Я. Ф. ЧЕКМАРЕВ

МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ АРИФМЕТИКИ

В V—VI КЛАССАХ ВОСЬМИЛЕТНЕЙ ШКОЛЫ

ИЗДАНИЕ 2-е
ИСПРАВЛЕННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ПРОСВЕЩЕНИЕ»
Москва 1965

ОТ РЕДАКЦИИ

Второе издание книги дополнено краткими сведениями о программированном обучении, материалом по проведению устных контрольных работ и диктантов на уроках арифметики. В параграфе 30, содержащем перечень видов простых задач, внимание учителя обращено также на «задачи, выраженные в косвенной форме». Обновлено содержание ряда задач.

ОТ АВТОРА

Настоящая книга — «Методика преподавания арифметики в V и VI классах восьмилетней школы» — состоит из двух частей: 1) общая методика и 2) частная методика арифметики. Общая методика раскрывает некоторые главные общие вопросы обучения арифметике, а частная включает методику изложения всех тем, предусмотренных программой по арифметике.

Автор стремился осветить вопросы, связанные с перестройкой школы, с осуществлением закона об укреплении связи школы с жизнью.

Автор считает своим долгом выразить благодарность внимательно просмотревшим книгу и оказавшим ценное содействие в устранении недостатков книги проф. И. Я. Депману, доценту С. Е. Ляпину, доценту В. Г. Чичигину, методисту г. Москвы К. П. Сикорскому, заслуженному учителю школы РСФСР И. А. Павленко и учительнице математики средней школы Т. Н. Денисовой.

ВВЕДЕНИЕ

В Законе об укреплении связи школы с жизнью и о дальнейшем развитии системы народного образования в СССР говорится:

«Главной задачей советской школы является подготовка учащихся к жизни, общественно полезному труду, дальнейшее повышение уровня общего и политехнического образования, подготовка образованных людей, хорошо знающих основы наук, воспитание молодежи в духе глубокого уважения к принципам социалистического общества, в духе идей коммунизма» (Закон об укреплении связи школы с жизнью, раздел I, статья I).

Математика, являясь ведущим предметом средней школы, имеет целью обеспечить учащимся прочное и сознательное овладение основами математических знаний, умений и навыков, необходимых как для периода обучения, так и по окончании школы, а также для продолжения общего и профессионального образования.

Из математических дисциплин изучаются в восьмилетней школе арифметика, алгебра и геометрия. Арифметика — наука о числах — первая составная часть математики. Арифметика в нашей школе изучается в течение шести лет: в I—IV классах изучается начальный курс арифметики, а в V—VI классах — систематический курс. В начальной школе учащиеся изучают арифметику целых положительных чисел и именованные числа. При изучении этого курса дети в небольшой мере знакомятся с вопросами теории, пользуются только сборником задач по арифметике, и при изучении математических понятий у них играет роль главным образом интуиция, индукция и наглядность. Учителю математики надо также помнить, что преподавание арифметики в начальной школе ведется не учителями математики.

Объяснительная записка к программе по арифметике для средней школы говорит: «Целью изучения арифметики в восьмилетней школе является развитие вычислительных навыков в действиях над целыми и дробными числами, ознакомление с наиболее распространенными в повседневной жизни зависимостями величин, изучение простейших сведений по геометрии и применение полученных знаний при решении задач и выполнении расчетов практического характера».

Арифметические знания, приобретенные в V и VI классах, являются основой для дальнейшего изучения как математики, так и других предметов. Ни геометрия, ни алгебра не могут быть усвоены основательно без твердого отчетливого знания арифметики, так как все математические вычисления, даже самые сложные, сводятся к основным четырем арифметическим действиям. Широко пользуются арифметическими расчетами на уроках физики, химии, биологии; нельзя обойтись без арифметики и в области социальных наук, где числовой материал имеет также громадное значение.

Арифметические знания и навыки должны быть усвоены в строгой системе. Систематичность есть характерная особенность математических дисциплин, где любое знание и навык являются выводами предыдущих и сами служат основой последующих. Этой системе должно быть подчинено расположение учебного материала при изучении арифметики, с сохранением известных дидактических правил.

Процесс обучения в нашей школе не ограничивается сообщением учащимся определенной суммы знаний; обучение арифметике способствует развитию умственных способностей, волевых черт, закладывает основы коммунистического сознания и поведения.

Арифметика способствует воспитанию навыков логического отвлеченного мышления: наблюдая отдельные факты, учащийся приходит к общему выводу.

Зависимость одних математических знаний и навыков от других, их внутренняя последовательность и логичность имеют большое воспитательное значение: учащийся на доступном для него материале убеждается, что пробелы в знаниях тормозят дальнейшую работу — это уже первый шаг к воспитанию сознательного отношения к труду.

Развивая у учащихся умение логически мыслить и решать практические задачи, арифметика воспитывает навыки в установлении функциональных зависимостей величин, отыскании законов, выражающих эти зависимости, что в свою очередь вырабатывает способность вскрывать причины и следствия жизненно практических явлений, развивает навык подмечать общее в отдельных явлениях и применять известное правило к частным случаям.

Изучение арифметики воспитывает материалистическое миропонимание; все математические выводы основываются на разнообразном конкретном материале; исходить из конкретного, для всякого вывода требовать достаточно оснований — это основа материалистического мышления.

Арифметика предъявляет к учащимся строгие требования в смысле обоснованности, последовательности и систематичности изложения.

При обучении арифметике воспитываются и волевые качества, настойчивость в доведении дела до конца, самостоятельность, сообразительность, инициатива. Точное и аккуратное выполнение заданий и математических расчетов, хорошее их оформление на бумаге вырабатывают постепенно у учащегося аккуратное отношение ко всякой работе, ко всякому заданию.

Воспитывающий характер обучения ярко сказывается при решении задач. Здесь развиваются логическое мышление, речь, воображение, память и другие качества. Ученик только тогда сможет решить задачу, когда ясно представит все процессы, вытекающие из условия задачи, в их взаимной связи, только тогда он начинает намечать план решения и выражать свою мысль словами. Математика — наука точная, и при обучении арифметике от учащегося требуют точных и сжатых формулировок правил, определений, объяснений. Умение точно и кратко выразить свою мысль имеет в жизни большое значение.

Необходимо добиться, чтобы учащиеся не только знали правила, определения, формулировки, но и понимали их смысл, значение, умели применять их при доказательствах и решении задач. В процессе обучения должны объединиться строго научное изложение учителя с высказываниями, рассуждениями, вопросами, усилиями в преодолении трудностей со стороны учащихся.

Связь обучения арифметике с жизнью осуществляется путем привития учащимся навыков решения жизненно практических вопросов, являющихся содержанием задач, включенных в классную и домашнюю работу.

Числовые данные, характеризующие коммунистическое строительство, неуклонный рост политической, экономической и культурной мощи нашей страны, перспективы развития народного хозяйства, служат богатым материалом для воспитания советского патриотизма. Эти данные служат конкретным материалом для разнообразных задач, вскрывающих грандиозность достижений советской страны во всех областях жизни. В преподавании арифметики при решении задач должны быть использованы числовые данные семилетнего плана роста нашей социалистической промышленности и сельского хозяйства, культурного роста нашей страны и т. д.

Учащиеся должны решать задачи не только из сборника задач, но и составлять задачи на числовом материале, в котором отражается жизнь и деятельность коллектива учащихся и жизнь и труд взрослых. Составление задач на местном числовом материале и решение этих задач способствуют развитию самостоятельности и инициативы, активизации учащихся в процессе обучения, укрепляют связь теории с практикой и приближают обучение арифметике к жизни. Осуществление связи обучения арифметике с жизнью является одним из важных средств коммунистического воспитания учащихся.

Необходимо отбирать такой числовой материал при составлении задач, который представляет интерес для учащихся и не требует большого количества времени для объяснения технических и других терминов, входящих в содержание составляемой задачи.

Самостоятельное составление задач учителем и учащимися должно стать системой обучения.

Следует заметить, что составление задач и их решение преподавателем и учащимися занимает много времени и не всегда имеется такой числовой материал, который дает возможность составить задачи для изучения вопроса программы.

Чтобы работа по составлению задач не шла в ущерб изучению арифметики, надо при планировании программного материала установить определенное время для составления задач преподавателем и учащимися.

Самостоятельно составленные задачи могут быть подражательного характера, с использованием имеющихся в сборнике задач, или соответствующими заданной тематике.

Задачи первого вида имеют малое образовательно-воспитательное значение, и их можно допустить в ограниченном количестве с целью ознакомить на них учащихся со структурой задачи (т. е. заставить четко понять, что каждая задача содержит в себе: 1) условие с теми или иными числовыми данными, 2) вопрос), с тем, как формулируется содержание задачи и ставится вопрос, показать при составлении задач связь теории с практикой.

Гораздо большую ценность имеют задачи второго вида, и они должны по преимуществу применяться на практике.

При составлении задач учащимся и самим преподавателям понадобятся числовые данные. Эти данные можно почерпнуть из разных источников, а именно: а) из жизни учащихся, взрослых, путем опроса учащимися своих родителей, знакомых и т. п., б) из газет, журналов, справочной технической литературы и т. п., в) из материалов экскурсий, г) из учебников тех дисциплин, которые изучаются в данном классе.

Чтобы оценить значение этой работы в воспитательно-образовательном отношении, проанализируем процесс составления задачи.

Этот процесс может состоять из следующих этапов: а) выбор темы и определение вопроса задачи; б) выбор жизненного материала для задачи; в) подбор числового материала; г) установление связи между искомым и данными; д) словесная формулировка задачи.

Иллюстрируем эти этапы примером.

Тема задачи: вычислить доход двух колхозных семей, в которых поровну работников, но разное количество трудодней.

Предполагается ответить на вопрос, какая семья получила больше и на сколько. Для составления такой задачи учащийся должен иметь дело с количеством членов семей, количеством трудодней каждой семьи и размером оплаты одного трудодня. Одни из этих данных может дать преподаватель, другие должны найти сами учащиеся путем опроса дома (если школа сельская) или получить из газет, справочника (если школа городская). Наконец, задаче надо придать словесную формулировку.

Таким образом, при составлении задач учащийся видит, что задача тесно связана с жизнью, что она дает ответ на весьма важный вопрос в хозяйственной жизни колхоза, полученный числовой материал в результате решения задачи ясно показывает зависимость благосостояния семьи от количества затраченного труда.

Эта работа ценна и в том отношении, что она помогает пониманию структуры задач, зависимости между данными и искомыми, а это самое существенное для выработки навыка решения задач.

ГЛАВА I

МЕТОДЫ ОБУЧЕНИЯ АРИФМЕТИКЕ

§ 1. Общие требования к методам преподавания

В постановлении ЦК ВКП (б) от 25 августа 1932 г. говорится: «Преподаватель обязан систематически, последовательно излагать преподаваемую им дисциплину, всемерно приучая детей к работе над учебником и книгой, к различного рода самостоятельным письменным работам, к работе в кабинете, в лаборатории, учебной мастерской и широко применяя, наряду с этими основными методами, различного рода демонстрации опытов и приборов, экскурсии (на завод, в музей, в поле, в лес и т. п.)...»

Учитель должен стремиться использовать все лучшие методы работы, разнообразя и обогащая ими педагогический процесс. Применяя тот или иной метод, уже испытанный в школе, учитель должен проявлять творческое отношение к работе, вносить новое, учитывая особенности учащихся, обстановку и условия своей работы.

Методы обучения не должны сводиться лишь к средствам простой передачи знаний — от учителя к ученику, но и способствовать развитию творческих сил учащихся, их умения самостоятельно искать и находить истину и приобретать новые знания.

Назовем основные методы обучения арифметике:

1. Метод устного изложения.
2. Метод работы над книгой.
3. Метод письменных и графических работ.

Каждый из этих методов имеет различные формы работы.

Арифметические знания и навыки лишь тогда будут отчетливо усвоены учащимися, когда учитель предварительно проанализирует материал каждого урока, выделит в нем самое существенное, распределит отдельные моменты изучения строго последовательно по степени их усложнения. Тогда каждое новое знание будет тесно связано с уже известными учащимся знаниями и твердо усвоится в намеченной учителем системе, что и является в образовательно-воспитательном отношении самым ценным.

§ 2. Метод устного изложения

Метод устного изложения применяется в двух формах:

1) Монологическое изложение.

2) Диалогическое (разговорное) изложение.

1. Монологическое изложение на уроках арифметики в школе применяется в виде а) рассказа и б) объяснения.

Когда у учащихся нет соответствующего запаса знаний, учитель применяет монологическую форму обучения: сообщает арифметические знания, рассказывая или объясняя.

Монологическая форма изложения материала по арифметике имеет следующее значение: 1) знакомит учащихся с правильной математической речью; 2) учит их слушать и понимать математическую речь; 3) дает учащимся образец объяснения; 4) вырабатывает у них навык излагать материал без вопросов, в виде связного рассказа.

В V и VI классах на уроках арифметики учитель применяет рассказ примерно на протяжении 5—10 минут.

Объяснение на уроках арифметики в школах проводится при ознакомлении учащихся с новыми понятиями и терминами. Например, при изучении делимости чисел учитель объясняет понятие «наименьшее общее кратное», при изучении дробных чисел объясняются понятия числителя, знаменателя и т. п.

2. Диалогическая форма изложения на уроках арифметики наиболее распространенная. Эта форма применяется: а) при сообщении нового материала, б) при закреплении, в) при проверке знаний учащихся.

Такая форма ведения уроков наиболее соответствует возрастным особенностям учащихся: они не могут долго слушать непрерывную речь учителя, внимание их скоро ослабевает. Вопросы же учителя и ответы учащихся оживляют преподавание. Вопросы учителя заставляют учащихся думать, дают их мысли определенное направление, держат учащихся в состоянии творческого напряжения, прививают навыки логического мышления, развивают у учащихся активность.

В процессе урока учитель руководит всем классом и работой каждого учащегося. К новому вопросу он привлекает внимание всего класса; с каждым новым вопросом он обращается ко всему классу в целом, чтобы все учащиеся думали над этим вопросом и готовили ответ. Отвечает только тот учащийся, которого назовет учитель. Если надо поставить дополнительный вопрос, то и этот вопрос ставится так, чтобы на него было направлено внимание всех учащихся.

Для усиления активности посредственно успевающих учащихся учитель задает вопросы нарастающей трудности. Таким образом эти учащиеся, правильно отвечая на легкие вопросы, приобретают уверенность в себе и стремятся разрешить более трудные вопросы. Когда же учащиеся во время беседы дают неправильные ответы, учитель обращается к классу с предложением исправить ответ, затем дает возможность ответить на вопросы кому-либо из учащихся, заявивших поднятием руки о своем желании отвечать. Если в ответе окажется неточность или если никто из учащихся не сумел правильно ответить, учитель сам дает исчерпывающие объяснения.

Вопросы ставятся учителем в определенной системе, так, чтобы в ответах учащихся имело место последовательное развертывание темы беседы. В свою очередь учащиеся вопросами могут отклонить учителя от темы беседы. В таких случаях учитель отвечает учащимся, что затронутые ими вопросы будут рассмотрены позже, и возвращается к первоначальной беседе на данную тему. Этим учитель приучает учащихся не отвлекаться от темы.

а) При изложении нового материала такая беседа представляет собою систему вопросов, приводящих учащихся к более или менее самостоятельному выводу. Своими вопросами учитель ставит ученика в положение лица, делающего открытие, находящего ответ на поставленный вопрос. Такая форма ведения урока называется *эвристической* (от греческого слова «эврика», что значит «нахожу»), так как учащиеся, руководимые учителем, как бы находят те или иные выводы, делают своего рода «открытия» (см. ниже такие уроки в частной методике).

б) Беседа по закреплению знаний проводится после рассказа или объяснения учителя. Она ставит своей целью повторение, уточнение, углубление пройденного. Во время беседы разъясняются некоторые вопросы, недостаточно усвоенные; учащиеся приводят примеры и задачи для подкрепления правил и определений, сообщенных им во время рассказа или объяснения учителя.

При проведении такой беседы большое значение имеют хорошо продуманные вопросы, которые в целом образуют стройную систему. Заголовки плана (т. е. вопросы, подлежащие рассмотрению) можно записывать на доске.

Во время беседы учитель лучше изучает индивидуальные особенности учащихся и степень усвоения ими знаний и в то же время проверяет качество собственной работы.

в) Беседа по проверке знаний учащихся имеет целью определить состояние знаний как отдельных учащихся, так и класса в целом. Постановка вопросов при такой беседе имеет в виду получение ответов, которые показали бы учителю качество усвоения изучаемого, а учащемуся помогли бы ответить в систематическом, последовательном порядке и привели бы его к определенной системе изложения своих мыслей.

Замечая, что ученик отвечает механически, не вдумываясь в смысл ответа, учитель предлагает ему придумать пример или задачу и изменяет форму вопроса или предлагает дополнительные вопросы, которые помогают проверить, насколько сознательно отвечает учащийся.

§ 3. Работа учащихся с учебником по арифметике

Одной из целей обучения учащихся является привитие навыков самостоятельной работы с книгой. Не секрет, что многие учащиеся старших классов с большим трудом могут самостоятельно изучать теорию по учебникам математики. Причиной неумения самостоятельно работать с книгой является то, что учащегося не учат в V—VI классах работать с ней. Некоторые учителя считают, что обучать учащихся чтению учебника арифметики является неоправданной тратой времени и что это время целесообразнее затратить на решение задач. В журнале «Математика в школе» за 1958—1959 гг. был помещен ряд статей по этому вопросу. Статьи С. А. Пономарева, Н. С. Поповой и др. правильно отражают необходимость «научить учащихся учиться» путем повседневной работы по учебникам как в классе, так и дома. Учителя арифметики в пятом классе с первого же дня занятий начинают давать задания учащимся по учебнику, не задумываясь над тем, умеет ли учащийся самостоятельно читать математическую книгу. Между тем умение работать с книгой вырабатывается постепенно.

В силу специфичности математического языка (лаконизм, логичность и точность) чтение учебника представляет для учащихся значительную трудность.

Ученики не умеют отделить главное от второстепенного: одни главное внимание обращают на заучивание правила, не задумываясь над его обоснованием, другие сразу принимаются за решение задач или примеров, не усвоив теоретический материал, третьи стараются запомнить все имеющиеся в тексте разнообразные примеры, и большинство вообще не знают, на что обратить внимание, что запомнить, что прочитать.

Самостоятельное чтение учениками математических книг, особенно в V—VI классах, — весьма трудное дело. Здесь требуется помощь учителя. При обучении чтению математической книги нужно соблюдать принцип постепенности в переходе от простого к сложному. Примерная последовательность в выработке умения читать учебник арифметики такова:

1. Классные упражнения в чтении учебника.

2. Чтение учебника с целью закрепления теории, изложенной предварительно учителем.

3. Самостоятельное усвоение нового теоретического материала а) по плану, составленному учителем, и б) без такого плана.

Можно рекомендовать заниматься в классе чтением учебника арифметики в пятых классах — 2 раза в неделю и в шестых классах — 1—2 раза в две недели (при 2 недельных часах, отводимых на арифметику). Время работы в классе с учебником — не более 15 минут.

После каждого вида работы с учебником учитель непременно проводит опрос учащихся по вопросам изученного. Прежде чем излагать организацию обучения учащихся работе по учебнику арифметики, остановимся на проведении первых уроков арифметики в V классе.

Учитель первые часы арифметики в V классе обычно отводит на ознакомление с составом класса, знаниями учащихся, умением слушать, излагать мысли, читать, т. е. с теми особенностями учащихся, без знания которых нельзя правильно организовать работу класса. Начальная школа недостаточно подготавливает учащихся к самостоятельной работе над книгой. Проведенные наблюдения за домашней работой ученика, пришедшего в V класс, дают такую картину. Ученик читает содержание заданного параграфа по книге, не делая на бумаге нужных упражнений и проверки. Он читает одно и то же несколько раз, пока не заучит все наизусть.

Ученик средних способностей, прочитав нужный материал по учебнику 1—2 раза, считает, что урок им выучен. Учителю часто приходится слышать от своих учащихся такого рода объяснения: «Я понимаю, но не могу рассказать», «Когда я дома учил, то все понимал, а сейчас забыл».

Причина нетвердого знания учащимися прочитанного заключается в том, что понимание прочитанного — это лишь первая стадия процесса изучения нового материала, за которой должна следовать вторая стадия — установление узловых моментов изучаемого вопроса в логической последовательности. При этом в сознании учащегося должна запечатлеться схема обоснования или изложения данного вопроса.

Наконец, третья стадия в изучении нового материала заключается в умении воспроизвести изученный вопрос. Продолжительность каждой из отмеченных стадий зависит от индивидуальных особенностей ученика, от степени его развития, от трудности изучаемого вопроса, времени и других причин.

На первых же уроках необходимо добиться от учащихся отчетливого представления, что изучить материал по учебнику — значит понять все то, о чем написано в указанном параграфе, заучить данные в нем определения, уметь изложить обоснование правила или свойства и, наконец, уметь применять правила к решению задач.

Организация чтения учебника должна быть примерно такова:

1. Каждый из учеников приносит учебник в класс. Учитель вначале сообщает тему и поясняет цель чтения. Один из учеников читает вслух первый абзац, а остальные следят. По прочтении абзаца, а возможно и двух-трех абзацев (это определяется необходимостью законченности отдельного вопроса) учитель путем постановки вопросов проверяет степень усвоения и выясняет смысл новых для ученика слов. Затем для последующего чтения вызывается другой ученик и в том же порядке продолжается чтение учебника.

По окончании чтения параграфа учитель проводит повторение прочитанного.

Приучая учащихся к работе с учебником, необходимо учить их находить главное и существенное в изучаемом, отделять его от второстепенного и несущественного. Для этого полезно, на первых порах, выписывать из учебника определения и правила в тетрадь.

2. Самостоятельное чтение учебника по закреплению теории, предварительно изложенной учителем, осуществляется вначале на уроке под руководством учителя, а затем в домашней обстановке; эта форма работы проводится только как необходимая переходная ступень к самостоятельному изучению нового материала по учебнику. При проведении этой работы желательно написать на доске план изучения по вопросам.

3. Самостоятельное изучение учащимися нового материала вначале проводится по готовому, составленному учителем плану изучения темы.

Для самостоятельной работы следует давать те вопросы, которые являются продолжением разобранного в классе. Например, учитель, изучая тему «Деление обыкновенных дробей», рассмотрел в классе случай деления целого числа на целое, нахождение числа по его дроби и деление целого на дробь; для самостоятельной работы по учебнику он может дать изучение остальных случаев деления дробей, предварительно сообщив вопросы, на которые должны ответить учащиеся.

Посильно для учащихся и самостоятельное изучение тем, аналогично пройденному в классе, например при изучении темы «Изменение результатов действий в зависимости от изменения компонентов» после рассмотрения темы «Изменение произведения» учащимся нетрудно самостоятельно изучать тему «Изменение частного».

Приведем в качестве образца план самостоятельного изучения учащимися двух тем: 1) «Изменение частного» и 2) «Деление обыкновенных дробей».

1) План изучения темы «Изменение частного» (учебник, § 33).

1. Вспомните названия чисел при делении.

2. Как изменяют делимое в первом случае (12) и во втором (360)? Как изменяется частное? Сформулируйте выводы.

3. Как изменяют делитель в первом (2) и во втором (100) случаях? Как изменяется частное? Сформулируйте выводы.

4. Приведите два примера на свойство: «Если делимое и делитель увеличим (или уменьшим) в одинаковое число раз, то частное не изменится».

5. На каждый из пяти рассмотренных случаев составьте по одному примеру.

2) План изучения темы «Деление обыкновенных дробей» (учебник, § 65).

В классе разобраны случаи: деление целого числа на целое, нахождение числа по данной его дроби и деление целого на дробь. Учащиеся самостоятельно должны изучить случаи: деление дроби на дробь и деление смешанных чисел.

1. Каким числом может быть частное двух натуральных чисел?

2. Как построен чертеж, иллюстрирующий деление дроби на дробь?

3. Как иначе можно вывести правило деления дробей? Сформулируйте правило деления дроби на дробь.

4. Что нужно сделать со смешанными числами, чтобы воспользоваться ранее выведенным правилом деления?

Приведенные образцы вопросов для самостоятельной работы являются примерными, и учитель в зависимости от уровня класса может или детализировать эти вопросы, или сократить.

Учитель, используя изложенные соображения о работе с учебником, непременно добьется нужных навыков в чтении математической литературы, которые на уроках алгебры и геометрии получат дальнейшее закрепление и развитие.

Чтобы оказать максимальную помощь учащимся в работе с книгой, учитель должен сам в совершенстве знать учебник, заблаговременно составить план работы, отметить разделы, которые можно дать для самостоятельной работы с небольшими пояснениями, и разделы, на которых нужно подробно остановиться, намечая их для самостоятельной работы в классе или на дом; отметить некоторые разделы, в которых следует заменить отдельные формулировки. В необходимых случаях учитель изучает соответствующую литературу и готовит эти формулировки. Работа эта большая, но обязательная для учителя, желающего правильно построить уроки в учебном году.

Учитель должен изучить сборник задач до начала занятий и установить степень трудности примеров и задач, их количественное соотношение по отдельным темам и т. д. Если учитель обнаружит, что сборник задач неполностью удовлетворяет соответствующим требованиям, он должен сам подобрать необходимые задачи и примеры. При обучении работе с задачником учитель должен познакомить учащихся с расположением в нем примеров и задач, а также ответов к ним, показать учащимся, как следует читать текст задачи.

Для обучения учащихся самостоятельной работе со сборником задач можно на уроке предложить одному-двум ученикам прочитать текст задачи и другим ученикам повторить его. Можно также применить следующий прием: предложить учащимся прочитать про себя текст задачи, а затем отдельным ученикам повторить вслух прочитанное. Повторение обнаружит степень усвоения содержания задачи. Более подробно о самостоятельной работе сказано будет ниже.

§ 4. Метод письменных работ

Письменные работы по арифметике в классе и дома обязательны уже потому, что они должны научить учащихся быстро и правильно производить письменные вычисления, правильно и аккуратно их оформлять. Всему этому надо научить при изучении арифметики, так как все привитые на уроках арифметики навыки заложат фундамент для изучения алгебры, геометрии, тригонометрии.

Остановимся на видах письменных работ и их значении. Письменные работы по арифметике могут содержать 1) решение примеров и задач и 2) теоретический материал.

Решению примеров с письменным пояснением не всегда уделяется достаточно внимания. Между тем при решении примеров на особые приемы вычислений, решении составных примеров, где требуется соблюдать порядок действий, решении примеров с неизвестными компонентами учащимся следует предложить не только произвести вычисления, но и дать краткие объяснения: какой прием сокращенных вычислений был применен, почему применялся тот или иной порядок действий, какова зависимость между элементами действий для нахождения того или иного компонента. Например:

$$1225 : \left[\frac{(13x - 30) \cdot 4}{12} - 10 \right] = 7.$$

Решение: 1) Определяем неизвестный делитель; делитель равен делимому, деленному на частное:

$$\frac{(13x - 30) \cdot 4}{12} - 10 = 1225 : 7 = 175.$$

2) Неизвестное уменьшаемое равно вычитаемому, сложенному с остатком:

$$\frac{(13x - 30) \cdot 4}{12} = 10 + 175 = 185.$$

3) Неизвестное делимое равно делителю, умноженному на частное:

$$(13x - 30) \cdot 4 = 12 \cdot 185 = 2220.$$

4) Неизвестный сомножитель равен произведению, деленному на другой сомножитель:

$$13x - 30 = 2220 : 4 = 555.$$

5) Неизвестное уменьшаемое равно вычитаемому, сложенному с остатком:

$$13x = 30 + 555 = 585.$$

6) Неизвестный сомножитель равен произведению, деленному на другой сомножитель:

$$x = 585 : 13 = 45. \text{ Ответ: } x = 45.$$

Учащимся предлагается сделать проверку решения.

Большое распространение получили письменные работы продолжительностью 15—20 минут. Такие письменные работы по арифметике вызываются необходимостью чаще проводить учет знаний учащихся. 15—20-минутные письменные работы следует давать не только в целях учета, но и для того, чтобы видеть, как учащиеся излагают свои мысли письменно.

Предлагать учащимся изложить дома какую-либо тему по теории арифметики не всегда целесообразно, так как учащиеся обычно излагают материал, придерживаясь текста учебника.

Отводить в классе на письменную работу по арифметике весь урок не всегда позволяет время.

Заметим, что классные письменные работы, содержащие лишь теоретические вопросы по арифметике, имеют свои минусы. Такая письменная работа по теории арифметики основана на памяти: кто лучше выучил или у кого богаче память, тот лучше выполнит работу. Выполняя работу по теории арифметики, ученик может воспользоваться фразами учебника; кто не привык выражать мысли своими словами и проникать в существо дела, а ограничивается заучиванием фраз, — будет вспоминать страницу учебника (на которой помещено данное доказательство), строчки и даже отдельные слова. Такая работа не имеет большого значения для общего развития учащегося и для развития устной и письменной речи.

Письменное решение задач начинается на классных занятиях, когда задачи решаются под руководством учителя. Путем вопросов учитель направляет мысль учащихся, открывает перед ними логические пути, по которым должно идти их мышление. Занимаясь решением задач с учащимися в классе, учитель подготовляет их к самостоятельному письменному решению задач в классе и дома.

Самостоятельное письменное решение задач в классе проводится под наблюдением учителя: сначала один ученик решает задачу на доске, остальные дополняют его ответ и записывают решение в тетрадях; затем учитель дает всему классу задачу для самостоятельного письменного решения. В это время он, обходя учащихся, дает соответствующие указания по решению задачи.

Наконец, учитель дает учащимся задание решить задачу дома. Дома, решая задачу письменно, учащиеся должны сами находить пути решения. Таким образом самостоятельное письменное решение задач развивает у учащихся логическое мышление. Мы знаем, что всякое знание, приобретенное самостоятельно, имеет большее значение, чем полученное при посторонней помощи. Следовательно, домашние задания должны являться обязательным приемом при обучении самостоятельному решению задач; это в то же время дает возможность учителю определить способность учащихся логически мыслить. Кроме того, письменное решение задач учит учащихся письменному изложению математической мысли. Мысль, возникшую во время домашнего письменного решения задач, ученик должен выразить в форме логически правильно построенного предложения, причем эту работу ему приходится выполнять без посторонней помощи.

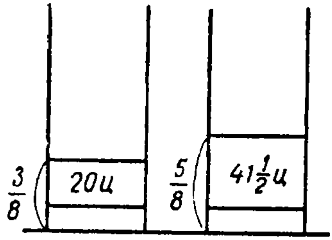
§ 5. Метод графических работ

Графические работы в V и VI классах применяются и на уроках арифметики и в домашних заданиях при изучении дробных чисел, пропорциональных величин и решении задач.

При изучении дробных чисел графические иллюстрации применяются для объяснения понятия дроби, равенства и неравенства дробей, изменения величины дроби с изменением числителя и знаменателя, основного свойства дроби, сокращения дробей, нахождения дроби от числа и числа по дроби, умножения дроби на дробь и т. п.

Но особенно часто графические иллюстрации приходится применять при решении задач, например, на движение и др.

Приведем пример решения задачи с применением чертежа.



Черт. 1.

Задача. Колхоз ссыпал $\frac{3}{8}$ всего овса в первый амбар, а остальной овес—во второй амбар. Когда же из первого амбара взяли 20 *ц*, а из второго $41\frac{1}{2}$ *ц*, то в них осталось овса поровну. Сколько овса было в каждом амбаре?

Краткая запись условия.

$$\left.\begin{array}{llll} \text{В 1} & \text{амбаре} & \frac{3}{8} \text{ всего овса, взято} & 20\ ц \\ \text{Во 2} & \text{»} & \text{остальное,} \quad \text{»} & 41\frac{1}{2}\ ц \end{array}\right\} \text{осталось поровну}$$

Сколько овса было в каждом амбаре?

Решению задачи помогает следующая иллюстрация (черт. 1).

По чертежу видно, что во 2-м амбаре было больше, чем в 1-м, на $\frac{5}{8}-\frac{3}{8}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$ всего овса, и эта часть соответствует разности $41\frac{1}{2}-20=21\frac{1}{2}$ (*ц*).

Следовательно, задача сводится к нахождению числа по данной величине его дроби и затем нахождению дроби от числа.

Решение задачи. Количество всего овса принимаем за единицу.

1) $1-\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$; $\frac{5}{8}$ всего количества овса всыпано во 2-й амбар.

2) $41\frac{1}{2}-20=21\frac{1}{2}$ (*ц*); на $21\frac{1}{2}$ *ц* овса из 2-го амбара взято больше, чем из 1-го.

3) $\frac{5}{8}-\frac{3}{8}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$; во 2-м амбаре было больше, чем в 1-м амбаре, на $\frac{1}{4}$ всего овса.

4) $21\frac{1}{2}:\frac{1}{4}=86$ (*ц*); всего было 86 *ц* овса.

5) $86\cdot\frac{3}{8}=32\frac{1}{4}$; $32\frac{1}{4}$ *ц* овса было в 1-м амбаре.

6) $86\cdot\frac{5}{8}=53\frac{3}{4}$ (*ц*); $53\frac{3}{4}$ *ц* овса было во 2-м амбаре; или $86-32\frac{1}{4}=53\frac{3}{4}$ (*ц*).

Имея целью показать графический метод решения задач, мы в данном случае опускаем анализ и объяснение решения.

§ 6. Анализ и синтез; индукция и дедукция

Важную роль при решении задач играют в арифметике методы *анализа* и *синтеза*.

В педагогике мы читаем следующее:

«Одним из действенных средств возбуждения у учащихся самостоятельной работы мысли является аналитико-синтетический путь изложения знаний. Этот способ изложения находит широкое применение во всех классах, начиная с первого и кончая десятым классом средней школы.

Сущность аналитико-синтетического способа заключается в том, чтобы разложить материал на составные части и элементы, не упуская из виду целого предмета или явления... Применяя анализ, необходимо практиковать и синтетический способ изучения явления в целом, выясняя взаимосвязь и взаимозависимость отдельных частей между собой и в целом» (И. Т. Огородников и П. Н. Шимбирев, Педагогика, 1954, стр. 147).

При анализе мы идем от неизвестного к известному, от искомого к данным, при синтезе — обратным путем, т. е. от известного к неизвестному, от данных к искомому.

Аналитический метод помогает учащимся самостоятельно находить обоснование своим суждениям при решении задач. Найденное путем анализа решение задач затем излагается синтетическим методом.

В решении задач анализ и синтез неотделимы друг от друга. Так, например, проводя анализ, следуя от главного вопроса задачи, мы должны считаться с тем, что нам известно, и часто данные условия задачи подсказывают нам ответ на очередной ведущий вопрос. И наоборот, применяя синтетический метод, мы имеем в виду вопрос, на который можно дать ответ.

На методах анализа и синтеза мы подробно остановимся в главе «Решение арифметических задач».

В связи с вопросом о методах преподавания арифметики в школе возникает вопрос о месте *индукции* и *дедукции*.

Сущность индукции рассмотрим на примерах.

Учитель предлагает учащимся несколько задач, примеров. Учащиеся разбирают их, сравнивают, выделяют общие признаки и из рассмотрения отдельных частных случаев делают общий вывод, формулируют правило. Умозаключение идет от частных фактов к общим выводам, т. е. индуктивно. *Индукция* — переход от частных случаев к общему выводу. Способ этот часто применяется в арифметике. Например, при выводе переместительного свойства суммы ученик рассматривает ряд сумм, производит в них перестановки слагаемых и в результате приходит к выводу, что сумма не меняется от перестановки слагаемых. Точно так же на ряде частных примеров учащиеся убеждаются, например, в равенстве прямых углов, в равенстве диагоналей прямоугольника и т. п.

В качестве подсобного приема в процессе индуктивного мышления большую роль играет *аналогия*: переход от одного частного случая к другому делается на основании подмечаемого их сходства (аналогии).

Если ученик, сравнивая предложенную для решения задачу с ранее решенными, видит, что новая задача сходственна с ними, он начинает ее решать так же, как решал первые. Здесь мы имеем пример аналогии.

Если учитель сообщает ученикам общее положение или правило и учащиеся, усвоив сущность этого правила, применяют его к частным случаям и конкретным примерам, то этот путь познания называется *дедукцией*. Дедукция — это переход от общих положений к частным примерам и конкретным положениям. Например, при изучении нумерации многозначных чисел учащийся запоминает названия классов и разрядов и указывает эти классы и разряды в любом многозначном числе.

§ 7. Особенности преподавания арифметики в школах-интернатах

Опыт работы в школах-интернатах пока еще очень мал, но учителя и воспитатели этих школ уже показывают хорошее решение некоторых сложных вопросов обучения и воспитания в условиях интерната.

Общественность вполне законно требует от школ-интернатов полной успеваемости учащихся по всем учебным предметам. Особо важная роль в осуществлении этой задачи ложится на учителей математики, усвоение которой сопряжено с известными трудностями.

В этом параграфе показаны первые шаги школ-интернатов. опыт двухлетней работы учителей математики этих школ.

Учебно-воспитательная работа в школах-интернатах имеет много общего с работой классов в школах продленного дня, а потому советы и рекомендации к преподаванию арифметики в интернатах могут быть использованы в классах продленного дня.

У нас нет никаких оснований считать, что преподавание арифметики в школе-интернате принципиально отличается от преподавания в школе общего типа, но все же оно имеет некоторые особенности.

Урок по арифметике в любой из этих школ проходит одинаково, но условия для проведения урока, эффективного по своим результатам, более благоприятны в школах-интернатах. Главное благоприятное условие заключается в том, что в школах-интернатах осуществляется систематическое выполнение учащимися домашних заданий, и, следовательно, учащиеся класса подготовлены к очередному уроку. Это условие позволяет учителю на ряде уроков вовсе отказаться от проверки в классе домашних заданий или проводить эту проверку выборочно, с небольшой затратой времени. Следовательно, освободившееся время учитель может использовать на закрепление и усвоение учащимися нового материала, повышая тем самым эффективность урока.

Работа учителя и воспитателя школы-интерната позволяет значительно уменьшить время на проверку самостоятельного решения примеров и задач домашнего задания. Ведь учитель, наблюдая и помогая учащимся во время самостоятельного выполнения ими домашних заданий, отчетливо представляет, как и кто выполнил это задание, а потому ему не требуется в классной обстановке проверять это вновь.

Учитель математики в школе-интернате имеет более благоприятные условия для того, чтобы на уроке *больше учить, чем проверять и оценивать*.

Специфика условий учебного процесса в школе-интернате заключается прежде всего в том, что учащиеся все время находятся под непрерывным воздействием учителей и воспитателей. Эти условия исключают опаздывание на уроки, забывание учебных пособий и принадлежностей и, главное, невыполнение домашних заданий.

Учитель математики встречается с учащимися во время выполнения ими самостоятельной домашней работы, оказывает им необходимую помощь и постоянно их контролирует.

Конечно, в школах-интернатах есть и трудности, которые отсутствуют при индивидуальной работе учащегося в семье. Так, например, большинство учащихся V класса готовит уроки, рассуждая вслух, но такая форма подготовки не может быть принята в школах-интернатах, и первое время некоторые учащиеся просят отпустить их домой «готовить уроки».

Учитель массовой школы знает, как учащиеся работают на уроке, но не знает, как они работают дома, а учитель интерната знает учащегося как по работе в классе, так и по внеклассной работе. Учитель школы-интерната имеет все возможности знать индивидуальные черты каждого ученика и соответствующим образом воздействовать на него.

Основная работа по закреплению и углублению умений и навыков учащихся по арифметике приходится на часы самоподготовки. Но так как далеко не всякий учащийся может самостоятельно выполнить задание и не всегда учитель математики может присутствовать на уроках самоподготовки, то значительная работа по руководству и помощи учащимся ложится на плечи воспитателя.

Опыт работы московских школ показывает, что учащимся во время часов самоподготовки нужен не только досмотр за дисциплиной, но, главное, нужна помощь, конкретная помощь ученику со стороны воспитателя.

Учителя и воспитатели школ-интернатов г. Москвы накопили значительный опыт совместной работы. Так, например, в школе № 41 с продленным днем Фрунзенского района воспитатели, являющиеся учителями гуманитарных дисциплин, в своей работе пришли к следующим выводам: воспитатель должен быть знаком с программами основных предметов, систематически посещать уроки и по возможности привлекать в качестве помощников учеников-отличников старших классов на часы самоподготовки по математике и физике.

В изданной Учпедгизом в 1961 году книге «Вопросы преподавания математики в средней школе» помещена статья Л. И. Побочиной: «Из опыта преподавания арифметики в школе-интернате». Приведем несколько конкретных примеров работы учителя во время самоподготовки, описанных в указанной статье:

«По математике на подготовку отводится 45 минут. Перед выполнением письменной работы воспитанники учат теоретический материал по учебнику; через 15—20 минут учитель начинает проверять, как ученики поняли и выучили правила, теоремы и т. п., и после этого разрешает приступить к решению задач и примеров. Во время такой подготовки домашнего задания можно проверить тетради почти у каждого ученика, а у слабо успевающего обязательно. Учитель имеет возможность следить за ходом выполнения работы учащимися. Слабо успевающим учащимся при затруднении я предлагала дополнительные индивидуальные задания на тот материал, в котором он ошибается, и только после решения этих предварительных упражнений разрешала ему готовить материал к уроку.

Когда учащиеся выполнят все домашнее задание, то в оставшееся время можно дать всем индивидуальные задания на пройденный материал, некоторым ученикам — повышенной трудности.

Для выполнения домашнего задания класс делится на 2 группы: а) учащихся, которые могут справиться с домашним заданием самостоятельно, и б) учащихся, которые требуют помощи.

Первая группа учащихся приступает к выполнению домашнего задания без особых пояснений. Выполнив его, они сдают тетради на проверку учителю и, если осталось время, получают от учителя индивидуальные задания повышенной трудности на отдельных карточках. Со второй группой учащихся иногда приходится проводить подготовительную работу, т. е. объяснить еще раз сначала новый материал, провести небольшую тренировку, и только после этого они выполняют домашнее задание самостоятельно. После этого слабые ученики выполняют с удовольствием домашнее задание. Если эту предварительную работу не провести, то слабо успевающие учащиеся списывают домашнее задание у решивших, как это часто имеет место в массовой школе. При такой организации подготовки обеспечивается самостоятельность выполнения домашнего задания.

Всего труднее самоподготовка проходит в V классе, когда задается задача. Сначала приходится предоставлять возможность каждому ученику подумать над задачей. Через 3—5 минут я задавала вопрос: «Кто знает, как решить задачу?» Если таковых не оказывалось, то проводим анализ условия совместно с учащимися. Наблюдая за самоподготовкой учащихся, я пришла к выводу о необходимости внесения некоторых изменений в методику организации и проведения урока. При объяснении нового материала я добиваюсь полного понимания темы учениками, чтобы обеспечить самостоятельное выполнение уроков в часы самоподготовки. Приучаю решать примеры на скорость. Ученик, решивший пример неправильно, в моем присутствии находит ошибку и заканчивает работу самостоятельно. Если ошибается сильный или средний ученик, то ошибку он находит сам, а я только говорю: «Решил неправильно». Организуя так работу на уроке, я обнаруживаю пробелы в знаниях ученика и предлагаю ему дополнительное задание для тренировки. Эти работы я проверяю сразу на уроке. Только систематическая тренировка приводит к тому, что пройденный материал усваивается всеми учениками. Эту систему я перенесла и на часы самоподготовки. В конце самоподготовки все ученики сдавали тетради на проверку.

В V и VI классах тетради проверялись систематически и каждая работа оценивалась. Это очень помогало качеству выполнения домашнего задания и способствовало повышению успеваемости учащихся. Дети всегда были под надзором, и все их работы учитывались. В интернате во время подготовки у слабых учеников я проверяла работу частями, для того чтобы приучить их самостоятельно решать.

В V классе при решении примеров на совместные действия с дробями сначала каждый ученик рассказывал порядок действий. Чтобы воспитанники не ошиблись в порядке действий, я при повторении действий над целыми числами учила их чтению и записи примера по результату действий, начиная с одного действия».

«Проверяя работу по частям, я в своей тетради ставила оценки, а к концу урока при общей проверке оценивала всю работу. Проверять надо быстро, не ошибаясь, поэтому при подготовке к урокам я все решаю подробно и записываю в конспект своего урока. В интернате готовиться к урокам приходится особенно тщательно, подготовка почти двойная, так как надо готовить индивидуальные карточки и к уроку и к самоподготовке.

Домашнее задание на уроке проверять нет смысла, так как в основном оно проверено у всех учащихся в часы самоподготовки. Следовательно, письменная часть работы проверяется ежедневно учителем, а вот теоретический материал проверять необходимо на уроке. Я начинаю урок с фронтального опроса и устного счета. Иногда эту часть урока провожу на индивидуальных карточках с обязательной проверкой и оценкой. Такая работа требует 5—7 минут, зато все считают и выясняется, кто не готов к данному уроку и кто не усвоил пройденный материал. Индивидуальных карточек составляю по 10 различных вариантов. При решении примеров и задач у доски заставляю считать устно (где это можно). Совершенно не разрешаю делать письменно умножение двузначных чисел на однозначное или двузначное. Иногда прошу применять приемы устного счета, которые прохожу на кружке или непосредственно на уроке. При опросе каждому ученику задаю устный пример на пройденный материал и на целые числа. Тех учащихся, которые быстро решат пример на доске (полуписьменно), я поощряю. Это очень развивает учащихся. В задачнике есть такие примеры, которые имеют несколько арифметических действий, а решаются устно. Я требую устного решения их. Этим самым сокращается время на упражнения. Устный счет ввожу во всех классах на каждом уроке и по всем разделам математики».

ГЛАВА II

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА УЧАЩИХСЯ

§ 8. Значение самостоятельной работы

Привитие учащимся навыков самостоятельной работы по арифметике является одним из основных и обязательных моментов педагогического процесса в школе.

Такие ценные качества ученика, как внимание, настойчивость, стремление к творчеству, точность, аккуратность, в значительной мере зависят от привития навыков самостоятельной работы.

Вместе с этим надо учитывать и то, что успешное выполнение учащимися самостоятельной работы, кроме морального удовлетворения, вызывает у них желание к дальнейшей работе.

Идея повышения самостоятельности в работе учащихся возникла в педагогике как реакция против тех форм обучения, которые опирались исключительно на память учащихся.

Н. К. Крупская в статье «Методика задавания уроков на дом» (журнал «Народный учитель», 1932 г., стр. 40 и 42) так говорила о значении самостоятельной работы: «Научить ребят самостоятельно работать совершенно необходимо. Самая прекрасная школа дает лишь сравнительно небольшой объем знаний.

Прогресс техники, прогресс науки, постоянная смена занятий, смена функций, необходимость продумывать и разрешать ряд вновь возникающих проблем требует умения самостоятельно работать над приобретением знаний. Человек, который не умеет сам учиться, а лишь усваивает то, что ему говорит учитель, профессор, который умеет лишь ходить на поводу, мало на что пригоден.

Нам надо научить подрастающее поколение самостоятельно овладевать знанием.

Самостоятельная работа над приобретением навыков должна сделать содержательнее классную учебу. Работа на дому может и должна выравнивать уровень знаний и навыков у ребят и тем повышать эффективность работы школы».

Самостоятельная работа: а) развивает у учащихся сообразительность, инициативу и творчество, твердость воли, настойчивость и упорство в работе, способность работать дисциплинированно;

б) содействует укреплению знаний, навыков, а также дает возможность по выходе из школы углублять и расширять знания, полученные в школе; приучает учащихся к работе с книгой;

в) активизирует преподавание: учителю представляется возможность изучить каждого учащегося в процессе его работы, наблюдать и отмечать его сильные и слабые стороны;

г) облегчает проведение текущего учета работы ученика, так как наблюдение за его работой дает учителю материал для подробной характеристики успеваемости с указанием слабых мест, на которые в дальнейшем надо обратить внимание.

В постановлении ЦК ВКП (б) от 25 августа 1932 г. говорится, что надо «... систематически приучать учащихся к самостоятельной работе, широко практикуя различные задания, в меру овладения определенным курсом знаний (решение задач и упражнений, изготовление моделей)».

В Законе об укреплении связи школы с жизнью и о дальнейшем развитии системы народного образования в СССР указывается на необходимость изменения методов обучения в сторону всемерного развития самостоятельности и инициативы учащихся. Это обязывает учителей средней школы всемерно стимулировать самостоятельную работу учащихся как в классе, так и дома.

Самостоятельная работа в классе подготовляет учащихся к самостоятельному выполнению домашней работы.

Очень важно отметить, что навыки самостоятельной работы, привитые в школе, сохраняются обычно на всю жизнь. Если школа не сумеет воспитать у учащихся навыки самостоятельной работы или привьет учащимся неправильные навыки работы, это неминуемо отразится в их дальнейшей работе. Насколько школа сумеет правильно воспитать навыки самостоятельной работы, настолько учащийся будет быстро продвигаться вперед и хорошо выполнять свою работу.

Самостоятельная работа учащихся является одним из главных средств для систематического и прочного усвоения учебно-программного материала школы. Для прочного усвоения знаний от учащихся требуется самостоятельное продумывание и повторение всех вопросов, изложенных учителем на уроке. Самостоятельная работа способствует расширению знаний учащихся, развивает творческие способности учащихся, а также дает возможность проверять и применять теоретические знания на практике.

Учащийся, научившийся самостоятельно работать, приобретает навыки работы с книгой; находит большое удовлетворение в своей работе, так как он сам преодолевает трудности; ищет лучшие способы быстрее выполнить работу, т. е. экономит время в процессе работы; добивается результата без посторонней помощи.

В практической деятельности хороших, опытных педагогов наметились такие основные виды самостоятельной работы учащихся при обучении арифметике:

1) Работа в классе, имеющая целью формулирование арифметических предложений. Эта работа проводится под руководством учителя в виде ответов учащихся на поставленные им вопросы.

2) Работа с учебниками в классе и дома.

3) Работа при решении задач.

4) Практические работы внутри школы или вне ее, особенно имеющие общественно полезную ценность, например составление какой-либо сметы на школьном участке, в мастерских, в колхозе и др. Организация и проведение каждого вида самостоятельной работы требуют от учителя тщательной и трудоемкой подготовки.

Самостоятельные работы всех видов начинаются с сообщения учителя о характере задания, подлежащего выполнению. Надо помнить: кто из учеников плохо понял поставленную перед ним задачу, тот и не выполнит эту задачу.

Для всех видов самостоятельной работы играет роль и привитие учащимся интереса к изучению того или иного вопроса. Привить интерес или по меньшей мере возбудить его к тому или другому изучаемому вопросу можно различными путями. Полезно также сообщать учащимся и мнения руководителей страны или виднейших ученых о роли изучения математики; например, слова М. И. Калинина о том, что кем бы они ни стали в будущем, — моряками, летчиками, артиллеристами, квалифицированными рабочими или паровозными машинистами, — всюду потребуется математика, — привлекают внимание учащихся.

В главе I «Методы обучения арифметике» изложено, как учитель должен обучать учащихся самостоятельно работать с книгой в классе и вне класса. Остановимся вкратце на значении самостоятельной работы при решении задач.

Ни в одном из указанных видов работ по арифметике учащиеся не проявляют так много самостоятельности, как при решении задач. В самом деле, задача дается в классе или на дом для более или менее продолжительного и вполне самостоятельного обдумывания и решения.

Задача заинтересовывает учащихся своей фабулой и скрытыми зависимостями между данными и искомыми величинами, которые требуется раскрыть, чтобы ответить на поставленный вопрос задачи. Процесс раскрытия зависимостей между искомыми и данными величинами в задаче, отыскание нужных операций над числовыми данными, в результате которых получается ответ, удовлетворяющий условиям задачи, — этот процесс увлекает учащихся, и в случае удачного решения (что чаще всего бывает) они испытывают чувство большой радости и большого удовлетворения.

Задачи имеют весьма важное значение как для учащихся, так и для учителя. Учащихся они призывают к труду, к вполне самостоятельной деятельности, к проверке и оценке своих сил, знаний и умений. Наблюдая учащихся при выполнении ими самостоятельной работы, учитель получает возможность узнать не только степень знаний и навыков учащихся, но также их работоспособность, умение самостоятельно справляться с предметом, их силу воли, настойчивость, способность доводить начатое дело до конца, не пасовать перед трудностями. Учитель должен подбирать задачу так, чтобы в ней было новое для учащихся, и каждый учащийся должен быть подготовлен к овладению этим новым и к выполнению нового требования. Решение задач ни в одном учебном предмете не имеет такого большого значения, как в арифметике. Поэтому самостоятельное решение задач как в классе, так и дома имеет очень важное значение. При этом самое серьезное внимание учителя должно быть обращено на то, чтобы работа выполнялась действительно самостоятельно.

§ 9. Самостоятельная работа в классе

Самостоятельная работа учащихся проводится в виде классных и домашних занятий. Классная самостоятельная работа подготовляет учащихся к самостоятельному выполнению домашней работы.

На каждом уроке арифметики рекомендуется проводить самостоятельную работу. Для нее нужно подбирать такой материал, который был бы посилен для всех учащихся.

Подготовка к самостоятельному решению примеров проводится обычно по такому плану. Учителем объясняется и решается пример на классной доске; второй пример решает ученик у доски под руководством учителя, и, наконец, ученики решают примеры самостоятельно. Поспешный переход к самостоятельному решению примеров делает работу непосильной для ученика, замедление же делает самостоятельную работу неинтересной. Поэтому иногда решается только один пример под руководством учителя, а остальные примеры в достаточном количестве решаются учащимися самостоятельно.

Самостоятельная работа в классе может быть дана в виде небольших контрольных работ: а) в начале урока — для проверки домашнего задания; б) после объяснения нового материала, чтобы определить степень его усвоения; в) в конце урока — для проверки степени усвоения пройденного материала; эти работы обычно даются как в письменной, так и в устной форме на 10—15 мин.

Устная контрольная работа может заключаться в подготовке ответов на предложенные учителем вопросы, в составлении плана решения задачи. По истечении определенного срока (3—5 мин.) учащиеся опрашиваются учителем.

К выполнению самостоятельной работы ученики приступают только после того, как учитель убедился, что задание понятно всем, особенно слабым учащимся.

Каждая самостоятельная работа должна быть проверена и оценена учителем.

§ 10. Домашняя работа учащихся

Домашняя работа учащихся по арифметике выполняется ими самостоятельно и играет исключительную роль в образовательном процессе.

Остановимся прежде всего на вопросе необходимости домашней работы. Вопрос о перегрузке учащихся домашними заданиями по разным предметам не сходит со страниц педагогической прессы, причем находятся сторонники не только значительного сокращения объема домашних работ, но даже полной их ликвидации.

Мы не станем останавливаться на неправильных доводах сторонников ликвидации домашних заданий по арифметике, но согласимся, что положительные результаты изучения арифметики возможны только при сочетании классных занятий с домашними. Учитель обязан добиваться, чтобы учебный материал в основном усваивался в классной обстановке, на уроке, по возможности сокращая объем домашней работы.

Главное в успехе выполнения домашней работы — продуманное учителем задание с четкими методическими указаниями о его выполнении. Ошибочно думают те учителя, которые считают, что, чем больше учащимся задано, чем больше учащиеся потратили времени на выполнение задания, чем больше решили примеров и задач, тем выше результат работы. Значительно полезнее будет для учащегося, если он с полным пониманием сможет толково объяснить одну задачу, чем наспех решить и написать, а значительное число учащихся — списать у товарища несколько задач без достаточного их понимания.

Поэтому учитель не должен жалеть потратить 5—6 минут на разъяснение домашнего задания. Недопустимо переходить к заданию на дом в конце последней минуты урока или во время перемены.

Тематика домашних заданий такова.

1. Повторение теоретических вопросов, разобранных в классе.
2. Самостоятельное изучение теоретического материала.
3. Решение примеров и задач.
4. Изготовление наглядных пособий.
5. Исправление ошибок, допущенных в контрольных работах.

Указанные первые четыре темы достаточно подробно освещаются в других разделах, а потому остановимся только на исправлении ошибок, допущенных в контрольных работах.

Многие учителя придерживаются такой проверки контрольных работ, при которой ученик не уясняет суть своих ошибок. Целью контрольной работы должно быть не только выявление знаний учащегося, но и устранение повторения ошибок в будущем.

Нахождение и осознание ошибок учениками в большой степени гарантирует от повторения этих же ошибок в будущем.

Отсюда и вытекает необходимость приучать учеников находить (по подчеркнутому учителем), осознавать свои ошибки.

Ученик, видя подчеркнутые учителем места, стремится определить свою ошибку, припоминает соответствующие места теории (заглядывая в учебник) и, обнаружив ошибку, получает не только удовлетворение, но, главное, создает у себя навыки, исключающие повторение этих ошибок.

Если ученик обращается к учителю с просьбой указать ошибку, то не следует давать исчерпывающего ответа, а только методически направить учащегося на путь выявления и устранения ошибки.

Остановимся более подробно на важном элементе учебного процесса — как давать домашнее задание.

§ 11. Домашнее задание

Н. К. Крупская говорит: «Уроки на дом имеют большое значение. Правильно организованные, они приучают к самостоятельной работе, воспитывают чувство ответственности, помогают овладевать знанием и навыками.

Домашнее задание составляет неотъемлемую часть проработки темы и требует тщательной работы со стороны учителя[1]».

Домашние задания даются или как упражнения на закрепление навыков, или в целях усвоения теоретического материала, сообщенного на уроке.

В качестве домашних заданий по арифметике должны даваться примеры и текстовые задачи. Примеры требуют от учителя меньше разъяснений, кроме того, их легче проверить в классе. Однако ограничивать домашние задания только одними примерами нельзя: примеры даются главным образом для закрепления навыков, для выработки вычислительной техники. Для развития же мышления и для установления связи математики с жизнью, с производством необходимы задачи, поэтому в зависимости от темы обязательно следует давать для домашнего выполнения и задачи, соблюдая постепенность в нарастании трудностей в их решении.

Сначала даются задачи, аналогичные решенным в классе, а затем и такие, которые в классе не решались, в которых учащиеся должны самостоятельно разобраться. Необходимо соблюдать постепенный переход от простого к сложному. Для закрепления теоретических знаний даются задания по учебнику. Кроме того, в качестве домашних заданий следует давать работы измерительного характера (при изучении мер), например определить размеры комнаты, окна, двери, двора, огорода; вычислить площадь пола квартиры, объем комнаты, количество воздуха на одного жильца и т. п.

Учитель должен давать характеристику работы как в отрицательной, так и в положительной форме и краткие указания, на-

---

[1] Н. К. Крупская, О воспитании и обучении. Статья «Методика задавания уроков на дом», Учпедгиз, 1946, стр. 177.

пример: «Работа выполнена хорошо, красиво написана», «Нужно обратить внимание на нахождение наименьшего общего кратного», «Нужно повторить деление обыкновенных дробей; задачи № такие-то». Такие замечания имеют большое значение для повышения успеваемости и воспитательное значение в смысле привития навыков правильного, красивого выполнения и расположения записей вычислений. С этой целью учитель должен требовать, чтобы все цифры и знаки действий писались правильно, с соблюдением соответствующих размеров: учитель должен ввести определенную систему расположения вычислений на странице тетради. Все вычисления должны выполняться в тетради; это позволяет учителю видеть процесс работы ученика и давать соответствующие указания; кроме того, это дисциплинирует учащихся, так как ученик, зная, что все его вычисления увидит учитель, будет более внимательно относиться к выполнению своих работ.

Как классные, так и домашние работы должны датироваться. Каждый раздел начинается его заглавием. В записи решения задачи, взятой из стабильного задачника, должен быть указан ее номер.

Чтобы приучить учащихся к аккуратному ведению тетрадей, надо показать образцы хороших записей. Все записи учителя в тетрадях учеников должны быть образцом четкости, аккуратности. Педагогика учит, что состояние письменных и графических работ учащихся — это зеркало руководства, осуществляемого учителем: по качеству ученических работ судят о качестве работы учителя.

Виды домашних работ разнообразны, и учитель должен пользоваться этим разнообразием.

Он должен тщательно продумать характер домашней работы, когда готовится к уроку. При составлении задания на дом учитываются те знания, которые ученики получат на данном уроке. Поэтому можно давать домашнюю работу в середине урока, сразу после объяснения нового материала, но можно задание на дом дать и в конце урока, в зависимости от усвоения нового материала.

При подготовке к новому учебному году учитель на основании программы должен учесть, какое общее число часов домашней работы будет использовано при изучении учебного материала в году. Планируя работу, учитель должен конкретизировать, какой именно материал по данной теме он предполагает включить в домашние задания и какое время займет выполнение домашней работы. Затрата времени на домашнюю работу не должна превышать установленных норм (40—50% времени, отводимого для классной работы).

Учитель должен отчетливо представлять, дается ли домашнее задание для закрепления изученного материала в классе, или для накопления материала, который в дальнейшем потребуется при выводе определенного правила, или для углубления и расширения знаний учащихся.

Домашнее задание должно включать материал, по трудности не превышающий проработанного в классе, или же материал для повторения, который подготовит их к следующему уроку.

Все задачи, которые даются на дом, учитель должен предварительно решить сам, проверить ответы в задачниках, и если у учащихся есть сборники задач разных изданий, то проверить, нет ли изменений в каком-либо издании, и предупредить учеников об этих изменениях.

Если ответ решенной задачи не сходится с ответом в книге и ученик не предупрежден об опечатке в ответе, то у него остается чувство неудовлетворенности в работе («решал, решал — и не вышло») и неуверенности, отражающейся на последующей работе. Если же есть опечатка в тексте задачи, то, естественно, решение задачи невозможно, или же ответ, получаемый при решении задачи, отличается от ответа в книге. У ученика появляется чувство разочарования в работе, пропадает интерес к ее выполнению. И в дальнейшем, если у ученика почему-либо задача не выходит, вместо того, чтобы добиваться верного решения, он бросает решать задачу, думая, что в задаче «опять какая-нибудь опечатка». Такие задания ни в коей мере не способствуют воспитанию волевого человека, выработке настойчивости в преодолении трудности.

Чтобы избежать всевозможного «забывания» домашнего задания, учитель должен не только разъяснить, что дано на дом, но и записать на доске страницу, номер и т. п. и проверить, все ли записали задание. Кроме того, в отдельных случаях можно указать наиболее рациональные приемы выполнения домашнего задания.

Задание на дом необходимо давать четко. Небрежность учителя приводит к тому, что ученики часто не знают, что им нужно делать, а это приводит к воспитанию навыка небрежного выполнения заданий.

Если задание дается по новому уроку, то учитель должен отметить, на что нужно обратить особенное внимание. Следует указать, что́ нужно вспомнить из пройденного, чтобы лучше осмыслить и закрепить основные положения.

Если даются на дом задачи, которые можно решить различными способами, необходимо напомнить ученикам об этом.

Можно сказать учащимся, сколько времени, по расчету учителя, требуется на выполнение задания. Такое указание имеет для них большое организующее и воспитательное значение.

Если дается задание на повторение, то необходимо сделать хотя бы краткое указание, на что ученик должен обратить внимание, в какой связи повторяемый материал находится с новым.

При объяснении правила какого-либо действия учитель указывает в книге страницу и параграф и предлагает дома проделать на это правило еще ряд примеров и задач и выучить это правило.

§ 12. Самостоятельная работа в классе и дома по решению задач

Чтобы научить учеников самостоятельно усваивать содержание задачи, учитель предлагает вызванному ученику прочесть текст задачи и после этого воспроизвести основные данные условия. Учитель при этом подмечает затруднения ученика и оказывает необходимую помощь.

Чтобы научить учеников работать над книгой, возможен такой прием: учащиеся по предложению учителя находят номер задачи и читают про себя текст. Для удобства решения задачи ученики иногда записывают кратко условие и числовые данные. После небольшой паузы, однако настолько длительной, чтобы учащиеся могли свободно прочитать задачу и кратко записать условие, один ученик читает задачу вслух. Затем учитель спрашивает, кому и что непонятно в условии задачи. Все непонятные слова и выражения объясняют ученики с помощью учителя. Не довольствуясь вопросами учащихся о неясных местах задачи, учитель ставит такие вопросы сам, причем чаще всего слабым учащимся, чтобы убедиться, что у них нет неясностей в условии задачи.

Когда учитель убедится, что все встречающиеся в условии задачи понятия усвоены учащимися, он предлагает одному из них еще раз повторить условие задачи, а затем класс приступает к ее решению.

С первых же уроков надо приучить учеников при выполнении самостоятельного решения задач (в классе или дома) применять графические приемы. Применение зарисовок является хорошим средством выяснения условия задачи. Составление чертежей при самостоятельном решении задачи дает учащимся возможность проявить творчество.

Учитель должен добиться от ученика, чтобы тот, решая самостоятельно задачу по книге, умел бегло и совершенно сознательно читать условие задачи. Искажение, пропуск слов делают непонятным условие, вследствие чего и решение оказывается невозможным.

Усвоение условия задачи во время самостоятельного чтения должно быть настолько прочным, чтобы ученик, не заглядывая в книгу, мог свободно воспроизвести условие.

Прежде чем начать производить действия, учащийся должен уяснить, что требуется узнать в задаче. Только тогда он сможет установить, как он должен решать задачу, какие действия при этом нужно производить и почему именно такие действия, иначе решение будет формальным. Не понимая вопроса, учащиеся наугад комбинируют условия и числа. При решении задачи учащийся должен уметь выделить в ней главную часть и установить взаимозависимость между величинами.

Затрата времени на разбор условия задачи покрывается экономией времени при ее решении.

Смысл же такой работы заключается в том, что мы приучаем учащихся самостоятельно пользоваться книгой, т. е. читать и понимать ее, и разбираться в условии задачи. К самостоятельному решению задач учащиеся приходят постепенно.

В зависимости от класса, содержания задачи и подготовки учащихся самостоятельное решение задач принимает различные виды.

Первый вид самостоятельной работы: учитель сам читает условие задачи, под его руководством производится разбор, потом ученики самостоятельно решают задачу.

Второй вид самостоятельной работы: условие задачи читает ученик, учащиеся под руководством учителя выделяют главный вопрос и числовые данные, потом задача решается самостоятельно.

Третий вид самостоятельной работы: ученики читают про себя условие задачи, учитель разъясняет непонятные отдельные места, далее ученики самостоятельно решают задачу.

Четвертый вид самостоятельной работы: ученики читают задачу про себя, потом самостоятельно решают.

Решение задачи проверяется или учителем, или учениками под его руководством.

Как вид самостоятельной работы практикуется составление задач учащимися: сначала эта работа проводится с помощью учителя, а потом учащиеся занимаются составлением задач самостоятельно, например при обучении решению типовых задач.

Наблюдения за самостоятельными занятиями учащихся на уроках должны дать учителю богатый материал для характеристики каждого из них. Это наблюдение проводится так. После объяснения и решения нескольких примеров и задач учителем даются аналогичные примеры или задачи для самостоятельного решения. Во время выполнения этого задания учитель ходит между партами, следит за работой учащихся и по мере надобности одним дает беглые указания, другим оказывает более серьезную помощь.

Наиболее важные выводы из наблюдений за работой каждого учащегося желательно после уроков фиксировать в «дневнике учителя».

Одним из видов самостоятельной работы учащихся на уроке и вне его являются практические работы, например подсчет трудодней в колхозе, подведение итогов счетов, составление несложных смет на ремонт, постройку. После усвоения отдела площадей и объемов можно дать для самостоятельного выполнения работы по измерению площадей предметов классной и домашней обстановки, а также предложить начертить квадраты и прямоугольники по заданным размерам; наконец, начертить план участка по его размерам с указанием масштаба.

Примерно так же проводятся самостоятельные упражнения на вычисление объемов прямоугольных параллелепипедов.

Перечисленные и подобные им работы характеризуют связь арифметики с жизнью, помогают учащимся осмыслить изучение арифметики, создают интерес к ней.

Остановимся на требованиях к домашнему заданию по решению задач. Прежде всего задание должно быть выполнено самостоятельно каждым учащимся. Если учащийся не пропускал уроков и внимательно слушал объяснение (а учитель, разумеется, дал объяснение правильно), то учащийся должен сам справиться с задачами, которые даются для домашнего решения.

Излишняя помощь и опека в таких случаях только демобилизуют волю ученика и воспитывают в нем иждивенческие настроения. Наихудшим способом товарищеской «помощи» является согласие товарища на простое списывание решения задач из его тетради. С таким несамостоятельным выполнением домашнего задания учитель должен самым решительным образом бороться как путем бесед с учащимися, так и правильной постановкой проверки выполнения домашних работ.

При проверке домашней работы ученик должен устно рассказать план решения задачи, объяснить, как рассуждал при решении и почему употребил тот или иной способ решения.

Но разумную взаимопомощь нужно поощрять, а иногда можно и организовать; например, два ученика решали самостоятельно одну и ту же задачу и получили разные ответы. Учитель предлагает им совместно проверить решения и найти ошибку. Или еще пример. Один из учеников по уважительной причине пропустил несколько уроков, на которых решались задачи; он отстает и не понимает, как решать задачи. В данном случае учитель способствует организации товарищеской помощи.

При задавании работы на дом недифференцированный подход к учащимся с различной успеваемостью и разными способностями мешает проявляться в достаточной полноте всем способностям наиболее одаренных и хорошо успевающих учащихся класса и не создает возможности к выявлению наиболее отстающих. Необходимо каждый раз при задавании на дом требовать выполнения определенного минимума, обязательного для всех учащихся; каждый ученик должен усвоить все основные требования программы, а для наиболее сильных учеников может быть дана дополнительная работа.

Многие учителя применяют индивидуальные самостоятельные работы, составляя карточки, охватывающие определенные разделы курса; учащиеся в определенные, заранее намеченные дни пишут работы по этим карточкам.

Индивидуальные классные и домашние работы по карточкам (все разные по содержанию) совершенно ликвидируют обезличку. В самом деле, при такой системе каждый учащийся имеет свою задачу и эту задачу надо не только решить, но дать к ней объяснение, следовательно, надо показать свою способность логически рассуждать.

ГЛАВА III

УРОК

В постановлении ЦК ВКП (б) от 25 августа 1932 г. указывается, что основной формой занятий в школе должен быть урок. Урок с данным классом учащихся по строго определенному расписанию занятий и с твердым составом учащихся — основная форма организации учебной работы в школе. От качества построения урока в значительной мере зависит и продуктивность этого урока. Вопрос о построении урока — один из основных в работе школы.

Для уяснения особенностей построения уроков по арифметике необходимо ознакомиться с общедидактическими положениями, которые должны быть учтены при построении каждого урока, но при этом следует иметь в виду и специфику математики, в частности арифметики, которая так или иначе будет влиять на организацию урока.

§ 13. Основные требования к уроку арифметики и повышение его эффективности

1. **Содержание урока.** Структура и план урока по арифметике зависят от многих факторов: от содержания темы, состава класса, учебной дисциплины, подготовленности класса и т. д. Поэтому уроки по арифметике отличаются большим разнообразием.

Материал урока должен быть разносторонним по содержанию, теоретический материал должен сочетаться с практикой, например: изучение законов и свойств арифметических действий должно сопровождаться применением их в устных вычислениях; формулы вычисления площадей и объемов следует прилагать к решению задач жизненного характера.

Содержание урока арифметики должно быть связано с другими учебными предметами, например при решении задач следует брать материал из геометрии, естествознания, физики, химии, географии.

Материал урока должен быть правильно отобран в отношении дозировки времени.

2. Методы и формы работы на уроке. Урок по математике в школе должен быть построен в соответствии с общими требованиями советской педагогики в отношении методов работы.

1) Применение различных методов на одном и том же уроке должно соответствовать особенностям данного урока (материалу, подготовке учащихся, их состоянию в момент проведения урока).

2) В отношении формы ведения урока необходимо соблюдать:

а) правильное чередование вопросо-ответной и повествовательной формы;

б) правильное применение эвристики, т. е. учащиеся вопросами учителя должны направляться по пути «открытия» тех истин, которые составляют содержание данного урока;

в) форма ведения урока должна меняться на ходу, если это вызывается обстановкой урока;

г) язык изложения и беседы должен быть простым по построению, конкретным, образным, правильным.

3. Подготовка к уроку. При подготовке к уроку учителю надлежит выполнить следующие виды работ:

1) Распределить тему на ряд уроков, каждый из которых представляет собой нечто законченное, связанное в единое целое с предшествующим и последующим уроками.

2) При составлении конспекта или развернутого плана урока необходимо продумать способ объяснения материала, ориентируясь не только на данный урок, но и на весь раздел.

3) Установить связь с пройденным, например при сложении и вычитании дробей с разными знаменателями дать для повторения нахождение НОК и НОЗ (и материал предшествующего урока).

4) Правильно распределить время урока.

5) Наметить примеры и задачи для устного счета, для закрепления пройденного, для повторения.

6) Наметить материал для закрепления, если урок проводится с объяснением нового материала.

7) Составить задачи практического содержания.

8) Если надо, изменить формулировку правила, данную в учебнике, тщательно обдумать и записать в конспект новую формулировку.

9) Подобрать вопросы для проверки знаний учащихся.

10) Наметить фамилии учащихся для опроса: а) по повторению, б) по новому материалу, в) для ликвидации задолженности (по «лицевому счету»).

11) Определить вид опроса каждого ученика:

а) решить задачу с записью и подробным объяснением,

б) решить задачи с записью только условия, но с устным решением и ответом,

в) рассказать устно теоретический материал,

г) выполнить устное решение задачи из задачника,

д) ответить по домашнему заданию,

е) ответить по приготовленному плакату.

12) Подобрать домашнее задание.

13) Наметить материал для повторения к следующему уроку.

14) Наметить способы сообщения учащимся домашнего задания:

а) запись на доске параграфа, страницы, номеров примеров и задач,

б) краткое объяснение,

в) подробное объяснение.

15) Подготовить наглядные пособия, чертежи, модели, таблицы.

Во всей этой работе от учителя требуется максимальная организованность, продуманность всех деталей, экономия времени. Не следует думать, что все перечисленные виды работ обязательно должны войти в состав каждого урока. Они перечислены для того, чтобы учитель при подготовке к уроку не упустил из виду какой-либо важный для данного урока вид работы.

4. **Проведение урока.** При проведении урока учитель должен:

1. Хорошо объяснить новый материал, закрепив его, при этом придерживаться намеченного плана и выполнить его.

2. Умело использовать наглядные пособия и дидактический материал.

3. Умело подойти к общему выводу на основе разбора достаточного количества частных примеров.

4. Полностью использовать учебник для усвоения темы урока и в целях привития навыка работы с книгой.

5. При задавании домашней работы охватить по возможности все пройденное на уроке и учесть время, в течение которого учащийся может выполнить домашнюю работу.

Осуществление Закона об укреплении связи школы с жизнью требует коренного улучшения качества уроков по арифметике.

В результате опыта осуществления Закона уже наметились первые шаги в повышении эффективности уроков по математике, появились новые требования к построению уроков.

Первое из требований: нельзя слепо придерживаться установившихся трафаретов в построении урока; надо творчески подходить к выбору методов обучения, отдавая предпочтение более совершенным, дающим наибольший эффект, учитывая при этом особенности класса, специфику материала и цели урока.

Второе требование: каждая минута урока должна быть использована наиболее плодотворно при высокой активности учеников.

Выполнение второго требования целиком зависит от того, как учитель подобрал и использовал учебный материал на уроке, как он вызвал заинтересованность и активность учащихся, как он направлял работу каждого ученика в течение 45 минут.

Повышение эффективности урока требует прежде всего продуктивного использования всех 45 минут урока. Надо свести к минимуму трату времени на всякие организационные моменты. Опоздание на 1—2 минуты в класс, выяснение фамилий дежурных, отсутствующих, наведение чистоты — все это отнимает несколько минут урока и, главное, дезорганизует учащихся: ведь они в это время остаются незанятыми. Переход от одного вида работы к другому также отнимает время (например, от опроса к контрольной работе и т. д.).

Учитель должен постепенно отказаться от вопросов дежурному об отсутствующих; пусть дежурный представит в начале урока список отсутствующих, а учитель в удобный момент без ущерба ведению урока сделает необходимые записи в журнале.

Бесполезно потраченным временем является выяснение, «что было задано на дом». Обычно или учащийся забывает задание и ему приходится копаться в дневнике, или приходится спрашивать другого ученика. На это тратятся минуты, а ведь для дела обучения это ничего не дает. В проверку выполнения домашней работы надо стремиться вовлечь весь класс, а для этого надо опрашивать, переключаясь с опроса одного ученика на другого.

Каждый учитель, если он действительно борется за повышение качества работы, найдет и использует резервы времени, способы воздействия на учащихся, возбуждающие у них интерес и активность в работе.

Очень многое зависит и от поведения учителя, от его преданности делу воспитания и обучения математике. Если преподаватель энтузиаст своего дела, то, несмотря на некоторые изъяны, которые он может допускать, преподавание будет у него поставлено так, как этого требует перестройка работы школы.

Учитель-энтузиаст, кроме полного использования всего времени урока, проводит разнообразные специальные мероприятия, направленные на создание у учащихся интереса к изучению арифметики. Он организует беседы, в которых на конкретном материале, доступном для понимания учащихся, показывает значение арифметики в жизни, для других дисциплин, в технике и т. д.; приводит высказывания видных общественных деятелей, ученых, героев; использует материалы из истории математики.

Активные методы преподавания вызывают активность и со стороны учащихся. Ученику V—VI классов свойственно мастерить, действовать, познавать не только на слух и зрение, но и с помощью осязания и мышечных усилий. Поэтому надо привлекать при обучении наглядные пособия; создавать силами учащихся различные приборы, модели, производить измерения. Учитель должен помнить, что эффективность урока целиком зависит от него, от его подготовки к уроку, от его поведения на уроке.

§ 14. Подготовка к уроку

Опыт работы лучших учителей школ позволяет рекомендовать вести подготовку к уроку следующим образом.

Прежде всего учитель должен продумать результаты предыдущего урока, установить для себя его недочеты и положительные стороны, выяснить степень усвоения учащимися материала предыдущих уроков. В результате такого анализа можно наметить содержание следующего урока, его целевую установку, объем намеченного для изучения на данном уроке материала. Желательно, чтобы при подготовке к занятиям учитель просмотрел соответствующую главу по методике арифметики и изложение того же материала в других источниках. Следует также продумать вопрос об общем методе преподавания материала урока. В связи с вопросом о методе преподавания стоит вопрос о форме ведения урока, т. е. вопрос о том, какая часть материала будет изучаться в форме беседы, какой материал будет сообщен учителем в форме изложения, какую работу могут проделать сами учащиеся под руководством учителя.

По характеру материала учитель должен определить, как установить связь изучаемого материала с другими учебными предметами и с практической жизнью.

Обдумав материал предстоящего урока, учитель намечает заранее, какие таблицы и наглядные пособия надо использовать на уроке.

Составляя план урока, учитель указывает примерное распределение времени (в минутах) на каждую часть урока: на организационные мероприятия, на проверку домашнего задания, на объяснение нового материала, на упражнения, на задание на дом.

Готовясь к проверке домашнего задания, учитель должен решить примеры и задачи, заданные на дом, если не все, то хотя бы самые трудные (продумать различные способы решения задачи). Это позволит ему проводить проверку без задержек и с большей уверенностью.

План проверки домашнего задания намечается заранее: кто из учащихся и по какому вопросу будет опрошен, на кого из учащихся следует обратить особое внимание. При тщательной проверке домашнего задания повторяется материал предыдущего урока, выявляются слабые стороны усвоения предыдущего материала. Этим самым преподаватель проверяет и качество своей работы.

Переходя к подбору материала, намеченного для объяснения на уроке, учитель определяет, достаточен ли материал в учебнике, не велик ли он; в случае недостаточности надо решить вопрос, что добавить и откуда взять; в случае излишка материала в учебнике часть его надо опустить. Далее отмечается материал из пройденного, который следует повторить на уроке. Каждый урок должен представлять одно из звеньев цепи уроков, на которых изучается данная тема. При подготовке к уроку необходимо выяснить, что следует повторить из ранее пройденного для установления связи с ним. С этой целью учитель анализирует намеченный к уроку материал, разлагает изучаемый материал на отдельные части, подбирает соответствующий материал для повторения.

Учитель подбирает и решает примеры и задачи, нужные для объяснения нового материала, намечает вопросы, которые будут при этом предложены учащимся, намечает примерно план обсуждения или изложения и выводы, которые будут сделаны; подбирает упражнения для выполнения учащимися у доски или самостоятельно; предусматривает различные возможные ответы и затруднения с ответами, намечает слабых учеников, которых следует проверить особо, чтобы убедиться, поняли ли они объяснение. Конечно, каждая деталь объяснения должна быть хорошо продумана.

Если объяснение нового материала не будет отличаться от изложенного в учебнике, то в плане его можно не писать, можно также опустить записи об организационном моменте и о проверке домашней работы; эти части урока проводятся учителем на каждом уроке.

Подбирая задачи и примеры для классной и домашней проработки, учитель должен прорешать их, чтобы судить об их особенностях. Количество примеров и задач, которые возможно и необходимо решить на уроке, должно быть по возможности точно рассчитано.

Следует записывать решения примеров и задач в особую тетрадь, накапливая материал для работы в будущем.

В плане должны быть намечены примеры и задачи для домашнего задания. Они или задаются по стабильному сборнику задач, или составляются учителем, или берутся из других задачников.

При этом в первую очередь следует брать материал, отражающий различные стороны коммунистического строительства.

В результате подготовки должен быть записан план урока или конспект его. Учителям малоопытным надо рекомендовать составлять план настолько подробно, чтобы он во время урока мог служить конспектом.

§ 15. Виды уроков и их проведение

Уроки арифметики в отношении их содержания можно разделить на следующие виды: а) урок по изучению нового материала; б) урок упражнений на пройденное в целях его закрепления или углубления; в) урок по проведению контрольной работы; г) урок-беседа по итогам контрольной работы или по выполнению самостоятельной работы.

Следует заметить, что на практике, ввиду специфичности предмета (тесная связь старого материала с новым), почти на каждом уроке, кроме уроков проведения письменных контрольных работ, обыкновенно имеют место и объяснение нового, и упражнения, и проверка знаний учащихся, и повторение.

Урок должен быть отнесен к тому или иному виду в зависимости от того, какой элемент является в нем доминирующим и что считается целевой его установкой.

Общая структура большинства уроков арифметики примерно такова:

а) Организационные мероприятия (установление внешнего порядка, проверка наличия классного оборудования, а также учебных пособий на уроке у учащихся).

б) Проверка домашнего задания.

в) Опрос.

г) Основная часть урока (объяснение нового материала, привитие навыков самостоятельной работы и т. п.).

д) Задание на дом.

В зависимости от содержания урока и подготовленности учащихся некоторые пункты можно опустить или переставить.

Урок по объяснению нового материала является наиболее ответственным, так как от правильной его постановки зависит главным образом ясность понимания и хорошее усвоение изучаемого материала.

Каждый урок арифметики (кроме уроков по проведению письменных работ) надо начинать работой, связывающей его с пройденным материалом. Поэтому в пункте б) нами поставлена проверка домашнего задания. Проверкой достигаются такие цели: 1) повторяется материал предыдущего урока, 2) контролируется выполнение учащимися домашней работы, 3) выявляются слабые стороны усвоения предыдущего материала, 4) проверяется работа учителя.

Технически проверка домашней работы проводится различно. Она может вестись или при открытых тетрадях, или без помощи тетрадей. Проверку по тетрадям можно проводить следующим образом. Учитель берет тетрадь у одного из учеников и предлагает вызываемым по очереди учащимся называть ответы по своим тетрадям, при этом он предупреждает, что тот, у кого оказался иной ответ, должен молча поднять руку; при обнаружении разных ответов учитель указывает, какой ответ правильный. При наличии большого числа неправильных ответов пример решается в классе.

Большое количество неправильных ответов показывает, что материал усвоен недостаточно и требует классной доработки.

Можно практиковать и другой способ проверки. Вызванный к доске ученик пишет по порядку из своей тетради ответы на каждый пример; остальные учащиеся при появлении на доске расхождения с полученными ими результатами молча поднимают руки. Учитель разбирает сомнительный результат и предлагает исправить ошибку.

Такие способы проверки помогают быстро установить, выполнено или не выполнено задание, но при этом трудно определить, была ли работа выполнена самостоятельно, достаточно ли хорошо она продумана и твердо ли усвоен заданный материал. Как при первом способе проверки, так и при втором учитель берет работы на дом и проверяет их. Если учитель не сможет проверять все тетради от урока к уроку, то он обязательно делает выборочную проверку (берет тетради нескольких учащихся на дом или проверяет их к концу учебного дня, если имеет свободный урок).

Для установления степени самостоятельности выполнения домашней работы применяется такой способ проверки. Учитель вызывает ученика к доске и предлагает решить заданный пример (или задачу) без пользования тетрадью.

Необходимо приучить учащихся при самостоятельных работах пользоваться ответами задачника. Но это не освобождает учителя от классной проверки работ, так как последняя имеет в виду проверку не только конечных ответов, но и промежуточных результатов.

С первых же дней учебного года надо организовать работу так, чтобы заставить учащихся выполнять домашние задания к каждому уроку и выполнять правильно, чисто, аккуратно. Поэтому необходимо повседневно проверять работу учащихся с начала до конца, особенно в начале учебного года. В дальнейшем можно — для сбережения времени — проверять только часть работы.

За проверкой домашнего задания должен следовать, если это требуется при объяснении, устный счет, который надо проводить по возможности на каждом уроке. На уроках объяснения нового материала устный счет связывается с новым материалом. Устный счет применяется также для того, чтобы связать новый материал с пройденным. На уроках по закреплению пройденного устный счет дается по пройденному материалу.

Связью нового материала с пройденным может служить повторение материала предыдущего урока или такого материала, с которым связан новый.

Переходя к центральной части урока — объяснению нового материала, следует стремиться точно выполнить намеченный план, но вместе с тем учитель не должен быть рабом этого плана и, если окажется нужным, в зависимости от сложившейся на уроке обстановки, должен перестроиться на ходу.

Приступая к объяснению нового материала, учитель знакомит учащихся с темой урока.

Объяснение нового материала желательно начинать с задачи, помогающей учащимся осознать необходимость и практическое значение разбираемого правила, приема вычисления. Разъяснение материала данного урока проводится на решении заранее подобранных задач и примеров. Учитель, решая с учащимися задачи и примеры, разъясняет соответствующий прием, делает нужные записи на доске, применяет наглядные пособия.

Основной формой ведения урока по объяснению нового материала должна быть эвристическая беседа, но ее надо чередовать с такой формой занятий, при которой учитель дает сплошное изложение материала, особенно в случае, когда учащиеся не имеют соответствующего запаса знаний и подготовки для проведения эвристической формы занятий. Своими вопросами и указаниями учитель дает мысли учащихся определенное направление, подводит их к выводу правила.

Когда учащийся во время беседы дает неправильные ответы, учитель обращается к классу с предложением исправить ошибку. Если же никто из учащихся не исправит ее, учитель сам исправляет ошибку.

Со стороны учителя требуется большое умение поддерживать внимание учащихся и проводить урок так, чтобы работа класса не подменялась работой только с вызванным учеником.

При подготовке плана урока учитель должен обдумать, в какой части урока будут привлечены к объяснению учащиеся, что будет объяснено в форме связного изложения, что ученики должны только слушать, что они должны записывать в тетради.

После фронтальной работы с классом учитель дает несколько аналогичных примеров или задач для самостоятельного решения в классе; учитель следит за выполнением работы каждым учащимся, помогает отстающим, указывает на ошибки, помогает исправить их. Решение каждого примера заканчивается частным выводом, подготовляющим к общему выводу.

При переходе к общему выводу бегло повторяются решенные примеры и задачи, воспроизводятся частные выводы; затем эти выводы обобщаются и выводится окончательная формулировка. Этот вывод полезно прочитать по учебнику; если формулировка взята не из учебника, учитель записывает ее на доске, а учащиеся заносят в свои тетради.

Урок надо строить так, чтобы оставалось время на закрепление сделанного вывода путем решения примеров и задач под наблюдением учителя. Эти примеры или задачи даются в таком количестве, чтобы их можно было проверить на этом же уроке. Урок заканчивается заданием на дом.

Уроки второго типа — уроки упражнений — по содержанию и структуре проще, чем уроки объяснения нового материала. Примерная схема уроков этого типа: 1) проверка домашнего задания, 2) устный счет, 3) упражнения, 4) задание на дом. Большое значение здесь имеет подбор материала: задачи и примеры должны быть разнообразны, в них должны быть исчерпаны все случаи каждого действия, все виды задач на данное правило. Эти уроки должны приучать учащихся к самостоятельной работе. Поэтому учитель, подбирая материал, должен продумать, какой материал будет выполняться учащимися под его руководством, какой полусамостоятельно или самостоятельно.

При проведении самостоятельной работы учитель особое внимание обращает на слабых учащихся, помогает им, дает дополнительные объяснения.

Домашняя работа должна быть дана своевременно, при полном внимании учащихся; прежде чем раздастся звонок, учащиеся должны получить указания, что и как готовить к следующему уроку, что и как записывать, что учить наизусть и т. д. Не целесообразно было бы давать подробное объяснение хода решения задачи или примера, это сделало бы работу ученика несамостоятельной.

Но иногда следует в ходе урока обратить внимание учащихся на выполнение домашнего задания; указать, что при полном понимании и самостоятельном решении задач и примеров в классе учащиеся не встретят затруднений при выполнении домашнего задания. Полезно сказать, что быстрота выполнения домашнего задания зависит от успешности усвоения материала на уроке. Иногда следует указать, какие трудности могут встретиться в домашней работе и как искать пути их преодоления.

В домашние задания может входить только материал, хорошо понятый учащимися. Вместе с материалом, заново объясненным, целесообразно для повторения включать в домашнее задание также материал из ранее пройденного.

Давая задание, учитель может записать на доске параграфы учебника, номера примеров и задач, то же самое учащиеся пишут в своих тетрадях.

Иногда учитель предлагает самим учащимся отыскать в книге нужные параграфы, прочитать те или иные правила, определения, описания процесса вычисления, припомнить изложение их в классе, сделать сравнение; этим учащиеся приучаются к пользованию книгой. Задавая на дом трудную задачу, учитель может предложить учащимся составить в классе устно план ее решения. Это облегчит выполнение домашней работы и будет способствовать развитию интереса к арифметике.

Заключительным этапом работы учителя над уроком должно быть подытоживание проведенной работы (самопроверка). Здесь можно выявить и зафиксировать как положительные, так и отрицательные стороны проведенной работы, сделать весьма важные выводы, полезные для работы в будущем.

При подытоживании урока учитываются, в зависимости от вида и содержания урока, следующие вопросы: 1) выполнение дозировки времени; 2) методы работы в соответствии с особенностями данного урока (материал, подготовка учащихся); 3) чередование вопросо-ответной формы с повествовательной; 4) изменение формы ведения урока в связи с обстановкой на уроке; 5) связь темы урока с разделом в целом; 6) установление моментов связи с пройденным; 7) примеры и задачи к данной теме урока при объяснении, закреплении и повторении; 8) изменение формулировки или правила, данных в учебнике; 9) выполнение проверки знаний и навыков учащихся; 10) формы опроса учащихся: а) решение задач с записью и объяснением, б) решение задач или примеров с записью только условий, но с устным решением и ответом; 11) выполнение опроса по намеченному плану: а) при повторении, б) при объяснении нового материала, в) при ликвидации задолженности по лицевому счету и т. п.; 12) выполнение плана урока; 13) использование учебника и наглядных пособий, подготовленных для урока; 14) общий вывод правила на основании частных выводов; 15) способы сообщения учащимся домашнего задания: а) запись на доске параграфа, страницы, номеров примеров и задач, б) краткое объяснение, в) подробное объяснение; 16) какие знания и навыки приобретены учащимся и насколько правильно и сознательно воспринят материал, изученный на уроке; 17) меры поддержания внимания на уроке; 18) воспитательные моменты на уроке.

При подведении итога все перечисленные вопросы, может быть, и не будут использованы. Они приведены здесь для того, чтобы учитель имел в виду все их многообразие при оценке результатов проведенного урока.

§ 16. Конспекты и планы уроков

Наблюдение уроков и изучение планов и конспектов уроков учителей математики показывают, что один и тот же преподаватель, но в разных параллельных классах, готовясь к уроку, пишет различные планы уроков.

Дидактика рекомендует располагать обучение так, чтобы в максимальной степени обеспечить последовательный и постепенный переход от легкого к трудному.

Опытные учителя применяют различные формы составления конспектов и планов уроков: для одного класса более подробный, а для другого в сжатой форме. Кроме того, конспект или план урока они составляют различно в зависимости от темы урока. Новый материал одной темы подробно излагают в монологической форме, а для другой темы урока в эвристической форме.

Очевидно, учитель при выборе из всех предложенных нами планов и конспектов проявит творческую инициативу: учтя особенности своего класса и состав учащихся, в одном случае использует подробные конспекты, в другом случае — краткий конспект, в третьем — расширенный план, в четвертом случае — сокращенный план урока.

1. Урок на тему: увеличение и уменьшение десятичной дроби в 10, 100 и т. д. раз.

Данный урок можно проводить по такому плану:

1) Повторение свойства суммы при увеличении в одинаковое число раз каждого слагаемого.

2) Сравнение величины десятичных дробей, записанных одинаковыми цифрами, но отличающихся местом запятой.

3) Вывод о роли запятой в десятичной дроби (изменение величины десятичной дроби при перенесении запятой вправо и влево).

4) Упражнения.

Содержание урока.

1) Учитель пишет:
$$8+7=15$$
$$16+14=30$$
$$24+21=45$$

Что я записал? (3 суммы.) Сравните вторую сумму с первой. Что видим? (Она в два раза больше первой.) А сравните каждое слагаемое второй суммы с соответствующим (по порядку) слагаемым первой суммы. Что же оказывается? (Каждое слагаемое второй суммы в 2 раза больше каждого слагаемого первой суммы.) Проведите сравнение суммы и слагаемых третьей суммы с соответствующими числами первой суммы. Что оказывается? (Каждое слагаемое третьей суммы больше каждого слагаемого первой суммы в 3 раза и третья сумма в 3 раза больше первой.) У меня имеется сумма: $10 + 7 + 9$. Я хочу увеличить ее в 5 раз. Что надо для этого сделать с каждым слагаемым? (Увеличить каждое в 5 раз.) Сделайте это и проверьте результаты.

2) Переходим к центральной части данного урока. Учитель пишет примеры:

$$0{,}123 \qquad 1{,}23$$

Сравните написанные числа, обратив внимание на место запятой. Что вы видите? (Запятая перемещена вправо.)

Какова величина второго числа по сравнению с первым? (Оно больше в 10 раз.) Обратите внимание на положение запятой. На сколько знаков она передвинута вправо во втором числе по сравнению с первым? (На один знак.) Теперь объясним, почему второе число больше первого в 10 раз.

Перепишем каждое из этих чисел иначе:

$$0{,}123 = 0 + 0{,}1 + 0{,}02 + 0{,}003.$$
$$1{,}23 = \qquad 1 + 0{,}2 + 0{,}03.$$

Сравните каждое слагаемое второй суммы (второго числа) с соответствующим слагаемым первой суммы (первого числа). Что оказывается? (В первой сумме первое слагаемое означает 1 десятую, во второй — единицу; в первой сумме второе слагаемое означает 2 сотых, во второй — 2 десятых; в первой сумме третье слагаемое означает 3 тысячных, во второй — 3 сотых. Каждое слагаемое второй суммы в 10 раз больше соответствующего слагаемого первой суммы.) Припомните свойство суммы: как она изменяется? (Сумма увеличивается (или уменьшается) во столько раз, во сколько раз увеличивается (или уменьшается) каждое слагаемое.) Значит, если в десятичной дроби перенести запятую на один знак вправо, то что сделается с величиной этой дроби? (Она увеличится в 10 раз.) Поясните почему. (Потому что десятичную дробь можно рассматривать как сумму. При перенесении запятой вправо на 1 знак мы каждый разряд этой дроби, т. е. каждое слагаемое, увеличиваем в 10 раз, значит, и вся сумма (десятичная дробь) тоже увеличится в 10 раз.)

Подобным же способом разбираются случаи с перенесением запятой на 2, 3 знака. Здесь надо предоставить учащимся больше свободы: пусть они самостоятельно проведут объяснения, сами ведут записи и формулируют правила.

Так как увеличение в 10, 100 . . . раз есть умножение на 10, 100 . . . , то эти примеры записываются со знаками умножения.

3) Приходим к обобщающему выводу:

Что происходит с десятичной дробью, когда в ней переносится запятая вправо? (Она увеличивается.) Во сколько раз? (В 10 раз, если запятая переносится на 1 знак вправо; в 100 раз, если запятая переносится на 2 знака вправо; в 1000 раз, если запятая переносится на 3 знака вправо.) Значит, что надо сделать с десятичной дробью для увеличения ее в 10, 100, 1000 и т. д. раз? (Перенести запятую вправо на 1, 2, 3 и т. д. знаков, т. е. на столько знаков, сколько нулей при единице.)

Подобным же образом выводится правило уменьшения десятичной дроби в 10, 100, 1000 и т. д. раз, т. е. учащиеся наблюдают это явление на ряде подобранных примеров, обобщают частные случаи и приходят к окончательной формулировке правила уменьшения десятичной дроби в 10, 100, 1000 и т. д. раз.

4) В заключение необходимо рассмотреть случаи, когда для возможности перенесения запятой приходится к десятичной дроби приписывать справа или слева нули. Например, увеличить в 100 раз числа 0,7; 2,5; 0,34 или уменьшить в 100 раз числа 0,2; 1,47; 16; 0,28.

2. Урок на тему: разъяснение понятия «приближенного частного с точностью до 0,1; 0,01; 0,001 и т. д.».

Содержание урока

1) Повторение пройденного о точном и приближенном частном на предложенных учащимися примерах (или данных учителем).

2) Переходя к разъяснению темы урока, предлагаем учащимся решить такой пример: 0,35 : 11; получается в частном 0,03181818. Сначала дадим понятие о приближенном частном с точностью до 0,1; 0,01; 0,001 и т. д. по внешнему его признаку (по количеству взятых десятичных знаков). Мы сказали, что в таких случаях деления, как 0,35 : 11 = 0,03181818 . . . , берут не все частное, а часть его. Возьмем, например, приближенное частное с двумя десятичными знаками: 0,03, т. е. ограничим его сотыми долями, а все остальные доли, начиная с тысячных, отбросим. В этом случае говорят, что мы взяли приближенное частное с точностью до 0,01. Если возьмем приближенное частное 0,031, то говорят, что мы взяли приближенное частное с точностью до 0,001; частное 0,0318 есть приближенное частное с точностью до 0,0001 и т. д.

3) Сообщение закрепляется соответствующими упражнениями. По усвоению внешнего признака понятия «приближенное частное с точностью до $\frac{1}{10^n}$» переходим к разъяснению этого понятия по существу.

Продолжим рассмотрение приближенных частных для того же случая деления 0,35 на 11.

Какое число будет выражать приближенное частное с точностью до 0,01? (0,03.) Начиная с каких долей мы отбрасываем в этом случае часть частного после сотых долей? (Отбрасываем, начиная с тысячных долей.) Сколько тысячных мы отбросили? (Одну.) Сравним 0,001 с 0,01. Какова 0,001 по сравнению с 0,01? Какая из дробей 0,001 и 0,01 меньше? (0,001 меньше 0,01.) Почему? (0,01 = 0,010). Значит, когда мы взяли приближенное частное 0,03, мы допустили неточность, меньшую, чем 0,01 (так как 0,001 меньше 0,01). В этом случае говорят, что мы взяли приближенное частное с точностью до 0,01, т. е. мы допустили ошибку меньше, чем на 0,01 единицы.

Запишите для этого случая деления (0,35 : 11) приближенное частное с точностью до 0,001 (0,031). Начиная с каких долей мы отбросили часть частного? (Начиная с десятитысячных.) Сколько десятитысячных мы отбросили? (8.) Сравните 0,0008 с 0,001. Что оказывается? (0,0008 меньше 0,001.) Почему? (0,001 = 0,0010.) Значит, когда мы взяли приближенное частное 0,031 с точностью до 0,001, мы допустили ошибку меньшую, нежели 0,001, т. е. нашли приближенное частное с точностью до 0,001.

Найдите приближенное частное с точностью до 0,0001, которое получится от деления 8 на 11 (учащиеся получают: 8 : 11 = = 0,7272). Что значит найти в данном случае приближенное частное с точностью до 0,0001? (Взять часть частного, кончая десятитысячными долями.) Какую мы в этом случае допускаем ошибку? (Меньше, нежели 0,0001 единицы.) Чему будет равно это частное? (0,7272.)

Для лучшего уяснения понятия о приближенном частном с точностью до 0,1; 0,01; 0,001 и т. д. учитель дает задание: выписать приближенные частные с точностью до 0,1; 0,01; 0,001, полученные, например, при делении 3 : 7; 9 : 17; 156 : 28 и т. п. Теперь скажите, что значит найти приближенное частное с точностью, например, до 0,01? (Найти частное с двумя первыми десятичными знаками и отличающееся от искомого меньше, чем на 0,01 единицы.)

3. Урок на тему: нахождение приближенного частного с точностью до 0,1; 0,01; 0,001 и т. д. с недостатком и с избытком.

1) Повторение о приближенном частном с точностью до 0,1; 0,01; 0,001 и т. д.

2) После этого переходим к теме урока.

Найдите частное 5 : 6 (учащиеся выполняют вычисление и получают: 5 : 6 = 0,8333. . .). Чему будет равно приближенное частное с точностью до 0,01? (0,83.) Почему? (Потому что, взяв частное 0,83, мы отбросили все доли частного начиная с 0,003 и допустили ошибку, меньшую, чем 0,01 единицы.) Какое число получится, если мы к приближенному частному 0,833 прибавим 0,007? (0,84.) На сколько оно отличается от предыдущего частного? (На 0,007.) Сравните 0,007 с 0,01. Что окажется? (0,01 = 0,010; 0,007 меньше 0,01.) Число 0,84 также можно считать приближенным частным с точностью до 0,01, так как в нем два десятичных знака и оно разнится от искомого меньше, чем на 0,01.

Итак, для случая деления 5 : 6 имеет два приближенных значения частного с точностью до 0,01.

Одно — 0,83, а другое — 0,84. На сколько 0,84 больше 0,83? (На 0,01.) А каждое из них отличается от искомого частного на сколько? (На число, меньшее 0,01 единицы.) Когда мы брали приближенное частное 0,83, то отбросили доли начиная с тысячных, т. е. взяли частное, меньшее искомого; для получения частного 0,84 мы к 0,833 прибавили 0,007, т. е. взяли частное, большее искомого. Первое частное называется приближенным частным с точностью до 0,01 с недостатком, а второе — приближенным частным с точностью до 0,01 с избытком. Этот случай нахождения приближенного частного можно записать так: $0,83 < 5 : 6 < 0,84$; читается эта запись так: частное 5 : 6 больше 0,83 и меньше 0,84.

Рассмотрим еще пример. Найдите приближенные частные с точностью до 0,1 с недостатком и с избытком для случая 5 : 11. Как поступите? (Разделим 5 на 11.)

$$
\begin{array}{r|l}
5 & 11 \\
\hline
50 & 0,4545\ldots \\
\hline
60 & \\
\hline
50 & \\
\hline
60 & \\
\hline
5 &
\end{array}
$$

Чему равно приближенное частное с точностью 0,1 с недостатком? (0,4.) А с избытком? (0,5.) Как можно это записать? ($0,4 < 5 : 11 < 0,5$.) Запишите для того же примера приближенные частные с точностью до 0,01 с недостатком и с избытком ($0,45 < 5 : 11 < 0,46$.) А с точностью до 0,001? ($0,454 < 5 : 11 < 0,455$.)

Повторим же все, что узнали о приближенных частных с точностью до 0,1; 0,01; 0,001 и т. д., взятых с недостатком и с избытком. Сколько получается таких частных? (Два.) На сколько они разнятся одно от другого? (Если ищем частные с точностью до 0,1, то они разнятся на 0,1, если с точностью до 0,01, то на 0, 01 и т. д.) А на сколько каждое из них разнится от искомого частного? (Если берем частное с точностью до 0,1, то каждое из них разнится на число, меньшее 0,1; если берем с точностью до 0,01, то каждое разнится на число, меньшее 0,01, и т. д.) Каковы эти частные по сравнению с искомыми? (Одно из них, взятое с недостатком, меньше искомого, а другое, взятое с избытком, больше искомого.) По усвоении сущности понятий «приближенное частное с точностью до 0,1; 0,01 и т. д.» и «частное, взятое с недостатком и с избытком», естественно, у учащихся может возникнуть вопрос: «Какое же частное следует брать: с недостатком или с избытком?» Поэтому дальше необходимо остановиться на этом вопросе.

4. Урок на тему: выбор приближенного частного.

Содержание урока

1) Повторите, что называется приближенным частным с недостатком и с избытком.

2) Найдите приближенные частные для случая деления 4 : 7 (4 : 7 = 0,571428...).

Какие приближенные частные мы можем взять для данного случая с точностью до 0,01? (0,57 и 0,58.) Сравним эти два приближенных частных: что вы сделали с неточным частным, когда взяли приближенное частное с недостатком, т. е. 0,57? (Отбросили все доли, начиная с 0,001.) А когда взяли второе частное 0,58? (К 0,571 прибавили 0,009.) Где допустили меньшую ошибку? (В первом случае.) Теперь возьмем для этого случая деления приближенные частные с точностью до 0,001. Какими они выразятся числами? (С недостатком —0,571, а с избытком — 0,572.) Которое из них точнее? (0,571.) Почему? (Потому что в этом случае мы отбрасываем часть неточного частного, начиная с 0,0004, а для получения частного 0,572 мы должны к 0,5714 прибавить 0,0006. Ясно, что в первом случае мы допускаем меньшую ошибку.)

Возьмите приближенные частные для этого же случая с точностью до 0,1. Запишите их: $0{,}5 < 4 : 7 < 0{,}6$. Какое из них точнее? (0,6.) Почему? (Потому что в этом случае ошибка меньше).

Дальнейшее объяснение учитель ведет преимущественно в форме рассказа, так как эвристическая форма ведения этой части урока вследствие недостаточных знаний учащихся дала бы слабый результат. Конечно, учитель и при рассказе должен побуждать учащихся к активному участию в работе.

Проведем эту часть урока примерно так:

«Рассмотрим приближенное частное с точностью до 0,1. Взято за приближенное частное с точностью до 0,1 число 0,6, а в частном с недостатком имеем 0,5. Следовательно, для приближенного частного с избытком с точностью до 0,1 мы последнюю оставляемую цифру увеличили на единицу (вместо 0,5 взяли 0,6).

Обратите внимание на приближенные частные с точностью до 0,01 и 0,001. Мы видим, что последняя цифра взятого приближенного частного такая же, как и в неточном частном. Значит, при нахождении приближенного частного в одних случаях мы последнюю оставляемую цифру частного увеличиваем на единицу, а в других случаях этого не делаем.

Кратко о программированном обучении арифметике

Существующие формы обучения в классе (урок, лекция, практические занятия) имеют существенные недостатки.

Избираемый учителем средний темп работы в классе неодинаково посилен для учащихся: для одних он оказывается слишком быстрым, для других — излишне замедленным. У сильных учеников время расходуется непроизводительно.

Вдобавок, при существующих формах коллективной работы учитель располагает ограниченной возможностью контролировать работу каждого ученика по существу: все ли понимает ученик? Не возникают ли у него неправильные представления?

Указанные недостатки существующих форм обучения вызывают необходимость поисков новых, более эффективных форм работы.

Одним из возможных путей улучшения обучения является применение разрабатываемого в настоящее время «программированного обучения». Эта форма обучения, по мнению отдельных учителей, имеет перспективу в преподавании математики. Поэтому вкратце остановимся на сущности программированного обучения, в частности обучения арифметике.

Программированное обучение означает обучение путем тщательного составления программы работы учащегося по предмету на весь период изучения того или иного материала, раздела.

Учебный материал, включая и упражнения (задачи и примеры), располагается в логической последовательности, делится на небольшие порции, называемые «блоками информации» или «шагами».

Усвоение каждой порции подготовляется предшествующей работой учащегося.

Каждый учащийся прорабатывает весь учебный материал в свойственном ему темпе. Значит, у учащегося нет неразумной траты времени и он имеет возможность работать в спокойной обстановке.

Таким образом, программированное обучение устраняет при определении темпа существующую ориентировку на так называемого среднего ученика.

Характерной чертой программированного обучения является наличие в нем постоянной о б р а т н о й с в я з и. Обычно ученик, изучив некоторый раздел и выполняя домашнюю или классную самостоятельную работу, до получения оценки остается в неведении, правильно ли он усвоил учебный материал. Отсутствие информации о восприятии им материала не дает стимула учащемуся, не способствует эффективности обучения.

В программированном учебнике материал дается так, что ученик систематически получает информацию о том, верно ли он выполнил задание, правильно ли понимает прочитанное. В случае неверного ответа ученика учебник организует отыскание им правильного ответа. При программированном обучении значительно меняется роль учителя, содержание и формы его работы. Он освобождается от объяснения и контроля по материалу, самостоятельно изучаемому учащимся. Оставаясь организатором всего учебного процесса, он может более глубоко познать степень усвоения учащимся того или иного раздела, помочь ему выбрать посильный темп работы, ответить на возникшие у ученика вопросы.

Программированное обучение может проводиться не по всем разделам курса. Оно может быть применено лишь при изложении принципиальных вопросов программы. Известны две различные системы изложения учебного материала в программированных учебниках: линейная и разветвленная.

Характерной особенностью линейной системы является требование к каждому учащемуся (независимо от его способностей) изучить весь текст главы или раздела. Материал дается небольшими порциями и каждый раз заканчивается вопросом. Ответив на вопрос, ученик переходит к изучению следующего пункта данного раздела. Если при ответе ученик допустил ошибку, он легко ее обнаруживает, сравнив свой ответ с приведенным в учебнике. При линейном построении учебного материала вопросы имеют главным образом обучающий характер. Приведем в качестве примера текст (в кратком виде) по одному из вопросов темы «Десятичные дроби».

П о н я т и е о д е с я т и ч н о й д р о б и

1. До сих пор ты изучал обыкновенные дроби и действия над ними. Ты знаешь, что обыкновенная дробь записывается с помощью черты и двух...	натуральных чисел.
2. Значит, знаменателем обыкновенной дроби может быть любое...	натуральное число

Например: $\frac{2}{5}$; $\frac{7}{9}$; $\frac{9}{10}$; $\frac{15}{37}$; $2\frac{11}{100}$.

3. Среди обыкновенных дробей встречаются такие дроби, знаменателями которых являются числа 10, 100, 1000 и т. д., т. е. числа, изображаемые единицей с последующими нулями.

Приведи пять примеров таких дробей.

4. **Дробь, знаменателем которой является единица с одним или несколькими нулями, называется десятичной дробью.**

Например: $\frac{7}{10}$; $\frac{19}{100}$; $4\frac{31}{1000}$ и т. д.

5. Десятичную дробь пишут без знаменателя, по правилам записи натуральных чисел.

Мы знаем, что всякое натуральное число можно разбить на разряды; например число 1238 имеет... — **8 единиц**

первого разряда,... — 3

второго разряда,... — 2

третьего и... четвертого разряда. — 1

Если читать натуральное число слева направо, то единица каждого разряда натурального числа уменьшается в десять раз по отношению к единицам слева. Значит, после единиц должен быть разряд десятых долей единицы, после десятых долей должны записываться сотые доли и т. д.

Запись 15,3 означает . . . . — 15 целых, 3 десятых доли единицы.

Запись 105,327 означает . . . . — 105 целых, 327 тысячных долей единицы.

Итак, десятичную дробь пишут без знаменателя, по правилам записи натуральных чисел. Целую часть отделяют от дробной части запятой.

6. Ответить на вопросы:

а) Сколько десятых долей в единице? — 10

б) Сколько сотых долей в одной десятой? — 10

в) Сколько тысячных долей в одной десятой? — 100

7. Запиши следующие десятичные дроби без знаменателя:

$$12\frac{3}{10} = 12{,}3; \quad 141\frac{31}{100} = \ldots;$$ — 141,31

$$6\frac{517}{1000} = \ldots; \quad 1\frac{3}{1000} = \ldots;$$ — 6,517; 1,003

При чтении текста правая часть страницы (ответы) может быть прикрыта картонной или бумажной полоской.

Программированный учебник по математике отличается от обычного значительно большим объемом.

К недостаткам линейной системы программированного обучения можно отнести: дробление материала на мелкие частные вопросы, что отвлекает от восприятия темы в целом; отсутствие выработки необходимых навыков работы с книгой, написанной обычным образом.

При разветвленной системе изложения весь учебный материал разделяется также на отдельные порции, которые делятся на кадры. Каждая порция содержит значительно больший объем информации, чем при линейном изложении. Основной кадр порции завершается вопросом, ответ на который учащийся может выбрать из предложенных здесь же 2—4 вариантов, из которых один-два правильные. Против каждого из приведенных ответов указана страница, к которой должен обратиться учащийся, выбрав тот или иной ответ. Если ответ учащийся выбрал верно, он на соответствующей странице получает новое задание, а при неверном ответе ему дается на соответствующей странице разъяснение его ошибки. Приведем пример на изложение понятия степени.

«Мы знаем, что результат умножения чисел называется произведением этих чисел. Интересным является случай, когда сомножителями оказываются равные числа. В примере $3 \times 3 = 9$ число 3— сомножитель; одно и то же число может быть сомножителем и более чем два раза.

Чему равно произведение, если число 2 используется в качестве сомножителя 3 раза?

Ответ	См. страницу
6	2
8	4
9	3 »

Допустим, что учащийся подумал, что ответ задачи будет 6. На странице 2 он читает следующий текст:

«Твой ответ: если число 2 берется сомножителем 3 раза, то произведение равно 6 — неверен. Ты просто использовал 2 и 3 как сомножители: $2 \times 3 = 6$. От тебя требуется найти ответ, если взять число 2 сомножителем 3 раза, т. е. $2 \times 2 \times 2 = ?$

Теперь вернись к странице 1 и выбери верный ответ».

Предположим, что учащийся выбрал ответ 9. На странице 3 он читает:

«Твой ответ: если число 2 берется сомножителем 3 раза, то произведение будет равно 9 — неверен, так как ты взял сомножителем число 3, а не число 2 ($3 \times 3 = 9$). Тебе было предложено взять число 2 сомножителем 3 раза: $2 \times 2 \times 2 = ?$

Теперь вернись к странице 1 и выбери верный ответ».

Предположим, что учащийся с самого начала выбрал ответ 8. На странице 4 он читает:

«Твой ответ 8 верен. $2 \times 2 \times 2 = 8$.

Короче в математике произведение равных сомножителей записывается так: $2 \times 2 \times 2 = 2^3$.

Аналогично, произведение $2 \times 2 \times 2 \times 2$ может быть записано как 2^4.

Чему равно 3^4?

Ответ	См. страницу
$3^4 = 3 \times 4 = 12$	7
$3^4 = 4 \times 4 \times 4 = 64$	9
$3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$	10 »

Как видим, разветвленная система изложения может направить мысль учащегося по неправильному пути, но далее учащийся видит ошибочность своего выбора. Работая по этой системе, учащийся получает полезные навыки работы с книгой. Основные недостатки разветвленной системы изложения:

а) Огромный объем учебного материала.

б) Учащийся в большой мере «угадывает», а не «решает».

в) Беспорядочное расположение учебного материала.

Вероятно, что в «чистом виде» у нас не привьется программированное обучение ни с линейной системой изложения, ни тем более с разветвленной системой, элементы же программированного обучения уже давно у нас находят применение в дидактическом и задачном материале.

ГЛАВА IV

ПЛАНИРОВАНИЕ ПРОГРАММНОГО МАТЕРИАЛА ПО АРИФМЕТИКЕ В V И VI КЛАССАХ

§ 17. Организация планирования курса арифметики

Правильно построенная система планирования программного материала в V и VI классах имеет большое значение при обучении арифметике.

При планировании программного материала нельзя механически подходить к распределению числа часов по отдельным темам в прямой пропорциональности к числу часов, отводимых на эти темы в учебном плане.

При планировании материала в V классе необходимо учитывать особенности подготовки учащихся в начальных классах.

Во-первых, в настоящее время у нас существуют отдельные школы младших классов с 4-годичным сроком обучения, однокомплектные* и двухкомплектные. Во-вторых, в четвертом классе учитель преподает один все предметы. Все это надо учитывать при планировании программного материала.

Опытные преподаватели пятых классов перед планированием программного материала по арифметике определяют знания учащихся в объеме IV класса. Для этого преподаватели не только изучают оценки по материалу, который учащиеся изучали в IV классе, но вместе с тем получают и подробную характеристику каждого учащегося от учителя IV класса.

Кроме того, некоторые опытные учителя пятых классов заблаговременно начинают изучать знания учащихся IV класса. В течение всего предшествующего года они, во-первых, посещают уроки учителя IV класса. После посещения каждого урока дают соответствующие советы учителю. Во-вторых, планируют программный материал по арифметике за IV класс. В-третьих, консульти-

* Однокомплектные школы — школы, в которых один учитель одновременно ведет преподавание во всех четырех классах.

руют учителя IV класса по всем вопросам преподавания арифметики. В-четвертых, чтобы учитель начальной школы знал, какую подготовку он должен дать будущим учащимся V класса, приглашают к себе учителей четвертых классов на урок, а после урока дают соответствующие указания.

Многие учителя арифметики V и VI классов имеют тщательно составленные годовые или полугодовые планы и планы по каждой теме.

Кроме годового плана или плана по теме, учителя арифметики имеют обычно подробный конкретный план (или конспект) каждого урока.

В практике школ учителя составляют следующие планы:

1) годовой план без детальной поурочной разбивки,

2) поурочные планы по темам,

3) подробные планы на каждый урок.

Выше было указано, что в начале учебного года весьма полезно провести в V и VI классах контрольную работу (с предварительным повторением) для проверки состояния знаний и навыков и корректирования плана работы на I четверть или 1-е учебное полугодие.

На основании опыта работы школ можно сделать некоторые выводы о преподавании арифметики в средней школе.

Решение задач по арифметике в V и VI классах до настоящего времени является трудным делом.

В начальной школе в III и IV классах учащиеся решают почти все типовые задачи на целые числа, которые в V и VI классах решаются с дробными числами.

Для усвоения типовых или составных задач с дробными числами в V и VI классах надо повторить все типовые задачи с целыми числами, которые учащиеся решали в начальной школе. На повторение курса целых чисел в школе дается 25 часов. Из этого количества часов на решение задач больше пяти часов трудно выделить. Поэтому, чтобы повторить типовые задачи с целыми числами, необходимо решать эти задачи при изучении делимости чисел и при изучении обыкновенных дробей.

При повторении типовых или составных задач на целые числа надо соблюдать дидактический принцип перехода от легкого к трудному, от простого к сложному. Постепенное усложнение в тренировке при решении задач устно и письменно, во-первых, дает возможность более быстрыми темпами повторить типовые и составные задачи, решавшиеся в начальной школе; во-вторых, повышает активность учащихся в решении таких задач.

Все типовые задачи из курса начальной школы можно разбить на 8 основных типов: 1. Задачи на изменение результата действий в зависимости от изменения компонентов[1]. 2. Задачи на вычисле-

---

[1] В этот тип входят задачи на зависимость между элементами и результатами действий.

ние среднего арифметического. 3. Задачи на нахождение чисел по их сумме и разности. 4. Задачи, в которых для нахождения неизвестной величины необходимо предварительно найти разность данных величин. 5. Задачи на нахождение дроби от числа и числа по дроби. 6. Задачи на пропорциональные величины. 7. Задачи на пропорциональное деление. 8. Задачи с определенным содержанием, которые в зависимости от постановки вопроса решаются одним из вышеуказанных приемов.

Каждый из приведенных основных типов включает несколько разновидностей задач. Они должны быть расположены также по степени трудности. Так, в основном типе «Задачи, в которых для нахождения неизвестной величины необходимо предварительно найти разность данных величин» материал должен разбираться в таком порядке: сначала нахождение чисел по разности двух величин, потом задачи на исключение неизвестного при помощи вычитания и дальше на уравнивание. При изучении типа задач на пропорциональные величины надо, прежде чем решать задачи на сложное тройное правило, добиться умения хорошо решать задачи на простое тройное правило.

При составлении годового плана V класса учитель включает в него последовательное повторение типовых задач с целыми числами в начале учебного года. Но прежде чем приступить к решению задач какой-либо разновидности, надо проверить, усвоено ли решение задач предшествующего вида. При этом должна быть сохранена последовательность перехода от легкого к трудному.

При повторении целых чисел учащиеся в течение пяти уроков решают типовые задачи на целые числа. При этом объясняется, из каких частей состоит решение: а) краткая запись условия, б) составление плана решения, в) решение с объяснением или без объяснения, г) вычисления, д) запись ответа.

Это делается для того, чтобы при решении задач на делимость чисел, обыкновенные или десятичные дроби, учащиеся знали порядок решения, умели письменно оформить решение задач.

Закончив все действия с обыкновенными дробями, решив типовые задачи на материале обыкновенных дробей, переходят к изучению десятичных дробей.

При изучении десятичных дробей учитель повторяет все типы задач, которые решались на целые числа, когда изучались делимость чисел и обыкновенные дроби. Когда же будет закончено изучение всех действий с десятичными дробями, решаются задачи на все действия с обыкновенными и десятичными дробями.

При изучении целых чисел в V классе следует повторить простые задачи. Кроме того, при повторении зависимости между компонентами и результатами действий следует повторить решение задач на зависимость между компонентами и результатами действий.

Таким образом, в V и VI классах во всех темах повторяются простые и составные задачи, которые решались в I—IV классах, и дополняются продолжением типовых задач, начатых в начальной школе.

Необходимо продолжать совершенствовать навыки в решении задач, которые получили учащиеся в начальной школе, а именно:

«В IV классе учащиеся, решая задачу, должны уметь самостоятельно сделать краткую запись условия задачи, проиллюстрировать с помощью рисунка или чертежа ее содержание, провести с большей самостоятельностью, чем в III классе, разбор задачи на основе понимания связи между величинами (аналитико-синтетический разбор), наметить устный план решения, записать решение с письменными вопросами, записать решение числовой формулой, проверить решение» (Программа начальной школы).

Обучение решению типовых задач, начатое в V классе в начале учебного года, должно проводиться систематически, на каждом уроке в течение всего периода изучения арифметики в V и VI классах.

Ниже мы даем планирование программного материала по арифметике для V и VI классов. Оно является для учителя ориентировочным. Планы, разработанные в начале учебного года, после детального ознакомления с подготовкой отдельных учащихся и класса в целом могут подвергнуться соответствующему уточнению.

В процессе работы, возможно, придется вносить в план поправки, дополнения и улучшения, вызванные конкретными условиями учебной работы.

§ 18. Годовой план работы по арифметике

Пятый класс

№ п/п	Темы	Содержание	К-во часов	Повторение
		I. Натуральные числа — 40 час.		
1	Повторение и углубление пройденного в начальной школе — 25 час.	1. Нумерация и округление многозначных чисел. Римская нумерация.	2	Решение задач на целые числа.
		2. Действия с многозначными и именованными числами. Сложение и вычитание на счетах. Порядок выполнения совместных действий и скобки. Зависимость между данными числами и результатами действий над ними. Проверка действий.	8	Задачи на зависимость между компонентами и на изменение результата действий в зависимости от изменения данных.

№ п/п	Темы	Содержание	К-во часов	Повторение
		3. Законы арифметических действий и применение их к упрощению вычислений.	3	Задачи на среднее арифметическое, на смешение первого рода и на вычисление времени.
		4. Изменение результатов действий в зависимости от изменения компонентов.	5	
		5. Решение задач.	5	
		6. Контрольная работа и ее анализ.	2	
2	Делимость чисел—15 час.	1. Делимость суммы и произведения. Признаки делимости на 2, 5, 9 и 3.	5	Задачи на нахождение чисел по их сумме и разности.
		2. Числа простые и составные. Разложение чисел на простые множители. Нахождение наименьшего общего кратного.	8	Задачи на вычисление неизвестного по разности двух величин.
		3. Контрольная работа и анализ ее.	2	Задачи на исключение неизвестного при помощи вычитания.
				Задачи на предположение.
		II. Обыкновенные дроби —66 час.		
1	Преобразование дробей —14 час.	1. Понятие о дроби, правильная и неправильная дробь, исключение целого числа из неправильной дроби и обратное преобразование. Сравнение дробей по величине.	4	Задачи на исключение неизвестного способом замены. Задачи на простое тройное правило. Задачи на сложное тройное правило.
		2. Изменение величины дроби с изменением ее членов. Сокращение дробей. Приведение дробей к наименьшему общему знаменателю.	8	
		Контрольная работа.	2	
2	Сложение и вычитание дробей — 12 час.	1. Сложение дробей и смешанных чисел.	3	Задачи на пропорциональное деление.
		2. Законы сложения.	1	

№ п/п	Темы	Содержание	К-во часов	Повторение
		3. Вычитание дробей и смешанных чисел.	3	Задачи на нахождение чисел по их сумме (или разности) и кратному отношению.
		4. Решение примеров и задач на сложение и вычитание дробей и смешанных чисел.	4	Задачи на сложно-пропорциональное деление.
		Контрольная работа.	1	
3	Умножение дробей—13 час.	1. Умножение и деление дроби на целое число. Нахождение дроби от числа. Умножение целого числа на дробь.	4	Задачи на нахождение дроби от числа.
		2. Умножение дроби и смешанного числа на дробь. Умножение смешанных чисел. Произведение трех и более дробей. Законы умножения.	4	
		3. Решение примеров и задач на сложение, вычитание и умножение дробей.	4	
		Контрольная работа.	1	
4	Деление дробей—16 час.	1. Нахождение числа по данной величине его дроби. Деление целого числа на дробь.	4	Задачи на нахождение числа по дроби.
		2. Деление дроби на дробь и деление смешанных чисел. Среднее арифметическое нескольких дробных чисел. Числа взаимно обратные. Замена деления умножением на обратное число.	4	Задачи на движение: а) встречное движение; б) движение в одном направлении.
		3. Решение примеров и задач на деление совместно с другими действиями.	7	Задачи на совместную работу.
		Контрольная работа.	1	
5	Геометрический материал—11 час.	Прямой угол. Понятие о градусе и минуте. Транспортир. Площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда и куба. Объем прямоугольного параллелепипеда и куба. Построение прямоугольных и секторных диаграмм. Решение задач на действия с обыкновенными дробями.	10	Повторение решения задач на вычисление площади прямоугольника и квадрата, объема прямоугольного параллелепипеда и куба.
		Контрольная работа.	1	

№ п/п	Темы	Содержание	К-во часов	Повторение
		III. Десятичные дроби— 66 час.		
1	Десятичные дроби и их преобразование—9 час.	1. Чтение и запись десятичных дробей. Сокращение десятичной дроби и приведение десятичных дробей к общему знаменателю	6	Решение задач с обыкновенными дробями: задачи на зависимость между компонентами и на изменение результатов действий в зависимости от изменения данных.
		2. Увеличение и уменьшение десятичных дробей в 10 раз, в 100 раз, в 1000 раз и т. д.	3	Задачи на среднее арифметическое и смешение первого рода.
2	Четыре действия над десятичными дробями— 29 час.	1. Сложение и вычитание десятичных дробей. Применение законов сложения к письменным и устным вычислениям и вычислениям на счетах.	6	Задачи на нахождение чисел по их сумме и разности, по разности двух величин, на нахождение дроби от числа и числа по дроби.
		2. Контрольная работа и ее анализ.	2	
		3. Умножение десятичных дробей.	5	
		4. Деление десятичных дробей. Округление целых чисел и десятичных дробей, применение законов к устным и письменным вычислениям.	6	
		5. Решение примеров и задач на все действия с десятичными дробями.	8	
		6. Контрольная работа и ее анализ.	2	
3	Проценты— 4 часа.	7. Проценты. Понятие о проценте. Нахождение процентов числа. Нахождение числа по его процентам.	4	Решение задач на проценты.
4	Геометрический материал — 12 час.	Нахождение периметра и площади квадрата, прямоугольника, треугольника, поверхности и объема куба и прямоугольного параллелепипеда по готовым данным и по данным, полученным путем непосредственного измерения.	10	Решение задач на вычисление периметра и площади квадрата, прямоугольника и треугольника, поверхности и объема куба и прямоугольного параллелепипеда.
		Контрольная работа и ее анализ.	2	

№ п/п	Темы	Содержание	К-во часов	Повторение
5	Решение задач—12 час.	1. Решение задач. 2. Контрольная работа и ее анализ.	10 2	
		IV. Совместные действия над обыкновенными и десятичными дробями. Отношение величин и чисел. Масштаб и план—24 часа.		
1	Совместные действия над обыкновенными и десятичными дробями—16 час.	1. Запись десятичной дроби в виде обыкновенной. Обращение обыкновенной дроби в десятичную (конечную и бесконечную). Понятие о периодической дроби. Округление данных в результате действий. 2. Совместные действия над обыкновенными и десятичными дробями.	6 10	Решение задач на простое и сложное тройное правило.
2	Отношение величин и чисел. Масштаб и план—8 час.	3. Отношение чисел и величин. 4. Числовой масштаб и его применение к построению диаграмм и составлению планов. Определение по плану или карте расстояния между двумя пунктами земной поверхности. 5. Контрольная работа и ее анализ.	3 3 2	Задачи на пропорциональное деление и нахождение чисел по их сумме и кратному отношению.
		V. Измерения на местности—8 час.		
		1. Обозначение и проведение прямых на местности. 2. Измерение расстояний на местности мерным шнуром (лентой, рулеткой), полевым циркулем, шагами. Глазомерная оценка расстояний. 3. Применение эккера. Построение прямоугольного участка и вычисление его площади.	2 3 3	Решение задач на совместные действия с обыкновенными и десятичными дробями.
		VI. Повторение—12 час.		
		1. Целые числа и делимость чисел. 2. Обыкновенные и десятичные дроби. 3. Решение примеров и задач. 4. Контрольная работа и ее анализ.	3 3 4 2	

Шестой класс

№ п/п	Темы	Содержание	К-во час.	Повторение
1	Приближенные вычисления—16 час.	1. Точные и приближенные значения величин.	1	
		2. Абсолютная погрешность.	1	
		3. Значащие цифры числа.	1	
		4. Сложение, вычитание, умножение и деление приближенных чисел. Правила подсчета цифр.	10	
		5. Контрольные работы и их анализ.	3	
2	Проценты—18 час.	1. Повторение обыкновенных и десятичных дробей.	2	**Решение задач на проценты.**
		2. Понятие о проценте.	1	
		3. Три основные задачи на проценты.	7	
		4. Решение более сложных задач на проценты.	6	
		5. Контрольная работа и ее анализ.	2	
3	Пропорция—12 час.	1. Отношение. Сокращение членов отношения. Замена отношения дробных чисел отношением целых чисел.	2	Задачи на зависимость между элементами действий, на нахождение дроби от числа и числа по дроби, на вычисление площадей и объемов, на совместную работу и на движение.
		2. Пропорция и ее основные свойства.	2	
		3. Нахождение неизвестного члена пропорции и решение примеров и задач.	5	
		4. Перестановка членов пропорции.	1	
		5. Контрольная работа и ее анализ.	2	
4	Пропорциональность величин—12 час.	1. Зависимость между величинами. Пропорциональная зависимость. Прямая и обратная пропорциональная зависимость с решением задач на пропорциональные величины.	10	Задачи на изменение результатов действий в зависимости от изменения данных, на простое и сложное тройное правило, на пропорциональное деление, на нахождение чисел по их сумме и кратному отношению, на проценты.
		2. Контрольная работа и ее анализ.	2	
5	Повторение—6 час.	1. Повторение действий с обыкновенными и десятичными дробями.	3	
		2. Повторение процентных вычислений.	1	
		3. Контрольная работа и ее анализ.	2	

ГЛАВА V

ПОВТОРЕНИЕ. УСТРАНЕНИЕ ПРОБЕЛОВ В ЗНАНИЯХ УЧАЩИХСЯ

§ 19. Повторение

Педагогика уделяет большое внимание повторению пройденного, так как повторение позволяет не только закрепить знания, но способствует также замене не совсем ясных представлений и понятий более отчетливыми и точными, связывает между собой отдельные части предмета, укладывает знания в систему.

Если повторение имеет большое значение для каждого предмета, то при изучении арифметики оно тем более важно. Действительно, математические знания и навыки должны располагаться в строгой системе. Отсюда вытекает необходимость того, чтобы учащиеся имели твердые знания пройденного, на которых строится новый материал.

Если учащиеся пропускают занятия по болезни, то повторение пройденного должно носить индивидуальный характер.

Учителю в отведенное число часов надо не только пройти новый материал, но и повторить пройденный.

Неопытные учителя повторяют только то, что нужно для закрепления знаний, получаемых на данном уроке, или в лучшем случае проводят повторение после изучения отдельных тем или разделов программы в конце четверти или главным образом в конце учебного года. Программный материал, изученный в предшествующие годы, иногда вовсе не повторяется. Нередко это объясняется тем, что такие учителя не умеют организовать повторение ранее пройденного, связать его органически с новым материалом.

Начиная с первого урока и до конца учебного года более опытные учителя проводят систематическое повторение, связанное с данным уроком и с материалом предшествующих лет.

В начале учебного года, в первой половине сентября, очень полезно провести в классе контрольную работу повторительного характера. Для учащихся, обнаруживших незнание тех или иных разделов программы, организуется повторение необходимого материала или в форме индивидуальных и групповых заданий для систематических упражнений по определенному материалу (6—10 дней), или в форме консультаций под руководством преподавателя с последующей письменной или устной проверкой задания.

Рассмотрим виды повторения: а) повторение программного материала предшествующего класса, б) повторение в процессе урока текущего материала, в) повторение материала, связанного с учетом по данной теме или разделу, г) повторение материала, пройденного в учебном году, д) повторение по отдельно взятому разделу.

Для каждого вида повторения учитель арифметики к началу учебного года должен составить план повторения, поместив его в соответствующей рубрике параллельно с планом изучения нового материала. Должен быть тщательно отобран теоретический материал для повторения, а также соответствующие примеры и задачи.

Повторительный материал следует по возможности связать с текущей работой в классе, хотя вопросы повторения могут быть и не связаны с проходимым на уроке материалом.

Но во всех случаях повторение необходимо организовать так, чтобы оно вызывало интерес учащихся, помогало быстрее восстанавливать в памяти то, что намечено для повторения, и стимулировать прохождение нового материала. Это значит, что наряду с планом учителю необходимо разработать и методику повторения.

Остановимся на каждом виде повторения.

В начале учебного года в V классе изучается тема «Натуральные числа» (40 часов).

При проработке этой темы учитель выясняет, кто из учащихся и какие имеет пробелы по материалу начальной школы. Для ликвидации этих пробелов им дается соответствующий материал для повторения.

Повторяется материал, который будет часто встречаться при изучении новых тем и который придется использовать при усвоении дальнейших знаний.

Материал из программы начальной школы при повторении изучается более углубленно. Например:

а) В начальной школе, начиная с первого класса и кончая четвертым, применяют переместительный закон сложения и переместительный закон умножения, но не всегда формулируют их. При повторении надо дать формулировки законов сложения и умножения и, конечно, решать примеры с применением этих законов.

б) В пятом классе при повторении темы «Натуральные числа» надо ознакомить учащихся с изменением результатов действий в зависимости от изменения двух и более компонентов и применять это свойство при решении примеров и задач.

При повторении в V классе пройденного в начальной школе надо дать образцы решения типовых задач на целые числа. Таких задач в задачнике С. А. Пономарева и Н. И. Сырнева вполне достаточно. Необходимо повторить все типовые задачи на целые числа, которые решались в начальной школе. Чтобы это выполнить, надо при повторении первой темы показать учащимся пятых классов, как они должны дома самостоятельно решать и оформлять решение задач. Для этого на одном уроке учитель показывает образец решения задачи; рассказывает о записи условия, разборе задачи для составления плана и решении задачи с кратким объяснением.

На следующем уроке учитель проверяет, усвоили ли учащиеся объяснение предыдущего урока, и для этого дает задачу для самостоятельного решения. При самостоятельном решении задачи учитель внимательно следит за работой учащихся и дает соответствующие указания. Когда учащиеся закончат решение задачи, она проверяется с классом.

При углубленной проработке темы «Свойства арифметических действий» и применении свойств действий к устному счету преподаватель должен вести занятия так, чтобы учащиеся обосновывали этими свойствами и устные вычисления с дробями.

Повторение в процессе урока планируется на каждый урок и может состоять из 3-х видов: а) повторение материала предыдущего урока (опрос), б) повторение ранее пройденного, связанного с данным уроком, в) повторение материала, объясненного на уроке.

Повторение пройденного на предыдущем уроке проходит обычно в начале урока в виде опроса учащихся. Этот вид повторения дает возможность учителю убедиться, насколько хорошо усвоен материал прошлого урока. В связи с этим преподаватель определяет, как надо строить новый урок: начинать ли тему нового урока или надо еще раз повторить материал предыдущего урока. Поэтому намеченный план урока иногда может быть ориентировочным и в некоторых случаях может быть изменен.

Повторение, связанное с данным уроком, имеет очень большое значение. При объяснении нового материала полезно привлекать для повторения ранее пройденный материал, который логически связывается с материалом данного урока. Например, в теме урока «Нахождение неизвестного члена отношения» надо повторить нахождение компонентов действия деления; для темы «Нахождение нескольких процентов данного числа» надо повторить нахождение дроби числа; для темы «Нахождение чисел по данным процентам» — нахождение числа по его дроби.

При объяснении на уроке нового материала полезно тут же предложить ученикам повторить правило или решить пример или задачу — в зависимости от темы урока и ее усвояемости. Например, в теме урока «Умножение дроби на дробь» предлагается решить устные примеры:

$$1)\ \frac{64}{125}\cdot\frac{25}{8};\qquad 2)\ \frac{27}{125}\cdot\frac{625}{108}.$$

Повторение перед изучением темы имеет задачей подготовить учащихся к лучшему усвоению темы. Для правильной его организации необходим анализ содержания темы и установление связи с нею основного, ранее пройденного материала. Например, при прохождении а) «Сложения и вычитания обыкновенных дробей» повторяется «Нахождение НОК и свойства его»; б) для прохождения темы «Обращение десятичных дробей в обыкновенные» следует повторить признаки делимости чисел, разложение на простые множители и нахождение НОД; в) для темы «Проценты» повторяют умножение и деление обыкновенных и десятичных дробей.

Повторение в конце учебного года материала, пройденного в данном учебном году, имеет характер обозрения, синтеза пройденного материала, позволяет лучше понять связь между отдельными частями программы, восстановить в памяти содержание программы.

Повторяют основные вопросы программы годового курса с тем, чтобы прочно закрепить у учащихся основы знаний и помочь им лучше систематизировать пройденное.

Учащимся дается программа, по которой они могут вести повторение самостоятельно. Вопросы, в которых учащиеся плохо разбираются, следует повторить в классе. Остальной материал повторяется дома в систематическом порядке.

К повторению по отдельно взятому разделу можно отнести решение типовых задач. Один из трудных разделов в арифметике — это решение составных типовых задач.

Для закрепления теоретического материала решаются задачи отдельно на каждое действие с обыкновенными и десятичными дробями. На таких задачах нельзя научить решать составные задачи хотя бы средней трудности. В V классе надо решать типовые задачи в течение всего учебного года в следующем порядке.

В начале учебного года учитель повторяет решение типовых задач на целые числа в теме «Натуральные числа» и в начале темы «Обыкновенные дроби».

Затем, когда изучат действия над обыкновенными дробями, на специально отведенных уроках начинают решать составные задачи на обыкновенные дроби.

Далее, при изучении десятичных дробей продолжают повторение решения задач на обыкновенные дроби до конца изучения десятичных дробей. Наконец, когда закончат изучение всех действий с десятичными дробями, начинают решать типовые задачи с десятичными дробями на специальных уроках.

Повторение составных задач в определенной системе надо поставить так, чтобы к уроку была решена учащимися дома по крайней мере одна типовая задача повторительного характера. Задачи надо подбирать нетрудные, доступные для самостоятельной работы учащихся. Если заданная на дом задача окажется трудной, то надо решить в классе задачу такого же типа, но с небольшими числами.

Решение типовых задач при прохождении всего курса арифметики с переходом от простых к более трудным, от задач с целыми числами к задачам с обыкновенными дробями, затем с десятичными дробями способствует развитию логического мышления учащихся, закреплению нового материала, увязывает новый материал с пройденным раньше.

Подбор задач, упражнений и теоретического материала для повторения необходимо сделать до начала учебного года. В процессе же работы можно вносить те или иные коррективы.

Методические указания к повторению.

I. Решение устных примеров

Цель: 1) закрепление правил, преобразований и действий с целыми и дробными числами; 2) развитие быстрого счета.

1) При подготовке к уроку учитель подбирает такой материал, на котором или повторяются правила, пройденные на предыдущем уроке (это проводится в начале урока), или закрепляется пройденный на данном уроке материал (это проводится в конце урока).

Например, в V классе при прохождении сложения обыкновенных дробей в начале урока предлагается учащимся повторить правила сложения дробей с одинаковыми знаменателями и с разными знаменателями и даются такие примеры для устного решения:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2};\ \frac{1}{3}+\frac{1}{3};\ \frac{1}{3}+\frac{2}{3};\ \frac{1}{4}+\frac{1}{4};\ \frac{1}{4}+\frac{3}{4};\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4};\ \frac{1}{2}+\frac{3}{4};$$
$$\frac{1}{3}+\frac{1}{6};\ \frac{1}{3}+\frac{5}{6};\ \frac{1}{2}+\frac{1}{3};\ \frac{1}{2}+\frac{2}{3}$$

Подобные упражнения проводятся почти на каждом уроке.

2) Для развития быстрого счета учитель подбирает по определенному плану материал на простые (в одно действие) и на составные (в 2 и более действий) примеры и отводит на их решение 3—5 минут в начале, в середине или в конце урока в зависимости от состояния внимания класса и содержания проходимого материала; например, если учащиеся утомились слушать, то полезно сделать «зарядку» быстрым счетом, предложив для этого соответствующие примеры. Здесь могут быть даны примеры и не относящиеся к проходимому на данном уроке материалу.

Возьмем еще пример: учащиеся усвоили намеченный по плану материал урока. Полезно использовать оставшееся время для устного счета. В V классе можно дать примеры:

$$\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{8};\ \frac{9}{16}\cdot 16;\ \frac{9}{16}\cdot 32;\ 1:\frac{2}{9};\ 1:\frac{2}{15};\ 2:\frac{2}{15};\ 1:\frac{1}{10};\ 1:0{,}1;\ 1:0{,}01;$$

2 : 0,2; 17 : 0,17; 2 : 0,1 и т. д. (все это, разумеется, не раньше изучения действий с дробями).

В VI классе: найти 3% от 8 руб.; 4% от 8 руб.; 5% от 20 руб.; 12% от 15 руб.; 6% от 12 *м*; 72 руб. разделить на 2 части в отношении 4 : 5 и т. д. В некоторых случаях указанные примеры могут быть выражены в виде задач.

II. Письменное решение сложных примеров

Цель при повторении: 1) восстановить знания тех, кто пропустил много занятий; 2) предупредить возможность забывания пройденного.

Методика: учитель тщательно проверяет классные самостоятельные, домашние и контрольные работы и ведет учет ошибок при вычислении. Затем, по мере накопления этих ошибок, сам составляет примеры простые и составные. Такие примеры могут быть даны отдельным учащимся, группам учащихся и целому классу с обязательной последующей проверкой. Если при проверке окажутся те же ошибки, то аналогичные примеры даются еще раз.

III. Решение задач

Цель повторения: 1) учащиеся упражняются в письменных вычислениях; 2) восстанавливают в памяти решение задач данного типа; 3) развивают умение решать задачи данного типа; 4) развивается логическое мышление учащихся.

Методика: если учитель намечает повторить задачи на целые числа при изучении нового материала, то при планировании он указывает, какие типы задач и в каком порядке будут решены. При этом необходимо учитывать тему каждого урока. Если тема урока трудная и на ее изучение приходится дать много примеров и задач, то и нецелесообразно здесь же давать задачу на повторение.

Приходится учитывать и умение учащихся решать тот или иной тип задач.

Порядок повторения типовых задач имеется в сборнике задач для V и VI классов. Что же касается устных задач, то учитель может использовать сборник для устных вычислений на целые числа Я. Ф. Чекмарева и В. Л. Эменова, где найдет много типовых задач с целыми числами.

К 1 мая программа арифметики в V классе обыкновенно выполняется. После этого надо начинать повторение обзорного характера по темам: 1) Целые числа, 2) Делимость чисел, 3) Обыкновенные дроби, 4) Десятичные дроби.

Учебный год заканчивается решением наиболее трудных и сложных задач всех типов с повторением всех изученных в году правил.

В VI классе в первой четверти при прохождении учебного материала отводится время на повторение пройденного в V классе. Здесь так же, как и в V классе, к каждому уроку ученик решает дома хотя бы одну типовую задачу. Устный счет и устные вычисления при повторении должны найти свое место.

Изучение арифметики в VI классе заканчивается повторением обзорного характера по темам:

1) Обыкновенные дроби.
2) Десятичные дроби.
3) Обращение обыкновенных дробей в десятичные и обратно.
4) Проценты.
5) Пропорции.
6) Пропорциональность величин.
7) Деление числа на части прямо и обратно пропорционально данным числам.

§ 20. Устранение пробелов в знаниях учащихся

Для ликвидации отставания учащихся, которое получается в результате пропусков занятий по болезни и другим причинам, педагогика рекомендует учителям проводить индивидуальные занятия с отстающими учащимися.

Из практики известно, что учителя арифметики V и VI классов средней школы организуют с отстающими учащимися индивидуальные занятия; они или сами проводят такие занятия, или прикрепляют неуспевающего к успевающему учащемуся того же или старшего класса.

Товарищеская помощь не только устраняет пробелы знаний отстающих учащихся, но оказывает благотворное влияние и на того, кто ее осуществляет.

Отставание в знаниях от учащихся своего класса заключается не только в том, что ученик не знает какого-либо материала за предыдущие годы, но и в том, что из-за пропусков занятий, хотя бы и по уважительным причинам, он не в состоянии усваивать новый текущий материал, пробел в его знаниях расширяется, отставание от общего уровня класса увеличивается.

Отставание может быть устранено, если учащимся будет оказана своевременная помощь. Поэтому необходимо оказывать помощь учащимся: 1) при занятиях на уроках, 2) при самостоятельном выполнении учащимся заданий по теме, которая им пропущена, 3) на дополнительных занятиях, 4) на консультации.

На уроках надо осуществлять индивидуальный подход и оказывать помощь отстающим, но до известного предела, чтобы не снизить продуктивность урока. Нельзя вести урок, ориентируясь только на неуспевающих, так как это понижает уровень преподавания и замедляет темп прохождения учебного материала.

Устранить отставание учащегося, только привлекая его к самостоятельной работе, трудно, так как во многих вопросах он сам разобраться не может, в иных случаях ему приходится тратить на это слишком много труда и времени.

Помощь учителя будет тем эффективнее, чем лучше он представляет состояние знаний учащихся. Некоторые учителя ведут так называемые «лицевые счета» учащихся.

В отдельной тетради каждому учащемуся отводятся отдельные страницы, в которых отмечаются:

1) пробелы по отдельным темам и разделам программы;

2) мероприятия для ликвидации пробелов:

а) индивидуальные задания учащемуся и сроки их выполнения;

б) отметки о посещении учащимся консультаций;

3) результаты работы учащегося:

а) качество усвоения учащимся учебного материала;

б) что не выполнено.

При этом нужно заметить, что в «лицевом счете» учитель не ставит оценок, как в классном журнале. Он отмечает продвижение знаний учащегося во время индивидуальных занятий. Эту запись полезно иметь, потому что запомнить пробелы в знаниях каждого ученика трудно. Кроме того, записи стимулируют учащегося к устранению пробелов.

Такой учет помогает осуществлять индивидуальный подход к учащимся, всесторонне, объективно оценивать их знания, оказывать своевременную помощь. Для этого следует специально проводить консультации, рассматривать на них «лицевые счета» учащихся.

§ 21. Повторение в V классе материала, пройденного в начальной школе

Прочность арифметических знаний можно определить при повторении арифметики в пятом классе, которое проводится в первой половине сентября.

Проверка в это время вычислительных навыков и навыков решения задач может показать, насколько прочно учащиеся усвоили программу по арифметике в четвертом классе.

Выявление недочетов в знаниях и навыках по арифметике в первых числах сентября даст возможность учителю, во-первых, узнать пробелы в знаниях учащихся и принять меры для ликвидации пробелов при повторении. Во-вторых, даст возможность выявить, какие недочеты и у кого из учащихся следует ликвидировать в первые месяцы учебного года различными способами: а) во время классных занятий, если большинство учащихся имеют одинаковые ошибки, б) во время дополнительных занятий, если незначительное количество учащихся имеют те или иные недочеты, и в) в форме индивидуальной работы с отдельными учащимися.

Мы рекомендуем проводить в первой половине сентября тщательную проверку знаний и навыков учащихся по арифметике, с которыми они пришли в школу после летних каникул.

Рассмотрим опыт такой проверки в одной из школ.

Программный материал четвертого класса был разбит на несколько тем. Для проверки знания каждой темы были составлены примеры и задачи.

Перед повторением каждой темы учащимся давалась самостоятельная работа, состоящая из примеров и задач.

Самостоятельные работы писались в отдельных тетрадях. За самостоятельную работу в журнале оценка не ставилась, об этом знали учащиеся. Большое внимание было обращено на то, чтобы учащиеся спокойно выполняли самостоятельную работу. Самостоятельные и контрольные работы давались одни и те же: в мае — в IV кл. и в сентябре — в V кл. Учителя проверяли самостоятельные работы в этот же день.

После подробного анализа каждой проведенной самостоятельной работы учитель намечал план устранения обнаруженных ошибок. Исправление ошибок выполнялось разными способами: фронтально в классе, отдельно с небольшой группой и индивидуально в зависимости от количества учащихся, сделавших ошибки в примере и в той или иной задаче. Если в примере или задаче многие учащиеся сделали ошибку, то она исправлялась в классе фронтально; если же небольшое число учащихся сделали ошибку (три-четыре ученика), то исправление ошибок проводилось только с этими учащимися; если ошибку сделали один-два человека, то для исправления ошибки этим учащимся давалась индивидуальная работа, которую они выполняли под наблюдением учителя.

Таким образом, самостоятельные работы давали возможность обнаружить, во-первых, что́ надо повторять; во-вторых, как повторять: фронтально со всем классом, с небольшой группой учащихся или индивидуально с одним или двумя учащимися.

В конце повторения, когда работа над ошибками была закончена, учащимся предлагалась контрольная работа.

Примерные самостоятельные работы, которые можно дать в первой половине сентября в V классе перед повторением пройденного в начальной школе

Работа первая (самостоятельная)

1. Записать размеры земного шара цифрами и округлить до одного миллиона.

Земной шар имеет следующие размеры: длина диаметра — двенадцать миллионов семьсот тринадцать тысяч семьсот двадцать шесть метров, длина меридиана — сорок миллионов восемь тысяч пятьсот пятьдесят два метра, длина экватора — сорок миллионов семьдесят пять тысяч семьсот четыре метра, поверхность земного шара — пятьсот девять миллионов девятьсот тысяч семьсот четырнадцать квадратных километров.

2. Прочитать и записать арабскими цифрами: VI, IX, XIV, XXI.

3. Решить примеры и проверить правильность решения:

а) $569\,487\,652 + 40\,513\,349$
б) $2\,709\,608\,079 - 296\,392\,927$

4. а) 8 лет 7 мес. + 5 лет 10 мес. б) 5 *кг* 80 *г* — 2 *кг* 95 *г*

5. Найти x:

а) $x - 6\,054\,803 = 4\,946\,198$ б) $30\,010\,101 - x = 29\,019\,196$
в) $x + 7\,908\,905 = 10\,010\,003$

6. Выполнить устно вычисление, пользуясь законами сложения: $7238 + 9687 + 2762$.

7. В прошлом году сельскохозяйственный комбинат получил от своих коров 27 170 000 *л* молока. Это на 4 830 000 *л* меньше, чем намечено получить в этом году. Сколько литров молока намечено получить в этом году?

Работа вторая (самостоятельная)

1. Решить примеры и проверить:

а) 6087×8090 б) $136\,174\,983 : 2569$

2. а) 7 *ц* 9 *кг* $\times$ 46; б) 246 *м* 60 *см* : 6 *м* 85 *см*

3. Найти x:

а) $586 \times x = 2\,346\,930$; б) $379\,714 : x = 746$; в) $x : 976 = 7009$.

4. Выполнить вычисления, применив свойства переместительности и сочетательности и прием последовательного умножения:

а) $18 \times 25 \times 2 \times 4$; $3 \times 25 \times 17 \times 4$; $2 \times 2 \times 19 \times 5 \times 5 \times 3$

б) 25×12; 150×8; 12×15; 350×6.

5. а) Рабочие завода получили в течение года некоторое количество путевок в санатории и в 3 раза больше путевок в дома отдыха. В дома отдыха поехали 3039 человек. Сколько человек отправилось в санатории?

б) На месте старых домов с общим числом жителей в 416 человек построен большой дом. Сколько человек живет в большом доме, если во всех старых домах было в 8 раз меньше жителей, чем в большом доме?

Работа третья (самостоятельная)

1. $386\,010 - (1102 - 398) \times 409 - 339\,014 : 169$

2. Передовое звено каменщиков уложило в 1-й день 14 500 кирпичей, во 2-й — на 80 кирпичей больше, чем в 1-й, в 3-й — 20 150, а в 4-й день — на 2800 кирпичей больше, чем в 3-й. Сколько кирпичей в среднем укладывало звено за один день?

3. Луг имеет длину 1 *км* 250 *м*, ширину 800 *м*. С каждого гектара накосили 120 *ц* травы. Сколько тонн сена получилось из этой травы, если из 24 *ц* травы получается 5 *ц* сена?

4. Длина амбара 12 *м*, ширина 10 *м*, а высота в 3 раза меньше длины. $\frac{1}{3}$ объема амбара занята рожью и пшеницей, причем рожью в 3 раза меньше, чем пшеницей. Найти вес этой ржи, если 1 *куб. м* ее весит 700 *кг*.

Контрольная работа

1. $380\,001-(28\,765+30\,968+206\,810)+256\times408+77\,952:384$.

2. Доменщики обязались за год выплавить 2520 *т* чугуна сверх плана, а выплавили сверх плана за первые 3 месяца 613 *т* 6 *ц* чугуна и за следующие 3 месяца — 664 *т* 4 *ц*. Сколько чугуна выплавляли доменщики в среднем за месяц сверх взятого ими обязательства (в первые полгода)?

3. На водопроводной станции были устроены четыре отстойника в виде подземных бассейнов прямоугольной формы: длина каждого 75 *м*, ширина 50 *м*, глубина 4 *м*. Сколько ведер воды вмещали эти отстойники, если в 10 *куб. м* воды 813 ведер?

Первая тема в V классе «Повторение и углубление пройденного в начальной школе».

На нее отводится по годовому плану 25 часов.

№ п/п	Содержание урока	К-во часов	Замечания
1	2	3	4
1	Нумерация и округление многозначных чисел. Раздробление и превращение составных именованных чисел. Римская нумерация от 1 до 100.	2	Обратить больше внимания на разряды, классы, поместное значение цифр и значение нуля; умение читать и записывать многозначные числа, которые имеют в середине нуль. Указать на различие значения слов «цифра» и «число». Уделить внимание правилу и практике округления многозначных чисел. Первое знакомство с приближенными числами.
2	Сложение и вычитание многозначных и именованных чисел. Названия компонентов сложения и вычитания. Свойства (законы) суммы и разности.	2	Обратить внимание в действии вычитания на случай, когда число единиц отдельного разряда уменьшаемого меньше числа единиц соответствующего разряда вычитаемого. Изучение свойств суммы и разности объединить с устными вычислениями.
3	Зависимость между компонентами и результатами действий сложения и вычитания. Проверка результата действий сложения и вычитания. Изменение суммы и разности в зависимости от изменения компонентов.	3	Материал этих уроков наряду с письменными вычислениями большею частью повторяется на устных примерах и задачах. На этих же уроках проверяются свойства сложения и вычитания.
4	Умножение многозначных и именованных чисел. Названия компонентов умножения. Свойства (законы) произведения.	3	Обратить внимание на случаи умножения, когда во множимом и множителе в середине или на конце имеются нули. Изучение свойств произведения объединить с устными вычислениями.

№ п/п	Содержание урока	К-во часов	Замечания
1	2	3	4
5	Деление многозначных и именованных чисел. Названия компонентов деления. Свойства (законы) частного.	3	Обратить внимание на случаи деления, когда в делимом, делителе и частном в середине и на конце имеются нули. Изучение свойств частного применить на устных вычислениях.
6	Зависимость между компонентами и результатом действий умножения и деления. Проверка результата действия умножения и деления при изменении компонентов.	3	На этих уроках применяются наряду с письменными и устные вычисления. В это же время повторяются и свойства (законы) произведения и частного.
7	Порядок действий и скобки.		Порядок действий и скобки объясняются на решении задач в виде числовых формул.
8	Решение задач на среднее арифметическое нескольких чисел.	2	Решение задач проводится по следующему плану. Сначала учитель сам дает образец решения задачи этого типа с записью на доске условия задачи, плана и решения с кратким объяснением. Учащиеся записывают в свои тетради решение задачи и по этому образцу решают типовые задачи; затем ученики в классе решают задачу такого же типа самостоятельно. Наконец, учащимся на дом предлагаются такого же типа одна или две задачи.
9	Решение задач на изменение результатов действий в зависимости от изменения компонентов и на вычисление площадей и объемов.	5	Особенно обращается внимание на запись условия, плана решения с кратким объяснением.
10	Контрольная письменная работа на повторение целых чисел и анализ ее.	2	Для контрольной работы даются задачи типа «Нахождение среднего арифметического» и «Изменение результатов действий в зависимости от изменения компонентов», пример на порядок действий и скобки с числовым материалом на трудные случаи сложения, вычитания, умножения и деления целых чисел.

В вычислениях учащиеся делают следующие ошибки:

$$(5 \cdot 5 + 3) \cdot 2 = 10 \cdot 8 + 6; \qquad 5 \cdot (2 + 7) = 10 + 7$$

Такие ошибки показывают, что учащиеся не уяснили распределительного свойства произведения.

Неумение определить неизвестный компонент вызывает большие затруднения не только на уроках математики, но и на уроках физики и химии.

При посещении школ мы обнаружили следующие ошибки, которые показывают незнание зависимости между компонентами действий:

1) $x - 12 = 15$; $\qquad x = 15 - 12$;
2) $3x = 13$; $\qquad x = 13 - 3$;
3) $x : 6 = 18$; $\qquad x = 18 : 6$;
4) $8 : x = 12$; $\qquad x = 12 : 8$ или $x = 12 \cdot 8$

ГЛАВА VI

УЧЕТ УСПЕВАЕМОСТИ ПО АРИФМЕТИКЕ

§ 22. Значение учета успеваемости и его целевая установка

В постановлении ЦК ВКП(б) от 25 августа 1932 г. «Об учебных программах и режиме в начальной и средней школе» говорится: «В основу учета школьной работы должен быть положен текущий индивидуальный систематически проводимый учет знаний учащихся. Преподаватель должен в процессе работы внимательно изучать каждого ученика».

Остановимся на проверке и оценке знаний по арифметике.

Учет знаний — это система приемов, при помощи которых объективно устанавливается состояние знаний и навыков класса и каждого учащегося в отдельности. Учет знаний учащихся имеет большое значение для учащихся и учителя. Правильно организованный и систематически проводимый учет знаний учащихся помогает определять недостатки в работе учащихся и учителя и устранять их. Учет не только выясняет недостатки в знаниях учащихся, но и заставляет учащихся настойчиво работать над лучшим усвоением программы, учителя он побуждает постоянно совершенствовать качество работы.

Систематически проводимый учет имеет, кроме того, воспитательное значение: дисциплинирует учащихся, воспитывает выдержку, настойчивость, приучает аккуратно и своевременно выполнять задания.

При помощи учета учитель определяет степень усвоения знаний учащимися, выясняет, какие части программы усвоены слабо и почему, кому из учащихся надо оказать помощь и какую именно.

Учет успеваемости учащихся — один из основных элементов педагогического процесса. Учет показывает состояние знаний учащихся по данному предмету. В преподавании арифметики учет особенно важен, ввиду тесной связи нового с пройденным. Успешное продвижение вперед возможно только при условии достаточного усвоения предшествующего материала.

Цель учета знаний учащихся:

1) Определить, в какой мере выполняется программа.

2) Определить качество усвоения материала (систематичность, сознательность, прочность усвоения материала учащимися).

3) Выяснить степень подготовки учащихся к самостоятельной работе и умение применять усвоенные знания на практике.

4) Выявить качество работы учителя.

§ 23. Основные требования к учету

Учет должен проводиться систематически. Формы учета должны быть разнообразны, учет должен быть индивидуальным, углубленным. Нельзя при учете ограничиваться одним-двумя вопросами: учитель должен выяснить, насколько каждый учащийся усвоил данный вопрос в его связи с ранее изложенным. Учет должен охватить все стороны работы по арифметике: знание теории (в доступной детям форме), умение решать задачи, умение правильно и красиво оформлять работы (расположение записей, чертежей, цифр, знаков). При повседневном учете отстающие учащиеся должны пользоваться наибольшим вниманием учителя: во время уроков их следует чаще спрашивать, их самостоятельные работы должны проверяться в индивидуальном порядке.

Опрос учащегося должен быть не только средством контроля его работы: ответ учащегося должен помогать более глубокому уяснению темы как отвечающему, так и классу в целом. Класс следит за ответом, за предложенными отвечающему дополнительными вопросами, за исправлением неточностей в изложении и т. п.

§ 24. Виды учета

Основные виды учета: предварительный, текущий, итоговый.

1. Цель предварительного учета — выяснить уровень знаний учащихся по данному разделу или теме после более или менее продолжительного перерыва в учебе.

По программе изучение арифметики построено так, что в каждом классе оно начинается с повторения. За период летних каникул в состоянии знаний, умений и навыков у учащихся происходят изменения, иногда очень существенные. В подавляющем большинстве случаев учащиеся забывают часть пройденного и у них слабеют навыки. Не знать эти изменения в начале учебного года — значит начать учебные занятия на неясной для преподавателя, непрочной базе.

Вот почему с первого урока в новом учебном году при повторении опытные учителя ставят перед собой задачу — отчетливо выяснить степень подготовки каждого учащегося, отдельные недостатки в знаниях и недостатки в применении вычислительных навыков.

На уроках повторения учителя проводят разнообразные упражнения — письменные и устные — на темы, имеющие особенно важное значение для дальнейшего усвоения арифметики. Контрольная письменная работа дается сравнительно нетрудная, так как трудную работу выполнят только некоторые учащиеся, и установить степень индивидуальной подготовленности такой работой не удается. Устные ответы и письменные работы учащихся тщательно проверяются и анализируются преподавателем. Главное назначение предварительного учета, проводимого в начале учебного года, заключается в том, чтобы установить, что прочно сохранилось в памяти учащихся, что ими позабыто, какие ошибки типичны для класса, каковы характерные ошибки у отдельных учащихся.

2. Цель текущего учета — проверка знаний и навыков учащихся по материалу, пройденному за тот или иной определенный промежуток времени.

Формами ежедневного текущего учета являются: а) устный опрос учащихся, б) наблюдение за самостоятельной работой учащихся в классе, в) классная проверка домашних заданий, г) внеклассная проверка ученических работ учителем.

Кроме ежедневного текущего учета, должен производиться периодический учет. К такому учету относятся: а) опрос после изучения раздела (темы), б) краткие 10 — 15-минутные контрольные работы по отдельным вопросам, в) контрольная работа по основному разделу темы.

Повседневное наблюдение за работой учащихся имеет большое значение в системе учета знаний учащихся по арифметике.

Какую форму учитель избирает для фиксации наблюдения за работой учащихся, зависит от многих условий, — это может быть алфавитная тетрадь, где каждому учащемуся отведена страница, могут быть карточки для отдельных учащихся или просто отдельные заметки в блокноте учителя, которые просматриваются в нужных случаях.

С целью всестороннего изучения учащихся и оказания им своевременной помощи наблюдения за учащимися должны вестись при всех видах классной и внеклассной работы. Во время объяснений преподаватель следит, как реагирует тот или иной учащийся на объяснения, легко или трудно их воспринимает. В то время, когда один учащийся отвечает у доски, а класс слушает, отдельные учащиеся также должны быть в поле зрения преподавателя; степень их участия в общей работе, подготовленность каждого к работе — все должно учитываться преподавателем. Особенно внимательно учитель наблюдает за учащимися во время самостоятельной индивидуальной или фронтальной работы в классе, помогая им в случае затруднений. Он отмечает в своей тетради или в личной карточке учащегося качество ответов при фронтальной работе, при проверке вычислительных навыков, при устном решении примеров, задач. Наблюдения могут фиксироваться при проверке домашних работ, при проверке контрольной работы.

Преподаватель использует для учета знаний и домашние тетради учащихся.

Проверка домашних тетрадей и оценка выполнения письменных работ необходимы.

К проверке выполнения домашних работ можно привлекать самих учащихся. Для этого класс делится на группы (обычно группу составляют учащиеся, сидящие в одном ряду парт), в каждой группе выделяется «учетчик»; он должен предварительно проверять, выполняется ли задание каждым учащимся его группы, т. е. факт выполнения или невыполнения; результаты этой проверки с указанием причин невыполнения сообщаются учителю вместе со сведениями об отсутствующих учениках. Этот прием очень дисциплинирует класс и повышает чувство ответственности за выполнение работы.

Проверку домашней работы и быстрый просмотр всех тетрадей с домашними заданиями (ученики раскрывают тетради, учитель обходит ряды и делает соответствующие замечания и отметки в своей тетради) надо проводить, как правило, на каждом уроке. На проверку домашних работ учитель уделяет 5—6 минут в начале урока. Если при проверке окажется, что неправильные решения получились у многих учащихся, то такие решения надо исправить на классной доске с помощью коллективной беседы, если ошиблись 2—3 человека, они обязаны исправить решение по указанию учителя. Если учащийся не выполнил домашнюю работу, учитель отмечает это в своей тетради. Каждый ученик, вызываемый к доске, подает учителю тетрадь. За время ответа учитель может бегло просмотреть качество работы. Но, кроме того, учитель должен брать на проверку домашние работы всего класса.

При проверке учитель обнаруживает не только невыполнение домашней работы, но видит и качество выполнения: неправильную запись, неправильную формулировку и т. п. Неверно написанные формулировки и слова учитель исправляет.

На каждом уроке учитель спрашивает возможно большее число учащихся, проверяет выполнение ими домашних заданий и усвоение пройденного материала. Учитель планирует заранее вопросы, которые будут предлагаться, а также фамилии учеников, которых следует спросить у доски, и тех, которые будут опрошены с места. В случае, если ученик не выполнил домашнего задания или не усвоил материала, учитель, выяснив причину этого, или назначает новый опрос на следующий урок, или заставляет выполнить работу в тот же день после занятий.

3. Итоговый учет по теме позволяет привести в систему все знания, полученные учащимися в процессе работы, и проводится после краткого повторения темы. Для учета по теме многими учителями разрабатываются вопросники. Вопросы ставятся в

определенной системе так, чтобы в ответах учащихся составлялось последовательное изложение темы или части темы.

Учет по теме целесообразно провести по наиболее существенным вопросам, для ответа на которые требуется хорошее усвоение материала, работа мысли, сообразительность. К вопросам, которые ставились при изучении темы, полезно добавить более сложные обобщающие вопросы. Надо указать учащимся, на чем сосредоточить внимание при подготовке к опросу, что можно только просмотреть и что можно опустить.

Итоговый учет проводится в конце учебной четверти и в конце учебного года. Прежде чем провести итоговый учет, материал повторяется в определенной системе с сосредоточением внимания на существенных вопросах. Затем проводится опрос учащихся и дается контрольная работа.

§ 25. Устный опрос

Для определения качества усвоения пройденного материала наиболее употребительной формой является вызов учащегося к доске.

При устном опросе учитель определяет, как учащиеся усвоили технику устных и письменных вычислений; умеют ли они давать объяснения; насколько прочно усвоили пройденное. При решении задач учитель должен обратить внимание на то, как учащиеся разбираются в условии задачи, насколько правильно выбирают действия для решения того или иного вопроса, в какой мере обнаруживают остроту соображения, смекалку, наконец, работа учащихся у доски покажет, каковы у них навыки внешнего оформления вычислений (правильность и аккуратность записей, умелое их расположение).

Опрос в начале урока позволяет учителю определить знание материала предшествующего урока. Соответственно данным устного опроса можно на уроке дать краткое или более детальное объяснение нового материала.

Устный опрос в процессе урока (отдельные контрольные вопросы) проверяет внимание класса и понимание хода объяснений, а опрос после объяснения нового материала выявляет степень усвоения.

В план урока учитель включает вопросы, которые будут предлагаться учащимся при устном опросе. Опытные преподаватели не ограничиваются вопросами по материалу данного урока; они пишут в плане вопросы и на ранее пройденное. Если учитель введет в систему на каждом уроке спрашивать учащихся из пройденного ранее, то учащиеся, готовя задание по текущему материалу, сами повторяют пройденный материал, который почему-либо хуже удержался в памяти, так как знают привычку учителя спрашивать что-либо из старого. При этом учителя спрашивают иногда ранее пройденный материал без связи с новым заданием.

В связи с такими дополнительными вопросами на уроке учащиеся серьезнее относятся к каждому уроку, у них развивается умение сопоставлять новый и пройденный материал, делать выводы; у учителя появляется возможность судить о прочности, глубине знаний учащихся.

Устный опрос может вестись в двух основных формах: в вопросо-ответной форме и в форме связного ответа отдельных учащихся.

Проверка путем вопросов имеет существенное значение, так как такой опрос быстро мобилизует знания учащихся, приучает их быть внимательными, учащиеся приучаются быстро делать выводы, сравнения, сопоставления; такой опрос учит их оценивать свои и чужие ответы и вносить в них поправки, приучает к точным формулировкам, к правильному словесному выражению своих мыслей, закрепляет знания учащихся.

Устный опрос в форме вопросов следует проводить так, чтобы нескольким учащимся в конце урока можно было поставить оценки. Это стимулирует подготовку к опросу.

При устном опросе в V — VI классах обычно применяется вопросо-ответная форма, но используется и форма связного ответа отдельных учащихся, например, опытные преподаватели вызывают ученика к доске и предлагают ему записать на доске краткое условие решаемой задачи, устно в монологической форме разобрать задачу методом анализа, сказать план решения задачи, записать ее решение на доске и дать устно объяснение решения задачи. Учащийся связно, последовательно излагает предложенный материал урока или пройденной темы. Опрашиваются в течение урока два-три учащихся. Классу приходится внимательно слушать, так как по окончании изложения проводится разбор ответа, вносятся исправления, дополнения к ответу. Таким образом, весь класс участвует в работе.

Задавая вопрос, надо придерживаться правила: вопрос ставится всему классу один раз и не повторяется; отвечает на вопрос вызванный ученик. Вопросы должны быть точны, определенны и немногословны. После недостаточно полного и связного ответа учитель предлагает другим учащимся исправить недочеты ответа или дать ответ более полный и точный. Когда вызванный ученик отвечает, то все остальные учащиеся класса должны внимательно слушать его. Обычно, когда учащиеся заметят ошибку в ответе, немедленно поднимают руку. Это хорошо, что все учащиеся активно участвуют в работе. В то же время здесь имеется и недостаток — поднятием руки с мест учащиеся вызывают волнение у отвечающего. Он начинает при ответе думать не только о том, что дальше ему отвечать, но и какую ошибку он уже допустил при ответе. Поэтому надо предложить учащимся поднимать руку только по окончании ответа вызванного ученика. Замечания по прослушанному ответу имеют большое значение. Это очень важно для определения знания данного вопроса остальными учащимися.

Учитель предлагает одному из учащихся, вне зависимости от того, поднял ли он руку, сделать замечания по выслушанному ответу. Замечания учеников учитель может оценить устно: «верно», «хорошо» или «неверно». Тому и другому учащемуся может быть поставлена соответствующая оценка в журнале, если учащийся ответил на несколько вопросов.

Такой устный опрос дает возможность спокойно отвечать учащемуся, который вызван к доске или столу, а учащимся с мест активно участвовать в работе. Этот способ проверки повышает знания и дисциплину всего класса.

Длительный опрос применяется также на уроках повторения. Намеченное содержание раздела разбивается на вопросы, которые записываются на карточках. В начале урока эти карточки раздаются вызванным учащимся. Во время урока в данном случае опрашиваются 4—5 учащихся. Класс участвует в исправлении ответов опрашиваемых учащихся, и таким образом все учащиеся привлекаются к работе.

Иногда учителя практикуют «уплотненный» опрос. Он заключается в следующем. Вызывается сразу 3—4 ученика. Один отвечает устно, другой решает на доске пример или задачу, остальные 2—3 ученика готовятся к ответу на вопросы, заданные им учителем. Очень важно, чтобы во время такого опроса весь класс участвовал в работе.

Проводить «уплотненный» опрос — дело трудное, его может применять не каждый учитель: трудно следить за 3—4-мя вызванными для ответа учениками, не оставляя без внимания всего класса в целом.

Применяется фронтальный опрос учащихся, проводимый по окончании какого-либо большого раздела программы. Цель такого опроса — кроме учета знаний учащихся — путем поставленных в системе вопросов закрепить, углубить пройденное, привести его в связь с ранее изученным. Учащиеся готовятся к фронтальному опросу: основные вопросы темы или раздела, по которым они будут опрашиваться, сообщаются им за несколько дней до опроса. Некоторые учителя записывают вопросы на отдельных карточках, которые раздают учащимся при опросе.

§ 26. Письменные контрольные работы

Учет при помощи письменной контрольной работы имеет те преимущества, что он позволяет на одном уроке охватить всех учащихся класса и за небольшой промежуток времени проверить каждого из них по сравнительно широкому кругу вопросов.

Контрольные работы применяются двух видов: а) краткие, рассчитанные на 10—15 минут; цель их — укрепление навыков по проходимой теме; б) продолжительные работы (на 1 академический час) по окончании темы, раздела курса или в конце учебной четверти.

Если в течение изучения темы было выполнено 3—4 кратких работы, то часовая контрольная работа может не проводиться. Краткие работы полезны тем, что мобилизуют учащихся на аккуратное приготовление домашних заданий; кроме того, они приучают учащихся к быстрым темпам выполнения работы, так как на нее дается только 10—15 минут.

Контрольная работа может учитывать усвоение материала части темы, всей темы, учебной четверти, полугодия и года.

Тематические контрольные работы позволяют установить: общий уровень знаний и навыков, пробелы в знаниях и навыках учащихся по данному разделу программы; уровень и пробелы работы отдельных учащихся; продвижение в работе класса и отдельных учащихся.

Содержание контрольной работы охватывает одни и те же вопросы для всех учащихся, конкретный материал ее может быть разный (несколько вариантов), но равной трудности. Продолжительность этих работ может быть один академический час.

При проведении контрольной работы необходимо обеспечить а) использование учащимися всего времени, отведенного на работу, б) полную самостоятельность при выполнении. Поэтому нецелесообразно текст контрольной работы писать на доске в начале урока, так как до окончания записи ученики не могут начать ее выполнение; в то время пока учитель будет писать, некоторые учащиеся будут подсказывать другим, консультироваться с товарищами.

Часто тексты работ дают на отдельных карточках в нескольких вариантах (не меньше четырех) или каждый учащийся получает отдельное задание.

Со стороны содержания, объема и трудности работы должны быть тщательно продуманы, чтобы нормально работающий учащийся выполнил их полностью в течение намеченного времени, для быстро работающих учащихся могут быть заготовлены дополнительные примеры или вопросы теоретического характера.

Контрольные работы выполняются в особых контрольных тетрадях, которые хранятся у учителя.

Все вычисления, которые ученик не в состоянии выполнить устно, должны производиться в этой же тетради или быть аккуратно переписаны с черновика (чтобы учителю не «искать их в черновике»).

Чтобы иметь истинное представление о вычислительных навыках учащихся и отучить их от записей на промокашках, на парте, учитель разъясняет учащимся, что в черновиках они могут производить для себя любые выкладки и действия, «не стесняясь», так как проверяться подробно будет лишь беловая работа, вместе с тем предупреждает, что и в черновике писать надо аккуратно.

Содержанием контрольных работ по арифметике обычно являются одна или две текстовые задачи и несколько примеров. В контрольную работу полезно включать вопросы теории, требующие краткого ответа, например: изложение правила действия, законов действия.

При выборе материала для контрольной работы необходимо исходить из следующих соображений: во-первых, ясно представить себе цель работы, точно определить, для проверки каких вопросов программы дается каждое упражнение; во-вторых, включить повторение ранее пройденного; в-третьих, дать упражнения на те случаи, в которых были ошибки в предыдущей работе.

При проверке контрольной работы полезно, подчеркнув ошибки и не исправляя их, указать на полях, против какого правила, закона, свойства действий допущена погрешность, например: «порядок действий», «деление на десятичную дробь» и т. п.

Каждый учащийся, сделавший ошибки, должен получить дополнительные домашние упражнения на те вопросы, в которых он допустил ошибки; можно также выделить группу учащихся для выполнения дополнительных упражнений под руководством учителя во внеурочное время; объяснение и исправление наиболее серьезных и распространенных ошибок следует сделать со всеми учащимися в классе.

Приведем примерную форму учета контрольных работ.

Дата: Тема:

№ п/п	Фамилия	I	II	III	IV	V	VI	Оценка	Примечание
1.	А	+	+	+	—	+	+		
2.	Б	+	—	—	Т	—	—		
3.	В	—	+	+	+	—	+		
4.	Г	+	Т	Т	—	—	Т		

Против фамилии учащегося условным знаком отмечается качество выполнения каждого примера или задачи. Например: знак «+» означает правильное решение, «т» — решение без грубых ошибок, знак «—» означает неправильное решение, знак «о» — совершенное отсутствие решения. Учитель не должен ограничиться только установлением ошибок: необходимо выявить типы ошибок, степень их повторяемости. Это поможет учителю принять меры к их изжитию. Учет ошибок можно проводить следующим образом: выписав наиболее грубые и часто встречающиеся, против каждой из них указать число учащихся и фамилии допустивших эту ошибку.

Приведенные примеры выявления ошибок помогут учителю анализировать их и выделить те, которые а) можно изжить путем повторных упражнений на уроках в связи с проходимым материалом; б) надо подробно разобрать в классе; в) должны тщательно просмотреть только отдельные учащиеся. Внимательно просматривая ошибки, учащиеся должны указать, в чем состояла та или иная ошибка, как ее исправить, какое надо было применить правило.

Задание по исправлению ошибок проверяется на следующем уроке. Опрос учеников, выполнявших это задание, выясняет, отчего допущены ошибки: сделана ли ошибка вследствие незнания правила или неумения его применить.

Через несколько уроков учащимся, написавшим работу на «2» или «3», предлагается во внеурочное время контрольная работа на те же правила. Если окажется, что многие учащиеся еще не усвоили материала данной контрольной работы, то эти вопросы должны включаться в следующую контрольную работу и в домашнее задание. Необходимо строго учитывать, кто из учащихся выполняет задания по исправлению ошибок, а кто нет.

Чтобы контрольные работы давали наибольший результат, они должны проводиться систематически, должны включаться в план работы. При 6 недельных уроках арифметики можно считать нормой, примерно, одну-две контрольные работы в месяц.

Хороших результатов контрольной работы можно ожидать только тогда, когда учащиеся подготовились к ней, решив достаточное количество упражнений и выполнив все самостоятельные работы в классе и дома; успех будет обеспечен вполне в том случае, если эти работы проверялись и исправлялись и если учащиеся были опрошены по материалу контрольной работы.

Очень важен подбор материала для контрольной работы. Здесь учителю надо избежать двух крайностей: слишком легкое задание дало бы повод учащимся считать, что они все хорошо знают и в дальнейшем могут меньше работать; при слишком трудном задании с ним справлялись бы только отдельные учащиеся. Учитель, зная уровень знаний класса, всегда найдет меру трудности материала.

Необходимо, чтобы количество задаваемого материала соответствовало продолжительности работы (10—15 мин. или академический час) и чтобы материал был правильно расположен. Было бы, например, ошибкой давать сначала самый трудный материал.

Следует требовать тщательного оформления работы: нельзя допускать небрежных записей вычислений, плохого написания цифр, сокращения слов, грамматических ошибок и т. д.

Лучшие учителя предварительно объясняют учащимся требования, предъявляемые к контрольным работам, они указывают, как должны оформляться записи задач и примеров.

По отношению к задачам разъясняется, в какой форме должно быть дано объяснение решения: в форме ли вопросов, или в виде утвердительного пояснения (предшествующего вычислениям или после вычислений), или в виде подробного связного текста; указывается на необходимость сделать проверку решения задачи.

Преподаватель разъясняет также требования, касающиеся вычислений, например: употреблять везде, где возможно, устные вычисления; выбирать наиболее простые способы вычислений, например, в совместных вычислениях с дробями обыкновенными и десятичными; доводить вычисления до наиболее простых результатов, применяя, например, сокращение дробей в результате вычислений; тщательно проверять вычисления и т. д.

Необходимо сообщить учащимся нормы оценки работы (согласно разъяснению Министерства просвещения для средних школ).

Предъявляя к учащимся определенные требования, не надо стеснять их свободы в выборе способа выполнения работы, в применении оригинальных, не шаблонных приемов.

Укажем некоторые положения, которые надо соблюдать при проверке контрольных работ:

а) работа проверяется до конца, если даже решение неверно, так как в отдельных частях работы могут быть частные ошибки или, наоборот, удачное решение; б) отмечаются не только арифметические, но и все другие недочеты (например, длинный или неудачный способ решения, плохое объяснение и т. п.);в) отмечаются логические и грамматические ошибки.

При анализе работы в классе разбираются ошибки общего характера. Учащиеся, сделавшие работу плохо, получают задание: сделать ту же работу дома, объяснить ошибки и исправить их, проделать дома добавочные упражнения.

С учащимися, пропускавшими (по уважительным причинам) уроки, учитель проводит дополнительные занятия, на которых кратко объясняет и предлагает изучить самостоятельно отдельную часть программы. После этого ученик выполняет предложенную работу. Естественно, что данное задание должно проверяться. Вследствие этого появляется необходимость вести специальный индивидуальный учет.

Для индивидуального учета знаний рекомендуем вести тетрадь по следующей форме:

№ п/п	Дата	Фамилии, имена учащихся	Раздел программы (вопрос), не усвоенный учащимся	Указание учителя	Срок подготовки данного вопроса учеником	Выполнение
1	15/IX	Иванова Клавдия	Умножение дроби на дробь	Прорешать примеры по задачнику, №	22/IX	Данный вопрос усвоен удовлетворительно

Такая работа с отстающими помогает в борьбе с неуспеваемостью и предупреждает ее. Отставание ученика, которое своевременно не замечено учителем и для устранения которого не приняты меры, очень часто переходит в неуспеваемость, когда учащийся оказывается не в состоянии успешно усваивать новый материал.

Опытные учителя, достигающие высокого качества знаний и полной успеваемости, уделяют большое внимание предупреждению отставания отдельных учащихся. Они своевременно подмечают отставание ученика и принимают меры, повышающие активность в учебной работе ученика. Предупреждение отставания достигается при непрерывном учете знаний, умений и навыков учащихся.

§ 27. Устные контрольные работы и диктанты по арифметике в V — VI классах

Закрепление пройденного и проверка знаний учащихся являются основными частями процесса обучения. Письменные контрольные работы и устный опрос по арифметике были и остаются основными формами проверки и закрепления знаний. За последние годы в средней школе стали с успехом применять и другие формы проверки и закрепления знаний, особенно устные контрольные работы и диктанты по арифметике.

Опыт проведения этих форм работы показывает их эффективность, выражающуюся в углублении теоретических знаний и повышении интереса учащихся к изучению арифметики.

Наиболее плодотворные формы контрольных работ: 1) фронтальная и 2) групповая.

Содержание устной контрольной работы можно подразделить на вопросы трех групп:

1. Определения и формулировки правил.
2. Задачи и примеры.
3. Вопросы на сообразительность, требующие глубокого знания теоретического материала.

Учитель, готовясь к фронтальной контрольной работе, подбирает на 45-минутный урок для класса 45—60 вопросов по 12—20 вопросов на каждую из указанных групп вопросов.

Приведем в качестве образца одну из контрольных работ на раздел «Десятичные дроби» (V класс).

I

1) Какая дробь называется десятичной?

2) Как увеличить десятичную дробь в 10, в 100, в 1000 раз?

3) Как уменьшить десятичную дробь в 10, в 100, в 1000 раз? Привести примеры.

4) Как складываются десятичные дроби? Привести правило и пример.

5) Как умножить десятичную дробь на целое число? Привести правило и пример.

6) Как умножить десятичную дробь на десятичную дробь? Привести правило и пример.

7) Какие законы сложения вы знаете?

8) Какие законы умножения вы знаете?

9) Как разделить десятичную дробь на целое число? Привести пример.

10) Как разделить десятичную дробь на десятичную дробь? Привести пример.

11) Как найти дробь числа?

12) Как найти число по данной его дроби?

13) Как найти отношение двух чисел?

14) Как найти процент числа?

15) Как найти число по данному его проценту?

II

Вычислить:

1) $2{,}53 + 1{,}0047$;
2) $2{,}53 + 2{,}75 + 7{,}4$;
3) $13{,}854 - 4{,}999$;
4) $32{,}48 : 16$;
5) $12{,}42 : 0{,}3$;
6) 18,12 увеличить в 3 раза;
7) $2{,}35 + \left(\frac{1}{2} - 0{,}5\right)$;
8) $0{,}78 + \left(\frac{3}{4} + 0{,}25\right)$;
9) $12{,}22 - 3{,}781 + 1{,}78$;
10) $2{,}35 \cdot \left(\frac{3}{4} - 0{,}75\right)$;
11) $\left(\frac{1}{20} - 0{,}05\right) \cdot 4{,}509$;
12) $\left(1\frac{1}{4} - 0{,}25\right) : 8$;
13) Найти 0,25 числа 12,4;
14) Найти 20% от 45;
15) Найти число, если 5% его равны 0,5.

III

1) Каждое слагаемое увеличили на 0,2. Как изменится сумма?

2) Как поступить, если в полученном произведении не хватает цифр для отделения запятой?

На каких свойствах умножения основаны следующие приемы устного умножения:

3) $4{,}5 \cdot 6{,}7 + 4{,}5 \cdot 3{,}3 = 4{,}5 \cdot (6{,}7 + 3{,}3) = 4{,}5 \cdot 10 = 45$?

4) $4 \cdot 2{,}578 \cdot 0{,}25 = 4 \cdot 0{,}25 \cdot 2{,}578 = 2{,}578$?

Вычислить наиболее рациональным путем:

5) $0{,}25 \cdot 0{,}3 \cdot 4 \cdot 10$;
6) $1{,}25 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}8 \cdot 5$;
7) $50 \cdot 0{,}17 \cdot 0{,}2 \cdot 20$;
8) $1{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}5$;

9) Сумма двух чисел равна (0,593 + 1,507); одно из чисел в 9 раз больше другого. Найти меньшее число.

10) Как изменится произведение двух чисел, если один из сомножителей увеличить в 4,8 раза, а другой уменьшить в 2,4 раза?

11) Как изменится произведение трех чисел, если первый сомножитель увеличить в 0,25 раза, второй в 4 раза, а третий уменьшить в 10 раз?

12) Как изменится частное, если делимое умножить на 0,8, а делитель на 1,6?

13) Что больше: 20% от 15 или 15% от 20?

14) Какими приемами можно найти несколько процентов от числа?

15) Какими приемами можно найти число по данным его процентам?

Приведенные вопросы контрольной работы примерные, конечно, учитель может их разнообразить и составить другие.

Несколько слов о методике проведения фронтальной контрольной работы.

Фронтальная контрольная работа проводится только после прохождения раздела (натуральные числа, обыкновенные дроби и др.), по времени это будет не чаще одного раза в четверть. Организация проведения ее такова.

Учитель предварительно записывает на доске некоторые вопросы (те, которые трудно помнить, если они даны в устной форме) и закрывает их газетой или листом бумаги. Предлагает ученикам убрать все книги, тетради, бумагу, карандаши и говорит, что каждому ученику будут предложены 3—4 вопроса, за ответы на них он может получить оценку. Рук не поднимать. Каждый вопрос задается всему классу и дается некоторое время на обдумывание; это время зависит от трудности вопроса. Если ответ, данный учеником, неточен или неправилен, то следует спросить кого-либо из учащихся класса, разрешив поднять руку.

В конце урока (контрольной работы) надо отвести 4—5 минут на подведение некоторых итогов проведения контрольной работы.

Вторая форма проведения устной контрольной работы — групповая. Эта форма контрольной работы обычно проводится за несколько дней до письменной контрольной работы, после прохождения определенной темы. Как правило, и эта форма контрольной работы рассчитана на весь урок.

Для проведения контрольной работы учитель готовит 5—8 вариантов контрольной работы, занесенной на карточки. Содержанием контрольной работы являются вопросы трех вышеперечисленных групп, как и для фронтальной работы. В каждый вариант входит 5—6 вопросов. Методика проведения этой формы контрольной работы такова. Учитель вызывает 4 учащихся и дает им карточки с предложением устно решить все вопросы карточки за 5—8 минут. Пока вызванные ученики готовятся к ответам, учитель фронтально опрашивает класс по другим карточкам.

Через 5—7 минут один из подготовившихся учеников начинает отвечать на вопросы карточки. Если ответ требует письменного решения или графического изображения, то ученик записывает необходимое на доске.

После ответа первого учащегося учитель вызывает еще одного (пятого) ученика и вручает ему карточку и т. д. В течение урока, отведенного на устную контрольную работу, 8—10 учеников получают за нее оценку. Остальные учащиеся слушают отвечающих или исправляют их ответы, в случае необходимости.

Таким образом, устная контрольная работа по арифметике позволит учителю повторить с классом основной материал пройденной темы, вместе с тем проверить знания учащихся и выявить пробелы.

Материалы для проведения устных контрольных работ учитель может взять из имеющихся дополнительных сборников задач по арифметике. Приведем в качестве примера содержание устной контрольной работы после прохождения темы «Целые числа».

1. Сумму чисел 4028 и 10215 увеличить в 101 раз.

2. Найти частное и остаток; сделать проверку: 75847 : 122.

3. Умножение 28 на 15 можно выполнить одним из следующих приемов:

а) $28 \cdot 15 = 28 \cdot 10 + 28 \cdot 5$; б) $28 \cdot 15 = (28 \cdot 5) \cdot 3$ и

в) $28 \cdot 15 = (28 : 2) \cdot 30$. Объяснить, на основании каких свойств действий основаны эти приемы.

4. Найти: $42786 - x = 5427$. Проверить.

5. Ширина огорода 60 *м*, а длина на 80 *м* больше. $\frac{3}{4}$ площади огорода занято под капусту. Чему равна площадь, занятая под капусту?

Многие учителя применяют 10-минутную контрольную работу по устному счету. Они заготавливают 10—15 заданий, смотря по трудности. Ученики на отдельных листках нумеруют соответственно 10—15 строчек для ответов. Учитель читает первое задание, ученики молча пишут ответ в первой строчке. Время для выполнения задания ограничено. Если ученик почему-либо не успел сосчитать, он ставит черту против номера несосчитанного примера. Среди заданий могут быть и теоретические вопросы.

Приведем образец контрольной работы по устному счету на тему «Проценты».

1. Найти 25% от 36.
2. Найти 75% от 4,8.
3. Найти 1% от 15.
4. Найти 0,1% от 70.
5. Найти число, если 50% его составляют $3\frac{1}{8}$.
6. Найти число, если 12% его составляют 60.
7. Найти число, если 1% его составляет 800.

8. Найти число, если $1\frac{1}{2}$ % его составляет 1,8.

9. Сколько процентов составляют 6 *м* от 24 *м*.

10. Сколько процентов составляют 3 *см* от 3 *м*?

11. Сколько процентов составляет 1 *ц* от 1 *т*?

12. Сколько процентов составляет 1 *т* от 1 *ц*?

13. Сколько процентов составляют 4 *м* от 4 *см*?

Приведенные формы устных контрольных работ могут видоизменяться, дополняться в зависимости от желания учителя, состава класса и других особенностей.

Изложим вкратце содержание и организацию проведения диктантов на уроках арифметики

Диктант по арифметике является одним из видов самостоятельной работы учащихся. Проведение диктантов активизирует учащихся, укрепляет знания по теории арифметики, выявляет пробелы и позволяет учителю с большей уверенностью оценивать знания учащихся.

Содержанием диктантов являются вопросы по теории арифметики такого характера, который исключает единообразие ответа и одинаковые по числовому значению ответы. Такие упражнения не допускают «списывания у соседа», а если попытка «списать» будет сделана, то учитель легко может выявить, кто у кого «списал», и тем самым пресечь подобные попытки в будущем.

На проведение диктанта следует отводить не более 18—20 минут, так как он требует большого умственного напряжения ученика. Диктант проводится после прохождения темы (однако не более двух раз в течение четверти).

Техника проведения диктанта: учитель диктует номер упражнения, ученики записывают этот номер и слушают вопрос. Наступает пауза обдумывания и записи ответа; длительность паузы зависит от характера вопроса, но не должна превышать 2 минут. Число вопросов диктанта — не более 5. Оценки за диктант выставляются в журнал. После проверки тетрадей учитель обязательно проводит анализ диктанта.

Надо ожидать, что при проведении первых диктантов ответы учащихся на вопросы теории будут недостаточно четкими и будут иметь погрешности. Важно, чтобы они отражали самое главное, существенное. Анализ ответов, проводимый учителем после каждого диктанта, позволит учащимся добиваться в последующих диктантах более строгих, точных и лаконичных ответов.

Характер упражнений легко усмотреть из следующих примеров:

а) Вариант диктанта после прохождения темы «Целые числа».

1. В чем различие между числом и цифрой? Какие знаки выражают одновременно цифру и число?

2. Если в примере имеются скобки, то в каком порядке выполняются действия? Пояснить ответ примером.

3. Когда сумма двух чисел равна одному из них? Пояснить на примере.

4. Показать на примерах применение переместительного, распределительного и сочетательного законов умножения.

5. Начертить три различных прямоугольника так, чтобы у каждого сумма всех сторон равнялась 20 *см*, и найти площадь каждого прямоугольника.

б) Вариант диктанта после изучения общих сведений об обыкновенных дробях.

1. Назови причины появления дробных чисел.

2. Напиши три неправильные дроби и запиши их в виде смешанных чисел.

3. Напиши два смешанных числа и запиши их в виде неправильных дробей.

4. Что значит сократить дробь? Какими способами можно сократить дробь? Покажи на примере.

5. Как сравниваются два дробных числа?

в) Вариант диктанта после прохождения темы «Приближенные вычисления».

1. В результате чего получаются приближенные числа?

2. Привести 3—4 примера на округление чисел.

3. Пояснить на примере различие между десятичными знаками и значащими цифрами приближенного числа.

4. Какой из двух приемов сложения и вычитания приближенных чисел (без предварительного округления или с предварительным округлением) удобнее? Показать на примере.

5. Как разделить точное число на приближенное? Показать на примере.

Изложенные формы опроса обладают рядом достоинств, а именно: живостью, активизацией учащихся, широкой возможностью выявления знаний и недочетов учащихся.

ГЛАВА VII

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ПРИМЕРЫ И ЗАДАЧИ

§ 28. Числовые примеры

Арифметической задачей называется всякий вопрос, для решения которого по двум или нескольким числам требуется найти новое число. Известные в задаче числа называются *данными*; число, которое находится, называется *искомым*.

Задачи, представляющие собою совокупность чисел и знаков действий, показывающих, какие действия и в каком порядке следует произвести над данными числами, называются *числовыми примерами*.

Числовые примеры имеют большое значение для закрепления арифметических навыков.

Кроме закрепления навыков, решение примеров возрастающей трудности приучает учащихся выполнять большую работу, разделяя ее на ряд последовательных этапов, приучает к аккуратности, к самоконтролю, вырабатывает внимание и терпение. Примеры должны даваться при изучении каждого нового правила, а также при повторении ранее пройденных правил, включая и примеры для устного решения.

Сначала надо повторить порядок действий в примерах без скобок.

Когда в числовом примере содержатся только действия одной ступени, то действия выполняются в порядке их обозначения.

В примерах, содержащих несколько действий первой ступени (сложений и вычитаний), порядок выполнения действий может быть различным; необходимо лишь следить за тем, чтобы вычитаемые все время оставались в роли вычитаемых (не становились бы «слагаемыми»).

Пример:

$$275-98+37-149+101=275-149-98+37+101=$$
$$=101-98+275+37-149=166.$$

Результат вычислений в примере, содержащем только действия второй ступени (умножение и деление), также не зависит от порядка действий. В примерах этого вида надо следить только за тем, чтобы делители все время оставались делителями (не становились бы множителями).

Пример:

$15 \cdot 18 \cdot 4 : 20 : 6$ можно решать в таком порядке: $18 : 6 \cdot 15 \times \times 4 : 20$ или $4 : 20 \cdot 15 \cdot 18 : 6$. Результат во всех случаях равен 9.

Первая перестановка может облегчить вычисление в целых числах, а вторая дает возможность вычислить результат с помощью дроби.

В примере, содержащем действия первой и второй ступени, выполняются сначала действия второй ступени, а потом уже действия первой ступени.

Пример:

$$175 - 18 \cdot 3 + 108 : 6 + 25 = 175 - 54 + 18 + 25 = 175 + 25 - 54 + 18 = 164$$

Иногда для указания последовательности вычислений употребляются *скобки* различной формы (круглые, квадратные, фигурные). Это делается в том случае, когда необходимо отступить от указанного выше порядка действий.

Действия над числами, заключенными в скобки, выполняются в первую очередь. Употребление скобок можно выяснить на задачах. Например, решается задача: «Бригада дала за смену 280 *т* проката. Другая бригада дала на 70 *т* больше первой, выполнив двойную норму. Какова была норма проката?»

Решение записывается в две строки:

1) $280 + 70 = 350$ (*т*);
2) $350 : 2 = 175$ (*т*).

Если решение задачи записать в виде такой формулы: $280 + 70 : 2$, то вычисление по установленным правилам приведет к неверному результату. Это надо разъяснить учащимся и показать, что формула должна иметь такой вид: $(280 + 70) : 2$, так как по смыслу задачи норма выработки составляла половину всей выработки второй бригады, т. е. половину суммы 280 *т* + 70 *т*. Приведенную формулу можно записать с другим знаком деления: $\frac{280 + 70}{2}$; в этом случае скобки не пишутся.

Задача. Из двух пунктов выехали одновременно навстречу друг другу два велосипедиста. Первый может проехать все расстояние между пунктами за 6 часов, второй за 5 часов. Какая часть пути будет отделять велосипедистов друг от друга через 2 часа после выезда?

Решение.

$$1)\ \frac{1}{6}+\frac{1}{5}=\frac{11}{30}\quad 2)\ \frac{11}{30}\cdot 2=\frac{11}{15}\quad 3)\ 1-\frac{11}{15}=\frac{4}{15}$$

Если решение задачи записать без скобок в виде числовой формулы: $1-\frac{1}{6}+\frac{1}{5}\cdot 2$, то вычисление по установленным правилам приведет к неверному результату. Надо разъяснить учащимся, что по смыслу задачи формула должна иметь такой вид: $1-\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{5}\right)\cdot 2$, так как удваивается не $\frac{1}{5}$ всего пути, а сумма $\frac{1}{6}+\frac{1}{5}$, или та часть пути, которую проедут оба велосипедиста за час.

Подобным же образом можно разобрать задачу, в формулу решения которой входят две пары скобок. Например: токарь выполнил до обеденного перерыва половину дневной нормы и изготовил еще 18 деталей. После обеда он изготовил 20 деталей. За день токарь перевыполнил норму на 5 деталей. Какова была норма?

Задача решается устно:

1) $18+20=38$ (деталей);

2) $38-5=33$ (детали);

3) $33\cdot 2=66$ (деталей).

Числовая формула $(18+20)-5\cdot 2$ дала бы неверный результат. Учащиеся объясняют, что по смыслу условия задачи на 2 надо умножить не 5 (превышение нормы), а то число $(18+20)-5$, которое составляет половину нормы. Поставив это выражение в квадратные скобки, получают верную формулу решения задачи $[(18+20)-5]\cdot 2=66$.

Как сказано ранее, под «примерами» разумеют задачи, записанные только числами, знаками действий, скобками, — задачи, в условии которых нет словесного текста. Например: $(8{,}4+7{,}2):6$.

Но в задаче, изложенной словами: найти частное от деления на 6 суммы чисел 8,4 и 7,2 — выполняются те же вычисления и в том же порядке. Поэтому обе задачи надо назвать одинаково — примерами.

§ 29. Задачи

Арифметической задачей в собственном смысле слова называется вопрос, для решения которого требуется определить искомое число по данным числам и по указанной в словесной форме зависимости между данными и искомым числом.

При изучении любого раздела арифметики учащимся предлагаются задачи прикладного содержания — *задачи-расчеты*. Они встречаются в быту и в каждой профессии. В задачах-расчетах вопрос о выборе действий решается без затруднений.

Значение задач-расчетов двоякое: во-первых, решение их помогает приобретению навыков в выполнении арифметических действий, во-вторых, учащиеся учатся применять арифметические знания к решению вопросов из жизненной практики.

Кроме задач-расчетов, решаются задачи с более сложным математическим содержанием. Большею частью они легко решаются алгебраическим методом — составлением и решением уравнений; арифметическое же решение требует сообразительности, умения рассуждать, более или менее развитого воображения, внимания и настойчивости в преодолении трудностей.

Приведем пример такой задачи.

Отцу 45 лет, одному его сыну 15 лет, другому 11 лет, третьему 7 лет. Через сколько лет возраст отца будет равен сумме лет сыновей? Задача легко решается, если составить уравнение: $45 + x = (15 + x) + (11 + x) + (7 + x)$, откуда $x = 6$ (через 6 лет отцу будет 51 г., сыновьям — 21, 17, 13; $51 = 21 + 17 + 13$). Арифметическое решение состоит в следующем: 1) Разность лет отца (45) и суммы лет сыновей (33) равна 12 годам. За один год эта разность уменьшается на $(1 + 1 + 1) - 1$, т. е. на 2 года. Она будет равна нулю через $12 : 2 = 6$ лет.

Задачей в широком смысле слова называется вопрос, в котором требуется определить числовое значение какой-либо величины, пользуясь числовыми значениями других величин, связанных определенной зависимостью с искомой величиной и между собою. Например:

«На окраску стен в школе надо 56 *кг* краски двух цветов. Высота всей стены $3\frac{1}{2}$ *м*, а высота части стены, окрашенной в светлый цвет, $1\frac{1}{2}$ *м*. Сколько понадобится светлой краски и сколько темной?»

Искомые величины, количества светлой и темной красок, определяются в зависимости от высоты части стены, окрашенной в светлый цвет, и от высоты части стены, окрашенной в темный цвет. Высота части стены, окрашенной в темный цвет, определяется по двум данным величинам: высоте всей стены и высоте части стены, окрашенной в светлый цвет.

В каждой арифметической задаче имеется а) числовой материал; б) условие задачи, т. е. текст, указывающий характер зависимости между данными величинами; в) вопрос задачи, указывающий, что надо определить.

Остановимся на тех требованиях, которые следует предъявлять к элементам всякой задачи. Числовой материал должен соответствовать арифметической подготовке учащихся, числовые значения величин данных и искомых должны быть реальными (нельзя, например, указать в условии скорость пешехода 20 *км* в час или расстояние между Москвой и Ленинградом равным какому-либо другому числу, кроме 651 *км*). Условие и вопрос задачи должны быть сформулированы ясно и точно, в соответствии с числовыми данными в условии.

Число условий должно соответствовать числу данных и искомых. Тогда задача имеет одно решение и является задачей определенной. Таково большинство задач в задачниках..

Если число условий в задаче недостаточно, то задача может иметь несколько решений и называется задачей неопределенной.

Пример 1. «Завод, собрав 2700 сельскохозяйственных машин, отослал их в три области. Сколько машин получила каждая область?» В условии задачи не указано, как распределялись машины между областями: поровну или как-нибудь иначе. Решений задачи может быть очень много.

Пример 2. «Какую прямоугольную площадь можно обвести веревкой длиной в 128,4 *м*?» Число условий (длина веревки) недостаточно для определенного решения задачи. В таком виде задача была бы неопределенной.

Задачи, содержащие лишние условия, с указанием на отыскание лишнего условия, даются иногда в задачниках. С такими задачами можно встретиться также в самостоятельных работах учащихся по составлению задач.

Приведем пример. Задача: «Завод, собрав 2700 сельскохозяйственных машин, послал их в три области с условием, чтобы первая область получила на 150 машин больше второй, вторая на 120 машин больше третьей и первая область на 270 машин больше третьей. Сколько сельскохозяйственных машин получит каждая область?» Здесь имеется лишнее условие, но условия не противоречат друг другу. Задача имеет определенное решение: 1040, 890, 770. При решении может быть опущено любое из условий, кроме первого.

Но лишние условия в задачах могут быть и противоречивыми. Приведем пример задачи, какую возможно встретить в работе учащихся при составлении ими задач.

«Завод собрал для трех областей 2700 сельскохозяйственных машин. Первая область должна получить на 150 машин больше второй, вторая на 120 машин больше третьей и вдвое меньше первой области. Сколько машин получит каждая область?»

Здесь имеется одно лишнее условие, и условия противоречат друг другу. Задача может иметь определенное решение: а) если опустить последнее условие; ее решение будет: 1040, 890, 770; б) если опустить первое условие (общее число машин 2700); тогда ее решение будет: 540, 390, 270; в) если опустить второе условие; тогда решение задачи будет: 1290, 765, 645; г) если опустить третье условие; решение задачи будет: 1140, 990, 570.

С учащимися надо повторить, что все арифметические задачи делятся на простые и составные (сложные). *Простыми задачами* называются задачи, решаемые с помощью одного действия.

Пример.

«Школьники уничтожили 340 полевых мышей. Сколько зерна они сохранили для колхоза, если каждая мышь уничтожает за день 0,003 *кг* зерна?»

Составными задачами называются такие задачи, для решения которых необходимо не меньше двух действий.

Разделение задач на простые и составные не может быть проведено вполне строго. Например: задача на сложение нескольких слагаемых может быть решена одним действием сложения или несколькими действиями сложения, т. е. может быть причислена к простым или к составным. Задачи на нахождение числа по его части могут решаться одним действием — делением на дробь, как задачи простые, или двумя действиями (делением на числитель дроби и умножением на ее знаменатель), т. е. могут быть отнесены к составным задачам.

За последние годы на страницах периодической печати появилось много статей, содержащих предложения по улучшению качества работы в школе. В журнале «Математика в школе» в 1962—1964 гг. была проведена дискуссия о роли арифметических задач и методах их решения. Было вновь признано, что арифметические задачи и арифметические методы решения задач играют большую роль в школьном обучении математике.

Решением задач достигаются следующие цели:

1) Решая задачу, учащийся учится понимать зависимость между величинами, устанавливать связь между ними, выбирать соответствующие действия.

2) Использование в условиях задач жизненного материала способствует установлению связи математики с современностью, уточняет знания учащихся о наших достижениях в области социалистического строительства, развивает в них гордость за наши успехи, любовь к нашей Родине.

3) На задачах выясняются многие математические понятия, например: два вида деления, увеличение и уменьшение в разностном и кратном отношении, различные случаи употребления действий и т. д.

4) Применение того или иного действия при решении задач закрепляет математические навыки.

5) Решение задач из окружающей жизни воспитывает человека, умеющего применять к жизни основы знаний, полученных в школе.

6) Решение задач способствует возбуждению интереса к занятиям математикой.

7) Развивая логическое мышление, решение задач готовит учеников к успешному усвоению алгебры и геометрии.

§ 30. Решение простых задач

Решая простую задачу, учащийся учится понимать зависимость между величинами и применять то или иное арифметическое действие.

С учащимися полезно повторить простые задачи на целые числа, указав различные случаи применения каждого арифметического действия.

Сложение применяется: 1) для нахождения суммы, когда даны слагаемые, 2) когда данное число надо увеличить на несколько единиц.

В вычитании по данной сумме двух слагаемых (уменьшаемому) и одному из слагаемых (вычитаемому) определяется второе слагаемое (остаток). Поэтому вычитанием решаются 1) задачи, в которых определяется остаток; 2) задачи на уменьшение числа на несколько единиц; здесь искомое слагаемое есть то число, к которому было прибавлено несколько единиц (вычитаемое) для получения суммы (уменьшаемого); 3) задачи на нахождение разности двух чисел (разностное сравнение); здесь неизвестное слагаемое было прибавлено к данному слагаемому (вычитаемому) для получения уменьшаемого.

Посредством умножения на целое число решаются задачи, в которых: 1) по одному из равных слагаемых (множимому) и числу этих слагаемых (множителю) находится сумма (произведение); 2) данное число (множимое) увеличивается во столько раз, сколько единиц во множителе.

Посредством деления по произведению двух сомножителей (делимому) и одному из сомножителей (делителю) находится другой сомножитель (частное). Искомый сомножитель при делении на целое число может быть множимым, тогда делимое есть целое, делитель (данный сомножитель) — число равных частей, на которые делится целое, частное — величина одной из равных частей. Первый случай употребления деления в задачах — нахождение одной из равных частей целого, второй случай применения деления, когда данное число надо уменьшить во столько раз, сколько единиц в делителе.

Если искомый сомножитель является множителем, тогда делимое есть целое, делитель — величина одной из равных частей, частное — число равных частей. Отсюда: делением решаются задачи, в которых надо определить, сколько раз одно число содержится в другом или во сколько раз одно число (делимое) больше другого (делителя).

Выбор действия — центральный и вместе с тем самый трудный вопрос при решении простых задач. При решении простой задачи учащиеся, усвоив содержание условия, должны разобраться, в какой зависимости находится искомое и данные числа, и отсюда сделать выбор действия для решения задачи.

При повторении решения простых задач надо обратить внимание на простые задачи «с обратным ходом решения», или, как их еще называют, «задачи, выраженные в косвенной форме».

В этих задачах условие не дает прямого указания на то действие, которое требуется для решения задачи.

При решении таких задач учащиеся должны быть особенно внимательны к условию задачи, чтобы установить истинную, а не кажущуюся зависимость между величинами. Например, в условии задачи говорится об увеличении числа на несколько единиц, но задачу нужно решать вычитанием. Условие задачи говорит об уменьшении числа в несколько раз, но задача решается умножением, и т. д.

Укажем задачи, выраженные в косвенной форме.

На определение слагаемых приведем следующие задачи и вопросы:

1) Сталевар снял 12 *т* 2 *ц* стали с 1 *кв. м* печи, перевыполнив норму на 4 *т* 4 *ц*. Найти норму съема стали с 1 *кв. м* печи.

Условие задачи записывается в виде уравнения: $x + 4$ *т* 4*ц* $=$ $= 12$ *т* 2 *ц*.

2) На сколько единиц надо увеличить 299, чтобы получить 720?

Условие можно записать в виде уравнения: $299 + x = 720$.

Форма, в которой выражено условие каждой задачи, указывает на сложение, решение же выполняется вычитанием, так как в обоих случаях по сумме и одному из слагаемых определяется другое слагаемое.

При определении неизвестных элементов вычитания вопросы могут также ставиться в косвенной форме. Приведем задачи:

1) Когда из вагона московского метро вышли на остановке 18 человек, в вагоне осталось 25 человек. Сколько пассажиров ехало в вагоне?

Условие записывается уравнением: $x — 18 = 25$.

2) Длина Беломорско-Балтийского канала 227 *км*, этот канал на 99 *км* длиннее канала имени Москвы. Какой длины канал имени Москвы?

Условие записывается уравнением: $227 — x = 99$.

3) Какое число надо уменьшить на 9,9, чтобы получилось 2,98?

Запись условия уравнением: $x — 9{,}9 = 2{,}98$.

Приведем задачи (выраженные в косвенной форме), содержащие вопросы на умножение чисел.

1) Задуманное число увеличили в 120 раз и получили 1560. Какое число задумано?

Запись условия: $x \cdot 120 = 1560$.

2) Число 150, увеличенное в несколько раз, дает 9000. Во сколько раз увеличено число 150?

Запись условия: $150 \cdot x = 9000$.

Хотя условие задачи указывает на увеличение числа в несколько раз (умножение), но задачи решаются делением, так как по произведению и одному из сомножителей здесь определяется другой сомножитель.

Рассмотрим задачи в косвенной форме, содержащие вопросы на деление чисел или приводящие к определению неизвестных элементов умножения или деления.

1) Бригада сэкономила 27 *ц* меди — в 9 раз больше, чем алюминия. Сколько алюминия сэкономила бригада?

Запись условия: $27 = 9 \cdot x$.

2) Изготовлены 2 болта. Один длиною в 1,2 *дм*, это в 2 раза меньше другого. Какой длины второй болт?

Условие задачи указывает на уменьшение в 2 раза, но задача решается умножением.

Условие можно записать формулой: $1{,}2 = x : 2$ или $x : 1{,}2 = 2$. Здесь определяется делимое по делителю и частному.

3) Если задуманное число уменьшить в 120 раз, то получится 130. Какое число задумано?

Запись условия: $x : 120 = 130$.

4) Во сколько раз надо уменьшить 31,25, чтобы получить 6,25? Запись условия: $31{,}25 : x = 6{,}25$.

В приведенных задачах условия указывают действия, противоположные тем, которые приходится выполнить при решении.

§ 31. Решение составных (сложных) задач

Решение составной задачи сводится к разложению ее на простые задачи и к решению этих простых задач.

Поэтому к решению составных задач можно приступить только тогда, когда учащиеся усвоили решение простых задач и когда они имеют достаточные вычислительные навыки.

Решение простой задачи, как известно, состоит в выявлении зависимости между данными и искомыми и в подборе арифметического действия. Приступая к решению составных задач, учитель должен провести ряд (устных) упражнений: а) в составлении вопросов для определения искомых, б) в подборе данных для ответа на поставленный вопрос, в) в указании действий для получения ответа на вопрос задачи.

Решение составных задач начинают с упражнений по подбору данных к поставленному вопросу. Например: «Что еще надо знать, чтобы определить, какое расстояние прошел поезд за 10 часов?», «Сколько заплатили за 3 *л* молока?», «Сколько рабочих дней затратили 5 колхозниц на прополку огорода?» и т. д. Вопросы надо ставить и в такой форме: «Что надо знать, чтобы вычислить число учащихся в пятых классах школы?», «По каким данным можно определить, сколько материала надо купить на несколько костюмов?» и т. п. Учащиеся должны назвать данные, указать числовое значение их, выяснить действие, которым решается задача, а также проверить решение задачи.

Чтобы учащиеся при решении сложной задачи, в которой несколько данных и несколько искомых, не затруднялись в составлении простых задач, на которые разбивается сложная задача, полезно проделать упражнения на составление сложной задачи из 2-х или 3-х простых. Для этого учащимся задаются одна за другой две простые задачи, причем ответ первой задачи служит одним из данных для второй задачи.

Потом обе задачи читаются без промежуточного вопроса.

Возьмем примеры:

1. Задача. В колхозе на один участок земли пошло 91,2 *ц* минеральных удобрений, а на другой — 110,4 *ц*. Какой вопрос можно поставить?

Учащиеся могут предложить вопрос, решаемый сложением, и вопрос, решаемый вычитанием. Учитель предлагает решить задачу вычитанием. Учащиеся выполняют действие: 110,4 *ц* — 91,2 *ц* = = 19,2 *ц*.

2. Задача. На второй участок пошло на 19,2 *ц* больше, так как второй участок был на 4 *га* больше первого.

Учащиеся ставят вопрос, выполняют действие: 19,2 *ц* : 4 = = 4,8 *ц*.

3. Задача. На каждый гектар шло 4,8 *ц* минеральных удобрений, а на весь первый участок пошло 91,2 *ц*.

Учащиеся ставят вопрос и вычисляют площадь первого участка: 91,2 *ц* : 4,8 *ц* = 19 (*га*).

4. Задача. Площадь участка 19 *га*. С каждого гектара колхоз собрал по 10,5 *ц* волокна конопли.

Учащиеся ставят вопрос, указывают действие (умножение) и выполняют его: 10,5 *ц* × 19 = 199,5 *ц*.

Дальше условия задач соединяются в одно, промежуточные вопросы опускаются, получается такая задача: «В колхозе на один участок земли пошло 91,2 *ц* минеральных удобрений, а на другой — 110,4 *ц*. Второй участок был на 4 *га* больше первого. С каждого гектара в среднем получали 10,5 *ц* волокна конопли. Сколько волокна конопли собрал колхоз с меньшего участка?»

Решение записывается:

1. 110,4 *ц* — 91,2 *ц* = 19,2 *ц*
2. 19,2 *ц* : 4 = 4,8 *ц*
3. 91,2 *ц* : 4,8 *ц* = 19 (*га*)
4. 10,5 *ц* × 19 = 199,5 *ц*

Решение сложной задачи состоит из следующих частей:

1) усвоение учащимися содержания задачи;

2) разбор задачи и составление плана (разложение сложной задачи на простые и составление плана решения);

3) решение (выбор действий, их выполнение, запись хода решения и вычислений);

4) проверка решения.

1. С учащимися можно практиковать такой прием для усвоения содержания задачи. Учитель называет номер задачи и предлагает учащимся прочитать условие про себя, разобраться в условии. После этого условие повторяется вызванными учащимися.

Такой прием приучает учащихся самостоятельно пользоваться книгой.

Если учащиеся читают самостоятельно условие по задачнику, то следует рекомендовать им прочитать задачу два-три раза про себя, затем закрыть задачник и повторить условие. При этом учитель рекомендует запомнить главным образом содержание, а не числовые данные. Чтобы учащиеся внимательнее отнеслись к чтению условия и повторению его про себя, преподаватель предупреждает, что повторять условие надо, не заглядывая в задачник. Чтение текста задачи с целевой установкой на его запоминание заставляет глубже вникнуть в содержание задачи, что в свою очередь способствует правильности решения.

Необходимо указать учащимся, что при выполнении домашнего задания они должны поступать, как сказано выше: прочитав условие не менее двух раз, повторять его, не заглядывая в задачник, и начинать решение только тогда, когда условие усвоено.

При повторении задачи необходимо обратить особое внимание на главный вопрос. Понимание главного вопроса — основное условие для правильного решения. Повторение условия необходимо для его усвоения. Однако бывают случаи, когда ученик, правильно повторивший условие задачи, не представляет того, о чем рассказывается в задаче. При таком формальном усвоении условия ученик не понимает зависимости между величинами и не может решить задачи.

Следует добиваться, чтобы учащиеся при самостоятельном чтении задачи отчетливо представляли ее содержание.

Другой прием ознакомления учащихся с условием задачи: учитель читает вслух условие задачи по задачнику или предлагает одному учащемуся читать вслух задачу. Остальные учащиеся следят за чтением по задачнику. Повторное чтение условия следует допускать только в исключительных случаях, когда условие задачи сложно. Если учащиеся знают, что условие задачи будет прочитано два-три раза, то они относятся к первому чтению без должного внимания. Для того чтобы проверить, насколько внимательно учащиеся следили за чтением условия, учитель предлагает контрольные вопросы, например: «О чем говорится в задаче»? «Что именно говорится?...» Такие вопросы заставляют учащихся более внимательно следить за содержанием условия, вдумываться в содержание задачи.

Чтобы помочь учащимся понять содержание задачи, следует записывать кратко условие задачи на доске и в тетрадях. Текст задачи не записывается, а расположение чисел должно указывать на связь между ними. Запись вопроса задачи не обязательна.

Приведем пример записи задачи.

«Пионер решил правильно на 2 задачи больше, чем примеров, и получил 13 очков. За задачу начисляли $2\frac{1}{2}$ очка, за пример $1\frac{1}{2}$ очка. Сколько задач и сколько примеров решил пионер?»

Краткая запись условия:

За зад. по $2\frac{1}{2}$ очка	всего 13 очков	на 2 зад. больше
За прим. по $1\frac{1}{2}$ очка		

Сколько задач и сколько примеров решил пионер?

После записи условия задачи содержание задачи повторяется учащимися.

В связи с переходом к всеобщему политехническому образованию необходимо установить связь теории с практикой. Эта связь должна явиться важным средством в преодолении формализма в знаниях учащихся по математике.

В то же время опыт работы преподавателей V—VI классов показывает, что учащиеся с интересом знакомятся при решении задач с выполнением народнохозяйственного плана, хода сева, уборки и заготовок в колхозах и совхозах нашей страны и т. п. Очень часто ученик, безразлично относящийся к учению, при решении практических вопросов становится активным, проявляет инициативу, а столкнувшись в практической деятельности с целым рядом затруднений и обнаружив пробелы в своих знаниях, начинает более серьезно заниматься математикой.

Иногда условие задачи не сразу бывает понятно учащимся, так как в условиях встречаются незнакомые учащимся названия (шкив, шлюз, передача, зубчатое колесо, зольное удобрение и т. п.); все такие названия должны быть предварительно разъяснены. Возможно, что для учащихся бывает неясно количественное соотношение между величинами, например между длиной диаметра шкива и числом оборотов и т. п. В таких случаях также необходимо разъяснение.

Нельзя исключить из задачников трудные слова, так как нельзя оторвать содержание задач от производственной и культурно-политической жизни. Такие задачи имеют воспитательно-образовательное значение.

Учащиеся должны понимать не только каждое слово в условии задачи, но должны представлять ту среду, обстановку, из которой взято содержание задачи, понимать, когда и кому может пригодиться такая задача в практической жизни.

Без этого понимания нельзя правильно установить зависимость между величинами, о которых говорится в условии, и правильно подобрать действия.

В некоторых задачах полезно употреблять графические иллюстрации: чертежи, рисунки. Например, при решении задач на движение, задач на определение частей по данному целому и разностным или кратным отношениям между частями.

Усвоение содержания задачи затрудняется иногда в зависимости от сложного построения условия задачи. Если числа задачи расположены в том порядке, в каком надо выполнять вычисления при решении, или — как называют методисты такие задачи — задача дается в приведенном виде, постановка вопросов и вычисления не вызывают затруднений у учащихся. Возьмем пример.

«Надо огородить колхозный сад, ширина которого 109,4 *м*, а длина на 24,6 *м* больше ширины. Сколько кольев потребуется для изгороди, если на каждый метр идет 5 кольев?»

Или: «Надо побелить снаружи одноэтажный дом размером 15 *м* $\times$ 6,6 *м* $\times$ 4,5 *м*. В доме 8 окон, каждое размером 2,3 *м* $\times$ $\times$ 1,2 *м* и дверь размером 2,5 *м* $\times$ 1,8 *м*. Сколько будет стоить побелка всего дома, если побелка 1 *кв. м* стоит 20 коп.?»

Задачи, в которых числа расположены не в том порядке, в каком будут происходить вычисления, называются неприведенными. Для решения таких задач можно изменить условия, сделав задачи приведенными.

«В течение трех дней бригада рабочих выполнила $\frac{3}{4}$ всей работы по ремонту шоссе между двумя колхозами. В первый день было отремонтировано 2,4 *км*, во второй день в $1\frac{1}{2}$ раза больше, чем в первый, а в третий день $\frac{5}{8}$ того, что отремонтировано за первые два дня вместе. Найти длину шоссе между колхозами».

В этой задаче порядок чисел можно изменить, чтобы сделать задачу приведенной, а именно: «Колхозники ремонтировали шоссе между двумя колхозами. В первый день они отремонтировали 2,4 *км*, во второй день в $1\frac{1}{2}$ раза больше, чем в первый, в третий день $\frac{5}{8}$ того, что было отремонтировано в первые два дня вместе. За 3 дня было отремонтировано $\frac{3}{4}$ всего шоссе между колхозами. Определить длину шоссе».

2. Второй этап в решении составной задачи — составление плана решения, т. е. выяснение зависимости между величинами и разложение составной задачи на простые. Для каждой простой задачи должны быть указаны данные и искомое, находящиеся между собой в зависимости. Данные подбираются сначала из условия задачи, потом из вычисленных искомых. Только последнее искомое (иногда 2 или более) указано в вопросе задачи. Поэтому основная трудность при решении составных задач заключается а) в подборе искомых для простых задач, т. е. в постановке вопросов к этим задачам, б) в выборе данных для простых задач из всех комбинаций величин, данных в условии и полученных при решении простых задач.

Разбор задачи можно сделать двумя приемами.

1) Первый прием называется *синтетическим*. Он состоит в следующем. Из условия задачи учащиеся выбирают одну пару числовых данных (иногда больше), к ним подбирается вопрос, т. е. составляется простая задача. Число, полученное при решении этой простой задачи, вместе с одним из данных в условии составной задачи или другая пара чисел из условия задачи берутся для составления второй простой задачи и т. д. В последней простой задаче ставится вопрос составной задачи. Ответ на него явится ответом задачи.

2) Второй прием разбора задач называется *аналитическим*. Он состоит в следующем. Разбор начинается с главного вопроса задачи, к нему подбираются данные из условия задачи. Если в условии нет данных для решения этого вопроса, ставятся новые вопросы для их определения. Так поступают и дальше до тех пор, пока дойдут до вопроса, для которого есть данные в условии.

Анализ и синтез связаны между собою. Действительно, подбирая к числовым данным вопрос (синтез), мы выбираем те данные, которые должны привести к решению задачи (анализ); поставив вопрос задачи (анализ), мы берем те данные, которые есть в условии задачи (синтез).

Разберем решение одной и той же задачи тем и другим приемом.

З а д а ч а. На трехтонном грузовике надо перевезти 150 бидонов, содержащих каждый 25 *л* смазочного масла. Пустой бидон весит 3 *кг*, литр масла весит 0,84 *кг*. Сколько бидонов придется оставить до второй поездки?

К р а т к а я з а п и с ь у с л о в и я: 150 бид. по 25 *л*
1 *л* . . . 0,84 *кг*
бидон . . . 3 *кг*

Изменяем формулировку условия, чтобы сделать задачу приведенной. Из различных способов решения выбираем наиболее короткий. (Задача решается 4-мя, 5-ю или 6-ю действиями.) Литр смазочного масла весит 0,84 *кг*. Бидон содержит 25 *л* масла, пустой бидон весит 3 *кг*. Надо перевезти 150 бидонов масла на трехтонном грузовике. Сколько бидонов придется оставить до второй поездки?

Разберем задачу синтетическим приемом.

1) Литр масла весит 0,84 *кг*, в бидоне помещается 25 *л*. Отсюда узнаем вес масла в бидоне.

2) Вес пустого бидона по условию задачи 3 *кг*, вес масла в бидоне определяется первым действием. Отсюда узнаем вес бидона с маслом.

3) Грузовик по условию задачи берет 3 *т*, вес бидона с маслом определяется вторым действием; отсюда можно узнать, сколько бидонов с маслом будет увезено в первую поездку.

4) Общее число бидонов, которые надо перевезти, 150; число бидонов, которые будут увезены в первую поездку, определяется третьим действием. Поэтому можно узнать, сколько бидонов будет увезено во вторую поездку.

Проведем разбор задачи аналитическим приемом. В задаче требуется знать, сколько бидонов со смазочным маслом будет увезено во вторую поездку. Чтобы ответить на этот вопрос, надо знать: а) общее число бидонов (дано в условии) и б) сколько бидонов увезет грузовик в первую поездку. Для определения второго данного надо знать: а) какой груз берет грузовик (известно в условии) и б) каков вес бидона с маслом. Здесь второе данное должно быть определено, а для этого надо знать: а) вес пустого бидона (дано в условии) и б) вес масла в бидоне. Для определения веса масла должны быть известны количество его в литрах, помещающееся в бидоне, и вес 1 *л* масла. То и другое дано в условии. Итак, намечаем порядок решения задачи (в порядке, обратном анализу):

1) вес 25 литров масла, если 1 *л* весит 0,84 *кг*;
2) вес бидона вместе с маслом;
3) число бидонов, которые берет грузовик в первую поездку;
4) число бидонов, которые останутся до второй поездки.

Синтез	Анализ
1. Вес масла в бидоне.	1. Число бидонов, увезенных во вторую поездку.
2. Вес бидона вместе с маслом.	2. Число бидонов, увезенных в первую поездку.
3. Число бидонов, увезенных в первую поездку.	3. Вес бидона с маслом.
4. Число бидонов, увезенных во вторую поездку.	4. Вес масла в бидоне.

При синтетическом приеме разбора задачи решение может идти параллельно с составлением плана; выбрав из условия пару данных (иногда больше), ставят к ним вопрос и выполняют решение этой простой задачи. Так же составляются и решаются вторая, третья и т. д. простые задачи. Ответ последней простой задачи является ответом всей составной задачи.

Синтетический прием проще, легче аналитического, так как рассуждения при этом приеме легче, доступнее для учащихся, да и подбор вопроса к данным легче, чем указание данных к вопросу. Но, решив несколько простых задач, использовав данные условия составной задачи, учащиеся не всегда получают ответ на вопрос задачи. Иногда они ставят лишние вопросы, загромождают решение ненужными данными. Трудность при решении сложной задачи синтетическим приемом заключается в подборе данных для составления каждой простой задачи. Например, в приведенной задаче можно выбрать данные 150 бидонов по 25 *л* масла и поставить вопрос о количестве масла в 150 бидонах. Но для плана решения 4-мя действиями такой вопрос был бы излишним.

Возможны ошибки в постановке вопросов, например: в приведенной задаче можно было поставить вопрос: сколько пустых бидонов весом по 3 *кг* может увезти трехтонный грузовик? Такая простая задача была бы излишней.

Итак, при синтетическом приеме решения нет уверенности, что выбранные из условия данные и вопрос, поставленный к ним, приведут к правильному решению задачи. Поэтому необходимо, подбирая к данным вопрос, иметь в виду главный вопрос, т. е. прибегать к аналитическому приему.

При аналитическом приеме решения намечается сначала план решения, потом порядок вычислений по этому плану. При аналитическом приеме рассуждения решение указываемых в плане простых задач может быть выполнено только после решения последующих задач. Например, в приведенной выше задаче вопрос о числе бидонов, увезенных в первую поездку, не может быть решен, пока не решены вопросы о весе 25 *л* масла и бидона вместе с маслом. При аналитическом приеме разбора задачи достигается строгая последовательность в ходе рассуждения, но рассуждения труднее даются учащимся, так как к поставленному вопросу приходится указать данные, которые еще неизвестны. Например: к вопросу, сколько бидонов будет увезено во вторую поездку, указываем данные: общее число бидонов (оно дано) и число бидонов, увезенных в первую поездку (оно неизвестно).

Учащиеся должны пользоваться тем и другим приемом. Чтобы научить учащихся анализировать задачи, полезно проводить анализ задач, уже решенных синтетическим приемом. Такая работа должна проводиться систематически.

Как мы сказали выше, анализ и синтез связаны между собой и при решении задач соединяют аналитический и синтетический методы.

План решения задачи сначала составляется устно, потом записывается в различной форме: в форме вопросов или в форме утвердительных предложений.

Возьмем пример.

З а д а ч а. Три куска свинца весят вместе 15,3 *кг*, два более тяжелых весят вместе $12\frac{7}{20}$ *кг*, а самый легкий на $1\frac{2}{25}$ *кг* легче среднего по весу. Определить вес каждого куска.

Разбирая задачу синтетическим приемом, можно наметить план решения в следующих формах.

I. Вопросительная форма записи:	II. Утвердительная форма записи:
1. Сколько весит самый малый кусок?	1. Вес самого малого куска.
2. Сколько весит средний кусок?	2. Вес среднего по весу куска.
3. Сколько весит больший кусок?	3. Вес большего куска.

Перейдем к записи вычислений.

Если план намечен в виде вопросов, то вычисления записываются под вопросами.

1) Сколько весит меньший кусок свинца?

$$15\frac{3}{10}-12\frac{7}{20}=14\frac{26}{20}-12\frac{7}{20}=2\frac{19}{20}\ (кг)$$

2) Сколько весит средний по весу кусок?

$$2\frac{19}{20}+1\frac{2}{25}=2\frac{25}{100}+1\frac{8}{100}=4\frac{3}{100}\ (кг)$$

3) Сколько весит большой кусок свинца?

$$12\frac{7}{20}-4\frac{3}{100}=12\frac{35}{100}-4\frac{3}{100}=8\frac{8}{25}\ (кг)$$

III. Решение может быть записано в виде указаний, что узнали данным вычислением или что узнаем каждым действием.

1) $15\frac{3}{10}-12\frac{7}{20}=2\frac{19}{20}$ (*кг*) весит меньший кусок свинца (или вес меньшего куска свинца).

2) $2\frac{19}{20}+1\frac{2}{25}=4\frac{3}{100}$ (*кг*) весит средний кусок свинца (или вес среднего куска свинца).

3) $12\frac{7}{20}-4\frac{3}{100}=8\frac{8}{25}$ (*кг*) весит большой кусок (или вес большого куска).

IV. Возможна и такая форма записи:

1) Меньший кусок свинца весит (или вес меньшего куска свинца) $15\frac{3}{10}-12\frac{7}{20}=2\frac{19}{20}$ (*кг*).

2) Средний кусок свинца весит (или вес среднего куска свинца) $2\frac{19}{20}+1\frac{2}{25}=4\frac{3}{100}$ (*кг*).

3) Больший кусок свинца весит (или вес большего куска свинца) $12\frac{7}{20}-4\frac{3}{100}=8\frac{8}{25}$ (*кг*).

Для выполнения записи решения можно практиковать различные приемы:

а) Сначала намечается устно лишь порядок вопросов, которые будут решаться, потом переходят к записи решения.

б) Записывается вопрос первой простой задачи, с которой начинается решение данной задачи; после этого приступают к выполнению соответствующего действия и записи его; затем переходят ко второму вопросу, с ним поступают так же, затем так же поступают с третьим вопросом и так до конца.

в) в IV и V классах следует практиковать и другой прием.

Записываются сначала все вопросы, а затем выполняются вычисления, причем вопросы и каждое вычисление нумеруются одним и тем же номером.

Наибольшего признания заслуживает первый прием (пункт а); здесь мы приучаем учащихся охватить всю структуру задачи, последовательность решения вопросов; этот прием должен быть преобладающим на практике. Однако, пока учащиеся имеют еще слабые навыки в решении составных задач, следует практиковать второй либо третий приемы (пункты б и в).

§ 32. Соединение аналитического и синтетического методов (аналитико-синтетический метод)

В трудных задачах для лучшего понимания хода решения рекомендуется применять оба метода.

«Для приобретения оборудования в детский клуб при ЖЭК три дворовые команды собрали 1300 *кг* металлолома, причем первая и вторая команды — поровну, а третья — на 100 *кг* больше каждой из них. Металлолом сдали по цене 8 руб. за тонну. На какую сумму собрала металлолома каждая команда?»

Учитель спрашивает: «Можно ли сразу узнать, на какую сумму сдала металлолома каждая команда?» (Нет.) «Почему?» (Потому что не знаем, сколько металлолома собрала каждая команда.)

Учитель ставит наводящие вопросы: «Сколько было команд?» (Три.) «Сколько лома они собрали?» (1300 *кг*) «Поровну?» (Нет, третья собрала на 100 *кг* больше, чем первая и вторая команды.) «А если бы они собрали поровну, можно было бы узнать, сколько собрала каждая команда?» (Да, мы бы весь сбор разделили на 3 части.) «Нельзя ли и здесь узнать, сколько лома собрали бы все три команды, если бы третья собрала столько же, сколько первая и вторая?» (Можно. Если все три команды соберут одинаково, то все они соберут не 1300 *кг*, а на 100 *кг* меньше, т. е. 1200 *кг*.) Начиная с этого вопроса, решение идет синтетическим путем. Таким образом, в задаче последовательно применяются анализ и синтез: это способствует лучшему пониманию решения задачи.

§ 33. Решение задач с графической иллюстрацией

Дадим графическую схему синтеза и анализа приведенной выше задачи:

«Три куска свинца весят вместе $15\frac{3}{10}$ (*кг*), два более тяжелых весят вместе $12\frac{7}{20}$ *кг*, а самый легкий на $1\frac{2}{25}$ *кг* легче среднего по весу. Определить вес каждого куска» (см. схему на стр. 113).

Схема показывает, что синтез решения простых задач, построенных на основании числовых данных условия (как задача 1-я) или данных, полученных при решении поставленных простых задач (как 2-я и 3-я), приводит к решению составной задачи.

Схема показывает также, что при анализе главный вопрос задачи расчленяется на частные вопросы, решение которых приводит к решению задачи.

3) Вес большого куска свинца

$$12\frac{7}{20} - 4\frac{3}{100} = 8\frac{8}{25} \ (кг)$$

Вес двух тяжелых кусков

$$12\frac{7}{20} \ кг$$

2) Вес среднего куска

$$2\frac{19}{20} + 1\frac{2}{25} = 4\frac{3}{100} \ (кг)$$

1) Вес меньшего куска

$$15\frac{3}{10} - 12\frac{7}{20} = 2\frac{19}{20} \ (кг)$$

Средний кусок тяжелее меньшего

на $1\frac{2}{25}$ *кг*

Решение многих арифметических задач может сопровождаться наглядной иллюстрацией: чертежом, таблицей. Чертеж должен облегчить рассуждения, проводимые при решении задачи.

При решении задач с помощью чертежа необходимо соблюдать два методических требования. Во-первых, на уроке чертежи должны выполняться в результате рассуждений при активном участии учеников, во-вторых, надо доводить рассуждения и письменное оформление решения до логического конца; ссылки на чертеж недостаточно.

Рассмотрим решение некоторых задач с применением чертежа.

З а д а ч а. Комбайнер за 4 дня убрал 108,7 *га* пшеницы, причем в первый день было убрано на 1,5 *га* меньше, чем во второй день, в третий день на 3 *га* больше, чем во второй, и на 5 *га* больше, чем в четвертый день. Сколько гектаров пшеницы было убрано в каждый из 4-х дней?

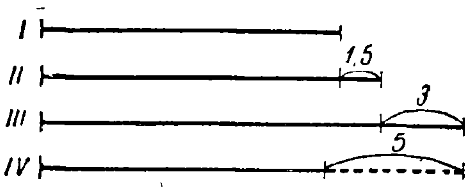
Для решения задачи необходимо узнать число гектаров пшеницы, убранной в один какой-либо день, а также разности между этим числом и каждым из остальных искомых чисел. Искомые числа уравниваются с одним из 4-х искомых, которое и определяется в первую очередь. Решение данной задачи возможно выполнить 4-мя способами.

Определим величину участка, убранного в первый день. Уравниваем с этим числом остальные три искомых числа, пользуясь данными разностными отношениями чисел. Изменив соответственно общее число гектаров убранной пшеницы, находим величину первого участка, а зная это число и разности между найденным числом и остальными числами, найдем все неизвестные числа.

Для определения разностей искомых чисел полезно применить чертеж (черт. 2).

Второе искомое число больше первого на 1,5 *га*. Третье число больше второго на 3 *га* и, следовательно, больше первого на $1{,}5 + 3 = 4{,}5$ (*га*). Четвертое число на 5 меньше третьего и на 0,5 ($5 - 4{,}5$) меньше первого. Чтобы уравнять второе, третье и четвертое числа с первым, надо второе число уменьшить на 1,5 *га*, третье уменьшить на 4,5 *га* и увеличить четвертое на 0,5 *га*. Общее число гектаров участков (сумма четырех слагаемых) при уменьшении слагаемых на 1,5 и 4,5 и увеличении на 0,5 уменьшится на $1{,}5 + 4{,}5 - 0{,}5 = 5{,}5$ (*га*) и будет соответствовать $108{,}7 - 5{,}5 = 103{,}2$ (*га*).

Итак, сумма 4-х чисел, из которых каждое равно величине первого участка, равна 103,2 (*га*). Отсюда величина первого участка равна $103{,}2 : 4 = 25{,}8$ (*га*). Величина второго участка $25{,}8 + 1{,}5 = 27{,}3$ (*га*), величина третьего участка $27{,}3 + 3 = 30{,}3$ (*га*) и величина четвертого участка $30{,}3 - 5 = 25{,}3$ (*га*).



Черт. 2.

Тот же чертеж помогает объяснить три других способа решения задачи. В самом деле, можно начать решение задачи с определения второго участка. Для этого надо уравнять все искомые числа со вторым числом. Для этого надо I число увеличить на 1,5 (*га*), III число уменьшить на 3 (*га*), IV число увеличить на 2 (*га*) ($5 - 3$). Общее число гектаров увеличится на $1{,}5 + 2 - 3 = 0{,}5$ (*га*) и будет равно $108{,}7 + 0{,}5 = 109{,}2$ (*га*).

Для определения третьего числа (третий способ решения) надо увеличить первое число на $1{,}5 + 3 = 4{,}5$ (*га*), второе — на 3 (*га*), четвертое — на 5 (*га*). Сумма четырех чисел увеличится на $4{,}5 + 3 + 5 = 12{,}5$ (*га*) и будет равна $108{,}7 + 12{,}5 = 121{,}2$ (*га*), отсюда третье число равно $121{,}2 : 4 = 30{,}3$ (*га*).

Величина четвертого участка (четвертый способ решения) определяется по формуле $(108{,}7 - 0{,}5 - 2 - 5) : 4$; $101{,}2 : 4 = 25{,}3$ (*га*).

Большое значение может иметь чертеж при решении задачи на движение.

Решение задач на движение в *одном направлении* нелегко дается учащимся. Когда начинается ознакомление учащихся с задачами этого типа, чертежом должны иллюстрироваться даже наиболее простые задачи.

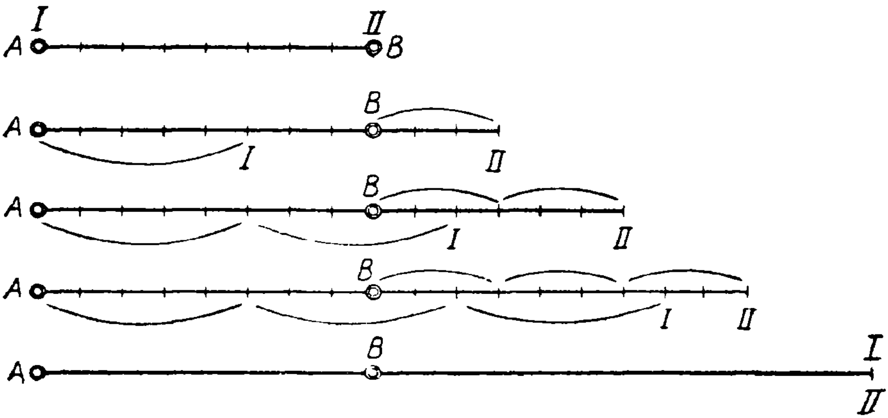
Задача.

Из двух мест A и B, расстояние между которыми 80 *км*, выходят одновременно в одном направлении (от A к B) два поезда. Один, вышедший из A, проходит 50 *км* в час, другой, идущий из B, проходит 30 *км* в час. Через сколько часов первый поезд догонит второй?

Рассмотрим на чертеже положение поездов через 1 час, через 2 часа и т. д. после выхода (черт. 3).

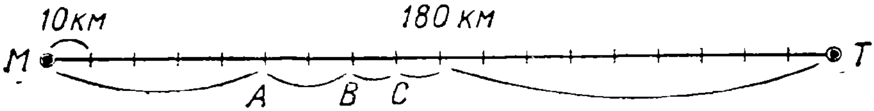
В момент выхода расстояние между поездами 80 *км*, через 1 час после выхода — 60 *км*, через 2 часа — 40 *км*, через 3 часа — 20 *км*, через 4 часа — 0 *км*.

Задача. Из Москвы в Тулу, расстояние между которыми 180 *км*, выехал велосипедист со средней скоростью 10 *км* в час.



Черт. 3.

Через 5 часов после его выезда по тому же направлению выехал из Москвы мотоциклист, который обогнал велосипедиста, прибыл в Тулу, пробыл там 1 час и выехал обратно в Москву. На каком расстоянии от Тулы произошла встреча мотоциклиста с велосипедистом, если мотоциклист ехал со скоростью 90 *км* в час?



Черт. 4.

Для решения задачи отмечают на чертеже (черт. 4): а) от M до A 5 равных делений по 10 единиц, так как велосипедист ехал 5 часов со скоростью 10 *км* в час, после чего выехал из M мотоциклист. б) Расстояние 180 *км* мотоциклист проехал за 2 часа (180 : 90). За это время велосипедист проехал еще 20 *км* (10 · 2), на чертеже отмечают отрезок *АВ*. в) Мотоциклист пробыл в Туле 1 час. За это время велосипедист проехал еще 10 *км* (отрезок *ВС*). г) Расстояние *СТ* велосипедист и мотоциклист проезжают одновременно, двигаясь навстречу друг другу. Решение задачи проводится параллельно с объяснением чертежа:

1) $10 \cdot 5 = 50$ (*км*); 2) $10 \cdot 2 = 20$ (*км*); 3) $10 \cdot 1 = 10$ (*км*); 4) $50 + 20 + 10 = 80$ (*км*); 5) $180 - 80 = 100$ (*км*); 6) $90 + 10 = 100$ (*км*); 7) $100 : 100 = 1$ (*час*); 8) $90 \cdot 1 = 90$ (*км*).

Ответ: встреча произойдет в 90 *км* от Тулы.

Чертежи применяются и при решении составных задач других типов.

§ 34. Запись решения задачи в виде числовой формулы

Решение составной задачи может быть записано в виде числовой формулы, объединяющей все действия, используемые в решении.

Этот прием состоит в следующем. После того как условие задачи усвоено учащимися, производится разбор задачи (устно), составляется план решения, указываются действия и порядок их. Начиная решение, записывают компоненты каждого действия, но результат действия не вычисляется. Отдельные действия связываются в том порядке, который необходим для решения задачи. В результате получается запись в виде формулы, показывающая весь ход разбора задачи и порядок действий, приводящий к решению задачи. Упражнения в составлении формул начинаются с несложных задач.

В начале настоящей главы (§ 28) были приведены примеры решений задач при помощи числовых формул.

Возьмем более сложную задачу, числовая формула решения которой получается постепенно в связи с разбором задачи.

«Два комбайнера, работая вместе, должны убрать хлеб с поля в 4 дня. За некоторое время, когда они работали вместе, один убрал $\frac{2}{9}$ всего поля, другой в 2 раза больше. Потом первый комбайнер перешел на другое поле. Во сколько дней второй комбайнер закончил уборку поля?»

Намечаем план решения. Величину всего поля надо принять за 1 (единицу.)

План решения

1. Какую часть поля убрал второй комбайнер?
2. Какую часть поля убрали комбайнеры, работая вместе?
3. Какую часть поля убрал второй комбайнер, работая один?
4. На сколько равных частей делилась дневная выработка комбайнеров, если выработку первого принять за 1 часть?

5. Какую часть всего поля должны были комбайнеры обрабатывать за 1 день?

6. Какую часть поля убирал за день первый комбайнер?

7. Какую часть поля убирал за день второй комбайнер?

8. Во сколько дней была закончена уборка поля?

Затем к каждому вопросу указывается действие, которое и записывается. Результаты действий не пишутся.

1. Второй комбайнер убрал в 2 раза больше: $\frac{2}{9} \cdot 2 = \frac{4}{9}$ всего поля.

2. Первый комбайнер обработал $\frac{2}{9}$ всего поля, второй $\frac{4}{9}$. Они обработали вместе $\frac{2}{9} + \frac{4}{9}$ всего поля.

3. От величины всего поля отнимаем величину обработанной части, чтобы определить, какую часть обработал второй комбайнер, работая один: $1 - \left(\frac{2}{9} + \frac{4}{9}\right)$.

4. Если дневную выработку первого комбайнера считать за 1 часть, то выработка второго составит 2 части. Узнаем посредством сложения, на сколько равных частей делилась дневная выработка двух комбайнеров.

$$1 + 2$$

5. Найдем посредством деления, какую часть поля два комбайнера обрабатывали за 1 день, работая вместе.

$$1 : 4$$

6. Узнаем посредством деления, какая часть всего поля приходилась на 1 часть выработки комбайнеров, т. е. какую часть поля обрабатывал за день первый комбайнер.

$$\frac{1 : 4}{1 + 2}$$

7. Увеличив в 2 раза дневную выработку первого комбайнера, узнаем дневную выработку второго комбайнера.

$$\frac{1 : 4}{1 + 2} \cdot 2$$

8. Число дней работы второго комбайнера, выполненной после ухода первого комбайнера, узнаем посредством деления.

$$\left[1 - \left(\frac{2}{9} + \frac{4}{9}\right)\right] : \left(\frac{1 : 4}{1 + 2} \cdot 2\right)$$

Описанная работа имеет громадное образовательное значение в смысле выработки умения охватить одной числовой формулой ряд действий в связи с конкретным материалом задачи. Эта работа весьма ценна, как подготовляющая детей к следующей ступени изучения математики: овладению умением составлять и разбираться в числовых формулах, формулах алгебраических.

§ 35. Письменное решение задач

Прежде чем потребовать от учащихся самостоятельного письменного объяснения решения задачи, учителю необходимо разобрать несколько задач (при активном участии класса), составив сначала устное объяснение решения, а затем выполнить решение письменно.

И в этом случае, как и при обучении записи плана решения задачи, учитель дает на доске образец письменного объяснения решения задачи.

Нетрудно понять, что успех такого рода работы в значительной степени зависит от умения учащихся устно давать подробные объяснения всего хода решения задачи, а потому на эту часть работы при решении задач учитель должен обратить самое серьезное внимание.

Учитель должен требовать от учащихся, чтобы они объясняли кратко и ясно ход решения, исходя из условий последней. При выборе того или иного действия учащиеся должны уметь объяснить, почему для решения данного вопроса выбрано именно это действие.

В письменном изложении решения задачи должны быть: 1) краткая запись условия, 2) план решения, составленный на основании синтетического или аналитического разбора задачи, 3) решение простых задач, т. е. подбор действий с объяснением, почему применяется то или иное действие, 4) ответ задачи, 5) проверка решения задачи.

Разберем пример решения задачи с объяснением.

З а д а ч а. В двух амбарах хранится 45,875 *т* хлопка в кипах одинакового веса. В первом амбаре на 58,75 *ц* больше хлопка, чем во втором амбаре. Сколько кип хлопка в каждом амбаре, если в первом на 47 кип больше, чем во втором?

К р а т к а я з а п и с ь у с л о в и я

В 2 амбарах 45,875 *т* В 1 на 58,75 *ц* больше В 1 на 47 кип больше	Сколько кип хлопка в каждом амбаре?

Решаем задачу. Составляем план решения, применяя устный синтетический разбор задачи. По условию в первом амбаре хранится больше хлопка, чем во втором амбаре, на 58,75 *ц* или на 47 кип. Отсюда 1) следует узнать вес одной кипы хлопка, 2) зная вес всего хлопка и вес одной кипы, узнаем, сколько кип хлопка хранится в двух амбарах, 3) зная все число кип хлопка и на сколько кип в первом амбаре больше, чем во втором, узнаем, сколько кип хлопка было бы в двух амбарах, если бы во втором амбаре было на 47 кип больше, чем в действительности, т. е. во втором амбаре было бы столько же, сколько в первом, 4) зная, сколько кип хлопка было бы в двух амбарах такой емкости, как первый, узнаем число кип хлопка в первом амбаре, 5) зная, сколько кип хлопка хранится в первом амбаре, и зная, что в первом амбаре на 47 кип больше, чем во втором, узнаем число кип хлопка во втором амбаре.

Итак, план решения следующий:

1) вес одной кипы хлопка,

2) число кип хлопка в двух амбарах;

3) число кип хлопка в том случае, если бы во втором амбаре стало столько же кип, сколько имеется в первом амбаре;

4) число кип хлопка в первом амбаре;

5) число кип хлопка во втором амбаре.

Решение с объяснением

1) 58,75 : 47 = 1,25 *ц*. Так как в 47 равных кипах 58,75 *ц* хлопка, то в одной кипе в 47 раз меньше этого веса. Уменьшение числа в несколько раз делается делением на равные части.

2) 45,875 *т* : 1,25 *ц* = 367 (кип). Чтобы найти число всех кип хлопка, узнаем, сколько раз в 45,875 *т* содержится 1,25 *ц*, а это выполняется делением.

3) Число 367 надо разделить на 2 части, из которых первая на 47 больше второй, т. е. по сумме двух чисел и их разности узнать два числа: 367 + 47 = 414 (кип). Если бы во втором амбаре было столько же кип хлопка, сколько в первом амбаре, т. е. на 47 кип больше, то общее количество хлопка (367 кип) увеличилось бы на 47 кип: увеличив 2-е слагаемое на 47, мы увеличиваем и сумму на 47. Увеличение на несколько единиц делается посредством сложения.

4) 414 : 2 = 207 (кип). Это — число кип в первом амбаре. Если бы в двух амбарах было по равному числу кип хлопка (по такому, как в первом амбаре), то в каждом была бы половина общего количества, а уменьшение числа вдвое выполняется делением.

5) 207 — 47 = 160 (кип). Это число кип во втором амбаре. В первом амбаре 207 кип, во втором по условию на 47 кип меньше. Уменьшение числа на несколько единиц делается посредством вычитания.

Ответ. В первом амбаре хранятся 207 кип, а во втором амбаре — 160 кип.

Проверка решения задачи

Составляем новую задачу. В двух амбарах хранится 45,875 *т* хлопка в кипах одинакового веса, в первом амбаре 207 кип, во втором — 160 кип. На сколько центнеров хлопка больше в первом амбаре, чем во втором?

Решение задачи

1) Число всех кип хлопка:

$$207 + 160 = 367 \text{ (кип)}$$

2) Вес одной кипы хлопка:

$$45{,}875 \ \textit{т} : 367 = 1{,}25 \ \textit{ц}$$

3) На сколько кип в первом амбаре больше, чем во втором?

$$207 - 160 = 47$$

4) На сколько центнеров больше хлопка в первом амбаре, чем во втором?

$$1{,}25 \ \textit{ц} \cdot 47 = 58{,}75 \ \textit{ц}$$

Получено число, опущенное из условия задачи; задача решена правильно.

§ 36. Постепенное усложнение условия задачи

Чтобы выработать у учащихся умение решать составные задачи, надо их познакомить с развитием содержания задачи, постепенно усложняя ее условие, заменяя данные в условии числа сложными данными или вводя новые условия.

Приведем пример задач, из которых каждая следующая получается из предыдущей путем усложнения условия.

I. На склад привезли сначала 32,5 *т* сахара, потом еще 28,5 *т*. Сколько всего сахара привезли на склад?

II. На склад привезли сначала 32,5 *т* сахара, потом вторую партию — на 4 *т* меньше. Сколько всего сахара привезли на склад?

III. На склад привезли сахар в двух вагонах по 16,25 *т* в каждом и в двух других по 14,25 *т* в каждом. Сколько всего сахара привезли на склад?

IV. На склад привезли сахар сначала в двух вагонах по 16,25 *т* в каждом, потом в двух вагонах, в каждом из которых было на 2 *т* меньше, чем в каждом из первых двух вагонов. Сколько всего сахара привезли на склад?

Возьмем еще ряд задач:

1. Пионеры, участвуя в уборке урожая, образовали 2 звена. Первое звено выработало 420 трудодней, второе 348 трудодней. Сколько трудодней выработали оба звена?

2. Пионеры, участвуя в уборке урожая, образовали 2 звена: в первом звене было 15 человек, и каждый выработал по 28 трудодней; во втором звене было 12 человек, и каждый выработал по 29 трудодней. Сколько трудодней выработали оба звена?

3. Пионеры, участвуя в уборке урожая, образовали 2 звена. Первое звено из 15 человек обязалось выработать по 25 трудодней,

но каждый выработал сверх обязательства по 3 трудодня. Второе звено из 12 человек выработало по 29 трудодней на каждого. Сколько трудодней выработали оба звена?

4. Пионеры, участвуя в уборке урожая, обязались выработать по 25 трудодней каждый. Они работали двумя звеньями; в первом звене было 15 человек и каждый выработал сверх обязательства по 3 трудодня, второе звено из 12 человек выработало сверх обязательства по 4 трудодня на каждого. Сколько трудодней выработали оба звена?

В таком ряде задач один и тот же вопрос, но он решается различным числом действий. Для определения числа трудодней, выработанных двумя звеньями пионеров, в условии первой задачи дано число трудодней, выработанных каждым звеном. Первая задача решается одним действием. Во второй задаче эти числа не даны, каждое определяется одним действием. Вторая задача решается тремя действиями. В третьей задаче эти числа также не даны и определение одного из них усложняется, так что оно определяется двумя действиями. Всего на решение третьей задачи надо 4 действия. Наконец, четвертая задача решается пятью действиями, так как каждое из двух чисел, необходимых для решения главного вопроса задачи, находится двумя действиями. Осложнение условия заставляет учащихся внимательно относиться к каждому слову задачи, к каждому данному в условии задачи, показывает, какое значение имеет вопрос задачи, приучает к анализу задачи.

Чтобы показать, какое значение имеет вопрос задачи, можно давать задачи, изменяя не условие, как в предыдущем ряде задач, а вопрос задачи. Например:

В селе в первый месяц радиофицировали 60 домов, во второй — в 2 раза больше, чем в первый, а в третий — на 30 домов больше, чем во второй. Во сколько домов села провели радио за три месяца? Задача решается по формуле: $60 + 60 \cdot 2 + (60 \cdot 2 + 30) = 330$.

Эту же задачу можно дать, изменив вопрос: «Сколько домов радиофицировали в селе за третий месяц?» Задача решается по формуле: $60 \cdot 2 + 30 = 150$. Изменив только вопрос задачи при тех же данных в условии, получили совершенно другой ответ.

Необходимо также давать задачи, в условие которых входят близкие понятия, например увеличение, уменьшение в кратном отношении и в разностном, сравнение кратное и разностное, деление на части и деление по содержанию и т. д.

Возьмем пример:

«На вопрос: «Который час?» — ответили, что оставшаяся часть суток в $2\frac{2}{3}$ раза меньше суток. Который был час?»

После этой задачи можно предложить следующую:

«На вопрос: «Который час?» — ответили, что прошедшая часть суток на $2\frac{2}{3}$ часа меньше суток. Который был час?»

Решив обе задачи, учащиеся выясняют, почему задачи решаются разными действиями.

§ 37. Проверка решения задачи

Если выполнение действий над числами следует проверять, то тем более надо проверять результат, полученный при решении составной задачи. Проверка помогает уяснить, правильно ли понята задача, устанавливает соответствие найденного результата всем условиям задачи.

Проверка решения задачи помогает более глубокому пониманию содержания задачи, содействует выработке критического отношения к работе, воспитывает настойчивость в достижении цели.

Обыкновенно проверяют решение задачи следующими способами: 1) узнают, соответствует ли полученный ответ условию задачи, или 2) составляют другую задачу с введением в ее условие полученного ответа.

Проверка первым способом

Задача. Для столярной мастерской купили верстаки. Известно, что 5 верстаков стоят 28 руб. Взяв 15 верстаков, мастерская уплатила их стоимость в 2 срока: в первый срок в 5 раз больше, чем во второй. Сколько было уплачено в первый и сколько во второй срок?

Решение.
1) 28 руб. : 5 = 5,6 руб.
2) 5,6 руб. · 15 = 84 руб.
3) 5 ч. + 1 ч. = 6 ч.
4) 84 руб. : 6 = 14 руб.
5) 14 руб. · 5 = 70 руб.

Ответ: 70 руб., 14 руб.

Берут первую часть задачи: известно, что 5 верстаков стоят 28 руб. Проверяют, получится ли такая стоимость 5-ти верстаков, если считать, что было уплачено 70 руб. и 14 руб.

Всего за 15 верстаков уплатили 70 руб. + 14 руб. = 84 руб.; один верстак стоит 84 руб. : 15 = 5,6 руб. 5 верстаков стоили 5,6 руб. × 5 = 28 руб. Число 28 руб. дано в первой части условия. Следовательно, возможно, что решение задачи правильно.

Берут вторую часть условия: по условию в первый срок уплачено в 5 раз больше, чем во второй срок. 70 руб. : 14 руб. = 5, т. е. ответ удовлетворяет и этой части условия.

Проверка выше разобранной задачи полная. Если бы ограничиться проверкой только первой части или только второй, это была бы неполная проверка. Иногда для обнаружения ошибки достаточно бывает и неполной проверки. Например, если бы разобранная выше задача о делении 84 руб. в отношении 5 к 1 была решена так: 84 руб. : 5 = 16,8 руб.; 84 руб. — 16,8 руб. = 67,2 руб. (ученики иногда делают такую ошибку в решении задач на пропорциональное деление), то проверка: 67,2 руб. : 16,8 руб. = = 4 (раза), а не 5 раз — сразу показала бы, что задача решена неправильно.

Проверка вторым способом

Второй способ проверки решения задач — составление к данной задаче обратной задачи.

К задаче можно составить столько обратных задач, сколько числовых данных входит в условие задачи.

Составление обратных задач на основании условия данной задачи имеет большое значение для развития логического мышления учащихся.

Рассмотрим задачу: Колхоз собрал 8 корзин винограда II сорта и в 6 раз больше корзин I сорта, всего 480 *кг*. В 3-х корзинах II сорта было 36 *кг*. Сколько килограммов винограда было в каждой корзине I сорта?

Решение:
1) 36 *кг* : 3 = 12 *кг*
2) 12 *кг* · 8 = 96 *кг*
3) 480 *кг* — 96 *кг* = 384 *кг*
4) 8 корз. · 6 = 48 корз.
5) 384 *кг* : 48 = 8 *кг*

Обратные задачи

1. Колхоз собрал 48 корзин винограда I сорта по 8 *кг* в корзине и в 6 раз меньше корзин II сорта, причем в каждых 3-х корзинах было по 36 *кг*. Сколько всего собрали винограда?

Решение:
1) 8 *кг* · 48 = 384 *кг*
2) 48 : 6 = 8 (корз.)
3) 36 *кг* : 3 = 12 *кг*
4) 12 *кг* · 8 = 96 *кг*
5) 384 *кг* + 96 *кг* = 480 *кг*

2. Колхоз собрал 48 корзин винограда I сорта по 8 *кг* в каждой и несколько корзин II сорта; всего 480 *кг*. Во сколько раз число корзин I сорта было больше, чем II сорта, если в каждых 3-х корзинах II сорта было по 36 *кг*?

Решение:
1) 8 *кг* · 48 = 384 *кг*
2) 480 *кг* — 384 *кг* = 96 *кг*
3) 36 *кг* : 3 = 12 *кг*
4) 96 *кг* : 12 *кг* = 8 (корз.)
5) 48 : 8 = 6 (раз)

Приведем еще пример решения задачи с проверкой вторым способом.

Задача. Трое рабочих могут выполнить работу в $1\frac{3}{5}$ часа. Во сколько времени мог бы выполнить эту работу один третий рабочий, если известно, что один первый выполнил бы ее в 8 часов., а один второй — в 6 часов?

Решение: 1) $1 : 8 = \frac{1}{8}$ 2) $1 : 6 = \frac{1}{6}$

3) $1 : 1\frac{3}{5} = \frac{5}{8}$ 4) $\frac{1}{8} + \frac{1}{6} = \frac{7}{24}$

5) $\frac{5}{8} - \frac{7}{24} = \frac{1}{3}$ 6) $1 : \frac{1}{3} = 3$ (часа)

Для проверки составляем такую задачу:

«Трое рабочих могут выполнить работу в $1\frac{3}{5}$ часа. Во сколько времени мог бы выполнить эту работу один первый рабочий, если известно, что один второй может выполнить ее в 6 часов, а один третий в 3 часа?»

Решение: 1) $1 : 6 = \frac{1}{6}$ 2) $1 : 3 = \frac{1}{3}$

3) $1 : 1\frac{3}{5} = \frac{5}{8}$ 4) $\frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

5) $\frac{5}{8} - \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ 6) $1 : \frac{1}{8} = 8$ (час.), т. е.

получим число, которое было опущено из условия данной задачи. Следовательно, задача решена верно.

§ 38. Решение задач несколькими способами

Многие арифметические задачи решаются несколькими способами. При решении таких задач необходимо соблюдать последовательность, переходить к новому способу решения только тогда, когда хорошо усвоен первый способ. Из нескольких способов надо выбирать наиболее удобный, целесообразный.

Решение задачи несколькими способами способствует лучшему пониманию метода решения, развивает инициативу учащихся, предприимчивость в отношении способов решения задачи.

Переходя к различным способам решения задачи, надо внимательно относиться к предлагаемым учащимися способам, разбирать, оценивать их, поощрять тех, кто находит наиболее удобные, рациональные способы.

Несколько способов решения применимы к задачам на встречное движение, на определение чисел по сумме и разности и др.

Задача. Для перевозки 71,4 *ц* зерна можно погрузить его на 5 подвод и 3 грузовика или на 2 подводы и 4 грузовика. Сколько грузят на подводу и сколько на грузовик?

Эта задача на уравнивание данных может решаться двумя способами.

З а п и с ь у с л о в и я: 5 подвод 3 грузовика 71,4 *ц*
2 подводы 4 грузовика 71,4 *ц*

а) Уравниваем число подвод, увеличив все числа первой части условия в 2 раза, второй части — в 5 раз. Решение будет следующее: 1) 20 — 6 = 14 (груз.); 2) 357 — 142,8 = 214,2 (*ц*); 3) 214,2 : 14 = 15,3 (*ц*) берет грузовик; 4) 15,3 · 3 = 45,9 (*ц*); 5) 71,4 — 45,9 = 25,5 (*ц*); 6) 25,5 : 5 = 5,1 (*ц*) берет подвода.

Аналогично решается задача посредством уравнивания числа грузовиков. Но задача может решаться еще способом замены, так как из условия: 5 подвод и 3 грузовика берут такой же груз, как 2 подводы и 4 грузовика — следует, что грузовик берет груз в 3 раза больший, чем подвода.

Эту замену можно объяснить следующим способом: 5 подв. и 3 груз. берут такой же груз, как 2 подв. и 4 груз. Во втором случае при одном и том же общем весе груза привлекают к работе подвод на 3 меньше, а грузовых машин на 1 больше. Очевидно, 1 грузовая машина берет столько же груза, сколько 3 подводы.

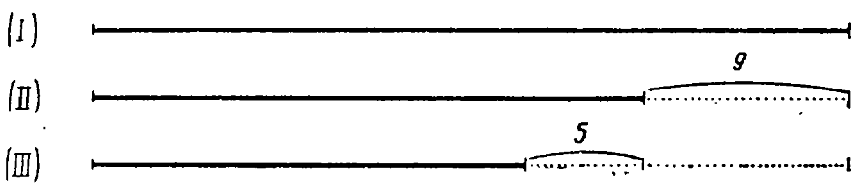
Если способ уравнивания является шаблонным, то нельзя сказать этого о применении к задаче способа замены, здесь учащиеся должны проявить сообразительность, смекалку.

Разберем задачу на определение чисел по их сумме и разности:

«Радиосеть в трех колхозах достигает 73 *км*, причем во втором колхозе на 5 *км* больше, чем в третьем, и на 9 *км* меньше, чем в первом. Какова длина радиосети в каждом колхозе?»

Задача решается способом уравнивания трех искомых чисел по одному из них. Усвоив условие, ученики выбирают наиболее простой способ решения. Так как в условии известны разности между величиной радиосети 3-го и 2-го колхозов и 1-го и 2-го колхозов, то удобно определять в первую очередь длину радиосети 2-го колхоза. К этому числу надо приравнять длину сети первого и третьего колхозов.

З а п и с ь у с л о в и я: I больше II на 9 | Какова длина радиосети в каждом колхозе?
III меньше II на 5



Черт. 5.

В помощь решению может быть сделан чертеж (черт. 5), указывающий разности между искомыми тремя числами.

(I) длина радиосети 1-го колхоза на 9 *км* больше длины радиосети 2-го колхоза (II); (III) длина радиосети 3-го колхоза на

5 *км* меньше длины радиосети 2-го колхоза (II). Чтобы уравнять (I) и (III) числа со (II), надо уменьшить (I) число на 9 и увеличить (III) на 5.

Сумма трех чисел — длина радиосети 73 *км* — при изменении (I) и (III) слагаемых — уменьшится на $9 - 5 = 4$ (*км*) и составит $73 - 4 = 69$ (*км*). Каждая из трех разностей, равных второй радиосети, составит $69 : 3 = 23$ (*км*). Два других числа определяются легко.

Но задача может быть решена другим способом — посредством уравнивания всех чисел с первым числом. Для этого (II) число должно быть увеличено на 9, а (III) на $9 + 5 = 14$; $73 + 9 + 14 = 96$; отсюда (I) $= 96 : 3 = 32$.

Третий способ решения: уравниванием (I) и (II) числа с (III). Для этого уменьшаем (I) число на $9 + 5 = 14$; (II) — на 5; $73 - 14 - 5 = 54$; (III) $= 54 : 3 = 18$.

Разберем еще одну задачу.

«Длина плитки 0,14 *м*, ширина 1,2 *дм*, толщина 4 *см*, вес 873,6 *г*. Длина второй плитки из того же материала 0,09 *м*, ширина 0,8 *дм*, толщина 0,2 *дм*. Сколько весит вторая плитка?»

Первое решение: 1) $14 \cdot 12 \cdot 4 = 672$; 672 *куб. см* — объем плитки;

2) 873,6 *г* : 672 = 1,3 *г* — вес 1 *куб. см* плитки;

3) $9 \cdot 8 \cdot 2 = 144$; 144 *куб. см* — объем второй плитки;

4) $1,3 \cdot 144 = 187,2$ *г* — вес второй плитки.

Второе решение: определив объем той и другой плитки, узнаем, во сколько раз объем первой больше, чем объем второй. $672 : 144 = 4\frac{2}{3}$; в $4\frac{2}{3}$ раза. Определим вес второй плитки: 873,6 *г* : $4\frac{2}{3} = 187,2$ *г*.

Третье решение: 1) Вес плитки шириною 12 *см*, толщиною 4 *см*, но длиною 9 *см* (вместо 14 *см*) составит $\frac{9}{14}$ веса первой плитки: 873,6 *г* $\cdot \frac{9}{14} = 561,6$ *г*; 2) Вес плитки длиною 9 *см*, шириною 12 *см*, толщиною 2 *см* (вместо 4 *см*) составит половину 561,6 *г*; 561,6 *г* : 2 = 280,8 *г*; 3) Вес плитки длиною 9 *см*, толщиною 2 *см*, шириною 8 *см* (вместо 12 *см*) составит $\frac{8}{12}$, или $\frac{2}{3}$ от 280,8 *г*; 280,8 *г* $\times \frac{2}{3} = 187,2$ *г*.

Ответ: 187,2 *г*.

§ 39. Группы арифметических задач

Выше мы останавливались на видах простых задач. Там же сказано и о важном значении их для решения составных задач.

Простые задачи являются подготовительной ступенью при обучении решению составных задач.

В планировании программного материала мы указали, что необходимо в V и VI классах повторить составные задачи на целые числа, которые решались в начальной школе.

Можно объединить в группы составные арифметические задачи, которые обычно решаются при изучении арифметики в V и VI классах.

Первая группа задач — на изменение результатов действий в зависимости от изменения данных. Сюда же входят задачи на зависимость между элементами действий.

Вторая группа задач — на вычисление среднего арифметического — знакомит учащихся с понятием «средней» величины, применяемым в практических вопросах (средняя температура, средняя скорость и т. д.). В этой группе задач разбирают практические задачи на пробу металлов, крепость растворов и т. п.

Третья группа задач — задачи на нахождение чисел по их сумме и разности.

Четвертая группа задач — на исключение неизвестного. В нее входят задачи на нахождение неизвестного по разности величин. Эти задачи подготовляют учащихся к решению задач на исключение неизвестного а) посредством вычитания и б) посредством уравнивания данных.

К группе задач на исключение неизвестного относятся в) задачи, решаемые способом замены неизвестного при данном разностном или кратном отношении неизвестных, и г) задачи, решаемые способом предположения.

Пятая группа задач — на нахождение дроби от числа и числа по его дроби.

В связи с изучением прямой и обратной пропорциональности величин возникает необходимость решения задач с пропорциональными величинами. В шестую группу арифметических задач входят задачи на простое тройное и сложное тройное правила.

Седьмая группа задач — на пропорциональное деление.

В нее входят:

а) задачи на нахождение чисел по сумме или разности и кратному отношению;

б) прямо и обратно пропорциональное деление;

в) сложно пропорциональное деление.

Восьмую группу составляют задачи различного содержания: на движение, совместную работу, задачи с геометрическим содержанием.

Не все то, что изложено в последующем, может быть использовано учителем на уроке; так, например, решение задач методом уравнивания, предположения и др. не предусмотрено программой, а потому их включение в эту главу следует рассматривать исходя из стремления автора дать некоторую завершенность классификации арифметических задач. Учитель решает в V и VI классах только задачи тех типов, которые указаны в программе, а остальные использует на кружковых занятиях и т. п.

§ 40. I группа. Задачи на изменение результатов действий в зависимости от изменения компонентов

Задачи на изменение результатов действий при изменении компонентов начинают решать при изучении действий с целыми числами.

Задачи этой группы надо решать также на дробных числах, усложняя содержание; при этом необходимо каждый вид задач решать в определенной части программы, например, изучая сложение обыкновенных и десятичных дробей, решать задачи на изменение суммы и т. п.

1. Приведем примеры задач, решение которых основано на изменении суммы.

Задача. В огороде, площадь которого $60\frac{1}{2}$ *а*, были посажены картофель, лук, морковь; в другом огороде под картофелем было на $9\frac{3}{4}$ *а* больше, чем в первом, под луком и морковью на $8\frac{1}{2}$ *а* меньше. Какую площадь занимал второй огород?

Решение задачи основано на зависимости между изменением слагаемых и изменением суммы. $60\frac{1}{2}$ *а* — эта сумма двух площадей, занятых а) картофелем и б) другими овощами. Первое слагаемое увеличивается на $9\frac{3}{4}$, второе уменьшается на $8\frac{1}{2}$. Сумма должна увеличиться на $9\frac{3}{4}-8\frac{1}{2}$. Итак, задача решается двумя действиями:

1) $9\frac{3}{4}-8\frac{1}{2}=1\frac{1}{4}$ (*а*); 2) $60\frac{1}{2}+1\frac{1}{4}=61\frac{3}{4}$ (*а*) — площадь второго огорода. Таким образом, вторая сумма находится без определения величины ее слагаемых.

Подобным же образом решается задача: «В младших и старших классах средней школы всего 560 учеников. В другой средней школе в младших классах на 90 учеников больше, а в старших — на 40 учеников больше, чем в первой. Сколько учеников во второй средней школе?»

Решение задачи основано на изменении суммы при изменении слагаемых. Сумма двух слагаемых — числа учащихся младших классов и старших классов первой школы — увеличивается от увеличения первого слагаемого на 90, второго слагаемого на 40.

Р е ш е н и е: $560 + 90 + 40 = 690$ — учеников во второй средней школе.

2. Рассмотрим некоторые задачи на изменение разности.

З а д а ч а. Одному трактористу осталось убрать на его участке 16,8 *га*. Сколько гектаров осталось убрать другому трактористу, если его участок был на 3,4 *га* меньше, чем первого, а убрал он на 2,9 *га* больше, чем первый?

Решение задачи объясняется изменением разности (остатка). Величина участка каждого тракториста — уменьшаемое, убранная часть участка — вычитаемое, 16,8 *га* величина неубранной части участка первого тракториста — остаток. Во втором случае уменьшаемое уменьшилось на 3,4, вычитаемое увеличилось на 2,9. Следовательно, остаток, уменьшившийся на 3,4 и уменьшившийся на 2,9, должен уменьшиться на $3{,}4 + 2{,}9 = 6{,}3$; он будет равен $16{,}8 - 6{,}3 = 10{,}5$. Ответ: второму трактористу осталось убрать 10,5 *га*.

Как сделать проверку этой задачи? Составляем новую задачу. Одному трактористу осталось убрать 16,8 *га*, другому 10,5 *га*. Участок второго меньше на 3,4 *га*. На сколько больше или меньше был участок, убранный вторым трактористом?

Р е ш е н и е з а д а ч и. Второму трактористу осталось убрать меньше на $16{,}8 - 10{,}5 = 6{,}3$ (*га*). Но его участок был меньше на 3,4 *га*; следовательно, он убрал больше, чем первый тракторист, на $6{,}3 - 3{,}4 = 2{,}9$ (*га*). Получаем число, опущенное в условии; задача решена верно.

Проверка может быть объяснена изменением остатка от изменения уменьшаемого и вычитаемого, а именно следующим рассуждением: имеются два остатка 16,8 и 10,5; второй остаток меньше первого на 6,3 ($16{,}8 - 10{,}5$); уменьшаемое второго остатка меньше на 3,4, отчего остаток уменьшился на 3,4; уменьшение остатка еще на $6{,}3 - 3{,}4 = 2{,}9$ показывает, что второе вычитаемое больше первого на 2,9. Получили число, показывающее в условии, на сколько убранный участок у второго тракториста был больше, чем у первого.

Разберем еще задачу.

З а д а ч а. Школьный коллектив разбивает часть пришкольного участка на сад и огород. Намечено отвести под огород на 294 *кв. м* больше, чем под сад. На сколько квадратных метров площадь огорода была бы больше или меньше площади сада, если бы а) 24 *кв. м* площади огорода отнесли к площади сада? б) 18 *кв. м* площади сада отнесли к площади огорода?

Решение задачи объясняется изменением разности при изменении уменьшаемого и вычитаемого.

а) Разность площадей огорода и сада равна 294 *кв. м*. Эта разность уменьшится на 24 *кв. м*, если уменьшаемое — площадь огорода — уменьшится на 24 *кв. м*; от увеличения вычитаемого — площади сада — на 24 *кв. м* разность уменьшится еще на 24 *кв. м*.

Итак, разность будет равна $294 - 24 - 24 = 246$ (*кв. м*). Площадь огорода будет больше площади сада на 246 *кв. м*.

б) Разность площадей огорода и сада при увеличении уменьшаемого (площадь огорода) на 18 *кв. м* увеличится на 18 *кв. м*; при уменьшении вычитаемого (площадь сада) на 18 *кв. м* разность увеличится еще на 18 *кв. м*. Итак, разность площадей будет равна $294 + 18 + 18 = 330$ (*кв. м*). Площадь огорода будет больше площади сада на 330 *кв. м*.

3. Приведем примеры задач, решение которых основано на изменении произведения.

Задача. Пришкольный участок прямоугольной формы одной школы имеет площадь 1200 *кв. м*. Длина пришкольного участка другой школы в 2,5 раза больше, а ширина в $1\frac{2}{3}$ раза меньше, чем первого пришкольного участка. Чему равна площадь второго участка?

Решение. Площадь прямоугольника равна произведению его основания (длины) на высоту (ширину). По условию первый сомножитель увеличивается в 2,5 раза, второй уменьшается в $1\frac{2}{3}$ раза. Произведение должно увеличиться в $2\frac{1}{2} : 1\frac{2}{3} = 1\frac{1}{2}$ раза. Итак, площадь второго пришкольного участка равна $1200 \cdot 1\frac{1}{2} = 1800$ (*кв. м*). Эта площадь определена, хотя размеры ее не известны.

4. Приведем примеры задачи, решение которой основано на изменении частного.

Задача. На постройку 1 *км* московского метро первой очереди пошло в среднем $3\frac{1}{3}$ мес. В Берлине метро строилось дольше в 1,8 раза, длина же его меньше в $1\frac{1}{11}$ раза. Во сколько месяцев строили 1 *км* метро в Берлине?

Решение. Время, затраченное на постройку 1 *км* метро, определяется делением времени постройки всей линии на число километров длины этой линии. По условию это число для 1 *км* московского метро первой очереди равно $3\frac{1}{3}$ мес. Для берлинского метро время постройки (делимое) больше в 1,8 раза, длина линии (делитель) меньше в $1\frac{1}{11}$ раза. Частное — время, затраченное на постройку 1 *км* метро, должно увеличиться сравнительно с числом $3\frac{1}{3}$ мес. в 1,8 раза и в $1\frac{1}{11}$ раза, т. е. в $1,8 \cdot \frac{12}{11}$ раза, итак, 1 *км* берлинского метро строился $3\frac{1}{3}$ мес. $\cdot 1,8 \cdot \frac{12}{11} = 6\frac{6}{11}$ мес.

Задача имеет определенное решение, хотя ни длина берлинского метро, ни время постройки всей линии не даны.

5. Решение задачи на изменение величины дроби с изменением ее членов в несколько раз аналогично с решением задачи на изменение величины частного.

Возьмем пример.

Задача. Как изменится величина дроби, если числитель умножим на $\frac{2}{3}$, а знаменатель на $\frac{3}{4}$?

1-е решение. Умножение числителя на $\frac{2}{3}$ уменьшает числитель и величину дроби в $\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$ раза. Умножение знаменателя на $\frac{3}{4}$ уменьшает знаменатель и увеличивает величину дроби в $\frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$ раза. Но $1\frac{1}{2} > 1\frac{1}{3}$. Итак, дробь уменьшится в $1\frac{1}{2} : 1\frac{1}{3} = 1\frac{1}{8}$ раза.

Проверим на примере. Имеется дробь $\frac{3}{8}$; $3 \cdot \frac{2}{3} = 2$; $8 \cdot \frac{3}{4} = 6$; $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$; сравним величины дробей $\frac{3}{8}$ и $\frac{1}{3}$; $\frac{3}{8} : \frac{1}{3} = \frac{9}{8}$; величина дроби уменьшилась в $\frac{9}{8}$ раза.

2-е решение. При умножении числителя на $\frac{2}{3}$ дробь умножится на $\frac{2}{3}$, при умножении знаменателя на $\frac{3}{4}$ дробь разделится на $\frac{3}{4}$; но $\frac{3}{4} > \frac{2}{3}$, следовательно, дробь разделится на $\frac{3}{4} : \frac{2}{3} = \frac{9}{8}$, т. е. уменьшится в $1\frac{1}{8}$ раза.

Задача. Ученику надо было сложить две десятичные дроби. По ошибке он поставил в большем числе запятую на две цифры левее, чем следовало, и получил в сумме 27,8986, тогда как истинная сумма 400. Найти слагаемые.

Решение. Перенесением запятой влево на 2 цифры ученик уменьшил одно из слагаемых в 100 раз, т. е. на 0,99 его величины. Сумма уменьшилась на столько же. Поэтому 400—27,8986 = = 372,1014 составляет 0,99 слагаемого. Найдем это слагаемое, разделив 372,1014 на 0,99, получаем 372,1014 : 0,99 = 375,86; второе слагаемое: 400—375,86 = 24,14.

Приведем еще некоторые задачи.

З а д а ч а. В колхозе участок под рожью на 164 *га* больше, чем участок под овсом, и составляет $\frac{6}{7}$ участка под пшеницей. Участок под пшеницей на 280 *га* больше, чем под люцерной, а участки под овсом и под люцерной равной величины. Определить величину каждого из 4-х участков.

Решение задачи основано на изменении разности.

Назовем участки под рожью — I, под овсом — II, под пшеницей — III, под люцерной — IV. По условию разность I—II = = 164 (*га*), а разность III — IV = 280 (*га*). Но вычитаемые равны и увеличение разности составит 280 — 164 = 116. По условию I составляет $\frac{6}{7}$ III, поэтому III составляет $\frac{7}{6}$ I, или III больше I на $\frac{1}{6}$ I числа. Итак, 116 *га* составляют $\frac{1}{6}$ величины участка под рожью. Поэтому I число равно $116 : \frac{1}{6} = 696$ (*га*); $\text{II} = 696 - 164 = 532$ (*га*). Здесь по уменьшаемому и разности находим вычитаемое $\text{III} = \frac{7}{6}\ \text{I} = 696 \cdot \frac{7}{6} = 812$ (*га*) и $\text{IV} = 812 - 280 = 532$ (*га*).

З а д а ч а. В двух рабочих поселках было равное число жителей. Потом число жителей первого поселка увеличилось на $\frac{3}{8}$ прежнего числа, а число жителей второго поселка уменьшилось на $\frac{9}{20}$ этого числа. Во сколько раз теперь число жителей первого поселка больше, чем число жителей второго поселка?

Р е ш е н и е. Отношение между числом жителей первого и второго поселков равно 1, так как эти числа равны. Число жителей первого поселка — делимое — увеличивается на $\frac{3}{8}$ своей величины, т. е. в $1 + \frac{3}{8} = \frac{11}{8}$ раза. Число жителей второго поселка — делитель — уменьшается на $\frac{9}{20}$ своей величины, т. е. в $\frac{20}{11}$ раза $\left(1 - \frac{9}{20} = \frac{11}{20}\right)$; при этих изменениях компонентов частное, или отношение, увеличивается в $\frac{11}{8} \cdot \frac{20}{11} = 2\frac{1}{2}$ раза. Число жителей первого поселка теперь в $2\frac{1}{2}$ раза больше, чем число жителей второго поселка.

З а д а ч а. Как изменится частное, если к делимому прибавить $\frac{3}{8}$ его, а из делителя вычесть $\frac{9}{20}$ его?

Решение. К делимому прибавляются $\frac{3}{8}$ его, следовательно, делимое увеличивается в $\frac{11}{8}$ раза $\left(1+\frac{3}{8}\right)$; из делителя вычитаются $\frac{9}{20}$ его, делитель уменьшается в $\frac{20}{11}$ раза. $\left(1-\frac{9}{20}=\frac{11}{20}\right)$; частное увеличивается в $\frac{11}{8}\cdot\frac{20}{11}=\frac{5}{2}=2\frac{1}{2}$ раза.

Сделаем проверку на дробных числах.

$\frac{16}{33}:\frac{12}{55}=\frac{20}{9}$; $\left(\frac{16}{33}+\frac{16}{33}\cdot\frac{3}{8}\right):\left(\frac{12}{15}-\frac{12}{55}\cdot\frac{9}{20}\right)=\frac{22}{33}\cdot\frac{33}{275}=$ $=\frac{2}{3}:\frac{3}{25}=\frac{50}{9}$ больше $\frac{20}{9}$ в $\frac{50}{20}=2\frac{1}{2}$ раза.

Изменение величины дроби от прибавления к числителю и знаменателю одного и того же числа рассмотрим на следующем примере.

Задача. Если к обоим членам дробей $\frac{13}{15}$ и $\frac{15}{13}$ прибавить по 3, на сколько полученные дроби будут отличаться от данных?

Решение. а) $\frac{13+3}{15+3}=\frac{8}{9}$; $\frac{8}{9}>\frac{13}{15}$, так как $8\cdot 15>9\cdot 13$.

б) $\frac{15+3}{13+3}=\frac{9}{8}$; $\frac{15}{13}>\frac{9}{8}$, так как $15\cdot 8>13\cdot 9$.

Подобным же способом сравниваются величины дробей данных и полученных от вычитания из обоих членов одного и того же числа. Делаются соответствующие выводы.

§ 41. II группа. Задачи на среднее арифметическое нескольких чисел

В науке и в практической жизни встречается ряд вопросов, в которых требуется определение так называемого среднего арифметического. Чтобы ознакомить учащихся с понятием о «среднем арифметическом» (средняя температура, средняя влажность, средняя скорость, средняя цена и т. д.), решаются задачи на определение «среднего арифметического» двух или нескольких чисел и обратные задачи, когда по известному среднему арифметическому и известным нескольким числам находится неизвестное число. Рассмотрим примеры задач этой группы.

Задача. Какова средняя температура воздуха в полдень за шесть дней июля, если термометр в полдень показывал в каждый из этих дней последовательно: 27,4°; 28,9°; 30,2°; 26,8°; 29,4°; 25,9°?

Решение задачи можно записать в виде числовой формулы.

$$\frac{27{,}4+28{,}9+30{,}2+26{,}8+29{,}4+25{,}9}{6}=28{,}1 \text{ (град.)}$$

Задача. Для определения всхожести семян посадили 4 сотни семян отдельно одну от другой. Из первой сотни взошло 92 семени, из второй 90, из третьей 93, из четвертой 89. Определить среднюю всхожесть семян с точностью до 1.

Решение. $(92 + 90 + 93 + 89) : 4 = 91$.

Решение обратной задачи труднее дается учащимся.

Возьмем задачу. Среднее арифметическое трех чисел равно 37,2, одно из этих чисел равно 10,9, другое равно 12,8. Найти третье число.

Решение задачи учащиеся объясняют следующим образом.

Среднее арифметическое число 37,2 получилось как частное от деления на 3 суммы трех чисел, из которых одно неизвестно. Но зная делитель 3 и частное 37,2, найдем делимое посредством умножения делителя на частное: $3 \cdot 37{,}2 = 111{,}6$. Это число и есть сумма трех чисел, в которой два слагаемых известны. Неизвестное слагаемое найдем посредством вычитания из суммы двух известных слагаемых. Решение можно записать в виде формулы: $x = 3 \times 37{,}2 - 10{,}9 - 12{,}8 = 87{,}9$.

Задача. На школьном участке, засеянном свеклой, школьники за 4 дня провели прополку свеклы: в первый день 3,4 *га*, во второй 3,6 *га*, в третий 3,5 *га*. Какая площадь была прополота в четвертый день, если в среднем за день пропалывали 3,65 *га*?

Решение. $3{,}65 \cdot 4 - 3{,}4 - 3{,}6 - 3{,}5 = 4{,}1$ (*га*).

К задачам на вычисление среднего арифметического относятся задачи на сплавы и смешение.

Прежде чем приступать к решению этих задач, учитель должен провести с учащимися беседу о сплавах и смешении жидкостей примерно следующего содержания.

Золотые и серебряные вещи из чистого золота и серебра почти не изготовляются, так как эти металлы мягки и от частого употребления легко стираются, уменьшаются в своем весе, а следовательно, теряют в своей стоимости.

Для того чтобы придать им необходимую твердость, их сплавляют с другими металлами, чаще всего с медью. Эта примесь меди к золоту или серебру называется *лигатурой*. Чтобы качество сплава выразить числом, вводят понятие «*пробы*».

Число граммов чистого золота или серебра в одном килограмме сплава называется пробой. Так, например, если говорят, что вещь сделана из золота 875 пробы, то это значит, в 1 *кг* золотого сплава содержится 875 граммов чистого золота. Чистое золото или чистое серебро можно назвать металлом 1000-й пробы, а медь — металлом нулевой пробы.

Кислоты и спирт в чистом виде не встречаются, обычно они являются растворами, т. е. содержат в себе воду. Очевидно, крепость растворов зависит от количества в нем чистого спирта или кислоты.

Число, показывающее, сколько процентов веса всего раствора или смеси составляет вес чистого спирта или кислоты, называется крепостью спирта или кислоты. Крепость спирта или кислоты выражается обыкновенно в градусах, т. е. в сотых долях, или процентах. Если говорят, что вино содержит 40 градусов, это значит, что в 100 весовых частях этого вина содержится 40 весовых частей чистого спирта. Если крепость серной кислоты есть 60%, это значит, что 60 сотых всего количества смеси есть кислота, а остальное вода.

В задачах на сплавы первого рода, так же как и в задачах на смешение первого рода, даются количества и качество (проба) нескольких сортов веществ, входящих в сплав, а требуется определить, какого качества получился сплав (пробу сплава).

Приведем пример задач на сплавы и смешение.

Задача. Сплавили золото 180 *г* 920-й пробы с 100 *г* 752-й пробы. Какой пробы получился сплав?

Решение. 1) Вес всего сплава:

$$180\ г + 100\ г = 280\ г.$$

2) Количество чистого золота в первом слитке 920-й пробы, т. е. золото составляет 0,920 веса слитка:

$$180\ г \cdot 0{,}920 = 165{,}6\ г.$$

3) Количество чистого золота во втором слитке 752-й пробы:

$$100\ г \cdot 0{,}752 = 75{,}2\ г.$$

4) Количество чистого золота во всем сплаве:

$$165{,}6\ г + 75{,}2\ г = 240{,}8\ г.$$

5) Проба сплава: $240{,}8\ г : 280 = 0{,}86$ (частей).

$0{,}86\ г \cdot 1000 = 860\ г$. Слиток 860-й пробы.

Задача. Чтобы получить раствор формалина для консервирования препаратов по биологии, к 0,5 *л* 40% раствора формалина прибавили 9,5 *л* воды. Какой крепости получился раствор?

Решение. 1) Количество чистого формалина в 0,5 *л* 40% раствора: $0{,}5\ л \cdot 0{,}4 = 0{,}2\ л$; 2) количество нового раствора: $0{,}5\ л + 9{,}5\ л = 10\ л$; 3) крепость раствора в процентах: $0{,}2\ л : 10\ л = 0{,}02$ (части); 2%.

§ 42. III группа. Задачи на нахождение чисел по их сумме и разности

Задача. В двух гаражах 115 машин. Когда из первого гаража перевели во второй 15 машин, то в первом гараже осталось на 7 машин больше, чем стало во втором. Сколько машин было первоначально в каждом гараже?

Решение. *1-й способ.* Определим число машин в каждом гараже после перевода 15 машин из первого гаража во второй.

Формула решения: $\frac{115-7}{2}=54$; 54 машины стало во втором гараже, 61 машина в первом. $61+15=76$, 76 машин было в первом гараже, $54-15=39$, 39 машин было во втором гараже.

2-й способ. В первом гараже было больше машин, чем во втором, на 37 машин $(15\cdot2+7)$. Число машин первого гаража $\frac{115+37}{2}=76$; во втором гараже было 39 машин.

Задача. Три фабрики выработали за смену 12 400 *м* ткани; первая выработала на 5940 *м* больше, чем вторая, а вторая — на 3120 *м* меньше, чем третья. Сколько метров ткани выработала каждая смена?

Краткая запись условия

3 фабрики — 12 400 *м* I на 5940 *м* больше II II на 3120 *м* меньше III	Сколько метров ткани выработала каждая фабрика?

План решения

1) На сколько уменьшилось бы общее количество ткани, если бы первая фабрика выработала меньше на 5940 *м*, а третья — меньше на 3120 *м*, т. е. дали бы столько же ткани, сколько дала вторая?

2) Сколько метров ткани выработали бы три фабрики, если бы первая и третья дали столько же ткани, сколько вторая фабрика?

3) Сколько ткани дала вторая фабрика?

4) Сколько ткани дала первая фабрика?

5) Сколько ткани дала третья фабрика?

Решение с кратким объяснением

1) 5940 *м* + 3120 *м* = 9060 *м*. По величине одного и другого слагаемого узнаем сумму.

2) 12 400 *м* — 9060 *м* = 3340 *м*; уменьшаем 12 400 на 9060, потому делаем вычитание.

3) 3340 *м* : 3 = $1113\frac{1}{3}$ *м*; если бы три фабрики дали 3340 *м* ткани поровну, то на одну фабрику пришлось бы в 3 раза меньше, чем 3340 *м*. Уменьшение в несколько раз делается делением на равные части. Вторая фабрика дала $1113\frac{1}{3}$ *м*.

4) $1113\frac{1}{3}$ *м* $+ 5940$ *м* $= 7053\frac{1}{3}$ *м*; увеличиваем число $1113\frac{1}{3}$ на 5940, так как первая фабрика дала больше второй на 5940 *м* ткани.

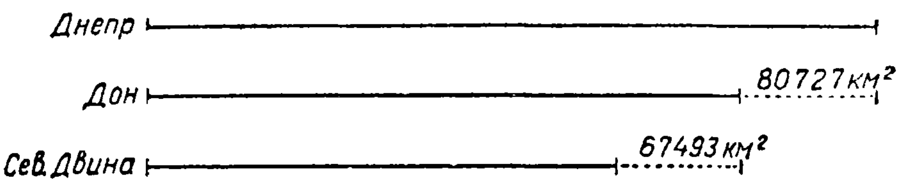
5) $1113\frac{1}{3}$ *м* $+ 3120$ *м* $= 4233\frac{1}{3}$ *м*; $1113\frac{1}{3}$ *м* увеличиваем на 3120 *м*, так как III фабрика выработала больше II на 3120 *м*.

Задача. Площадь бассейнов Дона, Днепра, Северной Двины и Волги составляет 2 704 544 *кв. км*, причем площадь бассейна Дона на 80 727 *кв. км* меньше площади бассейна Днепра и на 67 493 *кв. км* больше площади бассейна Северной Двины, а площадь бассейна Волги на 99 354 *кв. км* превышает сумму площадей бассейнов остальных трех рек. Определить площади бассейнов каждой из рек.

Решение. Начнем с определения площади бассейна Волги, которая равна сумме площадей бассейнов остальных трех рек, увеличенной на 99 354 *кв. км*. Если бы сумма площадей бассейнов трех рек равнялась площади бассейна Волги, то и общая сумма площадей бассейнов всех рек была бы на 99 354 *кв. км* больше 2 704 544 *кв. км* и равнялась бы $2\,704\,544 + 99\,354 = 2\,803\,898$ (*кв. км*). Поэтому площадь бассейна Волги равна $2\,803\,898 : 2 = 1\,401\,949$ (*кв. км*), а сумма площадей бассейнов остальных рек $2\,704\,544 - 1\,401\,949 = 1\,302\,595$ (*кв. км*).

Применим дальше уравнивание трех слагаемых первому слагаемому. Для этого увеличим второе слагаемое на 80 727 *кв. км*, а третье — на 80 727 *кв. км* $+$ 67 493 *кв. км* $= 148\,220$ *кв. км* (черт. 6). Площадь бассейна Днепра: $\frac{1\,302\,595 + 80\,727 + 148\,220}{3} = 510\,514$ (*кв. км*).

Площадь бассейна Дона $510\,514 - 80\,727 = 429\,787$ (*кв. км*).
Площадь Сев. Двины $429\,787 - 67\,493 = 362\,294$ (*кв. км*).



Черт. 6.

Задача. В двух неравных участках $24\frac{1}{4}$ *га* земли. Если от большего отрезать $3\frac{1}{2}$ *га* и прибавить их к меньшему, то в большем все же останется на $\frac{3}{5}$ *га* больше, чем станет в меньшем. Как велик каждый участок?

Задача решается различными способами.

Решение с кратким объяснением

Чтобы решить эту задачу, разделим сначала $24\frac{1}{4}$ *га* на такие две части, из которых одна больше другой на $\frac{3}{5}$ *га*. Меньшая часть содержится в большей один раз с остатком $\frac{3}{5}$ *га*; вследствие этого она содержится в сумме $24\frac{1}{4}$ *га* два раза с остатком $\frac{3}{5}$ *га*. Поэтому удвоенная меньшая часть равна

$$24\frac{1}{4}\ га - \frac{3}{5}\ га = 23\frac{13}{20}\ га;$$

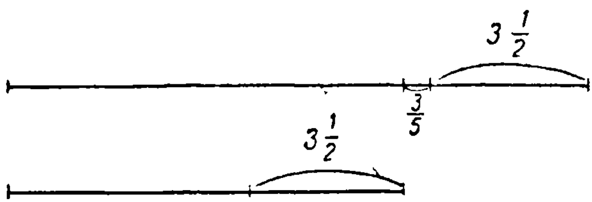
$$23\frac{13}{20}\ га : 2 = 11\frac{33}{40}\ га \text{ (меньшая часть после прирезки } 3\frac{1}{2}\ га\text{);}$$

$$11\frac{33}{40}\ га - 3\frac{1}{2}\ га = 8\frac{13}{40}\ га \text{ (меньшая часть);}$$

$$24\frac{1}{4}\ га - 8\frac{13}{40}\ га = 15\frac{37}{40}\ га \text{ (бóльшая часть).}$$

Решение другим способом

Из условия задачи можно вывести, на сколько гектаров первый участок больше второго. Этому выводу может помочь чертеж (черт. 7). Задача решается способом предположения, что оба участка стали равными между собой, тогда общая величина двух участков изменится; по общей величине участка делением пополам находится величина одного из участков.



Черт. 7.

Первый участок больше второго на $3\frac{1}{2}+3\frac{1}{2}+\frac{3}{5}=7\frac{3}{5}$ (*га*). Действительно, если бы передача $3\frac{1}{2}$ *га* из первого во второй участок уравняла величины участков, то в первом должно было быть $3\frac{1}{2}+3\frac{1}{2}=7$ (*га*) лишних, но в первом оказывается еще $\frac{3}{5}$ *га* лишних сравнительно со вторым участком, поэтому он превышает второй участок на $7+\frac{3}{5}=7\frac{3}{5}$ (*га*).

Дальше решение может идти двумя разными способами.

В рассматриваемой задаче предположим, что второй участок будет такой же величины, как первый, т. е. больше на $7\frac{3}{5}$ (*га*), чем в действительности. Тогда общая величина двух участков, равных большему, будет больше на $7\frac{3}{5}$ *га* и составит $24\frac{1}{4}+7\frac{3}{5}=$ $=31\frac{17}{20}$ (*га*). Отсюда величина большего участка равна $31\frac{17}{20}:2=$ $=15\frac{37}{40}$ (*га*); меньший участок содержит $15\frac{37}{40}-7\frac{3}{5}=8\frac{13}{40}$ (*га*).

Формула решения задачи:

$$\left(24\frac{1}{4}+7\frac{3}{5}\right):2-7\frac{3}{5}.$$

Другой способ решения. Предполагаем, что первый участок (больший) равен меньшему, т. е. меньше на $7\frac{3}{5}$ *га*, тогда общая величина двух участков, равных меньшему, на $7\frac{3}{5}$ *га* меньше и составляет $24\frac{1}{4}-7\frac{3}{5}=16\frac{13}{20}$ (*га*); отсюда определяем величину меньшего участка.

Формула решения задачи:

$$\left(24\frac{1}{4}-7\frac{3}{5}\right):2+7\frac{3}{5}.$$

Решение тем или иным способом основано на изменении суммы $\left(24\frac{1}{4}\right)$ при увеличении или уменьшении одного из слагаемых.

В формулировке вопроса: какова была бы общая величина двух участков, если бы второй участок был такой величины, как первый, т. е. больше на $7\frac{3}{5}$ *га*, чем в действительности, — требуется полная точность. Только при этом условии учащиеся могут правильно поставить вопрос, величину какого участка (большего) они определяют в первую очередь. То же самое относится к аналогичному вопросу в другом способе решения, когда решение начинается с определения меньшего участка.

§ 43. IV группа. Задачи, в которых для отыскания неизвестной величины необходимо предварительно найти разность данных

1. Вычисление неизвестного по разности двух величин.

Задача. Поезд проходит 7,2 сек. мимо семафора и 12 сек. мимо станционной платформы длиной в 120 *м*. Какова длина поезда и его скорость?

Решение. Чтобы найти скорость поезда, надо знать расстояние, пройденное поездом за известный промежуток времени. Мимо семафора за 7,2 сек. поезд проходит расстояние, равное его длине; за 12 сек. он проходит расстояние, равное его длине + длина платформы в 120 *м*. Отсюда следует, что за 12 сек. — 7,2 сек. = = 4,8 сек. поезд проходит 120 *м*, в 1 сек. 120 *м* : 4,8 = 25 *м*. Его часовая скорость 25 *м* × 3600 = 90 *км*. Длина поезда 25 *м* · 7,2 = 180 *м*. Формула решения задачи: $\frac{120}{12-7,2} = 25$ (*м*) (скорость поезда в секунду); $\frac{120}{12-7,2} \cdot 7,2 = 180$ (*м*) — длина поезда.

2. Исключение неизвестного при помощи вычитания.

Задача. Две бригады трактористов могут выполнить некоторую работу в $4\frac{4}{5}$ дня, если же будут работать $\frac{1}{2}$ трактористов первой бригады и вся вторая, то эта работа может быть выполнена в 6 дней. Во сколько времени каждая бригада в отдельности выполнит эту работу?

Краткая запись условия

I и II бригады . . . . . в $4\frac{4}{5}$ дня

половина I и вся II бригада . . . . . . в 6 дней

Задача решается способом исключения одного неизвестного посредством вычитания.

I и II бригады выполняют в день $1 : 4\frac{4}{5} = \frac{5}{24}$ (ч. работы); половина I и вся II бригада выполняют в день $1 : 6 = \frac{1}{6}$ (ч. работы).

Работа II бригады в обоих случаях одинакова. Выполнение $\frac{5}{24}$ частей работы больше $\frac{1}{6}$ части ее на $\frac{5}{24} - \frac{4}{24} = \frac{1}{24}$ часть, так как в первом случае больше рабочих в I бригаде на $\frac{1}{2}$ I бригады. Итак, $\frac{1}{2}$ I бригады вырабатывает в день $\frac{1}{24}$ (ч. работы). Вся I бригада вырабатывает в день $\frac{1}{24} \cdot 2 = \frac{1}{12}$ (ч. работы). $1 : \frac{1}{12} = 12$ дней надо I бригаде для выполнения всей работы. $\frac{5}{24} - \frac{1}{12} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$ (работы) выполняет в день II бригада. $1 : \frac{1}{8} = 8$; 8 дней надо II бригаде для выполнения всей работы.

Проверка решения задачи:

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{8} = \frac{5}{24};\ 1 : \frac{5}{24} = 4\frac{4}{5}\ \text{(дня)}.$$

$$\frac{1}{24} + \frac{1}{8} = \frac{1}{6};\ 1 : \frac{1}{6} = 6\ \text{(дней)}.$$

3. Уравнивание данных и искомых.

З а д а ч а. Бассейн наполняется водой через 2 трубы. Если открыть первую трубу на 9 часов и вторую на 10 часов, в бассейн вольется $1088\frac{3}{4}$ *гл* воды. Если же открыть обе трубы на 12 часов, то в бассейн вольется 1350 *гл*. Сколько гектолитров воды вливается через каждую трубу за 1 час?

З а п и с ь   у с л о в и я

9 час.	10 час.	$1088\frac{3}{4}$ *гл*
12 час.	12 час.	1350 *гл*

1-й способ решения. Уравняем число часов работы первой и второй труб. Для этого найдем наименьшее общее кратное чисел 9 и 12, оно равно 36. Увеличим число часов работы труб и количество влившейся воды в первом случае в 4 раза, во втором случае в 3 раза. Получим задачу на исключение неизвестного посредством вычитания. Условие ее следующее:

36 час.	40 час.	4355 *гл*
36 час.	36 час.	4050 *гл*

$4355 - 4050 = 305$, на 305 *гл* влилось воды больше, потому что вторая труба действовала в первом случае больше на 4 часа ($40 - 36 = 4$), первая труба действовала в обоих случаях одинаковое число часов. Итак, вторая труба дала за 4 часа 305 *гл* воды, она давала в час $305 : 4 = 76\frac{1}{4}$ *гл*; $76\frac{1}{4} \cdot 10 = 762\frac{1}{2}$ (*гл*); $1088\frac{3}{4} - 762\frac{1}{2} = 326\frac{1}{4}$ (*гл*); $326\frac{1}{4} : 9 = 36\frac{1}{4}$ (*гл*) — вливается в 1 час через первую трубу.

2-й способ решения. Уменьшим числа второй части условия в 12 раз, а полученные числа увеличим в 9 раз.

1 час.	1 час.	$112\frac{1}{2}$ *гл*
9 час.	9 час.	$1012\frac{1}{2}$ *гл*

Этот ряд чисел сравним с первым.

10 час. — 9 час. = 1 час.; $1088\frac{3}{4} - 1012\frac{1}{2} = 76\frac{1}{4}$.

Возможны и другие способы решения задачи, например: делим числа первого ряда на 3, второго на 4.

3 часа $3\frac{1}{3}$ часа $362\frac{11}{12}$ *гл*; $3\frac{1}{3} - 3 = \frac{1}{3}$; 3 часа 3 часа $337\frac{1}{2}$ *гл*; $362\frac{11}{12} - 337\frac{1}{2} = 25\frac{5}{12}$ (*гл*); $25\frac{5}{12} : \frac{1}{3} = 76\frac{1}{4}$ и т. д.

Или делим числа первого ряда на 5, второго на 6 и т. д.

З а д а ч а. Двое учащихся получили одинаково высокий урожай помидоров и моркови. Первый с 50 *кв. м* помидоров и 30 *кв. м* моркови собрал всего 4,2 *ц* урожая, а второй с 30 *кв. м* помидоров и 50 *кв. м* моркови собрал всего 4,6 *ц*. Во сколько раз учащиеся получили больше урожая сравнительно со средним урожаем в этой местности, если средний урожай помидоров составлял 250 *ц* с 1 *га*, а моркови 220 *ц* с 1 *га*?

Краткая запись условия

50 *кв. м* помидоров	30 *кв. м* моркови	4,2 *ц*
30 » »	50 » »	4,6 *ц*

Средний урожай помидоров 250 *ц* с 1 *га*, моркови 220 *ц* с 1 *га*.

Задача решается посредством уравнивания данных, после чего применяется исключение одного из неизвестных посредством вычитания.

Уравняем площади под помидорами у обоих учащихся, для этого числа 50 и 30 заменим их наименьшим кратным 150. Числа первой части условия умножим на 3, второй части на 5.

150 *кв. м*	90 *кв. м*	12,6 *ц*
150 *кв. м*	250 *кв. м*	23,0 *ц*

Превышение урожая у 2-го учащегося зависит от превышения у него площади под морковью.

250 — 90 = 160 (*кв. м*); 23—12,6 = 10,4 (*ц*);

10,4 : 160 = 0,065; 0,065 *ц* = 6,5 *кг* урожая моркови с 1 *кв. м*; 6,5 *кг* · 10 000 = 650 *ц* — урожай моркови с 1 *га*. 650 *ц* : 220 *ц* = $= 2\frac{21}{22} \approx 3$ раза; средний урожай моркови с 1 *га* в этой местности приблизительно в 3 раза ниже, чем у учащихся. 6,5 *кг* · 30 = 195 *кг* моркови получено с 30 *кв. м*. 420 *кг* — 195 *кг* = 225 *кг* помидоров получено с 50 *кв. м*. $\frac{225\ кг \cdot 10\,000}{50} = 45\,000\ кг = 450\ ц$ получено помидоров с 1 *га*. 450 *ц* : 250 *ц* $= \frac{9}{5} = 1{,}8$ (раза); урожай с 1 *га* помидоров в этой местности в 1,8 раза ниже, чем у учащихся.

Эту задачу можно решить разными способами.

а) Можно уравнять площади под морковью, умножив числа первой части условия на 5, второй части на 3;

б) можно разделить все числа на 10. Получится задача:

5 *кв. м* помидоров	3 *кв. м* моркови	42 *кг*
9 » »	5 » »	46 *кг*

в) исключение неизвестного можно сделать, умножив первый ряд чисел на $\frac{3}{5}$ или второй ряд на $\frac{5}{8}$ и т. д.

4. Замена данных.

Задача. Два комбайнера убрали вместе 211,1 *га* пшеницы. Один работал 11 дней, другой 9 дней. Второй убирал на 1,9 *га* в день больше, чем первый. Сколько гектаров убирал в день каждый комбайнер?

Задача решается путем замены работы в день одного комбайнера работой другого.

Предположим, что второй комбайнер вырабатывал в день столько же, сколько первый, т. е. на 1,9 *га* в день меньше, чем в действительности. Его выработка должна уменьшиться, а вместе с этим и общая выработка уменьшится на $1{,}9 \cdot 9 = 17{,}1$ (*га*). Следовательно, за $11 + 9$ дней было бы выработано $211{,}1 - 17{,}1 = 194$ (*га*) по норме работы первого комбайнера. Итак, первый комбайнер убирал в день $194 : 20 = 9{,}7$ (*га*). Второй убирал в день $9{,}7 + 1{,}9 = 11{,}6$ (*га*).

В этом решении исключается работа второго комбайнера, которая заменяется работой первого комбайнера. Решение возможно и другое. Предположим, что первый комбайнер убирал в день столько же, сколько второй, т. е. на 1,9 *га* в день больше, чем в действительности. Тогда общая выработка увеличилась бы на $1{,}9 \cdot 11 = 20{,}9$ *га*; она составляла бы $211{,}1 + 20{,}9 = 232$ *га* за 20 дней $(11 + 9)$ работы по норме, которую давал второй комбайнер; отсюда $232 : 20 = 11{,}6$ (*га*) убирал в день второй комбайнер; $11{,}6 - 1{,}9 = 9{,}7$ (*га*) убирал в день первый комбайнер.

Задача. Сколько весит 1 *куб. м* сухого дуба и 1 *куб. м* сухой ели, если $7\frac{1}{2}$ *куб. м* дуба и $3\frac{3}{4}$ *куб. м* ели весят $8\frac{1}{4}$ *т*, причем вес 1 *куб. м* дуба в $1\frac{1}{3}$ раза больше, чем вес 1 *куб. м* ели?

Задача решается способом исключения одного из неизвестных, для чего одно из неизвестных заменяется другим.

1-й способ. Предположим, что $7\frac{1}{2}$ *куб. м* дуба заменим $7\frac{1}{2}$ *куб. м* ели. Так как 1 *куб. м* ели в $1\frac{1}{3}$ раза легче 1 *куб. м* дуба, то, чтобы вес ели был равен весу $7\frac{1}{2}$ *куб. м* дуба, надо взять ели в $1\frac{1}{3}$ раза больше, чем $7\frac{1}{2}$ *куб. м*. Следовательно, $8\frac{1}{4}$ *т* будет вес $(7\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}+3\frac{3}{4})$ *куб. м* ели. Отсюда вес 1 *куб. м* ели равен $8\frac{1}{4}\ т : 13\frac{3}{4}=\frac{33\cdot 4}{4\cdot 55}=\frac{3}{5}\ т$. Вес 1 *куб. м* дуба больше в $1\frac{1}{3}$ раза и равен $\frac{3}{5}\ т\cdot\frac{4}{3}=\frac{4}{5}\ т$.

2-й способ. Если бы $3\frac{3}{4}$ *куб. м* ели заменить дубом, то, чтобы вес дуба был равен весу $3\frac{3}{4}$ *куб. м* ели, надо взять дуба в $1\frac{1}{3}$ раза меньше, чем $3\frac{3}{4}$ *куб. м*, или $3\frac{3}{4}$ *куб. м* $:\frac{4}{3}=\frac{15\cdot 3}{4\cdot 4}$ *куб. м* $=2\frac{13}{16}$ *куб. м*. Следовательно, $8\frac{1}{4}$ *т* будет вес $2\frac{13}{16}$ *куб. м* $+7\frac{1}{2}$ *куб. м* $=10\frac{5}{16}$ *куб. м*. Вес 1 *куб. м* дуба $=8\frac{1}{4}\ т : 10\frac{5}{16}\ т=\frac{33}{4}т : \frac{165}{16}=\frac{4}{5}т$; вес 1 *куб. м* ели: $\frac{4}{5}т : \frac{4}{3}=\frac{3}{5}т$.

З а д а ч а. Расстояние от станции, равное 29 *км*, колхозник проехал на лошади, причем $2\frac{1}{4}$ часа он ехал рысью и $\frac{1}{2}$ часа шагом; скорость же при езде рысью была втрое больше, чем при езде шагом. С какой скоростью шла лошадь шагом и рысью?

Исключение одного из неизвестных можно сделать

а) заменив скорость езды рысью скоростью езды шагом,

б) заменив скорость езды шагом скоростью езды рысью.

а) Предположим, что первую часть пути колхозник ехал также шагом: тогда на эту часть пути пошло бы времени больше в 3 раза, чем в $2\frac{1}{4}$ часа; $2\frac{1}{4}\cdot 3=6\frac{3}{4}$ (часа). При этом условии путь в 29 *км* был бы проделан за $6\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=7\frac{1}{4}$ (часа). Отсюда скорость езды шагом равна $29 : 7\frac{1}{4}=4$ (*км*); скорость езды рысью $4\cdot 3=12$ (*км*).

б) Предположим, что вторую часть пути колхозник проехал также рысью. На вторую часть пути при этом условии было бы затрачено $\frac{1}{2}:3=\frac{1}{6}$ (часа), а на весь путь $2\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=2\frac{5}{12}$ (часа); скорость езды рысью была равна $29 : 2\frac{5}{12}=12$ (*км*).

5. Задачи на предположение.

З а д а ч а. С двух участков земли общей площадью 8,5 *га* собрано всего 58 *ц* льноволокна. На первый участок было внесено минеральное удобрение. С каждого гектара первого участка собрали в среднем $8\frac{4}{7}$ *ц*, с каждого гектара второго участка 5,6 *ц*. Определить площадь каждого участка.

Краткая запись условия

$$8{,}5\ \textit{га} \left\{ \begin{array}{l} \text{I участ. по } 8\frac{4}{7}\ \textit{ц} \\ \text{II участ. по } 5{,}6\ \textit{ц} \end{array} \right.$$

Определить площадь каждого участка

План решения

1) Узнаем сбор льноволокна со всей площади, предполагая, что с 1 *га* собирали по $8\frac{4}{7}$ *ц*.

2) Узнаем, на сколько предполагаемый сбор был меньше действительного сбора.

3) Узнаем, на сколько центнеров снижает сбор каждый гектар второго участка.

4) Узнаем площадь второго участка.

5) Узнаем площадь первого участка.

Р е ш е н и е.

1) $8\frac{4}{7} \cdot 8\frac{1}{2} = 72\frac{6}{7}$ (*ц*)—предполагаемый сбор льноволокна.

2) $72\frac{6}{7} - 58 = 14\frac{6}{7}$ (*ц*)—уменьшение сбора за счет площади второго участка.

3) $8\frac{4}{7} - 5\frac{3}{5} = 2\frac{34}{35}$ (*ц*)—каждый гектар второго участка снижал сбор на $2\frac{34}{35}$ *ц*.

4) $14\frac{6}{7} : 2\frac{34}{35} = 5$ (*га*)—площадь второго участка.

5) $8{,}5 - 5 = 3{,}5$ (*га*)—площадь первого участка.

П р о в е р к а.

$8\frac{4}{7} \cdot 3\frac{1}{2} = 30$ (*ц*)—сбор с I участка;
$5{,}6 \cdot 5 = 28$ (*ц*)—сбор со II участка;
$30 + 28 = 58$ (*ц*)—весь сбор.

58 *ц* — число, данное в условии, задача решена верно.

Можно решить задачу тем же способом, но предположив, что собирали на обоих участках по 5,6 *ц* с 1 *га*.

Задача. Поезд составлен из 2-, 3- и 4-осных вагонов, причем число 3- и 4-осных одинаково. Число всех вагонов 36, число осей 111. Определить число вагонов каждого рода в отдельности.

Решение. 1) Если бы все вагоны были 3- и 4-осные (поровну), то число осей было бы $(3 + 4) \cdot (36 : 2) = 126$.

2) В действительности число осей меньше на $126 - 111 = 15$.

3) Если заменить один 3-осный и один 4-осный двухосными, то число осей уменьшится на $3 + 4 - 2 \cdot 2 = 3$.

4) Такую замену сделаем $15 : 3 = 5$ раз.

5) $2 \cdot 5 = 10$ двухосных вагонов.

6) $18 - 5 = 13$ вагонов 3-осных и столько же 4-осных.

Сделаем проверку задачи.

Число всех вагонов: $10 + 13 + 13 = 36$; число осей $2 \cdot 10 + 3 \cdot 13 + 4 \cdot 13 = 111$, что соответствует условию задачи.

Задача. Слиток из золота и серебра весом в 3,64 *кг* потерял в воде 265 *г*. Сколько в нем золота и сколько серебра, если золото теряет в воде $\frac{1}{19}$, а серебро $\frac{1}{10}$ своего веса?

Решение.

1) Предположим, что слиток состоит из 3,64 *кг* серебра. Сколько потерял бы такой слиток в воде?

$$3{,}64 \cdot 0{,}1 = 0{,}364 \text{ (кг)}$$

2) В слитке по нашему предположению золото заменено серебром. На сколько граммов больше потеряет в воде слиток, если золото заменить серебром?

$$0{,}364 - 0{,}265 = 0{,}099 \text{ (кг)};\ 99 \text{ г}$$

3) Каждый килограмм серебра теряет в воде 0,1 *кг*, каждый килограмм золота $\frac{1}{19}$ *кг*. На сколько меньше теряет в воде каждый килограмм золота по сравнению с килограммом серебра?

$$\frac{1}{10} - \frac{1}{19} = \frac{9}{190} \text{ (кг)}$$

4) Так как изменение в потере веса произошло от примеси золота в серебряном слитке, то узнаем, сколько килограммов золота в слитке: $99 : \left(\frac{9}{190} \cdot 1000\right) = 2{,}09$ (*кг*)

5) Сколько килограммов серебра в слитке?

$$3{,}64 - 2{,}09 = 1{,}55 \text{ (кг)}$$

П р о в е р к а: Потеря в весе равна:

$$1{,}55 \cdot 0{,}1 + 2{,}09 \cdot \frac{1}{19} = 0{,}155 + 0{,}11 = 0{,}265 \ (кг);$$

получено число, данное в условии, следовательно, задача решена правильно.

§ 44. V группа. Задачи на нахождение дроби числа и числа по дроби

Примеры и задачи на нахождение дроби числа решались в курсе дробей при изучении умножения на дробь, а нахождение числа по дроби — при изучении деления на дробь.

Остановимся на решении этих задач.

З а д а ч а. Завод отпустил на культурные нужды 4150 руб.; 0,3 этой суммы — на лагерь для детей, 0,42 всей суммы — на кружковую работу в школе, $\frac{1}{5}$ всей суммы — на спортивную работу. Сколько денег осталось на прочие нужды?

Р е ш е н и е. *1-й способ.* $\frac{1}{5} = 0{,}2$; 1) $0{,}3 + 0{,}42 + 0{,}2 = 0{,}92$ — такая часть всей суммы отпущена на лагерь, на школу и на спорт. Всю сумму принимаем за единицу.

2) $1 - 0{,}92 = 0{,}08$ — такая часть суммы осталась на прочие нужды.

3) 4150 руб. · 0,08 = 332 руб. — осталось на прочие нужды.

2-й способ. 1) 4150 руб. · 0,3 = 1245 руб. — отпущено на детский лагерь.

2) 4150 руб. · 0,42 = 1743 руб. — на кружковую работу школы.

3) 4150 руб. · $\frac{1}{5}$ = 830 руб. — на спортивную работу.

4) 1245 руб. + 1743 руб. + 830 руб. = 3818 руб. — отпущено на детский лагерь, на работу школьных кружков и на спортивную работу.

5) 4150 руб. — 3818 руб. = 332 руб. — осталось на прочие нужды.

З а д а ч а. Совхозом вновь разработано $40\frac{1}{2}$ *га* под пашню. Участок, равный $\frac{4}{9}$ этой площади, засадили плодовыми деревьями, а $\frac{3}{5}$ остальной площади отвели под кормовые культуры. Какая площадь отведена под кормовые культуры?

1-е р е ш е н и е. 1) $\frac{4}{9}$ от $40\frac{1}{2}$ *га* $= \frac{81}{2}$ *га* $\cdot \frac{4}{9}$ (дробь от числа находится умножением числа на дробь). Получится 18 *га*.

2) $40\frac{1}{2}$ *га* — 18 *га* $= 22\frac{1}{2}$ *га*.

3) $22\frac{1}{2}$ *га* $\cdot \frac{3}{5} = 13\frac{1}{2}$ *га* отведено под кормовые культуры.

Здесь умножением на дробь $\frac{3}{5}$ узнаем эту часть от $22\frac{1}{2}$ *га*.

2-е решение. Всю величину площади принимаем за единицу.

1) $1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$ всей площади осталось после выделения участка под плодовые деревья.

2) $\frac{5}{9} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1}{3}$ всей площади отведено под кормовые культуры.

Здесь берем $\frac{3}{5}$ части от $\frac{5}{9}$ величины всей площади.

3) $40\frac{1}{2}$ *га* $\cdot \frac{1}{3} = 13\frac{1}{2}$ *га* отведено под кормовые культуры.

Задача. С 45 *а* посева сняли 3 сбора за год, из которых третий сбор дал 540 *кг* сухого корма. Зная, что первый сбор составлял $\frac{3}{5}$ второго, а третий $\frac{3}{8}$ второго, найти 1) общий сбор за год с 45 *а*, 2) сбор за год с 1 *га*.

Решение. 1) $540 : \frac{3}{8} = 1440$ (*кг*); 1 *т* 440 *кг*—второй сбор;

2) $1440 \cdot \frac{3}{5} = 864$ (*кг*)—первый сбор.

3) 864 *кг* + 1 *т* 440 *кг* + 540 *кг* = 2 *т* 844 *кг*—сбор за год с 45 *а*;

4) (2 *т* 844 *кг* : 45) · 100 = 6 *т* 320 *кг*—сбор за год с 1 *га*.

Задача. Учащийся прочитал книгу за 3 дня. В первый день он прочитал $\frac{1}{5}$ часть и еще 16 страниц, во второй день $\frac{3}{10}$ остатка и еще 20 страниц, в третий день $\frac{3}{4}$ нового остатка и последние 30 страниц. Сколько страниц в книге?

Решение. В третий день было прочитано число страниц, равное $\frac{3}{4}$ второго остатка, и последние 30 страниц. Итак, 30 стр. это $\frac{1}{4}$ второго остатка, а $30 : \frac{1}{4} = 120$ стр.—второй остаток.

Во второй день, кроме $\frac{3}{10}$ первого остатка, было прочитано 20 страниц, после чего осталось 120 страниц. Следовательно, $20 + 120 = 140$ страниц составили $1 - \frac{3}{10}$ первого остатка; $1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$; $140 : \frac{7}{10} = 200$ — первый остаток. В первый день, кроме $\frac{1}{5}$ части книги, было прочитано 16 страниц да осталось непрочитанными 200. Итак, $16+200=216$, это $1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$ всего числа страниц в книге; $216:\frac{4}{5}=270$ — число страниц в книге.

§ 45. VIII* группа. Особые задачи, которые в зависимости от постановки вопроса решаются одним из выше указанных приемов

В эту группу входят задачи на движение, на совместную работу, задачи с геометрическим содержанием и т. п.

1. Задачи на движение.

К группе задач на движение относятся задачи, решаемые на основании зависимости между расстоянием, скоростью и временем. В эту группу входят задачи на встречное движение, на движение в противоположных направлениях и на движение в одном направлении. Решение этих задач развивает у учащихся пространственные представления. В решении их большую помощь оказывает графическая иллюстрация, которую учащиеся должны сами составить к данному условию задачи.

В задачах на встречное движение различаются три вида задач: 1) на определение пути по данной скорости равномерного движения и времени; 2) на определение времени по данному пути и скорости равномерного движения; 3) на определение скорости равномерного движения по данному пути и времени.

При решении задач *на встречное движение* учащиеся повторяют при помощи чертежа особенности этого вида движения; например, встреча двух тел происходит тогда, когда они проходят все разделявшее их расстояние, и т. д.

Задача. Пароход шел от одной пристани до другой и обратно, употребив на все плавание 5 часов. Найти расстояние между пристанями, если по течению пароход делал 12 *км* в час, а против течения 8 *км* в час.

Решение. Расстояние между пристанями можно определить, зная скорость и время движения парохода в одном направлении. Расстояние равно скорости 12 *км*, умноженной на число часов движения по течению, или скорости 8 *км*, умноженной на число часов движения против течения. Скорость 12 *км* больше 8 *км* во столько же раз, во сколько раз время движения против течения больше времени движения по течению. Число 5 часов (300 мин.) надо разделить на $12+8=20$ частей и для времени движения против течения взять 12 частей. $\frac{300 \text{ мин.}}{20}\cdot 12=180$ мин. $=3$ часа. Искомое расстояние: $8 \text{ км}\cdot 3=24$ *км*.

* Учитывая, что методы решения задач VI и VII групп полно изложены в соответствующих темах («Пропорции», «Пропорциональные величины»), мы отсылаем читателя к этим темам.

Задача. Скорость течения реки 2 *км* в час. Чтобы проплыть некоторое расстояние по течению, лодочник употребил вдвое менее времени, чем плывя то же расстояние против течения. Найти скорость движения лодки в стоячей воде.

Решение. Скорость лодки в час при движении по течению равна скорости ее в стоячей воде плюс 2 *км*; скорость лодки в час при движении против течения равна скорости лодки в стоячей воде минус 2 *км*.

По условию время движения по течению вдвое меньше, чем против течения (на одном и том же расстоянии). Следовательно, скорость движения по течению вдвое больше, чем скорость движения против течения: 2 части — 1 часть = 1 часть. Но скорость движения по течению на $2 + 2 = 4$ (*км* в час) больше, чем скорость движения против течения; скорость по течению равна $4 \cdot 2 = 8$ (*км* в час), скорость против течения 4 *км* в час; $8-2 = 6$ (*км* в час).

Задача. С двух станций выходят одновременно навстречу один другому два поезда. Первый проходит все расстояние между станциями за $12\frac{1}{2}$ часа, второй за $18\frac{3}{4}$ часа. Через сколько часов поезда встретятся?

Решение. Величину расстояния между станциями примем за 1. Скорость первого поезда в 1 час равна $1 : 12\frac{1}{2} = \frac{2}{25}$ (единицы); скорость второго поезда в 1 час равна $1 : \frac{75}{4} = \frac{4}{75}$ (единицы); скорость, с которой поезда сближаются за час, или скорость, с которой уменьшается расстояние между ними за час, равна $\frac{2}{25} + \frac{4}{75} = \frac{2}{15}$ (всего расстояния). Число часов до встречи равно $1 : \frac{2}{15} = 7\frac{1}{2}$.

Возьмем задачи на движение *в одном направлении*.

Задача. От двух пристаней отошли одновременно в одном направлении два парохода: один со скоростью $16\frac{1}{2}$ *км*, другой со скоростью 21 *км* в час. Через $4\frac{1}{4}$ часа второй пароход догнал первый. Найти расстояние между пристанями.

Решение. *1-й способ*. Формула решения: $21 \cdot 4\frac{1}{4} - 16\frac{1}{2} \times 4\frac{1}{4}$, т. е. второй пароход прошел больше первого на то расстояние, которое разделяло пристани.

2-й способ. Формула решения: $\left(21 - 16\frac{1}{2}\right) \cdot 4\frac{1}{4}$, т. е. второй пароход уменьшал расстояние до первого парохода на $\left(21 - 16\frac{1}{2}\right)$ *км* в час. За $4\frac{1}{4}$ часа второй пароход догнал первый; следовательно, расстояние между ними сделалось равным нулю. Итак, расстояние между пристанями равно $19\frac{1}{8}$ *км*.

Задача. В 6 часов минутная и часовая стрелки составляют прямую линию. Когда они опять будут расположены в направлении прямой линии?

Решение. Когда минутная и часовая стрелки снова будут направлены по одной прямой линии, минутная пройдет после 6 часов на 60 делений циферблата и в 12 раз больше, чем часовая; следовательно, часовая пройдет $\frac{60}{12-1} = 5\frac{5}{11}$ делений после цифры 6. Часы будут показывать.

$$7 \text{ час.} + \frac{12 \text{ мин.} \cdot 5}{11} = 7 \text{ час. } 5\frac{5}{11} \text{ мин.}$$

Задача. Из города A в город B вышли автомобиль и товарный поезд. Поезд отошел на 16 мин. позже автомобиля и догнал его через $1\frac{1}{3}$ часа после выхода из A, пройдя $\frac{8}{15}$ всего расстояния от A до B. За сколько часов поезд и автомобиль пройдут расстояние от A до B?

Тип задачи: нахождение целого по его дроби.

Решение.

1) $\frac{8}{15} : \frac{4}{3} = \frac{2}{5}$ всего расстояния проходил поезд в час;

2) $1 : \frac{2}{5} = 2\frac{1}{2}$ часа шел поезд от A до B;

3) $1\frac{1}{3} + \frac{16}{60} = 1\frac{3}{5}$ часа шел автомобиль $\frac{8}{15}$ расстояния от A до B;

4) $\frac{8}{15} : \frac{8}{5} = \frac{1}{3}$ расстояния от A до B проходил автомобиль в час;

5) $1 : \frac{1}{3} = 3$ часа шел автомобиль расстояние от A до B.

Задача. Расстояние между городами A и B 129 *км*. В 5 час. 36 мин. утра выехал из A в B велосипедист; в 7 час. 15 мин. навстречу ему из B в A выехал другой велосипедист, скорость которого в час на 0,75 *км* больше скорости первого. Встретились они в полдень. Определить скорость каждого велосипедиста.

Краткая запись условия

Расстояние 129 *км*.
Время I: от 5 час. 36 мин. до 12 час.

Время II: от 7 час. 15 мин. до 12 час.

Скорость II в час на 0,75 *км* больше скорости I.

Определить скорость в час каждого велосипедиста.

Р е ш е н и е: Предположим, что второй ехал со скоростью первого, т. е. на 0,75 *км* в час меньше, чем в действительности. Зная время его движения: 12 час. — $7\frac{1}{4}$ часа $= 4\frac{3}{4}$ часа, определим, на сколько уменьшилось бы расстояние, которое он проехал, а также расстояние, которое проехали они оба. 0,75 *км* $\times 4\frac{3}{4} = 3\frac{9}{16}$ *км*. Расстояние, которое проехали бы оба велосипедиста, двигаясь со скоростью первого, было бы 129 *км* — $3\frac{9}{16}$ *км* $= 125\frac{7}{16}$ *км*. На это расстояние было бы потрачено а) первым велосипедистом 12 час. — $5\frac{3}{5}$ часа $= 6\frac{2}{5}$ часа, б) вторым — $4\frac{3}{4}$ часа, всего $6\frac{2}{5}$ часа $+ 4\frac{3}{4}$ часа $= 11\frac{3}{20}$ часа. Отсюда скорость первого велосипедиста $125\frac{7}{16}$ *км* : $11\frac{3}{20} = 11\frac{1}{4}$ *км* в час; скорость второго $11\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 12$ (*км* в час).

З а д а ч а. Из колхоза в город, до которого 48 *км*, отправились одновременно колхозник на лошади со скоростью 7 *км* в час и письмоносец на велосипеде со скоростью 13 *км* в час. Через сколько часов остаток пути до города будет для письмоносца в 3 раза меньше, чем для колхозника?

Р е ш е н и е. 1) Колхозник отставал от велосипедиста на 13—7 = 6 (*км*) в час. Предположим, что через час остаток пути до города для колхозника был в 3 раза больше, чем для велосипедиста, т. е. составлял 1 часть для велосипедиста, 3 части для колхозника; 2) 3 ч. — 1 ч. = 2 ч.; 3) 2 ч. — это 6 *км*; 4) 6 *км* : 2 = 3 *км* было бы расстояние до города для велосипедиста; 5) 3 *км* + 13 *км* = 16 *км* было бы расстояние от колхоза до города; 6) 48 *км* : 16 *км* = 3; через 3 часа велосипедист будет в 3 раза ближе к городу, чем колхозник.

2. З а д а ч и н а с о в м е с т н у ю р а б о т у.

З а д а ч а. С помощью двух кранов можно вылить воду из аквариума, вмещающего 480 *л*, в 5 раз скорее, чем одним первым краном. Через второй кран можно вылить воду на 30 мин. скорее, чем через первый кран. По скольку литров выливается через каждый кран в минуту?

Р е ш е н и е. За время, в течение которого через первый кран выльется вода из одного аквариума, через оба крана может быть вылита вода из 5 таких аквариумов, следовательно, через второй кран выльется вода объемом в 4 аквариума. Чтобы через второй кран вылить 480 *л*, времени надо в 4 раза меньше и на 30 мин. меньше, чем в том случае, когда это количество воды будет вылито через первый кран. Отсюда $\frac{30 \text{ мин.}}{4-1} = 10$ мин. — надо, чтобы вылить 480 *л* воды через второй кран; 10 мин. · 4 = 40 мин. — нужно, чтобы вылить 480 *л* через первый кран 480 *л* : 40 = 12 *л* и 480 *л* : 10 = 48 *л*.

Ответ. Через первый кран выливается в 1 мин. 12 *л*, а через второй — 48 *л*.

Задача. В купальный бассейн проведены два насоса, которые, действуя один за другим, в течение 2 час. 15 мин. вылили всю воду из бассейна. Через первый насос, выливающий 18 ведер в минуту, вылито на 351 ведро больше, чем через второй насос. Сколько времени действовал каждый насос, если известно, что второй выливал 15 ведер в минуту?

Тип задачи: исключение неизвестного посредством замены одной величины другой величиной.

Решение. Если бы в течение 2 час. 15 мин., т. е. 135 мин., действовал второй насос, то им было бы вылито на 15 вед. · 135 = = 2025 ведер больше первого насоса (первый вылил 0 ведер). На самом деле вылито через первый насос больше на 351 ведро.

Если заменить второй насос первым на 1 мин., разность между количествами воды, вылитыми вторым и первым насосами, уменьшится на 18 вед. + 15 вед. = 33 вед. Но она должна измениться на 2025 вед. + 351 вед. = 2376 вед. Значит, первый насос действовал 2376 вед. : 33 вед. = 72 (мин.); второй — 63 мин.

Второй способ решения.

Если бы в течение 135 мин. работал один первый насос, то он дал бы 18 вед. · 135 = 2430 вед., т. е. на 2430 вед. больше, чем второй (который дал 0 вед.). В действительности первый дал больше только на 351 вед., т. е. меньше на 2430 вед. — 351 вед. = 2079 вед. При замене первого насоса вторым на 1 мин. разность в количестве воды, вылитой тем и другим насосами, уменьшается на 18 вед. + + 15 вед. = 33 вед. Эта разность уменьшится на 2079 вед. в течение 2079 вед. : 33 вед. = 63 (мин.).

Третий способ решения.

Первый насос вылил лишние 351 ведро за 19,5 мин. (351 : 18). Оба насоса вылили бы воду поровну, если бы первый не работал 19,5 мин. Тогда оба насоса работали бы 2 час. 15 мин. — 19,5 мин. = = 1 час. 55,5 мин.; время их работы обратно пропорционально скорости работы, так как оба вылили одинаковое количество воды. I — время работы первого, II — время работы второго,

$I:II=\frac{1}{18}:\frac{1}{15}=5:6$; разделим 1 час 55,5 мин. в отношении $5:6$; $I=(115{,}5:11)\cdot 5=52\frac{1}{2}$ (мин); $52\frac{1}{2}$ мин.$+19\frac{1}{2}$ мин. $=72$ мин.; $II=(115{,}5:11)\cdot 6=63$ (мин.).

3. Задачи геометрического содержания.

Задача. Прямоугольник со сторонами 3 *см* и 4 *см* изображает на плане земельный участок в масштабе 1 : 100 000. Сколько гектаров в этом участке?

Решение. 1) Длина участка 4 *см* · 100 000 = 4000 *м*; 2) ширина участка 3 *см* · 100 000 = 3000 *м*; 3) площадь участка 4000 · 3000 = 12 000 000 (*кв. м*) = 1200 *га*.

Задача. Внешние размеры деревянного ящика 7 *см*, 8 *см* и 10 *см*. Толщина стенок и крышки 5 *мм*. Вычислить вместимость ящика.

Решение 1) 0,5 *см* · 2 = 1 *см* — толщина стенок ящика или дна и крышки (вместе); 2) 7 *см* — 1 *см* = 6 *см* — высота внутреннего объема ящика; 3) 8 *см* — 1 *см* = 7 *см* — ширина внутреннего объема ящика; 4) 10 *см* — 1 *см* = 9 *см* — длина внутреннего объема ящика; 5) 9 · 7 · 6 = 378 (*куб. см*) — вместимость ящика.

Задача. Железный брусок, имеющий в сечении квадрат со стороною 0,4 *м* и длину 3,6 *м*, вытягивают в прокатном цехе через отверстие, имеющее форму квадрата со стороной 0,24 *м*. Какую длину он будет иметь после вытягивания?

Решение. 1) Объем бруска 3,6 · 0,4 · 0,4 = 0,576 (*куб. м*). 2) Длина бруска после вытягивания 0,576 : 0,0576 = 100 (*дм*).

Ответ: 10 *м*.

Задача. Человеческое тело содержит в среднем 6 *л* крови; 1 *куб. мм* крови — около 5 миллионов красных кровяных шариков, и каждый кровяной шарик имеет диаметр $\frac{3}{500}$ *мм*. Какая получилась бы длина, если бы все эти кровяные шарики уложить один за другим?

Решение. 1) 6 *л* = 6000 *куб. см* = 6000 000 *куб. мм* = $=6\cdot 10^6$ *куб. мм*.

2) $5\cdot 10^6\cdot 6\cdot 10^6=30\cdot 10^{12}$;

3) $\frac{3}{500}$ *мм* $\cdot\, 3\cdot 10^{13}=\frac{3}{5}$ *мм* $\cdot\, 3\cdot 10^{11}=\frac{9\cdot 10}{5}\cdot 10^{10}$ *мм* $=18\times$ $\times\, 10^{10}$ *мм* $=18\cdot 10^7$ *м* $=18\cdot 10^4$ *км* $=180\,000$ *км*.

В V и VI классах задачи указанных выше групп полезно решать применительно к изучению соответствующего раздела теоретического курса арифметики, начиная с начала учебного года.

Например: при повторении арифметики целых чисел в теме «Изменение результатов действий от изменения данных» решается группа арифметических задач «Изменение результатов действий в зависимости от изменения данных».

При изучении теории арифметики по темам «Умножение и деление дробей» решается группа арифметических задач «Нахождение дроби от числа и числа по данной его дроби». При изучении темы «Прямая и обратная пропорциональность величин» надо решать группу арифметических задач на пропорциональность величин и на пропорциональное деление.

Такая система изучения арифметики объединяет теоретическую часть арифметики с ее практической частью, и эту связь теории с практикой необходимо каждому учителю проводить в своей работе.

ГЛАВА VIII

МЕТОДИКА УСТНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ НА УРОКАХ АРИФМЕТИКИ

§ 46. Значение устного счета

В настоящее время во всех областях жизни громадное значение имеют (наряду с письменными вычислениями) вычисления на счетных приборах, но в то же время повседневная практика на заводе, в колхозе да и в обыденной жизни требует умения производить необходимые расчеты быстро, точно, иногда на ходу, т. е. считать устно.

Устные вычисления имеют и методическое значение. Выработка прочных навыков письменных вычислений возможна только при хороших навыках устного счета.

Устные вычисления вносят разнообразие в преподавание математики, закрепляют знания учащихся, дают возможность быстро проверить их знания, активизируют работу класса, повышают ее эффективность.

При объяснении нового материала, особенно трудного для понимания учащихся, необходимо соблюдать переход от легкого к трудному, от простого к сложному. Здесь можно использовать устные вычисления как подготовительную ступень к объяснению нового материала. Например, при объяснении переместительного и сочетательного законов сложения полезно дать для устного решения примеры на целых числах, например:

$$1528+457+272+543.$$

Решая этот пример устно, учащиеся делают перестановку слагаемых (переместительный закон сложения): $1528 + 272 + 457 + 543$, группы слагаемых $1528 + 272$ и $457 + 543$ заменяют их суммами (сочетательный закон сложения); наконец, выполняют сложение: $1800 + 1000 = 2800$.

При изучении обыкновенных дробей для повторения законов сложения можно дать пример:

$$4\frac{3}{4}+1\frac{7}{9}+2\frac{5}{12}+5\frac{2}{9}+\frac{7}{12}+3\frac{1}{4}.$$

Пример с десятичными дробями: $12,8+6,5+2,2$.

При изучении свойства: «Величина произведения не изменяется, если один сомножитель увеличивается во столько же раз, во сколько раз уменьшается другой сомножитель» — можно дать примеры в виде следующего: $248 \cdot 25$; первый сомножитель делим на 4, второй умножаем на 4; по указанному выше свойству произведения величина его не изменилась $(248:4)\cdot(25\cdot 4)=62\cdot 100=$ $=6200$. Еще пример:

$$3,2\cdot 125=(3,2:8)\cdot(125\cdot 8)=0,4\cdot 1000=400.$$

Прежде чем изучать разложение на множители, можно дать следующие упражнения: а) Я задумал два числа, перемножил их и получил 65. Какие числа я задумал? б) Я задумал три числа, перемножил их и получил 105. Какие числа я задумал?

После этого можно дать примеры на разложение чисел на множители: 70, 120, 420,...

Перед изучением разложения на множители следует дать для устного решения такие примеры:

$$23\cdot 3+23\cdot 7=23\cdot(3+7)=230;$$

$$73\cdot 24+73\cdot 49+73\cdot 27=73\cdot(24+49+27)=73\cdot 100=7300;$$

$$13\frac{7}{15}\cdot 12+16\frac{8}{15}\cdot 12=\left(13\frac{7}{15}+16\frac{8}{15}\right)\cdot 12=360;$$

$$175\frac{3}{10}\cdot 3\frac{4}{9}+175\frac{3}{10}\cdot 6\frac{5}{9}=175\frac{3}{10}\cdot\left(3\frac{4}{9}+6\frac{5}{9}\right)=$$

$$=175\frac{3}{10}\cdot 10=1753.$$

$$45,48\cdot 3,125+37,36\cdot 3,125+17,16\cdot 3,125=3,125\times$$
$$\times(45,48+37,36+17,16)=3,125\cdot 100=312,5.$$

Можно дать такие упражнения: «Я задумал число; если разделить его на 5, к частному прибавить 150, то получится 400. Какое число я задумал?» Или: «Если неизвестное число увеличить в 6 раз, к полученному числу прибавить 0,8, то получится 3,2. Какое это число?» Или: «Определить первоначальную скорость автомобиля, если он, уменьшив скорость на 12 *км* в час, на остальной части пути прошел 400 *км* за 16 часов».

Ознакомление с новым видом задач можно начинать с решения устных задач этого вида на небольших числах.

Прежде чем решать такие задачи на числа любой величины, надо разобрать 2—3 задачи этого вида с числами в пределе 100 и 1000.

Например, переходя к решению задач на пропорциональные величины (простое тройное правило), можно дать задачи этого вида с числами в пределе 100, затем с числами в пределе 1000. Приведем задачи:

а) Соломорезка за 6 часов нарезала 30 *ц* соломы. Сколько соломы нарежет она за 9 часов?

б) Чтобы засадить саксаулом 5 тыс. *га* песков, надо заготовить 30 *т* семян саксаула. Сколько семян саксаула надо заготовить, чтобы засадить 12,5 тыс. *га* песков?

Задачи на уравнивание данных и искомых вызывают наибольшие затруднения у учащихся. Прежде чем перейти к задачам этого вида, можно дать для устного решения сначала задачи на вычисление неизвестного по разности двух величин. Например: а) Две доски распилили на равные части. Из одной получилось 8 частей, из другой 6 таких же частей. Первая доска была на 1,2 *м* длиннее второй. Какой длины была каждая доска? б) Лесопильный завод отправил доски с двумя поездами. В первом поезде доски были погружены в 18 вагонов, во втором поезде — в 16 таких же вагонов. Первый поезд увез на 2500 досок больше, чем второй. Сколько досок увез каждый поезд?

Дальше для устного счета можно предложить задачи на исключение неизвестного посредством вычитания. Например:

1 литр бензина и 6 литров керосина весят 5,5 *кг*, а 1 литр бензина и 1 литр керосина— 1,5 *кг*. Найти вес 1 *л* бензина и 1 *л* керосина.

Затем устно решаются задачи на уравнивание данных и искомого:

В мастерской металлоремонта имелись 20 больших гаек и 60 малых гаек; все они весили 16 *кг*. Когда употребили на изделия 4 больших и 4 малых гайки, то остальные весили 14,2 *кг*. Каков вес большой и малой гайки?

Решив подготовительные задачи, переходят к задачам разбираемого вида на числах любой величины.

Подготовительные устные задачи даются также перед решением задач других видов. Количество подготовительных задач в каждом отдельном случае определяет сам учитель в зависимости от развития класса.

Умение устно производить вычисления в сложных задачах дает возможность учащимся решить больше задач и более подробно их разобрать.

Сравним устные и письменные вычисления при решении одной и той же задачи на целые числа. «Длина земельного участка 640 *м*, ширина 125 *м*. Двадцать пятая часть этого участка засажена помидорами, пятая его часть — капустой, остальная часть участка под картофелем. Сколько аров земли под картофелем, капустой и помидорами отдельно?»

Устно.

1) $640 \cdot 125 = (640 : 8) \times$ $\times 1000 = 80\,000$ (*кв. м*)
2) $800 : 25 = (800 : 100) \times$ $\times 4 = 32$ (*а*)
3) $800 : 5 = (800 : 10) \times$ $\times 2 = 160$ (*а*)
4) $32 + 160 = 192$ (*а*)
5) $800 - 192 = 608$ (*а*)

Письменно.

1) $$\begin{array}{r} 640 \\ \times\ 125 \\ \hline 3200 \\ +128 \\ 64 \\ \hline 80\,000 \end{array}$$

2) $$\begin{array}{r|l} 80\,000 & 100 \\ \hline 0 & 800 \end{array}$$

3) $$\begin{array}{r|l} 800 & 25 \\ \hline 50 & 32 \\ \hline 0 & \end{array}$$

4) $$\begin{array}{r|l} 800 & 5 \\ \hline 5 & 160 \\ \hline 30 & \\ 30 & \end{array}$$

5) $$\begin{array}{r} 160 \\ +\ \ 32 \\ \hline 192 \end{array}$$

6) $$\begin{array}{r} 800 \\ -\ 192 \\ \hline 608 \end{array}$$

Вычисления: $(640 : 8) \cdot 1000$; $(800 : 100) \cdot 4$; $(800 : 10) \cdot 2$ — при решении не записываются, а выполняются устно.

С дробными числами можно решить устно, например, следующую задачу.

Задача. Надо оштукатурить и побелить снаружи одноэтажный дом, размеры которого: длина 12 *м*, ширина 8 *м* и высота $4\frac{1}{2}$ *м*. В доме 7 окон размером каждое $2\frac{1}{2}$ *м* $\times$ $1\frac{1}{5}$ *м* и 2 двери размером каждая 3 *м* $\times$ $1\frac{1}{2}$ *м*. Сколько будет стоить вся работа, если побелка и штукатурка 1 *кв. м* стоит 2 руб. 40 коп?

Решение задачи можно записать в следующем виде:

1) $12 \cdot 4\frac{1}{2} = 54$ (*кв. м*)
2) $54 \cdot 2 = 108$ (*кв. м*)
3) $8 \cdot 4\frac{1}{2} = 36$ (*кв. м*)
4) $36 \cdot 2 = 72$ (*кв. м*)
5) $108 + 72 = 180$ (*кв. м*)
6) $2\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{5} = 3$ (*кв. м*)
7) $3 \cdot 7 = 21$ (*кв. м*)
8) $3 \cdot 1\frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}$ (*кв. м*)
9) $4\frac{1}{2} \cdot 2 = 9$ (*кв. м*)
10) $21 + 9 = 30$ (*кв. м*)
11) $180 - 30 = 150$ (*кв. м*)
12) $2\frac{2}{5} \cdot 150 = 360$ (руб.)

Все вычисления выполняются устно.

Устные вычисления имеют большое значение также при закреплении навыков и при проверке знаний учащихся. Так, при изучении законов действий и их следствий можно предлагать учащимся решать устно с подробным объяснением такие упражнения:

$$(138 + 315 + 175) + 185; \quad \left(\frac{8}{15} \cdot \frac{5}{16} \cdot \frac{5}{6}\right) \cdot 1\frac{1}{5};$$

$$(84+36)\cdot 25; \quad \left(3\frac{5}{12}+2\frac{1}{8}\right)\cdot 24; \quad 79\cdot 13+21\cdot 13;$$

$$15\frac{2}{19}\cdot 8+37\frac{8}{19}\cdot 8+47\frac{9}{19}\cdot 8; \quad \left(40\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{26}\cdot 5\frac{1}{5}\right):4\frac{1}{2};$$

$$(0{,}25\cdot 0{,}4\cdot 5):0{,}5; \quad (65026+39052):13;$$

$$(27{,}036-9{,}054):0{,}009; \quad \left(6\frac{2}{3}-5\frac{5}{7}\right):20$$

Сравним письменное и устное решения примеров: а) целые числа.

$$\begin{array}{r} 1720 \\ +\,863 \\ 280 \\ 137 \\ \hline \end{array}$$

Решая пример письменно, применяют таблицу сложения и правило сложения многозначных чисел. При устном решении того же примера: $1720+863+280+137$ 1) меняют порядок второго и третьего слагаемых: $1720+280+863+137$ (переместительный закон сложения); 2) группы слагаемых: $1720+280$ и $863+137$ заменяют их суммами (сочетательный закон сложения); 3) выполняют сложение $2000+1000=3000$.

б) Обыкновенные дроби:

$$14\frac{5}{63}+\left(2\frac{3}{8}+3\frac{53}{126}\right).$$

При письменном вычислении обязательно применение правила сложения дробей с различными знаменателями. Необходимо начать вычисления с приведения дробей (в скобках) к наименьшему общему знаменателю. НОЗ = 504.

$$1)\ 2\frac{3}{8}+3\frac{53}{126}=2+3+\frac{189+212}{504}=5\frac{401}{504}.$$

$$2)\ 14\frac{5}{63}+5\frac{401}{504}=14+5+\frac{40+401}{504}=19\frac{441}{504}=19\frac{7}{8}.$$

Ответ: $19\frac{7}{8}$.

Дополнительные вычисления:

$$126=2\cdot 3\cdot 3\cdot 7$$

$$\text{НОЗ}=2\cdot 3\cdot 3\cdot 7\cdot 2\cdot 2=504$$

$$504:126=4$$
$$504:63=8$$
$$\frac{441}{504}=\frac{7}{8}$$

Устное решение.

1) $14\frac{5}{63}+\left(2\frac{3}{8}+3\frac{53}{126}\right)=14\frac{5}{63}+2\frac{3}{8}+3\frac{53}{126}$ (к числу прибавляется сумма двух слагаемых);

2) $14\frac{5}{63}+2\frac{3}{8}+3\frac{53}{126}=14\frac{5}{63}+3\frac{53}{126}+2\frac{3}{8}$ (изменяется порядок слагаемых);

3) $\left(14\frac{5}{63}+3\frac{53}{126}\right)+2\frac{3}{8}=17\frac{63}{126}+2\frac{3}{8}$ (группа слагаемых заменяется их суммой);

4) $17\frac{1}{2}+2\frac{3}{8}=19\frac{4+3}{8}=19\frac{7}{8}$. Ответ: $19\frac{7}{8}$.

в) Десятичные дроби: $(16,4+13,2)+(10,6+4,8)$;

1) $\begin{array}{r} 16,4 \\ +\ 13,2 \\ \hline 29,6 \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} 10,6 \\ +\ 4,8 \\ \hline 15,4 \end{array}$ 3) $\begin{array}{r} 29,6 \\ +\ 15,4 \\ \hline 45,0 \end{array}$

Ответ: 45.

При письменном решении необходимо применение таблицы сложения и правила сложения многозначных чисел.

Посмотрим, как этот пример решается устно.

1) $16,4+13,2+10,6+4,8$ (к сумме прибавляется другая сумма);

2) $16,4+10,6+13,2+4,8$ (изменяется порядок слагаемых);

3) $(16,4+10,6)+(13,2+4,8)=27+18=45$ (группы слагаемых заменяются их суммами).

Ответ: 45.

При устных вычислениях учащемуся предоставляется возможность выбирать те или иные приемы действий, а это развивает наблюдательность, смекалку.

Конечно, нельзя строить устные вычисления только на смекалке. Здесь нужны и знания соответствующих свойств арифметических действий и их сознательное применение. Следует избегать таких устных упражнений, в которых учащиеся расходуют много времени на отыскание приема вычисления и на процесс вычисления: такие примеры скорее решаются письменно.

Уже в III и IV классах начальной школы на применение зависимости между компонентами и результатом действий решаются не только простые, но и сложные упражнения. Выполняя вычисления, учащиеся приводят подробные обоснования применяемых действий.

Пример 1-й. Если к утроенному неизвестному числу прибавить 29, то получится 113. Найти неизвестное число. Объяснение вычислений должно быть примерно следующее: а) Чтобы по сумме 113 и слагаемому 29 найти другое слагаемое, надо из суммы вычесть известное слагаемое: $113 - 29 = 84$. б) 84 — это произведение неизвестного числа и сомножителя 3. Чтобы найти по произведению и сомножителю неизвестный сомножитель, надо произведение разделить на известный сомножитель:

$$84 : 3 = 28.$$

Учащиеся проверяют ответ 28, выполнив вычисления:

$$28 \cdot 3 + 29 = 113.$$

Пример 2-й. Задумано число, прибавлено к нему 19, сумма разделена на 3 и получилось 29. Найти задуманное число. Объяснение решения должно быть следующее: а) Сумма неизвестного числа и 19-ти служит делимым, 3 — делителем и 29 частным. Делимое равно делителю, умноженному на частное: $29 \times 3 = 87$. б) 87 — эта сумма неизвестного числа и 19. Неизвестное число равно сумме без известного слагаемого: $87 - 19 = 68$. Решение примера проверяется, делаются вычисления $(68 + 19) : 3 = 29$. Особенно хорошо устный счет помогает усвоению изменения результата действия от изменения данных. Например: ученик, умножая устно $64 \cdot 125$, выполняет вычисления следующим образом: $(64 : 8) \cdot (125 \cdot 8) = 8 \cdot 1000 = 8000$. Эти вычисления ученик объясняет применением правила: если один сомножитель уменьшить в несколько раз, а другой увеличить во столько же раз, то произведение не изменится. Объяснение решения учащимися показывает, что вычисления сделаны сознательно, правило усвоено. Подобные примеры полезно повторить в V классе.

Устные вычисления, применяемые в V классе при изучении законов и свойств арифметических действий, кроме практических навыков, прочных знаний законов и свойств действий, должны дать учащимся пятых классов базу, на которой строится изучение алгебры в шестом классе. Например, академики Колмогоров и Александров в учебнике алгебры говорят: «Мы увидим сейчас, как свойства вычитания, известные из арифметики, получаются простым вычислением с алгебраическими суммами» и далее: «Применяя правила раскрытия скобок (§ 21) и правило о том, что сумма не меняется от перемены порядка слагаемых (§ 18), получаем:

$$a - (b + c) = a - b - c \quad (1) \qquad a - (b - c) = a - b + c \quad (3)$$
$$a + (b - c) = a + b - c \quad (2) \qquad a - (b - c) = a + c - b \quad (4)$$

Формулы 1, 2 и 4 выражают правила, известные из арифметики: 1) Чтобы отнять от какого-нибудь числа сумму, можно отнять от этого числа каждое из слагаемых одно за другим.

2) Чтобы прибавить к какому-нибудь числу разность, можно прибавить к этому числу уменьшаемое и вычесть из полученной суммы вычитаемое.

3) Чтобы отнять от какого-нибудь числа разность, можно прибавить к этому числу вычитаемое и затем от полученной суммы отнять уменьшаемое. Например:

$$5-(7-4)=5+4-7=2.$$

Все эти формулы в арифметике были установлены для положительных (или равных нулю) чисел. Теперь мы доказали простым вычислением, что они верны и для любых рациональных чисел (положительных, отрицательных или равных нулю)». (Александров и Колмогоров, Алгебра, ч. I, изд. 1940 г., стр. 50.)

Учащиеся должны не только иметь теоретические знания, но и уметь применять их на практике. Свойствами арифметических действий учащиеся должны уметь обосновать приемы устных вычислений в следующих примерах:

$$548-(248+139)=548-248-139=(548-248)-139=$$
$$=300-139=161.$$

$$37\frac{15}{16}-\left(12\frac{15}{16}+7\frac{7}{10}\right)=\left(37\frac{15}{16}-12\frac{15}{16}\right)-7\frac{7}{10}=17\frac{3}{10}.$$

$$49{,}3-(16{,}3+27{,}9)=49{,}3-16{,}3-27{,}9=(49{,}3-16{,}3)-$$
$$-27{,}9=33-27{,}9=5{,}1.$$

$$825+(175-109)=825+175-109=(825+175)-109=$$
$$=1000-109=891.$$

$$15\frac{17}{48}+\left(18\frac{7}{48}-6\frac{9}{20}\right)=15\frac{17}{48}+18\frac{7}{48}-6\frac{9}{20}=\left(15\frac{17}{48}+18\frac{7}{48}\right)-$$
$$-6\frac{9}{20}=33\frac{1}{2}-6\frac{9}{20}=27\frac{1}{20}.$$

$$57{,}9+(19{,}1-13{,}5)=57{,}9+19{,}1-13{,}5=(57{,}9+19{,}1)-13{,}5=$$
$$=77-13{,}5=63{,}5.$$

$$121-(375-279)=121+279-375=(121+279)-375=$$
$$=400-375=25.$$

$$23\frac{7}{20}-\left(29\frac{4}{15}-23\frac{13}{20}\right)=23\frac{7}{20}+23\frac{13}{20}-29\frac{4}{15}=$$
$$=\left(23\frac{7}{20}+23\frac{13}{20}\right)-29\frac{4}{15}=47-29\frac{4}{15}=17\frac{11}{15}.$$

$$51{,}37-(63{,}28-18{,}63)=51{,}37+18{,}63-63{,}28=(51{,}37+$$
$$+18{,}63)-63{,}28=70-63{,}28=6{,}72.$$

Таким образом, учащиеся V и VI классов должны знать законы и свойства арифметических действий и применять их при решении примеров для обоснования действий.

Надо отметить и большое воспитательное значение устных вычислений.

Система расположения материала по устному счету

Различают общие и частные приемы устного счета по арифметике.

Общие приемы основаны на применении десятичного состава чисел, а также законов и свойств арифметических действий.

Общие приемы усваиваются в первые два года изучения арифметики. Приведем примеры. Чтобы умножить 23 на 4, разбивают 23 на 2 десятка + 3 единицы; на основании распределительного закона умножения множат на 4 отдельно десятки и единицы, а произведения складывают:

$$(20+3)\cdot 4 = 20\cdot 4+3\cdot 4 = 80+12 = 92.$$

Для деления 96 на 3 разлагают 96 на 9 десятков и 6 единиц, затем на основании распределительного закона делят на 3 отдельно десятки и единицы и результаты складывают:

$$96 : 3 = (90+6) : 3 = 90 : 3+6 : 3 = 30+2 = 32.$$

Переходим к системе расположения частных приемов устных вычислений. Остановимся прежде всего на приемах устных вычислений при повторении целых чисел. Здесь применяются примерно следующие приемы устных вычислений: замена нескольких слагаемых их суммой (закон сочетательный), перестановка слагаемых (закон переместительный), округление одного или нескольких слагаемых, округление уменьшаемого и вычитаемого, замена нескольких сомножителей их произведением, перестановка сомножителей, умножение произведения на число, сокращенный способ умножения и деления: умножение и деление на 5, 25, 125.

При изучении делимости чисел а) решаются задачи на все действия с целыми числами и б) повторяются составные задачи. Следовательно, в этом разделе а) применяются приемы устных вычислений, показанные выше, и б) решаются устно задачи с небольшими числами на те виды, которые повторяются.

Такого же содержания даются устные вычисления, когда по программе изучаются сложение и вычитание обыкновенных дробей. Здесь для устных вычислений даются не только примеры на целые числа, но и на обыкновенные дроби. То же самое делается и при изучении умножения и деления дробей.

Когда же выполняют все действия с обыкновенными дробями, даются и устные вычисления на этот раздел. В это же время могут решаться также и составные задачи.

При изучении десятичных дробей примеры и задачи для устного решения даются сначала на обыкновенные дроби, а потом на десятичные.

При изучении всех действий с десятичными дробями рассматриваются законы и свойства действий.

Из изложенного следует, что программа устных вычислений по арифметике вытекает из общей программы. Устные вычисления начинаются с повторения целых чисел. Это повторение необходимо, чтобы проверить, насколько учащиеся владеют навыками устного счета в объеме программы I—IV классов.

Начинать устные вычисления в объеме программы V класса следует с устных вычислений с применением законов и свойств действий с целыми, потом с дробными числами; затем применяют вычисления, основанные на изменении результата при изменении данных. Далее выполняются главным образом упражнения с обыкновенными и десятичными дробями. Устные вычисления для каждого действия над обыкновенными дробями надо изучать отдельно, применяя их не только в устных примерах, но и в задачах. Такой же порядок надо соблюдать и при изучении десятичных дробей. После изучения десятичных дробей следует перейти к устным вычислениям на совместные действия над дробями обыкновенными и десятичными, соблюдая тот же порядок, какой указан для обыкновенных и десятичных дробей.

На основании анализа программы арифметики составляется краткий годовой план устных вычислений; он разбивается на четвертные планы и по темам.

Можно составлять планы в ином порядке. После анализа каждой темы надо наметить необходимые устные вычисления: примеры и задачи на основные и особые приемы вычислений.

Приводим примерное содержание устных вычислений с применением особых приемов.

1. Сложение. 1) Замена нескольких слагаемых их суммой (закон сочетательный); 2) Перестановка слагаемых (закон переместительный); 3) Прибавление суммы к числу; 4) Прибавление числа к сумме; 5) Прибавление к сумме другой суммы.

2. Сложение и вычитание. 1) Перестановка ряда членов при сложении и вычитании (переместительное свойство членов ряда при сложении и вычитании). 2) Прибавление к числу разности (первый случай сочетательного свойства ряда членов сложений и вычитаний). 3) Вычитание из числа суммы (второй случай сочетательного свойства ряда членов сложений и вычитаний). 4) Вычитание из числа разности (третий случай сочетательного свойства ряда членов сложений и вычитаний). 5) Вычитание из суммы числа. 6) Вычитание из разности числа. 7) Вычитание из суммы другой суммы. 8) Вычитание из разности другой разности. 9) Округление одного или нескольких слагаемых. 10) Округление уменьшаемого или вычитаемого. 11) Замена вычитания сложением и сложения вычитанием.

3. Умножение. 1) Замена нескольких сомножителей их произведением (сочетательный закон произведения). 2) Перестановка сомножителей (переместительный закон произведения). 3) Умножение произведения на число. 4) Умножение числа на произведение. 5) Умножение произведения на произведение.

4. Умножение и деление. 1) Перестановка членов ряда умножений и делений (переместительное свойство ряда умножений и делений). 2) Умножение числа на частное. 3) Деление числа на произведение. 4) Деление числа на частное. 5) Деление произведения на число. 6) Деление произведения нескольких сомножителей на другое произведение. 7) Сокращенный способ умножения: а) умножение на 5, 50, 500. . . , б) умножение на 25, 250, 2500. . . , в) умножение на 125, 1250 . . . . 8) Сокращенный способ деления: а) деление на 5, 50, 500 . . . , б) деление на 25, 250 и т. п., в) деление на 125, 1250. . .

5. Все действия. 1) Распределительное свойство произведения. 2) Умножение разности на число. 3) Деление суммы на число. 4) Деление разности на число. 5) Округление сомножителей: а) умножение на 15, 150. . . , б) умножение на 9, 99, 999. . . , в) умножение на 19, 29, 39... 6) Округление слагаемых и замена сложения умножением. 7) Округление уменьшаемого и вычитаемого. 8) Округление делимого. 9) Умножение на 11 по способу округления.

§ 47. Приемы устных вычислений

Законы действий. В числе теоретических вопросов, включенных в программу арифметики, имеется вопрос о законах арифметических действий.

Эти законы надо изложить учащимся в элементарной форме на конкретном материале, по методу индукции; учитель подбирает примеры, разбирает каждый из них в классе; из разбора отдельных примеров делаются частные выводы (текст закона), а частные выводы завершаются общей формулировкой закона — как обобщение рассмотренных частных случаев. Общий вывод закрепляется решением подобранных примеров и задач. Рассмотрим пример такой работы.

Тема: Переместительное свойство умножения.

Работу начинаем с вывода:

$$8 \cdot 3 = 3 \cdot 8.$$

Начертим в тетрадях прямоугольник, у которого в длину 8 клеточек, а в ширину 3. Умножьте 8 на 3.

Сосчитайте, сколько получилось квадратов? (24)

А теперь таким же способом найдем, сколько получилось от умножения 3 на 8. Значит, $8 \cdot 3$ чему равно? ($3 \cdot 8 = 24$.)

Запишем это так: $8 \cdot 3 = 3 \cdot 8$. Чем отличается правая часть нашей записи от левой? (Переставлены сомножители 8 и 3.)

Значит, что можно сделать с числами при умножении 8 на 3? (Их можно поменять местами.)

Проверьте это на примерах: $6 \cdot 4$; $5 \cdot 3$.

Учащиеся сравнивают результаты, записывают: $6 \cdot 4 = 4 \times 6$; $4 \cdot 3 = 3 \cdot 4$ — и делают вывод, что при умножении двух чисел их можно переставлять, а затем делается обобщающий вывод: «От перестановки сомножителей произведение не меняется».

Рассмотрим некоторые приемы устных вычислений на сложение, вычитание, умножение и деление.

а) Сложение с перестановкой слагаемых: $357 + 89 + 43 + 111$. Производим перестановку слагаемых на основании закона переместительного, чтобы получить круглые числа при сложении: $357 + 89 + 43 + 111 = 357 + 43 + 89 + 111$. Группы слагаемых заключаем в скобки на основании закона сочетательного: $357 + 43 + 89 + 111 = (357 + 43) + (89 + 111)$. Выполняем сложение полученных чисел: $(357 + 43) + (89 + 111) = 400 + 200 = 600$.

1) $4\frac{3}{4} + 1\frac{7}{9} + 2\frac{5}{12} + 5\frac{2}{9} + \frac{7}{12} + 3\frac{1}{4} = \left(4\frac{3}{4} + 3\frac{1}{4}\right) + \left(2\frac{5}{12} + \frac{7}{12}\right) + \left(1\frac{7}{9} + 5\frac{2}{9}\right) = 8 + 3 + 7 = 18$.

2) $(20,9 + 15,7 + 10,71) + (1,29 + 40,1 + 2,3) = 20,9 + 15,7 + 10,71 + 1,29 + 40,1 + 2,3 = (20,9 + 40,1) + (15,7 + 2,3) + (10,71 + 1,29) = 61 + 18 + 12 = 61 + (18 + 12) = 61 + 30 = 91$.

б) Округление слагаемых: $197 + 65$. Первое слагаемое заменяем разностью двух чисел $197 = 200 - 3$, получим $(200 - 3) + 65$. Применяя законы сочетательный и переместительный, получим: $(200 - 3) + 65 = 200 - 3 + 65 = 200 + 65 - 3 = 262$.

1) $398 + 79 = (400 - 2) + 79 = 479 - 2 = 477$.

2) $199 + 57 = 200 - 1 + 57 = 257 - 1 = 256$.

3) $15\frac{11}{12} + 7\frac{1}{3} = 16 + 7\frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \left(16 + 7\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{12} = 23\frac{1}{3} - \frac{1}{12} = 23\frac{1}{4}$.

4) $23,98 + 3,26 = 24 + 3,26 - 0,02 = (24 + 3,26) - 0,02 = 27,26 - 0,02 = 27,24$.

в) Округление уменьшаемого или вычитаемого.

Рассмотрим пример: $394 - 28$. Заменим уменьшаемое числом 400. По известному свойству разность увеличится на 6 единиц. Для получения истинной разности полученную разность $400 - 28$ уменьшаем на 6 единиц:

1) $400 - 28 - 6 = 372 - 6 = 366$.

Подобным же образом:

2) $703 - 35 = 700 - 35 + 3 = 668$.

3) $9\frac{11}{12} - 3\frac{5}{6} = \left(10 - 3\frac{5}{6}\right) - \frac{1}{12} = 6\frac{1}{6} - \frac{1}{12} = 6\frac{1}{12}$.

4) $7,82 - 2,46 = (8 - 2,46) - 0,18 = 5,54 - 0,18 = 5,36$.

5) $11\frac{1}{16} - 6\frac{3}{8} = \left(11 - 6\frac{3}{8}\right) + \frac{1}{16} = 4\frac{5}{8} + \frac{1}{16} = 4\frac{11}{16}$.

6) $6,03 - 3,25 = (6 - 3,25) + 0,03 = 2,75 + 0,03 = 2,78$.

Рассмотрим пример: $235 - 198$. Заменим вычитаемое разностью двух чисел: 198 — 200 — 2. На основании теоремы вычитания из данного числа разности (чтобы отнять от данного числа разность двух чисел, достаточно вычесть уменьшаемое и прибавить вычитаемое) получим:

1) $235 - 198 = 235 - (200 - 2) = 235 - 200 + 2 = 37.$

2) $401 - 205 = 401 - 200 - 5 = 201 - 1 - 4 = 196.$

3) $6\frac{5}{12} - 2\frac{5}{6} = \left(6\frac{5}{12} - 3\right) + \frac{1}{6} = 3\frac{5}{12} + \frac{1}{6} = 3\frac{7}{12}.$

4) $7{,}83 - 5{,}98 = (7{,}83 - 6) + 0{,}02 = 1{,}83 + 0{,}02 = 1{,}85.$

5) $15\frac{5}{8} - 7\frac{1}{16} = \left(15\frac{5}{8} - 7\right) - \frac{1}{16} = 8\frac{5}{8} - \frac{1}{16} = 8\frac{9}{16}.$

6) $9{,}43 - 5{,}44 = 9{,}43 - 5{,}43 - 0{,}01 = 4 - 0{,}01 = 3{,}99.$

г) Округление при умножении: $198 \cdot 4$. Заменим число 198 разностью двух чисел $200 - 2$, получим $198 \cdot 4 = (200 - 2) \cdot 4$. На основании закона распределительного (чтобы умножить разность двух чисел на какое-либо число, достаточно умножить на это число уменьшаемое и вычитаемое и из первого произведения вычесть второе) получим: $(200 - 2) \cdot 4 = 800 - 8 = 792.$

1) $299 \cdot 3 = 300 \cdot 3 - 3 = 900 - 3 = 897.$

2) $197 \cdot 4 = 200 \cdot 4 - 3 \cdot 4 = 788.$

3) $7\frac{11}{12} \cdot 3 = \left(8 - \frac{1}{12}\right) \cdot 3 = 8 \cdot 3 - \frac{1}{12} \cdot 3 = 24 - \frac{1}{4} = 23\frac{3}{4}.$

4) $5{,}99 \cdot 6 = (6 - 0{,}01) \cdot 6 = 6 \cdot 6 - 0{,}01 \cdot 6 = 36 - 0{,}06 = 35{,}94.$

д) Последовательное умножение: $17 \cdot 18$. Разложим число 18 на простые сомножители: $18 = 3 \cdot 3 \cdot 2$ и получим $17 \cdot 18 = 17 \times \times (3 \cdot 3 \cdot 2)$.

На основании теоремы об умножении числа на произведение получим: $17 \cdot (3 \cdot 3 \cdot 2) = (17 \cdot 3) \cdot 3 \cdot 2 = (51 \cdot 3) \cdot 2 = 153 \times \times 2 = 306.$

1) $16 \cdot 15 = 16 \cdot 3 \cdot 5 = 16 \cdot 5 \cdot 3 = 240.$

2) $19 \cdot 24 = 19 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 456.$

3) $\frac{7}{15} \cdot 30 = \frac{7}{15} \cdot (15 \cdot 2) = \left(\frac{7}{15} \cdot 15\right) \cdot 2 = 7 \cdot 2 = 14.$

4) $4{,}6 \cdot 8 = 4{,}6 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 9{,}2 \cdot 2 \cdot 2 = 18{,}4 \cdot 2 = 36{,}8.$

е) Последовательное деление: 168:12. Разложив 12 на простые сомножители: $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$, можем записать: $168 : 12 = = 168 : (2 \cdot 2 \cdot 3)$. На основании теоремы о делении числа на произведение нескольких чисел получим: $168 : (2 \cdot 2 \cdot 3) = = (168 : 2) : 2 : 3 = (84 : 2) : 3 = 42 : 3 = 14.$

1) $15\frac{5}{8} : 2\frac{1}{2} = 15\frac{5}{8} : \left(5 \cdot \frac{1}{2}\right) = \left(15\frac{5}{8} : 5\right) : \frac{1}{2} = 3\frac{1}{8} : \frac{1}{2} = 6\frac{1}{4};$

2) $64{,}4 : 1{,}4 = 64{,}4 : (2 \cdot 0{,}7) = (64{,}4 : 2) : 0{,}7 = 32{,}2 : 0{,}7 = 46.$

ж) Приемы сокращенного умножения.

Сокращенное умножение на данные числа выполняют на основании законов распределительного, сочетательного и изменения произведения с изменением одного из сомножителей.

Умножение на 5

Умножение числа на 5 заменяется умножением его на 10 и делением полученного произведения на 2 или (если множимое четное) делением на 2 с последующим умножением на 10. Например: $98 : 5 = (98 : 2) \cdot 10 = 49 \cdot 10 = 490$.

1) $83 \cdot 5 = (83 \cdot 10) : 2 = 415$
2) $96 \cdot 5 = (96 : 2) \cdot 10 = 480$
3) $7\frac{7}{10} \cdot 5 = \left(7\frac{7}{10} \cdot 10\right) : 2 = \frac{77}{2} = 38\frac{1}{2}$
4) $3{,}6 \cdot 5 = (3{,}6 : 2) \cdot 10 = 1{,}8 \cdot 10 = 18$
5) $6{,}3 \cdot 5 = (6{,}3 \cdot 10) : 2 = 31{,}5$

Умножение на 25

Чтобы умножить число на 25, можно данное число умножить на 100 и произведение разделить на 4 или, если множимое делится на 4, то сначала разделить множимое на 4 и затем полученное частное умножить на 100. Например: $24 \cdot 25 = (24 : 4) \cdot 100 = 6 \cdot 100 = 600$.

1) $36 \cdot 25 = (36 : 4) \cdot 100 = 900$
2) $9 \cdot 25 = 900 : 4 = 225$
3) $2{,}4 \cdot 25 = (2{,}4 : 4) \cdot 100 = 0{,}6 \cdot 100 = 60$
4) $3{,}7 \cdot 25 = (3{,}7 \cdot 100) : 4 = 370 : 4 = 92{,}5$

Умножение на 15

При умножении на 15 умножают на 10 и прибавляют половину полученного числа. Например:

$$26 \cdot 15 = 26 \cdot (10 + 5) = 26 \cdot 10 + \frac{26 \cdot 10}{2} = 260 + 130 = 390$$

1) $38 \cdot 15 = 380 + 380 : 2 = 570$
2) $44 \cdot 15 = 440 + 220 = 660$
3) $2{,}48 \cdot 15 = 2{,}48 \cdot 10 + \frac{2{,}48 \cdot 10}{2} = 24{,}8 + 12{,}4 = 37{,}2$

Умножение на 11

При умножении на 11 данное число умножают на десять и к полученному произведению прибавляют данное число. Пример:

$27 \cdot 11 = 27 \cdot (10 + 1) = 27 \cdot 10 + 27 \cdot 1 = 270 + 27 = 297$.

1) $28 \cdot 11 = 280 + 28 = 308$
2) $45 \cdot 11 = 450 + 45 = 495$
3) $2{,}8 \cdot 11 = 2{,}8 \cdot 10 + 2{,}8 = 28 + 2{,}8 = 30{,}8$

Второй способ умножения двузначного числа на 11. Пример: $48 \cdot 11 = 528$. Последняя цифра произведения будет 8, вторая $2(8 + 4 = 12)$, третья $5(4 + 1 = 5)$.

Еще пример: $76 \cdot 11 = 836$; последняя цифра произведения 6, средняя $3(7 + 6 = 13)$, третья $8(7 + 1)$.

Объясняется этот прием тем, что при умножении на 11 цифры не меняются, но в зависимости от разрядов множителя сдвигаются влево на одно место. Поэтому при умножении двузначного числа на 11 цифра единиц подписывается под цифрой десятков, и они складываются.

Умножение на 9

При умножении на 9 умножают данное число на 10 и из полученного произведения вычитают данное число. Например: $23 \cdot 9 = 23 \cdot (10 - 1) = 23 \cdot 10 - 23 \cdot 1 = 230 - 23 = 207$.

1) $37 \cdot 9 = 370 - 37 = 333$.

2) $48 \cdot 9 = 480 - 48 = 432$.

3) $2{,}3 \cdot 9 = 2{,}3(10 - 1) = 23 - 2{,}3 = 20{,}7$.

з) Приемы сокращенного деления.

Сокращенное деление на данные числа выполняют на основании законов распределительного, сочетательного, переместительного и изменения частного с изменением делимого и делителя.

Деление на 5

При делении числа на 5 делят его на 10 и умножают полученное частное на 2 или сначала умножают данное число на 2, а потом полученное произведение делят на 10. Например: $430 : 5 = (430 : 10) \cdot 2 = 43 \cdot 2 = 86$; $145 : 5 = (145 \cdot 2) : 10 = 290 : 10 = 29$.

1) $540 : 5 = 54 \cdot 2 = 108$

2) $375 : 5 = 750 : 10 = 75$

3) $13{,}6 : 5 = (13{,}6 : 10) \cdot 2 = 1.36 \cdot 2 = 2{,}72$

4) $8{,}3 : 5 = (8{,}3 \cdot 2) : 10 = 16{,}6 : 10 = 1{,}66$

Деление на 25

Чтобы разделить число на 25, делят его на 100 и полученное частное умножают на 4 или сначала делимое умножают на 4, а потом полученное произведение делят на 100. Например:

1) $800 : 25 = (800 : 100) \cdot 4 = 8 \cdot 4 = 32$

2) $225 : 25 = (225 \cdot 4) : 100 = 900 : 100 = 9$

Можно делить иначе:

3) $325 : 25 = (300 : 25) + 25 : 25 = 3 \cdot (100 : 25) + 1 = 3 \times$
$\times 4 + 1 = 12 + 1 = 13$

4) $14{,}4 : 25 = (14{,}4 : 100) \cdot 4 = 0{,}144 \cdot 4 = 0{,}576$

5) $13{,}2 : 25 = (13{,}2 \cdot 4) : 100 = 52{,}8 : 100 = 0{,}528$

6) $175 : 25 = 700 : 100 = 7$.

Для проведения устного счета в несколько звеньев на все действия мы не будем указывать отдельных приемов, так как во все звенья будут входить приемы, уже объясненные выше. Здесь можно сделать лишь небольшое методическое замечание: если преподаватель при устном вычислении звеньями обнаружит, что учащиеся слабо усвоили данные приемы, то нужно повторить их и потом уже опять вернуться ко всем действиям звеньями. Плохое усвоение отдельного приема будет тормозить дальнейшую работу.

§ 48. Организация занятий по устному счету

Остановимся на общих приемах подготовки к проведению устных вычислений в школе.

Готовясь к уроку, учитель должен наметить целевую установку устных вычислений и соответственно этому подбирать упражнения, соблюдая строгую последовательность. Например, если устные вычисления являются подготовкой к изучению нового материала по теме урока «Изменение произведения при изменении сомножителей», учитель подбирает для классных занятий упражнения в устных вычислениях на эти свойства.

Если же устные вычисления служат для повторения изучаемого материала, который в свою очередь является подготовкой к теме урока, то ученикам необходимо дать соответствующее домашнее задание. Например: перед изучением задач на исключение неизвестного при помощи вычитания надо дать для домашнего упражнения несколько задач на нахождение чисел по разности двух величин. В классе же перед объяснением задач нового вида следует решить несколько устных задач того вида, который был дан для повторения в домашних упражнениях.

Если устные вычисления имеют целью выработку навыков быстрого (беглого) устного счета, то соответствующие упражнения на основные и особые приемы устных вычислений даются в классе без предварительного повторения учащимися.

Опытные учителя отводят для устных вычислений на каждом уроке 5—7 минут.

В практике многих школ устный счет ставят в начале урока вслед за проверкой домашних работ. С этим можно согласиться, но это нельзя превращать в шаблон. Устный счет можно проводить и в середине урока, например после вывода нового правила для закрепления его решением задач и примеров под руководством учителя. На уроках, где преобладает решение задач, устные задачи решаются как подготовительные упражнения к трудным письменным задачам.

Преподаватель должен требовать от учащихся устных или полуписьменных вычислений при всех подсчетах с небольшими числами, а также и с большими числами, если можно применять особые приемы устных вычислений.

Задача. Поезд прошел $337\frac{1}{2}$ *км*; $\frac{7}{9}$ этого расстояния он шел по горизонтальному пути, $\frac{3}{8}$ остатка—на подъем, а остальные — под уклон. Сколько километров прошел поезд под уклон?

От учащихся V класса можно требовать при решении этой задачи и устных и полуписьменных (сокращенных письменных) или письменных вычислений.

1) $337\frac{1}{2} \cdot \frac{7}{9} = \frac{675 \cdot 7}{2 \cdot 9} = \frac{525}{2} = 262\frac{1}{2}$ (*км*) (письменное вычисление)

2) $337\frac{1}{2} - 262\frac{1}{2} = 75$ (*км*) (устное вычисление)

3) $75 \cdot \frac{3}{8} = \frac{225}{8} = 28\frac{1}{8}$ (*км*) (полуписьменное вычисление)

4) $75 - 28\frac{1}{8} = 46\frac{7}{8}$ (*км*) (устное вычисление)

Переходя к формам занятий по устному счету, остановимся на видах устного счета.

а) Счет в уме, когда считающий воспринимает данные числа на слух, ничего не пишет и никакими пособиями не пользуется. Это чисто слуховое упражнение.

б) Устный счет при помощи таблиц, когда, кроме слухового восприятия, участвует и зрение или только одно зрение. В данном случае при устном счете употребляют записи на доске, плакаты, счетные фигуры, таблицы и другие наглядные пособия. Это зрительно-слуховое упражнение.

По форме слуховые и зрительные упражнения разнообразны. Остановимся сначала на некоторых основных формах зрительно-слуховых упражнений, а потом перейдем уже к формам слуховых упражнений.

1) Запись примеров на доске. Учитель записывает примеры на доске в перерыв или во время самостоятельной работы, затем он показывает указкой числа на доске, а ученики считают устно и отвечают. Эта форма применяется при упражнениях с такими числами, которые учащимся трудно запомнить, при особых приемах устного счета и при решении неприведенных сложных задач. Такая форма упражнений всегда возможна и не требует от учителя большого времени при подготовке.

2) Плакаты, счетные фигуры и таблицы. Учитель укрепляет на доске одно из данных пособий, показывает числа указкой и

предлагает считать молча. Сосчитав, учащиеся заявляют об этом поднятием руки.

Переходя к слуховым упражнениям, остановимся на некоторых их формах.

1) Устный счет в одно действие (звено). Можно предлагать учащимся пример, задачу или загадку.

а) Учитель говорит: $120 \cdot 0{,}5$. Учащиеся решают устно и поднятием руки показывают, что пример решен.

б) Можно предложить простую задачу (в одно действие). Учитель читает задачу: «Поезд проходил по $55\frac{1}{2}$ *км* в 1 час. Какое расстояние он прошел в 8 часов?» Учащиеся решают ее и говорят ответ.

в) Наконец, можно дать задачу-загадку: «Я задумал число, отнял от него $114\frac{3}{4}$ и получил $216\frac{1}{2}$. Какое число я задумал?» После чтения задачи-загадки учащиеся решают ее и поднятием руки заявляют, что решили.

2) Беглый счет от двух до пяти звеньев.

Переходим к составным примерам и задачам, которые решаются устно (слуховые упражнения). Примеры и задачи из двух и более действий предлагаются классу медленно (по частям), чтобы учащиеся успели запомнить условие и сделать вычисления. Условие не повторяется ни учителем, ни учениками.

Предлагая классу пример или задачу, учитель называет каждое действие (звено) отдельно, делая паузу в несколько секунд после каждого звена. Действия указывают в той последовательности, в которой они должны быть выполнены. Длительность паузы должна соответствовать среднему времени, необходимому для вычисления заданного звена, так как одинаково нецелесообразна ни слишком длинная, ни очень короткая пауза: длинная утомляет, заставляя удерживать в памяти найденный результат вычисления, а короткая не дает возможности выполнить вычисления.

Учитель говорит: «34,2 умножить на 10». Делает паузу, чтобы учащиеся могли умножить. Учащиеся поднятием руки заявляют о готовности дать ответ. Затем учитель говорит: «Полученное число увеличить на 60». Пауза, учитель ждет, пока учащиеся выполнят второе действие. Далее счет продолжается в такой же форме до конца решения всего примера. (Такое ведение устного счета называют «счет цепочкой».)

Учитель должен разнообразить формы подачи примера:

$$1)\ 2{,}25 \cdot 2 : 5 \cdot 70 - 2{,}98.$$

«2,25 умножить на 2 (делается остановка), полученное произведение разделить на 5 (делается остановка), полученное частное умножить на 70 (делается остановка), из полученного произведения вычесть 2,98. Сколько получится?» (делается остановка).

...число уменьшить в ..., результат уменьшить на $\frac{9}{20}$ (пауза). Сколько получится?» (пауза).

3) Решение задач. Беглый счет может проводиться также и на задачах. Составная задача для устного счета дается в приведенном виде, т. е. в ее условии числа расположены в том порядке, в котором должны производиться действия. Задачи приведенного вида состоят из цепи простых задач, связанных между собою тем, что искомое (ответ) каждой задачи становится одним из данных следующей задачи.

Сначала учитель читает учащимся всю задачу, а потом по звеньям с паузами. Пока учащиеся не имеют навыка в беглом счете по решению задач, после каждой простой задачи ставится вопрос, но ответ учащиеся не сообщают. Ответ дается только на главный вопрос задачи.

Рассмотрим одну из составных (приведенных) задач.

Учитель читает задачу: «В заводской библиотеке технические книги составляют $\frac{3}{4}$ всего числа книг, научные $\frac{1}{10}$, справочники $\frac{1}{20}$, остальные 160 книг—беллетристика. Сколько всего книг в библиотеке?»

После этого учитель читает условие задачи по частям, и ученики решают каждую простую задачу (ответ не говорят):

«В библиотеке технические книги составляют $\frac{3}{4}$ всего числа книг, научные $\frac{1}{10}$, справочники $\frac{1}{20}$. Какая это часть числа всех книг библиотеки? (Учитель предлагает ученикам не говорить ответ вслух.) Какую часть всех книг составляет беллетристика? (Ответ не говорят вслух.)

Сколько всего книг в библиотеке?»

Заканчивается решение задачи опросом 2 — 3 учеников.

После достаточной тренировки вопросы в каждом звене не ставятся, а задается только окончательный вопрос задачи.

Разберем задачу (ее условие вначале сообщается полностью). «Один врубовый машинист подрубил за смену 480 *т* угля, другой на $\frac{1}{4}$ этого количества больше». Учитель делает паузу, ждет, пока сделают вычисления. «Третий машинист подрубил $\frac{2}{3}$ того, что подрубил второй». Подождав, пока учащиеся сделают вычисления, учитель продолжает: «По норме врубовый машинист должен подрубить за смену 240 m угля. Сколько тонн угля сверх норм рубили три машиниста за смену?»

Решение задачи заканчивается опросом 2-х—3-х учеников лученные промежуточные ответы ученики могут записывать

Рассмотрим один из сложных (составных) примеров на за мость между элементами действий.

Учитель, записав на доске $x \cdot 3 + 9{,}8 = 34{,}7$, читает: « к утроенному неизвестному числу прибавить 9,8, то получ 34,7. Найти неизвестное число». Прочитав только один раз предлагает ученикам решить пример устно и, дав время по мать, спрашивает ответ у двух-трех учеников.

Затем учитель обращается к классу с вопросом: «У кого д гой ответ?» — после чего называет правильный ответ. Если которые учащиеся сделали вычисления неверно, то при опро один из учащихся (по назначению учителя) выполняет первое де ствие: «Чтобы по сумме двух слагаемых 34,7 и слагаемому 9 найти другое слагаемое, надо из суммы вычесть известное слага мое: $34{,}7 - 9{,}8 = 24{,}9$». Потом учитель спрашивает второго уче ника. Тот отвечает: «Чтобы по произведению двух сомножителе 24,9 и сомножителю 3 найти другой сомножитель, надо произве дение разделить на известный сомножитель: $24{,}9 : 3 = 8{,}3$; ответ 8,3». Учитель подтверждает, что ответ 8,3.

При устных вычислениях очень важно, чтобы ученик знал, на основании каких свойств арифметических действий производятся вычисления.

Может быть, не следует подробно разбирать каждый пример, но надо дать ученику навык, при самостоятельном решении приводить обоснования. Это имеет большое образовательное и воспитательное значение.

При решении письменных задач, требующих особых способов решения, полезно предварительно решать устные задачи такого же характера. Эти устные задачи даются большей частью в неприведенном виде, а потому их трудно, а иногда и невозможно решать приемами беглого счета без записи. Следовательно, условие задачи неприведенного вида надо записывать на доске.

У учащихся возникают большие затруднения при составлении плана решения некоторых задач, особенно задач на замену (величин, находящихся в кратном или разностном отношении), задач на определение величин по сумме и разности, по разности двух величин.

Разберем несколько составных задач, решаемых устно.

З а д а ч а: Учитель записывает на доске:

На I автомобиль грузили $2\frac{2}{5}$ m	I перевез на $6\frac{1}{2}$ m
на II » » $\frac{1}{}$	

Сколько пшеницы перевезли автомобили?»

Делая эту запись, учитель читает условие задачи: «Два грузовых автомобиля перевозили пшеницу на железнодорожную станцию и сделали одинаковое число поездок. На один грузили по $2\frac{2}{5}$ *т*, на другой по $1\frac{1}{10}$ *т*. Первый перевез на $6\frac{1}{2}$ *т* больше, чем второй. Сколько всего пшеницы перевезли эти автомобили?»

Учитель может сначала прочитать условие задачи, потом записать числа на доске. После повторения и усвоения учениками условия задачи учитель предлагает ученикам решать задачу самостоятельно. Учитель ждет, пока ученики поднимут руки в знак того, что ответ найден, затем спрашивает ответ у 2 — 3 учеников. После этого ученикам предлагается рассказать решение задачи. Ученики дают примерно такой ответ.

«Чтобы узнать, сколько всего пшеницы перевезли два автомобиля, надо знать, сколько пшеницы они перевозили за одну поездку и сколько поездок (одинаковое для обоих число) они сделали. Чтобы узнать, какой груз они оба перевозили за каждую поездку, надо знать, сколько груза перевозил за одну поездку каждый автомобиль. Эти данные есть в условии. Чтобы узнать число поездок, одно и то же для обоих автомобилей по условию, надо знать, на сколько тонн пшеницы перевез больше первый автомобиль за все поездки (известно из условия) и на сколько тонн больше он перевозил за одну поездку. Для решения второго вопроса надо знать, какой груз перевозил за одну поездку каждый автомобиль. Это известно из условия задачи. Итак, 1) узнаем, на сколько тонн первый автомобиль перевозил за одну поездку больше, чем второй. Чтобы сделать разностное сравнение двух чисел, выполняем вычитание:

$$2\frac{2}{5}\ \text{т} - 1\frac{1}{10}\ \text{т} = 1\frac{3}{10}\ \text{т};$$

2) узнаем, сколько поездок сделали автомобили (одно и то же число каждый). За все поездки первый автомобиль перевез больше второго на $6\frac{1}{2}$ *т*, за одну поездку он перевез больше второго на $1\frac{3}{10}$ *т*. Узнаем, во сколько раз $6\frac{1}{2}$ *т* больше $1\frac{3}{10}$ *т*, т. е. выполним деление по содержанию:

$$6\frac{1}{2}\,\text{т} : 1\frac{3}{10}\,\text{т} = 5;$$

3) узнаем, сколько груза перевозили за одну поездку два автомобиля; по двум слагаемым узнаем сумму:

$$2\frac{2}{5}\,\text{т} + 1\frac{1}{10}\,\text{т} = 3\frac{1}{2}\,\text{т};$$

4) узнаем, сколько груза перевезено за 5 поездок; по величине одного из равных слагаемых и числу слагаемых узнаем сумму, т. е. выполним умножение:

$$3\frac{1}{2}\, m \cdot 5 = 17\frac{1}{2}\, m.$$

Задача. (Учитель читает условие задачи. Параллельно с чтением условия или после прочтения всего условия учитель записывает на доске кратко условие задачи.)

«Подводная лодка прошла всего 18,5 мили, делая в час по 22 мили на поверхности воды и 15 миль под водой, причем на поверхности воды она шла столько же часов, сколько под водой. Сколько миль лодка прошла на поверхности воды и сколько под водой?»

Краткая запись условия

22 мили в час на поверхности 15 миль в час под водой	Число часов движения одинаковое	Всего 18,5 мили

После повторения условия задачи и усвоения его ученикам предлагается решать задачу самостоятельно. Учитель ждет, пока учащиеся поднимут руки в знак того, что ответ найден, затем спрашивает ответ у двух-трех учеников и, наконец, предлагает ученикам рассказать, как они решали задачу.

Ученики отвечают примерно следующее:

«Чтобы узнать, какое расстояние прошла лодка на поверхности воды и какое под водой, надо знать скорость движения лодки в час на поверхности воды и под водой (эти числа известны из условия, а также число часов движения на поверхности и под водой). По условию задачи лодка шла на поверхности столько же часов, сколько и под водой. Поэтому число часов движения (на поверхности и под водой) определим, зная все пройденное расстояние (дано в условии) и расстояние, которое прошла бы лодка, двигаясь один час по поверхности и один час под водой. Последнее расстояние легко узнать, так как в условии даны скорости движения лодки в час на поверхности воды и под водой.

Итак: 1) Узнаем, какое расстояние прошла бы лодка, двигаясь 1 час на поверхности и 1 час под водой. Сумму по двум слагаемым определяем сложением. 22 мили + 15 миль = 37 миль.

2) Сколько часов шла лодка по поверхности или под водой? Лодка шла столько часов, сколько раз 37 миль содержится в 18,5 мили. 18,5 : 37 = 0,5 (часа) (деление по содержанию).

Итак, лодка шла 0,5 часа по поверхности воды и 0,5 часа под водой.

3) Расстояние, пройденное лодкой на поверхности:
22 мили · 0,5 = 11 милям. За час лодка проходит 22 мили, за 0,5 часа — 0,5 от 22 миль.

4) Расстояние, пройденное лодкой под водой: 15 миль · 0,5 = = 7,5 мили или же 18,5 мили — 11 миль = 7,5 мили.

, б) 12483 · 4032;

…001 · 2007.

…ение многозначных чисел» большое внимание …лить трудным случаям деления многозначных чисел, в которых имеются нули в середине делимого, делителя и частного. Как и в умножении, сначала надо проверить, знают ли учащиеся деление с нулем.

Особенно много ошибок делают учащиеся, когда в делимом и частном бывают в середине нули, например,

$$14516608 : 4826 = 3008.$$

§ 50. Изменение результатов действия в зависимости от изменения компонентов

1. Изменение суммы. Разбирается случай, как изменяется сумма двух или нескольких чисел от прибавления к одному из слагаемых нескольких единиц.

Берется задача: «В двух школах было по 800 учащихся, осенью в одну школу поступило 110 новичков, а в другую — 100. Сколько учащихся стало в каждой школе? В которой больше? На сколько больше? Почему на 10 больше?»

Задача дается в другом варианте: «В одной школе было 800 учащихся, а в другой 810. В ту и другую школу поступило по 100 учащихся. В которой школе стало больше учащихся? На сколько больше? Почему?»

Запись решения:

а) 1) $800+100=900$	б) 1) $800+100=900$
2) $800+110=910$	2) $810+100=910$
3) $910-900=10$	3) $910-900=10.$

Дальше разбирается пример: В первый раз к 25 прибавили 40, а во второй 43. Какая сумма больше? На сколько единиц? Почему сумма увеличилась на три единицы? Затем учащимся предлагаются вопросы: Как изменится сумма от прибавления к слагаемому 8 единиц? 12? 19? И, наконец, общий вопрос: Как изменится сумма от прибавления к одному из слагаемых нескольких единиц?

Выводится правило: «Если к какому-либо слагаемому прибавим несколько единиц, то сумма увеличится на столько … единиц».

рассматривается изменени
...о из слагаемых.
...ьше переходят к изучению изменения суммы
нии двух слагаемых.

Берется задача: «На одном заводе ударников комму... го труда 240 мужчин и 160 женщин, а на другом мужчи... ловек больше, а женщин на 30 человек больше, чем на п... сколько больше ударников коммунистического труда ... заводе, чем на первом?»

Учащиеся обыкновенно решают задачу, определяя чи... рабочих на 1-м и 2-м заводах, и находят разность между эт... лами. Можно одобрить это решение как верное, но затем указать другое, основанное на изменении слагаемых и свод... к одному сложению.

Изменение суммы изучается последовательно: сначала о... менения одного слагаемого, потом другого. Проводится ср... ние сумм в таком порядке:

$$
\begin{aligned}
240 + 160 &= 400\\
240 + 50 &= 290\\
160 + 30 &= 190\\
290 + 190 &= 480\\
480 - 400 &= 80
\end{aligned}
$$

Учащимся предлагается ряд дальнейших вопросов: «На скол... ко больше число ударников коммунистического труда, работающи... на втором заводе? Как узнать короче, на сколько человек больше?»

Дальше таким же образом рассматривается изменение суммы от уменьшения двух слагаемых, потом — от увеличения одного слагаемого и уменьшения другого. Условие задачи для объяснения последнего случая изменяется так:

«На одном заводе ударников коммунистического труда 240 мужчин и 160 женщин. На другом заводе мужчин на 50 больше, а женщин на 30 меньше. На каком заводе ударников коммунистического труда больше и на сколько?»

Если учащиеся решат задачу обычным способом, сделав 3 сложения и 2 вычитания, нельзя отвергать это решение, но затем надо указать другое, основанное на изменении слагаемых и суммы. Число работающих на заводе есть сумма числа мужчин и числа женщин (240 мужчин + 160 женщин), одно слагаемое этой суммы увеличилось на 50, значит, сумма должна увеличит...
(290 + 160); но другое слагаемое уменьшило...
вая сумма уменьшится на 30 (290 ...
увеличится на 50 — 30 = ...

Особо след...
увели...

на двух складах? А если со второго склада перевезти на первый 280 $м^3$ дров, сколько дров будет на двух складах?»

Количество дров на двух складах это сумма. Сумма эта не изменилась потому, что от одного слагаемого отняли 280 и прибавили 280 к другому слагаемому.

А если со второго склада продадут 300 $м^3$, а на первый склад привезут 300 $м^3$, сколько дров будет на двух складах?

Здесь количество дров — сумма двух слагаемых — также не изменилась, так как от одного слагаемого отняли 300, зато к другому слагаемому прибавили столько же.

Делается вывод: «Если к одному слагаемому прибавить несколько единиц, а от другого отнять столько же единиц, то сумма не изменится».

2. *Изменение разности*. В самом начале надо обратить внимание учащихся на то, что уменьшаемое есть сумма вычитаемого и разности, или что уменьшаемое показывает, сколько было всего единиц, вычитаемое — сколько единиц отнято, и разность, или остаток, — сколько единиц осталось. Такое выяснение делается на каком-либо числовом примере (1050 — 300 = 750). Первым упражнением на изменение разности должна быть задача, например:

«Два колхоза, из которых один собрал 6000 *т* зерна, а другой 6600 *т*, продали государству 4600 *т* каждый. В каком колхозе осталось больше зерна и на сколько?»

Решение задачи сводится к сравнению двух разностей при одном и том же вычитаемом. Если учащиеся начинают решение обычным способом, сделав 3 вычитания, не надо называть решение неверным, но необходимо указать более короткий способ решения путем одного вычитания, для чего достаточно сравнить уменьшаемые (при равных вычитаемых). При объяснении вопрос ставится конкретно: продажа зерна каждым колхозом 4600 *т*, но второй колхоз собрал на 600 *т* больше, значит, у него должно оставаться на 600 *т* больше.

После этого дается пример на изменение разности при увеличении уменьшаемого на 1, 2 единицы и т. д.

75 — 50 = 25
76 — 50 = 26
77 — 50 = 27
78 — 50 = 28

После сравнения остатков и уменьшаемых учащиеся делают вывод: «Если к уменьшаемому прибавить несколько единиц, то остаток увеличивается на столько же единиц».

Подобным же образом выводится правило изменения остатка при уменьшении уменьшаемого сначала на 1,2, потом на несколько единиц: «Если от уменьшаемого отнимем несколько единиц, то остаток уменьшится на столько же единиц». В этом случае общее количество (сумма) единиц вычитаемого и остатка уменьшается и вычитаемое не изменяется, следовательно, остаток уменьшится на столько же единиц.

Дальше рассматривается изменение остатка при изменении вычитаемого.

Берется задача:

«Двум школьным бригадам дали для посадки по 150 декоративных кустов. Одна бригада за день посадила 80 кустов, другая — 93 куста. У которой из бригад осталось больше непосаженных кустов и на сколько?»

Обычно задача сначала решается тремя действиями, потом необходимо перейти к другому способу решения. Вопрос сначала ставится в конкретной форме: если обе бригады имели поровну посадочного материала, но вторая посадила на 13 кустов больше, чем первая, то у второй должно остаться на 13 кустов меньше, чем у первой.

Вопрос об изменении остатка при изменении вычитаемого является сравнительно трудным. Поэтому надо больше остановиться на разборе примеров на увеличение вычитаемого на 1,2, . . . единиц, тщательно разъясняя в каждом примере, что все единицы вычитаемого отнимаются от уменьшаемого, всякая единица, прибавленная к вычитаемому, в остаток не войдет, и потому остаток на эту единицу уменьшится. Приводятся конкретные случаи увеличения или уменьшения вычитаемого, например: если из имеющихся денег истратить больше, то останется меньше, если истратить меньше, то останется больше. Эти примеры помогают разъяснить закон изменения остатка и должны приводиться во всех затруднительных случаях.

Точно так же разбираются примеры на увеличение вычитаемого на несколько единиц:

$$70 - 40 = 30; \quad 70 - 41 = 29; \quad 70 - 42 = 28; \quad 70 - 43 = 27.$$

После сравнения вычитаемых и остатков учащиеся делают вывод: «Если к вычитаемому прибавим несколько единиц, то остаток уменьшится на столько же единиц».

Изменение остатка при уменьшении вычитаемого объясняется аналогично. Сначала дается задача, например: «Одному ученику дали вычесть 348 из 720, а другому — 330 из 720. У кого получится остаток больше? На сколько единиц? Почему?»

Задача должна решаться сравнением вычитаемых при одном и том же уменьшаемом. Уменьшаемое 720 заключает в себе единицы вычитаемого и остатка. Вычитаемое во втором случае меньше на 18 единиц, поэтому в остатке должно быть больше на 18 единиц. Дальше подробно разбираются примеры. Если от вычитаемого отнимем 1, 2, . . . единицы, то их не придется вычитать из уменьшаемого, и остаток будет больше на 1,2 . . . единицы; следовательно, разность увеличится на столько же единиц.

$$100 - 80 = 20; \quad 100 - 79 = 21; \quad 100 - 78 = 22; \quad 100 - 77 = 23.$$

Сравнив вычитаемые и остатки в этих примерах, учащиеся делают вывод: «Если от вычитаемого отнимем несколько единиц, то остаток увеличится на столько же единиц».

Изменение остатка при изменении уменьшаемого и вычитаемого дается учащимся труднее разобранных случаев.

Здесь надо обратить особое внимание на тот случай, когда остаток не изменяется, если к уменьшаемому и вычитаемому прибавляют одно и то же число или от обоих членов отнимают одно и то же число.

Берется задача: «Рабочий из ежемесячного заработка в 80 руб. вносил в сберкассу каждый месяц по 5 руб. Когда заработок его увеличился на 10 руб., он стал вносить в сберкассу на 10 руб. больше. Сколько оставалось ему на расходы каждый месяц до и после увеличения заработка?»

Решение задачи должно объясняться так: 80 руб. — это уменьшаемое, 5 руб. — вычитаемое, 75 руб. — деньги на расходы — разность. Во втором случае к уменьшаемому и вычитаемому прибавляется по 10 руб., разность не изменяется. Действительно, если к уменьшаемому прибавить 10 руб., то остаток увеличится на 10 руб.

1) 80 руб. — 5 руб. = 75 руб.;
2) 90 руб. — 5 руб. = 85 руб.

Но к вычитаемому тоже прибавили 10 руб., от этого новый остаток должен уменьшиться на 10 руб., т. е. 90 руб. — 15 руб. = = 75 руб. Итак, остаток не изменился. Хорошо иллюстрировать этот случай изменения уменьшаемого и вычитаемого задачами на сравнение возраста двух человек в данный момент и через несколько лет.

Пример: «Сестре 30 лет, брату 27 лет. Какая разница будет в их возрасте через 10 лет?»

Решение задачи: возраст сестры это — уменьшаемое, возраст брата — вычитаемое, 3 года — разность их лет. К уменьшаемому и вычитаемому прибавилось по 10 лет, разность не изменилась. А какая будет разность в возрасте через 12 лет? Через 30 лет?

Дальше прибавление к уменьшаемому и вычитаемому одного и того же числа иллюстрируется на примерах:

$$750 - 380 = 370;$$
$$770 - 400 = 370.$$

Изменение остатка рассматривается последовательно: сначала — при изменении уменьшаемого, потом — при изменении вычитаемого.

Уменьшение на одно и то же число уменьшаемого и вычитаемого должно рассматриваться также сначала на задачах, например на задачах о разности возрастов:

«Сестре 30 лет, брату 27 лет. А какая была разница в их возрастах 5 лет назад? 10 лет назад? 13 лет назад?»

Решение объясняется подобно приведенному выше.

Затем рассматриваются примеры:

$$170 - 90 = 80; \quad 150 - 90 = 60; \quad 150 - 70 = 80.$$

Другие случаи изменения уменьшаемого и вычитаемого на несколько единиц приводятся также к последовательному изменению остатка, сначала от изменения уменьшаемого, потом от изменения вычитаемого.

Задания на изменение разности можно записывать кратко в виде таблицы:

Изменение уменьшаемого	Изменение вычитаемого	Изменение остатка
+12	—8	—
—	+5	—17
+1	—	0

а) Здесь в первой строчке записан пример: уменьшаемое увеличено на 12, вычитаемое уменьшено на 8. Как изменился остаток?

б) Во второй строчке: вычитаемое увеличено на 5. Что надо сделать с уменьшаемым, чтобы остаток уменьшился на 17?

в) В третьей строчке: уменьшаемое увеличено на 1. Что надо сделать с вычитаемым, чтобы остаток не изменился?

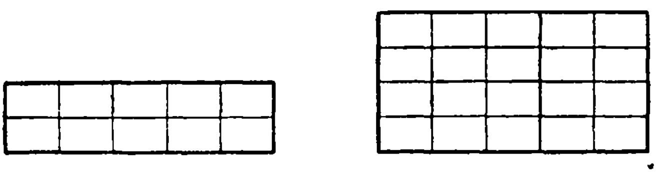
Приведем объяснение первого примера.

а) При увеличении уменьшаемого на 12 единиц остаток увеличится на 12 единиц, при уменьшении вычитаемого на 8 единиц остаток увеличится на 8 единиц, в итоге остаток увеличится на $12 + 8 = 20$ единиц.

3. Изменение произведения. Вопрос об изменении произведения является трудным вопросом для учащихся, так как умножение есть действие, которое не отличается наглядностью. Поэтому в затруднительных случаях, когда выяснение преобразований требует наглядности, приходится сводить умножение к сложению равных слагаемых. Начать надо с повторения (на примерах) определения умножения.

а) Увеличение произведения от увеличения множителя в несколько раз можно иллюстрировать с помощью прямоугольника.

На чертеже 8 дан прямоугольник, длина которого 5, ширина 2 единицы, площадь его $5 \times 2 = 10$ (кв. единиц). Не изменяя длины, увеличим ширину до 4 единиц. Площадь нового прямоугольника будет равна $5 \times 4 = 20$ (кв. единиц).



Черт. 8.

Задаются вопросы: Какова длина первого прямоугольника? Какова его ширина? Какова его площадь? Задаются те же вопросы относительно второго прямоугольника. Во сколько раз ширина второго прямоугольника больше ширины первого? Во сколько раз площадь второго прямоугольника больше площади первого?

Далее разбирается пример. В произведениях 15×3 увеличим множитель в 2 раза. Сделаем вывод, что произведение тоже увеличится в 2 раза. Действительно, умножение 15×3 есть сложение трех равных слагаемых $15 + 15 + 15 = 45$, тогда как умножение 15×6 есть нахождение суммы шести таких слагаемых:

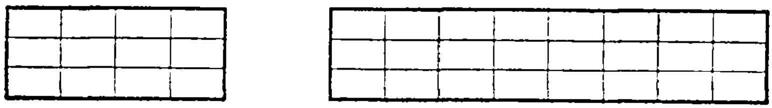
$$15 + 15 + 15 + 15 + 15 + 15,$$

а эта сумма больше первой в 2 раза.

После этого делается вывод: «Если множитель увеличить в несколько раз, произведение увеличится во столько же раз».

б) Изменение произведения от увеличения множимого в несколько раз лучше всего объяснить учащимся наглядно с помощью прямоугольника.

На чертеже 9 даны два прямоугольника с равной высотой



Черт. 9.

(3 единицы), но с различными основаниями (4 и 8 единиц).

Под руководством учителя дети сравнивают длину, ширину и площади прямоугольников. Площадь первого прямоугольника равна $4 \times 3 = 12$ (кв. единиц). Площадь второго равна $8 \times 3 =$ $= 24$ (кв. единицы). Множимое 8 больше 4 в 2 раза, и произведение 24 больше 12 в 2 раза, что видно и на чертеже 9.

Дальше разбираем задачу:

«Пешеход шел со скоростью 5 *км* в час, велосипедист ехал со скоростью 15 *км* в час. Какое расстояние прошел пешеход за 4 часа? Какое расстояние проехал велосипедист за 4 часа? Во сколько раз велосипедист проедет больше, чем пройдет пешеход? Почему в 3 раза?»

Решение запишем так: $5 \times 4 = 20$ (*км*); $15 \times 4 = 60$ (*км*); 60 *км* : 20 *км* = 3 (раза). Учащиеся сравнивают множимые, множители и произведения и делают вывод: «Если множимое увеличить в 3 раза, произведение увеличится в 3 раза».

Разбирается пример: $20 \times 3 = 60$. Увеличим множимое в 2 раза: $40 \times 3 = 120$. Произведение увеличилось в 2 раза. Действительно, первое произведение можно заменить суммой трех равных слагаемых: $20 + 20 + 20 = 60$. Второе произведение равно $40 + 40 + 40 = 120$, но здесь каждое слагаемое в 2 раза больше, чем слагаемое первой суммы; поэтому вторая сумма, т. е. второе произведение, больше первого произведения в 2 раза.

Из разобранных задач и примеров делается вывод: «Если множимое или множитель увеличить в несколько раз, то произведение увеличится во столько же раз». Выводы относительно увеличения произведения при увеличении множимого или множителя в несколько раз можно объединить. «Если один из сомножителей увеличить в несколько раз, то произведение увеличится во столько же раз».

в) Изменение произведения в результате уменьшения одного из сомножителей в несколько раз.

Этот случай изменения произведения можно формулировать так: «Если один из сомножителей уменьшить в несколько раз, то произведение уменьшится во столько же раз». Изучение этого вопроса ведется так же, как изучение изменения произведения от умножения одного из сомножителей. Лучше всего начать с графической иллюстрации на прямоугольниках, потом разобрать задачи и примеры с отвлеченными числами. Числовые примеры ограничиваются случаями, когда данный сомножитель делится без остатка на целое число.

г) Изменение произведения при изменении обоих сомножителей.

Изменение произведения при изменении обоих сомножителей легко понимается учащимися, если требуется определить лишь характер изменения произведения без указания, во сколько раз оно увеличивается или уменьшается. Если же требуется определить точно, как изменится произведение при данных изменениях сомножителей, то в большинстве случаев учащиеся ошибаются, полагая, что при умножении множимого на одно число и множителя на другое произведение умножится на сумму этих чисел; что при делении каждого сомножителя произведение разделится на сумму делителей; что при умножении одного сомножителя на какое-нибудь число и при делении другого сомножителя на другое число произведение умножится или разделится на разность этих чисел. Исправить эти ошибки, исходя из понятия умножения, трудно; более понятным для учащихся является сопоставление измененных произведений с данными.

Так, взяв пример $30 \times 10 = 300$ и найдя, во что обратится произведение 300, когда множимое умножим на 3, а множитель — на 4, дети из сравнения полученного произведения 3600 (90×40) с начальным 300 могут сделать вывод, что данное произведение увеличилось в 12 раз, т. е. на произведение $4 \times 3 = 12$, а не на сумму $4 + 3 = 7$.

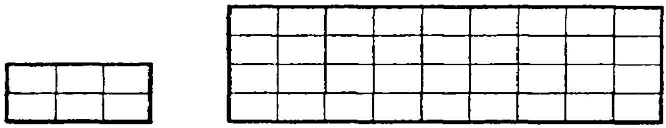
Если изменятся оба сомножителя, то произведение иногда увеличится, иногда уменьшится или же останется без изменения. Чтобы определить, что делается с произведением при изменении обоих сомножителей, следует рассмотреть, что произойдет с произведением, если сначала изменится только множимое, потом — как изменится произведение от изменения множителя. Рассмотрим 4 случая.

1) Увеличим в несколько раз и множимое и множитель. Этот случай иллюстрируется чертежом (черт. 10). Берутся два прямоугольника: один с размерами 3 *см* и 2 *см*, длина второго больше длины первого прямоугольника в 3 раза, ширина — в 2 раза. Сравнив длину, ширину и площадь двух прямоугольников, учащиеся видят, что если длину прямоугольника увеличить в 3 раза, а ширину в 2 раза, то площадь увеличится в 6 раз.

Решаем численный пример $4 \times 5 = 20$. Умножив множимое на 3, множитель на 5, получим:

$$12 \times 5 = 60; \qquad 12 \times 25 = 300.$$

Сравнивая полученное произведение с начальным, делаем вывод: если один сомножитель умножить на 3, а другой на 5, то произведение увеличится в 15 (3×5) раз; $300 : 20 = 15$.



Черт. 10.

Из рассмотренных примеров должен быть сделан вывод: «Если множимое и множитель умножить на некоторые числа, то произведение увеличится во столько раз, сколько единиц заключается в произведении этих чисел».

2) Поясним на примере изменение произведения при уменьшении в несколько раз множимого и множителя. Изучение изменения произведения в этом случае проводится так же, как при увеличении обоих сомножителей в несколько раз.

Остановимся на разборе примера: $18 \times 8 = 144$.

Уменьшим множимое в 6 раз, множитель в 4 раза. При уменьшении множимого в 6 раз произведение уменьшится в 6 раз, получится не 144, а $3 \times 8 = 24$. Теперь 3 надо множить не на 8, а на 2, отчего произведение 24 уменьшится в 4 раза; получится 6. Итак, начальное произведение 144, последнее 6. Произведение уменьшилось в $144 : 6 = 24$ раза; $24 = 6 \times 4$.

Уменьшение обоих сомножителей можно иллюстрировать тем же чертежом. Уменьшив длину большого прямоугольника в 3 раза, а ширину в 2 раза, получим новый прямоугольник, площадь которого меньше в 6 раз.

Формулировка вывода не обязательна вследствие затруднительности ее для учащихся.

3) Увеличим в несколько раз один сомножитель и уменьшим в отличное от первого число раз второй сомножитель.

Пример: $15 \times 8 = 120$.

Увеличим множимое в 6 раз, а множитель уменьшим в 2 раза: $90 \times 4 = 360$. Если множимое увеличится в 6 раз, то произведение тоже увеличится в 6 раз. Но если после этого множитель уменьшим в 2 раза, то произведение уменьшится в 2 раза и будет больше первоначального уже не в 6 раз, а только в 3 раза (6 : 2).

Формулировка вывода не обязательна: необходимо только, чтобы учащиеся разобрались в числовых примерах, произведя последовательно изменение множимого, потом множителя.

4) Увеличим один сомножитель и уменьшим другой в одинаковое число раз. Пример: $15 \times 6 = 90$. Увеличим множимое и уменьшим множитель в 2 раза: $30 \times 3 = 90$. Или уменьшим множимое и увеличим множитель в 3 раза: $15 \times 6 = 90$; $5 \times 18 = 90$.

При увеличении множимого в 2 раза произведение увеличится в 2 раза ($30 \times 6 = 180$). Новое произведение ($30 \times 6 = 180$) при уменьшении множителя в 2 раза уменьшится в 2 раза ($30 \times 3 = 90$). В результате двух изменений произведение не изменится. Если уменьшить множимое в 3 раза, произведение уменьшится в 3 раза ($15 \times 6 = 90$; $5 \times 6 = 30$); если увеличить множитель в 3 раза, то новое произведение ($5 \times 6 = 30$) должно увеличиться в 3 раза ($5 \times 18 = 90$); в целом произведение не изменится.

Закон о неизменяемости произведения можно формулировать так: «Если один сомножитель увеличить в несколько раз, а другой уменьшить во столько же раз, то произведение не изменится». Для облегчения понимания этого надо применить графический прием (на прямоугольниках), причем длину прямоугольника можно увеличить, а ширину уменьшить во столько же раз (или наоборот).

Для закрепления раздела об изменении произведения при изменении обоих сомножителей даются примеры и задачи.

Задания на изменение произведения можно записывать в виде таблицы, где увеличение в несколько раз обозначается знаком умножения (×), уменьшение в несколько раз — знаком деления (:).

№	Изменение множимого	Изменение множителя	Изменение произведения
1	×3	:12	?
2	?	×2	×8

Здесь записаны задачи: 1) Множимое увеличено в 3 раза, множитель уменьшен в 12 раз. Как изменилось произведение?

2) Множитель увеличен в 2 раза, произведение увеличилось в 8 раз. Что сделано с множимым?

4. Изменение частного. Изменение частного представляет одно из самых трудных мест программы. Объясняется это более сложной, чем в других действиях, зависимостью между числами и двояким смыслом деления (на части и по содержанию).

а) Изменение частного от умножения делимого. Для объяснения изменения частного от увеличения делимого можно использовать задачи:

«6 человек из кружка «Я люблю книгу» подклеили за неделю 96 книг. Сколько книг в среднем подклеил каждый из них в следующую неделю, если общее число книг, подклеенных во вторую неделю, было в 2 раза больше?»

Учащиеся объясняют решение: 1) $96 \times 2 = 192$ (кн.); 2) $192 : 6 = 32$ (кн.). В первую неделю каждый подклеил $96 : 6 = 16$ книг. Сравнивая делимые и частные (при одинаковом делителе 6), учащиеся приходят к выводу: при увеличении делимого в 2 раза частное увеличилось тоже в 2 раза. Следовательно, задачу можно решить так:

1) $96 : 6 = 16$ (кн.); 2) $16 \cdot 2 = 32$ (кн.).

Дальше решают такие примеры: $20 : 4 = 5$; 20 увеличиваем в 5 раз, $100 : 4 = 25$. Частное увеличилось в 5 раз $(25 : 5 = 5)$. Объяснение решения этого примера может быть следующее: умножить делимое на 5 — значит к делимому прибавить еще 4 таких же числа. Раз к данному делимому прибавим еще 4 таких же делимых, то и частное (при постоянном делителе) будет соответственно изменяться, т. е. к первоначальному частному прибавится еще 4 таких же частных и новое частное будет в 5 раз больше первоначального, т. е. увеличится в 5 раз, следовательно, при увеличении делимого в 5 раз и частное увеличивается в 5 раз. Этот закон изменения частного хорошо объяснить так: дается ряд примеров на деление при одном и том же делителе, делимое же постепенно увеличивается в несколько раз.

$20 : 4 = 5$
$40 : 4 = 10$
$80 : 4 = 20$
$160 : 4 = 40$
$320 : 4 = 80$

Учащиеся сравнивают делимые и частные этих примеров. Здесь они найдут примеры на увеличение делимого и частного в 2, 4, 8, 16 раз.

Из разбора задач и примеров делается вывод: «Если делимое увеличить в несколько раз, то частное увеличится во столько же раз».

б) Изменение частного от деления делимого. При кратном уменьшении делимого изменение частного лучше показать на числовых примерах, дав для вычисления примеры, в которых при одном и том же делителе делимые уменьшаются в 2, 4, 8, 16 раз.

$320 : 4 = 80$
$160 : 4 = 40$
$80 : 4 = 20$
$40 : 4 = 10$

Сравнивая делимые и частные между собой, ученики устанавливают зависимость изменения частного от изменения делимого. После разбора задач и примеров делается вывод: «Если делимое уменьшить в несколько раз, то и частное уменьшится во столько же раз».

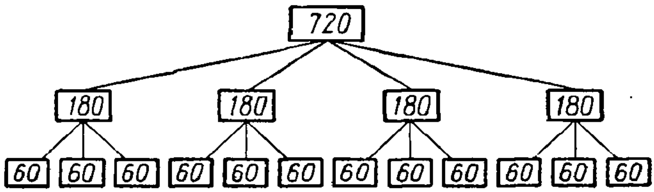
Изменение частного от кратного увеличения делителя предлагается иллюстрировать решением следующей задачи:

«720 яблок разложили поровну в 4 ящика, а потом яблоки из каждого ящика разложили поровну в 3 корзины. Сколько яблок было в каждом ящике? Сколько яблок было в каждой корзине?»

Решение этой задачи можно пояснить рисунком (черт. 11).

Решение задачи приводит к результату: если делитель увеличить в 3 раза, то частное уменьшится в 3 раза; если делитель увеличить в 4 раза, то частное уменьшится в 4 раза.

Прилагая этот вывод к примерам, решаемым на отвлеченных числах, учащиеся дают такие объяснения: $\frac{120}{4} = 30$; $\frac{120}{24} = 5$. Здесь делитель 4 умножен на 6, т. е. из каждой прежней части сделано 6 новых частей, поэтому прежнее частное разделится на 6. Наконец, делается вывод: «Если делитель увеличить в несколько раз, то частное уменьшится во столько же раз».



Черт. 11.

в) Изменение частного от уменьшения делителя можно объяснить на примере:

$$\frac{96}{24} = 4; \quad \frac{96}{12} = 8.$$

Если 96 делим не на 24, а на 12 частей, то прежние 2 части соединяются в одну, а потому частное становится больше в 2 раза.

Наконец, формулируется правило: «Если уменьшить делитель в несколько раз, то частное увеличится во столько же раз».

г) Изменение частного при изменении делимого и делителя.

Изменение частного при изменении делимого и делителя вызывает у учащихся такие же недоразумения, как при изменении произведения. Разъяснения можно делать тем же путем, как указано для изменения произведения: для того чтобы определить изменение частного, надо изменить сначала только делимое, затем проследить изменение нового измененного частного в связи с изменением делителя.

При совместных изменениях надо обратить особое внимание на случаи неизменяемости частного. На остальных случаях мы здесь не останавливаемся.

Увеличение делимого и делителя в одно и то же число раз можно рассмотреть на примерах:

8 : 4 = 2
24 : 12 = 2
40 : 20 = 2
80 : 40 = 2
120 : 60 = 2

В каждом примере изменение данных делается последовательно: сначала увеличивается делимое, отчего частное увеличивается во столько же раз, потом умножается делитель, тогда измененное частное во столько же раз уменьшается.

Пример: 8 : 4 = 2; если делимое увеличить в 5 раз (40), то частное увеличится в 5 раз (10), но когда делитель увеличится в 5 раз (40 : 20), то новое частное уменьшится в 5 раз (не 10, а 2).

Формулируется правило: «Если делимое и делитель увеличить в одно и то же число раз, то частное не изменится». Точно так же изучается вопрос об уменьшении делимого и делителя одновременно.

Рассмотрим примеры на разбираемый случай изменения частного:

800 : 200 = 4
400 : 100 = 4
200 : 50 = 4
100 : 25 = 4

Сравнив делимые, делители и частные между собой, устанавливаем, что делимое и делитель уменьшились в одно и то же число раз, причем частное не изменилось. Этот вывод и формулируется так: «Если делимое и делитель уменьшить в одно и то же число раз, то частное не изменится».

Разберем некоторые случаи изменения делимого и делителя, когда частное изменяется.

Если делимое увеличить в 5 раз, а делитель уменьшить в 2 раза, то частное увеличится в 10 раз. Пример: 60 : 12 = 5; 300 : 6 = = 50. Решение: если делимое увеличить в 5 раз, то частное увеличится в 5 раз: 300 : 12 = 25; если при измененном делимом уменьшить в 2 раза делитель, то частное, увеличенное в 5 раз, увеличится в 2 раза; значит, сравнительно с данным оно увеличится в 10 раз.

Если делимое уменьшить в 2 раза, а делитель увеличить в 5 раз, то частное уменьшится в 10 раз. Пример: 200 : 5 = 40; 100 : 25 = = 4. Решение объясняется изменением сначала только делимого, потом в измененном примере делается увеличение в 5 раз делителя. В результате частное сначала уменьшилось в 2 раза, потом это уменьшенное частное уменьшилось в 5 раз. Во втором делении частное в 10 раз меньше, чем в первом. Так же изучаются с учащимися и другие случаи изменения частного в зависимости от изменения делимого и делителя.

Запись примеров на изменение частного можно сделать в виде таблицы, обозначая увеличение в несколько раз знаком умножения (×), а уменьшение в несколько раз знаком деления (:).

№	Изменение делимого	Изменение делителя	Изменение частного
1	×8	×2	?
2	?	×3	×6
3	:6	?	не изменено

1-й пример: делимое увеличено в 8 раз, делитель — в 2 раза. Как изменилось частное?

2-й пример: делитель увеличен в 3 раза, частное увеличено в 6 раз. Как изменилось делимое?

3-й пример: делимое уменьшено в 6 раз, что нужно сделать с делителем, чтобы частное не изменилось?

§ 51. Делимость чисел

Тема «Делимость чисел» имеет важное значение в программе арифметики, так как при ее изучении учащиеся знакомятся с новыми свойствами чисел, получают ряд новых знаний о них. Знание свойств наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного дает оригинальные способы решения некоторых задач. Эта глава имеет и вспомогательное значение для программы: знание признаков делимости чисел используется при сокращении дроби, а умение находить наименьшее общее кратное чисел необходимо для приведения дробей к общему наименьшему знаменателю.

В программе средней школы в тему «Делимость чисел» входят следующие вопросы:

1. Делимость суммы.
2. Признаки делимости чисел на 2, 3, 9, 5.
3. Числа простые и составные.
4. Разложение чисел на простые множители.
5. Нахождение наименьшего общего кратного.

Для объяснения перечисленных вопросов необходимо выяснить понятия: делитель числа и кратное числа, а также основные теоремы делимости чисел: 1) если каждое слагаемое делится на какое-нибудь число, то и сумма разделится на то же число; 2) если одно из двух слагаемых делится на какое-нибудь число, а другое не делится, то их сумма не разделится на то же число; 3) если один из сомножителей делится на какое-нибудь число, то и все произведение разделится на то же число.

Для обоснования признаков делимости чисел, для понимания техники нахождения НОК необходимо коснуться ряда теоретических положений. Между тем возраст и развитие учащихся, их подготовка не позволяют дать строгие доказательства теории делимости. Поэтому из всего теоретического материала должен быть отобран тот минимум, без которого нельзя обойтись. Изучение делимости чисел в школах надо построить так, чтобы каждое теоретическое положение являлось выводом из разбора тщательно подобранных и методически последовательно расположенных частных (числовых) примеров, при этом необходимо строить уроки так, чтобы учащиеся принимали активное участие в объяснении нового материала.

Остановимся подробно на объяснении содержания этой темы.

Тему «Делимость чисел» можно изучать по такому плану:

1. Выяснение понятия «делитель числа» и «кратное числа».
2. Обоснование основных теорем делимости чисел.
3. Признаки делимости чисел.
4. Разложение составных чисел на простые множители.
5. Общий делитель двух чисел. Взаимно простые числа.
6. Наименьшее общее кратное.

§ 52. Понятие о делителе и кратном числе

План:

1) Выяснение понятия «делитель числа».
2) Самостоятельная работа на нахождение делителей числа.
3) Выяснение понятия «кратное числа».
4) Самостоятельная работа на нахождение кратных числа.

На первом занятии при употреблении термина «делитель» возникают затруднения: учащиеся привыкли называть «делителем» то число, на которое делят как при делении с остатком, так и при делении без остатка.

В теории же делимости чисел «делителем» данного числа называют только то число, на которое данное число разделится нацело (без остатка). Например: при делении 20 на 6 (частное 3, остаток 2) 6 есть число, на которое мы делим число 20, в теории же делимости делителями числа 20 являются числа 2, 4, 5, 10, 20, на которые делится нацело (без остатка). Это разъясняется учащимся.

Затем предлагается назвать делители нескольких чисел, например, 12-ти (1, 2, 3, 4, 6, 12), 18-ти (1, 2, 3, 6, 9, 18), 17-ти (1, 17), 11-ти (1, 11). Делители каждого числа записываются. Учитель предлагает указать для каждого из данных чисел: а) Самый меньший делитель (1). б) Самый большой делитель. (Само число, так как само число всегда делится «само на себя» или на число, «равное самому себе».) Дается ряд примеров для самостоятельного решения на отыскание делителей числа. Например: 36, 52, 78.

Затем переходят к выяснению понятия «кратные» числа. Предлагается назвать и записать числа, которые делятся, например, на 6 (6, 12, 18, 24 и т. д.), на 11 (11, 22, 33 и т. д.). Разъясняется, что вместо фразы «12 делится на 6», говорят «12 кратно 6-ти». Предлагается назвать числа кратные 7-ми, 10-ти, 18-ти и т. д.

Проводятся самостоятельные упражнения на сопоставление понятий «делитель» и «кратные»: учащиеся называют делители, например, числа 15- ти, потом кратные числа 15-ти, делители 20-ти и кратные 20-ти и т. п. Учащиеся повторяют объяснения того и другого термина.

Необходимо приучать учащихся употреблять термины: 40 кратно 8-ми, 8 — делитель 40-ка. Дается пример на деление с остатком: 75 : 10 = 7 (остаток 5). Ставится вопрос: можно ли сказать, что 75 кратно 10-ти? (Нет, потому что 75 не делится на 10 нацело.) Можно ли назвать 10 делителем 75-ти? (Нет, по той же причине.)

Из задачника решить примеры № 179 и 180.*

§ 53. Основные теоремы делимости чисел

Из основных теорем делимости чисел программа предлагает рассмотреть только одно свойство, а именно:

Если каждое слагаемое суммы делится на какое-либо число, то их сумма разделится на то же число.

Но кроме основного свойства делимости суммы, рекомендуем рассмотреть и следующие два свойства:

1. Если уменьшаемое и вычитаемое делятся на какое-нибудь число, то и разность разделится на то же число.

2. Если один из сомножителей произведения делится на какое-либо число, то и все произведение разделится на это число.

1) Для объяснения первого свойства учитель выписывает на доске ряд чисел, например 240, 120, 105. Каждое число разлагается на слагаемые:

$$240 = 160 + 80; \quad 120 = 30 + 90; \quad 105 = 28 + 35 + 42.$$

Какое действие здесь записано? (Сложение.)

Как называются числа 160 и 80 по отношению к 240 ? (Слагаемые.) Как называется число 240? (Сумма.)** Задаются те же вопросы относительно 30 и 90. Сообразите, на какие числа делятся 160 и 80? (На 2, 5, 10 и т д.) Значит, каждое слагаемое делится на 2, 5, 10. . . Узнайте, разделится ли сумма 240 на 2, 5, 10. . . ? (Число 240 также делится на 2, 5, 10. . .)

Таким же способом разбирается пример 120 = 30 + 90.

На какие же числа делилась сумма чисел? (На те же числа, на какие делилось каждое из двух слагаемых.)

---

* Здесь и далее в книге указываются номера задач стабильного задачника С. А. Пономарева и Н. И. Сырнева 1961 г. изд.

** В методических разработках приводятся неполные ответы учащихся, но при проведении занятий на практике надо требовать полных ответов. При составлении конспектов уроков частично использован материал нашей методики арифметики для педучилищ.

Затем разбирается третий пример. На какое число делятся 28, 35 и 42? (На 7.) Сколько раз 7 содержится в 28? в 35? в 42? Сколько же раз должно число 7 содержаться в сумме этих чисел? $(4 + 5 + 6 = 15$ раз.) Проверьте, сколько раз 7 содержится в сумме чисел, т. е. в 105. Учащиеся делят 105 на 7, получается 15.

Далее полезно рассмотреть такие примеры: $(45 + 54 + 36) : 9$; $(60 + 90 + 120) : 30$; сначала делят каждое слагаемое, сумма частных сравнивается с частным от деления суммы этих чисел на тот же делитель.

Затем учащиеся делают общий вывод. «Если каждое слагаемое делится на какое-либо число, то сумма этих слагаемых разделится на то же число».

После этого следует обратить внимание учащихся на то, что теорема, обратная рассмотренной, не всегда справедлива. Если сумма нескольких слагаемых делится на какое-либо число, то нельзя сказать, что каждое слагаемое делится на то же число, например: $66 = 22 + 44$ и $66 = 40 + 26$. В первом случае сумма и каждое слагаемое делятся на 11, во втором случае сумма делится на 11, но ни одно из слагаемых на 11 не делится.

Полезно поставить вопрос: всегда ли верно, что если ни одно из слагаемых не делится на какое-либо число, то и сумма не разделится на это число? (Сумма может делиться, если ни одно из слагаемых не делится на это число.) Например: в сумме $5 + 8 + 2$ ни одно слагаемое не делится на 3, сумма же 15 делится на 3.

Для самостоятельной работы учащиеся придумывают примеры на рассмотренные случаи.

3. Далее можно перейти к объяснению свойства разности, когда уменьшаемое и вычитаемое делится на данный делитель. Учитель предлагает примеры, которые учащиеся записывают в тетрадях: $140 - 84 = 56$; $135 - 90 = 45$. Как называются числа при вычитании? (Уменьшаемое, вычитаемое, остаток.)

Скажите, на какие числа делятся 140 и 84? (На 2, 4, 7, 14, 28.) Значит, уменьшаемое и вычитаемое делятся на 2, 4, 7, 14, 28. Узнайте, разделится ли разность 56 на те же числа (56 делится на все эти делители).

Таким же способом разбирается пример:

$$135 - 90 = 45.$$

На какие же числа делится разность? (На те же числа, на какие делятся уменьшаемое и вычитаемое.)

Из рассмотренных примеров учащиеся делают вывод: «Если уменьшаемое и вычитаемое делятся на какой-нибудь делитель, то разность также разделится на этот делитель».

Учащиеся придумывают примеры.

Полезно привести примеры на свойство, обратное рассмотренному; если разность чисел делится на какое-нибудь число, то нельзя сказать, что на это число делятся уменьшаемое и вычитаемое:

$$78 - 26 = 52; \qquad 100 - 35 = 65.$$

В первом примере на 13 делятся уменьшаемое, вычитаемое и разность, во втором примере на 13 делится разность, но не делятся ни уменьшаемое, ни вычитаемое. Аналогично приведенным примерам разбираются случаи, когда один из компонентов вычитания делится на данный делитель, другой компонент и результат не делятся на этот делитель. Учащиеся разбирают примеры и делают соответствующий вывод.

Например: 75 — 40 = 35. Здесь на делитель 25 делится уменьшаемое, но не делятся вычитаемое и остаток.

90 — 40 = 50. Здесь на 20 делится вычитаемое, но не делятся уменьшаемое и остаток. Учащимся предлагаются примеры № 167, 168.

4. Учитель напоминает, что сумма двух слагаемых разделится на какое-либо число, если каждое слагаемое делится на это число. Перейдем к делимости произведения на какой-нибудь делитель.

Учитель пишет на доске, а учащиеся в своих тетрадях: 3 · 7 · 10. Чему равно произведение этих чисел? (210.) Сколько сомножителей этого произведения делятся на 2? (Один сомножитель 10.) Сколько сомножителей делятся на 5? (Один сомножитель 10.) А произведение 210 делится на 2 и на 5? (Делится.)

Учащиеся самостоятельно разбирают еще примеры: 2 · 6 · 25 (делители 3 и 5); 6 · 5 · 33 (делители 2 и 11).

Из рассмотренных примеров делается вывод о делимости произведения на какой-либо делитель. Сколько сомножителей должно делиться на этот делитель? (Один сомножитель.) После этого учащиеся формулируют вывод: «Если в произведении хотя бы один из сомножителей делится на какое-либо число, то и все произведение разделится на это число».

Учитель дает самостоятельную работу: прочитать о разобранных трех случаях делимости по учебнику и рассмотреть примеры из задачника № 179—184.

После ознакомления с основными свойствами делимости чисел переходят к выводу признаков делимости.

§ 54. Признаки делимости чисел

Признаки делимости изучаются по следующему плану:

1. Выяснение необходимости знания признаков делимости.

2. Вывод признаков делимости чисел по группам: а) на 2 и 5; б) на 9 и 3.

1. Проводится беседа с целью выяснить необходимость знания признаков делимости чисел. Вначале учащиеся решают следующие упражнения:

Найдите и запишите делители числа 42 (1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42). То же для числа 56 (1, 2, 4, 7, 8, 14, 28, 56).

Учащиеся без затруднений находят делители этих небольших чисел. Далее переходим к большим числам; например, найдем делители числа 231 или числа 12 474, — учащиеся будут испытывать затруднения. Им сообщается, что существуют способы, при помощи которых можно легко, не деля числа, по некоторым признакам узнать, делится ли число на данный делитель. Эти способы называются признаками делимости.

2. Вывод признаков делимости на 2 и 5, 9 и 3. При выводе признаков делимости применяется один и тот же прием: данное число представляется в виде суммы двух слагаемых, из которых одно делится на данный делитель, следовательно, делимость всего числа или суммы зависит от делимости второго слагаемого на данный делитель.

Разберем признак делимости чисел на 2, а затем на 5. Предварительно следует повторить, что числа, делящиеся на 2 или кратные 2-м, называются **четными**, а не делящиеся на 2 — **нечетными**.

Назовите несколько четных чисел и запишите на доске. Записывают, например, такие числа: 16, 28, 234.

Назовите и запишите несколько нечетных чисел. Записывают, например, числа: 17, 25, 241. Какие цифры достаточно изменить в четных числах, чтобы они не делились на 2? (Цифры единиц. Какие цифры надо изменить в нечетных числах, чтобы они делились на 2? (Цифры единиц.)

Какой цифрой должно оканчиваться число, чтобы оно делилось на 2? (0, 2, 4, 6, 8.) Делится ли на 2 число 574? Сказать, не выполняя деления. Как узнать? Почему? Возможно, что ученики ответят: «В числе 574 десятков 57. Так как каждый десяток делится на 2, то 570 разделится на 2 нацело (без остатка); 4 также делится на 2; поэтому число 574 разделится на 2».

Разберите самостоятельно делимость числа 23 796 на 2. Итак, многозначное число разлагается на 2 слагаемых: десятки + единицы, и применяется свойство: если каждое из двух слагаемых делится на какое-нибудь число, то и сумма делится на это число.

Совершенно также объясняется признак делимости на 5, он рассматривается после признака делимости на 2. При объяснении исходят из того, что десяток делится на 2 и на 5, потому любое число десятков делится на 5. Делимость числа на 5 зависит от числа единиц.

Учащиеся делают самостоятельно обобщающий вывод: на 2 (или на 5) делятся только те числа, цифра единиц которых делится на 2 (или соответственно на 5) или которые оканчиваются нулем.

Вывод закрепляется работой учащихся на числовом примере.

Как надо представить число 4036, когда рассматриваем, делится ли оно на 5?

Ответ: 4036 надо разбить на десятки и единицы.

Получается запись: $4036 = 4030 + 6$.

Какое из слагаемых делится на 5?

Первое слагаемое делится на 5, второе слагаемое не делится, значит, сумма 4036 на 5 не разделится.

Какую цифру числа надо изменить, чтобы число разделилось на 5?

Вместо 6 единиц надо поставить 5 или 0.

$$4030 : 5 = 806; \quad 4035 : 5 = 807.$$

Делится ли 4036 на 2?

Делится, потому что каждое из двух слагаемых делится на 2.

Признаки делимости на 3 и 9. Объяснение признака делимости на 9 целесообразнее изложить в виде рассказа с соответствующим выводом.

Этот рассказ можно построить по такому плану.

Рассмотрим, что получается от деления на 9 чисел 10, 100, 1000... Ученики решают устно и результаты записывают в виде таблицы:

$$\begin{aligned} 10 &= 9 \cdot 1 + 1, \\ 100 &= 9 \cdot 11 + 1, \\ 1000 &= 9 \cdot 111 + 1. \end{aligned}$$

Переходят к делению на 9 многозначных чисел, например 2574. Вспоминаем, что при делении на 2, 5, 4, 25 разлагали число на 2 слагаемых. Здесь сразу сделать это нельзя, но постепенно подойдем к этому.

Разлагаем число 2574 на разрядные слагаемые:

$$2574 = 2000 + 500 + 70 + 4.$$

Разделим на 9 каждое слагаемое.

Если от деления на 9 числа 1000 получалось частное 111 и остаток 1, то от деления 2000 получится частное и остаток в 2 раза больше, чем от деления 1000. Поэтому

$$2000 = 9 \cdot 222 + 2.$$

Учащиеся сами могут объяснить дальнейшее деление:

$$\begin{aligned} 500 &= 9 \cdot 55 + 5, \\ 70 &= 9 \cdot 7 + 7, \\ 4 &= 4. \end{aligned}$$

Сложим полученные равенства:

$$2574 = 9 \cdot 222 + 2 + 9 \cdot 55 + 5 + 9 \cdot 7 + 7 + 4.$$

Применяя переместительное и сочетательное свойства суммы, то же число можно представить так:

$$2574 = (9 \cdot 222 + 9 \cdot 55 + 9 \cdot 7) + (2 + 5 + 7 + 4).$$

Число 2574 разложено на 2 слагаемых. Сумма, заключенная в первых скобках, делится на 9, потому что каждое слагаемое этой суммы делится на 9; делимость числа 2574 зависит от второго слагаемого, а это слагаемое есть сумма остатков, записанных цифрами разрядов данного числа, иначе говоря, сумма цифр данного числа. Эта сумма равна 18, но 18 делится на 9, значит, второе слагаемое, выделенное из данного числа, также делится на 9, поэтому и все число 2574 разделится на 9.

Учитель подытоживает свое объяснение.

Как составилось второе слагаемое, от которого зависит делимость на 9 всего числа? (Из суммы остатков, полученных от деления на 9 соответствующих разрядов числа.) Какими цифрами выражены остатки? (Цифрами данного числа.) Как же подсчитать второе слагаемое? (Сложить все цифры.) Какие же числа делятся на 9?

Отвечая на вопросы учителя, учащиеся делают частный вывод признака делимости числа на 9.

Учитель предлагает прочитать по учебнику формулировку признака делимости на 9.

Дальше следует повторить заслушанный вывод сначала на том же примере, потом на одном-двух новых числах, например 4275, 8774.

После повторения подробного доказательства можно остановиться на сокращенном объяснении признака делимости на 9. Например, число 6876 надо разделить на $9: 6876 = 6000 + 800 + 70 + 6$. От каждой тысячи при делении на 9 остается одна единица, от 6000 останется 6 единиц, от сотни остается единица, от 800 останется 8, от 7 десятков — 7 единиц; остаток от деления 6876 на 9 выразится числом: $6 + 8 + 7 + 6 = 27$; но 27 делится на 9, следовательно, число 6876 делится на 9.

Для закрепления сделанного вывода полезно дать следующие самостоятельные упражнения:

1) указать, какие из ряда данных чисел делятся на 9, какие не делятся: 576,4096, 1024, 4734 и т. д.;

2) числа этого ряда, не делящиеся на 9, исправить так, чтобы они делились на 9.

При выводе признака делимости на 3 следует обратить внимание учащихся на то, что число $9 = 3 \cdot 3$; следовательно, всякое число, делящееся на 9, делится и на 3. Признак делимости на 3 выводится подобно тому, как выводится признак делимости на 9. Учащиеся самостоятельно формулируют признак делимости на 3.

На 3 делятся те числа, сумма цифр которых делится на 3.

В самостоятельных упражнениях на применение признаков делимости на 9 и на 3 следует поставить такие вопросы:

а) Есть ли числа, делящиеся на 9, но не делящиеся на 3? Наоборот?

б) Применяя правило о признаке делимости на 3 или на 9, например числа 435 689, не следует складывать все цифры; очевидно, что 3, 6, 9 можно не включать в сумму, надо откидывать также $4 + 5$, $7 + 2$ и т. п.

В числах в виде 3 650 918, 254 720 делимость на 9 можно определить сразу, не составляя суммы цифр. Вообще учащиеся должны понимать, что надо находить сумму единиц только тех разрядов, которые препятствуют делению числа на 9 или на 3.

Упражнения, которые полезно дать для самостоятельной работы после изучения отдела о признаках делимости:

1) Не выполняя деления, сказать, делятся ли нацело суммы:

120 + 962; 240 + 125; 414 + 510 на 2, на 3, на 5.

2) Не выполняя деления, сказать, какой остаток получится от деления чисел:

4165, 364, 750, 6021 на 3, на 5, на 9.

3) В данных числах поставьте на месте вопросительных знаков такие цифры, чтобы числа делились:

а) на 3: 17?4; 1?43; 60?14;

б) на 4: 83?95?2; 70?4;

в) на 9: 136?5; 4825?294?.

Для самостоятельных занятий: решить из задачника № 185, 188, 190, 191, 192, 194, 195.

§ 55. Разложение составных чисел на простые множители

Этот раздел можно изучать по следующему плану.

1) Понятие о простом (первоначальном) числе и о составном числе.

2) Вывод, что всякое составное число можно представить в виде произведения простых сомножителей.

3) Разложение составного числа на простые (первоначальные) сомножители.

1. Учитель диктует для записи на доске и в тетрадях ряд чисел, например 17, 265, 212, 97, 22, 128, 31, 459, 147 и т. д. Применяя изученные признаки делимости, скажите о каждом числе, на какие делители оно делится.

При разборе чисел выясняют, что некоторые из них (17, 97, 31...) делятся только на единицу и на число, равное самому себе («делится само на себя»). Учитель дает определения: «Такие числа, которые имеют только два различных делителя, называются простыми». «Числа, имеющие какой-либо делитель, кроме единицы и «самого себя», называются составными».

После этого переходят к разъяснению положения: составное число можно представить в виде произведения сомножителей, отличных от данного числа и единицы.

Учитель пишет ряд чисел (первой сотни и трехзначных), например 36, 45, 120. . .

Какие даны числа — простые или составные? (Составные.) От перемножения каких чисел можно получить 36? ($4 \cdot 9$ или $3 \cdot 12$ или $2 \cdot 18$ и т. д.). А число 45? ($3 \cdot 15$ или $5 \cdot 9$). А число 120? ($2 \cdot 60 = 3 \cdot 40 =$ и т. д.). Значит, как представим числа 36, 45, 120? (В виде произведений.) Как же можно представить каждое составное число? (В виде произведения других чисел.) Говорят так: всякое составное число можно разложить на сомножители, а так как на каждый из этих сомножителей можно разделить данное число, то говорят также, что данное число разложили на делители. Для самостоятельного упражнения предлагается разложить числа на сомножители:

а) Разложите на сомножители устно числа 12, 18, 24, 28 и т. д. по таблице умножения. Разложите также на два сомножителя трехзначные числа 128, 136, 170, 200 и т. д.

б) Возьмите несколько четных чисел, меньших 100, разложите на два сомножителя, из которых один простой, например:

38, 52, 68, 84, 60, 70, 85, 63, 78, 93.

В последних примерах оба сомножителя простые.

Переходим к разложению составных чисел на простые сомножители. Для этого учитель предлагает решить следующие задачи.

Я задумал два числа, перемножил их и получил 21. Какие числа я задумал? (3 и 7.)

После ответа ученик записывает на доске: $21 = 3 \cdot 7$.

Дается еще задача на разложение 35, 49 на два сомножителя. Числа 42, 30, 105 предлагается разложить на три сомножителя. Разложение записывается на доске в таком виде: $35 = 5 \cdot 7$; $49 = 7 \cdot 7$; $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$; $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$; $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$. Как заменили данные составные числа? (Каждое число заменили произведением.) Произведением каких сомножителей заменили эти составные числа? (Произведением простых сомножителей.) Значит, что мы сделали с составными числами? (Разложили на простые сомножители.)

Разложение числа на простые сомножители можно производить постепенно, например:

Разложите число 150 на два сомножителя, чтобы один был простой: $150 = 2 \cdot 75$.

Какое число 2? (Простое.) Какое число 75? (Составное.) Нельзя ли 75 также разложить на сомножители? (Можно. $75 = 3 \cdot 25$.) Что можно сделать с числом 25? (Разложить. $25 = 5 \cdot 5$.)

Замените в числе 75 сомножитель 25 произведением $5 \cdot 5$; $75 = 3 \cdot 5 \cdot 5$. Замените в числе 150 сомножитель 75 произведением простых сомножителей: $3 \cdot 5 \cdot 5$; тогда $150 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$.

Значит, что сделали мы с числом 150? (Разложили на простые сомножители.) Значит, что же можно сделать с составным числом? (Разложить на простые сомножители.)

Такой же способ разложения повторяется над числом 420.

Получается запись:

$$\begin{aligned} 420 &= 2 \cdot 210, \\ 210 &= 2 \cdot 105, \\ 105 &= 3 \cdot 35, \\ 35 &= 5 \cdot 7, \\ 105 &= 3 \cdot 5 \cdot 7, \\ 210 &= 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7, \\ 420 &= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7. \end{aligned}$$

Дальше учитель знакомит учащихся с техникой разложения составных чисел на простые сомножители.

Пусть надо разложить число 240 на простые сомножители.

Какое первое простое число? (2.)

По признакам делимости делится ли число 240 на 2? (Делится, потому что оно оканчивается нулем.)

Запишите так: $\begin{array}{l} 240 = 2 \cdot \ \ldots \\ 120 \end{array}$ (частное 120).

На какое первоначальное число делится 120? (На 2.) Разделим 120 на 2. Запись продолжим:

$$\begin{array}{l} 240 = 2 \cdot 2 \cdot \ \ldots \text{ (частное 60).} \\ 120 \\ \ \ 60 \end{array}$$

Продолжая, получим в результате такую запись разложения числа 240 на первоначальные сомножители:

$$\begin{array}{r} 240 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \\ 120 \\ 60 \\ 30 \\ 15 \\ 5 \\ 1 \end{array}$$

Разложение числа 240 можно записать и так:

$$\begin{array}{r|l} 240 & 2 \\ 120 & 2 \\ 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Указанный способ разложения, когда данное число делится сначала на наименьший простой делитель, полученное частное опять делится на наименьший простой делитель и т. д., не является обязательным. Особые свойства чисел позволяют выполнять разложение чисел на простые сомножители другим путем, например: $180 = 10 \cdot 18$, число 10 и число 18 разложите устно на сомножители: $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$; $10 = 2 \cdot 5$. Замените в разложении числа 180, 10 и 18 их произведениями:

$$180 = 10 \cdot 18 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5.$$

При разложении больших чисел на простые сомножители приходится нередко пользоваться таблицей простых чисел. Например, разложим число 29 910.

Число 29 910 разлагается на простые сомножители так:

$$\begin{array}{r|l}
29910 & 2 \\
14955 & 3 \\
4985 & 5 \\
997 & 997 \\
1 &
\end{array}$$

Число 997 находим в таблице простых чисел.
$29\,910 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 997$.

§ 56. Общие делители чисел

Объяснение начинается с повторения понятия о делителе.

Припомните, какое число называется делителем числа. (На которое данное число делится нацело, без остатка.) Возьмите число 15. Назовите его делители (1, 3, 5, 15).

Возьмите числа 28 и 42, найдите их делители и выпишите.

28; (1, 2, 4, 7 , 14, 28) и 42; (1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42).

Сравните делители этих чисел и скажите, какие у них общие делители (1, 2, 7, 14). Почему вы называете эти делители общими? (Потому что на них делятся оба числа.)

Найдите общие делители чисел 21 и 14; 24 и 30; 36 и 54 (попарно), подчеркните их. Учащиеся получают в тетрадях следующие записи:

$21;\ (\underline{1},\ 3,\ \underline{7},\ 21),$ $\qquad 24;\ (\underline{1},\ \underline{2},\ \underline{3},\ 4,\ \underline{6},\ 8,\ 12,\ 24),$

$14;\ (\underline{1},\ 2,\ \underline{7},\ 14).$ $\qquad 30;\ (\underline{1},\ \underline{2},\ \underline{3},\ 5,\ \underline{6},\ 10,\ 15,\ 30).$

$36;\ (\underline{1},\ \underline{2},\ \underline{3},\ 4,\ \underline{6},\ \underline{9},\ 12,\ \underline{18},\ 36),$

$54;\ (\underline{1},\ \underline{2},\ \underline{3},\ \underline{6},\ \underline{9},\ \underline{18},\ 27,\ 54).$

Рассмотрим делители чисел 21 и 14. Какие у них общие делители? (1, 7); найдите общие делители 24 и 30; (1, 2, 3, 6).

Решите в классе примеры № 196, 198, 199, 201 (по одному примеру). Для самостоятельной работы надо дать № 196, 197 и 201.

§ 57. Наименьшее общее кратное

План

1. Определение НОК.
2. Выяснение теоретических положений, на которых основана техника нахождения НОК.
3. Вывод правила нахождения НОК: а) первый способ, б) второй способ.
4. Упражнения.

Ознакомление с теорией наименьшего общего кратного проводится на разборе и решении примеров.

Понятие о кратном дано учащимся в начале изучения отдела делимости чисел. Выясняются термины «общее кратное» нескольких чисел и «наименьшее общее кратное» чисел.

Даются два числа, например 5 и 2. Запишите числа, кратные каждого из этих чисел.

$$(5,\ 10,\ 15,\ 20,\ 25,\ 30,\ 35,\ 40,\ 45,\ 50,\ 55,\ 60,\ 65,\ \ldots) : 5,$$
$$(2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14,\ 16,\ 18,\ 20,\ 22,\ 24,\ 26,\ 28,\ 30,\ \ldots) : 2.$$

Найдите числа, кратные одновременно 5 и 2. Такие числа называются общими кратными. Найдите и подчеркните общие кратные 6 и 8.

6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72,...
8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72,...

Выпишите общие кратные 2 и 5.

10, 20, 30. . . (Какое из этих чисел самое меньшее? (10.) Такое число называется наименьшим общим кратным чисел 2 и 5. Запишите так: НОК (2 и 5) = 10. Найдите наименьшее общее кратное чисел 6 и 8 (24). Запишите. Получается запись:

НОК (6 и 8) = 24.

Далее учащиеся самостоятельно находят НОК (устно), например для чисел 5 и 6; 8 и 9; 5 и 7; 20 и 4; 14, 42 и 7; 36, 12, 6. Здесь даются примеры для нахождения НОК чисел взаимно простых и чисел, из которых одно делится на другое.

Упражнения проводятся примерно так: учащиеся нашли самостоятельно НОК чисел 5 и 6, равное 30. Нет ли еще чисел, общих кратных 5 и 6? (60, 90, 120. . .) Сколько можно найти общих кратных 5 и 6? (Сколько угодно.) Как они получаются из числа 30? Почему мы не говорим о наибольшем общем кратном? (Какое бы большое число мы ни взяли, есть еще большие.)

Решается пример: Найти (устно) НОК для 36, 12 и 6. Какое это число? (36). Почему? (Потому что 36 делится на 36, 12 и 6, это самое меньшее из общих кратных 36-ти, 12-ти, 6-ти.) Какие числа будут еще общими кратными для 36, 12, 6? (72, 108, 144. . .)

Первый способ нахождения НОК выводится на основании следующих положений:

а) если одно число кратно другому, то все простые сомножители делителя входят в делимое, например:

$$36 : 12 = (2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3) : (2 \cdot 2 \cdot 3) = \text{частное } 3;$$

б) отсюда: одно число делится на другое (кратно другому), если в состав делимого входят все простые сомножители делителя;

в) в состав НОК данных чисел должны входить все простые сомножители каждого из этих чисел.

Тема «Нахождение НОК способом разложения на множители» изучается по следующему плану:

1) Вывод общего правила нахождения НОК.

2) Применение общего правила нахождения НОК к частным случаям (когда данные числа взаимно простые и когда одно число делится на все остальные).

3) Краткое повторение темы.

4) Практический прием нахождения НОК.

Остановимся подробно на объяснении этой темы.

«Повторим, какое число называется наименьшим общим кратным числом? Пусть надо найти НОК для чисел 72 и 96. Как сказать иначе? (Найти наименьшее число, делящееся и на 72 и на 96.) Каков должен быть состав делимого, чтобы оно делилось на делитель? (В делимое должны войти все простые сомножители делителя.) Что же надо сделать с каждым из этих чисел, чтобы найти НОК? (Разложить каждое число на простые сомножители.) Сделайте разложение и запишите ($72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$; $96 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \times \times 2 \cdot 2 \cdot 3$). Какие сомножители должны войти в состав НОК? (Сомножители 72-х и 96-ти.) Сравним сомножители этих чисел. Возьмем число, в котором больше сомножителей, т. е. 96. Сравните сомножители 96-ти с сомножителями числа 72 и скажите, какие сомножители из 72 надо добавить к сомножителям числа 96, чтобы произведение всех сомножителей делилось на 72? (Одну тройку.) Добавим ее и запишем так: НОК (72 и 96) $= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \times \times 2 \cdot 3 \cdot 3 = 288$. Какое же число является НОК для 72 и 96? (288.) Назовите другие общие кратные для 72 и 96 (576, 864, 1152...). Какое из них наименьшее? (288.) Повторите, как находили НОК.

Решите самостоятельно примеры:

НОК (224 и 288),
НОК (108, 135, 81).

После самостоятельного решения достаточного числа примеров делается вывод правила, как находить НОК.

Повторите, как находили НОК в решенных вами примерах. (Разлагали каждое число на простые сомножители, брали сомножители одного числа, добавляли недостающие из других чисел и все сомножители перемножали.) Из какого числа удобнее взять сомножители? (Из того числа, в котором больше сомножителей.) Прочитайте по учебнику правило нахождения НОК чисел.

Рассмотрим особые случаи нахождения НОК. Пусть дано: найти НОК чисел 20 и 49. Разложите эти числа на простые сомножители. Сравните их сомножители. (Эти числа взаимно простые.) Почему? (Потому что у них нет общих сомножителей, кроме единицы.) Значит, в состав НОК войдут какие сомножители? (Все сомножители 20 и 49.) Надо ли в этом случае разлагать числа на простые сомножители? (Не надо, при небольших числах.) Как найти НОК этих взаимно простых чисел? (Их надо перемножить, полученное произведение будет их НОК.)»

Решают самостоятельно примеры:

НОК (34 и 15); НОК (35 и 18); НОК (10, 11, 51).

Таким же примерно путем разбирается случай нахождения НОК, когда одно из чисел делится на все остальные, например 180, 45, 60.

Должны быть рассмотрены примеры, в которых некоторые числа можно не разлагать, например НОК (24, 8, 18); здесь 8 можно не разлагать на простые сомножители, так как всякое число, делящееся на 24, разделится на 8; НОК (24, 8, 18) = 72. В примере найти НОК для 9, 54, 18, 12. Надо разложить только 54 и 12; НОК (9, 54, 18 и 12) = 108.

После этого вопрос о НОК кратко повторяется.

Какой раздел мы изучили? (О нахождении НОК для двух и нескольких чисел.) Повторим кратко. Какое число называется НОК? (Повторяют определение.) Как находится НОК? (Повторяют правило.) Всегда ли надо данные числа разлагать на простые сомножители? (Не всегда.) При каких данных числах разложение не делается? (Когда одно из чисел делится на остальные и когда небольшие данные числа взаимно простые.) Полезно проделать упражнения, вычислив НОК данных чисел, найти для каждого числа множители, которых в нем недостает до НОК.

Возьмем пример:

$$
\begin{array}{l|l}
462 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 & 2 \cdot 5 \\
385 = 5 \cdot 7 \cdot 11 & 2 \cdot 2 \cdot 3 \\
420 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 & \;\; 11 \\
\hline
\multicolumn{2}{l}{\text{НОК} = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 4620}
\end{array}
$$

Эти сомножители представляют собой частные от деления НОК на каждое из данных чисел. В теории дробей они имеют большое значение. Они называются дополнительными множителями.

К сомножителям числа 420 приписали только один сомножитель.

Практический прием быстрого нахождения НОК нескольких чисел посредством разложения их на простые множители. Даны числа: 280, 350, 105, 525. Найти их НОК.

280	350	105	525	2
140	175	105	525	2
70	175	105	525	2
35	175	105	525	3
35	175	35	175	5
7	35	7	35	5
7	7	7	7	7
1	1	1	1	

Записываем данные числа в горизонтальной строке, за последним числом 525 проводим вертикальную черту, делим числа по порядку на каждый простой делитель, начиная с наименьшего — 2, частные подписываем под данными числами; числа, которые не разделились, переписываем во 2-ю строчку. Числа второй строчки опять делим на 2, частные подписываем в третьей строчке, числа, не разделившиеся на 2, переписываем в третью строчку и т. д.

Продолжая делить, получим в 8-й строчке частные, каждое из которых равно единице. Произведения всех делителей $2 \cdot 2 \times \times 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = 4200$. (Указание: при перемножении простых сомножителей выделяем группы $2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 = 100$; $2 \cdot 3 \cdot 7 = = 42$; $42 \cdot 100 = 4200$.) НОК (280, 350, 105, 525) = 4200.

Для классных и самостоятельных работ: решить задачи № 204, 205—207, 211—213 и 208, 209. Задачи 208 и 209 полезны не только своими выводами, но главное — методом решения.

ГЛАВА X

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДРОБИ

§ 58. К вопросу о последовательности изучения обыкновенных и десятичных дробей

Усвоение курса дробей имеет большое значение для средней школы, так как знание учащимися дробей необходимо для всего последующего курса математики.

Спорным вопросом методики дробей является вопрос о порядке изучения дробей обыкновенных и десятичных: должны ли десятичные дроби изучаться после обыкновенных, как их частный случай, или после целых чисел, как развитие десятичной системы счисления.

На страницах журнала «Математика в школе» в 1961—1962 гг. были помещены статьи, посвященные обсуждению этого вопроса.

Подводя итоги дискуссии, редакция журнала отметила: «Вполне естественно, что в решении многих методических вопросов преподавания математики, в том числе и арифметики, можно идти различными путями».

Авторы ряда статей справедливо утверждали, что и так называемый традиционный порядок изучения обыкновенных и десятичных дробей нельзя считать устаревшим и неэффективным, если при этом изучении обеспечивается достаточно серьезное внимание к десятичным дробям.

Сторонники изучения десятичных дробей прежде обыкновенных указывали, что действия с десятичными дробями легче, чем с обыкновенными, потому что эти действия аналогичны действиям с целыми числами, что десятичные дроби имеют большее практическое значение, потому что связаны с метрической системой мер и с получением приближенных значений при делении целых чисел.

Этот порядок изучения дробей был положен в основу эксперимента, осуществленного Сектором методики математики Института общего и политехнического обучения. Проведенная работа показала неплохой результат.

Но преподаватели, которые занимались этой экспериментальной работой, пишут, что имеющийся пока опыт еще недостаточен, чтобы убедить в необходимости повсеместной перестройки курса арифметики.

Приверженцы этой системы изучения дробей признают некоторые трудности, возникающие, например, при изучении умножения и деления на десятичную дробь.

Сторонники изучения десятичных дробей после обыкновенных указывали, что исторически и практически обыкновенные дроби предшествуют десятичным (учащиеся еще в дошкольной жизни имели дело с простейшими долями $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$) и, кроме того, смысл умножения и деления на правильную дробь легче выяснить на обыкновенных дробях, чем на десятичных. Новые программы по арифметике содержат систематический курс дробей, причем сначала изучаются обыкновенные дроби, потом десятичные, как частный случай обыкновенных дробей.

§ 59. Понятие о дроби

Учащиеся V класса знакомы с простейшими дробями из курса начальной школы. Начальная школа в III—IV классах знакомит учащихся конкретно и наглядно с долями: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$ и их простейшими преобразованиями.

В систематическом курсе дробей все преобразования, правила выводятся на основании свойств действия с целыми числами, признаков делимости, разложения чисел на простые сомножители и т. д.

В систематическом курсе дробей разбирается вопрос о происхождении дробей: а) как результат измерения, б) как результат деления. Объяснение можно провести в таком порядке.

Учитель указывает, что в природе существуют величины, которые могут быть разделены на любое число равных частей, например длина, вес, время и т. п. Измерение таких величин какой-либо единицей не всегда дает в результате целые числа.

Пусть надо измерить длину классной доски. Для этого сравниваем эту длину с длиной, принятой за единицу измерения, например с длиной метра. Учитель предлагает отложить метр по длине доски (зная заранее, что эта длина больше метра, но меньше двух метров).

Ученик отложил метр один раз, но получился остаток, меньший метра.

«Как измерить остаток длины доски? (Надо метр разделить на равные части.) Разделите метр на 10 равных частей и десятую часть метра откладывайте на остатке. Сколько раз он уложился. (Примерно 6 раз.) Чему равна длина доски? (1 метр и 6 десятых метра). Как записать 6 десятых метра? $\left(\frac{6}{10}.\right)$ Как получилась дробь $\frac{6}{10}$ метра? (При измерении длины.)»

Учитель сообщает: «Здесь 1 *м*, или единицу, делили на 10 равных частей. Одну из равных частей единицы принято называть долей единицы. Часть единицы может состоять из нескольких долей. Здесь получилась какая часть метра? $\left(\frac{6}{10}.\right)$ Как она получилась? (Метр разделили на 10 равных долей и таких долей оказалось 6.) Как называется число $\frac{6}{10}$? (Дробью.) А как назовете число $\frac{1}{10}$? (Также дробью.) Как сказать, какое число называется дробью? (Одна из равных долей или несколько равных долей единицы.)»

Учитель сообщает, что дробь можно получить не только при измерении. Дробь может получиться в результате деления. Когда мы занимались делением целых чисел, то видели, что деление не всегда возможно, например не могли бы разделить 3 на 4, 5 на 8, меньшее число на большее. Пользуясь дробными числами, можем выполнить такое деление.

Поясним на примере. «Решить задачу: 2 булки одинакового веса разделить поровну на 3 человека» (Целого числа булок дать каждому человеку невозможно).

«Разделите первую булку на 3 равные части. Какую часть булки получит каждый человек?» (Третью часть.) «Потом разделите вторую булку на 3 равные части и опять дайте каждому человеку одну часть. Сколько всего частей получит каждый человек?» (Две части.) «Какие части булки получит каждый человек?» (Третьи части.) «Какую же часть булки получил каждый человек?» $\left(\frac{2}{3}\text{ булки.}\right)$ «Нельзя ли иначе выделить человеку $\frac{2}{3}$ булки?» (Можно: от первой булки отрезать $\frac{2}{3}$ части, от второй булки—также $\frac{2}{3}$ части, и останутся $\frac{2}{3}$ части для третьего человека.) «Как же можно разделить 2 булки поровну трем человекам?» (Или каждую булку разделить на 3 равные части и 2 такие части дать каждому, или же от 2 булок отрезать по $\frac{2}{3}$ части, остаток составит $\frac{2}{3}$ булки.) «Скажите же, как может получиться число $\frac{2}{3}$?» (Или единицу разделить на 3 равные части и таких частей взять 2, или 2 единицы разделить на 3 равные части.)

Учитель говорит: «Проделаем на чертеже деление 2 : 3. Начертите два равных отрезка один под другим, разделите каждый на 3 равные части и отчеркните по одной части каждого отрезка. Какой получится отрезок, если эти доли соединить?» (Получится $\frac{2}{3}$ отрезка.) (Сделать чертеж.)

«Теперь отложите один за другим два равных отрезка (две единицы.) Разделите каждый на 3 равные части, отметьте по две части три раза. Что сделали во втором чертеже?» (Две единицы разделили на 3 равные части, получили $\frac{2}{3}$.) «В результате какого действия получилась дробь $\frac{2}{3}$?)» (В результате деления 2 на 3.) «Запишем: $2 : 3 = \frac{2}{3}$».

Далее следует объяснить подробно деление большего числа на меньшее (частное — смешанное число), например $15 : 4$. Сначала для деления берем два слагаемых 12 и 3. Окончательный результат записываем со знаком сложения: $15 : 4 = (12 + 3) : 4 = 12 : 4 + 3 : 4 = 3 + \frac{3}{4} = 3\frac{3}{4}$.

Разделите 3 на 4 $\left(\frac{3}{4}\right)$. Как разделить на 3 и 4? (Единицу разделить на 4 равные части, получится $\frac{1}{4}$, также вторую и третью единицу разделить на 4 равные части, от каждой получится $\frac{1}{4}$, всего получится $\frac{3}{4}$.) Разделите 5 на 8? $\left(\frac{5}{8}.\right)$ Уменьшите 10 в 3 раза. ($3\frac{1}{3}$.) Найдите 5-ю часть 12-ти.

Придумайте примеры такого деления, чтобы в частном получилась дробь. Чтобы в частном получилось целое число с дробью.

Для устного решения следует дать учащимся задачи на перевод дробных именованных чисел в целые и обратно, например: «Сколько сантиметров в $\frac{1}{4}$ *м*? Сколько граммов в $\frac{3}{8}$ *кг*?» И т. д. «Какую часть года составляют 7 мес.? Какую часть суток составляют 11 час.?» И т. д.

Несмотря на то что по программе арифметики начальных классов школы учащихся полагается знакомить с чтением и записью дроби, все же при изучении систематического курса обыкновенных дробей надо подробно остановиться на этом вопросе.

Учитель записывает на доске дроби $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{5}{8}$ и спрашивает: «Если эти дроби получились в результате деления единицы, то что выражают числа 5, 7, 8?» (Единица разделена на 5, 7, 8 равных частей.) «Что показывают числа 1, 3, 5?» (Сколько взято частей.) «Сколько вы произносите слов, чтобы назвать дробь, например $\frac{3}{5}$?» (Два слова.) «Каждое из слов есть название чего?» (Числа.) «Как называются числа, обозначающие дробь?» (Одно—числитель, а другое— знаменатель.)

Для окончательного и более наглядного уяснения письменной нумерации дробей и терминов «числитель» и «знаменатель» учитель чертит на доске отрезок, делит его на несколько равных частей, например на 5. «Что показывает (знаменует) число 5?» (На сколько равных частей разделена единица?) Далее учитель дугой отмечает, например, 3 деления отрезка. «Сколько я теперь взял таких равных долей?» (Три.) «Что показывает цифра 3?» (Число взятых долей.) «Да, она показывает число долей, а потому и называется числителем. Числитель и знаменатель будем называть членами дроби. Повторите еще раз, сколько членов имеет всякая дробь? Как они называются и почему именно так? Что показывает числитель? Что показывает знаменатель?» Учитель пишет на доске: 2 : 3; 4 : 5; 7 : 13 и спрашивает, какие числа получатся в частном. (Дробные.) «Запишите их». ($2 : 3 = \frac{2}{3}$; $4 : 5 = \frac{4}{5}$; $7 : 13 = \frac{7}{13}$.) «Как мы получили в этих случаях дроби?» (Делили меньшее число на большее.)

«Придумайте еще примеры дробей». (Придумывают и объясняют их состав.)

С учащимися надо решить из задачника № 215—234.

§ 60. Виды дробей

Изучение темы рекомендуется изложить в ниже приведенном плане. Учитель спрашивает: «В результате какого действия мы получали дроби?» (Деления.) Выполните деление и запишите результаты. Даются примеры: 2 : 5; 4 : 7; 11 : 12. Сравните $\frac{2}{5}$ с единицей. ($\frac{2}{5}$ меньше единицы.) Почему? (В единице $\frac{5}{5}$, а в этом числе только $\frac{2}{5}$.) Сравните $\frac{4}{7}$ и $\frac{11}{12}$ с единицей, объясните результаты. Сравните числители и знаменатели этих дробей. (В каждой дроби числитель меньше знаменателя.) Учитель сообщает, что такие дроби называются правильными дробями, и предлагает учащимся формулировать определение правильной дроби. (В правильной дроби числитель меньше знаменателя, и такая дробь меньше единицы.)

Дальше проводится знакомство с неправильными дробями, равными единице и бо́льшими единицы. Для знакомства с дробями, равными единице, можно дать задачу: какую часть рубля составляют 5 коп? ($\frac{1}{20}$.) А сколько в рубле монет по 5 коп? (20.) Как заменить рубль двадцатыми долями рубля? $\left(\frac{20}{20}.\right)$ А как заменить рубль гривенниками? $\left(\frac{10}{10}.\right)$ Двугривенными? $\left(\frac{5}{5}.\right)$

Учитель сообщает, что такие дроби, как $\frac{5}{5}$, $\frac{10}{10}$, $\frac{20}{20}$, называются неправильными дробями. Учащиеся придумывают примеры неправильных дробей, равных единице, и формулируют определение неправильной дроби. (Неправильной дробью называется такая дробь, у которой числитель равен или больше знаменателя и которая равна единице или больше ее.)

После этого учащимся дается упражнение: записать единицу в виде нескольких дробей с указанными учителем знаменателями. Получается, например, такая запись:

$$1 = \frac{4}{4} = \frac{8}{8} = \frac{15}{15} = \ldots$$

Дальше рассматриваются неправильные дроби, бо́льшие единицы. Даются примеры на деление большего числа на меньшее: 3 : 2; 15 : 8; 20 : 3; 45 : 4. Частные записываются в виде неправильных дробей. Учащиеся сравнивают величину числителя и знаменателя, а также величину дроби с единицей. Учитель сообщает, что такие дроби также называются неправильными дробями. Учащиеся формулируют определение неправильных дробей. (В неправильной дроби числитель равен знаменателю, а величина дроби равна единице или числитель больше знаменателя, и величина дроби больше единицы.)

Учащиеся придумывают примеры дробей правильных и неправильных. Для закрепления и самостоятельной работы учащиеся должны решить из задачника № 236—242.

§ 61. Преобразование неправильной дроби в смешанное число и смешанного числа в неправильную дробь

После ознакомления с неправильными дробями переходят к их преобразованию в целые и смешанные числа.

Возьмите дробь $\frac{8}{4}$. Какая это дробь? (Неправильная.) Почему она называется неправильной? (Потому что она больше единицы, так как числитель ее больше знаменателя.) Как узнать, сколько в ней единиц? (Надо числитель разделить на знаменатель.) Почему надо делить числитель на знаменатель? (В единице 4 четверти, в 8 четвертых столько единиц, сколько раз в 8 четвертых содержатся 4 четверти, или в 8 содержится 4, т. е. 2 единицы.) Придумайте неправильные дроби, которые равнялись бы целым числам. В случае затруднения в объяснении следует дать пример на превращение мелких мер в более крупные, например 300 *сек* в минуты, 200 *см* в метры.

Возьмите неправильную дробь $\frac{17}{5}$. Как узнать, сколько в ней целых единиц? (Надо числитель разделить на знаменатель.) Почему? (Объясняют.) Сколько единиц заключается в этой дроби? (3.) Сколько остается долей? $\left(\frac{2}{5}.\right)$ Как записать результат? $\left(\frac{17}{5} = 3\frac{2}{5}.\right)$

Возьмите дробь $\frac{31}{7}$. Сколько в ней целых единиц? (4.) Как это узнать? (Разделить 31 на 7.) Почему? (Объясняют.) Сколько долей останется? $\left(\frac{3}{7}.\right)$ Как записать результат? $\left(\frac{31}{7} = 4\frac{3}{7}.\right)$ Такие числа, как $3\frac{2}{5}$, $4\frac{3}{7}$, называются смешанными числами. Почему они так называются? (В них есть и целое число и дробь.)

Учитель сообщает, что преобразование неправильной дроби в целое или смешанное число называют исключением целого числа из неправильной дроби. Что значит исключить из неправильной дроби целое число? (Узнать, сколько целых единиц содержится в неправильной дроби.) Как это сделать? (Надо числитель разделить на знаменатель.) Целое частное покажет количество целых единиц, а остаток — количество долей в смешанном числе. Сколько раз знаменатель содержится в числителе, столько будет целых единиц. Учащиеся придумывают примеры на исключение из неправильной дроби целого числа.

Далее решается обратная задача: целое или смешанное число заменить неправильной дробью.

Предлагается учащимся решить устно и записать примеры на замену целого числа неправильной дробью. Замените 3 единицы четвертыми долями, 5 единиц восьмыми долями, 10 единиц пятнадцатыми долями. Число 2 замените вторыми, третьими, четвертыми, пятыми и т. п. долями. Получается запись:

$$2 = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \frac{8}{4} = \frac{10}{5}\ldots$$

Следовательно, единицу и целое число можно заменить любыми долями. Как объяснить, почему $2 = \frac{10}{5}$? (В единице $\frac{5}{5}$, в 2-х единицах в 2 раза больше.)

Напишите какое-нибудь смешанное число $\left(11\frac{3}{8}\right)$. Узнайте, сколько восьмых долей заключается в 11 единицах? (88.) Как это узнать? (Надо 8 умножить на 11.) Почему? (В одной единице 8 восьмых, в 11 единицах в 11 раз больше.) Сколько еще имеется восьмых долей? $\left(\frac{3}{8}.\right)$ Скольким же восьмым долям равняется число $11\frac{3}{8}$? $\left(\frac{91}{8}.\right)$ Запишите это. $\left(11\frac{3}{8} = \frac{91}{8}.\right)$ Можно записать подробно все вычисления. Учитель показывает и объясняет запись:

$$11\frac{3}{8}=\frac{8\cdot 11+3}{8}=\frac{91}{8}.$$

(Сначала мы 8 умножили на 11, к полученному числу прибавили 3 и так как получили число восьмых долей, то подписали знаменатель 8.) Подробно разбирается и записывается еще пример: $25\frac{7}{10}$ выразить в десятых долях. Получается запись:

$$25\frac{7}{10}=\frac{10\cdot 25+7}{10}=\frac{257}{10}.$$

Учитель сообщает, что в случае такого преобразования смешанного числа в неправильную дробь говорят: смешанное число обратили в неправильную дробь. Как же обратить смешанное число в неправильную дробь? (Надо умножить знаменатель на целое число, к полученному произведению прибавить числитель и подписать тот же знаменатель.) Для чего умножают знаменатель на целое число? (Чтобы узнать, сколько долей в целом числе.) Для чего прибавляют числитель? (Узнают, сколько долей во всем числе.) Для чего подписывается знаменатель? (Надо показать, из каких долей состоит число.) Формулируя это правило, ученики часто забывают сказать: «подписать тот же знаменатель».

Учащиеся придумывают примеры на смешанные числа и решают их с подробным объяснением. Полезно также дать ряд устных примеров на это преобразование. В случае затруднений с объяснением можно напомнить примеры на раздробление двух составных именованных чисел, например: 2 *км* 100 *м* выразить в метрах; 3 часа 15 мин. в минутах.

Для закрепления и самостоятельной работы решить № 244—248.

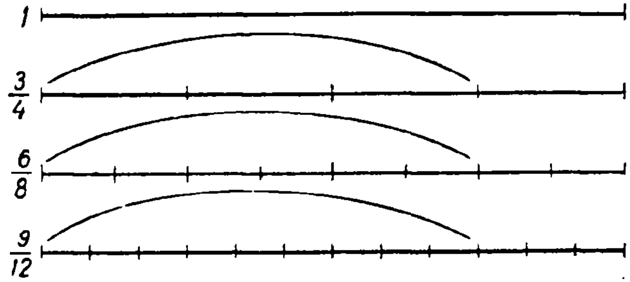
§ 62. Сравнение дробей

Для сравнения величины дробей (1-й цикл) можно не делать никаких преобразований, а ограничиться только устным объяснением ответа на поставленный вопрос на основании наблюдений над дробями.

Сначала рассматривается вопрос о равенстве дробей. Два дробных числа считаются равными, если две величины, выражаемые этими числами при одной и той же единице измерения, равны между собой.

Объяснение сопровождается чертежом (черт. 12). Учитель предлагает начертить 4 раза (один под другим) отрезок, принимаемый за 1. Первый отрезок остается целым. «Разделите второй отрезок на 4 равные части и отметьте 3 такие части. Какую дробь отметили?» $\left(\frac{3}{4}.\right)$

«На следующем отрезке каждую четверть разделите пополам. Какие получились доли единицы?» (Восьмые.) «Почему эти доли восьмые?» (В $\frac{1}{4}$ их две, а в $\frac{4}{4}$, или в единице, их $2 \cdot 4 = 8$.) «Сколько же восьмых долей в $\frac{3}{4}$?» ($2 \cdot 3 = 6$, в $\frac{3}{4}$ содержится $\frac{6}{8}$.) «Следовательно, две длины $\frac{3}{4}$ *м* и $\frac{6}{8}$ *м* равны между собой; также $\frac{3}{4}$ *км* и $\frac{6}{8}$ *км* равны между собой и т. д. Значит, дробь $\frac{3}{4}$ равна дроби $\frac{6}{8}$.



Черт. 12.

Разделите теперь каждую четверть на 3 равные части. (На 4-й линии чертежа.) Сколько таких частей будет в 1?» ($3 \cdot 4 = 12$.) «Какие получились доли метра?» (Двенадцатые.) «Длина $\frac{3}{4}$ *м* составит сколько двенадцатых частей метра?» (В $\frac{1}{4}$ *м* $\frac{3}{12}$ *м*, в $\frac{3}{4}$ *м* в 3 раза больше, т. е. $\frac{9}{12}$ *м*.)

«Измеряемые отрезки сравниваются с одной и той же единицей, следовательно, $\frac{3}{4}$ *м* $= \frac{9}{12}$ *м*, или дробь $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$». Решают устно примеры, подобные следующим:

а) Сколько восьмых долей в $\frac{1}{2}$? в $\frac{3}{4}$? в $2\frac{1}{4}$? в $3\frac{3}{4}$?

б) Сколько двенадцатых долей в $\frac{2}{5}$? в $\frac{3}{10}$? в $1\frac{1}{4}$? в $2\frac{1}{2}$?

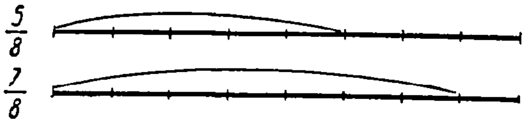
в) Сколько пятых долей в 3 единицах? В 6 единицах? 15-х долей в 4 единицах? Сотых долей в 3 единицах?

Надо предложить учащимся придумать равные между собой дроби и составить примеры на замену целого числа дробью.

Дальше переходят к сравнению дробей с равными знаменателями. Здесь следует остановиться на объяснении и дать графическую иллюстрацию.

Учитель предлагает начертить два отрезка равной длины, оба отрезка разделить на одинаковое число равных долей, например на 8 (черт. 13).

На первом отрезке отмечают $\frac{5}{8}$, на втором $\frac{7}{8}$. Сравнив дроби, учащиеся записывают: $\frac{5}{8}$ и $\frac{7}{8}$; $\frac{5}{8} < \frac{7}{8}$. Почему $\frac{5}{8}$ меньше $\frac{7}{8}$? (Каждая дробь состоит из восьмых долей одной и той же единицы, но число долей в первой дроби меньше, чем во второй, а потому дробь $\frac{5}{8} < \frac{7}{8}$.) Учитель предлагает придумать несколько



Черт. 13.

пар дробей с равными знаменателями и разными числителями для сравнения их величин. Ученики дают ответы с объяснением.

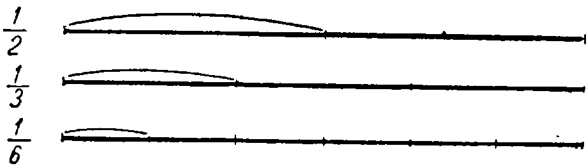
После решения нескольких примеров учитель предлагает учащимся самостоятельно сделать вывод и сформулировать правило для сравнения величины дробей с равными знаменателями.

Как правило, так и объяснение ученики повторяют на тех примерах, которые составляют самостоятельно.

Дальше рассматриваются дроби с равными числителями. На этом вопросе приходится остановиться дольше. Сравнение более крупных и более мелких долей, т. е. дробей с равными числителями, но разными знаменателями, пока учащиеся не знают приведения дробей к общему знаменателю, должно быть иллюстрировано графически.

Учитель дает для сравнения сначала дроби с числителем, равным единице.

Запишите и изобразите величины дробей на прямых (черт. 14):

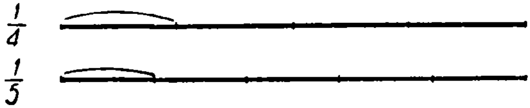


Черт. 14.

Какая дробь самая большая? $\left(\frac{1}{2}.\right)$ Почему? (Потому что эта доля крупнее всех.) А какой у этой дроби знаменатель? (Самый меньший.) Которая дробь меньше всех? Почему? (Потому что шестая доля мельче всех.) А какой у этой дроби знаменатель? (Самый большой.) Ученики делают соответствующий вывод.

Пользуясь чертежом, узнайте, во сколько раз $\frac{1}{2}$ больше $\frac{1}{6}$? Во сколько раз $\frac{1}{3}$ больше $\frac{1}{6}$?

Запишите дроби $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{5}$. Сделайте чертеж: начертите два отрезка равной длины. Что они изображают? (Единицу.) Разделите один отрезок на 4 равные части, другой — на 5 равных частей. Отметьте $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{5}$ (черт. 15).



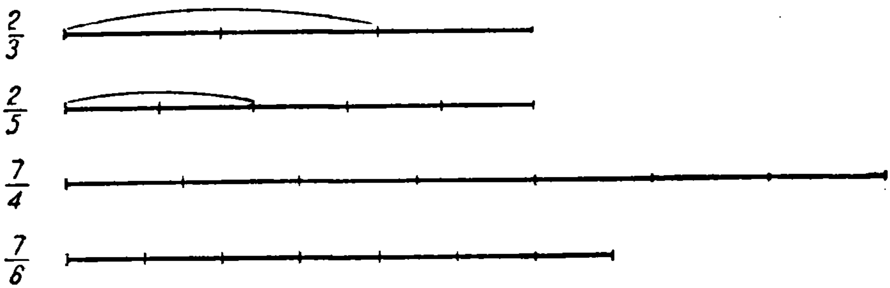
Черт. 15.

$\frac{1}{4}$ доля крупнее, чем $\frac{1}{5}$, число долей в этих дробях одинаковое. Запишите, что $\frac{1}{4}$ больше $\frac{1}{5}$. $\left(\frac{1}{4} > \frac{1}{5}.\right)$

Назовите две дроби с числителями, равными единице, и разными знаменателями. Ученики приводят примеры и объяснение, почему одна дробь больше другой.

После этой подготовки проводится дальнейшее сравнение дробей с равными числителями, но разными знаменателями. Учитель предлагает записать примеры и сделать к ним чертеж. Например:

$\frac{2}{3}$ и $\frac{2}{5}$; $\frac{7}{4}$ и $\frac{7}{6}$ (черт. 16).



Черт. 16.

Сравните $\frac{2}{3}$ и $\frac{2}{5}$. Которая дробь больше? $\left(\frac{2}{3}.\right)$ Почему? (Третьи доли крупнее пятых, а число долей в этих дробях одинаковое.) А какие у этих дробей знаменатели? (3 меньше 5.) А какие у этих дробей числители? (Одинаковые.)

Сравните $\frac{7}{4}$ и $\frac{7}{6}$. Которая дробь больше? $\left(\frac{7}{4}.\right)$ Почему? (Повторяют объяснение.)

Разобрав еще примеры сравнения дробей с равными числителями, учащиеся самостоятельно выводят правило сравнения дробей с равными числителями, но разными знаменателями. Учащиеся самостоятельно подбирают примеры и решают их с объяснением.

Сравнение величины дробей полезно провести на примерах, в которых дроби легко сравниваются с единицей или половиной.

а) $\frac{7}{8}$, $\frac{10}{11}$ и $\frac{5}{9}$; $\frac{5}{7}$, $\frac{7}{9}$ и $\frac{1}{3}$; $\frac{15}{14}$, $\frac{9}{8}$ и $\frac{7}{6}$;

б) $\frac{5}{12}$, $\frac{3}{8}$ и $\frac{7}{10}$; $\frac{7}{18}$, $\frac{3}{10}$ и $\frac{5}{14}$; $\frac{7}{12}$, $\frac{9}{16}$ и $\frac{11}{20}$;

в) Три равных отрезка разделены: один на 3, другой на 12, третий на 15 равных частей. Во сколько раз $\frac{1}{3}$ больше $\frac{1}{12}$? $\frac{1}{3}$ больше $\frac{1}{15}$? (Сделать чертеж и решить задачу.)

Цель таких упражнений — приучить учащихся сознательно разбираться в особенностях дробей, чтобы использовать эти свойства в различных преобразованиях.

Рассматривая равные между собой дроби попарно $\frac{5}{8}$ и $\frac{10}{16}$, $\frac{2}{7}$ и $\frac{4}{14}$, $\frac{3}{5}$ и $\frac{60}{100}$, замечаем, что каждая пара равных дробей обладает одним и тем же свойством: произведение числителя первой дроби на знаменатель второй равно произведению числителя второй на знаменатель первой.

В самом деле: $5 \cdot 16 = 10 \cdot 8$; $2 \cdot 14 = 4 \cdot 7$; $3 \cdot 100 = 60 \times \times 5$. Для сравнения дробей, имеющих разные числители и знаменатели, можно применить такой же способ.

а) Умножают числитель первой дроби на знаменатель второй.

б) Умножают числитель второй дроби на знаменатель первой.

Та дробь больше, числитель которой входит в большее произведение. Поясним на примерах: сравним дроби $\frac{6}{13}$ и $\frac{5}{11}$; $6 \cdot 11 > 5 \cdot 13$; следовательно, $\frac{6}{13} > \frac{5}{11}$. Сравниваем дроби $\frac{8}{15}$ и $\frac{5}{9}$; $8 \times 9 < 5 \times 15$; следовательно, $\frac{8}{15} < \frac{5}{9}$.

Для закрепления и самостоятельной работы решить № 249—263.

§ 63. Изменение величины дроби с изменением ее членов

Для объяснения изменения величины дроби в зависимости от изменения числителя и знаменателя и основного свойства дроби следует повторить изменение частного при соответствующих изменениях делимого и делителя. Этот прием применяется с указанием, что известное свойство целого частного переносится без доказательства на частное, выраженное дробью.

Изменение величины дроби в зависимости от изменения ее членов следует иллюстрировать наглядными пособиями, например, чертежом отрезков прямых линий. Все, что проделывается на классной доске, можно учащимся выполнять в своих тетрадях. Здесь весьма удобными оказываются тетради из клетчатой бумаги.

Подбирая материал по степени трудности, надо соблюдать такую последовательность:

а) увеличение дроби в несколько раз посредством умножения числителя (полученная дробь должна быть в первой стадии изучения несократима) объясняется увеличением в несколько раз числа взятых долей единицы. Примеры: $\frac{3}{5}$ увеличить в 4 раза, $\frac{5}{7}$ — в 3 раза;

б) уменьшение дроби в несколько раз посредством деления числителя (объясняют уменьшением в несколько раз числа взятых долей). Примеры: уменьшить $\frac{8}{15}$ в 4 раза, $\frac{9}{10}$ — в 3 раза;

в) уменьшение дроби в несколько раз посредством умножения знаменателя (результат должен быть в первой стадии изучения несократимой дробью) объясняется тем, что доли становятся мельче в несколько раз. Примеры: уменьшить $\frac{9}{10}$ в 2 раза, $\frac{3}{4}$ — в 5 раз;

г) увеличение дроби в несколько раз посредством деления знаменателя объясняется тем, что доли становятся крупнее в несколько раз. Примеры: увеличить $\frac{6}{25}$ в 5 раз, $\frac{3}{16}$ в 8 раз;

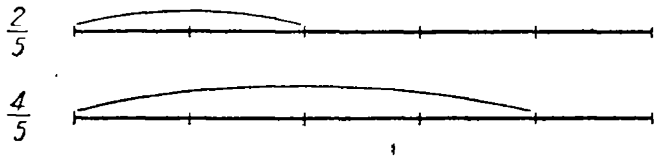
д) увеличение и уменьшение величины дроби в любое число раз (в результате возможно сокращение дроби). Примеры: $\frac{7}{8}$ увеличить в 6 раз; $\frac{15}{16}$ уменьшить в 10 раз.

Примеры решаются устно, записываются как умножение или деление числителя или знаменателя на целое число.

Объяснение первого случая можно провести примерно следующим образом:

Учитель говорит: «Начертите отрезок прямой линии, разделите его на 5 равных частей, отметьте дробь $\frac{2}{5}$ (черт. 17).

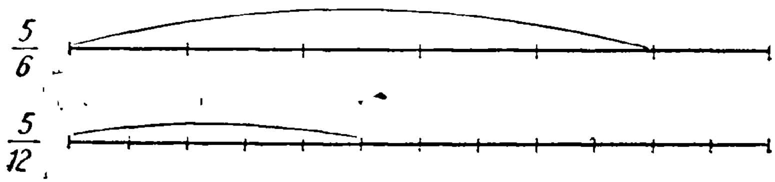
Увеличьте числитель дроби в 2 раза. Начертите отрезок такой же длины, как первый. Какая вторая дробь? $\left(\frac{4}{5}.\right)$ Отметьте на втором отрезке. Сравните отмеченные отрезки. Что скажете об их длине? (Второй больше.) Во сколько раз? (В 2 раза.) Значит, какова величина дроби $\frac{4}{5}$ сравнительно с дробью $\frac{2}{5}$? (В 2 раза больше.) Почему же дробь $\frac{4}{5}$ больше дроби $\frac{2}{5}$ в 2 раза? (Число взятых долей в этой дроби больше в 2 раза, чем в $\frac{2}{5}$, а доли одинаковые.) А как получили вторую дробь из первой? (Увеличили числитель в 2 раза.)» Записывают: $\frac{2 \cdot 2}{5} = \frac{4}{5}$. Учитель предлагает еще подоб-



Черт. 17.

ные примеры, учащиеся придумывают, решают и объясняют их решение. После этого делается вывод. «Скажите, как изменяется величина дроби, когда ее числитель увеличивается в несколько раз?» (Дробь увеличивается во столько же раз.)

Таким же способом выводится, что с уменьшением числителя в несколько раз величина дроби уменьшается во столько же раз.



Черт. 18.

При помощи чертежа и в такой же последовательности изучается вопрос об изменении величины дроби при увеличении и уменьшении знаменателя.

Изменение величины дроби при увеличении знаменателя в несколько раз рассматривается сначала на чертеже. Учащиеся чертят два равных отрезка и делят один на 6 равных частей, другой — на 12 (черт. 18).

Откладывают $\frac{5}{6}$ и $\frac{5}{12}$. Записывают, как получилась дробь $\frac{5}{12}$ из дроби $\frac{5}{6}$. Сравнивают их величину ($\frac{5}{12}$ в 2 раза меньше, чем $\frac{5}{6}$, и объясняют, почему дробь $\frac{5}{6}$ уменьшилась в 2 раза: число долей одинаковое, но двенадцатые доли в 2 раза мельче, чем шестые). Учащиеся составляют примеры на увеличение знаменателя в несколько раз и решают их с объяснением. После этого формулируется вывод об изменении величины дроби при увеличении знаменателя в несколько раз.

Точно так же рассматривается изменение величины дроби при уменьшении знаменателя в несколько раз и формулируется вывод.

Повторяют, как изменяется величина дроби при изменении числителя в несколько раз.

Учитель обращает внимание учащихся на то, что величина дроби изменяется так же, как ее числитель. Повторяют и объясняют, что это значит.

Затем повторяют, как изменяется величина дроби при изменении знаменателя: при увеличении знаменателя в несколько раз величина дроби во столько же раз уменьшается, при уменьшении знаменателя — увеличивается.

Решаются примеры двух видов:

1) Как изменится величина дроби $\frac{5}{8}$, если

а) увеличить ее числитель в 2 раза (или умножить числитель на 2)?

б) уменьшить знаменатель в 2 раза (или разделить его на 2)?

Ответ: дробь увеличится в 2 раза, получится $\frac{10}{8}$ или $\frac{5}{4}$.

2) Как изменится величина дроби $\frac{6}{7}$, если

а) числитель ее уменьшить в 3 раза (или разделить на 3)?

б) знаменатель ее увеличить в 3 раза (или умножить на 3)?

Ответ: дробь уменьшится в 3 раза, получится $\frac{2}{7}$ или $\frac{6}{21}$.

После решения нескольких подобных примеров учащиеся делают вывод:

«Чтобы увеличить дробь в несколько раз, надо или увеличить в это число раз ее числитель (умножить числитель на данное число) или уменьшить в то же число раз знаменатель (иначе: разделить его на данное число).

Чтобы уменьшить дробь в несколько раз, надо или уменьшить в это число раз ее числитель (разделить числитель на данное число) или увеличить в это число раз знаменатель (умножить знаменатель на данное число)».

На изменение величины дроби даются примеры в виде следующих:

а) Увеличить в 3 раза дроби:

$$\frac{1}{2}, \ \frac{5}{7}, \ \frac{2}{9}, \ \frac{11}{15}.$$

б) Уменьшить в 4 раза следующие дроби:

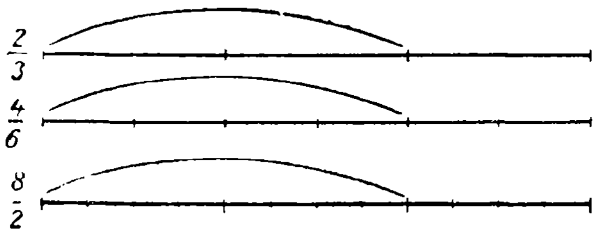
$$\frac{8}{9}, \ \frac{12}{17}, \ \frac{5}{12}, \ \frac{7}{11}.$$

в) Придумать самостоятельно такие дроби, чтобы для их уменьшения надо было делить числитель или для увеличения дробей делить знаменатель. Для закрепления и самостоятельной работы учащимся можно предложить № 264—287.

§ 64. Основное свойство дроби

Основное свойство дроби выводится из рассмотрения примеров на увеличение или уменьшение величины дроби в связи с увеличением и уменьшением ее членов в несколько раз. Рассмотрение примеров иллюстрируется чертежом, на котором учащиеся проверяют, что равные дроби могут быть выражены в различных видах.

Взять, например, три отрезка равной длины. Один делится на 3 равные части, другой на 6, третий на 12. Отмечаются дроби: $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{8}{12}$ (черт. 19).



Черт. 19.

Учащиеся объясняют, почему дробь $\frac{2}{3}$ равна $\frac{4}{6}$. Число долей второй дроби в 2 раза больше, чем первой, но взятые доли вдвое мельче. Объяснение может быть и другого содержания: во второй дроби числитель увеличен в 2 раза, отчего дробь увеличилась в 2 раза; но оттого что знаменатель увеличен также в 2 раза, дробь уменьшилась в 2 раза. В результате двух изменений дробь сохранила свою величину, но приняла более громоздкий вид, члены ее выражены бо́льшими числами. Получается запись: $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}=\frac{8}{12}$ и $\frac{8}{12}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$. Во втором ряду дробей равенство $\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$ объясняется последовательным изменением вида дроби при уменьшении числителя и знаменателя в одинаковое число раз.

После решения примеров делаются выводы: «Величина дроби не изменится, если числитель и знаменатель увеличить в одинаковое число раз; величина дроби не изменится, если числитель и знаменатель уменьшить в одинаковое число раз».

Для усвоения выводов решаются примеры:

1) дробь $\frac{2}{3}$ выразить в десятых, пятнадцатых и т. д. долях.

2) в каких долях можно выразить $\frac{5}{6}$?

3) можно ли дробь $\frac{3}{4}$ выразить в 60-тых долях? и т. д.

4) в каких более крупных долях можно выразить $\frac{2}{4}$ и $\frac{10}{18}$, $\frac{15}{20}$, $\frac{12}{36}$?

Для самостоятельной работы взять № 288, 289.

§ 65. Сокращение дробей

При изучении сокращения дробей надо добиться, чтобы учащиеся поняли а) на каком свойстве дробей основано их сокращение; б) цель этого преобразования (вид дроби упрощается, так как числитель и знаменатель выражаются меньшими числами); в) сокращение дробей возможно только тогда, когда члены дроби имеют общие делители.

Программой по арифметике для V—VI классов рекомендуется производить сокращение последовательно, применяя признаки делимости.

Со своей стороны, считая такое последовательное сокращение разумным в школьных условиях, автор все же полагал бы полезным поощрять тех учащихся, которые сокращают дроби на произведения общих делителей.

В начале изучения этого вопроса следует применять наглядность для обоснования сокращения дробей.

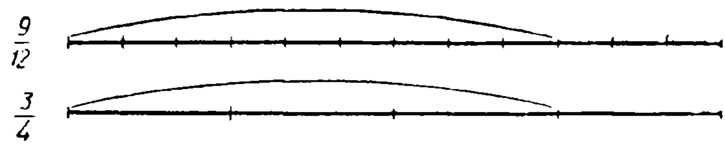
Дается пример: «Начертите два равных отрезка, один разделите на 12 равных частей, другой — на 4 (черт. 20). Отметьте дробь $\frac{9}{12}$, отложите равную дробь четвертыми долями $\left(\frac{3}{4}\right)$. Почему эти дроби равны между собой? (В первой дроби доли мельче в 3 раза, но число их больше в 3 раза.) Запишите эти дроби $\left(\frac{9}{12}=\frac{3}{4}\right)$. Что сделано с числителем и знаменателем дроби $\frac{9}{12}$? (Разделены на 3.) Как объяснить, почему величина дроби не изменилась?(От деления числителя на 3 дробь в 3 раза уменьшилась, от деления знаменателя на 3 она в 3 раза увеличилась, после двух делений в результате величина дроби не изменилась.) Такое преобразование называют сокращением дроби».

Затем разбирается несколько примеров:

$$\frac{12}{16}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4};\quad \frac{36}{54}=\frac{18}{27}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}\ \text{и т. д.}$$

«Сравните полученные дроби с данными. Какая дробь проще? $\frac{12}{16}$ или $\frac{3}{4}$? $\frac{36}{54}$ или $\frac{2}{3}$? Для чего же делается сокращение дроби? (Чтобы упростить дробь.) Как делается сокращение дроби?» (Числитель и знаменатель делятся на общий делитель.)

Дальше идут упражнения на сокращение дробей путем постепенного деления членов дроби на общие делители.



Черт. 20.

После этого идет закрепление навыков путем решения примеров. Подбирая примеры, необходимо наряду с сократимыми дробями давать дроби несократимые, чтобы учащиеся приучились в простейших случаях различать без вычислений сократимые и несократимые дроби. Надо следить, чтобы сокращение дроби доводилось до конца, т. е. до получения несократимой дроби.

Сокращение дробей можно применять для сравнения величины дробей. В примерах могут быть такие вопросы: а) какая дробь больше $\frac{5}{8}$ или $\frac{625}{1000}$?

б) во сколько раз первая дробь больше или меньше второй: $\frac{2}{5}$ и $\frac{180}{450}$?

в) расположить дроби по порядку их величины, начиная с большей: $\frac{48}{84}$, $\frac{63}{147}$, $\frac{100}{140}$. Для закрепления и самостоятельной работы можно дать упражнения № 290 — 299.

§ 66. Приведение дробей к наименьшему общему знаменателю

Для уяснения цели приведения дробей к общему знаменателю могут служить задачи на сравнение величины дробей с разными числителями и знаменателями.

К этому надо подойти постепенно, дав сначала примеры на повторение: сравнить дроби а) с равными знаменателями и б) с равными числителями. Когда учащимся придется сравнивать дроби с разными числителями и знаменателями, они будут поставлены в необходимость сделать одинаковыми или числители, или знаменатели дробей. Здесь учитель разъясняет учащимся, что обыкновенно делают одинаковыми знаменатели, хотя иногда бывает удобнее сравнивать дроби, если сделать одинаковыми числители. Урок можно провести примерно по такому плану:

а) Учитель при решении устных примеров показывает, что дроби приводятся к наименьшему общему знаменателю для сравнения их величин.

б) Выясняется, что общий знаменатель есть наименьшее общее кратное всех знаменателей.

в) Первый случай приведения дробей к наименьшему общему знаменателю, когда один из знаменателей является НОК всех знаменателей.

г) Второй случай, когда знаменатели имеют общие делители.

д) Третий случай, когда знаменатели — числа взаимно простые.

а) Учитель дает пример из пройденного: сравнить величины дробей $\frac{7}{8}$ и $\frac{3}{8}$. Ученики объясняют, почему $\frac{7}{8} > \frac{3}{8}$. Потом сравниваются дроби $\frac{2}{9}$ и $\frac{2}{7}$. Ученики также на основании пройденного объясняют, что $\frac{2}{9} < \frac{2}{7}$. Переходят к дробям с разными числителями и знаменателями. «Сравните дроби $\frac{5}{6}$ и $\frac{7}{12}$. Что надо сделать для сравнения этих дробей? (Сделать их знаменатели одинаковыми.) Что надо сделать с знаменателем 6, чтобы получилось 12? (Надо умножить 6 на 2.) Как изменится величина дроби $\frac{5}{6}$, если знаменатель умножим на 2? (Уменьшится в 2 раза. Будет $\frac{5}{12}$.) Что надо сделать с полученной дробью, чтобы величина дроби $\frac{5}{6}$ не изменилась? (Умножить числитель на 2.) Какая получается дробь? $\left(\frac{10}{12}.\right)$ Какова величина дроби $\frac{10}{12}$ сравнительно с дробью $\frac{5}{6}$? (Величина дробей одинакова.) Сравните $\frac{10}{12}$ и $\frac{7}{12}$. $\left(\frac{7}{12} < \frac{10}{12}.\right)$ Что сделали мы с дробью $\frac{5}{6}$? (Выразили в 12-х долях.) Теперь доли в обеих дробях одинаковые, знаменатели дробей одинаковые». Учитель сообщает: «В таких случаях говорят, что привели дроби к одному знаменателю или к общему знаменателю. Приведите к общему знаменателю $\frac{3}{5}$ и $\frac{7}{10}$; $\frac{4}{15}$ и $\frac{2}{5}$».

б) Мы привели $\frac{5}{6}$ и $\frac{7}{12}$ к общему знаменателю, оказалось, что $\frac{5}{6} = \frac{10}{12}$. Нельзя ли подобрать еще число, большее 12, чтобы оно служило общим знаменателем? (Можно, например, 24, 36, ...) Запишите, какие получатся дроби, если их общим знаменателем будет 24 $\left(\frac{20}{24}\text{ и }\frac{14}{24}\right)$. Это преобразование дробей $\frac{5}{6}$ и $\frac{7}{12}$ учащиеся объясняют следующим образом: в единице $\frac{6}{6}$ или $\frac{24}{24}$, следовательно, в $\frac{1}{6}$ содержится $\frac{4}{24}$, а в $\frac{5}{6}$ — в 5 раз больше, или $\frac{20}{24}$. Возьмите для общего знаменателя число больше 24 и запишите $\left(\frac{5}{6}=\frac{30}{36};\quad \frac{7}{12}=\right.$ $\left.=\frac{21}{36}\right)$. Какое число удобнее взять общим знаменателем: 12, 24 или 36? (Число 12.) Почему? (В числителе получаются меньшие числа.) Учитель сообщает, что дроби надо приводить к наименьшему общему знаменателю, т. е. $\frac{5}{6}=\frac{10}{12}$.

в) Как называется число 12 для 12 и 6? (Наименьшим общим кратным.)

Приведите к наименьшему общему знаменателю $\frac{3}{10}$ и $\frac{5}{6}$.

Какое число будет наименьшим общим знаменателем? (НОК 10-ти и 6-ти есть 30.)

г) Дальше переходят к выводу правила приведения дробей к наименьшему общему знаменателю. Рассматривают три случая. Во всех случаях при нахождении наименьшего общего знаменателя следует настойчиво различать два положения в вычислениях: деление наименьшего общего знаменателя на знаменатель каждой дроби и умножение числителя и знаменателя каждой дроби на полученное частное.

Учитель предлагает учащимся вспомнить, какие случаи нахождения НОК им известны.

Потом переходит к объяснению первого случая приведения дробей к наименьшему общему знаменателю, когда самый большой из знаменателей является НОК всех знаменателей.

Сначала повторяют из пройденного. Для чего приводят дроби к наименьшему общему знаменателю? (Чтобы сравнивать их величину.). Как называется наименьший общий знаменатель по отношению к знаменателям остальных дробей? (НОК.) Значит, какое число надо найти для знаменателей дробей? (НОК.) Возьмите дроби $\frac{9}{20}$ и $\frac{4}{5}$. Какое число надо найти для знаменателей 20 и 5? (НОК.) Какое число будет НОК для 20 и 5? (20.) На какое число надо умножить 5, чтобы получить 20? (На 4.) Как это узнали? (20 разделили на 5.) Что надо сделать с числителем и знаменателем дроби, чтобы знаменатель дроби равнялся 20? (Умножить на 4 знаменатель и числитель.) Почему? (Потому, что величина дроби не должна измениться.) Какой дроби равна дробь $\frac{4}{5}$? $\left(\frac{16}{20}.\right)$

Какая же дробь больше: $\frac{9}{20}$ или $\frac{4}{5}$?

Разбирают таким же образом пример: $\frac{5}{18}$ и $\frac{2}{3}$.

Теперь повторите, что мы делали для приведения дробей к наименьшему общему знаменателю.

Повторяют: 1) Нашли НОК для знаменателей;

2) Делили наименьший общий знаменатель на знаменатель второй дроби;

3) Умножили числитель и знаменатель второй дроби на частное от деления 18 на 3.

Приведем к НОЗ дроби $\frac{7}{15}$, $\frac{11}{60}$, $\frac{9}{20}$. Как поступите? (Найдем НОК для 15, 60 и 20.) Какое это будет число? (60.) Что узнаем дальше? (На какое число надо умножить числитель и знаменатель каждой дроби, чтобы у всех дробей был знаменатель 60.) Как это узнать? (Общий знаменатель разделим на знаменатель каждой дроби.) На какое число умножим числитель и знаменатель дроби $\frac{7}{15}$? (На 4.) Как получилось число 4? (60 : 15.) Это число 4 называется дополнительным множителем.

А какой будет дополнительный множитель для дроби $\frac{9}{20}$? (3.) Как его найти? (Надо 60 : 20.) Значит, как называется то число, на которое умножаются числитель и знаменатель каждой дроби при приведении дробей к НОЗ? (Дополнительный множитель.) Почему умножают и числитель и знаменатель на один и тот же дополнительный множитель? (Потому что величина дроби не должна при этом измениться.) Какие получились дроби после приведения их к наименьшему общему знаменателю? $\left(\frac{28}{60}, \frac{11}{60}, \frac{27}{60}.\right)$ Расположите дроби $\frac{7}{15}$, $\frac{11}{60}$, $\frac{9}{20}$ по порядку их величины, начиная с большей.

Приведите к НОЗ дроби: $\frac{3}{40}$, $\frac{7}{50}$, $\frac{17}{200}$, $\frac{13}{25}$. Решают самостоятельно 1—2 примера на этот случай приведения дробей к НОЗ. Решения примеров учащиеся объясняют подробно.

После этого делается вывод правила. Скажите, как приводили дроби к наименьшему общему знаменателю. 1) Находили наименьшее общее кратное знаменателей, 2) делили общий знаменатель на знаменатель каждой дроби для нахождения дополнительного множителя, 3) умножали числитель и знаменатель каждой дроби на дополнительный множитель.

Как вы находили НОК знаменателей? (Один из знаменателей делился на знаменатели остальных дробей.) Какое число служило общим знаменателем? (Наибольший знаменатель.)

Придумайте примеры на аналогичный случай приведения дробей к НОЗ и сделайте вычисления.

д) По усвоении первого случая приведения дробей к общему знаменателю переходят ко второму случаю, когда ни один знаменатель не делится на остальные, но знаменатели — числа не взаимно простые.

При объяснении этого случая надо рассматривать прежде всего такие примеры, в которых хотя наибольший знаменатель не является общим кратным всех знаменателей, но из него получается НОЗ путем умножения на 2, 3, 4. Например: чтобы найти НОЗ для дробей $\frac{4}{9}$ и $\frac{7}{12}$, число 12 умножаем постепенно на 2 (24), на 3 (36); число 36 и будет НОЗ для данных дробей, так как оно делится на 9 и на 12.

$$\frac{4}{9}=\frac{4\cdot4}{9\cdot4}=\frac{16}{36};\quad \frac{7}{12}=\frac{7\cdot3}{12\cdot3}=\frac{21}{36}.$$

Для дробей $\frac{7}{10}$, $\frac{11}{15}$, $\frac{5}{12}$ НОЗ = 60. Действительно, наибольший знаменатель 15 умножим поочередно на 2 (30), на 3 (45), на 4 (60). Последнее число разделится на все данные знаменатели. Получаем:

$$\frac{7}{10}=\frac{7\cdot6}{10\cdot6}=\frac{42}{60};\quad \frac{11}{15}=\frac{11\cdot4}{15\cdot4}=\frac{44}{60};\quad \frac{5\cdot5}{12\cdot5}=\frac{25}{60}.$$

Решение этих примеров помогает учащимся уяснить, что НОЗ есть НОК всех знаменателей, а также усвоить процесс нахождения дополнительных множителей.

Пользование этим способом на примерах более сложных привело бы к слишком громоздкому решению. Поэтому необходимо сообщить учащимся общий прием нахождения НОЗ с помощью разложения знаменателей на простые множители. С этой целью преподаватель для решения новым способом берет один из решенных примеров или предлагает решить новый пример. Разбирают пример: привести к НОЗ дроби $\frac{7}{20}$, $\frac{5}{18}$, $\frac{11}{45}$.

В чем особенность знаменателей этих дробей? (Ни один знаменатель не делится на другой.) Будем приводить эти дроби к общему знаменателю. Какое число надо сначала найти? (НОК всех знаменателей.) Как найти НОК чисел 20, 18 и 45? (Учащиеся формулируют общий прием нахождения НОК для чисел не взаимно простых). Какому числу оно равно? (180). Что надо делать дальше? (Найти дополнительный множитель для каждой дроби.) Как их найти? (Надо общий знаменатель разделить на знаменатель каждой дроби.) Потом что сделаете? (Числитель и знаменатель каждой дроби умножим на дополнительный множитель.) Сделайте вычисления: $180:20=9$;

$$\frac{7\cdot9}{20\cdot9}=\frac{63}{180};\quad 180:18=10;\quad \frac{5\cdot10}{18\cdot10}=\frac{50}{180};\quad 180:45=4;\quad \frac{11\cdot4}{45\cdot4}=\frac{44}{180}.$$

Придумайте сами подобные примеры и приведите дроби к общему знаменателю.

Третий случай приведения дробей к общему знаменателю отличается от первых двух только способом нахождения НОК, так как применяется к знаменателям взаимно простым.

Урок начинается с повторения общего приема приведения дробей к общему знаменателю.

Приведите к общему знаменателю $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{4}{5}$. На который из рассмотренных случаев приведения дробей похож данный случай? (На второй.) Почему? (Ни один знаменатель не делится на другие.) Как называются такие числа, как 3, 4, 5? (Взаимно простыми.) Какое число находили мы сначала, когда приводили дроби к общему знаменателю в первом и втором случае? (НОК.) Припомните, как находится НОК для чисел взаимно простых? (Надо эти числа перемножить.) Что надо делать дальше? (Найти дополнительные множители.) Потом что делают? (Числитель и знаменатель каждой дроби умножают на дополнительный множитель. Какому числу равен дополнительный множитель знаменателя каждой дроби в этом случае? (Произведению знаменателей остальных дробей.) На какое число умножают числитель и знаменатель каждой дроби в этом случае? (На произведение знаменателей остальных дробей.) Дальше объяснение повторяется на одном-двух подобных примерах.

$$\frac{5}{11}, \frac{2}{7}, \frac{3}{4}; \frac{5}{13}, \frac{1}{2}, \frac{4}{5}; \frac{4}{9}, \frac{3}{14}, \frac{1}{5}.$$

Придумайте примеры приведения дробей к общему знаменателю, когда знаменатели — числа взаимно простые.

После изучения трех приведенных случаев выводится общее правило приведения дробей к общему знаменателю.

Что мы делали для приведения дробей к общему знаменателю во всех трех случаях?

1. Находили НОК знаменателей.

2. Находили дополнительный множитель для знаменателя каждой дроби.

3. Умножали числитель и знаменатель каждой дроби на дополнительный множитель.

Чем отличаются три случая приведения дробей к общему знаменателю? (Нахождением НОК.) Какое число служило общим знаменателем в первом случае? (Наибольший знаменатель.) В третьем случае? (Произведение знаменателей.) Как поступали во втором случае? (Находили общий знаменатель разложением знаменателей на простые множители.)

При решении примеров встречаются такие, когда нет надобности разлагать на множители все знаменатели; например, для приведения к общему знаменателю дробей $\frac{17}{90}$, $\frac{19}{21}$, $\frac{19}{30}$ разлагаются на множители только 90 и 21, так как всякое кратное 90 — кратно также 30. НОК $= 630$; $\frac{119}{630}$, $\frac{570}{630}$, $\frac{399}{630}$.

Для закрепления и самостоятельной работы использовать № 300—309.

§ 67. Сложение

Изучение сложения дробей надо начать с повторения сложения целых чисел; при этом выясняется, что складывать можно только однородные числа, т. е. отвлеченные с отвлеченными, именованные с именованными, выраженными в однородных мерах, что если при именованных числах стоят названия единиц, то эти названия переносятся в сумму без изменения, складываются только числа; затем устанавливается, что в дроби знаменатель является лишь названием долей; отсюда вывод, что при сложении и вычитании дробей их надо сначала выразить в одинаковых долях, т. е. привести к одному знаменателю, затем сложить или вычесть только числители, так как знаменатели являются названиями дробей.

Для разъяснения способа сложения и вычитания смешанных чисел полезно провести параллель между смешанными числами и составными именованными числами.

Урок ведется примерно следующим образом. Даются примеры на возможное и невозможное сложение: 375 + 215; 14 *км* + 51 *кг*; 89—11 *см*. Ученики объясняют, что второй пример нельзя решить, так как нельзя складывать километры с килограммами, третий пример также не решается (сантиметры вычитаются из отвлеченного числа). Учитель объясняет: «Во втором и третьем примерах даны числа разнородные, а складывать и вычитать можно какие числа? (Однородные.) Сложите теперь 3 часа и 5 часов. (Получилось 8 часов.) Название единиц изменилось или нет? (Не изменилось.) Что же вы складывали? (Числа 3 и 5.) Какие же величины 3 часа и 5 часов — однородные или неоднородные? (Однородные.) Повторите, какие числа складывали и как складывали? (Складывали однородные числа, название их не изменилось.)

Возьмем теперь сложение дробей: $\frac{4}{15}+\frac{7}{15}$. Однородны эти дроби или разнородны? (Однородны.) Почему? (В них доли называются одинаково.)» В случае затруднений предлагается написать этот пример с названиями долей вместо знаменателя: 4 пятнадцатых +7 пятнадцатых = 11 пятнадцатых. Как решали пример: 3 часа + 5 часов = 8 часов? (Читая эти примеры, делают ударение на числах, а не названиях.) Устно вычисляют еще 2—3 примера на сложение дробей с равными знаменателями.

Потом переходят к сложению дробей с разными знаменателями. «Сложим $\frac{4}{15}+\frac{3}{10}$. Напишите эти дроби с названиями: 4 пятнадцатых +3 десятых. Однородны эти дроби или разнородны? (Разнородны.) Как сделать их однородными? (Надо привести дроби к общему знаменателю.) Приведите и запишите $\left(\frac{8}{30}+\frac{9}{30}\right)$. Что означает знаменатель 30? (Название долей.) Что же надо складывать? (Числа 8 и 9.) Почему? (Потому что складывают числа долей, т. е. числители 8 и 9.)»

В случае затруднений пишут дроби с названиями долей вместо знаменателей: 8 тридцатых +9 тридцатых = 17 тридцатых.

Теперь напишите иначе $\left(\frac{8}{30}+\frac{9}{30}=\frac{17}{30}\right)$. Сложите дроби $\frac{5}{12}+\frac{3}{8}$. Делают вычисления и подробно объясняют. Повторите, как складывали дроби. (Привели к одному знаменателю, сложили числители, подписали общий знаменатель.) Скажите, для чего мы приводили дроби к общему знаменателю? (Чтобы сделать доли одинаковыми.) А почему это сделали? Складывать можно только числители. (Потому что числители показывают число долей.)

Далее дается несколько упражнений на сложение дробей. Каждый пример учащиеся объясняют.

Переходя к сложению смешанных чисел, учитель напоминает сложение составных именованных чисел. Дается пример в виде: 2 *м* 15 *см* + 4 *м* 30 *см*. Ученики объясняют: складываем сначала 15 *см* + 30 *см* = 45 *см*, потом 2 *м* + 4 *м* = 6 *м*, всего 6 *м* 45 *см*. «А можно начать сложение с метров? (Можно, но удобнее начать с сантиметров.) Почему? (Ученики объясняют.) Сложите числа $4\frac{2}{5}+7\frac{3}{10}$. Как называются такие числа? (Смешанные числа.) Почему они так называются? (Ученики объясняют.) На какие числа похожи смешанные числа? (На составные именованные.) Как сложить данные смешанные числа?» (Сначала сложить целые числа, а потом дроби.)

Чтобы яснее была аналогия, можно данный пример решать, изменив запись: 2 *м* 15 *см* + 4 *м* 30 *см*, это все равно, что $2\frac{15}{100}$ *м* + $4\frac{30}{100}$ *м*; тем самым мы составные именованные числа выражаем смешанными числами.

Скажите, как складываются смешанные числа.

(Ученики повторяют вывод.)

При решении примеров на сложение необходимо следить за правильностью записи вычислений учащимися: разделительные черты дробей должны стоять одна против другой, знак действия и знак равенства — против разделительной черты, например:

$$\frac{7}{15}+\frac{4}{15}=\frac{11}{15}.$$

Следующий этап в записи сложения — запись после приведения дробей к общему знаменателю; в целях уплотнения записи общий знаменатель пишется под общей чертой:

$$\frac{7}{15}+\frac{3}{10}=\frac{14+9}{30}=\frac{23}{30}.$$

Дополнительные множители вначале можно надписывать.

Большое разнообразие наблюдается в записи сложения смешанных чисел. Применяют в этом случае двоякий прием: а) складывают отдельно дроби и отдельно целые числа; б) не делают этого разделения. Приведем пример записи сложения смешанных чисел, дроби которых имеют разные знаменатели:

$$85\frac{13}{40}+18\frac{3}{8}+92\frac{5}{16}.$$

Общий знаменатель должен по возможности находиться по соображению. Поэтому, умножив наибольший знаменатель 40 на 2, найдем НОК всех знаменателей, равный 80.

Более краткая запись:

$$85\frac{13}{40}+18\frac{3}{8}+92\frac{5}{16}=195\,\frac{26+30+25}{80}=195\frac{81}{80}=196\frac{1}{80};$$

$$15\frac{11}{75}+22\frac{23}{60}+1\frac{9}{40}=36\,\frac{88+230+135}{600}=38\frac{453}{600}=38\frac{151}{200}.$$

$$\begin{array}{r}
75=\phantom{2\cdot{}}3\cdot5\cdot5\\
60=2\cdot2\cdot3\cdot5\\
40=2\cdot2\cdot2\cdot5\\
\hline
\text{НОК}=2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot5\cdot5=600
\end{array}$$

В ходе вычислений с дробями должны быть сделаны все возможные упрощения: сокращение дроби, исключение целого числа из неправильной дроби.

При выполнении сложения смешанных чисел учащиеся иногда обращают эти числа в неправильные дроби. Нецелесообразность этого надо показать на разборе нескольких примеров, например:

$$2128\frac{5}{12}+1391\frac{3}{14}\ \text{или}\ 3067\frac{3}{11}+4096\frac{3}{13}\ \text{и т. п.}$$

В сложении дробей должны быть рассмотрены все случаи нахождения НОК знаменателей: а) наибольший знаменатель является НОК всех знаменателей.

Пример:

$$\frac{3}{8}+\frac{7}{40}+\frac{1}{20}=\frac{15+7+2}{40}=\frac{24}{40}=\frac{3}{5}.$$

б) Наибольший знаменатель не является кратным других знаменателей, но путем его умножения на 2, 3, 4,... легко находится НОЗ. Пример:

$$\frac{2}{9}+\frac{5}{18}+\frac{1}{24};\quad 24\cdot3=72;$$

$$\frac{16+20+3}{72}=\frac{39}{72}=\frac{13}{24}.$$

в) Общий случай нахождения НОЗ путем разложения знаменателей на множители.

г) Знаменатели дробей — числа взаимно простые.

Пример:

$$\frac{3}{8}+\frac{4}{25}=\frac{75+32}{200}=\frac{107}{200}.$$

При изучении сложения дробей попутно выясняются основные свойства слагаемых суммы дробей. Здесь надо показать, что для дробных чисел сохраняются все законы и свойства сложения, имеющие место для целых чисел. Повторяется все известное о сложении целых чисел, о свойствах суммы, об изменении суммы в зависимости от изменения слагаемых, о проверке сложения (сложением.)

Ставится прежде всего вопрос: всегда ли выполнимо сложение? Учащиеся приводят примеры на правило сложения дробей с равными знаменателями, потом с разными знаменателями. В том и другом случае сложение сводится к сложению числителей дробей, т. е. к сложению целых чисел. Следовательно, сложение дробей всегда возможно.

Затем учащиеся припоминают переместительное и сочетательное свойства суммы целых чисел, приводят примеры. После этого даются примеры на сложение дробей, при решении которых надо применить перемещение слагаемых и их группировку. Учащиеся видят, что применение этих свойств суммы упрощает и сокращает вычисления. Берется пример:

$$5\frac{4}{9}+7\frac{8}{25}+1\frac{11}{36}+3\frac{3}{100}.$$

Решая пример общим способом, учащиеся будут писать:

$$5\frac{4}{9}+7\frac{8}{25}+1\frac{11}{36}+3\frac{3}{100}=16\frac{400+288+275+27}{900}=16\frac{990}{900}=$$

$$=16\frac{11}{10}=17\frac{1}{10}.$$

По окончании решения учитель предлагает учащимся рассмотреть данные слагаемые и переместить их более удобным способом.

Учащиеся, вероятно, наметят такой порядок:

$5\frac{4}{9}+1\frac{11}{36}+7\frac{8}{25}+3\frac{3}{100}$ — на основании переместительного свойства суммы. Дальше на основании сочетательного свойства суммы применяют группировку:

$$\left(5\frac{4}{9}+1\frac{11}{36}\right)+\left(7\frac{8}{25}+3\frac{3}{100}\right)=6\frac{27}{36}+10\frac{35}{100}=6\frac{3}{4}+10\frac{7}{20}=$$

$$=16\frac{15+7}{20}=16\frac{11}{10}=17\frac{1}{10}.$$

Все вычисления могут быть сделаны устно или полуписьменно. Таким образом, выясняется, что сумма дробей не зависит от порядка слагаемых и что слагаемые можно соединить в группы.

На решении примеров повторяют также: а) прибавление числа к сумме и б) прибавление суммы к числу.

а) Решается пример: $\left(12\frac{2}{3}+24\frac{5}{7}\right)+5\frac{1}{3}$.

Вычисляем в том порядке, как показывают скобки: $12\frac{2}{3}+24\frac{5}{7}=36\frac{14+15}{21}=37\frac{8}{21}$; $37\frac{8}{21}+5\frac{1}{3}=42\frac{8+7}{21}=42\frac{5}{7}$, переходим к другому способу, который легче и быстрее ведет к цели: чтобы прибавить к сумме число, прибавляют число $5\frac{1}{3}$ к слагаемому $12\frac{2}{3}$. Получается запись:

$$\left(12\frac{2}{3}+5\frac{1}{3}\right)+24\frac{5}{7}=42\frac{5}{7}.$$

б) Берется пример: $5\frac{3}{8}+\left(8\frac{7}{15}+3\frac{5}{8}\right)$; решается сначала общим способом: $8\frac{7}{15}+3\frac{5}{8}=11\frac{56+75}{120}=12\frac{11}{120}$; $5\frac{3}{8}+12\frac{11}{120}=$ $=17\frac{56}{120}=17\frac{7}{15}$; потом применяют правило прибавления суммы: $5\frac{3}{8}+8\frac{7}{15}+3\frac{5}{8}$. На основании переместительного и сочетательного свойств получается:

$$5\frac{3}{8}+3\frac{5}{8}+8\frac{7}{15}=9+8\frac{7}{15}=17\frac{7}{15}.$$

Повторив проверку сложения целых чисел сложением, учащиеся решают пример на сложение дробей с проверкой его сложением. Например: выполнить сложение:

$$1\frac{19}{20}+2\frac{3}{5}+\frac{1}{6}+4\frac{5}{8}+\frac{11}{24}=7\frac{114+72+20+75+55}{120}+7\frac{336}{120}=$$
$$=7\frac{14}{5}=9\frac{4}{5}.$$

Для проверки сложения изменяют порядок слагаемых:

$$\left(\frac{1}{6}+\frac{11}{24}\right)+\left(1\frac{19}{20}+2\frac{3}{5}\right)+4\frac{5}{8}=\frac{15^{3}}{24}+4\frac{11}{20}+4\frac{5}{8}=\left(\frac{5}{8}+4\frac{5}{8}\right)+$$
$$+4\frac{11}{20}=5\frac{1}{4}+4\frac{11}{20}=9\frac{4}{5}.$$

Для закрепления и самостоятельной работы учащимся предложить № 310—339.

§ 68. Вычитание

Тема «Вычитание обыкновенных дробей» излагается по такому же плану, как и сложение дробей. При прохождении этого раздела надо предоставить учащимся больше самостоятельности, так как приемы, известные им из сложения, здесь повторяются.

Изучение вычитания начинается с повторения вычитания целых чисел. Рассматриваются задачи (или примеры) на вычитание, содержащие один из трех вопросов, решаемых вычитанием (найти остаток, уменьшить на несколько единиц, сравнить числа в разностном отношении).

При вычитании целых чисел выясняется, что вычитание не всегда возможно.

Повторяется определение вычитания, как действия, обратного сложению.

Сначала рассматривается вычитание дробей с равными знаменателями. Дается, например, задача: «Самолет пролетел свой маршрут за $6\frac{7}{12}$ часа. За это время на остановки ушло $\frac{5}{12}$ часа. Сколько времени самолет был в полете?»

Под руководством учителя учащиеся выясняют, что надо найти число, которое, будучи прибавлено к $\frac{5}{12}$, дало бы $6\frac{7}{12}$, т. е. по сумме и слагаемому отыскивается второе слагаемое, а такой вопрос решается вычитанием. Разобрав 2—3 примера на вычитание одноименных долей, учащиеся выводят правило. (Рассуждения при выводе правила такие же, как при выводе правила сложения.)

В примеры дробей с равными знаменателями надо включить вычитание дроби из неправильной дроби, равной единице, например: $\frac{16}{16}-\frac{9}{16}=\frac{7}{16}$, чтобы подготовить к вычитанию из единицы.

Необходимо, особенно в начале разбора примеров, чтобы решение примеров объяснялось действием над долями. В случае затруднений можно, как и при сложении, дать для решения и объяснения пример на именованные числа, записать вычитание дробей не со знаменателем, а с названиями долей (как при сложении).

Дальше рассматривается вычитание дробей с разными знаменателями. В примерах этой группы должны быть даны все случаи нахождения НОЗ. Сначала в задачах и примерах должны быть даны правильные дроби. Из разбора 2—3 примеров учащиеся выводят правило вычитания дробей с разными знаменателями. Потом переходят к вычитанию смешанных чисел. Так же, как и в сложении, для выяснения приемов вычитания можно приводить примеры вычитания составных именованных чисел. Решив 2—3 примера, учащиеся выводят правило вычитания смешанных чисел.

Материал можно расположить примерно в таком порядке: вычитание целого числа или правильной дроби из смешанного числа, вычитание правильной дроби из целого и смешанного числа, вычитание из целого числа смешанного числа, вычитание смешанных чисел, совместное сложение и вычитание. На вычитании целого числа или дроби из смешанного числа долго останавливаться нет надобности: примеры эти очень легки.

Вычитание правильной дроби из целого числа сводится к вычитанию дроби из единицы. В примерах этого вида должны быть вопросы на нахождение дополнения дроби до единицы, решаемые устно. Вычитание правильной дроби из целого числа также решается устно с записью только условия и результата, например:

$$27 - \frac{5}{9} = 26\frac{4}{9}.$$

Примеры этой группы подготовляют учащихся к вычитанию из целого числа смешанного числа. При решении этих примеров вначале делается подробная запись, необходимая для выяснения правила вычитания смешанного числа, например:

$$52 - 13\frac{4}{7} = 52 - \left(13 + \frac{4}{7}\right) = 52 - 13 - \frac{4}{7} = 39 - \frac{4}{7} = 38\frac{3}{7}.$$

После записи 2 — 3 примеров вычисления делаются устно, записывается только результат:

$$52 - 13\frac{4}{7} = 38\frac{3}{7}.$$

Примеры на вычитание правильной дроби из смешанного числа располагаются в таком порядке:

а) сначала вычитаемая дробь меньше дроби, имеющейся в уменьшаемом; б) более трудный случай, когда вычитаемая дробь больше, чем дробь в уменьшаемом.

а) $41\frac{7}{8} - \frac{3}{8} = 41\frac{4}{8} = 41\frac{1}{2}$; $29\frac{7}{12} - \frac{1}{6} =$

$= 29\frac{7}{12} - \frac{2}{12} = 29\frac{5}{12}$.

б) $21\frac{5}{12} - \frac{7}{12} = 20\frac{17}{12} - \frac{7}{12} = 20\frac{10}{12} = 20\frac{5}{6}$;

$48\frac{5}{14} - \frac{3}{21} = 48\frac{15}{42} - \frac{16}{42} = 47\frac{41}{42}$.

Запись может быть также следующая:

а) $17\frac{17}{20} - \frac{11}{15} = 17\frac{51-44}{60} = 17\frac{7}{60}$;

б) $21\frac{5}{12} - \frac{7}{12} = 21\frac{5-7}{12} = 20\frac{17-7}{12} = 20\frac{10}{12} = 20\frac{5}{6}$;

в) $48\frac{5}{14} - \frac{8}{21} = 48\frac{15-16}{42} = 47\frac{57-16}{42} = 47\frac{41}{42}$.

Покажем пример записи вычитания смешанных чисел:

$$35\frac{7}{20} - 18\frac{7}{12} = 35\frac{21}{60} - 18\frac{35}{60} = 34\frac{81}{60} - 18\frac{35}{60} = 16\frac{46}{60} = 16\frac{23}{30}.$$

Как и в записи сложения, в записи вычитания смешанных чисел наблюдается неверная расстановка учащимися знаков равенства. Например:

$$15\frac{3}{10}-8\frac{11}{18}=15-8=7\frac{27-55}{90}=6\frac{117-55}{90}=6\frac{62}{90}=6\frac{31}{45}.$$

Чтобы показать нецелесообразность обращения смешанных чисел при вычитании в неправильные дроби (нередко практикуется учащимися), учитель дает примеры с большими целыми числами, обращение которых в неправильные дроби затруднило бы учащихся, например: $25\,108\frac{31}{145}-18596\frac{51}{156}$ и т. д.

Для закрепления и самостоятельной работы учащимся надо дать примеры № 340—363 на сложение и вычитание дробей.

При решении примеров на вычитание выясняется, что свойства разности целых чисел распространяются и на дробные числа. Даются примеры на применение правил: а) вычитания из числа суммы дробей, б) прибавления к числу разности дробей, в) вычитания из числа разности дробей.

Рассмотрим примеры: а) $15\frac{11}{15}-\left(8\frac{2}{15}+2\frac{1}{10}\right)=5\frac{1}{2}$.

Сначала вычисления делаются в том порядке, как намечено скобками:

1) $8\frac{2}{15}+2\frac{1}{10}=10\frac{4+3}{30}=10\frac{7}{30}$; $15\frac{11}{15}-10\frac{7}{30}=5\frac{22-7}{30}=5\frac{1}{2}$;

потом вычитают из числа одно слагаемое за другим:

2) $15\frac{11}{15}-8\frac{2}{15}-2\frac{1}{10}=7\frac{3}{5}-2\frac{1}{10}=5\frac{1}{2}$.

Второй способ вычисления легче выполнить устно.

б) $16\frac{13}{28}+\left(10\frac{4}{13}-7\frac{9}{28}\right)$; вычисление по общим правилам дает:

$$10\frac{4}{13}-7\frac{9}{28}=3\frac{112-117}{364}=2\frac{359}{364};\quad 16\frac{13}{28}+2\frac{359}{364}=$$
$$=18\frac{169+359}{364}=18\frac{528}{364}=18\frac{132}{91}=19\frac{41}{91}.$$

К тому же примеру применяем правило: «Чтобы прибавить к числу разность, надо прибавить уменьшаемое и вычесть вычитаемое (или в обратном порядке)». Решаем тот же пример:

$$16\frac{13}{28}+\left(10\frac{4}{13}-7\frac{9}{28}\right)=\left(16\frac{13}{28}-7\frac{9}{28}\right)+10\frac{4}{13}=9\frac{1}{7}+10\frac{4}{13}=$$
$$=19\frac{41}{91}.$$

Второй способ дает возможность сделать вычисления устно.

в) $16\frac{1}{30}-\left(8\frac{7}{8}-2\frac{29}{30}\right)$; $\quad 8\frac{7}{8}-2\frac{29}{30}=6\frac{105-116}{120}=5\frac{109}{120}$;
$16\frac{1}{30}-5\frac{109}{120}=11\frac{4-109}{120}=10\frac{15}{120}=10\frac{1}{8}$.

Но для того чтобы вычесть из числа разность, достаточно вычесть из числа уменьшаемое и прибавить к результату вычитаемое (или в обратном порядке): $16\frac{1}{30}+2\frac{29}{30}=19$; $\quad 19-8\frac{7}{8}=10\frac{1}{8}$. Вычисление легко выполняется устно.

При решении примеров на сложение и вычитание дробей должна быть повторена проверка сложения вычитанием, а также проверка вычитания сложением и вычитанием. Возьмем пример на сложение: $8\frac{4}{9}+11\frac{8}{15}+10\frac{11}{36}=30\frac{17}{60}$. Сделаем проверку: $8\frac{44}{9}+10\frac{11}{36}=18\frac{3}{4}$; $\quad 30\frac{17}{60}-18\frac{3}{4}=11\frac{8}{15}$. Сделаем проверку вычитания: а) сложением, б) вычитанием.

$$10\frac{9}{100}-1\frac{17}{48}=9\frac{108-425}{1200}=8\frac{883}{1200}.$$

а) $8\frac{883}{1200}+1\frac{17}{48}=9\frac{883+425}{1200}=9\frac{1308}{1200}=10\frac{108}{1200}=10\frac{9}{100}$;

б) $10\frac{9}{100}-8\frac{883}{1200}=2\frac{108-883}{1200}=1\frac{425}{1200}=1\frac{17}{48}$.

Повторив с учащимися на целых числах, как изменяется сумма при изменении слагаемых, учитель дает примеры и задачи на изменение суммы дробей.

Например:

1. Как изменится граница прямоугольного поля, если длину его увеличить на $2\frac{1}{4}$ *км*, а ширину — на $1\frac{1}{2}$ *км*?

2. Турист предполагал пройти в 3 дня определенный маршрут, но прошел в первый день на $6\frac{3}{8}$ *км* больше, во второй — на $7\frac{7}{12}$ *км* меньше и в третий — на $2\frac{1}{10}$ *км* больше, чем рассчитывал проходить в каждый из этих дней. На сколько пройденное расстояние больше или меньше намеченного по плану?

Точно так же повторяется на дробных числах изменение разности.

Изменение суммы и разности можно применять для упрощения вычислений при сложении и вычитании. Примеры:

Выполнить сложение, дополняя дробные части слагаемых до единицы, затем соответственно уменьшая сумму:

1) $21\frac{15}{16}+7\frac{15}{16}=22+8-\frac{1}{16}-\frac{1}{16}=30-\frac{1}{8}=29\frac{7}{8}$;

2) $11\frac{99}{100}+14\frac{91}{100}=12+15-\frac{1}{100}-\frac{9}{100}=27-\frac{1}{10}=26\frac{9}{10}$.

Выполнить вычитание, округляя вычитаемое до единицы и соответственно увеличивая разность:

$$8\frac{1}{2}-3\frac{7}{8}=8\frac{1}{2}-4+\frac{1}{8}=4\frac{1}{2}+\frac{1}{8}=4\frac{5}{8};$$

$$79\frac{3}{4}-60\frac{19}{20}-\frac{9}{10}=79\frac{3}{4}-61+\frac{1}{20}-\frac{9}{10}=18\frac{3}{4}+\frac{1}{20}-\frac{9}{10}=$$

$$=18\frac{4}{5}-1+\frac{1}{10}=17\frac{9}{10}.$$

При решении примеров на сложение и вычитание дробей повторяется зависимость между членами сложения и вычитания.

Примеры:

а) $x+\frac{2}{9}=\frac{7}{12}$; $x=\frac{7}{12}-\frac{2}{9}=\frac{13}{36}$;

б) $\frac{3}{14}+x=\frac{13}{35}$; $x=\frac{26}{70}-\frac{15}{70}=\frac{11}{70}$.

Здесь применяется определение одного слагаемого по известной сумме и другому слагаемому:

в) $x-\frac{5}{36}=\frac{13}{36}$; $x=\frac{5}{36}+\frac{13}{36}=\frac{1}{2}$; $\frac{49}{72}-x=\frac{5}{48}$;

$x=\frac{49}{72}-\frac{5}{48}=\frac{196-30}{288}=\frac{166}{288}=\frac{83}{144}$.

В этих примерах определяется неизвестное уменьшаемое и вычитаемое по остальным элементам вычитания.

Ряд сложений и вычитаний имеет свойство: «Результат ряда сложений и вычитаний не меняется от перемены порядка членов ряда». Примеры:

а) $20\frac{7}{15}-10\frac{1}{3}-3\frac{2}{15}=20\frac{7}{15}-3\frac{2}{15}-10\frac{1}{3}=17\frac{1}{3}-$

$$-10\frac{1}{3}=7;$$

б) $21\frac{1}{2}-\left(6\frac{3}{4}+9\frac{1}{3}\right)-4\frac{1}{2}=21\frac{1}{2}-4\frac{1}{2}-\left(6\frac{3}{4}+9\frac{1}{3}\right)=$

$$=17-16\frac{1}{12}=\frac{11}{12};$$

в) $21\frac{1}{2} - \left(6\frac{3}{4} + 9\frac{1}{3} - 4\frac{1}{2}\right) = 21\frac{1}{2} - \left(6\frac{3}{4} - 4\frac{1}{2} + 9\frac{1}{3}\right)$ (переместительное свойство ряда сложений и вычитаний $= 21\frac{1}{2} - \left(2\frac{1}{4} + 9\frac{1}{3}\right) = 21\frac{1}{2} - 2\frac{1}{4} - 9\frac{1}{3}$ (вычитание суммы из числа) $= 19\frac{1}{4} - 9\frac{1}{3} = 10\frac{3-4}{12} = 9\frac{11}{12}$;

г) $21\frac{1}{2} - 6\frac{3}{4} + \left(9\frac{1}{3} - 6\frac{1}{2}\right) = 14\frac{3}{4} + 2\frac{5}{6} =$

$$= 16\frac{9+10}{12} = 17\frac{7}{12};$$

д) $21\frac{1}{2} - 6\frac{3}{4} - \left(9\frac{1}{3} + 4\frac{1}{2}\right) = 14\frac{3}{4} - 13\frac{5}{6} = \frac{21-10}{12} = \frac{11}{12}$;

е) $47\frac{2}{21} - \left\{\left(1\frac{5}{6} + 2\frac{13}{24}\right) + \left[27\frac{13}{30} - \left(15\frac{5}{12} - 12\frac{13}{20}\right)\right]\right\}$.

Запись последнего примера может быть различная, например:

1) $1\frac{5}{6} + 2\frac{13}{24} = 3\frac{20+13}{24} = 3\frac{11}{8} = 4\frac{3}{8}$;

2) $15\frac{5}{12} - 12\frac{13}{20} = 3\frac{25-39}{60} = 2\frac{85-39}{60} = 2\frac{23}{30}$;

3) $27\frac{13}{30} - 2\frac{23}{30} = 25\frac{13-23}{30} = 24\frac{2}{3}$;

4) $4\frac{3}{8} + 24\frac{2}{3} = 28\frac{9+16}{24} = 29\frac{1}{24}$;

5) $47\frac{28}{21} - 29\frac{17}{24} = 18\frac{16-7}{168} = 18\frac{9}{168} = 18\frac{3}{56}$

или (пример решается полуписьменно):

$$47\frac{2}{21} - \left\{\left(1\frac{5}{6} + 2\frac{13}{24}\right) + \left[27\frac{13}{30} - \left(15\frac{5}{12} - 12\frac{13}{20}\right)\right]\right\} = 47\frac{2}{21} - \left\{4\frac{3}{8} + \left[27\frac{13}{30} - 3\frac{25-39}{60}\right]\right\} = 47\frac{2}{21} - \left\{4\frac{3}{8} + \left[27\frac{13}{30} - 2\frac{23}{30}\right]\right\} = 47\frac{2}{21} - \left\{4\frac{3}{8} + 24\frac{2}{3}\right\} = 47\frac{2}{21} - 29\frac{1}{24} = 18\frac{16-7}{168} = 18\frac{9}{168} = 18\frac{3}{56}.$$

$$\left[x + \left(7\frac{1}{2} - 5\frac{3}{4}\right)\right] - \left(7\frac{3}{8} - 6\frac{11}{12} + 3\frac{1}{4}\right) = 2\frac{3}{8}.$$

Пример решается на основании вывода о зависимости между элементами сложения и вычитания.

$\left[x + 1\frac{3}{4}\right] - \left(7\frac{3}{8} + 3\frac{1}{4} - 6\frac{11}{12}\right) = 2\frac{3}{8}$ (переместительное свойство членов ряда сложений и вычитаний) $\left[x + 1\frac{3}{4}\right] - \left(10\frac{5}{8} - 6\frac{11}{12}\right) =$

$= 2\frac{3}{8}$; $\left(x + 1\frac{3}{4}\right) - 3\frac{39-22}{24} = 2\frac{3}{8}$; $\left(x + 1\frac{3}{4}\right) - 3\frac{17}{24} = 2\frac{3}{8}$;

$x + 1\frac{3}{4} = 3\frac{17}{24} + 2\frac{9}{24} = 5\frac{26}{24} = 6\frac{1}{12}$ (уменьшаемое равно сумме вычитаемого и остатка). $x = 6\frac{1}{12} - 1\frac{3}{4} = 4\frac{13-9}{12} = 4\frac{1}{3}$ (одно слагаемое равно сумме без другого слагаемого).

Полученный результат проверяется. Вместо x подставляем $4\frac{1}{3}$ и выполняем все вычисления:

$$4\frac{1}{3} + \left(7\frac{1}{2} - 5\frac{3}{4}\right) - \left(7\frac{3}{8} + 3\frac{1}{4} - 6\frac{11}{12}\right) = 4\frac{1}{3} + 1\frac{3}{4} -$$

$$- \left(10\frac{5}{8} - 6\frac{11}{12}\right) = 5\frac{13}{12} - 4\frac{15-22}{24} = 6\frac{1}{12} - 3\frac{17}{24} = 3\frac{2-17}{24} = 2\frac{26-17}{24} =$$

$$= 2\frac{9}{24} = 2\frac{3}{8}.$$

Проверка показывает, что ответ $x = 4\frac{1}{3}$ найден правильно. Для закрепления и самостоятельной работы дать примеры № 364—382.

§ 69. Умножение дробей

Умножение и деление дробей относятся к числу трудных отделов арифметики.

Наиболее трудным вопросом в умножении и делении дробей является умножение и деление на дробь, так как здесь учащимся впервые приходится встретиться с новым пониманием действий умножения и деления.

План изучения умножения дробей программой определен в такой последовательности:

I. Умножение дроби и смешанного числа на целое число.
II. Нахождение одной и нескольких частей числа.
III. Умножение целого числа на дробь.
IV. Умножение дроби на дробь.
V. Умножение смешанного числа на смешанное число.
VI. Повторение свойств умножения в процессе изучения умножения дробей.

Так как логически достаточное обоснование умножения дроби на целое число ничем не отличается от деления дроби на целое число, то, достаточно подробно останавливаясь на умножении, мы по аналогии будем рассматривать справедливость этого правила и на делении дробей.

1. Умножение и деление дроби на целое число. Решают задачу: «Расход бензина на 1 *км* пути автомобиля «Волга» составлял 7 *л*. Сколько бензина израсходовал автомобиль на расстоянии 10 *км*?»

«Как узнать расход бензина на расстоянии 10 *км*? (Надо $\frac{7}{50}$ *л* умножить на 10.) Почему? Какое число приходится множить на какое? (Дробь на целое число). Что значит $\frac{7}{50}$ умножить на 10? (Повторить $\frac{7}{50}$ слагаемым 10 раз.) Запишите это $\left(\frac{7}{50}\cdot 10 = \overbrace{\frac{7}{50}+\frac{7}{50}+\frac{7}{50}+\ldots}^{10 \text{ раз}}\right)$. Сколько получится? Что надо сделать с этой неправильной дробью? (Исключить целое число $1\frac{2}{5}$.) Сравните полученное произведение $\frac{70}{50}$ с данными числами. Какое число не изменилось? (Знаменатель 50.) Из каких сомножителей получилось 70? (Из 7 и 10). В результате какого действия получилось 70? (Умножением 7 на 10). Что же сделано при умножении $\frac{7}{50}$ на 10?» (Числитель 7 умножен на целое число 10 и оставлен тот же знаменатель.) Разбирают таким же образом 2—3 примера, после чего учащиеся выводят правило умножения дроби на целое число.

Подбирая первые примеры для вывода правила, надо следить, чтобы числитель и знаменатель не имели общих множителей, чтобы в произведении получалась несократимая дробь. При таком подборе первых примеров учащиеся не отвлекаются сокращением дроби от главной цели рассуждений.

После того как правило умножения будет усвоено, в упражнениях надо брать такие числа, которые допускают сокращение множителя со знаменателем, например:

$$\frac{4}{15}\cdot 10 = \frac{4\cdot 10}{15} = \frac{4\cdot 2}{3} = 2\frac{2}{3}.$$

Подобные примеры с сокращением должны подробно разбираться. Учащиеся должны понимать, что $4\cdot 10$ есть числитель дроби, выраженный целым числом, 15 — знаменатель дроби; что для упрощения ответа числитель $4\cdot 10$ и знаменатель 15 должны разделиться на одно и то же число 5, причем величина дроби $\frac{4\cdot 10}{15}$ не изменится. Но для деления на 5 числителя, т. е. произведения $4\cdot 10$, надо разделить один из сомножителей, именно 10, отчего произведение $4\cdot 10$ уменьшится в 5 раз. В ответе должны быть сделаны все упрощения: сокращение и исключение целого числа из неправильной дроби.

После уяснения и запоминания правил умножения на целое число разобрать случаи деления дроби на целое.

Чтобы приучить учащихся делать предварительное сокращение в произведении, надо дать учащимся примеры дробей, выраженных большими числами, умножаемых на большие числа, например: $\frac{11}{49} \cdot 343 = \frac{11 \cdot 343}{49} = 11 \cdot 7 = 77$. Выполнив умножение без предварительного сокращения $\left(\text{получив } \frac{3773}{49}\right)$, учащиеся видят, насколько проще вычислить с предварительным сокращением.

В умножении дробей на целые числа должны быть взяты и примеры, где множитель равен знаменателю дроби, например:

$$\frac{55}{256} \cdot 256 = \frac{55 \cdot 256}{256} = 55.$$

Такие примеры должны решаться устно. Когда учащиеся переходят к умножению смешанного числа на целое число, то сначала на целых числах повторяют переместительное и сочетательное свойства умножения. Потом предлагается, например, задача: «Ведро вмещает приблизительно $12\frac{3}{10}$ *л* воды. Сколько воды в 4 ведрах?»

Учащиеся решают задачу сначала сложением равных слагаемых:

$$12\frac{3}{10} + 12\frac{3}{10} + 12\frac{3}{10} + 12\frac{3}{10}.$$

Из сложения смешанных чисел известно, что целые числа складываются с целыми числами, дроби с дробями. Получается запись: $\left(12 + \frac{3}{10}\right) + \left(12 + \frac{3}{10}\right) + \left(12 + \frac{3}{10}\right) + \left(12 + \frac{3}{10}\right) = (12 + 12 + 12 + 12) + \left(\frac{3}{10} + \frac{3}{10} + \frac{3}{10} + \frac{3}{10}\right)$. Учащиеся объясняют решение применением сочетательного и переместительного свойств суммы:

$$12 \cdot 4 + \frac{3}{10} \cdot 4 = 48 + \frac{12}{10} = 49\frac{2}{10} = 49\frac{1}{5}.$$

Таким образом, от сложения равных слагаемых приходят к умножению смешанного числа на целое число:

$$12\frac{3}{10} \cdot 4 = 12 \cdot 4 + \frac{3}{10} \cdot 4 = 48 + \frac{12}{10} = 49\frac{1}{5}.$$

Решив несколько подобных примеров, учащиеся самостоятельно выводят правило умножения смешанного числа на целое число: как отдельное умножение целых чисел и дробей на целое число.

Указанный способ умножения смешанного числа на целое число короче и проще, чем практикуемое еще некоторыми учителями обращение смешанного числа в неправильную дробь и умножение на целое число этой неправильной дроби.

Из решения примеров на умножение дробей и смешанных чисел на целое число учащиеся самостоятельно выводят, что в этом случае умножения произведение всегда больше множимого, что умножение дробей на целые числа применяется в задачах двух видов: а) когда находится сумма нескольких равных слагаемых, б) когда данное число требуется увеличить в несколько раз.

Умножение дроби на целое число, т. е. увеличение дроби в несколько раз, можно в некоторых случаях выполнить проще и короче, разделив знаменатель на целое число, например:

$$\frac{8}{15} \cdot 5 = \frac{8}{15 : 5} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}.$$

Этот способ умножения учащиеся должны применять особенно в устных вычислениях.

Из разбора примеров учащиеся выводят: умножение дроби посредством умножения числителя на целое число всегда возможно, деление же знаменателя применимо сравнительно редко, но в этих случаях оно обязательно.

Для закрепления изучаемого вопроса учащиеся должны решить из задачника № 383—392.

2. Нахождение дроби данного числа (части числа). Чтобы подготовить учащихся к наиболее трудному случаю умножения — умножению на дробь, напоминают известное из курса начальной школы нахождение дроби числа (части числа) делением или двумя действиями. Сначала решаются задачи и примеры на нахождение одной части числа: $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{8}$ и т. п. Например:

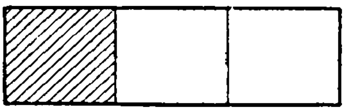
«Поле занимает 720 *га*; $\frac{1}{40}$ его занята горохом. Какая площадь занята горохом?»

Решение задачи объясняется так: чтобы найти $\frac{1}{40}$ часть площади 720 *га*, надо 720 разделить на 40 равных частей:

720 *га* : 40 = 18 *га*; 720 : 40 = 18 (*га*).

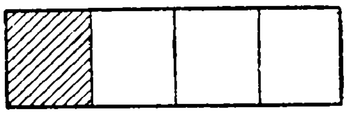
Учащиеся сами придумывают задачи и примеры аналогичного содержания, объясняют и решают их. Решение примеров и задач желательно сопровождать графической иллюстрацией. Чертят, например, прямоугольник на клетчатой бумаге. На нем отмечают как дроби с числителем 1, т. е. одну какую-либо часть целого, так и дроби вида $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ и т. д. (черт. 21, 22, 23, 24).

$\frac{1}{3}$



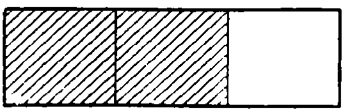
Черт. 21.

$\frac{1}{4}$



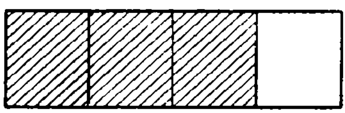
Черт. 22.

$\frac{2}{3}$



Черт. 23.

$\frac{3}{4}$



Черт. 24.

Дальше переходят к задачам и примерам на отыскание нескольких частей целого. Дается, например, задача:

«Скорость полета стрижа 1600 *м* в минуту, скворца $\frac{3}{4}$ и ястреба $\frac{7}{16}$ скорости полета стрижа. Найти скорость полета скворца и ястреба в минуту».

Решение. Надо найти $\frac{3}{4}$ от числа 1600 *м* и $\frac{7}{16}$ от этого же числа. Сколько четвертых частей числа умеем найти? $\left(\frac{1}{4}.\right)$ Как это сделать? (1600 *м* разделить на 4 равные части.) Сколько получится? (1600 *м* : 4 = 400 *м*). Как найти $\frac{3}{4}$ от числа 1600 *м*? (Надо 400 *м* умножить на 3). Почему? $\left(\frac{3}{4}\text{ больше }\frac{1}{4}\text{ в 3 раза}\right)$. Сколько получится? (400 *м* · 3 = 1200 *м*.) Что показывает число 1200 *м*? (Скорость полета скворца в минуту.) Повторите, как решали первый вопрос задачи, и запишите решение. Получается запись: $\frac{1}{4}$ от числа 1600 *м* составляет $\frac{1600\ м}{4} = 400$ *м*. $\frac{3}{4}$ от числа 1600 *м* составляют 400 *м* · 3 = 1200 *м*.

Решение второго вопроса задачи проводится так же:

$$1600\ м : 16 = 100\ м$$
$$100\ м \times 7 = 700\ м$$

Применяя правила увеличения и уменьшения дробей в несколько раз, учащиеся могут решать задачи на нахождение части (одной и нескольких частей) от дробного числа. Учащиеся осуществляют наглядно нахождение одной и нескольких долей от дроби.

Находят $\frac{1}{3}$ от $\frac{1}{4}$.

Решение: Чтобы найти $\frac{1}{3}$ от $\frac{1}{4}$ единицы, надо $\frac{1}{4}$ уменьшить в 3 раза. Для этого знаменатель 4 умножается на 3, получается $\frac{1}{4 \cdot 3} = \frac{1}{12}$.

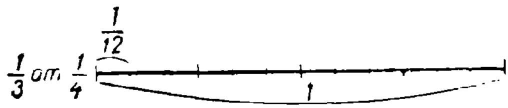
Пример: найти $\frac{2}{3}$ от $\frac{3}{4}$ — объясняется так:

$$\frac{2}{5}\text{ от }\frac{3}{4}.$$

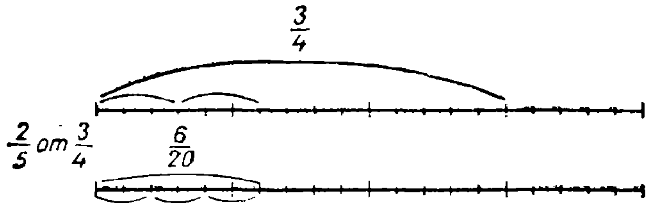
Найдем $\frac{1}{5}$ от $\frac{3}{4}$, для этого $\frac{3}{4}$ уменьшим в 5 раз, умножив знаменатель 4 на 5. Получается запись $\frac{1}{5}$ от $\frac{3}{4}$ составляет

$\frac{3}{4 \cdot 5} = \frac{3}{20}$. Чтобы найти $\frac{2}{5}$ от $\frac{3}{4}$, надо $\frac{3}{4 \cdot 5}$ увеличить в 2 раза, умножив числитель на 2; $\frac{2}{5}$ от $\frac{3}{4}$ составляют $\frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 5} = \frac{3}{10}$.

После этого решаются примеры и задачи на нахождение дроби от смешанного числа. Например: найти $\frac{2}{5}$ от $13\frac{2}{3}$. В этом случае вычисления можно сделать разными способами:



Черт. 25.



Черт. 26.

а) можно применить общий способ, обратив $13\frac{1}{3}$ в неправильную дробь и рассуждая, как показано выше, а именно:

$\frac{1}{5}$ от $\frac{41}{3}$ равна $\frac{41}{3 \cdot 5}$ (уменьшили дробь $\frac{41}{3}$ в 5 раз); $\frac{2}{5}$ от $\frac{41}{3}$ равны $\frac{41 \cdot 2}{3 \cdot 5} = \frac{82}{15} = 5\frac{7}{15}$ (увеличили дробь $\frac{41}{3 \cdot 5}$ в 2 раза);

б) другой прием:

$\frac{2}{5}$ от $13\frac{2}{3}$ равны $\left(\frac{2}{5} \text{ от } 10\right) + \left(\frac{2}{5} \text{ от } 3\frac{2}{3}\right) = 4 + \left(\frac{2}{5} \text{ от } \frac{11}{3}\right)$;

$\frac{2}{5}$ от $\frac{11}{3}$ равны $\frac{11 \cdot 2}{3 \cdot 5} = \frac{22}{15} = 1\frac{7}{15}$; $4 + 1\frac{7}{15} = 5\frac{7}{15}$.

Для закрепления и самостоятельной работы учащиеся могут решить примеры № 393—406.

3. Умножение целого числа на дробь. К определению умножения на дробь можно прийти путем решения практической задачи, смысл которой требует умножения, причем изменение числовых данных во множителе представляет возможность перейти от целых, смешанных чисел к правильным дробям.

Решается, например, задача: «Самолет пролетает 360 *км* в час.

Какое расстояние он пролетит за 6 часов? за 2 часа? за $\frac{1}{2}$ часа? за $\frac{1}{4}$ часа? за $\frac{1}{5}$ часа? за $\frac{2}{3}$ часа? за $\frac{5}{6}$ часа?»

Как получить ответ на первый и второй вопросы? (Надо 360 *км* умножить на 6, на 2.) Как узнать, какое расстояние самолет пролетел за $\frac{1}{2}$ часа? (366 *км* умножить на $\frac{1}{2}$.) Сколько километров самолет пролетает за $\frac{1}{2}$ часа? (180 *км*.) Значит, если 360 *км* умножить на $\frac{1}{2}$, то сколько получится? (180 *км*.) Почему мы сделали умножение? (Чтобы узнать расстояние, надо скорость умножить на число, выражающее время.) Как узнать, какое расстояние самолет пролетел за $\frac{1}{4}$ часа? (Надо 360 *км* умножить на $\frac{1}{4}$.) А как сосчитать, какое расстояние самолет пролетит за $\frac{1}{4}$ часа? (Надо 360 *км* : 4 = 90 *км*), 90 *км* — это какая часть 360? $\left(\frac{1}{4}.\right)$ Значит, что мы узнали, умножив 360 на $\frac{1}{4}$? $\left(\frac{1}{4}\right.$ от 360.) Теперь как узнать, какое расстояние пролетит самолет за $\frac{1}{5}$ часа? (Надо $360 \cdot \frac{1}{5}$.) Почему? (Потому что расстояние определяется так: скорость множится на число, выражающее время.) Если учащиеся затрудняются назвать эти вычисления умножением, можно $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{5}$ часа выразить в минутах и вычислить расстояние по скорости в минуту (6 *км* $\times$ 15 = 90 *км*, 6 *км* $\times$ 12 = 72 *км*). Сколько же получится, если 360 *км* $\times \frac{1}{5}$? (72 *км*.) Как получилось 72 *км*? (360 разделили на знаменатель 5.)

Сравним теперь умножение на целые числа и на дроби $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$. Мы множили 360 на 6. Что это означает? (Повторить 360 слагаемым 6 раз.) Потом мы множим 360 на $\frac{1}{4}$. Можно ли сказать, что мы брали 360 слагаемым $\frac{1}{4}$ раза. (Нельзя.) Что же означает умножить 360 на $\frac{1}{4}$? (За $\frac{1}{4}$ часа самолет пролетает не 360 *км*, а 90 *км*.) 90 *км* составляет какую часть 360 *км*? $\left(\frac{1}{4}\right.$ часть.) Следовательно, что мы нашли, умножив 360 на $\frac{1}{4}$? (Нашли $\frac{1}{4}$ от 360). Решаются устные примеры: умножить 600 на $\frac{1}{3}$, 420 на $\frac{1}{7}$, 500 на $\frac{1}{4}$, а также примеры, где ответ не является целым числом: $12 \cdot \frac{1}{5}$, $20 \cdot \frac{1}{3}$ и т. д. Итак, что значит умножить число на $\frac{1}{3}$, на $\frac{1}{4}$? (Найти $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{4}$ часть числа.) Как же умножить целое число на $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{4}$? (Надо это число разделить на знаменатель 3, 7, 4.) Теперь как узнать, какое расстояние самолет пролетел за $\frac{2}{3}$ часа? (Надо 360 *км* $\cdot \frac{2}{3}$.) Почему? (Потому что узнаем расстояние, а для этого надо умножить скорость на число, выражающее время.) Если бы самолет летел $\frac{1}{3}$ часа, сколько километров пролетел бы он? ($360 \cdot \frac{1}{3}$ или $360 : 3 = 120$ (*км*).) Сколько же он пролетит в $\frac{2}{3}$ часа? (В 2 раза больше, т. е. 120 *км* $\cdot\, 2 = 240$ *км*.) Какое действие мы сделали над числами 360 и $\frac{2}{3}$? $\left(360 \cdot \frac{2}{3}.\right)$ Как выполнить это умножение? ($360 : 3 \cdot 2$.) Что же узнаем, когда множим 360 на $\frac{2}{3}$? (Сначала $\frac{1}{3}$ от 360, потом $\frac{2}{3}$ от 360.) Как узнать, какое расстояние самолет пролетит в $\frac{5}{6}$ часа? (Надо $360 \cdot \frac{5}{6}$.) Как это вычислить? (Надо узнать $\frac{1}{6}$ от 360; $360 : 6 = 60$; потом узнать $\frac{5}{6}$ от 360; $60 \cdot 5 = 300$.) Какое число мы узнали, умножив 360 на $\frac{5}{6}$? (Узнали $\frac{5}{6}$ от 360.) Повторите, как умножили 360 на $\frac{5}{6}$. (Делили 360 на 6, результат множили на 5.) Как же умножается целое число на дробь? (Надо целое число разделить на знаменатель дроби и полученное число умножить на числитель дроби.)

Предлагается вычислить пример, когда целое число не делится на знаменатель. В каком другом порядке можно сделать вычисления? (Сначала целое число умножить на числитель, потом полученное произведение разделить на знаменатель дроби.)

Нужно подбирать такие примеры умножения целого числа на дробь, в которых возможно сокращение и чтобы ответ не был целым числом: $15 \cdot \frac{5}{6}$, $24 \cdot \frac{7}{16}$ и т. д.

Сравнивая результат умножения целого числа на правильную дробь с множимым, учащиеся устанавливают, что произведение меньше множимого.

Предложить учащимся самостоятельно объяснить, почему произведение целого числа на правильную дробь меньше множимого.

В случае, если учащиеся не смогут дать объяснение, учитель напоминает объяснение умножения на дробь.

Для самостоятельной работы учащимся дать упражнение № 410.

4. Умножение дроби на дробь. Для обоснования правила умножения дроби на дробь желательно решить несколько задач, из решения которых учащиеся выведут правила.

Задача. 1. Вес рафинада, получаемого из сахарного песка, составляет $\frac{13}{15}$ веса сахарного песка. Сколько рафинада получится из $\frac{4}{5}$ *т* сахарного песка?

Как ответить на вопрос задачи? $\left(\text{Надо } \frac{4}{5}\ т \text{ умножить на } \frac{13}{15}.\right)$ Почему? $\left(\text{Надо найти } \frac{13}{15} \text{ частей от } \frac{4}{5}\ т\text{, а дробь } \frac{13}{15} \text{ от числа находится умножением этого числа на } \frac{13}{15}.\right)$ Как будете находить $\frac{13}{15}$ частей от $\frac{4}{5}$ *т*? $\left(\text{Найдем сначала } \frac{1}{15} \text{ от } \frac{4}{5}\ т.\right)$ Как найти $\frac{1}{15}$ от $\frac{4}{5}$ *т*? $\left(\text{Надо } \frac{4}{5} \text{ уменьшить в 15 раз.}\right)$ Как дробь уменьшить в 15 раз? (Надо знаменатель умножить на 15.) Запишите это $\left(\frac{4}{5 \cdot 15}\right)$. Что найдете дальше? $\left(\frac{13}{15} \text{ от } \frac{4}{5}.\right)$ Как это сделать? $\left(\text{Дробь } \frac{4}{5 \cdot 15} \text{ надо увеличить в 13 раз.}\right)$ Как это сделать? (Надо числитель умножить на 13.) Запишите это $\left(\frac{4 \cdot 13}{5 \cdot 15}\right)$. Запишите, что было дано и что получилось $\left(\frac{4}{5} \cdot \frac{13}{15} = \frac{4 \cdot 13}{5 \cdot 15}\right)$. Какой результат? $\left(\frac{52}{75}\ т.\right)$

Задача 2. В семенах льна содержится $\frac{3}{10}$ (по весу) жира. Сколько жира в $\frac{7}{25}$ *т* семян льна, взятых для изготовления масла?

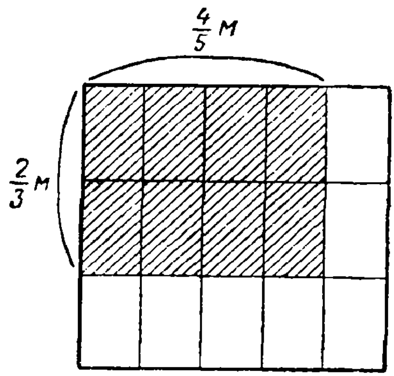
Как ответить на вопрос задачи? $\left(\text{Надо узнать } \frac{3}{10} \text{ от } \frac{7}{25}\ т.\right)$ Каким действием это сделать? $\left(\text{Надо } \frac{7}{25}\ т \text{ умножить на } \frac{3}{10}.\right)$ Почему? (Потому что умножением на дробь находится часть числа, обозначаемая множителем.) Как же найти $\frac{3}{10}$ числа $\frac{7}{25}$ *т*? $\left(\text{Надо сначала найти } \frac{1}{10}\text{, потом } \frac{3}{10}.\right)$ Как найти $\frac{1}{10}$ от $\frac{7}{25}$ *т*? $\left(\text{Надо } \frac{7}{25} \text{ уменьшить в 10 раз.}\right)$ Как найти $\frac{3}{10}$? (Надо полученную дробь увеличить в 3 раза, а для этого надо числитель умножить на 3.)

Запишите $\left(\frac{7 \cdot 3}{25 \cdot 10} = \frac{21}{250}\ (m).\right)$ Теперь вспомните, как $\frac{4}{5}$ умножали на $\frac{13}{15}$. $\left(\frac{4 \cdot 13}{5 \cdot 15}.\right)$ Как $\frac{7}{25}$ умножали на $\frac{3}{10}$? $\left(\frac{7 \cdot 3}{25 \cdot 10}.\right)$

Ученики могут самостоятельно вывести правило умножения дроби на дробь.

Умножение дробей можно иллюстрировать чертежом. Повторяют об измерении площади прямоугольника, когда длина и ширина выражены целыми числами, например, 4 *см* и 2*см*. Вспоминают, что величину площади определяли, сосчитав квадратные единицы. От этого способа переходили к вычислению площади прямоугольника путем перемножения длины и ширины, выраженных одинаковыми линейными единицами.

Предлагается определить по чертежу (черт. 27) площадь прямоугольника, размеры которого $\frac{2}{3}$ *м* и $\frac{4}{5}$ *м*. На чертеже условно изображается квадратный метр. Одна сторона разделена на 3 равные части, из них отделим 2, другая сторона разделена на 5 равных частей, из них отделим 4. Квадрат разделился на 5×3 равных прямоугольников, площадь каждого прямоугольника равна $\frac{1}{15}$ *кв. м*. Площадь выделенного прямоугольника равна $\frac{8}{15}$ *кв. м*. Вычислим площадь выделенного прямоугольника путем перемножения длины и ширины:



Черт. 27.

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{8}{15}\ (\text{кв. м}).$$

В упражнениях на умножение дробей следует добиваться, чтобы учащиеся сначала обозначали действия, в полученном выражении делали возможные сокращения и только после этого делили одно произведение на другое, например.

$$\frac{9}{20} \cdot \frac{8}{15} = \frac{9 \cdot 8}{20 \cdot 15} = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 5} = \frac{6}{25}.$$

Для самостоятельной работы учащимся дать упражнения № 413, 417 (1—4).

5. Умножение смешанного числа на дробь. В заключение темы «Умножение обыкновенных дробей» надо остановиться на умножении смешанных чисел.

Умножение целого числа на смешанное число можно показать на примерах, причем возможно решение разными приемами:

а) или сначала умножают целое число на целое число, потом на дробь и полученные произведения складывают,

б) или смешанное число обращают в неправильную дробь и выполняют умножение целого числа на дробь.

Например: $9 \cdot 4\frac{1}{3}$.

а) $9 \cdot 4 + 9 \cdot \frac{1}{3} = 36 + 3 = 39$;

б) $9 \cdot 4\frac{1}{3} = 9 \cdot \frac{13}{3} = \frac{9 \cdot 13}{3} = 39$.

Первый способ имеет то преимущество, что все вычисления можно выполнить устно (при небольших числах).

Умножение смешанного числа на дробь начинают с более простых примеров.

Решается, например, задача: «Ведро воды весит приблизительно $12\frac{3}{10}$ *кг*. Каков вес воды, наполняющей $\frac{2}{3}$ ведра?»

Учащиеся могут самостоятельно разобрать эту задачу. Они указывают, что для решения этой задачи надо узнать $\frac{2}{3}$ от $12\frac{3}{10}$ *кг*. Но дробь от числа находится умножением этого числа на дробь, показывающую, какая берется часть. Поэтому $12\frac{2}{10}$ *кг* надо умножить на $\frac{2}{3}$. Дальше подробно объясняют, что сначала надо найти $\frac{1}{3}$ от числа $12\frac{3}{10}$, потом увеличить полученное число в 2 раза. Здесь учащимся предоставляется выбор приема, посредством которого они вычисляют $\frac{2}{3}$ от $12\frac{3}{10}$. Возможно, что они применяют общий прием, т. е. обратят смешанное число в неправильную дробь и выполнят умножение дроби на дробь: $\frac{123 \cdot 2}{10 \cdot 3} = \frac{41}{5} = 8\frac{1}{5}$ (*кг*). Но в данном примере возможен и следующий прием: $\frac{2}{3}$ от $12\frac{3}{10}$ составляют $\frac{2}{3}$ от 12 плюс $\frac{2}{3}$ от $\frac{3}{10}$, т. е. $\frac{12 \cdot 2}{3} + \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{3}$, а сумма равна $8 + \frac{2}{10} = 8\frac{1}{5}$ (*кг*).

Умножение смешанных чисел не вызывает затруднений у учащихся. Обратив смешанные числа в неправильные дроби, умножают как дробь на дробь. Например:

$$3\frac{1}{5} \cdot 6\frac{1}{4} = \frac{16}{5} \cdot \frac{25}{4} = 20.$$

Следует обратить внимание на ошибку, которую при этом умножении допускают учащиеся: они умножают отдельно целые числа и дроби. Например, в произведении $3\frac{1}{5} \cdot 6\frac{1}{4}$ можно встретить результат $18\frac{1}{20}$.

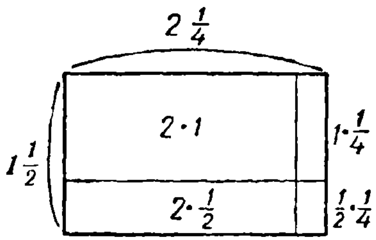
Учащиеся могут воспользоваться графической иллюстрацией, доказывающей наглядно неправильность последнего способа умножения.

Для этого предлагается вычислить по чертежу (черт. 28) площадь прямоугольника, размеры которого $2\frac{1}{4}$ и $1\frac{1}{2}$. Вычисление площади дает:

$$2\frac{1}{4} \cdot 1\frac{1}{2} = \frac{9}{4} \cdot \frac{3}{2} = \frac{27}{8} = 3\frac{3}{8}\text{ (кв. ед.)}.$$

Действительно, прямоугольник данных размеров можно разбить на следующие меньшие прямоугольники:

$$2\frac{1}{4} \cdot 1\frac{1}{2} = 2 \cdot 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = 2 + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 3\frac{3}{8}.$$



Черт. 28.

При вычислении произведения нескольких сомножителей сначала обозначается в одной дроби умножение всех числителей и всех знаменателей, потом делаются всевозможные сокращения и только после этого выполняются действия, например:

$$\frac{2}{5} \cdot 12 \cdot 2\frac{1}{4} \cdot 1\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 12 \cdot 9 \cdot 5}{5 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{2 \cdot 1 \cdot 9 \cdot 1}{1 \cdot 1 \cdot 1} = 18;$$

$$18\frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 1\frac{2}{11} \cdot 1\frac{1}{5} = \frac{55 \cdot 4 \cdot 13 \cdot 6}{3 \cdot 11 \cdot 5} = \frac{1 \cdot 4 \cdot 13 \cdot 2}{1 \cdot 1 \cdot 1} = 104.$$

Правило умножения нескольких дробей учащиеся легко сформулируют сами. При умножении дробей учащиеся допускают иногда следующую ошибку: $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{3}$, но вместо $\frac{1}{3}$ пишут 3.

В упражнениях на умножение необходимо повторить на примерах случаи, когда произведение больше множимого, равно множимому и меньше множимого. Например:

$$\frac{4}{15} \cdot 12 = \frac{4 \cdot 12}{15} = \frac{4 \cdot 4}{5} = 3\frac{1}{5}; \quad \frac{4}{15} \cdot 3\frac{1}{3} = \frac{4 \cdot 10}{15 \cdot 3} = \frac{8}{9}; \quad \frac{4}{15} \cdot \frac{8}{3} = \frac{32}{45}.$$

Учащимся объясняют, почему в этих примерах произведение должно быть больше множимого, а также сравнением $\frac{8}{9}$ с $\frac{4}{15}$ и $\frac{32}{45}$ с $\frac{4}{15}$ доказывают, что произведения в этих примерах больше множимых: $\frac{4}{15} \cdot 1 = \frac{4}{15}$; $\frac{4}{15} \cdot \frac{3}{4} = \frac{4 \cdot 3}{15 \cdot 4} = \frac{1}{5}$. (Объясняют, почему последнее произведение должно быть меньше множимого, и делают сравнение $\frac{1}{5}$ с $\frac{4}{15}$.)

Учащимся предлагают такие упражнения: дано множимое, например 12, подобрать множитель так, чтобы произведение было больше множимого, равно ему или меньше его. Для умножения можно взять правильные дроби, смешанные числа, например: $\frac{8}{15}$, $3\frac{3}{4}$, 1 и т. п., к ним также подбирать множители. Для самостоятельной работы учащимся дать примеры из упражнений № 411, 412, 414, 415, 418—423.

6. Повторение свойств умножения. Законы и свойства умножения учащиеся повторяют в процессе изучения умножения дробей в таком порядке: а) $\frac{5}{8} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{8} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}$. (Равенство этих произведений учащиеся докажут самостоятельно. Для этого они выполняют умножение, переставив сомножители в числителе и знаменателе. В произведениях получатся равные дроби, так как числители и знаменатели этих дробей равны, как произведения целых чисел, отличающихся только порядком сомножителей.)

Учащиеся применяют переместительное свойство умножения для проверки умножения: б) $\frac{3}{5} \cdot \frac{9}{16} \cdot 3\frac{1}{3} \cdot 1\frac{7}{9} = \frac{3}{5} \cdot 3\frac{1}{3} \cdot \frac{9}{16} \cdot 1\frac{7}{9}$ (переместительное свойство произведения) $= 2 \cdot 1 = 2$. в) свойство умножения: $\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{7}{12} \cdot 1\frac{5}{7}\right) \cdot 1\frac{1}{2}$. Чтобы умножить произведение на число, надо умножить на это число один из сомножителей, поэтому пишем: $\left(\frac{2}{3} \cdot 1\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{7}{12} \cdot \frac{12}{7}\right)$ (т. е. применяем переместительное и сочетательное свойства произведения) $= 1 \cdot 1 = 1$.

г) $1\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{8}\right)$. Здесь умножаем число на произведение, поэтому множим $1\frac{1}{2}$ на первый сомножитель, полученное произведение — на второй сомножитель, новое произведение — на третий сомножитель: $1\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{8} = \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{8}\right)$ (сочетательное свойство произведения)

$$1 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{8} = \frac{4 \cdot 5}{5 \cdot 8} = \frac{1}{2}.$$

д) $\left(2\frac{1}{4} + 1\frac{1}{12} + \frac{3}{8}\right) \cdot 24$. Для умножения суммы на число достаточно умножить на это число каждое слагаемое и результаты сложить. Поэтому пишем:

$$\frac{9}{4} \cdot 24 + \frac{13}{12} \cdot 24 + \frac{3}{8} \cdot 24 = 54 + 26 + 9 = 89.$$

При рассмотрении различных случаев умножения дробей достаточно, чтобы учащиеся формулировали и запомнили правило умножения дроби на дробь. К умножению, когда один из сомножителей целое число, учащиеся могут применить общее правило умножения дробей, представив целое число, как дробь со знаменателем единица. Например:

$$8 \cdot \frac{5}{16} = \frac{8}{1} \cdot \frac{5}{16} = \frac{8 \cdot 5}{1 \cdot 16} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}; \quad \frac{3}{8} \cdot 10 = \frac{3}{8} \cdot \frac{10}{1} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}.$$

Случай, когда один или оба сомножителя смешанные числа, приводится к умножению дробей, так как смешанное число заменяется неправильной дробью.

Учащиеся повторяют на целых числах различные случаи изменения произведения. После этого даются примеры на увеличение произведения дробных чисел в несколько раз. Вычислите произведение:

$$\frac{5}{7} \cdot \frac{2}{3} = \frac{5 \cdot 2}{7 \cdot 3} = \frac{10}{21}.$$

а) Увеличьте первый сомножитель в 3 раза. Что сделается с произведением? (Увеличится в 3 раза.) Как это сделать? $\left(\frac{5}{7} \cdot 3 = \frac{5}{7} + \frac{5}{7} + \frac{5}{7}.\right)$ Эту сумму надо множить на $\frac{2}{3}$, а для этого множим на $\frac{2}{3}$ каждое слагаемое. Получим: $\frac{5}{7} \cdot \frac{2}{3} + \frac{5}{7} \cdot \frac{2}{3} + \frac{5}{7} \cdot \frac{2}{3}$, т. е. первоначальное произведение $\frac{5}{7} \cdot \frac{2}{3}$ увеличилось в 3 раза.

б) Увеличьте второй сомножитель в 2 раза. Выполнив умножение $\frac{5}{7} \cdot \frac{4}{3}$, получают $\frac{20}{21}$; сравнив это произведение с $\frac{10}{21}$, находят, что произведение увеличилось в 2 раза.

в) Уменьшите первый сомножитель в 3 раза, второй сомножитель увеличьте в 3 раза. Что сделается с произведением? (Не изменится.) Докажите это. ($\frac{5}{7}$ уменьшаем в 3 раза:

$\frac{5}{7 \cdot 3} = \frac{5}{21}$; увеличим $\frac{2}{3}$ в 3 раза: $\frac{2 \cdot 3}{3} = 2$; $\frac{5}{21} \cdot 2 = \frac{10}{21}$, т. е. произведение не изменилось.)

г) Увеличьте первый сомножитель в 3 раза, второй сомножитель в 4 раза. Что сделается с произведением? (Увеличится в 12 раз.) Докажите это. ($\frac{5}{7}$ увеличим в 3 раза: $\frac{5 \cdot 3}{7} = \frac{15}{7}$; увеличим $\frac{2}{3}$ в 4 раза: $\frac{2 \cdot 4}{3} = \frac{8}{3}$; $\frac{15 \cdot 8}{7 \cdot 3} = \frac{120}{21} = \frac{40}{7}$; $\frac{120}{21}$ больше $\frac{10}{21}$ в 12 раз, так как числитель 120 больше 10 в 12 раз, знаменатели равны.)

д) Уменьшите первый сомножитель в 6 раз, второй увеличьте в 2 раза. Что сделается с произведением? (Уменьшится в 3 раза.) Докажите это. (Уменьшим $\frac{5}{7}$ в 6 раз: $\frac{5}{7 \cdot 6} = \frac{5}{42}$; увеличим $\frac{2}{3}$ в 2 раза: $\frac{2 \cdot 2}{3} = \frac{4}{3}$; $\frac{5}{42} \cdot \frac{4}{3} = \frac{10}{63}$; $\frac{10}{63}$ меньше $\frac{10}{21}$ в 3 раза, так как знаменатель 63 в 3 раза больше знаменателя 21, числители же равны.)

В заключение решаются примеры и задачи на совместные действия на сложение, вычитание и умножение.

Для закрепления и самостоятельной работы по пройденному даются примеры и упражнения № 424—436.

§ 70. Деление дробей

Изучение деления дробей можно вести по такому плану.

I. Деление целого числа и дроби на целое число.

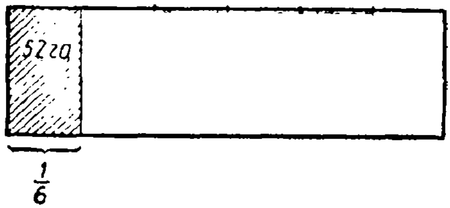
II. Нахождение числа по данной его дроби.

III. Деление целого числа на дробь.

IV. Деление дроби на дробь.

V. Деление смешанного числа на целое, на дробь и на смешанное число.

VI. Повторение свойств деления в процессе изучения деления дробей.



Черт. 29.

I. Деление целого числа и дроби на целое число. Можно начинать изучение этого раздела с повторения определения действия деления с целыми числами, а именно: деление есть действие, обратное умножению, в котором по данному произведению двух сомножителей (делимое) и одному из сомножителей (делитель) определяется другой сомножитель (частное). Например: разделить 72 на 24 — значит найти число, которое надо умножить на 24 или на которое надо умножить 24, чтобы получить 72. Величина частного не зависит от того, будет ли искомое число множимое или множитель. В арифметике дробных чисел это определение всегда применимо, так как здесь частное всегда число точное (исключение — деление на 0).

Рассмотрение деления начинается с деления целого числа на целое число. Пусть, например, требуется найти частное от деления 3 на 8. Это значит найти число, от умножения которого на 8 получится 3. Такое число есть $\frac{3}{8}$, так как $\frac{3}{8} \cdot 8 = 3$. Точно так же $12 : 5 = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}$.

Учащиеся самостоятельно выводят правила деления целого числа на целое. (Чтобы разделить целое число на целое, надо составить дробь, числитель которой равен делимому, а знаменатель делителю.)

Дальше рассматривают деление дроби на целое число. Решается, например, задача: «Сумма всех сторон квадрата $\frac{3}{5}$ *м*. Определить его сторону».

«Как найти сторону квадрата?» $\left(\text{Надо } \frac{3}{5}\right.$ разделить на 4.) «Почему?» (Четыре равные стороны квадрата составляют $\frac{3}{5}$ *м*, одна сторона меньше $\frac{3}{5}$ *м* в 4 раза.) «Запишите это». $\left(\frac{3}{5} : 4.\right)$ «Как уменьшить дробь в четыре раза?» (Надо разделить числитель или умножить знаменатель на 4.) «Запишите это» $\left(\frac{3}{5 \cdot 4} = \frac{3}{20}\right)$. Разбираются примеры и задачи на этот случай деления. Здесь должно быть деление таких дробей на целое число, числители которых делятся на делитель. Например: $\frac{8}{15} : 4$; $\frac{27}{8} : 9$ и т. д.

Учащиеся могут самостоятельно вывести правило деления дроби на целое число.

II. Нахождение числа по данной его дроби. Прежде чем переходить к изучению деления на дробь, учащиеся должны повторить нахождение неизвестного числа по его дроби (части), когда известно, какая именно часть дана и сколько единиц она составляет.

Из программы начальной школы учащимся известно нахождение числа по одной его части. Целесообразно начать повторение с задачи с применением иллюстрации, например:

«Школьники посадили виноград на 52*а*, что составляет часть опытного участка. Как велика площадь опытного участка?»

Р е ш е н и е. Зарисуйте поле в виде прямоугольника, отметьте шестую часть (черт. 29). Как найдете площадь всего поля? (Надо 52 *а* умножить на 6).

Почему? (Потому что шестая часть поля 52 *а*, а все поле в 6 раз больше.) Сколько получится? (312 *а*.) Как записать, что $\frac{1}{6}$ неизвестного числа равна 52 *а*? $\left(\frac{1}{6}\,x = 52.\right)$ Запишите решение. ($52\ a \cdot 6 = 312\ a$.) Проверьте решение. (Надо взять шестую часть 312 *а*, т. е. разделить 312 на 6.)

Дальше переходят к нахождению числа, когда одна часть его выражена дробью — правильной, неправильной и смешанным числом.

Например, рассматривают решение задачи:

«Самолет пролетел в $\frac{2}{5}$ часа $\frac{1}{3}$ расстояния между городами. Во сколько времени он пролетит все расстояние?» Как узнать время, за которое самолет пролетит все расстояние? (Надо $\frac{2}{5}$ часа умножить на 3.)

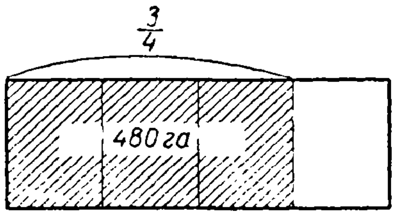
Почему? (Все расстояние больше $\frac{1}{3}$ расстояния в 3 раза, и времени на все расстояние надо больше в 3 раза, т. е. в 3 раза больше, чем $\frac{2}{5}$ часа.) Какую часть неизвестного времени составляют $\frac{2}{5}$? $\left(\frac{1}{3}.\right)$ Как записать, что $\frac{1}{3}$ неизвестного числа равна $\frac{2}{5}$ часа? $\left(\frac{1}{3}x = \frac{2}{5}.\right)$ Сосчитайте устно, но решение запишите. $\left(x = \frac{2}{5} \cdot 3 = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}\ \text{(часа)}.\right)$ Как проверить решение? (Надо от $1\frac{1}{5}$ взять $\frac{1}{3}$ часть.) Как это сделать? $\left(\frac{6}{5} : 3 = \frac{2}{5}.\right)$

Потом переходят к нахождению числа по нескольким его частям.

Можно начать с рассмотрения следующей задачи:

«С самолета было распылено удобрение на площади 480 *га*, что составило $\frac{3}{4}$ площади, занятой посевом ржи. Какая площадь засеяна рожью?»

Решение иллюстрировать чертежом. Учащиеся чертят прямоугольник, делят его на 4 равные части, отделяют $\frac{3}{4}$, заштриховывают, записывают величину площади (черт. 30). Обозначьте неизвестную величину поля через *x* *га* и запишите, что дано в задаче $\left(\frac{3}{4}\,x = 480\right)$. Чем эта задача отличается от первой задачи? (Здесь дается не одна часть, а 3.) Что же сначала на-



Черт. 30.

до узнать? (Узнать $\frac{1}{4}$ неизвестного числа.) Как это сделать? (Надо 480 разделить на 3.) Почему? 3 равные части составляют 480 *га*, одна часть в 3 раза меньше.) Сколько получится? (160.) Как записать? $\left(\frac{1}{4}x = 480:3 = 160.\right)$ Что дальше можно узнать? $\left(\text{Все число или } \frac{4}{4}\cdot x.\right)$ Как это сделать? $(160 \cdot 4 = 640.)$ Как проверить решение? (Надо от 640 взять $\frac{3}{4}$ ч.)

Решают еще задачу:

«$\frac{5}{9}$ лесозащитной полосы занимает по плану 10 000 *га*. Какова площадь всей этой полосы?»

Обозначьте неизвестную площадь через x *га* и запишите, что дано в задаче. $\frac{5}{9}x = 10\,000$. Объясните, как будете решать, и запишите решение. Получается запись:

$$\frac{1}{9}x = 10\,000:5 = 2000;\ \frac{9}{9}x = 2000\cdot 9 = 18\,000\ (га).$$

Применяя правило на увеличение и уменьшение дробей в несколько раз, учащиеся решают примеры и задачи, в которых часть числа дается в виде дроби или смешанного числа. Например, решается задача:

«В бронзе содержится $\frac{4}{5}$ части меди, остальное — олово и свинец. Сколько весит отливка, если в ней $1\frac{3}{5}$ *кг* меди?»

Решение. Что дано в задаче? $\left(\frac{4}{5}\right.$ веса отливки составляют $\left.1\frac{3}{5}\ кг.\right)$ Обозначьте вес отливки через x *кг* и запишите, что дано. $\left(\frac{4}{5}x = 1\frac{3}{5}.\right)$ Что узнаете сначала? $\left(\frac{1}{5}\right.$ веса отливки или $\left.\frac{1}{5}x.\right)$ Как это узнать? (Надо $1\frac{3}{5}$ *кг* разделить на 4.) Почему? (4 равные части составляют $1\frac{3}{5}$ *кг*, одна часть в 4 раза меньше.) Запишите это. $\left(\frac{1}{5}x = 1\frac{3}{5}\ кг:4.\right)$ Сколько получится? $\left(\frac{2}{5}\ кг.\right)$ Как это вычислить? (Уменьшить числитель в 4 раза.) Какую часть веса отливки вы узнали? $\left(\frac{1}{5}.\right)$ Как узнать вес отливки? (Надо $\frac{2}{5}$ *кг* увеличить в 5 раз.) Что получится? (2 *кг*.) Записываются: $\frac{5}{5}x = \frac{2}{5}\ кг \times 5 = 2\ кг$. Решение проверяется.

В случае затруднения учащихся при решении последней задачи можно $1\frac{3}{5}$ *кг* заменить целым числом, раздробив это число в граммы.

Дальше решаются примеры и задачи на нахождение числа, часть которого задана в виде дроби или смешанного числа. Решения проверяются. Для самостоятельной работы учащимся дать примеры из упражнений № 437—440.

III. Деление целого числа на дробь. После достаточной подготовки переходят к делению на правильную дробь целого и дробного числа.

Прежде всего выясняется, что смысл деления на дробь не всегда такой, как при делении на целое число. Что означает 18 : 3? (Уменьшить 18 в 3 раза.) А что означало бы 18 *кг* : 3 *кг*? (Сколько раз 3 *кг* содержится в 18 *кг*.) Можно ли уменьшить число в $\frac{1}{3}$ раза? (Нельзя.) А можно ли узнать, сколько раз в 18 содержится $\frac{1}{3}$? (Можно.) Итак, деление на $\frac{1}{2}$, на $\frac{1}{3}$ и т. д. не может означать уменьшить в $\frac{1}{2}$ или в $\frac{1}{3}$ раза.

Чтобы выяснить значение деления на отвлеченную правильную дробь, учитель может взять конкретную задачу, смысл которой требует применения деления, а делителем может быть как целое, так и дробное число.

Решается ряд задач:

«Какова скорость автомобиля, если он прошел 120 *км* за 4 часа? 60 *км* за 2 часа? 45 *км* за $1\frac{1}{2}$ часа? 20 *км* за $\frac{2}{3}$ часа? 15 *км* за $\frac{1}{2}$ часа?» Задачи решаются посредством деления величины расстояния на число, обозначающее время. Получается запись:

$$120 \text{ км} : 4 = 30 \text{ км} \qquad 15 \text{ км} : \frac{1}{2} = 30 \text{ км}$$

$$60 \text{ км} : 2 = 30 \text{ км} \qquad 20 \text{ км} : \frac{2}{3} = 30 \text{ км}$$

Объяснение последних двух задач показывает, что деление на $\frac{1}{2}$, на $\frac{2}{3}$ сводится к нахождению числа по его части $\left(\text{по } \frac{1}{2}, \text{ по } \frac{2}{3}\right)$.

К тому же выводу можно прийти другим путем на основании определения деления, как действия, обратного умножению. Пусть надо 25 разделить на $\frac{2}{3}$. Это значит найти число, произведение которого на $\frac{2}{3}$ дает 25. Но умножением числа на $\frac{2}{3}$ находятся $\frac{2}{3}$ этого числа. Обозначив искомое число через x, имеем такую запись:

$25 : \frac{2}{3} = x$; $\frac{2}{3} \cdot x = 25$; следовательно, $\frac{1}{3} \cdot x = \frac{25}{2}$; $\frac{3}{3} \cdot x = \frac{25 \cdot 3}{2} = \frac{75}{2} = 37\frac{1}{2}$; $25 : \frac{2}{3} = \frac{25 \cdot 3}{2} = 37\frac{1}{2}$. Решаются задачи № 432—435.

После решения нескольких задач и примеров учащиеся самостоятельно выводят правило деления целого числа на дробь.

Для самостоятельной работы учащимся дать № 453.

IV. Деление дроби на дробь. Деление дроби на дробь после изучения деления целого числа на дробь усваивается учащимися быстрее. Для объяснения этого случая деления можно взять задачу, в которой делимым является сначала целое число, потом правильная дробь.

«Поезд проходит 40 *км* в $\frac{2}{3}$ часа, 5 *км* в $\frac{1}{12}$ часа, $\frac{9}{10}$ *км* в $\frac{3}{200}$ часа. Найти скорость поезда в час».

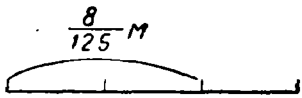
Учащиеся, усвоившие значение деления целого числа на правильную дробь, знают, что для решения первой и второй задач надо применить деление 40 *км* $: \frac{2}{3}$ и 5 *км* $: \frac{1}{12}$, т. е. делить величину расстояния на число, обозначающее время, и что это деление означает нахождение числа по данной его дроби (части). По аналогии с первой и второй задачами они решают третью задачу делением расстояния на число, означающее время, т. е. $\frac{9}{10}$ *км* $: \frac{3}{200}$. Обозначив искомое число через x, записывают $\frac{9}{10} : \frac{3}{200} = x$ и объясняют, что этим делением находят скорость за час, зная $\frac{3}{200}$ ее части. Поэтому переходят к записи $\frac{3}{200}x = \frac{9}{10}$; $\frac{1}{200}x$ меньше $\frac{9}{10}$ в 3 раза и равна $\frac{9}{10} : 3 = \frac{9}{10 \cdot 3}$, а x больше $\frac{9}{10 \cdot 3}$ в 200 раз, т. е. $x = \frac{9 \cdot 200}{10 \cdot 3} = 60$. Получается запись: $\frac{9}{10} : \frac{3}{200} = \frac{9 \cdot 200}{10 \cdot 3} = 60$.

В случае, если учащихся затрудняет применение деления в последней задаче, можно $\frac{9}{10}$ *км* выразить в метрах (900 *м*); $\frac{3}{200}$ часа в секундах $\left(\frac{3 \cdot 60 \cdot 60}{200} = 54\right)$ 900 *м*$:54 = 16\frac{2}{3}$ *м*; умножив секундную скорость $\frac{50}{3}$ *м* на $60 \cdot 60$, получаем скорость в час:

$$\frac{50 \cdot 60 \cdot 60}{3} \text{ м} = 60\,000 \text{ м} = 60 \text{ км}.$$

Разбирают еще подобную задачу: «$\frac{8}{125}$ *м* составляют $\frac{2}{3}$ длины отрезка. Какой длины отрезок?» Условие записывается: $\frac{2}{3}x = \frac{8}{125}$ *м*. Решение и объяснение выполняют учащиеся самостоятельно. Получается запись: $\frac{1}{3}x = \frac{8}{125 \cdot 2}$; $\frac{3}{3}x = \frac{8 \cdot 3}{125 \cdot 2} = \frac{12}{125}$ (*м*). Как иначе записать решение задачи? $\left(\frac{8}{125}\ м : \frac{2}{3} = \frac{8 \cdot 3}{125 \cdot 2}\ м = \frac{12}{125}\ м\ .\right)$

Какое число больше: делимое $\frac{8}{125}$ или частное $\frac{12}{125}$? $\left(\frac{12}{125}.\right)$



Черт. 31.

Почему от деления на $\frac{2}{3}$ получилось число больше делимого? (По $\frac{2}{3}$ частям числа нашли все число.) Решение задачи проверяется.

Если учащиеся затрудняются в применении деления, можно число $\frac{8}{125}$ *м* заменить целым числом, раздробив в миллиметры. Деление целого числа на дробь известно учащимся.

Рассмотрев решение двух задач: $\frac{9}{10} : \frac{3}{20} = \frac{9 \cdot 20}{10 \cdot 3} = 60$ и $\frac{8}{125} : \frac{2}{3} = \frac{8 \cdot 3}{125 \cdot 2} = \frac{12}{125}$, учащиеся выводят правило деления дроби на дробь. Для самостоятельной работы учащимся дать примеры № 441 (1—3), 456, 458 (1, 2).

После решения достаточного числа задач и примеров на деление дроби на дробь переходят к делению смешанного числа на целое число, на дробь и на смешанное число.

V. При **делении смешанного числа на целое** пользуются двумя способами: а) деление отдельно целого числа и дроби; б) обращение делимого в неправильную дробь и деление этой дроби на целое число. Примеры: $153\frac{6}{7} : 3 = 51\frac{2}{7}$ $\left(\text{здесь делимое делится на 3, как сумма двух чисел } 153 + \frac{6}{7}\right)$;

$$2\frac{4}{7} : 9 = \frac{18}{7} : 9 = \frac{2}{7}.$$

Остальные случаи деления смешанных чисел приводятся к делению неправильных дробей на правильную или неправильную дробь.

$$3\frac{1}{5} : \frac{8}{9} = \frac{16}{5} : \frac{8}{9} = \frac{16 \cdot 9}{5 \cdot 8} = \frac{18}{5} = 3\frac{3}{5};$$

$$4\frac{2}{7} : 1\frac{1}{2} = \frac{30}{7} : \frac{3}{2} = \frac{30 \cdot 2}{7 \cdot 3} = \frac{20}{7} = 2\frac{6}{7}.$$

Во всех случаях деления дробных чисел следует проводить сравнение делимого и частного, причем учащиеся должны самостоятельно объяснять, почему в одних случаях частное меньше делимого, в других случаях частное больше делимого. В связи с этими вопросами следует дать упражнения такого содержания.

К данному делимому подобрать дробный делитель так, чтобы: а) частное было больше делимого и б) частное было меньше делимого.

Рассмотрением всех случаев деления на дробное число выясняется, что: а) деление на дробь может быть выполнено двумя действиями, б) деление может во всех случаях выполняться как умножение делимого на число, обратное делителю. Числом, обратным данному, можно назвать частное от деления единицы на данное число. Например, число, обратное $\frac{5}{7}$, есть $1 : \frac{5}{7} = \frac{7}{5}$. Целое число имеет обратным числом дробь, например, для 4 или $\frac{4}{1}$ обратное число $\frac{1}{4}$, для смешанного числа $3\frac{1}{3}$ — обратное число $\frac{3}{10}$ и т. д. *Примечание.* Целое число 1 имеет обратное число 1.

Примеры:

$$8 : \frac{3}{5} = \frac{8 \cdot 5}{3} = 13\frac{1}{3};\ 8 \cdot \frac{5}{3} = \frac{8 \cdot 5}{3} = 13\frac{1}{3};\ \frac{2}{5} : \frac{3}{7} = \frac{2 \cdot 7}{5 \cdot 3} = \frac{14}{15};$$

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{7}{3} = \frac{2 \cdot 7}{5 \cdot 3} = \frac{14}{15} \text{ и т. п.}$$

в) Случаи деления, когда один из компонентов есть целое число, а другой — дробь, можно привести к делению дробных чисел, заменив целое число дробью с знаменателем 1.

Пример:

$$8 : \frac{4}{9} = \frac{8}{1} : \frac{4}{9} = \frac{8 \cdot 9}{1 \cdot 4} = 18;\quad \frac{5}{7} : 2 = \frac{5}{7} : \frac{2}{1} = \frac{5 \cdot 1}{7 \cdot 2} = \frac{5}{14}$$

г) Должны быть рассмотрены примеры, где делимое равно делителю, частное равно 1, а также деление на 1.

д) Деление на 0 исключается, иными словами, 0 не имеет обратного числа.

Учащимся должны быть даны упражнения на выполнение ряда умножений и делений, в которых промежуточные результаты не вычисляются, например:

а) $4 \cdot 1\frac{1}{2} : \frac{8}{9} : 1\frac{11}{16} : 2 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 16 \cdot 1}{2 \cdot 8 \cdot 27 \cdot 2} = 2.$

б) $\frac{7}{8} : \frac{3}{4} \cdot 1\frac{1}{14} : 1\frac{1}{5} \cdot 24 = \frac{7 \cdot 4 \cdot 15 \cdot 5 \cdot 24}{8 \cdot 3 \cdot 14 \cdot 6} = 25.$

в) $$\frac{8\cdot\frac{5}{12}:5\frac{1}{14}\cdot 7}{2\frac{1}{7}:\frac{5}{7}:4\cdot\frac{8}{9}}=\frac{8\cdot5\cdot4\cdot7}{12\cdot21}:\frac{15\cdot7\cdot8}{7\cdot5\cdot4\cdot9}=\frac{8\cdot5\cdot4\cdot7\cdot7\cdot5\cdot4\cdot9}{12\cdot21\cdot15\cdot7\cdot8}=$$

$$=\frac{20}{3}=6\frac{2}{3}.$$

Кроме задач, в которых деление применяется для уменьшения числа в несколько раз или для нахождения числа по данной его дроби, являющейся делителем, — деление употребляется еще в случаях: а) когда частное (целое или смешанное число) показывает, сколько раз одно число содержится в другом или во сколько раз одно число больше другого. Например: «Снимок киноленты имеет площадь, равную $4\frac{8}{25}$ *кв. см*, а его изображение на экране $9\frac{18}{26}$ *кв. м*. Во сколько раз площадь изображения больше, чем площадь снимка?» Решение: $9\frac{18}{25}$ *кв. м* : $4\frac{8}{25}$ *кв. см* = 22500 (раз); б) когда частное показывает, какую часть одно число составляет от другого. Например: «Из туши коровы весом 175 *кг* получили $12\frac{1}{4}$ *кг* сырого сала. Какую часть веса туши составлял вес сала?» Решение: $12\frac{1}{4}$ *кг* : 175 *кг* $=\frac{7}{100}$.

Для закрепления и самостоятельной работы дать учащимся примеры из упражнений № 443—451, 457, 459—472.

VI. Повторение свойств деления. Свойства деления учащиеся повторяют в процессе изучения деления дробей в таком порядке:

1) Переместительное свойство ряда умножений и делений: от перемены порядка действий умножения и деления результат не изменяется.

Примеры:

а) $1\frac{1}{2}:1\frac{1}{4}\cdot1\frac{2}{3}:1\frac{1}{5}=\frac{3\cdot4\cdot5\cdot5}{2\cdot5\cdot3\cdot6}=\frac{5}{3}=1\frac{2}{3};$

$1\frac{1}{2}:1\frac{1}{5}\cdot1\frac{2}{3}:1\frac{1}{4}=\frac{3\cdot5\cdot5\cdot4}{2\cdot6\cdot3\cdot5}=1\frac{2}{3}.$

б) $\frac{5}{8}:\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}:1\frac{1}{3}=\frac{5\cdot4\cdot4\cdot3}{8\cdot3\cdot5\cdot4}=\frac{1}{2};$

$\frac{5}{8}:1\frac{1}{3}:\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}=\frac{5\cdot3\cdot4\cdot4}{8\cdot4\cdot3\cdot5}=\frac{1}{2}.$

2) Распределительное свойство по отношению к делимому.

Чтобы разделить сумму (или разность) на какое-либо число, надо разделить на это число каждое слагаемое (уменьшаемое и вычитаемое) и полученные результаты сложить (из первого частного вычесть второе). Например:

а) $\left(10\frac{5}{7}+15\frac{10}{21}+20\frac{25}{28}\right):5=10\frac{5}{7}:5+15\frac{10}{21}:5+20\frac{25}{28}:$

$$:5=2\frac{1}{7}+3\frac{2}{21}+4\frac{5}{28}=9\frac{35}{84}=9\frac{5}{12}.$$

б) $37\frac{1}{3}:4=\left(36+1\frac{1}{3}\right):4=9+\frac{1}{3}=9\frac{1}{3}.$

в) $\left(3\frac{1}{3}-2\frac{6}{7}\right):10=3\frac{1}{3}:10-2\frac{6}{7}:10=\frac{1}{3}-\frac{2}{7}=\frac{1}{21}.$

3) Чтобы разделить число на произведение, достаточно разделить это число на первый множитель, полученное частное разделить на второй, новое частное — на третий и т. д.

$$7\frac{1}{8}:\left(9\frac{1}{2}\cdot 1\frac{1}{8}\cdot\frac{3}{4}\right)=\frac{57}{8}:\frac{19}{2}:\frac{9}{8}:\frac{3}{4}=\frac{3}{4}:\frac{9}{8}:\frac{3}{4}=$$
$$=\frac{2}{3}:\frac{3}{4}=\frac{8}{9}.$$

Чтобы разделить произведение на число, достаточно разделить на это число один из сомножителей произведения и результат умножить последовательно на остальные сомножители.

$$\left(40\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{14}{25}\right):4\frac{1}{2}=\left(40\frac{1}{2}:4\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{14}{25}=9\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{14}{25}=3\frac{3}{5}.$$

Известные учащимся из программы начальной школы зависимости между компонентами умножения и деления в V классе повторяются на дробных числах.

Примеры: найти неизвестное число (x).

а) $\frac{1}{2}x\cdot\frac{3}{4}=9;\ \frac{1}{2}x=9:\frac{3}{4}=12;\ x=12:\frac{1}{2}=24.$

б) $3\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}x=20;\ \frac{3}{4}x=20:3\frac{1}{3}=6;\ x=6:\frac{3}{4}=8.$

в) $\frac{2}{3}x:1\frac{3}{5}=25;\ \frac{2}{3}x=25\cdot 1\frac{3}{5}=25\cdot 1+25\cdot\frac{3}{5}=40;$

$$x=40:\frac{2}{3}=\frac{40\cdot 3}{2}=60.$$

г) $15:\frac{11}{16}x=\frac{3}{11};\ \frac{11}{16}x=15:\frac{3}{11}=55;\ x=55:\frac{11}{16}=80.$

Изменение результатов умножения и деления в зависимости от изменения данных также должно быть повторено на примерах и задачах с дробными числами.

Даются примеры на изменение одного из компонентов умножения и деления, а также на изменение обоих компонентов.

Примеры: Как изменится произведение двух чисел,

1) если один из сомножителей умножить на $4\frac{1}{2}$? на $\frac{1}{4}$? на $\frac{9}{10}$? В случае затруднения преподаватель задает наводящие вопросы;

2) если один из сомножителей разделить на $4\frac{1}{2}$? на $\frac{1}{4}$? на $\frac{9}{10}$? Подобрать примеры на умножение и произвести изменение произведения. В случае затруднения преподаватель задает наводящие вопросы;

3) если один из сомножителей умножить на $\frac{4}{5}$, другой разделить на $\frac{4}{5}$. Проверить на примере.

После изучения четырех действий рассматривают вопрос об изменении величины дроби в том случае, когда оба члена дроби увеличиваются или уменьшаются на одно и то же число. Сначала рассматривается изменение величины правильной дроби, например: сравнивают $\frac{5}{8}$ и $\frac{5+2}{8+2}=\frac{7}{10}$. Здесь удобнее всего найти дополнения этих дробей до 1, так как разность между числителем и знаменателем в обоих случаях одинакова: $1-\frac{5}{8}=\frac{3}{8}$; $1-\frac{7}{10}=\frac{3}{10}$, но $\frac{3}{10}<\frac{3}{8}$, поэтому $\frac{7}{10}>\frac{5}{8}$; тот же результат можно получить, сравнив произведения числителя 7 на знаменатель 8 (56) с произведением числителя 5 на знаменатель 10 (50); $56>50$. Дробь $\frac{7}{10}>\frac{5}{8}$.

Разобрав несколько таких примеров, учащиеся самостоятельно делают вывод, что правильная дробь увеличивается, если к обоим членам прибавить одно и то же число.

Затем рассматривается изменение величины неправильных дробей при увеличении обоих членов на одно и то же число. Например, сравнивают $\frac{11}{8}$ и $\frac{11+4}{8+4}=\frac{15}{12}=\frac{5}{4}$. Здесь сравнивают избытки каждой дроби над целым числом или берут произведения $11\cdot4$ и $5\cdot8$; $11\cdot4>5\cdot8$. Следовательно, дробь $\frac{11}{8}$ уменьшилась. Разобрав несколько примеров, учащиеся самостоятельно делают вывод об изменении величины неправильной дроби при увеличении ее членов на одно и то же число.

Изменение величины правильных и неправильных дробей, при уменьшении их членов на одно и то же число, учащиеся могут рассмотреть самостоятельно в виде классных или домашних упражнений.

Учащиеся в процессе изучения деления должны повторить проверку умножения вторым способом (кроме умножения сомножителей в другом порядке), именно делением произведения на один из сомножителей, отчего получается второй сомножитель (зависимость между элементами умножения).

Берется пример: $\frac{275}{288} \cdot \frac{27}{44}$, предлагается выполнить умножение и проверить а) умножением и б) делением.

$$\frac{275}{288} \cdot \frac{27}{44} = \frac{275 \cdot 27}{288 \cdot 44} = \frac{25 \cdot 3}{32 \cdot 4} = \frac{75}{128}.$$

Проверка:

а) $\frac{27}{44} \cdot \frac{275}{288} = \frac{75}{128}$; б) $\frac{75}{128} : \frac{27}{44} = \frac{75 \cdot 44}{128 \cdot 27} = \frac{275}{288}$.

Для проверки деления используют зависимость между элементами деления:

а) делимое равно произведению делителя на частное,

б) делитель равен частному от деления делимого на частное.

Например: $3\frac{1}{2} : \frac{3}{4} = \frac{7 \cdot 4}{2 \cdot 3} = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}$.

Проверка: а) $\frac{3}{4} \cdot 4\frac{2}{3} = \frac{3 \cdot 14}{4 \cdot 3} = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$;

б) $3\frac{1}{2} : 4\frac{2}{3} = \frac{7}{2} : \frac{14}{3} = \frac{7 \cdot 3}{2 \cdot 14} = \frac{3}{4}$.

Для закрепления и самостоятельной работы учащимся дать примеры из упражнений № 473—487.

§ 71. Запись вычислений с дробями

Завершением курса обыкновенных дробей должно быть решение задач и примеров на все действия с целыми и дробными числами. При этом, кроме повторения правил действий над числами, надо добиваться 1) чтобы все посильные учащимся вычисления производились устно и 2) чтобы все действия производились быстро и четко.

В практике школ наблюдается большое разнообразие во внешнем оформлении вычислений.

Необходимо с первых же шагов изучения дробей предъявить учащимся настойчивые требования в отношении записей вычислений с дробями, а также и по отношению к другим записям.

Разберем вопрос о записях вычислений с дробями в порядке прохождения программы курса обыкновенных дробей.

1. При изучении письменной нумерации дробей надо добиться правильной, красивой записи дробей и смешанных чисел:

а) числитель и знаменатель должны записываться цифрами равной величины;

б) различительная черта (обязательно горизонтальная) ставится на равном расстоянии от числителя и знаменателя (члены дроби не должны касаться черты),

в) смешанное число пишется так, чтобы дробь по размеру равнялась целому числу.

2. Преобразование дробей и смешанных чисел. а) Результат обращения смешанного числа в неправильную дробь и обратное преобразование записываются так, чтобы смешанное число и неправильная дробь были примерно одинаковой высоты, разделительная черта должна располагаться против знака равенства:

$$10\frac{2}{3}=\frac{32}{3}; \qquad \frac{41}{8}=5\frac{1}{8}.$$

б) Сокращение дробей. Если это преобразование выполняется как тренировочное упражнение, то следует, не прибегая к зачеркиванию чисел и надписи над ними, писать рядом полученную от сокращения дробь, соединив дроби знаком равенства, например: $\frac{85}{102}=\frac{5}{6}$. Общий делитель пишется над дробью (со скобкой под ним).

Если же сокращать приходится сложную дробь, например при выполнении умножения или деления дробей, то неизбежно зачеркивание чисел и надписи над ними:

$$\frac{15\cdot 27\cdot 16}{32\cdot 40\cdot 81}=\frac{\overset{\overset{1}{3}}{\cancel{15}}\cdot \overset{1}{\cancel{27}}\cdot \overset{1}{\cancel{16}}}{\underset{\underset{1}{2}}{\cancel{32}}\cdot \underset{8}{\cancel{40}}\cdot \underset{3}{\cancel{81}}}=\frac{1}{16}.$$

Следует добиваться аккуратного зачеркивания чертами в одном направлении.

в) Приведение дробей к наименьшему общему знаменателю. В этом преобразовании наиболее необходимым является выделение дополнительных множителей. В случае несложных вычислений НОЗ дополнительные множители находятся устно и надписываются над дробями (со скобкой под ними):

$$\frac{3}{20}+\frac{7}{15}=\frac{9+28}{60}=\frac{37}{60}.$$

Укажем, как можно расположить записи при более сложных вычислениях.

Пример: привести к НОЗ дроби $\frac{22}{315}$, $\frac{203}{270}$, $\frac{11}{210}$.

$\frac{22}{315}$ $315=3\cdot 3\cdot 5\cdot 7$ $\qquad 2\cdot 3=6$ — доп. множ. 1-й дроби.

$\frac{203}{270}$ $270=2\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 5$ $\qquad 7$ — доп. множ. 2-й дроби.

$\frac{11}{210}$ $210=2\cdot 3\cdot 5\cdot 7$ $\qquad 3\cdot 3=9$ — доп. множ. 3-й дроби.

$$\text{НОК } (315, 270, 210) = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 1890.$$

$$\frac{22}{315} = \frac{132}{1890}; \quad \frac{203}{270} = \frac{1421}{1890}; \quad \frac{11}{210} = \frac{99}{1890}.$$

(Здесь дополнительные множители найдены путем исключения из сомножителей НОК знаменателей — сомножителей, входящих в состав каждого знаменателя.)

3. Действия с дробями. О записях сложения и вычитания дробей и смешанных чисел сказано в отделе сложения и вычитания дробей.

При записи умножения и деления требовать, чтобы сокращение предшествовало вычислению результата, а не производилось в результате. Вместо записи:

$$\frac{8}{9} : 1\frac{1}{3} = \frac{8}{9} : \frac{4}{3} = \frac{8 \cdot 3}{9 \cdot 4} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$$

должно быть: $\frac{8}{9} : 1\frac{1}{3} = \frac{8}{9} : \frac{4}{3} = \frac{8 \cdot 3}{9 \cdot 4} = \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 1} = \frac{2}{3}$.

Наибольшую трудность представляет оформление вычислений на все действия с дробями, смешанными и целыми числами, входящими в одну формулу.

В школьной практике в этом случае наблюдается смешение записи хода вычислений и самих вычислений. Они объединяются в одном месте, самые же вычисления учащиеся, выполнив на черновиках, блокнотах, клочках бумаги, в тетрадь переписывают набело. При таком приеме нельзя проследить и выявить приемы работы каждого учащегося.

Для выработки вычислительных навыков и умения правильно оформлять их необходимо отделять запись хода вычислений от выполнения самих вычислений. Все вычисления должны выполняться в тетради, в случае ошибки учащийся может аккуратно зачеркнуть неправильно выполненное вычисление и переделать.

В качестве образца приведем решение следующего примера:

$$\frac{\left(\frac{17}{32} - \frac{11}{54}\right) \cdot \left(\frac{9}{16} + \frac{7}{12}\right) \cdot \left(4\frac{10}{11} \cdot 3\frac{1}{5}\right) \cdot \left(2\frac{17}{25} : 1\frac{19}{48}\right)}{\left(6 : 2\frac{5}{8}\right) \cdot \left(3\frac{2}{9} \cdot \frac{63}{64}\right) \cdot \left(7 - 6\frac{25}{29}\right) \cdot \left(3\frac{4}{15} + \frac{38}{75}\right)}.$$

Сначала выполняем вычисления в числителе: вычитание, сложение, умножение на произведение и на частное.

Ход решения.	Вычисления.
1) $\frac{17}{32} - \frac{11}{54} = \frac{283}{864}$.	$\frac{17}{32} - \frac{11}{54} = \frac{459 - 176}{864} = \frac{283}{864}$.
2) $\frac{9}{16} + \frac{7}{12} = \frac{55}{48}$ (устно).	

3) $\frac{283}{864} \cdot \frac{55}{48} \cdot 4\frac{10}{11} \cdot 3\frac{1}{5} \cdot 2\frac{17}{25} \cdot \frac{48}{67} = \frac{283}{25}$. $\quad \frac{283 \cdot 55 \cdot 54 \cdot 16 \cdot 67 \cdot 48}{864 \cdot 48 \cdot 11 \cdot 5 \cdot 25 \cdot 67} = \frac{283}{25}$.

При вычислении числителя а) $\frac{55}{48}$ — сумма двух дробей не заменяется смешанным числом, так как дальше это число служит множителем; б) умножение на $\left(4\frac{10}{11} \cdot 3\frac{1}{5}\right)$ выполняется, как умножение числа на произведение; в) деление на $1\frac{19}{48}$ заменяется умножением на обратное число $\frac{48}{67}$; г) умножение на $\left(2\frac{17}{25} \cdot \frac{48}{67}\right)$ выполняется, как умножение числа на произведение.

Дальше вычисляем знаменатель. Выполняем сначала вычитание, сложение, потом умножение.

4) $7-6\frac{25}{29} = \frac{4}{29}$ (устно). $\quad$ 5) $3\frac{4}{15}+\frac{38}{75} = 3\frac{58}{75}$ (устно).

6) $6 \cdot \frac{8}{21} \cdot \frac{29}{9} \cdot \frac{63}{64} \cdot \frac{4}{29} \cdot 3\frac{58}{75} = \frac{283}{75}$. $\quad \frac{6 \cdot 8 \cdot 29 \cdot 63 \cdot 4 \cdot 283}{21 \cdot 9 \cdot 64 \cdot 29 \cdot 75} = \frac{283}{75}$.

7) $\frac{283}{25} : \frac{283}{75} = 3$. $\quad \frac{283 \cdot 75}{25 \cdot 283} = 3$.

При указанной системе ведения вычислений и их записи учащийся ясно представляет ход вычисления, при этом он имеет возможность легко проверить вычисления в каждом отдельном случае.

По этим записям преподавателю нетрудно найти слабые места в усвоении материала, видны все детали вычислительного процесса.

Для того чтобы учащийся прочно овладел навыками вычислений с обыкновенными дробями, а также в большей степени овладел искусством решения задач, он должен самостоятельно решить большую часть упражнений из сборника задач Пономарева и Сырнева на совместные действия с обыкновенными дробями. Эти задачи и примеры даны в упражнениях № 488—580 (§ 21).

В указанном параграфе приводятся задачи на совместную работу, бассейны, использование диаграмм и др. О решении таких задач есть указания в главе «Арифметические примеры и задачи» настоящего пособия.

ГЛАВА XI

ДЕСЯТИЧНЫЕ ДРОБИ

§ 72. Понятие о десятичной дроби и ее определение

Наиболее удобным и простым наглядным пособием при изучении десятичных дробей является метр с подразделениями на дециметры, сантиметры и миллиметры. На этом пособии иллюстрируются десятые доли (на дециметрах), сотые доли (на сантиметрах), тысячные доли (на миллиметрах), т. е. так называемые десятичные доли, получившиеся от деления единицы на число равных частей, выраженных единицей с нулями. Эти доли: $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10000}$, $\frac{1}{1000000}$ и т. д. — так же, как разрядные единицы целых чисел, различаются как доли высших разрядов (бо́льшие) и доли низших разрядов (меньшие). Например, по сравнению с $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{10}$ — доля высшего разряда, а $\frac{1}{100}$ — доля низшего разряда, из дробей $\frac{1}{100}$ и $\frac{1}{1000}$ доля высшего разряда — $\frac{1}{100}$, а $\frac{1}{1000}$ — доля низшего разряда и т. д. Всякая десятичная доля равна 10-ти долям следующего (низшего) разряда. Например:

$$\frac{1}{10}=\frac{10}{100};\quad \frac{1}{100}=\frac{10}{1000};\quad \frac{1}{100\,000}=\frac{10}{1\,000\,000}$$

и т. д. Соотношения между долями можно проверять также на счете рублей, гривенников, копеек. Следует использовать также вертикальные проволоки классных счетов, а также русские торговые счеты.

Изучение темы начинается с выяснения понятия о десятичной дроби.

Урок на тему «Понятие о десятичной дроби и ее определение» можно построить так:

1. Выделение десятичных дробей из множества дробей обыкновенных.
2. Выяснение состава знаменателей выделенных дробей.
3. Определение десятичной дроби.
4. Закрепление.

Ход урока. Учитель пишет на доске ряд дробей десятичных и обыкновенных, например:

$$\frac{1}{4}, \frac{7}{10}, \frac{4}{5}, \frac{13}{100}, \frac{7}{9}, \frac{133}{1000}, \frac{14}{15}.$$

Ученики читают эти примеры, указывают в каждой дроби числитель и знаменатель. Учитель предлагает выписать дроби, у которых знаменатели состоят из единицы с нулями.

Получается запись:

$$\frac{7}{10}, \frac{13}{100}, \frac{133}{1000}.$$

Учитель предлагает рядом с записанными дробями выписать те же дроби, но знаменатели их представить как произведения числа 10.

Получается запись:

$$\frac{133}{1000} = \frac{133}{10\cdot 10\cdot 10},$$
$$\frac{13}{100} = \frac{13}{10\cdot 10},$$
$$\frac{7}{10} = \frac{7}{10\cdot 1}.$$

Из чего же состоит знаменатель этих дробей? (Из единицы с нулями.) Учитель сообщает: такие дроби, у которых знаменатели состоят из единицы с одним или несколькими нулями, называются десятичными.

А как записываются знаменатели этих дробей? (Единицей с нулями.) Повторите, какие дроби называются десятичными дробями? (Дроби, у которых знаменатель содержит единицу с нулями.) Ученики повторяют определение и читают его по учебнику Шевченко. Почему же эти дроби называются десятичными? (Потому что их знаменатели состоят из 10 или из произведения 10 на единицу с нулями.)

Для закрепления вывода учащиеся придумывают примеры десятичных дробей, выписывают из задачника десятичные дроби и объясняют, почему дроби называются десятичными.

§ 73. Устная нумерация десятичных дробей

Нумерация десятичных дробей по своим принципам сходна с нумерацией целых чисел, являясь дальнейшей ступенью ее развития. Вначале разбирается устная нумерация, потом письменная.

Образование и состав десятичной дроби удобнее всего изучать на метре. Сопоставляя между собою метр, дециметр, сантиметр и миллиметр (в различных комбинациях), учащиеся выводят соотношения между долями десятыми, сотыми, тысячными.

На десятых, сотых, тысячных долях можно уяснить все свойства десятичных долей.

Доли низших разрядов $\left(\frac{1}{10\,000}, \frac{1}{100\,000}, \frac{1}{1\,000\,000} \text{ и т. д.}\right)$ можно изучать при помощи счетов с вертикальными проволоками. Соотношения между десятичными долями можно изучить по следующей таблице.

Единицы	Десятые	Сотые	Тысячные	Десяти-тыс.	Стотысячн.	Миллионные	Десяти-милл.
1	10	100	1000	10000	100000	1000000	10000000
	1 десятая	10	100	1000	10000	100000	1000000
		1 сотая	10	100	1000	10000	100000
			1 тысяч.	10	100	1000	10000
				1 десяти-тысячная	10	100	1000
					1 стотыс.	10	100
						1 милл.	10

Для закрепления вопроса о сравнении долей надо дать ряд задач и примеров на раздробление долей. Например:

а) Какую часть составляет грамм от килограмма? от центнера? от тонны? миллиграмм от дециграмма? сантиграмм от килограмма? и т. д.

б) Сколько в одной десятой тысячных? миллионных? Сколько в одной сотой стотысячных? десятимиллионных? Сколько в одной тысячной миллионных, миллиардных?

в) Раздробить 2 сотые в десятитысячные, 5 десятых в стотысячные, 3 десятых и 4 сотых в сотые, 7 сотых и 2 тысячных в тысячные, 5 десятых и 8 тысячных в десятитысячные, одну десятую две сотых 5 тысячных в тысячные и т. п.

Даются также упражнения на превращение долей низших разрядов в доли высших разрядов, например: какими долями высших разрядов можно заменить 50 сотых? 40 десятитысячных? 500 стотысячных? 200 миллионных? 250 тысячных? 480 стотысячных? 810 десятимиллионных? И т. д.

Для закрепления и повторения даются упражнения № 581—587.

§ 74. Письменная нумерация десятичных дробей

Сущность письменной нумерации десятичных дробей заключается в том, что основной принцип десятичной нумерации распространяется на доли, стоящие вправо от целых единиц.

Порядок изучения следующий.

На доске записывают целое число, состоящее, например, из тысяч, сотен, единиц, сравнивают тысячу с сотней, сотню с десятком, десяток с единицей. Из сравнения делают вывод, что единица каждого последующего разряда, если считать слева направо, в 10 раз меньше единицы предшествующего разряда. Учащиеся сами делают вывод, что единицы, стоящие направо от целых единиц, должны означать десятые доли. Делаются упражнения: учитель откладывает на счетах числа, содержащие десятые доли, ученики читают эти числа; учащиеся откладывают под диктовку учителя числа с десятыми долями, пишут под диктовку учителя такие же числа; останавливаются особо на числах, содержащих нуль целых единиц. Дальше примерно по такому же плану изучают сотые доли (отдельно), потом переходят к нумерации десятых и сотых долей вместе, затем рассматривают тысячные доли (отдельно), потом десятые, сотые и тысячные вместе. Особо надо остановиться на нумерации дробей, в которых пропущены некоторые доли, например при изучении десятых и сотых отсутствуют десятые, при изучении дробей с тремя десятичными знаками имеется нуль на месте десятых или на месте сотых.

При записи дробей сообщается, что цифры, стоящие направо от запятой, называются десятичными знаками.

При чтении десятичных дробей, отложенных на счетах несколькими разрядами или записанных несколькими десятичными знаками, сначала практикуется чтение по разрядам, например: 15,273 читается так: 15 целых, 2 десятых, 7 сотых, 3 тысячных.

Для запоминания места долей каждого разряда можно указать, что по обе стороны от единиц стоят на одинаковом месте десятки (слева) и десятые доли (справа), именно на первом месте от единиц, сотни (слева) и сотые доли (справа) стоят на втором месте от единиц и т. д. Десятичные дроби можно записывать с знаменателем $\frac{23}{100}$ и без знаменателя 0,23; $0{,}23 = \frac{23}{100}$.

Здесь же надо установить соотношение между числами десятичных знаков и числом нулей знаменателя низшего разряда долей, входящих в данную дробь. Например, если дробь записана 4-мя десятичными знаками, в ней низший разряд — десятитысячные доли. Дробь 0,0005 читается так: 0 целых 5 десятитысячных, знаменатель 10 000 имеет 4 нуля. Если дробь записана 6-ю десятичными знаками: 0,000008, в ней низший разряд — миллионные доли, она читается так: 8 миллионных, т. е. знаменатель этой дроби 1 000 000 и т. д.

После достаточного числа примеров десятичных дробей, прочитанных поразрядно, переходят к чтению дроби, когда числитель и знаменатель произносятся сразу. Здесь надо провести аналогию с чтением целых чисел, например число 2375 читается как 2375 единиц вместо 2 тысячи 3 сотни 7 десятков 5 единиц, т. е. все разряды раздробляются в низший разряд.

То же самое раздробление в низший разряд делается при чтении десятичной дроби без разбивания ее на разряды. Действительно:

Дробь $5{,}479 = 5 + \frac{4}{10} + \frac{7}{100} + \frac{9}{1000} = 5 + \frac{400}{1000} + \frac{70}{1000} + \frac{9}{1000} = 5\frac{479}{1000}$. Дробь эта читается так: 5 целых 479 тысячных, т. е. числитель раздроблен в низший разряд (тысячные доли).

Возьмем еще пример: 0,0708. При поразрядном чтении получается: $\frac{7}{100} + \frac{8}{10000}$; приведя дроби к НОЗ, имеем: $\frac{700}{10000} + \frac{8}{10000} = \frac{708}{10000}$; следовательно, дробь читается так: 0 целых 708 десятитысячных. В дроби 5,479 знаменатель долей низшего разряда 1000, т. е. единица с тремя нулями, тот же знаменатель и всей дроби, так как цифра 9 занимает третье место после запятой. В дроби 0,0708 знаменатель долей низшего разряда (он же знаменатель всей дроби) 10 000, единица с 4 нулями, так как 8 стоит на 4-м месте после запятой.

Таким образом, при чтении любой десятичной дроби читается числитель как целое число, затем указывается знаменатель в соответствии с числом десятичных знаков в числе.

При чтении десятичных дробей учитель в первый период изучения может заставлять учащихся сначала определить знаменатель дроби по числу десятичных знаков в ней, потом прочитать дробь. Чтобы прочитать десятичную дробь с большим числом десятичных знаков, поступают следующим образом. Десятичные знаки, начиная от запятой, делят на грани по 3 цифры в каждой грани; в последней грани может быть две или одна цифра. Читают каждую грань, как целое число, прибавляя к названию числа этой грани название знаменателя, в первой грани — тысячных, во 2-й грани — миллионных, в 3-й грани — миллиардных и т. д. К числу последней грани добавляют название долей, выражаемых последней цифрой. Например, дробь 0,053 208 009 17 читается так: 0 целых 53 тысячных 208 миллионных 9 миллиардных 17 стомиллиардных.

Запись десятичных дробей без знаменателя объясняется параллельно с чтением дробей. Прочитав на счетах или записанную на доске десятичную дробь, выраженную десятыми долями, учащиеся записывают под диктовку учителя дроби с десятыми долями, потом записываются сотые доли (отдельно), например $\frac{7}{100} = 0{,}07$. При этой записи учащимся напоминается, что число десятичных знаков должно быть равно числу нулей знаменателя. Дальше записываются десятые и сотые доли, например: $\frac{25}{100} = 0{,}25$. В случае затруднения дробь $\frac{25}{100}$ заменяют суммой $\frac{20}{100} + \frac{5}{100} = \frac{2}{10} + \frac{5}{100}$, теперь десятые и сотые доли записывают без знаменателя. Такой прием можно употребить в случае затруднений при записывании любой десятичной дроби без знаменателя. Пусть, например, дробь $\frac{28\,749}{1000}$ надо записать без знаменателя. Исключаем целое число: $28\frac{749}{1000}$, затем представим это число в виде суммы целого числа и долей различных разрядов: $28 + \frac{700}{1000} + \frac{40}{1000} + \frac{9}{1000}$, сделаем сокращение на 10, на 100 и т. д.: $28 + \frac{7}{10} + \frac{4}{100} + \frac{9}{1000}$. Запишем дробь без знаменателя, поставив все десятичные доли на соответствующее место после запятой. При этом учащимся напоминается, что число нулей знаменателя показывает, на каком месте после запятой должен стоять соответствующий десятичный знак. Итак, $28\frac{749}{1000} = 28{,}749$.

Учащиеся проверяют результат, раздробив 28 целых и 749 тысячных в самые мелкие, т. е. тысячные доли. Рассуждают так: в единице 10 десятых, в 28 единицах 280 десятых, приложив 7 десятых, получаем 287 десятых; в одной десятой 10 сотых, в 287 десятых 2870 сотых, прибавив 4 сотых, получаем 2874 сотых; раздробляем 2874 сотых в тысячные: в одной сотой 10 тысячных, получаем 28 740 тысячных, прибавив 9 тысячных, имеем данное число 28 749 тысячных.

Пусть дана дробь, в которой нет целого числа: $\frac{875}{100000}$. Заменяем эту дробь суммой ее разрядов:

$$\frac{800}{100\,000} + \frac{70}{100\,000} + \frac{5}{100\,000} = \frac{8}{1000} + \frac{7}{10\,000} + \frac{5}{100\,000}.$$

Поставив каждый десятичный знак на его месте после запятой (место указывается числом нулей знаменателя) и заменив нулями недостающие разряды, получим запись: 0,00875.

Разбираются несколько подобных примеров, из которых делается вывод:

Чтобы записать десятичную дробь без знаменателя, пишут числитель и отделяют запятой с правой стороны столько десятичных знаков, сколько нулей в знаменателе, причем иногда с левой стороны числителя приходится приписать нули.

Для чтения и записи дробей берут

а) неправильные дроби, например $\frac{8705}{100}$; соответствующая запись: 87,05;

б) правильные дроби, например $\frac{7048}{1\,000\,000}$; соответствующая запись: 0,007048.

В связи с изучением письменной нумерации десятичных дробей даются следующие упражнения:

а) Составное именованное число записывается в виде десятичной дроби, например:

3 *м* 75 *мм* = 3, 075 *м*.

Такие примеры можно предложить учащимся расположить в таблице:

	Целые				Доли			
	Тысячи (*кило*)	Сотни (*гекто*)	Десятки (*дека*)	Единицы: метр, рубль, грамм	Десятые (*деци*)	Сотые (*санти*)	Тысячные (*милли*)	
5 *м* 21 *см*				5	2	1		5,21 *м*
10 *м* 9 *мм*			1	0	0	0	9	10,009 *м*
7 *дм*				0	7			0,7 *м*
15 руб. 48 коп.			1	5	4	8		15,48 руб.
11 коп.				0	1	1		0,11 руб.
5 *г* 4 *дг* 8 *сг*				5	4	8		5,48 *г*

б) Превращение в высшие меры и запись в виде дроби, например:

469 *мм* = 0,469 *м*.

в) Запись в виде составного именованного числа, например:

5,105 *т* = 5 *т* 1 *ц* 5 *кг*.

г) Полная запись таких, например, чисел:

0,2 млн. = 200 000 или 81, 2 тыс. = 81 200.

д) Обратное упражнение: запись крупного числа в виде десятичной дроби, например:

18 300 = 18,3 тыс.; 2 140 000 = 2,14 млн.

Все указанные упражнения, связанные с нумерацией, следует изучать с возможной конкретностью и наглядностью. Как и везде, следует изыскивать все случаи связи изучаемого с жизненной практикой. Например, упражнения г) и д) связываются с газетным материалом.

Запись десятичных дробей вызывает затруднения в некоторых сложных случаях, когда в числителе имеются нули и когда числитель имеет меньше цифр, чем нулей в знаменателе. Например, чтобы записать дроби: 124 348 миллионных или 196 стотысячных, учащийся должен определить число нулей в знаменателе каждой дроби и сравнить с ним число цифр числителя. В первом примере знаменатель имеет 6 нулей, следовательно, числитель пишется сразу после запятой, знаменатель второй дроби — 1 с 5-ю нулями, поэтому, чтобы поставить 196 на 3, 4, 5-е место, надо после запятой поставить 2 нуля. Получается запись: 0,124348 и 0,00196. Для самостоятельной работы дать учащимся примеры из упражнений № 588—591.

§ 75. Сокращение десятичной дроби и приведение дробей к общему знаменателю

Рассматривая преобразования дробей, учащиеся убеждаются, что вопрос об исключении целого числа из неправильной десятичной дроби отпадает, если дробь записана без знаменателя и запятая отделяет целое число от десятичных долей, например, $\frac{827}{100} = 8{,}27$.

Обращение смешанного числа в неправильную дробь, если десятичная дробь записана с помощью запятой, тоже отпадает, например: дробь 2,78 может быть прочитана как 278 сотых. Учащиеся убеждаются, что преобразования десятичных дробей проще, чем дробей обыкновенных.

Далее. Учащиеся могут самостоятельно сделать вывод, что приписывание нулей справа и слева к десятичной дроби, записанной без знаменателя, не изменяет величины дроби. Рассматривают пример:

Числа 5, 04; 05, 04; 005; 04; 5,040; 5,0400 выражают одно и то же число, состоящее из 5 единиц и 4 сотых долей, так как 40 тысячных $\frac{40}{1000}$ и 400 десятитысячных $\frac{400}{10000}$ равны 4 сотым. Здесь применяется умножение числителя и знаменателя на одно и то же число $\frac{4 \cdot 10}{100 \cdot 10}$ и $\frac{4 \cdot 100}{100 \cdot 100}$, отчего величина дроби не изменяется, т. е. основное свойство дроби, известное учащимся из курса обыкновенных дробей. Попутно у учащихся иногда возникает вопрос: можно ли приписывать нули справа и слева к целому числу. Выясняется, что нули слева не изменяют значения разрядов числа, а нули справа, как десятичные знаки, если отделить целое число запятой, также не изменяют поместного значения цифр. Например:

$$125 = 00125 = 0125{,}00.$$

Сравнение дробей данной и полученной после приписывания нулей справа можно объяснить на именованных числах метрической системы. Например: $0,8 = 0,80 = 0,800$. Действительно, пусть имеем 0,8 *м*, раздробим в сантиметры:

$$0,8\ м = \frac{8 \cdot 100}{10}\ см = 80\ см;\ \text{но}\ 0,80\ м = \frac{80 \cdot 100}{100}\ см = 80\ см.$$

$$0,800\ м = \frac{800 \cdot 100}{1000}\ см = 80\ см.$$

На вопрос учителя, какие преобразования обыкновенных дробей основаны на главном их свойстве, учащиеся отвечают, что на этом свойстве основано сокращение дробей и приведение дробей к общему знаменателю.

Зная, что к десятичной дроби можно справа приписывать нули, учащиеся легко сами выведут обратное преобразование, когда в десятичной дроби, не изменяя ее величины, можно отбросить нули, стоящие справа на месте десятичных знаков. Например, $5,71000 = 5,71$. Учащиеся могут самостоятельно объяснить это преобразование, написав десятичную дробь с знаменателем, выполнив сокращение и записав полученную дробь без знаменателя. Получается запись:

$$5,71000 = 5\frac{71000}{100000} = 5\frac{71}{100} = 5,71$$

Желательно учащимся задать такие вопросы: можно ли сократить дробь 0,76, оставляя ее десятичной? (Нельзя.) Какие же десятичные дроби можно сокращать? (Которые оканчиваются нулями.) Как это делается? (Нули справа зачеркиваются.) Учащиеся придумывают десятичные дроби, которые можно сократить.

Объяснение приведения дробей к общему знаменателю следует начать с примеров, у которых десятичная дробь выражена в различных десятичных долях. Учитель, дав пример десятичной дроби, например 3,25, предлагает выразить эту дробь в 1000-х, 10 000-х и т. д. долях.

Выясняется, что знаменатели десятичных дробей отличаются только числом нулей при единице, поэтому преобразование одной десятичной дроби в другую можно сделать только путем умножения числителя и знаменателя на число, состоящее из единицы с нулями. Учащимся известно, что приписывание нулей к десятичной дроби справа не изменяет величины дроби, изменяет только ее форму.

П р и м е р: выразить 3,25 в 1000-х и 10 000-х долях, решается и объясняется учащимися самостоятельно: $3,25 = 3,250 = 3,2500$.

В случае затруднений десятичные дроби записываются с знаменателем и применяется главное свойство дробей. После такой подготовки переходят к приведению дробей к общему знаменателю. Учащиеся могут самостоятельно разобрать примеры: в дробях 5,35; 0,1237; 10,2 указать знаменатели этих дробей (100, 10000, 10). Общим может быть только наибольший 10 000, как число кратное 10 и 100. На дополнительные множители 100 и 1000 надо умножить числители и знаменатели дробей, т. е. приписать справа к первой дроби два нуля, к третьей дроби три нуля. Получается запись: 5,3500; 0,1237; 10,2000. Разобрав несколько примеров, учащиеся самостоятельно выводят правило приведения десятичных дробей к общему знаменателю.

В случае затруднений десятичные дроби можно написать с знаменателями, привести их к общему знаменателю, потом результаты записать без знаменателей.

Надо обратить внимание учащихся на то, что общим знаменателем данных дробей может быть не только 10 000, но и 100 000, 1 000 000 и т. д., но наименьшим является 10 000. Обычно целесообразно приводить дроби к наименьшему общему знаменателю.

Для самостоятельной работы дать учащимся примеры из упражнений № 608—610, 612.

В заключение надо потребовать от учащихся обязательного запоминания распространенных дробей $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{4}$ и $\frac{3}{4}$ в виде десятичных.

§ 76. Сравнение десятичных дробей по величине

При сравнении величины десятичных дробей надо применить тот же прием, что и при сравнении обыкновенных дробей, т. е. приведение дробей к общему знаменателю. Учащиеся часто ошибаются, считая большей ту десятичную дробь, числитель которой имеет больше десятичных знаков. Имея, например, дроби 0, 27895 и 0,315, не приводя дробей к НОЗ, сравнивая числители, учащиеся сделали бы ошибку, сказав, что первая дробь больше второй, так как числитель $27895 > 315$. После приведения к НОЗ посредством приписывания нулей справа ко второй дроби, учащиеся видят, что вторая дробь больше первой, потому что $31500 > 27895$.

На целом ряде примеров учащиеся вспоминают основной прием сравнения величины дробей посредством приведения к НОЗ и сравнения числителей.

В дальнейшей работе учащиеся убеждаются в том, что приписывание нулей для сравнения десятичных дробей не имеет особого практического значения. Чтобы определить, какая дробь больше, достаточно сравнить только наиболее крупные доли, в смешанных же числах сравнение начинается с целых чисел: если целые равны, то та дробь больше, у которой десятых больше, если и десятых поровну, то больше дробь, имеющая большее число сотых, и т.д.

П р и м е р ы:

0,5 и 0,49; 0,50 и 0,49; $0{,}50 > 0{,}49$; $0{,}5 > 0{,}49$; 0,2 и 0,08; $0{,}20 > 0{,}08$; $0{,}2 > 0{,}08$; 0,73 и 0,71998; $0{,}73000 > 0{,}71998$; $0{,}73 > 0{,}71998$. Или дроби сравнивают поразрядно, не приводя к НОЗ. Например:

7,81 и 5,9999; $7 > 5$, поэтому $7{,}81 > 5{,}9999$; 2,4318 и 2,52; $0{,}4 < 0{,}5$; $2{,}4318 < 2{,}52$; 0,63599 и 0,6814; $0{,}03 < 0{,}08$; $0{,}63599 < 0{,}6814$ и т. д.

§ 77. Изменение величины десятичной дроби при перенесении в ней запятой

Увеличение и уменьшение десятичных дробей в 10, 100, 1000 и т. д. раз является частным случаем умножения десятичной дроби на целое число. Ввиду того что на этих упражнениях происходит дальнейшее раскрытие свойств десятичных дробей, уточняется понимание единиц разрядов десятичных дробей, а также перевод одних метрических мер в другие, вопросы эти ставятся отдельно. Здесь следует повторить с учащимися свойство суммы: сумма увеличивается во столько раз, во сколько раз увеличивается каждое слагаемое (при условии, что слагаемые увеличиваются в одинаковое число раз).

Учитель записывает на доске:

$$10 + 12 + 17 = 39$$
$$20 + 24 + 34 = 78$$
$$30 + 36 + 51 = 117.$$

Предлагает учащимся сравнить вторую сумму с первой. (Вторая в 2 раза больше первой.) Теперь сравните каждое из слагаемых 2-й суммы с соответствующим слагаемым первой суммы. (Каждое слагаемое второй суммы в 2 раза больше соответствующего слагаемого первой суммы.)

Учащиеся, сравнив третью сумму с первой, приходят к заключению, что третья сумма, как и каждое ее слагаемое, в 3 раза больше, чем первая сумма и соответствующие слагаемые.

Решается еще пример. Сумму $12 + 18 + 10$ надо увеличить в 6 раз. Как это сделать? (Надо увеличить в 6 раз каждое слагаемое.) Получается запись:

$$12 + 18 + 10 = 40$$
$$72 + 108 + 60 = 240$$

А как можно уменьшить сумму 240 в 3 раза? (Надо каждое слагаемое уменьшить в 3 раза.) Сделайте это. Учащиеся записывают:

$$24 + 36 + 20 = 80$$

Далее переходят к вопросу об изменении величины дроби от перенесения запятой вправо. Берется пример: 4,827, предлагается учащимся написать те же цифры в том же порядке, но запятую поставить после 8: 48,27. Разряды полученного числа учащиеся сравнивают с разрядами первоначального числа, в первом числе 4 означает простые единицы, во втором числе 4 — десятки, т.е. значение цифры 4 увеличилось в 10 раз. Цифра 8, означавшая десятые доли в первом числе, во втором означает простые единицы, т. е. ее значение увеличилось также в 10 раз. То же самое приходится сказать об остальных цифрах. Учащиеся делают вывод: перенесением запятой через один знак вправо десятичная дробь увеличивается в 10 раз. Если запятая переносится через 2 знака вправо, то значение каждого разряда увеличится в $10 \cdot 10 = 100$

раз, например: десятые доли при перенесении запятой через 2 знака вправо заменяются десятками, сотые — единицами и т. д. Перенесением запятой через 3 десятичных знака вправо увеличивается значение каждого разряда в 1000 раз, следовательно, дробь увеличивается в 1000 раз и т. д.

Обратно, перенесение запятой влево через один знак уменьшает значение каждого разряда десятичной дроби и всю дробь в 10 раз. Например, 378,258 заменим дробью 37,8258. Здесь 3 сотни первого числа заменились во втором числе 3-мя десятками, 7 десятков — 7-ю простыми единицами, 8 единиц — 8-ю десятыми долями, 2 десятых — 2-мя сотыми и т. д. Таким образом, значение каждого разряда уменьшилось во втором числе в 10 раз и все число уменьшилось в 10 раз. (Вспоминают свойство суммы.) Точно так же можно объяснить, что перенесение запятой через 2 знака влево уменьшает десятичную дробь в 100 раз, перенесение через три знака влево — в 1000 раз и т. д.

Здесь надо напомнить известное из курса целых чисел свойство суммы: если слагаемое уменьшить в несколько раз, то сумма уменьшится во столько же раз.

Примеры на увеличение десятичной дроби в 10, 100, 1000 и т. д. раз можно расположить в таком порядке.

а) Примеры, в которых запятая переносится через значащие цифры десятичной дроби.

Учащиеся сначала делают подробные преобразования, употребляя запись дроби со знаменателем:

$$5{,}24 \cdot 10 = 5\,\frac{24}{100} \cdot 10 = \frac{524 \cdot 10}{100} = \frac{524}{10} = 52{,}4;$$

$$18{,}249 \cdot 100 = \frac{18249}{1000} \cdot 100 = \frac{18249}{10} = 1824{,}9;$$

$$2{,}0576 \cdot 1000 = \frac{20576 \cdot 1000}{10000} = 2057{,}6.$$

При записи этих примеров употребляется знак умножения, так как увеличение в 10, 100, 1000... раз есть умножение на 10, 100, 1000...

Каждый пример объясняется учащимися. Они указывают, что дроби, получившиеся при перенесении запятой, записаны теми же цифрами в том же порядке, но запятая перенесена вправо через столько десятичных знаков, сколько нулей при единице (единица с нулями — число, увеличивающее десятичную дробь в 10^n раз).

б) Дальше разбираются примеры, в которых после перенесения запятой она опускается, т. е. дробь увеличивается во столько раз, сколько нулей заключается в знаменателе, и заменяется целым числом.

Примеры: $0{,}9 \cdot 10 = 9$; $2{,}13 \cdot 100 = 213$;
$1{,}125 \cdot 1000 = 1125$.

в) Решаются примеры на правильные десятичные дроби, в которых после перенесения запятой нуль целых заменяется значащей цифрой:

$$0,321 \cdot 100 = 32,1; \ 0,0587 \cdot 1000 = 58,7.$$

г) Дальше рассматриваются примеры, в которых перенесение запятой вызывает возникновение нулей справа:

$$10,15 \cdot 1000 = 10150; \ 314 \cdot 10000 = 31400.$$

д) В следующих примерах перенос запятой вызывает возникновение вместо нулей целых значащих цифр:

$$0,028 \cdot 100 = 2,8; \ 0,0185 \cdot 1000 = 18,5.$$

Во всех случаях примеры могут быть объяснены записью десятичных дробей со знаменателем и увеличением их в такой форме в 10, 100,.... раз или выражением этих дробей в метрических мерах.

В тех случаях, когда при увеличении числа в 10, 100, 1000, . . . раз число цифр числа после запятой меньше, чем число нулей при единице, учащиеся сначала приписывают справа к числу нули, потом переносят запятую.

В заключение делается вывод правила увеличения десятичной дроби в 10, 100, 1000,.... раз. Чтобы увеличить десятичную дробь в 10, 100, 1000 и т. д. раз, надо перенести запятую вправо через столько десятичных знаков, сколько нулей при единице.

Подобным же образом делается вывод правила уменьшения десятичной дроби в 10, 100, 1000 и т. д. раз.

Уменьшение в 10, 100, 1000,... раз есть деление на 10, 100, 1000,...; поэтому примеры этого раздела записывают со знаком деления.

а) Запятая переносится:

$$58,2 : 10 = 5,82.$$

Объяснение этого преобразования могут дать сами учащиеся (по аналогии с разбором примеров на увеличение в 10, 100,... раз):

$$58,2 : 10 = \frac{582}{100} = 5,82.$$

б) Появляются после запятой новые нули:

$$0,7 : 10 = 0,07; \ 0,15 : 100 = 0,0015.$$

Объяснение преобразования может быть дано, как в первом случае, а также в некоторых случаях дроби можно выразить именованными числами метрической системы мер. Например:

$$0,7 \textit{ м} : 10 = 7 \textit{ дм} : 10 = 70 \textit{ см} : 10 = 7 \textit{ см} = 0,07 \textit{ м}.$$

в) Запятая появляется:

$$625 : 10 = 62,5; \ 1876 : 100 = 18,76.$$

Объяснение может быть следующее:

$$625 \text{ м} : 10 = 6250 \text{ дм} : 10 = 625 \text{ дм} = 62{,}5 \text{ м}.$$

г) Появляется запятая и нуль целых:

$$27 : 100 = 0{,}27.$$

д) Появляется запятая и 3 нуля:

$$5 : 1000 = 0{,}005.$$

е) Нуль справа исчезает, появляются нули слева и запятая:

$$90 : 1000 = 0{,}09.$$

В тех случаях, когда число цифр числа меньше числа нулей при единице, учащиеся сначала приписывают к данному числу нули слева (отчего величина числа не изменяется), потом переносят запятую.

После разбора примеров учащиеся выводят правило: чтобы уменьшить десятичную дробь в 10, 100, 1000, ... раз, надо перенести запятую влево через столько цифр, сколько нулей при единице.

Умея увеличивать и уменьшать десятичную дробь в 10, 100, ... раз, легко можно выполнять раздробление и превращение именованных чисел, выраженных в метрических мерах. Например, надо 0,125 *м* раздробить в сантиметры. 1 *см* в 100 раз меньше 1 *м*, число сантиметров должно быть в 100 раз больше, чем число метров такой же длины. В числе 0,125 переносим запятую через 2 цифры вправо: 0,125 *м* = 12,5 *см*. Чтобы раздробить 1,2 *т* в килограммы, надо перенести запятую в этом числе вправо через 3 цифры: 1,2 *т* = 1200 *кг*.

Для превращения 25,6 *кг* в центнеры надо перенести запятую в этом числе влево через 2 знака (уменьшить число килограммов в 100 раз, так как 1 *ц* больше 1 *кг* в 100 раз, число центнеров должно быть меньше в 100 раз, чем число килограммов). Ответ: 25,6 *кг* = = 0,256 *ц*.

Для закрепления и для самостоятельной работы учащиеся могут использовать примеры из упражнений № 592—608.

§ 78. Сложение

Правило сложения дробей известно учащимся из курса обыкновенных дробей. Поэтому правило сложения десятичных дробей учащиеся могут вывести самостоятельно, разобрав несколько примеров. Дается пример: 25,17 + 2,149. Вычисления записываются так:

$$25{,}17 + 2{,}149 = 25\frac{17}{100} + 2\frac{149}{1000} = 27\frac{319}{1000} = 27{,}319 \quad \text{и}$$

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{r} 25{,}170 \\ 2{,}149 \end{array} \\ \hline 27{,}319 \end{array}$$

В дальнейшем учащиеся не приводят дроби к НОЗ, но должны, чтобы не допускать ошибок, выяснять, какие разряды десятичных долей они складывают.

Порядок расположения примеров может быть следующий.

1) Сложение десятичных дробей с одинаковым числом десятичных знаков без перехода в следующий разряд, например: в бидоне было 5,4 *л* смазочного масла. В него добавили 3,2 *л*. Сколько смазочного масла стало в бидоне?

Решение: $5{,}4\ л + 3{,}2\ л = 8{,}6\ л.$

2) Сложение десятичных дробей с одинаковым числом десятичных знаков с переходом в высший разряд. Обращается внимание учащихся на то, что слагаемые можно подписывать одно под другим и складывать поразрядно как целые числа. Например, решается задача:

Требуется изготовить 2 болта: один длиною 7,2 *см*, другой длиннее на 12,9 *см*. Какой длины надо взять стальной прут, если положить 0,9 *см* на потери при резании?

Формула решения: $(7{,}2\ см + 12{,}9\ см) + 7{,}2\ см + 0{,}9\ см = 20{,}1\ см + 7{,}2\ см + 0{,}9\ см = 28{,}2\ см$
или следующая запись:

$$1)\ \begin{array}{r} +\begin{array}{r}7{,}2\ см\\12{,}9\ см\end{array}\\ \hline 20{,}1\ см\end{array} \qquad 2)\ \begin{array}{r} +\begin{array}{r}20{,}1\ см\\7{,}2\ см\\0{,}9\ см\end{array}\\ \hline 28{,}2\ см\end{array}$$

3) Сложение десятичной дроби с целым числом:

$$2{,}78 + 11 = 13{,}78.$$

Перед последующими примерами следует напомнить учащимся, что величина десятичной дроби не зависит от числа нулей на конце.

4) Сложение десятичных дробей с разным числом десятичных знаков. В первый период обучения десятичные дроби приводятся к НОЗ. Пример: $7{,}1 + 5{,}128 + 3{,}42$

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r}7{,}100\\5{,}128\\3{,}420\end{array}\\ \hline 15{,}648\end{array}$$

5) Сложение десятичных дробей, дающих в сумме одну или несколько целых единиц:

$$0{,}53 + 0{,}47 = 1.$$

После решения достаточного числа примеров сложение выполняется без приведения дробей к НОЗ.

Учащиеся самостоятельно формулируют правило сложения десятичных дробей.

В некоторых школах на изучение сложения десятичных дробей отводится слишком мало времени на том основании, что сложение легко усваивается учащимися. Однако в вычислительной практике учащихся в сложении, записанном в строчку, встречаются очень грубые ошибки. Приведем примеры таких ошибок:

	ответ		ответ
$5,43+2$	5,63	$25+0,31$	0,56
$5,43+2$	5,45	$2,6+0,7$	2,13
$0,4+0,9$	0,13	$20,5+0,9$	20,14 и т. п.

В процессе упражнений законы и свойства сложения необходимо повторить и на сложении десятичных дробей:

1) Сочетательное свойство:

$$128,13 + 724,77 + 811,41 + 315,5$$

Группу слагаемых заменяем их суммой:

$$(128,13 + 724,77) + (811,41 + 315,5) = 852,9 + 1126,91 = 1979,81$$

$$+\begin{array}{r}128,13\\724,77\\\hline 852,90\end{array}\qquad +\begin{array}{r}811,41\\315,5\\\hline 1126,91\end{array}\qquad +\begin{array}{r}852,9\\1126,91\\\hline 1979,81\end{array}$$

2) Переместительное свойство:

$$10,197 + 42,287 + 0,013 + 34,203 = 10,197 + 34,203 + 42,287 + 0,013 = (10,197 + 34,203) + (42,287 + 80,013) = 44,4 + 122,3 = 166,7$$

$$+\begin{array}{r}10,197\\34,203\\\hline 44,400\end{array}\qquad +\begin{array}{r}42,287\\80,013\\\hline 122,300\end{array}\qquad +\begin{array}{r}44,4\\122,3\\\hline 166,7\end{array}$$

3) Прибавление суммы к числу:

$$0,999 + (1,689 + 2,837 + 4,444) = 9,969$$

$$+\begin{array}{r}0,999\\1,689\\\hline 2,688\end{array}\qquad +\begin{array}{r}2,688\\2,837\\\hline 5,525\end{array}\qquad +\begin{array}{r}5,525\\4,444\\\hline 9,969\end{array}$$

4) Прибавление числа к сумме:

$$(29,98 + 14,87 + 36,83) + 19,39 = 101,07$$

$$+\begin{array}{r}29,98\\19,39\\\hline 49,37\end{array}\qquad +\begin{array}{r}49,37\\14,87\\36,83\\\hline 101,07\end{array}$$

Остановимся на применении законов и свойств сложения в устном счете с десятичными дробями.

1) Замена нескольких слагаемых их суммой (сочетательное свойство):

а) $6,43 + 4,57 + 9,87 = (6,43 + 4,57) + 9,87 = 11 + 9,87 = 20,87$;

б) $3,37 + 5,86 + 4,14 = 3,37 + (5,86 + 4,14) = 3,37 + 10 = 13,37$.

2) Перестановка слагаемых (переместительное свойство):

а) $3,57 + 4,68 + 6,43 = 3,57 + 6,43 + 4,68 = (3,57 + 6,43) + 4,68 = 10 + 4,68 = 14,68$;

б) $8,3 + 3,85 + 9,7 + 5,15 + 2,25 = 8,3 + 9,7 + 3,85 + 5,15 + 2,25 = (8,3 + 9,7) + (3,85 + 5,15) + 2,25 = 18 + 9 + 2,25 = 29,25$;

в) $13,98 + 7,12 = 13,98 + 0,02 + 7,1 = (13,98 + 0,02) + 7,1 = 14 + 7,1 = 21,1$.

В примере «в» разбиваем второе слагаемое на 2 числа с целью приведения к сложению круглых чисел и применяем сочетательное свойство.

3) Прибавление суммы к числу:

а) $2,64 + (5,36 + 7,78) = 2,64 + 5,36 + 7,78 = (2,64 + 5,36) + 7,78 = 15,78$;

б) $5,37 + (5,88 + 4,63) = 5,37 + 5,88 + 4,63 = (5,37 + 4,63) + 5,88 = 10 + 5,88 = 15,88$.

4) Прибавление числа к сумме:

а) $(4,53 + 6,89) + 5,47 = (4,53 + 5,47) + 6,89 = 10 + 6,89 = 16,89$;

б) $(5,29 + 4,68 + 2,1) + 6,71 = (5,29 + 6,71) + 4,68 + 2,1 = 12 + 4,68 + 2,1 = 18,78$.

Для самостоятельной работы учащимся в классе и на дом надо дать примеры из упражнений № 615—632.

§ 79. Вычитание

Правило вычитания десятичных дробей учащиеся могут вывести самостоятельно из решения примеров. Первые примеры решаются при помощи записывания десятичных дробей со знаменателями и применения правила вычитания обыкновенных дробей.

Дается пример: $5,375 - 1,24 = 5\frac{375}{1000} - 1\frac{24}{100} = 5\frac{375}{1000} - 1\frac{240}{1000} = 4\frac{135}{1000} = 4,135$. Возможна и другая запись:

$$\begin{array}{r} 5,375 \\ -\,1,240 \\ \hline 4,135 \end{array}$$

В дальнейшем приведения к общему знаменателю не требуется, но объяснение, над какими разрядами производится вычитание, в первый период обучения обязательно.

Примеры на вычитание.

1) Вычитание десятичных дробей с одинаковыми знаменателями без перехода из одного разряда в другой — без раздробления.

Решается задача: « В первый час велосипедист проехал 12,3 *км*, а во второй час 15,5 *км*. На сколько быстрее ехал велосипедист во второй час?»

Решение:

$$15{,}5 - 12{,}3 = 3{,}2.$$

2) Вычитание десятичных дробей с одинаковым числом десятичных знаков с раздроблением высшего разряда в низший. Учащимся надо указать, что вычитание десятичных дробей делается так же, как вычитание целых чисел.

3) Вычитание целого числа из десятичной дроби (из смешанного числа). Пример:

$$15{,}45 - 8 = 7{,}45.$$

4) Вычитание десятичной дроби из 1 и из целого числа:

$$1 - 0{,}75 = 0{,}25; \; 8 - 5{,}52 = 2{,}48.$$

В этих и последующих примерах следует напомнить учащимся, что величина десятичной дроби не зависит от числа нулей на конце, что нули справа, если целое число отделено запятой, и нули слева от целого числа не изменяют величины дроби.

После решения достаточного числа примеров учащиеся выполняют вычитание, не приводя дроби к НОЗ.

Правило вычитания учащиеся легко сформулируют сами. Решение примеров должно сопровождаться объяснением вычитания десятичных долей поразрядно.

Для самостоятельной работы рекомендуется дать учащимся примеры из упражнений № 633—649.

§ 80. Сложение и вычитание

После усвоения вычитания десятичных дробей необходимо на этом материале повторить законы и свойства вычитания.

Укажем примеры устного счета на применение свойств сложения и вычитания.

1. Переместительное свойство ряда сложений и вычитаний. Результат ряда сложений и вычитаний не изменяется от перемены порядка членов этого ряда:

а) $0{,}579 + 5{,}687 - 0{,}687 = 5{,}687 - 0{,}687 + 0{,}579 = 5{,}579.$

б) $8{,}132 - 4{,}863 - 0{,}132 = 8{,}132 - 0{,}132 - 4{,}863 = 8 - 4{,}863 = 3{,}137.$

в) $10{,}788 - 1{,}318 - 1{,}588 - 7{,}682 = 10{,}788 - 1{,}588 - 1{,}318 - 7{,}682 = (10{,}788 - 1{,}588) - (1{,}318 + 7{,}682) = 9{,}2 - 9 = 0{,}2.$

2. Прибавление к данному числу разности: чтобы прибавить к числу разность, достаточно вычесть из числа вычитаемое и прибавить уменьшаемое (или в обратном порядке):

а) $3{,}72 + (4{,}59 - 2{,}72) = 3{,}72 + 4{,}59 - 2{,}72 = 3{,}72 - 2{,}72 + 4{,}59 = 1 + 4{,}59 = 5{,}59;$

б) $64{,}2 + (35{,}8 - 17{,}36) = 64{,}2 + 35{,}8 - 17{,}36 = (64{,}2 + 35{,}8) - 17{,}36 = 100 - 17{,}36 = 82{,}64$.

3. Вычитание из числа суммы: чтобы вычесть из данного числа сумму, достаточно вычесть из него одно слагаемое за другим:

а) $84{,}7 - (14{,}7 + 28{,}8) = 84{,}7 - 14{,}7 - 28{,}8 = (84{,}7 - 14{,}7) - 28{,}8 = 70 - 28{,}8 = 41{,}2$;

б) $15{,}48 - (6{,}29 + 3{,}48) = 15{,}48 - 6{,}29 - 3{,}48 = (15{,}48 - 3{,}48) - 6{,}29 = 12 - 6{,}29 = 5{,}71$.

4. Вычитание из числа разности: чтобы из данного числа вычесть разность, достаточно вычесть уменьшаемое и прибавить вычитаемое (или в обратном порядке):

а) $61{,}2 - (21{,}2 - 3{,}82) = 61{,}2 - 21{,}2 + 3{,}82 = (61{,}2 - 21{,}2) + 3{,}82 = 40 + 3{,}82 = 43{,}82$;

б) $33{,}54 - (29{,}65 - 12{,}46) = 33{,}54 + 12{,}46 - 29{,}65 = (33{,}54 + 12{,}46) - 29{,}65 = 46 - 29{,}65 = 16{,}35$.

5. Вычитание из суммы числа: чтобы из суммы нескольких слагаемых вычесть какое-нибудь число, достаточно вычесть его из одного слагаемого, большего того числа или равного ему.

а) $(5{,}27 + 4{,}86) - 2{,}27 = 5{,}27 + 4{,}86 - 2{,}27 = 5{,}27 - 2{,}27 + 4{,}86 = (5{,}27 - 2{,}27) + 4{,}86 = 3 + 4{,}86 = 7{,}86$,

б) $(8{,}13 + 9{,}11) - 5{,}11 = 8{,}13 + 9{,}11 - 5{,}11 = 8{,}13 + (9{,}11 - 5{,}11) = 8{,}13 + 4 = 12{,}13$.

Повторение на десятичных дробях зависимости между членами сложения и членами вычитания можно провести на решении примеров и задач в виде следующих:

а) К какому числу надо прибавить 15,75, чтобы получить 101,05?

б) Сумма трех слагаемых 278,85; одно слагаемое равно 138,8, другое 70,35. Найти третье слагаемое.

в) Какое число надо отнять от 100 000, чтобы получить в остатке 72348,72?

г) $3973 + x = 4701{,}3$; $15{,}74 - x = 12{,}84$; $x - 13{,}125 = 6{,}875$.

Для повторения изменения суммы от изменения слагаемых и изменения остатка от изменения уменьшаемого и вычитаемого можно предложить примеры и задачи:

1. Сумма трех слагаемых равна 119,7. а) Одно из слагаемых увеличено на 9,9, другое уменьшено на 9,9. Найти новую сумму. б) Первое слагаемое уменьшено на 21,3, второе увеличено на 30. Какова новая сумма? в) Второе слагаемое уменьшено на 40, третье слагаемое увеличено на 25,7. Какова новая сумма?

2. Разность двух чисел 81,9. а) Уменьшаемое и вычитаемое уменьшены (увеличены) на 13,1. Какова новая разность? б) Уменьшаемое увеличено на 1,9, вычитаемое уменьшено на 2,1. Какова новая разность? в) Как надо изменить уменьшаемое, чтобы разность

была равна 100? г) Как надо изменить вычитаемое, чтобы разность равнялась 50?

Для повторения проверки сложения и вычитания надо дать примеры в виде следующих:

Выполнить сложение и сделать проверку двумя способами:

$$5,48 + 7,44 + 235,83 + 0,08 + 0,07.$$

Выполнить вычитание и сделать проверку двумя способами:

$$1001,034 - 193,727.$$

На изменении результатов действий от изменения данных основаны особые приемы устных вычислений. Приведем примеры некоторых приемов на десятичных дробях.

1. Округление одного или нескольких слагаемых основано на изменении суммы от изменения слагаемых. Округляя слагаемые, увеличиваем (или уменьшаем) их. Следовательно, и сумма увеличится (или уменьшится) на несколько долей. Полученную сумму уменьшаем (увеличиваем) на столько же долей:

а) $23,98 + 3,26 = (24 + 3,26) - 0,02 = 27,24$;

б) $7,99 + 18,96 + 5,97 = (8 + 19 + 6) - 0,01 - 0,04 - 0,03 = 33 - 0,08 = 32,92$.

2. Одно из слагаемых увеличиваем (уменьшаем) на несколько долей, другое слагаемое уменьшаем (увеличиваем) на столько же долей — сумма не изменится:

а) $19,96 + 7,44 = 19,96 + 7,4 + 0,04 = (19,96 + 0,04) + 7,4 = 27,4$;

б) $6,72 + 8,14 = (6,72 + 0,14) + (8,14 - 0,14) = 6,86 + 8 = 14,86$.

3. Округление уменьшаемого или вычитаемого основано на изменении разности от изменения уменьшаемого или вычитаемого:

а) $7,82 - 2,46 = (8 - 2,46) - 0,18 = 5,54 - 0,18 = 5,36$.

Уменьшаемое увеличено на несколько долей, получившаяся разность должна быть уменьшена на столько же долей.

б) $6,03 - 3,25 = (6 - 3,25 + 0,03 = 2,75 + 0,03 = 2,78$.

Уменьшаемое уменьшено на несколько долей, получившаяся разность должна быть увеличена на столько же долей.

в) $7,83 - 5,98 = (7,83 - 6) + 0,02 = 1,83 + 0,02 = 1,85$.

Вычитаемое увеличено на несколько долей, получившаяся разность должна быть увеличена на столько же долей.

г) $9,43 - 5,44 = (9,43 - 5,43) - 0,01 = 4 - 0,01 = 3,99$.

Вычитаемое уменьшено на несколько долей, разность должна быть уменьшена на столько же долей.

д) $1,31 - 0,96 = (1,31 + 0,04) - (0,96 + 0,04) = 1,35 - 1 = 0,35$;

е) $7,5 - 3,12 = (7,5 - 0,12) - (3,12 - 0,12) = 7,38 - 3 = 4,38$.

Если уменьшаемое и вычитаемое увеличить (пример «д») или уменьшить (пример «е») на одно и то же число, разность не изменится.

Для закрепления учащимся надо решить из задачника упражнения № 650 — 668.

§ 81. Умножение десятичных дробей

Умножение десятичных дробей следует начинать с умножения дроби на целое число.

При умножении десятичной дроби на целое число можно выделить следующие случаи: а) умножение десятичной дроби на однозначное число (без перехода в высший разряд и с переходом в высший разряд); б) умножение на 10, 100, 1000 и т. д.; в) умножение десятичной дроби на многозначное число.

а) Умножение десятичной дроби на однозначное число можно объяснить различными способами:

Во-первых, десятичные дроби можно записать со знаменателем и выполнить умножение на основании правила умножения обыкновенных дробей. Например: $0{,}243 \cdot 2 = \frac{243}{1000} \cdot 2 = \frac{243 \cdot 2}{1000} = \frac{486}{1000} = 0{,}486$. Учащиеся сравнивают число десятичных знаков множимого и произведения.

Во-вторых, можно выполнять умножение поразрядно, называя умножаемый разряд, а также разряд, получаемый в произведении. При решении двух-трех примеров учащиеся обязательно называют разряд множимого и получаемый разряд произведения. Например: $0{,}1325 \cdot 3$; объяснение должно быть следующее: 5 десятитысячных, умноженные на 3, дают 15 десятитысячных, или одну тысячную 5 десятитысячных; 2 тысячные, умноженные на 3, дадут 6 тысячных, да еще 1 тысячная, всего 7 тысячных; 3 сотых при умножении на 3 дадут 9 сотых, 1 десятая $\times\ 3 = 3$ десятых, итого 0,3975. Учащиеся сравнивают число десятичных знаков множимого и произведения.

Кроме того, можно объяснить умножение на целое число изменением произведения при изменении множимого. Например: дано 0,68497 умножить на 4. Умножаем целое число 68 497 на 4, получаем 273 988. Учащиеся по вопросам учителя выясняют, что так как множимое увеличено в 100 000 раз, то произведение получилось увеличенное сравнительно с требуемым также в 100 000 раз; поэтому для получения правильного результата полученное число 273 988 надо уменьшить в 100 000 раз, для этого в нем справа отделяют запятой 5 цифр. Получается 2,73988. Учащиеся во всех случаях сравнивают число десятичных знаков произведения и множимого и выводят правило умножения десятичных дробей на целое число.

При объяснении этого случая умножения полезно взять не пример, а задачу, чтобы напомнить учащимся перед переходом к умножению на дробь значение умножения на целое число. Умножение на однозначное число следует выполнять полуписьменно. При записи вычислений не следует позволять учащимся зачеркивать запятую в десятичной дроби.

б) Умножение десятичной дроби на 10, 100, 1000, . . . подготовлено разбором вопроса об увеличении десятичной дроби в 10, 100, 1000, . . . раз. В разделе об увеличении десятичной дроби в 10, 100, 1000, . . . раз указана последовательность расположения примеров, которые и следует повторить, как умножение на 10, 100, 1000, . . .

в) Умножение десятичной дроби на многозначное число можно объяснять, записав десятичную дробь со знаменателем и применив правило умножения обыкновенных дробей. Например:

$$1{,}36 \cdot 273 = \frac{136}{100} \cdot 273 = \frac{136 \cdot 273}{100} = \frac{37128}{100} = 371{,}28.$$

Учащиеся сравнивают число десятичных знаков множимого и произведения.

Другой способ объяснения умножения десятичной дроби на целое число основан на увеличении произведения от увеличения множимого. Разбирается пример: 3,251 · 147. Учитель предлагает учащимся умножить целое число 3251 на 147, получается 477 897. По вопросам учителя учащиеся объясняют, что при умножении 3251 множимое было увеличено в 1000 раз сравнительно с данным, произведение получилось в 1000 раз больше, чем требуемое. Поэтому для получения искомого произведения число 477 897 надо уменьшить в 1000 раз; для этого надо отделить в нем 3 цифры справа. Получается запись: 3,251 · 147 = 477,897.

Запись вычислений может быть следующая:

а)
$$\begin{array}{r} \times\ 3251 \\ 147 \\ \hline 22757 \\ +\ 13004 \\ 3251 \\ \hline 477897 \end{array}$$

б)
$$\begin{array}{r} \times\ 3{,}251 \\ 147 \\ \hline 22757 \\ +\ 13004 \\ 3251 \\ \hline 477{,}897 \end{array}$$

Таким образом записывают множимое и множитель, как при умножении целых чисел. Зачеркивание запятой нельзя допускать.

Умножение десятичной дроби и целого числа на десятичную дробь надо начинать с умножения на 0,1, 0,01, 0,001 и т. д. Например: 4,08 · 0,1. Записав дроби со знаменателями, к ним применяют правило умножения обыкновенных дробей:

$$\frac{408}{1000} \cdot \frac{1}{10} = \frac{408}{10\,000}$$

Выполнив вычисления этого примера, учащиеся видят, что множимое уменьшилось в10 раз. На этом примере они повторяют значение умножения на правильную дробь: умножить на 0,1, 0,01 и т. д. — значит найти одну десятую, одну сотую и т. д. данного числа. Для этого данную дробь надо уменьшить в 10 раз, в 100 раз и т. д.

Тот же результат, как при умножении на 0,1, 0,01, 0,001, получится, если данное число разделить на 10, 100, 1000, . . . Для этого надо перенести в данном множимом запятую через одну, две, три цифры влево. Разбирают еще примеры:

$15{,}2 \cdot 0{,}01 = \frac{152}{10} \cdot \frac{1}{100} = \frac{152}{1000} = 0{,}152$, но этот же пример можно решать делением на 100: $15{,}2 : 100 = 0{,}152$.

Особенное внимание надо обратить на случаи, когда для перенесения запятой влево приходится приписывать нули. Например:

$$3{,}14 \cdot 0{,}001 = 0{,}00314; \qquad 0{,}2 \cdot 0{,}0001 = 0{,}00002.$$

В примерах умножения на 0,1, 0,01, 0,001, . . . учащиеся повторяют объяснение смысла умножения числа на правильную дробь. Они объясняют значение этого умножения тем, что умножение на 0,1, 0,01, 0,001, . . . уменьшает данное число в 10, 100, 1000, . . .раз и может быть выполнено делением на 10, 100, . . .

Умножение десятичной дроби и целого числа на десятичную дробь может быть объяснено по правилу умножения обыкновенных дробей.

Пример:

$$13 \cdot 0{,}75 = 13 \cdot \frac{75}{100} = \frac{13 \cdot 75}{100} = \frac{975}{100} = 9{,}75.$$

Умножение целого числа на десятичную дробь можно объяснить и на основании изменения произведения при изменении сомножителя.

Пример:

$$13 \cdot 0{,}75 = 9{,}75.$$

Учитель предлагает выполнить умножение целых чисел:

$$13 \cdot 75 = 975.$$

Получается запись:

$$\begin{array}{r} \times\ 13 \\ 75 \\ \hline +\ 65 \\ 91 \\ \hline 975 \end{array}$$

Учащиеся могут самостоятельно разъяснить умножение примерно так: множитель увеличен в 100 раз. Чтобы получить произведение $13 \cdot 0{,}75$, надо произведение 975 уменьшить в 100 раз, т. е. отделить запятой справа налево 2 цифры.

Умножение десятичной дроби на десятичную дробь можно объяснить по правилу умножения обыкновенных дробей:

$$2{,}37 \cdot 0{,}4 = \frac{237}{100} \cdot \frac{4}{10} = \frac{948}{1000} = 0{,}948.$$

Учащиеся разбирают самостоятельно, какие числа перемножались, сколько нулей во множимом, множителе, в произведении, сколько десятичных знаков во множимом, множителе, произведении, какое соотношение между числом десятичных знаков произведения и сомножителей.

Вывод правила умножения десятичных дробей можно сделать и на основании изменения произведения в зависимости от изменения сомножителей.

Можно при выводе правила применить изменение одного сомножителя. Разберем пример: $3{,}2 \cdot 0{,}256$. Умножаем сначала 3,2 на 256. Умножение на целое число учащиеся знают. Получается произведение 819,2. Учащиеся объясняют, что множитель 0,256 заменен целым числом, т. е. увеличен в 1000 раз, отчего произведение получилось увеличенным в 1000 раз. Чтобы получить произведение $3{,}2 \cdot 0{,}256$, надо число 819,2 уменьшить в 1000 раз.

$$\begin{array}{r}
\times\ 3{,}2 \\
256 \\
\hline
192 \\
+\ 160 \\
64 \\
\hline
819{,}2
\end{array}$$

В произведении 8192 был отделен один десятичный знак справа, теперь переносим запятую еще через 3 цифры справа налево. Произведение $3{,}2 \cdot 0{,}256 = 0{,}8192$. Учащиеся разбирают, каково соотношение между числом десятичных знаков сомножителей и произведения, и формулируют правило умножения десятичных дробей.

После вывода правила умножения дроби на дробь повторяется, как это правило применяется к умножению дроби на целое число, целого числа на дробь.

В записях вычислений нельзя позволять зачеркивания запятой. При перемножении многозначных чисел следует располагать числа, не обращая внимания на запятые, так, как были бы записаны соответствующие целые числа. Например:

$$3{,}127 \cdot 0{,}243$$

$$\begin{array}{r}
\times\ 3{,}127 \\
0{,}243 \\
\hline
9381 \\
+\ 12508 \\
6254 \\
\hline
0{,}759861
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
\times\ 5{,}39 \\
1{,}257 \\
\hline
3773 \\
+\ 2695 \\
1078 \\
539 \\
\hline
6{,}77523
\end{array}$$

Смысл умножения на правильную десятичную дробь необходимо подчеркивать при решении примеров и задач на этот случай умножения. В примерах и задачах должны быть вопросы: найти 0,8 от 45; 0,52 от 3,2; 0,6 от 0,5. Сначала учитель предлагает примеры и задачи на нахождение дроби от числа, например: найти $\frac{2}{3}$ от 15; $\frac{3}{5}$ от 20 и т. д. Учащиеся подробно объясняют решение примеров. После этого предлагается учащимся решить самостоятельно примеры, в которых надо найти дробь от числа (курс десятичных дробей). Пример: найти 0,8 от 45 решается умножением $45 \cdot 0{,}8$; учащиеся выполняют умножение и объясняют его: $45 \times \frac{8}{10} = \frac{45 \cdot 8}{10}$; делением 45 на 10 вычисляем $\frac{1}{10}$ от 45, умножив $\frac{45}{10}$ на 8, найдем $\frac{8}{10}$ от 45; решаются также примеры: найти 0,52 от 3,2: $3{,}2 \cdot 0{,}52$; найти 0,6 от 0,5: $0{,}5 \cdot 0{,}6$.

На нахождение дроби от целого учащимся предлагаются задачи в виде следующих.

а) Деталь машины, весившую 12 *кг*, рабочий предложил заменить деталью, вес которой был меньше на 0,25 веса первой. Каков был вес более легкой детали?

б) Один колхозник получил в среднем по 40,5 *кг* меду с улья, другой на 0,6 этого веса больше. Сколько меду получил в среднем второй колхозник с одного улья?

в) По норме обжигательная печь должна давать по 64 *ц* цемента за 1 час. Машинист увеличил выработку печи на 0,3 нормы. Сколько цемента получил машинист сверх нормы за 8 часов работы?

Законы и свойства умножения можно повторить с учащимися на примерах для устного счета в процессе упражнений на умножение.

1. Замена группы сомножителей их произведением (сочетательное свойство произведения):

а) $6{,}9 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}2 \cdot 125 \cdot 8 = 6{,}9 \cdot (0{,}5 \cdot 0{,}2) \cdot (125 \cdot 8) = 6{,}9 \times 0{,}1 \cdot 1000 = 690$;

б) $2 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}2 \cdot 3{,}5 \cdot 6 = (2 \cdot 0{,}75) \cdot 0{,}2 \cdot (3{,}5 \cdot 6) = 1{,}5 \times 0{,}2 \cdot 21 = (1{,}5 \cdot 0{,}2) \cdot 21 = 0{,}3 \cdot 21 = 6{,}3$.

2. Перестановка сомножителей (переместительное свойство произведения):

а) $0{,}2 \cdot 7 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}25 \cdot 4 = 0{,}2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}25 \cdot 4 \cdot 7 = (0{,}2 \cdot 0{,}5) \times (0{,}25 \cdot 4) \cdot 7 = 0{,}1 \cdot 1 \cdot 7 = 0{,}7$;

б) $0{,}4 \cdot 8 \cdot 0{,}03 \cdot 12{,}5 \cdot 2{,}5 = 0{,}4 \cdot 2{,}5 \cdot 8 \cdot 12{,}5 \times 0{,}03 = (0{,}4 \cdot 2{,}5) \cdot (8 \cdot 12{,}5) \cdot 0{,}03 = 1 \cdot 100 \cdot 0{,}03 = 3$.

3. Умножение произведения на число:

а) $(0{,}2 \cdot 0{,}11 \cdot 0{,}3) \cdot 0{,}5 = 0{,}2 \cdot 0{,}11 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}5 = 0{,}2 \times 0{,}5 \times 0{,}11 \cdot 0{,}3 = (0{,}2 \cdot 0{,}5) \cdot 0{,}11 \cdot 0{,}3 = 0{,}1 \cdot 0{,}11 \cdot 0{,}3 = 0{,}0033$;

б) $(0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 10) \cdot 0{,}25 = 0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 10 \cdot 0{,}25 = 0{,}4 \cdot 0{,}25 \times 0{,}3 \cdot 10 = (0{,}4 \cdot 0{,}25) \cdot 0{,}3 \cdot 10 = 0{,}3$.

4. Умножение числа на произведение:

а) $1{,}28 \cdot (0{,}9 \cdot 2{,}5) = 1{,}28 \cdot 0{,}9 \cdot 2{,}5 = 1{,}28 \cdot 2{,}5 \cdot 0{,}9 = 3{,}2 \times \times 0{,}9 = 2{,}88$;

б) $0{,}64 \cdot (12{,}5 \cdot 0{,}7 \cdot 3) = 0{,}64 \cdot 12{,}5 \cdot 0{,}7 \cdot 3 = 8 \cdot 0{,}7 \cdot 3 = = 5{,}6 \cdot 3 = 16{,}8$.

К указанному способу близок прием замены множителя соответствующим произведением (прием последовательного умножения):

а) $3{,}5 \cdot 8 = 3{,}5 \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) = 3{,}5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 7 \cdot 2 \cdot 2 = = 14 \cdot 2 = 28$;

б) $370 \cdot 0{,}06 = 370 \cdot (0{,}2 \cdot 0{,}3) = 370 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 74 \cdot 0{,}3 = 22{,}2$.

Умножение, сложение, вычитание (распределительное свойство произведения).

1. Умножение суммы нескольких чисел на число:

а) $(12{,}5 + 3{,}6) \cdot 10 = 12{,}5 \cdot 10 + 3{,}6 \cdot 10 = 125 + 36 = 161$;

б) $(0{,}48 + 1{,}44 + 1{,}08) \cdot 0{,}25 = 0{,}48 \cdot 0{,}25 + 1{,}44 \cdot 0{,}25 + + 1{,}08 \cdot 0{,}25 = 0{,}12 + 0{,}36 + 0{,}27 = 0{,}75$.

2. Умножение разности двух чисел на число:

а) $(36{,}2 - 20{,}04) \cdot 100 = 36{,}2 \cdot 100 - 20{,}04 \cdot 100 = 3620 - - 2004 = 1616$;

б) $(5{,}12 - 1{,}28) \cdot 0{,}25 = 5{,}12 \cdot 0{,}25 - 1{,}28 \cdot 0{,}25 = 1{,}28 - - 0{,}32 = 0{,}96$.

(Умножение на 0,25 можно заменить делением на 4, так как взять 0,25 от числа — значит взять 4-ю часть числа.)

Для закрепления пройденного материала учащиеся должны решить из задачника упражнения № 669 — 704.

§ 82. Деление десятичных дробей

Различные случаи деления десятичных дробей сводятся к делению на целое число. При этом делении: а) последний остаток может равняться нулю, тогда частное выражается целым числом или конечной десятичной дробью, б) ни один остаток не равняется нулю, частное получается в виде бесконечной десятичной дроби, в которой обозначаются рядом точек справа повторяющиеся дальше десятичные знаки, например: 0,7272. . . Понятие о бесконечной дроби является новым для учащихся. Учащиеся впервые встречаются с приближенным значением с определенной степенью точности дробей бесконечных или конечных, выраженных большим числом десятичных знаков.

Прежде чем изучать деление десятичной дроби на целое число, необходимо повторить с учащимися деление целых многозначных чисел на однозначное, двузначное, многозначное число с полным объяснением.

При подборе примеров для деления на однозначное число надо брать сначала случаи деления без раздробления высших разрядов в низшие, например: 462,8 : 2; 69,03 : 3 и т. д. Следующая группа примеров, в которых встречается раздробление, например: 6,76 : 4 = 1,69; 3,24 : 9 = 0,36; 35,224 : 7 = 5,032 и т. д. Деление на однозначное число записывается в строчку.

В примерах с раздроблением высших разрядов в низшие на первых порах это преобразование должно подробно объясняться. Надо строго следить за правильной постановкой запятой, это помогает избежать ошибок.

Дальше берутся более трудные случаи деления — деление на двузначное и многозначное число, частное — точная десятичная дробь. Запись может быть столбиком.

Примеры:

$$\begin{array}{r} 10{,}24 : 64 = 0{,}16 \\ -\underline{384} \\ 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 96{,}72 : 24 = 4{,}03 \\ -\underline{72} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1806{,}94 : 742 = 2{,}57 \\ -\underline{1484} \\ 4229 \\ -\underline{3710} \\ 5194 \\ -\underline{5194} \\ 0 \end{array}$$

I. Необходимо рассмотреть примеры, в которых единицы последнего разряда раздробляются в низший разряд и раздробление следующих остатков продолжается довольно далеко.

Примеры:

$$\begin{array}{r} 1{,}298 : 16 = 0{,}081125 \\ -\underline{129} \\ 18 \\ 20 \\ 40 \\ 80 \\ 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3{,}2 : 625 = 0{,}00512 \\ 3200 \\ -\underline{3125} \\ 750 \\ 1250 \\ 0 \end{array}$$

II. Потом можно рассмотреть деление целого числа на целое при частном в виде конечной десятичной дроби.

Примеры:

$$\begin{array}{r} 1125 : 90 = 12{,}5 \\ 225 \\ 450 \\ 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 36 : 45 = 0{,}8 \\ 360 \\ 0 \end{array}$$

```
 3712 : 145 = 25,6        40527 : 1125 = 36,024
−290                     −3375
  812                      6777
 −725                     −6750
   870                       2700
  −870                      −2250
     0                        4500
                             −4500
                                 0
```

Разобрав ряд примеров на деление десятичной дроби на целое число, учащиеся сами выведут правило.

Чтобы перейти к делению на целое число, когда в частном бесконечная десятичная дробь, учитель задает примеры деления на целое число, состоящее из сомножителей 2 и 5 (например:

11 : 4; 11 : 8; 11 : 16; 11 : 5; 11 : 25; 11 : 400 и т. д.).

В этих примерах частные — конечные десятичные дроби. Учащиеся разбирают, какие сомножители входят в состав чисел 4, 8, 25, 400. Предлагается ученикам придумать и проделать деление любого числа на один из делителей, имеющих в составе только множители 2 и 5. Учитель сообщает, что, когда деление выполняется без остатка, получаемое частное называется точным.

После этого учитель предлагает выполнить деление на однозначные делители 3, 6, 7, 9 или двузначные числа, в состав которых, кроме 2 и 5, входят эти однозначные множители. Дается часть примеров, в которых деление выполняется нацело, и примеры, где частное неточное. Примеры: 2586 : 5; 0,478 : 9; 20 : 3; 5 : 13. На примере 20 : 3 учащиеся видят, что деление окончиться не может, потому что в процессе деления повторяется один и тот же остаток (2), в частном повторяется один и тот же десятичный знак (6). В конце записи ставится многоточие.

```
 20 | 3
−18 |6,666 ...
  20
 −18
   20
  −18
    2
```

Делая проверку такого бесконечного деления, учащиеся видят, что при умножении частного на делитель получаются числа, не равные делимому, но подходящие к делимому тем ближе, чем больше десятичных знаков берется в частном. Учащиеся, проделав несколько умножений, находят разности между делимым и каждым произведением. Например:

$$20 : 3 = 6{,}666\ldots$$

а) $3 \cdot 6 = 18$; $20 - 18 = 2$; б) $3 \cdot 6{,}6 = 19{,}8$; $20 - 19{,}8 = 0{,}2$;
в) $3 \cdot 6{,}66 = 19{,}98$; $20 - 19{,}98 = 0{,}02$ и т. д.

Учащиеся могут самостоятельно объяснить, почему получаемые произведения меньше делимого. Учитель сообщает, что такое деление, в котором повторяется один и тот же остаток, называется бесконечным делением; результат его записывается в виде десятичной дроби, в которой повторяются одни и те же десятичные знаки в определенном порядке. Принято записывать повторяющиеся десятичные знаки два-три раза, после чего ставят многоточие. Такая дробь называется бесконечной дробью.

Разберем пример: 0,35 : 9.

$$\begin{array}{r|l} 0{,}35 & 9 \\ \hline 80 & 0{,}03888\ldots \\ 80 & \\ 80 & \\ 8 & \end{array}$$

Здесь деление не закончится, так как в остатке повторяется число 8.

В таких случаях берут не все частное, а часть его, останавливаясь на любом десятичном знаке или на знаке, наперед заданном, отбрасывая все остальные. В данном случае можно взять, например, такие частные: 0,03; 0,038; 0,0388; 0,03888 и т. д. Такие частные называются приближенными. Рассмотрим эти частные. Если возьмем 0,03 и отбросим всю остальную часть частного, мы оставляем в частном только сотые доли. В этом случае говорят, что взято приближенное частное с точностью до одной сотой.

Если взять частное 0,038, то говорят, что взято частное с точностью до одной тысячной и т. д.

Разберем этот вопрос подробнее. Взяв приближенное число 0,03, мы отбросили все доли, начиная с тысячных. Выясним, какая здесь допущена ошибка.

Сравним 8 тысячных с 0,01; $\frac{1}{100} = \frac{10}{1000}$, т. е., взяв приближенное частное 0,03 и отбросив все остальные доли частного, мы допустили ошибку, меньшую 0,01, и взятое частное меньше искомого. В этом случае говорят, что взято частное с точностью до 0,01 с недостатком.

Но мы можем взять другое приближенное частное, тоже с точностью до 0,01, а именно 0,04. В этом случае мы к 0,038 прибавили 0,002. Здесь допущена ошибка, меньшая 0,01, так как 0,002 меньше 0,01. В этом случае говорят, что взято приближенное частное с точностью до 0,01 с избытком, т. е. приближенное частное 0,04 больше искомого и отличается от него меньше чем на 0,01.

Итак, искомое частное 0,35 : 9 заключается между двумя приближенными: 0,03 и 0,04, причем $\frac{0{,}35}{9} > 0{,}03$ и $\frac{0{,}35}{9} < 0{,}04$.

Соединяя эти записи в одну, получаем: $0{,}03 < \frac{0{,}35}{9} < 0{,}04$. Эта запись читается так: частное от деления 0,35 на 9 больше 0,03 и меньше 0,04. Сравним эти два приближенных частных и решим вопрос, которое из них ближе к искомому. Взяв приближенное частное 0,03 (с недостатком), мы отбрасываем доли, начиная с 0,008, а когда возьмем приближенное частное 0,04 (с избытком), мы прибавляем 0,002. Очевидно, во втором случае мы допускаем меньшую ошибку. Данный случай деления, когда получаются неточные частные, принято записывать так: $\frac{0,35}{9} \approx 0,03$; $\frac{0,35}{9} \approx$ $\approx 0,04$; запись читается так: частное от деления 0,35 на 9 приближенно равно 0,03 или 0,04.

Разберем еще пример. Выполнить деление 13 : 7:

```
13 | 7
   |------------------
60 | 1,857142857142...
 40
  50
   10
    30
     20
      60
       40
        50
         10
          30
           20
            60
             4
```

Возьмем приближенное частное с точностью до 0,001, т. е. с тремя десятичными знаками. Таких приближенных частных можно взять два: с недостатком (1,857) и с избытком (1,858).

Разница между числами 1,857 и 1,858 равна 0,001 и каждое из двух взятых приближенных частных будет отличаться от искомого частного меньше чем на 0,001. Это и значит найти приближенное частное с точностью до 0,001 (или с недостатком, т. е. меньше искомого, или с избытком, т. е. больше искомого). И в том и в другом случае разница между приближенным частным и искомым меньше 0,001 единицы.

При выборе приближенного частного надо брать то, которое ближе к искомому, т. е. то, которое имеет меньшую погрешность (ошибку).

Остановимся на вопросе о выборе приближенного частного.

Учитель предлагает пример на бесконечное деление:

$$7 : 13 (7 : 13 = 0,53846153846\ldots).$$

Какие приближенные частные с точностью до 0,01 мы можем взять для данного случая? (0,53 и 0,54). Сравним эти приближенные частные. Что вы сделали с неточным частным, взяв приближенное частное с недостатком, т. е. 0,53? (Отбросили все доли, начиная с 0,008.) А когда взяли второе частное 0,54? (К 0,538 прибавили 0,002.) Где меньше ошибка? (В числе 0,54).

Возьмем теперь приближенные частные с точностью до 0,001 (с недостатком 0,538, с избытком 0,539). Которое точнее? (0,538). Почему? Для получения числа 0,538 отбрасываем часть частного, начиная с 0,0004; для получения числа 0,539 к 0,5384 прибавили 0,0006 (ясно, что в первом случае ошибка меньше).

Возьмите приближенные частные с точностью до 0,1. Запишите их. $0{,}5 < \frac{7}{13} < 0{,}6$. Которое из них точнее? (0,5). Почему? (Потому что отбрасываемая часть частного начинается с 0,03; если же взять частное 0,6, то к 0,53 прибавляется 0,07.)

Но находить более точное частное этим приемом долго. Существует более рациональный прием, который надо применить в этом случае.

Из этого же примера 7 : 13 выпишем приближенные частные с точностью до 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001 и подчеркнем те, которые содержат меньшую ошибку.

Получается запись:

Частное	Степень точности	Приближенное частное	
		с недостатком	с избытком
7 : 13 = = 0,538461538...	0,1	0,5	0,6
	0,01	0,53	0,54
	0,001	0,538	0,539
	0,0001	0,5384	0,5385

Учащиеся под руководством учителя рассматривают, как составились приближенные более точные частные с точностью до 0,01 (0,54) и с точностью до 0,0001 (0,5385). В первом случае вместо 0,53 взято 0,54, во втором случае вместо 0,5384 взято 0,5385; в обоих случаях последняя оставленная цифра увеличена на единицу.

Разбирается вопрос, когда надо сделать увеличение последней цифры на единицу. Для этого рассматривается, с каких цифр начинается отбрасываемая часть частного. В тех случаях, когда последнюю оставляемую цифру приближенного частного увеличивали на единицу, отбрасываемая часть начиналась с цифры 8; 6, а когда не увеличивали — с цифры 3; 4.

Правило формулируется так: если первая из отбрасываемых в неточном частном цифр 5 или больше 5, то для приближенного частного предыдущую цифру следует увеличить на единицу; если же первая из отбрасываемых цифр меньше 5, то предыдущая цифра остается без изменения.

На выведенное правило даются упражнения. Например, найти приближенные частные с точностью до 1; 0,1; 0,001; 0,0001 для частного 11 : 13 и записать его. Деление дает: 11 : 13 = 0,846153846153...

Приближенные частные:

С точностью до	1	— 1
	0,1	— 0,8
	0,001	— 0,846
	0,0001	— 0,8462 и т. д.

Для закрепления этого важного раздела курса десятичных дробей разбираются 2—3 примера. Учащиеся объясняют, почему берется то или иное частное, а после достаточной тренировки решают примеры с применением изложенного механического приема нахождения приближенного частного.

Деление на десятичную дробь. Перед изучением деления на десятичную дробь необходимо повторить вопрос о неизменяемости частного при увеличении делимого и делителя в одинаковое число раз.

Деление целого числа на десятичную дробь сводится к делению на целое число. Научить учащихся заменять деление на десятичную дробь делением на целое число можно двумя способами: 1) Можно применить к делимому и делителю увеличение в 10, 100, 1000,... раз, причем частное не изменяется. Множитель берется такой, чтобы делитель стал целым числом. Увеличение делимого и делителя делается перенесением запятой вправо через одинаковое число десятичных знаков. 2) Делимое и делитель (или только делитель, если делимое — целое число) пишутся со знаменателями, и над ними выполняется деление по правилу действия над обыкновенными дробями. Десятичные знаменатели при этом сокращаются полностью или частично.

Первый способ более короткий. Получив частное, учащиеся пытаются иногда внести поправку, увеличив или уменьшив его. Полезно приучить учеников проверять полученный ответ, округлив числа. Сначала на ряде примеров повторяют деление целого числа и десятичной дроби на целое число.

Разберем примеры:

а) $314 : 2 = 157$;

б) $314 : 0{,}2 = 3140 : 2 = 1570$;

в) $314 : 0{,}02 = 31400 : 2 = 15\,700$.

Прежде чем деление будет выполнено, учитель задает вопросы: каково будет частное в каждом примере, больше или меньше делимого, и почему? Таким образом ученики повторяют значение деления на целое число и на правильную дробь. Решение примеров объясняется увеличением делимого и делителя в примере б) в 10 раз, в примере в) в 100 раз, отчего частное не изменяется. Учащиеся при помощи учителя делают вывод правила деления целого числа и десятичной дроби на десятичную дробь. Правило можно формулировать так: чтобы разделить какое-либо число на десятичную дробь, надо увеличить делимое и делитель перенесением запятой через столько десятичных знаков вправо, чтобы делитель стал целым числом, и выполнить деление по правилу деления на целое число.

Покажем на примерах другой способ вывода правила деления на десятичную дробь:

а) $3,14 : 0,2 = \frac{314}{100} : \frac{2}{10} = \frac{314 \cdot 10}{100 \cdot 2} = 31,4 : 2 = 15,7;$

б) $31,4 : 0,02 = \frac{314}{10} : \frac{2}{100} = \frac{314 \cdot 100}{10 \cdot 2} = 3140 : 2 = 1570;$

в) $31,4 : 0,002 = \frac{314}{10} : \frac{2}{1000} = \frac{314 \cdot 1000}{10 \cdot 2} = 31\,400 : 2 = 15\,700.$

Анализ примеров показывает учащимся, что и этим способом они приходят к тому же выводу. Действительно, в примере 3,14 : 0,2 деление выполняется над числами 31,4 : 2, в которых запятая перенесена через один знак вправо, делитель стал целым числом; в примере 31,4 : 0,02 запятая перенесена вправо через два знака, делитель стал целым числом; в примере 31,4 : 0,002 запятая перенесена через 3 знака вправо, делитель сделан целым числом. Учащимся следует рекомендовать вывод правила деления на десятичную дробь первым способом.

Далее учащиеся решают примеры, в которых делителем является число двузначное, трехзначное, многозначное, делимым берется целое число и десятичные дроби, число десятичных знаков должно быть в делимом больше, равно, меньше числа десятичных знаков в делителе. Записи могут быть выполнены в строчку, например: 232,078 : 2,74 = 23207,8 : 274 = 84,7

$$
\begin{array}{r}
-\underline{2192} \\
-\underline{1287} \\
\underline{1096} \\
-\underline{1918} \\
\underline{1918} \\
0
\end{array}
$$

В записях вычислений не должно быть зачеркивания запятой, надо переписывать пример, как показано.

При решении некоторых примеров учащиеся предварительно решают вопрос, больше или меньше делимого получится частное. После решения ответ проверяют, округлив делимое и делитель. Например при решении примера 31,4 : 0,02 учащиеся указывают, что частное должно быть больше делимого потому, что делитель — правильная дробь и делением на 0,02 находится целое по 0,02 частям его. Решив пример и проверяя ответ 1570, учащиеся должны рассуждать так: если 31 делить на 2, то получится больше 15, но 0,02 в 100 раз меньше 2, частное должно быть больше 1500. Ответ 1570 удовлетворяет этим требованиям.

Примеры на деление должны подбираться так, чтобы сначала частные получались в виде конечных десятичных дробей, потом, после достаточной тренировки, можно брать деление, в котором частное — бесконечная дробь. Делимое — целое число или десятичная дробь. Делитель сначала однозначный, потом двузначный и т. д.

Следует взять ряд примеров на деление на 0,1; 0,01; 0,001 и т. д. Деление в этих случаях можно свести к умножению на 10, 100, 1000 и т. п. На этих примерах обязательно повторяется объяснение, каков смысл деления на правильную дробь. Параллельно с этими примерами следует дать примеры на умножение на 0,1; 0,01 и другие с объяснением учащимися смысла этого умножения.

Для более прочного усвоения смысла деления на правильную дробь надо дать примеры и задачи на нахождение целого по нескольким долям его, которые объясняются учащимися самостоятельно. Примеры: найти x, если $0{,}25x = 17$. Здесь по произведению 17 и сомножителю 0,25 находится другой сомножитель x; следовательно, x находится делением 17 на 0,25. Но по смыслу вопроса 17 есть 0,25 искомого числа. Следовательно, чтобы найти неизвестное число по данной величине его дроби, достаточно данное число разделить на дробь, обозначающую часть числа. Выполняя вычисление: $17 : 0{,}25 = 17 : \frac{25}{100} = \frac{17 \cdot 100}{25} = 68$, учащиеся видят, что 17 делится на 25, так как находится $\frac{1}{100}$ неизвестного числа, потом $\frac{17}{25}$ множится на 100 для нахождения $\frac{100}{100}x$, или x.

Необходимо дать задачи на нахождение целого по его дроби; например: «Пароход прошел 18 *км* в 0,75 часа. Какое расстояние проходит он в час?» Р е ш е н и е. Здесь по 0,75 частям расстояния надо найти целое расстояние, поэтому делим 18 на 0,75. Вычисление: $18 : \frac{75}{100} = \frac{18 \cdot 100}{75} = 24$.

Дальше берутся примеры на деление на десятичную дробь, когда в частном получается бесконечная десятичная дробь. После деления учащиеся заменяют частное приближенным значением с заданной степенью точности. Например:
$10 : 21 = 0{,}476190476190\ldots$ 0; 0,5; 0,48; 0,476; 0,4762 и т. д.

Чтобы выбрать приближенное значение частного с наименьшей ошибкой, можно судить о последней цифре округленного частного по последнему остатку. Например, вычисляем 10 : 21:

$$\begin{array}{r|l} 10 & 21 \\ \hline 100 & 0{,}476190\ldots \\ 160 & \\ -147 & \\ \hline 130 & \\ \hline 40 & \\ \hline 190 & \\ \hline 10 & \end{array}$$

Берем значение частного с точностью до 0,1; $10 : 21 = 0,5$, потому что остаток 16 больше $\frac{1}{2}$ делителя; $16 > \frac{21}{2}$. Значение частного с точностью до 0,01; $10:21 = 0,48$, так как остаток $13 > \frac{21}{2}$.

Значение частного с точностью 0,001; $10:21 = 0,476$, так как остаток $4 < \frac{21}{2}$ и т. д.

Этот признак дает возможность правильно выбрать приближенное значение частного с заданной степенью точности, не вычисляя последующих десятичных знаков частного. Например, вычислим частное $0,4 : 15$ с точностью до 0,001:

$$\begin{array}{r|l} 0,4 & 15 \\ \cline{2-2} 40 & 0,026 \\ 100 & \\ 10 & \end{array}$$

Значение частного с возможно меньшей ошибкой: 0,027, так как остаток $10 > \frac{15}{2}$.

Решить примеры № 705—724.

§ 83. Умножение и деление

Законы и свойства умножения и деления повторяются с десятичными дробями и применяются при устном счете.

1. Перестановка членов ряда умножений и делений. Результат ряда умножений и делений не меняется от перемены порядка членов данного ряда:

а) $1,5 \cdot 0,7 : 0,05 = 1,5 : 0,05 \cdot 0,7 = 30 \cdot 0,7 = 21$;

б) $14,7 : 0,2 : 0,07 = 14,7 : 0,07 : 0,2 = 210 : 0,2 = 1050$.

2. Деление числа на произведение. Чтобы разделить данное число на произведение, достаточно разделить данное число на первый сомножитель, полученное частное разделить на второй сомножитель, новое частное — на третий сомножитель и т. д:

а) $7,125 : (9,5 \cdot 1,125) = 7,125 : 9,5 : 1,125 = 0,75 : 1,125 = 0,666...$

б) $8,16 : (0,8 \cdot 0,03 \cdot 0,5) = 8,16 : 0,8 : 0,03 : 0,5 = 10,2 : 0,03 : 0,5 = 340 : 0,5 = 340 \cdot 2 = 680$.

(Деление на 0,5 можно заменить умножением на 2, так как делить на 0,5 — значит по 0,5 или $\frac{1}{2}$ числа найти целое число.)

3. К указанному выше способу деления числа на произведение близки следующие способы деления: разложение делителя на частные делители, последовательное деление с сочетательным свойством. Примеры:

а) $7{,}56 : 0{,}42 = 7{,}56 : (2 \cdot 3 \cdot 0{,}07) = (7{,}56 : 2) : 3 : 0{,}07 = (3{,}78 : 3) : 0{,}07 = 1{,}26 : 0{,}07 = 18$;

б) $18{,}9 : 5{,}4 = 18{,}9 : (3 \cdot 3 \cdot 0{,}6) = (18{,}9 : 3) : 3 : 0{,}6 = 6{,}3 : 3 : 0{,}6 = 2{,}1 : 0{,}6 = 3{,}5$;

в) $12{,}8 : 0{,}5 : 4 = 12{,}8 : (0{,}5 \cdot 4) = 12{,}8 : 2 = 6{,}4$.

4. Деление произведения на число. Чтобы разделить произведение нескольких сомножителей на какое-нибудь число, достаточно разделить на это число один из сомножителей, полученное частное умножить последовательно на остальные сомножители:

$$(0{,}12 \cdot 0{,}5 \cdot 8) : 0{,}04 = (0{,}12 : 0{,}04) \cdot 0{,}5 \cdot 8 = 3 \cdot 0{,}5 \times 8 = 0{,}5 \cdot 8 \cdot 3 = 4 \cdot 3 = 12.$$

Деление, сложение, вычитание. 1. Деление суммы на число. Чтобы разделить сумму нескольких слагаемых на данное число, достаточно разделить на него каждое слагаемое и полученные результаты сложить:

а) $(560{,}14 + 490{,}28) : 7 = (560{,}14 : 7) + (490{,}28 : 7) = 80{,}02 + 70{,}04 = 150{,}06$;

б) $(64{,}048 + 128{,}016) : 16 = 64{,}048 : 16 + 128{,}016 : 16 = 4{,}003 + 8{,}001 = 12{,}004$.

2. Деление разности на число. Чтобы разделить разность на какое-либо число, достаточно разделить на это число уменьшаемое и вычитаемое и из первого результата вычесть второй:

$$(81{,}054 - 36{,}018) : 9 = (81{,}054 : 9) - (36{,}018 : 9) = 9{,}006 - 4{,}002 = 5{,}004.$$

Изменение результатов умножения и деления от изменения данных. 1. Если один из сомножителей увеличить в несколько раз, а другой уменьшить во столько же раз, то произведение не изменится. На этом основан сокращенный способ умножения чисел на 5, 50, 500 и т. д. Умножение на 5, 50, 500, . . . заменяется умножением данного числа на 10,100, 1000, . . . и делением полученного произведения на 2 или сначала множимое делится на 2, а полученное частное умножается на 10, 100, 1000 и т. д.:

а) $2{,}4 \cdot 5 = (2{,}4 : 2) \cdot (5 \cdot 2) = 1{,}2 \cdot 10 = 12$;

б) $3{,}6 \cdot 50 = (3{,}6 \cdot 100) : 2 = 360 : 2 = 180$;

в) $4{,}9 \cdot 500 = (4{,}9 : 2) \cdot (500 \cdot 2) = 2{,}45 \cdot 1000 = 2450$.

2. Умножение на 25, 250, 2500 и т. д.

Чтобы умножить число на 25, 250, 2500 и т. д., достаточно данное число умножить на 100, 1000, 10 000, . . . и произведение разделить на 4 или сначала данное число разделить на 4 и полученное частное умножить на 100, 1000, 10 000, . . .:

а) $21{,}2 \cdot 25 = (21{,}2 : 4) \cdot (25 \cdot 4) = 5{,}3 \cdot 100 = 530$;

б) $3{,}9 \cdot 250 = (3{,}9 : 4) \cdot (250 \cdot 4) = 0{,}975 \cdot 1000 = 975$;

в) $6{,}1 \cdot 2500 = (6{,}1 \cdot 10\,000) : 4 = 61\,000 : 4 = 15\,250$.

3. Умножение на 125, 1250, ...

При умножении числа на 125, 1250 и т. д. данное число умножают на 1000, 10 000, ... и полученное произведение делят на 8 или сначала данное число делят на 8, а результат умножают на 1000, 10 000, ...:

а) $9{,}6 \cdot 125 = (9{,}6 \cdot 1000) : 8 = 9600 : 8 = 1200$ или

б) $9{,}6 \cdot 125 = (9{,}6 : 8) \cdot (125 \cdot 8) = 1{,}2 \cdot 1000 = 1200$.

1. Если делимое и делитель увеличить или уменьшить в одинаковое число раз, то частное не изменится. На этом свойстве частного основаны сокращенные способы деления числа на 5, 25, 125, 50, 250, 1250, 500, 2500, 12500 и т. п..:

а) $13{,}6 : 5 = (13{,}6 \cdot 2) : (5 \cdot 2) = 27{,}2 : 10 = 2{,}72$;

б) $31{,}5 : 50 = (31{,}5 \cdot 2) : (50 \cdot 2) = 63 : 100 = 0{,}63$;

в) $2{,}4 : 500 = (2{,}4 \cdot 2) : (500 \cdot 2) = 4{,}8 : 1000 = 0{,}0048$.

2. Чтобы разделить число на 25, 250, ... , достаточно разделить его на 100, 1000, ... и полученный результат умножить на 4 или сначала делимое умножить на 4, а полученное произведение разделить на 100, 1000 и т. д.:

а) $14{,}4 : 25 = (14{,}4 : 100) \cdot 4 = 0{,}144 \cdot 4 = 0{,}576$;

б) $3{,}7 : 250 = (3{,}7 \cdot 4) : (250 \cdot 4) = 14{,}8 : 1000 = 0{,}0148$.

3. Деление на 125, 1250, ... можно сделать так: данное число разделить на 1000, 10 000, ... и полученное частное умножить на 8 или сначала делимое умножить на 8, а полученное произведение разделить на 1000, 10 000:

а) $3{,}5 : 125 = (3{,}5 : 1000) \cdot 8 = 0{,}0035 \cdot 8 = 0{,}028$;

б) $3{,}5 : 125 = (3{,}5 \cdot 8) : (125 \cdot 8) = 28 : 1000 = 0{,}028$.

Умножение, сложение и вычитание. Округление одного из сомножителей.

1. Округляем множимое до целого числа: а) отнимая от него или б) прибавляя к нему несколько долей, умножаем отдельное целое число и доли на множитель, затем полученные произведения или а) складываем, или б) из первого произведения вычитаем второе:

а) $4{,}02 \cdot 7 = (4 + 0{,}02) \cdot 7 = 4 \cdot 7 + 0{,}02 \cdot 7 = 28 + 0{,}14 = 28{,}14$;

б) $5{,}99 \cdot 6 = (6 - 0{,}01) \cdot 6 = 6 \cdot 6 - 0{,}01 \cdot 6 = 36 - 0{,}06 = 35{,}94$.

2. Округляем множитель до целого числа, уменьшая его на несколько долей, умножаем отдельно множимое на целое число и на отдельные доли, полученные произведения складываем:

а) $23 \cdot 100{,}4 = 23 \cdot (100 + 0{,}4) = 23 \cdot 100 + 23 \cdot 0{,}4 = 2300 + 9{,}2 = 2309{,}2$;

б) $23 \cdot 1{,}5 = 23 \cdot (1 + 0{,}5) = 23 + 23 \cdot 0{,}5 = 23 + 11{,}5 = 34{,}5$.

Используем этот способ при умножении на 15. Например:

$2{,}48 \cdot 15 = 2{,}48 \cdot (10 + 5) = 2{,}48 \cdot 10 + 2{,}48 \cdot 5 = 2{,}4{,}8 + \\ + \frac{2{,}48 \cdot 10}{2} = 24{,}8 + 1{,}24 \cdot 10 = 24{,}8 + 12{,}4 = 37{,}2$.

3. Округляем множитель до целого числа, увеличивая его на несколько долей, умножаем отдельно целое число и прибавленные доли на множитель и из первого произведения вычитаем второе:

$6 \cdot 0{,}98 = 6 \cdot (1 - 0{,}02) = 6 - 6 \cdot 0{,}02 = 6 - 0{,}12 = 5{,}88$.

Этим способом умножаем на 9, 99, 999, 19, 29, 39, ... При умножении на 9, 99, 999, ... умножают данное число на 10, 100, 1000, ... и из произведения вычитают данное число:

а) $2{,}3 \cdot 9 = 2{,}3 \cdot (10 - 1) = 2{,}3 \cdot 10 - 2{,}3 \cdot 1 = 23 - 2{,}3 = \\ = 20{,}7$;

б) $5{,}4 \cdot 99 = 5{,}4 \cdot (100 - 1) = 5{,}4 \cdot 100 - 5{,}4 \cdot 1 = 540 - \\ - 5{,}4 = 534{,}6$;

в) $7{,}3 \cdot 999 = 7{,}3 \cdot (1000 - 1) = 7{,}3 \cdot 1000 - 7{,}3 \cdot 1 = 7300 - \\ - 7{,}3 = 7292{,}7$.

При умножении на 19, 29, 39, . . . умножают данное число на 20, 30, 40, . . . и из полученного произведения вычитают данное число:

а) $4{,}8 \cdot 19 = 4{,}8 \cdot (20 - 1) = 4{,}8 \cdot 20 - 4{,}8 = 96 - 4{,}8 = 91{,}2$;
б) $5{,}3 \cdot 29 = 5{,}3 \cdot 30 - 5{,}3 = 159 - 5{,}3 = 153{,}7$;

в) $0{,}32 \cdot 49 = 0{,}32 \cdot 50 - 0{,}32 = \frac{0{,}32 \cdot 100}{2} - 0{,}32 = 16 - \\ - 0{,}32 = 15{,}68$.

Зависимость между членами умножения и между членами деления можно повторить на примерах с x.

Найти x, если: 1) $4{,}75x = 418$; 2) $x \cdot 1{,}49 = 0{,}596$; 3) $x : 3{,}4005 = \\ = 5{,}407$; 4) $3{,}784 : x = 1{,}25$.

Этот вопрос можно повторить и на задачах. Например:

1. Произведение двух чисел 37,5; множимое равно 0,08. Найти множитель.
2. Один из сомножителей равен 0,00625, а произведение равно 3,1275. Найти второй сомножитель.
3. Делимое 0,0069, частное 0,5. Чему равен делитель?
4. Делитель 0,25, частное 12,8. Найти делимое.

На десятичных дробях необходимо повторить проверку умножения и деления.

а) Выполнить умножение $5{,}76 \cdot 4{,}75$ и сделать проверку умножением и делением.

б) Выполнить деление $136{,}474 : 15{,}08$ и сделать проверку двумя способами.

в) Выполнить деление с остатком 17,108 : 3,4 и сделать проверку.

Для закрепления пройденного и для самостоятельной работы учащимся даются примеры из упражнений № 725—744.

§ 84. Решение задач на все действия с десятичными дробями

После изучения всех теоретических вопросов о действиях над десятичными дробями следует приступить к решению задач и примеров на все действия с десятичными дробями.

В сборнике задач по арифметике имеется достаточное количество упражнений для закрепления пройденного материала и выработки прочных навыков решения задач. Примеры № 762—778 и задачи № 779 — 850 решаются одновременно, точнее, на каждое домашнее задание и урок даются один-два примера и три-четыре задачи. После решения задач общего вида (№ 779 — 797) решаются «типовые» задачи: на среднее арифметическое, на отыскание чисел по их сумме и разности, по сумме или разности и кратному отношению, задачи на движение и задачи на работу.

В заключение решаются задачи геометрического характера (№ 830 — 846) и упражнения на чтение и построение диаграмм (№ 848, 849), на составление сметы (№ 847, 850).

Перечисленные задачи могут быть предложены не только для самостоятельных домашних заданий и решения в классе, но частично и для контрольных работ.

§ 85. Понятие о проценте. Нахождение процентов числа. Нахождение числа по его процентам

Программой V класса по арифметике предусмотрено: первое ознакомление с задачами на проценты производить в разделе «Десятичные дроби» и ограничиться решением тех задач, в условиях которых содержится лишь целое число процентов.

Приводим примерное содержание этих вопросов в разделе «Десятичные дроби».

Процентом называется сотая часть. Название «процент» происходит от латинских слов *pro centum*, что означает «со ста, на сто». Ознакомление с процентами параллельно изучению десятичных дробей имеет целью не только практическое применение их при решении задач и в других школьных предметах, но и показать учащимся, что процент — это не что иное, как дробь со знаменателем 100, имеющая особое название (подобно тому, как некоторые доли единицы обозначаются особыми названиями, например вторая доля называется «половиной» и т. д.) и особую форму записи. Слово «процент» обозначается знаком %. Десятичные дроби со знаменателем 100 наиболее удобны для вычислений, так как во многих мерах метрической системы встречается единичное отношение 100, в метре 100 сантиметров, в гектаре 100 аров, в центнере 100 килограммов. Следовательно, $1\ см = 0{,}01\ м$, или $1\ см = 1\%$ метра; $1\ а = 0{,}01\ га$, или $1\ а = 1\%$ гектара; $1\ кг = 0{,}01\ ц$, или $1\ кг = 1\%$ центнера.

Прежде чем изучать подробно тему «Проценты», учитель проводит ряд подготовительных упражнений. К этим упражнениям относится повторение следующих действий:

1) деление целого числа на единицу с нулями, 2) нахождение одной или нескольких долей от числа, 3) нахождение числа по одной или нескольким его частям. Затем особо следует остановиться на нахождении одной и нескольких сотых от данного числа. Рассказав ученикам в предварительной беседе о процентах и их значении в жизни и науке, разъяснив само слово «процент» и его обозначение, учитель, убедившись, что ученики достаточно усвоили понятие о проценте, выполняет с ними следующие упражнения: 1) выразить целое число в процентах. Так как 1 процент есть одна сотая часть числа, то все число содержит 100 сотых частей, или 100 процентов. Поэтому если $1 = 100\%$, то $2 = 200$ процентам, а $18 = 1800$ процентам (или 1800%).

2) Десятичную дробь или целое число с десятичной дробью выразить процентами:

а) $0{,}3 = 0{,}30 = \frac{30}{100} = 30$ процентов, или 30%;

$0{,}8 = 0{,}80 = 80\%$; $0{,}25 = 25\%$;

б) $1{,}6 = 1{,}60 = 160\%$; $3{,}8 = 3{,}80 = 380\%$.

3) Обыкновенную дробь, которая обращается в конечную десятичную дробь, выразить в процентах:

$$\frac{4}{5} = 0{,}8 = 80\%; \qquad 2\frac{1}{4} = 2{,}25 = 225\%.$$

Выводят правило: чтобы какое-либо число заменить процентами, надо перенести запятую вправо через 2 знака и поставить справа от числа знак %; вместо недостающих знаков следует поставить нули.

После усвоения учащимися проведенных упражнений и решения достаточного числа примеров учитель должен решить с учащимися ряд упражнений, имеющих обратную цель, т. е. выражение процентов в виде десятичных или обыкновенных дробей:

а) $1\% = 0{,}01$; $6\% = 0{,}6$; $40\% = 0{,}40 = 0{,}4$. Каждый пример первоначально подробно объясняется учителем, следующие примеры предлагается объяснять ученикам.

б) $100\% = 1$; $200\% = 2$; $1000\% = 10$.

Здесь формулируют правило: чтобы проценты заменить соответствующим числом, надо запятую перенести через 2 знака влево и опустить знак %.

Кроме письменных упражнений, на каждом уроке проводится устное решение прямой и обратной задачи (выразить дробь в процентах и проценты в виде дроби).

Перевод наиболее употребительных дробей в % и обратно учащиеся должны запомнить:

$$\frac{1}{2} = 0{,}50 = 50\% \qquad \frac{1}{5} = 0{,}2 = 20\%$$

$$\frac{1}{3} = \frac{100\%}{3} = 33\frac{1}{3}\% \qquad \frac{1}{25} = 0{,}04 = 4\%$$

$$\frac{1}{4} = 0{,}25 = 25\% \qquad \frac{1}{10} = 0{,}10 = 10\%$$

$$\frac{1}{8} = 0{,}125 = 12{,}5\% \qquad \frac{1}{20} = 0{,}05 = 5\%$$

Такую таблицу полезно вывешивать около доски на стену. Пользуясь ею, учащиеся выполняют и объясняют более сложные вычисления. Например:

$$\frac{2}{5} = 40\%, \text{ так как } \frac{1}{5} = 20\%.$$

Прежде чем приступать к решению задач на проценты, следует повторить с учащимися решение задач на нахождение дроби числа и числа по дроби.

Приведем пояснение к решению первой задачи на нахождение процентов данного числа.

«Липовый цвет при сушке теряет 74% своего веса. Сколько получится сухого липового цвета из 300 *кг* свежего» (№ 751).

Ставим вопросы перед учащимися: «Что такое процент?» «Как можно иначе записать 74%?» «Следовательно, если мы заменим 74% числом 0,74, то задачу какого типа нам надо решить?»

Запись решения задачи можно провести так.

Решение: 1) 74% = 0,74;

2) 300 *кг* · 0,74 = 222 *кг*. Ответ: 222 *кг*.

Полезно в классе решить задачу № 754 (задача с округлением результата).

«В 1959 г. из 208,8 млн. населения нашей страны женщины составляли 55%. Сколько женщин проживало в 1959 г. в нашей стране?» (Вычислить с точностью до 0,1 млн. человек.)

Мы не приводим вопросы учителя, подводящие всех учащихся класса к уяснению решения. Задача несложна и аналогична рассмотренной ранее. Ее особенность — округление результата. Приводим запись решения:

1) 55% = 0,55; 2) 208,8 · 0,55 = 114,84.

Ответ: 114,8 млн.

Для закрепления и выработки навыков предложить учащимся самостоятельно решить упражнения № 745—755.

Затем учитель переходит к нахождению числа по его процентам. Методика обучения решению этого вида задач аналогична методике обучения нахождению нескольких процентов данного числа.

Приведем задачу: «Токарь обработал за смену 368 деталей, что составило 115% его дневной нормы. Сколько деталей обработал токарь сверх нормы?»

Вначале обращаем внимание учеников на «115%» и ставим вопрос: это выполнение или перевыполнение? Какой примерно будет ответ задачи — больше 368 или меньше? Далее изложение строим примерно так же, как и в первом случае.

Запись решения: 1) 115% = 1,15;

2) 368 : 1,15 = 36 800 : 115 = 320;

3) 368 — 320 = 48.

Ответ: 48 деталей.

Для закрепления и выработки навыков предложить учащимся решить задачи № 756—761.

В заключение сказать учащимся, что в VI классе они будут детально изучать процентные вычисления.

ГЛАВА XII

СОВМЕСТНЫЕ ДЕЙСТВИЯ НАД ОБЫКНОВЕННЫМИ И ДЕСЯТИЧНЫМИ ДРОБЯМИ. ОТНОШЕНИЕ ВЕЛИЧИН

§ 86. Запись десятичной дроби в виде обыкновенной

После изучения четырех действий над десятичными дробями переходят к совместным действиям над дробями обыкновенными и десятичными. Всякие вычисления, в которых наряду с обыкновенными встречаются и конечные десятичные дроби, нужно выполнять быстро и верно. А быстрота вычисления зависит не только от умения вычислять по правилам, но также от умения выбирать наилучший способ вычисления. В одних случаях полезнее заменить обыкновенную дробь десятичной, так в большинстве случаев и выполняют совместные действия, в других — это невозможно; иногда десятичную дробь целесообразнее заменить обыкновенной.

Чтобы показать целесообразность в некоторых случаях записи десятичной дроби в виде обыкновенной, учитель предлагает задачу или пример, в которых надо сложить (или вычесть) десятичную дробь с обыкновенной, причем десятичные дроби берутся с такими числителями, чтобы дробь допускала сокращение.

Примеры: $3{,}75+2\frac{1}{32}$; $2\frac{1}{64}-1{,}875.$

Ввиду того что дроби $\frac{1}{32}$ и $\frac{1}{64}$ очень несложны, выгоднее 3,75 и 1,875 заменить обыкновенными дробями. Учащимся предлагается записать эти дроби со знаменателями и сделать сокращение. Получается запись:

$$3\frac{75}{100}=3\frac{3}{4};\quad 3\frac{3}{4}+2\frac{1}{32}=5\frac{25}{32}\ \text{(устно)};$$

$$1{,}875=1\frac{875}{1000}=1\frac{7}{8};\quad 2\frac{1}{64}-1\frac{7}{8}=1\frac{1}{64}-\frac{7}{8}=$$

$$=\frac{65}{64}-\frac{56}{64}=\frac{9}{64}\ \text{(устно)}.$$

После решения таких примеров учащиеся самостоятельно формулируют правило:

Чтобы конечную десятичную дробь записать в форме обыкновенной, достаточно подписать ее знаменатель и, если можно, сократить.

Для закрепления и выработки навыков решить задачи № 860—862.

§ 87. Обращение обыкновенной дроби в десятичную. Периодические дроби

Действия над десятичными дробями выполняются проще, чем над соответствующими обыкновенными дробями.

В современной советской действительности (науке, технике, житейской практике) весь числовой материал дается исключительно в десятичных дробях. Поэтому во всех случаях, где это возможно (по условиям упражнения), полезно заменять обыкновенные дроби равными им десятичными, а в некоторых случаях и приближенными значениями.

Следует обратить внимание учащихся на то, что все выводы, которые будут сделаны, относятся к дробям несократимым. Существует два приема обращения обыкновенных дробей в десятичные.

Рассмотрим первый прием (посредством разложения знаменателя на простые множители).

Учащиеся сначала составляют таблицу разложения знаменателей 10, 100, 1000, ... на простые множители:

$$\begin{aligned} 10 &= 2 \cdot 5 \\ 100 &= 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \\ 1000 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \\ 10000 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \end{aligned}$$

Из рассмотрения состава этих знаменателей учащиеся делают выводы: 1) каждый десятичный знаменатель разлагается только на простые сомножители 2 и 5; 2) число двоек равно числу пятерок; 3) число двоек или пятерок равно числу нулей в записи десятичного знаменателя.

Пусть требуется обратить дробь $\frac{11}{40}$ в десятичную. Данную дробь надо заменить равной ей дробью, знаменателем которой было бы число 10, 100, 1000 и т. д., причем нужно взять из всех возможных наименьшее. Чтобы привести несократимую дробь к другому знаменателю, надо ее члены умножить на одно и то же число, отчего величина дроби не изменится. Знаменатель искомой дроби, выраженный единицей с нулями, имеет только сомножители 2 и 5, обоих поровну. Заметив это, выясним состав знаменателя 40 : $40 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$; из разложения видно, что для получения знаменателя, выраженного единицей с нулями, надо добавить к 40 два раза по 5 в качестве сомножителей; тогда сомножители

2 и 5 будут входить в знаменатель каждый по 3 раза, получится число, выраженное единицей с тремя нулями, т. е. 1000.

Но чтобы величина дроби не изменилась, надо ее числитель также умножить на 5·5. Учащиеся записывают:

$$\frac{11}{40} = \frac{11}{2\cdot2\cdot2\cdot5} = \frac{11\cdot5\cdot5}{2\cdot2\cdot2\cdot5\cdot5\cdot5} = \frac{275}{1000} = 0{,}275.$$

Учащиеся повторяют все рассуждения на другом примере: разбирают обращение дроби $\frac{7}{250}$ в десятичную дробь. После этого решается еще ряд примеров на обращение обыкновенных дробей в десятичные. Для закрепления учащимся дать упражнения № 851, 852.

Из разбора примеров учащиеся могут самостоятельно сделать следующие выводы: 1) во всех решенных примерах в состав знаменателей обыкновенных дробей входят в качестве сомножителей только или одни двойки, или одни пятерки, или те и другие; 2) все такие дроби обращаются в конечные десятичные; 3) число двоек и пятерок в знаменателе полученной десятичной дроби одинаково; 4) число десятичных знаков в полученных десятичных дробях равно количеству двоек или пятерок в знаменателе обыкновенной дроби (в зависимости от того, каких сомножителей больше, двоек или пятерок).

На обращение обыкновенных дробей в десятичные решаются устные примеры. Некоторые результаты учащиеся должны запомнить, например:

$$\frac{1}{2} = 0{,}5; \quad \frac{1}{4} = 0{,}25; \quad \frac{3}{4} = 0{,}75; \quad \frac{1}{8} = 0{,}125;$$

$$\frac{3}{8} = 0{,}375; \quad \frac{1}{5} = 0{,}2; \quad \frac{2}{5} = 0{,}4; \quad \frac{3}{5} = 0{,}6; \quad \frac{1}{25} = 0{,}04.$$

Возьмем теперь дроби $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{7}{11}$. Очевидно, их нельзя обратить в конечные десятичные, так как в состав их знаменателей не входят сомножители 2 и 5. Точно так же дроби $\frac{5}{6}$, $\frac{4}{15}$, $\frac{13}{14}$, $\frac{11}{75}$ не могут быть обращены в конечные десятичные, так как в состав их знаменателей, кроме сомножителей 2 и 5, входят и другие сомножители и их произведение не может равняться 10, 100, 1000 и т. д. Итак, чтобы определить, в какую десятичную дробь обратится данная обыкновенная дробь, надо знать, на какие сомножители разлагается знаменатель данной дроби.

Учащиеся формулируют выводы:

1. Если знаменатель обыкновенной несократимой дроби не содержит никаких простых сомножителей, кроме 2 и 5, такая дробь обращается в конечную десятичную; причем эта десятичная дробь имеет столько десятичных знаков, сколько раз в знаменателе обык-

новенной дроби повторяется тот из сомножителей 2 и 5, который входит большее число раз.

2. Если знаменатель обыкновенной несократимой дроби содержит какие-либо простые сомножители, отличающиеся от 2 и 5, то такая дробь не обращается в конечную десятичную.

Изложенное выше дает основание сформулировать правило обращения обыкновенной дроби в десятичную:

Чтобы обратить обыкновенную дробь в десятичную, надо:

а) разложить знаменатель данной дроби на простые сомножители:

$$\left(\frac{3}{250} = \frac{3}{2\cdot5\cdot5\cdot5}\right);$$

б) уравнять число двоек и пятерок в знаменателе дроби:

$$\left(\frac{3}{2\cdot5\cdot5\cdot5\cdot2\cdot2}\right);$$

в) умножить числитель дроби на произведение добавленных в знаменателе двоек или пятерок:

$$\left(\frac{3\cdot2\cdot2}{2\cdot2\cdot2\cdot5\cdot5\cdot5}\right); \qquad \frac{3}{250} = \frac{3\cdot2\cdot2}{2\cdot2\cdot2\cdot5\cdot5\cdot5} = \frac{12}{1000} = 0{,}012.$$

Указанный прием обращения обыкновенных дробей в десятичные на практике мало применяется, так как практичнее и быстрее ведет к цели другой способ преобразования обыкновенной дроби в десятичную, но разобранный прием дает возможность определить: 1) какие обыкновенные дроби обращаются в конечные десятичные, какие — в бесконечные, 2) в какие конечные дроби обращаются данные обыкновенные дроби.

Перейдем к изложению другого способа обращения обыкновенной дроби в десятичную. Этот способ применим и к дробям, обращающимся в бесконечные десятичные дроби. Так как обыкновенную дробь можно рассматривать как частное от деления числителя на знаменатель, то для обращения обыкновенной дроби в десятичную достаточно разделить числитель дроби на ее знаменатель по правилу деления десятичной дроби на целое число. Учащиеся повторяют определение дроби как частного от деления числителя на знаменатель. Потом им даются примеры обыкновенных дробей для обращения их в десятичные, для чего берутся дроби, обращающиеся в конечные десятичные и в бесконечные:

$$\frac{3}{8}, \quad \frac{5}{7}, \quad \frac{7}{11}, \quad \frac{5}{9}.$$

Учащиеся предварительно характеризуют каждую дробь, обращается ли она в конечную десятичную или в бесконечную, потом выполняют деление:

1) $$\begin{array}{r|l} 3 & 8 \\ \underline{30} & 0{,}375 \\ \underline{60} & \\ \underline{40} & \\ 0 & \end{array}$$

2) $$\begin{array}{r|l} 5 & 7 \\ \underline{50} & 0{,}714285714... \\ \underline{10} & \\ \underline{30} & \\ \underline{20} & \\ \underline{60} & \\ \underline{40} & \\ \underline{50} & \\ \underline{10} & \\ \underline{30} & \\ 2 & \end{array}$$

Во втором примере деление закончиться не может, так как остатки повторяются в одном и том же порядке, и, следовательно, будут повторяться и цифры частного, т. е. получается бесконечная десятичная дробь.

Обратим в десятичные дроби $\frac{7}{11}$; $\frac{5}{9}$:

$$\begin{array}{r|l} 7 & 11 \\ \underline{70} & 0{,}6363... \\ \underline{40} & \\ \underline{70} & \\ \underline{40} & \\ 7 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 5 & 9 \\ \underline{50} & 0{,}555... \\ \underline{50} & \\ \underline{50} & \\ 5 & \end{array}$$

При обращении дроби $\frac{5}{7}$ в десятичную имеем повторяющийся ряд цифр 714285, при обращении $\frac{7}{11}$ — 63, при обращении $\frac{5}{9}$ — 5. Такой *ряд повторяющихся в определенном порядке десятичных знаков бесконечной десятичной дроби называется периодом.*

Учитывая, что при делении числителя на знаменатель получаются приближенные числа, которые придется учащимся самим округлять, полезно предварительно повторить правила округления на решении примера № 855. Затем дать учащимся решить упражнения № 852, 853, 854, 856—859, 864—868.

Бесконечная десятичная дробь, в числителе которой одна или несколько цифр повторяются в определенном порядке, называется *периодической* десятичной дробью. Обратим в десятичные дроби обыкновенные дроби $\frac{7}{9}$ и $\frac{5}{12}$. Делим числитель каждой дроби на ее знаменатель:

$$\begin{array}{l|l} 7 & \;9 \\ \cline{2-2} \underline{70} & 0{,}777\ldots \\ \;\;\underline{70} & \\ \;\;\;\;\underline{70} & \\ \;\;\;\;\;\;7 & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 5 & \;12 \\ \cline{2-2} \underline{50} & 0{,}41666\ldots \\ \;\;\underline{20} & \\ \;\;\;\;\underline{80} & \\ \;\;\;\;\;\;\underline{80} & \\ \;\;\;\;\;\;\;\;\underline{80} & \\ \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\underline{80} & \\ \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;8 & \end{array}$$

В том и в другом случае получились бесконечные, периодические дроби. В первой дроби период начинается тотчас после запятой, во второй — не тотчас после запятой. Первая дробь называется *чистой периодической*, вторая — *смешанной периодической* дробью.

Итак, периодические дроби разделяются на чистые периодические и смешанные периодические.

Чистой периодической дробью называется такая бесконечная дробь, в которой период начинается тотчас после запятой (0,777...); смешанной периодической дробью называется такая периодическая дробь, у которой период начинается не тотчас после запятой (0,41666...).

Периодические дроби записываются так: период пишется один раз и заключается в скобки, например 0,333... записывается как 0,(3) и читается: «0 целых и 3 в периоде», а дробь 0,525252... записывается так: 0,(52) и читается: «нуль целых и 52 в периоде».

Смешанная периодическая дробь записывается так: 0,41666... = = 0,41(6) и читается: «нуль целых 41 сотая и 6 в периоде» или «нуль целых 41 до периода и 6 в периоде».

Бесконечные десятичные дроби для практических целей округляют, т. е. берут приближенную их величину с назначенной точностью, с недостатком или с избытком. Например, для дроби $\frac{5}{14} =$ $= 0{,}3(571428)$ приближенное значение с точностью до 0,01 будет 0,36 (с избытком); с точностью до 0,001... 0,357 (с недостатком). Следовательно, можно записать:

$$\frac{5}{14} \approx 0{,}36 \text{ или } \frac{5}{14} \approx 0{,}357.$$

Решить примеры № 869—871.

§ 88. Совместные действия над обыкновенными и десятичными дробями

По окончании изучения всех действий с десятичными дробями, в связи с решением сложных задач и примеров на совместные действия над обыкновенными и десятичными дробями следует повторить с учащимися приемы преобразования десятичных дробей в обыкновенные и обратно.

Часть примера на обращение простейших обыкновенных дробей в десятичные учащиеся должны, выполнив устно, запомнить, например: $\frac{1}{2} = 0,5$; $\frac{1}{8} = 0,125$; $\frac{1}{5} = 0,2$; отсюда более сложные дроби с теми же знаменателями учащиеся легко вычислят устно, например: $\frac{3}{8} = 0,125 \cdot 3 = 0,375$; $\frac{2}{5} = 0,2 \cdot 2 = 0,4$ и т. п.

При решении примеров на четыре действия с дробями обыкновенными.

Решение примеров показывает учащимся, что при сложении и вычитании дробей разного вида проще вести вычисления в десятичных дробях. Но в некоторых случаях удобнее десятичные дроби заменить обыкновенными.

При этом могут быть случаи: а) когда ясно, что обращение обыкновенной дроби в десятичную упрощает вычисление, например: $\frac{1}{2} + 0,237 + 2,36 + \frac{3}{5}$. Зная, что $\frac{1}{2} = 0,5$ и $\frac{3}{5} = 0,6$, учащиеся выполняют сложение: $0,5 + 0,237 + 2,36 + 0,6 = 3,697$.

б) Встречаются примеры, в которых выражение десятичной дроби в виде обыкновенной нецелесообразно, например: $0,7691 + \frac{3}{16}$; в этом примере десятичная дробь сложна, поэтому проще $\frac{3}{16}$ заменить десятичной дробью. Учащиеся, разложив знаменатель 16 на простые сомножители, устанавливают, что $\frac{3}{16}$ обратится в десятичную дробь с четырьмя десятичными знаками:

$$\frac{3}{16} = 0,1875; \quad 0,7691 + 0,1875 = 0,9566.$$

Пример: $5,1375 - 1\frac{4}{5}$ целесообразнее решить в десятичных дробях, так как обращение дроби 5,1375 в обыкновенную дробь было бы сложнее, чем замена $\frac{4}{5}$ десятичной дробью:

$$\frac{1}{5} = 0,2; \quad \frac{4}{5} = 0,2 \cdot 4 = 0,8; \quad 5,1375 - 1,8 = 3,3375.$$

в) Замена обыкновенных дробей десятичными в сложении и вычитании рациональна только тогда, когда обыкновенные дроби обращаются в конечные десятичные. Когда обыкновенная дробь не может быть заменена конечной десятичной дробью, для получения точного ответа следует десятичную дробь взять со знаменателем. Например:

$$\frac{5}{13} + 0,73 = \frac{5}{13} + \frac{73}{100} = \frac{500 + 949}{1300} = \frac{1449}{1300} = 1\frac{149}{1300}.$$

В примерах на умножение и деление десятичных и обыкновенных дробей удобнее выполнять эти действия в обыкновенных дробях, причем десятичные дроби берутся со знаменателями, затем сокращаются, так что числа бывают сравнительно малы.

Сравним вычисления одного и того же упражнения в десятичных и обыкновенных дробях:

$$3{,}25 \cdot \frac{4}{25} + 0{,}875 \cdot 4\frac{2}{5} = 3{,}25 \cdot 0{,}16 + 0{,}875 \cdot 4{,}4 = 0{,}5200 + 3{,}8500 = 0{,}52 + 3{,}85 = 4{,}37.$$

То же упражнение выполним в обыкновенных дробях:

$$\frac{325}{100} \cdot \frac{4}{25} + \frac{875}{1000} \cdot \frac{22}{5} = \frac{13 \cdot 1}{25 \cdot 1} + \frac{7 \cdot 11}{4 \cdot 5} = \frac{13}{25} + \frac{77}{20} = \frac{13}{25} + 3\frac{17}{20} = 3\frac{52+85}{100} = 3\frac{137}{100} = 4\frac{37}{100} = 4{,}37.$$

Выполнив вычисления первым и вторым способами, учащиеся увидят, что второе решение приводит к небольшим числам, что часть вычислений можно сделать устно.

В вычисления можно включать и такие обыкновенные дроби, которые не могут обратиться в конечные десятичные, взяв их множителями или делителями.

Пример:

$$\left(5{,}44 + 2\frac{3}{5}\right) : \frac{6}{7} = (5{,}44 + 2{,}6) : \frac{6}{7} = 8{,}04 : \frac{6}{7} = \frac{804 \cdot 7}{100 \cdot 6} = \frac{134 \cdot 7}{100} = \frac{67 \cdot 7}{50} = \frac{469}{50} = 9\frac{19}{50}.$$

Последнее действие можно выполнить следующим образом:

$$\frac{8{,}04 \cdot 7}{6} = 1{,}34 \cdot 7 = 9{,}38.$$

Для закрепления навыков и выработки умений производить совместные действия над обыкновенными и десятичными дробями учащиеся решают примеры и задачи № 872—911.

§ 89. Отношение двух чисел

Учащиеся подготовляются к понятию об отношении двух чисел при решении задач в курсе начальной школы, в которых ставится вопрос о сравнении значений однородных величин (или о сравнении чисел): во сколько раз одна величина больше другой или какую часть одна величина составляет от другой. Всякую величину можно измерить, в результате измерения получается число — числовое значение величины. Поэтому сравнение величин в арифметике сводится к сравнению чисел, измеряющих эти величины. А вопрос, во сколько раз одно число больше другого или какую часть одно число составляет от другого, решается в арифметике делением. В результате деления получается число, которое называется частным. Частное от деления одного числа на другое иначе называется *отношением* двух чисел. Если числа, над которыми производится деление, получены при измерении двух величин одной и той же единицей меры, то отношение этих чисел есть в то же время отношение этих величин, например: отношение 1 часа к 12 мин. равно 1 часу : 12 мин. = 60 мин. : 12 мин. = 60 : 12 = =5; отношение 15 мин. : 1 часу = 15 мин. : 60 мин. = 15 : 60 = $\frac{1}{4}$.

Делимое называется иначе *предыдущим членом отношения*, делитель — *последующим членом*. Пример: 15 : 3 = 5, здесь 5 — предыдущий член, 3 — последующий член; словом «отношение» называют такое выражение, как 15 : 3, т. е. записанное, но не вычисленное отношение, а также численное значение этого выражения 5. Если отношение чисел есть число целое (или смешанное), то оно показывает, во сколько раз первое число больше второго или второе число меньше первого, а также сколько раз второе число (последующий член) содержится в первом числе (предыдущем члене). Если отношение — правильная дробь, то оно показывает, какую часть первое число составляет от второго, предыдущий член от последующего.

Примеры:

$$2\ км : 200\ м = 2000\ м : 200\ м = 10;$$

$$18\ см : 5\ дм\ 4\ см = 18\ см : 54\ см = 18 : 54 = \frac{1}{3};$$

$$40\ кг : 60\ кг = 40 : 60 = \frac{2}{3}.$$

Под названием «отношение» подразумевается «кратное» отношение, вычисляемое делением. Его надо отличать от разностного или «арифметического» отношения, которое определяется вычитанием (разность двух чисел).

Предыдущий и последующий члены могут быть отвлеченными или именованными числами, но отношение $\left(10, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ всегда число отвлеченное, так как показывает во сколько раз одно число больше (или меньше) другого (в 10 раз) или какую часть первое число составляет от второго $\left(\frac{1}{3};\ \frac{2}{3}\right)$.

Так как отношение есть частное от деления одного числа на другое, в котором делимое называется предыдущим членом, делитель — последующим членом, то к отношению применимы свойства частного, а именно:

1) предыдущий член равен последующему, умноженному на отношение;

2) последующий член равен предыдущему, деленному на отношение;

3) отношение не изменится, если оба члена его умножить или разделить на одно и то же число, кроме нуля.

На последнем (3) свойстве отношения основано: а) сокращение членов отношения и б) замена отношения дробных чисел отношением целых чисел.

Примеры: а) отношение 1500 : 600 не изменится, если оба члена его разделить на 300 : 1500 : 600 = 5 : 2. (Здесь повторяется учащимися основное свойство частного и дроби, величина которой не изменяется при делении обоих членов на одно и то же число.) Объяснение зависимости между членами отношения и отношением учащиеся могут дать самостоятельно, повторив зависимость между делимым, делителем и частным.

Отмечается, что как делителем, так и последующим членом отношения не может быть 0. Делимое — предыдущий член — может быть любым членом; б) отношение дробей заменим отношением целых чисел: $\frac{7}{12} : \frac{5}{8}$. Учащиеся приводят дроби к НОЗ: $\frac{14}{24} : \frac{15}{24}$; оба члена отношения умножают на НОЗ. Получается запись:

$\left(\frac{14}{24} \cdot 24\right) : \left(\frac{15}{24} \cdot 24\right) = 14 : 15.$ Подобным же образом:

$$6\frac{2}{3} : 1\frac{3}{4} = \frac{20}{3} : \frac{7}{4} = \frac{80}{12} : \frac{21}{12} = \left(\frac{80}{12} \cdot 12\right) : \left(\frac{21}{12} \cdot 12\right) = \\ = 80 : 21,$$

$$2\frac{2}{5} : 1\frac{1}{3} = \frac{12}{5} : \frac{4}{3} = \frac{36}{15} : \frac{20}{15} = 36 : 20 = 9 : 5.$$

(Сокращение на 4 можно сделать в отношении —

$$\frac{12}{15} : \frac{4}{3} = \frac{3}{5} : \frac{1}{3} = \frac{9}{15} : \frac{5}{15} = 9 : 5.)$$

При подборе примеров необходимо рассмотреть примеры отношений дробей: а) с равными знаменателями и б) с равными числителями. Проделав преобразование отношений дробей с равными знаменателями и равными числителями, учащиеся могут самостоятельно прийти к выводу:

а) отношение дробей с равными знаменателями равно отношению их числителей;

б) отношение дробей с равными числителями равно обратному отношению их знаменателей.

Например: $3\frac{3}{8} : 1\frac{5}{8} = 27 : 13$; $3\frac{3}{4} : 2\frac{1}{7} = \frac{15}{4} : \frac{15}{7}$. Делим оба члена отношения на 15.

Получим: $\frac{15}{4} : \frac{15}{7} = \frac{1}{4} : \frac{1}{7} = \frac{7}{28} : \frac{4}{28} = 7 : 4.$

При решении примеров на преобразование отношений учащиеся должны уметь обосновать и формулировать эти преобразования.

Для закрепления теоретических сведений об отношении и для самостоятельной работы надо предложить учащимся решить примеры № 912—928.

Прекрасной иллюстрацией применения сведения об отношении к практическим целям является решение упражнений на числовой масштаб и его применение к построению диаграмм, составлению планов, к определению расстояния между двумя пунктами земной поверхности. В задачнике имеется достаточно упражнений (№ 929—935) по этим вопросам.

ГЛАВА XIII

ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

§ 90. К вопросу о приближенных вычислениях в средней школе

Изучение элементов приближенных вычислений в средней школе является давно назревшей необходимостью. Требования о введении приближенных вычислений в курс средней школы стали раздаваться еще в конце прошлого века в связи с прогрессивным движением среди учителей математики. Одним из основных положений этого движения было требование о тесном сближении теоретических знаний с практическим приложением.

Профессор В. П. Ермаков в 1905 г. написал брошюру «Приближенное вычисление», в предисловии к которой говорил: «Большой недостаток средних школ заключается в неумении производить вычисления. О приближенности вычислений в средних школах ученики не имеют никакого представления. Это можно судить потому, что ученик берет $\pi = 3{,}14$ и вычисляет окончательный результат при помощи семизначных логарифмов».

Известный педагог и автор ряда книг В. А. Крогиус в докладе «Приближенные и сокращенные вычисления в средней школе», сделанном им на I Всероссийском съезде преподавателей математики, заявляет: «...вообще же, надо признать, что кончающие среднюю школу вычисляют плохо, а о приближенных вычислениях не имеют понятия... Имея опытные данные с тремя цифрами, учащиеся часто берут результат от перемножения или деления их с пятью или шестью цифрами».

Учащиеся дореволюционной школы спокойно брали за высоту здания величину 25,435 арш., население города за 256 764 человека, расстояние между городами с точностью до 0,01 версты. Аналогичное положение наблюдалось и за рубежом. Первая попытка введения в программу средней школы приближенных вычислений была предпринята в 1927 году, но отсутствие этого материала в учебниках и отсутствие методической литературы по этому вопросу привело к неудовлетворительной постановке преподавания приближенных вычислений в советской школе, а в результате этот вопрос был исключен из программы средней школы.

Целью введения приближенных вычислений является необходимость научить учащихся при решении задач по математике, физике и другим предметам, где приходится иметь дело с приближенными вычислениями, производить их с меньшей затратой времени. Надо выработать у учащихся навык критически относиться к величинам, оценивая их точность и соответственно этому упрощать вычисления.

В объяснительной записке к программе средней школы говорится: «Приближенные вычисления применяются при решении задач, в частности таких, для которых числовые данные получаются непосредственным измерением величин...

Дальнейшее совершенствование навыков приближенных вычислений проводится в процессе их применения, при изучении математики и смежных дисциплин: при нахождении числовых значений алгебраических выражений, при вычислении значений функций, при выполнении графических упражнений, при решении практических задач в алгебре и геометрии, при выполнении лабораторных работ по физике и химии и т. д.».

Введение в программу средней школы приближенных вычислений представляет значительный шаг в деле связи школы с жизнью. Изучению приближенных вычислений по программе арифметики для шестых классов предшествует знакомство с некоторыми понятиями приближенных вычислений не только в V классе, но и в начальных (III—IV) классах. Учитель арифметики V—VI классов должен хорошо представлять знания учащихся о приближенных числах, полученные ими еще в начальной школе, а потому мы несколько подробнее остановимся на этом вопросе.

§ 91. Знания учащихся о приближенных вычислениях, полученные ими в I — IV классах

В начальной школе при изучении подготовительного курса арифметики (в пределе 10, 20, 100 и 1000) учащиеся при решении примеров и задач выполняют округление чисел и производят прикидку ответов (не употребляя этого выражения) так же, как, применяя переместительный закон в пределе 10, выполняют сложение: $1 + 7$ заменяют $7 + 1$.

При изучении систематического курса арифметики, выполняя действие с многозначными числами, учащиеся употребляют терминологию «округление чисел», «приближенные числа».

Для установления преемственности по этой теме между I—IV классами и V и VI классами остановимся на округлении, прикидке чисел и приближенных числах, которые применяются в начальной школе. Как известно, приближенные числа получаются при счете, измерении и вычислении.

Мы сначала остановимся на округлении чисел, прикидке и приближенных числах, полученных в результате вычисления.

Подготовительные работы и приближенные вычисления начинаются при изучении первого десятка. В связи со сложением и вычитанием проходится состав числа, а также решаются примеры и задачи с обратным ходом решения или примеры и задачи, выраженные в косвенной форме, например при решении примера $3 + ? = 7$. Учащиеся решают этот пример способом подбора чисел (прикидка результата). Они ставят число вместо знака «?», делают прикидку ответа. Некоторые учащиеся могут поставить вместо знака «?» число 3. Проверяя решение, они обнаруживают неверное решение. После этого они снова делают прикидку, ставят вместо знака вопроса какое-либо другое число. Снова делают прикидку. Так продолжается до тех пор, пока не получат верного решения.

Таким же способом учащиеся решают примеры и задачи на вычитание способом подбора чисел (прикидка чисел).

При изучении сложения в пределе сотни учащиеся выполняют действия, применяя округление чисел, например: $37 + 49 = 37 + 50 - 1 = 86$. Здесь выполнено округление числа 49.

При изучении таблицы деления в пределе 20 и 100 учащиеся прикидывают числа, например $24 : 6$, учащиеся подбирают числа, делают прикидку ответа. Они могут взять число 3, для проверки умножают 3 на 6, получается число 18. После этого пробуют умножить число 4. Таким образом, отыскивают частное 4.

В пределе 100 учащиеся изучают внетабличное деление: деление двузначного числа на двузначное.

Как известно из методики арифметики, сначала знакомят детей с делением круглых десятков, а затем полных двузначных чисел, например $76 : 19$. Для вычисления подобного случая учащиеся округляют 76 до 8 десятков и 19 до 2 десятков. После этого прикидывают частное 4 и проверяют правильность решения $76 : 19$.

В пределе 100 в начальной школе учащиеся изучают деление с остатком на однозначное число и на двузначное число.

Деление с остатком двузначного числа на однозначное имеет очень большое значение при ознакомлении с делением многозначных чисел на однозначное, на двузначное число.

На методике деления с остатком в пределе 100 мы здесь не останавливаемся.

При изучении темы деления с остатком в пределе 100 учащиеся встречаются с понятиями округления чисел, прикидки чисел и приближенными вычислениями.

Надо заметить, что при делении двузначного числа на двузначное с остатком учащихся в начальной школе затрудняет подбор (угадывание) частного, но этому необходимо научить их. Процесс умножения полученного частного на делитель, вычитание этого числа из делимого и проверка остатка затруднений не встретит, если основательно изучить деление с остатком на однозначное число.

При делении трехзначного числа на трехзначное число особенно большое значение имеет округление компонентов и прикидка результатов в делении двузначного числа на двузначное без остатка и с остатком.

При делении полного трехзначного числа на полное трехзначное число, например 827 : 218, числа округляются до 8 сотен и до 2 сотен и делается прикидка частного (4). Число 4, полученное от деления 8 сотен на 2 сотни, проверяется. Произведение 218 на 4 равно 872, результат умножения сравнивают с делимым.

В начальной школе ученикам предлагается округлять числа до десятков и сравнивать число десятков делимого с числом десятков делителя, например 872 : 218. Ученики на основании округления в пределе ста при делении двузначного числа на двузначное число должны прикинуть, сколько раз 21 десяток делителя содержится в 87 десятках делимого. Затем проверяется полученное число (4) путем умножения его на 218.

Наше изучение работы школ показывает, что если учащиеся в подготовительном курсе арифметики плохо усвоили округление и прикидку чисел, то очень большие затруднения встретятся у них и у учителей при изучении деления многозначных чисел.

Покажем это на примерах деления многозначных чисел:

1) 875 : 248. Округляем до сотен эти числа и делим сотни делимого на сотни делителя: 8 : 2, делаем прикидку частного 4, частное проверяем умножением: 248 × 4 = 992; прикидка показала, что ответ 4 велик, потому что 992 больше 875, уменьшаем на единицу частное 4 и делаем вторую прикидку числа 3. Снова проверяем: 248 × 3 = 744, вторая прикидка числа частного 3 верна, потому что 744 меньше 875.

2) 274938 : 367. Отделяем четыре цифры делимого 2749 : 367; для деления 2749 : 367 округляем до сотен эти числа и делим сотни делимого на сотни делителя: 27 : 3 = 9, делаем прикидку частного, получаем 9, частное проверяем, умножив 9 на 367, получим 3303; прикидка числа 9 оказалась неправильной потому, что 3303 больше 2749. Уменьшаем на единицу частное 9 и делаем вторую прикидку; частное проверяем, умножив 8 на 367; получим 2936.

Вторая прикидка (числа 8) оказалась неправильной потому, что 2936 больше 2749. Уменьшаем на единицу частное 8 и делаем третью прикидку (числа 7); частное проверяем, умножив 7 на 367; получим 2569.

Третья прикидка частного 7 верна, потому что 2569 меньше 2749.

Самая трудная часть этой работы — устная проверка намеченной цифры частного, т. е. устное умножение трехзначного числа на однозначное и вычитание произведения из делимого (875 в первом примере, 2749 — во втором).

Для облегчения этой работы достаточно на прикидку числа частного умножать не весь делитель (248), а число десятков делителя и полученное произведение сравнивать с десятками делимого (с 87 в первом примере, с 274 — во втором).

В первом примере для проверки умножаем 24 на 4, получаем 96, потом проверяем частное $3 : 24 \times 3 = 72$.

Во втором примере проверяем цифру 9, умножаем 36 на 9, получаем 324; дальше проверяем цифру $8 : 36 \times 8$; и это число больше 274; тогда переходим к $7 : 36 \times 7 = 252$.

В последнем примере (36×9, 36×8 и 36×7) при проверке умножаются на первую цифру частного сотни и десятки делителя потому, что из десятков при умножении могут составиться сотни.

В процессе деления многозначных чисел на трехзначное приходится остатки от деления высших разрядов раздроблять в низшие разряды. Возможны ошибки в делении в связи с тем, что ученики забывают свойства остатка: остаток при делении должен быть меньше делителя.

В начальной школе на уроках арифметики ежедневно учащиеся занимаются 5—7 минут устными вычислениями. При этом они применяют особые приемы устных вычислений, основанные на округлении чисел.

Приведем несколько случаев устных вычислений, в которых используется округление чисел.

I. Округление слагаемых: $197 + 65$.

Первое слагаемое заменяют разностью двух чисел: $197 = 200 - 3$, получают: $(200 - 3) + 65 = 200 + 65 - 3 = 262$.

II. Округление уменьшаемого или вычитаемого:

1) $394 - 28 = 400 - 28 - 6 = 366$;
2) $235 - 198 = 235 - 200 + 2 = 37$.

III. Округление при умножении: 198×4.

$198 = 200 - 2$; $198 \times 4 = (200 - 2) \times 4 = 800 - 8 = 792$.

IV. Округление слагаемых и замена сложения умножением:

$$83 + 82 + 86 + 85 + 78 + 77 = 80 \times 6 + 3 + 2 + 6 + 5 - 2 - 3 = 480 + 11 = 491.$$

V. Округление уменьшаемого и умножение: $608 - 8 \times 13 = 608 - 8 - 8 \times 12 = 600 - 96 = 504$.

Большое значение имеет округление при делении, когда в середине частного или на конце его должны получиться нули. Наиболее трудный случай последний. В этих примерах учащиеся часто пропускают нули в частном. Например: 6812 : 17; учащиеся получают ответ 4 вместо 400 (ост. 12).

Для предупреждения таких ошибок делается приближенное вычисление частного путем деления округленных высших разрядов на делитель. Например: 72 485 : 12; округляем высшие разряды частного до тысячи и получаем $72 : 12 = 6$ тысячам, в частном

4 цифры: 72 485 : 12 = 6040 (ост. 5); 6 250 981 : 125. Округляем делимое до десятков тысяч, высший разряд частного — десятки тысяч (625 : 125), в частном 5 цифр: 6 250 981 : 125 = 50007 (ост. 106).

§ 92. Ознакомление с элементами приближенных вычислений в V классе

Хотя в программе по арифметике для V класса из темы «Натуральные числа» вопрос об округлении целых чисел перенесен в тему «Десятичные дроби», все же, учитывая, что до изучения темы «Десятичные дроби» учащимся V класса приходится решать задачи, в которых требуется найти приближенное число и, кроме того, учащиеся с понятием «округлить данное число с заданной точностью» были ознакомлены в начальной школе, необходимо при изучении нумерации многозначных чисел дать понятие о приближенном числе и об округлении целых чисел.

В школьном учебнике вопросу «Округление целых чисел» отводится специальный параграф (§ 7), а в сборнике задач предлагается несколько упражнений (№ 15).

Беседу об округлении целых чисел желательно начать с примеров, показывающих необходимость первого понятия приближенного числа.

Можно начать с небольшого вступительного слова учителя о необходимости брать приближенные значения измеряемых величин (привести примеры), а можно, в целях активизации работы класса, написать упражнения на доске и путем наводящих вопросов привести учащихся к мысли о том, что в результате измерений получаются приближенные числа. Приведем образцы вопросов для уяснения понятия приближенного числа.

Укажите, какие из данных значений величин являются точными, а какие нет.

1. В нашем городе 480 тыс. жителей.
2. В нашем классе 32 ученика.
3. Колхоз имеет под посевами 12 500 *га* земли.
4. Расстояние между Москвой и Тулой 180 *км*.
5. Железнодорожный рельс имеет длину 10 *м*.
6. Кассир кинотеатра продал 560 билетов.

Далее можно предложить учащимся измерить длину класса, вес какого-либо тела и подвести учащихся к выводу, что результат измерения выражается приближенным числом.

Вспомнив понятие приближенного частного (с чем учащиеся встречались в IV классе), можно силами учащихся сделать вывод, что приближенное число получается в результате измерения, а иногда и в результате счета и вычисления.

Обычно учащимся не доставляет трудности уяснение понятия «результат измерения есть число приближенное», так как аргументация учителя, что неточность измерения происходит за счет несовершенства органов чувств человека и не идеальной точности приборов измерения, для ученика ясна. Можно подтвердить это таким опытом: вызвать двух учеников и предложить одному из них (другой помогает) метровой линейкой или рулеткой измерить длину класса, причем результат пока не объявлять, а записать на бумаге, затем предлагается ученикам поменяться ролями и повторить измерение. Сравнение результатов покажет приближенность измерений.

Полезно сказать учащимся, что в разговорной речи они часто слышат фразы, выражающие приближенные числа, например:

а) Ване 12 с лишним лет; б) Сегодня на улице нет и 15° мороза; в) В спортивном зале было около 50 учеников; г) На выполнение домашних уроков я трачу более 2 часов.

Предложить учащимся составить аналогичные упражнения.

Для закрепления понятия о приближенном числе предложить учащимся решить следующие упражнения: «Точное или приближенное число представляет каждое из следующих данных:

1. Вчера в школе присутствовало 540 учеников.

2. В рабочем поселке живет 15 тысяч человек.

3. Вес космического корабля «Восток» равнялся 4 725 *кг*. Юрий Гагарин пролетел в нем 40 тыс. *км* за 108 мин.

4. Магазин продал 435 пар обуви.

5. Станок весит 1 350 *кг*.

6. Станок имеет 96 деталей»

После уяснения понятия о приближенном числе перейти к уяснению понятия об округлении чисел.

В результате рассмотренных выше примеров ученики скажут, что при измерении, счете и иногда при вычислении приходится брать приближенные числа, т. е. приходится результаты измерения, счета или вычислений округлять. Хотя в начальной школе они и знакомились с понятиями «округлить с избытком», «округлить с недостатком», все же лучше еще раз изложить вопрос в такой последовательности.

Вначале на примере числа жителей какого-либо города показать, что округление многозначных чисел сводится к сохранению в них одной или нескольких цифр, считая слева направо, и к отбрасыванию остальных, точнее, к замене остальных нулями.

Далее сказать, что в некоторых случаях надо непременно округлять с избытком, в других — только с недостатком.

Примеры. 1. Сколько рабочих надо для изготовления 111 одинаковых деталей за день, если один рабочий в день может изготовить 15 деталей? Решение задачи дает ответ (111 : 15) в виде дробного числа, но число людей может выражаться только целым числом и, с другой стороны, остаток 6 деталей нельзя передавать этим же рабочим. Поэтому ответ будет — 8 рабочих, хотя восьмой рабочий сделает только 6 деталей.

2. Сколько костюмов выйдет из 50 *м* ткани, если на каждый костюм требуется 3 *м*?

Ответ: 16 костюмов. Округление нужно произвести «с недостатком».

Разобрав еще 2—3 примера, сформулировать правило округления чисел; это правило приводится в учебнике.

Правило округления закрепляется решением примеров упражнения № 15. Учитель сообщает, что оформление записи при округлении делается так: $456 \approx 500$; $549 \approx 500$ и т. д.

Полученные знания об округлении целых чисел учащийся может применить при решении некоторых задач, например задач № 543 (1, 2), 567 и др. Программой арифметики предусматривается, что в теме «Десятичные дроби» после вопроса «Сравнение десятичных дробей по величине» надо изучить с учащимися «Округление целых чисел и десятичных дробей».

Эту тему надо начать с повторения ранее изученного понятия о приближенном числе.

Для этого надо записать на доске следующие фразы:

1. Велосипедное колесо имеет поперечник 0,63 *м*.
2. Один аршин равен 71,12 *см*. Один пуд равен 16,38 *кг*.
3. Одно ведро содержит 12,3 *л*.
4. Столовая отпустила 456 обедов.
5. Библиотека имеет книжный фонд в 45 тыс. книг.
6. Железнодорожный рельс имеет длину 10,35 *м*.
7. Музей посетило 4200 человек.

Указать, какие из приведенных величин являются точными, какие приближенными. Обратить внимание учащихся, что в примерах 5 и 7 приведенные величины могут быть и точными и приближенными. После повторения понятия о приближенном числе надо вспомнить округление целых чисел.

Учащиеся знают правило округления целых чисел. Им надо сказать, что с округлением десятичных дробей они будут чаще встречаться, чем с округлением целых чисел.

Так как правило округления десятичных дробей принципиально ничем не отличается от правила целых чисел, то после повторения можно приступить к решению примеров упражнений № 613 и 614.

После ознакомления с округлением десятичных дробей учащиеся могут решать задачи с данными, в которых указывается, с какой степенью точности должен быть получен ответ. Это задачи № 685—688, 699, 702—704, 728, 743, 744 и др. Надо иметь в виду, что в задачах, где требуется определить число животных, округлять ответ надо по смыслу или «с недостатком», или «с избытком» так, чтобы результат был целым числом.

§ 93. Точные и приближенные значения величин. Абсолютная погрешность

При изучении округления чисел в V классе учащиеся на примерах ознакомились с точными и приближенными числами. Приступив в VI классе к изучению темы «Приближенные вычисления», необходимо повторить и расширить имеющиеся у учащихся понятия о точных и приближенных значениях величин.

Примерное содержание повторения и расширения понятий о точных и приближенных значениях величин таково. При изучении арифметики в предыдущих классах мы встречались с различными числами, одни из которых получались в результате измерения величин, другие — в результате счета предметов и третьи — в результате выполнения действий над заданными величинами.

Как мы уже знаем из пройденного в V классе, всякое число, полученное в результате измерения, есть число приближенное. (Если учащиеся забыли проведенные опыты с измерением, то можно напомнить, проделав измерения длины комнаты и измерения веса какого-либо предмета двумя-тремя учащимися.) Главной причиной таких результатов является в основном несовершенство наших органов чувств и измерительных приборов.

Приближенные числа могут получиться и в результате счета предметов. Например, нам нужно определить число деревьев на какой-то определенной площади, например на площади в 2 *га*. Вероятно, мы поступили бы так: подсчитали число деревьев на площади в 1 сотку (*ар*), а затем полученное число умножили на 200. Конечно, учащиеся сами скажут, что полученное число есть число приближенное. Можно привести примеры приближенных чисел от подсчета числа зрителей на стадионе, числа жителей в городе, числа семян в определенном объеме или весе и т. д.

Предложить учащимся самим придумать примеры на подсчет предметов с точными и неточными результатами. Часто бывает, что тот или другой результат счета можно принять как за точное, так и приближенное число, например: «Городской музей сегодня посетило 3200 человек», «библиотека имеет книжный фонд 18 000 экземпляров». В приведенных примерах, возможно, числа являются точными, но, возможно, они округлены.

Приближенные числа получаются не только при измерении и при счете предметов, но получаются всегда и при округлении чисел.

П р и м е р ы:

$$4{,}75 \approx 5;\ 89{,}0567 \approx 89{,}06;\ 7:3 \approx 2{,}3 \text{ и т. д.}$$

Общий вывод о происхождении приближенных чисел: приближенные числа получаются в результате измерения, счета, округления и вычисления, причем в результате измерения и округления получаются в с е г д а приближенные числа.

Если среди чисел, входящих в вычисление, есть хотя бы одно приближенное, то и результат вычисления есть приближенное число. Например, если стороны прямоугольника, полученные при измерении, 562 *м* и 304 *м*, то и площадь прямоугольника 562×304 будет приближенным числом.

Измерение величин производится всегда с определенной точностью, различной в различных случаях.

Например, измеряя расстояние между городами, берут результаты с точностью до километра, измеряя длину и ширину огорода, берут точность до одного метра; измеряя материал при пошивке одежды, берут точность до сантиметра, а на часовых заводах измерения деталей часов ведут с «микронной точностью».

При нахождении приближенного числа всегда интересуются, на сколько оно отличается от самого числа. Разность, показывающая, на сколько приближенное число больше или меньше соответствующего точного, называется абсолютной погрешностью. Округляя приближенное число, мы к имеющейся погрешности его добавляем еще погрешность округления. Округляя же точное число, имеем только погрешность округления.

При округлении с избытком погрешность всегда меньше единицы последнего сохраняемого разряда, а при округлении с недостатком не больше единицы последнего сохраняемого разряда. Поэтому при решении задач говорят, что округление производится «с точностью до единицы» последнего сохраняемого разряда и, наоборот, фраза «округлить число с точностью до единицы такого-то разряда» понимается в том смысле, что погрешность округления не будет превосходить единицы этого разряда.

В приближенных числах, выраженных десятичной дробью, приходится иногда отбрасывать только нуль или несколько нулей справа, например при записи приближенного числа 0,4800 с точностью до сотых. Этот случай условимся считать округлением с нулевой погрешностью.

Несмотря на сравнительно легкое усвоение процесса округления чисел и нахождения погрешности, необходимо тщательное практическое изучение материала на значительном количестве примеров. Поэтому рекомендуем провести короткую контрольную работу (15—20 мин.) на понятие о приближенном числе, округлении и нахождении погрешности.

§ 94. Запись приближенного числа. Верные (надежные) цифры. Значащие цифры приближенного числа

Необходимо, чтобы учащиеся отчетливо представляли правило записи приближенных чисел, имели понятие о «верных» («надежных») цифрах числа и твердо могли указать значащие цифры приближенного числа.

Наметим примерное изложение этой темы.

Пусть мы измерили рулеткой 6 раз длину здания и получили такие результаты (в метрах): 21,63; 22,12; 22,20; 21,87; 21,91; 22,16. Если обратиться к учащимся с вопросом: «Как найти длину здания?» — то получим ответ: «Надо найти среднее арифметическое этих измерений». Найдя среднее арифметическое, получим: 131,89 : 6 = 21,981666. . . Возникает вопрос, какие цифры полученного числа заслуживают доверия, т. е. «верные», или «надежные», а какие не заслуживают доверия, т. е. «неверные», или «ненадежные»?

Один из выдающихся математиков и кораблестроителей А. Н. Крылов дал правило записи приближенных чисел.

Он писал: «Результат всякого вычисления и измерения выражается числом; условимся писать эти числа так: чтоб по самому начертанию можно было судить о степени точности; для этого стоит только принять за правило писать число так, чтобы в нем все значащие цифры, кроме последней, были верны и лишь последняя цифра была бы сомнительна, и притом не более, как на одну единицу» (А. Н. Крылов, Лекции о приближенных вычислениях, 1950, стр. 10). Конечно, в такой формулировке правило записи приближенных чисел не следует давать. Учащимся можно предложить такую формулировку:

«Приближенное число следует записывать так, чтобы последняя его цифра указывала на его точность; все цифры, кроме последней, должны быть верными и лишь в последней допустима небольшая ошибка».

Применяя это правило к рассмотренному примеру, получим, что длина здания будет ≈ 22 *м*. Эта запись показывает, что приближенное число взято с точностью до 1 *м*.

Запись $t \approx 37{,}0^\circ$ указывает, что приближенное число взято с точностью до десятых долей градуса.

Учащиеся, решив задачи № 1014—1020, должны выработать твердые представления о записи приближенных чисел и верных их цифрах.

Почти все правила оценки точности результатов действий над приближенными числами по способу подсчета цифр основываются на понятии о значащих цифрах приближенного числа. Учащиеся знают из прошлого, что значащими цифрами называются цифры 1, 2, . . . , 9. При изучении приближенных вычислений приходится пересмотреть такое определение значащих цифр.

Кроме несколько иного истолкования значащих цифр, учащиеся должны отчетливо представлять различие между десятичными знаками числа и значащими цифрами.

Поясним на примерах.

Учащиеся знают, что *десятичными знаками* числа называются все его цифры, записанные справа от запятой. Например, числа 4,2; 5,03; 0,3216; 204,6; 0,015; 706 имеют соответствующее число десятичных знаков: 1; 2; 4; 1; 3; 0.

Значащими цифрами приближенного числа называются все его цифры, начиная с первой слева, отличной от нуля.

Такое определение дано в школьном учебнике, и мы будем его придерживаться, хотя оно страдает тем недостатком, что не разъясняет, в каком случае нули, стоящие в конце числа, считаются значащими, а в каком — нет, относя их всегда к значащим цифрам. Наиболее точное определение значащих цифр дает В. М. Брадис в книге «Средства и способы элементарных вычислений». Но это определение трудно усваивается учащимися.

Рассматривая приведенный выше пример в качестве пояснения к понятию «значащие цифры», видим: числа 4,2; 5,03; 0,3216; 204,6; 0,15; 706 имеют соответственно 2, 3, 4, 4, 2, 3 значащие цифры.

Сравнивая число десятичных знаков этих чисел с их значащими цифрами, учащиеся поймут различие этих понятий. Определение значащих цифр надо рассмотреть на значительном числе примеров, примерно, в такой последовательности. Вначале закрепление проводится на примерах без нулей на конце числа: 42; 402; 4248; 4,2; 4,56, затем берутся примеры целых приближенных чисел с нулями на конце: 160 (с точн. до единиц). Нуль — значащая цифра, всего 3 значащие цифры. 1600 (с точн. до десятков). Нуль десятков — значащая цифра, а нуль единиц — незначащая, всего — 3 значащие цифры. 1600 (без оговорки о точности). Оба нуля — незначащие цифры. Всего 2 значащие цифры. 1 106 000 (без оговорки о точности). Три нуля на конце — незначащие цифры. Всего 4 значащие цифры.

В приближенном числе, если оно является десятичной дробью, нули в конце всегда являются значащими цифрами, в противном случае они не пишутся. Например, число 40,050 имеет 5 значащих цифр, число 3,00 имеет 3 значащие цифры.

§ 95. Сложение и вычитание приближенных чисел

Вначале надо сказать учащимся, что при решении различных практических задач приходится производить вычисления с приближенными числами, например при вычислении периметров различных фигур (прямоугольников, квадратов, треугольников), площадей фигур и объемов тел.

Сложение и вычитание приближенных чисел целесообразнее проходить в такой последовательности: вначале сложение и вычитание целых приближенных чисел, а затем сложение и вычитание дробных приближенных чисел. В каждом из этих двух случаев прежде рассматривать упражнения на сложение и вычитание приближенных чисел, имеющих одинаковую точность, а потом различную точность.

Случай сложения и вычитания приближенных целых чисел не представит никаких затруднений для учащихся, так как он повторяет сложение и вычитание целых чисел. Новым для учащихся явится только то, что они должны представлять последнюю цифру результата ненадежной (сомнительной). Пример: «Найти периметр прямоугольника, длина которого 15 *см*, а ширина 11 *см*».

Р е ш е н и е: $P \approx 15 + 15 + 11 + 11 = 52$ (*см*). О т в е т: 52 *см*. Цифра 2 сомнительна, так как цифры единиц 5, 5, 1,1 были сомнительными.

Далее надо перейти к случаю, когда компоненты даны с различной степенью точности.

Как известно, существует несколько различных формулировок правила сложения и вычитания приближенных целых чисел. Наиболее доступная формулировка для учащихся следующая:

При сложении и вычитании приближенных целых чисел в полученном результате нужно отбрасывать (по правилу округления) цифры тех разрядов справа, которых нет хотя бы в одном из данных чисел.

Это правило надо сообщить учащимся не сразу, а подвести к нему, разобрав подробно 3—4 примера.

Задача: «Колхоз имеет 6500 *га* (с точностью до 100) пахотной земли, 1840 *га* (с точностью до 10) сенокосных угодий, 215 *га* под выгоном для скота и 84 *га* усадебной земли. Сколько всего земли в колхозе?»

Прежде чем приступить к решению, необходимо убедиться, что учащиеся понимают, какие цифры в каждом данном являются верными (надежными); производя сложение обычным путем, получим:

$$+\begin{array}{r}6500\\1840\\215\\84\\\hline 8639\end{array}$$

Сумма чисел 8639 является приближенным числом. Возникает вопрос, все ли цифры полученной суммы являются верными, т. е. все ли цифры надо сохранить в результате.

Первое слагаемое (6500) дано с точностью до сотни (число десятков и число единиц неизвестно), второе — с точностью до десятка (число единиц неизвестно), третье и четвертое — с точностью до 1. Следовательно, в числе 8639 цифры 3 и 9 являются ненадежными, а потому мы можем ручаться в числе 8639 только за 8 и 6.

Это рассуждение наглядно можно представить так. Вместо неизвестных цифр в приближенных числах ставим букву Н и складываем:

$$+\begin{array}{r}65\text{НН}\\184\text{Н}\\215\\84\\\hline 86\text{НН}\end{array}$$

Рассматривая результат сложения, видим, что в сумме приближенных чисел надо оставить справа только цифру того разряда, который имеется во всех числах.

После усвоения учащимися правила сложения аналогично надо вывести правило вычитания приближенных чисел, например, разобрав решение такой задачи: «В керосиновую лавку было завезено 4560 *кг* керосина, и из этого количества продано 2526 *кг*. Сколько керосина осталось в лавке?»

Считая, что уменьшаемое дано с точностью до десятка, получим:

$$\begin{array}{r} -\begin{array}{r} 4510 \\ 2526 \end{array} \\ \hline 1984 \approx 1980 \ (\text{кг}) \end{array}$$

После рассмотрения этих примеров надо формулировать приведенное выше правило.

Для закрепления правила сложения и вычитания целых приближенных чисел надо решить в классе несколько примеров.

Необходимо указать учащимся, что при округлении результатов сложения или вычитания целых приближенных чисел отбрасываемые цифры надо заменить нулями.

Как только учитель убедился, что учащиеся умеют складывать и вычитать целые приближенные числа, он переходит к изучению сложения и вычитания любых чисел.

Вначале надо рассмотреть случай, когда все компоненты действий даются с одинаковой точностью. Этот случай не представляет трудности для учащихся и вполне достаточно решить только одну задачу, например такую:

«Стороны треугольника равны 4,5 *см*, 5,7 *см* и 3,9 *см*. Найти периметр треугольника».

Решение: $4{,}5 + 5{,}7 + 3{,}9 = 14{,}1$ (*см*). В результате также оставляем десятые доли.

После этого надо перейти к решению задач, у которых приближенные числа даны с различной точностью.

Задача: «Стеклянный пузырек весит 52,8 *г*, пробка к нему 4,85 *г*. В пузырек влили 35 *г* воды, отмерив ее мензуркой. Какой общий вес пузырька с водой и пробкой?»

Решение:

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r} 52{,}8 \\ 4{,}85 \\ 35\phantom{{,}00} \end{array} \\ \hline 92{,}65 \approx 93 \ (\text{г}) \end{array}$$

В полученной сумме цифры сотых, десятых долей и единиц являются сомнительными (последняя цифра каждого слагаемого сомнительная). Отсюда мы должны результат округлить, оставляя цифру единиц, а остальные сомнительные (десятые и сотые) отбросить. Следовательно, результат равен 93.

Такое рассуждение можно провести в том случае, если учитель уверен, что класс прочно и ясно уяснил предыдущее. Если у учителя есть сомнение в восприятии этого учащимися, то тогда лучше прибегнуть к записи:

$$\begin{array}{r} 52{,}8\text{Н} \\ +\ 4{,}85 \\ 35{,}\text{НН} \\ \hline 92{,}\text{НН} \end{array}$$

Рассуждения те же, что на стр. 328.

Как мы видим из разобранных примеров, результат сложения и вычитания приближенных чисел берется с таким числом десятичных знаков, с каким был дан наименее точный компонент.

После рассмотрения всех указанных случаев сложения и вычитания учащиеся должны решить (в классе и дома) примеры № 1021—1027.

Желательно проведение 25—30-минутной контрольной работы.

§ 96. Умножение приближенных чисел

Рекомендуется, прежде чем рассматривать умножение приближенных чисел, повторить действие умножения с точными числами, а также понятие о значащих цифрах числа. Последовательность изложения умножения приближенных чисел такова: умножение целых приближенных чисел, умножение целого приближенного числа на точное, умножение приближенных десятичных дробей.

Умножение целых приближенных чисел можно начать так. Предложить одному из учеников измерить длину и ширину класса с точностью до 1 *см*. Пусть результаты измерения будут такие: длина 12 *м* 72 *см* и ширина 6 *м* 51 *см*. Поставить перед классом задачу — вычислить площадь класса. Так как результат измерения — приближенные числа, то и их произведение — приближенное число. Согласно записи приближенного числа цифры единиц сантиметров являются ненадежными, или сомнительными. Найдем произведение (введя в записи букву Н):

$$\begin{array}{r} \times\ 127\text{Н} \\ 65\text{Н} \\ \hline \text{НННН} \\ 635\text{Н} \\ 762\text{Н} \\ \hline 82\text{НННН} \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\ 1272 \\ 651 \\ \hline 1272 \\ 6360 \\ 7632 \\ \hline 828072 \end{array}$$

Рассматривая полученные произведения, мы видим, что надежными являются только первые две цифры (8 и 2), а все остальные — сомнительные (ненадежные). Значит, произведение должно иметь только три значащие цифры, причем последняя из них ненадежная: другими словами, $1272 \times 651 \approx 828\ 000$. Следует рассмотреть аналогично еще один пример, затем сообщить правило:

При умножении приближенных чисел в произведении следует сохранять столько значащих цифр, сколько их имеется в сомножителе с наименьшим числом значащих цифр.

Для закрепления правила решите 2—3 задачи с предварительным измерением размеров самими учащимися и 2—3 примера с отвлеченными числами. После уяснения правила умножения приближенных чисел рассмотрите умножение приближенного числа на точное. Вывод правила для этого случая поручите сделать учащемуся при решении задачи: «Угольная баржа вмещает каменного угля 474 *т*. Найти вес угля, погруженного на 25 барж».

Учащиеся получат: $474 \cdot 25 = 11850 \approx 11900$ (*т*) и сделают вывод, что при умножении приближенного числа на точное учитывается только количество значащих цифр приближенного числа, а на количество цифр в точном числе не обращается внимания.

Рекомендуем в классе следующие задачи:

а) Бригада рабочих на ремонте шоссе проработала 132 часа, ремонтируя 24 *м* в час. Сколько метров шоссе отремонтировала бригада?

б) Вычислить площадь земельного участка прямоугольной формы, если длина его равна 1450 *м*, а ширина 546 *м*.

в) Найти объем бруса длиной 453 *см*, если площадь поперечного сечения его равна 224 *кв. см*.

г) Грузовая машина берет при перевозке 2500 *кг* торфа. Сколько торфа перевезет машина за 12 рейсов?

д) Продано 45 ящиков помидоров. В каждом ящике было по 24 *кг*. Сколько килограммов помидоров продано?

Умножение приближенных десятичных дробей можно начать, рассматривая пример умножения приближенного числа на точное, а затем уже рассмотреть умножение приближенных десятичных дробей. Рассмотрим сказанное на решении задач.

1. Моток проволоки весит 2,32 *кг*. Чему равен вес 12 таких мотков?

Умножение выполним по правилу умножения точных чисел, а затем умножим, введя букву Н:

$$\begin{array}{r} \times\,2{,}32 \\ 12 \\ \hline 464 \\ 232 \\ \hline 27{,}84 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\,2{,}3\text{Н} \\ 12 \\ \hline 46\text{Н} \\ 23\text{Н} \\ \hline 27{,}\text{НН} \end{array}$$

Так как во множимом цифра сотых (2) ненадежна, то в полученном произведении уже две цифры будут ненадежны (8 и 4), следовательно, только первые цифры результата можно считать надежными, а цифра десятых сомнительна. Следовательно, искомый ответ будет 27,8 *кг*. После рассмотрения этого примера можно, не формулируя окончательно правило, обратить внимание учащихся на число значащих цифр в произведении.

Далее надо рассмотреть общий случай при решении такой задачи:

«Найти площадь прямоугольника, длина которого равна 34,26 *м*, а ширина 8,67 *м*». Оба данных — приближенные числа. Естественно, что и ответ будет приближенным числом:

$$\begin{array}{r} \times\ 34{,}26 \\ 8{,}67 \\ \hline 23982 \\ 20556 \\ 27408 \\ \hline 297{,}0342 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} \times\ 34{,}2\text{Н} \\ 8{,}6\text{Н} \\ \hline \text{НННН} \\ 2052\text{Н} \\ 2736\text{Н} \\ \hline 293{,}\text{НННН} \end{array}$$

Мы видим, что только первые две цифры полученного произведения верны, а остальные сомнительны. Следовательно, результат будет 297 ($м^2$).

После рассмотрения этих примеров можно сформулировать правило умножения приближенных чисел: «Приближенные числа умножаем как точные и в полученном произведении оставляем столько значащих цифр, сколько их имеет сомножитель с наименьшим числом значащих цифр».

§ 97. Приближенное частное. Деление десятичных дробей

Прежде чем рассматривать деление приближенных чисел, необходимо рассмотреть (повторить) вопрос о нахождении приближенного частного при делении точных чисел с округлением его до десятых, сотых и т. д. долей.

С приближенным частным с определенной степенью точности учащиеся достаточно полно знакомились при делении десятичных дробей. Полезно повторить правило округления: «Если остаток больше или равен половине делителя, то последнюю значащую цифру частного увеличивают на единицу, а если остаток меньше половины делителя, то оставляют без изменения». Решить 2—3 примера и сделать следующую запись:

1) $80598 : 247 \approx 326$ (с недостатком)

$$\begin{array}{r|l} 80598 & 247 \\ \cline{2-2} -741 & 326 \\ \cline{1-1} 649 & \\ -494 & \\ \cline{1-1} 1558 & \\ -1482 & \\ \cline{1-1} 76 & \text{(остаток)} \end{array} \qquad 76 < \frac{247}{2}$$

2) $54{,}5 : 37 \approx 1{,}5$ (с избытком)

$$\begin{array}{r|l} 54{,}5 & 37 \\ \underline{-37} & \overline{1{,}4} \\ 175 & \\ \underline{-148} & \\ 27 & \end{array} \qquad 27 > \frac{37}{2}$$

Наибольшая трудность при нахождении приближенного частного для некоторых учащихся заключается в установлении правильного результата сравнения остатка с половиной делителя. Если нет уверенности в прочности усвоения нахождения приближенного частного точных чисел, то дополнительно решить из сборника задач № 712.

После повторения приближенного частного точных чисел приступают к рассмотрению деления приближенных чисел.

Учитель сообщает учащимся, что правила деления приближенных чисел устанавливаются аналогично правилам умножения приближенных чисел.

Так, при делении приближенного числа на точное число в частном сохраняется столько значащих цифр, сколько их было в приближенном делимом. При делении приближенных чисел в частном сохраняется столько значащих цифр, сколько их имеет приближенное данное с наименьшим числом значащих цифр.

Объяснение правила деления приближенных чисел для учащихся представляет значительные трудности, а потому надо ограничиться лишь указанием на аналогию этого правила с правилом умножения и на то, что его применение не противоречит умножению (но утверждается проверкой деления умножением).

Учащиеся, проделав в классе и дома упражнения из сборника задач № 1031—1036, будут иметь необходимые навыки в решении вычислений в 1—2 действия с приближенными числами.

Полезно дать контрольную работу на 25—30 минут на определение значащих цифр, умножение и деление приближенных чисел.

§ 98. Совместные действия над приближенными числами. Предварительное округление приближенных чисел. Запасная цифра

Умея выполнить каждое из четырех действий над приближенными числами, учащиеся в состоянии решать и более сложные задачи, требующие выполнения двух и более действий над такими числами. Окончательный результат получается после выполнения последнего действия, а предыдущие действия дают промежуточные результаты. Точность окончательного результата получается во многих случаях выше, если в промежуточных результатах брать одной цифрой больше, чем предусмотрено в известных нам правилах сложения и вычитания, умножения и деления приближенных чисел.

Целесообразность оставления одной запасной цифры необходимо учащимся тщательно объяснить на примерах. Приведем примеры:

1. Найти сумму трех приближенных чисел, взятых с различной точностью:

$$14{,}7+2{,}04571+0{,}63059.$$

Найдем сумму чисел тремя различными вычислениями:

а) выполняем сложение и полученный результат округляем;

б) предварительно округляем данные (до сложения), сохраняя в них столько значащих цифр, сколько их имеется в наименее точном данном;

в) предварительно округляем данные с сохранением лишней («запасной») цифры:

$$\text{а)}\ \begin{array}{r} 14{,}7 \\ +\ 2{,}04571 \\ 0{,}63059 \\ \hline 17{,}37630 \\ \hline 17{,}4 \end{array} \qquad \text{б)}\ \begin{array}{r} 14{,}7 \\ +\ 2{,}0 \\ 0{,}6 \\ \hline 17{,}3 \end{array} \qquad \text{в)}\ \begin{array}{r} 14{,}70 \\ +\ 2{,}05 \\ 0{,}63 \\ \hline 17{,}38 \\ \hline 17{,}4 \end{array}$$

Рассматривая эти три способа вычислений, видим, что в случае а) мы напрасно потратили время на сложение последних четырех цифр второго и третьего слагаемых, в случае б) результат получается менее точный, чем в а), и в случае в) выигрыш во времени (в производстве вычислений) получается без ущерба для точности результата.

2. Пусть надо найти произведение двух дробных чисел: $2{,}8125 \times$ $\times\ 1{,}3$. Проведем, как и в ранее разобранном примере, три вычисления:

$$\text{а)}\ \begin{array}{r} 2{,}8125 \\ \times\ 1{,}3 \\ \hline 84375 \\ 2\,8125 \\ \hline 3{,}65625 \\ \hline 3{,}7 \end{array} \qquad \text{б)}\ \begin{array}{r} 2{,}8 \\ \times\ 1{,}3 \\ \hline 84 \\ 28 \\ \hline 3{,}64 \\ \hline 3{,}6 \end{array} \qquad \text{в)}\ \begin{array}{r} 2{,}81 \\ \times 1{,}3 \\ \hline 843 \\ 281 \\ \hline 3{,}653 \\ \hline 3{,}7 \end{array}$$

Рассмотрев эти три способа вычислений, мы опять видим, что сохранение в промежуточных результатах «запасной цифры» дает экономию в вычислениях, не нарушая точности результата.

Обобщая рассмотренные случаи, можно записать в тетрадях учащихся следующее правило: «Если некоторые приближенные данные имеют больше десятичных знаков (при сложении и вычитании) или больше значащих цифр (при умножении и делении), чем другие, то перед выполнением действия их следует округлить, сохраняя при этом одну запасную цифру».

Это правило можно только записать, но требовать от учащихся его заучивания не следует, в силу его громоздкости.

У учащихся, естественно, возникнет вопрос: «А если брать по две запасные цифры, то не будет ли результат вычисления еще выше?»

Рассмотрим для ответа на этот вопрос решение примера: $3{,}12 \times \times 1{,}4 + 3{,}74 \cdot 1{,}8 + 4{,}06 \cdot 2{,}4 + 8{,}61 \cdot 0{,}90$.

Сведем все действия в таблицу:

	Без запасной цифры	С одной запасной цифрой	С двумя запасными цифрами
$3{,}12 \cdot 1{,}4 =$	4,4	4,37	4,368
$3{,}74 \cdot 1{,}8 =$	6,7	6,732	6,732
$4{,}06 \cdot 2{,}4 =$	9,7	9,74	9,744
$8{,}61 \cdot 0{,}90 =$	7,7	7,75	7,749
$\times \quad =$	28,5	28,59	28,563
	28,5	28,6	28,6

Сравнивая полученные результаты, видим, что сохранение одной запасной цифры оказало влияние на окончательный результат, но сохранение двух запасных цифр оказалось бесполезным для результата.

Надо сказать учащимся, что встречается немало случаев, когда вычисление с запасной цифрой дает тот же результат, что и без нее, но пользоваться запасной цифрой при совместных действиях над приближенными числами все же рекомендуется.

После того как будет введено использование запасной цифры, можно решать любые из упражнений № 1038—1041 сборника задач, а также провести контрольную работу. При решении задач из задачника следует сказать учащимся, чтобы они не обращали внимания на встречающиеся в некоторых задачах (№ 1033, 1034 и 1036) указания о границах числового значения величин, данные в скобках ($\pm a$). В заключение приведем по одному варианту контрольных работ VI класса по приближенным вычислениям. Как было сказано выше, контрольные работы желательно провести: 1) после прохождения вопроса «Точные и приближенные значения величин. Абсолютная погрешность»; 2) на сложение и вычитание приближенных чисел; 3) на умножение и деление приближенных чисел и 4) на совместные действия над приближенными числами. Вместе на все четыре контрольные работы не должно уйти больше 2 академических часов.

I контрольная работа

1. Укажите, какие из данных значений величин являются точными числами, а какие — приближенными.

а) Расстояние между Москвой и Ленинградом 561 *км*.

б) В школе по спискам числится 656 учеников.

в) Стакан вмещает 200 *куб. см* воды.

г) Магазин продал за день 420 пар обуви.

д) Станок весит 2,75 *т*.

2. Придумайте и запишите пример приближенного и пример точного числа.

3. Округлить: 1) с точностью до 1: 276,73; 13,499;
2) с точностью до 0,01: 15,4542; 0,135106.

Вычислить погрешность, допущенную при округлении.

4. Представить дробь $\frac{2}{3}$ в виде десятичной дроби с тремя десятичными знаками и вычислить абсолютную погрешность, допущенную при округлении.

II контрольная работа

1. Вычислить:

а) $0{,}576 + 4{,}3 + 7{,}023$;

б) $0{,}836 - 0{,}82$.

2. К разности приближенных чисел 4,564 и 1,27 прибавить точное число 23.

3. Болт весит 10,7 *г*, гайка — 4,58 *г*, вес шайбы равен 1,21 *г*. Найти общий вес этих трех деталей.

4. Масло с бутылкой весит 1,42 *кг*, а пустая бутылка весит 0,543 *кг*. Сколько весит масло?

III контрольная работа

1. Сколько значащих цифр имеет каждое из следующих приближенных чисел: 358; 7004; 50 400; 6,4; 0,134; 40, 045; 1,100.

2. Какая разница между двумя записями: «Длина карандаша 12 *см*» и «Длина карандаша 12,0 *см*»?

3. На окраску пола требуется по 0,142 *кг* краски на каждый квадратный метр пола. Сколько нужно краски для пола в 24 *кв. м*?

4. Четырехкратное взвешивание одного и того же предмета дало следующие результаты:

1,345 *кг*; 1,348 *кг*; 1,341 *кг* и 1,343 *кг*.

Найти средний вес предмета.

IV контрольная работа

1. Произвести указанные действия с использованием запасной цифры:

1) $(13,2 + 1,45) \cdot 0,35 + 3 : 7$;
2) $0,37 \cdot 23 - 0,21 - 0,8 + 22 : 62$.

2. Четырехугольный участок разбит на два треугольных с общим основанием 56,8 *м*. Высота первого треугольника равна 24, 5 *м*, а второго 9,6 *м*. Вычислить площадь участка.

3. В колхозе 42 *га* засеяли рисом, из них с участка в 18 *га* собрали по 20,4 *ц* с *га*, а с остальных по 18,3 *ц*. Какой был средний урожай риса в колхозе?

ГЛАВА XIV

ПРОЦЕНТЫ

Согласно программе средней школы понятие о проценте дается еще в курсе десятичных дробей, там же решаются простейшие задачи на проценты.

Кроме первоначальных понятий о процентах, программой предусмотрено проходить как самостоятельную тему процентные вычисления, ввиду их важности как в жизненной практике, так в технике и науке.

При прохождении раздела «Десятичные дроби» ученики познакомились с этой темой, а потому она здесь только дополняется.

В практической жизни встречаются большей частью три вида задач на проценты: 1) нахождение процентов от данного числа, 2) нахождение числа по его процентам и 3) нахождение процентного отношения двух чисел.

§ 99. Нахождение процентов от данного числа

Сначала решаются устные задачи с конкретным содержанием на нахождение процентов от числа, затем числовые примеры.

Задача. Сберкасса дает 2% годовых по бессрочным вкладам и 3% — по срочным. Сколько выплатит сберкасса в год со 100 руб. бессрочного вклада? с 200 руб.? с 3600 руб? по срочным вкладам с 7000 руб.? с 10000 руб.? и т. д.

Никаких записей, кроме условия, не делается. Учащиеся проводят устные вычисления: 1) 1% от 400 руб. или 0,01 от 400 руб. составляет 4 руб.; 2% или 0,02 составят 8 руб.; 2) 3% от 7000 руб.— 210 руб., так как 1% или 0,01 от 7000 руб. равна 70 руб.

Для выработки вычислительных навыков учащимся даются в большом количестве устные примеры на отвлеченные числа. Помимо общего приема (вычислить 1 % делением на 100, потом умножить на число процентов), надо давать в порядке устного счета вычисления 10%, 20%, 25%, 50%, 75%, $33\frac{1}{3}$ %, $66\frac{2}{3}$ % от разных чисел и др. Здесь учащиеся должны применять разные приемы устного счета, проявлять сообразительность, изобретательность.

Например: 50% от 8900 составляют $\frac{1}{2}$ от 8900, т. е. 4450.

10% от 3360 — это $\frac{1}{10}$ часть от 3360, т. е. 336.

15% от 3360 = 10% от 3360 + 5% от 3360 = 336 + 168 = 504.
9% от 3360 = 10% от 3360 — 1% от 3360 = 336 — 33,6 = 302,4.
60% от 3360 = 50% от 3360 + 10% от 3360 = 1680 + 336 = 2016

или 60% = $\frac{3}{5}$; $\frac{3}{5}$ от 3360 = 2016.

Учащиеся формулируют общий прием вычисления процентов от числа (деление на 100 и умножение на число процентов) и припоминают, что так решаются задачи на нахождение части от числа. Следовательно, нахождение процентов от числа есть нахождение дроби (части) числа, выраженной в процентах.

Дальше переходят к письменному решению задачи на нахождение процентов от числа.

Так как входящие в эту задачу величины находятся в прямо пропорциональной зависимости, их можно решать способом приведения к единице или способом пропорций, после изучения пропорции и прямой и обратной пропорциональной зависимости.

Найти 2,5% от 84,8 *куб. м.* Записывают условие в виде таблицы:
100% . . . 84,8 *куб. м.*
2,5%. . .x. . .

Решение: 1% от 84,8 $м^3 = \frac{84,8}{100}$ *куб. м*;

$$2,5\% \text{ от } 84,8\ м^3 = \frac{84,8 \cdot 2,5}{100} \text{ куб. м.} = 2,12 \text{ куб. м.}$$

Ту же задачу можно решить способом пропорций.

$x : 84,8 = 2,5 : 100$. Пропорция читается так: x меньше 84,8 во столько же раз, во сколько раз 2,5 меньше 100.

Из решения устных примеров учащиеся сделают вывод, что нахождение процентов числа есть вычисление дроби (части) числа, выраженной в процентах.

Поэтому задача может быть решена умножением числа на дробь 0,025 (2,5%), т. е. одним действием:

$$84,8 \cdot 0,025 = 2,12 \text{ (куб. м).}$$

После решения достаточного числа числовых задач и примеров можно дать общую формулу решения задач этого вида.

Задача. Найти $p\%$ от числа a.

Решение одним действием. $p\% = \frac{p}{100}$;

$$a \cdot \frac{p}{100} = \frac{a \cdot p}{100};\ p\% \text{ от числа } a = \frac{ap}{100} \text{ или } 0,01\ ap.$$

Решение способом пропорций

$$100\% \ldots\ldots a$$
$$p\% \ldots\ldots x$$
$$x : a = p : 100; \quad x = \frac{a \cdot p}{100}.$$

Проверяют формулу, подставляя числовые значения a и p из ранее решенных задач, дальше пользуются формулой для решения задач.

Этот вид задач на проценты решается главным образом нахождением дроби от числа, реже — приведением к единице и очень редко способом пропорций.

Для закрепления и самостоятельной работы предложить учащимся примеры из упражнений № 1042—1057.

§ 100. Нахождение числа по процентам

Вторая группа задач на проценты — нахождение числа по его дроби, выраженной в процентах. Эта группа включает 3 вида задач: 1) задачи, в условии которых известно число процентов от числа;

2) задачи, в которых дано число, которое получится, если к данному числу прибавить несколько его процентов; 3) задачи, в которых дано число, получаемое при вычитании из данного числа нескольких его процентов. Сначала делаются устные упражнения. Даются примеры или задачи с конкретным содержанием. Например: найти число, если

1) 1% его равен: 12; 29; 4; 5; 13; 26 и т. д.;
2) 2% его равны: 36; 84; 9; 6; 24; 8 и т. д.;
3) 3% его равны: 18; 45; 6; 9; 15; 6 и т. д.

Условие записывается на доске. Искомое число можно обозначить буквой x.

4) $8\%x = 24$; найти x. Решение выполняется устно с таким объяснением: $8\%x$ или 0,08 числа равны 24, $1\%x$ или 0,01 числа равны $24 : 8 = 3$; $100\%x$ или все число равно $3 \cdot 100 = 300$. Этот способ решения — приведением к единице (2-мя действиями).

5) $4\%x = 12$; найти x. $4\% = \frac{1}{25}$; $x = 12 \cdot 25 = 300$ (по части, выраженной в %, находится число).

6) $0{,}6x = 24$; здесь 0,6% заменяем дробью: $0{,}6\% = 0{,}006$; $0{,}001x = 24$; $6 = 4$; $x = 4 \cdot 1000 = 4000$.

Этот вид задач можно решать и в обыкновенных дробях: $4\%x = 12$; $x = \frac{12 \cdot 100}{4} = 300$.

7) Решаются задачи, в которые входят и первый и второй вид задач на проценты, например: «Найти число, если $2\frac{1}{4}\%$ его составляют 60% от 120» и т. п.

В числе задач, решаемых устно, должны быть такие, в которых требуется найти число, если даны 10% его, 25%, 50%, $33\frac{1}{3}\%$ и т. п.

Из устного решения задач и примеров учащиеся делают вывод, что нахождение числа по его процентам есть задача нахождения числа по его части, выраженной в процентах, поэтому решение может записываться, как деление данного числа на дробь.

Письменное решение задач на нахождение числа по его процентам может выполняться двумя действиями или одним действием.

З а д а ч а: «Техминимум в цехе сдали 150 рабочих, что составляет 75% всего числа рабочих. Сколько рабочих в цехе?»

1) Условие задачи можно записать в виде таблицы.

75%. . . 150 рабочих

100%. . . x —» —

Здесь зависимость между величинами прямо пропорциональная. Решение задачи можно выполнить:

а) приведением к единице (двумя действиями)

$$1\% \ldots \frac{150}{75}$$

$$100\% \ldots \frac{150 \cdot 100}{75} = 200 \quad \text{(рабочих)};$$

б) пропорцией:

$x : 150 = 100 : 75$ (x больше 150 во столько раз, во сколько раз 100 больше 75).

$$x = \frac{150 \cdot 100}{75} = 200 \text{ (раб.)}$$

2) Решение задачи можно выполнить одним действием, заменив число процентов обыкновенной дробью $\left(\frac{75}{100} = \frac{3}{4}\right)$ или десятичной дробью (0,75).

$$x = 150 : \frac{3}{4} = 200 \text{ или } x = 150 : 0{,}75 = 200.$$

Полезно проверить ответ, вычислив 75% от 200.

После решения нескольких задач этого вида выводится формула решения в общем виде.

Задача состоит в нахождении числа (x) по данной величине P его дроби $\frac{p}{100}$.

Р е ш е н и е: а) одним действием: $P : \frac{p}{100} = \frac{P \cdot 100}{p}$;

б) пропорцией $p\% \ldots P \quad x : P = 100 : p$;

$100\% \ldots x \quad x = \frac{P \cdot 100}{p}$.

Подставив в формулу решения числовые значения величин из ранее решенных задач, проверяют формулу и пользуются ею для решения задач.

Задачи № 980, 983, 984.

Дальше необходимо остановиться на 2-й и 3-й группах задач, указанных выше, в которых дается число, полученное от прибавления к искомым 100% нескольких процентов или от вычитания из 100% нескольких процентов.

Задачи эти, имея большое практическое значение, сравнительно труднее других усваиваются учащимися.

Задача 1. Чтобы наверстать опоздание, скорость поезда увеличили на 35% и тогда она достигла 54 *км* в час. Какова скорость поезда по расписанию?

Решение. Искомая величина x скорости поезда по расписанию — 100%; увеличенная скорость составляет $100\% + 35\% = 135\%$. Итак, $135\% x = 54$, откуда $x = 54 : 1{,}35 = 40$ (*км* в час). Эта задача может быть решена иначе: $x = \frac{54 \cdot 100}{135}$; $x = 40$ (*км* в час).

Задача 2. Трава теряет при высыхании 28% своего веса. Сколько было накошено травы, если из нее получилось 144 *ц* сена?

Решение. Вес накошенной травы — 100% (x *ц*.) Вес сена $100\% - 28\% = 72\%$; итак, $72\% x = 144$ (*ц*).

$x = 144$ *ц*$: 0{,}72 = 200$ *ц* $= 20$ *т*.

§ 101. Нахождение процентных отношений

Процентным отношением двух чисел называется их отношение, выраженное в процентах.

Прежде чем решать задачи на процентное отношение чисел, необходимо повторить с учащимися все, что им известно об отношении чисел. Для этого даются устные примеры и задачи, на которых учащиеся повторяют свойства и преобразования отношений.

Примеры: 1) Сократить отношения: $42 : 11{,}2$; $6{,}8 : 5{,}1$.

2) Заменить отношения дробей отношениями целых чисел:

$$0{,}25 : 0{,}2;\ 3{,}5 : 0{,}21;\ \frac{5}{18} : \frac{7}{24};\ 6{,}3 : 14.$$

3) Найти отношения с точностью

а) до 0,1:

$$5 : 7;\ 0{,}8 : 1{,}2;\ 0{,}3 : 0{,}8;$$

б) до 0,01:

$$1531 : 244;\ 5{,}1 : 21{,}4;\ 6 : 7.$$

в) Найти отношения:

$$6\ дм : 4\ см;\ 2{,}4\ км : 40\ м.$$

Чтобы перейти к вычислению процентных отношений, даются устные упражнения на небольших числах, при этом употребляются разнообразные формулировки: «Какую часть составляет одно число от другого?» «Каково отношение одного числа к другому?» «Сколько процентов составляет одно число от другого?» и т. д. Вычисляются отношения меньшего числа к большему и большего к меньшему в процентах.

Результаты устных вычислений записываются.

$$35 : 175 = \frac{35}{175} = \frac{1}{5} = 20\%;\ 12 : 200 = \frac{12}{200} = \frac{6}{100} = 6\%;$$

$$\frac{43}{86} = \frac{1}{2} = 50\%;\ \frac{250}{200} = \frac{125}{100} = 125\%;$$

$$\frac{400}{200} = 2 = 200\% \text{ и т. д.}$$

Из решения примеров выводят определение процентного отношения.

Переходя к письменному решению задач на нахождение процентного отношения чисел, предлагают примеры и задачи с более сложными числами. Письменно выполняется деление одного числа на другое, частное — отношение — представляется в виде десятичной дроби, потом в виде процентов. Это один прием решения задач на нахождение процентного отношения чисел.

Примеры: 1) найти процентное отношение 28 к 97.

28 : 97 = 0,28 ... ≈ 29% (с точн. до 1%)
280
− 194
860
− 776 Процентное отношение 28 к 97 ≈ 29%.
84

2) 153 : 44 = 3,477 ... ≈ 347,7% (с точн. до 0,1%)
210
340
320 Процентное отношение 135 к 44 = 347,7% (с точностью до1%)
12

Задачи на определение процентных отношений можно решать и способом пропорции, так как величины, входящие в условие, прямо пропорциональны.

Сколько процентов составляет 18 от 40?

$$40 \ldots 100\% \qquad x : 100 = 18 : 40$$

$$18 - x \qquad x = \frac{100 \cdot 18}{40} = 45\ (\%).$$

Решим задачу в общем виде: сколько процентов составляет число m от a? Отношение $\frac{m}{a}$ надо выразить в процентах.

$$1.\ x = \frac{m}{a} \cdot 100 = \frac{m \cdot 100}{a},$$

$$2.\ a \text{\_\_\_\_\_\_\_\_} 100\%$$
$$m \text{\_\_\_\_\_\_\_\_} x$$
$$x : 100 = m : a;\quad x = \frac{m \cdot 100}{a}.$$

Нахождение процентного отношения возможно следующим способом. Найдем: 1% от $a = \frac{a}{100}$; m — составит столько процентов, сколько раз в m содержится $\frac{a}{100}$; выполняем деление: $x = m : \frac{a}{100} = \frac{m \cdot 100}{a}$. Процентное отношение a к $в$ равно $\frac{a \cdot 100}{в} = \frac{100\,a}{в}$ (%).

Возьмем числовой пример: сколько процентов составляет 12 от 45? 1% от $45 = 0{,}45$; $12 : 0{,}45 = 26\frac{2}{3}$ %.

Задачи № 1070 — 1088.

Этот вид задач решается главным образом нахождением отношения чисел, выраженного десятичной дробью.

После решения трех видов задач на проценты переходят к решению сложных текстовых задач, содержащих простые задачи на процентные вычисления всех видов.

Рассмотрим решение ряда задач.

Например: «Мальчик, собирая деньги на радиоприемник, обратился за помощью к отцу и двум дядям. Первый дядя обещал дать 25% того, что будет собрано без него, включая накопления мальчика; второй дядя обещал добавить $33\frac{1}{3}$%, а отец 50% того, что будет собрано без каждого из них, включая и деньги мальчика. Сколько стоил радиоприемник, если у мальчика своих денег было 20,8 руб.?

Решение. Первый дядя обещал дать 25% от той суммы, которая будет собрана без него, включая и деньги мальчика, эта сумма—100%. Отсюда взнос первого дяди составляет $\frac{25}{100+25} = \frac{1}{5} = 20\%$ стоимости радиоприемника.

Второй дядя дает $33\frac{1}{3}$% всей остальной суммы (100%), т. е. $\frac{33\frac{1}{3}}{100 + 33\frac{1}{3}} = \frac{1}{4} = 25\%$ всей стоимости радиоприемника, отец дает $\frac{50}{100+50} = \frac{1}{3} = 33\frac{1}{3}\%$ всей стоимости радиоприемника. Трое дают $20\% + 25\% + 33\frac{1}{3}\% = 78\frac{1}{3}\%$ стоимости радиоприемника, деньги же мальчика составляют $100\% - 78\frac{1}{3}\% = 21\frac{2}{3}\%$ стоимости радиоприемника, отсюда стоимость радиоприемника равна $\left(20{,}8 \text{ руб.} : 21\frac{2}{3}\right) \cdot 100 = 96{,}4$ руб.

При решении задачи приходится определить процентное отношение двух чисел (3 вопроса) и по процентам найти число (последний вопрос).

Следует обратить внимание учащихся на некоторые задачи несложного содержания, но требующие вдумчивого отношения при решении. Например: время, необходимое для изготовления детали, уменьшилось на 25%. На сколько процентов увеличилась производительность труда?

Решение. Время; производительность труда

$$\downarrow \quad \begin{matrix} 100\% & \qquad & 100\% \\ 75\% & \qquad & x \end{matrix} \quad \uparrow$$

Эти величины обратно пропорциональны, поэтому $x : 100 = 100 : 75$; $x = \frac{100 \cdot 100}{75} = 133\frac{1}{3}$; $133\frac{1}{3}\% - 100\% = 33\frac{1}{3}\%$.

Производительность труда увеличилась на $33\frac{1}{3}\%$.

Задачу можно объяснить иначе. Время изготовления детали примем за 1, оно уменьшилось на $\frac{1}{4}$ и стало составлять $\frac{3}{4}$ единицы. Производительность труда обратно пропорциональна времени и составляет $\frac{4}{3}$ первоначальной, т. е. выросла на $\frac{1}{3}$, или $33\frac{1}{3}\%$.

Для избежания ошибок при решении задач на проценты необходимо выяснять в каждом отдельном случае, что принимается за единицу, за целое, за 100%.

Задача. Первое снижение цен на товары было на 20%, второе снижение на 15%. На сколько дешевле стал товар по сравнению с первоначальной стоимостью?

За единицу или 100% принимается первоначальная стоимость товара; после снижения цен на 20% она составит $100\% - 20\% = 80\%$ первоначальной. Второе снижение составляло 15% от пониженной стоимости, т. е. 15% от 80% первоначальной. Здесь за целое, за единицу принимается 80% первоначальной стоимости. От этой единицы вычисляем 15%. $\frac{80\% \cdot 15}{100} = 12\%$ первоначальной стоимости. Стоимость после второго снижения равна 80% — 12% = = 68% первоначальной, т. е. товар стоил на 32% дешевле по сравнению с его первоначальной стоимостью.

З а д а ч а. Колхоз в первый день весеннего сева засеял 20% всей площади, во второй день 40% оставшегося числа гектаров, в третий день 40% нового остатка. Сколько % всей площади осталось незасеянной?

Сначала величина всей площади принимается за единицу или 100%. К концу первого дня осталось незасеянной 100% — 20% = = 80% всей площади. Дальше за единицу (100%) принимаются 80% всей площади, из них к концу второго дня засеяли 40%, т. е. $\frac{80\% \cdot 40}{100} = 32\%$ всей площади, осталось 80% — 32% = 48% всей площади. Эти 48% всей площади принимаем за единицу (100%), из них за третий день засеяли 40%, т. е. $\frac{489 \cdot 40}{100} = 19\frac{1}{5}\%$ всей площади, осталось незасеянной $48\% - 19\frac{1}{5}\% = 28\frac{4}{5}\%$ всей площади.

З а д а ч а. На заводе работают 6250 мужчин и 3750 женщин. Сколько процентов составляет число мужчин и сколько процентов составляет число женщин?

На сколько процентов число мужчин больше, чем число женщин?

На сколько процентов число женщин меньше, чем число мужчин?

При решении поставленных вопросов необходимо прежде всего выяснить, какое число при определении процентного отношения принимается за 100%.

При решении первого вопроса за 100% принимается все число рабочих (6250 + 3750), хотя в условии задачи указания на это нет. Задача может быть решена различными способами.

Формула решения может быть следующая: $\frac{6250 \cdot 100}{6250 + 3750} = 62,5\ (\%)$ — процент числа мужчин на заводе.

Процент числа женщин можно определить решением подобной же формулы или вычитанием: 100% — 62,5% = 37,5%.

Второй вопрос ставится для сравнения числа мужчин с числом женщин, которое и принимается за 100%. Необходимо обратить внимание учащихся на то, что при определении процентного отношения словами «чем», «по сравнению с. . .», «по отношению к . . .», «от», «к» указывается, какое число следует принять за 100%. Второй вопрос можно решить или а) определив разность между числом мужчин и женщин и выразив эту разность в процентах от числа женщин, или б) выразив число мужчин в процентах от числа женщин и определив, на сколько процентов оно больше, чем 100% (женщин). Решение:

$$1)\ 6250 - 3750 = 2500;\ 2)\ \frac{2500 \cdot 100}{3750} = 66\frac{2}{3}\ (\%).$$

При решении вопроса, на сколько процентов женщин меньше, чем мужчин, число мужчин принимается за 100%, так как с этим числом сравнивается число женщин.

Узнают, насколько женщин меньше, чем мужчин: 6250 — 3750 = = 2500; выражают разность 2500 в процентах от числа мужчин:

$$\frac{2500 \cdot 100}{6250} = 40\ (\%).$$

Необходимо обратить внимание учащихся на то, что на вопросы: на сколько процентов число мужчин больше числа женщин и на сколько процентов число женщин меньше числа мужчин, — получились различные ответы, так как разность 6250—3750 сравнивалась в одном случае с числом женщин — 3750, в другом случае с числом мужчин — 6250.

Большое значение для учащихся имеют задачи, в которых данные выражены в процентах, так как с такими вопросами они встречаются на производстве, когда совершают экскурсии.

Разберем, например, задачу: «На заводе фрезерные станки составляют 32% всего числа станков, а шлифовальных на 20% меньше, чем фрезерных. На сколько процентов токарных станков больше, чем шлифовальных?»

100% — число всех станков на заводе, 32% этого числа — число фрезерных станков. Число шлифовальных станков меньше на 20% этого числа. Следовательно, число 32% всех заводских станков принимается за целое — 100%. Уменьшаем его на 20%, остается 80% числа фрезерных станков или $\frac{32\% \cdot 80}{100} = 25{,}6\%$ всего числа заводских станков — число шлифовальных станков. Число токарных станков = 100% — 32% — 25,6% = 42,4% всего числа заводских станков. Число токарных станков сравнивается с числом шлифовальных, которое надо принять за 100%, 42,4% — 25,6% = = 16,8 %; $\frac{16{,}8 \cdot 100}{25{,}6} = 65\frac{5}{8}$ (%). На $65\frac{5}{8}$ % число токарных станков больше, чем число шлифовальных.

Полезно поставить вопрос: на сколько процентов число шлифовальных станков меньше, чем число токарных, число которых и надо принять за 100%: $\frac{16{,}8 \cdot 100}{42{,}4} = 39\frac{33}{53}$ %. Учащиеся должны объяснить, почему ответы на два последних вопроса различны.

З а д а ч а. В октябре рабочий выпустил 0,18% изделий второго сорта, в ноябре — 0,15% изделий второго сорта. На сколько процентов уменьшился в ноябре выпуск изделий второго сорта?

Решение: 1) Показатель изделий второго сорта уменьшился в ноябре на 0,03% (0,18 — 0,15); 2) На сколько процентов уменьшился удельный вес изделий второго сорта (т. е. число процентов от всего количества изделий? $(0,03 : 0,18) \cdot 100 = 16\frac{2}{3}$ (%).

Задача. В марте рабочий выработал 250 000 изделий, из которых 375 изделий второго сорта. В апреле он выработал 300 000 изделий, из которых 360 изделий второго сорта. На сколько процентов снизился выпуск изделий второго сорта? («Математика в школе», № 3).

Для сравнения чисел 375 и 360 надо каждое из них выразить в процентах всей выработки («Удельный вес» изделий второго сорта). $\frac{375 \cdot 100}{250000} = 0,15$ (%). $\frac{360 \cdot 100}{300\,000} = 0,12$ (%). Процент уменьшения удельного веса изделий 2-го сорта: $\frac{0,15 - 0,12}{0,15} \cdot 100 = 20$(%).

Для самостоятельной работы предложить учащимся решить упражнения № 1089—1111.

ГЛАВА XV

ПРОПОРЦИИ. ПРЯМАЯ И ОБРАТНАЯ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТЬ ВЕЛИЧИН

§ 102. Отношения

Изучение темы следует начать с повторения рассмотренного выше материала об отношении.

Как мы уже видели (§ 89), отношением двух чисел называется частное, полученное от деления одного числа на другое. Например: отношения $72 : 60$ или $\frac{72}{60}$; результат $1,2$ также называется отношением 72 и 60.

Отношение $8 : \frac{6}{7}$, или $\frac{8}{\frac{6}{7}}$, равно $9\frac{1}{3}$; $8 : \frac{6}{7}$ и $9\frac{1}{3}$ называют отношением 8 и $\frac{6}{7}$.

Возьмем отношения дробных чисел:

$$1\frac{3}{4} : 2\frac{5}{8} = \frac{1\frac{3}{4}}{2\frac{5}{8}} = \frac{2}{3};$$

$5,2 : 0,13 = \frac{5,2}{0,13} = 40$; $1\frac{3}{5} : 2,4 = \frac{2}{3}$ и т. д.

Отношения читаются различными способами. Например: отношение $72 : 6$ можно прочитать так: отношение 72 к 6 равно 12; 72 больше 6 или 6 меньше 72 в 12 раз.

Запись отношения именованных чисел может быть двоякая: делимое и делитель могут быть оба именованными или оба отвлеченными. Например: 3 час. : 15 мин. = 180 мин. : 15 мин. = 12; или $180 : 15 = 12$. Частное в обоих случаях — число отвлеченное.

Под «отношением» подразумевается и $180 : 15$, т. е. не вычисленное отношение, и 12 — численное значение частного. Так как деление одного числа на другое всегда возможно (кроме деления на 0), то всегда можно найти отношение двух чисел. Если отношение больше единицы, то оно показывает, во сколько раз первое число больше второго; если отношение равно единице, то оно показывает, что числа равны между собой; если отношение меньше единицы $\left(\text{например: } 15 : 180 = \frac{1}{12}\right)$, то оно показывает, какую часть первое число составляет от второго.

Отношение в общем виде записывается так: $a : b = q$. Число a называется *предыдущим членом* отношения, b — *последующим членом*, число q (так же, как и $a : b$) — *отношением*. Число q есть то число, на которое надо умножить b, чтобы получить a.

Свойства членов отношения. Как мы видели, свойства членов отношения выводятся на основании того, что предыдущий член отношения есть делимое, последующий член — делитель, отношение есть частное. Обращается внимание на то, что члены отношения в этом случае — любые числа, кроме нуля.

Если отношение обозначено числами в общем виде: $a : b = q$, то свойства членов можно записать в виде следующих равенств:

1) $a = b \cdot q$, т. е. предыдущий член равен последующему, умноженному на отношение;

2) $b = a : q$, т. е. последующий член равен предыдущему, деленному на отношение;

3) $(a \cdot m) : b = qm$; $a : (b : n) = qn$, где m и n — целые числа, т. е. если предыдущий член отношения увеличить или последующий уменьшить в несколько раз, то отношение увеличится во столько же раз. В первом случае отношение увеличилось в m раз, во втором случае в n раз;

4) $(a : m) : b = q : m$ и $a : (b \cdot n) = q : n$, т. е. если предыдуший член уменьшить или последующий увеличить в несколько раз, то отношение уменьшится во столько же раз. В первом случае отношение уменьшилось в m раз, во втором случае — в n раз;

5) $(a \cdot m) : (b \cdot m) = q$ или $(a : n) : (b : n) = q$. Если предыдущий и последующий члены увеличить или уменьшить в одинаковое число раз, то отношение не изменится.

На основании свойств членов отношения учащиеся решают задачи на замену отношения дробных чисел отношением целых чисел и на сокращение отношений. В этих упражнениях надо требовать от учащихся объяснений, на чем основаны указанные преобразования отношений. Следует обратить внимание учащихся на то, что в преобразованных отношениях изменяются члены отношений, но величина отношений остается неизменной.

Замена отношения дробных чисел отношением целых чисел — преобразование, не имеющее аналогичного ни в делении целых чисел, ни в делении дробей. На это преобразование должно быть обращено особое внимание. Соблюдая последовательность в подборе упражнений, надо давать сначала примеры, в которых один член отношения целый, другой дробный, потом можно переходить к отношениям, выраженным дробными числами, причем подбор знаменателей должен идти в той последовательности, которая соблюдалась при приведении дробей к НОЗ.

Возьмем примеры (отношение дробей заменить отношением целых чисел):

1) $\frac{2}{3} : 5 = 2 : 15$; 4) $\frac{7}{12} : \frac{2}{3} = 7 : 8$; 7) $8\frac{2}{3} : 2\frac{3}{5} = 130 : 39$

2) $10 : \frac{2}{5} = 50 : 2$; 5) $\frac{5}{6} : \frac{3}{4} = 10 : 9$; и т. д.

3) $\frac{5}{8} : \frac{3}{8} = 5 : 3$; 6) $\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = 10 : 12$;

В отношении дробных чисел должны быть рассмотрены:

а) отношения дробей с равными знаменателями (заменяются отношениями числителей); например $5\frac{1}{4} : 3\frac{1}{4} = \frac{21}{4} : \frac{13}{4} = 21 : 13$;

б) отношения дробей с равными числителями. Путем достаточного количества упражнений учащиеся должны научиться заменять отношение дробей с равными числителями обратным отношением их знаменателей, например:

$\frac{3}{5} : \frac{3}{8} = \frac{3 \cdot 8}{5 \cdot 8} : \frac{3 \cdot 5}{8 \cdot 5} = (3 \cdot 8) : (3 \cdot 5) = 8 : 5$;

$\frac{5}{6} : \frac{5}{7} = \frac{5 \cdot 7}{6 \cdot 7} : \frac{5 \cdot 6}{7 \cdot 6} = (5 \cdot 7) : (5 \cdot 6) = 7 : 6$. Решение каждого примера должно объясняться учащимися.

Учащиеся решают также примеры на сокращение отношений, объясняя каждый пример. Например: $3600 : 2400 = 36 : 24 = 3 : 2 = 1\frac{1}{2}$; $7\frac{1}{5} : 1\frac{5}{7} = \frac{36}{5} : \frac{12}{7} = \frac{3}{5} : \frac{1}{7} = 21 : 5 = 4\frac{1}{5}$ и т. д.

Это преобразование аналогично преобразованию дроби или точного частного, потому дается учащимся без затруднений.

Для самостоятельной работы учащимся предложить примеры из упражнений № 1114—1122, 1124—1130.

Обратные отношения. Полезно дать учащимся понятие об обратном отношении.

Два отношения называются *обратными*, если предыдущий член одного отношения служит последующим членом другого и обратно. Например: $\frac{20}{4} = 5$ и $\frac{4}{20} = \frac{1}{5}$. Отношения $\frac{20}{4}$ и $\frac{4}{20}$ — взаимно обратные, числа 5 и $\frac{1}{5}$ взаимно обратные. Произведение обратных отношений равно единице.

Для составления обратного отношения данных чисел можно, не изменяя порядка чисел, взять отношение чисел, обратных данным. Например: имеем отношение 3 : 5; составим обратное отношение 5 : 3; но отношение чисел, обратных 3 и 5, будет также равно отношению 5 : 3. Действительно: $\frac{1}{3} : \frac{1}{5} = \frac{1 \cdot 5}{3 \cdot 5} : \frac{1 \cdot 3}{5 \cdot 3} = 5 : 3$.

Возьмем еще пример: для отношения $\frac{2}{3} : \frac{5}{8}$ обратное отношение равно $\frac{5}{8} : \frac{2}{3} = \frac{5 \cdot 3}{8 \cdot 3} : \frac{2 \cdot 8}{3 \cdot 8} = 15 : 16$; но отношение чисел, обратных данным, также равно $\frac{15}{16}$; действительно, $\frac{3}{2} : \frac{8}{5} = \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 5} : \frac{8 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{15}{10} : \frac{16}{10} = 15 : 16$.

§ 103. Пропорция

В курсе элементарной арифметики рассматривается только кратная или геометрическая пропорция, состоящая из кратных отношений. В настоящее время пропорция арифметическая, состоящая из арифметических отношений, в курс арифметики не включается.

Включение вопроса о пропорции в программу математики решается методистами по-разному: одни относят этот вопрос в курс алгебры или теоретической арифметики, излагая теорию в буквенном обозначении, другие изучают пропорцию на числах — в курсе арифметики, как и предлагается в программе.

Если понятие пропорции вводится после вопроса о пропорциональных величинах, то изучение ее связывается с решением задач на тройное правило.

Если же теория пропорций предшествует теории пропорциональных величин, то через решения задач вводятся понятия о величинах постоянных и переменных, в виде отношений устанавливается изменение переменных величин и зависимость между изменениями различных переменных величин, выводится равенство отношений, приводящее к пропорции.

Понятие о пропорции выводится при решении задач.

Рассмотрим пример.

Маятник стенных часов делает 52 качания в 1 мин. Сколько качаний сделает он в 2 мин.? в 3 мин.? в 6 мин.? в 8 мин.? в 12 мин.? в 15 мин.? и т. д.

Делается следующая запись: 1) решение задачи; 2) отношение чисел, измеряющих время; 3) отношение чисел, показывающих число качаний; 4) равенство полученных отношений.

1) 1 мин. 52 кач.	2) и 1) $2 : 1 = 2$
2) 2 мин. 104 кач.	3) и 2) $3 : 2 = 1\frac{1}{2}$
3) 3 мин. 156 кач.	

4) и 3) $6 : 3 = 2$
5) и 2) $8 : 2 = 4$
6) и 4) $12 : 6 = 2$
7) и 6) $15 : 12 = 1\frac{1}{4}$
и т. д.

2
$= 1\frac{1}{2}$
$= 2$
$4 = 4$
$312 = 2$
$78 : 624 = 1\frac{1}{4}$
и т. д.

$2 : 1 = 104 : 52$
$3 : 2 = 156 : 104$
$6 : 3 = 312 : 156$
$8 : 2 = 416 : 104$
$12 : 6 = 624 : 312$
$15 : 12 = 780 : 624$
и т. д.

Все записи делаются учащимися в процессе беседы. При изучении всех решенных задач выясняется, что в них имеются две величины: время и количество качаний маятника; значения этих величин изменяются (т. е. эти величины переменные), разница в их изменениях та, что числовые значения времени даны в условии, количество же качаний вычисляется в зависимости от числового значения времени; поэтому время называется величиной независимой, количество качаний — зависимой (от времени). Записав числа 2-й и 3-й колонки, учащиеся сравнивают кратные отношения времени и числа качаний в соответствующих строках, делают вывод, что отношения соответствующих чисел равны и записывают в третьей колонке равные отношения.

Полученные равенства читают различными способами: а) 3 больше 2-х во столько же раз, во сколько раз 156 больше 104; б) отношение 3 к 2 равно отношению 156 к 104; в) 3 относится к 2, как 156 относится к 104.

Делается вывод: два равных отношения, соединенных знаком равенства, называются пропорцией.

По такому же плану разбирается еще одна-две задачи. Для составления пропорции можно взять задачи на числовой масштаб. Например: дан масштаб 0,001; отрезок в 2 *см* на плане изображает расстояние на местности в 20 *м*; отрезок в 6 *см* на плане — 60 *м* на местности. Находим отношения: 20 *м* : 2 *см* = 1000; 60 *м* : 6 *см* = 1000; отсюда 20 *м* : 2 *см* = 60 *м* : 6 *см* или 2000 *см* : 2 *см* = 6000 *см*: 6 *см* или 2000 : 2 = 6000 : 6.

Для составления пропорций берутся отношения как между отвлеченными числами, так и между именованными; отношения могут быть целые, дробные, члены отношений также могут быть дробные.

Приведем примеры: $36:72=15:30$; $8:\frac{1}{2}=32:2$;

$3\frac{3}{4}:15=2:8$; $\frac{3}{4}:\frac{3}{8}=10:5$; $\frac{\frac{1}{3}\text{ часа}}{4\text{ часа}}=\frac{2\text{ часа}}{24\text{ часа}}$; $\frac{0{,}15\text{ кг}}{0{,}05\text{ кг}}\approx 6\text{ кг}:2\text{ кг}$. Увеличивая в данных дробях в одно и то же число раз числитель и знаменатель, получим отношение целых чисел.

В отношениях именованных чисел оба члена должны выражать значения одной и той же величины. Возможно равенство таких отношений, где члены одного отношения выражены в одних мерах, члены другого отношения в других мерах. Например: $8\text{ кг}:2\text{ кг}=1\frac{1}{2}$ часа: $\frac{3}{8}$ часа; $\frac{1}{2}\text{ м}:2\text{ м}=\frac{3}{4}$ сек. : 3 сек.

При решении примеров напоминаются названия членов отношений и сообщаются названия членов пропорций: первый и четвертый — крайние члены, второй и третий — средние члены. Затем предлагается учащимся:

а) подобрать четыре числа, из которых можно составить пропорцию;

б) подбирать числа для пропорции, причем заданы отношения или члены отношений (два или три);

в) из ряда данных отношений выбрать те, из которых можно составить пропорции;

г) проверить правильность данных пропорции, вычисляя первое и второе отношения

(перечеркнуть знак равенства, где два отношения не составляют пропорции).

После решения большого числа примеров нужно познакомить учащихся с записью пропорции в общем виде. Учащиеся повторяют запись отношения в виде букв: $a:b=q$. По предложению учителя они заменяют буквы a и b числами, вычисляют отношение q. Например: $7:8=\frac{7}{8}$. Потом подбирается вторая пара чисел, отношение которых также равно $\frac{7}{8}$ (например: $14:16$), второе отношение заменяется буквенной записью, но члены отношения заменяются другими буквами ($c:d$), отношение же обозначается через q.

Получается запись: $c:d=q$. Так как оба отношения равны q, их соединяют в виде равенства: $a:b=c:d$ или $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Пропорции читаются в такой форме, как было указано на числовых примерах. Подбираются числовые примеры.

Основное свойство пропорции. При подборе примеров учащимися в тех случаях, когда примеры выражены небольшими числами, необходимо делать сравнение произведений крайних и средних членов.

Записав несколько пропорций с несложными отношениями, учащиеся вычисляют и выписывают произведения крайних членов, средних членов, сравнивают их; записывают их в одном равенстве. Например:

$$
\begin{array}{lll}
27 : 9 = 60 : 20; & 27 \cdot 20 = 540; & 9 \cdot 60 = 540; \\
44 : 4 = 66 : \ \ 6; & 44 \cdot \ \ 6 = 264; & 4 \cdot 66 = 264; \\
28 : 4 = 35 : \ \ 5; & 28 \cdot \ \ 5 = 140; & 4 \cdot 35 = 140;
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
27 \cdot 20 &= 9 \cdot 60; \\
44 \cdot \ \ 6 &= 4 \cdot 66; \\
28 \cdot \ \ 5 &= 4 \cdot 35.
\end{aligned}
$$

Доказательство основного свойства пропорции можно дать сначала на числовых примерах. В методических руководствах можно найти различные приемы доказательства. Укажем один из них. Дана пропорция: $6 : 8 = 9 : 12$ или $\frac{6}{8} = \frac{9}{12}$.

Требуется доказать, что произведение крайних членов пропорции равно произведению средних членов.

Обе части данного равенства $\frac{6}{8} = \frac{9}{12}$ умножаем на 8×12; $\frac{6}{8} \cdot (8 \cdot 12) = \frac{9}{12} \cdot (8 \cdot 12)$ или $6 \cdot 12 = 9 \cdot 8$ (следствие из определения деления); $6 \cdot 12 = 8 \cdot 9$ (переместительное свойство).

Доказательство главного свойства пропорции можно дать также на буквенной пропорции. Имеем пропорцию: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Требуется доказать: $ad = bc$.

Обе части данной пропорции умножаем на произведение bd (закон монотонности умножения):

$$\frac{a}{b} \cdot bd = \frac{c}{d} \cdot bd \text{ или}$$

$ad = cb$ (следствие из определения деления)
$ad = bc$ (переместительное свойство).

Основное свойство пропорции применяется при проверке пропорции и при определении неизвестного члена.

Четыре числа, составляющие пропорцию, называются *пропорциональными*. Если даны 4 пропорциональных числа, например 12, 4, 15, 5, то из них можно составить пропорцию, взяв их или в том порядке, в каком они даны ($12 : 4 = 15 : 5$), или в другом порядке. Числа эти должны иметь свойство: произведение двух из них должно быть равно произведению двух других ($12 \cdot 5 = 4 \cdot 15$). Возможность составления пропорции из данных пропорциональных чисел легко доказать в общем виде.

Дано: a, b, c, d и $ad = bc$.

Доказать: из данных чисел можно составить пропорцию: $a : b = c : d$.

Обе части данного в условии равенства $ad = bc$ разделим на bd. Получим: $\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd}$, после сокращения первой части на d, второй на b, получим: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Возьмем пример: 12, 3, 32, 8, $12 \cdot 8 = 3 \cdot 32$; следовательно, из данных чисел можно составить пропорцию, в которой 12 и 8—крайние, 3, 32 — средние члены (или наоборот). Получаем: $12 : 3 = 32 : 8$ или $32 : 12 = 8 : 3$ и др.

Решить примеры № 44.

Проверка пропорции

Решая задачи на проверку пропорций, учащиеся применяют два способа: а) вычисляют каждое отношение и сравнивают их или б) вычисляют и сравнивают произведение крайних членов и произведение средних членов. Например:

$12 : \frac{2}{3} = 54 : 3$; $12 : \frac{2}{3} = 18$; $54 : 3 = 18$; $12 \cdot 3 = 54 \cdot \frac{2}{3}$ — пропорция верна.

$\frac{4}{5} : 8 = 6 : 60$; $\frac{4}{5} : 8 = \frac{1}{10}$; $6 : 60 = \frac{1}{10}$; $\frac{4}{5} \cdot 60 = 8 \cdot 6$ — пропорция верна.

$$35 : \frac{7}{8} = \frac{8}{15} : \frac{4}{75}; \quad 35 : \frac{7}{8} = 40; \quad \frac{8}{15} : \frac{4}{75} = 10.$$

$35 \cdot \frac{4}{75} \neq \frac{7}{8} \cdot \frac{8}{15}$ — пропорция не верна.

Запись $35 : \frac{7}{8} = \frac{8}{15} : \frac{4}{75}$ не является пропорцией.

Решить примеры № 1132.

Решение пропорции

При составлении примеров на пропорции учащиеся находили к трем данным числам четвертое пропорциональное путем подбора. Необходимо показать, как четвертый член пропорции вычисляется по трем данным членам с применением основного свойства пропорции.

Задачи на нахождение неизвестного члена пропорции по степени трудности можно разделить на две группы:

1) в пропорции неизвестным членом служит член, обозначенный только буквой x;

2) искомое число x входит, как компонент, в сумму, разность, произведение или частное в одном из членов пропорции.

Возьмем примеры первой группы в такой последовательности: $x : b = c : d$; $a : b = c : x$; $a : x = c : d$; $a : b = x : d$; $x : 12 = 150 : 180$; $60 : 90 = 150 : x$; $450 : x = 900 : 20$; $48 : 36 = x : 240$.

Укажем несложные примеры второй группы:

$$55 : 110 = 5x : 40; \; 48 : 14 = 72 : (7 : x).$$

Примерное решение задач первой группы.

Попытка найти x из пропорции $x : 12 = 150 : 180$ путем догадки или подбора отнимет много времени у учащихся. Учитель предлагает записать равенство произведений крайних и средних членов: $x \cdot 180 = 12 \cdot 150$, учащиеся объясняют нахождение x, как определение неизвестного сомножителя по произведению $12 \cdot 150$ и сомножителю 180.

Учитель дает образец записи: $x = \frac{12 \cdot 150}{180}$; сделав дальше сокращение дроби, учащиеся определяют $x = 10$.

Полученный результат проверяется.

Учащиеся решают еще 2—3 задачи на нахождение неизвестного крайнего члена. В первой записи величины $x = \frac{12 \cdot 150}{180}$ сокращений не делают, чтобы анализ выражения дал возможность вывести правило. После этого правило нахождения неизвестного крайнего члена пропорции формулируется учащимися.

По такому же плану изучается правило нахождения неизвестного среднего члена пропорции. Подбор примеров дальше усложняется: вводятся дробные члены в виде дробей обыкновенных и десятичных, сначала по одному члену, потом по 2 и по 3.

Приведем примеры: $x : 15 = 0{,}5 : 2$; $\frac{3}{8} : 6 = \frac{15}{16} : x$;

$$\frac{1}{2} : \frac{2}{3} = 0{,}75 : x.$$

Решение таких примеров можно выполнять разными способами. Можно сначала упростить пропорцию: для этого члены одного и того же отношения надо увеличить или уменьшить в одно и то же число раз. В том случае, когда отношение между двумя числами выражено дробями, желательно отношение дробных чисел заменить отношением целых чисел, не изменяя величины отношения.

Возьмем пример: $\frac{1}{2} : \frac{2}{3} = 0{,}75 : x$.

1-е отношение преобразуем: $\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} : \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 2} = 3 : 4$; в дальнейшем решении пропорции $3 : 4 = 0{,}75 : x$ десятичную дробь помещаем в числитель дроби, образовавшейся в правой части равенства в вычислении x: $x = \frac{4 \cdot 0{,}75}{3}$, — освобождаем это выражение от десятичной дроби: $x = \frac{4 \cdot 75}{300} = 1$.

Пропорцию, содержащую дробные члены, можно решать и без предварительного преобразования, например: $2{,}52 : 1{,}14 = x : 1{,}9$,

$x = \frac{2,52 \cdot 1,9}{1,14}$. Числитель и знаменатель дроби увеличиваем в 1000 раз, чтобы выразить правую часть равенства целыми числами: $x = \frac{252 \cdot 19}{1140} = \frac{252}{60} = \frac{21}{5} = 4\frac{1}{5}$.

Вторая группа примеров на пропорции труднее для учащихся, но зато, решая их, учащиеся вспоминают и применяют к решению зависимости между компонентами и результатами действий.

$$1\frac{1}{9} : 3\frac{1}{3} = 2\frac{2}{3} : \frac{4}{7}x; \quad \frac{4}{7}x = \frac{3\frac{1}{3} \cdot 2\frac{2}{3}}{1\frac{1}{9}} = \frac{10 \cdot 8 \cdot 9}{3 \cdot 3 \cdot 10};$$

$$x = \frac{10 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 7}{3 \cdot 3 \cdot 10 \cdot 4}; \quad x = 14.$$

Здесь по величине $\frac{4}{7}x = \frac{10 \cdot 8 \cdot 9}{3 \cdot 3 \cdot 10}$ находим целое, для чего полученное выражение делим на $\frac{4}{7}$.

Разберем решение примера $48 : 14 = 72 : (7 : x)$.

Приведя правило нахождения неизвестного крайнего члена, учащиеся пишут формулу для вычисления $7 : x$: $\frac{7}{x} = \frac{14 \cdot 72}{48}$; в получившейся новой пропорции неизвестный средний член $x = \frac{7 \cdot 48}{14 \cdot 72}$. После сокращения дроби получаем $x = \frac{1}{3}$. Это нахождение x можно объяснить так же, как определение делителя x по делимому 7 и частному $\frac{14 \cdot 72}{48}$.

Сокращение пропорций. Сокращение пропорций основано на преобразовании кратных отношений. Но некоторые случаи сокращения с трудом усваиваются учащимися и на практике почти не применяются, это — сокращение обоих предыдущих членов или обоих последующих.

Случаи сокращения можно расположить примерно в такой последовательности:

а) Сокращение членов одного отношения — первого или второго. Например, пропорцию $360 : 144 = 3\frac{3}{4} : x$ можно заменить следующей: $5 : 2 = \frac{15}{4} : x$; $x = 1\frac{1}{2}$.

б) Сокращение членов первого отношения на одно число, членов второго отношения на другое. Например: $\frac{4}{5}x : 16 = 45 : 80$; $\frac{1}{5}x : 4 = 9 : 16$; $x = 11\frac{1}{4}$.

в) Сокращение обоих предыдущих членов или обоих последующих. Например: $48 : 32 = 64 : x$; отсюда: $3 : 32 = 4 : x$; $x = \frac{128}{3} = 42\frac{2}{3}$; другая пропорция; $15 : 8x = 60 : 72$; отсюда $15 : x = 60 : 9$; $1 : x = 4 : 9$; $x = \frac{9}{4}$.

г) Сокращение всех членов пропорции на одно и то же число. Например:

$96 : 40 = 5\frac{1}{3}\,x : 24$, отсюда после сокращения всех членов на 8 получаем: $12 : 5 = \frac{2}{3}x : 3$; освобождаем второе отношение от дроби, умножив оба члена на 3, получаем: $12 : 5 = 2x : 9$; сокращаем оба предыдущих члена на 2: $6 : 5 = x : 9$; откуда

$$x = \frac{6 \cdot 9}{5} = 10\frac{4}{5}.$$

Во всех приведенных примерах проверка пропорции тем или другим способом показывает, что преобразования сделаны правильно. Две формулировки а) и в) можно заменить одной формулировкой, включающей оба случая сокращения, а именно: сокращают крайний член с каждым из средних и средний член с каждым из крайних.

Например:

1) $75 : 60 = 40 : x$; сокращаем 75 и 60 на 15, получаем:
$5 : 4 = 40 : x$; сокращаем 5 и 40 на 5; получаем:
$1 : 4 = 8 : x$, откуда $x = 32$.

2) $90 : 144 = x : 32$; сокращаем 144 и 90 на 18; $5 : 8 = x : 32$; сокращаем 8 и 32 на 8, получаем $5 : 1 = x : 4$, откуда $x = 20$.

Во всех случаях сокращения членов пропорции учащиеся объясняют, что пропорция составлена правильно. Действительно, в случаях а) и б) сокращение членов отношения не изменяет величины отношения, и два отношения остаются равными между собой.

В случае в) сокращение обоих предыдущих членов уменьшает в одинаковое число раз оба отношения, сокращение обоих последующих увеличивает оба отношения в одинаковое число раз. Оба отношения остаются равными между собой.

В случае г) сокращение всех членов отношения на одно и то же число не изменяет величины отношений, остаются равными между собой. Правильность пропорции, полученной после того или другого сокращения, можно объяснить также изменением (уменьшением) произведений крайних и средних членов в одинаковое число раз, вследствие чего оба произведения остаются равными между собой.

Для закрепления понятия о сокращении пропорций дать учащимся примеры № 1133 (7, 8, 5), 1134 (1—4).

Замена дробных членов пропорции целыми числами

Освобождение пропорции от дробных членов основано также на преобразовании отношений. Преобразование дробных членов в целые числа можно рассматривать в такой же последовательности, как сокращение членов пропорции:

а) увеличение в одно и то же число раз членов одного отношения — первого или второго. Например:

1) $\frac{15}{16} : \frac{5}{8} = 6 : \frac{1}{2} x$; члены первого отношения умножаем на их общий знаменатель 16, получаем $15 : 10 = 6 : \frac{1}{2} x$, откуда $\frac{1}{2} x = \frac{6 \cdot 10}{15} = 4$; $x = 8$; 2) $2x : 18 = \frac{8}{15} : \frac{3}{10}$; члены второго отношения умножаем на их НОЗ 30, получаем $2x : 18 = 16 : 9$; сокращаем последующие члены на 9, имеем $2x : 2 = 16 : 1$; члены 1-го отношения сокращаем на 2; $x : 1 = 16 : 1$; $x = 16$;

б) члены первого отношения умножаем на одно число, члены второго отношения — на другое число, например: $\frac{2}{3} : 1\frac{7}{9} = \frac{3}{10} : 2x$; члены 1-го отношения умножаем на 9, члены второго на 10; $6 : 16 = 3 : 20x$; после сокращения находим: $x = \frac{2}{5}$;

в) умножаем на одно и то же число оба предыдущих члена или оба последующих; например:

1) $x : 1{,}4 = 3 : 2{,}1$; оба последующих члена умножим на 10; $x : 14 = 3 : 21$, откуда $x = 2$;

2) $\frac{13}{30} : 26 = \frac{2}{5} : 6x$; оба предыдущих члена умножаем на их НОЗ (на 30); $13 : 26 = 12 : 6x$; после сокращения находим $x = 4$;

г) умножаем все члены пропорции на одно и то же число: $5{,}1 : x = 2{,}04 : 0{,}6$; умножаем на 100 все члены пропорции, получаем $510 : 100x = 204 : 60$; откуда после сокращения определяем: $x = 1{,}5$.

Формулировки а) и в) можно заменить одной — включающей оба случая, именно: в пропорции можно умножить на одно и то же число крайний член с каждым из средних и средний член с каждым из крайних.

Правильность преобразования пропорции подтверждается проверкой ее решения.

Все преобразования объясняются свойствами отношений, которые в случаях а), б), г) не изменяются, в случае в) изменяются в одинаковое число раз и остаются равными.

Правильность пропорций, полученных после преобразований дробных членов в целые числа, можно объяснить также увеличением произведений крайних и средних членов в одинаковое число раз, вследствие чего оба произведения остаются равными между собой.

Для закрепления и самостоятельной работы дать учащимся решить № 1134 (7—12).

Перестановка членов пропорции

Перестановка членов пропорции мало применяется при решении задач, но ознакомление учащихся с переместительным свойством членов пропорции имеет образовательное значение. Можно объяснить все случаи перемещения членов на пропорции, выраженной буквами.

Имеем пропорцию: 1) $a : b = c : d$, главное свойство ее членов выражается равенством: $ad = bc$.

Таким же равенством выражается главное свойство пропорций, полученных следующими перестановками членов пропорции $a : b = c : d$;

2) Меняем местами средние члены: $a : c = b : d$; на основании главного свойства пропорции имеем равенство: $ad = cb$ или $ad = bc$ (переместительное свойство произведения);

3) Меняем местами крайние члены: $d : b = c : a$; имеем равенство $da = bc$ или $ad = bc$ (переместительное свойство произведения);

4) Меняем местами и средние и крайние члены: $d : c = b : a$. Главное свойство пропорции выражается равенством $da = cb$ или $ad = bc$ (переместительное свойство произведения).

Далее в каждой из четырех пропорций меняем местами отношения, получаем:

5) $c : d = a : b$; 7) $c : a = d : b$;
6) $b : d = a : c$; 8) $b : a = d : c$.

Главное свойство каждой из этих пропорций (5, 6, 7, 8) выражается равенством произведений ad и bc.

$cb = da$ (5); $cb = ad$ (7);
$bc = da$ (6); $bc = ad$ (8).

Пропорции 5, 6, 7, 8 можно получить другим способом.

5) Меняем местами отношения в пропорции $a : b = c : d$, получаем $c : d = a : b$;

6) В полученной пропорции меняем местами крайние члены:

$$b : d = a : c;$$

7) Меняем местами средние члены: $c : a = d : b$;

8) Меняем местами и крайние и средние члены: $b : a = d : c$.

Сделанные выводы проверяются на примерах числовых пропорций.

Для закрепления дать учащимся решить упражнения № 1135—1137.

§ 104. Прямо пропорциональные величины

1. Учащиеся при решении задач неоднократно встречались с переменными взаимозависимыми величинами. Но в этой теме впервые систематизируются и обобщаются накопленные ими знания. В теме «Пропорции и пропорциональные величины» впервые в систематическом плане изучаются простейшие виды функциональной зависимости. Пропорциональная зависимость между переменными величинами есть простейший вид функциональной зависимости, учащиеся ознакомляются с идеей, которая является одной из основных в курсе математики. С примерами функциональной зависимости учащиеся встречались в вопросах об изменении результатов действий в зависимости от изменения компонентов и отчасти при построении диаграмм. Особое внимание к функциям — прямой и обратной пропорциональности величин объясняется их важным значением для арифметических расчетов в любой производственной деятельности человека.

При ознакомлении учащихся с пропорциональными величинами рассматривается ряд величин, находящихся в такой зависимости между собой, что каждому значению одной величины соответствует определенное значение другой величины. Здесь наряду с пропорциональностью встречаются и другие виды зависимостей.

Составляются таблицы:

1. Условия подписки на газету «Правда».

1 мес.	0,6 руб.	Каждому количеству месяцев соответствует определенная плата в рублях.
2 мес.	1,2 руб.	
3 мес.	1,8 руб.	
4 мес.	2,4 руб.	
6 мес.	3,6 руб.	
12 мес.	7,2 руб.	

2. Оплата телеграмм: 3 коп. за каждое слово и подепешная плата 10 коп. за телеграмму.

Число слов.	Оплата.	
10 . . .	40 коп.	С увеличением числа слов увеличивается оплата телеграммы. Каждому числу слов соответствует определенная оплата.
15 . . .	55 коп.	
20 . . .	70 коп.	
30 . . .	1 рубль	
40 . . .	1 рубль 30 коп.	
50 . . .	1 рубль 60 коп.	

В каждой таблице даны значения двух величин. В первом примере отношение двух значений одной величины равно отношению соответственных значений другой величины. Например, если срок подписки увеличился в $1\frac{1}{2}$ раза (3 мес. : 2 мес.), соответствующая оплата газеты увеличилась также в $1\frac{1}{2}$ раза (1,8 руб. : 1,2 руб.).

Во втором примере при увеличении числа слов телеграммы в $1\frac{1}{2}$ раза (30 : 20) оплата телеграммы увеличивается, но не в $1\frac{1}{2}$ раза.

Из рассмотрения первой таблицы выясняется, что существует такая зависимость между двумя величинами, при которой с увеличением (уменьшением) значения одной величины в несколько раз значение другой величины увеличивается (уменьшается) во столько же раз. Такая зависимость между двумя величинами называется *прямой пропорциональностью.* На примерах, взятых из таблицы, учащиеся делают вывод, что отношение двух любых числовых значений одной величины равно отношению соответствующих числовых значений другой величины, например: 12 мес. больше 3 мес. во столько раз, во сколько раз 72 руб. больше 18 руб. Из числовых значений двух величин составляется пропорция: 12 : 3 = 72 : 18. Такие величины, как срок подписки и оплата ее, являются прямо пропорциональными величинами.

Рассмотрим таблицу числовых значений двух прямо пропорциональных величин: веса, выраженного в пудах, и веса, выраженного в килограммах.

Пуды	Килограммы
0,5 пуда	8,19 *кг*
1 пуд	16,38 *кг*
2 пуда	32,76 *кг*
3 — » —	49,14 *кг*
4 — » —	65,52 *кг*

Возьмем отношения любых соответствующих значений этих величин.

$$8{,}19 : 0{,}5 = 49{,}14 : 3 = 65{,}52 : 4 = \ldots = 16{,}38.$$

Итак, отношение соответствующих числовых значений этих величин есть число постоянное. Это число есть коэффициент пропорциональности двух указанных величин.

Коэффициент пропорциональности показывает числовое значение одной величины, соответствующее единице другой величины, ей пропорциональной. Поэтому числовое значение коэффициента пропорциональности проще всего находить из отношения значения второй величины к единице первой величины.

$$16{,}38 : 1 = 16{,}38.$$

Если значения одной из величин обозначим через a_1, a_2, a_3. . . , соответствующие значения другой величины через b_1, b_2, b_3 . . . , то при прямой пропорциональности этих величин должны существовать пропорции:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}, \quad \frac{a_1}{a_3} = \frac{b_1}{b_3} \text{ и т. д.}$$

При ознакомлении с пропорциональностью величин надо рассмотреть и такие примеры, какой дан в таблице 2. Учащиеся часто смешивают понятие величины, пропорциональной другой, и величины, возрастающей или убывающей в зависимости от изменения другой. Эта ошибка устраняется, если четко указать на характерное свойство пропорциональности: изменение одной величины в то же число раз, в какое изменяется другая величина. Пример пропорционального и непропорционального изменения величин можно дать на таблице изменений стороны, периметра и площади квадрата.

Сторона	Периметр	Площадь
1	4	1
2	8	4
3	12	9
4	16	16
5	20	25
6	24	36
7	28	49
8	32	64

Здесь изменение величины периметра прямо пропорционально изменению стороны, изменение величины площади не пропорционально ни изменению стороны, ни изменению периметра.

Из рассмотрения таблиц, например таблицы сторон и периметров квадратов, учащиеся сделают следующий вывод:

Если данные величины прямо пропорциональны, то отношение числового значения одной и соответствующего значения другой есть число постоянное.

Действительно: $4 : 1 = 8 : 2 = 12 : 3 = \ldots = 32 : 8 = 4$. Это постоянное число 4 называется коэффициентом пропорциональности величин. Коэффициентом пропорциональности называют постоянный множитель, на который надо умножить числовое значение одной величины, чтобы получить числовое значение другой величины. Примером коэффициента пропорциональности может служить числовой масштаб, показывающий постоянное отношение длин линий на чертеже (карте) к длинам расстояний на поверхности земли. В таблице сроков и оплаты подписки на газету «Правда» коэффициент пропорциональности равен 0,6.

Если из двух данных величин значение одной величины изменяется произвольно, то соответствующие значения другой величины получаются в зависимости от того, какие значения взяты для первой величины.

Та и другая величина называются переменными величинами. Та переменная величина, которая принимает произвольное значение (например, срок подписки на газету «Правда», длина стороны квадрата и т. п.), называется независимой переменной (или аргументом). Та переменная величина, значения которой изменяются в зависимости от изменения другой величины (аргумента), называется зависимой переменной или функцией первой переменной величины. Термины «аргумент», «функция» в V—VI классах не сообщаются.

Примеры. Путь, пройденный движущимся телом, есть функция его скорости (при постоянном времени), а при постоянной скорости — функция времени. Это значит, что при одном и том же промежутке времени путь тела зависит от скорости, а при одной и той же скорости зависит от времени.

Связь между прямо пропорциональными величинами можно выразить равенством.

Из таблицы сроков и оплаты подписки находим величину оплаты в зависимости от величины срока подписки:

Предположим, что 1 мес. подписки соответствует k руб. оплаты. Сроку подписки x мес. — y руб. оплаты.

Но с увеличением (уменьшением) в несколько раз одной величины другая величина увеличивается (уменьшается) во столько же раз, или отношение двух числовых значений одной величины равно отношению соответствующих числовых значений другой величины. Поэтому:

$x : 1 = y : k$, откуда $y = kx$.

В этой формуле y и x соответств. значения двух перемен. величин

мес.	руб.
1	k
x	y

k — постоянное число, равное отношению соответствующих значений двух прямо пропорциональных величин. Это число — коэффициент пропорциональности. Зная коэффициент пропорциональности, можно по данному значению x вычислить значение y.

Зависимость между прямо пропорциональными величинами часто выражают числовой формулой. Например, в таблице температур по шкалам Реомюра и Цельсия 1°Р соответствует $\frac{5^\circ}{4}$ Ц, здесь $k = \frac{5}{4}$, поэтому $y = \frac{5}{4}x$. Отсюда любому значению x найдем соответствующее значение y. При $x = 12$, $y = \frac{5}{4} \cdot 12 = 15$ и т. д.

Для самостоятельной работы учащимся предложить упражнения № 1138, 1139, 1142.

§ 105. Обратно пропорциональные величины

Обратно пропорциональная зависимость между переменными величинами труднее усваивается учащимися, чем прямо пропорциональная зависимость. Надо привести много примеров обратно пропорциональных величин, сопоставляя их с примерами величин прямо пропорциональных. Должны быть введены термины: «Обратно пропорциональные величины», «Обратно пропорциональная зависимость».

Рассматривается задача: «Артель рабочих в 32 человека может выполнить работу в 15 дней. Во сколько дней ту же работу могут выполнить 96 чел.? 16 чел.? 160 чел.? 480 чел.?»

Задача решается устно. Делаются записи:

32 чел. в 15 дней $32 : 16 = 2$
16 » 30 »

. . . . . .

96 » 5 »	$96 : 32 = 3$	$15 : 5 = 3$	$96 : 32 = 15 : 5$
160 » 3 »	$160 : 32 = 5$	$15 : 3 = 5$	$160 : 32 = 15 : 3$
480 » 1 »	$480 : 32 = 15$	$15 : 1 = 15$	$480 : 32 = 15 : 1$

Разбор таблицы приводит к выводам: в задаче имеются две величины — число рабочих и время, затраченное на выполнение определенной работы; эти переменные величины зависят одна от другой. Для выполнения определенной работы меньшее число рабочих проработало бы большее число дней, большее число рабочих — меньшее число дней; во сколько раз уменьшается число рабочих, во столько раз увеличивается число дней работы и наоборот; эти величины, следовательно, пропорциональны, но такая зависимость между величинами называется *обратной пропорциональностью*, величины эти — обратно пропорциональны. Учащиеся формулируют определение обратной пропорциональности двух величин. Если при увеличении (уменьшении) одной из двух величин в несколько раз другая величина уменьшается (увеличивается) во столько же раз, то такие величины называются обратно пропорциональными.

Учащиеся приводят примеры того и другого случая пропорциональной зависимости величин.

При разборе таблицы, составив отношения числовых значений той и другой величины, учащиеся видят, что для составления пропорции надо взять отношение двух числовых значений одной величины и обратное отношение двух числовых значений другой величины, например: отношение $2 : 4$ нельзя приравнять отношению $240 : 120$, вместо которого надо взять обратное отношение $120 : 240$. После выяснения, как можно заменить второе отношение $120 : 240$, переходят к записи: $2 : 4 = \frac{1}{240} : \frac{1}{120}$. Составление пропорций повторяют и на других числах, например пропорцию $96 : 160 = 3 : 5$ можно составить иначе: $96 : 160 = \frac{1}{5} : \frac{1}{3}$, т. е. отношение двух значений одной величины равно отношению двух соответствующих обратных значений другой величины. Но пропорция, в которой второе отношение получается перестановкой членов, легче для учащихся.

Рассматривая пропорции, полученные в таблице, учащиеся устанавливают, что если две величины обратно пропорциональны, то произведение каждых двух соответствующих их значений есть число постоянное. Применяя этот признак обратной пропорциональности величин, приведенную задачу можно решать следующим образом. Из условия видно, что на выполнение работы требуется $15 \cdot 32 = 480$ человеко-дней. Это число остается неизменным для различных количеств рабочих, поэтому при числе рабочих, равном, например, 160, число дней работы каждого будет равно $480 : 160 = 3$. Зависимость между обратно пропорциональными величинами можно также выразить формулой. Пусть, например, решается задача:

«Чтобы выполнить заказ в 2 недели, надо работать на 60 станках. На скольких станках надо работать, чтобы выполнить заказ в неделю? в 3 недели? в 5 недель? в $2\frac{1}{2}$ недели?» Задача решается устно.

Составляется таблица.

2 нед.	60 ст.	$1 : 2 = 60 : 120$
1 — » —	120 »	$3 : 2 = 60 : 40$
3 — » —	40 »	$5 : 2 = 60 : 24$
5 — » —	24 »	$2\frac{1}{2} : 2 = 60 : 48$
$2\frac{1}{2}$ — » —	48 »	

Обозначим некоторое число недель через x, соответствующее число станков через y, число станков для 1-й недели через k. По определению обратно пропорциональных величин имеем: $y : k = 1 : x$, откуда $y = \frac{k}{x}$. Итак, если две величины обратно пропорциональны, то численное значение одной из них равно некоторому постоянному числу k, деленному на соответствующее значение другой величины. Но из формулы $y = \frac{k}{x}$ $k = xy$. Это равенство показывает, что постоянное число, выражающее произведение двух соответствующих значений x и y, равно тому значению функции y, которое она имеет при аргументе $x = 1$.

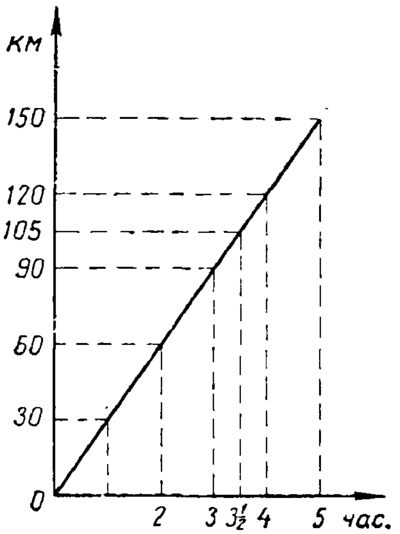
Число недель в нашем примере принимает произвольные значения. Число станков, необходимых для выполнения заказа, зависит от числа недель. Постоянное число $k = 2 \cdot 60 = 1 \cdot 120 = 3 \cdot 40$ и т. д. В данном примере k обозначает число станко-недель, необходимых для выполнения заказа.

Для закрепления и самостоятельной работы предложить учащимся решить упражнения № 1143, 1144, 1145, 1146, 1148.

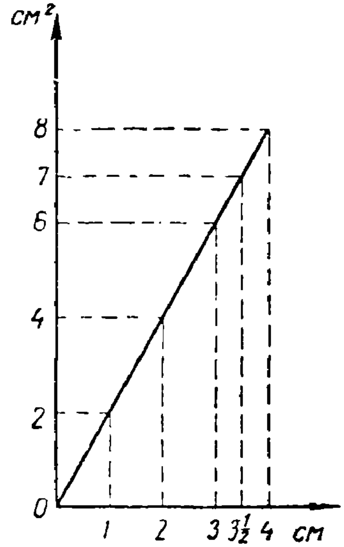
§ 106. Графики прямо пропорциональной и обратно пропорциональной зависимостей

Зависимость между прямо и обратно пропорциональными величинами можно изобразить наглядно на чертеже.

Выразим прямо пропорциональную зависимость в виде графика. Например: товарный поезд идет со скоростью 30 *км* в час. На горизонтальной прямой (оси), проведенной из точки O (черт. 32), отложим отрезки, соответствующие числовым значениям времени, а на вертикальной прямой (оси) — отрезки, соответствующие числовым значениям пройденных расстояний. По прошествии часа поезд будет находиться на расстоянии 30 *км* от O, через 2 часа — в 60 *км*, через 3 часа — в 90 *км* и т. д. Расстояние в 30 *км* изобразим отрезком, равным $1\frac{1}{2}$ *см*, отложенным вверх от точки O. Отложим также отрезки, соответствующие промежуткам времени (1 час = = 1 *см*), на горизонтальной оси. Восставим в намеченных точках



Черт. 32.



Черт. 33.

перпендикуляры к осям. При пересечении перпендикуляров получится ряд точек, соединение которых дает график прямой пропорциональной зависимости между расстоянием (функция) и временем (аргумент). Этот график — прямая линия.

Пользуясь графиком, любому значению времени (аргумента) можно найти соответствующее значение расстояния (функции).

Коэффициент пропорциональности $\frac{60}{2} = \frac{90}{3} = 30$ есть постоянная скорость движения поезда.

Например: через $3\frac{1}{2}$ часа поезд проходит расстояние 105 *км*.

Вычертим график изменения площади прямоугольника в зависимости от изменения ширины при неизменной длине 2 *см* (черт. 33).

Обозначим площадь через S (*кв. см*), ширину через b *см*. Формула $S = 2\ b$. При изменении $b = 1, 2, 3, 4$ (*см*) площадь получает значения 2, 4, 6, 8 . . . (*кв. см*). S будет изменяться по закону прямой пропорциональности.

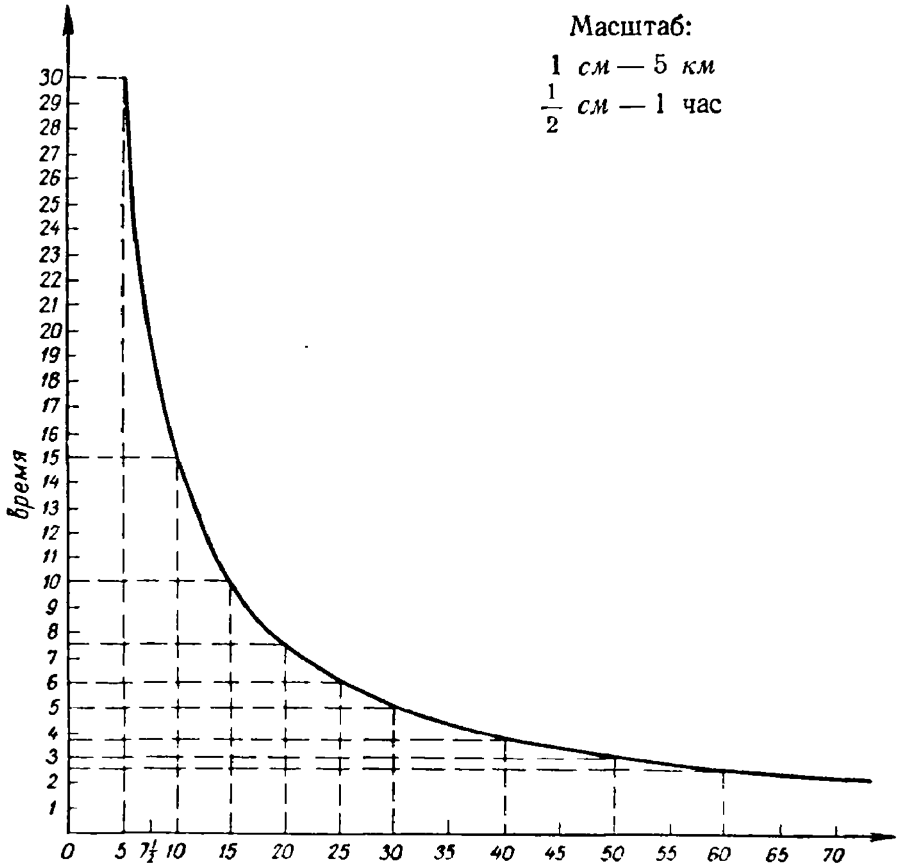
На горизонтальной оси отложим от точки O отрезки, соответствующие численным значениям b (ширина — аргумент), на вертикальной оси — отрезки, соответствующие численным значениям S (площадь — функция). График прямой пропорциональной зависимости между S и b (величиной площади и ширины при одной и той же длине) — прямая линия. Любому значению b найдем, пользуясь графиком, значение S.

Например, при ширине $3\frac{1}{2}$ *см* площадь равна 7 *кв. см*. Коэффициент пропорциональности $\frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} \ldots = 2$ есть значение постоянной длины прямоугольника.

Чтобы установить вид графика обратной пропорциональности, предположим, например, что при средней скорости 30 *км* в час поезд проходит расстояние между городами в 5 часов. Очевидно, что при скорости 15 *км* в час он пройдет то же расстояние в 10 часов, а при скорости 50 *км* в час то же расстояние будет пройдено в 3 часа и т. д. Изобразим эту зависимость на графике. Будем давать часовой скорости значения 5, 10, 15, 20. . . *км*; отложим на горизонтальной оси от точки O отрезки, соответствующие численным значениям скорости. На вертикальной оси отложим отрезки, соответствующие числовым значениям времени: 1, 2, 3. . . *час* (черт. 34).

Составим таблицу:

Скорость (в час)	5 *км*	10 *км*	15 *км*	20 *км*	25 *км*	30 *км*
Время движения	30 час.	15 час.	10 час.	$7\frac{1}{2}$ час.	6 час.	5 час.



Черт. 34.

В отмеченных точках восставим перпендикуляры к осям, точки пересечения перпендикуляров соединим. Получившаяся кривая есть график обратной пропорциональности.

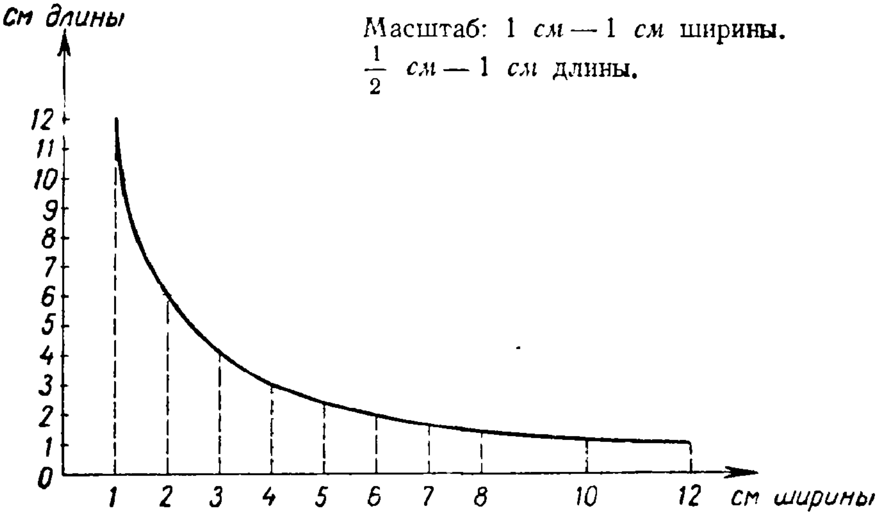
Другой пример. Воспользуемся формулой площади прямоугольника $S = ab$. Предположим, что величина площади задана, например $S = 12$ *кв. см*. Значит, $ab = 12$, отсюда $a = \frac{12}{b}$ (a — длина, b — ширина прямоугольника). Длина a изменяется в зависимости от ширины b по закону обратной пропорциональности (если величина площади остается постоянной). Будем давать ширине b значения 1, 2, 3, 4. . . *см* и на горизонтальной оси отложим от точки O отрезки, соответствующие числовым значениям b; на вертикальной оси отложим отрезки, соответствующие числовым значениям a (длина): 12, 6, 4,3 . . . *см*. Проведя через эти деления перпендикуляры к осям, получим в их пересечениях ряд точек, соединив которые получим кривую линию — график обратно пропорциональной зависимости (черт. 35).

Составим таблицу:

Ширина	1	2	3	4	5	6	8	10	12
Длина	12	6	4	3	2,4	2	1,5	1,2	1

Масштаб: 1 *см* — 1 *см* ширины.

$\frac{1}{2}$ *см* — 1 *см* длины.



Черт. 35.

Здесь по данной ширине b можно определить длину прямоугольника площадью 12 *кв. см* и обратно: можно по графику найти ширину, когда задана длина прямоугольника, площадь которого 12 *кв. см*. Для определения длины по заданной ширине, например $b = 6$ *см*, надо провести перпендикуляр к горизонтальной оси в точке, где оканчивается отрезок, равный 6 *см*, до пересечения с графиком и посмотреть, против какого деления вертикальной оси приходится точка пересечения. Следовательно, при $b = 6$, $a = 2$.

§ 107. VI группа задач. Задачи с пропорциональными величинами (простое и сложное тройное правило)

Решение задач с прямо и обратно пропорциональными величинами в некоторой мере уже известно учащимся. Эти задачи решались по соображению вначале в III—IV классах, а затем в V классе при изучении умножения и деления целых и дробных чисел. Совершенно новыми для учащихся являются способы записи решения. Рассмотрим решение задач с пропорциональными величинами в следующей последовательности. Вначале рассмотрим решения задач с двумя пропорциональными величинами, а затем с тремя и более и, наконец, задачи на пропорциональное деление.

Задачи с пропорциональными величинами решаются способом приведения к единице, способом обратного приведения к единице, способом кратных частей, способом пропорционального изменения, способом пропорций, способом введения условной единицы. Способ приведения к единице имеет то преимущество перед другими способами, что он заставляет глубже вдумываться в характер зависимости между величинами и требует рассуждения.

Обычно в школе учащихся знакомят с двумя приемами — решение «способом приведения к единице» и «способом пропорции», но мы изложим и другие приемы. Их применение, несомненно, полезно.

При решении задач обращается внимание учащихся на следующее: а) запись схемы условия задачи, б) определение вида пропорциональной зависимости (прямая или обратная пропорциональность); в) запись формулы решения в одну строчку; г) объяснение каждого действия; д) преобразование формулы (сокращение дроби, освобождение от дробей).

I. Сначала учащиеся решают задачи с величинами прямо пропорциональными.

Предлагается решить задачу: «15 *куб. см* меди весят 133,5 *г*. Сколько граммов весят $22\frac{1}{2}$ *куб. см* меди?» Учащиеся решают задачу по вопросам двумя действиями:

1) Сколько граммов весит 1 *куб. см* меди?

$$133{,}5 : 15 = 8{,}9 \ (\textit{г}).$$

2) Сколько граммов весят $22\frac{1}{2}$ *куб. см* меди?

$$8{,}9 \cdot 22\frac{1}{2} = 200\frac{1}{4} \ (\textit{г}).$$

Из решения выясняется, что для получения результата сначала одно данное число делится на другое, потом полученное частное умножается на второе данное число, что запись решения может быть сделана короче, а именно: надо записать оба действия в одной формуле, значение которой и определить, не производя промежуточных вычислений. Формула получается следующая:

$\dfrac{133{,}5 \cdot 22\frac{1}{2}}{15} = x$. В ней должны быть сделаны преобразования:

$\frac{1335 \cdot 45}{150 \cdot 2}$ (освобождение от десятичной дроби, умножение на неправильную дробь). $\frac{1335 \cdot 45}{150 \cdot 2} = \frac{267 \cdot 3}{2 \cdot 2} = \frac{801}{4} = 200\frac{1}{4}$ (*г*) (сокращение).

Приведем решение задачи: «Рабочий сможет выполнить $\frac{5}{8}$ работы за 3 часа 45 минут. В какое время он выполнит $\frac{2}{3}$ той же работы?»

Для удобства решения данные условия записываются в одну строчку, данные вопроса — в другую так, чтобы числа, выражающие значения одной и той же величины, подписывались одно под другим. Получается запись условия:

$$\begin{array}{l} \frac{5}{8} \text{ работы} \ldots 3\frac{3}{4} \text{ часа} \\ \frac{2}{3} \text{ работы} \ldots x \text{ час.} \end{array}$$

Выясняется, что значение x будет показывать число часов. Выясняется также, что время, затрачиваемое на работу при прочих одинаковых условиях, прямо пропорционально величине работы. Прочими одинаковыми условиями могут быть размер работы, ее сложность, производительность труда и т. п. Учителя рекомендуют учащимся при записи условия задачи с прямо пропорциональными величинами поставить стрелки одинакового направления, как показано выше.

Решение способом приведения к единице (с объяснением). Величина всей работы принята за единицу.

На выполнение		$\frac{5}{8}$	работы	тратится	$3\frac{3}{4}$ часа
»	»	всей работы		»	$3\frac{3}{4} : \frac{5}{8}$
»	»	$\frac{2}{3}$	»	»	$\left(3\frac{3}{4} : \frac{5}{8}\right) \cdot \frac{2}{3}$

$$\text{или } x = \frac{3\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{5}{8}} = \frac{15 \cdot 2 \cdot 8}{4 \cdot 3 \cdot 5} = 4 \text{ (часа).}$$

Применяя деление $3\frac{3}{4} : \frac{5}{8}$, учащиеся объясняют, что здесь по $\frac{5}{8}$ частям времени находят единицу времени для выполнения работы, а целое по части находится делением на дробь, показывающую часть. Умножение $\left(3\frac{3}{4} : \frac{8}{8}\right) \cdot \frac{2}{3}$ объясняется нахождением $\frac{2}{3}$ времени, нужного для выполнения всей работы.

Решение этой же задачи возможно посредством перехода через другую единицу, а именно: через $\frac{1}{8}$ работы и через $\frac{1}{3}$ работы. Тогда решение будет следующее.

$$\frac{5}{8} \ldots 3\frac{3}{4} \text{ часа}; \qquad \frac{1}{8} \ldots \frac{3\frac{3}{4}}{5}; \qquad \frac{8}{8} \ldots \frac{3\frac{3}{4} \cdot 8}{5};$$

$$\frac{1}{3} \ldots \frac{3\frac{3}{4} \cdot 8}{5 \cdot 3}; \qquad \frac{2}{3} \ldots \frac{15 \cdot 8 \cdot 2}{4 \cdot 5 \cdot 3} = 4 \text{ (часа)}.$$

Возьмем задачу.

Из 6 *кг* свекловицы получается 0,6 *кг* сахара. Сколько сахара получится из 0,5 *т* свекловицы?

В задаче даются две величины: количество свекловицы и количество сахара. Эти величины прямо пропорциональны. Применяем способ приведения к единице. Определяем значение искомой величины, соответствующее значению, равному 1, той величины, оба значения которой даны в условии.

1) Из 1 *кг* свекловицы получается 0,6 *кг* : 6 = 0,1 *кг* сахара.

2) Из 0,5 *т* или 500 *кг* получается 0,1 *кг* · 500 = 50 *кг* сахара.

Формула решения $(0{,}6 : 6) \cdot 500 = 50$ (*кг*) или $\frac{0{,}6 \cdot 500}{6} = 50$ (*кг*).

Во многих задачах на пропорциональные величины можно применить переход к искомой величине через промежуточное число, которое можно также назвать единицей для сравнения. Например, в задаче «На болторезном станке за 30 мин. изготовляется 45 болтов. Сколько болтов изготовят за 1 час 40 мин.?» промежуточным числом может служить 10 мин.

$$\text{За } 30 \text{ мин.} \ldots 45 \text{ (б.)}$$
$$10 \text{ мин.} \ldots 45 : 3 \text{ (б.)}$$
$$100 \text{ мин.} \ldots \frac{45 \cdot 10}{3} = 150 \text{ (б.)}$$

Этот способ называется *способом введения условной единицы.*

В ряде задач способ приведения к единице требовал бы необычного вопроса или хода рассуждения. Это задачи на обратное приведение к единице. Возьмем пример: «Станок изготовил 558 деталей за 18 мин. За сколько времени он может изготовить 1736 деталей?»

$$\begin{array}{l|l} \uparrow\ 558 \text{ д.} \ldots 18 \text{ мин.} \uparrow \\ 1736 \text{ д.} \ldots x \text{ мин.} \end{array}$$

Решая задачу приведением к единице, мы узнавали бы, сколько минут требуется для изготовления одной детали $\left(\frac{18}{558} \text{ мин.}\right)$, потом — сколько минут требуется для изготовления 1736 дет. (56 мин.) Более естественно поставить вопросы: а) сколько деталей изготовляет станок в минуту? б) Сколько времени надо для изготовления 1736 деталей?

Задача. Если в $4\frac{1}{2}$ мин. маятник сделал 180 качаний, то во сколько времени он сделает 2000 качаний?

Число качаний и время — величины прямо пропорциональные. Приведение к единице числа качаний привело бы к дробному числу минут, равному $\frac{9}{2\cdot 180}$ мин.; более естественно задать вопрос: сколько качаний маятник делает в минуту, т. е. употребить способ обратного приведения к единице. Формула решения: $2000:\frac{180}{4,5} = 50$ (мин.).

Решение задач на пропорциональную зависимость между величинами *способом пропорций* также должно быть объяснено учащимся. Этот способ необходимо сравнивать со способом приведения к единице, а при решении задач следует предоставить учащимся выбор того или другого способа.

Сначала решаются задачи с прямо пропорциональными величинами. До решения задачи учащиеся должны выяснить, будут ли данные в задаче величины прямо пропорциональны или нет.

Задача. На болторезном станке за 30 мин. изготовляют 45 болтов. Сколько потребуется времени, чтобы на том же станке изготовить 495 болтов?

Условие записывается учащимися:

45 болт. изготовляют за 30 мин.
495 болт. » » x мин.

Надо поставить ряд вопросов, чтобы проанализировать задачу. 1) Сколько величин дано в этой задаче? (Число болтов и время изготовления их). 2) Какая зависимость между величинами? 3) Как изменяется число болтов? (Увеличивается.) 4) Как должно изменяться время изготовления их? (Тоже увеличиваться.) 5) x больше или меньше 30? (Больше во столько раз, во сколько 495 больше 45.) 6) Как это можно записать? ($x : 30 = 495 : 45$). 7) Как это равенство называется? 8) Как найти неизвестный член пропорции?

Получается запись: $x:30 = 495:45$; $x = \frac{30\cdot\overset{11}{495}}{\underset{1}{45}} = 330$ (мин.);

330 мин. $= 5\frac{1}{2}$ часа. Ответ: $5\frac{1}{2}$ часа.

После этого решается способом пропорций с объяснением еще несколько задач с прямо пропорциональными величинами.

Задача. Чертеж предмета сделан в масштабе $\frac{1}{40}$; расстояние между двумя его точками равно 4,8 *см*. Какое расстояние будет между соответственными точками на другом чертеже, сделанном в масштабе $\frac{1}{75}$?

Запишем условие, обозначив через x *см* расстояние между точками на другом чертеже.

$$\frac{1}{40} \dots 4{,}8 \text{ см}$$

$$\frac{1}{75} \dots x \text{ см}.$$

Длина линии на чертеже прямо пропорциональна численному масштабу, поэтому получается пропорция: $x : 4{,}8 = \frac{1}{75} : \frac{1}{40}$, т. е. x меньше 4,8 во столько раз, во сколько раз $\frac{1}{75}$ меньше $\frac{1}{40}$; $x = \left(4{,}8 \cdot \frac{1}{75}\right) : \frac{1}{40} = 2{,}56$ (*см*).

II. Решение задач на обратно пропорциональную зависимость величин можно вести по тому же плану, как решение задач с прямо пропорциональными величинами: задача решается и записывается учащимися самостоятельно двумя действиями, делается разбор решения, выводится формула для сокращенной записи решения в виде дроби, решается вторая задача с объяснением способа приведения к единице и с сокращенной записью.

Следующая задача решается приведением к единице, решение подробно объясняется и записывается сокращенно.

Задача. Чтобы покрыть пол в комнате ковром, надо купить 27 *м* дорожки шириною по 90 *см*; но в магазине оказалась только дорожка на 15 *см* у́же. Сколько метров этой дорожки надо купить?

$$\uparrow 90 \text{ см} \dots 27 \text{ м} \mid$$
$$\mid 75 \text{ см} \dots x \text{ м} \downarrow$$

Учащиеся устанавливают, что длина дорожки при неизменной площади обратно пропорциональна ее ширине. В записи условия ставятся стрелки в противоположных направлениях, как показано.

Решение. При ширине 90 *см* надо 27 *м* дорожки

» » 1 *см* » $27 \cdot 90$ (*м*);

» » 75 *см* » $\frac{27 \cdot 90}{75} = \frac{162}{5} = 32\frac{2}{5}$ (*м.*)

Применение каждого действия объясняется.

Решение этой задачи возможно посредством перехода через другую единицу, именно через 15 (через 3; 5).

При ширине 90 *см* надо 27 *м* дорожки

» » 15 *см* » $27 \cdot 6$ (*м*)

» » 75 *см* » $\frac{27 \cdot 6}{5} = 32\frac{2}{5}$ (*м*).

Предлагая учащимся задачи с пропорциональными величинами, предоставляют им самостоятельно установить, какая существует зависимость между величинами, прямо или обратно пропорциональная.

Задача. Делая в среднем по $37\frac{1}{2}$ *км* в час, поезд прошел расстояние между двумя городами за 12 час. С какой скоростью он должен идти, чтобы пройти то же расстояние за 9 часов?

Задачу можно решить способом введения условной единицы (приведения к общему делителю). Числа 12 и 9 имеют НОД 3. Поэтому переход от числа 12 к числу 9 можно сделать через этот общий делитель.

1) Узнаем, во сколько раз 12 больше 3? $12 : 3 = 4$ (раза).

2) Узнаем скорость поезда в случае, если бы то же расстояние он прошел в 3 часа вместо 12. Скорость $37\frac{1}{2}$ *км* должна увеличиться в 4 раза: $37\frac{1}{2} \cdot \frac{12}{3}$ (*км*).

3) Но поезд шел 9 часов, т. е. в 3 раза дольше, поэтому его скорость была в 3 раза меньше, чем $37\frac{1}{2} \cdot \frac{12}{3}$, т. е. равна $37\frac{1}{2} \cdot \frac{12}{3} : \frac{9}{3} = 50$ (*км*)

Задача может быть решена способом пропорционального изменения.

Если время движения составляет $\frac{9}{12}$ первоначального, то скорость на одном и том же расстоянии должна увеличиться в $\frac{12}{9}$ раза (обратная пропорциональность). $37\frac{1}{2} \cdot \frac{12}{9} = 50$ (*км*).

Задачи с обратно пропорциональными величинами могут решаться также и способом пропорций.

Расположив числа заданной задачи в виде таблицы, учащиеся при составлении пропорции часто ошибаются, записывая механически: нижнее число относится к верхнему во II столбце, как нижнее число к верхнему в I столбце. Следует указать при составлении пропорции, что в обоих отношениях предыдущие члены должны быть больше последующих или оба предыдущих должны быть меньше последующих.

Для предупреждения ошибок при составлении пропорций употребляют указанный выше прием: после того как учащиеся выяснят, какая зависимость между величинами, прямо или обратно пропорциональная, на записи условия ставятся стрелки, имеющие одинаковое направление в случае прямой пропорциональности величин и противоположное направление в случае обратной пропорциональности.

З а д а ч а. Два шкива связаны ременной передачей. У одного шкива длина окружности 60 *см*, у другого 150 *см*. Сколько оборотов сделает второй шкив в минуту, если первый делает 50 оборотов?

$$\text{Условие:}\quad \begin{array}{l} |\ 60\ \text{см} \ldots 50\ \text{оборотов}\ \uparrow \\ \downarrow 150\ \text{см} \ldots x\ \text{оборотов.}\ | \end{array}$$

Выясняется, что две величины — длина окружности и число оборотов — находятся в обратно пропорциональной зависимости: с увеличением окружности шкива в несколько раз число его оборотов уменьшается во столько же раз. Поэтому x меньше 50 во столько раз, во сколько раз 60 меньше 150.

$$x : 50 = 60 : 150.$$

Из полученной пропорции $x = \frac{50 \cdot 60}{150} = 20$ (оборотов).

Для выработки умения решать задачи и для самостоятельной работы дать учащимся упражнения № 1160—1165, 1173—1175, 1178—1185 (5).

III. Задачи с пропорциональными величинами могут содержать сложную зависимость искомой величины от нескольких данных. (В старых учебниках и сборниках задач они назывались задачами на сложное тройное правило.) Решаются эти задачи теми же способами, как и задачи, содержащие только две величины: данную и искомую.

При решении задач, в которые входят три, четыре пропорциональные величины, необходимо расположить задачи так, чтобы трудности при их решении возрастали постепенно. Можно прин'ять, например, такой порядок материала:

а) задачи, содержащие три прямо пропорциональные величины, б) задачи, в которых две величины прямо пропорциональны, другие две величины обратно пропорциональны, в) одна величина обратно пропорциональна двум другим.

Первая задача сначала решается общим приемом с промежуточными вычислениями, потом на этой же задаче вводится запись в виде формулы. Каждое действие объясняется.

З а д а ч а. 52 лошадям на 15 дней выдают 3900 *кг* сена. Сколько килограммов клеверного сена надо выдать 9 лошадям на 2 дня, если клеверное сено питательнее обыкновенного в 1,5 раза?

Искомая величина — количество сена — прямо пропорциональна числу лошадей и времени и обратно пропорциональна питательности сена.

Р е ш е н и е.

1) Сколько килограммов сена надо выдать 52 лошадям на 1 день?

$$3900 : 15 = 260\ (\text{кг})$$

2) Сколько килограммов сена надо выдать 1 лошади на 1 день?

$$260 : 52 = 5\ (\text{кг})$$

3) Сколько килограммов сена надо выдать 9 лошадям на 1 день?

$$5 \cdot 9 = 45 \ (кг)$$

4) Сколько килограммов сена надо выдать 9 лошадям на 2 дня?

$$45 \cdot 2 = 90 \ (кг)$$

5) Сколько клеверного сена надо 9 лошадям на 2 дня?

$$90 : 1{,}5 = 60 \ (кг).$$

Сделав анализ решения, записывают его вновь в виде формулы.

1) Сколько килограммов сена надо выдать 52 лошадям в 1 день?

$$3900 : 15 \ (кг)$$

2) Сколько килограммов сена надо выдать 1 лошади на 1 день?

$$\frac{3900}{15 \cdot 52} \ (кг)$$

3) Сколько килограммов сена надо выдать 9 лошадям на 1 день?

$$\frac{3900 \cdot 9}{15 \cdot 52} \ (кг)$$

4) Сколько килограммов сена надо выдать 9 лошадям на 2 дня?

$$\frac{3900 \cdot 9 \cdot 2}{15 \cdot 52} \ (кг)$$

5) Сколько килограммов клеверного сена надо выдать лошадям на 2 дня?

$$\frac{3900 \cdot 9 \cdot 2}{15 \cdot 52 \cdot 1{,}5} \ (кг) = 60 (кг).$$

Вопросы и рассуждения должны относиться к искомой величине. Две данные величины, оба значения которых известны, приведены к единице. В школьной практике способ приведения к единице применяется чаще, чем способ пропорций.

Задача. Для обивки стульев купили $24\frac{1}{2}$ *м* клеенки шириною в $1\frac{1}{2}$ *м*. Этого количества хватило для обивки $\frac{3}{5}$ всего числа стульев; пришлось прикупить еще несколько метров клеенки шириной $1\frac{1}{4}$ *м*. Сколько метров этой клеенки было куплено?

Запись условия.

Обр.	Прям.	
$1\frac{1}{2}$ *м* ширины	$\frac{3}{5}$ числа стульев	$24\frac{1}{2}$ *м*
$1\frac{1}{4}$ *м* « «	$\frac{2}{5}$ « «	x *м*

Искомая величина — длина клеенки обратно пропорциональна ширине клеенки (при неизменной площади) и прямо пропорциональна количеству стульев. Пропорциональность величин можно указать стрелками или словами «прямо», «обратно», как показано.

Решаем задачу способом приведения к единице.

$$1\frac{1}{2}\text{ м} \quad \ldots \quad \frac{3}{5} \quad \ldots \quad 24\frac{1}{2}\text{ м}$$

$$1\text{ м} \quad \ldots \quad \frac{3}{5} \quad \ldots \quad 24\frac{1}{2}\cdot 1\frac{1}{2} = \frac{49\cdot 3}{2\cdot 2}$$

$$1\frac{1}{4}\text{ м} \quad \ldots \quad \frac{3}{5} \quad \ldots \quad \frac{49\cdot 3\cdot 4}{2\cdot 2\cdot 5}\text{ м}$$

$$1\frac{1}{4}\text{ м} \quad \ldots \quad 1 \quad \ldots \quad \frac{49\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{2\cdot 2\cdot 5\cdot 3}\text{ м}$$

$$1\frac{1}{4}\text{ м} \quad \ldots \quad \frac{2}{5} \quad \ldots \quad \frac{49\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 2}{2\cdot 2\cdot 5\cdot 3\cdot 5} = 19\frac{3}{5}\text{ м}.$$

Задача может решаться при помощи вопросов и вычисления ответов на каждый вопрос. Преимущество указанного способа в том, что запись окончательного ответа формулой и вычисление этой формулы сокращает решение.

Задачу с тремя пропорциональными величинами можно решать и способом пропорции, но он труднее для учащихся, чем способ приведения к единице.

З а д а ч а. 36 рабочих, работая по 7 часов в день, закончили работу в 20 дней. Во сколько дней 42 рабочих, работая по 6 часов в день, выполнят ту же работу?

Учащиеся устанавливают, что искомая величина — число дней работы — обратно пропорциональна числу рабочих и продолжительности рабочего дня.

З а п и с ь у с л о в и я: 36 рабочих 7 час. 20 дней
42 » 6 час. x дней

Задача разбивается на две задачи. Предположим, что 42 рабочих работали также по 7 час. Тогда число дней должно измениться в зависимости только от числа рабочих. Получается задача:

36 раб. сделают работу в 20 дней
42 раб. » » в y дней.

Неизвестное число обозначаем через y (оно не является искомым в задаче, потому что не соответствует всем условиям задачи).

y меньше 20 во столько раз, во сколько раз 36 меньше 42;

$y : 20 = 36 : 42$ (обратная пропорциональность).

Отсюда $y = \frac{20\cdot 36}{42}$.

Изменяем число часов ежедневной работы согласно условию. При 7-часовом рабочем дне работу можно выполнить за $\frac{20 \cdot 36}{42}$ дней; при 6-часовом — за x дней. $x : \frac{20 \cdot 36}{42} = 7 : 6$ (обратная пропорциональность); $x = \frac{20 \cdot 36 \cdot 7}{42 \cdot 6} = 20$ (дней).

Для выработки навыков в решении задач на сложную пропорциональную зависимость дать учащимся самостоятельно решить № 1187—1194.

§ 108. VII группа задач (на пропорциональное деление)

Простейшие задачи на пропорциональное деление решались учащимися в отделе целых чисел, обыкновенных и десятичных дробей; это так называемые задачи «на части» или «деление чисел на части, кратно неравные». Например: число 60 разделить на два слагаемых, из которых одно в 5 раз больше, чем другое. Другая задача: сплавлено 3 куска меди, всего 9 *кг*. Вес одного составляет 3 весовые части, вес другого 2 весовые части, вес третьего 1 весовую часть. Сколько весил каждый кусок меди?

Приведенные задачи — простейшие из отдела задач на пропорциональное деление. Задачи этого отдела очень разнообразны, поэтому необходимо расположить их в определенной системе в зависимости от степени трудности решения. Можно принять такой примерный план расположения видов задач на пропорциональное деление.

I. Задачи, в которых данное число надо разделить в данном отношении — на два, на три, на четыре и т. д. слагаемых.

Например: Число 81 разделить в отношении 4 к 5.

Прежде чем приступить к решению задачи, надо выяснить смысл деления в данном отношении. Отвечая на вопросы учителя, учащиеся дают такое объяснение задачи: разделить 81 на две части (два слагаемых), которые относились бы, как 4 к 5, это значит разделить 81 на два слагаемых (две части) так, чтобы в первом содержалось 4 таких доли, каких во втором 5, или чтобы первое слагаемое состояло из 4 таких долей, каких во втором 5.

В начале изучения отдела пропорционального деления можно ограничиться приведенным выше объяснением деления в данном отношении. В дальнейшем подобные задачи должны получить разнообразные объяснения. Например: разделить 81 в отношении 4 к 5 — это значит, что первое слагаемое должно быть меньше второго во столько раз, во сколько раз 4 меньше 5 или второе больше первого во столько раз, во сколько раз 5 больше 4. Должно быть дано и такое объяснение: разделить 81 в отношении 4 : 5 — это значит разделить данное число на две части, из которых первая составляет $\frac{4}{5}$ второй, или вторая составляет $\frac{5}{4}$ первой; употребляется также термин: разделить 81 пропорционально 4 и 5.

Трудность задач должна возрастать в зависимости от числа слагаемых (частей), на которые делится данное число: на две, на три, четыре и т. д. частей. Затем трудность задач увеличивается в связи с подбором более сложных чисел: сначала даются целые числа, потом обыкновенные, десятичные дроби, смешанные числа.

Приведем примеры. «Число 600 разделить на 3 части, которые относились бы, как 3, 4, 5» (или как 3 : 4 : 5).

«Разделить 798 пропорционально ряду чисел: $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ и $\frac{4}{5}$».

Искомые числа обозначаются римскими цифрами I, II, III, ... а также буквами x_1, x_2, x_3. Решения 1-й и 2-й задач обясняются аналогично.

В задаче 1-й запись условия должна быть следующая: I : II : III = = 3 : 4 : 5 или $x_1 : x_2 : x_3 = 3 : 4 : 5$.

Учителю приходится остановиться на разъяснении смысла записи I : II : III = 3 : 4 : 5. Для этого из сложного отношения выделяются отношения трех искомых чисел попарно. На доске выписывается пропорция: I : II = 3 : 4, выясняется, что 3 и 4 — это числа частей (равной величины) в I и II числах. Такое же объяснение дается пропорции II : III = 4 : 5 и I : III = 3 : 5. Для решения задачи надо узнать: 1) число частей в трех искомых числах, 2) величину одной части, 3) величину каждого числа.

Полученный ответ следует проверить, для этого надо использовать одно какое-либо объяснение записи I : II : III = 3 : 4 : 5, например, проверить, составляет ли I число $\frac{3}{4}$ II и $\frac{3}{5}$ III. Кроме того, проверяется, составляют ли три полученных числа в сумме 600.

Дальнейшее усложнение задач состоит в том, что в условии отношения искомых чисел даются в дробных числах: $\text{I}:\text{II}:\text{III} = \frac{2}{3} : \frac{3}{4} : \frac{4}{5}$.

Следует предварительно решить пример, в котором данное число составляется из двух чисел, отношение между которыми задано в дробных числах. Учащиеся повторяют преобразование этого отношения в отношение целых чисел.

$\text{I}:\text{II}:\text{III} = \frac{2}{3} : \frac{3}{4} : \frac{4}{5}$. Зная, что в сложное отношение входят два отношения (I : II и II : III), в каждом из которых можно заменить отношение дробей отношением целых чисел, учащиеся преобразовывают сложное отношение:

$$\text{I}:\text{II}:\text{III} = \frac{40}{60} : \frac{45}{60} : \frac{48}{60} = 40:45:48.$$

Всего в трех числах 133 равных доли (40 + 45 + 48); одна доля составляет 798 : 133 = 6, искомые числа 240, 270, 288.

Другой прием решения: $I = \frac{2}{3}$ доли, $II = \frac{3}{4}$ доли, $III = \frac{4}{5}$ доли, $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} = \frac{133}{60} = 2\frac{13}{60}$; одна доля $798 : 2\frac{13}{60} = 360$; $I = 360 \cdot \frac{2}{3} = 240$; $II = 360 \cdot \frac{3}{4} = 270$; $III = 360 \cdot \frac{4}{5} = 288$ — здесь от 360 берутся $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, т. е. от числа находится часть посредством умножения.

Второй способ решения задачи — в дробных числах — реже применяется учащимися, так как действия с дробями сложнее, чем действия с целыми числами, которые получатся, если отношения дробей заменить отношениями целых чисел.

При решении задачи, где сложное отношение дробных чисел заменяется отношением целых чисел или члены сложного отношения сокращаются, необходимо обратить внимание учащихся на то, что вследствие преобразования отношения размер доли и число долей каждой части изменяются: при замене дробей целыми числами величина каждой доли в несколько раз уменьшается, число долей каждого искомого числа увеличивается во столько же раз; при сокращении членов сложного отношения величина каждой доли увеличивается в несколько раз, число долей каждого искомого числа во столько же раз уменьшается. При том и другом преобразовании отношения между числами долей, приходящихся на каждое искомое число, остаются без изменения.

Преобразование сложного отношения, выраженного десятичными дробями, объясняется аналогично приведенным преобразованиям. Для выработки умений и навыков дать учащимся для самостоятельной работы № 1200—1203, 1213—1215.

II. Следующая группа задач на пропорциональное деление — это задачи, в которых даны отношения искомых чисел и известно а) одно из чисел или б) сумма двух или нескольких искомых чисел, или в) разность их.

Задача. Для приготовления фарфора берут глину, гипс и песок в количествах, пропорционально числам 25 : 1 : 2. Сколько изготовлено фарфора, если для его изготовления пошло 5 *кг* песка?

Решение. 1) Величина 1 доли — $5 : 2 = 2{,}5$ (*кг*); число всех долей $(25 + 1 + 2) = 28$; количество фарфора $2{,}5 \cdot 28 = 70$ (*кг*). Иногда учащиеся при решении подобной задачи ставят лишние вопросы, определяя в отдельности первую и вторую части состава (количество глины и гипса) и складывая полученные числа.

Надо указать учащимся на то, что лишние вопросы усложняют и затрудняют решение задачи.

Задача. Число учеников в четырех классах начальной школы находится (по порядку классов начиная с первого) в отношении $4 : 3\frac{3}{4} : 3\frac{1}{2} : 3$. Сколько учеников в школе, если в первом и втором классах вместе 93 ученика?

Решение. $\mathrm{I} : \mathrm{II} : \mathrm{III} : \mathrm{IV} = 4 : 3\frac{3}{4} : 3\frac{1}{2} : 3 =$

$= 16 : 15 : 14 : 12$; $16 + 15 = 31$; 31 доля составляет 93 уч.; величина 1 доли составляет $93 : 31 = 3$ (уч.); общее число долей $16 + 15 + 14 + 12 = 57$; $3 \cdot 57 = 171$ (уч.).

Задача. Сплав меди приготовлен из трех кусков. Вес I куска в 2,5 раза больше веса II куска, вес III куска в 1,5 раза больше веса II куска. Первый кусок тяжелее второго на 4,5 *кг*. Определить вес сплава.

Решение. $\mathrm{I} : \mathrm{II} : \mathrm{III} = 2{,}5 : 1 : 1{,}5 = 25 : 10 : 15 = 5 : 2 : 3$. I больше II на $5-2 = 3$ доли; 3 доли составляют 4,5 *кг*; вес 1 доли составляет 4,5 *кг* : 3 = 1,5 *кг*; отсюда $\mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III} = 10$ долям; вес сплава 1,5 *кг* · 10 = 15 *кг*.

Решить задачи № 1216, 1224, 1225, 1226.

III. Дальше рассматриваются задачи на пропорциональное деление, в которых даются отношения отдельных частей.

Например: Число 63 разложить на 3 слагаемых так, чтобы

$$\mathrm{I} : \mathrm{II} = 2 : 3, \text{ а } \mathrm{II} : \mathrm{III} = 3 : 4.$$

Определив число долей, приходящихся на каждое слагаемое, учащиеся видят, что решение этой задачи ничем не отличается от решения задач I вида. Две пропорции сводятся в одну запись в виде сложного отношения.

$\mathrm{I} : \mathrm{II} : \mathrm{III} = 2 : 3 : 4$. Дальнейшее решение известно.

Более сложные задачи этой группы труднее других задач на пропорциональное деление, так как при решении приходится преобразовывать данные в условии отношения, чтобы привести их к только что разобранному виду задач.

Возьмем задачу: «Разделить 340 на три части так, чтобы

$$\mathrm{I} : \mathrm{II} = 3 : 10 \text{ и } \mathrm{II} : \mathrm{III} = 5 : 2»$$

Прежде всего выясняется, что вторая часть содержит разное число долей в первом и втором отношениях, что 10 долей второй части первого отношения равны 5 долям второго отношения, следовательно, доли различны и их надо уравнять. Чтобы сделать доли равными, надо уравнять и их число во II части, для этого 5 долей раздробить так, чтобы во втором отношении II часть имела также 10 долей. Чтобы отношение II : III не изменилось, надо увеличить число долей II части также в 2 раза. $\mathrm{I} : \mathrm{II} = 3 : 10$; $\mathrm{II} : \mathrm{III} = 10 : 4$. Но 10 — это НОК для 10 и 5.

Члены отношения $5 : 2$ умножены на число 2, которое является дополнительным множителем до наименьшего общего кратного 5 и 10, т. е. до числа 10. Составив дальше сложное отношение $\mathrm{I} : \mathrm{II} : \mathrm{III} = 3 : 10 : 4$, решают задачу, как задачу первого вида этой группы.

В этом виде задач должны быть разобраны все случаи нахождения НОК чисел. Например:

I : II = 3 : 7;	Вычисления дадут сложное отношение:
II : III = 2 : 9;	I : II : III = 6 : 14 : 63 (НОК 7 и 2 = 14).
I : II = 5 : 8;	I : II : III = 15 : 24 : 14
II : III = 12 : 7;	(НОК 8 и 12 = 24).

Возможен и другой прием решения.

I : II = 3 : 7. Здесь I число составляет $\frac{3}{7}$ второго, которое можно принять за 1.

II:III = 2 : 9. Это отношение показывает, что III число равно $\frac{9}{2}$ II. Тогда сложное отношение 3-х чисел получается в таком виде: I : II : III = $\frac{3}{7} : 1 : \frac{9}{2}$. Освободив его от дробей, будем иметь отношение 6 : 14 : 63 (то же самое, что и при первом решении).

Для закрепления предложить учащимся задачи № 1211—1214.

IV. Дальше надо рассмотреть задачи, в которых требуется разделить число на части в отношении, обратном данным числам (обратно пропорционально двум или нескольким числам).

Сначала решаются задачи, в которых данное число делится обратно пропорционально двум числам. Например: число 80 разделить обратно пропорционально 9 и 7 (т. е. в отношении, обратном числам 9 и 7).

Решение объясняется так: число 80 надо разделить на две части так, чтобы первая относилась ко второй не как 9 : 7, а как 7 : 9, I : : II = 7 : 9. Решение таких задач учащимся известно. Но отношение 7 : 9 равно отношению $\frac{1}{9} : \frac{1}{7}$, т. е. числам, обратным 9 и 7. Решив 2—3 примера, переходят к делению числа на части, обратно пропорциональные трем и более числам. Например: разделить 65 обратно пропорционально 3, 2, 4.

Учащиеся записывают сначала I : II = 2:3; II:III = 4:2; I:II = = 2:3; II:III = 2:1. Откуда I:II:III = 4:6:3; I $= \frac{65}{4+6+3} \cdot 4 = 20$; II = 30; III = 15.

На основании разобранных примеров деления чисел на 2 части пишут: I : II = $\frac{1}{3} : \frac{1}{2}$ (отношение 2 : 3).

II : III = $\frac{1}{2} : \frac{1}{4}$ (отношение 4 : 2 или 2 : 1). Получают сложное отношение I:II:III = $\frac{1}{3} : \frac{1}{2} : \frac{1}{4} = 4 : 6 : 3$.

Дальнейшее решение известно.

Из решения нескольких задач делается вывод: чтобы разделить число обратно пропорционально данным числам, можно разделить его прямо пропорционально числам, обратным данным.

Разберем задачу на деление числа на части обратно пропорционально данным числам.

Одна бригада может выполнить работу в 12 дней, другая в 24 дня и третья в 8 дней. Сколько рабочих в каждой бригаде, если во всех бригадах вместе 60 человек и если производительность труда всех рабочих одинакова?

Объяснение. При одинаковой производительности труда первая бригада выполняет работу скорее второй во столько раз, во сколько раз 12 меньше 24, следовательно, число рабочих в первой бригаде больше, чем во второй бригаде, во столько раз, во сколько раз 24 больше 12 или $\frac{1}{12}$ больше $\frac{1}{24}$, т. е. числа рабочих обратно пропорциональны 12 и 24. Точно так же время выполнения работы второй бригадой больше, чем третьей бригадой, в $(24 : 8)$ раз, следовательно, число рабочих второй бригады меньше, чем число рабочих третьей бригады во столько раз, во сколько раз 8 меньше 24 или во сколько раз $\frac{1}{24}$ меньше $\frac{1}{8}$, или числа рабочих второй и третьей бригад обратно пропорциональны 24 и 8. Итак, числа рабочих трех бригад относятся, как $\frac{1}{12} : \frac{1}{24} : \frac{1}{8} = 2 : 1 : 3$. Это сложное отношение может быть объяснено следующим образом. Первая бригада выполняет в день $\frac{1}{12}$ часть работы, вторая — $\frac{1}{24}$, третья — $\frac{1}{8}$. Числа рабочих должны быть прямо пропорциональны $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{24}$, $\frac{1}{8}$. Дальнейшее решение известно:

$$\text{I} = \frac{60}{6} \cdot 2 = 20 \text{ (раб.)}; \quad \text{II} = 10 \text{ (раб.)}; \quad \text{III} = 10 \cdot 3 = 30 \text{ (раб.)}.$$

Проверка может быть сделана так: первая бригада затрачивает на работу $12 \cdot 20 = 240$ человеко-дней; вторая $24 \cdot 10 = 240$; третья $8 \cdot 30 = 240$. Так как производительность труда всех рабочих одинакова и работа всех бригад одна и та же,то и число человеко-дней должно быть одинаково.

Для закрепления и выработки навыков учащимся дать на решение задачи № 1204—1212; 1218—1223.

V. В отделе задач на пропорциональное деление должны быть рассмотрены задачи на деление числа пропорционально двум рядам чисел. Возьмем задачу с конкретным содержанием.

«Для проведения геологоразведывательных работ отпущено 4720 руб. трем экспедициям. Первая экспедиция в составе 6 человек работает 10 дней; вторая в составе 7 человек работает 30 дней и третья в составе 8 человек работает 40 дней. Сколько денег получила каждая экспедиция?»

Отпущенные деньги надо разделить прямо пропорционально составу экспедиции, т. е. числам 6, 7 и 8, а также прямо пропорционально продолжительности работы, т. е. числам 10, 30 и 40.

Следовательно, общую сумму надо разделить прямо пропорционально $6 \cdot 10$; $7 \cdot 30$; $8 \cdot 40$; $\mathrm{I} : \mathrm{II} : \mathrm{III} = (6 \cdot 10) : (7 \cdot 30) : (8 \cdot 40)$. Деля все члены сложного отношения на 10, получим: $\mathrm{I} : \mathrm{II} : \mathrm{III} = 6 : 21 : 32$. Отсюда $\mathrm{I} = \frac{4720}{59} \cdot 6 = 480$ (руб.); $\mathrm{II} = 1680$ (руб.); $\mathrm{III} = 25600$ (руб.).

Обращается внимание учащихся на то, что из двух рядов чисел, пропорционально которым надо было делить 4720, а именно:

$$\mathrm{I} : \mathrm{II} : \mathrm{III} = 6 : 7 : 8 \text{ и}$$
$$\mathrm{I} : \mathrm{II} : \mathrm{III} = 10 : 30 : 40 \text{ —}$$

составили один ряд $(6 \cdot 10) : (7 \cdot 30) : (8 \cdot 40)$. Пропорционально числам этого ряда было произведено деление числа 4720.

Для объяснения приема деления числа пропорционально двум рядам чисел можно взять задачу, в которой путем приведения одного ряда чисел к единице или к какому-либо одинаковому числу нетрудно доказать необходимость перемножения чисел двух рядов.

Возьмем задачу. За доставку трех партий товара заплатили 72 руб. Первая партия товара в количестве 70 *т* была доставлена за 150 *км*, вторая в количестве 90 *т* — за 100 *км* и третья в количестве 60 *т* — за 125 *км*. Сколько уплатили за доставку каждой партии товара?

Условие задачи:
$$\left.\begin{array}{ll} 70\ т & 150\ км \\ 90\ т & 100\ км \\ 60\ т & 125\ км \end{array}\right\} 72 \text{ руб.}$$

Если бы товар был одинакового веса, то оплата доставки была бы прямо пропорциональна расстоянию; при равном расстоянии оплата доставки была бы пропорциональна весу партий товара. Поэтому оплата партий товара должна быть прямо пропорциональна весу партии товара и расстоянию.

$$\mathrm{I} : \mathrm{II} : \mathrm{III} = 70 : 90 : 60$$
$$\mathrm{I} : \mathrm{II} : \mathrm{III} = 150 : 100 : 125$$

Если бы каждый товар весил 1 *т*, то за ту же плату перевезли бы первый товар на расстояние в 70 раз большее, второй товар — на расстояние в 90 раз большее и третий товар — на расстояние в 60 раз большее: $\mathrm{I} : \mathrm{II} : \mathrm{III} = (150 \cdot 70) : (100 \cdot 90) : (125 \cdot 60)$. После деления членов сложного отношения получается: $\mathrm{I} : \mathrm{II} : \mathrm{III} = 7 : 6 : 5$. Дальнейшее решение известно. Тот же ряд чисел получается, если предположить, что товары перевозились на одинаковое расстояние, например на 1 *км*. Тогда вес каждого товара увеличится соответственно в 150, 100 и 125 раз. Получится сложное отношение: $\mathrm{I} : \mathrm{II} : \mathrm{III} = (70 \cdot 150) : (90 \cdot 100) : (60 \cdot 125)$, отличающееся от первого сложного отношения только порядком сомножителей в каждом члене отношения.

Решение этой задачи можно объяснить иначе.

Оплата доставки первого товара должна идти за $70 \cdot 150$ тонно-километров, второго товара — за $90 \cdot 100$ и третьего — за $60 \cdot 125$ тонно-километров. 72 руб. надо разделить прямо пропорционально этим произведениям.

В задачах на деление пропорционально двум рядам чисел приходится создавать сложные единицы, например «человеко-дни», «тонно-километры» и т. д.

После выяснения общего приема деления числа пропорционально двум рядам чисел можно перейти к решению задач, в которых сложную единицу трудно назвать конкретным названием. К задачам применяется тогда общий прием: чтобы разделить данное число пропорционально двум рядам чисел, надо эти числа соответственно перемножить и разделить данное число пропорционально полученным произведениям.

Во многих задачах на пропорциональное деление учащимся приходится самим на основании условия определять отношения между числами. Укажем некоторые из таких задач.

1) Разложить число $7\frac{1}{2}$ на два слагаемых так, чтобы одно составляло $\frac{2}{3}$ другого. Для составления отношения — второе число принимается за единицу, тогда первое будет равно $\frac{2}{3}$ единицы. Получаем: $\mathrm{I}:\mathrm{II} = \frac{2}{3} : 1 = 2 : 3$.

Ответ: 3 и $4\frac{1}{2}$.

2) Сумма двух чисел 65; первое должно составлять 30% второго.

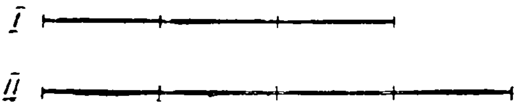
Решение. Второе обозначается через 100% и отношение будет равно $30 : 100 = 3 : 10$. Ответ: 15 и 50.

3) Найти три таких числа, чтобы второе равнялось $\frac{3}{4}$ первого, а третье $\frac{7}{8}$ второго. Разность $\mathrm{I} - \mathrm{III} = 2\frac{1}{5}$. Записываем отношения: а) $\mathrm{II}:\mathrm{I} = \frac{3}{4}:1 = 3:4 = 24:32$; б) $\mathrm{III}:\mathrm{II} = \frac{7}{8} : 1 = 7:8 = 21:24$; в) $\mathrm{I}:\mathrm{II}:\mathrm{III} = 32:24:21$; г) $32-21 = 11$; д) $2\frac{1}{5} : 11 = \frac{1}{5}$; $\mathrm{I} = \frac{1}{5}\cdot 32 = 6\frac{2}{5}$ и т. д.

4) Число 56 разложить на 2 слагаемых так, чтобы $\frac{1}{3}$ первого была равна $\frac{1}{4}$ второго. а) $\mathrm{I} = \frac{3}{4}\,\mathrm{II}$; $\mathrm{I}:\mathrm{II} = 3:4$; $\mathrm{I} = 24$; $\mathrm{II} = 32$.

б) Другое решение. На чертеже 36 видно, что в I числе 3 таких части, каких во II числе 4.

5) Число 90 разделить на 3 части так, чтобы $\frac{4}{5}$ I части равнялись $\frac{8}{15}$ II и $\frac{2}{5}$ III.



Черт. 36.

Записываем отношения:

а) $\mathrm{I} = \frac{8}{15}\mathrm{II} : \frac{4}{5} = \frac{2}{3}\mathrm{II}$; $\quad \mathrm{I} : \mathrm{II} = 2 : 3$; $\quad \mathrm{I} : \mathrm{II} : \mathrm{III} = 2 : 3 : 4$;
$\mathrm{II} = \frac{2}{5}\mathrm{III} : \frac{8}{15} = \frac{3}{4}\mathrm{III}$; $\quad \mathrm{II} : \mathrm{III} = 3 : 4$. $\quad$ Ответ: $\mathrm{I} = 20$ и т. д.

б) Другое решение.

$$\mathrm{I}:\mathrm{II} = \frac{8}{15} : \frac{4}{5} \text{ (обратная пропорциональность)}$$

$$\mathrm{II}:\mathrm{III} = \frac{2}{5} : \frac{8}{15} \text{ (обратная пропорциональность)}$$

$$\mathrm{I}:\mathrm{II} = 8 : 12 = 2 : 3$$
$$\mathrm{II}:\mathrm{III} = 6 : 8 = 3 : 4 \text{ и т. д.}$$

Искомые части I, II и III обратно пропорциональны числам $\frac{4}{5}$, $\frac{8}{15}$ и $\frac{2}{5}$; $\mathrm{I} : \mathrm{II} : \mathrm{III} = \frac{5}{4} : \frac{15}{8} : \frac{5}{2} = \frac{1}{4} : \frac{3}{8} : \frac{1}{2} = 2 : 3 : 4$.

Задача. В гараже имеется 79 машин различной грузоподъемности; $\frac{5}{12}$ числа полуторатонных машин равно $\frac{1}{3}$ числа двухтонных и $\frac{2}{5}$ числа трехтонных.

Сколько машин каждой грузоподъемности имеется в гараже?

Решение. I, II и III — искомые числа, обратно пропорциональны.

$$\frac{5}{12}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{2}{5},$$

$$\mathrm{I} : \mathrm{II} : \mathrm{III} = \frac{12}{5} : 3 : \frac{5}{2} = 24 : 30 : 25.$$

$$\mathrm{I} = \frac{79 \cdot 24}{24 + 30 + 25} = 24; \quad \mathrm{II} = 30; \quad \mathrm{III} = 25.$$

Для закрепления пройденного предложить учащимся самостоятельно решить упражнения № 1226—1231.

ГЛАВА XVI

ЭЛЕМЕНТЫ ГЕОМЕТРИИ В КУРСЕ АРИФМЕТИКИ V — VI КЛАССОВ

Курс арифметики V—VI классов содержит некоторый геометрический материал. В объяснительной записке к программе арифметики так сказано о цели введения элементов геометрии в курс арифметики: «Включение в курс арифметики простейших сведений по геометрии имеет важное значение для развития пространственного воображения учащихся для последующего изучения курса геометрии и осуществления связи с физикой, географией и трудом в мастерских».

Таким образом, знакомство с элементами геометрии, с одной стороны, подготавливает учащегося к изучению систематического курса геометрии и, с другой стороны, вооружает учащихся знаниями, имеющими большое практическое значение как по линии непосредственного применения к практическим вопросам (измерение периметров, площадей и объемов некоторых геометрических фигур), так и по линии осуществления связи с другими смежными школьными предметами (физикой, географией и трудом в мастерских).

Геометрический материал в курсе арифметики можно разбить на две части: I часть — повторение и углубление некоторых вопросов, пройденных в начальной школе (прямая, отрезок, площади квадрата и прямоугольника, объем куба и параллелепипеда), и II часть — ознакомление с некоторыми новыми геометрическими фигурами (угол, периметр квадрата и прямоугольника, площадь поверхностей куба и параллелепипеда).

Программой предусмотрено, что изучение всего перечисленного геометрического материала проходится в V классе в связи с прохождением различных тем курса арифметики.

В 1-й теме — «Натуральные числа» — повторяется метрическая система мер (меры длины, площади и объема, меры времени) и повторяется геометрический материал, изучавшийся в начальной школе. Все эти вопросы повторяются в связи с решением задач и примеров.

Во 2-й теме — «Обыкновенные дроби» — даются основные понятия об углах и их измерении, о транспортире; повторяется нахождение площадей прямоугольника и квадрата и объемов прямоугольного параллелепипеда и куба. В заключение, опираясь на имеющиеся сведения о площадях, излагают приемы построения прямоугольных и секторных диаграмм.

В 3-й теме — «Десятичные дроби» — даются сведения о нахождении периметров треугольника, квадрата и прямоугольника, площади треугольника, на нахождение поверхностей куба и прямоугольного параллелепипеда по готовым данным и по данным, полученным путем непосредственного измерения.

Геометрический материал изучается путем наглядного знакомства учащихся с геометрическими образами на чертежах, моделях, предметах окружающей обстановки, частях технических изделий и закрепляется на основе решения соответствующих задач.

Практика работы учителей V класса показывает, что для ознакомления учащихся с новыми геометрическими понятиями и для обучения решению задач геометрического содержания целесообразнее выделять особые часы. Закрепление же геометрического материала на задачах может проводиться на любом уроке арифметики.

Геометрические понятия ученик начинает приобретать с I класса. В этом классе при решении задач он начинает понимать понятия «выше», «ниже», «шире», «направо», «налево», «по прямой линии», «кривой линии», горизонтальное и вертикальное положение предметов, понятие об образе прямоугольника и квадрата. С этими понятиями он сталкивается не только на уроках арифметики, но и на уроках рисования и физкультуры. На уроках физкультуры во время игр и забав ему приходится слышать: «займи квадратик», «иди по прямой», «вверх», «высота» и т. д.

По мере изучения арифметики учащиеся во II, III, в IV классах знакомятся с понятиями: «прямая линия», «отрезок», «угол», «параллелепипед», «куб», узнают, как находить площадь прямоугольника, квадрата, объем куба и прямоугольного параллелепипеда.

§ 109. Изложение элементов геометрии в V классе

1. Повторение метрической системы мер и некоторых понятий геометрии. Прежде всего на уроках арифметики в связи с решением задач на действия с натуральными числами учитель повторяет метрическую систему мер. В сборнике задач приведено значительное число упражнений на метрическую систему мер. Это упражнения: № 22—28, 34, 35, 47—50 и т. д.

При прохождении темы «Натуральные числа» учитель повторяет понятия: «прямая», «отрезок», нахождение площади прямоугольника и квадрата.

В III классе наглядно были даны понятия прямой и кривой линий, а также отрезка (на примерах натянутой нити, образовании сгиба при перегибании чертежа) и пояснялось, что прямая линия не имеет начала и конца. «Мы изобразили на рисунке прямую линию. Но ведь нельзя изобразить то, что не имеет начала и конца! Что же именно мы изобразили? (Часть прямой линии.) Да, и этот кусок прямой линии мы назовем отрезком».

Наклонно расположённые прямые линии многие учащиеся считают на первых порах кривыми. Поэтому необходимо требовать от учеников, чтобы они чертили прямые в разных направлениях. Решая задачи № 133, 158—161, 166, 172 и другие, учитель должен напомнить соответствующие правила нахождения площади прямоугольника и объема параллелепипеда.

2. Прямой угол. Понятие о градусе и минуте. Транспортир. С понятием угла учащиеся знакомятся в III классе. Знакомство дается только на готовых чертежах прямого, острого и тупого углов. Поэтому желательно ознакомление с углами провести так.

Предложить учащимся взять лист бумаги (лучше бесформенный), согнуть его, а затем снова согнуть так, чтобы совпали прямые края — получится прямой угол. Далее предложить ученикам, пользуясь этим углом, проверить угол, полученный соседом, или угол предмета, имеющего прямоугольную или квадратную форму. После проверки ученики убеждаются, что угол, полученный из бумаги, угол доски, стола равны между собой. Через такое сравнение дети приходят к выводу, что все прямые углы равны между собой, и, следовательно, их величина не зависит от длины стороны угла. Здесь же надо сообщить названия элементов угла — сторон и вершины, их обозначение. Сгибая модель прямого угла, дети получат острые углы. Затем на модели ознакомить и с тупым углом. После уяснения учениками различных видов углов перейти к их измерению. Если есть время, то полезно остановиться на истории возникновения градусного измерения углов. Указать, что при измерениях приходится брать различную точность измеряемого угла, а потому возникает необходимость в наличии более мелких делений. Полезно указать, что ничтожное (миллионные доли градуса) отклонение космического корабля может привести к неудаче путешествия корабля. В учебнике и сборнике задач приведено достаточно теоретического и практического материала (задачи) для закрепления навыков по теме.

В классной и домашней работе учащиеся должны решить все примеры упражнений № 575—578.

3. Площадь прямоугольника и квадрата. Учитывая, что понятие «периметр фигуры» для учащихся V класса более сложно (в силу новизны), чем понятие «площадь фигуры», в программе рекомендуется повторение и углубление сведений о прямоугольнике и квадрате начинать с нахождения площадей этих фигур.

Прежде чем приступить к нахождению площадей прямоугольника и квадрата, надо уточнить имеющиеся у учащихся представления. Вероятно, некоторые из них и дадут точное определение прямоугольника и квадрата. Если все забыли, то путем наводящих вопросов надо привести их к определению.

Затем для полного уяснения, что такое прямоугольник и квадрат, надо научить учащихся чертить прямоугольник и квадрат с помощью линейки и угольника. Здесь же можно сказать, что наряду с терминами «длина» и «ширина» прямоугольника мы будем употреблять термины «основание», «высота» прямоугольника.

Далее полезно проверить, уяснили ли учащиеся понятия: «площадь» и «единицы площади». С этой целью учитель чертит (или предлагает учащимся начертить) на доске квадратный дециметр, квадратный метр, квадратный сантиметр и поясняет, что мы будем понимать под площадью фигуры.

Затем учащиеся вспоминают правило нахождения площади прямоугольника: «Чтобы найти площадь прямоугольника, основание и высота которого выражены числами в одинаковых единицах мер, надо перемножить эти числа; полученное произведение показывает, сколько соответствующих квадратных единиц имеет площадь прямоугольника».

Обозначая длины сторон прямоугольника буквами a и b, а его площадь буквой S, учитель записывает выражение для площади формулой $S = ab$.

Правило нахождения площади прямоугольника можно дать в краткой формулировке: «Площадь прямоугольника равна произведению его основания на высоту».

Далее учитель напоминает правило нахождения площади квадрата и формулу:

$$S = a \cdot a \quad \text{или} \quad S = a^2.$$

Решаются задачи на нахождение площади по известным сторонам прямоугольника и на определение одной из сторон, если известны площадь и другая сторона.

Например:

1. Прямоугольное поле колхоза имеет длину 400 *м* и ширину 40 *м*. Какова его площадь?

2. Прямоугольное поле колхоза имеет площадь 12 *га*, а длина его 600 *м*. Какой ширины поле?

Первая задача решается без затруднений, вторая же не вызывает затруднений в том случае, когда деление выполняется без остатка. Зная дроби, учащиеся будут в состоянии решать вторую задачу при любых числовых данных.

После того как учащиеся вспомнили правило нахождения площади прямоугольника, надо рассмотреть квадрат и нахождение его площади.

Для самостоятельной работы и выработки навыков учащимся предлагается решить упражнения № 564—571.

4. Объем куба и прямоугольного параллелепипеда. Несмотря на то что в IV классе учащиеся решали немало задач на нахождение объема бруса, куба, необходимо до решения задач вспомнить и расширить основные понятия о кубе и о прямоугольном параллелепипеде. Ученики должны иметь понятие о вершинах, ребрах, гранях этих тел и находить их элементы в окружающих предметах (комната, кирпич, спичечная коробка и т. д.); учащиеся должны знать, что в прямоугольном параллелепипеде противоположные грани равны. Можно дать такое понятие о прямоугольном параллелепипеде: «Прямоугольный параллелепипед есть тело, ограниченное шестью попарно равными прямоугольниками». Надо сказать, что длины трех ребер, сходящихся в одной вершине, называются *измерениями* прямоугольного параллелепипеда (бруса). Если в прямоугольном параллелепипеде все три измерения равны, то он называется кубом.

Далее надо уточнить понятия: «кубическая единица» и «объем тела». «Кубической единицей называется куб, ребром которого является единица длины». Учащиеся должны уметь начертить изображение кубического сантиметра и кубического дециметра. Будет весьма полезно, если ученики с помощью пластинок или проволоки сделают модель кубического метра и модель кубического дециметра.

Полезно повторить с учащимися непосредственное измерение объема куба и прямоугольного параллелепипеда, используя арифметический ящик.

Так, непосредственно на арифметическом ящике ученики выделяют слой кубиков, высота которого равна 1 *см*, а площадь равна площади грани куба. Ученики ясно увидят, что таких слоев в кубе будет столько, сколько раз в ребре — высоте куба — уложится 1 *см*, и если ребро куба a *см*, то объем куба равняется: $a^2 \cdot a = a^3$ (*куб. см*).

Следовательно:

$$V = a \cdot a \cdot a = a^3 \text{ (куб. ед.)}.$$

Затем записывается правило: «Чтобы вычислить объем куба, нужно ребро куба взять сомножителем три раза».

Аналогично поясняется правило вычисления объема прямоугольного параллелепипеда. Учитель указывает, что измерение объема прямоугольного параллелепипеда, так же как и измерение объема куба, производится непосредственным заполнением прямоугольного параллелепипеда кубами, каждый из которых есть единица измерения объема. Показывает, что на основании параллелепипеда можно уложить ab куб. единиц (a — длина, b — ширина основания параллелепипеда) и что они составят слой высотой, равной ребру куба. Таких слоев будет столько, сколько раз высота куба уложится в высоте c параллелепипеда. Поэтому объем прямоугольного параллелепипеда будет равен abc куб. единицам.

Для закрепления и домашней работы ученикам дать задачи № 572—574.

5. Построение прямоугольных и секторных диаграмм. В IV классе учащиеся знакомятся с построением линейных и столбчатых диаграмм. В V классе учащиеся продолжают строить эти виды диаграмм при прохождении темы «Натуральные числа», а изучив обыкновенные дроби, они могут строить любые прямоугольные диаграммы, а также познакомиться и с секторными диаграммами. В учебнике достаточно полно изложен вопрос о построении диаграммы, а потому не станем здесь давать другие приемы изложения этого вопроса. Если учащиеся после ознакомления с материалом учебника самостоятельно проделают упражнения № 579 и 580, то приобретут соответствующий навык в построении диаграмм.

6. Нахождение периметра прямоугольника и квадрата. Вывод правила нахождения периметра прямоугольника лучше всего провести на следующей практической работе. Взять лист бумаги, имеющей прямоугольную форму, и предложить учащимся проверить, что противоположные стороны прямоугольника попарно равны. Затем дать определение периметра прямоугольника. Предложить учащимся измерить длину периметра взятого листа бумаги. Учащиеся увидят, что для этого достаточно измерить только две стороны прямоугольника, прилежащие друг к другу. Если обозначить длину основания прямоугольника через «a», а длину высоты через «b», то периметр прямоугольника (P) можно записать формулой:

$$P = 2a + 2b.$$

Для квадрата формула нахождения его периметра будет $4a$, где a — длина стороны.

7. Нахождение поверхности куба и прямоугольного параллелепипеда. Прежде всего предложить учащимся назвать предметы в окружающей обстановке, имеющие форму куба или форму параллелепипеда.

На моделях кубов различных размеров (из дерева, из картона, каркасных) уточняются ранее встречавшиеся понятия «ребра», «вершины» и «грани». Выясняется число ребер, вершин, граней куба. Вводится термин «основания куба» (их число). Устанавливается, что каждая грань куба — квадрат, что все грани куба равны. Выясняется, что площадь боковой поверхности куба равна сумме площадей четырех квадратов, а площадь полной поверхности куба равна площади шести равных квадратов — граней куба.

Учащиеся записывают, что площадь боковой поверхности куба равна $4a^2$ (кв. ед.), а площадь полной поверхности куба равна $6a^2$ (кв. ед.), где a обозначает длину ребра куба. Учитель показывает развертку куба, и ученики еще раз убеждаются в правильности сделанных записей. Развертка куба зарисовывается в тетради, зарисовывается и сам куб.

Записываются формулы:

$$S_{бок} = 4a^2 \text{ (кв. ед.)},$$
$$S_{полн} = 6a^2 \text{ (кв. ед.)}.$$

Учащимся дается задание: дома выкроить развертку куба и принести ее в класс. В классе на следующем уроке вывешивается таблица: «Куб и его развертка». В таблице наклеивается из цветной бумаги развертка куба, пространственный рисунок куба и куб, приклеенный одной гранью; размеры его должны соответствовать размерам прилагаемой развертки.

Далее учитель покажет и второй способ вычисления боковой и полной поверхности куба. Для этого цветным мелом на контуре развертки куба выделяется фигура, составленная из четырех квадратов, составляющих боковые грани куба. Это прямоугольник с основанием, равным периметру основания куба, и высотой, равной ребру куба.

Таким образом, для вычисления площади боковой поверхности куба периметр основания куба нужно умножить на высоту куба. После этого учащиеся устанавливают, что для вычисления площади полной поверхности куба к площади его боковой поверхности надо прибавить площади двух его оснований, т. е.

$$S_{полн} = S_{бок} + 2a^2 = 4a^2 + 2a^2 = 6a^2 \text{ (кв. ед.)}.$$

В таком же плане следует изучение способа определения поверхности прямоугольного параллелепипеда.

Рассматривая с учащимися развертку прямоугольного параллелепипеда, учитель подчеркивает, что все четыре его боковые грани составляют вместе прямоугольник, и определяет его размеры (основание и высоту). Непосредственным измерением устанавливается, что высотой этого прямоугольника является высота прямоугольного параллелепипеда, а основанием прямоугольника является периметр основания прямоугольного параллелепипеда.

Таким образом ученики подводятся к вычислению площади боковой поверхности прямоугольного параллелепипеда по следующей формуле:

$$S_{бок} = P_{осн} \cdot c \text{ (кв. ед.), где } P_{осн} = 2a + 2b$$

и c — высота прямоугольного параллелепипеда; кроме того, вычисляется иначе и площадь полной поверхности:

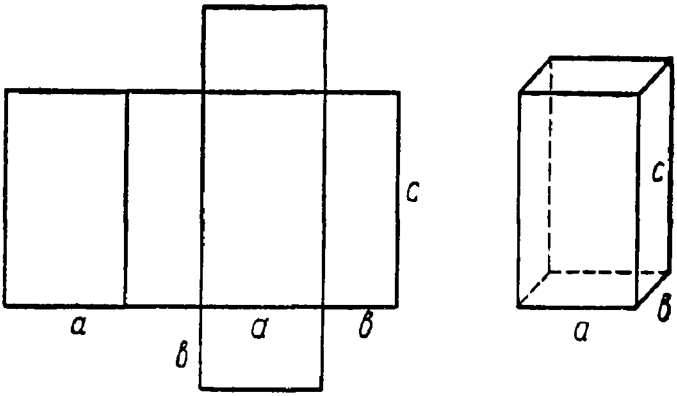
$$S_{полн} = S_{бок} + 2ab \text{ (кв. ед.)}.$$

Так же, как и для куба, составляется соответствующая таблица для прямоугольного параллелепипеда с его разверткой, рисунком-чертежом и моделью (черт. 37).

$$S_{бок} = (2a + 2b) \cdot c \text{ (кв. ед.)},$$
$$S_{полн} = (2a + 2b) \cdot c + 2ab \text{ (кв. ед.)},$$
$$V = abc \text{ (куб. ед.)}.$$

Для выработки навыка находить поверхность тел необходимо учащимся решить упражнения № 834—836, 839, 841.

8. Нахождение площади треугольника и четырехугольника. Вначале даются понятия о треугольнике и его видах. Надо повторить правила нахождения площади прямоугольника, затем перейти к нахождению площади прямоугольного треугольника. Вырезанная из картона модель прямоугольника разрезается по диагонали прямоугольника (термин «диагональ» не обязательно вводить). Все остальное изложение проводится так, как рекомендуется учебником.



Черт. 37.

Для закрепления и самостоятельной работы учащимся дать упражнения № 830—833.

Хотя программой арифметики и не предусмотрено ознакомление с окружностью, кругом и его частями, но изучение других вопросов арифметики (единиц мер, измерения углов, секторных диаграмм), а также возникающие геометрические образы на других уроках, например, на уроках труда — «круг», «дуга», «цилиндр», «конус» — создают необходимость пояснять эти термины. Эти пояснения следует давать, прибегая к показу на моделях или на окружающих предметах.

В темах программы арифметики VI класса не встречаются вопросы геометрии, но из этого не следует делать вывод, что на уроках не надо касаться геометрического материала. Весь геометрический материал, изученный в V классе, закрепляется при решении задач курса VI класса. В сборнике задач во всех темах помещены задачи с геометрическим содержанием.

ГЛАВА XVII

ПРАКТИЧЕСКИЕ РАБОТЫ

Одним из видов практических работ в школе являются простейшие измерительные работы на местности. В программе предлагается следующее содержание практических работ по арифметике в V и VI классах:

«Обозначение точек и проведение прямых на местности. Измерение расстояний на местности: мерным шнуром (лентой, рулеткой), полевым циркулем, шагами. Глазомерная оценка расстояний. Применение эккера. Построение прямоугольного участка и вычисление его площади».

Остановимся сначала на приборах для измерительных работ в школе, а затем на описании некоторых работ.

§ 110. Приборы для измерительных работ на местности

1) Мерная веревка. Это обыкновенная пеньковая веревка или толстый шнур длиной 10—20 *м*. Чтобы веревка не подвергалась гниению, ее необходимо вымочить в воде, прокипяченной с кусками дубовой коры. На конце веревки нужно завязать петли для надевания на палки. Отдельные метры на веревке отмечаются цветными нитками, медными бляшками или кусочками картона.

2) Колышки (бирки).

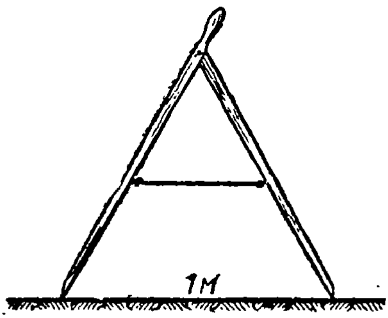
Бирка — колышек длиной примерно 40 *см*, толщиной 2—3 *см*, с заостренным концом.

3) Колья длиной 15 *дм* и толщиной 4 *см* для надевания на них мерной веревки; колья должны быть равными и прямыми. Колья с одного конца нужно заострить и обуглить, еще лучше — заостренный конец обить железом. Каждый кол надо просверлить и вбить в отверстие гвоздь на расстоянии 15 *см* от заостренного конца, чтобы веревка при надевании была на определенной высоте.

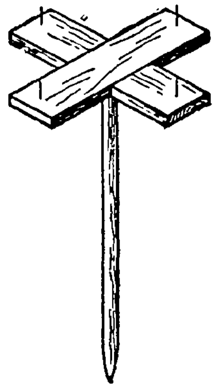
4) Вехи — ровные палки с заостренным концом, в длину не менее 2 *м* и толщиной 3 *см*. Для лучшей видимости с них сдирают

кору или покрывают красной краской, верхний конец снабжают флажком или привязывают пучок травы.

5) Полевой циркуль (черт. 38) состоит из двух брусков, с одной стороны заостренных, длиной приблизительно 1,5 *м*, скрепленных шурупом, как классный циркуль. К одному из брусков (приблизительно посредине) прикреплена петля, а к другому бруску (тоже посредине) прикреплен железный крюк такой длины, чтобы расстояние между заостренными концами ножек циркуля,



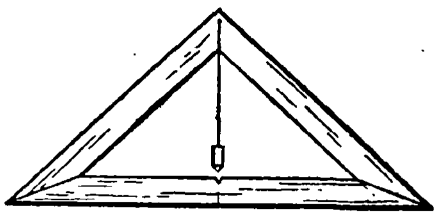
Черт. 38.



Черт. 39.

когда крюк наложен, было равно 1 *м*.

6) Эккер (черт. 39) состоит из двух планок 34 *см* × 5 *см* × × 2,5 *см*, врезанных заподлицо одна в другую так, чтобы получился прямой равноконечный крест. Вдоль каждой планки проводятся прямые линии, так чтобы они были взаимно перпендикулярны. В каждом из концов прочерченного креста нужно вбить отвесно по гвоздю без шляпки. В точке пересечения прямых просверлить отверстие и насадить крестовину с помощью гвоздя или шурупа на палку с заостренным концом так, чтобы она могла с некоторым трением вращаться. Палка делается такой длины, чтобы эккер был на уровне глаз наблюдателя. Вертикальность палки проверяется при помощи отвеса.



Черт. 40.

7) Ватерпас (уровень) можно сделать в виде равнобедренного треугольника с отвесом, имеющим достаточно длинную веревку с петелькой и грузом на конце (черт. 40). Можно использовать отвес отдельно.

Все приборы, как видно из описания их устройства, можно заказать в любой мастерской или сделать самим.

Желательно приобрести для школы рулетку и компас.

§ 111. Провешивание прямых линий и измерение расстояний

Пособия: бирки, мерная веревка или полевой циркуль, вехи (не менее трех).

Работа начинается с провешивания, потом следует перейти к измерению линий на местности.

Для провешивания линии намечают точки, между которыми нужно провешивать линию. В этих точках вбивают по одной вехе. Один ученик (измеряющий) становится у начальной вехи и намечает (визирует) линию. Другой ученик берет третью веху, отходит с ней по направлению второй вехи шагов на 10—15 от первой и ставит свою веху вытянутой рукой отвесно к земле, стоя сбоку линии, чтобы не загородить своим туловищем конечной вехи. Первый ученик дает указания, правильно ли поставлена веха; для этого он поднимает ту руку, в сторону которой нужно сместить веху. Когда веха установлена правильно, первый ученик машет рукой. Второй укрепляет ее отвесно (если же вех мало, то вместо вехи вколачивают колышек); берет четвертую веху и, пройдя дальше по линии, устанавливает эту веху уже без помощника так, чтобы она покрывала первые две вехи. Таким образом устанавливаются и остальные вехи. Когда линия будет провешена, берут полевой циркуль, мерную веревку, рулетку и измеряют по провешенной линии расстояние между начальной и конечной точками. Измерение делают другие два ученика: один удерживает конец веревки около начального кола, другой уходит вперед вдоль линии провешивания и натягивает веревку с помощью кола. Первый ученик, глядя на этот кол, следит за тем, чтобы веревка ложилась точно вдоль провешенной линии. Натянув веревку, передний ученик ставит у начального кола бирку. Затем оба ученика продвигаются с веревкой вперед, пока задний конец веревки не приблизится к бирке. Идущий сзади ученик вытаскивает бирку, а на ее место ставит кол, на который надет конец веревки, и т. д. Число подобранных учеником бирок покажет, сколько раз откладывалась веревка. Если веревка имеет 10 *м* и подобрано учеником 7 бирок, то расстояние провешенной линии равняется 70 *м*.

Необходимо организовать работу так, чтобы после этого каждые четыре ученика провели эту же работу. Учитель, убедившись, что дети усвоили порядок работ, предлагает одной четверке измерить расстояние, например, между кочкой и деревом на лугу, другой четверке — бросить камень как можно дальше и определить это расстояние. Работу необходимо всячески разнообразить, чтобы дети не скучали, например поменять задачи между четверками, одной четверке поручить проверить работу другой и т. п.

Вместо мерной веревки для измерения линии можно применить полевой циркуль. Работа эта не сложна: взяв циркуль за ручку, ученик идет с ним по провешенной линии, считая отложения, а его помощник проверяет его.

§ 112. Измерение расстояния шагами и на глаз

Пособия: колья, бирки, мерная веревка или полевой циркуль.

Когда учащиеся научатся провешивать прямые линии на земле и измерять расстояния на местности, необходимо познакомить их с определением расстояния шагами и на глаз.

Чтобы определить расстояние на глаз, выбирается расстояние между двумя точками, предлагается детям определить это расстояние, не измеряя. Учащиеся говорят примерные числа, затем делается измерение и определяются ошибки. После ряда таких упражнений, а также при всяком измерении инструментами необходимо приучать детей сначала определять расстояние на глаз, а потом уже измерять.

При измерении расстояния шагами сначала нужно рассказать детям, как определить среднюю длину шага в метрах или дециметрах. Для этого берем расстояние между двумя точками, узнаем, какое число шагов между этими точками, стараясь идти ровным вольным шагом. Затем определяют это расстояние при помощи инструментов. Наконец, полученное число метров (лучше раздробить в дециметры) делят на количество шагов каждого ученика. Промер расстояния шагами каждый ученик делает несколько раз, и тогда находится среднее арифметическое, определяющее длину шага каждого ученика.

§ 113. Построение прямого угла и прямоугольного участка на местности

Пособия: вехи, бирки, эккер, мерная веревка, отвес.

Эту работу следует связать с выполнением какого-либо конкретного задания, например наметить прямоугольную площадку для игры в футбол, наметить участок для школьного огорода и т. п.

Придя на место работы, учитель ведет такую беседу: «Какое у нас задание?» (Наметить площадку для игр.) «Какой формы должна быть эта площадка?» (Прямоугольной.) «Какой четырехугольник называется прямоугольником?» (Такой, у которого углы прямые, а противоположные стороны равны.) «Значит, чтобы наметить площадку, что нам придется сделать?» (Провести 4 линии и построить 4 прямых угла.) «С чего нам надо начать работу?» (С проведения одной из четырех линий.) «Вы уже это умеете делать и сделаете, начиная от того места, которое нам указано».

(Ученики проводят линию.) «Что дальше надо сделать?» (Отмерить на ней одну сторону площадки.) Дети отмеряют сторону и ставят на концах вехи. «Что дальше надо сделать?» (Построить на концах по прямому углу.) «На бумаге вы как строили прямые углы?» (С помощью угольника.) «На земле же это удобнее делать с помощью вот такого инструмента, который называется эккером. Рассмотрим его устройство». (Учитель объясняет устройство эккера.) «Где надо воткнуть кол с эккером?» (В этой точке.) «Кол должен стоять отвесно. Проверить это можно с помощью отвеса» (Дети проверяют.) «Теперь надо линейку эккера направить по провешенной линии. Как теперь найти линию, которая с первой линией образовала бы прямой угол?» (Надо провешить линию по направлению второй линейки эккера.) Учащиеся делают это. «Какой угол составляют две провешенные линии?» (Они составляют прямой угол.) «Таким же способом проводится перпендикуляр и во второй точке. Мы провели перпендикуляры. Что дальше надо сделать?» (Отмерить на них меньшие стороны.) «А где пройдет четвертая сторона?» (Соединит концы меньших сторон.) «Итак, мы наметили площадку. Теперь надо вычислить ее площадь. Как это сделать?» (Надо перемножить длину на ширину.)

Продолжением этой работы должно быть нанесение измеренной площадки на план, что проделывается уже в классе.

§ 114. Черчение плана

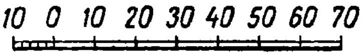
После того как тот или иной земельный участок будет зарисован с натуры, полученный материал используется в классной работе для нанесения на план. Чтобы выполнить эту работу, надо иметь следующие инструменты и наглядные пособия: 1) линейку с делением на сантиметры и миллиметры, 2) чертежный угольник, 3) циркуль-ножку.

Рассмотрим урок по вычерчиванию плана школьного огорода.

План: I. Разбор записей, сделанных при работе на местности. II. Выяснение понятия «план участка». III. Выяснение необходимости уменьшения размеров для нанесения на план. IV. Выбор масштаба. V. Вычерчивание (техника построения).

«Нам надо начертить план нашего огорода. Посмотрите в тетрадях, что мы записали». (Длина огорода 100 *м*, его ширина 60 *м*.) «Что еще мы отметили при съемке плана нашего огорода?» (Могут быть на участке колодец, караулка и т. п., часть участка может быть занята деревьями, кустами и т. д. Все это должно быть отмечено в записях.) «Сегодня будем чертить план измеренного нами огорода. Припомните, как вы чертили план класса?» (Измерили метром длину и ширину.) «Каков был участок по сравнению с классом?» (Гораздо больше.) «Может он уместиться на бумаге»? (Нет.) «Значит, чтобы начертить план нашего огорода, что надо сделать?» (Уменьшить размеры.) «Какая линия на плане заменяет метр длины (или ширины) огорода (в натуре)?» (Например, 1 *см* вместо метра, или 1 *см* вместо 10 *м*, или 1 *см* вместо 100 *м*.) На чертеже это делается так: проводится снизу чертежа прямая, на ней откладывают несколько сантиметров и обозначают их цифрами с указанием, какое расстояние на местности соответствует 1 *см* на плане (черт. 41).

«Вот такая малая мера на плане, заменяющая большую меру на местности, называется линейным масштабом. Будем чертить план нашего огорода, пользуясь этим масштабом. Повторите, какую форму имеет наш огород. Припомните, как построить прямоугольник. Проведите прямую линию. Какой длины возьмете вы основание прямоугольника?» (10 *см*.) «Почему?» (Потому что длина огорода 100 *м*, а каждый сантиметр масштаба равен 10 *м*.) «При помощи чего вы отложите 10 *см*?» (При помощи линейки.) «Что дальше надо сделать?» (Построить прямые углы на концах отложенной линии.) «Как это сделаете?» (При помощи угольника.) «Что дальше надо сделать?» (Отложить на полученных линиях по 6 *см*.) «Почему?» (Потому что ширина огорода 60 *м*.) «Что остается дальше сделать?» (Соединить концы меньших линий.)



Черт. 41.

Если на план нужно будет нанести, например, имеющийся на огороде колодец, то по записанным размерам его и расстоянию от сторон прямоугольника учащиеся, пользуясь начерченным масштабом, делают соответствующее построение на плане.

§ 115. Измерение площадей на местности

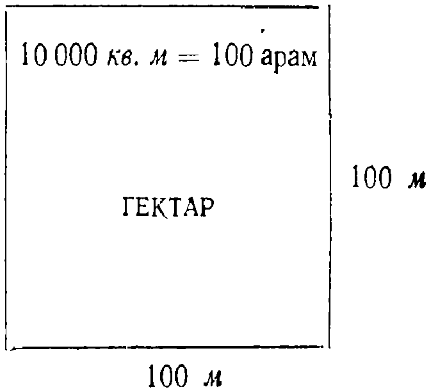
Повторение земельных мер — ара, гектара — надо проводить весной, когда можно совершать экскурсии. Изучение ара и гектара должно носить наглядный характер. Нужно разъяснить учащимся неудобство непосредственного измерения площади земельного участка даже такой сравнительно крупной квадратной единицей, как квадратный метр; после этого перейти к ознакомлению с аром. Последний, как и гектар, надо прежде всего изучить в натуре, а уж потом перейти к вычерчиванию его в масштабе и вычислениям на бумаге.

При проведении экскурсии необходимо иметь следующее оборудование: а) несколько вешек, т. е. кольев длиной около 2 *м*; б) рулетку, а за неимением ее — веревку длиной в 10 *м*, можно также применить мерный циркуль (он делается из двух нешироких дощечек — шириной 3—4 *см* — и такой длины, чтобы расстояние между его ножками было равно 1 *м* (см. черт. 38); в) эккер, для построения прямого угла (см. черт. 39).

При помощи перечисленных инструментов дети под руководством учителя строят сначала ар, вычисляют и записывают его площадь 1 *а* = 10 *кв. м* × 10 = 100 *кв. м*, затем так же строится гектар и записывается его площадь в таком виде:

$$1\ га = 100\ а = 100\ кв.\ м \times 100 = 10\,000\ кв.\ м.$$

В тетрадях полезно вычертить гектар в таком виде:



При таком подходе к изучению земельных мер у детей получаются сначала конкретные представления об этих мерах: они возникают в процессе их практической работы и уже после этого становятся орудием, инструментом для вычислений.

Окружающая жизнь дает много материала для применения полученных сведений о земельных мерах. Но учитель сделает ошибку, если использует этот материал только как материал для вычислений и закрепления сообщенного. Его необходимо использовать и в воспитательных целях; надо задачи подбирать так, чтобы числовые выкладки ярко иллюстрировали и оттеняли динамику социалистического строительства; например, на этих задачах следует показать в живых цифрах прирост площадей под техническими культурами, увеличение площади улучшенных мостовых (в городе), улучшенных дорог и т. д.

При ознакомлении с аром и гектаром надо разъяснить учащимся, что эти единицы земельных мер не обязательно имеют форму квадрата, их можно представить в виде прямоугольников, площади которых равняются 100 *кв. м*, т. е. ару и 10 000 *кв. м*, т. е. гектару. Например 5 *м* × 20 *м*; 40 *м* × 250 *м* и т. д.

ГЛАВА XVIII

ВНЕКЛАССНАЯ РАБОТА

§ 116. Общие замечания

Внеклассная работа по арифметике, как и всякая внеклассная работа по другим предметам, имеет большое образовательное и воспитательное значение. В объяснительной записке к программе по математике восьмилетней школы записано: «В целях развития у учащихся интереса к изучению математики и повышения математической культуры рекомендуется систематически проводить внеклассные занятия (кружки, школьные математические газеты, олимпиады и т. п.)» (программа восьмилетней школы по математике, стр. 4).

Внеклассная работа по арифметике обогащает детей новыми знаниями, углубляет знания, полученные во время классных занятий, воспитывает чувство коллективизма, развивает сообразительность, находчивость, упорство в достижении цели, поднимает интерес к изучению арифметики, воспитывает советский патриотизм и советскую национальную гордость при составлении арифметических задач, отражающих коммунистическое строительство нашей Родины. Эту работу учащиеся большею частью выполняют самостоятельно.

Внеклассная работа по арифметике особенно большое значение имеет в V и VI классах, так как эти занятия ликвидируют разрыв между знаниями учащихся начальной и средней школ и помогают выявить математические способности учащихся уже в этих классах.

В пятый класс приходят учащиеся с различной подготовкой и различными способностями по арифметике.

На внеклассных занятиях учителя разрешают одну из очень важных проблем: выявляют и развивают способности учащихся и повышают у них интерес к арифметике.

К внеклассной работе по арифметике относятся: занятия в математических кружках, проведение олимпиад, организация классного математического уголка, выпуск классной или общеклассной (для V и VI кл.) газеты, проведение экскурсий, вечеров с показом работы кружка и другие мероприятия.

В зависимости от целевой установки внеклассные занятия могут способствовать углублению знаний, освоению приемов быстрых вычислений, развитию активного внимания, практическому применению теоретических знаний, выявлению лучшего счетчика класса и т. д. От учителя внеклассные занятия требуют большой подготовки. Прежде чем приступить к организации внеклассных занятий, учитель должен составить план занятий.

§ 117. Кружковая работа по арифметике

Кружок по арифметике организуется из учащихся V и VI классов. При этом в зависимости от школьных условий (количества учащихся, помещения, желающих участвовать в кружке и т. п.) можно организовать два кружка по арифметике: один для пятых классов и другой для шестых классов.

Опыт кружковой работы в этих классах показывает, что организация кружка по арифметике может проводиться в таком порядке.

Составляются задачи и упражнения по арифметике, и предлагается учащимся, желающим поступить в члены кружка, выполнить письменную работу.

После проверки работ отбираются учащиеся для зачисления в члены кружка.

Организацию кружка по арифметике выполняют и другим способом. Учащимся V и VI классов предлагается (если кружок будет включать тех и других) записаться в члены кружка. Затем выбирают (для кружка) учащихся, имеющих оценки «5» и «4» (а иногда и «3»). Из членов кружка выбирается староста. Руководителем кружка обычно является учитель; составляется устав и план работы кружка по арифметике.

Опыт кружковой работы школ показывает, что содержание устава отражает следующие положения:

Занятия кружка обычно проводятся один раз в неделю. Каждый член кружка обязан участвовать в занятиях кружка. После двух пропусков занятий кружка без уважительных причин ученик исключается из числа членов кружка без права поступления в кружок до конца года.

Общее собрание может исключить также и членов, не выполняющих аккуратно поручения, данные руководителем кружка или старостой. Поведение кружковцев должно быть образцовым и члены кружка не должны иметь двоек.

Нередко на внеклассных занятиях учащиеся работают более успешно, чем на классных, — тем самым подтверждается, что хорошо поставленная внеклассная работа по арифметике способствует более успешному обучению.

Каждое занятие должно иметь целевую установку.

Первое занятие должно быть особенно хорошо подготовлено, чтобы создать интерес у учащихся к дальнейшей работе. Основным содержанием работы кружка должно быть составление и решение задач, связанных с жизнью, трудом и практикой коммунистического строительства, развитие у учащихся самостоятельности и инициативы, проведение практических работ, углубление знаний учащихся в области арифметики, развитие математического мышления и интереса к изучению математики, знакомство с историей математики, с жизнью и деятельностью выдающихся математиков.

Работа группы учащихся в кружке имеет значение и для всего класса. Члены кружка — первые помощники учителя в изготовлении наглядных пособий, в проведении экскурсий, в выпуске математической газеты, в организации конкурса на лучшего математика класса или школы, в устройстве математических вечеров, в организации математического уголка класса и т. п.

На кружковых занятиях решаются замысловатые задачи, головоломки, загадки, осваивают приемы быстрого счета, технику вычислений на счетах и т. д., на занятиях используются различные таблицы, проводятся настольные игры, инсценировки и т. п.

Для кружковых занятий можно брать задачи, не являющиеся обязательными в курсе арифметики V и VI классов, например задачи на замену, на уравнивание и т. п.

Практика показывает, что учащиеся с большим интересом решают задачи на сообразительность, головоломки, задачи-загадки.

С большим интересом учащиеся решают задачи-расчеты на озеленение школьного участка, бюджет семьи, составление смет, на оклейку комнаты, на побелку класса и т. п. К подбору числовых данных для этих задач привлекаются учащиеся.

Учитель сам составляет и обучает учащихся составлению интересных задач, содержание которых связано с другими предметами: с естествознанием, географией, физикой, историей; использовать можно данные, например, о размножении растений, рыб, птиц, животных, о числе зерен различных культур в 1 *кг*, о скорости передвижения животных, птиц, машин (велосипеда, парохода, поезда, автомобиля, самолета), о дальности перелета птиц, о высоте полета птиц (сравнить с высотой облаков, с высотой полета самолета, воздушных кораблей, спутников Земли и т. д.), использовать знаменательные даты открытий из области науки, техники, культуры, искусства и т. п. Такие задачи развивают кругозор учащихся. Учителю и учащимся для составления подобных задач необходимо собирать соответствующий материал.

В воспитательных целях учитель и учащиеся на кружковых занятиях составляют задачи, которые показывают грандиозность нашего коммунистического строительства.

§ 118. Математическая газета

Математическая газета имеет целью развитие интереса к математике.

Для работы по сбору материала можно выбрать редактора математической газеты. Он привлекает к работе других членов кружка — организуется редколлегия газеты. Отбором материала (в соответствии с вычислительными навыками читателей-учащихся) руководит учитель.

Газета должна содержать материал как для сильных, так и для средних и слабых учащихся.

В газете должна быть отражена кружковая работа и других внешкольных мероприятий, интересные доклады учащихся, составленные учащимися задачи (связанные с жизнью, трудом и практикой коммунистического строительства), решения оригинальных и интересных задач, занимательные задачи и квадраты, задачи-загадки, ребусы двух родов с восстановлением стертых цифр и с нахождением цифрового состава чисел, записанных буквами.

К оформлению газеты привлекаются учащиеся с четким, разборчивым почерком. Первый номер газеты должен быть особенно красочным, оформлен соответствующими рисунками.

Среди рисунков в газете можно поместить портреты выдающихся математиков с краткой их биографией. К участию в газете надо привлекать по возможности большее количество учащихся, как членов кружка, так и не состоящих членами кружка.

В зависимости от количества учащихся, их интереса к классной и внеклассной математической работе газету можно выпускать 3—6 раз в течение учебного года.

Если мало материала для выпуска математической газеты, можно организовать математический уголок в общешкольной или классной газете, поместив в ней математические загадки, головоломки, задачи, ребусы и т. п.

Интерес к газете возрастает, если газетный материал используется в классе. Например, учащимся, справившимся с решением газетных головоломок или задач, можно дать на уроке время для их объяснения классу, или же учитель на уроке разбирает с классом какую-нибудь интересную задачу, головоломку, вводя таким образом занимательную арифметику в классные занятия. Учитель ведет наблюдение, кто из учащихся с интересом относится к газете, кто не обнаруживает интереса. Наиболее активных ребят следует отметить в газете.

§ 119. Математический уголок

Желательно, чтобы каждая восьмилетняя школа имела математический кабинет. Если его нет в школе, то обязательно следует организовать хотя бы математический уголок для V—VI классов.

Здесь мы не будем останавливаться на организации, содержании и работе математического кабинета, а остановимся на математическом уголке для V—VI классов, будет ли он при математическом кабинете или за отсутствием последнего организован самостоятельно. Цель математического уголка для V—VI классов — закрепление и углубление знаний по математике.

Уголок создается при активном участии учащихся. При организации математического кружка для V—VI классов можно выбрать одного из членов математического кружка в качестве лаборанта, который будет председателем группы учащихся при математическом уголке. Кроме лаборанта, в эту группу полезно ввести еще 6 учащихся, которые будут ежедневно дежурить, когда это нужно, в математическом кабинете, а все 7 человек выполняют работу по математическому уголку.

Лаборант — председатель и все члены группы математического уголка собирают и оформляют все материалы проведенных внеклассных мероприятий: кружковой работы, математической газеты, математической викторины, математических вечеров, экскурсий.

В результате такой работы в математическом уголке помещаются математические газеты, планы, программы математических кружков, задачи, самостоятельно составленные членами математического кружка, образцы жизненно необходимых задач с их решениями, например задачи-расчеты на озеленение школьного участка, доклады учащихся на различные темы в кружках, образцы контрольных работ, занимательные задачи и их решения, оригинальные решения задач, приемы быстрых вычислений, работы, проведенные на математической олимпиаде и викторине, самодельные наглядные пособия, таблицы, рисунки, чертежи, которые были выполнены на классных и внеклассных занятиях и т. п.

Кроме работ, которые были выполнены на классных и внеклассных занятиях, в математическом уголке должны быть справочники цен, нормы выработки, скорости передвижения животных, полета птиц, самолетов и т. п.; портреты ученых-математиков, различные таблицы для вычислений, приборы для практических работ (полевой циркуль, вехи и т. п.), ребусы двух родов, фокусы и загадки, доска с новыми арифметическими задачами, числа-великаны и т. п.

Все это надо иметь для того, чтобы члены и не члены кружка могли получить сведения в математическом уголке для составления задач и различных других целей в своей работе.

§ 120. Экскурсии

В связи с законом о перестройке школы очень большое значение имеет проведение экскурсий на производство: в совхозы, колхозы, на заводы, фабрики, электростанции и т. п. На экскурсии учащиеся знакомятся с жизнью, трудом и практикой коммунистического строительства. Здесь они получают восприятие натуральных предметов, явлений и процессов в условиях их естественного окружения. Экскурсии вносят оживление в обучение, пробуждают, усиливают интерес к предмету; особенно важно их воспитательное значение: они учат детей уважать, ценить и любить труд.

Кроме экскурсий на производство, в V и VI классах при изучении арифметики и наглядной геометрии обязательно должны быть выполнены всем классом во внеклассной обстановке измерения на местности. Содержание и методика измерения на местности даны в главе XVII «Практические работы». Вместе с этой обязательной работой, в зависимости от постановки цели, на экскурсии учащиеся могут научиться: определять стороны горизонта по компасу, ориентироваться на местности без компаса, находить дорогу по плану, читать план местности, определять ширину реки, дальность расстояния, высоту предмета по тени и т. п.

Эффективность экскурсии в значительной степени зависит от тщательной подготовки самого учителя, учащихся, руководителя экскурсии на производстве и рабочих, с которыми будут встречаться учащиеся и получать разъяснения по тому или иному вопросу.

Прежде всего учитель уясняет себе цель экскурсии: какое воспитательное значение она будет иметь для учащихся, какой числовой материал он предполагает получить для составления задач. В соответствии с целью экскурсии учитель разрабатывает ее план, в котором намечаются вопросы для организации наблюдения на экскурсии. Директор же и заведующий учебной частью должны оказать помощь в подготовке экскурсии.

После составления плана экскурсии учитель должен обязательно побывать на объекте экскурсии. Он должен поехать на производство, осмотреть объекты наблюдения учащимися, подготовить руководителя экскурсии на производстве, подробно рассказать ему о цели и плане экскурсии.

В то же время он сам должен получить инструкции от ее руководителя. Таким образом, на производстве должна быть проведена тщательная обоюдная подготовка учителя и руководителя экскурсии, каждый из них должен ясно представлять свою роль в проведении экскурсии. Надо выяснить, будет ли объяснения во время экскурсии давать руководитель или только учитель, во втором случае учитель должен очень внимательно изучить объект экскурсии.

При подготовке к экскурсии, в которой имеется тема «Измерения на местности», учитель должен учесть, что занятия будут проводиться на открытом воздухе, где внимание учащихся рассеивается и работу проводить труднее, чем в классной обстановке.

Составляя план экскурсии, необходимо отвести время на отдых и подумать, чем занять учащихся в эти минуты. Рекомендуется во время отдыха на экскурсии проводить игры — подвижные, сидячие, игры-развлечения, игры-эстафеты и т. п.

Если на экскурсию отводится полтора — два часа, то из этого времени на образовательную работу выделяется от часа до часа двадцати минут. Перерывы делаются два-три раза по 15—20 минут каждый.

Экскурсии для работы на местности можно строить по такому плану. Готовясь к экскурсии, учитель должен:

1. Ознакомить учащихся с ее целью и содержанием.
2. Предусмотреть обеспечение учащихся измерительными и другими приборами.
3. Четко спланировать все отдельные моменты работы продолжительностью в 15—20 минут.
4. Организовать отдых в процессе экскурсионной работы.
5. Разбить учащихся на группы и каждой группе или индивидуально некоторым учащимся (если это нужно в зависимости от условия проведения экскурсии) дать определенные задания, которые учитель заранее подготовил.
6. Подготовить материал для подведения итога проведенной экскурсии.
7. Дать учащимся задания с целью подкрепления полученных выводов.

При подготовке к такого рода экскурсии учитель должен предварительно побывать на месте экскурсии и проделать там с двумя-тремя ближайшими помощниками намеченные для экскурсии работы.

§ 121. Математические олимпиады

В последнее время проводятся школьные, городские, а также районные, областные и республиканские математические олимпиады.

Олимпиада повышает уровень подготовки учащихся и, как всякая внеклассная работа, поднимает качество работы учителя.

Одна из форм проведения олимпиады следующая.

Учителя подготавливают «положение» об олимпиаде, определяют, каким числом очков учитывать решение задачи или упражнения, сколько времени отвести на подготовку, сколько очков засчитывать учащемуся, если он только наметил план решения, вопрос о консультациях, проводимых во время подготовки к I и II турам олимпиады, срок проведения олимпиады и т. п.

Учителя подготавливают набор задач и упражнений для тренировки учащихся перед I и II турами и для решения в I и II турах. Школьная математическая комиссия утверждает предложенный материал.

Перед каждым туром вывешивается набор 10—20 задач и упражнений, вопросов на сообразительность для тренировки. В первом наборе не следует давать очень трудных задач, чтобы не подорвать у учащихся веру в свои силы.

Это же требование относится и к задачам I тура. Опыт показывает, что учащимся V—VI классов для I тура можно дать две задачи трудности выше средней и один вопрос на сообразительность на срок 2 астрономических часа.

Перед II (заключительным) туром также дается набор тренировочных задач и упражнений, но уже повышенной трудности и проводится консультация по разбору их решений.

Ко II туру допускаются учащиеся, получившие установленное число очков согласно принятому «положению об олимпиаде». Выполнение тренировочных задач обычно не зачитывается.

Опыт показывает, что олимпиаду можно проводить и в другой форме, а именно: каждому классу дается набор из 10—15 задач для письменного решения дома, на срок не более 2-х недель. Выполнение оценивается числом очков согласно принятому «положению» — это I тур олимпиады. Ко II туру допускаются учащиеся, набравшие установленное число очков. Во II туре для учащихся V—VI классов даются 2 задачи и 1 вопрос для письменного решения за 2 астрономических часа. Вручение призов победителям олимпиады нужно провести возможно торжественнее.

Олимпиады обычно проводятся в период с 15 января по 15 марта. На всю олимпиаду отводится примерно $1\frac{1}{2}$ месяца.

К участию в I туре внутришкольной олимпиады допускаются все желающие учащиеся.

Победители школьных олимпиад — кандидаты на районную или городскую олимпиаду.

Из числа победителей районных или городских олимпиад выделяются учащиеся для участия в областной олимпиаде.

Районные или городские олимпиады должны проводиться одновременно во всех городах и районах области в срок, установленный облоно. Задания подготавливаются кабинетом математики областного института усовершенствования учителей с участием кафедр педагогических институтов.

Чтобы облегчить учителям подготовку учащихся к математическим олимпиадам, облоно рассылает на места набор тренировочных задач и упражнений и рекомендации к проведению олимпиады.

Из числа победителей областных олимпиад выделяются команды на республиканскую олимпиаду.

Первая республиканская олимпиада была проведена в апреле 1960 г. в г. Москве. В этой олимпиаде участвовали команды от 10 союзных республик.

Олимпиады помогут повысить уровень математической подготовки учащихся, выявить наиболее одаренных, поднять качество работы учителя.

ОГЛАВЛЕНИЕ

От автора 2
Введение 3
Глава I. Методы обучения арифметике 8
Глава II. Самостоятельная работа учащихся 24
Глава III. Урок 35
Глава IV. Планирование программного материала по арифметике в V и VI классах 56
Глава V. Повторение. Устранение пробелов в знаниях учащихся 65
Глава VI. Учет успеваемости по арифметике 78
Глава VII. Арифметические примеры и задачи 95
Глава VIII. Методика устных вычислений на уроках арифметики . 156
Глава IX. Натуральные числа 181
Глава X. Обыкновенные дроби 211
Глава XI. Десятичные дроби 274
Глава XII. Совместные действия над обыкновенными и десятичными дробями. Отношение величин 316
Глава XIII. Приближенные вычисления 327
Глава XIV. Проценты 349
Глава XV. Пропорции. Прямая и обратная пропорциональность величин 360
Глава XVI. Элементы геометрии в курсе арифметики V—VI классов 401
Глава XVII. Практические работы 409
Глава XVIII. Внеклассная работа 416

Я. Ф. ЧЕКМАРЕВ

МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ АРИФМЕТИКИ

Редактор *Г. С. Уманский*
Обложка художника *С. Я. Нодельмана.* Художественный редактор *Б. Л. Николаев.*
Технический редактор *М. И. Смирнова.* Корректор *К. А. Иванова*

* * *

Сдано в набор 3/XI-1964 г. Подписано к печати 20/III-1965 г. $60\times90^1/_{16}$. Печ. л. 26,5. Уч.-изд. л. 24,70. Тираж 104 тыс. экз. А00112. (Тем. план 1965 г. № 237). Заказ № 177.

* * *

Издательство «Просвещение» Государственного комитета Совета Министров РСФСР по печати. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Саратовский полиграфический комбинат Росглавполиграфпрома Совета Министров РСФСР по печати. г. Саратов, ул. Чернышевского, 59.

Цена без переплета 67 коп., переплет 10 коп.