В. А. ИГНАТЬЕВ, С. А. ПОНОМАРЁВ, Е. Н. ОБУХОВСКАЯ

СБОРНИК
ЗАДАЧ И УПРАЖНЕНИЙ ДЛЯ УСТНЫХ ЗАНЯТИЙ ПО МАТЕМАТИКЕ

ПОСОБИЕ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ ДОПОЛНЕННОЕ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
МОСКВА * 1952

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий сборник составлен на основе опыта применения устных занятий на уроках математики в школах и педагогических училищах г. Москвы. Материал сборника составлен в строгом соответствии с программой средней школы. Упражнения в каждой главе расположены в порядке возрастающей трудности, но это не исключает выборочного использования материала в зависимости от состава класса и времени.

При составлении сборника были использованы различные сборники задач и статьи из журнала «Математика в школе».

Работа была разделена между составителями следующим образом:

Упражнения по арифметике составил В. А. Игнатьев.

Упражнения по алгебре составил С. А. Пономарёв.

Упражнения по геометрии составила Е. Н. Обуховская.

Упражнения по тригонометрии составили С. А. Пономарёв (главы I и II) и Е. Н. Обуховская (глава III).

Все замечания и пожелания по данному сборнику просьба направлять по адресу: Москва, Чистые пруды, 6, Учпедгиз, редакция математики.

Авторы.

ВВЕДЕНИЕ

Значение устных упражнений на уроках математики

«Целью преподавания математики в средней школе является сообщение учащимся фактических знаний в области математики и воспитание у них необходимых навыков и умений для применения полученных знаний в различных практических вопросах. Одновременно преподавание математики служит целям образовательным и воспитательным, вытекающим из общих задач коммунистического воспитания (формирование марксистско-ленинского мировоззрения, выработка воли и характера, воспитание советского патриотизма, национальной гордости)». (Программы средней школы. «Математика», 1948.)

Для достижения этих целей учителя должны применять те методы и приёмы, которые углубляют знания, вырабатывают и закрепляют уменья и навыки, содействуют выполнению задач коммунистического воспитания, активизируют работу и повышают её эффективность.

Одним из испытанных средств, способствующих лучшему усвоению математики, являются устные упражнения на уроках математики. Устные упражнения на уроках математики способствуют более сознательному усвоению предмета, приучая учащихся отчётливее понимать сущность математических понятий, определений, теорем и преобразований. Чем лучше будут поставлены в школе устные упражнения, тем скорее будет ликвидирован формализм в преподавании математики.

Устные упражнения развивают у учащихся внимательность, наблюдательность, сообразительность, инициативу, укрепляют волю, повышают дисциплину и возбуждают интерес к работе.

Правильно поставленные устные упражнения подготовляют учащихся к выполнению различных жизненно необходимых расчётов и вычислений, экономят время и устраняют крупный недостаток, наблюдаемый у многих учителей, выражающийся в преклонении перед «подробными записями». Культивирование «подробной записи», когда все малейшие промежуточные выкладки тщательным образом записываются по раз навсегда установленному шаблону, приводит к тому, что учащийся не видит конечного результата, не замечает наиболее рациональных путей решения и непроизводительно тратит время.

Из сказанного не следует делать вывод, что учитель не должен вообще требовать от учащихся уменья производить подробные записи. В начале изучения какого-либо раздела или во время проведения некоторых контрольных работ учитель должен показывать и требовать подробные записи, но по мере усвоения вопросов того или другого раздела, учителю «не следует обременять учащихся работами, сводящимися к пассивному и механическому воспроизведению математических доказательств, к многократному переписыванию громоздких буквенных выражений, подвергаемых разнообразным тождественным преобразованиям». (Программа средней школы, 1948.)

Значение устных вычислений на уроках математики неоднократно освещалось как на страницах учебно-методических пособий, так и в журналах, но для многих учителей устные занятия остаются хотя и полезным, но неосуществимым в их практике вопросом. За последние годы устные упражнения достаточно широко стали применяться только при прохождении арифметики в начальной школе.

Методика проведения устных занятий

Различие по существу между устными и письменными вычислениями заключается не в том, что одно записывается, а другое нет, а различие — в приёмах вычислений: приёмы устных вычислений разнообразны и индивидуальны, а письменные вычисления — однообразны и часто механичны.

Устные вычисления могут быть двух видов: 1) исключительно устные (или слуховые) и 2) полуписьменные (или зрительные). При проведении упражнения можно различить три этапа: 1) ознакомление с упражнением, 2) выполнение упражнения и 3) сообщение ответа и его проверка.

Наиболее распространённая форма ознакомления с упражнением заключается в том, что учитель только один раз чётко читает упражнение, не разрешая его записывать. Эта форма употребляется тогда, когда упражнение несложно по своей структуре и легко запоминается. Если данные задачи сложны для запоминания, то записывают их на доске.

Другой формой ознакомления с упражнением является ознакомление при помощи классных настенных таблиц. Учитель с помощью указки показывает написанные алгебраические или арифметические выражения и предлагает произвести над ними те или иные действия.

Возможно также использование карточек, которые учитель предварительно раздаёт учащимся. Приведённые формы применяются в зависимости от содержания проходимого материала.

Для выполнения упражнения необходимо создать соответствующую обстановку (установить тишину и убрать всё лишнее с парт). Ученики, выполнившие упражнение, поднимают руку, а учитель, когда значительная часть класса подняла руки, опрашивает учеников.

Если кто-либо из учеников даёт неверный ответ, его заставляют повторить условие задачи и её решение. Если упражнение допускает различные приёмы решения и ученики дали эти приёмы, то необходимо разобрать их и выделить лучшее решение. Затраченное время на устные вычисления окупается повышением интереса к занятиям со стороны учащихся.

Устный счёт рекомендуется проводить систематически, т. е. последовательно знакомить учащихся с новыми приёмами, расширяя круг приложения приобретённых навыков к числам различной величины и к задачам.

Материал для устного счёта нужно точно спланировать как по разделам программы, так и на каждый урок. Надо точно определить, какое количество времени может быть отведено устным вычислениям на уроке, а также и их место на уроке. Занятия устным счётом можно проводить в начале урока, в середине, в связи с опросом учащихся или решением задач, и в конце — для закрепления усвоенного на уроке материала. Нужно избегать чисто «словесных» уроков математики.

Чтобы занятия устным счётом не были утомительны, нужно их разнообразить, чередуя устные, полуписьменные и письменные формы занятий.

Некоторые особенности устных вычислений по арифметике, алгебре, геометрии и тригонометрии

Содержание и объём устного счёта по арифметике, алгебре, геометрии и тригонометрии должны находиться в строгом соответствии с программой.

Арифметика. Ознакомление учащихся с различными приёмами устных вычислений по арифметике и выработка навыков беглого счёта должны иметь место на протяжении всех лет обучения в средней школе. Устный счёт может найти широкое применение при решении алгебраических и арифметических задач, и нужно следить за тем, чтобы навыки, приобретённые на уроках арифметики, росли и множились при изучении алгебры и геометрии. В этом отношении наиболее широкие возможности открывает алгебра.

По арифметике надо особенное внимание обратить на перенесение приёмов устных вычислений с целыми числами на устные вычисления с обыкновенными и десятичными дробями.

При повторении действий с целыми числами и изучении раздела «Делимость чисел» было бы весьма полезно усвоить путём систематических упражнений умножение двузначных чисел от 11 до 20 сначала на однозначные числа, а позднее, при изучении обыкновенных и десятичных дробей, и на двузначные (от 11 до 20 по таблицам на стр. 12 и 14).

Таблицы эти должны постоянно находиться перед глазами учащихся, как для тренировки во время устных вычислений, так и для самостоятельного пользования ими при производстве письменных вычислений.

При изучении обыкновенных дробей следует использовать таблицы №№ 1 и 2 (стр. 53—54).

Таблица в увеличенном виде может облегчить учащимся усвоение обыкновенных дробей.

При проведении устных вычислений не следует увлекаться вычислительной практикой в отрыве от задач, так как только решение задач, имеющих отношение к жизненной практике, поможет учащимся в будущем применять свои счётные навыки на фабрике, заводе, в колхозе, в совхозе и при выполнении своих обязанностей по защите нашей социалистической родины.

Алгебра. Устные упражнения по алгебре, имеющиеся в данном сборнике, в основном двух видов: во-первых, представлены упражнения, способствующие повышению уровня математического развнтия учащихся, во-вторых, — упражнения, способствующие развитию вычислительных навыков. Содержание и объём навыков в устных упражнениях определяются программой математики.

В сборнике подавляющее большинство упражнений дано для устного решения, но есть и так называемые «полуписьменные» упражнения. Некоторые упражнения, как, например, упражнения в гл. II § 2 №№ 2—5, требуют предварительного составления настенных таблиц. В целях экономии времени и получения лучшего результата, ряд упражнений, как, например, из глав I, VI, IX, XII и др., способствующих развитию вычислительных навыков, можно заносить на так называемые «индивидуальные» карточки.

Геометрия. Предлагаемые ниже устные задачи и упражнения по курсу геометрии для VI — X классов преследуют следующие цели:

1. Устные задачи и вопросы должны способствовать развитию пространственных представлений у учащихся и помогать более чёткому образованию геометрических понятий.

2. Углубить опрос по геометрии путём таких заданий, как: а) узнать по чертежу фигуру и определить её свойства; б) реконструировать фигуру внесением элементов движения; в) узнать и объяснить изученные геометрические соотношеиия на новом геометрическом материале и др.

В соответствии с целевой установкой геометрических упражнений следует подбирать устные задачи и вопросы так, чтобы они подготавливали учащихся к восприятию новых пространственных соотношений и расширяли бы имеющийся запас геометрических образов.

После доказательства теоремы на классной доске, чтобы проверить, поняли ли учащиеся план доказательства и смысл выполненных вспомогательных построений, им даются дополнительно устные задачи и вопросы. Ответы учащихся на эти вопросы должны показать учителю понимание учащимися чертежа и доказательства теоремы. Повторное доказательство теоремы полезно проводить устно на изменённых чертежах.

Устные задачи и вопросы следует ставить различно в зависимости от цели, содержания материала и навыков в устных вычислениях.

В одном случае можно предложить вопрос, ничего не записывая на доске, и требовать от учащихся устного ответа, в другом — нужно записать условие задачи на доске. Устный опрос по геометрии может быть организован так: вывешивается плакат с условием задачи, например, на доказательство. Учащиеся по плакату рассказывают её решение; плакат может быть использован и для исследования решённой в классе задачи на построение. Учащиеся по плакату подробно рассказывают, сколько и какие могут быть случаи решения, или отвечают на вопрос, когда задача не имеет решения. Иногда на доске даётся чертёж для составления самостоятельной устной задачи.

Тригонометрия. Имеющиеся в сборнике устные упражнения по тригонометрии, как и упражнения по другим разделам, можно подразделить на упражнения, способствующие повышению уровня математического развития учащихся, и упражнения тренировочного характера. Подавляющее большинство упражнений может быть выполнено устно, без письменных выкладок, а некоторая часть — «полуписьменно», например: упражнения гл. III «Графическое решение тригонометрических уравнений».

Раздел 1. АРИФМЕТИКА

Глава I

ПОВТОРЕНИЕ ПРОЙДЕННОГО В НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЕ

§ 1. Нумерация

1. Сколько различных слов нужно, чтобы составить названия чисел от единицы до миллиона? до миллиарда? до триллиона?

2. В 1950 г. по Советскому Союзу было выработано примерно четыре миллиарда шестьсот восемьдесят шесть миллионов *м* хлопчатобумажных тканей, сто пятьдесят девять миллионов четыреста тысяч *м* шерстяных тканей. Написать цифрами.

3. В 1950 г. в начальных, семилетних и средних школах обучалось более 31 млн. 800 тыс. учащихся. Сколько карандашей нужно иметь, чтобы выдать каждому по 10 штук?

4. В 1950 г. было изготовлено более 2 млрд. 333 млн. тетрадей. Сколько потребуется стоп бумаги, если из стопы бумаги изготовляется 100 тетрадей? [23,33 млн. стоп.]

5. Во сколько раз увеличится целое число, написанное по десятичной системе счисления, если справа приписать к нему один нуль? два нуля?

6. Поверхность земного шара равна 509 000 000 *кв. км.* Сколько это составляет *га*?

7. Расстояние от Земли до Солнца равно 149 500 000 *км.* Сколько мириаметров от Земли до Солнца?

8. Число всех жителей, живущих на Земле, примерно 2 100 000 000 человек. Сколько миллионов жителей на Земле?

9. Написать по двоичной системе 5; 7; 8; 6; 2. Написать те же числа по троичной системе счисления.

10. Написать 12; 28; 300; 149 и 187 по пятиричной, шестиричной и двенадцатиричной системе счисления.

11. Число 123 написано по восьмиричной системе. Написать его по десятичной системе.

12. Записать в десятичной системе счисления следующие числа: $234_{(5)}$; $1230_{(4)}$; $78_{(9)}$; $173_{(12)}$ и $80_{(11)}$.

13. Какое изменение произойдёт в числе, если между двумя его цифрами вставить один, два, три... нуля? (Вывести правило.)

14. Найти 1% и 1‰ от следующих чисел: 8 000; 9 000; 74 000.

15. Найти 10% от чисел: 970; 810; 900; 1 400; 21 000.

16. Найти 10‰ и 100‰ от чисел: 800; 900; 17 000; 29 000; 870 000.

17. Сколько квадратных метров в 1 *кв. км*? Сколько квадратных дециметров? квадратных сантиметров?

18. Сколько кубических миллиметров в 1 *куб. м*? Сколько кубических сантиметров? Сколько кубических дециметров?

19. Объём продукции СССР во всём сельском хозяйстве в 1937 г. достиг 20 100 млн. руб. Записать это число рублей в миллиардах.

§ 2. Приёмы устных вычислений

Сложенне

1. Пользуясь прилагаемой таблицей, найти суммы чисел по горизонтали или вертикали и, постепенно усиливая темпы счёта, стараться достигнуть наибольшей быстроты.

При счёте называются только результаты сложения (промежуточные суммы). Сначала складывайте по два числа, а затем по два и по три; по четыре.

Например: 8; 10; 16; 19 и т. д. (1-й столбец);
17; 36; 45; 50 (2-й столбец).

Таблица 1

1	3	5	7	9	8	5	1
7	9	1	4	5	3	1	5
2	5	7	6	8	1	4	2
6	8	4	1	3	7	6	8
3	4	8	5	7	2	5	3
8	7	3	9	2	5	2	4
4	2	9	3	6	8	6	3
9	6	2	8	1	4	3	2
5	1	6	2	4	9	4	5
4	5	8	6	9	7	3	4

2. По приводимой ниже таблице прибавляйте однозначное число к двузначному и двузначное к двузначному, соблюдая указанные выше правила счёта.

(Для этого можно разрезать таблицу на отдельные полоски и соединять их: одна + одна, одна + две, две + две.)

Таблица 2

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
I	4	11	29	32	50	58	61	73	88	93
II	2	15	27	34	48	56	63	71	89	100
III	5	13	20	36	46	52	65	74	87	94
IV	7	18	28	38	44	54	67	72	90	95
V	3	14	25	40	42	51	69	75	96	97
VI	6	17	23	31	49	53	62	80	85	98
VII	10	12	21	33	47	55	64	77	83	96
VIII	8	16	26	35	45	60	66	79	81	91
IX	1	20	24	39	43	57	68	76	84	99
X	9	19	22	37	41	59	70	78	82	92

3. Складывайте числа выборочно через один, два ряда. Например: 2-й и 4-й; 3-й и 6-й и т. д. (таблица 2).

При сложении чисел по вертикальным рядам упражняйтесь в нахождении суммы каждого ряда путём округления сначала до ближайшего большего числа, потом до среднего и, наконец, до меньшего числа.

Для упражнений в сложении путём уравнивания средней лучше пользоваться горизонтальными рядами.

Упражнения по таблицам нужно проводить до тех пор, пока учащиеся не станут считать почти автоматически.

4. *Сложение большого числа многозначных чисел.*

Пользуясь указанными приёмами, найдите суммы многозначных чисел:

13 789	789	273	1 345	283 478
24 737	345	489	2 786	879 631
34 578	721	718	3 459	234 589
78 963	448	314	7 638	748 697
81 234	793	925	4 627	397 868
+ 56 789	+ 842	+ 783	+ 8 541	+ 487 356
78 965	345	494	7 368	947 889
87 518	789	845	4 932	757 812
75 634	632	789	2 785	348 721
32 178	145	876	3 486	923 561
65	(5 849)	(6 506)	(46 967)	(6 009 602)
52				
58				
48				
51				
564 385				

5. *Сложение многозначных чисел при помощи «телефонного способа» чтения чисел:*

253 472 + 342 012 = 595 484

25/34/72 + 34/20/12 = 59/54/84

274 263 + 432 615	831 721 + 154 254
153 714 + 224 736	297 342 + 311 856
285 332 + 422 547	483 153 + 225 447

6. *Замена нескольких слагаемых их суммой.*

Например:

$$343 + 87 + 83 = 343 + (87 + 83) = 343 + 170 = 513$$
$$278 + 125 + 275 + 150 = 278 + (125 + 275) + 150 =$$
$$= 278 + (400 + 150) = 278 + 550 = 828$$

34 + (63 + 27)	223 + 137 + 263	238 + 142 + 258 + 140
49 + 72 + 58	387 + 243 + 547	372 + 246 + 154 + 130
87 + 63 + 47	723 + 138 + 242	485 + 372 + 128 + 115

7. *Способ перестановки* (закон переместительности).

390 + 286 + 210	323 + 278 + 77	473 + 252 + 127
470 + 347 + 230	485 + 149 + 15	392 + 415 + 208
640 + 149 + 160	384 + 153 + 16	487 + 273 + 313

84 + 27 + 16 + 43
170 + 210 + 330 + 190
427 + 315 + 126 + 185

8. *Округление слагаемых или прибавление разности.*

298 + 134	476 + 288	384 + 198	437 + 396
398 + 305	594 + 396	578 + 277	594 + 789
327 + 225	324 + 238	723 + 139	537 + 243
532 + 318	418 + 139	348 + 223	328 + 534

312 + 454 + 188	148 + 308 + 252 + 142
447 + 175 + 253	134 + 258 + 147 + 266
195 + 205 + 305	196 + 148 + 134 + 196

9. *Замена сложения умножением.*

$$409 + 410 + 411 + 412 = 410 \times 4 + (-1 + 1 + 2) = 1\,642$$

209 + 208 + 211 + 213 =	78 + 89 + 90 + 88 + 92 + 95 =
315 + 314 + 316 + 318 =	63 + 65 + 67 + 68 + 60 + 65 =
425 + 426 + 427 + 430 =	

Вычитание

1. *Вычитание десятичными группами.*

Например:

785 — 527 = (7 с. — 5 с.) + (85 — 27) = 2 с. + 58 ед. = 258;
654 — 373 = 65 д. — 37 д. + 4 ед. — 3 ед. = 28 д. + 1 ед. = 281.

473 — 242	747 — 475	417 — 285	819 — 397
578 — 329	858 — 387	745 — 374	472 — 324

2. *Вычитание при помощи телефонного чтения чисел.*

Например:

347 985 — 184 769 = 34/79/85 — 18/47/69 = 16 + 32/16 = 163 216.

Этот способ применяется в том случае, если части числа попарно вычитаются без занимания.

543 762 — 142 648 784 662 — 363 847 976 832 — 451 719
785 443 — 654 938 624 372 — 352 738 355 249 — 182 718

3. Иногда при последовательном вычитании выгодно предварительно сделать сложение.

Например:

342 — 37 — 163 = 342 — (37 + 163) = 342 — 200 = 142
897 — 119 — 181 — 450 748 — 243 — 157 — 125
785 — 217 — 83 — 225 956 — 372 — 128 — 350

4. *Округление уменьшаемого и вычитаемого (порознь и вместе).*

597 — 280 823 — 497 878 — 197 798 — 289 945 — 789
501 — 365 712 — 304 349 — 294 584 — 694 978 — 689

5. *Уравнивание единиц в уменьшаемом и вычитаемом.*

Пример: 976 — 527 = (976 — 526) — 1 = 450 — 1 = 449
458 — 327 582 — 344 397 — 189 382 — 196
742 — 536 873 — 578 485 — 278 942 — 836

Умножение

Приступая к повторению умножения, составьте с учащимися таблицу умножения до 19 × 9 (по типу таблицы Пифагора) и рекомендуйте усвоить её в течение первого полугодия, показав учащимся применение её к умножению многозначных чисел.

Таблица умножения до 19×9

	2	3	4	5	6	7	8	9
11	22	33	44	55	66	77	88	99
12	24	36	48	60	72	84	96	108
13	26	39	52	65	78	91	104	117
14	28	42	56	70	84	98	112	126
15	30	45	60	75	90	105	120	135
16	32	48	64	80	96	112	128	144
17	34	51	68	85	102	119	136	153
18	36	54	72	90	108	126	144	162
19	38	57	76	95	114	133	152	171

1. Произвести умножение, начиная с высших разрядов:

64 × 7 32 × 8 27 × 9 65 × 6 55 × 8
43 × 300 86 × 70 104 × 600 608 × 8 67 × 20

2. *Способ перестановки сомножителей* (переместительный закон умножения).

Пример:

$$8 \times 12 \times 15 \times 5 = 8 \times 15 \times 12 \times 5 = 120 \times 60 = 7\,200.$$

$16 \times 8 \times 5$	$15 \times 3 \times 8 \times 5$	$36 \times 18 \times 5 \times 15$
$18 \times 4 \times 5$	$24 \times 15 \times 5 \times 6$	$48 \times 24 \times 15 \times 5$

$26 \times 4 \times 5 \times 25$

$48 \times 6 \times 35 \times 15$

3. *Округление множимого и множителя.*

Пример:

$$58 \times 12 = 60 \times 12 - 2 \times 12 = 720 - 24 = 696;$$

$$45 \times 27 = 45 \times 30 - 45 \times 3 = 1\,350 - 135 = 1\,215.$$

72×18	48×23	72×19	38×23	46×39
84×17	59×24	84×18	72×29	48×23

4. Перемножить двузначные числа по указанному ниже способу.

Пример:

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}47\\23\end{array}\\ \hline 1\,081\end{array}$$

Рассуждаем так: от умножения 3 на 7 получается 21 единица. 1 единицу пишем, 2 десятка в уме. От умножения 2 на 7 и 3 на 4 получается $14 + 12$ (десятков) да 2 десятка в уме, всего 28 десятков; 8 пишем в разряде десятков, 2 сотни в уме; от умножения 2×4 получается 8 сотен да 2 сотни в уме, всего 10 сотен, или тысяча.

Умножить:

47×24	72×33	84×22	93×21
47×28	37×28	47×37	73×42

5. В приведённых ниже примерах упростить вычисления путём увеличения одного сомножителя в несколько раз и соответственного уменьшения другого.

Пример:

$$75 \times 44 = 150 \times 22 = 300 \times 11 = 3\,300;$$

можно сразу $75 \times 44 = 300 \times 11$; $35 \times 48 = 70 \times 24 = 1\,680$.

48×15	175×28	868×45
25×56	625×56	256×15
72×35	246×35	684×45

Таблица умножения двузначных чисел

	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
11	121	132	143	154	165	176	187	198	209	220
12	132	144	156	168	180	192	204	216	228	240
13	143	156	169	182	195	208	221	234	247	260
14	154	168	182	196	210	224	238	252	266	280
15	165	180	195	210	225	240	255	270	285	300
16	176	194	208	224	240	256	272	288	304	320
17	187	204	221	238	255	272	289	306	323	340
18	198	216	234	252	270	288	306	324	342	360
19	209	228	247	266	285	304	323	342	361	380
20	220	240	260	280	300	320	340	360	380	400

6. Последовательное умножение или умножение числа на произведение.

Например:

$$84 \times 45 = (84 \times 5) \times 9 = 420 \times 9 = 3\,780.$$

55×48 $\quad 36 \times 45$ $\quad 24 \times 65$ $\quad 56 \times 75$

52×85 $\quad 76 \times 15$ $\quad 24 \times 95$

7. Применение распределительного закона.

Умножение на 9.

Например:

$$43 \times 9 = 43 \times 10 - 43 = 387.$$

27×9; 48×9; 56×9; 123×19; 208×9; 305×9; 409×9.

Умножение двузначных чисел на 99.

Пример:

$$47 \times 99 = 4\,700 - 47 = 4\,600 + 100 - 47 = 4\,653,$$

короче: уменьшить число сотен на единицу и приписать дополнение множимого до 100.

Пример:

$$93 \times 99 = 9\,207.$$

47×99; 53×99; 87×99; 95×95; 88×99; 48×99.

Точно так же умножается трёхзначное число на 999 и т. д.

Пример: $349 \times 999 = 348\,651$.

589×999; 688×999; 723×999; 684×999; 473×999.

Умножение на 5, 25 и 125 по формулам:

$$A \times 5 = \frac{A \times 10}{2} = \frac{A}{2} \times 10; \quad A \times 25 = \frac{A \times 100}{4} = \frac{A}{4} \times 100;$$

$$A \times 125 = \frac{A \times 1000}{8} = \frac{A}{8} \times 1\,000.$$

Пользуясь этими формулами, найти произведение: 16, 24, 48, 56, 52, 76, 84, 96, 108, 144, 256 на 5, на 25, на 125.

Умножение на 15.

Пример:

$$48 \times 15 = 48 \times 10 + \frac{48 \times 10}{2} = 720.$$

Умножить: 24, 32, 42, 52, 56 на 15.

Умножение на 35.

Пример:

$$36 \times 35 = 36 \times 25 + 36 \times 10 = 900 + 360 = 1\,260.$$

Умножить: 32×35; 48×35; 52×35; 72×35; 84×35.

Умножение на 75.

Пример:

$$84 \times 75 = 84 \times 100 - \frac{84 \times 100}{4} = 6\,300,$$

или

$$84 \times 75 = 84 \times 50 + \frac{84 \times 50}{2} = 6\,300.$$

Умножить: 12, 16, 24, 28, 36, 44, 52 на 75.

8. Умножение посредством разложения множителя на слагаемые, разность, сомножители и частное.

Примеры:

$$48 \times 37 = 48 \times 25 + 48 \times 12 = 1\,200 + 576 = 1\,776;$$
$$53 \times 45 = 53 \times (50 - 5) = 53 \times 50 - 53 \times 5 = 2\,385;$$
$$48 \times 375 = 48 \times 125 \times 3 = 6\,000 \times 3 = 18\,000.$$

$$24 \times 12\frac{1}{2} = 24 \times \frac{100}{8} = 300.$$

9. *Народные способы умножения:*

Сколько уплатили за 23 иголки по 15 коп.?

23 гривенника	— 2 руб. 30 коп.
23 пятака	— 1 руб. 15 коп.
	Всего 3 руб. 45 коп.

Сколько уплатили за 8 *м* материи по цене 3 руб. 77 коп. за метр?

8 трёшниц	— 24 руб.
8 полтинников	— 4 руб.
8 четвертаков	— 2 руб.
8 двухкопеек	— 16 коп.
	Всего 30 руб. 16 коп.

Пример:

$$\begin{array}{r} 48 \times 52 \\ 24 \times 104 \\ 12 \times 208 \\ 6 \times 416 \\ 3 \times 832 \\ \hline 2\,496 \end{array}$$

10. *Умножение по алгебраическим формулам* (см. ниже стр. 88).

Деление

1. Произвести деление, начиная с единиц высшего разряда.

Пример:

$$963 : 3 = (960 : 3) + (3 : 3) = 321.$$

448 : 4; 1 248 : 4; 856 : 8; 924 : 3; 1 456 : 7; 1 296 : 12; 1 648 : 16; 3 696 : 12; 8 496 : 12; 9 664 : 16; 9 664 : 32; 625 125 : 125; 375 125 : 125.

2. В приведённых ниже примерах рекомендуем разлагать делимое на десятичные группы и делить по частям.

Примеры: 348 : 3 = 3 сотни и 48 единиц разделить на 3 = 1 сотня и 16 единиц, или 116; 429 : 3 = 42 десятка и 9 единиц разделить на 3, получится 14 десятков и 3 единицы, или 143.

Разделить: 456 : 4; 764 : 4; 855 : 5; 917 : 7; 768 : 4; 948 : 3; 545 : 5; 648 : 6; 954 : 9; 819 : 3.

3. *Округление делимого.*

Пример:

$$954 : 18 = (900 + 54) : 18 = 50 + 3 = 53.$$

Разделить: 816 : 16; 918 : 18; 988 : 19; 882 : 18; 798 : 19; 688 : 16; 546 : 13; 756 : 18; 656 : 16; 984 : 24.

4. *Последовательное деление.*

Пример:

$$480 : 32 = (480 : 8) : 4 = 60 : 4 = 15.$$

Разделить: 632 : 8; 944 : 16; 960 : 64; 825 : 75; 255 : 85; 455 : 65; 475 : 95; 315 : 35.

5. *Одновременное увеличение делимого и делителя в несколько раз.*

Примеры:

$$315 : 35 = 630 : 70 = 9.$$

495 : 15	225 : 75	495 : 45	275 : 55	440 : 55
455 : 65	425 : 85	285 : 95	475 : 95	345 : 15

6. *Деление на 5, 25, 125 по формулам* $A : 5 = \frac{A \times 2}{10} = \frac{A}{10} \times 2$; $A : 25 = \frac{A \times 4}{100} = \frac{A}{100} \times 4$; $A : 125 = \frac{A \times 8}{1\,000} = \frac{A}{1\,000} \times 8$.

Разделить данные ниже числа на 5, 25 и 125:
520, 630, 740, 810, 920 (на 5); 1 800, 1 500, 2 100, 3 400, 6 100 (на 25) и 2 000, 6 000, 8 000, 9 000, 17 000 (на 125).

§ 3. Дополнительные приёмы сокращённых вычислений

Объяснительная записка к программе подчёркивает необходимость «направлять внимание учащихся в сторону наиболее рационального расположения вычислений, указывая методы контроля, и следить за тем, чтобы учащиеся заранее «прикидывали» числовой результат действия». В целях рационализации вычислений и упрощения записей можно рекомендовать перечисленные ниже приёмы сокращённых вычислений.

1. Сложение и вычитание

Произвести устно вычитание посредством сложения.

Пример:

$$\begin{array}{r} _{-}\,4\,317 \\ 1\,786 \\ \hline 2\,531 \end{array}$$

Рассуждаем так: сколько надо прибавить к 6, чтобы получить 7? — 1. Пишем под единицами 1. Сколько надо прибавить к 8, чтобы получить 11 ? — 3. Пишем 3 под десятками. Сколько надо прибавить к 7, чтобы получить 12, так как мы заняли уже 1 сотню? — 5. Пишем 5 под сотнями. Сколько надо прибавить к 1, чтобы получить 3, так как мы заняли 1 тысячу? — 2. Пишем 2 в разряде тысяч.

Произвести вычитание посредством сложения:

1 000 — 392	400 — 136	1 000 — 543	1 000 — 868
1 000 — 543	5 678 — 2 351	300 — 175	900 — 568
800 — 362	700 — 183	3 672 — 1 993	9 886 — 5 992
1 000 — 671			

Пользуясь приведённым выше приёмом вычитания, можно производить одновременно сложение и вычитание нескольких слагаемых и вычитаемых.

Пример:

$$\begin{array}{r} 84\,378 \\ -\left\{\begin{array}{r} 3\,672 \\ 16\,934 \\ 5\,281 \end{array}\right\}+ \\ \hline 58\,491 \end{array}$$

Рассуждаем так: $1 + 4 + 2 = 7$. Сколько надо прибавить к 7, чтобы получить 8? — 1. Далее: $8 + 3 + 7 = 18$. Сколько надо прибавить к 8, чтобы получить 17? — 9. Далее: $2 + 9 + 6 = 17$. Сколько надо прибавить к 7, чтобы получить 11, так как 2 занято? — 4. Далее: $5 + 6 + 3 = 14$. Сколько надо прибавить к 4, чтобы получить 12 (два занято)? — — 8 и т. д.

2. Умножение

Умножение на числа, начинающиеся или оканчивающиеся единицей, можно записывать так:

$\begin{array}{r} 1783 \times 14 \\ 7132 \\ \hline 24962 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1783 \times 41 \\ 7132 \\ \hline 73103 \end{array}$

При умножении многозначного числа на двузначное число можно многие случаи умножения производить в строчку, а не в столбик, пользуясь внетабличным умножением и др.

Пример:

$$16\,473 \times 15 =$$

Пользуясь правилом числа цифр произведения, при записи результата действия отступаем вправо на 6 знаков и рассуждаем так:

$$16\,473 \times 15 = 247\,095$$

$3 \times 15 = 45$; 5 пишем, 4 в уме; $7 \times 15 = 105$; $105 + 4 = 109$; 9 пишем, 10 в уме; $4 \times 15 = 60$; $60 + 10 = 70$; 0 пишем, 7 в уме; $6 \times 15 = 90$ и 7 в уме — 97; 7 пишем, 9 в уме; $1 \times 15 = 15$ и 9 в уме — 24; пишем 24.

Умножить:

$12\,345 \times 12$	$27\,864 \times 13$	$37\,965 \times 14$
$27\,896 \times 16$	$37\,896 \times 18$	$27\,845 \times 19$

При умножении рекомендуем пользоваться данными выше таблицами (см. стр. 1—12).

При умножении многозначного числа на однозначное иногда удобно умножать по десятичным группам.

Пример: $121\,615 \times 5 = 608\,075$.

Умножить:

$164\,236 \times 2$	$182\,716 \times 3$	$141\,719 \times 4$
$152\,134 \times 3$	$432\,762 \times 2$	$191\,718 \times 5$

Умножение на 5. При умножении многозначных чисел на 5 можно, пользуясь приведённой выше формулой, делить множимое на 2 и при наличии остатка (1) ставить на конце, вместо нуля, 5.

Примеры:

$$1\,897\,846 \times 5 = 9\,489\,230$$
$$1\,897\,847 \times 5 = 9\,489\,235$$

Умножить:

524×5	648×5	539×5	649×5	$1\,695 \times 5$
$2\,695 \times 5$	$13\,784 \times 5$	$29\,487 \times 5$	$147\,915 \times 5$	

Умножение на 25. При умножении на 25 поступаем так: делим множимое на 4 и умножаем на 100, т. е. приписываем два нуля. Если в остатке получается 1,2 или 3, то вместо нулей пишем 25, 50 и 75, т. е. результат умножения 25 на 1,2 и 3.

Примеры: $14\,456 \times 25 = 361\,400$; $14\,457 \times 25 = 361\,425$; $14\,458 \times 25 = 361\,450$; $14\,459 \times 25 = 361\,475$.

Умножить:

$2\,784 \times 25$; $3\,496 \times 25$; $5\,781 \times 25$; $6\,482 \times 25$; $7\,387 \times 25$; $24\,956 \times 25$; $27\,946 \times 25$; $189\,475 \times 25$; $147\,896 \times 25$.

Умножение на 125. При умножении на 125 делим множимое на 8 и полученный результат умножаем на 1 000, т. е. приписываем три нуля. При наличии остатков (от 1 до 7), вместо нулей на конце пишем 125, 250, 375, 500, 625, 750 и 875, т. е. результат умножения 125 на остаток от деления.

Примеры: $1\,472 \times 125 = 184\,000$; $1\,473 \times 125 = 184\,125$; $1\,475 \times 125 = 184\,375$; $1\,479 \times 125 = 184\,875$.

Умножить:

864×125; 912×125; $1\,024 \times 125$; $2\,748 \times 125$; $1\,986 \times 125$; $2\,784 \times 125$; $3\,948 \times 125$; $8\,745 \times 125$; $9\,856 \times 125$.

Умножение на 11. Умножение на 11 легко вывести из записи частных произведений. Пусть дано $1\,642 \times 11$. Подписывая одно частное произведение под другим, видим, что 2 остаётся без изменения; далее первая цифра множимого складывается со второй; вторая — с третьей; третья — с четвёртой, и последняя остаётся без изменения. $1\,642 \times 11 = 18\,062$.

Умножить:

$23\,421 \times 11$; $32\,783 \times 11$; $42\,632 \times 11$; $87\,654 \times 11$.

Если одна часть множителя кратна другой, то имеется возможность уменьшить число частных произведений, что облегчает вычисление. Пример: 325×168. Так как 16 в два раза больше 8, то достаточно число умножить на 8 и полученный результат удвоить, написав его под десятками. Запись умножения имеет такой вид:.

$$\begin{array}{r} \times\ 325 \\ 168 \\ \hline 2600 \times 2 \\ 5200 \\ \hline 54600 \end{array} \qquad 16:8=2. \quad \text{Ещё пример:} \quad \begin{array}{r} \times\ 1\,696 \\ 248 \\ \hline 13568 \times 3 \\ 40704 \\ \hline 420608 \end{array} \qquad 24:8=3.$$

Умножить:

352×147; 478×168; 395×189; $7\,245 \times 126$; $1\,344 \times 279$; $2\,348 \times 369$; $3\,947 \times 4\,824$; $1\,696 \times 1\,224$; $3\,785 \times 6\,923$.

3. Деление

Если делитель однозначное число, то частное записывается непосредственно в строчку. Пример: $677\,616 : 8 = 84\,702$.

Для облегчения вычислений первоначально можно ставить поразрядно остатки. Запись будет иметь такой вид:

$$\begin{array}{l}677\,616 : 8 = 84\,702.\\ 35\end{array}$$

Разделить:

$$27\,896 : 8;\ \ 489\,924 : 4;\ \ 783\,624 : 6.$$

Если делитель разлагается на произведение нескольких множителей, то сперва делят на один множитель, полученное частное — на другой и т. д.

$$\frac{873\,684}{36} = \frac{218\,421}{9} = 24\,269.$$

Разделить:

$$\frac{2\,472}{48};\ \ \frac{3\,825}{45};\ \ \frac{14\,448}{36};\ \ \frac{877\,824}{72};\ \ \frac{792\,297}{99}.$$

Письменное деление на числа 5; 25 и 125.

Чтобы разделить на 5, 25 и 125, отделяем запятой в делимом сперва 1, 2 и 3 знака и полученное таким образом число умножаем на 2, 4 и 8.

Примеры:

$147'0 : 5 = 147 \times 2 = 294$; $147'00 : 25 = 588$;
$12\,785'000 : 125 = 12\,785 \times 8 = 102\,280$.

Если после запятой остаются числа, кратные 5, 25 и 125, то, разделив их на 5, 25 и 125, прибавляем полученное частное к найденному раньше.

Пример:

$$2\,78'5 : 5 = 556 + 5 : 5 = 557;\ \ 2\,7'75 : 25 = 27 \times 4 + 75 : 25 = \\ = 108 + 3 = 111;\ \ 27'875 : 125 = 27 \times 8 + 875 : 125 = \\ 27 \times 8 + 7 = 216 + 7 = 223.$$

Разделить каждое из данных ниже чисел на 5; 25 и 125:

2 750; 37 875; 34 625; 29 500; 872 125; 1 725 875.

§ 4. Задачи и примеры на все четыре арифметических действия с целыми числами

1. Найти сумму всех тех двузначных чисел, которые оканчиваются цифрой 7.

2. Сколько раз встречается цифра 2 во всех двузначных числах? [18.]

3. Сколькими способами можно уплатить 25 руб., имея кредитные билеты в 3 руб., 5 руб. и 10 руб.?

4. Найти сумму наибольшего двузначного, наибольшего трёхзначного и наибольшего четырёхзначного чисел. [11 097.]

5. Река Днепр имеет в длину 2 285 *км*, а река Дон на 318 *км* короче Днепра. Определить длину реки Дона. [1 967 *км*.]

6. Разность двух чисел равна 480; уменьшаемое в 41 раз больше вычитаемого. Найти уменьшаемое и вычитаемое. [492; 12.]

7. Найти уменьшаемое и вычитаемое, если сумма уменьшаемого, вычитаемого и разности равна 960, разность равна 120. [480; 360.]

8. В ведре морской воды содержится 100 *г* соли. Во скольких вёдрах такой воды содержится 1 *кг* соли? 1 *т*?

9. Утром и вечером я пью по 2 стакана чаю, в каждый стакан кладу по 3 куска сахару. Сколько килограммов сахару я истрачу в месяц (30 дней), если 60 кусков сахару весят 400 *г*? [2,4 *кг*.]

10. Книгу в 5 печатных листов печатают в 1 200 экземплярах. Сколько нужно стоп бумаги?

11. Между блеском от выстрела пушки и звуком прошло 12 сек. Как далеко была пушка, из которой произведён был выстрел, если звук проходит в 1 сек. 340 *м*? [4 080 *м*.]

12. В партере театра 26 рядов по 24 места в каждом. Все места перенумерованы, начиная с первого ряда.
В каком ряду приходится место № 375? [16.]

13. Пионеры в одном из районов уничтожили 10 000 сусликов. Сколько тонн зерна сберегли они для Родины, если суслик съедает за лето до 16 *кг* зерна?

14. Хороший улей пчёл может дать в год 24 *кг* мёду; 1 *кг* мёду стоит 30 руб. На сколько рублей даст мёду один улей? [720 руб.]

15. Сколько минут в апреле месяце? [43 200 мин.]

16. Ширина медного пятака 32 *мм*. Какой длины ряд из 20 пятаков? [64 *см*.]

17. Чему равно произведение всех цифр? Сумма?

18. Длина спички 42 *мм*. Какой длины составится полоса, если приложить одну к другой по длине 75 спичек одной коробки? 10 коробок? [3,15 *м*; 31,5 *м*.]

19. Великий океан в самой широкой части имеет 17 000 *км*. Сколько часов потребовалось бы для перелёта океана, если лететь всё время со скоростью 850 *км* в час? [20 час.]

20. В. П. Чкалов при перелёте Москва—о-в Удд (ныне Чкалов) пробыл в полёте 56 час. 20 мин. Сколько минут В. П. Чкалов был в полёте? [3 380 мин.]

21. Найти неизвестное число по следующим данным:

Множимое	*Множитель*	Произведение	*Делимое*	*Делитель*	*Частное*
50	25	x	1500	125	x
125	x	625	2000	x	8
80	15	x	350	25	x
91	x	728	120	x	15
x	112	560	x	12	25
16	x	208	720	18	x
125	24	x	x	16	15

22. Как изменится частное, если из делимого вычесть половину делимого? Если из делителя вычесть одну треть делителя?

23. 123 45 67 89 = 100.

Какие арифметические знаки надо поставить между этими 4 числами, чтобы получилось 100?

24. 16 *кг* соли взрослому человеку хватит (для употребления в пище) на 2 года 8 месяцев. Сколько соли нужно взрослому человеку в год? [6 *кг*.]

25. Из каждых 600 *кг* дерева получается 24 *кг* золы. Сколько килограммов золы получится из 5 *куб. м* берёзовых дров, если 1 *куб. м* берёзы весит 750 *кг*? [150 *кг*.]

26. 25 *кг* картофеля содержат 18 *кг* воды. Сколько вёдер воды заключается в картофеле, собранном с 1 *а*, если ведро воды весит 12 *кг*, а с ара получается 200 *кг* картофеля? [12 вёдер.]

27. Для 25 рабочих запасли провизии на 40 дней. Через 8 дней прибавилось ещё 15 рабочих.

На сколько дней хватит остатка провизии? [20 дней.]

28. На 4 тракторах за 9 дней вспахали 170 *га* земли. Во сколько дней на 6 таких тракторах вспахали бы 340 *га* земли? [12 дней.]

29. Мне и моему брату вместе 71 год. Мне и моей матери 115 лет, а брату и матери 124 года.

Сколько лет каждому из нас? [84; 40; 31 год.]

30. 100 *кг* каменного угля дают столько же тепла, сколько 300 *кг* сухих дров, а 33 *кг* мазута по количеству даваемого тепла заменят 50 *кг* каменного угля.

Сколько надо взять дров, чтобы заменить ими 165 *кг* мазута? [750 *кг*.]

31. У взрослого мужчины пульс делает в 24 секунды столько же ударов, сколько у женщины в 21 секунду. В 6 секунд у мужчин семь ударов. Сколько ударов делает пульс у мужчин и сколько у женщин в минуту? [70; 80.]

32. В 1948 г. по Министерству мясной и молочной промышленности СССР выработка масла достигла 275 тыс. *т*. Сколько потребовалось бы вагонов, чтобы перевезти это масло, если в каждые два вагона грузить по 25 *т*?

33. Для сооружения волжских гигантов надо вынуть и переместить 750 млн. *куб. м* грунта, т. е. в 10 раз больше, чем при строительстве Суэцкого канала. Сколько кубометров грунта было вынуто при постройке Суэцкого канала?

34. Волга ежегодно несёт в Каспийское море 250 *куб. км* воды. Какой глубины можно получить из этой воды озеро размером 25 *км* $\times$ 5 *км*?

35. Аму-Дарья вливает ежегодно в Аральское море 42 *куб. км* воды. Какую площадь земли можно оросить этой водой, если на каждый квадратный метр положить по 100 *куб. дм* воды?

36. Двое рабочих сделали 336 деталей. Пока один делал 7 деталей, другой делал только 5 деталей. Сколько деталей сделал каждый? [196 и 140.]

37. За 80 руб. купили шарф и шапку. За шарф уплатили столько раз по 15 руб., сколько раз за шапку по 25 руб. Узнать цену шарфа и шапки. [30 руб. и 50 руб.]

38. На ремонт трёх квартир израсходовали 3 600 руб. Ремонт второй квартиры обошёлся в 2 раза дороже ремонта первой, а ремонт третьей в 3 раза дороже ремонта второй. Сколько израсходовано на ремонт третьей квартиры? [2 400 руб.]

39. В три ящика сложили 47 *кг* груш. В первый ящик вошло 72 груши, во второй 90 груш, в третий 120 груш. Сколько весит каждый ящик груш? [12 *кг*; 15 *кг* и 20 *кг*.]

40. Трём покупателям продали на 33 руб. одинаковых конфет. Один покупатель взял 400 *г*, другой 800 *г*, третий 1 *кг*. Сколько заплатил за конфеты каждый покупатель? [6 руб.; 12 руб. и 15 руб.]

41. Для приготовления стекла берут 10 частей поташу, 31 часть песку и 2 части мелу. Сколько пойдёт этих материалов на 129 *кг* стекла? [30 *кг*; 93 *кг* и 6 *кг*.]

42. Материал, из которого отливают пушки, составляется из 50 частей красной меди, 115 частей олова и 35 частей стали. Сколько нужно этих материалов, чтобы отлить пушку весом 2 000 *кг*?

43. Найти два последовательных числа, сумма которых равна 295. [147; 148.]

44. Найти три последовательных чётных числа, сумма которых равна 114. [36; 38; 40.]

45. Сумма двух чисел, из которых одно в 15 раз более другого, равна 1 024. Найти эти числа. [64 и 960.]

46. Сумма двух чисел, из которых одно в 11 раз менее другого, равна 480. Найти эти числа. [440 и 40.]

47. Трое рабочих получили за работу 970 руб. Когда один из них израсходовал из полученных денег 60 руб., другой 85 руб. и третий 105 руб., тогда у них осталось денег поровну. Сколько получил каждый рабочий? [300; 325 и 345 руб.]

48. В трёх школах города, учатся 1 240 учащихся; из них во *второй школе на 100 учащихся больше, чем в первой, а в третьей* на 180 учащихся больше, чем в первой. Сколько учащихся в каждой школе? [320; 420 и 500 уч.]

49. Трое рабочих подписались на заём в сумме 3 600 руб. и разделили между собой облигации так, что второй получил на 350 руб. больше первого и на 200 руб. меньше третьего. На сколько каждый из них подписался?
[900 руб.; 1 250 руб.; 1 450 руб.]

50. Осётр мечет 7 млн. икринок, карп в 14 раз меньше осетра, а треска на 1,5 млн. больше карпа и осетра вместе. Сколько икринок мечет треска? [9 млн.]

51. На трёх полках 96 книг. Если с первой полки переложить на вторую 3 книги, потом со второй на третью 1 книгу, то на всех полках книг будет поровну. Сколько книг было первоначально на каждой полке? [35; 30 и 31.]

52. Колхоз засеял пшеницей два участка, из которых в одном 200 *га*, в другом 300 *га*. На второй участок высеяли на 130 *ц* зерна больше, чем на первый. Сколько пшеницы высеяли на оба участка? [650 *ц*.]

53. Два брата получили зарплату: один 600 руб., другой 540 руб. Через сколько дней у них останется поровну денег, если первый брат будет расходовать ежедневно 36 руб., а второй 30 руб.? [10 дней.]

54. Сколько раз нужно прибавить к 180 по 15, чтоб получить столько же, сколько получится от прибавления того же числа раз к 270 по 10? [18 раз.]

55. В колхозе имеется лошадей и коров поровну. На каждую лошадь отпускается в день 14 *кг* сена, а на корову 10 *кг*. На всех коров в месяц расходуется на 72 *ц* меньше, чем на лошадей. Сколько всего сена расходует колхоз в 1 месяц? [432 *ц*.]

56. Столяр и плотник работали одинаковое число дней. Столяр заработал 360 руб., а плотник 300 руб. Плотник зарабатывал в 1 день на 4 руб. меньше столяра. Сколько зарабатывал тот и другой в день? [24 руб.; 20 руб.]

57. Сын втрое моложе отца и на 20 лет моложе матери. Если к летам всех трёх прибавить 5, то будет 100. Сколько лет каждому?

58. Трём школам продали 2 000 тетрадей; из них вторая школа взяла в 3 раза меньше первой и в 4 раза меньше третьей. Сколько тетрадей купила каждая школа?

59. Два ученика купили тетрадей по одинаковой цене, причём первый купил в 5 раз меньше второго и заплатил на 8 руб. меньше, чем второй. Сколько тетрадей купил каждый, если тетрадь стоила 50 коп.? [20 и 4.]

60. *На заводе работают мужчины и женщины*, причём мужчин в 5 раз больше, чем женщин. Сколько всего человек работает на этом заводе, если число мужчин на 640 больше числа женщин? [960 чел.]

61. Лосось мечет 25 000 икринок, налим на 75 000 больше лосося, а окунь в 4 раза больше налима. Сколько икринок мечет окунь? [400 тыс.]

62. Дед втрое старше старшего внука, вчетверо старше младшего. Обоим внукам вместе 49 лет. Сколько лет деду? [84 года.]

63. У одного человека на 140 руб. больше денег, чем у другого. Но если бы он дал другому 110 руб., то у того стало бы втрое больше, чем у первого. Сколько денег было у каждого? [150 руб. и 10 руб.]

64. Введение в строй волжских гигантов даст экономию 45 млн. *т* каменного угля. Сколько освободится железнодорожных составов поездов по 50 вагонов каждый, если в вагон грузить по 15 *т* угля?

65. Волга вскрывается в Калинине в среднем 10 апреля, а в Астрахани 19 марта. Замерзает в Калинине в среднем 20 ноября, а в Астрахани 21 декабря. Найти разницу в числе дней, когда Волга бывает свободна ото льда в обоих городах.

66. Сумма двух чисел равняется 2 100, частное 6. Найти эти числа. [300; 1 800.]

67. Частное двух чисел 5, разность 280. Какие это числа? [70; 350.]

68. У одного мальчика было на 20 листов больше бумаги, чем у его товарища. Когда же он дал товарищу 15 листов, то у него стало вдвое меньше, чем у товарища. Сколько листов бумаги было у каждого мальчика? [25 л. и 5 л.]

69. В двух комнатах разместились 135 чел.; если из первой комнаты перейдёт во вторую 28 чел., то во второй комнате станет в 4 раза больше людей, чем в первой. Сколько человек было первоначально в каждой комнате? [55 чел. и 80 чел.]

70. Мальчика спросили, сколько ему лет. Он отвечал: «Я втрое старше брата и втрое моложе отца». Отец на 40 лет старше брата. Сколько лет мальчику? [15 лет.]

71. Вес сердца у взрослого человека составляет одну 156-ю часть веса всего тела, а вес крови в 12 раз превышает вес сердца. Сколько весит кровь у человека, вес тела которого равен 78 *кг*? [6 *кг*.]

72. У гренландского кита голова составляет по длине одну третью часть всего тела. Длина остальной части его тела достигает 14 *м*. Какой длины достигает тело кита? [21 *м*.]

73. «Дай мне перо, и у меня будет перьев вдвое больше, чем у тебя», — сказал один школьник другому.

«Нет. Лучше дай ты мне перо, тогда у нас будет поровну», — ответил его товарищ. Можете ли вы сказать сколько у каждого школьника было перьев?

74. Ученику оставалось прочесть седьмую часть книги. Когда он прочёл ещё 43 страницы, то ему осталось прочесть только 57 страниц.

Сколько страниц в этой книге? [700 стр.]

75. Хвост рыбы весит 4 *кг*, голова весит столько, сколько хвост и половина туловища, а туловище столько, сколько голова и хвост. Сколько весит вся рыба? [32 *кг*.]

76. Карандаш и тетрадь стоят 59 коп.; 12 карандашей и 10 тетрадей стоят 6 руб. 8 коп. Сколько стоит карандаш и сколько тетрадь? [50 коп. и 9 коп.]

77. За 10 вилок и 5 ножей заплатили 210 руб. Ножик и вилка стоят вместе 30 руб. Сколько стоят вилка и нож в отдельности? [12 руб. и 18 руб.]

78. За 10 пар ботинок и 8 пар галош уплатили 1 100 руб. Ботинки и галоши стоят вместе 115 руб. Сколько стоят ботинки и галоши в отдельности? [90 руб. и 25 руб.]

79. На 12 тетрадей и 4 блокнота нужно 100 листов бумаги, а на 12 тетрадей и 5 блокнотов нужно 110 листов бумаги. Сколько листов бумаги идёт на каждую тетрадь и на каждый блокнот? [5 л. и 10 л.]

80. 20 яблок и 5 апельсинов стоят 30 руб., а 10 яблок и 15 апельсинов стоят 40 руб. Сколько стоит яблоко? апельсин? [1 руб.; 2 руб.]

81. Вчера продали 3 патефона и 40 пластинок к ним за 1 550 руб., а сегодня по тем же ценам 3 таких же патефона и 70 пластинок за 1 700 руб. Сколько стоит 1 патефон и 1 пластинка? [450 руб.; 5 руб.]

82. Найти три числа, если известно, что суммы их, взятые попарно, дают 170, 190 и 180. [80; 90; 100.]

83. Пальто и пиджак стоят 740 руб. Пиджак и сапоги стоят 360 руб., а сапоги и пальто — 720 руб. Что стоит каждая вещь? [550 руб.; 170 руб. и 190 руб.]

84 Тушь и бумага стоят вместе 5 руб., тушь и кисточка 4 руб., а бумага и кисточка 3 руб. Сколько стоит каждая вещь? [3 руб.; 2 руб. и 1 руб.]

85. Один ученик купил тетрадь и ручку и заплатил 90 коп., другой купил такую же тетрадь и карандаш и заплатил 80 коп., третий купил ручку и карандаш и заплатил 70 коп. Сколько стоила каждая вещь отдельно? [50 коп.; 40 коп. и 30 коп.]

86. Колхоз привёз хлеб на трёх грузовых автомобилях. На первом и втором вместе было 8 *т*, на первом и третьем вместе 9 *т*, на втором и третьем вместе 7 *т*. Сколько тонн хлеба привезли на каждом грузовике? [5 *т*; 3 *т* и 4 *т*.]

87. Двое рабочих получили за свою работу вместе 3 600 руб. Один из них работал 2 месяца, а другой 3 месяца. Второй получал в месяц на 200 руб. больше первого. Сколько получал в месяц каждый рабочий? [600 руб. и 800 руб.]

88. 12 мужских костюмов и 10 пальто стоят 19 600 руб. Пальто стоит на 200 руб. дороже костюма. Сколько стоит пальто и сколько стоит костюм в отдельности? [1 000 руб. и 800 руб.]

89. Кастрюля втрое дороже разливной ложки и вчетверо дороже кружки. Разливная ложка и кружка стоят вместе 21 руб. Сколько стоит кастрюля? [36 руб.]

90. За 30 цыплят и 15 гусят заплатили 270 руб. Что стоит каждый цыплёнок и гусёнок, если гусёнка ценили вчетверо дороже цыплёнка? [3 руб. и 12 руб.]

91. За 12 детских костюмов и 7 пальто заплатили 792 руб. Пальто втрое дороже костюма. Что стоит пальто и что стоит костюм? [72 руб.; 24 руб.]

92. Купили 40 *кг* конфет двух сортов — в 16 руб. и 12 руб. за килограмм. Сколько стоят эти конфеты, если на каждые 5 *кг* конфет первого сорта брали по 3 *кг* второго сорта? [580 руб.]

93. Составлена смесь из сушёных яблок и груш, причём на каждые 10 *кг* яблок взято 5 *кг* груш. Сколько взято яблок и сколько груш, если килограмм яблок стоит 16 руб., а килограмм груш 18 руб., а вся смесь 1 000 руб.? [40 *кг* и 20 *кг*.]

94. Женщина купила 5 *м* материи по 12 руб. и несколько метров по 18 руб. за метр. Сколько она уплатила за материю, если в среднем метр обошёлся ей в 16 руб.? [240 руб.]

95. Железнодорожная касса продала 45 билетов по 70 руб. и 40 руб. за билет и выручила 2 400 руб. Сколько было продано в отдельности билетов по 70 руб. и по 40 руб. [20 бил.; 25 бил.]

96. Между городами *А* и *Б* 800 *км*. Поезд прошёл это расстояние в 18 час., идя со скоростью 30 *км* и 50 *км* в час. Сколько часов он шёл с каждой скоростью отдельно? [5 час.; 13 час.]

97. Между городами *А* и *Б* 800 *км*. Поезд прошёл это расстояние в 18 час., идя со скоростью 40 *км* и 50 *км* в час. Какое расстояние пройдено со скоростью 40 *км* и какое со скоростью 50 *км*? [400 *км*.]

Задачи с геометрическим содержанием

98. Скажите, каких размеров может быть прямоугольник, чтобы он был равновелик квадрату со стороной в 10 *см*?

99. В комнате длиной 8 *м*, шириной 5 *м* нужно сделать паркетный пол из квадратных дощечек, сторона которых 4 *дм* каждая. Сколько дощечек пойдёт на пол? [250.]

100. Сколько нужно листов бумаги длиной 12 *дм*, шириной 8 *дм*, чтобы оклеить потолок квадратной комнаты, сторона которой 12 *м*? [150 *л*.]

101. В комнате длиной 12 *м*, шириной 5 *м* выкрасили пол, и это обошлось в 90 руб. Что будет стоить выкрасить пол в комнате длиной 9 *м*, шириной 8 *м*? [108 руб.]

102. Сколько нужно досок длиной 6 *м*, шириной 6 *дм*, чтобы замостить пол в квадратной комнате, длина которой 12 *м*? [40 д.]

103. Какова должна быть длина сторон квадрата, площадь которого 64 *кв. м*? 81 *кв. м*? 100 *кв. м*?

104. Прямоугольное поле имеет в длину 1 *км*, в ширину 1 *км* без 200 *м*. Сколько в нём гектаров? [80 *га*.]

105. Чему равно основание прямоугольника, площадь которого равна 24 *кв. дм*, а высота 80 *см*?

106. Какими мерами измеряется периметр?

107. Чему равен периметр квадрата, если сторона его равна 15 *см*? 35 *см*? 1 *м* 2 *дм*?

108. Чему равен периметр прямоугольника, длина которого 35 *см*, а ширина 25 *см*?

109. Во сколько раз 1 *га* больше, чем 1 *а*?

110. Принимая вес одного *куб. см* воды равным 1 *г*, найти вес: а) *куб. м* воды; б) воды, наполняющей бассейн длиной 8 *м*, шириной 5 *м*, до высоты 2 *м*.

111. Сколько литров воды вмещает прямоугольный бак длиной 3 *м*, шириной 8 *дм*, высотой 1 *м*? [2 400 *л*.]

112. Сарай с сеном имеет в длину 10 *м*, в ширину 5 *м* и в высоту 2 *м* 5 *дм*. Сколько в нём кубических метров сена? [125 *куб. м*.]

113. Вырыли пруд длиной 17 *м*, шириной 8 *м*, глубиной 2 *м* 5 *дм*. За каждый вынутый кубический метр земли платили 6 руб. 50 коп. Сколько уплатили за работу? [2 210 руб.]

114. Наша классная комната имеет в длину 12 *м*, в ширину 10 *м*, а в высоту 3 *м* 5 *дм*. Сколько кубических метров воздуха приходится на каждого из 30 учеников этого класса? [14 *куб. м*.]

115. Площадка имеет в длину 18 *м*, в ширину 6 *м*. Сколько нужно кубических метров земли, чтобы повысить площадку на 5 *дм*?

116. Что получится, если разделить объём бруса на его высоту?

117. Что получится, если разделить объём куба на площадь основания?

118. Какую часть куба с ребром в 2 *см* составляет брус длиной 2 *см*, шириной 2 *см*, а высотой 1 *см*?

119. Какую часть куба с ребром в 3 *см* составляет куб с ребром в 1 *см*?

120. Во сколько раз увеличится объём куба, если ребро его увеличить в два раза?

Глава II

ДЕЛИМОСТЬ ЧИСЕЛ

§ 1. Признаки делимости

1. Делится ли 31 664 на 72? 42 795 на 45?

2. Написать произведение трёх последовательных чисел и проверить, делится ли оно на 6.

3. Вычислить суммы цифр числа 256 729, стоящих на чётных и нечётных местах, и найти их разность. Делится ли это число на 11?

4. Назвать несколько шестизначных чисел, которые делятся без остатка на 9 и все цифры их одинаковы; какие это числа? Делятся ли они на 11 и 37?

5. Поставить в числе 2 050 603 вместо нулей такие цифры, чтобы оно делилось на 3, на 9 и на 11.

6. Написать трёхзначное число, кратное 4, 5 и 3.

7. Какие числа делятся без остатка на 6? на 12? на 15? на 18? на 21? на 45? на 75? на 72?

8. Число делится без остатка на 2 и на 4; делится ли оно на 8?

9. Число делится на 5 и 15. Делится ли оно на 75?

10. Делится ли произведение двух последовательных чисел на 2?

§ 2. Разложение чисел на простые множители

1. Назовите наименьшее простое число. [2.]

2. Разложите на простые множители каждое из следующих чисел: 108; 120; 150; 175; 225; 560; 320; 720; 960.

3. На какие первоначальные числа делятся без остатка:

300; 360; 663; 570; 510; 512?

4. Может ли простое число быть чётным?

5. Число учащихся VII класса равно наибольшему простому делителю числа 345, а число учащихся V класса равно наибольшему простому делителю числа 410. На сколько в V классе больше учащихся, чем в VII?

6. Найти общие делители в каждой группе следующих чисел:

1) 120; 360; 540 и 720
2) 144; 180; 270 и 960
3) 360; 420; 540 и 600
4) 400; 800 и 200

7. Показать, что числа 6, 28, 496 совершенны, т. е. показать, что каждое из них равно сумме всех его делителей, не считая его самого.

8. Показать, что числа 220 и 284 таковы, что каждое из них равно сумме делителей другого.

9. Не выполняя вычитания, указать, простыми или составными числами будут следующие разности:

$$2 \times 3 \times 5 \times 7 - 2 \text{ и } 2 \times 3 \times 5 \times 7 - 7$$

§ 3. Нахождение наименьшего общего кратного и наибольшего общего делителя

1. Какое будет наименьшее кратное чисел 5 и 7? 6 и 4? 5 и 20? 60 и 36? 120 и 40? 75 и 60? 121 и 11?

2. Найти наименьшее общее кратное каждой группы следующих чисел:

1) 2; 5 и 9	4) 2; 9 и 18	7) 8; 32; 16 и 64
2) 3; 7 и 11	5) 4; 16 и 48	8) 12; 48; 96 и 108
3) 5; 8 и 3	6) 7; 21 и 63	9) 15; 75; 60 и 300

3. Найти наименьшее кратное всех однозначных чисел.

4. Назвать по три числа, имеющие н. о. д. число 24; 18; 25.

5. Делится ли наименьшее кратное двух чисел на их общий наибольший делитель?

6. Найти н. о. д. каждой группы чисел:

1) 42; 56 и 98	4) 50; 75 и 125	7) 15; 60 и 120
2) 45; 60 и 90	5) 108; 72 и 144	8) 54; 18 и 108
3) 60; 72 и 96	6) 64; 144 и 96	9) 25; 36 и 64

7. 24 ученикам раздают для игры 52 шара. На сколько групп надо поделить учеников, чтобы в каждой группе было одно и то же число играющих, чтобы каждая группа имела одно и то же число шаров и чтобы число участников каждой группы было возможно большим? [4 группы, 13 шаров.]

8. Имеется 36 синих и 48 красных листов бумаги. Какое наибольшее число комплектов можно сделать из этих листов, если в каждом комплекте должно быть по одинаковому числу синих и по одинаковому числу красных листов? [12 комплектов.]

9. У ученика есть несколько монет по 15 коп. С этими деньгами он приходит в магазин, чтобы купить себе тетрадей, стоящих каждая 12 коп. Какое наименьшее число тетрадей может купить ученик, если в магазине не оказывается мелочи для сдачи? [5 тетрадей.]

10. Малая шестерня велосипеда имеет 8 зубцов, а большая 18 зубцов. Какое наименьшее число оборотов должна сделать педаль, чтобы заднее колесо и большая шестерня вернулись в своё первоначальное положение? [4 оборота.]

11. Окружность переднего колеса телеги равна 3 *м*, а окружность заднего колеса 4 *м*. Какую наименьшую длину должен иметь путь, пройденный телегой, чтобы каждая пара колёс обернулась целое число раз? [12 *м*.]

12. Пароходы первой линии отправляются из гавани через каждые 12 дней; пароходы второй линии отправляются из той же гавани через каждые 28 дней. 1 января 1948 г. 2 парохода

обеих линий покинули одновременно гавань. Найти ближайшее число и месяц, когда пароходы снова отправятся в плавание одновременно. [24 марта.]

13. Общий наибольший делитель чисел 960 и 1 080 разложен на 3 части так, что первая вдвое, а вторая втрое больше третьей. Найти эти числа.

14. Общий наибольший делитель чисел 256 и 288 разложить на такие две части, чтобы первая была втрое больше второй. [24; 8.]

15. Какое число кратно всем числам?

Глава III

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДРОБИ

§ 1. Основные понятия, изменение величины дроби с изменением её членов, сокращение и приведение дробей к одному знаменателю

1. Сколько граммов заключается в $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{2}{8}$; $\frac{1}{16}$ части килограмма?

2. Какую часть одного метра составляет: пятая часть 3 *м*, седьмая часть 4 *м*, десятая часть 5 *м*?

3. Представьте 7 в виде неправильной дроби, знаменатель которой равен 1; 2; 3.

Какую часть каждого из чисел 22, 25, 40 составляет 27?

4. Два детских сада купили кусок материи длиной 68 *м;* один из них взял 17 *м,* а другой — всё остальное. Какую часть куска материи купил каждый детский сад?

5. Обратите в неправильные дроби:

$$2\frac{5}{7};\quad 3\frac{4}{5};\quad 15\frac{7}{8};\quad 19\frac{2}{11};\quad 15\frac{11}{15};\quad 23\frac{7}{25};\quad 5\frac{8}{35};\quad 12\frac{7}{75}.$$

6. Исключить целые числа из дробей:

$$\frac{75}{8};\quad \frac{686}{5};\quad \frac{512}{25};\quad \frac{948}{12};\quad \frac{623}{65};\quad \frac{1440}{180};\quad \frac{225}{15};\quad \frac{512}{16}.$$

7. Во сколько раз $\frac{1}{8}$ больше $\frac{1}{24}$? $\frac{2}{7}$ больше $\frac{2}{21}$? $\frac{4}{9}$ меньше $\frac{8}{9}$? $\frac{6}{25}$ больше $\frac{6}{50}$? $\frac{6}{25}$ больше $\frac{3}{50}$? $\frac{7}{15}$ больше $\frac{14}{60}$?

8. Дроби $\frac{13}{25}$; $\frac{8}{25}$; $\frac{21}{25}$; $\frac{13}{119}$; $\frac{13}{34}$; $\frac{13}{15}$ и $\frac{13}{28}$ написать по порядку их величины, начиная с меньшей?

9. Я издержал вчера $\frac{5}{12}$ своих денег, а сегодня $\frac{2}{16}$; когда я издержал больше?

10. Определить, не приводя к одному знаменателю, наибольшую и наименьшую из дробей: $\frac{18}{35}$; $\frac{14}{47}$; $\frac{8}{63}$ и $\frac{5}{97}$.

11. Расположить в порядке величины следующие дроби, не приводя их к одному знаменателю:

1) $\frac{7}{8}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{6}{7}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{4}{5}$; 2) $\frac{11}{12}$; $\frac{23}{24}$; $\frac{17}{18}$; $\frac{12}{13}$; $\frac{19}{20}$; 3) $\frac{11}{24}$; $\frac{9}{20}$; $\frac{3}{8}$; $\frac{7}{16}$; $\frac{5}{12}$.

12. Увеличить следующие дроби в 5 раз:

$$\frac{2}{3};\ \frac{7}{15};\ \frac{11}{45};\ \frac{8}{17};\ \frac{11}{55};\ \frac{19}{33}.$$

13. Уменьшить следующие дроби в 4 раза:

$$\frac{4}{15};\ \frac{7}{12};\ \frac{8}{13};\ \frac{9}{11};\ \frac{16}{25};\ \frac{17}{40}.$$

14. Каждую из следующих дробей сначала увеличить в 6 раз, а потом уменьшить в 7 раз:

$$\frac{7}{12};\ \frac{35}{42};\ \frac{14}{18};\ \frac{21}{56};\ \frac{42}{72};\ \frac{84}{96};\ \frac{91}{108}.$$

15. Один рабочий выполнил $\frac{3}{4}$ всей работы, а другой в 6 раз меньше. Какую часть работы выполнил другой рабочий?

16. Через одну трубу за 3 часа наполняется $\frac{1}{5}$ бассейна, через другую трубу за 5 час. наполняется $\frac{1}{4}$ бассейна. Которая труба наполняет в час большую часть бассейна?

17. Самолёт проходит расстояние между двумя городами за 3 часа; какую часть этого расстояния он пройдёт за 1 час? за $\frac{1}{2}$ часа? за $\frac{1}{4}$ часа?

18. Что сделается с дробью или её компонентом?

Числитель	Знаменатель	Дробь
$\times 3$	$\times 6$	?
$\times 2$	$: 2$	?
$: 5$	$: 10$	?
$: 5$	$\times 2$	?
$\times 8$	$: 4$	?
?	$\times 2$	$\times 4$
?	$: 2$	$\times 8$
$\times 6$	?	$\times 12$
$: 4$	?	$\times 8$

19. Как увеличить дробь во столько раз, сколько единиц в её знаменателе?

20. Если колхозник будет проходить по $\frac{1}{15}$ *км* в минуту, то он придёт в город через 2 часа. Сколько километров до города?

[8 *км*.]

21. Часы отстают на $\frac{3}{4}$ секунды в час. На сколько они отстанут в течение суток?

22. Сократите дроби:

1) $\frac{2}{4}$; $\frac{6}{10}$; $\frac{3}{9}$; $\frac{6}{15}$; 2) $\frac{12}{16}$; $\frac{20}{24}$; $\frac{24}{36}$; $\frac{32}{40}$;

3) $\frac{28}{36}$; $\frac{28}{56}$; $\frac{48}{60}$; $\frac{40}{84}$; 4) $\frac{48}{72}$; $\frac{60}{96}$; $\frac{72}{90}$; $\frac{60}{100}$.

23. Сократите дроби:

1) $\frac{14}{21}$; $\frac{12}{30}$; $\frac{24}{60}$; $\frac{35}{105}$;

2) $\frac{55}{77}$; $\frac{81}{270}$; $\frac{75}{450}$; $\frac{135}{180}$; $\frac{140}{210}$;

3) $\frac{105}{165}$; $\frac{144}{360}$; $\frac{240}{560}$; $\frac{30}{150}$; $\frac{80}{200}$.

24. Сократите дроби:

$$\frac{2\times35\times18}{9\times14\times40};\quad \frac{19\times8\times5\times11}{22\times4\times20\times19};\quad \frac{15\times13\times6}{6\times9\times5\times26}.$$

25. Представить в простейшем виде дробь, числитель которой равен $\frac{5}{36}$ от 720, а знаменатель равен общему наименьшему кратному чисел 20, 30 и 75.

$\left[\frac{1}{3}.\right]$

26. Что сделается с дробью, если знаменатель её будет заменён единицей?

27. Приведите к простейшему виду следующие дроби:

$\frac{108}{960}$; $\frac{256}{640}$ и $\frac{360}{840}$.

28. Привести к одному знаменателю:

1) $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{5}$ и $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{7}$ и $\frac{1}{9}$;

2) $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$ и $\frac{7}{12}$; 3) $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$ и $\frac{11}{16}$;

4) $\frac{1}{6}$, $\frac{7}{8}$ и $\frac{2}{5}$; 5) $\frac{3}{5}$; $\frac{7}{15}$ и $\frac{8}{25}$.

29. Сколько раз по $\frac{1}{8}$ *г* содержится в $\frac{1}{4}$ *кг*? в $\frac{1}{2}$ *кг*?

30. Сколько раз по $\frac{1}{5}$ *км* содержится в 1 *км*? в $1\frac{3}{5}$ *км*?

31. Какую часть километра составляют 50 *м*? 100 *м*? 200 *м*?

32. Один рабочий оканчивает работу за 6 час., другой за 8 час. и третий за 9 час. Какую часть работы может сделать каждый рабочий за $\frac{1}{2}$ часа?

§ 2. Сложение

1. Сложить: $\frac{2}{3}$ и $\frac{3}{4}$; $\frac{3}{5}$ и $\frac{7}{10}$; $\frac{4}{9}$ и $\frac{5}{12}$; $\frac{7}{8}$ и $\frac{11}{24}$.

2. Сложить: 1) $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{8}$ 2) $\frac{2}{3}+\frac{5}{6}+\frac{7}{12}$

3) $\frac{1}{5}+\frac{4}{15}+\frac{11}{30}$ 4) $\frac{2}{9}+\frac{3}{8}+\frac{5}{12}$

5) $\frac{7}{15}+\frac{3}{10}+\frac{7}{20}$ 6) $\frac{11}{16}+\frac{7}{18}+\frac{5}{36}$

Примечание. При сложении дробей, отличающихся от единицы на одну долю, можно прибавлять к другой дроби или смешанному числу единицу и отнимать от суммы эту долю единицы.

Например: $2\frac{3}{4}+\frac{7}{8}=3\frac{6-1}{8}=3\frac{5}{8}$;

$\frac{5}{6}+\frac{11}{12}=1\frac{10-1}{12}=1\frac{3}{4}$.

3. Сложить: $3\frac{1}{3}+1\frac{5}{6}$; $2\frac{7}{15}+2\frac{11}{12}$; $1\frac{3}{4}+1\frac{19}{20}$;

$\frac{5}{8}+\frac{11}{12}$; $\frac{8}{9}+\frac{5}{6}$; $\frac{11}{18}+\frac{26}{27}$.

4. Сложить дроби вида $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$ и сделать вывод:

$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$; $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$; $\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$; $\frac{1}{6}+\frac{1}{7}$; $\frac{1}{9}+\frac{1}{11}$.

5. Сложить дроби вида $\frac{k}{m}+\frac{k}{n}$, пользуясь сделанным выше выводом:

$\frac{2}{3}+\frac{2}{5}=\frac{2\cdot 8}{15}=\frac{16}{15}$; $\frac{3}{7}+\frac{3}{11}$; $\frac{3}{13}+\frac{3}{7}$; $\frac{5}{11}+\frac{5}{8}$; $\frac{7}{9}+\frac{7}{17}$.

6. Сложить: а) $2\frac{5}{8}$ часа + 1 час 15 мин.

б) 20 сут. $+5\frac{5}{6}$ мес

7. Увеличить сумму $\frac{3}{4}+\frac{5}{8}+\frac{7}{12}$ в 6 раз.

8. Уменьшить сумму $\frac{1}{5}+\frac{1}{15}+\frac{1}{30}$ в 4 раза.

9. Как изменится сумма, если к одному слагаемому прибавить $1\frac{1}{20}$, а к другому $1\frac{1}{30}$?

10. Как изменится сумма трёх слагаемых $1\frac{4}{7}$, если увеличить первое слагаемое на $\frac{2}{9}$, а третье на $\frac{1}{6}$?

§ 3. Вычитание

1. Ученик издержал $3\frac{3}{4}$ руб. на книгу и $2\frac{1}{2}$ руб. на бумагу. Сколько у него осталось денег от 10 руб.?

2. Тракторист вспахал сначала $\frac{1}{7}$ поля, а потом $\frac{9}{28}$. Какая часть поля ещё не вспахана?

3. Когда закройщик раскроил $17\frac{3}{4}$ *м* сукна на брюки, ему осталось скроить на $2\frac{3}{8}$ *м* больше, чем он раскроил. Сколько метров сукна нужно было раскроить закройщику?

4. Вес товара брутто $32\frac{2}{3}$ *кг*, а вес тары $4\frac{5}{6}$ *кг*. Найти вес нетто товара.

5. Вес нетто товара $27\frac{7}{8}$ *кг*, вес брутто $34\frac{5}{6}$ *кг*. Найти вес тары.

6. Вычесть: $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$; $\frac{1}{5}-\frac{1}{6}$; $\frac{1}{6}-\frac{1}{7}$; $\frac{1}{8}-\frac{1}{9}$; $\frac{1}{10}-\frac{1}{11}$ и сделать общий вывод о сокращённом нахождении разности, пользуясь формулой $\frac{1}{m}-\frac{1}{n}=\frac{n-m}{mn}$.

7. Вычесть: $\frac{2}{3}-\frac{2}{5}$; $\frac{3}{7}-\frac{3}{9}$; $\frac{4}{11}-\frac{4}{13}$.

8. Найти число, которое на $\frac{3}{4}$ меньше $\frac{7}{8}$.

9. Найти число, которое на $\frac{5}{6}$ меньше суммы дробей $\frac{1}{2}$ и $\frac{11}{20}$.

10. Разность между $\frac{1}{5}$ и $\frac{1}{6}$ увеличить на $\frac{1}{10}$.

11. Разность двух чисел равна $\frac{4}{9}$. Какова будет разность, если:

а) уменьшаемое увеличить на $\frac{2}{5}$

3*

б) уменьшаемое уменьшить на $\frac{1}{18}$;

в) вычитаемое увеличить на $\frac{5}{12}$;

г) вычитаемое уменьшить на $\frac{3}{20}$?

12. Уменьшаемое уменьшено на $\frac{9}{14}$. Что надо сделать с вычитаемым, чтобы разность:

а) уменьшилась на 1;

б) увеличилась на $\frac{2}{7}$;

в) уменьшилась на $\frac{2}{21}$?

13. Вычитаемое увеличено на $2\frac{4}{15}$. Что надо сделать с уменьшаемым, чтобы разность:

1) не изменилась;
2) увеличилась на 4;
3) уменьшилась на 7;
4) уменьшилась на $1\frac{1}{5}$?

14. Уменьшаемое увеличено на $6\frac{7}{27}$. Что надо сделать с вычитаемым, чтобы разность:

а) не изменилась;

б) увеличилась на $1\frac{5}{18}$;

в) уменьшилась на 10;

г) увеличилась на 12?

15. Вычитаемое уменьшено на 11. Что надо сделать с уменьшаемым, чтобы разность:

а) увеличилась на $2\frac{1}{2}$;

б) уменьшилась на $3\frac{8}{35}$;

в) увеличилась на $4\frac{5}{16}$?

16. Велосипедист каждые 5 час. проезжает 47 *км*, а всадник на лошади каждые 6 час. проезжает 43 *км*. На сколько километров велосипедист проезжает в 1 час. больше всадника?

17. Найти число, которое на столько меньше $2\frac{1}{2}$, на сколько $1\frac{3}{4}$ меньше $2\frac{7}{8}$.

18. Найти число, которое на столько больше $3\frac{5}{6}$, на сколько $3\frac{5}{6}$ больше $1\frac{2}{3}$.

19. В бассейн проведены три трубы. Через одну он наполняется в 6 час., через другую в 8 час., а через третью вся вода бассейна вытекает в 9 час. Какая часть бассейна наполнится в 1 час, если открыть все три трубы?

20. Найти x, если $7\frac{5}{16}+x=11\frac{3}{8}$.

21. Найти x, если $x+7\frac{5}{14}=20\frac{19}{21}$.

22. В колхозе $187\frac{1}{2}$ *га* пахотной земли; из них под рожью $60\frac{3}{4}$ *га*, под пшеницей на $20\frac{5}{8}$ *га* больше, остальная земля под другими полевыми культурами. Сколько земли под другими культурами?

23. Отцу, сыну и дочери 30 лет. Отец на $25\frac{3}{4}$ года старше сына, а сын на $1\frac{1}{2}$ года старше дочери. Сколько лет каждому?

[$27\frac{2}{3}$, $1\frac{11}{12}$ и $\frac{5}{12}$ года.]

§ 4. Умножение

1. Сколько сахару останется из 20 *кг* через 10 дней, если в день выходит $\frac{5}{8}$ *кг*? [$13\frac{3}{4}$ *кг*.]

2. Лошадь пробегает в минуту $\frac{3}{10}$ *км*, а мотоциклист движется в 3 раза скорее. На сколько он обгонит лошадь в 10 мин.? в 20 мин.? в 30 мин.? [6 *км*; 12 *км*; 18 *км*.]

3. Часы уходят вперёд каждые сутки на $\frac{5}{12}$ минуты. На сколько они уйдут вперёд в 16 суток?

4. Пассажирский поезд обгоняет товарный поезд каждый час на $5\frac{7}{15}$ *км*. На сколько километров он обгонит его в 12 час.? в 15 час.?

5. 1 *куб. см* железа весит $7\frac{4}{5}$ *г*. Сколько весит брусочек железа в 6 *см* $\times$ 5 *см* $\times$ 3 *см*?

6. Килограмм кофе стоит 64 руб. Сколько нужно уплатить за $\frac{1}{2}$ *кг*? за $\frac{1}{4}$ *кг*? за $\frac{1}{8}$ *кг*? за $\frac{1}{10}$ *кг*? за $\frac{1}{20}$ *кг*?

7. Найти $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{14}$, $\frac{1}{16}$ от 24.

8. Найти $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{8}$ от $3\frac{1}{8}$.

9. Найти $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{14}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{7}$ от $\frac{21}{25}$.

10. Сколько нужно заплатить за $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{11}{16}$ *м* материи ценой 24 руб. метр?

11. У меня было 7 руб. 20 коп.; на $\frac{5}{6}$ всех денег я купил три книги по одинаковой цене. Сколько стоит каждая книга? [2 руб.]

12. У мальчика было 5 руб. 60 коп.; $\frac{3}{8}$ части всех своих денег он истратил на тетради, $\frac{5}{14}$ оставшихся — на карандаши, а на все остальные деньги купил несколько листов бумаги и за каждый лист заплатил 75 коп. Сколько листов бумаги купил мальчик? [3 *л.*]

13. У меня было 9 руб. 60 коп.; $\frac{1}{5}$ часть всех этих денег я истратил на покупку географической карты, $\frac{3}{10}$ на книги и $\frac{7}{20}$ на письменные принадлежности. Сколько осталось у меня денег? [1 руб. 44 коп.]

14. Который теперь час, если прошли $\frac{3}{8}$ суток? если осталось $\frac{3}{8}$ суток?

15. Трём мальчикам роздали 1 *кг* орехов: один получил $\frac{2}{3}$ всех орехов, другой $\frac{1}{5}$ того, что первый, а третий все остальные орехи. Сколько орехов досталось каждому мальчику, если в килограмме было 120 орехов? [80; 16; 24.]

16. Из 72 *кг* меди сделаны 3 котла; на один употреблено $\frac{5}{12}$ всей этой меди, а на другой $\frac{3}{5}$ оставшейся. Сколько меди пошло на третий котёл?

17. Найти стоимость $\frac{3}{4}$ *кг* риса, пшена и овсянки, если их цены: 8 руб., 2 руб. и 1 руб. 60 коп. за килограмм.

18. Скорость поезда 60 *км*. Сколько километров делает поезд в $\frac{3}{4}$ часа? в $\frac{1}{2}$ часа? в $\frac{5}{6}$ часа?

19. Какие из нижеследующих выражений больше и какие меньше множимого:

$$а)\ 9 \cdot 4\frac{1}{6};\quad б)\ 3\frac{17}{21} \cdot 3\frac{1}{8};\quad в)\ 27 \cdot \frac{7}{9};\quad г)\ \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{8}.$$

20. Множимое увеличено в $8\frac{2}{5}$ раза; что надо сделать с множителем, чтобы произведение а) осталось без перемены? б) увеличилось в 2 раза? в) увеличилось в 24 раза?

21. В киоск доставили 960 тетрадей; $\frac{5}{8}$ этого количества тетрадей в одну линейку, $\frac{1}{4}$ — в клетку, а все остальные — в две линейки. Сколько доставили **тетрадей в две линейки?**

22. Имея 255 руб., покупатель израсходовал в одном магазине $\frac{1}{3}$ своих денег, а в другом $\frac{1}{4}$. На сколько рублей после этого у него осталось меньше, чем он израсходовал?

[42 руб. 50 коп.]

23. Что больше: $\frac{1}{3}$ четверти килограмма или $\frac{1}{4}$ трети килограмма?

24. Умножить так:

$$14\frac{2}{5} \times 4 = 14 \times 4 + \frac{2}{5} \times 4 = 56 + \frac{8}{5} = 57\frac{3}{5};$$

$$12\frac{5}{6} \times 8;\quad 14\frac{7}{8} \times 9;\quad 15\frac{6}{11} \times 10;\quad 17\frac{7}{10} \times 12;$$

$$18\frac{3}{4} \times 25;\quad 22\frac{8}{15} \times 5;\quad 23\frac{9}{16} \times 15;\quad 34\frac{3}{8} \times 35;$$

$$42\frac{4}{5} \times 75;\quad 28\frac{3}{10} \times 125.$$

Умножение целого числа на дробь, которая отличается от единицы на одну долю.

$$24 \times \frac{5}{6} = 24\left(1 - \frac{1}{6}\right) = 24 - \frac{24}{6} = 20.$$

25. Умножить:

$$36 \times \frac{17}{18};\quad 45 \times \frac{8}{9};\quad 84 \times \frac{11}{12};\quad 96 \times \frac{15}{16};\quad 108 \times \frac{11}{12};$$

$$44 \times \frac{7}{8};\quad 56 \times \frac{11}{14};\quad 45 \times \frac{19}{20};\quad 75 \times \frac{24}{25};\quad 81 \times \frac{26}{27}.$$

Умножение на дробь и смешанное число путём разложения одного из сомножителей на слагаемые.

Например:

$$88\times\frac{13}{16}=88\times\left(\frac{8}{16}+\frac{4}{16}+\frac{1}{16}\right)=88\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}\right)=$$

$$=44+22+5\frac{1}{2}=71\frac{1}{2}, \quad 54\times87\frac{1}{2}=54\times\left(50+25+12\frac{1}{2}\right)=$$

$$=2700+1350+675=4725.$$

26. Умножить:

$$48\times\frac{11}{15};\ 84\times\frac{7}{8};\ 96\times\frac{17}{28};\ 28\times37\frac{1}{2};\ 25\times22\frac{1}{2};\ 96\times12\frac{1}{2}.$$

Умножение на числа, составляющие известную часть ста, можно свести к умножению на 100 с последующим делением на целое число.

Например:

$$48\times12\frac{1}{2}=48\times\frac{100}{8}=\frac{4800}{8}=600.$$

$$33\frac{1}{3}=\frac{100}{3};\ 12\frac{1}{2}=\frac{100}{8};\ 3\frac{1}{3}=\frac{10}{3};\ 11\frac{1}{9}=\frac{100}{9};\ 16\frac{2}{3}=\frac{50}{3}=\frac{100}{6}$$ и т. д.

27. Пользуясь приведёнными данными, произвести умножение:

$$96\times33\frac{1}{3};\ 128\times12\frac{1}{2};\ 81\times3\frac{1}{3};\ 108\times11\frac{1}{9};\ 84\times16\frac{2}{3}.$$

§ 5. Деление

1. На 5 крючков идёт $\frac{7}{8}$ *м* проволоки. Сколько метров проволоки идёт на каждый крючок?

2. Из $\frac{5}{6}$ *м* материи сделали 10 санитарных крестов. Сколько метров материи пошло на каждый крест?

3. Из $\frac{3}{4}$ листа бумаги получается 6 конвертов. Какая часть листа бумаги идёт на один конверт?

4. $\frac{1}{8}$ *кг* мальков хватает 25 рыбкам в аквариуме на 5 дней. Какую часть килограмма нужно 1 рыбке в день? Сколько граммов?

5. Рабочий получил за 4 дней работы $96\frac{1}{2}$ руб. Сколько он получал в 1 деиь?

6. Путешественник в 5 дней проехал $\frac{7}{8}$ намеченного пути. Какую часть пути он проезжал каждый день?

7. Колхоз в 3 дня убрал $\frac{21}{25}$ картофельного поля. Какую часть поля он убирал в среднем за один день?

8. Самолёт израсходовал на три одинаковых перелёта $48\frac{3}{4}$ *л* бензина. Сколько литров бензина потребовалось на каждый перелёт?

9. Паровоз проходит в час $66\frac{2}{3}$ *км*. Сколько он проходит в 1 мин.? в 10 мин.? в 20 мин.? в 15 мин.?

10. Рабочий расходует на газеты, журналы и книги $\frac{3}{35}$ своей заработной платы, что составляет 45 руб. Сколько рублей получает рабочий в месяц?

11. Найти число, если $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$ неизвестного числа равны 9.

12. Найти число, если $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{8}$ неизвестного числа равны $\frac{1}{6}$.

13. Найти число, если $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{8}{9}$ неизвестного числа равны $3\frac{3}{7}$.

14. Найти число, $\frac{1}{8}$ которого равна $\frac{3}{7}$ от 49.

15. Один рабочий может исправить мостовую в 8 дней, а другой в 10 дней. Спустя 3 дня совместной работы им осталось исправить 26 $м^2$. Сколько метров мостовой нужно было исправить? [80 *кв. м.*]

16. Машинистка переписала в первый день $\frac{3}{7}$ рукописи, во второй день $\frac{3}{4}$ остатка, а в третий день остальные 12 страниц. Сколько страниц было в рукописи? [84.]

17. Когда экскурсанты прошли $\frac{2}{5}$ всего маршрута, им осталось на 3 *км* больше, чем они прошли. Найти длину маршрута.

18. Два тракториста, работая вместе, подняли в течение недели $\frac{15}{28}$ целины. Им осталось поднять целины на 8 *га* меньше, чем поднято. Сколько гектаров земли нужно было поднять трактористам? [112 *га*.]

19. Когда девочка издержала на покупку книги $\frac{3}{8}$ своих денег, у неё осталось на 4 руб. больше, чем она уплатила за книгу. Сколько денег было у девочки? [16 руб.]

20. Рабочий в $\frac{3}{4}$ часа заготовляет 12 деталей. Сколько деталей он заготовит за 8 час.?

21. Найти x, если $\frac{3}{7}x + 12 = 36$.

22. Рабочий взял из сберкассы сначала $\frac{1}{6}$ своих денег, потом $\frac{2}{5}$ оставшихся. После этого осталось на книжке 300 руб. Сколько денег было у рабочего на книжке? [600 руб.]

23. Из кассы выдали сначала $\frac{3}{8}$ бывших в ней денег, потом $\frac{3}{5}$ оставшихся, после этого в кассе осталось 200 руб. Сколько денег было в кассе первоначально? [800 руб.]

24. За $\frac{3}{4}$ *м* сукна уплатили 72 руб. Почём покупали метр сукна?

25. Когда тракторист вспахал $\frac{5}{7}$ зяби, ему осталось вспахать ещё 14 *га*. Сколько гектаров земли должен поднять тракторист?

26. Рабочий внёс в сберкассу 240 руб., что составляет $\frac{2}{3}$ его заработной платы. Сколько зарабатывает рабочий в месяц?

27. На $\frac{3}{5}$ живой изгороди вокруг школы пошло 120 кустов шиповника. Сколько нужно кустов шиповника на всю изгородь?

Деление целого числа на дробь, которая отличается от целого числа на одну долю единицы, можно производить так:

$$84 : \frac{6}{7} = 84 \times \frac{7}{6} = 84 \times \left(1 + \frac{1}{6}\right) = 84 + 14 = 98.$$

28. Разделить:

$$96 : \frac{3}{4}; \quad 64 : \frac{8}{9}; \quad 72 : \frac{12}{13}; \quad 144 : \frac{18}{19}.$$

29. У меня было 54 руб.; из этих денег я издержал 5 руб. 75 коп. на конфеты, 8 руб. на чай и кофе, 4 руб. 25 коп. на книги. Какая часть бывших у меня денег осталась? $\left[\frac{2}{3}.\right]$

30. Если я буду проходить в минуту $\frac{1}{16}$ *км*, то во сколько времени я пройду $\frac{1}{4}$ *км*? $\frac{2}{5}$ *км*? $\frac{7}{8}$ *км*?

31. Было две проволоки: одна в $2\frac{3}{4}$ *м*, другая в $3\frac{1}{2}$ *м*. Из этих проволок сделали кольца и на каждое кольцо употребили по $\frac{1}{20}$ *м* проволоки. Сколько вышло колец? [125.]

32. Во сколько раз каждое из чисел: 5, 8, 14 — больше 3?

33. Во сколько раз каждое из чисел: 7, 21, 28 — меньше 35?

34. Какое число в $3\frac{1}{3}$ раза меньше 1 000?

35. Сравните решение вопросов:

1) чему равно частное от деления 8 на 25?
2) чему равно частное от деления 25 на 8?
3) чему равно произведение этих частных?

36. На что надо умножить $1\frac{7}{9}$, чтобы получить 1?

37. Какую часть: а) $\frac{2}{21}$ составляет от $\frac{8}{21}$?

б) $\frac{5}{32}$ составляет от $\frac{15}{32}$?

38. Во сколько раз $\frac{17}{20}$ больше $\frac{17}{60}$?

$\frac{3}{8}$ больше $\frac{3}{64}$?

39. Во сколько раз а) $\frac{18}{25}$ больше $\frac{6}{25}$?

б) $\frac{24}{35}$ больше $\frac{3}{35}$?

40. Сравните решение следующих вопросов:

1) во сколько раз 16 больше 5?
2) какую часть 16 составляет 5?

41. Сравните решение вопросов:

1) во сколько раз 12 меньше 50?
2) Какую часть 50 составляет 12?

42. Не производя деления, сказать: какие из нижеследующих выражений больше единицы и какие меньше единицы:

1) $\frac{7}{8} : \frac{3}{4}$? 2) $5\frac{9}{11} : 13\frac{5}{7}$?

3) $18 : 10\frac{7}{20}$? 4) $\frac{7}{12} : \frac{5}{6}$?

43. Не производя деления, сказать, какие из нижеследующих выражений больше данного делимого и какие меньше его:

а) $20 : \frac{4}{5}$? б) $4\frac{1}{2} : \frac{2}{3}$? в) $\frac{84}{121} : \frac{63}{110}$? г) $32 : 9\frac{3}{5}$?

44. Каждое из нижеследующих частных заменить равным ему произведением:

а) $\frac{9}{16} : 6$; б) $12 : \frac{5}{8}$; в) $\frac{3}{10} : \frac{8}{11}$; г) $\frac{7}{12} : 3\frac{1}{16}$.

45. Частное равно 4; какое будет частное, если:

а) делимое увеличить в $1\frac{1}{6}$ раза? б) делимое уменьшить в $3\frac{1}{3}$ раза? в) делитель увеличить в $9\frac{1}{3}$ раза? г) делитель уменьшить в $1\frac{7}{8}$ раза?

46. Частное равно $2\frac{4}{7}$; какое будет частное, если:

1) увеличить делимое в $2\frac{1}{2}$ раза, а делитель в 9 раз?

2) уменьшить делимое в $1\frac{7}{8}$ раза, а делитель в $\frac{2}{3}$ раза?

§ 6. Задачи

1. Фонтан выбрасывает 1 250 вёдер воды в $6\frac{1}{4}$ часа. Сколько вёдер воды выбросит он в $2\frac{1}{2}$ часа?

2. За 11 листов бумаги заплачено $\frac{33}{50}$ руб. Сколько нужно заплатить за 25 листов бумаги по той же цене?

3. От куска сукна длиной 44 *м* отрезано сперва $7\frac{1}{4}$ *м*, а потом $3\frac{3}{4}$ *м*. Какая часть сукна осталась в куске? [$\frac{3}{4}$.]

4. Паровоз проходит в час $42\frac{6}{7}$ *км*; сколько он проходит в минуту? [$\frac{5}{7}$ *км*.]

5. $1\frac{7}{8}$ *м* тесьмы стоят 6 руб. 75 коп. Что стоят 6 *м*? [21,6 руб.]

6. За $\frac{4}{7}$ работы заплачено 20 руб. Сколько следует заплатить за всю работу? [35 руб.]

7. Верёвка длиной $7\frac{8}{13}$ *м* разрезана на 11 равных частей. Найти длину 9 таких частей верёвки.

8. Купили кусок материи в 30 *м*; из $\frac{2}{5}$ части всего этого куска сделали фуражки и на каждую фуражку употребили по $\frac{1}{3}$ *м* материи. Сколько вышло фуражек? [36.]

9. Пароход прошёл расстояние от Ленинграда до Кронштадта в 2 часа. Сколько километров между этими городами, если известно, что этот пароход в $3\frac{1}{2}$ часа проходит $66\frac{1}{2}$ *км*?

10. Книга в переплёте стоит 9 руб. 60 коп. Цена переплёта составляет $\frac{1}{5}$ цены книги. Сколько стоит книга и переплёт в отдельности?

11. За 1 час зерносушилка перерабатывает $1\frac{1}{5}$ *т* зерна, понижая его влажность на 14—20%. Сколько зерна перерабатывает зерносушилка в 1 мин.? в 10 мин? в $2\frac{1}{2}$ часа? в 8 часов?

12. При взрыве 1 *кг* дымного пороха остаётся твёрдых остатков (не превращающихся в газообразные продукты) $\frac{2}{5}$ *кг*. Сколько таких твёрдых остатков получится, если взорвать 15 *кг* этого пороха? 35 *кг*? [6 и 14 *кг*.]

13. Поезд железной дороги в $4\frac{1}{2}$ часа прошёл 162 *км*. Какое расстояние он пройдёт в $2\frac{1}{3}$ часа? [84 *км*.]

14. Два корабля вышли одновременно навстречу из двух гаваней, расстояние между которыми 165 *км*. Первый корабль шёл со скоростью $22\frac{1}{4}$ *км*, а второй $32\frac{3}{4}$ *км* в час.

Через сколько часов корабли встретятся? [3 час.]

15. Из двух городов навстречу друг другу одновременно вышли два поезда: первый проходил в час $47\frac{3}{4}$ *км*, а второй $42\frac{1}{4}$ *км*. Поезда встретились через $4\frac{1}{2}$ часа. Сколько километров между городами? [405 *км*.]

16. Один мотоциклист проезжает расстояние между двумя пунктами в 7 час., а другой в 8 час. Через сколько часов встретятся мотоциклисты, если они одновременно выедут друг другу навстречу? [Через 3 часа 44 мин.]

17. Расстояние между двумя городами один поезд проходит в 10 час., а другой в 15 час. Поезда вышли одновременно из этих городов навстречу друг другу. Через сколько часов они встретятся? [Через 6 час.]

18. Расстояние между двумя пристанями один пароход проходит в 6 час., а другой в 8 час. Второй пароход отошёл от пристани на 1 час раньше. Через сколько часов первый пароход догонит второй? [Через 3 часа.]

19. Один поезд проходит расстояние между двумя городами в 12 час., а другой в 15 час. Второй поезд вышел на 2 часа раньше. Через сколько часов первый поезд догонит второй? [Через 8 час.]

20. Поезд вышел из города A в 9 час. утра и прибыл в город $Б$ в 7 час. вечера того же дня. Когда прошёл этот поезд $\frac{2}{5}$ расстояния между этими городами, если предположить, что он шёл всё время с одинаковой скоростью? [В час дня.]

21. Один ученик, идя в школу, прошёл $\frac{5}{8}$ всего расстояния от своего дома до школы в 20 мин. Как велико расстояние от его дома до школы, если в минуту он делал 45 *м*? [1 *км* 440 *м*.]

22. Одна артель рабочих может окончить некоторую работу в 30 дней, а другая в 25 дней. Какую часть этой работы сделают обе артели в один день?

23. Два пловца плыли навстречу друг другу с противоположных берегов реки. Первый пловец может переплыть эту реку в 12 мин., а второй в 15 мин. Через сколько минут они встретились?

[Через $6\frac{2}{3}$ мин.]

24. В бассейн проведены 3 трубы: через одну пустой бассейн наполняется в 4 часа, через другую в 12 час., а через третью в 9 час. Какая часть пустого бассейна наполнится, если все три трубы открыть сразу на 2 часа? $\left[\frac{8}{9}.\right]$

25. $\frac{7}{12}$ своих денег я истратил на покупку книги, $\frac{1}{4}$ на бумагу и карандаши, и у меня ещё осталось 6 руб. Сколько денег было у меня до покупки вещей? [36 руб.]

26. Когда портной отрезал $5\frac{1}{4}$ *м* сукна, то у него осталось $\frac{5}{8}$ куска. Сколько метров материи было в куске? [14 *м*.]

27. $\frac{5}{9}$ всех бывших со мной денег я издержал на покупку книги, на половину оставшихся денег купил бумаги, и у меня ещё остался 1 руб.

Сколько было у меня денег? $\left[4\frac{1}{2}\text{ руб.}\right]$

28. В одной библиотеке книги на русском языке составляют $\frac{3}{4}$ всего числа книг, на французском $\frac{1}{10}$, на немецком $\frac{1}{20}$, а все остальные 60 книг — на английском языке. Сколько всего книг в библиотеке? [600 книг.]

29. Рабочие в первый месяц исправили $\frac{1}{4}$ всего шоссе, во второй $\frac{1}{6}$, в третий $\frac{1}{8}$ часть, и ещё осталось исправить шоссе на расстоянии 44 *км*. Как велика длина всего шоссе? [96 *км*.]

30. Каменщики вымостили в первый день $\frac{3}{7}$ части всего переулка, во второй — 25 *м*, в третий — остальные $\frac{3}{14}$ части всего переулка. Сколько получили они за работу, если с каждого погонного метра им платили по $12\frac{1}{2}$ руб.? [875 руб.]

31. После того как я издержал $\frac{5}{7}$ своих денег, у меня осталось 18 руб. Сколько денег у меня было? [63 руб.]

32. Турист должен пройти 72 *км*; в первый день он прошёл $\frac{1}{9}$ всего пути, а во второй $\frac{3}{8}$. Сколько километров осталось ещё идти? [37 *км*.]

33. Если сложить треть и четверть моих денег, то будет 63 руб.; сколько у меня денег? [108 руб.]

34. Рабочий издержал $\frac{3}{4}$ своей получки на питание, $\frac{1}{7}$ на покупку обуви, $\frac{1}{20}$ на мелкие расходы, и у него осталось 50 руб. Как велика его заработная плата? [875 руб.]

35. Рыболова спросили: «Сколько весит пойманная вами рыба?» Он ответил: «Три четверти килограмма и ещё $\frac{3}{4}$ своего веса». Сколько весила рыба? [3 *кг*.]

36. Увеличив четверть некоторого числа на 20 единиц, мы получим половину этого числа. Найти это число. [80.]

37. Если к неизвестному числу прибавить $\frac{3}{7}$ его, да ещё 20, то получится 150. Найти неизвестное число. [91.]

38. Сумма двух чисел равна $8\frac{3}{4}$; одно из них в 6 раз больше другого; найти эти числа. $\left[1\frac{1}{4};\ 7\frac{1}{2}\right]$

39. В двух корзинах 80 яиц; число яиц второй корзины составляет $\frac{3}{7}$ первой. Сколько в каждой? [56; 24.]

40. Два ученика купили книг на 6 руб. 96 коп.; первый издержал $\frac{5}{7}$ того, что издержал второй. Сколько истратил каждый? [2 руб. 90 коп.; 4 руб. 8 коп.]

41. Высота дерева составляет $\frac{4}{5}$ высоты здания. Найти их высоты, если известно, что здание выше дерева на 5 *м*. [25 *м* и 20 *м*.]

42. Отцу и сыну 37 лет; сын в $4\frac{2}{7}$ раза моложе отца. На сколько сын моложе отца? [На 23 года.]

43. В цирке 459 зрителей. Число мужчин составляет $\frac{11}{16}$ числа женщин. На сколько в цирке меньше мужчин, чем женщин?
[На 85 чел.]

44. В двух колхозах 800 голов крупного скота. Число голов скота в первом колхозе равно $\frac{1}{3}$ числа голов во втором колхозе. Сколько голов скота в каждом колхозе?

45. В колхозе 1 200 голов мелкого скота — свиней и овец. Число овец равно $\frac{7}{8}$ числа свиней. Сколько овец и сколько свиней в колхозе?

46. Отцу $53\frac{3}{4}$ года; сын в 5 раз моложе отца, а мать в 4 раза старше сына. Сколько лет матери? [43 года.]

47. В колхозе $\frac{5}{12}$ ярового поля засеяли овсом, $\frac{3}{8}$ ячменём, причём овсом засеяли на 2,5 *га* больше, чем ячменём. Определить площадь ярового поля. [60 *га*.]

48. Девочка прочитала книгу в 3 дня. В первый день она прочитала $\frac{3}{10}$ во второй $\frac{2}{5}$ всей книги, а в третий остальные 96 страниц. Сколько страниц в этой книге?

49. За 30 *м* красного и 40 *м* синего сатина заплачено 724 руб. Метр красного сатина на $\frac{4}{5}$ руб. дороже синего. Сколько стоит метр того и другого сатина? [$10\frac{4}{5}$ руб.; 10 руб.]

50. Страховая плата за один дом на 96 руб. больше страховой платы за другой дом. Найти каждую из них, если известно, что первая равна $\frac{13}{25}$ второй. [200 руб.; 104 руб.]

51. Если купить $1\frac{3}{4}$ *кг* муки, то останется $\frac{1}{2}$ руб., а если купить $2\frac{1}{2}$ *кг* той же муки, то нехватит $2\frac{1}{2}$ руб. Сколько стоит килограмм муки? [4 руб.]

52. Если туристы будут перемещаться на лодке против течения реки со скоростью 2 *км* в час, то они приедут на $\frac{1}{4}$ часа позже намеченного срока, а если они будут перемещаться со скоростью $2\frac{1}{2}$ *км* в час, то приедут раньше намеченного срока на $\frac{2}{5}$ часа. Сколько километров намеревались проехать туристы?
[$6\frac{1}{2}$ *км*.]

53. На консервном заводе смешивали сливы двух сортов: к $\frac{3}{8}$ ящика одного сорта слив примешивали $\frac{5}{8}$ ящика другого сорта. Ящик слив одного сорта весил 18 *кг*, а ящик другого 20 *кг*. Сколько весили 12 ящиков смеси из слив? [231 *кг*.]

54. Сколько должны получить за перепечатку рукописи каждая из трёх машинисток, если первая машинистка печатала $2\frac{1}{2}$ часа, вторая $\frac{3}{4}$ часа, а третья $\frac{1}{2}$ часа и если за всю работу уплатили $22\frac{1}{2}$ руб.? [15 руб.; 4 руб. 50 коп.; 3 руб.]

55. Один ученик истратил $\frac{3}{4}$, а другой $\frac{2}{3}$ своих денег, и у них осталось по 8 руб.; сколько денег было у каждого? [32 руб.; 24 руб.]

56. За две книги уплатили 12 руб.; $\frac{1}{3}$ цены первой книги равна $\frac{1}{5}$ цены второй книги. Найти цены книг. [4 руб. 50 коп. и 7 руб. 50 коп.]

57. Двое имели 280 руб. Первый истратил $\frac{3}{4}$, второй $\frac{2}{3}$ своих денег, и у них стало денег поровну. Сколько денег было у каждого? [160 руб.; 120 руб.]

58. За две картины уплатили 3 600 руб.; $\frac{1}{2}$ стоимости первой картины равна $\frac{1}{3}$ стоимости второй картины. Сколько стоит каждая картина? [1 440 руб; 2 160 руб.]

59. $\frac{5}{8}$ первого числа равно $\frac{7}{18}$ второго; какое из них больше?

60. $\frac{7}{15}$ одного числа равно $\frac{7}{20}$ другого; какое число больше?

61. У меня на 40 руб. больше, чем у моего брата. $\frac{1}{5}$ моих денег составляет $\frac{1}{3}$ денег брата. Сколько денег у каждого из нас? [100 руб. и 60 руб.]

62. Разность двух чисел равна 235; $\frac{2}{7}$ первого равны $\frac{5}{6}$ второго. Найти эти числа. [175; 60.]

63. В колхозе было три ящика огородных семян. В первом и во втором ящике было $2\frac{1}{4}$ *кг*. В первом и третьем $2\frac{1}{2}$ *кг*. Во втором и третьем $2\frac{3}{4}$ *кг*. Сколько килограммов семян было в каждом ящике?

64. В первом и втором пакетах $1\frac{3}{4}$ *кг* конфет, во втором и третьем 2 *кг*, в первом и третьем $1\frac{1}{2}$ *кг* конфет. Сколько килограммов конфет в каждом пакете? [$\frac{5}{8}$ *кг*, $\frac{9}{8}$ *кг* и $\frac{7}{8}$ *кг*.]

65. За $1\frac{1}{2}$ *кг* овсянки и $\frac{3}{4}$ *кг* пшена уплатили 3 руб. 90 коп. Если бы взяли $\frac{3}{4}$ *кг* овсянки и $\frac{1}{2}$ *кг* пшена, то пришлось бы уплатить 2 руб. 20 коп. Сколько стоит килограмм овсянки и килограмм пшена? [1 руб. 60 коп. и 2 руб.]

66. Сумма двух чисел равна $38\frac{1}{2}$, а если мы первое число удвоим, а второе утроим, то сумма полученных новых чисел будет равна $95\frac{1}{2}$. Найти эти числа. [20 и $18\frac{1}{2}$.]

67. Когда продали $\frac{4}{7}$ куска сукна, осталось $\frac{3}{5}$ куска без 12 *м*. Сколько было метров в куске? [70 *м*.]

68. Найти два числа, сумма которых равна $6\frac{7}{8}$, а удвоенное первое число равно утроенному второму. [$\frac{33}{8}$; $\frac{22}{8}$.]

69. Подводная лодка на поверхности воды идёт со скоростью 20 *км*, а под водой со скоростью 15 *км*. За 4 часа лодка прошла $67\frac{1}{2}$ *км*. Сколько часов лодка плыла под водой? [$2\frac{1}{2}$ час.]

70. Поезд прошёл расстояние между двумя городами в 8 час. Половину пути поезд шёл со скоростью 40 *км*, а другую половину — со скоростью 60 *км*. Сколько часов шёл поезд с каждой скоростью отдельно? [$4\frac{4}{5}$ и $3\frac{1}{5}$ час.]

71. Один рабочий может окончить работу в 6 дней, а другой в 8 дней. Работая один после другого, они окончили работу в 7 дней. Сколько дней работал каждый? [3 и 4 дня.]

72. Один рабочий берётся окончить всю работу в 15 дней, а другой в 30 дней. Работая один после другого, они закончили работу в 20 дней. Сколько дней работал каждый? [по 10 дней.]

73. Найти суммы по горизонтали и вертикали. (В виде игры «Кто быстрей, кто верней».)

$\frac{1}{12}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{18}$	$\frac{5}{12}$
$\frac{5}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{21}{36}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{1}{18}$
$\frac{7}{36}$	$\frac{25}{36}$	$\frac{13}{36}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{5}{18}$
$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{11}{36}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$
$\frac{11}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{11}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{8}{9}$

$\left[\frac{65}{36}.\right]$

Произвести указанные действия.

74. $2\frac{1}{8}+3\frac{2}{3}+4\frac{7}{8}+1\frac{1}{3}$

$3\frac{1}{2}+2\frac{2}{7}+3\frac{1}{2}+2\frac{5}{7}$

$\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{3}{4}+\frac{5}{9}$

$\frac{4}{7}+\frac{3}{8}+\frac{3}{7}+\frac{1}{8}$

75. $2\frac{3}{16}+5\frac{5}{8}+3\frac{5}{16}+1\frac{3}{8}$

$2\frac{7}{32}+2\frac{8}{15}+1\frac{9}{32}+2\frac{7}{15}$

$1\frac{3}{8}+1\frac{1}{4}+1\frac{1}{8}+\frac{1}{4}$

$\frac{1}{5}+\frac{1}{15}+\frac{3}{5}+\frac{2}{15}$

76. $3\frac{1}{2}+\left(2\frac{3}{4}+1\frac{1}{2}\right)$

$2\frac{7}{8}+\left(1\frac{3}{5}+1\frac{1}{8}\right)$

$7\frac{1}{2}-\left(1\frac{3}{8}+1\frac{1}{2}\right)$

$9\frac{1}{16}-\left(\frac{5}{8}+\frac{7}{16}\right)$

77. $2\frac{1}{2}-\left(1\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)$

$3\frac{4}{5}-\left(2\frac{3}{4}-1\frac{1}{5}\right)$

$3\frac{7}{15}-\left(2\frac{1}{2}-1\frac{3}{15}\right)$

$4\frac{7}{32}-\left(3\frac{3}{4}-1\frac{7}{32}\right)$

78. $3\frac{1}{2}\times 2+2\frac{1}{2}\times 2+3\frac{1}{2}\times 2$ $\qquad 5\frac{1}{6}\times 4+2\frac{5}{6}\times 4+8\frac{1}{2}\times 4$

$4\frac{1}{4}\times 3+3\frac{1}{4}\times 3+7\frac{1}{2}\times 3$ $\qquad 9\frac{1}{12}\times 8+7\frac{5}{12}\times 8+2\frac{1}{2}\times 9$

79. Вычитание суммы.

$$5\frac{5}{16}-\left(2\frac{1}{3}+2\frac{5}{16}\right)=5\frac{5}{16}-2\frac{5}{16}-2\frac{1}{3}=3-2\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

$$3\frac{5}{8}-\left(1\frac{3}{4}+1\frac{5}{8}\right);\ 2\frac{7}{8}-\left(1\frac{3}{4}+\frac{3}{8}\right);\ 16\frac{2}{3}-\left(7\frac{1}{2}+5\frac{2}{3}\right)$$

80. Прибавление разности.

$$7\frac{3}{4}+\left(2\frac{7}{8}-1\frac{3}{4}\right)=7\frac{3}{4}-1\frac{3}{4}+2\frac{7}{8}=8\frac{7}{8}$$

$$3\frac{7}{8}+\left(2\frac{3}{5}-1\frac{5}{8}\right);\ 4\frac{5}{11}+\left(3\frac{7}{22}-1\frac{3}{11}\right);\ 6\frac{3}{9}+\left(2\frac{7}{8}-1\frac{8}{9}\right)$$

81. Вычитание разности.

$$3\frac{7}{8}-\left(2\frac{3}{8}-1\frac{3}{4}\right)=3\frac{7}{8}-2\frac{3}{8}+1\frac{3}{4}=1\frac{1}{2}+1\frac{3}{4}=3\frac{1}{4}$$

$$\frac{5}{7}-\left(\frac{3}{7}-\frac{1}{4}\right);\ \frac{5}{6}-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{8}\right);\ \frac{13}{32}-\left(\frac{3}{16}-\frac{1}{8}\right)$$

82. Деление произведения на число.

$$\frac{2\frac{2}{3}\times 2\frac{3}{8}}{1\frac{1}{3}}=\left(2\frac{2}{3}:1\frac{1}{3}\right)\times 2\frac{3}{8}=2\times 2\frac{3}{8}=4\frac{3}{4}$$

$$\frac{5\frac{3}{8}\times 9\frac{1}{3}}{4\frac{2}{3}};\quad \frac{6\frac{1}{2}\times 3\frac{1}{5}}{1\frac{3}{5}};\quad \frac{12\frac{1}{2}\times 5\frac{1}{3}}{6\frac{1}{4}}$$

83. Деление произведения на произведение.

$$\frac{2\frac{1}{4}\times 2\frac{2}{3}}{9\times 8}=\left(2\frac{1}{4}:9\right)\times\left(\frac{8}{3}:8\right)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$$

$$\frac{6\frac{1}{3}\times 7\frac{1}{5}}{19\times 36};\quad \frac{3\frac{1}{5}\times 2\frac{3}{4}}{16\times 11};\quad \frac{3\frac{5}{7}\times 12\frac{8}{9}}{13\times 29}$$

84.	**85.**	**86.**	**87.**
$\frac{3}{8}+\frac{3}{4}$	$\frac{5}{6}-\frac{2}{3}$	$\frac{7}{12}+\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}+\frac{1}{3}$
$-\frac{11}{16}$	$+\frac{7}{12}$	$-\frac{5}{24}$	$-\frac{3}{10}$
$:\frac{7}{12}$	$:4\frac{1}{2}$	$:\frac{3}{4}$	$:2\frac{1}{3}$
$\times 8$	$\times 6$	$\times 12$	$\times 10$
[6]	[1]	[10]	[1]

88. $\frac{3}{5}-\frac{7}{15}$

$:\frac{2}{3}$

$\times\frac{7}{8}$

$\times 5\frac{5}{7}$

[1]

89. $\frac{1}{6}+\frac{1}{4}$

$+\frac{3}{8}$

$:9\frac{1}{2}$

$\times 12$

[1]

90. $\frac{1}{4}+\frac{1}{12}$

$\times 7\frac{1}{2}$

$+\frac{3}{4}$

$:1\frac{5}{8}$

[2]

91. $\frac{1}{16}+\frac{1}{12}$

$:\frac{7}{24}$

$-\frac{3}{8}$

$\times 20$

$\left[2\frac{1}{2}\right]$

92. $\frac{7}{8}+\frac{1}{12}$

$-\frac{5}{6}$

$\times 2\frac{2}{3}$

$:\frac{1}{6}$

[2]

93. $\frac{5}{16}+\frac{1}{3}$

$-\frac{1}{2}$

$:\frac{7}{16}$

$\times 3$

[1]

94. $\frac{4}{5}+\frac{1}{3}$

$-\frac{3}{5}$

$:1\frac{1}{3}$

$\times 5$

[2]

95. $\frac{7}{9}-\frac{1}{3}$

$+\frac{1}{6}$

$:5\frac{1}{2}$

$\times 4\frac{1}{2}$

$\left[\frac{1}{2}\right]$

Таблица для упражнений в действиях с обыкновенными дробями № 1

$\frac{168}{216}$	$\frac{5}{23}$	$\frac{5}{13}$	65	$3\frac{5}{8}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{19}{25}$
$\frac{83}{249}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{5}{6}$	42	$8\frac{5}{13}$	$\frac{1}{33}$	$\frac{4}{7}$
$\frac{60}{144}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{13}{18}$	144	$31\frac{5}{6}$	$\frac{4}{81}$	$\frac{4}{9}$
$\frac{264}{312}$	$\frac{7}{29}$	$\frac{9}{16}$	256	$105\frac{3}{4}$	$1\frac{7}{12}$	12
$\frac{22}{143}$	$\frac{11}{25}$	$\frac{17}{25}$	136	$17\frac{11}{20}$	$2\frac{19}{48}$	$1\frac{5}{32}$
$\frac{21}{140}$	$\frac{5}{31}$	$\frac{24}{35}$	$\frac{8}{15}$	246	$\frac{3}{64}$	$\frac{2}{5}$
$\frac{72}{81}$	$\frac{1}{81}$	$\frac{3}{4}$	$2\frac{6}{7}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{17}$	45

Сделайте такую настенную таблицу и используйте её для решения примеров на все четыре арифметических действия.

При производстве арифметических действий над обыкновенными дробями и особенно при приведении их к одному знаменателю и сокращении следует приучать учащихся пользоваться таблицами, данными на стр. 13 и 15.

Для этого необходимо предложить учащимся сделать себе такие таблички на плотной бумаге размером 12 *см* × 12 *см*. Многократное использование их будет содействовать лучшему усвоению табличных результатов и будет облегчать производство устных и письменных вычислений.

Таблица для устного счёта № 2

(дроби)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
204	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{512}$	$\frac{1}{1024}$	224
252	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{81}$	$\frac{1}{243}$	$\frac{1}{729}$	$\frac{1}{126}$	$\frac{1}{144}$	$\frac{1}{162}$	$\frac{1}{180}$	198
168	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{42}$	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{54}$	$\frac{1}{60}$	208
90	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{80}$	$\frac{1}{35}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{45}$	$\frac{1}{50}$	132
165	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{125}$	$\frac{1}{216}$	$\frac{1}{49}$	$\frac{1}{56}$	$\frac{1}{63}$	$\frac{1}{70}$	192
176	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{22}$	$\frac{1}{33}$	$\frac{1}{44}$	$\frac{1}{55}$	$\frac{1}{66}$	$\frac{1}{77}$	$\frac{1}{88}$	$\frac{1}{99}$	$\frac{1}{110}$	121
156	$\frac{1}{13}$	$\frac{1}{26}$	$\frac{1}{39}$	$\frac{1}{52}$	$\frac{1}{65}$	$\frac{1}{78}$	$\frac{1}{91}$	$\frac{1}{104}$	$\frac{1}{137}$	$\frac{1}{130}$	182
288	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{120}$	$\frac{1}{135}$	$\frac{1}{210}$	$\frac{1}{225}$	$\frac{1}{240}$	$\frac{1}{255}$	$\frac{1}{270}$	$\frac{1}{235}$	$\frac{1}{150}$	105
272	$\frac{1}{17}$	$\frac{1}{34}$	$\frac{1}{51}$	$\frac{1}{68}$	$\frac{1}{85}$	$\frac{1}{102}$	$\frac{1}{119}$	$\frac{1}{136}$	$\frac{1}{153}$	$\frac{1}{170}$	187
228	$\frac{1}{19}$	$\frac{1}{38}$	$\frac{1}{57}$	$\frac{1}{76}$	$\frac{1}{95}$	$\frac{1}{114}$	$\frac{1}{133}$	$\frac{1}{152}$	$\frac{1}{171}$	$\frac{1}{190}$	209
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	

В таблице для устного счёта № 2 даны дроби со знаменателями от 2 до 20 и кратные им. Целые числа, стоящие вверху и внизу, могут быть использованы как числители, а целые числа, стоящие справа и слева, — для нахождения частей от числа и чисел по данной части. Таблица даёт богатый материал для сложения и вычитания чисел со взаимно простыми, кратными и составными знаменателями, а также для умножения и деления целых чисел на дробь.

Глава IV

ДЕСЯТИЧНЫЕ ДРОБИ

§ 1. Понятие о десятичной дроби и преобразование десятичных дробей

1. Во сколько раз 625,63 больше 6,2563? 835,4 больше 83,54? 62,5 больше 0,625?

Во сколько раз 281 больше 28,1? 35,73 больше 3,573?

2. Во сколько раз увеличится каждое из чисел: 0,7; 0,014; 36,25; 0,036, если отбросить запятую?

3. Уменьшить: 606,5 в 100 раз; 6,67 в 10 раз; 1,2 в 100 раз; 26,7 в 1000 раз.

4. Превратить в метры: 75,2 *см;* 1,5 *мм.*

Превратить в квадратные метры: 25,4 *дм*^{2}; 3 500 *см*^{2}.

Превратить в кубические метры: 7 000 *дм*^{3}; 56 700 *см*^{3}.

Превратить в килограммы: 830 *г*; 20 *г;* 1,5 *г.*

5. Выразить в миллионах человек число жителей следующих крупнейших городов РСФСР (по переписи 1939 г.) с точностью до $\frac{1}{0}$ млн.:

Москва	4 137 018
Ленинград	3 191 304
Горький	644 116
Ростов на Дону	510 253
Сталинград	445 476
Свердловск	425 544

6. Выразить в тысячах километров $\left(\text{с точностью до } \frac{1}{10}\right)$ длину важнейших рек РСФСР:

Обь с Иртышом	5 200 *км*
Амур	4 354 »
Лена	4 264 »
Енисей	3 807 »
Волга	3 688 »

7. Делением числителя на знаменатель следующие обыкновенные дроби представить в виде десятичных:

$$1)\ \frac{1}{2};\ 2)\ \frac{2}{5};\ 3)\ \frac{3}{5};\ 4)\ \frac{1}{4};\ 5)\ \frac{3}{4};\ 6)\ \frac{3}{20};\ 7)\ \frac{1}{25};$$

$$8)\ \frac{7}{25};\ 9)\ \frac{3}{50};\ 10)\ \frac{3}{8};\ 11)\ \frac{1}{125}.$$

8. Какие обыкновенные дроби обращаются в конечные десятичные? Сколько десятичных знаков будет иметь конечная десятичная дробь, получаемая из обыкновенной дроби?

9. Сколько цифр перед периодом получится, если представить в виде смешанных периодических дробей следующие обыкновенные: $\frac{5}{6}$; $\frac{7}{12}$; $\frac{3}{22}$; $\frac{7}{48}$; $\frac{11}{45}$; $\frac{13}{72}$?

§ 2. Сложение и вычитание

1. Прибавляйте: а) к 3,4 по 0,7; б) к 0,83 по 0,06; в) к 0,292 по 0,003.

2. Вычитайте: а) от 5,3 по 0,6; б) от 0,91 по 0,09; в) от 0,513 по 0,004.

3. Какое число на 12,9 больше 26,3? [39,2.]

4. Нужно вырыть колодец глубиной в 18,25 *м*. Вырыто 12,75 *м*. Сколько остаётся вырыть?

5. Сумма двух чисел равна разности между 56,6 и 17,4; одно из этих чисел 25,4. Найти другое число. [13,8.]

6. В 1930 г. один рабочий добывал в среднем по 12,8 *т* угля в месяц, а в 1940 г. по 26,6 *т*. На сколько тонн увеличилась средняя добыча угля одним рабочим в месяц? [На 13,8 *т*.]

7. Боевой патрон винтовки весит 22,5 *г*. Вес его слагается из веса гильзы, капсюля, заряда и пули. Определите вес пули с капсюлем, если заряд весит 3,2 *г*, а гильза 9,6 *г*.

8. Одна чугунная отливка весит 24,8 *кг*, другая на 8,75 *кг* тяжелее первой, а третья на 1,9 *кг* легче второй. Каков вес всех трёх отливок?

9. Пуля, выпущенная из винтовки с близкого расстояния, пробивает земляную насыпь толщиною в 0,5 *м* и деревянную стенку — в 0,75 *м*. Во сколько раз глубже пуля проникает в дерево, чем в землю?

10. Найти сумму по горизонталям и вертикалям большого, среднего и малого квадратов (можно в виде игры «Кто скорей, кто верней»).

0,4	0,01	0,02	0,03	0,42	0,41	0,46
0,38	0,31	0,13	0,14	0,32	0,35	0,12
0,39	0,3	0,26	0,21	0,28	0,2	0,11
0,43	0,33	0,27	0,25	0,23	0,17	0,07
0,06	0,16	0,22	0,29	0,24	0,34	0,44
0,05	0,15	0,37	0,36	0,18	0,19	0,45
0,04	0,49	0,49	0,47	0,08	0,09	0,1

§ 3. Умножение и деление

1. Какие доли получаются от умножения десятых долей на десятые доли? на сотые доли?

2. Произведение двух чисел 6 300. Какое будет произведение, если уменьшить: а) множимое в 1 000 раз? б) множитель в 10 раз?

3. Произведение двух чисел 164. Какое будет произведение, если уменьшить: а) множимое в 10 раз? б) множитель в 100 раз?

4. Во сколько раз: а) 0,3 меньше 3? б) 0,015 меньше 15? в) 6,32 меньше 632?

5. Какие из нижеследующих выражений больше единицы и какие меньше единицы: а) 2,4 : 7,5? б) 8,1 : 3,6? в) 0,3 : 0,12? г) 0,07 : 0,35? д) 3,5 × 0,2? е) 2,3 × 1,8? ж) 0,7 × 8,5?

6. Какую часть площади всех граней куба с ребром в 1,5 *м* составляет площадь всех граней куба с ребром в 0,75 *м*? [0,25.]

7. Вес пяти котлов равен 90 *кг*; 3 котла равного веса, а вес каждого из последних двух на 3,5 *кг* меньше веса каждого из первых. Сколько весит каждый котёл? [19,4 *кг;* 15,9 *кг.*]

8. Что сделается с частным 7,8 : 0,13, если к делимому прибавить 0,39? [Увеличится на 3.]

9. Какая часть суток прошла, если теперь 4 часа 48 мин. утра?

10. По линиям метро за 12 лет перевезено 12,18 млрд. пассажиров. Сколько пассажиров в среднем перевозится в год? [1,015 млрд.]

11. Если к неизвестному числу прибавить 0,5 его да ещё 2,5, то получится 10. Найти неизвестное число. [5.]

12. Разность между двумя неизвестными числами равна 22,5, а частное этих же чисел 10. Найти числа. [25 и 2,5.]

13. Сумма двух чисел 2,5; одно из них в 24 раза более другого. Какие это числа? [0,1 и 2,4.]

14. Умножить на пять:*

2,8; 3,4; 7,2; 6,3; 8,4; 9,3; 8,24; 22,4; 43,6

15. Умножить на 0,5:

1,4; 2,8; 3,6; 7,6; 9,8; 12,4; 16,8; 20,4; 42,8

16. Умножить на 25:

0,4; 0,8; 0,24; 3,2; 4,8; 2,3; 2,5; 4,8

17. Умножить на 0,25:

0,6; 2,4; 3,6; 7,8; 8,9; 12,4; 36,8; 44,8; 96

18. Умножить на 2,5:

24; 16; 1,8; 2,6; 3,2; 0,8; 0,16; 0,24; 0,36

19. Умножить на 15, 1,5 и 0,15 каждое из следующих чисел:

42; 36; 64; 1,6; 2,4; 7,6; 8,4; 9,6; 0,4; 0,8

20. Умножить на 125, 12,5, 1,25 и 0,125 каждое из следующих чисел:

16; 24; 36; 48; 64; 96; 0,4; 0,8; 0,12; 0,16; 0,24

21. Умножить на 9 и 0,9 следующие числа:

2,4; 0,5; 3,2; 0,45; 0,96; 0,84; 0,64

22. Умножить на 99; 9,9; 0,99:

12; 13; 14; 15; 16; 22; 23; 24; 45; 48; 79; 81

23. Умножить на 999, 99,9, 9,99 и 0,999:

1,23; 232; 344; 3,28; 34,6; 77,8; 89,6; 0,124; 0,368

24. Перемножить:

2,3 и 3,6; 2,7 и 3,8; 3,2 и 4,5; 2,6 и 7,2;
8,5 и 9,6; 9,2 и 7,6; 8,4 и 9,3; 9,6 и 5,4

25. Произвести указанные действия:

$1,98 + 2,14 + 2,02 + 8,6 - 6$ $\quad$ $28 \times 0,25 - 20 \times 0,15 + 0,72$
$2 - 0,35 \times 4 + 0,2 \times 8 - 0,99$ $\quad$ $9 + 7,2 \times 14 : 1,8 - 3,56$
$0,83 + 3,84 + 2,02 + 1,16 - 7$ $\quad$ $3,5 \times 29 - 2,9 + 6,9 \times 2 : 5$
$0,25 \times 36 - 2,49 + 3,49$ $\quad$ $(10 - 8 : 16) : 19 + 3,5$
$4 - 0,45 \times 4 + 0,31 \times 9$ $\quad$ $6,4 \times 1,5 : 8 + 3,2 \times 25 - 4,2$

---

* При умножении на 0,5; 0,25; 0,9; 0,99; 0,999 и т. д. следует пользоваться приёмами сокращенного умножения целых чисел с последующим определением места занятий в произведении.

26. Распределительное свойство деления относительно суммы и разности.

$(350 - 1{,}375 \times 100) : 10 = 35 - 13{,}75 = 21{,}25$
$(420 - 2{,}8 \times 100) : 10$; $(32 - 2{,}5 \times 10) : 100$
$(27 : 6 + 0{,}75 \times 2) : 3$; $(2{,}75 \times 12 - 0{,}15 \times 9) : 15$
$(0{,}8 \times 0{,}7 - 0{,}16 \times 0{,}42) : 0{,}14 = 4 - 0{,}48 = 3{,}52$
$(4{,}2 \times 3{,}6 - 2{,}4 \times 1{,}4) : 5{,}6$; $(2{,}3 \times 1{,}5 - 4{,}6 \times 0{,}3) : 3{,}9$
$(4{,}5 \times 2{,}2 - 7{,}5 \times 1{,}1) : 3{,}3$; $(4{,}8 \times 5 - 6{,}4 \times 2{,}5) : 0{,}6$

27. $1{,}5 : 6$
$\times 8$
$: 5$
$+ 5{,}8$
$- 3{,}9$
[2,3.]

28. $1{,}5 \times 7$
$: 0{,}3$
$\times 5$
$+ 0{,}4$
$- 75{,}4$
[100.]

29. $4{,}8 \times 9$
$+ 5{,}6$
$: 8$
$\times 1{,}1$
[6,71.]

30. $2{,}5 \times 11$
$- 4{,}5$
$: 2{,}3$
$\times 4{,}9$
$+ 11$
[60]

31. $1{,}6 \times 12$
$+ 0{,}8$
$: 2{,}5$
$\times 5{,}2$
[41,6.]

32. $9 : 4{,}5$
$\times 1{,}1$
$+ 1{,}8$
$: 4$
[1.]

33. $8 \times 9{,}9$
$- 9{,}2$
$: 1{,}4$
$\times 0{,}7$
[35.]

34. $800 \times 0{,}34$
$: 0{,}8$
$: 1{,}7$
$\times 0{,}4$
[80.]

35. $3{,}52 - 0{,}48$
$: 0{,}5$
$\times 6$
$\times 0{,}2$
$+ 0{,}004$
[7,3.]

36. $3{,}6 : 9$
$\times 0{,}4$
$+ 1{,}24$
$\times 5$
$: 3{,}5$
[2.]

37. $8{,}4$
$+ 2{,}6$
$: 5{,}5$
$\times 7{,}5$
[15.]

38. $12{,}3$
$- 4{,}8$
$: 2{,}5$
$\times 1{,}6$
[4,8.]

39. $1{,}44$
$\times 5$
$- 2{,}2$
$: 2{,}5$
[2.]

40. $8{,}8$
$\times 2{,}5$
$: 4$
$+ 4{,}5$
[10.]

41. $1{,}6$
$\times 7{,}5$
$: 3$
$\times 9{,}5$
[38.]

42. $8{,}5$
$: 1{,}7$
$\times 0{,}5$
$+ 17{,}5$
[20.]

43. $12{,}5$
$: 0{,}5$
$\times 1{,}6$
$+ 16$
[56.]

44. $16{,}4$
$: 0{,}4$
$+ 9$
$\times 0{,}8$
[40.]

45. $9{,}6$
$\times 5$
$: 2{,}4$
$\times 0{,}1$
[2.]

46. $5{,}5$
$\times 3{,}5$
$: 1{,}1$
$\times 1{,}8$
[31,5.]

47. $0{,}4$
$\times 0{,}96$
$: 8$
$+ 0{,}052$
[0,1.]

48. 1,6	**49.** 1,2	**50.** 0,7	**51.** 2,4
$\times$ 0,25	$\times$ 7	$\times$ 0,7	$\times$ 3,5
$+$ 3,6	$+$ 1,6	$+$ 0,51	$+$ 6,6
: 0,8	: 0,01	: 0,2	— 14,99
[5.]	[1000.]	[5.]	[0,01.]

§ 4. Задачи

1. 6 *кг* зелёной кукурузы содержат 0,9 *кг* кормовых едииц, сколько кормовых единиц содержит 1 *кг* зелёной кукурузы? [0,15 *кг*.]

2. При небольшой густоте травы 1 косец может скосить за день $\frac{1}{2}$ *га;* одноконной косилкой за день можно убрать 3 *га*; косилкой пароконной 4 *га*. Во сколько раз ускоряет работу косца одноконная косилка? двуконная косилка? [В 6 и 8 раз.]

3. При хранении в подвалах или ямах картофель теряет за 6 месяцев $\frac{3}{20}$ своего веса. Сколько картофеля нужно сложить в яму, чтобы через шесть месяцев иметь 51 *ц* картофеля для посева? [60 *ц*.]

4. На прокорм коровы за зиму расходуется яровой соломы 2,1 *т*, сена 0,1 *т*, мякины 0,3 *т* и картофеля 0,5 *т*. Какой запас этих кормов потребуется на прокорм 5 коров за зиму? [15 *т*.]

5. Для одной головы крупного рогатого скота на лето полагается 0,25 *га* пастбища с хорошей травой, а лошади в 3 раза меньше. Какой размер пастбища нужно иметь для 7 голов рогатого скота и 3 лошадей? [2 *га*.]

6. Электрическая молотилка в час обмолачивает 0,16 *т* зерна, а вручную 1 рабочий за это же время обмолачивает 0,03 *т*. Во сколько раз быстрее работает электрическая молотилка?

7. Перистые облака находятся в 10 раз выше, чем грозовые, и на 11,43 *км* выше последних. На какой высоте находятся перистые и на какой грозовые? [12,7 *км* и 1,27 *км*.]

8. Царь-колокол и царь-пушка весят вместе 230,4 *т*. Царь-колокол весит на 153,6 *т* больше, чем царь-пушка. Сколько весит царь-пушка?

9. В колхозе 0,375 всей земли занято под лугами и лесом, 0,8 оставшейся земли под пашней, а остальные 40 *га* под постройками и огородами. Сколько земли в колхозе? [320 *га*.]

10. Вся граница вокруг прямоугольного поля 4,8 *км*; ширина поля составляет $\frac{3}{5}$ его длины. Сколько гектаров содержит это поле? [135 *га*.]

11. Участники автопробега в первый день прошли 0,25 всего пути, во второй день 0,5 оставшегося пути, в третий день остальные 360 *км*. Как велика дистанция автопробега? [960 *км*.]

12. Три рабочих получили 272 руб.; первый получил 0,75 того, что получил третий. Второй в 2,5 раза больше третьего. Сколько получил каждый? [48 руб.; 160 руб. и 64 руб.]

13. Когда учительница раздала $\frac{1}{3}$ всех тетрадей и ещё 4 тетради, то у неё осталось 0,4 всех тетрадей и ещё 16 тетрадей. Сколько тетрадей было у учительницы? [75.]

14. Доску длиной в 9 *м* нужно перепилить на две части так, чтобы длина одной из них была больше длины другой в 3,5 раза. Какова должна быть длина каждой части? [2*м*; 7 *м*.]

15. Газопровод Саратов—Москва на 672 *км* длиннее канала имени Москвы. Найти длину того и другого, если отношение их длины равно 6,25. [800 *км* и 128 *км*.]

16. За две книги заплатили 8,25 руб.; одна книга дороже другой в 4,5 раза. Какова стоимость каждой книги? [1,5 руб. и 6,75 руб.]

17. За 1 *м* шёлку и 1 *м* сатину уплатили 57 руб. Метр шёлку в 3,75 раза дороже метра сатина. Сколько стоит метр шёлка и метр сатина в отдельности? [45 руб. и 12 руб.]

18. Отцу 40 лет, а трём сыновьям 9, 10 и 11 лет. Через сколько лет годы сыновей, сложенные вместе, будут равны годам отца? [Через 5 лет.]

19. Два парохода вышли одновременно из одного порта и идут в одном направлении. Первый в каждые 1,5 часа проходит 25,5 *км*, а второй — 19,5 *км*. Через сколько времени первый пароход обгонит второй на 16 *км*? [Через 4 час.]

20. Из двух станций *А* и *Б*, расстояние между которыми равно 18 *км*, вышли одновременно в одном и том же направлении два поезда. Первый поезд проходит в 1 мин. 0,8 *км*, а второй 0,6 *км*. Через сколько часов первый поезд (выходящий из *А*) догонит второй?

21. Из *А* вышел поезд, который проходит расстояние между *А* и *Б* в 12 час. Спустя 2 часа, вслед за ним вышел поезд, который проходит это же расстояние в 10,5 часа. Через сколько часов второй поезд догонит первый? [Через 14 час.]

22. От *А* до *Б* 450 *км*. В 8 час. утра выехали одновременно из *А* почтовый, а из *Б* товарный поезд и идут друг другу навстречу. Товарный поезд проходит весь путь в 18 час., а почтовый вдвое скорее. Когда они встретятся? (Решить двумя способами.)

23. Поезд в 1 час 20 мин. проезжает 80 *км*. Сколько проедет он в сутки при 10 остановках, каждая по 7,5 мин.? [1 365 *км*.]

24. 24 столовые ложки и 36 чайных весят 3,3 *кг*, а 36 столовых и 36 чайных весят 4,5 *кг*. Сколько весит столовая и сколько чайная ложка? [100 *г* и 25 *г*.]

25. Сливки составляют 0,125 веса молока; сливочное масло составляет 0,2 веса сливок; топлёное русское масло составляет

0,75 веса сливочного масла. Сколько нужно взять молока (по весу), чтобы получить 3 *кг* топлёного масла? [160 *кг*.]

26. Хозяйка купила 5,25 *кг* рису и 1,5 *кг* сахару и за всё это заплатила сумму денег, на которую можно было бы купить 5,7 *кг* того же сахару. Рис дешевле сахара на 2 руб. Что стоит 1 *кг* рису и 1 *кг* сахару? [8 руб.; 10 руб.]

§ 5. Задачи с геометрическим содержанием

1. Если сторона квадрата равна 0,5 *см*; 0,25 *дм*; 0,4 *м;* 0,15 *м;* 1,5 *см;* 2,5 *см,* то чему равна площадь каждого из этих квадратов и чему равен периметр каждого из них?

2. Чему равно основание прямоугольника, если площадь его равна 5,2 *кв. м,* а высота равна 2,6 *м*?

3. Сколько пластинок квадратной формы со стороной в 0,4 *дм* поместится в прямоугольнике шириной в 0,8 *дм*, а длиной в 5 *дм?*

4. Чему равен объём бруса длиной в 5,5 *дм*, шириной в 0,4 *дм* и высотой в 1,5 *дм?* [3,3 *куб. дм.*]

5. Сколько весит кусок гранита длиной 0,75 *м,* толщиной 0,2 *м* и шириной 0,25 *м,* если гранит в 2,8 раза тяжелее воды? [0,105 *т.*]

6. Длина комнаты 6 м, ширина 4,5 м и высота 4 м. Что будет стоить побелка стен и потолка известью, если за 1 *кв. м* берут по 45 коп.? [49 руб. 95 коп.]

7. Читальня имеет площадь пола 48 *кв. м*, а высоту 3,5 *м*. Сколько человек одновременно может заниматься в читальне, чтобы на каждого человека приходилось 3 *куб. м* воздуха? [56 чел.]

8. Площадь поля прямоугольной формы равна 1,48 *га*; длина его 148 *м*. Чему равны ширина и периметр? [100 *м* и 496 *м*.]

9. Скольким кубическим дециметрам равен объём камня весом в 200 *кг*, если 1 *куб. см* этого камня весит 2,5 *г?*

10. Во сколько раз увеличится площадь квадрата, если сторону его увеличить в 1,5 раза? в 2,5 раза? Во сколько раз увеличится периметр? [2,25 раза; 6,25 раза.]

11. Найдите длину окружности, если диаметр её равен 3; 2,5; 1,5; 11; 22; 7,5 (*дм*).

12. Определите длину диаметра, если окружность равна 15,7 *см*; 6,28 *см*; 18,84 *см*; 7,85 *см* ($\Pi = 3{,}14$).

13. На протяжении 3,14 *км* колесо паровоза сделало 500 оборотов. Как велик радиус колеса?

14. На сколько поперечник одного дерева больше другого, если первое дерево имеет в обхвате 176 *см*, а второе 132 *см* $\left(\Pi = \frac{22}{7}\right)$. [14 *см*.]

15. Корова пасётся на привязи. Длина верёвки 4 *м*. Какую площадь пастбища может стравить корова, находящаяся на привязи? [50,24 $м^2$.]

16. На прямоугольном выгоне размером 21 *м* $\times$ 23 *м* пасётся лошадь, привязанная к столбу на углу выгона. Как велика пло-

щадь выгона, недоступного для лошади, если длина верёвки 10 *м*? [404,5 *кв. м.*]

17. Развёрнутая боковая поверхность цилиндра — прямоугольник, основание которого 25,12 *см*, а высота 5 *см*. Найдите объём цилиндра.

18. Во сколько раз уменьшится объём куба, если ребро его уменьшить в 5 раз? [В 125 раз.]

19. Диаметр вагонного колеса 1,25 *м*. Сколько оборотов сделает колесо на протяжении 3 14 *км*? [800 об.]

20. Новые никелевые монеты имеют следующие диаметры:
10-копеечная монета имеет диаметр 17,27 *мм*.
15-копеечная монета имеет диаметр 19,56 *мм*.
20-копеечная монета имеет диаметр 21,84 *мм*. Найти длину окружности каждой монеты с точностью до 1.
[54 *мм*; 61 *мм*; 69 *мм*.]

21. Вес пассажирского паровоза с тендером в $3\frac{1}{8}$ раза больше веса пассажирского вагона; багажный вагон весит в два раза меньше, чем пассажирский. Сколько весят в отдельности пассажирский паровоз с тендером, пассажирский и багажный вагоны, если общий вес их 148 *т*? [100 *т*, 32 *т* и 16 *т*.]

22. Вычислить площадь треугольников по следующим данным

Основание в метрах:	6,25;	16,5;	84;	96;	4,8;	5,4;	9,2
Высота в метрах:	8;	2,5;	12,5;	2,5;	25;	35;	1,5

23. Вычислить площадь прямоугольных треугольников по следующим данным:

1-й катет в метрах:	15,5;	25;	45,2;	35,8;	18,8;	12,5;	20,4
2-й катет в метрах:	25;	12,5;	15;	2,5;	7,5;	24;	12,5

24. Вычислить площадь параллелограма по следующим данным:

Основание в метрах:	29,6;	45,8;	30,6;	28,4;	15,4;	20,6
Высота в метрах:	25;	15;	12,5;	11;	3,5;	7,5

25. Чему равны площадь, основание и высота треугольника:

Основание	Высота	Площадь
24; 36; 48 x; x; x 6,1, 7,2; 8,1	5,5; 2,5; 1,5 4,5; 12,5, 3,5 x, x, x	x; x, x 18; 50; 10,5 25; 90; 70

26. Чему равны площадь, основание и высота параллелограма:

Основание	Высота	Площадь
7,5; 22,5; 3,5 x; x; x 12; 18; 24	x; x; x 6,8; 8,5; 4,5 22,5; 7,5; 12,5	45; 90; 700 170; 340, 18 x x; x

27. Чан имеет радиус 0,7 *м* и высоту 1,2 *м*. Объём ведра 12 *куб. дм*. Сколько вёдер воды вмещает чан, если он имеет форму цилиндра? [154 ведра.]

Глава V

ПРОЦЕНТЫ

1. Какой доле целого равны следующие числа процентов: $1\frac{1}{2}$ %; $2\frac{1}{4}$ %; $3\frac{3}{4}$ %; $4\frac{2}{5}$ %; $5\frac{2}{3}$ %; $6\frac{3}{7}$ %?

2. Найти один процент от 3 руб., 8 руб., 9 руб., 23 руб., 345 руб., 60 руб., 457 руб.

3. Скольким рублям равны 4% от 20 руб.? от 45 руб.? от 6,5 руб., от 3,25 руб.?

4. Скольким процентам равны 0,37? 0,125? 0,78? 1,5? 2,008?

5. Записать в виде десятичных дробей следующие числа процентов 37%; 43%; 59%; 8%; 111%; 123%.

При вычислении процентов рекомендуем пользоваться следующей таблицей:

$100\% = \frac{100}{100}$	— равно самому числу	$8\frac{1}{3}\% = \frac{1}{12}$	всего числа
$1\frac{1}{4}\% = \frac{1}{80}$	всего числа	$10\% = \frac{1}{10}$	всего числа
$1\frac{1}{3}\% = \frac{1}{75}$	всего числа	$12\frac{1}{2}\% = \frac{1}{8}$	всего числа
$1\frac{2}{3}\% = \frac{1}{60}$	всего числа	$16\frac{2}{3}\% = \frac{1}{6}$	всего числа
$2\% = \frac{1}{50}$	всего числа	$20\% = \frac{1}{5}$	всего числа
$2\frac{1}{2}\% = \frac{1}{40}$	всего числа	$25\% = \frac{1}{4}$	всего числа
$3\frac{1}{3}\% = \frac{1}{30}$	всего числа	$33\frac{1}{3}\% = \frac{1}{3}$	всего числа
$4\% = \frac{1}{25}$	всего числа	$37\frac{1}{2}\% = \frac{3}{8}$	всего числа
$5\% = \frac{1}{20}$	всего числа	$50\% = \frac{1}{2}$	всего числа
$6\frac{1}{4}\% = \frac{1}{16}$	всего числа	$66\frac{2}{3}\% = \frac{2}{3}$	всего числа

6. Перед войной РСФСР давала $\frac{2}{5}$ всей угледобычи нашего Союза, $\frac{1}{5}$ всей советской нефти, $\frac{2}{5}$ чугуна, $\frac{1}{2}$ стали и $\frac{3}{4}$ продуктов машиностроения. Выразить продукцию РСФСР в процентах.

7. Сколько рублей составляют 8%; 3%; 0,6% от 75 руб.?

8. Сколько рублей составляют 5%; 1_2%; 6,5% от 840 руб.?

9. Скольким арам равны 7,4% от площади в 1,5 *га*?

10. Нахождение процентов от числа можно вычислять ещё разложением числа процентов на части.

Пример: найти $22\frac{1}{2}$ % от 460.

$$
\begin{array}{rl}
20\% \text{ от } 460 \text{ составляют} & 92 \\
2\% \text{ от } 460 \text{ составляют} & 9{,}2 \\
\frac{1}{2}\% \text{ от } 460 \text{ составляет} & 2{,}3 \\
\hline
22\frac{1}{2}\% \text{ от } 460 \text{ составляют} & 103{,}5
\end{array}
$$

Найти $37\frac{1}{2}$% от 700	$(37{,}5 = 25 + \frac{1}{2}\cdot 25)$
45% от 480	$(45 = 50 - 5)$
55% от 960	$(55 = 50 + 5)$
35% от 440	$(35 = 25 + 10)$
60% от 350	$(60 = 50 + 10)$

11. Участок земли имеет форму прямоугольника, длина которого 1,5 *км*, а ширина составляет 0,6 длины. Лес составляет 20% всей площади. Определить в гектарах площадь, занятую лесом. [27 *га*.]

12. Найти перестановкой сомножителей проценты от чисел:

36% от 50	44% от 7 500
16% от 25	48% от 1 250
24% от 375	22% от 4 000

13. Сырой торф содержит в себе в среднем 70% воды. Сколько сухого торфа получится из 140 *т* сырого? [42 *т*.]

14. Трава при сушении теряет 80% своего веса. Высчитать, сколько сена получится с луга в 12 *га*, если с каждого гектара получается 5 *т* травы? [12 *т*.]

15. За три книги заплачено 12 руб. 40 коп. Стоимость второй книги составляет 25% стоимости первой книги, а стоимость третьей составляет 60% стоимости первых двух книг вместе. Сколько стоила каждая книга?

[6 руб. 20 коп.; 1 руб. 55 коп.; 4 руб. 65 коп.]

16. Рожь при размоле даёт 75% муки. Сколько зерна нужно смолоть, чтобы получить 1 *т* муки?

17. Пшеница при размоле даёт 80% муки. Сколько отрубей получится из 25 мешков пшеничного зерна при весе каждого мешка в 80 *кг*? [400 *кг*.]

18. В 1939 г. в РСФСР было 109,3 млн. человек населения. Русские составляли 80% всего населения РСФСР. Сколько было миллионов русских в составе населения РСФСР? [87,44 млн.]

19. В глубине Хибинских гор разведано около 2 млрд. *т* апатита. В апатите 30% фосфора. Как велики в Хибинах запасы фосфора? [600 млн. *т*.]

20. Мальчик собрал за лето 600 насекомых; $16\frac{2}{3}$% этого числа составляли бабочки и $12\frac{1}{2}$% — кузнечики. Сколько бабочек и сколько кузнечиков собрал мальчик? [100 и 75.]

21. В овцеводческом колхозе было 8 000 овец. Молодняк составлял $62\frac{1}{2}$%, а матки $27\frac{1}{2}$% всего числа овец. Сколько молодняка и сколько маток в колхозе? [5 000, 2 200.]

22. Общая протяженность речных путей СССР составляет свыше 400 тыс. *км*., из них 25% судоходных. Во сколько раз судоходная часть речных путей меньше их общей протяженности? [В четыре раза.]

23. В правилах торговли мясом установлен следующий сортовой разруб говядины:

1-й сорт 55% (филей)

2-й сорт 33% (лопатка, грудинка)

Сколько мяса каждого сорта можно получить из туши весом 1,2 *т*?

24. Молоко даёт 23% сливок, сливки 21% масла. Сколько килограммов молока нужно взять, чтобы получить 483 *кг* масла?

25. Найти число:

если 25% его составляют 18	$3\frac{1}{2}$% его составляют 7
5% его составляют 10	0,3% его составляют 9
5% его составляют 55	9% его составляют 1,8

26. Найти число:

если 25% его составляют 16	$33\frac{1}{3}$% его составляют 120
5% его составляют 30	$\frac{1}{2}$% его составляют 7
6% его составляют 48	0,3% его составляют 6
75% его составляют 600	200% его составляют 250
$12\frac{1}{2}$% его составляют 48	300% его составляют 336

27. Рабочий уплатил членские взносы в профсоюз и кассу взаимопомощи, всего 12,5 руб., что составляет 2% его заработка. Каков заработок рабочего? [625 руб.]

28. На РСФСР приходится около 16,7 млн. *кв. км* площади, что составляет приблизительно 75% всей площади Советского Союза. Найти площадь Советского Союза. [$\approx$22 млн. *кв. км*]

29. Число, 15% которого равны 108, разделено на две части так, что отношение этих частей равно 3. Найти части. [540 и 180.]

30. Сколько процентов составляет $\frac{1}{4}$ по отношению к $\frac{1}{2}$?

Сколько процентов составляет $\frac{1}{10}$ по отношению к $\frac{1}{5}$?

Сколько процентов составляет $\frac{1}{6}$ по отношению к $\frac{1}{3}$?

31. На сколько процентов $\frac{1}{2}$ больше $\frac{1}{4}$?

На сколько процентов $\frac{1}{8}$ меньше $\frac{1}{4}$?

32. Сколько процентов составляют 6 *м* по отношению к 60 *м*? 25 *кг* по отношению к 125 *кг*? 24 *л* по отношению к 96 *л*? 5 *ц* по отношению к 100 *ц*? 5 руб. по отношению к 40 руб.?

33. В 1948 г. на социальное обеспечение отпущено по СССР 22,6 млрд. руб. На сколько процентов увеличены расходы на социальное обеспечение, если в 1947 г. было отпущено 20 млрд. руб.? [13%.]

34. Стахановец т. Лукачёв, проходчик шахты № 10 бис треста «Куйбышевуголь», за 1 год 11 месяцев выполнил свою пятилетнюю норму на 106,5%. Во сколько раз он увеличил производительность своего труда? [$\approx 2\frac{3}{4}$ раза.]

35. Стахановец т. Масалов шахты № 4—5 «Никитовка» со своей бригадой добился рекордной добычи угля — 1 000 *т* в смену, что составляет 2 000% от установленной нормы. Какова норма?

36. Навалоотбойщик комбината «Москвоуголь» т. Титаренко годовую норму 1947 г. выполнил на 256%. Во сколько раз он увеличил производительность своего труда?

37. Забойщики шахты «Красный Октябрь» Щербинков и др. добились добычи угля до 1 000 *т* в смену, вместо 50 *т*. На сколько процентов Щербинков и его товарищи превысили среднюю норму добычи угля?

38. В одной партии из 250 чугунных отливок забраковано 12; в другой из 320 отливок забраковано 20. Где процент брака больше?

39. Рабочий-стахановец обувной фабрики, вместо нормы 700 пар, даёт 1 200 пар обуви. Определить процент перевыполнения плана.

40. Какое число, уменьшенное на 25%, составляет 6?
Какое число, уменьшенное на 40%, составляет 18?
Какое число, уменьшенное на $12\frac{1}{2}$ %, составляет 72?
Какое число, уменьшенное на 10%, составляет 90?

41. Число 20 больше какого числа на 20%?
Число 220 больше какого числа на 10%?

42. Какое число, увеличенное на 6%, составит 318?
Какое число, увеличенное на 5%, составит 525?
Какое число, увеличенное на 10%, составит 220?

43. Найти число, 25% которого равны 5% от 40.
Найти число, 10% которого равны 8% от 75.

44. Мясо теряет при варке 35% своего веса. Сколько надо взять сырого мяса, чтобы отпустить 260 порций по 40 *г* варёного мяса в каждой? [16 *кг.*]

45. Книга продана со скидкой в 12% за 2,64 руб. Сколько стоит книга без скидки? [3 руб.]

46. Костюм со скидкой в 4% продан за 720 руб. Какова стоимость костюма? [750 руб.]

47. На некоторую сумму денег можно купить 36 *кг* товара. Сколько килограммов товара можно купить на те же деньги, если цена одного килограмма будет снижена на 10%? [40 *кг.*]

48. В начале года рабочий зарабатывал 36,4 руб. в день, а в конце года стал зарабатывать 48,07 руб. в день. На сколько процентов увеличилась зарплата?

Глава VI

ОТНОШЕНИЯ И ПРОПОРЦИИ ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

§ 1. Понятие об отношении и пропорции

1. Заменить отношение дробей отношением целых чисел: $\frac{8}{15}$ и $\frac{4}{15}$; $\frac{8}{15}:\frac{8}{45}$; $\frac{9}{34}:\frac{9}{17}$; $\frac{1}{4}\cdot 0{,}5$; 6,25 и 3,75; $5\frac{2}{5}$ и 2,5.

2. Сократить отношения: 188 : 408; 1 225 : 1 125; 1 024 : 960; 8,16 : 6,8; 9,18 : 0,54.

3. Написать несколько отношений, знаменатель которых был бы: 3; 8; $2\frac{1}{4}$; $3\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{7}{8}$.

4. Написать несколько отношений, обратных друг другу.

5. Чему равно: отношение 5,6 $дм^2$ к 0,7 $см^2$? отношение 0,7 $см^2$ к 5,6 $дм^2$?

6. Чему равно отношение объёма куба с ребром в 2 *см* к объёму куба с ребром в 1 *см*?

7. Отцу 48 лет, а сыну 20; какое отношение было между летами отца и сына 4 года назад? 12 лет?

8. Верёвка в 7,8 *м* длиной разрезана на 2 части, из которых первая больше второй на 1,8 *м*. Во сколько раз первая часть больше второй? [В 1,6 раза.]

9. Кусок материи в 4 *м* стоит 56 руб.; кусок материи другого сорта в 7 *м* стоит 105 руб. Каково отношение цен той и другой материи?

10. Найти прямое и обратное отношение: 1 сут. 8 час.: 30 мин.

$$\left[64 \text{ и } \frac{1}{64}.\right]$$

11. Чему равно произведение прямого и обратного отношений двух чисел?

12. Найти неизвестный член следующих пропорций:

$x : 8 = 4 : 0{,}5$	$0{,}8 : x = 0{,}25 : 0{,}5$
$x : 0{,}5 = 7 : 14$	$0{,}16 : x = 0{,}15 : 0{,}3$
$x : 0{,}1 = 4{,}2 : 21$	$4{,}2 : x = 0{,}16 : 0{,}8$
$x : 2{,}5 = 0{,}8 : 0{,}2$	$4 : x = 2{,}4 : 9{,}6$

13. Время выполнения определённого заказа прямо пропорционально или обратно пропорционально числу лиц, выполняющих этот заказ?

14. Сыну 24 года; лета его относятся к летам отца, как $2 : 4\frac{1}{2}$. Сколько лет отцу? [54 года.]

15. Мастер сплавил золото и серебро в отношении $5 : 8$. Золота он взял 20 *г*. Сколько весил сплав? [52 *г*.]

16. Отец зарабатывает в день 31,5 руб. Величина заработной платы отца относится к величине заработной платы сына, как $4\frac{1}{2} : 2$. Сколько денег зарабатывает в день сын?

17. Высота зала относится к высоте окна, как $5\frac{3}{5} : 1\frac{3}{5}$. Определить высоту зала, если высота окна $1\frac{1}{7}$ *м*.

18. На оклейку комнаты пошло 18 кусков обоев шириной 40 *см*. Сколько нужно кусков той же длины по 30 *см* шириной? [24 куска.]

19. На обивку пола нужно 24 ковра шириной 2 *м*. Сколько нужно будет ковров шириной в 1,5 *м*? [32.]

20. Требуется начертить план прямоугольного участка земли в 28,5 *м* длиной и 22,4 *м* шириной так, чтобы длина на плане вышла 5,7 *см*. Какова должна быть ширина участка на плане? [4,48 *см*.]

21. План прямоугольной комнаты в масштабе 0,01 имеет по длине 4,5 *см*, по ширине 3,2 *см*. Как велика площадь комнаты на плане? В натуре? Во сколько раз площадь комнаты в натуре больше площади на плане? [14,4 *кв. см*; 14,4 *кв. м*; в 10 000 раз.]

22.

Размер земельного участка в натуре		Размер участка на плане		Численный масштаб
длина	ширина	длина	ширина	
120 *м*	30 *м*	12 *см*	3 *см*	1 : 1 000
160 »	50 »	8 »	? »	?
? »	25 »	15 »	? »	1 : 500
200 »	? »	20 »	12 »	?
300 »	60 »	? »	6 »	1 : 1 000
400 »	40 »	40 »	? »	1 : 1 000

На место знаков вопроса поставьте нужные числа.

23. Вертикальный шест длиной 4 *м* отбрасывает тень длиной 7,7 *м*, а тень от башни в то же время дня равна 38,5 *м*. Определить высоту башни. [20 *м*.]

§ 2. Задачи

1. Заготовлен провиант на 96 дней для 45 человек. На сколько дней хватит этого провианта для 30 человек?

2. 12 рабочих окончили работу в 8 дней. Во сколько дней сделали бы ту же работу 16 рабочих, если бы они работали так же?

3. Сколько трудодней нужно записать колхознику за вспашку $6\frac{3}{4}$ *га*, если за $\frac{3}{4}$ *га* записывают 1 трудодень? [9.]

4. С $1\frac{1}{5}$ *га* пахотного поля было собрано 1,8 *т* зерна ржи. Как велик урожай с 1 *га*? [1,5 *т*.]

5. Заступом можно поднять в один день $\frac{1}{25}$ *га*, трактором $4\frac{1}{2}$ *га*. Во сколько раз трактором можно поднять больше, чем заступом? [В 112,5 раза.]

6. Два шкива соединены ремнём. Диаметр одного из них в $2\frac{1}{2}$ раза больше диаметра другого. Малый шкив делает в минуту 100 оборотов. Сколько оборотов в минуту делает большой шкив?

7. 0,45 *кг* каменного угля по количеству даваемого тепла заменяют 1 *кг* дров. Какое количество угля следует взять, чтобы заменить 25 *т* дров? [11,25 *т*.]

8. На один гектар пшеницы высевается 5 млн. зёрен. Сколько зёрен пшеницы приходится на 1 *кв. дм* поля? [5 зёрен.]

9. Десять рабочих должны были кончить работу в 8 дней. Когда они проработали 2 дня, то оказалось необходимым кончить работу через 4 дня. Сколько нужно ещё нанять рабочих? [5 чел.]

10. При выпечке хлеба расходуется количество дров, равное по весу половине выпекаемого хлеба. Вычислите расход дров в месяц на выпечку хлеба в колхозе с населением 350 человек, если душевое потребление хлеба в день 1,2 *кг*? [6,3 *т*.]

11. На ферме 320 овец. Всех овец остригли, и каждая овца дала по 1,8 *кг* грязной шерсти. Сколько килограммов промытой шерсти получено со всех этих овец, если из 16 *кг* грязной шерсти получается 10 *кг* промытой? [360 *кг*.]

12. Тонна угля сберегает 2,5 *куб. м* дров разной породы. Сколько дров сберегается для края копями, добывающими в среднем в год 150 000 *т* угля? [375 тыс. $м^3$.]

13. 7 *т* сухого торфа заменяют собой 2,4 *т* обыкновенного каменного угля. Сколько тонн угля нужно иметь для замены 98 *т* сухого торфа? [33,6 *т*.]

14. Сколько рабочих нужно назначить для вырубки в течение 8 часов 15,3 *га* кустарника при очистке места для стройки, если 2 рабочих вырубают в час 51 *кв. м* такого кустарника?

15. Поле было убрано в 6 дней, причём работали по 7,5 часа в день. Во сколько дней кончилась бы работа, если бы работали по 9 час. в день? [5 дней.]

16. Ведро вмещает 12,5 *кг* молока. Сколько масла можно получить из 40 вёдер молока, если из 40 *кг* молока выходит 1,5 *кг* масла? [18,75 *кг*.]

17. Из 1 *куб. м* дров получается 25% по весу древесного угля. Сколько килограммов древесного угля можно получить из 1 *куб. м* берёзовых, если 1 *куб м* берёзы весит 798 *кг*? [199,5 *кг*.]

18. В 8 лампах, горевших ежедневно по 6 час., в течение 24 дней сгорело 48 *л* керосина. По сколько часов в день должны гореть 12 таких ламп, чтобы в течение 48 дней в них сгорело 144 *л* керосину?

19. Три квартиры получили счет за освещение на 11 руб. В одной квартире было 4 электрических лампочки по 40 св.; в другой 3 лампочки по 50 св. и в третьей 2 лампочки по 120 св. Сколько уплатила за свет каждая квартира?

20. В трёх школах обучается 1 140 учащихся. Число учащихся второй школы составляет 90% числа учащихся первой школы, а число учащихся третьей школы составляет 50% числа учащихся первых двух школ вместе. Сколько учащихся в каждой школе? [400; 360 и 380 чел.]

21. Валовой урожай хлопка в 1950 г. относится к плановому заданию на 1950 г., как 75 : 62. Найти валовой урожай хлопка в 1950 г., если задание перевыполнено на 0,65 млн. *т*?

22. 198 руб. разделили между четырьмя лицами так, что если бы первый получил $\frac{1}{2}$, второй $\frac{1}{4}$, третий $\frac{1}{7}$, а четвёртый $\frac{1}{9}$ того, что они получили действительно, то у них было бы поровну. Сколько получил каждый? [18; 36; 63 и 81 руб.]

23. В колхозе 1 980 *га* пахотной и луговой земли. Сколько было гектаров той и другой земли, если $66\frac{2}{3}$% числа гектаров пахотной земли равны 80% количества гектаров луговой? [1 080 *га* и 900 *га*.]

24. Разность двух чисел равна 146. Найти эти числа, зная, что $4\frac{1}{2}$ % одного равны $16\frac{2}{3}$ % другого. [200; 54.]

25. Двое рабочих заработали 1 550 руб. Сколько заработал каждый, если 8% заработка первого рабочего равны $7\frac{1}{2}$% заработка второго? [750 руб. и 800 руб.]

26. У одного мальчика столько копеечных монет, сколько у другого двухкопеечных и сколько у третьего трёхкопеечных монет. Сколько денег у каждого мальчика, если всего у них 9 руб.? Сколько монет у каждого?

27. Провод длиной 555 *м* разрезали на 3 части так, что в одной столько метров, сколько в другой дециметров и сколько в третьей сантиметров. Как велика длина каждой части провода?

28. Сколько чистого золота в куске золота 800-й пробы весом 0,2 *кг*?

29. Сколько чистого серебра в куске серебра 750-й пробы весом 0,4 *кг*?

30. Сплавили 1 *кг* серебра 600-й пробы и 0,5 *кг* 750-й пробы. Какой пробы получился сплав? [650-й.]

31. Цена 1 *куб. м* берёзовых дров 24 руб., ольховых 21 руб., хвойных 20 руб. и осиновых 16 руб. Вычислить цену 1 *куб. м* дров смеси, содержащей 50% берёзы, 25% ольхи, $12\frac{1}{2}$ % хвойных и $12\frac{1}{2}$ % осины. [21,75 руб.]

32. Расходы по перевозке трёх партий товара составили 90 руб. Вес первой партии 160 *ц*, второй 28 *ц*, третьей 172 *ц*. Распределить расходы пропорционально весу каждой партии. [40 руб.; 7 руб. и 43 руб.]

33. Расход на электрическое освещение по механическому, литейному и сборочному цехам составляет 186 руб. Сколько должен уплатить каждый цех, если показания счётчика в механическом цехе 2 300 ватт, в литейном 2 100 ватт и в сборочном 4 900 ватт? [46 руб.; 42 руб. и 98 руб.]

34. Три стахановца получили за работу 2 100 руб. Первый работал 8,5 дня, второй 7,5 дня, а третий 5 дней. Сколько денег достанется каждому стахановцу?

35. Из двух сортов конфет ценой 17 руб. и 16,5 руб. за 1 *кг* составлена смесь ценой по 16,8 руб. за 1 *кг*. Сколько взято конфет каждого сорта, если конфет первого сорта взяли на 14 *кг* больше, чем конфет второго сорта? [42 *кг* и 28 *кг*.]

36. Сколько чистого серебра в сплаве: а) 2,5 *кг* 625-й пробы? б) 4,2 *кг* 700-й пробы?

37. Определить пробу сплава из трёх кусков весом 2,5 *кг* 600-й пробы, 1,25 *кг* 800-й пробы и 6,25 *кг* 400-й пробы. [500-я.]

38. Найти пробу сплава, если золото составляет 0,4 веса всего сплава; 0,8 его веса.

39. Найти пробу сплава, если в нём медь относится к золоту, как 3 : 7; 1 : 4; 1 : 3. [700-я; 800-я; 750-я.]

40. Найти крепость вина, если в нём на 2 части воды приходится 3 части спирта. [60°.]

41. Смешали 2 ведра воды, температура которой 60°, с 3 вёдрами воды, температура которой 10°. Какой температуры получилась вода? [30°.]

42. Порох содержит 75% селитры, 10% серы и остальное уголь. Сколько надо взять этих веществ для приготовления 100 зарядов по 10 *г* каждый?

43. При 2-сортном помоле пшеницы получается муки первого сорта 50% и муки второго сорта 35% веса зерна. Сколько получится муки первого сорта, если муки второго сорта получилось 70 *ц*? Сколько пшеницы взято для помола? [100 *ц*; 200 *ц*.]

44. Ромашка (головка) при сушке теряет 84% своего веса. Сколько надо собрать свежей ромашки, чтобы получить 6,4 *кг* сушёной? [40 *кг*.]

45. Липовый цвет при сушке теряет 74% своего веса. Сколько надо собрать свежего цвета, чтобы получить 78 *кг* сушёного?

46. Найти средний вес ящика, если при взвешивании 5 ящиков были получены следующие ответы: 4 *кг* 800 *г*, 4 *кг* 600 *г*, 4 *кг* 650 *г*, 4 *кг* 700 *г*, 4 *кг* 750 *г*. [4,7 *кг*.]

47. В колхозе 750 *га* земли распределены так, что число гектаров земли под овсом, ячменём, пшеницей и просом относится так, как 5 : 7 : 9 : 4. Сколько гектаров земли отведено под каждую зерновую культуру? [150 *га*; 210 *га*; 270 *га*; 120 *га*.]

48. Три зеркальных карпа весят вместе 5,4 *кг*. Первый весит вдвое больше, чем второй, а третий вдвое больше, чем первый и второй вместе. Сколько весит каждый?

49. Два ученика, имея вместе 10,8 руб., пошли покупать книги. После того как первый ученик истратил 0,75 своих денег, а второй 0,8 своих денег, у них осталось денег поровну. Сколько денег было у каждого ученика? [4,8 руб. и 6 руб.]

50. Длина главного Туркменского канала, Южноукраинского и Северокрымского каналов 1650 *км*. Главный Туркменский канал больше двух других на $33\frac{1}{3}$ % общей длины трёх каналов. Найти длину главного Туркменского канала.

51. Общая длина распределительных каналов по орошению земель Ростовской и Сталинградской областей запроектирована в 568 *км*, из них: Верхне-Сальский канал 125 *км*, Нижне-Донской 73 *км*, Багаевский 35 *км*, Садковский 15 *км*, Азовский 90 *км*, Ергенинский 140 *км* и Чирский 90 *км*. Выразить в процентах длину каждого канала по отношению к общей длине распределительных каналов.

Указание: Найти 1% общей длины распределительных каналов (568 : 100) и, округлив результат до 6, найти процентное отношение каждого.

52. Донской магистральный канал будет на 89 *км* длиннее судоходного Волго-Донского канала и на 910 *км* короче Главного Туркменского канала. Найти длину каждого канала, если их общая длина 1 391 *км*.

Раздел 2. АЛГЕБРА

Глава I

БУКВЕННЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ

§ 1. Употребление букв

1. Рабочий за 1 час изготовляет 5 деталей. Сколько он изготовит таких же деталей за 3 часа? За 5 часов? За n часов?

2. Поезд за 1 час проходит 50 *км*. Сколько километров пройдёт поезд за 6 час.? За 11 час.? За x час.?

3. Куплено 3 карандаша и заплачено a копеек Сколько стоит один карандаш?

4. Первый колхоз имеет 150 коров, а второй на x коров больше. Сколько коров имеет второй колхоз? Сколько коров имеют вместе оба колхоза?

5. В двух овощехранилищах лежит a *т* картофеля. В первом овощехранилище на 50 *т* картофеля больше, чем во втором. Сколько тонн картофеля во втором овощехранилище?

6. Дана дробь, числитель которой равен x, а знаменатель на 3 больше. Чему будет равна дробь, если к числителю и знаменателю прибавить по 5?

7. Брату a лет, а сестра на b лет моложе. Сколько лет сестре?

8. Автомобиль за a час. прошёл 300 *км*. Сколько километров он пройдёт за b час.?

9. Смешано 5 *кг* чаю по a руб. и 3 *кг* по b руб. за килограмм. Сколько стоит килограмм смеси?

10. Бригада в a человек за b дней заработала c руб. Каков в среднем дневной заработок каждого члена бригады?

11. Дать решение сначала в виде числовой, а затем буквенной формулы:

а) Скорость автомобиля составляет $v = 50$ *км* в час. Какой путь s пройдёт автомобиль в $t = 5$ час.?

б) Первый рабочий нарезает в час $a = 20$ болтов, а второй $b = 25$ болтов. Сколько болтов нарежут оба рабочих за $t = 4$ часам? Решить двумя способами.

в) Длина прямоугольного участка $a = 500$ *м*, а ширина $b = 40$ *м*. Найти площадь участка.

12. Дать решение сначала в виде буквенной формулы, а затем найти числовые ответы:

а) Рабочий за $a = 8$ час. сделал $b = 40$ деталей. Сколько деталей он сделает за $c = 5$ час.?

б) Турист за $a = 6$ час. прошёл путь $s = 24$ *км*. Сколько он пройдёт за $b = 8$ час.?

в) Определить объём прямоугольного параллелепипеда, имеющего размеры: длина $a = 5$ *м*, ширина $b = 6$ *м*, а высота $c = 4$ *м*.

13. Выразить с помощью знаков действий:

1) Сумму чисел 5 и a; сумму чисел a, b и c.

2) Разность чисел a и b; разность чисел a и 7.

3) Произведение чисел a и b; произведение чисел $\frac{1}{2}$ и a.

4) Частное от деления числа a на разность чисел a и b.

5) Полусумму чисел a и b; полуразность чисел a и b.

6) Частное от деления 5 на произведение a и b.

14. Найти число, которое

1) на 5 больше a;

2) на 3 меньше b;

3) в 2 раза меньше $3x$;

4) в 4 раза меньше $5y$;

5) на a больше 30;

6) в x раз больше 30;

7) на y больше суммы a и b;

8) на 8 меньше разности a и b.

15. Дать ответ:

1) Какое число при делении на 3 даёт в частном 5?

2) Какое число при делении на 3 даёт в частном a?

3) Какое число при делении на 3 даёт в частном a и в остатке b?

4) Число при делении на n даёт в частном a. Какое это число?

5) Число при делении на n даёт в частном a и в остатке b. Какое это число?

§ 2. Коэффициент

1. Найти путь, пройденный поездом за t час., если скорость его 50 *км* в час.

2. Сколько сантиметров в k метрах? Сколько миллиметров в k метрах?

3. Сколько сантиметров в a *м* b *дм*? Сколько сантиметров в a *м* 5 *дм*?

4. Сколько килограммов в a *т* b *ц*? Сколько килограммов в a *т* 5 *ц* и 6 *кг*?

5. Сколько минут в t час.? Сколько минут в t сутках и n час.?

6. Сколько суток в m неделях? Сколько часов в x сутках?

7. Сколько единиц в числе, состоящем из a десятков?

8. Сколько единиц в числе, состоящем из x сотен, y десятков и 3 единиц?

9. Сколько единиц в числе, состоящем из a сотен и b единиц? Сколько единиц в сумме цифр этого числа?

10. Назовите:
1) двузначное число, в котором a десятков и b единиц;
2) трёхзначное число, в котором x сотен, y десятков и 5 единиц;
3) трёхзначное число, в котором x сотен, 0 десятков и 0 единиц.

11. Выразить формулой:
1) чётное число; 2) нечётное число; 3) число, кратное 3; 4) число, кратное 7; 5) число, кратное 2 и 3; 6) число, которое при делении на 5 даёт остаток 3.

12. Даны три числа a, b и c. Скажите: 1) удвоенное первое число, 2) сумму удвоенного первого числа и утроенного второго числа; 3) удвоенное произведение трёх данных чисел; 4) частное от деления суммы двух первых чисел на третье; 5) частное от деления утроенного первого числа на разность между вторым и третьим числом.

13. Какие простые делители имеют числа: $2a$; $6a$; $5a$; $12b$?

14. Найти периметр прямоугольника со сторонами a и b.

15. Какой груз вместе перевезут за один рейс a двухтонных и b трёхтонных грузовиков?

§ 3 Степень

1. Чему равна площадь (s) квадрата со стороной a *см*? Вычислить, если: 1) $a = 9$ *см*; 2) $a = 0{,}5$ *см*; 3) $a = \frac{1}{3}$ *см*.

2. Чему равен объём (v) куба, ребро которого содержит a *см*? Вычислить: 1) $a = 3$ *см*; 2) $a = 0{,}2$ *см*; 3) $a = \frac{2}{3}$ *см*.

3. Скажите без коэффициентов следующие выражения:

1) $2a^2$; 2) $3m^2 + 2n^3$; 3) $3x^2 - 2y^2$; 4) $2(x + y)$.

4. Скажите без показателей степеней выражения:

1) a^2; 2) b^3; 3) $\left(\frac{a}{b}\right)^2$; 4) $2a^2$.

5. Скажите без коэффициентов и без показателей степеней выражения:

1) $2a^2$; 2) $3a^2 + 2b^3$; 3) $2x^2 - y^3$.

6. Вычислить следующие выражения, если $x = 3$:

1) $2x$; 2) $2x^2$; 3) $\frac{1}{3}x^3$; 4) $0{,}9x^2$; 5) $\frac{2}{3}x^3$.

7. Ребро куба a *см*. Найти поверхность куба.

8. Вычислить:

1) 2^4; 2) 2^5; 3) 4^3; 4) 12^2; 5) $0{,}5^3$; 6) $\left(1\frac{1}{2}\right)^2$; 7) $\left(5\frac{1}{2}\right)^2$.

9. Найти отношения данных чисел, а затем найти отношения квадратов этих чисел:

1) 10 и 5; 3) 0,05 и 0,1; 5) $\frac{3}{5}$ и $\frac{1}{5}$;

2) 0,4 и 0,2; 4) $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{4}$; 6) 0,3 и $\frac{1}{5}$.

10. Из доски нарезали 5 квадратиков со стороной *x см* и 3 квадратика со стороной *y см*. Какова площадь доски?

11. Увеличится ли положительное число, если его возвысить во вторую, третью и т. д. степени?

(Если число больше 1, то увеличится, а если меньше 1, то уменьшится.)

12. Какие числа не изменяют своей величины при возведении их в степень? [0; 1.]

Вычислить:

13. $4a^2 : 0{,}8$ при $a = 2;\ 4;\ 6;\ \frac{1}{2};\ \ \frac{1}{8}$.

14. $\frac{a^2}{a+b}$ при $b = 2;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ \ a = 1$.

15. $\frac{a+b}{a-b}$ при $a = 2{,}5$ и $b = 2{,}3$.

§ 4. Порядок действий. Употребление скобок

1. Прочесть следующие выражения:

1) $a + bc$	6) $(a + b) - d$	11) $a^2 + b^2$
2) $a + \frac{b}{c}$	7) $a - (b - c)$	12) $(a + b)^2$
3) $(a + b)\ c$	8) $(a + b) : (a - b)$	13) $a^3 - b^3$
4) $(a - b)\ c$	9) $3\ (a + b)$	14) $(a - b)^3$
5) $a(b + c)$	10) $5a + 2\ (a - b)$	15) $3\ (a + b)^2$

2. Указать порядок действий в следующих выражениях:

1) $a - bc$	6) $a^2 + b^2$
2) $a + \frac{b+c}{2}$	7) $2\ (a^2 - b^2)$
3) $(a - b) : 5$	8) $a - [b^2 + (a - b)]$
4) $2\ (a - b) : 3$	9) $(x + y)\ [3x - (x + y)]$
5) $(a + b)\ \ (a - b)$	10) $a - b\ [c - (a - b)]$

Запишите решение с помощью скобок. Укажите порядок действий.

3. Один ученик купил *x* тетрадей, а другой *y* тетрадей. За каждую тетрадь платили *n* копеек. Сколько заплачено за все тетради?

4. Два грузовика перевезли в первый рейс *a т* груза, а во второй *b т*. Сколько перевёз каждый грузовик, если они были одинаковой грузоподъёмности?

5. Велосипедист проехал некоторое расстояние в *t* час.; из них первые *m* час. он ехал со скоростью *a км* в час; затем уменьшил скорость на *b км* в час. Какое расстояние он проехал за *t* час.?

§ 5. Равенство и неравенство. Тождество и уравнение

1. Что больше: 1) 7 или 5? 2) 0,3 или 0,5? 3) 0,0213 или 0,022?

2. Что больше: 1) a или $a+2$? 2) $b+3$ или $b+5$? 3) $x-3$ или $x-5$?

3. При каком условии: 1) $3a>3$; 2) $3a<3$; 3) $3a=3$?

4. При каком условии: 1) $ab>a$; 2) $ab=a$; 3) $ab=1$?

5. При каком условии: 1) $\frac{a}{b}>1$; 2) $\frac{a}{b}<1$; 3) $\frac{a}{b}=1$?

6. При каком условии: 1) $a^2>a$; 2) $a^2<a$; 3) $a^2=a$?

7. Определить, какие из следующих равенств — тождества:

1) $5+x=x+5$	5) $a+a=2a$
2) $a+3=5$	6) $\kappa-2=5$
3) $ab=ba$	7) $7a-a=5a+a$
4) $5a=20$	8) $5=\frac{10}{x}$

8. Решить уравнения:

1) $x+3=5$	5) $7-x=3$	9) $\frac{1}{2}x=4$
2) $15+a=20$	6) $8,5-x=1$	
3) $x-2=4$	7) $2a=6$	10) $0,4x=1,6$
4) $a-0,5=3,2$	8) $5y=40$	11) $y:3=2$
12) $x:7=5$	15) $10:x=20$	18) $3x+2=11$
13) $x:\frac{1}{3}=3$	16) $2,4:y=0,6$	19) $20-2x=12$
14) $15:a=5$	17) $2x+3=7$	20) $6,6-3x=3$

9. Какое число надо прибавить к 10, чтобы получить 15?

10. К числу x прибавили 7 и получили 25. Найти x.

11. Из какого числа надо вычесть 15, чтобы получить 30?

12. Отец старше сына на 30 лет, а сумма лет обоих равна 50 годам. Определить возраст каждого.

13. В трёх корзинах лежит 180 яблок. Во второй корзине в два раза больше яблок, чем в первой, а в третьей в три раза больше, чем во второй. Сколько яблок лежит в каждой корзине?

14. Длина прямоугольника вдвое больше его ширины, а периметр прямоугольника равен 24 *см*. Найти длину и ширину прямоугольника.

15. Две улицы имеют вместе в длину 2 500 *м*. Если бы длина первой улицы была на 100 *м* меньше, то она была бы в два раза больше длины второй улицы. Какова длина каждой улицы?

16. Поезд прошёл за t *час* s *км*, двигаясь равномерно со скоростью v *км* в час. Как выразить в виде формулы: 1) s в зависимости от v и t; 2) v в зависимости от s и t; 3) t в зависимости от s и v?

17. Задача о нахождении площади прямоугольника привела к уравнению $12x = 60$. Воспроизвести текст задачи.

18. Задача, заканчивающаяся фразой, «определить возраст отца и возраст сына», привела к уравнению $x + x + 30 = 50$. Воспроизвести текст задачи.

19. Периметр квадрата $2p$ *см*. Найти площадь квадрата.

20. Периметр равнобедренного треугольника $2p$ *см*. Основаине a *см*. Найти длину боковой стороны.

21. Пешеход направился из A в B со скоростью a *км* в час, а спустя n час из A в B выехал велосипедист, который ехал со скоростью b *км* в час ($b > a$). Через сколько времени велосипедист догонит пешехода?

Глава II

ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ И ОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

§ 1. Основные понятия

1. Объяснить смысл выражений.

1) температура воздуха: а) $(+5°)$; б) $(-15°)$;

2) доход: а) $(+50$ руб.); б) $(-100$ руб.);

2. Назвать числа: 1) обратные данным числам; 2) противоположные данным числам:

1) 3	6) (-2)	11) a
2) 5	7) (-5)	12) $a-3$
3) $\frac{1}{2}$	8) $\left(-\frac{1}{5}\right)$	13) $a-b$
4) $0{,}1$	9) $\left(-\frac{3}{4}\right)$	14) $-b-c$
5) $2{,}5$	10) $(-1{,}2)$	15) $-2x+y$

3. Что больше: 1) $|+5|$ или 5? 2) $|-5|$ или 4? 3) $|-3|$ или -1? 4) $|-7|$, $|-2|$ или 0?

4. Как расположены на числовой оси относительно точки O два взаимно противоположных числа?

5. Назвать 4 последовательных целых числа в возрастающем порядке, начиная с числа -10; с числа -50; с числа -1.

6. Назвать 5 последовательных целых чисел в убывающем порядке, начиная с числа $+5$; с числа -8; с числа -2.

7. Если $|a| > |b|$, то можно ли сказать, что $a > b$?

8. Можно ли утверждать, что:

1) $a + 2 > a$; 2) $2a > a$.

9. $10 > x > 3$. Какие целые значения может принимать число x?

10. $-10 < x < -5$. Какие целые значения может принимать число x?

11. Найти: 1) $|+5|+|-3|$; 2) $|-3|+|-5|$; 3) $|-4|-|-2|$; 4) $|-1{,}6|+\left|-\frac{1}{4}\right|$.

12. Какие действия выполнимы всегда в области чисел натуральных (т. е. целых и положительных)?

13. Какое действие не всегда выполнимо в области положительных чисел?

§ 2. Действия над положительными и отрицательными числами

1. Термометр показывает в комнате $+18°$, а на улице $(-8°)$. На сколько градусов температура в комнате выше наружной?

2. Найти сумму $a+b$, подставляя вместо a и b числовые значения из приводимой таблицы:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	$+3$	-5	-2	$+6$	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{3}{4}$	$6{,}5$	$-2{,}4$	$-1\frac{1}{4}$	$1{,}3$
b	$+5$	$+5$	$+5$	-10	$+\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{8}$	$-2{,}4$	$+1{,}9$	$+1\frac{1}{4}$	$-2\frac{1}{5}$

3. Найти разность $a-b$, подставляя вместо a и b числовые значения из приводимой таблицы:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	10	-10	15	$-\frac{1}{2}$	$-0{,}7$	$6{,}2$	$-5{,}8$	$\frac{1}{2}$	$4\frac{3}{4}$	$-2{,}6$
b	3	5	-3	$-\frac{1}{4}$	$1{,}2$	$-3{,}4$	$-4{,}9$	$-0{,}5$	$-3{,}5$	$3\frac{3}{5}$

4. Найти произведение ab при следующих числовых значениях букв a и b:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	2	4	-5	10	-7	$\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$	$-0{,}7$	$-1{,}2$	$-1\frac{1}{5}$
b	3	-7	8	-8	-2	$-\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$-0{,}1$	$0{,}5$	$-0{,}6$

5. Найти частное $\frac{a}{b}$ при следующих числовых значениях букв a и b:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	25	-2	14	-40	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{6}{7}$	1,2	$-1{,}3$
b	5	1	-2	-20	-1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{15}{4}$	$\frac{3}{5}$	$-0{,}6$	$-1\frac{1}{2}$

6. Вычислить:

1) $(-5)^2$ 5) $(-1)^5$ 8) $(-1{,}2)^2$

2) $(-0{,}3)^2$ 6) $(-2)^4$ 9) $\left(-\frac{3}{4}\right)^2$

3) $(-3)^3$ 7) $(-2)^5$ 10) $\left(-1\frac{1}{2}\right)^3$;

4) $(-1)^4$

7. Найти разность чисел $(+5)$ и (-2).

8. К числу a прибавили (-3) и получили (-5). Найти a.

9. Какое число надо отнять от (-2), чтобы в остатке получить 20?

10. Как изменится сумма двух чисел, если:

1) К первому слагаемому прибавить $(+5)$, а ко второму (-3)?

2) К первому слагаемому прибавить (-10), а ко второму (-7)?

3) От первого слагаемого отнять (-5), а ко второму прибавить (-2)?

11. Как изменится разность двух чисел, если:

1) К уменьшаемому прибавить (-10)?

2) От уменьшаемого отнять (-3)?

3) К вычитаемому прибавить (-12)?

4) От вычитаемого отнять (-5)?

5) Прибавить к уменьшаемому (-10), а к вычитаемому $(+5)$?

12. Представить в виде разности:

1) $5+2$; 3) $4+(-2)$; 5) $(-x)+y$;

2) $(-3)+4$; 4) $a+b$; 6) $(-a)+(-b)$.

13. Представить в виде алгебраической суммы:

1) $5-3-2$; 3) $a-b-c$;

2) $a-3+b$; 4) $(-a)-b-(-c)$.

14. Даны числа -3 и $+5$. Найти: а) сумму абсолютных величин этих чисел; б) абсолютную величину суммы тех же чисел.

15. При каком условии сумма абсолютных величин двух относительных чисел будет равна абсолютной величине суммы тех же чисел?

§ 3. Упражнения и решение уравнений

1. При каком условии $-a>0$?

2. При каком условии $a-1>0$? $a-1=0$? $a-1<0$?

3. 1) $a-b=5$. Чему равно $b-a$?
2) $c-d=10$. Чему равно $d-c$?

4. При каких значениях b выражение:
1) $2b>0$? 2) $2b<0$? 3) $2b=0$? 4) $-2b<0$? 5) $-2b>0$?

5. При каком условии $ab=a$? $ab=-a$? $ab=-1$?

6. При каком условии: 1) $ab=1$? 2) $ab=0$? 3) $\frac{a}{b}=0$?
4) $\frac{a}{b}=-1$?

7. При каком условии: 1) $a+b=0$? 2) $a+b=a-b$?

8. При каком условии: 1) $(a-2)^2=0$? 2) $(a-2)^2=1$?

9. При каких значениях дробь: 1) $\frac{a}{b}>0$? 2) $\frac{a}{b}<0$? 3) $\frac{a}{b}$ не имеет смысла?

10. При каких значениях x следующие выражения: 1) положительны; 2) отрицательны; 3) не имеют смысла?

$$\frac{2}{x-1};\qquad \frac{3}{x+2};\qquad \frac{4}{x-2};\qquad \frac{1}{x+1}.$$

11. Какое число не изменяется при изменении его знака?

12. Что больше:

1) $-x^2$ и $(-x)^2$? 3) $(-2x)^2$ и $-(-2x)^2$?
2) $-a^3$ и $(-a)^3$? 4) $(a-b)^2$ и $(b-a)^2$?

13. При каком условии: 1) $a+b<a$? 2) $a-b>a$?

14. При каком значении a выражение имеет наименьшее значение?

1) a^2; 2) $(a-1)^2$; 3) $1+a^2$.

15. При каких условиях: 1) $a^3>a^2$? 2) $a^3<a^2$? 3) $a^3=a^2$?

16. При каких условиях: 1) $a>\frac{1}{a}$? 2) $a<\frac{1}{a}$? 3) $a=\frac{1}{a}$?

17. Может ли быть $|x|<0$? [Нет.]

18. Можно ли сказать, что $|x|$ при всех значениях имеет положительные значения? [Нет; при $x=0$ $|x|=0$.]

19. Какие значения может иметь частное $\frac{|x|}{x}$? [1 при $x>0$ и -1 при $x<0$.]

20. Известно, что $|x|<1$. Где на числовой прямой может быть расположена соответствующая точка x?
[Между точками -1 и $+1$.]

21. Можно ли сказать, что a^2 есть положительное число при всех значениях a? [Нет, так как $a^2 = 0$, если $a = 0$.]

22. Дано $-3(a-b) > 0$. Что больше: a или b?

23. Дано $4(a-b) < 0$. Что больше: a или b?

24. Какое число надо отнять от 5, чтобы разность была числом положительным? Числом отрицательным?

25. Дано $a > 0$. Может ли быть $\frac{1}{a} < 0$?

26. Дано $0 < a < b$. Что больше $\frac{1}{a}$ или $\frac{1}{b}$?

27. Дано $a < b < 0$. Что больше $\frac{1}{a}$ или $\frac{1}{b}$?

28. Дано $a < 0 < b$. Что больше $\frac{1}{a}$ или $\frac{1}{b}$?

29. К какому числу надо прибавить 2, чтобы получить 1?

30. К какому числу надо прибавить 1,5, чтобы получить -2?

31. Найти число, которое в сумме с числом -5 равно 2.

32. Найти число, которое в сумме с числом $-2\frac{1}{2}$ равно -4.

33. Если к числу, противоположному искомому, прибавить 2, то получится $3\frac{1}{2}$. Найти число.

34. Решить уравнения:

1) $x + 2{,}5 = 2$	7) $5x + 3 = 2$
2) $3\frac{1}{2} + x = 1\frac{1}{4}$	8) $\frac{1}{2} = 2x + 2\frac{3}{4}$
3) $x - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$	9) $-0{,}2x + 5{,}5 = -1{,}3$
4) $0{,}5 = 1 + x$	10) $-5(x - 0{,}1) = 10$
5) $1\frac{3}{4} = 2\frac{1}{4} - x$	11) $5 - \frac{2}{x} = 7$
6) $2x - 0{,}6 = 1$	12) $3(x - 0{,}1) = 0$

Глава III

МНОГОЧЛЕНЫ

§ 1. Сложение и вычитание алгебраических выражений

1. Турист в первый день прошёл *a км*, а во второй вдвое больше. Сколько километров пути он прошёл за 2 дня?

2. Одна сторона треугольника *a см*, вторая вдвое больше, а третья на 2 *см* меньше второй. Найти периметр треугольника.

3. Выполнить сложение одночленов:

1) $5x+(-3x)$
2) $(-4a)+5a$
3) $6ab+(-6ab)$
4) $\left(\frac{1}{2}a^2\right)+\left(-\frac{1}{4}a^2\right)$
5) $\frac{3}{5}x^3+\left(-\frac{2}{3}x^3\right)$
6) $(-0{,}76b^2)+(-0{,}001b^2)$
7) $(-0{,}01ab)+0{,}1ab$
8) $4x+(-2x)+(-5x)$
9) $(-1{,}2x)+(-0{,}1x)$
10) $(a^k)+(-3a^k)+4a^k$

4. Выполнить вычитание одночленов:

1) $2a-(-3a)$
2) $-20x-(+2x)$
3) $5b^3-(-4b^3)$
4) $\frac{1}{2}a-(-a)$
5) $2\frac{1}{4}b^2-\left(+1\frac{1}{2}b^2\right)$
6) $(-5a^n)-(+3a^n)$
7) $0{,}4a^k-(-0{,}6a^k)$
8) $1\frac{1}{2}ab^2-\left(+3\frac{1}{4}ab^2\right)$
9) $(-x^n)-\left(-\frac{1}{5}x^n\right)$
10) $7{,}2a^nb^k-\left(-1\frac{1}{2}a^nb^k\right)$

5. При каком условии сумма двух слагаемых равна 0?

6. При каком условии сумма двух слагаемых равна одному из этих слагаемых?

7. Какое число надо вычесть из a, чтобы получить число, противоположное a?

8. Выполнить сложение:

1) $3x+(4x-5)$
2) $(-2x)+(a-5x)$
3) $(4a-b)+(a-4b)$
4) $\left(\frac{1}{2}ab-5\right)+\left(\frac{3}{4}ab+4\right)$
5) $(4-0{,}2x)+(1{,}2x-4)$
6) $(5z-2t)+(3t-5z)$

9. Выполнить вычитание:

1) $2a-(a+5)$
2) $5x-(2x-3)$
3) $(2x+1)-(x-1)$
4) $\left(1\frac{1}{4}a^2-a\right)-\left(\frac{1}{2}a^2-a\right)$
5) $(3-5a^2)-(4-7a^2)$
6) $(-5ab+4)-(2ab+4)$

10. Найти сумму двух последовательных натуральных чисел, из которых меньшее равно $2n+1$.

11. Найти сумму трёх последовательных натуральных чисел, из которых меньшее равно $2a$.

12. Найти сумму трёх последовательных чётных чисел, из которых меньшее равно $2n$.

13. Какими свойствами действий мы пользуемся, делая приведение подобных членов многочлена?

14. Представить в виде суммы: 1) $a-b$; 2) $a-b-c$.

15. Представить в виде разности: 1) $a+b$; 2) $a+b+2$.

16. Не изменяя величины многочлена $a-b+c-d$, представить его в различных видах, поставив скобки: 1) перед b и после c; 2) перед c и после d.

17. Не изменяя величины многочлена $a-2b+3$, заключить его в скобки, поставив перед скобками знак минус.

18. Многочлен $a-b-c+d$ представить в виде суммы двух слагаемых, из которых одно $d-c$.

19. Трёхчлен $a+b-c$ представить в виде разности с уменьшаемым a.

20. От сложения каких двух одночленов получается в сумме двучлен $a-b$?

21. От вычитания каких двух одночленов получается в разности двучлен $a+b$?

22. Доказать, что сумма двух чётных чисел есть число чётное.

Указание. Если каждое из слагаемых данной суммы делится на одно и то же число, то и вся сумма разделится на это число.

23. Доказать, что сумма чётного и нечётного чисел есть число нечётное.

24. Определить, при каких значениях x следующие выражения обращаются в 0:

1) $x+1$; 2) $2x+1$; 3) $x+x+4$; 4) $x+x+x$.

25. Решить уравнения:

1) $x+x+x=6$	4) $(2x-1)-3x=2$
2) $(2x+1)+3x=11$	5) $(x-5)-(2-2x)=6$
3) $(x-3)+(x+2)=5$	6) $(4x-1)-(3x+1)=2$

26. В двух классах 75 учеников. В одном классе на 5 учеников больше, чем в другом. Сколько учеников в каждом классе?

27. В трёх квартирах живёт 14 человек. В первой квартире живёт на 2 человека, а в третьей на 3 человека больше, чем во второй. Сколько человек живёт в каждой квартире?

28. В равнобедренном треугольнике каждая из боковых сторон на 5 *см* больше основания, а периметр треугольника 40 *см*. Найти основание треугольника.

29. В саду растут яблони, груши и сливы. Всего плодовых деревьев 210. Число яблонь вдвое больше, чем груш, а груш вдвое больше, чем слив. Сколько деревьев каждого вида растёт в саду?

30. Периметр треугольника 36 *см*. Длины его сторон относятся, как 3 : 4 : 5. Найти длину каждой стороны.

§ 2. Умножение одночленов и многочленов на одночлен

1. В саду имеется a рядов деревьев по a деревьев в каждом ряду. Сколько деревьев в саду?

2. Выполнить умножение:

1) $a \cdot (-b)$
2) $(-a) \cdot (-b)$
3) $(-a) \cdot (+c)$
4) $a \cdot a \cdot a$
5) $a \cdot (-a^2)$
6) $a^2 \cdot a^3$
7) $x^5 \cdot x^7$
8) $a^{10} \cdot a^{15}$
9) $a^n \cdot a$
10) $a^{2n} \cdot a^n$
11) $a^{n-2} \cdot a^2$
12) $b^{2k+1} \cdot b^k$
13) $2a^3 \cdot (-3ab)$
14) $5a^nb \cdot 2ab^n$
15) $(-4a^nb^2) \cdot (-3a^{2n}b^3)$
16) $(a)^2$
17) $(a^3)^2$
18) $(a^2)^3$
19) $(2a)^2$
20) $(4a^2b)^2$

3. Возвести в квадрат: 1) $5ab$; 2) $\frac{1}{2}a^3b$; 3) $0{,}4a^5b^3$; 4) $(-1\frac{1}{2}a^3b)$; 5) $(-0{,}8a^n)$.

4. Выполнить умножение:

1) $(a+1) \cdot 2$
2) $3 \cdot (a-2)$
3) $0{,}1 \cdot (10x+5)$
4) $(7a-3) \cdot 2a$
5) $4x \cdot (x+y)$
6) $(4ab-2a) \cdot 3a$
7) $(0{,}2a^2-4a^3) \cdot 0{,}5a$
8) $(-3{,}2a-4) \cdot 0{,}2a^2$
9) $(a^k-a^{k-2}) \cdot a^2$
10) $(2b^{n+2}-2b^n) \cdot b^n$

5. Сколько членов в произведении трёхчлена на одночлен?

6. На каком свойстве умножения основано правило умножения одночлена на многочлен?

7. Что сделается с многочленом, если его умножить на -1?

8. Решить уравнения:

1) $2(x+2)=4$
2) $3(x-2)=9$
3) $4(2x-1)=12$
4) $2x-3(x-1)=3$
5) $5(x-3)=0$
6) $3(2x-4)=0$

9. Один ученик купил a тетрадей, а другой на b тетрадей меньше. За каждую тетрадь платили m копеек. Сколько заплачено за все тетради?

§ 3. Деление одночлена и многочлена на одночлен

1. Поезд прошёл $40a$ *км* за 8 час. Какова его средняя скорость?

2. Периметр квадрата равен $(8a+16)$. Найти его сторону.

3. Выполнить деление:

1) $5a:5$
2) $-3x:3$
3) $2b:(-b)$
4) $4a:2a$
5) $3ab:6a$
6) $a^3:a$
7) $a^{10}:a^3$
8) $x^m:(-x^3)$
9) $x^{m+2}:x^4$
10) $x^{2n}:x^n$
11) $a^{2k+3}:a^{k+1}$
12) $6a^3b:2a^3$
13) $(-14a^5b):(-7a^4b)$
14) $0{,}2a^n:(-0{,}2a^5)$
15) $1{,}2a^{n+2}:(-6a^{n-1})$

4. Выполнить деление:

1) $(2a+4):2$
2) $(9x-6):3$
3) $(x-1):5$
4) $(24a-30b):(-6)$
5) $(1{,}8a-0{,}9):(-0{,}9)$
6) $(am-bm):m$
7) $(4a^3-6a^2):2a^2$
8) $(10a^2b-5ab):5ab$
9) $(2a^k+4a^{k+1}):2a^k$
10) $(1{,}4a^{k+1}-0{,}7a^{k+2}):0{,}7a^{k+1}$

5. Возможно ли деление нацело следующих одночленов:

1) $5a^2 : 5ab$ 3) $45a^4b^2 : 15ab^3$
2) $4a^3b : 2a^2bc$ 4) $3ab^3 : 2a^3$?

6. Найти зависимость между делимым A, делителем B, частным Q и остатком R.

7. Как изменится многочлен, если его разделить на -1?

8. Как изменится частное $\frac{a+b}{c}$:

1) если делимое увеличить в 2 раза? в 10 раз? в n раз?
2) если делитель увеличить в 2 раза? в m раз?
3) делимое увеличить в m раз, а делитель в n раз?

§ 4. Сокращённое умножение по формулам

1. Выполнить умножение:

1) $(x+y)(x-y)$
2) $(a+1)(a-1)$
3) $(2+x)(2-x)$
4) $(5-y)(5+y)$
5) $(2a+b)(2a-b)$
6) $(5a-2b)(5a+2b)$
7) $(a^2+2)(a^2-2)$
8) $(1+3a^2)(1-3a^2)$
9) $(2m+3n)(2m-3n)$
10) $(4a-3b)(3b+4a)$
11) $(3ab+1)(1-3ab)$
12) $\left(1\frac{1}{2}a^2-1\right)\left(1+1\frac{1}{2}a^2\right)$
13) $(0{,}03a^2-2)(2+0{,}03a^2)$
14) $(a^k+b^n)(a^k-b^n)$
15) $(5a^n-3b^m)(3b^m+5a^n)$

2. Вычислить следующие выражения, пользуясь формулой: $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$, например:

$31 \cdot 29 = (30+1)(30-1) = 30^2 - 1^2 = 900 - 1 = 899.$

1) $21 \cdot 19$
2) $41 \cdot 39$
3) $51 \cdot 49$
4) $61 \cdot 59$
5) $101 \cdot 99$
6) $22 \cdot 18$
7) $48 \cdot 52$
8) $82 \cdot 78$
9) $27 \cdot 33$
10) $93 \cdot 87$
11) $25 \cdot 35$
12) $75 \cdot 65$
13) $103 \cdot 97$
14) $2\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{2}$
15) $1{,}2 \cdot 0{,}8$

3. Вычислить следующие выражения, пользуясь формулой $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$, например:

$$35^2-25^2=(35+25)(35-25)=60 \cdot 10=600$$

1) 19^2-18^2
2) 25^2-24^2
3) 47^2-46^2
4) 35^2-32^2
5) 55^2-54^2
6) 55^2-45^2
7) 37^2-27^2
8) 625^2-624^2
9) $\left(1\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2$
10) $4{,}7^2-4{,}6^2$

4. Выполнить действия:

1) $(c+d)^2$ 6) $(5a-4)^2$ 11) $(2a^2-3b^3)^2$
2) $(5+a)^2$ 7) $(10-2x)^2$ 12) $(0{,}2a^2+0{,}3b^3)^2$
3) $(4-a)^2$ 8) $(5a+2ab)^2$ 13) $(3a^2-\frac{1}{3}b)^2$
4) $(a-3)^2$ 9) $(a^2-4bc)^2$ 14) $(0{,}2a^3+\frac{1}{2}b)^2$
5) $(2x+3)^2$ 10) $(a^3+7a)^2$ 15) $\left(\frac{1}{2}a^n-\frac{1}{3}b\right)^2$

5. Вычислить следующие выражения, пользуясь формулой $(10a+b)^2=(100a^2+b^2)+10\cdot 2ab$, например:

$$71^2=4\,901+140=5\,041$$

1) 21^2 4) 31^2 7) 51^2 10) 26^2 13) 58^2
2) 23^2 5) 32^2 8) 62^2 11) 37^2 14) 64^2
3) 24^2 6) 41^2 9) 81^2 12) 46^2 15) 76^2
16) 101^2

6. Вычислить следующие выражения, пользуясь формулой $(10a-b)^2=(100a^2+b^2)-10\cdot 2ab$, например:

$$39^2=(40-1)^2=1\,601-80=1\,521$$

1) 29^2 4) 69^2 7) 99^2 10) 58^2 13) $5{,}8^2$
2) 49^2 5) 79^2 8) 28^2 11) 67^2 14) $4{,}7^2$
3) 59^2 6) 89^2 9) 47^2 12) 88^2 15) $9{,}8^2$

7. Вычислить следующие выражения, пользуясь формулой $(10a+5)^2=100a(a+1)+25$, например:

$$65^2=6\cdot 7\cdot 100+25=4\,225$$

1) 25^2 3) 45^2 5) 65^2 7) 85^2 9) $9{,}5^2$
2) 35^2 4) 55^2 6) 75^2 8) $4{,}5^2$

8. Вычислить следующие выражения, пользуясь формулой $\left(a+\frac{1}{2}\right)^2=a(a+1)+\frac{1}{4}$, например: $\left(5\frac{1}{2}\right)^2=5\cdot 6+\frac{1}{4}=30\frac{1}{4}$

1) $\left(1\frac{1}{2}\right)^2$ 3) $\left(3\frac{1}{2}\right)^2$ 5) $\left(5\frac{1}{2}\right)^2$ 7) $\left(7\frac{1}{2}\right)^2$ 9) $\left(9\frac{1}{2}\right)^2$
2) $\left(2\frac{1}{2}\right)^2$ 4) $\left(4\frac{1}{2}\right)^2$ 6) $\left(6\frac{1}{2}\right)^2$ 8) $\left(8\frac{1}{2}\right)^2$ 10) $\left(10\frac{1}{2}\right)^2$

9. Вычислить следующие выражения, пользуясь формулой $(10a+b)(10a+c)=100a(a+1)+bc$, где $b+c=10$,

например:

$$32\cdot 38=100\cdot 3\cdot 4+16=1\,216$$

1) $24\cdot 26$ 3) $33\cdot 37$ 5) $47\cdot 43$ 7) $64\cdot 66$ 9) $97\cdot 93$
2) $28\cdot 22$ 4) $42\cdot 48$ 6) $53\cdot 57$ 8) $82\cdot 88$ 10) $96\cdot 94$

10. Вычислить следующие выражения, пользуясь формулой $(10a+c)(10b+c)=(100ab+c^2)+100c$, где $a+b=10$.

Эти же примеры решить, пользуясь формулой: $(10a+c)(10b+c)=100(ab+c)+c^2$, например:

$$47\cdot 67=(100\cdot 4\cdot 6+49)+700=3\,149$$

1) $23\cdot 83$	3) $42\cdot 62$	5) $63\cdot 43$	7) $88\cdot 28$	9) $26\cdot 86$
2) $34\cdot 74$	4) $46\cdot 66$	6) $71\cdot 31$	8) $93\cdot 13$	10) $17\cdot 97$

11. Вычислить следующие выражения, пользуясь формулой $(10a+b)(10b+a)=10(a^2+b^2)+101ab$, например:

$$32\cdot 23=10(9+4)+101\cdot 3\cdot 2=360+606=966$$

1) $24\cdot 42$	3) $36\cdot 63$	5) $43\cdot 34$	7) $52\cdot 25$	9) $83\cdot 38$
2) $27\cdot 72$	4) $39\cdot 93$	6) $47\cdot 74$	8) $73\cdot 37$	10) $91\cdot 19$

12. Выполнить действия:

1) $(a+1)^3$	5) $(a^2+b^2)^3$	9) $(a+1)(a^2-a+1)$
2) $(a-1)^3$	6) $(a^3-b^3)^3$	10) $(a+2)(a^2-2a+4)$
3) $(a+2)^3$	7) $(1+2y)^3$	11) $(x-3)(x^2+3x+9)$
4) $(x-5)^3$	8) $(2y+3)^3$	12) $(x-5)(x^2+5x+25)$

13. Что следует прибавить к двучлену, чтобы получить квадрат суммы (разности) двух чисел:

1) $a^2+2a+?$	5) $x^2-10xy^2+?$
2) $x^2+2xy+?$	6) $1-6a^2+?$
3) $a^2+4ab+?$	7) $c^2-ab+?$
4) $a^4+6a^2b+?$	8) $4x^2-4xy+?$

14. Доказать справедливость следующих равенств:

1) $(x-y)^2=(y-x)^2$; 2) $(-a-b)^2=(a+b)^2$.

15. Что следует прибавить к $(a-b)^2$, чтобы получить $(a+b)^2$?

16. Доказать, что разность квадратов двух последовательных чисел есть число нечётное.

Указание: $(n+1)^2-n^2=2n+1$.

17. Доказать, что разность квадратов двух последовательных нечётных чисел делится на 8.

Указание: $(2n+1)^2-(2n-1)^2=8n$.

18. Доказать, что произведение двух последовательных натуральных чисел, увеличенное на большее из них, даёт квадрат большего числа.

Указание: $n(n+1)+n+1=n^2+2n+1=(n+1)^2$.

§ 5. Сокращённое деление по формулам

1. Выполнить деление, пользуясь формулами:

1) $(a^2-b^2):(a+b)$	6) $(a^4-b^4):(a^2+b^2)$
2) $(x^2-1):(x-1)$	7) $(b^4-4):(b^2-2)$
3) $(4-a^2):(2+a)$	8) $(x^6-9):(3+x^3)$
4) $(1-b^2):(b+1)$	9) $(25x^4-4y^6):(2y^3+5x^2)$
5) $(4x^2-y^2):(2x-y)$	10) $(a^2b^4-9c^2):(3c+ab^2)$

2. Выполнить деление, пользуясь формулами:

1) $(x+y)^2 : (x+y)$
2) $(x^2+2xy+y^2) : (x+y)$
3) $(a^2+10a+25) : (a+5)$
4) $(b^2+16b+64) : (b+8)$
5) $(4x^2+12xy+9y^2) : (2x+3y)$
6) $(a^3-b^3) : (a-b)$
7) $(x^3+1) : (x+1)$
8) $(x^3-1) : (x^2+x+1)$
9) $(a^6-b^6) : (a^2-b^2)$
10) $(a^6+b^6) : (a^4-a^2b^2+b^4)$

3. При каких значениях x и y следующие равенства будут несправедливы:

1) $\frac{x^2-y^2}{x-y}=x+y$; 2) $\frac{x^2-y^2}{x+y}=x-y$; 3) $\frac{x^3-y^3}{x-y}=x^2+xy+y^2$?

(Так как делить на нуль нельзя, то первое равенство будет несправедливо, если $x=y$, второе — при $x=-y$ и третье — при $x=y$.).

Глава IV

РАЗЛОЖЕНИЕ НА МНОЖИТЕЛИ

1. Разложить на множители следующие многочлены путём вынесения общего множителя за скобку:

1) $2a+2b$
2) $5x+5y$
3) $11x-11y$
4) $4a-4b$
5) $6x+9y$
6) $2x^2-4xy$
7) $5a^2-5ab$
8) $3-3x$
9) $7a+14a^2$
10) $2a^2-4a^3$
11) m^4-2m^3
12) b^6+b^5
13) $a^{20}+a^{18}$
14) $a^{2m}-a^m$
15) $x^{m+2}-x^m$
16) $a^{m+n}-a^m$
17) $15x^2y+5xy$
18) $-8m^4x+12m^3x^2$
19) $6(x+y)^2z^3-12(x+y)z$
20) $a(x+y)-2b(x+y)$

2. Разложить на множители, вынося за скобку:

1) x в выражении $(x+y)$; y в выражении $(x+y)$;
2) a^2 в выражении (a^2+b); b в выражении $(1+b)$;
3) $2ab$ в выражении (a^2+b^2); $5a$ в выражении $(5+a)$

3. Разложить на множители:

1) $a(x+y)+b(x+y)$
2) $a(x+y)+2(y+x)$
3) $x(a-b)-(a-b)$
4) $15(a-b)-5(a-b)$
5) $(a-x)-b(a-x)$
6) $a(x-y)+b(y-x)$
7) $2a(x-3)-4(3-x)$
8) $x(a-4)+x^2(4-a)$
9) $3x^2(2-a)-6x(a-2)$
10) $3a(x-2)^2-6(2-x)$

4. Разложить на множители способом группировки:

1) $2(x+y)+x+y$
2) $5a(x-y)+x-y$
3) $3x(a-2)-a+2$
4) $2(3-x)-3+x$
5) $2(a+b)+ax+bx$
6) $5x(a-b)-3a+3b$
7) $ab+bc+a+c$
8) $ax+bx+by+ay$
9) $3a+3b-ax-bx$
10) a^3+a^2+a+1

Разложить на множители, применяя формулы сокращённого умножения:

5. 1) a^2-b^2 2) m^2-n^2 3) x^2-4 4) a^2-25 5) $4a^2-9$ 6) $16-25x^2$ 7) $9b^2-1$ 8) $1-16x^2$ 9) a^2x^2-25 10) $49a^2-b^4$ 11) $-4x^4+y^4$ 12) $-25a^6+1$ 13) $(a+b)^2-1$ 14) $(2a+b)^2-b^2$ 15) $16x^2-(x+y)^2$

6. 1) $a^2+2ab+b^2$ 2) $x^2-2xy+y^2$ 3) $a^2-4ab+4b^2$ 4) x^2+6x+9 5) $a^2-10a+25$ 6) $-x^2-4xy-4y^2$ 7) $8ab+16a^2+b^2$ 8) $-a^2-1-2a$ 9) $-x^2-25+10x$ 10) $a^4+16+8a^2$

7. 1) a^3+b^3 2) m^3+n^3 3) a^3-b^3 4) m^3-1 5) a^3-8 6) a^3+8 7) x^3-27 8) x^3+27 9) $1-a^3$ 10) $1+8a^3$ 11) $8+27a^3$ 12) $27a^3-8b^3$

Найти числовое значение выражений, предварительно разложив их на множители:

8. a^2-b^2 при: 1) $a=65$; $b=35$; 2) $a=68$; $b=32$; 3) $a=96$; $b=4$; 4) $a=82$; $b=18$; 5) $a=77$; $b=23$.

9. $a^2-2ab+b^2$ при: 1) $a=55$; $b=25$; 2) $a=67$; $b=47$; 3) $a=93$; $b=43$; 4) $a=36$; $b=25$; 5) $a=63$; $b=55$.

10. $a^2+2ab+b^2$ при: 1) $a=24$; $b=16$; 2) $a=42$; $b=18$; 3) $a=56$; $b=14$.

11. Разложить на множители трёхчлен второй степени, используя формулу: $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$.

Например:

$$x^2+5x+6=x^2+2x+3x+6=$$
$$=x(x+2)+3(x+2)=(x+2)(x+3).$$

1) x^2+3x+2 2) x^2+6x+8 3) $x^2+7x+10$ 4) $a^2+10a+16$ 5) $a^2+11a+30$ 6) x^2-5x+4 7) x^2-7x+6 8) $a^2-11a+18$ 9) $x^2-17x+30$ 10) $a^2-50a+49$

12. Разложите на множители:

1) $2a^2-2b^2$ 2) $5x^2-5y^2$ 3) $3x^2-3$ 4) a^3-4a 5) $8x-2x^3$ 6) a^3-a 7) ab^3-a^3b 8) a^4-b^4 9) x^4-1 10) $ax^2+2ax+a$ 11) $by^2+6by+9b$ 12) a^4+a 13) x^4-x 14) $2x^4-16x$ 15) a^6-b^6

13. При каких значениях x каждое из следующих произведений равно нулю?

1) $5(x-1)=0$; 2) $6(x+2)=0$; 3) $(x-1)(x-2)=0$; 4) $(x+3)(x-1)=0$; 5) $(x-1)(x-5)=0$.

14. Доказать, что произведение двух чётных чисел есть число, кратное 4.

Указание: $2n(2n+2a)=4n(n+a)$.

15. Доказать, что произведение двух последовательных чётных чисел есть число, кратное 8.

Указание: $2n(2n+2)=4n(n+1)$. Из двух последовательных чисел n и $n+1$ одно чётное, следовательно, произведение делится на 8.

16. Доказать, что разность между квадратом натурального числа и самим числом делится на 2.

Указание: $a^2-a=a(a-1)$.

17. Доказать, что разность между квадратом нечётного числа и единицей делится на 8.

Указание: $(2n+1)^2-1=(2n+1-1)(2n+1+1)=$ $=4n(n+1)$

18. Доказать, что произведение трёх последовательных натуральных чисел делится на 6.

Указание: $n(n+1)(n+2)$. Из трёх натуральных последовательных чисел одно кратно 2, а другое кратно 3.

19. Доказать, что разность a^3-a, где a — любое натуральное число, есть число, кратное 6.

Указание: $a^3-a=a(a-1)(a+1)$

Глава V

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДРОБИ

§ 1. Алгебраическая дробь

1. При каких значениях a и b дробь $\frac{a}{b}$ не имеет смысла?

2. Чему равны дроби: 1) $\frac{0}{2}$; 2) $\frac{0}{a}$, где $a\neq 0$; 3) $\frac{0}{x-1}$, если $x\neq 1$?

3. При каких значениях x обращаются в нуль следующие дроби:

1) $\frac{x-1}{3}$; 2) $\frac{x-2}{x}$; 3) $\frac{x-3}{x-2}$; 4) $\frac{x(x-1)}{x+1}$; 5) $\frac{(x-1)(x-2)}{x-3}$?

4. При каких значениях x следующие дроби положительны:

1) $\frac{x-1}{2}$; 2) $\frac{x-3}{5}$; 3) $\frac{x+1}{-2}$?

5. При каких значениях x следующие дроби отрицательны:

1) $\frac{x-2}{5}$; 2) $\frac{x+2}{10}$; 3) $\frac{x-1}{-5}$?

6. При каких значениях x следующие дроби не имеют смысла:

$$1)\ \frac{1}{x};\quad 2)\ \frac{2}{x-1};\quad 3)\ \frac{x}{x-6};\quad 4)\ \frac{x}{(x-2)(x-3)};\quad 5)\ \frac{1}{x-1}?$$

7. Не изменяя величины следующих дробей, преобразовать их так, чтобы знак минус стоял перед дробью:

$$1)\ \frac{-5}{a};\quad 2)\ \frac{2x}{-a};\quad 3)\ \frac{2-a}{a};\quad 4)\ \frac{a+b}{a-b};\quad 5)\ \frac{a+b}{x+y}.$$

8. $a>b$. Что можно сказать о зависимости между обратными числами?

9. Бассейн наполняется одной первой трубой в a час., а одной второй трубой в c час. Какую часть бассейна наполнит каждая труба в 1 час? Какую часть бассейна наполнят обе трубы в 1 час?

10. Двое рабочих выполняют некоторую работу, работая одновременно, за t час. Первый рабочий, работая один, выполнит ту же работу за m час. Какую часть работы выполняет второй рабочий за 1 час?

11. Переднее колесо трактора имеет окружность в a метров, а окружность заднего колеса на b метров больше переднего.

1) Сколько оборотов сделает каждое колесо на расстоянии s метров?

2) На сколько оборотов переднее колесо сделает при этом больше заднего?

12. При каком условии $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$? $[ad=bc]$.

13. Поясните, почему если изменить знак и у числителя, и у знаменателя, то значение дроби останется без изменения.

14. Указать, в каких из следующих выражений изменится знак, если x заменить числом противоположным.

$$1)\ \frac{5}{x};\qquad 2)\ \frac{x^2}{4};\qquad 3)\ \frac{x^3}{3};\qquad 4)\ \frac{1+x^2}{x};\qquad 5)\ \frac{(x-1)^2}{x^2}.$$

15. Поясните, почему $\frac{b-a}{b+a}=-\frac{a-b}{a+b}$.

16. При каком условии:

1) $\frac{a}{b}>0$; 2) $\frac{a}{b}<0$; 3) $\frac{a}{b}$ — целое число; 4) $\frac{a}{b}=\frac{3a}{b}$?

§ 2. Сокращение дробей

1. Какое свойство дроби выражает равенство:

$$\frac{am}{bm}=\frac{a}{b}?$$

2. При всяком ли m равенство $\frac{am}{bm}=\frac{a}{b}$ справедливо?

3. Сократить дроби:

1) $\frac{2}{4a}$
2) $\frac{10}{5b}$
3) $\frac{15a}{30b}$
4) $\frac{3a}{6a^2}$
5) $\frac{12a^3}{15a^2}$
6) $\frac{10ax}{15a^2x}$
7) $\frac{8a^5}{12a^4b}$
8) $\frac{6a^2b^3}{12a^2b^2}$
9) $\frac{a^m}{a^{m+2}}$
10) $\frac{x^{m+2}}{x^{m-1}}$
11) $\frac{a^{n-2}}{a^{n-1}}$
12) $\frac{6(x+y)}{(x+y)^2}$
13) $\frac{4(x-y)^3}{2(x-y)^4}$
14) $\frac{5a^2(x+y)}{10(x+y)^2}$
15) $\frac{a-x}{x-a}$

4. Сократить дроби:

1) $\frac{a-b}{b-a}$
2) $\frac{2a-2b}{4}$
3) $\frac{5x+5y}{10}$
4) $\frac{x+y}{x^2-y^2}$
5) $\frac{2x+2y}{x^2-y^2}$
6) $\frac{3a^2-3}{2a-2}$
7) $\frac{a-2}{a^3-8}$
8) $\frac{a^2-a}{a^2-2a+1}$
9) $\frac{a^4-b^4}{b^2+a^2}$
10) $\frac{x^3-y^3}{x^2-y^2}$

5. Справедливо ли равенство: $\frac{a-a}{a-a}=1$?

§ 3. Сложение и вычитание дробей

1. Произвести указанные действия:

1) $\frac{a}{2}+\frac{b}{2}$
2) $\frac{x}{3}-\frac{y}{3}$
3) $\frac{3a}{x}+\frac{b}{x}$
4) $\frac{5a}{6}-\frac{a}{6}$
5) $\frac{1}{a}+\frac{1}{2a}$
6) $\frac{1}{b}-\frac{1}{3b}$
7) $\frac{2}{7a}-\frac{3}{3a}$
8) $\frac{a}{x^2}+\frac{1}{x}$
9) $\frac{a}{x^5}-\frac{b}{x^4y}$
10) $\frac{3x-1}{4}+\frac{x-2}{3}$
11) $\frac{a-1}{3}-\frac{a-2}{2}$
12) $\frac{a}{2x^2}-\frac{b}{4x^3}$
13) $\frac{a}{x^2y}-\frac{a}{xy^2}$
14) $a+\frac{1}{a}$
15) $a+\frac{a-ab}{b}$

2. Произвести указанные действия:

1) $\frac{1}{a-1}+\frac{1}{1-a}$

2) $\frac{1}{a^2-1}+\frac{1}{1-a^2}$

3) $\frac{2}{a-5}-\frac{3}{5-a}$

4) $\frac{1}{a-1}+\frac{1}{a+1}$

5) $\frac{2}{a+2}-\frac{1}{2-a}$

6) $\frac{x}{a^3+1}-\frac{x}{a^3-1}$

7) $\frac{1}{x+c}-\frac{1}{x+b}$

8) $\frac{2}{y+x}+\frac{1}{x+y}$

9) $\frac{a}{5x+5y}-\frac{a}{6x+6y}$

10) $\frac{5}{2x-2}+\frac{3}{4x-4}$

11) $\frac{4a}{a^2-1}-\frac{3}{a-1}$

12) $\frac{5x}{x^2-4}+\frac{2}{x-2}$

13) $\frac{5}{a+3}-\frac{4a}{a^2-9}$

14) $\frac{2}{a-2}+\frac{3a}{4-a^2}$

15) $\frac{1}{5x+5}+\frac{2}{x^2-1}$

3. Решить уравнения:

1) $\frac{x}{2}+x=6$

2) $x-\frac{x}{4}=9$

3) $5-\frac{10}{x}=3$

4) $8-\frac{1}{x}=5$

5) $\frac{5}{x}+\frac{3}{x}=4$

6) $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=5$

7) $\frac{5x}{4}-\frac{x}{2}=3$

8) $\frac{x+2}{3}=1$

9) $\frac{2x-6}{5}=2$

10) $\frac{x-1}{2}+\frac{2x-3}{3}=2$

§ 4. Умножение и деление дробей

Выполнить указанные действия:

1. 1) $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}$

2) $\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b^2}$

3) $\frac{2a}{3b}\cdot\frac{2a}{5}$

4) $\frac{a}{b}:\frac{a}{c}$

5) $a:\frac{a}{b}$

6) $5a:\frac{5a}{2b}$

7) $\frac{1}{a}:b$

8) $15a^2b\cdot\frac{4x}{5ab}$

9) $\frac{4a}{5b}:\frac{2a}{15b^2}$

10) $2a:\frac{6a^2}{b}$

2. 1) $\frac{a-b}{2}\cdot\frac{4}{a-b}$

2) $\frac{x-}{4}:\frac{y-x}{4}$

3) $\frac{a+b}{2}\cdot\frac{6}{a^2-b^2}$

4) $\frac{x-y}{10}:\frac{x^2-y^2}{5}$

5) $\frac{a+1}{b^2}\cdot\frac{2b}{1-a^2}$

6) $\frac{a+2}{a}\cdot\frac{a^2}{(a+2)^2}$

7) $\frac{a-1}{a}:\frac{2a-2}{b}$

8) $(x-2):\frac{2x-2}{3}$

3. Решить уравнения относительно x:

1) $x+b=c$ 4) $\frac{x}{a}+b=c$

2) $ax+d=l$ 5) $a(x+b)=c$

3) $ax-b=c$ 6) $mx+nx=p$

4. Какая дробь не изменяет своей величины при прибавлении к числителю числа m, а к знаменателю числа n?

5. Всегда ли полезно сократить дробь? В каких случаях лучше не спешить с сокращением? [Если надо впоследствии приводить дроби к общему знаменателю, то удобнее не сокращать дробь.]

6. При каком условии $\frac{a}{b}=-\frac{a}{b}$?

7. Почему дробь $\frac{a^2-1}{a^2+1}$ при любых значениях a имеет смысл?

[Так как a^2+1 есть число, отличное от 0.]

8. При каких условиях справедливо равенство: $\frac{a}{b}=\frac{a^2}{b^2}$?

[При $a=b\neq 0$; $a=0$, $b\neq 0$.]

9. При каких значениях x и y дроби: $\frac{x^2+1}{x^2-1}$, $\frac{x-y}{x(x-y)}$, $\frac{1}{x^2-y^2}$ имеют смысл?

10. Является ли $\frac{n(n-1)}{2}$ числом целым или дробным, если n — натуральное число?

11. Является ли $\frac{n(n-1)(n-2)}{2}$ числом целым, если n — натуральное число?

Глава VI

ПРОПОРЦИИ

1. Во сколько раз 1 *кг* больше 1 *г*? Во сколько раз 5 *кг* больше 20 *г*? Во сколько раз a *кг* больше b *г*?

2. Подобрать два числа, отношение которых было бы равно: 1) $\frac{1}{2}$; 2) $1\frac{1}{2}$; 3) $\frac{a}{b}$.

3. $\frac{a}{b}=c$. Чему равно отношение чисел, обратных членам данного отношения?

4. Найти прямое и обратное отношения величин:

1) 1 *га* к 1 *а*; 3) 1 *л* к 2 *см*^{3};

2) a *га* к m *а*; 4) a *л* к b *см*^{3}

5. Если $a<b$, то какой знак неравенства надо поставить между $\frac{1}{a}$ и $\frac{1}{b}$?

(Если a и b имеют одинаковые знаки, то $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$.)

6. Если $a<\frac{1}{b}$, то какой знак неравенства надо поставить между a и b?

7. Определить неизвестный член отношения (x):

1) $x:5=6$	4) $0,2:x=1$
2) $10:x=20$	5) $a:x=b$
3) $2x:7=4$	6) $x:c=b$

8. Отношение дробных чисел заменить отношением целых чисел: 1) $0,5:0,7$; 2) $1,1:0,12$; 3) $0,3x:1,2y$.

9. Как изменится отношение,

1) если предыдущий член увеличить в 10 раз, а последующий в 5 раз?

2) если предыдущий член увеличить в n раз, а последующий член в m раз?

3) если предыдущий член увеличить в n раз, а последующий уменьшить в $2n$ раз?

10. Как изменится отношение, если к предыдущему члену прибавить последующий?

11. Может ли последующий член отношения $\frac{a}{b}$ быть любым числом?

12. Следующие равенства записать в виде пропорции:

1) $2\cdot 5=10\cdot 1$	4) $2a=b^2$
2) $ac=b$	5) $5(a+c)=2(n+b)$
3) $2p=3$	6) $a^2-b^2=a(b+n)$

13. Какие пропорции можно получить из данной пропорции $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ путём перестановки её членов?

14. Найти неизвестный член пропорции:

1) $\frac{x}{5}=\frac{14}{7}$	4) $\frac{a}{x}=\frac{c}{b}$
2) $\frac{x}{2}=\frac{20}{40}$	5) $\frac{3a}{2b}=\frac{x}{2}$
3) $\frac{x}{a}=\frac{b}{c}$	6) $\frac{a-b}{x}=\frac{a^2-b^2}{3}$

15. Дана пропорция $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Докажите, что будут справедливы производные пропорции:

1) $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$; 2) $\frac{a-b}{a}=\frac{c-d}{d}$; 3) $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$.

Дать словесную формулировку полученных пропорций.

16. С помощью производных пропорций найти x:

1) $\frac{2-x}{x}=\frac{2}{5}$; 2) $\frac{7+x}{x}=\frac{12}{5}$; 3) $\frac{a+x}{a-x}=\frac{b}{c}$.

17. Какие величины называются прямо пропорциональными? Привести примеры.

18. Какие величины называются обратно пропорциональными? Привести примеры.

19. Какие из величин, определяемых зависимостью $s = v\,t$, будут прямо пропорциональны и какие обратно пропорциональны, если:

1) v сохраняет постоянное значение;
2) t » » » ;
3) s » » » .

Ответить на те же вопросы, если зависимость определяется формулами: 1) $d = P : v$; 2) $a = 5bc$.

20. Если a грузовиков могут перевезти некоторый груз за t час., то сколько потребуется грузовиков той же грузоподъёмности, чтобы перевезти весь груз в n час.?

21. Для выполнения определённой работы в t дней требуется a рабочих. Во сколько дней выполнят эту работу b рабочих?

22. Указать прямо пропорциональную, обратно пропорциональную и непропорциональную зависимости между элементами арифметических действий.

Глава VII

УРАВНЕНИЯ 1-й СТЕПЕНИ С ОДНИМ НЕИЗВЕСТНЫМ

§ 1. Основные свойства уравнения

1. При каком значении x выражение $x - 5$ равно: 1) 0; 2) 3; 3) -4; 4) n?

2. При каком значении x выражения $x+5$ и $2x+2$ имеют одинаковое числовое значение?

3. Даны выражения: $y_1 = 3x - 1$ и $y_2 = 2x + 1$. При каких значениях x будет иметь место равенство $y_1 = y_2$?

4. Даны выражения: $y_1 = 2x - 3$ и $y_2 = 3(x-1) - x$. При каких значениях x будет справедливо $y_1 = y_2$?

5. Является ли 5 корнем уравнения $3x - 15 = 0$?

6. Какое из чисел 5, 3, 2, 0, -2, -4 будет корнем уравнения: 1) $2x + 10 = 6$; 2) $5x - 3 = 7$; 3) $x^2 = 4$?

7. Почему уравнение $x + 2 = x + 3$ не имеет решений?

8. Какие из следующих равенств являются тождествами и какие не являются тождествами:

1) $x + x = 2x$; 2) $2a + 1 = 3$; 4) $2x - 5 = 2(x+7) - 19$;
3) $(x+5)^2 = x^2 + 10x + 25$; 5) $3(x+1) = 3x + 3$?

9. Составить уравнение, корнем которого было бы число:

1) 2; 2) 5; 3) 0; 4) -3; 5) $-0,5$.

10. Равносильны ли два уравнения:

1) $x+5=7$ и $2x-1=3$
2) $x+1=5$ и $4x-2=2$
3) $5x+1=2$ и $10x+2=4$
4) $5x+4=9$ и $2x-1=1$
5) $4x+2=10$ и $x^2=4$
6) $x-1=0$ и $x^2-1=0$

11. Не решая уравнений, определить, будут ли равносильны два уравнения:

1) $x+5=3$ и $x+2=0$
2) $2x-3=1$ и $\frac{2x-3}{2}=\frac{1}{2}$
3) $4x-3=5$ и $(4x-3)\cdot 3=15$
4) $x+3=5$ и $\frac{x+3}{2}=\frac{5}{3}$
5) $x-1=4$ и $2x-\frac{x-1}{2}=8$

12. На каком свойстве уравнения основан перенос члена уравнения из одной части уравнения в другую?

13. На какое число нельзя делить обе части уравнения?

14. На каком свойстве уравнения основано преобразование уравнения к виду, когда коэффициенты всех его членов целые числа?

15. На каком свойстве уравнения основана перемена знаков у всех членов уравнения?

16. В каком случае утверждают, что уравнение не имеет ни одного корня?

17. Сколько решений имеет уравнение $|x|=x$?

18. Какое значение x если $5x=-5x$?

§ 2. Решение уравнений 1-й степени с одним неизвестным

1. Найти корень уравнения и проверить ответ:

1) $x+5=7$
2) $x-2=8$
3) $x+3=3$
4) $x-0,1=0,3$
5) $x-\frac{1}{2}=1\frac{1}{2}$
6) $\frac{x}{2}=1$
7) $5:x=5$
8) $10:x=2$
9) $3y=6$
10) $4x=0$
11) $2\frac{1}{2}x=\frac{\quad}{2}$
12) $2:3x=3$
13) $1,24x=24,8$
14) $3\frac{1}{2}x=7\frac{1}{2}$
15) $10\frac{1}{2}x=31\frac{1}{2}$
16) $2x+4=10$
17) $3x-1=5$
18) $5x+2=3$
19) $0,1x-5=1$
20) $2(x-2)=1$

2. Решить уравнения:

1) $5y+18=8y$
2) $16-2x=3x$
3) $42-2x=5x$
4) $3y+18=5y$
5) $5y-22=3y$
6) $3x+38=5x+18$
7) $7y-5=3y+3$
8) $6x-45=2x-17$
9) $3-3x=7-13x$
10) $3x-2=7-x$

3. Может ли 1 быть корнем уравнения $\frac{1}{1-x}=1$?

4. При каком значении x следующие равенства не имеют смысла:

1) $3a=\frac{1}{x}$ 4) $\frac{1}{x-2}=b$

2) $\frac{b}{x}=5$ 5) $\frac{2+x}{x}=m$

3) $\frac{3}{x}=\frac{c}{5}$ 6) $\frac{1}{x-5}=\frac{a}{5}$?

5. Решите задачу: «Отцу 35 лет, а сыну 10 лет. Через сколько лет отец будет на 25 лет старше сына?» Как истолковать ответ?

6. Решить уравнения:

1) $x+b=a$ 6) $ax=c$ 11) $\frac{x}{a}+b=c$

2) $x-a=b$ 7) $11x=a$ 12) $k(x-a)=b$

3) $a+y=b$ 8) $2ay=4b$ 13) $\frac{av}{b}=c$

4) $2x-a=x$ 9) $\frac{1}{2}mx=4n$ 14) $2ax-m=ax+2$

5) $\frac{x}{a}=b$ 10) $my+ny=a$ 15) $\frac{x}{a}+\frac{4}{2a}=b$

7. Следующие уравнения решить относительно той буквы, которая указывается в качестве неизвестного:

1) $p=dv$, решить относительно d
2) $s=ab$, решить относительно b
3) $s=\frac{1}{2}bh$, решить относительно h
4) $C=2\pi R$, решить относительно R
5) $m=ab^2+a$, решить относительно a.

8. Чему равен параметр a, если уравнение $2a+x=7$ имеет корень $x=3$?

9. Чему равен параметр a, если уравнение $3x+a=5$ имеет корень $x=0$?

§ 3. Составление уравнений по условиям задачи

1. а) К какому числу надо прибавить 12, чтобы получить 20?
б) К какому числу надо прибавить 12, чтобы получить 10?
в) К какому числу надо прибавить 10, чтобы получить 0?

2. Разделить число 18 на 3 части так, чтобы вторая часть была вдвое больше первой, а третья втрое больше второй.

3. В трёх корзинах 240 яблок. Во второй корзине яблок втрое больше, чем в первой, а в третьей вдвое больше, чем во второй. Сколько яблок в каждой корзине?

4. Для приготовления бронзы берётся 17 частей меди, 2 части цинка и одна часть олова. Сколько килограммов меди, цинка и олова отдельно надо взять, чтобы изготовить 4 *ц* бронзы?

5. Найти три последовательных числа, сумма которых 15.

6. На овощной базе имеется 50 *т* картофеля. База ежедневно отправляет в овощные магазины 50 *ц*. Через сколько дней на базе останется 100 *ц* картофеля?

7. Расстояние между городами 300 *км*. Из этих городов вышли навстречу друг другу два поезда. Первый поезд идёт со скоростью 60 *км* в час, а второй 40 *км*. Через сколько часов произойдёт их встреча?

8. Яблоки при сушке теряют 84% своего веса. Сколько надо взять свежих яблок, чтобы получить 32 *кг* сушёных?

9. В первый день турист прошёл $\frac{1}{2}$ намеченного пути; во второй $\frac{1}{3}$, а в третий — остальные 12 *км*. Какой путь прошёл турист за три дня?

10. Ученик израсходовал третью часть своих денег на книги, одну шестую остатка на бумагу. После покупки книг и бумаги у ученика осталось 10 руб. Сколько денег было у ученика?

11. Пифагор, греческий математик, живший в VI в. до н. э., на вопрос о том, сколько у него учеников, ответил: «Половина их изучает прекрасную науку математику; четвёртая часть отдаёт себя познанию бессмертной природы; седьмая часть проводит время в молчании, предаваясь размышлениям; кроме того, есть ещё три женщины. Вот число моих учеников». Сколько было учеников у Пифагора?

12. (Задача-шутка.) Бутылка с пробкой стоит 11 коп. Бутылка стоит на 10 коп. дороже чем пробка. Сколько стоит бутылка и сколько стоит пробка?

13. Одна сторона прямоугольника a *см*, а периметр его составляет P *см*. Найти вторую сторону прямоугольника.

14. Одна сторона прямоугольника на n *см* больше другой. Периметр прямоугольника P *см*. Найти стороны прямоугольника.

15. Мясо при варке теряет 35% своего веса. Сколько надо взять сырого мяса, чтобы получить a *кг* варёного?

16. В руде содержится p% меди. Добыто a тонн меди. Сколько взято руды?

17. Первый угольный склад имел a тонн угля, а второй b тонн. После того как из первого израсходовали часть угля, во втором стало в 2 раза больше, чем в первом. Сколько угля израсходовали из первого склада?

18. Первый угольный склад имел a тонн угля, а второй b тонн. После того как из первого взяли некоторое количество угля, а из второго вдвое больше, то на складах осталось угля поровну. Сколько угля взяли из первого склада?

19. Двое рабочих могут выполнить вместе определённую работу за t час. Первый рабочий может выполнить эту работу, работая один, за a час. Во сколько времени второй рабочий, работая один, выполнит всю работу?

Глава VIII

СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ 1-й СТЕПЕНИ С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

1. Отцу и сыну вместе 50 лет. Сколько лет каждому из них? Имеет ли эта задача определённый ответ?

Почему эта задача называется неопределённой?

Что ещё надо знать, чтобы получить определённый ответ?

2. Всякие ли два уравнения с двумя неизвестными имеют определённое решение?

3. Существуют ли такие два числа, сумма которых одновременно равна 4 и 5?

4. Равносильны ли уравнения $x+y=5$ и $x+y=7$?

5. Решить следующие системы способом подстановки:

1) $\begin{cases} x+y=5 \\ x=2y \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 5x+4y=19 \\ x=3y \end{cases}$

2) $\begin{cases} x+y=12 \\ x=3y \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 2x+10y=20 \\ x=5y \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x+2y=8 \\ 2y=x \end{cases}$

6. Решить системы:

1) $\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=1 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x+y=1 \\ y-x=-5 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x+y=10 \\ 2x-y=8 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+3y=7 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x-y=5 \\ 3x+y=19 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 2x-3y=3 \\ 3x+2y=11 \end{cases}$

7. Почему система $\begin{cases} x+y=3 \\ 3x+3y=9 \end{cases}$ имеет бесконечное множество решений?

8. Составьте систему двух уравнений первой степени с двумя неизвестными, которая имеет бесконечное множество решений.

9. Почему система $\begin{cases} x+y=5 \\ 2x+2y=12 \end{cases}$ не имеет решений?

10. Дана система: $\begin{cases} x+y=5 \\ ax+2y=c \end{cases}$ Подобрать такие значения для параметров a и c, чтобы система уравнений: 1) имела одно решение; 2) имела бесконечное множество решений; 3) не имела решений.

11. Составить уравнение с двумя неизвестными так, чтобы вместе с данным уравнением получилась система, имеющая единственное решение:

1) $x+y=3$; 2) $2x-y=6$; 3) $2x+3y=7$.

12. Составить уравнение с двумя неизвестными так, чтобы вместе с данным уравнением получилась система, имеющая бесконечное множество решений:

1) $x+y=4$; 2) $x-2y=5$; 3) $2x+3y=6$.

13. Составить уравнение с двумя неизвестными, которое противоречило бы данному:

1) $x+y=5$; 2) $2x-y=10$; 3) $5x=y+4$.

14. Найти среди решений уравнения $x+2y=9$ такое, при котором x и y равны.

15. Решить следующие системы:

1) $\begin{cases} x+y=4a \\ x-y=2a \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x+y=3b \\ x-y=3a \end{cases}$

2) $\begin{cases} x+y=3m \\ y-x=m \end{cases}$ 4) $\begin{cases} ax+by=c \\ x=y \end{cases}$

16. При каких условиях систему уравнений с двумя неизвестными удобнее решать способом подстановки?

17. В чём основная мысль решения системы уравнений любым из способов: алгебраического сложения, подстановки и сравнения?

18. Задача, относящаяся к определению измерений прямоугольного участка, привела к системе:

$\begin{cases} 2(x+y)=900 \\ x-y=150. \end{cases}$ Воспроизведите текст задачи.

19. Составьте несколько задач, решение которых привело бы к системе: $\begin{cases} x+y=80 \\ x-y=20. \end{cases}$

Глава IX

СТЕПЕНИ И КОРНИ

§ 1. Степени с целым положительным и буквенным показателем. Чётная и нечётная степень отрицательного числа. Степень произведения, дроби и степени. Квадрат многочлена

1. Сторона квадратного участка земли равна a. Найти его площадь. Вычислить площадь при $a=25$; 35; 65; 1,5; 4,5.

2. Проверить справедливость равенства: $10^2+11^2+12^2=13^2+14^2$.

3. Если число оканчивается двумя нулями, то сколькими нулями оканчивается квадрат этого числа? Вывести общее правило возведения в квадрат чисел, оканчивающихся нулями.

4. Бак имеет форму куба, ребро которого равно a. Найти его объём. Вычислить объём при $a = 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8$.

5. Вычислить: $1^3;\ 1^4;\ 1^5;\ \ldots\ 1^n$, где n — натуральное число.

6. Составьте таблицу степеней числа 2, кончая 8-й степенью.

7. Составьте таблицу степеней числа 3, кончая 6-й степенью.

8. Справедлив ли для возведения в степень переместительный закон? [Нет.]

9. Масса Солнца равна 19 00000000000000000000000000 *т*. Записать это число короче. [$19 \cdot 10^{26}$]

10. Масса Земли равна 598 0000000000000000000 *т*. Записать это число короче.

11. Представить десятичную дробь в виде суммы дробей, знаменатели которых являются различными степенями десяти: 0,56; 0,304; 0,0216; 0,00112.

Указание: $0{,}0216 = \frac{2}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{6}{10^4}$.

12. Записать в виде десятичной дроби выражения:

1) $\frac{2}{10} + \frac{3}{10^2}$ 3) $\frac{1}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{5}{10^4}$

2) $\frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{7}{10^3}$ 4) $\frac{3}{10} + \frac{4}{10^3} + \frac{1}{10^5}$

13. Представить в виде степени:

16; 32; 8; 27; 64; 81; 128; 125; 625; 216.

14. Представить в виде степени с одним основанием:

$2^x \cdot 2;\quad 2^x \cdot 4;\quad 3^n \cdot 9;\quad 25 \cdot 5^k;\quad \frac{2^x}{2};\quad \frac{2^x}{8};\quad \frac{3^n}{27};\quad \frac{7^{n+1}}{49}$.

15. Записать в виде дроби: $2^{x-1};\quad 2^{2x-3};\quad 3^{x-2};\quad 5^{2x-3};\quad a^{x-1}$

16. Почему при возвышении в квадрат несократимой дроби не может получиться целое число? Сократимая дробь?

17. В каких случаях при возвышении в квадрат целого числа получается: а) чётное число; б) нечётное число?

18. Какими цифрами не может оканчиваться квадрат целого числа?

19. Найти ошибку в следующих рассуждениях:

1) $a = 2a$. Доказательство:

$$a^2 - a^2 = a^2 - a^2;\ (a-a)a = (a-a)(a+a).$$

Делим обе части равенства на $(a-a)$. Получим:

$$a = 2a.$$

2) $a = b$, где a и b различны. Доказательство:

$$a^2 - 2ab + b^2 = b^2 - 2ab + a^2$$

$$(a-b)^2 = (b-a)^2.$$

Так как числа $(a-b)^2$ и $(b-a)^2$ равны, показатели степеней также равны, то будут равны и основания степеней, т. е. $a-b=b-a$; $2a=2b$; $a=b$.

3) $2 \cdot 2=5$. Доказательство:

$$16-36=25-45$$

$$16-36+\frac{81}{4}=25-45+\frac{81}{4}$$

$$\left(4-\frac{9}{2}\right)^2=\left(5-\frac{9}{2}\right)^2$$

$$4-\frac{9}{2}=5-\frac{9}{2}$$

$$4=5; \quad 2\cdot 2=5.$$

20. Вычислить: а) $(-1)^3+(-1)^5-(-1)^7$;

б) $(-1)^{1000}+(-1)^{1001}+(-1)^{902}$

в) $(-1)^{2n}+(-1)^{2n+1}-(-1)^{4n-1}$,

где n — натуральное число.

21. Вычислить: $-a^2$; $(-a)^2$; $-a^3$; $(-a)^3$; 1) при $a=3$; 2) при $a=-3$.

22. Упростить: $a^2-(-a)^2$; $a^3-(-a)^3$; $a^7-(-a)^7$; $-a^{2n}-(-a)^{2n}$.

23. При каких значениях a будет справедливо неравенство:

1) $a^3>a$; 3) $a^3<a$; 5) $a^3=a^2$.

2) $a^3=a$; 4) $a^3>a^2$; 6) $a^3<a^2$?

24. Вычислить двумя способами:

$(2\cdot 3)^2$; $(3\cdot 5)^2$; $(5\cdot 10)^3$; $(2\cdot 3\cdot 4)^2$

25. Вычислить: 30^2; 200^2; 900^2; 20^3; 50^3; 20^4.

Указание: Применить правило возведения в степень произведения.

26. Вычислить выражения: 1) $(ab)^3$; 2) $a(bc)^2$; 3) $a^2(bc)^3$ при $a=-1$; $b=2$ и $c=3$.

27. Вычислить: $\left(-\frac{1}{2}\right)^3$; $\left(-\frac{1}{5}\right)^4$; $\left(-\frac{1}{3}\right)^5$; $\left(-\frac{1}{2}\right)^6$;

$\left(-1\frac{1}{2}\right)^3$; $\left(-2\frac{1}{4}\right)^2$.

28. Может ли быть верным равенство: $\frac{a}{b}=\frac{a^2}{b^2}$?

29. Вычислить двумя способами:

$(2^2)^3$; $(-2^2)^2$; $(-2^4)^2$.

30. Упростить: $(-a^2)^5$, $(-x^3)^4$; $(-y^2)^9$; $(-a^n)^{2k}$; $(-a^n)^{2k-1}$

31. Упростить: $(a^2b^3)^5$; $(-1{,}5a^4b)^2$; $\left(\frac{3a^3}{4b^2}\right)^2$; $\left(-\frac{1}{2}a^5\right)^5$.

32. Всегда ли выражение $(x-3)^2$ будет положительным числом? (При $x=3$ оно равно 0.)

33. При каких численных значениях a и b верно равенство:

1) $(a+b)^2=a^2+b^2$; 2) $(a+b)^3=a^3+b^3$; 3) $\frac{a}{b}=\left(\frac{a}{b}\right)^2$?

34. Разложить по формуле:

$(a+b+c)^2$; $(a-b-c)^2$; $(a^2+a+1)^2$; $(a^2-b^3-c^4)^2$.

35. Разложить по формуле:

$(x+y+z+u)^2$; $(a-b+c-d)^2$; $(a+b-c-d-e)^2$.

36. Можно ли утверждать, что выражение $(a-1)^2$ имеет только положительные значения?

37. Можно ли утверждать, что $(x+1)^2$ больше 1?

38. Можно ли утверждать, что $\frac{x+4}{3+x}$ имеет значения, большие единицы по абсолютной величине?

39. Может ли дробь $\frac{x^2}{1+x^2}$ иметь отрицательные значения?

40. Может ли выражение $(x-2)^2$ иметь неположительные значения?

41. Может ли произведение ab быть меньше $\frac{a}{b}$ $(b \neq 0)$?

42. Выразить формулой: 1) число, которое при делении на 5 даёт в остатке 3; 2) число, которое при делении на a даёт в остатке b $(b<a)$.

§ 2. Извлечение квадратного корня из чисел

1. Площадь квадрата равна 25 $м^2$. Найти длину стороны квадрата.

2. Чему равна вторая степень шести? Чему равен корень второй степени (квадратный корень) из 36?

3. Чему равно 15^2? Чему равен $\sqrt{225}$?

4. Сколько существует различных чисел, квадрат которых равен 16?

5. Найти два числа, квадрат которых равен: 64; 100; 196; 256; 400; 10 000; 0,01; 0,0081; $\frac{1}{25}$; $\frac{25}{121}$.

6. Найти арифметический корень:

$\sqrt{16}$; $\sqrt{36}$; $\sqrt{49}$; $\sqrt{81}$; $\sqrt{121}$; $\sqrt{289}$; $\sqrt{400}$; $\sqrt{2500}$; $\sqrt{8100}$; $\sqrt{0,01}$; $\sqrt{0,64}$; $\sqrt{6,25}$; $\sqrt{0,0001}$; $\sqrt{0,0009}$; $\sqrt{0,0625}$; $\sqrt{\frac{9}{25}}$; $\sqrt{\frac{1}{16}}$; $\sqrt{\frac{9}{49}}$; $\sqrt{\frac{64}{169}}$; $\sqrt{2\frac{1}{4}}$; $\sqrt{1\frac{9}{16}}$; $\sqrt{5\frac{1}{16}}$.

7. Определить, между какими числами, состоящими из круглых десятков, заключены следующие корни:

$\sqrt{841}$; $\sqrt{1849}$; $\sqrt{7225}$; $\sqrt{4624}$, $\sqrt{9604}$.

8. Определить, сколько целых десятков имеют корни в следующих числах:

$$\sqrt{625};\quad \sqrt{961};\quad \sqrt{1024};\quad \sqrt{1225};\quad \sqrt{5625}.$$

9. Есть ли среди рациональных чисел такое число, квадрат которого равен 2; 5; 11; 30?

10. Назовите однозначные числа, из которых нельзя точно извлечь квадратный корень.

11. Найти наибольшее целое положительное число, квадрат которого меньше числа: 5; 6; 10; 17; 26; 110.

12. Найти приближённое значение арифметического корня с точностью до 1 (с недостатком и с избытком):

$$\sqrt{2};\quad \sqrt{5};\quad \sqrt{10};\quad \sqrt{40};\quad \sqrt{60};\quad \sqrt{90};\quad \sqrt{200}.$$

13. Извлечь корень с указанной точностью:

$$\sqrt{2}\left(\text{до } \frac{1}{2}\right);\quad \sqrt{3}\left(\text{до } \frac{1}{5}\right);\quad \sqrt{20}\left(\text{до } \frac{1}{3}\right).$$

14. Извлечь корень с точностью до $\frac{1}{10}$:

$$\sqrt{2};\quad \sqrt{3};\quad \sqrt{5};\quad \sqrt{15};\quad \sqrt{26}.$$

15. Вычислить с точностью до 1:

$$\sqrt{121^2-120^2};\quad \sqrt{35^2-33^2};\quad \sqrt{58^2-42^2};\quad \sqrt{92^2-8^2};\quad \sqrt{25{,}6^2-25{,}5^2}.$$

16. Можно ли точно извлечь квадратный корень из чисел: 1) 5 207; 2) 31 550; 3) 60 502?

17. Как извлечь корень из смешанного числа?

18. Извлечь квадратный корень из чисел:

$$2\frac{7}{9};\quad 5\frac{1}{16};\quad 2\frac{14}{25};\quad 1\frac{32}{49}.$$

19. В каком случае при извлечении квадратного корня из дробного числа арифметическое значение корня получается: 1) больше подкоренного числа; 2) меньше подкоренного числа?

20. Какой знак имеет разность: $\sqrt{5}-\sqrt{3}$; $\sqrt{5}-\sqrt{6}$.

21. Чему равно значение:

$$1)\ \left|\sqrt{25}\right|;\quad 2)\ \left|\sqrt{144}\right|;\quad 3)\ \left|\sqrt{x^2}\right|;\quad 4)\ \left|\sqrt{(x-1)^2}\right|?.$$

22. Как извлечь квадратный корень из десятичной дроби с нечётным числом десятичных знаков?

23. Найти, чему равно каждое из следующих чисел, если известно, что каждое число является целым числом:

$$\sqrt{289};\quad \sqrt{961};\quad \sqrt{1225};\quad \sqrt{3025};\quad \sqrt{9025};$$
$$\sqrt{1521};\quad \sqrt{7569};\quad \sqrt{176400};\quad \sqrt{739600}.$$

Указание. Вначале определить значность числа; затем — цифру десятков и в конце — цифру единиц, например: $\sqrt{1521}$

есть двузначное число, так как состоит из двух граней; цифра десятков есть 3, так как $3^2 < 15$; цифра единиц есть 9, так как число 9^2 оканчивается цифрой 1, и хотя число, у которого цифра единиц есть 1, также при возведении в квадрат даёт число, цифра единиц которого есть 1, но $\sqrt{1521}$ ближе к 40, чем к 30.

24. Найти, чему равно каждое из следующих чисел, если известно, что подкоренное число есть квадрат некоторого числа:

$$\sqrt{2{,}25}; \quad \sqrt{0{,}5625}; \quad \sqrt{9{,}61}; \quad \sqrt{17{,}64}; \quad \sqrt{0{,}0729}.$$

§ 3. Понятие об иррациональном числе

1. Существуют ли целые числа, квадрат которых равен 3; 5; 7?

2. Площадь квадрата равна 2 $м^2$. Найти его сторону.

3. Отрезок a несоизмерим с единицей. Может ли быть соизмерим с этой единицей отрезок $2a$? Отрезок $6a$? Отрезок $1\frac{1}{2}a$? Отрезок, меньший отрезка a на 3 единицы?

4. Как показать, что и половина диагонали квадрата несоизмерима с его стороной?

Указание. Разбить квадрат диагоналями на 4 треугольника и один из них дополнить до квадрата.

5. Всякая ли обыкновенная дробь может быть обращена в десятичную?

6. Какая обыкновенная дробь обращается в конечную десятичную дробь?

7. Какая обыкновенная дробь обращается в бесконечную десятичную дробь?

8. Почему бесконечная десятичная дробь, полученная от обращения обыкновенной дроби, будет обязательно периодической?

9. Какие дроби $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{11}{20}$; $\frac{7}{15}$; $\frac{23}{25}$; $\frac{71}{75}$ при обращении в десятичную дробь дадут конечную десятичную дробь? Бесконечную десятичную дробь?

10. Приведите несколько обыкновенных дробей, которые при обращении в десятичную дают конечную дробь, бесконечную дробь.

11. Что такое иррациональное число?

12. Всякая ли бесконечная десятичная дробь изображает иррациональное число?

13. Предполагая, что закон чередования десятичных знаков ясен из приведённой части бесконечных дробей, указать, какие из них являются рациональными и какие иррациональными числами:

1) 0,325 325 325...
2) 0,325 325 532 555...
3) 0,02 002 000 200 002...
4) 3,256 056 056 056...
5) 1, 324 513 324 511 345 111...

14. Что неточно в определении «Все целые и дробные числа называются рациональными числами». Что надо добавить в этом определении для того, чтобы оно было точным?

15. Справедливо ли утверждение: «Каждой точке на прямой соответствует определённое число, выраженное десятичной дробью»?

16. Какое число больше: $\sqrt{2}$ или 1,5? $\sqrt{3}$ или 1,8? $\sqrt{3}$ или $\frac{9}{5}$?

17. Какое из чисел больше (наметить только пути):

1) $\sqrt{3}$ или 1,7369? 2) $\sqrt{15}$ или 3,873? 3) $\sqrt{5}$ или $\frac{161}{72}$?

18. Можно ли сложить следующие числа: $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$?
[Можно.]

19) Можно ли сложить следующие числа: $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$ и π?

20. a — рациональное число, а b — иррациональное число. Может ли сумма $a+b$ быть рациональным числом? [Нет.]

21. Может ли сумма двух иррациональных чисел быть рациональным числом? [Может.]

22. Может ли разность двух иррациональных чисел быть рациональным числом? [Может.]

23. В дроби $\frac{a}{b}$ числитель — иррациональное число, а знаменатель — рациональное число. Может ли $\frac{a}{b}$ быть рациональным числом?

24. Числа a и b — оба иррациональны. Может ли дробь $\frac{a}{b}$ быть рациональным числом?

25. Какие числа называются действительными числами?

26. Всякому ли действительному числу соответствует точка на числовой оси?

27. Можно ли сказать, что $2a$ есть чётное число, где a — некоторое иррациональное число?
[Нельзя, так как понятие чётного и нечётного числа было введено только для целых чисел.]

28. Какие действия над рациональными числами выполнимы без оговорок в области рациональных чисел?
[Сложение, вычитание, умножение, деление (кроме деления на нуль).]

29. Какие из данных чисел являются рациональными числами и какие иррациональными:

1) $\sqrt{25}$; 2) $\sqrt{5}$; 3) $\sqrt[5]{-8}$; 4) $4-\sqrt{3}$; 5) $\sqrt{4}-6$;
6) $5\sqrt{3}\cdot\sqrt{12}$; 7) $\sqrt{\pi}$; 8) $\pi-1$?

Ответ: [1), 5) и 6) — рациональные числа.]

30. Доказать, что сумма, разность, произведение и частное (при условии неравенства делителю нулю) двух рациональных чисел — рациональное число.

Ответ: [Рассмотрим доказательство для частного. Делимое a и делитель b — рациональные числа. Предположим, что $\frac{a}{b}$ — иррациональное число. Тогда приходим к неверному утверждению, что произведение рационального числа (не равного 0) на иррациональное есть рациональное число.]

§ 4. Извлечение корня из произведения, дроби и степени. Вынесение множителей из-под радикала

В упражнениях § 4 принимать: 1) значения букв — только положительные и 2) величины корней — арифметические.

а) Корень из степени:

1. $\sqrt{2^6}$; $\sqrt{3^4}$; $\sqrt{5^4}$; $\sqrt[3]{5^3}$; $\sqrt[3]{3^9}$; $\sqrt[4]{2^8}$; $\sqrt[5]{3^{10}}$.

2. $\sqrt{a^4}$; $\sqrt{a^8}$; $\sqrt{a^{20}}$; $\sqrt{a^{2n}}$; $\sqrt{a^{4n+2}}$; $\sqrt{x^{6n+8}}$.

3. $\sqrt[3]{a^{12}}$; $\sqrt[3]{-x^{15}}$; $\sqrt[3]{-x^{3n}}$; $\sqrt[3]{-a^{3n+6}}$; $\sqrt[3]{-x^{6+9n}}$.

4. $\sqrt[4]{a^8}$; $\sqrt[4]{a^{4n}}$; $\sqrt[5]{-a^{10}}$; $\sqrt[5]{-a^{10n+5}}$; $\sqrt[7]{n^{14}}$; $\sqrt[n]{y^{2n}}$.

б) Корень из произведения:

1. $\sqrt{4\cdot 49}$; $\sqrt{16\cdot 9}$; $\sqrt{25\cdot 81}$; $\sqrt{49\cdot 25}$; $\sqrt{100\cdot 4}$; $\sqrt{36\cdot 81}$.

2. $\sqrt{4\cdot 9\cdot 25}$; $\sqrt{9\cdot 16\cdot 25}$; $\sqrt{4\cdot 100\cdot 49}$; $\sqrt{16\cdot 625\cdot 36}$.

3. $\sqrt[3]{8\cdot 27}$; $\sqrt[3]{27\cdot 125}$; $\sqrt[4]{16\cdot 81}$; $\sqrt[4]{16\cdot 256}$.

4. $\sqrt{a^2b^4}$; $\sqrt{4a^4b^{10}}$; $\sqrt{25a^8b^4}$; $\sqrt{144x^2y^4}$; $\sqrt{169a^6b^{14}}$.

5. $\sqrt[3]{a^6b^3}$; $\sqrt[3]{8a^9b^{12}}$; $\sqrt[3]{27x^6y^9}$; $\sqrt[4]{a^{12}b^8}$; $\sqrt[5]{a^{10}b^5c^{15}}$.

6. $\sqrt[3]{-27a^3b^6}$; $\sqrt[4]{16a^{4n}b^8}$; $\sqrt[5]{-32a^5b^{10}}$; $\sqrt[3]{-3^6a^{6k+3}}$.

7. $\sqrt{16a^4(x+y)^2}$; $\sqrt[3]{-8a^6(x+y)^3}$; $\sqrt[4]{81x^8(a+b)^4}$; $\sqrt[5]{-32x^{10}(a+b)^5}$.

в) Корень из дроби:

1. $\sqrt{\frac{1}{9}}$; $\sqrt{\frac{4}{25}}$; $\sqrt{\frac{36}{100}}$; $\sqrt{\frac{144}{169}}$; $\sqrt{\frac{121}{196}}$.

2. $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$; $\sqrt[3]{\frac{64}{27}}$; $\sqrt[3]{\frac{64}{125}}$; $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$; $\sqrt[5]{\frac{1}{32}}$.

3. $\sqrt{\frac{16a^2b^4}{25c^4}}$; $\sqrt{\frac{64a^4b^6}{81x^8y^2}}$; $\sqrt{\frac{0{,}01a^4}{x^6y^{10}}}$.

4. $\sqrt[3]{\frac{27a^6b^{12}}{64x^8}}$; $\sqrt[3]{-\frac{a^{3n}}{8x^6}}$; $\sqrt[4]{\frac{81}{16}a^8b^{12}}$.

г) Вынесение множителя из-под радикала и введение его под радикал.

Вывести из-под радикала множители:

1. $\sqrt{8}$; $\sqrt{12}$; $\sqrt{18}$; $\sqrt{50}$; $\sqrt{200}$; $\sqrt{162}$; $\sqrt{288}$.

2. $\sqrt[3]{16}$; $\sqrt[3]{54}$; $\sqrt[3]{81}$; $\sqrt[3]{250}$; $\sqrt[3]{32}$; $\sqrt[3]{108}$; $\sqrt[3]{375}$.

3. $\sqrt[4]{32}$; $\sqrt[4]{48}$; $\sqrt[4]{80}$; $\sqrt[4]{162}$; $\sqrt[5]{64}$.

4. $\sqrt{a^5}$; $\sqrt{a^7}$; $\sqrt[3]{x^5}$; $\sqrt[3]{-a^{10}}$; $\sqrt[4]{x^9}$; $\sqrt[5]{x^6}$; $\sqrt[n]{x^{n+1}}$.

5. $\sqrt{a^3b^5}$; $\sqrt{4a^3b^3}$; $\sqrt{32a^7b^{11}}$; $\sqrt{162x^9y^3}$; $\sqrt{27a^{2n+1}b^5}$.

6. $\sqrt[3]{a^5b^7}$; $\sqrt[3]{16x^8y^{10}}$; $\sqrt[3]{81a^4b^{3n}}$; $\sqrt[4]{a^9b^{10}}$; $\sqrt[4]{32a^{4n}b^{8k+1}}$.

7. $\sqrt{\frac{8}{27}}$; $\sqrt{\frac{1}{125}}$; $\sqrt{\frac{20}{27}}$; $\sqrt{\frac{54}{363}}$; $\sqrt[3]{\frac{27}{16}}$; $\sqrt[3]{\frac{54}{125}}$.

Подвести под радикал множители, стоящие перед ним:

1. $2\sqrt{5}$; $3\sqrt{2}$, $6\sqrt{3}$; $7\sqrt{2}$; $8\sqrt{10}$; $10\sqrt{5}$; $11\sqrt{3}$.

2. $2\sqrt[3]{3}$; $3\sqrt[3]{2}$; $5\sqrt[3]{2}$; $4\sqrt[3]{10}$; $2\sqrt[4]{3}$; $2\sqrt[4]{10}$.

3. $2\sqrt{\frac{3}{2}}$; $3\sqrt{\frac{5}{3}}$; $4\sqrt{\frac{5}{8}}$; $5\sqrt{2\frac{1}{5}}$; $2\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$; $3\sqrt[3]{\frac{5}{3}}$.

4. $3\sqrt{a}$; $5\sqrt{ab}$; $a\sqrt{2a}$; $3ab^3\sqrt{a}$; $4ab\sqrt{2ab}$.

5. $\frac{x}{y}\sqrt{y}$; $2a\sqrt{\frac{b}{4a}}$; $3\sqrt[3]{\frac{a}{3}}$; $\frac{y}{x}\sqrt[3]{\frac{x^2}{y^2}}$; $2x^2y\sqrt[3]{\frac{1}{2xy}}$.

6. Не производя вычисления корней, определить, какое из чисел больше: 1) $2\sqrt{3}$ или $\sqrt{8}$? 2) $3\sqrt{5}$ или $\sqrt{80}$? 3) $3\sqrt{\ }$ или $\sqrt{27}$? 4) $5\sqrt{3}$ или $3\sqrt{5}$?

7. Определить наибольшее из чисел: $2\sqrt{17}$; $6\sqrt{6}$; $\sqrt{150}$.

8. Которое из чисел больше: $\sqrt[3]{15}$ или $2\sqrt[3]{2}$? $4\sqrt[3]{3}$ или $2\sqrt[3]{25}$?

9. Вычислить с точностью до 1 двумя способами $2\sqrt{3}$. Почему получились различные результаты? Который из них более точен?

10. Вычислить с точностью до 1: $2\sqrt{3}$; $3\sqrt{3}$; $5\sqrt{5}$; $4\sqrt{2}$; $10\sqrt{2}$.

§ 5. Основное свойство корня. Приведение корней к общему показателю

1. Найти: $\sqrt{4}$; $\sqrt[4]{16}$; $\sqrt[6]{64}$.

2. Найти: $\sqrt{a^4}$; $\sqrt[4]{a^8}$; $\sqrt[6]{a^{12}}$.

3. Что больше: 1) $\sqrt{2}$ или $\sqrt[4]{4}$? 2) $\sqrt{3}$ или $\sqrt[4]{81}$? 3) $\sqrt[4]{a^2}$ или $\sqrt[6]{a^3}$?

4. Сократить показатели корней и подкоренных выражений: 1) $\sqrt[4]{a^2}$; 2) $\sqrt[8]{a^4}$; 3) $\sqrt[9]{b^6}$; 4) $\sqrt[15]{b^{10}}$; 5) $\sqrt[20]{a^5b^5}$; 6) $\sqrt[5]{a^{10}b^5}$; 7) $\sqrt[2n]{a^nb^{mn}}$; 8) $\sqrt[6]{25a^4b^2}$; 9) $\sqrt[9]{27a^6b^3}$; 10) $\sqrt[12]{64a^9b^{3m}}$.

5. Привести к общему показателю корни: 1) $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$; 2) $\sqrt{5}$, $\sqrt[4]{24}$; 3) $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[6]{50}$; 4) $\sqrt{2}$, $\sqrt[8]{17}$; 5) $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$; 6) $\sqrt{a}$ $\sqrt[6]{a}$; 7) $\sqrt[4]{b^3}$, $\sqrt[6]{b}$; 8) $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[4]{b}$; 9) $\sqrt[4]{a^3}$, $\sqrt[5]{a^2}$; 10) $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[3n]{b}$.

6. Что больше: 1) $\sqrt{5}$ или $\sqrt[4]{24}$? 2) $\sqrt[3]{7}$ или $\sqrt[6]{50}$? 3) $2\sqrt{2}$ или $\sqrt[4]{65}$? 4) $\sqrt{2}$ или $\sqrt[3]{3}$; 5) $\sqrt{2}$ или $\sqrt[5]{5}$?

7. Каждый из корней $\sqrt{2}$ и $\sqrt[3]{2{,}8}$, вычисленный с точностью до 0,1, оказывается равным 1,4. Найти посредством приведения к общему показателю, какой из корней в действительности больше.

8. Какие из приведённых равенств справедливы и какие нет? (Рассматривать только арифметические значения корней.)

1) $\sqrt{a^2+2ab+b^2}=a+b$; 2) $\sqrt{x^2-y^2}=x-y$;

3) $\sqrt{a^2-10a+25}=a-5$.

9. Какое из иррациональных чисел $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[5]{3}$, $\sqrt[15]{26}$ является наибольшим?

Подобные корни

Доказать подобие корней:

1) $\sqrt{2}$ и $\sqrt{8}$; 2) $\sqrt{3}$ и $\sqrt{12}$; 3) $\sqrt[3]{54}$ и $\sqrt[3]{16}$; 4) $\sqrt{20}$ и $\sqrt{45}$; 5) $2\sqrt{8}$ и $3\sqrt{50}$; 6) $\sqrt[3]{24}$ и $\sqrt[3]{81}$; 7) $\sqrt{\frac{1}{2}}$ и $\sqrt{2}$; 8) $\sqrt[5]{a^7}$ и $\sqrt[6]{a^{13}}$; 9) $\sqrt[3]{27a^5}$ и $\sqrt[3]{8a^8}$; 10) $\sqrt[6]{a^7b}$ и $\sqrt[6]{a^{13}b^7}$.

§ 6. Сложение и вычитание корней

1. Площадь квадрата равна 2 $м^2$. Найти его периметр.

2. Площади двух квадратов равны 48 $см^2$ и 75 $см^2$. На сколько сторона второго квадрата больше стороны первого?

3. Сложить одночлены: 1) $2\sqrt{3}$ и $5\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{8}$ и $\sqrt{18}$; 3) $\sqrt{50}$ и $\sqrt{18}$; 4) $\sqrt[3]{16}$ и $3\sqrt[3]{2}$; 5) $\sqrt{a^3}$ и $\sqrt{a}$; 6) $\sqrt{a^5b}$ и $\sqrt{a^7b}$.

4. Упростить выражения: 1) $2\sqrt{2}+3\sqrt{2}-5\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{27}-\sqrt{54}+2\sqrt{3}$; 3) $2\sqrt{a^3}+5\sqrt{a^3}-a\sqrt{a}$.

5. Упростить выражения и вычислить результат с точностью до 1: 1) $\sqrt{8}+\sqrt{18}$ 2) $4\sqrt{3}-\sqrt{75}$; 3) $3\sqrt{18}+\sqrt{200}$.

6. Какой знак имеет разность двух иррациональных чисел: 1) $2\sqrt{2}$ и $\sqrt{7}$? 2) $5\sqrt{2}$ и $\sqrt{51}$? 3) $\sqrt{2}$ и $\sqrt[3]{3}$? 4) $\sqrt[3]{4}$ и $\sqrt{3}$?

§ 7. Умножение и деление корней

1. Длина и ширина прямоугольника выражаются числами: 1) 2 и $2\sqrt{2}$; 2) $2\sqrt{3}$ и $3\sqrt{3}$; 3) $2\sqrt{3}$ и $3\sqrt{2}$; 4) $2\sqrt{6}$ и $5\sqrt{3}$. Найти его площадь.

2. Перемножить одночлены:

1) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$
2) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}$
3) $\sqrt{6}\cdot\sqrt{12}$
4) $2\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{6}$
5) $0{,}5\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}$
6) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{12}$
7) $\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{18}$
8) $\sqrt[5]{2}\cdot\sqrt[5]{16}$
9) $2\sqrt[3]{20}\cdot 3\sqrt[3]{4}$
10) $\sqrt[3]{54}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$
11) $\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}$
12) $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{a^2}$
13) $\sqrt[5]{b^2}\cdot\sqrt[5]{b^4}$
14) $a\sqrt[6]{b^5}\cdot a^2\sqrt[6]{b^4}$
15) $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$
16) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{3}$
17) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{8}$
18) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3}$
19) $\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[2]{2}$
20) $\sqrt[4]{8}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}$
21) $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt{a}$
22) $\sqrt[5]{b^2}\cdot\sqrt{b}$
23) $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[4]{b}$
24) $2\sqrt[3]{a}\cdot 3\sqrt[5]{a}$
25) $3\sqrt{ab}\cdot 2\sqrt[3]{\frac{1}{ab}}$

3. Произвести умножение:

1) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})\cdot\sqrt{2}$
2) $(\sqrt{5}+\sqrt{3})\cdot\sqrt{3}$
3) $(\sqrt{5}-\sqrt{3})\cdot\sqrt{5}$
4) $(\sqrt{7}-\sqrt{2})\cdot\sqrt{7}$
5) $(\sqrt{7}+\sqrt{2})\cdot\sqrt{7}$
6) $(\sqrt{6}+\sqrt{2})\cdot\sqrt{6}$
7) $(\sqrt{6}-\sqrt{2})\cdot\sqrt{2}$
8) $(\sqrt{12}-\sqrt{3})\cdot\sqrt{3}$
9) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})\cdot\sqrt{a}$
10) $(\sqrt{a}-\sqrt{b})\cdot\sqrt{b}$

11) $(\sqrt[3]{a^4}-\sqrt[3]{b})\cdot\sqrt[3]{b^2}$

12) $(\sqrt[5]{a^n}-\sqrt[5]{b})\cdot\sqrt[5]{a}$

13) $(\sqrt{a}-\sqrt[3]{b})\cdot\sqrt{a}$

14) $(\sqrt{x}-\sqrt[3]{x^2})\cdot\sqrt[4]{x}$

15) $(\sqrt[3]{b}-\sqrt[4]{a})\cdot\sqrt{ab}$

4. Площадь одного квадрата 40 $м^2$, а другого 10 $м^2$. Во сколько раз сторона первого квадрата больше стороны второго?

5. Произвести деление:

1) $2\sqrt{2}:2$

2) $6\sqrt{3}:4$

3) $\sqrt{2}:2$

4) $\sqrt{5}:5$

5) $\sqrt{15}:15$

6) $3:\sqrt{3}$

7) $6:\sqrt{6}$

8) $5:\sqrt{5}$

9) $6\sqrt{3}:2\sqrt{3}$

10) $10\sqrt{2}:5\sqrt{2}$

11) $\sqrt{24}:\sqrt{6}$

12) $\sqrt{18}:\sqrt{2}$

13) $2:\sqrt[3]{4}$

14) $\sqrt{4}:\sqrt[3]{2}$

15) $\sqrt{6}:\sqrt[3]{2}$

16) $\sqrt{2a}:\sqrt{a}$

17) $\sqrt[3]{4a}:\sqrt[3]{2a}$

18) $a:\sqrt{a}$

19) $b:\sqrt[3]{b^2}$

20) $a:\sqrt[3]{a}$

6. Произвести деление:

1) $(2\sqrt{2}-4\sqrt{3}):2$

2) $(15\sqrt{2}-6\sqrt{3}):0,3$

3) $(\sqrt{10}+\sqrt{5}):\sqrt{5}$

4) $(\sqrt{30}-\sqrt{15}):\sqrt{3}$

5) $(\sqrt{12}-\sqrt{6}):\sqrt{3}$

6) $(\sqrt[3]{45}+\sqrt[3]{18}):\sqrt[3]{9}$

7) $(\sqrt[3]{36}-\sqrt[3]{16}):\sqrt[3]{2}$

8) $(\sqrt[3]{18}-\sqrt[3]{3}):\sqrt[3]{3}$

9) $(\sqrt{2a}+\sqrt{a}):\sqrt{a}$

10) $\left(\sqrt{a}-\sqrt{\frac{a}{2}}\right):\sqrt{a}$

11) $(\sqrt{a}-\sqrt[3]{a^2}):\sqrt{a}$

12) $(\sqrt[5]{a}-\sqrt[4]{a}):\sqrt[5]{a}$

13) $(\sqrt[3]{b^2}-\sqrt{b}):\sqrt[4]{b}$

14) $(\sqrt[5]{b^4}-\sqrt{b}):\sqrt[10]{b^3}$

15) $(a\sqrt{b}-a\sqrt[3]{b})\cdot a\sqrt{b}$

7. Можно ли любое положительное число представить в виде произведения двух иррациональных чисел?

[Можно. Например, число 3 может быть представлено в виде $(3+\sqrt{6})(3-\sqrt{6})$ или, иначе, $\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=3$.]

8. Может ли частное двух иррациональных чисел быть целым положительным числом?

[Может. Например: 1) $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=2$; 2) $(3+3\sqrt{3}):(1+\sqrt{3})=3$.]

9. Может ли произведение двух иррациональных чисел быть рациональным числом?

[Может. Например: 1) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}=5$; 2) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{4}=2$.]

10. Частное $\dfrac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[5]{3}}$ будет больше или меньше единицы?

§ 8. Возведение корней в степень и извлечение из них корня

1. Площадь одного квадрата 8 *м*², а сторона другого квадрата в 2 раза больше стороны первого квадрата. Найти площадь второго квадрата. (Решить двумя способами.)

2. Возвести в степень:

1) $(\sqrt{2})^2$	6) $(2\sqrt{5})^3$	11) $(a\sqrt{a})^3$	16) $(\sqrt{3})^4$
2) $(\sqrt[3]{3})^2$	7) $\left(\frac{1}{7}\sqrt{6}\right)^2$	12) $(b\sqrt{b})^2$	17) $(\sqrt[5]{7})^{10}$
3) $(\sqrt[3]{2})^3$	8) $(2\sqrt[3]{9})^2$	13) $\left(\frac{a}{b}\sqrt{b}\right)^2$	18) $(\sqrt{5})^3$
4) $(\sqrt[3]{4})^2$	9) $(\sqrt{a})^3$	14) $\left(\frac{a}{b}\sqrt{ab}\right)^3$	19) $(\sqrt[3]{6})^4$
5) $(2\sqrt{3})^2$	10) $(\sqrt[3]{b})^2$	15) $(\sqrt[4]{a^2bc})^3$	20) $(\sqrt[5]{3})^7$

3. Возвести в степень:

1) $(2+\sqrt{2})^2$	6) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$
2) $(3-\sqrt{3})^2$	7) $(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2$
3) $(1+2\sqrt{2})^2$	8) $(2\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$
4) $(2\sqrt{3}-1)^2$	9) $(2\sqrt{2}-3\sqrt{3})^2$
5) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$	10) $(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$
11) $(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})^2$	16) $\left(\sqrt{3+\sqrt{2}}+\sqrt{3-\sqrt{2}}\right)^2$
12) $(3-\sqrt{2}-\sqrt{3})^2$	17) $\left(\sqrt{3+\sqrt{2}}-\sqrt{3-\sqrt{2}}\right)^2$
13) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$	18) $\left(\sqrt{5+\sqrt{3}}+\sqrt{5-\sqrt{3}}\right)^2$
14) $(\sqrt{2a}+\sqrt{3b})^2$	19) $\left(\sqrt{a+\sqrt{b}}+\sqrt{a-\sqrt{b}}\right)^2$
15) $(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})^3$	20) $\left(\sqrt{a+\sqrt{b}}-\sqrt{a-\sqrt{b}}\right)^2$

4. Проверить равенства:

$$\sqrt{\sqrt{16}}=\sqrt[4]{16};\quad \sqrt[3]{\sqrt{64}}=\sqrt[6]{64}.$$

5. Извлечь корень:

$$\sqrt[4]{625}; \quad \sqrt[6]{64}; \quad \sqrt[4]{1296}.$$

6. Извлечь корень:

1) $\sqrt{\sqrt{2}}$
2) $\sqrt{\sqrt[3]{3}}$
3) $\sqrt[3]{\sqrt{5}}$
4) $\sqrt{\sqrt{8}}$
5) $\sqrt[3]{\sqrt{125}}$
6) $\sqrt{\sqrt[3]{a}}$
7) $\sqrt{\sqrt[3]{a^2}}$
8) $\sqrt{\sqrt[3]{a^5}}$
9) $\sqrt[4]{\sqrt{a^2}}$
10) $\sqrt[15]{\sqrt[6]{a^5}}$
11) $\sqrt{a\sqrt{a}}$
12) $\sqrt{b\sqrt[3]{b}}$
13) $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{b}}}$
14) $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}$
15) $\sqrt{a\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a}}}$

§ 9. Освобождение от иррациональности в знаменателе

1. Привести к рациональному виду знаменатель:

1) $\frac{2}{\sqrt{3}}$
2) $\frac{5}{\sqrt{5}}$
3) $\frac{1}{\sqrt{2}}$
4) $\frac{1}{\sqrt{50}}$
5) $\frac{1}{\sqrt{18}}$
6) $\frac{6}{\sqrt{3}}$
7) $\frac{15}{\sqrt{5}}$
8) $\frac{4}{3\sqrt{2}}$
9) $\frac{10}{3\sqrt{15}}$
10) $\frac{2}{\sqrt[3]{2}}$
11) $\frac{a}{\sqrt{a}}$
12) $\frac{b}{\sqrt[3]{b}}$
13) $\frac{n}{\sqrt{n^3}}$
14) $\frac{2a}{\sqrt{a}}$
15) $\frac{3ab}{\sqrt{3a}}$
16) $\frac{1}{\sqrt{x+y}}$
17) $\frac{x-y}{\sqrt{x-y}}$
18) $\frac{a+b}{\sqrt{a+b}}$
19) $\frac{a^2-b^2}{\sqrt{a-b}}$
20) $\frac{a+b}{\sqrt{a^2-b^2}}$
21) $\frac{1}{1+\sqrt{3}}$
22) $\frac{4}{\sqrt{5}-1}$
23) $\frac{2}{\sqrt{3}+1}$
24) $\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$
25) $\frac{6}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$

2. Привести к рациональному виду числитель дроби:

1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
2) $\frac{\sqrt{5}}{5}$
3) $\frac{\sqrt{3}}{6}$
4) $\frac{\sqrt{12}}{4}$
5) $\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$
6) $\frac{\sqrt{a}}{a}$
7) $\frac{\sqrt[3]{a^2}}{a}$
8) $\frac{\sqrt{ab}}{a}$
9) $\frac{\sqrt[4]{n^3}}{n}$
10) $\frac{\sqrt[5]{a^8}}{ab}$
11) $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$
12) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{4}$
13) $\frac{\sqrt{3}+1}{6}$
14) $\frac{\sqrt{7}+\sqrt{2}}{20}$
15) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}$

Глава X

КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. Неполные квадратные уравнения

1. Высота прямоугольника в 2 раза больше основания. Определить основание, если площадь прямоугольника равна 50 *см*^{2}.

2. Решить уравнения:

1) $2x^2 = 18$	6) $x^2 - 4 = 0$	11) $4x^2 - 5 = 0$
2) $5x^2 = 20$	7) $x^2 - 49 = 0$	12) $9x^2 - 8 = 0$
3) $4x^2 = 1$	8) $4x^2 - 1 = 0$	13) $2x^2 + 8 = 0$
4) $9x^2 = 16$	9) $16x^2 - 25 = 0$	14) $3x^2 + 27 = 0$
5) $25x^2 = 1$	10) $x^2 - 8 = 0$	15) $x^2 + 36 = 11$

16) $ax^2 - 4a^2 = 0$	19) $3x^2 - 9a^6 = 0$
17) $x^2 = 9a^2b^2$	20) $5ax^2 - 20a^3 = 0$
18) $x^2 = 25a^4$	

3. Решить уравнения:

1) $x^2 - x = 0$	6) $2x^2 = 4x$	11) $x^2 + ax = 0$
2) $x^2 - 5x = 0$	7) $5x^2 = 10x$	12) $y^2 - by = 0$
3) $x^2 + 4x = 0$	8) $3x^2 = 8x$	13) $ay^2 - 2a^2y = 0$
4) $2x^2 + 6x = 0$	9) $4x^2 = 9x$	14) $4y^2 = 8ay$
5) $5x^2 + 12x = 0$	10) $6x^2 = -15x$	15) $20aby^2 = 5a^2b^2y$

4. Произведение некоторого числа на свою половину равно 18. Найти это число.

5. Произведение половины некоторого числа на $\frac{1}{3}$ его равно 6. Найти это число.

6. Произведение некоторого числа на удвоенное то же число равно 8. Найти это число.

7. Стороны прямоугольника относятся, как 2 : 3. Площадь прямоугольника равна 20 *см*^{2}. Найти стороны.

8. При каких значениях x справедливо равенство:

1) $x^2 = 0$; 2) $5x^2 = 0$; 3) $\frac{2}{3}x^2 = 0$?

9. Какое квадратное уравнение имеет:

1) один корень, равный нулю?
2) оба корня, равные нулю?
3) корни, являющиеся противоположными числами?

§ 2. Полные квадратные уравнения

1. Не решая следующих уравнений, определить, какие из них имеют два различных корня, двукратный корень или не имеют действительных корней:

1) $x^2 - 2x + 1 = 0$	5) $x^2 - 2x - 3 = 0$
2) $x^2 - 10x + 25 = 0$	6) $x^2 - 4x + 3 = 0$
3) $x^2 + 6x + 9 = 0$	7) $x^2 - 14x + 49 = 0$
4) $x^2 - x - 6 = 0$	8) $x^2 + x - 1 = 0$

9) $x^2-2x+5=0$

10) $2x+4=x^2$

11) $2x^2-9x+7=0$

12) $2x^2+3x-2=0$

13) $2x^2-3x+1=0$

2. Не решая следующих уравнений, определить знаки их корней:

1) $x^2-4x+4=0$

2) $x^2-6x+5=0$

3) $x^2+4x-5=0$

4) $x^2+2x+1=0$

5) $x^2-10x+16=0$

6) $x^2-20x-30=0$

7) $2x^2+9x-22=0$

8) $2x^2+5x+2=0$

9) $9x^2+8x-4=0$

10) $4x^2+5x-1=0$

3. Не решая следующих уравнений, указать, какие из них имеют иррациональные корни:

1) $x^2-4x+4=0$

2) $x^2+2x-4=0$

3) $5x^2+2x-1=0$

4) $2x^2-9x+7=0$

[Иррациональные корни имеют 2,3 и 4 уравнения.]

4. Указать условие, при котором уравнение $ax^2+bx+c=0$, где a, b и c — рациональные числа, имеет иррациональные корни?

5. Составить квадратное уравнение, корни которого $2x_1$ и $3x_2$, где x_1 и x_2 — корни уравнения: $x^2-5x+6=0$.

Ответ: [$x^2-13x+36=0$ или $x^2-12x+36=0$.]

6. При каком значении p уравнение:

1) $x^2-px+10=0$	будет	иметь	корень, равный	2?
2) $x^2-px+6=0$	„	„	„ „	6?
3) $x^2+px+15=0$	„	„	„ „	5?
4) $x^2+px+36=0$	„	„	двукратный корень?	
5) $x^2+px+10=0$	„	„	действительные корни?	

7. При каком значении q уравнение:

1) $x^2-4x+q=0$	будет	иметь	двукратный корень?	Какой?
2) $x^2+12x+q=0$	„	„	„ „	„
3) $x^2+10x+q=0$	„	„	действительные корни?	

8. Составить квадратные уравнения по данным корням их:

1) 2 и 3

2) 3 и 5

3) -2 и -4

4) -1 и -5

5) 3 и -2

6) -5 и 2

7) 2 и 2

8) -5 и -5

9) 3 и 0

10) 0 и -2

11) 2 и -2

12) -7 и 7

13) 0 и $\frac{1}{2}$

14) $-\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{3}$

15) $-0,1$ и $0,3$

16) $-\frac{1}{4}$ и 4

17) 3 и -3

18) a и $-2a$

19) a и $\frac{1}{a}$

20) $2a$ и $3a$

9. Один из корней уравнения $x^2 - 7x + 10 = 0$ равен 2. Определить второй корень.

10. Не решая уравнения $x^2 - 8x + 12 = 0$, составить новое, корни которого были бы в 3 раза больше корней данного.

11. Не решая уравнения $x^2 - 10x + 24 = 0$, составить новое, корни которого были бы в 2 раза меньше корней данного.

12. Может ли квадратное уравнение с рациональными коэффициентами иметь иррациональные корни?

13. Может ли квадратное уравнение с рациональными коэффициентами иметь один рациональный, а другой иррациональный корень?

14. Один из корней квадратного уравнения с рациональными коэффициентами равен: 1) $1 + \sqrt{2}$; 2) $2 - \sqrt{3}$; 3) $\sqrt{3} - 1$.

Чему равен второй корень?

[1) $1 - \sqrt{2}$; 2) $2 + \sqrt{3}$; 3) $-\sqrt{3} - 1$.]

15. В каком случае можно сразу, без вычисления дискриминанта, утверждать, что данное квадратное уравнение имеет действительные корни?

16. При каких значениях x следующие выражения обращаются в 0:

1) $x - 5$ 3) $x^2 - 4$ 5) $2x^2 - 2x$ 7) $x^2 - 8x + 7$
2) $2x - 6$ 4) $x^2 - 5$ 6) $x^2 - 5x + 6$ 8) $x^2 + 5x - 6$

Ответ: [1) 5; 2) 3; 3) ± 2; 4) $\pm\sqrt{5}$; 5) 0 и 1; 6) 2 и 3; 7) 7 и 1; 8) 6 и 1.]

17. Найти корни следующих выражений:

1) $x^2 - 9$ 3) $2x^2 - 8x$ 5) $x^2 - 9x + 18$
2) $6x^2 - 12$ 4) $ax^2 - bx$ 6) $x^2 + x - 20$

18. Разложить на множители следующие трёхчлены:

1) $x^2 - 2x + 1$ 6) $a^2 - 2a - 3$
2) $x^2 - 6x + 8$ 7) $a^2 - 8a - 20$
3) $x^2 - 4x + 3$ 8) $a^2 + 2a - 15$
4) $x^2 + 3x + 2$ 9) $a^2 + 5a - 24$
5) $x^2 + 7x + 10$ 10) $x^2 - ax - 6a^2$

19. Составить несколько трёхчленов, имеющих корни: $x_1 = 3$ и $x_2 = 4$.

Ответ: [$x^2 - 7x + 12$; $2x^2 - 14x + 28$; $5x_2 - 35x + 60$.]

20. При каком значении p следующие трёхчлены будут полными квадратами:

1) $x^2 - px + 4$ 3) $x^2 + px + 3$
2) $x^2 + px + 4$ 4) $2x^2 + px + 7$

§ 3. Иррациональные уравнения

1. Не решая уравнений, объяснить, почему каждое из них не может иметь действительных решений:

1) $\sqrt{x-2}+\sqrt{x+5}=0$

2) $\sqrt{x-5}-\sqrt{4-x}=3$

3) $\sqrt{3x-7}-\sqrt{2-x}=1$

4) $\sqrt{x^2+11}+\sqrt{x^2-4}=2$

5) $\sqrt{x^2-1}+\sqrt{5x+7}=3$

2. Не решая уравнений, определить границы его корней:

1) $\sqrt{x-5}+\sqrt{x}=5$

2) $\sqrt{x-7}-\sqrt{x-12}=1$

3) $\sqrt{5-x}+7=\sqrt{x+60}$

3. Решить уравнения:

1) $\sqrt{x}=2$

2) $\sqrt{x}-3=0$

3) $\sqrt{x}+1=0$

4) $\sqrt{x-3}=5$

5) $\sqrt{2x-7}=5$

6) $\sqrt{x-2}=\sqrt{2x-3}$

7) $\sqrt{x^2-1}=\sqrt{3}$

8) $\sqrt[3]{x+2}=3\sqrt[3]{x-1}$

9) $\sqrt{x-a}=b$

10) $\sqrt{a-x}=a+b$

4. Равносильны ли уравнения?

1) $x=2$ и $\sqrt{x}=\sqrt{2}$

2) $x+2=3$ и $\sqrt{3+x}=2$

3) $x^2-1=3$ и $x+\sqrt{6+x}=3$

4) $x-a=0$ и $\sqrt{x+2a}=\sqrt{3a}$

Глава XI

ФУНКЦИИ И ИХ ГРАФИКИ

1. Может ли выражение $(1+x)$ принимать всевозможные численные значения?

2. При каком значении x выражение $(1+x)$ имеет наименьшее неотрицательное значение? [При $x=-1$.]

3. Могут ли значения выражения $\frac{1}{1+x^2}$ быть большими 1 (x — действительное число)? Каково наибольшее значение этого выражения? Имеет ли это выражение наименьшее значение?

4. Имеет ли выражение x^2 наименьшее и наибольшее значения (x — действительное число)?

5. Выражение $\sqrt{x^2+9}$ — иррациональное. Может ли его значение при некоторых частных значениях x быть рациональным? Что здесь является аргументом и что функцией?

6. При каких действительных значениях x выражение: $\sqrt{x}$ имеет смысл? $\sqrt{-x}$ имеет смысл? $\sqrt{\frac{1}{x}}$ имеет смысл? $\sqrt{1-x}$ имеет смысл?

7. Можно ли сказать, что функция x^2 возрастает при положительных значениях x?

8. Можно ли сказать, что функция x^2 возрастает при всех действительных значениях x?

9. При каких действительных значениях x функция $\sqrt{1-x^2}$ имеет смысл?

10. Может ли функция $x+\frac{1}{x}$ принимать значения меньшие 1, если x — положительное число?

11. Из формулы для площади прямоугольника $s=ab$ выразить b как функцию остальных величин.

12. Из приведённых ниже формул выразить указанные величины как функции остальных:

1) Площадь квадрата $s=a^2$. Найти a.
2) Площадь трапеции $s=\frac{(a+b)h}{2}$. Найти a.
3) Объём куба $V=a^3$. Найти a.
4) Объём параллелепипеда $V=abc$. Найти c.
5) Длина окружности $C=2\pi R$. Найти R.
6) Путь S, пройденный свободно падающим телом, выражается формулой: $S=\frac{gt^2}{2}$. Найти t.

13. В каком координатном углу находится точка, если её координаты таковы:

1) (5,2)	5) (0, —2)
2) (6, —4)	6) (—3,2)
3) (2,0)	7) (0,0)
4) (—3, 5)	

14. На какой линии лежат точки, абсциссы и ординаты которых равны между собой и по величине и по знаку? Как расположена эта линия? Какие углы она образует с осями координат?

15. Какой угол с осью абсцисс образует линия, ординаты которой равны по абсолютной величине абсциссам, но противоположны им по знаку?

16. В какой зависимости находятся при равномерном движении:

а) путь, проходимый в данное время и скорость движения?
б) время, в течение которого проходится данный путь и скорость движения?
в) путь и время, в течение которого он проходится (при данной скорости)?

17. Будут ли пропорциональны друг другу следующие пары переменных величин:

а) площадь прямоугольника и его основание (при неизменной высоте)?

б) хорда и центральный угол, опирающийся на неё?

в) площадь квадрата и его сторона?

18. Какой угол с осью абсцисс образует график функции: $y = x$; $y = -x$?

19. Больше или меньше угла в 45° образует график функции с осью абсцисс: 1) $y = 2x$; 2) $y = 5x$; 3) $y = -\frac{1}{2}x$; 4) $y = 1{,}2x$?

20. Если построить на одном и том же чертеже графики функций $y = \frac{2}{x}$ и $y = \frac{5}{x}$, то в чём будут сходство и различие в их изображении?

21. Почему функция $y = kx + b$ называется линейной?

22. Если построить на одном и том же чертеже графики функций $y = 2x$, $y = 2x + 5$, $y = 2x - 1$, то в чём будет сходство и в чём различие в их изображении?

23. В какой точке график функции $y = 2x + 1$ пересекает ось x-ов? Ось y-ков?

24. Назовите линейную функцию, график которой образует с осью x-ов угол 45° и пересекает ось y-ков в точке (0,0)? (0,2)? (0, —3)?

25. При каком значении x функции $y = 2x - 6$ и $y = x - 2$ имеют одно и то же значение и какое? Ответ: [$x = 4$; $y = 2$.]

26. На одном и том же чертеже построены графики функций $y = ax + b$ и $y = a_1x + b_1$. При какой зависимости между a и a_1 b и b_1 графики будут параллельны? [При $a = a_1$ и $b \neq b_1$.]

27. При каком значении a график функции $y = ax + 1$ параллелен графику функции: $y = -2x + 3$? [При $a = -2$.]

28. Можно ли утверждать, что функция $y = \frac{1}{x}$ является убывающей?

[Нет. Она убывает при $x > 0$ и при $x < 0$, но не является убывающей в области всех действительных чисел.]

29. Даны функции: $y = x^2$; $y_1 = 2x^2$; $y_2 = \frac{1}{2}x^2$. Не вычерчивая графики этих функций, определить, в чём сходство между графиками этих функций и в чём различие?

30. Дана функция: $y = (x - 2)^2$.

Не вычерчивая график этой функции, определить:

1) Вид и положение кривой относительно осей координат.

2) При каких значениях x функция имеет наименьшее значение?

3) При каких значениях x функция y: а) убывает? б) возрастает? в) обращается в нуль?

4) В какой точке пересекает данная кривая ось y?

31. Дана функция: $y = -2(x-1)^2$.

Ответить на 1—4-й вопросы предыдущей задачи.

32. Дана функция: $y = x^2 - 2x + 1$.

1) Представить правую часть уравнения в виде квадрата двучлена.

2) Может ли эта функция иметь отрицательные значения? Неположительные значения?

3) При каких значениях x функция y: а) убывает; б) возрастает; в) обращается в нуль?

33. Дана функция: $y = x^2 - x + \frac{1}{4}$.

Ответить на 1—3-й вопросы предыдущей задачи.

34. При каких условиях квадратный трёхчлен $y = x^2 + px + q$ представляет полный квадрат двучлена?

35. Если на одном и том же чертеже построить функции $y = x^2$, $y = x^2 + 2x$ и $y = x^2 + 2x + 4$, то в чём будет сходство и различие полученных кривых?

36. Дана парабола, выражающаяся уравнением $y = x^2$.

Назвать уравнение каждой из парабол, полученных путём следующих перемещений данной параболы:

1) парабола перенесена на 2 единицы вверх;
2) „ „ „ 3 „ вниз;
3) „ „ „ 1 единицу вправо;
4) „ „ „ 5 единиц влево;
5) направление ветвей параболы изменено на противоположное.

Глава XII

СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЯ 2-й СТЕПЕНИ С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

1. Решить следующие системы, применяя теоремы о сумме и произведении корней квадратного уравнения:

1) $x + y = 3$, $xy = 2$	6) $x + y = 0$, $xy = -4$
2) $x + y = 6$, $xy = 8$	7) $x - y = 2$, $xy = 3$
3) $x + y = 8$, $xy = 7$	8) $x - y = 1$, $xy = 30$
4) $x + y = 1$, $yx = -6$	9) $x + y = a$, $xy = -2a^2$
5) $x + y = -1$, $xy = -12$	10) $x - y = b$, $xy = 2b^2$

2. Сумма двух чисел 7; их произведение 10. Найти эти числа.

3. Сумма двух чисел 15; их произведение 100. Найти эти числа.

4. Разность двух чисел 3; их произведение 15. Найти эти числа.

5. Разность двух чисел 6; их произведение 55. Найти эти числа.

6. Как решить систему двух уравнений, из которых одно 1-й степени, а второе — 2-й степени? Сколько решений имеет такая система?

7. Дана система двух уравнений с двумя неизвестными, причём каждое уравнение — неполное уравнение 2-й степени. Сколько решений (корней) может иметь такая система?

8. Задача, относящаяся к прямоугольнику, привела к системе $\begin{cases} xy = 12 \\ x^2 + y^2 = 25. \end{cases}$ Воспроизвести тексты задачи.

9. Составить несколько задач из разных областей окружающей жизни, решение которых приводит к системе $\begin{cases} x + y = 25 \\ xy = 150 \end{cases}$

Глава XIII

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ЧИСЕЛ

1. Даны последовательности чисел, каждая из которых составлена по некоторому закону:

1) 1, 4, 7, 10, 13, ...
2) 10, 8, 6, 4, 2, ...
3) —8, —4, 0, 4, 8, ...
4) 1, 2, 4, 8, 16, ...
5) $\frac{1}{27}, \frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1, \ldots$
6) 16, 8, 4, 2, 1, ...
7) $1 \times 2,\ 2 \times 3,\ 3 \times 4,\ 4 \times 5, \ldots$
8) $1 + 2,\ 2 + 3,\ 3 + 4,\ 4 + 5, \ldots$
9) 1, 4, 9, 16, 25, ...
10) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$

а) подметить наиболее простой закон образования чисел; продолжить каждую из последовательностей ещё на 3 числа;

б) для последовательностей (1—6) вычислить $(n+1)$-й член, если n-й член равен a;

в) для последовательностей 7—10 вычислить m-й член;

г) приведите примеры других последовательностей.

2. Назвать первые пять членов последовательности, если её общий член выражается формулой:

1) $a_n = 2n$
2) $a_n = 2n - 1$
3) $a_n = \frac{n}{n+1}$
4) $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$
5) $a_n = (-1)^n n$
6) $a_n = 2 + 3(n-1)$
7) $a_n = \frac{n^2 - 1}{n^2}$
8) $a_n = (-1)^{n+1}$
9) $a_n = \frac{(-1)^n}{2n}$

3. Найти формулу общего члена последовательности:

1) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots \ldots \left(\frac{1}{2^n}\right)$

2) $1, 3, 5, 7, 9, \ldots \ldots (2n-1)$

3) $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \ldots \ldots \left(\frac{2n-1}{2^n}\right)$

4) $\frac{1}{3}, \frac{4}{5}, \frac{9}{7}, \frac{16}{9}, \ldots \ldots \left(\frac{n^2}{2n+1}\right)$

5) $0, 3, 8, 15, 24, \ldots \ldots (n^2-1)$

6) $\frac{1}{1\cdot 2}, \frac{1}{2\cdot 3}, \frac{1}{3\cdot 4}, \frac{1}{4\cdot 5} \ldots \ldots \frac{1}{n(n+1)}$

7) $1, -1, 1, -1, 1, \ldots \ldots (-1)^{n+1}$

4. Из написанных последовательностей указать возрастающую, убывающую и колеблющуюся:

1) $2, 5, 10, 26, 37, \ldots$

2) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$

3) $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \ldots$

4) $2{,}6;\ 2{,}64;\ 2{,}645;\ 2{,}6457, \ldots$

5) $2, -4, 8, -16, 32, \ldots$

6) $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \ldots$

5. Составить формулу, выражающую m-й член последовательности:

1) расширенного ряда натуральных чисел;
2) чётных чисел; 3) нечётных чисел;
4) чисел, кратных 5; 5) чисел, кратных 11.

[1) $(m-1)$; 2) $2m$; 3) $2m+1$; 4) $5m$; 5) $11m$.]

6. Написать числовую последовательность, которую составляют суммы внутренних углов треугольника, четырёхугольника, пятиугольника и т. д.

[$180°$; $360°$; $540°$; ... $180°(n-2)$, где n — число сторон.]

§ 1. Арифметическая прогрессия

1. Какие из приводимых последовательностей составляют арифметическую прогрессию:

1) $0, 3, 6, 9, 12, \ldots$ 3) $5, 0, -5, -10, \ldots$
2) $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$ 4) $1, 4, 9, 16, 25, \ldots$

2. Назвать арифметическую прогрессию, состоящую из 5 членов, если первый член равен 2, а разность равна 3.

3. Назвать арифметическую прогрессию, состоящую из 7 членов, если первый член равен 10, а разность прогрессии равна —2.

4. Найти разность прогрессии, если: 1) $a_1 = 6$ и $a_2 = 10$; 2) $a_1 = 5$ и $a_3 = 9$; 3) $a_1 = 4$ и $a_4 = 13$.

5. В каждой из арифметических прогрессий

1) 10, 12, 14, ...	4) a, $a+1$, $a+2$, ...
2) 15, 10, 5, ...	5) $2a$, $2a+2$, $2a+4$, ...
3) —4, —1, 2, ...	

назвать следующие три члена.

6.	Найти	5-й	член	арифметической	прогрессии:	1, 4, ...
7.	„	4-й	„	„	„	10, 6, ...
8.	„	10-й	„	„	„	0, 2, ...
9.	„	6-й	„	„	„	—4, —3, ...
10.	„	5-й	„	„	„	a, $3a$, $5a$, ...
11.	„	10-й	„	„	„	a, $a+2$, ...

12. Дана прогрессия: 2, 5, 8, ... Если перепишем её члены в обратном порядке, то получим ли снова арифметическую прогрессию? Если да, то чему равна её разность? Какая зависимость между полученной разностью и разностью данной прогрессии?

13. Из формулы $a_n = a_1 + d(n-1)$ найти: a_1; d; n.

14. В прогрессии 1, 4, 7, ... определить: 1) пятый член, 2) двенадцатый член, 3) n-й член, 4) $(n+4)$-й член.

14а. В прогрессии 2, 6, 10 ... определить: 1) d; 2) a_5; 3) a_7; 4) a_{10}; 5) a_{n+1}.

15. Найти сумму всех однозначных чисел.

16. Найти сумму чётных чисел от 2 до 20 включительно.

17. Найти сумму чётных чисел от 2 до 40 включительно.

18. Найти сумму натуральных чисел от 1 до 20 включительно.

19. Найти сумму натуральных чисел от 1 до n включительно.

20. Найти сумму натуральных чисел от 1 до $2n$ включительно.

21. Найти 6-й член и сумму 6 членов арифметической прогрессии: 1, 3, 5, ...

22. Найти 5-й член и сумму 5 членов арифметической прогрессии: —10, —7, —4 ...

23. Найти сумму нечётных чисел от 1 до 17 включительно.

24. „ „ „ „ от 1 до 25 „

25. „ „ первых 10 нечётных чисел.

26. „ „ первых 20 нечётных чисел.

27. В нижеприведённых задачах из пяти величин a_1, a_n, d, n, S_n даны какие-либо три. Найти остальные две.

№ задач	a_1	d	n	a_n	S_n
1	2	3	6	—	—
2	10	—2	8	—	—
3	—	2	12	29	—
4	—	30	4	9	—
5	4	—	6	14	—
6	7	—	9	39	—

28. Может ли разность прогрессии равняться: 1) — 1; 2) 0?

29. Будет ли убывающая арифметическая прогрессия при достаточном продолжении непременно иметь отрицательные члены?

30. При каком условии возрастающая арифметическая прогрессия будет иметь хотя бы один отрицательный член?

31. Могут ли стороны прямоугольного треугольника образовать арифметическую прогрессию?

32. Могут ли стороны и периметр треугольника образовать арифметическую прогрессию?

33. Шары расположены в форме треугольника так, что в первом ряду один шар, во втором — два шара, в третьем — три шара и т. д. Сколько шаров будет в шестом ряду? Сколько всего шаров в 6 рядах?

34. В чём состоит условие, необходимое и достаточное для того, чтобы 3 числа составляли 3 последовательных члена арифметической прогрессии?

35. Какую последовательность образуют числа, выражающие суммы углов: треугольника, четырёхугольника, пятиугольника и т. д?

36. Какой функцией: 1) разности арифметической прогрессии, 2) числа n её членов является a_n (n-й член)?

37. Может ли сумма конечного числа членов арифметической прогрессии быть равной нулю?

38. Дано: a, $a+d$, $a+2d$, ... — арифметическая прогрессия:

1) Образуют ли противоположные числа арифметическую прогрессию?

2) Образуют ли обратные числа (числам данной прогрессии) арифметическую прогрессию?

§ 2. Геометрическая прогрессия

1. Какие из приводимых последовательностей составляют геометрическую прогрессию:

1) 10, 8, 6, 4, ...
2) 10, 6, 3, $1\frac{1}{2}$, ...
3) 1, 4, 9, 16, ...
4) 2, — 4, 8, — 16, ...
5) 2, 6, 12, 20, ...

2. Ниже приведены формулы общего члена некоторых числовых последовательностей:

1) $a_n = n^2$; 3) $a_m = (m - 1)\,m$;

2) $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$, 4) $a_n = 2^n$;

а) назвать первые три члена каждой последовательности;

б) установить, какие из этих последовательностей составляют геометрическую прогрессию.

3. Назвать геометрическую прогрессию, состоящую из 5 членов, если первый её член равен 1, а знаменатель прогрессии равен 2.

4. Назвать геометрическую прогрессию, состоящую из 5 членов, если первый её член равен 16, а знаменатель прогрессии равен $\frac{1}{2}$.

5. Назвать геометрическую прогрессию, состоящую из 6 членов, если первый её член равен 2, а знаменатель прогрессии равен -2.

6. Найти знаменатель геометрической прогрессии, если:

1) $a_1 = 10$; $a_2 = 50$ 4) $a_2 = \sqrt{2}$; $a_3 = 2$

2) $a_3 = 15$; $a_4 = -45$

3) $a_5 = 40$; $a_6 = 20$ 5) $a_{15} = \sqrt{\frac{3}{2}}$; $a_{16} = \sqrt{\frac{2}{3}}$

7. В каждой из геометрических прогрессий:

1) 3, 6, 12, ... 4) 40, -20, 10, ...

2) 5, -10, 20, ... 5) a, $2a$, $4a$, ...

3) 36, 12, 4, ... 6) $2a$, $-6a$, $18a$, ...

назвать следующие три члена.

8. В прогрессии: 3, 6, 12, ... найти a_6.

9. В прогрессии: 1, -3, 9, ... найти a_5.

10. В прогрессии: a, $2a$, $4a$, ... найти a_7.

11. В прогрессии: a, $a\sqrt{2}$, $2a$, ... найти a_7.

12. В прогрессии: 8, 4, 2, ... найти a_6.

13. В прогрессии: 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, ... найти a_5.

14. В прогрессии 16, -8, 4, ... найти a_7.

15. Найти первый член геометрической прогрессии, если
1) $a_5 = 48$; $q = 2$; 2) $a_4 = 27$; $q = 3$; 3) $a_5 = 81$; $q = -3$;
4) $a_4 = 1$; $q = \frac{1}{2}$; 5) $a_5 = 1$; $q = -\frac{1}{2}$.

16. Может ли знаменатель геометрической прогрессии быть равен: 1) 1; 2) 0?

17. Может ли геометрическая прогрессия иметь подряд только пять отрицательных членов?

18. Может ли геометрическая прогрессия иметь только один отрицательный член?

19. В чём состоит условие, необходимое и достаточное для того, чтобы 3 числа представляли собой 3 последовательных члена геометрической прогрессии?

20. Какую последовательность образуют числа, обратные последовательным членам геометрической прогрессии?

21. Могут ли длины сторон прямоугольного треугольника составлять геометрическую прогрессию?

22. Как расположены отрицательные члены в арифметической и геометрической прогрессии?

23. Какой функцией числа членов является сумма n-членов: 1) арифметической прогрессии; 2) геометрической прогрессии?

[1) квадратной, 2) показательной]

24. Может ли сумма конечного числа членов геометрической прогрессии равняться нулю?

[Может, если $q = -1$ и число членов чётно.]

25. Какова геометрическая прогрессия, в которой произведение любых двух членов есть также член этой прогрессии?

[Первый член равен знаменателю прогрессии.]

§ 3. Понятие о пределе. Предел суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии

1. Привести пример ограниченной последовательности, которая не имеет предела. (Например: 1, 0, 1, 0, 1, 0, . . .).

2. Найти предел выражения $y = \frac{2}{x}$, если x принимает значения $x = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$

3. Найти предел для $y = 10 - \frac{2}{x}$, если x принимает значения $x = 1, 2, 3, 4, \ldots$

4. Найти предел выражения $y = 5 + \frac{20}{x}$, если x неограниченно возрастает.

5. Найти предел выражения $y = 15 + \frac{4}{x} - \frac{1}{x^2}$, если x неограниченно возрастает.

6. Найти пределы числовых последовательностей:

1) $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots \frac{1}{n}$

2) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots \frac{n}{n+1}$

3) $\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \ldots \frac{n+1}{n}$

7. Найти предел числовой последовательности, общий член которой:

1) $y_n = \frac{n}{n+1}$

2) $y_n = 2 + \frac{1}{n}$

3) $y_n = 2 + \frac{n}{n+1}$

4) $y_n = \frac{n^2+1}{n^2}$

5) $y_n = \frac{3+n}{n^2}$

[1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 1; 5) 0.]

8. Привести примеры числовых последовательностей, имеющих своим пределом: 1) 1; 2) 2; 3) 0.

[Например, последовательность, общий член которой выражается формулой: 1) $\frac{n}{n+1}$; 2) $\frac{2n+1}{n}$; 3) $\frac{1}{n}$.]

9. Зная, что предел суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии выражается формулой $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q}$, где a — первый член, а q — знаменатель прогрессии, найти предел суммы:

1) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$

2) $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \ldots$

3) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots$

4) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots$

5) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \ldots$

6) $1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \ldots$

7) $8 + 4 + 2 + 1 + \ldots$

8) $8 - 4 + 2 - 1 + \ldots$

9) $4 - 1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{16} + \ldots$

10) $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \ldots$

10. Обратить чистую периодическую дробь в обыкновенную:

1) $0,(1) = \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \ldots$

2) $0,(3) = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \ldots$

3) $0,(7) = \frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + \ldots$

11. Обратить смешанную периодическую дробь в обыкновенную:

1) $0,2(1) = \frac{2}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \ldots = \frac{2}{10} + \left(\frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \ldots\right)$

2) $0,1(5) = \frac{1}{10} + \frac{5}{100} + \frac{5}{1000} + \ldots$

3) $0,4(3) = \frac{4}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \ldots$

Глава XIV

ОБОБЩЕНИЕ ПОНЯТИЯ О ПОКАЗАТЕЛЕ СТЕПЕНИ

1. Чему равно: 5^0? $(-3)^0$? $\left(-\frac{1}{2}\right)^0$? $\left(\frac{2}{5}\right)^0$? $1\,000^0$? a^0?

2. Чему равно: $(\sqrt{5})^0$? $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^0$? $\left(\frac{8}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)^0$?

3. Можно ли доказать: 1) $a^0=1$? 2) $a^1=a$

[Нет, $a^0=1$ и $a^1=a$ — определения.]

4. При всех ли значениях a справедлива формула $a^0=1$?

[Нет. При $a=0$ выражение не имеет смысла.]

5. Что больше: $(-2)^2$ или 2^0? $\left(-\frac{1}{2}\right)^2$ или $\left(-\frac{1}{2}\right)^0$? $\left(-\frac{1}{2}\right)^3$ или $\left(-\frac{1}{3}\right)^0$? $(-2)^3$ или $(-2)^0$?

6. Вычислить:

1) 2^{-2}
2) 3^{-2}
3) 5^{-3}
4) 7^{-1}
5) 1^{-5}
6) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$
7) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$
8) $\left(-\frac{2}{5}\right)^{-2}$
9) $\left(-\frac{3}{2}\right)^{-1}$
10) $\left(-\frac{1}{23}\right)^{-1}$
11) $\left(-1\frac{1}{2}\right)^{-2}$
12) $(-0{,}5)^{-2}$
13) $(+0{,}1)^{-3}$
14) $(-a^2)^{-2}$
15) $(a^3)^{-5}$

7. Вычислить.

1) $16\cdot 2^{-3}$
2) $8\cdot 4^{-2}$
3) $9\cdot 3^{-3}$
4) $25\cdot 5^{-1}$
5) $2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$
6) $12\cdot 3^{-1}$
7) $64\cdot 8^{-2}$
8) $64\cdot 2^{-5}$
9) $216\cdot 6^{-2}$
10) $25\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$

8. Освободить выражения от нулевых и отрицательных показателей:

1) $a\cdot b^{-2}$
2) a^0b^{-1}
3) $a^3\cdot a^{-2}$
4) $5a^{-2}$
5) $4a^{-1}b^0$
6) $a^{-4}\cdot a^{-1}$
7) $a^5:a^{-1}$
8) $a^n:a^{-n}$
9) $5^0\cdot(x-y)^0\cdot y^{-2}$
10) $\left(\frac{3}{4}\right)^0\cdot a^{-2}b$

9. Что больше: 1) 2^2 или $\left(-\frac{1}{2}\right)^2$? 2) 3^2 или $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$?

3) $\left(\frac{1}{3}\right)^3$ или 3^{-3}? 4) $\left(\frac{1}{4}\right)^2$ или 4^{-3}? a^3 или $(a^2)^{-1}$?

10. Пользуясь отрицательными показателями, записать без знаменателей выражения:

1) $\frac{1}{3}$ 3) $\frac{2}{3}$ 5) $\frac{21}{1000}$ 7) $\frac{1}{a^3b^2}$ 9) $\frac{x^2}{y^3}$

2) $\frac{1}{25}$ 4) $\frac{15}{7^2}$ 6) $\frac{1}{a^5}$ 8) $\frac{a}{b}$ 10) $\frac{10x}{y^3}$

11. Можно ли доказать, что $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$?

[Нет. $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ — определение.]

12. Заменить радикалы выражениями с дробными показателями:

1) $\sqrt{2}$ 3) $\sqrt[3]{16}$ 5) $\sqrt[3]{a^2}$ 7) $\sqrt[n]{b^m}$ 9) $\sqrt{(a+b)^{-1}}$

2) $\sqrt[3]{5}$ 4) $\sqrt{a}$ 6) $\sqrt[5]{b^3}$ 8) $\sqrt[3]{a^{-2}}$ 10) $2a\sqrt[3]{x+y}$

13. При всяких ли значениях справедлива формула $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Ответ [При $a<0$ выражение не имеет смысла во множестве действительных чисел]

14. Заменить выражения с дробными показателями радикалами:

1) $a^{\frac{1}{2}}$ 3) $n^{\frac{1}{4}}$ 5) $a^{\frac{1}{2}}$ 7) $a^{-0,5}$ 9) $x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}$

2) $b^{\frac{1}{2}}$ 4) $m^{\frac{2}{3}}$ 6) $x^{-\frac{2}{3}}$ 8) $b^{1,5}$ 10) $\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$

15. Вычислить:

1) $4^{\frac{1}{2}}$ 3) $64^{\frac{1}{2}}$ 5) $16^{\frac{1}{4}}$ 7) $625^{\frac{1}{2}}$ 9) $2^{-2} \cdot 16^{\frac{1}{2}}$

2) $16^{\frac{1}{2}}$ 4) $27^{\frac{1}{3}}$ 6) $144^{\frac{1}{2}}$ 8) $100^{-\frac{1}{2}}$ 10) $3^{-2} \cdot 81^{\frac{1}{4}}$

16. Как понимать выражение $2^{\sqrt{2}}$?

17. Что больше 1) 2^2 или $2^{\sqrt{2}}$? 2) $2^{\sqrt{2}}$ или $2^{\sqrt{3}}$? 3) $2^{\sqrt{2}}$ или $2^{\sqrt{3}}$?

Глава XV

ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ И ЛОГАРИФМЫ

§ 1. Свойства показательной функции

1. Что называется функцией? Приведите примеры функций.

2. В силу какого условия показательная функция $y = a^x$ имеет единственное значение?

3. Почему основание a показательной функции $y = a^x$ предполагается положительным числом?

4. Как изменяются значения показательной функции a^x при возрастании x от $-\infty$ до $+\infty$, если 1) $a > 1$; 2) $0 < a < 1$?

5. Какие из следующих показательных функций являются возрастающими и какие убывающими при возрастании x:

1) $y = 2^x$; 2) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$; 3) $y = 0{,}4^x$; 4) $y = (\sqrt{3})^x$?

6. При каких значениях a функция a^x возрастает при возрастании x?

7. Представляют ли собой степени: $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$; $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}}$; $\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}$; $\left(3\right)^{-\frac{2}{3}}$ числа, большие или меньшие 1?

8. Что больше: 1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{4}}$ или $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}}$? 2) $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{5}}$ или $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{5}}$? 3) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$ или $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{4}{3}}$? 4) $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{4}}$ или $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{4}}$?

9. Какое заключение можно сделать:

а) относительно показателей α и β, если

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\beta}$? 2) $\left(\frac{4}{3}\right)^{\alpha} < \left(\frac{4}{3}\right)^{\beta}$? 3) $1{,}2^{\alpha} > 1{,}2^{\beta}$?

б) Относительно положительного основания a, если

1) $a^{\frac{1}{3}} < a^{\frac{2}{3}}$? 2) $a^{\frac{2}{5}} < a^{\frac{1}{5}}$? 3) $a^{-\frac{1}{5}} > a^{\frac{1}{5}}$?

10. Какие значения аргумента (x) являются допустимыми для функций:

1) $y = a^{x^2}$? 3) $y = a^{\frac{1}{1-x}}$?

2) $y = a^{\frac{1}{x}}$? 4) $y = a^{\sqrt{x}}$?

11. I. Как располагаются графики функций относительно друг друга:

1) $y = 2^x$ и $y = 3^x$? 2) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ и $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$?

11. В какой точке эти 4 графика функций пересекаются?

[I. 1) Если $x < 0$, то график функций $y = 2^x$ лежит выше графика функции $y = 3^x$, а если $x > 0$, то — ниже. 2) Если $x < 0$, то график функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ лежит ниже графика функции $y = \left(\frac{1}{3}\right)$, а если $x > 0$, то — выше. II. Графики функций пересекаются в точке (0,1)].

12. Зная график функции $y = 2^x$, как построить графики следующих функций.

$$1)\ y = -2^x;\quad 2)\ y = \frac{1}{2^x}?$$

[1) Надо построить кривую, симметричную функции $y = 2^x$ относительно оси x. 2) Надо построить кривую, симметричную функции $y = 2^x$, относительно оси y.]

§ 2. Понятие о логарифме

1. Различные степени числа 5 даны в следующей таблице.

Таблица 1

$\frac{1}{3125} = 5^{-5}$	$5 = 5^1$
$\frac{1}{625} = 5^{-4}$	$25 = 5^2$
$\frac{1}{125} = 5^{-3}$	$125 = 5^3$
$\frac{1}{25} = 5^{-2}$	$625 = 5^4$
$\frac{1}{5} = 5^{-1}$	$3125 = 5^5$
$1 = 5^0$	

При помощи этой таблицы умножение, деление, возвышение в степень и извлечение корня чисел, стоящих в левой части равенства, можно заменить более простыми действиями над показателями степеней. Приведём примеры:

а) Найти произведение: $625 \cdot \frac{1}{3125}$. Из таблицы находим $625 \cdot \frac{1}{3125} = 5^4 \cdot 5^{-5} = 5^{-1}$. В этой же таблице находим, что $5^{-1} = \frac{1}{5}$.

б) Найти частное: $125 : \frac{1}{25}$. Из таблицы находим: $5^3 : 5^{-2} = 5^5$. Та же таблица показывает, что $5^5 = 3\,125$.

в) Найти $\sqrt{625}$. Из таблицы 1 находим: $\sqrt{625} = \sqrt{5^4} = 5^{\frac{4}{2}} = 5^2 = 25$.

2. Найти указанным приёмом с помощью таблицы I произведения:

$$1)\ 25 \cdot 125;\quad 2)\ \frac{1}{25} \cdot 3\,125;\quad 3)\ \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{625}.$$

3. Найти с помощью таблицы I частные следующих выражений:

$$1)\ 3\,125 : 25;\quad 2)\ 625 : \frac{1}{5};\quad 3)\ \frac{1}{3125} : \frac{1}{625}.$$

4. Найти с помощью таблицы I степени:

$$1)\ 25^2;\quad 2)\ \left(\frac{1}{5}\right)^5;\quad 3)\ \left(\frac{1}{25}\right)^2.$$

5. Найти с помощью таблицы I:

$$1)\ \sqrt{625};\quad 2)\ \sqrt[5]{3\,125};\quad 3)\ \sqrt[3]{\frac{1}{125}}.$$

6. В средние века математики пользовались различными таблицами, облегчающими вычисления. Приведём пример таблицы, составленной Михаилом Штифелем.

Таблица II.

$$\ldots, -10,\ -9,\ -8,\ -7,\ -6,\ -5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,$$
$$\ldots, \frac{1}{1024},\ \frac{1}{512},\ \frac{1}{256},\ \frac{1}{128},\ \frac{1}{64},\ \frac{1}{32},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{2},\ 1,$$
$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10, \ldots$$
$$2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ 128,\ 256,\ 512,\ 1024, \ldots$$

Числа верхнего ряда — члены арифметической прогрессии с разностью 1, а нижнего — члены геометрической прогрессии со знаменателем 2.

При помощи этой таблицы умножение, деление, возвышение в степень и извлечение корня членов геометрической прогрессии можно заменить более простыми действиями - сложения, вычитания, умножения и деления над соответствующими числами верхнего ряда (членами арифметической прогрессии), например:

а) Если нужно умножить $\frac{1}{64}$ на 256, то вместо этого складывают соответствующие числа арифметической прогрессии $(-6 + 8 = 2)$ и под полученным числом (2) находят искомое произведение (4).

б) Чтобы разделить $\frac{1}{512}$ на $\frac{1}{32}$, надо найти разность стоящих над ними в верхнем ряду чисел $(-9 + 5 = -4)$ и под полученным числом (-4) найти искомое частное $\left(\frac{1}{16}\right)$.

в) Чтобы найти $\sqrt[4]{256}$, надо разделить число, стоящее над 256, на показатель корня, т. е. на 4, и под полученным частным (2) найти в нижнем ряду искомый корень (4).

Примечание. При пояснении этой таблицы полезно указать принцип её составления: члены арифметической прогрессии — логарифмы соответствующих членов геометрической прогрессии, взятых при основании 2.

7. Найти по таблице II произведения:

1) $\frac{1}{64} \cdot 128$ 3) $256 \cdot \frac{1}{1024}$ 5) $\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{128}$

2) $\frac{1}{512} \cdot 32$ 4) $\frac{1}{16} \cdot 512$

8. Найти по таблице II частные:

1) $128:256$ 4) $\frac{1}{32} : \frac{1}{64}$

2) $64:\frac{1}{4}$ 5) $\frac{1}{1024} : \frac{1}{64}$

3) $512:\frac{1}{2}$

9. Найти по таблице II степени:

1) 4^3, 2) 32^2; 3) 8^3; 4) $\left(\frac{1}{2}\right)^5$; 5) $\left(\frac{1}{4}\right)^5$.

10. Найти по таблице II корни:

1) $\sqrt[3]{512}$ 4) $\sqrt[8]{\frac{1}{256}}$

2) $\sqrt[1]{256}$

3) $\sqrt[5]{1024}$ 5) $\sqrt[3]{\frac{1}{512}}$

§ 3. Общие свойства логарифмов

Исходя из определения логарифма, решить следующие задачи:

1. Какое число имеет логарифм 2 при основании 5?
2. Какое число имеет логарифм 5 при основании 2?
3. Какое число имеет логарифм 4 при основании 3?
4. Какое число имеет логарифм 2 при основании $\frac{1}{4}$?
5. При каком основании логарифм числа 25 равен 2?
6. При каком основании логарифм числа 81 равен 4?
7. При каком основании логарифм числа 5 равен $\frac{1}{3}$?
8. Найти логарифм $\frac{1}{8}$ при основании 2?
9. Найти логорифм $\frac{1}{125}$ при основании 5?

10. Чему равен log 144 при основании 12?

11. Чему равен $\log_9 81$?

12. Чему равен $\log_3 243$?

13. Чему равен $\log_2 512$?

14. Чему равен $\log_3 \frac{1}{27}$?

15. Чему равен $\log_4 \frac{1}{64}$?

16. Основание равно 3; найти числа, логарифмы которых есть: 0; 1; -1; 2; -2; 3; -3.

17. Основание равно 10; найти числа, логарифмы которых равны:

$$0;\ 1;\ -1;\ 2;\ -2;\ 3;\ -3.$$

18. При каких основаниях число $\frac{1}{16}$ имеет логарифмы:

$$1;\ 2;\ 4;\ -1;\ -2;\ -4?$$

19. При каких основаниях число 125 имеет логарифмы: 1; 3; -1; -3?

20. Найти логарифмы чисел:

1) $\log_a a$	4) $\log_a a^n$	7) $\log_{\frac{1}{a}} a$
2) $\log_a a^2$	5) $\log_a \frac{1}{a}$	8) $\log_{a^2} a$
3) $\log_a a^4$	6) $\log_a \frac{1}{a^3}$	9) $\log_{\sqrt{a}} a$

21. Чему равен логарифм 5 при основании 5?

22. Логарифм какого числа равен 1: 1) при основании 2; 2) при основании 3; 3) при основании $\frac{1}{5}$?

23. Чему равен логарифм 1 при основании: 1) 2; 2) 5; 3) $\frac{1}{3}$?

24. Тождественны или различны выражения:
1) $2^3 = 8$ и $2^{\log_2 8} = 8$? 2) $3^3 = 27$ и $3^{\log_3 27} = 27$?

25. Чему равно выражение:
1) $2^{\log_2 4}$, 2) $2^{\log_2 32}$; 3) $10^{\log_{10} 100}$; 4) $5^{\log_5 125}$; 5) $a^{\log_a N}$.

26. Чему равен $\log_a 1$?

27. Чему равно произведение: $\log_2 16 \cdot \log_3 15 \cdot \log_5 1$?

28. Чему равно произведение логарифмов натуральных чисел от 1 до 10: 1) при основании 2? 2) при основании 3? 3) при любом основании (не равном 1)?

29. Выразить $\log 10$ через $\log 2$ и $\log 5$

30. Выразить $\log 14$ „ $\log 2$ и $\log 7$.

31, Выразить $\log \frac{5}{3}$ „ $\log 5$ и $\log 3$.

32. Выразить $\log 1\frac{1}{2}$ через $\log 3$ и $\log 2$.

33. Выразить $\log 15$ через $\log 60$ и $\log 4$

34. Выразить $\log 8$ через $\log 2$.

35. Выразить $\log \frac{1}{16}$ через $\log 2$.

36. Выразить $\log \sqrt{5}$ через $\log 5$.

37. Выразить $\log \sqrt[3]{2}$ через $\log 2$.

38. Зная, что $\log a = x$ и $\log b = y$, найти логарифмы чисел:

1) ab; 2) $\frac{a}{b}$; 3) a^2; 4) a^2b; 5) a^5b^3; 6) $\sqrt{ab}$.

39. Будет ли равенство $\log x^2 = 2\log x$ верно при любых значениях x?

40. Чему равно: $\frac{\log_2 64}{\log_2 4}$? $\frac{\log 81}{\log 3}$? $a^{\log_a b}$?

41. Что сделается с логарифмом, если число увеличить в 3 раза? в 5 раз? в n раз?

42. Что сделается с логарифмом, если число уменьшить в 2 раза? в 10 раз? в n раз?

43. Что сделается с числом, если его логарифм удвоить? умножить на 10? умножить на n?

44. Что сделается с числом, если его логарифм уменьшить: в 5 раз? в 8 раз? в n раз?

45. Прологарифмировать выражения:

1) $x = 3ab$	4) $x = \frac{c^2}{ab}$	7) $x = 2a\sqrt{b}$	10) $x = \sqrt{a\sqrt{b}}$
2) $x = \frac{ab}{c}$	5) $x = 2(a+b)$.	8) $x = 3a^2\sqrt{b^2}$	
3) $x = c^2b$	6) $x = \frac{5}{a^2 - b^2}$	9) $x = \sqrt{\frac{a}{b}}$	

46. Произвести потенцирование:

1) $\log x = \log a + \log b + \log c$	6) $\log x = 2\log a + 3\log b$
2) $\log x = \log 18 - \log 2 - \log 3$	7) $\log x = 3\log m + 2\log n$
3) $\log x = \log 18 - \log 2 - \log 3$	8) $\log x = \log 3 + 2\log a - 3\log c$
4) $\log x = \log a - \log b - \log c$	9) $\log x = \frac{1}{2}\log a + \frac{1}{2}\log b$
5) $\log x = 2\log a$	10) $\log x = \frac{1}{3}\log a + \frac{1}{6}\log b$

47. Какой знак имеют логарифмы:

1) $\log_8 25$? 2) $\log_2 1{,}3$? 3) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}$? 4) $\log_{0,2} 5$? 5) $\log_{0,5} 0{,}35$?

48. Что больше:

1) $\log_2 12$ или $\log_2 30$? 3) $\log_{\frac{1}{2}} 6$ или $\log_{\frac{1}{2}} 8$?

2) $\log_2 0{,}3$ или $\log_2 0{,}5$? 4) $\log_{0,3} 1{,}5$ или $\log_{0,3} 1{,}9$?

49. Какие значения аргумента x являются допустимыми для функций: 1) $y = \log_a |-x|$; 2) $y = \log_a |1 - x|$; 3) $y = \frac{1}{\log_a} x$, если $a > 0$?

50. Какое заключение можно сделать:

a) относительно логарифмируемого числа N, если

1) $\log_2 N = 3{,}2$ 3) $\log_{\frac{1}{2}} N = 2{,}1$

2) $\log_3 N = -1{,}5$ 4) $\log_{\frac{1}{2}} N = -3{,}2$

b) относительно основания логарифмов a, если:

1) $\log_a 10 = 2{,}3$ 3) $\log_a 0{,}15 = 3{,}5$ 5) $\log_a 2 < \log_a 1{,}5$
2) $\log_a 15 = 0{,}2$ 4) $\log_a 7 = -2$ 6) $\log_a 3 > \log_a 2$

c) относительно логарифмируемых чисел N и M, если
1) $\log_3 N > \log_3 M$? 2) $\log_{\frac{1}{2}} N > \log_{\frac{1}{2}} M$? 3) $\log_{0,3} N < \log_{0,3} M$?

51. Зная, что $\log_a b \cdot \log_b a = 1$, найти:

1) $\log_2 5$, если $\log_5 2 = a$
2) $\log_3 8$, если $\log_8 3 = \frac{1}{b}$
3) $\log_5 72$, если $\log_{72} 5 = -m$
4) $\log_b a$, если $\log_a b = -\frac{k}{m}$
5) $\log_2 10$, если $\log_2 5 = a$
6) $\log_3 12$, если $\log_3 4 = b$
7) $\log_5 4$, если $\log_5 2 = a$
8) $\log_2 3$, если $\log_3 4 = m$
9) $\log_5 9$, если $\log_3 5 = a$
10) $\log_8 5$, если $\log_{\frac{1}{5}} 3 = m$

52. Всегда ли при увеличении числа его логарифм увеличивается?

§ 4. Десятичные логарифмы

1. Найти: $\lg 10$; $\lg 1$, $\lg 100$; $\lg 1000$.

2. Зная, что $0{,}1 = 10^{-1}$; $0{,}01 = 10^{-2}$ и т. д., найти: $\lg 0{,}1$; $\lg 0{,}01$, $\lg 0{,}0001$.

3. Зная, что $\lg 2 = 0{,}301$, найти: $\lg 20$; $\lg 200$, $\lg 0{,}2$; $\lg 0{,}02$; $\lg 0{,}0002$.

4. Зная, что $\lg 3 = 0{,}477$, найти логарифмы чисел: 30; 300; 3 000; 0,3; 0,003.

5. Зная, что $\lg 5 = 0{,}698$, найти логарифмы чисел: 50, 500, 0,5; 0,05; 25; 0,25.

6. Зная, что $\lg 2 = 0{,}301$, $\lg 3 = 0{,}477$ и $\lg 7 = 0{,}845$, найти логарифмы чисел: 4, 5, 6, 8, 9, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 25, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{15}$.

7. Зная, что $\lg 2 = 0{,}301$, найти $\lg 25$; $\lg 40$.

8. Логарифмы каких простых чисел нужно знать, чтобы найти логарифмы при том же основании чисел: 12, 18, 24, 27, 15, 0,2, $\frac{1}{5}$?

9. Что сделается с числом, если характеристику его логарифма увеличить на 3 единицы? на 5 единиц?

10. Что сделается с числом, если характеристику его логарифма уменьшить на 2 единицы? на 3 единицы?

§ 5. Показательные и логарифмические уравнения

1. Решить уравнения:

1) $2^x = 32$	6) $3^{x-1} = 27$	11) $2^{-x} = 8$
2) $3^x = 27$	7) $5^{x-2} = 25$	12) $5^{-x} = 25$
3) $5^x = 625$	8) $6^{x-3} = 36$	13) $4^x = 2$
4) $10^x = 10000$	9) $a^{x-1} = a^2$	14) $3^x = 27$
5) $4^x = 256$	10) $a^{x-2} = a^{2x}$	15) $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{3}{2}$

16) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 4$	18) $a^x = a^2$
	19) $2^x \cdot 3^x = 36$
17) $\left(\frac{1}{25}\right)^x = 5$	20) $5^x \cdot 2^{2x} = 400$

2. Решить уравнения:

1) $\lg x = \lg 3 + \lg 2$	6) $\lg x = 2\lg 5 - 3\lg 2$
2) $\lg x = \lg 5 + \lg 2 - \lg 3$	7) $\lg x = 2 - 2\lg 5$
3) $\lg x = 1 - \lg 2$	8) $1 + \lg x = \lg a$
4) $\lg x = 2 - \lg 5$	9) $2 - \lg x = 2\lg b$
5) $\lg x = 1 - \lg 5 - \lg 2$	10) $\lg x^2 = 2\lg 5$.

3. В чём ошибка? $\lg x = -\lg y$. Отсюда $x = -y$.

4. В чём ошибка?

$\left(\frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{2}\right)^3$; следовательно, $\lg\left(\frac{1}{2}\right)^2 > \lg\left(\frac{1}{2}\right)^3$

или $2\lg\frac{1}{2} > 3\lg\frac{1}{2}$.

Делим обе части неравенства на $\lg\frac{1}{2}$; получим: $2 > 3$.

Глава XVI

СОЕДИНЕНИЯ И БИНОМ НЬЮТОНА

§ 1. Соединения и их виды

1. Сколько различных двузначных чисел можно составить из 5 цифр 1, 2, 3, 4, 5 (каждая цифра должна входить в каждое число не более одного раза)? Сколько трёхзначных?

2. Сколько трёхзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 4, 5?

3. Имеется 7 цветных полос, окрашенных в цвета спектра. Сколько можно составить из них различных флагов: одноцветных, двухцветных, трёхцветных?

4. Сколько перестановок можно сделать из букв слов «Киев», «Минск», «Москва»?

5. Сколько различных трёхзначных чисел можно составить из цифр 6, 7, 8?

6. Сколько различных трёхзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2? [$P_3 - P_2 = 4$.]

7. Сколько различных трёхзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4? [$A_5^3 - A_4^2 = 48$.]

8. Сколькими различными способами можно избрать из 10 человек делегацию в составе 3 человек?

9. Сколько прямых линий можно провести через 5 точек, из которых никакие три не лежат на одной прямой?

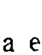
10. Треугольник, стороны которого a, b и c и два его угла α и β, определяется тремя из этих элементов. Сколько можно составить различных задач на построение треугольника по тем или иным из указанных элементов?

11. Определить наибольшее возможное число точек пересечения трёх прямых? пяти прямых?

12. «Интернациональная сигнальная книга» состоит из 26 различных флажков. Сколько сигналов можно дать: 1) двумя флажками? 2) если все флажки показывать одновременно?

13. Сколькими способами можно выбрать трёх лиц на три различные должности из 8 кандидатов на эти должности?

14. Сколькими способами можно выбрать трёх лиц на три одинаковые должности из 8 кандидатов на эти должности?

15. В азбуке для слепых для представления букв употребляются точки числом от 1 до 6, которые помещаются в тех или других из 6 мест, указанных по прилагаемой схеме: 

Сколько различных знаков (букв) можно составить из:

1) 1, 2) 2, 3) 3, 4) 4, 5) 5 и 6) 6 точек. Сколько различных знаков можно составить в общем итоге?

16. Вычислить:

1) $\dfrac{A_5^3}{A_5^2}$	4) $\dfrac{P_7}{P_6}$	7) C_5^2	10) $\dfrac{C_{10}^5}{C_9^4}$
2) $A_5^3 - A_5^2$	5) $\dfrac{P_{100}}{P_{99}}$	8) C_5^4	
3) $\dfrac{P_5}{P_4}$	6) $\dfrac{P_n}{P_{n-1}}$	9) C_{50}^{49}	

17. Что больше (вычислений не производить): 1) A_5^4 или A_8^6? 2) A_9^6 или A_{10}^5? 3) C_{50}^{26} или C_{50}^{25}? 4) C_{40}^{10} или C_{40}^{31}?

18. Как получить число перестановок: 1) из 5 элементов, зная число перестановок из 4; 2) из 6 элементов, зная число перестановок из 5 элементов?

19. Доказать формулу: $P_n = n\ P_{n-1}$.

20. Что больше: 1) $2n!$ или $(2n)!$ 2) $\frac{1}{2}\ n!$ или $\left(\frac{1}{2}\ n\right)!$

Упростить. 1) $\dfrac{n!}{(n+1)!}$; $\dfrac{n!}{(n-1)!}$; $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!}$.

21. Треугольник Паскаля. Взяв ряд чисел $C_m^0,\ C_m^1,\ C_m^2,\ C_m^3, \ldots\ C_m^{m-2},\ C_m^{m-1},\ C_m^m$ — и придавая m последовательно значения: 0, 1, 2, 3, ... получим следующие ряды:

C_0^0 *)								1						
C_1^0	C_1^1							1	1					
C_2^0	C_2^1	C_2^2				или		1	2	1				
C_3^0	C_3^1	C_3^2	C_3^3					1	3	3	1			
C_4^0	C_4^1	C_4^2	C_4^3	C_4^4				1	4	6	4	1		
C_5^0	C_5^1	C_5^2	C_5^3	C_5^4	C_5^5			1	5	10	10	5	1	
C_6^0	C_6^1	C_6^2	C_6^3	C_6^4	C_6^5	C_6^6		1	6	15	20	15	6	1
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—		—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Эта таблица называется арифметическим треугольником Паскаля.

Обнаружить следующие свойства треугольника Паскаля:

1) Два числа одного горизонтального ряда, равноотстоящие от начала и конца, равны между собой. Какой формулой выражается это свойство?

2) Если сложить два последовательных числа одного горизонтального ряда, то получится число следующего ряда, подписанное под вторым из слагаемых чисел. Какой формулой выражается это свойство?

*) Условились под символом C_m^0 при всяком m подразумевать 1

3) Горизонтальные ряды треугольника дают последовательные степени числа 11.

22. Среди всех перестановок цифр в пятизначном числе 23 547 сколько имеется таких, которые начинаются: 1) с 2; 2) с 23; 3) с 274; 4) с какой-либо перестановки цифр 2, 7 и 4?

23. Среди всех перестановок из m элементов сколько имеется таких, в которых: 1) элемент a занимает 2-е место? 2) элементы a, b, c занимают соответственно 2-е, 4-е и 9-е места? 3) элементы a, b, c в каком-либо порядке занимают первые три места?

24. Среди всех сочетаний из m элементов по n в каждом сколько имеется таких, которые содержат: 1) элемент a? 2) элементы a, b и c?

25. Среди размещений из m элементов по n сколько имеется таких, которые начинаются: 1) с элемента a? 2) с abc? 3) с какой-либо перестановки элементов a, b, c?

26. Среди размещений из m элементов по n сколько имеется таких, которые содержат: 1) элемент a? 2) элементы a и b?

27. Как истолковать равенство $C_m^n = C_m^{m-n}$?

§ 2. Бином Ньютона

1. Найти сокращённым путём произведения двучленов.

1) $(a+1)(a+2)$
2) $(a-5)(a-3)$
3) $(x+4)(x+7)$
4) $(x-b)(x-3)$
5) $(x+a)(x+b)$
6) $(x-a)(x+b)$
7) $(a+2)(a-3)$
8) $(a-4)(a+5)$
9) $(x+a)(x-b)$
10) $(x+1)(x+2)(x+3)$

2. Разложить по формуле бинома Ньютона (значения коэффициентов давать в виде C_m^n или вычислять с помощью арифметического треугольника Паскаля):

1) $(x+a)^4$
2) $(r-t)^4$
3) $(y+b)^6$
4) $(x-a)^6$
5) $(1+\sqrt{b})^4$
6) $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^4$
7) $(a^2+1)^5$
8) $(a^2-b^2)^6$

3. Разложить по формуле бинома Ньютона и, если возможно, упростить:

1) $(x+a)^4+(x-a)^4$
2) $(x+a)^4-(x-a)^4$
3) $(1+x)^6+(1-x)^6$
4) $(x+1)^5-(x-1)^5$
5) $(a-1)^6-(a+1)^6$

4. Найти коэффициент 4-го члена разложения $(a+b)^5$.

5. Найти наибольшие коэффициенты разложений:

1) $(a+b)^4$; 2) $(x+y)^5$; 3) $(a-x)^6$.

6. Найти 3-й член разложения $(a+b)^5$.

7. Найти 5-й член разложения $(a-b)^5$.

8. Найти средний член разложения $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^4$.

9. Найти два средних члена разложения $(x-y)^7$.

10. Найти член разложения $(a+b)^5$, содержащий a^2.

11. Найти член разложения $(x-y)^6$, содержащий y^5.

12. Найти член разложения $(a^2-b)^4$, содержащий a^6.

13. Найти член разложения $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^6$, содержащий a^2.

14. Найти член разложения $(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y})^6$, содержащий y.

15. Найти рациональные члены разложения бинома:

1) $(a+\sqrt{b})^5$. 2) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^4$ 3) $(1+\sqrt[3]{2})^5$.

16. С помощью треугольника Паскаля определить наибольшие коэффициенты разложения:

1) $(a+b)^4$ 3) $(a+b)^5$
2) $(a+b)^6$ 4) $(a-b)^7$

17. Почему биномиальные коэффициенты, несмотря на то, что они записываются в виде дробей, являются всегда целыми числами?

18. Найти, чему равна сумма биномиальных коэффициентов разложения $(x+a)^5$.

19. Чему равна: 1) сумма биномиальных коэффициентов членов разложения $(a+b)^5$, стоящих на нечётных местах? 2) сумма биномиальных коэффициентов членов разложения $(x-y)^6$, стоящих на чётных местах?

20. Как доказать, что: 1) $(1+a)^n \approx 1+na$ и 2) $(1-a)^n = 1-na$ при a — достаточно малом.

21. Вычислить по формулам приближения (смотри № 20):
1) $(1{,}02)^5$; 2) $(0{,}99)^7$; 3) $(0{,}999)^{10}$.

Глава XVII

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

1. Какая зависимость между мнимой единицей и действительной единицей?

2. Вычислите:

1) i^3	7) i^9	13) i^{16}
2) i^4	8) i^{4n}	14) i^{41}
3) i^5	9) i^{4n+1}	15) $(-i)^{20}$
4) i^6	10) i^{4n+2}	16) $(-i)^{31}$
5) i^7	11) i^{4n+3}	17) $-i^{15}$
6) i^8	12) i^{4n+4}	18) $-i^{24}$

3. Произвести указанные действия:

1) $2i+3i-4i$	5) $2i\cdot 3i\ \ 4i$
2) $15i-10i-5i$	6) $(3+2i)+(5-2i)$
3) $\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-2}$	7) $(1+i)-(1-2i)$
4) $6i\cdot 3i$	8) $(2+3i)-(2-3i)$

4. Назвать числа, сопряжённые комплексным числам:

1) $1+2i$	4) 1
2) $5-3i$	5) -1
3) $a+bi$	

5. Назвать числа, противоположные комплексным числам:

1) $2+3i$; 2) $3-2i$; 3) $-2+5i$.

6. Может ли сумма двух комплексных чисел быть: 1) действительным числом? 2) чисто мнимым числом?

7. Даны комплексные числа:

1) $2+3i$	3) $a+bi$
2) $5-2i$	4) $2a-3bi$

Ответить относительно каждого из чисел:

а) Какое число следует к нему прибавить (или вычесть), чтобы получить действительное число? Является ли это число единственным?

б) Какое число следует к нему прибавить (или вычесть), чтобы получить чисто мнимое число?

8. Какому числовому множеству принадлежит произведение двух комплексных чисел?

9. Какому числовому множеству принадлежит произведение чисто мнимых чисел?

10. Какому числовому множеству принадлежит произведение двух сопряжённых комплексных чисел?

11. Найти условие, необходимое и достаточное для того, чтобы произведение $a+bi$ и $c+di$ было действительным числом.

12. Назвать два комплексных числа, обладающих тем свойством, что их сумма и произведение — действительные числа.

13. Какому числовому множеству принадлежат степени комплексного числа?

14. Может ли степень комплексного числа быть действительным числом?

15. Найти условие, необходимое и достаточное для того, чтобы частное чисел $a+b$ и $c+di$ было действительным числом.

16. Где допущена ошибка: $i^2=(\sqrt{-1})^2=\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}=\sqrt{(-1)(-1)}=\sqrt{1}=1$, т. е. $i^2=1$.

Ответ: [Ошибка в том, что правила действий с корнями установлены для корней с положительными подкоренными выражениями.]

17. Разложить на комплексные множители:

1) x^2+y^2
2) a^2+4b^2
3) $4a^2+9b^2$
4) x^2+4
5) a^2+1
6) a^4+b^2
7) $4+9$
8) $16+1$
9) $64+1$
10) 26
11) 65
12) 13
13) $a+1$
14) $a+b$

18. Выполнить действия:

1) $(1+i)^2$
2) $(2-3i)^2$
3) $(1+i)^3$
4) $(1-i)^3$
5) $(2+i)^3$
6) $(1+i)^4$
7) $(1-i)^4$
8) $10i:2$
9) $6i:2i$
10) $8i:(-4i)$
11) $(1+i):i$
12) $\frac{1+i}{1-i}$

19. Вычислить:

1) $(1+i)^3-(1-i)^3$
2) $(1-i)^3+(1+i)^3$
3) $(2+i)^3+(2-i)^3$
4) $(1+i)^4+(1-i)^4$
5) $(1+i)^4-(1-i)^4$
6) $(1+i)^5+(1-i)^5$

20. Найти сумму тех членов разложения $(a+i)^5$, которые не содержат i.

21. Найти сумму тех членов разложения $(a+i)^4$, которые содержат i.

22. 1) Назвать числа, соответствующие точкам *А, В, С, Д, Е, К, М*.

Указание. Начертить на доске числовую плоскость. Точки A, B, C, D, E, K, M — точки плоскости, причём точки D и M — симметричные относительно оси x-ов (оси действительных чисел).

2) В каком соответствии находятся комплексные числа, отображающиеся точками D и M?

3) Исследовать, устанавливается ли при представлении комплексных чисел точками однозначное соответствие между комплексными числами и точками «числовой плоскости» и обратно.

4) Что можно сказать о точках, отображающих комплексные числа $a+bi$ и a_1+b_1i, если $a=a_1$ и $b=b_1$?

5) При каком условии $a+bi=0$?

23. Дано число $2+3i$. В какой четверти комплексной плоскости расположены точки, изображающие числа: 1) сопряжённое данному; 2) противоположное ему.

24. Где на плоскости располагаются точки, изображающие: 1) величину $2+bi$ при различных значениях b; 2) величину $a+3i$ при различных значениях a.

Ответ: [1) точки лежат на прямой, параллельной оси мнимых чисел и отстоящей от неё на расстоянии, равном двум единицам; 2) точки лежат на прямой, параллельной оси действительных чисел и отстоящей от неё на расстоянии, равном 3 единицам.]

25. Чему равен аргумент любого положительного числа?

26. Чему равен аргумент любого отрицательного числа?

27. Чему равен аргумент чисто мнимого числа?

28. Чему равен аргумент числа 0?

[Число 0 не имеет определённого аргумента.]

29. Чему равен модуль положительного числа?

30. Чему равен модуль отрицательного числа?

31. Определить множество точек плоскости, если аргументы чисел, изображаемых этими точками, равны:

$$1)\ \frac{\pi}{4};\quad 2)\ \frac{2}{3}\pi;\quad 3)\ 1\frac{5}{6}\pi.$$

[1) Множество этих точек образует биссектрису угла первой четверти;

2) множество точек образует полупрямую, исходящую от точки начала координат и образующую с положительным направлением оси x угол, равный $\frac{2}{3}\pi$]

32. Определить множество точек плоскости, если модуль чисел, изображаемых этими точками, равен: 1) 3; 2) 5,4.

[Множество точек образует окружность с центром в начале координат и радиусом равным: 1) 3; 2) 5,4.]

33. Представить в тригонометрической форме числа:

1) 1	6) n, где $n<0$	11) $1+i$
2) 5	7) i	12) $1-i$
3) -1	8) $3i$	13) $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$
4) -6	9) $-2i$	14) $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$
5) m, где $m>0$	10) $-5i$	15) $1+i\sqrt{3}$

34. Представить в алгебраической форме.

1) $2(\cos 0+i\sin 0)$	4) $2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$
2) $3(\cos\pi+i\sin\pi)$	5) $\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$
3) $\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$	6) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{4}\pi+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$

Глава XVIII

НЕРАВЕНСТВА

§ 1. Неравенства 1-й степени с одним неизвестным

1. Даны неравенства:

1) $4 > 3$
2) $15 > 13$
3) $\frac{1}{2} > \frac{1}{4}$
4) $-10 > -12$
5) $\sqrt{3} > \sqrt{2}$

Составить для каждого неравенства разность между числами, стоящими в его левой части и правой части. Какому множеству чисел принадлежат эти разности?

2. Даны неравенства:

1) $2 < 5$
2) $8 < 10$
3) $\frac{1}{5} < \frac{1}{4}$
4) $-5 < -3$
5) $\sqrt{5} < \sqrt{6}$

Составить для каждого неравенства разность между числами, стоящими в его левой части и правой части. Какому множеству чисел принадлежат эти разности?

3. Какому неравенству удовлетворяет любое положительное число?

4. Какому неравенству удовлетворяет любое отрицательное число?

5. Каким знаком неравенства, не измеияя порядка букв, можно соединить:

1) x и y, если известно, что $x - y = +a$

2) m и n, если известно, что $m - n = -c$, где a и c — положительные числа.

6. Дано: $5 > 3$. Всегда ли справедливо: $5a > 3a$? При каких значениях a: 1) $5a < 3a$? 2) $5a = 3a$?

7. Дано: $a > b$. Всегда ли справедливо $a^2 > b^2$?

8. Что можно сказать о числах a и b, если $ab > 0$? если $ab < 0$? $ab = 0$?

9. Сложить неравенства.

1) $2 > 1$ и $1 > -3$
2) $3 > 2$ и $3 > -5$
3) $5 < 7$ и $-3 < 1$
4) $a > b$ и $c > d$
5) $2a + 1 > a + 3$ и $a + 3 > a$

10. Вычесть второе неравенство из первого:

1) $5 > 3$; $2 < 3$
2) $10 > 5$; $2 < 4$
3) $-1 > -3$; $5 < 6$
4) $7 < 9$; $3 > 2$
5) $2a < 3$; $a > 1$

11. Умножить обе части неравенства на указанные множители:

1) $2 > -3$ на 10 3) $a > b$ на -2
2) $3 > -3$ на -2 4) $a+1 > b$ на $-n$, где $n < o$.

12. Разделить обе части неравенства на указанные делители:

1) $9 > 6$ на 3 3) $3a < 6a$ на $-a$, где $a > 0$
2) $12 > 4$ на -4 4) $a^3 < a^2$ на $-a$, где $a < 0$

13. Перемножить почленно неравенства:

1) $3 > 2$; $5 > 3$ 3) $1 > -3$; $-1 > -3$
2) $2 < 4$; $3 < 5$ 4) $-2 < -1$; $3 > 1$

14. Определить, при каких значениях аргумента x функция y принимает: а) положительные значения; б) отрицательные значения; в) обращается в нуль.

1) $y = x - 2$ 3) $y = 2x - 8$
2) $y = x + 3$ 4) $y = -x - 2$

15. Решить следующие неравенства и дать геометрическое изображение:

1) $2x + 2 > x + 5$ 3) $0{,}4x - 0{,}5 < 0{,}3x + 0{,}5$
2) $5x - 3 > 2x$ 4) $(x-2)^2 > x^2$

16. Из числа написанных неравенств одинакового смысла указать неравенство, обобщающее остальные:

1) $x > 5$; $x > 8$; $x > 20$ 3) $y > \frac{1}{2}$; $y > \frac{3}{5}$; $y > \frac{2}{3}$

2) $x < 5$; $x < 0$; $x < -2$ 4) $y > 5$; $y > -2$; $y > -\frac{1}{2}$

17. Указать целые значения, которые может иметь x, удовлетворяющие следующим системам неравенств:

1) $\begin{cases} x < 5 \\ x > -2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x > 3 \\ x > 5 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x > -10 \\ x < -5 \end{cases}$

Дать геометрическое изображение множеству всех решений для каждой системы неравенств.

18. Решить неравенства:

1) $(x+1)(x+5) > 0$ 4) $(x-3)(x-5) < 0$

2) $(x-2)(x+5) > 0$ 5) $\frac{2x}{x+1} > 0$

3) $(x-1)(x+2) < 0$ 6) $\frac{x-2}{x-5} < 0$

19. Доказать, что при x, принимающем только действительные значения, неравенство справедливо:

1) $x^2 + 1 > 0$

2) $x^2 + \frac{1}{x^2} > 1$

20. Что больше: 1) $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ или $\sqrt{7}$?

2) $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ или $\sqrt{10}$?

3) $\sqrt{5}-\sqrt{2}$ или $\sqrt{3}$?

21. Доказать, что при x, принимающем только положительные значения, неравенство справедливо:

1) $x+\frac{1}{x}\geqslant 2$; 2) $2x\leqslant 1+x^2$.

§ 2. Исследование уравнений 1-й степени с одним неизвестным

1. Определить, при каких значениях a и b дробь $\frac{a}{b}$ — положительна? отрицательна?

2. Определить, при каких значениях a следующие уравнения имеют положительные решения:

1) $2x=4a$ 4) $5x=a-7$

2) $3x-a=6a$ 5) $2x+1=2a+3$

3) $2x=5a-5$ 6) $\frac{x}{2}=\frac{a}{5}$

3. Определить, при каких значениях t следующие уравнения имеют отрицательные решения:

1) $3x=6t$ 4) $18x=t+2$

2) $2x-t=2t$ 5) $0{,}1x=2t-4$

3) $5x=6t+3$ 6) $\frac{t}{2}=\frac{x}{3}$

4. Определить, при каких значениях t уравнение

1) $x+t=5$ будет иметь решеиие больше, чем 2?

2) $4x=t-2$ будет иметь решение меньше, чем 1?

3) $5x=5-2t$ будет иметь решение больше, чем -3?

5. При решении задачи „По какому числу надо прибавить к числителю и знаменателю дроби $\frac{39}{78}$, чтобы она обратилась в $\frac{1}{2}$?" получен ответ: $x=0$. Объясните решение.

6. Во сколько раз нужно увеличить числитель и знаменатель дроби $\frac{17}{51}$, чтобы она превратилась в $\frac{1}{3}$? Объясните решение.

7. Исследовать, при каких значениях букв, входящих в уравнеиия, следующие уравнения имеют: а) положительные решения, б) отрицательные, в) нулевые, г) бесконечное множество решений, д) не имеют решений.

1) $5x=2a+1$ 3) $ax=m-nx$

2) $ax=3a+2$ 4) $ax-m=nx+m$

§ 3. Исследование системы уравнений 1-й степени с двумя неизвестными

1. Решая систему $\begin{cases} ax + by = c \\ a_1x + b_1y = c_1, \end{cases}$

получим:

$$x = \frac{cb_1 - bc_1}{ab_1 - ba_1} \text{ и}$$

$$y = \frac{ac_1 - ca_1}{ab_1 - ba_1}$$

Если знаменатель $ab_1 - ba_1 \neq 0$, то каково множество всех решений системы? А если $ab_1 - ba_1 = 0$?

2. Не решая следующих систем уравнений, определить, будет ли данная система иметь:

а) одно решение; б) бесконечное множество решений; в) не будет иметь решений.

1) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 4x + 2y = 7 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 4y = 6 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 5x - y = 10 \\ 15x - 3y = 30 \end{cases}$

3. Если построить графики системы, то будут ли прямые иметь общую точку?

1) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - y = 0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x + 2y = 8 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 4x + 2y = 15 \end{cases}$

4. При каких значениях k система уравнений

$$\begin{cases} 2x + y = k \\ 4x + 2y = 10 \end{cases}$$

имеет бесконечное множество решений?

5. При каких значениях m система уравнений

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 4x + 6y = m \end{cases}$$

не имеет решений?

6. Приведите примеры систем уравнений, когда системы имеют: а) одно решение; б) бесконечное множество решений; в) не имеют решеиий.

7. Назовите уравнения первой степени с одним неизвестным:

1) имеющее бесконечное множество корней;
2) не имеющее ни одного корня;
3) имеющее только один корень.

8. Имеет ли уравнение $0 \cdot x = i$: 1) действительные корни? 2) мнимые корни?

9. Каково множество всех корней уравнения $0 \cdot x = 0$.

10. При каких значениях букв a и b равенство $ax = b$ есть тождество по отношению к неизвестному x?

11. Сколько решений имеет каждое из уравнений системы:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 2x - 3y = 8 \end{cases}$$

Имеют ли эти уравнения общие решения?

12. Дано уравнение: $x + 2y = 4$. Назовите уравнение первой степени с двумя неизвестными, которое с данным уравнением дало бы систему, имеющую: 1) бесконечное множество решений, 2) не имеющее решений, 3) единственное решение.

§ 4. Неравенства 2-й степени

1. Решить неравенства:

1) $x^2 - x > 0$
2) $2x^2 - 3x < 0$
3) $x^2 - 4 > 0$
4) $2x^2 - 18 < 0$
5) $2x^2 > 0$
6) $x^2 - 4x + 4 > 0$
7) $x^2 + 6x + 9 < 0$
8) $x^2 - 5x + 6 > 0$
9) $x^2 - 2x - 8 < 0$
10) $x^2 - x - 42 > 0$

2. Дан квадратный трёхчлен:

$$x^2 + px + q$$

1) Найти дискриминант трёхчлена и указать, при каком значении дискриминанта трёхчлен имеет: а) два различных корня; б) двукратный корень; с) не имеет действительных корней.

3. Дана функция:

$$y = x^2 - 4x + 3$$

При каких значениях аргумента функция y: а) обращается в нуль?

б) принимает положительные значения?

в) принимает отрицательные значения?

г) в каких промежутках возрастает?

д) в каких промежутках убывает?

4. Определить, при каких значениях a корни следующих уравнений будут: а) действительными и неравными; б) действительными и равными; в) мнимыми:

1) $x^2 - 2x + a = 0$
2) $x^2 - 4x - a = 0$
3) $x^2 - 2ax - 9 = 0$

5. Определить, при каких значениях a корни уравнения $x^2 - 4x + a = 0$ будут рациональными числами?

6. Определить, при каких значениях a корни следующих уравнений будут: а) оба положительные, б) один положительный, а второй отрицательный, в) оба отрицательные, г) равные:

1) $x^2 - 4x + a = 0$
2) $x^2 + 6x - a = 0$
3) $x^2 - ax + 5 = 0$

7. Решать неравенства:

1) $\frac{(x-1)(x-3)}{x-2}>0$ 3) $\frac{x-1}{x^2+2x+1}>0$

2) $\frac{(x-2)(x-3)}{x-4}<0$ 4) $\frac{x^2+2x+1}{x+1}<0$

8. При каких значениях x следующие выражения имеют смысл:

1) $\lg(x^2-1)$ 4) $\lg(x^2-x)$

2) $\lg(x^2+1)$ 5) $\lg(x^2-2x+1)$

3) $\lg(x^2-4)$ 6) $\lg(x^2-3x+2)$

9. При каких значениях n следующие неравенства удовлетворяются при всяких действительных значениях x:

1) $x^2-2x+n>0$ 3) $x^2-mx+1>0$

2) $x^2+4x+n>0$ 4) $x^2+mx+9<0$

10. Даны функции:

1) $y=x^2-4$ 3) $y=x^2-2x+1$

2) $y=x^2-x$ 4) $y=x^2-3x+2$

При каких значениях x каждая из приведённых функций:

а) обращается в нуль;

б) принимает наибольшее или наименьшее значение;

в) принимает положительные и отрицательные значения.

Глава XIX

ТЕОРЕМА БЕЗУ И ЕЁ СЛЕДСТВИЯ

1. Найти остатки от деления многочлена $2x^3-3x^2+x-5$ при делении на $x-1$; на $x+1$; на $x-2$.

2. Не выполняя деления, найти остаток от деления:

1) $(x^3-2x^2+3x-4):(x-1)$

2) $(x^3+3x^2-2x+5):(x+2)$

3) $(x^4-3x^3+3x^2+4x-3):(x-1)$

4) $(x^5-2x^2+x+3):(x+2)$

5) $(2x^3-3x^2+4x-5):(x-3)$

3. Делится ли двучлен на $x-1$:

1) x^3-1 3) x^4-1 5) $x^{10}-1$

2) x^3+1 4) x^4+1 6) $x^{10}+1$

4. Делится ли двучлен на $x+1$:

1) x^2+1 4) x^3+1

2) x^2-1 5) x^4+1

3) x^3-1 6) x^4-1 7) $x^{10}+1$

5. При каком значении a многочлен $x^3 - 2x + 3x + a$ при делении на $x + 1$ даёт остаток, равный 2? равный 5?

6. При каком значении b многочлен $x^3 + 2x^2 + bx - 5$ при делении на $x - 2$ даёт остаток, равный 3? равный 15?

7. При каком значении k многочлен $x^3 - kx^2 + 9$ делится на $x - 3$?

8. При каком значении a многочлен $ax^2 + x - 45$ делится на $x + 5$?

9. Определить частные, получаемые при делении:

1) $(x^3 - a^3) : (x - a)$	4) $(x^3 + a^3) : (x + a)$
2) $(x^4 - a^4) : (x - a)$	5) $(x^4 - a^4) : (x + a)$
3) $(x^5 - a^5) : (x - a)$	

10. Если уравнение третьей степени с вещественными коэффициентами имеет два корня вещественных, то каким числом (вещественным или мнимым) будет третий корень?

11. Если уравнение пятой степени с вещественными коэффициентами имеет один вещественный корень, то что можно сказать об остальных корнях уравнения?

12. Найдено, что некоторое уравнение пятой степени с рациональными коэффициентами имеет корни: 2; $1 + i$ и $2 - 3i$. Как найти величину других корней?

13. Найдено, что один из корней уравнения четвёртой степени — вещественное число. Что можно сказать о других корнях этого уравнения?

14. Решить следующие двучленные уравнения:

1) $x^4 - 1 = 0$	4) $x^3 - 1 = 0$
2) $x^4 - 16 = 0$	5) $x^3 + 1 = 0$
3) $x^4 + 1 = 0$	6) $x^3 - 8 = 0$

15. Какой вид должно иметь уравнение n-й степени, если один корень его равен 0? два корня равны 0?

16. При каком значении n уравнение n-й степени имеет, по крайней мере, один действительный корень?

17. Составить уравнение третьей степени, корнями которого служат: 1) 1, 2, 2; 2) 0, i, $-i$

18. Составить уравнение наименьшей степени с рациональными коэффициентами, корнями которого служат:

1) 1, 2, 0	4) 1, -1, 4
2) 1, -1, 2	5) 1, $1 + i$, $1 - i$
3) 1, 2, -2	6) 1, -1, 2, -2

19. Уравнение 3-й степени имеет корни $2i$ и $3 - 5i$. Могут ли его коэффициенты быть действительными числами? Мнимыми числами?

20. Составить уравнение третьей степени с рациональными коэффициентами, если даны два его корня:

1) $x_1 = 1$ и $x_2 = i$; 2) $x_1 = 3$ и $x_2 = -i$.

21. Составить уравнение четвёртой степени с рациональными коэффициентами, если даны два его корня:

$$x_1 = 1 + i \text{ и } x_2 = 2 - i.$$

22. Составить уравнение четвёртой степени с рациональными коэффициентами, если даны три его корня:

$$x_1 = 1,\ x_2 = -1 \text{ и } x_3 = 1 + i.$$

23. Составить уравнение пятой степени с рациональными коэффициентами, если даны четыре его корня:

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0 \text{ и } x_4 = 2 + i.$$

Раздел 3. ГЕОМЕТРИЯ

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Простейшие геометрические тела

1. Сколько измерений имеет куб? Какие?
2. Сколько измерений имеет ребро куба? Какие?
3. Начертите одну грань куба.
4. Покажите основание куба.
5. Покажите ребро куба.
6. Сравните куб с комнатой, в которой вы находитесь.
7. Среди стоящих на столе геометрических тел возьмите то, которое по своим элементам напоминает комнату. Как называется это геометрическое тело?
8. Сравните куб с прямой четырёхугольной призмой.
9. Покажите одну грань прямой четырёхугольной призмы.
10. Покажите основание прямой четырёхугольной призмы.
11. Сколько измерений имеет прямая четырёхугольная призма?
12. Среди стоящих на столе геометрических тел найдите треугольную призму.
13. Покажите основания треугольной призмы.
14. Покажите боковую грань треугольной призмы.
15. Покажите ребро треугольной призмы.
16. Сравните куб с треугольной призмой.
17. Сравните треугольную призму с прямой четырёхугольной призмой.
18. Укажите в комнате равные между собой грани.
19. Укажите вершины куба. Сколько их?
20. Укажите вершины прямой четырёхугольной призмы? Сколько их?
21. Укажите вершины треугольной призмы. Сколько их?

§ 2. Линии

1. Найдите и покажите несколько кривых линий на предметах, которые находятся в классе.
2. Найдите и покажите несколько прямых и ломаных линий на предметах, которые находятся в классе.

3. Сколько раз могут пересечься две прямые?

4. Сколько прямых линий можно провести между двумя точками?

5. Сколько прямых линий можно провести между 3, 4, 5, 6, ..., n точками, если каждые 3 точки не лежат на одной прямой?

6. Покажите на доске вертикальные линии.

7. Покажите на доске горизонтальные линии.

8. На прямой отложен отрезок AB длиной в 15 *дм* и влево от точки B отложены отрезки BC и CD, каждый длиной 4 *дм*. Сколько дециметров в AC? Сколько дециметров в AD?
[$AC = 11$ *дм*; $AD = 7$ *дм*.]

9. Выразите составным именованным числом длину выпрямленной ломаной $ABCD$, если $AB = 9{,}5$ *м*, $BC = 1$ *м* 1 *см* и $CD = 6{,}3$ *дм*. [11 *м* 1 *дм* 4 *см*.]

10. По обе стороны от точки A на прямой отложены отрезки: $AB = 2$ *дм* 6 *см* и $AC = 4$ *см*. Определить расстояние между серединами отрезков AB и AC. [1 *дм* 5 *см*.]

11. На прямой по одну сторону от точки A отложены отрезки $AB = 0{,}4$ *м* и $BC = 0{,}5$ *м*. Найти расстояние между серединами AB и BC. [4 *дм* 5 *см*.]

12. На прямой отложен отрезок AB длиной 1 *м*; вправо и влево от точки B отложены отрезки BC и BD, каждый длиной 4 *дм*. Найти расстояние точки B от середины AB и AC.
[5 *дм*; 3 *дм*.]

13. Отрезок AB длиной 3,5 *м* разделён в точке D на 2 части, из которых AD длиннее BD на 5 *дм*. Определить длину AD.
[$AD = 2{,}0$ *м*.]

14. Найти длину каждого из отрезков AC и CD прямой AD, если $AD = 5{,}5$ *м*, $AC - CD = 5$ *дм*.
[$AC = 30$ *дм*; $CD = 25$ *дм*.]

15. На прямой между точками M и N даны точки C, K, B. Назовите сумму отрезков: 1) $MC + CK + KB$, 2) $CK + KB + BN$.
[MB; CN.]

16. На прямой между точками M и N даны точки C, K, D. Назовите разность отрезков: 1) $MN - CK$, 2) $MN - (CK + KD)$, 3) $(MK + CK + KD) - MC$. Суммой каких отрезков можно заменить отрезок MD? Разностью каких отрезков можно заменить отрезок MD? Суммой каких отрезков можно заменить отрезок CN? Разностью каких отрезков можно заменить отрезок CK? MK?

17. На прямой от точки C последовательно отложены отрезки $CA = AB = BD = DK = KE$. Каким отрезком прямой выразится

1) $CA \times 5$	4) $\frac{CE}{5} \cdot 2$
2) $BD \times 4$	5) $\frac{CK}{2}$
3) $\frac{CK}{4}$	6) $\frac{CD}{3} \cdot 2$

18. На прямой от точки A последовательно отложены отрезки: AD, $DK = 2AD$, $KM = 3DK$. Определить отношение AK к AD; AM к DK; AM к KM. [3; 4,5; 1,5.]

19. Отрезок прямой AB имеет в длину 2,5 *м*. На каком расстоянии от A и B находится точка C, если она делит отрезок AB на 2 части так, что AC больше CB на 9 *дм*? [8 *дм*; 17 *дм*.]

20. На отрезке MN дана точка C. В каком отношении находятся отрезки MC и CN, если $MN = 1,8$ *дм*, а MC на 6 *см* меньше CN? [0,5.]

21. На неограниченной прямой линии даны точки A и B на расстоянии 50 *дм* одна от другой. На той же линии находятся точки C и D, причём $AC = BD = 10$ *дм*. Чему равно расстояние между серединой отрезка AC и точкой D?

[Три решения: 35 *дм*; 65 *дм*; 55 *дм*.]

22. Дан отрезок AB длиной 20 *м*. От конца A вправо отложен отрезок $AC = 5,1$ *м*, а от конца B влево на той же прямой отложена часть $BD = 7,9$ *м*. Определить длину отрезка CD.

23. Отрезок AB разделён на 2 неравные части. Расстояние между серединами этих частей равно 5,4 *м*. Определить длину отрезка AB. [10,8 *м*.]

24. Лежат ли точки A, B и C на одной прямой, если расстояние между ними: $AB = 40$ *дм*, $AC = 15$ *дм*, $BC = 25$ *дм*.

25. Как расположены точки A, B и C на одной и той же прямой, если расстояния между ними следующие:

1) $AB = 20$ *м*; $AC = 13$ *м*; $BC = 7$ *м*
2) $AB = 4$ *м*; $AC = 7$ *м*; $BC = 3$ *м*
3) $AB = 1,3$ *м*; $AC = 7,8$ *м*; $BC = 6,5$ *м*

Глава I

УГЛЫ

1. Определить углы, образуемые часовой и минутной стрелками, когда часы показывают: 3 часа; 2 часа; 5 час.; 4 часа; 6 час.; 8 час.; 11 час.; 10 час.; 12 час.; 9 час.

2. По обе стороны прямой около общей вершины O построено 6, 3, 8, 12, 60 равных углов. Чему равен каждый из них?

3. По одну сторону прямой около общей вершины O построено 4 равных угла, 6 равных углов, 5 равных углов, 3 равных угла, 8 равных углов, 12 равных углов, 2 равных угла. Выразить каждый из углов в градусах и в частях прямого угла. Каким будет каждый из этих углов?

4. По обе стороны прямой около общей вершины O построено 23 угла. 3 угла равны между собой, и каждый из них равен 24°. Остальные 20 углов тоже равны между собой. Чему равен каждый из 20 равных углов? Выразить каждый угол в градусах и в частях прямого угла.

5. Сколько можно поместить равных углов по одну сторону прямой около общей вершины, если каждый из них равен $22°30'$; $18°$; $15°$; $11°\ 15'$; $60°$; $36°$; $20°$?

6. Сколько можно поместить равных углов по обе стороны прямой около одной общей вершины, если каждый из них равен: $45°$; $30°$; $22°\ 30'$; $11°\ 15'$; $12°$; $18°$?

7. Найти угол, который меньше своего смежного: 1) на $45°$; 2) на $90°$; 3) на $35°$; 4) на $60°$; 5) на $75°$.

8. Отношение двух смежных углов равно: 1) 4; 2) $\frac{1}{7}$; 3) 0,2. Определить тупой угол. [$144°$; $157°\,30'$; $150°$.]

9. Чему равен угол, если он меньше своего смежного на $0,4\,d$? на $40°$?

10. Угол DCB равен $\frac{2}{7}$ смежного угла BCA; прямая CE делит угол DCB пополам. Чему равен угол ACE?

11. Чему равен угол, образованный биссектрисами двух смежных углов?

12. Один из четырёх углов, образовавшийся от взаимного пересечения двух прямых, составляет $\frac{7}{20}$ всей их суммы. Найти величину каждого. [$54°$; $126°$.]

13. Может ли быть 2 острых угла, чтобы разность между ними равнялась $90°$? [Нет.]

14. Какова должна быть разность между острыми углами? [Меньше $90°$.]

15. Каким должен быть каждый из смежных углов, чтобы их разность была равна прямому углу?

16. Между какими углами разность может быть равна d?

17. Даны два смежных неравных угла. Внутри тупого угла восставлен из общей вершины к общей стороне смежных углов перпендикуляр. Чему равна сумма двух крайних углов? [$90°$.]

18. Могут ли оба смежных угла быть острыми? тупыми? прямыми?

19. Может ли один угол быть острым, если другой смежный с ним прямой? тупой? острый?

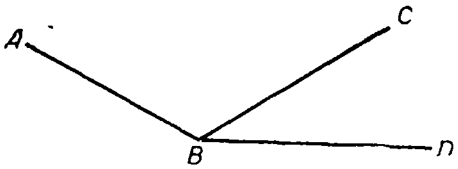
20. Могут ли все четыре равных угла, расположенных вокруг одной точки, быть острыми? тупыми? прямыми?

21. Один из смежных углов равен $\frac{3}{4}$ их суммы. Найти каждый из углов.

22. Один из смежных углов равен $30°$. Найти угол, составленный двумя прямыми линиями, делящими оба смежных угла пополам.

23. Один из смежных углов равен a. Найти угол между биссектрисами двух смежных углов.

24. Можно ли углы ABC и CBD (см. черт. 1) назвать смежными?



Черт. 1

25. Один из четырёх углов при пересечении двух прямых — прямой. Найти величину остальных трёх углов.

26. Дан тупой угол ABC и вне его проведена прямая BM. Назвать угол, на который увеличился угол ABC от проведения прямой BM. Из каких двух углов состоит вновь образованный угол MBC? Назовите разность между углом MBC и углом ABC.

27. Внутри угла ABC проведены прямые BD и BE так, что BD делит угол ABC пополам, а BE делит угол DBC пополам. Назвать угол, который равен $\frac{1}{2}$ угла ABC; $\frac{1}{2}$ угла DBC; $\frac{3}{4}$ угла ABC; $\frac{1}{4}$ угла ABC.

28. Угол ABC тупой. Прямой BD, перпендикулярной AB, угол ABC разделился на 2 части. Назвать каждый из вновь образованных углов и сказать, какие получились углы: тупые, острые, прямые?

29. Дан угол ABC и внутри его проведены прямые BD, BE. Назвать углы, которые в сумме составят угол ABC.

30. Дан угол ABC. Стороны этого угла продолжены. Изменилась ли от этого величина угла ABC? От чего зависит величина угла?

31. Дан тупой угол ABC. Из вершины B восставлен перпендикуляр BD к стороне BC. Сумме каких углов равен теперь угол ABC?

32. Даны неравные смежные углы ABC и CBD. Из вершины этих углов B восставлен перпендикуляр BM к прямой AD. Назвать разность между данным тупым углом и прямым углом.

33. Дан тупой угол. Построить разность между данным углом и прямым углом и назвать эту разность.

34. Начертите 3 острых угла так, чтобы они имели общую вершину и чтобы сумма их была равна $2d$; была больше $2d$; была меньше $2d$. Как они расположатся?

35. Как убедиться, что данная поверхность есть плоскость? Укажите плоскости в классе.

36. Какая разница между прямой линией, лучом и отрезком?

37. Какая разница между кругом и окружностью?

38. Какая разница между диаметром и хордой? диаметром и радиусом? хордой и секущей?

39. Что называется сектором? сегментом?

40. Какой угол называется центральным?

41. Для чего служит транспортир? Как он устроен? Как надо им пользоваться?

Глава II

ТРЕУГОЛЬНИК

§ 1. Треугольники

1. Сумма двух сторон треугольника равна 1 *м*. Определить периметр, зная, что третья сторона на 1 *дм* больше одной и на 2 *дм* меньше другой стороны. [1 *м* 4 *дм* 5 *см*, или 1,45 *м*.]

2. Стороны треугольника пропорциональны $\frac{1}{2}$, 0,7 и $\frac{2}{5}$. Найти длину наибольшей стороны, если сумма двух других равна 9 *м*. [7 *м*.]

3. Стороны треугольника пропорциональны числам 5 : 8 : 10. Найти длину наименьшей стороны, если разность двух других сторон равна 0,5 *м*.

4. Две стороны треугольника выражаются числами 8 и 5 Между какими числами заключается третья сторона? [$13 > x > 3$.]

5. Возможен ли треугольник, стороны которого равны 1 *м*, 1 *дм* и 1 *см*?

6. Возможен ли треугольник, стороны которого пропорциональны числам 1, 2 и 3?

7. Одна сторона равнобедренного треугольника равна 20 *дм*, другая сторона равна $\frac{2}{5}$ третьей. Чему равен периметр? [48 *дм*.]

8. Периметр равнобедренного треугольника равен 3 *дм*. Найти длину каждой стороны, если: 1) одна из них равна 4 *см*; 2) одна из них равна 8 *см*.
[1) Равные стороны по 1,3 *дм*. 2) 2 решения: равные стороны по 8 *см* или равные стороны по 11 *см*.]

9. Периметр равнобедренного треугольника равен 2 *м* 2 *дм*; разность неравных сторон равна 4 *дм*. Найти основание.

10. Периметр равнобедренного треугольника равен 3,6 *м*, причём одна из сторон больше другой в 4 раза. Чему равна каждая сторона треугольника? [1,6 *м*; 1,6 *м*; 0,4 *м*.]

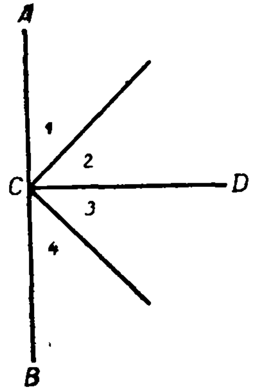
11. Одна сторона треугольника равна 12 *дм*, другая 1 *дм*; определить третью сторону, зная, что она выражается целым числом дециметров. [12 *дм*.]

12. Дан треугольник ABC. $BP \perp AC$; $AP = PB$. Доказать, что угол A равен углу ABP.

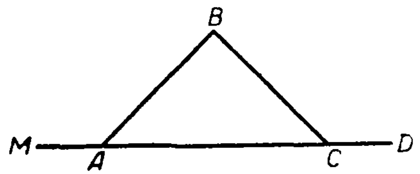
13. Дан треугольник ABC. $AC = BC$; $AP = PB$. Доказать, что $CP \perp AB$.

14. Дано: $AB \perp CD$; угол 2 равен углу 3. Доказать, что угол 1 равен углу 4 (см. черт. 2).

15. Дан треугольник ABC. $AB = BC$. Доказать, что внешний угол MAB равен внешнему углу BCD (см. черт. 3).



Черт. 2



Черт. 3

16. Может ли треугольник иметь стороны, равные 10 *дм*, 15 *дм* и 2 *м*? 1 *м*, 2 *м* и 3 *м*? 1,2 *м*, 1 *дм*, 5 *дм*?

17. Могут ли углы треугольника быть равными 39°, 21°, 120°? 75°, 25°, 80°? 75°, 80°, 25°? $\frac{3}{4}d$, $\frac{2}{3}d$ и $\frac{1}{3}d$?

18. Определить каждый из углов треугольника, зная, что первый угол в $1\frac{1}{2}$ раза больше второго, а второй вдвое больше третьего.

19. Первый угол треугольника меньше второго на 12°, второй больше третьего на 6°. Определить каждый из углов треугольника.

20. Один из внешних углов треугольника равен 135°, а разность внутренних углов, с ним не смежных, равна 29°. Определить внутренние и внешние углы треугольника.

21. Какого вида треугольник, если один из внутренних его углов равен сумме двух других? больше этой суммы? меньше этой суммы?

22. Какого вида треугольник, если один из его внутренних углов равен смежному с ним внешнему? больше смежного с ним внешнего? меньше его?

23. Внутренний угол треугольника равен 39°, а внешний, не смежный с ним, равен 113°. Определить остальные внутренние и внешние углы.

24. Отношение острых углов прямоугольного треугольника равно 3; определить эти углы.

25. Определить углы прямоугольного треугольника, если один из внешних его углов равен $1{,}4d$? 144°?

26. Определить угол, образуемый прямыми линиями, делящими пополам острые углы прямоугольного треугольника; внешние тупые углы его. [135°; 45°.]

27. В треугольнике ABC угол $A = 36°$. Какой угол образуют прямые линии, делящие пополам угол B и угол C? [108°.]

28. Две прямые, делящие пополам углы B и C треугольника ABC, пересекаются под углом в 114°. Определить угол A. [48°.]

29. Угол при вершине равнобедренного треугольника равен 139°. Определить углы при основании. [20°30.]

30. Угол при основании равнобедренного треугольника равен 51°30′. Определить угол при вершине. [77°.]

31. Внешний угол при основании равнобедренного треугольника равен 102°. Определить внутренние углы треугольника. [78°; 78°; 24°.]

32. Определить углы равнобедренного треугольника, если угол при основании в 4 раза больше угла при вершине; вдвое меньше; если отношение этих углов равно 2; $\frac{1}{5}$; 0,3.

33. Определить углы равнобедренного треугольника, если сумма углов, прилежащих к одной из равных сторон, равна 115°; $1\frac{1}{9}d$.

34. Определить угол, образованный линией, делящей пополам угол при вершине равнобедренного треугольника с его основанием.

35. Дано: 1) треугольник ABC равен треугольнику $A_1B_1C_1$; 2) $BD \perp AC$ и $B_1D_1 \perp A_1C_1$.

Доказать, что треугольник ABD равен треугольнику $A_1B_1D_1$.

36. Если два треугольника равны между собой, то какая зависимость существует между равными сторонами и противолежащими им углами? между равными углами и противолежащими им сторонами?

37. Как построить внешний угол треугольника?

38. Сколько в каждом треугольнике внешних углов?

39. Могут ли быть в одном треугольнике два прямых внешних угла? два тупых внешних угла? два острых внешних угла? Ответ пояснить.

40. Отношение внешних углов равно $1 : 1\frac{1}{2} : 1{,}25$. Определить внутренние углы треугольника. [84°; 36°; 60°.]

41. Определить углы равнобедренного треугольника, если угол при вершине на 30° больше угла при основании. [50°; 50°; 80°.]

42. Определить угол A треугольника ABC, если сумма внешних углов, смежных с B и C, больше $B + C$ втрое; вчетверо. [90°; 108°.]

43. Чему равен внешний угол равностороннего треугольника? [120°.]

44. В треугольнике ABC сумма углов A и B равна 84°, а угол B равен $\frac{1}{6}$ угла A. Определить углы треугольника ABC?

[96°; 12°; 72°.]

45. Внешний угол при вершине равнобедренного треугольника равен 65°; какая сторона в треугольнике наибольшая?

[Основание.]

46. Какого вида треугольник образуют биссектрисы углов при основании равнобедренного треугольника с его основанием?

47. Линия, проведённая через вершину равнобедренного треугольника параллельно его основанию, образует со стороной треугольника угол в 48°. Определить углы треугольника.

[48°; 48°; 84°.]

48. Могут ли быть таких два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$, чтобы в них $\angle A + \angle A_1 = 180°$; $\angle B + \angle B_1 = 180°$?

49. Могут ли быть такие треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, чтобы углы A, B, C треугольника ABC дополняли до двух прямых углы A_1, B_1, C_1 треугольника $A_1B_1C_1$?

50. *Внутри треугольника* ABC *взята точка* O *и проведены* прямые OB и OC. Какой из углов BOC и BAC больше?

51. Доказать, что каждая сторона треугольника меньше его полупериметра.

52. Внешний угол при вершине равнобедренного треугольника вдвое больше внутреннего угла при основании. Доказать.

53. Если в равнобедренном треугольнике высота равна $\frac{1}{2}$ основания, то этот треугольник прямоугольный. Доказать.

54. Если в прямоугольном треугольнике один из острых углов вдвое меньше другого, то гипотенуза вдвое больше меньшего катета. Доказать.

55. Если через вершины треугольника провести прямые, параллельные противоположным сторонам, то углы вновь полученного треугольника соответственно равны углам данного. Доказать.

56. Прямые, перпендикулярные сторонам какого-нибудь треугольника, образуют треугольник, углы которого соответственно равны углам данного треугольника. Доказать.

57. Доказать, что равнобедренные треугольники равны, если имеют соответственно равные:

1) Основания и углы при вершине;
2) Основания и углы при основании.

58. В каком треугольнике совпадают высоты, медианы и биссектрисы?

59. Доказать, что в треугольнике ABC биссектриса угла A образует с высотой, выходящей из вершины этого угла, угол, равный, полуразности углов B и C (угол B больше C).

60. Какие точки называются симметричными относительно данной прямой?

61. Какие две фигуры называются симметричными относительно данной прямой?

62. Каким свойством обладают две фигуры, симметричные относительно какой-либо оси?

63. Приведите примеры осевой симметрии в природе.

64. Какая прямая является осью симметрии равнобедренного треугольника?

65. Доказать, что равнобедренные прямоугольные треугольники равны, если катет одного треугольника равен катету другого.

§ 2. Свойства перпендикуляра и наклонных

1. Из точки C опущен на прямую AB перпендикуляр CD и проведены наклонные CE и CF, основания которых равно удалены от основания перпендикуляра. Доказать, что эти две наклонные образуют с перпендикуляром равные углы.

2. Из вершины угла AOB восставлены к его сторонам перпендикуляры OD и OF. Доказать, что угол, образованный этими перпендикулярами, равен $\angle AOB$, или дополняет его до $2d$.

3. $\angle AOC$ и $\angle COB$, имеющие общую вершину и общую сторону, разделены пополам прямыми OE и OF, перпендикулярными между собой. Доказать, что эти углы смежные.

4. Дан отрезок AB и точки H и K, равноудалённые от концов отрезка AB. Какие углы образует с AB прямая, проходящая через точки H и K?

5. Что называется проекцией точки?

6. Что называется проекцией наклонной линии?

7. В каких случаях применяется выражение «опустить» перпендикуляр и в каких случаях — «восставить» перпендикуляр?

Глава III

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ

1. Две параллельные линии образуют с секущей внутренние односторонние углы, отношение которых равно $\frac{2}{9}$. Найти каждый из 8 углов, которые образуются прн пересечении двух параллельных секущей.

2. Стороны четырёхугольника попарно параллельны. Один из углов равен 54°. Найти остальные углы. [126°; 54°.]

3. Одна из сторон четырёхугольника перпендикулярна другой стороне и параллельна третьей, а с четвёртой образует угол в $1\frac{1}{4}d$. Определить остальные углы.

4. Из точки, взятой внутри угла, равного 70°, проведены две прямые: одна перпендикулярно к одной его стороне, другая — параллельно другой стороне. Определить угол между прямыми. [2 решения: 20°; 160°.]

5. Дана пара смежных углов. Перпендикуляр к одной из прямых и параллель к другой пересекаются под углом 75°. Определить разность смежных углов. [150°.]

6. Один из внутренних углов, образуемых при пересечении двух параллельных секущей, равен 45° и разделён пополам прямой линией. Под каким острым углом эта прямая встречает другую параллель? [22°30′.]

7. Чему равен угол, образуемый прямыми, делящими пополам внутренние односторонние углы при параллельных линиях?

8. Прямая $MN \parallel KA$. К MN восставлен перпендикуляр CB; к KA — перпендикуляр DL. Что можно сказать об этих перпендикулярах? Свой вывод обосновать.

9. $AB \parallel CD$. Из точки O опущены перпендикуляры на AB и CD. Что можно сказать об этих перпендикулярах?

10. Внутренний угол COM, образованный секущей AB с одной из параллельных линий CD, разделён прямой OK пополам, а эта прямая встречает другую параллельную прямую под углом, который на 30° меньше угла COM. Определить угол COM.

11. Доказать, что линии, делящие пополам 2 накрест лежащих угла, параллельны между собой.

12. Доказать, что линии, делящие пополам 2 соответственных угла, параллельны между собой.

13. Определить угол, образуемый прямыми, делящими пополам внутренние односторонние углы при параллельных линиях.

14. Внутри угла, равного 70°, взята точка и из неё проведены 2 прямые линии — одна параллельно одной стороне угла, другая параллельно к другой стороне угла. Какой угол образуют эти линии? [70°; 110°.]

15. Угол A равен 78°; внутри его взята точка, и из неё опущены перпендикуляры на стороны угла. Какой угол образуют эти перпендикуляры? [102°.]

16. Из точки, взятой внутри угла A, равного 150°, проведены 2 прямые, параллельные сторонам угла. Найти острый угол, образуемый этими прямыми. [30°.]

17. Разность двух внутренних одностронних углов равна 36°. Определить все углы, образованные при пересечении двух параллельных секущей.

18. Биссектриса внутреннего угла при одной из двух параллельных прямых пересекает вторую параллельную под углом в 30°. Определить величину каждого из 8 углов, образуемых при пересечении двух параллельных. [60°; 120°.]

Глава IV

ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ

1. Определить все углы параллелограма, если один из его углов равен 76°; 15°.

2. Разность двух углов параллелограма равна 42°20′. Определить его углы.

3. Один из углов параллелограма прямой. Определить остальные углы.

4. В четырёхугольнике каждый из его углов в 2 раза больше последующего. Определить углы.

5. Определить углы параллелограма, у которого один из его внешних углов составляет $\frac{4}{5}$ смежного с ним внутреннего.

6. Определить углы параллелограма, если один из его внешних углов равен 45°.

7. Прямая, делящая угол параллелограма пополам, делит противоположную сторону на отрезки в 3 *см* и 8 *см*. Определить периметр параллелограма.

8. Один из углов параллелограма составляет 25% другого. Найти углы параллелограма.

9. Разность двух неравных углов параллелограма равна 39°20′. Определить углы параллелограма.

10. В параллелограме $ABCD$ сторона $AB = 9$ *см* и составляет 30% всего периметра. Определить другие стороны.

11. Если одна из сторон параллелограма равна 5 *см*, то могут ли его диагонали выражаться следующими числами: 1) 4 *м* и 6 *м*? 2) 4 *м* и 3 *м*? 3) 6 *м* и 7 *м*?

12. Высота параллелограма, проведённая из вершины тупого угла, делит этот угол в отношении 3 : 5. Определить углы параллелограма.

13. Вычислить углы параллелограма, если известно, что в треугольнике, образуемом его диагональю со сторонами, сумма углов, прилежащих к диагонали, равна $\frac{1}{2}$ третьего угла.

14. Периметр параллелограма равен 18 *м*; разность двух неравных сторон равна 4 *м*. Определить длину каждой из сторон.

15. Высота параллелограма, опущенная из вершины тупого угла, образует с боковой стороной угол в 54°. Чему равны углы параллелограма?

16. Определить сторону квадрата, периметр которого равен периметру прямоугольника, имеющего основание 32 *м*, а высоту 28 *м*.

17. Квадрат и прямоугольник имеют равные периметры. Сторона квадрата на 6 *дм* меньше одной стороны прямоугольника и вдвое больше другой стороны прямоугольника. Определить стороны этих фигур.

18. В квадрате расстояние точки пересечения диагоналей до одной из сторон равно 1 *м* 1 *дм*. Определить периметр квадрата.

19. В прямоугольнике диагональ образует с большей стороной угол в 36°. Определить угол между диагоналями, обращённый к большей стороне.

20. Что можно сказать о длине диагоналей прямоугольника?

21. Диагональ *АС* образует со стороной *АВ* прямоугольника *АВСД* угол в 30°. Диагонали *АС* и *ВД* пересекаются в точке *О*. Какого вида треугольник *АОД*? [Равносторонний.]

22. Дать определение ромба.

23. Сторона ромба образует с его диагоналями углы, разность которых равна 28°. Определить углы ромба.

24. Углы ромба, образуемые стороной ромба с его диагоналями, относятся как 5 : 4. Определить углы ромба.

25. Чему равен угол между диагональю и стороной квадрата?

26. Сторона квадрата равна 4 *м*. Определить расстояние от точки пересечения диагоналей до одной из его сторон.

27. Высота ромба, проведённая из его вершины, делит противоположную сторону пополам. Определить углы ромба.

28. Стороны параллелограма 6 *см* и 9 *см*. Из вершины его острого угла проведена биссектриса этого угла. На какие части делит биссектриса противоположную сторону?

29. В центре прямоугольного участка стоит дерево. Расстояние от этого дерева до большей стороны участка равно 1,5 *м*, а до меньшей 1,8 *м*. Определить периметр участка.

30. Меньшая диагональ ромба равна его стороне. Определить углы ромба.

31. В ромбе *MNAB* угол, составленный диагональю *MA* со стороной *MB*, равен 60°. Определить каждый из углов треугольника *MNA*.

32. Расстояния точки пересечения диагоналей прямоугольника до смежных сторон соответственно равны 1 *дм* и 1,5 *дм*. Найти периметр прямоугольника.

33. Диагональ *MC* прямоугольника *MNCD* образует со стороной *NC* угол в 30°. Какого вида треугольник *COD*, если диагонали прямоугольника пересекаются в точке *O*?

34. В прямоугольнике *MNAK* сторона *NA* составляет половину диагонали *MA*. Определить угол *MAN*, который образует сторона *AN* с диагональю *MA*.

35. В прямоугольнике *CAMB* диагональ имеет в длину 6 *см*. Середины сторон прямоугольника соединили последовательно прямыми линиями. Определить длину каждой из сторон образовавшегося четырёхугольника.

36. Какая получится фигура, если середины сторон квадрата последовательно соединить прямыми линиями? [Квадрат.]

37. Доказать, что если в квадрате *ABCD* отложить на его сторонах последовательно от вершин *A*, *B*, *C* и *D* четыре равных отрезка и концы этих отрезков соединить, то получится квадрат.

38. Может ли диагональ прямоугольника быть меньше одной из его сторон?

39. Прямые, соединяющие середину стороны прямоугольника, периметр которого равен 30 *м*, с вершинами двух углов его, образуют прямой угол. Вычислить стороны прямоугольника.

40. Диагональ прямоугольника вдвое больше одной из его сторон. Определить углы между диагоналями.

41. Меньшая сторона прямоугольника равна 1,2 *дм*; угол между диагоналями равен 120°. Найти длину диагонали.

42. Дано: $ABCD$ — прямоугольник; на стороне AB дана точка M так, что $AM = MB$. Доказать: $MC = MD$.

43. Периметр параллелограма равен a *см*. Найти периметр квадрата, сторона которого есть средняя арифметическая величина смежных сторон параллелограма.

44. Может ли диагональ параллелограма быть меньше одной из его сторон? Доказать.

45. Сколько разных высот можно провести в параллелограме? Доказать.

46. Доказать, что в ромбе 2 высоты, опущенные из вершины одного и того же тупого угла, равны между собой.

47. Доказать, что линии, соединяющие середины сторон ромба, образуют прямоугольник.

48. Доказать, что биссектрисы внутренних углов параллелограма при пересечении образуют параллелограм.

49. Диагонали ромба 36 *дм* и 10 *дм*. Середины смежных сторон его соединены прямыми. Найти периметр полученного четытрёхугольника.

50. Прямые, соединяющие середины двух смежных сторон четырёхугольника, равны 12 *см* и 20 *см*. Определить диагонали четырёхугольника.

51. Биссектриса угла между стороной и диагональю ромба встречает другую диагональ под углом в 75°. Определить углы ромба.

52. Разность параллельных сторон трапеции равна 5 *м*; средняя линия 6,5 *м*. Вычислить длину каждой из параллельных сторон трапеции.

53. Периметр трапеции равен 60 *м*, а прямая, соединяющая середины непараллельных сторон трапеции, равна 17 *м*. Определить сумму параллельных и сумму непараллельных сторон трапеции.

54. Периметр трапеции равен 25 *м*, а сумма его непараллельных сторон равна 10 *м*. Определить длину средней линии трапеции.

55. Расстояние между серединами непараллельных сторон трапеции равно 200 *см*. Меньшее основание равно 105 *см*. Определить большее основание трапеции.

56. Основания трапеции относятся, как $7:3$; разность этих оснований равна 3,2 *м*. Найти длину средней линии этой трапеции.

57. В данной равнобедренной трапеции боковая сторона равна средней линии, периметр трапеции равен 24 *м*. Определить боковую сторону трапеции.

58. Основания трапеции равны 12 *дм* и 20 *дм;* боковые стороны 4 *дм* и 11 *дм*. Из конца меньшего основания параллельно меньшей боковой стороне проведена прямая. Определить величину периметра отсечённого треугольника.

59. Определить углы равнобедренной трапеции, если в ней разность противоположных углов равна $\frac{8}{15}d$.

60. Определить углы равнобедренной трапеции, в которой верхнее основание равно боковой стороне, а диагональ перпендикулярна к боковой стороне.

61. В равнобедренной трапеции один из противоположных углов в 4 раза больше другого. Найти каждый из углов равнобедренной трапеции.

Глава V

ОКРУЖНОСТЬ

1. Дан круг радиуса $r = 0,5$ *см*. Определить расстояние от центра круга до касательной.

2. Дан круг радиуса a и прямая, отстоящая от центра круга на b *см*. В каком случае эта прямая будет пересекать окружность, касаться или вовсе не иметь общих точек с окружностью?

3. Радиус окружности равен 17 *см*. Точка A удалена от центра на 14 *см*. Определить наименьшее и наибольшее расстояние этой точки от окружности.

4. Наибольшее расстояние точки A от окружности равно 28 *дм*, наименьшее равно 10 *дм*. Найти радиус этой окружности.

5. Хорда удалена от центра на $1\frac{3}{4}$ *м*. Найти расстояние этой хорды от другой хорды, равной ей и параллельной.

6. Две взаимно перпендикулярные хорды, выходящие из одной точки окружности, удалены от центра на 15 *дм* и 12 *дм*. Найти их длины.

7. Две параллельные хорды стягивают дуги в $\frac{1}{2}$ окружности и в $\frac{1}{3}$ окружности. Определить величину дуги, заключённой между этими хордами.

8. Дуга, заключённая между данной хордой и параллельным ей радиусом, равна $\frac{2}{15}$ окружности. Чему равна дуга, стягиваемая данной хордой?

9. Угол, вписанный в окружность, равен 23°30′. Определить величину центрального угла, ему соответствующего.

10. Центральный угол равен 84°30′. Как велик угол, имеющий вершину на окружности и опирающийся на ту же дугу?

11. Вписанный угол опирается на дугу, равную $\frac{4}{15}$ окружности. Чему равен этот угол?

12. Из одной и той же точки окружности проведены 2 хорды. Одна из них стягивает дугу в 48°40′, другая в 97°20′. Определить угол, образуемый этими хордами.

13. Хорда делит окружность в отношении 11 к 13. Определить величину вписанных углов, опирающихся на эту хорду.

14. Хорды AB и CD пересекаются под углом в 45°. Определить дуги DB и CA, если их отношение равно 1 : 4.

15. Через точку окружности проведены хорда и касательная Определить угол между ними, если центральный угол, опирающийся на хорду, равен 150°.

16. Через концы дуги в 50° проведены касательные. Определить угол между этими касательными.

17. Угол между двумя радиусами равен 108°. Определить угол между касательными, проведёнными через концы этих радиусов.

18. Через конец хорды, делящей окружность в отношении 3 : 5, проведена касательная. Определить угол между хордой и касательной.

19. Чему равна дуга, вмещающая угол в 35°25′?

20. Дуги, заключённые между сторонами данного угла, вершина которого лежит вне круга, равны 148°50′ и 32°10′. Определить величину угла.

21. Хорда AB делит окружность в отношении 13 : 5. Какие углы образует эта хорда с касательными, проведёнными в точке 4 и в точке B?

22. Определить угол, образуемый двумя касательными, если окружность точками касания делится в отношении 25 : 11.

23. Окружность разделена на 3 части, относящиеся между собой, как 3 : 4 : 5, и через точки деления проведены касательные. Определить углы полученного треугольника.

24. Доказать, что касательные, проведённые к концам диаметра, параллельны между собой.

25. Окружность, описанная на прямой AB, как на диаметре, есть геометрическое место вершин прямых углов, стороны которых проходят через концы AB. Доказать.

26. Доказать, что если 2 концентрические окружности пересечь прямой линией, то отрезки этой линии, заключённые между окружностями, равны между собой.

27. В круге из концов хорды проведены 2 перпендикулярные к ней хорды. Доказать, что эти хорды равны.

28. Доказать, что хорды, соединяющие противоположные концы двух диаметров, равны и параллельны между собой.

29. Доказать, что отрезки двух равных взаимно пересекающихся хорд соответственно равны.

Глава VI

ВПИСАННЫЕ И ОПИСАННЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ И ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИКИ

1. Вершины вписанного четырёхугольника делят окружность в отношении $3:7:5:21$. Определить углы этого четырёхугольника.

2. В круг вписан треугольник. Одна сторона этого треугольника диаметр, а 2 другие стягивают дуги, относящиеся между собой, как $13:5$. Определить углы треугольника.

3. Определить радиус круга, описанного около прямоугольного треугольника, гипотенуза которого равна 12 *дм*.

4. Определить радиус круга, описанного около прямоугольника, диагональ которого равна 24 *дм*.

5. В круг вписан четырёхугольник. Углы его, прилежащие к одной стороне, содержат $35°30'$ и $109°45'$. Определить остальные углы.

6. В круг вписана трапеция, один из углов которой равен $70°$. Чему равны остальные углы?

7. Четырёхугольники каких видов можно вписать в окружность?

8. В четырёхугольник какого вида можно вписать окружность?

9. Около трапеции описана окружность. Периметр трапеции равен 10 *дм*; средняя линия равна 3 *дм*. Найти длину каждой из боковых сторон трапеции.

10. В круг вписан прямоугольник, одна из сторон которого стягивает дугу в $\frac{5}{18}$ окружности. Определить дугу (в градусах), стягиваемую смежной стороной.

11. Около круга описан квадрат. Радиус круга равен $\frac{1}{8}$ *м*. Определить периметр квадрата.

12. Периметр квадрата, описанного около круга, равен 1 *м*. Найти радиус круга.

13. В прямоугольный треугольник вписан круг. Сумма катетов равна 26 *дм*; радиус вписанного круга равен 3 *дм*. Найти гипотенузу треугольника.

14. Доказать, что в равнобедренном треугольнике центр описанной окружности лежит на высоте.

15. Доказать, что вписанная в круг трапеция равнобедренная.

16. Доказать, что центры вписанного и описанного кругов около правильного треугольника совпадают.

17. Около правильного треугольника ABC описана окружность и на дуге BC взята произвольная точка M. Доказать, что $MA = MB + MC$.

Глава VII

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕСТА НА ПЛОСКОСТИ

1. Назвать геометрическое место точек, находящихся на данном расстоянии a от данной точки A.

[Окружность с центром в точке A и радиусом, равным a.]

2. Назвать геометрическое место точек, расположенных по данную сторону на данном расстоянии от данной прямой.

[Прямая, параллельная данной.]

3. Назвать геометрическое место точек, находящихся на равном расстоянии от двух данных параллельных прямых.

[Прямая, параллельная двум данным прямым и расположенная посредине между ними.]

4. Назвать геометрическое место точек, находящихся на равном расстоянии от сторон угла. [Биссектриса этого угла.]

5. Назвать геометрическое место точек, равноудалённых от концов данного отрезка.

[Перпендикуляр к этому отрезку через его середину.]

6. Назвать геометрическое место точек, равноудалённых от двух данных пересекающихся прямых.

[Совокупность двух взаимно перпендикулярных прямых, делящих смежные углы между прямыми пополам.]

7. Назвать геометрическое место точек, находящихся на равном расстоянии от данной точки.

[Совокупность концентрических окружностей с центром в этой точке.]

8. Что является геометрическим местом вершин равнобедренных треугольников, имеющих общее основание?

[Перпендикуляр к основанию через середину этого основания.]

9. Назвать геометрическое место центров кругов, касающихся двух пересекающихся прямых.

[Биссектриса углов, образуемых этими прямыми.]

10. Что является геометрическим местом центров окружностей, касающихся двух параллельных прямых?

[Прямая, параллельная данным прямым и расположенная на равном расстоянии от них.]

11. Назвать геометрическое место центров окружностей данного радиуса, касающихся данной окружности.

[Окружность, концентрическая данной и описанная радиусом, равным сумме или разности данных радиусов.]

12. Что является геометрическим местом центров окружностей, касающихся данной окружности в данной точке?

[Секущая этой окружности, проходящая через её центр и через данную точку.]

13. Назвать геометрическое место средин равных хорд, проведённых в данной окружности.

[Окружность, концентрическая с данной и проведённая радиусом, равным расстоянию одной из хорд от центра.]

14. Что является геометрическим местом вершин равных углов, стороны которых проходят через две данные точки?

[Дуга окружности, проходящая через эти точки и через вершину какого-нибудь одного из данных углов.]

15. Что является геометрическим местом вершин прямых углов прямоугольных треугольников, имеющих общую гипотенузу?

[Окружность круга, описанного на этой гипотенузе как на диаметре.]

16. Назвать геометрическое место точек, имеющих то свойство, что каждая пара касательных, проведённых из этих точек к данной окружности, составляют между собой равные углы.

[Окружность, концентрическая данной.]

17. Что является геометрическим местом точек средин всех хорд, проведённых параллельно данной прямой.

[Диаметр, перпендикулярный к данной прямой.]

18. Назвать геометрическое место центров окружностей, отсекающих на сторонах угла равные хорды.

[Биссектриса данного угла.]

Глава VIII

ПОДОБНЫЕ ФИГУРЫ

§ 1. Общая мера двух отрезков

1. Определить отношение: 1) *м* к *см*; 2) *см* к *м*; 3) *дм* к *см*; 4) *см* к *км*; 5) *кв. м* к *кв. дм*; 6) ара к *кв. дм*; 7) *га* к *кв. м*; 8) *куб. дм* к *куб. см*; 9) *куб. дм* к *куб. м*.

2. Определить отношение площади зала, длина которого 20 *м*, ширина 15 *м*, к площади крышки стола, длина которого 2 *м*, ширина 1 *м* 50 *см*.

3. Найти общую наибольшую меру метра и дециметра; дециметра и декаметра.

4. Общая мера двух отрезков содержится в большем из них 75 раз, в меньшем 35 раз. Сколько раз содержится в каждом из отрезков общая наибольшая мера? [15; 7.]

5. Найти отношение меньшего из двух отрезков к большему по следующим данным: меньший отрезок содержится в большем 8 раз с остатком; остаток содержится в меньшем отрезке 4 раза ровно.

6. Отношение двух отрезков прямой равно 5 : 3. Найти отношение суммы этих двух отрезков к их разности. [4.]

7. Отношение отрезка a к отрезку b равно 1,5. Отношение b к метру равно 0,4. Сколько метров в a?

§ 2. Подобные треугольники

1. Дан треугольник ABC. Прямая DE, параллельная AC, рассекает сторону AB на отрезки BD и AD, отношение которых равно $\frac{5}{8}$. Найти отношения: $\frac{DE}{AC}$; $\frac{EC}{BC}$; $\frac{BC}{BE}$.

2. На стороне угла A отложены части AN, NF, FS, пропорциональные числам 2; 3; 4,5. Из точек N, F и S проведены параллельные до пересечения с другой стороной угла в точках B, C и D. Найти отношения $BN : CF : DS$.

3. В предыдущей задаче найти CF и DS, полагая $BN = 2$ *дм*.

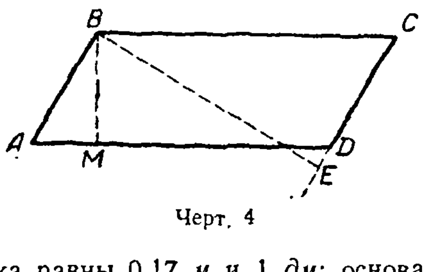
4. В треугольнике MBC сторона $MC = 1$ *м*. Из точки D стороны MB проведена прямая $DE \parallel BC$. Зная, что $\frac{MD}{BD} = \frac{3}{7}$, найти длину ME и отношение $MC : EC$.

5. Высота треугольника равна 2 *м*. Определить расстояние середины боковой стороны до основания. [1 *м*.]

6. Расстояние середины боковой стороны до основания треугольника равно 2,5 *дм*. Чему равна высота треугольника? [5 *дм*.]

7. Подобны ли треугольники, если их стороны соответственно равны: 1) 1 *м*, 1,5 *м* и 2 *м*; 10 *см*, 15 *см* и 20 *см*. 2) 1 *м*, 2 *м* и 15 *дм*; 12 *дм*, 8 *дм* и 16 *дм*. 3) 1 *м*, 2 *м* и 1,25 *м*; 10 см, 9 см и 16 *см*.

8. Из вершины B параллелограма $ABCД$ опущены на стороны перпендикуляры BM и BE. Доказать (см. черт. 4), что $\frac{BM}{BE} = \frac{AB}{BC}$



Черт. 4

9. В двух равнобедренных треугольниках углы при вершине равны. Боковая сторона и основание одного треугольника равны 0,17 *м* и 1 *дм*; основание другого треугольника равно 6 *см*. Определить боковую сторону другого треугольника.

10. Что можно сказать о двух равнобедренных треугольниках, имеющих по равному углу?

11. В одном прямоугольном треугольнике острые углы относятся, как 1 : 2. В другом прямоугольном треугольнике внешний угол, смежный с одним из острых углов треугольника, равен 150°. Что можно сказать об этих двух треугольниках?

12. Два прямоугольных треугольника подобны. Внешний угол, смежный с одним из внутренних острых углов первого треугольника, равен 135°. Что можно сказать о внешних углах другого прямоугольного треугольника?

13. В треугольнике ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$. Определить B_1C_1, если $AB = 1{,}2$ *дм*, $BC = 7$ *см*, $A_1B_1 = 3$ *см*.

$\left[1\frac{3}{4}\text{ см.}\right]$

14. В прямоугольных треугольниках BCD и $B_1C_1D_1$ $\angle A = \angle A_1$; катет $BC = 8$ *см*, катет $B_1C_1 = 2$ *см*. Определить гипотенузу каждого треугольника, если их сумма равна 8,75 *дм*.

[7 *дм*; 1,75 *дм*.]

15. В треугольнике ABC через точку N на стороне AB проведена до пересечения с AC прямая $NM \parallel BC$. Определить длину NM, если $AB = 3$ *дм*, $BC = 4$ *дм*, $AN = 0{,}8$ *дм*.

16. Стороны треугольника ABC равны 3 *дм*, 4 *дм* и 5 *дм*. Определить стороны треугольника DEF, подобного треугольнику ABC, если большая сторона треугольника равна $1\frac{2}{3}$ *дм*.

17. Треугольник ABC подобен треугольнику MND. BE и NK — высоты этих треугольников. Определить основание AC и высоту BE, если $AB = 15$ *дм*, $MN = 6$ *дм*, $NK = 5$ *дм*, $MD = 9$ *дм*.

18. В двух треугольниках большие стороны равны 16 *дм* и 20 *дм*, а соответствующие им высоты равны 1,2 *м* и 1,8 *м*. Подобны ли эти треугольники?

19. Дан треугольник ABC. Через точку D на стороне BC проведена прямая, пересекающая AC в точке E и параллельная AB. Определить BD, если $BC = 16$ *см*, $AB = 2$ *дм*, $DE = 15$ *см*.

20. В треугольнике ABC сторона $AB = 36$ *дм*, $AC = 64$ *дм*. Прямая DE отсекает от этих сторон части $AD = 27$ *см* и $AE = 48$ *см*. Как расположена DE по отношению к BC?

21. Стороны треугольника MAK соответственно равны 12 *дм*, 14 *дм* и 16 *дм*. Меньшая сторона треугольника BCD, подобного треугольнику MAK, равна 3 *дм*. Определить остальные стороны треугольника BCD.

22. Вертикально поставленный шест длиной 8 *м* бросает тень в 15 *м*; определить высоту предмета, тень которого в то же время имеет длину 45 *м*.

23. В равнобедренном треугольнике неравные стороны содержат 25 *дм* и 10 *дм*. Прямая, параллельная основанию данного треугольника, отсекает треугольник, основание которого равно 9 *дм*. Определить боковые стороны отсечённого треугольника.

24. Основание треугольника равно 16 *дм*, высота равна 1 *м*. На каком расстоянии от вершины проведена прямая параллельно основанию треугольника, если длина этой прямой равна 8 *дм*?

25. Прямая рассекает одну боковую сторону треугольника на части, равные 0,6 *м* и 1 *м*, а другую на части в 3 *м* и 5 *м*. Будет ли эта прямая параллельна третьей стороне?

26. В треугольнике, основание которого равно 12 *дм*, а высота 24 *дм*, проведена прямая параллельно основанию, на расстоянии 10 *дм* от основания. Определить длину этой прямой.

27. Доказать, что треугольники подобны, если они имеют по равному углу при основании, основание и высота одного треугольника пропорциональны основанию и высоте другого треугольника.

28. Доказать, что прямая, соединяющая основания двух высот равнобедренного треугольника, отсекает треугольник, подобный данному.

29. В равностороннем треугольнике ABC из точки D — середины стороны BC — опустили перпендикуляр DE на AC. Доказать, что $AE = \frac{3}{4} AC$.

30. Стороны AB и BC треугольника ABC продолжены; на продолжениях отложены части $BD = \frac{1}{2} AB$ и $BE = \frac{1}{2} BC$. Доказать, что $DE \parallel AC$.

31. Дан прямоугольный треугольник. Из вершины прямого угла опущен перпендикуляр на гипотенузу. Доказать, что полученные треугольники подобны данному и между собой.

32. На сторонах BC и CD треугольника BCD взяты точки K и F так, что $CK : KB = 3 : 4$, $CF : FD = 3 : 4$. Доказать, что $BD \parallel KF$.

33. Доказать, что 2 треугольника подобны, если имеют по равному углу и высоты, опущенные на стороны, заключающие эти углы, пропорциональны.

34. Доказать, что прямые линии, соединяющие середины сторон треугольника, образуют треугольник, подобный данному.

35. Средняя линия трапеции равна 1 *м*. Точка пересечения диагоналей удалена от оснований трапеции на 4 *дм* и 1 *дм*. Найти основания. [16 *дм* и 4 *дм*.]

36. Диагонали четырёхугольника соответственно равны 8 *дм* и 6 *дм*. Середины сторон служат вершинами нового четырёхугольника. Определить стороны последнего. [4 *дм*; 3 *дм*.]

37. Высота треугольника равна 3 *дм*. Чему равно расстояние от точки пересечения медиан до основания? [1 *дм*.]

38. Биссектриса угла параллелограма делит диагональ в отношении 17 : 12. Меньшая сторона параллелограма равна 6 *дм*. Найти отрезки, на которые биссектриса делит большую сторону параллелограма [6 *дм*; 2,5 *дм*.]

39. Основание треугольника равно 16 *дм*, высота равна 10 *дм*. На каком расстоянии от вершины проведена прямая $l = 4{,}8$ *дм* параллельно основанию?

40. Боковые стороны трапеции $ABCD: AB = 40$ *дм*, $CD = 25$ *дм*. Диагональ BD, равная 30 *дм*, делит трапецию на 2 подобных треугольника. Определить основания трапеции.

[48 *дм*; $18\frac{3}{4}$ *дм*.]

41. От треугольника ABC прямая BD отсекает подобный ему треугольник CBD. Определить длину общей стороны BC, если $AD = 12$ *дм*, $DC = 4$ *дм*. [8 *дм*.]

42. Стороны a и b прямоугольника соответственно равны 32 *дм* и 12 *дм*. Определить периметр прямоугольника, подобного данному, у которого основание больше высоты на 5 *дм*. [22 *дм*.]

43. Биссектриса угла B треугольника ABC делит сторону AC на отрезки 14 *см* и 6 *см*. Определить периметр треугольника ABC при условии, что сторона AB больше стороны BC на 10 *см*.

[45 *см*.]

44. Отношение двух смежных сторон параллелограма равно 8 : 9. Определить отношение двух высот, проведенных из точки пересечения этих сторон к противоположным сторонам. [8 : 9.]

45. Биссектриса наибольшего угла треугольника делит противоположную сторону на части, равные 12 *м* и 9 *м*. Наименьшая сторона треугольника равна 15 *м*. Вычислить периметр треугольника.

46. Одна сторона треугольника больше другой в 3 раза. Биссектриса угла, заключённого между этими сторонами, делит третью сторону на 2 отрезка, из которых один больше другого на 16 *дм*. Определить длину третьей стороны.

47. По трём сторонам треугольника: $a = 9$ *дм*, $b = 15$ *дм* и $c = 16$ *дм*, определить отрезки, на которые биссектриса наибольшего угла делит противоположную сторону.

48. Стороны квадрата пропорциональны сторонам ромба. Подобны ли эти 2 фигуры?

49. Внутри данного прямоугольника лежит другой прямоугольник, стороны которого параллельны сторонам данного и отстоят от его сторон на одно и то же расстояние. Подобны ли эти прямоугольники?

Глава IX

МЕТРИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ В ТРЕУГОЛЬНИКЕ И КРУГЕ

§ 1. Метрические соотношения в треугольнике

1. Отношение высоты, опущенной на гипотенузу прямоугольного треугольника, к одному из отрезков гипотенузы равно 2. Чему равно отношение катетов? А если отношение той же вы-

соты к одному из отрезков гипотенузы равно $\frac{3}{4}$, то чему равно отношение катетов?

2. Один из полученных отрезков гипотенузы больше высоты в 3 раза. Во сколько раз этот отрезок больше другого?

3. Гипотенуза равна 10 *см*; один из отрезков гипотенузы, образуемых высотой, равен 4 *см*. Найти квадрат каждого катета и отношение квадрата большего катета к квадрату меньшего катета. [40; 60; $1\frac{1}{2}$.]

4. Гипотенуза делится высотой на отрезки в отношении 1 : 4. Найти отношение квадрата меньшего катета к квадрату большего.

5. Отрезки гипотенузы равны 8 и 2. Найти отношение катетов. [2.]

6. Определить гипотенузу прямоугольного треугольника, если катет равен 10 *дм*, а прилегающий к нему отрезок гипотенузы равен 4 *дм*. [25 *дм*.]

7. Высота треугольника делит гипотенузу на части: 75 *дм* и 12 *дм*. Найти высоту. [30 *дм*.]

8. Гипотенуза делится высотой на отрезки 16 *см* и 9 *см*. Вычислить высоту и стороны треугольника..

9. Сумма катетов равна 7. Произведение их равно 12. Найти гипотенузу.

10. Произведение катетов равно 10. На сколько квадрат гипотенузы меньше квадрата суммы катетов?

11. Гипотенуза равна 1. Произведение катетов 0,48. Определить периметр треугольника.

12. Отношение катетов равно 3 : 4. Определить отношение гипотенузы к каждому катету. [5 : 3 и 5 : 4.]

13. Определить основание треугольника по его боковым сторонам: $a = 10$ *м*; $b = 17$ *м* и высоте $h = 8$ *м*.

[2 решения: 21 *м* и 9 *м*.]

14. Чему равна высота равнобедренного треугольника, периметр которого 72 *дм*, а основание меньше боковой стороны на 6 *дм*?

15. Вычислить периметр равнобедренного треугольника по его основанию, равному 40 *см*, и высоте, равной 21 *см*. [98 *см*.]

16. Определить стороны прямоугольного треугольника по гипотенузе, равной 13 *дм*, и разности катетов, равной 7 *дм*.

[12 *дм*; 5 *дм*.]

17. Определить, какого вида треугольник, если стороны его равны:

1) 5; 4; 3; 2) 8; 7; 4; 3) 10; 4; 9; 4) 12, 8; 9.

18. Наибольшая сторона треугольника равна 40 *м*, наименьшая равна 13 *м*; высота, опущенная на первую сторону, равна 12 *м*. Определить третью сторону. [37 *м*.]

19. Определить основание равнобедренного треугольника, у которого боковая сторона $a = 5$ *дм*, а медиана основания равна 3 *дм*.

§ 2. Пропорциональные отрезки в круге

1. Из точки окружности опущен на диаметр перпендикуляр длиной 6 *дм*; один из полученных отрезков диаметра равен 9 *дм*. Определить радиус круга. [6,5 *дм*.]

2. Перпендикуляр, опущенный из точки окружности на диаметр, делит его на отрезки 9 *дм* и 25 *дм*. Определить длину перпендикуляра.

3. Хорда, перпендикулярная к диаметру, больше одного из полученных отрезков его в 4 раза. Найти отношение отрезков диаметра.

4. Диаметр, проходящий через середину хорды, делится ею на части: $a = 700$ *см* и $b = 63$ *см*. Найти длину хорды.

5. Хорда делит другую хорду на отрезки в 8 *дм* и 6 *дм*; один из отрезков первой хорды содержит 12 *дм*. Найти второй отрезок.

6. Через точку, взятую внутри круга, проведена хорда, делящаяся в этой точке на отрезки 3 *дм* и 12 *дм*. Определить наименьшую хорду, проходящую через ту же точку.

Глава X

ПЛОЩАДИ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ ФИГУР

1. Найти отношение площадей двух прямоугольников, имеющих равные основания и высоты, равные: $h_1 = 9$ *м* и $h_2 = 3$ *м*.

2. Найти разность периметров двух прямоугольников, основания которых равны, а высоты $h_1 = 9$ *дм*, $h_2 = 3$ *дм*.

3. Как изменится площадь прямоугольника, если его основание увеличить в 2 раза, а высоту прямоугольника оставить без изменения? [Площадь увеличится в 2 раза.]

4. Как изменится периметр прямоугольника, основание которого 60 *дм*, если это основание увеличить в 2 раза, а высоту оставить без изменения? [Увеличится на 120 *дм*.]

5. Прямоугольник и квадрат имеют общее основание. Высота прямоугольника в 5 раз больше высоты квадрата. Найти отношение площадей данных фигур.

6. Прямоугольник и квадрат имеют общее основание. Высота прямоугольника в 5 раз больше высоты квадрата. Чему равно отношение периметров данных фигур?

7. Прямоугольник и квадрат имеют общую высоту; периметр прямоугольника вдвое больше периметра квадрата. Найти отношение площадей данных фигур.

8. Как изменится площадь прямоугольника, если его основание увеличить в 6 раз, а высоту в 4 раза? [Увеличится в 24 раза.]

9. Основание одного прямоугольника в 8 раз меньше высоты другого прямоугольника, а высота этого же прямоугольника в 4 раза больше основания другого. Найти отношение площадей.

10. Высота прямоугольника 16 *дм*. Основание его увеличили в 4 раза. На сколько надо уменьшить высоту, чтобы вновь полученный прямоугольник был равновелик данному? [На 12 *дм*.]

11. Диагонали ромба равны 20 *см* и 16 *см*. Средины его сторон служат вершинами нового четырёхугольника. Определить площадь последнего. [80 *кв. см*.]

12. Периметр квадрата равен 28 *дм*. Чему равна его площадь? [49 *кв. дм*.]

13. Площадь квадрата равна 25 *кв. дм*. Чему равен его периметр? [20 *дм*.]

14. Периметр квадрата содержит столько линейных единиц, сколько его площадь имеет соответствующих квадратных единиц. Каким числом выражается сторона квадрата?

15. Площадь прямоугольника равна 1 *кв. м*. Одно из его измерений равно 25 *дм*. Найти другое измерение.

16. Периметр квадрата равен периметру прямоугольника, основание которого равно 9 *м*, а высота равна 21 *м*. Какая из площадей больше и на сколько?

[Площадь квадрата больше на 36 *кв. м*.]

17. Основание прямоугольника равно 24 *дм*. Не изменяя основания, удлинили высоту на 12 *дм*. На сколько увеличилась площадь? [288 *кв. дм*.]

18. Участок земли имеет форму параллелограма, основание которого равно 500 *м*, а высота 120 *м*. Сколько гектаров занимает участок?

19. Квадрат и ромб имеют одинаковые периметры. Осиоваиие ромба втрое больше его высоты. Чему равно отношение площадей данных фигур?

20. Основание ромба равно 5 *дм*. Если бы высота его была на 80 *дм* больше, то площадь увеличилась бы в 3 раза. Определить площадь данного ромба.

21. Найти площадь прямоугольника по его периметру $P = 84$ *дм* и разности двух соседних сторон $d = 6$ *дм*. [432 *кв. дм*.]

22. Разность сторон прямоугольника равна $a = 16$ *дм*. Что больше: площадь этого прямоугольника или площадь квадрата, имеющего такой же периметр, и на сколько? [Площадь квадрата больше на 64 *кв. дм*.]

23. Прямоугольный участок земли длиной 120 *м* и шириной 90 *м* разбит на две части: на квадрат и прямоугольник. Определить площади частей.

24. Параллелограм и равновеликий ему треугольник имеют общее основание. Найти отношение их высот.

25. Параллелограм и треугольник имеют равные высоты. Площадь параллелограма в 15 раз меньше площади треугольника. Во сколько раз основание параллелограма меньше основания треугольника? [В 30 раз.]

26. Параллелограм разрезан на 2 части прямой, проходящей через одну из вершин и через середину другой стороны. Чему равно отношение площадей вновь полученных частей? [1 : 3.]

27. Основание треугольника 5 *дм*, а высота 8 *дм*. Какой части ара равна площадь треугольника? $\left[\frac{1}{500}.\right]$

28. Середина гипотенузы удалена от катетов на 36 *дм* и 60 *дм*. Чему равна площадь треугольника?

29. Диагонали ромба 12 *дм* и 25 *дм*. Определить площадь ромба.

30. Две стороны треугольника соответственно равны 2 *дм* и 5 *дм*. Высота, опущенная на большую сторону, равна 8 *дм*. Определить высоту, опущенную на меньшую сторону (без помощи подобных треугольников).

31. Гипотенуза треугольника равна 6 *дм*. Разность катетов равна 2 *дм*. Определить площадь треугольника.

32. Перпендикуляр, опущенный из вершины прямого угла на гипотенузу, делит треугольник на 2 части, площади которых равны 1 *кв. м.* и 49 *кв. м.* Во сколько раз один катет меньше другого?

33. На диагонали квадрата, равной 17 *дм*, построен треугольник, равновеликий данному квадрату. Чему равна высота этого треугольника?

34. Вычислить площадь треугольника по его сторонам: $a = 21$ *м*; $b = 20$ *м*; $c = 13$ *м*.

35. Определить площадь и высоты треугольника по трём сторонам: $a = 4$ *м*; $b = 13$ *м*; $c = 15$ *м*.

Глава XI

ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ

1. Найти центральный угол правильного десятиугольника, восьмиугольника, восемнадцатиугольника.

2. Найти отношение центрального угла правильного многоугольника к одному из внешних углов.

3. Найти сумму внутреннего и центрального угла правильного многоугольника.

4. В каком правильном многоугольнике центральный угол равен внутреннему? В каком — центральный угол вдвое меньше внутреннего? В каком — вдвое больше внутреннего?

5. Сторона правильного многоугольника вдвое больше своего расстояния от центра этого многоугольника. Сколько сторон имеет этот многоугольник? [4.]

6. Прямые, соединяющие центр правильного многоугольника с вершинами, разбивают его на равнобедренные прямоугольные треугольники. Сколько сторон у этого многоугольника? [Четыре.]

7. Найти отношение периметров вписанного в круг правильного шестиугольника и описанного около того же круга квадрата. [3 : 4.]

8. Найти длину прямой, соединяющей через одну середины двух сторон правильного шестиугольника, если сторона этого шестиугольника равна 8 *дм.* [12 *дм.*]

9. В каком правильном многоугольнике радиус описанного круга вдвое больше радиуса вписанного?

10. Формула удвоения.

1) По данному радиусу $R = 2$ *дм* найти a_{24}.
2) По данному радиусу $r = 4$ *дм* найти b_8.
3) По данной стороне $a_6 = 1$ *дм* найти a_3.
4) По данной стороне $a_6 = 3$ *дм* найти b_{12}.
5) По данной стороне $a_4 = 4$ *дм* найти b_{12}.
6) По данной стороне $a_8 = 2$ *дм* найти a_3.

Глава XII

ДЛИНА ОКРУЖНОСТИ И ПЛОЩАДЬ КРУГА

1. Диаметр окружности равен 7 *дм.* Катясь по прямой, окружность сделала полный оборот. Какое расстояние прошёл центр, если $\pi \frac{22}{7}$?

2. Одна окружность сделала 8 оборотов, другая на том же расстоянии 12 оборотов. Найти отношение радиуса первой окружности к радиусу второй. [3 : 2.]

3. Разность длин окружностей 20 *дм.* Отношение их диаметров равно 5. Найти длину меньшей окружности. [5 *дм.*]

4. Радиус окружности увеличили на 2 *дм.* На сколько увеличилась длина окружности?

5. Окружность, описанная около равностороннего треугольника, больше вписанной в этот треугольник окружности на 3,4 *м.* Определить длину каждой окружности.

6. На данной окружности отложена дуга, длина которой равна длине полуокружности, описанной на радиусе. Определить величину этой дуги в градусах. [90°.]

7. Длина одной окружности равна диаметру другой. Найти отношение их радиусов. $\left[\frac{7}{22}.\right]$

8. Вычислить длину окружности по стороне правильного вписанного шестиугольника, равной 14 *дм* $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$. [88 *дм.*]

9. Вычислить длину окружности по диагонали вписанного квадрата, равной 7 *дм.* [22 *дм.*]

10. Длина окружности равна 1 *м*. Найти диаметр. $\left[\frac{1}{\pi}.\right]$

11. Найти длину окружности, которая больше своего диаметра на 5 *дм.*

12. Определить площадь круга при длине радиуса: 1) 7 *м;* 2) 0,7 *м.*

13. Определить радиус круга, если его площадь равна:

1) $12\frac{4}{7}$ *кв. дм*; 2) $6\frac{2}{7}$ *кв. дм.*

14. Определить площадь круга, если площадь вписанного в этот круг квадрата равна: 1) 8 *кв. дм*; 2) 18 *кв. дм.*

15. Вычислить площадь круга, если она меньше площади описанного квадрата на 0,42 $м^2$.

16. Радиус круга увеличили на $\frac{1}{5}$ часть его длины. На какую часть увеличилась площадь круга?

17. Даны 2 концентрических круга. Радиус одного равен стороне квадрата, вписанного в другой. Определить отношение площади кольца к площади меньшего круга.

18. Вычислить площадь круга, если длина его окружности равна 12 *см.*

19. Вычислить площадь круга, описанного около равностороннего треугольника, сторона которого равна $4\sqrt{3}$ *дм.*

20. Периметр сектора равен 20 *см,* а его площадь равна 25 *кв. см*. Определить его радиус.

Глава XIII

ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. Прямые и плоскости

1. Отрезок наклонной между точкой A и плоскостью P равен 12 *дм*. Проекция этого отрезка на плоскость P равна 8 *дм*. Определить расстояние от точки A до точки P. [$4\sqrt{5}$ *дм.*]

2. Вне плоскости правильного треугольника дана точка K, которая проектируется в центр этого треугольника. Сторона треугольника равна $2\sqrt{3}$ *дм.* Расстояние от точки K до вершины треугольника равно $2\frac{1}{2}$ *дм*. Определить расстояние точки K до плоскости. [$1\frac{1}{2}$ *дм.*]

3. Из точки B под углом в 60° проведена к некоторой плоскости наклонная. Определить длину этой наклонной от точки B до плоскости, если её проекция на плоскость равна 9 *дм*. [18 *дм.*]

4. Из точки B под углом в 30° проведена к некоторой плоскости наклонная. Отрезок её между точкой B и плоскостью равен 8 *дм*. Определить расстояние точки B от плоскости.

5. Наклонная проведена под углом в 45° к плоскости M и равна 1,6 *дм*. Найти проекцию этой наклонной на плоскость M.

$$\left[\frac{4\sqrt{2}}{5}.\right]$$

6. Всегда ли можно провести плоскость через 2 непересекающиеся прямые? [Только тогда, когда они параллельны.]

7. Найти на данной плоскости точку, равноудалённую от трёх данных точек.

8. Чем определяется расстояние между двумя параллельными плоскостями?

9. Найти наибольшее число плоскостей, которые можно провести через 3, 4, 5, 6, ..., n точек в пространстве при условии, что никакие 4 из них не лежат в одной плоскости.

[Для трёх	точек	— одна;	$C_3^3 = 1$
„ четырёх	„	— $1 + 3$;	$C_4^3 = C_4^1 = 4$
„ пяти	„	— $1 + 3 + 6$;	$C_5^3 = C_5^2 = 10$
„ шести	„	— $1 + 3 + 6 + 10$;	$C_6^3 = 20$
. . . .	. . . . .	. . . .	. . . .
„ n точек	. . . . .	. . . .	$C_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$.]

10. Найти наибольшее число плоскостей, которые можно провести через n лучей в пространстве, выходящих из одной точки при условии, что никакие три луча не лежат в одной плоскости. [C_n^2 плоскостей.]

11. В пространстве даны 5 прямых и 5 точек. Найти наибольшее число плоскостей, которые можно провести через них при условии, чтобы каждая плоскость содержала одну из данных прямых и одну из данных точек. [25 плоскостей.]

12. Найти наибольшее число прямых, по которым могут пересечься 3 плоскости, 4 плоскости, 5 плоскостей, ... n плоскостей.

[3 плоскости по 3 прямым.
4 плоскости по 6 прямым.
5 плоскостей по 10 прямым.
n плоскостей по $[1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1)]$.
прямым или по $\frac{n(n-1)}{2}$ прямым $= C_n^2$.

13. На сколько областей делится пространство одной плоскостью? двумя пересекающимися плоскостями?

[Одной плоскостью пространство делится на 2 области; двумя пересекающимися плоскостями — на 4 области.]

14. На плоскости P дана точка A. Наклонная $AB = 2a$ образует с плоскостью P угол α; проекция AB_1 наклонной равна a. Найти угол α.

[Проекция AB_1 (катет треугольника AB_1B) равна половине AB (гипотенузы), следовательно, угол $ABB_1 = 30°$ и $\angle \alpha = 60°$.]

15. Найти наибольшее число плоскостей, которые можно провести через 5 лучей в пространстве, выходящих из одной точки, из которых никакие три луча не лежат в одной плоскости.

[$1 + 2 + 3 + 4 = 10$ плоскостей $= C_5^2$].

§ 2. Многогранные углы

1. Можно ли составить такой трёхгранный угол, в котором плоские углы равны: 75°, 100° и 130°?

2. Можно ли составить такой четырёхгранный угол, в котором плоские углы равны: 96°, 108°, 100° и 120°?

3. Можно ли составить такой пятигранный угол, в котором плоские углы равны: 5°, 6°, 7°, 8° и 9°? [Можно.]

4. Проведены из одной точки три прямые, составляющие углы 160°, 113° и 87°. Лежат ли эти прямые в одной плоскости?

5. Чему равен угол между двумя непересекающимися рёбрами правильной треугольной пирамиды? $\left[\frac{\pi}{2}.\right]$

6. Чему равен угол между диагональю куба и его гранью?

7. Из вершины A прямоугольника $ABCD$ со сторонами $AB = 3$ *дм* и $AD = 5$ *дм*, восставлен к плоскости прямоугольника перпендикуляр $AE = 4$ *дм*. Определить расстояние точки E от вершин прямоугольника B, C и D.

8. Прямая линия, пересекая две параллельные плоскости, образует с ними угол 45°. Расстояние между плоскостями равно 10 *дм*. Определить отрезок прямой, заключённый между этими плоскостями.

9. При каком условии проекцией прямого угла на плоскость будет: 1) прямой угол; 2) острый угол; 3) тупой угол? (Показать на модели.)

10. Из точки, отстоящей от плоскости P на расстоянии 6 *дм*, проведены 3 наклонные под углами 30°, 45° и 60° к плоскости P. Определить длину каждой наклонной.

11. Три прямые OA, OB и OC, выходящие из одной точки, образуют друг с другом углы: $\angle AOB = 104°$; $\angle BOC = 72°$; $\angle COA = 125°$. В одной или разных плоскостях лежат названные прямые? Почему?

12. Как убедиться в равенстве двух двугранных углов?

Глава XIV

МНОГОГРАННИКИ

1. Диагональ куба равна 9 *дм*. Определить рёбра куба.

2. Диагональ куба равна a *дм*. Определить проекцию диагонали на плоскость грани куба.

3. Ребро куба равно 5 *дм*. Определить площадь диагонального сечения.

4. Площадь диагонального сечения куба равна 5 *кв. м*. Определить длину диагонали куба.

5. Диагональ куба равна a *дм*. Определить боковую поверхность куба.

6. Диагональ куба равна 9 *дм*. Определить полную поверхность куба.

7. Полная поверхность куба равна 120 *кв. дм*. Определить площадь диагонального сечения.

8. Боковая поверхность куба равна 64 *кв. дм*. Определить объём куба.

9. Полная поверхность куба равна 726 *кв. дм*. Определить его объём.

10. Объём куба равен 729 *куб. дм*. Определить его полную поверхность.

11. Ребро одного куба вдвое больше ребра другого куба. Во сколько раз объём первого куба больше объёма второго?

12. Как пересечь куб плоскостью, чтобы в сечении получился квадрат?

[Искомая плоскость должна быть параллельна двум противоположным граням и лежать между ними.]

13. Пересечь куб плоскостью так, чтобы в сечении получился правильный треугольник.

[Искомая плоскость должна проходить через какую-либо вершину и две диагонали граней, выходящих из этой вершины.]

14. Сколько плоскостей можно провести через три вершины куба? [Одну.]

15. Можно ли куб пересечь плоскостью так, чтобы в сечении получить: 1) квадрат? 2) прямоугольник? 3) ромб? 4) параллелограм? 5) трапецию? 6) разносторонний треугольник? 7) равнобедренный треугольник? 8) равносторонний треугольник? 9) прямоугольный треугольник? [1—8 да, 9 — нет.]

16. Чему равен периметр сечения, проходящего через концы трёх рёбер, выходящих из одной и той же вершины куба, если известно, что ребро куба $a = 4$ *см*. [$3a\sqrt{2}$.]

17. Определить площадь сечения, проходящего через концы трёх рёбер, выходящих из одной и той же вершины куба, если ребро куба равно $a (a = 4$ *см*$)$.

$$\left[\frac{a^2\sqrt{3}}{2}\ см^2.\right]$$

18. Объём прямоугольного параллелепипеда равен 70 *куб. дм*, его боковая поверхность равна 91 *кв. дм*, а высота равна 7 *дм*. Определить стороны основания. [4 *дм* и $2\frac{1}{2}$ *дм*.]

19. Определить объём прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием, высота которого 20 *дм*, а сторона основания 6 *дм*. [720 *куб. дм*.]

20. Какие геометрические фигуры получаются в диагональном сечении параллелепипеда? [Параллелограмы.]

21. Полная поверхность правильной четырёхугольной призмы 522 *кв. м*. Высота призмы 10 *м*. Определить сторону основания.

22. Высота правильной четырёхугольной призмы h *см*; диагональ призмы образует с плоскостью основания угол 60°. Определить объём призмы.

$$\left[\frac{1}{6}h^3.\right]$$

23. Какие фигуры представляют диагональные сечения прямой призмы?

24. Всякую ли четырёхугольную призму можно назвать параллелепипедом?

[Четырёхугольную призму можно назвать параллелепипедом только при условии, если её основанием служит параллелограм.]

25. Сколько диагональных сечений можно провести через одно боковое ребро, 3-, 4-, 5-, ..., m-угольной призмы?

На сколько частей эти плоскости делят призму? Какое геометрическое тело представляет каждая отсечённая часть?

26. Сколько диагональных сечений можно провести через все боковые рёбра 4-, 5-, 6-, ..., n-угольной призмы. $\left[2;\ 5;\ 9;\ \frac{n(n-3)}{2}.\right]$

27. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна a *дм*. Угол между плоскостью основания и плоскостью боковой грани равен 60°. Определить высоту пирамиды.

28. Чему равна поверхность правильной треугольной пирамиды, ребро которой равно а?

29. В правильной треугольной пирамиде высота равна стороне основания. Какой угол образуют боковые рёбра с плоскостью основания?

30. Площадь боковой грани правильной пирамиды с квадратным основанием равна 20 *кв. дм*; площадь основания 64 *кв. дм*. Найти объём пирамиды.

31. Полная поверхность правильной четырёхугольной пирамиды равна 360 *кв. дм*. Апофема равна 13 *дм*. Определить объём пирамиды.

32. Объём правильной четырёхугольной пирамиды равен 1 280 *куб. дм*. Высота равна 15 *дм*. Определить полную поверхность пирамиды.

33. Объём правильной треугольной пирамиды равен 48 *куб. м.* Угол между плоскостью основания и боковым ребром равен 60°. Определить боковое ребро. [8 *м.*]

34. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна *а дм.* Угол между плоскостью боковой грани и плоскостью основания равен 30°. Определить боковую поверхность пирамиды.

$$\left[\frac{1}{2}a^2.\right]$$

35. Угол между боковым ребром правильной треугольной пирамиды и плоскостью её основания равен 60°. Боковое ребро $l = 4$ *дм.* Определить объём пирамиды. [$v = 6$ *куб. дм.*]

36. В треугольной пирамиде стороны основания равны 30 *дм,* 28 *дм* и 26 *дм.* Высоты боковых граней пирамиды равны между собой и каждая из них равна 10 *дм.* Определить объём пирамиды. [672 *куб. дм.*]

37. Объём правильной четырёхугольной усечённой пирамиды равен 26 *куб. дм,* высота равна 1,5 *дм,* апофема равна 2,5 *дм.* Определить полную поверхность усечённой пирамиды.

[80 *кв. дм.*]

38. Высота правильной четырёхугольной усечённой пирамиды $h = 2$ *дм.* Сторона верхнего основания $a_1 = 1$ *дм,* нижнего $a_2 = 4$ *дм.* Найти объём усечённой пирамиды.

$$\left[v = \frac{1}{3}\left(a_1^2 + a_2^2 + a_1a_2\right)h = 14\ дм^3.\right]$$

39. Три последовательных угла основания четырёхугольной пирамиды относятся, как 2 : 3 : 4; боковые рёбра пирамиды образуют с плоскостью основания равные углы. Найти плоские углы основания. [60°; 90°; 120°; 90°.]

40. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, у которого основание равно 12 *дм,* а боковая сторона равна 10 *дм.* Боковые грани пирамиды образуют с его основанием равные двугранные углы, содержащие 45°. Определить высоту пирамиды. [3 *дм.*]

41. Двугранный угол при боковом ребре правильной четырёхугольной пирамиды равен 120°. Сторона основания равна *а см* Определить боковое ребро пирамиды.

$$\left[\text{Боковое ребро равно } \frac{1}{2}a\,.\sqrt{3}\ см.\right]$$

42. Доказать, что если у пирамиды высоты боковых граней равны, то вершина пирамиды проектируется в центр круга, вписанного в основание.

43. Доказать, что если в правильной треугольной пирамиде высота равна стороне основания, то боковые рёбра составляют с плоскостью основания угол в 60°.

Глава XV

КРУГЛЫЕ ТЕЛА

1. Определить отношение высоты цилиндра к радиусу его основания, если площадь осевого сечения цилиндра равна сумме площадей оснований.

2. Определить боковую поверхность цилиндра, вписанного в куб, ребро которого равно a.

3. Радиус основания цилиндра равен r; на сколько надо увеличить высоту цилиндра, чтобы его боковая поверхность была равна прежней полной поверхности?

4. При каком радиусе основания боковая поверхность цилиндра будет содержать столько квадратных единиц, сколько в его объёме кубических единиц?

5. Что сделается с поверхностью цилиндра, если его измерения увеличим в 3 раза?

6. Определить радиус основания цилиндра, боковая поверхность которого равна 352 *кв. дм*, а образующая равна 8 *дм*.
$\left[\pi = \frac{22}{7}.\right]$

7. Как относятся боковые поверхности двух цилиндров с одинаковыми объёмами?

8. Объём цилиндра, высота которого равна $\frac{2}{3}$ *дм*, вдвое больше объёма шара, радиус которого равен 1 *дм*. Чему равен радиус основания цилиндра?

9. Чему равен радиус основания цилиндра, если объём его равен 11 *куб. дм*, а высота равна 14 *дм*?

10. Что сделается с объёмом цилиндра, если радиус его основания увеличить в 2 раза?

11. Что сделается с объёмом цилиндра, если его высоту увеличить в 2 раза?

12. Высота цилиндра равна $\frac{9}{11}$ *дм*, а радиус основания равен 7 *дм*; определить сторону квадрата, равновеликого боковой поверхности цилиндра.

13. Как относятся объёмы двух цилиндров, имеющих одну и ту же боковую поверхность?

14. Радиус основания цилиндра равен 2 *м*; высота его равна 3 *м*. Найти диагональ осевого сечения. [5 *м*.]

15. Осевое сечение цилиндра — квадрат, площадь которого равна 4 $м^2$. Найти площадь основания. [π.]

16. Высота цилиндра $h = 8$ *дм*, радиус основания $r = 5$ *дм*. Цилиндр пересечён плоскостью, параллельной оси, так, что в сечении получается квадрат. Найти расстояние сечения от оси. [3 *дм*.]

17. Площадь осевого сечения цилиндра равна $S (S = 4\ м^2)$. Найти боковую поверхность цилиндра. [$4\pi м^2$.]

18. Чему равна высота цилиндра, радиус основания которого равен 1 *дм*, а площадь осевого сечения равновелика основанию?

19. Диаметр основания цилиндра равен его высоте. Найти отношение площади осевого сечения цилиндра к площади его основания.

20. Как изменится боковая поверхность конуса, если его образующую увеличить в m раз, а длину окружности основания в n раз?

21. Во сколько раз боковая поверхность равностороннего конуса (т. е. такого, в котором сечение по оси есть равносторонний треугольник) больше площади его основания?

22. Как изменится боковая поверхность конуса, если, оставив без изменения образующую, уменьшить радиус основания в 4 раза?

23. Чему равен радиус основания конуса, боковая поверхность которого равна 132 *кв. дм*, а образующая равна 11 *дм*?

24. Найти отношение объёмов равностороннего цилиндра и равностороннего конуса, если их полные поверхности равны между собой.

25. Как изменится объём конуса, если радиус основания оставить без изменения, а высоту уменьшить в 6 раз?

26. Чему равен радиус основания конуса, объём которого равен 616 *куб. дм*, а высота равна 12 *дм*?

27. Объём конуса равен 176 $дм^3$; высота равна 42 *дм*; $\pi = \frac{22}{7}$. Определить радиус основания.

28. Определить отношение объёма конуса к объёму шара, если высота и радиус основания конуса равны радиусу шара.

29. Радиус основания конуса R. Высота конуса равна радиусу основания. Найти площадь осевого сечения, если $R = 3$ *м*.

[$R^2 = 9$ $м^2$.]

30. Отношение площади основания конуса к площади осевого сечения равно π. Найти угол между образующей и плоскостью основания конуса. [45°.]

31. Радиус основания конуса R. Через середину высоты конуса проведена плоскость, параллельная основанию конуса. Найти площадь сечения, если $R = 2$ *м*. $\left[\frac{\pi R^2}{4} = \pi.\right]$

32. Высота конуса $H = \frac{1}{2}$ *м*. Угол между высотой и образующей равен 60°. Найти площадь сечения, проведённого через две взаимноперпендикулярные образующие. $\left[2H^2 м^2 = \frac{1}{2} м^2.\right]$

33. Площадь осевого сечения конуса равна 84 *кв. дм*, а основание этого сечения равно 14 *дм*. Определить объём конуса.

34. Шар пересечён плоскостью на расстоянии 9 *дм* от центра. Радиус круга, полученного в сечении, равен 12 *дм*. Определить поверхность шара. [900 π $дм^2$.]

35. Шар пересечён плоскостью, расстояние которой от центра шара на 2 *дм* меньше радиуса шара. Радиус круга, полученного в сечении, равен 6 *дм*. Определить объём шара.

36. Найти объём цилиндра, описанного около куба, ребро которого равно a.

37. В куб вписан шар, радиус которого равен 1 *дм*. Определить поверхность куба. [24 *кв. дм*.]

38. В цилиндр вписан шар. Определить отношение поверхностей и объёмов этих тел. [3 : 2.]

39. Около куба описан и в куб вписан шар. Определить отношение полученных шаровых поверхностей.

40. Ребро тетраэдра равно a *дм*. Найти поверхность шара, вписанного в этот тетраэдр.

41. Каждое из боковых рёбер пирамиды равно 3 *дм*. Основанием пирамиды служит прямоугольник со сторонами 2 *дм* и 4 *дм*. Определить радиус шаровой поверхности, описанной около пирамиды.

42. В усечённый конус вписан шар радиусом 3 *дм*. Отношение площадей оснований усечённого конуса 4 : 9. Определить объём усечённого конуса.

43. Около основания конуса, высота которого равна 9 *дм*, описан квадрат, площадь которого равна 49 *кв. дм*. Определить объём конуса.

44. Поверхность усечённого конуса, в который вписан шар, равна 78π *кв. дм*. Радиус верхнего основания усечённого конуса равен 2 *дм*. Определить поверхность шара.

45. По каким данным можно построить прямой круговой конус?

[Прямой круговой конус можно построить в том случае, если по данным можно построить его осевое сечение — равнобедренный треугольник.]

46. Высота конуса $H = \frac{1}{2}$ *м*. Угол между высотой и образующей равен 60°. Найти объём конуса.

47. Дана правильная треугольная пирамида и 2 конуса: один вписан в неё, другой описан. Найти отношение объёмов конусов. [$V^1 : V^2 = 1 : 4$.]

48. Дана правильная четырёхугольная пирамида и 2 конуса: один вписан в неё, другой описан. Найти отношение объёмов конусов. $V_1 : V_2 = 1 : 2$.

49. Развёртка конуса есть сектор радиуса, a с углом $\alpha = 90°$. Найти объём конуса.

$$\left[V = \frac{\pi a^3}{192}\sqrt{15} \text{ куб. ед.} \right]$$

50. Окружности каких радиусов можно провести на поверхности шара радиуса R?

[Окружности, радиусы «r» которых удовлетворяют условию: $0 < r \leq R$]

51. Где должен находиться источник света, чтобы была освещена половина шаровой поверхности?

[Если источник света находится на конечном расстоянии от шара, то пучок лучей, падающий на шаровую поверхность, освещает только часть поверхности, а именно: сегмент, меньший половины поверхности шара.

По мере того, как источник света удаляется от шара, освещаемая часть шара увеличивается. Если источник света будет неограниченно удаляться от шаровой поверхности, то освещаемая поверхность шара будет неограниченно приближаться к половине шаровой поверхности.]

52. Из шара выделили часть, ограниченную двумя большими полукругами; чему равна поверхность части шара, заключённой между двумя большими полукругами, образующими угол в 30°?

$$\left[\text{Поверхность этой части шара} = \frac{\pi R^2}{3} + \pi R^2 = \frac{4\pi}{3} \cdot R^2 \text{ (кв. ед.)}\right]$$

53. Дан круг и вне его в пространстве точка. Как должна быть расположена точка относительно круга, чтобы можно было построить через эту точку и окружность данного круга шар?

[Точка может находиться в любом месте пространства, но только не в плоскости данного круга.]

54. Чему равно отношение поверхности шара и полушара?

[$4\pi R^2 : 3\pi R^2 = 4 : 3$.]

55. Шар делится тремя попарно взаимно перпендикулярными большими кругами на 8 частей. Найти поверхность одного из 8 полученных тел и отношение поверхности каждой части к поверхности шара.

[Кривая поверхность одной восьмой части шара равна $\frac{\pi R^2}{2}$ кв. ед. Кроме того, эта часть шара ещё ограничена тремя четвертями площади большого круга, т. е. $\frac{3\pi R^2}{4}$ кв. ед. Отсюда поверхность каждого из образовавшихся тел равна $\frac{5\pi}{4} R^2$ кв. ед., а отношение её к поверхности шара равно $5 : 16$.]

56. Определить отношение объёма конуса к объёму шара, если высота, радиус основания конуса и радиус шара равны между собой.

57. Объём цилиндра, высота которого *a дм*, вдвое больше объёма шара, радиус которого равен *b дм*. Чему равен радиус основания цилиндра?

Глава XVI

ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

1. Какое геометрическое тело образуется от вращения квадрата около одной из его сторон?

2. Какое геометрическое тело образуется от вращения прямоугольного треугольника около одного из катетов?

3. От вращения какой фигуры получается усечённый конус?

4. Сторона квадрата равна 1 *дм*. Вычислить полную поверхность тела, полученного от вращения этого квадрата вокруг стороны.

5. Сторона квадрата равна 10 *см*. Вычислить боковую поверхность цилиндра, полученного от вращения этого квадрата вокруг одной из его сторон.

6. Неравные стороны прямоугольника относятся, как $\frac{1}{2}$: 0,3. Определить отношение объёмов двух цилиндров, полученных от вращения прямоугольника около каждой из сторон.

7. Прямоугольный треугольник с катетами 4 *дм* и 3 *дм* вращается вокруг гипотенузы. Определить поверхность и объём тела вращения.

8. Определить объём тела, полученного от вращения прямоугольного равнобедренного треугольника около катета, равного a.

9. Определить объём тела, полученного от вращения равнобедренного прямоугольного треугольника около катета, равного 7 *дм*.

10. Чему равно отношение боковых поверхностей конусов, полученных от вращения прямоугольного треугольника около каждого из катетов?

11. Треугольник, площадь которого S, вращается вокруг стороны a. Найти объём тела вращения.

[По формуле Гюльдена: $V = S\ 2\pi . \frac{2S}{3a} = \frac{4}{3}\pi\frac{S^2}{a}$ куб. ед.]

12. Чему равно отношение объёмов, полученных от вращения параллелограма около каждой из неравных сторон?

13. Определить объём тела, полученного от вращения прямоугольного треугольника около гипотенузы, равной 25 *дм*, если один из катетов равен 20 *дм*.

14. Определить объём тела, полученного от вращения прямоугольного треугольника около гипотенузы, если катеты равны 3 *дм* и 4 *дм*.

15. Диагональ прямоугольника равна 13 *см*, периметр его равен 34 *см*. Определить поверхность тела, полученного от вращения этого прямоугольника около большей стороны.

Глава XVII

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕСТА ТОЧЕК В ПРОСТРАНСТВЕ

1. Что является геометрическим местом точек, равноудалённых от двух данных точек (или от концов данного отрезка) в пространстве?

[Плоскость, проходящая через середину прямой, соединяющей данные точки, и перпендикулярная к этой прямой.]

2. Найти геометрическое место точек, равноудалённых от трёх данных точек в пространстве, не лежащих на одной прямой.

[Перпендикуляр, восставленный из центра окружности к плоскости этой окружности, описанной около треугольника, для которого данные 3 точки являются вершинами.]

3. Назвать геометрическое место точек, равноудалённых от двух пересекающихся в пространстве прямых AB и BC.

[Плоскость, проходящая через биссектрису угла BAC и перпендикулярная к плоскости BAC.]

4. Что является геометрическим местом точек, равноотстоящих от трёх пересекающихся прямых AB, BC и AD, не лежащих в одной плоскости?

[Прямая, полученная от пересечения двух плоскостей: плоскости, каждая точка которой равно удалена от двух из этих прямых AB и BC, и плоскости, каждая точка которой равно удалена от двух других прямых BC и AD.]

5. Каким геометрическим местом точек является плоскость, параллельная двум данным параллельным плоскостям?

[Геометрическим местом точек, равноудалённых от каждой из двух данных параллельных плоскостей.]

6. Что является геометрическим местом точек, отношение расстояний которых от двух данных параллельных плоскостей имеет данную величину? [Две плоскости, параллельные данным.]

7. Назвать геометрическое место середин отрезков прямых, пересекающих две данные параллельные плоскости и заключённых между этими плоскостями.

[Плоскость, параллельная данной.]

8. Что является геометрическим местом точек, находящихся на данном расстоянии от данной точки в пространстве?

[Шар с радиусом, равным данному расстоянию, и с центром в данной точке.]

9. Назвать геометрическое место точек, находящихся на данном расстоянии от данной плоскости.

[2 плоскости, параллельные данной и находящиеся от неё на данном расстоянии.]

10. Что будет являться геометрическим местом точек, лежащих в данной плоскости и находящихся на данном расстоянии от другой данной плоскости?

[Две прямые, параллельные между собой, лежащие в первой данной плоскости и параллельные другой данной плоскости.]

11. Назвать геометрическое место точек, равноудалённых от двух параллельных плоскостей.

[Плоскость, параллельная двум данным плоскостям и делящая расстояние между ними пополам.]

12. Назвать геометрическое место точек, равноудалённых от трёх пересекающихся плоскостей.

[Четыре прямые, по которым пересекаются биссектральные плоскости двугранных углов, образованных данными плоскостями.]

13. Назвать геометрическое место точек, из которых данный отрезок виден в пространстве под прямым углом.

[Шар, имеющий своим диаметром данный отрезок.]

14. Назвать геометрическое место точек данной плоскости, из которых данный отрезок виден под прямым углом.

[Окружность, полученная в пересечении данной плоскости с шаром, геометрическим местом всех точек пространства, из которых данный отрезок виден под прямым углом.]

15. Найти геометрическое место центров тяжести треугольников, основания которых лежат на данной плоскости M, а вершины — на плоскости N, параллельной плоскости M.

[Плоскость, параллельная данной плоскости M.]

16. Назвать геометрическое место вершин треугольников, основания которых лежат на данной плоскости M, а центры тяжести находятся на плоскости N, параллельной M.

[Плоскость, параллельная данной плоскости M.]

17. Назвать геометрическое место середин отрезков лучей, проведённых из данной точки вне данной плоскости, ко всем точкам этой плоскости. [Плоскость, параллельная данной.]

18. Найти геометрическое место точек, равноудалённых от вершин данного треугольника.

[Прямая, перпендикулярная к плоскости этого треугольника и проходящая через центр описанной около него окружности.]

19. Найти геометрическое место оснований равных наклонных, проведённых из одной и той же точки вне данной плоскости.

[Окружность, лежащая на данной плоскости.]

20. Найти геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из данной точки вне данной прямой на все плоскости, проходящие через эту прямую.

[Окружность, лежащая в плоскости, перпендикулярной к данной прямой.]

21. Найти геометрическое место центров окружностей, описанных около прямоугольных треугольников, вершины которых лежат в трёх данных параллельных плоскостях.

[Три плоскости, параллельные данным.]

22. Назвать геометрическое место точек, находящихся на данном расстоянии a от данной плоскости M и на данном расстоянии b от прямой l, перпендикулярной M.

[Окружность, лежащая на плоскости, параллельной M, и окружность, симметричная первой относительно плоскости M.]

23. Назвать геометрическое место центров окружностей данного радиуса, лежащих в плоскостях, проходящих через данную прямую, и касающихся этой прямой в одной и той же точке.

[Окружность с центром на данной прямой, лежащая в плоскости, перпендикулярной к этой прямой.]

24. Найти геометрическое место точек, симметричных данной точке A относительно всех точек данной прямой a.

[Прямая, параллельная данной прямой a.]

25. Что является геометрическим местом точек, симметричных данной точке A относительно всех прямых, параллельных данной прямой a? [Плоскость, перпендикулярная данной прямой a.]

26. Назвать геометрическое место точек, симметричных данной точке A относительно всех точек, лежащих на данной плоскости M, и одинаково удалённых от A.

[Окружность, лежащая в плоскости, параллельной плоскости M.]

27. Что является геометрическим местом точек, симметричных данной точке A относительно всех плоскостей, проходящих через данную прямую a?

[Окружность, лежащая в плоскости, перпендикулярной к данной прямой a.]

28. Назвать геометрическое место осей симметрии двух данных точек A и B.

[Плоскость, перпендикулярная прямой AB и проходящая через её середину.]

29. Что является геометрическим местом точек, равноудалённых от граней двугранного угла?

[Плоскость, делящая двугранный угол пополам.]

30. Назвать геометрическое место точек, сумма расстояний которых от граней двугранного угла равна данной величине.

[Плоскость, параллельная ребру двугранного угла и одинаково наклонённая к его граням.]

31. Назвать геометрическое место точек, разность расстояний которых от граней двугранного угла равна данной величине.

[Плоскость, параллельная плоскости, делящей двугранный угол пополам.]

32. Что является геометрическим местом точек, находящихся на данных расстояниях от граней двугранного угла?

[Прямая, параллельная ребру и отстоящая от граней двугранного угла на заданном расстоянии.]

33. Назвать геометрическое место точек, равноудалённых от граней двугранного угла и находящихся на данном расстоянии от данной плоскости.

34. Назвать геометрическое место центров окружностей, описанных около треугольников, получаемых в сечении трёхгранного угла параллельными плоскостями.

[Прямая, проходящая через вершину этого угла.]

35. Что является геометрическим местом точек, равноудалённых от граней трёхгранного угла?

[Прямая, проходящая через вершину этого угла.]

36. Назвать геометрическое место точек, расстояния которых от трёх граней трёхгранного угла пропорциональны трём данным числам.

37. Что является геометрическим местом точек, равноудалённых от рёбер трёхгранного угла?

[Прямая, проходящая через вершину этого угла.]

38. Определить геометрическое место вершин равновеликих пирамид, имеющих одно и то же основание.

[Искомое геометрическое место точек есть плоскость, параллельная основанию и проходящая через вершину одной из пирамид.]

39. Что является в шаре геометрическим местом середин хорд, параллельных данной прямой?

[Искомым геометрическим местом является большой круг, перпендикулярный к данной прямой.]

40. Найти геометрическое место центров шаров, касающихся двух данных прямых AB и AC.

[Искомое геометрическое место точек есть плоскость, проходящая через биссектрису угла BAC и перпендикулярная плоскости BAC.]

41. Найти геометрическое место точек, отстоящих от поверхности данного шара на расстоянии l.

[Искомое геометрическое место точек есть поверхность шара, концентрическая с данной и описанная радиусом, равным сумме радиуса данного шара с l.]

42. Определить геометрическое место центров шаров данного радиуса, касающихся данной плоскости.

[Искомое геометрическое место точек есть плоскость, параллельная данной и отстоящая от неё на расстоянии данного радиуса.]

43. Найти геометрическое место центров шаров, касающихся данной прямой в данной на ней точке.

[Искомое геометрическое место точек есть плоскость, перпендикулярная к данной прямой и проходящая через данную точку.]

44. Назвать геометрическое место центров шаров данного радиуса, касающихся данной прямой в данной на ней точке.

[Искомое геометрическое место точек есть окружность радиуса, равного данному, и описанная из данной точки в плоскости, проходящей через эту точку, перпендикулярно данной прямой.]

45. Найти геометрическое место центров шаров данного радиуса, касающихся данной прямой.

[Искомое геометрическое место точек есть цилиндрическая поверхность, описанная прямой, параллельной данной прямой и проходящей от неё на расстоянии данного радиуса.]

46. Найти геометрическое место центров шаров, касающихся двух данных плоскостей.

[Искомое геометрическое место точек есть плоскость, делящая пополам двугранный угол между двумя данными плоскостями.]

47. Определить геометрическое место центров шаров данного радиуса, которые касались бы двух пересекающихся плоскостей.

[Искомое геометрическое место точек есть линия пересечения двух плоскостей, параллельных данным и отстоящих от них на расстоянии данного радиуса.]

48. Определить геометрическое место центров шаров, касающихся данного шара в данной на нём точке.

[Искомое геометрическое место точек есть прямая, проходящая *через центр шара и данную точку.*]

49. Определить геометрическое место центров шаров данного радиуса, касающихся данного шара.

[Искомое геометрическое место точек есть поверхность шара, концентрическая с данной и описанная радиусом, равным сумме или разности радиуса данного шара и данного радиуса.]

Раздел 4. ТРИГОНОМЕТРИЯ

Глава I

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

§ 1. Тригонометрические функции острого угла

1. Какие функции острого угла определяют отношение катета к гипотенузе? Отношение катетов?

2. Какие тригонометрические функции возрастают при изменении угла от 0° до 90°?

3. Почему величины $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ не могут быть больше 1?

4. Как изменяется: 1) $\sin\alpha$ при изменении угла от 90° до 0°? 2) $\cos\alpha$ при изменении угла от 0° до 90°; 3) $\operatorname{tg}\alpha$ при изменении угла от 45° до 0°?

5. Может ли синус или косинус острого угла быть равным:

а) $\frac{2}{3}$; б) 0,9; в) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\frac{\sqrt{5}}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sqrt{3}-2$?

6. Может ли тангенс (или котангенс) острого угла быть равным:

$$\frac{1}{12};\quad 7\frac{1}{5};\quad \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-2};\quad \sqrt{2}-1;\quad \sqrt{2}-2?$$

7. При каких значениях букв a, b, m и n справедливы следующие равенства:

а) $\sin\alpha=\frac{a}{5}$; б) $\operatorname{tg}\beta=\frac{b}{20}$; в) $\cos\gamma=\frac{a-1}{a}$; г) $\operatorname{tg}\eta=\frac{a}{b}$;

д) $\sin\varphi=\frac{m}{n}$?

8. Имеет ли смысл выражение и если имеет, то при каких значениях a и b:

1) $\sin\alpha=a+\frac{1}{a}$ 2) $\operatorname{tg}\alpha=\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$?

[1) Не имеет. 2) Не имеет при $a=b$.]

9. Что больше:

1) sin 20° или sin 60°?
2) cos 50° или cos 10°?
3) tg 10° или tg 5°?
4) sin 0° или cos 80°?
5) cos 15° или cos 2°?

10. Определить знак каждой разности:

1) $\sin 50° - \sin 20°$ 3) $\cos 10° - \cos 40°$
2) $\sin 60° - \sin 80°$ 4) $\operatorname{tg} 15° - \operatorname{tg} 30°$

11. Найти дополнительные углы следующих углов:

1) 20° 3) 34° 5) 16°30′
2) 60° 4) 57° 6) 2°15′

12. Выразить через функцию угла меньшего 45°:

1) $\sin 70°$ 3) $\sin 84°$ 5) $\operatorname{tg} 69°40'$
2) $\cos 65°$ 4) $\cos 45°15'$ 6) $\operatorname{tg} 74°01'$

13. При каком значении острого угла $\sin\alpha = \cos\alpha$? $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\alpha$?

14. Найти значения $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, если α — острый угол равнобедренного прямоугольного треугольника.

15. Что больше:

1) $\sin 30°$ или $\cos 40°$? 3) $\sin 15°17'$ или $\cos 78°30'$?
2) $\sin 70°$ или $\cos 70°$? 4) $\operatorname{tg} 40°$ или $\operatorname{ctg} 30°$?

16. Какой знак имеет разность:

1) $\sin 15° - \cos 60°$; 2) $\cos 0° - \sin 50°$; 3) $\operatorname{tg} 30° - \operatorname{ctg} 70°$?

17. Заменить синусом дополнительного угла:

1) $\cos 75°$; 2) $\cos 12°$; 3) $\cos(45° + \alpha)$;
4) $\cos(60° - \alpha)$; 5) $\cos(\alpha - 30°)$.

18. Заменить косинусом дополнительного угла

1) $\sin 56°$ 4) $\sin(60° - 2\alpha)$
2) $\sin 7°$ 5) $\sin \frac{30° + \alpha}{2}$
3) $\sin(45° + \alpha)$

19. При каком значении острого угла α справедливо каждое из равенств:

1) $\sin(30° + \alpha) = \sin(30° - \alpha)$ 3) $\cos 43° = \sin(15° - \alpha)$
2) $\sin 25° = \cos(30° + \alpha)$ 4) $\sin(40° + \alpha) = \cos(20° + \alpha)$

20. Доказать, что тангенс любого острого угла больше синуса этого угла.

21. Доказать, что сумма синусов (или сумма косинусов) острых углов прямоугольного треугольника больше единицы.

§ 2. Измерение дуг и углов

1. Как понимать, что „радианная мера дуги, соответствующей некоторому центральному углу, не зависит от радиуса окружности“?

2. Найти радианную меру дуги окружности, радиус которой равен 8 *см*, если длина дуги равна: 1) 4 *см*; 2) 6 *см*; 3) 0,8 *см*; 4) 1,6 *дм*.

$\left[\frac{1}{2};\ \frac{3}{4};\ 0{,}1;\ 2.\right]$

3. Радиус окружности 12 *см*. Найти длину дуги, если её радианная мера равна: 1) 2; 2) 0,5; 3) $\frac{1}{4}$; 4) 1,2.

[24 *см*; 6 *см*; 3 *см*; 14,4 *см*.]

4. Радианная мера дуги окружности 1,2. Найти радиус окружности, если длина дуги равна:

1) 0,6 *см*; 2) 4,8 *см*; 3) 0,03 *дм*; 4) $\frac{1}{3}$ *м*.

$\left[0{,}5;\ 4;\ \frac{1}{4};\ \frac{5}{18}.\right]$

5. Найти радианную меру угла в долях числа π, равного: 30°; 60°; 90; 180°; 45°; 135°; 150°; 210°.

$\left[\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{2};\ \pi;\ \frac{\pi}{4};\ \frac{3}{4}\pi;\ \frac{5}{6}\pi;\ 1\frac{1}{6}\pi.\right]$

6. Найти радианную меру угла, составляющую:

1) $\frac{1}{2}$ полной окружности; 3) $\frac{3}{4}$ полной окружности;

2) $\frac{2}{3}$ полной окружности; 4) 0,4 полной окружности.

$\left[\pi;\ \frac{4}{3}\pi;\ \frac{6}{4}\pi;\ 0{,}8\pi.\right]$

7. Выразить в радианах внутренний угол: 1) равностороннего треугольника; 2) квадрата; 3) правильного шестиугольника.

$\left[\frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{2};\ \frac{2\pi}{3}.\right]$

8. Найти в радианной мере углы треугольника, если они относятся, как: 1) 1:2:3, 2) 2:3:4.

$\left[1)\ \frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{2};\quad 2)\ \frac{2\pi}{9};\ \frac{\pi}{3};\ \frac{2\pi}{9}.\right]$

9. Найти градусную меру угла, равного: $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{2}{3}\pi$; $\frac{3}{4}\pi$, π радианов.

10. Найти периметр сектора, дуга которого содержит a(2) радианов, а её радиус равен R (4) *см*. [$(2R+aR)$; 16 *см*.]

11. I. Найти в градусной мере угол поворота махового колеса, сделавшего: 1) 2 полных оборота; 2) 10 полных оборотов; 3) 3,5 полных оборота. II. Выразить полученные углы в радианах.

12. Маховое колесо делает в 3 секунды 24 оборота. На сколько градусов повернётся колесо за 1 секунду? за 5 секунд?

13. Пропеллер учебного самолёта в 1 секунду делает 25 оборотов. На какой угол (в радианах) повернётся точка пропеллера за 1 секунду?

§ 3. Тригонометрические функции любого угла

1. Углом какой четверти является угол:

а) синус и косинус которого отрицательны?

б) синус которого положителен, а тангенс отрицателен?

в) косинус которого отрицателен, а котангенс положителен?

г) тангенс которого отрицателен, а косинус положителен?

д) тангенс и косинус которого отрицательны?

2. Для углов какой четверти:

1) синус и косинус одновременно возрастают?

2) синус и тангенс одновременно убывают по абсолютной величине?

3) синус и котангенс одновременно убывают по абсолютной величине?

4) косинус и тангенс одновременно возрастают?

3. Какие равенства имеют смысл и при каких значениях букв a, b, x, y:

1) $\cos\alpha = \frac{a^2-1}{a+1}$ 3) $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b}$ 5 $\sin x = \frac{\pi}{a}$

2) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2-y^2}}$ 4) $\sin\alpha = \sqrt{a}$ 6) $\cos x = \pi . a$

4. Определить знаки следующих значений тригонометрических функций:

1) $\sin 185^\circ$ 4) $\sin 250^\circ$ 7) $\cos 3$ 10) $\sin 1\frac{5}{6}\pi$

2) $\cos 97^\circ$ 5) $\operatorname{tg} 200$ 8) $\operatorname{tg} 1{,}5$ 11) $\cos 1{,}8\pi$

3) $\operatorname{tg} 181^\circ$ 6) $\sin 2$ 9) $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{3}$

5. Определить знаки следующих функций, если $0^\circ < \alpha < 90^\circ$:

1) $\sin(90^\circ+\alpha)$ 4) $\operatorname{tg}(270^\circ-\alpha)$ 6) $\sin(360^\circ-2\alpha$`

2) $\cos(90^\circ+\alpha)$ 5) $\sin(360^\circ-\alpha)$ 7) $\cos(360^\circ-2\alpha)$

3) $\operatorname{tg}(180^\circ-\alpha)$

6. Определить зна́ки следующих тригонометрических функций:

1 $\sin(\pi-1)$ 3) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+2\right)$ 5) $\sin\left(\frac{3}{2}\pi+1\right)$

2) $\cos(\pi+1)$ 4) $\operatorname{tg}(2\pi-1)$ 6) $\operatorname{tg}(\pi+2)$

[1) Плюс; 2) минус; 3) плюс; 4) минус; 5) минус; 6) минус.

7. Что больше:

1) $\sin 100^\circ$ или $\cos 100^\circ$?

2) $\sin 300^\circ$ или $\operatorname{tg} 1^\circ$?

3) $\cos 200^\circ$ или $\operatorname{tg} 180^\circ$?

4) $\sin\frac{\pi}{2}$ или $\cos\pi$?

5) $\cos\frac{2}{3}\pi$ или $\operatorname{tg} 1\frac{1}{6}\pi$?

6) $\sin 3$ или $\operatorname{tg} 3$?

7) $\sin(2\pi-1)$ или $\cos(2\pi-1)$?

[6) $\sin 3 > \operatorname{tg} 3$; 7) $\cos(2\pi-1) > \sin(2\pi-1)$.]

8. Какой знак имеет разность:

1) $\sin 50^\circ - \cos 100^\circ$
2) $\sin 200^\circ - \cos 300^\circ$
3) $\operatorname{tg} 80^\circ - \sin 80^\circ$
4) $\operatorname{tg} 140^\circ - \sin 115^\circ$
5) $\sin \pi - \cos 1$
6) $\operatorname{tg} 2\pi - \sin \frac{3}{2}\pi$

[5) минус; 6) плюс.]

9. Определить знак произведения:

1) $\sin 80^\circ \cdot \cos 100^\circ$
2) $\operatorname{tg} 120^\circ \cdot \cos 190^\circ$
3) $\sin 150^\circ \cdot \operatorname{tg} 190^\circ$
4) $\sin 50^\circ\ \operatorname{tg} 120^\circ \cdot \cos 150^\circ$
5) $\cos 77^\circ \cdot \operatorname{tg} 115^\circ \cdot \sin 360^\circ \cdot \operatorname{tg} 19^\circ$

[4) плюс; 5) нуль.]

10. В каких четвертях содержится угол α, если:

1) $\sin\alpha \cdot \cos\alpha < 0$
2) $\sin\alpha \cdot \cos\alpha > 0$
3) $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha > 0$
4) $\operatorname{tg}\alpha\ \sin\alpha < 0$
5) $\cos\alpha\ \operatorname{ctg}\alpha > 0$

[1) II или IV четв.; 2) I или III, 3) I, II, III или IV; 4) II или III; 5) I или II.]

11. Есть ли среди тригонометрических функций функция, которая в каждой четверти 1) возрастает, 2) убывает?

[1) тангенс, 2) котангенс.]

12. Почему $\operatorname{tg} 90^\circ$ не существует?

(Так как нет пересечения касательной, проходящей через конец горизонтального диаметра с вертикальным диаметром (продолжением его), а следовательно, и нет значения для $\operatorname{tg} 90^\circ$.)

13. Вычислить:

1) $2 \sin 90^\circ + 3 \cos 180^\circ$
2) $\operatorname{tg} 180^\circ - 2 \sin 270^\circ$
3) $3 \operatorname{ctg} 180^\circ - \sin 180^\circ$
4) $\sin 2\pi - \cos \frac{\pi}{2}$
5) $2 \operatorname{tg} 0 + \cos \frac{3}{2}\pi - 2 \sin \frac{\pi}{2}$

[1) -1; 2) 2; 3) нельзя; 4) 0; 5) -2.]

14. Чему равно произведение: $\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha \cdot \sec\alpha \cdot \csc\alpha$; если α не равен 0°, 90°, 180°, 270°, 360°?

[1.]

15. Найти наибольшее и наименьшее значение выражения при изменении угла от 0° до 360°:

1) $1 + \cos x$; 2) $2 - \sin x$; 3) $3 - 2 \sin x$.

[1) 0; 2; 2) 1; 3; 3) 1; 5.]

16. Для каких углов справедливо неравенство

$$\sin x + \cos x > 1?$$

[Для углов 1-й четверти.]

17. Всегда ли имеет смысл выражение:

1) $\sqrt{\sin x}$
2) $\sqrt{1 + \cos x}$
3) $\sqrt{1 - 2 \sin x}$
4) $\sqrt{\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x}$
5) $\sqrt{\sin x \cdot \csc x}$

[Имеет смысл: 1) для углов I и II четв.; 2) всегда; 3) от 0° до 30°, от 150° до 180° и для углов III и IV четв.; 4) за исключением x, равном 0°, 90°, 180° и 360°.]

§ 4. Зависимость между тригонометрическими функциями

1. Всегда ли имеют смысл производные формулы:

1) $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$; 2) $\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha$; 3) $\operatorname{ctg}^2\alpha + 1 = \csc^2\alpha$?

[1) Не имеет смысла при x, равном 0°; 90°; 180°; 270°; 360°.
2) Не имеет смысла при x, равном 90° и 270°.
3) Не имеет смысла при x, равном 0°, 180° и 360°.]

2. Выразить тригонометрические функции угла α, если $0° < \alpha < 90°$.

1) Через $\sin\alpha$; 2) через $\cos\alpha$.

3. Выразить тригонометрические функции угла α, если $90° < \alpha < 180°$.

1) Через $\sin\alpha$; 2) через $\cos\alpha$.

4. Выразить $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ через $\operatorname{tg}\alpha$, если $180° < \alpha < 270°$.

5. Дано: $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ и $90° < \alpha < 180°$. Найти $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$.

6. Дано: $\cos\alpha = 0{,}8$ и $270° < \alpha < 360°$. Найти $\sin\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$.

7. Дано: $\sin\alpha = -\frac{12}{13}$ и $180° < \alpha < 270°$. Найти $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$.

8. Дано: $\operatorname{tg}\alpha = 1$ и $180° < \alpha < 270°$. Найти $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$.

9. Дано: $\operatorname{tg}\alpha = 3$ и $0° < \alpha < 90°$. Найти все остальные функции.

10. Упростить:

1) $1 - \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$
2) $1 + \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$
3) $\frac{\cos^2\alpha}{1 - \cos^2\alpha}$
4) $\frac{\sin^2\alpha}{1 - \sin^2\alpha}$
5) $\cos\alpha \operatorname{tg}\alpha + \sin\alpha$
6) $\sin^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha + \cos^2\alpha$
7) $(1 + \operatorname{ctg}^2\alpha)\sin^2\alpha$
8. $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}}$
9. $\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2\alpha}}$
10. $\frac{\sin^2\alpha - 1}{1 - \cos^2\alpha}$

[1) $2\cos^2\alpha$; 2) $2\sin^2\alpha$; 3) $\operatorname{ctg}^2\alpha$; 4) $\operatorname{tg}^2\alpha$; 5) $2\sin\alpha$; 6) $\sec^2\alpha$; 7) 1]; 8) $\sin\alpha$; 9) $\cos\alpha$; 10) $-\operatorname{ctg}^2\alpha$.

11. Доказать тождества:

1) $2 - \sin^2\alpha - \cos^2\alpha = 1$
2) $1 - \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 2\sin^2\alpha$
3) $(1 - \cos\alpha)(1 + \cos\alpha) = \sin^2\alpha$
4) $\sqrt{1 - \sin^2\alpha}\ \operatorname{tg}\alpha = \sin\alpha$
5) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 + 2\sin\alpha\cos\alpha$
6) $\cos^4\alpha + 2\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha + \sin^4\alpha = 1$
7) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 2$
8) $(\sin\alpha - \sec\alpha + \cos\alpha \cdot \sec\alpha)^2 = 4$
9) $\frac{1 - \cos^2\alpha}{1 - \sin^2\alpha} + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = \sec^2\alpha$
10) $(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)^2 - (\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha)^2 = 4$

12. Дано: $\sin\alpha + \cos\alpha = 1{,}4$. Найти $\sin\alpha\cos\alpha$. [0,48.]

13. Дано: $\sqrt{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha} = 2$. Найти $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha$. [14.]

14. Исключить угол α из системы равенств:

1) $\begin{cases} x = 2\operatorname{tg}\alpha \\ y = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\alpha \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = 4\sec\alpha \\ y = \frac{1}{2}\cos\alpha \end{cases}$ [1) $xy = 1$; 2) $xy = 2$.]

§ 5. Формулы приведения

1. Привести к тригонометрическим функциям угла, меньшего 45°:

1) $\sin 55°$ 4) $\operatorname{ctg} 45°30'$ 7) $\sin 280°$
2) $\cos 81°$ 5) $\cos 130°$ 8) $\operatorname{tg} 350°$
3) $\operatorname{tg} 76°$ 6) $\operatorname{tg} 210°$ 9) $\cos 305° : \operatorname{ctg} 317°$

2. Привести к тригонометрическим функциям угла, меньшего $\frac{\pi}{2}$:

1) $\sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)$ 4) $\operatorname{ctg} 1\frac{7}{8}\pi$
2) $\cos 1\frac{1}{5}\pi$ 5) $\sin 1\frac{1}{4}\pi$
3) $\operatorname{tg}\frac{2}{3}\pi$

3. Привести к тем же тригонометрическим функциям острого угла следующие функции:

1) $\sin 150°$ 5) $\sin 299°$ 8) $\sin 1\frac{5}{6}\pi$
2) $\cos 260°$ 6) $\cos\frac{2}{3}\pi$ 9) $\cos 1\frac{1}{5}\pi$
3) $\operatorname{tg} 290°$ 7) $\operatorname{tg} 1\frac{7}{8}\pi$ 10) $\operatorname{tg}\frac{8\pi}{9}$
4) $\operatorname{ctg} 305°$

4. Упростить выражение:

1) $\sin(90° + \alpha) + \cos(180° + \alpha)$
2) $\cos(270° + \alpha)\sin(180° - \alpha) - \sin(90° + \alpha)\cdot\cos(180 - \alpha)$
3) $\operatorname{ctg}(90° + \alpha)\cdot\operatorname{ctg}(180° - \alpha)$
4) $\operatorname{tg} 15°\cdot\operatorname{tg} 87°\cdot\operatorname{tg} 75°$

[1) 0; 2) 1; 3) 1; 4) ctg 3°.]

5. Доказать, что

$$\sin(45° + \alpha) = \cos(45° - \alpha);$$
$$\operatorname{tg}(45° + \alpha) = \operatorname{ctg}(45° - \alpha).$$

Указание: воспользоваться формулой $\sin\gamma = \cos(90° - \gamma)$.

6. Привести к тригонометрическим функциям положительного острого угла:

1) $\sin(-15°)$ 4) $\operatorname{ctg}(-170°)$ 7) $\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right)$
2) $\cos(-95°)$ 5) $\sin(-286°)$
3) $\operatorname{tg}(-210°)$ 6) $\operatorname{tg}\left(-1\frac{1}{3}\pi\right)$ 8) $\sin\left(-1\frac{1}{7}\pi\right)$

7. Привести к функциям наименьшего положительного угла:

1) $\sin 380^\circ$
2) $\cos 790^\circ$
3) $\operatorname{tg} 425^\circ$
4) $\sin(-400^\circ)$
5) $\cos(-500^\circ)$
6) $\operatorname{tg} 920^\circ$
7) $\sin\left(-4\frac{1}{5}\pi\right)$
8) $\cos\left(-8\frac{1}{7}\pi\right)$
9) $\operatorname{tg}\left(-10\frac{1}{3}\pi\right)$

8. Найти несколько значений для α, если:

1) $\sin\alpha = \sin 15^\circ$; 2) $\cos\alpha = -\cos 40^\circ$; 3) $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg} 70^\circ$.

9. Вычислить:

1) $\sin 150^\circ + \cos 300^\circ + \operatorname{tg} 225^\circ$
2) $\sin 780^\circ + \cos 390^\circ - \operatorname{tg} 540^\circ$
3) $\cos\frac{5}{4}\pi + \sin 1\frac{3}{4}\pi + 2\operatorname{ctg} 1\frac{1}{4}\pi$

[1) 2; 2) $\sqrt{3}$; 3) $2-\sqrt{2}$.]

10. Синус суммы двух углов треугольника равен $\frac{1}{3}$. Найти синус третьего угла треугольника.

$\left[\frac{1}{3}.\right]$

11. Косинус суммы двух углов треугольника равен $+0{,}3$. Имеется ли среди углов треугольника тупой угол?

[Да, так как косинус третьего угла — отрицательное число.]

12. Тангенс одного острого угла прямоугольного треугольника равен 2. Найти котангенс второго угла. [2.]

13. Синус острого угла параллелограма равен $\frac{3}{5}$. Найти синус тупого угла параллелограма, а затем его косинус.

$\left[\sin\alpha = \frac{3}{5};\ \cos\alpha = -\frac{4}{5}.\right]$

14. Косинус одного из смежных углов равен $-\frac{12}{13}$. Найти синус второго угла.

$\left[\frac{5}{13}.\right]$

§ 6. Периодичность тригонометрических функций. Графики тригонометрических функций

1. Какая функция называется периодической?

[Функция называется периодической, если существует число, прибавление которого к произвольному значению аргумента не меняет значение функции.]

2. Известно, что $\sin 0^\circ = \sin(0^\circ + 180^\circ)$. Можно ли сделать отсюда вывод, что период синуса равен 180°.

[Нет, так как прибавление 180° к любому другому значению аргумента (кроме 0° и 180°) меняет значение функции, например: $\sin 90^\circ = 1$, а $\sin(90^\circ + 180^\circ) = -1$.]

3. Чему равен период функции:

1) $y=\sin 2x$
2) $y=\cos 5x$
3) $y=\operatorname{tg} 10x$
4) $y=\sin \frac{x}{3}$
5) $y=\cos \frac{x}{4}$
6) $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$
7) $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$
8) $y=\operatorname{tg}\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$

[1) π; 2) $\frac{2\pi}{5}$; 3) $\frac{\pi}{10}$; 4) 6π; 5) 8π; 6) 2π; 7) 2π; 8) $\frac{\pi}{2}$.]

4. Привести примеры функции, период которой равен:

1) $60°$; 2) $720°$; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4) 3π.

[1) $\sin 6x$; $\operatorname{tg} 3x$ и т. д.; 2) $\cos \frac{x}{2}$; $\operatorname{tg} \frac{x}{4}$ и т. д.; 3) $\sin 4x$; $\operatorname{ctg} 2x$ и т. д.; 4) $\sin\frac{2}{3}x$; $\operatorname{tg}\frac{x}{3}$ и т. д.]

5. Что мы понимаем под выражением „график функции"? [График функции есть геометрический образ функциональной зависимости.]

6. Чем отличается:

1) график $\sin x$ от графика $\sin 2x$?
2) график $\sin x$ от графика $\sin(x+\alpha)$?
3) график $\sin x$ от графика $2\sin x$?
4) график $\sin x$ от графика $2+\sin x$?
5) график $\sin x$ от графика $a+b\sin(kx+c)$?

[1) график $\sin 2x$ есть график $\sin x$, сжатый в направлении оси x в 2 раза; 2) график $\sin(x+\alpha)$ есть график $\sin x$, перенесённый влево на α; 3) амплитуда графика (ординаты точек) $y=2\sin x$ в два раза больше амплитуды графика $y=\sin x$, 4) график функции $y=2+\sin x$ есть график $y=\sin x$, перенесённый вверх (по оси y) на расстояние 2; 5) график функции $y=a+b\sin(kx+c)$ есть график функции $y=\sin x$, сжатый в направлении оси x в k раз, перенесённый влево на c, с амплитудой в $в$ раз большей и перенесённый вверх по оси y на a.]

7. Какая функция называется чётной? нечётной? Приведите примеры.

[1) Чётной функцией называется функция, не меняющая своего значения при изменении знака аргумента, например: а) $y=x^2$; б) $\cos(-x)=\cos x$; в) $\sec(-x)=\sec x$.
2) Нечётной функцией называется функция, меняющая только свой знак при изменении знака аргумента, например: а) $y=x^3$; б) $\sin(-x)=\sin x$; в) $\operatorname{tg}(-x)=-\operatorname{tg} x$; г) $\operatorname{ctg}(-x)=\operatorname{ctg} x$; д) $\csc(-x)=\csc x$.]

8. Какие функции будут чётные и какие нечётные:

1) $y = \sin^2 x$ 3) $y = \mathrm{tg}^3 x$ 5) $y = \frac{1 + \cos x}{x^2}$

2) $y = \frac{\mathrm{tg} x}{x}$ 4) $y = x + \sin x$ 6) $y = \sin x + \mathrm{tg} x$

[1, 2, 5 — чётные функции, а остальные нечётные.]

9. Какие из функций являются чётными, какие нечётными и какие не являются ни чётными, ни нечётными:

1) $y = \sec x + \cos x$

2) $y = \sin x + \mathrm{tg} x$

3) $y = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$

4) $1 + \sin x$

5) $\sin x + \cos x$

[1 — чётная функция, 2 и 3 — нечётные; 4 и 5 функции ни чётные, ни нечётные.]

10. При каком значении x функции $y = \sin x$ в интервале $0 < x < 2\pi$ достигает своего наибольшего значения? Достигает наименьшего значения?

[1) при $x = \frac{\pi}{2}$; 2) при $x = \frac{3}{2}\pi$.]

11. Можно ли указать такое значение x в интервале $0 < x < \pi$, при котором функция $y = \mathrm{tg} x$ достигает наибольшего значения?

[Нет, так как $\mathrm{tg} x$ при $x \to \frac{\pi}{2}$ неограниченно возрастает.]

12. При каких значениях x на сегменте $0 \leq x \leq 2\pi$ функция принимает наибольшее значение:

1) $y = 2 + \sin x$; 2) $y = 3 - \cos x$; 3) $y = \sin x + \cos x$?

[1) При $x = \frac{\pi}{2}, y = 3$; 2) при $x = \pi$, $y = 4$; 3) при $x = \frac{\pi}{4}, y = \sqrt{2}$.]

13. При каких значениях x на сегменте $0 \leq x \leq 2\pi$ функция принимает наименьшее значение:

1) $y = 2 + \sin x$; 2) $y = 3 - \cos x$; 3) $y = \sin x + \cos x$?

[1) При $x = \frac{3}{2}\pi, y = 1$; 2) при $x = 0$ или 2π, $y = 2$; 3) при $x = 1\frac{1}{4}\pi, y = -\sqrt{2}$.]

14. Для каких значений x в интервале $0 < x < \pi$ справедливо неравенство:

1) $\mathrm{tg}^2 x > 1$; 2) $\sin x > \frac{1}{2}$?

[1) $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3}{4}\pi$; 2) $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5}{6}\pi$.]

Глава II

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

§ 1. Синус, косинус и тангенс суммы и разности двух любых углов

1. Найти $\sin 75°$, рассматривая угол в $75°$ как сумму углов в $45°$ и $30°$.

2. Найти $\cos 15°$, рассматривая угол в $15°$ как разность углов в $45°$ и $30°$.

3. Найти $\operatorname{tg} 105°$, рассматривая угол в $105°$ как сумму углов в $60°$ и $45°$.

4. Пользуясь формулами сложения и вычитания, докажите формулу приведения:

1) $\sin(90°+\alpha)=\cos\alpha$
2) $\cos(180°-\alpha)=-\cos\alpha$
3) $\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)=-\cos\alpha$
4) $\cos(2\pi-\alpha)=\cos\alpha$

Указание: 3) $\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)=\sin\frac{3}{2}\pi\cos\alpha-\cos\frac{3}{2}\pi\sin\alpha=$
$=-\cos\alpha.$

5. Углы α и β — положительные острые: $\sin\alpha=\frac{3}{5}$; $\cos\beta=\frac{12}{13}$.

Найти:

1) $\sin(\alpha+\beta)$; 2) $\cos(\alpha+\beta)$; 3) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$.

[1) $\frac{56}{65}$; 2) $\frac{33}{65}$; 3) $-1\frac{23}{33}$.]

6. Найти $\sin(\alpha-\beta)$ и $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$, если $\alpha=135°$ $\sin\beta=\frac{3}{5}$ и $90°<\beta<180°$.

[1) $\frac{\sqrt{2}}{10}$; 2) -7.]

7. Упростить:

1) $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$
2) $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$
3) $\sin(50°+\alpha)-\sin(50°-\alpha)$
4) $\cos(\alpha+70°)-\cos(\alpha-70°)$
5) $\sin(30°+\alpha)+\sin(30°-\alpha)$
6) $\cos(60°-\alpha)-\cos(60°+\alpha)$

[1) $2\sin\alpha\cos\beta$; 2) $2\cos\alpha\cos\beta$; 3) $2\cos 50°\sin\alpha$; 4) $-2\sin 70°\sin\alpha$; 5) $\cos\alpha$; 6) $\frac{\sqrt{3}\sin\alpha}{2}$.]

8. Упростить:

1) $\sin 10°\cdot\cos 40°+\cos 10°\cdot\sin 40°$
2) $\sin 70°\cdot\cos 20°-\cos 70°\cdot\sin 20°$
3) $\cos 55°\cdot\cos 20°-\sin 55°\cdot\sin 20°$
4) $\sin 40°\cdot\sin 20°+\cos 40°\cdot\cos 20°$
5) $\frac{\operatorname{tg}15°-\operatorname{tg}8°}{1+\operatorname{tg}15°\cdot\operatorname{tg}8°}$

[1) $\sin 50°$; 2) $\sin 50°$; 3) $\cos 35°$; 4) $\cos 20°$; 5) $\operatorname{tg} 7°$.]

9. Вычислить:

1) $\sin 5^\circ \cdot \cos 25^\circ + \cos 5^\circ \cdot \sin 25^\circ$

2) $\cos 70^\circ \cdot \cos 10^\circ + \sin 70^\circ \cdot \sin 10^\circ$

3) $\sin 20^\circ \cdot \cos 80^\circ - \sin 80^\circ \cdot \cos 20^\circ$

4) $\dfrac{\operatorname{tg} 50^\circ - \operatorname{tg} 20^\circ}{1 + \operatorname{tg} 50^\circ \cdot \operatorname{tg} 20^\circ}$

5) $\dfrac{\operatorname{tg} 40^\circ + \operatorname{tg} 20^\circ}{\operatorname{tg} 40^\circ \cdot \operatorname{tg} 20^\circ - 1}$

$\left[1)\ \frac{1}{2};\ 2)\ \frac{1}{2};\ 3) -\frac{\sqrt{3}}{2};\ 4)\ \frac{\sqrt{3}}{3};\ 5) -\sqrt{3}.\right]$

10. Синусы двух острых углов треугольника соответственно равны $\frac{4}{5}$ и $\frac{12}{13}$. Найти синус третьего угла. $\left[\frac{56}{65}.\right]$

11. Синус острого угла прямоугольного треугольника равен $\frac{5}{13}$. Найти синус другого острого угла. (Найти двумя способами.) $\left[\frac{12}{13}.\right]$

12. Синус суммы двух углов равен 0,8, а синус разности тех же углов равен 0,2. Найти: 1) произведение синуса большего угла на косинус меньшего; 2) произведение синуса меньшего угла на косинус большего угла. $\left[1)\ \frac{1}{2};\ 2)\ 0{,}3.\right]$

13. Сумма тангенсов двух углов равна 4, а тангенс суммы этих углов равен 6. Найти произведение тангенсов данных углов. $\left[\frac{1}{3}.\right]$

14. Найти $(\alpha + \beta)$, если $\operatorname{tg}\alpha = 2$; $\operatorname{tg}\beta = 3$; α и β — острые углы. $[(\alpha + \beta) = 135^\circ.]$

15. Дано: $0 < \alpha < 90^\circ$ и $0 < \beta < 90^\circ$. Доказать:

$$\sin(\alpha + \beta) < \sin\alpha + \sin\beta.$$

§ 2. Функции двойного и половинного аргумента

1. Почему формулы функций двойных углов называются иначе формулами умножения аргумента?

2. $\sin x = a$. Найти $\sin 2x$. $[2a\sqrt{1 - a^2}.]$

3. $\cos x = b$. Найти $\sin 2x$ и $\cos 2x$. $[2b\sqrt{1 - b^2},\ 2b^2 - 1.]$

4. $\sin x = c$. Найти $\sin 2x$ и $\cos 2x$. $[2c\sqrt{1 - c^2}.]$

5. $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n} = a$. Найти $\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}$. $\left[\frac{2a}{1 - a^2}.\right]$

6. $\sin\frac{\pi}{n} = a$; $\cos\frac{\pi}{n} = b$. Найти $\operatorname{tg}\frac{2}{n}\pi$. $\left[\frac{2ab}{b^2 - a^2}.\right]$

7. Выразить:

1) $\sin\alpha$ через $\sin\frac{\alpha}{2}$

2) $\cos 4\beta$ через $\cos 2\beta$

3) $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$ через $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{4}$

$$\left[1)\ 2\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{1-\sin^2\frac{x}{2}};\quad 2)\ 2\cos^2 2\beta-1;\quad 3)\ \frac{2\operatorname{tg}\frac{\gamma}{4}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{4}}.\right]$$

8. $\sin\alpha = a$; $0<\alpha<90°$. Найти $\sin 4\alpha$.

9. Упростить выражения:

1) $2\sin 25°\cdot\cos 25°$

2) $4\cos^2 40° - 4\sin^2 40°$

3) $\sin 8°\cdot\cos 8°$

4) $\frac{1}{2}\cos 18°\cdot\sin 18°$

5) $\sin 10°\cdot\cos 10°\cdot\cos 20°$

6) $2\sin\alpha\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

7) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2$

8) $(\cos^4\alpha-\sin^4\alpha)$

10. Доказать, что $\sin 2\alpha < 2\sin\alpha$, если $0<\alpha<\pi$.

11. Доказать, что $\sin 2\alpha > 2\sin\alpha$, если $\pi<\alpha<2\pi$.

Указание для 10—11 задачи. Заменить $\sin 2\alpha$ через $2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$.

12. Доказать, что $\operatorname{tg} 2\alpha > 2\operatorname{tg}\alpha$, если $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$.

13. В равнобедренном треугольнике синус угла при основании равен $\frac{3}{5}$. Найти синус и косинус угла при вершине.

$$\left[\frac{24}{25};\ \frac{7}{25}.\right]$$

14. Доказать, что тригонометрические функции одного и того же угла будут рациональными тогда, и только тогда, когда тангенс половинного угла есть число рациональное (или не существует).

Указание. Так как тригонометрические функции угла α выражаются рационально через $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ и если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ — рациональное число, то тригонометрические функции угла α будут также рациональны.

15. Дано: $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}$. Найти $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$.

$$\left[\sin\alpha=\frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{4}}=\frac{4}{5};\quad \cos\alpha=\frac{1-\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}}=\frac{3}{5};\quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}.\right]$$

16. Дано: $\operatorname{tg}\alpha=4$. Найти $\sin 2\alpha$, если $\pi<\alpha<\frac{3}{2}\pi$.

17. Дано: $\operatorname{tg}\alpha=2$. Найти $\sin 4\alpha$. $\left[-\frac{24}{25}.\right]$

18. Найти $\sin 15°$ и $\cos 15°$, зная значения тригонометрических функций $30°$.

19. Найти $\sin 22°30'$ и $\cos 22°30'$, зная $\cos 45°$.

20. Дано: $\cos\alpha = -m$; $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Найти $\sin\frac{\alpha}{2}$ и $\cos\frac{\alpha}{2}$.

$$\left[\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+m}{2}};\quad \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-m}{2}}.\right]$$

21. Дано: $\cos 4\alpha = a$; $\frac{3}{2}\pi < 4\alpha < 2\pi$. Найти $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$.

$$\left[\sin 2\alpha = \sqrt{\frac{1-a}{2}};\quad \cos\alpha = -\sqrt{\frac{1+a}{2}}.\right]$$

22. Упростить выражения:

1) $\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\alpha}{2}}{2}}$; 2) $\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}$; 3) $\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\alpha}{4}}{2}}$;

4) $\sqrt{\frac{1+\cos 4\alpha}{2}}$; 5) $\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$; 6) $\frac{\cos 4\alpha}{1-\sin 4\alpha}$;

7) $1+\cos\alpha$; 8) $1-\cos\alpha$; 9) $1+\sin\alpha$; 10) $1-\sin\alpha$.

[1) $\sin\frac{\alpha}{4}$; 2) $\sin\alpha$; 3) $\cos\frac{\alpha}{8}$; 4) $\cos 2\alpha$; 5) $\operatorname{tg}\alpha$; 6) $\operatorname{tg} 2\alpha$;

7) $2\cos^2\frac{\alpha}{2}$; 8) $2\sin^2\frac{\alpha}{2}$; 9) $2\cos^2\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)$; 10) $2\sin^2\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)$.]

23. В равнобедренном треугольнике косинус угла при вершине равен $\frac{3}{5}$. Найти синус и косинус угла при основании. $\left[\sqrt{\frac{4}{5}};\ \sqrt{\frac{1}{5}}.\right]$

§ 3. Преобразование сумм тригонометрических функций в произведения и преобразование произведений функций в суммы

Преобразовать суммы функций в произведения:

1. 1) $\sin 10° + \sin 20°$
2) $\sin 50° - \sin 20°$
3) $\sin\frac{\pi}{10} + \sin\frac{\pi}{8}$
4) $\cos 20° + \cos 4°$
5) $\cos 15° - \cos 35°$
6) $\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{6}$
7) $\sin\alpha + \sin 3\alpha$
8) $\cos 4\alpha - \cos 2\alpha$

2. 1) $\sin 8° + \sin 7°$
2) $\sin 15° - \sin 10°20'$
3) $\sin 5°10' - \sin 20°30'$
4) $\cos 19° + \cos 22°$
5) $\cos 36° - \cos 57°40'$
6) $\cos 7°25' - \cos 10°40'$
7) $\sin\alpha - \sin\frac{\alpha}{2}$
8) $\cos\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{4}$

3. 1) $\sin 10° + \cos 30°$
2) $\sin 40° - \cos 70°$
3) $\cos 50° - \sin 20°$
4) $\sin\frac{\pi}{5} - \cos\frac{\pi}{3}$
5) $\sin\alpha + \cos\alpha$
6) $\cos\alpha - \sin\alpha$
7) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg} 3\alpha$
8) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha$

4. Вычислить:

1) $\sin 75° + \sin 15°$ 3) $\sin 165° + \sin 105°$

2) $\cos 15° - \cos 75°$ 4) $\sin 135° - \cos 45°$

$\left[1)\ \frac{\sqrt{6}}{2};\ 2)\ \frac{\sqrt{2}}{2};\ 3)\ \frac{\sqrt{6}}{2};\ 4)\ 0.\right]$

5. Представить в виде произведения:

1) $1 + \sin 80°$ 3) $1 + \cos 20°$ 5) $1 + \cos\frac{\alpha}{2}$

2) $1 + \sin 2\alpha$ 4) $1 - \cos\alpha$ 6) $1 - \sin 2\alpha$

$\left[1)\ 2\cos^2 5°;\ 2)\ 2\cos^2(45° - \alpha);\ 3)\ 2\cos^2 10°;\ 4)\ 2\sin^2\frac{\alpha}{2};\ 5)\ 2\cos^2\frac{\alpha}{4};\ 6)\ 2\sin^2(45° - \alpha).\right]$

6. Проверить справедливость следующих равенств:

1) $\sin 50° + \sin 10° = \cos 20°$

2) $\cos 85° + \cos 35° = \cos 25°$

3) $\cos(45° + \alpha) + \cos(45° - \alpha) = \sqrt{2}\cos\alpha$

4) $\sin(60° + \alpha) - \sin(60° - \alpha) = \sin\alpha$

7. Введением вспомогательного угла привести к виду, удобному для логарифмирования:

1) $\frac{1}{2} + \sin 20°$ 5) $1 + \operatorname{tg} 50°$

2) $1 - 2\sin 10°$ 6) $\sqrt{3} + \operatorname{tg} 20°$

3) $\sqrt{3} + 2\cos 80°$ 7) $1 + \sqrt{3}\operatorname{tg} 10°$

4) $\sqrt{2} - 2\cos 70°$

$\left[1)\ 2\sin 25° \cdot \cos 5°;\ 2)\ 4\cos 20° \cdot \sin 10°;\ 3)\ 4\cos 55° \cdot \cos 25°;\ 4)\ \cos 12°30' \cdot \sin 57°30';\ 5)\ \frac{\cos 5°}{\cos 45° . \cos 50°};\ 6)\ \frac{\sin 80°}{\cos 60° . \cos 20°};\ 7)\ \frac{\sin 40 \sqrt{3}}{\cos 30° . \cos 10°}.\right]$

8. В каком случае при вычислениях целесообразнее заменять произведения тригонометрических функций суммами.

[Произведения тригонометрических функций целесообразно заменять суммами при пользовании таблицами натуральных значений тригонометрических функций.]

9. Проверить справедливость следующих равенств:

1) $\sin 20° \cos 8° = \frac{1}{2}(\sin 28° + \sin 12°)$

2) $\cos 80° \cdot \sin 4° = \frac{1}{2}(\sin 84° - \sin 76°)$

3) $\cos 40° \cdot \cos 6° = \frac{1}{2}(\cos 46° + \cos 34°)$

4) $\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)=\frac{1}{2}(\sin 2\alpha+\sin 2\beta)$

5) $\sin(\alpha-\beta)\cdot\cos(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}(\sin 2\alpha-\sin 2\beta)$

6) $\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)=\frac{1}{2}(\cos 2\alpha+\cos 2\beta)$

7) $\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)=\frac{1}{2}(\cos 2\alpha-\cos 2\beta)$

10. Пользуясь формулами, преобразовать произведения функций в сумму (смотри пример № 9):

1) $\sin 24^\circ\cdot\cos 2^\circ$
2) $\sin 56^\circ\cdot\cos 12^\circ$
3) $\cos 46^\circ\cdot\sin 20^\circ$
4) $\cos 50^\circ\cdot\cos 10^\circ$
5) $\cos\frac{\pi}{5}\cdot\cos\frac{\pi}{10}$
6) $\sin 40^\circ\cdot\sin 18^\circ$
7) $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$
8) $\cos\alpha\cdot\cos 3\alpha$

[1) $\frac{1}{2}(\sin 26^\circ+\sin 22^\circ)$; 2) $\frac{1}{2}(\sin 68^\circ+\sin 44^\circ)$; 3) $\frac{1}{2}(\sin 66^\circ-\sin 26^\circ)$; 4) $\frac{1}{2}(\cos 60^\circ+\cos 40^\circ)$]

11. Преобразовать произведения в суммы и вычислить значения выражений:

1) $\sin 45^\circ\cos 15^\circ$; 2) $\sin 105^\circ\cos 75^\circ$; 3) $\sin\frac{\pi}{24}\sin\frac{5\pi}{24}$.

[1) $\frac{1}{4}(\sqrt{3}+1)$; 2) 0; 3) $\frac{1}{4}(\sqrt{3}-\sqrt{2})$]

12. Преобразовать произведения функций в суммы:

1) $\sin 32^\circ\cdot\cos 8^\circ\cdot\cos 16^\circ$
2) $2\cos 12^\circ\cdot\cos 8^\circ\cdot\sin 26^\circ$
3) $4\cos 20^\circ\cdot\cos 24^\circ\cdot\cos 28^\circ$
4) $4\sin\alpha\cdot\sin 2\alpha\cdot\sin 3\alpha$

[1) $\frac{1}{4}(\sin 56^\circ+\sin 24^\circ+\sin 40^\circ+\sin 8^\circ)$; 2) $\frac{1}{2}(\sin 46^\circ+\sin 6^\circ+\sin 30^\circ+\sin 22^\circ)$; 3) $(\cos 72^\circ+\cos 16^\circ+\cos 32^\circ+\cos 24^\circ)$; 4) $-\sin 6\alpha+\sin 4\alpha+\sin 2\alpha$.]

13. Для каждой из нижеследующих функций определить значение независимой переменной в границах от 0 до π, при котором функция принимает наибольшее значение:

1) $y=\sin x+\cos x$; 2) $y=\sin x-\cos x$, 3) $y=\sin 2x+\cos 2x$.

[1) при $x=45^\circ$; 2) при $x=135^\circ$; 3) при $x=22^\circ 30'$.]

Глава III

ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. Обратные тригонометрические функции.

Разъяснить смысл выражений:

1. 1) $\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$ 5) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3}$

2) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{6}$ 6) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\pi}{3}$

3) $\arcsin 1=\frac{\pi}{2}$ 7) $\arcsin 0=0$

4) $\arcsin(-1)=-\frac{\pi}{2}$ 8) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$

2. 1) $\arccos 0=\frac{\pi}{2}$ 4) $\arccos(-1)=\pi$

2) $\arccos 1=0$ 5) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{6}$

3) $\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$

3. 1) $\operatorname{arctg} 0=0$ 3) $\operatorname{arctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$

2) $\operatorname{arctg} 1=\frac{\pi}{4}$ 4) $\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\pi}{6}$

Имеет ли смысл выражение:

4. 1) $\arcsin\sqrt{3}$; 2) $\arcsin\frac{a^2}{a^2+1}$; 3) $\arcsin\frac{a^2+1}{a^2}$.

5. 1) $\arccos(\sqrt{2}-1)^2$ 3) $\operatorname{arctg}\sqrt{3}$

2) $\arccos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ 4) $\operatorname{arcctg}\frac{a^2+1}{a^2}$

6. Даны функции:

1) $y=\frac{1}{2}\cos x$; 2) $y=\frac{1}{3}\sin x$; 3) $y=2\operatorname{tg}x$; 4) $y=\frac{2}{5}\operatorname{ctg}x$.

Найти функцию, обратную данной; указать, для каких значений аргумента эта обратная функция имеет смысл и построить её график.

Найти:

7. 1) $\sin(\arcsin x)$ 3) $\sin(\operatorname{arctg} x)$

2) $\sin(\arccos x)$ 4) $\sin(\operatorname{arcctg} x)$

[1) x; 2) $\sqrt{1-x^2}$; 3) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$; 4) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.]

8. 1) $\cos(\arccos x)$ 3) $\cos(\operatorname{arctg} x)$

2) $\cos(\arcsin x)$ 4) $\cos(\operatorname{arcctg} x)$

[1) x; 2) $\sqrt{1-x^2}$; 3) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$; 4) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.]

9. 1) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)$ 3) $\operatorname{tg}(\arccos x)$
2) $\operatorname{tg}(\arcsin x)$ 4) $\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x)$

$\left[1) x;\ 2)\ \frac{x}{\sqrt{1-x^2}};\ 3)\ \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \text{ при } x\neq 0;\ 4)\ \frac{1}{x} \text{ при } x\neq 0\right]$

10. Указать, для каких значений x имеет смысл каждая из следующих функций:

1) $\arccos\frac{x}{2}$
2) $\arcsin 3x$
3) $\arcsin nx$
4) $\arcsin(3x+1)$
5) $\arcsin(1-5x)$
6) $\arcsin\frac{5x-1}{2}$

11. Найти значение функции $y=\arccos x$ при следующих значениях x:

$$-1;\ -\frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2};\ 1;\ 0.$$

12. Найти значение функции $y=x+\arccos x$ при следующих значениях x:

$$1; -\frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{1}{2};\ 0.$$

13. 1) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x)$ 3) $\operatorname{ctg}(\arccos x)$
2) $\operatorname{ctg}(\arcsin x)$ 4) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x)$

$\left[1)\ x;\ 2)\ \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \text{ при } x\neq 0;\ 3)\ \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \text{ при } x\neq\pm 1;\ 4)\ \frac{1}{x} \text{ при } x\neq 0.\right]$

14. 1) $\sin(2\arcsin x)$ 4) $\cos(2\arcsin x)$
2) $\cos(2\arccos x)$ 5) $\cos(2\operatorname{arctg} x)$
3) $\operatorname{tg}(2\operatorname{arctg} x)$

$\left[1)\ 2x\sqrt{1-x^2};\ 2)\ 2x^2-1;\ 3)\ \frac{2x}{1-x^2}(x\neq\pm 1);\ 4)\ 1-2x^2;\ 5)\ \frac{1-x^2}{1+x^2}.\right]$

15. 1) $\sin\left(\frac{1}{2}\arcsin x\right)$; 2) $\cos\left(\frac{1}{2}\arccos x\right)$;
3) $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x\right)$.

$\left[1)\ \frac{x}{\sqrt{2(1+\sqrt{1-x^2})}};\ 2)\ \frac{1+x}{2};\ 3)\ \frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}.\right]$

В следующих равенствах выразить с помощью обратных тригонометрических функций дугу x:

16. 1) $\sin x=\frac{2}{3}$ 3) $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=0{,}2$
2) $\sin 2x=0{,}9$ 4) $\sin mx=a$

$\left[1)\ \arcsin\frac{2}{3};\ 2)\ \frac{1}{2}\arcsin 0{,}9;\ 3)\ \arcsin 0{,}2-\frac{\pi}{2};\ 4)\ \frac{\arcsin a}{m}.\right]$

17. 1) $\cos x = \frac{4}{5}$ 3) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0{,}6$

2) $\cos\frac{x}{3} = \frac{1}{4}$ 4) $\cos(mx + b) = c$

$\left[1)\ \arccos\frac{4}{5};\ 2)\ 3\arccos\frac{1}{4};\ 3)\ \frac{\arccos 0{,}6}{2} + \frac{\pi}{8};\ 4)\ \frac{\arccos c}{m} - \frac{b}{m}.\right]$

18. 1) $\operatorname{tg} x = 2{,}5$ 3) $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{3}$

2) $\operatorname{tg} 4x = 3$ 4) $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{p} - q\right) = n$

$\left[1)\ \operatorname{arctg} 2{,}5;\ 2)\ \frac{\operatorname{arctg} 3}{4};\ 3)\ 2\operatorname{arctg}\frac{1}{3} - \frac{2\pi}{3};\ 4)\ p \cdot \operatorname{arctg} n + pq.\right]$

19. 1) $\operatorname{ctg} x = 1{,}5;$ 2) $\operatorname{ctg}\frac{x}{2} = \frac{1}{8};$ 3) $\operatorname{ctg}(2x - 1) = \sqrt{3}.$

$\left[1)\ \operatorname{arcctg} 1{,}5;\quad 2)\ 2\operatorname{arcctg}\frac{1}{8};\quad 3)\ \frac{1}{2}\operatorname{arcctg}\sqrt{3} + \frac{1}{2}.\right]$

В следующих равенствах выразить x как функцию y:

20. 1) $y = \cos\frac{x}{3}$ 3) $y = 3\sin 2x$

2) $y = 3\arcsin\frac{x}{5}$ 4) $\frac{y}{5} = \frac{\operatorname{arctg} 3x}{2}$

$\left[1)\ x = 3\arccos y;\ 2)\ x = 5\sin\frac{y}{3};\ 3)\ x = \frac{1}{2}\arcsin\frac{y}{3};\ 4)\ x = \frac{1}{3}\operatorname{tg}\frac{2y}{5}.\right]$

21. 1) $y = 3\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ 3) $y = \frac{1}{5}\operatorname{ctg}\frac{x}{4}$

2) $2y = 3\operatorname{arcctg}\frac{2}{x}$ 4) $y - 7 = 3\arccos\frac{x}{2}$

$\left[1)\ x = 2\operatorname{arctg}\frac{y}{3};\ 2)\ x = \frac{2}{\operatorname{ctg}\frac{2y}{3}};\ 3)\ x = 4\operatorname{arcctg} 5y;\ 4)\ x = 2\cos\frac{y-7}{3}.\right]$

Найти числовое значение выражения:

22. 1) $\sin[\operatorname{arctg}(-1)]$ 4) $\sin[\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})]$

2) $\sin[\arcsin(-1)]$ 5) $\sin(\arccos 0)$

3) $\sin[\operatorname{arctg}\sqrt{3})$ 6) $\sin(\arccos 1)$

23. 1) $\sin\left(\arccos\frac{3}{5}\right)$ 3) $\sin\left[2\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$

2) $\sin(2\operatorname{arctg} 1)$ 4) $\sin\left[3\operatorname{arctg}\sqrt{3} + 2\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$

$\left[1)\ \frac{4}{5};\quad 2)\ 1;\quad 3)\ -1;\quad 4)\ \frac{\sqrt{3}}{2}.\right]$

24. 1) $\cos\left(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 5) $\cos(\operatorname{arctg} 1)$

2) $\cos\left[\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})\right]$ 6) $\cos(\arcsin 0)$

3) $\cos\left[\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right]$ 7) $\cos(\arcsin 1)$

4) $\cos\left[\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$

25. 1) $\cos\left(3\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 3) $\cos(3\arcsin 1)$

2) $\cos[4\operatorname{arctg}(-1)]$ 4) $\cos\left(\arcsin\frac{5}{13}\right)$

[1) -1; 2) -1; 3) 0; 4) $\frac{12}{13}$.]

26. 1) $\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 4) $\operatorname{tg}(\arccos 0)$

2) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 5) $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

3) $\operatorname{tg}(\arcsin 0)$ 6) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}\sqrt{3})$

27. 1) $\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{4}{5}\right)$ 4) $\operatorname{tg}\left[2\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$

2) $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{5}{13}\right)$ 5) $\operatorname{tg}\left[3\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$

3) $\operatorname{tg}\left[4\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$ 6) $\operatorname{tg}\left[2\arccos\frac{1}{2}+\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$

[1) $\frac{3}{4}$; 2) $\frac{5}{12}$; 3) $\sqrt{3}$; 4) $-\sqrt{3}$; 5) $-\sqrt{3}$; 6) $\sqrt{3}$.]

28. 1) $\operatorname{ctg}\left[\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$ 4) $\operatorname{ctg}\left(\arcsin\frac{1}{2}\right)$

2) $\operatorname{ctg}\left[\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$ 5) $\operatorname{ctg}(\arccos 0)$

3) $\operatorname{ctg}(\arcsin 0)$ 6) $\operatorname{ctg}(\arcsin 1)$

29. 1) $\operatorname{ctg}\left(\arcsin\frac{5}{13}\right)$ 2) $\operatorname{ctg}\left(2\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

[1) $2\frac{2}{5}$; 2) 0.]

Найти главные значения дуг:

30. 1) $\arcsin 1$ 3) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$

2) $\arcsin(-1)$ 4) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

31. 1) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$ 4) $\arcsin\frac{1}{2}$

2) $\arcsin\frac{-\sqrt{2}}{2}$ 5) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$

3) $\arcsin 0$

32. 1) $\arccos 1$ 4) $\arccos \frac{1}{2}$

2) $\arccos(-1)$ 5) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$

3) $\arccos 0$

33. 1) $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$ 3) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

2) $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$ 4) $\arccos\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$

34. 1) $\operatorname{arcctg} 0$ 4) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

2) $\operatorname{arctg} 1$ 5) $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3}$

3) $\operatorname{arctg}(-1)$

35. 1) $\operatorname{arcctg} \sqrt{3}$ 3) $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

2) $\operatorname{arcctg} 0$ 4) $\operatorname{arcctg}(-1)$

36. 1) $\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)$ 4) $\arcsin\left(\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

2) $\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)$ 5) $\arcsin\left(\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

3) $\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)$ 6) $\arcsin\left(\sin\frac{5\pi}{2}\right)$

37. 1) $\arccos\left(\cos\frac{\pi}{5}\right)$ 3) $\arccos(\cos 9\pi)$

2) $\arccos\left(\cos\frac{5\pi}{2}\right)$ 4) $\arccos\left(\cos\frac{6\pi}{5}\right)$

38. 1) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{9\pi}{5}\right)$ 4) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{9\pi}{10}\right)$

2) $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{5}\right)$ 5) $\operatorname{arctg}\left[\operatorname{ctg}\left(-\frac{3\pi}{5}\right)\right]$

3) $\operatorname{arctg}\left[\operatorname{tg}\left(-\frac{5\pi}{9}\right)\right]$ 6) $\operatorname{arcctg}\left(-\operatorname{tg}\frac{7\pi}{8}\right)$

Найти общий вид дуг, представленных выражениями

39. 1) $\operatorname{Arc}\sin 0$ 3) $\operatorname{Arc}\sin\frac{\sqrt{2}}{2}$

2) $\operatorname{Arc}\sin 1$ 4) $\operatorname{Arc}\sin\left(-\frac{1}{2}\right)$

[1) $k\pi$; 2) $2k\pi+\frac{\pi}{2}$; 3) $k\pi+(-1)^k\cdot\frac{\pi}{4}$; 4) $k\pi-(-1)^k\cdot\frac{\pi}{6}$.]

40. 1) $\operatorname{Arc}\cos 0$ 3) $\operatorname{Arc}\cos\frac{1}{\sqrt{2}}$

2) $\operatorname{Arc}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}$ 4) $\operatorname{Arc}\cos\left(-\frac{1}{2}\right)$

$\left[1)\ k\pi+\frac{\pi}{2};\quad 2)\ 2k\pi\pm\frac{\pi}{6};\quad 3)\ 2k\pi\pm\frac{\pi}{4};\quad 4)\ 2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}.\right]$

41. 1) $\operatorname{Arc}\operatorname{tg}\sqrt{3}$ 3) $\operatorname{Arc}\operatorname{tg}(-1)$

2) $\operatorname{Arc}\operatorname{tg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 4) $\operatorname{Arc}\operatorname{tg} 1$

$\left[1)\ k\pi+\frac{\pi}{3};\quad 2)\ k\pi-\frac{\pi}{6};\quad 3)\ k\pi-\frac{\pi}{4};\quad 4)\ k\pi+\frac{\pi}{4}.\right]$

42. 1) $\operatorname{Arc}\operatorname{ctg} 1$; 2) $\operatorname{arc}\operatorname{ctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; 3) $\operatorname{Arc}\operatorname{ctg}(-1)$.

$\left[1)\ k\pi+\frac{\pi}{4};\quad 2)\ k\pi+\frac{\pi}{3};\quad 3)\ k\pi+\frac{3\pi}{4}.\right]$

43. 1) $\operatorname{Arc}\sin\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{\pi}{6}$; 2) $\operatorname{Arc}\sin(-1)+\frac{5\pi}{2}$.

[1) $\pi k+\frac{\pi}{3}$ при k нечётном и πk при k чётном; 2) $\pi k+3\pi$ и $\pi k+2\pi$.]

44. 1) $\operatorname{Arc}\cos 0+\frac{\pi}{4}$; 2) $\operatorname{Arc}\cos(-1)+\frac{\pi}{4}$.

$\left[1)\ \pi k+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4};\quad 2)\ 2k\pi+\pi+\frac{\pi}{4}.\right]$

45. 1) $\operatorname{Arc}\operatorname{tg}(-\sqrt{3})+\frac{2\pi}{3}$; 2) $\operatorname{Arc}\operatorname{tg}(-1)+\frac{3\pi}{2}$.

$\left[1)\ k\pi+\frac{\pi}{3};\quad 2)\ k\pi+\frac{5\pi}{4}.\right]$

46. 1) $\operatorname{Arc}\operatorname{ctg} 0+\frac{\pi}{4}$; 2) $\operatorname{Arc}\operatorname{ctg}\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\pi}{6}$.

$\left[1)\ \pi k+\frac{3\pi}{4};\quad 2)\ \pi k+\frac{\pi}{2}.\right]$

47. $\operatorname{Arc}\cos a$; 2) $\operatorname{Arc}\operatorname{tg} b$; 3) $\operatorname{Arc}\operatorname{tg}(-\operatorname{tg} a)$.

[1) $2k\pi\pm\arccos a$; 2) $k\pi+\operatorname{arc}\operatorname{tg} b$; 3) $k\pi-a$.]

48. Выразить $\arcsin x$ через все остальные обратные тригонометрические функции при $0<x<1$:

$$\left[\arcsin x=\arccos\sqrt{1-x^2}=\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\operatorname{arc}\operatorname{ctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.\right]$$

49. Выразить $\arccos x$ через все остальные обратные тригонометрические функции при $0<x<1$:

$$\left[\arccos x=\arcsin\sqrt{1-x^2}=\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}=\operatorname{arc}\operatorname{ctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.\right]$$

50. Выразить $\operatorname{arc\,tg} x$ через все остальные обратные тригонометрические функции при $x>0$:

$$\left[\operatorname{arc\,tg} x = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arc\,ctg}\frac{1}{x}.\right]$$

51. Выразить $\operatorname{arc\,ctg} x$ через все остальные обратные тригонометрические функции при $x>0$.

$$\left[\operatorname{arc\,ctg} x = \arcsin\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \arccos\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}.\right]$$

Доказать тождества:

52. 1) $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{7}+\operatorname{arc\,tg}\frac{3}{4}=\frac{\pi}{4}$ 3) $\sin(2\operatorname{arc\,tg} p)=\frac{2p}{1+p^2}$

2) $\arcsin\frac{3}{5}=\arccos\frac{4}{5}$ 4) $\operatorname{arc\,tg} m+\operatorname{arc\,ctg} m=\frac{\pi}{4}$

53. 1) $\operatorname{tg}(2\operatorname{arc\,tg} p)=\frac{2p}{1-p^2}$ 3) $\arcsin\frac{1}{2}=\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$

2) $\cos(2\arccos k)=2k^2-1$ 4) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\operatorname{arc\,tg}\sqrt{3}$

54. 1) $\arcsin 1=2\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$ 3) $3\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{3}}{3}=\arccos 0$

2) $2\operatorname{arc\,tg} 1=3\arcsin\frac{1}{2}$ 4) $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$

55. 1) $\sin\left(\arccos\frac{m}{n}\right)=\frac{\sqrt{n^2-m^2}}{n}$ 3) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arc\,ctg}\frac{m}{n}\right)=\frac{n}{m}$

2) $\cos\left(\arcsin\frac{m}{n}\right)=\frac{\sqrt{n^2-m^2}}{m}$ 4) $\cos(2\arccos a)=2a^2-1$

56. 1) $\operatorname{tg}(\arcsin m)\cdot\cos(\arcsin m)=m$ 2) $\cos(2\arccos a)+\cos(2\arcsin a)=0$; 3) $\operatorname{ctg}(\arccos m)\cdot\sin(\arccos m)=m$.

§ 2. Тригонометрические уравнения

Решить тригонометрические уравнения.

1. 1) $\sin x=1$ 3) $\sin x=-1$ 5) $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

2) $\sin x=0$ 4) $\sin x=\frac{1}{2}$ 6) $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. 1) $\sin\frac{x}{2}=1$ 4) $2\sin x=1$

2) $\sin 2x=1$ 5) $2\sin\frac{x}{2}=1$

3) $\sin 3x=1$

[1) $4k\pi+\pi$; 2) $k\pi+\frac{\pi}{4}$; 3) $\frac{\pi}{6}(4k+1)$; 4) $k\pi+(-1)^k\frac{\pi}{6}$; 5) $2k\pi+(-1)^k\frac{\pi}{3}$.]

3. 1) $\sin\frac{x}{2}=0$ 3) $\sin\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 5) $\sin x=-\frac{1}{2}$

2) $\sin 2x=0$ 4) $\sin 3x=\frac{1}{2}$ 6) $\sin 2x=\frac{1}{2}$

[1) $2k\pi$; 2) $\frac{k\pi}{2}$; 3) $2k\pi+(-1)^k\frac{\pi}{2}$; 4) $\frac{k\pi}{3}+(-1)^k\frac{\pi}{18}$; 5) $k\pi-(-1)^k\frac{\pi}{6}$; 6) $\frac{k\pi}{2}+(-1)^k\frac{\pi}{12}$.]

4. 1) $\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 4) $\sin 5x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

2) $\sin 3x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 5) $\sin 8x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

3) $\sin 5x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

[1) $k\pi-(-1)^k\frac{\pi}{3}$; 2) $\frac{k\pi}{3}+(-1)^k\frac{\pi}{12}$; 3) $\frac{k\pi}{5}+(-1)^k\frac{\pi}{15}$; 4) $\frac{k\pi}{5}-(-1)^k\frac{\pi}{20}$; 5) $\frac{k\pi}{8}-(-1)^k\frac{\pi}{24}$.]

5. 1) $\cos x=0$ 4) $\cos x=\frac{1}{2}$

2) $\cos x=1$ 5) $\cos x=-\frac{1}{2}$

3) $\cos x=-1$ 6) $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

6. 1) $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 4) $2\cos x=0$

2) $\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 5) $2\cos x=1$

3) $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 6) $\cos 2x=1$

7. 1) $2\cos 2x=1$ 4) $\cos 3x=\frac{1}{2}$

2) $\cos 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 5) $\cos 5x=1$

3) $\cos 2x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 6) $\cos 2x=-\frac{1}{2}$

[1) $k\pi\pm\frac{\pi}{6}$; 2) $k\pi\pm\frac{\pi}{12}$; 3) $k\pi\pm\frac{\pi}{8}$; 4) $\frac{2k\pi}{3}\pm\frac{\pi}{9}$; 5) $\frac{2k\pi}{5}$; 6) $k\pi\pm\frac{\pi}{3}$.]

8. 1) $\operatorname{tg} x=0$ 4) $\operatorname{tg} x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 6) $\operatorname{tg} x=-\sqrt{3}$

2) $\operatorname{tg} x=1$ 5) $\operatorname{tg} x=\sqrt{3}$ 7) $\operatorname{tg} x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

3) $\operatorname{tg} x=-1$

9. 1) $\operatorname{tg} 2x = 1$ 4) $\operatorname{tg} 3x = 1$

2) $\operatorname{tg} 2x = \sqrt{3}$ 5) $\operatorname{tg} 4x = 1$

3) $\sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} x = 1$ 6) $\operatorname{tg} 5x = -1$

[1) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$; 2) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$; 3) $k\pi + \frac{\pi}{6}$; 4) $\frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{12}$; 5) $(4k+1)\frac{\pi}{16}$; 6) $(4k-1)\frac{\pi}{20}$.]

10. 1) $\operatorname{ctg} x = 0$ 4) $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$

2) $\operatorname{ctg} x = 1$ 5) $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$

3) $3 \operatorname{ctg} x = 1$ 6) $\operatorname{ctg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

11. 1) $\operatorname{ctg} 3x = -\sqrt{3}$ 4) $3 \operatorname{ctg} 2x = \sqrt{3}$

2) $\operatorname{ctg} 2x = -1$ 5) $\sin x = m$

3) $\operatorname{ctg} 2x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

[1) $(6k+5)\frac{\pi}{18}$; 2) $(4k+3)\frac{\pi}{8}$; 3) $(3k\pi+2)\frac{\pi}{6}$; 4) $(6k\pi+1)\frac{\pi}{12}$; 5) $k\pi + (-1)^k \cdot \arcsin m$.]

12. $\sin 4x = -\sin x$. $\left[x_1 = \frac{2\pi k}{5};\quad x_2 = \frac{2\pi k + \pi}{3}.\right]$

13. $\sin 3x = \sin x$. $\left[x_1 = \frac{\pi}{4}(2k+1);\quad x_2 = k\pi.\right]$

14. $\sin 2x = \sin x$. $\left[x_1 = k\pi;\quad x_2 = \frac{\pi}{3}(2k+1).\right]$

15. $\sin 5x = \sin 4x$. $\left[x_1 = k\pi;\quad x_2 = \frac{\pi}{9}(2k+1).\right]$

16. $\sin x = \sin\frac{x}{2}$. $\left[x_1 = 2k\pi;\quad x_2 = \frac{2\pi}{3}(2k+1).\right]$

17. $\sin x = -\cos x$. $\left[x = \frac{\pi}{4}(4k-1).\right]$

18. $3\sin x = 2\cos^2 x$. $\left[x = k\pi + (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6}.\right]$

19. $\sin x = \cos 2x$. $\left[x_1 = \pi k + (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6};\quad x_2 = 2\pi k + \frac{3\pi}{2}.\right]$

20. $\sin 3x = \cos 3x$. $\left[x = \frac{\pi}{12}(4k+1).\right]$

21. $\sin x = \cos 5x.$ $\left[x_1 = \frac{\pi}{8}(4k - 1);\quad x_2 = \frac{\pi}{12}(4k + 1).\right]$

22. $\cos 5x = -\sin 3x.$ $\left[x_1 = k\pi + \frac{\pi}{4};\quad x_2 = \frac{\pi}{16}(4k + 3).\right]$

23. $\sin 5x = \cos 7x.$ $\left[x_1 = k\pi - \frac{\pi}{4};\quad x_2 = \frac{\pi}{24}(4k + 1)\right]$

24. $(\cos x + \sin x)^2 = \cos 2x.$ $\left[x_1 = k\pi;\quad x_2 = k\pi - \frac{\pi}{4}\cdot\right]$

25. $\frac{\sin 2x}{\cos x} = 0.$ $\left[x = k\pi.\right]$

26. $\sin^2 x - 2\sin x\cos x - \cos^2 x = 0.$ $\left[x = \frac{\pi}{8}(4k - 1).\right]$

27. $\cos^2 x + \sin x = 1.$ $\left[x_1 = k\pi;\quad x_2 = 2k\pi + \frac{\pi}{2}\cdot\right]$

28. $3(1 - \sin x) = 1 + \cos 2x.$ $\left[x_1 = \frac{\pi}{2}(4k + 1);\quad x_2 = 2k\pi + \frac{\pi}{6}\cdot\right.$

$\left.x_3 = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} = (2k + 1)\pi - \frac{\pi}{6}\cdot\right]$

29. $\cos 2x - 2\cos x + 1 = 0.$ $\left[x_1 = \frac{\pi}{2}(2k + 1);\quad x_2 = 2k\pi\right]$

30. $3\,\mathrm{tg}\left(x + \frac{\pi}{12}\right) - \sqrt{3} = 0.$ $\left[x = \pi k + \frac{\pi}{12}\cdot\right]$

31. $2\cos^3 x - 3\cos^2 x - 2\cos x = 0.$

$\left[x_1 = k\pi + \frac{\pi}{2};\quad x_2 = 2k\pi + \frac{2\pi}{3}\cdot\right]$

32. $\sin^3 x - \cos^3 x = \sin x - \cos x.$ $\left[x_1 = \frac{\pi}{4}(4k + 1);\quad x_2 = \frac{\pi k}{2}\cdot\right]$

33. $\cos x + \sin x = 1 + \sin 2x.$ $\left[x_1 = 2k\pi + \frac{\pi}{2};\quad x_2 = 2k\pi.\right]$

34. $\cos^2 x - \sin^2 x + \mathrm{tg}^2 x = 1.$ $\left[x_1 = \frac{\pi}{4}(2k + 1);\quad x_2 = k\pi.\right]$

35. $\mathrm{tg}^2 x - 1 = 0.$ $\left[x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}\right]$

36. $4\cos^2 x + 4\cos x - 3 = 0.$ $\left[x_1 = 2k\pi + \frac{\pi}{3}\cdot\right]$

37. $2\sin^2 x = 3\cos x.$ $\left[x_1 = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}\cdot\right]$

38. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0.$ $\left[x_1 = \frac{k\pi}{2};\quad x_2 = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}\cdot\right]$

39. $\cos^2 x + \cos x = 0.$ $\left[x_1 = \pi k + \frac{\pi}{2};\quad x_2 = \pi(2k + 1).\right]$

40. $\cos x + \sin x = 1.$ $\left[x_1 = 2k\pi + \frac{\pi}{2};\quad x_2 = 2k\pi.\right]$

41. $\cos^3 x - \cos x = 0$. $\left[x_1 = k\pi + \frac{\pi}{2};\quad x_2 = k\pi.\right]$

42. $\sin x - \cos x = 1$. $\left[x_1 = 2k\pi + \frac{\pi}{2};\quad x_2 = (2k+1)\pi.\right]$

43. $\cos^2 x - 4\cos x + 3 = 0$. $[x = 2k\pi.]$

44. $\sin x + \sqrt{3}\cdot\cos x = 1$. $\left[x_1 = 2k\pi + \frac{\pi}{2};\ x_2 = 2k\pi - \frac{\pi}{6}.\right]$

45. $\cos^2 x + 6\cos x + 5 = 0$. $[x = (2k+1)\pi.]$

46. $\sqrt{3}\cdot\sin x - \cos x = 1$. $\left[x_1 = (2k+1)\cdot\pi;\ x_2 = \frac{\pi}{3}(6k+1).\right]$

47. $2\cos x - \frac{1}{4} = \sin^2 x$. $\left[x = \frac{\pi}{3}(6k\pm 1).\right]$

48. $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 5x$. $\left[x = \frac{\pi k}{4}.\right]$

49. $\operatorname{tg} 2x = 2\cos x$. $\left[x_1 = \frac{\pi}{2}(2k+1),\ x_2 = \pi k + (-1)^k\cdot\frac{\pi}{6}.\right]$

50. $\operatorname{tg} x = \sin 2x$. $\left[x_1 = \frac{\pi}{4}(2k+1);\ x_2 = k\pi.\right]$

51. $\operatorname{tg} 3x = -\operatorname{ctg} x$. $\left[x = \frac{\pi}{4}(2k+1).\right]$

52. $\operatorname{ctg} x = 2\cos x$. $\left[x_1 = 2k\pi + \frac{\pi}{2};\quad x_2 = k\pi + (-1)^k\cdot\frac{\pi}{6}.\right]$

53. $\sin^2 x - \sin x = 0$. $\left[x_1 = k\pi;\quad x_2 = 2k\pi + \frac{\pi}{2}.\right]$

54. $\sin x + 2 = 1 + 3\sin x$. $\left[x = k\pi + (-1)^k\cdot\frac{\pi}{6}.\right]$

55. $\sin^3 x - \sin^2 x = 0$. $\left[x_1 = k\pi;\quad x_2 = 2k\pi + \frac{\pi}{2}.\right]$

56. $\sin(60^0 + x) - \sin x = 0{,}5$. $\left[x_1 = 2k\pi + \frac{\pi}{6};\quad x_2 = 2k\pi - \frac{\pi}{2}.\right]$

57. $2\sin^2 2x - 1 = 2\sin^2 x$. $\left[x_1 = \frac{\pi}{4}(2k+1);\quad x_2 = \pi k \pm \frac{\pi}{6}.\right]$

58. $\sin^2 x - 6\sin x + 5 = 0$. $\left[x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}.\right]$

59. $\sin^2 x - \sin^2\frac{x}{2} = \sin 30^0$. $\left[x_1 = k\pi + \frac{\pi}{2};\quad x_2 = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}.\right]$

60. $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$.

$\left[x_1 = 2k\pi - \frac{\pi}{2};\ x_2 = 2k\pi + \frac{\pi}{6};\ x_3 = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6}.\right]$

61. $2\sin^2 x + \sin^2 2x = 2$. $\left[x_1 = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4};\quad x_2 = k\pi + \frac{\pi}{2}.\right]$

62. $\operatorname{tg}\frac{2x}{3} - 1 = 0$. $\left[x = \frac{3\pi}{8}(4k+1).\right]$

63. $\sin x + \cos 2x - \sin 5x - \cos 6x = 0.$

$$\left[x_1 = \frac{k\pi}{2};\quad x_2 = \frac{\pi}{14} + \frac{2k\pi}{7}.\right]$$

64. $\cos x - \cos 5x = \sin 4x.$ $\left[x_1 = \frac{k\pi}{2};\quad x_2 = \frac{\pi}{10}(4k+1).\right]$

65. $\operatorname{ctg} x - \cos x = 1 - \sin x.$ $\left[x_1 = k\pi + \frac{\pi}{4};\quad x_2 = 2k\pi + \frac{\pi}{2}.\right]$

66. $2\cos^2 x - 7\cos x + 3 = 0.$ $\left[x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}.\right]$

67. $\operatorname{tg} x - \sin x = 2\sin^2 \frac{x}{2}.$ $\left[x_1 = 2k\pi;\quad x_2 = \frac{\pi}{4}(4k+1).\right]$

68. $3\sin^4 x + 5\cos^4 x = 2.$ $\left[x_{1,2} = k\pi \pm \frac{\pi}{4};\ x_{3,4} = k\pi \pm \frac{\pi}{3}.\right]$

69. $\cos 2x + \sin x = 1.$

$$\left[x_1 = k\pi;\ x_2 = 2k\pi + \frac{\pi}{6};\quad x_3 = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6}.\right]$$

70. $\cos 7x + \cos x = \cos 4x.$

$$\left[x_1 = \frac{\pi}{8}(2k+1);\quad x_2 = \frac{2k\pi}{3} \pm \frac{\pi}{9}.\right]$$

71. $\sin x + \cos x = \sin 45^0.$ $\left[x_1 = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi;\quad x_2 = 2k\pi - \frac{\pi}{12}.\right]$

72. $\cos x - \cos 2x = 1.$ $\left[x_1 = k\pi + \frac{\pi}{2};\quad x_2 = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}.\right]$

73. $\frac{3}{\sin^2 x} = 4.$ $\left[x_{1,2} = k\pi \pm \frac{\pi}{3}.\right]$

74. $\sin(x + 30^0) = \cos x.$ $\left[x = k\pi + \frac{\pi}{6}.\right]$

75. $\cos x = \sin^2 x - \cos^2 x.$ $\left[x_1 = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3};\quad x_2 = 2k\pi + \pi.\right]$

76. $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0.$

$$\left[x_1 = k\pi + (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6};\ x_2 = 2k\pi + \frac{\pi}{2}.\right]$$

77. $\cos^2 2x + 2\cos^2 x = \frac{7}{4}.$ $\left[x = \frac{\pi}{6}(6k \pm 1).\right]$

78. $4\sin x = 1 - 4\cos^2 x.$ $\left[x_1 = k\pi - (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6}.\right]$

79. $\cos x - \cos 3x = \sin x.$

$$\left[x_1 = k\pi;\quad x_2 = k\pi + \frac{\pi}{12};\quad x_3 = k\pi + \frac{5\pi}{12}.\right]$$

80. $2\cos^2 x - \sin x - 1 = 0.$

$$\left[x_1 = k\pi + (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6};\ x_2 = 2k\pi - \frac{\pi}{2}.\right]$$

81. $7\cos x - 3 = 2\cos^2 x.$ $\left[x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}.\right]$

82. $2\cos^2 x + 4\sin^2 x = 3.$ $\left[x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}.\right]$

83. $\sin^4 x - \cos^4 x = 0{,}5.$ $\left[x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}.\right]$

84. $1 - \cos x = \sin\frac{x}{2}.$

$$\left[x_1 = 2k\pi; \quad x_2 = 4k\pi + \frac{\pi}{3}; \quad x_3 = 4k\pi + \frac{5\pi}{3}.\right]$$

85. $\sin x = 4\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}.$

$$\left[x_1 = (2k+1)\pi; \quad x_2 = (2k+1)\cdot 2\pi.\right]$$

86. $\sin x + \cos^2 x = \frac{1}{4}.$ $\left[x_1 = (2k+1)\pi + \frac{\pi}{6}; \; x_2 = 2k\pi - \frac{\pi}{6}.\right]$

87. $3\sin 2x = 2\cos^2 2x.$ $\left[x = \frac{k\pi}{2} + (-1)^k\cdot\frac{\pi}{12}.\right]$

88. $\cos x = \sin^2 x - \cos^2 x.$ $\left[x_1 = 2k\pi + \pi; \; x_2 = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}.\right]$

89. $1 + \cos x = \operatorname{ctg}\frac{x}{2}.$ $\left[x_1 = (2k+1)\pi; \quad x_2 = (4k+1)\frac{\pi}{2}.\right]$

90. $\sin x(1 + 2\cos x) = 0.$ $\left[x_1 = k\pi; \; x_2 = 2k\pi + \frac{2\pi}{3}.\right]$

91. $\sin^2 x - \sqrt{2}\sin^3 x = 0.$ $\left[x_1 = k\pi; \; x_2 = k\pi + (-1)^k\cdot\frac{\pi}{4}.\right]$

92. $\sin x \cdot \operatorname{ctg} 2x = 0.$ $\left[x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}.\right]$

93. $\sin^2 x\,(1 + \operatorname{ctg} x) = \sin x + \cos x.$

$$\left[x_1 = 2k\pi + \frac{\pi}{2}; \quad x_2 = k\pi - \frac{\pi}{4}.\right]$$

94. $\operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} 2x = 4\cos^2 x.$

$$\left[x_1 = k\pi + \frac{\pi}{2}; \quad x_2 = \frac{\pi}{8}(4k+1).\right]$$

95. $\cos 3x \cdot \sin 2x = 0.$ $\left[x_1 = \frac{\pi}{6}(2k+1); \quad x_2 = \frac{k\pi}{2}.\right]$

96. $\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x = 0.$ $\left[x_1 = k\pi; \quad x_2 = k\pi + \frac{\pi}{4}.\right]$

97. $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0.$ $\left[x = \frac{\pi}{12}(6k+5).\right]$

98. $3\sin^2 x - 1 = \cos^2 x.$ $\left[x = \frac{\pi k}{2} + \frac{\pi}{4}.\right]$

99. $\sin x \cdot \operatorname{tg}\frac{x}{2} = 0{,}5.$ $\left[x = 2k\pi + \frac{\pi}{3}.\right]$

100. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-\operatorname{tg}2x=2.$ $\left[x=k\pi\pm\frac{\pi}{6}\cdot\right]$

101. $\sin(x-1)=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$ $\left[x=k\pi-(-1)^k\cdot\frac{\pi}{3}+1.\right]$

102. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{x}{3}\right)=-1.$ $\left[x=3k\pi-\frac{9\pi}{4}\cdot\right]$

103. $\sin(30^\circ+x)+\sin(30^\circ-x)=\frac{\sqrt{3}}{2}.$ $\left[x=k\pi+(-1)^k\cdot\frac{\pi}{6}\cdot\right]$

104. $\sin^2 x=\frac{3\cos x}{2}\cdot$ $\left[x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}\cdot\right]$

105. $\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x=2.$ $\left[x=k\pi+\frac{\pi}{4}\cdot\right]$

106. $\left(\cos x-2\sin^2\frac{x}{2}\right)\cdot\sin x=0.$ $\left[x_1=k\pi;\quad x_2=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}\cdot\right]$

107. $\sin 2x\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}x-\sin 2x+1=0.$ $\left[x=\frac{\pi}{4}(4k+1).\right]$

108. $\sin^2 x+\cos x=1.$ $\left[x_1=\frac{\pi}{2}(2k+1);\ x_2=2k\pi.\right]$

109. $1+\sin^2 x=\cos x.$ $[x=2k\pi.]$

110. $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\sin x=\frac{1}{2}\cdot$ $\left[x=k\pi\pm\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\cdot\right]$

111. $\operatorname{tg}^2 x-\sqrt{3}\cdot\operatorname{tg}x=0.$ $\left[x_1=k\pi;\ x_2=k\pi+\frac{\pi}{3}\cdot\right]$

112. $\sin^2 x-\cos^2 x=1.$ $\left[x=k\pi+\frac{\pi}{2}\cdot\right]$

113. $3(1-\cos x)=\sin^2 x.$ $[x=2k\pi.]$

114. $2\cos x+3=4\cos\frac{x}{2}\cdot$ $\left[x=\frac{2\pi}{3}(6k\pm 1).\right]$

115. $\sin x+\sqrt{3}\cdot\cos x=0.$ $\left[x=k\pi-\frac{\pi}{3}\cdot\right]$

116. $1+\cos x=\cos^2\frac{x}{2}\cdot$ $[x=(2k+1)\pi.]$

117. $\operatorname{tg}(60^\circ+x)\cdot\operatorname{tg}(60^\circ-x)=-1.$ $\left[x=k\pi\pm\frac{\pi}{4}\cdot\right]$

118. $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\sin\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)=0.$ $\left[x_1=\frac{\pi}{4}(2k+1)-\frac{\pi}{6};\right.$

$\left.x_2=\frac{k\pi}{3}+\frac{\pi}{9}\cdot\right]$

119. $\sin x\cdot\cos x=\frac{1}{4}\cdot$ $\left[x=\frac{k\pi}{2}+(-1)^k\cdot\frac{\pi}{12}\cdot\right]$

120. $9\sin x=7\operatorname{tg}x.$ $\left[x_1=k\pi;\ x_2=\arccos\frac{7}{9}\cdot\right]$

121. $3-2\cos^2 x=8\operatorname{tg} x\cos^2 x.$ $\left[x_1=\operatorname{arc\,tg}2;\quad x_2=\operatorname{arc\,ctg}\frac{2}{3}\cdot\right]$

122. $\sin x+2\cos x=\frac{1}{\cos x}\cdot$ $\left[x=\operatorname{arc\,tg}\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\cdot\right]$

123. $\operatorname{tg}x+5\operatorname{ctg}x=6.$ $\left[x_1=\pi k+\frac{\pi}{4};\quad x_2=\operatorname{arc\,tg}\ 5\right]$

124. $2\cos x+1=0.$ $\left[x_{1,2}=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3};\right.$

$\left.x_3=2k\pi+\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\right]$

125. $\sin 2x=\sin^2 x.$ $[x_1=k\pi;\ x_2=k\pi+\operatorname{arc\,tg}\ 2.]$

126. $\frac{2}{1+\operatorname{tg}^2 x}=2+\sin x.$ $\left[x_1=k\pi;\ x_2=2k\pi-\frac{\pi}{6};\right.$

$\left.x_3=2k\pi+\frac{5\pi}{6}\cdot\right]$

127. $\sin x+\cos^2 x=1-\sin x\cos x.$ $\left[x_1=2k\pi+\frac{\pi}{2};\ x_2=2k\pi.\right]$

128. $\sin^2 3x=3\cos^2 3x.$ $\left[x=\frac{\pi}{9}(3k\pm 1).\right]$

129. $3\operatorname{tg}^2 3x-1=0.$ $\left[x=\frac{\pi}{18}\ (6k\pm 1).\right]$

130. $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{4}{5}\cdot$ $\left[x=2k\pi\cdot\frac{\pi}{4}\pm\arccos\frac{4}{5}\cdot\right]$

131. $3\sin^2 x-4\cos^2 x=\sin x\cos x.$ $\left[x_1=\operatorname{Arc\,tg}(-1)=k\pi-\frac{\pi}{4};\right.$

$\left.x_2=\operatorname{Arc\,tg}\frac{4}{3}=k\pi+\operatorname{arc\,tg}\frac{4}{3}\cdot\right]$

132. $\operatorname{tg}4x-\operatorname{tg}x=0.$ $\left[x=\frac{k\pi}{3}\cdot\right]$

133. $\frac{1+\cos x}{\sin x}=2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cdot$ $\left[x=2\operatorname{Arc\,tg}\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\right]$

134. $a\sin x=b\cos x.$ $\left[x=\operatorname{Arc\,tg}\frac{b}{a}\cdot\right]$

135. $a\cos x=b\operatorname{ctg}x.$

$\left[x_1=k\pi+\frac{\pi}{2};\quad x_2=k\pi+(-1)^k.\arcsin\frac{b}{a}\cdot\right]$

136. $a\sin x=b\operatorname{tg}x.$ $x_1=k\pi;\quad x_2=2k\pi\pm\arccos\frac{b}{a}\cdot\Big]$

137. $a(1-\cos x)=b\sin\frac{x}{2}\cdot$

$\left[x_1=2k\pi;\quad x_2=2k\pi+(-1)^k 2\arcsin\frac{b}{2a}\cdot\right]$

138. $\sin(x-a)=\cos(x+a).$ $\left[x=k\pi+\frac{\pi}{4}\cdot\right]$

139. $\sin 2x = b\cos x$. $\left[x_1 = k\pi + \frac{\pi}{2};\quad x_2 = \operatorname{Arc}\sin\frac{b}{2a}\right]$

140. $\sin(a+x) + \sin(a-x) = c$. $\left[x = \operatorname{Arc}\sin\frac{c}{2\cos a}\cdot\right]$

141. $\operatorname{tg} x = m$. $[x = \operatorname{Arc}\operatorname{tg} m = k\pi + \operatorname{arc}\operatorname{tg} m]$

Решить системы тригонометрических уравнений:

142. $\begin{cases} \dfrac{\sin x}{\sin y} = 2. \\ x + y = 120°. \end{cases}$ $[x = 90°;\quad y = 30°.]$

143. $\begin{cases} \dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y} = 3. \\ x - y = 30°. \end{cases}$ $[x = 60°;\quad y = 30°.]$

144. $\begin{cases} \sin x \cdot \sin y = \dfrac{3}{4}\cdot \\ \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = 3. \end{cases}$ $[x = 60°;\quad y = 60°]$

145. $\begin{cases} \sin x + \sin y = 1. \\ x + y = 60°. \end{cases}$ $[x = 30°;\quad y = 30°.]$

Решить систему относительно $\sin x$ и $\cos y$:

146. $\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 y = a. \\ \cos^2 x - \sin^2 y = b. \end{cases}$ $\left[\sin x = \pm\sqrt{\frac{a-b}{2}};\ \cos y = \pm\sqrt{\frac{a+b}{2}}.\right]$

Решить уравнения:

147. 1) $\arcsin(x+1) = \frac{\pi}{6}$ 3) $\arccos(x^2 - 5x + 7) = 0$

2) $\arcsin(2x - 3) = \frac{\pi}{2}$ 4) $\arccos(x^2 - 2) = \pi$

$\left[1)\ -\frac{1}{2};\ 2)\ -2;\ 3)\ x_1 = 2;\ x_2 = 3;\ 4)\ x_1 = 1;\ x_2 = -1.\right]$

148. 1) $4\operatorname{arc}\operatorname{tg}(4x^2 - 12x + 10) = \pi$

2) $\operatorname{arc}\operatorname{tg}(x^2 - 4x + \sqrt{3} + 3) = \frac{\pi}{3}$

3) $6\arcsin(x^2 - 6x + 8{,}5) = \pi$

4) $\operatorname{arc}\operatorname{ctg}(x^2 - 8x + 15 + \sqrt{3}) = \frac{\pi}{6}$

$\left[1)\ \frac{3}{2};\quad 2)\ x_1 = 3,\ x_2 = 2;\quad 3)\ x_1 = 2;\quad x_2 = 4;\quad 4)\ x_1 = 5,\ x_2 = 3.\right]$

149. 1) $4\operatorname{arc}\operatorname{ctg}(x^2 - 9x + 15) - \pi = 0$ 3) $\arccos x = \arcsin a$

2) $\arcsin x = \arccos a$ 4) $\operatorname{arc}\operatorname{tg} x = \arcsin\frac{3}{5}$

$\left[1)\ x_1 = 7,\ x_2 = 2;\ 2)\ \sqrt{1 - a^2};\ 3)\ \sqrt{1 - a^2};\ 4)\ \frac{3}{4}\cdot\right]$

150. 1) $\operatorname{arc\,tg} x = \arccos\frac{5}{13}$ 3) $\operatorname{arc\,tg} x = \arccos\frac{4}{5}$

2) $\operatorname{arc\,sec}\frac{\sqrt{5}}{x} = \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}$ 4) $\arcsin\frac{3x}{2} = \arcsin x$

$\left[1)\ \frac{12}{5};\quad 2)\ 2;\quad 3)\ \frac{3}{4};\quad 4)\ 0.\right]$

151. 1) $2\arcsin\frac{x}{2} = \arcsin\frac{x\sqrt{3}}{4}$

2) $\arcsin\frac{x}{\sqrt{3}} + \arcsin x\frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{2}$

3) $\frac{1}{2}\arcsin\frac{x}{6}\arcsin\frac{x}{3\sqrt{2}} = \frac{\pi}{3}$

4) $\arcsin\frac{x\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{x}{3} = \frac{\pi}{6}$

$\left[1)\ x_1=0;\quad x_{2,3}=\pm\frac{\sqrt{13}}{2};\quad 2)\ \frac{\sqrt{3}}{2};\quad 3)\ 3;\quad 4)\ \frac{3}{2}.\right]$

152. 1) $\arccos\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\arccos\frac{x\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{4}$

2) $\operatorname{arc\,tg} 3x = 2\operatorname{arc\,tg} x$

3) $\operatorname{arc\,tg} 4x = 2\operatorname{arc\,tg} x$

4) $\operatorname{arc\,tg} 2x = \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2}$

$\left[1)\ 1;\quad 2)\ x_1=0;\quad x_{2,3}=\pm\frac{\sqrt{3}}{3};\quad 3)\ x_1=0;\quad x_{2,3}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2};\quad 4)\ 0.\right]$

153. 1) $\arcsin 3x = \arccos 4x$; 3) $\arcsin x = \operatorname{arc\,tg} a$.

2) $\operatorname{arc\,tg} x = \operatorname{arc\,ctg} a$;

$\left[1)\ \frac{1}{5};\quad 2)\ \frac{1}{a};\quad 3)\ \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}.\right]$

154. 1) $\arcsin x = 2\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}$; 2) $3\arcsin\sqrt{x} - \pi = 0$.

$\left[1)\ x_1=0;\quad x_{2,3}=\pm 1;\quad 2)\ \frac{3}{4}.\right]$

155. Выразить в виде алгебраического уравнения функциональные зависимости между переменными:

1) $\arcsin x = \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y}$. $[x^2+y^2=1.]$

2) $\arccos x = \operatorname{arc\,ctg}\frac{y}{x}$. $[x^2+y^2=1.]$

3) $\arccos y = \operatorname{arc\,tg} x$. $[y^2(1+x^2)=1.]$

156. Исходя из зависимости, что $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ и, обозначив $\sin x = y$, доказать, что $2\arcsin y = \arccos(1-2y^2)$.

157. Можно ли считать число π корнем уравнения:

$$\frac{\sin x}{1+\cos x}=0?$$

158. Можно ли считать число $\frac{\pi}{2}$ корнем уравнения:

$$\cos 2x \cdot \operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0?$$

159. Можно ли считать уравнения $\sin x=0$ и $\sin 5x=0$ равносильными?

160. Показать, что уравнения: $\sin^2 2x-\sin^2 x=\frac{1}{2}$

и $\sin 3x+\sin x=\frac{1}{2}$ равносильны.

161. Можно ли считать уравнения: $\operatorname{tg} x(1-2\cos x)\cdot(2+\sin x)=0$ и $\operatorname{tg} x(1-2\cos x)=0$ равносильными?

162. Какому условию должен удовлетворять коэффициент c уравнения: $7\sin^2 x+3\cos^2 x=c$, чтобы получились возможные решения? [$7\geqslant c\geqslant 3$.]

163. Какому условию должен удовлетворять коэффициент a уравнения: $a\sin^2 x+5\cos^2 x=7$, чтобы уравнение можно было решить? [$a>7$.]

§ 3. Графическое решение тригонометрических уравнений

1. $\sin x=0$.

Указание. Строим график функции $y=\sin x$.

Решениями данного уравнения будут абсциссы точек пересечения линий: $y=\sin x$ и $y=0$, т. е. абсциссы точек пересечения синусоиды с осью x. Все решения, записываемые формулой $x=k\pi$ при $k>0$ и при $k<0$, будут на чертеже соответствовать точкам, в которых синусоида пересекает ось x.

Значения $x=0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ \ldots,-\pi,\ -2\pi,\ \ldots$

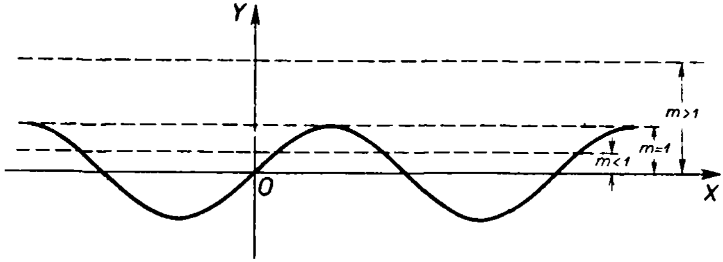
2. $\operatorname{tg} x=0$.

3. $\cos x=0$.

4. $\sin x=m$, где $m>0$.

Указание. В этом случае мы отыскиваем те значения аргумента, при которых две функции

$y=\sin x$ и $y=m$ имеют одинаковые ординаты.



Черт. 5

График функции $y=\sin x$ есть синусоида, график функции $y=m$ есть прямая линия, параллельная оси ox, следовательно, графическое решение уравнения $\sin x=m$ сводится к нахождению точек пересечения синусоиды и прямой линии. Из чертежа (см. черт. 5) следует, что если $m<1$ или $m=1$, то существует бесконечное множество точек пересечения, следовательно, уравнение имеет бесконечное множество решений, если $m>1$, прямая не пересекается с синусоидой; уравнение в этом случае не имеет решения, значит и равенство $\sin x=m$ не имеет смысла.

4а. $\sin x=m$, где $m<0$;

5. $\cos x=m$;

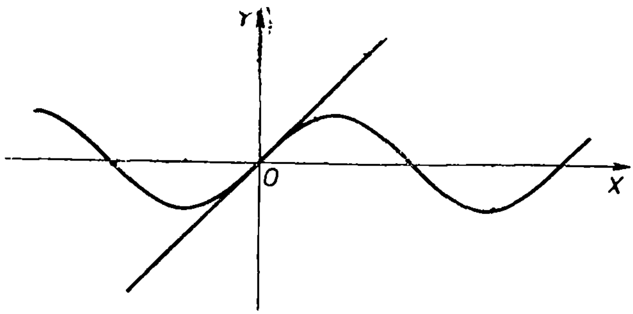
6. $\operatorname{tg} x=m$;

7. $\operatorname{ctg} x=m$;

8. $\sin x=x$.

Указание. Графическое решение уравнения $\sin x=x$ сводится к нахождению общих точек графиков функций:

$$y=x \text{ и } y=\sin x.$$



Черт. 6

График функции $y=x$ есть биссектриса первого и третьего координатных углов, следовательно, как можно видеть из чертежа (см. черт. 6) уравнение имеет единственное решение $x=0$. Это и понятно, так как для углов первой четверти $\sin x<x$.

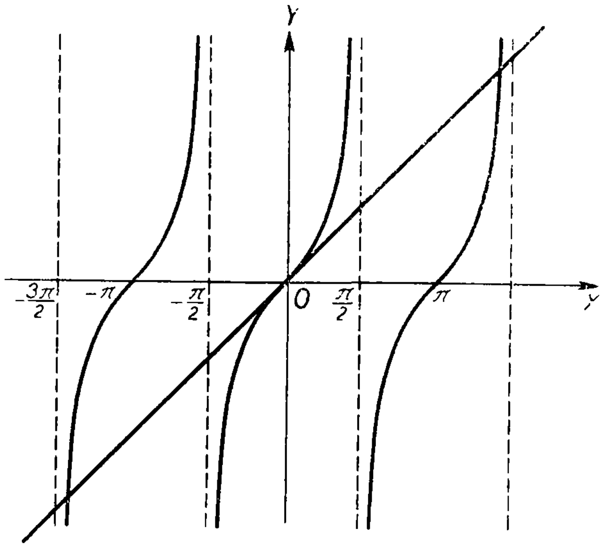
9. $x-\operatorname{tg} x=0$.

Указание. Графическое решение этого уравнения сводится к отысканию точек пересечения графиков функций: $y=x$, $y=\operatorname{tg} x$, т. е. к отысканию точек пересечения биссектрисы координатного угла с тангенсоидой, а так как таких точек пересечения бесконечное множество, то уравнение $x-\operatorname{tg} x=0$ имеет бесконечное множество корней. Первые три корня будут:

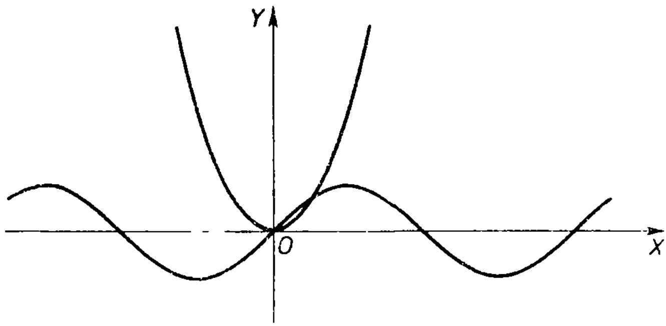
$$x_1=0;\quad x_2=4{,}5;\quad x_3=-4{,}5. \text{ (см. черт. 7).}$$

10. $x^2-\sin x=0$.

Указание. Решение сводится к отысканию точек пересечения графиков функций: $y=x^2$; $y=\sin x$, т. е. к отысканию точек пересечения параболы и синусоиды (см. черт. 8). Корни этого уравнения будут: $x_1=0$; $x_2=0{,}85$.



Черт. 7



Черт. 8

11. $\frac{1}{x} - \sin x = 0.$

Указание. Решение этого уравнения сводится к отысканию точек пересечения гиперболы $y = \frac{1}{x}$ и синусоиды $y = \sin x$. Данное уравнение, как можно видеть из чертежа (см. черт. 9), имеет бесчисленное множество корней.

12. $\cos x = x$

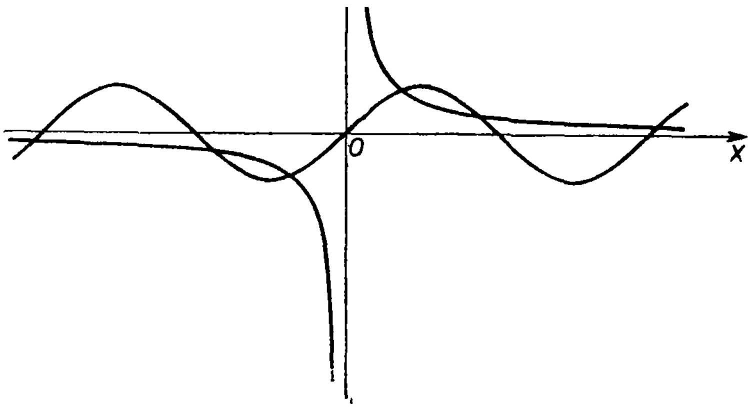
13. $x^2 - \cos x = 0$

14. $\frac{1}{x} - \cos x = 0$

15. $x^2 - \operatorname{tg} x = 0$

16. $\frac{1}{x} - \operatorname{tg} x = 0.$

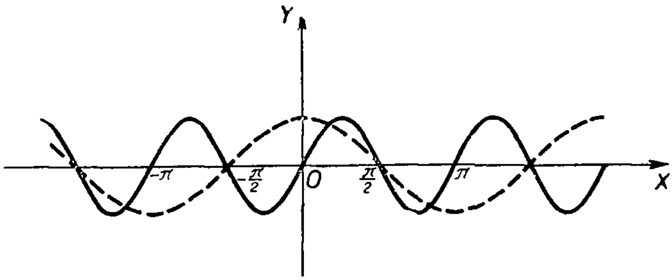
Указание. Все эти уравнения решаются аналогично предшествующим уравнениям.



Черт. 9

17. $\sin 2x = \sin x$.

Указание. Решение уравнения сводится к отысканию точек пересечения двух синусоид: $y = \sin 2x$; $y = \sin x$, причём период синусоиды первой в 2 раза меньше периода второй синусоиды.



Черт. 10

Уравнение $\sin 2x = \sin x$ имеет бесчисленное множество решений.

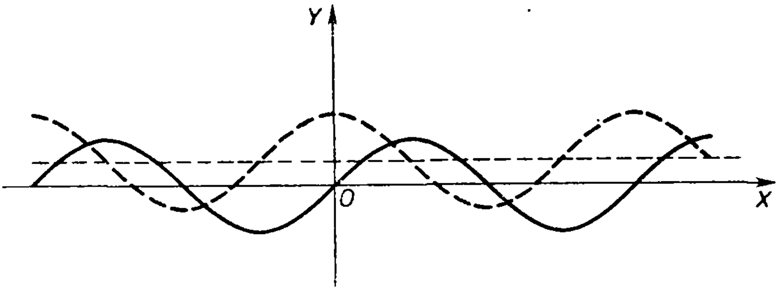
18. $\sin 2x = \cos x$.

Указание. Заменив правую часть уравнения $\cos x$ на $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, сводят графическое решение уравнения к отысканию точек пересечения синусоид: $y = \sin 2x$ и $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, причём синусоида $y=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ сдвинута относительно начала координат на $\frac{\pi}{2}$ (см. черт. 10).

Уравнение имеет бесконечное множество решений.

19. $\operatorname{tg} 2x=\operatorname{tg} x$. **20.** $\operatorname{tg} 2x=\operatorname{ctg} x$. **21.** $\sin x-\cos x=\frac{1}{2}$.

Указание. Решение уравнения $\sin x-\cos x=\frac{1}{2}$ сводится к решению уравнения $\sin x=\frac{1}{2}+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, т. е. к отысканию точек пересечения функций: $y=\sin x$ и $y=\frac{1}{2}+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ (см. черт. 11).



Черт. 11

Графическое решение уравнения $\sin x-\cos x=\frac{1}{2}$ сводится к отысканию точек пересечения двух синусоид, из которых вторая смещена относительно начала координат на $\frac{\pi}{2}$ и сдвинута вдоль оси y на $\frac{1}{2}$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Редактор *С. В. Пазельский.* Техн. редактор *М. Д. Петрова*

Подписано к печати 21/I 1952 г. А 01528. Бумага 60×92¹/₁₆.
Бумажных листов 7,5. Печатных листов 15. Учётно-изд. листов 14,51.
Тираж 25 тыс. экз. Цена без переплёта 3 р. 90 к. Переплёт 75 к. Заказ 1052.

Типография 3 ЛРТПП, г. Рига, ул. Ленина, 137/139.