысле, которое он имеет в данной задаче. Это можно сделать так: сообщить учащимся, что последняя задача точно такая же, как и все предыдущие задачи на деление данного числа, и предложить им самим сформулировать её. Учащиеся это сделают довольно легко: число 720 разделить на две части так, чтобы они относились, как 13 : 5. Дальше решение пойдёт по известному плану.

V тип. Задачи, в которых надо данное число разделить обратно пропорционально числам:

1) m и n;
2) m, n, и p и т. д.

Задачи этого типа ничем не отличаются от задач III типа. При решении первой задачи опять надо истолковать новый термин обратно пропорционально как выражение «в отношении, обратном данным числам».

VI тип. Задачи, в которых известно отношение частей и:
1) размер одной из них или
2) сумма или разность двух чисел.

Например.

Задача 1. «Три числа относятся, как 3 : 5 : 8; третье число равно 112. Вычислить два первых числа».

$x:y:z=3:5:8$	x—3 пая	8 паёв—112
$z=112$	y—5 паёв	
	z—8 паёв	1 пай—$\frac{112}{8}=14$

$x=14\cdot3=42$	$x=42$
$y=14\cdot5=70$	$y=70$

З а д а ч а 2. «Отношение двух чисел равно отношению 9,3 : 0,8. Одно число больше другого на 34. Найти это число».

$x:y=9,3:0,8$	$x:y=93:8$	$x-y=34$
$x-y=34$	x—93 пая	$93-8=85$ (на 85 паёв
	y—8 паёв	первое число содержит
		больше второго)

По условию задачи:

85 паёв составляют 34;

$34:85=\frac{2}{5}$ $\left(\frac{2}{5}\right.$ приходится на 1 пай$\left.\right)$.

$$x=\frac{2}{5}\cdot 93=37,2 \quad\Big|\quad x=37,2$$

$$y=\frac{2}{5}\cdot 8=3,2 \quad\Big|\quad y=3,2$$

VII т и п. Сложные задачи с конкретным содержанием, в которых надо число разделить пропорционально двум рядам чисел. Например:

«Три бригады рабочих получили вместе 1 008 руб. Первая бригада состояла из 8 человек и работала 5 дней; вторая бригада состояла из 7 человек и работала 8 дней, а третья состояла из 12 человек и работала 4 дня. Какую сумму денег получила каждая бригада?»

Условие задачи:

1 008 руб.

I бригада	—8 человек	—5 дней	x руб.
II »	7 »	8 »	y руб.
III »	12 »	4 »	z руб.

Предполагая, что каждая бригада работала одинаковое число дней, надо 1 008 разделить прямо пропорционально числу рабочих в каждой бригаде, т. е.

$$x:y:z=8:7:12.$$

Предполагая, что в каждой бригаде было одно и то же число рабочих, надо 1 008 разделить прямо пропорционально числу рабочих дней, проработанных каждой бригадой в отдельности, т. е.

$$x:y:z=5:8:4.$$

Таким образом, число 1 008 надо разделить пропорционально двум рядам чисел:

$$x:y:z=8:7:12;$$

$$x:y:z=5:8:4.$$

Если число рабочих дней, проработанных каждой бригадой, умножить на число рабочих той же бригады, то в результате получится число рабочих дней, которое потребуется одному рабочему каждой бригады для выполнения той же работы, какую выполнила вся бригада за все указанные дни:

I бригада — $5\cdot 8$;
II » — $8\cdot 7$;
III » — $4\cdot 12$.

Это приведение к единице (за единичный размер принимается один рабочий).

Если в полученных произведениях переставить сомножители, то новые произведения можно истолковать так: $8\cdot 5$, $7\cdot 8$ и $12\cdot 4$ — суть числа, измеряющие количества рабочих для выполнения в один день той работы, которую делает каждая бригада в указанное число дней. Это тоже приведение к единице, но за единичный размер принимается один рабочий день (один «человекодень»).

В том и другом случае получается один ряд чисел, пропорционально которым надо разделить число 1 008:

$$x:y:z=(5\cdot8):(8\cdot7):(4\cdot12);$$
$$x:y:z=(8\cdot5):(7\cdot8):(12\cdot4).$$

Дальнейший ход решения задачи ясен:

$$x:y:z=5:7:6 \text{ (после сокращения на 8).}$$

После того как учащиеся научатся решать такие задачи с конкретным содержанием, в которых приходится создавать особые сложные «единицы»: «человекодень», «рабочий день», «тонно-километр» и т. п., можно перейти к решению таких задач с конкретным содержанием, в которых сложную единицу трудно назвать каким-нибудь словом. Но общий приём решения таких задач уже создан: для того чтобы данное число разделить пропорционально двум рядам чисел, надо эти числа соответственно перемножить и данное число разделить пропорционально полученным произведениям.

Например: «Три колхоза условились разделить расходы по починке моста пропорционально числу дворов и обратно пропорционально расстоянию каждого колхоза от моста. Как им распределить расход в 553 руб. 20 коп., если в первом колхозе было 84 двора, а расстояние до моста 3 *км*; во втором колхозе 156 дворов, а расстояние до моста 2,6 *км*; в третьем 56 дворов, а расстояние до моста $1\frac{3}{4}$ *км*?»

$$\left.\begin{array}{l}\text{I колхоз — 84 двора — 3 км — } x \text{ руб.}\\ \text{II } \text{ » — 156 дворов — 2,6 км — } y \text{ руб.}\\ \text{III } \text{ » — 56 } \text{ » — } 1\tfrac{3}{4} \text{ км — } z \text{ руб.}\end{array}\right\}\ 553 \text{ руб. } 20 \text{ коп.}$$

Рассуждая так же, как и при решении предыдущей задачи, учащиеся составят и запишут два сложных отношения:

$$x:y:z=84:156:56;$$

$$x:y:z=\frac{1}{3}:\frac{10}{26}:\frac{4}{7}=91:105:156.$$

Затем учащиеся, как это им уж известно, должны из полученных сложных отношений образовать одно новое сложное отношение: $x:y:z=(84\cdot91):(156\cdot105):(56\cdot156)=7:15:8$, и дальше решают по ранее выработанному плану.

Заключительная работа по изучению пропорциональных величин должна состоять в решении смешанных задач, когда учащиеся сами должны определить способ решения каждой задачи, проводя предварительный анализ данных величин и существующей зависимости между ними.

ГЛАВА VIII

ПРОПОРЦИИ

1. Пропорции в курсе арифметики

Когда заходит речь о пропорциях, то под этим термином всегда разумеется только кратная или геометрическая пропорция, состоящая из кратных отношений, в отличие от разностной или арифметической пропорции, которая состоит из разностных отношений; в настоящее время последние пропорции совсем не рассматриваются в курсе элементарной арифметики.

Члены пропорции могут быть обозначены или буквами или числами. В последнем случае пропорции называют числовыми пропорциями; такие и только такие пропорции преимущественно рассматриваются в курсе арифметики. Буквенные пропорции изучаются в курсе алгебры.

Числовые пропорции в курсе арифметики тесно и непосредственно связаны или с отношениями, равенство которых и приводит к понятию пропорции, или с понятием о пропорциональных величинах; с другими вопросами того же курса они не имеют почти никакой связи.

При изучении пропорций в курсе арифметики желательно и необходимо ввести запись их с помощью букв. В предыдущем изложении широко рекомендовалось вводить, как обобщение, буквенные записи при изучении действий над целыми и дробными числами: запись самих действий, основных законов этих действий, запись отношений. Буквенная запись последних естественно должна подвести к необходимости и возможности записи пропорций тоже с помощью букв.

2. Примерный план изучения пропорций

1. Если понятие пропорции вводится после изучения пропорциональных величин, то оно постепенно создаётся в связи с решением задач на тройное правило, содержащих только прямо пропорциональные, а потом и обратно пропорциональные величины.

Если же изучение пропорций предшествует изучению пропорциональных величин (как это указано в программе по арифметике, как этот материал расположен в учебниках арифметики и как это делается в большинстве случаев в практике школы), то план работы будет другой: сначала надо ввести понятие о переменных и постоянных величинах, входящих в одну и ту же задачу, запись изменения каждой переменной величины в виде отношений, установление зависимости между изменениями этих величин и запись равенства двух равных отношений, что и приводит к получению пропорций.

Независимо от того, каким образом получено понятие пропорции, дальнейшее изучение пропорций идёт по одному и тому же плану. В процессе работы учащиеся знакомятся с двумя способами записи пропорций: в виде записи действия деления, а потом и в виде дробей. Сообщаются названия членов пропорции: учащиеся приучаются читать пропорцию не механически (12 относится к 3 и т. д.), а по смыслу, сначала не употребляя слова «относится» (12 больше 3 во столько раз и т. д.). Только после того, когда они освоятся со структурой пропорции в строчечной записи, можно показать им и запись в виде дроби, приучая и в этой записи различать крайние и средние члены пропорции.

После рассмотрения целого ряда числовых пропорций можно ввести буквенную запись их; учащиеся будут подбирать соответствующие числовые значения входящих букв.

2. Главное или основное свойство пропорции сначала выявляется путём непосредственной проверки в нескольких пропорциях, а затем может быть дано путём рассуждений и объяснение этого свойства. Преподаватель может дать и более общее доказательство того же свойства пропорции, записанной с помощью букв, если найдёт это возможным и необходимым. Обязательно надо рассмотреть обратную задачу о том, что четыре числа, парные произведения которых равны, могут быть членами одной и той же пропорции.

3. Второе важнейшее свойство пропорций, вытекающее из основного свойства, — это переместительное свойство их членов. Нет смысла в курсе арифметики заставлять учащихся получать все восемь видов пропорции; но зато они должны отчётливо понимать возможность перемещения членов пропорции в определённом порядке. В связи с этим может быть дано понятие и о коэффициенте пропорциональности.

4. Как применение главного свойства пропорции дальше идёт изучение основных преобразований пропорции — сокращение членов её и замена дробных членов целыми числами.

5. Из того же главного свойства вытекают и отвлечённые задачи на решение пропорций, т. е. определение одного из членов её, если известны остальные три члена.

6. Последние приёмы применяются к решению задач с конкретным содержанием, преимущественно на тройное правило — простое и сложное, а также некоторых типов задач на процентные вычисления.

3. Понятие о пропорции

Понятие о пропорции вводится в связи с решением задач, содержащих пропорциональные величины.

Задача. «Поезд при равномерном движении делает 40 *км* в час. Какой путь *он пройдёт в 2 часа? в 5 час.? в 6 час.? в 8 час.? в 10 час.? в 12 час.?* и т. д.»

Такие задачи уже неоднократно решались: в первой колонке записывается решение задачи, которое выполняется устно, во второй — отношение чисел, измеряющих время, в третьей — отношение чисел, измеряющих пройденные пути, в четвёртой — равенство полученных отношений.

1) 1 час — 40 *км*	2) и 1) $2:1=2$	$80:40=2$	$2:1=80:40$
2) 2 часа— 80 *км*	3) и 2) $5:2=2\frac{1}{2}$	$200:80=2\frac{1}{2}$	$5:2=200:80$
3) 5 час.—200 *км*	4) и 2) $6:2=3$	$240:80=3$	$6:2=240:80$
4) 6 час.—240 *км*	5) и 2) $8:2=4$	$320:80=4$	$8:2=320:80$
5) 8 час.—320 *км*	7) и 5) $12:8=1\frac{1}{2}$	$480:320=1\frac{1}{2}$	$12:8=480:320$
6) 10 час.—400 *км*	и т. д.	и т. д.	и т. д.
7) 12 час.—480 *км*			
и т. д.			

Все колонки учащиеся заполняют последовательно в процессе беседы, в которой выясняется, что:

1) в задачу входят две величины — время и путь;

2) время и путь — переменные величины (почему?);

3) обе эти величины связаны пропорциональной зависимостью (какой? что это значит?);

4) разница в изменениях этих величин: числовые значения времени **даны** в этой задаче, а вообще время изменяется, т. е. принимает различные числовые значения, независимо от пути, пройденного телом, тогда как путь изменяется в зависимости от изменения времени (т. е. числовые значения пути вычисляются в зависимости от числовых значений времени);

5) время называется **независимой** переменной величиной, а путь — **зависимой** (от времени);

6) как выразить словами и записать изменение времени:

а) время увеличивается вдвое: $2:1=2$;

б) « » в $2\frac{1}{2}$ раза: $5:2=2\frac{1}{2}$

и т. д. (эти отношения записываются во второй колонке);

7) как выразить словами и записать изменение пути:

а) путь увеличивается вдвое: $80:40=2$;

б) » » в $2\frac{1}{2}$ раза: $200:80=2\frac{1}{2}$

и т. д. (эти отношения записываются в третьей колонке);

8) в соответствующих строчках эти отношения равны, что и записывается в четвёртой колонке;

9) чтение каждой записи по смыслу:

а) 2 больше одного во столько же раз, во сколько 80 больше 40 (в два раза);

б) 5 больше двух во столько же раз, во сколько 200 больше 80 (в $2^1/_2$ раза) и т. д.;

10) каждое равенство состоит из двух отношений; оно называется **пропорцией**.

Даётся определение: **пропорция есть равенство** двух отношений (**равенство**, как два выражения, записанные с помощью знака равенства)

Это определение повторяется несколько раз разными учащимися.

По такому же плану решаются ещё одна или две задачи. Учащиеся составляют несколько отношений числовых значений одной и другой величины, выбирают соответствующие равные отношения и записывают их в виде равенства, которые опять называют пропорциями.

Затем разбирается структура пропорции: повторяется определение её и вводится терминология:

1) члены обоих отношений сохраняют свои прежние названия с указанием порядка отношения: предыдущий член первого отношения, последующий член второго отношения и т. п.;

2) те же члены обоих отношений в пропорции называются ещё и по-новому: **крайние** члены (предыдущий член первого отношения и последующий член второго отношения) и **средние** члены (последующий член первого отношения и предыдущий член второго отношения).

Чтобы завершить выяснение понятия о пропорции, надо решить ещё одну задачу такого же типа, повторить вкратце все сделанные ранее выводы и закрепить их повторными формулировками. Такое повторение даст возможность преподавателю проверить усвоение материала, обнаружить пробелы и во-время восполнить их. Но в ту же самую работу надо внести и новый материал, новый не по существу, а по форме: запись пропорций надо вести теперь и в виде дробей $\left(\frac{a}{b} = \frac{c}{d}\right)$. Учащиеся вновь упражняются в различении членов пропорции при записи её в виде дроби; иногда можно соединять стрелкой крайние члены в одних пропорциях и средние члены в других и проверять получаемые результаты при записи пропорций в виде строчки, где крайние и средние члены на самом деле стоят по краям или в середине.

В связи с этой работой учащиеся продолжают упражняться и в чтении пропорций по смыслу: 12 больше 3 во столько же раз, во сколько 20 больше 5, или 8 составляет от 12 такую же часть, какую 2 составляет от 3, и т. п.

Теперь накопился такой большой набор числовых пропорций, что своевременно познакомить учащихся с буквенной записью их. Учащиеся повторяют определение пропорции, определение отношения, припоминают запись отношения с помощью букв и воспроизводят эту запись: $a : b = q$. Преподаватель предлагает учащимся заменить буквы a и b сначала одной парой чисел и найти отношение их $\left(\text{например, } 5 : 7 = \frac{5}{7}\right)$, а затем подобрать другую пару чисел так, чтобы их отношение тоже было равно $\frac{5}{7}$ $\left(\text{например, } 15 : 21 = \frac{5}{7}\right)$. Затем преподаватель предлагает учащимся записать последнее отношение новыми буквами; при этом они должны помнить, что второе числовое отношение равно первому, а потому запись может быть в таком виде: $c : d = q$. Теперь видно, что два отношения записаны разными буквами ($a : b$ и $c : d$), но они равны ($q = q$), а потому оба эти отношения можно записать в виде одного равенства двух отношений — в виде пропорции

($a:b=c:d$). Учащиеся называют члены каждого отношения, члены пропорции и затем подбирают числовые значения для каждой пары букв.

Преподаватель заставляет учащихся читать пропорцию, записанную в общем виде:

a больше b во столько раз, во сколько c больше d, или a составляет от b такую же часть, какую c составляет от d; теперь можно читать буквенную пропорцию в более общей форме, как это делается в большинстве случаев при чтении пропорций, а именно: a относится к b так же, как c относится к d.

Буквенные пропорции должны записываться и в виде одной строчки с помощью знака деления — двоеточия — и в виде дробей $\left(a:b=c:d \text{ или } \frac{a}{b}=\frac{c}{d}\right)$; завершается вся работа решением задач на составление пропорций, чтением их (по смыслу) и проверкой.

1. Подобрать к трём данным числам четвёртое число так, чтобы получилась пропорция (пользуясь смысловым чтением данной пропорции):

$$12:3=20:x; \quad 35:x=14:2;$$

$$18:36=x:10; \quad x:13=40:20 \text{ и т. д.}$$

2. К данному отношению двух чисел подобрать равное ему отношение двух других чисел:

$$18:6=x:y.$$

3. Составить несколько (две, три или более) пропорций, подбирая три числа к данному числу:

$$24:b=c:d.$$

4. Из данных отношений составить пропорции: $12:6$; $15:3$; $27:13{,}5$; $20:4$ и т. п.

5. Проверить данные записи равенства отношений, сравнивая величину их (перечеркнуть знак равенства в неверных равенствах).

4. Главное свойство пропорции

Главное или основное свойство пропорции учащиеся выявляют сначала непосредственным перемножением как крайних, так и средних членов пропорции, пользуясь для этой цели данными числовыми пропорциями.

По предложению преподавателя они записывают в первой колонке данные пропорции, называют или указывают крайние члены их и записывают произведение их во второй колонке, а в третьей — произведение средних членов. Учащиеся сопоставляют оба произведения, видят равенство их и в четвёртом столбике записывают р а в е н с т в о обоих произведений:

$35:7=15:3$	$35\cdot3=105$	$7\cdot15=105$	$35\cdot3=7\cdot15$
$39:13=57:19$	$39\cdot19=741$	$13\cdot57=741$	$39\cdot19=13\cdot57$
$21:84=2:8$	$21\cdot8=168$	$84\cdot2=168$	$21\cdot8=84\cdot2$
и т. д.	и т. д.	и т. д.	и т. д.

Точно так же обрабатываются следующие пропорции, записанные в первой колонке. После этого учащиеся делают общий обзор всей записи:

1) в первой колонке записаны пропорции;

2) во второй колонке записаны произведения крайних членов каждой пропорции;

3) в третьей колонке записаны произведения средних членов каждой пропорции;

4) в четвёртой колонке записаны равенства: произведение крайних членов каждой пропорции равно произведению средних членов её. Учащиеся по очереди прочитывают каждое равенство в четвёртой колонке и таким образом повторяют словесную формулировку этого свойства пропорции.

Затем следует решение задач, в которых требуется проверить правильность данных пропорций, пользуясь новым свойством их. Преподаватель заставляет учащихся повторять это свойство пропорции, не допуская таких небрежных выражений, как: «крайние члены пропорции равны средним».

Более или менее строгое доказательство основного свойства пропорций вообще мало доступно и непонятно учащимся, особенно если пользоваться только числовыми пропорциями. «На этом доказательстве оправдывается общее свойство всех математических доказательств, проходимых с учениками без достаточной математической подготовки (их):... подлежащее доказательству часто яснее самого доказательства» [1]. Однако ограничиться только проверкой основного свойства на нескольких примерах выбранных пропорций тоже нежелательно. Поэтому в учебниках арифметики и в некоторых методических руководствах излагаются различные приёмы для вывода основного свойства пропорции. Один из этих приёмов состоит в следующем. Прежде всего припоминается соглашение о том, что на запись $\left(\frac{2}{3}:5\right)$ можно смотреть двояко: как на требование выполнить действие деления, а также как на результат, полученный при делении, т. е. как на отношение. Поэтому, если дана пропорция $2:15=\frac{2}{3}:5$, то первое отношение можно рассматривать как запись действия деления, а второе — как запись частного; тогда $2=15\cdot\left(\frac{2}{3}:5\right)$ или $2=\left(15\cdot\frac{2}{3}\right):5$ (свойство сочетательности деления); теперь $15\cdot\frac{2}{3}$

[1] Шохор-Троцкий, Методика арифметики, 1935, стр. 229.

является делимым, 5 — делителем и 2 — частным, а потому $15 \cdot \frac{2}{3} = 2 \cdot 5$. Сопоставляя эту запись с записью данной пропорции, учащиеся убеждаются в справедливости нового свойства [1].

Эти же рассуждения можно провести и в том случае, если будет дана пропорция в буквенной записи ($a : b = c : d$).

В приведённых рассуждениях трудность для учащихся состоит в том, что одно и то же арифметическое выражение — $a : b$ или $c : d$ — приходится рассматривать то как требование выполнить указанное действие, то как результат выполненного действия.

Существует и другой довольно распространённый приём вывода основного свойства пропорции:

$$a : b = c : d = q \quad (q \text{ — величина отношения}).$$

Поэтому: $a : b = q \mid a = b \cdot q$; После перемножения

$c : d = q \mid d = c : q$ получается: $a \cdot d = b \cdot c$.

Этот приём строго формальный, но мало понятный учащимся.

Вслед за этим они решают обратные задачи, т. е. составляют пропорции из четырёх данных чисел, если парные произведения их, составленные определённым образом, равны (что приводит к выводу и формулировке обратного свойства пропорции).

5. Применение основного свойства пропорции при проверке и при простейших преобразованиях их

а) Проверка пропорции

Учащиеся решают задачи, в которых требуется «проверить» данные пропорции. Теперь они эту проверку проводят двумя способами: а) вычисляют каждое отношение и сравнивают их попарно; б) вычисляют произведение крайних, а потом произведение средних членов и сравнивают эти произведения (в неверных равенствах перечёркивается знак равенства). Например:

$18:6 = 24:8$	$18:6 = 3$ $24:8 = 3$	$18 \cdot 8 = 6 \cdot 24$	Пропорция верна
$15:5 \neq 12:6$ и т. д.	$15:5 = 3$ $12:6 = 2$	$15 \cdot 6 \neq 5 \cdot 12$	Пропорция не верна

б) Сокращение пропорций

Сокращение пропорций и замена дробных членов её целыми числами непосредственно вытекают из соответствующих преобразований кратных отношений; эти преобразования значительно упрощают многие вычисления при решении пропорций.

[1] Березанская, Методика арифметики, 1934, стр 1?8.

Данные пропорции	Проверка пропорции	Какие члены сокращаются	Новые пропорции	Проверка их	Что изменяется при этом
1) $36:12 = 63:21$	$36:12 = 63:21 = 3$ $36\cdot21 = 12\cdot63 = 756$	Все члены на 3	$12:4 = 21:7$	$12:4 = 21:7 = 3$ $12\cdot7 = 4\cdot21 = 84$	Произведение уменьшилось в 9 раз
2) $0,18:0,3=12:20$	$18:30=12:20=\frac{3}{5}$ $0,18\cdot20=0,3\cdot12=3,6$	Первое отношение на 3 Второе отношение на 4	$0,06:0,1 = 3:5$	$6:10 = 3:5 = \frac{3}{5}$ $0,06\cdot5 = 0,1\cdot3 = 0,3$	Произведение уменьшилось в 12 раз
3) $\frac{3}{4}:\frac{5}{12}=\frac{9}{25}:\frac{1}{5}$	$\frac{3}{4}:\frac{5}{12}=\frac{9}{25}:\frac{1}{5}=\frac{9}{5}$	Предыдущие члены обоих отношений на 3	$\frac{1}{4}:\frac{5}{12}=\frac{3}{25}:\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}:\frac{5}{12}=\frac{3}{25}:\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$	Отношение уменьшилось в 3 раза
	$\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5}=\frac{5}{12}\cdot\frac{9}{25}=\frac{3}{20}$			$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}=\frac{5}{12}\cdot\frac{3}{25}=\frac{1}{20}$	Произведение уменьшилось в 3 раза
4) $5:4 = 2:1,6$	$5:4 = 20:16 = \frac{5}{4}$	Последующие члены обоих отношений на 4	$5:1 = 2:0,4$	$5:1 = 20:4 = 5$	Отношение увеличилось в 4 раза
	$5\cdot1,6 = 4\cdot2 = 8$			$5\ 0,4 = 1\cdot2 = 2$	Произведение уменьшилось в 4 раза

Сокращение пропорций вообще не представляет каких-либо больших затруднений для учащихся; но есть отдельные случаи, которые с большим трудом усваиваются ими, а потому на практике, к сожалению, почти никогда не применяются: сокращение одних предыдущих членов обоих отношений или одних последующих. Вся эта работа должна строиться на решении достаточно большого числа упражнений, которые можно расположить примерно в такой последовательности:

1) сокращение членов только одного отношения — первого или второго (повторение с объяснением);

2) сокращение всех членов пропорции на одно и то же число;

3) сокращение членов первого отношения на одно число, а членов второго — на другое;

4) сокращение только предыдущих членов обоих отношений или только последующих;

5) сокращение предыдущих членов на одно число, а последующих — на другое число.

Общий характер работы изложен в таблице (см. стр. 263).

в) Замена дробных членов целыми числами

Преподаватель даёт одну или несколько пропорций и предлагает учащимся повторить предыдущую работу, заменяя деление членов пропорции умножением их.

На основании этой работы учащиеся могут сформулировать соответствующие правила о том, что или все члены пропорции или только члены пропорции, попарно взятые в определённом порядке, можно умножать на одно и то же число.

Сопоставляя эти правила с правилами сокращения пропорции на одно и то же число, учащиеся могут дать более общую формулировку выведенных свойств пропорции: если все члены пропорции или только члены, попарно взятые в определённом порядке, умножить или разделить на одно и то же число, не равное 0, то пропорция останется верной.

Ещё резче запечатлеется это свойство пропорции, если учащимся дать такие упражнения:

1) в данной пропорции члены первого отношения умножить на одно и то же число, а члены второго отношения разделить на то же или на другое число (или наоборот);

2) в данной пропорции предыдущие члены умножить на одно и то же число, а последующие члены разделить на то же или на другое число (или наоборот);

3) в данной пропорции предыдущий член первого отношения умножить на некоторое число, а последующий член второго отношения разделить на то же число.

После такой подготовки можно перейти к замене дробных членов пропорции целыми числами. Изучение этого преобразования тоже надо вести на решении большого числа упражнений, которые можно расположить в некоторой последовательности.

1) В состав пропорции входит только один дробный член, например:

$\frac{3}{5}:2=6:20$	$\frac{3}{5}\cdot 20=2\cdot 6=12$	$3:10=6:20$	$3\cdot 20=10\cdot 6=60$
$4:\frac{3}{7}=56:6$	$4\cdot 6=\frac{3}{7}\cdot 56=24$	$28:3=56:6$	$28\cdot 6=3\cdot 56=168$
$4:6=\frac{8}{3}:4$	$4\cdot 4=6\cdot\frac{8}{3}=16$	$4:6=8:12$	$4\cdot 12=6\cdot 8=48$
$27:12=1:\frac{4}{9}$	$27\cdot\frac{4}{9}=12\cdot 1=12$	$27:12=9:4$	$27\cdot 4=12\cdot 9=108$

Учащиеся сначала проверяют правильность каждой пропорции (записывается во второй колонке), потом отмечают наличие одного дробного члена в ней, который, в частности, затрудняет вычисления при проверке пропорции, и с помощью преподавателя изыскивают способы замены дробного члена целым числом: или умножают каждый член соответствующего отношения на знаменатель дроби (как это сделано во всех данных решениях), или же умножают на тот же знаменатель только предыдущие члены обоих отношений (в первом или третьем примерах: $3:2=30:20$ и $12:6=8:4$) или только последующие (во втором и четвёртом примерах: $4:3=56:42$ и $27:108=1:4$).

2) В состав пропорции входят два дробных члена только в одном отношении, например:

$$40:8=4{,}2:0{,}84;$$
$$3{,}5:0{,}7=15:3.$$

3) Пропорция содержит два дробных члена в разных отношениях — или предыдущие или последующие, например:

$\frac{3}{7}:4=\frac{15}{28}:5$	$3:28=15:140$	или	$12:4=15:5$
$3:\frac{5}{9}=8:1\frac{13}{27}$	$27:5=216:40$		$3:15=8:40$

4) В пропорцию входят два дробных члена — оба крайние или оба средние, например:

$\frac{8}{9}:30=2:67\frac{1}{2}$	$8:270=4:135$
$9:\frac{5}{8}=28\frac{4}{5}:2$	$72:5=144:10$

5) В пропорцию входят три дробных члена, например:

$$\frac{8}{15}:\frac{2}{5}=1\frac{1}{3}:1.$$

6) В пропорцию входят четыре дробных члена, например:

$$\frac{3}{8}:\frac{1}{4}=\frac{15}{16}:\frac{5}{8}.$$

г) Переместительное свойство членов пропорции

Переместительное свойство членов пропорции в курсе арифметики имеет преимущественно образовательное значение и очень редко применяется практически при решении задач. Поэтому изучать этот вопрос в полном объёме нет особой необходимости. Познакомить же учащихся с возможностью перемещения членов пропорции в определённом порядке и с возможностью получения новых пропорций необходимо. С этой целью преподаватель предлагает учащимся числовую пропорцию: $42:7=12:2$. Они определяют величину отношения ($k=6$) как коэффициент пропорциональности данных четырёх чисел, входящих в пропорцию в указанном порядке (этот термин можно ввести здесь), вычисляют произведение крайних и средних членов пропорции (84). Затем они припоминают, что произведение не изменяется при перемещении сомножителей, а потому числа 42 и 2 (крайние члены данной пропорции) можно переставить в пропорции, причём произведение крайних членов, как и прежде, будет равно произведению средних; следовательно, получится новая верная пропорция ($2:7=12:42$) и каждое отношение её будет равно $\frac{2}{7}$, а не 6, как было в данной пропорции.

То же рассуждение повторяется при рассмотрении произведения средних членов; создаются новые пропорции: $42:12=7:2$ (из данной пропорции: $\kappa=3\frac{1}{2}$, а не 6) и $2:12=7:42$ $\Big($из второй или новой пропорции: $\kappa=\frac{1}{6}$, а не $\frac{2}{7}\Big)$. Таким образом, из данной пропорции получено три новых пропорции; произведение крайних и средних членов во всех пропорциях равно 84, а отношения в них разные $\left(6, \frac{2}{7}, 3\frac{1}{2} \text{ и } \frac{1}{6}\right)$. Можно обратить внимание учащихся на то, что отношения в первой и последней пропорциях, а также во второй и третьей,— числа взаимно обратные $\left(6 \text{ и } \frac{1}{6}, \frac{2}{7} \text{ и } \frac{7}{2}\right)$; это легко объяснить, рассматривая каждое отношение как деление или как дробь. Учащиеся могут сформулировать это свойство пропорции: в каждой пропорции можно перемещать или только крайние члены, или только средние, или те и другие одновременно.

На этом, в сущности, можно закончить данную работу. Если преподаватель найдёт возможным и полезным продолжить её, то он может сделать только одно указание — переменить места отношений в данной или в четвёртой пропорции ($12:2=42:7$ или $7:42=2:12$), а учащиеся сами могут повторить предыдущую работу. Таким образом, они убеждаются, что из данной пропорции можно получить семь новых пропорций.

Если учащиеся в порядке домашней самостоятельной работы повторят эту работу на одной или двух пропорциях, они в достаточной мере усвоят технику перестановки членов её и в дальнейшем будут свободно делать это.

Эту же работу можно провести на буквенных пропорциях.

д) Решение пропорций

Наиболее широкое применение главное свойство пропорции имеет при решении пропорций, т. е. при нахождении неизвестного члена её, например: $45:15=21:x$. Учащиеся уже решали такие задачи, когда они к трём данным числам подбирали четвёртое число, чтобы составить пропорцию (способом подбора чисел или разных проб). Теперь они снова пытаются решать их теми же способами, которые применяли и раньше, но убеждаются, что эти методы не всегда годятся. Тогда преподаватель предлагает им записать основное свойство пропорции, после чего искомый член пропорции станет множителем, который нетрудно будет определить по произведению и другому множителю.

По степени трудности все задачи на пропорции можно разбить на две группы: 1) в первую должны войти такие пропорции, в которых неизвестным членом пропорции служит x, т. е. член, обозначенный одной буквой, например:

$$7:14=9:x$$
$$54:27=x:300$$
$$21:x=36:12$$
$$x:12=75:15 \text{ и т. п.}$$

2) во вторую группу войдут такие пропорции, в которых искомый член имеет более сложное строение: x является компонентом суммы, разности, произведения или частного в одном из членов пропорции:

$$4{,}5:3x=4:28 \qquad 7:3=(x+3):75$$
$$\frac{x}{2}:\frac{3}{4}=2\frac{1}{2}:\frac{1}{8} \qquad 45:18=180:(x-1) \text{ и т. п.}$$

Примерное решение нескольких задач первой группы.

Задача 1. «Найти неизвестный член пропорции: $230:92=185:x$».

Учащиеся попытаются путём подбора найти неизвестный член пропорции. Но все их попытки в этом случае окажутся неудачными. Тогда преподаватель напоминает им о главном свойстве пропорции и предлагает записать его:

$$230\cdot x=92\cdot 185.$$

Учащиеся анализируют полученную запись:

1) в левой части равенства записано произведение крайних членов пропорции, а в правой — произведение средних членов её;

2) неизвестный крайний член пропорции теперь является множителем;

3) x, как множитель, равен произведению, делённому на другой множитель; за произведение принимается $92\cdot 185$, а другой множитель есть 230:

$$x=\frac{92\cdot 185}{230};$$

4) вычисление не встречает затруднений:

$$x=\frac{\overset{2}{92}\cdot\overset{37}{185}}{\underset{\underset{1}{46}}{230}};\quad x=74;$$

5) поверкой учащиеся завершают эту работу:

а) $230:92=185:74$;
б) $230\cdot 74=92\cdot 185=27\,020$;

в) $\begin{cases} 230:92=2\frac{1}{2}\,; \\ 185:74=2\frac{1}{2}\,. \end{cases}$

В первой записи строчка оставляется без всяких преобразований для того, чтобы по ней можно было проанализировать процесс нахождения неизвестного крайнего члена пропорции и сформулировать соответствующее правило:

$$x=\frac{92\cdot 185}{230}\,;$$

неизвестный крайний член пропорции равен произведению средних членов её, делённому на другой крайний член (известный).

Учащиеся решают ещё несколько таких задач, в которых требуется найти неизвестный крайний член пропорции, после чего делают обзор всех решённых пропорций и формулируют правило.

По такому же плану решаются пропорции, в которых один из средних членов неизвестен.

Для дальнейшего развития и закрепления навыков в решении пропорций надо давать сначала такие же примеры, но в разбивку, т. е. так, чтобы в одних пропорциях неизвестные члены стояли на месте крайних, а в других — на месте средних. Затем и эта работа должна усложняться постепенным введением в пропорцию дробных членов — в виде обыкновенных и десятичных дробей — сначала одного, потом двух и трёх, например:

$$12:x=4:1{,}8$$
$$3{,}6:12=2{,}1:x$$
$$x:3{,}6=1\frac{3}{4}:0{,}7 \text{ и т. п.}$$

Решение этих задач можно выполнять по-разному. Так, можно предварительно заменять дробные члены пропорции целыми числами:

$$12:x=40:18; \quad x=\frac{\overset{3}{12}\cdot 18}{\underset{10}{40}}\,; \quad x=\frac{54}{10}\,; \quad x=5{,}4.$$

Можно сразу записывать десятичные дроби в числителе и в знаменателе:

$$3{,}6:12=2{,}1:x; \quad x=\frac{\overset{1}{12\cdot 2{,}1}}{\underset{\underset{1}{3}}{3{,}6}}\,; \quad x=7.$$

Если в пропорцию входят обыкновенные и десятичные дроби, можно поступать в каждом отдельном случае по-разному: или обыкновенные дроби предварительно обращать в десятичные, или все дроби записать в виде обыкновенных, например:

$$x:3{,}6=1\frac{3}{4}:0{,}7;\quad x=\frac{3{,}6\cdot\overset{2{,}5}{\cancel{1{,}75}}}{\underset{1}{\cancel{0{,}7}}};\quad x=9.$$

$$x:3{,}6=1{,}75:0{,}7.$$

Вторая группа задач на решение пропорций представляет довольно большие затруднения для учащихся. Зато решение их, связанное с преодолением этих затруднений заставляет учащихся вспоминать основные зависимости между компонентами и результатами действий и непосредственно применять эти зависимости к решению пропорций.

Примеры решения таких пропорций

Задача 1. «Найти x, если $4{,}5:3x=4:28$».

Преподаватель обращает внимание учащихся на ту особенность данной пропорции, что неизвестный средний член её есть утроенное число x (учащиеся должны отчётливо выражать словами эту мысль). Затем он спрашивает правило для нахождения неизвестного среднего члена пропорции и помогает учащимся записать соответствующую формулу:

$$3x=\frac{4{,}5\cdot 28}{4}.$$

После сокращения дроби и вычисления произведения $(4{,}5\cdot 7)$ учащиеся получают такое равенство: $3x=31{,}5$. Дальше они рассуждают так:

$3x=31{,}5$;

x равен $\frac{31{,}5}{3}$ (в три раза меньше), т. е. $x=10{,}5$.

Задача 2. «Найти x, если $\frac{x}{2}:\frac{3}{4}=2\frac{1}{2}:\frac{1}{8}$».

Задача 3. «Найти x, если $7:3=(x+3):75$».

Задача 4. «Найти x, если $45:18=180:(x-1)$».

Все эти задачи решаются по тому же плану, что и первая задача.

6. Решение задач с применением пропорций

Преподаватель при изучении пропорций в курсе арифметики должен показать учащимся применение пропорций к решению задач, должен научить их решать соответствующие задачи методом пропорций, как это требуется программой, должен сравнить способ пропорций со способом приведения к единице, а затем предоставить самим учащимся выбор того или другого способа при решении задач на простое тройное правило.

Преподаватель предлагает решить задачу, содержащую прямо пропорциональные величины.

Задача 1. «41,4 *г* льда занимают объём в 46 *см*³. Определить объём льда весом в 18,9 *г*».

Учащиеся записывают схематически условие задачи:

41,4 *г* льда — 46 *см*³;
18,9 » — x

и тотчас же начинают решать её методом приведения к единице. Затем надо поставить ряд вопросов, с помощью которых они вновь проанализируют задачу.

1) *Сколько дано величин в этой задаче? Назовите их:* вес льда и объём его.

2) Какая зависимость между этими величинами?

3) Как изменяется вес льда? (Уменьшается.)

4) Как должен измениться объём льда? (Он тоже должен уменьшиться.)

5) Значит, x будет больше или меньше 46 *см*³? (Меньше.)

6) Во сколько раз x будет меньше 46? (Во столько же раз, во сколько 18,9 меньше 41,4.)

7) Как это можно записать?

$$(x:46=18,9:41,4).$$

8) Что мы получили? (Пропорцию.)

9) Все ли члены её известны?

10) Как найти неизвестный член этой пропорции?

Вся запись примет вид:

41,4 *г* льда—46 *см*³	$x:46=18,9:41,4$	**Ответ.** Кусок льда в 18,9 *г* имеет объём 21 *см*³
18,9 *г* » —x	$x=\frac{\overset{10}{46}\cdot\overset{2,1}{8,9}}{\underset{1}{\underset{4,6}{41,4}}}$	
	$x=21$	

Учащиеся повторяют процесс решения этой задачи.

Учащиеся решают ещё несколько задач, содержащих прямо пропорциональные величины с такими же объяснениями. Затем преподаватель даёт задачи, содержащие обратно пропорциональные величины. Все они решаются обязательно только новым методом — с помощью пропорций, чтобы учащиеся прочно усвоили его и научились применять к решению задач, содержащих как прямо, так и обратно пропорциональные величины.

Задача 2. «Для отопления дома приготовлено топливо на 60 дней при норме расхода в 700 *кг* на 1 день. На сколько дней хватит того же запаса топлива при ежедневном расходе в 525 *кг*?»[1].

Схема условия:	Решение:	
На 60 дней 700 *кг*	$x:60=700:525$	$x=80$
На x » 525 *кг*	$x=\frac{\overset{20}{60}\cdot\overset{4}{700}}{\underset{1}{\underset{3}{525}}}$	Запаса топлива хватит на 80 дней
Обратная пропорциональность	$x=80$	

Объяснение ведётся так: искомое число дней x больше 60 во столько раз, во сколько 700 больше 525 и т. д.

[1] Березанская, Сборник задач и упражнений по арифметике, 1938, № 1812.

В короткой заключительной беседе учащиеся, во-первых, устанавливают факт, что все последние задачи они решали с помощью пропорций, во-вторых, припоминают что раньше они решали такие же задачи приведением к единице. В связи с этим преподаватель даёт новую задачу: сначала решают её одним способом, а потом — другим, сравнивают оба решения и приходят к выводу: в первом способе сразу записывается решение задачи в виде одной строчки (или в виде формулы), а во втором способе сначала составляется пропорция, а потом она решается; решение пропорции служит решением и данной задачи.

Метод приведения к единице более короткий, удобный и чаще всего применимый в повседневной практической жизни. В дальнейшем учащиеся решают большое число задач, содержащих пропорциональные величины, преимущественно в порядке выполнения домашней самостоятельной работы, и при этом свободно выбирают тот или другой метод — метод пропорций или приведения к единице.

Задачи на сложное тройное правило преимущественно решаются способом приведения к единице. Однако сами учащиеся могут поставить вопрос о том, можно ли и эти задачи решать способом пропорции? Преподаватель должен провести на уроке решение нескольких задач на сложное тройное правило с помощью пропорций, привлекая к этой работе самих учащихся.

Например, решается такая задача:

«5 насосов в течение 3 час. подают 1 800 вёдер воды. Сколько воды подадут 4 таких же насоса в течение 4 час.?»

5 насосов—3 часа—1 800 вёдер;
4 насоса —4 » — x »

Процесс решения этой задачи состоит из трёх этапов.

1) Допускаем, что в первом и во втором случаях насосы работали в течение 3 часов, что можно записать так:

5 насосов—3 часа—1 800 вёдер	Время работы измеряется одним
4 насоса —3 » — x_1 »	и тем же числом

(3 часа), а потому его можно не принимать во внимание; таким образом, получается первая задача на простое тройное правило:

5 насосов—1 800 вёдер
4 насоса — x_1 »

Она решается способом пропорции так:

$x_1 : 1\,800 = 4 : 5$ и $x_1 = \frac{1\,800 \cdot 4}{5}$ (этот результат можно не вычислять).

2) Допускаем, что в первом и во втором случае работали только 4 насоса, которые в течение 3 часов подают x_1 вёдер воды; это условие можно записать так:

4 насоса 3 часа x_1 вёдер	Число насосов
4 » 4 » x »	одно и то же (4),

а потому его можно не принимать во внимание; получается вторая задача на простое тройное правило:

3 часа—x_1 вёдер	Она решается способом
4 » — x »	пропорции так:

$$x:x_1=4:3 \text{ и } x=\frac{x_1\cdot 4}{3}.$$

3) В последнюю запись вместо x_1 вставляется численное значение его из первой простой задачи $\left(x_1=\frac{1800\cdot 4}{5}\right)$:

$$x=\frac{1800\cdot 4\cdot 4}{5\cdot 3}.$$

После сокращения дроби и выполнения указанных действий получается искомое решение задачи: $x=\frac{\overset{120}{\cancel{1800}}\cdot 4\cdot 4}{\underset{1\cdot 1}{\cancel{5\cdot 3}}}$ и $x=1\,920$; (1920 вёдер воды подают 4 насоса в течение 4 часов).

Запись объяснения задачи при устных объяснениях принимает такой вид. Условие задачи.

5 насосов—3 часа—1 800 вёдер;
4 насоса —4 » — x »

Решение.

1) 5 насосов в 3 часа—1 800 вёдер	5 насосов 1 800 вёдер
4 насоса » 3 » — x »	4 насоса x_1 »

$$x_1:1\,800=4:5;$$

$$x_1=\frac{1800\cdot 4}{5}.$$

2) 4 насоса в 3 часа—x_1 вёдер	3 часа—x_1 вёдер
4 » » 4 » —x »	4 часа—x »

$$x:x_1=4:3;$$

$$x=\frac{x_1\cdot 4}{3}.$$

3) $x=\frac{1\,800\cdot 4\cdot 4}{\underset{1\cdot 1}{5\cdot 3}}$; $x=\frac{\overset{120}{1\,800}\cdot 4\cdot 4}{\underset{1\cdot 1}{5\cdot 3}}$; $x=1\,920$.

(1920 вёдер воды подают 4 насоса в течение 4 часов.)

Очень полезно одну-две задачи на сложное тройное правило решить в классе двумя способами — с помощью пропорций и приведением к единице—и сравнить эти способы. При этом учащиеся должны обратить внимание на тот факт, что конечная запись решения задач с помощью пропорций полностью совпадает с записью решения её приведением к единице.

ГЛАВА IX

РЕШЕНИЕ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

I. ЗАДАЧИ И ЗНАЧЕНИЕ ИХ В КУРСЕ АРИФМЕТИКИ

На изучение курса арифметики в советской средней школе отводится по учебному плану около 1 150 часов. Бóльшая часть этого времени в классной работе затрачивается на решение задач.

Кроме того, учащиеся ежедневно получают домашнее задание, основное и почти единственное содержание которого составляют тоже задачи; на самостоятельное решение их тем же учебным планом предусматривается в среднем 50% времени, отводимого на учебную работу в классе, т. е. ещё около 575 часов.

Эти данные свидетельствуют о том, что в процессе обучения арифметике в первых шести классах средней школы основная работа сводится к решению арифметических задач, что в свою очередь позволяет сделать вывод о важной роли и об огромном значении, которые имеют арифметические задачи в деле подготовки будущих строителей коммунистического общества.

И в дореволюционной школе арифметическим задачам уделялось много времени и внимания. При этом указывалось, что решение сложных текстовых задач имеет почти исключительно образовательное значение, так как содействует развитию логического мышления учащихся.

В настоящее время этому виду учебной работы придаётся большое значение как фактору, способствующему развитию диалектико-материалистического мышления и мировоззрения учащихся.

Само содержание текстовых арифметических задач, которое черпается из окружающей жизни, непосредственным образом помогает учащимся, во-первых, знакомиться с фактами действительной, реальной жизни (выполнение пятилетних планов народного хозяйства, великие стройки коммунизма, рост и развитие культурных мероприятий и т. п.) и, во-вторых, выяснять те связи, которые имеются между отдельными отраслями народного хозяйства и повышением жизненного и культурного уровня трудящихся (создание величайших в мире каналов и сверхмощных гидроэлектростанций позволяет осуществить орошение огромных площадей засушливых и пустынных земель, выполнение планов народного хозяйства приводит к снижению цен и т. д.).

Количественные показатели наших достижений как результаты, полученные при решении специально составленных и подобранных задач, при сравнении и сопоставлении их с соответствующими показателями дореволюционной России, а также с показателями в современных капиталистических странах, убеждают учащихся в преимуществах социалистического строя, пробуждают в них чувство национальной гордости за наши успехи и стремление самим стать достойными и полезными участниками в великом строительстве коммунистического общества.

1. Задачи и построение их

Задачей в широком смысле этого слова называется требование определить числовое значение искомой величины, зная, во-первых, числовые значения других величин, входящих в задачу, и, во-вторых, зависимости, которые связывают все эти величины между собой.

1. Построение задач

Из этого определения видно, что в каждую задачу входят: 1) числовые значения величин, которые называются данными или известными, 2) зависимости между величинами или так называемые условия и, наконец, 3) требование определить числовое значение искомой величины — искомое или неизвестное.

В одних задачах зависимости между данными и искомым или условия выражены в явной форме с помощью математических символов — знаков действий, например:

$$1)\ 3\frac{1}{2}+1\frac{1}{3}\cdot 2\frac{1}{4}=x.$$

$$2)\ \frac{12,4:8+1\frac{1}{2}\cdot\left(3\frac{1}{3}+7,5\right)}{12-7\frac{3}{5}}=x.$$

Такие задачи в практике школы называются числовыми примерами или упражнениями. Они преимущественно служат для развития и закрепления вычислительных навыков.

В других задачах те же самые зависимости между величинами могут быть выражены в словесной форме, обыкновенным разговорным языком — языком повседневной жизни и производственной деятельности человека. Например:

«В тираже на одну облигацию займа пал выигрыш в 500 руб., а на три других по 150 руб. Как велик весь выигрыш?»

Такие задачи, и только такие, принято называть задачами в собственном смысле этого слова; они называются также текстовыми задачами, или задачами с текстом.

Данные в этих задачах выражены числами, как и в примерах или упражнениях, зависимости между величинами — в словесной форме, а требование определить искомое значение одной из величин в форме вопроса.

2. Числовой материал в задачах

Если содержание задачи взято из окружающей жизни, то числовые значения величин (данные и искомые) должны удовлетворять основному требованию — они должны быть реальными, т. е. они должны характеризовать действительные отношения между величинами в окружающем нас мире. Например, длина, ширина и толщина книг не могут измеряться целыми метрами, рост человека — десятками метров и т. п. Но окружающая жизнь часто даёт такие задачи, в которых имеются слишком громоздкие числа, связанные очень сложными зависимостями. Такие задачи зачастую непосильны детям. Поэтому при изучении элементарной арифметики учащиеся решают только такие задачи, которые приспособлены к их возрасту. В этих задачах нет смысла вводить особенно громоздкие числа, которые могут только затруднять учащихся. При изучении десятичной нумерации надо, конечно, познакомить учащихся с примерами больших чисел, решая соответствующие задачи (например, с астрономическим содержанием). Но в дальнейшем достаточно ограничиться только такими числами, которые чаще всего встречаются на практике (целые числа не свыше миллиона, десятичные дроби с пятью-шестью значащими цифрами, обыкновенные дроби с однозначными, двузначными и редко с трёхзначными знаменателями и т. п.). Это требование в полной мере относится и к числовым примерам.

3. Зависимости между величинами, или условия

Зависимости между величинами в текстовой задаче, или так называемые условия, должны быть выражены точно, ясно, с необходимой и достаточной полнотой. Требование необходимой и достаточной полноты состоит в том, чтобы число условий в задаче определённым образом соответствовало числу данных и искомых. Если это требование выполнено, задача имеет одно решение и называется *определённой* (таковы почти все задачи, помещаемые в сборниках задач).

Если число условий в задаче недостаточно, то она может иметь не одно, а несколько решений; такая задача называется *неопределённой*. Например: «Артель рабочих из 5 человек заработала 1 000 руб. Сколько получит каждый член артели?» В этой задаче отсутствует условие, указывающее способ деления — поровну или в каком-нибудь ином отношении. Наконец, могут быть такие задачи, в которых имеются лишние условия; их тогда называют *переопределёнными* задачами. Если лишние условия не противоречат другим условиям, то задача может иметь только одно определённое решение. Например: «Пальто и костюм вместе стоят 1 800 руб. Костюм на 600 руб. дешевле пальто, а последнее — вдвое дороже костюма. Сколько стоит в отдельности пальто и костюм?» В этой задаче имеются такие условия: 1) общая стоимость пальто и костюма, 2) разностное отношение стоимости пальто и костюма и 3) кратное отношение стоимости пальто и костюма; одно из условий лишнее, но они не противоречат друг другу. Эта задача имеет вполне определённое решение: костюм стоит 600 руб., а пальто 1 200 руб.

Но иногда лишние условия в задачах могут быть противоречивыми. Например:

«Пальто и костюм вместе стоят 1 800 руб. Пальто на 600 руб. дороже костюма, а последний втрое дешевле пальто. Сколько стоит в отдельности пальто и костюм?» Здесь одно из условий лишнее, и, кроме того, они противоречат друг другу. Эта задача может иметь вполне определённое решение только в том случае, если предварительно исключить одно условие: если исключить разностное отношение, то задача имеет такое решение: пальто стоит 1 350 руб., а костюм 450 руб.; если же исключить кратное отношение, то получится иное решение.

4. Вопрос задачи

Вопрос текстовой задачи, в котором требуется определить числовое значение искомой величины, должен быть выражен, как и все условия её, точно и ясно; кроме того, он должен непосредственно вытекать из общего содержания задачи, т. е. из данных чисел и связывающих их условий. В следующей задаче поставлен вопрос неудачно: «Отцу 50 лет, а сыну $12^1/_2$ лет. Через сколько лет отец будет вчетверо старше сына?» Здесь имеет смысл спросить: во сколько раз отец старше сына в настоящее время?

5. Конкретное содержание задач

Содержание текстовых задач, как сказано было раньше, обычно черпается из разных областей человеческого знания и из окружающей жизни. Первое требование, которое предъявляется к содержанию текстовой задачи, заключается в том, чтобы оно было понятно учащимся, имеющим определённое развитие.

По мере того как учащиеся будут постепенно развиваться, расширяя круг своих представлений путём опыта, наблюдения и через обучение, должен постепенно расширяться и материал, входящий в содержание текстовых задач. Содержание задач должно постепенно охватывать материал из области сельского хозяйства, промышленности и т. д. Многие сведения о фактах и явлениях в области естествознания, географии, истории и других наук могут также служить материалом для задач.

Второе требование, которое предъявляется к содержанию задачи, состоит в том, чтобы оно, возбуждая интерес, ни в коем случае не заслоняло собою арифметическую сущность задачи.

Историческое, географическое или техническое содержание задач может сделать самое изучение арифметической темы более интересным, понятным и полезным только в том случае, если арифметическое содержание тех же задач связано с изучением основной темы и не затуманивается излишней описательной формой задачи. В связи с этим следует возражать вообще против многословных текстов в описательной или повествовательной форме, так как учащиеся, читая в задаче длинное описание или очень интересный рассказ, зачастую не могут при этом выявить арифметическое содержание задачи.

2. Что значит решить задачу?

1. Решение числовых примеров

Если данная задача есть числовой пример, т. е. если зависимости между данными числами и искомым выражены в математической форме, то возникает вполне естественная потребность — выполнить указанные действия; этот процесс и называется решением примера.

Успех работы зависит только от того, в какой мере учащийся понимает указанные операции и владеет необходимыми вычислительными навыками.

2. Решение текстовых задач

Если имеется текстовая задача, то решение её слагается из четырёх основных этапов:

1) выявление зависимости между данными в задаче, между данными и искомым, истолкование этих зависимостей с математической точки зрения и перевод их на математический язык, т. е. запись их с помощью математических символов;

2) решение полученных таким путём числовых примеров, т. е. выполнение указанных действий в определённом порядке;

3) составление ответов на вопросы задачи из полученных решений;

4) проверка решения по условию задачи.

Некоторые текстовые задачи содержат только два данных числа, с помощью которых требуется найти третье искомое число; для своего разрешения они почти всегда требуют только одной операции. Такие задачи принято называть **простыми** задачами. Например:

«Лоточник продал 85 груш и выручил 93,5 руб. Почём он продавал груши?»

Если задача содержит более двух данных чисел, то для разрешения её вообще потребуется не одна, а несколько операций. Такие задачи называются **сложными**. Каждая отдельная операция в процессе решения сложной задачи представляет собой решение простой задачи, которая выделяется из данной сложной задачи. Следовательно, сложная задача всегда состоит из нескольких простых задач[1].

Процесс решения сложной арифметической задачи проходит по той же схеме, по которой решаются и простые задачи. Но пер-

---

[1] Надо заметить, что эта классификация не строгая.

вый этап в применении к сложным задачам становится значительно труднее и ответственнее. И это понятно: в простой задаче всегда имеется только два данных числа; поэтому зависимость между ними и третьим искомым числом можно выявить более или менее легко. Совсем другое дело имеется в сложной задаче: для решения её надо сначала из нескольких данных чисел выбрать только два числа и установить между ними необходимую зависимость. Учащийся имеет перед собой в этом случае два вопроса: какую пару данных следует выбрать из текста задачи, чтобы составить первую простую задачу, и какую зависимость между ними надо установить? После составления или даже после решения первой простой задачи те же два вопроса вновь повторяются, и так идёт дело до окончания решения задачи. Главная трудность при решении сложной арифметической задачи состоит в расчленении её на ряд простых задач.

Когда это будет сделано, выполнение указанного действия в каждой простой задаче уже не представляет затруднений для учащихся; так же легко они составят и ответ на вопрос задачи.

3. Значение задач в курсе арифметики

Каждому известно, какое огромное значение имеют арифметические задачи во всём педагогическом процессе обучения арифметике. Одна из основных целей преподавания этой части элементарной математики состоит в том, чтобы научить учащихся «применять знания к решению задач»[1] чисто практического характера, научить их разбираться в таких вопросах повседневной жизни, которые приводят к различным вычислениям.

Решение задач является не только целью, но и чрезвычайно важным средством при изучении арифметики. С помощью решения задач учащиеся должны научиться выяснять разные арифметические понятия, делать целый ряд соответствующих выводов и правил и постепенно создавать теорию того или иного вопроса. Решение задач способствует также развитию математического мышления учащихся, вырабатывает у них уменье рассуждать и логически обосновывать свои суждения. Наконец, благодаря решению большого количества задач, учащиеся постепенно развивают и закрепляют вычислительные навыки.

Но этим не ограничивается значение задач; каждому новому шагу в курсе арифметики должны предшествовать задачи, которые помогут ввести учащихся в круг вопросов, составляющих основное содержание вновь поставленной цели.

Решение задач в процессе изучения арифметики представляет собой богатейший и самый благодарный материал для самостоятельной работы учащихся в классе и дома, когда они выходят из-под непосредственного влияния и надзора преподавателя и могут

---

[1] Программы средней школы. Математика. Объяснительная записка. 1951.

вполне самостоятельно проявить свою индивидуальность. Решение задач дома в особенности способствует развитию у учащихся самодеятельности, инициативы, а в связи с этим развивается интерес и к самой арифметике.

Задачи в широком смысле этого слова составляют также основное содержание контрольных письменных работ.

Таким образом, задачи пронизывают весь курс арифметики и составляют основное содержание самого процесса обучения.

Задачи-примеры составляют самую большую группу арифметических задач, которые решаются учащимися на каждом уроке арифметики и в порядке домашней самостоятельной работы. Цель и назначение задач-примеров при обучении арифметике состоит в том, чтобы научить учащихся выполнять указанные действия, выполнять их в определённой последовательности и наиболее рационально располагать записи.

Простые текстовые задачи в зависимости от словесной формулировки можно разбить на две группы. В одних задачах условие выражено в явной форме, прямо указывающей то действие, которое надо произвести над данными числами, чтобы решить задачу.

Например:

«В ящике было $8\frac{1}{2}$ *кг* конфет; в него пересыпали $3\frac{1}{4}$ *кг* конфет из другого ящика. Сколько конфет стало в первом ящике?»

В других задачах условие выражено, как говорят, в косвенной форме, т. е. оно не даёт прямого указания на то действие, которое требуется для решения данной задачи.

Например:

«Из ящика продали 27 груш, после чего в нём осталось 53 туки. Сколько груш было в ящике до продажи?»

Сплошь и рядом некоторые учащиеся дают вслух такое решение: $80 - 27 = 53$. Слово «продали» естественно толкает их к действию вычитания. Решая такие задачи, учащиеся вынуждены очень внимательно вдумываться в условие, прежде чем установить истинную, а не кажущуюся зависимость между данными числами. И только после этого они могут указать и записать необходимое действие. Простые задачи в косвенной форме непосредственно подготовляют учащихся к решению сложных текстовых задач, где зависимости между данными бывают выражены большей частью не в прямой, а в косвенной форме.

С помощью решения простых задач в курсе арифметики устанавливается смысл каждого арифметического действия. С этой целью преподаватель, приступая, например, к изучению сложения дробей, предлагает учащимся набор таких простых задач, которые приводят их к сложению сначала целых чисел, потом правильных дробей.

Круг тех величин, которые составляют основное содержание большинства простых задач, помещаемых в задачниках, сравнительно очень невелик: 1) цена, количество и стоимость; 2) единичный размер, количество и продукция; 3) время, скорость и путь; 4) разностное и кратное сравнения и т. п.

Из каждого комплекта трёх величин, входящих в простую задачу, можно составить только три варианта задач, например: 1) зная цену и количество товара, можно определить стоимость его; 2) зная цену товара и стоимость его, можно найти количество его; 3) зная стоимость и количество товара, можно определить цену его. Поэтому преподаватель должен требовать от учащихся в классе, чтобы перед решением простой задачи они сначала указывали, какие величины входят в неё, какие основные зависимости существуют между ними, какие величины известны и какая величина должна быть найдена.

Изучая систематический курс арифметики, учащиеся должны не только решать готовые задачи, но и сами должны уметь составлять задачи. Эту работу надо вести в течение всего периода изучения арифметики. Сначала учащиеся могут только ставить вопрос в данной задаче. Например: «Один арбуз весит $3\frac{1}{2}$ *кг*, а другой $8\frac{1}{4}$ *кг*». Учащиеся устанавливают, что пока ещё никакой задачи нет, так как не указана искомая величина (нет вопроса в задаче). По предложению преподавателя они ставят соответствующие вопросы: 1) Сколько весят два арбуза? 2) На сколько второй арбуз тяжелее первого?

Затем можно предложить учащимся заполнить пробел в задаче, если в ней нет одного из данных. Например:

«Я купил книгу за 4 руб. 50 коп. и тетради. Сколько я заплатил за всю покупку?»

Следующее усложнение может состоять в том, чтобы учащиеся подобрали соответствующие числовые значения к данным величинам в задаче. Например:

«Самолёт летел несколько часов с определённой скоростью. Какой путь он покрыл за это время?»

После такой подготовки учащиеся могут составлять задачи на заданную тему или зависимость. Сложные арифметические задачи, помимо практического, имеют также огромное образовательное значение: учащиеся, решая большое количество сложных задач, постепенно овладевают двумя основными методами логического мышления — синтезом и анализом. Это связано, главным образом, с расчленением сложной задачи на ряд простых задач. Это расчленение сложных задач на простые производится очень просто и легко в том случае, если все данные числа и соответствующие зависимости между ними в сложной задаче расположены в том же порядке, в каком должно идти решение задачи. Например: «Рабочий в течение первых трёх месяцев вносил в сберкассу по 120 руб. в месяц и ещё четыре месяца по 150 руб. Затем он взял из кассы сначала $\frac{3}{4}$ всего вклада на покупку костюма, а потом

$\frac{1}{6}$ часть на покупку ботинок. Сколько денег осталось в кассе?»

Самая структура данной сложной задачи указывает ход решения её: учащиеся из текста задачи выбирают сначала первую пару данных чисел, потом вторую, составляют и решают каждую простую задачу; полученные результаты дают возможность составлять и решать новые простые задачи, руководствуясь тем порядком, который указывается самим текстом задачи. Такие задачи иногда называют приведёнными, или задачами с прозрачным содержанием. Основное назначение их — научить учащихся читать текст задачи, последовательно выбирать данные числа из него, указывать зависимость между ними, переводить их на арифметический язык, записывать необходимые действия, выполнять их и устанавливать логическую последовательную связь между отдельными простыми задачами. Такой приём решения называется синтетическим.

Гораздо труднее идёт расчленение сложной задачи на простые в том случае, когда числовые данные и связывающие их зависимости стоят в тексте не рядом, как в приведённой задаче, а отделены одно от другого одним или несколькими условиями; следовательно, структура такой задачи не указывает хода решения её. Эти задачи иногда называют неприведёнными. Например:

«Рабочий ежемесячно вносил в сберкассу сначала по 120 руб. в месяц, а потом по 150 руб. Из всей внесённой суммы он взял сначала $\frac{3}{4}$ всего вклада на покупку костюма, а затем $\frac{1}{6}$ — на покупку ботинок. Какая сумма осталась в сберкассе (не считая процентов), если первые взносы рабочий делал 3 месяца, а вторые 4 месяца?»

Такой «беспорядок» в расположении данных и условий на первых порах затрудняет решение задачи и требует от учащихся сообразительности и уменья разбираться в условиях её. Иногда сами учащиеся замечают, что эту задачу можно сделать более «простой», если переставить в тексте данные числа и связывающие их зависимости, т. е. сделать её приведённой. Такую работу надо всячески поощрять. Но далеко не во всякой задаче можно так легко переставлять данные числа и условия. Поэтому неприведённые задачи чаще всего решаются другим способом — аналитическим, когда расчленение сложной задачи на простые начинается не с выбора данных, а с основного вопроса задачи.

II. ОСНОВНЫЕ ПРИЁМЫ РЕШЕНИЯ СЛОЖНЫХ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Самая важная и трудная часть работы при решении сложной задачи состоит в том, чтобы расчленить её на ряд простых задач, связанных между собой общим содержанием данной задачи. Существуют два основных способа или приёма для выполнения этой цели — синтетический и аналитический. Сущность каждого из них можно отчётливо выяснить, решив одну и ту же задачу двумя способами.

Задача. «В колхозе с 400 *га* собрана пшеница по 20 *ц* с *га*; из этого сбора 40% сдается государству по 25 руб. за *ц*; 25% засыпается в семенной фонд; остальная пшеница распределяется между колхозниками по 10 *кг* на трудодень. $\frac{1}{4}$ вырученной суммы за сданный хлеб затрачивается на оплату работы машин и на ремонт инвентаря; остальные деньги распределяются по трудодням. Сколько денег придется на один трудодень?»

Прочитав задачу, учащиеся записывают схематически условие её:

400 *га* под посевом;

20 *ц* — сбор с 1 *га*;

40% сбора — государству по 25 руб. за *ц*;

25% » в семенной фонд;

остальная часть сбора — на трудодни по 10 *кг* на трудодень;

$\frac{1}{4}$ вырученной суммы денег — на оплату машин и на ремонт; остальные деньги — на трудодни.

Сколько денег придётся на один трудодень?

Решение синтетическим способом

Из условия задачи учащиеся выбирают одну пару данных чисел (400 и 20), устанавливают между ними зависимость (с 1 *га* снято 20 *ц*, а с 400 *га* — в 400 раз больше), ставят вопрос, указывают и записывают действие (20·400) и вычисляют результат (8 000 центнеров собрано пшеницы со всего поля).

Точно так же они составляют и решают вторую простую задачу, потом третью и т. д. до тех пор, пока не получат ответа на вопрос данной задачи из решения последней простой задачи. (См. запись схемы № 1 в конце главы.)

На приведённое решение данной задачи надо смотреть только как на примерное решение, но отнюдь не единственное.

Сущность только что описанного синтетического приёма состоит в следующем: из всей совокупности «данных» в сложной задаче выбирается только одна пара их (иногда берётся больше) и к ней ставится соответствующий вопрос; так составляются первая, вторая, третья и следующие простые задачи. В последней простой задаче ставится основной вопрос данной сложной задачи; число, полученное в результате решения её, является ответом на этот вопрос.

С внешней стороны только что описанный синтетический приём подкупает своей простотой, лёгкостью, плавной «последовательностью». Но эти внешние положительные качества его, подкупая учащихся на первых порах, сплошь и рядом доставляют им большие неприятности: решив несколько простых задач, использовав для этой цели все или почти все «данные» в сложной задаче, учащиеся всё-таки иногда могут не получить ответа на вопрос задачи. Бывает и так, что некоторые учащиеся доведут решение до конца, но среди промежуточных простых задач оказываются лишние задачи, которые только загромождают общий ход решения, но не связаны с другими простыми задачами. Причины этих явлений кроются в самой природе синтетического приёма. В самом деле, успех работы зависит прежде всего от удачного выбора пары «данных» для составления каждой простой задачи. Например, в процессе решения данной сложной задачи можно выбрать такую пару «данных»: 40% сбора сдано государству и 25% засыпано в семенной фонд.

Из них можно составить простую задачу с вопросом: сколько процентов всего сбора сдано государству и засыпано в семенной фонд? Эта задача может не быть лишней, если несколько перестроить дальнейший ход решения сложной задачи. Но из всей совокупности «данных» в процессе решения можно выбрать и такую пару чисел: 2000 *ц* засыпано в семенной фонд, а 25 руб. стоит 1 *ц* пшеницы, сданной государству; к этой паре чисел можно поставить только такой вопрос: сколько рублей стоит вся пшеница, засыпанная в семенной фонд? Получится простая задача, которая является лишней в решении. Из приведённых примеров видно, что при выборе данных для составления каждой простой задачи синтетическим способом нет надёжных и достоверных критериев, утверждающих, что надо выбрать именно эти «данные», а не иные.

Не лучше обстоит дело и с постановкой «соответствующего» вопроса к выбранной паре «данных». Так, например, если в данной сложной задаче опять взять такие числа: 40% сдано государству и 25% засыпано в семенной фонд, то какой вопрос «соответствует» этой паре чисел, тот ли, который был поставлен, или — на сколько процентов сдано государству больше, чем засыпано в семфонд? Задача, составленная с помощью этого вопроса, является лишней.

Итак, элементы произвола и случайности играют большую роль не только при выборе пары чисел, но и при постановке вопроса к ним. Поэтому при синтетическом способе решения сложной задачи нет никакой уверенности в том, что данная задача будет решена верно; сплошь и рядом верное решение может получиться совершенно случайно; оно зависит от удачного выбора пары «данных» и от удачной постановки вопроса к ним.

Решение аналитическим способом

Аналитическое решение данной сложной задачи начинается с постановки основного вопроса задачи, т. е. с задачи определения искомого числа:

1) Сколько денег приходится на каждый трудодень?

Что надо знать для *решения этой простой задачи?* (Сумму денег, выделенных для раздачи... А руб. Число всех трудодней в колхозе... Б трудодней.)

Как определить искомое, зная эту пару чисел? (Делением первого числа на второе, т. е. А : Б = x; x руб. приходится на один трудодень.)

Просматривая условие задачи, учащиеся не находят там ни одного из требуемых чисел (ни А, ни Б). Поэтому, чтобы получить ответ на вопрос данной задачи, надо сначала найти сумму денег, подлежащих выдаче на трудодни (число А), а потом — общее число трудодней (число Б), т. е. надо решить две вспомогательные задачи.

Решается сначала первая из них тем же способом, т. е. ставится основной вопрос этой задачи:

2) Сколько рублей выделено для раздачи на трудодни?

Учащиеся опять подбирают те данные, с помощью которых можно решить эту вспомогательную задачу:

а) Что надо знать, чтобы определить сумму денег для раздачи на трудодни? (Всю сумму денег, полученную за пшеницу... В руб.) Дробь, которая указывает часть суммы, выделенную для этой цели... Г.

б) Каким действием можно решить эту задачу? (Умножением.)

В·Г = А. (А рублей выделено для раздачи на трудодни.)

Среди данных чисел в задаче опять нет ни одного из этих чисел. Поэтому придётся поставить две новые вспомогательные задачи — нахождение «В» и «Г» (продолжение см. в схеме № 2 в конце главы).

Особенность изложенного решения состоит в том, что сначала составляют и записывают все простые задачи (с первой до последней включительно), обозначая пока «неизвестные данные» буквами, а «известные» числами, а потом уже начинают их решать с последней задачи. Следовательно, в первом этапе намечается только **план** решения задачи, а во втором — **решение** всей задачи по намеченному плану.

Этот способ очень строгий и последовательный, но в то же время и утомительный: учащиеся, составляя план решения задачи аналитическим путём, долго не видят никаких результатов своей работы.

Но этот способ гарантирует правильный ход решения сложной задачи. Составление плана решения начинается с постановки основного вопроса данной задачи; поэтому при аналитическом способе совершенно исключается произвол, неопределённость и неуверенность при постановке вопроса: он всегда вытекает из предыдущей задачи.

Зато подбор чисел, необходимых для решения поставленного вопроса, есть дело очень трудное и ответственное; оно требует большого напряжения внимания и нередко становится источником ошибок. В самом деле, даже основной вопрос сложной задачи, который входит в состав первой простой задачи, можно разрешить иначе, зная 1) весь пай, приходящийся на один трудодень в денежном исчислении (т. е. стоимость 10 *кг* пшеницы, которая выдаётся натурой, и денежный пай), и 2) стоимость только 10 *кг* пшеницы; при вычитании второго числа из первого получится то число, которое является ответом на вопрос данной задачи. В некоторых простых задачах к поставленному вопросу можно подбирать разные пары чисел. Понятно, что среди таких вариантов могут быть ошибочные.

Сравнение синтетического и аналитического приёмов решения сложной арифметической задачи можно провести по схемам (см. схемы в конце главы).

1) Решение задач синтетическим способом начинается с выбора пары «данных» из условия задачи; затем к ним подбирается соответствующий вопрос для отыскания искомого. При аналитическом способе решение начинается с основного вопроса данной сложной задачи и к нему подбирается пара соответствующих чисел (известных или неизвестных), которые необходимы для решения этого вопроса.

2) При синтезе результат, полученный при решении каждой простой задачи, становится одним из «данных» в условии сложной задачи и как таковой входит в состав одной или нескольких других простых задач. При анализе «данные» в простых задачах, числовые значения которых пока неизвестны, становятся «искомыми» для следующих простых задач.

3) При синтезе составление отдельных простых задач и решение их идут параллельно. При анализе сначала составляется только план решения всей задачи. Решение простых задач по составленному плану начинается с той простой задачи (последней или промежуточной), в которой все «данные» известны.

4) Синтетический способ представляет собой ряд отдельных попыток, которые далеко не всегда имеют между собой органическую связь, так как не всегда ясно, почему из сложной задачи выбирается та, а не иная пара «данных» и почему к ним ставится такой, а не иной вопрос. Следовательно, при синтезе возможны ошибки как при выборе данных, так и при постановке вопроса к ним.

Аналитический способ представляет стройную логическую цепь заключений, органически связанных между собой (одно из «данных» простой задачи служит «искомым» в следующей задаче). При постановке вопроса совершенно исключается возможность ошибок и отклонений в сторону. Только подбор «данных» к поставленному вопросу может быть ошибочным или неудачным.

5) При синтетическом способе решения сложной задачи весь ход мысли и работы учащихся проще, примитивнее, чем при аналитическом: выбор пары «данных» из «совокупности» их (иногда просто случайный), постановка вопроса к ним, указание и запись необходимого действия, вычисление — и первая простая задача решена. Всё это очень легко и просто, но зато не надёжно: нередко получаются лишние решения или совсем не находится ответ на основной вопрос задачи. Чаще всего это имеет место, когда после выбора пары данных ставится вопрос: «что *можно* узнать?» вместо другого вопроса: «что *надо* узнать?»

При аналитическом решении ход мысли более строгий и последовательный; здесь не может получиться лишней простой задачи, так как каждый раз ставится только тот вопрос, который является или вопросом данной сложной задачи, или вытекает из решения предыдущих простых задач. Зато аналитический ход мысли очень труден для учащихся, требует от них большого напряжения и сообразительности, так как к поставленному вопросу приходится подбирать «данные», которые пока ещё неизвестны; это последнее обычно ставит учащихся в тупик на первых порах: они никак не могут понять, чтобы можно было одно неизвестное определить с помощью других неизвестных (это затрудняет учащихся даже в старших классах).

Теперь встаёт вопрос: какому способу следует отдать предпочтение при решении сложной арифметической задачи?

В основу правильно организованного педагогического процесса в младших и средних классах средней школы кладётся требование: от известного постепенно переходить к неизвестному и от более простого к более сложному. С этой точки зрения сложные задачи следует решать сначала только синтетическим способом, который полностью отвечает обоим приведённым требованиям: при выборе пары «данных» процесс мышления начинается от известных в задаче чисел а постановка вопроса к ним является простейшим умозаключением.

По мере развития учащихся, когда они в более или менее достаточной мере овладеют синтетическим способом решения сложных задач, следует в процессе решения вводить постепенно сначала только некоторые аналитические приёмы. Так, когда учащийся составляет простую задачу синтетическим способом, следует задавать контрольные вопросы и требовать более или менее ясные и определённые ответы на них: зачем или для чего нужен искомый промежуточный результат? Например, в той же сложной задаче учащийся выбирает первую пару данных (400 и 20) и ставит к ним вопрос: «Сколько всего собрано пшеницы?» Преподаватель спрашивает: «Зачем это надо знать?» Затем аналитические приёмы можно вводить при проверке уже решённых задач, начиная эту проверку с конца, т. е. с последнего вопроса. Например, проверяя решение той же сложной задачи, преподаватель спрашивает:

1) Сколько денег было выдано на один трудодень? (2 руб. 14 коп.)

2) Что нам надо было знать, чтобы получить этот ответ? (60 000 руб. и 28 000 трудодней, т. е. сумму денег, выделенную для оплаты трудодней, и общее число трудодней в колхозе.)

3) Известна ли была эта сумма денег по условию задачи? (Нет.)

4) Как мы её нашли? (Вычитанием.)

5) Что нам надо было знать, чтобы найти эту сумму? (Сумму денег, полученную за сданную пшеницу, и сумму денег, уплаченную за машины и ремонт и т. д.)

Такая «аналитическая» проверка решения имеет особенно важное значение для выявления лишних решений, если они были при синтетическом способе.

Аналитический приём следует применять при решении сначала таких задач, которые расчленяются только на две простые задачи. Например, учащиеся читают такую задачу:

«Турист-пешеход в первый день шёл 12 час. в среднем по $5\frac{1}{2}$ *км* в час. Во второй день он прошёл 34 *км*.

Сколько он прошёл в два дня?»

Преподаватель спрашивает:

1) Что требуется определить в задаче? (Сколько километров прошёл турист в два дня.)

2) Что для этого нам надо знать? (Сколько километров он прошёл в первый день и во второй день.)

3) Что мы знаем по условию задачи? (Сколько прошёл во второй день; 34 *км*.)

4) Что нам теперь надо ещё знать? (Сколько километров турист прошёл в первый день.)

5) Что мы для этого должны знать? (Сколько он шёл часов и сколько километров в среднем проходил в час.)

6) Известно ли нам это? (Известно: 12 час. и $5\frac{1}{2}$ *км* в час.)

7) Каким действием можно это узнать? (Умножением $5\frac{1}{2}$ на 12.)

8) Что мы узнаем? (Сколько километров он прошел в первый день.)

9) Что потом узнаем? (Сколько километров турист прошёл в два дня.)

Таким образом, учащиеся в устной беседе составляют план решения задачи, пользуясь аналитическим приёмом.

Такую работу затем следует вести при решении сложной задачи, состоящей из трёх простых задач, потом четырёх и более. Но теперь план решения следует уже записывать, вводя буквенную символику (сначала можно ввести мнемоническую символику, т. е. писать одну первую букву той величины, которая измеряется *неизвестным числом, например, число метров* материи — *М*, сумма денег — Р, пройденный путь — П, и т. п.).

По мере того как учащиеся будут овладевать отдельными аналитическими приёмами, следует показать и такой способ: если при решении синтетическим способом сразу трудно безошибочно выбрать первую пару данных, то надо начать с вопроса задачи и вести анализ до тех пор, пока дальнейший ход решения не будет ясен (аналитико-синтетический приём). При решении некоторых задач полезно идти иным путём: если первая часть условия задачи имеет «прозрачный» ход решения, то начинать решение надо синтетическим способом. При первом же затруднении в выборе данных следует обратиться к основному вопросу задачи и аналитическим путём составить план решения остальной части её.

Огромное большинство задач фактически и решается не синтезом или анализом в их чистом виде, а сочетанием обоих этих способов.

III. КЛАССИФИКАЦИЯ СЛОЖНЫХ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

1. Общий обзор попыток классификации задач

В каждом сборнике арифметических задач имеется огромное количество таких задач, которые или совсем нельзя решить, пользуясь только основными способами — анализом и синтезом, или же, хотя их и можно решить с помощью тех же способов, полученные решения будут очень громоздки и маловразумительны. Например:

«На 252 руб. куплено 10 *м* материи двух сортов: по 27 руб. и по 21 руб. за метр. Сколько метров материи куплено каждого сорта?»

Чтобы решить эту задачу синтетическим способом, надо выбрать одну пару данных, находящихся в известной зависимости, и поставить к ним соответствующий вопрос. Какие могут быть при этом возможности в связи с выбором данных?

а) На 252 руб. куплено 10 *м* материи двух сортов. Сколько стоит в среднем 1 *м* материи? (25,2 руб.)

Дальше можно найти разность между средней ценой и ценой каждого сорта (1,8 руб. и 4,2 руб.) и разделить число 10 обратно пропорционально числам 1,8 и 4,2. Этот способ решения очень громоздкий и трудный; кроме того, надо заметить, что последняя задача (число 10 разделить в обратном отношении числам 1,8 и 4,2) есть в свою очередь сложная задача и никак не может быть получена синтетически.

б) Метр первого сорта стоит 27 руб., а второго 21 руб. Какие вопросы можно поставить к этим данным?

1) Сколько стоит метр первого сорта и метр второго сорта вместе?

2) На сколько рублей метр первого сорта стоит дороже метра второго сорта? Каждый результат, полученный при решении обеих этих задач (сумма цен — 48 и разность их — 6), ни с одним из других данных задачи не находится в непосредственной зависимости. Поэтому дальнейший ход решения задачи остаётся невыясненным.

Применение анализа к решению этой задачи тоже не даст желательных результатов. В самом деле: в задаче требуется узнать, сколько метров материи куплено каждого сорта, например первого. Надо подобрать данные к этому вопросу: общее количество купленной материи (10 *м* — оно известно) и количество материи второго сорта (второе искомое). Чтобы определить последнее, надо знать всю стоимость его (она неизвестна) и цену одного метра (21 руб.). Отсюда вытекает необходимость определить стоимость материи второго сорта; для этого надо знать общую стоимость покупки (252 руб.) и стоимость материи первого сорта (она неизвестна). Последнее можно определить, зная цену каждого метра материи первого сорта (27 руб.) и количество, которое является искомым в первой простой задаче.

Таким образом, применение аналитического способа для решения этой задачи оказывается ещё менее удачным: оно приводит к логическому кругу (при описанном ведении анализа).

Как же решается эта задача? — П р е д п о л о ж е н и е м.

1) Сколько стоила бы материя, если бы она вся была первого сорта? (270 руб.)

2) На сколько предполагаемая стоимость материи больше действительной? (на 18 руб.)

3) На сколько метр первого сорта стоит дороже метра второго сорта? (на 6 руб.)

4) Сколько было куплено метров второго сорта (3 *м*) и первого сорта? (7 *м*.) Особенность этого решения состоит в том, что для первой простой задачи выбираются такие данные (количество всей материи и цена одного метра первого сорта), которые не находятся, в сущности, ни в какой зависимости между собой.

Можно привести ещё пример такой задачи, которая не может быть решена приёмами синтеза или анализа (из типа задач на «уравнивание» данных):

«Первый раз куплено 5 *кг* картофеля и 7 *кг* капусты и заплачено 15,6 руб. Второй раз куплено 3 *кг* картофеля и 5 *кг* капусты и за всё заплачено по той же цене 10 руб. Сколько стоит килограмм картофеля и килограмм капусты?»

Обычно все такие задачи очень легко решаются алгебраически (путём составления уравнений и решения их). Арифметическое же решение их представляет собой только толкование этих алгебраических решений, как бы перевод алгебраического решения на арифметический язык. В силу этого все подобного рода задачи в методике арифметики называются задачами алгебраического типа в отличие от сложных задач арифметического типа.

Многие русские методисты, начиная с А. И. Гольденберга, пытались указать те признаки, которыми отличаются задачи алгебраические и арифметические [1].

Ф. И. Егоров перечисляет и разбирает много других разных попыток классифицировать сложные арифметические задачи, разбивая их на так называемые «типы» [2]. Авторы этих попыток исходили из различных принципов. Одни из них разделяли арифметические задачи по содержанию их:

1) задачи на «прибыль и убыток»; 2) на «пропорциональное деление»; 3) на бассейны; 4) на встречу и т. п.

Другие предлагали систематизировать задачи по «действиям и числу действий в строго последовательном порядке, начиная от самых простых задач, решаемых одним действием, и постепенно усложняя их объём двумя и более вопросами».

В заключение Ф. И. Егоров вообще высказывает сомнение в возможности более или менее строгой и определённой классификации задач [3].

Вместо этого он предлагает «последовательный подбор задач сообразно с целями курса и постепенность в ознакомлении детей с приёмами решения сложных задач».

Характеризуя существующие сборники арифметических задач, Ф. И. Егоров подчёркивает, что почти все задачи в них, за исключением задач на сложение и вычитание, относятся или непо-

---

[1] Гольденберг, Методика арифметики, стр. 55; Егоров, Методика арифметики, 1917, стр. 76.

[2] Егоров, Методика арифметики, 1917, стр. 80.

[3] Там же, стр. 89.

средственно к тройному правилу и к правилу пропорционального деления, или заключают элементы этих правил (бо́льшая часть простых задач на умножение и деление), или, наконец, представляют комбинации задач того и другого типа.

Поэтому, продолжает Ф. И. Егоров, в процессе изучения всего курса арифметики надо обязательно разъяснять учащимся понятие о пропорциональности величин, постепенно знакомить их с приёмами решения задач, содержащих пропорциональные величины, и по возможности с разнообразными видоизменениями этих задач. Многие из этих задач требуют особых искусственных приёмов решения. Выбор таких задач должен быть сделан особенно тщательно и осторожно; только те задачи будут иметь развивающее значение для учащихся, в решении которых они сами принимают деятельное участие и не только в вычислениях, а самое главное — в исследовании зависимости между величинами, входящими в задачу, и в установлении приёма решения их.

2. Классификация сложных арифметических задач по способам решения их

В настоящее время наибольшее распространение имеет классификация задач по способам решения их, когда на первый план выдвигаются те идеи, которые направляют решение задачи и вызывают необходимость изучать приёмы или способы решения задач, независимо от их предметного содержания. В этом случае тип задачи зависит только от тех математических соотношений между данными величинами и искомой, которые определяют тот или иной способ решения.

1. Способ приведения к единице

Огромное количество сложных арифметических задач содержит пропорциональные величины. Самым распространённым способом, применяемым при решении таких задач, является способ прямого или обратного приведения к единице. Уже с I класса начальной школы и на протяжении целых пяти лет обучения в школе учащиеся решают задачи, пользуясь именно этим способом. Тип таких задач общеизвестен.

«Куплено сначала A метров материи и заплачено T рублей, а потом B метров той же материи и по той же цене. Сколько стоит вторая покупка?»

Конкретное содержание этих задач может бесконечно меняться, меняться могут и числовые данные, а метод решения их остаётся один и тот же: чтобы узнать нечто о нескольких объектах, надо прежде узнать то же самое об одном из них, а потом уже и обо всех.

В V или в VI классе средней школы эти задачи решаются точно так же, как они решаются и в более младших классах; изменяется только форма записи решения.

Все задачи этого типа с давних пор объединяются в группу задач на «тройное правило». Это название сохранилось только в силу некоторых исторических традиций.

Способом приведения к единице очень успешно решаются и задачи на пропорциональное деление, те самые задачи, которые широко известны в младших классах школы под именем задач «на части». Например: «Две бригады рабочих в 8 и 11 человек заработали в день 228 руб. Сколько рублей заработала каждая бригада при одинаковой оплате каждого рабочего?

2. Способ произвольного допущения

Способ произвольного допущения, применяемый для решения задач, содержащих пропорциональные величины, состоит в следующем: при решении задачи делается некоторое предположение (например, что вместо двух сортов товара куплен или продан только один сорт), которое потом исправляется в ходе решения при учёте всех условий задачи. Например:

«Лоточник продавал яблоки по 0,7 руб. и груши по 0,9 руб. за штуку. Сколько он продал яблок и сколько груш, если за 60 штук тех и других выручил 46,8 руб.?»

Решение. Допускается, что лоточник продал груш и яблок поровну, т. е. по 30 штук. Тогда он за яблоки выручил бы 21 руб. $(0{,}7\cdot30=21)$, за груши 27 руб. $(0{,}9\cdot30=27)$, а всего 48 руб. $(21+27=48)$. Из условий же задачи известно, что он выручил только 46,8 руб., т. е. меньше на 1,2 руб. $(48-46{,}8=1{,}2)$; следовательно, сделанное допущение неверно: яблок он продал больше, чем груш. При замене груши яблоком общее количество проданных фруктов (60 шт.) не изменится, а вырученная сумма от такой замены уменьшится на 0,2 руб. $(0{,}9-0{,}7=0{,}2$ — разница в цене груши и яблока). Чтобы уменьшить ту же сумму на 1,2 руб., надо заменить яблоками столько груш, сколько раз 0,2 содержится в 1,2, т. е. 6 груш заменить 6-ю яблоками $(1{,}2:0{,}2=6)$. Тогда будет найдено, что яблок продано 36 штук $(30+6=36)$, а груш 24 $(30-6=24)$.

Для разрешения этой задачи можно было сделать и другое допущение — принять, что лоточник продал только одни яблоки; дальнейший ход решения будет мало отличаться от описанного.

3. Способ подобия

К способу произвольного допущения очень близко примыкает способ подобия, который, к сожалению, мало применяется в практике школ. Он состоит в том, что одной из искомых величин в задаче сразу же дают произвольное числовое значение, а на основании указанных в задаче соотношений находят числовые значения других искомых величин; затем находят отношение двух числовых значений некоторой величины — данного и найденного средственно к тройному правилу и к правилу пропорционального деления, или заключают элементы этих правил (бо́льшая часть простых задач на умножение и деление), или, наконец, представляют комбинации задач того и другого типа.

Поэтому, продолжает Ф. И. Егоров, в процессе изучения всего курса арифметики надо обязательно разъяснять учащимся понятие о пропорциональности величин, постепенно знакомить их с приёмами решения задач, содержащих пропорциональные величины, и по возможности с разнообразными видоизменениями этих задач. Многие из этих задач требуют особых искусственных приёмов решения. Выбор таких задач должен быть сделан особенно тщательно и осторожно; только те задачи будут иметь развивающее значение для учащихся, в решении которых они сами принимают деятельное участие и не только в вычислениях, а самое главное — в исследовании зависимости между величинами, входящими в задачу, и в установлении приёма решения их.

2. Классификация сложных арифметических задач по способам решения их

В настоящее время наибольшее распространение имеет классификация задач по способам решения их, когда на первый план выдвигаются те идеи, которые направляют решение задачи и вызывают необходимость изучать приёмы или способы решения задач, независимо от их предметного содержания. В этом случае тип задачи зависит только от тех математических соотношений между данными величинами и искомой, которые определяют тот или иной способ решения.

1. Способ приведения к единице

Огромное количество сложных арифметических задач содержит пропорциональные величины. Самым распространённым способом, применяемым при решении таких задач, является способ прямого или обратного приведения к единице. Уже с I класса начальной школы и на протяжении целых пяти лет обучения в школе учащиеся решают задачи, пользуясь именно этим способом. Тип таких задач общеизвестен.

«Куплено сначала А метров материи и заплачено Т рублей, а потом В метров той же материи и по той же цене. Сколько стоит вторая покупка?»

Конкретное содержание этих задач может бесконечно меняться, меняться могут и числовые данные, а метод решения их остаётся один и тот же: чтобы узнать нечто о нескольких объектах, надо прежде узнать то же самое об одном из них, а потом уже и обо всех.

В V или в VI классе средней школы эти задачи решаются точно так же, как они решаются и в более младших классах; изменяется только форма записи решения.

Все задачи этого типа с давних пор объединяются в группу задач на «тройное правило». Это название сохранилось только в силу некоторых исторических традиций.

Способом приведения к единице очень успешно решаются и задачи на пропорциональное деление, те самые задачи, которые широко известны в младших классах школы под именем задач «на части». Например: «Две бригады рабочих в 8 и 11 человек заработали в день 228 руб. Сколько рублей заработала каждая бригада при одинаковой оплате каждого рабочего?

2. Способ произвольного допущения

Способ произвольного допущения, применяемый для решения задач, содержащих пропорциональные величины, состоит в следующем: при решении задачи делается некоторое предположение (например, что вместо двух сортов товара куплен или продан только один сорт), которое потом исправляется в ходе решения при учёте всех условий задачи. Например:

«Лоточник продавал яблоки по 0,7 руб. и груши по 0,9 руб. за штуку. Сколько он продал яблок и сколько груш, если за 60 штук тех и других выручил 46,8 руб.?»

Решение. Допускается, что лоточник продал груш и яблок поровну, т. е. по 30 штук. Тогда он за яблоки выручил бы 21 руб. $(0,7 \cdot 30=21)$, за груши 27 руб. $(0,9 \cdot 30=27)$, а всего 48 руб. $(21+27=48)$. Из условий же задачи известно, что он выручил только 46,8 руб., т. е. меньше на 1,2 руб. (48—46,8=1,2); следовательно, сделанное допущение неверно: яблок он продал больше, чем груш. При замене груши яблоком общее количество проданных фруктов (60 шт.) не изменится, а вырученная сумма от такой замены уменьшится на 0,2 руб. (0,9—0,7=0,2—разница в цене груши и яблока). Чтобы уменьшить ту же сумму на 1,2 руб., надо заменить яблоками столько груш, сколько раз 0,2 содержится в 1,2, т. е. 6 груш заменить 6-ю яблоками $(1,2:0,2=6)$. Тогда будет найдено, что яблок продано 36 штук $(30+6=36)$, а груш 24 (30—6=24).

Для разрешения этой задачи можно было сделать и другое допущение — принять, что лоточник продал только одни яблоки: дальнейший ход решения будет мало отличаться от описанного.

3. Способ подобия

К способу произвольного допущения очень близко примыкает способ подобия, который, к сожалению, мало применяется в практике школ. Он состоит в том, что одной из искомых величин в задаче сразу же дают произвольное числовое значение, а на основании указанных в задаче соотношений находят числовые значения других искомых величин; затем находят отношение двух числовых значений некоторой величины — данного и найденного (коэффициент пропорциональности) и производят соответствующие изменения во взятом и полученном значениях искомых.

Пример. «Куплена материя трёх сортов, всего 140 *м*; за первый сорт заплачено 900 руб., за второй 660 руб. и за третий 400 руб. Сколько метров материи было каждого сорта, если 1,1 *м* первого сорта стоили столько же, сколько 1,8 *м* второго, а $6\frac{2}{3}$ *м* второго — сколько $5\frac{1}{2}$ *м* третьего?»

Решение. Произвольно допускается, что первого сорта было 10 *м*; тогда один метр стоил бы 90 руб., 1,1 *м* стоили бы 99 руб. $(90:1,1=99)$. Столько же, по условию задачи, стоили бы 1,8 *м* материи второго сорта; один метр второго сорта стоил бы 55 руб. $(99:1,8=55)$, а всего было куплено 12 *м* его $(660:55=12)$; $5\frac{1}{2}$ *м* третьего сорта, по условию задачи, стоили сколько же, сколько $6\frac{2}{3}$ *м* второго, т. е. $366\frac{2}{3}$ руб. $\left(55\cdot 6\frac{2}{3}=\frac{55\cdot 20}{3}=\frac{1\,100}{3}=366\frac{2}{3}\right)$; следовательно, один метр третьего сорта стоил бы $66\frac{2}{3}$ руб. $\left(366\frac{2}{3}:5\frac{1}{2}=\frac{1\,100\cdot 2}{3\cdot 11}=\frac{200}{3}=66\frac{2}{3}\right)$, а всего было бы 6 *м* третьего сорта $\left(400:66\frac{2}{3}=\frac{400\cdot 3}{200}=6\right)$. При таком допущении общее количество материи было бы 28 *м* $(10+12+6=28)$, а по условию задачи куплено материи 140 *м*, т. е. в 5 раз больше $(140:28=5)$. Следовательно, количество материи каждого сорта будет тоже в 5 раз больше, т. е. первого сорта будет 50 *м* $(10\cdot 5=50)$, второго 60 *м* $(12\cdot 5=60)$ и третьего 30 *м* $(6\cdot 5=30)$.

Способом подобия очень удобно решается большое количество задач на смешение. Например:

«Из двух сортов муки в 4,6 руб. и 2,9 руб. за килограмм составлена смесь по 3,58 руб. килограмм. Сколько взято муки каждого сорта, если первого сорта вошло в смесь на 10 *кг* меньше, чем второго?»

Решение. Положим, что первого сорта было 10 *кг*; можно узнать, что на каждый килограмм получается разность между стоимостью смеси и стоимостью первого сорта в 1,02 руб. $(4,6-3,58=1,02)$, а на 10 *кг* — 10,2 руб. $(1,02\cdot 10=10,2)$.

Чтобы покрыть эту разницу, надо взять в смесь столько килограммов муки второго сорта, сколько раз разница в цене второго сорта и смеси — 0,68 руб. $(3,58-2,9=0,68)$ — содержится в сумме 10,2 руб., т. е. 15 *кг* $(10,2:0,68=1020:68=15)$. Итак, если положить, что первого сорта в смесь вошло 10 *кг*, а второго 15 *кг*, то разность этих чисел будет 5 *кг* $(15-10=5)$, т. е. эта разность будет вдвое меньше указанной в задаче; следовательно, надо количество муки каждого сорта удвоить: 20 и 30 *кг* муки первого и второго сорта вошло в смесь.

4. Способ сравнения (исключение неизвестного)

Целый ряд сложных арифметических задач содержит требование найти числовые значения не одной, а двух искомых величин. При переводе этих задач на алгебраический язык получается система двух уравнений с двумя неизвестными.

Например: «12 яблок и 7 груш стоят 18,5 руб., а 12 таких же яблок и 10 груш стоят 21,8 руб. Сколько стоит одно яблоко и одна груша?»

Алгебраическое решение (составление системы уравнений):

Яблоко стоит x руб.	$12x+7y=18,5$
Груша » y руб.	$12x+10y=21,8$

Основной способ решения таких уравнений, как известно, состоит в том, чтобы с помощью той или иной операции исключить одно неизвестное.

Поэтому и арифметический способ решения таких задач называется способом исключения неизвестных. Как при решении системы уравнений, так и при арифметическом способе решения таких задач применяются разные приёмы для исключения одного из неизвестных: очень редко сложение, чаще вычитание, предварительное уравнивание, замена и т. п.

В силу этого основной способ исключения неизвестных подразделяется на несколько более частных способов или приёмов: 1) способ сравнения сложением или чаще вычитанием, 2) способ предварительного уравнивания неизвестных, 3) способ замены.

а) Выше приведённая задача о покупке яблок и груш решается способом сравнения с помощью вычитания (иногда этот способ называют способом остатков или разностей, получаемых при вычитании).

Решение записывается так:

Схема условия задачи.

12 яблок и 10 груш стоят 21,8 руб.
12 » » 7 » » 18,5 руб.

3 груши стоят 3,3 руб.

3,3 : 3=1,1 (1,1 руб. стоит 1 груша)
1,1×10=11 (11 руб. стоят 10 груш)
21,8—11=10,8 (10,8 руб. стоят 12 яблок)
10,8 : 12=0,9 (0,9 руб. стоит 1 яблоко)

Ответ.

1 яблоко стоит 0,9 руб.
1 груша » 1,1 руб.

б) Предварительное уравнивание данных, как было сказано раньше, есть один из частных приёмов того же способа исключения неизвестных. Он применяется при решении тех задач, в которых числовые данные, измеряющие каждую величину, попарно не равны.

Пример. «За 7 топоров и 9 кос заплачено 41 руб., а за 10 топоров и 8 кос заплачено 44 руб. Сколько стоит один топор и одна коса в отдельности?»

Записывается схема условия задачи:

7 топоров и 9 кос стоят 41 руб.
10 » 8 » » 44 руб.

Теперь видно, что для решения этой задачи надо условие задачи преобразовать так, чтобы сделать равными числа, измеряющие количество топоров или кос, сохраняя между всеми величинами существующие отношения. Для этого все данные числа первой строчки умножаются на 10 или на 8, а во второй на 7 (или на 9):

70 топоров и 90 кос стоят 410 руб.
70 » и 56 » » 308 руб.

Теперь эта задача ничем не отличается от только что решённой задачи:

34 косы стоят 102 руб.
$102:34=3$ (3 руб. стоит одна коса) и т. д.

При решении таких задач способом уравнивания надо заставлять учащихся внимательно всматриваться в числовой состав задач и составлять наименьшее кратное двух данных чисел, измеряющих одну и ту же величину.

в) Способ замены одного неизвестного другим есть так же, как и способ уравнивания данных, частный приём более общего способа исключения неизвестных. С помощью его можно решить такую задачу:

«За 2 *м* синей и 3 *м* чёрной материи заплачено 35 руб. Сколько стоит 1 *м* той и другой материи, если первая материя вдвое дороже второй?»

Решение. Допускаем, что на 35 руб. куплена только чёрная материя, т. е. вместо 2 *м* синей материи взято 4 *м* чёрной (так как синяя материя вдвое дороже чёрной и вместо 1 *м* синей можно за ту же сумму денег купить 2 *м* чёрной материи), а всего куплено 7 *м* чёрной материи за 35 руб.; следовательно, 1 *м* чёрной материи стоит 5 руб ($35:7=5$), а метр синей 10 руб. ($5\times2=10$).

Точно так же решаются задачи, в которых требуется определить число птиц и четвероногих животных, зная общее число голов и общее число ног и много других задач[1].

[1] Березанская, Сборник упражнений и задач по арифметике, 1938, № 454 и следующие.

5. Нахождение дроби числа и числа по известной дроби его

Во всех сборниках имеется огромное число таких сложных задач, в которых требуется или найти часть данного числа (дробь его), или по данной части числа (или по его дроби) найти всё число. Такие задачи решаются на протяжении почти всего курса арифметики, сначала как сложные задачи, двумя действиями, а потом, когда будет изучено умножение и деление на дробь, одним действием.

Большая часть задач на проценты—нахождение процентов данного числа, нахождение числа по его части или дроби, заданной процентами, и нахождение процентного отношения—ничем не отличается от соответствующих задач на нахождение дроби числа и числа по его дроби. То же самое следует сказать о задачах на вычисление промилле.

IV. МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Подготовка учащихся к решению сложных арифметических задач

Когда по той или иной причине ставится вопрос «о решении задач», то имеется в виду в сущности решение только сложных арифметических задач.

Простые текстовые задачи в огромном большинстве случаев представляют собой в сущности числовые простые примеры, выраженные в словесной форме. Поэтому при решении простой задачи учащийся должен предварительно словесную форму задачи перевести на арифметический язык и сам написать необходимые действия для решения её. После этого работа сводится к решению числового примера и к истолкованию полученного результата в связи с общим содержанием простой задачи.

Так как решение сложных задач сводится к решению простых задач, то естественно, что учащиеся должны в достаточной и необходимой мере овладеть техникой решения простых задач, прежде чем приступить к решению сложных задач.

Главное затруднение при решении сложных задач, как известно, заключается в расчленении их на ряд простых задач. Основные приёмы этой работы уже описаны. Поэтому ещё при решении простых задач надо упражнять учащихся в придумывании разных вопросов или в подборе соответствующих данных, например: 1) Сколько у меня осталось денег после покупки галош? 2) Какое расстояние прошёл турист за всё время? и т. п. Эта работа вплотную подводит учащихся к самостоятельному составлению простых задач в связной форме.

2. Предложение задачи

Решение задачи всегда начинается с чтения её, будь то числовой пример или текстовая задача. Каждый преподаватель по опыту знает, что учащиеся иногда не умеют решить задачу только потому, что невнимательно или неправильно прочитали условие её. Процесс чтения, как известно, состоит не только в том, чтобы «вслух» или «про себя» произнести те слова, которые написаны, а ещё и в том, чтобы осознать и понять прочитанное. Это относится ко всякому чтению, а в особенности к чтению условия задачи, каковое во много раз труднее чтения многих других текстов. К сожалению, в практике школы не всегда придают серьёзное значение процессу чтения содержания задачи, а от этого в значительной мере зависит успешное разрешение её, особенно при самостоятельной работе.

Довольно часто в классе предлагается задача таким образом: сам преподаватель читает текст по книге — задачнику (а иногда по записи в плане) — или рассказывает содержание её своими словами, а учащиеся слушают; затем преподаватель прочитывает (или рассказывает) задачу ещё раз и предлагает кому-либо из учащихся повторить её. Если задача простая по своей структуре или по содержанию, то учащиеся легко запоминают её и довольно свободно воспроизводят всё содержание.

Такой способ предложения задачи может иметь место преимущественно при устном решении простых и некоторых сложных задач, когда ставится цель приучить учащихся «на слух» воспринимать содержание задачи. Но таким способом нельзя научить самих учащихся «читать» задачу: они только слушают, тогда как при самостоятельном решении задачи, особенно дома, они именно должны уметь читать её. Это уменье можно развить только в общей классной работе, если учащиеся сами будут читать текст задачи. Поэтому почти каждую задачу в условиях классной работы, особенно сложную задачу, должен обязательно читать кто-либо из учащихся с тем, чтобы остальные внимательно следили за чтением тоже по тексту и в организованном порядке вносили поправки, если читающий допустил ошибки или искажения. Это необходимо и возможно делать в том случае, если предлагаемая задача имеется в задачнике, принятом в данном классе. Но так же следует поступать и в том случае, когда преподаватель предлагает свою задачу, которой нет в принятом задачнике; в этом случае он должен сначала продиктовать её с тем, чтобы все учащиеся записали условие задачи в свои тетради; после этого один из них отчётливо читает текст по записи в своей тетради, а остальные следят за чтением тоже по своим записям.

В процессе этой работы учащиеся под руководством преподавателя продолжают развивать навыки правильного, отчетливого, достаточно громкого и выразительного чтения. Последнее качество — выразительность чтения — в достаточной степени освещает вопрос о том, в какой мере читающий понимает текст задачи и осознаёт его. Навыки чтения текста задачи могут развиваться только в общеклассной работе при чтении задачи самими учащимися.

Каждую задачу в классе надо прочитывать только один раз. Двукратное, а иногда многократное чтение текста задачи в классе есть непроизводительная и даже вредная трата времени: многие учащиеся, зная, что задача будет прочитана два, а может быть и три раза, при первых чтениях её будут считать себя свободными и заниматься посторонними делами.

Повторное чтение текста задачи допускается только в том случае, если первый чтец небрежно прочитал задачу или внёс искажения в содержание её.

Двукратное и многократное чтение в классе надо заменить тщательным изучением содержания задачи. Для того чтобы проверить, в какой мере все учащиеся следили за чтением, преподаватель сначала задаёт один-два вопроса общего контрольного характера: «О чём (или о ком) говорится в задаче?» и «Что именно говорится в ней?» Такие вопросы общего характера имеют большое воспитательное и образовательное значение: учащиеся, зная, что их спросят о содержании, станут более внимательно следить за чтением задачи, а в процессе этого чтения будут стараться схватывать общее конкретное содержание её.

Более подробное изучение задачи преподаватель ведёт с помощью вопросов. Например:

«В магазине смешали конфеты двух сортов и полученной смесью наполнили пакетики для детских подарков. Конфет первого сорта взяли 16 *кг* по 9,4 руб. за килограмм и второго сорта 12 *кг* по 8,8 руб. за килограмм. В каждый пакетик насыпали по 250 *г* смеси.

Сколько стоит каждый подарок, если бумажный пакетик отдельно стоит 20 коп.?»

После первых конкретных вопросов преподаватель спрашивает:

1) Сколько конфет взято первого сорта? (16 *кг*.)

2) Сколько стоит 1 *кг* этих конфет? (9,4 руб.)

3) Сколько конфет взято второго сорта? (12 *кг*.)

4) По какой цене они были? (по 8,8 руб.)

5) Сколько конфет насыпали в каждый пакетик? (250 *г*.)

6) Сколько стоит пакетик?

7) Что спрашивается в задаче?

Чтобы дать точный и определённый ответ на каждый из этих вопросов, учащиеся могут и должны опять обращаться к тексту задачи, отыскивая в нём необходимые данные. Таким образом, они вторично, по частям, прочитают данную задачу, но это не будет простым повторением первого чтения, так как оно связано с подробным изучением содержания её. Попутно учащиеся схематически записывают условие задачи — числовые данные с наименованием —

по возможности в таком порядке, чтобы была видна зависимость между ними (один пишет на классной доске, остальные — в своих тетрадях):

16 *кг* . . . по 9,4 руб.;
12 *кг* . . . » 8,8 руб.;
250 *г* в пакетике;
20 коп. стоит пакетик.

Сколько стоит каждый подарок?

Изучение содержания задачи завершается повторением её: один из учащихся, пользуясь написанной схемой, в связной форме передаёт всё содержание задачи, остальные слушают и вносят свои замечания.

3. Процесс решения задачи

Решение простой задачи в классе состоит в том, чтобы схематически записать условие её, указать действие, которым она решается, записать это действие (если задача решается письменно), вычислить результат и дать истолкование его в связи с общим содержанием задачи. Например:

«Бригада грузчиков получила за работу 222 руб. из расчёта по 18,5 руб. на каждого из них. Сколько человек было в бригаде?»

Бригада . . . . 222 руб.;
1 грузчик . . . 18,5 руб.

$$222:18{,}5 = 2\,220:185 = 12.$$
$$\begin{array}{r} \underline{370} \\ 0 \end{array}$$

Сколько человек было в бригаде?

Ответ. *В бригаде было 12 человек.*

Один из учащихся решает задачу на классной доске, остальные — в своих тетрадях.

Необходимо после решения провести поверку решения по тексту задачи умножением ($18{,}5 \cdot 12$) или делением ($222:12$).

Уменье решать простые задачи полностью применяется в процессе решения сложных задач, на которые они расчленяются. Выразительное чтение условия задачи, схематическая запись его, повторение содержания задачи по этой записи — вся эта работа служит подготовкой к разбивке сложной задачи на простые.

Если данная сложная задача имеет так называемое *прозрачное* содержание или в схематической записи её все данные *приведены* во взаимное соответствие, то наилучшим способом решения будет синтетический. В этом случае учащиеся, подготовленные предыдущей работой, вполне самостоятельно должны составлять простые задачи, выбирая пару данных, примерно в том же порядке, как они расположены в схематической записи, и ставить к ним соответствующий вопрос. Роль преподавателя сводится к тому, чтобы следить за ходом работы и время от времени задавать контрольные вопросы: «Надо ли это знать?» или «Для чего это надо знать?» Эти вопросы будут удерживать учащихся на правильном пути в процессе решения сложной задачи; у них постепенно будет развиваться привычка задавать такие же вопросы себе и при самостоятельном решении задач.

Если сложная задача решается синтетическим способом, то все простые задачи, на которые она расчленяется, по мере их составления сейчас же записываются и решаются. Результат, полученный в последней задаче, будет ответом на основной вопрос данной сложной задачи, поэтому его следует выписать в новую строку с соответствующим наименованием и истолкованием. Вся работа завершается повторением: в него входит подробное и связное изложение всего хода решения задачи и истолкование полученного результата. Для повторения иногда можно привлекать нескольких учащихся: один из них повторяет условие задачи, другие — ход решения и, наконец, последний даёт истолкование результата.

Такое распределение работы имеет свои положительные и свои отрицательные стороны: с одной стороны, в повторение втягиваются многие учащиеся, благодаря чему во всём классе поддерживается рабочее настроение и напряжённое внимание; с другой стороны, вследствие такой раздробленности в работе, очень трудно добиваться правильной и связной передачи повторения всего хода решения задачи Поэтому повторение решения некоторых задач полезно проводить два раза: один раз по частям, а второй раз весь ход решения в связной форме повторяет один ученик.

Если в данной сложной задаче условие построено так, что учащиеся затрудняются сразу наметить ход решения её, то преподаватель помогает им обратиться прямо к основному вопросу в этой задаче и подобрать к нему соответствующую пару данных. Этот первый шаг всегда затрудняет учащихся. Особенно их смущает то, что намеченные ими по смыслу «данные» для разрешения первой простой задачи являются «неизвестными числами». Преподаватель должен помочь им побороть эту неуверенность.

Как уже было сказано раньше, анализ задачи следует вести до тех пор, пока не станет ясным дальнейший ход решения: тогда можно по намеченному плану перейти к синтетическому способу решения задачи, который легко и быстро приведёт к получению искомого ответа.

При аналитическом способе решения сложной задачи учащиеся, как известно, сначала составляют только план решения всей задачи или части её. При этом они на первых порах встречают большие затруднения при письменном оформлении этого плана, когда приходится намеченные «данные» для решения простой задачи обозначать буквами и записывать действия над этими новыми символами. После достаточно большой практики учащиеся преодолевают и эти затруднения, постепенно вырабатывая убеждение, что буквенная символика имеет даже свои преимущества.

После составления такой простой задачи, для разрешения которой известны все данные, учащиеся по имеющимся записям намечают в устной форме план решения данной сложной задачи или части её, начиная с последней, а затем приступают к письменному решению её по этому плану.

Повторение решения следует начинать тоже с анализа задачи, что по готовым записям не представит особых затруднений даже для самых слабых учащихся.

Решение всякой задачи завершается проверкой решения по тексту её или по схематической записи условия её. Проверку можно проводить до или после повторения решения.

4. Устное решение задач

Если текстовые задачи содержат небольшие и легко запоминаемые числа, то они большей частью решаются устно. Процесс решения их очень прост: один из учащихся читает условие или преподаватель своими словами передаёт содержание её в связной форме. По окончании чтения или изложения учащиеся в организованном порядке сначала дают свои ответы на вопрос задачи, а преподаватель иногда дополнительно требует объяснения, каким действием получается ответ, почему именно таким, а не иным действием, и таким образом устно вычисляется результат.

Если же числовые данные в простой задаче таковы, что их трудно запомнить, то надо записать их на классной доске без всяких наименований. Затем учащиеся устно вычисляют результат.

Сложные задачи, к сожалению, очень редко решаются устно, хотя повседневная жизнь настойчиво предлагает большое количество таких задач, которые очень легко и скоро решаются устно; к тому же эти задачи появляются иногда в таких условиях, когда нет возможности воспользоваться письменными принадлежностями Например:

«У меня было 120 руб.; $\frac{1}{3}$ этих денег я заплатил за рубашку, а $\frac{1}{4}$ остатка — за 4 пары носков. Сколько стоит пара носков?»

Как условие этой задачи, так и числовые данные в ней очень легко запоминаются. Поэтому после прочтения задачи или изложения её учащиеся могут свободно повторить содержание и числовые данные сразу в связной форме; преподаватель может, конечно, задать один-два направляющих вопроса, если заметит некоторое затруднение. После этого учащиеся устно решают задачу сначала «про себя» без всяких записей, а преподаватель отбирает у них полученные результаты путём опроса: если окажется несколько разных ответов, преподаватель записывает их на доске в порядке поступления без утверждения и без опровержения. Затем учащиеся «рассказывают» своё решение. Это изложение хода решения всей дачи может делать иногда один учащийся в связной форме; в некоторых случаях работу можно поручить нескольким учащимся (каждый из них излагает решение одной простой задачи), но после этого обязательно надо повторить весь ход в связной форме.

Если сложная задача без особых затруднений может быть решена устно, но числовые данные трудно запомнить, то после прочтения её на классной доске надо записать эти данные в связи с устным повторением содержания задачи. Это даёт возможность учащимся не загромождать память и всё своё внимание сосредоточить на последовательном составлении и устном решении простых задач.

При решении более трудных задач в классе преподаватель может отбирать отдельные ответы, получаемые при решении каждой простой задачи, и записывать их на классной доске, как новые «данные» в сложной задаче.

Для получения ответов как на вопрос отдельной простой задачи, так и на основной вопрос данной сложной задачи, если учащиеся решают её устно полностью, преподаватель должен отводить столько времени, чтобы задачу могли решить почти все учащиеся.

При этом нет смысла ожидать решения поголовно от всех: на это будет уходить много времени, бесполезно и даже вредно затраченного для большинства учащихся. Некоторые учащиеся очень быстро получают ответ. Но преподаватель должен выждать, пока подавляющее большинство из них поднимет руку, заявляя о готовом решении. Отбор ответов следует начинать со слабых учащихся, чтобы авторитет более сильных не заставлял первых изменять свои ответы.

Если преподаватель видит, что даже сильные учащиеся пока не дают ответа, то он не должен терять времени на ожидание; очевидно, задача оказалась непосильной для самостоятельной работы учащихся; поэтому надо немедленно оказать соответствующую помощь.

В зависимости от качества полученных ответов преподаватель будет знать, в какой мере надо требовать от учащихся объяснения устного решения задачи: если все ответы верные, то можно ограничиться беглым опросом для выяснения хода решения задачи; если же имеются неверные ответы, то при опросе надо особенно остановиться на тех простых задачах, в которых могли быть ошибки.

При устном решении сложных задач бывают иногда такие случаи: некоторые учащиеся, получившие вполне самостоятельно верный ответ на основной вопрос задачи, не могут объяснить его, точнее говоря, они не могут припомнить все промежуточные операции, которые заслонились полученным ответом. Преподаватель помогает таким учащимся восстановить весь процесс решения по частям, заставляя их припоминать содержание задачи и отдельные числовые данные, из которых они составляли промежуточные простые задачи. После этого они могут вновь повторить ход решения в связной форме.

Если учащиеся решали задачу разными приёмами, следует подробно разобрать каждый из них в отдельности, указать число действий или отдельных простых задач в каждом решении и степень трудности их. Преподаватель может иногда и сам указать более короткий и изящный способ решения задачи или отдельного вычисления в ней.

5. Письменное решение задач

Многие текстовые задачи по своему содержанию таковы, что устное их решение затруднительно. В целях экономии времени и сил имеет смысл решать их только письменно. Общий ход решения остаётся тот же: учащийся прочитывает по книге или по тетради задачу только один раз, после чего следует изучение содержания её по отдельным вопросам и схематическая запись условия; числовые данные в этой схеме на первых порах сопровождаются иногда не только наименованием их, но некоторыми однословными или двусловными объяснениями, но от этого с течением времени надо отходить: в схеме следует записывать только числа с наименованиями, но по возможности в таком порядке, чтобы была видна зависимость между ними; по этой записи один из учащихся в связной форме пересказывает содержание данной сложной задачи. После этого учащиеся составляют устно сначала первую простую задачу, указывают соответствующее действие, а потом записывают вопрос простой задачи, указанное действие и необходимые вычисления, если нельзя их выполнить устно. Так же составляются, а затем и решаются следующие задачи.

Отдельные преподаватели по-разному оформляют письменное решение сложных задач. Так, одни из них требуют, чтобы учащиеся сначала записывали вопрос каждой отдельной простой задачи; под ним, с новой строчки,—действие и вычисления, а на следующей строчке — результат с наименованием (см. в конце главы схему 1). Другие располагают те же самые записи несколько иначе: вопросы в порядке их следования записываются на левой половине страницы, каждый раз с новой строчки, а действия и вычисления — на правой половине против соответствующего вопроса (см. схему 2). Этот способ расположения записей имеет некоторые преимущества перед первым: здесь отчётливо выделяется арифметическое содержание решения задачи, которое может быть легко прочитано и истолковано без обращения к вопросам.

Довольно редко в практике школы встречается такая запись, которая приведена в примерном решении одной и той же задачи синтетическим и аналитическим способами: сначала выписываются те данные, которые входят в каждую простую задачу двумя строчками, под ними — решение задачи, а затем, с новой строчки,— ответ с наименованием (если оно имеется) и с кратким истолкованием его; последнее заменяет вопрос простой задачи. Эту же запись можно вести на двух половинках страницы: на левой — данные каждой простой задачи, на правой — решение той же задачи и с новой строчки — ответ с истолкованием его (см. схему 3 там же).

Последний способ записи решения сложной задачи — запись без вопросов (вопросы формулируются только устно при составлении каждой отдельной простой задачи) — постепенно приучает учащихся к составлению объяснения решения задачи в связной форме.

При письменном решении задач учащиеся должны применять самые разнообразные приёмы вычисления и наиболее удобное расположение записей при этом. В первую очередь надо всемерно культивировать устные вычисления даже при письменном решении задач; к письменным вычислениям имеет смысл прибегать только в тех случаях, когда устные вычисления могут отнять больше времени, чем письменные, или когда имеется опасность допустить ошибку при устных вычислениях. Как правило, надо требовать, чтобы при умножении и делении многозначных чисел (целых и десятичных дробей) на однозначные все вычисления производились только устно с последующей записью каждого однозначного результата. Например:

$$1)\ 32\,624 \cdot \frac{1}{8} = \frac{32\,624}{8} = 4078.$$

$$2)\ 723{,}6 \cdot 0{,}9 = 651{,}24.$$

Когда учащиеся переходят к операциям над дробными числами, в частности, над обыкновенными дробями, когда все действия над дробями записываются только «в строчку», при письменном решении сложных и простых задач, в которых имеются целые и дробные числа, следует ввести однообразную запись решения задач — запись действия в виде строчек. В связи с этим надо приучать учащихся переписывать числа при вычислениях только в самых крайних случаях, когда без этого переписывания совсем нельзя обойтись и в этих крайних случаях надо сократить до минимума количество переписываемых чисел.

С давних пор в школьной практике и в методической литературе стоит вопрос о записи вычислений, связанных с простыми именованными числами. Оставляя в стороне вопрос об этом для начальной школы, где изучается арифметика целых чисел и где впервые выясняется смысл каждого действия над числами в более старших классах, когда учащиеся закончат изучение арифметики целых чисел и будут иметь довольно отчётливое представление о смысле и сущности каждого арифметического действия, надо все операции производить только над отвлечёнными числами, даже при решении задач с конкретным содержанием; и только каждый вновь полученный результат в отдельной записи можно сопровождать наименованием и даже более подробным истолкованием (см. схемы 1, 2, 3 в конце главы).

Кстати надо заметить, что этот вопрос имеет остроту только при изучении арифметики, в частности, при решении арифметических задач с конкретным содержанием. Когда некоторые из этих задач потом попадают в курс алгебры, где их решают с помощью уравнений, то вопрос о записи наименований при составлении уравнений никогда не поднимается. Поэтому вполне естественно снять этот вопрос и при арифметическом решении задач, при изучении арифметики дробей, когда учащиеся могут и должны достаточно хорошо уметь разбираться во всех арифметических записях и истолковывать их без всяких надписей.

Сторонники записей наименований при компонентах и при полученных результатах действия обычно приводят один пример, когда нельзя обойтись без наименований — это при делении по содержанию или при нахождении отношения. Такой случай имел место в примерном решении задачи о колхозе, когда нужно было узнать, сколько раз 10 *кг* содержится в 2 800 *ц*; вопрос и в этом случае разрешается очень просто: надо предварительно центнеры выразить в килограммах, тогда можно опять обойтись без наименований.

При переходе от записи чисел с наименованиями к записи их без таковых в качестве временной меры можно сохранить запись наименования только у результата действия, заключая его в скобки, что имеет большое применение в практике школы, например:

$$32:0{,}4=320:4=80\ (\text{руб.}).$$

Но с течением времени и от этого надо отказаться, ограничиваясь записью наименования только при истолковании полученного результата отдельно от самого действия (см. те же схемы). При решении сложных задач нет никакой необходимости на классной доске записывать вопросы или полные объяснения, так как учащиеся на доске всегда пишут очень медленно и неуверенно, занимают текстом много места и очень часто вынуждены тотчас же стирать записанный вопрос, чтобы освободить место для новых записей; всё это очень задерживает и тормозит общую работу.

6. Самостоятельное решение задач в классе и дома

Огромное количество всякого рода задач учащиеся решают в порядке выполнения ими самостоятельной работы в классе или дома; они решают их в этом случае преимущественно в письменном виде. На эту работу большинство учащихся затрачивает много времени, иногда много больше, чем на приготовление всех остальных уроков по другим предметам, особенно в том случае, когда у них задача «не выходит». Более настойчивые из них упорной работой доводят решение до конца, а те, которые «не любят» арифметику, просто бросают такую задачу: одни из них на следующем уроке скажут преподавателю, что «задача не вышла» или что они «не поняли её»; другие, во избежание неприятностей, перед уроком кое-как и наспех спишут решение у товарища.

Основная причина этих фактов кроется в способе задания самостоятельной работы на дом. Преподаватели математики нередко совершенно справедливо говорят, что у них нехватает времени на «прохождение программы», поэтому они стараются на уроке использовать каждую минуту для общеклассной работы, а задание на дом часто указывается и записывается после звонка. Понятно, что никаких или почти никаких объяснений и указаний к выполнению самостоятельной работы дома преподаватель не делает, да и сделать при этих условиях не может. Такое отношение к домашней работе приносит вред: у старательных и упорных учащихся отнимается много лишнего времени на преодоление препятствий и затруднений в ущерб остальным школьным дисциплинам; у менее настойчивых из них развивается привычка списывать работу или же просто отбивается всякая охота к решению задач.

Домашнее задание надо предлагать учащимся в таких условиях и в такой форме, чтобы они все или почти все могли его выполнить, чтобы у них не появилось даже желания списать задачу у товарища и не было повода сказать, что задачу не поняли. Как можно этого добиться? Прежде всего домашнее задание, связанное с изучением нового материала на уроке, следует задавать не после звонка, а сразу по окончании выяснения закрепления нового материала или в конце урока, но до звонка. Если даётся задача нового типа или довольно трудная, преподаватель предлагает учащимся достать книгу — задачник, открыть определённую страницу и найти указанный номер. Затем он заставляет прочитать задачу вслух, а иногда про себя и задаёт несколько контрольных вопросов; по ответам учащихся он заключает о том, в какой мере содержание задачи понято ими. Если надо будет, преподаватель должен сам дать некоторые указания и ответить на вопросы учащихся; иногда имеет смысл на классной доске схематически записать условие трудной задачи. Некоторые преподаватели возражают против такого объяснения домашнего задания и считают, что «учащимся тогда и делать нечего». С этим никак нельзя согласиться: учащемуся остаётся решить задачу, т. е. прочитать условие, схематически записать его, составить, записать и решить все простые задачи, применяя тот или иной способ расположения записей, и истолковать полученное решение. Это большая и ответственная работа, которая доставляет учащимся радость, связанную с выполнением порученной работы, даёт им удовлетворение и прививает любовь к труду и к арифметике.

Многие авторы, составители задачников, как в дореволюционное время, так и теперь, помимо ответов ко всем или почти ко всем задачам, к некоторым из них давали и дают полные решения или краткие указания. Сами преподаватели при подготовке к урокам сплошь и рядом пользуются этими указаниями и решениями, что надо признать совершенно естественным и законным. Понятно, что учащиеся тоже имеют полное право получать необходимые указания к решению некоторых задач, которые им задаются в классе.

Работа, связанная с выполнением домашнего задания, считается оконченной только на следующем уроке, когда преподаватель проверит её: сначала бегло просмотрит тетради у всех учащихся на местах, а затем проведёт опрос. Для этой цели преподаватель применяет разные способы: 1) вызывает одного из учащихся к доске с тетрадью, где тот записывает своё решение задачи без вопросов, а остальные учащиеся сравнивают его записи со своими и в организованном порядке вносят замечания и изменения; 2) иногда вызванный учащийся у стола читает своё решение по вопросам, остальные следят по своим тетрадям и вносят изменения; 3) в некоторых случаях отдельные учащиеся с мест читают по своим тетрадям решения только одной простой задачи; при этом выявляются разные варианты решения и производится сравнительная оценка их.

Схема решения сложной задачи синтетическим способом.

Зная, что	Можно узнать:	Решение	Ответы
1) а) Под пшеницей 400 *га* б) Собрано с 1 *га* 20 *ц*	1. Сколько пшеницы собрано всего?	20·400= =8 000	8 000 *ц* собрано пшеницы
2) а) Собрано пшеницы 8 000 *ц* б) Сдано государству 40%	2. Сколько пшеницы сдано государству?	8 000·0,4= =3 200, где 0,4=40%	3 200 *ц* сдано государству
3) а) Сдано государству 3 200 *ц* б) По цене за 1 *ц* 25 руб.	3. Сколько денег выручено за сданную пшеницу?	25·3 200 = =80 000	80 000 руб. получено за пшеницу
4) а) Собрано пшеницы 8 000 *ц* б) Засыпано в семенной фонд 25%	4. Сколько пшеницы засыпано в семенной фонд?	8 000·0,25 = =2 000, где 0,25=25%	2 000 *ц* засыпано в семенной фонд
5) а) Собрано пшеницы 8 000 *ц* б) Сдано государству 3 200 *ц* в) Засыпано в семенной фонд 2 000 *ц*	5. Сколько пшеницы осталось для распределения по трудодням?	8 000 — —3 200 — —2 000 = =2 800	2 800 *ц* распределено по трудодням
6) а) Распределено пшеницы 2 800 *ц* б) На 1 трудодень 10 *кг*	6. Сколько трудодней числилось в колхозе?	2 800 *ц* = =280 000 *кг*; 280 000 : 10 = =28 000	28 000 трудодней было в колхозе
7) а) Получено денег 80 000 руб. б) Уплачено за ремонт $^1/_4$ суммы	7. Сколько денег уплачено за ремонт и за машины?	$80\,000 \cdot \frac{1}{4} =$ =20 000	20 000 руб. уплачено за ремонт и машины
8) а) Получено денег 80 000 руб. б) Уплачено из них 20 000 руб.	8. Сколько денег осталось для распределения по трудодням?	80 000 — —20 000 = =60 000	60 000 руб. распределено по трудодням
9) а) Распределено по трудодням 60 000 руб. б) В колхозе было 28 000 трудодней	9. Сколько денег приходится на 1 трудодень?	60 000 : :28 000 = =60 : 28 ≈ ≈2,14	2 руб. 14 коп. приходится на 1 трудодень

Ответ. На 1 трудодень приходится 2 руб. 14 коп.

Приложение 2.

Схема решения сложной задачи аналитическим способом.

Чтобы определить:	Надо знать:	Действие	Решение
1. Сколько денег приходится на 1 трудодень?	а) Сумму денег, распределённую на трудодни ...А руб. б) Число трудодней в колхозе ...Б руб.	1) $А : Б = x$; x руб. приходится на 1 трудодень	9) $60\,000 : 28\,000 =$ $= 60 : 28 \approx 2,14$; 2 руб. 14 коп. приходится на 1 трудодень
2. Сколько денег распределено на трудодни?	а) Сумму вырученных денег за пшеницу ...В руб. б) Часть, выделенную для распределения... *Г* руб.	2) $В \cdot Г = А$; А руб. распределено на трудодни	5) $80\,000 \cdot \frac{3}{4} =$ $= \frac{80\,000 \cdot 3}{4} =$ $= 60\,000$; 60 000 руб. выдано на трудодни
3. Сколько денег выручено за пшеницу?	а) Количество пшеницы, сданной государству ...Д *ц* б) Стоимость 1 центнера... 25 руб.	3) $25 \cdot Д = В$; В руб. выручено денег за пшеницу	3) $25 \cdot 3\,200 =$ $= 80\,000$; 80 000 руб. получено за пшеницу
4. Сколько пшеницы сдано государству?	а) Количество собранной пшеницы ...Е *ц* б) Часть, сданную государству... 40% сбора	4) $Е \cdot 0,4 = Д$, где $0,4 = 40\%$; Д центнеров сдано государству	2) $8\,000 \cdot 0,4 = 3200$, где $0,4 = 40\%$; 3 200 *ц* сдано государству
5. Сколько собрано пшеницы?	а) Количество земли под пшеницей... 400 *га* б) Сбор с 1 *га*... 20 *ц*	5) $20 \cdot 400 = 8\,000$; 8 000 *ц* собрано пшеницы	1) $20 \cdot 400 = 8\,000$; 8 000 *ц* собрано пшеницы
6. Какая часть денег выделена для распределения?	а) Вырученную сумму денег, принятую за ...1 б) Часть, выделенную на уплату за машины и ремонт... $\frac{1}{4}$	6) $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$; $\frac{3}{4}$ вырученной суммы выделено на трудодни ($\frac{3}{4}$ Г)	4) $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$; $\frac{3}{4}$ всей суммы денег выдано на трудодни

Чтобы определить:	Надо знать:	Действие	Решение
7. Сколько трудодней было в колхозе?	а) Количество пшеницы, выданной на трудодни ...Ж *ц* б) Количество пшеницы на 1 трудодень 10 *кг*	7) 100 Ж:10 = Б трудодней было в колхозе	8) 2 800·100:10 = 28 000; 28 000 трудодней было в колхозе
8. Сколько пшеницы выдано на трудодни?	а) Количество собранной пшеницы ...Е *ц* б) Количество пшеницы, сданной государству ...Д *ц* в) Количество пшеницы, засыпанной в семенной фонд ...З *ц*	8) Е — Д — З = = Ж; Ж *ц* выдано на трудодни	7) 8 000 — 3 200— — 2 000=2 800; 2 800 *ц* выдано на трудодни
9. Сколько пшеницы засыпано в семенной фонд?	а) Количество собранной пшеницы ...Е *ц* б) Часть, засыпанную в семенной фонд ...25%	9) Е·0,25 = З, где 0,25 = 25%; З *ц* засыпано в семенной фонд	6) 8 000·0,25 = 2 000, где 0,25 = 25%; 2 000 *ц* засыпано в семенной фонд

Ответ. На 1 трудодень приходится 2 руб. 14 коп.

Приложение 3.

Схема 1.

1. Сколько пшеницы собрано со всего поля?

20·400 = 8 000;
8 000 *ц*.

2. Сколько пшеницы сдано государству?

8 000·0,4 = 3 200, где 0,4 = 40%;
3 200 *ц*.

3. Сколько рублей получено за сданную пшеницу?

25·3 200 = 80 000;
80 000 руб.

4. Сколько пшеницы засыпано в семенной фонд?

8 000·0,25 = 2 000, где 0,25 = 25%;
2 000 *ц*.

5. Сколько пшеницы распределено по трудодням?

8 000 – 3 200 – 2 000 = 2 800;
2 800 *ц*.

6. Сколько всего трудодней числилось в колхозе?

2 800 *ц* = 280 000 *кг*
280 000:10 = 28 000;
28 000 трудодней.

7. Сколько денег уплачено за машины и ремонт?

$$80\,000 \cdot \frac{1}{4} = \frac{80\,000}{4} = 20\,000;$$

20 000 руб.

8. Сколько денег распределено по трудодням?

$$80\,000 - 20\,000 = 60\,000;$$

60 000 руб.

9. Сколько денег приходится на один трудодень?

$$60\,000 : 28\,000 = 60 : 28 \approx 2{,}14;$$

2 руб. 14 коп.

10. Ответ. 2 руб. 14 коп. приходится на один трудодень.

Приложение 4.

Схема 2.

1. Сколько пшеницы собрано со всего поля?	1.	$20 \cdot 400 = 8\,000$; 8 000 *ц*
2. Сколько пшеницы сдано государству?	2.	$8\,000 \cdot 0{,}4 = 3\,200$, где $0{,}4 = 40\%$; 3 200 *ц*
3. Сколько рублей получено за сданную пшеницу?	3.	$25 \cdot 3\,200 = 80\,000$; 80 000 руб.
4. Сколько пшеницы засыпано в семенной фонд?	4.	$8\,000 \cdot 0{,}25 = 2\,000$, где $0{,}25 = 25\%$; 2 000 *ц*
5. Сколько пшеницы выдано на трудодни?	5.	$8\,000 - 3\,200 - 2\,000 = 2\,800$; 2 800 *ц*
6. Сколько всего трудодней имели колхозники?	6.	2 800 *ц* = 280 000 *кг*; $280\,000 : 10 = 28\,000$; 28 000 трудодней
7. Сколько денег уплачено за машины?	7.	$80\,000 \cdot \frac{1}{4} = \frac{80\,000}{4} = 20\,000$; 20 000 руб.
8. Сколько денег распределено на трудодни?	8.	$80\,000 - 20\,000 = 60\,000$; 60 000 руб.
9. Сколько денег приходится на один трудодень?	9.	$60\,000 : 28\,000 = 60 : 28 \approx 2{,}14$; 2 руб. 14 коп.

10. Ответ. 2 руб. 14 коп. приходится на 1 трудодень

Приложение 5.

Схема 3.

1. 400 *га* земли под пшеницей 20 *ц* собрано с 1 *га*	1.	$20 \cdot 400 = 8\,000$; 8 000 *ц* собрано пшеницы
2. 8 000 *ц* сбор пшеницы 40% сбора сдано государству	2.	$8\,000 \cdot 0{,}4 = 3\,200$, где $0{,}4 = 40\%$; 3 200 *ц* пшеницы сдано государству
3. 3 200 *ц* сдано государству 25 руб. получено за 1 *ц*	3.	$25 \cdot 3\,200 = 80\,000$; 80 000 руб. выручено за сданную пшеницу
4. 8 000 *ц* весь сбор пшеницы 25% засыпано в семенной фонд	4.	$8\,000 \cdot 0{,}25 = 2\,000$, где $0{,}25 = 25\%$; 2 000 *ц* пшеницы засыпано в семенной фонд
5. 8 000 *ц* весь сбор пшеницы 3 200 *ц* сдано государству 2 000 *ц* засыпано в семенной фонд	5.	$8\,000 - 3\,200 - 2\,000 = 2\,800$; 2 800 *ц* пшеницы распределено по трудодням
6. 2 800 *ц* распределено по трудодням по 10 *кг* на 1 трудодень	6.	2 800 *ц* = 280 000 *кг*; $280\,000 : 10 = 28\,000$; 28 000 трудодней числилось у всех колхозников
7. 80 000 руб. выручено денег $\frac{1}{4}$ их израсходована на машины и ремонт	7.	$80\,000 \cdot \frac{1}{4} = \frac{80\,000}{4} = 20\,000$; 20 000 руб. уплачено за машины и ремонт
8. 80 000 руб. выручено денег 20 000 руб. уплачено за машины и ремонт	8.	$80\,000 - 20\,000 = 60\,000$; 60 000 руб. распределено по трудодням
9. 60 000 руб. выделено на трудодни 28 000 трудодней в колхозе	9.	$60\,000 : 28\,000 = 60 : 28 \approx 2{,}14$; 2 руб. 14 коп. приходится на 1 трудодень

10. Ответ. 2 руб. 14 коп. приходится на один трудодень.

ОГЛАВЛЕНИЕ

V. Десятичные дроби

ава VI. Проценты

Глава VII. Решение задач, содержащих пропорциональные величины

Глава IX. Решение арифметических задач