АКАДЕМИЯ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК РСФСР
ИНСТИТУТ ОБЩЕГО И ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

ПЕДАГОГИЧЕСКАЯ БИБЛИОТЕКА УЧИТЕЛЯ

Г. Г. МАСЛОВА

МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ

В ВОСЬМИЛЕТНЕЙ ШКОЛЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК РСФСР
Москва 1961

Печатается по решению Ученого совета Института общего и политехнического образования АПН РСФСР

ОГЛАВЛЕНИЕ

Галина Герасимовна Маслова

МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ В ВОСЬМИЛЕТНЕЙ ШКОЛЕ

Редактор Э. К. Викулина

Обложка Н. А. Перовой Худож. редактор Л. В. Голубева

Техн. редактор А. М. Доброквашина

Корректоры Г. Ф. Ивановская, В. С. Антонова

Сдано в набор 28/IV 1961 г. Подписано к печати 9/VIII 1961 г.

Формат 84×108$^{1}/_{32}$ Бум. л. 2,38 Печ. л. 9,5 Усл. п. л. 7,79 Уч.-изд. л. 7,54

А07948 Тираж 41 300 Цена 20 коп. Зак. 260

Изд-во АПН РСФСР. Москва, Погодинская ул., 8.

Типография изд-ва АПН РСФСР. Москва, Лобковский пер., 5/16.

ВВЕДЕНИЕ

Ведущим началом изучения основ наук в восьмилетней школе, в том числе математики, является тесная связь обучения с жизнью, с подготовкой учащихся к практической деятельности.

В преподавании математики большое значение приобретают вопросы, связанные с обучением учащихся геометрическим построениям (выполнение наиболее распространенных геометрических построений и обучение решению задач на построение).

Решая задачи на построение, учащиеся приобретают первые теоретические и практические основы «графической грамотности», знакомятся с наиболее употребительными приемами их решения, с инструментами, используемыми в различных условиях работы (в чертежно-конструкторской практике, при разметке, при выполнении построений на местности). У них развиваются пространственное воображение, конструктивные способности, сообразительность, изобретательность, т. е. такие качества, которые необходимы работникам многих профессий.

Доказательство правильности решения задачи и ее исследование способствуют лучшему усвоению учащимися теоретического материала, развитию их логического мышления.

Обучение геометрическим построениям в школе имело до последнего времени много недостатков. Так, учащиеся поздно знакомились с геометрическими построениями (в VI классе ими занимались лишь в конце учебного года). Приемы решения задач на построение часто не отвечали требованиям практики: как правило, изучались построения, выполняемые **только циркулем и линейкой**, а другие чертежные инструменты практически не использовались; мало уделялось внимания распространенным построениям, хотя обоснование их соответствовало программе по геометрии и целесообразность применения этих построений на уроках математики, черчения и других предметов не вызывала сомнения; при рассмотрении геометрических построений не уделялось должного внимания установлению связи между приемами построений (на бумаге, при разметке, на местности) и использованием соответствующих инструментов.

Отдельные приемы геометрических построений, изучаемые в школе, были громоздки и требовали для своего осуществления много времени, оказывалось затруднительным широко использовать геометрические построения при изучении курса геометрии. В связи с этим знания учащихся в области геометрических построений нередко носят формальный характер. Большую трудность для многих учащихся и сейчас представляет отыскание плана решения задачи и исследование полученного результата. Часто приходится встречаться с тем, что учащиеся могут перечислить и даже обосновать, какие построения и в какой последовательности ими должны быть выполнены, но практически такие построения не в состоянии сделать.

Это подтверждают и результаты 1943 контрольных работ по геометрии, проведенных Сектором обучения математике Института общего и политехнического образования АПН РСФСР в VII классах ряда школ Российской Федерации.

Каждому из учащихся была предложена одна из следующих задач на построение параллелограмма:

Построить параллелограмм по его сторонам в 6 см и 3 см и углу между ними в 62°.

Построить параллелограмм по двум сторонам a и b и диагонали d.

Построить параллелограмм по двум его сторонам в 4,2 см и 6,8 см и углу между ними в 158°.

Построить параллелограмм по его стороне a, диагонали d и углу между ними α.

При проверке обнаружилось, что умения учащихся решать даже несложные задачи не могут считаться удовлетворительными (см. табл. 1). Параллелограмм, полученный в результате построения, не соответствовал условию задачи в 1127 (58%) контрольных работах из 1943 (100%).

Таблица 1

Допущенные ошибки	Число работ	В % к общему числу учащихся
Неверно взяты длины отрезков	375	18,4
Неверно взяты величины углов	304	15,6
Другие ошибки (в чертежах)	348	17,9

В 58% всех работ была построена фигура, не соответствующая условию задачи. При решении задач, в которых длины отрезков были заданы в сантиметрах, а *величины углов* — в градусах, учащиеся допустили много ошибок в построении отрезков и углов. Подавляющее большинство учащихся при построении параллелограммов *вначале отдельно чертили заданные отрезки и углы*, используя масштабную линейку и транспортир, а затем переносили их циркулем и линейкой (уже не считавшейся масштабной) на основной чертеж, т. е. поступали так, как это на практике делается. Такое усложнение построения, естественно, вызывало дополнительную затрату времени, снижало точность результата.

Описания построений в большинстве случаев оказывались излишне пространными — учащиеся обычно описывали очень подробно, **как** выполнялось построение. Так, например, вместо того чтобы указать, что они строят угол, равный данному, ученики писали: «Проведем прямую MN. На прямой от точки A проведем (?) отрезок в 6 *см* AD (?). Описываем произвольным радиусом из вершины A угла ABD (?), затем таким же радиусом проводим дугу из точки...» и т. д. Подобные примеры не единичны.

В описаниях было много неточностей и ошибок. Встречались, например, такие выражения: «измерим расстояния между сторонами угла», «проведем дугу в угле α», «соединим дуги», «наносим на прямую параллелограмм», «построение задачи» и т. д.

Доказательство правильности построения учащиеся также снабжали многословными пояснениями, содержащими значительное число неточностей. Обычно учащиеся ограничивались доказательством того, что полученная фигура — параллелограмм, но не доказывали, что полученная фигура — искомый параллелограмм. Не всегда приводились ссылки на необходимые теоремы или определения, часто ссылки не были обоснованы. В некоторых случаях учащиеся доказывали положения, которые совершенно не были связаны с выполненными ими построениями.

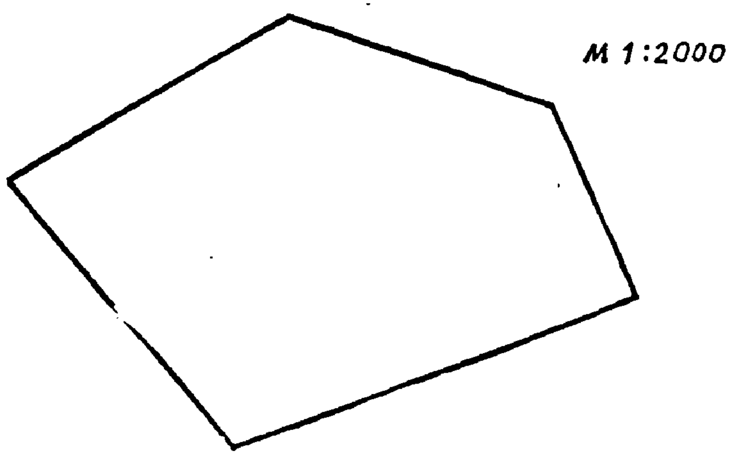
Аналогичные недочеты обычно отмечаются и при посещении уроков.

Большие трудности вызвала работа по геометрии, проведенная в ряде школ РСФСР по материалу VIII класса (см. таблицу 2).

Девятиклассникам были предложены следующие задачи:

I вариант.

Определить площадь земельного участка по данному его плану, проведя необходимые построения, измерения и вычисления (черт. 1).



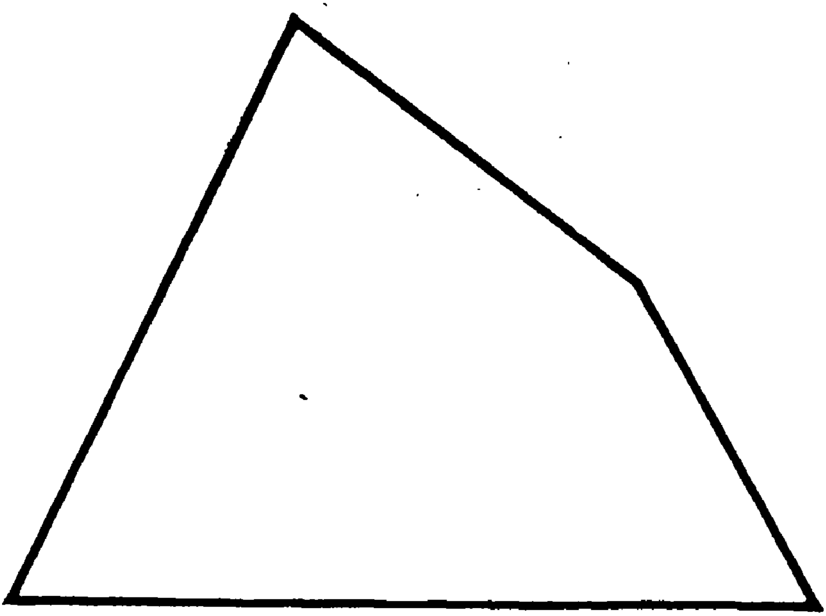
Черт. 1

II вариант.

При съемке плана земельного участка четырехугольной формы получены следующие данные: три его стороны равны соответственно 780 м, 500 м и 450 м, угол между первой и второй сторонами равен 75°, угол между второй и третьей — 158°. Начертить план этого участка в масштабе 1 : 10 000 и вычислить его площадь, проводя необходимые построения и измерения.

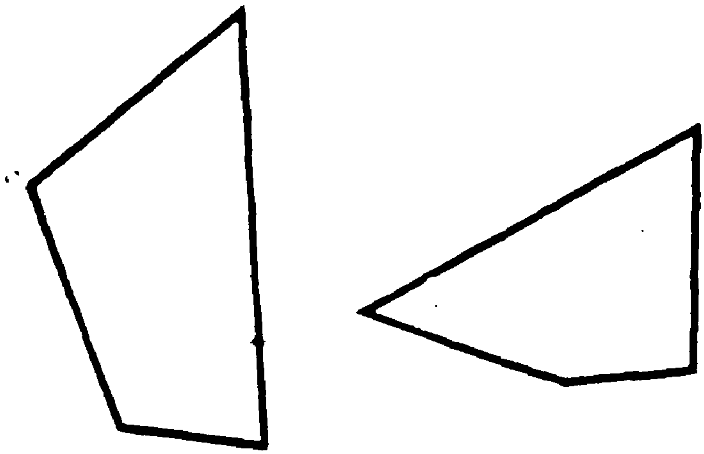
Всего выполняли работу 824 человека (100%), из них получили верный ответ только 173 человека (21%).

Качество выполненных работ по классам было примерно одинаковым и в общем довольно точно характеризуется данными таблицы 2, но в отдельных случаях большинство учащихся класса совершенно не знали, как приступить к задаче, они не могли построить четырехугольник по заданным его элементам. Так, например, вместо чертежа, соответствующего задаче второго варианта (черт. 2), в работах были даны чертежи, совер-



Черт. 2

шенно не удовлетворяющие условию задачи (например, черт. 3).



Черт. 3

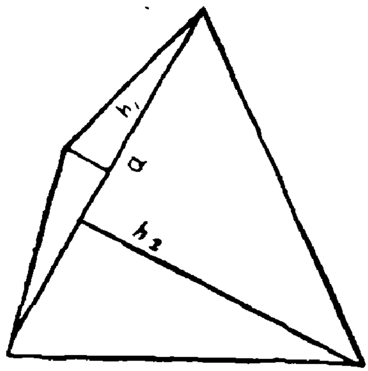
Таблица 2

Характерные недочеты	Число работ (в %)
К решению не приступали	22
Допустили ошибки при построении:	
отрезков	34
углов	43
Неудачно выбрали основания вспомогательных треугольников для определения площадей	35
Неверно провели высоты треугольников	20
Допустили ошибки при вычислении .	32
Допустили ошибки при определении истинных размеров участка по его плану:	
при определении расстояний . .	18
при определении площадей	24
Допустили ошибки в формулах площадей треугольников и трапеций . . .	9
Дали неверные наименования единиц площади	24

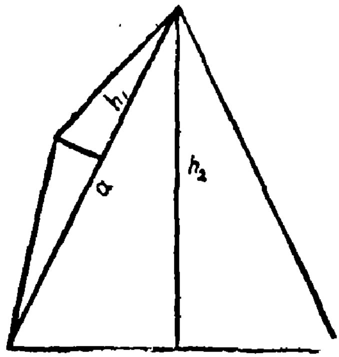
Многие учащиеся находили площади многоугольников нерациональным путем. Прежде всего, неудачно выбирались основания вспомогательных треугольников.

Так, в задаче второго варианта, вместо того чтобы за основания треугольников принять их общую сторону (диагональ четырехугольника, черт. 4) и вычисление площади проводить по формуле:

$$S = \frac{1}{2} a \left(h_1 + h_2 \right),$$



Черт. 4



Черт. 5

учащиеся вначале определяли площадь каждого из треугольников (черт. 5) по формулам:

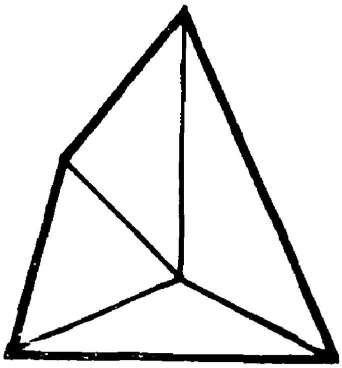
$$S_1 = \frac{1}{2} a h_1; \quad S_2 = \frac{1}{2} b h_2,$$

а затем находили сумму $S_1 + S_2$ площадей.

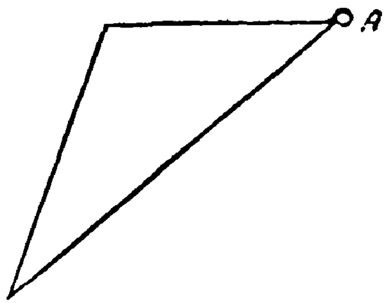
Встречались и совершенно неудачные варианты деления многоугольника на треугольники (черт. 6).

Характер ошибок, допущенных при выполнении этой работы, показывает, что в предшествующих классах недостаточно уделялось внимания выполнению простейших построений, вычислению площадей фигур по данным их размерам или чертежам земельных участков по их планам; недостаточно уделялось внимания практическим приложениям темы «Подобие», обучению рациональным приемам вычисления, предварительным упрощениям алгебраических выражений, закреплению полученных умений путем выполнения упражнений практического характера.

Анализ большого числа контрольных работ, в которые были включены задачи на построение, свидетельствует, что в некоторых случаях учащиеся старших классов недостаточно владеют умениями выполнять элементарные построения. Так, наблюдаются случаи, когда учащиеся IX—X классов ошибаются в построении высот треугольников, особенно когда высота должна быть проведена из вершины острого угла тупоугольного треугольника (вершина *A*, черт. 7), не могут построить отрезки



Черт. 6



Черт. 7

или даже точки, симметричные относительно данной оси, если ось симметрии расположена наклонно, и т. д.

Недостатки в знаниях учащихся по геометрическим построениям являются в большинстве случаев следствием еще имеющегося некоторого отрыва изучения математики (в частности, геометрических построений) от жизни, практики, а также недостаточного учета требований теории геометрических построений.

В данной работе рассматриваются два вопроса: обучение школьников выполнению собственно геометрических построений и решению конструктивных задач.

Содержание этого материала имеет большое прикладное значение. Поэтому целесообразно при переходе к рассмотрению методики обучения школьников геометрическим построениям и решению задач на построение, уделить некоторое внимание вопросам, связанным с практическим использованием геометрических построений.

Глава I

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ПРАКТИЧЕСКОГО ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПОСТРОЕНИЙ

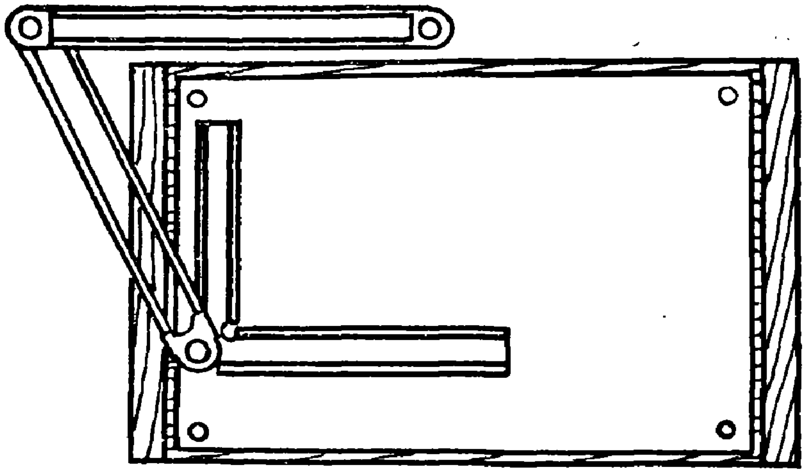
Геометрические построения широко используются почти во всех областях народного хозяйства. Выполнение разнообразных чертежей, вычерчивание графиков, применение графических методов расчета, разметка деталей — все это требует геометрических построений.

В зависимости от содержания работы, степени ее повторности, условий (производство, чертежно-конструкторское бюро и др.) предъявляются различные требования к приемам выполнения построения, их точности, инструменту. Рассмотрим более подробно эти вопросы.

§ 1. Выбор чертежных и разметочных инструментов

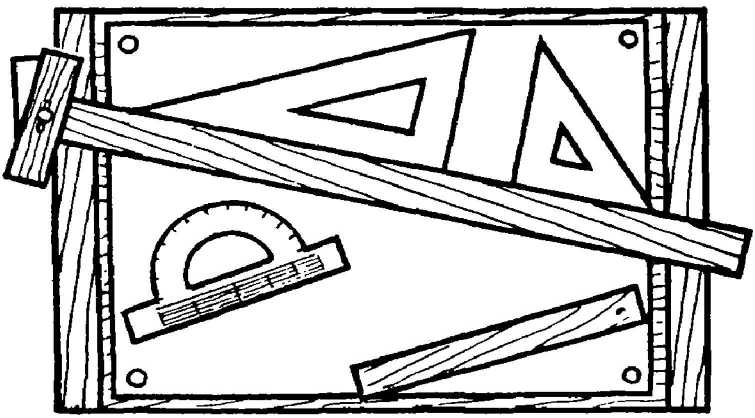
На практике во многих случаях критерием оценки того или иного приема построения является простота выполнения работы и достаточно высокая точность результата. Вследствие этого на производстве, в конструкторских бюро, всюду, где приходится иметь дело с большим числом построений, используются инструменты и приемы построений, обеспечивающие выполнение этих требований.

Так, например, широкое распространение в чертежно-конструкторской практике получила чертежная машина (черт. 8), при помощи которой проводятся параллель-



Черт. 8

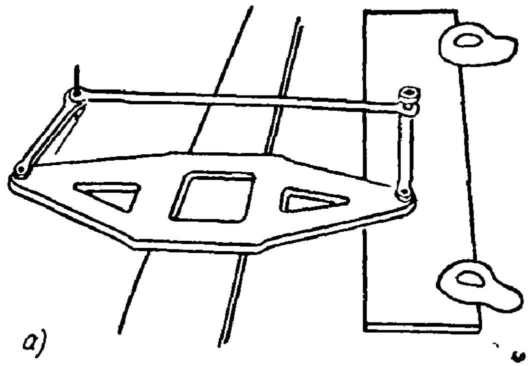
ные и перпендикулярные прямые, строятся углы, равные данным. Механическая рейсшина заменяет обычный набор чертежных инструментов — рейсшину, линейку, чертежные треугольники, транспортир (черт. 9).



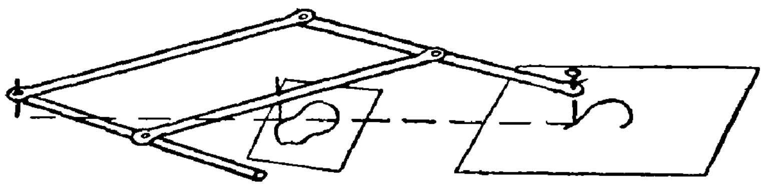
Черт. 9

Для более сложных построений, особенно если их приходится выполнять в большом числе, используются разнообразные специализированные инструменты и приборы.

Так, например, построение подобных фигур (без использования центра гомотетии) часто выполняется пропорциональным циркулем, а построение подобных и подобно расположенных фигур выполняется пантографом, действие которого основывается на свойствах подобных и подобно расположенных (гомотетичных) фигур (на черт. 10 приведено две схемы пантографа). Для вычер-



а)



б)

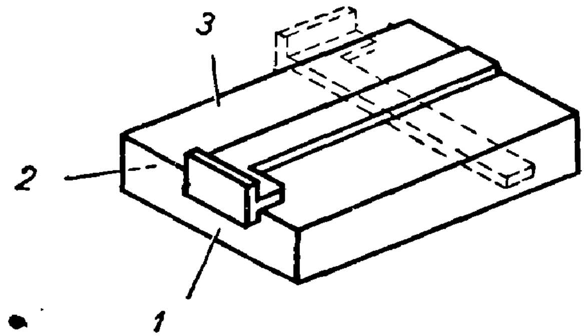
Черт. 10

чивания эллипсов по заданным их осям служит специальный прибор—эллипсограф; построение параллельных и перпендикулярных прямых и нанесение на координатную плоскость точек по заданным их координатам может быть выполнено координатографом; существует значительное число приборов для механического вычерчивания аксонометрических проекций; известен прибор Френе для механического построения перспективы по двум ортогональным проекциям фигуры на координатные плоскости; имеются механизмы для графического нахождения действительных и мнимых корней трехчленных уравнений.

Разнообразен выбор инструментов и при разметке *.

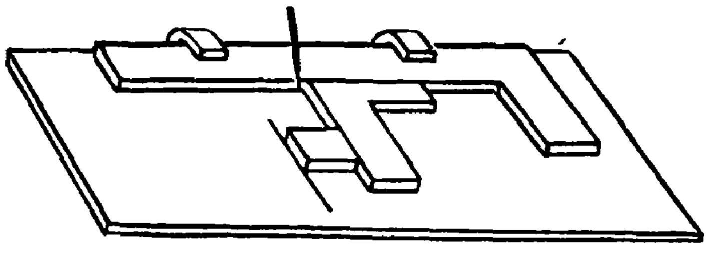
Во многих случаях геометрические построения при разметке на плоскости выполняются так же, как и при построениях на бумаге.

Так, например, на черт. 11 показано построение перпендикулярных и параллельных прямых на поверхности



Черт. 11

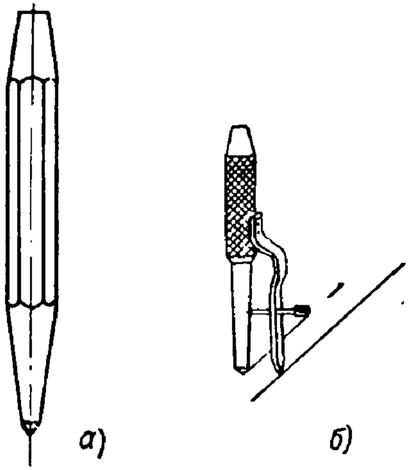
детали, когда взаимно-перпендикулярные плоскости 1, 2, 3 уже обработаны. На черт. 12 показано построение параллельных и перпендикулярных прямых на детали,



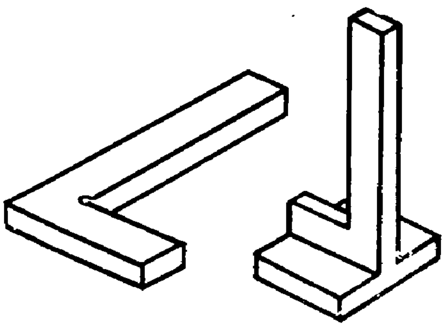
Черт. 12

* Разметкой называется операция нанесения на заготовку детали точек и линий, указывающих места последующей механической обработки в соответствии с данным рабочим чертежом. По этому чертежу разметчик устанавливает, какие построения ему необходимо выполнить. Нередко в задачу разметчика входит контроль размеров заготовки и контроль ранее выполненных технологических операций, который осуществляется как непосредственным измерением, так и при помощи предварительного построения.

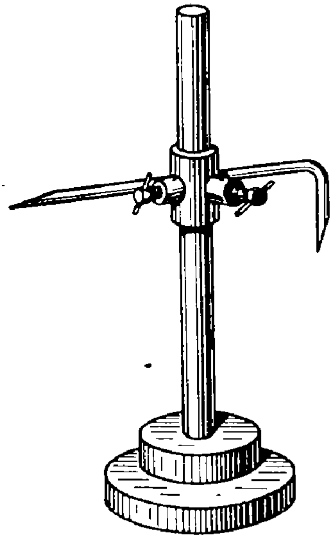
Черт. 13



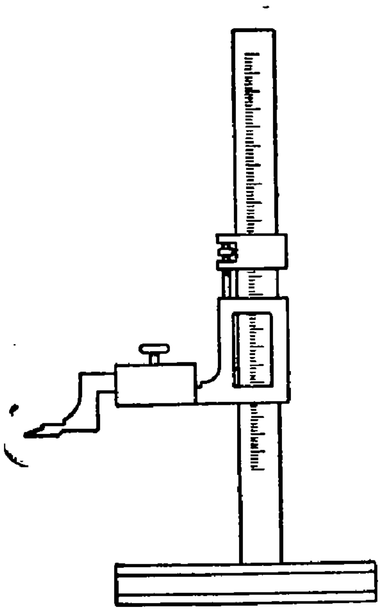
Черт. 14



Черт. 15



Черт. 16

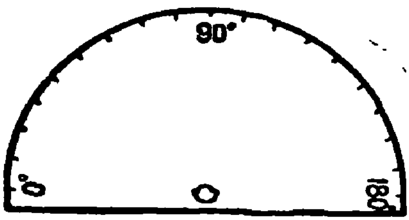


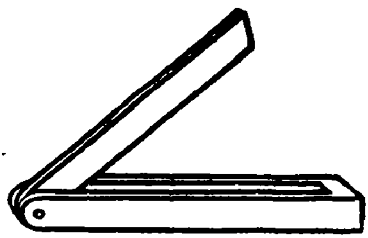
Черт. 17

укрепленной на разметочной плите. В некоторых случаях при недостаточно ровной поверхности детали, наличии на ней выступов, мешающих использованию угольников, построение параллельных и перпендикулярных прямых выполняется циркулем и линейкой.

Конечно, специфика разметки откладывает отпечаток на конструкцию разметочных инструментов и на сам процесс выполнения разметки.

Так, например, разметочные линии наносятся на поверхность металла (часто покрываемую специальной краской для лучшей видимости разметочных линий) стальными чертилками (черт. 13), точки пересечения проведенных линий (рисок), а иногда и сами линии намечаются кернером (черт. 14). Для построения перпендикулярных и параллельных прямых используются специальные угольники (черт. 15), линейки, масштабные линейки (точность отсчета по их шкалам доходит до 0,2 *мм*). Для проведения горизонтальных линий при пространственной разметке используются специальные рейсмасы (черт. 16). Для разметки и измерения высот уступов деталей и центров отверстий применяется штангенрейсмас (черт. 17), углы строятся при помощи специальных транспортиров, малок (черт. 18) и разнообразных угломерных инструментов.

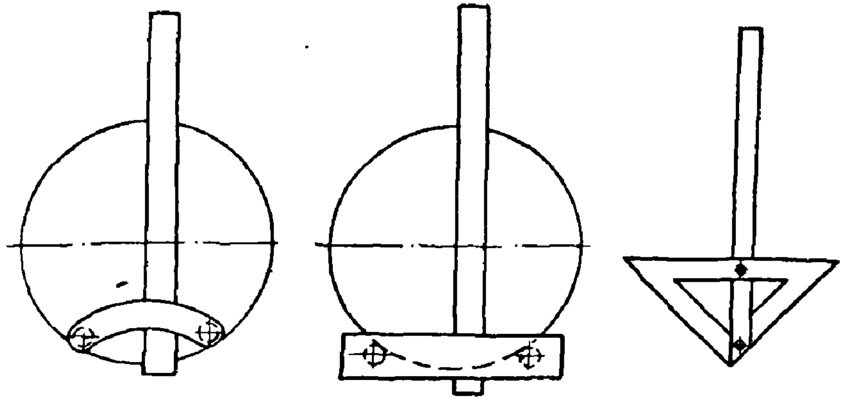




Черт. 18

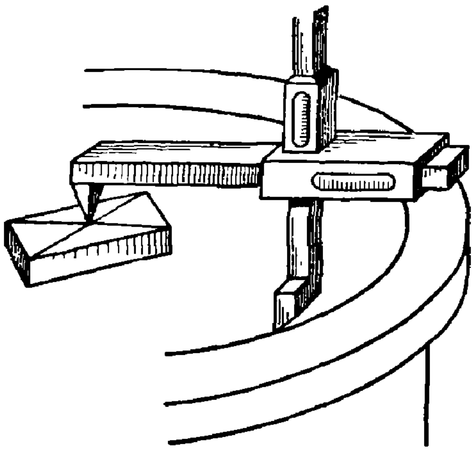
Для нахождения центра окружности существуют различные виды центроискателей, основанных, главным образом, на свойствах биссектрисы угла треугольника, свойстве перпендикуляра, проведенного к хорде через ее середину, и др. Схемы некоторых из них приведены на черт. 19.

Для построения окружностей, если ножка циркуля не

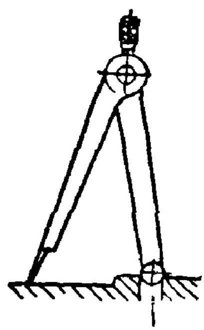


Черт. 19

может быть установлена в центр этой окружности, существуют специальные циркули (черт. 20) с весьма точной установкой на заданный размер радиуса, в ряде случаев используются самоустанавливающиеся циркули (черт. 21).



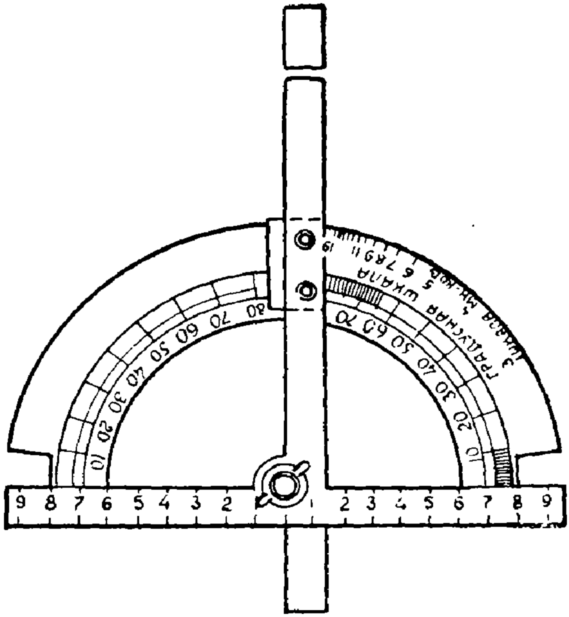
Черт. 20



Черт. 21

Для достижения большой точности (до 0,02 *мм* при построении и измерении отрезков) используются мерные плитки, циркули и рейсмасы с микрометрическими винтами.

Часто при разметке употребляются специализированные комбинированные инструменты. На черт. 22 приве-



Черт. 22

дена упрощенная схема разметочного инструмента, сконструированного Б. М. Власовым. При помощи этого инструмента можно: делить окружность на равные части (в данном инструменте от 3 до 19, но шкала многоугольников может быть рассчитана и на большее число делений); определять по заданной стороне центр окружности, в которую вписан данный многоугольник с данной стороной; находить центр данной дуги окружности; строить любой угол по заданному числу его градусов; проводить через данную точку перпендикуляр к данной прямой; проводить через данную точку прямую, параллельную данной прямой; проводить через данную на окружности точку касательную и нормаль к окружности.

В связи с развитием машиностроения и приборостроения возросла необходимость в изготовлении кулачков *.

* Кулачок — движущаяся деталь кулачкового механизма, сообщающая соприкасающейся с ней детали (толкателю или штанге) заранее заданное движение. Это движение обеспечивается формой кулачка. Кулачковые механизмы применяются в двигателях внутреннего сгорания, в машинах-автоматах, в паровых машинах, во многих приборах.

Так как рабочие поверхности плоских кулачков очерчены обычно по лекальным кривым, то их разметка без специальных приспособлений занимает много времени. Некоторые специальные приспособления для разметки цилиндрических кулачков дают возможность значительно сократить время на разметку и увеличить точность последней.

Большое число приспособлений создано для нахождения центров отверстий и цилиндрических выступов, для построения окружностей с недоступным центром и пр.

В последнее время в разметке широко используются оптические методы. Так, например, в судостроении при выполнении разметки контуров шаблонов вначале с большой тщательностью выполняются на чертежной бумаге чертежи-шаблоны деталей; эти чертежи фотографируются, и негативы проектируются на разметочный стол с соответствующим увеличением. Затем разметчик намечает контуры детали керном.

В этом случае точность разметки существенно зависит не только от правильного выбора масштаба увеличения и точности накернивания линий (разметки), но и от точности выполнения чертежей. Точно так же необходима высокая точность изготовления чертежей, которые затем используются для фоторазметки по металлу (с последующим протравливанием нанесенных на металл контуров).

Приведенный выше далеко не полный перечень чертежных и разметочных инструментов, используемых на практике, показывает, что было бы неправильно ограничивать выбор инструментов, рассматриваемых и используемых в школе.

§ 2. Точность построений

Геометрические построения по требованиям к точности их выполнения могут быть условно разделены на две группы:

1) геометрические построения, не требующие особой точности, например, рабочие чертежи деталей, схемы узлов, станков и пр.; все необходимые размеры на этих чертежах проставляются согласно определенным правилам (ГОСТ);

2) геометрические построения, к точности выполнения *которых предъявляются* повышенные требования.

Большая точность требуется при решении задач графическими методами — графическое умножение, дифференцирование, интегрирование, графическое решение уравнений, построение номограмм и работа с ними.

Высокая точность построения необходима при выполнении чертежей, по которым затем непосредственно ведется разметка (фоторазметка) или обработка деталей (например, на оптико-шлифовальных станках).

Точность графического решения задач обусловливается двумя факторами — точностью задания исходных данных и точностью выполнения построений.

Точность задания исходных данных зависит от конкретного содержания задачи; точность выполнения построений — от точности каждой элементарной операции и часто от их числа и порядка выполнения.

Рассмотрим причины возникновения погрешностей. В результате теоретического выполнения решения задачи на построение (рассматривается случай, когда задача имеет решение и оно выполнено верно) находится фигура, удовлетворяющая всем требованиям, поставленным в условии задачи. Однако при фактическом выполнении построения полученная фигура будет отличаться от искомой вследствие неизбежных погрешностей, возникающих в процессе построения. Эти погрешности могут быть разделены на три группы:

1. Систематические погрешности возникают, например, вследствие использования приборов с неточной градуировкой, построений с помощью чертежных треугольников, у которых углы выполнены неточно, и т. д Систематические погрешности, естественно, влияют на точность результата построения и иногда могут быть в той или иной мере учтены. Для уменьшения их влияния необходимы, например, тщательная проверка и отбор чертежных инструментов.

2. Случайные погрешности зависят, как видно из самого названия, от ряда случайных, трудно поддающихся анализу, но всегда в той или иной мере присутствующих причин. Их величины не могут быть точно определены, но поддаются оценке*.

---

* См. табл. 3.

Таблица 3

Среднее значение погрешностей элементарных операций*

Элементарные операции	Погрешность
Диаметр „круглой точки" при уколе ножкой циркуля	0,20 *мм*
Диаметр „круглой точки" при уколе карандашом	0,25—0,30 *мм*
Средняя толщина тонкой линии	0,15 *мм*
Ошибка укола в данную точку	0,08 *мм*
Повторные уколы (от 2 до 9) дают добавочную ошибку	0—0,25 *мм*
Ошибка укола циркулем в произвольную точку прямой	0,33 *мм*
Ошибка укола карандашом в произвольную точку прямой	0,05 *мм*
Определение точки пересечения прямых	0,08 *мм*
Ошибка проведения прямой через точку	0,08 *мм*
Точность нанесения угла по транспортиру (R = 100 *мм*)	4′
Точность проведения параллельных и перпендикулярных прямых треугольником и линейкой	16″ на 100 *мм*
Точность прикладывания линейки к двум точкам	0,03 *мм*
Точность прикладывания линейки к прямой	0,002 *мм*
Угловая точность прикладывания линейки к двум точкам	0,05 : 2
Угловая точность прикладывания линейки к прямой	0,03 : 1

Эти погрешности по характеру происхождения могут быть:

а) объективными погрешностями, не зависящими от исполнителя;

б) субъективными погрешностями.

Объективные погрешности возникают по той причине, что в действительности не существует идеально точных инструментов, так как не существует идеально остро заточенной ножки циркуля, грифеля карандаша, идеально гладкой бумаги и т. д. Поэтому невозможно проводить на чертеже линии в математическом понимании это-

* А. А. Миронович. Анализ точности графических расчетов. Канд. диссерт., Л., 1950.

го слова (линии «без ширины»), вместо них получаются «полосы» переменной ширины (из-за неизбежного стирания грифеля), вместо точки пересечения прямых (в математическом смысле) в результате пересечения «полос» мы получаем некоторый криволинейный четырехугольник. Точно так же получаем «пятно» или «отверстие» в том случае, если определяем точку уколом острия грифеля или ножки циркуля. При повторных уколах «отверстие» увеличивается в диаметре, что может значительно увеличить погрешность построения.

Кроме того, на точность построения влияют факторы субъективного характера. Влияние некоторых из них может быть уменьшено (например, точность построения увеличивается при внимательности исполнителя), но не может быть полностью исключено.

Рассмотрим такой пример. Наименьший отрезок, видимый человеком с нормальным зрением, равен примерно 0,07—0,08 *мм.*

При проведении через данную точку прямой последняя может пройти не точно через эту точку, а на некотором расстоянии от нее, причем это отклонение исполнитель не может обнаружить. Если же учесть, что вместо точек и прямых в математическом смысле мы в действительности получаем «пятна» и «полосы», то картина значительно усложняется.

3. Наконец, к третьей группе могут быть отнесены п р о м а х и и о ш и б к и, которые ведут к неверным построениям, а стало быть, и к неправильному результату.

На основании анализа систематических и случайных погрешностей можно установить некоторые элементарные требования к выполнению построений, обеспечивающие более высокую точность чертежей. Эти требования следует учитывать и в школьной практике. Перечислим некоторые из них.

а) Для увеличения точности построения необходимо п р о в о д и т ь п о в о з м о ж н о с т и т о н к и е л и н и и.

б) Для уменьшения погрешности следует б р а т ь т о ч к и, о п р е д е л я ю щ и е п р я м у ю, н а б о л е е д а л е к о м р а с с т о я н и и д р у г о т д р у г а.

в) Радиусы вспомогательных окружностей (пересечение которых определит искомые точки) следует выбирать так, чтобы о к р у ж н о с т и п е р е с е к а л и с ь под углами, возможно более близкими к прямым.

г) Необходимо выдерживать принцип единообразия порядка малости отрезков, иными словами, в построении должны использоваться отрезки приблизительно одной величины. Обычно считают, что отношение отрезков не должно превышать 20. Надо сказать, что в некоторых случаях на практике при изготовлении чертежей-копиров, по которым ведется обработка на шлифовальных станках, для фоторазметки на металле и т. д. не стремятся повысить точность чертежа, а увеличивают сам чертеж (в 10—100 раз). Этим достигается большая точность обработки и разметки.

§ 3. Некоторые вопросы теории геометрических построений

В теории геометрических построений каждый инструмент выполняет свойственную только ему операцию. Описание этой операции является его абстрактной характеристикой и дает возможность указать на те элементы чертежа, которые могут быть построены при однократном использовании того или иного инструмента.

Обычно на практике несколько «абстрактных» инструментов объединяются в один (например, чертежный треугольник является комбинацией односторонней линейки, прямого и двух острых углов). Часто также один инструмент используется для выполнения двух (или нескольких) совершенно различных операций (например, линейка используется для построения прямой, проходящей через две заданные точки, и общих касательных к двум данным окружностям). Это дает возможность значительно сократить число используемых инструментов.

Укажем характерные операции * для наиболее распространенных в школьной практике чертежных приборов и на те элементы чертежа, которые могут быть получены при однократном их использовании.

Циркуль. Характерная для циркуля операция — проведение окружности данным (или произвольным) радиусом с центром в данной (или произвольной) точке.

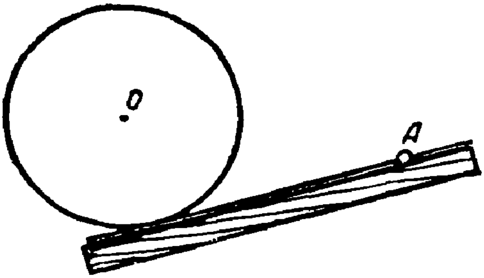
* Н. Ф. Четверухин. Методы геометрических построений. М., Учпедгиз, 1952.

Таким образом, циркулем могут быть построены:

а) окружность данного радиуса с центром в данной точке (радиус может быть задан двумя точками);

б) дуга окружности данного радиуса с центром в данной точке.

Линейка. Характерная операция для чертежной линейки — проведение прямой через две данные точки.



Черт. 23

На практике линейкой пользуются также для построения к данной окружности касательной (черт. 23), проходящей через заданную вне ее точку, и для построения общих внешних и внутренних касательных к двум окружностям. Теоретически эти операции так же строги, как и проведение прямой через две данные точки. Практическая точность в большинстве случаев вполне удовлетворительна. Этот прием часто используется в чертежных работах и при разметке.

Итак, при помощи линейки могут быть построены:

а) прямая, проходящая через две данные точки;

б) отрезок прямой, ограниченный двумя данными точками;

в) луч, проходящий через данную точку и имеющий начало в другой данной точке;

г) касательная к данной окружности, проходящая через данную вне окружности точку;

д) внешние и внутренние касательные к двум данным окружностям.

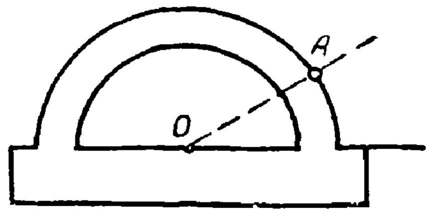
Чертежный треугольник обладает всеми свойствами односторонней линейки. Следовательно, с помощью чертежного треугольника могут быть получены те же элементы, что и с помощью линейки, а также прямая, проходящая через данную точку и образующая с данной прямой угол *, равный одному из углов чертежного треугольника.

---

* На практике это построение выполняется чертежным треугольником и линейкой (черт. 31).

Транспортир. Характерной операцией для транспортира является построение точки, лежащей на луче, проходящем через данную на прямой точку и образующем заданный угол с этой прямой (черт. 24).

Абстрактная характеристика каждого инструмента может быть использована для выяснения вопроса о разрешимости задач на построение теми или иными инструментами.



Черт. 24

С этой целью в теорию геометрических построений вводится понятие класса конструктивных*. элементов. К этому классу относятся все заданные элементы, а также: прямая, если она определяется двумя конструктивными точками; окружность, если она определяется конструктивным центром и конструктивным радиусом (пара конструктивных точек); точка, лежащая на луче, проходящем через заданную на конструктивной прямой точку и образующем с этой прямой заданный угол, и, наконец, точки, являющиеся пересечением конструктивных линий (прямых и окружностей)**.

Очевидно, что каждый набор инструментов имеет свой класс K конструктивных элементов.

На основании этого может быть установлен следующий критерий разрешимости задачи на построение.

Если искомый элемент (или элементы) принадлежит классу К, определяемому выбранным набором инструментов, то задача является разрешимой при выполнении этими инструментами конечного числа операций.

Отсюда, естественно, следует, что возможность использования большого числа различных инструментов расширяет, вообще говоря, класс конструктивных элементов и тем самым увеличивает число задач, допускаю-

---

* Конструктивными элементами называются заданные или построенные соответствующими инструментами элементы.

** Несколько другое обоснование геометрических построений, приводящее к тем же результатам, определяет класс конструктивных элементов на основании понятий теории множеств (А. Л. Пикус. Вопросы теории и методики геометрических построений в пространстве, канд. диссертация, Л., 1955).

щих точное решение. Интересно проследить, как постепенное введение новых инструментов и их комбинаций позволяет увеличить число задач, решение которых может быть выполнено теоретически точно.

Как известно, решение задач второй степени (т. е. задач, аналитическое решение которых сводится к уравнению второй степени) возможно циркулем и линейкой.

Еще в конце XVII века датский математик Георг Мор (в книге «Эвклид по-датски», 1672 г.), а затем итальянский инженер Маскерони (1797 г.) указали на возможность решения всех задач второй степени с помощью только одного циркуля.

Яков Штейнер *, считая наиболее точным инструментом линейку, в 1833 г. показал, что любая задача на построение второй степени может быть решена с помощью проведения лишь прямых линий, если только в плоскости чертежа задана окружность и ее центр. (Любая окружность считается построенной, если известен ее центр и радиус.)

В 1890 г. Август Адлер выступил в Берлинской Академии наук с докладом «Вспомогательные средства, необходимые для решения геометрических задач второго порядка». В докладе было приведено доказательство возможности решения задач на построение второго порядка при помощи только линейки и скользящего по ней постоянного угла. В том же году А. Адлер в работе, посвященной построениям Маскерони, доказал, что задачи второй степени могут быть решены строго при помощи двусторонней линейки или при помощи прямого или острого угла, а следовательно, и угольника.

Таким образом, для решения всякой задачи на построение второй степени достаточно одного из следующих инструментов: циркуля, двусторонней линейки, прямого или острого угла, угольника. Комбинируя те или другие из этих инструментов, можно получить более простое решение задачи второй степени. Дальнейшие исследования показали, что из приведенных выше инструментов можно составить инструментарий, с помощью которого могут быть решены задачи более высоких степеней.

---

* Я. Штейнер. Геометрические построения, выполняемые с помощью прямой линии и неподвижного круга, пер. с нем., М. Учпедгиз, *1939*.

Так, *Кортум и Смит показали*, что *каждая* задача на построение третьей и четвертой степени может быть решена с помощью циркуля и линейки, если в плоскости чертежа дано отличное от окружности коническое сечение.

А. Адлером * было доказано, что каждая задача на построение третьей и четвертой степеней может быть решена с помощью двух прямых углов.

В работе Н. А. Никулина ** показано, что эти же задачи можно решить: а) при помощи циркуля и произвольного угла, б) при помощи двух произвольных, но равных углов, в) при помощи произвольного угла и двусторонней линейки, г) при помощи линейки, циркуля и трех подвижных прямых или одного угольника.

Интересные результаты были получены Н. А. Никулиным по решению задач пятой и шестой степеней ***. Как оказалось, их решения могут быть получены при помощи циркуля, двух прямых углов и постоянного конического сечения.

Точное решение трансцендентных задач, т. е. задач, аналитическое решение которых сводится к решению трансцендентных уравнений, может быть получено только при помощи инструментов для вычерчивания трансцендентных кривых (например, спирали Архимеда $\rho = a\varphi$ или кривой $y = \arccos x$) и т. д.

Эти, уже очень краткие сведения из теории геометрических построений показывают, что с точки зрения теории выбор инструментария может быть весьма разнообразным, но с точки зрения практики должны быть взяты инструменты, обеспечивающие достаточную простоту выполнения операций, точность результата, небольшую затрату времени на выполнение построений.

Однако целый ряд задач, в том числе и задач второй степени, не может быть решен при использовании только заданных в условии задач элементов. Так, при делении с помощью циркуля и линейки данного угла попо-

* А. Адлер. Теория геометрических построений, пер. с нем., 3-е изд. М., Учпедгиз, 1940.

** Н. А. Никулин. К вопросу о разрешимости задач третьей и четвертой степени, «Известия Крымского пединститута», т. XXI, 1955.

*** Н. А. Никулин. Геометрические построения, выполняемые с помощью некоторых вспомогательных средств, «Известия Крымского пединститута», т. XVI, 1950.

лам радиусы вспомогательных окружностей выбираются *произвольными* (в этом случае говорят, что при решении задачи использовался произвольный элемент — радиус вспомогательной окружности).

В теории геометрических построений вопрос о необходимости привлечения произвольных элементов для решения (точного или приближенного) задач на построение рассматривается в ряде работ *; на основании теоремы, утверждающей, что при наличии среди заданных элементов двух различных точек класс конструктивных элементов, полученный при использовании циркуля и линейки, образует счетное, всюду плотное множество, доказывается, что *любая задача на построение может быть решена при помощи циркуля и линейки без привлечения произвольных элементов либо точно, либо приближенно с любой степенью точности, если среди заданных элементов имеются по крайней мере две различные точки.*

В приведенной выше задаче деления угла пополам была известна только одна точка — вершина угла. Следовательно, эта задача не может быть решена циркулем и линейкой без привлечения произвольных элементов.

Вместе с тем задача деления данного отрезка пополам может быть точно решена циркулем и линейкой без привлечения произвольных элементов. В этом случае радиусы вспомогательных окружностей могут быть взяты равными заданному отрезку.

Естественно, что для другого выбора инструментов расположение и число заданных элементов, обеспечивающие решение задачи без привлечения произвольных элементов, могут изменяться. Так, например, любая задача на построение может быть решена с помощью двусторонней линейки без привлечения произвольных элементов либо точно, либо приближенно с любой степенью точности, если среди заданных элементов имеются по крайней мере четыре различные точки, не лежащие в вершинах параллелограмма.

---

* Н. Ф. Четверухин. Методы геометрических построений, М., Учпедгиз, 1952.

А. Л. Пикус. Вопросы теории и методики геометрических построений в пространстве, канд. диссертация, Л., 1955.

Глава II

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ В ШКОЛЕ

§ 4. Основные направления более тесной связи с жизнью в обучении геометрическим построениям

С целью приближения преподавания геометрии к жизни система обучения учащихся геометрическим построениям должна быть значительно изменена.

Прежде всего, необходимо привести в соответствие с чертежно-конструкторской практикой набор инструментов, с помощью которого выполняются построения.

В школе при решении задач на построение должны широко использоваться наряду с циркулем и линейкой чертежные треугольники и транспортир; желательно также ознакомить учащихся с применением рейсшины и пантографа.

Необходимо, чтобы учащиеся овладели разнообразными приемами построений при помощи этих инструментов, особенно теми, которые часто встречаются в чертежной практике и при разметке. (Например, различные способы построения касательной к окружности для случаев, когда центр окружности задан, если он находится вне чертежа, и пр.)

Следует также вырабатывать у учащихся навыки правильного обращения с чертежными инструментами, приучать их выполнять построения рациональными приемами и с наименьшей затратой времени, с наибольшей точностью, т. е. так, как это делается на практике. Это особенно важно в связи с тем, что изучение важнейших задач на построение (геометрическое черчение) в курсе геометрии проводится в основном в VI и лишь частично в VII классах, т. е. практически до того, как этот же материал рассматривается в курсе черчения.

Полезно, кроме того, на уроках геометрии знакомить учащихся с **приборами и приспособлениями**, используемыми при черчении и разметке, с их устройством, принципами действия.

Целесообразно также знакомить учащихся с тем, как изучаемые построения могут быть выполнены на местности и на бумаге, устанавливать аналогию между соответствующими инструментами, например:

Построения на бумаге	Построения на местности
Проведение прямой через две точки	Провешивание прямой через две точки
Построение прямой, перпендикулярной данной прямой и проходящей через точку, данную на прямой или вне ее, с помощью прямого угла чертежного треугольника	Провешивание прямой, перпендикулярной данной и проходящей через точку, данную на прямой или вне ее, с помощью эккера
Построение угла, равного данному, при помощи транспортира	Построение угла, равного данному, при помощи астролябии

Приближение преподавания геометрии к потребностям практики должно найти отражение и в выборе задач, предлагаемых учащимся. Содержание этих задач и методы их решения должны соответствовать практике. При отборе задач необходимо прежде всего исходить из требований восьмилетней школы. Нужно использовать такие задачи, которые являются понятными учащимся и которые имеют определенную познавательную и практическую ценность. Выполнение этого условия особенно важно на начальной ступени обучения.

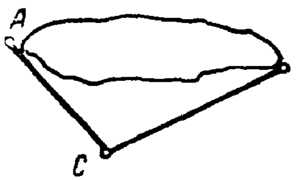
В частности, должны быть включены задачи, в которых надо определить искомые элементы при помощи предварительных построений и измерений, например, графическое решение треугольников, решение задач на определение расстояний на местности и площадей участков по заданному или предварительно построенному плану.

Например:

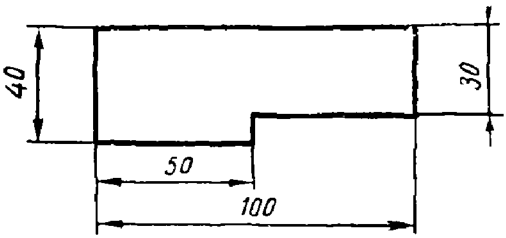
На сторонах угла, равного 48°, даны две точки на расстоянии 30 мм и 40 мм от вершины.

Найти расстояние между этими точками (VI класс).

Для определения расстояния между двумя пунктами A и B (черт. 25), которое не может быть



Черт. 25



Черт. 26

измерено непосредственно, были измерены расстояния AC и BC (точка C выбирается произвольно, но так, чтобы эти расстояния могли быть измерены) и угол ACB.

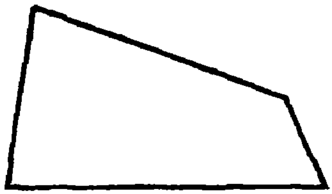
Найти расстояние AB, если AC = 15,5 м, BC = = 34 м; ∠ACB = 47° (VIII класс).

Вычертить деталь в натуральную величину по размерам, данным на черт. 26.

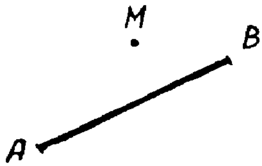
Проведя необходимые построения, измерения и вычисления, найти площадь фигуры, данной на черт. 27.

Графическое решение задач, являясь одним из распространенных практических методов, закрепляет навыки в аккуратном и точном выполнении построений и приучает обращаться с измерительными инструментами.

Использование этого метода дает возможность увели чить число задач, доступных учащимся.



Черт. 27



Черт. 28

Полезны также задачи на построение фигур по за данному положению некоторых их элементов, например

Построить треугольник, приняв данный отре зок AB за сторону треугольника и точку M — з(точку пересечения его медиан (черт. 28).

Такие задачи представляют интерес не только дл закрепления теоретического материала, но и для подго товки учащихся к решению задач на проекционном чер теже.

В курсе восьмилетней школы учащиеся должны быт также ознакомлены с приближенными приема ми решения задач на построение. В само деле, эти приемы довольно широко используются в чер тежно-конструкторских работах, при разметке. Рассмот рение их в школе дает учащимся возможность по-ново му подходить к решению конструктивных задач.

В разных классах ознакомление учащихся с приема ми приближенных решений задач на построение осуще ствляется по-разному. Так, если шестиклассникам толь ко сообщаются такие приемы решения задач (деле ние отрезка на равные части), то в VIII классе может быть дано обоснование этих построений, оценка (в простейших случаях) погрешности приближенных построений.

Интересным упражнением для учащихся является отыскание ошибок во внешне кажущихся правильными «доказательствах» заведомо ложных предложений. (Например, «все существующие треугольники равносторонние».) Ошибка в «доказательстве» легко находится учащимися, если они верно выполнят чертеж или найдут ошибку на данном им чертеже.

§ 5. Выполнение геометрических построений

Обучение учащихся геометрическим построениям преследует две цели: обучение выполнению собственно геометрических построений и обучение решению задач на построение.

Естественно, что каждому из этих вопросов в различных классах должно быть уделено различное внимание. Рассмотрим первый из них.

В VI классе основное внимание обращается на обучение учащихся выполнению простейших геометрических построений и их систематическому использованию при формировании и закреплении важнейших понятий: перпендикулярность и параллельность прямых, главнейшие линии в треугольнике, симметрия относительно прямой и т. д.

К концу VI класса учащиеся должны получить уже довольно прочные навыки в решении ряда конструктивных задач, включенных в программу VI класса, ценных с практической точки зрения и необходимых для дальнейшего изучения материала.

К этим построениям относятся различные приемы построения отрезка, равного данному, масштабной линейкой или циркулем и линейкой (немасштабной); действия над отрезками (в том числе деление отрезка пополам) при помощи масштабной линейки или циркуля и линейки (немасштабной); приближенное деление угла пополам циркулем; построение угла, равного данному, транспортиром или циркулем и линейкой; построение прямого угла чертежным треугольником; действия, производимые над углами малкой, транспортиром, циркулем и линейкой (немасштабной); построение параллельных и перпендикулярных прямых различными приемами.

Умение фактически выполнять указанные выше построения является совершенно необходимым условием для дальнейшего успешного обучения решению конструктивных задач, так как только при этом условии учащиеся, решая задачи, смогут уделить внимание содержанию и методам их решения, а не только технике выполнения самого построения.

Кроме того, овладение рядом построений способствует лучшему усвоению новых понятий. Так, например, для усвоения таких важных понятий, как высота треугольника, симметрия относительно прямой и т. д., необходимо, чтобы учащиеся умели строить прямые углы, перпендикулярные прямые и т. д.

Правильно выполненный чертеж имеет большое значение для отыскания плана решения задач на вычисление и доказательство, и наоборот, неверно выполненный чертеж часто не позволяет «увидеть» нужные соотношения. Более того, неверный чертеж часто направляет мысль учащихся по неверному пути.

Поясним сказанное следующим примером.

В одном из шестых классов разбиралось решение задачи:

Доказать, что в равнобедренном треугольнике высоты, проведенные из вершин углов при основании, равны.

Эта задача была вначале задана на дом, и примерно половина учащихся с ней не справилась.

Выполненный учеником чертеж на доске совершенно не соответствовал условию задачи: высоты были проведены так, что почти никто из учащихся не «увидел» на чертеже прямоугольных треугольников, и поэтому, естественно, план решения не был найден. После того как чертеж был выполнен более или менее верно, ход решения для большинства учащихся стал совершенно ясен.

Большие трудности, связанные с неправильно выполняемым чертежом, часто вызывает в школе такая задача:

В равнобедренном треугольнике угол при основании равен 30°. Определить угол, составленный высотой, проведенной к боковой стороне треугольника, с основанием треугольника.

Как правило, ученики вначале при выполнении чертежа не обращают внимания на соответствие чертежа условию задачи, на то, что угол при основании должен быть равен 30°, и чертят его значительно большим, а после решения задачи они часто не могут объяснить, почему угол в 60° на чертеже оказывается меньшим, чем угол в 30°.

Аналогичные трудности при решении задач на вычисление встают перед учащимися VII класса, например, при решении задачи:

Дан прямоугольник. Перпендикуляр, проведенный из вершины прямоугольника к его диагонали, делит эту диагональ на части, относящиеся как 3 : 1. Найти угол, образованный этим перпендикуляром и другой диагональю.

Учащиеся при неверно выполненном чертеже часто не видят прямоугольного треугольника, на рассмотрении которого основывается решение этой задачи.

Вследствие таких затруднений учащиеся часто (при неверно выполненном чертеже) тратят излишне много времени на решение задач, а иногда и не в состоянии его найти. Кроме того, в этом случае замедляется и усложняется процесс формирования основных понятий курса геометрии.

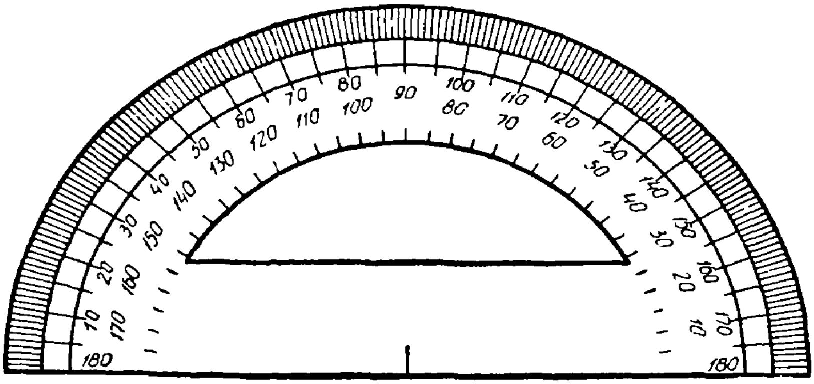
Все эти соображения заставляют обратить самое серьезное внимание на выполнение учащимися простейших геометрических построений и на закрепление приобретенных ими умений. Именно поэтому в VI классе должна вестись весьма тщательная работа по обучению различным приемам выполнения одних и тех же построений.

Так, например, построение угла, равного данному, вначале выполняется при помощи малки или транспортира. При этом нет необходимости измерять угол (называть число градусов и минут). Достаточно отметить, установив соответствующим образом транспортир относительно сторон и вершин данного угла, положение второго луча на шкале транспортира, а затем построить угол, равный данному.

Позже, при измерении углов эта же задача может быть решена с предварительным измерением углов, и, наконец (примерно в середине учебного года), угол, равный данному, строится циркулем и линейкой.

Какому же из этих трех приемов построения углов нужно уделить больше внимания? Конечно, учащиеся должны уметь применять каждый из них, но практически должен чаще использоваться второй прием как наиболее важный.

При проведении этой работы надо уметь предупреждать возникновение возможных ошибок в измерении и построении углов. Источником ошибок могут послужить транспортиры, отличные от обычно употребляемых (черт. 29). Кроме того, при измерении углов и построении угла, равного данному, особенно если он близок к



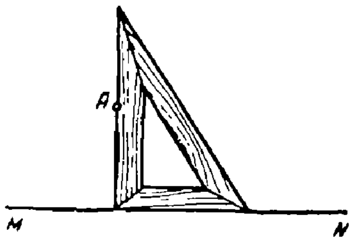
Черт. 29

90°, учащиеся часто неверно читают показания шкалы (неверно выбирают направление отсчета). Они говорят, например, что тупой угол содержит 85° или острый угол равен 110° и пр. Эти ошибки легко предупредить, если в самом начале работы с транспортиром тщательно проконтролировать результаты измерений и построений учащихся.

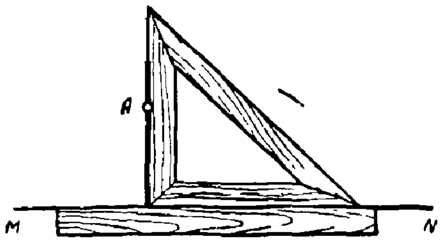
Более сложная работа проводится при обучении учащихся построению прямого угла и перпендикулярных прямых.

Вначале прямой угол строится одним чертежным треугольником (черт. 30). Затем указывается, что удобнее выполнить построение, если использовать еще и линейку (черт. 31), так как при этом облегчается ориентация треугольника относительно данных прямой и точки. Построение проводится в такой последовательности: сначала к данной прямой прикладывается линейка, к ней — треугольник одним из своих катетов; затем треугольник передвигается вдоль линейки до тех пор, пока второй его катет не пройдет через данную точку.

Указанный прием часто используется при построении перпендикулярных прямых. Поэтому желательно, чтобы учащиеся приобрели некоторый навык в его выполнении.

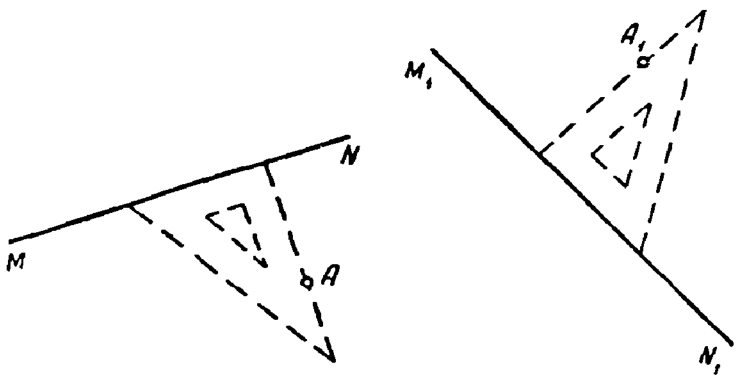


Черт. 30



Черт. 31

С этой целью время от времени в домашнее задание или на уроке предлагаются задачи на построение перпендикуляра к данной прямой, при этом задаются различные случаи расположения прямой и точки (черт. 32).



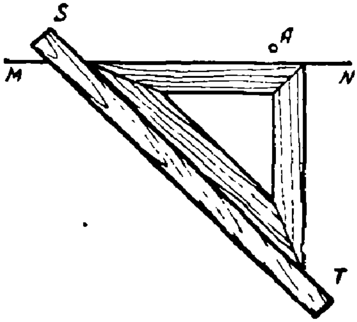
Черт. 32

Перед рассмотрением углов с соответственно параллельными и перпендикулярными сторонами следует вновь обратиться к построению перпендикулярных прямых при помощи чертежного треугольника и линейки. На черт. 33 и 34 приведены последовательные этапы решения известной уже ученикам задачи: *через данную точку провести прямую, перпендикулярную данной прямой.*

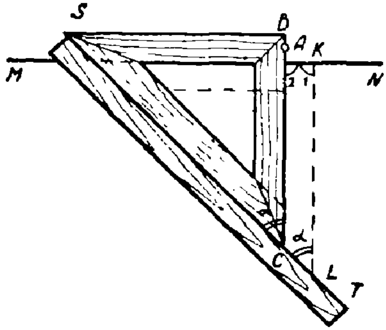
Это построение должен выполнить на доске сам учитель, объясняя все эти этапы. Особенный интерес представляет обоснование построения. (Оно, конечно, не является обязательным для учащихся.) Для облегчения доказательства полезно на чертежах, которые выполняет учитель, провести вспомогательные построения (на черт. 34 они выполнены штриховыми линиями).

Доказательство может быть проведено примерно так:

Отрезки BC и KL параллельны, так как они образуют равные соответственные углы с прямой ST. Поэтому $\angle 1 + \angle 2 = 2d$, как внутренние односторонние углы при параллельных прямых BC и KL и секущей MN, но $\angle 1 = 90°$, (прямой угол треугольника), значит, $\angle 2 = 90°$, т. е. $BC \perp MN$, что и требовалось доказать.



Черт. 33



Черт. 34

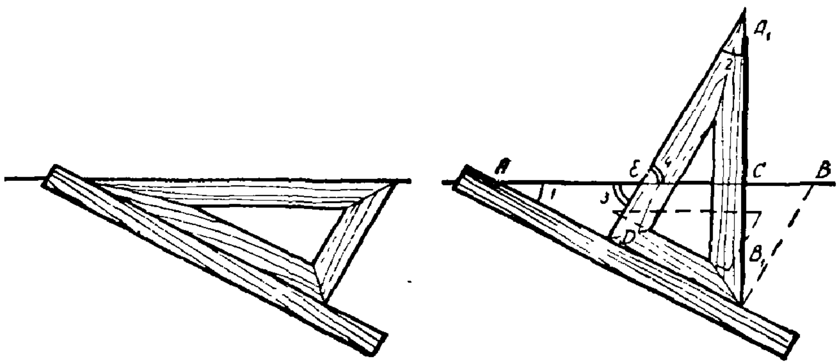
Здесь же полезно показать ученикам преимущество этого приема перед ранее разобранными. В этом случае оказывается легко найти основание перпендикуляра (или точку пересечения перпендикулярных прямых), а также можно провести прямую, перпендикулярную данной прямой, через точку, лежащую на данной прямой; провести перпендикуляр к лучу через конец луча.

После рассмотрения теоремы о сумме внутренних углов треугольника может быть разобран еще один прием построения перпендикулярных прямых с использованием треугольника и линейки (черт. 35). Его удобно использовать для нахождения точки пересечения перпендикулярных прямых. Обоснование этого приема также не может считаться обязательным, но оно является интересным примером использования теоремы о сумме внутренних углов треугольника для обоснования приема построения.

Приведем это доказательство (черт. 35) Рассмотрим треугольники ADE и A_1EC. Надо доказать, что $\angle A_1CE$— прямой.

В самом деле, $\angle 1 = \angle 2$, так как они равны одному и тому же острому углу чертежного треугольника, $\angle 3 = \angle 4$, как вертикальные, $\angle 1 + \angle 3 = 90°$, так как $\angle ADE = 90°$, то $\angle A_1CE = 180° - (\angle 4 + \angle 2) = 90°$, что и требовалось доказать.

Какие же приемы построения перпендикулярных прямых ученик должен знать? Он обязательно должен вла-



Черт. 35

деть первыми тремя приемами, последние же два не являются обязательными, они были введены для того, чтобы показать существование различных приемов выполнения одного и того же построения. Но вместе с тем это практически распространенные приемы, они могут использоваться на уроках черчения при различных графических работах (черчение диаграмм, графиков, разбивка колонок для стенгазеты и т. д.), поэтому следует при построении перпендикулярных прямых не только в VI, но и в VII—VIII классах возвращаться к этим приемам, предлагать использовать их при построении перпендикулярных прямых на доске и в тетрадях.

В VII классе перед учителем стоят более широкие задачи по изучению и использованию геометрических построений, в том числе решению задач на построение. Продолжается обучение выполнению некоторых новых построений и проводится систематическое закрепление приобретенных в VI классе умений; как и ранее, геометрические построения используются при формировании и закреплении геометрических понятий, а также для доказательства существования некоторых геометрических фигур. (Начало этой работы, доказательство существования определяемых объектов, проводилось в VI классе; понятия медианы, биссектрисы, высоты треугольника, параллельных прямых вводились там на основе построения.)

Новыми построениями для учащихся VII класса являются: построение центрально-симметричных фигур, деление отрезка на равные части, построение окружности по трем ее точкам, деление дуг окружности на равные части, деление дуг и хорд окружности пополам, проведение касательной к окружности через данную точку.

Все эти построения, выполнение которых в большинстве случаев основывается на материале, изученном в VI классе, используются затем при решении конструктивных задач. Необходимо, чтобы учащиеся умели фактически выполнять их при любом взаимном положении заданных элементов.

В VII классе продолжается формирование умения учащихся выбирать различные приемы построения в зависимости от условия задачи. Так, например, перед ними может быть поставлен вопрос, каким способом они будут проводить через данную точку касательную к данной окружности, если

а) точка лежит вне окружности и центр окружности неизвестен,

б) точка лежит на окружности и центр окружности неизвестен,

в) точка лежит на окружности, а центр окружности находится вне чертежа.

Построение касательных для всех этих случаев учащиеся не должны заучивать. Они должны лишь представлять, как нужно поступить в зависимости от условия задачи, какие соотношения между искомыми и данными элементами надо использовать для построения.

В VIII классе число новых построений весьма ограничено — это деление отрезка в данном отношении, построение фигур, подобных данным, построение углов по заданным значениям их тригонометрических функций и построение правильных многоугольников. Таким образом, основное внимание здесь уделяется закреплению ранее изученных *построений и решению задач на построение*.

§ 6. О некоторых вопросах методики обучения решению задач на построение

При решении с учащимися задач на построение возникают большие методические трудности. Дело в том, что при этом обычно преследуют две цели: решить данную задачу и вместе с тем научить школьников решать задачи на построение вообще, т. е. познакомить их с общими подходами к решению задач, показать, как путем анализа искомой фигуры, рассуждений, предположений отыскивается решение задачи.

Эта вторая задача значительно сложней, чем первая, и ее реализация требует от учителя большой кропотливой и систематической работы, особенно в восьмилетней школе, так как решение задач на построение — совершенно новый для учащихся вид работы. Во многих случаях отыскание хода решения новой задачи является для учащихся небольшим открытием и в то же время исследованием.

Трудность усугубляется еще и тем, что часто нахождение решения задачи представляет собой весьма сложный процесс, требующий от учащихся большого внимания. Для того чтобы эта работа протекала успешно, необходимо, чтобы учащиеся заинтересовались решением задач, чтобы они поняли, насколько интересна эта работа. Поэтому всегда следует поощрять проявление учащимися изобретательности, инициативы, самостоятельности в отыскании решения.

С первых уроков геометрии, подводя учащихся к решению задач на построение, надо обеспечивать им некоторую самостоятельность, а тогда, когда это необходимо, направить мысль учащихся на желаемый путь. Иногда, может быть, даже следует создать у учащихся *иллюзию самостоятельности* с тем, чтобы придать им уверенность в работе, заинтересовать их решением задач.

Мера самостоятельности в работе, выполняемой учащимися, должна определяться учителем, исходя из их возраста, подготовки, сложности решаемой задачи.

Как же проходит обучение учащихся решению задач на построение?

Прежде всего рассмотрим, как возрастают трудности при выполнении отдельных этапов решения задач на построение.

В начале изучения курса геометрии содержание задачи на построение весьма просто. Решение этих задач имеет целью способствовать формированию у учащихся умений и навыков в выполнении элементарных построений. Отыскание путей решения этих задач часто проводится учащимися интуитивно, на основании известных им определений, например:

Построить при помощи транспортира биссектрису начерченного угла.

В данном треугольнике провести все медианы.

Даны два отрезка (предполагается, что отрезки начерчены), найти расстояние между их серединами.

Позже уже необходимо уделять внимание анализу задачи с предварительным выполнением чертежа-наброска искомой фигуры и его использованием для нахождения плана решения.

Построение и доказательство правильности решения задач присутствуют везде и проводятся обычными способами, поэтому мы на этих вопросах здесь останавливаться не будем, а отнесем их рассмотрение в следующие главы (по классам).

На первых этапах решения задач на построение (VI класс) и при решении задач на построение по новому материалу решаются задачи, имеющие одно решение. Большинство задач само по себе имеет единственное решение (случаи, когда задача не имеет решения, вначале не рассматриваются). Если же задача может иметь более, чем одно решение (или не иметь решения), то данные в условии подбираются так, чтобы задача имела единственное решение.

И только позже, в конце VI класса учащиеся начинают проводить исследования. Поясним это на примере решения задачи на построение треугольника по данным его сторонам. Вначале учащимся предлагается задача:

Даны три отрезка, построить треугольник, считая эти три отрезка сторонами искомого треугольника.

При этом три отрезка уже начерчены или их длины заданы так, что задача имеет решение.

Параллельно с решением задачи повторяется зависимость между сторонами треугольника:

Могут ли быть треугольники со сторонами:

а) 15 м, 18 м, 17 м,

б) 3 см, 24 см, 14 см?

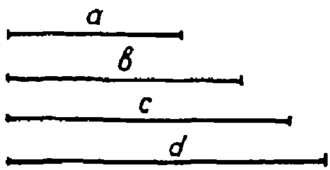
На черт. 36 дано четыре отрезка a, b, c, d.

Могут ли быть сторонами треугольника отрезки:

а) *a, b и c;*

б) *a, b и d;*

в) *d, a и b?*



Черт. 36

Затем учащимся предлагается усложненная задача:

Начертить три отрезка и, считая их сторонами треугольника, построить этот треугольник.

Всегда ли возможна эта задача?

Учащимся предлагается начертить три отрезка, значительно отличающиеся по длине, затем построить треугольник (можно сначала вспомнить необходимое условие, которому должны удовлетворять длины отрезков, чтобы задача имела решение, затем строить их).

Здесь же (например, при опросе) ученикам могут быть даны три отрезка a, b и c (для которых $a > b + c$) и предложено построить треугольник.

Несколько позже учащимся предлагают такие задачи с числовыми данными, которые могут иметь два и больше решений, например:

Построить равнобедренный треугольник по двум его сторонам в 6 см и 8 см.

Часто перед решением такой задачи учащимся предлагается задача на вычисление с такими же или аналогичными данными, например:

Найти третью сторону равнобедренного треугольника, если две его стороны равны:

а) *7 см и 3 см,*

б) *7 см и 8 см.*

Сколько может быть построено равнобедренных треугольников, у которых две стороны равны отрезкам a и b (черт. 36)?

Этими задачами учащиеся подготавливаются к самостоятельному выяснению числа решений.

И только после этого учащимся предлагаются задачи, в которых по указанию учителя требуется установить, сколько решений имеет задача в зависимости от величин заданных элементов и соотношений между ними, например:

> *Построить равнобедренный треугольник по двум его сторонам a и b. При каких соотношениях между сторонами a и b задача будет иметь:*
> *а) одно решение,*
> *б) два решения,*
> *в) ни одного решения?*

Здесь был приведен только один пример подготовки учащихся к исследованию решения задач. По времени он занимает довольно значительный промежуток: от первой задачи (на зависимость между сторонами треугольника) до последней проходит несколько уроков. И учитель, решая первые задачи, должен хорошо себе представлять конечную цель в решении этой «цепочки» задач.

Аналогичная работа должна проводиться и при решении задач на другие разделы курса геометрии VI—VIII классов.

§ 7. О методах решения задач на построение

В курсе геометрии восьмилетней школы не предполагается ознакомление учащихся с методами решения задач на построение. Но учитель, зная эти методы, должен готовить учащихся к овладению ими в дальнейшем (в частности, должно быть уделено определенное внимание методу симметрии, методу геометрических мест, методу подобия).

Решение задач на построение этими методами весьма тесно связано с задачами на вычисление и доказательство, эта связь будет раскрыта в III—V главах книги.

Здесь хотелось бы обратить внимание на систему работы в VI—VIII классах, направленную на подготовку учащихся к овладению некоторыми методами решения задач на построение.

Рассмотрим, например, **решение задач** **методом геометрических мест.**

Определение понятия геометрического места точек в восьмилетней школе не *формулируется, несмотря на то* что его содержание понятно учащимся и образы простейших геометрических мест им доступны. Введение же некоторых теоретических сведений логического порядка (например, «те и только те точки» и т. д.), доказательство того, что та или иная совокупность точек является геометрическим местом точек, обладающих определенным свойством, вызывает у учащихся определенные трудности.

Поэтому в восьмилетней школе предполагается ознакомление учащихся с понятием геометрического места точек на конкретных примерах с последующим его использованием при решении задач.

Так, например, *в VI и VII классах учащимся могут* быть предложены несложные задачи и вопросы, подводящие их к понятию геометрического места точек, например:

> *Построить несколько точек, находящихся на расстоянии 3 см от данной точки. Сколько таких точек может быть построено? На какой линии лежат точки, находящиеся на расстоянии 3 см от данной точки?*

Сначала учащимся задают эти вопросы, а затем предлагают задачи, в которых вместо указания расстояния в сантиметрах оно задается отрезком или в общем виде (например, «на расстоянии a»).

После того как этот материал будет усвоен учащимися (примерно в конце учебного года), им предлагают задачи типа:

> *На данной прямой l найти точку, удаленную от данной точки A на расстояние a (положение точки A и прямой l задается).*

Могут быть рассмотрены случаи, когда точка A лежит на прямой l и когда точка A лежит вне прямой l.

(Эта же задача может быть рассмотрена и в VII классе при изучении касательных. При этом устанавливается возможное число решений в зависимости от расстояния между данной точкой и прямой и расстоянием от данной точки до искомой, т. е. проводится исследование решения.)

Затем понятие геометрического места точек, равноудаленных от одной точки, закрепляется при решении ряда задач, например:

На данной окружности найти точку, удаленную от данной точки на расстояние a.

Найти точки, удаленные от одной из данных точек на расстояние a, а от другой данной точки — на расстояние b.

Эти же задачи могут быть рассмотрены и в VII классе, но уже с проведением исследования, связанного со взаимным положением двух окружностей. (Аналогичная работа проводится в VI классе при изучении биссектрисы угла.)

В VII классе при изучении свойств прямоугольника учащимся даются такие задачи:

Построить несколько точек, находящихся на расстоянии 5 см от данной прямой. Сколько таких точек (т. е. точек, находящихся на расстоянии 5 см от данной прямой) может быть построено? Где находятся точки, удаленные от данной прямой на 5 см?

Далее учащимся предлагаются задачи, в решение которых входит построение точки, удаленной на данное расстояние от данной прямой, например:

Построить треугольник по двум сторонам и высоте, проведенной к одной из них.

Построить параллелограмм по двум сторонам и одной из его высот. Сколько решений имеет задача?

При решении этих задач учащиеся пользуются методом геометрических мест, однако как метод он не рассматривается, его содержание раскрывается только в связи с решением конкретных задач.

В VIII классе учащимся также предлагается несколько задач, которые решаются методом геометрических мест:

Даны две параллельные прямые. Построить их ось симметрии.

Построить несколько точек, находящихся на одинаковом расстоянии от двух параллельных прямых.

Сколько можно построить точек, удаленных на одинаковое расстояние от двух данных параллельных прямых?

На какой линии находятся точки, удаленные на одинаковое расстояние от двух параллельных прямых?

Построить несколько точек, отношение расстояний которых до двух параллельных прямых равно двум.

Сколько можно построить точек, отношение расстояний которых до двух данных параллельных прямых равно двум?

На каких прямых находятся точки, отношение расстояний которых до двух данных параллельных прямых равно двум?

Такие упражнения способствуют развитию геометрических представлений и закреплению теории, а также являются подготовкой к решению ряда задач следующих глав.

§ 8. Порядок работы над решением задач на построение

При решении задач вообще и задач на построение в частности важно научить школьников правильно понимать условие задачи, составлять план решения, осмысливать результат решения, уметь использовать результат или способ решения одной задачи при решении других задач.

В методике обучения математике разработаны некоторые приемы отыскания решения задач, последовательность и содержание вопросов, которые полезно ставить перед собой при работе над задачей.

Эти сведения полезно не только сообщать учащимся, но и в процессе работы в классе показывать, как можно осуществить предлагаемые рекомендации.

Ниже приводится один из вариантов плана работы над задачами. Конечно, не все его пункты должны быть выполнены при решении каждой задачи, некоторые из них в зависимости от условия задачи, класса, состава учащихся могут быть опущены. Но общая система должна, примерно, заключаться в следующем.

1. Разбор условия задачи

Прежде всего надо внимательно прочесть условие задачи, выделить, какие элементы даны, какую фигуру надо построить; затем следует попытаться от руки построить фигуру, в которую были бы включены как данные, так и искомые элементы. При этом обращается внимание на то, что даже при выполнении чертежа от руки должны быть выдержаны соотношения, данные в условии задачи. После выполнения чертежа выясняются соотношения, связывающие данные и искомые элементы.

Вероятно, что не все из этих соотношений будут затем использованы при решении задачи, но эту работу все же следует проводить, так как она имеет значение и для лучшего усвоения программного материала. Возможно, что уже первое из установленных соотношений позволит решить задачу. Учитель должен сам установить, можно ли этим ограничиться, или нужно найти какие-либо другие соотношения, которые дадут возможность решить эту задачу другим, более простым путем.

Здесь же предлагается учащимся продумать, достаточно ли данных для построения искомой фигуры содержит условие задачи, не является ли это условие противоречивым.

Последний вопрос не имеет особого значения, так как в школе обычно рассматриваются задачи, в которых число условий для их решения необходимо и достаточно. Неопределенные задачи, т. е. задачи, допускающие бесчисленное множество решений, хотя и имеются в задачниках, но число их очень мало, а задачи с противоречивым условием и лишними данными по вполне понятным причинам в задачник не включаются.

Все же для подготовки учащихся к решению задач, с которыми они могут встретиться в жизни, в практике, наконец, для общего развития учащихся полезно познакомить их с подобными задачами.

Эти задачи должны быть простыми, с тем чтобы учащиеся быстро могли уяснить суть вопроса. Так, например:

Построить прямоугольный треугольник по его гипотенузе, равной 6 см, и медиане, проведенной к гипотенузе, равной 3 см.

Это неопределенная задача, имеющая бесконечное множество решений, так как во всяком прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна ее половине.

Построить прямоугольный треугольник по гипотенузе, равной 6 см, острому углу в 40°, медиане, проведенной к гипотенузе и равной 3 см.

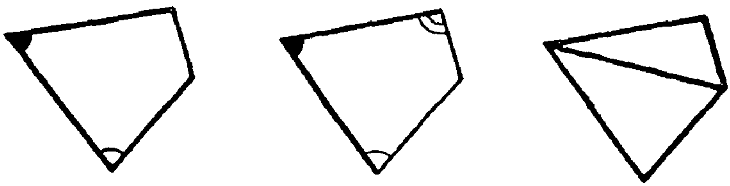
Эта задача имеет решение, но она переопределена (последнее условие лишнее).

Построить прямоугольный треугольник по гипотенузе, равной 6 см, острому углу в 40° и медиане, проведенной к гипотенузе и равной 4 см.

Задача не имеет решения, так как условие противоречиво.

Вопрос о числе элементов, достаточных для выполнения построений, специально не рассматривается в средней школе, но некоторые сведения об этом учащиеся получают на протяжении всех лет обучения в школе.

Так, уже в VI классе учащиеся знают, что наименьшее число данных, определяющих **треугольник**,



Черт. 37

равно трем, при этом должен быть по крайней мере один линейный элемент. Семиклассник сообразит, что для построения четырехугольника необходимо задать пять элементов, из которых один опять-таки должен быть линейным, и т. д. На черт. 37 выделены элементы четырехугольников (3 варианта), по которым учащиеся VII или

VIII классов могут построить четырехугольник (аналогичные рисунки могут быть рассмотрены с учащимися). Для построения параллелограмма достаточно знать только три элемента, так как само понятие «параллелограмм» подразумевает равенство противоположных сторон и, таким образом, общее число элементов, необходимых для построения, оказывается равным пяти. Для построения ромба достаточно знать два элемента, однако и здесь фактически имеется пять заданных элементов. Например, задание стороны и угла ромба соответствует заданию трех сторон и двух углов или двух сторон и трех углов произвольного четырехугольника.

Аналогичную картину имеем и при рассмотрении квадрата.

Этот материал может быть использован при выяснении числа элементов, достаточного для построения фигур, но, конечно, он не может считаться обязательным для учащихся.

2. Работа над планом решения (анализ)

К поискам плана решения приступают после того, как условие задачи и предварительно выполненный к нему чертеж становятся совершенно понятными. Трудность этого этапа заключается в том, что обычно не представляется возможным дать правило для составления плана решения любой задачи. Умение решать задачи зависит от ряда факторов, в том числе от того, насколько велики у учащихся опыт и тренировка в решении задач (при условии знаний соответствующего материала по геометрии).

Основное здесь, по-видимому, — внимательно **рассмотреть** чертеж и выяснить соотношение между искомыми и данными элементами. Для более четкого отделения искомых элементов от данных можно рекомендовать чертить их линиями разной толщины (см. черт. 37).

При обучении решению задач на построение довольно часто используется эвристическая форма работы, сущность которой заключается в том, что учитель, предлагая учащимся заранее продуманные вопросы, подводит их к составлению плана решения задачи.

Периодически учителю самому следует в классе р шать задачу у доски, «думая вслух», показывая этим учащимся, каков может быть ход мысли у решающего задачу, какие у него возникают предположения, суждения, как он отбирает из возникших предположений наиболее удачные, как проводится оценка этих предположений (см. § 16). При этом следует на примере одной-двух задач показать, что не всегда сами по себе верные рассуждения дают возможность отыскать план решения задачи.

При самостоятельной работе полезно учащимся рекомендовать ставить перед собой вопросы, облегчающие поиски решения, например: «Решалась ли ранее подобная задача?»

Допустим, что нужно решить задачу:

Построить треугольник, принимая данный отрезок AB за его сторону и данную точку M, лежащую вне отрезка AB, за точку пересечения его биссектрис.

Полезно перед этим вспомнить учащимся такую задачу (если она решалась ранее):

Построить треугольник, принимая данный отрезок AB за его сторону и данную точку M, лежащую вне отрезка AB, за точку пересечения его высот.

Однако здесь следует помнить, что учащиеся не всегда могут сделать правильное заключение о том, являются ли рассматриваемые задачи аналогичными в смысле метода или плана решения. Так, например, рассмотрим две задачи:

В данный треугольник вписать квадрат.

В данный сегмент вписать равнобедренный треугольник так, чтобы его основание лежало на основании сегмента и угол при вершине равнялся бы данному.

Однако здесь следует помнить, что учащиеся не всесмотря на внешне различное содержание. Вместе с тем две следующие задачи, несмотря на внешнее сходство, решаются совершенно различными способами, причем последняя задача вообще не может быть решена с помощью циркуля и линейки.

Построить треугольник по данным его трем медианам.

Построить треугольник по биссектрисам трех его углов.

Часто при отыскании плана решения полезно выяснить, решался ли более общий случай или более частный случай этой задачи; решалась ли задача с теми же искомыми элементами, но с другими данными; как могут быть заменены данные так, чтобы можно было свести задачу к ранее решенной (см. § 13) и т. д.

При решении задач методом геометрических мест на вписывание фигур, подобных данным, и ряда других задач нередко начинают с нахождения вспомогательной или части искомой фигуры (обычно треугольника), а затем переходят к построению искомой. Таким образом, может быть решен в VI классе ряд задач на построение треугольников (см. черт. 84 и 90) или, например, задача:

Построить прямоугольный треугольник по катету и его проекции на гипотенузу.

В процессе решения задач следует сообщать учащимся некоторые рекомендации общего порядка. Так, в начале курса геометрии при построении параллелограмма и трапеции часто решение задач сводится к построению треугольников. В старших классах большую роль начинают играть преобразования.

Для лучшего осмысливания плана полезно предварительное решение задачи (от руки) выполнить не на одном, а последовательно на нескольких чертежах. В этом случае легче проверить, можно ли решить задачу выбранным способом и учтены ли все данные условия. Последнее, как мы уже говорили выше, является для школьных условий некоторым критерием правильности решения задач. Примером может служить оформление задачи на стр. 70 (черт. 56).

3. Построение искомой фигуры

После составления плана решения задачи проводится непосредственное выполнение построения инструментами (при этом еще раз проверяется каждый шаг решения задачи). Это требование в первые годы обучения является обязательным. Позже, когда будет уверенность, что учащиеся могут грамотно выполнять построения, требование может быть снято (достаточно, если ученики смогут показать план решения от руки).

4. Доказательство

Учащиеся должны уметь доказать, что полученная фигура удовлетворяет **всем** требованиям, содержащимся в условии задачи. Например, если нужно построить параллелограмм с данными сторонами и диагональю, то учащиеся должны доказать не только то, что построенная ими фигура является параллелограммом, но что это именно **тот** параллелограмм, который нужно было построить.

5. Исследование решения

В зависимости от величины данных элементов или их соотношений выясняется, **сколько решений** имеет эта задача. Исследование вводится постепенно. Сначала решаются задачи, имеющие одно решение, и лишь в конце обучения школьники проводят (по указанию учителя) полное исследование.

6. Заключительная работа после решения задач

Как правило, в школьной практике решение задачи заканчивается исследованием. Однако в некоторых случаях полезно еще раз вернуться к решенной задаче, чтобы лучше осмыслить ее решение в целом. При этом полезно выяснить с учащимися ряд вопросов. Например, нельзя ли упростить решение задачи? Если, например, кто-нибудь предложит другой вариант решения, его следует рассмотреть, даже если это решение несколько сложнее первого. В этом случае можно показать преимущества первого варианта.

Очень интересным является такой вопрос: для каких задач может быть использован данный вариант решения? (Вывод лучше сделать после того, как рассмотрено два или больше аналогичных примера.) Полезно, чтобы иногда учащиеся сами придумывали задачи, которые могут быть решены этим приемом. Возможно, что эти задачи (особенно в VI классе) будут мало отличаться от только что рассмотренных. Это и несущественно, а важно то, что школьники будут думать над этим вопросом.

Кроме того, с учениками выясняется, где может понадобиться решение этой задачи. При этом имеется в виду не только решение самой математической задачи, но и ее практическое приложение.

При обучении решению задач на построение нет необходимости выполнять все эти этапы работы, разбирать все приведенные выше вопросы. Для более целесообразного использования времени следует ограничивать ся рассмотрением наиболее интересных этапов (анализ, построение, доказательство, исследование) конкретной задачи и лишь иногда рассматривать решение в целом.

§ 9. Введение задач на построение

Продумывая систему работы по обучению школьников геометрическим построениям, особое внимание следует уделить методике обучения решению задач на построение.

Для подготовки учащихся к возможно более самостоятельному решению задач на построение целесообразно в ряде случаев вначале предлагать учащимся задачи подготовительного характера. Они могут быть как на построение, так и на вычисление, и на доказательство. Ниже приводятся три примера использования вспомогательных задач.

Пример:

Через вершину данного угла провести прямую, образующую с его сторонами равные углы.

Угол ABC равен 62°. Через вершину угла проведена прямая MN, перпендикулярная его биссектрисе. Вычислить углы, которые образует эта прямая со сторонами угла.

Пример:

Через точку P, данную внутри угла ABC, провести прямую, отсекающую от сторон угла равные отрезки.

Стороны угла пересечены прямой, перпендикулярной его биссектрисе. Доказать, что отрезки сторон угла, отсекаемые этой прямой, равны.

Пример:

Две точки A и B находятся по одну сторону прямой l. На прямой l найти такую точку C, чтобы сумма расстояний AC и BC была наименьшей.

Отрезок AC перпендикулярен прямой l и делится в точке пересечения с этой прямой пополам. Точка B находится на прямой l. Доказать, что точка B находится на одинаковом расстоянии от точек A и C.

Такая подготовительная работа важна в начале обучения решению задач потому, что у учащихся VI—VII классов еще очень слабы связи между различными фактами, изучаемыми в геометрии. Кроме того, на первых порах нельзя допускать нагромождения трудностей. Необходимо работу учащихся сделать насыщенной, но посильной.

Иногда полезно от решения практической задачи перейти к задаче на построение. Здесь некоторая сюжетная задача (а стало быть, более понятная) будет сведена к математической.

В некоторых случаях к одной и той же задаче полезно обращаться несколько раз, с тем чтобы показать учащимся различные способы ее решения.

В ряде случаев различные по содержанию практические задачи сводятся к одной и той же математической. Так, решение следующих двух задач сводится к решению первой задачи предыдущего примера.

В каком месте следует построить переправу, чтобы расстояние от пункта A до пункта B было наименьшим (черт. 38).

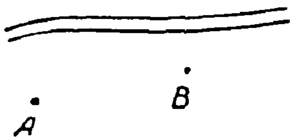
Шириной реки в данном случае пренебрегаем.

Луч из источника света A отражается от экрана E так, что отраженный луч проходит через точку B. Найти точку экрана, в которой отразился луч света.

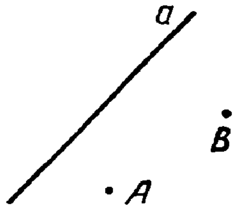
Еще пример (первая задача — геометрическая, три последующие — практические):

Две точки A и B расположены по одну сторону *прямой MN. На этой прямой найти такую точку С, чтобы $\angle ACM = \angle BCN$.*

В какую точку нужно направить луч света из точки А, чтобы он, отразившись от непрозрачного экрана а, попал в точку В (черт. 39)?



Черт. 38



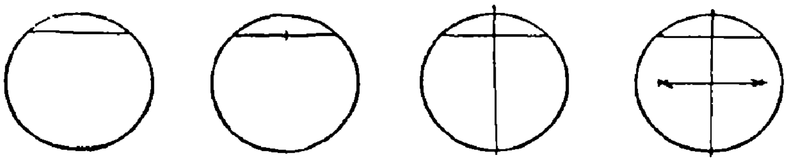
Черт. 39

В какую точку нужно направить упругий шар А, чтобы он, отразившись от упругой стенки, прошел через точку В (черт. 39)?

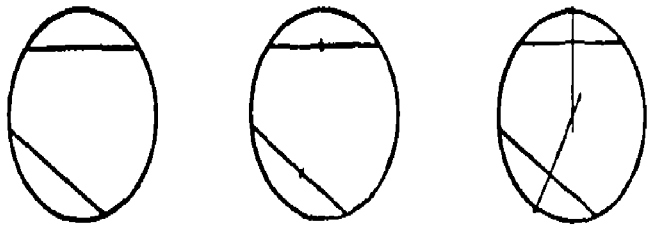
К двум точкам А и В подвешена гибкая нерастяжимая нить, на которую надето тяжелое кольцо. Найти положение равновесия кольца на нити.

Часто оказывается, что математическая задача весьма проста, но если вложить в нее практическое содержание, то она становится недоступной. Поэтому полезно в VI—VIII классах рассматривать с учащимися примеры того, как различные практические задачи сводятся к одной и той же математической.

Большое образовательное значение имеет ознакомление учащихся с приборами, применяемыми на практике при решении некоторых конструктивных задач. Обычно эта работа проводится после решения соответствующих задач на построение. Так, например, после рассмотрения свойства перпендикуляра, проведенного к хорде через ее середину, учащимся предлагается найти центр изображенной на чертеже окружности (возмож-



Черт. 40



Черт. 41

ный порядок решения задачи дан на черт. 40 и 41), а затем предлагается обосновать конструкции центроискателей, данных на черт. 19.

§ 10. Оформление решения задач

При обучении учащихся решению задач на построение не следует заниматься подробными письменными описаниями хода решения, как это еще имеет место в практике работы некоторых школ (например, описывать построение угла по данному значению его тригонометрической функции). Вместо этого следует уделить внимание устным объяснениям и фактическому выполнению построений. В тетрадях должна быть дана лишь краткая запись условия, приведено само построение и могут быть даны краткие замечания о построении, доказательстве, исследовании решения.

Затронутые в этой главе вопросы мы раскроем ниже на конкретных примерах решения задач в соответствии с программой по геометрии восьмилетней школы.

Глава III

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ В VI КЛАССЕ

§ 11. *Общие положения*

При решении задач в VI классе большое место отводится задачам на вычисление. Необходимость этого следует из самого содержания материала по геометрии, желательности осуществления связи между геометрией и арифметикой и закрепления у учащихся ранее полученных вычислительных навыков. Кроме того, задачи на вычисление чаще других видов встречаются в практике.

Вместе с тем, как уже указывалось выше, большое внимание на этом этапе уделяется обучению шестиклассников пользоваться чертежными инструментами (необходимо, чтобы умения учащихся выполнять наиболее важные построения со временем становились навыками).

Постепенно вводятся задачи на построение. Значительная часть их в VI классе предназначена для лучшего усвоения учащимися основных геометрических понятий. Во многих случаях цель заданий—выработать у учащихся вычислительные и измерительные навыки.

Некоторые задачи, которые часто рассматриваются как вычислительные, могут быть для VI класса сформулированы так, что при их решении окажется необходимым произвести предварительно построения и измерения, а полученные таким образом результаты или являются уже сами по себе искомыми, или используются в вычислительной части работы. Например:

На сторонах прямого угла даны две точки, одна из них на расстоянии 30 мм от вершины, а другая на расстоянии 40 мм. Измерить расстояние между этими точками.

Измерить длины всех высот прямоугольного треугольника, гипотенуза которого равна 6 см, а острый угол равен 40°.

Построить угол, равный 80°, и провести его биссектрису. На биссектрисе угла взять произвольную точку, через эту точку провести перпендикуляры к сторонам угла и измерить отрезки этих перпендикуляров от выбранной точки до сторон угла.

Сформулированные таким образом условия задач дают возможность довольно быстро проверить, насколько правильно были проведены построения и измерения.

При выборе способов задания элементов по возможности должна соблюдаться определенная последовательность.

При построении треугольника по трем его сторонам могут быть предложены, например, такие задачи, в которых стороны заданы тремя начерченными отрезками, указанием длин его сторон (в сантиметрах, миллиметрах и т. д.) и, наконец, в общем виде. Например:

Построить треугольник по трем его сторонам a, b и c, где под a, b и c могут пониматься любые отрезки или длины.

Углы также могут быть заданы или их величиной, выраженной в градусах, или в общем виде — угол α, или просто могут быть начерченными.

При обучении учащихся решению задач на построение целесообразно на первых порах придерживаться такой последовательности задания элементов, которая создаст определенную систему исследования решений задач: вначале устанавливается, сколько решений имеет задача при данных конкретных величинах заданных элементов; на более позднем этапе устанавливается, сколько будет решений в зависимости от возможных величин и отношений между заданными элементами.

Однако элементы исследования вводятся в VI классе очень осторожно, основное внимание уделяется фактическому выполнению и обоснованию построений.

Перейдем теперь к рассмотрению решений задач на построение по различным разделам курса геометрии VI класса.

§ 12. Основные понятия

Прямая. Луч. Отрезок. Ломаная линия

Решение первых задач этого параграфа имеет целью закрепить такие понятия, как прямая линия, луч, отрезок, ломаная линия. При этом обращается внимание на фактическое решение таких задач, как, например:

Через произвольно взятую точку провести три прямые.

Провести три луча, исходящие из одной точки.

Выясняется, кроме того, сколько решений может иметь та или иная задача (выводы учащимися делаются на основании опыта). Эти задачи могут быть сформулированы так:

Через две данные точки провести прямую. Сколько прямых и кривых линий можно провести через две точки?

Через две данные точки проведены две линии, могут ли эти обе линии быть прямыми? Почему?

Через произвольно взятую точку провести прямую. Сколько прямых может быть проведено через выбранную точку?

Здесь же должны быть повторены и закреплены умения в выполнении измерений, с которыми учащиеся знакомились в начальной школе и в курсе арифметики, например:

Начертить отрезок длиной 6 см.

Начертить отрезок и измерить его длину.

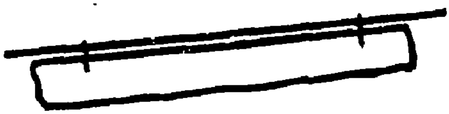
Начертить на глаз отрезок длиной в 8 см. Проверить масштабной линейкой правильность построения.

При этом обращается внимание на правильность выполнения измерений. Наиболее распространенной ошибкой при измерении отрезков является неправильный выбор учащимися начала отсчета: часто за начало отсчета на шкале линейки выбирается «1» вместо «0» или конец линейки.

При построении отрезков, равных данным, показываются возможные варианты решения задачи одной масштабной линейкой или циркулем и линейкой. В последнем случае на прямой MN от произвольно выбранной на ней точки циркулем откладывают отрезок, величина которого вначале определена по масштабной линейке.

Совершенно нецелесообразно эту задачу решать так, как это еще иногда делается в школе: вначале чертят отрезок AB, длина которого равна заданному числу сантиметров, затем на произвольной прямой от некоторой ее точки циркулем откладывают отрезок, равный AB. Только после этого считают, что задача решена, хотя само построение отрезка AB уже является решением задачи. Такие же лишние дополнительные построения нередко производятся и при решении более сложных задач, в которых длины отрезка заданы в сантиметрах, а величины углов — в градусах.

Такое оформление работы возникло, очевидно, в результате механического переноса «классического» решения задачи (циркулем и линейкой) на решение обычной практической задачи.

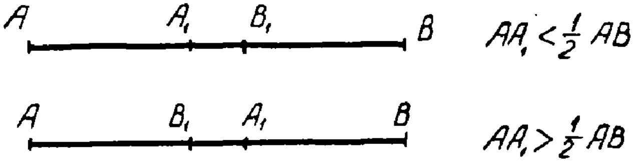


Черт. 42

Построение отрезка, равного данному, можно проводить циркулем и линейкой, или при помощи одной масштабной линейки, или даже просто бумажной полосой (черт. 42). В дальнейшем при построении отрезков и выполнении всех действий над ними можно пользоваться любым из этих способов. Однако вследствие того, что точность перенесения отрезка при помощи измерителя несколько выше, чем при использовании одной масштабной линейки, следует рекомендовать учащимся для увеличения точности построений переносить отрезки при помощи циркуля-измерителя.

При делении отрезка на равные части обращается внимание на то, чтобы учащиеся умели уверенно выполнять эти операции масштабной линейкой и освоили приближенное деление отрезка при помощи циркуля.

Допустим, что надо разделить отрезок AB на две равные части. От точек A и B на отрезке AB откладываем циркулем отрезки AA_1 и BB_1, равные между собой и составляющие примерно половину отрезка AB (черт. 43). Затем отрезок A_1B_1 делим на глаз пополам,



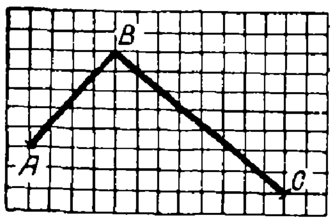
Черт. 43

пусть середина отрезка A_1B_1 (найденная на глаз) будет точка C; она и будет серединой отрезка AB.

Для закрепления приемов деления отрезка пополам решается небольшое число упражнений, например:

Начертить треугольник ABC, измерить расстояния между серединами его сторон. Сравнить эти расстояния с соответствующими сторонами треугольника.

Перечертить в тетрадь ломаную ABC (черт. 44) и измерить расстояние между серединами отрезков AB и BC.

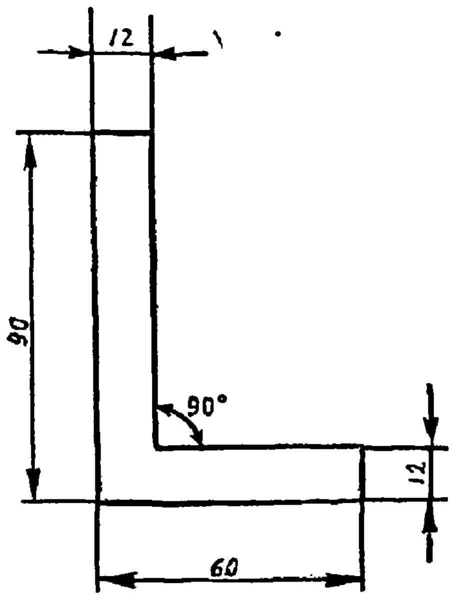


Черт. 44

В последней задаче требуется перечертить по клеточкам в тетрадь данную ломаную линию. Это дает возможность довольно быстро проконтролировать правильность построений и измерений. Кроме того, такое перечерчивание является в некоторой степени подготовкой учащихся к усвоению ими идеи координат. В дальнейшем задачи, включающие построение «по клеточкам», будут даваться неоднократно. Это делается для того, чтобы учащиеся приобрели некоторые умения в определении положения одной точки относительно другой.

Решение задач на все действия над отрезками полезно начать с построения чертежа заготовки изделия, т. е. с задачи, которая знакома в той или иной степени каждому учащемуся по работе в мастерских.

Определить размеры заготовки из листового железа для угольника (черт. 45). если припуск на обработку равен 1,5 мм. Сделать чертеж заготовки в натуральную величину и проставить на нем размеры.



Черт. 45

Содержание задачи знакомо учащимся, так как аналогичные задания они выполняли на занятиях в мастерских в V классе (они же входят в программу занятий по труду в VI классе).

Знаком учащимся и термин «припуск на обработку».

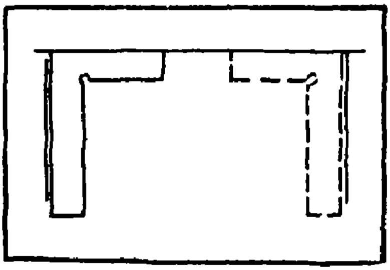
Рассмотрим теперь решение этой задачи. Так как припуск на обработку на каждую сторону равен 1,5 *мм*, то все размеры, указанные на чертеже, должны быть увеличены на 3 *мм*.

Для выполнения первой части задания, т. е. для определения размера заготовки, достаточно, чтобы учащиеся выполнили от руки рисунок (эскиз) заготовки и проставили на нем необходимые размеры. Размеры должны быть проставлены в соответствии с ГОСТ, т. е. так, как это сделано на черт. 45. Это требование вызвано тем, что на уроках труда и позже, на уроках черчения от учащихся требуется выполнение условностей чертежа в соответствии с ГОСТ, с этим надо считаться и на уроках геометрии.

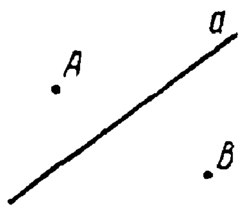
Вторая часть задания предусматривает выполнение чертежа заготовки в натуральную величину.

Выполнение построения может быть осуществлено по-разному. Можно сразу построить чертеж заготовки угольника по найденным учащимися размерам. Можно поступить иначе: вначале сделать чертеж угольника в натуральную величину, а затем получить контур заготовки, проведя прямые, параллельные соответствующим сторонам угольника, на расстоянии 1,5 *мм* от каждой из них. Лучше построение вести первым способом.

При построении прямых углов и параллельных прямых учащиеся должны использовать приемы построения, известные им из арифметики и уроков труда (черт. 46).



Черт. 46



Черт. 47

Рассмотрим следующую задачу на построение:

Даны прямая a и точки A и B, лежащие по разные стороны этой прямой. На прямой a найти такую точку C, чтобы сумма расстояний AC и CB была наименьшей (черт. 47).

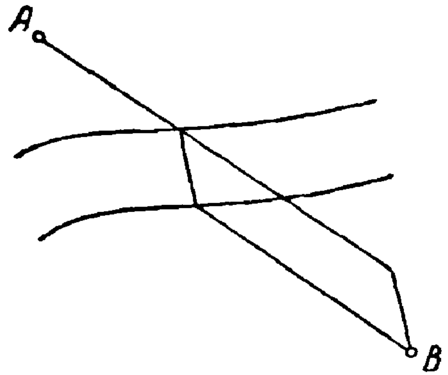
Для решения надо соединить точки A и B прямой, точка пересечения данной прямой a и отрезка AB определит искомую точку C.

При решении этой задачи учащимся можно предложить объяснить, почему точка C является искомой. Если ученики самостоятельно не могут этого сделать, то учитель предлагает им доказать, что сумма отрезков AD и BD (где D — любая точка на прямой a, отличная от точки C) всегда больше суммы отрезков AC и CB, т. е. отрезка прямой AB.

Все рассуждения при решении задачи ведутся устно, в тетрадях ученики выполняют только построение.

После того как задача решена, может быть поставлен вопрос: где в жизни может встретиться такая задача? Простейшим примером этого может быть задача о выборе места для постройки моста через реку, где предполагают, что дорога, соединяющая пункты A и B, кратчайшая (шириной реки пренебрегаем).

Порядок введения задачи можно избрать любой:



Черт. 48

прийти к математической задаче от практической или наоборот.

В VII классе при изучении свойств параллелограмма можно вернуться к решению этой задачи, но для ее правильного решения необходимо уже будет учесть ширину реки (черт. 48).

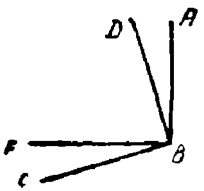
Угол. Действия над углами

В курсе геометрии восьмилетней школы предусмотрено ознакомление учащихся с применением малки для построения угла, равного данному, и для сложения, вычитания и умножения (на целое число) углов. Такие работы могут выполняться не только на доске, но и в ученических тетрадях с использованием индивидуальных малок. Эти же задачи могут быть решены транспортиром (учащиеся знакомятся с его применением еще в V классе).

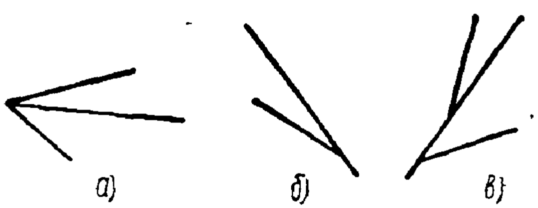
Задачи на построение прямых, смежных и вертикальных углов довольно просты. При их решении необходимо обратить внимание на то, чтобы эти углы строились в р а з л и ч н ы х п о л о ж е н и я х. Это делают для того, чтобы, например, образ прямого угла не связывался только с вертикальным и горизонтальным положением его сторон, чтобы общая сторона смежных углов не представлялась бы только горизонтальной и т. д. С этой целью учащимся предлагаются, например, такие задания:

Начертить при помощи чертежного треугольника четыре прямых угла в различных положениях.

На черт. 49 изображено несколько углов. Какие из этих углов прямые?



Черт. 49



Черт. 50

Начертить два смежных угла так, чтобы их общая сторона была:

а) вертикальная,

б) горизонтальная,

в) наклонная.

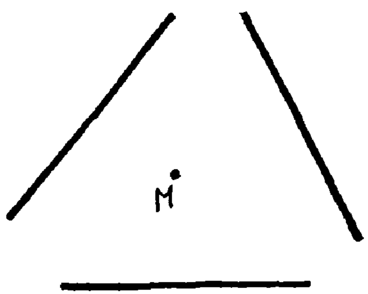
Среди углов, данных на черт. 50, указать, какие углы являются смежными.

Аналогичная работа должна быть продолжена при изучении перпендикулярных прямых. С этой целью решается довольно большое число упражнений, например:

Через данную точку провести перпендикуляр к данной прямой, если

а) данная точка лежит на данной прямой.

б) данная точка не лежит на данной прямой.



Черт. 51

Через конец луча провести к нему перпендикуляр.

Из концов данного отрезка, не лежащего на данной прямой, провести к ней перпендикуляры.

Эта задача готовит учащихся к нахождению проекции отрезка.

Через данную точку М провести прямые, перпендикулярные к трем данным прямым (черт. 51).

Письменных пояснений к решению этих задач не требуется.

Построения перпендикулярных прямых выполняются сначала одним чертежным треугольником (черт. 30), но для упрощения удобнее использовать и линейку (черт. 31).

К данной прямой прикладывается линейка, затем чертежный треугольник перемещается вдоль линейки до тех пор, пока его катет не пройдет через данную точку.

Окружность

В разделе «Окружность» решается несколько задач на построение, содержащих также задания на вычисления и измерения. Назначение задач — закрепить изучаемые понятия. Например:

Начертить окружность диаметра 56 мм.

Измерить диаметры данных окружностей.

Начертить окружность радиусом 42 мм, от произвольно взятой на ней точки отложить хорду, равную 50 мм. Сколько решений имеет задача?

Измерение углов

В этом разделе большое внимание уделяется вычислительным задачам, связанным с построением углов и отрезков, например:

Начертить острый и тупой угол и измерить их с помощью транспортира.

Начертить на глаз угол в 60° (30°, 45°, 90°), проверить правильность построения транспортиром.

Построить транспортиром углы, равные 30°, 72°, 170°.

Точки А и В находятся на сторонах угла в 179° на расстояниях соответственно 45 мм и 78 мм от вершины. Измерить расстояние между точками А и В.

С помощью транспортира провести перпендикуляр к данной прямой через данную на ней точку.

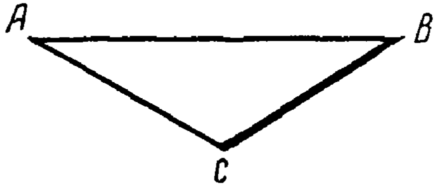
Одновременно с решением этих задач ученики знакомятся с различными инструментами для построения углов на местности (эккер, буссоль, астролябия), кроме того, полезно рассмотреть, как строят углы в мастерских, какие инструменты для этого употребляются.

§ 13. Треугольники

Главнейшие линии в треугольнике

В начале изучения темы «Треугольники» большое внимание уделяется формированию понятий высоты, медианы и биссектрисы угла треугольника.

Построение высот треугольников имеет много общего с проведением через данную точку перпендикуляра к прямой, поэтому учащимся рекомендуется перед проведением высот определить, через какую точку (вершину) должна проходить высота, к какой стороне треугольника она должна быть перпендикулярна. Для большей ясности на первых порах эти элементы выделяются на чертежах (черт. 52). Все построения (во всяком случае до тех пор, пока никто из учащихся не будет допускать ошибок) выполняются инструментами. В задачи, как и ранее, включаются измерения линейных и угловых элементов.



Черт. 52

Понятие медианы треугольника также вводится путем построения, что даст возможность повторить деление отрезка пополам.

Аналогично этому вводится понятие биссектрисы. Деление угла в этом случае выполняется транспортиром.

Все эти понятия закрепляются решением ряда упражнений, в том числе и комбинированных, например:

В данном тупоугольном треугольнике провести из вершины тупого угла медиану, высоту и биссектрису и измерить их.

(Это задание может быть дано на отдельных карточках с тем, чтобы можно было быстро его проверить.)

В данном треугольнике ABC из вершины C провести перпендикуляр к биссектрисе угла A.

Из вершины треугольника провести перпендикуляр к медиане, проведенной из другой вершины.

После изучения признаков равенства треугольников могут быть решены такие задачи:

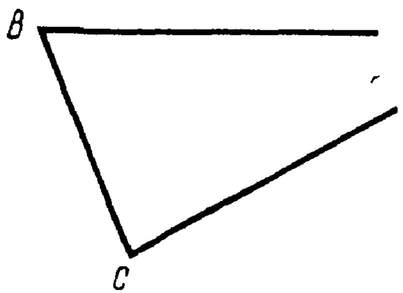
Найти длины высот треугольника, стороны которого равны 4 см, 9 см, 10 см.

Измерить высоту равностороннего треугольника, стороны которого равны 70 мм.

В заключение решаются некоторые задачи на построение:

Вершина A треугольника ABC не помещается на чертеже. Найти основание высоты треугольника, проходящей через точку A.

Здесь уже необходим анализ задачи. Учащимся предлагается изобразить фигуру, соответствующую условию задачи (черт. 53). Выясняется, что направление высоты известно (она должна быть перпендикулярна стороне *BC*). Таким образом, надо найти еще хотя бы одну точку, через которую проходит высота. Как можно найти эту точку? Обычно учащиеся сами указывают, что этой точкой может быть точка пересечения высот треугольника (так как все высоты треугольника пересекаются в одной точке). Эту точку можно найти, построив высоты, проходящие через вершины *B* и *C*.



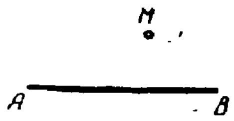
Черт. 53

После выполнения построения нет необходимости проводить доказательство и исследование задачи, так как ответы на поставленные при доказательстве и исследовании вопросы очевидны для учащихся.

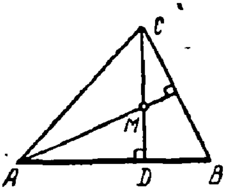
Затем рассматривается новый тип задач, так называемые з а д а ч и н а п о л о ж е н и е (заметим только, что если некоторые из этих задач трудны для учащихся, то их можно рассмотреть в конце учебного года, при повторении):

Построить треугольник ABC, считая отрезок AB (черт. 54) его стороной, а точку M — точкой пересечения его высот.

При анализе задачи удобно на чертеже искомой фигуры, выполненном от руки, выделить данные элементы (черт. 55), при этом чертятся только две высоты и затем



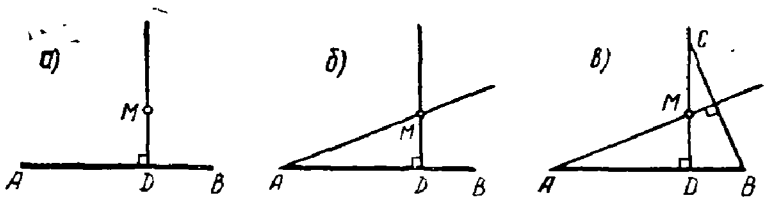
Черт. 54



Черт. 55

выясняется, как расположены друг относительно друга искомые и данные элементы.

Рассматривая чертеж, мы видим, что высота, проведенная через вершину C, проходит через точку M и перпендикулярна к стороне AB; таким образом, искомая вершина C лежит на перпендикуляре MD, проведенном к отрезку AB через точку M. Этот вывод сразу же фиксируется на вспомогательном чертеже (черт. 56, *а*). Дру-



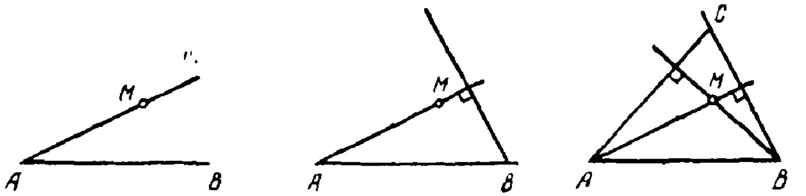
Черт. 56

гая высота, проходящая, например, через вершину A, лежит на прямой AM (подробных объяснений этому не дается); сразу же отмечаем эту прямую на чертеже (черт. 56, *б*). Сторона BC перпендикулярна прямой AM, следовательно, ее положение легко определить (черт. 56, *в*). Таким образом находится положение точки C.

Приведенное выше расчленение чертежа при отыскании плана решения задачи делает его более понятным для учащихся.

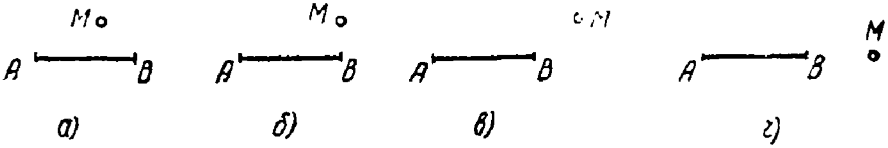
Возможен и другой путь решения (черт. 57), который мало чем отличается от предыдущего и может быть также принят.

Полезно, чтобы построение этой задачи выполнил



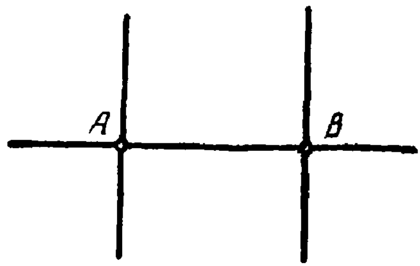
Черт. 57

каждый учащийся. На доказательстве правильности построения здесь останавливаться не следует. На этом этапе обучения проведение исследования задачи не предполагается, тем более что в предложенной формулировке задача будет иметь единственное решение.



Черт. 58

Но если эта задача будет рассматриваться позже (в старших классах или на занятиях математического кружка), то интересно выяснить, всегда ли (т. е. при любом ли положении точки M относительно отрезка AB) она будет иметь решение (черт. 58).



Черт. 59

Конечно, можно предложить ученикам самостоятельно рассмотреть различные возможные положения точки M относительно отрезка AB (черт. 58), однако справиться с этим заданием смогут только сильные ученики, поэтому вопрос о возможности решения лучше разобрать самому учителю.

Задача имеет единственное решение, если точка M не лежит ни на одной из прямых, изображенных на чертеже 59, за исключением точек A и B. При совпадении точки M с точкой A или точкой B задача имеет бесконечное множество решений.

В тетрадях учащиеся делают чертежи, необходимые при анализе, и приводят само решение. Письменных объяснений к решению задач не дается.

Для более сильных учащихся может быть предложена такая задача:

Через данную точку и точку пересечения двух данных прямых, находящуюся вне чертежа, провести прямую.

Затем ученикам предлагается задача:

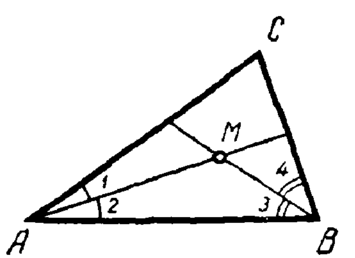
Построить треугольник ABC, считая отрезок AB (черт. 54) его стороной, а точку M — точкой пересечения биссектрис его углов.

Эта задача обычно не вызывает у учащихся затруднений, особенно если они хорошо поняли решение аналогичной задачи с высотами.

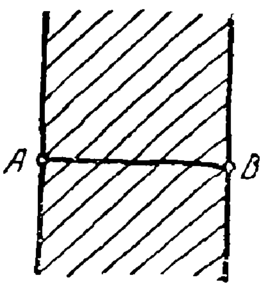
Интересно выяснить, при каком положении точки M относительно отрезка AB задача будет иметь решение? Этот вопрос, как и предыдущее исследование, конечно, рано еще ставить перед учащимися в самом начале изучения темы «Треугольники», но в старших классах его было бы интересно рассмотреть.

Часто учащиеся, видя, что $\angle 1 = \angle 2 < 90°$ и $\angle 3 = \angle 4 < 90°$ (черт. 60), считают, что решение задачи возможно, если точка M будет находиться внутри одной из половин полосы (черт. 61). Это, конечно, неверно.

Легко показать, что $\angle AMB$ (черт. 60) всегда больше 90°; следовательно, задача имеет решение, если точка M



Черт. 60

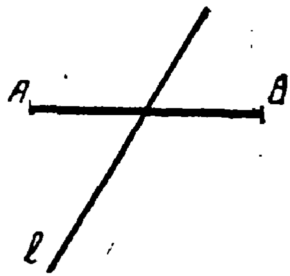


Черт. 61

находится внутри окружности, построенной на отрезке AB, как на диаметре. Это обстоятельство необходимо учитывать при составлении заданий для учащихся.

Симметрия относительно прямой

Введение понятия симметрии относительно прямой сопровождается решением значительного числа задач, с тем чтобы учащиеся четко усвоили это важное геометрическое понятие. Недооценка роли упражнений по этому материалу часто ведет к тому, что понятие симметрии усваивается учащимися формально. Они могут дать определение симметричных фигур, но если ось симметрии расположена не вертикально, то построить фигуру, симметричную данной, не могут. Нередко встречаются «построения» точек, симметричных относительно прямой, изображенные на черт. 62.



Черт. 62

Первые упражнения на этот материал весьма несложны:

Построить точку, симметричную данной относительно данной оси.

Построить отрезок, симметричный данному относительно данной оси.

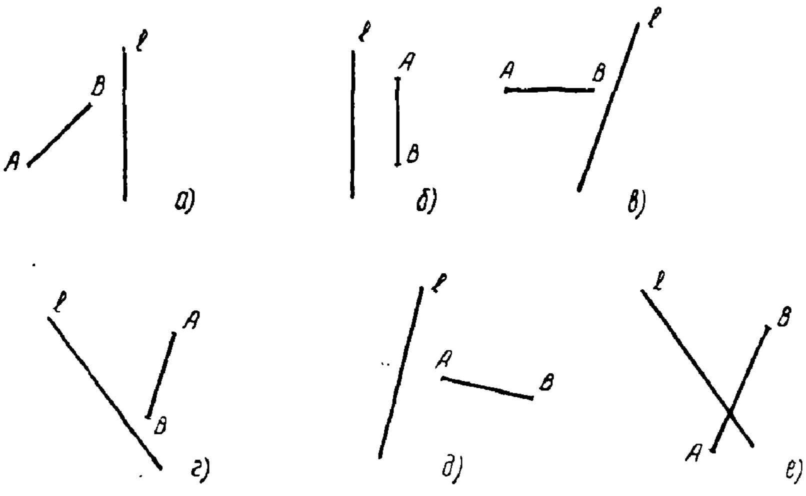
Построить треугольник, симметричный данному относительно оси симметрии.

Построить окружность, симметричную данной относительно данной оси.

Построить фигуру, симметричную данной относительно данной оси.

При решении этих задач расположение фигур можно брать из задачника или их может задавать сам учитель. Для того чтобы учащиеся хорошо овладели понятием симметричных фигур, необходимо, чтобы они решали эти задачи при различных положениях фигур относительно оси симметрии и при различных положениях самой оси. Например, при построении отрезка, симметричного данному, могут быть заданы различные исходные чертежи (черт. 63). Аналогична система усложнения чертежа и при построении других симметричных фигур.

Все эти задания, конечно, даются не в течение одного урока, а распределяются во времени. Возможно, что более сложные случаи (например, когда заданные фигуры



Черт. 63

пересекают ось симметрии) будут рассмотрены позже, при повторении материала (например, в разделах «Равенство треугольников» или «Параллельность»). Важно лишь, чтобы эта работа была проведена достаточно глубоко и чтобы учащиеся умели строить симметричные фигуры (имеются в виду простые фигуры).

При выполнении этих построений полезно вспомнить, что отрезок определяется двумя точками, и поэтому для построения ему симметричного отрезка нужно найти точки, симметричные концам отрезка. Позже решаются более сложные задачи, например:

Построить прямую, симметричную данной относительно данной оси.

Построить угол, симметричный данному относительно данной оси.

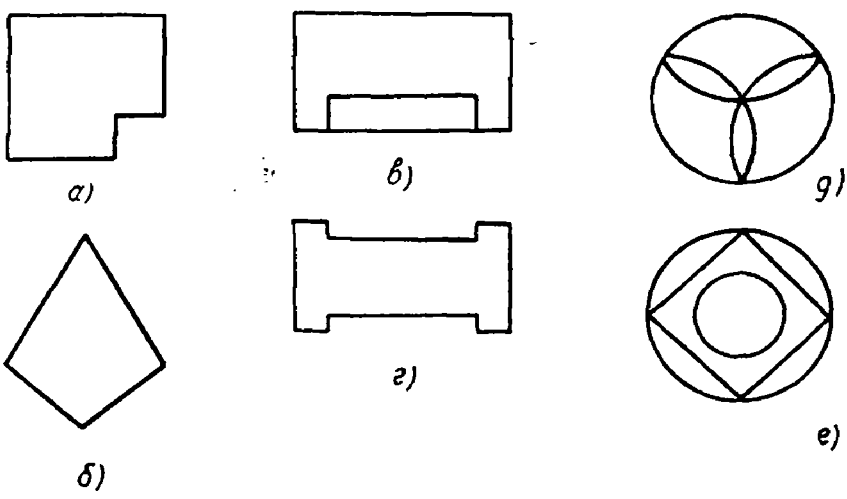
Построить луч, симметричный данному относительно данной оси.

В последних двух задачах следует выбрать наиболее простое расположение данных фигур.

Эти задачи несколько сложнее, чем предыдущие, так как ранее учащиеся имели дело лишь с построением симметричных фигур конечных размеров. Следует обратить внимание учащихся на то, что для построения прямой, симметричной данной относительно данной оси симметрии, достаточно построить только две ее точки (часто учащиеся строят больше точек).

Кроме этих упражнений, решаются задачи на построение осей симметричных фигур. Вначале предлагаются подготовительные (устные) упражнения, например:

Сколько осей симметрии имеют фигуры, данные на черт. 64?



Черт. 64

При этом даются фигуры, имеющие небольшое число осей симметрии, и в некоторых случаях фигуры, не имеющие осей симметрии.

Затем учащиеся строят оси симметрии простейших фигур; им предлагается:

Построить ось симметрии двух данных точек.

Построить ось симметрии данного отрезка.

Перечертить фигуры, данные на черт. 64, и построить все их оси симметрии.

В этих задачах, как и в задачах, решаемых устно, задания должны усложняться постепенно.

Наконец, учащимся предлагают две задачи (вторая задача дается при изучении параллельности):

Построить ось симметрии двух пересекающихся прямых.

Построить ось симметрии двух параллельных прямых.

Решение этих задач основывается только на геометрических представлениях учащихся, обоснования построения от них не требуется. Единственным критерием проверки правильности построения является выяснение того, совпадут ли фигуры, если сложить чертеж по проведенной оси симметрии. Такое обращение к «выходу из плоскости» при мысленном сложении фигур способствует развитию у учащихся пространственных представлений. Фактическое сложение фигур проводилось в начале темы, когда учащимся, например, предлагалось:

Вырезать из бумаги квадрат, прямоугольник и круг и, перегибая вырезанные фигуры, установить, сколько осей симметрии имеют эти фигуры.

В этом же разделе рассматривается несколько задач на построение, решаемых методом симметрии.

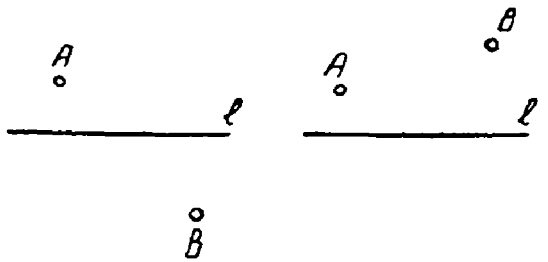
Рассмотрим первую из них:

Дана прямая l и точки A и B, расположенные по одну сторону от нее. На данной прямой найти такую точку C, чтобы сумма отрезков AC и CB была наименьшей.

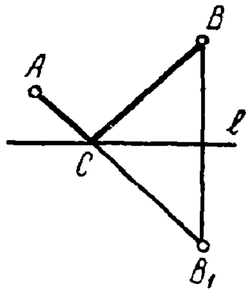
Перед тем как предложить ее учащимся, может быть повторена (дома или в классе) задача, приведенная в § 12 (черт. 47). Затем перед учащимися ставятся вопросы: Не является ли новая задача похожей на ранее решенную? Можно ли свести к ней эту новую задачу? В некоторых случаях чертежи на доске, соответствующие условиям этих двух задач (черт. 65), помогают быстрее обнаружить аналогию в их решении.

Доказательство того, что полученная точка C является искомой, проводится на основании рассмотрения симметричных отрезков CB и CB_1 (черт. 66).

Для облегчения доказательства равенства отрезков



Черт. 65



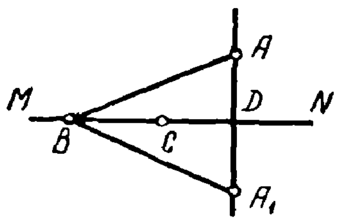
Черт. 66

CB и CB_1 учащимся предварительно дается несколько задач, например:

Отрезок AC перпендикулярен прямой MN и делится ею пополам. Точка B находится на прямой MN. Доказать, что точка B одинаково удалена от точек A и C.

На фигуре, данной на черт. 67, $AA_1 \perp MN$, $AD = A_1D$, точка C находится на прямой MN. Доказать, что $CA = CA_1$.

После решения этой задачи выясняется вопрос о числе решений, т. е. сколько может быть найдено точек (точек C), удовлетворяющих условию. При доказательстве решения уже было определено, что условию задачи не удовлетворяет ни одна точка, отличная от точки C. В связи с этим и нет необходимости проведения исследования. Выясняется только, всегда ли возможно решение задачи.



Черт. 67

В дальнейшем предварительное решение вспомогательных задач на вычисление и доказательство будет довольно часто предшествовать разбору задач на построение. Так, в приведенном ниже примере первая задача является подготовительной к решению второй.

На черт. 67 $AA_1 \perp MN$, $AD = DC$, точка B лежит на прямой MN. Доказать, что $\angle ABD = \angle DBA_1$.

Точки A и B расположены по одну сторону прямой MN. На этой прямой найти такую точку C, чтобы $\angle ACM = \angle NCB$.

После разбора двух последних задач на построение учащимся предлагается составить такую практическую задачу, которая свелась бы к одной из этих геометрических. Обычно учащиеся предлагают задачу, приведенную в § 9 (черт. 38), содержание которой весьма просто. Позже, по мере приобретения учащимися соответствующих знаний их следует познакомить и с другими примерами, данными в этом параграфе.

Можно было бы эти две задачи вначале давать не как геометрические задачи на построение, а как практические, но позже, при их решении выделить геометрическое содержание. В дальнейшем этот прием (переход к задаче на построение от практической задачи) также должен довольно часто использоваться.

Построение треугольников

Решение задач по этому разделу имеет целью закрепление наиболее важных соотношений между элементами треугольников, признаков равенства треугольников и продолжение работы по развитию у учащихся навыков в измерении и построении отрезков и углов заданной величины.

Обращается внимание на умение учащихся выполнять построение треугольников по трем сторонам; по двум сторонам и углу, заключенному между ними; по стороне и двум прилежащим к ней углам.

В задании элементов выдерживается последовательность, указанная в § 11 (вначале заданные отрезки чертятся, затем задаются длины отрезков в линейных единицах, величины углов в градусах и, наконец, в общем виде). Это дает возможность уже на данном этапе обучения применять разнообразные приемы построений отрезков и углов (после того как усвоено построение угла, равного данному) с использованием всех инструментов, имеющихся в распоряжении учащихся: линейки, транспортира и циркуля.

С целью систематического повторения основных понятий, изучаемых в VI классе, и закрепления измерительных навыков в задачи на построение треугольников включаются дополнительные задания, связанные с измерением отрезков и углов, например:

Построить треугольник по сторонам $AB=12$ см, $BC=6$ см, $AC=8$ см. Провести биссектрису угла C и измерить ее.

Построить равнобедренный треугольник по двум сторонам, равным 65 мм и 25 мм, и провести в нем ось симметрии.

Построить равнобедренный треугольник по двум его сторонам, равным 65 мм и 45 мм, провести через его вершину высоту и измерить ее (два решения).

Построить треугольник по сторонам $AB=12$ см, $BC=6$ см, $AC=8$ см. Провести биссектрису угла C и измерить ее.

Построить равносторонний треугольник со стороной, равной 60 мм, и провести в нем все оси симметрии.

Построить треугольник по сторонам, равным 10 см, 5 см, 6 см, и измерить бóльший из углов треугольника.

Если последняя задача решается до изучения соотношений между сторонами и углами треугольника, то учащиеся, измеряя углы, определяют, какой из углов треугольника больше; если же соответствующие теоремы уже известны учащимся, то это — повторение. Аналогичная задача может быть использована для предварительного установления соотношения между сторонами и углами треугольника.

Такие дополнительные задания, включенные в задачи на построение треугольников, позволяют учителю довольно быстро проверить правильность выполнения учащимися построений.

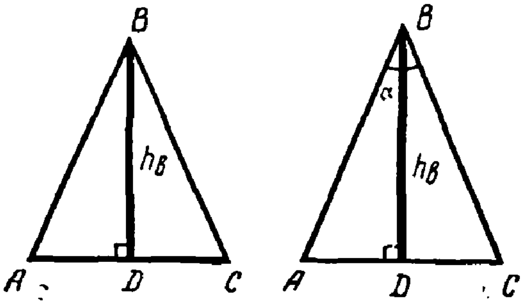
Аналогичная работа проводится при решении задач на построение прямоугольных треугольников (на основании признаков их равенства).

Затем решаются несложные задачи, которые могут быть сведены к уже известным задачам на построение треугольников. Например:

Построить равнобедренный треугольник по основанию b и высоте h_b.

Построить равнобедренный треугольник по высоте h_b и углу α при его вершине.

Учащиеся довольно быстро находят решение этих задач, рассматривая чертеж-набросок, на котором выделены заданные элементы (черт. 68 и 69). Для решения каждой из приведенных выше задач вначале может быть



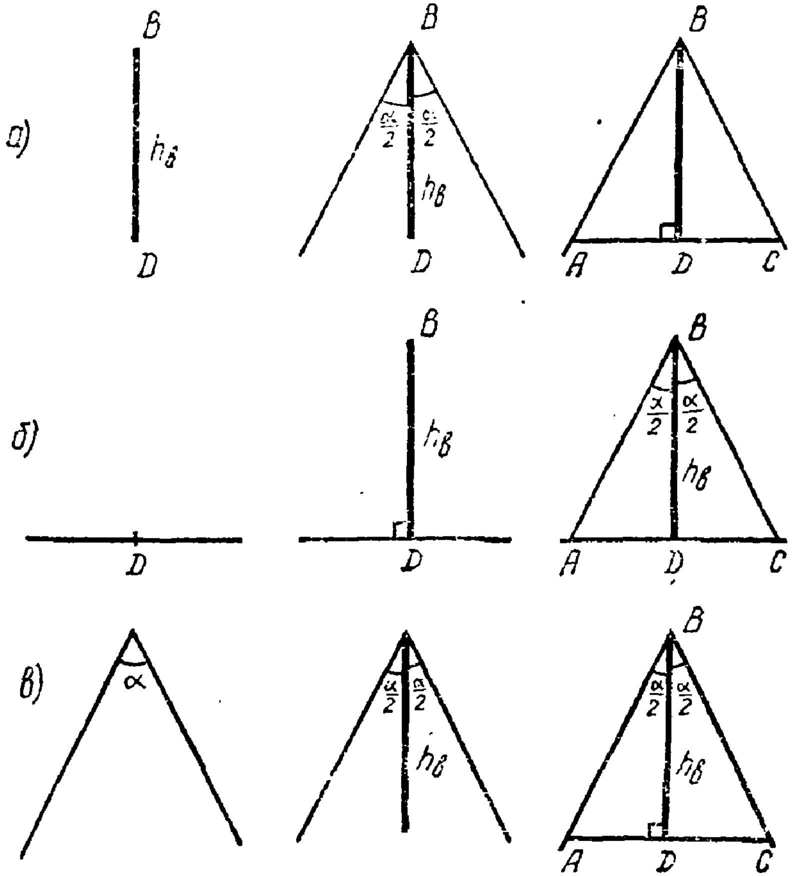
Черт. 68 Черт. 69

построен прямоугольный треугольник ABD (черт. 68 и 69), который затем достраивается до искомого треугольника ABC (обычно всегда в классе найдутся учащиеся, которые предложат строить не вспомогательный треугольник ABD, а непосредственно искомый треугольник ABC).

Анализ чертежа проводится в обоих случаях одинаково: так, для первой задачи (черт. 68) устанавливается, что так как $AC \perp BD$, то $AD = DC$, отсюда ясно и само построение. Его учащиеся могут выполнить самостоятельно.

Вторая задача (черт. 69) несколько сложнее. Анализ чертежа дает возможность установить, что так как $BD \perp AC$, то, значит, $\angle ABD = \angle DBC$. Построение может показаться несколько трудным, поэтому при отыскании плана решения задачи полезно, как это уже указывалось в § 13, схематически показать последовательность выполнения построения, ориентируясь на соотношения между элементами треугольника. Возможны три варианта решения (см. черт. 70), все они примерно одинаковы по трудности, и любой из них может быть выбран учащимися.

Интересно в этих задачах доказательство. В обоих случаях надо доказать, что треугольники являются равнобедренными. Остальные условия выполняются непо-



Черт. 70

средственно. Равенство сторон AB и BC вытекает из равенства прямоугольных треугольников ABD и DBC, но значительно проще это доказать, опираясь на свойства осевой симметрии.

Рассмотрим первую задачу (черт. 68). По построению $AC \perp BD$ и $AD = DC$, отсюда следует, что прямая BD является осью симметрии точек A и C. Так как точка B лежит на оси симметрии BD, то отрезки AB и BC симметричны относительно оси BD и, следовательно, равны.

Рассмотрим вторую задачу (черт. 69).

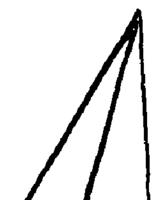
Так как $\angle ABD = \angle DBC$, то прямая BD является осью симметрии угла ABC. Так как $AC \perp BD$, то при сгибании фигуры ABC по ее оси симметрии луч DA пойдет по лучу DC и стороны угла AB и BC совпадут, откуда следует $AB = BC$, что и требовалось доказать.

После решения второй задачи может возникнуть интересный вопрос: являются ли треугольники (черт. 69 и 70), полученные в результате различной последовательности построений, равными между собой?

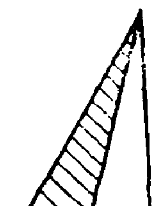
Можно использовать два приема доказательства: рассмотреть треугольники ABD и показать, что они равны, и затем доказать равенство треугольников ABC или доказать непосредственно равенство треугольников ABC путем их наложения (так, чтобы совпали их высоты или углы при вершинах).

Завершается построение треугольников группой задач, решение которых начинается с некоторого вспомогательного треугольника, достраиваемого затем до искомого. Анализ решения этих задач сложнее предыдущих. Поэтому на чертеже-наброске нужно отчетливо выделять заданные элементы. Рассмотрим примеры. Первая задача:

Построить треугольник по сторонам, равным 2,5 см и 5 см, и медиане, проведенной к меньшей стороне и равной 4,5 см.



Черт. 71



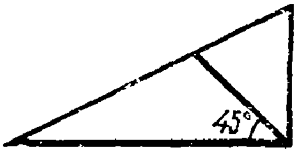
Черт. 72

Учащиеся чертят от руки треугольник, в котором по возможности выдержаны данные размеры, проводят в нем медиану основания и выделяют на чертеже заданные элементы (черт. 71). (Такой же чертеж выполняется на доске.) Затем учитель предлагает выяснить, имеется ли на чертеже треугольник, который может быть построен (черт. 72) по данным элементам, как этот треугольник может быть достроен до искомого? Итак, план решения задачи наметился.

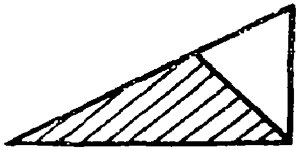
Вторая задача:

Построить прямоугольный треугольник по данному катету, равному 6,5 см, и биссектрисе прямого угла, равной 4,2 см.

Для нахождения плана решения ученики чертят прямоугольный треугольник, проводят в нем биссектрису прямого угла, выделяют заданные элементы (черт. 73),



Черт. 73



Черт. 74

затем отыскивают треугольник, который может быть построен (черт. 74), выясняют, как этот треугольник достраивается до искомого.

Способы построения и признаки равенства треугольников используются и при решении задач на четырехугольники. Например, после построения треугольников по трем сторонам учащимся предлагается:

Построить четырехугольник, равный данному (см. *черт. 2*).

Указание: провести диагональ четырехугольника. (Предварительно решается задача, где приходится снимать нужные размеры с чертежа.)

Таким образом, решение задачи сводится к построению двух треугольников по трем его сторонам.

Эта же задача может быть решена при помощи построения не только отрезков, но и углов, равных данным (см. черт. 37). В этом случае используются транспортир и линейка или циркуль и линейка. При построении четырехугольников, равных данным, представляет интерес рассмотрение различных приемов решения предложенных задач. С этой целью удобно на доске начертить несколько возможных случаев задания элементов, по которым можно построить искомый многоугольник (вспомогательные треугольники, см. черт. 37), и продумать, как в каждом случае будет решаться задача. Выполнение построений при этом не обязательно. Работа в этом случае преследует цель развить сообразительность учащихся и их умение представлять чертеж с проведенными на нем вспомогательными линиями.

Проекция отрезка на прямую

Завершается раздел «Треугольники» введением понятия проекции отрезка на прямую.

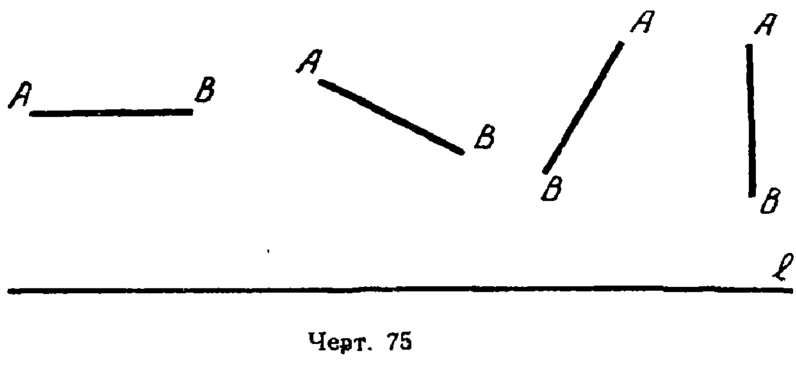
Основные упражнения, решаемые здесь учащимися, связаны с проведением перпендикулярных прямых и предназначены для закрепления этого практически нужного приема, а также понятия проекции отрезка.

Так же как и при построении симметричных точек, построение проекций отрезков проводится учащимися при различных положениях оси проекции и проектируемого отрезка.

При построении проекций отрезков внимание учащихся обращается на то, что проекция отрезка зависит от его наклона к оси проекций (в VIII классе это положение может быть доказано).

К этому выводу учащиеся могут прийти, сравнивая проекции равных отрезков на одну и ту же ось, например:

Построить проекции равных отрезков, расположив их так, как это указано на черт. 75.



Черт. 75

Отмечается также, что проекция отрезка, перпендикулярного оси проекции, есть точка.

Затем предлагается более сложная задача:

Построить проекции сторон AB и BC треугольника ABC на сторону AC (или на ее продолжение).

Рассмотреть случаи, когда треугольник ABC:
а) остроугольный,
б) *прямоугольный, $\angle B$ прямой,*
в) *прямоугольный, $\angle C$ прямой,*
г) *тупоугольный, $\angle C$ тупой.*

В этом же разделе решается несколько задач на построение и измерение углов и отрезков, например:

Из точки, взятой на расстоянии 7,5 см от прямой, проведены к ней две наклонные, длины которых равны 10 см и 8,5 см. Измерить расстояние между основаниями наклонных.

Задача имеет два решения. В заключение могут быть заданы вопросы:

Когда аналогичная задача будет иметь одно решение?

В каком случае задача не имеет решения?

Каково наибольшее возможное число решений задачи?

§ 14. Параллельность

При изучении этой темы учащиеся, помимо определенных сведений по теории, должны познакомиться с некоторыми практическими приемами выполнения построений параллельных прямых, научиться проводить обоснование рассматриваемых построений.

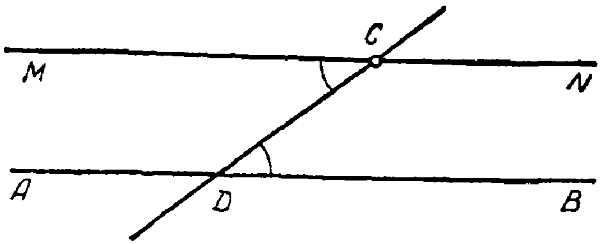
С этой целью учащимся предлагаются такие задания:

Через данную точку провести прямую, параллельную данной прямой, при помощи
а) *чертежного треугольника и линейки,*
б) *транспортира и линейки.*

Построение параллельных прямых транспортиром и линейкой осуществляют следующим образом. Через данную точку C проводится произвольная прямая CD, пересекающая прямую AB в некоторой точке D

(черт. 76). Затем при точке C строится при помощи транспортира угол MCD, равный углу CDB. Прямая MC будет параллельна прямой AB.

Могут быть и другие варианты построения, основанные на признаках параллельности прямых, однако их рассмотрением не следует увлекаться, так как на практике они, как правило, не используются, а представляют интерес лишь для упражнения в применении признаков параллельности.



Черт. 76

Здесь же с учащимися рассматривается обоснование некоторых практических приемов построения. Один из них приводится в задачнике по геометрии:

> *На чертеже* 85 показано несколько приемов построения параллельных прямых (рейсшина, чертежный треугольник и линейка, столярный угольник). Объяснить, почему прямые а, в, с будут параллельны.*

Умение строить *параллельные* прямые (чертежным треугольником и линейкой) затем закрепляется при решении разнообразных задач, причем на первых порах эти построения могут выполняться для некоторых задач на вычисление и на доказательство. Например (задача предшествует изучению теоремы о сумме внутренних углов треугольника):

> *В треугольнике ABC $\angle A = 42°$, $\angle B = 67°$. Найти величину угла C.*
>
> Указание: через вершину C провести прямую, параллельную стороне AB.

* Н. Н Никитин, Г. Г. Маслова. Сборник задач по геометрии для VI—VIII классов восьмилетней школы. М., Учпедгиз, 1961.

При изучении свойства внешнего угла треугольника и теоремы о сумме его внутренних углов решается довольно много задач на вычисление и доказательство. В некоторых случаях для решения задачи является очень важным, насколько верно выполнен чертеж, например:

В треугольнике ABC $\angle A = 35°$, $\angle B = 68°$. Через вершину B проведена внутри треугольника прямая BD так, чтобы $BC = CD$ (точка D лежит на стороне AC). Найти меньший из углов, вершины которых находятся в точке D.

Если медиана треугольника, проведенная к большей его стороне, равна ее половине, то треугольник прямоугольный. Доказать.

В треугольнике ABM $\angle A = 42°$, $\angle B = 86°$. Через вершины A и B проведены прямые, параллельные противоположным сторонам треугольника, до их взаимного пересечения. Определить меньший угол, образованный этими прямыми.

В треугольнике ABC $\angle A = 48°$, $\angle B = 56°$. На продолжении AC отложены отрезки CE и AD так, что $BC = CE$ и $AD = AB$. Определить углы образовавшегося треугольника BDE.

В этих случаях следует рекомендовать, если учащиеся не могут достаточно хорошо выдерживать на глаз требуемые соотношения, пользоваться при построениях инструментами.

Число задач на построение треугольников в этих разделах относительно невелико. И по содержанию и методам решения они мало чем отличаются от ранее разобранных.

Рассматриваются, например, такие задачи:

Построить прямоугольный треугольник

а) *по катету, равному 6 см, и противолежащему углу, равному 65°;*

б) *по гипотенузе, равной 7 см, и острому углу, равному 42°.*

Эти же задачи затем даются в общем виде:

Построить прямоугольный треугольник

а) *по катету a и противолежащему углу α;*

б) *по гипотенузе c и острому углу.*

В последних задачах выясняется, какими могут быть a, b, α, A.

Анализа чертежа требуют уже такие задачи, как:

Построить равнобедренный прямоугольный треугольник по его гипотенузе.

Прежде всего необходимо найти такие элементы, по которым он может быть построен. Ученики обычно сами приходят к выводу, что у прямоугольного равнобедренного треугольника углы при его основании равны, причем каждый из них равен 45°. Таким образом, данная задача сводится к уже известной: *построить треугольник по стороне и прилежащим к ней углам.*

Следует заметить, что построения углов в 45° могут быть проведены не только при помощи транспортира, но и чертежного треугольника с острыми углами в 45° и линейки (черт. 77).

Черт. 77

Полезно рассмотреть и другое решение, которое обычно предлагают сами учащиеся: равнобедренный треугольник делится высотой на два равных прямоугольных треугольника, в которых известны оба катета, следовательно, они могут быть построены.

Сравнивая эти два решения, нужно выяснить, почему первое решение удачнее второго (меньшее число операций, бóльшая точность решения, меньшее время, затрачиваемое на выполнение построения); сколько решений имеет задача (показать, что в обоих случаях имеется одно решение).

Такого рода задачи на построение помогают учащимся прочнее усвоить соотношения между элементами треугольников. Например:

Построить равносторонний треугольник по данной его высоте.

Здесь же может быть рассмотрена следующая интересная задача (доказательство ее решения проводится на основании признака равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и катету):

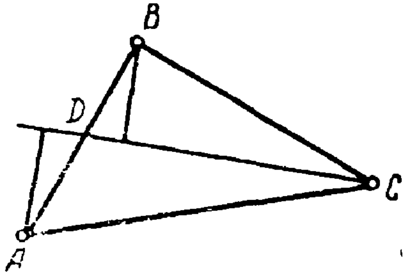
Даны точки A, B и C, не лежащие на одной прямой. Через точку C провести прямую так, чтобы отрезки перпендикуляров, проведенных из точек B и A к этой прямой до пересечения с ней (расстояния от точек B и A до прямой), были бы равны между собой.

Иная формулировка:

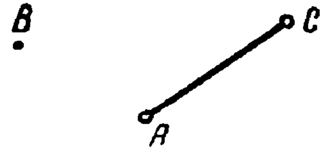
Через данную точку C провести прямую, одинаково удаленную от двух других точек A и B.

Эта задача по постановке вопроса довольно трудная для учащихся, поэтому перед ее решением могут быть рассмотрены подготовительные задачи:

В треугольнике ABC через вершину C проведена медиана CD. Доказать, что высоты треугольников DBC и DAC, проведенные из вершин A и B, равны между собой (черт. 78).



Черт. 78



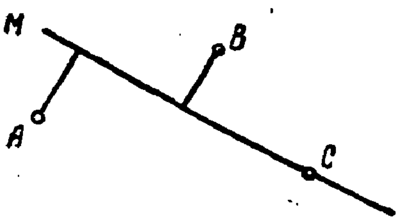
Черт. 79

В треугольнике ABC через вершину C и середину D стороны AB проведена прямая. Доказать, что точки A и B находятся на одинаковом расстоянии от прямой CD.

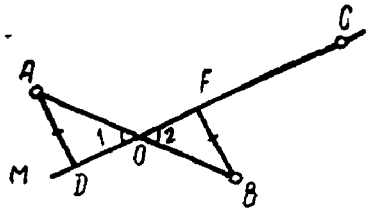
Затем может быть дана такая задача на построение:

Через данную точку B провести прямую, находящуюся на одинаковом расстоянии от концов данного отрезка AC (черт. 79).

И наконец подходим к решению нужной нам задачи на построение. Для отыскания плана ее решения можно поступить таким образом: на доске изобразить чертеж к задаче на доказательство (черт. 78), а затем рядом с ним (черт. 80) — условие задачи на построение. Если провести прямую CM (чертеж-набросок) и через точки A



Черт. 80



Черт. 81

и B провести к ней перпендикуляры, то уже простое сравнение чертежей подскажет решение.

В некоторых случаях достаточно спросить учащихся, проводилось ли ранее построение, в котором бы упоминались элементы, указанные в этой задаче.

Можно эту задачу рассматривать и без такой подготовительной работы, но тогда анализ необходимо проводить более подробно.

Предположим, что CM — прямая, удовлетворяющая условию задачи (черт. 81). Следовательно, отрезки перпендикуляров, проведенных через точки A и B к прямой CM, равны. Соединим точки A и B отрезком прямой и рассмотрим полученные треугольники AOD и OFB. Они равны, как прямоугольные, имеющие по равному катету и острому углу: $\angle 1 = \angle 2$, как вертикальные углы; следовательно, $AO = OB$, как гипотенузы равных прямоугольных треугольников.

Отсюда следует построение: соединяем точки A и B и через середину отрезка AB, точку O, проводим прямую CO, которая является искомой. Доказательство правильности построения после проведения анализа уже не вызывает затруднения.

Определение числа решений не является обязательным в данной задаче, однако об этом полезно побеседовать с учащимися (не проводя доказательства). Также интересно выяснить, всегда ли задача имеет решение.

твет на этот вопрос можно обосновать примерно так: ля решения задачи необходимо провести прямую через точку C и середину отрезка AB. Это всегда возможно, следовательно, задача всегда имеет решение.

Несколько позже можно предложить такое задание:

Провести прямую, находящуюся на равном расстоянии от двух данных точек.

Возможно, что ученики сами догадаются, что задача имеет бесчисленное множество решений. Если же это будет для них трудно, то можно поступить следующим образом: вначале повторить решение предыдущей задачи (черт. 81), а затем спросить, как изменится решение задачи, если отбросить условие, что искомая прямая должна проходить через точку C.

Очевидно, в этом случае прямая должна пройти обязательно через одну точку (середину отрезка AB) и, следовательно, задача будет иметь бесчисленное множество решений.

На примере последней задачи легко заметить, как исключение одного из условий превращает ее в неопределенную.

При изучении параллельных прямых учащиеся также знакомятся с новыми приемами построения перпендикулярных прямых, которые затем используются при повторении материала в VI и старших классах. Основные из этих задач указаны в § 5.

Внешний угол треугольника

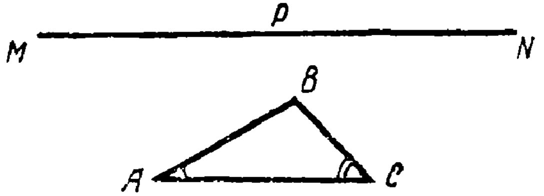
Задач на построение, доступных для учащихся VI класса, в которых используется свойство внешнего угла треугольника, очень мало. Поэтому мы ограничимся рассмотрением лишь одной задачи.

Построить треугольник по двум его углам и периметру.

Решение задачи должно быть сообщено самим учителем как пример того, каков иногда может быть ход мысли у решающего. Эта задача может быть также использована и на занятиях кружка.

Вначале учитель на доске изображает искомый треугольник ABC, отмечает данные углы ($\angle A$ и $\angle C$, черт. 82) и выясняет, что по сути в задаче даны все три угла треугольника (третий угол всегда может быть найден, так как сумма углов треугольника известна.

На только что изображенном чертеже еще не указано третье данное — периметр треугольника:



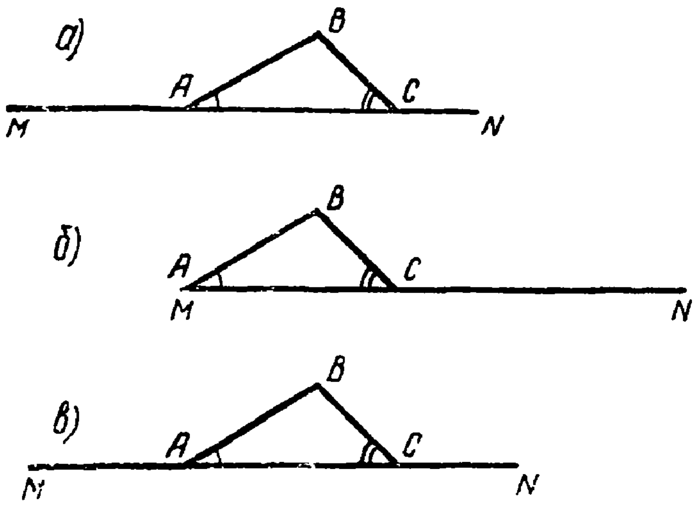
Черт. 82

$$P = AB + BC + AC \text{ или } P = a + b + c.$$

Очевидно, что надо каким-то образом связать отрезок MN, равный периметру этого треугольника, с чертежом самого треугольника.

По-видимому, этот отрезок не должен ни пересекать треугольника ABC (выполняется соответствующее построение), ни находиться вне его, ни проходить только через его вершину, так как в этом случае положение его относительно треугольника не будет определено и мы не сможем установить искомых связей.

Очевидно, отрезок, равный периметру (MN), должен лежать на прямой, на которой лежит какая-либо из сторон треугольника (пусть AC).



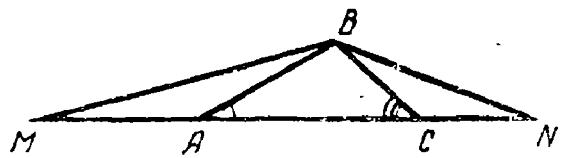
Черт. 83

На какой именно — безразлично, так как можно считать, что все углы треугольника известны.

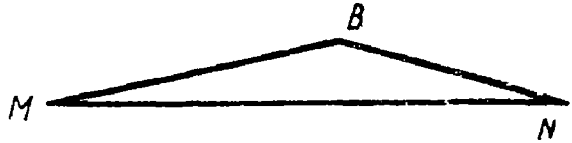
Теперь остается определить, как удобнее поместить на этой прямой отрезок, равный периметру. Очевидно, что может быть сделано по-разному, например как указано на черт. 83,*а,б,в*.

Первый из этих чертежей нам ничего не дает, так как положение начала и конца отрезков MN неопределенно, во втором случае положение отрезка MN более определенно относительно треугольника ABC, но связать отрезок MN и стороны не удается.

Попробуем отрезок MN расположить так, как указано на черт. 83, *в*, на котором $MA = AB$ и $BC = CN$. Соединим точку B с точками M и N (черт. 84), получим треугольник MBN.



Черт. 84



Черт. 85

Можно ли его построить? В нем известно основание MN. Какие еще его элементы могут быть найдены?

В условии задачи были даны углы. Может быть, можно найти по этим углам углы треугольника MBN?

Затем выясняется, что $\angle M = \frac{1}{2} \angle A$ и $\angle N = \frac{1}{2} \angle C$.

Таким образом, оказывается, что $\triangle MBN$ может быть построен. Допустим, этот треугольник MBN построен (черт. 85). Как теперь построить искомый треугольник?

Как можно найти положение вершины A? Может быть, для ее отыскания можно воспользоваться тем, что треугольник ABM равнобедренный?

В своих рассуждениях учитель может использовать ответы учащихся на некоторые из поставленных им вопросов.

После того как найдены вершины A и C и построен треугольник ABC, следует доказать, что треугольник ABC является действительно искомым.

Затем учащимся предлагается решить эту задачу с конкретными данными, например:

Построить треугольник по двум его углам 60° и 40° и периметру, равному 15 см.

Построить прямоугольный треугольник по периметру и острому углу.

Построить равнобедренный треугольник по углу при основании (или при вершине) и периметру.

Некоторые из этих задач могут быть перенесены в повторение.

Следует заметить, что при решении разобранной выше задачи довольно трудным для учащихся оказывается *один из последних* этапов решения — отыскание вершин A и C. Поэтому, если учитель будет рассматривать эту задачу в классе, необходимо, чтобы учащиеся не только хорошо уяснили свойство перпендикуляра, проведенного к отрезку через его середину, но и были знакомы с решением вспомогательных задач.

Повторение

Как видно из изложенного выше материала, в VI классе при решении задач на построение используется: понятие симметрии относительно прямой, свойства высот и биссектрис углов треугольника, равенство треугольников, первоначальные представления о геометрических местах точек (без употребления этого термина).

Используются и отдельные методы решения задач: метод симметрии; метод введения новых вспомогательных фигур (треугольников), построение которых выполняется непосредственно; метод спрямления; метод геометрических мест.

Как уже указывалось выше, эти методы построения отдельно не выделялись и не изучались именно как методы построения.

В конце учебного года целесообразно повторить весь этот материал.

Так, например, методом симметрии могут быть решены такие задачи:

> *Через точку, данную на биссектрисе угла, провести прямую так, чтобы она отсекала на сторонах угла равные отрезки.*
>
> *Через точку, данную внутри угла, провести прямую, отсекающую на сторонах угла равные отрезки.*

Первая из этих задач, возможно, решалась ранее. Ко второй задаче (после того как решена первая) ученикам могут быть предложены вспомогательные вопросы:

Решалась ли задача с аналогичным условием? Являлась ли ранее решенная задача общим или частным случаем этой задачи? Где находилась данная точка? (На доске может быть сделан чертеж, соответствующий условию этой задачи.)

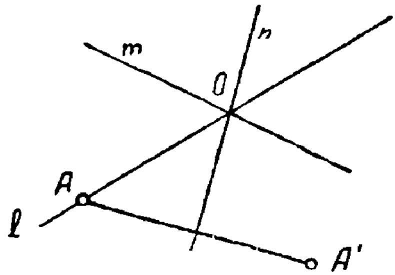
Может ли быть решена эта задача так же, как была решена предыдущая задача? (Учащиеся сами должны вспомнить, **как** решалась предыдущая задача). Заканчивается разбор выяснением числа решений. Достаточно, если учащиеся скажут, что задача имеет одно решение, так как через точку можно провести лишь одну прямую, перпендикулярную данной прямой.

Для внеклассных занятий или для сильных учащихся можно рекомендовать более трудную задачу, также решаемую при помощи симметрии:

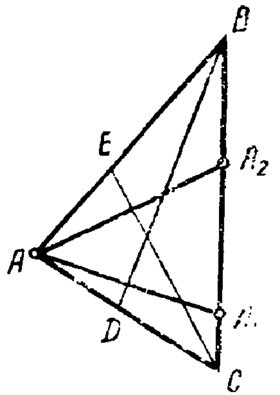
> *Даны три прямые l, m и n, пересекающиеся в одной точке, и точка A, лежащая на одной из них. Построить треугольник так, чтобы его вершина находилась в точке A, а его биссектрисы лежали бы на прямых l, m и n (черт. 86).*

Аналогичная по содержанию задача была рассмотрена при знакомстве учащихся со свойством высот треугольников. Но методы решения их совершенно различны. На примере этих двух задач учащимся может быть показано, что не всегда аналогия в содержании приводит к аналогии в методах решения.

Рассмотрим решение этой задачи. Прежде всего начертим треугольник (лучше разносторонний) и проведем в нем биссектрису какого-либо угла, например угла B (черт. 87). Так как биссектриса BD угла B является его осью симметрии, то точка A_1, симметричная точке A относительно биссектрисы BD, лежит на стороне BC



Черт. 86



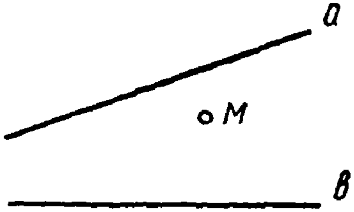
Черт. 87

(или на ее продолжении). Теперь проведем биссектрису угла C и аналогично получим, что точка A_2, симметричная точке A относительно биссектрисы CE, также лежит на стороне BC (или на ее продолжении). Таким образом, прямая, на которой лежит сторона BC, известна, она определяется точками A_1 и A_2. Вершины B и C лежат на прямых, на которых находятся биссектрисы углов B и C. Таким образом, они легко находятся как точки пересечения прямой A_1A_2 и соответствующих прямых. Отсюда уже ясен план решения данной задачи.

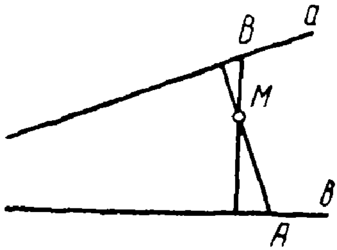
На применение свойств высот треугольников также можно предложить интересную задачу:

Через данную точку M провести прямую, проходящую через недоступную точку пересечения прямых a и b (черт. 88).

Для ее решения через точку M проводят прямые, перпендикулярные прямым a и b (черт. 89). Отрезки, заключенные между прямыми a и b, могут быть приняты за высоты треугольника, вершины которого A и B известны (отрезок AB — сторона треугольника), а вершина C находится вне чертежа. Затем через точку M проводится прямая, перпендикулярная AB. Эта прямая и будет искомой.



Черт. 88



Черт. 89

Доказательство правильности построения выполняется методом «от противного».

Решение задач при помощи предварительного построения вспомогательных фигур повторяется в таких задачах, как, например:

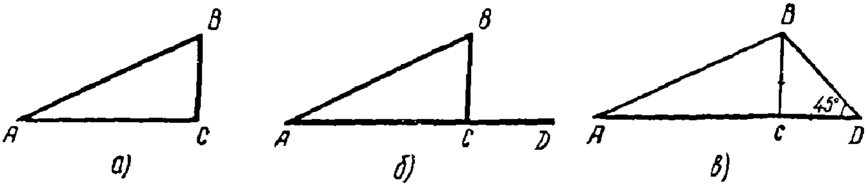
Построить треугольник по стороне, прилежащему к ней углу и высоте, проведенной из вершины этого угла.

Но здесь же могут быть разобраны и более сложные задачи. Например:

Построить прямоугольный треугольник по гипотенузе и сумме двух катетов.

Интересно, что здесь вспомогательный треугольник не достраивается до искомого, а наоборот, искомый треугольник является частью вспомогательного.

Анализ решения задачи может быть проведен таким образом: вначале от руки выполняется чертеж искомого треугольника (черт. 90,*а*) и на нем отмечаются данные



Черт. 90

элементы. Легко, например, выделяется заданная гипотенуза. А как же показать, что задана с у м м а двух катетов?

Для этого продолжим катет AC на длину катета BC (черт. 90,*б*).

Теперь перед учащимися ставится вопрос: можно ли по заданным элементам построить некоторый вспомогательный треугольник, который был бы каким-то образом связан с искомым треугольником? Учащиеся обычно предлагают построить треугольник с вершинами в точках A, B и D.

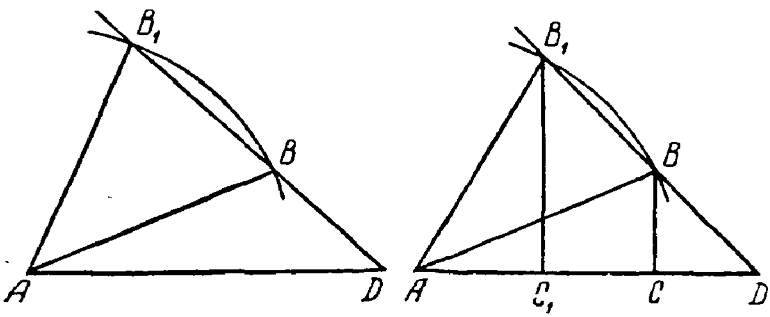
Для построения треугольника необходимо иметь три элемента, а пока имеется лишь две стороны AB и AD. Может быть, рассматривая чертеж, можно найти еще один угол?

Как правило, учащиеся сами находят (из прямоугольного треугольника BCD), что $\angle ADB = 45°$.

Таким образом, треугольник ABD может быть построен. Но нам нужно построить треугольник ABC, у которого $\angle ACB = 90°$. Как его можно построить, имея треугольник ABD?

Этот вопрос (особенно если на доске последовательно изображены приведенные выше рисунки) не вызывает у учащихся трудностей, и на доске изображается последний этап решения (черт. 90, *в*).

После того как найден план решения задачи, переходят к построению (*черт. 91*). *Строят угол в 45° и на*



Черт. 91

одной из его сторон от вершины угла D откладывают отрезок AD, равный сумме двух катетов. Затем из точки A, как из центра, описывают дугу, равную заданной длине гипотенузы, которая пересечет вторую сторону угла в двух точках B и B_1 (рассматривается общий случай, когда прямая пересекает окружность в двух точках). Таким образом, оказывается, что в результате решения по выбранному плану получаем два треугольника $\triangle ABC$ и $\triangle AB_1C_1$. Каждый ли из них является решением задачи?

Очень полезно, если учащиеся сумеют доказать равенство этих треугольников и тем самым покажут, что задача имеет единственное решение. Доказательство этого положения по содержанию используемого там материала вполне доступно учащимся VI класса. Недостаток его заключается лишь в том, что это доказательство длинно. В связи с этим оно не может считаться обязательным для всех учащихся.

Для закрепления рассмотренного приема решения ученикам может быть предложена такая же задача, но с числовыми данными или несколько видоизмененная, например:

Построить прямоугольный треугольник по углу в 40° и сумме двух катетов, равной 10 см.

Построить прямоугольный треугольник по данной его гипотенузе и разности двух катетов.

При решении последней задачи рекомендуется вспомнить: Решалась ли ранее задача со сходным условием? В чем заключался использованный тогда прием? Можно ли его применить сейчас?

Задачи, решаемые при повторении с использованием понятия геометрического места точек, указаны в § 7.

Глава IV

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ В VII КЛАССЕ

§ 15. Общие положения

В VII классе продолжается работа по закреплению у учащихся навыков в выполнении построений, рассматриваются приемы решения некоторых задач, часто встречающихся в чертежно-конструкторской практике (деление дуги окружности, проведение касательных к окружности). Эти приемы используются затем при решении задач на построение.

Очень важно, чтобы учащиеся владели техникой выполнения построений, рассмотренных в VI классе. Поэтому в начале учебного года при решении задач по новому материалу обращается внимание на то, как учащиеся выполняют построения при помощи инструментов.

Выбор задач, решаемых при этом, должен обеспечить не только повторение необходимых приемов построений (построение параллельных и перпендикулярных прямых при помощи чертежного треугольника и линейки, при помощи циркуля и линейки; деление отрезка и угла пополам при помощи циркуля и линейки; построение угла, равного данному, при помощи циркуля, линейки и транспортира), но и подготовку учащихся к решению задач первой темы курса геометрии VII класса. С этой целью предлагаются такие задачи:

Построить треугольник по трем сторонам (подготовительная задача к построению параллелограмма по двум сторонам и диагонали).

Построить треугольник по двум сторонам и углу между ними (подготовительная задача к построению параллелограмма по двум сторонам и углу между ними).

Построить прямоугольный треугольник по двум катетам (подготовительная задача к построению прямоугольника по двум сторонам).

Построить треугольник по катету и гипотенузе (подготовка к задаче: *построить прямоугольник по стороне и диагонали*).

Для повторения свойств симметрии решаются задачи:

Построить точку, симметричную данной относительно данной оси симметрии.

Построить отрезок, симметричный данному относительно данной прямой.

Построить треугольник, симметричный данному прямоугольному треугольнику относительно а) одного из его катетов, б) его гипотенузы.

Построить треугольник, симметричный данному равнобедренному треугольнику относительно его основания.

Как и в VI классе, при решении задач по материалу VII класса вначале предлагаются задачи на построение с конкретными данными (например, отрезки даются уже начерченными или задаются их длины), а затем в общем виде.

При этом учащиеся лучше осмысливают построение искомой фигуры. Кроме того, облегчается первый этап в обучении исследованию решений (определяется число решений, не затрагивая зависимость его от соотношений между величинами заданных элементов).

Предлагаются задачи, в которых искомые величины получаются после выполнения соответствующих построений и измерений.

Приближенные приемы решения задач на построение в VII классе рассматриваются, как в VI классе, только в связи с программным материалом: перед изучением точного приема деления отрезка на равные части повторяются приемы приближенного деления, а в теме «Окружность» рассматривается деление окружности и ее дуги на равные части.

§ 16. Четырехугольники

Параллелограмм, прямоугольник, квадрат, ромб

Перед решением задач на построение параллелограмма вводится понятие центральной симметрии. Затем, как и при введении понятия осевой симметрии в VI классе, это понятие закрепляется при построении центрально-симметричных фигур. Решаются, например, такие задачи:

Построить точку, центрально-симметричную данной точке относительно данного центра симметрии.

Построить отрезок, центрально-симметричный данному отрезку относительно данного центра симметрии.

Построить фигуры, центрально-симметричные данным относительно данного центра симметрии.

Построить треугольник, симметричный данному относительно середины его какой-либо стороны.

Предлагаются задачи на построение центров симметрии центрально-симметричных фигур.

Например:

Построить центр симметрии двух данных точек.

Построить центр симметрии данного отрезка.

Построить центр симметрии двух пересекающихся прямых.

Эти задачи способствуют усвоению учащимися понятия центральной симметрии, которое затем неоднократно используется при построении параллелограммов, точнее, при достраивании треугольников до параллелограммов.

Большое значение для выработки навыков в обращении с инструментами, а следовательно, и в подготовке учащихся к практической деятельности в VII классе имеют задачи на графическое определение числовых значений тех или иных элементов геометрических фигур. Это те же задачи на построение, но с включением простейших измерительных работ. При их решении широко используются масштабная линейка, чертежный треугольник, транспортир, т. е. как раз те инструменты, которыми ученики VII класса в настоящее время не владеют достаточно свободно.

Предлагаются, например, такие задачи:

Построить параллелограмм по двум сторонам, равным 3 см и 6 см, и углу между ними, равному 40°. Измерить его бо́льшую высоту.

Построить параллелограмм по его диагоналям, равным 12 см и 8 см, и углу между ними, равному 35°. Измерить его высоты.

Построить ромб по его стороне, равной 5 см, и углу, равному 50°. Измерить его высоту.

Число задач для графического решения не должно быть большим, с тем чтобы не принижать в глазах учащихся значение вычислений.

С целью лучшего уяснения учащимися соотношений между элементами геометрических фигур решаются так называемые задачи «на положение». Например:

Дан отрезок AB и точка M вне его. Построить параллелограмм так, чтобы одной из его сторон был отрезок AB, а точка M являлась точкой пересечения его диагоналей.

Дан отрезок AB и точка M вне его. Построить параллелограмм, одна из сторон которого совпадала бы с отрезком AB, а другая делилась бы точкой M пополам.

Даны три точки, не лежащие на одной прямой. Построить параллелограмм так, чтобы его вершины находились в данных точках. Сколько решений имеет задача?

Начертить прямую и на ней отметить отрезок AB. Построить квадрат так, чтобы отрезок AB

а) был стороной квадрата,

б) был диагональю квадрата.

Начертить прямую и на ней отложить отрезок АВ. Построить прямоугольник, диагональ которого совпала бы с отрезком АВ и составила с боковой стороной угол, равный 40°.

Построить параллелограмм так, чтобы середины трех его сторон находились в трех данных точках. Сколько решений имеет задача?

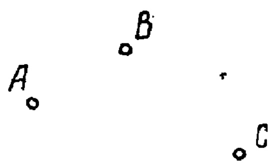
Эти задачи, как и предыдущие, не рассматриваются как типовые. Здесь же они выделены с тем, чтобы можно было показать определенную последовательность в нарастании их сложности.

Для одних задач план решения очевиден или сравнительно легко находится при анализе, для других — целесообразно воспользоваться вспомогательными задачами.

Так, например, перед решением последней задачи можно предложить учащимся следующее:

Доказать, что середины двух противоположных сторон параллелограмма являются центрально-симметричными точками относительно центра симметрии параллелограмма.

Доказать, что отрезок, соединяющий середины противоположных сторон параллелограмма, проходит через центр симметрии параллелограмма и делится в нем пополам.



Черт. 92

Конечно, эту задачу можно (и даже интереснее) решить без указанных вспомогательных задач, на основании анализа чертежа искомой фигуры.

Для более четкого уяснения учащимися проводимых рассуждений им может быть предложена задача:

Построить прямоугольник так, чтобы середины его двух противоположных сторон находились в двух данных точках, а третья сторона (или ее продолжение) проходила через третью данную точку (черт. 92). Сколько решений имеет задача?

Более сильным ученикам можно предложить выяснить, можно ли по аналогичному условию построить ромб? Всегда ли задача будет иметь решение? Как аналогичную задачу нужно сформулировать для построения квадрата?

С целью повторения серии задач, решавшихся в VI классе (см. § 14), могут быть рассмотрены и такие задачи *:

Даны три точки: провести через них параллельные прямые a, b и c так, чтобы расстояния между ними были равны.

(Задача эта легко сводится к уже решенной в VI классе, см. § 14.)

В заключение может быть предложена такая задача:

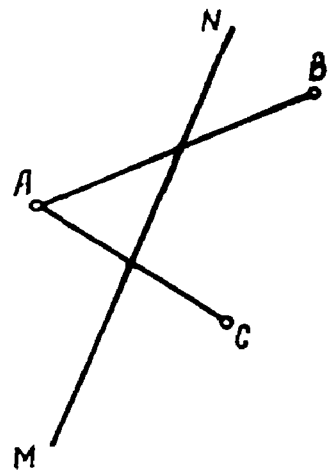
Провести прямую, находящуюся на равных расстояниях от трех данных точек (данные три точки не лежат на одной прямой). Сколько решений имеет задача?

План решения легко может быть найден, если предварительно повторить задачу, рассмотренную в VI классе:

Провести прямую, одинаково удаленную от двух данных точек.

Тогда рассуждение ведется таким образом: пусть надо найти прямую, одинаково удаленную от точек A и B (черт. 93). Очевидно, этому условию будет удовлетворять любая прямая, проходящая через середину отрезка AB.

Но эта же прямая должна быть одинаково удалена от точек C и A. Значит, она пройдет через середину отрезка AC.



Черт. 93

* Расстояние от точки до прямой рассматривается в соответствии с новой программой в VI классе. При изучении свойств прямоугольника это понятие повторяется.

Какая же прямая будет одинаково удалена от точек A, B и C? Очевидно, прямая, проходящая через середины отрезков AB и AC.

Затем ученикам предлагается доказать правильность построения.

Доказательство проводится на основании равенства двух пар прямоугольных треугольников или же оно сводится к ранее рассмотренной задаче.

Прямая MN проходит через середину отрезка AB, следовательно, она одинаково удалена от точек A и B, кроме того, она проходит через середину отрезка AC... и т. д. Оба доказательства являются равноценными.

Затем ученикам предлагается найти, сколько решений имеет эта задача. Если имеется чертеж, на котором обозначены данные точки и проведена прямая MN (черт. 93), то ученики довольно быстро отвечают, что всего будет три решения. К решению этой задачи полезно возвратиться и при изучении средней линии треугольника (см. стр. 109).

Задачи на построение ромба, рассматриваемые в VII классе, *являются* во многих случаях повторением задач на построение параллелограмма и прямоугольных треугольников, лишь с некоторым изменением условий.

Принципиально новыми задачами являются задачи на построение, выполняемые только одной двусторонней линейкой, т. е. обычной линейкой с параллельными сторонами.

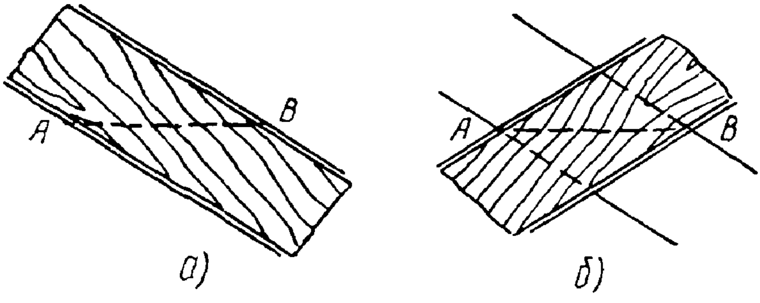
Эти построения иногда используются на практике; но представляют они интерес главным образом потому, что на их примере раскрываются возможности нового для учащихся чертежного инструмента и применяются свойства ромба для обоснования построений.

Прежде всего рассматривается задача:

Построить ромб, одной из диагоналей которого является данный отрезок (отрезок должен быть больше ширины линейки).

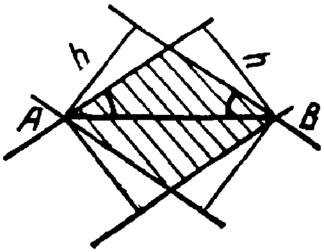
Последовательные этапы решения этой задачи даны на черт. 94.

Конечно, сами учащиеся не смогут самостоятельно указать решение, так как и инструмент и прием его использования для них совершенно новы.

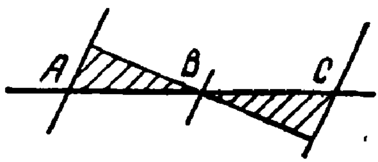


Черт. 94

Эта первая задача разбирается в классе (обычно самим учителем). Доказательство решения дается на основании того, что диагональ полученного четырехугольника образует равные углы со всеми его сторонами. Это следует из равенства прямоугольных треугольников, у которых равны гипотенузы (данный отрезок) и катеты (ширина линейки), см. черт. 95.



Черт. 95



Черт. 96

После этого учащиеся смогут самостоятельно решить некоторые задачи на построение, используя в качестве единственного инструмента двустороннюю линейку. Приведем несколько таких задач:

Разделить данный отрезок пополам.

На данном отрезке, как на диагонали, строится ромб. Точки пересечения его диагоналей определят искомую точку.

Через середину данного отрезка провести прямую, перпендикулярную ему.

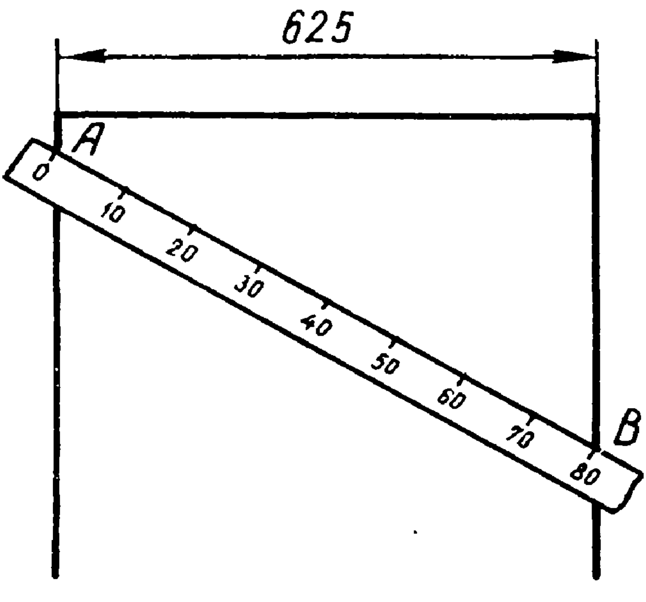
Через данную на прямой точку провести к ней перпендикуляр.

К последней задаче дается указание: с помощью линейки с параллельными краями отложить на данной прямой от данной точки два равных отрезка AB и BC (черт. 96), а затем на отрезке AC как на диагонали построить ромб.

Учащиеся могут самостоятельно доказать, что эти отрезки (AB и BC) равны как гипотенузы равных треугольников (заштрихованы на черт. 96), у которых равны углы и катеты, лежащие против этих углов (ширина линейки).

Свойство отрезков, отсекаемых параллельными прямыми

Перед тем как рассмотреть точный способ деления отрезка на равные части, повторяют приближенный прием решения этой задачи методом проб. После изучения точного способа выполняется несколько упражнений обычного характера. Затем учащимся предлагается один из практических приемов деления отрезка на равные части, иногда используемый при разметке и выполнении чертежных работ; *пусть надо разделить прямоугольную полосу шириной 625 мм на 8 равных частей* (черт. 97). На полосу налагают линейку или



Черт. 97

рейсшину так, чтобы длина отрезка линейки нацело делилась на 8. Пусть, например, на прямой AB в точке A будет нулевое деление, а точке B будет соответствовать деление, равное 800 *мм*. От точки A (или B) отмечают через каждые 100 *мм* точки и через них проводят прямые, параллельные краям полосы. Все полученные таким образом полосы будут иметь одинаковую ширину.

Конечно, можно было бы просто разделить отрезок длиной 625 *мм* на 8 и отложить 8 раз по краю полосы полученный отрезок или одним циркулем путем проб разделить отрезок в 625 *мм* на 8 равных частей.

Этот прием является одним из примеров практического применения деления отрезка на равные части. Он может быть использован учащимися при выполнении различных работ, в частности при решении задач на деление отрезков в заданном отношении.

Средняя линия треугольника

Решение небольшого числа задач по этому разделу имеет целью лучшее усвоение понятия средней линии треугольника.

Интересной с этой точки зрения является такая задача:

Построить треугольник, зная середины трех его сторон. (Положение трех данных точек задается.)

Понятие средней линии треугольника может быть использовано при решении задачи, которую мы уже рассмотрели раньше в этом параграфе:

Провести прямую, находящуюся на равных расстояниях от трех данных точек.

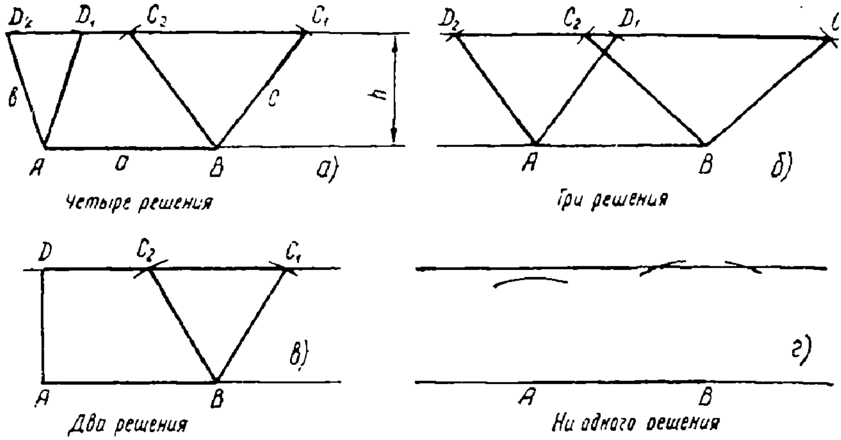
Перед решением этой задачи полезно предложить учащимся следующую задачу на доказательство:

Доказать, что все вершины треугольника одинаково удалены от прямой, проходящей через середины двух сторон треугольника.

Трапеция

При изучении трапеции число задач на построение довольно значительно, основная цель их решения — закрепить важнейшие свойства трапеции, повторить ранее рассмотренные способы построения и познакомить учащихся с некоторыми новыми приемами.

При составлении задач на построение трапеций следует очень внимательно подходить к заданию элементов, так как во многих случаях эти задачи будут иметь большое число решений. Это может вызвать у учащихся на первых порах значительные трудности. Так, например, приведенная ниже задача в зависимости от величин заданных элементов может иметь четыре, три, два или ни одного решения (черт. 98):



Черт. 98

Построить трапецию по основанию a, высоте h и двум боковым сторонам b и c.

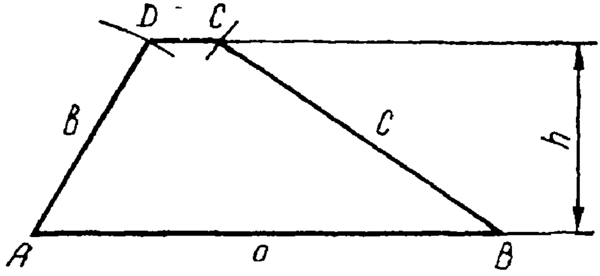
Поэтому вначале учащимся предлагаются задачи, имеющие одно-два решения, а затем уже переходят к решению задач в общем виде с выяснением числа возможных решений.

Так, например, могут быть рассмотрены такие задачи:

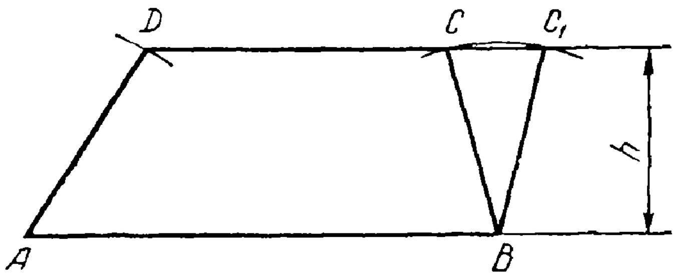
Построить трапецию $ABCD$ по основанию AD, боковым сторонам AB и CD и диагонали BD (два решения).

Построить трапецию по бо́льшему основанию a, высоте h и боковым сторонам b и c.

Вначале отрезки a, b, c задаются так, чтобы задача имела одно решение, затем так, чтобы задача имела два решения (черт. 99, 100).



Черт. 99



Черт. 100

Если снять требование, что основание *a* должно быть бо́льшим, задача может иметь три (черт. 98, *б*) и четыре (черт. 98, *а*) решения. Наконец, могут быть даны такие отрезки, при которых задача не будет иметь решения (черт. 98, *г*).

В заключение рассматривается решение задачи в общем виде и выясняется зависимость числа решений от соотношения между данными элементами.

Аналогичный пример:

> *Построить трапецию ABCD по бо́льшему основанию AB, равному 8 см, сторонам AD и CB, равным соответственно 4 см и 6 см, и диагонали DB, равной 7 см.*

Эта задача в данной формулировке имеет единственное решение.

Если же не оговаривать того, что основание *AB* является бо́льшим основанием, то этим же данным будут удовлетворять две трапеции: *ABCD* и ABC_1D.

Если несколько изменить условие приведенной выше задачи, то она будет иметь два решения, например:

Построить трапецию ABCD по большему основанию AB, равному 8 см, сторонам AD и CB, соответственно равных 4 см и 3,8 см, и диагонали DB, равной 7 см.

Не стоит увлекаться исследованием решений. Достаточно, если учащиеся на примерах нескольких задач убедятся в возможности существования двух, трех и более решений (или отсутствии решения).

Построение трапеций (например, в предыдущей задаче) учащиеся иногда начинают с построения вспомогательного треугольника, который затем достраивают до трапеции, т. е. используют метод построения, с которым они познакомились в VI классе. Постепенно следует переходить, где это возможно, к непосредственному построению трапеций. Однако следует помнить, что для некоторых задач это и невозможно, например: при построении трапеции по боковым сторонам, разности оснований и диагонали.

При решении задач на построение трапеций, представляется возможным показать учащимся новый метод решения задач, который сводится к построению вспомогательной фигуры.

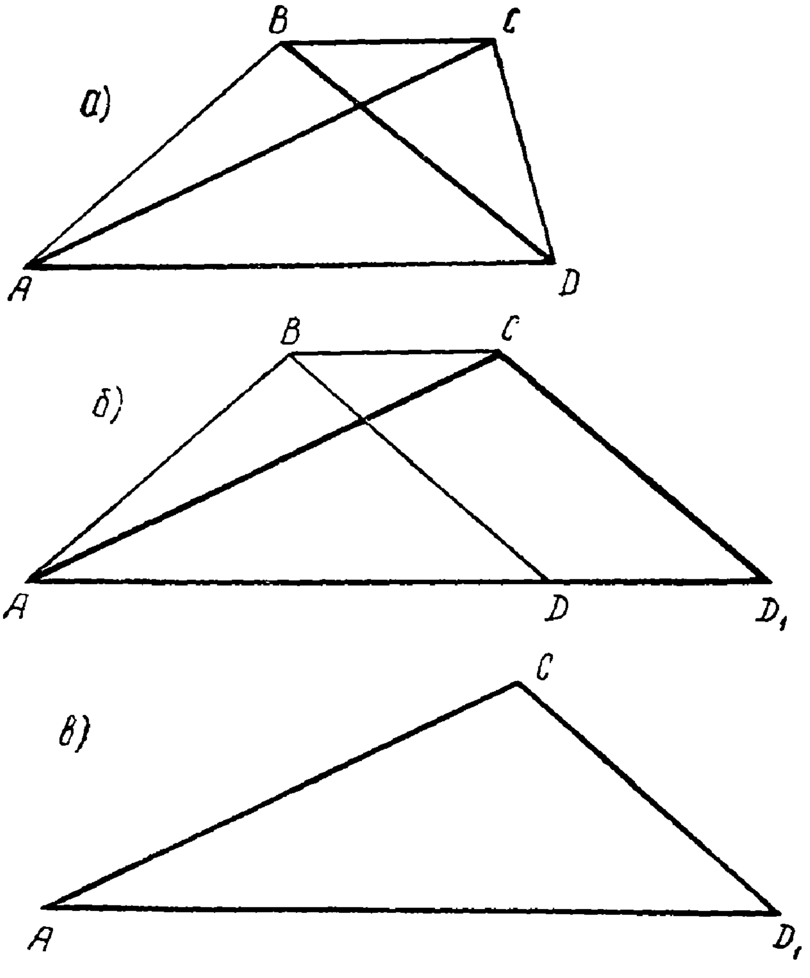
Рассмотрим, например, такую задачу:

Построить трапецию по двум основаниям, равным 3,5 см и 9 см, и двум диагоналям, равным 6 см и 9,2 см.

После того как сделан предварительный чертеж и на нем выделены заданные элементы (черт. 101, *a*), учащимся предлагается самостоятельно попытаться найти план решения. До сих пор решение задач на построение, как правило, сводилось к отысканию треугольника, который можно было построить по заданным элементам.

Естественно выяснить, нет ли на чертеже треугольников, которые могут быть построены.

Внимательно рассмотрев каждый треугольник, учащиеся приходят к выводу, что ни один из них не может быть построен по данным условиям задачи. Следовательно, надо отыскивать некоторую вспомогательную фигуру, которую можно было бы построить по этим данным.



Черт. 101

После ряда попыток учащиеся (или учитель) предлагают построить вспомогательный треугольник ACD_1 путем переноса диагонали BD параллельно самой себе, т. е. так, как указано на черт. 101, *б*.

Этот вспомогательный треугольник ACD_1 может быть построен, так как все его стороны известны (черт. 101, *в*).

Как же затем может быть получена искомая трапеция?

Из сравнения черт. 101, *а, б, в* следует, что для получения вершин B и D трапеции нужно построить отрезок BD, параллельный и равный отрезку CD_1, так чтобы отрезок DD_1 был бы равен меньшему основанию трапеции. Таким образом, все вершины трапеции станут известны.

Учащиеся могут объяснить нахождение вершин B и D по-другому, например, они могут предложить провести через вершину C прямую, параллельную AD, и на этой прямой от точки C и на прямой AD_1 от точки D_1 отложить равные отрезки BC и DD_1.

Позже с помощью этого же метода учащиеся могут решить задачи:

Построить равнобедренную трапецию по двум ее основаниям и диагонали.

Построить трапецию по двум ее основаниям, диагонали и углу, образованному этой диагональю с бóльшим основанием.

Построить трапецию по разности оснований, двум боковым сторонам и одной диагонали.

Свойство медиан треугольника

Из VI класса учащиеся знают, что все медианы треугольника пересекаются в одной точке, в VII классе они знакомятся с тем, что медианы, пересекаясь, делятся в отношении 2 : 1 (считая от вершины).

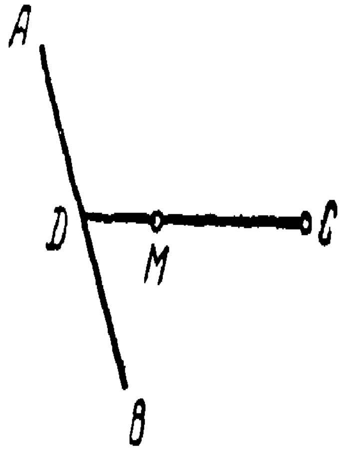
Этот новый факт используется при решении ряда задач. Одной из первой решается задача:

Дан отрезок AB и точка M, лежащая вне прямой AB. Построить треугольник, считая отрезок AB стороной искомого треугольника, а точку M — точкой пересечения его медиан.

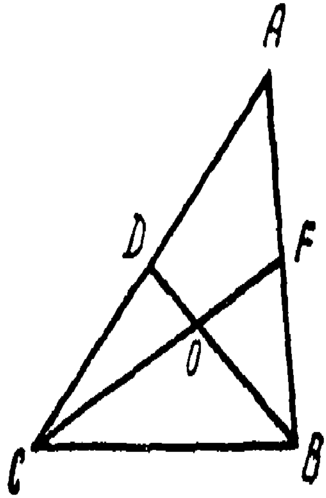
Задача очень легкая. При отыскании плана ее решения можно рассматривать треугольник, в котором проведены все медианы, или треугольник, в котором проведена лишь одна медиана к заданной стороне AB.

Возможно, что учащиеся и без проведения анализа предложат примерно такое решение. Задача сводится к нахождению третьей вершины C, которая должна лежать на медиане, т. е. на отрезке, проходящем через точку M и середину отрезка AB (обозначим ее точкой D). Так как медианы треугольника, пересекаясь, делятся в точке M в отношении 1 : 2 (считая от основания), то для нахождения третьей вершины C на прямой MD откладываем от точки M отрезок MC, равный $2\ MD$ (черт. 102).

Задача имеет решение при любом положении на плоскости точки M, если только она не лежит на прямой AB.



Черт. 102



Черт. 103

В этом учащиеся могут убедиться, взяв несколько различных положений точки M относительно отрезка AB.

Затем предлагается задача на построение, где также используется свойство медиан треугольника:

Построить треугольник по стороне a и двум медианам m_b и m_c, проведенным к двум другим сторонам.

Из анализа (черт. 103) следует, что предварительно *каясь, делятся в отношении 2 : 1, считая от вершины, то эти отрезки являются медианами треугольника.*

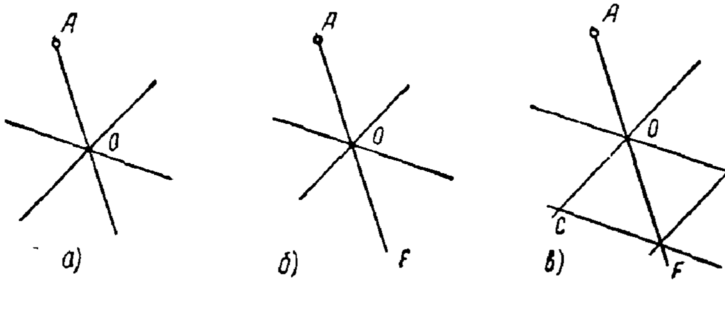
Но обратная теорема в восьмилетней школе не рассматривается. Интересно разобрать такое решение задачи, которое может быть обосновано ссылкой на прямую теорему о свойстве медиан треугольника. Оно заключается в следующем.

Вначале строится треугольник OBC, затем на продолжении отрезка OB в направлении от точки B к точке O откладывается отрезок OD, равный $\frac{1}{2}OB$. Через точки D и C проводится прямая, на которой от точки D откладывается отрезок AD, равный отрезку CD (черт. 103), и проводится отрезок AB. Затем уже нетрудно доказать, что точка F находится на стороне AB и делит ее пополам.

На этом примере видно, как несколько измененный план построения дает возможность очень просто провести обоснование решения, в то время как весьма простой и естественный план решения задачи вызывает значительные трудности в доказательстве правильности построения.

При рассмотрении свойств медиан могла бы быть рассмотрена задача «на положение» (аналогичная решенным ранее при изучении высот и биссектрис треугольников в § 13):

Даны три прямые, пересекающиеся в одной точке O, и точка A на одной из них (черт. 104, a)



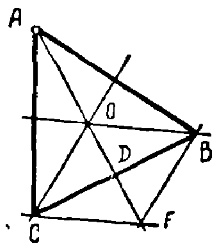
Черт 104

Построить треугольник, считая точку A его вершиной, так, чтобы его медианы лежали на трех данных прямых.

Эта задача довольно трудна, и поэтому ее не следует считать обязательной для решения в классе. В то же время ее полезно рассмотреть в кружке или предложить отдельным, более сильным учащимся. В этой задаче большой интерес представляет анализ, так как в результате его в качестве вспомогательной фигуры выделяется не треугольник, а параллелограмм.

Эту задачу также можно использовать для иллюстрации возможного хода отыскания решения задачи на построение.

Из чертежа, соответствующего условию задачи (черт. 105), оказывается, что сразу можно построить точку D, лежащую на стороне BC. Для этого нужно на прямой AO отложить от точки O отрезок OD, равный $\frac{1}{2}AO$. Но остается невыясненным направление стороны BC. Таким образом, верные предположения не дали возможности решить задачу. Поэтому приходится идти другим путем: начертить треугольник ABC, провести в нем медианы и попытаться найти связь между данными и искомыми элементами.



Черт. 105

Предположим, что задача решена и треугольник ABC — искомый. Можно ли связать положение вершин B и C с положением медиан, проходящих через точки C и B? Известно, что медиана AD делится в точке O в отношении $1:2$ (считая от основания).

Какие еще соотношения в треугольнике нами не учтены? Очевидно, равенство отрезков (CD и BD). Последнее равенство показывает, что сторону BC можно рассматривать как диагональ параллелограмма, две стороны которого лежат на прямых CO и BO. Как построить этот параллелограмм? Очевидно, надо на прямой AO от точки O отложить отрезок OF, равный OA (черт. 105). Что же это дает? Построим четырехугольник $COBF$, соединив точку F с точками B и C. Этот четырехугольник является параллелограммом (так как $OD = DF$ и $CD = DB$), следовательно, $FB \parallel CO$ и $FC \parallel OB$. Таким образом, последовательные этапы построения искомого треугольника могут быть выполнены так, как показано на черт. 104,*а,б,в,* и 105.

§ 17. Площадь многоугольника

Площадь многоугольника. Поверхность и объем прямой призмы

При изучении этой темы наряду с вычислительными задачами решается небольшое число задач на построение. В основном это задачи на построение равновеликих фигур, на вычисление площадей фигур по данным, полученным в результате построений и измерений, на построение разверток прямых призм.

Приведем примеры таких задач:

Стороны прямоугольника равны 12 см и 3 см,

а) начертить равновеликий ему прямоугольник, сторона которого равнялась бы 5 см;

в) начертить равновеликий ему прямоугольник, стороны которого относились бы как 3 : 4;

с) начертить равновеликий ему квадрат.

Построить квадрат, площадь которого в два раза больше (меньше) площади квадрата со стороной 3,5 см. (Сторона квадрата может быть задана в виде отрезка, а затем уже в общем виде.)

Построить квадрат, площадь которого равнялась бы сумме (разности) площадей двух данных квадратов.

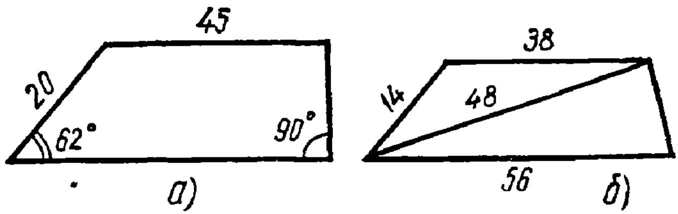
Построить прямоугольный треугольник AB_1C с прямым углом C, равновеликий треугольнику ABC, так чтобы их стороны AC были равны.

Построить равнобедренный треугольник, равновеликий данному треугольнику, при условии, что основание равнобедренного треугольника было бы равно какой-либо стороне данного треугольника. Сколько решений имеет задача?

Построить параллелограмм по сторонам, равным 4 см и 6 см, и углу между ними, равному 125°. Найти площадь параллелограмма.

Построить треугольник по трем его сторонам, равным 4 см, 6 см и 9 см, и найти его площадь.

По данным элементам трапеции (черт. 106) построить трапецию и, проведя необходимые построения и измерения, вычислить ее площадь.



Черт. 106

Построить развертку прямой четырехугольной призмы, в основании которой лежит квадрат со стороной 3,5 см, если боковая поверхность призмы равна 400 см².

Построить развертку прямой призмы, в основании которой лежит прямоугольник со сторонами 50 мм и 45 мм, если ее объем равен 850 см³.

Кроме того, решается несколько несложных задач на деление данных фигур на фигуры, площади которых находятся в заданном отношении.

Прямой, проходящей через вершину треугольника, разделить его на два равновеликих треугольника.

Прямыми, проходящими через вершину треугольника, разделить его на три равновеликих треугольника.

Прямой, проходящей через вершину треугольника, разделить его на два треугольника, площади которых относились бы как 2 : 3.

(Решение этих задач проводится при помощи инструментов. Деление стороны в нужном отношении может выполняться точным или приближенным способами.)

Аналогичные задания учащиеся получают при изучении поверхности и объема цилиндра и в VIII классе — при изучении поверхностей и объемов пирамид, конусов и пр.

§ 18. Окружность

В теме «Окружность» решается довольно большое число задач на построение, причем значительная часть их имеет практическое значение (построение окружности по трем точкам, деление окружности и дуги ее на равные части, проведение касательных к окружности).

Вначале рассматриваются задачи на действия над дугами и деление окружности на равные части. Например:

На данной окружности от произвольной ее точки отложить дугу, равную удвоенной дуге AB. Измерить хорду, стягивающую дугу AB, и хорду, стягивающую удвоенную дугу. Убедиться, что при увеличении дуги в два раза соответствующие хорды не увеличиваются в два раза.

Циркулем разделить данную дугу окружности на две равные части.

В последней задаче приближенное деление дуги пополам может быть выполнено приемом, рассмотренным (стр. 62, черт. 43) при делении отрезка.

Для закрепления умений учащихся в приближенном делении дуг могут быть решены некоторые задачи практического характера, например:

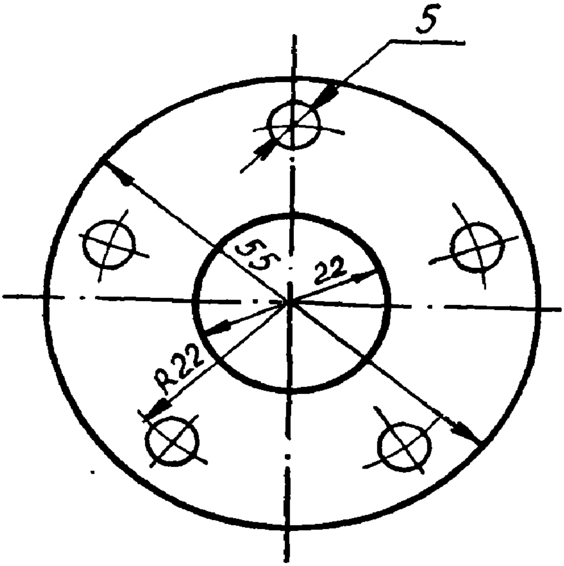
Вычертить в натуральную величину деталь по размерам (в миллиметрах), данным на черт. 107.

На уроках труда сообщаются некоторые сведения об условностях чертежа. Учащиеся к этому времени уже имеют представление об оси симметрии, о центровых линиях, о правилах оформления чертежей. Поэтому при выполнении чертежа детали они должны проставить основные центровые линии и размеры в соответствии с установленными правилами. (Перед размерами диаметров на черт. 107 должен быть указан знак диаметра — ∅).

Деление окружности выполняется приближенно циркулем или с использованием транспортира.

Одними из первых являются задачи на построение окружности по трем данным точкам. Например:

Через данные три точки A, B и C ($AB = BC = AC = 6$ см) провести окружность. Измерить ее радиус.



Черт. 107

Через вершины равнобедренного треугольника, угол при вершине которого равен 30°, проведена окружность. Определить при помощи построения положение центра и величину радиуса окружности, если основание треугольника равно 30 мм.

Параллельно с этим учащимся задается ряд вопросов, например:

Построить окружность, проходящую через две данные точки. Где находятся центры окружностей, проходящих через эти точки? Чему равен радиус наименьшей окружности, проходящей через эти две точки?

Могут ли расстояния между тремя данными точками не превышать одного миллиметра, а радиус окружности, проходящей через эти три точки, быть порядка километра?

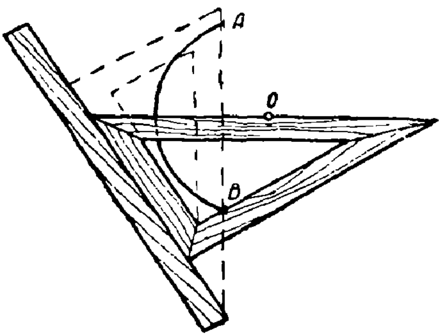
Как это можно показать?

После рассмотрения теоремы о диаметре, перпендикулярном к хорде, разбирается задача о делении дуги пополам. Эта задача часто встречается при выполнении чертежных работ, при разметке, поэтому следует рассмотреть возможные варианты ее решения.

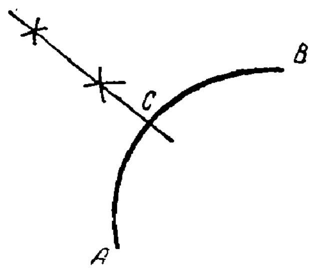
В том случае, когда центр дуги дан, задача решается при помощи циркуля и линейки на основании указанной выше теоремы. Решение это хорошо известно, и мы его здесь приводить не будем.

Однако не следует ограничиваться рассмотрением только этого способа. Полезно показать учащимся, что в зависимости от условий, в которых решается задача, и от выбора инструментов варианты решения этой задачи могут быть различными. Ниже мы покажем некоторые практически распространенные приемы построений. Обоснование этих приемов весьма просто и доступно учащимся. Их можно рассматривать как задачи на доказательство, предлагая учащимся обосновать построения после того, как соответствующий прием будет рассмотрен в классе.

На черт. 108 показан способ деления дуги AB окруж-



Черт. 108



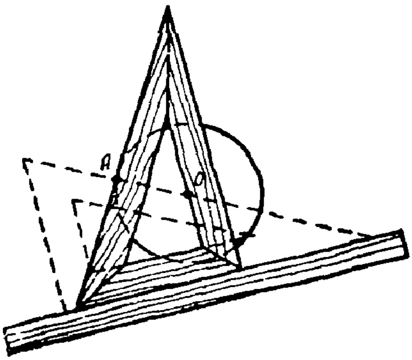
Черт. 109

ности пополам при заданном центре окружности при помощи чертежного треугольника и линейки. Преимущество этого способа перед обычно рассматриваемым в школе заключается в том, что здесь нет необходимости выполнять вспомогательные построения (заметим, однако, что при построениях на неровной поверхности деталей, например, при разметке, а также при малых размерах чертежа или детали обычно приходится пользоваться только циркулем и линейкой). Прием деления пополам дуги окружности, центр которой находится вне чертежа, приведен на черт. 109.

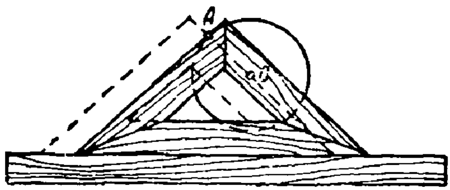
Касательная к окружности

Расширение выбора чертежных инструментов дает возможность сразу же после определения касательной показать учащимся практически распространенные приемы построения касательной к данной окружности, если дана точка касания (черт. 110 и 111), выполняемые линейкой и чертежным треугольником.

Из анализа указанной задачи следует, что искомая касательная должна быть перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания. Таким образом, решение сводится к



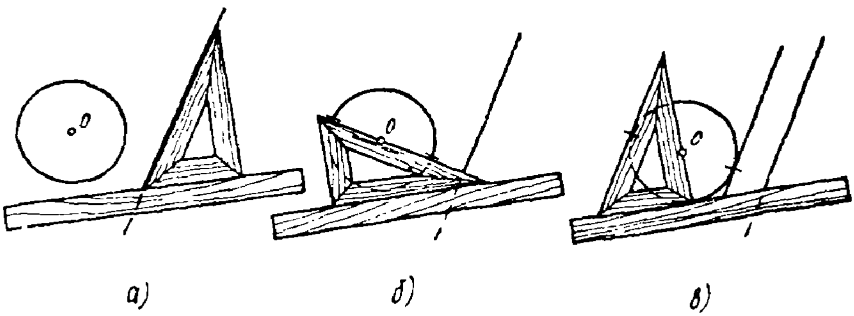
Черт. 110



Черт. 111

уже известному построению: через данную точку провести прямую, перпендикулярную данной прямой (радиусу, проведенному в точку касания).

С тем же набором инструментов решается задача о проведении к данной окружности касательной, параллельной данной прямой. Вначале определяются точки касания, а затем строится касательная. Последовательные этапы построения, выполняемые с помощью чертеж-



а) б) в)

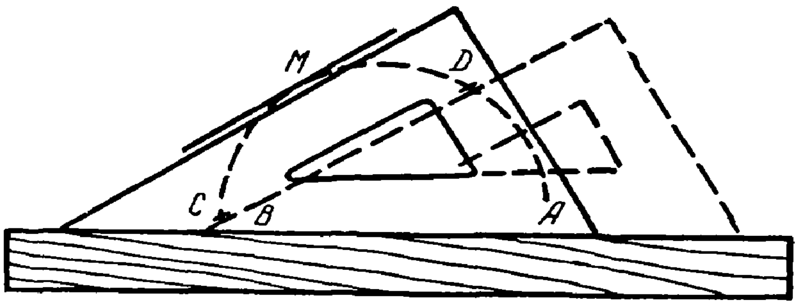
Черт. 112

ного треугольника и линейки, приведены на черт. 112.

После рассмотрения этих задач учащимся предлагается:

Через данную точку M дуги AB, центр которой находится вне чертежа, провести касательную к дуге.

Построение выполняется при помощи линейки, циркуля и чертежного треугольника: вначале от точки M откладываются две равные дуги MC и MD (черт. 113),



Черт 113

затем соединяют точки C и D (хорда CD может фактически и не проводиться), а затем через точку M проводят прямую, параллельную хорде CD, которая и будет искомой касательной.

Рассматривается также *практический прием проведения касательной к окружности через точку, лежащую вне ее.*

На практике обычно это построение выполняется при помощи одной линейки. Аналогично поступают при построении общей внешней и внутренней касательных к двум окружностям. Точность построения касательных, если непосредственно приложить линейку к двум окружностям или к окружности и точке вне ее, в большинстве случаев удовлетворяет требованиям практики, чем и объясняется широкое применение в графических работах указанных приемов.

После проведения касательных к окружности через данную вне ее точку (при помощи одной линейки) точки касания определяются построением, основанным на свойстве радиуса, проведенного в точку касания. (Последнее построение выполняется при помощи чертежного треугольника и линейки.)

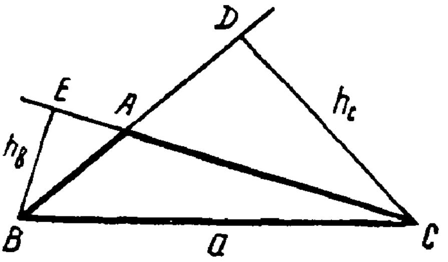
Этот довольно простой прием построения касательных используется затем при решении задач на построение четырехугольников и треугольников, если среди заданных элементов есть их высоты. При доказательстве правильности решения широко используются теоремы о свойствах касательных к окружности.

Приведем пример:

Построить треугольник по стороне (а) и высотам (h_b и h_c), проведенным к двум другим сторонам.

Решение:

Пусть $\triangle ABC$ — искомый, BC — основание, равное a, CD и BE — высоты, проведенные к боковым сторонам и равные соответственно h_c и h_b (черт. 114). Так как $BD \perp DC$ и $AC \perp BE$, то прямые BA и CA должны быть касательными к окружностям, проведенным из точек C и B, как из центров, радиусами соответственно равными h_c и h_b.



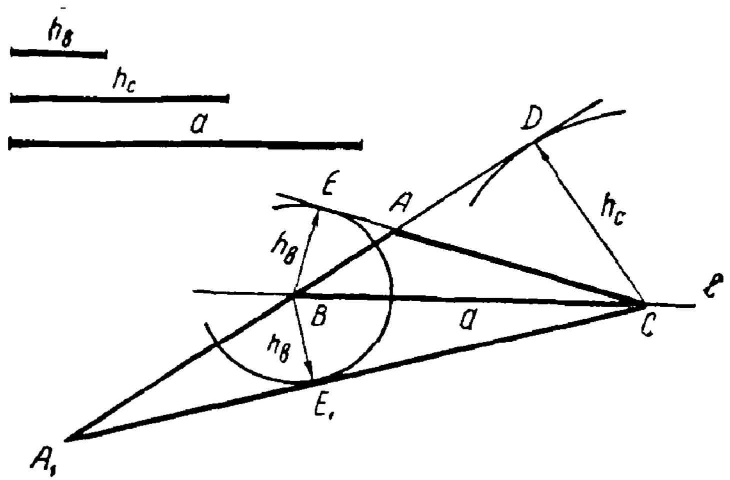
Черт. 114

Отсюда следует построение, указанное на черт. 115. На произвольной прямой l откладывают отрезок BC, равный a. Из точек B и C, как из центров, радиусами h_c и h_b соответственно описывают окружности или их дуги. Затем через точки B и C проводят касательные к проведенным окружностям (или дугам). Точки пересечения проведенных касательных (обозначим их через A и A_1) соединяются с точками B и C. В результате получают два треугольника $\triangle ABC$ и $\triangle A_1BC$.

Оба эти треугольника, $\triangle ABC$ и $\triangle A_1BC$, удовлетворяют условию задачи. В самом деле, рассмотрим $\triangle ABC$. Сторона BC равна a. Соединяя вершины B и C с точками касания E и D, получим, что $BE \perp AC$ и $CD \perp AB$ (как радиусы, проведенные в точки касания). Следовательно, отрезки BE и CD являются высотами треугольника ABC, проведенными к его сторонам AB и AC, и равны, согласно построению, h_b и h_c.

Аналогично доказывается, что треугольник A_1BC является искомым.

Полное исследование решения задачи может быть опущено, в классе достаточно установить, какими должны быть отрезки a, h_c и h_b, чтобы задача имела решение. Удобно это сделать по чертежу 115, на котором проводился анализ задачи.



Черт. 115

Так как в треугольнике BDC высота CD является катетом, а сторона BC — гипотенузой, то всегда $DC < BC$.

Полное исследование числа возможных решений в зависимости от величин h_b, h_c и a в VII классе еще довольно трудно, его можно рассмотреть на кружковых занятиях.

Это исследование может быть проведено таким образом.

Пусть для определенности $h_b < h_c$.

При $h_c > a$ решения нет, так как в этом случае точка B будет лежать внутри окружности радиуса h_c и через нее нельзя будет провести к этой окружности касательную.

Можно рассуждать и иначе: h_c не может быть больше a, так как в треугольнике высота не может быть больше стороны, исходящей из той же вершины.

При $h_b = h_c = a$ задача не имеет решения, так как тогда касательные, проведенные к окружности, будут параллельны.

При $h_b < h_c = a$ задача будет иметь единственное решение — прямоугольный треугольник ABC с прямым углом B.

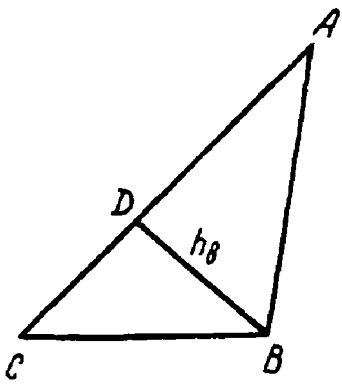
При $h_b < h_c < a$ задача будет иметь два решения — треугольники ABC и A_1BC (черт. 115), из которых по крайней мере один будет тупоугольный.

При $h_b = h_c < a$ задача будет иметь единственное решение — равнобедренный треугольник ABC, в котором $AB = AC$.

Если сравнить вариант решения, в котором касательные к окружности, проходящие через данную вне окружности точку, проводятся при помощи одной линейки с известным решением этой задачи при помощи циркуля и линейки, то легко видеть, что в первом случае мы получаем более простое и наглядное решение без построения вспомогательных треугольников. Кроме того, в первом случае легче решается вопрос о числе решений задачи. Рассмотрим еще две задачи:

Построить треугольник по двум сторонам (a и b) и высоте (h_b), проведенной к одной из них.

Чертим треугольник ABC, в котором выделяем заданные элементы: стороны $BC = a$, $AC = b$ и высоту BD, проведенную из вершины B, равную h_b (черт. 116). Так как $AC \perp BD$, то AC можно рассматривать, как касательную к окружности радиуса h_b с центром в точке B.



Черт. 116

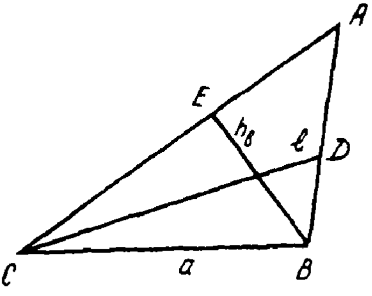
Таким образом, приходим к следующему построению: на произвольной прямой MN откладываем отрезок BC, равный a, и из точки B, как из центра, проводим дугу окружности радиуса h_b. Прикладываем край линейки к точке C так, чтобы он касался проведенной дуги, и проводим касательную CD к дуге. На касательной от точки C откладываем отрезок AC, равный отрезку b. Точку A соединяем с точкой B. Полученный треугольник ABC — искомый.

Доказательство и исследование этой задачи не представляет затруднений, поэтому мы его опускаем.

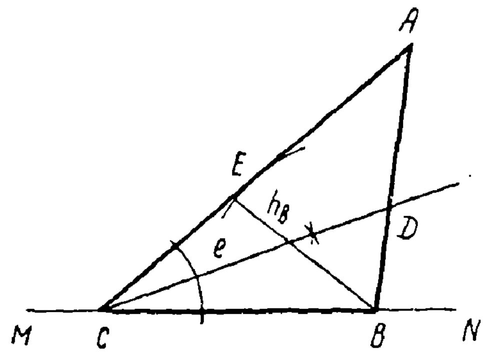
Построить треугольник по стороне a, высоте h_b и биссектрисе l угла C.

Чертим треугольник ABC, в котором выделяем заданные элементы. Пусть в $\triangle ABC$ $BC = a$, $BE \perp AC$ и $BE = h_b$ $CD = l$, $\angle ACD = \angle DCB$ (черт. 117).

На основании установленных соотношений проводим следующее построение. На произвольной прямой M откладываем отрезок BC, равный a. Из точки B, как из центра, проводим дугу радиуса h_b (черт. 118) и прово-



Черт. 117



Черт. 118

дим через точку C касательную CA к проведенной дуге окружности. Строим биссектрису угла BCA и от точки C откладываем на биссектрисе отрезок CD, равный данному отрезку l. Затем проводим прямую BD до пересечения ее с прямой CA (точка A). Полученный треугольник ABC — искомый.

Аналогично решается такая задача:

Построить треугольник по двум сторонам (b и c) и высоте (h_a), проведенной к третьей стороне.

Однако не для всех задач, которые можно решить указанным приемом, следует его использовать. В неко-

торых случаях при этом сам пр...
ственным и непонятным для учащихся. Рассмотрим, на-пример, такую задачу:

Построить равнобедренный треугольник по боковой стороне b и высоте h, проведенной к этой стороне.

Анализ: Предположим, что задача решена и $\triangle ABC$ — искомый, т. е. $AB = BC = b$, $DC \perp AB$ и $DC = h_b$.

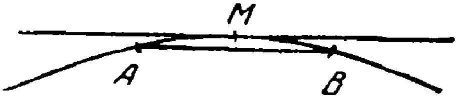
Построение наиболее удобно выполнить следующим образом.

Строим прямоугольный треугольник BDC по гипотенузе BC и катету DC. На прямой BD откладываем от точки B в направлении к точке D отрезок $BA = BC$, соединяем точки C и A. Получим искомый $\triangle ABC$.

Доказательство. $\triangle ABC$ — искомый, так как $AB = BC = b$ и $DC = h$ по построению. $DC \perp BA$, т. е. является высотой треугольника ABC, проведенной из вершины B.

Задача имеет решение, если $h < b$.

После разбора построения касательной и окружности по заданной точке касания (если неизвестен центр дуги) полезно ознакомить учащихся с приемом построения касательной к дуге произвольной кривой, если задана точка касания (представление о касательной дается, как о предельном положении секущей). Прием приближенного решения этой задачи ясен из черт. 119. Он аналогичен точному приему построения касательной к дуге окружности. Если кривизна дуги в окрестности данной точки меняется незначительно, то проведенная прямая мало отличается от касательной. Следует, однако, помнить, что этот прием дает большую погрешность, если кривизна в окрестности данной точки меняется значительно.



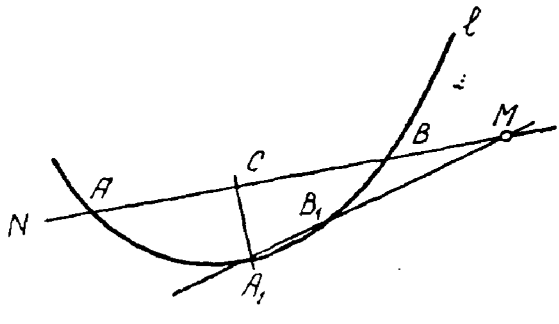
Черт. 119

Учителю полезно знать несколько приближенных приемов построения касательной к дуге произвольной кривой, проходящей через точку, лежащую вне кривой.

Некоторые из этих приемов описаны в работе

Н. Ф. Четверухина*. Приведем один из них (без доказательства).

Пусть через точку M (черт. 120) надо построить ка-



Черт. 120

сательную к кривой l. Проводим секущую MA так, чтобы отсекаемая дугой l ее хорда AB была по возможности мала. Делим пополам хорду AB и через полученную точку C проводим к ней перпендикуляр до пересечения с кривой l. Через полученную точку (пусть это будет точка A_1) и точку M проводим прямую, на которой кривой l отсечется хорда A_1B_1, делим эту хорду пополам и выполняем построение, аналогичное указанному выше. Уже при построении второй секущей обычно получается практически удовлетворительный результат.

Этот метод называется методом последовательных приближений, так как секущие MA, MA_1 постепенно приближаются к своему предельному положению — искомой касательной.

Вписанные углы По новой программе математики из курса VII класса восьмилетней школы исключены вопросы об углах с вершиной внутри и вне круга, о сегменте, вмещающем данный угол. В связи с этим упрощено и содержание задач на построение из этого раздела. Решаются задачи, связанные главным образом с построением угла в 90°, т. е. вписанного угла, опирающегося на диаметр окружности. Например:

Построить прямоугольный треугольник по его гипотенузе.

---

* Н. Ф. Четверухин. Методы геометрических построений. М., Учпедгиз, 1952.

При этом выясняется, сколько решений может иметь эта задача, где располагаются точки, из которых гипотенуза треугольника видна под прямым углом.

Затем предлагается несколько задач на построение треугольников, в которых используется решение предыдущей задачи. Например:

Построить прямоугольный треугольник по его гипотенузе и высоте.

Построить прямоугольный треугольник по катету, равному 6 см, и проекции его на гипотенузу, равной 4 см. Измерить длину гипотенузы.

Решение этих задач ведется методом геометрических мест. Однако он подробно не рассматривается, а суть его раскрывается на конкретных задачах.

После решения этих и аналогичных задач учащимся можно предложить самим составить задачи на построение прямоугольных треугольников по гипотенузе и еще какому-нибудь элементу, а затем решить их (на этом или на следующих уроках). Такое задание весьма оживит урок и будет способствовать лучшему уяснению учащимися идеи рассматриваемого метода.

Глава V

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ В VIII КЛАССЕ

§ 19. Общие положения

В VIII классе задачи на построение рассматриваются главным образом в 2-х темах: «Пропорциональные отрезки. Подобие фигур» и в несколько меньшем числе в теме «Вписанные и описанные многоугольники». В первой теме решаются в основном задачи на построение методом подобия, во второй теме учащиеся знакомятся с некоторыми построениями, также интересными с практической точки зрения, так как многие из рассматриваемых там приемов построений правильных многоугольников часто используются в чертежной и конструкторской практике при разметке, при выполнении графических работ различного содержания.

В связи с ограниченными возможностями использования геометрических построений в курсе VIII класса необходимо в течение учебного года уделить больше внимания повторению важнейших приемов выполнения построений, о которых уже шла речь в предыдущих главах.

Изучение первого раздела курса геометрии VIII класса «Пропорциональные отрезки» не требует решения большого числа задач на построение. В то время, как весь остальной материал первой темы: «Пропорциональные отрезки. Подобие фигур» насыщен конструктивными задачами, для решения которых учащиеся должны использовать ранее изученный материал. Поэтому в начале учебного года параллельно с изучением первой темы целесообразно повторить некоторые задачи на построение, которые затем будут использованы при построении фигур, подобных данным.

Так, например, построение точек, одинаково удаленных от данной точки, используется при построении параллелограммов, если в число заданных элементов входят высота, диагональ и стороны. Построение точек, одинаково удаленных от концов данного отрезка, используется при построении равнобедренного треугольника по основанию и высоте и т. д.

При решении задач на построение методом подобия часто приходится строить вспомогательные фигуры по заданным отношениям их линейных элементов. Поэтому целесообразно в начале учебного года, как только будет рассмотрен соответствующий теоретический материал, вспомнить решения некоторых задач с тем, чтобы в дальнейшем построение вспомогательных фигур не затрудняло учащихся (каждой задаче будет удовлетворять бесконечное множество решений подобных между собой фигур). *Например:*

Построить квадрат по его стороне.

Построить ромб по острому углу и стороне

Построить параллелограмм по углу и отношению боковых сторон.

Построить параллелограмм по углу и отношению высоты и основания.

Построить прямоугольник по отношению диагонали и стороны.

Повторение решения основных задач на построение (если в этом есть необходимость) проводится параллельно с решением задач на текущий материал.

§ 20. Пропорциональные отрезки. Подобие фигур

Отношение и пропорциональность отрезков

Вопрос об отношении двух отрезков обычно довольно легко усваивается учащимися, особенно при условии выполнения ими некоторого числа специально подобранных упражнений, связанных с построением и вычислением. Хотя этот материал непосредственно не связан с решением задач на построение, мы уделим здесь ему внимание.

До сих пор в некоторых случаях наблюдается формальное изучение понятия отношения отрезков. Это подтверждают результаты работ, выполненных учащимися непосредственно после изучения этого раздела.

На одной из таких работ стоит специально остановиться.

В одном из VIII классов учащимся было предложено:

> *Построить прямоугольный треугольник с острым углом в 40° и найти отношение меньшего катета к гипотенузе.*

Учащиеся могли пользоваться учебником и записями в тетради.

Из 19 учеников выполнили задание только 4 ученика, причем из 14 учеников, давших верное объяснение к построению (чего не требовалось по заданию), неверно выполнили само построение 12 учеников.

При решении задач были допущены следующие ошибки. Неверно построен прямой угол (1 ученик). Неверно построен угол в 40° (2 ученика). Для нахождения искомого отношения рядом с построенным треугольником были отдельно построены отрезки, равные катету и гипотенузе, но в действительности эти отрезки не были равны указанным элементам треугольника (2 ученика). Катет разделен на 10 частей на глаз (2 ученика). Сделано предположение, что длина катета пропорциональна углу (3 ученика). Отношение хорд заменено отношением дуг (1 ученик). Отложено на гипотенузе 4 отрезка, а написано, что отложено 6 (2 ученика). Ни один ученик в записях не использовал знак приближенного равенства.

Таким образом, оказалось, что учащиеся недостаточно усвоили материал. Довольно трудоемкое задание, в котором надо было построить треугольник, выделить отрезки, отношение которых предстояло найти, оказалось им не под силу. Таких задач учащиеся не решали. В классе ограничивались лишь заучиванием соответствующего теоретического материала и его возможного использования без практических упражнений.

С целью более глубокого усвоения понятия отношения отрезков учащимся рекомендуется давать небольшое число упражнений примерно такого содержания:

Найти с точностью до 0,05 отношения $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ отрезков a, b, c и d, если $a = 12$ см, $b = 3$ см, $c = 0{,}12$ см, $d = 125$ см.

Найти отношение отрезков a и b, b и c (отрезки a, b и c даны на чертеже).

Вычислить отношение катета и гипотенузы в равнобедренном прямоугольном треугольнике.

Построить прямоугольный треугольник с острым углом в 40° и найти отношение его меньшего катета к гипотенузе.

При проверке решения двух последних задач обращается внимание учащихся на то, что результаты у всех должны получиться одинаковыми, хотя размеры построенных треугольников и были различными. Этот факт будет использован позже, при введении признаков подобия треугольников (при разборе первого и второго признаков подобия треугольников).

Для лучшего усвоения теоремы о пропорциональности отрезков, образуемых на прямых, пересекаемых несколькими параллельными, а также для выработки умений применять эту теорему необходимо с учащимися решить несколько задач на построение пропорциональных отрезков, в том числе и на построение четвертого пропорционального отрезка к трем данным и деление отрезка в заданном отношении. Эти упражнения целесообразно относить на домашнее задание, проверяя, особенно вначале, все графические работы учащихся.

Затем решаются задачи на построение, в которых используется умножение отрезка на данное число и деление отрезка в заданном отношении.

Рассмотрим некоторые из них:

Принимая данные точки O_1 и O_2 за центры, построить окружности, касающиеся внешним образом, при условии, что отношение радиуса первой окружности (R_1) к радиусу второй окружности (R_2) равно $\frac{2}{3}$.

Для решения этой задачи необходимо провести анализ. Чертеж-набросок ученики могут выполнить одним из двух способов: вначале задать точки O_1 и O_2 и затем начертить (приближенно) окружности или начертить две окружности, касающиеся друг друга внешним образом, с заданным отношением радиусов, а затем считать, что их центры — заданные точки O_1 и O_2.

Первый вариант, конечно, более отвечает условию задачи, тем более, что выполнение предварительного чертежа уже является по сути решением задачи, но и второй путь также допустим. Анализ проводится устно, при этом учащиеся убеждаются, что задача сводится к нахождению точки K, делящей отрезок O_1O_2 в отношении $2:3$. Затем следует построение.

Доказательство правильности построения не вызывает у учащихся затруднений. В самом деле, выполнение условий задачи обусловливается самим ходом построения: точки O_1 и O_2 являются центрами окружностей, отношение радиусов окружностей равно заданному; окружности касаются, так как точка K общая и лежит на линии центров.

Исследование решения проводится также устно. Очевидно, при любом положении заданных точек всегда существует единственное решение, так как на отрезке O_1O_2 может быть найдена единственная точка K такая, чтобы $\frac{O_1K}{KO_2} = \frac{2}{3}$.

Затем учащимся предлагается задача, ход решения которой аналогичен предыдущей, но задача уже имеет два решения. (Задача на «положение»).

> *Принимая точки O_1 и O_2 за центры окружностей, построить эти окружности, касающиеся между собой внутренним образом, при условии, что отношение их радиусов равно $2:3$.*

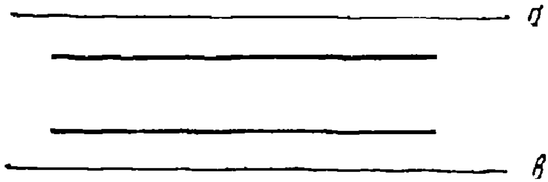
Вопрос о геометрических местах точек в восьмилетней школе по новой программе не изучается, но ряд упражнений, предлагаемых учащимся, должен быть направлен на создание у них представления об этом важном геометрическом понятии. В VI и VII классах при рассмотрении окружности и расстояния от точки до прямой даются с этой целью специальные упражнения (аналогичные упражнения могут быть предложены и восьмиклассникам). Например:

> *Построить несколько точек, одинаково удаленных от двух данных параллельных прямых.*
>
> *На какой прямой находятся точки, одинаково удаленные от двух данных параллельных прямых?*

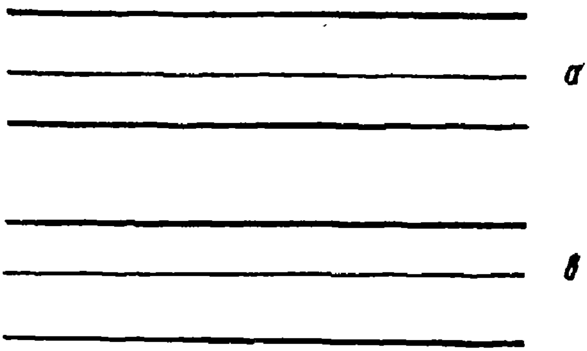
Построить несколько точек, для которых отношение расстояний до двух параллельных прямых равно $\frac{1}{4}$.

Где расположены все точки, расстояния которых до двух данных параллельных прямых равны $\frac{1}{4}$?

При решении последней задачи вначале лучше рассмотреть ее частный случай, когда искомые точки находятся внутри полосы, определяемой данными параллельными прямыми *a* и *b* (две прямых, черт. 121), а за-



Черт. 121



Черт. 122

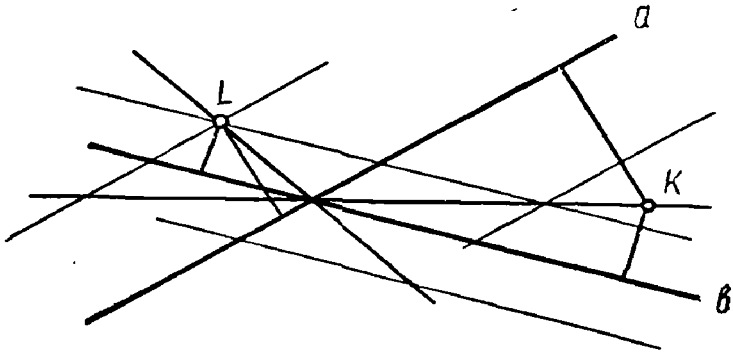
тем уже общий случай, когда положение искомых точек не ограничено полосой (четыре прямых, черт. 122).

Даны две пересекающиеся прямые a и b. Построить несколько точек, для которых расстояние до прямой a в два раза больше расстояния до прямой b (черт. 123).

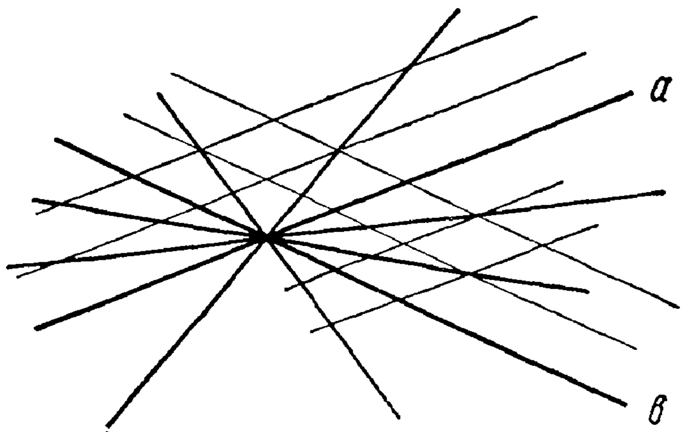
На каких прямых лежат точки, удовлетворяющие этому условию?

Даны две пересекающиеся прямые a и b. Построить несколько точек, для которых отношение расстояний до прямых a и b равно двум (черт. 124).

На каких прямых лежат точки, удовлетворяющие этому условию?



Черт. 123



Черт. 124

(Здесь также лучше начать с частного случая решения задачи, а затем разобрать общий).

На этом этапе обучения достаточно, если школьники смогут представить себе, где будут находиться искомые точки, и доказать, что расстояния любой точки, взятой на соответствующей прямой, до данных прямых будут находиться в заданном отношении.

Результаты решения этих задач используются при решении других задач. Например:

Даны две параллельные прямые на отрезке прямой, заключенном между ними. Найти точки, расстояния которых до данных параллельных прямых относятся как 1 : 4.

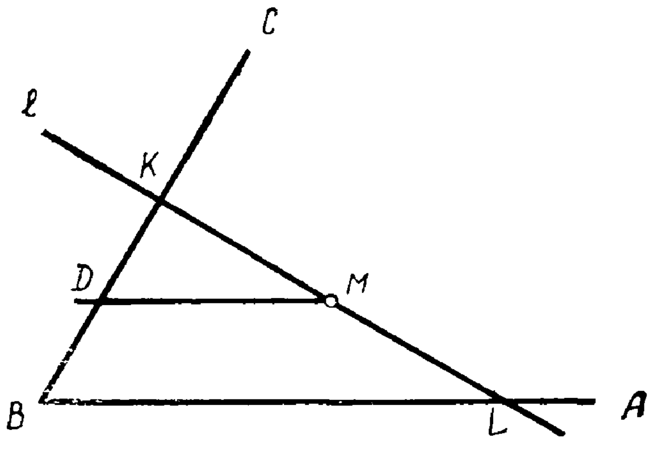
Рассмотрим подробнее еще одну задачу:

Через точку М, данную внутри угла, провести прямую так, чтобы отрезок ее KL, заключенный между сторонами угла, делился точкой М в данном отношении.

Перед ее решением учащимся предлагается подготовительная задача:

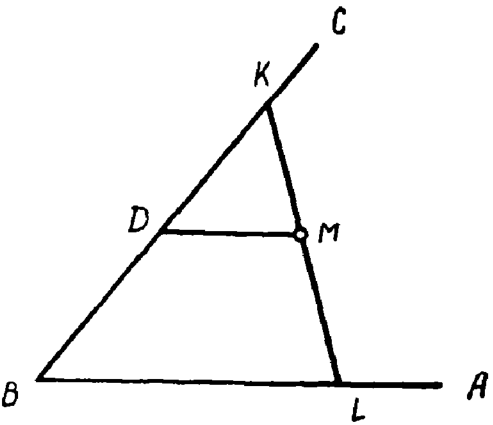
Через точку М, данную внутри угла, провести прямую так, чтобы отрезок ее, заключенный между сторонами угла, делился точкой М пополам.

Эта задача ранее рассматривалась в VII классе при изучении свойства диагоналей параллелограмма и свойства средней линии треугольника.



Черт. 125

Теперь можно рассмотреть новый прием ее решения. Вначале попробуем установить связи между искомыми и данными условиями. Допустим, что задача решена и отрезок KL прямой l, заключенный между сторонами угла,—искомый (черт. 125), т. е. делится в точке M пополам. Для решения задачи нужно найти одну из точек—K или L. Проведем через точку M прямую, параллельную BA. Отметим точку (точку D) ее пересечения с CB. Отрезки BD и KD равны (выясняется почему). Затем на доске стирается отрезок KL. Как восстановить положение точек K или L? Очевидно. для этого нужно на прямой BC от точки D отложить отрезок DK, равный отрезку BD. Теперь уже решение задачи (построение отрезка KL) не вызывает затруднений.



Черт. 126

Через точку M проводится прямая MD, параллельная BA, и от точки D откладывается отрезок KD, равный BD. Отрезок KL прямой l делится в точке M пополам.

После этого предлагается задача, где отрезок KL должен делиться точкой M в заданном отношении.

Дадим один из возможных вариантов ее решения. Предположим, что задача решена и отношение отрезков KM и ML равно заданному (черт. 126). Для решения задачи нужно найти еще одну точку (K или L).

Проведем через точку M отрезок MD, параллельный AB. Получим два треугольника $\triangle KDM$ и $\triangle KBL$. На основании известной теоремы имеем:

$\frac{KM}{ML} = \frac{KD}{DB} = k$, где k—величина заданного отношения.

Отсюда следует построение, аналогичное приведенному выше: проводим отрезок DM, параллельный AB, затем от точки D на стороне BC угла ABC откладываем отрезок DK, равный $k \cdot BD$. Отрезок KM будет искомым.

Подобие треугольников

Изучение признаков подобия треугольников сопровождается решением задач на построение подобных треугольников. Например, после теоремы о втором признаке подобия треугольников решаются задачи.

Построить треугольник по отношению двух сторон, равному 1 : 2, и углу, заключенному между ними, если меньшая из этих сторон равна а (одно решение).

Построить треугольник по отношению двух сторон, равному 1 : 2, и углу, заключенному между ними, если одна из сторон его равна а (три решения).

После рассмотрения третьего признака подобия треугольников может быть решена такая задача:

Построить треугольник, если известно, что стороны его относятся как 4 : 5 : 6 и средняя его (по величине) сторона равна а (одно решение).

После того как учащиеся научатся свободно выполнять построение подобных треугольников, они могут определять число решений аналогичных задач, не проводя построения. Например, не решая задач, могут выяснить, сколько каждая из них будет иметь решений.

Построить треугольник по отношению его сторон, равному 5 : 6 : 7, если одна из этих сторон равна а. (три решения).

Построить треугольник по отношению трех его сторон, равному 5 : 6 : 6, если одна из сторон равна а (два решения).

Здесь же на ряде задач учащимся показывается применение подобия фигур на практике, например, при измерительных работах на местности:

Для определения расстояния АВ, которое нельзя измерить непосредственно, избрали некоторую точку С, измерили угол между направлениями СА и СВ, угол между направлениями АВ и АС и расстояние АС. Как определить АВ? Обосновать ответ.

Найти расстояние AB, если $AC = 9$ м, $\angle ACB = 62°$, $\angle BAC = 42°$.

Решается эта задача следующим образом: в некотором масштабе чертим треугольник $A_1B_1C_1$, подобный треугольнику ABC ($\triangle ABC$ — треугольник на местности). Искомое расстояние найдем, умножив длину стороны A_1B_1 на коэффициент подобия (масштаб построения). Например, если сторона A_1C_1 будет равна 9 *см*, а коэффициент подобия k будет равен 100, то искомое расстояние AB будет равно:

$$AB = A_1B_1 \cdot k = 8{,}6 \text{ см} \cdot k = 8{,}6 \text{ м}.$$

Затем учащимся могут быть предложены и другие задачи, например:

Для измерения расстояния AB, которое нельзя измерить непосредственно, измерили расстояния CA и CB от некоторой точки C и угол, образованный направлениями CA и CB. Как определить расстояние AB? Обосновать ответ.

Найти расстояние AB, если $CA = 6$ м, $CB = 8{,}5$ м, $\angle ACB = 68°$.

Для определения расстояния AB, которое нельзя измерить непосредственно, установили эккер в такой точке C, чтобы направления CA и CB составляли прямой угол, а затем измерили расстояния CA и CB.

Как можно определить расстояние AB? Обосновать ответ.

Найти расстояние AB, если $CA = 6$ м, $CB = 9{,}4$ м.

Решение последней задачи может быть найдено также вычислением по теореме Пифагора. Интересно сравнить оба варианта решения: графический и аналитический. При этом окажется, что практическая точность графического решения будет вполне достаточна, простота же его не вызывает сомнения.

Рассмотрим еще один вопрос, который хотя и не входит непосредственно в программу, но имеет практическое значение при построении подобных фигур — это построение и применение так называемого пропорционального масштаба.

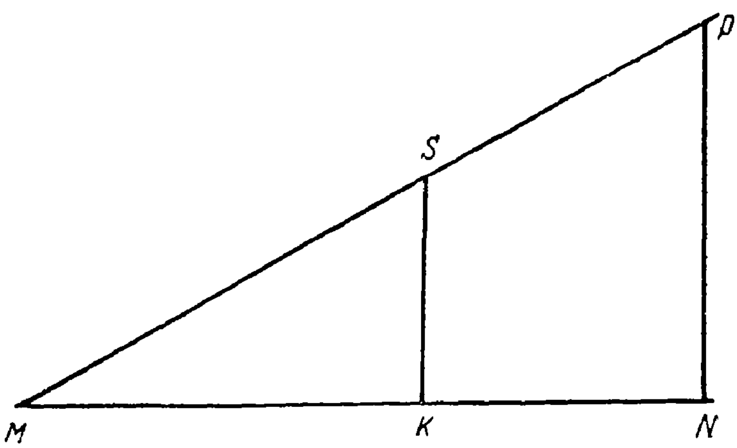
Пусть дана задача:

Построить треугольник, подобный данному, с коэффициентом подобия, равным 0,6.

Эта задача довольно быстро решается, если искомый треугольник может быть построен на том же чертеже, что и данный, и намного усложняется — если на другом чертеже. Во втором случае приходится предварительно находить (построением или вычислением) элементы, по которым может быть построен искомый треугольник.

Использование пропорционального масштаба значительно упрощает работу.

Прежде всего для решения этой задачи ($k = 0{,}6$) построим пропорциональный масштаб. На некоторой прямой отложим отрезок MN (черт. 127), равный какой-либо стороне данного треугольника (например, BC). Из точ-



Черт. 127

ки N восставим к нему перпендикуляр, на котором откладываем отрезок NP, равный сходственной стороне B_1C_1 искомого треугольника, таким образом $NP = 0{,}6\ MN$. Через точки M и P проводится прямая. Полученная фигура используется в дальнейшем для построения подобного треугольника с заданным коэффициентом подобия.

Чтобы получить длину стороны, сходственной, например, стороне AB данного треугольника, надо от точки M отложить отрезок MK, равный стороне AB данного треугольника, и из точки K провести к MN перпендикуляр. Отрезок KS этого перпендикуляра, заключенный между сторонами угла PMN, будет равен искомой стороне A_1B_1. Для удобства отсчета пропорциональный масштаб обычно строится для каждого коэффициента подобия на миллиметровой бумаге.

Умение учащихся пользоваться пропорциональным масштабом закрепляется решением нескольких задач, например:

Дан треугольник ABC и на его стороне BC точка D. Построить треугольник, подобный данному, с коэффициентом подобия 0,7 и найти положение точки D_1, соответствующей точке D.

Даны треугольник ABC и точка D внутри его. По заданному коэффициенту подобия построить треугольник, подобный данному, и найти положение точки D_1, соответствующей точке D.

Понятие подобия используется затем при решении более сложных задач. Заметим, что простота решения задачи методом гомотетии часто зависит от выбора центра гомотетии. (Оба эти термина — «метод гомотетии» и «центр гомотетии» — в восьмилетней школе не вводятся. Конечно, учитель может употреблять эти термины в классе, но не требовать от учащихся их определения.) При решении задач методом подобия следует обратить внимание на то, что центр подобия выбирается часто в зависимости от того, какие элементы даны в условии задачи. Так, если заданы сторона, медиана, биссектриса или высота треугольника, то центр подобного преобразования обычно выбирается в соответствующей вершине треугольника. Если же дан радиус описанного или вписанного круга, то центр преобразования удобно выбрать в центре этого круга.

Эти соображения не формулируются явно, а учащиеся постепенно, на основании рассмотрения ряда задач подводят к этому выводу. Решаются, например, такие задачи:

Построить треугольник по отношению высоты и основания, углу при основании и боковой стороне (два решения).

Построить треугольник по углу, отношению сторон, заключающих этот угол, и высоте, проведенной к одной из этих сторон.

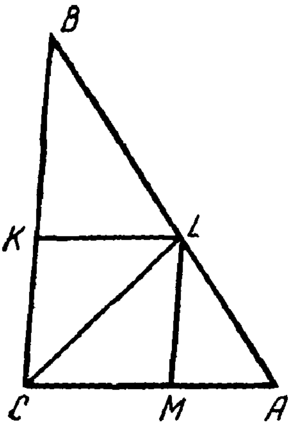
В VIII классе решается также некоторое число задач на вписание одних фигур в другие (в основном в треугольник).

При этом возможна, например, такая последовательность задач.

Вначале предлагается:

В данный прямоугольный треугольник вписать квадрат так, чтобы его вершина совпала с вершиной прямого угла, а все остальные вершины находились бы на сторонах треугольника.

Анализ условия задачи (черт. 128) показывает, что вершина квадрата, лежащая на гипотенузе, должна в то же время лежать и на биссектрисе прямого угла треугольника. Таким образом, эта задача может быть решена без использования понятия подобия.



Черт. 128

Затем перед учащимися ставится вопрос, как будет решаться задача если требуется:

Вписать в произвольный треугольник квадрат так, чтобы все вершины квадрата лежали на сторонах треугольника.

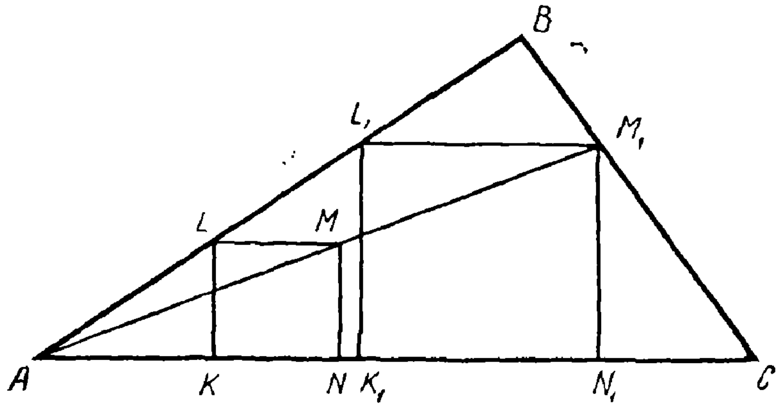
Предыдущий прием решения здесь уже не годится.

Учащимся для облегчения самостоятельного отыскания плана решения этой задачи можно вначале предложить такую задачу:

На черт. 129 $KLMN$ — квадрат, прямая AM пересекает сторону BC треугольника в точке M_1; $L_1M_1 \parallel LM$; $M_1N_1 \parallel MN$; $L_1K_1 \parallel LK$.

Доказать, что четырехугольник $K_1L_1M_1N_1$ является квадратом.

Затем уже перейти к ранее предложенной задаче, решение которой подробно разобрано во многих работах по геометрическим построениям.



Черт. 129

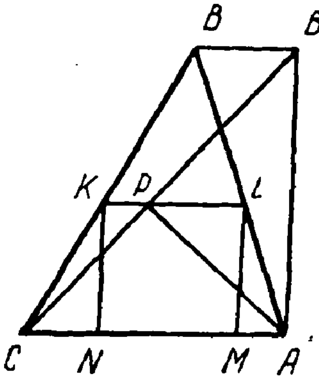
Представляет интерес одно решение этой задачи, которое обычно не рассматривается в школе. Предварительно докажем следующее предложение:

Два треугольника, имеющие равные высоты и равные основания, расположены по одну сторону от прямой, на которой лежат их основания. Доказать, что отрезки прямой, параллельной основаниям, заключенные внутри треугольников, равны.

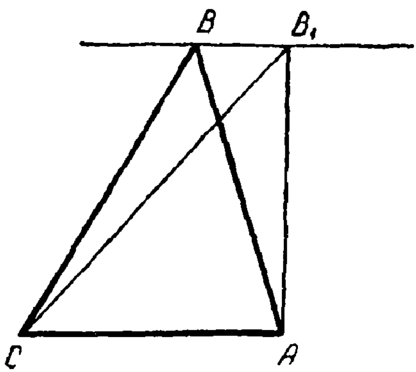
Доказав это, можно рассмотреть такое решение задачи:

Предположим, что в треугольник ABC уже вписан квадрат $KLMN$ (черт. 130). Закрепим мысленно на сторонах AB и BC точки L и K, а затем, представив себе, что стороны AB и BC могут растягиваться и сжиматься, будем перемещать вершину B треугольника ABC по прямой, параллельной AC. Тогда квадрат, «подвешенный» в точках K и L, также будет перемещаться, причем отрезок KL (как это нетрудно доказать) будет сохранять свою величину и положение относительно прямой AC. В момент, когда сторона AB станет перпендикулярной основанию AC, точка K совпадет с P, основанием биссектрисы угла B_1AC треугольника AB_1C.

Следовательно, возможно такое решение задачи. Преобразуем данный треугольник ABC в прямоугольный треугольник AB_1C ($\angle CAB_1 = 90°$) так, как это указано на черт. 131, и проведем в этом треугольнике биссектрису угла B_1AC. Через точку P, точку пересечения проведенной биссектрисы со стороной B_1C (см.



Черт. 130



Черт. 131

черт. 130) проводим прямую, параллельную AC. Точки пересечения этой прямой со сторонами данного треугольника определят две вершины K и L искомого квадрата.

Аналогичный прием может быть использован при решении задач, в которых для вписываемых фигур заданы углы, например:

В данный треугольник вписать ромб с данным острым углом так, чтобы все его вершины лежали на сторонах треугольника.

В данный треугольник вписать прямоугольник, у которого диагональ образует данный угол со стороной.

Следует заметить, что некоторые задачи проще решаются обычным методом, например:

В данный треугольник вписать прямоугольник с заданным отношением сторон.

§ 21. Правильные многоугольники

Вписанные и описанные треугольники и четырехугольники

При решении задач на построение вписанных и описанных треугольников решаются следующие четыре основные задачи:

Около данного треугольника описать окружность.

В данный треугольник вписать окружность.

Около данной окружности описать треугольник, подобный данному.

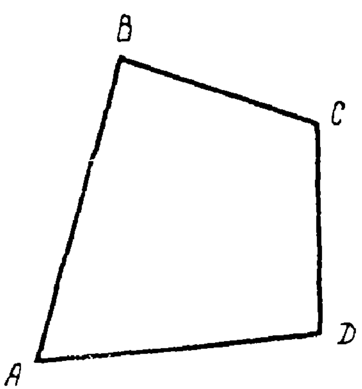
В данную окружность вписать треугольник, подобный данному.

Все эти задачи решаются не только «в общем виде», но и с конкретными данными, например:

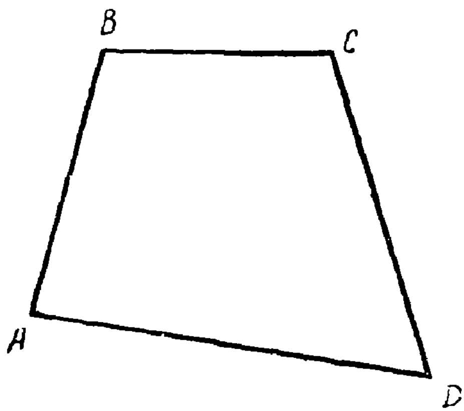
Около данной окружности описать равнобедренный прямоугольный треугольник.

Около окружности радиуса 4 см описать равнобедренный треугольник с углом при вершине, равным 57°. Вычислить, проведя необходимые измерения, его площадь.

Часть этих задач может быть решена методом подобия, что дает возможность повторить материал первого полугодия, но число этих задач невелико, так как на



Черт. 132



Черт. 133

всю тему «Вписанные и описанные многоугольники» выделяется 12 часов.

Для закрепления умений можно предложить задачи (построение выполняется на отдельных листах).

Дан четырехугольник (черт. 132), известно, что около него может быть описана окружность. Построить ее.

Дан четырехугольник (черт. 133), известно, что в него может быть вписана окружность. Построить ее.

Правильные многоугольники

При изучении правильных многоугольников большое внимание уделяется задачам на построение. Прежде всего учащиеся должны научиться строить окружности, описанные около правильных многоугольников и вписанные в них. Обычно эти задачи не представляют большого интереса, так как центр окружности в случае четного и нечетного числа сторон довольно быстро находится.

В соответствии с программой на уроке геометрии рассматриваются точные приемы построения правильных шестиугольников, треугольников и квадратов. Но в конце изучения этой темы на основании решения ряда задач с учащимися можно выяснить, какие еще приемы могут быть использованы для построения правильных многоугольников. В числе этих приемов могут быть названы следующие: построение правильного многоугольника делением вписанной или описанной окружности на соответствующее число равных частей; вычисление и построение соответствующего центрального угла; вычис-

Таблица 4

n	a	n	a	n	a	n	a
3	0,7320	11	0,5635	19	0,3292	27	0,2321
4	0,414	12	0,5176	20	0,3139	28	0,2239
5	0,1754	13	0,4786	21	0,2981	29	0,2162
6	1,000	14	0,4456	22	0,2846	30	0,2090
7	0,8677	15	0,4158	23	0,2733	31	0,2023
8	0,7654	16	0,3602	24	0,2610	32	0,1960
9	0,6840	17	0 3673	25	0,2507	33	0,1901
10	0,6180	18	0,3473	26	0,2417	34	0,1844

ление стороны многоугольника, если известен радиус описанной около него окружности. Учитель сообщает, что последний является одним из распространенных способов построения правильных многоугольников. Им часто пользуются в черчении и при разметке. Для вычисления стороны a правильного многоугольника используется таблица 4.

Эту таблицу можно найти во многих справочниках, но ее легко составить по формуле:

$$a=2R\cos\frac{360°}{2n}$$

или, полагая $R=1$,

$$a=2\cos\frac{180°}{n}.$$

Однако нужно помнить, что при большом n применение этого способа приводит к значительной погрешности.

В самом деле, рассмотрим, какова может быть фактическая погрешность при построении правильного 15-угольника, вписанного в окружность радиуса 200 *мм*.

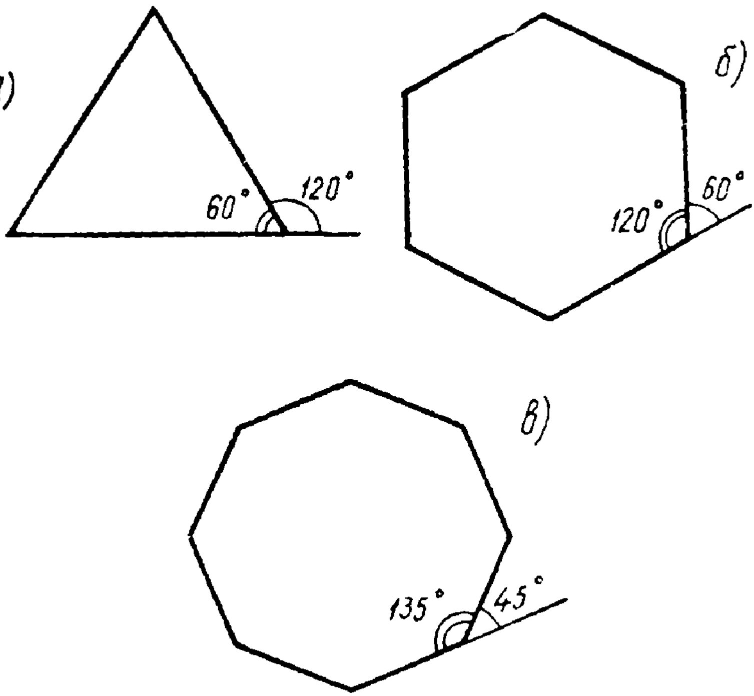
По приведенной выше таблице находим, что

для $R=1$ *мм* $a=0{,}4158$ *мм*,
для $R=200$ *мм* $a=83{,}16$ *мм*.

Обычно считается, что циркуль можно установить с точностью до 0,1 *мм*. Следовательно, даже если циркуль будет установлен на размер 83,1 *мм*, то при откладывании хорд окажется, что последняя хорда будет примерно на 1 *мм* больше других. К этому добавятся и другие погрешности. Для устранения накопления погрешностей имеются различные приемы, которые здесь не рассматриваются.

Выше были рассмотрены приемы построения правильных многоугольников по радиусу описанной около них или вписанной в них окружности. Интересно перед учениками поставить вопрос, как можно построить правильный n-угольник ($n=3, 6, 8$) по данной его стороне.

Ответ может быть получен довольно быстро, если учащиеся обратят внимание на величины внутренних и внешних углов многоугольников (черт. 134). Таким образом окажется, что построение правильного тре-

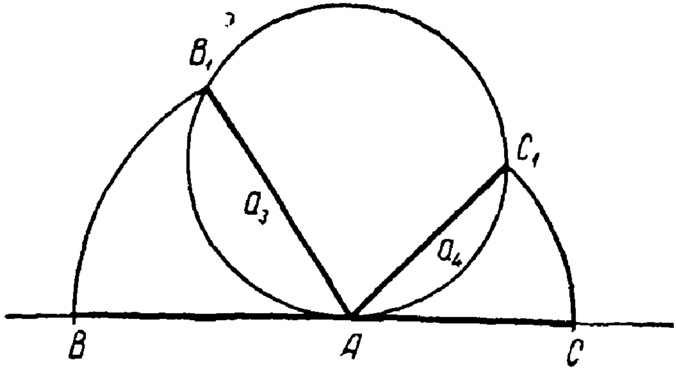


Черт. 134

угольника, квадрата и восьмиугольника может быть довольно просто выполнено с помощью обычных чертежных инструментов: линейки (лучше рейсшины) и чертежных треугольников.

В этом же разделе интересно рассмотреть с учащимися решение одной практической задачи на спрямление полуокружности, при решении которой используется выражение сторон квадрата и правильного треугольника через радиус описанных около них окружностей.

Пусть надо построить отрезок, равный длине полуокружности данного радиуса. Чертим окружность данного радиуса и проводим к ней касательную (черт. 135). От точки касания по обе стороны от нее откладываем на касательной два отрезка AB и AC, равные сторонам правильного треугольника и квадрата, вписанных в эту окружность. Сумма этих отрезков (отрезок BC) и будет приближенно равна длине полуокружности.



Черт. 135

В самом деле:

$BC=AB+AC$; но так как $AB=AB_1$ и $AC=AC_1$, то

$BC=B_1A+AC_1=a_3+a_4$;

$BC=R\sqrt{3}+R\sqrt{2}=R(\sqrt{3}+\sqrt{2})$;

$BC=R(1{,}7321+1{,}4142)=3{,}1463\,R$.

Длина полуокружности равна πR или приближенно $3{,}1463R$. Таким образом, абсолютная погрешность практически будет равна нулю.

Этот прием может быть использован при построении разверток цилиндров и конусов.

Описанная нами система работы в значительной части проверялась в VI—VIII классах и дала положительные результаты: знания школьников по изученному материалу стали осознанными, они хорошо усвоили основные понятия курса геометрии VI—VIII классов, стали более свободно использовать теоретические сведения при решении задач, научились правильно и довольно быстро выполнять геометрические построения при помощи различных инструментов.

Разнообразные по содержанию упражнения и задачи, установление связи между различными видами задач, частое обращение к примерам, взятым из окружающей жизни (в том числе из личного опыта учащихся), в большей степени повысили их интерес и внимание к изучению геометрии, что, естественно, сказалось и на качестве усвоения материала.

ОПЕЧАТКИ

Стр.	Строка сверху	Строка снизу	Напечатано	Следует читать
21	13		0,33	0,03
51		6	Однако здесь следует помнить, что учащиеся не все-	Они могут быть решены одним и тем же методом, не-
67		15	вычислительным	измерительным
78	1		$AD = DC$	$AD = DA_1$
129	5		h^q	h_b
129	17, 20		h	h_b
129		22	касательной и	касательной к
130		15	MA, MA_1	MA, MA_1, ...
139	8–9		*Даны две параллельные прямые на отрезке прямой, заключенном между ними. Найти*	*Даны две параллельные прямые; на отрезке прямой, заключенном между ними, найти*
140		1	KM	KL
152	5		$BC = R\,(1{,}7321 + 1{,}4142)$	$BC \approx R\,(1{,}7321 + 1{,}4142)$

Г. Г. Маслова «Методика обучения решению задач на построение в восьмилетней школе».