Н. С. ПОПОВА

МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ АРИФМЕТИКИ В НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЕ

ПОСОБИЕ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ

Утверждено Министерством просвещения РСФСР

ГОСУДАРСТВЕННОЕ УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
ЛЕНИНГРАДСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
Ленинград · 1955

ОТ АВТОРА

В начальном курсе арифметики, несмотря на всю его элементарность, раскрываются в доступной детям форме основные арифметические понятия.

Путь к этим понятиям идет от непосредственных восприятий предметов и явлений окружающей действительности. Отсюда огромное значение наглядности в начальном обучении арифметике.

Центральное место в работе над арифметическим материалом занимает словесное рассуждение сначала на основе непосредственного восприятия, затем по представлению. Только после этого можно давать определения и правила. Иначе говоря, понимание должно предшествовать запоминанию. Простое запоминание арифметических фактов, в частности, простое запоминание таблиц арифметических действий без предварительной работы над вычислительными приемами лишено образовательного значения.

Формирование арифметических понятий в начальной школе обеспечивается системой практических упражнений и представляет собою длительный процесс, который получает свое относительное завершение лишь в средней школе.

Работа над арифметическим материалом предполагает широкое применение получаемых знаний и навыков как на уроках в школе, так и при выполнении практических заданий во внеурочное время.

Итак, в работе над любым вопросом курса арифметики следует идти, согласно требованиям дидактики, от восприятия и понимания к запоминанию и применению.

Настоящее пособие отличается от других методических руководств отсутствием некоторых глав, содержание которых устанавливается не столько методическими соображениями, сколько официальными документами и инструкциями. Сюда относятся: „Анализ программы по арифметике в начальной школе“, „Планирование и учет“ и др. Не выделен в особую главу вопрос о методах преподавания арифметики, так как целесообразнее рассматривать его по частям: „аналитический“ и „синтетический“ методы решения задач — в главе о задачах; метод изучения чисел и метод изучения действий — в историческом очерке, который служит вступлением к методике изучения целых чисел в советской школе; графический метод — при ознакомлении учащихся с простейшими дробями и элементами геометрии.

Решение арифметических задач связано со всеми вопросами начального курса. Поэтому главу о задачах можно поставить либо в самом начале, либо в конце, после всех остальных вопросов. По установившейся традиции мы даем ее вначале, тем более, что этим обеспечивается присущая начальному курсу практическая направленность.

В методике преподавания арифметики существует много разногласий. Разногласия эти касаются таких вопросов, как классификация основных видов простых задач; применение при решении составных задач так называемого „анализа" и „синтеза"; метод и план работы над первым десятком; порядок изучения табличного умножения и деления; форма записи деления по содержанию при решении задач; система расположения внетабличного умножения и деления; порядок изучения нумерации многозначных чисел, письменного умножения и деления; методика работы над делением многозначных чисел и др.

Желательно, чтобы учителя начальной школы принимали более активное участие в разработке методических проблем, проверяли на опыте различные варианты решения спорных вопросов и содействовали таким образом улучшению преподавания арифметики в начальной школе.

Автор

24 июня 1955 года

I. ОСНОВНЫЕ АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ В НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЕ

Не только начальный, но и систематический курс арифметики, который изучается в V и VI классах, существенно отличается от теоретической арифметики, т. е. от арифметики как науки.

В теоретической арифметике прежде всего излагается та или иная система аксиом, а затем из этой системы выводится чисто дедуктивным путем ряд истин, относящихся ко всем категориям чисел, начиная с натуральных и кончая комплексными.

Систематический курс арифметики в средней школе также представляет собою систему понятий, однако он далеко не охватывает всех тех вопросов, которые входят в состав теоретической арифметики, и не обеспечивает той строгости определений и доказательств, которая присуща этой науке.

Еще менее строгим в логическом смысле этого слова является начальный курс. От систематического он отличается прежде всего концентрическим расположением материала и широким применением наглядности. Арифметические действия не определяются, а поясняются на предметах. Относящиеся к этим действиям правила носят преимущественно частный характер. Законы арифметических действий усваиваются практически в процессе вычислений. Обобщения осуществляются постепенно, в несколько приемов. Вообще же, арифметические понятия не достигают в начальной школе и того уровня общности, который доступен учащимся V класса.

Однако, при всей элементарности начального курса его основой является все же система отвлеченных понятий. Ценность знаний, которые должны быть получены детьми в начальной школе, зависит от усвоения этих отвлеченных понятий. Можно научить детей производить арифметические действия над целыми числами, не раскрывая сущности механизмов действий. Но в результате такого преподавания уровень развития учащихся начнет неизбежно отставать от уровня сообщаемых им знаний. Последствия отставания обнаружатся, быть может, не сразу, но с каждым годом разрыв между требованиями программы и развитием детей будет становиться все глубже. Только работая над определенной системой понятий, добиваясь прежде всего ясных, отчетливых представлений и столь же четких словесных формулировок, можно подвести учащихся начальной школы к некоторым доступным им обобщениям. Это даст возможность обеспечить в дальнейшем, уже в V классе, сознательное отношение к определению действий, к формулировке их законов и к расширению понятий действий при знакомстве с умножением и делением дробей.

Учащиеся начальной школы имеют дело только с натуральными числами, которые в теоретической арифметике получают название целых в отличие от дробных и целых положительных в отличие от целых отрицательных. Проблемой расширения понятия числа начальная школа не занимается. Впрочем, в порядке чисто пропедевтическом учащиеся получают конкретное представление о целом и его части, об одной и нескольких равных долях круга или квадрата и отсюда — понятие об одной и нескольких равных долях единицы. Этот пункт программы дает основание и в начальной школе называть натуральные числа „целыми числами“ в отличие от простейших „дробей“. Вообще же, если иметь в виду сколько-нибудь серьезную постановку вопроса о расширении понятия числа, то этот вопрос рассматривается в доступной для учащихся форме в курсе математики средней школы.

Основой всех арифметических действий над целыми числами является счет. Таким образом в начальной школе приходится в первую очередь иметь дело с понятием числа[1] и с операцией счета. Остановимся

---

[1] В данном случае, как и в последующем изложении, слово „число“ надо понимать, как „натуральное число“.

подробнее на вопросе о возникновении первоначальных числовых представлений и на взаимосвязи между этими представлениями и счетом.

Число и счет

В основе всех математических дисциплин, в частности, и в основе арифметики лежат те или иные первоначальные понятия. Первоначальные понятия, будучи исходными, не поддаются чисто логическим определениям. Они не „определяются", а „вводятся" посредством соответствующей, логически непротиворечивой системы аксиом, т. е. истин, принимаемых без доказательств.

Математики идеалистического направления рассматривают аксиомы и первоначальные понятия как произвольно выбранные нами символы, знаки, вне какой-либо связи с реальной действительностью.

В. Н. Комаров в своей теоретической арифметике цитирует слова одного немецкого математика: „Число — это во всяком случае произвольно выбранный нами знак, служащий средством достижения весьма разнообразных целей".[1] За основные понятия в арифметике этот математик рекомендует принять „натуральное число", „предшествует", „следует за" и „непосредственно"... „Когда читатель встретит фразу: натуральное число *a* предшествует другому натуральному числу *b*, он может подразумевать под этим все, что ему угодно, лишь бы конкретное содержание, которое будет вкладываться в эту отвлеченную фразу, не оказалось в противоречии с аксиомами".[2]

Такова точка зрения математиков идеалистического направления. Основоположники марксизма, наоборот, учат нас, что исходные математические понятия, содержание которых раскрывается посредством аксиом, вовсе не являются нашими произвольными измышлениями.

„Как понятие числа, так и понятие фигуры заимствованы исключительно из внешнего мира, а не возникли в голове из чистого мышления".[3]

Аксиомы, которые раскрывают содержание исходных

---

[1] В. Н. Комаров. Теоретические основы арифметики и алгебры. 1929, стр. 23.

[2] Там же. 1929, стр. 26.

[3] Ф. Энгельс. Анти-Дюринг. 1953, стр. 37.

понятий, недоказуемы средствами самой математики. „Спенсер прав в том отношении, что кажущаяся нам самоочевидность этих аксиом унаследована нами. Они доказуемы диалектически, поскольку они не чистые тавтологии“.[1]

Не останавливаясь подробнее на сущности аксиоматического метода обоснования арифметики, подчеркнем только, что понятие числа не возникло из чистого мышления. Являясь исходным, оно не поддается формально-логическому определению. Формальные теории обоснования арифметики посредством той или иной системы аксиом — теория количественного числа Кантора и теория порядкового числа Пеано — отражают каждая лишь одну сторону дела и приводят „к неразрешенным методологическим проблемам общего характера“.[2]

Но даже если бы удалось построить единую непротиворечивую систему аксиом для всестороннего обоснования понятия числа, самое понятие это все же осталось бы за пределами формально-логических построений. Его содержание пришлось бы все равно раскрывать другими средствами, разъяснять „диалектически“.

Диалектика требует, чтобы любое явление, любая вещь, любое понятие рассматривались с точки зрения их движения, их изменения, их развития. То же требование относится к понятию числа и к тесно связанной с ним операции счета. Оно приводит нас, с одной стороны, к истории развития числовых представлений у первобытных народов (т. е. к развитию в филогенезе), а с другой стороны, к развитию первоначальных числовых представлений у ребенка в раннем детстве (т. е. к развитию в онтогенезе). На значение для теории познания умственного развития ребенка прямо указывал В. И. Ленин.[3]

Необходимо тут же подчеркнуть, что было бы грубой ошибкой отожествлять явления онтогенеза и филогенеза. У ребенка числовые представления развиваются иначе, чем в процессе истории. Оба процесса интересуют нас лишь в том отношении, что оба они дают возможность

---

[1] Ф. Энгельс. Диалектика природы. 1950, стр. 205.
[2] И. В. Арнольд. Теоретическая арифметика. 1939, стр. 11.
[3] В. И. Ленин. Философские тетради. 1947, стр. 297.

понять сложную природу числа, двойственный характер этой природы.

Изучая развитие числовых представлений в онто- и филогенезе, мы приходим к убеждению, что понятие числа и операция счета возникают одновременно при условии взаимодействия категории количества и категории порядка, хотя обе эти категории могут существовать независимо от числа и счета и независимо одна от другой. Поясним последнее положение конкретными примерами.

Представим себе пачку конвертов и набор почтовых марок. Наклеив на каждый конверт по одной и только по одной марке, мы установим между этими двумя группами предметов (двумя множествами) соотношение либо равномощности, либо неравномощности. В самом деле, в одном случае марок может быть как раз столько же, сколько конвертов; в других случаях марок может быть либо больше, либо меньше, чем конвертов.

Итак, не прибегая к счету и даже не умея называть числа, мы получаем представление о количественном соотношении двух множеств посредством установления между ними взаимно однозначного соответствия.

Категория порядка также может существовать в нашем сознании независимо от числа и счета и независимо от количественных отношений. Дни недели, месяцы года мы различаем просто по названиям, что не мешает нам помнить порядок их следования одного за другим. Мы знаем, что за августом следует сентябрь даже в том случае, если забыли, что август восьмой месяц, а сентябрь — девятый.

Теперь посмотрим, как возникали числовые представления в филогенезе и как они развиваются в онтогенезе.

Количественные представления первобытного человека связаны с так называемыми стандартными множествами: нос или луна (один), руки или крылья (два), нога страуса (три), нога птицы (четыре), рука (пять) и т. п.

Первобытный человек устанавливал взаимно однозначное соответствие, например, между „ногой страуса" и числом убитых животных, или между „рукой" и числом членов своей семьи. Пользуясь такими общеизвестными группами, как „нога страуса", „рука" и т. д., люди понимали друг друга, не умея считать и не прибегая к помощи специальных слов — числительных. Количественная оценка множества осуществлялась на основе его сопоставления с другим, общеизвестным множеством, причем сами стандартные множества никак не связывались одно с другим, соответствующие им понятия не располагались в последовательный ряд и поэтому не могли выступать в качестве компонентов арифметических действий.

Известны и другие формы доарифметических операций, которые опираются не на стандартные множества, а на определенную пространственную последовательность элементов множества. Так, например, островитяне Торресова пролива устанавливают по отношению к своему собственному телу такую последовательность элементов: начинают с мизинца левой руки, перебирают затем остальные пальцы этой руки; далее следует запястье, локоть, плечо, грудная кость, а затем соответствующие сочленения правой стороны тела от плеча до мизинца правой руки. В деловых сношениях туземец довольствуется указанием той части тела, до которой он дошел, перебирая по одному предметы интересующей его совокупности. Слова, которыми он при этом пользуется, „являются просто названиями частей тела, а отнюдь не числительными“.[1] Каждое из этих слов, взятое само по себе, не может служить количественной характеристикой множества.

Спрашивается, как же на основе элементарных количественных и порядковых представлений возникают в филогенезе сознательный счет и полноценные числовые представления.

Простейшая группа из двух элементов (глаза, руки, крылья) играла до поры до времени только роль стандартного множества, с которым сравнивались другие множества. Но наступает, повидимому, момент, когда внутри этой группы первобытный человек начинает различать „этот“ и „тот“ элемент, один и другой, первый и второй. Слово, обозначавшее количество „два“ (крылья), занимает определенное место после слова „нос“. Зарождается счет до двух, и становятся полноценными

---

[1] Л. Леви-Брюль. Первобытное мышление. 1930, стр. 124.

числовые представления один и два. На этом уровне находились сравнительно недавно некоторые австралийские племена, которые считали так: один, два, много.

Следующий шаг вперед — продвижение счета до трех и завоевание еще одного числа — три. „Этот и тот",— считает первобытный человек. „Еще раз этот",— продолжает он, узнавая в новой группе знакомое ему стандартное множество —„нога страуса". И название группы (нога страуса) занимает, наконец, свое место в ряду, становится счетным словом, числительным. Оно обозначает теперь не только три, но и третий, не только третий, но и три. „Еще раз тот" позволяет продвинуть счет до четырех и овладеть еще одним числом натурального ряда.

Процесс расширения числового ряда протекал в филогенезе (в связи с историей развития первобытного человека) крайне медленно. Многие тысячелетия потребовались для того, чтобы создать устную и письменную нумерацию.

У ребенка, который развивается в условиях современной культуры, понятие числа и операция счета формируются, конечно, неизмеримо быстрее, чем они складывались когда-то в человеческом обществе, но диалектически сложная природа числа и счета обнаруживается и в онтогенезе.

Еще не умея считать, ребенок различает знакомые группы предметов в количестве двух и даже трех: два чулочка, два башмачка, три куколки и т. п. Такое непосредственное восприятие множества свидетельствует о зарождении у ребенка количественных представлений, однако, в это время он еще далек от овладения понятием числа.

Такой же доарифметический характер имеет механическое называние детьми некоторых числительных, даже если эти числительные располагаются в порядке натурального ряда. О неполноценности такого „счета" свидетельствует тот факт, что, сосчитав правильно предметы данной группы, например, собственные пальцы, ребенок не может ответить на вопрос, сколько их всего. В это время у некоторых детей можно наблюдать любопытное явление: каждое числительное закрепляется за определенным предметом, как бы прирастает к нему.[1] Так, Ниночка П. в возрасте около 3 лет умела считать свои пальчики, только начиная с мизинца. Слово „один" она связывала только с мизинцем, слово „пять" всегда относилось к большому пальцу. Пересчитав пальчики на одной руке, она не могла продолжать счет на другой, хотя и знала числительные шесть, семь и т. д. Мизинец второй руки был не „шесть", а „один", большой палец был не „шесть", а „пять". Образовавшаяся связь знаменует тот важный в развитии числовых понятий момент, когда в сознании ребенка начинает создаваться необходимое для счета „упорядоченное множество" — словесный числовой ряд. В этот момент группа как целое временно перестает существовать, зато в языке ребенка появляются порядковые числительные — второй, вторая.

У той же Ниночки на пороге четвертого года удалось впервые обнаружить соединение счета с распознаванием числа два. Отвечая на вопрос, сколько у куклы ножек, девочка сделала легкое движение рукой, как при счете, и уверенно отвечала „две". Расчленив два на один и один, она сознательно ответила на вопрос „сколько всего?" Слово „два" оказалось включенным в активный словарь ребенка. Рисуя человечка, Ниночка говорит по собственной инициативе: „два глазика".

„Две ножки", „два глазика" являются наиболее приметными стандартными группами. Не мудрено, что именно по отношению к одной из этих групп могло впервые осуществиться как сознательное применение счета, так и сознательное распознавание числа. Заметим, что обе эти функции выступили одновременно, во взаимосвязи, хотя и ограничивались на первых порах весьма тесными рамками — числом два. За пределами этого числа на вопрос „сколько всего?" ребенок еще не дает ответа. Называние числительных по порядку продолжает сохранять свой доарифметический характер.

Решительный сдвиг наступил позднее, когда Ниночке было $3^1/_2$ года. Надо отметить, что девочке не приходилось иметь дела с числовыми фигурами. Не потому ли произошла некоторая задержка в развитии ее числовых

---

[1] Н. С. Попова. Очерки по методике арифметики (Неопубликованная диссертация). 1945. Глава III. „К вопросу о развитии первоначальных числовых представлений в раннем детстве".

представлений, что, наряду с называнием числительных по порядку, чем она уже владела, ей нехватало второго фактора — пространственного образа?

Роль числовых фигур в опыте Ниночки сыграли цифры, с которыми она познакомилась случайно, играя листками отрывного календаря. Она уже хорошо умела узнавать и называть первые пять цифр, когда ей было предложено на листок с цифрой четыре положить соответствующее число карамелек. Сначала операция не удавалась: девочка накладывала карамельки одну за другой, считая их, но не обращая внимания на цифру. Так дело дошло до шести карамелек. Вопрос „разве это четыре?" заставил девочку остановиться и задуматься. Сняв три карамельки, она еще раз пересчитала оставшиеся три. Ей было снова предложено посмотреть на цифру. Тогда она быстро добавила одну карамельку и сказала уверенно: „вот четыре".

Операция счета, однажды удавшаяся по отношению к числу „четыре", была без труда перенесена на остальные числа первого пятка. Теперь последнее произнесенное числительное выражало не только порядковый номер последнего элемента множества, но и количество всех перенумерованных элементов.

Напомним, что развитие числовых представлений в онтогенезе не является повторением их развития в филогенезе. Однако, все приведенные факты вскрывают двойственную природу как понятия числа, так и операции счета. Эти факты показывают, что понятие числа и операция счета возникают и развиваются параллельно в постоянной и тесной взаимосвязи.

Двигаясь по этому пути вперед, человечество создает так называемые „узловые числа", которые для своего времени были предельными, которые далее привели к счету парами, пятками, дюжинами, десятками и пр. и обусловили возникновение различных систем счисления, что, в свою очередь, позволило неограниченно расширить числовой ряд.

В то же время и, повидимому, с такой же постепенностью, как числовой ряд, возникали и развивались арифметические действия, без которых не могла бы сложиться никакая система счисления. Вот почему мы сделаем сначала краткий обзор арифметических действий и только после этого вернемся к счету, а именно, рассмотрим вопрос о системах счисления, а также о устной и письменной нумерации.

Что касается собственно методических выводов из всего сказанного о числе и счете, то подробнее этот вопрос раскрывается в специальной главе, посвященной работе над I десятком. Здесь мы отметим только некоторые основные положения.

Счет требует, как мы видели, установления взаимно однозначного соответствия между элементами множества и последовательными числами натурального ряда, начиная с единицы. На основании этого надо прежде всего научить детей правильно устанавливать взаимно однозначное соответствие при счете: произнося числительное, ученик должен в то же время прикасаться карандашом или указкой к соответствующему предмету. Ребенок еще не способен мысленно расчленить группу предметов на отдельные подгруппы и заменить счет сложением, как это делает взрослый, когда приходится считать „глазами". Впрочем, и взрослый не может пересчитать „глазами" сколько-нибудь значительную группу однородных предметов, особенно, если они расположены в один ряд.

Далее, поскольку счет связан с предметами, следует взять под сомнение такие выражения, как „отвлеченный счет" и „обратный счет". Можно называть отвлеченные числа в порядке натурального ряда и в обратном порядке, но это не счет.

Учитывая двойственную природу числа и счета, необходимо пользоваться при изучении первого десятка пособиями двоякого рода: предметами, расположенными в один ряд, и предметами, расположенными в виде числовой фигуры. В первом случае при счете яснее выступает порядковое значение числа, во втором случае — его количественное значение. При этом дети должны уметь пользоваться не только количественными, но и порядковыми числительными.

Наконец, необходимо задавать детям вопросы двоякого рода: 1) что больше — 3 или 4? что меньше — 2 или 3? 2) какое число следует за числом 3? за каким числом следует число 5? Такими вопросами мы уточняем количественные и порядковые отношения между числами первого десятка.

I Краткий обзор арифметических действий

Из основной арифметической операции — счета развились все арифметические действия. При наличии предметов все действия можно выполнять посредством счета, пересчитывания. Но такие действия над группами предметов не являются еще в полном смысле слова арифметическими действиями, т. е. действиями над числами.

Выполнение собственно арифметических действий обусловлено применением законов арифметических действий. Так, чтобы выполнить без предметов простейшее сложение, надо не только владеть словесным числовым рядом, но, кроме того, уметь пользоваться сочетательным законом сложения, т. е. уметь присчитать второе слагаемое к первому по единице: $5+3=5+1+1+1$.

Первое действие, которое возникает на основе счета, есть **сложение**. Ввиду некоторых теоретических трудностей, связанных с определением этого действия, ограничимся следующим разъяснением: **сложить несколько чисел — значит узнать, сколько единиц содержат все данные числа вместе.** При этом данные числа называются **слагаемыми**, а результат сложения — **суммой**.

Сложение любых чисел предполагает знание наизусть **таблицы сложения** и уменье пользоваться двумя законами: сочетательным и переместительным.

Сочетательный закон сложения состоит в следующем: сумма не изменится, если какую-либо группу слагаемых заменить их суммой или наоборот. Для трех слагаемых сочетательный закон можно выразить в общем виде следующей формулой:

$$a+b+c=a+(b+c)=(a+b)+c$$

Сочетательный закон применим и в тех случаях, когда число слагаемых больше трех.

Иногда при сложении конкретных чисел можно воспользоваться сочетательным законом, чтобы упростить вычисления. Например:

$$35+27+13+16+14=35+40+30$$

Выделим в приведенной формуле ее правую часть:

$$a+(b+c)=(a+b)+c$$

Раскроем это буквенное равенство: чтобы к какому-нибудь числу прибавить сумму двух чисел, достаточно прибавить к нему сначала первое слагаемое, а затем к полученной сумме прибавить второе слагаемое.

Учащиеся начальной школы практически усваивают этот вывод, учась присчитывать по одному и группами пределах первого десятка, второго десятка и т. д. Например:

$$5+3=5+1+1+1; \quad 8+7=8+2+5;$$
$$27+5=27+3+2$$

Такой прием носит название приема последовательного сложения.

Переместительный закон сложения формулируется так: сумма не изменится, если изменить порядок слагаемых.

Переместительный закон выражается в общем виде следующей формулой:

$$a+b=b+a$$

На переместительном законе основан прием перестановки слагаемых, которым учащиеся начинают пользоваться уже в пределах первого десятка. Вот некоторые случаи применения перестановки слагаемых в школьной практике:

$$1+4=4+1; \quad 2+9=9+2; \quad 7+28=28+7$$

От сложения двух слагаемых возможен переход к сложению нескольких слагаемых. Вообще говоря, слагаемыми являются разные числа. Но возможен и такой случай, когда складывать приходится одинаковые числа. Если число слагаемых больше двух, то сложение становится затруднительным. Это дает основание ввести новое действие — умножение. Однако, оно вступает в силу только с того момента, когда мы начинаем применять законы умножения и, в первую очередь, его распределительный закон, что позволяет более трудный случай умножения свести к ранее известным более легким случаям, например:

$$4\times7=4\times5+4\times2$$

Итак, на основе сложения возникает новое действие — умножение, при определении которого мы ссылаемся на сложение, как на соответствующее родовое понятие: умножением называется сложение двух и более одинаковых слагаемых. При этом число, которое повторяется как слагаемое, называется множимым, а число, которое показывает, сколько раз повторяется множимое, называется множителем. Результат умножения носит название произведения.

Умножение любых чисел предполагает знание наизусть таблицы умножения и уменье применять законы умножения: распределительный, сочетательный и переместительный.

Распределительный закон умножения выступает в двух случаях: при умножении суммы (или разности) на число и при умножении числа на сумму (или разность).

В общем виде распределительный закон умножения можно выразить (для трех чисел) следующими буквенными равенствами:

$$(a+b)\,m=am+bm \tag{1}$$

$$m\,(a+b)=ma+mb \tag{2}$$

$$(a-b)\,m=am-bm \tag{3}$$

$$m\,(a-b)=ma-mb \tag{4}$$

Раскроем первое равенство: чтобы умножить сумму на какое-либо число, достаточно умножить на это число каждое слагаемое и полученные произведения сложить.

Прием, вытекающий из этого равенства, может быть назван приемом разложения множимого на слагаемые. Такой прием вводится во II классе при изучении внетабличного умножения на однозначное число. Например:

$$17\times4=10\times4+7\times4=40+28$$

Раскроем второе равенство: чтобы умножить какое-либо число на сумму, достаточно умножить это число на каждое слагаемое и полученные произведения сложить.

Прием, вытекающий из этого равенства, может быть назван приемом разложения множителя на слагаемые. Такой прием применяется в начальной школе уже при изучении таблицы умножения. Например:

$$8 \times 7 = 8 \times 5 + 8 \times 2 = 40 + 16$$

Две последних формулы реализуются в тех случаях, когда мы применяем прием округления множимого или множителя. Например:

$$9 \times 5 = (10 - 1) \times 5 = 10 \times 5 - 1 \times 5 = 50 - 5$$
$$7 \times 9 = 7 \times (10 - 1) = 7 \times 10 - 7 \times 1 = 70 - 7$$

Сочетательный закон умножения можно выразить в общем виде (для трех сомножителей) так:

$$abc = (ab)\,c = a(bc)$$

Как мы видим, этот закон, подобно сочетательному закону сложения, состоит в следующем: произведение не изменится, если какую-либо группу сомножителей заменить их произведением и наоборот.

На этом законе основан прием последовательного умножения, которым учащиеся III класса пользуются в устных вычислениях, а также при умножении любых чисел на круглые десятки и на круглые сотни. Например:

$$18 \times 2 \times 5 = 18 \times 10; \quad 137 \times 4 \times 25 = 137 \times 100;$$
$$24 \times 30 = 24 \times 3 \times 10; \quad 7 \times 400 = 7 \times 4 \times 100$$

Переместительный закон умножения формулируется так: произведение не изменится, если изменить порядок сомножителей. В общем виде этот закон выражается следующим равенством:

$$ab = ba.$$

На этом законе основан прием перестановки сомножителей, которым учащиеся начинают пользоваться во II классе. Например:

$$7 \times 5 = 5 \times 7; \quad 6 \times 10 = 10 \times 6; \quad 10 \times 37 = 37 \times 10$$

От умножения двух чисел можно перейти к последовательному умножению нескольких чисел. При одинаковых сомножителях (частный случай умножения, как раньше мы имели частный случай сложения) можно выполнять действие старыми приемами. Но можно установить новые, сокращенные приемы, опирающиеся на новые законы. Тогда появляется новое действие — возвышение в степень.

Возвышение в степень основано на двух свойствах этого действия: при умножении степени на степень того же основания показатели степеней складываются: $a^2 \times a^3 = a^{2+3} = a^5$, а при возвышении степени в степень показатели перемножаются: $(a^2)^3 = a^{2 \cdot 3} = a^6$. Заметим, что возвышение в степень не обладает переместительным свойством: $2^3 \neq 3^2$.

Переходим к системе **обратных действий**.

Каждому прямому действию, рассуждая теоретически, должно соответствовать два обратных. В самом деле, обратные действия сводятся к нахождению одного из двух компонентов прямого действия по его результату и другому компоненту. Иначе говоря, искомым может быть первое число или же искомым может быть второе число.

Однако, спрашивается: имеет ли смысл различать два разных действия, обратных данному прямому, или же такое различение явится излишним?

Вопрос о вычитании решается в теоретической арифметике следующим образом.

Сложение обладает переместительным свойством, слагаемые однородны и выполняют в сложении одну и ту же роль. Поэтому безразлично, является ли в обратном действии искомым первое слагаемое или же второе слагаемое. Отсюда следует, что два действия, обратные сложению, сливаются в одно действие вычитания.

Обобщение двух видов вычитания в одно действие вычитания позволяет установить однозначное определение этого действия.

Вычитание — это арифметическое действие, в котором по сумме двух слагаемых и одному из них находят другое слагаемое.

При выполнении этого действия пользуются правилами вычитания суммы из числа и числа из суммы:

1) Чтобы вычесть сумму из числа, можно вычесть каждое слагаемое одно за другим. Такой прием носит название **приема последовательного вычи-**

тания. Учащиеся начальной школы знакомятся с этим приемом уже при изучении первого и второго десятка. Например:

$$6-2=6-1-1; \quad 12-5=12-2-3$$

2) Чтобы вычесть число из суммы, можно вычесть это число из какого-нибудь одного слагаемого. Соответствующий прием вводится в I классе при знакомстве с внетабличным вычитанием:

$$18-5=(10+8)-5=10+(8-5)=10+3$$

Посмотрим теперь, как обстоит дело с действием деления.

Умножение, как и сложение, обладает переместительным свойством с тою лишь разницей, что множимое и множитель неоднородны и при умножении они играют разную роль. Это видно из определения: множимое — это то число, которое повторяется слагаемым, а множитель показывает, сколько раз повторяется множимое.

Исходя из неоднородности множимого и множителя, следовало бы определять деление двояко, в зависимости от того, который из компонентов — множимое или множитель — является искомым. Однако, с формальной точки зрения, в силу переместительного свойства умножения, они занимают по отношению к произведению совершенно равноправное положение. Отсюда вытекает возможность обобщения: видовые понятия „множимое“ и „множитель“ подчиняются родовому „сомножители“. Вот почему в теоретической арифметике деление, подобно вычитанию, определяется однозначно:

Деление — это арифметическое действие, в котором по произведению двух сомножителей и одному из них находят другой сомножитель.

При выполнении деления приходится чаще всего пользоваться следующими правилами:

1) Чтобы разделить сумму на какое-нибудь число, можно разделить на это число каждое слагаемое отдельно и полученные частные сложить.

Это правило применимо в том случае, если каждое слагаемое делится на данное число без остатка.

Такой прием можно назвать *приемом разложения делимого на слагаемые*. Учащиеся начальной школы начинают пользоваться этим приемом при изучении внетабличного деления. Например:

$$54:3 = 30:3 + 24:3 = 10 + 8$$

Этот прием аналогичен приему разложения на слагаемые множимого. Следует, однако, иметь в виду, что прием разложения на слагаемые *множителя* не имеет себе подобного при делении.

2) Чтобы разделить какое-нибудь число на произведение, можно разделить это число на первый сомножитель, полученное частное разделить на второй сомножитель, это частное на третий и т. д.

Прием, вытекающий из этого правила, можно назвать *приемом последовательного деления*. Такой прием дети усваивают в III классе, сначала на числах первой сотни, а затем применяют его при делении на круглые числа. Например:

$$68:4 = 68:2:2 = 34:2;$$

$$420:60 = 420:10:6; \quad 5400:900 = 5400:100:9$$

Чтобы закончить обзор обратных действий, скажем коротко о том, как обстоит дело с двумя действиями, обратными возвышению в степень. Возвышение в степень не обладает переместительным свойством: $2^3 \neq 3^2$. Отсюда, два обратных действия при одинаковых компонентах имеют, вообще говоря, разный результат. Корень *третьей* степени из *восьми* равен двум, но логарифм *восьми* при основании *три* не равен двум. Вот почему различают два действия, обратных возвышению в степень: извлечение корня и отыскание логарифма.

Итак, существует всего семь действий — три прямых и четыре обратных. В начальной школе изучаются только четыре из них: действия *первой ступени* — сложение и вычитание и действия *второй ступени* — умножение и деление.

Можно ли придерживаться в работе с учащимися начальной школы той трактовки этих четырех действий, которая имеет место в теоретической арифметике? Как сочетать в этом случае принцип научности с принципом доступности?

Что касается сложения и вычитания, то никаких особых логических трудностей с усвоением этих действий в начальной школе не связано.

Несколько иначе обстоит дело с действиями второй ступени.

Напомним, что возможность обобщения двух видов деления в одно действие деления вытекает из предшествующего обобщения множимого и множителя. Может ли семилетний ребенок сколько-нибудь сознательно обобщить эти понятия? Наш опыт приводит к отрицательному ответу на этот вопрос. Дело в том, что обобщение возможно только на основе сознательного различения. Если нет различения, то вместо обобщения происходит смешение понятий, их отождествление, разумеется, крайне нежелательное.

Отчетливое различение множимого и множителя дается учащимся I класса с трудом. Приходится проделать много специальных упражнений, чтобы научить детей ставить множимое и множитель на своем месте, чтобы приписывать наименование множимому и не приписывать его множителю, чтобы правильно читать запись умножения (не „3 взять по 5 раз“, а „по 3 взять 5 раз“). Ошибки этого рода встречаются не только в I классе, но и позднее.

Но если сознательного обобщения множимого и множителя можно добиться лишь с течением времени, то тем самым отпадает возможность скороспелого обобщения двух видов деления в одно действие деления. И в этом случае внимание учителя должно быть направлено, в первую очередь, не на обобщение, которое может привести только к смешению и отождествлению. Наоборот, надо старательно добиваться различения двух видов деления, подчеркивая существующую между ними разницу и в соответствующих словесных выражениях, и в записи.

Итак, в начальной школе мы различаем два вида деления: деление по содержанию, когда искомым является отвлеченный множитель, и деление на равные части, когда отыскивается конкретное множимое. Поясним эти два случая деления на задачах, связав обе задачи на деление с соответствующими задачами на умножение.

Задача на умножение. Купили 5 конвертов, по 3 коп. за конверт. Сколько израсходовали денег?

Задача на деление. На 15 коп. купили несколько конвертов. Каждый конверт стоит 3 коп. Сколько купили конвертов?

Изменим в первой задаче порядок сомножителей. Будем иметь вторую пару задач.

Задача на умножение. Купили 3 конверта, по 5 коп. за конверт. Сколько израсходовали денег?

Задача на деление. За 3 одинаковых конверта заплатили 15 коп. Сколько стоит каждый конверт?

Расположим решение этих задач в удобном для сопоставления порядке:

$$\frac{3\text{ коп.} \times 5 = 15\text{ коп.}}{15\text{ коп.} : 3\text{ коп.} = 5} \qquad \frac{5\text{ коп.} \times 3 = 15\text{ коп.}}{15\text{ коп.} : 3 = 5\text{ коп.}}$$

Чем отличается первая прямая задача от второй? Только порядком сомножителей.

Чем отличается первая обратная задача от второй? Заметим, что числа в обеих задачах одни и те же: делимое 15 и делитель 3. Числовое значение частного тоже в обоих случаях одно и то же. В чем же разница? В первой задаче искомым является отвлеченный множитель, а во второй — конкретное множимое. В первой задаче мы узнаем, сколько раз по 3 коп. содержится в 15 коп., а во второй задаче мы делим 15 коп. на 3 равные части.

Конкретная ситуация, соответствующая двум прямым задачам, различна: в первой из них конвертов больше, но они дешевле, хуже; во второй их меньше, но они дороже, лучше.

Обратные задачи тождественны по числам, но смысл этих задач совершенно разный. Далеко не одно и то же — узнать число конвертов или узнать цену каждого конверта, не говоря уже о количестве и качестве конвертов, которое тоже оказалось различным.

На первых порах в начальной школе мы не только не обобщаем двух видов деления, но даже не сопоставляем их, пока учащиеся не усвоят каждый вид в отдельности. Только во II классе в конце первого полугодия устанавливается, что при одинаковых числах, будем ли мы делить на равные части или по содержанию, результат получится один и тот же. Тем не менее, до IV класса включительно, наряду с указанным сходством, попрежнему подчеркивается разница между тем и другим видом деления. Только в V классе даются определения действий, в том числе и определение деления как действия, в котором по произведению двух сомножителей и одному из них находят другой сомножитель. Только в V классе учащиеся записывают делимое, делитель и частное без наименования, которое в этом случае ставится у результата действия в скобках.

Как мы видим, подготовительный курс ведет учащихся к тем же положениям, которые содержатся в систематическом курсе, но ведет их медленно и осторожно. Тем самым при изучении действий на уроках арифметики принцип научности сочетается с принципом доступности.

Итак, уже в условиях начальной школы ученик должен сознательно выполнять четыре арифметические действия над целыми числами. Что же это значит?

Это значит, во-первых, что ученик научился видеть связь между прямыми действиями, т. е. понимает, что произведение представляет собою сумму нескольких одинаковых слагаемых, что умножение есть сокращенное сложение.

Это значит, во-вторых, что ученик усвоил переместительные законы сложения и умножения, т. е. понимает, что, решив пример $5+3=8$, можно, не производя вычислений, решить пример $3+5$. Точно так же, решив пример $8\times3=24$, можно, не производя вычислений, решить пример 3×8.

Это значит, в-третьих, что ученик умеет пользоваться связью между прямыми и обратными действиями. Так, зная сумму двух чисел, например 5 и 3, может, не производя вычислений, решить два следующих примера: $8-3=5$ и $8-5=3$. То же относится к умножению и делению: зная, что $8\times3=24$, он может, не производя вычислений, решить примеры $24:3$ и $24:8$.

Это значит, в-четвертых, что ребенок научился пользоваться в процессе устных вычислений не только переместительным законом, но и другими законами и свойствами действий и умеет применять их в условиях десятичной системы счисления к действиям над многозначными числами. Так, познакомившись практически на числах первой сотни с распределительным и сочетательным законами умножения, ученик должен понимать, что при умножении многозначных чисел он пользуется теми же приемами.

Система счисления, устная и письменная нумерация

Предметы можно считать по-разному: перебирая их по одному или же соединяя в группы. Различные способы группировки предметов при счете определяют ту или иную **систему счисления**.

Счет, счисление имеет целью установить, сколько всего предметов в данной группе, в данной совокупности. Наличие определенной системы облегчает счетную операцию, позволяет расширить сферу ее применения. Наряду с этим, развивается прежде всего **устная нумерация**, т. е. различные способы называния чисел, а затем и **письменная нумерация**, т. е. различные способы записи чисел. Если бы люди не додумались до группировки единиц при счете, пришлось бы каждому числу натурального ряда давать особое название и каждое число изображать особым знаком.

Сколько надо было бы иметь слов, чтобы назвать все числа до 1 миллиарда включительно, если бы мы не пользовались группировкой единиц при счете? Миллиард слов.

Сколько слов употребляем мы теперь, пользуясь двойной группировкой единиц в разряды и в классы?

один, два, три . . . . девять (9 слов)
десять, сорок, девяносто, сто . . . . (4 слова)
тысяча, миллион, миллиард . . . . (3 слова)

Всего 16 слов. Да и то два из них (сорок и девяносто) не зависят от системы счисления, а обусловлены своеобразием русского языка. Кроме того, досчитав при помощи 16 слов до миллиарда, мы можем продолжить счет до 999 миллиардов, не добавляя ни одного лишнего слова.

Нумерация так или иначе опирается на систему счисления. Однако, при одной и той же системе счисления могут существовать разные варианты как устной, так и письменной нумерации. Поясним это положение примерами.

Во французском языке существуют отдельные названия для круглых чисел 20, 30, 40, 50 и 60. Для чисел 70, 80 и 90 нет новых названий: 70 — это 60 и 10, 80 — это четыре раза двадцать (quatre-vingts), 90 — это 80 и 10 (quatre-vingts dix). Счет от 60 до 80 и от 80 до 100 французы ведут совершенно так же, как от единицы до 20. Роман Виктора Гюго „93-й год“ называется по-французски „Quatre-vingts treize“, т. е. четыре раза двадцать и тринадцать. Названия эти являются пережитками двадцатиричной системы счисления, но в настоящее время продолжают применяться в условиях десятичной системы.

Что касается письменной нумерации, то при одной и той же системе возможны еще более резкие различия, чем в устной нумерации. Достаточно указать на древнегреческую и старую русскую нумерацию, в которой роль цифр выполняют буквы алфавита, и особенно на общеизвестную римскую нумерацию, которая совершенно не похожа на современную письменную нумерацию, хотя римская нумерация применялась в тех же условиях, что и наша, т. е. в условиях десятичной системы счисления. Основная отличительная особенность этих нумераций состоит в том, что они не имеют цифры, которая обозначала бы отсутствие единиц того или иного разряда, т. е. они не имеют нуля. В римской нумерации к тому же только 7 знаков, причем часть этих знаков не относится к числам первого десятка. Между тем, при десятичной системе счисления должно быть, кроме нуля, еще 9 цифр для обозначения первых девяти чисел. Подробнее об этом будет сказано в дальнейшем.

Основой современной устной и письменной нумерации является *десятичная* система счисления, т. е. десятичная группировка единиц при счете. Как называние чисел, т. е. устная нумерация, так и запись чисел, т. е. письменная нумерация, осуществляются в условиях этой системы применительно к числу *десять*.

Поясним на предметах, как же происходит в данном случае группировка единиц при счете.

Представим себе на столе гору спичек. Представим себе также, что мы умеем считать только до десяти. Как найти число, соответствующее нашей горе?

Первый этап будет состоять в том, что мы сгруппируем *все* спички в десятки. Получится гора таких пучков-десятков и, кроме того, еще, например, 5 отдельных спичек.

Второй этап будет состоять в том, что мы сгруппируем пучки-десятки в более крупные пучки — по 10 десятков в каждом пучке. Получится гора пучков-сотен и, кроме того, еще, например, 3 отдельных пучка-десятка.

Третий этап будет заключаться в образовании пучков-тысяч, по 10 сотен в каждом пучке. Получится, скажем, 7 пучков-тысяч и в остатке еще, например, 6 пучков-сотен.

Итак, что же получилось у нас из горы спичек? 7 пучков-тысяч, 6 пучков-сотен, 3 пучка-десятка и 5 отдельных спичек, короче говоря, число семь тысяч шестьсот тридцать пять.

Пояснив на конкретном примере сущность группировки единиц при счете, сформулируем теперь основные положения, относящиеся к десятичной системе счисления.

Число, применительно к которому происходит группировка предметов при счете, называется **основанием** системы счисления.

Основанием современной системы счисления является число десять, почему она и называется **десятичной**.

Каждый предмет при счете носит название **единицы**.

Различают простые и сложные счетные единицы.

Считая отдельные предметы от одного до девяти включительно, мы пользуемся **простыми счетными единицами**.

Группируя предметы в десятки, сотни, тысячи и т. д., мы образуем **сложные счетные единицы**.

Однородные единицы называются также единицами одного и того же **разряда**.

Отношение единиц двух **смежных разрядов**, именно высшей единицы к низшей, постоянно и равно основанию, т. е. в нашей системе — десяти.

Числа, состоящие из одной единицы какого-либо разряда, называются **разрядными единицами**.

Разрядными единицами считают от одной до 10 совершенно так же, как считают простыми единицами от одной до десяти.

Собрание нескольких единиц одного разряда, но не более девяти, называют **разрядным числом**.

Четвертую разрядную единицу (тысячу) рассматривают вместе с тем как особую счетную единицу — классную.

Отношение единиц двух смежных классов постоянно и равно в нашей системе счисления тысяче.

Классными единицами считают от одной до 1000 совершенно так же, как считают простыми единицами от одной до тысячи.

Простая единица есть одновременно единица первого разряда и единица первого класса.

1 тысяча — это одновременно единица четвертого разряда и единица второго класса.

1 миллион — это одновременно единица седьмого разряда и единица третьего класса. И т. д.

Итак, мы пользуемся при счете двойной группировкой единиц — в разряды и в классы.

Устная нумерация, как уже было указано, связана с системой счисления, опирается на нее.

Письменная нумерация также связана с десятичной системой счисления, однако преимуществами этой системы не всегда умели пользоваться. Такова, например, римская письменная нумерация. Остановимся на ней подробнее. Это позволит нам оценить исключительное удобство современной письменной нумерации.

Римляне пользовались семью цифрами и некоторыми вспомогательными значками, которые давали возможность изображать многозначные числа.

Вот эти цифры: I, V, X, L, C, D и M. Значение цифр не меняется с изменением их места в записи числа. Располагаются они по величине соответствующих чисел как слагаемые. В некоторых случаях, а именно, если младшая по значению цифра стоит влево от старшей, имеет место вычитание. Цифры I, X, C и M могут повторяться, но не больше трех раз, цифры же V, L и D не повторяются.

Приведем несколько примеров:

CCCLXIV — 364 DCCXXIII — 723
DCXLIX — 649 MMCDIII — 2403

Число знаков, как мы видим, не зависит от величины числа. Один знак изображает число 1000, а семь знаков — XXXVIII — изображают число 38.

Неудобство такой письменной нумерации становится особенно очевидным при необходимости произвести вычисления. Ввиду этого римляне, как и другие народы древнего мира, применявшие римские цифры, вынуждены были пользоваться особыми счетными приборами.

Простейшая счетная доска, по-гречески а б а к, представляла собою стол, посыпанный песком („абак“ значит пыль, песок) и разделенный на вертикальные колонки. Колонки эти соответствовали разрядам числа. Число единиц каждого разряда отмечалось на песке заостренной палочкой. В дальнейшем стали обходиться без песчаного слоя. Вместо черточек в каждой колонке откладывали камешки, а еще позднее — счетные марки или жетоны по числу единиц данного разряда.

Известен римский абак, на котором можно было изображать семизначные числа:

$\lvert\overline{I}\rvert$	$\overline{C}$	$\overline{X}$	$\overline{I}$	C	X	I

Горизонтальная черточка над цифрой показывает, что ее значение увеличено в тысячу раз. Чтобы обозначить увеличение в 100 тысяч раз, цифру заключали сверх того между двумя вертикальными черточками, например:

$$1\,180\,600 — \lvert X\rvert\,\overline{CLXXX}\,DC$$

Все эти приемы показывают, что римляне пользовались десятичной системой счисления. Мало того, они применяли двойную группировку единиц — в разряды и в классы. И все же их письменная нумерация существенно отличается от современной.

При помощи абака выполнялись все четыре арифметических действия, о чем свидетельствует горизонтальная черта, под которой, очевидно, выкладывался итог. Цифры служили только для записи результата вычислений, самые же вычисления проделывались на абаке инструментальным способом.

В X веке начинается оживление торговли и промышленности, а так как в это время во всеобщем употреблении были римские цифры, неудобные для вычислений, то абак получил очень широкое распространение.

В улучшении письменной нумерации сыграли роль два усовершенствования. Трудно сказать, когда и кем они были сделаны.

Первое из них состоит в том, что вместо камешков или жетонов, которые надо было класть по нескольку, стали употреблять жетоны с цифрами. Один жетон изображал все единицы данного разряда.

Второе усовершенствование состояло в том, что среди меченых жетонов появился немеченый. Очевидно, это было сделано с той целью, чтобы освободиться от колонок: немеченый жетон мог заменить пустую колонку. Теперь можно было вычислять на любом столе, на любой доске.

Абак без колонок с мечеными и немечеными жетонами содержит в готовом виде принцип поместного значения цифр и идею нуля. Оставалось только цифрам сойти с жетонов на поверхность бумаги, если бы существовало, как теперь, девять цифр для обозначения первых девяти чисел и нуль для обозначения „пустого множества".[1]

Такие удобные цифры и нуль были изобретены в Индии. Первая запись с нулем в виде кружка относится к 200-му году до нашей эры.[2]

От индусов через арабов письменная нумерация, основанная на позиционном принципе с применением цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 0, проникла сначала в Испанию, а затем в Италию и Францию. Большое влияние на развитие арифметики в Европе имели труды узбекского математика Альховаризми. По имени этого математика алгорифмом арифметических действий стали называть те правила, на которых основано выполнение действий.

Между школой абацистов, т. е. сторонников вычислений при помощи абака, и школой алгоритмиков, т. е. последователей Альховаризми, шла долгая, упорная борьба. Только в XVI веке индусская система была принята почти повсеместно. В России так называемые арабские цифры встречаются впервые в рукописях XVII века. Систематически они применены

---

[1] Проф. И. К. Андронов. Арифметика натуральных чисел. 1954, стр. 18.

[2] Джавахарлал Неру. Открытие Индии. М., 1955, стр. 226.

Л. Ф. Магницким в его „Арифметике", которая вышла в 1703 году. Это была первая печатная математическая книга на русском языке.

Сущность современной письменной нумерации состоит в следующем:

1) Для обозначения единиц любого разряда существует девять значащих цифр.

2) Единицы каждого разряда занимают в записи числа определенное место.

3) Если в числе нет единиц какого-либо разряда, на их месте пишут нуль.

4) Каждая цифра, стоящая в записи числа рядом с другой влево от нее, обозначает единицы следующего высшего разряда и называется по отношению к ней старшей; цифра же, стоящая рядом с другой вправо от нее, обозначает единицы низшего разряда и называется младшей.

5) Каждая цифра имеет, таким образом, двоякое значение: свое собственное и то, которое зависит от ее места в записи числа. Значение цифр, зависящее от того места, которое они занимают в записи числа, называется поместным значением цифр.

Итак, основная особенность современной письменной нумерации — принцип поместного значения цифр и применение нуля при наличии девяти значащих цифр.

В заключение покажем связь между современной письменной нумерацией в условиях десятичной системы счисления и арифметическими действиями.

Многозначное число представляет собою многочлен, расположенный по убывающим степеням основания 10:

$$532764 = 5 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 4$$

Как мы видим, все три прямые действия — сложение, умножение и возвышение в степень — используются нами для того, чтобы рационально сгруппировать единицы при счете.

Итак, мы убеждаемся, что нумерация могла развиваться и совершенствоваться только в связи с развитием арифметических действий, выполнение которых, в свою очередь, значительно облегчается удобствами современной нумерации.

В начальной школе учащиеся знакомятся с устной и письменной нумерацией не сразу. Шаг за шагом вникают они в сущность десятичной системы счисления и вместе с тем учатся называть и записывать числа. Познакомившись с основанием системы счисления — числом десять, они осваивают следующие разрядные единицы до тысячи включительно. На третьем году обучения тысяча выступает уже как первая классная единица. Этот этап работы открывает учащимся доступ к пониманию двойной группировки единиц — в разряды и в классы — и к усвоению нумерации чисел любой величины. Начавшись в I классе, работа над системой счисления и вместе с тем над устной и письменной нумерацией продолжается до IV класса включительно и заканчивается только в V классе.

Отметим тут же, что одним из условий успешной работы начальной школы является своевременное сообщение учащимся некоторых терминов, которыми приходится пользоваться не только при изучении нумерации, но и в работе над арифметическими действиями. Таковы, в частности, термины „разрядная единица" и „разрядное число". Учитель, как правило, не знакомит с ними учащихся. Между тем, нельзя не разъяснить детям, что многозначное число представляет собою сумму разрядных чисел, которые в данном случае мы называем „разрядными слагаемыми". Нельзя избежать таких важных этапов в работе над действиями второй ступени как умножение и деление на разрядную единицу и на разрядное число. Нельзя не пользоваться этими терминами при объяснении письменных механизмов арифметических действий.

II. НАГЛЯДНЫЙ ОБРАЗ, СЛОВО И МЫШЛЕНИЕ НА УРОКАХ АРИФМЕТИКИ В НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЕ

Основную часть урока, на котором дается новый материал, характеризуют три следующие момента:

а) применение наглядности, которое может состоять в использовании классного пособия и протекать фронтально, или же проводится при индивидуальном использовании раздаточного материала;

б) усвоение рассуждения, которое опирается на предметную наглядность, но обеспечивает возможность перехода от непосредственного восприятия к представлению и от представления к понятию;

в) формулировка выводов, правил, обобщений, определений, как результат предшествующей работы.

Все эти три момента тесно связаны между собою и выступают в непосредственном взаимодействии. Чтобы ясно представить себе методические требования к этой части урока, необходимо подробнее остановиться на следующих вопросах: 1) цель применения наглядных пособий, виды наглядности и наглядных пособий на уроках арифметики; 2) соотношение между непосредственным восприятием и словом в работе над арифметическим материалом; 3) соотношение между словом и мышлением; 4) различные формы применения слова на уроках арифметики.

Рассмотрим прежде всего вопрос о цели применения наглядных пособий, о видах наглядности и наглядных пособий на уроках арифметики.

Необходимо подчеркнуть, что наглядность на уроках арифметики имеет иной характер и иную цель, чем на других уроках в начальной школе. Изучение географии, истории, естествознания предполагает непосредственное знакомство с предметами и явлениями в их натуральном виде. Ученик должен хорошенько рассмотреть то или иное растение, чучело животного, географический ландшафт, портрет исторического деятеля и, по возможности, запомнить данный предмет в его конкретных подробностях. Если на уроках географии, истории, естествознания и делаются кое-какие обобщения (хвойные деревья, домашние животные, полуостров, родовой быт и т. п.), то в эти обобщения входят все существенные признаки предметов, эти общие понятия нельзя мыслить вне связи со всей многокрасочной действительностью.

Другое назначение имеют наглядные пособия на уроках арифметики. Вспомним, что математика и, в частности, арифметика оперируют абстрактными понятиями. По словам Энгельса, чтобы считать, т. е. выполнять простейшую арифметическую операцию, надо уже обладать способностью отвлекаться при рассмотрении предметов „от всех прочих их свойств, кроме числа“.[1] Если материал арифметики — не предметы сами по себе, а лишь „количественные отношения действительного мира“,[2] то основное назначение наглядных пособий на уроках арифметики состоит в том, чтобы служить опорой для обобщения, облегчать процесс образования отвлеченных понятий.

Чтобы решить задачу о рыбках, нет надобности приносить в класс аквариум с живыми рыбками. Достаточно иметь подобие аквариума и картонные изображения рыбок, лишенные каких бы то ни было видовых признаков. Такой обобщенный образ — первый шаг на пути к дальнейшим обобщениям.

Заметим также, что на уроках арифметики нет смысла давать словесные объяснения до работы с наглядным пособием. Из двух возможных способов сочетания слова и наглядности, описанных Л. Занковым,[3] здесь уместен только первый способ, когда оба фактора используются параллельно. При этом на первом этапе

---

[1] Ф. Энгельс. Анти-Дюринг. 1948, стр. 36—37.
[2] Там же, стр. 37.
[3] Л. Занков. Слово и наглядность на уроке. „Учительская газета“, 18/V 1955.

словесное объяснение выступает в виде диалога между учителем и учеником.

В младших классах начальной школы приходится довольно часто прибегать к полной предметной наглядности. Сюда относятся прежде всего предметы классной обстановки: карандаши, тетради, книги, столы, стулья, лампы, парты и т. д. Сюда же относится специальный счетный материал: палочки, кружки, квадратики и кубики в руках у детей, шарики на счетах, кружки на резинке у учителя. На этих предметах, благодаря их подвижности, удобно пояснять арифметические действия.

Вот как, например, можно объяснить детям сложение чисел 4 и 2 при помощи кружков на резинке:

1) работа с пособием: учитель откладывает налево 4 зеленых кружка, направо 2 красных. Красные кружки он придвигает по одному, один за другим, к зеленым;

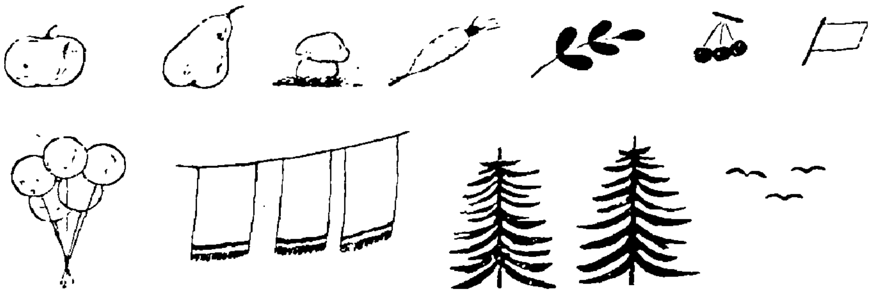
2) рассуждение, сопутствующее передвижению кружков: если к 4 кружкам прибавить 1 кружок, получится 5 кружков; если к 5 кружкам прибавить 1 кружок, получится 6 кружков;

3) вывод: значит, если к 4 кружкам прибавить 2 кружка, получится 6 кружков.

Аналогичное упражнение проделывается и на других пособиях (палочки, квадратики, кубики и т. п.). Прием обобщается и без труда переносится на отвлеченные числа. Так совершается переход от конкретного к абстрактному, от предметов к числовым отношениям.

На равных правах с предметами применяются в качестве наглядных пособий их изображения из картона и бумаги, а также рисунки этих предметов на классной доске. Таковы, например, бумажные васильки и ромашки, иллюстрирующие перестановку чисел при сложении (3 василька и 4 ромашки, 4 василька и 3 ромашки); таковы изображения осенних листьев, нанизанные на нитку, чтобы удобно было их пересчитывать; таковы картонные гуси на наборном полотне и т. д. А вот целый ряд рисунков, которыми можно пользоваться при конкретизации чисел в пределах первого десятка. (См. рисунки на стр. 36.)

Следует еще раз подчеркнуть, что на уроках арифметики полную предметную наглядность не следует доводить до натурализма. Результат счета не зависит от индивидуальных особенностей пересчитываемых предметов. Не зависят от них и результаты вычислений. Излишняя красочность скорее мешает, чем помогает вычислениям. Исключение составляют иллюстрации, поясняющие непонятные слова в задачах (элеватор, экскаватор, насос, инкубатор и т. д.), что, однако, не имеет прямого отношения к арифметическому содержанию задач.



Наряду с полной предметной наглядностью, применяется условная наглядность, которой мы пользуемся при изучении нумерации трехзначных и многозначных чисел. Сюда же относятся такие виды наглядности как схема и чертеж.

Нумерацию второго десятка и первой сотни обычно проходят на палочках, причем единицу изображает 1 палочка, а десяток — 10 палочек, связанных в пучок. С тою же целью применяются графические образы, например, „числовая лесенка", а в дальнейшем „лента ста" и „лента тысячи", на которых дети учатся считать до 100 и до 1000. Основой всех этих пособий служит еще полная предметная наглядность. Иначе обстоит дело при переходе к письменной нумерации в пределах первой тысячи, которую изучают на „абаке с кружками", причем условно один и тот же кружок обозначает единицу каждого из четырех первых разрядов в зависимости от того места, которое он занимает. Заметим, что в этом случае положение кружков соответствует положению цифр в обычной записи числа, где разряды располагаются справа налево, начиная с единиц.

Труднее пользоваться при объяснении нумерации многозначных чисел обычными классными счетами.

И в этом случае наглядность является условной, поскольку шарик на счетах обозначает единицы разных разрядов в зависимости от места проволоки, на которой он находится. Но разрядные числа можно расположить на счетах только либо сверху вниз, либо снизу вверх. Верх (или низ) приходится условно принять за крайнее правое место в записи числа, т. е. за место единиц. Получается своего рода двойная условность: значение шарика условно зависит от места проволоки, а одна из проволок условно принимается за крайнюю правую.

Чтобы избежать этого неудобства, можно пользоваться счетной таблицей с двойными „карманами" под каждым разрядом: в верхний вставляется цифра, а в нижний — соответствующее число палочек. Палочки заменяют шарики на вертикальных счетах, которые также обеспечивают расположение разрядов справа налево, а не сверху вниз. Но вертикальные счеты имеются далеко не во всех школах; кроме того, легче положить несколько палочек в „карман", чем надевать шарики на проволоку по одному (надевать несколько шариков сразу просто технически невозможно). Правда, это неудобство можно устранить, если согнуть вертикальные проволоки в виде дуг и дощечкой, пропущенной между ветвями дуг, закрыть их задние половины. Тогда шарики легко перебрасывать с задней части дуги, где они скрыты, на переднюю часть. Такое остроумное приспособление описывает К. П. Аржеников в своей „Методике".[1]

Когда дети хорошо ознакомятся с цифрами, эти знаки становятся более выразительными, чем группы предметов. В самом деле, ряд предметов перестает быть наглядным, если предметов больше четырех. Между тем, даже такие цифры, как 7, 8 и 9 вызывают достаточно отчетливые представления, которыми уже в I классе ученики могут оперировать вполне сознательно. Цифра, как и слово, является „сигналом сигналов". Пользуясь цифрами, мы имеем дело не с чем иным, как с некоторой разновидностью второсигнальных раздражителей. Но взаимодействие между первой

---

[1] К. П. Аржеников. Методика преподавания арифметики. 1935, стр. 62. См. также А. С. Пчелко. Письменные вычисления в III классе. 1948, стр. 23.

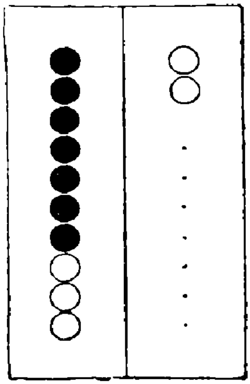
и второй сигнальными системами, в данном случае **соединение предметной наглядности** с удобообозримой **цифровой записью** является весьма плодотворным. Вот образцы такого соединения в работе с учащимися I класса:

$4+2=?$

$4+1=5$

$5+1=6$

$4+2=6$



$7+5=?$

$7+3=10$

$10+2=12$

$7+5=12$

Заметим, что некоторые элементы самой записи служат предметом непосредственного восприятия: черта под заданием, расположение вычислений в соответствии с ходом рассуждения, новая черта, отделяющая рассуждение от вывода, черточка под ответом. Такую запись, ее **структуру** можно рассматривать как своего рода наглядное пособие.

Пользуясь структурой **ряда**, мы иллюстрируем натуральный ряд чисел. На этом образе построена игра в закрытые цифры, которую можно проводить в I классе при повторении нумерации первого десятка. Вот как можно расположить при этом карточки с цифрами:

1	2			5		7	8		10

Дети должны догадаться, какие цифры закрыты и, перевернув карточку, проверить свой ответ.

Структурой записи в качестве наглядного пособия можно пользоваться во II классе при изучении таблицы умножения. Счет равными группами обычно поясняют на классных счетах. Той же цели служат **ряды сла-**

гаемых: в первом ряду два числа, во втором — три, в третьем — четыре и т. д. Слагаемые должны быть расположены в точности одно под другим. Тогда видно, что каждый следующий ряд содержит одним слагаемым больше, чем предыдущий. Это облегчает счет равными группами. Чтобы на тех же рядах пояснить наглядно группировку слагаемых, достаточно подчеркнуть соответствующие группы. Аналогичным приемом пользуются в дальнейшем для пояснения сочетательного закона умножения и в некоторых других случаях.

Мы рассмотрели способы конкретизации чисел и действий. Переходим к приемам иллюстрации арифметических задач.

Следует заметить, что в этой области иллюстративный метод стал применяться значительно позднее, чем при изучении действий. В сущности по отношению к задачам этот метод начал распространяться в нашей массовой школе только уже в советское время.

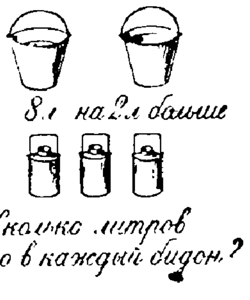
Применение наглядности при решении задач может идти по четырем направлениям. Можно иллюстрировать: 1) числовые данные задачи посредством полной предметной наглядности; 2) сюжет задачи посредством изображения тех предметов, о которых говорится в задаче; 3) арифметическое содержание задачи посредством схематической записи или чертежа и 4) процесс рассуждения, предшествующий решению задачи, посредством схемы из кружков.

Числовые данные задачи есть смысл иллюстрировать только до тех пор, пока мы имеем дело с небольшими числами. Желательно, чтобы при этом непосредственному восприятию были доступны только данные числа, а именно: при сложении только слагаемые, но не сумма, при вычитании только уменьшаемое и вычитаемое, но не разность. Достигается это тем, что учащимся мы демонстрируем каждое слагаемое в отдельности и тотчас после этого соответствующие группы предметов прячем: грибки или яблоки в корзинку, рыбки в ведерко, карандаши в пенал, картинки в конверт и т. д. Точно также, продемонстрировав уменьшаемое, мы убираем соответствующую группу предметов по принадлежности: книги в шкаф, тетради в портфель, кубики в коробку, мячики в мешочек. Затем демонстрируется вычитаемое, а искомый остаток продолжает лежать в шкафу, в портфеле, в коробке, в мешочке. Этим приемом мы исключаем возможность найти сумму или остаток посредством простого пересчитывания: ученик вынужден произвести либо сложение, либо вычитание.

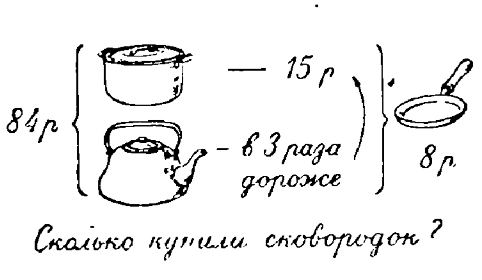
Уже в пределах II десятка, а затем во II классе и в начале III класса мы иллюстрируем не числовые данные, а только предметы, о которых говорится в задаче. Такие иллюстрации не имеют прямого отношения к арифметике: они не служат основой формирования арифметических понятий. Однако, они помогают усвоить сюжет задачи и тем самым облегчают до некоторой степени ее решение. Такие иллюстрации мы находим в стабильных учебниках. Так, в учебнике для III класса помещены рисунки, изображающие баржу, колесный и гусеничный трактор, товарный вагон, инкубатор, кипу хлопка, значок БГТО, цистерну. Аналогичные изображения желательно иметь для каждого класса и в виде стенных таблиц.

Однако, для пояснения собственно арифметического содержания задачи одного рисунка недостаточно. С этой целью применяется **схематическая запись условия задачи**. Вот образцы некоторых записей, в которых, наряду с числовыми данными, использованы рисунки предметов, о которых говорится в задаче:

Задача 1.



Задача 2.



Глядя на такие записи с рисунками, учащиеся II и III классов самостоятельно формулируют текст задач.

А вот образцы записей без рисунков:

Задача.

18 *кг* ягод

сварили 3 *кг*	разложили по 5 *кг*

Сколько потребовалось корзин?

Задача.

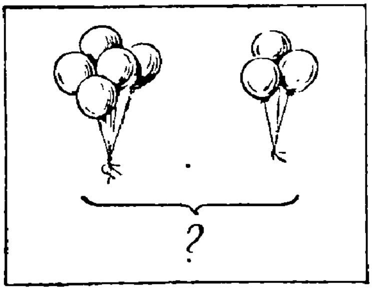
$$65 \text{ дер.} \begin{cases} \text{I —} \\ \text{II — посадили еще 5 дер.} \end{cases} \text{Стало поровну}$$

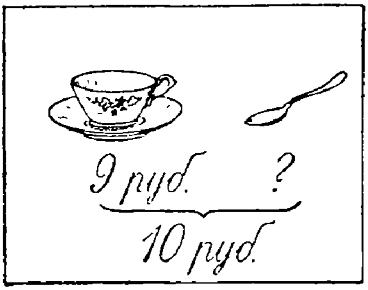
Сколько деревьев росло сначала на каждом участке?

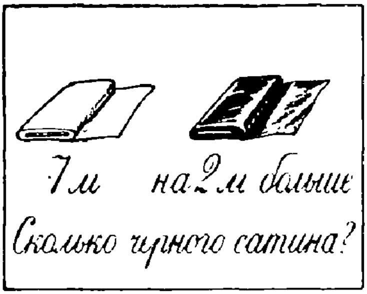
Связующим звеном, помогающим понять арифметическое содержание задач, служат в этих записях скобки, стрелки, черточки и т. п.

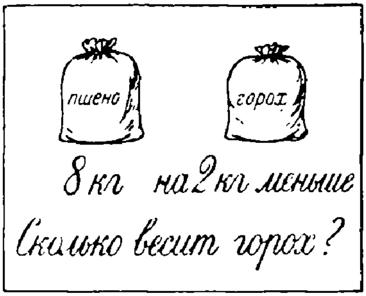
Исключительно важное значение имеет соединение числовых данных с рисунком в тот период, когда учащиеся еще не научились как следует читать и когда рисунок передает доходчиво и лаконично текст задачи.

Вот несколько образцов таких задач-рисунков, которые могут быть предложены учащимся I класса в конце первой учебной четверти и во второй четверти:









В старших классах начальной школы содержание некоторых задач поясняется *чертежом*. Этот прием применяется с наибольшим успехом при решении задач на встречное движение. Иногда к чертежу добавляется изображение самих движущихся предметов — поездов, пароходов и т. п. Точка встречи обозначается флажком. Значение чертежа состоит в том, что отношения чисел заменяются *отношениями отрезков* и таким образом отношения чисел становятся наглядными.

Чертеж применим для пояснения пропорционального деления, а также для пояснения задач на нахождения слагаемых по их сумме и кратному отношению, если числовые данные выражены в *мерах длины*. Экспериментально установлено, что условное обозначение отрезками числовых данных, не связанных с мерами длины, приводит в начальной школе к недоразумениям.[1]

Составление схематических записей сопряжено с некоторыми трудностями. В старших классах начальной школы такая работа может быть предложена учащимся как самостоятельное и очень интересное логическое упражнение. В младших классах краткая запись задачи — дело учителя.

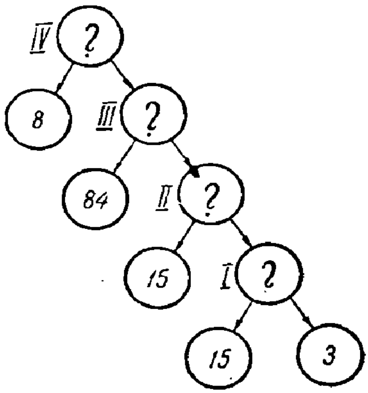
Чтобы иллюстрировать *процесс рассуждения* при анализе задач, лучше всего воспользоваться схемой из кружков, которую учитель рисует на доске по мере того, как ученик переходит от одного звена рассуждения к другому.

Поясним это на задаче о покупке сковородок (стр. 40).

---

[1] Н. С. *Попова*. Приемы логической работы над арифметическими задачами в начальной школе. Статья в сборнике „Решение арифметических задач в начальной школе", 1949, стр. 113—115.

Чтобы узнать, сколько купили сковородок, надо знать, сколько стоит каждая из них (8 руб.) и сколько стоят все сковородки (?).



Чтобы узнать, сколько стоят все сковородки, надо знать, сколько стоит вся покупка (84 руб.) и сколько стоят вместе кастрюля и чайник (?).

Чтобы узнать общую стоимость кастрюли и чайника, надо знать цену кастрюли (15 руб.) и цену чайника (?).

Чтобы узнать цену чайника, надо знать, сколько стоит кастрюля (15 руб.) и во сколько раз чайник дороже кастрюли (в 3 раза).

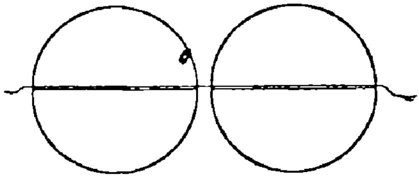
Эти числа нам известны. С этого вопроса можно начать решение задачи.

Составим план решения. И т. д.

Итак, для конкретизации счета и действий мы пользуемся, во-первых, полной предметной наглядностью, во-вторых, условной наглядностью; роль наглядного пособия может также играть графический образ и структура арифметической записи.

Для конкретизации арифметических задач мы тоже применяем на первых порах полную предметную наглядность. В дальнейшем переходим к схематической записи условия в соединении с рисунком, а затем и без него. В тех же целях применяем чертеж. Наконец, процесс рассуждения поясняем схемой из кружков.

В заключение следует упомянуть о видах наглядных пособий, которые применяются на уроках арифметики в начальной школе. Подробнее мы не будем останавливаться на этом вопросе, так как он достаточно хорошо освещен в наших методических руководствах. Отметим только, что существуют пособия, изготовленные фабричным способом (классные счеты, арифметический ящик, таблицы для изучения чисел I десятка, для устных упражнений, для изучения нумерации, эталоны мер, измерительные приборы и т. д.). Наряду с „готовыми“ пособиями, применяются пособия самодельные (палочки, кружки, квадратики, пособия для изучения нумерации, для иллюстрации задач и т. д.). Из числа самодельных пособий можно особенно рекомендовать „кружки на резинке".



Кружки эти сделаны из толстой папки. Каждый кружок разрезан пополам, половинки слегка раздвинуты, а потом заклеены целиком с одной стороны красной, а с другой стороны зеленой глянцевой бумагой. В образовавшуюся между половинками щель продевают резинку или эластичный шнурок, концы которого прикрепляют к доске. Кружки свободно двигаются по резинке. По мере надобности их поворачивают то красной, то зеленой стороной к классу. На этом пособии удобно демонстрировать счет и действия в пределах первого десятка.

Следует добавить, что, наряду с классными пособиями, используется раздаточный (дидактический) материал. Важно, чтобы в восприятии участвовали по возможности не только зрение, но и другие чувства — осязание и мускульное чувство, чтобы дети не только пассивно воспринимали то, что им показывает учитель, но могли бы собственноручно выполнить работу с наглядным пособием. В I классе у каждого ученика должен быть индивидуальный набор дидактического материала, куда входят палочки, кружки, квадратики, цифры, знаки действий и изображения монет. Во II классе каждый ученик должен иметь сантиметровую линейку и хотя бы два цветных карандаша. В дальнейшем к линейке надо добавить чертежный треугольник, а для выполнения работ по геометрии — специальную тетрадь.

Полезно применять одновременно классные пособия и раздаточный материал. Учитель объясняет, например, новый вычислительный прием, пользуясь кружками на резинке, а ученики повторяют тот же прием на кружках из своего набора. Классное пособие помогает руководить работой, а раздаточный материал дает возможность сочетать зрительное восприятие с осязательным.

Говоря о цели применения наглядных средств и о видах наглядности, мы не могли не касаться вопроса о сочетании непосредственного восприятия и слова, образного и логического в работе над арифметическим материалом. В частности, было показано, как выражается в слове процесс присчитывания двух кружков к четырем кружкам (стр. 35), как сочетается демонстрация приема табличного сложения на пособии с развернутой записью этого приема цифрами. Интересным примером сочетания образного и логического является составление самими учащимися текста задачи на основе образной записи ее условия (стр. 40 и 42). Образцом такого сочетания является также словесный анализ задачи по соответствующей схеме из кружков (стр. 43).

Чтобы осмыслить соотношение между наглядным образом и словом на уроках арифметики, обратимся к учению И. П. Павлова о двух сигнальных системах.

Наш мозг находится под постоянным воздействием предметов и явлений внешнего мира. Роль проводника этих воздействий выполняет первая сигнальная система.[1]

Наряду с этим, наш мозг испытывает воздействие слов, речи. Проводником этих воздействий является вторая сигнальная система.

Без речи непосредственное восприятие не идет дальше тех процессов, которые мы наблюдаем у животных. Наоборот, наличие речи у человека приводит к тому, что уже наши непосредственные восприятия предметов и явлений окружающей действительности качественно отличаются от восприятий у животных, не говоря о том, что только наличие речи делает возможным абстрактное мышление.

Умственное развитие ребенка происходит на основе взаимодействия первой и второй сигнальных систем. Вторая сигнальная система регулирует и направляет работу первой сигнальной системы. Проще говоря, речь, слово направляют, регулируют непосредственное восприятие. С другой стороны, первая сигнальная система контролирует работу второй сигнальной системы, иначе говоря, словесное выражение мыслей мы проверяем и

---

[1] Первая сигнальная система — ближайший проводник действительности. „Павловские среды", т. III, 1949, стр. 318.

уточняем, обращаясь к непосредственному восприятию предметов и явлений.

Применяя в процессе преподавания различные наглядные средства, мы опираемся на первую сигнальную систему. Речь, слова, слышимые, видимые и произносимые — это вторые сигналы, сигналы сигналов. Цифры играют ту же роль, что и „видимые" слова. Это тоже сигналы сигналов.

Использование наглядности может быть эффективным только в том случае, если оно идет под словесным руководством учителя в условиях организующей роли второй сигнальной системы. Бессловесный показ не дает нужных результатов.

Однако, применяя словесные объяснения на уроках арифметики, применяя арифметические записи, т. е. оперируя цифрами, учитель должен помнить, что словесная сигнализация, вообще работа второй сигнальной системы утомляет значительно больше, чем непосредственное восприятие предметов и явлений. Чем моложе ученик, тем относительно больше места приходится отводить предметной наглядности.

Наконец, работу второй сигнальной системы приходится проверять посредством первой сигнальной системы. Рассуждение, повторенное много раз на предметах, приобретает характер динамического стереотипа, который в дальнейшем применяется и без предметов. Если же, пользуясь стереотипным рассуждением по представлению, ученик допустил ошибку, необходимо вернуться к предметам, восстановить связь слов с первосигнальным раздражителем.

В процессе работы учащиеся должны усвоить арифметическую терминологию, выражения и обороты речи. Эти завершающие моменты при изучении арифметических понятий и навыков протекают в условиях работы второй сигнальной системы. Самый же процесс формирования новых понятий и навыков, опирающийся, как правило, на применение наглядных пособий, требует рационального использования двух сигнальных систем в их взаимодействии.

С течением времени, когда роль второй сигнальной системы становится все значительнее, группы предметов мы заменяем цифрами, отношения одной группы предметов к другой группе поясняем структурой записи, выводы и правила формулируем почти без участия первой сигнальной системы. Так изучаются нумерация и действия над многозначными числами в III и IV классе. Придавая словесным объяснениям действия стереотипный характер, мы создаем прочную опору запоминания этих объяснений и обеспечиваем безошибочность вычислений.

При решении арифметических задач приходится на первых порах опираться на предметную наглядность, но уже в I классе почти вся работа над задачами протекает в условиях второй сигнальной системы.

Работа над языком становится особенно ответственной при переходе учащихся в старшие классы начальной школы. Толковое, без лишних слов, повторение условия задачи и ее вопроса, безупречный, без пропусков и уклонений в сторону, разбор задачи, точная формулировка вопросов и окончательного ответа — вся эта работа над речью ученика является вместе с тем школой его логического мышления. Не следует, как уже сказано, бояться некоторой стереотипности этих рассуждений. Каждый раз, решая новую задачу, ученик вкладывает в эту готовую форму новое содержание.

Характеризуя роль речевой функции, И. П. Павлов отмечает, что „вторые сигналы“ представляют собою „отвлечение от действительности и допускают обобщение, что и составляет наше лишнее, специальное человеческое, высшее мышление, создающее сперва общечеловеческий эмпиризм, а наконец и науку — орудие высшей ориентировки человека в окружающем мире и в себе самом“.[1]

Понимаемая таким образом связь между речью и мышлением получает новое освещение в марксистском языкознании.

Связь между мышлением и речью всегда подчеркивалась в любом курсе психологии. Но оставалось недосказанным одно очень существенное обстоятельство: речь не только связана с мышлением, она неотделима от мышления так же, как и мышление неотделимо от

---

[1] И. П. Павлов. Физиология высшей нервной деятельности. Том III, книга вторая, стр. 232.

речи. Таково одно из основных положений марксистского языкознания. Тот, кто отрывает мышление от языка, попадает „в болото идеализма".[1] Но нельзя в равной мере отрывать речь от мышления. Тот, кто это делает, тоже „впадает ... в идеализм".[2]

В самом деле, речь, слово связаны со своим предметом только через мышление. При отрыве языка от мышления и мышления от языка между словом и предметом, т. е. между словом и реальной действительностью, а вместе с тем и между мышлением и реальной действительностью утрачивается внутренняя связь по содержанию. Это и есть чистейший идеализм.

„Будучи непосредственно связан с мышлением, язык регистрирует и закрепляет в словах и в соединении слов в предложениях результаты работы мышления, успехи познавательной работы человека..."[3]

Итак, было бы методологически неправильно отрывать на уроках арифметики „работу мышления" от соответствующего словесного оформления. Каждое арифметическое понятие должно быть связано с соответствующим термином, все соображения, приводящие к тому или иному правилу, необходимо „регистрировать и закреплять в словах и в соединении слов в предложениях". В самом деле, только владея специальной терминологией, ученик может овладеть арифметическими понятиями. Но этого мало. Необходимо усвоить целый ряд специальных выражений и оборотов речи, овладеть в целом арифметическим языком, научиться давать в связной форме объяснения арифметических действий, делать в связной форме разбор арифметических задач, четко формулировать вопросы при составлении плана их решения и т. д.

Выполнение всех этих требований ограничивается в отдельных случаях лишь возрастными особенностями учащихся. Так, уже в I классе, производя вычисления, дети практически знакомятся с законами арифметических действий, однако, было бы рано давать названия этих законов. В III и IV классах учащиеся решают различные типовые задачи. Названия некоторых из них затруд-

---

[1] И. Сталин. Марксизм и вопросы языкознания. Госполитиздат, 1952, стр. 39.

[2] Там же, стр. 45.

[3] Там же, стр. 22.

няют учащихся. В таких случаях вместо определения типа задачи можно давать название способа ее решения. Нет надобности, например, выводить термин „простое тройное правило“, но уже в III классе дети без особого труда различают способ прямого приведения к единице и способ обратного приведения к единице. И т. д.

В течение всего XIX века вопросы преподавания арифметики разрабатывались под знаком борьбы с недостатками словесно-догматического преподавания. В результате этой борьбы преподавание арифметики в начальной школе попало из одной крайности в другую. Боязнь словесного преподавания, которое сводилось к механическому усвоению определений и правил, вылилось в своего рода гонение на арифметическую теорию. Учитель старался как можно меньше говорить, не объяснять в связной форме арифметических действий, не сообщать во-время арифметической терминологии. В отличие от прошлого, когда учитель говорил, а ученик слушал и старался „затвердить“ слова учителя, теперь ни тот, ни другой не излагали своих мыслей связно. Вошедшая в употребление вопросо-ответная форма обучения вытеснила связное изложение, а вместе с ним и элементы теории. Предполагалось, что ученик должен усваивать арифметический материал „по свободному соображению“.

Так обстояло у нас дело незадолго до Великой Октябрьской социалистической революции.

Уже в советское время учителя арифметики стали замечать, что они стоят на неверном пути, что надо не только „наводить“ детей на тот или иной вычислительный прием, но надо также давать определения и правила, учить их связно излагать свои мысли, делать выводы и обобщения.

В настоящее время мы применяем, наряду с вопросо-ответной формой обучения, связное изложение учебного материала как учителем, так и учеником. При этом возможны следующие варианты: 1) учитель объясняет, ученик слушает; 2) учитель спрашивает, ученик отвечает; 3) ученик объясняет, учитель слушает.

На первых порах преобладает вопросо-ответная форма преподавания, так как младшему школьнику трудно удержать в своих руках, без помощи учителя логическую нить рассуждения. Вот почему среди разнообразных вопросов, которые учитель задает детям на уроке, важную роль играют так называемые наводящие вопросы. Не лишая ученика определенной доли самостоятельности, эти вопросы направляют его мысль на верный путь, не позволяют ему уклоняться в сторону от этого пути.

Применение вопросо-ответной формы обучения возможно лишь после некоторых подготовительных упражнений.

1) Детей, поступивших в школу, надо прежде всего научить слушать вопросы учителя и отвечать только по его вызову. На первых порах учащиеся не понимают, что вопрос, обращенный к классу, обращен и к каждому из учеников класса. С другой стороны, они не понимают, что не каждый ученик должен отвечать на вопрос, обращенный к классу. С новичками может произойти одно из двух: либо весь класс молчит, либо все отвечают хором. Надо научить детей поднимать руку и терпеливо ждать вызова.

2) Надо научить детей отвечать на поставленный вопрос полным ответом. Отсюда не следует, что каждый ответ должен быть полным. Иногда это мешает живости урока, сопряжено с бесполезной тратой времени и даже просто смешно. Вот, например, разговор, который был записан на одном из уроков в I классе.

Учитель. Ты плохо решил пример. Я ставлю тебе единицу. (Обращаясь к другому ученику.) Толя, почему ты не слушаешь? Повтори, что я ему поставила!

Ученик. Единицу.

Учитель (сердито). Полным ответом!

Ученик. Вы поставили ему единицу.

Комментарии в этом случае, как говорится, излишни.

При „беглом счете", а иногда и при объяснении нового учебного материала вполне уместны короткие реплики детей. Многословные ответы могут помешать им следить за ходом собственной мысли.

Наряду с вопросо-ответной формой обучения, применяется связное изложение, требующее некоторой подготовки.

1) Этой цели могут служить упомянутые полные ответы. Давая при повторении задачи полные ответы,

ученик разучивает ее текст по частям. Соединяя затем эти части в одно целое, он уже без особого труда повторяет всю задачу. Аналогичную работу приходится проводить и при объяснении письменных приемов арифметических действий.

2) Надо учить детей в случае надобности повторять объяснения учителя дословно. Начинающим особенно трудно повторить вопрос задачи. Ребенок готов отвечать, а учитель требует, чтобы ученик тоже спрашивал, т. е. вышел за пределы данной конкретной ситуации, преодолел ее. В этих случаях полезно вызвать ученика к столу учителя и предложить ему задать ту же задачу классу — не повторить, а именно „задать". „Задай эту задачу классу, повтори ее классу",— говорит учитель. После этого можно перейти и к безличному повторению.

3) Надо учить детей следить за своей речью. Внимание ребенка направлено не на слова, а на их смысл. Иногда, повторяя задачу, он заменяет одно слово другим, которое кажется ему равнозначащим. В отдельных случаях это допустимо (например, „мальчик купил ириску" вместо „мальчик купил конфетку" или „рабочий заплатил за свет" вместо „рабочий заплатил за электричество"). Но иной раз, особенно в выражениях чисто арифметических, замена слова искажает мысль („прибавить нуль" вместо „приписать нуль", „узнать" главный вопрос вместо „решить" главный вопрос и т. п.).

Подготовив детей к вопросо-ответному методу и к связному изложению, учитель чередует оба метода, пользуется то тем, то другим в зависимости от учебного материала и от цели работы над ним.

В заключение остается подчеркнуть, что учитель обязан следить за грамматической правильностью речи. Это требование относится не только к урокам русского языка, но и к урокам арифметики. Нельзя, например, допускать таких выражений: „пять прибавить три, получится восемь", или же „три взять по пять, получится пятнадцать". В младших классах, пока дети имеют дело с небольшими числами, необходимо склонять числительные. Позднее вводятся при сложении и вычитании термины „плюс" и „минус", или же ставится в косвенном падеже слово „число": к *числу* 275 прибавить 147; от *числа* 328 отнять 94 и т. п.

Давая новый термин, учитель должен позаботиться о том, чтобы ученик усвоил его не только на слух, но и видел, как это слово пишется. Чтобы сознательно пользоваться словом, надо увидеть его связь с другими словами того же корня. Ученик IV класса, назвавший делитель—„велителем", показал, что он не связывает понятия „делитель" с действием деления.

Дети часто не понимают, что „дважды семь" означает 7×2, трижды восемь—8×3, а не наоборот. То же относится к выражениям „пятью шесть", „семью восемь" и т. п. Приходилось, кроме того, слышать форменное искажение этих слов, лишавшее их какого бы то ни было смысла. Вместо „пятью шесть" дети говорили „пятушесть", вместо „семью восемь"—„семувосемь" и т. п. Результат умножения они воспроизводили по памяти правильно, но как получился этот результат, оставалось тайной.

Итак, точность, правильность и грамматическая безупречность речи должны быть предметом особой заботы на уроках арифметики, где ведущая роль принадлежит логическому мышлению, а речь выступает как связующее звено между непосредственным восприятием предметов и явлений, с одной стороны, и мышлением, с другой.

III. МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ В НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЕ

Усвоение арифметики в начальной школе связано с решением примеров и задач. В обоих случаях дело сводится к нахождению неизвестного числа по числам данным. Разница же между примером и задачей состоит в том, что в примере действия и их порядок прямо указываются, а в задаче их приходится „выбирать".

Сюжет не является отличительным признаком задачи. Вот, например, типовая задача на нахождение чисел по их сумме и кратному отношению, построенная на отвлеченных числах. „Сумма двух чисел — 20, причем одно из них в 3 раза больше другого. Найти эти числа". Такая задача с арифметической точки зрения ничем не отличается от следующей задачи с текстом: „За барабан и волчок заплатили 20 руб., причем волчок в 3 раза дороже барабана. Сколько стоит каждая игрушка в отдельности?"

Итак, существенным признаком задачи является не сюжет, а необходимость выбора действий, которые в задачи прямо не указываются.

Каждая задача состоит из условия, числовых данных и вопроса.

Решить задачу — это значит произвести над ее числовыми данными арифметические действия, которые вытекают из условия задачи и дают ответ на ее вопрос.

Все задачи делятся на простые и составные.

Простыми называются задачи, которые решаются одним действием.

Составными называются задачи, которые решаются двумя и более действиями, в частности, повторением одного и того же действия.

Некоторые задачи на сложение решаются повторением этого действия и потому относятся к составным, хотя имеют только один вопрос. Такова, например, следующая задача. „На верхнюю полку шкафа поставили 30 книг, на среднюю 28 книг и на нижнюю 37 книг. Сколько всего книг поставили на эти полки?“

При решении приведенной задачи нет надобности ставить два вопроса: узнавать сначала, сколько было книг на двух верхних полках вместе, а затем, сколько было всего книг. И запись решения нет надобности разбивать на две части. Однако, выполнять одновременно два действия невозможно. Решая задачу, придется сначала сложить 30 книг и 28 книг, а затем к полученной сумме прибавить 37 книг. Вот почему подобные задачи и относятся к составным.

Основные виды простых задач на все действия

Для того чтобы научиться решать любые задачи, надо прежде всего овладеть основными видами простых задач на все действия.

Все простые задачи делятся по числу арифметических действий на четыре группы: простые задачи на сложение, на вычитание, на умножение и на деление.

Простых задач на каждое действие бесчисленное множество — меняются числа, меняется сюжет. Но все эти задачи можно свести к небольшому числу различных с арифметической точки зрения видов, которые можно назвать основными видами задач на данное действие.

Основные задачи на каждое действие могут быть либо прямыми, либо обратными.

Не следует смешивать понятия „прямое действие“ и „прямая задача на данное действие“, „обратное действие“ и „обратная задача на данное действие“. Существуют прямые и обратные задачи, которые решаются сложением, прямые и обратные задачи, которые решаются вычитанием, и т. д.

Установим сначала количество тех и других задач, а затем рассмотрим подробнее арифметическое содержание каждой из них.

На сложение существует одна прямая задача — это задача, в которой ясна необходимость найти сумму данных чисел. Наряду с этим, существует три обратных задачи, которые тоже решаются сложением.

На вычитание существует три прямых задачи: нахождение остатка; нахождение разности, когда надо узнать, на сколько одно число больше другого, и нахождение разности, когда надо узнать, на сколько одно число меньше другого. Наряду с этим, существует пять обратных задач, которые тоже решаются вычитанием.

На умножение существует одна прямая задача, когда ясна необходимость повторить одно из данных чисел столько раз слагаемым, сколько единиц в другом числе. Наряду с этим, существует три обратных задачи, которые тоже решаются умножением.

На деление существует четыре прямых задачи: деление на равные части; деление по содержанию; кратное сравнение, когда надо узнать, во сколько раз одно число больше другого, и кратное сравнение, когда надо узнать, во сколько раз одно число меньше другого. Наряду с этим, существует пять обратных задач, которые также решаются делением.

Подведем итог: 9 прямых задач, 16 обратных; всего 25 основных видов простых задач на все действия.

Сущность прямых задач мы уже выяснили. Остановимся подробнее на арифметической сущности обратных задач.

Сложением решаются три задачи, которые являются обратными по отношению к прямым задачам на вычитание.

1) Нахождение уменьшаемого по вычитаемому и остатку. „Ученик купил тетрадь за 16 коп. После этого у него осталось 34 коп. Сколько денег было сначала у этого ученика?“ Приведенная задача является обратной по отношению к следующей прямой. „Имея 50 коп., ученик купил тетрадь, которая стоит 16 коп. Сколько денег у него осталось?“

2) Нахождение уменьшаемого по вычитаемому и разности (I вариант). „Карандаш стоит 15 коп., а резинка на 10 коп. дороже карандаша. Сколько стоит резинка?“ Эта задача является обратной по отношению к следующей прямой. „Карандаш стоит 15 коп., а резинка—25 коп. На сколько резинка дороже

карандаша?“ В прямой задаче разность надо найти, в обратной она дана.

3) Нахождение уменьшаемого по вычитаемому и разности (II вариант). „Карандаш стоит 15 коп., он на 10 коп. дешевле резинки. Сколько стоит резинка?“ Эта задача является обратной по отношению к следующей прямой. „Карандаш стоит 15 коп., а резинка — 25 коп. На сколько карандаш дешевле резинки?“ В прямой задаче разность надо найти, в обратной она дана.

Вычитанием решаются две задачи, обратные по отношению к прямой задаче на сложение, и три задачи, обратные задачам на вычитание.

1) Нахождение первого слагаемого по сумме двух чисел и второму слагаемому. „В коробке было несколько красных карандашей и 5 зеленых, всего 12 карандашей. Сколько было в коробке красных карандашей?“ В этой задаче 12 карандашей — сумма, 5 зеленых карандашей — второе слагаемое. Искомым является первое слагаемое.

2) Нахождение второго слагаемого по сумме двух чисел и первому слагаемому. „В коробке было 7 красных карандашей и несколько зеленых, всего 12 карандашей. Сколько было в коробке зеленых карандашей?“ В этой задаче 12 карандашей — сумма, 7 красных карандашей — первое слагаемое. Искомым является второе слагаемое.

3) Нахождение вычитаемого по уменьшаемому и остатку. „В апреле 30 дней. До конца месяца осталось 6 дней. Сколько дней уже прошло?“ В этой задаче 30 дней — уменьшаемое, 6 дней — остаток. Искомым является вычитаемое.

4) Нахождение вычитаемого по уменьшаемому и разности (I вариант). „Рыбак поймал 12 окуней, а карасей на 5 штук меньше. Сколько поймал он карасей?“ Эта задача, в которой разность дана, является обратной по отношению к следующей задаче, в которой разность надо найти. „Рыбак поймал 12 окуней и 7 карасей. На сколько меньше поймал он карасей, чем окуней?“

5) Нахождение вычитаемого по уменьшаемому и разности (II вариант). „Рыбак поймал 12 окуней, на 5 штук больше, чем карасей. Сколько

поймал он карасей?" Эта задача, в которой разность дана, является обратной по отношению к следующей задаче, в которой разность надо найти. „Рыбак поймал 12 окуней и 7 карасей. На сколько больше поймал он окуней, чем карасей?"

Умножением решаются три задачи, обратные задачам на деление.

1) Нахождение делимого по делителю и частному. „Веревку разрезали на три равные части. Длина каждой части 5 *м*. Какой длины была вся веревка?" Такие задачи удобнее задавать в отвлеченной форме. „Задуманное число разделили на 5: в каждой части получилось по 12. Какое число задумали?"

2) Нахождение делимого по делителю и кратному отношению (I вариант). „Тетрадь стоит 16 коп., а книга — в 5 раз дороже. Сколько стоит книга?" Эта задача является обратной по отношению к следующей задаче на кратное сравнение. „Тетрадь стоит 16 коп., а книга — 80 коп. Во сколько раз книга дороже тетради?"

3) Нахождение делимого по делителю и кратному отношению (II вариант). „Тетрадь стоит 16 коп., она в 5 раз дешевле, чем книга. Сколько стоит книга?" Эта задача является обратной по отношению к следующей задаче на кратное сравнение. „Тетрадь стоит 16 коп., а книга — 80 коп. Во сколько раз тетрадь дешевле книги?"

Делением решаются две задачи, обратные по отношению к прямой задаче на умножение, и три задачи, обратные задачам на деление.

1) Нахождение множимого по произведению и множителю. „Задуманное число умножили на 3 и получили 45. Какое число задумали?" Придать ту же форму задачам с вещественным содержанием затруднительно. В этих случаях ограничиваются отвлеченной формулировкой условия.

2) Нахождение множителя по произведению и множимому. „Если 18 умножить на задуманное число, получится 54. Какое число задумали?" И в этом случае приходится иметь дело с отвлеченными числами.

3) Нахождение делителя по делимому и частному также может быть задано лишь в отвле-

ченной форме. „На какое число надо разделить 72, чтобы получилось 12?“

4) Нахождение *делителя по делимому и кратному отношению* (I вариант). „На грузовик положили 60 мешков муки, а на подводу — в 10 раз *меньше*. Сколько мешков муки положили на подводу?“ В этой задаче кратное отношение дано. А вот прямая задача, в которой кратное отношение является искомым. „На грузовик положили 60 мешков муки, а на подводу — 6 мешков. Во сколько раз *меньше* положили мешков на подводу, чем на грузовик?“

5) Нахождение *делителя по делимому и кратному отношению* (II вариант). „На грузовик положили 60 мешков муки, в 10 раз *больше*, чем на подводу. Сколько мешков муки положили на подводу?“ В этой задаче кратное отношение дано. А вот прямая задача, в которой оно является искомым. „На грузовик положили 60 мешков муки, а на подводу — 6 мешков. Во сколько раз *больше* положили мешков на грузовик, чем на подводу?“

Как уже было установлено, существует 9 прямых задач на все действия. Это число не является случайным — оно обусловлено природой прямых действий и своеобразием обратных действий, которые уже по самому определению своему выступают в двух вариантах и которые, кроме того, применяются при сравнении чисел. Из этих теоретических предпосылок можно было бы сделать вывод, что на вычитание должно быть столько же прямых задач, сколько и на деление, т. е. четыре. Почему же мы рассмотрели только три прямых задачи на вычитание? Это объясняется тем, что две основных задачи на вычитание, связанные с определением этого действия, сливаются, в силу переместительного свойства сложения и однородности слагаемых, в одну задачу. Кроме этой одной задачи, остается еще два варианта задач на разностное сравнение, итого *три* прямых задачи. Что же касается прямых задач на деление, то две задачи, связанные с определением этого действия, не сливаются в одну задачу ввиду неоднородности множимого и множителя. Отсюда мы имеем две прямых задачи на деление: деление на равные части и деление по содержанию, а всего, считая задачи на кратное сравнение, — *четыре* прямых задачи. Итак, мы будем считать не 10, а 9 прямых задач на все действия.

Рассуждая теоретически, при наличии 9 прямых задач должно быть 18 обратных, так как по отношению к каждой прямой задаче должно существовать 2 обратных. Мы же рассмотрели не 18 обратных задач, а только 16. Это объясняется тем, что не были упомянуты 2 задачи, обратные относительно деления по содержанию. Эти две задачи трудно сформулировать даже в отвлеченной форме, и в практическом отношении они особого интереса не представляют. Вот почему у нас получилось только 16 обратных задач.

Мы закончили обзор основных видов простых задач на все действия под углом зрения их арифметического содержания. Оказывается, что все многообразие этих задач исчерпывается с арифметической точки зрения их принадлежностью либо к прямым, либо к обратным задачам на то или иное действие.

Теперь остается сгруппировать эти задачи по их методическим особенностям. При такой группировке мы будем различать три категории простых задач.

1) Простейшие задачи на все действия, в которых ясна необходимость прибавить, отнять, умножить, разделить на несколько равных частей, а также узнать, сколько раз одно из данных чисел содержится в другом, всего 5 задач.

2) Задачи, связанные с понятием разности — две прямых и четыре обратных, и столько же задач, связанных с понятием кратного отношения, всего 12 задач.

3) Все остальные обратные задачи, в которых, по принятому у нас неудачному выражению, действия заданы в „косвенной форме“. Такие задачи удобнее всего представить в виде примеров с x:

а)	$x-5=3$	б)	$x:5=7$
	$5+x=8$		$5\times x=35$
	$x+3=8$		$x\times 7=35$
	$8-x=3$		$35:x=7$

Среди этих задач, как мы видим, одна решается сложением, три — вычитанием, одна — умножением и три — делением, всего 8 задач.

Надо еще упомянуть о трех задачах, которые не вошли в наш перечень, так как они связаны не с целыми числами, а с курсом дробей. Сюда относятся: нахождение доли от числа, нахождение всего числа по его доле и, наконец, задача, в которой требуется узнать, какую долю одного из данных чисел составляет другое число. Только первая из этих задач дается в начальной школе, где она решается делением на равные части. В условиях начального обучения вторая задача могла бы решаться умножением, а третья — делением по содержанию. Однако, эти две задачи отнесены в настоящее время к систематическому курсу дробей в V классе, где нахождение дроби от числа рассматривается как умножение, а две другие задачи решаются делением.

Методика решения простейших задач на сложение и вычитание

Знакомство первоклассников с решением арифметических задач относится к самому началу их учебных занятий в школе. Уже при изучении первого пятка можно ввести простейшие задачи на сложение, а вслед за ними и на вычитание.

Прежде чем решать задачи, надо познакомить детей с выражениями „прибавить“, „отнять“, „получится“ и с нахождением суммы и остатка путем простого пересчитывания.

Как смысл указанных выражений, так и приемы сложения и вычитания поясняются на предметах. При решении задач на первых порах приходится также прибегать к наглядности. Вследствие этого многие учителя смешивают один вид работы с другим видом: выясняя смысл действия или его прием, они полагают, что это и есть уже решение задачи, хотя в данном случае решение сводится к выполнению действия, которое сами они указывают. Дается, например, такая задача: „Мальчик сделал 3 красных флажка и 2 зеленых. Сколько всего флажков сделал мальчик?“ Задачу учитель поясняет на флажках и тут же задает наводящий вопрос: к трем флажкам п р и б а в и т ь два флажка, сколько получится флажков? Действие подсказано.

Тем самым отпадает основной отличительный признак задачи и основная трудность, связанная с ее решением: необходимость выбора действия.

Чтобы работа над задачами шла успешно, необходимо ставить перед собой совершенно определенную цель и не смешивать решение задач с выполнением указанных действий на предметах.

Понятия „прибавить“, „отнять“, „получится“ можно пояснять на классных счетах, на двухцветных кружках, а также на окружающих предметах или на изображениях предметов, которые выставляются на наборном полотне. Наряду с классными пособиями, применяется раздаточный материал — палочки, кружки, квадратики и т. д. На упражнениях с этими предметами смысл действия и его прием раскрываются — такова их цель.

В задаче речь может идти о тех же предметах, которые применялись при знакомстве с действием, но теперь это действие прямо не указывается, оно скрыто сюжетом задачи. Цель работы над задачей — подобрать действие, которым она решается.

Надо вести работу так, чтобы ребенок понимал, чем он занимается: учится ли прибавлять и отнимать, или же решает задачу.

Чтобы решить задачу, надо ее понять.

Понять задачу, которая решается одним действием,— это значит увидеть двустороннюю связь между ее условием и вопросом. Но для того чтобы установить связь, надо сначала расчленить задачу, осознать, что она состоит из условия и вопроса. Фактически такое расчленение происходит посредством выделения вопроса задачи. В самом деле, выделяя вопрос, мы отделяем его от условия, т. е. выделяем и условие.

Выделение вопроса — первый узловой момент в логической работе над задачей.

Далее должна быть найдена связь между условием задачи и ее числовыми данными, с одной стороны, и вопросом задачи, с другой стороны. Внешним выражением этого акта является выбор действия, которым решается задача.

Выбор действия — это второй, важнейший логический момент в работе над задачей.

Выбор действия закрепляется записью решения.

Работа над задачей заканчивается формулировкой ответа. Тем самым достигается осознание целенаправленности всей работы.

Формулировка ответа — третий узловой момент в логической работе над задачей. Ответ задачи дается, по крайней мере, устно.

Переходим к изложению методических приемов работы над задачей в I классе.

С самого начала следует ввести соответствующую терминологию: задача, вопрос задачи, решение задачи, ответ задачи. Несколько позднее дети знакомятся также с выражением „условие задачи".

Приступая к решению задачи, учитель должен предупредить об этом детей: „Сейчас мы будем решать задачу. Слушайте внимательно".[1]

Сюжет задачи не должен быть громоздким. Слишком многословный, красочный сюжет может заслонить от детей арифметическое содержание задачи. С другой стороны, чересчур сухой, лаконичный сюжет приближает задачу к тем упражнениям, которые выполнялись на предметах при знакомстве с действиями, заслоняет от учащихся разницу между примером и задачей. Поэтому, формулируя сюжет задачи, очень важно соблюсти меру: при всей краткости текста пользоваться образными выражениями. Вместо слов „первый — второй" или „один — другой", которые часто встречаются в задачах, лучше говорить „большой — маленький" (бидон, кувшин, тарелка); „верхний — нижний" (этаж, полка); „старший — младший" (брат, сестра); „красные — зеленые" (флажки, звездочки) и т. д. Излишне вводить в задачу имена собственные: „Вова и Юра", „Люся и Женя". Отвлеченные „Вова и Юра" ничем друг от друга не отличаются — это полнейшая абстракция, даже более туманная, чем „первый и второй" мальчики. При повторении и решении задачи детям легче различить функции „первого" и „второго" мальчиков, чем функции „Вовы" и „Юры".

Чтобы лучше усвоить задачу, надо ее повторить. На первых порах, когда учащиеся еще не умеют читать, единственной опорой, облегчающей повторение,

---

[1] Другой способ первоначального знакомства детей с решением задач изложен на стр. 138.

служит предметная наглядность. „На большую тарелку положили 3 яблока, на маленькую — 2 яблока. Сколько всего яблок положили на обе тарелки?" Таков текст задачи. Он поясняется при помощи тарелок из картона, в надрезы которых вставляются яблоки. Еще до сообщения задачи учитель предлагает детям рассмотреть тарелки, назвать их (большая, маленькая), сосчитать яблоки на каждой из них. Группы яблок на тарелках заменяют запись числовых данных.

Повторение задачи ведется сначала по наводящим вопросам учителя, а затем кто-нибудь из учеников повторяет задачу целиком. Выражения „повтори задачу", „повтори вопрос задачи" должны стать привычными на уроках арифметики.

Далее детям предлагается решить задачу и сообщить полученный ответ. Только после этого выявляется действие. „Что надо сделать, чтобы решить эту задачу?" — спрашивает учитель. Решение необходимо обозначить разрезными цифрами и знаками действий на наборном полотне.

Позднее учащиеся записывают его в тетрадях по образцу, заготовленному учителем на доске. Еще позднее они делают это самостоятельно, отсчитав нужное число клеточек вниз от предыдущей записи и вправо от полей или края тетради. Первое время числа записываются без наименования. Однако уже в конце первой четверти следует ввести наименования, если при сокращении слова можно ограничиться одной и притом, конечно, уже известной детям буквой. Сокращенно записывать в это время такие слова как яблоко, флажок, книга преждевременно. Нельзя пользоваться такими наименованиями, как яйца, окна. Одной буквой можно заменить слова: карандаш, тетрадь, картинка, фантик, марка, шар и т. д. Названия мер „копейка" и „рубль", с которыми дети встречаются в первой четверти, на первых порах также обозначаются одной буквой **к.** и **р.**, но не коп. и руб., как в дальнейшем.

В октябре следует познакомить детей с выражением „условие задачи". В это время полезно ввести следующее упражнение: после решения задачи учитель вызывает к доске четырех учеников, ставит их лицом к классу и предлагает повторить задачу и ее решение по ролям. Первый ученик говорит условие, второй —

вопрос, третий — решение и четвертый — ответ. Выражения, которые они слышали до сих пор от учителя, произносятся теперь самими учениками, что содействует их лучшему пониманию и запоминанию.

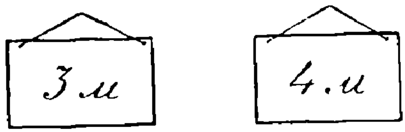
Перечислим коротко этапы работы при решении простейших задач на сложение и вычитание: 1) знакомство с наглядным пособием; 2) сообщение задачи; 3) повторение задачи по наводящим вопросам; 4) повторение задачи целиком; 5) выделение вопроса задачи; 6) решение в уме; 7) сообщение ответа; 8) выявление действия; 9) запись действия и 10) формулировка ответа.

На первых порах, применяя предметы для конкретизации компонентов действия, которым решается задача, мы оставляем на виду и результаты действий. Так, например, имея перед глазами две тарелки с яблоками, дети видят не только каждое слагаемое, но и сумму. Отрывая 2 листика от веточки, на которой было сначала 5 листиков, мы демонстрируем не только уменьшаемое и вычитаемое, но и остаток. Такой способ конкретизации задач позволяет находить сумму и остаток посредством простого пересчитывания.

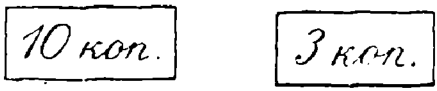
Однако, уже очень скоро следует перейти к другим приемам применения наглядности, когда демонстрируются только данные числа. Так, например, при решении задачи на сложение карандашей, следует показать и пересчитать вместе с детьми оба слагаемых, а затем убрать карандаши в пенал, чтобы „скрыть" сумму. Иллюстрируя задачу на вычитание, можно уменьшаемое, например, 7 грибков, положить на глазах у детей в корзиночку, а затем вынуть из нее и показать классу вычитаемое, например, 3 грибка. Искомый остаток продолжает лежать в корзиночке — дети его не видят. Такой способ иллюстрации задач исключает возможность находить сумму и остаток посредством пересчитывания предметов. Дети вынуждены волей-неволей складывать и вычитать не группы предметов, а **числа**.

Предметная наглядность при решении задач нужна до тех пор, пока дети не научились читать и писать. В дальнейшем нет надобности иллюстрировать каждую задачу при помощи наглядных пособий. Но совершенно необходимо исподволь приучать детей к записи числовых данных.

Чтобы облегчить переход от красочной иллюстрации к сухой цифровой записи, можно ввести в качестве промежуточных этапов запись числовых данных на отдельных табличках, а затем запись на доске в рамках. Так, например, задачу о покупке материи на платье двум сестрам можно зафиксировать посредством двух табличек с соответствующими числами: 3 *м* и 4 *м*.



Числовые данные к задаче, в которой надо отнять 3 коп. от 10 коп., можно записать прямо на доске, окружив каждое число рамкой.



Роль табличек и рамок состоит в том, что они помогают привлечь внимание учащихся к записи на доске, сосредоточить их внимание на этой записи.

Только в конце второй четверти можно перейти к обыкновенной записи числовых данных на доске. Значение этих записей для последующей работы над задачей выяснится в дальнейшем.

При решении задач на сложение и вычитание некоторые учителя заменяют выражение „получится" словами: „будет", „станет" или (при вычитании) „останется". Однако, правильнее держаться всегда одного и того же слова „получится" по следующим соображениям. Во-первых, надо приучить детей прилагать ко всем арифметическим действиям одно и то же выражение, поскольку в систематическом курсе во всех случаях приходится пользоваться одним единственным термином „равняется". Во-вторых, если дети привыкнут связывать с вычитанием выражение „останется", то во II классе они окажутся в затруднительном положении, когда искомым числом явится разность, и в III классе — когда придется находить вычитаемое по уменьшаемому и остатку.

Методика решения простейших задач на умножение и деление

С простейшими задачами на умножение и деление первоклассники знакомятся в III учебной четверти. Последняя из этих задач — на деление по содержанию — дается во II классе, в начале второй четверти.

Что значит *умножить*? Это значит повторить одно из данных чисел слагаемым столько раз, сколько единиц в другом числе. Этот первоначальный смысл умножения дети усваивают на предметах, причем необходимо всемерно подчеркивать разницу между множимым и множителем.

Различение множимого и множителя составляет основную трудность и при решении простейших задач на умножение. До обобщения этих понятий дети еще не доросли. На первых порах приходится думать не о том, как подвести учащихся к обобщению, а о том, как предотвратить *отожествление*.

Укажем главнейшие приемы, помогающие детям различать множимое и множитель.

При решении задач на умножение необходимо прежде всего научить детей *правильно записывать* это действие. Множимое стоит на первом месте и пишется с наименованием. Множитель—число отвлеченное и поэтому пишется без наименования. Произведение однородно множимому и пишется с тем же наименованием, что и множимое. Дело осложняется тем, что в задачах на умножение, как правило, сначала упоминается множитель, а затем множимое. Первоклассники решали такую задачу: „Купили 3 ящика красок, по 4 руб. за каждый ящик. Сколько израсходовали денег?“ Многие ученики, записывая решение, поставили 3 ящика на первое место, а число 4 — на второе. Учителю пришлось нарисовать на доске 3 ящика и под каждым ящиком написать „4 руб.“. Тогда всем стало ясно, что надо *по 4 руб. взять 3 раза*, а не наоборот.

Итак, первый способ, помогающий различить множимое и множитель — применение *наглядности*. К этому необходимо добавить требование не только правильно записывать, но и *правильно читать* запись умножения, придавая множимому и произведению соответствующие наименования. Нельзя 4 руб. умножать на 3 ящика; еще хуже умножать 3 ящика на 4 рубля. Совершенно недопустимо заменять фразу „по 4 рубля взять 3 раза“ бессмысленным выражением: „4 рубля взять по 3 раза“. Неправильно также говорить „по пяти“, „по шести“ и т. д. Ведь никто не говорит „по двум“, „по четырем“. Наряду с выражениями „по два“, „по три“, „по четыре“, следует употреблять выражения „по пять“, „по шесть“ и т. д.

Чтобы научить детей различать множимое и множитель, применяют еще следующие способы.

1) Двоякую запись решения задач на умножение. Так, задачу про покупку красок можно решить сначала сложением: 4 руб. + 4 руб. + 4 руб. = 12 руб. После этого дети заменяют „длинную“ запись более короткой: 4 руб. × 3 = 12 руб.

2) Решение парных задач, которые отличаются одна от другой только порядком сомножителей.

„Купили 3 конверта, по 5 коп. за конверт. Сколько израсходовали денег?“

„Купили 5 конвертов, по 3 коп. за конверт. Сколько израсходовали денег?“

Разница между этими задачами выступает особенно отчетливо, если каждую из них пояснить рисунком и подробной записью.

Задача 1. Задача 2.

Задача 1	Задача 2
5 к. + 5 к. + 5 к.	3 к. + 3 к. + 3 к. + 3 к. + 3 к.
5 к. × 3 = 15 к.	3 к. × 5 = 15 к.

Возникает вопрос: почему так трудно научить детей правильно ставить наименования при записи умножения? Почему они склонны ставить наименования у обоих компонентов?

По всей вероятности это объясняется тем, что в течение ряда месяцев они записывали только сложение и вычитание и тем самым привыкли ставить наименование у обоих компонентов. Теперь приходится преодолеть укоренившуюся привычку: наряду с прежней связью, создать новую связь, добиться дифференциации этих связей. В подобном случае полезно прибегнуть к „перемежающемуся противопоставлению", на которое указывает в своих лекциях И. П. Павлов: „Сначала нам казалось, что здесь имеют место два приема. Один — это только многократное повторение определенного агента в качестве условного раздражителя... Другой — перемежающееся противопоставление этого определенного условного раздражителя с близким к нему агентом... В настоящее время мы склонны признать действительность только последнего приема".[1]

Здесь, разумеется, идет речь о применении приема „перемежающегося противопоставления" не в условиях учебного процесса и не в работе с учащимися. Но весьма вероятно, что иногда этот прием может оказаться эффективным и в работе с детьми. Кое-какие данные уже удалось получить в истекшем учебном году.[2] Группе детей, не усвоивших правила расстановки наименований при умножении, был предложен ряд парных задач, основное различие которых, при прочих сходных чертах, состояло в том, что одна задача решалась умножением, а другая — сложением. Вот образцы таких парных задач:

1) Колхозница продала 3 бидона молока по 5 *л* в каждом бидоне. Сколько литров молока продала колхозница? (5 *л* $\times$ 3 = 15 *л*)

2) Из одного бидона колхозница продала 5 *л* молока, а из другого — 3 *л*. Сколько литров молока продала колхозница? (5 *л* + 3 *л* = 8 *л*)

В обеих задачах один и тот же сюжет, одни и те же числа, но разные действия, и наименования приходится ставить по-разному.

А вот еще образец таких же задач.

1) Дети решили 3 столбика примеров, по 4 примера в каждом столбике. Сколько всего примеров решили дети? (4 пр. $\times$ 3 = 12 пр.)

2) Из одного столбика дети решили 4 примера, а из другого — 3 примера. Сколько всего примеров решили дети? (4 пр. + 3 пр. = 7 пр.)

---

[1] И. П. Павлов. Лекции о работе больших полушарий головного мозга. 1947, стр. 105.

[2] В 1952/53 учеб. году в I классах базовой школы при Лен. Гос пед. инст. им. А. И. Герцена.

Решая **вперемежку** задачи на умножение и сложение с одинаковыми числами, дети с большим успехом вырабатывают новую связь и подмечают разницу в записи умножения и сложения.

Другая группа детей решала тоже парные задачи, но отвечающие первому приему — „многократному повторению“ одного и того же „агента“.

Вот образцы таких парных задач.

1) Колхозница продала 3 бидона молока, по 5 *л* в каждом бидоне. Сколько литров молока продала колхозница? (5 *л* $\times$ 3 = 15 *л*)

2) В 3 окна вставили стекла, по 5 стекол в каждое окно. Сколько всего стекол вставили в эти окна? (5 ст. $\times$ 3 = 15 ст.)

Или такая пара.

1) Дети решили 3 столбика примеров, по 4 примера в каждом столбике. Сколько всего примеров решили дети? (4 пр. $\times$ 3 = 12 пр.)

2) Мама сшила 3 рубашки. К каждой рубашке она пришила по 4 пуговицы. Сколько пуговиц пришила она ко всем рубашкам? (4 п. $\times$ 3 = 12 п.)

Решая такие задачи, дети многократно повторяли запись умножения и могли заметить, что первое число пишется всегда с наименованием, а второе число — без наименования. Такое „многократное повторение“ одного и того же агента принесло некоторую пользу, но оказалось менее эффективным, чем „перемежающееся противопоставление“.

При первоначальном знакомстве с умножением не следует вводить выражение „умножить на столько-то“. Было замечено, что в этом случае дети начинают смешивать умножение и сложение. На вопрос, сколько получится, если 8 умножить на 2, они отвечают: „получится 10“; на вопрос, сколько получится, если 6 умножить на 3, отвечают: „получится 9“ и т. д. Очевидно, глагол „умножить“ они отожествляют с глаголом „увеличить“, встречавшийся им раньше при решении соответствующих задач.

Решению задач на деление предшествует выяснение смысла этого действия на предметах. Тут имеет значение не столько число предметов, сколько жест, конкретное движение. Чтобы пояснить сложение, приходится придвигать предметы, чтобы пояснить вычитание — отодвигать; при умножении абирают предметы парами, тройками и т. д.

Жест, характеризующий деление на равные части,— это раздача предметов по одному, пока ничего не останется. Двум ученикам раздаются поровну 4 тетради, 6 карандашей, 8 флажков и т. п. Попутно вводится соответствующая словесная формулировка, например: 4 тетради разделить на 2 равные части, получится по 2 тетради в каждой части. Запись действия делается с наименованием у делимого и частного:

$$4 \text{ т.} : 2 = 2 \text{ т.}$$

Усвоив смысл деления, дети решают простые задачи на деление по тому же плану, который до этого времени применялся к задачам на сложение, вычитание и умножение.

Заметим, что предлог „по" в прямом действии стоит перед множимым, а в обратном действии перед частным. Чтобы обеспечить дифференцировку соответствующих выражений, полезно сопоставлять аналогичные задачи на умножение и деление. Например:

1) С двух грядок сорвали морковки, по 8 морковок с каждой грядки. Сколько всего сорвали морковок?

2) С двух грядок сорвали 8 морковок, поровну с каждой грядки. Сколько морковок сорвали с каждой грядки?

Смешивая формулировку умножения с формулировкой деления, дети говорят: „8 морковок взять по 2 раза" и „по 8 морковок разделить на 2 равные части", тогда как следует сказать: „по 8 морковок взять 2 раза" и „8 морковок разделить на 2 равные части, получится по 4 морковки в каждой части".

В дальнейшем вводятся краткие формулировки: „8 морковок умножить на 2, получится 16 морковок" и „8 морковок разделить на 2, получится 4 морковки". Предлог „по" становится в этом случае излишним.

В I классе при объяснении деления на равные части приходится, как мы видели, придавать вводным упражнениям характер практических задач. При объяснении деления по содержанию, несмотря на то, что этот вид деления изучается во II классе, такая форма работы является единственно возможной. Вот три задачи, которые могут быть решены на первом уроке:

1) 4 картинки надо разложить в конверты, по 2 картинки в каждый конверт. Сколько потребуется конвертов?

2) 6 морковок надо раздать кроликам, по 2 морковки каждому кролику. Сколько кроликов получат морковки?

3) 8 флажков надо раздать ученикам, по 2 флажка каждому ученику. Сколько учеников получат флажки?

Все эти вопросы подобраны с таким расчетом, чтобы их решение можно было пояснить на предметах. Так, один из учеников фактически раскладывает картинки в конверты, по 2 картинки в каждый конверт. Учитель прикрепляет к доске морковки, соединив вместе по 2 морковки. Флажки раздаются ученикам, по 2 флажка каждому ученику.

Называя приведенные вопросы „задачами“, мы имеем в виду только их форму. По существу же это не задачи, так как ученику не приходится „выбирать“ действие — оно демонстрируется на предметах.

Каждый раз после демонстрации действия на предметах делается соответствующий вывод: из четырех картинок можно взять по две картинки 2 раза; отсюда, если 4 картинки разделить по 2 картинки, получится 2 раза по 2 картинки; значит потребуется 2 конверта. Действие с наименованием у делимого и делителя учитель записывает на доске, а учащиеся — в тетрадях. Под действием пишется ответ:

4 к. : 2 к. = 2

Ответ: 2 конверта

6 м. : 2 м. = 3

Ответ: 3 кролика

8 фл. : 2 фл. = 4

Ответ: 4 ученика

Запись ответа при решении задач вводится еще в I классе. Такая запись становится особенно необходимой, если поставленный вопрос решается делением по содержанию. В самом деле, ответ получается в этих случаях не сразу. Сначала приходится узнавать, сколько раз одно число содержится в другом. Получается отвлеченное число, которому только на основании дополнительного рассуждения придается то или иное наименование. Записывая отдельно ответ, мы отображаем сложный характер задач на деление по содержанию, для решения которых требуется, во-первых, произвести арифметическое действие, и, во-вторых, сделать некоторое умозаключение. Нет никаких оснований сливать эти два этапа воедино, ставя в скобках рядом с отвлеченным частным его будущее наименование. Этим прежде всего наносится ущерб пониманию смысла деления. Наименование, даже если оно стоит в скобках, заслоняет от ученика отвлеченный смысл частного. Мало того, читая вслух подобную запись деления, дети, разумеется, не упоминают о скобках и тем самым допускают неграмотный оборот речи: 8 флажков разделить по 2 флажка, получится 4 ученика. Сторонники записи наименования в скобках ссылаются на детскую забывчивость. С этим никак нельзя согласиться. Если бы наши дети были до такой степени рассеяны и забывчивы, их вообще ничему нельзя было бы научить. Наконец, что важнее: запоминание случайного факта, изменяющегося с изменением текста задачи, от которого зависит наименование ответа, или же понимание неизменной сущности данного вида деления? Последнее, конечно, важнее. Вот почему следует записывать результат деления по содержанию без наименования.

Существует мнение, что для первого знакомства с делением по содержанию надо выбирать задачи, вопрос которых начинается словами „сколько раз“. Например:

Для поливки цветов садовник принес 10 ведер воды. Каждый раз он приносил по 2 ведра. Сколько раз ходил он за водой?

Однако, такая задача не устраняет трудностей, характерных для деления по содержанию, не упрощает рассуждения. В самом деле, садовник ходил за водой столько раз, сколько раз 2 ведра содержатся в 10 ведрах; 2 ведра содержатся в 10 ведрах 5 раз; значит, он ходил за водой 5 раз. Ничем не отличаясь по своей структуре от обычного, такое рассуждение не вносит ясности в понимание деления. Наоборот, оно может запутать ученика. В трудное положение попадают при этом сторонники записи частного с наименованием в скобках. Ведь слово „раз“ играет здесь двоякую роль: с одной стороны, оно связано с арифметическим действием, с другой стороны, относится к ответу на вопрос задачи. Выходит, что в этом случае надо записать действие следующим образом: 10 в.:2 в. = 5 (раз). Как должен чувствовать себя ученик II класса, которому внушают, что слово „раз" у числа не пишется, тогда как здесь оно все же написано?

Результат деления по содержанию следует записывать без наименования даже в тех случаях, когда это действие не является последним. Давая устное объяснение деления, ученик устно же придает полученному числу то наименование, которое соответствует поставленному вопросу.

Когда дети вполне освоятся с делением по содержанию, полезно сопоставить на задачах с одними и теми же числами это действие с делением на равные части. Попутно следует ввести название каждого вида деления. Встречаясь при решении задач с тем или иным видом деления, учащиеся должны назвать его и обосновать соответствующим образом выбор действия.

Методика решения задач, связанных с понятиями разности и кратного отношения

В основе всех этих задач лежит разностное или кратное сравнение чисел. Задачи, в которых разность или кратное отношение являются искомыми, так и называются задачами на разностное или кратное сравнение. Но разность или кратное отношение могут быть даны в условии задачи. Тогда приходится различать задачи, содержащие выражения „больше" или „меньше" на столько-то и во столько-то раз.

В методическом отношении более легкими считаются задачи, в которых разность или кратное отношение даны в условии. Из них задачи с выражениями „больше" или „меньше" на столько-то решаются уже в I классе. Остальные задачи, а именно, задачи на разностное сравнение и все задачи, связанные с понятием кратного отношения, решаются во II классе.

Простейшие случаи разностного сравнения могут и должны предшествовать решению задач с выражениями „больше" или „меньше на столько-то". Уже во время работы над первым десятком надо научить детей сравнивать соседние числа натурального ряда. Такие упражнения должны непременно опираться на предметную наглядность. Если поместить перед глазами учащихся два ряда предметов, например, 4 кружка и 5 кружков, расположенных один под другим с таким расчетом, чтобы ученик мог ясно видеть „лишний" кружок во втором ряду, ответ на вопрос, где больше кружков и где меньше кружков, не затрудняет учащихся. Взаимообратность этих отношений дети улавливают еще в дошкольном возрасте. Мало того, они без труда отвечают на вопрос, на сколько больше кружков в нижнем ряду, так как видят лишний кружок в этом ряду. Труднее ответить на вопрос, на сколько меньше кружков в верхнем ряду, поскольку нельзя видеть того, что отсутствует. Этот вопрос поясняется на счетах. Отложив на двух проволоках по 5 шариков, учитель отодвигает в сторону один шарик в верхнем ряду. Дети видят, что четыре меньше пяти на один.

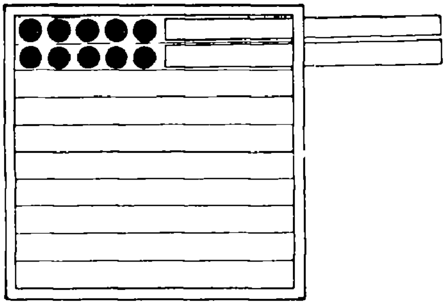
Итак, на первых порах разностное сравнение доступно детям только в том случае, если разность равна единице, если сравниваются группы предметов и если решается вопрос, на сколько одно число больше другого. О решении задач на разностное сравнение в это время не может быть и речи.

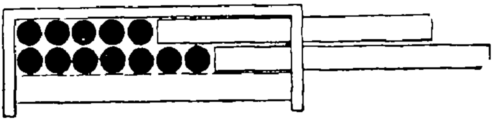
Задачи с выражением „больше" или „меньше на столько-то" легче задач на разностное сравнение уже по той простой причине, что выражение „больше на столько-то" всегда связывается на первых порах с действием сложения, а „меньше на столько-то"—с действием вычитания. Что же касается разностного сравнения, то в этом случае с самого начала ученикам приходится преодолеть привычную связь: в задаче спрашивается, на сколько одно число больше другого, а решается задача вычитанием. Мало того, два разных вопроса (на сколько больше и на сколько меньше) решаются одним и тем же действием. Это тоже на первых порах дезориентирует учащихся. Итак, начинать приходится с задач, в которых разность дана.

Пояснить выражение „больше на столько-то" удобнее всего на счетах или на „арифметической доске".

Сравнение предполагает непременно наличие двух групп предметов, двух чисел.

Учитель открывает сначала два ряда кружков, по 5 кружков в каждом ряду. Дети пересчитывают кружки и устанавливают, что в верхнем и в нижнем ряду кружков поровну. Затем учитель открывает, прибавляет еще 2 кружка в нижнем ряду. Учащиеся утверждают, что теперь кружков не поровну, так как к пяти кружкам учитель прибавил еще 2 кружка: в нижнем ряду стало на 2 кружка больше, чем в верхнем. Дальнейшая работа состоит





в том, чтобы закрепить следующие два положения: 1) если прибавить 2, 3, 4 кружка, станет на 2, 3, 4 кружка больше; 2) чтобы стало на 2, 3, 4 кружка больше, надо 2, 3, 4 кружка прибавить.

Переходя к решению задач, дети опираются на установленную таким образом связь.

„У младшего брата было 16 почтовых марок, а у старшего на 4 марки больше. Сколько марок было у старшего брата?“

Ученик рассуждает так: в задаче сказано — на 4 марки больше; чтобы стало на 4 марки больше, надо прибавить 4 марки к 16 маркам, получится 20 марок; ответ — у старшего брата было 20 марок.

Аналогичным образом поясняется выражение „меньше на столько-то“. В этом случае удобнее воспользоваться классными счетами, чтобы вычитаемое осталось на виду у детей. На двух проволоках счетов учитель откладывает по 6 шариков. Дети устанавливают, что на верхней и на нижней проволоке шариков поровну. Затем учитель отодвигает в сторону 2 шарика на нижней проволоке. Если отодвинуть, отнять 2 шарика, станет на 2 шарика меньше. Вообще, если отнять 2, 3, 4 шарика, станет на 2, 3, 4 шарика меньше. Отсюда, чтобы стало на 2, 3, 4 шарика меньше, надо 2, 3, 4 шарика отнять.

Решая задачи с выражением „меньше на столько-то", дети рассуждают так: в задаче сказано — на 3 карандаша меньше; значит, надо 3 карандаша отнять. И т. д.

„Больше на столько-то" и „меньше на столько-то" — понятия относительные: если $a > в$, то тем самым $в < a$. Значит ли это, что в работе с первоклассниками надо вводить оба понятия одновременно, на одном и том же уроке? Мы отвечаем на этот вопрос отрицательно и вот почему. На данном этапе работы наша задача состоит не в том, чтобы добиться дифференцировки этих понятий — дети и без того достаточно хорошо их различают. Наша задача — установить связь между выражением „больше на столько-то" и сложением, между выражением „меньше на столько-то" и вычитанием. Показать обе эти связи одновременно, посредством одного и того же наглядного приема, невозможно. Одновременно можно показать только сложение и увеличение на столько-то. Чтобы показать вычитание и уменьшение на столько-то, надо вернуть предметы (кружки, шарики на счетах) в исходное положение, образовать опять равные группы и только после этого продемонстрировать вычитание, а вместе с тем и уменьшение на столько-то. Такой большой материал не уложится на одном уроке и может на первых порах привести к смешению понятий. Надо сначала закрепить связи, относящиеся к увеличению на несколько единиц, затем ввести уменьшение на несколько единиц и только после этого перейти к сопоставлению выражений „больше" и „меньше на столько-то" на отвлеченных примерах и на задачах.

С разностным сравнением по-настоящему дети знакомятся во II классе, хотя с некоторыми простейшими случаями такого сравнения они должны были встретиться уже при изучении нумерации в пределах десяти.

Уже в I классе дети сопоставляют выражения „больше" и „меньше на столько-то" и начинают понимать их взаимосвязь: если у старшего брата на 4 марки больше, чем у младшего, это значит, что у младшего брата тем самым на 4 марки меньше, чем у старшего.

Эта взаимосвязь должна быть совершенно ясна детям, прежде чем будет введено разностное сравнение.

Чтобы познакомить детей с разностным сравнением и раскрыть его связь с вычитанием, поступают следующим образом.

Учитель рисует на доске слева 7 кружков, а справа — 10 кружков. При таком расположении кружков искомая разность не воспринимается зрительно, что помешало бы осознать необходимость ее нахождения посредством вычитания. На каждый кружок прикалывается кнопкой равный ему кружок из цветной бумаги.

Учитель. Надо узнать, на сколько больше кружков справа, чем слева. Чтобы решить этот вопрос, будем снимать одновременно по одному кружку в каждом ряду.

В конце концов на доске получается следующая картина:

Учитель. Из каждого ряда мы взяли по 7 бумажных кружков. Слева таких кружков не осталось. Справа осталось 3 кружка. Почему они остались?

Ученик. Потому что справа было на 3 кружка больше, чем слева.

Учитель. Как получился этот остаток?

Ученик. От десяти кружков мы отняли семь кружков и получилось 3 кружка.

Это действие учитель записывает на доске, а дети в тетрадях.

Учитель. Итак, чтобы узнать, на сколько одно число больше другого, что надо сделать?

Ученик. Чтобы узнать, на сколько одно число больше другого, надо от большего числа отнять меньшее число.

Учитель. Мы узнали, что число 10 на 3 единицы больше, чем число 7. А что можно сказать в таком случае про число 7?

Ученик. Число 7 на 3 единицы меньше, чем число 10.

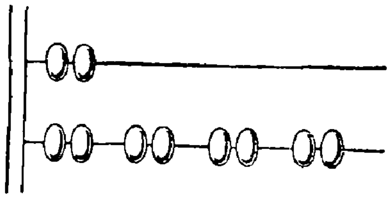
Учитель. Итак, что надо сделать, чтобы узнать, на сколько одно число меньше другого?

Ученик. Чтобы узнать, на сколько одно число меньше другого, достаточно от большего числа отнять меньшее число.

В отличие от выражений „больше" и „меньше на столько-то", которые вводились в I классе сначала независимо одно от другого, оба вопроса, связанные с нахождением разности, следует дать сразу, опираясь на один и тот же наглядный образ. Это становится возможным благодаря предшествующей работе учащихся, которая подготовила их к пониманию взаимосвязи выражений „больше" и „меньше на столько-то". Единство образа подчеркивает то общее, что относится к решению двух разных вопросов — оба они решаются вычитанием. Вывод этот закрепляется посредством решения примеров и задач.

Обратимся теперь к задачам, связанным с понятием кратного отношения.

Выражение „больше во столько-то раз" вводится во II классе при изучении табличного умножения (материал второй четверти).



На верхней проволоке классных счетов учитель откладывает 2 шарика, а на нижней — 4 раза по 2 шарика.

Учитель. Сколько шариков на нижней проволоке?

Ученик. На нижней проволоке 4 раза по 2 шарика, а всего 8 шариков.

Учитель. На нижней проволоке 4 раза по 2 шарика. Иначе можно сказать: в 4 раза больше, чем на верхней проволоке.

Дальнейшая работа состоит в том, чтобы закрепить следующие два положения: 1) если по 2, по 3, по 4 взять 5, 6, 7 раз, станет в 5, 6, 7 раз больше; 2) чтобы стало в 5, 6, 7 раз больше, надо по 2, по 3, по 4 взять 5, 6, 7 раз.

Словечко „раз" играет роль связующего звена между умножением и увеличением числа в несколько раз. Было бы неосторожно употреблять в этом случае выражение „умножить на столько-то". Это могло бы повести к отожествлению выражений „умножить на" и

„увеличить **на**", тогда как необходимо с самого начала подчеркнуть разницу между известным детям выражением „увеличить **на**" и новым выражением „увеличить **в** несколько раз". В первом случае мы пользуемся сложением, во втором случае — умножением. Чтобы дети вполне осознали эту разницу, следует после работы с наглядным пособием перейти к решению примеров и сразу же применить прием „перемежающегося противопоставления". Вот образцы таких примеров:

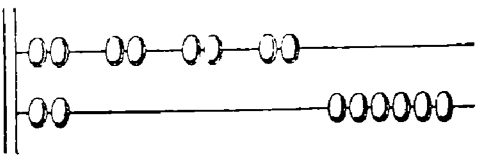
1) 3 увеличить в 9 раз; 3 увеличить на 9.
2) 4 увеличить на 8; 4 увеличить в 8 раз.
3) 20 увеличить в 3 раза; 20 увеличить на 3.
4) 10 увеличить на 7; 10 увеличить в 7 раз. И т. д.

Числа в этих примерах подобраны в точном соответствии с тем программным материалом, который должен быть пройден детьми ко времени их знакомства с увеличением числа в несколько раз. Еще в I классе они познакомились с умножением круглых десятков, а во II классе успели пройти табличное умножение по 3 и по 4.

При решении примеров необходимо подчеркивать связь сложения с предлогом **на** и связь умножения с предлогом **в**. Только после этого можно перейти к решению простых задач с выражением „больше во столько-то раз", которое и в задачах целесообразно чередовать с выражением „больше на столько-то".

Уменьшение числа в несколько раз надо связать с делением на равные части, предварительно познакомив детей с нахождением части числа.

На двух проволоках классных счетов учитель откладывает по 8 шариков. И ту, и другую группу он делит на 4 равные части, чтобы получить *четвертую часть* восьми. Затем на нижней проволоке он оставляет только *одну* четвертую часть. На верхней проволоке четыре такие части, иначе говоря, в 4 раза больше. На нижней проволоке одна такая часть, иначе говоря, *в 4 раза меньше*. В этом случае понять смысл выражения „во столько-то раз меньше" помогает аналогия с той взаимосвязью, которая усвоена



детьми по отношению к выражениям „больше“ и „меньше на столько-то“. Ученик должен рассуждать так: книжка в 5 раз дороже, чем тетрадь; значит, тетрадь в 5 раз дешевле, чем книжка. Полезно давать детям задачи на сопоставление этих выражений. Например:

1) Для детского сада купили 6 столовых ложек, а чайных в 3 раза больше. Сколько чайных ложек купили для детского сада?

2) Для детского сада купили 18 чайных ложек, а столовых в 3 раза меньше. Сколько столовых ложек купили для детского сада?

Работая над выражением „меньше во столько-то раз“, дети усваивают следующие два положения: 1) если разделить число на 2, 3, 4 равные части, станет в 2, 3, 4 раза меньше; 2) чтобы стало в 2, 3, 4 раза меньше, надо разделить число на 2, 3, 4 равные части.

Кратное сравнение обычно дается уже в начале третьей четверти, когда ученики II класса заканчивают изучение табличного умножения и деления. Два разных вопроса — во сколько раз одно число больше другого и во сколько раз одно число меньше другого — решаются одним и тем же действием: делением по содержанию. В этом состоит трудность кратного сравнения, аналогичная той трудности, которая связана с нахождением разности. Дети привыкли связывать выражение „больше во столько-то раз“ с умножением. Однако, вопрос, „во сколько раз одно число больше другого“, решается делением. Чтобы облегчить детям выбор действия при кратном сравнении, поступают следующим образом.

Каждый ученик кладет перед собой на парте 3 спички (или палочки) налево и 12 спичек (или палочек) направо. „Надо узнать, говорит учитель, во сколько раз 12 больше, чем 3“. Следуя далее указаниям учителя, дети соединяют 3 спички в один пучок, затем находящиеся справа 12 спичек они также раскладывают, делят по 3 спички. Теперь они видят налево один пучок, а направо четыре таких же пучка.

Учитель. Сколько раз по 3 спички лежит у вас направо? Во сколько же раз направо спичек больше, чем налево?

Ученик. Направо спичек в 4 раза больше, чем налево.

Учитель. Как мы это узнали?

Ученик. Мы разделили 12 спичек по 3 спички.

Учитель. Итак, чтобы решить вопрос, во сколько раз одно число больше другого, надо узнать, сколько раз меньшее число содержится в большем числе.

Дети записывают это действие: 12 сп. : 3 сп. = 4 и еще раз формулируют ответ: 12 спичек больше, чем 3 спички, в 4 раза.

Учитель. Мы узнали, что 12 в 4 раза больше, чем 3. А что можно сказать в таком случае про число 3?

Ученик. Число 3 в 4 раза меньше, чем 12.

Учитель. Итак, что надо сделать, чтобы узнать, во сколько раз 3 меньше, чем 12?

Ученик. Чтобы решить этот вопрос, тоже достаточно 12 разделить по 3.

В конце концов делается вывод: оба вопроса — во сколько раз одно число больше другого и во сколько раз одно число меньше другого — решаются делением по содержанию. Усвоив этот вывод на предметах, дети решают затем примеры и задачи на кратное сравнение, чередуя их с примерами и задачами на разностное сравнение.

Может возникнуть вопрос, как записывать наименования при решении задач, связанных с понятиями разности и кратного отношения, если в этих задачах речь идет о разнородных предметах. В этих случаях можно поступить двояко:

1) можно пользоваться родовым понятием, которому подчинены данные видовые, например, вместо щук и окуней употреблять слово „рыба“, вместо берез и лип — „деревья“.

2) можно записывать действие без наименования у компонентов, а у полученного ответа ставить наименование в скобках. Так, например, решение вопроса, сколько окуней поймал рыбак, если у него было 5 щук, а окуней в 3 раза больше, можно записать так: $5 \times 3 = 15$ (окуней).

Методика решения составных задач в два-три действия

При изучении в I классе второго десятка дети впервые знакомятся с задачами в два действия, т. е. с составными задачами.

Составная задача — это задача, которая решается двумя и более действиями. Однако, нельзя представлять себе дело так, что механическое соединение двух простых задач в одну задачу уже есть составная задача. Вот, например, задача, состоящая из двух простых: „Старшая сестра сорвала 5 васильков и 4 ромашки, а младшая 6 васильков и 2 ромашки. Сколько цветков сорвала каждая сестра?

Это не составная задача, хотя она и „составлена“ из двух простых задач.

В составной задаче, решаемой двумя действиями, ответ первой задачи необходим для решения второй. Ответ первой задачи называется поэтому промежуточным искомым. Это промежуточное искомое связывает вторую задачу с первой. В отличие от механического соединения двух простых задач, в составной задаче связь между простыми задачами не только сюжетная, но и арифметическая.

В чем же выражается внешняя, уловимая для ученика разница между простой и подлинно составной задачей? Простая задача решается сразу, одним действием. При механическом соединении нескольких простых задач дело сводится к тому, что главный вопрос без труда расчленяется на несколько частных вопросов, из которых каждый решается сразу, одним действием. Главный вопрос составной задачи нельзя решить сразу. В этом ее специфика.

Следует ли при первоначальном знакомстве с составными задачами отправляться от простых задач, из которых затем строится составная, или же целесообразнее идти от готовой задачи в два действия к составляющим ее простым задачам?

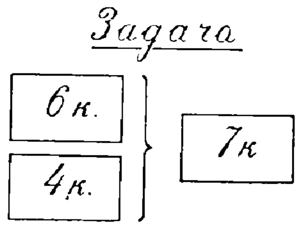
Предпочтительнее второй прием. В самом деле, уловимая для семилетнего ребенка специфика составной задачи заключается в том, что ее нельзя решить сразу, одним действием. Если нанизывать простые задачи одну за другой на какую-нибудь сюжетную нить, дети будут воспринимать их как отдельные простые задачи, поскольку каждая из них решается сразу, одним действием. Арифметическую зависимость второй задачи от первой они так и не почувствуют, никакой разницы между простой и составной задачей не заметят.

Наоборот, если при первом знакомстве с составной задачей отправляться от готовой задачи в два действия, разница между простой и составной задачей выступит с полной отчетливостью.

Для начала можно взять такую задачу, которую удобно проиллюстрировать на предметах.

В коробку положили 6 красных карандашей и 4 зеленых. Потом взяли из коробки 7 карандашей. Сколько карандашей осталось в коробке?

На доске задача записана, как показано на рисунке.



Для большей убедительности „6 к." можно записать красным мелом, а „4 к."—зеленым. Рамки нарисованы белым мелом, вычитаемое „7 к." также написано белым мелом, поскольку неизвестно, какого цвета карандаши входят в это число. Вопрос задачи не записывается, так как дети в это время еще не смогли бы его прочитать.

Сообщив задачу, учитель показывает детям сначала 6 красных карандашей, затем 4 зеленых. Карандаши должны быть снаружи соответствующего цвета.

Дети пересчитывают каждую группу карандашей, учитель складывает их в коробку. Дети не видят, сколько их всего: промежуточное искомое скрыто в коробке. Затем учитель вынимает 7 карандашей, которые также следует пересчитать. Главное искомое остается скрытым в коробке.

Прослушав задачу, учащиеся повторяют ее сначала по наводящим вопросам, затем целиком. Выделив после этого вопрос задачи, они решают ее в уме, как решали до этого времени простые задачи.

У всех получился правильный ответ: в коробке осталось 3 карандаша. Можно проверить, так ли это. Да, в коробке действительно лежит 3 карандаша, в этом можно убедиться воочию.

У ч и т е л ь. Как мы узнали, что в коробке осталось 3 карандаша?

У ч е н и к. От 10 карандашей мы отняли 7 карандашей и получилось 3 карандаша.

У ч и т е л ь (указывая на доску, где записаны числовые данные). От 10 карандашей? Но такого числа нет в задаче.

Ученик. К 6 карандашам надо прибавить 4 карандаша и получится 10 карандашей.

Учитель. Что мы узнали, складывая 6 карандашей и 4 карандаша?

Ученик. Мы узнали, сколько было всего карандашей в коробке.

Учитель. Вот, видите, сначала мы узнали, сколько было всего карандашей в коробке — это первый вопрос, а потом узнали, сколько карандашей осталось — это второй вопрос. Итак, сколько же вопросов в этой задаче?

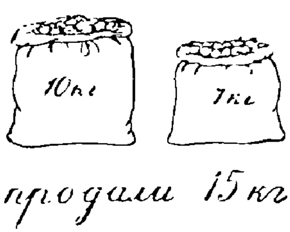
Ученик. В этой задаче два вопроса.

Далее учитель подчеркивает, что задачи иногда решаются одним действием. Но бывают задачи, которые нельзя решить сразу — приходится сделать сначала одно действие, потом другое, например, сначала сложить, потом отнять.

С этого времени перед решением каждой задачи дети прежде всего устанавливают, можно ли решить ее сразу. Если выясняется, что это невозможно, учитель спрашивает: „А что можно узнать сразу?" Так дети начинают впервые применять „простейший анализ" — первый шаг на пути к „полному анализу" в III—VI классах.

Подобно „полному анализу", этот „простейший неполный анализ" опирается на сложный аналитико-синтетический процесс мышления. Вопрос: „Можно ли решить задачу сразу?" побуждает детей подбирать данные к вопросу — это момент аналитический в познавательном смысле слова. Вопрос: „А что можно узнать сразу?" побуждает детей подбирать вопрос к данным — это момент синтетический. Однако ведущим является все же не синтез, а анализ.

От полной предметной наглядности можно перейти к плакату или рисунку на доске. Вместе с тем можно несколько углубить тот „простейший неполный анализ", которым мы пользовались в самом начале.



В большом мешке было 10 *кг* луку, а в маленьком—7 *кг*. Продали 15 *кг*. Сколько килограммов луку осталось?

Рисунок на доске поясняет текст задачи, но не иллюстрирует самих чисел.

Вот как можно „углубить“ „анализ“ этой задачи.

Учитель. Можно ли сразу узнать, сколько луку осталось?

Ученик. Нет, нельзя.

Учитель. Почему нельзя узнать этого сразу?

Ученик. Потому что мы не знаем, сколько было всего луку.

Учитель. А сколько было всего луку, можно узнать сразу?

Ученик. Да, это можно узнать сразу.

Вопрос „почему?“ заполняет тот логический пробел, который при „простейшем неполном анализе“ получается между вопросом: „Можно ли узнать сразу?“ и вопросом: „А что можно узнать сразу?“

Привыкнув к вопросу „почему?“, дети начинают анализировать задачу, не ожидая этого вопроса. Они говорят: „Сразу нельзя узнать, сколько луку осталось, потому что мы не знаем, сколько было всего луку“.

Большое значение имеет такой анализ при решении задач с выражениями „больше“ или „меньше“ на столько-то. Задачи простые этого рода дети зачастую пробуют решать двумя действиями, а составные — одним действием. Это объясняется тем, что учитель не приучил их вдумываться в вопрос задачи, не спрашивает, можно ли сразу решить этот вопрос.

Во втором полугодии дети решают задачи в два действия на сложение, вычитание, умножение и деление. В это время следует познакомить их с терминами „простая задача“ и „составная задача“. Простая задача решается сразу, одним действием. Составную задачу нельзя решить сразу, она решается двумя действиями. Дети должны сами давать такие объяснения.

Решив составную задачу, дети строят простые задачи, на которые им пришлось расчленить данную составную. Этот прием дает возможность осмыслить термины „простая задача“ и „составная задача“. Простая задача решается сразу, одним действием, а составная „состоит“ из двух простых задач.

Дана задача. За барабан и 3 одинаковых мяча заплатили 17 руб. Мяч стоит 4 руб. Сколько стоит барабан?

Решение задачи записывается так:

Задача.

1) 4 руб. $\times$ 3 = 12 руб.
2) 17 руб. — 12 руб. = 5 руб.

Ответ: 5 руб.

Теперь учитель предлагает детям составить задачи к каждой строчке.

Первая задача. Купили 3 одинаковых мяча. Каждый мяч стоит 4 руб. Сколько израсходовали денег?

Вторая задача. За барабан и мячи заплатили 17 руб. Все мячи стоят 12 руб. Сколько стоит барабан?

Надо следить за тем, чтобы в формулировку простых задач дети не вносили лишних данных, например, во второй задаче говорили не о трех мячах, а о всех мячах.

Так, уже в I классе можно научить детей расчленять составную задачу на две простых.

Задачу о барабане и мячах можно иллюстрировать рисунком. Но делать это каждый раз невозможно, а записи числовых данных не всегда удается придать удобообозримый вид. В этом случае помогают рамки.

Дана задача. Купили свитер за 70 руб. и 4 *м* сатина. Весь сатин стоит на 10 руб. дороже, чем свитер. Сколько стоит 1 *м* сатина?

Записать условие этой задачи можно следующим образом:

Свитер	**4 м сатина**
70 руб.	**на 10 руб. дороже.**

Благодаря удобной записи легче повторить и проанализировать задачу.

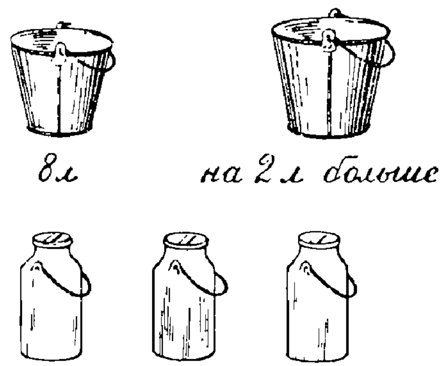
Во II классе вводятся задачи в три действия. Простейшими задачами этого рода являются задачи на два умножения и сложение, на два умножения и вычитание. Например:

На мельницу отправили 3 подводы и 2 грузовика с зерном. На каждой подводе было по 6 мешков зерна, на каждом грузовике по 40 мешков. Сколько всего мешков зерна отправили на мельницу?

Это задача на сумму двух произведений. А вот аналогичная задача на разность.

У садовника было 3 ящика с цветочной рассадой, по 30 кустиков в каждом ящике. Эту рассаду он высадил на 4 клумбы, по 20 кустиков на каждую клумбу. Сколько еще кустиков осталось?

На вопрос, почему нельзя решить такую задачу сразу, дети иногда указывают только одно из неизвестных. Тогда учитель спрашивает дополнительно: „А еще почему?“ Такое добавление не нарушает стройности анализа: оба числа в равной мере нужны нам для того, чтобы решить главный вопрос задачи.



Иначе обстоит дело с более трудными задачами в три действия. Например:

В одном ведре было 8 *л* молока, в другом — на 2 *л* больше. Все это молоко разлили поровну в 3 бидона. Сколько молока вошло в каждый бидон?

Ведра и бидоны нарисованы на доске.

Анализ обычно протекает следующим образом.

Учитель. Можно ли сразу узнать, сколько молока вошло в каждый бидон?

Ученик. Нельзя, так как мы не знаем, сколько литров молока было во втором ведре.

Это одна из самых распространенных ошибок — пропуск промежуточного логического звена. Чтобы вернуть ученика на правильный путь, учитель задает вопрос: „А разве в бидоны влили молоко только из второго ведра?“ Обычно этого вопроса бывает достаточно, чтобы получить от ученика правильное объяснение.

Ученик. Мы не можем сразу узнать, сколько молока вошло в каждый бидон, так как не знаем, сколько молока было в двух ведрах вместе.

Учитель. Можно ли сразу узнать, сколько молока было в двух ведрах вместе?

Ученик. Нет, так как мы не знаем, сколько молока было во втором ведре.

Решение записываем без вопросов, как и в I классе:

Задача

1) $8\ л + 2\ л = 10\ л$
2) $10\ л + 8\ л = 18\ л$
3) $18\ л : 3 = 6\ л$

Ответ: $6\ л$

Полезно и в этом случае, опираясь на запись действий, составить те простые задачи, на которые мы расчленили данную задачу.

1) В одном ведре было 8 *л* молока, а в другом — на 2 *л* больше. Сколько молока было во втором ведре?

2) В одном ведре было 8 *л* молока, в другом — 10 *л*. Сколько всего молока было в обоих ведрах?

Труднее всего составить задачу к третьей строчке. Детям никак не удается отрешиться от сюжета задачи в целом. В текст третьей задачи они вводят лишние данные, например: „В двух ведрах было 18 *л* молока". Задача должна быть сформулирована так: 18 *л* молока разлили поровну в 3 бидона. Сколько молока вошло в каждый бидон?

В течение всего второго года обучения дети решают обыкновенные, нетиповые задачи в 2—3 действия. Это как раз самый благоприятный период для применения „неполного анализа" с вопросом „почему?" Надо только следить за тем, чтобы дети, рассуждая, не пропускали промежуточного логического звена. Если учитель допускает такие ошибки учащихся, он не только не развивает логического мышления ученика, но, наоборот, вносит путаницу, неясность в его мысли, приучает его быть неточным. Такой разбор задач приносит не пользу, а вред.

Методика решения обыкновенных, нетиповых задач в III и IV классах

В предыдущей главе были показаны приемы, которыми пользуются учащиеся I и II классов при разборе составных задач. Мы называли эти приемы „простейшим анализом", анализом с вопросом „почему?", наконец, „неполным анализом" в отличие от „полного анализа", с которым детям предстоит познакомиться в III классе.

Говоря о „неполном анализе“, мы различали две мыслительные операции: 1) рассуждение, идущее от вопроса задачи к ее числовым данным (можно ли решить сразу этот вопрос?) и 2) рассуждение, идущее от числовых данных к вопросу (а что можно узнать сразу?). Первое рассуждение с познавательной точки зрения можно назвать анализом, а второе — синтезом.

Происходит видимость смешения понятий: разбор задачи, в который входит как момент анализа, так и момент синтеза, мы называем в целом „анализом“ задачи.

На самом деле здесь происходит не смешение понятий, а смешение терминологии, которое объясняется недостаточностью и несовершенством собственно методической терминологии. Чисто методический прием разбора задачи мы называем „анализом“, так как не придумали другого, более удачного названия. При этом действует определенная историческая традиция, сложившаяся в те времена, когда анализ и синтез рассматривались в философии, логике и психологии как вполне самостоятельные, не связанные между собою мыслительные операции. Именно тогда вошли в употребление выражения: аналитический метод решения задач, иначе говоря, разбор задачи, идущий от вопроса к числовым данным, и синтетический метод решения задач, иначе говоря, разбор задачи, идущий от числовых данных к вопросу.

Прием разбора задачи в два действия мы называем по традиции „анализом“ только потому, что он начинается не с числовых данных, а с вопроса задачи.

Б. Ф. Рубилов в своей кандидатской диссертации[1] пытается доказать, что может существовать только один метод решения задач, а именно, только аналитико-синтетический метод. Тем самым смешение собственно методической терминологии с терминологией психологической и логической доводится до своего крайнего предела. Из того простого факта, что в процессе мышления анализ неотделим от синтеза, делается неправомерный вывод, что в арифметике применим один единственный метод работы над задачей — аналитико-синтетический.

[1] Б. Ф. Рубилов. Аналитико-синтетический метод решения арифметических задач в начальной школе. Диссертация. АПН РСФСР, Институт методов обучения, 1952.

Само собой разумеется, что **вся** работа над задачей, начиная с усвоения ее содержания и кончая решением, представляет собою мыслительный процесс, в котором анализ и синтез выступают в тесном взаимодействии и диалектическом единстве. Значит ли это, однако, что методика арифметики должна отказаться от разработки разнообразных приемов работы над задачей, от четкой дифференцировки этих приемов, от права называть разные приемы по-разному?

Мы полагаем, что это было бы неправильно, что методика арифметики, с одной стороны, не должна отказываться от своих функций, но, с другой стороны, не должна подводить новый фундамент под старую схоластическую терминологию. Сохраняя за неимением лучшего традиционные названия, мы будем в дальнейшем употреблять их в кавычках, понимая, как это и было до сих пор, под „анализом" разбор задачи, идущий от вопроса к числовым данным, а под „синтезом"—разбор задачи, идущий от числовых данных к вопросу.

В ряде случаев, особенно при решении типовых задач, целесообразно комбинировать оба метода работы над задачей, но комбинировать еще не значит обезличивать эти методы. При любом сочетании каждый метод сохраняет свои отличительные особенности и свое право на особое название.

Применяя ту или иную форму разбора задачи, мы развиваем логическое мышление ученика и точность его речи. Усвоенное учеником стереотипное рассуждение служит той формой, в которую он вкладывает различное содержание в зависимости от условия задачи.

Наряду с этими общими приемами работы над задачей, полезно применять некоторые дополнительные приемы, развивающие сообразительность учащихся, уменье раскрыть те зависимости, которые связывают вопрос задачи с ее условием. На этих приемах мы остановимся подробнее в дальнейшем.

В первом полугодии учащиеся III класса продолжают применять тот „неполный анализ", которым они пользовались при решении составных задач в младших классах. Теперь они уже почти не нуждаются в наводящих вопросах учителя. При этом, чтобы избежать автоматизации, можно применять попеременно оба приема разбора задач, в частности, и тот прием, который исходит из числовых данных задач.

В целом работа над задачей расчленяется в это время на следующие этапы: 1) усвоение содержания задачи, куда входит ее сообщение учителем, повторение по наводящим вопросам и целиком, объяснение непонятных слов, а иногда и некоторая вводная беседа; 2) рассуждение, исходящее из вопроса задачи (так называемый „анализ“) или же из ее числовых данных (так называемый „синтез“); 3) составление плана решения задачи и выбор действий к каждому вопросу; 4) решение задачи с мотивировкой выбора действия (если в этом есть необходимость) и, наконец, 5) формулировка ответа. Если задача решается не по задачнику, а со слов учителя, она должна быть заранее коротко, в схематической форме, записана на доске. Впрочем, начиная со второго полугодия, можно ввести уже в III классе такую запись в качестве полезного упражнения, выполняемого самими учащимися сначала под руководством учителя, а затем и вполне самостоятельно. В таком случае небесполезно также требовать краткой записи задач, взятых и из учебника.

На всех перечисленных этапах работы над задачей ведущая роль принадлежит аналитико-синтетическому процессу мышления, неразрывно связанному с его выражением в слове. Уже при повторении задачи, которое должно быть точным и осмысленным, ученик усматривает те связи и зависимости, которые должны привести к решению задачи и которые в полной мере раскрываются при разборе задачи и при составлении плана решения. Существенное значение имеет, в частности, формулировка каждого вопроса, которая должна быть краткой и четкой, без лишних добавлений и, по возможности, без упоминания числовых данных.

Наибольший интерес с точки зрения развития логических способностей и речи ученика имеет второй этап работы над задачей — ее разбор. Два варианта таких рассуждений доступны учащимся III класса уже в первом учебном полугодии. Покажем эти варианты на конкретной задаче.

На 6 лошадей и 12 коров отпускают ежедневно по 180 *кг* сена. Каждая лошадь получает по 6 *кг* сена. Сколько килограммов сена получает ежедневно каждая корова?

Вот как должен рассуждать ученик, если он начинает разбор задачи с ее вопроса.

Сразу решить главный вопрос задачи нельзя, так как неизвестно, сколько сена отпускают ежедневно всем коровам.

Сразу узнать, сколько сена отпускают всем коровам, тоже нельзя, так как неизвестно, сколько сена отпускают ежедневно всем лошадям.

Сразу узнать, сколько сена отпускают всем лошадям, можно, так как известно, сколько было лошадей и сколько сена отпускают ежедневно каждой лошади.

С этого вопроса можно начать решение задачи. Составим план решения. И т. д.

Вот как должен рассуждать ученик, если он начинает разбор задачи с ее числовых данных.

Если известно, сколько было лошадей и сколько сена получает ежедневно каждая лошадь, можно узнать, сколько сена отпускают ежедневно всем лошадям.

Если известно, сколько всего сена отпускают лошадям и коровам и сколько сена отпускают всем лошадям, можно узнать, сколько сена отпускают всем коровам.

Если известно, сколько сена отпускают всем коровам и сколько было коров, можно узнать, сколько сена получает каждая корова, что и спрашивается в задаче.

Составим план решения. И т. д.

Разница между работой II класса и III класса состоит в том, что ученик III класса уже в первом учебном полугодии излагает свои мысли самостоятельно, без наводящих вопросов учителя. Кроме того, применяя „неполный анализ", ученик доводит рассуждение до его логического конца: сформулировав последнее звено этого рассуждения, он объясняет, почему м о ж н о ответить на поставленный вопрос.

Который же из двух приведенных вариантов разбора ценнее в логическом отношении?

Пользуясь „синтетическим" методом, ученик выделяет два числа и ставит к ним вопрос. Делая это более или менее наугад, он может ошибиться, наметить лишний вопрос. Чтобы вскрыть ошибку, необходимо пройти весь дальнейший путь разбора задачи до главного вопроса включительно. Дело в том, что при логически правильном построении каждого звена рассуждения в отдельности, выбор того или иного звена носят до известной степени случайный характер. Таким образом, логическая ценность всего рассуждения в целом является сомнительной.

Разбор задачи, который начинается с главного вопроса, обеспечивает безусловную целенаправленность всего рассуждения. Первое звено этого рассуждения устанавливает условия, необходимые для решения главного вопроса. Каждое следующее звено приближает нас к тем числовым данным, с которых можно будет начать решение задачи. План решения вытекает при этом сам собою из разбора задачи, причем целенаправленность рассуждения обеспечивает целесообразность плана.

Несмотря на явные логические преимущества „аналитического" метода разбора задачи, некоторые учителя все же недооценивают его роли. Особенно трудным им представляется так называемый „полный анализ". Приведем образец такого разбора применительно к задаче, в которой говорится о кормовых дачах лошадям и коровам.

Чтобы узнать, сколько килограммов сена получает ежедневно каждая корова, надо знать, сколько было всего коров и сколько сена отпускают ежедневно всем коровам.

Сколько всего коров, нам известно, а сколько сена им отпускают ежедневно, неизвестно.

Чтобы узнать, сколько сена отпускают ежедневно всем коровам, надо знать, сколько всего сена отпускают лошадям и коровам вместе и сколько сена отпускают ежедневно всем лошадям.

Сколько всего сена отпускают лошадям и коровам, нам известно, а сколько сена отпускают ежедневно всем лошадям, неизвестно.

Чтобы узнать, сколько сена получают ежедневно все лошади, надо знать, сколько было всего лошадей и сколько сена получает ежедневно каждая лошадь.

Оба эти числа нам известны. С этого вопроса можно начать решение задачи. Составим план. И т. д.

Чем отличается этот „полный анализ" от „неполного"?

В обоих случаях путь мышления один и тот же —

от вопроса задачи к тем данным, которые нужны для его решения, причем число логических звеньев, из которых состоит все рассуждение, должно быть равно числу действий, которыми решается задача. Но при „полном анализе“ мы намечаем оба компонента, необходимые для выполнения данного действия, независимо от того, даны они в задаче или не даны; при „неполном“ анализе достаточно указать только тот компонент, который нам пока неизвестен, отсутствие которого среди числовых данных не позволяет решить сразу поставленный вопрос. Лишь в отдельных случаях придется и при „неполном“ анализе называть оба компонента, а именно, в тех случаях, когда оба компонента неизвестны или оба, наоборот, известны.

При „неполном“ анализе рассуждение приобретает характер установления отношений причинности между поставленным вопросом и условиями для его решения. „Почему нельзя сразу решить этот вопрос?“ — спрашивает учитель. „Потому что мы не знаем, сколько стоит 1 *м* материи (или сколько было всего метров, или сколько стоила вся материя и т. п.)“, — отвечает ученик.

Учителя склонны ограничиваться „неполным анализом“ и избегать „полного“. Действительно, как мы видим, „полный анализ“ является в достаточной мере многословным. Это и пугает учителей. Задачи средней трудности, говорят они, а тем более легкие задачи можно решать и без „анализа“, к трудным же задачам он неприменим; следовательно, он вообще не нужен. В действительности как раз к задачам средней трудности и особенно к легким задачам и следует применять „полный анализ“, поскольку такие задачи сами по себе мало развивают мышление ученика. Между тем, именно развитие логического мышления ученика и является основной целью работы над задачей.

Что касается трудностей „полного анализа“, то они вполне устранимы, если переход к этому варианту работы подготовлен правильной постановкой дела в младших классах школы и специальными упражнениями в III классе и если, кроме того, для пояснения хода рассуждения применяется схема из кружков, отображающая каждое звено рассуждения в лаконичной, удобообозримой форме.

Как же подготовить учащихся III класса к „полному анализу“ и как пользоваться этим приемом работы над задачей в дальнейшем?

Прежде всего необходимо выяснить, понимает ли ученик, что для решения задачи надо выполнить одно или несколько арифметических действий и что арифметические действия выполняются над числами, причем в каждом случае для выполнения действия необходимо и достаточно иметь два числа. Вместе с тем, надо проверить, знают ли учащиеся терминологию действий, отдают ли себе отчет в том, что для нахождения суммы надо знать слагаемые, для нахождения остатка — уменьшаемое и вычитаемое и т. д.

Подготовительные упражнения следует провести на простых задачах, причем необходимо учесть все три возможных случая, которые встречаются при анализе составных задач: 1) оба числа, необходимые для решения поставленного вопроса, неизвестны; 2) одно число известно, другое — неизвестно; 3) оба числа известны.

Первый шаг лучше связать с задачами, в которых одно число известно. Ухватившись за эту ниточку, дети легче догадаются, чего нехватает для решения поставленного вопроса, и построят соответствующее рассуждение. Вот образцы задач этого рода:

1) В коробку положили 8 красных карандашей и несколько зеленых. Сколько всего карандашей положили в коробку?

2) Учительница принесла в класс 30 перьев. Несколько перьев она раздала детям. Сколько перьев у нее осталось?

3) Купили несколько метров материи по 35 руб. за метр. Сколько израсходовали денег?

4) На мельницу привезли несколько одинаковых мешков с зерном, всего 250 *кг*. Сколько килограммов зерна в каждом мешке? Или: Сколько привезли мешков?

Учитель задает детям первую из этих задач. Учащиеся устанавливают, что решить ее нельзя, так как неизвестно, сколько было зеленых карандашей.

Следует вывод: чтобы решить эту задачу, надо знать, сколько было красных карандашей и сколько было зеленых карандашей.

Учитель предлагает детям дополнить задачу и решить ее.

Такой же прием применяется к остальным задачам. Учащиеся привыкают формулировать рассуждение, которое должно в дальнейшем лечь в основу „полного анализа“ составных задач. Вот образцы этих рассуждений.

Чтобы узнать, сколько перьев осталось в коробке, надо знать, сколько было всего перьев и сколько перьев раздала учительница детям. Сколько было всего перьев, известно, а сколько перьев она раздала детям, неизвестно.

Чтобы узнать, сколько израсходовали денег, надо знать, сколько купили метров материи и сколько платили за 1 *м*. Сколько платили за 1 *м*, известно, а сколько купили метров, неизвестно. И т. д., и т. п.

А вот образцы задач без числовых данных, на которых дети продолжают упражняться в аналогичных рассуждениях.

1) На тарелке лежало несколько ломтей белого хлеба и несколько ломтей черного. Сколько всего ломтей хлеба лежало на тарелке?

2) На полке стояли книги. Несколько книг сняли с полки. Сколько книг осталось на полке?

3) Продали несколько одинаковых мешков картофеля. Сколько весил весь этот картофель?

4) В парнике вырастили рассаду. Эту рассаду посадили на грядки, поровну на каждую грядку. Сколько кустиков рассады посадили на каждую грядку? Или: Сколько было грядок?

При разборе последней задачи рассуждение меняется в зависимости от поставленного вопроса. Если поставлен первый вопрос, учащиеся рассуждают так:

Чтобы узнать, сколько кустиков рассады посадили на каждую грядку, надо знать, сколько было всего кустиков и сколько было грядок. Ни того, ни другого мы не знаем.

Если поставлен второй вопрос, рассуждение видоизменяется следующим образом.

Чтобы узнать, сколько было грядок, надо знать, сколько было всего кустиков рассады и сколько кустиков посадили на каждую грядку. Ни того, ни другого мы не знаем.

Следует заметить, что задачи с неполными данными или совсем без данных, а также задачи без вопроса предлагались детям и раньше — во II и даже в I классе. Но в то время эти задачи играли другую роль. На них учащиеся убеждались, что правильно составленная задача должна состоять из условия, числовых данных и вопроса, учились подбирать вопрос к числовым данным и данные к вопросу. Теперь цель работы над задачей без числовых данных или с неполными данными иная: научить детей формулировать то рассуждение, которое войдет затем в „полный анализ", как одно из звеньев этого рассуждения.

Прежде чем переходить к составным задачам, надо проделать „полный анализ" нескольких простых задач с данными и вопросом. Например:

1) Купили 5 *м* материи по 18 руб. за метр. Сколько израсходовали денег?

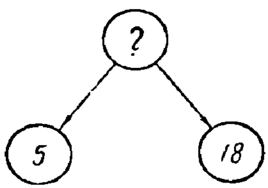
2) Поезд прошел 180 *км*, делая по 45 *км* в час. Сколько часов шел поезд?

В это время мы начинаем применять прием, который в дальнейшем будет широко использован при разборе составных задач. Сущность его в следующем.

Вопрос задачи мы обозначаем кружком с вопросительным знаком. Затем, установив, что для решения этого вопроса надо иметь два числа, мы отводим от кружка две стрелки и против каждой из них рисуем по кружку. После этого остается выяснить, для каких чисел предназначаются эти кружки и записать числа в кружках.

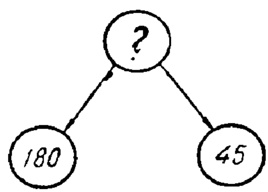
Чертежи к обеим задачам и запись решения их на доске будут иметь следующий вид:

Задача 1.



18 руб. $\times$ 5 = 90 руб.
Ответ: 90 руб.

Задача 2.



180 *км* : 45 *км* = 4
Ответ: 4 часа

Беседа по поводу первой задачи ведется следующим образом: Что спрашивается в задаче? Что надо знать, чтобы решить этот вопрос? Знаем ли мы, сколько купили метров материи и сколько стоит 1 *м*? Каким действием решается эта задача?

После этого учащиеся должны повторить рассуждение в связной форме: чтобы решить вопрос задачи, надо знать, сколько купили метров материи и сколько стоит 1 *м*; оба эти числа нам известны. Чтобы решить задачу, надо 18 руб. умножить на 5, получится 90 руб. Ответ: 90 руб.

Таким же способом анализируется задача про поезд и любая простая задача.

Если числа в кружках расположены так, как их принято располагать при записи действия (задача про поезд), может явиться соблазн поставить между кружками с числами знак действия. Однако числа могут оказаться и в ином положении, как мы это видим в задаче о покупке материи. Поэтому следует вообще отказаться от применения в схеме знаков действий.

Не следует также ставить у чисел в кружках наименований, чтобы чертеж занимал как можно меньше места. Компактная схема нагляднее, чем громоздкий чертеж. В этом и заключается преимущество схемы с кружками по сравнению с теми многословными записями, которые обычно рекомендуются в методических руководствах.

Поупражнявшись в анализе простых задач на все четыре действия, можно перейти к анализу задач в два действия. Для начала удобнее взять задачи, которые заканчиваются сложением, как это рекомендовал в свое время П. Цветков.[1] Например:

Купили меховой воротник за 360 руб. и 3 *м* материи по 120 руб. Сколько израсходовали денег?

Первое звено анализа этой задачи подготовлено работой над простыми задачами, в которых недостает одного из компонентов. Его место займет кружок с вопросительным знаком. Второе звено — анализ простой задачи на умножение. Запись на доске должна иметь следующий вид:

[1] П. Цветков. Методические заметки о решении арифметических задач. Изд. 2-е, исправленное, 1905.

Задача

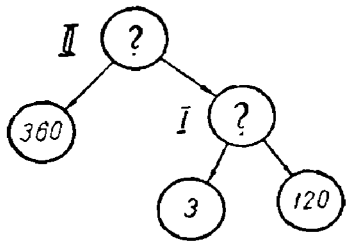
Воротник — 360 руб.

Материя — 3 *м* по 120 руб.

1) Сколько стоила вся материя?

120 руб. $\times$ 3 = 360 руб.

2) Сколько израсходовали денег?



360 руб. + 360 руб. = 720 руб.

Ответ: 720 руб.

После сообщения задачи, записи числовых данных и повторения надо предупредить учащихся, что теперь мы разберем ее, подобно тому, как мы разбирали простые задачи.

Затем выделяется вопрос задачи.

Учитель. Обозначим этот вопрос кружком с вопросительным знаком. Что надо знать, чтобы решить вопрос задачи?

Ученик. Надо знать, сколько заплатили за воротник и сколько заплатили за материю.

Учитель чертит на доске 2 стрелки и к каждой стрелке по кружку.

Учитель. Знаем ли мы, сколько заплатили за воротник?

Ученик. Знаем: 360 руб.

Учитель. Запишем это число в левом кружке. А кто догадается, что надо поставить в правом кружке?

Ученик. В правом кружке надо поставить вопросительный знак, потому что мы не знаем, сколько заплатили за материю.

Учитель ставит в правом кружке знак вопроса.

Учитель. Что надо знать, чтобы вычислить расход на материю?

Ученик. Надо знать, сколько купили метров материи и сколько заплатили за 1 *м*.

Учитель чертит 2 стрелки и 2 кружка.

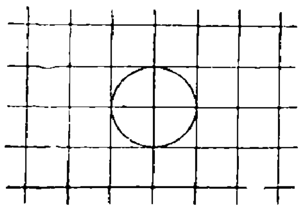
Учитель. Знаем ли мы, сколько купили метров материи и сколько платили за 1 *м*?

Ученик. Знаем. В левом кружке надо записать число 3, а в правом — 120, так как купили 3 *м* материи по 120 руб.

Разбор закончен. Теперь надо перейти к составлению плана. Дети повторяют первый вопрос, учитель ставит римскую цифру I около соответствующего кружка. Потом учащиеся повторяют вопрос задачи, а учитель ставит цифру II около верхнего кружка с вопросительным знаком. Далее следует запись решения в тетрадях.

Первое время не следует вводить черчение схемы самими учащимися. Черчение им нравится, но отвлекает их внимание от процесса рассуждения. Достаточно, если они будут следить за работой учителя на доске и отвечать на его вопросы, а затем, уже после решения задачи, повторят все рассуждение в связной форме. В нашем опыте дети быстро овладевали этим уменьем, делая разбор задачи не только по готовой схеме, но и без схемы, которую к этому времени стирали с доски.

Позднее следует объяснить детям, как чертить схемы, научить их располагать кружки симметрично, вписывая каждый кружок в четыре клеточки арифметической тетради, как показано на нашем рисунке. Достаточно посвятить этому один урок. В дальнейшем не стоит заниматься черчением схем в классе — это отнимает много времени. Такую работу дети могут выполнять и охотно выполняют дома.



В классе же можно ограничиться рисунками учителя на доске.

Разбор задач в три действия удобнее опять-таки начать с задач, последнее действие которых сложение, и вся схема имеет симметричный вид. До сих пор схема разветвлялась в одном направлении (надо решить 5—6 таких задач), теперь она будет иметь две ветки. Например:

Колхоз отправил на мельницу две подводы с зерном. На одной подводе было 7 мешков зерна по 60 *кг* в каждом мешке, на другой — 5 мешков по 80 *кг* в каждом. Сколько всего килограммов зерна отправили на мельницу?

Разбор задачи в 3 действия представляет собой довольно длинное рассуждение. В таких случаях и подавно учащиеся III класса легко теряют логическую нить, если не разбить все рассуждение на отдельные звенья и не создать опоры для различения этих звеньев в наглядном образе.

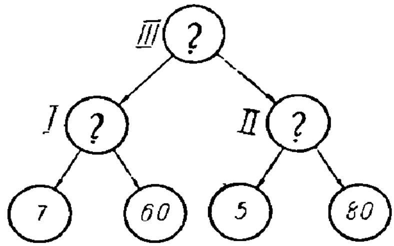
Запись и схема на доске будут иметь следующий вид:

Задача.

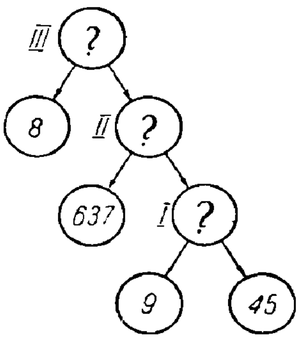
7 м. по 60 *кг* }
5 м. по 80 *кг* } Ск. привезли килограммов зерна?

1) 60 *кг* × 7 = 420 *кг*
2) 80 *кг* × 5 = 400 *кг*
3) 420 *кг* + 400 *кг* = 820 *кг*

Ответ: 820 *кг*



Заметим, что было бы неправильно задерживаться на задачах одного и того же рода. Привыкнув располагать кружки определенным образом, учащиеся попадают во власть формы, оказавшейся как бы вне зависимости от того логического содержания, с которым она первоначально связывалась. Схема перестает помогать мышлению и, наоборот, мешает ему. Поэтому, наряду с „симметричными“ задачами в три действия, надо предлагать учащимся „несимметричные“ задачи. Например:



На 637 руб. купили 9 *м* шерстяной материи по 45 руб. за метр и 8 *м* шелка. Сколько стоит 1 *м* шелка?

Эта задача оканчивается делением на равные части. Схема анализа имеет одну ветку. Если эту задачу видоизменить так, чтобы она оканчивалась делением по содержанию, анализ становится более трудным. Однако, к концу третьей четверти учащиеся III класса справляются с анализом и этой разновидности обратных задач на сумму двух произведений.

Интересно пояснить схемами два разных способа решения одной и той же задачи. Вот, например, задача, которая решается двумя способами и которую, следовательно, разбирать можно тоже по-разному.

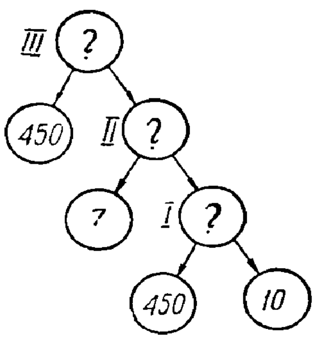
Рабочий подписался на заем на 450 руб. Эти деньги он должен был внести поровну в течение 10 месяцев. С начала взносов прошло 7 месяцев. Сколько еще денег должен внести рабочий?

Первый способ. Чтобы узнать, сколько еще денег должен внести рабочий, надо знать, сколько он должен был внести всего и сколько денег он уже внес. Первое число нам известно, второе—неизвестно. И т. д.

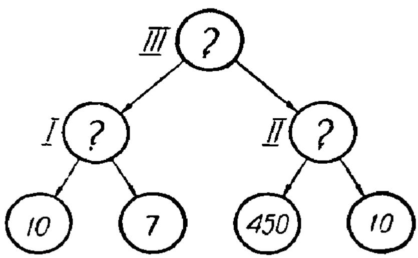
Второй способ. Чтобы узнать, сколько еще денег должен внести рабочий, надо знать, сколько денег должен он вносить ежемесячно и сколько еще месяцев придется ему делать взносы. Ни то, ни другое число нам неизвестно. И т. д.

В соответствии с этими вариантами разбора будем иметь следующие две схемы из кружков.

Первый способ.



Второй способ.

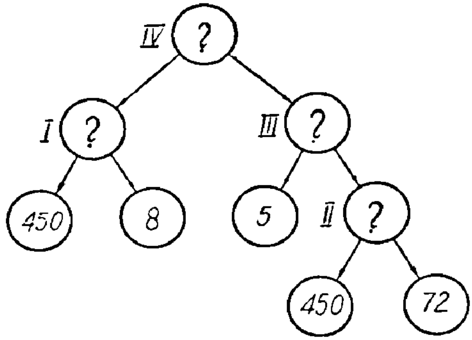


В IV классе необходимо продолжать применение разбора задач, особенно целевого разбора, который начинается с главного вопроса. Эту работу следует постепенно усложнять в двух направлениях: с одной стороны, берутся более трудные задачи, с другой стороны, учащимся предоставляется большая самостоятельность. На экзамене можно требовать от них вполне самостоятельного устного разбора задач.

В начале года учащиеся IV класса практикуют разбор задач примерно той же степени трудности, что и в

III классе. Вот, например, задача, которая в логическом отношении является вполне посильной ученикам IV класса, если в III классе они уже упражнялись в „полном анализе" арифметических задач.

Один насос работал 8 час., накачивая по 450 ведер воды в час. Другой насос работал 5 час., накачивая в час на 72 ведра больше, чем первый насос. Сколько всего ведер воды накачали оба насоса?



Появление четвертого действия и возможность начать по-разному решение этой задачи осложняет работу ученика.

Хорошо, если учитель располагает цветными мелками. Тогда можно резче разграничивать „анализ" и составление плана. При проведении „анализа" кружки рисуются обыкновенным мелом.

Переходя к составлению плана, учитель спрашивает: С каких вопросов можно начать составление плана? Пойди, покажи на схеме, где обозначены эти вопросы. Повтори каждый из них. С какого же вопроса начнем мы решать задачу?

Ученик. Сначала узнаем, сколько ведер воды накачал первый насос.

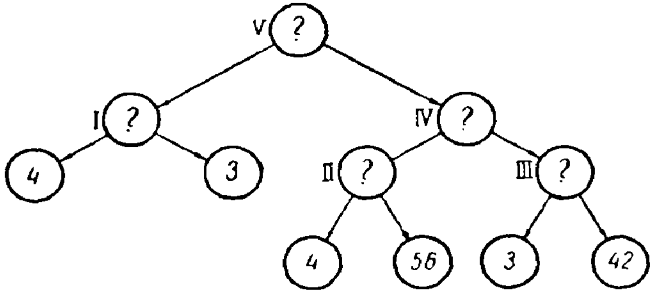
Учитель. Покажи на схеме числа, которые потребуются для решения этого вопроса.

Ученик называет числа „8 часов" и „450 ведер", учитель ставит римскую цифру I у кружка с вопросом, а кружки с числовыми данными затушевывает цветным мелом. Затем выясняются следующие вопросы — второй, третий, четвертый. Каждый раз учитель нумерует соответствующий кружок с вопросительным знаком, а два относящиеся к нему кружка с числовыми данными закрашивает каким нибудь новым цветом. Тем самым он как бы вынимает из схемы пару за парой все числовые данные, подчеркивая каждое логическое звено при составлении плана.

Некоторые типовые задачи, например, на смешение I рода (нахождение среднего арифметического) легко поддаются полному анализу. Например:

Машина шла 4 часа со скоростью 56 *км* в час, а затем еще 3 часа со скоростью 42 *км* в час. Сколько километров проходила она в среднем за 1 час?

Схема анализа этой задачи является как бы дальнейшим развитием схемы задачи о насосах. Логических трудностей она не представляет, хотя и решается в 5 действий.

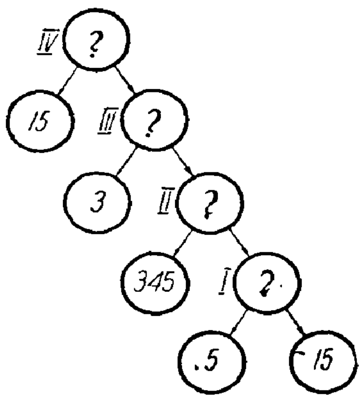


Интересно, что в нашем опыте удавалось получать вполне сознательный ответ на вопрос: почему разветвляется схема?

Ученик. Потому что мы не знаем обоих чисел, необходимых для решения пятого вопроса, и еще не знаем обоих чисел, нужных для решения четвертого вопроса.

Хорошо удается анализ усложненных задач (обратных) на сумму двух произведений.

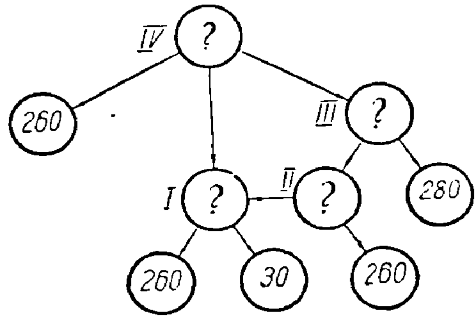
За 3 *м* сукна и 5 *м* сатина заплатили 345 руб. Метр сатина стоил 15 руб. Во сколько раз 1 *м* сукна дороже, чем 1 *м* сатина?



Задачи, в которых последнее действие — разностное или кратное сравнение, разбирались еще в III классе. Это один из легких случаев. В IV классе такую задачу дети могут разобрать совершенно самостоятельно, начертив к ней схему на доске и в тетради.

С некоторой осторожностью надо подходить к задачам с выражениями „больше“ или „меньше на столько-то“ или „во столько-то раз“. Много таких задач дети решали в III и даже во II классе, не применяя к ним, однако, „полного анализа“. Теперь они будут интересовать нас именно с этой стороны. Возьмем, например, такую задачу.

Самолет пролетел в первый час 260 *км*, во второй — на 30 *км* больше. В третий час он пролетел на 280 *км* меньше, чем в первые два часа вместе. Сколько всего километров пролетел самолет?



Это легкая задача, но ее разбор отличается некоторыми специфическими трудностями.

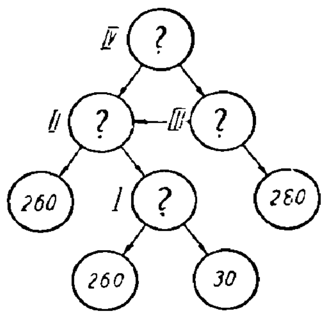
Чтобы решить главный вопрос задачи, необходимо знать, сколько километров пролетал самолет в каждый час. Выясняя вопрос о расстоянии, которое самолет пролетел в третий час, мы вынуждены поставить вопрос о расстоянии, которое он пролетел в первый и второй час вместе. Но вопрос о втором часе уже обозначен на схеме — к нему и ведем стрелку. Получается своеобразное переплетение стрелок, которое показывает, что решение нельзя начинать по-разному; возможен только один определенный порядок действий.

Число кружков с вопросительными знаками в схеме должно точно соответствовать числу вопросов при составлении плана. Вот почему стрелку от кружка, обозначающего искомую сумму первого и второго слагаемого, мы направили не к новому кружку, а к тому, который еще раньше был обозначен на схеме.

Но если один и тот же вопрос не должен появляться ни в схеме, ни в плане решения задачи больше одного раза, то одно и то же число может повторяться в схеме и несколько раз выступать в роли компонента действий при решении задачи. Так, например, в нашей последней схеме число 260 записано три раза.

Помимо той непосредственной помощи, которую схема оказывает ученику в его логической работе, она позволяет уже после решения задачи углубить эту работу, продолжить ее.

Всматриваясь внимательно в схему к задаче о самолете, мы замечаем, что при решении главного вопроса дело может быть сведено к сложению не трех, а только двух слагаемых. В самом деле, для нахождения третьего слагаемого необходимо предварительно найти сумму первого и второго слагаемых. Следовательно, для решения вопроса задачи достаточно к этой сумме прибавить третье слагаемое. Число действий не изменится, но разбор и план решения станут проще, яснее.



Необходимо подчеркнуть, что применять к таким задачам „полный анализ" можно только в том случае, если рассуждение сопровождается схемой из кружков. Устный анализ в этих случаях приводит к путанице и поэтому приносит не пользу, а вред. Без схемы к этой задаче применим только „синтетический" метод разбора.

Если мы хотим, чтобы работа над задачей развивала логическое мышление и речь учащихся, необходимо прежде всего, чтобы учитель следил за правильностью собственной речи. Учитель спрашивает: „Можно ли решить вопрос задачи?" Конечно, можно. Ведь условие задачи так и построено, чтобы можно было решить ее вопрос. Следует спросить: „Можно ли сразу, одним действием решить главный вопрос? или, когда анализ подходит к концу, спросить: „А этот вопрос можно ли решить сразу?"

Далее, при „полном анализе" необходимо различать глаголы „знать" и „узнать": „Чтобы узнать, сколько всего израсходовали денег, надо знать, сколько заплатили за картофель и сколько заплатили за муку". Решая вопрос, мы находим неизвестное число, узнаем это число. Но чтобы выполнить соответствующее действие, надо иметь два числа, надо знать эти числа. Иногда они прямо даны в задаче, мы знаем эти числа. Иногда мы знаем только одно из них, иногда не знаем ни одного. Тогда мы продолжаем разбор и опять говорим:

„Чтобы узнать неизвестное число, надо знать то-то и то-то". Слова „чтобы узнать" можно заменить равнозначащими выражениями: „чтобы найти неизвестное число", „чтобы решить поставленный вопрос" и т. д.

Очень большое значение для логической выразительности речи имеет правильная интонация: повышение и понижение голоса, ударение на отдельных словах, паузы. Тягучая монотонная речь учителя и такая же бесцветная речь ученика лишают рассуждение необходимой живости и остроты.

Немаловажное значение имеет рисование схемы одновременно с развертыванием рассуждения, постепенное появление каждого ее звена на глазах у детей, а также выразительный жест — указание на кружки в схеме, выделение их попарно, движение указки от звена к звену.

Поясним роль пауз и ударений на конкретном примере. Чтобы узнать, сколько всего израсходовали денег, надо знать (ударение, понижение голоса, пауза), сколько заплатили за стол (повышение голоса, пауза) и сколько заплатили за стулья.

Сколько заплатили за стол, нам известно: 160 руб. А сколько заплатили за все стулья (ударение, пауза), мы не знаем.

Чтобы узнать, сколько заплатили за все стулья, надо знать (ударение, понижение голоса, пауза), сколько купили стульев (повышение голоса, пауза) и сколько платили за каждый стул. И т. д.

Подбирая компоненты для решения того или другого вопроса, надо называть число, если оно дано, а в противном случае устанавливать, что оно неизвестно. В нашем изложении эти примечания стоят в скобках, но их надо читать.

Чтобы закончить рассмотрение приемов работы над обыкновенными, нетиповыми задачами, следует остановиться на некоторых вопросах, связанных с усвоением содержания задачи, составлением плана и решением.

Как правило, за сообщением и повторением задачи следует выделение вопроса и разбор. Однако, в ряде случаев полезно предпослать разбору небольшую вводную беседу, которая помогает осмыслить арифметическое содержание задачи.

Дана задача. „От колхоза до города 100 *км*. Один колхозник выехал в город на велосипеде, а другой — на мотоцикле. Через час первому осталось проехать 85 *км*, а второму — 40 *км*. Во сколько раз больше можно проехать в час на мотоцикле, чем на велосипеде?"

Ученики повторяют задачу.

Учитель. Можно ли, не решая задачи, доказать, что мотоциклист едет быстрее?

Ученик. Можно. Через час велосипедисту осталось проехать 85 *км*, а мотоциклисту только 40 *км*. Значит, за 1 час мотоциклист проехал больше километров, чем велосипедист.

Учитель. А что спрашивается в задаче?

Ученик. Во сколько раз больше километров можно проехать в час на мотоцикле, чем на велосипеде?

Учитель. Можно ли сразу решить этот вопрос? И т. д.

Возьмем еще одну задачу. „В киоске было 140 букварей и задачников. Продали 12 букварей. После этого букварей и задачников осталось поровну. Сколько было сначала букварей и задачников в киоске?

Задачу эту можно записать на доске следующим образом:

$$140 \text{ кн.} \left\{ \begin{array}{l} \text{Б.— продали 12 б.} \\ \text{З.}\rule{3cm}{0.4pt} \end{array} \right\} \text{осталось поровну.}$$

Сколько букварей и задачников было сначала?

Ученики повторяют задачу.

Учитель. Чего было больше до продажи: букварей или задачников?

Ученик. Букварей было больше.

Учитель. Изменилось ли число задачников?

Ученик. Нет, не изменилось. Задачников сколько было сначала, столько и осталось.

Учитель. Что легче узнать: сколько было букварей или сколько было задачников?

Ученик. Легче узнать, сколько было задачников, потому что сколько их было, столько и осталось.

Учитель. Можно ли сразу узнать, сколько задачников осталось?

Ученик. Этого нельзя узнать сразу, так как мы не знаем, сколько всего книг осталось после продажи букварей. А сколько всего книг осталось, можно узнать сразу, так как известно, сколько всего книг было сначала и сколько книг продали.

Учитель. Составим план решения задачи. И т. д.

Заметим, что для понимания приведенной задачи большое значение имеет ясное различение и правильное употребление выражений „было сначала" и „стало потом" или „осталось". Два-три вопроса, поставленные учителем до начала разбора задачи, помогают учащимся различить эти соотношения и преодолеть некоторые трудности самого разбора.

Каким бы методом мы ни пользовались — „аналитическим" или „синтетическим" — необходимо четко разграничивать разбор задачи, с одной стороны, и составление плана решения, с другой. Ученик должен отдавать себе отчет в том, занимается ли он разбором задачи или же составляет план решения.

При формулировке вопросов надо избегать лишних слов и упоминания числовых данных. В первый вопрос к задаче о продаже букварей дети склонны вводить придаточное предложение: сколько книг осталось после того, как продали 12 букварей. Проще сформулировать этот вопрос следующим образом: сколько осталось книг после продажи букварей?

После составления плана полезно предложить учащимся назвать те действия, которыми решается каждый вопрос. Названия действий сообщаются, как правило, только в связи с изучением многозначных чисел. В первой четверти учащиеся III класса могут еще не знать этих названий. В таком случае учитель спрашивает: Что надо сделать, чтобы узнать, сколько книг осталось (или сколько было задачников? или сколько было сначала букварей?)?

Отвечая на подобные вопросы, дети говорят просто: надо прибавить, надо отнять и т. д.

Указывая действие, ученик отнюдь не должен производить тут же устно самые вычисления. При многозначных числах это просто невозможно. Но и при небольших числах, когда нетрудно выполнить действие в уме, не надо предвосхищать того, что дети могут в дальнейшем проделать самостоятельно на доске или в тетрадях. Помимо всего прочего, если мы решили разграничивать разбор задачи и составление плана, то с неменьшей четкостью следует проводить и всю остальную работу над задачей: **сначала** составить план, **потом** выбрать действия и только **после этого** перейти к решению.

Устно план составляется **до начала решения**. В самом деле, сначала надо спланировать работу, а уже после этого переходить к выполнению. Но при **записи** решения было бы неправильно отрывать вопрос от действия. Если весь план записан сначала, ученик может произвести действия, не руководствуясь планом, что сплошь и рядом наблюдается в тех случаях, когда учителя III и IV классов требуют раздельной записи вопросов и действий. Бывает так, что вопрос поставлен правильно, а действие не соответствует вопросу и наоборот. Чтобы избежать подобных ошибок, надо связывать непосредственно вопрос с его решением.

Нумеровать следует только вопросы. Решение подчинено вопросу; нет надобности писать два раза один и тот же номер. Другое дело, если учитель найдет нужным ограничить работу детей записью одних действий. Тогда, разумеется, действия нумеруются.

Возникает вопрос, следует ли мотивировать выбор действия, как это весьма педантично требуют некоторые учителя.

В тех случаях, когда ясна необходимость прибавить, отнять, умножить и разделить, мотивировка выбора действия не нужна. Только по недоразумению можно требовать мотивировки при решении, например, такого вопроса: сколько километров прошел поезд за 3 часа, если шел со скоростью 60 *км* в час? Некоторые учителя добиваются подробного объяснения: чтобы решить этот вопрос, надо 60 *км* умножить на 3, так как за 3 часа поезд пройдет не 60 *км*, а в 3 раза больше. Эти учителя забывают, что дети уже в I классе умеют „взять“ или повторить число слагаемым несколько раз, что это простейший смысл умножения, тогда как с увеличением числа в несколько раз они знакомятся только во II классе. Нелогично объяснять простейшее, более легкое посредством более трудного.

Наоборот, более трудное полезно сводить к более легкому. Так, например, можно потребовать мотивировки выбора действия при решении вопроса, какова скорость самолета, если поезд проходит 60 *км* в час, а самолет пролетает в 4 раза больше. В этом случае ученик рассуждает так: чтобы решить этот вопрос, надо 60 *км* умножить на 4, так как скорость самолета в 4 раза больше скорости поезда.

В первом случае имела место неосновательная попытка свести умножение к увеличению в несколько раз, во втором случае увеличение в несколько раз вполне законно сведено к умножению.

Если в задаче встречается деление, ученик должен каждый раз не только назвать это действие, но отметить также, является ли оно делением на равные части или же делением по содержанию. Выбор действия должен быть мотивирован ссылкой на условие задачи. Например: 160 *л* надо делить на 5 равных частей, так как в задаче сказано, что 160 *л* молока разлили поровну в 5 бидонов. Или: 160 *л* надо делить по 32 *л*, так как бидонов было столько, сколько раз 32 *л* содержится в 160 *л*.

Выполняя действия, ученик пользуется всегда одним и тем же словом „получится". Формулируя же ответ на вопрос задачи, он говорит по-разному: „стало, осталось, купили, продали, привезли, увезли" и т. д. Устная формулировка ответа должна быть обстоятельной, но в тетрадях достаточно записать только полученное число с наименованием: 180 *км*; 5 бидонов и т. п. Наименования метрических мер, рубли и копейки записываются сокращенно; в остальных случаях слово-наименование выписывается полностью. Дело в том, что сокращенные наименования метрических мер являются общепринятыми и потому общепонятными, а сокращенные названия предметов могут быть поняты по-разному. Так, например, буква к. может означать карандаши, кисти, картинки, конфеты, коробки, куклы, конверты и т. д.

Методика решения типовых задач

Остановимся прежде всего на самом понятии типовой задачи.

Задача, которая решается несколькими действиями, является, как мы знаем, составной задачей. Нетрудно придумать ряд составных задач, которые решались бы одними и теми же действиями, расположенными в одном и том же порядке. Такие задачи можно было бы назвать задачами одного и того же в и д а.

Некоторые виды составных задач в методике арифметики принято называть **т и п о в ы м и**.

Многие виды задач обладают чертами, сходными с типовыми, но им, так сказать, не посчастливилось. Они не получили особого названия, не выделены в особую группу и не вошли в число типовых. Вот например, задача, которая похожа на типовую.

„40 рабочих должны были выгрузить из вагонов 3168 *т* угля. Каждый рабочий выгружал в день по 72 *ц* угля. Через 6 дней к рабочим присоединилось еще 10 грузчиков. Сколько всего дней продолжалась разгрузка вагонов?“

Такие задачи пытались называть задачами на совместную работу, но в числе типовых они все же не значатся.

С другой стороны, есть задачи, которые в начальной школе причисляются к типовым, например, задачи на нахождение дроби от числа, или даже задачи на вычисление площади и объема. За пределами начальной школы первая из них рассматривается как простая задача, т. е. задача в одно действие и уже тем самым нетиповая. Задачи на вычисление площади и объема тем более не имеют ничего общего с типовыми.

Отличительным признаком типовых задач принято считать их большую трудность по сравнению с нетиповыми и необходимость применения к ним особых приемов рассуждения; вспомним хотя бы так называемый „способ частей“. Однако есть совсем легкие типовые задачи, например, задачи на простое тройное правило, которые решаются уже во II классе и к которым вполне применим обыкновенный „неполный анализ“.

Чем же объяснить то неопределенное положение, в которое попала эта довольно значительная группа задач? Почему не поддается определению понятие типовой задачи?

Ответ на этот вопрос состоит в следующем. Не существует общего признака, по которому ту или иную задачу можно было бы отнести к числу типовых. Но если нет такого общего признака, то нельзя дать определения понятию типовой задачи, а в таком случае невозможно произвести и классификацию типовых задач. В самом деле, классификация есть особая форма деления понятия. Основанием деления должен быть признак, который входит в качестве существенного в определение понятия. В данном случае, как уже сказано, нет такого признака.

Значит ли это, что следует вообще отказаться от термина „типовая задача"? Отнюдь нет. Выражение это приобрело давным-давно права гражданства в нашей методической литературе, употребляется в объяснительной записке к программе Министерства просвещения РСФСР (стр. 78) и помогает учителю разобраться в том материале, который содержат наши учебники. Придется только рассматривать термин „типовая задача" как традиционное название разнородных задач, а классификацию таких задач заменить их перечнем.

Назовем типовые задачи, которые решаются в начальной школе, сгруппировав их по признаку общности их арифметического содержания.

1. Простое тройное правило; пропорциональное деление; деление пропорционально данному числу частей; нахождение чисел по их сумме и кратному отношению.

2. Задачи на нахождение неизвестного по двум разностям: а) когда даны обе разности и б) когда дана только одна из них.

3. Задачи, прямая и обратные, на сумму двух произведений, как подготовительные к следующим группам.

4. Задачи на встречное движение, прямая и обратные.

5. Задачи на вычисление среднего арифметического.

Приведенный перечень не предрешает той последовательности, в которой данные варианты типовых задач предлагаются учащимся. Так, задачи на простое тройное правило, которые в нашем перечне упоминаются только один раз, фактически отнесены программой к двум классам — третьему и четвертому. Точно так же задачи на пропорциональное деление решаются в III классе, а задачи из той же группы — на нахождение чисел по их сумме и кратному отношению — отнесены к IV классу.

В задачах на п р о с т о е т р о й н о е п р а в и л о раскрывается пропорциональная зависимость величин, прямая или обратная. В этих задачах даются два значения одной величины и одно из соответствующих значений другой величины. Искомым является „четвертое пропорциональное".

В средней школе задачи на простое тройное правило решаются способом пропорций. Чтобы составить пропорцию, достаточно установить, в какой зависимости, прямой или обратной, находятся данные пропорциональные величины. Решение составленной пропорции осуществляется затем совершенно механически.

В начальной школе задачи на простое тройное правило, как и все остальные типовые задачи, решаются не по „правилу", а по свободному соображению. Способ решения приходится выбирать с таким расчетом, чтобы при составлении плана избежать искусственных по своему содержанию вопросов, а в действиях избежать дробей. В таких условиях при решении задач на простое тройное правило с прямо пропорциональными величинами применяются **четыре** различных способа решения. Что касается задач с обратно пропорциональными величинами, то в начальной школе даются только наиболее легкие из них, не требующие особых приемов рассуждения и решения. Они решаются как обыкновенные, нетиповые.

Рассмотрим четыре способа решения задач на простое тройное правило с прямо пропорциональными величинами.

Первый способ носит название **прямого приведения к единице**. Он применяется в тех случаях, когда в кратном отношении находятся значения разных величин, а третье число однородно с делителем. Например:

За 5 минут насос выкачал 70 ведер воды. Сколько ведер воды выкачает этот насос за 9 минут?

Задачу эту записывают на доске следующим образом:

5 мин.— 70 ведер
9 мин.— ?

В начале учебного года, когда учащиеся III класса решают такие задачи, к ним вполне приложим „неполный анализ".

Сразу узнать, сколько ведер воды дает насос за 9 минут, мы не можем, так как неизвестно, сколько ведер воды он дает в 1 минуту.

Узнать сразу, сколько ведер воды дает насос в 1 минуту, мы можем, так как известно, что за 5 минут он дает 70 ведер воды.

В дальнейшем к подобным задачам можно применять „полный анализ", а в IV классе полезно ввести, кроме того, рассуждение особого рода, чтобы раскрыть прямую пропорциональную зависимость между временем и количеством воды, которое выкачивает насос.

Если за 5 минут насос дает 70 ведер воды, то за 1 минуту он даст в 5 раз меньше. Если за 1 минуту он дает 14 ведер воды, то за 9 минут даст в 9 раз больше.

Второй способ носит название обратного приведения к единице. Он применяется в тех случаях, когда в кратном отношении находятся значения разных величин, а третье число однородно с делимым. Например:

За 5 минут насос выкачал 70 ведер воды. Сколько минут должен работать этот насос, чтобы выкачать 126 ведер воды?

Записать эту задачу можно так:

70 ведер — 5 мин.
126 ведер — ?

И к этой задаче приложим как „неполный", так и „полный анализ". В обоих случаях мы одинаково формулируем первый вопрос: сколько ведер воды дает насос за 1 минуту? Совпадают также действия, которыми решается этот вопрос в обеих задачах — это деление на равные части. Способ решения обеих задач и называется поэтому способом приведения к единице, поскольку приходится узнавать, сколько ведер воды дает насос в одну минуту.

В первой задаче дано время, а искомым является количество ведер. Во второй задаче, наоборот, дано количество ведер, а искомым является время. Таким образом, вторая задача является обратной по отношению к первой — прямой. Отсюда первый способ решения называют прямым приведением к единице, а второй способ — обратным.

При переходе в IV класс учащиеся встречаются с такими задачами на простое тройное правило, к которым ни прямое, ни обратное приведение к единице в условиях начальной школы не применимо. Появляется новый способ, называемый способом отношений и имеющий два варианта.

Первый вариант применяется в тех случаях, когда в кратном отношении находятся значения одной и той же величины, а третье число соответствует делителю. Например:

За 5 минут насос выкачал 72 ведра воды. Сколько ведер воды выкачает он за 15 минут?

Эта задача решается делением по содержанию и умножением.

Второй вариант применяется в тех случаях, когда в кратном отношении находятся значения одной и той же величины, а третье число соответствует делимому. Например:

За 15 минут насос выкачал 216 ведер воды. Сколько ведер воды выкачаеt он за 5 минут?

Эта задача решается делением по содержанию и делением на равные части.

При решении этих задач нельзя узнавать, сколько ведер воды выкачивает насос за 1 минуту, так как 72 ведра не делятся без остатка на 5 равных частей, а 216 ведер — на 15.

Поступаем иначе, а именно, в первом случае рассуждаем так: чем дольше работает насос, тем больше он выкачает воды. Узнаем, во сколько раз 15 минут больше, чем 5 минут; во столько же раз больше воды выкачает насос за 15 минут. После этого составляется план решения первой задачи.

Чтобы решить вторую задачу, рассуждаем аналогичным образом: чем меньше времени работал насос, тем меньше воды он выкачал. Узнаем, во сколько раз 5 минут меньше, чем 15 минут. Во столько же раз меньше он выкачал воды. После этого составляется план решения.

Решение каждой из этих двух задач начинается, как мы видим, с кратного сравнения. В IV классе, когда учащиеся еще не знакомы с понятием отношения, приведенный способ решения задач на простое тройное правило можно назвать **способом кратного сравнения**. Термины „прямое и обратное приведение к единице" дети усваивают без труда.

Все четыре изложенных нами способа, как уже указывалось, подчинены требованию решать задачи в целых числах. Если пользоваться дробями, то **любую** задачу на тройное правило можно решить **любым** из этих четырех способов.

Напомним, что неправильно было бы сводить обыкновенное умножение к увеличению в несколько раз, а обыкновенное деление к уменьшению в несколько раз. Но при решении задач на тройное правило учащиеся должны наблюдать, как с увеличением или уменьшением одной величины другая величина, связанная с нею, увеличивается или уменьшается во столько же раз.[1]

От задач на простое тройное правило, решаемых способом приведения к единице, учащиеся III класса переходят к решению задач на пропорциональное деление.

Задачи эти, как и задачи на простое тройное правило, связаны с пропорциональной зависимостью величин. В задачах на пропорциональное деление даются два значения одной величины и сумма соответствующих значений другой величины. Эти слагаемые и являются искомыми. Например:

Колхозник получил на трудодни 4 мешка ржи и 5 таких же по весу мешков пшеницы, всего 720 *кг*. Сколько получил он в отдельности килограммов ржи и пшеницы?

Решая эту задачу, легко заметить ее сходство с задачей на простое тройное правило: установив, что 9 мешков зерна весят 720 *кг*, мы находим вес 4 мешков ржи и вес 5 мешков пшеницы. В этом случае мы пользуемся способом прямого приведения к единице. Это — первый вариант задач на пропорциональное деление.

Не меняя сюжета задачи, перестроим ее так, чтобы при ее решении пришлось применить способ обратного приведения к единице.

Колхозник получил на трудодни 9 одинаковых мешков зерна, причем ржи было 320 *кг*, а пшеницы — 400 *кг*. Сколько получил он в отдельности мешков ржи и пшеницы?

Если в первом случае приходилось общий вес зерна делить пропорционально числу мешков, то во втором случае число мешков придется делить пропорционально весу ржи и пшеницы.

При решении второй задачи обнаруживается ее связь с обратным приведением к единице: установив, что 9 мешков зерна весят 720 *кг*, можно будет узнать,

---

[1] А. Субботин. Задачи на простое и сложное тройное правило. Начальная школа, 1947, № 7.

сколько было мешков ржи, если они весят 320 *кг*, и сколько было мешков пшеницы, если они весят 400 *кг*. Это — второй вариант задач на пропорциональное деление.

Особенность обоих вариантов задач на пропорциональное деление состоит в том, что эти задачи требуют двух ответов. Как известно, разбор любой задачи начинается с выделения ее вопроса. Но для данной разновидности задач этого недостаточно. Необходимо научить детей расчленять главный вопрос на два отдельных вопроса.

Учитель. Сколько ответов будет в этой задаче?

Ученик. В этой задаче будет два ответа, так как мешков ржи и пшеницы было не поровну (или так как килограммов ржи и пшеницы было не поровну).

Учитель. Войдет ли главный вопрос в план решения задачи?

Ученик. Нет, не войдет. Вместо него будет два отдельных вопроса: 1) сколько получил колхозник килограммов ржи и 2) сколько получил колхозник килограммов пшеницы. (Или: 1) сколько получил колхозник мешков ржи и 2) сколько получил колхозник мешков пшеницы.)

Учитель обращается к доске, где перед тем были записаны числовые данные и вопрос задачи. Вторую часть вопроса он стирает и, пользуясь стрелками, расчленяет первоначальный вопрос на два отдельных вопроса:

$$\text{Сколько было килограммов} \begin{array}{l} \nearrow \text{ржи?} \\ \searrow \text{пшеницы?} \end{array}$$

Или:

$$\text{Сколько было мешков} \begin{array}{l} \nearrow \text{ржи?} \\ \searrow \text{пшеницы?} \end{array}$$

Одновременно нельзя решать два вопроса. Поэтому, прежде чем приступить к разбору задачи, надо выбрать один из них, например: сколько будет килограммов ржи? (при решении первой задачи) или сколько было мешков ржи? (при решении второй задачи).

Учащиеся третьего класса начинают решать задачи на пропорциональное деление еще в первом полугодии.

В это время они пользуются „неполным анализом". В дальнейшем к задачам данного типа можно применять „полный анализ", имея в виду один из поставленных вопросов. Например:

Узнаем, сколько было килограммов ржи. Чтобы решить этот вопрос, надо знать, сколько было мешков ржи (4 мешка) и сколько весил каждый мешок (?).

Чтобы узнать, сколько весил каждый мешок, надо знать, сколько было всего мешков (?) и сколько весило все зерно (720 *кг*).

Чтобы узнать, сколько было всего мешков, надо знать, сколько было в отдельности мешков ржи (4 мешка) и сколько было мешков пшеницы (5 мешков).

После разбора задачи составляется план решения. При этом к трем вопросам, вытекающим непосредственно из разбора, присоединяется четвертый вопрос: сколько было килограммов пшеницы? (или сколько было мешков пшеницы?)

Как мы видим, при решении задач на пропорциональное деление к обычным этапам работы над задачей присоединяется еще один этап: работа над главным вопросом. Надо стремиться к тому, чтобы ученик мог самостоятельно сформулировать соответствующее рассуждение.

В этой задаче будет два ответа, так как мешков ржи и пшеницы было не поровну. Поэтому главный вопрос не войдет в план решения. Вместо него будет два отдельных вопроса: 1) сколько было килограммов ржи? и 2) сколько было килограммов пшеницы? Одновременно нельзя решать двух вопросов. Узнаем сначала, сколько было килограммов ржи.

Такая работа над главным вопросом предотвращает характерные ошибки учащихся, у которых в младших классах вырабатывается привычка включать главный вопрос задачи без всяких изменений в план решения. То же самое они склонны делать и при решении задач на пропорциональное деление В этом случае получается разрыв между последним вопросом и последним действием. Поставив вопрос, сколько было килограммов ржи и пшеницы в отдельности, ученики фактически узнают, сколько было килограммов пшеницы.

Укажем еще две ошибки учащихся, относящиеся непосредственно к расчленению главного вопроса на два отдельных вопроса.

Дана задача. За два отреза одинаковой материи заплатили 350 руб. В одном из них было 3 *м* материи, а в другом—4 *м*. Сколько рублей заплатили за каждый отрез?

Ученик. В этой задаче два ответа, так как купили два отреза и надо знать, сколько стоил каждый отрез.

Чтобы навести мысль ученика на правильный путь, учитель дает вторую задачу.

За 3 карандаша заплатили 75 коп. Сколько стоит каждый карандаш?

Учитель. Сколько будет ответов в этой задаче?

Ученик (после некоторого колебания). Будет один ответ.

Учитель. Но ведь купили 3 карандаша и спрашивается, сколько стоит каждый карандаш. Почему же в этой задаче один ответ, а в задаче про покупку материи два ответа?

Ученик. Потому что материи в кусках было не поровну.

Вторая ошибка, чисто стилистическая, состоит в том, что дети вводят в свой ответ лишние словечки: „в каждом куске материи было не поровну“ или „в обоих кусках материи было не поровну“. Слова „в каждом“ и „в обоих“ в сочетании с соотношением „не поровну“ противоречат здравому смыслу.

Задачи на пропорциональное деление можно использовать в качестве подготовительной ступени к задачам на нахождение чисел по их сумме и кратному отношению. С этой целью в задачу на пропорциональное деление мы вводим условные части. Вот как придется в таком случае сформулировать задачу про мешки ржи и пшеницы:

Колхозник получил на трудодни 720 *кг* зерна, причем рожь составляла по весу 4 части всего зерна, а пшеница 5 таких же частей. Сколько получил он в отдельности килограммов ржи и пшеницы?

Чтобы подвести детей к этой формулировке, необходимо восстановить в их памяти второй вопрос исходной задачи: сколько весил каждый мешок зерна?

Учитель. Что надо было сделать, чтобы решить этот вопрос?

Ученик. Надо было 720 *кг* разделить на 9 равных частей.

Учитель. Сколько же таких частей приходится на рожь?

Ученик. На рожь приходится 4 такие части, так как ржи было 4 мешка.

Учитель. А сколько таких частей приходится на пшеницу?

Ученик. На пшеницу приходится 5 таких частей, так как пшеницы было 5 мешков.

После этого с помощью учителя дети сами составляют задачу про рожь и пшеницу, заменяя мешки „частями". Разбор и решение этой задачи ничем не отличается от исходной. Изменится только первый вопрос. Вместо того чтобы узнавать, сколько было всего мешков, придется узнавать, сколько было всего равных частей. Тем самым у чисел при решении данного вопроса вместо буквы **м**. придется поставить букву **ч**.

Так вводятся задачи на деление пропорционально данному числу частей.

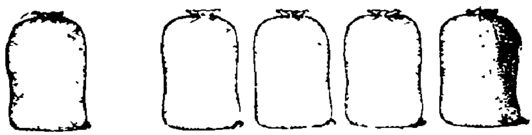
Формулировка первого вопроса этих задач совершенно аналогична формулировке того же вопроса в задачах на пропорциональное деление. Нет никакой необходимости вводить новый и притом трудный для детей оборот речи, как это делают некоторые учителя: на сколько равных частей приходится 720 *кг* зерна? Во-первых, словосочетание „на сколько" создает такое впечатление, будто бы речь идет о разностном сравнении. Это может только дезориентировать ученика. Во-вторых, тогда пришлось бы и в задачах на пропорциональное деление спрашивать, на сколько мешков приходится 720 *кг* зерна. Между тем подобный вопрос носит явно искусственный характер.

Итак, следует держаться простейшей формулировки: сколько было всего равных частей. Без глагола учащимся труднее произнести любое предложение. Потому мы вводим в этот вопрос сказуемое „было". Слово „всего" подчеркивает необходимость сложения. Особенно важным является в данном случае слово „равных". Дело в том, что неравных частей было только две: количество ржи и количество пшеницы. Пропуская слово „равных“, мы лишаем вопрос необходимой определенности.

Теперь можно без особого труда ввести задачи на нахождение чисел по их сумме и кратному отношению.

Изменим задачу про рожь и пшеницу так, чтобы ржи был только один мешок. Поясним ее рисунком.

Всего 400 *кг*



рожь пшеница

Сколько было килограммов ржи и пшеницы в отдельности?

Глядя на рисунок и запись, учащиеся заменяют мешки „частями“. Учитель записывает условие задачи по-новому:

$$400\ кг \begin{cases} \text{Рожь} & — 1\ ч. \\ \text{Пшеница} & — 4\ ч. \end{cases}$$

Учитель. Чего было больше — ржи или пшеницы?

Ученик. Пшеницы было в 4 раза больше, чем ржи, так как ржи была только одна часть, а пшеницы четыре такие же части.

Учитель. Попробуем еще раз переделать нашу задачу так, чтобы в условии не говорить о „частях“, а употребить выражение: „в 4 раза больше“.

Ученик. Колхозник получил на трудодни 400 *кг* ржи и пшеницы, причем ржи была одна часть, а пшеницы в 4 раза больше.

Учитель. Надо ли говорить, что ржи была 1 часть?

На этот пункт следует обратить в работе с детьми особое внимание. Им кажется, что рожь исчезнет, если не упомянуть об „одной части“. Но ведь если бы не было ржи, то пшеницу не с чем было бы сравнивать!

Чтобы убедить в этом учащихся, учитель стирает с доски мешок, изображающий рожь, и подпись под ним.

Учитель. Можно ли теперь сказать, что пшеницы в 4 раза больше, чем ржи?

Ученик. Теперь нельзя этого сказать, так как ржи совсем нет.

Учитель. Итак, если сказано, что пшеницы в 4 раза больше, чем ржи, это значит, что рожь есть, что она составляет 1 часть, а пшеница—4 такие же части.

В конце концов дети под руководством учителя правильно формулируют текст задачи:

Колхозник получил на трудодни 400 *кг* зерна, ржи и пшеницы. При этом пшеницы он получил в 4 раза больше, чем ржи. Сколько получил он килограммов ржи и пшеницы в отдельности?

В соответствии с новым текстом вносятся изменения в запись условия задачи на доске:

$$400\ \textit{кг} \begin{cases} \text{Рожь} \\ \text{Пшеница — в 4 раза больше} \end{cases}$$

Сколько было килограммов ржи и пшеницы в отдельности?

Теперь остается показать, что новая задача решается совершенно так же, как предыдущая: достаточно только выразить количество ржи и пшеницы в частях.

Ученик вслед за учителем повторяет следующее рассуждение: примем количество ржи за одну часть; тогда количество пшеницы составит четыре такие же части.

Учитель дополняет запись на доске:

$$400\ \textit{кг} \left\{ \begin{array}{l} \text{Рожь} \\ \text{Пшеница — в 4 раза больше} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{1 ч.} \\ \text{4 ч.} \end{array}$$

Задачи на нахождение чисел по их сумме и кратному отношению можно назвать „задачами на части", а способ, которым они решаются, „способом частей". Такие незамысловатые термины вполне доступны учащимся IV класса.

Назовем основные этапы работы над такой задачей.

1. Усвоение содержания задачи (общее требование, относящееся к решению любой задачи).

2. Рассуждение, которое позволяет выразить соотношение между данными числами в „частях".

3. Работа над главным вопросом, в результате чего главный вопрос расчленяется на два отдельных вопроса.

4. Разбор задачи применительно к первому из этих вопросов.

5. Составление плана решения с добавлением второго вопроса, выделенного из главного.

6. Решение с вопросами и ответом.

В усложненных задачах на нахождение чисел по их сумме и кратному отношению не всегда приходится расчленять главный вопрос. Вот, например, задача, в которой будет только один ответ, а следовательно, главный вопрос войдет в план решения.

Универмаг продал 4800 *м* материи, ситца и сатина. Ситца было продано в 3 раза больше, чем сатина. Сколько продали кусков ситца, если в каждом куске было 45 *м*?

После повторения задачи ученик должен перейти к рассуждению.

Примем количество сатина за одну часть, тогда количество ситца составит три такие же части.

Дальше следует разбор задачи.

Чтобы решить главный вопрос, надо знать, сколько было продано всего метров ситца (?) и сколько метров ситца было в каждом куске (45 *м*).

Чтобы узнать, сколько продали всего метров ситца, надо знать, сколько продали сатина (?) и во сколько раз больше продали ситца (в 3 раза больше).

Чтобы узнать, сколько продали метров сатина, надо знать, сколько было продано ситца и сатина вместе (4800 *м*) и сколько было всего равных частей (?).

Чтобы узнать, сколько было всего равных частей, надо к одной части прибавить три части. С этого вопроса можно начать решение задачи.

Составим план решения. И т. д.

В дальнейшем учащиеся решают усложненные задачи на нахождение трех чисел по их сумме и кратным отношениям. Например:

На складе было 750 *т* овощей: свеклы в 2 раза меньше, чем капусты, а картофеля в 6 раз больше, чем капусты. Сколько тонн каждого сорта овощей было на складе?

Прежде, чем решать такую задачу, надо выбрать из трех искомых наименьшее. Меньше всего было свеклы, капусты было больше, чем свеклы, а картофеля больше, чем капусты. Именно в этом порядке записываем названия овощей одно под другим, сводя кратные отношения между ними к выражению „больше" во столько-то раз.

Затем следует рассуждение: примем вес свеклы за 1 часть; вес капусты составит 2 такие части, а вес картофеля, которого было в 6 раз больше, чем капусты — 12 таких частей.

Запись на доске будет иметь следующий вид:

$$750\ \text{т} \left\{ \begin{array}{l} \text{Свекла} \\ \text{Капуста — в 2 раза больше} \\ \text{Картофель — в 6 раз больше} \end{array} \right\} \begin{array}{r} 1\ \text{ч.} \\ 2\ \text{ч.} \\ 12\ \text{ч.} \end{array}$$

Сколько тонн каждого сорта овощей было на складе?

Главный вопрос задачи расчленяем на три отдельных вопроса.

Сначала узнаем, сколько было свеклы. Применительно к этому вопросу делаем разбор и составляем начало плана решения, а затем добавляем два последних вопроса.

Заметим, что „способ частей" применим также к задачам на нахождение чисел по их сумме и разности, которые решаются в V классе. Учащиеся, овладевшие этим способом, без труда переключаются на алгебраический способ решения таких и подобных им задач, когда вместо условных „частей" вводится обозначение неизвестного через x.

Решение задач на *нахождение неизвестного по разности двух чисел* мы начинаем с таких задач, в которых обе разности даны. Например:

1) В мастерской было два куска одинаковой проволоки. Один из них был на 5 *м* длиннее и на 450 *г* тяжелее другого. Сколько весил 1 *м* этой проволоки?

2) Два одинаковых насоса должны были выкачать воду из ямы. Первый насос работал на 8 минут дольше и выкачал на 96 ведер воды больше, чем второй.

Сколько ведер воды выкачивал каждый насос в 1 минуту?

Разбор этих задач удобнее вести от числовых данных к вопросу.

Если известно, на сколько один кусок проволоки длиннее другого и на сколько он в то же время тяжелее, можно узнать, сколько весит 1 *м* такой проволоки.

Если известно, на сколько дольше работал первый насос и на сколько больше он выкачал ведер воды, можно узнать, сколько ведер выкачивал каждый насос в 1 минуту.

Следующий этап — решение задач в два действия, когда прямо дается только одна из двух разностей.

Купили по одинаковой цене 8 *м* красного сатина и 5 *м* синего, причем за весь красный сатин заплатили на 48 руб. больше, чем за весь синий. Сколько стоит 1 *м* такого сатина?

Прежде чем решать эту задачу, надо обратить внимание учащихся на разницу в стоимости красного и синего сатина.

Учитель. Почему за красный сатин заплатили больше, чем за синий?

Ученик. Потому что красного сатина купили на 3 *м* больше, чем синего.

Учитель. А на сколько больше заплатили?

Ученик. На 48 руб.

Учитель. Если известно, на сколько больше купили красного сатина и на сколько больше за него заплатили, что можно узнать?

Ученик. Можно узнать, сколько стоит 1 *м* сатина.

Такой прием разбора задачи позволяет наиболее простым способом вскрыть зависимость между разницей в количестве метров и разницей в стоимости. В дальнейшем можно с таким же успехом применять к этим задачам „полный анализ".

Чтобы узнать, сколько стоит 1 *м* сатина, надо знать, на сколько больше купили красного сатина, чем синего (?) и на сколько больше за него заплатили (на 48 руб.).

Чтобы узнать, на сколько больше купили красного сатина, чем синего, надо знать, сколько купили красного сатина (8 *м*) и сколько синего (5 *м*).

Составим план решения. И т. д.

После таких легких задач в два действия можно перейти к решению задач на нахождение неизвестного по разности двух чисел в четыре действия.

Берем ту же задачу про красный и синий сатин, изменив только ее вопрос: сколько стоит отдельно красный и синий сатин?

Начинаем, как и в задачах на пропорциональное деление, с расчленения главного вопроса.

Сколько стоит весь → красный сатин?
↘ синий сатин?

Разбираем задачу применительно к первому из этих двух вопросов.

Узнаем, сколько стоит весь красный сатин. Чтобы решить этот вопрос, надо знать, сколько купили метров красного сатина (8 *м*) и сколько стоит 1 *м* (?).

Дальнейший ход рассуждения совпадает с разбором приведенной ранее задачи в два действия.

Предыдущая задача сводилась к прямому приведению к единице. Изменим ее так, чтобы она решалась обратным приведением.

За красный сатин уплатили 128 руб., а за синий, по той же цене,— 80 руб. При этом красного сатина купили на 3 *м* больше, чем синего. Сколько купили отдельно красного и синего сатина?

По отношению к задачам этого рода тоже приходится сначала устанавливать условно-следственную зависимость между разницей в количестве метров и разницей в стоимости, а затем применить те же приемы рассуждения, которые были изложены раньше.

Как мы видим, два варианта задач на вычисление неизвестного по двум разностям совершенно аналогичны двум вариантам задач на пропорциональное деление. Разница только в том, что в задачах на пропорциональное деление первый вопрос решается сложением, а в задачах на вычисление неизвестного по двум разностям этот вопрос решается вычитанием.

Задачи на сумму двух произведений, прямая и обратные, не представляют особых трудностей и решаются уже во II классе. В данном случае эти задачи интересуют нас с двух точек зрения: во-первых, они нужны в качестве подготовительных к задачам на встречное движение и на вычисление среднего арифметического; во-вторых, прямые задачи этого рода могут служить интересной интерпретацией распределительного закона умножения.

Приведем образец п р я м о й задачи на сумму двух произведений.

Купили 5 *кг* яблок, по 7 руб. за килограмм, и 3 *кг* орехов, по 10 руб. за килограмм. Сколько всего израсходовали денег?

Запишем решение этой задачи в виде формулы:

$$7 \times 5 + 10 \times 3 = 65$$

По данной прямой задаче составим две обратных.

1) Купили 5 *кг* яблок, по 7 руб. за килограмм, и несколько килограммов орехов, по 10 руб. за килограмм. Всего израсходовали 65 руб. Сколько купили килограммов орехов?

2) Купили 5 *кг* яблок, по 7 руб. за килограмм, и 3 *кг* орехов. Всего израсходовали 65 руб. Сколько стоит 1 *кг* орехов?

Содержание обратных задач выражается следующими уравнениями:

$$1)\ 7 \times 5 + 10 \times x = 65$$
$$2)\ 7 \times 5 + x \times 3 = 65$$

Обратимся еще раз к прямой задаче. Если в этой задаче изменить числовые данные, то окажется, что ее можно решать разными способами. Вот один из таких вариантов.

Купили 5 *кг* яблок, по 10 руб. за килограмм, и 3 *кг* орехов по той же цене. Сколько всего израсходовали денег?

Эту задачу можно решить двумя способами, как показывает следующее равенство:

$$10 \times 5 + 10 \times 3 = 10 \times (5 + 3)$$

А вот другой вариант той же задачи.

Купили 3 *кг* яблок, по 7 руб. за килограмм, и столько же килограммов орехов, по 10 руб. за килограмм. Сколько всего израсходовали денег?

И в этом случае задача решается двумя способами.

$$7 \times 3 + 10 \times 3 = (7 + 10) \times 3$$

Из приведенных равенств ясно, что в первом случае мы пользуемся распределительным законом умножения в отношении множителя, а во втором случае — в отношении множимого. Решение таких задач двумя способами и сопоставление этих способов возбуждает интерес учащихся и повышает их активность, а вместе с тем служит подготовкой к усвоению распределительного закона умножения.

Задачи на встречное движение решаются в III классе.

Прежде всего дети должны познакомиться с названиями тех величин, которые встречаются в задачах на движение. Затем они решают следующие простые задачи.

1) Какое расстояние пройдет пароход за 4 часа, если идет со скоростью 23 *км* в час?

2) Сколько часов должен идти пароход, чтобы пройти расстояние в 92 *км* при скорости 23 *км* в час?

3) С какой скоростью шел пароход, если расстояние в 92 *км* прошел за 4 часа?

При решении этих вопросов ученик должен назвать данные величины и искомую.

Даны скорость и время; надо найти расстояние. Вопрос решается умножением.

Даны расстояние и скорость; надо найти время. Вопрос решается делением по содержанию.

Даны расстояние и время; надо найти скорость. Вопрос решается делением на равные части.

После таких подготовительных упражнений можно перейти к решению задач на встречу.

Существуют три основных задачи на встречу, а именно:

1) Задача, в которой даны обе скорости и время до встречи; надо найти расстояние.

2) Задача, в которой даны обе скорости и расстояние; надо найти время до встречи.

3) Задача, в которой даны расстояние, время до встречи и скорость одного из движущихся тел; надо найти скорость второго движущегося тела.

Рассмотрим подробнее каждый из этих вариантов задач.

Задача 1. Из двух городов вышли одновременно навстречу друг другу легковой автомобиль и грузовик. Скорость автомобиля — 50 *км* в час, скорость грузовика — 40 *км*. Через 3 часа они встретились. Как велико расстояние между этими городами?

Задача поясняется чертежом, на котором показаны обе скорости, но не показана точка встречи. Ученики должны сами наметить эту точку. Вначале дети склонны думать, что она должна быть ближе к тому городу, из которого выехал автомобиль, так как он двигается быстрее. Необходимо рассеять это недоразумение. Когда точка нанесена на прямую, изображающую путь, надо разделить расстояние, пройденное каждой машиной до встречи, на 3 равные части. И к этой мысли дети должны придти, по возможности, самостоятельно. Дело в том, что машины начали двигаться одновременно, каждая прошла свою часть пути за 3 часа; отрезки, соответствующие одному часу, не равны, так как машины двигались с разной скоростью: большей скорости соответствует больший отрезок.

Разбор задачи удобнее вести от числовых данных к вопросу. Поэтому ученик рассуждает так.

Если известно, сколько километров в час проходит автомобиль и сколько часов он шел до встречи, можно узнать, какое расстояние он прошел до встречи.

Если известно, сколько километров в час проходит грузовик и сколько часов он шел до встречи, можно узнать, какое расстояние прошел до встречи грузовик.

Если известно расстояние, пройденное каждой машиной, можно узнать, как велико все расстояние между этими городами, что и спрашивается в задаче.

Запишем решение этой задачи в виде формулы:

$$50 \times 3 + 40 \times 3 = 270$$

Всмотревшись в эту формулу, мы замечаем, что это задача на сумму двух произведений, причем здесь в обоих произведениях один и тот же множитель — число 3. А потому:

$$50 \times 3 + 40 \times 3 = (50 + 40) \times 3$$

Итак, нашу задачу можно решить другим, более коротким способом.

Чтобы подвести учащихся к этому способу, полезно иметь следующее наглядное пособие: картинки, изображающие автомобиль и грузовик, свободно двигаются навстречу друг другу по шнуру, который продет в двух точках через каждую картинку и туго натянут на доске.

Двигая картинки навстречу друг другу, учитель наводит детей на мысль, что каждый час машины сближаются на одно и то же число километров (50 *км* + + 40 *км*), и это повторяется 3 раза, так как до встречи машины двигались 3 часа.

Теперь ученик рассуждает по-новому.

Зная, сколько километров в час проходит каждая машина, можно узнать, на сколько километров они сближаются за 1 час.

Зная, на сколько километров они сближаются за 1 час и сколько часов прошло до встречи, можно узнать, как велико все расстояние между городами, что и спрашивается в задаче.

Задача 2. Из двух городов, которые находятся на расстоянии в 270 *км*, вышли одновременно навстречу друг другу легковой автомобиль и грузовик. Скорость автомобиля — 50 *км* в час, а скорость грузовика — 40 *км*. Через сколько часов они встретятся?

Арифметическое содержание этой задачи является некоторым видоизменением одной из обратных задач на сумму двух произведений. Вспомним уравнение, приведенное на стр. 128:

$$7 \times 5 + 10 \times x = 65$$

Если ввести дополнительное условие, а именно, если принять, что $x = 5$, то можно было бы, изменив числа, составить задачу к следующему уравнению:

$$7 \times x + 10 \times x = 85$$

Откуда $(7 + 10) \times x = 85$

Следовательно, $x = 85 : (7 + 10) = 5$

Чтобы решить нашу вторую задачу на встречу, надо ясно представить себе, что время до встречи было для каждой машины одно и то же и что каждый час они сближались на одно и то же число километров. И то, и другое учитель поясняет на подвижных картинках, изображающих автомобиль и грузовик.

Разбор задачи и в этом случае удобнее начинать с числовых данных.

Необходимо обратить внимание учащихся на формулировку и решение первого вопроса; эти моменты тождественны аналогичным моментам в первой задаче: На сколько километров сближаются машины за 1 час?

$$50\ \textit{км} + 40\ \textit{км} = 90\ \textit{км}$$

Задача 3. Из двух городов, которые находятся на расстоянии 270 *км*, вышли одновременно навстречу друг другу легковой автомобиль и грузовик. Автомобиль шел со скоростью 50 *км* в час и встретил грузовик через 3 часа. С какою скоростью шел грузовик?

И здесь мы также имеем одну из обратных задач на сумму двух произведений. Дети решают ее сначала тремя действиями. При этом они упускают из виду, что время до встречи было для каждой машины одно и то же.

Вернемся еще раз к обратным задачам на сумму двух произведений. Возьмем второе уравнение:

$$7 \times 5 + x \times 3 = 65$$

В задаче на встречу мы имеем в обоих произведениях один и тот же множитель.

Изменим в соответствии с этим наше уравнение:

$$7 \times 3 + x \times 3 = 51$$

Откуда $(7 + x) \times 3 = 51$
Или $7 + x = 51 : 3 = 17$
Следовательно, $x = 17 - 7 = 10$

Интересно, что первый вопрос и в этом случае совпадет с прежней формулировкой: „на сколько километров сближаются машины за 1 час?“ Однако решается этот вопрос уже не сложением, как было до сих пор, а делением на равные части. В самом деле, обе машины, двигаясь навстречу друг другу, прошли все расстояние между городами, т. е. все 270 *км*, за 3 часа. Поэтому, чтобы узнать, сколько километров они проходили за 1 час, вернее, на сколько километров они сближались за 1 час, надо произвести деление.

Второй вопрос решается на этот раз вычитанием. Зная, что за 1 час обе машины проходили 90 *км* и что одна из них двигалась со скоростью 50 *км* в час, найдем скорость второй машины, если отнимем 50 *км* от 90 *км*.

Во всех трех задачах на встречу, как это было показано, первый вопрос формулируется одним и тем же способом: „на сколько сближаются поезда за 1 час?" или „на сколько уменьшается расстояние между поездами за 1 час?" Иногда этот вопрос ставится по-другому: „сколько километров проходят оба поезда за 1 час?" Такая формулировка вопроса может навести учащихся на ложную мысль, что меняется скорость движения, что скорости можно складывать, тогда как в данном случае меняется не скорость, а расстояние. Это и следует подчеркнуть в вопросе.

Рассмотрим последнюю группу задач — задачи на в ы ч и с л е н и е с р е д н е г о а р и ф м е т и ч е с к о г о, которые приобретают особое значение в условиях политехнического обучения.

Прежде всего необходимо разъяснить, что такое среднее арифметическое.

Среднее арифметическое связано с понятием арифметической пропорции, которая представляет собою равенство двух арифметических отношений. Например:

$$15 - 12 = 9 - 6$$

Сумма крайних членов арифметической пропорции равна сумме ее средних членов:

$$15 + 6 = 12 + 9$$

Если оба средние (или оба крайние) члена арифметической пропорции равны, она называется н е п р е р ы в н о й. Например:

$$12 - 9 = 9 - 6$$

Число 9 и является в этой пропорции с р е д н и м а р и ф м е т и ч е с к и м.

Опираясь на основное свойство арифметической пропорции, легко вычислить среднее арифметическое:

$$9 = (12 + 6) : 2$$

Итак, среднее арифметическое двух чисел равняется их полусумме.

Средним арифметическим нескольких чисел называется частное от деления их суммы на число слагаемых. Это определение даже в средней школе дается без каких-либо обоснований. В начальной школе и подавно достаточно познакомить детей с средним арифметическим двух чисел, а затем сообщить им правило для вычисления среднего арифметического нескольких чисел.

Задачи на среднее арифметическое даются в IV классе в первой учебной четверти.

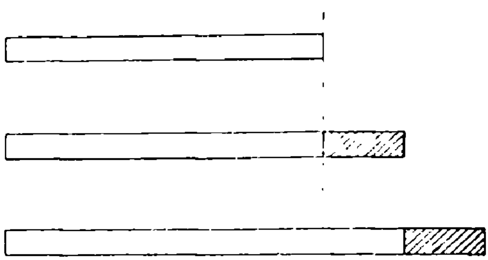
Чтобы научить детей вычислять среднее арифметическое двух чисел, полезно прежде всего напомнить им тот житейский смысл, который связывается с выражениями „средний рост“, „средний возраст“, „средняя скорость“ и т. п.

Средний рост, скажут учащиеся,—это не самый маленький, но и не самый большой рост. Средний возраст — это не самый молодой, но и не самый старый возраст. Средняя скорость — это не самая малая, но и не самая большая скорость.

После этого краткого вступления учитель прикрепляет к доске две полоски длиною в 40 *см* и в 60 *см*.

Учитель. В короткой полоске 40 *см*, в длинной — 60 *см*. Сколько сантиметров должно быть в полоске средней длины?

Ученик. В полоске средней длины должно быть больше, чем 40 *см*, и меньше, чем 60 *см*.



Учитель. Попробуем наметить на доске полоску средней длины. На сколько больше 60 *см*, чем 40 *см*?

Ученик. На 20 *см*.

Учитель. Разделим этот излишек пополам, получится 10 *см*.

Прибавим 10 *см* к меньшей полоске. Вот мы и получили полоску средней длины. Кто может повторить, как мы это узнали?

Ученик. От 60 *см* отнять 40 *см*, получится 20 *см*. Затем 20 *см* разделить на 2 равные части, получится 10 *см*. К 40 *см* прибавить 10 *см*, получится 50 *см*. В полоске средней длины 50 *см*.

Учитель. Сколько полосок средней длины вышло бы из двух полосок в 40 *см* и в 60 *см*?

Ученик. Вышло бы две полоски, так как 40 *см* плюс 60 *см* = 100 *см*, а 50 *см* плюс 50 *см* тоже = 100 *см*.

Учитель. Число 50 можно назвать средним арифметическим чисел 40 и 60. Кто догадается, как проще всего найти среднее арифметическое этих чисел?

Ученик. Надо числа 40 и 60 сложить и полученную сумму разделить на 2.

Учитель. Повторите, как найти среднее арифметическое двух чисел.

Ученик. Чтобы найти среднее арифметическое двух чисел, надо сумму этих чисел разделить на 2.

Учитель предлагает еще кому-нибудь из учащихся повторить это правило.

После этого дети решают задачи на вычисление среднего арифметического двух чисел вроде задач № 183 — 186 из стабильного учебника.

В дальнейшем учитель сообщает правило вычисления среднего арифметического нескольких чисел: чтобы найти среднее арифметическое нескольких чисел, надо сумму этих чисел разделить на число слагаемых. Пользуясь этим правилом, дети решают задачи № 187, 188 и т. д. из учебника.

Надо как можно шире использовать вычисления среднего арифметического на уроках арифметики ввиду их значения в науке и технике, а следовательно, и в политехнической подготовке учащихся.

Когда будут пройдены составные именованные числа, можно связать нахождение среднего арифметического с измерением и черчением. Допустим, например, что при измерении огорода прямоугольной формы были получены следующие числа: для длины — 38 *м* 2 *дм* и 37 *м* 8 *дм*, а для ширины — 23 *м* 1 *дм* и 23 *м* 3 *дм*.

Учащиеся находят среднее арифметическое для каждой пары чисел и, приняв 4 *дм* за 1 *мм*, чертят план огорода.

По своей структуре задачи на вычисление среднего арифметического представляют собою своеобразное усложнение задач на сумму двух произведений. Вот образец такой задачи.

В течение первых 5 месяцев года вагоностроительный завод выпускал по 396 вагонов, в течение остальных 7 месяцев по 420 вагонов. Сколько вагонов в среднем выпускал завод ежемесячно?

Задача эта решается по следующей формуле:

$$\frac{396 \times 5 + 420 \times 7}{5 + 7}$$

• Верхняя часть этой формулы представляет собою задачу на сумму двух произведений.

Усложнение задач на вычисление среднего арифметического чаще всего состоит в том, что добавляется еще одно или даже два произведения. Можно и другим способом ввести шестое действие. Например:

В одном из передовых колхозов два опытных участка. Площадь первого участка — 6 *га*, площадь второго — 9 *га*. Первый участок дал по 34 *ц* 50 *кг* пшеницы с гектара, а второй участок — по 36 *ц*. До революции средний урожай пшеницы составлял у нас 8 *ц* 85 *кг* с гектара. Во сколько раз теперь средний урожай в передовом колхозе выше, чем он был в России до революции?

Вот как разбирают ученики эту задачу.

Чтобы решить главный вопрос задачи, надо знать средний урожай пшеницы в прошлом и с р е д н и й у р о ж а й п ш е н и ц ы в передовом колхозе в настоящее время.

Первое число нам известно — 8 *ц* 85 *кг*, а второго числа мы не знаем.

Ч т о б ы в ы ч и с л и т ь с р е д н е е а р и ф м е т и ч е с к о е н е с к о л ь к и х ч и с е л, н а д о с у м м у э т и х ч и с е л р а з д е л и т ь н а и х ч и с л о. Поэтому, чтобы вычислить средний урожай на площади опытных участков в передовом колхозе, надо знать всю площадь, занятую опытными участками, и общее количество пшеницы, которое с нее собрали. Ни того, ни другого мы не знаем.

Чтобы вычислить весь урожай, надо 34 *ц* 50 *кг* умножить на 6, затем 36 *ц* умножить на 9 и полученные числа сложить.

Чтобы узнать площадь обоих участков, надо к 6 *га* прибавить 9 *га*. С этого вопроса можно начать решение задачи.

Как мы видим, при разборе задачи на вычисление среднего арифметического достаточно сформулировать соответствующее правило, а затем просто указать действия, которые надо произвести, чтобы решить задачу.

Развитие самостоятельности и творческих способностей учащихся в работе над задачами

До сих пор мы занимались общими приемами логической работы над задачами. Теперь укажем некоторые дополнительные приемы, цель которых научить детей понимать структуру задачи, открывать нечто новое, находить своими силами способы решения задач новых видов.

Когда, поступив в школу, семилетки впервые встречаются с арифметическими задачами, им приходится прежде всего понять роль вопроса задачи и необходимость выбора действия, которое является внешним выражением связи между вопросом задачи и ее условием. На первых порах ученик не решает задачу, а просто воспроизводит условие с ответом. Учителя сплошь и рядом не придают этому значения, не подчеркивают разницы между задачей и рассказом. Однако, не видя этой разницы, ученик не может сколько-нибудь сознательно решать задачи.

Чтобы вопрос задачи не сливался в глазах детей с ее условием, а сообщение ответа, без предварительного выполнения действия, не обращало бы задачу в арифметический рассказ, следует подчеркнуть разницу между данными числами и искомым числом, научить детей отвечать на вопросы, что нам известно и что неизвестно.

В соответствии с этой целью мы не даем задачу в готовом виде — она создается на глазах у детей.

Прежде всего учитель знакомит детей с наглядными пособиями — показывает им ведерко и рыбок из картона.

Учитель. Сегодня вы будете сами составлять задачу про этих рыбок.

На виду у класса учитель опускает в ведерко 5 рыбок. Попутно дети хором считают их. Затем учитель вынимает из ведерка 2 рыбки и показывает их детям.

Учитель. Сколько всего рыбок опустил я в ведерко? А сколько вынул? (Дети отвечают.)

Учитель. В ведерко опустили 5 рыбок, а потом вынули 2 рыбки. Это начало задачи. Это нам известно. Повторите, что нам известно. (Дети повторяют.)

Учитель (заглядывая в ведерко). Но я не все сказала вам! Что нам пока неизвестно?

Ученик. Неизвестно, сколько рыбок осталось в ведерке.

Учитель. Сколько рыбок осталось в ведерке — это вопрос задачи. Повторите этот вопрос. (Дети повторяют.)

Учитель. Вот мы и составили задачу. Вспомним еще раз, что нам известно. А что неизвестно? Значит, что же спрашивается в задаче? (Дети отвечают на эти вопросы.)

Учитель. Можно ли, не глядя в ведерко, догадаться, сколько там осталось рыбок.

Ученик. Можно. Там осталось 3 рыбки.

Учитель. Как вы это узнали?

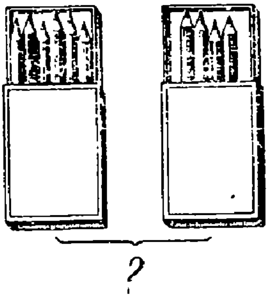
Ученик. От 5 рыбок отнять 2 рыбки, получится 3 рыбки.

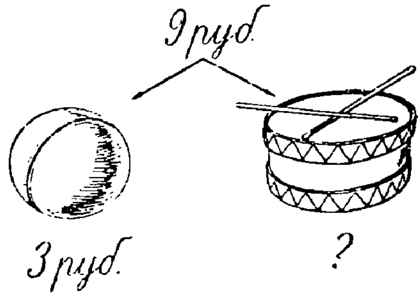
Учитель. Это решение задачи. Повторите решение задачи. (Дети повторяют решение.)

Работа заканчивается формулировкой ответа задачи.

На следующих уроках дети продолжают составлять задачи, руководствуясь требованиями прежде всего указать, что известно, а потом — что неизвестно, что спрашивается в задаче. Самостоятельность их при этом постепенно возрастает. Сначала учитель сообщает, что известно, а дети устанавливают, что неизвестно, формулируют условие задачи и вопрос. Затем они составляют задачи по неполным данным.

Чтобы сделать работу более увлекательной, можно предложить детям составлять задачи по рисункам на доске. Вот образцы таких рисунков.





В конце первой четверти можно применить прием составления задачи по двум данным числам, причем учитель не подсказывает учащимся сюжета задачи — они должны сами его придумать. Сначала требуется составить задачу на сложение, а затем, с теми же числами, на вычитание.

Вот две задачи на числа: 8 книг и 2 книги.

1) На полке стояло 8 книг. Поставили еще 2 книги. Сколько всего книг стоит на полке?

2) На полке стояло 8 книг; 2 книги сняли. Сколько книг осталось на полке?

Разумеется, могут быть и другие варианты задач на те же числа.

К концу первой четверти можно ввести обратное упражнение: к данному вопросу придумывать условие. Вот образцы таких вопросов.

1) Ученик готовит урок. Сколько еще примеров осталось ему решить?

2) Мальчики и девочки играют в мяч. Сколько всего детей играет в мяч?

3) На тарелке лежали груши. Сколько груш осталось?

В чем же состоит смысл и ценность всех этих упражнений с точки зрения развития сообразительности ученика, его уменья самостоятельно решать задачи?

Чтобы решить задачу, надо „открыть“ соотношение между искомым числом и данными числами. Если ученик научится создавать связь между числовыми данными и вопросом, ему нетрудно будет открыть эту связь в готовой задаче.

Следующая серия упражнений, относящаяся уже ко второй четверти, должна быть построена с таким расчетом, чтобы помочь детям свободно ориентироваться в составных задачах на сложение и вычитание. Укажем некоторые из этих упражнений.

Учащимся предлагается решить задачу в одно действие, а затем так изменить ее условие или вопрос, чтобы она решалась двумя действиями.

Изменение условия.

Учитель. У хозяйки было 20 руб. Она купила корыто, которое стоит 8 руб. Сколько денег у нее осталось?

Ученик. У хозяйки было 20 руб. Она купила корыто, которое стоит 8 руб., и ведро, которое стоит 7 руб. Сколько денег у нее осталось?

Изменение вопроса.

Учитель. Девочка сделала 8 красных флажков, а голубых—на 2 флажка больше. Сколько сделала она голубых флажков?

Ученик. Девочка сделала 8 красных флажков, а голубых—на 2 флажка больше. Сколько всего флажков она сделала?

Можно, наоборот, предлагать детям задачи в два действия. Видоизменяя условие или вопрос, дети должны из составной задачи сделать простую.

Изменение условия.

Учитель. На елку повесили 6 золотых шариков и 10 серебряных. Два шарика упало и разбилось. Сколько шариков осталось на елке?

Ученик. На елке висело 16 стеклянных шариков. Два шарика упало и разбилось. Сколько шариков осталось на елке?

Изменение вопроса.

Учитель. Старший брат сделал 10 лодочек, а младший—на 3 лодочки меньше. Сколько всего лодочек они сделали?

Ученик. Старший брат сделал 10 лодочек, а младший—на 3 лодочки меньше. Сколько лодочек сделал младший брат?

Видоизменяя условие и вопрос задачи, дети глубже вникают во взаимосвязь между этими элементами задачи, учатся рассматривать условие задачи под углом зрения ее вопроса и наоборот.

Еще дальше они продвинутся в этом отношении вперед, если научатся проверять ответ задачи, сопоставляя его с условием.

Решая задачу про поезд, в котором было 4 мягких вагона, а всего вместе с жесткими — 16, ученик не знал, как найти число жестких вагонов.

Помочь ему можно было двумя способами.

Можно было нарисовать поезд — 16 небольших прямоугольников — и затушевать 4 из них. Это мягкие вагоны. Тогда видно, что жесткие вагоны — это остальные вагоны. Тем самым трудная для первоклассника задача (обратная на сумму двух чисел) обращается в привычную для ученика задачу на нахождение остатка.

Можно и другим способом вывести ученика из затруднения. Пусть он произведет эксперимент — попробует решить задачу сложением. Окажется, что в поезде 4 мягких вагона, 20 жестких, а всего... 16 вагонов. Ученик убеждается, что действовал неправильно. Это заставляет его глубже вдуматься в те зависимости, которые определяют ход решения задачи. Было всего 16 вагонов, рассуждает ученик, но не все они были мягкие. Мягких было только 4 вагона. А какие же были, значит, остальные вагоны? Остальные были жесткие. После этого уже нетрудно сообразить, что задача решается вычитанием.

Второй способ с точки зрения развития более высоких мыслительных операций у детей ценнее первого способа.

Во втором полугодии первоклассники продолжают упражняться в самостоятельном придумывании задач. Особенно важно применить этот прием при ознакомлении учащихся с новыми действиями — умножением и делением. К условию дети придумывают вопрос, к вопросу — условие. Полезно сопоставлять аналогичные задачи в два действия и видоизменять первую по образцу второй, а вторую—по образцу первой. Например:

1) Мальчик успел решить на уроке 3 столбика примеров, по 4 примера в каждом столбике, а его сосед на 3 примера меньше. Сколько примеров решил второй мальчик?

2) В одном доме 3 этажа и в каждом этаже по 6 окон, а в другом доме на 2 окна больше. Сколько окон во втором доме?

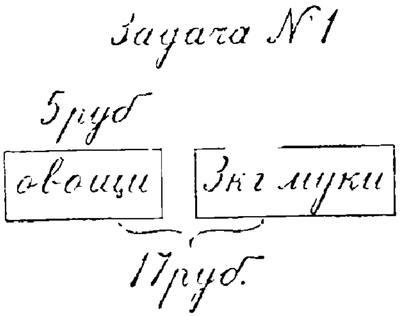
При сопоставлении этих задач сначала указывается их сходство, затем разница и, наконец, выясняется, почему в задаче про мальчиков второе действие — вычитание, а в задаче про дома — сложение.

После этого можно предложить детям изменить первую задачу так, чтобы она решалась, как вторая, а вторую так, чтобы она решалась как первая.

Возьмем еще две аналогичные задачи:

1) У мамы было 17 руб. За овощи она заплатила 5 руб., а на остальные деньги купила 3 *кг* муки. Сколько стоит килограмм муки?

2) Дети принесли в класс 17 веточек тополя. Из них 5 веточек они поставили в банку, а остальные — поровну в 3 бутылки. Сколько веточек поставили они в каждую бутылку?



Первую задачу дети решают со слов учителя, пользуясь при этом схематической записью на доске, а вторую составляют сами по записи с соответствующей иллюстрацией.

Во II классе появляются некоторые новые виды простых задач. По мере их появления учитель дает детям такого рода задания.

1) Составьте задачу, в которой надо узнать, сколько раз 3 руб. содержится в 12 руб.

2) Составьте задачу, в которой спрашивается, на сколько 50 *м* длиннее, чем 38 *м*.

3) Составьте задачу, в которой требуется 3 *кг* увеличить в 6 раз.

4) Составьте задачу, в которой надо 25 коп. уменьшить в 5 раз.

5) Составьте задачу, в которой надо узнать, во сколько раз 32 *л* больше, чем 8 *л*.

Во втором полугодии дети составляют всевозможные простые задачи на данный числовой пример.

Вот какие задачи при умелом руководстве со стороны учителя могут составить учащиеся II класса к примеру 8×6:

1) Купили 6 *м* ситца по 8 руб. за метр. Сколько израсходовали денег?

2) Метр ситца стоит 8 руб., а метр шерстяной материи в 6 раз дороже. Сколько стоит 1 *м* шерстяной материи?

3) Задумали число; разделили его на 6 равных частей и получили 8. Какое число задумали?

Чтобы облегчить детям составление таких задач, можно для начала давать готовый образец. Попрактиковавшись в составлении задач по аналогии, дети на следующих уроках сумеют выполнить задание уже вполне самостоятельно.

Возьмем другой пример: 32:8. Вот соответствующие задачи:

1) За 8 билетов в театр заплатили 32 руб. Сколько стоит один билет?

2) 32 *кг* мандаринов разложили в ящики, по 8 *кг* в каждый ящик. Сколько потребовалось ящиков?

3) Отцу 32 года, а сыну 8 лет. Во сколько раз отец старше сына?

4) Мальчик собрал 32 почтовых марки. Восьмую часть этих марок он подарил товарищу. Сколько марок подарил он товарищу?

5) Из гаража выехало 32 грузовых машины, а легковых в 8 раз меньше. Сколько легковых машин выехало из гаража?

Во II классе дети встречаются с задачами, которые можно решать двумя способами. Например:

В одном мешке было 6 *кг* муки, а в другом — в 4 раза больше. Израсходовали 16 *кг* муки. Сколько килограммов муки осталось?

Дети, правильно понявшие задачу, решают ее так:

1) $6\ кг \times 4 = 24\ кг$; 2) $6\ кг + 24\ кг = 30\ кг$;
3) $30\ кг - 16\ кг = 14\ кг$

Понявшие неправильно, производят только два действия:

1) $6\ кг \times 4 = 24\ кг$; 2) $24\ кг - 16\ кг = 8\ кг$

Чтобы побудить учащихся глубже вникнуть в задачу, полезно выписать оба способа решения на доске, предложить сравнить их и подумать, почему получились разные ответы. Когда причина ошибки будет установлена, следует предложить ее исправить. При этом окажется, что задачу можно решать двумя способами. Второй состоит в следующем:

$$1)\ 6\ \textit{кг} \times 4\ \textit{кг} = 24\ \textit{кг};\quad 2)\ 24\ \textit{кг} - 16\ \textit{кг} = 8\ \textit{кг};$$
$$3)\ 6\ \textit{кг} + 8\ \textit{кг} = 14\ \textit{кг}$$

Уже во II классе учащимся приходится пользоваться способами прямого и обратного приведения к единице. Вот две такие задачи:

1) На 3 халата пришили 24 пуговицы. Сколько пуговиц пришьют на 5 таких халатов?

2) На 9 костюмов израсходовали 27 *м* материи. Сколько таких костюмов сошьют из 18 *м* материи?

Когда дети научатся решать оба варианта задач, необходимо эти варианты сопоставить. После этого можно предложить детям изменить первую задачу так, чтобы она решалась как вторая, а вторую так, чтобы она решалась как первая. Всю эту работу нельзя выполнить на одном уроке. Сначала видоизменяется первая задача, затем вторая. Выполнив задание устно, учащиеся самостоятельно записывают на доске условия обоих вариантов:

Первая задача

3 х. — 24 п.	3 х. — 24 п.
5 х. — ?	? — 30 п.

Вторая задача

9 к. — 27 *м*	9 к. — 27 *м*
? — 18 *м*	6 к. — ?

Производя перестройку задач, дети замечают, что первая часть условия не меняется — меняется только вторая часть. В зависимости от этого меняется и второе действие, которое может быть либо умножением, либо делением по содержанию.

Позднее, уже в III классе, это „открытие“, сделанное детьми более или менее самостоятельно, позволит учителю дать и разъяснить название обоих способов решения задач на простое тройное правило (см. стр. 115).

Хороши в качестве стимула, повышающего активность учащихся, так называемые задачи-смекалки. Интерес учащихся I класса возбуждает, например, такая задача:

В корзине 6 яблок. Как разделить их между тремя мальчиками, чтобы каждому досталось по 2 яблока и чтобы 2 яблока осталось в корзине?

Надо догадаться, что один мальчик получит свои 2 яблока вместе с корзинкой.

В III классе следует особенно широко практиковать решение одной и той же задачи разными способами, для чего имеется достаточно поводов. Таковы прежде всего задачи на встречу — первый и третий варианты. Как помочь учащимся додуматься до второго, более короткого способа?

Можно воспользоваться наглядностью, как это показано на стр. 131 по отношению к прямой задаче на встречное движение. Но можно поступить иначе, а именно, предложить детям решить три следующие задачи.

1) Купили 1 *кг* яблок за 6 руб. и 1 *кг* груш за 8 руб. Сколько израсходовали денег?

2) Купили 3 *кг* яблок по 6 руб. за килограмм и 2 *кг* груш по 8 руб. за килограмм. Сколько израсходовали денег?

3) Купили 3 *кг* яблок по 6 руб. за 1 *кг* и столько же килограммов груш по 8 руб. Сколько израсходовали денег?

После решения второй задачи учитель спрашивает: „А не следует ли и во второй задаче сложить 6 руб. и 8 руб.? Почему нет смысла складывать эти числа?“

После решения третьей задачи, если дети воспользуются тем же длинным способом, учитель предлагает им сравнить ее сначала с второй задачей, чтобы увидеть разницу, а затем с первой, чтобы подметить сходство. Подумав, дети догадываются, как можно решить последнюю задачу коротким способом и почему можно применить к ней этот способ.

К третьему варианту задач на встречу еще труднее применить короткий способ. Дети решают эти задачи в три действия. Чтобы натолкнуть их на более глубокое продумывание этой разновидности задач, учитель спрашивает: не подойдет ли и в этом случае тот первый вопрос, который вы ставили до сих пор, решая задачи на встречу? Пробуя применить в новых условиях прежний вопрос, дети улавливают ту связь между временем до встречи и расстоянием, которую до сих пор не замечали. Оказывается, что прежний вопрос подходит, только решается в данном случае не сложением, а делением.

Очень полезно решить двумя способами следующую задачу.

Товарный поезд прошел 985 *км*. Пассажирский поезд был в пути втрое дольше и шел вдвое скорее. Сколько километров прошел пассажирский поезд?

Если два способа решения первой задачи на встречу могут служить иллюстрацией распределительного закона умножения, то на этой задаче про поезда можно раскрыть сущность сочетательного закона. Вот как она решается:

Первый способ: 1) $985\ км \times 3 = 2955\ км$; 2) $2955\ км \times 2 = 5910\ км$

Второй способ: 1) $3 \times 2 = 6$; 2) $985\ км \times 6 = 5910\ км$

При решении задачи первым способом формулировка вопросов не затрудняет учащихся. Что касается второго способа, то особую трудность, но вместе с тем и особый интерес представляет собою формулировка первого вопроса: „во сколько раз больше километров прошел пассажирский поезд, чем товарный?“ Желательно, чтобы под руководством учителя дети сами додумались до правильной постановки этого вопроса.

Решение двумя способами задач, аналогичных приведенной, наряду с решением отвлеченных примеров того же рода, следует предпослать вопросу об умножении чисел на круглые десятки.

Особый интерес представляет собою та „экспериментальная“ работа, которую при умелом руководстве могут произвести учащиеся в связи с решением задач на нахождение чисел по их сумме и кратному отношению, если предоставить их в какой-то мере собственным силам.

Задача. На участке леса росло 120 деревьев, лип и берез, причем берез было в 3 раза больше, чем лип. Сколько было лип и берез в отдельности?

Один из учеников предлагает разделить 120 деревьев на 2, очевидно, полагая, что было два вида деревьев—липы и березы, а потому и нужно делить на 2.

Учитель. А разве лип и берез было поровну?

Другой ученик, поняв ошибку товарища, предлагает делить 120 деревьев на 3. Выделив из условия задачи число 3, этот ученик исходит уже не из конкретной ситуации, а из количественного соотношения между искомыми числами.

Учитель. Попробуем разделить 120 на 3 равные части. Сколько же таких частей придется на липы и сколько — на березы?

Ученик (нерешительно). Одна часть — на липы, а две части — на березы.

Учитель. Но в задаче сказано, что берез не в 2 раза, а в 3 раза больше, чем лип.

Тогда, наконец, некоторые ученики приходят к правильной мысли — надо делить не на 3, а на 4 равные части. Липы составят 1 часть, а березы — остальные 3 части. Так добираются учащиеся до обычного рассуждения, о котором говорилось на стр. 123.

Большое место в работе учащихся III и IV классов должно занять составление обратных задач по данной прямой задаче. Эта работа прежде всего помогает учащимся полностью овладеть основными видами простых задач на все действия, что является условием сознательного выбора действий при решении составных задач. Вообще же упражнение в составлении обратных задач по данным прямым является одним из важнейших средств развития математического мышления учащихся, обеспечивает гибкость и разнообразие приемов при самостоятельном решении задач.

Учащиеся должны заметить, что к любой прямой задаче можно составить по крайней мере две обратных. Начать надо с простых задач на сложение и вычитание, потом ввести простые задачи на умножение и деление и, наконец, обратиться к составлению обратных задач по данным прямым в два и три действия. Последний вид упражнений, как наиболее трудный, следует отнести к IV классу.

Дана задача на сложение. Дети сделали 25 красных флажков и 15 зеленых. Сколько всего флажков сделали дети?

Обратные задачи. 1) Дети сделали 25 красных флажков и несколько зеленых, а всего 40 флажков. Сколько зеленых флажков сделали дети? 2) Дети сделали несколько красных флажков и 15 зеленых, а всего 40 флажков. Сколько красных флажков сделали дети?

Дана задача на вычитание. С лотка продали 60 яблок и 48 груш. На сколько **больше** продали яблок, чем груш?

Обратные задачи. 1) С лотка продали 48 груш, а яблок на 12 штук больше. Сколько продали яблок? 2) С лотка продали 60 яблок. Их было на 12 штук больше, чем груш. Сколько продали груш?

Если изменить вопрос прямой задачи, то изменятся и обе обратные задачи. Вот новый вопрос: на сколько **меньше** продали груш, чем яблок?

Обратные задачи. 1) С лотка продали 60 яблок, а груш на 12 штук меньше. Сколько продали груш? 2) С лотка продали 48 груш. Их было на 12 штук меньше, чем яблок. Сколько продали яблок?

Дана задача на умножение. На огороде 3 грядки с капустой. С каждой грядки сняли по 50 *кг*. Сколько всего капусты сняли с этих грядок?

Обратные задачи. 1) С трех грядок сняли 150 *кг* капусты, поровну с каждой грядки. Сколько капусты сняли с каждой грядки? 2) Со всех грядок на огороде сняли 150 *кг* капусты, по 50 *кг* с каждой грядки. Сколько на этом огороде грядок капусты?

Мы привели только несколько образцов упражнений на составление обратных задач по данной прямой. За исключением первого из этих упражнений, которое можно предложить учащимся II класса в конце учебного года, остальные виды работы лучше отнести к началу III класса. Здесь надо как можно чаще обращаться к всевозможным упражнениям этого рода.

В IV классе можно ввести составление обратных задач к данным прямым в два и в три действия.

Вот прямая задача в два действия. В одном мешке 6 *кг* муки, а в другом—в 3 раза больше. Сколько всего муки в обоих мешках?

Обратные задачи. 1) В двух мешках 24 *кг* муки, причем в одном из них 6 *кг*. Во сколько раз больше муки в другом мешке? 2) В двух мешках 24 *кг* муки, причем в одном из них в 3 раза больше муки, чем в другом. Сколько муки в каждом из этих мешков?

Работая над составлением обратных задач, учащиеся, неожиданно для самих себя, но, разумеется, не неожиданно для учителя, создают типовую задачу на нахождение чисел по их сумме и кратному отношению. Этот факт, между прочим, свидетельствует о том, на сколько обратная задача может оказаться труднее прямой.

Несколько проще составление обратных задач на сумму двух произведений. Такую задачу мы приводим на стр. 128. Купили 3 *кг* яблок по 6 руб. за килограмм и 2 *кг* груш по 8 руб. за килограмм. Сколько израсходовали денег?

Обратные задачи. 1) Купили 3 *кг* яблок по 6 руб за килограмм и 2 *кг* груш. Всего израсходовали 34 руб. Сколько стоит 1 *кг* груш? 2) Купили 3 *кг* яблок по 6 руб. за килограмм и несколько килограммов груш по 8 руб. за килограмм. Всего израсходовали 34 руб. Сколько купили килограммов груш?

Составление самими детьми таких обратных задач по данной прямой надо отнести к III классу и в конце года сопоставить эти задачи с обратными задачами на встречу.

Все эти упражнения и им подобные развивают сообразительность детей и подымают культуру решения задач в начальной школе.

Элементы политехнизма в задачах для III и IV классов

Самостоятельность учащихся при составлении и решении арифметических задач следует связать с некоторыми элементами их политехнической подготовки.

Учащимся сельской школы ближе сельскохозяйственное производство. Им можно показать молочную ферму, свиноводческую ферму, колхозный птичник, огород, теплицу, пасеку. Дети могут наблюдать посев квадратно-гнездовым способом картофеля, кукурузы и

Дана задача на сложение. Дети сделали 25 красных флажков и 15 зеленых. Сколько всего флажков сделали дети?

Обратные задачи. 1) Дети сделали 25 красных флажков и несколько зеленых, а всего 40 флажков. Сколько зеленых флажков сделали дети? 2) Дети сделали несколько красных флажков и 15 зеленых, а всего 40 флажков. Сколько красных флажков сделали дети?

Дана задача на вычитание. С лотка продали 60 яблок и 48 груш. На сколько **больше** продали яблок, чем груш?

Обратные задачи. 1) С лотка продали 48 груш, а яблок на 12 штук больше. Сколько продали яблок? 2) С лотка продали 60 яблок. Их было на 12 штук больше, чем груш. Сколько продали груш?

Если изменить вопрос прямой задачи, то изменятся и обе обратные задачи. Вот новый вопрос: на сколько **меньше** продали груш, чем яблок?

Обратные задачи. 1) С лотка продали 60 яблок, а груш на 12 штук меньше. Сколько продали груш? 2) С лотка продали 48 груш. Их было на 12 штук меньше, чем яблок. Сколько продали яблок?

Дана задача на умножение. На огороде 3 грядки с капустой. С каждой грядки сняли по 50 *кг*. Сколько всего капусты сняли с этих грядок?

Обратные задачи. 1) С трех грядок сняли 150 *кг* капусты, поровну с каждой грядки. Сколько капусты сняли с каждой грядки? 2) Со всех грядок на огороде сняли 150 *кг* капусты, по 50 *кг* с каждой грядки. Сколько на этом огороде грядок капусты?

Мы привели только несколько образцов упражнений на составление обратных задач по данной прямой. За исключением первого из этих упражнений, которое можно предложить учащимся II класса в конце учебного года, остальные виды работы лучше отнести к началу III класса. Здесь надо как можно чаще обращаться к всевозможным упражнениям этого рода.

В IV классе можно ввести составление обратных задач к данным прямым в два и в три действия.

Вот прямая задача в два действия. В одном мешке 6 *кг* муки, а в другом—в 3 раза больше. Сколько всего муки в обоих мешках?

Обратные задачи. 1) В двух мешках 24 *кг* муки, причем в одном из них 6 *кг*. Во сколько раз больше муки в другом мешке? 2) В двух мешках 24 *кг* муки, причем в одном из них в 3 раза больше муки, чем в другом. Сколько муки в каждом из этих мешков?

Работая над составлением обратных задач, учащиеся, неожиданно для самих себя, но, разумеется, не неожиданно для учителя, создают типовую задачу на нахождение чисел по их сумме и кратному отношению. Этот факт, между прочим, свидетельствует о том, на сколько обратная задача может оказаться труднее прямой.

Несколько проще составление обратных задач на сумму двух произведений. Такую задачу мы приводим на стр. 128. Купили 3 *кг* яблок по 6 руб. за килограмм и 2 *кг* груш по 8 руб. за килограмм. Сколько израсходовали денег?

Обратные задачи. 1) Купили 3 *кг* яблок по 6 руб за килограмм и 2 *кг* груш. Всего израсходовали 34 руб. Сколько стоит 1 *кг* груш? 2) Купили 3 *кг* яблок по 6 руб. за килограмм и несколько килограммов груш по 8 руб. за килограмм. Всего израсходовали 34 руб. Сколько купили килограммов груш?

Составление самими детьми таких обратных задач по данной прямой надо отнести к III классу и в конце года сопоставить эти задачи с обратными задачами на встречу.

Все эти упражнения и им подобные развивают сообразительность детей и подымают культуру решения задач в начальной школе.

Элементы политехнизма в задачах для III и IV классов

Самостоятельность учащихся при составлении и решении арифметических задач следует связать с некоторыми элементами их политехнической подготовки.

Учащимся сельской школы ближе сельскохозяйственное производство. Им можно показать молочную ферму, свиноводческую ферму, колхозный птичник, огород, теплицу, пасеку. Дети могут наблюдать посев квадратно-гнездовым способом картофеля, кукурузы и других культур, посадку овощей в торфяных горшочках и т. д., и т. п. Если поблизости от школы имеется лесопильный завод, кирпичный завод, торфоразработки, то и с этими объектами полезно познакомить учащихся.

Учащиеся городской школы могут побывать на хлебозаводе, на постройке дома, в ремонтной мастерской, на швейной фабрике и т. д. Весной и осенью можно организовать экскурсии на пригородную селекционную станцию, в плодоовощной совхоз, в оранжереи.

Подготовляя детей к экскурсии, необходимо снабдить их соответствующим вопросником. Чтобы легче было собрать числовой материал, надо распределить вопросы между учащимися с таким расчетом, чтобы каждый из них вместе с шестью-семью товарищами работал только над одним каким-нибудь вопросом.

Экскурсия на молочную ферму может дать арифметический материал, интересный как для III, так и для IV класса. Однако вопросники придется составить отдельно для каждого класса, поскольку учащиеся III класса еще не знакомы с вычислением площади и не умеют обращаться с составными именованными числами.

Вот образец вопросника для III класса.

1) Сколько всего коров на ферме? Сколько на ферме дойных коров? Сколько на ферме телят?

2) Сколько коров обслуживает одна доярка? (Записать имена нескольких доярок с указанием числа коров, которых каждая из них обслуживает.) Как начисляются дояркам трудодни?

3) Введена ли на ферме электродойка? Сколько коров обслуживает при этом одна доярка?

4) Сколько молока в год дает одна корова? (Записать выборочно годовой и суточный удои нескольких коров.)

5) Какую примерно часть молока по весу составляют сливки? Какую примерно часть сливок по весу составляет масло?

6) Куда поступает продукция фермы? Как организована транспортировка этой продукции?

Кое-какой числовой материал можно получить не только на экскурсии, но из справочников, популярных брошюр, наконец, из учебных пособий. В одном из таких пособий[1], например, приведена таблица с данными о четырех передовых доярках Московской области. В таблице указано, сколько каждая из них обслуживает коров, сколько получает в среднем килограммов молока на 1 корову и как велико в килограммах получаемое от одной коровы в год количество молочного жира. Указывается также, что на машину грузят по 30 бидонов молока, вмещающих каждый по 40 *кг*.

На основе полученных данных учащиеся III класса могут составить, например, такие задачи.

1) Одна доярка вырастила 6 телят, а другая — 8 телят. На всех этих телят им начислили 168 трудодней. Сколько трудодней начислили каждой доярке?

2) Одна доярка, обслуживая 10 коров, надоила от каждой из них по 3644 *л* молока в год. Другая доярка, обслуживая 9 коров, надоила от каждой из них по 3775 *л* молока в год. Которая доярка надоила за год больше молока и на сколько больше?

3) Обслуживая 8 коров, доярка надоила в сутки от каждой своей коровы по 25 *кг* молока. Сливки составляют пятую часть молока, а масло — четвертую часть сливок. Сколько масла получится из суточного удоя молока от всех коров у этой доярки?

4) При электродойке одна доярка обслуживает 50 коров. На ферме 360 коров, причем вручную каждая доярка обслуживает 8 коров. Сколько коров могли бы обслужить все эти доярки при электродойке?

Можно было бы привести еще очень много задач, построенных на собранном материале. Чтобы задачи эти имели практическую значимость, учитель намечает сам тот или иной вопрос. Для решения поставленного учителем вопроса дети, разумеется, намечают сначала простейший путь. Получается задача в два действия или даже в одно действие. Так, например, чтобы узнать, сколько трудодней начислили каждой доярке за выращенных ею телят, достаточно установить по записям, сделанным на экскурсии, сколько телят вырастила та или иная доярка и сколько трудодней начисляют за каждого теленка. Дети составляют две простых задачи.

---

[1] В. А. Игнатьев, Н. И. Игнатьев и Я. А. Шор. Сборник задач по арифметике. Пособие для учителей начальной школы. 1953, стр. 87.

1) Доярка Иванова вырастила 6 телят. За каждого теленка ей начислили 12 трудодней. Сколько всего трудодней начислили ей за телят?

2) Доярка Петрова вырастила 8 телят. За каждого теленка ей начислили 12 трудодней. Сколько всего трудодней начислили ей за телят?

Из этих двух задач, решенных детьми, учитель предлагает составить одну задачу, в которой говорилось бы, сколько всего трудодней начислили обеим дояркам, но не говорилось бы, сколько трудодней начисляют за одного теленка. В результате получается приведенная нами задача на пропорциональное деление.

Аналогичную работу можно провести и над другими задачами, помогая детям постепенно усложнять и комбинировать исходные простые задачи.

Некоторые из этих задач дают основание подчеркнуть преимущество машинного труда по сравнению с ручным, роль правильного ухода за животными, роль электричества в сельском хозяйстве и т. д.

Учащиеся IV класса должны измерить длину и ширину скотного двора, ширину прохода, длину и ширину телятника и других помещений.

В дополнение к данным, собранным учениками III класса, они должны узнать следующее:

1) Сколько квадратных метров площади отводится на скотном дворе на каждую корову?

2) Какова продуктивность различных кормов, т. е. сколько молока образует 1 *кг* клеверного сена, отрубей, жмыхов, силоса?

3) Как исчисляется в кормовых единицах грубый корм — луговое сено, клеверное сено, солома?

4) Как исчисляется в кормовых единицах сильный корм — отруби, жмыхи, силос?

5) Как вычислить кормовую дачу коровы в зависимости от ее живого веса (поддерживающий корм) и от количества удоя (продуктивный корм)?

Перед экскурсией надо, разумеется, объяснить детям такие термины, как кормовая единица, поддерживающий корм, продуктивный корм, а также выяснить, если дети этого не знают, что такое отруби, жмыхи, силос.

Полученные на экскурсии данные учащиеся записывают в виде таблиц. Например:

Продуктивность различных кормов

1 *кг* клевера	образует	1 *кг* — 3 *кг* молока
1 *кг* соломы	„	750 *г* — 1 *кг* „
1 *кг* отрубей	„	3 *кг* — 4 *кг* „
1 *кг* жмыхов	„	4 *кг* — 5 *кг* „

Таблица кормовых дач (на 1 кормовую единицу)

Поддерживающий корм

Луговое сено	1 *кг* 250 *г*
Клевер	800 *г* — 1 *кг*
Солома	2 *кг* — 2 *кг* 500 *г*

Продуктивный корм

Отруби	400 *г*
Жмыхи	300 *г*

На 50 *кг* живого веса требуется 1 кормовая единица поддерживающего корма. На рост приплода прибавляется от 1 до 2 кормовых единиц. Продуктивный корм дается из расчета одной кормовой единицы на 1 *кг* 250 *г* молока.

На основании полученных данных дети под руководством учителя составляют следующие, например, задачи.

1) Длина скотного двора 42 *м*, ширина 16 *м*. Ширина прохода, идущего вдоль всего двора, 1 *м* 5 *дм*. Сколько коров можно поставить на этом дворе, если на каждую корову отводится по 7 *кв. м*?

2) Живой вес коровы — 600 *кг*. На каждые 50 *кг* живого веса требуется 1 кормовая единица поддерживающего корма. Кроме того, добавляется 1 кормовая единица на рост приплода. Как составить кормовую дачу этой корове из поддерживающих кормов?

3) Корова дает в сутки 20 *кг* молока. На каждые 1 *кг* 250 *г* молока она получает либо 400 *г* отрубей, либо 300 *г* жмыхов. Как составить кормовую дачу этой корове из продуктивных кормов?

4) Какое количество поддерживающего и продуктивного корма должна получить корова, вес которой 600 *кг*, если она дает в сутки 25 *кг* молока?

Все эти задачи, кроме первой, являются неопределенными, так как комбинировать корма можно по-разному. Вот как, например, можно решить вторую задачу.

1) 600 *кг*:50 *кг* = 12; 2) 12 ед. + 1 ед. = 13 ед.; 3) 13 ед. = 8 ед. + 5 ед.; 4) 1250 *г* лугового сена × × 8 = 10 *кг*; 5) 2 *кг* соломы × 5 = 10 *кг*; 6) 10 *кг* + + 10 *кг* = 20 *кг*.

Ответ: 20 *кг*.

А вот примерное решение последней задачи.

1) 600 *кг*:50 *кг* = 12; 2) 12 ед. + 1 ед. = 13 ед.; 3) 800 *г* клевера × 13 = 10 *кг* 400 *г* (поддерживающий корм); 4) 25 *кг*:1 *кг* 250 *г* = 20; 5) 300 *г* жмыхов × × 20 = 6 *кг* (продуктивный корм); 6) 10 *кг* 400 *г* + + 6 *кг* = 16 *кг* 400 *г*

Ответ: 16 *кг* 400 *г*

Почему, спрашивается, в первой задаче мы исчислили только поддерживающий корм и получили 20 *кг*, тогда как во второй задаче поддерживающий и продуктивный корм вместе составили 16 *кг* 400 *г*? Это объясняется тем, что в первом случае мы кормили корову сеном и соломой, а во втором случае вместо лугового сена и соломы она получила гораздо более питательные клевер и жмыхи.

Желательно, чтобы ученики решали все эти задачи по-разному, варьируя в указанных пределах существующие нормы.

Учащиеся IV класса могут также составить несколько задач на вычисление среднего арифметического, например, вычислить средний годовой удой коров у одной какой-нибудь доярки, средний вес новорожденных телят от коров той или иной породы и т. д.

Остановимся теперь на одной из экскурсий, доступных городским школьникам, познакомим их с фабрикой готового платья. Вот примерный вопросник к этой экскурсии.

1) Сколько на фабрике рабочих — мужчин и женщин? Сколько на фабрике служащих?

2) Есть ли среди рабочих новаторы производства? Сколько их?

3) Сколько метров материи (установить количество по сортам) расходует фабрика за 1 год?

4) Какова годовая продукция фабрики по отдельным ее видам (костюмы, платья, пальто и т. д.)?

5) Будет ли выполнен в срок или досрочно годовой план?

6) Какую экономию времени и материала дают фабричные способы кройки и шитья?

7) Как оплачивается труд рабочих и служащих?

8) Сколько бесплатных путевок было выдано рабочим в течение года? Сколько и на какую сумму выдано денежных премий?

Вот несколько образцов задач, которые могут составить и решить учащиеся IV класса по вопросам, которые намечает учитель.

1) При новом способе раскроя платьев на фабрике сэкономили в месяц 350 *м* шерстяной материи. Сколько платьев сошьют сверх плана из этой материи, если на каждое платье будут расходовать по 2 *м* 80 *см*?

2) Ежемесячно фабрика экономит 350 *м* шерстяной материи. За год из этой материи сшили 900 дамских платьев из расчета по 2 *м* 80 *см* на каждое платье. Остальную материю употребили на детские платья. Сколько сшили сверх плана детских платьев, если на каждое платье расходовали по 1 *м* 40 *см* материи?

3) На ручной машинке по существующим нормам пиджак можно сшить за 15 час. 25 мин., а брюки за 5 час. На фабрике вся эта работа может быть выполнена в 2 ч. 55 мин. Во сколько раз быстрее сошьют целый костюм на фабрике, чем вручную?

4) На 12 путевок и на денежные премии рабочим фабзавком ассигновал 12 600 руб. Каждая путевка стоила 450 руб. Сколько выдано денежных премий, если каждая из них составляла 240 руб.?

Экскурсии, которые могут быть проведены учащимися начальной школы, описаны в брошюре А. С. Пчелко и П. А. Завитаева под названием „Элементы политехнического обучения в начальной школе“ (Москва, 1953). Экскурсии эти разработаны в общедидактическом плане. Что касается сбора собственно арифметического материала и приемов его использования, то об этом в каждом отдельном случае придется позаботиться самому учителю. Только в связи с одной из этих экскурсий (разработанной П. В. Бурденко) приведено несколько задач, составленных учащимися II класса по записанным ими числовым данным. Та же самая экскурсия (в деревообделочный цех) могла бы дать интересный арифметический материал не только учащимся II класса, но и более старшим ученикам.

Основная ценность экскурсии для работы по арифметике состоит в том, что дети **сами** наблюдают определенные производственные процессы, **сами** собирают числовые данные. В этих условиях они могут до известной степени опережать программу. Так, например, вопрос о кормлении скота, о кормовых единицах и расчете кормовых дач, вообще говоря, труден для IV класса. Но при наличии у детей собственных наблюдений, при правильном руководстве со стороны учителя, который должен выделить из всей массы этих наблюдений только то, что посильно учащимся, они могут справиться и с этими более сложными расчетами.

Подведем итоги.

Методика экскурсионной работы по арифметике для развития политехнических интересов и политехнического кругозора учащихся складывается из следующих этапов: 1) из собирания числового материала по вопроснику; 2) из самостоятельного составления учащимися несложных задач под определенным углом зрения, намеченном учителем и 3) из дальнейшего усложнения этих задач под руководством учителя.

IV. КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ИСТОРИИ ПРЕПОДАВАНИЯ АРИФМЕТИКИ

Чтобы правильно поставить преподавание арифметики в начальной школе, надо знать, как преподавали этот предмет в прошлом, как зарождалась методика преподавания, как развивалась борьба различных методических взглядов и направлений. Учитывая этот исторический опыт, не повторяя старых ошибок, оценивая по достоинству достигнутые результаты, мы можем с большей уверенностью двигаться вперед, совершенствовать нашу методику, добиваться новых успехов.

Особое внимание в этом историческом очерке уделяется начальному этапу изучения арифметики — трем первым концентрам. В работе с детьми именно этот раздел курса потребовал прежде всего разработки специальных приемов, что повело к возникновению особой отрасли дидактики, получившей название методики преподавания арифметики. Именно этот раздел начального курса арифметики оказался ареной борьбы различных направлений. До сих пор, как это ни странно, существуют разногласия относительно приемов изучения первого десятка, второго десятка и первой сотни. Данная глава служит своего рода вступлением к следующей большой главе, посвященной изучению целых чисел и, в первую очередь, трех упомянутых концентров.

Преподавание арифметики в старой школе

Русь XI—XII веков нельзя считать в культурном отношении отсталой страной. „Книжная мудрость" была у наших предков в большом почете. Однако, образование в те далекие времена, да и позднее, уже после татарского нашествия, носило преимущественно религиозный характер и было достоянием более обеспеченных слоев населения, в первую очередь, общественной верхушки и духовенства. Образование это, в основном, сводилось к чтению, письму и церковному пению. Материалом для чтения служили богослужебные книги и книги религиозно-нравственного содержания. Изучая письмо, знакомились и с письменной нумерацией. Вспомним, что в те времена роль цифр играли буквы церковнославянского алфавита.

Образование повышенного типа было доступно весьма немногим. Источником его позднее, уже в XVII веке, служили своеобразные учебники (азбуковники), в которых помещались отдельные статьи по философии, истории, географии, астрономии. В этих учебниках можно было найти кое-какие сведения по арифметике и геометрии. Ни о какой методике преподавания этих предметов не могло быть и речи. Просто хорошо грамотные люди, располагая досугом, пополняли свои знания самостоятельным чтением полезных книг.

На пороге XVIII века по указу Петра I была основана первая государственная общеобразовательная школа в России — „школа математических и навигацких наук". Помещалась она в Сухаревой башне в Москве. Для подготовки к этой средней школе открыли два начальных класса, в которых преподавали русский язык и арифметику. В дальнейшем такие школы под названием „цифирных" были организованы и в провинции.[1]

Во главе нашей первой средней школы стоял англичанин Фарварсон, но истинной душою ее был русский математик-самоучка, замечательный педагог Леонтий Филиппович Магницкий (1669—1731 гг.).

Магницкий получил образование в Московской славяно-греко-латинской академии, где совсем не преподавались математические науки. Однако, владея иностранными языками, он самостоятельно изучил эти науки в объеме, значительно превышавшем тогдашние русские источники. Во вновь открытой школе он сам становится преподавателем предметов математического

---

[1] Любопытная подробность: крепостных крестьян не принимали даже в цифирные школы.

цикла. По свидетельству дьяка Курбатова, который должен был наблюдать за ходом занятий в этой школе, Магницкий как педагог и математик был ничуть не ниже Фарварсона и значительно выше его помощников — англичан

В 1703 г. появился замечательный для своего времени труд Магницкого „Арифметика, сиречь наука числительная". Содержание этой книги шире ее названия. В ней, кроме арифметики целых и дробных чисел, изложены начала алгебры, тригонометрии и астрономии. Знание этих наук было особенно необходимо будущим морякам, которых наша первая средняя школа готовила для создававшегося Петром национального флота. Магницкий понимал значение реформ Петра и в своей области всемерно содействовал успеху его начинаний.

Арифметика целых чисел, как и другие разделы книги, изложена Магницким в виде систематического курса. Сначала дается нумерация многозначных чисел (до пятого класса включительно), а затем одно за другим четыре арифметических действия или, как говорили в те времена, „четыре правила": сложение, вычитание, умножение и деление.

В разделе, посвященном нумерации, показано обычное в допетровской Руси применение букв славянского алфавита. Затем следуют арабские цифры и, наконец, римские. Особого внимания заслуживает тот факт, что арабские цифры, а вместе с ними и нумерация, основанная на позиционном принципе, вошли в Россию во всеобщее употребление только благодаря „Арифметике" Магницкого.

Изложение каждого действия начинается у Магницкого с его определения. Сложению и умножению предпосылаются таблицы этих действий. Затем подробно разъясняется механизм каждого действия сразу на многозначных числах. После этого даются примеры для тренировки и задачи с готовым решением.

Интересно отметить, что новый для своего времени труд Магницкого облечен в старую форму, унаследованную от XVII века. Обширное предисловие содержит наставления религиозно-нравственного характера, некоторые указзния в тексте написаны тяжеловесными силлабическими стихами, таблицам действий придан внешне занятный вид. Автор явно не надеется возбудить у своих учеников интереса к предмету по существу и старается достигнуть этого окольными путями.

„Арифметика" Магницкого оставалась долгое время единственным учебным пособием, определившим характер преподавания этого предмета не только в средней, но и в начальной школе. Если можно говорить в этих условиях о методике преподавания, то она сводилась к удобообозримому расположению чисел в таблицах сложения и умножения и к назидательным стихам, в которых рекомендовалось хорошенько рассмотреть, „разобрать" эти таблицы и запомнить их наизусть: „изустно сказати". Особо важное значение таблицы умножения подчеркнуто грозным предостережением: кто не затвердит ее наизусть, будет „во всей науке не свобод от муки".

Легко представить себе, какими далекими и непонятными представлялись детям 15-значные числа в то время, когда они еще не умели сложить двух однозначных чисел даже в пределах первого десятка; как трудно было, едва разучив таблицу сложения, тотчас переходить к сложению и вычитанию многозначных чисел; как несвоевременно складывать и вычитать огромные числа, не имея никакого понятия о таблице умножения однозначных чисел и т. д.

Проходили годы, десятки лет, а приемы преподавания оставались такими же, как и во времена Магницкого. В течение XVIII века появилось несколько учебников для начальной школы, претендовавших на большую доступность „малолетнему юношеству". Но авторам их и в голову не приходило отступить от того порядка расположения материала, который уместен только в систематическом курсе. В их представлении не было никакой разницы между наукой и учебным предметом, между взрослым учеником и ребенком. Не учитывались ни специфический характер начальной школы, ни возрастные особенности учащихся этой школы. Правда, делались попытки упростить язык учебника, ввести вопросо-ответный способ изложения, но существо дела от этого нисколько не менялось. Таков учебник Михаила Меморского „Краткая арифметика, служащая к легчайшему обучению малолетнего юношества" и учебник Константина Меморского „Арифметика в вопросах и ответах, расположенная по новейшему методу". Пособия эти появились на рубеже XVIII и XIX веков, просуществовали много десятков лет, много раз переиздавались. Здесь мы находим все тот же систематический курс: нумерация, четыре правила, именованные числа. Арифметическая теория иллюстрируется небольшим числом примеров и несколькими задачами в одно-два действия. Герой повести Гоголя Иван Федорович Шпонька изучал до 15 лет „сокращенный катехизис и четыре правила арифметики". Выражением „четыре правила" пользовались на протяжении всего XIX века, особенно в условиях сельской школы. И в самом деле, учителя этих школ мало заботились о том, чтобы учащиеся понимали вычисления и умели сознательно пользоваться ими при решении задач жизненного содержания. Дело сводилось именно к словесно-отвлеченному усвоению четырех правил.

Через полтораста лет после появления „Арифметики" Магницкого в сельской школе применялись все те же старые, схоластические приемы обучения арифметике. Интересное описание этих приемов мы находим в воспоминаниях Е. Стрельцова: „Из 25-летней практики сельского учителя". Воспоминания Стрельцова охватывают период с 1849 по 1864 г. Вкратце вот что он сообщает.

С голоса учителя дети должны были считать хором сначала до 10, потом до 100 и далее. Усвоив запись чисел первой сотни по готовым образцам, они сразу же приступали к изучению нумерации многозначных чисел. Учитель просто писал на доске „число с миллионом" и называл разряды и классы этого числа, а дети должны были твердить то же самое хором „до тех пор, пока будут знать и подряд, и вразбивку". Научившись „выговаривать" многозначные числа и писать их под диктовку, учащиеся зубрили наизусть таблицу сложения и тотчас же переходили к письменному сложению. Учитель объяснял, „с чего начинать сложение, что писать, что в уме — и все тут". Таким же упрощенным способом изучались и остальные действия.

Аналогичную картину рисует еще позднее, уже в 1868 г. известный земский деятель, знаток начальной школы Н. А. Корф. По его словам, ученики этой школы еще кое-как справлялись с механизмами арифметических действий, хотя и не понимали их, но задач, даже простейших, решать не умели. Из двадцати и более учеников только один или два достигали „временных, скоро улетучивающихся знаний“. Усвоив кое-что к концу учебного года, они начисто забывали пройденное к осени следующего года.

Значит ли все это, что до середины прошлого века не было никаких попыток освободиться от старых, схоластических приемов преподавания? Такое допущение было бы неправильным. Уже в первой четверти XIX столетия в нашу школу начинают проникать новые веяния. Были у нас уже в то время просвещенные педагоги, были отдельные успешные начинания. К середине столетия и подавно многое изменилось к лучшему. В этом отношении интересна статья революционного демократа Н. А. Добролюбова, едко осмеявшего в 1858 г. учебник некоего Михельсона, сфабрикованный по старым образцам и выдаваемый автором за последнее слово методики преподавания арифметики в женской (!) школе. „*Мы желали бы знать, отчего именно девочкам необходимо начинать арифметику с того, чтобы выучиться произносить 20507930461504З, число, написанное г. Михельсоном на стр. 9?*“ — спрашивает Добролюбов. „*Или он думает,* — продолжает автор статьи, — *что теперь, когда мальчиков от этой бесполезной работы уже избавили* (подчеркнуто мною. — *Н. П.*), *нужно передать ее девочкам: пусть, дескать, и они помучаются!..*“ [1]

Итак, к середине XIX века трафаретное построение курса арифметики в духе старых учебников уже рассматривается передовыми педагогами как вредный пережиток прошлого. В воспоминаниях Стрельцова и в критических замечаниях Корфа речь идет лишь о наиболее отсталой сельской школе, школе „старого закала“. В этой школе постановка преподавания начинает улучшаться только после крестьянской реформы 1861 года, в связи с общим подъемом культурной жизни страны.

Как же был подготовлен предшествующей историей перелом в области преподавания арифметики? Как проникли в нашу школу зарубежные влияния? Как удалось нам освободиться от этих влияний и создать свою

---

[1] Н. А. Добролюбов. Собрание сочинений. Т. II, стр. 332.

собственную, глубоко национальную методику преподавания арифметики? Вот вопросы, на которые необходимо дать ответ.

Переход к новым приемам преподавания арифметики

Уже в древние времена ученые, философы, мыслители пытались улучшить приемы начального обучения. Греческий философ Платон более 2000 лет тому назад настаивал на том, чтобы обучение счету сделать приятным для детей и основать на счете плодов, венков и тому подобных вещей.

Амос Коменский подчеркивает, что „начало познания лежит во внешних чувствах и обучение должно исходить от действительного созерцания, а не от объяснения слов“ (Великая Дидактика, 1628 г.).

Ту же мысль приводит Ж.-Ж. Руссо: „Не слово, не знак, а вещь: вот что составляет основу обучения“. „Мы даем слишком много власти словам“ („Эмиль“, 1762 г.).

Мысли этих выдающихся людей не влияли на характер преподавания, так как не сопровождались разработкой соответствующих практических приемов.

Первым, кто начал осуществлять на деле теоретические высказывания Амоса Коменского, Джона Локка, Ж.-Ж. Руссо и других мыслителей, был замечательный швейцарский педагог Генрих Песталоцци (1746—1827 гг.).

В области преподавания арифметики он первый действительно заменил знак — вещью: цифру — наглядным образом, механическое запоминание — свободным соображением, автоматизм письменных вычислений по „правилам“ — устными упражнениями над числами первой сотни. Тем самым было заложено основание новых приемов обучения, более сообразных с природой ребенка, с его психологическими особенностями. Возбуждая самодеятельность учащихся, Песталоцци стремился добиться сознательного усвоения учебного материала и таким образом обеспечить развитие всех сил и способностей ребенка.

Систему упражнений, отвечающую этим новым принципам, ближайшие сотрудники Песталоцци под его непосредственным руководством изложили в трех книгах под названием „Anschauungslehre des Zahlenverhältnisse“. Немецкий оригинал появился в 1803 г. а русский перевод — в 1806 г. Переводчик озаглавил его следующим образом: „Очевидное учение о содержании чисел“. Теперь можно было бы назвать это сочинение „наглядным изучением числовых отношений“. Занятиям в школе, которые велись по этому пособию, должны были, по мысли Песталоцци, предшествовать подготовительные упражнения под руководством матери в семье.

Упражнения в семье Песталоцци подчиняет следующим основным требованиям.

1) На первых порах число необходимо тесно связывать с пересчитыванием предметов. „Положив на стол один орех, мать не скажет: вот один, а скажет: вот один орех; не скажет — вот два, а скажет: вот два раза один орех и т. д.“

2) Чтобы возникло понятие отвлеченного числа, необходимо разнообразить предметы при счете. „Слова горошины, камушки, дощечки переменяются с переменою вещей, а слова один, два, три и т. д. всегда непременны. Через сие в уме младенца отделится отвлеченное понятие о числе независимо от вещей“.

3) Каждое число следует рассматривать в его отношении к единице. „Это 2 раза 1 камушек или 2 камушка; это 2 раза 1 листочек или 2 листочка и т. д.“

4) Переходя к действиям, Песталоцци подчеркивает важность счета, сосчитывания: „Заучивать наизусть, что $3+4=7$, бесплодное занятие“.

С соблюдением тех же требований должна строиться, как учит Песталоцци, работа над первым десятком и первой сотней в школе.

Чтобы обеспечить применение наглядности в школьном обучении, Песталоцци вводит три таблицы. На первой из них изображены, при помощи штрихов, числа от 1 до 100, на двух остальных, при помощи частей квадрата, дроби от $\frac{1}{2}$ до $\frac{1}{10}$ и дроби со знаменателями в пределах первой сотни. Никаких других наглядных пособий, кроме этих трех таблиц, Песталоцци не применял в своей школе, забывая собственное требование разнообразить предметы при счете. Зато требование рассматривать каждое число в его отношении к единице он проводит со всей присущей ему педантичностью. Ученику не разрешается просто сказать: двадцать четыре, двадцать шесть. Непременно надо добавлять: двадцать четыре раза один, двадцать шесть раз один и т. д.

Продолжая развивать ту же идею, Песталоцци вводит упражнения, которые раскрывают отношение каждого числа не только к единице, но к любому меньшему числу. В результате этих упражнений ученик должен совершенно ясно представить себе состав каждого числа первой сотни из меньших чисел.

С самого начала Песталоцци вводит дроби, требуя, чтобы ученики умели устанавливать не только отношение каждого числа к единице, но и отношение единицы к любому числу: один — это половина двух, третья часть трех, четвертая часть четырех и т. д.

Вот образец упражнений, которые Песталоцци предлагал своим ученикам.

„Восемь раз по три и два раза третья часть трех — сколько раз по четыре?"

Ответ. Шесть раз по четыре и два раза одна четверть четырех.

Доказательство. Один раз по три — три раза один; два раза по три — шесть раз один; три раза по три — девять раз один; четыре раза по три — двенадцать раз один; пять раз по три — пятнадцать раз один; шесть раз по три — восемнадцать раз один; семь раз по три — двадцать один раз один; восемь раз по три — двадцать четыре раза один. Дальше: третья часть трех — один; два раза третья часть трех — два раза один. А всего двадцать четыре раза один и два раза один — двадцать шесть раз один.

Итак, восемь раз три и два раза третья часть трех — это двадцать шесть раз один.

При помощи такого же невероятно громоздкого рассуждения ученик должен был составить число двадцать шесть из четверок.

Вывод. Восемь раз по три и два раза третья часть трех — это шесть раз по четыре и два раза одна четверть четырех.

От вычислений по таблицам ученики Песталоцци переходили к решению аналогичных вопросов без наглядных пособий. Во время всей этой работы они должны были обходиться без обозначения чисел при помощи цифр и без каких-либо записей. Это были подлинно устные вычисления, счет в уме (Kopfrechnen).

Песталоцци рассчитывал, что в результате работы по его системе ученики не только приобретут понятие „чистого числа“, но познакомятся с дробями и вполне сознательно усвоят Пифагорову таблицу — этот камень преткновения школьников, особенно в те времена, когда таблицу умножения просто зубрили наизусть.

Чтобы понять дальнейший ход развития методики арифметики, необходимо, с одной стороны, дать себе ясный отчет в тех ошибках, которые допустил Песталоцци, а с другой стороны, отметить то положительное и бесспорное, что он внес в преподавание этого предмета.

Первая серьезная ошибка Песталоцци заключается в том, что, провозгласив наглядность важнейшим дидактическим требованием, он, сам того не замечая, оторвался от этой реальной почвы и увлекся бесплодной умственной эквилибристикой, совершенно не отвечающей задачам начального обучения. Можно себе представить, с каким перенапряжением должны были работать дети, чтобы удовлетворять требованиям своего наставника. Если им все же удавалось достигнуть результатов, поражавших сторонних наблюдателей, то это объясняется исключительно личными качествами Песталоцци, его энтузиазмом и любовью к детям. Своим ученикам он отдавал все свое время, все силы и способности, жил с ними в полном смысле слова общею жизнью.

Не использовав в достаточной мере предметную наглядность, Песталоцци лишил своих учеников и другой опоры при счете: он слишком поздно знакомил их с цифрами, с десятичной системой счисления и с письменными механизмами действий. В борьбе со старой зубрежкой и механическим применением „правил“ он создает разрыв между устными и письменными вычислениями, не обеспечивает той преемственности, которая должна существовать между концентром ста и работой над многозначными числами.

Наконец, стремясь достигнуть формальной цели обучения — изощрить логику ученика, Песталоцци упускает из виду практическую цель, связанную с приобретением арифметических знаний и их применением к решению задач жизненного содержания. Помимо всего прочего, развивая логическое мышление ученика вне связи с каким-либо жизненно практическим содержанием, мы рискуем не изощрить, а притупить умственные способности ребенка.

По своим довольно сбивчивым философским взглядам Песталоцци примыкает к идеалистам кантианского направления. У Песталоцци, как и у Канта, чувственное восприятие является как бы воплощением идеи, которая в смутном виде существовала еще до восприятия. Под влиянием непосредственного восприятия априорная идея будто бы выявляется, облекается в плоть и кровь.

Находясь в плену идеалистической философии, с одной стороны, религиозных взглядов, с другой, Песталоцци не видел перед собой ясной цели, не мог вести к ней и своих питомцев, не мог дать подлинно здоровую пищу пытливому уму ребенка.

Несмотря на указанные недостатки, нельзя не признать выдающихся заслуг Песталоцци как основоположника методики преподавания арифметики в начальной школе. Вот главнейшие из них.

1) Песталоцци положил начало концентрическому расположению арифметического материала, выделив первую сотню в особый концентр;

2) ввел устные упражнения как подготовительную ступень к изучению письменных механизмов действий;

3) привлек в качестве опоры для этих устных упражнений наглядные образы;

4) подробно разработал систему устных упражнений, расположив весь материал в строго определенной последовательности.

Метод изучения чисел

Ближайшие сотрудники и ученики Песталоцци продолжали разрабатывать его метод. Один из них, Иосиф Шмид, желая освободить детей от чрезмерного напряжения внимания при упражнениях по таблицам, ввел дополнительные наглядные образы, тоже составленные из штрихов, но иллюстрирующие каждое из чисел первой сотни в отдельности. Поправка Шмида усилила отрицательные стороны метода Песталоцци и привела в дальнейшем к методу изучения чисел в разработке немецкого методиста Августа Вильгельма Грубе.

Наряду с методом изучения чисел, в Германии намечается и другое течение, представителем которого явился талантливый педагог и методист Адольф Дистервег. В 1829 г. появилось его „Руководство к обучению счету", в котором развивается то положительное, что содержала в себе система Песталоцци. Дистервег уточнил вопрос о десятичных концентрах, установив следующие этапы в изучении целых чисел: первый десяток, второй десяток, первая сотня, многозначные числа. В пределах каждого концентра Дистервег рекомендует изучать действия одно за другим.

Однако, в школьной практике перевес оказался на стороне метода изучения чисел. Такова была линия наименьшего сопротивления, освобождавшая учителя от необходимости пересматривать приемы, которые успели стать привычными и которые Грубе изложил в доходчивой форме. В 1842 г. появилось его „Руководство к счислению в элементарной школе, основанное на эвристическом методе", которое определило собственно немецкое направление в методике преподавания арифметики.

Основные положения Грубе состоят в следующем.

Преподавание арифметики не должно переходить от действия к действию: оно должно идти (в пределах сотни) от числа к числу.

Каждое число первых двух разрядов сравнивается с каждым из предыдущих чисел и „измеряется" им при помощи разностного и краткого отношения. В результате такого всестороннего изучения ученик должен усвоить наизусть состав каждого числа из слагаемых и сомножителей. Действия должны как бы сами собою вытекать из знания наизусть состава числа. Дети должны выполнять их по памяти, не производя вычислений.

По мысли Грубе, даже решение задач имеет единственную цель — „укрепить представление чистого числа".

Интересно сопоставить „чистое число" у Грубе с идеалистической философией его времени. Руководство Грубе появилось в 1842 г., а Энгельс в середине сороковых годов писал о немцах, которые „вращаются в сфере «чистого духа»", находясь во власти гегелевской философии.[1]

Вот материал из руководства Грубе, относящийся к изучению числа 7.

Семь

$$|\,|\,|\,|\,|\,|\,|\quad 7$$

$$\begin{array}{l} |\ 1\\ |\ 1\\ |\ 1\\ |\ 1\\ |\ 1\\ |\ 1\\ |\ 1 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 1+1+1+1+1+1+1=7\\ 1\times 7=7\\ 7-1-1-1-1-1-1=1\\ 7:1=7 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{r} |\,|\ 2\\ |\,|\ 2\\ |\,|\ 2\\ |\ 1 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 2+2+2+1=7\\ 2\times 3+1=7\\ 7-2-2-2=1\\ 7:2=3\ (1) \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{r} |\,|\,|\ 3\\ |\,|\,|\ 3\\ |\ 1 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 3+3+1=7\\ 3\times 2+1=7\\ 7-3-3=1\\ 7:3=2\ (1) \end{array}\right. \qquad \begin{array}{r} |\,|\,|\,|\ 4\\ |\,|\,|\ 3 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 4+3=7\\ 4\times 1+3=7\\ 7-4=3,\quad 7-3=4\\ 7:4=1\ (3) \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{r} |\,|\,|\,|\,|\ 5\\ |\,|\ 2 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 5+2=7,\quad 2+5=7\\ 5\times 1+2=7\\ 7-5=2\\ 7:5=1\ (2) \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} 6+1=7,\quad 1+6=7\\ 6\times 1+1=7\\ 7-6=1\\ 7:6=1\ (1) \end{array}$$

Ученики рисуют **штрихи** (явно заимствованные у Песталоцци) или раскладывают палочки по одной, пока не получится 7 палочек. Записывают: $1+1+1+1+1+1+1=7$.

„Сколько раз взяли мы по одной палочке?" — спрашивает учитель. „Запишем это".

„Теперь будем отсчитывать по одной",— продолжает он. „Запишем это".

„Сколько раз 1 палочка содержится в 7? Запишем это". И т. д.

Как мы видим, Грубе действительно пользуется эвристическим методом. При этом он требует от ученика

---

[1] К. Маркс и Ф. Энгельс. Философские работы 1845—1847 годов. „Фейербах", стр. 30.

полных ответов, связного объяснения всего, что он делает, но не задается вопросом о том, как представляет себе ученик данное арифметическое действие, отличает ли одно действие от другого и в какой мере сознательно относится к разностному и кратному сравнению, а также к делению с остатком. Между тем, все эти понятия фигурируют в упражнениях, как если бы они были знакомы детям.

Решая задачу, ученик не должен формулировать вопросы и выбирать действия для их решения. Действия даже не упоминаются. Чтобы решить задачу, относящуюся, например, к числу 12, ученик должен только знать состав этого числа и уметь им пользоваться. Вот образец задачи из руководства Грубе и способ ее объяснения.

З а д а ч а. „Сколько яблок можно получить на 2 пятикопеечные монеты и 1 двухкопеечную, если каждое яблоко стоит 3 коп.?"

О б ъ я с н е н и е. За каждые 3 коп. я получаю 1 яблоко. Но 2 пятикопеечные монеты и 1 двухкопеечная составляют 12 коп., а 12 коп. — это четырежды 3 коп Следовательно, я получу четырежды одно яблоко, или 4 яблока.

Итак, чтобы решить эту задачу, ученик должен вспомнить состав числа 12 из следующих чисел: $12 = 5 + 5 + 2$ и $12 = 3 \times 4$.

Мы поступили бы совсем иначе. Ученику в нашей школе пришлось бы составить план решения задачи, выполнить соответствующие действия и сформулировать ответ.

1) Сколько денег израсходуют на яблоки?

$$5 \text{ коп.} + 5 \text{ коп.} + 2 \text{ коп.} = 12 \text{ коп.}$$

2) Сколько яблок купят на все эти деньги?

$$12 \text{ коп.} : 3 \text{ коп.} = 4$$

Ответ: 4 яблока.

Свой метод Грубе применяет ко всем числам первой сотни. Некоторые приемы он сохраняет и для концентра тысячи.

Метод изучения чисел основан на предположении, разумеется, ошибочном, что все числа первой сотни доступны непосредственному созерцанию, т. е. что число, предварительно изученное, возникает в памяти ученика в форме, необходимой для данного случая. Если это и возможно по отношению к числам второго десятка, а также по отношению к табличному и даже отчасти внетабличному умножению и делению, то производить сложение и вычитание в пределах ста на основе „непосредственного созерцания“ нет никакой возможности, так как пришлось бы помнить около пяти тысяч различных комбинаций только для чисел этого концентра. Но даже если бы ученик и мог запомнить множество подобных комбинаций, эти знания не могли бы содействовать его умственному развитию и не имели бы образовательного значения, поскольку Грубе оставляет без внимания различение действий, понимание их смысла и уменье вычислять, т. е. уменье пользоваться основными свойствами арифметических действий в условиях десятичной системы счисления.

Несмотря на свою явную несостоятельность, метод Грубе прочно укоренился в немецкой начальной школе. Интересно отметить, что много позднее, на рубеже XIX и XX веков, в Германии была сделана попытка обновить этот метод, изменив не сущность его, а лишь те наглядные средства, которыми пользовался его основоположник. Такая роль принадлежит „методу числовых образов“, разработанному В. А. Лаем. В немецкой литературе метод Лая рассматривался как позднейшее видоизменение метода Песталоцци.[1] Если и существовали в Германии в начале XX века сторонники „метода сосчитывания“, который сами они противополагали „методу числовых образов“, то спор шел не о сущности двух методов, а лишь о том, в какой мере возможно восприятие числа предметов в группе „без сосчитывания“, а также, в какой мере возможно, на основе тех же числовых образов, выполнение действий „без сосчитывания“. Имелся в виду именно счет, сосчитывание, но не вычислительные приемы, не их сознательное усвоение. Цель экспериментальных исследований Лая состояла главным образом в том, чтобы выбрать наиболее удобное „для схватывания одним

---

[1] Проф. Эрнст Мейман. Лекции по экспериментальной педагогике. Перевод под ред. Н. Л. Виноградова, 1914, ч. III, стр. 167.

взглядом"[1] расположение элементов в числовой фигуре. После опытной проверки, которой подверглись прежде всего черточки, введенные когда-то швейцарским педагогом и сохранившиеся у Грубе, теперь первое место заняли так называемые „квадратные числовые фигуры", составленные из кружков белого цвета на черном фоне. Кружки расположены парами и четверками так, что расстояние между четверками вдвое больше, чем расстояние между отдельными кружками внутри каждой четверки, где оно равняется диаметру кружка.

Такое расположение элементов группы действительно облегчает „схватывание одним взглядом" не только двойки и четверки, но и всех остальных чисел первого десятка, в состав которых, кроме этих основных групп, входят еще отдельные кружки. Однако, такому „схватыванию" должно предшествовать усвоение наизусть состава чисел из тех групп, которые образуют каждую числовую фигуру. Возможность „первоначального уразумения числа впечатлений без сосчитывания",[2] вопреки мнению Лая и его единомышленников, является весьма проблематичной. Если ребенок еще не знает, что пять состоит из четырех и одного, шесть — из четырех и двух, семь — из четырех, двух и одного и т. д., то число кружков в группе он сможет установить только посредством пересчитывания.

Итак, применение числовых фигур облегчает процесс изучения чисел, но не устраняет существенных недостатков метода Грубе, не повышает его образовательного значения: понятиям, связанным с арифметическими действиями и с десятичной системой счисления, попрежнему не уделяется должного внимания.

Зарождение самобытной методики арифметики в России

Первое десятилетие XIX века ознаменовалось появлением прогрессивных настроений в русском обществе. Пробуждается, в частности, некоторый интерес и к педагогическим вопросам. В это время были пере-

---

[1] Проф. Эрнст Мейман. Лекции. Стр. 191.
[2] Там же, стр. 181.

ведены на русский язык книги Песталоцци, относящиеся к обучению детей начальной арифметике. Мелькала даже мысль, оставшаяся, впрочем, безрезультатной, пригласить автора этих книг в Россию для организации у нас школ и педагогического образования по швейцарскому образцу.

Во втором десятилетии XIX века для усовершенствования в науках за границу было командировано из России пятеро молодых людей, окончивших среднюю школу. Одним из них был Ф. И. Буссе, побывавший между прочим в Швейцарии и изучивший в действии систему Песталоцци.

Ф. И. Буссе написал впоследствии несколько пособий по арифметике, в которых пытался отразить передовые идеи своего времени. Однако, ему так и не удалось перейти от общих рассуждений к конкретным методическим указаниям, не удалось сколько-нибудь улучшить „министерскую неизменную систему".[1] Подлинным основоположником русской методики арифметики явился близкий ему по взглядам, более молодой по возрасту Петр Семенович Гурьев.

П. С. Гурьев был сыном крупного математика, академика С. Е. Гурьева. Глубоко и разносторонне образованный, П. С. Гурьев отдает лучшие годы своей жизни преподаванию математики в Гатчинском воспитательном доме, реорганизованном позднее в Гатчинский сиротский институт. До реорганизации, т. е. до 1837 г., здесь воспитывались сироты обоего пола. С 1837 г. в институт принимают только мальчиков (сирот обер-офицерского звания), которые получают здесь среднее юридическое образование (выше гимназического).

Деятельность П. С. Гурьева в этом учебном заведении охватывает продолжительный период от начала тридцатых годов до середины пятидесятых годов прошлого века, т. е. один из наиболее мрачных периодов нашей истории. Гатчинский институт находился под непосредственным покровительством „высочайших особ". Поэтому сюда приглашали лучших преподавателей, среди которых, естественно, могли оказаться люди

---

[1] П. С. Гурьев. Практическая арифметика. 1881, кн. II, стр. XIII.

прогрессивно настроенные. Получилось нечто парадоксальное: в непосредственной близости к главному очагу реакции расцветали передовые педагогические идеи.

Уже будучи преподавателем Гатчинского воспитательного дома, Гурьев совместно с преподавателями того же учебного заведения, видными педагогами А. Г. Ободовским и Е. О. Гугелем, издает в 1833—1834 гг. „Педагогический журнал", который знакомит „публику" как с новейшими немецкими и французскими методами, так и с применением этих методов в русской школе.

В 1837 г. по инициативе Гугеля и Гурьева, и даже вначале на их личные средства, при Гатчинском институте была открыта „Малолетняя школа" для детей от 4 до 7 лет, нечто вроде дошкольного учреждения. Эта „школа" готовила детей к поступлению в I класс института. Принимая живейшее участие в руководстве „Малолетней школой", Гурьев дополнял свой опыт преподавания математики в средней школе опытом работы с маленькими детьми.

Из всех трудов Гурьева наибольший интерес имеет для нас „Руководство к преподаванию арифметики малолетним детям". „Часть первая" этого руководства вышла в 1839 г. „часть вторая" — в 1842 г.

Несомненно, что П. С. Гурьев прекрасно знал западноевропейскую специальную литературу. Он глубоко изучил работы Песталоцци. Только в одной из своих журнальных статей он перечисляет 20 немецких методистов. Однако, свое руководство, эту первую русскую методику преподавания арифметики, он строит на оригинальных началах. В предисловии к „Части второй" говорится, что „мето́ду" автора „назвали Песталоцциевой потому единственно, что он заимствовал у Песталоцци три таблицы для наглядных упражнений". В действительности Гурьев никому не подражал, и только приходится удивляться, как он близок нам и как далек от школьной схоластики своего времени.

Арифметический материал Гурьев располагает по концентрам. Работа начинается с первого десятка. Автор требует, чтобы ребенка научили „сперва считать и изображать цифрами только числа от одного до десяти", потом тотчас переходили „к сложению и вычитанию этих чисел".[1] Изучаются сложение и вычитание, по Гурьеву, совсем как теперь: сначала дети учатся присчитывать ко всем числам первого десятка по 1, по 2, по 3 и т. д., затем проходят соответствующие случаи отсчитывания. Только после этого даются упражнения в разложении чисел первого десятка „на их составные части". Таким образом запоминание состава чисел служит в этой системе не исходным моментом, как у Грубе, а завершающим.

Следующим концентром, по Гурьеву, является первая сотня, в пределах которой „частные приемы получают определенность, правила обобщаются и самые законы начинают приобретать свою силу". Так мог говорить не только опытный методист, но прежде всего образованнейший математик, понимавший важное теоретическое значение устных вычислений в пределах первой сотни.

Следует подчеркнуть, что из концентра ста Гурьев выделяет в особый раздел сложение и вычитание в пределах двадцати. Именно ради этих двух действий и, в первую очередь, ради изучения *таблицы сложения* мы и вводим в настоящее время после первого десятка концентр второго десятка. Гурьев частично предвосхитил и эту деталь современной методики арифметики. Разница только в том, что он не включил в этот раздел умножения и деления.

После тщательного изучения первой сотни „третья степень" (т. е. концентр многозначных чисел), говорит Гурьев, „не представит никакой трудности для учащихся", тем более, что он постоянно подчеркивает связь между устными и письменными вычислениями, выводит правила письменных вычислений на основе уже известных детям устных вычислительных приемов. Вот, например, как он поясняет умножение числа 387 на 5:

$$
\begin{array}{r}
387 \\
\times\ 5 \\
\hline
1935
\end{array}
\qquad\Bigg|\qquad
\begin{array}{r}
387 = 300 + 80 + 7 \\
\hline
300 \times 5 = 1500 \\
80 \times 5 = \ \ 400 \\
7 \times 5 = \ \ \ \ 35
\end{array}
\qquad\Bigg|\qquad
\begin{array}{r}
387 \\
5 \\
\hline
35 \\
400 \\
1500 \\
\hline
1935
\end{array}
$$

[1] П. С. Гурьев. Руководство к преподаванию арифметики малолетним детям. Часть первая, стр. XII.

Заметим, что предварительно дети должны были научиться умножать круглые десятки и круглые сотни на однозначное, опираясь на уже пройденную ими таблицу умножения:

$$300 \times 5 = 3 \text{ сотни} \times 5 = 15 \text{ сотен} = 1500$$
$$80 \times 5 = 8 \text{ дес.} \times 5 = 40 \text{ дес.} = 400 \text{ и т. д.}$$

Большое внимание в занятиях с детьми уделяет Гурьев и решению задач. Задачи, по его словам, следует разнообразить, придавая им больше живости. Они „должны быть занимательны как самым тоном рассказа, так и загадочностью содержания“.[1] При составлении задач Гурьев советует считаться с тем, живут ли дети в большом городе или в деревне. Попутно он рекомендует развивать у учащихся „чувство местности и глазомер“. Надо сказать, что эти правильные указания и до настоящего времени не реализованы в полной мере.

Судьба талантливого педагога-новатора сложилась неудачно. В значительной мере это объясняется тем, что он не создал арифметических задачников. Правда, он снабдил свое „Руководство“ довольно большим количеством примеров и задач, но это все же была книга не для ученика, а для учителя. Во всяком случае, ее никак нельзя было дать в руки начинающему. Позднее Гурьев заново переработал свое руководство, постаравшись придать ему характер своего рода самоучителя. Но и это новое его пособие — „Практическая арифметика“, появившаяся впервые в 1857 г. и затем несколько раз переиздававшаяся, представляет собою нечто среднее между учебником, задачником и методическим руководством. Охватывая весь курс арифметики целых чисел, обыкновенных и десятичных дробей, „Практическая арифметика“ трудна для ученика как учебник и недостаточно интересна как задачник.

Была и еще одна причина, почему методика Гурьева не получила широкого распространения. В начале шестидесятых годов у нас стал известен немецкий метод — метод изучения чисел. В блестящей переработке Евтушевского он надолго закрыл доступ в школу собственно русскому методу — методу изучения действия, основы которого были заложены Гурьевым.

---

[1] П. С. Гурьев. Руководство к преподаванию арифметики малолетним детям. Часть первая, стр. 6.

Метод Грубе в русской школе и борьба с ним

Интерес к педагогическим вопросам, пробудившийся в самом начале XIX века, не заглох и в последующие годы, несмотря на усиление реакции и борьбу со всякими новыми веяниями. К середине столетия, в годы, предшествовавшие крестьянской реформе, нарастает подъем демократического движения в России, а вместе с тем в обществе оживает с новой силой стремление улучшить дело народного образования.

К этому времени относится появление работы И. И. Паульсона „Арифметика по способу немецкого педагога Грубе", в которой автор не только излагает так называемый метод изучения чисел, но резко критикует отечественные приемы преподавания и всячески превозносит достижения немецкой методики.

К сожалению, в те времена мы были особенно склонны к недооценке своих сил и к преклонению перед Западом. Этим, вероятно, объясняется тот факт, что талантливый преподаватель, образованный математик Василий Адрианович Евтушевский, знавший и ценивший Гурьева, отдает все же предпочтение методу Грубе. Вышедшие в 1871 г. задачники Евтушевского, составленные в соответствии с этим методом, создают эпоху в работе нашей школы и становятся на долгие годы одним из наиболее популярных учебных пособий по арифметике. Даже в XX веке, когда несостоятельность метода изучения чисел стала достаточно очевидной, задачники Евтушевского все еще продолжали переиздаваться. Последнее, 76-е, издание этих задачников вышло в 1909 г.

Свои методические взгляды, несколько отличные от взглядов Грубе, Евтушевский изложил в обширной методике, опубликованной в 1872 г. вслед за первым изданием задачников, которые вышли в 1871 г. Основная поправка, внесенная Евтушевским в метод изучения чисел, состоит в том, что уже в пределах второго десятка, а затем в пределах первой сотни уделяется внимание вычислительным приемам применительно к десятичному составу чисел. Однако, секрет успеха Евтушевского не в тех улучшениях, которые он внес в метод Грубе, не в его теоретических установках, а в его задачниках.

Остановимся несколько подробнее на том разделе в задачниках Евтушевского, который посвящен первой сотне, этой основной арене борьбы двух методов — немецкого и русского.

Сначала даются задачи на все числа первой сотни, а затем, отдельно от задач, примеры.

Задачи расположены по группам следующим образом: задачи на числа от 1 до 10, от 11 до 20, от 21 до 30, от 31 до 40 и т. д. до 100.

В каждой такой группе представлен по порядку состав чисел, начиная с наименьшего. Так, в первой группе даются прежде всего задачи на состав числа 2, потом на состав числа 3 и т. д. Во второй группе помещены вначале задачи на число 11, потом на число 12, на число 13 и т. д., до числа 20 включительно. Так же построены остальные главы задачника. С самого начала вводятся все четыре действия, разностное и кратное сравнение. В конце каждого раздела даются „неопределенные“ задачи, в которых прямо требуется разложить данное число всеми возможными способами на слагаемые и на сомножители. Очень рано появляются довольно замысловатые типовые задачи, что, впрочем, во времена Евтушевского, когда дети начинали учиться в десятилетнем возрасте, не находилось в особенно резком противоречии с их возможностями.

В отношении примеров принцип расположения материала по числам выражен еще яснее. На это прямо указывают заголовки: число 11, число 12, число 13., ...— число 23, ... число 36, ... число 48, ... число 50. Дальше, очевидно потеряв терпение, автор соединяет вместе по два числа: 51 и 52, 53 и 54, 55 и 56 и т. д. до 99 и 100 включительно.

Нельзя не отдать должное необыкновенно тонкой, тщательной, кропотливой работе, которая была проделана автором этого задачника. Если вдобавок принять во внимание, что вместо прежних, крайне однообразных задач на куплю и продажу, прибыль и убыток, теперь появляются задачи совсем другого рода — жизненные по тематике, содержательные в арифметическом отношении, занимательные по характеру изложения, — можно понять, какой переворот произвело появление такого пособия в скудно обставленной школе 70 х годов. Можно только пожалеть, что всю силу таланта и трудолюбия Евтушевский направил на оснащение отличными задачниками порочного по существу метода.

Совершенно несомненно, что задачники Евтушевского принесли свою долю пользы русской школе. Даже в той части, которая посвящена первой сотне и построена по методу изучения чисел, задачник Евтушевского при умелом его использовании мог обеспечить неплохие результаты. Однако в массовой школе в руках неопытных учителей очень скоро обнаружились недостатки монографического метода. Кропотливое изучение каждого числа в отдельности замедляло работу, вызывало своим однообразием утомление и скуку. Работа в школе по этому методу выливалась иногда в анекдотическую форму. Один такой урок описывает П. С. Гурьев в предисловии к своей „Практической арифметике".[1] В школе, где происходил этот урок, строго придерживались, по словам ее директора, „мето́ды Евтушевского". Мальчики в возрасте от 10 до 12 лет по указанной от министерства программе „второго года обучения" изучали числа первой сотни. На данном уроке „всестороннему рассмотрению" подлежало число 97, поскольку все числа от 1 до 96 включительно уже были пройдены. Урок состоял в том, что учащиеся должны были „то разлагать 97 на двойки, тройки и проч., то производить сложение и вычитание" (очевидно, в пределах того же числа). После урока учитель уверял Гурьева, будто бы „сам автор упирает на то, чтобы не было пропущено в упражнениях ни одного числа". По задачнику так оно и выходило.

Неудивительно, что Гурьев, стоявший на совершенно иных позициях, чем Евтушевский, отнесся отрицательно к методу изучения чисел и неоднократно высказывался против него. Жаль только, что он не сумел вскрыть теоретическую несостоятельность этого метода, не сумел показать, что его собственный метод прямо противоположен методу Евтушевского.

Другие выступления против метода Грубе, имевшие место в 70-х годах, тоже не ставили вопроса в той плоскости, которая позволила бы поколебать основы этого метода. Такова критика Л. Н. Толстого и С. А. Рачин-

---

[1] П. С. Гурьев. Практическая арифметика. Книга II, 3-е изд., исправленное и дополненное, 1881, стр. XXI.

ского. Оба они указывают на несоответствие метода изучения чисел условиям тогдашней русской школы. Поступивших в нее детей десятилетнего возраста заставляли целый год изучать числа первого десятка, тогда как эти дети уже умели считать до 20 и до 100, умели, играя в бабки, считать парами и шестерками, имели практическое представление о десятичной системе, благодаря известному им счету на копейки, гривенники и рубли. Применение к такому составу учащихся монографического метода вызывало, по словам Толстого, „томительную скуку", а по словам Рачинского „отзывалось чрезвычайной искусственностью".

Критика 70-х годов раскрыла слабые стороны метода Грубе лишь с общепедагогической и отчасти психологической точки зрения, не коснувшись арифметической сущности этого метода. Выходило так, что для детей помоложе он, пожалуй, мог бы оказаться пригодным.

Впрочем, у Толстого есть одно более существенное замечание. „Прежде,— говорит он,— заучивали определения действий, теперь и **самих действий не делают**, так как только на третий год, по Евтушевскому, приступают к нумерации и предполагают, что нужно учить детей в продолжение целого года считать до 10". [1]

В противовес Евтушевскому Толстой сам составил пособие по арифметике.

„Арифметика" Толстого народна по тематике задач и по языку, но в преподавание этого предмета она не вносит ничего нового, наоборот, возвращается назад к тем временам, когда начинали прямо с нумерации, а затем изучали пресловутые „четыре правила".

Глубокий анализ метода Грубе, раскрывающий его теоретическую несостоятельность, был сделан позднее, уже в середине 80-х годов.

Метод изучения действий

Противникам метода изучения чисел не удавалось на первых порах уточнить и сформулировать сущность метода, основы которого, отвечающие требованиям теоретической арифметики, были заложены в свое время

[1] Л. Н. Толстой. Арифметика. Стр. 5—7.

П. С. Гурьевым. Даже название этого метода, в отличие от метода изучения чисел, еще не вошло в употребление.

Одним из первых, кто попытался научно обосновать метод изучения действий, был В. А. Латышев. В своем „Руководстве к преподаванию арифметики" (1880 г.) он подчеркивает, что „вся арифметическая теория заключается в теории действий". Отсюда, главнейшая задача преподавания арифметики состоит в том, чтобы дать детям правильные понятия о действиях и научить их сознательно вычислять, причем устные вычисления не должны быть оторваны от письменных, но наоборот, должны служить их основой.

Таким образом, Латышев не только отверг метод изучения чисел, но, что еще важнее, указал основные черты метода изучения действий. Однако и этот дальнейший шаг в борьбе с методом Грубе не дал ощутимых практических результатов, поскольку Латышев не подкрепил свою правильную методическую позицию разработкой соответствующих задачников.

Окончательный удар немецкому методу нанес Александр Иванович Гольденберг.

Получив высшее математическое образование в Московском университете, а затем специальное в Михайловской артиллерийской академии, А. И. Гольденберг начал свою деятельность с военной службы и с преподавания в военных учебных заведениях. Однако, в 1867 г. он порывает с военными учреждениями и всю свою последующую жизнь посвящает, наряду с преподаванием в частных школах и в земской учительской школе, педагогической работе с учительством. С особенным увлечением он занимается вопросами преподавания арифметики в начальной школе.

В 1880 г. появилась нашумевшая в свое время статья Гольденберга под названием „Немецкие измышления в русской школе".[1] В этой статье Гольденберг раскрывает несостоятельность основных положений Грубе и решительно высказывается против методики

[1] Журнал „Русские ведомости", 1880, № 196.

Евтушевского, поскольку и он придерживается „монографического изучения чисел“.[1]

Авторитет Евтушевского, все еще непререкаемый после ряда предшествовавших выступлений, начинает колебаться под натиском глубоко научной и весьма острой критики Гольденберга. Решающую роль сыграло в этом отношении появление в 1885 г. „Методики начальной арифметики“ Гольденберга и вслед за нею его задачников.

В „Предисловии“ ко второму изданию „Методики“ (1886 г.) с предельной четкостью вскрыты антинаучные, бездоказательные положения, на которые опирается Грубе, и с неменьшей четкостью, в краткой и сжатой форме, изложены основы метода изучения действий.

Прежде всего Гольденберг возражает против утверждения Грубе, будто бы „все числа первой сотни подлежат непосредственному созерцанию и доступны ясному представлению“. „Понятие числа,— говорит Гольденберг,— не подлежит, как и всякое понятие, ни созерцанию, ни представлению“. Если же иметь в виду не понятие, а группу предметов, число которых не превосходит ста, то возможность представления сколько-нибудь значительной группы стоит, по словам Гольденберга, „в полном противоречии с выводами современной психологии“.

„Никакое изучение чисел не может увеличить емкости нашего ума“,— продолжает Гольденберг. „Грубе и его сторонники требуют следовательно невозможного“,— заключает он.

Чтобы показать несостоятельность метода Грубе с математической точки зрения, Гольденберг начинает с того, что берет под сомнение самый термин „изучение чисел“, который не имеет смысла в условиях начального обучения, поскольку цель этого обучения — „научить детей вычислять и понимать вычисления“.

„Если при обучении счислению могло бы найти себе место какое-либо изучение чисел,— говорит Гольденберг,— то оно исключительно свелось бы к ознакомле-

---

[1] Гольденберг был, повидимому, первым применившим выражение „монографический метод“ в качестве синонима „метода изучения чисел“.

нию детей с теми элементарными свойствами чисел (или, иначе говоря, свойствами действий — *Н. П.*), на которых основаны приемы вычислений; это ознакомление не может, впрочем, предшествовать обучению производству действий или быть, вообще, отделено от него".

Последнее замечание имеет особенно важное значение, как веский аргумент против метода изучения чисел, который, разумеется, отнюдь не знакомит учащихся со свойствами суммы, разности и пр., а потому и не обеспечивает уменья вычислять и понимать вычисления.

„Уменье сознательно производить действия над числами,—говорит далее Гольденберг,— предполагает, во-первых, ясное понимание тех свойств, которые мы применяем, и, во-вторых, отчетливое усвоение основ десятичного счисления, которым мы пользуемся".

Одним из самых слабых мест метода Грубе является недооценка тех удобств, которые связаны с применением десятичной системы счисления. Этот дефект монографического метода Гольденберг поясняет на следующем примере.

Чтобы разделить 78 пополам, нет никакой надобности представить себе это число состоящим из 39 двоек. Достаточно разложить его на 60 и 18, поскольку эти числа „удобно, так сказать, сразу разделить пополам, с тем, чтобы затем сложить найденные части". Этот результат мы „не извлекаем готовым из нашего сознания, куда он может будто бы проникнуть путем созерцания чисел", но „добываем его, так сказать, на месте" при помощи соответствующих вычислений.

Чтобы научить детей сознательно вычислять, опираясь на десятичный состав числа, Гольденберг рекомендует выделить в особые концентры первый десяток, первую сотню и числа любой величины.

Действия над числами в пределах каждого концентра подчинены одним и тем же свойствам или законам. „Для сложения чисел 3 и 4,— поясняет Гольденберг,— мы последовательно присчитываем к первому числу единицы второго"; при этом мы пользуемся „тем самым свойством чисел, которое применяем, когда складываем, например, числа 4325 и 268". Разница только в том, что число 4 „не подлежит десятичному расчленению", тогда как 268 мы разлагаем на разрядные слагаемые.

Результаты действий в пределах первого десятка

„мы должны помнить; иначе нам пришлось бы постоянно прибегать к инструментальному счету",— говорит Гольденберг.

Однозначные числа, как уже сказано, не подлежат расчленению на десятичные группы, к ним не применимы сокращенные приемы вычислений. Вот почему необходимо помнить наизусть не только результаты действий в пределах первого десятка, но результаты всех действий с однозначными числами и за пределами первого десятка. Другими словами, необходимо помнить так называемые таблицы действий в пределах ста. „Во всех остальных случаях,— отмечает Гольденберг,— результат действий над числами в пределах ста получается применением сокращенных способов, основанных на пользовании десятичным составом чисел".

„Действия над числами любой величины,— читаем мы дальше,— приводятся во всех случаях к ряду действий над десятичными группами данных чисел".

Чтобы резче подчеркнуть слабые стороны метода Грубе, Гольденберг предлагает его сторонникам доказать, что „обучение производству действий не обладает в достаточной мере образовательными элементами", что надо учить детей еще чему-то, например, „созерцанию и представлению чисел". Такими доказательствами сторонники метода изучения чисел, разумеется, не располагали. Тем явственнее выступает при сопоставлении обоих методов высокое образовательное значение метода изучения действий.

Гольденберг уделял также большое внимание методике решения задач. Его борьба с методом Грубе — Евтушевского, вероятно, не окончилась бы такой блестящей победой, если бы он ограничился составлением методического руководства. Прекрасным задачникам Евтушевского, построенным в соответствии с методом изучения чисел, Гольденберг сумел противопоставить новые задачники, которые оказались во всех отношениях выше задачников Евтушевского.

Цель обучения детей счислению Гольденберг видит не только в сознательном выполнении арифметических действий, но и в умении прилагать эти действия „к решению задач общежитейского содержания". Считая простоту и ясность залогом успеха в деле обучения счислению, Гольденберг не был сторонником чересчур замысловатых задач. Его задачи жизненны по своему содержанию, отличаются точностью и краткостью изложения, расположены в определенной системе.

Постоянно общаясь и работая с учительством, Гольденберг внимательно прислушивался к голосу педагогов-практиков. Тем ближе к нуждам начальной школы оказался материал его задачников, тем легче совершился переход от метода изучения чисел к методу изучения действий.

Задачники для начальной школы, составленные Гольденбергом, переиздавались около 40 раз. Последнее, 25-е, издание его „Методики" вышло в 1914 г.

Рядом с Гольденбергом и непосредственно после него работает целая плеяда методистов, разделяющих его взгляды и продолжающих развивать в различных направлениях метод изучения действий. Среди этих методистов видное место занимают Ф. И. Егоров, С. И. Шохор-Троцкий, В. К. Беллюстин, К. П. Арженников и др.

Пожалуй, наиболее популярным из всех этих методистов оказался К. П. Арженников. Его „Методика начальной арифметики", написанная в 1898 г., затем много раз переиздавалась с различными дополнениями и улучшениями. Преимущественно этой методикой пользовались учителя начальной школы в годы Великой Октябрьской социалистической революции. То же относится и к его задачникам. В 1935 г., уже после смерти Арженникова (он скончался в 1933 г.), его „Методика" с необходимыми поправками и сокращениями была переиздана под редакцией А. С. Пчелко. Переиздавались в первые годы после революции и его задачники.

Арженников установил следующие концентры: 1) первый десяток; 2) первые два десятка; 3) круглые десятки до ста; 4) первая сотня; 5) первая тысяча и 6) числа любой величины. В настоящее время круглые десятки включаются в концентр первой сотни; действия над ними не выделяются в особый концентр.

Глава I в „Методике" Арженникова содержит особый параграф под названием „Метод изучения действий". Резюмируя возражения против метода Грубе — Евтушевского, Арженников подчеркивает, что „изучение чисел было отвергнуто". Освободившись от немецкого влияния, начальное обучение в наших школах вступило на „самобытный путь", а именно, „на место изучения чисел поставлено изучение действий, т. е. **приемов их выполнения**. В основу этих приемов положены счет и десятичная система счисления. „Новый метод,— заканчивает Арженийков,— получил название **метода изучения действий**". Как мы видим, во времена Арженикова этот термин уже вошел в употребление. Появилось нужное **слово**, без которого соответствующему понятию недоставало полной определенности.

Несколько позднее метод изучения действий стали также называть **вычислительным методом**, поскольку изучение действий состоит главным образом в изучении „приемов их выполнения", в изучении вычислительных приемов.

Много ценного внесли методисты первой четверти XX века и в методику решения арифметических задач. Следует также отметить заслуги С. И. Шохор-Троцкого в отношении тщательной и весьма тонкой разработки наиболее трудных арифметических действий — умножения и деления многозначных чисел.

На фоне всеобщего признания и повсеместного применения метода изучения действий стоит особняком попытка реставрации метода изучения чисел, предпринятая Д. Л. Волковским.

В 1910 г. появился под его редакцией перевод книги В. А. Лая „Руководство к первоначальному обучению арифметике, основанное на результатах дидактических опытов". Вера в научную значимость тех экспериментов, на которых базируется метод Лая, увлекла не одного Волковского. К нему безоговорочно примкнул небезызвестный в свое время методист В. Р. Мрочек и, как ни странно, такой вдумчивый педагог и тонкий наблюдатель, как К. Ф. Лебединцев.[1]

Сам Волковский ограничился применением монографического метода к числам первого десятка, утверждая, что якобы „за изучение каждого числа в отдельности в пределах первого десятка с детьми 6—8 лет говорят данные экспериментальной психологии".

[1] Помимо пособий и методических руководств по арифметике и алгебре, **Лебединцев** написал интересное исследование „Развитие числовых представлений у ребенка в раннем детстве". 1923.

Однако, нашлись и такие некритически настроенные педагоги, которые восстановили монографический метод для чисел второго десятка. Так построен задачник С. В. Зенченки и В. Л. Эменова под названием „Жизнь и знание в числах“, опубликованный в 1926 г.

Волковский внес все же некоторые улучшения в работу начальной школы. В частности, он был инициатором применения картинок в задачнике для I класса и вообще красочной наглядности на уроках арифметики. Да и квадратные числовые фигуры, которые он включил в число наглядных пособий при изучении первого десятка, являются действительно удобным средством конкретизации чисел 1—10, хотя мы пользуемся ими иначе, чем Лай и Волковский.

Задачник Зенченки и Эменова был последним отголоском зарубежных влияний в нашей отечественной методике арифметики. Никто не сомневается больше в преимуществах метода изучения действий. Впрочем, остаются еще кое-какие разногласия, относящиеся главным образом к концентру первого десятка, а также к порядку изучения умножения и деления в пределах второго десятка и первой сотни.

Надо сказать, что дореволюционные сторонники вычислительного метода не уделяли должного внимания начальным этапам работы над первым десятком. Так, например, задачник Арженикова[1] начинается прямо с присчитывания и отсчитывания по единице — о нумерации здесь даже не упоминается. Затем следует присчитывание и отсчитывание чисел 2, 3, 4 и 5 и, наконец, все остальные случаи вразбивку. На каждый случай сложения и вычитания дается по **одной** задаче. Примеров, расположенных в определенной **системе**, мы здесь совсем не находим.

В советское время удалось значительно уточнить приемы изучения первого десятка, но, как мы увидим в дальнейшем, все еще остается некоторая неясность и неопределенность в трактовке этого важнейшего концентра. Некоторые методисты все еще отстаивают

---

[1] К. П. **Арженикова**. Сборник арифметических задач и примеров для начальных народных училищ. Год первый, 1913, стр. 1—15.

необходимость использования монографического метода в работе над числами 1—10.

Что касается второго десятка и первой сотни, то своего рода пережитком метода изучения чисел является сохранившаяся кое у кого тенденция проходить табличное умножение и деление совместно, причем имеется в виду не столько изучение этих действий, сколько усвоение состава табличных чисел из сомножителей.[1]

При рассмотрении этих спорных вопросов необходимо ясно представлять себе следующие основные положения, касающиеся обоих методов.

1) От метода не зависит объем материала. От метода зависит только порядок изучения одного и того же материала.

2) Для вычислительного метода исходным является изучение действий, завершающим — знание наизусть состава чисел, причем в пределах первого десятка переход от сложения к запоминанию состава числа осуществляется попутно с изучением сложения: если к двум прибавить один, получится три; значит, три состоит из двух и одного; если к четырем прибавить два, получится шесть; значит, шесть состоит из четырех и двух и т. д.

3) Для монографического метода, наоборот, исходным является запоминание наизусть состава чисел, а завершающим — выполнение действий. Иначе говоря, если я помню, что три состоит из двух и одного, я сумею, не вычисляя, найти сумму этих чисел и от суммы отнять каждое из них. Если я помню, что шесть состоит из четырех и двух, я сумею, не вычисляя, найти сумму этих чисел и вычесть четыре или два из этой суммы. И т. д.

---

[1] См. статью И. Ф. Зименкова „Способы заучивания таблицы умножения". „Начальная школа", 1955, № 1.

V. МЕТОДИКА ИЗУЧЕНИЯ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ В НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЕ

ПЕРВЫЙ ДЕСЯТОК

Первый десяток выделяется в особый концентр по следующим соображениям.

1) Число 10 является **основанием** общепринятой десятичной системы счисления. Сложными единицами мы считаем от 1 до 10 совершенно так же, как считаем от 1 до 10 простыми единицами.

2) Каждое число до 10 имеет особое название и изображается особым знаком. Этими названиями и знаками мы пользуемся в дальнейшем, чтобы обозначать, по правилам устной и письменной нумерации, любые числа за пределами первого десятка.

3) Наконец, таблица сложения в пределах десяти служит основой таблиц всех действий в пределах ста.

Естественно поэтому начинать изучение арифметики целых чисел с изучения первого десятка.

Метод и план работы над первым десятком

Авторы распространенных у нас методических руководств не уделяют должного внимания вопросу о методе изучения первого десятка. Их указания носят сбивчивый, а подчас и противоречивый характер.

Так, Я. Ф. Чекмарев и В. Т. Снигирев прямо утверждают, что работа в пределах первого десятка „должна строиться по методу изучения чисел“,[1] хотя в дальнейшем нет никаких указаний на всестороннее изучение состава этих чисел. Наоборот, очень подробно изла-

[1] Я. Ф. Чекмарев и В. Т. Снигирев. Методика преподавания арифметики. 1952, стр. 115.

гаются вычислительные приемы, относящиеся к сложению и вычитанию в пределах первого десятка.

Не вносит ясности в решение вопроса о методе изучения первого десятка и А. С. Пчелко. Он рекомендует „изучать" все числа от 1 до 10 включительно, причем в план работы над каждым числом входит подробная работа над его составом.[1] В изучение чисел могут быть введены, по мнению автора, „элементы сложения и вычитания на основе знания состава числа". Затем в обширной главе излагается методика работы над сложением и вычитанием так, как если бы дети не имели решительно никакого представления о составе чисел первого десятка (стр. 160—170). Необходимость такой двойной работы не обосновывается. Можно подумать, что в прошлом не существовало ни истории двух методов, ни борьбы между ними, а если она и была, то кончилась их примирением: к первому десятку следует, оказывается, прилагать оба метода один за другим.

С таким решением вопроса никак нельзя согласиться. Одно из двух: или дети усваивают состав чисел первого десятка и тут же, на основе знания наизусть состава чисел, производят сложение и вычитание в пределах каждого числа; тогда совершенно не за чем изучать вычислительные приемы, выделив материал сложения и вычитания в особую главу. Или же они усваивают в связи с нумерацией только состав каждого числа из предыдущего и единицы; тогда имеет смысл заняться подробным изучением всех случаев сложения и вычитания в пределах десяти на основе применения целесообразных вычислительных приемов.

Наличие бесспорных доводов в пользу метода изучения действий, доводов, которые накопились в результате длительной исторической борьбы и всестороннего анализа обоих методов, дает возможность избежать половинчатости в решении вопроса о методе работы над первым десятком. Вопрос этот может быть решен однозначно, если принять во внимание особый характер первого десятка, как основания системы счисления.

---

[1] А. С. Пчелко. Методика преподавания арифметики в начальной школе. 1951, стр. 154.

Следуя методу изучения действий, в пределах любого концентра мы должны прежде всего познакомить детей с устной и письменной нумерацией, а затем с арифметическими действиями.

Изучение нумерации в пределах десяти существенно отличается от аналогичной работы в пределах каждого из следующих концентров. В самом деле, числа первого десятка „не подлежат десятичному расчленению“, их нельзя разложить на десятичные группы. Взамен десятичного состава здесь приходится опираться лишь на состав каждого числа из предыдущего и единицы. Отсюда вытекает необходимость остановиться на каждом из чисел первого десятка в отдельности, тем более, что каждому такому числу соответствует особое название и особый знак. Таким образом создается видимость монографического изучения чисел данного концентра, хотя в действительности расположение материала по числам необходимо в данном случае только при изучении нумерации.

Ребенок 7 лет, поступая в школу, как правило, умеет считать до 10, понимает смысл вопроса „сколько всего?“ предметов в данной группе и имеет некоторое представление о составе чисел первого пятка. Это дает основание доработать материал первого пятка попутно с изучением его нумерации, которая состоит в уточнении связей между числами натурального ряда до 5 включительно, в узнавании и письме цифр. Однако, чтобы не повторять при этом ошибок монографического метода, необходимо и в данном случае идти от сложения к составу числа, а не наоборот. В самом деле, сначала надо образовать число из предыдущего и единицы и только после этого можно ставить вопрос о его составе. Сначала надо прибавить единицу к единице, а потом утверждать, что число 2 состоит из одного и одного; сначала надо прибавить единицу к двум, а потом утверждать, что число 3 состоит из двух и одного или из одного и двух и т. д. И в речи учителя слово „прибавить“, хочет он этого или не хочет, появляется раньше, чем слово „состоит“. Тем самым устанавливается приоритет действия по отношению к составу числа.

Итак, уже при изучении первого пятка, располагая работу по числам, необходимо, в связи с образованием каждого числа из предыдущего, ввести выражение „прибавить — получится“, а затем применить это выражение ко всем возможным случаям сложения в пределах данного числа, добиваясь в то же время запоминания его состава. После окончания работы над числами первого пятка вводится выражение „отнять“. Разумеется, оба действия на первых порах еще не записываются — их можно обозначать при помощи разрезных цифр и знаков действий. Разумеется также, что было бы странно вводить в это время те или иные вычислительные приемы. Речь может идти лишь о простом пересчитывании суммы или остатка.

Работа над числами 6—10 сводится в сущности к изучению нумерации этих чисел, что вынуждает нас, как и раньше, останавливаться в отдельности на каждом из них. К тем комбинациям, которые связаны с образованием числа из предыдущего ($5+1$, $6-1$; $6+1$, $7-1$ и т. д.), можно добавить еще три следующих случая: $3+3$, $4+4$ и $5+5$. Последняя из этих сумм знакома детям еще до поступления в школу: каждый ребенок знает, что у него 10 пальцев, по 5 пальцев на каждой руке. Остальные комбинации легко запоминаются благодаря симметричному расположению кружков на соответствующих числовых фигурах. Знание перечисленных сумм может облегчить в дальнейшем запоминание смежных комбинаций: если $3+3=6$, то $3+4=7$; если $4+4=8$, то $4+5=9$ и т. д.

На основе твердого знания устной и письменной нумерации до десяти, дети проходят все случаи сложения и вычитания.

Изучая каждый табличный ряд в отдельности, ученик прежде всего усваивает на аналогичных примерах соответствующий вычислительный прием. Вместе с тем он запоминает результаты сложения (так называемые „таблицы“), а на основе этого — состав чисел из соответствующих слагаемых. Так, например, научившись присчитывать 2 по одному, ученик запоминает таблицу: $4+2=6$, $5+2=7$ и т. д., а вместе с тем и состав чисел: $6=4+2$, $7=5+2$ и т. д. Научившись присчитывать число 3, ученик делает еще один шаг вперед в отношении знания состава тех же чисел: $6=3+3$, $7=4+3$ и т. д. Продолжая изучать сложение, ученик попутно, хотя и разрозненно, усваивает полностью состав каждого числа первого десятка из всевозможных слагаемых. Эти „локальные“ связи должны быть затем включены в определенную „систему“, ради чего весь пройденный материал располагается уже не по вычислительным приемам, а по числам. Повторением состава каждого числа из любых слагаемых и завершается работа над первым десятком.

Следует помнить, что знание наизусть всех табличных сумм так же, как и знание состава чисел первого десятка, служит фундаментом всей дальнейшей работы.

Теперь можно окончательно установить план работы над первым десятком, пояснив его при помощи следующей таблицы:

1+1	2+1	3+1	4+1	5+1	6+1	7+1	8+1	9+1
1+2	2+2	3+2	4+2	5+2	6+2	7+2	8+2	
1+3	2+3	3+3	4+3	5+3	6+3	7+3		
1+4	2+4	3+4	4+4	5+4	6+4			
1+5	2+5	3+5	4+5	5+5				
1+6	2+6	3+6	4+6					
1+7	2+7	3+7						
1+8	2+8							
1+9								

Всего мы различаем в работе над первым десятком следующие четыре этапа.

1) Первый пяток, куда относятся 10 случаев сложения, обведенные тонкой линией, и 10 соответствующих случаев вычитания.

2) Числа 6—10, куда относятся 5 случаев сложения (справа в верхнем ряду) и столько же соответствующих случаев вычитания. В это время дети могут также усвоить на память три случая сложения равных слагаемых (3 + 3, 4 + 4 и 5 + 5), не касаясь соответствующих случаев вычитания. Все эти случаи обведены пунктиром.

3) Сложение и вычитание в пределах десяти,

причем заведомо новыми для детей окажутся только 11 случаев сложения, выделенные наверху справа толстой линией; остальные случаи сложения (внизу слева) отличаются от пройденных только порядком слагаемых. Попутно усваивается по частям состав чисел первого десятка.

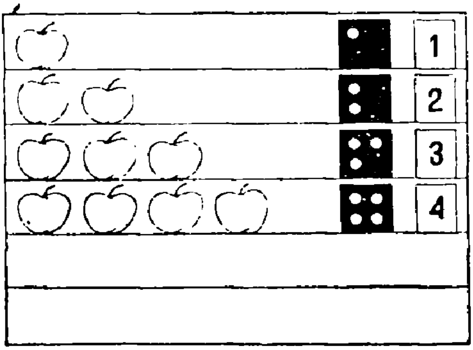
4) Повторение *состава чисел* в пределах десяти после соответствующей перегруппировки пройденного.

Первый пяток

Рассмотрим подробнее приемы работы над первым пятком.

Материал этого раздела, как уже было установлено, располагается по числам. В пределах каждого числа работа складывается из следующих моментов:

1) *Образование данного числа из предыдущего.* Умея считать до 5, ребенок еще далек от сознательного различения этих чисел и от понимания основного закона образования числового ряда. Следует, кроме того, подчеркнуть, что в числовых представлениях семилетки еще слабо отражена двойственная природа числа. Вот почему для иллюстрации чисел 1—5 приходится пользоваться пособиями двух родов: *рядами предметов*, когда яснее выступает порядковое значение числа, и *числовыми фигурами*, которые помогают охватить данную группу в целом и тем самым овладеть количественным значением числа. Применяя пособия двух родов, мы поясняем на каждом из них закон образования чисел натурального ряда, т. е. каждое число получаем из предыдущего посредством прибавления единицы.

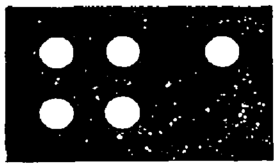


Вот, например, как можно познакомить детей с образованием числа 5.

Урок начинается с повторения пройденного на рядах яблок, числовых фигурах и цифрах, выставленных на наборном полотне.

Дети считают яблоки в каждом ряду, кружки на каждой числовой фигуре и называют соответствующее число.

Затем учитель поясняет образование числа 5 на подвижных кружках: откладывает сначала 4 кружка, затем придвигает к ним еще один, пятый, кружок и называет полученное число. То же демонстрируется на числовой фигуре: к четырем кружкам, заранее наклеенным на доске, он присоединяет пятый кружок.



Каждый раз на вопрос учителя: „как получилось число 5?“ дети отвечают полным ответом: „к четырем прибавить 1, получится 5“.

То же упражнение дети выполняют на классных счетах и на флажках.

Наконец, они выставляют на щите в нижнем его ряду 5 яблок и числовую фигуру, изображающую число 5. Эти предметы они также находят на столе учителя.

Фронтальную работу полезно завершить счетом по слуху числа хлопков, ударов карандаша по столу, а также счетом шагов. Стуки и шаги — это те же ряды, особенно хорошо подчеркивающие порядковое значение числа, поскольку элементы этих рядов располагаются *во времени* и не могут быть схвачены зрительным путем сразу, без сосчитывания.

В порядке самостоятельной работы дети воспроизводят ряды и фигуру числа 5 у себя на партах, пользуясь дидактическим материалом (палочками, кружками и квадратиками) из своего индивидуального набора.

2) *Восприятие числа на естественных группах.* Рассматривая данные о развитии числовых представлений в филогенезе, мы в свое время отмечали роль естественных групп в образовании этих представлений. То же относится и к развитию числовых представлений в онтогенезе. Два глаза, две руки, четыре ноги у животных, пять пальцев на каждой руке — это естественные группы, которые помогают овладеть количественным значением числа.

„Чего у вас пять?“ — спрашивает учитель. А затем дает две загадки: 1) у двух матерей по 5 сыновей;

у всех одно имя; 2) пять пальцев, ни костей, ни мяса. Первую загадку дети разгадывают без труда. Чтобы помочь разгадать вторую загадку, можно показать перчатку. Жалкий вид ее пальцев, не имеющих „ни костей, ни мяса“, вызывает у детей смех.

Труднее увидеть число 5 на пятиконечной звездочке, но рассмотреть ее полезно, особенно, если попутно напомнить детям стихи: „Кремлевские звезды на небе горят — повсюду доходит их свет“.

3) Знакомство с печатной цифрой. Учитель показывает детям печатную цифру, называя при этом ее элементы: стоячая палочка, лежачая палочка, овал, полуовал и т. п. После этого учащиеся находят данную цифру в своем индивидуальном наборе и показывают ее учителю. При изучении числа пять один из учеников по вызову учителя находит цифру 5 среди других цифр на столе учителя и выставляет ее на щите под цифрой 4, против ряда из пяти яблок и числовой фигуры с пятью кружками. Учитель подчеркивает при этом, что цифра 5 следует за цифрой 4, а также указывает на ее роль при оценке работы учащихся: „пятерка идет за четверкой; пять — самая лучшая отметка, все ей радуются“.

Знакомство с новым числом и с новой цифрой можно закончить рисованием в тетрадях пяти флажков. Дома дети раскрашивают их красным карандашом.

4) Работа с плакатом, на котором изображены группы предметов. До сих пор дети имели дело с самими предметами, окружающими их в классе. Таковы кружки на резинке, шарики на счетах, флажки, кружки на числовой фигуре, изображения яблок, дидактический материал у каждого ученика в его коробочке.

Теперь они рассматривают изображения предметов на плакате, считают их и составляют про них рассказики с числовыми данными.

Аналогичную работу можно вести по рисункам в задачнике. Дети составляют рассказик: „Два мальчика ловят рыбу, а один мальчик подошел и смотрит; всего три мальчика“. Это, конечно, еще не задача, а рассказик, иллюстрирующий число 3. Такой же рассказик поясняет число 5: „На одной веточке 3 ореха, а на другой — 2 ореха; всего 5 орехов“. Каждая подгруппа и все предметы в группе пересчитываются. Здесь еще нет ни действий, ни изучения состава числа.

5) Уточнение связей между соседними числами натурального ряда. Зная, что каждое число получается из предыдущего, если к нему прибавить единицу, дети могут не отдавать себе отчета в том, что каждое число больше предыдущего на единицу. Точно также, умея называть числа по порядку, особенно если начинать это упражнение с единицы, дети могут испытывать затруднения при ответе на вопросы, за каким числом следует данное, какое число следует за данным, наконец, между какими числами стоит данное или какое число стоит между данными.

Чтобы уточнить количественное значение числа, надо ставить вопросы, что больше: 2 или 1, 3 или 2 и на сколько больше. Разумеется, на данном этапе мы можем сопоставлять только соседние числа: 3 и 4, 4 и 3, 5 и 4, когда разность равна единице. Разумеется также, что эти количественные отношения можно пояснить детям только при наличии двух множеств, приведенных во взаимно однозначное соответствие: двух рядов яблок на наборном полотне, расположенных один под другим; кружков на арифметической доске в таком же расположении и т. п. Выделив два соседних ряда, учитель задает вопрос: „сколько яблок в верхнем ряду? сколько яблок в нижнем ряду? где их больше?" А затем, закрыв в нижнем ряду столько яблок, сколько их в верхнем, спрашивает: „на сколько же больше 4 яблока, чем 3 яблока? или 5 яблок, чем 4 яблока?" В отвлеченной форме эти вопросы были бы непосильны учащимся I класса.

При выяснении порядкового значения числа трудность возникает прежде всего при замене недоступных детям научных выражений „предшествует" и „следует за", предлогами „перед" и „за", которые в быту понимаются по-разному („перед" как „впереди"; „за" как „позади"). „Структура ряда" не спасает положения: детям кажется, что пятерка обгоняет четверку, стоит „впереди", а четверка отстает, стоит „позади" пятерки.

Наряду с предлогами, выражающими пространственные отношения, можно было бы обратиться к временным отношениям: при счете мы называем 4 до числа 5, а 6 после числа 5. Но беда в том, что в школе по недоразумению учат детей считать „вперед" и „обратно". Это неправильное употребление слова „счет" лишает определенности предлоги „до" и „после".

Наблюдения, проведенные в одной из ленинградских школ,[1] показали, что предлоги „до" и „после" дают лучший результат, чем предлоги „перед" и „за", если правильно пользоваться словом „счет" и подробнее формулировать соответствующие вопросы: какое число называем мы при счете до такого-то числа и какое число называем мы при счете после такого-то числа. Если вообще не прибегать к пространственным соотношениям, можно пользоваться, наряду с предлогом „до", предлогом „перед": какое число называем мы при счете перед данным числом.

Чтобы придать каждой паре предлогов вполне определенное значение, необходимо установить неразрывную связь между предлогами „перед" и „до" с **меньшим** из двух соседних чисел, а между предлогами „за" и „после"— с **бóльшим** из двух соседних чисел. Понимание количественного отношения соседних чисел обеспечит понимание их порядкового отношения: 5 больше 4; значит, 5 стоит за числом 4; 4 меньше 5; значит, 4 стоит перед числом 5.

6) Знакомство с письмом цифры. Не всегда удается знакомить детей с письмом цифры в то время, когда ведется работа над данным числом. Как правило, письмо цифр отстает от хода работы над числами первого пятка. Цифру 1 дети усваивают без труда, но в дальнейшем происходит задержка. Уже цифру 2 приходится писать сначала по частям: верхнюю часть, которая похожа на рыболовный крючок, отдельно от нижней части (волнистая черта). Нелегко писать и тройку, у которой верхний полуовал немного меньше нижнего, причем надо правильно закончить этот нижний полуовал точкой (дети часто забывают эту деталь). У четверки лежачая палочка должна помещаться ниже середины цифры; кроме того, надо научиться писать и эту цифру, как все остальные, с небольшим наклоном. Письмо цифры 5 тоже требует подробных объяснений и длительной тренировки. Нижний полуовал должен занимать больше половины всей цифры по высоте;

[1] 157-я школа Смольнинского района.

заканчивает этот полуовал непопулярная у детей точка; нелегко придать и этой цифре правильный наклон.

Вот почему, работая над числом пять, дети пишут в это время только тройку или, может быть, даже только двойку.

7) Сложение в пределах данного числа. Уже при знакомстве с числом 2, когда поясняется на предметах образование этого числа из единицы, вводятся выражения „прибавить — получится". Работая над числом 3, дети в двух случаях пользуются этими выражениями: „к двум прибавить один, получится три" и „к одному прибавить два, получится три". Все эти случаи сложения демонстрируются, конечно, на предметах. Это не решение задач, а конкретизация выражений „прибавить", „получится". Действие не скрыто, как в задачах, а, наоборот, показано и подсказано вопросом учителя: „сколько получится, если к 2 кружкам прибавить 1 кружок?"

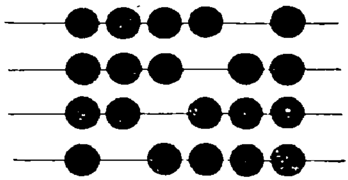
Записывать действия на первых порах дети не могут, так как и цифр писать как следует они еще не научились. Однако, поскольку узнавание цифр идет параллельно с изучением чисел, можно научить детей обозначать сложение при помощи разрезных цифр и знаков действий уже в период работы над первым пятком.

Вычитание вводится позднее, после окончания работы над первым пятком. Приемы работы те же, что и при знакомстве с действием сложения.

Сумму и остаток дети находят на первых порах путем простого пересчитывания. К этому приему приходится прибегать только в более трудных случаях, поскольку часть комбинаций в пределах первого пятка знакома детям еще до поступления в школу; остальные комбинации они усваивают в школе. Однако, если ученик не может выполнить действие по памяти, приходится обратиться к предметам. При изучении первого пятка было бы преждевременно отрывать действия от их конкретной основы, нет смысла вводить вычислительные приемы, основанные на присчитывании и отсчитывании. Что же касается пересчитывания, которым дети пользуются в этих условиях, то оно возможно только при наличии предметов.

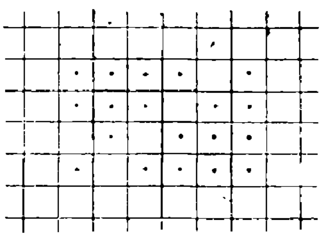
После работы над сложением в пределах данного числа необходимо отвести специальный урок на повторение его состава. Урок этот можно построить следующим образом.

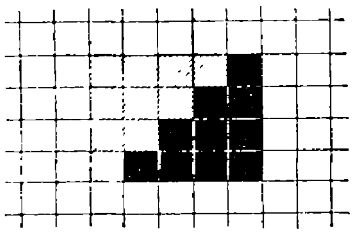
а) Фронтальная работа над составом числа. Учитель предлагает детям вспомнить, как они получили данное число из предыдущего, например, пять из четырех. Со слов детей он откладывает на счетах 4 шарика и 1 шарик. „А еще как можно составить из шариков число 5?" — спрашивает учитель. Выдерживая определенную последовательность, он откладывает на следующих проволоках остальные комбинации слагаемых. (См. прилагаемый рисунок.)



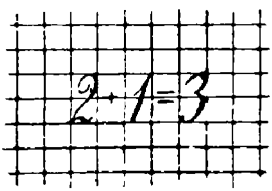
Глядя на счеты, ученики по вызову учителя повторяют состав числа пять в намеченном порядке.

б) Индивидуальная работа учащихся над составом числа. Пользуясь кружками из индивидуального набора, дети воспроизводят у себя на партах то, что они видят на классных счетах. Затем можно предложить им зарисовать расположение кружков в тетрадях, обозначая кружки точками. Можно также представить состав числа посредством квадратиков, раскрашенных цветными карандашами:





После окончания работы над числами 1—5 необходимо посвятить несколько уроков решению задач. В это время можно ввести запись сложения и вычитания. Для каждого знака отводится по ширине только одна клеточка, в то время как высота цифры должна равняться двум клеточкам.



Числа 6—10

Работа над числами 6—10 завершает изучение устной и письменной нумерации в пределах первого десятка. Расположение материала по числам, что уже было разъяснено на стр. 191, не может расцениваться в данном случае как принадлежность монографического метода. Такое расположение обусловлено своеобразием первого концентра.

Числа 6—10 менее ясны детям, чем числа первого пятка. Если ученик и умеет называть эти числа по порядку, то ответить на вопрос, какое число следует за данным или стоит перед данным, он часто еще не может. Тем более непосильным является поставленный в отвлеченной форме вопрос, на сколько следующее число больше предыдущего.

Что касается письменной нумерации, то, как правило, дети при поступлении в школу еще не знают цифр.

В соответствии с этим работа над каждым числом второго пятка складывается из следующих моментов.

1) Образование данного числа из предыдущего и единицы. Как и в пределах первого пятка, мы пользуемся в этом случае не только рядами предметов (шариками на счетах, кружками на резинке), но и числовыми фигурами; тем самым подчеркивается, наряду с порядковым, и количественное значение числа.

2) Счет в пределах данного числа. Счет этот мы проводим на окружающих предметах, а также на предметах, изображенных в задачнике или на плакате. Наряду с фронтальной работой, применяется индивидуальная: дети раскладывают определенное число палочек, кружков или квадратиков у себя на партах; рисуют указанное число предметов: яблок, грибков, листков, елочек и т. п. у себя в тетрадях.

3) Знакомство с печатной цифрой. Сначала данную цифру показывает учитель; затем учащиеся находят ее среди других цифр в своих индивидуальных наборах.

4) Письмо цифры, обозначающей данное число. В отличие от первого пятка, когда письмо цифр отставало от изучения чисел, теперь то и другое идет параллельно. Следует обратить внимание на недочеты,

которые нередко наблюдаются у детей при письме цифр 8 и 9. Восьмерку надо писать сначала слева направо, а затем справа налево: дети часто пишут эту цифру наоборот, отчего она приобретает неправильный наклон влево вместо общепринятого вправо. Девятку иногда пишут в верхней ее части, как двойку. Вследствие этого получается неправомерное сокращение верхней части и отсутствие нажима слева. Верхний овал надо писать как нуль или букву о с нажимом, а затем дописывать остальную часть девятки.

5) Уточнение связей между числами натурального ряда. Чтобы установить количественное соотношение между двумя соседними числами, например, числами 7 и 8, учитель откладывает эти числа одно под другим на классных счетах. Чтобы облегчить ответ на вопрос, где больше шариков и на сколько больше, можно добавить: „Сколько лишних шариков лежит в нижнем ряду? так на сколько же их больше?"

Чтобы уточнить порядковое значение числа, детям задают вопросы: какое число называют при счете перед данным, после данного, между данными? Полезно предлагать детям называть числа в обратном порядке. Неправильно только пользоваться при этом выражением „обратный счет". Счет — это операция, которая позволяет ответить на вопрос, сколько всего предметов в данной группе. „Обратный счет" не дает ответа на этот вопрос и потому не является счетом. Употребление неправильного выражения „обратный счет" вносит сбивчивость в понимание детьми порядкового значения числа. В самом деле, если обе операции называть „счетом", то как отличать число, предшествующее данному, от числа, следующего за данным? Ведь если считать „вперед", то число 7, например, следует за числом 6, а если считать „обратно", то оно будет следовать за числом 8. Дети должны знать, что называние чисел в обратном порядке — не счет.

Некоторые учителя пытаются конкретизировать „прямой" и „обратный" счет. Вот как это происходит.

Ученик откладывает на классных счетах 10 шариков, передвигая их по одному справа налево. Двигая первый шарик, он говорит „один", потом „два" и т. д. Это счет в собственном смысле слова, счет без эпитетов.

Когда все 10 шариков передвинуты налево, учитель предлагает ученику „считать обратно". Отодвигая вправо один шарик, ученик говорит „десять", хотя видит один и девять, потом говорит „девять", хотя видит два и восемь и т. д. К концу получается все хуже и хуже. Отодвигая седьмой шарик, ученик говорит „четыре", отодвигая восьмой — „три" и т. д. Нелепость такой „наглядности" очевидна. Уж если конкретизировать называние чисел в обратном порядке (хотя это чисто словесное упражнение), можно воспользоваться „числовой лесенкой". Как бы спускаясь по ее ступеням, ученик называет числа, характеризующие каждый столбик.

Есть другое, действительно полезное упражнение, которое состоит в том, чтобы считать предметы, расположенные в один ряд, то слева направо, то справа налево. Такой счет (счет в полном смысле слова) подводит учащихся к пониманию основной аксиомы счета, которая состоит в том, что результат счета не зависит от порядка, в котором пересчитывают предметы данной совокупности.

6) Сложение и вычитание в тех случаях, когда второе слагаемое или вычитаемое равны единице. Эти случаи сложения и вычитания связаны с процессом образования каждого числа из предыдущего и единицы. Процесс образования числа поясняется на предметах. При сложении также приходится нередко обращаться к помощи полной предметной наглядности. На данном этапе обучения оба слагаемых, например, 8 и 1, откладываются на счетах, ученик придвигает 1 шарик к 8 шарикам и находит сумму пересчитыванием. Прием присчитывания единицы вводится позднее.

Еще чаще к приему пересчитывания придется обращаться при вычитании. Если ученик затрудняется решить пример $9-1$, надо предложить ему отложить на счетах 9 шариков, отодвинуть в сторону 1 шарик и пересчитать остаток.

Наряду с примерами, дети решают в это время и задачи, в которых, кроме материала первого пятка, появятся случаи сложения и вычитания: $5+1$, $6+1$, $7+1$, $8+1$, $9+1$; $6-1$, $7-1$, $8-1$, $9-1$ и $10-1$.

7) Усвоение наизусть состава чисел 6—10

из предыдущего числа и единицы. Этот момент является завершающим в работе над каждым числом. Полезно, кроме того, научить детей составлять числа 6, 8 и 10 из равных слагаемых. Симметричное расположение кружков в группе облегчает запоминание наизусть указанных комбинаций. Что касается числа 10, то дети еще до школы знают, что на каждой руке у нас по 5 пальцев, а всего на обеих руках их 10. Запоминание состава чисел 6, 8 и 10 из равных слагаемых содействует лучшему различению чисел. На фоне отчетливой шестерки яснее выступает число 7, на фоне отчетливой восьмерки — число 9.

Кстати сказать, числа 7 и 9 удобно иллюстрировать веточкой с листьями, которых всегда бывает нечетное число. При этом явственно видна связь семерки с шестеркой и девятки с восьмеркой. В самом деле, если у первой веточки закрыть ее седьмой листок, а у второй — ее девятый листок, отчетливо выступает состав чисел шесть и восемь из равных слагаемых.

Сложение и вычитание в пределах десяти

На таблице, поясняющей этапы работы над первым десятком (стр. 193), выделены две группы примеров, которые должны быть пройдены после чисел 6—10. Первая из этих двух групп содержит 11 примеров на сложение, в которых второе слагаемое меньше первого. Вторую группу составляют 16 примеров, в которых, наоборот, второе слагаемое больше первого. Последние примеры отличаются от примеров первой группы только порядком слагаемых.

На границе между первой и второй группами помещаются три случая сложения, уже известные детям: $3+3$, $4+4$ и $5+5$. Мы включаем их в первую группу, поскольку остались непройденными соответствующие случаи вычитания: $6-3$, $8-4$ и $10-5$.

Оба действия — сложение и вычитание — изучаются параллельно. За каждым рядом примеров на сложение следует ряд соответствующих примеров на вычитание. Всего на третьем этапе работы учащиеся должны усвоить 27 новых случаев сложения и 30 новых случаев вычитания. Остальной материал включается в качестве повторительного. К тем случаям сложения и вычитания, когда второй компонент равен единице, надо при повторении научить детей прилагать прием присчитывания и отсчитывания в отличие от примитивного пересчитывания.

Если на первый пяток и числа 6—10 обычно затрачивают первый учебный месяц — сентябрь, то работа над сложением и вычитанием занимает остальную часть первой четверти. Для повторения и закрепления отводится еще три недели в начале второй четверти. В это время необходимо добиться безусловного знания наизусть таблицы сложения и состава чисел первого десятка из слагаемых.

Необходимо сделать очень важную оговорку. Как неоднократно подчеркивалось, при вычислительном методе исходным является изучение действий, а производным — знание наизусть состава чисел. Но не следует представлять себе дело так, что сначала изучаются только вычислительные приемы, а после окончания всей этой работы дети занимаются разучиванием состава чисел. То и другое, наоборот, протекает в тесном взаимодействии. Каждый новый шаг в изучении действий есть в то же время этап в овладении очередным материалом, относящимся к составу чисел. Именно поэтому работа над каждым табличным рядом заканчивается разучиванием наизусть соответствующих сумм и разностей. Это, с одной стороны, дает возможность, опираясь на *память*, переходить от присчитывания единицы к присчитыванию двух по одному, от присчитывания двух к присчитыванию группами и т. д. С другой стороны, в процессе вычислений дети запоминают *по частям* состав чисел первого десятка. Таким образом в ноябре, когда подводятся итоги всей предшествующей работы, не придется создавать новые навыки, а придется только перегруппировать *по числам* все пройденные в первой четверти случаи сложения и вычитания, что сделает самое повторение более интересным.

Работу над сложением и вычитанием в пределах десяти мы рассмотрим под углом зрения тех *вычислительных приемов*, которыми пользуются учащиеся, выполняя эти действия. Всего они должны усвоить *четыре* приема.

1) *Прием присчитывания и отсчитывания единицы.* В работе над первым пятком и над числами 6—10 дети пользовались приемом простого пересчитывания суммы и остатка. Теперь необходимо переключить их на прием присчитывания, который вначале поясняется на предметах, но который в дальнейшем можно будет применять и без предметов. Такую же роль играет и прием отсчитывания, заменяющий пересчитывание остатка. Оба приема являются переходом от сложения и вычитания *предметов* к собственно арифметическому сложению и вычитанию *чисел*.

Решение примеров первой группы надо начинать с тех случаев, которые еще не всеми детьми усвоены наизусть, а именно, с примеров $5+1=6$ и $6-1=5$.

Вот как должен рассуждать ученик, складывая числа 8 и 1: „за числом 8 следует число 9; значит, к 8 прибавить 1, получится 9“.

Решая пример $7-1$, ученик должен рассуждать так: „перед числом 7 стоит 6; значит, от 7 отнять 1, получится 6“.

2) *Прием присчитывания и отсчитывания двух и трех по одному.* Этот второй прием нет надобности, как и первый, применять к числам 1—5, поскольку состав этих чисел усвоен наизусть и действия в пределах пятка выполняются по памяти. Первыми примерами, на которых следует остановиться в данном случае, являются примеры: $4+2$ и $6-2$. Приемы сложения и вычитания необходимо пояснить на классных счетах или на двухцветных кружках, надетых на резинку.

$$\begin{array}{c} 4+2=? \\ \hline 4+1=5 \\ 5+1=6 \\ \hline 4+2=6 \end{array}$$

Придвигая красные кружки к синим по одному, учитель, а за ним и ученики рассуждают следующим образом:

„К 4 кружкам прибавить 1 кружок, получится 5 кружков; к 5 кружкам прибавить 1 кружок, получится 6 кружков. Значит, к 4 прибавить 2, получится 6.

Аналогичное рассуждение относится и к вычитанию, с тою лишь разницей, что при вычитании все кружки должны быть одного цвета. Как решить пример: $6-2=?$

„От 6 кружков отнять 1 кружок, получится 5 кружков; от 5 кружков отнять 1 кружок, получится 4 кружка. Значит, от 6 отнять 2, получится 4“.

Такие рассуждения предотвращают возможные ошибки — замену действия механическим называнием чисел. Вместо того, чтобы прибавить два к четырем, ученик называет числа „четыре, пять“ и получает неправильный ответ: пять вместо шести. При вычитании, например, трех из восьми ребенок говорит „восемь, семь, шесть“ и получает шесть вместо пяти. Прибавляя два, он называет д в а ч и с л а, включая данное; отнимая три, он называет т р и ч и с л а, включая данное. Ученик просто считает, тогда как надо прибавлять или отнимать. Необходимо также делать в обоих случаях соответствующий вывод. Слово „значит“ позволяет связать этот вывод с предшествующим рассуждением.

Материал сложения и вычитания можно в данном случае расположить двояко: сначала прибавлять двойку к четным числам, затем — к нечетным и в таком же порядке пройти соответствующие случаи вычитания. Но можно также в отношении первого слагаемого придерживаться порядка натурального ряда. Соответствующим образом придется тогда изменить и порядок изучения вычитания.

Прием присчитывания и отсчитывания по одному применим и к тройке. Рассуждение и вывод будут совершенно сходны с той формулировкой, которая применяется к двойке.

3) П р и е м п р и с ч и т ы в а н и я и о т с ч и т ы в а н и я г р у п п а м и. Этот третий по счету прием применим только к присчитыванию и отсчитыванию тройки и четверки. Чтобы прибавить или отнять три, мы разбиваем это число на два слагаемых: $3=2+1$ или $3=1+2$. Число четыре можно разбить на две двойки, или же представить его так: $4=1+3$ или $4=3+1$.

Если мы прибавляем тройку к четным числам, целесообразно сначала прибавить 2, а затем — единицу. Если надо прибавить тройку к нечетному числу, удобнее сначала прибавить единицу, а затем уже к четному числу прибавить двойку. То же относится и к вычитанию.

Прибавить четверку к любым числам можно первым из указанных способов, поскольку к этому времени дети успеют усвоить наизусть присчитывание двух как к четным, так и к нечетным числам. Можно опираться и на присчитывание тройки и в этом случае пользоваться разложением числа 4 на 1 и 3 *или* на 3 и 1.

В случае затруднения можно прибегнуть и к более длинному способу. Вот, например, как легче всего сложить 5 и 4: $5+1=6$; $6+2=8$; $8+1=9$; значит, $5+4=9$. Удобство этого приема состоит в том, что мы сводим вычисления к присчитыванию единицы, которое опирается на нумерацию, и к присчитыванию двойки к четному числу, что также не представляет трудностей. Однако, этот способ можно рекомендовать только в том случае, если ученик еще не в силах считать без наглядных пособий. Без пособий, несмотря на удобные числа, прием в целом настолько громоздок, что практически мало пригоден.

Все, что сказано о присчитывании четырех, относится и к отсчитыванию этого числа.

4) Прием перестановки слагаемых. Описанные нами приемы сложения и вычитания относятся к той группе примеров, которая на таблице выделена наверху справа толстой линией. В этой группе всего 11 примеров, но они представляют собою основу всего дальнейшего.

Начиная с тех случаев, когда приходится прибавлять и отнимать число 5, нет смысла пользоваться приемом присчитывания и отсчитывания группами. Рекомендовать такой прием учащимся нецелесообразно, даже просто вредно. Заменив второе слагаемое или вычитаемое целым рядом меньших чисел, выполняя действие по частям, ученик забывает, сколько он уже прибавил или отнял, сколько еще осталось прибавить или отнять. В этих случаях единственно правильный путь при сложении — прием перестановки слагаемых. При этом дети усваивают разложение чисел на такие слагаемые, одно из которых равняется 5, что позволяет производить вычитание этого числа просто по памяти.

Прием перестановки слагаемых демонстрируется на двухцветных кружках. Сначала к одному синему кружку учитель придвигает по одному 5 красных кружков, сопровождая этот показ подробным объяснением:

$1+1=2$, $2+1=3$ и т. д. Затем, вернув кружки в исходное положение, он придвигает 1 синий кружок к 5 красным. Получается тот же ответ и притом сразу. Чтобы подчеркнуть преимущество второго способа, полезно оба приема записать на доске. Неплохо, если дети запишут их у себя в тетрадях.

I способ	II способ
$$\begin{array}{c} 1+5=? \\ \hline 1+1=2 \\ 2+1=3 \\ 3+1=4 \\ 4+1=5 \\ 5+1=6 \\ \hline 1+5=6 \end{array}$$	$$\begin{array}{c} 1+5=? \\ \hline 5+1=6 \\ \hline 1+5=6 \end{array}$$

После сопоставления обоих способов учащиеся делают вывод: „легче к пяти прибавить один, чем к одному *прибавить пять*“. В дальнейшем (во второй четверти) можно выразить ту же мысль в более общей форме: „легче к большему числу прибавить меньшее, чем к меньшему прибавить большее“.

Отнимать пятерку также нет надобности по единице или по частям. Проходя сложение, дети запоминают, что $6=1+5$, $7=2+5$ и т. д. Отсюда вычитание пятерки они производят без труда, просто по памяти: $9-5=4$, так как $9=4+5$.

Таким же способом они решают и все остальные примеры, в которых вычитаемое больше остатка.

Как мы видим, чтобы производить в указанных случаях вычитание, надо очень твердо знать таблицу сложения, а на основе таблицы — состав чисел из слагаемых. Это достигается тем, что учитель не только объясняет детям приемы сложения, но задает им на дом отдельные части таблицы для заучивания наизусть. На уроке он предлагает ученику отвечать пройденный материал: „прибавляй по два к числам первого десятка, начиная с единицы“. Или: „отнимай по три от чисел первого десятка, начиная с десяти“.

Чтобы научить детей пользоваться взаимосвязью между сложением и вычитанием, полезно предлагать им составлять по трем данным числам все возможные примеры на сложение и вычитание. Так, из чисел 6, 4 и 10 можно составить следующие примеры: $6+4=10$; $4+6=10$; $10-4=6$ и $10-6=4$.

Состав чисел первого десятка

Завершающим является четвертый этап работы над первым десятком — повторение и закрепление таблицы сложения и состава чисел в пределах десяти. Соответствующие упражнения предлагаются учащимся в начале второй четверти.

Для закрепления *таблицы сложения* применяют игру в лото и круговые примеры.

Игра в лото проводится на разрезных цифрах из индивидуального набора учащихся. Каждый ученик берет из набора любые шесть чисел и кладет их перед собою в один ряд. Учитель читает один за другим примеры, подобранные с таким расчетом, чтобы в ответах получались разные числа. Ученики решают про себя пример и, если найдут среди своих чисел ответ, переворачивают соответствующую карточку лицом к столу. Выигрывает тот ученик, который раньше всех перевернет все свои карточки. Возможно, что это случится сразу у двух-трех учеников. Ответы у них необходимо проверить. Ученик называет одно за другим числа на своих карточках, а учитель ищет у себя пример с соответствующим ответом. Если такого примера не оказывается, ученик считается проигравшим.

Круговые примеры можно решать по-разному. Можно написать их на доске и предложить одному из учеников решить вслух первый пример: $5+3=8$. Следующий ученик должен найти пример, который начинается с восьмерки, прочитать и решить его: $8-6=2$. Третий ученик читает и решает пример: $2+7=9$ и т. д., пока сами ученики не подметят, что примеры повторяются. „Их можно решать вечно“, — говорят дети. „Такие примеры называются *круговыми*; решать их — все равно, что ходить по кругу“, — объясняет учитель.

$$
\begin{array}{lll}
\boxed{5} & +3= & \\
2 & +7= & \\
4 & +6= & \\
9 & -5= & \\
8 & -6= & \\
10 & -5= & \boxed{5}
\end{array}
$$

Ту же работу можно провести по индивидуальным наборам, которые выдаются каждому ученику. Получив набор карточек с круговыми примерами, ученик берет любую из них, списывает пример в тетрадь и решает его. Затем ищет следующую карточку, которая начинается с полученного ответа, и т. д., пока „круг“ не замкнется. Это „замыкание“ круга является самопроверкой, доказательством, что примеры решены правильно.

Для лучшего запоминания **состава чисел** применяются следующие упражнения:

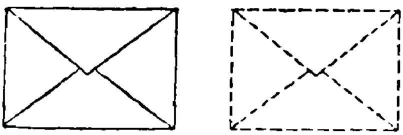
1) Решение примеров, в которых один из компонентов заменен точками или обозначен пустым квадратиком:

$$\begin{array}{llll} 5+\ldots=6 & 4+\square=7 & \ldots+1=8 & \square+2=9 \\ 4+\ldots=6 & 5+\square=7 & \ldots+3=8 & \square+5=9 \\ 2+\ldots=6 & 3+\square=7 & \ldots+6=8 & \square+7=9 \end{array}$$

При решении этих примеров дети не устанавливают действия, которым они решаются. Ответ они находят по соображению: „чтобы получилось 7, к четырем надо прибавить 3, так как 7 **состоит** из четырех и трех“. Решение они записывают следующим образом: $4+\mathbf{3}=7$. Ответ **3** приходится подчеркнуть, чтобы этим способом выявить разницу между числами данными и искомыми. Решая примеры с пропуском первого числа, дети рассуждают так: „чтобы получилось 9, надо к семи прибавить 2, так как 9 состоит из двух и семи“. Решение записывают так: $\mathbf{7}+2=9$.

2) Придумывание примеров к заданному числу. Учитель предлагает детям придумать такие примеры, чтобы в ответе получилось, допустим, число 10. Учитель до тех пор опрашивает детей, пока они не назовут всех возможных примеров, удовлетворяющих поставленному условию. Класс следит за тем, чтобы один и тот же пример не повторялся несколько раз.

10 кружков



Вариант этого упражнения состоит в том, что учитель прикрепляет к доске два конверта разного цвета, причем в один из них заранее вложено, например, 2 кружка, а в другой — 8 кружков. Зная, что всего в конвертах 10 кружков, ученики должны угадать не только число кружков в каждой группе, но их место в конвертах: в голубом конверте 2 кружка, а в розовом — 8 кружков.

3) Магические квадраты. Более легкий вариант применения магических квадратов состоит в том, что дети складывают числа по рядам и по столбцам и убеждаются в равенстве ответов. Квадрат изображен на доске, а вычисления дети записывают в тетрадях.

4	3	3
2	6	2
4	1	5

Следующее, более трудное упражнение состоит в том, что ученики должны сами подобрать числа для заполнения пустых клеток квадрата. Прежде всего надо догадаться, какой ответ должен получиться при сложении чисел в каждом ряду и в каждом столбце. А чтобы догадаться, надо найти тот ряд или столбец, все клетки которого заполнены. Установив, что искомое число — 10, придется подумать, с каких клеток можно начать заполнение квадрата и с каких нельзя. В данном случае можно начать с верхнего или среднего ряда, но нельзя начинать с нижнего ряда. Ученики должны обосновать то и другое.

3	2	
3		1
4		

Чтобы заполнить все клетки нашего квадрата, ученикам придется произвести следующие вычисления:

$$3+2=5 \quad 3+1=4 \quad 2+6=8 \quad 4+2=6$$
$$10-5=\mathbf{5} \quad 10-4=\mathbf{6} \quad 10-8=\mathbf{2} \quad 10-6=\mathbf{4}$$

Числами 5, 6, 2 и 4 дети заполняют пустые клетки квадрата.

Те же числа могут быть найдены и другим способом. Так, например, получив число 5, можно воспользоваться затем суммой $5+1$, чтобы заполнить нижнюю клетку в правом столбце. В соответствии с этим изменяются и дальнейшие вычисления:

$$5+1=6 \quad 4+4=8 \quad 2+2=4$$
$$10-6=\mathbf{4} \quad 10-8=\mathbf{2} \quad 10-4=\mathbf{6}$$

Конспекты уроков на темы первого десятка

Конспект урока арифметики в I классе 14/XI 1953 г.

Тема урока. Трудные случаи вычитания в пределах первого десятка.

Цель урока. Научить детей пользоваться знанием состава числа при решении трудных примеров на вычитание.

План урока

I. Организационный момент.
II. Проверка домашнего задания.
III. Устные упражнения.
IV. Решение примеров: 10 — 6; 9 — 6; 8 — 6; 10 — 7; 9 — 7; 8 — 7.
V. Решение задачи.
VI. Задание на дом.

Оборудование урока

1) „Лесенка" с числовыми примерами; 2) наборное полотно, разрезные цифры и знаки действий; 3) запись на доске примеров и задачи.

Ход урока

I. Организационный момент.

II. Домашнее задание проверяется путем обхода класса. Дети решали пример № . . ., первый и второй столбики. Учитель сообщает классу о результатах просмотра.

III. Устные упражнения состоят в решении примеров, расположенных в виде лесенки.

2 + 6
8 — 5 | | 10 — 5
4 + 3 | | 2 + 7
7 — 2 | | 9 — 6
3 + 5 | | 2 + 5

Сначала учитель предлагает детям „подниматься“ по лесенке. Вызванный для ответа ученик решает вслух указанный учителем пример. Затем таким же способом учащиеся „спускаются“ с лесенки.

IV. Решение примеров.

Работа с разрезными цифрами на наборном полотне.

На полотне выставлен пример: $6 + \square = 10$. Карточка, на которой обозначено второе слагаемое, перевернута.

Учитель. Какое число надо прибавить к шести, чтобы получить десять?

Дети отвечают. Учитель открывает карточку с числом 4 и закрывает (переворачивает) карточку с числом 6.

Учитель. К какому числу надо прибавить 4, чтобы получилось 10?

Дети отвечают. Учитель снова открывает число 6.

Учитель. Так из каких же чисел составили мы число 10? А теперь надо сразу сообразить, сколько получится, если от 10 отнять 6?

Ученик. От 10 отнять 6, получится 4, так как 10 состоит из 6 и 4.

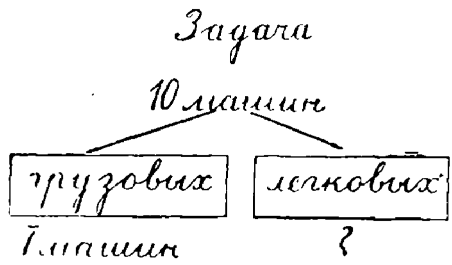
Пользуясь тем же приемом, учитель разъясняет еще один пример: $9 - 7 = 2$. После этого он открывает записанные на доске примеры, (см. план) и учащиеся решают их самостоятельно в своих тетрадях.

Когда работа эта закончена, ученики по вызову учителя читают примеры с ответами, ссылаясь при этом на состав уменьшаемого.

V. Решение задачи.

Учитель открывает запись задачи.

Учитель. В гараже стояло всего 10 машин, грузовых и легковых. Грузовых было 7 машин. Это известно. А что неизвестно? Что можно узнать?



Учащиеся составляют задачу по этим данным.

Затем следует повторение задачи, выделение вопроса, решение в уме, сообщение ответа и выявление действия.

Решение задачи дети записывают в тетрадях: 10 м.— — 7 м. = 3 м. У чисел ставится сокращенное наименование, ответ подчеркивается.

VI. Задание на дом: пример № ..., первый и второй столбики.

Конспект урока арифметики в I классе 21/XI 1953 г.

Тема урока. Повторение сложения и вычитания в пределах десяти.

Цель урока. Закрепление пройденного.

План урока.

I. Организационный момент.
II. Проверка домашнего задания.
III. Устные упражнения.
IV. Составление примеров по трем заданным числам:
   а) фронтальная работа
   б) самостоятельное составление примеров и их запись в тетрадях.
V. Решение задачи.
VI. Задание на дом.

Оборудование урока.

1) Разрезные цифры из индивидуального набора; 2) наборное полотно, разрезные цифры и знаки действий из классного набора; 3) иллюстративный материал к задаче.

Ход урока.

I. Организационный момент.

II. Проверка примера № . . . (три столбика).

Одного ученика учитель вызывает с задачником к своему столу решить вслух все примеры первого столбика.

Дополнительные вопросы: 1) прибавляй по 4 к числам первого десятка, начиная с единицы; 2) отнимай по 5 от чисел первого десятка, начиная с десяти.

За ответ ученику ставится отметка.

Остальные примеры зачитываются отдельными учениками по одному.

III. Устные упражнения.

Проводится игра в лото. Каждый ученик берет из своего набора шесть разных цифр и раскладывает их на парте в один ряд. Учитель читает примеры на сложение и вычитание. Ученики решают про себя эти примеры. Найдя у себя ответ, ученик переворачивает карточку с этим ответом. Выигрывает тот, кто первый перевернет все карточки.

Вот две серии таких примеров.

1) $2+7=9$ $\quad 1+7=8$ $\quad 2+4=6$ $\quad 3+4=7$
$10-5=5$ $\quad 9-5=4$ $\quad 10-7=3$ $\quad 8-6=2$
$3+7=10$
$9-8=1$

2) $10-8=2$ $\quad 4+4=8$ $\quad 9-4=5$ $\quad 7-3=4$
$9-2=7$ $\quad 8-7=1$ $\quad 3+6=9$ $\quad 6+4=10$
$9-6=3$
$10-4=6$

Сначала учитель зачитывает примеры первой серии, пока кто-нибудь не выиграет. Сверив полученные учеником ответы с зачитанными примерами, учитель проводит второй тур игры, предложив детям переменить цифры.

IV. Составление примеров по трем заданным числам.

Учитель выставляет на наборном полотне три числа — 3, 5 и 8.

Учитель. Из этих чисел надо составить пример со знаком „прибавить".

Ученики составляют сначала такой пример: $3+5=8$, а потом догадываются, что можно переставить слагаемые. Получается второй пример: $5+3=8$.

Учитель. Теперь постарайтесь составить пример со знаком „отнять".

Ученики составляют два примера на вычитание.

Учитель. Повторите, какие примеры составили мы из наших трех чисел.

Ученики повторяют.

После этого учитель выставляет на наборном полотне числа 4, 6 и 10.

Учитель. Пользуясь этими числами, составьте четыре разных примера и запишите их решение в тетрадях.

После окончания работы составленные детьми примеры зачитываются вслух.

V. Решение задачи.

На доске нарисован схематически паровоз и при нем 10 вагонов:

Учитель. Паровоз вез 10 вагонов. На станции 3 вагона отцепили. Сколько вагонов осталось при паровозе?

Учащиеся повторяют задачу, а учитель тем временем быстро закрывает паровоз и 7 вагонов (искомый остаток) газетой или занавеской.

Учитель. „Решайте задачу. Как вы узнали, что при паровозе осталось 7 вагонов?" (Дети отвечают.)

Учитель стирает 3 вагона и открывает искомое число. Дети убеждаются, что решили задачу правильно: при паровозе осталось 7 вагонов.

Решение задачи учащиеся записывают в тетради.

II. Задание на дом: пример № ... (три столбика).

Итоги работы над первым десятком

Работа над первым десятком должна положить начало практическому знакомству детей с законом образования натурального ряда чисел, с основной аксиомой счета, с сочетательным и переместительным законами сложения, с основным свойством вычитания, с взаимосвязью между сложением как прямым действием и вычитанием как обратным. Все перечисленные вопросы должны быть в поле зрения учителя, должны направлять и осмысливать работу по арифметике.

Учитель должен понимать, что, объясняя детям способ образования каждого следующего числа из предыдущего и единицы, он подводит их к пониманию закона образования натурального ряда чисел: что, предлагая детям пересчитывать ряд предметов сначала слева направо, а затем справа налево, он приоткрывает им основную аксиому счета; что, обучая детей различным приемам сложения и вычитания, он знакомит их с основными законами и свойствами этих действий; что своего рода игра в составление примеров по трем данным числам раскрывает связь между сложением и вычитанием, между результатом действия и его компонентами.

Так с первых шагов начинает закладываться фундамент математического образования учащихся.

МЕТОДИКА РАБОТЫ НАД ВТОРЫМ ДЕСЯТКОМ

Выделение второго десятка в особый концентр вызывается следующими соображениями.

1) Чтобы складывать любые числа, надо знать наизусть все суммы однозначных чисел, взятых по два. Совокупность этих сумм носит название *таблицы сложения*. Наибольшая сумма двух однозначных чисел — 18. Таким образом, таблица сложения заключается целиком в пределах двух десятков, что и является главным основанием выделения второго десятка в особый концентр.

2) Таблица сложения служит фундаментом таблицы умножения, которую, как и таблицу сложения, надо знать наизусть. Пользуясь таблицей умножения, мы умножаем любые числа. Знание таблиц прямых действий служит опорой табличного вычитания и деления, что в свою очередь дает возможность вычитать и делить любые числа. Таким образом, с таблицей сложения связаны механизмы всех арифметических действий. Это тоже принимается во внимание при выделении второго десятка в особый концентр.

3) В пределах второго десятка уже приходится осуществлять десятичную группировку единиц при счете и пользоваться теми вычислительными приемами, которые основаны на этой группировке. Последующие разделы начального курса арифметики представляют собою дальнейшее развитие и усложнение тех начал, которые характеризуют второй десяток, что также служит основанием для его выделения в особый концентр.

В I классе изучаются следующие вопросы, относящиеся ко второму десятку: устная и письменная нумерация, сложение, вычитание, умножение и деление на равные части. Деление по содержанию отнесено программой к началу второй четверти II класса.

Нумерация в пределах двадцати

Устная нумерация за пределами первого десятка основана на группировке единиц при счете. Чтобы назвать первые десять чисел, мы пользуемся словами простыми, коренными. Названия чисел второго десятка, в условиях группировки единиц при счете, являются сложными, производными.

Чтобы показать детям, как происходит группировка единиц при счете до 20 и как она связана с соответствующими числительными, можно воспользоваться палочками, которые удобно пересчитывать и связывать в пучки.

Пользуясь палочками, дети считают до десяти. Набрав 10 палочек, они соединяют их в пучок. Учитель сообщает им при этом два новых термина: каждый предмет при счете мы называем единицей; десять единиц составляют десяток. Следует напомнить учащимся, что некоторые предметы, например, яйца, яблоки, принято считать десятками.

Продолжая считать палочки, дети говорят: десять и один, десять и два, десять и три и т. д.; наконец, десять и десять или два десятка.

Следующий этап работы — изменение порядка слов применительно к общепринятому. Каждый ученик держит в левой руке на раскрытой ладони пучок из десяти палочек и, продолжая считать, кладет на этот пучок отдельные палочки: один на десять, два на десять, три на десять и т. д. Учитель поясняет название каждого числа:

один на десять — одиннадцать
два на десять — двенадцать
три на десять — тринадцать и т. д.

При этом нет надобности считаться с тем, что слово „палочка" женского рода. Правда, две на десять ближе к числительному двенадцать, чем два на десять. Зато одна на десять не соответствует слову одиннадцать.

Учитель объясняет, что частица дцать в этих числительных заменяет слово десять. Два десятка можно также назвать короче: два — десять или двадцать.

Два рода упражнений содействуют сознательному усвоению состава чисел второго десятка: 1) образование числа из одного десятка и нескольких единиц и 2) разложение чисел второго десятка на разрядные слагаемые.

Упражнения первого рода состоят в следующем. Учитель предлагает детям взять в руки десяток палочек и еще 3 палочки и назвать полученное число. Проделав несколько таких упражнений, учащиеся составляют числа из 1 десятка и нескольких единиц без помощи наглядных пособий.

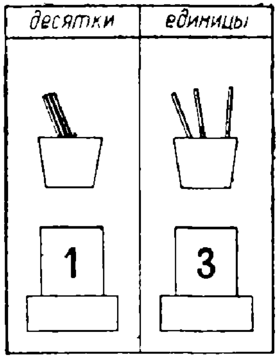
Упражняясь в разложении чисел второго десятка, которые называет учитель, дети изображают их посредством пучка-десятка и отдельных палочек. В дальнейшем те же вопросы они решают без пособий. „Сколько десятков и единиц в числе 15?" — спрашивает учитель. „В числе 15 один десяток и пять единиц", — отвечает ученик.

Упражнения, относящиеся к устной нумерации, можно закончить называнием чисел в прямом и обратном порядке и ответами на следующие вопросы: Какое число следует за числами 12, 17, 14, 19? Какое число называют при счете перед числами 16, 13, 20, 18? Какие числа называют между числами 11 и 13, 15 и 17, 18 и 20? И т. д.

Письменная нумерация за пределами первого десятка связана с применением принципа поместного значения цифр. Каждый десятичный разряд занимает определенное место в записи числа. Чтобы сознательно пользоваться позиционным принципом, надо поэтому уметь разлагать число на разрядные слагаемые, чему дети должны были научиться при знакомстве с устной нумерацией.

Роль места при обозначении цифрами двузначного числа удобнее всего пояснить на „простейшем абаке", который вывешивается на классной доске.

Прямоугольный кусок картона разделен продольно пополам. Направо — место единиц, налево — место десятков. С каждой стороны имеется два кармана. В верхний карман кладут палочки, в нижний — вставляют цифры.



Сначала учитель набирает по одной десять палочек в правой стороне пособия. Насчитав 3 палочки, он ставит под ними цифру 3. Продолжая набирать палочки, он еще раза два обозначает цифрой то или иное число палочек, например, 7 палочек, 9 палочек.

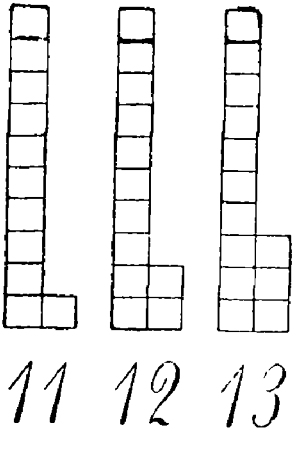
Наконец, получилось 10 палочек. Под правым карманом имеется место только для одной цифры. Но число 10 нельзя записать одной цифрой. Поэтому 10 палочек нельзя оставить в правом кармане. Надо связать палочки в пучок и переложить этот десяток налево — на место десятков. Правый карман остается пустым. Под пучком-десятком можно поставить теперь цифру 1, а под пустым карманом — 0. Цифра 1 показывает, что число состоит из одного десятка, а цифра 0 — что в этом числе нет отдельных единиц. Так разъясняется детям запись числа десять — первоначально она сообщалась им без всяких объяснений.

Необходимо подчеркнуть, что существует отдельное место для единиц и отдельное место для десятков, но не существует отдельного, особого места для нуля. Нуль пишут вместо единиц, если их нет в числе.

Продолжая работу, учитель добавляет к десятку в левом кармане еще одну палочку в правом кармане. Дети сами называют полученное число и устанавливают, что оно состоит из одного десятка и одной единицы. Цифру 0 учитель заменяет единицей, а учащиеся объясняют значение каждой цифры в записи числа.

Таким же способом вводится запись остальных чисел второго десятка до двадцати включительно. Набрав второй десяток, учитель связывает палочки в пучок и переносит их в левый карман. Налево он ставит теперь цифру 2, а направо — цифру 0. Дети расшифровывают значение каждой цифры.

В дальнейшем полезно предложить учащимся выполнить в тетрадях следующую работу. Каждое число второго десятка они изображают по клеточкам в виде двух столбиков: налево столбик из 10 клеточек, а направо столбики в одну, две, три, четыре и т. д. кле-



точек. Под каждой парой столбиков они записывают соответствующее число. При этом они повторяют тот вывод, который был сделан первоначально на „простейшем абаке“: единицы стоят на первом месте справа, а десятки — на втором.

Изучение письменной нумерации заканчивается упражнениями в чтении чисел по учебнику и в записи чисел под диктовку. К этому времени полезно приурочить знакомство детей с серебряными монетами.

Сложение и вычитание в пределах двадцати

В пределах двадцати заканчивается изучение таблицы сложения и соответствующих случаев вычитания. Первая часть таблицы (45 случаев сложения и столько же случаев вычитания) заключена в пределах первого десятка. Остается пройти еще 36 случаев табличного сложения и столько же случаев вычитания.

Табличное сложение и вычитание в пределах второго десятка называют также сложением и вычитанием с переходом через десяток. Наряду с этим, в пределах того же концентра имеется сложение и вычитание без перехода через десяток. Сюда относятся 55 случаев сложения двузначного с однозначным и столько же случаев сложения однозначного с двузначным. К этому надо добавить равный по объему материал вычитания.

Возникает вопрос: следует ли сначала пройти табличное сложение и вычитание, а затем перейти к сложению и вычитанию без перехода через десяток, или же лучше сделать наоборот?

Вопрос этот является до известной степени спорным. Некоторые дореволюционные педагоги, а вслед за ними и некоторые современные методисты решают его в пользу табличного сложения и вычитания, ссылаясь на единство приема, которым приходится пользоваться при переходе через десяток. Эти лица указывают также на значительную трудность вычитания двузначного числа из двузначного по сравнению с табличным вычитанием.

Чтобы придти к определенному выводу, вспомним, на чем основан прием табличного сложения. Как, например, следует рассуждать, чтобы сложить числа 6 и 5?

Необходимо прежде всего иметь представление о той системе счисления, в условиях которой приходится складывать эти числа. Предположим, что мы пользуемся семиричной системой. Сумма данных чисел явно превышает основание этой системы, иначе говоря, она должна состоять из одной единицы второго разряда и нескольких единиц первого разряда. Чтобы образовать единицу второго разряда, надо к 6 простым единицам добавить еще одну такую единицу; останется 4 единицы. По правилам нашей письменной нумерации полученное число пришлось бы записать так: 14.

Трудность, которую испытывает взрослый человек, пользуясь непривычной ему системой счисления, должен испытывать и ребенок, слабо усвоивший сущность десятичной системы. Вот почему нецелесообразно начинать с тех случаев сложения, когда десятичный состав суммы является искомым. Легче сложить двузначное с однозначным или однозначное с двузначным. Располагая десятичным составом одного из слагаемых, опираясь на этот состав, ученик фактически производит действия, не выходящие за предел десятка. Так, чтобы вычислить сумму $15+3$, достаточно уметь сложить 5 и 3, чтобы вычислить сумму $16+4$, достаточно уметь сложить 6 и 4. То же относится и к вычитанию.

Итак, мы приходим к выводу, что после нумерации следует заняться сложением и вычитанием без перехода через десяток. Сюда относятся следующие группы примеров:

1) Одно из чисел 10:

$10+3$	$13-3$
$3+10$	$13-10$

2) Сумма и уменьшаемое меньше 20:

$12+6$	$18-6$
$6+12$	$18-12$

3) Сумма и уменьшаемое равняются 20:

$$16 + 4 \qquad 20 - 4$$
$$4 + 16 \qquad 20 - 16$$

Первая группа примеров непосредственно примыкает к изучению нумерации чисел второго десятка. Чтобы решить такой пример, ученик должен только уметь образовать число из десятка и нескольких единиц, или же разложить число на десяток и единицы.

Весь остальной материал расчленяют в работе с учащимися на три ступени: 1) сложение без перехода через десяток (все случаи); 2) вычитание однозначного числа без перехода через десяток (18—6, 20—4) и 3) вычитание двузначного числа (18 — 12, 20 — 16).

Основным наглядным пособием при объяснении приемов сложения и вычитания являются отдельные палочки и пучки-десятки.

При объяснении примера $12 + 6$ дети кладут перед собой слева 1 пучок и 2 палочки, а справа — 6 палочек. Выполняя сложение на палочках, они должны понять, что 6 единиц следует прибавлять не к одному десятку, а к двум единицам.

При решении примера $6 + 12$, который отличается от предыдущего только порядком слагаемых, приходится 6 палочек перенести для удобства сложения с левой стороны, где они лежали сначала, направо. Тем же приемом перестановки слагаемых дети пользуются в дальнейшем при решении примеров без наглядных пособий.

Приемы решения примеров $16 + 4$ и $4 + 16$ отличаются от предыдущих только тем, что при сложении единиц получается полный десяток. Сначала на палочках, а потом и без них дети рассуждают так: 16 состоит из 1 десятка и 6 единиц; к 6 прибавить 4, получится 10, или 1 десяток; к одному десятку прибавить один десяток, получится 2 десятка, или 20.

При вычитании однозначного из двузначного, которое также поясняется на палочках, надо научить детей разлагать уменьшаемое на разрядные слагаемые и вычитать единицы из единиц.

Особую трудность представляет собою вычитание двузначного из двузначного, а также из 20. При решении этих примеров, в отличие от примеров на вычитание однозначного, разложение уменьшаемого на разрядные слагаемые применять не следует. Разложив оба компонента, например, 18 и 12, на десятичные группы, ученик склонен отнять сначала 2 от 8, а потом десяток от десятка; в остатке получается нуль, который ученик и считает окончательным ответом. Чтобы избежать подобных ошибок, следует при вычитании двузначного числа разлагать на разрядные слагаемые только вычитаемое и приучать детей отнимать сначала десяток, а затем единицы.

Тот же прием применяется при вычитании двузначного из 20. Не разлагая уменьшаемого, мы отнимаем от него сначала один десяток, а затем оставшиеся единицы.

В работе над сложением и вычитанием без перехода через десяток нет ни возможности, ни необходимости изучать каждый случай в отдельности. В этих условиях речь может идти только об изучении отдельных вычислительных приемов, относящихся к целой группе аналогичных случаев. По вычислительным приемам и располагается, как было показано, соответствующий учебный материал.

Иначе разрешается вопрос об изучении *табличного сложения и вычитания*, т. е. сложения и вычитания с переходом через десяток. Все случаи табличного сложения, число которых не так велико (в пределах второго десятка — 36), необходимо знать наизусть. Это обязывает нас остановиться на каждом из них в отдельности. Весь этот материал представлен в следующей таблице.

9 + 2	9 + 3	9 + 4	9 + 5	9 + 6	9 + 7	9 + 8	9 + 9
8 + 3	8 + 4	8 + 5	8 + 6	8 + 7	8 + 8	8 + 9	
7 + 4	7 + 5	7 + 6	7 + 7	7 + 8	7 + 9		
6 + 5	6 + 6	6 + 7	6 + 8	6 + 9			
5 + 6	5 + 7	5 + 8	5 + 9				
4 + 7	4 + 8	4 + 9					
3 + 8	3 + 9						
2 + 9							

Переход через десяток тем легче, чем ближе первое слагаемое к числу 10. Легче всего прибавить однозначное число к 9 (1-й ряд). Следующая ступень — прибавление однозначных чисел к 8, потом к 7, к 6 и т. д. Последний, наиболее трудный случай — $2+9$.

Прием сложения с переходом через десяток мы поясняем на пособии, которое можно назвать „таблицей с кружками".[1]

Кусок картона прямоугольной формы разделен вертикальной линией на две равные части. К картону пришиты обыкновенные платяные крючки, по 10 штук с каждой стороны. К таблице прилагаются 20 двухцветных кружков с небольшим отверстием подальше от центра. Благодаря этому кружки можно вешать на крючки. На рисунке изображено сложение чисел 7 и 5.

Отложив в левой части пособия 7 красных кружков, мы убеждаемся воочию, что на этой стороне остается еще 3 свободных места. Тем самым определяется с необходимостью дальнейший ход вычислений: второе слагаемое придется волей-неволей разложить на 2 части, из которых первая является дополнением семи до десяти. Три свободных места слева заполняем синими кружками; остается еще два синих кружка, которые можно поместить только в правой части таблицы.

Таким образом, при помощи данного пособия удается представить наглядно не только искомую сумму, но и ее десятичный состав.

Применяя наглядность, полезно на первых порах пояснять ход вычислений подробной записью.

$$\begin{array}{r} \underline{7+5=?} \\ 7+3=10 \\ \underline{10+2=12} \\ 7+5=12 \end{array}$$

Рассуждения, которые дети усвоят на двухцветных кружках и закрепят посредством такой записи, они воспроизводят в дальнейшем и без пособий.

Таблица сложения должна быть разучена наизусть.

Возникает вопрос: следует ли проходить оба действия — сложение и вычитание — параллельно?

В прошлом существовала практика параллельного изучения табличных действий. Неудобство этой практики состоит в том, что при вычитании получается для ряда примеров один и тот же ответ. Так, первой группе примеров на сложение (см. таблицу на стр. 38) соот-

[1] См. изображение этого пособия на стр. 225.

ветствует следующая группа примеров на вычитание: 11 — 2, 12 — 3, 13 — 4, 14 — 5, 15 — 6, 16 — 7, 17 — 8, 18 — 9. Во всех этих случаях разность равна 9. Подметив такую „закономерность“, дети склонны были писать примеры с ответами, не производя вычислений. Та же картина наблюдалась при изучении следующих табличных рядов.

Вот почему в настоящее время проходят сначала всю таблицу сложения, а затем, имея возможность опираться при изучении вычитания на любые случаи сложения, располагают материал вычитания по постоянному уменьшаемому.

Итак, прежде всего мы отнимаем все однозначные числа от 11, потом от 12, от 13 и т. д.

Прием табличного вычитания поясняется на той же таблице с кружками, которой мы пользовались при сложении. Разница только в том, что при вычитании приходится применять кружки одного цвета.

Решая пример 14 — 6, мы откладываем в левой части таблицы 10 синих кружков, а в правой — 4 кружка того же цвета. Имея перед глазами десятичный состав уменьшаемого, дети без труда усваивают прием табличного вычитания. Этому содействует также развернутая запись. В дальнейшем при решении подобных примеров они рассуждают и без пособий.

$$14 - 6 = ?$$
$$14 - 4 = 10$$
$$10 - 2 = 8$$
$$14 - 6 = 8$$

Некоторые учителя вводят нерациональный прием табличного вычитания, который затем автоматически переносится на числа первой сотни в ущерб беглости и правильности вычислений. Поясним это на конкретном примере.

От 12 требуется отнять 7. Вместо того, чтобы в естественном порядке сначала отнять 2 единицы, а затем остальные 5 единиц, учащиеся отнимают сразу 7 от 10; получив остаток 3, прибавляют к нему молчаливо откинутую двойку. Далеко не все дети помнят об этой двойке, а потому у некоторых из них получаются неправильные ответы.

В связи с этим отмечу такой случай. Ученица I класса получала двойки за арифметику. При тщательном просмотре ее тетрадки выяснилось, что все примеры решены правильно, за исключением примеров на табличное вычитание, — везде повторяется та самая ошибка, о которой только что шла речь. Учительница не обращала внимания на однородный характер ошибок и, не вникая в их причину, ставила девочке двойки. Как только недоразумение выяснилось, девочка быстро овладела правильным приемом и стала систематически получать четверки и пятерки.

Предоставленные самим себе, дети иногда выдумывают собственные приемы. Некоторые из этих приемов заслуживают внимания и одобрения. Таков, например, при сложении способ уравнивания слагаемых. Дело в том, что лучше других запоминаются такие случаи сложения, как $6+6$, $7+7$, $8+8$ и $9+9$. При неравных слагаемых в силу переместительного свойства сложения внимание как бы раздваивается ($7+8=8+7$), что, повидимому, и затрудняет запоминание. Дети пользуются хорошо усвоенными суммами равных слагаемых, чтобы находить промежуточные суммы. Отсюда получаются такие приемы: $6+7=6+6+1$; $7+8=7+$ $+7+1$; или $7+6=7+7-1$; $9+8=9+9-1$ и т. д.

Если учитель не научил детей вычислять и если сами они не додумались до рациональных вычислительных приемов, приходится наблюдать даже в конце учебного года, что учащиеся все еще пользуются палочками или собственными пальцами. Причина этой недоработки состоит в том, что учитель с самого начала применял только палочки вместо специального наглядного пособия, на котором при сложении приходится сначала добавлять первое слагаемое до десяти, а при вычитании — отнимать единицы уменьшаемого. Пособие это должно быть постоянно под руками, чтобы предотвратить простое пересчитывание суммы или остатка. При желании можно пользоваться и классными счетами, которые также вынуждают ученика действовать в рамках десятичной системы счисления. Так, решая пример $7+5$ и отложив на одной проволоке 7 шариков, ученик должен волей-неволей прибавить к ним сначала только 3 шарика, а остальные 2 шарика отложить уже на другой проволоке. То же относится и к вычитанию.

Умножение и деление в пределах двадцати

В третьей четверти, закончив изучение табличного сложения и вычитания, учащиеся I класса приступают к работе над умножением и делением.

В пределах 20 дети впервые знакомятся с **умножением**. По мнению некоторых учителей, они усваивают это действие с большим трудом, чем даже деление. Дело в том, что в жизни, в быту им приходится чаще всего складывать и делить на равные части; приходится иногда вычитать, но с умножением вне школы они не встречаются.

Первый вопрос, который необходимо поставить и решить, — это вопрос о том, в какой последовательности следует расположить материал умножения.

Можно выбрать одно из двух: либо расположить все случаи умножения по постоянному **множимому**, либо — по постоянному **множителю**, а именно.

I способ				II способ			
2×2	3×2	4×2	и т. д.	2×2	2×3	2×4	и т. д.
2×3	3×3	4×3		3×2	3×3	3×4	
2×4	3×4	4×4		4×2	4×3	4×4	
2×5	3×5	4×5		5×2	5×3	5×4	
2×6	3×6			6×2	6×3		
и т. д.				и т. д.			

Расшифруем начало каждого способа:

$2+2$	$2+2$	$2+2+2$	и т. д.
$2+2+2$	$3+3$	$3+3+3$	
$2+2+2+2$	$4+4$	$4+4+4$	
$2+2+2+2+2$	$5+5$	$5+5+5$	
$2+2+2+2+2$	$6+6$	$6+6+6$	
и т. д.	и т. д.		

Сравним эти способы.

1) При расположении материала по постоянному множимому **обеспечена связь** каждого следующего случая с предыдущим, из которого он получается:

$$2\times5=2\times4+2;\quad 2\times6=2\times5+2 \text{ и т. д.}$$

Второй способ не обеспечивает такой преемственности: каждый раз приходится заново набирать слагаемые. Чтобы умножить 4 на 3, надо набирать четверки, чтобы умножить 5 на 3 — пятерки, 6 на 3 — шестерки. Предыдущий случай не является опорой для последующего, между ними нет ничего общего.

2) При расположении материала по постоянному множимому **трудность нарастает постепенно.**

При постоянном множителе каждый следующий случай значительно труднее предыдущего.

3) При наличии нескольких равных слагаемых легче оправдать в глазах ребенка замену сложения умножением, чем при наличии только двух равных слагаемых.

4) При наличии разного числа слагаемых (три двойки, четыре двойки, пять двоек, шесть двоек и т. д.) устраняется опасность понять умножение, как удваивание.[1]

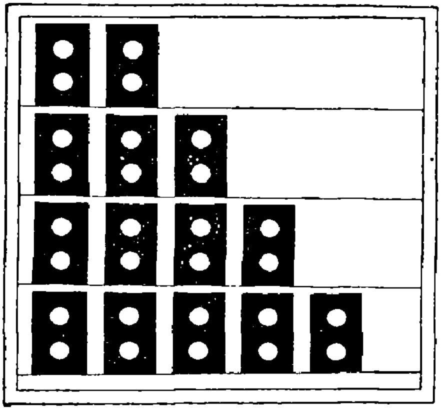
Итак, следует предпочесть способ расположения таблицы умножения по постоянному множимому. Всего предстоит пройти с учащимися следующие 27 случаев умножения:

2×2	3×2	4×2	5×2	6×2	7×2	9×2
2×3	3×3	4×3	5×3	6×3	8×2	10×2
2×4	3×4	4×4	5×4			
2×5	3×5	4×5				
2×6	3×6					
2×7						
2×8						
2×9						
2×10						

Кроме того, в процессе работы дети знакомятся с умножением каждого из чисел первого десятка на единицу. С этих случаев нельзя начинать работу над табличными рядами. В самом деле, чтобы перейти от сложения к умножению, надо иметь сумму, по крайней мере, двух слагаемых. Число, взятое в отдельности, нельзя рассматривать как слагаемое. Детям понятно требование заменить сумму $5+5$ произведением 5×2. Но замена числа 5 произведением 5×1 может и должна на первых порах вызывать недоумение. В дальнейшем, когда учащиеся привыкнут пользоваться выражением по 2, по 3, по 4 и т. д. взять столько-то раз, можно добиться „переноса“ этого выражения и на те случаи, когда множитель равен единице: по 3 взять 1 раз, по 4 взять 1 раз и т. д.

[1] Только в XVII веке итальянский математик Лука Пачиоли отказался рассматривать умножение и деление на 2 как особые действия.

Первый урок, на котором вводится умножение, должен быть подготовлен особенно тщательно. Выражение „взять по 2“ надо пояснить соответствующим жестом. Чтобы удобнее было демонстрировать такое „набирание“ предметов парами, можно сделать из картона 14 прямоугольников, наклеив на каждый из них по 2 цветных кружка величиною с пятачок.



В верхнем ряду наборного полотна учитель ставит 2 пары таких кружков, в следующем — 3 пары и т. д. Против каждого ряда прямоугольников он делает под диктовку детей соответствующую запись: $2+2=4$, $2+2+2=6$ и т. д.

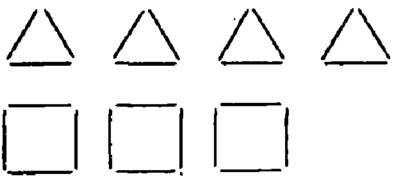
Составив сумму из пяти двоек, учитель подчеркивает неудобство такой длинной записи и объясняет, что ее можно заменить более короткой, которая читается так: по 2 кружка взять 5 раз, получится 10 кружков.

Дети повторяют новое выражение, а затем и в остальных случаях заменяют сложение новым действием — умножением. Учитель дополняет запись на доске и предлагает детям переписать все четыре произведения в свои тетради.

Урок заканчивается устным решением одной или двух простых задач на умножение.

Наглядность в работе над умножением мы считаем более уместным применять фронтально. Раскладывание кружков или палочек самими учениками у себя на партах отвлекает внимание детей от объяснений учителя: не так-то просто разложить в определенном порядке 28 мелких предметов! Тем труднее обеспечить индивидуальную работу с дидактическим материалом при изучении дальнейших случаев умножения.

Поэтому при умножении по 3, по 4 и т. д. мы предпочитаем пользоваться классными счетами или арифметической доской,[1] а также развернутой записью сложения, которую учитель на глазах у детей и под их диктовку заменяет умножением. Впрочем, умножение по 3 и по 4 полезно, уже после записи соответствующих таблиц в тетрадях, связать с выкладыванием из палочек треугольников и квадратов.



При этом дети не только считают палочки, но вместе с тем уточняют свои представления о данных фигурах.

Очень важно постоянно возвращаться от умножения к сложению, пояснять умножение сложением. Сюда относятся три вида упражнений.

1) Даются два примера на умножение: $3 \times 4 = 12$ и $4 \times 3 = 12$. Предлагается записать эти примеры иначе, подробнее: $3 + 3 + 3 + 3 = 12$; $4 + 4 + 4 = 12$.

2) Дается пример на сложение равных слагаемых: $2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 12$. Предлагается записать этот пример короче: $2 \times 6 = 12$.

3) Даются два примера: один на сложение равных слагаемых, а другой — на сложение разных слагаемых: $3 + 3 + 3 + 3 = ?$ и $3 + 2 + 3 + 1 = ?$ Дети должны объяснить, почему первый пример можно записать короче и почему нельзя этого сделать по отношению ко второму примеру.

Переходя к делению, мы должны прежде всего установить план работы над этим действием.

Основой выполнения обратных действий является связь этих действий с прямыми. Поэтому в пределах первого десятка вычитание изучается параллельно с действием сложения.

При переходе ко второму десятку принцип параллельности сохраняется, но реализуется несколько иначе, чем это было до сих пор. После сложения без перехода через десяток дети проходят в порядке параллельности аналогичные случаи вычитания; после табличного сложения они занимаются табличным вычитанием. Однако, занятия одним и тем же действием становятся длитель-

[1] См. изображение этого пособия на стр. 75.

нее: сначала все случаи сложения без перехода через десяток, потом все соответствующие случаи вычитания; сначала вся таблица сложения, потом все табличное вычитание.

В I классе учащиеся знакомятся только с делением на равные части, так как этот вид деления является более легким, чем деление по содержанию. Правда, детям нередко приходится раздавать предметы по 2, по 3 и т. д., но такую раздачу можно производить безотносительно к арифметическому действию, т. е. к делению чисел. Можно не знать, сколько всего орехов в кульке или карандашей в коробке, и раздавать их братьям, сестрам или товарищам, не подсчитав после раздачи, сколько человек получило орехи или карандаши и сколько всего орехов или карандашей пришлось раздать. Зато при решении задач на деление по содержанию обнаруживается сложная природа этого вида деления — приходится не только разложить число на пары, тройки и т. д., но придти к довольному сложному для ребенка умозаключению: купили столько конвертов, сколько раз 3 коп. содержится в 15 коп.; было столько бидонов с молоком, сколько раз 10 *л* содержится в 20 *л* и т. д. При делении на равные части мы не встречаемся с такою трудностью: результат деления является в этом случае прямым ответом на вопрос задачи.

Возникает вопрос: можно ли проходить параллельно умножение и деление на равные части, если материал умножения расположен по постоянному множимому?

Имея перед глазами кружки или шарики на счетах, ученик усваивает один табличный ряд за другим. Попутно можно было бы, не нарушая и не разрушая сложившегося стереотипа, делить числа второго десятка по 2, по 3, по 4 и т. д. Но, глядя на ряд двоек, нельзя делить данные числа на 2 равные части, глядя на ряд троек — на 3 равные части и т. д. Вот почему невозможно проходить деление на равные части параллельно с умножением — эти действия изучаются раздельно.

Таким образом, только по окончании работы над умножением можно перейти к делению сначала на 2 равные части, затем на 3 равные части, на 4 равные части и т. д.

Работу над делением мы начинаем с раздачи предметов по одному. При этом удобнее пользоваться такими предметами, раздача которых связана с конкретной действительностью. При умножении не нужна красочная наглядность. Она скорее мешала бы детям уловить основной смысл умножения, т. е., во-первых, увидеть равенство слагаемых и, во-вторых, установить без труда их число. При делении должен быть прежде всего представлен наглядно делитель и показан убедительно процесс раздачи предметов поровну. Поэтому иллюстрация деления состоит в решении практических вопросов, связанных с раздачей книг, тетрадей, карандашей ученикам; с раскладыванием яблок и грибков в корзинки, картинок и открыток в конверты; с рассаживанием пионеров (фигурки из бумаги) в лодочки и т. п.

Ученики, корзинки, конверты, лодочки конкретизируют делитель; раздача предметов по одному конкретизирует деление на равные части. По наводящим вопросам учителя процесс деления облекается в словесную форму: сколько предметов делили? на сколько равных частей? сколько предметов получилось в каждой части? Из отдельных ответов складывается окончательная формулировка: 2 книги разделить на 2 равные части, получится по 1 книге в каждой части; 4 тетради разделить на 2 равные части, получится по 2 тетради в каждой части и т. д.

Устные ответы учеников надо записать на доске с соответствующими наименованиями у делимого и у частного: 2кн. : 2 = 1кн.; 4т. : 2 = 2т. и т. д.[1]

На первом уроке можно пройти деление чисел первого десятка на 2 равные части, следующие два урока посвятить делению чисел второго десятка на 2 равные части. Четвертый урок отводится на повторение пройденного и на решение задач. При этом вводятся понятия четного и нечетного числа.

Следующие этапы работы — деление на 3, на 4, на 5 и т. д. равных частей — строятся по образцу деления на 2 равные части.

[1] См. также главу о решении задач, где идет речь о выяснении смысла действий, в том числе и деления.

С самого начала не следует подчеркивать связь между умножением и делением. Попытка использовать эту связь при делении на 2 равные части приводит к путанице, к смешению понятий. Учащиеся не понимают, чем они занимаются; новое действие не воспринимается с полной отчетливостью.

Однако, уже при делении на 3 равные части, когда дети освоятся с этим действием, следует научить их подбирать частное при помощи умножения: 15 разделить на 3 равные части, получится по 5, так как по 5 взять 3 раза, получится 15. К умножению надо обращаться и в тех случаях, когда приходится исправлять неправильный ответ или проверять правильный.

Деление по содержанию дается во II классе в начале второй четверти перед изучением табличного умножения и деления в пределах ста. Это предварительное знакомство проводится на пройденном числовом материале, т. е. на числах второго десятка и на круглых десятках.

Уже в I классе дети должны были научиться производить деление на основе умножения. Поэтому самый процесс деления не может затруднять их, будет ли то деление на равные части или деление по содержанию. Зная состав чисел второго десятка из сомножителей, дети устанавливают без труда, сколько раз надо взять по 3, чтобы получить 12, сколько раз надо взять по 4, чтобы получить 20 и т. д.

Все внимание при изучении нового вида деления должно быть направлено главным образом на выяснение смысла деления по содержанию в отличие от деления на равные части, на новую словесную формулировку и правильную запись.

Рассматривая приемы работы над простыми задачами, мы подробно изложили порядок ознакомления детей с делением по содержанию. Напомним, что необходимо с самого начала подчеркивать отвлеченный характер частного как в работе с пособиями, так и при решении задач.

Итоги работы над вторым десятком

При переходе к этому концентру дети впервые знакомятся с десятичной системой счисления. Это знакомство предполагает прежде всего включение в активный словарь ребенка таких терминов как единица и десяток. В результате работы над устной нумерацией дети должны уметь образовать любое число второго десятка из его разрядных слагаемых и, наоборот, уметь разложить такое число на разрядные слагаемые. При знакомстве с письменной нумерацией дети впервые начинают пользоваться принципом поместного значения цифр и различать место единиц и место десятков в записи числа.

Складывая и вычитая в пределах двадцати, учащиеся продолжают применять, но уже в новых условиях, приемы, основанные на сочетательном и переместительном законах сложения и на основном свойстве вычитания.

При знакомстве с новым действием — умножением — дети должны прежде всего увидеть его связь с хорошо известным им сложением. В дальнейшем это приведет к определению умножения как сложения равных слагаемых. Наряду с этим, необходимо обеспечить четкую дифференцировку умножения и сложения. В I классе достаточно обратить внимание учащихся на внешнее различие между этими действиями: при решении задач на сложение все три числа имеют одно и то же наименование, а при умножении второе число пишется без наименования. Затем надо научить детей различать множимое и множитель, иначе говоря, понимать, что компоненты умножения играют разную роль и в зависимости от этого занимают каждый свое определенное место в записи действия.

Деление на равные части сводится на первых порах к раздаче предметов по одному. В дальнейшем дети переходят от деления предметов к делению чисел без предметов. К этому времени должна быть, с одной стороны, обеспечена дифференцировка деления и умножения, а, с другой стороны, дети должны уловить связь между умножением и делением как действиями взаимно обратными. Деление чисел без предметов осуществляется на основе этой взаимосвязи.

Появление нового вида деления — деления по содержанию — вынуждает нас снова обратиться к предметам, хотя в это время учащиеся уже не так беспомощны, как в I классе. Трудность заключается в том, что с прежним названием действия надо соединить новый смысл. Этот новый смысл дети усваивают на предметах, а затем применяется прием, основанный на взаимосвязи между умножением и делением. Полная дифференцировка двух видов деления достигается уже в работе над числами первой сотни.

МЕТОДИКА РАБОТЫ НАД ПЕРВОЙ СОТНЕЙ

Вслед за вторым десятком изучается первая сотня. Выделение этой области чисел в особый концентр диктуется следующими соображениями.

1) Сотня — это вторая сложная счетная единица. Знакомство с этой счетной единицей является необходимым этапом в изучении десятичной системы счисления.

2) В пределах первой сотни заключена таблица умножения, подобно тому, как в пределах второго десятка заключена таблица сложения. Таблицы действий необходимо знать наизусть при выполнении действий над любыми числами.

3) В пределах первой сотни учащиеся знакомятся с разнообразными вычислительными приемами. Овладевая вычислительной техникой, они практически усваивают законы арифметических действий, что облегчает им в дальнейшем понимание письменных механизмов действий над многозначными числами.

Работа над первой сотней начинается в четвертой четверти I класса, продолжается до конца третьей четверти II класса и заканчивается в III классе (деление с остатком).

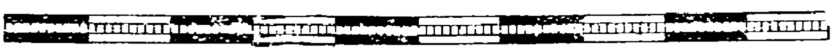
Концентр первой сотни состоит из следующих разделов: устная и письменная нумерация, счет круглыми десятками, сложение и вычитание, табличное умножение и деление, внетабличное умножение и деление, деление с остатком.

Нумерация, счет круглыми десятками, сложение и вычитание

Может явиться мысль, что изучение первой сотни удобнее начинать не с нумерации, а со счета десятками, поскольку при этом выясняется роль десятка как счетной единицы и уточняется соотношение между десятком и сотней. Однако, вступать на этот путь небезопасно. Ученик, который считает до 100 десятками, не научившись сначала считать по одному, запоминает числа 30, 40, 50 и т. д. механически, вне их связи с натуральным рядом. Такому ученику может казаться, что между круглыми числами нет промежуточных, что круглые десятки непосредственно следуют один за другим. Чтобы избежать подобных ошибок, надо начинать работу над первой сотней не с круглых десятков, а с нумерации. Кроме того, при изучении нумерации необходимо пользоваться такими пособиями, которые иллюстрировали бы не только группировку единиц при счете, но и натуральный ряд в целом.

Группировку единиц удобнее всего показать на палочках, которые при счете связываются в пучки-десятки. В процессе счета ученик видит, как из единиц образуются десятки. Однако, досчитав до 100, он остается при одних десятках — натуральный ряд исчезает. Поэтому, наряду с палочками, следует применять „ленту ста“ — метр, разделенный на дециметры и сантиметры. Дециметры окрашены в разный цвет, что позволяет видеть группировку сантиметров в десятки и вместе с тем не мешает считать сантиметры по одному. Круглые числа выступают таким образом не в отрыве от числового ряда, а как необходимые звенья этого ряда.

Применение метра, разделенного на сантиметры, тем более уместно, что по программе в связи с изучением нумерации до 100 дети должны познакомиться с новой мерой — сантиметром. Название „дециметр“ еще не вводится. Поэтому дети считают просто сантиметры и десятки сантиметров или, еще проще, „квадратики“ по одному и десятками.



Интересную разновидность такой ленты представляет собою шнур, по которому свободно передвигается сотня свернутых из бумаги трубочек. Длина каждой трубочки — сантиметр. Трубочки окрашены десятками попеременно в красный и зеленый цвет. При счете ученик постепенно сдвигает все 100 трубочек в один сплошной ряд.[1]

Пользуясь пособиями, учащиеся выполняют следующие упражнения.

1) Счет до 100 по одному. Особое внимание должно быть обращено при этом на образование каждого круглого числа из предыдущего. Дети должны понять, что за числом 29 следует не двадцать — десять, а тридцать, за числом 39 — сорок и т. д.

2) Счет круглыми десятками. Считая по одному, дети познакомились с новыми для них числами — тридцать, сорок, пятьдесят и т. д. и с их местом среди остальных чисел натурального ряда. Необходимо еще и еще раз повторить новые названия и показать соответствующие им числа на палочках и на „ленте".

3) Усвоение десятичного состава чисел первой сотни. Усвоить десятичный состав этих чисел значит: а) уметь образовать двузначное число из десятков и единиц и б) уметь разложить двузначное число на десятки и единицы. Учитель предлагает составить число из 5 десятков и 4 единиц. Ученик берет 5 пучков и 4 палочки, называет число и показывает его на „ленте". Или же учитель называет число сорок восемь. Ученик говорит, сколько в этом числе десятков и единиц, составляет его из пучков и палочек и показывает на „ленте".

4) Называние чисел первой сотни в порядке натурального ряда и в обратном порядке. Некоторую трудность представляют собою при этом переходы от одного десятка к другому. Преодолеть эту трудность помогают следующие упражнения. Учитель называет число, например, 47, а ученик называет следующие числа, пока не дойдет до круглого числа: 47, 48, 49, 50. Или же учитель задает число, например, 62, а ученик называет предыдущие числа в обратном порядке: 62, 61, 60, 59.

Благодаря группировке единиц в десятки, мы не выдумываем новых названий для круглых десятков — мы пользуемся теми же числительными, которые применяются при счете простыми единицами до 10. В рус-

---

[1] Идея пособия из бумажных трубочек заимствована у профессора П. А. Компанийца.

ском языке только два названия — сорок и девяносто не подчиняются общему правилу.

Письменная нумерация тоже связана с десятичной группировкой единиц при счете. Благодаря группировке единиц в десятки, мы обозначаем круглые десятки теми же цифрами, что и простые единицы. При этом, чтобы отличить десятки от простых единиц, мы пользуемся принципом поместного значения цифр. Дети познакомились практически с этим принципом, когда проходили письменную нумерацию в пределах двадцати. Придется еще раз обратиться к простейшему абаку[1] и на нем пояснить запись двузначных и круглых чисел в пределах ста.

Начинать надо именно с записи двузначных чисел. Надо напомнить детям, что единицы пишут на первом месте справа, десятки — на втором. Что же касается нуля, то для него нет особого места: он пишется на месте единиц или на месте десятков (число 100), если их нет в данном числе.

При изучении письменной нумерации упражнения располагают в следующем порядке.

1) Обозначение на абаке двузначных чисел. В верхние карманы абака учитель вставляет пучки-десятки и отдельные палочки. Под каждым карманом ученик ставит соответствующую цифру и называет число. Затем порядок меняется. Учитель ставит цифры, а ученик — пучки и палочки. Полезно сопоставлять такие числа, как 24 и 42, 35 и 53 и т. д. В этом случае вполне уместно перемежающееся противопоставление.

2) Обозначение на абаке круглых чисел. В карманы абака вставлены 2 пучка и 9 палочек. Под ними цифрами обозначено число 29. Учитель добавляет в правый карман еще одну, десятую, палочку, связывает десяток в пучок и переносит его в левый карман. Совместно с классом решается вопрос: какие цифры следует теперь вставить в нижние карманы. Так вводится запись числа 30 и других круглых чисел. Число 100 записывается без помощи абака. В нем 10 десятков, а отдельных единиц нет. На их месте пишут нуль.

3) Запись чисел под диктовку. Учитель на-

[1] Это пособие изображено на стр. 226.

зывает всевозможные числа первой сотни. Кто-нибудь из учеников пишет числа на доске, остальные в тетрадях. И в этом случае среди двузначных чисел следует обратить внимание на такие пары, как 45 и 54, 26 и 62 и т. п.

4) Чтение чисел по задачнику. Прочитав число, ученик должен объяснить, что обозначает каждая цифра в зависимости от места, которое она занимает. Например, прочитав число 47, ученик говорит: в этом числе 7 единиц, так как цифра 7 стоит на первом месте, и 4 десятка, так как цифра 4 стоит на втором месте. При чтении круглых чисел ученик объясняет: в этом числе нет единиц; на их месте стоит нуль.

Знакомясь впервые с письменной нумерацией первой сотни, дети пишут иногда 506 вместо 56 или 307 вместо 37 и т. п. Это бывает в тех случаях, когда учитель не пользуется абаком и торопится ввести запись круглых чисел без соответствующих объяснений. Следует, наоборот, остановиться прежде всего на общем случае, т. е. познакомить детей с записью двузначных чисел. Только после этого будет сознательно усвоен частный случай, когда в записи числа на месте единиц стоит нуль.

Познакомив детей с устной и письменной нумерацией в пределах ста, можно перейти к изучению действий над круглыми десятками.

В I классе проходят сложение и вычитание круглых десятков, а также умножение и деление круглых десятков на однозначное число.

Во всех этих случаях приходится прибегать к превращению единиц в десятки и к последующему раздроблению полученного результата в единицы. Например:

$$30 + 20 = 3 \text{ дес.} + 2 \text{ дес.} = 5 \text{ дес.} = 50$$
$$90 - 50 = 9 \text{ дес.} - 5 \text{ дес.} = 4 \text{ дес.} = 40$$
$$20 \times 3 = 2 \text{ дес.} \times 3 = 6 \text{ дес.} = 60$$
$$80 : 4 = 8 \text{ дес.} : 4 = 2 \text{ дес.} = 20$$

Учащиеся записывают только данные числа и результат — объяснения даются устно.

В I классе можно умножать 10 на 4 и 20 на 3, так как в этих случаях мы оперируем целыми десят-

ками. Но было бы преждевременно умножать 4 на 10 и 3 на 20, так как счет четверками и счет тройками не предусмотрен программой I класса. В самом деле, при счете четверками ученику пришлось бы справляться с такими трудными случаями, как 28 + 4, 32 + 4, 36 + 4, а при счете тройками со случаями 18 + 3, 21 + 3, 24 + 3 и 27 + 3. Это материал II класса.

В I классе можно делить 60 на 6 равных частей и 80 на 4 равные части, но нельзя делить 60 по 6 и 80 по 4, так как в этом классе изучается только деление на равные части. Нельзя также делить 60 на 10 равных частей или 80 на 20 равных частей. Первый случай (60 : 10) проходят во II классе в связи с табличным делением, а второй случай (80 : 20) — в связи с внетабличным.

Итак, в I классе можно делить круглые десятки только на равные части и притом только на однозначное число.

Сложение и вычитание в пределах ста изучается во II классе. Весь этот материал можно разделить на три части. В *первую часть* входят все случаи сложения без перехода через десяток и соответствующие случаи вычитания. Во *вторую часть* следует отнести все случаи дополнения до круглых десятков и соответствующие случаи вычитания. Наконец, в *третьей части* будем иметь сложение и вычитание с переходом через десяток.

В следующей таблице содержится материал сложения и вычитания с подразделением на три указанные части:

I	II	III
1) 20 + 7; 27 — 7 7 + 20	1) 26 + 4; 30 — 4 4 + 26	1) 28 + 7; 35 — 7 7 + 28
2) 35 + 20; 55 — 20 20 + 35	2) 26 + 24; 50 — 24	2) 38 + 47; 85 — 47
3) 26 + 3; 29 — 3 3 + 26		
4) 32 + 24; 56 — 24		

Как видно из этой таблицы, при планировании сложения постоянно практикуется перестановка слагаемых: $20+7$ и рядом $7+20$; $26+4$ и тут же $4+26$ и т. д. Что касается вычитания, то из двух соответствующих случаев параллельно со сложением можно вводить только один, более легкий. Например, параллельно с двумя случаями сложения $35+20$ и $20+35$ можно дать 55—20, но не следует давать $55-35$. Такие примеры встретятся позднее, когда придется из двузначного вычитать двузначное. Сюда же войдет и такой вариант вычитания, как 29—26, тоже позднее, чем соответствующий случай сложения $(3+26)$.

Фактически материал располагается более компактно: сначала вводятся, в связи с нумерацией, простейшие случаи сложения и вычитания $(20+7,\ 27-7)$, затем даются все случаи сложения, за исключением третьей группы; после этого — все соответствующие случаи вычитания. Наконец, проходят раздельно сложение и вычитание с переходом через десяток.

В работе с учащимися для иллюстрации вычислений пользуются палочками. При сложении оба слагаемых могут быть представлены наглядно. При вычитании конкретизируется только уменьшаемое, поскольку вычитаемое входит в уменьшаемое как его часть.

Решая примеры первой группы, ученик должен понять, что при сложении десятки относят к десяткам, единицы к единицам, а при вычитании десятки отнимают от десятков, единицы — от единиц.

Если второе слагаемое или вычитаемое — двузначное число, надо с самого начала приучить детей применять прием последовательного сложения и последовательного вычитания, не разлагая первого слагаемого и уменьшаемого на разрядные слагаемые. Вот как объясняют дети эти приемы:

$$\begin{array}{l} 32+24=\ ? \\ \hline 32+20=52 \\ 52+\ \ 4=56 \\ \hline 32+24=56 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l} 56-24=\ ? \\ \hline 56-20=36 \\ 36-\ \ 4=32 \\ \hline 56-24=32 \end{array}$$

Правда, в этих случаях можно было бы применить и поразрядное сложение и вычитание. Однако, если вычитаемое содержит больше простых единиц, чем уменьшаемое, то такой прием окажется непригодным. Лучше поэтому с самого начала создавать у детей привычку не разлагать на десятичные группы уменьшаемое, а во избежание недоразумений поступать аналогичным образом и при сложении.

Вообще, надо следить за тем, чтобы дети начинали вычисления не с единиц, а с десятков, т. е. чтобы они не пользовались письменными вычислительными приемами. Начав вычисление с единиц, ученик перестает думать о числах — все его внимание направляется на цифры, что может быть причиной нелепых ошибок. При решении примера 85—4 ученик II класса, правда, неуспевающий, действовал так: $5-4=1$; $8-4=4$; $1+4=5$; ответ 5. Дело происходило в четвертой четверти. Тем не менее пришлось прибегнуть к палочкам, чтобы навести ученика на верный путь.

При решении примеров второй группы следует пояснить образование нового десятка при сложении и необходимость раздробления десятка в единицы при вычитании. Приемы эти поясняются, как и раньше, на палочках. В более трудных случаях, когда второй компонент — двузначное число, применяется прием последовательного сложения и прием последовательного вычитания. Вот как объясняют учащиеся эти приемы:

$$\begin{array}{l} 26+24=? \\ \hline 26+20=46 \\ 46+\ \ 4=50 \\ \hline 26+24=50 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l} 50-24=? \\ \hline 50-20=30 \\ 30-\ \ 4=26 \\ \hline 50-24=26 \end{array}$$

Те же приемы последовательного сложения и последовательного вычитания применяются к примерам последней группы:

$$\begin{array}{l} 28+7=? \\ \hline 28+2=30 \\ 30+5=35 \\ \hline 28+7=35 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 35-7=? \\ \hline 35-5=30 \\ 30-2=28 \\ \hline 35-7=28 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 38+47=? \\ \hline 38+40=78 \\ 78+2+5=85 \\ \hline 38+47=85 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 85-47=? \\ \hline 85-40=45 \\ 45-5-2=38 \\ \hline 85-47=38 \end{array}$$

К последнему примеру на сложение, ввиду его громоздкости, можно применить поразрядное сложение:

$$38 + 47 = (30 + 40) + (8 + 7) = 70 + 15 = 85$$

Последний, самый трудный пример на вычитание можно решать, кроме обычного, способом уравнивания единиц:

$$85 - 47 = 85 - 45 - 2 = 40 - 2 = 38$$

Учащиеся II класса заканчивают сложение и вычитание в пределах 100 к концу первой учебной четверти. Однако, в дальнейшем следует постоянно возвращаться к этим действиям, чтобы добиться беглости в применении соответствующих вычислительных приемов.

Порядок изучения таблицы умножения и табличного деления

Во второй четверти, закончив работу над сложением и вычитанием в пределах ста, учащиеся переходят к изучению умножения и деления.

Различают табличное и внетабличное умножение и деление.

Таблица умножения — это расположенная в определенном порядке совокупность всех случаев умножения однозначных чисел, взятых по два. Таковы, например, следующие случаи: 5×7, 3×4, 3×6 и т. д. К ним обычно присоединяют умножение каждого однозначного числа на 10, а именно 4×10, 7×10 и т. д.

Соответствующие случаи деления тоже называют табличными. Таковы, например, $35:7$, $12:4$, $54:6$ и т. д. К ним присоединяется деление круглых десятков на однозначное число: $40:4$, $60:6$, $70:7$ и т. д.

Остальные случаи умножения, т. е. умножение двузначного на однозначное и наоборот, а также все соответствующие случаи деления являются внетабличными.

Во II классе, в начале второй четверти, дети дорабатывают непройденное в I классе деление по содержанию, а затем приступают к изучению табличного умножения и деления в пределах 100.

В I классе, как это было разъяснено на стр. 230 таблица умножения строится по постоянному мно-

...этого

...определению, умно-

...действие, посредством которого одно число повторяют слагаемым столько раз, сколько единиц в другом числе. Таким образом, основой умножения является счет равными группами. С такого счета придется начинать изучение каждого табличного ряда. Естественно, начав ряд, пройти его до конца, т. е., например, умножив 4 на 2, 3, 4 и 5, продолжать умножать то же число на 6, 7, 8, 9 и 10. Если бы мы решили поступать наоборот, т. е. умножать все числа первого десятка на один и тот же множитель 4, пришлось бы строить не один ряд, а девять разных рядов: 2×4, 3×4, 4×4, ..., 9×4, 10×4, начиная каждый раз набирать слагаемые заново. Наоборот, при постоянном множимом каждый следующий случай умножения вытекает из предыдущего, опирается на него. Если мы умеем 4 умножить на 6, то нетрудно повторить число 4 слагаемым 7 раз, затем 8 раз и т. д.

Итак, таблицу умножения мы будем строить по постоянному множимому, располагая материал в порядке натурального ряда: умножение по 2, по 3, по 4, по 5, по 6 и т. д. Возникает вопрос: как изучать в таком случае табличное деление?

Напомним прежде всего, что в начальной школе нельзя на первых порах рассматривать два вида деления как одно действие деления. Правда, теоретическая арифметика, исходя из формальных соображений, обобщает на основе переместительного свойства понятия множимого и множителя. Тем самым отпадает необходимость различать два вида деления — они сливаются в одно действие деления.

Иначе обстоит дело во II классе начальной школы, как это разъяснено в одной из предшествующих глав.[1] Различение множимого и множителя представляет собою значительную трудность для ребенка семи-восьми лет. Тем осторожнее приходится подводить его к обобщению этих понятий. Но если нельзя на первых порах обобщать понятия множимого и множителя, тем более несвоевременно обобщать два вида деления в

[1] Глава „Основные арифметические понятия в начальной школе". Стр. 22.

одно действие деления. Этот вывод относится пı всего к программе I класса, где, как известно, сматривается только один вид деления — делени равные части.

При ознакомлении учащихся с делением по со жанию на втором году обучения мы также воздер ваемся в начале не только от обобщения двух ві деления, но даже от их сопоставления. На первых по необходимо добиться четкого различения деле. на равные части и деления по содержанию, так ı только на основе различения можно будет в дальнейш подойти к их обобщению.

Как же следует, ввиду всего сказанного, проходи табличное деление в пределах первой сотни?

Деление по содержанию можно было бы, не нару шая логики предмета и не прибегая к преждевремен ному обобщению множимого и множителя, проходиті параллельно с умножением. Усвоив, например, умножение числа 4 на все числа первого десятка, дети могли бы без особого труда и на основе тех же наглядных образов узнавать, сколько раз надо повторить по 4, чтобы получить 24, 28, 32 и т. д. Однако, совместное изучение умножения и деления могло бы, во-первых, привести к нечеткому различению соответствующих понятий и, во-вторых, при таком расположении материала пришлось бы более трудный вид деления изучать раньше, чем более легкий, что противоречит общепедагогическому требованию идти от легкого к трудному, а не наоборот. Трудность деления по содержанию дает себя знать особенно при решении задач. Легче решать задачи на нахождение части числа и на уменьшение в несколько раз, чем на деление по содержанию. Кроме того, начав с деления по содержанию, мы ставим под вопрос естественный порядок расположения задач, связанных с понятием кратного отношения. Порядок этот сводится к следующему: сначала, в связи с умножением, решаются задачи на увеличение числа в несколько раз; затем, в связи с делением на равные части — задачи на уменьшение числа в несколько раз и, наконец, в связи с делением по содержанию — задачи на кратное сравнение. Выпустив среднее звено — деление на равные части — мы разры... систему, вносим путаницу в порядок ...

Если мы предпочтем не связывать умножение с делением по содержанию, то нельзя ли связать умножение с делением на равные части?

Вспомним, что материал умножения мы располагаем по постоянному множимому. В этих условиях, научившись умножать, например, число 3 на 7, 8 и 9, ученик может тотчас же перейти к делению чисел 21, 24 и 27 по 3, но это отнюдь не значит, что он тем самым сумеет разделить каждое из этих чисел на 3 равные части. Чтобы разделить 24 на 3 равные части, надо представить себе число 24 состоящим не из троек, чему мы учили детей, а из восьмерок, чему мы их не учили. Единственный способ подвести учащихся к делению на равные части состоит в том, чтобы обратиться к переместительному свойству умножения и показать, что $3\times 8 = 8\times 3$, а затем связать деление числа 24 на 3 равные части с умножением 8 на 3. Однако, допустимо ли вводить на скорую руку перестановку сомножителей? Восьмилетний школьник охотно поверит учителю на слово, что $3\times 8 = 8\times 3$, $3\times 9 = 9\times 3$ и т. д. Но толкать ученика на этот путь *формального, автоматического* усвоения нового понятия — значит грубо нарушать принцип сознательности, который требует целесообразного использования наглядности и бережного обращения с логическим мышлением ученика.

Что представляет собою применяемая в этих случаях наглядность? Пояснение переместительного свойства при помощи прямоугольника, составленного из квадратиков, которые можно считать двумя способами — по рядам и по столбцам, является образцом так называемой „слепой" наглядности, на основе которой создается только видимость понимания, недопустимый „эрзац" сознательности. Получается нечто вроде „магического прямоугольника", напоминающего „магический квадрат". Ребенок не может понять, что в первом случае равенство произведений вытекает из свойства умножения, а во втором случае равенство результатов сложения создано искусственным подбором чисел.

На самом деле сущность переместительного свойства раскрывается посредством двоякого способа умножения чисел. Например:

$$1)\ 4\times 7 = 4\times (1+1+1+1+1+1+1) = \\ = 4+4+4+4+4+4+4$$

2) $4 \times 7 = (1 + 1 + 1 + 1) \times 7 = 7 + 7 + 7 + 7 = 7 \times 4$

В первом случае мы пользуемся приемом разложения на слагаемые множителя, во втором случае — множимого. Из сопоставления приведенных способов вытекает интересующее нас равенство: $4 \times 7 = 7 \times 4$.

Такое сложное умозаключение превышает возможности ученика II класса. Приходится идти другим, чисто практическим путем — вводить перестановку сомножителей не в процессе работы над таблицей умножения, а только после ее завершения. Пока таблица не пройдена, добросовестный учитель должен был бы требовать от своего питомца, вместо формального усвоения равенства $4 \times 7 = 7 \times 4$, следующего рассуждения: „Я умею считать четверками; я знаю, что по 4 взять 7 раз, будет 28; но я еще не умею считать семерками и не могу сказать, сколько получится, если по 7 взять 4 раза". Поэтому не следует давать учащимся просто для запоминания отдельные табличные произведения, например, 7×3, 8×3 и 9×3, в отрыве от соответствующих табличных рядов. Это нарушает общепринятое требование располагать все случаи умножения по постоянному множимому, когда ученик самостоятельно выводит каждый новый случай умножения из предыдущего. Иначе получается запоминание без понимания.

Итак, если нежелательно связывать на первых порах изучение таблицы умножения с делением по содержанию и совершенно недопустимо сразу же вводить деление на равные части, то приходится отказаться от совместного изучения этих действий. Ссылка на взаимосвязь между умножением и делением, которую действительно необходимо всемерно подчеркивать и которая якобы лучше осознается учащимися при совместном изучении умножения и деления, является малоубедительной. При изучении умножения приходится подчеркивать, в первую очередь, связь умножения с действием сложения. Что же касается связи между умножением и делением, то устанавливать эту связь надо не тогда, когда изучается умножение, а тогда, когда изучается деление. Чем лучше и тверже дети усвоят умножение, тем больше пользы можно будет извлечь из взаимосвязи между делением и умножением. Достаточно будет научить детей при делении на равные части находить по памяти множимое, а при делении по содержанию — множитель. Но для этого, разумеется, они должны знать наизусть таблицу умножения и состав каждого табличного числа из однозначных множителей, что достигается лишь к концу работы над табличным умножением. Нет также оснований бояться однообразия в работе над умножением. Разнообразие обеспечивается прежде всего решением новых вариантов задач, связанных с увеличением числа в несколько раз. Кроме того, занимаясь умножением, необходимо попутно повторять оба вида деления на пройденном числовом материале.

Итак, наилучшим является следующий порядок изучения табличного умножения и деления. Сначала надо пройти всю таблицу умножения, располагая материал по постоянному множимому и пользуясь в это время выражениями „по 4 взять 7 раз" или же „4 умножить 7", что соответствует записи 4×7. Затем следует познакомить детей с переместительным свойством умножения, что теперь возможно, поскольку все случаи в отдельности пройдены. После этого можно перейти к делению на равные части.

Каждый этап в изучении этого действия предполагает знание наизусть соответствующих случаев табличного умножения, расположенных по постоянному множителю. Такую перегруппировку материала умножения нет надобности производить сразу в отношении всех табличных рядов. Просто перед каждым новым этапом в изучении деления учащиеся выписывают и повторяют ту часть таблицы умножения, на которую придется опираться при делении. Попутно вводится сокращенное чтение таблицы умножения. Так, перед делением на 3 равные части дети повторяют умножение на 3 в такой формулировке: трижды пять, трижды шесть, трижды семь и т. д.; перед делением на 4 равные части — четырежды шесть, четырежды семь и т. д.

После деления на равные части необходимо остановиться на делении по содержанию; каждому этапу в изучении этого вида деления предпосылается соответствующая часть таблицы умножения, расположенная по постоянному множимому.

Раздельное изучение табличного умножения и деления отнюдь не исключает применения „перемежающегося противопоставления". Надо только правильно выбрать материал для противопоставления. Не следует умножение противопоставлять делению, но весьма полезно, наоборот, деление противопоставлять умножению. Полезно также сопоставлять выражения „умножить на столько-то“ и „увеличить на столько-то“; „разделить на столько-то“ и „уменьшить на столько-то“.

Заметим в заключение, что попытка восстановить совместное изучение таблицы умножения и табличного деления представляет собою в некотором роде реставрацию метода изучения чисел, немецкого метода, давно и решительно отвергнутого передовыми русскими методистами. Вникнем поглубже в этот вопрос.

Чтобы пройти оба вида деления совместно с умножением, сторонники такой системы вводят преждевременно перестановку сомножителей. Фактически дело сводится к простому запоминанию состава табличных чисел из табличных сомножителей. Так, чтобы делить 21 на 3 и по 3, надо предварительно усвоить состав числа 21 из сомножителей 3 и 7; чтобы делить 24 на 4 и по 4, надо знать состав числа 24 из сомножителей 4 и 6 и т. д. Но именно так и строили работу сторонники монографического метода: они не занимались изучением действий; действия, по их мнению, должны были сами собой вытекать из всестороннего изучения каждого числа.

Проходить не только деление по содержанию, но и деление на равные части совместно с умножением, расположенным по постоянному множимому и наскоро перестроенным по постоянному множителю — значит некоторым образом возвращаться обратно к временам Грубе и Евтушевского.

Программа Министерства просвещения РСФСР указывает только объем материала по каждому разделу курса арифметики, не предрешая порядка изучения той или иной темы в школе. Что касается стабильного учебника, то в нем работа над табличным умножением и делением спланирована следующим образом: после каждого табличного ряда (например, после умножения по 4) даются отдельно сначала соответствующая таблица деления по содержанию (например, таблица деления по 4), а затем аналогичная таблица деления на равные части (например, таблица деления на 4 равные части). Если строго придерживаться порядка, который намечен учебником, то каждый раз при переходе к новой таблице деления на равные части пришлось бы включать новые случаи умножения, взятые в отрыве от соответствующих табличных рядов (например, при делении на 4 равные части случаи 6×4, 7×4, 8×4 и 9×4), т. е. вступать частично на путь механического запоминания. Однако, известным достоинством учебника является тот факт, что весь материал распадается на отдельные параграфы: все три таблицы, на каждом этапе их изучения, даются раздельно. Такое четкое расчленение материала позволяет планировать работу над табличными действиями по-разному. Кроме раздельного изучения, которое представляется нам наилучшим, можно также пройти сначала все случаи умножения и деления по содержанию совместно, а затем перейти к делению на равные части, или, закончив умножение, проходить совместно оба вида деления.

Приемы работы над табличным умножением и делением

Исходным при изучении каждого табличного ряда является прием, раскрывающий связь между умножением и сложением. Это так называемый счет равными группами, который предшествует специфическим приемам умножения, основанным на законах этого действия.

В дальнейшем шире всего используется прием разложения множителя, основанный на распределительном свойстве умножения. Прием этот удобен в двух случаях: когда множитель можно разложить на равные слагаемые ($7 \times 6 = 7 \times 3 + 7 \times 3$), или же когда при умножении на одно из слагаемых, а иногда и на оба, получаются круглые числа ($6 \times 8 = 6 \times 5 + 6 \times 3$; $4 \times 10 = 4 \times 5 + 4 \times 5$). Неудобен этот прием в том случае, когда он приводит к сложению с переходом через десяток ($7 \times 8 = 7 \times 4 + 7 \times 4 = 28 + 28$). Неудобное разложение множителя следует заменить более удобным ($7 \times 8 = 7 \times 5 + 7 \times 3 = 35 + 21$).

Теоретически рассуждая, наряду с разложением множителя, можно было бы применить разложение множимого ($9 \times 4 = 5 \times 4 + 4 \times 4$). Однако, учащиеся не склонны пользоваться этим приемом, быть может потому, что он разрушает образ, который создается с самого начала при счете равными группами. В самом деле, ученик представляет себе, например, ряд девяток, которые нетрудно соединять по две или по четыре. Гораздо труднее построить **новые ряды** из пятерок и четверок, совсем не похожие на первоначальный ряд из четырех девяток.

Существуют еще два приема, которые применимы в работе над табличным умножением, но которые также труднее разложения множителя: это приемы **округления множимого** и **округления множителя**. Округлением множимого можно пользоваться при умножении **по** 9, а округлением множителя — при умножении **на** 9. Приведенный выше пример (9×4) можно было бы решить, округляя множимое ($9 \times 4 = 10 \times 4 - 4$), а при обратном порядке сомножителей пришлось бы округлять множитель ($4 \times 9 = 4 \times 10 - 4$). Округление множимого затрудняет детей по той же причине, по которой их затрудняет разложение множимого: вместо ряда, состоящего из девяток, на который все время направлено внимание учащихся, приходится представить себе другой, новый ряд, состоящий из десяток. Округление множителя не нарушает того образа, а вместе с тем и того стереотипа, который возник при счете равными группами: набирали четверки; набрали 9 четверок, добавили еще одну — десятую; получилось число 40, содержащее лишнюю четверку, ее следует отнять. Однако, и этот прием все же труднее приема разложения множителя. Проще воспользоваться разложением множителя и в том случае, когда он равен 9 ($4 \times 9 = 4 \times 5 + 4 \times 4$). Что касается приема округления **множимого**, когда оно равно 9, то этот прием станет понятнее учащимся, если его проиллюстрировать на классных счетах. Так, чтобы пояснить способ умножения 9 на 4, надо отложить по 10 шариков на четырех проволоках, а затем на каждой из них отодвинуть в сторону по одному шарику. Учащиеся видят, что в каждом ряду была сначала отложена лишняя единица, а всего их четыре. Отсюда $9 \times 4 = 10 \times 4 - 4$.

По мере прохождения таблицы можно частично применять прием перестановки сомножителей, если он подготовлен предшествующей работой. Так, при умножении 6 на 4 и на 5 можно сопоставить эти случаи с умножением 4 на 6 и 5 на 6; при умножении 7 на 3, 4, 5 и 6 можно точно также напомнить детям умножение чисел 3, 4, 5 и 6 на 7 и т. д. В наиболее выгодных условиях окажется последний табличный ряд — умножение по 9, когда весь предыдущий материал уже усвоен. Однако, такого попутного сопоставления недостаточно. Необходимо после окончания всей таблицы уделить нарочитое внимание переместительному свойству умножения. Пользуясь прямоугольником, составленным из квадратиков, следует объяснить, что умножение можно выполнять двумя способами. Так, например, глядя на прямоугольник, в котором 4 ряда квадратиков, по 6 квадратиков в каждом ряду, учащиеся считают четверки по столбцам — это один способ, или же каждый из четырех квадратиков первого столбца повторяют 6 раз — это второй способ ($1 \times 6 + 1 \times 6 + 1 \times 6 + 1 \times 6 = 6 + 6 + 6 + 6 = 6 \times 4$) Таким образом они приходят к выводу, что $4 \times 6 = 6 \times 4$.

Переместительное свойство умножения следует также продемонстрировать на задачах. Даются две задачи, которые отличаются только порядком сомножителей. Например:

1) Сколько килограммов чернослива в 6 ящиках, если в каждом из них по 8 *кг*?

2) Сколько килограммов чернослива в 8 ящиках, если в каждом из них по 6 *кг*?

Ответ в обеих задачах один и тот же, так как $8 \times 6 = 6 \times 8$.

В процессе изучения таблицы учащиеся употребляли выражения: „по 6 взять 7 раз“, „по 8 взять 5 раз“ и т. д., или же „6 умножить на 7“, „8 умножить на 5“ и т. д. В это время важно было подчеркивать место множимого и множителя, не допускать расхождения между записью и чтением таблицы.

После знакомства с переместительным свойством умножения вводится удобное с мнемонической точки зрения краткое чтение таблицы: трижды восемь, семью девять и т. д. Выражение „по 7 взять 5 раз“ соответствует образному мышлению детей. Выражение „7 умножить на 6“ носит отвлеченный характер, но сохраняет тот порядок слов, который соответствует конкретным образам, поясняющим умножение. Выражение „шестью семь“ воспринимается вне связи с конкретным образом и даже вне связи с тем значением, которое придается множимому и множителю в самом определении умножения.

Краткое чтение таблицы (шестью семь, трижды восемь и т. д.) вводится в то время, когда весь материал пройден и осталось лишь окончательно выучить его наизусть. Разучивание таблиц, расположенных в данном случае по постоянному м н о ж и т е л ю, лучше всего предпосылать делению на равные части по мере прохождения этого действия. Нет надобности специально запоминать такие словосочетания как „шестью пять“ или „шестью четыре“; достаточно помнить выражения „пятью шесть“ и „четырежды шесть“. В этих условиях достаточно знать наизусть следующий материал:

2×2	3×3	4×4	5×5	6×6	7×7	8×8	9×9
3×2	4×3	5×4	6×5	7×6	8×7	9×8	
4×2	5×3	6×4	7×5	8×6	9×7		
5×2	6×3	7×4	8×5	9×6			
6×2	7×3	8×4	9×5				
7×2	8×3	9×4					
8×2	9×3						
9×2							

Для лучшего запоминания полезно повторять умножение в порядке табличных чисел.

21	**24**	25	**27**	**28**	**30**
32	35	36	40		
42	45	48	49	50	
54	**56**	60			
63	64	70			
72	80				
81	90				

Всего, как мы видим, надо помнить только 25 чисел. Из них не затрудняют учащихся круглые числа, произведения равных сомножителей, числа, кратные пяти, и те случаи умножения, когда числительные рифмуют ($6\times6=36$, шестью восемь — сорок восемь). За вычетом этого более легкого материала останется 11 табличных чисел (включая $36=9\times4$), к которым надо почаще возвращаться, чтобы добиться прочного усвоения. Учитель называет число, например, 42, а ученик отвечает: шестью семь — сорок два и т. п.

Обратимся теперь к *наглядным образам*, которые применяются для конкретизации табличного умножения.

Уже в I классе при иллюстрации умножения в пределах 20 мы не пользовались красочной, сюжетной наглядностью, уместной при знакомстве с действиями сложения и вычитания в пределах 10, но излишней при переходе к умножению. Во II классе и подавно наглядное пособие должно быть выбрано только с таким расчетом, чтобы зрительно отчетливо воспринималось равенство слагаемых и чтобы было удобно их пересчитывать. Этим требованиям лучше всего удовлетворяют *шарики классных счетов*, *ряды точек* на доске или в тетради, прямоугольник, составленный из *квадратиков* и, наконец, *ряды цифр*.

Все эти пособия дают возможность конкретизировать прежде всего *счет равными группами*, с чего начинается изучение каждого табличного ряда, а затем пояснить *группировку слагаемых* применительно к тому или иному случаю табличного умножения.

Поясняя группировку слагаемых на счетах, мы сдвигаем соответствующее число рядов вправо, оставляя часть из них слева. Ученик видит, что $6\times4=6\times2+6\times2$, или что $7\times6=7\times3+7\times3$. То же можно показать на точках, если часть из них будет сделана красным карандашом, а часть — синим. И ряды квадратиков, составляющие прямоугольник, можно соединить в группы, раскрасив их соответствующим образом. Наконец, пользуясь рядами цифр, можно выделить нужное число слагаемых, подчеркнув каждую группу или отделив группы одну от другой вертикальной чертой.

Рассмотрим этапы урока, на котором дети учатся *умножать* по 4.

На доске заранее написаны ряды цифр, поясняющие счет четверками. Против каждого такого ряда записан соответствующий случай табличного умножения.

4	$4 \times 1 =$
$4 + 4 =$	$4 \times 2 =$
$4 + 4 + 4 =$	$4 \times 3 =$
$4 + 4 + 4 + 4 =$	$4 \times 4 =$
$4 + 4 + 4 + 4 + 4 =$	$4 \times 5 =$
$4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 =$	$4 \times 6 =$
$4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 =$	$4 \times 7 =$
$4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 =$	$4 \times 8 =$
$4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 =$ и т. д.	$4 \times 9 =$

Учитель предлагает одному из учеников прочитать написанные справа примеры на умножение, не называя ответов, и объясняет, что цель урока — повторить те примеры, которые дети уже решали, и научиться решать остальные.

По вызову учителя один из учеников подходит к счетам и откладывает по четыре шарика на каждой проволоке, говоря: четыре; четыре да четыре — восемь; восемь да четыре — двенадцать и т. д.

Каждый раз учитель записывает сумму против соответствующего ряда слагаемых, а кто-нибудь из учащихся решает вслух соответствующий пример на умножение: по четыре взять один раз, получится четыре; по четыре взять два раза, получится восемь и т. д. Результаты умножения учитель записывает против соответствующих примеров в правом столбце.

Таким образом дети повторяют первую часть таблицы до случая 4×5 включительно.

Теперь начинается новый материал. Ученик у счетов откладывает шестую четверку и говорит: двадцать да четыре, получится двадцать четыре. Учитель пишет против соответствующего ряда число 24. Вызванный им ученик говорит: по 4 взять 6 раз, получится 24. Учитель записывает это число против примера $4 \times 6 =$. Затем он снова обращается к классу и предлагает объяснить, как получилось число 24. Ученики отвечают: по 4 взять 5 раз, получится 20; по 4 взять 1 раз, получится 4; 20 да 4, получится 24.

Тем же способом устанавливаются приемы умножения четырех на 7, 8, 9 и 10:

$$4 \times 7 = 4 \times 5 + 4 \times 2 = 20 + 8 = 28$$
$$4 \times 8 = 4 \times 5 + 4 \times 3 = 20 + 12 = 32$$

$$4 \times 9 = 4 \times 5 + 4 \times 4 = 20 + 16 = 36$$
$$4 \times 10 = 4 \times 5 + 4 \times 5 = 20 + 20 = 40$$

„Почему удобно каждый раз начинать с умножения четырех на 5?“ — спрашивает учитель. Ученики сами находят ответ на этот вопрос: умножать 4 на 5 они уже умеют, кроме того, при умножении четырех на 5 получается круглое число — 20, к которому легко прибавить второе слагаемое — 8, 12, 16, 20.

После тщательной работы над вычислительными приемами учитель стирает с доски ряды четверок и предлагает прочитать два раза таблицу умножения, записанную справа. Далее, он закрывает в этой таблице ответы, и ученики повторяют таблицу по памяти. Наконец, закрывается вся таблица, и дети еще раз отвечают ее наизусть, сначала подряд, а затем по вопросам учителя — вразбивку.

В заключение учитель снова открывает запись таблицы с ответами и предлагает ученикам переписать ее в тетради.

Когда таблица умножения пройдена и усвоена наизусть, можно перейти к делению на равные части, а именно: на 3, на 4, на 5, на 6 и т. д. равных частей.

В I классе, объясняя деление на равные части, мы пользуемся полной предметной наглядностью, связывая ее с некоторой сюжетной канвой, чтобы ученик понял необходимость деления, его смысл и прием (прием раздачи предметов по одному). То же относится к первоначальному знакомству с делением по содержанию. Возвращаться к этим исходным моментам теперь нет никакой надобности. Во II классе дети должны отчетливо представлять себе связь между делением и умножением и уметь пользоваться этой связью при делении.

Урок деления на 3 равные части проводится таким образом. В „устном счете“ дети повторяют умножение всех чисел первого десятка на 3. Иначе говоря, материал умножёния располагается по постоянному множителю.

Переходя к основной части урока, учитель предлагает прочесть без ответов примеры на деление, записанные заранее на доске.

3:3=	18:3=	
6:3=	21:3=	
9:3=	24:3=	
12:3=	27:3=	
15:3=	30:3=	

„Сегодня мы будем решать эти примеры",—говорит учитель. „Часть из них вы уже решали. Начнем с них".

Дети читают и решают первые пять примеров. Перед решением шестого примера учитель вызывает к доске двух учеников и предупреждает их, что первый будет писать слева примеры на умножение, а второй справа — соответствующие примеры на деление.

„Сколько получится, если 6 умножить на 3?" — спрашивает учитель.

Ученик отвечает полным ответом и записывает на доске $6 \times 3 = 18$.

Обращаясь ко второму ученику, учитель задает ему вопрос: „6 умножить на 3, получится 18; значит, сколько получится, если 18 разделить на 3 равные части?"

Ученик отвечает: „6 умножить на 3, получится 18; значит, 18 разделить на 3 равные части, получится 6".

Дальше ученики у доски ведут между собою диалог применительно к следующим случаям умножения и деления.

1-й ученик. 7 умножить на 3, получится 21.

2-й ученик. Значит, 21 разделить на 3 равные части, получится 7.

Учитель обращается к классу и предлагает раза два повторить это рассуждение.

Работа продолжается.

1-й ученик. 8 умножить на 3, получится 24.

2-й ученик. Значит, 24 разделить на 3 равные части, получится 8.

Ученики с мест повторяют это рассуждение. И т. д.

В заключение на доске появляется следующая запись:

$6 \times 3 = 18$	$18:3 = 6$
$7 \times 3 = 21$	$21:3 = 7$
$8 \times 3 = 24$	$24.3 = 8$
$9 \times 3 = 27$	$27:3 = 9$
$10 \times 3 = 30$	$30:3 = 10$

По мере решения этих примеров, учитель записывает ответы в заготовленную на доске таблицу деления.

Когда работа над всеми случаями деления закончена, ученики читают таблицу деления по записи на доске. Ответы сначала открыты, затем учитель их закрывает. Наконец, закрывается вся таблица, и дети повторяют ее наизусть подряд и по вопросам учителя — вразбивку.

В заключение учитель снова открывает запись таблицы с ответами, и ученики переписывают ее в тетради.

По тому же образцу проходят деление по содержанию.

Запись на доске будет теперь иметь такой вид:

$$
\begin{array}{ll}
3\times 6=18 & 18:3=6 \\
3\times 7=21 & 21:3=7 \\
3\times 8=24 & 24:3=8 \\
3\times 9=27 & 27:3=9 \\
3\times 10=30 & 30:3=10
\end{array}
$$

Диалог ученики должны вести в следующих выражениях.

1-й ученик. По 3 взять 6 раз, получится 18.

2-й ученик. Значит, 18 разделить по 3, получится 6.

1-й ученик. По 3 взять 7 раз, получится 21.

2-й ученик. Значит, 21 разделить по 3, получится 7. И т. д.

Как мы видим, материал умножения в этом случае снова располагается по постоянному множимому. Чтобы помочь детям правильно отвечать при делении, следует вернуться к образному выражению при умножении: не просто „3 умножить на 6“, а „по 3 взять 6 раз“. Отсюда, „18 разделить по 3“.

Когда оба вида деления пройдены в отдельности, необходимо их сопоставить на парных задачах и показать, что при одних и тех же числах получится одно и то же число в ответе, будем ли мы делить на равные части или по содержанию. Например:

1) Купили 8 *м* ситца за 56 руб. Сколько стоит 1 *м* ситца?

56 руб.:8 = 7 руб.

2) Купили несколько метров ситца на 56 руб. Метр ситца стоит 8 руб. Сколько купили метров ситца?

$$56 \text{ руб.} : 8 \text{ руб.} = 7$$

Мы делили те же числа и получили то же число в ответе, хотя в первом случае надо было 56 руб. разделить на 8 равных частей, а во втором случае — по 8 руб. В первом случае мы получили в ответе 7 руб., а во втором случае — отвлеченное число 7. В первом случае мы имеем деление на равные части, во втором случае — деление по содержанию.

В заключение напомним еще раз, что при изучении табличного умножения и деления дети знакомятся с теми видами простых задач, которые связаны с понятием кратного отношения. Кроме того, в это время вводятся задачи на нахождение части числа, о которых сказано подробнее в главе, посвященной вопросу об элементах дробей в начальной школе.

Внетабличное умножение и деление

В пределах первой сотни различают, как известно, табличное и внетабличное умножение, табличное и внетабличное деление.

Напомним, что табличными называются все случаи умножения однозначных чисел, взятых по два. Сюда же обычно относятся все произведения однозначных чисел на 10. Соответствующие случаи деления называются также табличными.

Все остальные случаи умножения и деления в пределах ста называются внетабличными.

Заканчивая табличное умножение, дети познакомились с переместительным свойством умножения и научились им пользоваться. Так, проще умножить 10 на 6, чем 6 на 10 или 5 на 8, чем 8 на 5. Применение приема перестановки сомножителей — первый шаг к обобщению понятий множимого и множителя. Необходимо еще раз подчеркнуть их равноправное положение по отношению к произведению, прежде чем переходить к внетабличному умножению. Усвоив переместительный закон умножения, учащиеся могут широко пользоваться им при внетабличном умножении на умножении 18 на 5 получается круглое число. Вообще же более трудными являются произведения, превышающие число 50. Впрочем, речь идет в данном случае не об отдельных примерах, а главным образом о приеме разложения множимого, который и должны усвоить дети.

Что касается запоминания наизусть внетабличных результатов, то во II классе было бы преждевременно задаваться такой целью. Хорошо, конечно, если в процессе работы дети усвоят некоторые произведения (например, 12×5, 15×4, 25×3, 25×4 и т. п.). Однако, опыт нарочитого заучивания всех внетабличных результатов, проведенный в трех школах, дал отрицательные результаты[1]. Ученик, плохо овладевший приемом, старался „вспомнить ответ“, не прибегая к вычислениям, но и это не всегда ему удавалось. Пришлось снова заняться вычислительными приемами, отложив „запоминание“ до III класса.

При умножении однозначного числа на круглые десятки надо сначала применить прием, основанный на распределительном законе умножения:

$$2 \times 20 = 2 \times 10 + 2 \times 10 = 20 + 20 = 40$$

В дальнейшем лучше пользоваться приемом перестановки сомножителей. В самом деле, нерационально умножать, например, 3 на 30, разлагая множитель на $10 + 10 + 10$. Проще умножить 30 на 3, чему дети научились еще в I классе.

Прием последовательного умножения, как уже отмечалось, недоступен учащимся II класса. Вводить его ради восьми случаев умножения на круглые десятки и подавно нет никакой надобности. Вот эти 8 случаев: 2×20, 3×20, 4×20, 5×20; 2×30, 3×30; 2×40 и 2×50. Дети прекрасно справляются с ними, пользуясь мысленно перестановкой сомножителей, что не мешает им при решении задач записывать действие с соблюдением той последовательности, которая диктуется сюжетом задачи.

Внетабличное умножение на двузначное изучается в той же последовательности, что и

---

[1] Опыт проводился в 210-й, 217-й и 221-й школах Куйбышевского района гор. Ленинграда.

умножение на однозначное, следует только множимое и множитель поменять местами.

При умножении однозначных чисел на числа второго десятка мы пользуемся приемом разложения множителя. Например:

$$4 \times 18 = 4 \times 10 + 4 \times 8 = 40 + 32 = 72$$

Перестановка сомножителей полезна только при умножении на числа второго и третьего десятка. Вот как пришлось бы умножать 4 на 23 и 3 на 32, не прибегая к перестановке данных чисел:

$$4 \times 23 = 4 \times 20 + 4 \times 3 = 4 \times 10 + 4 \times 10 + 4 \times 3 = \\ = 40 + 40 + 12 = 92$$

$$3 \times 32 = 3 \times 30 + 3 \times 2 = 3 \times 10 + 3 \times 10 + 3 \times 10 + \\ + 3 \times 2 = 30 + 30 + 30 + 6 = 96$$

Этот громоздкий прием можно заменить более экономным, если переставить сомножители:

$$4 \times 23 = 23 \times 4 = 20 \times 4 + 3 \times 4 = 80 + 12 = 92$$
$$3 \times 32 = 32 \times 3 = 30 \times 3 + 2 \times 3 = 90 + 6 = 96$$

При делении на однозначное число мы пользуемся приемом разложения делимого на такие слагаемые, которые легко делились бы на данное число:

$$84:6 = 60:6 + 24:6 = 10 + 4 = 14$$

В отдельных случаях, как это было и при умножении, применим прием последовательного деления, например:

$$72:6 = (72:2):3 = 36:3 = 12$$

Однако, этот прием следует отложить до III класса.

Деление на однозначное мы располагаем в точном соответствии с аналогичными случаями умножения: деление на 2, затем деление на 3, на 4 и т. д.

Деление на круглые десятки и на двузначное число удобнее рассматривать как деление по содержанию. При делении на такие числа приходится просто подбирать частное или, как говорят, „задаваться" цифрой частного и проверять ее умножением.

Деление на круглые десятки, особенно, если понимать его как деление по содержанию, не затрудняет учащихся.

Деление же на двузначное может быть успешно выполнено только в том случае, если ученик хорошо усвоил умножение двузначного на однозначное.

Рассуждение при делении на двузначное число сводится к следующему: 72 разделить по 18, получится 4, так как по 18 взять 4 раза, получится 72; 95 разделить по 19, получится 5, так как по 19 взять 5 раз, получится 95 и т. д.

Первая сотня в III классе

Работа по арифметике в III классе начинается с повторения первой сотни. Особое внимание следует уделить прежде всего сложению и вычитанию с переходом через десяток, а затем надо заняться табличным и внетабличным умножением и делением.

Позднее, уже при изучении первой тысячи, вводится табличное деление с остатком, которое необходимо предпослать письменному делению на однозначное число.

Выполняя деление с остатком, ученик подбирает частное и проверяет его умножением. Пусть дано 38 разделить на 5.

Ученик рассуждает так: 38 на 5 не делится; делится 35. Если 35 разделить на 5, получится 7. Ответ: 7 и 3 в остатке.

Действие записывается „в строчку“: 38:5 = 7 (ост. 3).

Внетабличное деление с остатком необходимо ввести перед делением многозначных чисел на двузначное число, т. е. самое позднее в начале третьей учебной четверти.

При внетабличном делении с остатком рассуждать приходится так же, как и при табличном. Дано 75 разделить на 6.

Ученик рассуждает: 75 на 6 не делится; делится 72. Если 72 разделить на 6, получится 12. Ответ: 12 и 3 в остатке.

Кое-какие сомнения и разногласия возникают в связи с вопросом о записи табличного и внетабличного деления с остатком. Некоторые учителя допускают при этом неправильное употребление знака равенства:

$$\begin{array}{l} \underline{75}:6=12 \\ \;\;3 \end{array}$$

Так писать нельзя, ибо 75:6 не равняется 12.

Остается старый, не вполне изящный с математической точки зрения, но все же более приемлемый и освященный традицией упомянутый способ записи „в строчку“:

$$75:6=12 \text{ (ост. 3).}$$

Чтобы учащиеся III класса могли осмыслить приемы умножения и деления на разрядное число (т. е. на круглые десятки и на круглые сотни), надо предварительно поупражнять их в последовательном умножении и последовательном делении на небольших числах.

Вернемся к тем примерам, которые пришлось признать слишком трудными для II класса. Даже в III классе нельзя обойтись в этих случаях без графической интерпретации.

Вот как можно пояснить детям прием последовательного умножения.

$15 \times 6 = ?$

15	15	15	15	15	15
30		30		30	
90					

$12 \times 8 = ?$

12	12	12	12	12	12	12	12
24		24		24		24	
48				48			
96							

Наглядное расположение чисел показывает, как в результате последовательного умножения получилось в первом случае произведение 90, а во втором случае — 96:

$$15 \times 6 = (15 \times 2) \times 3 = 30 \times 3 = 90$$
$$12 \times 8 = (12 \times 2) \times 2 \times 2 = (24 \times 2) \times 2 = 48 \times 2 = 96$$

Прием последовательного деления так же, как и умножения, приходится пояснять графически:

$68 : 4 = ?$

<table>
<tr><td colspan="4">68</td></tr>
<tr><td colspan="2">34</td><td colspan="2">34</td></tr>
<tr><td>17</td><td>17</td><td>17</td><td>17</td></tr>
</table>

$90 : 6 = ?$

<table>
<tr><td colspan="6">90</td></tr>
<tr><td colspan="2">30</td><td colspan="2">30</td><td colspan="2">30</td></tr>
<tr><td>15</td><td>15</td><td>15</td><td>15</td><td>15</td><td>15</td></tr>
</table>

При делении числа 90 на 6 можно начать с деления на 2 равные части, но удобнее делить сначала на 3 равные части, как и показано на чертеже.

Итак:

$$68:4=(68:2):2=34:2=17$$
$$90:6=(90:3):2=30:2=15$$

Усвоив приемы последовательного умножения и последовательного деления, учащиеся пользуются ими при решении примеров и задач. Особенно поучительным является решение обратных вопросов:

Как изменится число, если его увеличить в 3 раза, а полученное произведение — в 4 раза?

Как изменится число, если его уменьшить в 2 раза, а полученное частное разделить на 5?

Сюда же относятся такие задачи, как задача о двух поездах (см. стр. 146) и аналогичные задачи на деление.

Конспекты уроков на темы первой сотни

Конспект урока арифметики во II классе 4/XI 1953 г.

Тема урока. Повторение вычитания с переходом через десяток.

Цель урока. Закрепить пройденное и ввести прием уравнивания единиц при вычитании.

План урока.

I. Организационный момент.
II. Проверка домашнего задания.
III. Устные упражнения.
IV. Решение примеров на вычитание:
а) фронтальная работа,

б) самостоятельное решение примеров в тетрадях.

V. Задание на дом.

Оборудование урока.

1) Изображение на доске двух „магических квадратов“; 2) запись примеров; 3) запись домашнего задания.

Ход урока.

I. Учащиеся организованно входят в класс, занимают свои места и приготовляют тетради и задачники.

II. Дома дети решали задачу № ... и пример № ... (первый и второй столбики).

Учитель вызывает ученика к своему столу рассказать *по задачнику* решение задачи и примера. Остальные учащиеся следят по своим *тетрадям* за ответом товарища.

Дополнительные вопросы связаны с очередной темой (дети повторяют умножение и деление в пределах двадцати): Считай тройками до 18! Считай четверками до 20! Что больше и на сколько больше — 3×5 или 4×4?

За ответ ставится отметка.

III. Устные упражнения.

Учитель открывает нарисованный на доске „магический квадрат“.

Учитель. Посмотрите на этот квадрат. Сейчас вы узнаете, в чем состоит свойство этого квадрата.

19	26	21
24	22	20
23	18	25

Учитель проводит указкой сначала по числам первого ряда, затем по числам второго ряда и, наконец, по числам третьего ряда, предлагая детям складывать числа по рядам.

Учащиеся убеждаются, что при сложении получается каждый раз одно и то же число — 66.

Тем же способом они устанавливают, что при сложении чисел по столбцам тоже получается число 66.

Наконец, производится сложение чисел с тем же результатом и с угла на угол.

8	18	4
6	10	14
16	2	12

После этого учитель открывает второй квадрат и отмечает, что не все его клетки заполнены.

Учитель. Надо подобрать такие числа, чтобы и в этом квадрате при сложении чисел в любом направлении получался один и тот же ответ. Кто догадается, какой должен получаться ответ?

Ученик. Должно получаться число 30.

Учитель. Как вы это узнали?

Ученик. В левом столбце нет пустых клеток. Если сложить числа этого столбца, получается 30.

Учитель. Вставим пропущенные числа. Можно ли начать с нижнего ряда?

Ученик. Нельзя, так как в нижнем ряду две пустых клетки. Можно начать с верхнего или среднего ряда.

Учитель ставит указку на пустые клетки, а учащиеся называют соответствующее число и объясняют, как оно получилось. Например, в пустой клетке верхнего ряда должно стоять число 18, так как $8 + 4 = 12$, а $30 - 12 = 18$.

Дети вычисляют, а учитель записывает полученные ответы в соответствующих клетках.

После заполнения всех пустых клеток учащиеся складывают числа с угла на угол, чтобы проверить, получается ли при этом число 30.

IV. Решение примеров на вычитание.

Учитель пишет на доске пример: $63 - 27 = ?$

Учащиеся решают этот пример и рассказывают, как они вычисляли.

Учитель делает на доске развернутую запись вычислительного приема.

После этого он объясняет, что тот же пример можно решить иначе: от 63 отнять не 20, а 23. Тогда получается сразу круглое число, от которого остается отнять 4.

На доске получается запись:

$$63 - 27 = ?$$

$$\begin{array}{ll} 63 - 20 = 43 & \qquad 63 - 23 = 40 \\ 43 - \ \ 3 = 40 & \qquad 40 - \ \ 4 = 36 \\ 40 - \ \ 4 = 36 & \end{array}$$

$$63 - 27 = 36$$

Эту запись дети переписывают в свои тетради.

Учитель открывает примеры, заранее написанные на доске, и предлагает решить их в тетрадях, пользуясь любым способом вычисления.

Учащиеся решают следующие четыре примера:

$$64 - 46 = 18 \qquad 86 - 59 = 27$$
$$75 - 38 = 37 \qquad 92 - 64 = 28$$

При проверке ответов учитель предлагает ученикам давать подробные объяснения способов решения этих примеров, подчеркивая удобство способа уравнивания единиц.

V. Задание на дом: задача № ... и пример № ... (третий и четвертый столбики).

Конспект урока арифметики во II классе 1/III 1954 г.

Тема урока. Внетабличное деление на двузначное число (легкие случаи).

Цель урока. Научить детей подбирать частное в тех случаях, когда оно равняется числам 2 или 3.

План урока.

I. Организационный момент.
II. Повторение деления на круглые десятки.
III. Объяснение нового материала:
а) решение устной задачи,
б) решение примеров.
IV. Письменное решение составной задачи.
V. Задание на дом.

Примечание. 1 марта 1954 года падало на понедельник; поэтому в план урока не входит проверка домашнего задания.

Оборудование урока.

1) Запись на доске примеров на деление; 2) краткая запись задачи.

Ход урока.

I. Дети бесшумно занимают свои места и приготовляют все необходимое для урока арифметики.

II. Учитель предлагает детям решить устно следующие примеры:

$$60:30=2 \qquad 90:30=3 \qquad 60:20=3$$
$$40:20=2 \qquad 80:20=4 \qquad 100:50=2$$

В процессе работы выясняется, что в этих случаях удобнее пользоваться делением по содержанию, чем делением на равные части.

Первый, более удобный прием: $60=6$ дес.; $30=3$ дес.; 6 дес.:3 дес. $=2$; значит, $60:30=2$.

Второй прием: $60=30+30$; $30:30=1$; $30:30=1$; $1+1=2$, значит, $60:30=2$.

Примечание. При делении на круглые десятки преждевременно вводить во II классе прием последовательного деления, основанный на сочетательном свойстве этого действия.

III. Объяснение нового материала.

Учитель предлагает детям следующую задачу.

У мальчика 69 коп. Он хочет купить на эти деньги цветные карандаши. Карандаш стоит 23 коп. Хватит ли ему денег на покупку двух карандашей?

Ученик. Хватит, так как, если 23 коп. умножить на 2, получится 46 коп., а у мальчика 69 коп.

Учитель. Хватит ли этих денег на 3 карандаша?

Ученик. И на 3 карандаша денег хватит, так как если по 23 коп. взять 3 раза, получится как раз 69 коп.

Учитель. Итак, сколько карандашей можно купить на 69 коп., если каждый карандаш стоит 23 коп.? Как записать решение?

Ученик. 69 коп.:23 коп. $=3$. Ответ: 3 карандаша.

После этого дети переходят к решению примеров, которые были заранее написаны на доске:

36:18	72:24	74:37	51:17
48:16	58:29	84:28	92:46

Два первых примера решаются фронтально с подробным объяснением:

$18\times 2=36$; поэтому 36 разделить по 18, получится 2.

$16\times 3=48$; поэтому 48 разделить по 16, получится 3.

Остальные примеры учащиеся решают самостоятельно в своих тетрадях.

IV. Решение задачи.

Учитель сообщает задачу по записи на доске.

Задача.

52 *кг* яблок — по 26 *кг* в ящике
54 *кг* груш — по 18 *кг* „

Сколько было всего ящиков с фруктами?

Ученик повторяет задачу: „Магазин получил 52 *кг* яблок, по 26 *кг* в каждом ящике, и 54 *кг* груш, по 18 *кг* в каждом ящике. Сколько всего ящиков с фруктами получил магазин?"

После выделения главного вопроса задачи следует ее разбор и составление плана решения.

Решение задачи дети самостоятельно записывают в своих тетрадях:

Задача.

1) 52 *кг* : 26 *кг* = 2
2) 54 *кг* : 18 *кг* = 3
3) 2 ящ. + 3 ящ. = 5 ящ. Ответ: 5 ящиков.

V. Задание на дом: задача № ..., пример № ... (третий столбик) и № ... (пятый столбик).

Итоги работы над первой сотней

При переходе от второго десятка к первой сотне становится весьма актуальным вопрос о преемственности арифметических знаний и навыков. Если при изучении второго десятка дети встретили много совершенно новых вопросов, которые не могли быть затронуты в работе над первым десятком, то в концентре первой сотни им придется в целом ряде случаев наблюдать лишь дальнейшее развитие тех арифметических истин, с которыми они уже познакомились раньше. Тем важнее, в интересах сознательности обучения, подчеркивать общность этих истин при переходе от одного концентра к другому.

Продвижение до ста в области устной и письменной нумерации позволяет учащимся лучше понять роль десятка как сложной счетной единицы, роль места в записи двузначных чисел, роль нуля как нумерационного знака. В связи с этим дети усваивают новые термины: круглые десятки, однозначное число, двузначное число.

Дальнейшая работа над арифметическими действиями дает возможность отчетливее различить эти действия, и, на основе различения, яснее представить себе взаимосвязь между сложением и умножением, между прямыми и обратными действиями, между множимым и множителем, между делением на равные части и делением по содержанию. Во II классе еще рано обобщать множимое и множитель, рано обобщать деление на равные части и деление по содержанию. Но можно и должно подготовить детей к предстоящим обобщениям. Учащиеся II класса должны понимать, что при умножении можно переставлять числа одно на место другого — результат от этого не изменится. Они должны понимать, что в делении при одних и тех же числах получается один и тот же результат, будем ли мы делить на равные части или по содержанию.

Очень важно, далее, указать детям на сходство вычислительных приемов, относящихся к числам второго десятка и к числам первой сотни. Например:

$$\begin{aligned}
7+5 &= (7+3)+2 = 10+2 = 12\\
37+5 &= (37+3)+2 = 40+2 = 42\\
14-6 &= (14-4)-2 = 10-2 = 8\\
54-6 &= (54-4)-2 = 50-2 = 48
\end{aligned}$$

Сходство надо подчеркнуть и в отношении внетабличного сложения и вычитания:

$$\begin{aligned}
12+3 &= 10+2+3 = 10+5 = 15\\
42+3 &= 40+2+3 = 40+5 = 45\\
18-15 &= 18-10-5 = 8-5 = 3\\
68-15 &= 68-10-5 = 58-5 = 53
\end{aligned}$$

Наряду с такими знакомыми моментами, дети встречают в работе над первой сотней и нечто новое. Это новое относится прежде всего к более трудным случаям сложения и вычитания, а также к приемам табличного и, особенно, внетабличного умножения. Работая над первой сотней, дети впервые применяют прием разложения множителя, основанный на распределительном законе умножения:

$$4 \times 7 = 4 \times 5 + 4 \times 2 = 20 + 8 = 28$$

Позднее оба приема, основанные на распределительном законе умножения, — приемы разложения множимого и разложения множителя — применяются при внетабличном умножении:

$$17 \times 5 = 10 \times 5 + 7 \times 5 = 50 + 35 = 85$$
$$4 \times 16 = 4 \times 10 + 4 \times 6 = 40 + 24 = 64$$

Наконец, уже в III классе дети знакомятся на материале первой сотни с приемами последовательного умножения и последовательного деления:

$$15 \times 6 = 15 \times 2 \times 3 = 30 \times 3 = 90$$
$$68 : 4 = 68 : 2 : 2 = 34 : 2 = 17$$

Тогда же вводится впервые сначала табличное, а затем и внетабличное деление с остатком.

В работе над первой сотней должна быть достигнута полная автоматизация навыков табличного сложения и табличного умножения. Надо также стремиться к тому, чтобы учащиеся III класса усвоили наизусть результаты внетабличного умножения.

МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ПЕРВОЙ ТЫСЯЧИ

Укажем прежде всего основания для выделения первой тысячи в особый концентр.

1) Тысяча единиц составляет первый класс — класс простых единиц. Следующие классы строятся по образцу первого класса, иначе говоря, от 1 тысячи до 1000 тысяч считают совершенно так же, как от 1 единицы до 1000 единиц; от 1 миллиона до 1000 миллионов считают совершенно так же, как от 1 единицы до 1000 единиц и т. д. Чтобы уметь хорошо считать в пределах любого класса, надо сначала научиться считать в пределах первой тысячи.

2) В пределах тысячи заканчивается изучение устных вычислительных приемов и начинается изучение письменных механизмов действий. Вычислять устно за пределами первой тысячи слишком трудно. Начинать раньше

письменные вычисления нецелесообразно (создается дурная привычка оперировать цифрами, не думая о числах).

Исходя из указанных соображений, программа по арифметике отводит для изучения тысячи последнюю учебную четверть II класса, когда дети проходят устную и письменную нумерацию в пределах 1000, а также все четыре действия над круглыми сотнями. В первой четверти III класса вводятся четыре действия над круглыми десятками и сотнями с использованием устных вычислительных приемов и начинается знакомство с письменными вычислениями в пределах 1000.

Укажем отличительные особенности устных вычислений по сравнению с письменными:

1) устные вычисления начинают с высших разрядов, письменные (кроме деления) — с единиц;

2) устные вычисления записывают „в строчку", письменные — „в столбик";

3) при устных вычислениях пишется только окончательный ответ — промежуточные результаты приходится запоминать; при письменных вычислениях записывают промежуточные результаты по мере их получения — запоминать их не приходится;

4) устные вычисления производят по „свободному соображению" с применением разнообразных приемов; письменные вычисления производятся по определенным правилам.

Заметим, что отсутствие записи не составляет отличительной особенности устных вычислений. Запись может отсутствовать, и тем не менее мы обнаруживаем применение характерного письменного приема.

Вот как одна девочка умножала 14 на 5: четырежды пять — двадцать; пятью один — пять; двадцать да пять — двадцать пять. Она усвоила правило умножения многозначных чисел, не вникая в его смысл, и в данном случае действовала автоматически, думая только о цифрах, как это бывает при письменном умножении. Не сопоставив ответа с данными числами, она поэтому спокойно отнеслась к нелепому результату своих вычислений.

А вот как делили 720 на 4 учащиеся III класса — делили „устно", как того требовала учительница: „7 на 4, будет 1; останется 3; раздробляю; 32 на 4, получится 8". Наступает пауза. Учительница помогает: „А нуль куда снесешь — в остаток или в частное?"

Учительница искренно полагала, что занимается с детьми „устным счетом". Однако, прием, которым пользовались дети, не имел ничего общего с устными вычислительными приемами. В данном случае надо было рассуждать так: $400:4 = 100$; $320:4 = 32$ дес.$:4 = 8$ дес.$= 80$; $100 + 80 = 180$. Возможен и другой прием: $720:4 = 72$ дес.$:4 = 18$ дес.$= 180$.

Первая тысяча во II классе

Рассмотрим прежде всего устную нумерацию в пределах тысячи.

До сих пор при изучении нумерации мы пользовались полной предметной наглядностью. Так было при знакомстве с числами второго десятка и первой сотни. При счете до 100 мы применяли, во-первых, палочки, которые удобно связывать в пучки и таким образом пояснять группировку единиц в десятки, и, во-вторых, „ленту ста", которая иллюстрирует натуральный ряд и облегчает при счете переход через десяток.

Счет до 1000 было бы обременительно проводить на палочках: от этого пособия приходится отказаться. Тем более важно применить второе пособие — „ленту тысячи", на которой можно показать группировку единиц в десятки, десятков в сотни, а затем, как и на „ленте ста", проиллюстрировать все последовательные числа натурального ряда и переходы при счете через сотню.

Сначала учитель прикрепляет к доске „ленту ста", которая уже знакома детям. Затем при помощи двух-трех учеников он развертывает и прикрепляет вдоль стен класса „ленту тысячи". При этом подчеркивается резкая разница между тысячей и сотней, чего нельзя было в свое время сказать о соотношении между сотней и десятком. Дело в том, что разрядные единицы возрастают по законам геометрической прогрессии, чем и объясняется быстрое увеличение разности при переходе от одной счетной единицы к другой.

Дети знают, что „лента ста" содержит 100 квадратиков. Теперь надо узнать, сколько квадратиков содержит

„длинная“ лента. Считают сначала по одному: сто один, сто два, сто три ... ; потом десятками: сто десять, сто двадцать, сто тридцать ... , сто девяносто; потом опять по одному, пока не насчитают вторую сотню и не узнают новое название: д в е с т и. Так они считают до тысячи, знакомясь попутно с новыми числительными: т р и с т а, ч е т ы р е с т а и т. д. Учитель выписывает все названия круглых сотен на доске:

сто	шестьсот
двести	семьсот
триста	восемьсот
четыреста	девятьсот
пятьсот	тысяча

В конце урока дети списывают эту табличку с доски в свои тетради.

„Покажите на ленте три сотни, пять сотен, восемь сотен; назовите эти числа иначе“,— предлагает учитель.

„Покажите на ленте две сотни и три десятка; как можно назвать иначе это число? Покажите шесть сотен и пять десятков; как называется иначе это число?“

Так начинается уже на первом уроке подготовка к усвоению десятичного состава чисел первой тысячи.

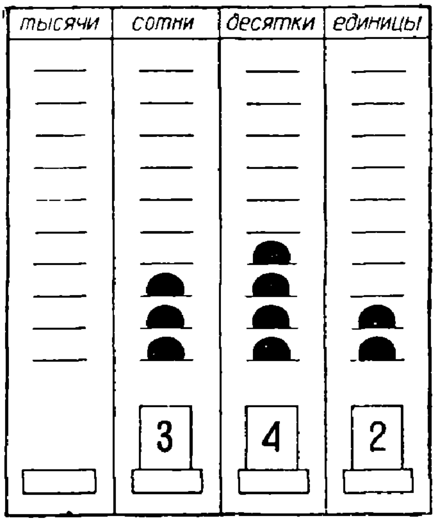
Второй урок целиком посвящается работе над о б р а з о в а н и е м чисел первой тысячи из сотен, десятков и единиц и над р а з л о ж е н и е м чисел первой тысячи на сотни, десятки и единицы. Цель урока — всестороннее знакомство учащихся с десятичным составом чисел первой тысячи.

В данном случае мы пользуемся пособием, заменяющим „арифметический ящик“. Классический „арифметический ящик“ содержал 100 отдельных кубиков (чаще всего кубических дюймов или кубических вершков), 30—40 брусков-д е с я т к о в и 5—6 квадратных досок-сотен. Теперь мы заменяем это громоздкое пособие плоскими фигурами, причем отдельные квадратики изображают единицы, полоски, составленные из 10 квадратиков — десятки, а большие квадраты, составленные из 100 мелких — сотни. Эти фигуры вставляют в загиб наборного полотна, которое лучше окрасить в черный цвет, чтобы на нем были яснее видны квадраты, полоски и квадратики из белого картона.

Упражнения надо располагать в таком порядке: 1) *образование* чисел из сотен, десятков и единиц и соответствующие случаи *разложения*; 2) образование и разложение чисел, состоящих только из сотен и десятков или же только из сотен и единиц.

На третьем уроке можно начать изучение *письменной нумерации*, которая подобно устной, опирается на группировку единиц при счете, иначе говоря, на уменье пользоваться десятичным составом числа.

Для пояснения письменной нумерации до 1000 мы впервые прибегаем к *условной наглядности*. Пособие, которым мы пользуемся в работе с детьми, носит название *абака с кружками*. Абак разделен на 4 столбца — для единиц, десятков, сотен и тысяч. Каждый столбец имеет 10 надрезов, в которые вставляют кружки по числу единиц данного разряда. Под каждым столбцом есть карман, в который вставляют цифры. Наглядность обеспечивается кружками и их положением на таблице. Условный же характер наглядности состоит в том, что кружок во втором столбце обозначает не единицу, а десяток; кружок в третьем столбце обозначает не единицу, а сотню; кружок в четвертом столбце обозначает не единицу, а тысячу.



Учитель должен прежде всего познакомить детей с новым пособием. Сначала он откладывает кружки в первом столбце, считая до десяти. Затем снимает все десять кружков и *заменяет* их одним кружком во втором столбце, объясняя при этом ученикам, что теперь один кружок обозначает один десяток. Тот же прием применяется к переходу от 10 десятков к сотне и от 10 сотен к тысяче.

После этого можно перейти к обозначению чисел первой тысячи посредством цифр. Сначала дети откладывают при помощи кружков числа, состоящие из сотен, десятков и единиц; запись в этом случае не содержит нулей. Более трудными являются аналогичные упражнения, если в числе нет единиц того или иного разряда; тогда в записи среди значащих цифр появляются нули. В этих случаях полезно задавать детям числа, которые отличаются одно от другого расстановкой одних и тех же цифр, например: 306, 603, 360, 630. Переставив соответствующим образом кружки, ученик меняет местами цифры.

На четвертом уроке можно проделать еще несколько упражнений на абаке, в частности, показать запись круглых сотен и 1000. После этого учащиеся пишут трехзначные числа под диктовку учителя на доске и в тетрадях и читают такие числа по задачнику.

На пятом и шестом уроке вводится километр и грамм в их соотношении с метром и килограммом.

Можно воспользоваться граммовым разновесом, чтобы составлять различные числа из сотен, десятков и единиц

Граммовый разновес содержит следующие гирьки 1 *г*, 2 *г*, 2 *г*, 5 *г*, 10 *г*, 20 *г*, 20 *г*, 50 *г*, 100 *г*, 200 *г*. 200 *г*, 500 *г*. Можно предложить детям отвесить при помощи этих гирек некоторое количество соли или песку (разумеется, не сахарного, а обыкновенного), например, 150 *г*, 230 *г*, 250 *г*, 170 *г* и т. д. Усложняя задачу, можно тем же способом отвесить 125 *г*, 212 *г*, 515 *г* и т. п. Полезно также познакомить детей с денежными знаками, из которых можно составлять по-разному такие числа, как 148 руб., 156 руб., 214 руб. и т. д.

Учащиеся II класса производят только такие д е й с т в и я н а д ч и с л а м и п е р в о й т ы с я ч и, которые непосредственно вытекают из знания нумерации в пределах тысячи. Например:

$$300 + 200 = 3 \text{ сотни} + 2 \text{ сотни} = 5 \text{ сотен} = 500$$
$$700 - 300 = 7 \text{ сотен} - 3 \text{ сотни} = 4 \text{ сотни} = 400$$
$$500 + 70 = 570; \quad 830 - 30 = 800$$
$$200 \times 3 = 2 \text{ сотни} \times 3 = 6 \text{ сотен} = 600$$
$$800 : 4 = 8 \text{ сотен} : 4 = 2 \text{ сотни} = 200$$

Как мы видим, дело сводится к преобразованиям единиц одного разряда в единицы другого разряда и к действиям над разрядными числами.

Первая тысяча в III классе

В III классе вводятся более трудные устные вычисления. Однако, числа для этих упражнений берутся все же круглые.

Трудность устного сложения в пределах тысячи зависит прежде всего от числа значащих цифр в обоих слагаемых. При этом легче складывать без перехода через сотню; труднее — добавлять до сотни; самый трудный случай — сложение с переходом через сотню.

Принимая во внимание оба признака, можно расположить материал сложения таким образом.

Первая ступень — сложение без перехода через сотню: $200 + 300$, $200 + 70$; $420 + 30$, $340 + 200$; $320 + 140$.

Вторая ступень — дополнение до круглых сотен: $120 + 80$; $160 + 240$.

Третья ступень — сложение с переходом через сотню: $80 + 70$; $160 + 90$; $270 + 180$.

Примеры на устное вычитание мы располагаем в точном соответствии с примерами на сложение.

Первая ступень: $500 — 30$, $270 — 70$; $480 — 60$; $560 — 200$; $460 — 140$.

Вторая ступень: $200 — 80$; $400 — 240$.

Третья ступень: $150 — 70$; $250 — 90$; $450 — 180$.

Во всех приведенных случаях сложение и вычитание надо начинать, как это полагается при устных вычислениях, с высших разрядов, видоизменяя прием в зависимости от данной конкретной ситуации. Например:

1) $320 + 140 = 400 + 60 = 460$ или $320 + 140 = 320 + 100 + 40 = 420 + 40 = 460$

2) $80 + 70 = 80 + 20 + 50 = 100 + 50 = 150$

3) $270 + 180 = 270 + 100 + 80 = 370 + 80 = 370 + 30 + 50 = = 400 + 50 = 450$

4) $400 — 240 = 400 — 200 — 40 = 200 — 40 = 160$

5) $150 — 70 = 150 — 50 — 20 = 100 — 20 = 80$

6) $450 — 180 = 450 — 100 — 80 = 350 — 80 = 350 — 50 — 30 = 300 — 30 = 270$

Отметим наиболее существенные особенности этих приемов: 1) при сложении без перехода через сотню складывают сотни с сотнями, десятки с десятками, разложив оба числа на разрядные слагаемые; 2) при вычитании никогда не следует разлагать на разрядные слагаемые уменьшаемое; достаточно разложить вычитаемое; 3) при сложении с переходом через сотню следует сначала дополнить первое слагаемое до круглого числа, а затем прибавлять остальное; 4) при вычитании с переходом через сотню следует сначала отнять десятки с таким расчетом, чтобы получились круглые сотни, а затем отнимать остальное.

Устное умножение и деление в пределах тысячи ограничивается следующими случаями.

1) Умножение круглых десятков на однозначное число и соответствующее деление. Например:

$$60 \times 7, \quad 90 \times 5; \quad 240:3, \; 560:8$$

Как мы видим, вычисления сводятся в данном случае к *табличному* умножению и делению. В самом деле: $60 \times 7 = 6$ дес. $\times 7 = 42$ дес. $= 420$. А также: $240:3 = 24$ дес.$:3 = 8$ дес. $= 80$.

2) Умножение чисел, состоящих из сотен и десятков, на однозначное число и соответствующее деление. Например:

$$120 \times 4, \quad 270 \times 3; \quad 600:5, \quad 720:6$$

В данном случае можно свести вычисления к *внетабличному* умножению и делению. В самом деле: $120 \times 4 = 12$ дес. $\times 4 = 48$ дес. $= 480$. А также: $600:5 = 60$ дес.$:5 = 12$ дес. $= 120$.

Наряду с этим, можно воспользоваться приемом разложения на слагаемые множимого и приемом разложения на слагаемые делимого, а именно:

$$270 \times 3 = 200 \times 3 + 70 \times 3 = 600 + 210 = 810$$
$$720 : 6 = 600 : 6 + 120 : 6 = 100 + 20 = 120$$

В пределах первой тысячи дети начинают знакомиться с письменными механизмами арифметических действий. Материал этот тоже отнесен программой к первой учебной четверти III класса. Сюда входят: письменное сложение и вычитание, письменное умножение и деление на *однозначное число*.

Методика письменного сложения и вычитания раскрывается почти полностью уже на материале первой тысячи. При переходе к многозначным числам нам не придется добавлять много нового.

Остановимся прежде всего на *письменном сложении*. Трудность письменного сложения в отличие от устного не зависит от числа значащих цифр в слагаемых. При письменном сложении затруднения могут возникнуть только в связи с переходом через десяток при сложении разрядных слагаемых. В соответствии с этим различают следующие пять ступеней сложения.

Первая ступень — сложение без перехода через десяток:

$$+\begin{array}{r}245\\123\\\hline\end{array}$$

Вторая ступень — десяток получается *один* раз:

$$+\begin{array}{r}426\\244\\\hline\end{array}\qquad+\begin{array}{r}352\\154\\\hline\end{array}$$

Третья ступень — десяток получается *два* раза:

$$+\begin{array}{r}368\\232\\\hline\end{array}$$

Четвертая ступень — переход через десяток происходит *один* раз:

$$+\begin{array}{r}456\\328\\\hline\end{array}\qquad+\begin{array}{r}284\\172\\\hline\end{array}$$

Пятая ступень — переход через десяток происходит *два* раза:

$$+\begin{array}{r}349\\287\\\hline\end{array}$$

Возможны нули в слагаемых, не влияющие на степень трудности данного случая и на его месте в системе упражнений.

Возможны также промежуточные комбинации, когда, например, один раз получается десяток и один раз происходит переход через десяток:

$$+\begin{array}{r}548\\359\\\hline\end{array}\qquad+\begin{array}{r}486\\374\\\hline\end{array}$$

Такие случаи удобнее дать в конце, после завершения работы над пятью основными ступенями.

Методика работы над письменным сложением заключается в следующем.

Учитель записывает на доске пример на сложение двух трехзначных чисел, например: $543 + 354 =$

До сих пор дети складывали только круглые числа, пользуясь устными вычислительными приемами. Попробуем и данный пример решить устно. Оказывается, это довольно обременительно. Тогда учитель вводит *новую запись* — „столбиком", при которой нет надобности запоминать промежуточные результаты: их записывают сразу по мере получения.

Для начала действие производится по правилу устных вычислений — начиная с сотен. Тут же демонстрируется возможность начинать сложение с единиц. Выясняется, что в обоих случаях получается один и тот же результат. Вводится правило, пока без объяснений, начинать письменное сложение с единиц.

Таково содержание первого урока по ознакомлению с письменным сложением. На этом уроке дети должны научиться объяснять новый *способ записи* сложения: единицы пишут под единицами, десятки под десятками, сотни под сотнями; знак сложения ставится слева против *середины* всей записи; запись подчеркивается. При объяснении самого действия учащиеся должны называть разряды слагаемых и суммы.

В дальнейшем, двигаясь вперед, дети проходят все намеченные нами ступени, давая подробные объяснения каждого примера.

При решении примеров второй и четвертой ступени необходимо обеспечить постепенное нарастание трудности.

Так, к решению примера $426 + 244$ надо подвести учащихся следующим образом:

$$+\begin{array}{r}426\\4\\\hline\end{array}\qquad +\begin{array}{r}426\\44\\\hline\end{array}\qquad +\begin{array}{r}426\\244\\\hline\end{array}$$

К решению второго примера из той же группы надо готовить детей так:

$$+\begin{array}{r}352\\54\\\hline\end{array}\qquad +\begin{array}{r}352\\154\\\hline\end{array}$$

Аналогичным образом подготовляется выполнение сложения с переходом через десяток:

$$\begin{array}{r} 456 \\ +\quad 8 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 456 \\ +\ 28 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 456 \\ +328 \\ \hline \end{array}$$

А также:

$$\begin{array}{r} 284 \\ +\ 72 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 284 \\ +172 \\ \hline \end{array}$$

Во всех этих случаях необходимо требовать, чтобы учащиеся называли разряды слагаемых и суммы и рассуждали вслух, если приходится преобразовывать полученный результат.

Когда все случаи сложения трехзначных чисел в пределах тысячи пройдены, надо объяснить детям, почему введено было правило начинать письменное сложение с единиц. Для этой цели надо взять пример, в котором приходится дважды переходить через десяток, и предложить учащимся начать его решение с сотен. Цифры сотен и десятков суммы, записанные преждевременно, приходится зачеркивать и заменять другими.

1) $\begin{array}{r} 349 \\ +287 \\ \hline \cancel{5}\cancel{2}6 \\ 63 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 349 \\ +287 \\ \hline 636 \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} 376 \\ +279 \\ \hline \cancel{5}\cancel{4}5 \\ 65 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 376 \\ +279 \\ \hline 655 \end{array}$

В каждой паре примеров первый раз сложение было начато с сотен, а во второй раз — с единиц. Так обнаруживается преимущество второго способа по сравнению с первым.

Переходим к письменному вычитанию. Различают следующие пять ступеней письменного вычитания в пределах 1000:

Первая ступень — занимать не приходится:

$$\begin{array}{r} 475 \\ -234 \\ \hline \end{array}$$

Вторая ступень — занимать приходится один раз, когда **в** уменьшаемом нуль:

$$\begin{array}{r} 470 \\ -235 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 508 \\ -364 \\ \hline \end{array}$$

Третья ступень — занимать приходится *один* раз, когда в уменьшаемом *значащая цифра*:

$$\begin{array}{r} 563 \\ -\,245 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 628 \\ -\,365 \\ \hline \end{array}$$

Четвертая ступень — занимать приходится *два* раза, когда в уменьшаемом *значащие цифры*:

$$\begin{array}{r} 843 \\ -\,389 \\ \hline \end{array}$$

Пятая ступень — занимать приходится *два* раза, когда в уменьшаемом нули:

$$\begin{array}{r} 900 \\ -\,248 \\ \hline \end{array}$$

Возможны и здесь, как при сложении, нули в уменьшаемом и вычитаемом в пределах указанных пяти ступеней.

Возможны также промежуточные комбинации, когда, например, нельзя отнять единиц вычитаемого от значащей цифры уменьшаемого, а десятков вычитаемого — от нуля в уменьшаемом, и наоборот:

$$\begin{array}{r} 502 \\ -\,348 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 630 \\ -\,276 \\ \hline \end{array}$$

Такие случаи удобнее дать в конце, после завершения работы над пятью основными ступенями.

Методика работы над письменным вычитанием строится примерно так же, как работа над сложением.

Сначала учащиеся знакомятся с записью вычитания и решают легкие примеры. Правило начинать вычисления с единиц вводится без объяснений.

Работа над теми случаями вычитания, когда приходится занимать единицу высшего разряда и раздроблять ее, должна быть подготовлена соответствующими упражнениями в раздроблении на палочках или хотя бы в „устном счете".

Вторая и третья ступени требуют таких же вступительных упражнений, как это было в соответствующих случаях при сложении:

$$\begin{array}{r}470\\ -\quad 5\\ \hline\end{array}\qquad\begin{array}{r}470\\ -\quad 35\\ \hline\end{array}\qquad\begin{array}{r}470\\ -235\\ \hline\end{array}$$

А также:

$$\begin{array}{r}563\\ -\quad 5\\ \hline\end{array}\qquad\begin{array}{r}563\\ -\quad 45\\ \hline\end{array}\qquad\begin{array}{r}563\\ -245\\ \hline\end{array}$$

Как мы видим, каждая новая трудность вычитания преодолевается сначала на простейшем случае, а именно, когда вычитаемое — однозначное число. После этого можно перейти к вычитанию двузначного и трехзначного числа.

Заметим, что порядок расположения основных ступеней вычитания отличается от порядка сложения. При вычитании пятая ступень, казалось бы, должна следовать за второй. Однако, легче занять у соседнего разряда, чем занимать через разряд. Вот почему материал пятой ступени надо дать под самый конец. Ведь, занимая два раза, когда в уменьшаемом значащие цифры, мы имеем дело каждый раз только с соседним разрядом, как и в тех случаях, когда приходится занимать один раз.

При вычитании из круглых сотен тем более необходимо начать с однозначного вычитаемого, за которым следует двузначное и трехзначное:

$$\begin{array}{r}900\\ -\quad 7\\ \hline\end{array}\qquad\begin{array}{r}900\\ -\quad 47\\ \hline\end{array}\qquad\begin{array}{r}900\\ -547\\ \hline\end{array}$$

Над тем разрядом, у которого приходится занимать, ставят точку. Никаких дополнительных надписей делать не полагается.

Когда все случаи вычитания пройдены, надо объяснить детям, почему выгоднее начинать письменное вычитание с единиц. Для этой цели надо взять пример, в котором приходится занимать два раза, и предложить учащимся начать его решение с сотен. Цифры сотен и десятков разности приходится в этих случаях зачеркивать и заменять другими:

$$\begin{array}{r}326\\ -189\\ \hline \cancel{2}\cancel{4}7\\ 13\end{array}\qquad\begin{array}{r}326\\ -189\\ \hline 137\end{array}$$

Из сопоставления двух способов на одном и том же примере видно, что начинать вычитание следует с единиц.

В заключение надо отметить еще те особые трудности, которые возникают при сложении, когда сумма равна 1000, и при вычитании, когда уменьшаемое равно 1000.

Особенно трудно отнимать от 1000. В этом случае занимать приходится через д в а разряда. Затрудняет детей раздробление тысячи в сотни и сотни в десятки. На эти случаи раздробления необходимо обратить внимание в „устном счете". Над разрядами уменьшаемого, у которых пришлось занимать, ставят т о ч к и. Следует давать учащимся побольше таких примеров в классе и на дом.

На первом уроке, посвященном п и с ь м е н н о м у у м н о ж е н и ю, надо показать детям запись умножения „столбиком", сообщить правило начинать действие с единиц и научить связно объяснять это действие.

Сначала даются примеры без перехода через разряд: 213×3, 124×2 и т. п. Решая эти примеры, дети называют разряды множимого и разряды произведения.

Далее решаются более трудные примеры: 124×3, 182×2, 64×5, 78×4, 147×6 и т. д.

Сюда не входят примеры с нулем на конце множимого по той причине, что умножение круглых сотен и десятков производится устно и записывается в строчку. Что касается нуля в середине множимого, то и такие примеры (во II классе они не встречались) следует в III классе решать устно: 102×4, 109×5 и т. п.

Под конец полезно разъяснить, почему письменное умножение, подобно сложению и вычитанию, начинают с единиц. С этой целью пример 173×5 решается двумя способами:

$$\begin{array}{r} \times\,173 \\ 5 \\ \hline 555 \\ 86 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} \times\,173 \\ 5 \\ \hline 865 \end{array}$$

В первом случае умножение было начато с сотен. Записанные результаты пришлось в дальнейшем исправлять.

Во втором случае умножение было начато с единиц. Сразу получен правильный ответ.

Письменное деление начинают с самого легкого случая, когда каждое разрядное слагаемое делится без остатка на данный однозначный делитель. При этом должна быть показана запись деления „столбиком“ или, как говорят иначе, „уголком“.

Дается пример 468:2, на котором дети учатся связно объяснять действие деления.

$$
\begin{array}{r|l}
468 & 2 \\ \cline{2-2}
\underline{4} & 234 \\
6 & \\
\underline{6} & \\
8 & \\
\underline{8} & \\
\end{array}
$$

Чтобы легче было называть разряды частного, надо делить не по содержанию, а *на равные части*. В самом деле, труднее установить, сколько раз 2 единицы содержатся в 4 сотнях, чем найти частное от деления 4 сотен на 2 равные части: делим на равные части сотни; значит, и в частном получатся сотни.

Рассуждаем: 4 сотни разделить на 2 равные части, получится 2 *сотни*. Пишем: 2 сотни. Всего в частном будет три цифры. Ставим две точки на месте десятков и единиц.

Узнаем, сколько всего сотен мы разделили. Для этого умножаем 2 сотни на 2, получится 4 сотни.

Узнаем, сколько сотен осталось разделить. Для этого отнимаем 4 сотни от 4 сотен. Сотен не останется.

Разделим 6 десятков на 2 равные части. Получится 3 *десятка*. Пишем 3 на месте десятков.

Узнаем, сколько всего десятков мы разделили. Для этого умножаем 3 десятка на 2, получится 6 десятков.

Узнаем, сколько десятков осталось разделить. Для этого отнимаем 6 десятков от 6 десятков. Десятков не останется.

Разделим 8 единиц на 2 равные части. Получится 4 единицы. Пишем 4 на месте единиц.

Узнаем, сколько единиц мы разделили. Для этого умножим 4 единицы на 2, получится 8 единиц.

Узнаем, сколько единиц осталось разделить. Для этого отнимаем 8 единиц от 8 единиц. Единиц не останется.

Итак, получилось 234. Деление произошло без остатка.

Переходя при делении от разряда к разряду, мы пользуемся выражениями: сносим десятки под черту, сносим единицы под черту.

Если деление свершилось без остатка, нет никакой надобности ставить под последней чертой нуль. В самом деле, уж если писать нуль в конце, то почему не писать его и на всех промежуточных этапах, когда вычитаемое равно уменьшаемому? Ведь при вычитании 4 сотен из 4 сотен и 6 десятков из 6 десятков остатка тоже не получается и, однако, в этом случае нуля не пишут. При вычитании 8 единиц из 8 единиц можно поступать аналогичным образом.

Не следует также вместо нуля ставить под чертой мелкие черточки или кавычки. Такие знаки никакого отношения к арифметике не имеют. Лишним является и минус для обозначения вычитания: знак деления („уголок") определяет полностью алгорифм этого действия, включая и такие привходящие моменты, как вычитание.

Дети должны уметь назвать *неполные делимые* и те числа, которые в действительности удалось разделить. В нашем примере они совпадают. Полезно их выписать и показать, что сумма этих чисел равна делимому: $400 + 60 + 8 = 468$.

Следующие примеры даются в таком порядке: 564:3 (в частном — трехзначное число); 378:7 (в частном — двузначное число); 402:6 и 280:8 (нули в делимом).

Нулей в частном в первой четверти III класса мы не даем, хотя они и могли бы появиться при делении трехзначного на однозначное число (например, $756:7 = 108$).

Рассмотрим один из более трудных случаев.

$$\begin{array}{r|l} 378 & \underline{\;7\;} \\ \underline{35\;\;} & 54 \\ 28 & \\ \underline{28} & \\ — & \end{array}$$

Здесь неполные делимые (370 и 28) приходится образовывать, тогда как в первом, легком случае они были прямо даны.

При этом ученик должен усвоить следующее рассуждение: 3 сотни нельзя разделить *на 7 равных частей* так, чтобы в каждой части получилось *по целой сотне*.

Такое рассуждение вполне понятно ученику, тогда как вопрос, сколько раз 7 единиц содержится в 3 сотнях, приводит к ряду недоразумений. Ученик готов заявить, что „7 единиц в 3 сотнях не содержится", и будет неправ: 7 единиц содержится в 3 сотнях более 40 раз.

Небезызвестный американский психолог Торндайк советует в этих случаях говорить так: 7 содержится в 3 сотнях нуль сотен раз.[1] Приходится только пожалеть тех детей, которым навязывают подобные формулировки.

Итак, необходимо делить не по содержанию, а на равные части: это избавит учащихся от многих трудностей.

Дальнейшие рассуждения при делении числа 378 на 7 не содержат по существу ничего нового.

Разделим 37 десятков на 7 равных частей. Получится в каждой части по 5 десятков. Значит, в частном будет двузначное число.

Узнаем, сколько десятков мы разделили. Для этого 5 десятков умножим на 7, получится 35 десятков.

Узнаем, сколько десятков осталось разделить. И т. д.

МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МНОГОЗНАЧНЫХ ЧИСЕЛ

Закончив концентр первой тысячи, мы переходим к изучению многозначных чисел, которые составляют основное содержание программы по арифметике в III и IV классах.

История и теория вопроса о системе счисления и о нумерации изложена в начале настоящего руководства при обзоре основных арифметических понятий в начальной школе. Методика этих вопросов раскрывалась по частям применительно к предшествующим десятичным концентрам. Остается рассмотреть методику преподавания нумерации в старших классах начальной школы, а затем перейти к действиям над многозначными числами.

Нумерация, сложение и вычитание многозначных чисел в начальной школе

Нумерацию многозначных чисел начинают изучать в III классе (числа в пределах миллиона) и заканчивают в IV классе (многозначные числа, включая класс миллиардов). Перед этим, в связи с работой над концентрами первого десятка, второго десятка, сотни и тысячи,

[1] Э. Л. Торндайк. Психология арифметики. 1932. На стр. 85 читаем буквально следующее: „15 содержится в 3 десятках тысяч 0 десятков тысяч раз, поэтому в частном будет 0 десятков тысяч".

дети учились называть и записывать соответствующие числа. Таким образом, при переходе в III класс они уже частично знакомы с десятичной системой счисления и вместе с тем с устной и письменной нумерацией в пределах тысячи.

В пределах первого десятка устная нумерация (называние чисёл) и письменная (узнавание и запись цифр) изучаются совместно. Каждое новое число мы составляем при этом из предыдущего и единицы, а также из одинаковых слагаемых, если это возможно ($2+2$, $3+3$, $4+4$, $5+5$). Такая группировка единиц при счете облегчает узнавание и различение чисел, хотя, в отличие от десятичной группировки, не отражается ни в названии чисел, ни в их записи.

При изучении второго десятка детям приходится впервые наблюдать десятичную группировку единиц при счете и связь этой группировки с устной и письменной нумерацией. На палочках мы поясняем образование десятка, а затем чисел, состоящих из одного десятка и отдельных единиц. При знакомстве с устной нумерацией подчеркивается связь между составом числа и составом слов (числительных). При изучении письменной нумерации дети впервые узнают, что единицы и десятки занимают определенное место в записи числа.

Продолжая группировать единицы в десятки, мы доводим счет до 100. При этом резче выступает разница между разрядом простых единиц и разрядом десятков, а также сходство между ними: десятки считают от одного до десяти совершенно так же, как простые единицы от одной единицы до 10 единиц.

В пределах 100 дети сначала проходят устную нумерацию, считая подряд до 100; затем выделяется новый материал — круглые десятки; наконец, даются упражнения на образование и разложение чисел первой сотни. После этого изучается письменная нумерация, причем яснее, чем в пределах второго десятка, выступает роль поместного значения цифр.

Нумерация первого десятка, второго десятка и первой сотни поясняется при помощи полной предметной наглядности.

В пределах 1000 устную нумерацию проходят на „ленте тысячи“. Другие способы конкретизации становятся теперь малопригодными. Устная нумерация связывается с группировкой единиц в десятки и сотни (новый момент). Образование каждой новой сотни сопровождается введением новых числительных. Далее следуют упражнения в образовании чисел из сотен, десятков и единиц и в разложении чисел на сотни, десятки и единицы.

Письменная нумерация поясняется, как и раньше, на счетной таблице, где каждый разряд занимает подобающее ему место. Полная предметная наглядность при изучении письменной нумерации становится в условиях тысячи невозможной — впервые приходится заменить ее условной наглядностью.

При изучении второго десятка, первой сотни и первой тысячи устную и письменную нумерацию проходят раздельно.

На третьем году обучения дети знакомятся с нумерацией чисел двух классов. Если уже тысячу трудно было конкретизировать, то десятки и сотни тысяч, миллион, десятки миллионов и сотни миллионов невозможно пояснить при помощи полной предметной наглядности. Такие числа пытаются сделать наглядными посредством мер длины, площади, объема и времени. Эти средства действуют на воображение, поражают, но, в сущности, не достигают цели. Лишний раз убеждаешься, что миллион и миллиард — нечто громадное, непостижимое. С другой стороны, некоторые образы, которые применяют для иллюстрации больших чисел, создают превратное представление об их размерах, преуменьшают их.

Вот несколько примеров пространственной интерпретации больших чисел.

Кв. метр содержит 1 миллион кв. миллиметров. Если приготовить такой метр из миллиметровой бумаги, можно воочию убедиться, что он равен 1 миллиону *кв. мм.* Однако, этот образ свидетельствует не о том, что миллион велик, а скорее о том, что он мал.

Впечатление от пространственного образа можно усилить, соединяя его с временными представлениями. Можно, например, раздать учащимся вырезанные из миллиметровой бумаги кв. сантиметры и предложить заполнить точками все 100 *кв. мм.* Чтобы поставить эти 100 точек, придется затратить примерно 1 мин. 15 сек. Для заполнения *кв. дм* пришлось бы поработать 125 минут, т. е. 2 ч. 5 мин., а для заполнения всего кв. метра — 208 часов. Если вместо обычных занятий в школе ежедневно в течение 4 астрономических часов ставить точки, то на всю эту работу придется затратить 52 учебных дня — целую учебную четверть.

К сожалению, подобные расчеты связаны с составными именованными числами и с кв. мерами, еще не доступными учащимся III класса. Да и в IV классе в начале года дети еще не знакомы с этими вопросами. Применить указанный прием конкретизации можно было бы только в конце учебного года при повторении пройденного.

От Ленинграда до Москвы приблизительно 650 *км*, т. е. 65 миллионов сантиметров. Если считать, что детский шаг равен 65 *см*, то ученику III—IV класса пришлось бы сделать миллион шагов, чтобы пройти все это расстояние. Однако, почувствовать размеры миллиона он мог бы только в том случае, если бы и в самом деле прошел пешком 650 *км* — дело явно нереальное. Впрочем, подобные расчеты дают все же некоторое представление о миллионе.

В IV классе, после знакомства с куб. мерами, следует обратить внимание учащихся на соотношение между 1 *куб. дм* и 1 *куб. мм*, которое равно миллиону, и на соотношение между 1 *куб. м* и 1 *куб. мм*, которое равно миллиарду. Но и эти данные не столько помогают постигнуть величину больших чисел, сколько говорят о их непостижимости.

Вот почему при изучении нумерации многозначных чисел придется конкретизировать не столько эти числа, сколько десятичную систему счисления. Не предметная наглядность, а схема, графический образ могут пояснить сложную структуру многозначного числа. Такой схемой является нумерационная или счетная таблица, на которой можно видеть взаимосвязь между классами и разрядами числа.

Возникает важный методический вопрос: следует ли при изучении многозначных чисел проходить устную нумерацию отдельно от письменной?

Устную нумерацию обычно проходят на вертикальных счетах, изображая каждое разрядное число посредством шариков: сколько разрядных единиц, столько и шариков на соответствующей проволоке.

Что видит при этом ученик? Место каждого разряда и число единиц каждого разряда, которое не может быть больше девяти. Вот на эти то числа первого десятка и распространяется предметная наглядность.

Теперь спрашивается: нужна ли ученику III класса предметная наглядность в отношении чисел первого десятка? Вспомним, что этот ученик прекрасно знает цифры, безошибочно и точно понимает их значение. С другой стороны, если ряд из двух, трех, четырех шариков на счетах действительно нагляден, то нагляден ли ряд или столбик из семи, восьми, девяти шариков?

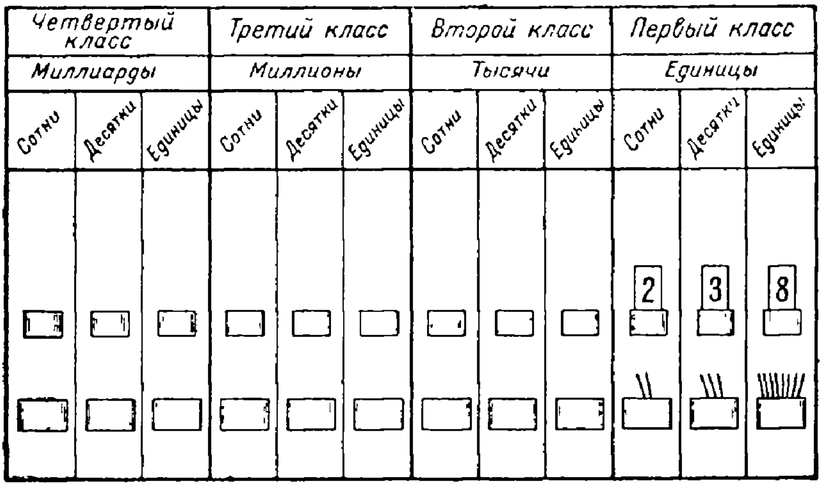
Поставьте перед учеником столбик из восьми шариков и цифру 8. Что быстрее дойдет до его сознания: число шариков или значение цифры? Бесспорно, значение цифры. Но если в III классе и тем более в IV классе учащиеся уже не нуждаются в предметной наглядности такого рода, то нет никакой надобности проходить устную и письменную нумерацию раздельно. Целесообразнее соединять с самого начала называние числа с его обозначением на счетной таблице. Вертикальные счеты, которыми мы все же при этом пользуемся, нужны нам только в двух случаях: 1) чтобы пояснить образование каждой новой разрядной единицы из десяти единиц ближайшего низшего разряда и 2) чтобы пояснить переходы при счете через разрядные и классные единицы.

Возникает еще один вопрос, связанный с двойной группировкой единиц — в разряды и в классы: ввести ли сразу все 6 разрядов, не останавливаясь на классе тысяч в отдельности, или же пройти сначала класс тысяч и только после этого заняться любыми шестизначными числами? Знакомить ли учащихся в следующем учебном году с любыми девятизначными числами или предварительно остановиться на классе миллионов? И т. д.

Целесообразнее избрать второй путь по следующим соображениям: 1) нельзя называть разряды, не употребляя при этом названий классов; 2) необходимо соблюдать постепенность при знакомстве детей с числами-великанами; 3) все, что детям уже известно о классе простых единиц, они без труда переносят по аналогии на класс тысяч, а позднее и на следующие классы; 4) легче добиться различения понятий разряда и класса, если рассматривать каждый класс в отдельности.

Материал III класса лучше всего расположить так: 1) повторение нумерации в пределах первого класса (новый термин); 2) нумерация в пределах второго класса — класса тысяч; 3) нумерация любых шестизначных чисел. Аналогичное расположение будем иметь на четвертом году обучения: 1) нумерация в пределах третьего класса — класса миллионов; 2) нумерация любых девятизначных чисел; 3) нумерация в пределах четвертого класса — класса миллиардов; 4) нумерация любых двенадцатизначных чисел.

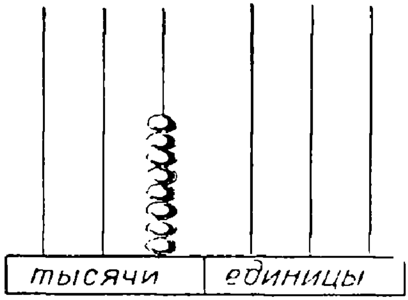
Основное пособие, которым мы будем пользоваться при изучении устной и письменной нумерации, — это счетная таблица (абак), разделенная на четыре части по числу классов. Каждая часть разделена на три столбца по числу разрядов в классе. Под названием разрядов имеются „карманы“, в которые вставляют цифры.



На изображенной здесь счетной таблице под карманами для цифр помещается второй ряд карманов, в которые можно вставлять небольшие палочки, окрашенные в яркий цвет. Эти палочки в нашем опыте заменяли шарики на вертикальных счетах.

Сейчас на абаке стоит число первого класса — 238. Закрыв остальную часть таблицы, учитель повторяет с детьми уже известную им нумерацию трехзначных чисел и объясняет, что это числа **первого класса**, класса простых единиц.

Следующий этап работы — счет в пределах класса тысяч. Учащиеся знают, что тысячу записывают на четвертом месте. Обращаясь к вертикальным счетам, учитель надевает один шарик на четвертую проволоку (или же кладет одну палочку в четвертый карман на абаке, если в школе нет вертикальных счетов). Это одна тысяча. На ту же проволоку он надевает один за другим еще 8 шариков. Ученики считают: 2 тысячи, 3 тысячи, 4 тысячи и т. д. до 9 тысяч.



Добавив еще один, десятый, шарик, учитель снимает все эти шарики и заменяет их одним шариком на пятой проволоке. Это 1 десяток тысяч, или 10 тысяч. Насчитав и на этой проволоке 10 шариков, учитель заменяет их одним шариком на шестой проволоке. Это 1 сотня тысяч, или 100 тысяч. Учитель надевает шарики на шестую проволоку, а дети считают сотнями тысяч: 200 тысяч, 300 тысяч, 400 тысяч и т. д. до 900 тысяч.

От вертикальных счетов учащиеся переходят к счетной таблице, на которой учитель открывает вторую часть — класс тысяч. Закрытой остается левая половина таблицы. Палочками (если есть соответствующие карманы) дети обозначают на таблице сначала 1 тысячу, 1 десяток тысяч и 1 сотню тысяч, а затем различные числа в т о р о г о к л а с с а — 653 тысячи, 248 тысяч, 375 тысяч и т. д., которые читаются совершенно так же, как читались до сих пор числа первого класса. Лучше начинать с таких чисел второго класса, в которых имеются единицы всех трех разрядов. Дети записывают их в тетрадях, обозначая нулями сотни, десятки и единицы первого класса. В дальнейшем вводятся числа второго класса с нулями на конце и в середине: 308 тысяч, 260 тысяч, 500 тысяч и т. д.

Чтобы подвести детей к нумерации любых шестизначных чисел, следует пояснить на вертикальных счетах (или на палочках в карманах нижнего ряда) переход через тысячу, через десяток тысяч и через сотню тысяч. На счетах откладывается число 1999. Достаточно добавить на первой проволоке один шарик, чтобы стала ясна необходимость освободить одну за другой все три проволоки первого класса и, образовав вторую тысячу, отложить второй шарик на четвертой проволоке. Тем же способом поясняется переход от числа 2999 к числу 3000, от числа 19 999 к числу 20 000 и т. д.

Следующие упражнения дети проделывают опять на счетной таблице: учатся составлять, обозначать цифрами, читать и записывать в тетрадях шестизначные числа сначала без нулей, например, 356 847, 561 723 и т. п., а затем с нулями на конце и в середине, например: 207 450, 320 048 и т. д.

Называя шестизначные числа, учитель должен делать ударение на слове „тысяч" и затем выдерживать небольшую паузу, давая тем самым понять, что дальше следует класс единиц, в котором должны быть сотни, десятки и единицы, а если единиц того или иного разряда не окажется, их место придется обозначить нулем.

При записи шестизначных чисел следует между классом тысяч и классом простых единиц оставлять небольшой промежуток. Так мы поступаем во время изучения нумерации и каждый раз при ее повторении. Однако, выполняя действия над многозначными числами, дети записывают числа по клеточкам, соблюдая между всеми цифрами одинаковые промежутки. Неодинаковые промежутки явились бы помехой при записи „столбиком" умножения и деления.

При изучении нумерации дети должны познакомиться с терминами „разрядная единица" и „разрядное число", должны понимать, что число состоит из **разрядных слагаемых**, должны уметь разложить число на его разрядные слагаемые. С этими терминами и приемами они встретятся в дальнейшем, при изучении действий над многозначными числами. Сюда же относятся следующие упражнения.

1) Раздробление единиц какого-либо разряда в единицы низшего разряда, например:

29 дес. = 290	57 сот. = 570 дес.
318 сотен = 31 800	16 дес. тысяч = 1600 сотен

2) Выделение из заданного числа всех единиц какого-либо разряда, например:

73 260	73 тысячи 732 сотни 7326 десятков

Не следует рассматривать эти преобразования как увеличение и уменьшение числа в 10, 100, 1000 раз. Начинаем в том и другом случае с рассуждения, от рассуждения переходим к правилу, которым и пользуемся в дальнейшем. Поясним это на приведенных примерах.

Требуется 318 сотен раздробить в единицы. Рассуждаем: за сотнями следуют десятки и единицы; в данном числе нет ни десятков, ни единиц; на их месте пишем нули; получаем 31 800. Итак, чтобы раздробить сотни в единицы, надо приписать к числу справа два нуля.

Требуется узнать, сколько всего сотен в числе 73 268. Рассуждаем: 7 дес. тыс. = 70 тыс. = 700 сотен; 3 тыс. = = 30 сотен. Имеем 700 сотен + 30 сотен + 2 сотни = = 732 сотни. Итак, чтобы узнать, сколько всего сотен в данном числе, надо отбросить десятки и единицы; оставшееся число покажет, сколько всего сотен в числе.

Когда дети хорошо усвоят нумерацию шестизначных чисел, можно показать им на том же абаке, как из числа 999 999 получается 1 млн. и как записать „один миллион“ цифрами.

На четвертом году обучения вводится сначала класс миллионов и девятизначные числа, а затем класс миллиардов и двенадцатизначные числа. Порядок работы тот же, что и в III классе. Все упражнения проводятся на счетной таблице. Прежде всего дети учатся обозначать на таблице и записывать без таблицы числа третьего класса без нулей и с нулями в пределах этого класса: 345 млн., 478 млн., 305 млн., 470 млн. и т. д. Следующий этап — обозначение на абаке, чтение и запись в тетрадях девятизначных чисел без нулей и с нулями. Таким же способом вводится класс миллиардов.

Учащиеся IV класса достаточно развиты для того, чтобы заинтересоваться вопросом о возможности продолжать счет за пределами класса миллиардов. Надо объяснить им, что 999 млрд. + 1 млрд. составляют 1 триллион и что счет можно продолжать сколь угодно далеко.

При записи многозначных чисел так же, как это делалось при записи шестизначных чисел, следует один класс от другого отделять небольшими промежутками. При выполнении действий, как уже это было сказано, числа записывают без таких промежутков — это мешало бы автоматизации вычислений.

Подведем итоги.

При изучении многозначных чисел не следует резко разграничивать работу над устной и письменной нумерацией.

Основным наглядным пособием при изучении нумерации является счетная таблица (абак), поясняющая десятичную систему счисления с ее группировкой единиц в разряды и классы, а вместе с тем и место каждого разряда и класса в записи числа.

Предметная наглядность нужна в двух случаях: 1) чтобы пояснить образование новой разрядной единицы из десяти единиц ближайшего младшего разряда и 2) чтобы пояснить переход через разрядную или классную единицу. И то, и другое демонстрируется на вертикальных счетах или на палочках в нижних карманах таблицы.

Нумерация каждого класса изучается сначала в пределах данного класса, и только после этого рассматриваются числа, состоящие из единиц нового класса и ранее изученных.

Нет надобности давать детям определения терминов „разряд“ и „класс“. Учащиеся должны знать только названия разрядов и классов, уметь составлять число из данных разрядных чисел, разлагать число на его разрядные слагаемые и преобразовывать единицы одного разряда в другой.

Вслед за нумерацией изучаются арифметические действия сначала в пределах миллиона (III класс), а затем в пределах миллиарда (IV класс).

В пределах тысячи дети уже познакомились с письменным сложением и вычитанием. При переходе к сложению и вычитанию многозначных чисел остается в III классе добавить следующее.

1) Знание терминологии действий (слагаемые, сумма; уменьшаемое, вычитаемое, разность, остаток).

2) Уменье складывать „столбиком" несколько слагаемых.

3) Уменье вычитать в тех случаях, когда приходится занимать через несколько разрядов (например: 700 000 — 56 428).

4) Уменье проверить сложение и вычитание, причем сложение проверяется только сложением (изменение порядка слагаемых или же группировка слагаемых).

5) Усвоение сокращенных приемов объяснения сложения и вычитания. Вот как надо объяснять приведенный здесь пример: пять, двенадцать, двадцать нуль; два, пять, семь, тринадцать, три; один, три, семь, восемь; восемьсот тридцать.

$$\begin{array}{r} 235 \\ +\,427 \\ 168 \\ \hline 830 \end{array}$$

В IV классе формулируется переместительный закон сложения и раскрывается зависимость между суммой и слагаемыми, между уменьшаемым, вычитаемым и остатком. Учащиеся находят одно из двух слагаемых по их сумме и другому слагаемому; находят уменьшаемое по вычитаемому и остатку или же вычитаемое по уменьшаемому и остатку.

Определения действий не заучиваются, хотя они и приведены в стабильном учебнике.

Умножение многозначных чисел

Наметим прежде всего план работы над умножением многозначных чисел.

Работу эту можно разделить на два этапа: 1) умножение на однозначное число, на 10, на круглые десятки и на двузначное число; 2) умножение на 100, на круглые сотни и на трехзначное число; сюда же относятся так называемые частные случаи умножения.

Изучение этих случаев умножения заканчивается в третьей учебной четверти III класса.

В IV классе закрепляются более трудные случаи умножения, особенно те случаи, когда сомножители оканчиваются нулями; повторяются и частично обобщаются соответствующие правила.

Работу над умножением можно построить и по другому плану: 1) умножение на однозначное число; 2) умножение на 10 и на 100; 3) умножение на круглые десятки и на круглые сотни; 4) умножение на двузначное и на трехзначное число.

Каждый способ имеет свои преимущества.

Преимущество второго способа состоит в том, что он дает возможность сблизить рассмотрение аналогичных вопросов. В самом деле, разъяснив прием умножения на 10 и сформулировав соответствующее правило, мы идем по тому же пути при разъяснении умножения на 100. Разъяснив прием умножения на круглые десятки и сформулировав относящееся к нему правило, мы прилагаем аналогичные разъяснения и формулировки к умножению на круглые сотни. Подобным образом устанавливается связь между умножением на двузначное и трехзначное число.

Преимуществом первого способа является его концентричность. Ученик проходит дважды весь цикл вопросов, относящихся к умножению. Повторное прохождение обеспечивает более глубокое понимание каждого звена в отдельности и вместе с тем позволяет лучше осознать связь между звеньями внутри каждого цикла. При этом устраняется некоторая однотонность, характерная для второго способа.

Письменное *умножение на однозначное число* в пределах 1000 должно быть пройдено в первой четверти.

Во второй четверти к умножению многозначного числа на однозначное остается добавить следующее:

1) Умножение на однозначное число четырех, пяти и шестизначных чисел.

2) Знание терминологии умножения (множимое, множитель, произведение).

3) Уменье проверить умножение посредством перестановки сомножителей.

4) Умножение чисел, которые оканчиваются нулем или нулями. (Этот случай умножения можно ввести и позднее при умножении на двузначное число.)

Решение таких примеров связано с преобразованием единиц одного разряда в другой. Пример $34\,700 \times 5$ можно записать двумя способами:

$$\times\begin{array}{r} 347 \text{ сотен} \\ 5 \\ \hline 1735 \text{ сотен} = 173\,500 \end{array} \qquad \text{или} \qquad \times\begin{array}{r} 34\,700 \\ 5 \\ \hline 173\,500 \end{array}$$

Слово „сотен" заменяет два нуля. Оставим их на своем месте. Будем умножать, не обращая внимания на нули, но помня, что мы умножаем сотни. Получим 1735 сотен, но не будем писать слово „сотен", а раздробим мысленно полученное число в единицы, т. е. припишем к нему справа два нуля.

Итак, не откидывая нулей, мы превращаем мысленно данное множимое в десятки, сотни, тысячи и т. п., а затем раздробляем полученный ответ в единицы.

5) Усвоение сокращенных приемов объяснения умножения. При этом нет надобности называть разряды множимого и произведения, что было бы особенно затруднительно при наличии нулей на конце справа у множимого. Таблицей умножения можно пользоваться теперь в краткой формулировке, не считаясь с расстановкой чисел во множимом и во множителе. Так, объяснение примера $34\,700 \times 5$ сводится к следующему: пятью семь — тридцать пять; пять пишу, три в уме; четырежды пять — двадцать, да три — двадцать три; три пишу, два в уме; трижды пять — пятнадцать; тысяча семьсот тридцать пять сотен; раздробляю в единицы — сто семьдесят три тысячи пятьсот.

Умножение на 10 дети производят сначала не по правилу, а на основе рассуждения: чтобы умножить данное число на 10, достаточно каждую единицу его умножить на 10; в произведении получится столько десятков, сколько единиц было во множимом. Так, если мы умножаем 7 единиц на 10, получается 7 дес. = 70, если умножаем 12 единиц, получается 12 дес. = 120 и т. д.

Чтобы вывести правило умножения на 10, составляют табличку, пользуясь приведенным рассуждением:

$$
\begin{aligned}
7 \times 10 &= 70 \\
9 \times 10 &= 90 \\
14 \times 10 &= 140 \\
27 \times 10 &= 270 \\
135 \times 10 &= 1350
\end{aligned}
$$

Сопоставляя во всех этих примерах множимое с произведением, учащиеся замечают, что в произведении остаются те же значащие цифры, которые были во множимом. Разница только в том, что на конце каждого произведения справа появился нуль, которого нет во множимом.

Разберем подробнее один из этих примеров, положим, последний, чтобы понять, какую роль играет этот нуль.

Цифра 5 стояла во множимом на первом месте и обозначала единицы; в произведении она обозначает десятки, т. е. число, которое в 10 раз больше прежнего.

Цифра 3 стояла во множимом на втором месте и обозначала десятки; теперь она обозначает сотни, т. е. число, которое в 10 раз больше прежнего.

Единица обозначала первоначально 1 сотню, а теперь — 1 тысячу, т. е. и ее значение возросло в 10 раз.

Итак, каждое разрядное слагаемое увеличилось в 10 раз. Значит, и все число увеличилось в 10 раз.

Это произошло потому, что все цифры множимого в связи с появлением нуля передвинулись на одно место влево. Следовательно, приписывая к числу справа один нуль, мы увеличиваем его в 10 раз.

Выводим правило: **чтобы умножить любое число на 10, достаточно приписать к нему справа один нуль.**

Умножение любых чисел на 10 всегда записывают в строчку:

$$3684 \times 10 = 36\,840$$

Умножение на круглые десятки разъясняется сначала на материале первой тысячи.

Что значит 18 умножить на 30? Это значит число 18 повторить слагаемым 30 раз. Чтобы поместить на доске все 30 слагаемых, соединим их в группы, по 10 слагаемых в каждой группе.

$$18 \times 30 = ?$$

$$18 + 18 + 18 + 18 + 18 + 18 + 18 + 18 + 18 + 18 = 180$$
$$18 + 18 + 18 + 18 + 18 + 18 + 18 + 18 + 18 + 18 = 180$$
$$18 + 18 + 18 + 18 + 18 + 18 + 18 + 18 + 18 + 18 = 180$$

$$54 + 54 + 54 + 54 + 54 + 54 + 54 + 54 + 54 + 54 = 540$$

Будем складывать по рядам. В каждом ряду 10 слагаемых; 18 умножить на 10, получится 180. Таких рядов три; 180 умножить на три, получится 540. Итак, $18 \times 30 = 540$.

Будем складывать по столбцам. В каждом столбце 3 слагаемых; 18 умножить на 3, получится 54. Таких столбцов десять; 54 умножить на 10, получится 540. Итак, $18 \times 30 = 540$.

Запишем подробно оба способа вычисления и сравним их:

1) $18 \times 30 = (18 \times 10) \times 3 = 180 \times 3 = 18$ дес. $\times 3 =$ $= 54$ дес. $= 540$

2) $18 \times 30 = (18 \times 3) \times 10 = 54 \times 10 = 540$

Второй способ удобнее первого, так как легче умножить на 3 число 18, чем число 180. В самом деле, нуль, который мы приписали, умножая 18 на 10, приходится затем снова отбросить и фактически умножать на 3 не 180, а 18 десятков, что собственно и усложняет вычисления.

Итак, из двух возможных способов мы выбираем второй и на основании этого способа выводим п р а в и л о умножения на круглые десятки:

Чтобы умножить любое число на 30, достаточно умножить его на 3 и к полученному произведению приписать справа нуль; чтобы умножить любое число на 40, достаточно умножить его на 4 и к полученному произведению приписать справа нуль и т. д.

В III классе было бы преждевременно вводить обобщенную формулировку этого правила. Однако, очень важно, чтобы учащиеся понимали сущность приема последовательного умножения, которым они в данном случае пользуются и который основан на сочетательном свойстве умножения. Необходимо постоянно возвращаться к этому вопросу, предлагая учащимся соответствующие устные упражнения. Например:

Как умножить любое число на 6? на 8? на 10? Как изменится число, если его увеличить в 2 раза, а полученное произведение умножить на 3? на 4? на 5?

Для дифференцировки основных приемов умножения, основанных на сочетательном и распределительном законах этого действия, полезно решать д в у м я способами такие примеры, как $15 \times 8 \times 10$ и $15 \times 8 + 15 \times 10$, или же аналогичные задачи:

1) Метр ситца стоит 7 руб., метр шелка в 4 раза дороже ситца, а метр драпа в 10 раз дороже шелка. Сколько стоит 1 *м* драпа?

2) На платье купили 4 *м* ситца по 7 руб. за метр, а на занавески к окнам — 10 *м* такого же ситца. Сколько всего израсходовано денег?

В соответствии с правилом умножения на круглые десятки вводится целесообразная запись:

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}197\\40\end{array}\\ \hline 7880\end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\begin{array}{r}5237\\50\end{array}\\ \hline 261\,850\end{array}$$

Объяснение: умножаем 197 на 4, получаем 788 единиц; умножаем 788 на 10; для этого приписываем к нему справа нуль; получаем 7880.

В данном случае мы именно *умножаем* число 788 на 10, но не раздробляем десятки в единицы, как иногда неправильно объясняют ученики.

Умножение на двузначное число тесно связано с предыдущими случаями умножения. Эту связь надо показать детям на небольших числах:

$$15 \times 12 = 15 \times 10 + 15 \times 2 = 150 + 30 = 180$$
$$25 \times 23 = 25 \times 20 + 25 \times 3 = 500 + 75 = 575$$

Чтобы умножить любое число на 12, надо уметь умножать на 10 и на однозначное число (в данном случае на 2).

Чтобы умножить любое число на 23, надо уметь умножать на 20 и на 3, т. е. на круглые десятки и на однозначное.

Но мы уже научились умножать и на однозначное, и на 10, и на круглые десятки. Остается применить известные нам приемы к многозначным числам.

Возьмем пример потруднее:

$$68 \times 34 = 68 \times 30 + 68 \times 4$$

Запишем эти действия „столбиком":

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}68\\30\end{array}\\ \hline 2040\end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\begin{array}{r}68\\4\end{array}\\ \hline 272\end{array} \qquad \begin{array}{r} +\begin{array}{r}2040\\272\end{array}\\ \hline 2312\end{array}$$

Сосредоточим все три действия в одном месте, сохраняя сначала порядок слагаемых 2040 и 272, а затем переставим эти неполные произведения:

$$\begin{array}{r}68\\ \times\ 34\\ \hline 2040\\ 272\\ \hline 2312\end{array}\qquad\qquad\begin{array}{r}68\\ \times\ 34\\ \hline 272\\ 2040\\ \hline 2312\end{array}$$

Последняя запись отличается от общепринятой только нулем на конце справа у второго неполного произведения. Если отбросить этот нуль, результат не изменится, так как следующие цифры остаются на своих местах под соответствующими разрядами первого неполного произведения:

$$\begin{array}{r}68\\ \times\ 34\\ \hline 272\\ 2040\\ \hline 2312\end{array}\qquad\qquad\begin{array}{r}68\\ \times\ 34\\ \hline 272\\ 204\\ \hline 2312\end{array}$$

Заметим, что нет надобности писать знак сложения против неполных произведений: прием умножения, включающий сложение неполных произведений, определяется от начала до конца **знаком умножения**, который пишется слева от сомножителей.

Вот как должен ученик объяснять умножение на двузначное число.

$$\begin{array}{r}56\\ \times\ 37\\ \hline 392\\ 168\\ \hline 2072\end{array}$$

Чтобы умножить 56 на 37, достаточно сначала умножить 56 на 7, затем умножить 56 на 30 и полученные числа сложить.

Умножаем 56 на 7. Шестью семь — 42; 2 пишу, 4 в уме. Пятью семь — 35, да 4 — 39.

Умножаем 56 на 30. Для этого достаточно умножить 56 на 3 и к полученному числу приписать нуль. **Этого нуля мы писать не будем**, оставим его место свободным, а произведение на 3 начнем записывать под десятками.

Умножаем 56 на 3: трижды шесть — 18; 8 пишу, 1 в уме; трижды пять — 15, да 1 — 16.

Складываем: 2, 17, 7, 1, 10, 0, 2.

Ответ: 2072.

Умножение на 100 производят сначала не по правилу, а на основании рассуждения: чтобы умножить данное число на 100, достаточно каждую единицу его умножить на 100; в произведении получится столько сотен, сколько единиц было во множимом.

Чтобы вывести правило, составляют табличку, пользуясь приведенным рассуждением:

$$
\begin{aligned}
3 \times 100 &= 300 \\
8 \times 100 &= 800 \\
12 \times 100 &= 1200 \\
24 \times 100 &= 2400 \\
37 \times 100 &= 3700
\end{aligned}
$$

Произведение в каждом примере отличается от множимого только двумя нулями, которые стоят справа от значащих цифр.

Разберем подробнее последний пример, чтобы понять, какую роль играют эти нули.

Цифра 7 стояла во множимом на первом месте и обозначала единицы; теперь она передвинулась на два места влево и обозначает сотни, т. е. число, которое в 100 раз больше прежнего.

Цифра 3 стояла во множимом на втором месте и обозначала десятки; теперь она обозначает тысячи, т. е. число, которое в 100 раз больше прежнего.

Итак, каждое разрядное слагаемое увеличилось в 100 раз, значит и все число увеличилось в 100 раз.

Выводим правило: *чтобы умножить любое число на 100, достаточно приписать к нему справа два нуля.*

Умножение любых чисел на 100 всегда записывают *в строчку*:

$$2706 \times 100 = 270\,600$$

Умножение на круглые сотни сводится, как и умножение на круглые десятки, к последовательному умножению, основанному на сочетательном свойстве умножения.

Когда мы умножали 18 на 30, мы соединили наши 30 слагаемых в группы, по 10 слагаемых в каждой группе. При умножении на круглые сотни в каждом ряду будет не 10, а 100 слагаемых:

$$24 \times 300 = ?$$

$$\begin{array}{l}
24 + 24 + 24 + \ldots\ldots\ldots + 24 = 24 \times 100 = 2400 \\
24 + 24 + 24 + \ldots\ldots\ldots + 24 = 24 \times 100 = 2400 \\
24 + 24 + 24 + \ldots\ldots\ldots + 24 = 24 \times 100 = 2400 \\
\hline
72 + 72 + 72 + \ldots\ldots\ldots + 72 = 72 \times 100 = 7200
\end{array}$$

Если считать по рядам, будем иметь:

$$24 \times 300 = (24 \times 100) \times 3 = 2400 \times 3 = 24 \text{ сотни} \times 3 = 72 \text{ сотни} = 7200$$

Если считать по столбцам, будем иметь:

$$24 \times 300 = (24 \times 3) \times 100 = 72 \times 100 = 7200$$

Второй способ удобнее первого, так как легче умножить на 3 число 24, чем число 2400.

Выводим правило умножения на круглые сотни, исходя из второго способа вычисления: чтобы умножить любое число на 300, достаточно умножить его на 3 и к полученному произведению приписать два нуля; чтобы умножить любое число на 400, достаточно умножить его на 4 и к полученному произведению приписать два нуля и т. д.

В III классе это правило носит, как мы видим, конкретный характер, подобно правилу умножения на круглые десятки.

Умножение на трехзначное число опирается на все предыдущие случаи умножения. Чтобы умножить на трехзначное число, надо уметь умножать на однозначное, на 10, на круглые десятки, на 100 и на круглые сотни, а также уметь объяснять умножение на двузначное.

Вот как должен ученик объяснять умножение на трехзначное число:

$$\begin{array}{r}
\times\ 427 \\
345 \\
\hline
2135 \\
1708 \\
1281 \\
\hline
147315
\end{array}$$

Чтобы умножить 427 на 345, достаточно умножить 427 на 5, затем на 40 и, наконец, на 300 и полученные произведения сложить.

Умножаем 427 на 5. Пятью семь — 35 и т. д.

Умножаем 427 на 40. Для этого достаточно умножить 427 на 4 и к полученному числу приписать нуль. Этого нуля мы писать не будем, оставим его место свободным, а произведение на 4 начнем записывать под десятками.

Умножаем 427 на 4. Четырежды семь — 28 и т. д.

Умножаем 427 на 300. Для этого достаточно умножить 427 на 3 и к полученному числу приписать два нуля. *Этих нулей мы писать не будем*, оставим их места свободными, а произведение на 3 начнем записывать под сотнями.

Умножаем 427 на 3. Трижды семь — 21 и т. д.

Складываем неполные произведения. Получаем 147 315.

Рассмотрим некоторые *частные случаи* умножения многозначных чисел.

Умножение на трехзначное с нулем в середине не содержит ничего принципиально нового.

Вот как следует объяснять такого рода умножение:

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}438\\203\end{array} \\ \hline 1314 \\ 876 \\ \hline 88914 \end{array}$$

Чтобы умножить 438 на 203, достаточно умножить 438 на 3, затем умножить 438 на 200 и полученные произведения сложить.

Умножаем 438 на 3. Трижды восемь — 24 и т. д.

Чтобы умножить 438 на 200, достаточно умножить 438 на 2 и к полученному числу приписать два нуля. *Этих нулей мы писать не будем*, оставим их места свободными, а произведение на 2 начнем записывать под сотнями.

Умножаем 438 на 2. Дважды восемь — 16 и т. д.

Складываем неполные произведения. Окончательный ответ — 88 914.

Умножение на трехзначное число, оканчивающееся нулем, основано на применении сочетательного свойства умножения, подобно умножению на круглые десятки и круглые сотни. Следует напомнить учащимся тот наглядный образ, который помог нам в свое время вывести правило умножения на круглые десятки.

Умножая 18 на 30, мы сгруппировали слагаемые по 10 в ряд, причем получили 3 таких ряда. Вычисляли по столбцам: $(18 \times 3) \times 10 = 54 \times 10 = 540$.

Воспользуемся тем же способом при умножении числа 426 на 240. Сгруппируем слагаемые по 10 в ряд. Таких рядов будем иметь не 3, как при умножении на 30, а 24. В самом деле, если рядов 24, а слагаемых в каждом ряду 10, то *всего* слагаемых 240, в точном соответствии с данным множителем.

Вычисляем по столбцам, т. е. умножаем 426 сначала на 24, а затем, по числу столбцов, на 10, т. е. к полученному произведению приписываем нуль.

Такому приему умножения соответствует запись: нуль, которым оканчивается множитель, пишут не под единицами множимого, а правее, как это делается при умножении на круглые десятки и круглые сотни.

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}426\\ 240\end{array} \\ \hline 1704\\ 852\\ \hline 102\,240 \end{array}$$

Умножив 426 на 24, получаем 10 224. Следует помнить, что мы умножаем именно на 24, а не на 24 десятка, и получаем также не десятки, а единицы.

Полученное число 10 224 мы затем умножаем на 10, приписав к нему справа нуль.

Остается рассмотреть еще один случай умножения, когда *оба сомножителя оканчиваются нулями*. Этот случай вводится только в IV классе.

Вспомним, как мы рассуждали, умножая, например, 2700 на 14, а также 27 на 140.

В первом случае мы умножали 27 *сотен* на 14, а затем полученные сотни *раздробляли* в единицы, приписав к ним два нуля.

Во втором случае мы умножали 27 на 14, а затем полученное произведение *умножали на* 10. Для этого достаточно было приписать к нему один нуль.

Теперь умножим 2700 на 140. Для этого достаточно умножить 27 сотен на 14, раздробить полученное число в единицы и умножить его на 10. Чтобы раздробить число в единицы, придется приписать к нему справа два нуля, а чтобы умножить на 10, еще один нуль.

Сопоставим все три записи:

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{l}2700\\ 14\end{array} \\ \hline 108\\ 27\\ \hline 37\,800 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\begin{array}{l}27\\ 140\end{array} \\ \hline 108\\ 27\\ \hline 3780 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\begin{array}{l}2700\\ 140\end{array} \\ \hline 108\\ 27\\ \hline 378\,000 \end{array}$$

В первом случае 378 сотен мы раздробляли в единицы. Во втором случае 378 единиц мы умножали на 10.

В третьем случае 378 сотен мы раздробляли в единицы, а затем умножали на 10.

Выводим правило: если сомножители оканчиваются нулями, производят умножение, мысленно откинув эти нули, а затем приписывают к произведению столько нулей, сколько их на концах множимого и множителя вместе.

В IV классе можно обобщить правила умножения на 10 и на 100, а также правила умножения на круглые десятки и на круглые сотни. Вспомним, что 10 и 100 — разрядные единицы, а круглые десятки и круглые сотни — разрядные числа.

Итак, сформулируем правила умножения на разрядную единицу и на разрядное число.

1) При умножении на разрядную единицу достаточно приписать к множимому столько нулей, сколько их во множителе.

2) При умножении на разрядное число достаточно найти произведение множимого на старшую цифру множителя и к полученному результату приписать столько нулей, сколько их во множителе.

В IV классе можно ввести сокращенное объяснение умножения на многозначное число. Например, умножение на трехзначное число ученик объясняет следующим образом: умножаю на цифру единиц; произведение начинаю записывать под единицами; умножаю на цифру десятков — произведение начинаю записывать под десятками; умножаю на цифру сотен — произведение начинаю записывать под сотнями.

Допуская такие условные формулировки, не следует мириться с выражениями: умножаю на 5 десятков, умножаю на 4 сотни и т. д. При отвлеченном множителе произведение однородно множимому. Умножая сотни на отвлеченное число, мы получаем сотни, умножая тысячи, получаем тысячи. Но что получится, если умножить 4 сотни на 3 сотни? 5 тысяч на 4 десятка? и т. д. Как назвать разряд произведения? Оказывается, в этом случае пришлось бы производить действие над словами, над наименованиями — операция, явно превышающая возможности ученика начальной школы. Вот почему при умножении на 300 или 400 мы рассуждаем так: умножим данное число на цифру сотен, т. е. повторим его 3 раза, а затем умножим произведение на 100.

Добиваясь беглости при объяснении умножения, следует пользоваться краткой формулировкой таблицы: четырежды шесть, пятью семь и т. д. При этом выгоднее с мнемонической точки зрения придерживаться только одного из двух возможных вариантов: всегда говорить не шестью четыре, а четырежды шесть, не восемью три, а трижды восемь, не девятью пять, а пятью девять и т. д. Таким образом, нам придется иметь дело только с теми случаями, когда множитель равен множимому или меньше множимого.

Например, умножая 345 на 98, мы будем пользоваться следующими выражениями: пятью восемь, четырежды восемь, трижды восемь, а затем пятью девять, четырежды девять и трижды девять, хотя по смыслу действия следовало бы говорить как раз наоборот. Однако, в это время дети уже настолько развиты, что перестановка сомножителей не может создать каких-либо недоразумений. Необходимо только время от времени проверять, как понимают ученики выражения четырежды, пятью и т. п. „Четырежды семь" значит „по семь взять четыре раза", „пятью восемь" значит „по восемь взять пять раз" и т. д. Можно сказать „пятью нуль", но нельзя говорить „нолью пять". На это также следует обратить внимание.

Деление многозначных чисел

Наметим план работы над делением многозначных чисел.

Работу эту, как и работу над умножением, можно разделить на два этапа: 1) деление на однозначное число, на десять, на круглые десятки и на двузначное число и 2) деление на сто, на круглые сотни и на трехзначное число. Необходимо также остановиться на частных случаях деления. Однако, в отличие от умножения, эти частные случаи появляются не в конце работы над делением, а возникают с самого начала, уже при делении многозначного числа на однозначное. Мы имеем в виду нули в середине и на конце частного. При делении на однозначное, когда в частном много цифр, среди них может оказаться больше нулей, чем при делении на многозначное.

При делении *многозначного числа на однозначное* необходимо прежде всего уточнить те сведения, которые дети приобрели в первой четверти. Поясним это на примере 16 436 : 7.

```
16436 | 7
14    |____
----- | 2348
 24
 21
 ---
  33
  28
  ---
   56
   56
   ---
```

Как при делении трехзначного числа, так и при делении многозначного действие производят по частям над так называемыми *неполными делимыми*. Неполные делимые — это числа, которые мы образуем при делении, чтобы получить один за другим разряды частного.

Неполными делимыми в нашем примере являются числа: 16 000, 2400, 330 и 56.

В действительности удается разделить не эти числа, а слагаемые 14 000, 2100, 280 и 56, на которые, пользуясь распределительным свойством деления, мы разложили делимое. Сумма этих чисел равна делимому.

При объяснении деления следует прежде всего назвать разряды делимого: 6 единиц, 3 десятка, 4 сотни, 6 тысяч, 1 десяток тысяч. Пробуем делить старший разряд — 1 десяток тысяч. Но 1 десяток тысяч не делится на 7 равных частей так, чтобы в частном получились целые десятки тысяч. Поэтому 1 дес. тыс. мы раздробляем в тысячи, прибавляем к 10 тысячам еще 6 тысяч и получаем 16 тысяч. Это число делится на 7 равных частей так, чтобы в частном получились целые тысячи. Итак, старший разряд частного — тысячи.

В дальнейшем можно рассуждать короче. Назвав разряды делимого, мы говорим: *образуем первое неполное делимое*; 1 десяток тысяч не делится на 7 равных частей так, чтобы в частном получились целые тысячи; первое неполное делимое будет 16 тысяч. Итак, старший разряд частного — тысячи.

Заметим, что при делении многозначных чисел, как и при делении трехзначных, легче установить старший разряд частного, если иметь в виду не деление по содержанию, а *деление на равные части*.

Образовав первое неполное делимое, установив его разряд и, тем самым, старший разряд частного, учащиеся должны тотчас же установить *число цифр частного*, отмечая точками их места.

Если при делении того или другого неполного делимого получился остаток, нельзя утверждать, что он меньше делителя (за исключением, разумеется, последнего остатка — от деления в целом). Следует говорить: остаток 2 тысячи не делится на 7 равных частей так, чтобы в частном получились целые тысячи; или остаток 3 сотни не делится на 7 равных частей так, чтобы в частном получились целые сотни и т. д.

Необходимо уделить особое внимание тем случаям, когда на конце или в середине частного получаются нули. Чтобы учащиеся не пропускали этих нулей, следует неуклонно соблюдать указанные требования: делить не по содержанию, а на равные части; называть разряд каждого неполного делимого и соответствующий разряд частного; назвав старший разряд частного, тотчас устанавливать число цифр частного, отмечая точками их места.

При делении многозначного числа на однозначное в III классе не следует спешить с переходом на сокращенную запись даже в том случае, когда в частном несколько нулей. Так, например, деление числа 280 024 на 4 записываем так:

$$\begin{array}{r|l} 280\,024 & 4 \\ \underline{28} & \overline{70\,006} \\ 0024 & \\ \underline{24} & \end{array}$$

Не получив остатка при делении 28 десятков тысяч, „сносим“ под черту нуль тысяч и пишем нуль на месте тысяч в частном; затем сносим нуль сотен и пишем нуль на месте сотен в частном; сносим, далее, 2 десятка; 2 десятка не делятся на 4 равные части так, чтобы получились целые десятки — пишем нуль на месте десятков; сносим, наконец, 4 единицы, делим 24 на 4 и получаем 6 единиц в частном, а всего 70 006.

В дальнейшем будем записывать такие случаи деления прямо в строчку:

$$280\,024 : 4 = 70\,006$$

Отметим еще те случаи деления, когда нули появляются на конце частного. Наибольшее число ошибок в делении падает как раз на эти случаи, особенно при делении с остатком:

$$
\begin{array}{r|l}
267\,500 & 5 \\
\underline{25} & \overline{53\,500} \\
17 & \\
\underline{15} & \\
25 & \\
\underline{25} & \\
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
26\,802 & 8 \\
\underline{24} & \overline{3350} \\
28 & \\
\underline{24} & \\
40 & \\
\underline{40} & \\
2 & \\
\end{array}
$$

В заключение надо обратить внимание еще на два обстоятельства, относящиеся к делению многозначного числа на однозначное:

1) деление многозначного числа на однозначное сводится, как мы видели, к *табличному делению*, т. е. к делению двузначного (или однозначного) числа на однозначное;

2) при делении на однозначное число мы находим цифру частного сразу, *без проб*.

Следует также помнить, что при делении многозначного числа на однозначное дети знакомятся с терминологией деления и с приемом проверки деления умножением.

Деление на 10 в пределах 1000 производят не по правилу, а на основе рассуждения: чтобы разделить число 60 (20, 40, 70 и т. п.) на 10, достаточно каждый десяток разделить на 10; в частном получится столько единиц, сколько было в делимом десятков. В делимом было 6 десятков, значит в частном получится 6.

Чтобы вывести *правило* деления на 10 для чисел, которые оканчиваются нулями, составляем табличку, пользуясь приведенным рассуждением:

$$
\begin{array}{r}
50:10=5 \\
80:10=8 \\
140:10=14 \\
170:10=17 \\
230:10=23
\end{array}
\text{ и т. д.}
$$

Сопоставляя во всех этих примерах делимое с частным, мы замечаем, что в частном остаются те же значащие цифры, которые были в делимом. Разница только в том, что каждое делимое оканчивается нулем, а в частном эти нули отпали.

Разберем подробнее последний пример. Цифра 3 стояла в делимом на втором месте и обозначала десятки; в частном она стоит на первом месте и обозначает единицы, т. е. число, которое в 10 раз меньше прежнего. Цифра 2 также переместилась на одно место вправо и обозначает число, которое в 10 раз меньше прежнего.

Итак, каждое разрядное слагаемое уменьшилось в 10 раз. Значит, и все число уменьшилось в 10 раз.

Выводим *правило: чтобы разделить на 10 число которое оканчивается нулем (или нулями), достаточно откинуть в нем справа один нуль.*

Нередко приходилось слышать на уроках арифметики, как дети с трудом пытаются выговорить слово „оканчивающиеся“. Надо пользоваться более удобным оборотом речи: „которые оканчиваются“.

Сразу же следует рассмотреть деление на 10 с остатком. В этом случае мы ограничиваемся рассуждением: правило в начальной школе не выводится.

Дано 376 разделить на 10. Разделится ли это число на 10? Число 370 разделится на 10 — к нему можно приложить правило. А 6 единиц, которые мы отбросили, на 10 не разделятся. Это остаток.

От деления трехзначных чисел на 10 переходим *к делению любых многозначных чисел на* 10. Если эти числа оканчиваются нулем (или нулями), к ним применяется установленное нами правило. Если же они оканчиваются значащей цифрой, приходится воспользоваться указанным рассуждением.

Деление любых чисел на 10 всегда записывают в строчку:

$$4560:10=456; \quad 15\,875:10=1587 \text{ (ост. 5)}.$$

Деление на круглые десятки, подобно делению на 10, разъясняется сначала на материале *первой тысячи*. При этом мы различаем два случая:

1) *легкий*, когда в делении на каждом его этапе участвует только два разряда делимого, т. е. столько же разрядов, сколько их в делителе.

$$\begin{array}{r|l} 860 & 20 \\ \cline{2-2} \underline{80} & 43 \\ 60 & \\ \underline{60} & \end{array}$$

В этом случае деление сводится к внетабличному делению в пределах 100. Рассуждаем так же, как и при делении на однозначное. Новый момент появится только в связи с образованием первого неполного делимого. Придется указать, что в делителе две цифры; поэтому и в первом неполном делимом не может быть меньше двух цифр. А дальше рассуждаем попрежнему: 86 десятков разделить на 20 равных частей, получится в каждой части по 4 десятка. Старший разряд частного — десятки, значит в частном будет 2 цифры. Узнаем, сколько десятков разделили, узнаем, сколько десятков осталось и т. д.

2) *Трудный*, когда в делении участвуют сразу все три разряда делимого, т. е. одним разрядом *больше*, чем в делителе.

Как найти в этом случае цифру частного?

$$\begin{array}{r|l} 420 & 60 \\ \hline \end{array}$$

Можно рассуждать двумя способами. Первый способ — способ „наименьшего сопротивления" — сводится к делению по содержанию: 6 десятков в 42 десятках содержатся 7 раз; значит, в частном будет 7.

В пределах первой тысячи такой способ рассуждения вполне применим. Но стоит только перейти к делению многозначных чисел, как сразу же обнаружатся его неудобства.

Решим пример: 36 000 : 40.

$$\begin{array}{r|l} 36\,000 & 40 \\ \hline \end{array}$$

Образуем первое неполное делимое — это 360 сотен. Узнаем, сколько раз *4 десятка* содержатся в 360 *сотнях*. Едва ли удастся получить от ученика III класса правильный ответ на этот вопрос.

Чтобы избежать подобных трудностей, следует и в этом случае придерживаться правила — делить не по содержанию, а *на равные части*. Такой способ деления состоит в последовательном делении на 10, а затем на цифру десятков.

Итак, чтобы разделить 420 на 60, достаточно 420 *единиц* разделить на 10 равных частей — получится 42 *единицы*, а затем 42 единицы разделить на 6 равных частей — получится 7 *единиц*.

Применяя тот же прием при делении многозначного числа на круглые десятки, мы и в этом случае сумеем без труда назвать разряд частного. В самом деле, разделив 360 *сотен* на 10 равных частей, мы получим 36 *сотен*, а при делении 36 *сотен* на 4 равные части будем иметь в частном 9 *сотен*, т. е. 900.

Прием последовательного деления следует пояснить детям **графически** на делении отрезков.

Опыт показал, что демонстрацию такого деления надо начинать сразу с деления отрезка на 20, 30, 40 и т. д. равных частей тем самым способом, который потребуется в дальнейшем при делении чисел. Попытка начинать последовательное деление отрезков с деления на 4, 6, 8 и 10 равных частей приводила в дальнейшем к недоразумениям: в **любых** случаях при делении на круглые десятки дети начинали производить действие с деления на 2 равные части.

Итак, надо продемонстрировать деление на 10 и на 2, на 10 и на 3 и т. д. Но разделить отрезок на 10 равных частей затруднительно. Проще прикрепить к доске метр, разделенный на дециметры. В это время учащиеся уже знают, что в метре 10 дециметров, что, следовательно, наша лента разделена на 10 равных частей. Остается каждую такую часть разделить мелом (под лентой) пополам — теперь лента разделена на 20 равных частей. Тем же способом учитель делит ее на 30 равных частей. А дальше, уже без пособия дети устанавливают способ деления на 40, на 70, на 80 и т. д. равных частей.

Итак, чтобы разделить 420 на 60, достаточно 420 единиц разделить на 10 равных частей, а затем 42 единицы на 6 равных частей; получится 7 единиц.

Тот же прием мы применяем и в случае деления с остатком. Чтобы 246 разделить на 30, достаточно 246 единиц разделить на 10, а затем 24 единицы — на 3 равные части. Получим в частном 8 единиц и 6 единиц в остатке.

Учащиеся решают ряд таких примеров:

$$\begin{array}{r|l} 327 & \underline{50} \\ \underline{300} & 6 \\ 27 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 415 & \underline{70} \\ \underline{350} & 5 \\ 65 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 543 & \underline{80} \\ \underline{480} & 6 \\ 63 & \end{array}$$

Каждый раз они подробно объясняют процесс деления:

Чтобы 327 разделить на 50, надо сначала разделить это число на 10, а затем 32 единицы на 5. Получится 6 единиц.

Узнаем, какое число мы разделили. Для этого умножим 50 на 6; получится 300.

Узнаем, сколько осталось. Осталось 27.

На каком этапе деления получаем мы цифру частного? Получаем ли мы цифру частного при делении числа на 10? Нет, не получаем. Так, например, разделив 327 на 10, мы еще не установили эту цифру; получим же ее при делении 32 на 5. Точно так же при делении числа 415 на 10 мы не найдем цифры частного, это произойдет только при делении 41 на 7 и т. д.

Итак, чтобы разделить 240 на 60, достаточно 24 разделить на 6; чтобы разделить 327 на 50, достаточно 32 разделить на 5; чтобы разделить 415 на 70, достаточно 41 разделить на 7 и т. д.

Вообще, чтобы разделить трехзначное число на круглые десятки (при однозначном частном), достаточно две старшие цифры делимого разделить на старшую цифру делителя.

Как мы видим, деление на круглые десятки сводится, подобно делению на однозначное, к табличному делению без остатка или с остатком (24:6, 32:5, 41:7 и т. д.).

И в этом случае, как при делении на однозначное, мы находим цифру частного сразу, без проб. Приходится только узнавать, какое число мы разделили (умножение) и сколько осталось (вычитание).

Чтобы подготовить переход к делению многозначных чисел на круглые десятки, можно заменить подробное объяснение деления более коротким. Так, при решении примера 327:50 мы говорим: чтобы 327 разделить на 50, достаточно 32 разделить на 5; при решении примера 415:70 мы говорим: чтобы 415 разделить на 70, достаточно 41 разделить на 7 и т. д.

Заметим, что, исходя из деления по содержанию, мы с неменьшим успехом могли бы ввести такое краткое объяснение. Но при делении многозначных чисел пришлось бы пользоваться этим объяснением совершенно автоматически, так как попытка осмыслить процесс нахождения цифры частного привела бы нас к вопросу: сколько раз 5 десятков содержатся в 42 сотнях или сколько раз 8 десятков содержатся в 35 десятках тысяч и т. д., т. е. к вопросу, на который учащимся очень трудно было бы ответить.

Наоборот, исходя из деления на равные части и связанного с ним приема последовательного деления, мы всегда можем проверить, понимает ли ученик механизм деления на круглые десятки. Покажем это на следующем примере.

Образуем первое неполное делимое. В делителе 2 цифры. Значит, в делимом не может быть меньше двух цифр.

```
74800 | 80
720   |----
----  | 935
 280
 240
 ----
  400
  400
  ---
```

74 тысячи не делится на 80 равных частей так, чтобы в каждой части получились целые тысячи.

Делим 748 сотен на 80 равных частей. Старший разряд частного — сотни. В частном будет три цифры.

Чтобы разделить 748 на 80, достаточно 74 разделить на 8. Получаем 9. Пишем в частном на месте сотен цифру 9.

Умножаем, вычитаем и т. д.

Таков краткий способ объяснения деления, но можно иногда в целях деавтоматизации потребовать от ученика подробного объяснения. Оно состоит в следующем.

748 сотен надо разделить на 80 равных частей. Делим сначала 748 *сотен* на 10 равных частей; получится 74 *сотни*. Делим, далее, 74 *сотни* на 8 равных частей; получится 9 *сотен*. Применяя такое объяснение, ученик отдает себе отчет в том, почему в частном получилось именно 9 *сотен*, а не другой какой-либо разряд.

Новый этап деления — *деление на двузначное число* — начинаем опять-таки с деления в пределах тысячи.

И в этом случае, как при делении на круглые десятки, различаем более легкие комбинации, когда в делении на каждом его этапе участвует столько же разрядов, сколько их в делителе. Здесь деление сводится к внетабличному делению в пределах 100. Цифра частного ясна сразу.

```
768 | 24
72  |---
--- | 32
 48
 48
---
```

Но наряду с такими легкими случаями, мы имеем значительно более трудные случаи, когда в делении сразу участвуют все три разряда делимого, т. е. одним разрядом больше, чем в делителе. В легком случае частное было двузначным. В трудном случае оно будет однозначным.

Знакомство *с делением трехзначного числа на двузначное при однозначном частном* представляет собою важнейший, узловой момент в изучении деления.

Рассмотрим ряд примеров.

416	52
416	8

Как можно было бы, не зная приема деления на двузначное число, найти в этом случае цифру частного?

Установим прежде всего ее разряд. В делителе две цифры, значит в первом неполном делимом не может быть меньше двух цифр. Но 41 десяток нельзя разделить на 52 равные части так, чтобы в каждой части получился хоть один десяток. Самое меньшее, их должно было бы быть 52, у нас же только 41 десяток.

Итак, в делимое войдут все три разряда данного числа. Следовательно, в частном получится *однозначное число*. Попробуем, не подойдет ли цифра 5. Умножаем 52 на 5 и убеждаемся, что цифра 5 „слаба". Не подойдет ли цифра 6? Оказывается, что и 6 не подходит. Испытываем 7 и, наконец, находим ответ — 8.

Продемонстрировав перед учащимися этот длинный способ, учитель предлагает вспомнить, на какое число, близкое к 52, мы уже научились делить.

Учащиеся уже умеют делить на круглые числа, в частности, на число 50, близкое к числу 52.

Заменим делитель 52 этим ближайшим к нему круглым числом. Как разделить 416 на 50? Для этого достаточно разделить 41 на 5, получится 8.

Можно ли считать цифру 8 окончательной? Нет, так как задано разделить на 52, а мы делили на 50. Полученная цифра не может считаться окончательной — это пробная цифра. Испытаем, годится ли она. Для этого умножим 52 на 8. Получится 416. Значит, цифра 8 верна.

Прием деления, основанный на замене делителя ближайшим круглым числом, называется *приемом округления делителя*, а полученная при этом цифра частного, как уже сказано, носит название *пробной цифры частного*.

До сих пор, когда мы делили на однозначное, на 10 и на круглые десятки, нам не приходилось изменять делитель; цифра частного, которую мы получали при делении одной или двух старших цифр делимого (полного или неполного) на старшую цифру делителя, была окончательной, ее не приходилось испытывать — достаточно было узнать, какое число удалось разделить (умножение) и какое число осталось (вычитание).

Теперь мы вступаем в новую область, где нам придется постоянно иметь дело с пробными цифрами частного, испытывать их и сплошь и рядом изменять, если окажется, что найденная цифра не подходит.

В предыдущем примере, округлив делитель, мы сразу нашли правильный ответ. Говорят, что в этом случае была сделана *одна проба*.

Возьмем другой пример.

Число 68 ближе к числу 70, чем к числу 60, иначе говоря, 68 ближе к *старшему круглому числу, чем к младшему*. Попробуем сначала округлить его все-таки в сторону *младшего круглого числа*, т. е. заменим его числом 60.

$$\begin{array}{r|l} 544 & 68 \\ \cline{2-2} 544 & 8 \\ \cline{1-1} \end{array}$$

Чтобы разделить 544 на 60, достаточно разделить 54 на 6. Получится 9. Сразу видно, что цифра 9 „сильна“. В самом деле, от умножения 60 на 9 получится уже 540, а ведь придется еще умножать 8 единиц. Поэтому заменим цифру 9 цифрой 8. Испытываем ее. Цифра 8 верна.

Итак, в этом случае мы получили цифру частного *после двух проб*.

Попробуем теперь округлить делитель в сторону *старшего круглого числа*, т. е. заменим его числом 70.

Чтобы разделить 544 на 70, достаточно разделить 54 на 7. Получится 7. Проверим эту цифру. Для этого умножим 68 на 7. Получится 476. Пока еще трудно сказать, годится ли цифра 7. Придется сделать вычитание и только после этого, получив в остатке число, равное делителю, мы видим, что цифра 7 „слаба“.

$$\begin{array}{r|l} 544 & 68 \\ \cline{2-2} 476 & 7 \\ \cline{1-1} 68 & \end{array}$$

Заменяем ее цифрой 8 и убеждаемся, что она подходит.

Оказывается, округляя делитель в сторону старшего круглого числа, мы получили цифру частного тоже после двух проб. Однако, из двух способов округления более выгодным явился первый способ. Дело в том, что заменяя делитель *меньшим* числом, мы рискуем за-

высить цифру частного, как это и случилось в нашем примере: цифра 9 „сильна“, но мы заметили это сразу, не выполнив до конца даже умножения и не начав производить вычитание. Нам не пришлось зачеркивать запись и вновь записывать решение примера. Наоборот, заменяя делитель *большим* числом, мы рискуем преуменьшить частное, что и случилось в нашем примере: цифра 7 „слаба“. Но заметить это нам удалось только в конце, когда выяснилось, что остаток равен делителю.

Вообще, если деление, как в приведенном примере, выполняется *без остатка*, нельзя при округлении делителя в сторону старшего круглого числа получить сразу правильный ответ. Первое пробное частное будет непременно меньше истинного, что влечет за собою по крайней мере две пробы и притом в особенно невыгодных условиях, когда цифра частного „слаба“.

Выгоднее округлять в сторону старшего круглого числа только при *делении с остатком*, например:

$$\begin{array}{r|l} 436 & 68 \\ \cline{2-2} \underline{408} & 6 \\ 28 & \end{array} \qquad \begin{array}{ll} 43:6 & (7)\text{ — две пробы} \\ 43:7 & (6)\text{ — одна проба} \end{array}$$

Однако, при небольшом остатке все преимущества могут опять-таки оказаться на стороне младшего круглого числа:

$$\begin{array}{r|l} 629 & 78 \\ \cline{2-2} \underline{624} & 8 \\ 5 & \end{array} \qquad \begin{array}{ll} 62:7 & (8)\text{ — одна проба} \\ 62:8 & (7)\text{ — две пробы} \end{array}$$

Как же все-таки решить вопрос о способе округления? Желательно придать соответствующему приему общий, универсальный характер. При однозначном и круглом делителе мы делим одну или две старшие цифры делимого (полного или неполного) на старшую цифру делителя. Совершенно так же поступают люди, не искушенные в методических тонкостях, и при делении на двузначное число. А это значит, что они округляют делитель в сторону младшего круглого числа, хотя, быть может, и не отдают себе в этом отчета.

Мы также склонны рекомендовать прием округления делителя в сторону *младшего* круглого числа, как наиболее естественный и притом универсальный. Однако, следует помнить, что в тех случаях, когда делитель близок к старшему круглому числу, пробная цифра частного может быть завышена — к ней надо отнестись с большою осторожностью.

Трудно установить цифру частного, если при округлении в сторону младшего круглого числа пробное частное превышает десяток. Тогда надо либо начинать пробы с цифры 9, либо округлить делитель в сторону старшего круглого числа, но при испытании полученной таким образом цифры частного помнить, что она по всей вероятности „слаба“. Так, при делении 139 на 19 первая пробная цифра 6 „слаба“; правильный ответ 7.

При испытании цифры частного надо все вычисления производить в уме и оперировать, по возможности, круглыми числами, не затрагивая единиц. Поясним это на конкретном примере 323 : 37.

$$\begin{array}{r|l} 323 & 37 \\ \underline{296} & \overline{\;8\;} \\ 27 & \end{array}$$

Разделим 32 на 3. Получится 10. Первая пробная цифра — 9.

30 умножить на 9 — 270, а у нас 323. В запасе 53.

Семью девять — 63. Значит, 9 — много. Берем 8.

30 умножить на 8 — 240. В запасе 83. Семью восемь — 56. Значит, частное — 8.

Нельзя допускать, чтобы при испытании пробной цифры дети производили полностью умножение, начиная его по правилам письменных вычислений с единиц, а затем полностью вычитание. Получается крайне громоздкий прием, непосильный учащимся не только III, но и IV класса. Особенно трудно, вычислив устно произведение ($37 \times 8 = 296$), произвести устно же вычитание трехзначного из трехзначного ($323 - 296$). Надо не вычитать, а сопоставлять „на глаз“ произведение единиц на пробную цифру частного с имеющимся „запасом“, который легко установить, если вычитаемое — круглое число. В нашем примере приходилось вычитать 270 и 240 из числа 323 и сопоставлять 63 и 53, а затем 56 и 83.

Уменье быстро и рационально проверять пробную цифру частного является одним из главнейших моментов в преодолении трудностей деления.

Пользуясь в основном округлением делителя в сторону *младшего* круглого числа, мы сводим деление трехзначного на двузначное при однозначном частном к делению двух старших цифр делимого на старшую цифру делителя. Это дает нам право упростить рассуждение при отыскании пробной цифры частного. Так, чтобы найти пробную цифру частного при решении примера 548:67, достаточно 54 разделить на 6; чтобы найти пробную цифру частного при решении примера 456:74, достаточно 45 разделить на 7 и т. д.

Переходим к *делению многозначного числа на двузначное*. Этот этап работы подготовлен предшествующими упражнениями в делении трехзначного числа на двузначное.

Покажем на примере, каких объяснений следует требовать от учащихся при делении многозначного числа на двузначное.

```
295830 | 45
270    |----
------   6574
 258
 225
 ---
  333
  315
  ---
   180
   180
   ---
```

Ученик. Образуем первое неполное делимое. В делителе две цифры. Возьмем две старшие цифры делимого.

29 десятков тысяч не делится на 45 равных частей так, чтобы в частном получились целые десятки тысяч. Поэтому первое неполное делимое — 295 тысяч. Старший разряд частного — тысячи. Всего в частном будет 4 цифры.

Разделим 295 на 45. Для этого достаточно 29 разделить на 4. Получится 7. Это пробная цифра частного. Может оказаться, что она „сильна", так как мы округляли делитель в сторону младшего круглого числа.

Умножаем 40 на 7; получается 280. В запасе 15. Пятью семь — 35. Значит, 7 — много. Берем 6. Умножаем 40 на 6; получается 240. В запасе 55. Частное — 6 тысяч.

Умножаем 45 на 6. Пятью шесть — 30. Нуль пишем, 3 в уме. Четырежды шесть — 24, да 3 — 27. Вычитаем 270. В остатке 25 тысяч. Сносим 8 сотен.

Делим 258 сотен на 45. Для этого достаточно 25 разделить на 4. Получится 6. Сразу видно, что 6 — много. Берем 5.

Умножаем 40 на 5, получается 200. В запасе 58. Частное — 5 сотен. И т. д.

Проходя с учащимися деление на двузначное, следует обратить внимание на деление с остатком. Много ошибок встречается в тех случаях, когда при делении с остатком частное оканчивается нулем или нулями. Чтобы избежать ошибок, учащиеся должны заранее устанавливать число цифр в частном и широко пользоваться проверкой деления.

При объяснении деления на 100 мы применяем тот же прием, которым пользовались при объяснении деления на 10.

Сначала находим частное по соображению. При делении каждой сотни на 100 равных частей в частном получается единица. При делении всего числа на 100 получится столько единиц, сколько в делимом было сотен.

Составим таблицу деления на 100, пользуясь приведенным рассуждением:

$$600:100 = 6$$
$$900:100 = 9$$
$$1200:100 = 12$$
$$1800:100 = 18$$
$$2400:100 = 24 \quad \text{и т. д.}$$

Сопоставляя во всех этих примерах делимое с частным, мы замечаем, что в частном остаются те же значащие цифры, которые были в делимом. Разница только в том, что каждое делимое оканчивалось двумя нулями, а в частном эти нули отпали.

Разберем подробнее последний пример. Цифра 4 стояла в делимом на третьем месте и обозначала сотни; в частном она стоит на первом месте и обозначает единицы, т. е. число, которое в 100 раз меньше прежнего. Цифра 2 также переместилась на два места вправо и обозначает число, которое в 100 раз меньше прежнего.

Итак, каждое разрядное слагаемое уменьшилось в 100 раз. Значит и все число уменьшилось в 100 раз.

Выводим правило: чтобы разделить на 100 число, которое оканчивается нулями, достаточно откинуть в нем справа два нуля.

Сразу же следует рассмотреть деление на 100 с остатком. На данном этапе мы ограничиваемся рассуждением; правило в начальной школе не выводится.

Дано 4527 разделить на 100. Разделится ли это число на 100? Разделится 4500: к нему нужно приложить правило. А 27 единиц на 100 не разделятся. Это остаток.

Деление любых чисел на 100 всегда записывают в строчку:

$$17\,318:100 = 173 \text{ (ост. 18)}$$

При делении чисел на круглые сотни мы прежде всего остановимся на устных случаях деления (800:200, 900:300 и т. п.), а также на делении четырехзначного числа при двузначном частном (8600:200, 9600:300 и т. п.). В первом случае можно пользоваться делением по содержанию, а во втором случае (8600:200) делить на равные части, рассуждая как при делении на однозначное число: 860 десятков делим на 200 равных частей, получится в каждой части по 4 десятка. Узнаем, сколько разделили десятков, узнаем, сколько десятков осталось и т. д.

$$\begin{array}{l|l} 8600 & 200 \\ \underline{800} & \overline{43} \\ 600 & \\ \underline{600} & \end{array}$$

Труднее делить четырехзначное число на круглые сотни *при однозначном частном*. Рассмотрим сначала случаи деления без остатка, например 3500:500.

Вспомним, как мы делили на 50. Чтобы разделить отрезок или число на 50, достаточно разделить данную величину или число на 10 равных частей, а затем каждую часть еще на 5 равных частей.

При делении на 500 мы также воспользуемся приемом последовательного деления. Пояснить этот прием можно, как и при делении на круглые десятки, посредством метра, заранее разделенного на сантиметры, т. е. на 100 равных частей. Разделив мысленно каждую такую часть на 2, на 3, на 4 и т. д., мы тем самым делим всю полоску на 200, 300, 400 и т. д. равных частей.

Итак, чтобы разделить 3500 на 500 равных частей, достаточно разделить это число на 100, а затем полученные 35 единиц еще на 5. Частное — 7 единиц.

Прием последовательного деления дает возможность правильно называть разряды частного, что становится затруднительным при делении многозначных чисел на круглые сотни, если пользоваться делением по содержанию. Так, при решении примера 350 000:500 пришлось бы узнавать, сколько раз 5 сотен содержатся в 35 десятках тысяч. Ответить на этот вопрос не так-то просто. Лучше рассуждать следующим образом.

Первое неполное делимое — 3500 сотен. Делим 3500 сотен на 100 равных частей. Получим в каждой части по 35 сотен. Делим теперь 35 сотен на 5 равных частей. Получим в каждой части по 7 сотен. Ответ — 7 сотен, или 700.

Такое же рассуждение прилагаем к делению на круглые сотни в тех случаях, когда получается остаток — сначала при однозначном частном, а затем и при многозначном частном. Однако, при переходе к делению многозначных чисел можно заменить длинное рассуждение более коротким, как это было показано при рассмотрении деления на круглые десятки.

Решим ряд примеров, пользуясь подробным рассуждением.

$$\begin{array}{r|l} 5400 & 600 \\ \cline{2-2} \underline{5400} & 9 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 4257 & 700 \\ \cline{2-2} \underline{4200} & 6 \\ 57 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 3615 & 900 \\ \cline{2-2} \underline{3600} & 4 \\ 15 & \end{array}$$

На каком этапе деления получаем мы цифру частного? Получаем ли мы эту цифру при делении числа на 100? Нет, не получаем. Но в первом примере мы получили цифру частного при делении числа 54 на 6, во втором примере при делении числа 42 на 7, в третьем примере при делении числа 36 на 9.

Итак, чтобы разделить 5400 на 600, достаточно 54 разделить на 6; чтобы разделить 4257 на 700, достаточно 42 разделить на 7; чтобы разделить 3615 на 900, достаточно 36 разделить на 9 и т. д., и т. п.

Как на всех предыдущих этапах деления, вопрос и в этом случае сводится к делению одной или двух старших цифр делимого на старшую цифру делителя. Цифра частного окончательная, испытывать ее не приходится.

Поясним деление многозначного числа на круглые сотни примером.

Первое неполное делимое — 5264 сотни, так как в делителе три цифры, а 526 тысяч не делится на

$$
\begin{array}{r|l}
526400 & 700 \\
\underline{4900} & \overline{752} \\
3640 & \\
\underline{3500} & \\
1400 & \\
\underline{1400} & \\
\end{array}
$$

700 равных частей так, чтобы в каждой части получились целые тысячи.

Делим 5264 сотни на 700 равных частей. В частном получим сотни, иначе говоря, в частном будет трехзначное число.

Чтобы разделить 5264 на 700, достаточно разделить 52 на 7. Получим 7. Пишем в частном на месте сотен цифру 7.

Умножаем, вычитаем и т. д.

Деление на трехзначное число начинаем с *деления четырехзначного на трехзначное при однозначном частном*. Этот случай является ключом к делению любого многозначного числа на трехзначное. Предпослать ему можно деление трехзначного на трехзначное (например, 396:132), а также деление четырехзначного на трехзначное при двузначном частном (например, 7552:236), поскольку в этих случаях легко найти цифру частного и установить ее разряд.

В более трудных случаях приходится применить тот же прием *округления делителя*, которым мы пользовались при делении на двузначное число. На основании тех же соображений, которые были изложены применительно к двузначному делителю, будем трехзначный делитель округлять в сторону *младшего* круглого числа. При этом мы рискуем завысить цифру частного, но заметить это легче, чем исправлять цифру частного, когда она „слаба“. Поясним это на примере:

$$
\begin{array}{r|l}
2922 & 356 \\
\underline{2848} & \overline{8} \\
74 & \\
\end{array}
$$

В делителе три цифры, но 292 десятка не делятся на 356 равных частей так, чтобы в каждой части получились целые десятки.

Разделим 2922 единицы на 356. Для этого достаточно 29 разделить на 3, получится 9. Это пробная цифра частного. Испытаем ее. При умножении 3 сотен на 9 уже получится 27 сотен, в запасе 2 сотни с небольшим, а придется умножать еще 5 десятков на 9. Ясно, что цифра 9 „сильна“. Заменим ее цифрой 8. Проверяем. Эта цифра подходит. В частном получится 8 и в остатке 74.

Если бы мы округлили 356 в сторону старшего круглого числа, первая пробная цифра получилась бы от деления числа 29 на 4. Проверяя эту цифру (7), нельзя заметить сразу, что она „слаба". Приходится произвести два действия (умножение и вычитание). Только получив остаток (430), мы убеждаемся в непригодности цифры 7.

2922	356
2492	7
430	

Итак, сохраняя прежнюю установку, будем округлять делитель в сторону младшего круглого числа. Тем самым остается в силе основной прием деления, согласно которому оно сводится к делению двух старших цифр делимого (общий случай) на старшую цифру делителя.

Приемом этим мы будем пользоваться и при делении многозначного числа на трехзначное.

Покажем число проб на каждом этапе деления при решении примера 420 178:781, чтобы сравнить оба способа округления.

Образуем первое неполное делимое. В делителе три цифры, но 420 тысяч не делится на 781 так, чтобы в частном получились целые тысячи. Поэтому будем делить 4201 сотню. В частном будет три цифры.

Чтобы разделить 4201 на 781, достаточно 42 разделить на 7 или же 42 разделить на 8 и т. д.

420178	781
3905	538
2967	
2343	
6248	
6248	

42:7	(6)	— две пробы
29:7	(4)	— две пробы
62:7	(8)	— одна проба
42:8	(5)	— одна проба
29:8	(3)	— одна проба
62:8	(7)	— две пробы

При округлении делителя в сторону младшего круглого числа пришлось дважды изменять пробную цифру частного, но сразу было видно, что цифры 6 и 4 „сильны".

При округлении делителя в сторону старшего круглого числа пришлось изменять цифру частного только один раз, но заметить, что цифра 7 слаба можно было только после умножения и вычитания.

6248	781
5467	7
781	

Остаток, как мы видим, равен делителю. Следовательно, в частном будет не 7, а 8.

Итак, в любых случаях при делении

на каждом его этапе мы будем делить две (или одну) старшие цифры делимого на *старшую* цифру делителя.

При делении на трехзначное число встречаются особенно трудные случаи, когда округление не помогает установить цифру частного, т. е. *не приводит к делению двузначного числа на однозначное.*

```
125775 | 129
1161   |----
------ | 975
  967
  903
  ---
   645
   645
   ---
```

Например:

Первое неполное делимое 1257 сотен.

Рассуждаем так: частное будет во всяком случае меньше 10, так как $129 \times 10 = 1290 > 1257$.

Испытаем наиболее „сильную“ из всех возможных цифр, т. е. цифру 9. В частном будет 9.

На следующих этапах деления приходится каждый раз сопоставлять две цифры делимого с двумя цифрами делителя, так как при делении 9 на 1 и 6 на 1 получаем явно завышенные цифры частного.

Делим 96 на 12, получаем 8. Сразу видно, что 8 — много. Берем 7.

Делим 64 на 12, получаем 5. В частном будет 5.

Частные случаи деления (нули в частном) пройдены попутно, но должны быть повторены в конце. В сущности, основная трудность деления не в нулях, а в числе проб, после которых удается установить цифру частного. Чтобы не ошибиться в нулях, достаточно с самого начала устанавливать число цифр частного и называть при делении разряды частного. Научить же подбирать цифру частного можно только путем длительных упражнений. Испытание цифры частного связано с устными вычислениями. Этот навык следует развивать исподволь, начиная с младших классов.

Все, что сказано до сих пор о делении, относится к III классу. В IV классе программа не вводит ничего принципиально нового. Речь идет лишь о закреплении пройденного. Особое внимание следует при этом обратить на те случаи деления, когда трудно подобрать цифру частного и когда на конце частного, особенно при делении с остатком, получаются нули.

В интересах увеличения вычислительной беглости можно, уже начиная с III класса, ввести кое-какие сокращения в запись деления. Так, деление на однозначное число можно производить „глазами“, не записывая промежуточных вычислений. Сначала можно освободить запись только от промежуточных произведений, а затем не писать и результатов вычитания. Вот, например, как можно записать деление числа 608548 на 7:

$$
1)\quad \begin{array}{l|l} 608548 & 7 \\ \hline \;\;48 & 86\,935 \\ \;\;\;65 & \\ \;\;\;\;24 & \\ \;\;\;\;\;38 & \\ \;\;\;\;\;\;3 & \end{array}
\qquad\qquad
2)\quad \begin{array}{r|l} 608548 & 7 \\ \hline 3 & 86\,935 \end{array}
$$

То же самое относится к делению на круглые числа. При делении на двузначное число лучше все-таки выписывать промежуточные остатки. Это дает вместе с тем возможность видеть неполные делимые. Например:

$$
\begin{array}{l|l} 136576 & 64 \\ \hline \;\;85 & 2134 \\ \;\;217 & \\ \;\;\;256 & \end{array}
$$

Неполные делимые — 136 тысяч, 85 сотен, 217 десятков и 256 единиц. Ученик должен уметь назвать и записать с нулями эти числа.

Из программы исключен в настоящее время вопрос об изменении результатов действий в зависимости от изменения компонентов. В этих условиях *нельзя зачеркивать нули на конце делимого и делителя* с целью упростить вычисления. Этот прием приходится отложить до V класса.

Итоги работы над нумерацией многозначных чисел и над письменными механизмами действий

Невозможно переоценить роль этих вопросов в курсе начальной школы. Именно нумерация и действия над многозначными числами составляют основную ее задачу. Два младших класса обеспечивают фундамент этой работы, которая главной своей частью ложится на III класс, а затем закрепляется и дополняется в IV классе. Завершающей является трактовка тех же вопросов в V классе, где с доступной учащимся степенью общности раскрываются и формулируются основные положения арифметики целых чисел.

Чтобы успешно справиться с курсом V класса, учащиеся начальной школы должны полностью овладеть нумерацией чисел четырех классов. Свободно оперируя десятичным составом таких чисел, умея образовать число из данных разрядных слагаемых и разложить любое число на его разрядные слагаемые, учащиеся должны также уметь преобразовывать единицы одного разряда в единицы другого разряда. В отношении письменной нумерации они должны ясно представлять себе связь между значением данной цифры и ее местом в записи числа. Чтобы без труда усвоить запись десятичной дроби на основе принципа поместного значения цифр, дети должны еще в IV классе усвоить сущность этого принципа. Они должны знать, как изменится число, если приписать к нему справа нуль или нули, а также, если откинуть стоящие в нем справа нуль или нули. Без такой подготовки в начальной школе труднее будет объяснить учащимся V класса, как изменяется значение цифр десятичной дроби при переносе запятой.

При изучении действий следует добиваться понимания таких сложных механизмов, как механизм умножения и, особенно, деления. Механизмы эти опираются, как известно, на законы арифметических действий и на некоторые специальные правила. Новыми для III класса являются приемы последовательного умножения и последовательного деления. Необходимо следить за тем, чтобы при умножении дети не смешивали новый прием с ранее усвоенными приемами разложения множимого и множителя на слагаемые; чтобы при делении они не пробовали, по аналогии с умножением, разлагать делитель на слагаемые, но умели сознательно пользоваться приемом последовательного деления. В начальной школе дети получают более или менее законченное представление только о переместительном законе. Однако, вдумчивая работа над вычислительными приемами в младших классах и, особенно, в III и IV классах помогает учащимся V класса сознательно усвоить и остальные законы действий.

Познакомившись в начальной школе с терминологией действий и с взаимосвязью между прямыми и обратными действиями, учащиеся должны в V классе усвоить их определения. Определение умножения как сокращенного сложения подготовляется исподволь, начиная с I класса. Определения обратных действий, основанные на их взаимосвязи с прямыми действиями, также не должны быть чем-то неожиданным для учащихся. На протяжении всего курса начальной школы следует подчеркивать эту взаимосвязь и пользоваться ею при выполнении обратных действий. Тогда учителю не придется навязывать детям определений обратных действий: они сами выведут их и таким образом подытожат свою предшествующую работу.

Понимание взаимосвязи между прямым и обратным действием должно предшествовать также установлению зависимости между результатом действия и его компонентами и, наоборот, понимание этой зависимости помогает глубже осознать связь между прямым и обратным действием. Уже в I классе ученику доступно, например, такое рассуждение: если $5+3=8$, то, следовательно, $8-3=5$. Подметив связь между сложением и вычитанием, ребенок тем самым устанавливает, что уменьшаемое (8) равно сумме вычитаемого и остатка, а также, что слагаемое (5) равно сумме без другого слагаемого. Разумеется, в I классе подобного рода истины усваиваются только практически в процессе вычислений. Но в дальнейшем степень их осознанности возрастает, что и дает возможность сформулировать в IV классе соответствующие выводы.

Учащиеся начальной школы должны научиться производить все четыре арифметических действия не только правильно, но и быстро. Правильность и быстрота вычислений зависят прежде всего от таких автоматизированных навыков, как знание наизусть таблиц арифметических действий. Добавим к этому, что для деления важно знать состав чисел первой сотни не только из табличных сомножителей, но и из любых сомножителей. Так, например, недостаточно знать, что $72=8\times 9$; надо помнить наизусть, что $72=36\times 2=24\times 3=$ $=18\times 4=12\times 6$. Все эти навыки очень пригодятся в V классе при разложении чисел на простые множители. Вообще, работая над „беглым счетом“ в начальной школе, учитель должен помнить, что недоделки по этой линии создают серьезные затруднения в V классе, где все операции над обыкновенными дробями выполняются исключительно в порядке устных вычислений.

VI. ЭЛЕМЕНТЫ ДРОБЕЙ В НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЕ

Понятие целого и его части в младших классах начальной школы

С выражениями „целое" и „его часть" дети знакомятся во II классе начальной школы. Еще в I классе им приходится услышать слово „часть", а именно, когда в третьей четверти после умножения в пределах двадцати вводится деление на равные части.

„Разложи эти грибки поровну в две корзинки", — говорит учитель и тут же переводит эту фразу на арифметический язык: „раздели 8 грибков на 2 равные части". На данном этапе обучения было бы преждевременно внушать ученику, что 8 грибков можно рассматривать как целое, а результат деления на 2 равные части — как половину этого целого.

Во II классе табличному умножению и делению (вторая учебная четверть) предпосылается тема „Нахождение части числа" (стабильный учебник, стр. 39). В это время необходимо ввести выражения „целое" и „часть" в их взаимосвязи и противопоставлении.

Следует иметь в виду, что на первых порах дети склонны отожествлять слова „часть" и „половина". Такое смешение понятий создает серьезные неудобства не только во II классе начальной школы, но и в дальнейшем. Поясним сказанное примером.

18 февраля 1954 года учащиеся III класса одной из ленинградских школ знакомились с делением трехзначных чисел на круглые десятки. Для конкретизации приема последовательного деления была применена метровая лента, разделенная на дециметры. Уточнив в беседе с учащимися, что лента разделена на 10 рав-

ных частей, учитель показал, что для деления этой ленты на 20 равных частей достаточно каждую из десяти частей разделить пополам. На вопрос, как разделить ту же ленту на 30 равных частей, ученик ответил: „Надо разделить ее на 10 равных частей, а затем каждую такую часть разделить еще на 3 половины“. Для этого ученика, как мы видим, половиной была любая часть, часть вообще.

Во II классе надо поэтому подчеркнуть, что не всякую часть можно называть половиной.

Изложим подробнее вопрос о первоначальном знакомстве детей с половиной предмета и числа.

К доске прикреплен круг. Другой такой же круг учитель складывает на глазах у учащихся пополам так, чтобы все видели, как сошлись край с краем его половинки. Не после того, как круг разрезан, а непременно до того, как он разрезан, надо продемонстрировать равенство частей.

Учитель. Как я сложил круг?

Ученик. Вы сложили круг пополам.

Затем учитель разрывает или режет круг на 2 равные части.

Учитель. Вот половина круга. И это тоже половина круга. Сколько же всего половин в целом круге?

Ученик. В целом круге две половины.

На доске рядом с целым кругом учитель прикрепляет половину круга.

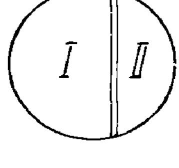
Учитель. Что надо было сделать с целым кругом, чтобы получить его половину?

Ученик. Чтобы получить половину круга, надо было целый круг разделить на 2 равные части.

Учитель показывает детям еще один круг, такой же, как первый.

Учитель. Вот целый круг. Посмотрите, как я его сложу и разрежу.

Учитель складывает и режет круг на две заведомо неравные части. Одну из них он показывает учащимся.



Учитель. Можно ли сказать, что это целый круг? Можно ли сказать, что это половина круга? Но если это не целый круг и не половина круга, то что же это такое?

Ученик. Это часть круга.

Учитель. Вот, видите, не всякая часть — половина. Вот эта часть — больше половины (сопоставляет половину и часть I), а вот эта часть — меньше половины (сопоставляет половину и часть II).

После этого следует продемонстрировать перед учащимися получение половины квадрата, который можно делить пополам двумя разными способами.

Учитель показывает детям квадрат.

Учитель. Что надо сделать, чтобы получить половину квадрата?

Ученик. Надо разделить его пополам, на две равные части.

Учитель делит квадрат сначала по средней линии, а затем по диагонали. Дети устанавливают, что и в том, и в другом случае полученная часть есть половина квадрата, хотя по виду половинки, полученные в первом случае, не похожи на половинки во втором случае.

Каждый ученик получает два небольших кружка: один целый, другой, разрезанный на две равные части.

Ученики должны сличить эти части между собою и с целым кругом. Вместе они составляют круг, между собою они равны. Следовательно, каждая такая часть является половиной данного круга.

Дома дети должны будут наклеить полученные фигуры в тетрадях: целый круг и рядом — половину круга.

Познакомившись с половиной круга и квадрата, дети переходят к вычислению половины числа.

Учитель. Вы знаете, как получить половину круга. Кто догадается, что надо сделать, чтобы получить половину числа?

Ученик. Надо разделить число на 2 равные части.

После этого дети решают задачу: „У белки было 12 орехов. Она съела половину этих орехов. Сколько орехов съела белка?"

При повторении задачи надо правильно ставить наводящие вопросы: сколько всего орехов было у белки? какую часть орехов она съела? что спрашивается в задаче?

Нередко учителя допускают ошибку: вместо вопроса „какую часть?", ставят вопрос „сколько?" В этом случае, вместо того, чтобы повторить задачу, учащиеся ее решают и сразу же говорят ответ.

После выявления действия учитель спрашивает: почему надо 12 орехов делить на 2 равные части? Ответ: потому что сказано, что белка съела половину всех орехов.

Четвертая и восьмая демонстрируются на круге и полоске. После этого дети находят четвертую и восьмую часть числа.

В дальнейшем надо познакомить детей с половиной метра, килограмма и литра, а в связи с темой „отсчет времени по часам" — с половиной и четвертью часа. За целый час минутная стрелка должна сделать полный оборот по кругу. За полчаса она делает половину оборота, за четверть часа — четверть оборота. На модели часов дети устанавливают стрелки так, чтобы часы показывали половину второго, четверть пятого и т. д.

В процессе работы над табличным делением знания детей о целом и его части несколько расширяются и углубляются. К сожалению, учителя, как правило, не поясняют детям на предметах, что такое треть, шестая и т. д. В стабильном задачнике без какой-либо графической интерпретации ставится вопрос: что больше — половина 18 или треть 24? (Учебник, стр. 45.) Так же голословно вводятся и другие доли целого.

Едва ли можно достигнуть ясного понимания детьми смысла соответствующих слов, если не продемонстрировать на предметах получение хотя бы трети и шестой.

В связи с табличным делением на 3 равные части надо показать детям, как получается треть полоски и, следовательно, треть числа.

До урока на партах должны быть разложены полоски бумаги длиною примерно в 12 *см*.

Учитель, имея в руках полоску длиною примерно в 40—50 *см*, показывает детям, как разделить ее на 3 равные части. Концы полоски надо загнуть навстречу друг другу так, чтобы полоска сложилась втрое, а затем разорвать ее по линиям сгибов. Учащиеся проделывают то же самое со своими полосками.

Учитель. На сколько равных частей разделили вы свои полоски? Как можно назвать каждую такую часть? Итак, что надо сделать, чтобы получить третью часть полоски?

После этого дети решают задачи на нахождение трети числа.

Получение шестой доли удобнее продемонстрировать опять-таки на полоске.

Каждый раз после знакомства с той или иной долей предмета, учащиеся переходят к нахождению одноименной доли числа: 1) чтобы получить четверть круга, надо разделить его на четыре равные части; 2) чтобы получить четверть числа, надо разделить данное число на четыре равные части. И т. д.

Подметив связь между числом равных частей и названием каждой части, учащиеся уже без наглядных пособий решают задачи на вычисление седьмой, девятой и десятой части числа.

Следует обратить внимание на недоразумение, которое возникает на первых порах у учащихся II класса при знакомстве с долями целого. Причина этого недоразумения состоит в том, что названия долей третья, четвертая и т. д. ничем не отличаются от порядковых числительных. Разделив круг на 4 равные части, дети думают, что „четвертая часть" — это только последняя часть, что остальные части надо называть „первая, вторая и третья". Следует объяснить, что при делении полоски на три равные части каждая такая часть есть треть или третья часть полоски, что при делении круга на четыре равные части каждая из этих четырех частей есть четверть или четвертая часть круга и т. д.

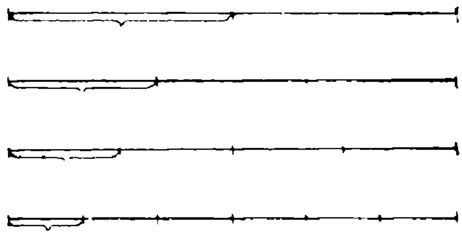
Познакомившись в связи с табличным делением на равные части с соответствующими долями целого и с приемом нахождения аналогичных долей числа, учащиеся решают задачи на нахождение части числа и при изучении внетабличного деления.

В новой программе для III класса нет никаких упоминаний о дробях. Однако, это не значит, что в III классе должен наступить в этом отношении рецидив неграмотности. И в III классе учащиеся продолжают решать задачи на нахождение части числа, хотя доли записываются попрежнему не цифрами, а словами: пятая часть, седьмая часть, десятая часть и т. д.

Полезно вернуться еще раз к графической интерпретации долей круга. В III классе дети могут проявить в этом отношении больше самостоятельности. Хорошо научить их чертить окружность при помощи двух карандашей и нитки. На концах нитки надо завязать петельки; в каждую петельку вставить острие карандаша; один карандаш упереть в бумагу и держать неподвижно, а другим карандашом, натянув нитку, обвести окружность. Начертив круг, ученик вырезывает его и делит на две, четыре и восемь равных частей, на три и на шесть равных частей.

Особенно интересно делить круг на три и на шесть равных частей. Для этого надо сделать надрез по прямой линии от окружности до центра, а затем применить тот же прием, которым дети пользовались во II классе, когда делили на 3 равные части полоску бумаги: края надреза надо загибать навстречу друг другу, пока круг не сложится втрое. Чтобы получить шестую долю, достаточно разделить третью часть круга пополам.

По заданию учителя дети чертят отрезки определенной длины, чтобы пояснить графически различные доли данного отрезка. Так, например, можно предложить детям начертить один под другим четыре отрезка длиною в 12 *см*. На первом отрезке отметить половину его, на втором — треть, на третьем — четверть и на четвертом — шестую часть. Дети воочию убеждаются, что самая крупная из этих долей — половина, а самая мелкая — шестая часть.



Полезно задавать учащимся III класса такие задачи-смекалки: „Мама разложила орехи поровну в несколько кульков. Младшему сыну дала один кулек, среднему — два кулька, а старшему — остальные три кулька. Какую часть всех орехов получил младший сын?“

Рассуждение: все орехи мама разделила на 6 равных частей; если круг разделить на 6 равных частей, получится шестая часть круга; значит, младший сын получил шестую часть всех орехов.

Такого рода задачи-смекалки помогут в дальнейшем перейти к решению задач на нахождение чисел по их сумме и кратному отношению.

Простейшие дроби в IV классе

В программе IV класса имеется небольшой раздел, посвященный простейшим дробям. В этот раздел входят следующие вопросы.

Простейшие дроби: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$, их образование.

Числитель и знаменатель дроби. Преобразование дробей. Сложение и вычитание одноименных и кратных долей. Решение задач на нахождение нескольких частей числа (20 часов).

Некоторые учителя склонны без достаточного основания раздвигать рамки этой темы: давать понятие о смешанном числе и о неправильной дроби, о сложении и вычитании дробей с переходом через единицу. Отчасти это объясняется тем, что еще недавно в программу начальной школы входил довольно обширный пропедевтический курс дробей. В методических руководствах до сих пор сохранились некоторые отголоски этих программных установок. Однако, в настоящее время, когда на всю работу с простейшими дробями, включая задачи на нахождение нескольких частей от числа, отводится всего 20 учебных часов, всякие попытки расширения и завышения программы должны быть отклонены.

При отборе материала, относящегося к простейшим дробям, следует исходить из той *цели*, которая стоит в данном случае перед начальной школой. Цель эта заключается в том, чтобы ученик начальной школы ясно представлял себе дробь как одну или несколько равных долей целого — круга, квадрата, полоски, единицы. В младших классах дети усваивают способ получения той или иной доли предмета или доли числа; в IV классе они должны познакомиться с образованием из нескольких равных долей единицы той или иной дроби и научиться находить несколько равных частей числа. Полученные знания учащиеся тотчас применяют к решению задач жизненно практического характера. Именно решение задач на нахождение дроби от числа, основанное на графических образах, и служит подготовкой к усвоению курса дробей в V классе. Понятие смешанного числа и неправильной дроби ничего не прибавят к тому запасу знаний и навыков, которые нужны ученику при переходе в среднюю школу. Зато уменье находить по соображению дробь от числа проложит пятикласснику прямой путь к усвоению нового смысла умножения, а на его основе и нового смысла деления.

Наметим в общих чертах план работы над простейшими дробями в IV классе.

1-й урок. Образование и запись половины, четверти и восьмой, а также дробей, составленных из этих долей. Числитель и знаменатель дроби.

2-й урок. Нахождение нескольких четвертых и восьмых от числа (решение примеров и задач).

3-й урок. Сравнение половины, четверти и восьмой. Первоначальное знакомство с раздроблением и превращением соответствующих долей и дробей.

4-й урок. Сложение и вычитание дробей, составленных из половин, четвертей и восьмых в том случае, когда у компонентов одинаковые знаменатели.

5-й урок. Решение более сложных задач на нахождение нескольких четвертей и восьмых от числа.

6-й урок. Сложение дробей, составленных из половин, четвертей и восьмых, когда у компонентов разные знаменатели.

7-й урок. Вычитание дробей, составленных из половин, четвертей и восьмых, когда у компонентов разные знаменатели.

8-й урок. Повторение пройденного.

9-й урок. Контрольная работа.

10-й урок. Образование и запись пятой и десятой, а также дробей, составленных из этих дробей. Нахождение нескольких пятых и десятых от числа.

11-й урок. Раздробление половин и пятых в десятые и соответствующие случаи превращения.

12-й урок. Сложение и вычитание дробей, составленных из пятых и десятых, в том случае, когда у компонентов одинаковые знаменатели.

13-й урок. Решение усложненных задач на нахождение нескольких пятых и десятых от числа.

14-й урок. Сложение дробей, составленных из пятых и десятых, а также из половин и десятых в том случае, когда у компонентов разные знаменатели.

15-й урок. Вычитание дробей, составленных из пятых и десятых, а также из половин и десятых, в том случае, когда у компонентов разные знаменатели.

16-й урок. Решение комбинированных задач на вычисление площади прямоугольника и нахождение нескольких частей от числа.

17-й урок. Решение комбинированных задач на вычисление объема и нахождение нескольких частей от числа.

18-й урок. Решение комбинированных задач на встречное движение и нахождение нескольких частей от числа.

19-й урок. Повторение пройденного.

20-й урок. Контрольная работа.

Разберем подробнее несколько первых уроков.

Тема первого урока — образование и запись половины, четверти и восьмой, а также дробей, составленных из этих долей. Числитель и знаменатель дроби.

На доске заранее нарисовано 8 одинаковых кругов, расположенных по четыре в ряд.

Учитель. Сегодня вы вспомните, как получается половина, четверть и восьмая и узнаете, как образуются дроби из этих долей.

Учитель указывает первый из нарисованных на доске кругов.

Учитель. Этот круг мы не будем делить. Это целый круг, целая единица.

Учитель пишет внутри первого круга цифру один. Затем он переносит указку на второй круг.

Учитель. Это такой же круг. Его мы разделим на две равные части. Как можно назвать каждую часть?

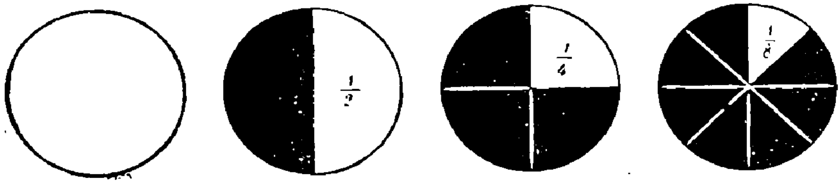
Учитель делит второй круг пополам и вызывает ученика показать сначала одну, потом другую половину круга. Левую половину учитель штрихует цветным мелом.

Учитель. А теперь посмотрите, как можно цифрами обозначить половину.

В правой половине круга учитель пишет $\frac{1}{2}$, объясняет значение каждой цифры и сообщает название членов дроби.

Учитель. Знаменатель показывает, что мы разделили круг на 2 равные части, а числитель показывает, что мы взяли одну такую часть.

Третий круг учитель делит на 4 равные части и объясняет, как записать одну четвертую цифрами; четвертый круг делится на 8 равных частей и в связи с этим дается запись одной восьмой. Вот эти четыре круга:

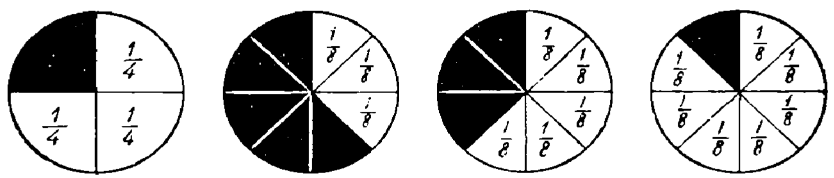


По предложению учителя дети рисуют в своих тетрадях эти круги и обозначают целый круг единицей, а на остальных выделяют половину, четверть и восьмую. Обвести круги можно по монете в 3 коп. или в 20 коп. Надо позаботиться накануне урока, чтобы у каждого ученика была такая монета.

После этого внимание учащихся переносится на второй ряд кругов. Первый из них используется для обозначения дроби $\frac{3}{4}$, остальные — для дробей $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$ и $\frac{7}{8}$.

Работа ведется под руководством учителя, но учащиеся по возможности самостоятельно находят способы получения каждой из этих дробей: чтобы получить $\frac{3}{4}$, говорят они, надо целый круг разделить на 4 равные части и взять 3 такие части; чтобы получить $\frac{5}{8}$, надо разделить целый круг на 8 равных частей и взять 5 таких частей и т. д.

В конце концов, второй ряд кругов на доске примет следующий вид:



$\frac{3}{4}$ $\qquad$ $\frac{3}{8}$ $\qquad$ $\frac{5}{8}$ $\qquad$ $\frac{7}{8}$

Эти кружки с соответствующими надписями учащиеся также заносят в свои тетради.

При делении все внимание ученика направлено на число долей в целом круге, в целой единице, а при обозначении долей цифрами он невольно пересчитывает число долей в данной дроби. Тем самым закрепляется способ получения дроби: чтобы получить $\frac{5}{8}$ круга, надо разделить целый круг на 8 равных частей и взять 5 таких частей и т. д.

Заметим, что цифры удобнее ставить в тех долях круга, которые **не** затушеваны, а затушевать можно остальную часть круга, которая в данном случае должна отступить на задний план.

От фактического деления кругов можно перейти к работе по представлению и предложить детям рассказать, как найти $\frac{3}{4}$ полоски, $\frac{5}{8}$ листа бумаги, $\frac{3}{8}$ квадрата, $\frac{7}{8}$ единицы.

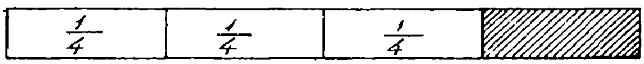
На втором уроке дети учатся находить дробь от числа или, как принято говорить в начальной школе, несколько частей данного числа.

Предварительно надо вспомнить, как найти $\frac{3}{4}$ круга, $\frac{5}{8}$ полоски и т. д. Как получается дробь $\frac{3}{8}$? $\frac{7}{8}$?

На доске нарисована полоска длиною в 60 *см*. Один из учеников измеряет ее, чтобы убедиться в этом.

Задача состоит в том, чтобы найти $\frac{3}{4}$ этой полоски. Сначала задача решается графически, а затем дети находят ответ посредством вычислений. Учитель объясняет, как записать эти вычисления. Вот чертеж и запись на доске:

Дл. полоски — 60 *см*.



1) $\frac{1}{4}$ от 60 *см* = 60 *см* : 4 = 15 *см*

2) $\frac{3}{4}$ от 60 *см* = 15 *см* $\times$ 3 = 45 *см*

Ответ: 45 *см*

После этого дети чертят в тетрадях полоску длиною в 12 *см*, отмечают на чертеже $\frac{3}{4}$ этой полоски, а затем вычисляют длину этой части в сантиметрах:

1) $\frac{1}{4}$ от 12 *см* = 12 *см* : 4 = 3 *см*

2) $\frac{3}{4}$ от 12 *см* = 3 *см* $\times$ 3 = 9 *см*

Ответ: 9 *см*

Затем, уже без чертежа, они решают следующие примеры: найти $\frac{3}{4}$ часа, $\frac{5}{8}$ суток, $\frac{3}{4}$ метра, $\frac{3}{8}$ килограмма, $\frac{7}{8}$ километра. Предварительно они раздробляют час в минуты, сутки в часы, метр в сантиметры, килограмм в граммы, километр в метры. Решение каждого примера они записывают в два действия.

Тема третьего урока — сравнение половины, четверти и восьмой, а затем первое знакомство с раздроблением и превращением долей и дробей.

Учитель предлагает детям начертить три отрезка длиною каждый в 8 *см* и разделить первый из них на 2 равные части, второй — на 4 равные части и третий — на 8 равных частей.

Учитель. Отметьте на первом отрезке половину, на втором — четверть и на третьем — восьмую часть. Которая из этих долей крупнее? которая мельче? Почему одна четвертая крупнее, чем одна восьмая?

Ученик. Если целые отрезки равны, то чем больше число равных частей, тем мельче каждая часть и, наоборот, чем меньше число частей, тем крупнее каждая часть.

На доске еще до урока должны быть нарисованы четыре одинаковые полоски.

Учитель. Верхнюю полоску мы не будем делить. Это целая полоска, целая единица.

Посередине верхней полоски учитель ставит цифру 1. Следующие полоски он делит пополам, на 4 равные части и на 8 равных частей. Под диктовку учащихся он записывает цифрами название каждой доли.

Дальше учащиеся решают вопросы: сколько половин в целой полоске? сколько четвертей и восьмых в целой полоске? сколько четвертей в половине? сколько восьмых в половине? в четверти? в двух четвертях? в трех четвертях?

Решение всех этих вопросов записывается на доске и в тетрадях. Запись можно расположить следующим образом:

$$1 = \frac{2}{2}; \quad 1 = \frac{4}{4}; \quad 1 = \frac{8}{8}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8}; \quad \frac{1}{4} = \frac{2}{8}; \quad \frac{3}{4} = \frac{6}{8}$$

Труднее всех последний случай. Раздробляя $\frac{3}{4}$ в восьмые, дети должны рассуждать следующим образом: в целой полоске 4 четверти и 8 восьмых; в одной четверти — 2 восьмых, а в трех четвертях — 6 восьмых; значит, $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$.

Пользуясь теми же полосками, на основе которых производилось раздробление, дети знакомятся с обратным преобразованием — превращением. В результате на доске и в тетрадях появляется следующая запись:

$$\frac{2}{2} = 1; \quad \frac{4}{4} = 1; \quad \frac{8}{8} = 1$$

$$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}; \quad \frac{2}{8} = \frac{1}{4}; \quad \frac{4}{8} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}; \quad \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

Превращая $\frac{6}{8}$ в четвертые, дети рассуждают так: 2 восьмых составляют одну четвертую; 2 восьмых в шести восьмых содержатся 3 раза, значит, $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$.

Урок заканчивается устными упражнениями в раздроблении и превращении.

Полезно ставить вопросы и в такой форме: что больше $\frac{1}{2}$ или $\frac{3}{4}$? $\frac{1}{2}$ или $\frac{3}{8}$? $\frac{3}{4}$ или $\frac{5}{8}$? $\frac{3}{4}$ или $\frac{7}{8}$?

Отвечая на эти вопросы, дети должны подтвердить свои слова соответствующими преобразованиями: $\frac{1}{2}$ больше, чем $\frac{3}{8}$, так как половина равняется четырем восьмым; $\frac{3}{4}$ меньше, чем $\frac{7}{8}$, так как $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$ и т. д.

Четвертый, шестой и седьмой уроки посвящены сложению и вычитанию дробей, составленных из половин, четвертей и восьмых. Напомним, что мы ограничиваемся сложением и вычитанием дробей без перехода через единицу.

Для конкретизации этих случаев сложения и вычитания можно обратиться к кругу, на котором легче, чем на полосках, различать половину, четверть и восьмую, а также дроби, составленные из этих долей. Надо заранее вырезать из бумаги набор соответствующих круговых секторов.

Уже при сложении дробей с одинаковыми знаменателями получается в ряде случаев сократимая дробь. Надо приучить детей производить в этих случаях превращение. Например;

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{2}{2}=1; \quad \frac{3}{8}+\frac{3}{8}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4} \text{ и т. д.}$$

При вычитании дроби из единицы надо записывать действие подробно:

$$1-\frac{5}{8}=\frac{8}{8}-\frac{5}{8}=\frac{3}{8}; \quad 1-\frac{3}{4}=\frac{4}{4}-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$$

При сложении и вычитании дробей с разными знаменателями запись действия также должна отображать все промежуточные этапы. Например:

$$\frac{3}{4}+\frac{1}{8}=\frac{6}{8}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}; \quad \frac{3}{4}-\frac{5}{8}=\frac{6}{8}-\frac{5}{8}=\frac{1}{8}$$

Надо следить за тем, чтобы дети правильно пользовались знаком равенства. Нельзя допускать такие, например, записи: $\frac{1}{4}+\frac{5}{8}=\frac{2}{8}=\frac{7}{8}$ вместо правильной: $\frac{1}{4}+\frac{5}{8}=\frac{2}{8}+\frac{5}{8}=\frac{7}{8}$. Ошибки учащихся IV класса объясняются тем, что в младших классах они привыкли говорить не „равняется“, а „получится“. Необходимо изжить эту привычку до перехода в V класс, где она создаст ряд серьезных неудобств.

На пятом уроке дети решают более сложные задачи на нахождение дроби от числа.

Следует заметить, что после второго урока, в дополнение к очередному материалу, относящемуся к дробям, надо предлагать детям несложные задачи на нахождение нескольких частей числа. Например:

1) Для пионерского лагеря купили 192 *кг* крупы. В первый месяц израсходовали $\frac{3}{8}$ всей крупы, во второй месяц — 78 *кг* 500 *г*. Сколько крупы осталось?

2) Магазин получил 185 *кг* свеклы и 175 *кг* моркови. Продали $\frac{5}{8}$ этих овощей. Сколько килограммов овощей осталось?

Параллельно с этим они решают примеры и задачи на сложение и вычитание дробей.

На пятом уроке можно предложить учащимся усложненные задачи на нахождение дроби от числа и комбинированные задачи на сложение и вычитание дробей и на нахождение дроби от числа. Например:

В магазин доставили 2400 пар галош. В первый день продали $\frac{3}{8}$ всех галош, во второй день — $\frac{3}{4}$ остатка. Сколько пар галош еще не продано?

Чтобы избежать громоздких записей при вычислении дроби от числа, можно к этому времени научить детей записывать оба действия — деление и умножение — в одну строчку в виде сложного примера. Тогда решение предложенной задачи можно записать следующим образом:

1) Сколько пар галош продали в первый день?

$$2400 \text{ п.} : 8 \times 3 = 900 \text{ п.}$$

2) Сколько пар галош осталось на второй день?

$$2400 \text{ п.} - 900 \text{ п.} = 1500 \text{ п.}$$

3) Сколько пар галош продали во второй день?

$$1500 \text{ п.} : 4 \times 3 = 1125 \text{ п.}$$

4) Сколько пар галош еще не продано?

$$1500 \text{ п.} - 1125 \text{ п.} = 375 \text{ п.}$$

Возможен и другой способ решения этой задачи. Желательно, чтобы дети сами до него додумались. В этом случае первый и второй вопрос остаются без изменения, а третий и четвертый ставятся и решаются по-другому:[1]

---

[1] Аналогичный способ можно применить и к двум первым вопросам, но с меньшей выгодой.

3) Какую часть оставшихся галош не продали во второй день?

$$1-\frac{3}{4}=\frac{4}{4}-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$$

4) Сколько пар галош еще не продано?

$$1500\ п.:4=375\ п.$$

На том же уроке можно решить и такую задачу.

За 3 дня самолет пролетел 1800 *км*. В первый день он пролетел $\frac{1}{4}$ часть, а во второй день — $\frac{3}{8}$ всего пути. Сколько километров пролетел он в третий день?

Решение.

1) Какую часть всего пути пролетел самолет за первый и второй день вместе?

$$\frac{1}{4}+\frac{3}{8}=\frac{2}{8}+\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$$

2) Какую часть всего пути пролетел он в третий день?

$$1-\frac{5}{8}=\frac{8}{8}-\frac{5}{8}=\frac{3}{8}$$

3) Сколько километров пролетел самолет в третий день?

$$1800\ км:8\times3=675\ км$$

Ответ: 675 *км*

Если ученик затрудняется произвести вычисления в уме, можно расположить действия „столбиком“, не расчленяя и в этом случае соответствующий вопрос на два отдельных вопроса:

$$\begin{array}{r|l} 1800\ км & 8 \\ \cline{2-2} \underline{20} & 225\ км \\ \underline{40} & \end{array} \qquad 225\ км\times3=675\ км$$

Мы разобрали первую часть темы об изучении простейших дробей в IV классе.

Вторая часть строится по аналогии с первой с тою лишь разницей, что теперь можно двигаться вперед несколько быстрее.

Пояснить соотношение между пятой и десятой, между половиной и десятой удобнее всего на метровых лентах, которые легко разделить на соответствующие равные части, пользуясь классной метровой линейкой.

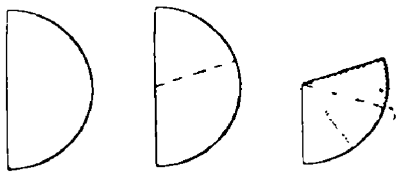
В тетрадях дети рисуют две группы полосок, длиною по 10 *см* (или, если угодно, в 10 клеточек). Первая группа поясняет соотношение между целой единицей, пятой долей и десятой долей, а вторая группа — между целой единицей, половиной и десятой. Вот образец таких полосок:

1									
$\frac{1}{5}$		$\frac{1}{5}$		$\frac{1}{5}$		$\frac{1}{5}$		$\frac{1}{5}$	
$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

1									
$\frac{1}{2}$					$\frac{1}{2}$				
$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

В III классе мы учили детей делить круг на 3 и на 6 равных частей. Теперь можно показать им, как разделить круг на 5 и на 10 равных частей. Между прочим, такое деление круга дает возможность вырезать пятиконечную звезду.

Вот как это делается.



Сложенный пополам круг (рис. 1) сгибают по радиусу (пунктир на рис. 2) с таким расчетом, чтобы пригнутая часть (штриховка на рис. 3) была вдвое больше, чем не закрытый ею сектор. То, что пригнули, надо сложить вдвое, а незакрытый сектор подвернуть под сдвоенную часть. Весь круг окажется таким образом сложенным вдесятеро. Остается полученную дольку, состоящую из десяти слоев, срезать под острым углом к радиусу. Если развернуть бумагу, получится пятиконечная звезда.

Полезно спросить, как была получена десятая доля, чтобы напомнить ученику прием последовательного деления на 10.

Остается привести образцы комбинированных задач, которые будут предложены учащимся на 16, 17 и 18-м уроках.

На 16-м уроке можно решать, например, такие задачи.

1) Пшеницей засеян прямоугольный участок земли, длина которого 1 *км* 200 *м*, а ширина составляет $\frac{3}{8}$ длины. Сколько семян потребовалось на этот участок, если на 1 *га* высевали по 120 *кг*?

2) Длина прямоугольного участка земли 175 *м*, ширина его на 35 *м* меньше длины. Картофель занимает $\frac{3}{4}$ этого участка, капуста — $\frac{3}{5}$ остальной площади. Какую площадь занимает капуста?

На 17-м уроке можно предложить учащимся задачи такого рода.

1) Длина погреба 5 *м*, ширина 3 *м*, глубина 2 *м*, причем $\frac{4}{5}$ всего погреба заполнено картофелем. Сколько весит этот картофель, если вес 1 *куб. м* его составляет в среднем 657 *кг* 500 *г*?

2) В колхозе выкопали пруд, длина которого 42 *м*, ширина 30 *м* и глубина 2 *м*. Сколько потребуется грузовых машин, чтобы вывезти $\frac{7}{10}$ всей вырытой земли, если на каждые 3 машины грузить по 14 *куб. м* земли?

К 18-му уроку можно отнести еще один вид комбинированных задач — на встречное движение и на нахождение нескольких частей числа. Приведем два варианта таких задач.

1) Из двух приморских городов, находящихся на расстоянии в 900 *км*, вышли одновременно навстречу друг другу два парохода. Первый из них проходил 32 *км* в час, а второй — $\frac{7}{8}$ этого расстояния. Через сколько часов сблизились эти пароходы на $\frac{3}{5}$ всего расстояния?

2) Расстояние между двумя городами 1800 *км*. За 27 часов первый поезд проходит $\frac{3}{5}$, а второй поезд — $\frac{3}{4}$ всего этого расстояния. Через сколько часов встретятся эти поезда, если они вышли одновременно навстречу друг другу?

На 9-м и 20-м уроках можно провести следующие контрольные работы.

Первая работа (9-й урок)

I вариант

Задача. Завод получил в три срока 7520 *т* угля: в первый раз $^3/_8$ всего количества, во второй раз — $^3/_4$ остатка. Сколько тонн угля получил завод в третий раз?

Примеры. 1) $\frac{3}{8}+\frac{3}{8}$; $\frac{3}{4}+\frac{1}{8}$; $\frac{1}{4}+\frac{5}{8}$

2) $1-\frac{5}{8}$; $\frac{7}{8}-\frac{3}{4}$; $\frac{1}{2}-\frac{3}{8}$

II вариант

Задача. Школа получила 5760 тетрадей в одну линейку, в две линейки и в клеточку. Тетради в одну линейку составляли $^5/_8$ всего количества, тетради в клеточку $^3/_4$ остальных. Сколько было тетрадей в две линейки?

Примеры. 1) $\frac{1}{2}+\frac{3}{8}$; $\frac{1}{4}+\frac{5}{8}$; $\frac{3}{8}+\frac{5}{8}$

2) $1-\frac{3}{8}$; $\frac{3}{4}-\frac{5}{8}$; $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$

Вторая работа (20-й урок)

I вариант

Задача. Глубина колодца 4 *м* 5 *дм*. Дно его имеет форму прямоугольника, стороны которого 15 *дм* и 12 *дм*. Вода заполняет колодец на $^3/_5$ его глубины. Сколько еще ведер воды может поместиться в этом колодце, если 1 ведро вмещает 12 *куб. дм*?

Примеры. 1) $\frac{4}{5}+\frac{1}{5}$; $\frac{3}{10}+\frac{2}{5}$; $\frac{1}{2}+\frac{1}{10}$

2) $\frac{7}{10}-\frac{1}{2}$; $\frac{9}{10}-\frac{2}{5}$; $\frac{1}{2}-\frac{3}{10}$

II вариант

Задача. Длина сарая прямоугольной формы 12 *м* 5 *дм*, ширина 7 *м* 2 *дм*, высота 3 *м*. Дрова занимают $^7/_{10}$ этого сарая. Сколько можно добавить в него центнеров дров, если 1 *куб. м* дров весит 6 *ц*?

Примеры. 1) $\frac{7}{10}+\frac{3}{10}$; $\frac{3}{5}+\frac{1}{10}$; $\frac{3}{10}+\frac{1}{2}$

2) $\frac{9}{10}-\frac{1}{2}$; $\frac{7}{10}-\frac{3}{5}$; $1-\frac{4}{5}$

VII. МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ИМЕНОВАННЫХ ЧИСЕЛ

Именованные числа, с которыми дети знакомятся в начальной школе, связаны, с одной стороны, с метрической системой мер, с другой стороны, с мерами времени.

Изучение метрических мер и выполнение действий над простыми именованными числами, выраженными в метрических мерах, начинается с I класса школы. То же относится к мерам времени. Меры эти вводятся не все сразу, но в III классе дети должны усвоить полностью три таблицы: таблицу мер длины — километр, метр, дециметр, сантиметр, миллиметр, таблицу мер веса — тонна, центнер, килограмм, грамм, и таблицу мер времени — век, год, месяц, сутки, час, минута, секунда.

Составные именованные числа, выраженные в метрических мерах, вводятся в III классе, а действия над такими числами — в IV классе.

Составные именованные числа, выраженные в мерах времени, а также действия над числами этого рода отнесены программой к IV классу. Здесь же вводятся квадратные и кубические меры и действия над соответствующими именованными числами.

Остановимся прежде всего на основных понятиях, относящихся к курсу именованных чисел.

Число получается не только при счете, но и при измерении. Измеряют различные величины: длину, площадь, объем, вес, время и т. д. При этом надо различать следующие понятия: величина, частное значение величины и числовое значение величины. Например, длина — это величина; длина данного отрезка — частное значение этой величины; 5 метров — ее числовое значение.

Частное значение величины, принимаемое за единицу при измерении, называется мерой.

В результате измерения получается числовое значение величины.

Более крупные меры называются по отношению к более мелким — мерами высшего наименования, а более мелкие по отношению к более крупным — мерами низшего наименования.

Число, которое показывает, сколько раз более мелкая мера содержится в более крупной, называется единичным отношением этих мер.

Рядом с числом, полученным при измерении, ставят наименование той меры, которой пользовались при измерении. Поэтому числа, полученные при измерении, называются именованными числами.

Простое именованное число получается при измерении частного значения величин одной какой-либо мерой и содержит единицы одного наименования.

Составное именованное число получается при измерении частного значения величины несколькими мерами и состоит из однородных единиц разных наименований.

Раздробить именованное число — значит выразить его в мерах низшего наименования. Величина его при этом не меняется.

Превратить именованное число — значит выразить его в мерах высшего наименования. Величина его при этом тоже не меняется.

Метрическая система мер

Как за границей, так и в России до введения метрических мер не было единой системы мер. Каждая страна имела свои меры, большею частью весьма неудобные с точки зрения тех единичных отношений, которые связывали одну меру с другой.

В России, например, существовали следующие меры длины:

верста — 500 саженей
сажень — 3 аршина или 7 футов
аршин — 16 вершков
фут — 12 дюймов
дюйм — 10 линий

Единичные отношения квадратных и кубических мер были особенно громоздкими и неудобными:

1 кв. аршин — 256 кв. вершков
1 куб. аршин — 4096 куб. вершков
1 куб. сажень — 343 куб. фута
1 куб. фут — 1728 куб. дюймов. И т. д.

С большим трудом усваивали учащиеся начальной школы действия над составными именованными числами, выраженными в таких мерах.

Необычайно удобными по сравнению с прежними мерами являются так называемые метрические меры, введенные впервые во Франции вскоре после революции 1789 года. По заданию революционного правительства была измерена при помощи триангуляции[1] часть Парижского меридиана от Дюнкерка до Барселоны. На основании этих данных установили длину четверти Парижского меридиана и ее десятимиллионную часть приняли за основную меру длины — метр. Все остальные меры длины, площади, объема, вместимости и веса связаны так или иначе с этой основной мерой. Система мер, связанных с метром, получила название метрической системы мер.

С 1 января 1840 года метрические меры стали во Франции общеобязательными.

Основными мерами метрической системы являются метр, грамм и литр.

Производные меры, которые меньше основной в 10, 100 и 1000 раз, обозначаются словами латинского корня деци, санти и милли.

Производные меры, которые больше основной в 10, 100 и 1000 раз, обозначаются словами греческого корня дека, гекто и кило.

В 1903 г. установлены общеобязательные сокращения наименований метрических мер, причем „дека" в отличие от „деци" обозначается не одной буквой *д*, а двумя буквами *да*. После сокращенных наименований метрических мер не ставят точки.

---

[1] Триангуляция — это топографическая съемка, осуществляемая тригонометрическим способом посредством сети треугольников.

Вот сокращенные наименования мер длины: *м, дм, см, мм; дам, гм* и *км*.

Грамм приблизительно равен весу 1 *куб. см* воды при температуре $+4°$ Цельсия, а литр — объему 1 *куб. дм*.

Употребительные у нас меры веса и вместимости сокращенно обозначают следующим образом: *г* (грамм), *кг* (килограмм) и *л* (литр).

Малоупотребительными являются *дг* (дециграмм) и *даг* (декаграмм), а также *дл* (децилитр) и *дал* (декалитр). Остальные меры и вовсе не применяются в нашем обиходе.

Кроме перечисленных мер, мы пользуемся еще **центнером**, который равен 100 *кг*, и **тонной**, которая составляет 10 центнеров, или 1000 *кг*.

Сокращенные обозначения этих мер — *ц* и *т*.

Линейные меры являются основой одноименных квадратных и кубических мер. Кроме того, земельные участки измеряются аром и гектаром. Ар — это кв. декаметр, а гектар — кв. гектометр. Сокращенно их обозначают так: *а* и *га*.

У нас метрическая система мер была введена правительственным декретом от 14 сентября 1918 года. Замена старых русских мер новыми мерами была, разумеется, сопряжена с некоторыми техническими трудностями, на преодоление которых потребовалось несколько лет. Все же эта реформа проведена у нас во много раз быстрее, чем это было во Франции.

Все меры метрической системы находятся в простой зависимости от основных мер — метра, грамма и литра. Единичным отношением метрических мер является число 10 или степень 10. Те же отношения существуют между разрядными единицами в десятичной системе счисления. Благодаря этому значительно упрощаются как преобразования метрических именованных чисел, так и действия над ними.

Раздробление и превращение таких именованных чисел следует производить в уме. Записать надо только данное число и полученный результат. На первых порах надо требовать от учащихся соответствующих объяснений.

Если требуется 37 *м* раздробить в сантиметры, ученик рассуждает так: в одном метре 100 *см*, а у нас

37 *м*; умножаю 100 *см* на 37; получится 3700 *см*; итак, 37 *м* = 3700 *см*.

При раздроблении составного именованного числа приходится сначала умножить, а потом сложить. Ответ и в этом случае записывается в строчку:

6 *м* 75 *см* = 675 *см*
4 *т* 670 *кг* = 4670 *кг*

Несколько труднее раздробить составное именованное число, в котором отсутствует то или иное звено метрической системы:

2 *кг* 75 *г* = 2075 *г*
1 *м* 8 *см* = 108 *см*

В первом из данных чисел отсутствуют гектограммы, а во втором — дециметры. В числах, полученных после раздробления, их место занято нулями. Чтобы учащиеся не пропускали нулей, надо решать побольше таких примеров с подробными объяснениями. Например: в 1 *кг* — 1000 *г*; в 2 *кг* — 2000 *г*; 2000 *г* да еще 75 *г* — всего 2075 *г*.

Превращение именованных чисел, выраженных в метрических мерах, следует также производить в уме и записывать в строчку. Например:

2400 *см* = 24 *м*
3675 *г* = 3 *кг* 675 *г*
209 *кг* = 2 *ц* 9 *кг*

Решая последний пример, ученик рассуждает так: 100 *кг* составляют 1 *ц*; 100 *кг* содержатся в данном числе 2 раза; значит, получится 2 *ц* 9 *кг*.

В этом примере выпал нуль, так как центнер не в 10 раз, а в 100 раз больше килограмма. Чтобы предотвратить ошибки, необходимо решать такие примеры с объяснениями.

Действия над составными именованными числами, выраженными в метрических мерах, мало чем отличаются от действий над отвлеченными числами.

При сложении, вычитании и умножении этих чисел на однозначное число нет необходимости предварительно производить раздробление. При делении составного именованного числа на отвлеченное раздробление тоже, вообще говоря, не обязательно. Необходимость в нем может появиться позднее в процессе вычислений.

Если в данных числах отсутствуют единицы какого-либо десятичного разряда, на их место еще до начала вычислений надо поставить нуль.

Вот примеры, иллюстрирующие указанные действия:

1) $$\begin{array}{r} 3\ \textit{м}\ 07\ \textit{см} \\ +\ 1\ \textit{м}\ 05\ \textit{см} \\ \hline 4\ \textit{м}\ 12\ \textit{см} \end{array}$$

2) $$\begin{array}{r} 4\ \textit{м}\ 05\ \textit{см} \\ -\ 2\ \textit{м}\ 08\ \textit{см} \\ \hline 1\ \textit{м}\ 97\ \textit{см} \end{array}$$

3) $$\begin{array}{r} 5\ \textit{ц}\ 45\ \textit{кг} \\ \times\ 8 \\ \hline 43\ \textit{ц}\ 60\ \textit{кг} \end{array}$$

4) $$\begin{array}{l|l} 114\ \textit{м}\ 80\ \textit{см} & 35 \\ \cline{2-2} \underline{105} & 3\ \textit{м}\ 28\ \textit{см} \\ \ \ 980\ \textit{см} & \\ \ \ \underline{70} & \\ \ \ 280 & \\ \ \ \underline{280} & \end{array}$$

При делении по содержанию необходимо до начала вычислений раздробить оба числа в простые именованные числа одного и того же наименования. Например:

$$32\ \textit{м}\ 70\ \textit{см} : 2\ \textit{м}\ 18\ \textit{см} = 3270\ \textit{см} : 218\ \textit{см} = 15$$

$$\begin{array}{l|l} 3270\ \textit{см} & 218\ \textit{см} \\ \cline{2-2} \underline{218} & 15 \\ 1090 & \\ \underline{1090} & \end{array}$$

Меры времени

Основные меры времени не являются, как и метр, произвольными. Одна из них — сутки — представляет собою время полного оборота Земли вокруг своей оси, а вторая — год — время полного оборота Земли вокруг Солнца.

Солнечный год содержит 365 суток 5 часов 48 минут и 48 секунд. Для удобства его заменяют гражданским, который содержит целое число суток, что дает возможность считать началом нового года всегда один и тот же час — полночь.

Однако, если приравнять солнечный год к целому числу суток и считать, что он содержит 365 суток, то новый гражданский год наступит приблизительно на 6 часов раньше, чем новый солнечный год. За 4 года разница между гражданским и солнечным новым годом уже составит почти целые сутки. С течением времени должно произойти полное расхождение между календарем и временами года: календарная весна окажется фактически зимой, а календарная зима — летом.

Реформу такого неудобного календаря произвел Юлий Цезарь незадолго до начала нашей эры. По совету египетского астронома Созигена было решено три года подряд считать простыми, по 365 суток, а каждый четвертый год — високосным, в котором 366 суток.

Лишний день в високосном году стали добавлять в феврале. Отсюда февраль простого года содержит 28 дней, а февраль високосного года — 29 дней. По-латыни этот лишний день получил название „биссекстус", что значит „еще раз шестое" или „шестое бис". Дело в том, что в високосном году дважды повторялось в феврале шестое число до мартовских календ (римляне вели счет дням от конца месяца). Год, содержащий лишний день, получил название „биссекстилис" Греки, от которых мы заимствовали юлианский календарь, выговаривают **б** как **в**. Отсюда получилось слово „високосный" (но отнюдь не **вы**сокосный, как думают не очень грамотные люди).

Добавляя к каждому четвертому году целые сутки, наши предки не вполне устранили расхождение между гражданским и солнечным годом, так как за 4 года накапливалось не 24 часа, а несколько меньше. В 1582 году разница между гражданским и солнечным годом уже составляла 10 суток. К этому времени относится реформа летосчисления, произведенная папой Григорием XIII. Чтобы уравнять гражданское время с солнечным, он предложил 5 октября 1582 года считать 15 октября, а чтобы предотвратить в дальнейшем накопление новой ошибки, было решено не считать високосными такие года как 1700, 1800 и 1900-й. Вообще, если порядковые числа, обозначающие годы, состоят из круглых сотен, то високосными считаются только те из них, у которых число сотен делится на 4. Уже после введения грегорианского летосчисления 1600-й год был високосным, а годы 1700, 1800 и 1900-й — простыми.

У нас юлианское летосчисление было введено при Петре I. Еще Магницкий в своей „Арифметике" указывает „лето от сотворения мира", обозначая его по-старому славянскими цифрами.

В царской России вопрос о введении нового календаря поднимался неоднократно, но каждый раз встречал противодействие со стороны православной церкви. Поэтому ко времени Великой Октябрьской социалистической революции расхождение между нашим календарем и западноевропейским составляло уже 13 суток.

Декретом от 25 января 1918 года в Российской республике был введен западноевропейский календарь. Вот текст этого декрета:

„Первый день после 31 января сего года считать не 1-м февраля, а 14-м февраля, второй день считать 15-м и т. д.

Жалованье за февраль выплачивать за вычетом 13/30 оного.

Подписал В. Ульянов (Ленин)".

Вот почему мы празднуем годовщину Великой Октябрьской социалистической революции не 25 октября, а 7 ноября по новому стилю.

Надо рассказать учащимся IV класса, когда был у нас введен новый стиль, какие годы по этому стилю являются простыми и какие — високосными. Надо объяснить также, почему день Октябрьской революции падает теперь на 7 ноября.

Объяснительная записка к программе по арифметике предостерегает от громоздких вычислений в отношении составных именованных чисел и особенно, если они выражены в мерах времени. Такие числа могут содержать единицы не более, чем двух разных наименований.

Раздробление и превращение именованных чисел надо ограничивать наиболее легкими случаями, когда раздробление можно произвести в уме, а превращение задавать с таким расчетом, чтобы число часов было не больше, чем 720, число минут не больше, чем 1440, а число секунд не больше, чем 3600 (иначе получились бы трехсоставные именованные числа).

Вот образцы таких преобразований:

5 сут. 18 час. = (24 часа $\times$ 5) + 18 час. = 138 час.
6 час. 40 мин. = (60 мин. $\times$ 6) + 40 мин. = 400 мин.
8 мин. 15 сек. = (60 сек. $\times$ 8) + 15 сек. = 495 сек.

$$
\begin{array}{l|l}
1350 \text{ мин.} & 60 \text{ мин.} \\
\underline{120} & \overline{\quad 22} \\
\ \ 150 & \\
\ \ \underline{120} & \\
\ \ \ 30 \text{ мин.} &
\end{array}
\qquad 1350 \text{ мин.} = 22 \text{ часа } 30 \text{ мин.}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
3285 \text{ сек.} & 60 \text{ сек.} \\
\underline{300} & \overline{\quad 54} \\
\ \ 285 & \\
\ \ \underline{240} & \\
\ \ \ 45 \text{ сек.} &
\end{array}
\qquad 3285 \text{ сек.} = 54 \text{ мин. } 45 \text{ сек.}
$$

Действия над составными именованными числами, выраженными в мерах времени, также не должны быть громоздкими. Например:

$$
\begin{array}{r}
+\begin{array}{r} 5 \text{ сут. } 17 \text{ час.} \\ 7 \text{ сут. } 15 \text{ час.} \end{array} \\
\hline
12 \text{ сут. } 32 \text{ часа} \\
\hline
13 \text{ сут. } \ \ 8 \text{ час.}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
-\begin{array}{r} \cancel{9} \text{ сут. } \overset{30}{\cancel{6}} \text{ час.} \\ 5 \text{ сут. } 14 \text{ час.} \end{array} \\
\hline
3 \text{ сут. } 16 \text{ час.}
\end{array}
$$

На умножение и деление надо давать преимущественно такие примеры, которые можно решить устно; соответствующие вычисления записываются в „строчку“. Например:

1) 6 час. 45 мин. $\times$ 4 = ?
   6 ч. $\times$ 4 = 24 ч. = 1 сут.
   45 мин. $\times$ 4 = 180 мин. = 3 часа.

   Ответ: 1 сутки 3 часа.

2) 15 час. 12 мин. : 6 = ?
   15 час. : 6 = 2 часа (ост. 3 часа)
   3 часа 12 мин. = 192 мин.; 192 мин. : 6 = 32 мин.

   Ответ: 2 часа 32 мин.

3) 19 час. 20 мин. : 2 часа 25 мин. = ?

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}19\\60\end{array} \\ \hline 1140 \end{array}$$

1140 мин. + 20 мин. = 1160 мин.
2 часа 25 мин. = 145 мин.

$$\begin{array}{l|l} 1160 \text{ мин.} & 145 \text{ мин.} \\ \underline{1160} & \quad 8 \end{array}$$

Ответ: 8.

Задачи на время

Различают задачи на время в пределах суток, месяца, года и столетия, причем в условия задач на вычисление времени в пределах столетий не должны включаться месяцы и дни.[1]

В пределах каждой из указанных групп существуют три варианта задач.

1) Дано начало промежутка времени и его продолжительность; надо найти его конец.

2) Даны начало и конец промежутка времени; надо найти его продолжительность.

3) Дана продолжительность промежутка времени и его конец; надо найти его начало.

Рассмотрим все три варианта применительно к каждой группе задач.

Задачи на время в пределах суток решаются устно, по свободному соображению. Приведем образец каждого варианта задач этой группы:

1) Поезд вышел с узловой станции в 1 ч. 30 мин. дня и прибыл на следующую узловую станцию через 5 час. 15 мин. В котором часу прибыл поезд на эту станцию?

1 час. 30 мин. + 5 час. 15 мин. = 6 час. 45 мин.

Ответ: в 6 час. 45 мин. вечера.

2) Ученик пришел в школу в 8 час. 30 мин. утра и ушел из школы в 1 час. 15 мин. Сколько времени был он в школе?

30 мин. + 3 часа + 1 час. 15 мин. = 4 часа 45 мин.

Ответ: 4 часа 45 мин.

3) Самолет летел из Москвы в Сочи 9 час. 45 мин. и прибыл к месту назначения в 2 часа 15 мин. дня. В котором часу вылетел он из Москвы?

---

[1] Програмы начальной школы. 1955, стр. 84.

1) 9 час. 45 мин. — 2 часа 15 мин. = 7 час. 30 мин.
2) 12 час. — 7 час. 30 мин. = 4 часа 30 мин.

Ответ: в 4 часа 30 мин. утра.

Эту задачу можно решить письменно одним действием, если считать часы от полуночи. В таком случае время прибытия самолета выразится числом 14 час. 15 мин. Чтобы решить задачу, достаточно от 14 час. 15 мин. отнять 9 час. 45 мин.

$$\begin{array}{rr} & 75 \\ 14 \text{ час.} & 15 \text{ мин.} \\ - \; 9 \text{ час.} & 45 \text{ мин.} \\ \hline 4 \text{ часа} & 30 \text{ мин.} \end{array}$$

Рассмотрим вторую группу задач, относящихся к промежуткам времени в пределах месяца.

При решении таких задач следует различать число календарное и число арифметическое.

Календарное число, или дата, показывает начало промежутка времени или его конец, арифметическое число выражает продолжительность промежутка времени.

При решении задач на время в пределах суток нам не приходилось иметь дело с порядковыми числами — в этих случаях порядковое число совпадало с количественным. Если в задаче говорилось, что ученик пришел в школу в 8 час. 30 мин. утра (не в девятом часу, а именно в 8 час. 30 мин.), то это означало, что от начала суток прошло ровно 8 час. 30 мин. Не изменяя этого числа, можно было производить над ним то или иное арифметическое действие.

В пределах месяца придется оперировать с датами, а следовательно, порядковые числа заменять арифметическими, считая дни от начала данного месяца.

Приведем образцы трех вариантов таких задач.

1) Поезд вышел из Москвы 5 июля в 9 час. вечера и прибыл во Владивосток через 9 сут. 15 час. Когда прибыл он во Владивосток?

Переведем календарное число в арифметическое. Поезд вышел из Москвы 5 июля в 9 час. вечера. К этому моменту от начала месяца прошло 4 дня 21 час. Теперь можно произвести сложение:

$$\begin{array}{rr} 4 \text{ сут.} & 21 \text{ час.} \\ + \; 9 \text{ сут.} & 15 \text{ час.} \\ \hline 13 \text{ сут.} & 36 \text{ час.} \\ \hline 14 \text{ сут.} & 12 \text{ час.} \end{array}$$

Полученное арифметическое число заменяем календарным.

Ответ: Поезд прибыл во Владивосток 15 июля в 12 час. дня.

2) Пароход отошел от пристани 20 мая в 8 час. утра и прибыл к месту назначения 26 мая в 8 час. вечера. Сколько времени был он в пути?

Заменяем оба календарных числа арифметическими. Первое число — 19 сут. 8 час.; второе число — 25 сут. 20 час. Производим вычитание:

$$\begin{array}{r} -\begin{array}{r} 25 \text{ сут. } 20 \text{ час.} \\ 19 \text{ сут. } 8 \text{ час.} \end{array} \\ \hline 6 \text{ сут. } 12 \text{ час.} \end{array}$$

Ответ: Пароход был в пути 6 сут. 12 час.

3) Лыжники были в походе 5 сут. 3 часа; поход закончился 20 января в 3 часа дня. Когда начался лыжный поход?

Заменяем календарное число арифметическим. К моменту окончания похода прошло от начала месяца 19 сут. 15 час. Вычитаем:

$$\begin{array}{r} -\begin{array}{r} 19 \text{ сут. } 15 \text{ час.} \\ 5 \text{ сут. } 3 \text{ часа} \end{array} \\ \hline 14 \text{ сут. } 12 \text{ час.} \end{array}$$

Ответ: Поход начался 15 января в 12 час. дня.

Переходим к задачам на время в пределах года. При решении этих задач надо учитывать продолжительность того месяца, в отношении которого придется производить раздробление или превращение. Если год в задаче не указан, его считают простым; если же он указан, то при раздроблении и превращении учитывают продолжительность февраля.

Приведем образцы трех вариантов задач на время в пределах года.

1) Санаторий был открыт 18 мая и действовал 4 мес. 18 дней. Когда закрылся санаторий?

От начала года до 18 мая прошло 4 мес. 17 сут.

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r} 4 \text{ мес. } 17 \text{ сут.} \\ 4 \text{ мес. } 18 \text{ сут.} \end{array} \\ \hline 8 \text{ мес. } 35 \text{ сут.} \end{array}$$

35 суток падают на сентябрь и начало октября. В сентябре 30 дней. Прошло, кроме того, 5 дней октября.

Ответ: Санаторий закрылся 6 октября.

2) Навигация началась 20 апреля и закончилась 15 ноября. Сколько времени продолжалась навигация?

Заменяем оба календарных числа арифметическими. Первое число — 3 мес. 19 сут.; второе число — 10 мес. 14 сут. Производим вычитание:

$$\begin{array}{r r} & 45 \\ -\ 10\cdot\ \text{мес.} & \cancel{14}\ \text{сут.} \\ 3\ \text{мес.} & 19\ \text{сут.} \\ \hline 6\ \text{мес.} & 26\ \text{сут.} \end{array}$$

При вычитании пришлось десятый месяц — октябрь — раздробить в сутки. В октябре 31 день; $31 + 14 = 45$. В уменьшаемом получилось 9 мес. 45 сут.

Ответ: Навигация продолжалась 6 мес. 26 сут.

3) По плану 1952 года ремонт тракторов к весеннему севу продолжался в одном из районов 40 дней и был закончен 21 марта. Когда начался в этом районе ремонт тракторов?

Заменяем календарное число арифметическим. От 2 мес. 20 сут. придется отнимать 40 суток; при этом надо будет второй месяц — февраль — раздробить в сутки. Но 1952 год — високосный. Значит, в феврале этого года было 29 суток.

$$\begin{array}{r r} & 49 \\ -\ 2\cdot\ \text{мес.} & \cancel{20}\ \text{сут.} \\ & 40\ \text{сут.} \\ \hline 1\ \text{мес.} & 9\ \text{сут.} \end{array}$$

Заменяем 1 мес. 9 сут. календарным числом.

Ответ: Ремонт тракторов в районе начался 10 февраля.

В условия задач на вычисление времени в *пределах столетий* не должны включаться месяцы и дни. В таком виде эти задачи не представляют никаких трудностей. При переводе соответствующих календарных чисел в арифметические и обратно придется иметь в виду начало нашего летосчисления. Действия над полученными числами выполняются совершенно так же, как над простыми именованными числами.

VIII. ЭЛЕМЕНТЫ ГЕОМЕТРИИ В НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЕ

В начальной школе первое место принадлежит геометрии измерения. Но наряду с этим, учащиеся знакомятся также и с некоторыми элементами геометрии формы. Соответствующие знания и умения приобретают особенно важное значение в условиях перехода школы к политехническому обучению. Уменье измерять требуется в любой отрасли техники, в любом производстве. Школа поэтому должна давать учащимся практические навыки в этой области.

Обязанность учителя начальной школы состоит в том, чтобы, не выходя за пределы программы, выполнить наилучшим образом ее требования в отношении знакомства учащихся с мерами и измерениями, с плоскими геометрическими фигурами и телами. Кое-что можно сделать в этом направлении уже в младших классах школы, особенно если умело сочетать изучение собственно арифметического материала с черчением и измерением, с вычислением площадей и объемов.

В осенний и весенний периоды учащиеся знакомятся с аром и гектаром, учатся строить на местности квадрат и прямоугольник.

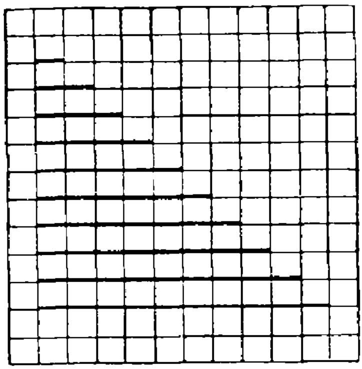
Измерение и черчение в младших классах начальной школы

Уже в I классе надо научить детей измерять метром и сантиметром и чертить отрезки прямой по линейке.

В конце первой четверти дети знакомятся с метром. По образцу, который должен быть прикреплен к стене в классе, дети сами приготовляют тесемки или полоски бумаги длиною в 1 метр. При помощи этих полосок они измеряют длину и ширину класса, намеченное учителем расстояние в школьном коридоре или зале. Расстояния эти надо выбрать с таким расчетом, чтобы они выражались в целых метрах.

В это же время дети учатся проводить прямые линии при помощи карандаша и линейки. Такая работа выполняется в арифметических тетрадях по клеточкам. В частности, надо научить детей отделять поля в тетрадях. Можно также ввести работу с шаблонами кружка и квадрата. Дети рисуют эти фигуры по шаблону, а затем раскрашивают их цветными карандашами.

К началу второй четверти, когда дети повторяют первый десяток, удобно приурочить черчение лесенки из отрезков в одну, две, три и т. д. клеточки до 10 клеточек включительно.

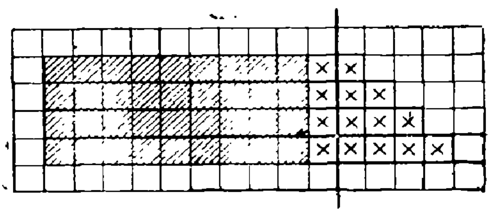


Можно нарисовать сначала „лежачую“ лесенку, а потом такую же „стоячую“.

При изучении нумерации дети чертят столбики для конкретизации чисел второго десятка (см. рисунок на стр. 222).

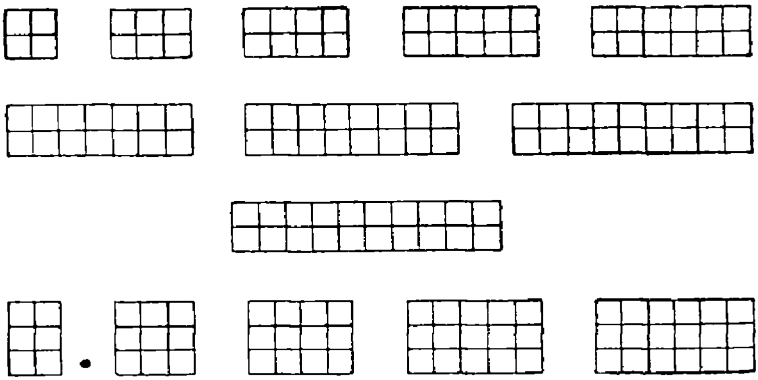
Несколько позднее учащиеся выполняют задание начертить по клеточкам два отрезка, если известна длина в клеточках одного из них и на сколько клеточек второй отрезок длиннее или короче первого.

В третьей четверти дети иллюстрируют чертежом сложение с переходом через десяток. Вот, например, чертеж, поясняющий первый ряд табличного сложения: $9+2$, $9+3$, $9+4$, $9+5$ и т. д.



Несколько позднее, при изучении умножения по 2 и по 3, дети изображают соответствующие произведения в виде прямоугольников и квадратов, составленных из клеточек (рис. на стр. 370).

Тем же способом дети иллюстрируют умножение по 4, по 5 и по 6.



Умножая по 3, учащиеся складывают из палочек треугольники, а умножая по 4 — квадраты.

В четвертой четверти дети знакомятся с сантиметром. „Лента ста“, представляющая собою метр, разделенный на сантиметры, применяется в качестве наглядного пособия при изучении устной нумерации.

С этой же целью дети могут сами настругать 120 палочек, длиною каждая в 20 *см*. Это коллективная работа всего класса. Каждый ученик должен сделать 3—4 палочки указанной длины и толщины по образцу, который имеется в классе. При счете до 100 эти палочки лежат на столе у учителя. Ученики по очереди связывают их в пучки, по 10 палочек в каждом пучке. Отдельные палочки нужны в дальнейшем для образования из десятков и единиц чисел первой сотни.

Пользуясь линейкой длиною в 20 *см*, дети измеряют длину карандаша, длину и ширину тетради, книги, конверта, табель-календаря и т. п.

По линейке они чертят отрезки заданной длины. Полезно повторить, теперь уже в сантиметрах, упражнение, которое было проделано во второй четверти: зная длину одного из двух отрезков и, кроме того, на сколько сантиметров этот отрезок длиннее или короче другого, начертить оба отрезка по линейке в тетрадях.

Во II классе измерением следует заниматься в связи с нахождением разности. Учитель раздает учащимся полоски бумаги и предлагает найти разность данной пары полосок. Ученик должен измерить длину каждой полоски сантиметровой линейкой и вычислить разность, а затем, наложив одну полоску на другую, проверить полученное число измерением.

Черчением прямоугольников и квадратов, составленных из клеточек, сопровождается и во II классе изучение таблицы умножения. При этом уточняются представления детей о квадрате и прямоугольнике.

Полезно при повторении табличного умножения начертить таблицу Пифагора в виде квадрата, сторона которого 10 *см*. Квадрат этот надо разделить на 100 квадратных клеток; сторона такой клетки — 1 *см*. В первом ряду надо поместить все числа от единицы до десяти; во втором ряду все числа, кратные двух, от двух до двадцати; в третьем ряду все числа, кратные трех и т. д.

Взяв один из сомножителей в верхнем ряду, а другой сомножитель в крайнем ряду слева, найдем произведение на пересечении вертикальной и горизонтальной линий, проходящих через эти сомножители.

На нашем рисунке выделены жирным шрифтом сомножители 7 и 3, а также произведение 21.

1	2	3	4	5	6	**7**	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	**21**	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
				и	т.	д.			

Увеличение и уменьшение числа в несколько раз можно связать с черчением отрезков, подобно тому, как это делалось в I классе по отношению к выражениям „больше“ и „меньше на столько-то“.

Кратное сравнение демонстрируется, как и разностное сравнение, на полосках. Ученик получает пару полосок, длина которых выражается целым числом сантиметров, причем одно из этих чисел является кратным другого. Ученик должен измерить каждую полоску, а затем найти не только кратное отношение, но и разность этих полосок.

В конце третьей четверти следует научить детей измерять небольшие расстояния шагами. Можно считать, что шаг ученика II класса примерно равен 50 *см*, иначе говоря, 2 шага составляют 1 *м*. Считая свои шаги через один, ученик может измерить длину школьного коридора, школьного двора, длину и ширину небольшого огорода и т. д. Полезно предложить учащимся сначала определить то или иное расстояние на глаз, а затем проверить свою догадку шагами.

При изучении нумерации в пределах первой тысячи надо познакомить детей с километром. После уроков учащиеся выходят всем классом из школы: построившись парами, стараясь идти в ногу, они отсчитывают шагами 200 *м* (400 шагов). Каждый считает (через шаг) от одного до двадцати, а староста класса отсчитывает вслух числа 20, 40, 60 и т. д. до 200. Кроме того, учитель замечает по часам, сколько потребовалось времени, чтобы пройти 200 *м*. Дети устанавливают, что пришлось бы сделать 5 раз по 200 *м*, чтобы пройти километр. Зная также, сколько времени они шли, дети вычисляют скорость пешехода в час. Так, например, если 200 *м* они прошли за 3 минуты, то на километр пришлось бы затратить 15 минут, а в таком случае за 1 час можно пройти 4 *км*.

Элементы геометрии в III классе

В III классе уточняются представления о прямой линии и об отрезке прямой. Нет надобности давать определение прямой — достаточно ее продемонстрировать в виде туго натянутой нити, в виде отпечатка этой нити на доске (нить надо предварительно натереть мелом), в виде сгиба бумаги, ребра стола, шкафа и других предметов в классе.

Отрезок — это часть прямой, ограниченная с обеих сторон. Учащиеся должны уметь отложить на прямой отрезок заданной длины.

Во второй четверти дети чертят отрезок, равный 1 *дм*, делят его по линейке на сантиметры и миллиметры.

В третьей четверти необходимо широко использовать измерение отрезков различной длины, приводящее к составным именованным числам. Учащиеся измеряют метром, разделенным на дециметры, длину и ширину класса. Метром, разделенным на сантиметры („лента ста“), они измеряют длину и ширину крышки стола, классной доски, ширину окна и двери, высоту стола, парты, стула и т. п. Наконец, миллиметровой линейкой они измеряют с возможно большей точностью различные мелкие предметы: длину, ширину и толщину книги, длину, ширину и высоту шкатулки, спичечной коробки и т. д.

Весной учащиеся III класса производят простейшие измерения на местности. Необходимо отвести больше времени на эту работу и не ограничивать ее измерением расстояний, которые уже обозначены (длина и ширина огорода, длина определенного участка дороги и т. п.). Вполне доступно учащимся III класса не только измерение расстояний, но и так называемое провешивание прямой, что и предусматривается новой программой.

Чтобы измерить расстояния на местности, необходимо иметь рулетку или, по крайней мере, мерную веревку длиной в 10 *м*. Метры должны быть обозначены на такой веревке цветными лоскутками. К концам веревки надо приделать колечки, чтобы можно было, натянув веревку, надевать их на колышки. Один ученик идет вперед, разматывая веревку, а другой следит, чтобы конец веревки не соскочил с колышка. Натянув веревку до отказа, первый ученик втыкает в землю колышек и надевает на него свой конец веревки. Затем оба ученика, сняв веревку, переносят ее на следующую дистанцию. Ученик, идущий позади, надевает свое кольцо на колышек, а идущий впереди, натянув веревку до отказа, вбивает третий колышек и т. д.

Для провешивания расстояний надо иметь хотя бы 5 вех высотою в полтора метра. Для начала можно обозначить вехами прямую, направление которой заранее не указано. Установив первую веху, дети отходят от нее в любом направлении на 10—20 шагов и ставят вторую веху. Тем самым определяется направление прямой. Стоя позади первой вехи, ученик-наблюдатель следит за тем, чтобы эта веха заслоняла собою не только вторую, но третью веху, затем четвертую, пятую и т. д. Дети воочию убеждаются, что две точки вполне определяют прямую.

Следующее упражнение — провешивание прямой между двумя данными точками (от начальной вехи до дерева, до телеграфного столба и т. п.). При этом выясняется, что между двумя точками можно провести только одну прямую.

Цель третьего упражнения — показать, что **прямая есть кратчайшее расстояние между двумя точками**. Это упражнение может состоять, например, в следующем. Дети измеряют расстояние от начальной вехи до дерева, расположенного на берегу реки, а затем измеряют расстояние до того же дерева по дороге, которая образует в этой части угол. Результат измерения показывает, что прямая короче ломаной.

Полезно еще раз продемонстрировать учащимся определенную часть километра. Дети *провешивают* расстояние в 250 *м*, ставя вехи через каждые 10 *м*. По мере продвижения вперед задние вехи используются повторно в качестве передних.

В III классе по новой программе учащиеся знакомятся с прямоугольником и квадратом, сторонами и углами этих фигур. Речь идет, собственно говоря, не об изучении совершенно нового материала, а скорее об уточнении уже имеющихся у детей представлений. Этому уточнению должно предшествовать сопоставление прямого угла с острым и тупым. Упражняясь в черчении квадратов и прямоугольников, дети глубже вникают в отличительные особенности и свойства этих фигур.

Виды углов можно продемонстрировать на подвижном пособии, составленном из двух прутьев. Учитель сдвигает и раздвигает стороны этого угла на глазах у детей. Угол становится то меньше, то больше, хотя длина его сторон не меняется — надо обратить на это внимание детей.

Сначала дети видят *острый* угол, который постепенно увеличивается. На один момент он становится *прямым*. При дальнейшем увеличении получается *тупой* угол, пока, наконец, стороны угла не образуют прямой линии.

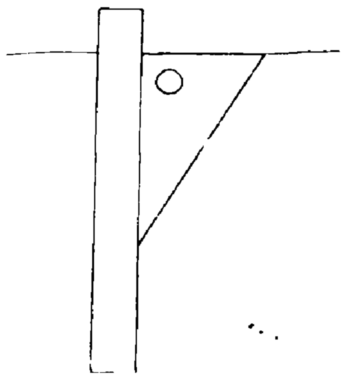
Дети должны знать, что угол имеет две стороны, выходящие из одной точки. Эта точка, из которой выходят *стороны угла*, называется его *вершиной*.

Чтобы образовать прямой угол, достаточно сложить вчетверо лист бумаги. Учащиеся находят прямые углы у ряда окружающих предметов: у книжки и тетрадки, у классной доски и крышки стола, у оконной рамы, двери, стенки шкафа. Показывая прямой угол, они должны провести указкой вдоль одной из сторон угла до его вершины и от вершины вдоль другой его стороны.

Прямой угол является мерой углов, с ним сравнивают все остальные углы. Отсюда острым называется угол, который меньше прямого, а тупым — угол, который больше прямого.

Учащиеся III класса должны научиться чертить прямой угол на неграфленой бумаге при помощи линейки и чертежного треугольника.

Чтобы начертить прямой угол, надо сначала провести по линейке прямую, затем приложить к ней одной из сторон прямого угла треугольник, к нему приложить вплотную линейку так, чтобы она пересекала прямую, и, наконец, отняв треугольник, провести вторую сторону угла. Линейка должна пересекать прямую, чтобы можно было довести до вершины вторую сторону угла.



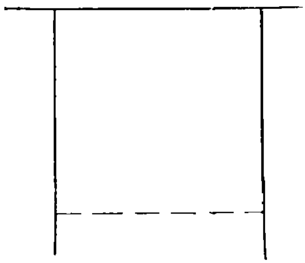
Урок, посвященный рассмотрению квадрата, надо начать с узнавания квадрата среди ряда других фигур. Учитель показывает классу треугольник, параллелограм, трапецию, неправильный четырехугольник. Дети должны поднять руки, когда увидят квадрат.

Затем сопоставляются квадраты разной величины. У каждого из них четыре стороны и четыре угла; все стороны равны, все углы прямые. По этим признакам и отличают квадрат от других плоских фигур.

Умея чертить прямой угол, дети сумеют без особого труда начертить квадрат заданных размеров, например, квадрат, сторона которого 5 *см*. (См. рисунок на стр. 376.)

Прежде всего надо провести прямую и на ней отложить отрезок длиною в 5 *см*. У обоих концов этого отрезка дети строят прямые углы. На каждой стороне они откладывают по 5 *см*. Теперь остается только соединить крайние точки прямой линией. Чертеж выполнен правильно, если окажется, что и четвертая сторона квадрата, которая обозначена на рисунке пунктиром, также равна 5 *см*, а прилежащие к ней углы — прямые. Проверяя чертеж, учащиеся обнаруживают взаимосвязь между элементами квадрата: неравенство сторон неизбежно влечет за собой неравенство углов и наоборот.

Под квадратом учащиеся записывают перечень его признаков: у квадрата 4 стороны и 4 угла; все стороны равны, все углы прямые.



В дальнейшем вводится неравносторонний прямоугольник. Показав детям эту новую фигуру, учитель спрашивает, можно ли ее назвать квадратом и если нельзя, то чем она отличается от квадрата.

Дети устанавливают, что вторая фигура имеет четыре угла и четыре стороны. Все углы прямые. Что же касается сторон, то равны только противоположные стороны.

Обе фигуры имеют прямые углы — их можно было бы с одинаковым правом назвать прямоугольниками. Равносторонний прямоугольник имеет особое название — это квадрат. Неравносторонний прямоугольник в отличие от квадрата мы будем называть просто прямоугольником. Дети уже слышали это название и привыкли придавать ему это условное значение.

Начертив прямоугольник, длина которого 6 *см*, а ширина 4 *см*, учащиеся записывают под ним перечень его признаков: у прямоугольника 4 стороны и 4 угла; противоположные стороны попарно равны, все углы прямые.

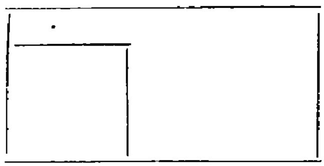
Желательно дать учащимся понятие о периметре квадрата и прямоугольника. Прямую и обратные задачи на периметр прямоугольника можно решать двумя способами. Можно найти сумму двух длинных сторон, затем сумму двух коротких сторон и полученные числа сложить. Но можно также просто умножить на 2 сумму двух смежных сторон. При решении коротким способом обратных задач находят при помощи деления полупериметр прямоугольника, а затем при помощи вычитания — искомую длину или искомую ширину.

Квадрат и прямоугольник в курсе IV класса

В IV классе дети учатся измерять и вычислять площадь квадрата и прямоугольника.

Величина той части поверхности, которую занимает квадрат или прямоугольник, называется площадью этих фигур.

Площадь может быть больше и меньше. Пояснить это следует при помощи наложения одной фигуры на другую. Квадрат на нашем чертеже помещается внутри прямоугольника. Отсюда следует, что площадь прямоугольника больше площади квадрата, а площадь квадрата меньше площади прямоугольника.



Одинаковые по форме фигуры могут иметь разную площадь. Это можно пояснить на нескольких разных по величине квадратах.

Наоборот, фигуры, имеющие разную форму, могут иметь одинаковую площадь. Достаточно один квадрат разрезать по средней линии, а другой такой же квадрат — по диагонали и сложить из этих частей прямоугольник и треугольник. Все три фигуры будут иметь разную форму, но равную площадь.

Измерение площади надо вывести из требования сравнить площадь фигур, имеющих разную форму, так как при этом не всегда можно воспользоваться простым наложением.

Начертив на доске прямоугольник и квадрат, учитель предлагает детям решить вопрос, которая из этих фигур имеет бóльшую площадь. Мнения учащихся расходятся. Сами они приходят к мысли, что ответ можно получить только в результате измерения.

Чем же измерить площадь фигур? Удобнее всего сравнить площадь данных фигур с площадью хорошо известного всем квадрата — квадратного дециметра. Посмотрим, сколько раз может поместиться в каждой из этих фигур квадратный дециметр, иначе говоря, измерим площадь данного прямоугольника и квадрата кв. дециметром.

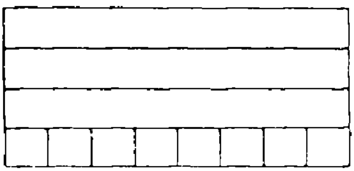
Учитель показывает детям кв. дециметр, а затем при помощи этого квадрата измеряет площадь обеих фигур. Сначала он откладывает кв. дециметр по длине фигуры, отмечая его положение точками. Затем проводит через намеченные точки прямую и разбивает полученную полоску на квадратные дециметры.

Тем же способом он заполняет кв. дециметрами второй и третий ряд в прямоугольнике, а после этого разбивает на кв. дециметры нарисованный на доске квадрат.

Остается подсчитать число кв. дециметров, составляющих площадь каждой фигуры. Дети не сразу догадываются, что достаточно знать число рядов и число кв. единиц в каждом ряду, чтобы при помощи умножения найти площадь. Обычно они вначале склонны пересчитывать квадраты по одному. Под руководством учителя они устанавливают более рациональный прием. Под каждой фигурой учитель записывает соответствующее действие: 5 *кв. дм* $\times 3 = 15$ *кв. дм* и 4 *кв. дм* $\times$ $\times 4 = 16$ *кв. дм*.

Теперь ясно, что площадь прямоугольника меньше площади квадрата.

Вслед за кв. дециметром вводится кв. сантиметр. Учащиеся чертят прямоугольники и квадраты определенных размеров и производят измерение площади этих фигур при помощи кв. сантиметра. В это время уже нет надобности заполнять всю фигуру квадратными клетками. Достаточно обозначить число рядов и разбить на квадратные единицы нижний ряд. В процессе работы дети подмечают зависимость между длиною прямоугольника и числом кв. единиц в одном ряду, между шириною прямоугольника и числом таких рядов. Обращаем внимание на этот важнейший этап в подготовке учащихся к вычислению площади прямоугольника и квадрата. Усвоив указанную зависимость, они пользуются в дальнейшем рассуждением, которое можно применять и без фактического измерения.



Познакомившись с кв. метром, дети решают легкие задачи на вычисление площади пола в классе, в коридоре, в зале, у себя дома. Вот как они при этом рассуждают. Длина класса — 8 *м*; значит, в одном ряду по длине класса уложится 8 *кв. м*. Ширина класса — 7 *м*; значит, таких рядов будет 7. Чтобы узнать площадь пола в классе, надо 8 *кв. м* умножить на 7. Получится 56 *кв. м*. Ответ: Площадь пола в классе составляет 56 *кв. м*.

Научившись измерять площадь фигур кв. метром, кв. дециметром и кв. сантиметром, дети могут теперь измерить кв. дециметром площадь кв. метра, кв. сантиметром — площадь кв. дециметра. Тем самым мы подготовили почву для составления таблицы кв. мер. В тетради для черчения надо построить кв. дециметр и разделить его на кв. сантиметры, а рядом наклеить кв. сантиметр, вырезанный из миллиметровой бумаги. Под кв. дециметром дети записывают следующее действие: 10 *кв. см* $\times$ 10 = 100 *кв. см*, а под кв. сантиметром они пишут: 10 *кв. мм* $\times$ 10 = 100 *кв. мм*.

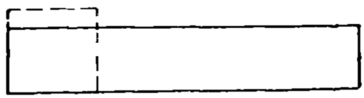
Таблицу кв. мер, включая кв. декаметр или ар и кв. гектометр или гектар, учащиеся повторяют дома по учебнику.

Покажем, как надо подвести учащихся к вычислению площади прямоугольника и квадрата в том случае, когда размеры этих фигур выражены составными именованными числами.

Прежде всего надо научить детей раздроблять и превращать числа, выраженные в квадратных мерах. Удобства метрической системы распространяются полностью и на эти числа. Преобразования и действия над ними подчинены общим правилам, которые изложены в предыдущей главе.

Подготовительным этапом к решению указанной выше наиболее сложной задачи является вычисление площади прямоугольника в том случае, когда стороны его выражены простыми именованными числами разных наименований.

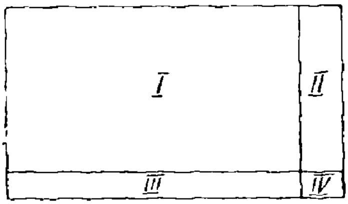
Пусть требуется найти площадь прямоугольника, длина которого 4 *дм*, а ширина — 8 *см*.



Попробуем измерить его кв. дециметром. По длине такой квадрат укладывается 4 раза, но по ширине он выходит за пределы данного прямоугольника. Значит, надо обратиться к более мелкой мере, т. е. к кв. сантиметру.

Узнаем, сколько кв. сантиметров можно уложить по длине прямоугольника. Раздробляем 4 *дм* в сантиметры: 4 *дм* = 40 *см*. Итак, в одном ряду уложится 40 *кв. см*, а всего таких рядов 8. Умножаем 40 *кв. см* на 8, получится 320 *кв. см* или, после превращения, 3 *кв. дм* 20 *кв. см*.

Теперь можно вычислить площадь прямоугольника, стороны которого выражены составными именованными числами.



Длина пр-ка — 5 *дм* 8 *см*.

Ширина пр-ка — 3 *дм* 5 *см*.

Выделим ту часть прямоугольника, которую можно измерить кв. дециметром.

Продолжим стороны нового прямоугольника до пересечения со сторонами заданного прямоугольника. Получилось четыре прямоугольника. Вычислим площадь каждого из них и полученные числа сложим:

I — 5 *кв. дм* × 3 =	15 *кв. дм*	
II — 30 *кв. см* × 8 =	—	240 *кв. см*
III — 50 *кв. см* × 5 =	—	250 *кв. см*
IV — 8 *кв. см* × 5 =	—	40 *кв. см*
	15 *кв. дм*	530 *кв. см*
	20 *кв. дм*	30 *кв. см*

Итак, площадь данного прямоугольника составляет 20 *кв. дм* 30 *кв. см*.

Надо показать учащимся этот длинный способ, чтобы предотвратить весьма распространенную ошибку, которая заключается в том, что дети просто умножают дециметры на дециметры, сантиметры на сантиметры и получают, вместо правильного ответа, 15 *кв. дм* 40 *кв. см*.

Чертеж помогает понять, что в число 15 *кв. дм* 40 *кв. см* вошла площадь не всех четырех прямоугольников, а только двух — первого и четвертого. Чтобы избежать ошибки и вместе с тем освободиться от громоздких вычислений, надо сразу раздробить оба данных числа в сантиметры:

5 *дм* 8 *см* = 58 *см*; 3 *дм* 5 *см* = 35 *см*

Итак, длина прямоугольника — 58 *см*; значит, по длине можно уложить 58 *кв. см*. Ширина прямоугольника — 35 *см*; значит таких рядов будет 35.

$$
\begin{array}{r}
\times\begin{array}{l}58 \text{ кв. см}\\35\end{array}\\
\hline
290\\
174\\
\hline
2030 \text{ кв. см} = 20 \text{ кв. дм } 30 \text{ кв. см}
\end{array}
$$

Умножаем 58 *кв. см* на 35.
Получаем 20 *кв. дм* 30 *кв. см*.

Умножая 58 *кв. см* на 35, мы произвели те же четыре действия, которые вошли в подробный способ: 8×5, 50×5, 8×30 (вместо 30×8) и 50×30 (т. е. 50 *кв. см* $\times$ 30 вместо 5 *кв. дм* $\times$ 3).

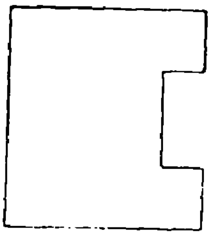
Если учащиеся разберутся в этом вопросе, они поймут, почему выгодно раздроблять составные именованные числа: операции остаются те же, но вычислительный процесс в целом упрощается.

Теперь можно сформулировать правило вычисления площади прямоугольника: чтобы вычислить площадь прямоугольника, надо измерить его длину и ширину одной и той же мерой и полученные числа перемножить. То же относится к площади квадрата.

Вводить краткую формулу „площадь прямоугольника равна произведению его основания на высоту" в начальной школе преждевременно.

Чтобы дети научились находить вполне самостоятельно площадь прямоугольника и квадрата, надо почаще предлагать им следующее упражнение. Имея наборы прямоугольников и квадратов всевозможных размеров, учитель раздает их учащимся. Каждый ученик должен произвести необходимые измерения, преобразовать надлежащим образом полученные числа и вычислить площадь данной фигуры.

Весной учащиеся производят съемку плана прямоугольного участка земли. При черчении они пользуются линейным масштабом из расчета 10 *м* в 1 *см* или 10 *м* в 1 *мм*, в зависимости от размеров участка. Особенно интересной является съемка плана сложной прямоугольной фигуры, когда длина одной из сторон равна сумме нескольких противолежащих сторон.



В этом случае необходимо особенно тщательно произвести измерения, чтобы иметь возможность приравнять длинную сторону к сумме соответствующих коротких сторон.

Наконец, весною учащиеся IV класса знакомятся с эккером, учатся строить при помощи эккера прямой угол, а затем наносят на местности квадраты и прямоугольники разных размеров. Среди этих фигур должно быть непременно несколько разных фигур, площадь которых равна 1 ару. Это могут быть: квадрат со стороною в 10 *м* и ряд прямоугольников (20×5, 25×4, 50×2).

Более подробное описание работ с эккером можно найти в методическом руководстве А. С. Пчелко.[1]

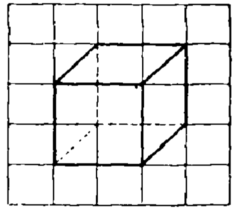
Куб и кубические меры

Форма куба знакома детям с I класса. Они считали „кубики", наряду с квадратиками и кружками. Поэтому, если рассмотрение плоских фигур мы начинаем с квадрата, то по тем же соображениям рассмотрение геометрических тел надо начать с куба.

Учитель показывает детям различные геометрические тела. Среди них должно быть два-три куба разной величины. Дети узнают куб среди других тел и заявляют об этом поднятием рук.

Выделив кубы, дети сравнивают их и находят те общие признаки, которые характеризуют все эти тела независимо от их размеров. Под руководством учителя дети рисуют куб. сантиметр у себя в тетрадях.

Под рисунком надо записать следующее: „У куба шесть граней; все грани — квадраты; все грани куба равны".



Следующий шаг в изучении куба — знакомство с его разверткой. Учитель показывает на доске, пользуясь моделью куба, как получить один за

[1] А. С. Пчелко. Методика преподавания арифметики в начальной школе. Стр. 389—390.

другим отпечатки его граней. Важно подчеркнуть, что эти отпечатки могут быть расположены по-разному. Однако при этом две грани должны непременно лежать по разные стороны от остальных четырех.

Необходимо далее установить названия граней: нижняя и верхняя, передняя и задняя, правая и левая. Нижнюю грань называют также основанием куба. Любая грань куба может быть его основанием.

Прямая линия, по которой пересекаются две грани куба, называется его **ребром**. У куба 12 ребер.

Точка, в которой сходятся три грани куба, называется его **вершиной**. У куба 8 вершин.

Учащиеся должны уметь показать грани, ребра и вершины куба и знать их число.

Все тела занимают в пространстве некоторую его часть. Величина этой части называется объемом данного тела.

Наполним водой стакан и графин. Сравним объем воды в стакане и в графине. Для этого опорожним графин и перельем в пустой графин всю воду из стакана: она займет только часть графина. Таким образом, устанавливаем, что объем воды в графине больше объема воды в стакане и, наоборот, объем воды в стакане меньше объема воды в графине.

Нальем в бутылку три стакана воды. Перельем эту воду в банку. Объем воды в банке равен объему воды в бутылке, хотя банка и бутылка имеют разную форму. С другой стороны, тела, имеющие одинаковую форму, например, форму куба, могут занимать больше или меньше места в пространстве, т. е. иметь разный объем. Учащимся можно пояснить это на полых кубах разных размеров: вставляя один куб в другой, мы демонстрируем неравенство их объемов.

Чтобы подвести учащихся к измерению объема тел, имеющих прямоугольную форму, необходимо иметь на каждую парту примерно по 80 штук деревянных кубических сантиметров. В крайнем случае их можно заменить куб. сантиметрами, вырезанными из сырого картофеля. Это могут сделать сами учащиеся незадолго до урока, так как иначе картофель усохнет.

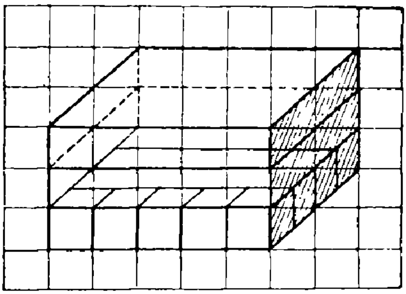
Учитель предлагает детям составить брусок из 5 *куб. см.* Три таких бруска составляют слой. На этот первый слой учащиеся кладут второй такой же слой и устанавливают, что длина полученного тела прямоугольной формы — 5 *см*, ширина 3 *см*, а высота 2 *см*.

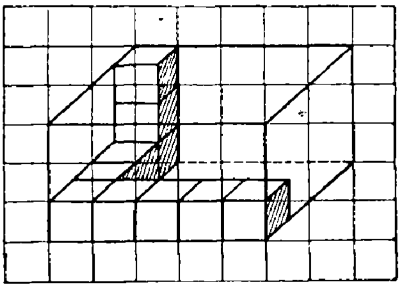
Теперь можно вычислить его объем. Сначала узнаем объем нижнего слоя: 5 *куб. см* $\times$ 3 = 15 *куб. см*. После этого вычислим объем всего тела:

$$15 \textit{ куб. см} \times 2 = 30 \textit{ куб. см}.$$

Пользуясь своим набором, дети строят из куб. сантиметров геометрические тела разных размеров. При этом они должны усвоить следующие весьма важные зависимости: если длина данного тела, например, коробки — 5 *см*, это значит, что в одном бруске будет 5 *куб. см*, если ширина — 4 *см*, это значит, что в одном слое будет 4 таких бруска; если высота — 3 *см*, это значит, что таких слоев будет 3.

Рассматривая чертеж, который может быть сделан на доске по прилагаемому образцу (см. рисунок, расположенный слева), учащийся видит, что и в самом деле в одном бруске 5 *куб. см*, в одном слое —4 таких бруска, а в целой коробке — 3 слоя.





Для сопоставления с правильным чертежом воспроизводим **неправильный**, который можно встретить в нашей методической литературе, но который приносит не пользу, а вред. Руководствуясь таким чертежом, учащиеся умножают куб. сантиметры на кубические сантиметры.

Усвоив зависимость между длиною тела прямоугольной формы и числом куб. единиц в одном бруске, между шириною и числом брусков, между высотою и числом слоев, учащиеся переходят к решению задач на вычисление объема без наглядных пособий. На первых порах они ставят при этом два отдельных вопроса. В дальнейшем оба действия могут быть подчинены одному вопросу: чему равен объем данного тела? При небольших числах решение этого вопроса записывают в виде сложного примера: 5 *куб. см* $\times 4 \times 3 = 60$ *куб. см*.

Из наглядных пособий при изучении кубических мер необходимо иметь, кроме куб. сантиметров, разборный остов кубического метра и кубический дециметр. На этих пособиях учитель поясняет единичные отношения кубических мер. Таблицу кубических мер дети затем повторяют по задачнику, после чего они решают примеры на раздробление и превращение, а также на все действия с составными именованными числами, выраженными в кубических мерах.

Правило вычисления объема формулируется в тех же выражениях, что и правило вычисления площади: чтобы вычислить объем тела прямоугольной формы, надо измерить его длину, ширину и высоту одной и той же мерой и полученные числа перемножить.

Чтобы вычислить объем куба, надо выразить его ребро простым именованным числом.

Учителя V класса предъявляют иногда учителям начальной школы необоснованные требования ввести в IV классе при вычислении площади и объема ту форму записи, которая применяется в средней школе. Они считают, что ученик IV класса должен писать: $6\ м \times 4\ м = 24$ *кв. м* или же $6\ м \times 4\ м \times 3\ м = 72$ *куб м*.

Заметим прежде всего, что такая запись недопустима с математической точки зрения. Правильная запись: $6\ м \times 4\ м = 24\ м^2$ и $6\ м \times 4\ м \times 3\ м = 72\ м^3$. Но с показателем степени учащиеся начальной школы еще не знакомы. Уже по этой одной причине нельзя вводить подобные записи в IV классе.

Вообще по отношению к упомянутым записям следует различать **три ступени**.

Первая ступень соответствует образному мышлению учащихся IV класса и тому пониманию умножения, которое доступно их возрасту. Образное мышление предполагает теснейшую связь между словом, устным и письменным, с одной стороны, и полной предметной наглядностью, с другой стороны. Но предметная наглядность, применяемая в IV классе, приводит именно к той форме записи, которую мы рекомендуем. Что же касается умножения, то дети понимают его как повторение одного из данных чисел слагаемым **столько раз**, сколько единиц в другом числе. Если множитель — именованное число, никак нельзя связать с умножением этот его простейший смысл. Итак, в IV классе надо сохранить такую форму записи: 6 *кв. м* $\times$ 4 = = 24 *кв. м* и 6 *куб. м* $\times 4 \times 3 = 72$ *куб. м*.

Учащиеся V класса могут пользоваться промежуточной формой записи. На этой **второй ступени** можно производить и записывать вычисления в отвлеченных числах. Вот образцы записей, отвечающих уровню развития пятиклассников:

1 *кв. м* $\times 6 \times 4 = 24$ *кв. м*

Или короче: $6 \times 4 = 24$ *(кв. м)*

1 *куб. м* $\times 6 \times 4 \times 3 = 72$ *куб. м*

Или короче: $6 \times 4 \times 3 = 72$ *(куб. м)*

Только на **третьей ступени** можно ввести общепринятую форму записи: 6 *м*·4 *м* = 24 *м*^{2}; 6 *м*·4 *м*·3 *м* = 72 *м*^{3} или же 24 *м*^{2}·3 *м* = 72 *м*^{3}. Чтобы сознательно пользоваться такими записями, учащиеся должны иметь представление о действиях над единицами размерности. Этот этап работы лежит за пределами V класса и, разумеется, за пределами начальной школы.

Работа над геометрическим материалом в начальной школе как одно из условий политехнической подготовки учащихся

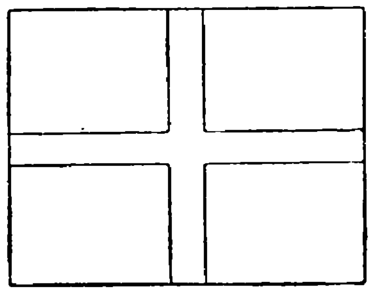
Уже отмечалось, что работа над геометрическим материалом является в **целом** своего рода подготовкой к политехническому обучению в средней школе. Отличное знание метрических мер, уменье пользоваться ими при измерении и черчении, отчетливые представления, связанные с простейшими плоскими фигурами и телами, квадратными и кубическими мерами — все это служит необходимой предпосылкой к овладению в дальнейшем политехническими знаниями и навыками. Учащиеся начальной школы должны ясно представлять себе протяженность линейных, квадратных и кубических мер, свободно пользоваться линейным масштабом при черчении отрезков и фигур, при чтении простейших чертежей, при вычислении действительной площади данной фигуры по ее площади на чертеже, при составлении диаграмм и т. д.

Чтобы достигнуть таких результатов, необходимо придать работе учащихся над геометрическим материалом жизненно практический характер, связать ее с трудом в саду, на огороде, в сельском хозяйстве, в строительном деле и т. п.

Начнем с пришкольного участка. Приведем образцы работ, которые рассчитаны, главным образом, на учащихся IV класса, но в некоторой своей части доступны и третьеклассникам.

1) Положим, требуется посыпать песком дорожки цветника, имеющего форму прямоугольника, длина которого 40 *м*, а ширина — 30 *м*. Одна дорожка идет посередине вдоль всего цветника, а другая — поперек. Сколько потребуется тачек песку, если на каждые 5 *кв. м* дорожки надо иметь 2 тачки?

Первый способ решения. Учащиеся измеряют длину и ширину всего цветника и вычисляют его площадь: 40 *кв. м* $\times$ 30 = 1200 *кв. м*.



Газон и клумбы с цветами занимают 4 одинаковых прямоугольника. Учащиеся измеряют длину и ширину одного из них и по этим данным находят площадь всех четырех прямоугольников.

Если длина каждого прямоугольника 19 *м* 6 *дм*, а ширина—14 *м* 6 *дм*, то площадь одного = 196 *кв. дм* $\times$ 146 = = 28 616 *кв. дм*, а всех четырех = 114 464 *кв. дм*.

Площадь дорожек можно теперь найти посредством вычитания:

1200 *кв. м* — 114 464 *кв. дм* = 55 *кв. м* 36 *кв. дм*

Можно считать, что дорожки занимают приблизительно 55 *кв. м*, а песку поэтому потребуется 22 тачки, так как 55 *кв. м* : 5 *кв. м* = 11, а 2 тачки $\times$ 11 = 22 тачки.

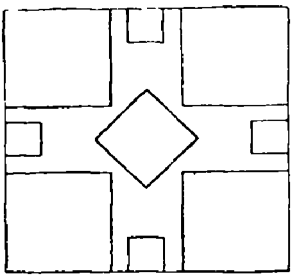
Второй способ. Учащиеся измеряют длину и ширину дорожек. Длина одной из них — 40 *м*, длина другой — 30 *м*, а ширина одна и та же — 8 *дм*.

Площадь первой дорожки: 400 *кв. дм* $\times$ 8 = = 3200 *кв. дм*.

Площадь второй дорожки: 300 *кв. дм* $\times$ 8 = = 2400 *кв. дм*.

Если сложить полученные числа, окажется, что мы удвоили квадрат, лежащий на пересечении дорожек. Поэтому от суммы 5600 *кв. дм* надо отнять 8 *кв. дм* $\times$ 8 = = 64 *кв. дм*. Найдем тот же ответ, который был получен первым способом: 55 *кв. м* 36 *кв. дм*.

2) Учащиеся под руководством учителя составляют проект небольшого цветника в форме квадрата, сторона которого 8 *м*. На прилагаемом чертеже представлен один из возможных вариантов: все клумбы этого квадратного цветника также имеют форму квадрата.



По углам расположены клумбы, сторона которых 3 *м*; между ними клумбы со сторонами в 1 *м*; в центре — квадратная клумба, сторона которой 2 *м*.

Чтобы вычислить площадь всех дорожек, придется в этом случае воспользоваться первым из двух указанных способов.

Площадь всего цветника: 8 *кв. м* $\times$ 8 = 64 *кв. м*.

Площадь четырех больших клумб: 3 *кв. м* $\times$ 3 $\times$ 4 = = 36 *кв. м*.

Площадь четырех маленьких клумб: 1 *кв. м* $\times$ 4 = = 4 *кв. м*.

Площадь средней клумбы: 2 *кв. м* $\times$ 2 = 4 *кв. м*.

Площадь всех клумб: 36 *кв. м* + 4 *кв. м* + 4 *кв. м* = = 44 *кв. м*, а площадь дорожек: 64 *кв. м* — 44 *кв. м* = = 20 *кв. м*.

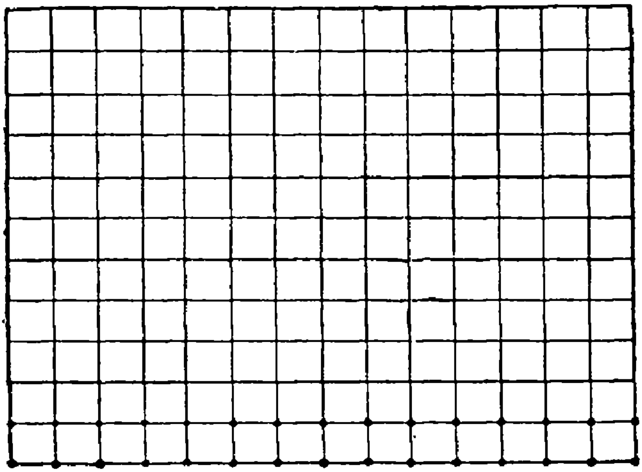
Чтобы посыпать песком все промежутки между клумбами, потребуется 8 тачек песку, так как 20 *кв. м*:5 *кв. м* = 4, а 2 тачки $\times$ 4 = 8 тачек.

3) Участок земли прямоугольной формы отведен под черную смородину. Требуется начертить план этого

участка, обозначить на плане место каждого куста и вычислить, пользуясь чертежом, сколько кустов растет на этом участке.

Длина участка — 28 *м*, ширина — 22 *м*. Расстояние между кустами 2 *м*.

Учащиеся чертят план участка по масштабу 4 *м* в 1 *см* и обозначают точками место каждого куста.



Длина участка на чертеже — 7 *см*, а ширина — $5\frac{1}{2}$ *см*.

Так как кусты растут на расстоянии в 2 *м* один от другого, то по длине в одном ряду, считая обе крайние точки, помещается 15 кустов.

Между рядами в действительности тоже 2 *м*. На чертеже это расстояние составляет $\frac{1}{2}$ *см*. Считая оба крайние ряда, всего на участке и на чертеже 12 таких рядов.

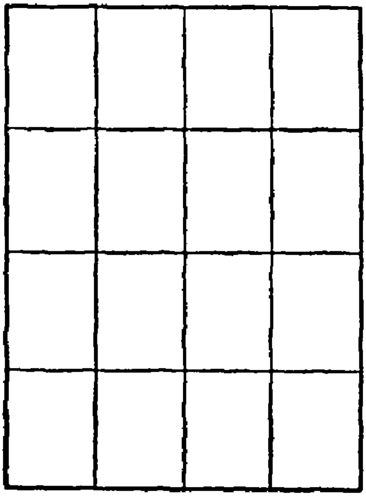
Итак, на участке растет 180 кустов черной смородины, так как 15 кустов $\times$ 12 = 180 кустов.

4) Длина парника — 15 *м*, ширина — 1 *м* 5 *дм*. Требуется начертить план этого парника по масштабу 15 *дм* в 1 *см*, а затем вычислить занимаемую им площадь.

Длина парника на чертеже — 10 *см*, так как 150 *дм* : 15 *дм* = 10; ширина на чертеже — 1 *см*.

Площадь, занимаемая парником, равняется 150 *кв. дм* $\times$ $\times$ 15 = 2250 *кв. дм* = 22 *кв. м* 50 *кв. дм*.

5) Длина парниковой рамы — 1 *м* 5 *дм*, ширина — 1 *м*. В раму вставлены 4 ряда стекол, по 4 стекла в каждом ряду. Начертить парниковую раму по масштабу 5 *дм* в 2 *см*.



Длина рамы на чертеже 6 *см*, так как 15 *дм* : 5 *дм* = 3, а 2 *см* $\times$ 3 = 6 *см*

Ширина рамы на чертеже 4 *см*, так как 10 *дм* : 5 *дм* = 2, а 2 *см* $\times$ 2 = 4 *см*.

6) Длина парника — 15 *м*, ширина — 15 *дм*. Какую площадь занимают 8 таких парников вместе с дорожками, если ширина дорожек между парниками равняется 4 *дм*?

Эту задачу можно решить двумя способами.

Первый способ. Площадь, занимаемая каждым парником: 150 *кв. дм* $\times$ 15 = 2250 *кв. дм*.

Площадь дорожки: 150 *кв. дм* $\times$ 4 = 600 *кв. дм*.

Площадь всех парников: 2250 *кв. дм* $\times$ 8 = 18 000 *кв. дм* = 180 *кв. м*.

Площадь всех дорожек: 600 *кв. дм* $\times$ 7 = 4200 *кв. дм* = 42 *кв. м*.

Площадь, которую занимают все парники вместе с дорожками, равняется 222 *кв. м* = 2 *а* 22 *кв. м*.

Второй способ. Длина парника есть вместе с тем длина всего участка: 15 *м* = 150 *дм*.

Ширина всего участка складывается из ширины парника, взятой 8 раз (по числу парников) и из ширины дорожки, взятой 7 раз (по числу дорожек): 15 *дм* $\times$ 8 + 4 *дм* $\times$ 7 = 148 *дм*.

Площадь всего участка: 150 *кв. дм* $\times$ 148 = 22 200 *кв. дм* = 222 *кв. м* = 2 *а* 22 *кв. м*.

Ягодник и парники, о которых здесь говорилось, не выдуманы, они существуют в действительности. Аналогичные объекты могут оказаться в поле зрения учащихся многих школ, и их умелое использование принесет больше пользы, чем работа только по задачнику.

От выращивания овощей на пришкольном участке можно перейти к выращиванию в поле пропашных культур. При этом следует познакомить учащихся с применением торфо-перегнойных горшочков и с квадратно-гнездовым способом посева. Учащиеся сельской школы могут видеть то и другое в натуре, учащиеся городских школ — хотя бы на плакате.

Вот образцы вопросов, решение которых доступно учащимся IV класса.

1) При выращивании в парниках капустной рассады на каждый кустик требуется 36 *кв. см* площади. Сколько надо иметь парников длиною в 15 *м* и шириною в 15 *дм*, чтобы вырастить рассаду на 1 *га*, если на 1 *га* высаживают в торфо-перегнойных горшочках 50 000 кустиков рассады? (См. рисунок.)

Примечание. При наличии соответствующих объектов учащиеся производят сами необходимые измерения парника и площади, занимаемой одним растением.

Решение. Площадь парника: 150 *кв. дм* $\times$ 15 = 2250 *кв. дм*. В одном парнике — 6250 кустиков рассады, так как 225 000 *кв. см* : 36 *кв. см* = 6250. Чтобы рассады хватило на 1 *га*, надо иметь 8 парников, так как 50 000 кустиков : 6250 кустиков = 8.

2) При посадке капусты в торфо-перегнойных горшочках получили по 432 *ц* с гектара, причем вес кочана колебался от 860 *г* до 940 *г*. При посадке обычным способом получили по 329 *ц* с гектара, причем вес кочана колебался от 640 *г* до 760 *г*. Сколько кочанов среднего веса можно собрать с 1 *га* в том и в другом случае? На сколько увеличивается средний вес кочана благодаря торфо-перегнойному горшочку?

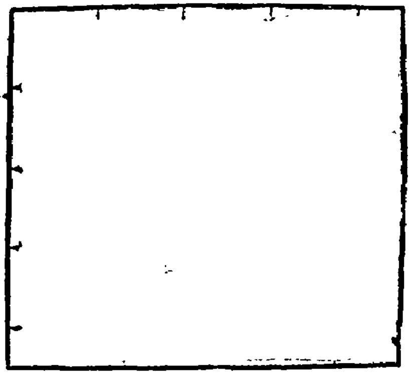
Решение. Средний вес кочана в первом случае 900 *г*, так как $\frac{860+940}{2}=900$, а во втором случае — 700 *г*, так как $\frac{640+760}{2}=700$. В первом случае с 1 *га* получили 48 000 кочанов, так как 43 200 000 *г* : 900 *г* = 48 000, а во втором случае 47 000 кочанов, так как 32 900 000 *г* : 700 *г* =

$= 47\,000$, причем каждый кочан был в среднем на 200 *г* легче, чем кочан из торфо-перегнойного горшочка.

Интересно собрать аналогичные данные на местах и сопоставить их с числовыми данными из этой задачи.

Интересно также узнать, какую площадь занимает в поле один кочан, если на 1 *га* растет 50 000 кочанов. Чтобы решить этот вопрос, надо раздробить 1 *га* в *кв. дм.* Оказывается, что под каждый кочан требуется 20 *кв. дм* площади.

3) Сажать капусту лучше всего квадратно-гнездовым способом. В этом случае под каждый кочан отводится квадрат, сторона которого — 4 *дм* 5 *см.* Учащиеся вычисляют площадь этого квадрата и чертят его по масштабу 1 *см* в 1 *мм.*



Площадь квадрата в действительности равняется 20 *кв. дм* 25 *кв. см*, так как 45 *кв. см* $\times$ 45 $=$ 2025 *кв. см* $=$ $=$ 20 *кв. дм* 25 *кв. см.*

Тот же вопрос можно решить другим способом, исходя из чертежа. Если 1 *мм* на чертеже соответствует одному сантиметру в действительности, то 1 *кв. мм* соответствует 1 *кв. см* в действительности. На чертеже площадь квадрата равняется 2025 *кв. мм*; значит, в действительности она равна 2025 *кв. см* $=$ 20 *кв. дм* 25 *кв. см.*

Квадратно-гнездовой способ посадки применяется в ряде других случаев. Этим способом, например, сажают арбузы, причем в каждом гнезде оставляют 2—3 лучших растения. Такое гнездо представляет собою квадрат, сторона которого 1 *м* 4 *дм.* Учащиеся могут вычислить площадь питания, которая приходится на каждое растение. Площадь всего гнезда составит 196 *кв. дм*, так как 14 *кв. дм* $\times$ 14 $=$ 196 *кв. дм.* При двух растениях площадь питания каждого из них 98 *кв. дм*, а при трех — приблизительно 65 *кв. дм.*

4) При посеве квадратно-гнездовым способом производится предпосевная маркеровка поля. Сначала делают контрольную борозду вдоль всего поля.

Затем при помощи эккера и вех намечают через каждые 36 *м* (если ширина между сошниками маркера 3 *м* 6 *дм*) поперечные контрольные борозды. После этого посредством маркера проводятся все продольные и поперечные борозды. Когда поле таким образом подготовлено, специальными сеялками производится посев той или иной пропашной культуры — картофеля, кукурузы, подсолнечника.

Квадратно-гнездовой способ сокращает затрату труда на прополку и прореживание, так как он дает возможность производить и эти работы при помощи машин.

При обычном способе на прополку и прореживание 1 *га* посева затрачивают около 5 человекодней, а при квадратно-гнездовом способе в 5 раз меньше. Два колхоза сэкономили таким образом 3540 человекодней. Какую площадь обработал каждый из них, если площадь одного в 2 раза меньше, чем площадь другого?

Решение. На каждом гектаре колхозники сэкономили 4 человекодня, так как $5:5=1$ и $5-1=4$. Всего они обработали 885 *га*, так как 4 в числе 3540 содержится 885 раз. Если принять площадь первого колхоза за 1 часть, площадь второго составит 2 такие же части; всего будем иметь 3 равные части. Отсюда, площадь первого колхоза = 885 *га* : 3 = 295 *га*, а второго 885 *га* — 295 *га* = 590 *га*.

Дополнительный вопрос: каков периметр первого участка, если он имеет форму прямоугольника, ширина которого 1 *км*?

Решение. Площадь участка — 295 *га* = 2 950 000 *кв. м*. При ширине в 1000 *м* его длина должна составить 2950 *м*, а периметр — (2950 *м* + 1000 *м*) × 2 = 7900 *м* = 7 *км* 900 *м*.

5) Посев, произведенный квадратно-гнездовым способом, можно обрабатывать культиватором вдоль и поперек поля. Это повышает урожайность кукурузы в среднем на 8 *ц* 30 *кг* с гектара, а урожайность подсолнечника — на 2 *ц*.

Участок земли под кукурузой давал раньше 1108 *ц*, а участок земли, засеянный подсолнечником, — 1200 *ц*. Благодаря перекрестной культивации с первого участка получили 1440 *ц* кукурузы, а со второго участка — 1350 *ц* подсолнечника. По этим данным дети находят площадь каждого участка.

Решение. Весь урожай кукурузы увеличился на 332 *ц*, урожай с 1 *га* — на 8 *ц* 30 *кг*. Отсюда, площадь участка под кукурузой = 40 *га*, так как 33 200 *кг* : : 830 *кг* = 40.

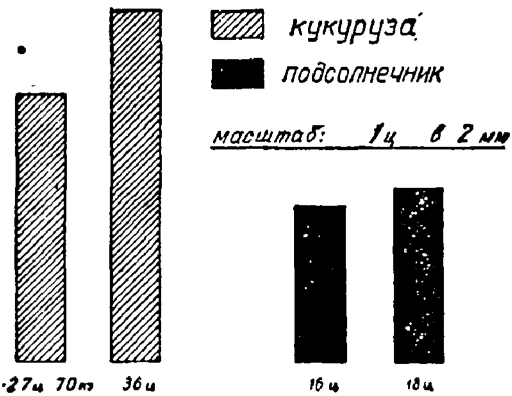
Урожай подсолнечника увеличился в целом на 150 *ц*, а с каждого гектара — на 2 *ц*. Отсюда, площадь участка, засеянного подсолнечником, равняется 75 *га*, так как 150 *ц* : 2 *ц* = 75.

Дополнительное задание: вычислить урожай с 1 *га* кукурузы и подсолнечника до применения квадратно-гнездового способа посева и после применения этого способа; начертить диаграмму повышения урожайности этих культур.

Решение. Раньше с 1 *га* получали кукурузы 1108 *ц* : 40 = 27 *ц* 70 *кг*, а подсолнечника 1200 *ц* : 75 = 16 *ц*. Теперь урожай кукурузы с 1 *га* составляет 27 *ц* 70 *кг* + + 8 *ц* 30 *кг* = 36 *ц*, а подсолнечника 16 *ц* + 2 *ц* = 18 *ц*.

Высота первого столбика диаграммы при масштабе 1 *ц* в 2 *мм* будет приблизительно 55 *мм*, высота остальных столбиков — 72 *мм*, 32 *мм* и 36 *мм*. (На прилагаемом чертеже высота столбиков меньше действительной.)

Повышение урожайности кукурузы и подсолнечника при квадратно-гнездовом способе посева



Зеленая масса кукурузы и подсолнечника, зеленая рожь, картофельная ботва, наряду с клевером, люцерной и другими травами, используются как корм для скота. В частности, из этих сельскохозяйственных культур заготовляют так называемый силос, которым кормят скот в зимнее время и который по своим питательным качествам приближается к летним кормам.

Предложим учащимся IV класса несколько вопросов, относящихся к выращиванию упомянутых культур и к заготовке силоса.

1) Каждое хорошо развившееся гнездо кукурузы дает до 5 *кг* силоса. Какую площадь следует засеять кукурузой, чтобы обеспечить силосом 100 коров, если на каждую корову надо заложить 6 *т* силоса и если каждое гнездо кукурузы представляет собою квадрат, сторона которого 9 *дм*?

Решение. На 100 коров надо запасти 6 *т* $\times$ 100 = = 600 *т* = 600 000 *кг* силоса. Площадь каждого гнезда = = 9 *кв. дм* $\times$ 9 = 81 *кв. дм*. Всего надо иметь 120 000 гнезд, так как 600 000 *кг*:5 *кг* = 120 000. Площадь, занимаемая этими гнездами, составит 81 *кв. дм* $\times$ 120 000 = = 9 720 000 *кв. дм* = 9 *га* 72 *а*.

2) В колхозах Белоруссии в 1954 г. осушено 6500 *га* заболоченных земель. Сколько тонн сена можно будет получить с этой площади, если четвертая часть ее будет засеяна клевером, а остальная площадь — тимофеевкой и если клевера соберут по 35 *ц* 20 *кг*, а тимофеевки по 32 *ц* 40 *кг* с 1 *га*?

Решение. 1) 6500 *га*:4 = 1625 *га*; 2) 6500 *га* — — 1625 *га* = 4875 *га*; 3) 3520 *кг* $\times$ 1625 = 5 720 000 *кг* = = 5720 *т*; 4) 3240 *кг* $\times$ 4875 = 15 795 000 *кг* = 15 795 *т*; 5) 15 795 *т* + 5720 *т* = 21 515 *т*.

Дополнительный вопрос: сколько коров можно будет прокормить этим сеном в течение стойлового периода, если для каждой коровы требуется на это время 25 *ц* сена? Ответ: 8606 коров.

3) Для приготовления силоса пользуются силосными башнями или траншеями. Траншею можно построить в более короткий срок и с меньшей затратой средств, чем башню — в этом состоит преимущество траншеи по сравнению с силосной башней.

Опытный тракторист вырыл бульдозером в течение одного сезона 15 траншей длиною каждая в 25 *м*, шириною в 2 *м* 4 *дм* и глубиною в 3 *м*. Сколько часов затратил он на эту работу, если 100 *куб. м* можно вырыть бульдозером за 5 часов?

Решение. Размеры траншеи в дециметрах составляют 250 *дм*, 24 *дм* и 30 *дм*. Объем земли, вырытой из одной траншеи, равняется 250 *куб. дм* $\times$ 24 $\times$ 30 = = 180 000 *куб. дм* = 180 *куб. м*. Всего вырыто 180 *куб. м* $\times$ $\times$ 15 = 2700 *куб. м* земли. В этом числе 100 *куб. м* содержится 27 раз. Отсюда вся работа была выполнена в 5 ч. $\times$ 27 = 135 часов.

4) Сколько коров можно обеспечить силосом из траншеи, длина которой 18 *м*, ширина 4 *м* и глубина 2 *м* 5 *дм*, если на каждую корову требуется в среднем 54 *ц* силоса и если в результате утрамбовки вес 1 *куб. м* силоса составляет 7 *ц* 20 *кг*?

Решение. Вместимость траншеи 180 *куб. дм* $\times$ $\times$ 40 $\times$ 25 = 180 000 *куб. дм* = 180 *куб. м*. Вес силоса в этой траншее составляет 720 *кг* $\times$ 180 = 129 600 *кг* = = 1296 *ц*. Но 1296 *ц* : 54 *ц* = 24. Значит, силоса хватит на 24 коровы.

5) Наряду с силосом, колхозы заготовляют так называемую сенную муку — наиболее дешевый корм для свиней и птицы.

Для сенной муки употребляют молодой клевер и люцерну, убранные до цветения. Хранят этот корм в прессованном виде в закрытом, сухом и темном помещении.

Сколько тонн сенной муки помещается в сарае, длина которого 10 *м*, ширина 6 *м* и высота 3 *м* 5 *дм*, если 1 *куб. м* такой муки весит 2 *ц*?

Решение. Вместимость сарая 100 *куб. дм* $\times$ 60 $\times$ $\times$ 35 = 210 000 *куб. дм* = 210 *куб. м*. Вес сенной муки в этом сарае составляет 2 *ц* $\times$ 210 = 420 *ц*.

Дополнительный вопрос: На откорм одной свиньи в течение шести месяцев требуется примерно 350 *кг* сенной муки. Сколько свиней можно поставить на откорм, имея 420 *ц* сенной муки?

Решение. 420 *ц* = 42 000 *кг*; 42 000 *кг* : 350 *кг* = 120. Ответ: 120 свиней.

Остановимся в заключение на некоторых вопросах, относящихся к выращиванию и уборке зерновых культур.

В настоящее время особого внимания заслуживает опыт освоения целинных и залежных земель.

1) По плану одна из передовых бригад в Алтайском

крае[1] должна была засеять на целинных и залежных землях 870 *га* яровых. Первые 5 дней засевали по 180 *га*, а в остальные 7 дней — по 200 *га* в день. На сколько был перевыполнен план?

Решение. 1) 180 $га \times 5 = 900$ *га*; 2) 200 $га \times 7 = 1400$ *га*; 3) 900 $га + 1400$ $га = 2300$ *га*; 4) 2300 $га - 870$ $га = 1430$ *га*.

Такую задачу учащиеся могли бы составить сами по прилагаемой газетной вырезке. Вообще в тех случаях, когда нехватает жизненного материала в задачнике и нет возможности получить его в ближайшем колхозе или совхозе, следует обращаться к газетам и журналам. Собирая и обрабатывая газетные выдержки, учащиеся расширяют свой кругозор, получают возможность проявить собственную инициативу в работе по арифметике и геометрии.

> По плану бригада т. Пятницы должна была засеять на целинных и залежных землях 870 гектаров яровых, а засеяла 1400 гектаров. Всего за 12 рабочих дней она засеяла 2300 гектаров зерновых.

Дополнительное задание: начертить план участка в 180 *га* и в 200 *га* по масштабу 200 *м* в 1 *см*, если каждый участок имеет форму прямоугольника, ширина которого 1 *км*.

Решение. Площадь первого участка — 180 *га* = 1 800 000 *кв. м*, ширина 1 *км* = 1000 *м*. Весь участок можно разделить мысленно на 1000 рядов. В каждом ряду при ширине в 1 *м* поместится 1800 *кв. м*; значит длина ряда, а вместе с тем и всего участка составит 1800 *м*.

Ширина прямоугольника на чертеже будет 5 *см*, так как 1000 *м* : 200 *м* = 5, а длина — 9 *см*, так как 1800 *м* : 200 *м* = 9.

Тем же способом устанавливаем, что на чертеже длина второго прямоугольника составит 10 *см* при ширине в 5 *см*.

Дополнительный вопрос: во сколько раз

[1] Бригадир тракторной бригады и комбайнер Герой Социалистического Труда тов. Пятница. „Правда", 11 июля 1954 г.

площадь участка в 200 *га* на чертеже меньше, чем в действительности?

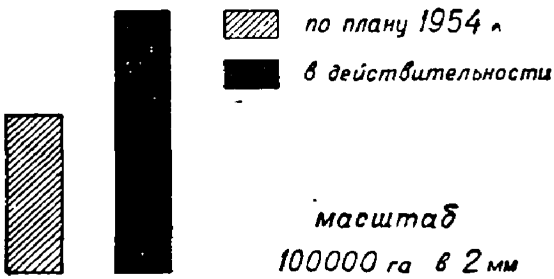
Решение. Площадь участка в действительности — 200 *га* = 20 000 000 000 *кв. см*, а на чертеже — 50 *кв. см*. Итак, на чертеже площадь участка меньше действительной в 400 000 000 раз.

2) Весной 1954 года на целинных и залежных землях РСФСР посеяно 2 700 000 *га* зерновых культур вместо 1 600 000 *га*, предусмотренных государственным планом.[1]

Начертить диаграмму перевыполнения плана по зерновым культурам на целинных и залежных землях по масштабу 100 000 *га* в 2 *мм*.

Решение. Высота столбика, изображающего плановое задание, составит 32 *мм*, так как 1 600 000 *га*:100 000 *га* = 16, а 2 *мм* × 16 = 32 *мм*. Высота столбика, изображающего освоенную площадь, составит 54 *мм*, так как 2 700 000 *га*:100 000 *га* = 27, а 2 *мм* × 27 = 54 *мм*. (На прилагаемом чертеже высота столбиков меньше действительной.)

Перевыполнение плана по зерновым культурам на целинных и залежных землях



3) Урожайность пшеницы на целинных землях достигает 38 *ц* с гектара, а проса — 25 *ц*, тогда как средняя урожайность пшеницы на старопахотных землях составляет 20 *ц*, а проса — 17 *ц* 50 *кг*.

Сколько получено дополнительно вагонов зерна, если

---

[1] Об итогах выполнения Государственного плана развития народного хозяйства РСФСР на 1954 год за первое полугодие. „Правда", 30 июля 1954 г.

пшеницей было засеяно 500 *га* целины, а просом — 800 *га* и если вагон вмещает 20 *т* зерна?

Решение. С 1 *га* получили дополнительно 38 *ц* — 20 *ц* = 18 *ц* пшеницы и 2500 *кг* — 1750 *кг* = 750 *кг* проса. Пшеницы со всей площади собрали дополнительно 18 *ц* $\times$ 500 = 9000 *ц* = 900 *т*, т. е. 45 вагонов, так как 900 *т*:20 *т* = 45. Проса собрали со всей площади дополнительно 30 вагонов, так как 750 *кг* $\times$ 800 = 600 000 *кг* = 600 *т*, а 600 *т*:20 *т* = 30. Итак, оба участка целинных земель дали дополнительно 45 в. + 30 в. = 75 вагонов зерна.

4) На юге один из крупнейших зерносовхозов обязался в 1954 г. убрать за 15 рабочих дней 25 500 *га* колосовых. Работает 85 сложных комбайнов (комбайновых агрегатов). Каждый комбайн оборудован электрическим светом для ночной работы. Сколько гектаров в сутки должен убрать каждый комбайн?[1]

Решение. 1) 25 500 *га*:15 = 1700 *га*; 2) 1700 *га*:85 = 20 *га*.

Дополнительный вопрос: какую длину и ширину может иметь прямоугольный участок земли, если его площадь равна 20 *га*?

Решение. Участок земли, площадь которого 1 *га*, может иметь любую форму, в частности, форму квадрата, сторона которого 100 *м*. Длина полосы, составленной из пяти таких квадратов, равняется 100 *м* $\times$ 5 = 500 *м*. Прямоугольник, площадь которого 20 *га*, содержит четыре полосы длиною в 500 *м* и шириною в 100 *м*; по ширине участка они займут 100 *м* $\times$ 4 = 400 *м*. Ответ: длина прямоугольника, площадь которого 20 *га*, составляет 500 *м*, ширина — 400 *м*.

Если расположить квадраты по-другому, можно получить прямоугольник, длина которого 1000 *м*, а ширина 200 *м* или же длина 10 000 *м*, а ширина 100 *м*.

Можно рассуждать иначе: 20 *га* = 200 000 *кв. м*. Чтобы установить размеры прямоугольника, имеющего такую площадь, достаточно подобрать два числа, произведение которых = 200 000. Такими числами могут быть 500 и 400, 1000 и 200, 800 и 250, 625 и 320 и т. д.

---

[1] Всесоюзное соревнование комбайнеров. „Ленинградская правда", 10 июля 1954 г. Числовые данные незначительно изменены ради округления результата.

На целинных землях новоселы строят жилые дома. На стены дома для одной семьи требуется 65 000 штук кирпича.

Можно предложить учащимся измерить в целых сантиметрах длину, ширину и толщину кирпича и вычислить его вес, зная, что 100 *куб. см* кирпича весят около 180 *г*.

Положим, что при измерении получены следующие данные: длина кирпича 25 *см*, ширина 14 *см* и толщина 6 *см*. Тогда объем кирпича составит 25 *куб. см* $\times$ 14 $\times$ $\times$ 6 = 2100 *куб. см*. Но 2100 *куб. см* : 100 *куб. см* = 21; отсюда вес кирпича равняется 180 *г* $\times$ 21 = 3780 *г*, т. е. около 4 *кг*.

Дополнительный вопрос: сколько потребуется вагонов, чтобы доставить на целинные земли кирпич для домов на 20 семей, если грузоподъемность вагона 50 *т*?

Решение: 1) 65 000 шт. $\times$ 20 = 1 300 000; 2) 4 *кг* $\times$ $\times$ 1 300 000 = 5 200 000 *кг* = 5200 *т*; 3) 5200 *т* : 50 *т* = 104. Ответ: 104 вагона.

Мы привели ряд вопросов, связанных с работами в саду, на огороде и в поле, решение которых доступно учащимся начальной школы. Попутно уточняются их геометрические представления, закрепляются сведения о метрических мерах, совершенствуются навыки раздробления и превращения этих мер, вырабатывается уменье решать прямые и обратные задачи на периметр, площадь и объем. Особенно полезно обращаться к таким упражнениям при повторении пройденного в конце четвертого года обучения. Связывая геометрический материал с вычислениями и с решением задач, среди которых, как мы видели, могут быть и некоторые варианты типовых, мы подводим итоги всей работы по арифметике и геометрии в начальной школе. Придавая этой повторительной работе жизненно практический характер, мы достигаем и другой, не менее важной цели: прививаем детям интерес к различным видам трудовой деятельности, стремление стать активными участниками этой деятельности.

СОДЕРЖАНИЕ

Наталия Сергеевна Попова

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Страница	Строка	Напечатано	Следует читать
226	1-я снизу	на стр. 225	на стр. 38
„	2-я снизу	на стр. 38	на стр. 225
240	1-я снизу	на стр. 226	на стр. 221

Н. С. Попова — Методика преподавания арифметики в начальной школе.

Наталия Сергеевна Попова

Методика преподавания арифметики в начальной школе

Пособие для учителей

★

Редактор *А. Г. Чахирев*
Техн. редактор *В. А. Макрушин*
Корректор *Р. К. Павгле*
Обложка художника *П. М. Тихонова*

Сдано в набор 25 июля 1955 г. Подписано к печати 3/XI 1955 г. 84 X 108¹/₃₂. Печ. л. 25,25 (20,7). Уч.-изд. л. 20,6. Тираж 50.000 экз. М-47159.

Ленинградское отделение Учпедгиза, Ленинград, Невский пр., 28.
Заказ № 766. Типография № 3 Управления культуры Ленгорисполкома. Ленинград, Красная ул., д. 1/3

Цена без переплета 5 р. 40 к., переплет 80 к.