ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЯ СТАТЬИ

АЛГЕБРЫ

(курсъ 7-го класса реальныхъ училищъ).

СОСТАВИЛЪ

А. Киселевъ.

Пятое изданіе.

Уч. Ком. М. Н. Пр. допущено въ качествѣ **руководства** при прохожденіи алгебры въ дополнительномъ классѣ реальныхъ училищъ (Журналъ М. Н. Пр., 1901 г., № 8).

ИЗДАНІЕ КНИЖНАГО МАГАЗИНА
В. В. ДУМНОВА,
подъ фирмою
„НАСЛѢДНИКИ бр. САЛАЕВЫХЪ“.

МОСКВА,
Т—во «Печатня С. П. Яковлева». Петровка, Салтыковскій пер., домъ Т—ва, № 9.
1903.

Изъ предисловія ко второму изданію

„Элементарной алгебры".

Относительно изложенія дополнительныхъ статей курса 7-го класса реальныхъ училищъ считаемъ не лишнимъ высказать нѣкоторыя замѣчанія.

Послѣ многихъ авторитетныхъ трудовъ въ западной и отечественной научно-педагогической литературѣ становится, какъ мы думаемъ, невозможнымъ излагать *способъ предѣловъ* такъ, какъ это дѣлалось прежде въ нѣкоторыхъ нашихъ руководствахъ. Теорія предѣловъ въ настоящее время тѣсно связывается съ теоріей несоизмѣримыхъ чиселъ *). Мы держались этой точки зрѣнія при составленіи дополнительныхъ статей, стремясь при этомъ къ возможно большей простотѣ безъ ущерба научности. Изъ различныхъ взглядовъ на природу несоизмѣримаго числа мы остановились, какъ на простѣйшемъ и наиболѣе доступномъ пониманію учащихся, на томъ, которымъ несоизмѣримое число опредѣляется, какъ *предѣлъ* неограниченнаго ряда соизмѣримыхъ чиселъ, обладающаго нѣкоторымъ признакомъ существованія предѣла.

При изложеніи статьи о *maximum* и *minimum* мы сочли не лишнимъ указать графическое изображеніе функціи объ одной перемѣнной независимой, такъ какъ это изображеніе во многихъ случаяхъ облегчаетъ уясненіе свойствъ разсматриваемой функціи.

---

*) См. напр. *Tannery*—Introduction à la theorie des fonctions d'une variable. 1896, статью *Griess'а*—Nombres incommensurables въ Journal de Math. élément. de Longchamps, 1888, *Tartinville*, Cours d'arithmetique, 1889, *Otto Stolz*, Vorlesungen über Allegemeine Arithmetik, 1885, *Otto Riemann*, Theorie der Analytischen Functionen, 1887, *Н. Билибинъ*—Алгебра для гимназій и реальныхъ училищъ, 1889, *Матковскій*—Начала алгебры, 1890, и др.

Принятый во многихъ учебникахъ способъ нахожденія *maximum* и *minimum* трехчлена второй степени и дроби съ трехчленными числителемъ и знаменателемъ, состоящій въ приравниваніи данной функціи неопредѣленному количеству *m*, мы отодвинули на второй планъ, такъ какъ этотъ способъ не обладаетъ общностью и — главное — не даетъ maximum и minimum въ точномъ смыслѣ этихъ словъ, а только самое большее и самое меньшее значеніе функціи (да и то не всегда). Мы предпочли поставить на первомъ мѣстѣ иной способъ, представляющій прямое слѣдствіе изъ опредѣленія maximum и minimum, и другой (Фермата), какъ весьма простой и плодотворный.

Мы отступили также отъ общепринятаго пріема, какъ не вполнѣ точнаго, при доказательствѣ теоремъ о наибольшемъ значеніи произведенія перемѣнныхъ чиселъ при постоянной ихъ суммѣ и о наименьшемъ значеніи суммы перемѣнныхъ чиселъ при постоянномъ ихъ произведеніи; мы предпочли болѣе строгое изложеніе, основанное на неравенствѣ *Коши*, усвоеніе котораго, полагаемъ, не затруднитъ учениковъ старшаго класса реальныхъ училищъ.

Настоящее изданіе „Дополнительныхъ статей“ представляетъ собою, съ небольшими измѣненіями и сокращеніями, то, что прежде было напечатано въ концѣ второго изданія „Элементарной алгебры“, въ видѣ приложенія къ ней.

Четвертое и пятое изданія печатаны безъ перемѣнъ съ третьяго.

Дополнительныя статьи алгебры.

Понятіе о функціи и о предметѣ алгебры.

1. Всякая величина, которая зависитъ отъ другихъ величинъ, можетъ быть названа *функціей* этихъ послѣднихъ. Напр., длина окружности круга есть функція радіуса, пространство, проходимое тѣломъ при равномѣрномъ движеніи, есть функція скорости и времени, продолжительность одного качанія маятника есть функція длины его и ускоренія отъ тяжести и т. п.

Если величины, отъ которыхъ зависитъ функція, могутъ быть измѣняемы произвольно, то онѣ наз. *перемѣнными независимыми*.

Функціи могутъ быть: отъ одной перемѣнной независимой, отъ двухъ, трехъ и болѣе.

Чтобы обозначить, что величина u есть нѣкоторая функція отъ перемѣнныхъ a, b, c..., пишутъ такъ:

$$u=f(a,\ b,\ c\ldots)$$

гдѣ f есть начальная буква слова *fonction*, т.-е. функція. Вмѣсто f иногда употребляются буквы: F, Φ, φ и нѣкоторыя другія.

Функціи раздѣляются на два обширные класса:

алгебраическія и *трансцендентныя*.

Алгебраическія функціи бываютъ двухъ родовъ. Это, во 1-хъ, такія функціи, которыя могутъ быть получены изъ своихъ перемѣнныхъ независимыхъ посредствомъ *конечнаго* числа 6-ти алгебраическихъ дѣйствій: сложенія, вычитанія, умноженія, дѣленія, возвышенія въ степень и извлеченія корня. Таковы, напр., слѣдующія функціи (если a, b, c... перемѣнныя независимыя):

$$u=a+b-c,\ u=(ab)^3,\ u=\sqrt[5]{\frac{a+b}{bc}} \text{ и т. п.}$$

Во 2-хъ, алгебраическими *функціи называются* и тогда, если ихъ зависимость отъ перемѣнныхъ независимыхъ выражается *алгебраическимъ* уравненіемъ (§ 229), въ которомъ неизвѣстное есть функція, а коэффиціенты—перемѣнныя независимыя. Такимъ образомъ, если имѣемъ уравненіе:

$$ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f=0$$

то можемъ сказать, что величина x, опредѣляемая этимъ уравненіемъ, есть *алгебраическая* функція перемѣнныхъ независимыхъ a, b, c, d, e и f.

Трансцендентными наз. всѣ тѣ функціи, которыя не могутъ быть причислены къ алгебраическимъ. Таковы, напр., функціи (если a есть перемѣнная независимая):

$u=2^a$ (показательная функція)
$u=\log a$ (логариѳмическая функція)
$u=\sin a$ (тригонометрическая функція)

и множество другихъ.

2. Алгеброю наз. та часть математическихъ наукъ, которая занимается разсмотрѣніемъ свойствъ алгебраическихъ функцій, причемъ *элементарная алгебра* занимается алгебраическими функціями 1-го рода и такими, которыхъ зависимость отъ перемѣнныхъ выражается алгебраическимъ уравненіемъ 1-й или 2-й степени; *высшая алгебра* имѣетъ предметомъ, главнымъ образомъ, алгебраическія функціи 2-го рода.

Такимъ образомъ, предметъ элементарной алгебры есть указаніе свойствъ: суммы, разности, произведенія, частнаго, степени, корня, а также рѣшеніе уравненій 1-й и 2-й степени.

Впрочемъ, ради педагогическихъ и практическихъ цѣлей, въ учебникахъ элементарной алгебры помѣщаются и нѣкоторые отдѣлы, которые по характеру своему не принадлежатъ алгебрѣ. Таковы: рѣшеніе неопредѣленныхъ уравненій въ *цѣлыхъ* числахъ (относится къ теоріи чиселъ), ученіе о логариѳмахъ (относится къ теоріи логариѳмическихъ функцій) и нѣкоторые другіе.

Основныя начала теоріи предѣловъ въ связи съ теоріей несоизмѣримыхъ чиселъ.

I. Главнѣйшія свойства предѣловъ величинъ.

3. Предварительное замѣчаніе. Въ этой главѣ мы будемъ говорить о *величинахъ* и ихъ *значеніяхъ*, не предполагая, чтобы эти значенія были выражены числами. При этомъ считаемъ извѣстнымъ, что значенія одной и той же величины можно сравнивать между собою относительно ихъ равенства или неравенства, а также производить надъ ними дѣйствія сложенія, вычитанія, умноженія и дѣленія на отвлеченное число.

Замѣтимъ, что говоря: абсолютная величина разности двухъ значеній a и b одной и той же величины, мы будемъ разумѣть разность $a-b$, когда $a>b$, и разность $b-a$, если $b>a$.

4. Опредѣленіе. *Перемѣнная величина наз. безконечно малою, если при своемъ измѣненіи она дѣлается и остается меньше всякаго даннаго значенія, какъ бы мало это значеніе ни было.*

Говоря: „дѣлается и остается", мы желаемъ выразить двѣ мысли: 1) что разсматриваемая перемѣнная величина, измѣняясь по какому-нибудь закону, можетъ получить такое значеніе, которое меньше всякаго даннаго значенія, какъ бы мало послѣднее ни было, и 2) что при дальнѣйшемъ процессѣ измѣненія перемѣнная величина *постоянно остается* меньше этого значенія.

Такова, напр., величина, представляющая разность площадей даннаго круга и правильнаго вписаннаго въ этотъ кругъ многоугольника при условіи, что число сторонъ этого многоугольника неопредѣленно увеличивается. Дѣйствительно, какую бы малую площадь мы ни задали, эта разность, при достаточномъ увеличенiи числа сторонъ многоугольника, можетъ *сдѣлаться* меньше этой площади и при дальнѣйшемъ увеличенiи числа сторонъ постоянно *остается* меньше ея.

5. Изъ понятiя о безконечно малой величинѣ слѣдуетъ:

1) *Сумма конечнаго числа безконечно малыхъ величинъ есть величина безконечно малая.* Дѣйствительно, какъ бы мало ни было данное значенiе ε, сумма безконечно малыхъ величинъ: $\alpha+\beta+\gamma+\ldots\lambda$, число которыхъ не превосходитъ опредѣленнаго числа n, можетъ сдѣлаться и оставаться меньше ε, потому что каждое слагаемое можетъ сдѣлаться и оставаться меньше $\frac{\varepsilon}{n}$.

2) *Абсол. величина разности безконечно малыхъ величинъ есть величина безконечно малая,* потому что она меньше той безконечно малой величины, которая служитъ уменьшаемымъ.

3) *Произведенiе безконечно малой величины на конечное соизмѣримое число есть величина безконечно малая.* Въ самомъ дѣлѣ, если n есть цѣлое число, а α безконечно малая величина, то αn представляетъ сумму: $\alpha+\alpha+\alpha+\ldots+\alpha$, которая, какъ мы видѣли, есть величина безконено малая при n конечномъ. Если же n есть дробь $\frac{p}{q}$, то $\alpha.\frac{p}{q}$ представляетъ $\frac{1}{q}$ часть отъ α, повторенную p разъ; слѣд., это произведенiе также есть величина безконечно малая.

4) *Частное отъ дѣленiя безконечно малой величины на постоянное соизмѣримое число есть величина безконечно малая,* потому что $\frac{\alpha}{n}$ все равно, что $\alpha.\frac{1}{n}$, а произведенiе безконечно малой величины на конечное соизмѣримое число, какъ мы выше объяснили, есть величина безконечно малая.

6. Опредѣленiе. *Перемѣнная величина наз. безконечно большою, если при своемъ измѣненiи она дѣлается и остается больше всякаго даннаго значенiя, какъ бы велико это значенiе ни было.*

Такова, напр., сумма внутреннихъ угловъ многоугольника при неограниченномъ увеличеніи числа его сторонъ.

О безконечно большой величинѣ иногда условно говорятъ, что она *стремится къ безконечности* (∞).

Опредѣленіе. *Перемѣнная величина, не способная при своемъ измѣненіи сдѣлаться больше нѣкотораго значенія, назыв. величиною конечною.*

Такова, напр., величина периметра многоугольника, вписаннаго въ данную окружность, при произвольномъ измѣненіи числа и длины его сторонъ.

7. **Опредѣленіе.** *Говорятъ, что перемѣнная величина* a *стремится къ предѣлу* A, *если* A *есть постоянная величина, обладающая тѣмъ свойствомъ, что абс. вел. разности* A—a, *при измѣненіи* a, *дѣлается и остается меньше всякаго даннаго значенія, какъ бы мало послѣднее ни было.*

Перемѣнная величина, обладающая предѣломъ, можетъ приближаться къ нему различно: или постоянно увеличиваясь, или постоянно уменьшаясь, или же то увеличиваясь, то уменьшаясь, при чемъ она можетъ быть то больше, то меньше своего предѣла. Напр., площадь прав. многоугольника, *вписаннаго* въ данный кругъ, при неограниченномъ удвоеніи числа сторонъ его, приближается къ предѣлу (къ площади круга), постоянно увеличиваясь; при томъ же условіи площадь прав. *описаннаго* многоугольника приближается къ предѣлу, постоянно уменьшаясь. Если вообразимъ, что площадь прав. многоугольника измѣняется по такому закону: берется площадь какого-нибудь прав. *вписаннаго* многоугольника (напр. 6-угольника), затѣмъ площадь прав. одноименнаго *описаннаго*, затѣмъ площадь прав. *вписаннаго*, имѣющаго вдвое больше сторонъ (12-угольника), далѣе площадь одноименнаго *описаннаго* и т. д., постепенно переходя отъ вписаннаго къ описанному и наоборотъ, то будемъ имѣть примѣръ перемѣнной величины, приближающейся къ своему предѣлу (къ площади круга), то увеличиваясь, то уменьшаясь, и дѣлающейся то больше своего предѣла, то меньше его.

Что перемѣнная величина a имѣетъ предѣлъ A, выражаютъ письменно такъ:

$$пред.\ a = A \text{ или: } \lim a = A$$

гдѣ *lim* есть сокращеніе франц. слова *limite* (или латинскаго *limes*), что значитъ „предѣлъ".

Для краткости рѣчи вмѣсто того, чтобы говорить: „a стремится *къ предѣлу* A", мы часто будемъ выражаться короче: „a стремится къ A".

Если условимся считать 0 за частное значеніе величины, то можно сказать, что *безконечно малая величина имѣетъ предѣломъ 0.* Дѣйствительно, если α есть безконечно малая величина, то разность $\alpha-0=\alpha$ дѣлается и остается какъ угодно малой, и потому, согласно опредѣленію предѣла, *пред.* $\alpha=0$.

8. Теорема 1. *Если перемѣнная величина* a *стремится къ предѣлу* A, *то, начиная съ нѣкотораго своего значенія, величина* a *постоянно остается заключенной въ промежуткѣ отъ* A—α *до* A+α, *какъ бы мало ни было данное значеніе* α.

Док. Какъ бы мало ни было α, величина a, согласно опредѣленію предѣла, можетъ получить такое значеніе, при которомъ, и при всѣхъ слѣдующихъ значеніяхъ, абс. вел. $A-a$ меньше α. Значитъ, тѣ изъ этихъ значеній, которыя окажутся больше A, должны удовлетворять неравенствамъ:

$$a>A,\ a-A<\alpha, \text{ т.-е. } A<a<A+\alpha$$

а тѣ, которыя меньше A*), удовлетворяютъ такимъ неравенствамъ:

$$a<A,\ A-a<\alpha, \text{ т.-е. } A-\alpha<a<A$$

Первыя значенія заключены всѣ въ промежуткѣ отъ A до $A+\alpha$; вторыя—въ промежуткѣ отъ $A-\alpha$ до A; значитъ, тѣ и другія заключены между $A-\alpha$ и $A+\alpha$, такъ что

$$A-\alpha<a<A+\alpha$$

*) Мы беремъ самый общій случай, когда перемѣнная величина то больше, то меньше своего предѣла.

Теорема 2. *Перемѣнная величина, измѣняющаяся по опредѣленному закону, не можетъ имѣть болѣе одного предѣла.*

Док. Предположимъ, что a, измѣняясь по опредѣленному закону, стремится къ двумъ различнымъ предѣламъ A и B, при чемъ $A > B$. Предположить это значитъ допустить (теор. 1-я), что, начиная съ нѣкотораго частнаго значенія, перемѣнная a постоянно будетъ заключаться между $A-\alpha$ и $A+\alpha$ и въ то же время между $B-\alpha$ и $B+\alpha$, какъ бы мало ни было α. Чтобы опровергнуть это, выберемъ α такъ, чтобы оно удовлетворяло неравенству:

$$B+\alpha < A, \text{ т.-е. } \alpha < \frac{A-B}{2}$$

При такомъ значеніи α два промежутка: отъ $B-\alpha$ до $B+\alpha$ и отъ $A-\alpha$ до $A+\alpha$ лежатъ *одинъ внѣ другого*; слѣд., a не можетъ одновременно заключаться въ нихъ обоихъ; поэтому нельзя допустить, чтобы A и B были предѣлами одной и той же перемѣнной a.

Теорема 3. *Если разность двухъ перемѣнныхъ* $\mathfrak{a}$ *и* $\mathfrak{b}$ *есть величина безконечно малая, или равна 0, и одна изъ этихъ перемѣнныхъ имѣетъ предѣлъ, то другая имѣетъ тотъ же предѣлъ.*

Док. Пусть *пред.* $a=A$. Требуется доказать, что *пред.* $b=A$. Такъ какъ абсол. величина $A-a$ дѣлается и остается меньше α, какъ бы мало α ни было, а съ другой стороны абсол. величина $a-b$ дѣлается и остается меньше β, какъ бы мало β ни было, то отсюда слѣдуетъ, что абсол. вел. $A-b$ дѣлается и остается меньше $\alpha+\beta$, т.-е. меньше какого угодно малаго значенія; слѣд. *пред.* $b=A$.

Если $b-a=0$, т.-е. $b=a$, то перемѣнныя a и b, ничѣмъ не отличаясь одна отъ другой, представляютъ одну и ту же величину и слѣд. имѣютъ одинъ предѣлъ (теор. 2).

Теорема 4 (обратная). *Если перемѣнныя* $\mathfrak{a}$ *и* $\mathfrak{b}$ *имѣютъ общій предѣлъ, то разность между ними есть величина безконечно малая, или равна нулю.*

Док. Если a и b имѣютъ общій предѣлъ A, то это значитъ, что, начиная съ нѣкоторыхъ частныхъ своихъ значеній, обѣ эти перемѣнныя будутъ постоянно заключаться между $A-\alpha$ и $A+\alpha$, какъ бы мало α ни было; отсюда слѣдуетъ, что разность между ними меньше разности $(A+\alpha)-(A-\alpha)=2\alpha$; значитъ, эта разность или равна 0, или есть величина безконечно малая.

Аксіомы. 1) *Если перемѣнная величина* a *возрастаетъ, оставаясь меньше нѣкотораго постояннаго значенія* A, *то она имѣетъ предѣлъ, меньшій или равный* A.

2) *Если перемѣнная величина* a *убываетъ, оставаясь больше нѣкотораго постояннаго значенія* A, *то она имѣетъ предѣлъ, большій или равный* A.

Теорема 5. *Если перемѣнная величина* a *получаетъ безконечный рядъ конечныхъ значеній:*

$$a_1,\ a_2,\ a_3 \ldots .\ a_k,\ a_{k+1} \ldots ., \qquad [1]$$

обладающій тѣмъ свойствомъ, что при неограниченномъ возрастаніи k *абсол. вел.* $(a_{k+p}-a_k)$ *стремится къ* 0 *при всякомъ данномъ* p, *то* a *имѣетъ предѣлъ.*

Замѣтимъ, что значенія: $a_1,\ a_2,\ a_3 \ldots$ могутъ итти увеличиваясь, или уменьшаясь, или то увеличиваясь, то уменьшаясь. Такимъ образомъ, предлагаемая теорема выражаетъ истину болѣе общую, чѣмъ содержаніе двухъ приведенныхъ выше аксіомъ.

Док. Наше доказательство будетъ состоять изъ трехъ частей.

Во 1-хъ, убѣдимся, что при данномъ въ теоремѣ условіи величина *a не можетъ увеличиваться безпредѣльно.*

Такъ какъ, по условію, абсол. вел. $(a_{k+p}-a_k)$ при неограниченномъ возрастаніи k стремится къ 0 при всякомъ данномъ p, то, какъ бы мало ни было данное α, всегда можно выбрать k настолько большимъ, что при этомъ значеніи k и при всѣхъ большихъ значеніяхъ абсолютныя величины всѣхъ разностей:

$$a_{k+1}-a_k;\ a_{k+2}-a_k,\ a_{k+3}-a \ldots .\ a_{k+p}-a_k \ldots$$

будутъ меньше α. Отсюда слѣдуетъ, что, начиная съ a_k, всѣ слѣдующіе члены ряда [1] будутъ заключены между $a_k-\alpha$ и

$a_k+\alpha$; значитъ, ни одинъ изъ нихъ не превзойдетъ $a_k+\alpha$; другими словами, величина a не можетъ возрастать безпредѣльно.

Во 2-хъ. докажемъ, что при условіи, данномъ въ теоремѣ, изъ значеній ряда [1], перебирая ихъ по порядку значковъ и выбрасывая нѣкоторыя, *всегда можно составить или безконечный рядъ значеній возрастающихъ, или безконечный рядъ значеній убывающихъ.*

Въ самомъ дѣлѣ, каковъ бы ни былъ законъ измѣненія значеній величины a, мы всегда можемъ поступить такъ: беремъ a_1; потомъ, перебирая слѣдующія значенія, отдѣляемъ то, которое больше a_1 (пусть это будетъ a_k); затѣмъ, перебирая слѣдующія, беремъ то, которое еще больше (пусть это будетъ a_m) и т. д. Тогда случится одно изъ двухъ: или, поступая такимъ образомъ, мы можемъ составить *безконечный* рядъ значеній ($a_1, a_k, a_m \ldots$), постоянно возрастающихъ, или же мы встрѣтимся съ нѣкоторымъ a_k, которое больше (по крайней мѣрѣ, не меньше) всѣхъ слѣдующихъ значеній (въ частномъ случаѣ это можетъ быть a_1). Въ послѣднемъ случаѣ станемъ, начиная съ a_k, подобно предыдущему, составлять рядъ значеній *убывающихъ*. Одно изъ двухъ: или мы можемъ составить *безконечный* рядъ такихъ значеній, или мы встрѣтимся съ нѣкоторымъ a_l, которое будетъ меньше (по крайней мѣрѣ, не больше) всѣхъ слѣдующихъ значеній. Въ послѣднемъ случаѣ станемъ, начиная съ a_l, составлять, подобно предыдущему, рядъ значеній *возрастающихъ*. И опять одно изъ двухъ: или можно составить *безконечный* рядъ такихъ значеній, или же дойдемъ до нѣкотораго a_m, которое будетъ больше (не меньше) всѣхъ слѣдующихъ значеній. Продолжая поступать такимъ образомъ далѣе, мы увидимъ, что можно составить неограниченный рядъ значеній: или постоянно возрастающихъ, или постоянно убывающихъ, или же, наконецъ, наибольшихъ и наименьшихъ значеній:

$$\underline{a_k},\ a_l,\ \underline{a_m},\ a_n,\ \underline{a_p},\ a_r, \ldots$$

(пусть подчеркнутыя буквы выражаютъ наибольшія значенія, а неподчеркнутыя наименьшія).

Положимъ, что будетъ имѣть мѣсто самый невыгодный для насъ случай: послѣдній. Такъ какъ, по предположенію,

$a_k \geqslant a_m \geqslant a_p \geqslant \ldots$, то, беря только эти значенія, мы составимъ безконечный рядъ убывающихъ членовъ *):

$$a_k,\ a_m,\ a_p\ .\ .\ .\ .\ .$$

Съ другой стороны, $a_l \leqslant a_n \leqslant \leqslant a_r \ldots$; поэтому, беря только эти значенія, мы составимъ безконечный рядъ возрастающихъ членовъ **):

$$a_l,\ a_n,\ a_r,\ldots.$$

Оказывается такимъ образомъ, что *всегда* изъ членовъ ряда [1], идя въ немъ отъ начала къ концу, можно составить безконечный рядъ значеній или возрастающихъ, или убывающихъ.

Въ 3-хъ, наконецъ, докажемъ, что *разсматриваемый рядъ имѣетъ предѣлъ*. Пусть изъ членовъ даннаго ряда:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_k,\ldots\ a_{k+1}\ .\ .\ . \qquad [1]$$

мы составили, какъ было выше объяснено, безконечный рядъ значеній возрастающихъ или убывающихъ:

$$a_l,\ a_m,\ a_n,\ a_p,\ a_q\ .\ .\ .\ . \qquad [2]$$

Рядъ [2], удовлетворяя требованіямъ приведенныхъ выше аксіомъ, имѣетъ предѣлъ. Сравнивая съ этимъ рядомъ рядъ [1], замѣчаемъ, что абсол. величины разностей между соотвѣтствующими членами обоихъ рядовъ: $a_l - a_1, a_m - a_2$, $a_n - a_3\ldots$, стремятся къ 0, согласно условію теоремы; изъ этого заключаемъ, что рядъ [1] имѣетъ тотъ же предѣлъ, что и рядъ [2] (теор. 3).

Теорема 6 (обратная). *Если перемѣнная величина* a, *получающая неограниченный рядъ конечныхъ значеній:*

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ldots\ a_k,\ a_{k+1},\ldots$$

стремится къ предѣлу, то абсол. вел. $(a_{k+p} - a_k)$, *при неограниченномъ возрастаніи* k, *стремится къ* 0 *при всякомъ данномъ* p.

Док. Если A есть предѣлъ a, то какъ бы мало ни было данное значеніе α, всегда можно выбрать k настолько боль-

*) Хотя, быть-можетъ, убывающихъ и не постоянно, такъ какъ нѣкоторыя рядомъ стоящія значенія могутъ оказаться равными.

**) Хотя, быть-можетъ, возрастающихъ и не постоянно, такъ какъ нѣкоторыя рядомъ стоящія значенія могутъ оказаться равными.

шимъ, что при этомъ значеніи k и при всѣхъ большихъ значеніяхъ члены ряда:

$$a_k,\ a_{k+1},\ a_{k+2},\ a_{k+3}\dots\ a_{k+p}\dots$$

будутъ постоянно заключаться между $A-\alpha$ и $A+\alpha$; изъ этого слѣдуетъ, что абсол. величина $(a_{k+p}-a_k)$ будетъ меньше 2α; а такъ какъ α можетъ быть мало какъ угодно, то это значитъ, что абсол. вел. $(a_{k+p}-a_k)$ стремится къ 0.

Слѣдствіе изъ двухъ предшествующихъ теоремъ: *чтобы перемѣнная величина* a, *получающая безконечный рядъ конечныхъ значеній:*

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4\dots\ a_k,\ a_{k+1}\dots$$

имѣла предѣлъ, необходимо и достаточно, чтобы абсол. вел. $(a_{k+p}-a_k)$ *при неограниченномъ возрастаніи* k *стремилась къ 0 при всякомъ данномъ* p.

Теорема 7. *Если двѣ перемѣнныя величины* a *и* b *получаютъ соотвѣтственно безконечные ряды значеній:*

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4\dots\ a_k,\ a_{k+1},\dots \qquad [1]$$
$$b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4\dots\ b_k,\ b_{k+1},\dots \qquad [2]$$

обладающихъ слѣдующими двумя свойствами:

1) *Каждое значеніе ряда [1] меньше каждаго значенія ряда [2];*

2) *разность* b_k-a_k *при неограниченномъ возрастаніи* k *стремится къ* 0;

то a *и* b *имѣютъ предѣлъ и притомъ общій.*

Док. Достаточно показать, что одинъ изъ этихъ рядовъ, напр. [1], имѣетъ предѣлъ, потому что въ этомъ случаѣ другой рядъ долженъ имѣть тотъ же предѣлъ (теор. 3-я).

Такъ какъ b_k-a_k стремится къ 0, то, какъ бы мало ни было данное α, всегда можно выбрать k настолько большимъ, что при этомъ значеніи k и при всѣхъ большихъ значеніяхъ разности:

$$b_k-a_k,\ b_{k+1}-a_{k+1},\ b_{k+2}-a_{k+2},\dots$$

будутъ меньше α. Тогда

$$b_k-a_k<\alpha \qquad [3] \qquad\qquad b_{k+p}-a_{k+p}<\alpha \qquad [4]$$

Съ другой стороны, согласно условію:

$$b_k > a_{k+p} \qquad [5] \qquad b_{k+p} > a_k \qquad [6]$$

Вычитая [3] изъ [5] и [4] изъ [6], находимъ:

$$a_k > a_{k+p} - \alpha \qquad [7] \qquad a_{k+p} > a_k - \alpha \qquad [8]$$

Если $a_{k+p} > a_k$, то неравенство [7] даетъ:

$$a_{k+p} - a_k < \alpha$$

Если же $a_{k+p} < a_k$, то изъ неравенства [8] находимъ:

$$a_k - a_{k+p} < \alpha$$

Значитъ, абсолютная вел. $(a_{k+p} - a_k)$ при всякомъ p можетъ быть сдѣлана какъ угодно малою; отсюда слѣдуетъ, что рядъ [1] имѣетъ предѣлъ (теор. 5-я).

Теорема 8. *Предѣлъ суммы перемѣнныхъ величинъ* a *и* b, *стремящихся къ предѣламъ* A *и* B, *равенъ суммѣ ихъ предѣловъ* A+B.

Док. Какъ бы мало ни было данное значеніе α, всегда можно положить, что при нѣкоторыхъ частныхъ значеніяхъ a и b и при всѣхъ слѣдующихъ значеніяхъ, эти перемѣнныя будутъ удовлетворять неравенствамъ:

$$A - \alpha < a < A + \alpha$$
$$B - \alpha < b < B + \alpha$$

Откуда $(A+B) - 2\alpha < a + b < (A+B) + 2\alpha$.

Отсюда слѣдуетъ, что абсол. вел. $(A+B) - (a+b)$ дѣлается и остается меньше 2α, т.-е. меньше какого угодно малаго значенія.

Поэтому $\qquad$ *пред.* $(a+b) = A + B$.

Теорема можетъ быть распространена на число слагаемыхъ, *большее двухъ; лишь бы число это было конечное.*

Теорема 9. *Предѣлъ разности перемѣнныхъ* a *и* b, *стремящихся къ предѣламъ* A *и* B, *равенъ разности предѣловъ* A − B.

Док. Для доказательства возьмемъ слѣдующее тождество:

$$(a - b) + b = a.$$

Слагаемое b стремится къ предѣлу по условію; если бы при этомъ слагаемое $a - b$ не стремилось къ предѣлу, то и сумма a, очевидно, не стремилась бы къ предѣлу; но этого нѣтъ; значитъ $a—b$ имѣетъ предѣлъ. Поэтому, на основаніи предыдущей теоремы, будемъ имѣть:

$$пред. (a-b)+пред. b=пред. a$$

Откуда: $пред. (a-b)=пред. a-пред. b=A-B.$

II. Числа, разсматриваемыя какъ предѣлы.

9. Несоизмѣримыя числа. Пусть перемѣнная величина a, измѣняясь по какому-нибудь закону, получаетъ безконечный рядъ значеній:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots a_k, a_{k+1} \ldots \qquad [1]$$

соизмѣримыхъ съ единицей измѣренія и обладающихъ тѣмъ свойствомъ, что, при неограниченномъ возрастаніи k, абсол. величина $(a_{k+p}-a_k)$ стремится къ 0 при всякомъ данномъ p.

Замѣнимъ всѣ значенія ряда (1) *числами*, измѣряющими ихъ; тогда получимъ безконечный рядъ *соизмѣримыхъ* чиселъ:

$$n_1, n_2, n_3, n_4, \ldots n_k, n_{k+1} \ldots \qquad [2]$$

обладающій тѣмъ же свойствомъ, а именно: при неогран. возрастаніи k, абсол. велич. $(n_{k+p}-n_k)$ стремится къ 0 при всякомъ данномъ p.

Рядъ (1), какъ было доказано (теор. 5), стремится къ нѣкоторому предѣлу; назовемъ его A. Значеніе A можетъ быть или соизмѣримо съ единицей или несоизмѣримо.

Въ первомъ случаѣ рядъ (2), очевидно, стремится къ предѣлу, именно къ тому соизмѣримому числу N, которое измѣряетъ соизмѣримое значеніе величины A.

Во второмъ случаѣ рядъ (2) не стремится ни къ какому численному предѣлу, если понятіе о числѣ мы ограничиваемъ числами цѣлыми и дробными. *Условимся расширить это понятіе, принимая, что рядъ (2) и въ этомъ случаѣ стремится къ нѣкоторому численному предѣлу, выражающему несоизмѣримое значеніе величины A. Этотъ предѣлъ назовемъ несоизмѣримымъ числомъ. Будемъ считать его извѣстнымъ, если извѣстенъ законъ составленія членовъ ряда (2).*

10. Всякое число можно разсматривать, какъ предѣлъ ряда соизмѣримыхъ чиселъ. Такимъ образомъ, мы опредѣляемъ несоизмѣримое число, какъ предѣлъ безконечнаго ряда соизмѣримыхъ чиселъ:

$$n_1, n_2, n_3, n_4, \ldots n_k, n_{k+1}, \ldots$$

въ томъ случаѣ, когда, обладая необходимымъ и достаточнымъ условіемъ существованія предѣла (абсол. вел. $n_{k+p}-n_k$ стремится къ 0), этотъ рядъ не стремится однако ни къ какому соизмѣримому предѣлу. Разъяснимъ, что и всякое соизмѣримое число можно разсматривать, какъ предѣлъ безконечнаго ряда соизмѣримыхъ чиселъ, и притомъ весьма различными способами. Для этого составимъ, напр., рядъ по такому закону:

$$a,\ a+ax,\ a+ax+ax^2, \ldots\ a+ax+ax^2+\ldots+ax^k, \ldots$$

и положимъ, что въ немъ x есть положительное число, *меньшее 1*. При этомъ условіи рядъ стремится къ предѣлу, потому что его члены представляютъ собою сумму членовъ геометр. прогрессіи, у которой знаменатель $x<1$, а число членовъ неопредѣленно возрастаетъ. Этотъ предѣлъ (§ 273, теорема 3) есть $\frac{a}{1-x}$. Легко убѣдиться, что вслѣдствіе произвольности въ выборѣ a дробь $\frac{a}{1-x}$ можетъ равняться любому соизмѣримому числу N, при всякомъ данномъ значеніи x. Въ самомъ дѣлѣ, если положимъ, что

$$\frac{a}{1-x}=N, \text{ то } a=N(1-x)$$

Если, напр., $N=7$ и $x=\frac{1}{2}$, то $a=\frac{7}{2}$; тогда получимъ такой рядъ:

$$\frac{7}{2}, \frac{7}{2}+\frac{7}{2}\cdot\frac{1}{2}; \frac{7}{2}+\frac{7}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{7}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2; \frac{7}{2}+\frac{7}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{7}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3; \ldots$$

стремящійся къ предѣлу 7. Если при томъ же $N=7$, положимъ $x=\frac{1}{3}$, то $a=\frac{14}{3}$, и мы будемъ имѣть другой рядъ:

$$\frac{14}{3}, \frac{14}{3}+\frac{14}{3}\cdot\frac{1}{3}, \frac{14}{3}+\frac{14}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{14}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2, \ldots$$

стремящійся также къ предѣлу 7.

Такихъ рядовъ мы можемъ получить безконечное множество. Простѣйшій изъ нихъ будетъ при $x=0$; тогда $a=N$ и рядъ будетъ состоять изъ одинаковыхъ чиселъ:

$$N,\ N,\ N, \ldots\ N, \ldots \text{ (пред. } N).$$

Итакъ, *всякое число, какъ соизмѣримое, такъ и несоизмѣримое, мы можемъ разсматривать, какъ предѣлъ нѣкотораго безконечнаго ряда соизмѣримыхъ чиселъ:*

$$n_1,\ n_2,\ n_3,\ n_4, \ldots\ n_k,\ n_{k+1} \ldots$$

обладающаго условіемъ существованія предѣла, а именно абс. величина $(n_{k+p}-n_k)$ *при неограниченномъ возрастаніи* k *стремится къ* 0 *при всякомъ* p.

11. Равенство и неравенство чиселъ. Введя новое понятіе о числѣ, какъ предѣлѣ ряда соизмѣримыхъ чиселъ, мы прежде всего должны установить, что слѣдуетъ разумѣть подъ равенствомъ или неравенствомъ такихъ чиселъ.

Каковы бы ни были числа M и N, служащія мѣрою двухъ значеній A и B одной и той же величины, при одной и той же единицѣ измѣренія, они считаются равными, если $A=B$; M считается большимъ N, если $A>B$. Въ этомъ состоитъ общій принципъ равенства или неравенства чиселъ, разсматриваемыхъ, какъ результаты измѣренія значеній величины.

Но когда числа M и N даны, какъ предѣлы рядовъ соизмѣримыхъ чиселъ:

$$m_1,\ m_2,\ m_3,\ m_4, \ldots\ m_k \ldots \text{ (пред. } M) \qquad [1]$$
$$n_1,\ n_2,\ n_3,\ n_4, \ldots\ n_k, \ldots \text{ (пред. } N) \qquad [2]$$

то этотъ принципъ можно свести къ слѣдующимъ опредѣленіямъ:

1) $M=N$, *если разность* m_k-n_k *стремится къ* 0 *или равна* 0, потому что въ этомъ случаѣ значенія величины, измѣряемыя числами данныхъ рядовъ, стремятся къ общему предѣлу (теор. 3-я).

2) $M>N$, *если разность* m_k-n_k *дѣлается и остается больше нѣкотораго положительнаго числа*, и обратно: $M<N$, *если эта разность дѣлается и остается меньше нѣкотораго*

*отрицательнаго числа**). Дѣйствительно, въ первомъ случаѣ значенія величины, измѣряемыя числами ряда (1), стремятся къ большему предѣлу, а во второмъ къ меньшему, чѣмъ значенія величины, измѣряемыя числами ряда (2).

Когда одно изъ сравниваемыхъ чиселъ, напр. N, соизмѣримо, а другое разсматривается, какъ предѣлъ:

$$m_1,\ m_2,\ m_3,\ m_4 \ldots\ m_k \ldots\ (\textit{пред. } M)$$

то высказанныя положенія сохраняютъ свою общность, такъ какъ число N можно разсматривать, какъ предѣлъ ряда:

$$N,\ N,\ N,\ N, \ldots\ N \ldots\ (\textit{пред. } N).$$

Значитъ, $M = N$, если разность $m_k - N$ стремится къ 0, $M > N$ или $M < N$, смотря по тому, дѣлается ли и остается эта разность больше положительнаго или меньше отрицательнаго числа.

Число M считается положительнымъ, если m_k, при неогран. возрастаніи k, дѣлается и остается больше нѣкотораго постояннаго положительнаго числа; число M считается отрицательнымъ, если m_k дѣлается и остается меньше нѣкотораго постояннаго отрицательнаго числа.

Такимъ образомъ, равенство и неравенство чиселъ, какъ соизмѣримыхъ, такъ и несоизмѣримыхъ, вполнѣ соотвѣтствуетъ равенству и неравенству значеній величины, измѣряемыхъ этими числами; вслѣдствіе этого изъ равенства или неравенства значеній величины мы можемъ вывести заключеніе о соотвѣтствующемъ равенствѣ или неравенствѣ чиселъ, измѣряющихъ ихъ (при одной и той же единицѣ измѣренія) и обратно. Поэтому аксіомы о равенствѣ или неравенствѣ значеній величины вполнѣ приложимы и къ числамъ; такъ:

если $M = N$ и $N = P$, то $M = P$;
если $M > N$ и $N = P$, то $M > P$
если $M > N$ и $N > P$, то $M > P$ и т. п.

12. Сложеніе и вычитаніе чиселъ, разсматриваемыхъ какъ предѣлы. Сложить или вычесть два числа M и N, измѣря-

*) Недостаточно было бы сказать: „дѣлается и остается положительной“, или: „дѣлается и остается отрицательной“, потому что при этихъ условіяхъ $m_k - n_k$ можетъ имѣть предѣломъ 0, и, слѣд., $M = N$.

юція при одной и той же единицѣ, два значенія величины A и B, значитъ найти число, измѣряющее сумму или разность $A \pm B$. Въ этомъ состоитъ общій принципъ сложенія и вычитанія чиселъ, разсматриваемыхъ, какъ результаты измѣренія значеній величины.

Но когда числа M и N даны какъ предѣлы рядовъ:

$$m_1,\ m_2,\ m_3,\ m_4, \ldots\ m_k \ldots\ (\textit{пред. } M) \qquad [1]$$

$$n_1,\ n_2,\ n_3,\ n_4, \ldots\ n_k \ldots\ (\textit{пред. } N) \qquad [2]$$

то этотъ принципъ можно свести къ слѣдующимъ опредѣленіямъ:

1) *Сложить* M *и* N *значитъ найти предѣлъ ряда:*

$$m_1+n_1,\ m_2+n_2,\ m_3+n_3 \ldots\ m_k+n_k, \ldots \qquad [3]$$

2) *Вычесть* N *изъ* M *значитъ найти предѣлъ ряда:*

$$m_1-n_1,\ m_2-n_2,\ m_3-n_3 \ldots\ m_k-n_k, \ldots \qquad [4]$$

Дѣйствительно: если значенія величины, измѣряемыя числами ряда [1], стремятся къ предѣлу A, а ряда [2] къ B, то значенія величины, измѣряемыя числами ряда [3], стремятся къ предѣлу $A+B$, а ряда [4]—къ $A-B$ (теор. 8-я и 9-я § 8).

13. Такъ какъ равенство и неравенство чиселъ, а также ихъ сумма и разность, соотвѣтствуютъ вполнѣ равенству и неравенству, суммѣ и разности измѣряемыхъ ими значеній величины, то:

1) *Всѣ равенства и неравенства, выражающія свойства суммы и разности значеній величинъ, примѣнимы и къ числамъ, какъ соизмѣримымъ, такъ и несоизмѣримымъ.*

Такимъ образомъ, если M, N и P будутъ какія ни на есть числа, то можемъ писать:

$$M+N+P=N+M+P=P+N+M=\ldots$$

$$M+(N\pm P)=M+N\pm P$$

$$M-(N\pm P)=M-N\mp P$$

Если $M=N$, то и $M\pm P=N\pm P$

Если $M<N$, то и $M\pm P<N\pm P$ и т. п.

2) *Всѣ истины о предѣлахъ, изложенныя въ предыдущей главѣ, примѣнимы и къ числамъ.*

Такимъ образомъ, въ словесномъ выраженіи этихъ истинъ вездѣ, гдѣ говорится: „перемѣнная величина“, можетъ быть поставлено: „перемѣнное число“. Напр., теоремы 8-я и 9-я въ примѣненіи къ числамъ выразятся такъ:

Предѣлъ суммы перемѣнныхъ чиселъ m и n, стремящихся къ предѣламъ M и N, равенъ суммѣ ихъ предѣловъ $M+N$.

Предѣлъ разности перемѣнныхъ чиселъ m и n, стремящихся къ предѣламъ M и N, равенъ разности ихъ предѣловъ $M-N$.

14. Приближенныя значенія несоизмѣримаго числа. Когда число N разсматривается, какъ предѣлъ ряда соизмѣримыхъ чиселъ:

$$n_1,\ n_2,\ n_3,\ n_4, \ldots\ n_k,\ n_{k+1}, \ldots\ (\textit{пред. } N)$$

то каждое изъ послѣднихъ можетъ быть названо *приближеннымъ значеніемъ* числа N, при чемъ n_k будетъ приб. значеніе числа N съ избыткомъ или съ недостаткомъ, смотря по тому, будетъ ли $n_k > N$, или $n_k < N$, другими словами, будетъ ли разность $n_k - n_{k+p}$, при неограниченномъ возрастаніи p, оставаться больше нѣкотораго постояннаго положительнаго числа или меньше нѣкотораго постояннаго отрицательнаго числа. Кромѣ того, n_k наз. прибл. значеніемъ числа N *съ точностью до* a (напр. до $^1/_{100}$), если абс. вел. $n_k - N < a$, другими словами, если абс. вел. $n_k - n_{k+p}$, при неогр. возрастаніи p, дѣлается и остается меньше a.

Обыкновенно приближенныя значенія находятъ съ десятичнымъ приближеніемъ: до 0,1, до 0,01 и т. д. Тогда несоизмѣримыя числа разсматриваютъ, какъ предѣлъ десятичной дроби съ безконечнымъ числомъ десятичныхъ знаковъ (§§ 178 и 179 Эл. алг.).

III. Умноженіе, дѣленіе и возвышеніе въ степень чиселъ, разсматриваемыхъ, какъ предѣлы.

15. Лемма 1. *Разность* $(abc\ldots k) - (a_1b_1c_1\ldots k_1)$ *безконечно мала, если разности* $a-a_1$, $b-b_1$, $c-c_1, \ldots k-k_1$ *безконечно малы* (всѣ числа предполагаются соизмѣримыми, конечными и число сомножителей конечное).

Док. Докажемъ сначала эту истину для двухъ сомножителей. Пусть $a-a_1=\alpha$ и $b-b_1=\beta$; тогда:

$$ab-a_1b_1=ab-(a-\alpha)(b-\beta)=\alpha b+\beta a-\alpha\beta.$$

Такъ какъ по условію, α и β безконечно малыя числа, то правая часть этого равенства, а слѣдов. и его лѣвая часть, безконечно мала.

Теперь распространимъ эту истину на бо́льшее число сомножителей. Такъ какъ разности $ab-a_1b_1$ и $c-c_1$ безконечно малы, первая по доказанному, а вторая по условію, то произведеніе abc безконечно мало отличается отъ $a_1b_1c_1$. Подобно этому убѣдимся, что произведеніе $abcd$ безконечно мало отличается отъ $a_1b_1c_1d_1$ и т. д., лишь бы только число сомножителей было конечное (только при этомъ условіи, разсуждая подобно предыдущему, мы можемъ дойти *до конца)*.

Замѣтимъ, что доказанная истина не теряетъ своей силы и тогда, когда нѣкоторые изъ сомножителей будутъ числа *постоянныя*.

Лемма 2. *Разность* $\frac{a}{b}-\frac{a_1}{b_1}$ *безконечно мала, если разности* $a-a_1$ и $b-b_1$ *безконечно малы и числа* b *и* b_1 *не стремятся къ* 0 (всѣ числа предполагаются соизмѣримыми и конечными).

Док. Пусть $a-a_1=\alpha$ и $b-b_1=\beta$. Тогда:

$$\frac{a}{b}-\frac{a_1}{b_1}=\frac{a}{b}-\frac{a-\alpha}{b-\beta}=\frac{a(b-\beta)-b(a-\alpha)}{b(b-\beta)}=\frac{-a\beta+b\alpha}{b(b-\beta)}$$

Такъ какъ, по условію, числа α и β безконечно малы, а b и b_1 не стремятся къ 0, то правая часть выведеннаго равенства, а слѣд. и его лѣвая часть, безконечно мала.

16. Въ нижеслѣдующихъ теоремахъ буквами M и N мы будемъ означать числа, соизмѣримыя или несоизмѣримыя, разсматриваемыя, какъ предѣлы рядовъ соизмѣримыхъ чиселъ:

$$m_1,\ m_2,\ m_3,\ m_4,\ldots\ (\textit{пред. } M)$$
$$n_1,\ n_2,\ n_3,\ n_4,\ldots\ (\textit{пред. } N)$$

Само собою разумѣется, что ряды эти, имѣя предѣлъ, должны удовлетворять необходимому и достаточному условію существованія предѣла, а именно: абсолютныя величины разностей

$$m_{k+p} - m_k \text{ и } n_{k+p} - n_k$$

при неограниченномъ возрастаніи k стремятся къ 0 при всякомъ p.

17. **Теорема**. *Рядъ* m_1n_1, m_2n_2, m_3n_3, ... m_kn_k... *стремится къ предѣлу; этотъ предѣлъ равенъ* MN, *если* M *и* N *числа соизмѣримыя*.

Док. Для существованія предѣла разсматриваемаго ряда достаточно показать, что разность $m_{k+p}\,n_{k+p} - m_kn_k$ стремится къ 0 при неограниченномъ возрастаніи k. Это дѣйствительно имѣетъ мѣсто (лемма 1), такъ какъ разности $m_{k+p} - m_k$ и $n_{k+p} - n_k$, по условію, безконечно малы.

Когда M и N числа соизмѣримыя, произведеніе MN есть опредѣленное число, получаемое изъ M и N согласно опредѣленію умноженія для чиселъ соизмѣримыхъ. Для доказательства, что это число есть предѣлъ разсматриваемаго ряда, достаточно обнаружить, что разность $MN - m_kn_k$ стремится къ 0 при возрастаніи k. Это дѣйствительно имѣетъ мѣсто (лемма 1), такъ какъ разности $M - m_k$ и $N - n_k$ безконечно малы, согласно опредѣленію предѣла.

18. **Опредѣленіе**. *Умножить* M *на* N, *когда эти числа, или одно изъ нихъ, несоизмѣримыя, значитъ найти предѣлъ ряда:*

$$m_1n_1,\ m_2n_2,\ m_3n_3 \ldots m_kn_k \ldots\ldots,$$

т.-е. найти предѣлъ произведенія приближенныхъ значеній чиселъ M и N при неограниченномъ увеличеніи степени приближенія.

По доказанному выше, такой предѣлъ существуетъ при всякомъ M и N: онъ равенъ MN, когда эти числа соизмѣримыя, и *принимается* за MN, по опредѣленію, когда эти числа, или одно изъ нихъ, несоизмѣримыя.

Покажемъ, что произведеніе MN не зависитъ отъ того закона, по которому составляются ряды приближенныхъ значеній MN. Пусть несоизмѣримое число M есть предѣлъ двухъ рядовъ приближеній:

$$m_1, m_2, m_3, m_4, \ldots m_k, \ldots \text{ (пред. } M)$$
$$m_1', m_2', m_3', m_4' \ldots m_k', \ldots \text{ (пред. } M)$$

Такъ какъ эти ряды имѣютъ общій предѣлъ, то $m_k - m_k'$ стремится къ 0 при возрастаніи k (теор. 4 § 8). Подобно этому, пусть несоизмѣримое число N есть общій предѣлъ двухъ рядовъ приближеній:

$$n_1, n_2, n_3, n_4, \ldots n_k, \ldots \text{ (пред. } N)$$
$$n_1', n_2', n_3', n_4', \ldots n'^k \ldots \text{ (пред. } N)$$

Значитъ, разность $n_k - n_k'$ также стремится къ 0 при возрастаніи k. Тогда два ряда:

$$m_1 n_1, m_2 n_2, m_3 n_3, \ldots m_k n_k, \ldots$$
$$m_1' n_1' \; m_2' n_2' \; m_3' n'_3, \ldots m_k' n_k' \ldots$$

должны имѣть одинъ и тотъ же предѣлъ, такъ какъ разность $m_k n_k - m_k' n_k'$ безконечно мала (лемма 1). Значитъ, произведеніе MN имѣетъ *единственное* значеніе.

Легко видѣть, что теорема предыдущаго § и опредѣленіе этого § распространяются на произведеніе 3-хъ, 4-хъ и болѣе сомножителей, лишь бы число ихъ было конечное.

19. Слѣдствіе. *Рядъ:* $m_1^p, m_2^p, m_3^p, \ldots m_k^p, \ldots$ *гдѣ* p *есть постоянное цѣлое положительное число, имѣетъ предѣлъ; этотъ предѣлъ равенъ* M^p, такъ какъ возвышеніе въ цѣлую положительную степень представляетъ частный случай умноженія.

20. Теорема. *Если* $N \neq 0$, *то рядъ:* $\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \frac{m_3}{n_3}, \frac{m_4}{n_4}, \ldots \frac{m_k}{n_k}, \ldots$ *имѣетъ предѣлъ; этотъ предѣлъ равенъ* $\frac{M}{N}$, *когда* M *и* N *числа соизмѣримыя.*

Док. Разсматриваемый рядъ имѣетъ предѣлъ, потому что разность $\frac{m_{k+p}}{n_{k+p}} - \frac{m_k}{n_k}$ при неограниченномъ возрастаніи k есть число безконечно малое, такъ какъ разности $m_{k+p} - m_k$ и $n_{k+p} - n_k$ безконечно малы (лемма 2).

Этотъ предѣлъ равенъ $\frac{M}{N}$, когда M и N числа соизмѣримыя, потому что разность $\frac{M}{N}-\frac{m_k}{n_k}$ есть число безконечно малое (лемма 2).

21. Опредѣленіе. *Раздѣлить* M *на* N, *когда эти числа, или одно изъ нихъ, несоизмѣримыя, значитъ найти предѣлъ ряда:* $\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \frac{m_3}{n_3} \dots \frac{m_k}{n_k} \dots$, т.-е. найти предѣлъ частнаго отъ дѣленія приближеннаго значенія M на приближенное значеніе N при неограниченномъ увеличеніи степени приближенія.

По доказанному выше, такой предѣлъ существуетъ при всякомъ M и N; онъ равенъ $\frac{M}{N}$, когда эти числа соизмѣримыя, и *принимается* за $\frac{M}{N}$, по опредѣленію, когда эти числа, или одно изъ нихъ, несоизмѣримыя.

Подобно тому, какъ это было сдѣлано для произведенія MN, можно доказать, что частное $\frac{M}{N}$ не зависитъ отъ того закона, по которому составляются ряды приближенныхъ значеній чиселъ M и N.

IV. Распространеніе свойствъ произведенія, частнаго и цѣлой степени на числа несоизмѣримыя.

22. Легко убѣдиться, что *всѣ равенства и неравенства, выражающія свойства произведенія, частнаго и степени соизмѣримыхъ чиселъ, примѣнимы и къ числамъ несоизмѣримымъ.*

Пусть, напр., имѣемъ равенство:

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

вѣрное для всякихъ соизмѣримыхъ значеній a и b. Покажемъ, что оно вѣрно и для несоизмѣримыхъ значеній этихъ буквъ. Пусть $a=M$, $b=N$, гдѣ M и N несоизмѣримыя числа, данныя какъ предѣлы. Разсуждаемъ такъ: равенство:

$$(m_k+n_k)(m_k-n_k)=m_k^2-n_k^2$$

вѣрно при всякомъ значеніи k, слѣдовательно:

$$\text{пред.} \{(m_k+n_k)(m_k-n_k)\}=\text{пред.} (m_k^2-n_k^2)$$

Но *пред.* $[(m_k+n_k)\ (m_k-n_k)]=$*пред.* (m_k+n_k) *пред.* $(m_k-n_k)=$
$=($*пред.* m_k+*пред.* $n_k)$ $($*пред.* m_k-*пред.* $n_k)=(M+N)\ (M-N)$
и *пред.*$(m_k^2-n_k^2)=$*пред.*m_k^2-*пред.*$n_k^2=($*пред.*$m_k)^2-($*пред.*$n_k)^2=$
$=M^2-N^2$

Значитъ: $(M+N)\ (M-N)=M^2-N^2$.

Подобно этому, можно показать примѣнимость для несоизмѣримыхъ чиселъ всякихъ другихъ равенствъ и неравенствъ, доказанныхъ для чиселъ соизмѣримыхъ.

7. Предѣлъ произведенія, частнаго и степени.

23. Пусть m и n два какихъ-нибудь перемѣнныхъ числа, а M и N ихъ предѣлы. Теоремы и опредѣленія предыдущихъ §§ выражаютъ, что если m и n, измѣняясь, переходятъ только черезъ *соизмѣримыя* значенія: m_1, m_2, m_3, . . . n_1, n_2, n_3, . . ., то *пред.* $(mn)=MN$, *пред.* $(m^p)=M^p$ и *пред.* $\frac{m}{n}=\frac{M}{N}$.
Легко теперь убѣдиться, что эти выводы остаются вѣрными и тогда, когда m и n, измѣняясь, переходятъ черезъ *какія угодно значенія*, какъ соизмѣримыя, такъ и несоизмѣримыя. Въ самомъ дѣлѣ, всѣ тѣ равенства, на которыхъ было основано доказательство леммъ 1-й и 2-й § 15 и послѣдующихъ за ними теоремъ, остаются вѣрными и тогда, когда буквы, входящія въ нихъ, означаютъ несоизмѣримыя числа (какъ было разъяснено въ пред. §); значитъ, окончательный выводъ изъ этихъ теоремъ не теряетъ своей силы и для несоизмѣримыхъ значеній буквъ.

Такимъ образомъ можемъ высказать:

1) *Предѣлъ произведенія конечнаго числа перемѣнныхъ чиселъ равенъ произведенію ихъ предѣловъ.*

2) *Предѣлъ частнаго перемѣнныхъ чиселъ равенъ частному ихъ предѣловъ, если предѣлъ дѣлителя не равенъ 0.*

3) *Предѣлъ степени, у которой показатель есть постоянное цѣлое положительное число, а возвышаемое число перемѣнное, равенъ той же степени предѣла этого перемѣннаго числа.*

VI. Значеніе $\sqrt[m]{A}$, когда A не есть точная m-ая степень.

24. Лемма. *Если* m *есть постоянное цѣлое положительное число и* a *и* a_1 *перемѣнныя конечныя числа, то разность* $a^m - a_1^m$ *безконечно мала, когда* $a - a_1$ *безконечно малое число, и наоборотъ.*

Док. Это можно видѣть изъ равенства:

$$a^m - a_1^m = (a - a_1)(a^{m-1} + a_1 a^{m-2} + a_2 a^{m-3} + \ldots + a_1^{m-1})$$

вѣрнаго для всевозможныхъ значеній буквъ a и a_1. Когда $a - a_1$ безконечно малое число и a и a_1 конечныя числа, то правая часть этого равенства, а слѣд. и его лѣвая часть, безконечно мала; обратно, когда $a^m - a_1^m$ безконечно малое число, то множитель $a - a_1$ долженъ быть безконечно малымъ числомъ, такъ какъ другой множитель, при конечныхъ a и a_1, представляетъ конечное число.

Замѣтимъ, что эта истина не теряетъ своего значенія и въ томъ случаѣ, когда число a или a_1 постоянное.

25. Въ § 181 „Элементарной алгебры" мы видѣли, что, *каково бы ни было положительное соизмѣримое число* A, *всегда можно найти два соизмѣримыя числа вида:* $\frac{x}{n}$ *и* $\frac{x+1}{n}$, *разнящіяся какъ угодно мало и между* m-*ыми степенями которыхъ заключается* A. Тамъ же было принято, что эти соизмѣримыя числа называются *приближенными значеніями* $\sqrt[m]{A}$, съ точностью до $\frac{1}{n}$; причемъ то число, степень котораго меньше A, наз. приближеннымъ значеніемъ *съ недостаткомъ*, а то, степень котораго больше A,—*съ избыткомъ*. То же разсужденіе, какимъ было доказано это предложеніе для соизмѣримаго числа A, вполнѣ примѣнимо и для случая, когда число A несоизмѣримо.

Такимъ образомъ, если буквою a обозначимъ приближенное значеніе $\sqrt[m]{A}$ съ точностью до $\frac{1}{n}$ съ недостаткомъ, то A должно заключаться между a^m и $\left(a+\frac{1}{n}\right)^m$; если же a есть приближ. значеніе съ избыткомъ, съ тою же точностью, то A должно заключаться между $\left(a-\frac{1}{n}\right)^m$ и a^m. Когда же неизвѣстно, съ избыткомъ или недостаткомъ будетъ приближеніе a, только знаемъ, что степень его точности есть дробь $\frac{1}{n}$, то во всякомъ случаѣ можемъ утверждать, что A заключено между $\left(a-\frac{1}{n}\right)^m$ и $\left(a+\frac{1}{n}\right)^m$. Докажемъ теперь о приближенныхъ значеніяхъ $\sqrt[m]{A}$ слѣдующую истину.

26. **Теорема.** *Предѣлъ m-ой степени приближеннаго значенія* $\sqrt[m]{A}$, *при неограниченномъ увеличеніи степени приближенія, равенъ* A.

Док. Пусть мы имѣемъ безконечный рядъ приближенныхъ значеній $\sqrt[m]{A}$:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\dots\ a_k,\dots$$

вычисленныхъ соотвѣтственно съ точностью до:

$$\frac{1}{n_1},\ \frac{1}{n_2},\ \frac{1}{n_3},\ \frac{1}{n_4},\dots\ \frac{1}{n_k},\dots$$

гдѣ числа: n_1, n_2, $n_3,\dots$ идутъ, все возрастая. Эти значенія могутъ быть или всѣ съ недостаткомъ, или всѣ съ избыткомъ, или нѣкоторыя съ недостаткомъ, а другія съ избыткомъ. Докажемъ, что каковъ бы ни былъ законъ возрастанія знаменателей: n_1, n_2, $n_3,\dots$ и каково бы ни было разнообразіе въ чередованіи значеній съ недостаткомъ со значеніями съ избыткомъ, рядъ:

$$a_1^m,\ a_2^m,\ a_3^m,\ a_4^m,\dots\ a_k^m,\dots \qquad [1]$$

стремится къ предѣлу A. Для доказательства возьмемъ два вспомогательныхъ ряда:

$$\left(a_1-\frac{1}{n_1}\right)^m,\ \left(a_2-\frac{1}{n_2}\right)^m,\ \left(a_3-\frac{1}{n_3}\right)^m,\dots\left(a_k-\frac{1}{n_k}\right)^m,\dots \qquad [2]$$

$$\left(a_1+\frac{1}{n_1}\right)^m,\ \left(a_2+\frac{1}{n_2}\right)^m,\ \left(a_3+\frac{1}{n_3}\right)^m,\dots\left(a_k+\frac{1}{n_k}\right)^m,\dots \qquad [3]$$

Числа ряда [2] меньше A; числа ряда [3] больше A; поэтому *каждое* число ряда [2] меньше *каждаго* числа ряда [3]; съ другой стороны, разности между соотвѣтствующими числами этихъ рядовъ стремятся къ 0 (лемма § 24), такъ какъ разность $\left(a_k+\frac{1}{n_k}\right)-\left(a_k-\frac{1}{n_k}\right)=\frac{2}{n_k}$ есть число безконечно малое, при неограниченномъ возрастаніи n_k. Изъ этого слѣдуетъ, что эти ряды стремятся къ общему предѣлу (теорема 7-я § 8). Этотъ предѣлъ не можетъ быть больше A, потому что *всѣ* числа ряда [2] меньше A; онъ не можетъ быть и меньше A, потому что *всѣ* числа ряда [3] больше A; слѣд., этотъ предѣлъ равенъ A.

Рядъ [1] долженъ стремиться къ тому же самому предѣлу, такъ какъ разность $a_k^m-\left(a_k-\frac{1}{n_k}\right)^m$ при неограниченномъ увеличеніи k есть число безконечно малое (лемма § 24); что и треб. доказать.

27. Теорема. *Приближенное значеніе* $\sqrt[m]{A}$ *стремится къ предѣлу при неограниченномъ увеличеніи степени приближенія; этотъ предѣлъ есть такое число,* m*-ая степень котораго равна* A.

Док. Пусть мы имѣемъ неограниченный рядъ приближенныхъ значеній $\sqrt[m]{A}$:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\dots \qquad [1]$$

вычисленныхъ все съ большею и большею степенью точности. Для показанія существованія предѣла этого ряда возьмемъ другой рядъ:

$$a_1^m,\ a_2^m,\ a_3^m,\ a_4^m,\dots\ a_k^m\dots \qquad [2]$$

Такъ какъ этотъ рядъ, по доказанному выше, стремится къ предѣлу, то, при неограниченномъ увеличеніи k, разность $a_{k+p}^m-a_k^m$ стремится къ 0 при всякомъ p (теор. 6-я § 8); въ такомъ случаѣ и разность $a_{k+p}-a_k$ стремится къ 0 (§ 24); поэтому рядъ [1] имѣетъ предѣлъ. Назовемъ его X. Тогда рядъ [2] долженъ стремиться къ предѣлу X^m (§ 19). Но мы видѣли выше, что этотъ предѣлъ есть A: значитъ $X^m=A$, что и требовалось доказать.

Такимъ образомъ, называя корнемъ m-ой степени числа A такое число, m-ая степень котораго равняется A, мы теперь видимъ, что, когда A есть число несоизмѣримое, или хотя и соизмѣримое, но не представляющее точной m-ой степени соизмѣримаго числа, корень m-й степени числа A есть предѣлъ приближенныхъ значеній этого корня при неограниченномъ увеличеніи степени приближенія.

VII. Распространеніе свойствъ радикаловъ на несоизмѣримыя ихъ значенія.

28. Всѣ тождественныя преобразованія радикаловъ, вѣрныя для соизмѣримыхъ значеній этихъ радикаловъ, примѣнимы и къ несоизмѣримымъ ихъ значеніямъ. Дѣйствительно, всѣ эти преобразованія основываются, во 1-хъ, на опредѣленіи $\sqrt[m]{A}$, какъ такого числа, m-ая степень котораго равна A; во 2-хъ, на свойствахъ первыхъ пяти алгебраическихъ дѣйствій; но мы видѣли, что то и другое вполнѣ примѣнимо и къ несоизмѣримымъ значеніямъ радикаловъ.

Такимъ образомъ, всегда можемъ писать:

$$\sqrt[m]{abc}=\sqrt[m]{a}\sqrt[m]{b}\sqrt[m]{c};\quad \sqrt[m]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}};\quad \sqrt[m]{a^{mp}}=a^p;$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a};\ \text{если } a>b,\ \text{то } \sqrt[m]{a}>\sqrt[m]{b};\ \text{и т. п.}$$

VIII. Значеніе несоизмѣримаго показателя.

29. Лемма. *Если въ выраженіи* a^α, *при* a *постоянномъ положительномъ, не равномъ* 0, α *стремится къ* 0, *переходя черезъ соизмѣримыя значенія, то* пред. $a^\alpha=1$.

Док. Положимъ сначала, что $a>1$ и α приближается къ 0, переходя только черезъ значенія вида $\frac{1}{n}$, гдѣ n есть цѣлое положительное число, неопредѣленно увеличивающееся. Возьмемъ геометрическую прогрессію:

$$1,\ a^{\frac{1}{n}},\ a^{\frac{2}{n}},\ a^{\frac{3}{n}},\ldots\ldots\ldots a^{\frac{n-1}{n}},$$

знаменатель которой есть $a^{\frac{1}{n}}$, а число членовъ равно n. Извѣстно (Эл. алг., § 271, теор. 3), что:

$$1+a^{\frac{1}{n}}+a^{\frac{2}{n}}+a^{\frac{3}{n}}+\ldots+a^{\frac{n-1}{n}}=\frac{a^{\frac{n-1}{n}}.a^{\frac{1}{n}}-1}{a^{\frac{1}{n}}-1}=\frac{a-1}{a^{\frac{1}{n}}-1}$$

Такъ какъ, по условію, $a>1$, то и $\sqrt[n]{a}$, т.-е. $a^{\frac{1}{n}}$ больше 1. Поэтому взятая нами прогрессія есть возрастающая, и всѣ члены ея, начиная со второго, превосходятъ первый членъ, т.-е 1. Слѣд., если мы замѣнимъ всѣ члены первымъ, то уменьшимъ ея сумму:

$$\overbrace{1+1+1+1+\ldots\ldots+1}^{n}<\frac{a-1}{a^{\frac{1}{n}}-1},$$

$$\text{т.-е. } n<\frac{a-1}{a^{\frac{1}{n}}-1}; \text{ откуда: } a^{\frac{1}{n}}-1<\frac{a-1}{n}$$

Изъ этого неравенства заключаемъ, что при неограниченномъ возрастаніи n разность $a^{\frac{1}{n}}-1$, оставаясь положительною, дѣлается и остается меньше какого угодно малаго числа; значитъ, *пред.* $a^{\frac{1}{n}}=1$.

Пусть теперь a приближается къ 0, принимая какія угодно значенія вида $\frac{p}{q}$, гдѣ и p и q цѣлыя положительныя числа, и a попрежнему болѣе 1. Какова бы ни была правильная дробь $\frac{p}{q}$, всегда можно найти двѣ дроби вида: $\frac{1}{n}$ и $\frac{1}{n+1}$, между которыми заключается $\frac{p}{q}$.

Дѣйствительно. $\frac{p}{q}=\frac{1}{q:p}=\frac{1}{n+\frac{r}{p}}$

если черезъ n и r обозначимъ соотвѣтственно частное и остатокъ отъ дѣленія q на p. Такъ какъ $\frac{r}{p}<1$, то $\frac{p}{q}>\frac{1}{n+1}$; съ другой стороны $\frac{p}{q}<\frac{1}{n}$; значитъ, всегда можемъ положить, что

$$\frac{1}{n}>\frac{p}{q}>\frac{1}{n+1}$$

и слѣд.
$$a^{\frac{1}{n}}>a^{\frac{p}{q}}>a^{\frac{1}{n+1}}$$

Когда $\frac{p}{q}$ стремится къ 0, то и дроби $\frac{1}{n}$ и $\frac{1}{n+1}$ стремятся къ 0; при этомъ, какъ мы выше доказали, числа $a^{\frac{1}{n}}$ и $a^{\frac{1}{n+1}}$ стремятся къ 1. Отсюда слѣдуетъ, что и $a^{\frac{p}{q}}$, заключающееся между $a^{\frac{1}{n}}$ и $a^{\frac{1}{n+1}}$, также имѣетъ предѣломъ 1.

Предположимъ теперь, что, при $a>1$, α стремится къ 0, оставаясь отрицательнымъ числомъ. Тогда—α будетъ число положительное, стремящееся къ 0, и по доказанному:

$$\textit{пред. } a^{-\alpha}=1, \text{ т.-е. } \textit{пред. } \frac{1}{a^{\alpha}}=1.$$

Откуда.
$$\textit{пред. } a^{\alpha}=1.$$

Наконецъ, положимъ, что $a<1$. Тогда $\frac{1}{a}>1$, и по доказанному выше:

$$\textit{пред. } \left(\frac{1}{a}\right)^{\alpha}=1, \text{ т.-е. } \textit{пред. } \frac{1}{a^{\alpha}}=1.$$

Откуда:
$$\textit{пред. } a^{\alpha}=1$$

Слѣдствіе. *Если* a *постоянное положительное число, a* b *и* b_1 *перемѣнныя конечныя соизмѣримыя числа, между которыми разность безконечно мала, то и разность* $a^b—a^{b_1}$ *безконечно мала*, потому что эта разность равна произведенію $a^b(1—a^{b_1-b})$, въ которомъ первый множитель есть число конечное, а второй стремится къ 0.

Замѣтимъ, что заключеніе остается то же самое, если b, или b_1, будетъ числомъ постояннымъ.

30. Теорема. *Если* N *есть число, разсматриваемое, какъ предѣлъ безконечнаго ряда соизмѣримыхъ чиселъ:*

$$n_1,\ n_2,\ n_3\ \ n_4\dots\ (\textit{пред. } N)$$

то рядъ:
$$a^{n_1},\ a^{n_2},\ a^{n_3},\ a^{n_4}\dots\ a^{n_k}\dots$$

гдѣ a *есть постоянное положительное число, имѣетъ предѣлъ; этотъ предѣлъ равенъ* a^N, *если* N *соизмѣримое число.*

Док. Такъ какъ разность $n_{k+p}-n_k$ стремится къ 0 при возрастаніи k, то и разность $a^{n_{k+p}}-a^{n_k}$ также стремится къ 0, согласно слѣдствію изъ вышеприведенной леммы, а это доказываетъ существованіе предѣла разсматриваемаго ряда. Этотъ предѣлъ равенъ a^N, когда N соизмѣримое число, потому что разность $a^N-a^{n_k}$, на основаніи того же слѣдствія, стремится къ 0.

31. Опредѣленіе *Возвысить* a *въ* N*-ую степень, когда* N *несоизмѣримое число, значитъ найти предѣлъ ряда*:

$$a^{n_1},\ a^{n_2},\ a^{n_3},\ a^{n_4},\ldots\ a^{n_k}\ldots$$

гдѣ n_1, n_2, n_3,,... *есть рядъ приближенныхъ значеній* N *съ возрастающею степенью приближенія.*

По доказанному, такой предѣлъ существуетъ при всякомъ N; онъ равенъ a^N, когда N соизмѣримое число и *принимается за* a^N, по опредѣленію, когда N есть несоизмѣримое число.

Покажемъ, что величина a^N не зависитъ отъ того закона, по которому составляется рядъ приближенныхъ значеній числа N. Въ самомъ дѣлѣ, если N есть предѣлъ двухъ различныхъ рядовъ приближенныхъ значеній:

$$\left.\begin{matrix} n_1,\ n_2,\ n_3,\ n_4\ldots\ n^k\ldots. \\ n_1',\ n_2',\ n_3',\ n_4,\ldots\ n^{k'}\ldots. \end{matrix}\right\}\ \textit{пред.}\ \mathrm{N}$$

то это значитъ, что разность n_k-n_k' стремится къ 0 при возрастаніи k; но тогда и разность $a^{n_k}-a^{n_k'}$ также стремится къ 0; слѣдов. два ряда:

$$\begin{matrix} a^{n_1},\ a^{n_2},\ a^{n_3},\ldots\ a^{n_k}\ldots \\ a^{n_1'}.\ a^{n_2'},\ a^{n_3'},\ldots\ a^{n_k'}\ldots \end{matrix}$$

имѣютъ общій предѣлъ (§ 8, теор. 3)

IX. Распространеніе свойствъ показателей на несоизмѣримыя ихъ значенія.

32. Всѣ тождественныя равенства и неравенства, выражающія свойства соизмѣримыхъ показателей (см. главы объ отриц. и дробныхъ показателяхъ) примѣняются и къ показателямъ несоизмѣримымъ. Возьмемъ для примѣра равенство:

$$a^x a^y = a^{x+y}$$

вѣрное для соизмѣримыхъ показателей, и положимъ, что $x=M$,

$y=N$, гдѣ M и N суть несоизмѣримыя числа, разсматриваемыя, какъ предѣлы рядовъ соизмѣримыхъ чиселъ:

$$m_1,\ m_2,\ m_3,\ m_4, \ldots\ m_k, \ldots\ (\textit{пред. } M)$$
$$n_1,\ n_2,\ n_3,\ n_4, \ldots\ n_k, \ldots\ (\textit{пред. } N)$$

Разсуждаемъ такъ: равенство $a^{m_k}a^{n_k}=a^{m_k+n_k}$ вѣрно при всякомъ значеніи k; поэтому:

$$\textit{пред. } (a^{m_k}a^{n_k}) = \textit{пред. } (a^{m_k+n_k})$$

Но $\qquad \textit{пред. } (a^{m_k}a^{n_k}) = \textit{пред. } a^{m_k}.\ \textit{пред. } a^{n_k} = a^M a^N$

и $\qquad \textit{пред. } a^{m_k+n_k} = a^{M+N}$

Слѣд. $\qquad a^M a^N = a^{M+N}$

Подобно этому, можно показать примѣнимость къ несоизмѣримымъ показателямъ и другихъ тождественныхъ равенствъ, доказанныхъ для соизмѣримыхъ показателей.

33. Убѣдимся еще въ слѣдующемъ свойствѣ показателя, доказанномъ въ § 276 „Элем. алгебры“ для соизмѣримыхъ чиселъ: *если* $a>1$ и x *есть положительное число, то* $a^x>1$.

Пусть $x=M$, гдѣ M есть несоизмѣримое число, опредѣляемое, какъ предѣлъ неограниченнаго ряда соизмѣримыхъ чиселъ:

$$m_1,\ m_2,\ m_3 \ldots\ldots\ m_k \ldots\ (\textit{пред. } M)$$

Если M есть число положительное, то это значитъ, что m_k при возрастаніи k дѣлается и остается больше нѣкотораго постояннаго положительнаго соизмѣримаго числа, напр. больше r. Если же $m_k>r$, то и $a^{m_k}>a^r$ (§ 276). Поэтому:

$$\textit{пред. } a^{m_k} \geqq a^r, \qquad \text{т.-е. } a^M \geqq a^r$$

Такъ какъ r число соизмѣримое и положительное, то $a^r>1$ и потому

$$a^M>1.$$

Изъ этого слѣдуетъ, что и для несоизмѣримыхъ значеній логариѳма остается вѣрнымъ слѣдующее свойство: *большему логариѳму соотвѣтствуетъ и большее число* (§ 276).

34. Выше было доказано (§ 29), что a^α стремится къ 1, если α стремится къ 0, переходя только чрезъ соизмѣримыя значенія; теперь не трудно видѣть, что заключеніе остается то же самое, когда предположимъ, что α, приближаясь къ предѣлу 0, переходитъ черезъ какія бы то ни было значенія. Въ самомъ дѣлѣ, если α будетъ числомъ несоизмѣримымъ, то всегда возможно найти два соизмѣримыя приближ. значенія α, одно съ недостаткомъ, другое съ избыткомъ, отличающіяся одно отъ другого какъ угодно мало. Пусть α_1 будетъ значеніе съ недостаткомъ, а α_{11} съ избыткомъ; тогда

$$\alpha_1 < \alpha < \alpha_{11} \qquad \text{и слѣд.} \qquad a^{\alpha_1} < a^\alpha < a^{\alpha_{11}}$$

Когда α будетъ приближаться къ предѣлу 0 къ тому же предѣлу будутъ стремиться α_1 и α_{11}; при этомъ *пред.* a^{α_1}—*пред.* $a^{\alpha_{11}}=1$; значитъ. *пред.* $a^{\alpha}=1$.

35. Если такимъ образомъ, лемма § 29 остается вѣрною при какомъ угодно процессѣ измѣненія α, то и *слѣдствіе* изъ нея (тотъ же §) примѣнимо къ несоизмѣримымъ показателямъ, т. е. *если* a *постоянное положительное число,* a b *и* b_1 *перемѣнныя конечныя числа, соизмѣримыя или несоизмѣримыя, между которыми разность безконечно мала, то и разность* $a^b - a^{b_1}$ *безконечно мала.* Это предложеніе понадобится намъ при дальнѣйшемъ изложеніи.

X. Обобщеніе теоремы о предѣлѣ степени.

36. *Предѣлъ степени равенъ предѣлу возвышаемаго числа, возвышенному въ степень, показатель которой есть предѣлъ показателя данной степени.*

Чтобы дать этой теоремѣ наибольшую общность, мы будемъ предполагать, что она включаетъ въ себѣ и тѣ случаи, когда возвышаемое число или показатель степени есть число постоянное; тогда подъ предѣломъ постояннаго числа будемъ разумѣть само это постоянное число.

Док. Различимъ три случая.

1-й случай: показатель степени есть число постоянное.

Пусть m есть перемѣнное число, имѣющее предѣломъ M, а n число постоянное. Требуется доказать, что *пред.* $m^n=M^n$.

Для случая, когда показатель n есть число цѣлое положительное, эта теорема была доказана раньше (§ 23). Положимъ теперь, что n есть положительная дробь вида $p/_q$. Тогда $M^n - m^n = M^{\frac{p}{q}} - m^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{M^p} - \sqrt[q]{m^p}$. Изъ тождества:

$(\sqrt[q]{M^p} - \sqrt[q]{m^p})[(\sqrt[q]{M^p})^{q-1} + \sqrt[q]{m^p}(\sqrt[q]{M^p})^{q-2} + \ldots (\sqrt[q]{m^p})^{q-1}] = M^p - m^p$

находимъ:

$$\sqrt[q]{M^p} - \sqrt[q]{m^p} = \frac{M^p - m^p}{(\sqrt[q]{M^p})^{q-1} + \sqrt[q]{m^p}(\sqrt[q]{M^p})^{q-2} + \ldots + (\sqrt[q]{m^p})^{q-1}} =$$

$$= \frac{(M-m)\,(M^{p-1} + mM^{p-2} + \ldots + m^{p-2})}{(\sqrt[q]{M^p})^{q-1} + \sqrt[q]{m^p}(\sqrt[q]{M^p})^{q-2} + \ldots + (\sqrt[q]{m^p})^{q-1}}$$

Такъ какъ одинъ изъ сомножителей числителя, именно $M-m$, есть безконечно малое число, а другой сомножитель, а также и знаменатель, числа конечныя, то правая часть выведеннаго равенства, а слѣд. и его лѣвая часть, есть число безконечно малое; а это значитъ, что

$$пред.\ \sqrt[q]{m^p}=\sqrt[q]{M^p},\ \text{т.-е.}\ пред.\ m^{\frac{p}{q}}=M^{\frac{p}{q}}$$

Если показатель n есть число положительное несоизмѣримое, опредѣляемое рядомъ соизмѣримыхъ чиселъ:

$$n_1,\ n_2,\ n_3,\ldots\ldots n_k,\ n_{k+1}\ldots\ldots\ (пред.\ n)$$

то разность M^n-m^n представляетъ собою, по опредѣленію дѣйствія вычитанія, предѣлъ ряда:

$$(M^{n_1}-m^{n_1}),\ (M^{n_2}-m^{n_2}),\ldots\ldots\ (M^{n_k}-m^{n_k})\ldots.$$

Такъ какъ всѣ числа n_1, n_2, $n_3\ldots$ соизмѣримыя и положительныя, то, когда m приближается къ M, всѣ разности послѣдняго ряда, по доказанному выше, безконечно малы; а потому и предѣлъ этого ряда, т.-е. разность M^n-m^n, есть безконечно малое число; значитъ, и въ этомъ случаѣ

$$пред.\ m^n=M^n.$$

Положимъ, наконецъ, что показатель n есть число отрицательное, напр. $n=-n_1$.

Тогда

$$M^n-m^n=M^{-n_1}-m^{-n_1}=\frac{1}{M^{n_1}}-\frac{1}{m^{n_1}}=$$

$$=\frac{m^{n_1}-M^{n_1}}{M^{n_1}m^{n_1}}$$

Такъ какъ числитель есть число безконечно малое, а знаменатель не безконечно малъ, то правая часть равенства, а слѣд. и его лѣвая часть, безконечно малы. Итакъ, во всѣхъ случаяхъ при n постоянномъ

$$пред.\ m^n=(пред.\ m)^n=M^n$$

Слѣдствіе: *предѣлъ корня изъ перемѣннаго числа равенъ корню той же степени изъ предѣла подкореннаго числа*, потому что

$$пред.\ \sqrt[q]{m}=пред.\ \left(m^{\frac{1}{n}}\right)=(пред.\ m)^{\frac{1}{q}}=M^{\frac{1}{q}}=\sqrt[q]{M}.$$

2-й случай: возвышаемое число постоянное.

Пусть m постоянное число, а n перемѣнное, имѣющее предѣломъ N. Требуется доказать, что *пред.* $(m^n)=m^N$.

Такъ какъ $N-n$ есть безконечно малое число, и N и n числа конечныя, то и разность m^N-m^n есть число безконечно малое; а это значитъ, что *пред.* $(m^n)=m^N$.

Слѣдствіе: *предѣлъ логариѳма перемѣннаго числа равенъ логариѳму предѣла этого числа.*

Дѣйствительно, если a есть основаніе логариѳмовъ, x—логариѳмъ числа, а y—перемѣнное число, то

$$y=a^x \text{ и, слѣд.: } пред.\ y=пред.\ (a^x)=a^{пред.\ x}$$

отсюда $$пред.\ x=\log\ (пред.\ y).$$

Но $x=\log y$; значитъ: *пред.* $(\log y)=\log$ (*пред.* y).

3-й случай: возвышаемое число и покозатель степени перемѣнные.

Пусть *пред.* $m=M$ и *пред.* $n=N$; требуется доказать, что *пред.* $(m^n)=M^N$.

Такъ какъ: $$\log\ (m^n)=n \log m$$

то $$пред.\ \log\ (m^n)=(пред.\ n)(пред.\ \log.\ m)=N\ (пред.\ \log m)=$$
$$=N\ (\log\ пред.\ m)=N \log M=\log\ (M^N).$$

Но *пред.* $\log\ (m^n)=\log$ (*пред.* m^n). значитъ:

$$\log\ (пред.\ m^n)=\log\ (M^N).$$

Если же равны логариѳмы, то равны и числа:

пред. $(m^n)=M^N$, что и требовалось доказать.

Замѣчаніе. Когда *пред.* $m=1$, а *пред.* $n=\infty$, то предѣлъ степени m^n можетъ быть различный, вслѣдствіе этого выраженіе 1^∞ принадлежитъ къ числу неопредѣленныхъ.

XI. Общій выводъ изъ теоріи предѣловъ.

37. Просматривая теоремы и опредѣленія, изложенныя въ теоріи предѣловъ, мы можемъ притти къ слѣдующему выводу: *Предѣлъ какой-либо функціи отъ перемѣнныхъ чиселъ, стремящихся къ предѣламъ, равенъ той же функціи отъ предѣловъ этихъ перемѣнныхъ чиселъ.*

По крайней мѣрѣ, этотъ выводъ нашими предыдущими разсужденіями оправдывается по отношенію къ функціямъ, составленнымъ изъ алгебраическихъ дѣйствій: сложенія, вычитанія, умноженія, дѣленія, возвышенія въ степень и извлеченія корня, а также и къ такимъ функціямъ, которыя относятся къ т. н. показательнымъ и логариѳмическимъ.. Дѣйствительно, мы видѣли, что предѣлъ суммы $=$ суммѣ предѣловъ, предѣлъ разности$=$разности предѣловъ, и т. д.

Такимъ образомъ, если a, b, $c\ldots$ суть нѣкоторыя перемѣнныя числа, стремящіяся къ предѣламъ: A, B, $C,\ldots$ и $F(a, b, c,\ldots)$ есть нѣкоторая функція, составленная изъ перечисленныхъ выше дѣйствій, то можемъ вообще положить:

$$\text{пред. } F(a, b, c,\ldots) = F(A, B, C\ldots)$$

38. Указанный общій выводъ приводитъ къ другому заключенію, имѣющему основное значеніе въ примѣненіи такъ называемаго *способа предѣловъ*, а именно:

Если между перемѣнными числами a, b, $c\ldots$, *стремящимися къ предѣламъ* A, B, $C\ldots$, *при всѣхъ измѣненіяхъ этихъ перемѣнныхъ, существуетъ нѣкоторая зависимость, выражаемая равенствомъ*:

$$f(a, b, c,\ldots) = \varphi(a, b, c,\ldots)$$

то такая же зависимость существуетъ и между предѣлами A, B. $C\ldots$, т.-е.

$$f(A, B, C,\ldots) = \varphi(A, B, C,\ldots)$$

Дѣйствительно, функціи $f(a, b, c\ldots)$ и $\varphi(a, b, c\ldots)$, при измѣненіяхъ перемѣнныхъ, представляютъ собою вообще перемѣнныя числа. Но если перемѣнныя числа равны, то равны и ихъ предѣлы (теорема 3-я § 8); поэтому:

$$\text{пред. } f(a, b, c\ldots) = \text{пред. } \varphi(a, b, c\ldots)$$

Но *пред.* $f(a, b, c\ldots) = f(A, B, C\ldots)$ и *пред.* $\varphi(a, b, c\ldots) = \varphi(A, B, C\ldots)$.

Слѣд.: $$f(A, B, C\ldots) = \varphi(A, B, C\ldots)$$

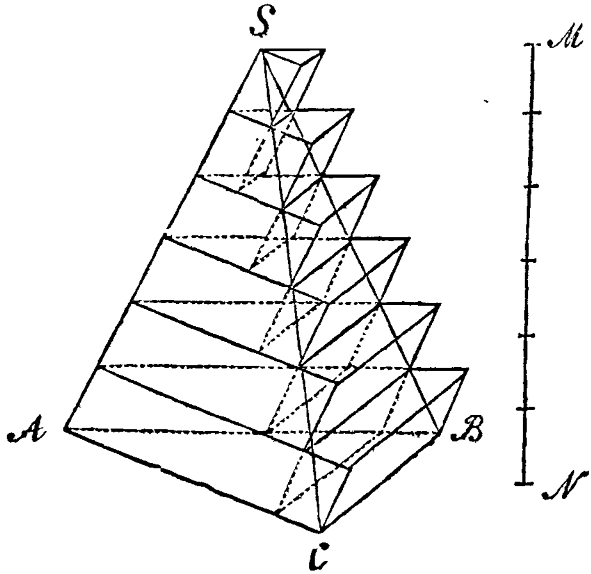
XII. Нѣкоторыя примѣненія способа предѣловъ.

39. Одинъ изъ способовъ находить зависимость между величинами A, B, $C\ldots$, состоитъ въ томъ, что величины эти разсматриваютъ, если можно, какъ *предѣлы* нѣкоторыхъ перемѣнныхъ величинъ a, b, $c\ldots$ Можетъ случиться, что зависимость между послѣдними усматривается проще, чѣмъ между A, B, $C\ldots$ Находятъ эту зависимость, выражая ее равенствомъ или неравенствомъ. Затѣмъ, основываясь на свойствахъ предѣловъ, переходятъ отъ зависимости между перемѣнными къ зависимости между ихъ предѣлами.

Изъ геометріи извѣстны нѣкоторыя примѣненія этого способа (опредѣленіе длины окружности, площади круга, объемовъ и поверхностей круглыхъ тѣлъ). Покажемъ здѣсь еще нѣкоторые примѣры.

Примѣръ 1. *Опредѣлить объемъ трехгранной пирамиды.*

Пусть $SABC$ будетъ трегранная пирамида, а MN ея высота. Обозначимъ объемъ пирамиды буквою V, площадь ея основанія P и высоту H. Раздѣлимъ высоту H на произвольное число n равныхъ частей и черезъ точки дѣленія проведемъ сѣченія плоскостями, параллельными основанію ABC. Въ сѣченіяхъ получатся треугольники, подобные ABC, и площади которыхъ относятся между собою, какъ квадраты ихъ разстояній отъ вершины пирамиды. Затѣмъ, беря каждый изъ этихъ треугольниковъ за основаніе, построимъ, какъ видно изъ чертежа, рядъ призмъ, *выходящихъ* нѣкоторою частью за пирамиду и имѣющихъ высоту въ $\frac{1}{n}H = a$. Такихъ призмъ n. Сумма ихъ объемовъ, очевидно, больше объема пирамиды и при измѣненіи n есть величина перемѣнная. Докажемъ, что при безграничномъ увеличеніи n этотъ перемѣнный объемъ стремится въ предѣлѣ къ объему пирамиды. Для этого, беря каждый треугольникъ сѣченій за верхнее основаніе треугольной призмы, построимъ $n-1$ призмъ, *входящихъ* внутрь пирамиды (какъ видно на чертежѣ), имѣющихъ каждая высоту $\frac{1}{n}$ H. Сумма всѣхъ этихъ призмъ, очевидно, менѣе объема пирамиды. Сравнивая призмы выходящія со входящими, замѣчаемъ, что $n-1$ призмъ выходящихъ, считая отъ вершины, соотвѣтственно равны $n-1$ входящимъ призмамъ, такъ что разность между суммою объемовъ призмъ выходящихъ и суммою объемовъ входящихъ равна одной выходящей нижней призмѣ,



объемъ которой есть $P. \alpha$. При безграничномъ увеличеніи n, число α безпредѣльно уменьшается, и потому произведеніе $P. \alpha$ есть величина безконечно малая. А такъ какъ разность между суммою объемовъ выходящихъ призмъ и объемомъ пирамиды меньше, чѣмъ разность между суммами объемовъ призмъ выходящихъ и входящихъ, то первая и подавно есть величина безконечно малая, а это значитъ, что предѣлъ суммы объемовъ выходящихъ призмъ (а также и входящихъ) есть объемъ пирамиды.

Теперь будемъ искать, чему равна сумма объемовъ выходящихъ призмъ.

Обозначимъ объемы этихъ призмъ, начиная съ верхней, сооттвѣтственно буквами $v_1, v_2, v_3, \ldots v_n$, а площади ихъ основанія соотвѣтственно буквами $p_1, p_2, p_3, \ldots p_{n-1}, p_n = = P = ABC$.

Тогда: $v_1 = p_1\alpha,\ v_2 = p_2\alpha,\ v_3 = p_3\alpha, \ldots\ v_n = p_n\alpha.$

Слѣд. $v_1+v_2+v_3+\ldots+v_n=a(p_1+p_2+\ldots+p_n)$.

Но $\frac{p_1}{p_n}=\frac{a^2}{(na)^2}=\frac{1}{n^2}$; $\frac{p_2}{p_n}=\frac{(2a)^2}{(na)^2}=\frac{2^2}{n^2}$;... $\frac{p_{n-1}}{p_n}=\frac{[(n-1)a]^2}{(na)^2}=\frac{(n-1)^2}{n^2}$

Слѣд. $p_1=p_n\frac{1^2}{n^2}$; $p_2=p_n\frac{2^2}{n^2}$; $p_3=p_n\frac{3^2}{n^2}$;... $p_{n-1}=p_n\frac{(n-1)^2}{n^2}$

Добавивъ къ этимъ равенствамъ еще одно: $p_n=p_n\frac{n^2}{n^2}$ и сложивъ почленно, получимъ:

$$p_1+p_2+p_3+\ldots+p_n=p_n\frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{n^2}$$

Такъ какъ $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, *)

то: $v_1+v_2+\ldots v_n=p_n an\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}=PH\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$

(такъ какъ $an=H$ и $p_n=P$). Найдемъ теперь предѣлъ этого объема при безграничномъ увеличеніи n. Для этого достаточно найти предѣлъ множителя $\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$ при $n=\infty$:

$$\textit{пред.}\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}=\textit{пред.}\frac{(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

Но мы видѣли, что предѣлъ нашего перемѣннаго объема есть объемъ V пирамиды; слѣд.

$$V=\frac{1}{3}PH$$

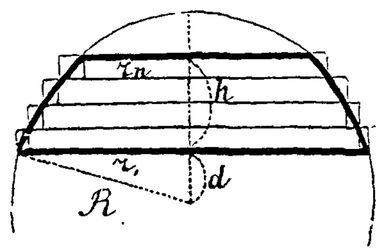
Примѣръ 2-й. *Найти объемъ сферическаго слоя.*

Раздѣлимъ высоту h сферическаго слоя на произвольное число n равныхъ частей (у насъ на чертежѣ высота раздѣлена на 4 части) и черезъ точки дѣленія проведемъ плоскости, параллельныя основаніямъ слоя. Каждый кругъ сѣченій причемъ за основаніе цилиндра и построимъ n цилиндровъ выходящихъ и n цилиндровъ входящихъ съ высотою у каждаго $\frac{1}{n}h=a$. Докажемъ, что при неограниченномъ увеличеніи n сумма объемовъ выходящихъ цилиндровъ, а также и сумма объемовъ входящихъ цилин-

---

*) См. § 311 „Элементарной алгебры".

дровъ, имѣетъ предѣломъ объемъ V сферическаго слоя. Обозначивъ объемы выходящихъ цилиндровъ, начиная снизу, соотвѣтственно буквами: $v_1, v_2, v_3, \ldots v_n$, мы увидимъ, что объемы входящихъ цилиндровъ будутъ соотвѣтственно, начиная снизу: $v_2, v_3, v_4, \ldots v_n, v'$, обозначая черезъ v' послѣдній цилиндръ изъ входящихъ. Тогда очевидно, что разность между суммами объемовъ цилиндровъ выходящихъ и цилиндровъ входящихъ будетъ $v_1 - v'$. т.-е величина безконечно малая при неограниченномъ возрастаніи n; а такъ какъ объемъ сферич. слоя заключается между этими двумя суммами, то разность между суммою объемовъ цилиндровъ выходящихъ и объемомъ слоя, или разность между этимъ объемомъ и суммою цилиндровъ входящихъ, и подавно есть величина безконечно малая; это значитъ, что объемъ слоя есть предѣлъ суммы объемовъ цилиндровъ, какъ выходящихъ, такъ и входящихъ.



Теперь найдемъ сумму объемовъ выходящихъ цилиндровъ. Обозначивъ радіусы основаній этихъ цилиндровъ, начиная съ нижняго, соотвѣтственно буквами: $r_1, r_2, r_3, \ldots r_n$, мы будемъ имѣть:

$$v_1+v_2+v_3+\ldots+v_n=\pi\alpha(r_1^2+r_2^2+r_3^2+\ldots+r_n^2)$$

Изъ чертежа видно, что:

$$r_1^2=R^2-d^2;\ r_2^2=R^2-(d+\alpha)^2;\ r_3^2=R^2-(d+2\alpha)^2;\ldots$$

$$r_n^2=R^2-[d+(n-1)\alpha]^2$$

Слѣд.: $$r_1^2+r_2^2+\ldots+r_n^2=nR^2-nd^2-2d\alpha[1+2+\ldots+(n-1)]$$

$$-\alpha^2\left[1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2\right]$$

т.-е. $$r_1^2+\ldots+r_n^2=nR^2-nd^2-2d\alpha\frac{n(n-1)}{2}-\alpha^2\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

Слѣд. сумма объемовъ цилиндровъ будетъ:

$$\pi\left[\alpha nR^2-\alpha nd^2-d\alpha^2n(n-1)-\alpha^3\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\right]$$

Но $\alpha n=h$; слѣд., сумма объемовъ равна:

$$\pi\left[hR^2-hd^2-dh^2 1\left(1-\frac{1}{n}\right)-h^3\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)1\left(2-\frac{1}{n}\right)}{6}\right]$$

При неограниченномъ увеличеніи n предѣлъ этого выраженія, т.-е. объемъ слоя будетъ:

$$V=\pi\left(hR^2-hd^2-dh^2-\frac{h^3}{3}\right)$$

Эту формулу можно упростить, вставивъ въ нее на мѣсто R и d ихъ выраженія черезъ r_1 и r_{n+1}. Не трудно видѣть, что:

$$hR^2-hd^2=h(R^2-d^2)=hr_1^2$$

Съ другой стороны: $(d+h)^2=R^2-r^2_{n+1}=r_1^2+d^2-r^2_{n+1}$,

т.-е. $$d^2+2hd+h^2=r_1^2-d^2-r^2_{n+1}$$

Откуда: $$d=\frac{r_1^2-r^2_{n+1}-h^2}{2h}$$

Поэтому $$V=\pi\left(hr_1^2-\frac{r_1^2h-r^2_{n+1}h-h^3}{2}-\frac{h^3}{3}\right)$$

т.-е. $$V=\pi\left(\frac{hr_1^2}{2}+\frac{hr^2_{n+1}}{2}+\frac{h^3}{6}\right)$$

или: $$V=\frac{\pi r_1^2h+\pi r^2_{n+1}h}{2}+\frac{\pi h^3}{6}$$

т.-е. *объемъ сферическаго слоя равенъ полусуммѣ цилиндровъ, имѣющихъ высоту одинаковую со слоемъ, а основаніями: одинъ нижнее, другой верхнее основаніе слоя, сложенной съ объемомъ шара, имѣющаго діаметромъ высоту слоя.*

Слѣдствія: 1) Чтобы получить изъ этой формулы объемъ *сегмента*, достаточно положить $r_{n+1}=0$; тогда найдемъ:

$$V=\frac{\pi r_1^2h}{2}+\frac{\pi h^3}{6}$$

Этой формулѣ можно придать другой видъ, иногда болѣе удобный, такъ какъ $r_1^2=h\ (2R-h)$, то

$$V=\pi\left(\frac{h^2(2R-h)}{2}+\frac{h^3}{6}\right)=\pi h^2\left(R-\frac{h}{2}+\frac{h}{6}\right)=\pi h^2\left(R-\frac{h}{3}\right)$$

2) Чтобы получить объемъ *шара*, достаточно въ формулѣ для объема слоя положить $r_1=R$, $r_{n+1}=0$ и $h=R$ (тогда будемъ имѣть объемъ полушара) и результатъ умножить на 2:

$$\text{Объемъ шара}=2\left(\frac{\pi R^3}{2}-\frac{\pi R^3}{6}\right)=\frac{4}{3}\pi R^3$$

Maximum и minimum нѣкоторыхъ функцій.

I. Предварительныя понятія.

40. Приращеніе функціи. Пусть $f(x)$ будетъ нѣкоторая функція перемѣнной независимой x. Дадимъ этой перемѣнной какое-нибудь значеніе a; тогда соотвѣтствующее значеніе функціи выразится $f(a)$. Будемъ называть разность:

$$f(a+\varepsilon)-f(a)$$

приращеніемъ функціи $f(x)$, при $x=a$, соотвѣтствующимъ приращенію перемѣнной независимой на ε; послѣднее можетъ быть числомъ положительнымъ и отрицательнымъ. Напр., приращеніе функціи $3x^2-5$ при $x=10$, соотвѣтствующее приращенію x на 0,1, будетъ.

$$[3(10+0{,}1)^2-5]-(3\,.\,10^2-5)=6+0{,}03=6{,}03$$

При томъ же значеніи x приращеніе функціи, соотвѣтствующее приращенію x на $-0{,}1$, окажется:

$$[3(10-0{,}1)^2-5]-(3\,.\,10^2-5)=-6+0{,}03=-5{,}97$$

41. Непрерывность функціи. Положимъ, что мы измѣняемъ x отъ значенія α до значенія $\beta>\alpha$ *непрерывно*, т.-е. такъ, чтобы число x переходило черезъ всевозможныя значенія, заключающіяся между α и β, какъ соизмѣримыя, такъ и несоизмѣримыя. Если при этомъ $f(x)$ остается постоянно вещественною, конечною, и приращенія ея безконечно малы для безконечно малыхъ приращеній x, то говорятъ, что $f(x)$ *непрерывна въ промежуткѣ между* α и β.

Изъ этого опредѣленія слѣдуетъ, что непрерывная функція не можетъ переходить отъ одного значенія къ другому скачкомъ, не переходя черезъ промежуточныя значенія; напр., отъ отрицательныхъ значеній къ положительнымъ, или наоборотъ, она не можетъ перейти, не сдѣлавшись равною нулю.

Приведемъ нѣкоторые примѣры непрерывныхъ функцій.

Функція $ax+b$, гдѣ a и b постоянныя числа, непрерывна во всякомъ вещественномъ промежуткѣ. Дѣйствительно, при измѣненіи x отъ $-\infty$ до $-\infty$ эта функція всегда вещественна и конечна, и приращенія ея могутъ быть сдѣланы какъ угодно малыми. Чтобы убѣдиться въ послѣднемъ обстоятельствѣ, дадимъ x какое-нибудь безконечно малое приращеніе ε и посмотримъ, каково будетъ соотвѣтствующее приращеніе функціи:

Прежнее значеніе функціи... $ax+b$.

Новое значеніе функціи... $a(x+\varepsilon)+b$.

Приращеніе функціи$=[a(x+\varepsilon)+b]-(ax+b)=a\varepsilon$

Отсюда видно, что приращеніе функціи есть число безконечно малое при безконечно маломъ приращеніи перемѣнной независимой.

Точно такъ же непрерывна во всякомъ промежуткѣ функція ax^2+bx+c, потому что она всегда вещественна, конечна, и безконечно малому приращенію x соотвѣтствуетъ безконечно малое приращеніе функціи, какъ видно изъ равенства:

$$[a(x+\varepsilon)^2+b(x+\varepsilon)+c]-(ax^2+bx+c)=2ax\varepsilon+b\varepsilon+a\varepsilon^2=\varepsilon(2ax+b+a\varepsilon)$$

42. Разрывъ непрерывности. Иногда случается, что при нѣкоторомъ значеніи x функція, какъ говорятъ, *претерпѣваетъ разрывъ непрерывности*. Напр., функція $\frac{1}{2-x}$ при измѣненіи x отъ $-\infty$ до $+2$ измѣняется непрерывно отъ 0 до $+\infty$; при возрастаніи x отъ $+2$ до $+\infty$ она измѣняется также непрерывно отъ $-\infty$ до 0, но при переходѣ x черезъ значеніе 2 функція претерпѣваетъ разрывъ непрерывности, переходя скачкомъ отъ $+\infty$ къ $-\infty$.

Подобный же разрывъ претерпѣваетъ тригонометрическая функція $tang x$ при $x=\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \ldots \frac{(2k+1)\pi}{2}$.

Функція $\sqrt{(x-1)(x-5)}$ непрерывна, кромѣ промежутка между 1 и 5, такъ какъ при $1<x<5$, произведеніе

$(x-1)(x-5)$ отрицательно, и слѣд., $\sqrt{(x-1)(x-5)}$ дѣлается мнимымъ количествомъ.

43. Maximum и minimum. Если при непрерывномъ измѣненіи x въ какомъ-нибудь промежуткѣ, какъ бы малъ этотъ промежутокъ ни былъ, функція $f(x)$, измѣняясь непрерывно, сначала увеличивается до нѣкотораго значенія $f(a)$, а потомъ уменьшается, то значеніе $f(a)$ наз. *maximum* функціи $f(x)$. Если же при этомъ $f(x)$ уменьшается непревывно до нѣкотораго значенія $f(a)$, а затѣмъ увеличивается, то $f(a)$ наз. *minimum* функціи $f(x)$.

Изъ этого опредѣленія слѣдуетъ, что $f(a)$ будетъ maximum, когда при безконечно маломъ положительномъ ε удовлетворяются неравенства:

$$f(a)>f(a-\varepsilon) \text{ и } f(a)>f(a+\varepsilon)$$

и $f(a)$ будетъ minimum, когда при такомъ же ε будутъ имѣть мѣсто неравенства:

$$f(a)<f(a-\varepsilon) \text{ и } f(a)<f(a+\varepsilon)$$

Эти неравенства можно иначе выразить такъ:

$$f(a\pm\varepsilon)-f(a)<0\ldots \text{ въ случаѣ maximum}$$
$$f(a\pm\varepsilon)-f(a)>0\ldots \text{ въ случаѣ minimum}$$

т.-е. $f(a)$ *есть* maximum, *если при* $x=a$ *приращеніе функціи остается отрицательнымъ независимо отъ знака безконечно малаго приращенія перемѣнной независимой; и* $f(a)$ *есть* minimum, *если при* $x=a$ *приращеніе функціи остается положительнымъ независимо отъ знака безконечно малаго приращенія перемѣнной независимой.*

Если при возрастаніи x функція постоянно возрастаетъ или постоянно убываетъ, то она не имѣетъ ни maximum, ни minimum: таковы, напр. функціи $ax+b$ и a^x.

Можетъ случится, что функція имѣетъ нѣсколько maximum и нѣсколько minimum. Такова, напр., функція $\sin x$, которая при $x=\frac{\pi}{2}$ имѣетъ maximum $+1$, при $x=\frac{3\pi}{2}$ имѣетъ minimum -1, при $x=\frac{5\pi}{2}$ получаетъ снова maximum $+1$, при $x=\frac{7\pi}{2}$ получаетъ снова minimum -1 и т. д.

Не должно смѣшивать maximum функціи съ ея *наибольшимъ*, а minimum функціи съ ея *наименьшимъ значеніемъ*. Maximum (minimum) не есть наибольшее (наименьшее) *изъ всѣхъ* значеній функціи, а только изъ весьма близкихъ къ нему (такъ называемыхъ *смежныхъ* значеній).

Maximum функціи можетъ иногда быть менѣе ея minimum. Для примѣра прослѣдимъ измѣненіе триг. функціи *secan* x. При измѣненіи x отъ $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$ эта функція уменьшается отъ $+\infty$ до $+1$ (при $x=0$), затѣмъ увеличивается отъ $+1$ до $+\infty$. Значитъ, при $x=0$ она получаетъ minimum $+1$. При возрастаніи x отъ $+\frac{\pi}{2}$ до $\frac{3\pi}{2}$ *secan* x возрастаетъ отъ $-\infty$ до -1 (при $x=\pi$), затѣмъ уменьшается отъ -1 до $-\infty$; значитъ, при $x=\pi$ эта функція переходитъ черезъ maximum, равный -1. Такимъ образомъ, maximum этой функціи оказывается меньше ея minimum.

Maximum и minimum функціи должно также различать отъ такъ называемыхъ *крайнихъ значеній*, которыя иногда можемъ имѣть функція. Если по условіяхъ вопроса или по свойствамъ самой функціи перемѣнная x можетъ измѣняться только въ опредѣленномъ промежуткѣ, напр. между a и b, то $f(a)$ и $f(b)$ наз. *крайними значеніями функціи*. Напр., въ функціи $+\sqrt{4-x^2}$ перемѣнная x можетъ измѣняться только въ промежуткѣ между -2 и $+2$, такъ какъ при всѣхъ прочихъ значеніяхъ x функція перестаетъ существовать (дѣлается мнимою). Значенія, которыя получаетъ эта функція при $x=-2$ и при $x=+2$, будутъ крайнія. Крайнія значенія могутъ быть наименьшими или наибольшими изъ всѣхъ возможныхъ значеній, но не minimum и не maximum въ томъ смыслѣ, какъ мы ихъ выше опредѣлили: здѣсь нѣтъ смежныхъ значеній *въ обѣ стороны*, а только въ одну: такъ, въ нашемъ примѣрѣ нѣтъ значеній, соотвѣтствующихъ $x=2+\varepsilon$, хотя есть значенія, соотвѣтствующія $x=2-\varepsilon$.

44. Полезно замѣтить, что если функція непрерывна въ промежуткѣ между α и β и въ этомъ промежуткѣ получаетъ только одинъ maximum, не имѣя minimum, то этотъ maximum будетъ вмѣстѣ съ тѣмъ и наибольшимъ значеніемъ функціи въ промежуткѣ между α и β. Дѣйствительно, если бы въ этомъ промежуткѣ существовало еще большее значеніе, то функція, переходя отъ minimum къ этому большему значенію, должна была бы сначала уменьшаться, а потомъ увеличиваться и, слѣд., непремѣнно перешла бы черезъ minimum, а мы допустили, что minimum'а нѣтъ.

Точно такъ же легко убѣдиться, что если непрерывная функція имѣетъ въ какомъ-нибудь промежуткѣ одинъ minimum, то послѣдній будетъ ея наименьшимъ значеніемъ въ этомъ промежуткѣ.

45. Изображеніе функціи кривою. Чтобы наглядно представить себѣ ходъ измѣненія данной функціи при измѣненіи ея перемѣнной независимой, прибѣгаютъ часто къ помощи чертежа. Пусть имѣемъ функцію объ одной перемѣнной независимой, напр., такую:

$$y=x^3-2x+1$$

Будемъ давать x произвольныя значенія, все возрастающія, напр.:

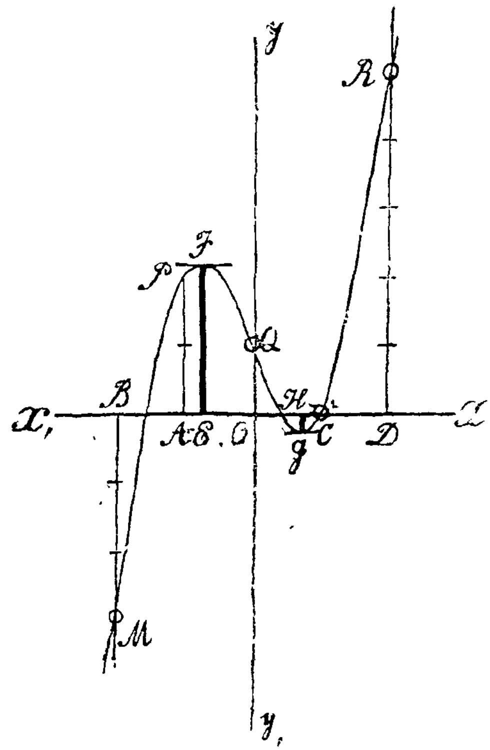
$$x=\ldots-2,\ -1,\ 0,+1,\ +2,\ldots$$

Подставивъ эти значенія въ данную функцію, вычислимъ соотвѣтствующія значенія послѣдней:

$$y=\ldots-3,\ +2,\ +1,\ 0,+5,\ldots$$

Теперь начертимъ (см. рис. на слѣд. стр.) двѣ перпендикулярныя прямыя xx_1 и yy_1, пересѣкающіяся между собою въ точкѣ O, и, выбравъ произвольный отрѣзокъ прямой за единицу, станемъ откладывать значенія x на прямой xx_1 отъ точки O вправо, если эти значенія положительны, и влѣво, когда они отрицательны. Такимъ образомъ, OA представитъ собою значеніе x, равное -1, OB—значеніе x, равное -2, OC выразитъ $+1$, $OD=+2$ и т. д. Точка O представляетъ значеніе x, равное 0.

Теперь условимся откладывать соотвѣтствующія значенія самой функціи, т.-е. значенія y, на перпендикулярахъ, возставленныхъ въ точкахъ B, A, O, C, D и т. д., при чемъ, если значенія функціи положительны, мы ихъ будемъ откладывать вверхъ отъ прямой xx_1, а когда они отрицательны,—внизъ отъ этой прямой. Такимъ образомъ, отрѣзокъ BM представитъ намъ значеніе функціи, равное -3 при $x=-2$; отрѣзокъ AP выразитъ значеніе функціи, равное $+2$, при $x=-1$ и т. д. Мы получимъ тогда рядъ точекъ: M, P, Q, C, R...., которыхъ будетъ тѣмъ больше и тѣмъ ближе. онѣ будутъ лежать другъ къ другу, чѣмъ больше и ближе другъ къ другу мы взяли значеній x. Обведя полученныя точки кривою линіей, мы наглядно выразимъ измѣненіе функціи при измѣненіи перемѣнной независимой, а именно: значенія функціи выразятся длинами перпендикуляровъ, возставленныхъ изъ концовъ отрѣзковъ, представляющихъ соотвѣтствующія значенія *перемѣнной независимой*, до пересѣченія съ кривою.



Кривая, построенная такимъ образомъ, наз. *кривою функціи*. Разстоянія OB, OA, OC, OD, ... выражающія различныя значенія x, наз. *абсциссами* кривой; отрѣзки BM, AP, ..., представляющіе значенія y, т.-е. самой функціи, назыв. *ординатами* кривой; тѣ и другія совмѣстно назыв. *координатами*. Неопредѣленная прямая xx_1 наз. *осью абсциссъ*, или *осью иксовъ*, неопред. прямая yy_1, параллельно которой проводятся ординаты, наз. *осью ординатъ* или *осью игрековъ*; та и другая прямая совмѣстно наз. осями координатъ. Точка O есть *начало координатъ*. Когда оси координатъ перпендикулярны другъ къ другу (какъ у насъ на чертежѣ), онѣ наз. *прямоугольными* осями (или ортогональными).

Если функція изображена кривою, то становится нагляднымъ, имѣетъ ли она maximum и minimum въ томъ промежуткѣ, для котораго сдѣланъ чертежъ. Такъ, на нашемъ чертежѣ видно, что при измѣненіи x отъ -2 до $+2$ функція переходитъ черезъ нѣкоторый maximum EF и черезъ нѣкоторый minimum Hg.

Подобными кривыми часто выражаются, для наглядности, законы измѣненія различныхъ величинъ, разсматриваемыхъ въ физикѣ; напр., измѣненіе плотности воды при измѣненіи температуры, измѣненіе упругости водяного пара при измѣненіи температуры и т. п.

46. Нѣкоторыя истины, облегчающія нахожденіе maximum и minimum.

I. Функціи $f(x)$ и $Af(x)$, отличающіяся только постояннымъ положительнымъ множителемъ A, *имѣютъ* maximum *и* minimum *при однихъ и тѣхъ же значеніяхъ* x.

Дѣйствительно, если

въ случаѣ maximum		*въ случаѣ minimum*
$f(a \pm \varepsilon) - f(a) < 0$	или	$f(a \pm \varepsilon) - f(a) > 0$

то при A положительномъ и (§ 239 эл. алгебры):

$$Af(a \pm \varepsilon) - Af(a) < 0 \quad \text{или} \quad Af(a \pm \varepsilon) - Af(a) > 0$$

Обратно: изъ вторыхъ неравенствъ выводятся первыя дѣленіемъ на положительное число A.

II. Функція $f(x)$ получаетъ maximum *(или* minimum*) при такихъ значеніяхъ* x, *при которыхъ фунція—f(x) получаетъ* minimum (*при* maximum).

Дѣйствительно, если

въ случаѣ maximum		*въ случаѣ minimum*
$f(a \pm \varepsilon) - f(a) < 0$	или	$f(a \pm \varepsilon) - f(a) > 0$

то (§ 240 эл. алгебры):

maximum	*minimum*

$$-f(a \pm \varepsilon) - [-f(a)] > 0 \quad \text{или} \quad -f(a \pm \varepsilon) - [-f(a)] < 0 \text{ и наоборотъ.}$$

III. Если f(x) *при* x$=$a *получаетъ положительный* maximum (*или* minimum), *то при томъ же значеніи* x *имѣетъ* maximum (*или* minimum) *и функція* $[f(\mathrm{x})]^m$ *при* m *цѣломъ положительномъ, и обратно.*

Дѣйствительно, разность $[f(a \pm \varepsilon)]^m - [f(a)]^m$ можетъ быть представлена такъ:

$$[f(a \pm \varepsilon) - f(a)]\left\{[f(a \pm \varepsilon)]^{m-1} + f(a)[f(a \pm \varepsilon)]^{m-2} + \ldots + [f(a)]^{m-1}\right\}$$

Когда $f(a)$ положительно, то и $f(a \pm \varepsilon)$ положительно (такъ какъ $f(a \pm \varepsilon)$ отличается отъ $f(a)$ на безконечно малое число); значитъ, множитель, стоящій въ скобкахъ $\{\ \}$, положителенъ; поэтому все произведеніе положительно или отрицательно, въ зависимости отъ того, положителенъ ли, или отрицателенъ множитель $f(a \pm \varepsilon) - f(a)$.

Эти истины позволяютъ весьма часто упростить ту функцію, maximum или minimum которой отыскивается. Если, напр., надо найти, при какомъ значеніи x функція

$$y = +\sqrt{\frac{x^2(a^2 - x^2)}{2}}$$

получаетъ maximum (a постоянное число), то, на основаніи предыдущихъ истинъ, приводимъ вопросъ къ нахожденію maximum болѣе простой функціи:

$$y_1 = x^2(a^2 - x^2)$$

Полѣзно еще замѣтить, что

$max.\,[f(x)+A]$ соотвѣтствуетъ $max.\ f(x)$
$max.\,[A-f(x)]$ „ $min.\ f(x)$
$max.\,\dfrac{A}{f(x)}$ „ $min.\ f(x)$

если A есть постоянное число.

II. Maximum и minimum трехчлена ax^2+bx+c.

47. Первый способъ. Пусть буква x выражаетъ то значеніе перемѣнной, при которомъ функція получаетъ maximum или minimum. Такое значеніе, какъ мы видѣли (§ 43), должно удовлетворять неравенствамъ:

въ случаѣ maximum	въ случаѣ minimum
$f(x \pm \varepsilon) - f(x) < 0$	$f(x \pm \varepsilon) - f(x) > 0$

гдѣ ε есть положительное безконечно малое число. Приращеніе трехчлена, соотвѣтствующее измѣненію x на $\pm\varepsilon$, равно;

$$[a(x \pm \varepsilon)^2 + b(x \pm \varepsilon) + c] - (ax^2 + bx + c) = \pm 2a\varepsilon x + a\varepsilon^2 \pm b\varepsilon =$$
$$= a\varepsilon^2 \pm (2ax - b)\varepsilon.$$

Слѣд., x должно удовлетворять такимъ неравенствамъ:

въ случаѣ maximum	въ случаѣ minimum
$a\varepsilon^2 \pm (2ax - b)\varepsilon < 0$	$a\varepsilon^2 \pm (2ax + b)\varepsilon > 0$

или по сокращеніи на положительное число ε:

въ случаѣ maximum	въ случаѣ minimum	
$a\varepsilon \pm (2ax - b) < 0$	$a\varepsilon \pm (2ax + b) > 0$	[1]

Каждое изъ этихъ неравенствъ возможно лишь тогда, когда $2ax+b=0$.

Дѣйствительно, если бы $2ax+b$ равнялось какому-нибудь числу, отличному отъ 0, хотя бы и съ очень малой абсол. величиной, то сумма $a\varepsilon+(2ax+b)$ и разность $a\varepsilon-(2ax+b)$, при безконечно маломъ значеніи ε, имѣли бы разные знаки (такъ какъ абсолютная величина числа $a\varepsilon$ можетъ быть сдѣлана такъ мала, какъ угодно), и тогда не удовлетворялось бы ни одно изъ неравенствъ [1], требующихъ, чтобы эта сумма и разность одновременно были или больше, или меньше 0.

Итакъ, значеніе x, при которомъ трехчленъ получаетъ maximum или minimum, должно удовлетворять уравненію $2ax+b=0$; изъ него находимъ: $x=-\frac{b}{2a}$. При этомъ значеніи x неравенства [1] даютъ:

въ случаѣ maximum	*въ случаѣ minimum*
$a\varepsilon<0$	$a\varepsilon>0$

или по сокращеніи на положительное число ε:

въ случаѣ maximum	*въ случаѣ minimum*
$a<0$	$a>0$

Такимъ образомъ, оказывается, что *при* $x=-\frac{b}{2a}$ *трехчленъ* ax^2+bx+c *имѣетъ* maximum, *если* a *отрицательное число, и* minimum, *если* a *положительное число.*

Самый maximum или minimum будетъ:

$$a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2+b\left(-\frac{b}{2a}\right)+c=\frac{b^2}{4a}-\frac{b^2}{2a}+c=\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

Замѣтимъ, что выраженіе $2ax+b$, которое, будучи приравнено 0, опредѣляетъ значеніе x, обращающее трехчленъ въ maximum или minimum, наз. *производною функціею* этого трехчлена. Производная функція *цѣлаго многочлена* вообще составляется по слѣдующему простому правилу: *въ каждомъ членѣ многочлена коэффиціентъ умножается на показателя перемѣннаго независимаго, а этотъ показатель уменьшается на единицу;* такъ, производная трехчлена $ax^2+bx+cx^0$, составленная по этому правилу, будетъ:

$$2ax^1+1.bx^0+0.cx^{-1}=2ax+b$$

Примѣры: 1) Найти max. или min. трехчлена $3x-x^2+5$.

Данный трехчленъ имѣетъ maximum, такъ какъ коэффиціентъ *при* x^2 отрицательный. Чтобы найти соотвѣтствующее значеніе x, составимъ производную функцію и приравняемъ ее нулю:

$$3-2x=0; \qquad x=\frac{3}{2}$$

$$max.\ (3x-x^2+5)=3.\frac{3}{2}-\left(\frac{3}{2}\right)^2+5=7\frac{1}{4}$$

2) Трехчленъ $1-5x+7x^2$ имѣетъ minimum при $x=\frac{5}{14}$; онъ равенъ $\frac{3}{28}$.

Замѣчаніе. Такъ какъ функція ax^2+bx+c непрерывна и имѣетъ только одинъ maximum, или только одинъ minimum, то первый есть наибольшее, а второй наименьшее значеніе функціи (§ 44).

48. **Второй способъ**. Трехчленъ ax^2+bx+c можно преобразовать такъ:

$$a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)\right]$$

Выраженіе, стоящее въ прямыхъ скобкахъ, состоитъ изъ перемѣннаго слагаемаго и постояннаго; слѣд., его maximum и minimum соотвѣтствуютъ maximum и minimum перемѣннаго слагаемаго. Но $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ не имѣетъ, очевидно, maximum, а minimum его равенъ 0 при $x=-\frac{b}{2a}$; слѣд., minimum выраженія, стоящаго въ скобкахъ $[\ ]$, есть $\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}=\frac{4ac-b^2}{4a^2}$ при $x=-\frac{b}{2a}$. При томъ же значеніи x будетъ minimum произведенія этого выраженія на a, когда $a>0$, и maximum, когда $a<0$ (§ 46); самый minimum или maximum равенъ:

$$a.\frac{4ac-b^2}{4a^2}=\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

49. **Измѣненіе трехчлена**. Чтобы имѣть ясное представленіе о процессѣ измѣненія данной функціи при непрерывномъ возрастаніи перемѣнной независимой x отъ $-\infty$ до $+\infty$, предварительно опредѣляютъ: 1) при какихъ значеніяхъ x функція получаетъ maximum или minimum, и каковы значенія послѣднихъ; 2) при какихъ значеніяхъ x она обращается въ 0, въ $+\infty$ и въ $-\infty$; 3) каковы предѣльныя значенія функціи при $x=-\infty$, $x=+\infty$ и $x=0$. Послѣ чего легко опредѣлить: 4) въ какихъ промежуткахъ функція возрастаетъ, въ какихъ убываетъ.

Прослѣдимъ, напр., измѣненіе трехчлена x^2-5x+4:

1) Онъ получаетъ minimum при $x=2^1/_2$, равный $-2^1/_4$; maximum не существуетъ; 2) трехчленъ 2 раза обращается въ 0: при $x=1$ и $x=4$; ни при какомъ конечномъ значеніи x онъ не обращается ни въ $+\infty$, ни въ $-\infty$; 3) такъ какъ x^2 число всегда положительное, превосходящее при достаточно большемъ x абсол. величину $5x$, то предѣльное значеніе нашего трехчлена при $x=-\infty$ и при $x=+\infty$ будетъ одно и то же, именно $+\infty$; при $x=0$ трехчленъ дѣлается равнымъ $+4$.

4) Чтобы судить теперь, въ какихъ промежуткахъ трехчленъ возрастаетъ и въ какихъ убываетъ, расположимъ всѣ предыдущія значенія x въ возрастающемъ порядкѣ и подъ ними выпишемъ соотвѣтственныя значенія трехчлена:

$$
\begin{array}{rlllll}
x= & -\infty, & 0, & 1, & 2^1/_2 & 4,\ +\infty \\
x^2-5x+4= & +\infty, & +4, & 0, & -2^1/_4\ (\text{min.}), & 0,\ +\infty.
\end{array}
$$

Изъ этой таблицы видимъ: при возрастаніи x отъ $-\infty$ до 0, трехчленъ убываетъ отъ $+\infty$ до $+4$; при возрастаніи x отъ 0 до 1 трехчленъ убываетъ отъ $+4$ до 0; при дальнѣйшемъ возрастаніи x отъ 1 до $2^1/_2$ трехчленъ продолжаетъ убывать отъ 0 до $-2^1/_4$; достигнувъ этого minimum, трехчленъ возрастаетъ до 0, при $x=4$, и далѣе до $+\infty$ при $x=+\infty$.

Ходъ измѣненія наглядно можно изобразить кривою при помощи координатныхъ осей. Предлагаемъ учащимся сдѣлать это самимъ.

Примѣры: 1) Измѣненіе трехчлена $2+3x-x^2$ выразится слѣдующей таблицей:

$$
\begin{array}{rlllll}
x= & -\infty, & \frac{3-\sqrt{17}}{2}, & 0, & \frac{3}{2}, & \frac{3+\sqrt{17}}{2},\ +\infty \\
2+3x-x^2= & -\infty, & 0, & 2, & 4^1/_2\ (\text{max.}), & 0,\ -\infty
\end{array}
$$

2) Измѣненіе трехчлена $2x^2-8x+9$ выразится слѣдующей таблицей:

$$
\left.\begin{array}{rllll}
x= & -\infty, & 0, & 2, & +\infty \\
2x^2-8x+9= & +\infty, & 9, & 1\ (\text{min.}), & +\infty
\end{array}\right\}\text{трехчленъ не обращается въ 0.}
$$

50. Основная задача. *Разложить число* а *на два слагаемыхъ, которыхъ произведенiе было бы наибольшее.*

Пусть одно слагаемое будетъ x, а другое $a-x$. Произведенiе $(a-x)\,x$, равное $-x^2+ax$, представляетъ частный случай трехчлена 2-й степени, поэтому наибольшее значенiе его будетъ въ то же время и maximum (§ 47, замѣчанiе). Такъ какъ коэффицiентъ при x^2 отрицательное число, функцiя $-x^2+ax$ имѣетъ maximum; онъ будетъ при такомъ значенiи x, которое удовлетворяетъ уравненiю: $-2x+a=0$, т.-е. при $x=\frac{a}{2}$; тогда другое слагаемое будетъ $a-\frac{a}{2}=\frac{a}{2}$. Итакъ: *произведенiе двухъ перемѣнныхъ чиселъ, которыхъ сумма равна постоянному числу, есть наибольшее, когда эти числа равны другъ другу.*

Замѣтимъ, что этотъ выродъ не теряетъ своей силы и тогда, когда x и a будутъ *отрицательныя числа.*

Примѣры: 1) Число 10 слѣдуетъ разбить на слагаемыя 5 и 5, чтобы произведенiе ихъ было наибольшее.

2) Число —20 слѣдуетъ разбить на слагаемыя —10 и —10, чтобы произведенiе ихъ было наибольшее.

51. Эта задача имѣетъ важное практическое значенiе, такъ какъ многiе вопросы могутъ быть сведены къ ней. Приведемъ примѣры.

Задача 1. *Изъ всѣхъ треугольниковъ съ даннымъ периметромъ* 2p *и даннымъ основанiемъ* a, *какой будетъ имѣть наибольшую площадь?*

Пусть x и y будутъ двѣ другiя стороны треугольника. Тогда площадь его выразится:

$$\triangle=\sqrt{p(p-a)(p-x)(p-y)}$$

Такъ какъ p и $p-a$ суть числа постоянныя, то значенiе $\triangle$ будетъ наибольшимъ, когда произведенiе $(p-x)\,(p-y)$ окажется наибольшимъ. Сумма этихъ двухъ сомножителей равна постоянному числу, такъ какъ: $2p-(x+y)=2p-(2p-a)=a$; слѣд., какъ мы видѣли выше, эти сомножители должны быть равны между собою, т.-е. $p-x=p-y$, откуда $x=y$; значитъ, искомый треугольникъ долженъ быть равнобедренный.

Задача 2. *Изъ всѣхъ прямоугольниковъ, вписанныхъ въ данный кругъ, какой имѣетъ наибольшую площадь?*

Пусть x и y будутъ неравныя стороны прямоугольника, а d діаметръ круга. Вопросъ приводится къ тому, чтобы найти наиб. значеніе произведенія xy, при условіи $x^2+y^2=d^2$. Разсуждаемъ такъ: произведеніе xy будетъ наибольшимъ при тѣхъ же значеніяхъ перемѣнныхъ, при которыхъ окажется наибольшимъ $(xy)^2$, т.-е. x^2y^2 (§ 46, III). Но сумма этихъ сомножителей равна постоянному числу; слѣд., $x^2=y^2$, т.-е. $x=y$; значитъ, искомый прямоугольникъ есть квадратъ.

Задача 3. *Въ данный треугольникъ вписать прямоугольникъ съ наибольшею площадью такъ, чтобы основаніе прямоугольника лежало на основаніи треугольника, а вершины двухъ угловъ лежали на боковыхъ сторонахъ треугольника.*

Обозначимъ высоту треугольника черезъ h, его основаніе черезъ b, отрѣзокъ высоты отъ вершины треугольника до ближайшей стороны прямоугольника черезъ x, основаніе прямоугольника черезъ y. Тогда площадь прямоугольника будетъ $y(h-x)$. Эта функція о двухъ перемѣнныхъ; приведемъ ее къ одной перемѣнной. Изъ подобія треугольниковъ не трудно видѣть, что $b:y=h:x$; откуда $y=\frac{bx}{h}$

Слѣд., площадь прямоугольника $=\frac{bx(h-x)}{h}$

Такъ какъ b и h суть числа постоянныя, то эта функція получаетъ наиб. значеніе тогда, когда окажется наибольшимъ произведеніе $x(h-x)$; но $x+(h-x)=h=$ пост. число; поэтому $x=h-x$, т.-е. $x=\frac{h}{2}$. Наиб. значеніе площади прямоугольника будетъ $\frac{bh^2}{4h}=\frac{bh}{4}$, т.-е. она равна $\frac{1}{2}$ площади треугольника.

III. Maximum и minimum дроби $\frac{ax^2+bx+c}{px^2+qx+r}$.

52. Теорема. Функція $\frac{ax^2+bx+c}{px^2+qx+r}$ *непрерывна между* α *и* *β, если въ этомъ промежуткѣ не встрѣчается ни одинъ изъ корней знаменателя.*

Док. Очевидно, что при всякомъ вещественномъ значеніи x разсматриваемая дробь получаетъ только вещественныя значенія. Съ другой стороны, эти значенія конечны для промежутка между α и β, въ которомъ не встрѣчается ни одинъ изъ корней трехчлена px^2+qx+r. Остается показать, что приращенія нашей дроби могутъ быть какъ угодно малы для всѣхъ значеній x, лежащихъ между α и β. Для этого дадимъ x безконечно малое приращеніе $=\varepsilon$ и посмотримъ, каково будетъ приращеніе дроби. Для краткости положимъ, что

$$ax^2+bx+c=A, \qquad px^2+qx+r=P$$
$$[a(x\pm\varepsilon)^2+b(x\pm\varepsilon)+c]-(ax^2+bx+c)=h$$
$$[p(x\pm\varepsilon)^2+q(x\pm\varepsilon)+r]-(px^2+qx+r)=h_1$$

Тогда приращеніе дроби можно выразить такъ:

$$\frac{A+h}{P+h_1}-\frac{A}{P}=\frac{(A+h)P-(P+h_1)A}{(P+h_1)P}=\frac{hP-h_1A}{(P+h_1)P}$$

Когда ε приближается къ 0, приращенія h и h_1 также приближаются къ 0; слѣд., выраженіе $hP-h_1A$ стремится къ 0, а $(P+h_1)P$ къ P^2. Послѣднее число не равно 0, такъ какъ мы разсматриваемъ такія значенія x, которыя не обращаютъ въ 0 знаменателя P. Изъ этого слѣдуетъ, что приращеніе нашей дроби безконечно мало при безконечно маломъ приращеніи x.

53. Нахожденіе maximum и minimum. Мы видѣли, что значенія x, при которыхъ функція $f(x)$ получаетъ maximum или minimum, должны удовлетворять неравенствамъ.

въ случаѣ maximum	въ случаѣ minimum
$f(x\pm\varepsilon)-f(x)<0$	$f(x\pm\varepsilon)f-(x)>0$

гдѣ ε есть безконечно малое положительное число. Въ примѣненіи къ нашей дроби эти неравенства будутъ:

въ случаѣ maximum	въ случаѣ minimum
$\dfrac{hP-h_1A}{(P+h_1)P}<0$	$\dfrac{hP-h_1A}{(P+h_1)P}>0$

Знаменатель $(h-P_1)P$ безконечно мало разнится отъ P^2; слѣд., при достаточно маломъ ε онъ будетъ числомъ положительнымъ поэтому предыдущія неравенства можно замѣнить такими.

въ случаѣ *maximum*	въ случаѣ *minimum*
$hP - h_1A < 0$	$hP - h_1A > 0$

гдѣ $h = a\varepsilon^2 \pm (2ax + b)\varepsilon$, $h_1 = p\varepsilon^2 \pm (2px + q)\varepsilon$.

Обозначивъ для краткости двучлены: $2ax + b$ и $2px + q$, представляющіе собою производныя функціи отъ числителя и знаменателя данной дроби, соотвѣтственно черезъ A_1 и P_1, можемъ положить, что

$$h = a\varepsilon^2 \pm A_1\varepsilon;\ h_1 = p\varepsilon^2 \pm P_1\varepsilon$$

Слѣд.. предыдущія неравенства, по сокращеніи ихъ на положительное число ε и послѣ перестановки нѣкоторыхъ членовъ, приведутся къ такому виду:

въ случаѣ *maximum*	въ случаѣ *minimum*
$(aP - pA)\varepsilon \pm (A_1P - AP_1) < 0$	$(aP - pA)\varepsilon \pm (A_1P - AP_1) > 0$

Необходимое условіе возможности этихъ неравенствъ состоитъ въ томъ, чтобы $A_1P - AP_1 = 0$. Дѣйствительно, такъ какъ членъ $(aP - pA)\varepsilon$ можетъ быть сдѣланъ такъ малъ, какъ угодно, то сумма $(aP - pA)\varepsilon + (A_1P - AP_1)$ и разность $(aP - pA)\varepsilon - (A_1P - AP_1)$ имѣли бы противоположные знаки, если бы $A_1P - AP_1$ равнялось какому-нибудь числу, отличному отъ 0, хотя бы и съ очень малой абсол. величиной; слѣд., тогда не удовлетворялось бы ни одно изъ неравенствъ, требующихъ, чтобы эта сумма и разность одновременно были или меньше, или больше нуля.

Итакъ. значенія x, обращающія данную дробь въ maximum или minimum, могутъ быть только изъ тѣхъ, которыя служатъ корнями уравненія:

$$A_1P - AP_1 = 0 \qquad [1]$$

Положимъ, что мы беремъ именно такія значенія. Тогда наши неравенства даютъ:

въ случаѣ *maximum*	въ случаѣ *minimum*
$(aP - pA)\varepsilon < 0$	$(aP - pA)\varepsilon > 0$

или по сокращеніи на положительное число ε:

въ случаѣ *maximum*	въ случаѣ *minimum*	
$aP - pA < 0$	$aP - pA > 0$	[2]

Уравненіе [1], опредѣляющее, какія значенія x могутъ обратить данную дробь въ maximum или minimum, легко можно запомнить, если обратимъ вниманіе на то, что его лѣвая часть равна: *производной числителя, умноженной на знаменателя, безъ производной знаменателя, умноженной на числителя.* Неравенства [2] также легко запомнить: *лѣвая часть ихъ составляется изъ лѣвой части уравненія* [1], *замѣною въ немъ производныхъ числителя и знаменателя на производныя этихъ производныхъ*, т.-е. вмѣсто $A_1=2ax+b$ берется $2a$ и вмѣсто $P_1=2px+q$ берется $2p$ (и затѣмъ неравенства сокращаются на 2).

Разсмотримъ теперь различные случаи, которые могутъ представиться при совмѣстномъ рѣшеніи ур. [1] и неравенствъ [2]. Подставивъ вмѣстѣ A, P, A_1 и P_1 ихъ подробныя выраженія, приведемъ уравненіе [1] къ виду:

$$(2ax+b)(px^2+qx+r)-(2px+q)(ax^2+bx+c)=0$$

или
$$(2apx^3+bpx^2+2aqx^2+bqx+2arx+br)-$$
$$-(2pax^3+aqx^2+2pbx^2+bqx+2pcx+cq=0,$$

т.-е.
$$(aq-bp)x^2+2(ar-pc)x+(br-qc)=0 \qquad [3]$$

Такимъ образомъ, управленіе [1] оказалось квадратнымъ. Если его корни будутъ мнимые, данная дробь не имѣетъ ни maximum, ни minimum. Посмотримъ, что будетъ, когда его корни окажутся вещественными.

Неравенства [2] можно представить такъ:

$$a(px^2+qx+r)-p(ax^2+bx+c)\gtrless 0$$

или:

въ случаѣ maximum	*въ случаѣ minimum*	
$(aq-pb)x+(ar-pc)<0$	$(aq-pb)x+(ar-pc)>0$	[4]

Когда корни ур. [3] окажутся равными, то каждый изъ нихъ будетъ $-\dfrac{ar-pc}{aq-pb}$. Это значеніе x, обращая въ 0 лѣвыя части неравенствъ [4], не удовлетворяетъ ни одному изъ нихъ. Значитъ, въ этомъ случаѣ разсматриваемая дробь не имѣетъ на maximum, ни minimum.

Когда корни ур. [3] будутъ вещественные неравные, то одинъ изъ нихъ удовлетворитъ одному изъ неравенствъ [4], а другой — другому. Въ самомъ дѣлѣ, сумма корней равна $-\frac{2(ar-pc)}{aq-bp}=\frac{2(pc-ar)}{aq-bp}$; значитъ, если корни неравны другъ другу, то одинъ изъ нихъ, напр. x_1, долженъ быть больше, а другой, напр. x_2, меньше $\frac{pc-ar}{aq-bp}$. Но неравенства [4] требуютъ, чтобы

въ случаѣ maximum

$$x<\frac{pc-ar}{aq-bp}$$

въ случаѣ minimum

$$x>\frac{pc-ar}{aq-bp}$$

если $aq-bp>0$, и

въ случаѣ maximum

$$x>\frac{pc-ar}{aq-bp}$$

въ случаѣ minimum

$$x<\frac{pc-ar}{aq-bp}$$

если $ab-bp<0$. Слѣд., въ первомъ случаѣ x_2 удовлетворитъ первому неравенству, а x_1 второму; во второмъ случаѣ наоборотъ.

Значитъ, когда корни ур. [3] вещественные неравные, данная дробь имѣетъ maximum и minimum.

Когда $aq-pb=0$, уравн.]3] дѣлается уравненіемъ 1-й степени и потому имѣетъ только одинъ корень. Въ этомъ случаѣ неравенства [4] даютъ:

въ случаѣ maximum

$$ar-pc<0$$

въ случаѣ minimum

$$ar-pc>0$$

Если $ar-pc\neq 0$, то одно изъ этихъ неравенствъ будетъ имѣть мѣсто; значитъ, тогда дробь имѣетъ или maximum, или minimum.

Наконецъ, когда при $aq-pb=0$ еще и $ar-pc=0$, то ур. [3] перестаетъ существовать. Въ этомъ случаѣ разсматриваемая дробь *равна постоянному числу* при всякомъ значеніи x. Дѣйствительно, изъ равенствъ $aq-pb=0$ и $ar-pc=0$ выводимъ:

$$\frac{a}{p}=\frac{b}{q} \text{ и } \frac{a}{p}=\frac{c}{r}; \text{ слѣд. } \frac{a}{p}=\frac{b}{q}=\frac{c}{r}=k$$

Тогда: $a=pk,\quad b=qk,\quad c=rk$

и $$\frac{ax^2+bx+c}{px^2+qx+r}=\frac{k(px^2+qx+r)}{px^2+qx+r}=k$$

54. Правило. Чтобы найти maximum и minimum дроби

$$\frac{ax^2+bx+c}{px^2+qx+r}=\frac{A}{P}$$

составляютъ прежде всего уравненіе:

$$A_1P-P_1A=0,$$

лѣвая часть котораго равна производной числителя, умноженной на знаменателя, безъ производной знаменателя, умноженной на числителя. Если корни этого уравненія окажутся мнимыми или вещественными равными, то дробь не имѣетъ ни maximum, ни minimum. Если корни будутъ вещественные неравные, то одинъ изъ нихъ обращаетъ дробь maximum, а другой—въ minimum Тогда составляютъ выраженіе: $aP-pA$, замѣняя въ лѣвой части уравненія производныя числителя и знаменателя на производныя этихъ производныхъ. Тотъ изъ корней, который обращаетъ это выраженіе въ отриц. число, соотвѣтствуетъ maximum дроби, другой корень — minimum. Если уравненіе окажется 1-й степени, его корень обращаетъ дробь или въ maximum или въ minimum, смотря по тому, получается ли отрицательное, или положительное число отъ подстановки въ выращеніе $aP-pA$ корня уравненія. Наконецъ, если уравненіе уничтожается, данная дробь равна постоянному числу при всякомъ значеніи x.

Примѣры: 1) *Найти max. и min. дроби* $\dfrac{-x^2+2x-1}{x^2-2}$

Составляемъ уравненіе:

$$(-2x+2)\ (x^2-2)-(2x)\ (-x^2+2x-1)=0$$

Упрощаемъ его: $x^2-3x+2=0$

Рѣшаемъ: $x_1=2,\quad x_2=1$

Дробь имѣетъ maximum и minimum.

Составляемъ выраженіе: $(-2)\ (x^2-2)-2(-x^2+2x-1)$;

Упрощаемъ его: $2(-2x+3)$.

При $x=2$ это выраженіе обращается въ отриц. число, а при $x=1$ въ положительное; слѣд., дробь получаетъ maximum при $x=2$ и minimum при $x=1$.

Самые maximum и minimum будутъ:

$$\frac{-4+4-1}{4-2}=-\frac{1}{2}(max.)\qquad \frac{-1+2-1}{1-2}=0\ (min)$$

2) *Найти max. и min. дроби* $\dfrac{x^2-5}{2x+4}$

$$2x(2x-4)-2(x^2-5)=0,\quad x^2-4x+5=0$$

Такъ какъ корни этого уравненія мнимые, то дробь не имѣетъ ни maximum, ни minimum.

3) *Найти max. и min. выраженія* $\frac{a+x}{a-x}+\frac{a-x}{a+x}$. Приведя оба члена даннаго выраженія къ общему знаменателю, получимъ:

$$2.\frac{x^2+a^2}{-x^2+a^2}$$

Найдемъ max. и min. перемѣннаго множителя $\frac{x^2+a^2}{-x^2+a^2}$.

$$2x(-x^2+a^2)-(-2x)(x^2+a^2)=0;\ 4a^2x=0;\ x=0$$

При $x=0$ выраженіе $2(-x^2+a^2)-(-2)(x^2+a^2)$ обращается въ $4a^2$, т.-е. въ число положительное; слѣд., при $x=0$ данная дробь получаетъ minimum; этотъ minimum$=2$.

55. Измѣненіе разсматриваемой дроби. Чтобы дать понятіе о томъ, какъ можно составлять сужденіе объ измѣненіи дроби вида $\frac{ax^2+bx+c}{px^2+qx+r}$ при непрерывномъ измѣненіи x отъ $-\infty$ до $+\infty$, возьмемъ частный примѣръ. Пусть требуется прослѣдить измѣненіе дроби $\frac{-x^2+2x-1}{x^2-2}$. Для этого, согласно сказанному въ § 49, находимъ сначала maximum и minimum этой функціи. Мы видѣли (пред. §, примѣръ 1-й), что она получаетъ maximum $-\frac{1}{2}$ при $x=2$ и minimum 0 при $x=1$. Чтобы найти теперь тѣ значенія x, при которыхъ дробь обращается въ 0 или въ $\pm\infty$, опредѣлимъ корни ея числителя и знаменателя:

$$-x^2+2x-1=0;\quad x^2-2x+1=0;\quad x=1$$
$$x^2-2=0;\quad x=\pm\sqrt{2}$$

Корни числителя обращаютъ дробь въ 0, если они не служатъ корнями знаменателя (въ противномъ случаѣ получается неопредѣленное выраженіе $^0/_0$, истинное значеніе котораго можетъ быть и не 0). Точно такъ же корни знаменателя обращаютъ дробь въ $\pm\infty$, если они не служатъ корнями числителя. Въ нашемъ примѣрѣ числитель и знаменатель не имѣютъ общихъ корней. Слѣд., при $x=1$ наша дробь обращается въ 0, а при $x=-\sqrt{2}$ и при $x=+\sqrt{2}$ она дѣлается $\pm\infty$.

Чтобы найти предѣльныя значенія дроби при $x = \pm\infty$, представимъ ее подъ такимъ видомъ:

$$\frac{-x^2-2x-1}{x^2-2} = \frac{-1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x^2}}$$

Отсюда находимъ, что при $x = \pm\infty$ дробь обращается въ -1.

При $x=0$ дробь получаетъ значеніе $\frac{1}{2}$.

Чтобы судить теперь, въ какихъ промежуткахъ наша дробь возрастаетъ и въ какихъ убываетъ, расположимъ всѣ предыдущія значенія x въ возрастающемъ порядкѣ и подъ ними выпишемъ соотвѣтственныя значенія дроби:

$x=$	$-\infty$,	$-\sqrt{2}$,	0,	0,	$+\sqrt{2}$,	2,	$+\infty$
Знач. дроби $=$	-1,	$\pm\infty$,	$\frac{1}{2}$,	0 (min.),	$\pm\infty$,	$-\frac{1}{2}$ (max.),	-1

По этой таблицѣ легко составить понятіе объ измѣненіи данной дроби. Для удобства представимъ послѣднюю въ такомъ видѣ (разложивъ числителя и знаменателя на множителей 1-й степени):

$$\frac{-x^2+2x-1}{x^2-2} = \frac{-(x-1)^2}{[x-(-\sqrt{2})](x-\sqrt{2})}$$

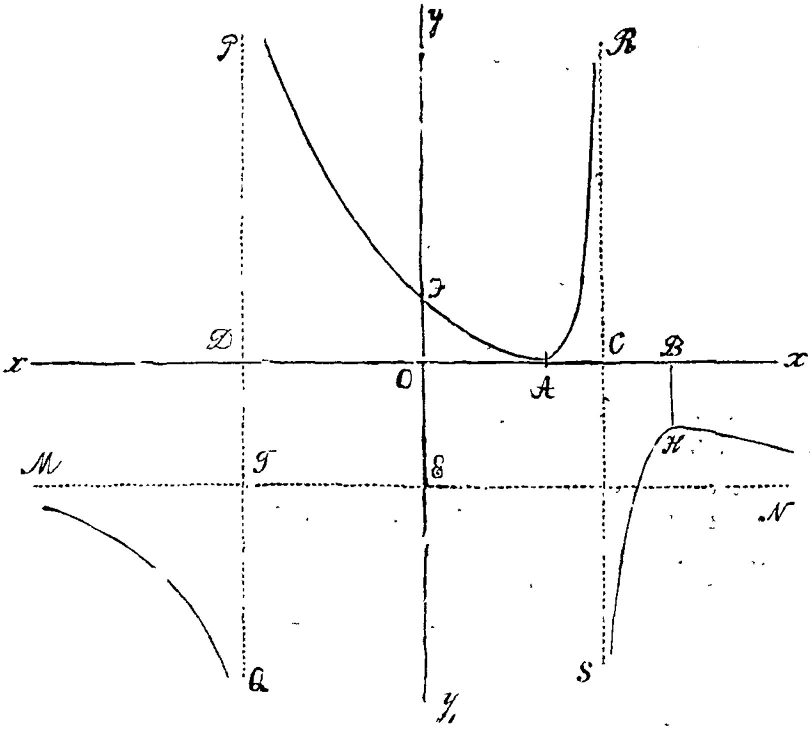
При измѣненіи x отъ $-\infty$ до $-\sqrt{2}$ дробь измѣняется отъ -1 до $-\infty$, никогда не достигая этихъ предѣльныхъ значеній. Что дѣйствительно дробь стремится къ $-\infty$, а не къ $+\infty$, когда x приближается отъ $-\infty$ къ $-\sqrt{2}$, видно изъ того, что при всѣхъ такихъ значеніяхъ x, знаменатель дроби остается положительнымъ, приближаясь къ 0, тогда какъ числитель всегда отрицательный.

При переходѣ x черезъ значеніе $-\sqrt{2}$ наша дробь претерпѣваетъ разрывъ, сразу дѣлаясь $+\infty$ изъ $-\infty$ (какъ только x сдѣлается больше $-\sqrt{2}$, знаменатель становится отрицательнымъ).

При возрастаніи x отъ $-\sqrt{2}$ до $+1$ дробь убываетъ отъ $+\infty$ до 0, переходя значеніе $\frac{1}{2}$ при $x=0$.

Достигнувъ значенія 0 (minimum), дробь начинаетъ возрастать до $+\infty$ (при $x=+\sqrt{2}$).

При переходѣ x черехъ значеніе $\sqrt{2}$ дробь вторично претерпѣваетъ разрывъ, дѣлаясь сразу $-\infty$ изъ $+\infty$.



При дальнѣйшемъ возрастаніи x дробь сначала увеличивается отъ $-\infty$ при до $-\frac{1}{2}$ (maximum), а затѣмъ уменьшается, стремясь въ предѣлѣ къ -1.

Ходъ измѣненія представляется болѣе нагляднымъ, когда мы изобразимъ разсматриваемую функцію кривою (см. чертежъ на этой страницѣ, на которомъ; $OA=1$, $OB=2$, $OC=+\sqrt{2}$, $OD=-\sqrt{2}$, $OE=-1$, $OF=+\frac{1}{2}$, $BH=-\frac{1}{2}$).

Вѣтви кривой, заключающейся въ пространствѣ $PDCR$, приближаются неограниченно близко къ прямымъ DP и CR, никогда, однако, ихъ не достигая. Точно такъ же кривая, лежащая въ углѣ MTQ, неограниченно близко приближается вѣтвями къ прямымъ TM и TQ, никогда ихъ не достигая. Такія прямыя наз. *ассимптотами* кривой. Для кривой, заключенной въ углѣ SCx, ассимптотами служатъ прямыя RS и MN.

VI. Нахожденіе наибольшихъ и наименьшихъ значеній нѣкоторыхъ другихъ функцій.

56. Лемма. *Среднее геометрическое нѣсколькихъ положительныхъ чиселъ меньше ихъ средняго ариѳметическаго, когда эти числа не всѣ одинаковы, и равно ихъ среднему ариѳметическому, когда всѣ числа одинаковы.*

Док. Пусть x, y, z, t,...v будутъ n положительныхъ чиселъ; требуется доказать, что

$$\sqrt[n]{xyzt...v} \leqslant \frac{x+y+z+t+...+v}{n}$$

т.-е.

$$xytv...v \leqslant \left[\frac{x+y+t+z+...+v}{n}\right]^n$$

гдѣ знакъ $=$ соотвѣтствуетъ тому случаю, когда $x=y=z=$ $=t=...v$.

Мы сначала докажемъ это неравенство для такого числа сомножителей, которое равно 2^k, т.-е. для 2-хъ, 4-хъ, 8-и и т. д., а затѣмъ—и для всякаго числа сомножителей.

Всегда можно положить, что

$$xy=\left(\frac{x+y}{2}\right)^2-\left(\frac{x-y}{2}\right)^2$$

Изъ этого тождества выводимъ:

$$xy \leqslant \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \qquad [1]$$

гдѣ знакъ $=$ имѣетъ мѣсто только тогда, когда $x=y$.

Возьмемъ теперь 4 сомножителя: x, y, z, t. Такъ какъ, по доказанному:

$$xy \leqslant \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \text{ и } zt \leqslant \left(\frac{z+t}{2}\right)^2$$

и члены неравенствъ числа положительныя, то, перемноженіемъ получаемъ:

$$xyzt \leqslant \left(\frac{x+y}{2} \cdot \frac{z+t}{2}\right) \qquad [2]$$

гдѣ знакъ $=$ имѣетъ мѣсто только тогда, когда $x=y$ и $z=t$.

На основаніи неравенства [1] можемъ положить:

$$\frac{x+y}{2} \cdot \frac{z+t}{2} \leqslant \left(\frac{x+y+z+t}{4}\right)^2 \qquad [3]$$

гдѣ знакъ $=$ сотвѣтствуетъ случаю, когда $x+y=z+t$. Изъ неравенствъ [2] и [3] выводимъ:

$$xyzt \leqslant \left[\left(\frac{x+y+z+t}{4}\right)^2\right]^2$$

т.-е.

$$xyzt \leqslant \left[\frac{x+y+z+t}{4}\right]^4 \qquad [4]$$

гдѣ знакъ $=$ имѣетъ мѣсто только тогда, когда $x=y$, $z=t$ и $x+y=z+t$, т.-е. когда $x=y=z=t$.

Пусть теперь имѣемъ 8 сомножителей: $xyztuvwp$. На основаніи неравенства [4] имѣемъ:

$$xyzt \leqslant \left(\frac{x+y+z+t}{4}\right)^4 \text{ и } uvwp \leqslant \left(\frac{u+v+w+p}{4}\right)^4$$

Откуда: $xyztuvwp \leqslant \left(\frac{x+y+z+t}{4} \cdot \frac{u+v+w+p}{4}\right)^4$ [5]

гдѣ знакъ $=$ соотвѣтствуетъ случаю, когда $x=y=z=t$ и $u=v=w=p$. Вслѣдствіе неравенства [1] можемъ написать:

$$\frac{x+y+z-t}{4} \cdot \frac{u+v+w+p}{4} \leqslant \left(\frac{x+y+z+t+u+v+w+p}{8}\right)^4 \qquad [6]$$

гдѣ знакъ $=$ соотвѣтствуетъ случаю, когда $x+y+z+t=$ $=u+v+w-p$. Изъ неравенствъ [6] и [5] выводимъ:

$$xytzuvwp \leqslant \left(\frac{x+y+z+t+u+v+w+p}{8}\right)^8$$

гдѣ знакъ $=$ имѣетъ мѣсто только тогда, когда всѣ 8 сомножителей равны другъ другу.

Подобнымъ же образомъ мы докажемъ истину для 16,32... вообще для 2^k сомножителей.

Пусть теперь число сомножителей не равно 2^k; напр., пусть имѣемъ пять сомножителей: $xyztu$. Обозначимъ сумму ихъ буквою s и добавимъ къ произведенію столько сомножителей, равныхъ $\frac{s}{5}$, сколько единицъ недостаетъ въ числѣ ихъ до ближайшей степени 2-хъ, т.-е. возьмемъ произведеніе $xyztu\frac{s}{5}\cdot\frac{s}{5}\cdot\frac{s}{5}$. Тогда, по доказанному, имѣемъ:

$$xyztu\left[\frac{s}{5}\right]^3 \leqslant \left(\frac{s+\frac{3s}{5}}{8}\right)^8 \text{ или } xyztu\left[\frac{s}{5}\right]^3 \leqslant \left[\frac{s}{5}\right]^8$$

что послѣ сокращенія на $\left[\frac{s}{5}\right]^3$ дастъ:

$$xyztu \leqslant \left[\frac{s}{5}\right]^5,$$

гдѣ знакъ $=$ соотвѣтствуетъ случаю, когда всѣ сомножители одинаковы.

Лемма такимъ образомъ доказана.

Замѣчаніе. Доказанное неравенство извѣстно подъ именемъ *неравенства Коши* *).

57. Теорема 1. *Если сумма положительныхъ перемѣнныхъ чиселъ есть число постоянное, то произведеніе этихъ чиселъ получаетъ наибольшее значеніе при ихъ равенствѣ.*

Мы уже видѣли (§ 50), что эта истина вѣрна для *двухъ* перемѣнныхъ чиселъ (при чемъ числа эти могутъ быть и отрицательныя); теперь предстоитъ показать вѣрность ея для какого угодно числа положительныхъ чиселъ.

Док. Пусть $x, y, z, t, \ldots v$ будутъ n положительныхъ чиселъ, которыхъ сумма равна постоянному числу a. Мы видѣли (лемма), что

$$xyzt\ldots v < \left[\frac{x+y+z+t\ldots+v}{n}\right]^n, \text{ т.-е. } xyz\ldots v < \left[\frac{a}{n}\right]^n$$

если не всѣ сомножители равны между собою, и

$$xyzt\ldots v = \left[\frac{a}{n}\right]^n$$

*) Приведенное нами доказательство существенно не отличается отъ даннаго *Коши* въ его „Алгебр. анализѣ“ (см. с. 434, переводъ Эвальда, Григорьева и Ильина, 1864 г.).

если они всѣ одинаковы. Отсюда слѣдуетъ, что наибольшее значеніе произведенія $xyzt...z$ будетъ $\left(\frac{a}{n}\right)^n$ при равенствѣ всѣхъ сомножителей.

Замѣчаніе. Предыдущее разсужденіе предполагаетъ, что множители *могутъ быть* сдѣланы одинаковыми.

Теорема 2. *Если сумма положительныхъ перемѣнныхъ чиселъ* $x+y+z+...+t$ *есть число постоянное, то произведеніе* $x^m y^n z^p ... t^r$, *гдѣ* m, n, $p...r$ *суть цѣлыя положительныя числа, будетъ наибольшимъ при условіи* $\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{p}=...=\frac{t}{r}$.

Док. Произведеніе $x^m y^n ... t^r$ будетъ наибольшимъ при томъ же значеніи перемѣнныхъ, при которыхъ окажется наибольшей дробь $\frac{x^m y^n ... t^r}{m^m n^n ... r^r}$. Послѣднюю можно представить въ видѣ произведенія:

$$\left(\frac{x}{m}\right)^m \left(\frac{y}{n}\right)^n ... \left(\frac{r}{t}\right)^r = \overbrace{\frac{x}{m} \cdot \frac{x}{m} ...}^{m} \overbrace{\frac{y}{n} \cdot \frac{y}{n} ...}^{n} ... \overbrace{\frac{t}{r} \cdot \frac{t}{r} ...}^{r}$$

Такъ какъ сумма всѣхъ этихъ $m+n+...+r$ сомножителей равна $x+y+...+t$, т.-е. есть число постоянное, то, по доказанному выше, произведеніе окажется наибольшимъ при равенствѣ всѣхъ сомножителей, т.-е. при условіи: $\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=...\frac{t}{r}$; что и треб. доказать.

Теорема 3. *Если произведеніе положительныхъ чиселъ есть число постоянное, то сумма этихъ чиселъ получаетъ наименьшее значеніе при ихъ равенствѣ.*

Док. Пусть произведеніе n положительныхъ сомножителей $xyz...t$ равно постоянному числу a; требуется доказать, что сумма $x+y+z+...+t$ будетъ наименьшей, когда $x= =y=z=...=t$.

Такъ какъ, согласно леммѣ,

$$\sqrt[n]{xyz...t} \leqq \frac{x+y+z+...+t}{n},$$

гдѣ знакъ $=$ соотвѣтствуетъ случаю, когда $x=y=z=...=t$, то

$$x+y+z+...+t \geqq n\sqrt[n]{xyz...t}, \text{ т.-е. } x+y+z+...t \geqq n\sqrt[n]{a}$$

Отсюда заключаемъ, что наименьшее значеніе суммы $x+$ $+y+z+\ldots t$ будетъ

$$n\sqrt[n]{a},\ \text{когда}\ x=y=z=\ldots=t.$$

Теорема 4. *Если произведеніе положительныхъ сомножителей $x^m y^n z^p \ldots t^r$ есть число постоянное, то сумма $x+y+z+\ldots+t$ получаетъ наименьшее значеніе при условіи $\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{p}=\ldots=\frac{t}{r}$.*

Док. Сумму $x+y+z+\ldots+t$ можно представить такъ:

$$\overbrace{\frac{x}{m}+\frac{x}{m}+\ldots}^{m}+\overbrace{\frac{y}{n}+\frac{y}{n}+\ldots}^{n}+\overbrace{\frac{z}{p}+\frac{z}{p}+}^{p}\ldots\ldots+\overbrace{\frac{t}{r}+\frac{t}{r}+\ldots}^{r}$$

Такъ какъ произведеніе всѣхъ этихъ $m+n+p+\ldots+r$ слагаемыхъ равно $\frac{x^m x^n z^p \ldots t^r}{m^m n^n p^p \ldots t^r}$ т.-е. есть число постоянное то, согласно теоремѣ 3-й, сумма окажется наименьшей при равенствѣ слагаемыхъ, т.-е. при условіи $\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{p}=\ldots=\frac{t}{r}$; что и треб. доказать.

Задача 1. *Изъ всѣхъ прямоугольниковъ съ даннымъ периметромъ какой имѣетъ наибольшую площадь?*

Обозначивъ стороны треугольника буквами x, y и z, а периметръ его черезъ $2p$, будемъ имѣть для площади выраженіе:

$$\triangle=\sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}$$

Такъ какъ p число постоянное, то наибольшее значеніе этой функціи будетъ при наибольшемъ произведеніи $(p-x)(p-y)(p-z)$. Сумма сомножителей $(p-x)+(p-y)+(p-z)$ равна $3p-(x+y+z)=3p-2p=p$, т.-е. она есть число постоянное; поэтому наибольшее произведеніе будетъ при равенствѣ сомножителей, т.-е. при $p-x=p-y=p-z$; откуда: $x=y=z$; значитъ, искомый треугольникъ равносторонній.

Задача 2. *Найти наиб. значеніе* xy *при условіи* 5x+7y=20.

Наиб. значеніе произведенія xy будетъ въ одно время съ наиб. произведеніемъ $5x.\ 7y$; но сумма $5x+7y$ есть число постоянное, поэтому $5x=$ $=7y$; значитъ:

$$x=2,\ y=\frac{10}{7}.$$

Вообще, наиб. значеніе произведенія $xyz\ldots t$ при условіи $ax+by+$ $cz+\ldots+kt=l$, гдѣ $a,\ b,\ c,\ldots\ k,\ l$ суть постоянныя положительныя числа, будетъ при условіи: $ax=by=cz=\ldots=kt$.

Задача 3. *Въ данный конусъ вписать цилиндръ съ наибольшимъ объемомъ.*

Пусть радіусъ основанія и высота даннаго конуса будутъ соотвѣтственно r и h, а радіусъ основанія и высота вписаннаго цилиндра x и y. Тогда объемъ цилиндра выразится $\pi x^2 y$. Приведемъ эту функцію къ одной перемѣнной, составивъ уравненіе, связывающее x съ y:

$$h-y:h=x:r;\quad \text{откуда:}\quad x=\frac{rh-ry}{h}.$$

Слѣд., объемъ цилиндра будетъ:

$$\pi\left(\frac{rh-ry}{h}\right)^2 y=\frac{\pi r^2}{h^2}(h-y)^2 y$$

Вопросъ теперь приводится къ нахожденію наибол. значенія $(h-y)^2 y$. Такъ какъ сумма $(h-y)+y$ есть величина постоянная, то произведеніе $(h-y)^2 y$ будетъ наибольшее (теорема 2-я) при условіи: $\frac{h-y}{2}=\frac{y}{1}$; отсюда: $y=\frac{h}{3}$.

Наиб. объемъ цилиндра будетъ:

$$\frac{\pi r^2}{h^2}\left(h-\frac{h}{3}\right)^2\frac{h}{3}=\frac{\pi r^2}{h^2}\cdot\frac{4}{9}h^2\cdot\frac{h}{3}=\frac{4\pi r^2 h}{27}.$$

Задача 4. *При какомъ положительномъ значеніи x выраженіе $\sqrt{x}+\frac{1}{x^8}$ будетъ наибольшее?*

Такъ какъ $(\sqrt{x})^{16}\cdot\left(\frac{1}{x^8}\right)^1=1$, т.-е. есть число постоянное, то наим. значеніе суммы $\sqrt{x}+\frac{1}{x^8}$ будетъ (теор. 4-я) при условіи $\sqrt{x}:16=\frac{1}{x^8}:1$; откуда $x=\sqrt[17]{256}$.

Задача 5. *Опредѣлить цилиндръ, который при данномъ объемѣ имѣлъ бы наименьшую поверхность.*

Обозначивъ радіусъ основанія цилиндра черезъ x, а высоту его черезъ y, будемъ имѣть для поверхности выраженіе $2\pi xy+2\pi x^2=2\pi(xy+x^2)$; слѣд., вопросъ приводится къ нахожденію наиб. значенія функціи $xy+x^2$. Если объемъ цилиндра назовемъ v, то $\pi x^2 y=v$; откуда $y=\frac{v}{\pi x^2}$ и, слѣд.,

$$xy+x^2=\frac{v}{\pi x}-x^2.$$

Такъ какъ $\left(\frac{v}{\pi x}\right)^2\cdot(x^2)^1=\frac{v^2}{\pi^2}$ = число постоянное, то (теор. 4-я) $\frac{v}{\pi x}:2=x^2:1$; откуда: $x=\sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}}$.

V. Нѣкоторые другіе способы нахожденія maximum и minimum функцій.

1) Принципъ Фермата.

58. Изъ элементарныхъ способовъ нахожденія maximum и minimum функцій особенно замѣчателенъ своею простотою такъ называемый *принципъ Фермата* (знаменитаго франц. математика 17-го столѣтія). Его можно резюмировать въ слѣдующихъ двухъ положеніяхъ, почти очевидныхъ:

I. Если непрерывная функція $f(x)$ имѣетъ maximum или minimum при $x=x_0$, то произвольному значенію $x=x_1$, меньшему x_0, и весьма близкому къ x_0, соотвѣтствуетъ такое значеніе $x=x_2$, большее x_0, и весьма близкое къ x_0, при которомъ $f(x_2)=f(x_1)$.

Дѣйствительно, предположимъ, чт $f(x_0)$ есть maximum (или minimum) и пусть x_1 есть произвольное значеніе x, меньшее x_0, но весьма мало отъ него отличающееся. Тогда, при непрерывномъ возрастаніи x отъ x_1, функція сначала непрерывно возрастаетъ (или убываетъ) до maximum (или minimum) $f(x_0)$, а затѣмъ непрерывно убываетъ (или возрастаетъ). Очевидно, что при этомъ убываніи (или возрастаніи) она непремѣнно достигнетъ нѣкотораго значенія $f(x_2)$, равнаго $f(x_1)$, если только x_1 было выбрано достаточно близко къ x_0.

II. Если x_1 неограниченно приближается къ x_0, то и x_2 неограниченно приближается къ x_0, такъ что пред. $f(x_1)$=пред. $f(x_2)=f(x_0)$.

Эти два положенія становятся вполнѣ наглядными, если изобразимъ непрерывную функцію кривою. Обратимся, напр., къ чертежу § 45 и положимъ, что $OE=x_0$ и $EF=f(x_0)$ есть maximum $f(x)$.

Тогда очевидно, что по обѣ стороны EF можно найти двѣ ординаты, равныя другъ другу и весьма близкія къ EF. Лѣвая изъ нихъ будетъ соотвѣтствовать значенію $x=x_1$, а правая—значенію $x=x_2$. Когда лѣвая ордината станетъ приближаться къ EF, то и правая должна къ ней придвигаться и совпадать съ EF обѣ должны одновременно. То же самое можно сказать о minimum HG.

59. Приложимъ сказанное къ нахожденію maximum и minimum трехчлена ax^2+bx+c. Пусть при $x=x_0$ этотъ трехчленъ получаетъ maximum или minimum. Тогда согласно первому положенію, можемъ допустить, что существуютъ значенія $x_1<x_0$ и $x_2>x_0$, при которыхъ имѣетъ мѣсто равенство:

$$ax_1^2+bx_1+c=ax_2^2+bx_2+c.$$

Изъ этого равенства выводимъ:

$$a(x_1^2-x_2^2)+b(x_1-x_2)=0 \text{ или } (x_1-x_2)[a(x_1+x_2)+b]=0$$

Такъ какъ $x_1-x_2\neq 0$, то на эту разность уравненіе можно сократить:

$$a(x_1+x_2)+b=0.$$

Это равенство вѣрно, какъ бы близко x_1 ни было къ x_0; слѣд., оно останется вѣрнымъ, когда x_1 обратится въ x_0; но тогда, согласно второму положенію, и x_2 обращается въ x_0; слѣд., мы будемъ имѣть:

$$2ax_0+b=0,\ \text{откуда:}\ x_0=-\frac{b}{2a}.$$

Такимъ образомъ, при этомъ значеніи x трехчленъ получаетъ или maximum, или minimum. Не трудно сообразить, что первое будетъ имѣть мѣсто при $a<0$, а второе при $a>0$. Въ самомъ дѣлѣ, при $a<0$ трехчленъ ax^2+bx+c получаетъ значеніе $-\infty$ при $x=-\infty$ и при $x=+\infty$; значитъ, при измѣненіи x отъ $-\infty$ до $+\infty$ трехчленъ измѣняется отъ $-\infty$ до $-\infty$; слѣд., онъ долженъ при этомъ перейти черезъ нѣкоторый *maximum*; при $a>0$ трехчленъ измѣняется отъ $+\infty$ до $+\infty$; слѣд., онъ долженъ перейти черезъ нѣкоторый *minimum*.

Такимъ образомъ, сущность принципа Фермата состоитъ въ томъ, что, составивъ уравненіе $f(x_1)=f(x_2)$, мы стараемся его преобразовать такъ, чтобы было видно, во что оно обратится въ предѣлѣ (даемъ уравненію такой видъ, чтобы его можно было сократить на x_1-x_2).

60. Приложимъ принципъ Фермата къ нахожденію maximum и minimum дроби $\frac{ax^2+bx+c}{px^2+qx+r}$. Положивъ, что

$$\frac{ax_1^2+bx_1+c}{px_1^2+qx_1+r}=\frac{ax_2^2+bx_2+c}{px_2^2+qx_2+r}$$

получимъ послѣ перенесенія членовъ:

$$\frac{(ax_1^2+bx_1+c)(px_2^2+qx_2+r)-(ax_2^2+bx_2+c)(px_1^2+qx_1+r)}{(px_1^2+qx_1+r)(px_2^2+qx_2+r)}=0.$$

Чтобы это уравненіе могло существовать при конечныхъ x_1 и x_2, необходимо и достаточно, чтобы числитель лѣвой части уравненія былъ равенъ 0. Упростимъ его.

Раскрывъ первыя скобки, получимъ:

$$apx_1^2x_2^2+bpx_1x_2^2+cpx_2^2+aqx_1^2x_2+bqx_1x_2+cqx_2+arx_1^2+brx_1+cr.$$

Вычитаемое числителя отличается отъ полученнаго результата только тѣмъ, что x_1 замѣнено на x_2 и обратно. Поэтому при вычитаніи сократятся всѣ тѣ члены, которые не измѣнятся отъ замѣны x_1 на x_2 и обратно (т.-е. члены, симметричные относительно x_1 и x_2). Сдѣлавъ такое сокращеніе, получимъ:

$$bpx_1x_2(x_2-x_1)-cp(x_2^2-x_1^2)+aqx_1x_2(x_1-x_2)+cq(x_2-x_1)+ar(x_1^2-$$
$$-x_2^2)+br(x_1-x_2)=0$$

или по сокращеніи на x_1-x_2:

$$-bpx_1x_2-cp(x_1+x_2)+aqx_1x_2-cq+ar(x_1+x_2)+br=0.$$

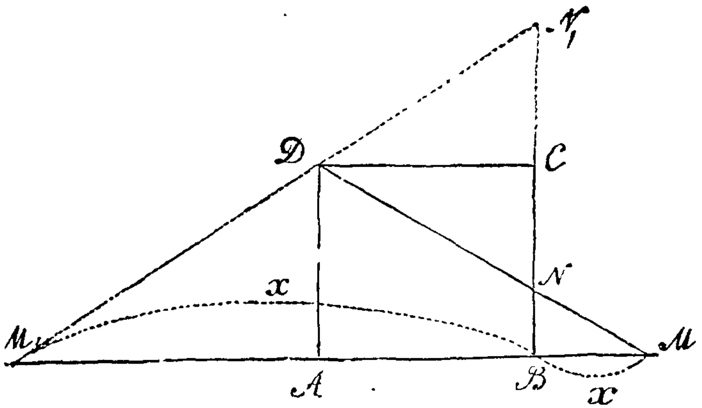
Это уравненіе въ предѣлѣ, т.-е. при $x_1=x_2=x_0$, дастъ:

$$(-bp-aq)x_0^2-2(-cp+ar)x_0+(-cq+br)=0.$$

Это то самое уравненіе, которое мы получили, рѣшая вопросъ способомъ, указаннымъ въ § 53

61. Принципъ Фермата не указываетъ пріема, которымъ можно различить, какой изъ корней полученнаго уравненія соотвѣтствуетъ maximum, и какой minimum функціи. Во многихъ случаяхъ это можно рѣшить непосредственно, разсматривая условія и характеръ задачи, изъ которой выведена функція. Примѣромъ служитъ слѣдующая задача.

Задача. *На продолженіи стороны* AB *прямоугольника* ABCD *найти такую точку* M, *чтобы сумма площадей треугольниковъ* MBN *и* NDC *была* maximum *или* minimum.



Пусть $AB=a$, $CB=b$, $MB=x$. Тогда сумма площадей $MBN+NDC$ выразится:

$$\frac{1}{2}(x.\,BN+a.\,CN)$$

Изъ пропорціи $BN:b=x:a+x$ находимъ;

$$BN=\frac{bx}{a+x};\ \text{слѣд.}\ CN=b-\frac{bx}{a+x}=\frac{ab}{a+x}$$

$$\text{и}\ \frac{1}{2}\left(x.\,BN+a.\,CN\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{bx^2}{a+x}+\frac{a^2b}{a+x}\right)=\frac{1}{2}b\ \left(\frac{x^2+a^2}{a+x}\right)$$

Находимъ max. или min. функціи: $\dfrac{x^2+a^2}{a+x}$ [1]

Согласно вышеприведеннымъ двумъ положеніямъ, будемъ имѣть:

$$\frac{x_1^2+a^2}{x_1+a}=\frac{x_2^2+a^2}{x_2+a};\quad \frac{(x_1^2+a^2)(x_2+a)-(x_1+a)(x_2^2+a^2)}{(x_1+a)(x_2+a)}=0.$$

$$x_1x_2(x_1-x_2)+a^2(x_2-x_1)-a(x_1^2-x_2^2)=0$$

$$x_1x_2-a^2-a(x_1+x_2)=0;\ x_0^2-2ax_0-a^2=0$$

$$x_0=-a\pm\sqrt{a^2+a^2}=-a\pm a\sqrt{2}$$

$$x_0'=a(\sqrt{2}-1)\qquad x_0''=-a(\sqrt{2}+1)$$

Изъ разсмотрѣнія условія задачи не трудно видѣть, что значенію x_0' соотвѣтствуетъ minimum суммы площадей. Дѣйствительно, если бы при этомъ значеніи x функція получала maximum, то при возрастаніи x сумма площадей должна была бы уменьшаться; но этого нѣтъ, такъ какъ при весьма большомъ x эта сумма можетъ быть сдѣлана, очевидно, какъ угодно большою.

Значеніе x_0'', будучи отрицательнымъ, соотвѣтствуетъ алгебраическому maximum'у. Если мы желаемъ уяснить геометрическій смыслъ этого рѣшенія, мы должны поступить приблизительно такъ, какъ было нами указано въ статьѣ объ изслѣдованіи уравненій (§ 126 „Элем. алгебры"). Замѣнимъ въ данной функціи x на $-x$. Тогда получимъ новую функцію:

$$\frac{x^2+a^2}{a-x} \qquad [2]$$

Теперь замѣтимъ, что значеніе функціи $f(x)$ при $x=m$ будетъ то же самое, что и значеніе $f(-x)$ при $x=-m$. Слѣд., при измѣненіи x отъ $-\infty$ до $+\infty$ функція $f(x)$ будетъ измѣняться совершенно такъ же, какъ измѣняется $f(-x)$ при измѣненіи x отъ $+\infty$ до $-\infty$. Поэтому, если $f(x)$ получаетъ maximum при $x=m$, то $f(-x)$ получитъ maximum при $x=-m$. Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что функція [2] имѣетъ maximum при $x=a(\sqrt{2}+1)$, такъ какъ функція [1] имѣетъ maximum при $x=-a(\sqrt{2}+1)$. Но функцію [2] можно представить такъ:

$$-\frac{x^2+a^2}{x-a}$$

и, слѣд., когда функція [2] имѣетъ maximum, функція $\frac{x^2+a^2}{x-a}$[3] получаетъ minimum. Какое же отношеніе къ нашей задачѣ имѣетъ функція [3]? Для разъясненія этого, предположимъ, что мы взяли искомую точку не направо отъ B, а налѣво отъ нея; пусть это будетъ M_1 (см. чертежъ). Тогда сумма площадей треугольниковъ $M_1BN_1+DCN_1$ выразится такъ:

$$\frac{1}{2}(x.BN_1+a.CN_1)$$

Изъ пропорціи $BN_1:b=x:x-a$ находимъ:

$$BN_1=\frac{bx}{x-a} \text{ и слѣд., } CN_1=\frac{bx}{x-a}-b=\frac{ab}{x-a}$$

$$\text{Поэтому: } M_1BN_1+DCN_1=\frac{1}{2}\left(\frac{bx^2}{x-a}+\frac{a^2b}{x-a}\right)=\frac{1}{2}b\left(\frac{x^2+a^2}{x-a}\right).$$

Вопросъ теперь приводится къ нахожденію max. или min. функціи $\frac{x^2+a^2}{x-a}$, которая и есть функція [3]. Получаемъ отвѣтъ: при $x=a(\sqrt{2}+1)$ сумма площадей M_1BN_1 и DCN_1 будетъ minimum.

62. Иногда принципъ Ферма оказывается примѣнимымъ въ такихъ случаяхъ, въ которыхъ другіе способы были бы не удобны. Приведемъ нѣкоторые примѣры.

Задача 1. *Изъ всѣхъ треугольниковъ, имѣющихъ одну и ту же* *высоту и одно и то же основаніе, какой имѣетъ наименьшую сумму двухъ другихъ сторонъ?*

Пусть основаніе треугольника будетъ b, высота его h и углы при основаніи x и y. Тогда сумма боковыхъ сторонъ выразится такъ:

$$\frac{h}{\sin x}+\frac{h}{\sin y}=h\left(\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\sin y}\right)$$

Будемъ искать minimum функціи, заключенной въ скобкахъ. Такъ какъ отрѣзки основанія, на которые оно разсѣкается высотою, суть $h \operatorname{cotg} x$ и $h \operatorname{cotg} y$, то между перемѣнными x и y мы имѣемъ уравненіе:

$$h \operatorname{cotg} x+h \operatorname{cotg} y=b: \text{ откуда: } \operatorname{cotg} y=\frac{b}{h}-\operatorname{cotg} x$$

Поэтому: $\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\sin y}=\operatorname{cosec} x+\operatorname{cosec} y=\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2 x}+\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2 y}=$

$$=\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2 x}+\sqrt{1+\left(\frac{b}{h}-\operatorname{cotg} x\right)^2}=\sqrt{1+z^2}+\sqrt{1+\left(\frac{b}{h}-z\right)^2}$$

если для краткости положимъ $\operatorname{cotg} x=z$.

$$\sqrt{1+z_1^2}+\sqrt{1+\left(\frac{b}{h}-z_1\right)^2}=\sqrt{1+z_2^2}+\sqrt{1+\left(\frac{b}{h}-z_2\right)^2}$$

или: $\sqrt{1+\left(\frac{b}{h}-z_1\right)^2}-\sqrt{1+\left(\frac{b}{h}-z_2\right)^2}=\sqrt{1+z_2^2}-\sqrt{1+z_1^2}$.

Желая сократить это уравненіе на z_2-z_1, преобразуемъ каждую часть его, основываясь на тождествѣ: $\sqrt{m}-\sqrt{n}=\frac{m-n}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}$; тогда получимъ:

$$\frac{\left(\frac{b}{h}-z_1\right)^2-\left(\frac{b}{h}-z_2\right)^2}{\sqrt{1+\left(\frac{b}{h}-z_1\right)^2}+\sqrt{1+\left(\frac{b}{h}-z_2\right)^2}}=\frac{z_2^2-z_1^2}{\sqrt{1+z_2^2}+\sqrt{1+z_1^2}}$$

Разложивъ числителей на множителей и сокративъ на z_2-z_1, будемъ имѣть:

$$\frac{\frac{2b}{h}-z_1-z_2}{\sqrt{1+\left(\frac{b}{h}-z_1\right)^2}+\sqrt{1-\left(\frac{b}{h}-z_2\right)^2}}=\frac{z_2+z_1}{\sqrt{1-z_2^2}+\sqrt{1+z_1^2}}$$

Переходя теперь къ предѣламъ, т.-е. положивъ: $z_1=z_2=z_0$, получимъ:

$$\frac{\frac{b}{h}-z_0}{\sqrt{1+\left(\frac{b}{h}-z_0\right)^2}}=\frac{z_0}{\sqrt{1-z_0^2}} \text{ или: } \frac{\left(\frac{b}{h}-z_0\right)^2}{1+\left(\frac{b}{h}-z_0\right)^2}=\frac{z_0^2}{1+z_0^2}$$

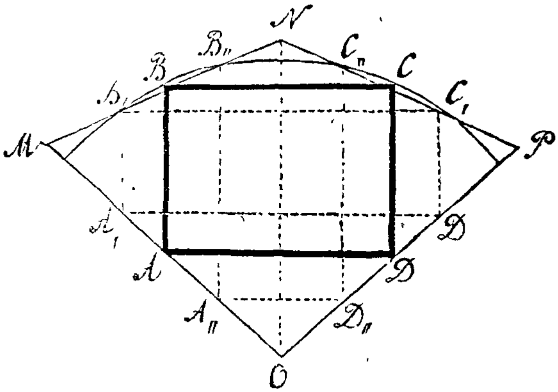
Это уравненіе представляетъ собою пропорцію; составимъ изъ нея производную пропорцію: разность членовъ 1-го отношенія относится такъ къ предыдущему члену этого отношенія, какъ...:

$$\frac{1}{\left(\frac{b}{h}-z_0\right)^2}=\frac{1}{z_0^2}; \text{ откуда: } \left(\frac{b}{h}-z_0\right)^2=z_0^2$$

Рѣшивъ это уравненіе, найдемъ: $z_0=cotg\ x_0=\frac{b}{2h}$, послѣ чего получимъ: $cotg\ y_0=\frac{b}{2h}=cotg\ x_0$, т.-е $x_0=y_0$. Слѣд., искомый треугольникъ долженъ быть равнобедреннымъ.

Задача 2. *Въ данный круговой секторъ вписать прямоугольникъ съ наибольшею площадью.*

Для примѣра рѣшимъ эту задачу геометрически, безъ помощи анализа.



Пусть прямоугольникъ $ABCD$ будетъ искомымъ. Согласно принципу Фермата, можно найти два прямоугольника $A_1B_1C_1D_1$ и $A_{11}B_{11}C_{11}D_{11}$, равные по площади. Тогда:

$$A_1B_1 . B_1C_1 = A_{11}B_{11} . B_{11}C_{11}; \text{ откуда: } \frac{A_1B_1}{B_{11}C_{11}}=\frac{B_{11}C_{11}}{B_1C_1}.$$

Изъ подобія треугольниковъ видно:

$$\frac{A_1B_1}{A_{11}B_{11}}=\frac{MB_1}{MB_{11}} \text{ и } \frac{B_{11}C_{11}}{B_1C_1}=\frac{NB_{11}}{NB_1}, \text{ слѣд. } \frac{MB_1}{MB_{11}}=\frac{NB_{11}}{NB_1}$$

Откуда: $MB_1.NB_1=MB_{11}.NB_{11}$ [1]

Съ другой стороны: $MB_1+NB_1=MB_{11}+NB_{11}$ [2]

Изъ [1] и [2] выводимъ: $MB_1=NB_{11}$ и $NB_1=MB_{11}$

Если теперь вообразимъ, что точки B_1 и B_{11} неограниченно приближаются къ B, то сѣкущая MN будетъ стремиться къ касательной въ точкѣ B; въ тоже время MB_1 приближается къ равенству съ MB, а NB_{11} къ равенству съ NB. Отсюда заключаемъ: когда прямоугольникъ $ABCD$ есть maximum (minimum, очевидно, не существуетъ; есть крайнее значеніе 0), отрѣзокъ касательной въ точкѣ B, заключенный между продолженіями радіусовъ OM и ON, дѣлится въ точкѣ B пополамъ; значитъ, точка B лежитъ на серединѣ дуги, составляющей половину дуги сектора.

2) Приравниваніе функціи произвольному количеству.

63. Сущность этого способа состоитъ въ слѣдующемъ. Задаемся вопросомъ, можетъ ли данная функція $f(x)$, при вещественныхъ значеніяхъ x, получать всевозможныя вещественныя значенія? Для этого, приравнявъ функцію неопредѣленному количеству m, опредѣляемъ, если можно, изъ уравненія $f(x)=m$ значеніе x въ зависимости отъ m, и, разсматривая получившуюся для x формулу, рѣшаемъ вопросъ, при всякомъ ли произвольномъ вещественномъ значеніи m для x будутъ получаться вещественныя значенія. Если окажется, что для вещественности x нѣтъ надобности ограничивать произвольность въ выборѣ m, то заключаемъ, что данная функція можетъ пріобрѣтать всевозможныя значенія, какъ очень большія, такъ и очень малыя, и слѣд., она не имѣетъ ни наибольшаго, ни наименьшаго значенія. Если же, по изслѣдованіи формулы для x, окажется, что количество m должно заключаться въ извѣстныхъ границахъ для того, чтобы соотвѣтствующее значеніе x было вещественнымъ, то заключаемъ, что $f(x)$ не можетъ получать всевозможныхъ значеній и потому она должна имѣть наибольшее или наименьшее значеніе, или то и другое вмѣстѣ. Эти значенія найдемъ, разсматривая границы, между которыми заключается m.

64. Для примѣра рѣшимъ этимъ способомъ слѣдующую **задачу:** *въ данный кругъ вписать равнобедренный треугольникъ, у котораго сумма основанія съ высотою была бы наибольшая.*

Обозначимъ основаніе треугольника $2x$, а высоту его y. Тогда сумма основанія съ высотою будетъ $2x+y$. Чтобы составить уравненіе между x и y, примемъ во вниманіе, что x есть средняя пропорціональная между y и $2r-y$, гдѣ r есть радіусъ даннаго круга: значитъ, $x=\pm\sqrt{y(2r-y)}$, и потому сумма $2x+y$ будетъ $2\sqrt{y(2r-y)}+y$. Приравняемъ эту функцію неопредѣленному колическву m и рѣшимъ уравненіе относительно y:

$$2\sqrt{y(2r-y)}+y=m; \quad 2\sqrt{y(2r-y)}=m-y$$
$$4y(2r-y)=m^2-2my+y^2; \quad 5y^2-2(4r+m)y+m^2=0$$
$$y=\frac{4r-m\pm\sqrt{(4r+m)^2-5m^2}}{5} \qquad [1]$$

Разсматривая эту формулу, замѣчаемъ, что m можетъ имѣть только такія значенія, при которыхъ

$$(4r+m)^2-5m^2\geqslant 0$$

По раскрытіи скобокъ и сокращеніи на 4, это неравенство будетъ:

$$-m^2+2rm+4r\geqslant 0 \qquad [2]$$

Вопросъ приведенъ такимъ образомъ къ рѣшенію неравенства 2-й степени. Такое неравенство легко разрѣшается, если лѣвую его часть разложимъ на множителей, для чего предварительно найдемъ корни ея:

$$m^2-2rm-4r^2=0; \quad m=r\pm\sqrt{r^2+4r^2}=r(1\pm\sqrt{5})$$
$$m_1=r(1+\sqrt{5}); \quad m_2=r(1-\sqrt{5})$$

Теперь неравенство [2] приметъ видъ:

$$-(m-m_1)(m-m_2)\geqslant 0$$

Значитъ, необходимо, чтобы произведеніе $(m-m_1)(m-m_2)$ было отрицательно; для этого нужно, чтобы величина m заключалась между m_1 и m_2 т.-е.

$$m_1\geqslant m\geqslant m_2$$

Слѣд., наиб. значеніе m равно $m_1=r(1+\sqrt{5})$, а наименьшее$=m_2=r(1-\sqrt{5})$. Послѣднее, какъ отрицательное, не имѣетъ геометрическаго смысла, и остается только одно наибольшее значеніе. Чтобы найти соотвѣтствующее значеніе y, подставимъ въ ур. [1] на мѣсто m значеніе $r(1+\sqrt{5})$; тогда подкоренное количество обратится въ 0, и мы получимъ:

$$y=\frac{4r+r(1+\sqrt{5})}{5}=r\frac{5+\sqrt{5}}{5}$$

$$x=\sqrt{r\frac{5+\sqrt{5}}{5}\left(2r-r\frac{5+\sqrt{5}}{5}\right)}=r\sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})(5-\sqrt{5})}{25}}=\frac{2r\sqrt{5}}{5}$$

$$2x+y=\frac{4r\sqrt{5}}{5}+r\frac{5+\sqrt{5}}{5}=r(\sqrt{5}+1)$$

Замѣчаніе. *Описаннымъ способомъ мы находимъ наибольшее и наименьшее значеніе данной функціи, но не *maximum* и *minimum* въ истинномъ значеніи этихъ словъ; напр., рѣшая вышеприведенную задачу, мы пришли къ заключенію, что при всевозможныхъ вещественныхъ значеніяхъ y величина функціи должна заключаться въ границахъ: $m_1 \geqq m \geqq m_2$, т. е. что m измѣняется между m_2 и m_1; но *какъ* она измѣняется въ этихъ границахъ, постоянно ли возрастаетъ, при непрерывномъ возрастаніи x, или постоянно убываетъ, или то возрастаетъ, то убываетъ, переходя черезъ одинъ или нѣсколько maximum и minimum, указаній къ этому описанный способъ не даетъ.

3) Способъ неопредѣленныхъ множителей.

65. Наибольшее значеніе функціи вида:

$$y=(ax-b)(a'x-b')(a''x-b'')\ldots$$

можно находить посредствомъ способа неопредѣленныхъ множителей. Покажемъ это на слѣдующемъ примѣрѣ:

$$y=(x-1)(x-2)(x-3)$$

Желая привести это произведеніе къ такому, у котораго сумма сомножителей была бы постоянна, умножимъ каждаго сомножителя соотвѣтственно на нѣкоторыя постоянныя числа α, β, γ, значенія которыхъ пока оставляемъ неопредѣленными. Тогда получимъ другое произведеніе:

$$z=\alpha\beta\gamma y=(\alpha x-\alpha)(\beta x-2\beta)(\gamma x-3\gamma)$$

При постоянномъ значеніи произведенія $\alpha\beta\gamma$ наибольшему значенію z будетъ соотвѣтствовать наибольшее или наименьшее значеніе y, смотря по тому, будетъ ли $\alpha\beta\gamma$ числомъ положительнымъ или отрицательнымъ.

Подчинимъ теперь числа α, β, γ условію, чтобы сумма: $(\alpha x-\alpha)+(\beta x-2\beta)+(\gamma x-3\gamma)$ была числомъ постояннымъ. Для этого достаточно положить:

$$\alpha+\beta+\gamma=0 \qquad [1]$$

При всякихъ значеніяхъ α, β, γ, удовлетворяющихъ этому уравненію, изъ всѣхъ значеній x, обращающихъ сомножителей функціи z въ *положительныя* числа, то будетъ соотвѣтствовать наибольшему значенію функціи, при которомъ эти сомножители равны другъ другу (теор. 1-я § 57). Отсюда слѣдуетъ, что искомое значеніе x должно удовлетворять уравненіямъ:

$$\alpha x-\alpha=\beta x-2\beta \quad [2] \quad \text{и} \quad \alpha x-\alpha=\gamma x-3\gamma \qquad [3]$$

Мы имѣемъ такимъ образомъ для опредѣленія 4-хъ неизвѣстныхъ; x, α, β и γ только три уравненія. Добавимъ еще одно, приравнявъ какого-нибудь сомножителя произвольному, но постоянному числу, напр. 1:

$$\alpha x-\alpha=1 \qquad [4]$$

Рѣшимъ эти уравненія. Изъ [4], затѣмъ изъ [2] и [3], находимъ:

$$\alpha=\frac{1}{x-1},\quad \beta=\frac{1}{x-2},\quad \gamma=\frac{1}{x-3}$$

Послѣ чего уравненіе [1] даетъ:

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}=0$$

или $$(x-2)(x-3)+(x-1)(x-3)+(x-1)(x-2)=0$$

Рѣшивъ это квадратное уравненіе, находимъ:

$$x_1=\frac{6-\sqrt{3}}{3}=1{,}422\ldots;\quad x_2=\frac{6+\sqrt{3}}{3}=2{,}577\ldots$$

При этихъ значеніяхъ x сомножители: $\alpha x-\alpha$, $\beta x-2\beta$, $\gamma x-3\gamma$ будутъ положительны, потому что каждый изъ нихъ равенъ 1; они будутъ также положительны при значеніяхъ x, нѣсколько меньшихъ или нѣсколько большихъ, чѣмъ x_1 и x_2. Изъ этого слѣдуетъ, что при $x=x_1$ и при $x=x_2$ функція z получаетъ значенія, наибольшія изъ смежныхъ, т.-е. maximum. Чтобы узнать, получитъ ли при этомъ функція y maximum или minimum, надо опредѣлить знакъ произведенія $\alpha\beta\gamma$. Такъ какъ

$$\alpha\beta\gamma=\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)},$$

то для этого достаточно найти знакъ знаменателя при $x=x_1$ и $x=x_2$:

$$(x_1-1)(x_1-2)(x_1-3)=\frac{3-\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{-\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{-3-\sqrt{3}}{3}=\frac{6\sqrt{3}}{27}>0$$

$$(x_2-1)(x_2-2)(x_2-3)=\frac{3+\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{-3+\sqrt{3}}{3}=\frac{-6\sqrt{3}}{27}<0$$

Слѣд., функція y переходитъ черезъ maximum при $x=x_1$ и minimum при $x=x_2$.

Когда число сомножителей вида $ax-b$ болѣе трехъ, то указанный пріемъ приводитъ къ уравненію степени выше 2-й, которое элементарно вообще не разрѣшается.

Этотъ же способъ можно примѣнить и въ тѣхъ случаяхъ, когда нѣкоторые сомножители равны другъ другу, т.-е. когда функція имѣетъ видъ:

$$y=(ax-b)^m(a'x-b')^{m'}\ldots.$$

Чтобы найти, напр., maximum функціи

$$y=(x-2)^2(x-3)(x-4)=(x-2)(x-2)(x-3)(x-4)$$

беремъ другую функцію:

$$Z=\alpha^2\beta\gamma y=(\alpha x-2\alpha)^2(\beta x-3\beta)(\gamma x-4\gamma)$$

Положивъ $$2\alpha+\beta+\gamma=0$$

и $$\alpha x-2=1\quad \beta x-3\beta=1\quad \gamma x-4\gamma=1$$

находимъ: $$\alpha=\frac{1}{x-2},\ \beta=\frac{1}{x-3},\ \gamma=\frac{1}{x-4}$$

и $$\frac{2}{x-2}+\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-4}=0$$

т.-е. $$2(x-3)(x-4)+(x-2)(x-4)+(x-2)(x-3)=0$$

Откуда: $$x_1=\frac{25-\sqrt{17}}{8}=2{,}61\ldots\quad x_2=\frac{25+\sqrt{17}}{8}=3{,}64\ldots$$

Произведеніе $\alpha^2\beta\gamma$ будетъ положительно или отрицательно, смотря по тому, будетъ ли $\beta\gamma$ положительно или отрицательно; знакъ $\beta\gamma$ опредѣляется знакомъ произведенія $(x-3)(x-4)$. Послѣднее дастъ:

$$(x_1-3)(x_1-4)=\frac{1-\sqrt{17}}{8}\cdot\frac{-7-\sqrt{17}}{8}>0$$

$$(x_2-3)(x_2-4)=\frac{1+\sqrt{17}}{8}\cdot\frac{-7-\sqrt{17}}{8}<0$$

Слѣд., y переходитъ черезъ maximum при $x=x_1$ и minimum при $x=x_2$.

Разсматриваемая функція имѣетъ еще minimum при $x=2$, потому, что при этомъ значеніи она обращается въ 0, а при значеніяхъ x, нѣсколько большихъ или нѣсколько меньшихъ, она остается положительной.

Способъ неопредѣленныхъ коэффиціентовъ.

66. Бываютъ случаи, когда является надобность въ рѣшеніи вопроса: не существуетъ ли многочленъ, который, будучи цѣлымъ относительно перемѣнной x, былъ бы способенъ удовлетворить извѣстнымъ условіямъ, и если существуетъ, то какъ его найти? Одинъ изъ способовъ рѣшенія такого вопроса состоитъ въ слѣдующемъ. Предположивъ, что такой многочленъ существуетъ, опредѣляютъ, если можно, *à priori* показателя его степени m; затѣмъ составляютъ многочленъ этой степени:

$$A_0x^m+A_1x^{m-1}+A_2^{m-2}+\ldots+A_{m-1}x+A^m$$

гдѣ коэффиціенты: A_0, A_1, $A_2\ldots A_m$ предполагаютъ пока *неопредѣленными*.

Далѣе, подчинивъ этотъ многочленъ даннымъ въ вопросѣ условіямъ, стремятся получить столько уравненій, сколько достаточно для опредѣленія значеній коэффиціентовъ. Въ этомъ состоитъ *способъ неопредѣленныхъ коэффиціентовъ*.

Если бы оказалось невозможнымъ опредѣлить à priori степень искомаго многочлена, предполагаютъ многочленъ неопредѣленной степени съ неопредѣленными коэффиціентами и, составивъ уравненія изъ условій вопроса, находятъ, если возможно, и показателя степени многочлена, и его коэффиціенты.

67. Способъ неопредѣленныхъ коэффиціентовъ основывается на слѣдующихъ истинахъ:

Теорема 1. *Если многочленъ* $P=A_0x^m+A_1x^{m-1}+\ldots+A^m$

равенъ 0 *при такомъ числѣ различныхъ значеній перемѣнной* x, *которое превосходитъ показателя его степени* m, *то всѣ его коэффиціенты равны* 0.

Док. Предположимъ сначала, что многочленъ P обращается въ 0 при m различныхъ значеніяхъ x. Пусть эти значенія будутъ: α_1, α_2, $\alpha_3 \ldots$ α_m. Покажемъ, что въ данномъ случаѣ P можно представить въ видѣ произведенія:

$$P=A_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\ldots(x-\alpha_m)$$

Въ алгебрѣ доказывается, что если многочленъ P обращается вь 0 при $x=a$, то онъ дѣлится на $x-a$ (см. § 58 „Элем. алгебры"). Поэтому можно положить:

$$P=(x-\alpha_1)P_1 \qquad [1]$$

гдѣ P_1 есть частное отъ дѣленія P на $x-\alpha_1$ (замѣтимъ, что высшій членъ его есть A_0x^{m-1}). Такъ какъ P, по условію, обращается въ 0 при $x=\alpha_2$, то то же самое можемъ сказать о произведеніи $(x-\alpha_1)$ P_1; но множитель $x-\alpha_1$ не равенъ 0 при $x=\alpha_2$; поэтому P_1 обращается въ 0 при этомъ значеніи x и, слѣд., P_1 дѣлится на $x-\alpha_2$. Положимъ, что $P_1=(x-\alpha_2)P_2$, гдѣ P_2 есть многочленъ степени $m-2$ (высшій членъ котораго есть A_0x^{m-2}). Равенство [1] можно тогда написать такъ:

$$P=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)P_2 \qquad [2]$$

Такъ какъ P, по условію, обращатся въ 0 при $x=\alpha_3$, то то же самое можемъ сказать о произведеніи $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)P_3$; но множители $x-\alpha_1$ и $x-\alpha_2$ не равны 0 при $x=\alpha_3$; поэтому P_2 обращается въ 0 при этомъ значеніи x и, слѣд., дѣлится на $x-\alpha_3$. Положимъ, что $P_2=(x-\alpha_3)P_3$, гдѣ P_3 есть многочленъ степени $m-3$ (высшій членъ котораго есть A_0x^{m-3}). Тогда равенство [2] можно написать такъ:

$$P=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)P_3$$

Принявъ теперь во вниманіе, что P обращается въ 0 при $x=\alpha_4$, при $x=\alpha_5\ldots$ и, наконецъ, при $x=\alpha_m$, и разсуждая подобно предыдущему, найдемъ, что

$$P=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\ldots(x-\alpha_m)P_m \qquad [4]$$

гдѣ P_m есть многочленъ степени $m-m$, высшій членъ котораго равенъ A_0x^{m-m}; значитъ, $P_m=A_0$.

Теперь предложимъ, что P обращается въ 0 еще при $x=\alpha_{m+1}$ при чемъ α_{m+1} не равно ни одному изъ значеній: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_m$. Тогда, подставивъ въ равенствѣ [4] на мѣсто x значеніе α_{m+1}, найдемъ, что $A_0=0$.

Такимъ образомъ, мы прежде всего видимъ, что если многочленъ обращается въ 0 при такомъ числѣ значеній x, которое превосходитъ его показателя степени хотя бы на 1, то первый его коэффиціентъ равенъ 0.

Положивъ $A_0=0$, будемъ имѣть:

$$P=A_1x^{m-1}+A_2x+\ldots+A_m$$

Такъ какъ этотъ многочленъ, по условію, обращается въ 0 при такомъ числѣ значеній x, которое превосходитъ $m-1$, то, на основаніи предыдущаго, заключаемъ, что $A_1=0$, Тогда

$$P=A_2x^{m-2}+A_3x^{m-3}+\ldots+A_m$$

Продолжая эти разсужденія далѣе, убѣдимся, что $A_2=0$, потомъ $A_3=0\ldots$ и, наконецъ, $A_m=0$.

Слѣдствіе. *Если многочленъ, цѣлый относительно* x, *равенъ* 0 *при всевозможныхъ значеніяхъ* x, *то всѣ его коэффиціенты равны* 0.

Теорема 2. *Если два многочлена, цѣлые относительно* x, *равны другъ другу при такомъ числѣ различныхъ значеній перемѣнной* x, *которое превосходитъ показателей степеней этихъ многочленовъ, то коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ буквы* x *должны быть равны другъ другу.*

Доказ. Положимъ, что равенство:

$$A_0x^m+A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}+\ldots+A_m=B_0x^n+B_1x^{n-1}+$$
$$+B_2x^{n-2}+\ldots+B_n$$

имѣетъ мѣсто при такомъ числѣ различныхъ значеній x, которое превосходитъ m, и пусть $m>n$. Перенеся всѣ члены въ лѣвую часть, получимъ въ этой части многочленъ:

$$A_0x^m+A_1x^{m-1}+\ldots+(A_{m-n}-B_0)x^n+(A_{m-n-1}-B_1)x^{n-1}+\ldots$$
$$+(A_m-B_n)$$

Этотъ многочленъ обращается въ 0 при такомъ числѣ различныхъ значеній x, которое превосходитъ показателя его степени; вслѣдствіе этого, согласно теоремѣ 1-й, будемъ имѣть:

$$A_0=0;\quad A_1=0,\ldots A_{m-n}=B_0,\quad A_{m-n+1}=B_1,\ldots A_m=B_n$$

что и требовалось доказать.

Слѣдствіе. *Если два многочлена, цѣлые относительно* x, *равны при всевозможныхъ значеніяхъ* x, *то у нихъ коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ буквы* x *должны быть равны другъ другу.*

68. Приведемъ нѣкоторые примѣры на примѣненіе способа неопредѣленныхъ коэффиціентовъ.

Примѣръ 1-й. *Нахожденіе частнаго отъ дѣленія двухъ многочленовъ.*

Пусть требуется найти частное отъ дѣленія $6x^4+11x^3-27x^2+59x-14$ на $3x^2-5x+7$. Предположимъ, что это частное возможно выразить въ видѣ цѣлаго многочлена. Въ такомъ случаѣ этотъ многочленъ долженъ быть 2-й степени; слѣд., онъ будетъ имѣть видъ: $A_0x^2+A_1x+A_2$. Вопросъ теперь состоитъ въ томъ, чтобы отыскать эти три неопредѣленныхъ коэффиціента. По свойству дѣленія имѣемъ:

$$\begin{aligned}6x^4+11x^3-27x^2+59x-14&=(3x^2-5x+7)(A_0x^2+A_1x+A_2)\\&=3A_0x^4+(3A_1-5A_0)x^3+(3A_2-5A_1+7A_0)x^2+\\&\quad(-5A_2+7A_1)x+7A_2\end{aligned}$$

Это равенство представляетъ собою тождество, т.-е. многочлены, стоящіе въ лѣвой и правой его частяхъ, равны другъ другу при всевозможныхъ значеніяхъ x; поэтому, согласно теоремѣ 2-й, мы будемъ имѣть равенства:

$$3A_0=6;\quad 3A_1-5A_0=11;\quad 3A_2-5A_1+7A_0=-27;\quad 7A_1-5A_2=59;\quad 7A_2=-14$$

Такимъ образомъ, мы получаемъ систему уравненій, въ которой число неизвѣстныхъ меньше числа уравненій. Эта система можетъ оказаться невозможной, тогда искомое частное нельзя выразить цѣлымъ многочленомъ; если же система окажется возможной, тогда коэффиціенты A_0, A_1, A_2 найдутся рѣшеніемъ ея.

Нахожденіе неизвѣстныхъ, вслѣдствіе особенности системы, выполняется весьма просто: изъ 1-го ур. находимъ: $A_0=2$; подставивъ это значеніе во 2-е уравненіе, получимъ $A_1=7$; послѣ чего уравненіе 3-е даетъ: $A_2=-2$ (A_2 также удобно найти изъ послѣдняго уравненія). Теперь остается опредѣлить, удовлетворяютъ ли найденныя числа остальнымъ уравненіямъ. Въ нашемъ примѣрѣ это имѣетъ мѣсто. Значитъ, искомое частное будетъ $2x^2+7x-2$.

Этимъ пріемомъ можно найти неполное частное и остатокъ въ томъ случаѣ, когда дѣленіе не можетъ быть выполнено нацѣло. Въ такомъ случаѣ придется взять еще многочленъ съ неопредѣленными коэффиціентами для остатка (степень его, конечно, должна быть ниже степени дѣлителя) и написать равенство: дѣлимое = дѣлителю, умноженному на частное + остатокъ. Изъ этого равенства возможно составить столько уравненій, сколько всѣхъ коэффиціентовъ въ частномъ и остаткѣ. Дѣйствительно, положимъ, что степень дѣлимаго есть m, степень дѣлителя n $(m>n)$: тогда степень частнаго должна быть $m-n$, а остатка $n-1$; значитъ, неопредѣленныхъ коэффиціентовъ въ частномъ должно быть $m-n+1$, а въ остаткѣ n, всего же $m+1$; всѣхъ коэффиціентовъ въ дѣлимомъ будетъ также $m+1$; значитъ, пользуясь теоремой 2-й, можемъ составить $m+1$ уравненій съ $m+1$ неизвѣстными.

Примѣръ 2-й. *Нахожденіе корня изъ многочлена.*

Пусть требуется найти:

$$\sqrt{x^6-4a^2x^4+2a^3x^3+4a^4x^2-4a^5x+a^6}$$

Предположимъ, что искомый корень возможно выразить въ видѣ многочлена, цѣлаго относительно x: тогда этотъ многочленъ долженъ быть 3-й степени и, слѣд., онъ будетъ имѣть видъ:

$$A_0x^3+A_1x^2+A_2x+A_3$$

Возвысивъ его въ квадратъ, приравняемъ результатъ данному многочлену; затѣмъ, согласно теоремѣ 2-й, составимъ слѣдующія 7 уравненій съ 4 неизвѣстными:

$$A_0^2=1;\quad 2A_0A_1=0;\quad A_1^2+2A_0A_2=-4a^2;\quad 2A_0A_3+2A_1A_2=2a^3;$$
$$A_2^2+2A_1A_3=4a^4;\quad 2A_2A_3=-4a^5;\quad A_3^2=a^6$$

Нахожденіе неизвѣстныхъ выполняется весьма просто: изъ 1-го ур. находимъ: $A_0=\pm 1$; изъ 2-го: $A_1=0$; изъ 3-го: $A_2=\mp 2a^2$; изъ 4-го: $A_3=\pm a^3$ (знаки $\pm$ во всѣхъ этихъ значеніяхъ находятся въ соотвѣтствіи). Коэффиціентъ A_3, повидимому, удобно было бы опредѣлить и изъ послѣдняго уравненія; но при этомъ оставалось бы неизвѣстнымъ, какому изъ знаковъ при A_0 соотвѣтствуетъ тотъ или другой знакъ при A_3. Найдя изъ первыхъ 4-хъ уравненія значенія коэффиціентовъ, мы должны опредѣлить, удовлетворяютъ ли эти значенія оставшимся уравненіямъ, т.-е. возможно ли наше допущеніе, что искомый корень выражается многочленомъ, цѣлымъ относительно x. Въ нашемъ примѣрѣ система оказалась возможной: искомый корень есть

$$\pm x^3\mp 2a^2x\pm a^3 \text{ или } \pm(x^3-2a^2x+a^3)$$

Подобнымъ же образомъ можно извлекать изъ многочленовъ корни другихъ степеней.

Примѣръ 2-й. *Нахожденіе многочлена по даннымъ его частнымъ значеніямъ.*

Пусть извѣстно, что величина y зависитъ отъ перемѣнной x и притомъ такъ, что когда $x=1$, то $y=0$, когда $x=2$, то $y=0$, когда $x=3$, то $y=1$. Опредѣлить, нельзя ли зависимость y отъ x выразить многочленомъ второй степени. Для рѣшенія вопроса допустимъ, что

$$y=A_0x^2+A_1x+A_2$$

Согласно даннымъ условіямъ, будемъ имѣть:

$$A_0+A_1+A_2=0;\ 4A_0+2A_1+A_2=0;\ 9A_0+3A_1+A_2=1$$

Вопросъ рѣшится въ утвердительномъ смыслѣ, если эта система окажется возможной. Въ нашемъ примѣрѣ это имѣетъ мѣсто: значенія коэффиціентовъ будутъ:

$$A_0=\frac{1}{2},\ A_1=-\frac{3}{2},\ A_2=1 \text{ и } y=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x+1$$

Само собою понятно, что для рѣшенія такихъ вопросовъ нужно, чтобы число частныхъ значеній многочлена было не меньше числа неопредѣленныхъ коэффиціентовъ; въ противномъ случаѣ нѣкоторые коэффиціенты останутся произвольными.

Полезно замѣтить, что многочленъ степени n, способный принимать $n+1$ частныхъ значеній:

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\dots u_{n-1},\ u_n$$

при $n+1$ соотвѣтственныхъ частныхъ значеніяхъ x:

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\dots x_{n-1}, x_n$$

можетъ быть выраженъ слѣдующею весьма простою формулою *Лагранжа*:

$$U=u_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)}+u_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)}+\dots$$
$$+u_n\frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})}\,.$$

Формула эта составляется такъ: каждое частное значеніе многочлена умножается на дробь, числитель которой есть произведеніе всѣхъ разностей: $x-x_0$, $x-x_1$, $x-x_2,\dots x-x_n$, кромѣ той, у которой вычитаемое равно соотвѣтствующему частному значенію x; знаменатель же дроби получается изъ числителя замѣною въ немъ x на то его частное значеніе, которое не входитъ въ числителя. Сумма всѣхъ такихъ членовъ составляетъ искомый многочленъ.

Не трудно убѣдиться, что формула Лагранжа: во-1-хъ, даетъ многочленъ, цѣлый относительно x; во-2хъ, степень этого многочлена не выше n, и въ-3-хъ, онъ принимаетъ значенія: u_0, u_1, u_2, $u_3\dots u_n$ при соотвѣтствующихъ значеніяхъ $x=x_0$, x_1, x_2, $x_3\dots x_n$.

Примѣнивъ эту формулу къ предыдущей задачѣ, найдемъ:

$$y=0+0+1\frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)}=\frac{1}{2}(x-1)(x-2)=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x+1$$

Примѣръ 4-й. *Преобразованіе раціональной дроби въ сумму простѣйшихъ дробей.*

Пусть требуется представить, если возможно, дробь

$$\frac{3+2x}{(2x-3)(5x-4)}$$

въ видѣ суммы двухъ болѣе простыхъ дробей, у которыхъ знаменателями были бы множители знаменателя данной дроби, а числители — количества, не зависящія отъ x. Допустивъ, что вопросъ возможенъ, положимъ, что

$$\frac{3+2x}{(2x-3)(5x-4)}=\frac{A_0}{2x-3}+\frac{A_1}{5x-4}$$

Приведя правую часть этого равенства къ общему знаменателю и приравнявъ числителей, получимъ:

$$3+2x=A_0(5x-4)+A_1(2x-3)=(5A_0-2A_1)x+(-4A_0-3A_1)$$

Откуда: $5A_0+2A_1=2$ и $4A_0+3A_1=-3$

Рѣшивъ эту систему, находимъ:

$$A_0=\frac{12}{7} \qquad A_1=-\frac{23}{7}$$

Слѣд. вопросъ возможенъ, и

$$\frac{3-2x}{(2x-3)(5x-4)}=\frac{12}{7(2x-3)}-\frac{23}{7(5x-4)}$$

Примѣръ 5-й. *Въ трехчленѣ* x^3+px+q *опредѣлить зависимость между* p *и* q, *которая необходима для того, чтобы этотъ трехчленъ дѣлился безъ остатка на* $(x-\alpha)^2$.

Задачу эту рѣшимъ двумя способами.

Способъ 1-й. Найдемъ остатокъ отъ дѣленія x^3+px+q на $x^2-2\alpha x+\alpha^2$:

$$\begin{array}{l|l}
x^3 \qquad +px-q & x^2-2\alpha x+\alpha^2 \\
\hline
-x^3+2\alpha x^2-\alpha^2 x & x+2\alpha \\
\hline
2\alpha x^2+(p-\alpha^2)x+q & \\
-2\alpha x^2+4\alpha^2 x \qquad -2\alpha^3 & \\
\hline
(p+3\alpha^2)x+(q-2\alpha^3) &
\end{array}$$

Согласно требованію задачи, остатокъ долженъ равняться нулю; для этого необходимо и достаточно (теор. 2-я), чтобы $p+3\alpha^2=0$ и $q-2\alpha^3=0$. Исключивъ изъ этихъ уравненій α, получимъ *необходимое* условіе для дѣлимости даннаго трехчлена на $(x-\alpha)^2$:

$$4p^3+27q^2=0$$

Способъ 2-й. Предположимъ, что x^3+px+q дѣлится на $x^2-2\alpha x+\alpha^2$ безъ остатка; тогда частное должно имѣть видъ $x+A$, и слѣд.:

$$x^3+px+q=(x^2-2\alpha x+\alpha^2)(x+A)=$$
$$=x^3-(A-2\alpha)x^2+(-2\alpha A+\alpha^2)x+\alpha^2 A$$

откуда $\qquad A-2\alpha=0; -2\alpha A+\alpha^2=p; \quad \alpha^2 A=q$

Изъ 1-го уравн. находимъ: $A=2\alpha$; подставивъ это значеніе въ остальныя два уравненія, получимъ *условныя* уравненія:

$$-3\alpha^2=p \quad 2\alpha^3=q$$

изъ которыхъ исключеніемъ α находимъ:

$$4p^3+27q^2=0$$

Комплексныя количества, выраженныя въ тригонометрическомъ видѣ.

I. Дѣйствія надъ такими количествами.

69. Тригонометрическій видъ комплекснаго количества. Покажемъ, что всякое комплексное количество $a+bi$ можно выразить посредствомъ тригонометрическихъ фунцій въ такомъ видѣ:

$$a+bi=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

гдѣ r есть *положительное* число, а φ нѣкоторая дуга. Для этого положимъ, что

$$a=r\cos\varphi\ [1] \text{ и } b=r\sin\varphi\ [2]$$

и опредѣлимъ изъ этихъ уравненій r и φ. Возвысивъ обѣ части каждаго уравненія въ квадратъ и затѣмъ почленно сложивъ, получимъ:

$$a^2+b^2=r^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)=r^2$$

откуда:

$$r=+\sqrt{a^2+b^2}$$

(мы условимся брать для r только ариометическое значеніе радикала). Подставивъ это значеніе въ равенства [1] и [2], найдемъ:

$$\cos\varphi=\frac{a}{+\sqrt{a^2+b^2}},\quad \sin\varphi=\frac{b}{+\sqrt{a^2+b^2}}$$

Такъ какъ: $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\leq 1$ и $\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\leq 1$

и съ другой стороны: $\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1,$

то существуетъ такая дуга φ, которой косинусъ и синусъ равняются соотвѣтственно этимъ количествамъ (ее легко найти при помощи тригонометрическихъ таблицъ).

Число r, равное $+\sqrt{a^2+b^2}$, принято называть *модулемъ*, а дугу φ *аргументомъ* комплекснаго количества. Замѣтимъ, что выраженіе $r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, ради краткости, иногда пишутъ символически: r_φ.

При данныхъ значеніяхъ a и b величина модуля вполнѣ опредѣлена, такъ какъ существуетъ только одно ариометпческое значеніе $\sqrt{a^2+b^2}$. Нельзя сказать того же объ аргументѣ. Дѣйствительно, извѣстно, что тригонометрическія величины дуги не измѣняются, ни по знаку, ни по абсолютной величинѣ отъ прибавленія къ дугѣ, или отнятія отъ нея, цѣлаго числа окружностей; вслѣдствіе этого аргументъ можно по произволу увеличивать или уменьшать на $2k\pi$, гдѣ k есть произвольное цѣлое число. Обыкновенно за аргументъ берутъ наименьшую изъ дугъ, имѣющихъ синусъ и косинусъ, соотвѣтственно равные выведеннымъ выше количествамъ.

Когда $a>0$ и $b>0$, тогда $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ положительныя числа; въ этомъ случаѣ $\varphi<\frac{\pi}{2}$.

Когда $a<0$, а $b>0$, тогда $\cos\varphi<0$; а $\sin\varphi>0$; въ этомъ случаѣ дуга φ заключена между $\frac{\pi}{2}$ и π.

Когда $a<0$ и $b<0$, тогда $\cos\varphi<0$ и $\sin\varphi<0$; и слѣд. дуга φ заключена между π и $\frac{3}{2}\pi$.

Наконецъ, когда $a>0$, а $b<0$, дуга φ заключена между $\frac{3}{2}\pi$ и 2π, если она положительна, или между 0 и $-\frac{\pi}{2}$, если она отрицательна.

Примѣры: 1) $3+4i=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$

$$r=+\sqrt{3^2+4^2}=5;\ \cos\varphi=\frac{3}{5},\ \sin\varphi=\frac{4}{5}$$

Логарифмируя одно изъ послѣднихъ двухъ равенствъ, находимъ по таблицамъ:

$$\varphi=53^0 51' 50''$$

Значитъ: $3+4i=5(\cos 53^0 51' 50''+i\sin 53^0 51' 50'')$

Или въ болѣе общемъ видѣ:

$$3+4i=5[\cos(53^0 51' 50''+2k\pi)+i\sin(53^0 51' 50''+2k\pi)]$$

2) $-3+4i=5(\cos 126^0 8' 10''+i\sin 126^0 8' 10'')$

потому что: $r=+\sqrt{(-3)^2+4^2}=5;\ \cos\varphi=-\frac{3}{5},\ \sin\varphi=\frac{4}{5}$

Такъ какъ дуга, имѣющая косинусъ $+\frac{3}{5}$, синусъ $+\frac{4}{5}$, равна $53^0 51'50''$; то дуга, имѣющая косинусъ $-\frac{3}{5}$, а синусъ $+\frac{4}{5}$, равна $180^0 - 53^0 51'50'' = 126^0 8'10''$.

Въ общемъ видѣ можно написать:

$$-3+4i=5[\cos(126^0 8'10''+2k\pi)+i\ \sin(126^0 8'10''+2k\pi)]$$

3) $$3-4i=5(\cos 306^0 8'10''+i\ \sin\ 306^0 8'10'')$$
$$=5[\cos(-53^0 51'50'')+i\ \sin(-53^0 51'50'')]$$
$$=5(\cos 53^0 51'50''-i\ \sin\ 53^0 51'50'')$$

потому что въ этомъ примѣрѣ $r=+\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$, $\cos\varphi=\frac{3}{5}$, $\sin\ \varphi=-\frac{4}{5}$; слѣд. $\varphi=360-53^0 51'50''=306^0 8'10''$, или же $\varphi=-53^0 51'50''$.

4) $$i=0+1i=1\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\ \sin\frac{\pi}{2}\right)$$

потому что $r=+\sqrt{0^2+1^2}=1$, $\cos\ \varphi=\frac{0}{r}=0$ $\sin\ \varphi=\frac{1}{r}=1$.

Въ болѣе общемъ видѣ можно написать:

$$i=\cos\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)+i\ \sin\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)=\cos\frac{4k+1}{2}\pi+i\ \sin\frac{4k+1}{2}\pi$$

5) Пусть $+A$ будетъ вещественное положительное число. Тогда можно положить, что $A=A+0i$; слѣд.

$$r=+\sqrt{A^2+0^2}=A \text{ и } \cos\ \varphi=\frac{A}{A}=1,\ \sin\ \varphi=\frac{0}{A}=0$$

Дуга, имѣющая синусъ 0 и косинусъ $+1$, равна 0, или вообще $2\ k\pi$. Поэтому:

$+A=A(\cos 0+i\ \sin 0)$, или вообще: $+A=A(\cos\ 2k\pi+i\ \sin\ 2k\pi)$

6) Пусть $-A$ есть вещественное отрицательное число; тогда можно положить, что

$$-A=+A(\cos\ \pi+i\ \sin\ \pi)$$

или вообще $\quad -A=+A[\cos(2k+1)\pi+i\ \sin(2k+1)\pi]$

70. Теорема 1. *Чтобы комплексное количество равнялось нулю, необходимо и достаточно, чтобы его модуль равнялся нулю.*

Доказ. Мы видѣли (§ 209 „Элем. алгебры“), что если

$a+bi=0$, то $a=0$, $b=0$. Слѣд., чтобы $r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ равнялось 0, необходимо, чтобы

$$r\cos\varphi=0 \text{ и } r\sin\varphi=0$$

Такъ какъ не существуетъ такой дуги, у которой синусъ и косинусъ одновременно равнялись бы 0, то равенства эти возможны только тогда, когда $r=0$; слѣд., это условіе необходимо; очевидно, что оно и достаточно.

Теорема 2. *Чтобы два комплексныя количества были равны, необходимо и достаточно, чтобы ихъ модули были равны, а аргументы или равны, или отличались на цѣлое число окружностей.*

Доказ. 1) *Это необходимо.* Пусть дано:

$$r_\varphi=r'_{\varphi'}, \text{ т.-е. } r(\cos\varphi+i\sin\varphi)=r'(\cos\varphi'+i\sin\varphi')$$

Мы видѣли (§ 209 „Элем. алгебры", слѣдствіе), что если $a+bi=a'+b'i$, то $a=a'$, $b=b'$. Поэтому данное равенство возможно только тогда, когда $r\cos\varphi=r'\cos\varphi'$ и $r\sin\varphi=$ $=r'\sin\varphi'$. Возвысивъ эти равенства въ квадратъ и сложивъ ихъ почленно, найдемъ: $r^2=r'^2$ и, слѣд., $r=r'$; вслѣдствіе этого будемъ имѣть: $\cos\varphi=\cos\varphi'$ и $\sin\varphi=\sin\varphi'$ т.-е. $\varphi=\varphi'$, или $\varphi=\varphi'\pm2k\pi$.

2) *Это достаточно.* Пусть дано:

$$r=r' \text{ и } \varphi=\varphi'\pm2k\pi$$

Тогда: $\cos\varphi=\cos\varphi'$ и $\sin\varphi=\sin\varphi'$;

слѣд.: $r(\cos\varphi+i\sin\varphi)=r'(\cos\varphi'+i\sin\varphi')$

71. Умноженіе, дѣленіе, возвышеніе въ степень комплексныхъ количествъ и извлеченіе корня изъ нихъ значительно упрощаются, когда эти количества представлены подъ видомъ r_φ.

Умноженіе. По правилу умноженія многочленовъ будемъ имѣть:

$$r(\cos\varphi+i\sin\varphi)r'(\cos\varphi'+i\sin\varphi')=rr'(\cos\varphi\cos\varphi'+i\sin\varphi\cos\varphi'$$
$$+i\cos\varphi\sin\varphi'+i^2\sin\varphi\sin\varphi')$$

Но $i^2=-1$; поэтому, переставивъ члены и вынеся i за скобки, получимъ:

$$r(\cos\varphi+i\sin\varphi)r'(\cos\varphi'+i\sin\varphi')=rr'[\cos\varphi\cos\varphi'-\sin\varphi\sin\varphi'$$
$$+i(\sin\varphi\cos\varphi'+\cos\varphi\sin\varphi')]=rr'[\cos(\varphi+\varphi')+i\sin(\varphi+\varphi')]$$

т.-е. $$r_\varphi\cdot r'_{\varphi_1}=(rr')_{\varphi+\varphi'}$$

Правило. *Чтобы перемножить комплексныя количества, достаточно перемножить ихъ модули, а аргументы сложить.*

Не трудно обобщить это правило на число сомножителей, большее двухъ. Пусть дано перемножить: $r_{1\varphi_1}.r_{2\varphi_2}.r_{3\varphi_3}\ldots r_{n\varphi_n}$. Произведенiе двухъ первыхъ сомножителей, по доказанному, будетъ: $(r_1r_2)_{\varphi_1+\varphi_2}$. Умноживъ этотъ результатъ на 3-го сомножителя по тому же правилу, получимъ: $(r_1r_2r_3)_{\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3}$. Умноживъ этотъ результатъ на 4-го, потомъ на 5-го..., наконецъ, на n-аго сомножителя, окончательно найдемъ:

$$r_{1\varphi_1}r_{2\varphi_2}r_{3\varphi_3}\ldots r_{n\varphi_n}=(r_1r_2r_3\ldots r_n)_{\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\ldots+\varphi_n}.$$

72. Дѣленiе. Предположимъ, что частное $r_\varphi : r'_{\varphi'}$ будетъ комплексное количество x_y. Тогда, по свойству дѣленiя, будемъ имѣть:

$$x_y.r'_{\varphi'}=r_\varphi, \qquad \text{т.-е.} \qquad (xr')_{y+\varphi'}=r_\varphi$$

Изъ послѣдняго равенства находимъ:

$$xr'=r \qquad \text{и} \qquad y+\varphi'=\varphi+2k\pi.$$

Откуда: $$x=\frac{r}{r'} \qquad \text{и } y=\varphi-\varphi'+2k\pi$$

Значитъ, отбросивъ въ аргументѣ цѣлое число окружностей, можемъ написать:

$$r(\cos\varphi+i\sin):r'(\cos\varphi'+i\sin\varphi')=\frac{r}{r'}[\cos(\varphi-\varphi')+i\sin(\varphi-\varphi')]$$

Правило. *Чтобы раздѣлить два комплексныя количества, достаточно модуль дѣлимаго раздѣлить на модуля дѣлителя и изъ аргумента дѣлимаго вычесть аргументъ дѣлителя.*

73. Возвышенiе въ степень. На основанiи правила умноженiя, выводимъ:

$$(r_\varphi)^n=\overbrace{r_\varphi\, r_\varphi\, r_\varphi\ldots r_\varphi}^{n}=\overbrace{rrr\ldots r}^{n}{}_{\varphi+\varphi+\varphi+\ldots+\varphi}=(r^n)_{n\varphi}$$

т.-е. $$[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$$

Это равенство извѣстно подъ именемъ *формулы Моавра.*

Правило. *Чтобы возвысить комплексное количество въ цѣлую положительную степень, достаточно возвысить въ* *эту степень модуль, а аргументъ умножить на показателя степени.*

74. Извлеченіе корня. Допустимъ, что

$$\sqrt[n]{r_\varphi}=x_y \qquad \text{т. е.} \qquad \sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=x(\cos y+i\sin y).$$

Тогда, по опредѣленію корня, будемъ имѣть:

$$(x_y)^n=r_\varphi, \qquad \text{т.е.} \qquad (x^n)_{ny}=r_\varphi$$

Откуда: $\qquad x^n=r \qquad$ и $\qquad ny=\varphi+2k\pi$

Слѣд.: $\qquad x=+\sqrt[n]{r} \qquad$ и $\qquad y=\frac{\varphi+2k\pi}{n}=\frac{\varphi}{n}+\frac{2k\pi}{n}$

и $$\sqrt[n]{r(\cos+\sin\varphi)}=+\sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)\right] \quad [A]$$

Такъ какъ число k можетъ имѣть всевозможныя цѣлыя значенія, какъ положительныя, такъ и отрицательныя, то казалось бы, что равенство [A] даетъ для корня безчисленное множество значеній: однако это не такъ: *различныхъ значеній окажется только* n. Чтобы убѣдиться въ этомъ, предварительно замѣтимъ, что если число k увеличимъ или уменьшимъ на n, $2n$, $3n$..., то правая часть равенства [A] не измѣнится, вслѣдствіе того, что отъ этого аргументъ увеличится или уменьшится на цѣлое число окружностей. Если такъ, то всякое значеніе k мы можемъ привести къ *положительному числу, меньшему* n, отнимая отъ k, если оно больше n, или прибавляя къ нему, если оно отрицательно, достаточное число разъ по n. Вслѣдствіе этого, всѣ различныя значенія правой части равенства [A] должны заключаться въ числѣ тѣхъ, которыя получатся для слѣдующихъ n значеній k:

$$k=0,\quad 1,\quad 2,\quad 3,\quad 4\ldots n-1.$$

Не трудно видѣть, что всѣ компл. количества, соотвѣтствующія этимъ значеніямъ, *различны*. Дѣйствительно, прибавить къ $\frac{\varphi}{n}$ дугу $\frac{2\pi}{n}$, или $\frac{2.2\pi}{n}$, или $\frac{3.2\pi}{n}$,... наконецъ $\frac{(n-1)2\pi}{n}$, это значитъ—прибавить къ дугѣ $\frac{\varphi}{n}$ одну n-ую часть, двѣ n-ыхъ части.... наконецъ $(n-1)$ n-ыхъ частей окружности. Отъ такого прибавленія, очевидно, не могутъ получиться двѣ дуги, которыя разнились бы между собою хотя бы на одну окружность, т.-е. такія двѣ дуги, у которыхъ синусы и косинусы были бы одинаковы.

Изъ этихъ разъясненій слѣдуетъ, что *корень* n-*й степени имѣетъ* n *различныхъ значеній*, получаемыхъ изъ равенства [A] при $k=0, 1, 2, 3 \ldots n-1$.

Правило. *Чтобы извлечь корень* n-*й степени изъ комплекснаго количества, извлекаютъ ариѳметическій корень этой степени изъ модуля, а аргументъ дѣлятъ на показателя корня; это будетъ одно значеніе корня. Чтобы получить остальныя, достаточно къ аргументу найденнаго значенія приложить* $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n} \ldots \frac{n-1}{n}$ *частей окружности.*

II. Приложеніе комплексныхъ количествъ къ рѣшенію двухчленныхъ уравненій.

75. Рѣшеніе уравненія $x^m=1$. Тригонометрическій способъ выражать комплексныя количества даетъ простое средство рѣшать двучленныя уравненія вида $x^m=A$, другими словами, находить всевозможныя значенія $\sqrt[m]{A}$. Разсмотримъ сначала рѣшеніе уравненія

$$x^m=1 \text{ или } x=\sqrt[m]{1}$$

Такъ какъ $1=1\,(\cos 0+i \sin 0)$, то

$$x=\sqrt[m]{1}=\sqrt[m]{1(\cos 0+i \sin 0)}=\cos\frac{2k\pi}{m}+i \sin\frac{2k\pi}{m}$$

гдѣ k предполагается равнымъ послѣдовательно: 0, 1, 2, 3… ($m-1$).

Примѣры: 1) $\sqrt[3]{1}$ имѣетъ слѣдующія три значенія:

$$1)\ \cos 0+i \sin 0=1 \qquad 2)\ \cos\frac{2\pi}{3}+i \sin\frac{2\pi}{3}$$

$$3)\ \cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=\cos\left(2\pi-\frac{2\pi}{3}\right)+i \sin\left(2\pi-\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\frac{2\pi}{3}-i \sin\frac{2\pi}{3}$$

Взявъ на чертежѣ $^1/_3$ часть окружности единичнаго радіуса и построивъ ея синусъ и косинусъ, легко замѣтимъ, что

$$\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}, \qquad \sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Поэтому два мнимыхъ значенія $\sqrt[3]{1}$ будутъ:

$$-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{и} \quad -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Это тѣ самыя выраженія, которыя мы получили, рѣшая ур. $x^3-1=0$ алгебраически (§ 223 „Элем. алгебры").

2) $\sqrt[4]{1}$ имѣетъ слѣдующія четыре значенія:

$$1)\ \cos 0+i \sin 0=1 \qquad 2)\ \cos\frac{2\pi}{4}+i \sin\frac{2\pi}{4}=i$$

$$3)\ \cos\frac{4\pi}{4}i+\sin\frac{4\pi}{4}=-1 \qquad 4)\ \cos\frac{6\pi}{4}+i \sin\frac{6\pi}{4}=-i$$

3) $\sqrt[5]{1}$ имѣетъ слѣдующія 5 значеній:

$$1)\ \cos 0+i \sin 0=1 \qquad 2)\ \cos\frac{2\pi}{5}+i \sin\frac{2\pi}{5} \quad 3)\ \cos\frac{4\pi}{5}+i \sin\frac{4\pi}{5}$$

$$4)\ \cos\frac{6\pi}{5}-i \sin\frac{6\pi}{5}=\cos\left(2\pi-\frac{4\pi}{5}\right)+i \sin\left(2\pi-\frac{4\pi}{5}\right)$$

$$=\cos\frac{4\pi}{5}-i \sin\frac{4\pi}{5}$$

$$5)\ \cos\frac{8\pi}{5}-i \sin\frac{8\pi}{5}=\cos\left(2\pi-\frac{2\pi}{5}\right)+i \sin\left(2\pi-\frac{2\pi}{5}\right)$$

$$=\cos\frac{2\pi}{5}-i \sin\frac{2\pi}{5}$$

76. Изъ разсмотрѣнія формулы, дающей всѣ значенія $\sqrt[m]{1}$, можно вывести слѣдующія важныя свойства:

1) Если m число *четное*, то существуютъ два вещественныхъ значенія $\sqrt[m]{1}$, одно $+1$, другое -1. Первое получается изъ общей формулы, когда положимъ въ ней $k=0$; второе, когда k сдѣлаемъ равнымъ $\frac{m}{2}$.

2) Если m число *нечетное*, то существуетъ только одно вещественное значеніе $\sqrt[m]{1}$, именно $+1$; оно получается при $k=0$.

3) Каждому мнимому корню соотвѣтствуетъ другой мнимый корень, сопряженный первому. Чтобы убѣдиться въ этомъ, дадимъ числу k два значенія: одно k_1, меньшее $\frac{m}{2}$, другое k_2,

большее $\frac{m}{2}$ и равное $m-k_1$. Сравнимъ соотвѣтствующія значенія $\sqrt[m]{1}$.

Для $k=k_1$ будемъ имѣть:

$$\cos\frac{2k_1\pi}{m}+i\sin\frac{2k_1\pi}{m}$$

Для $k=k_2=m-k_1$ найдемъ:

$$\cos\frac{2(m-k_1)\pi}{m}+i\sin\frac{2(m-k_1)\pi}{m}=\cos\left(2\pi-\frac{2k_1\pi}{m}\right)$$

$$+i\sin\left(2\pi-\frac{2k_1\pi}{m}\right)$$

$$=\cos\frac{2k_1\pi}{m}-i\sin\frac{2k_1\pi}{m}$$

т.-е. эти корни оказываются сопряженными.

4) Если обозначимъ буквою α какое-нибудь изъ мнимыхъ значеній $\sqrt[m]{1}$, то всѣ m значеній корня, *при* m *простомъ*, можно выразить такъ:

$$\alpha^1,\ \alpha^2,\ \alpha^3,\ \alpha^4\ldots\alpha^{m-1},\ \alpha^m=1$$

Напр., пусть $m=5$ и примемъ за α, положимъ, такое значеніе $\sqrt[5]{1}$ (см. примѣръ 3-й предыдущ. §):

$$\alpha=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$$

Тогда: $$\alpha^2=\cos\frac{4\pi}{5}+i\sin\frac{4\pi}{5};\ \alpha^3=\cos\frac{6\pi}{5}+i\sin\frac{6\pi}{5}$$

$$=\cos\left(2\pi-\frac{4\pi}{5}\right)+i\sin\left(2\pi-\frac{4\pi}{5}\right)=\cos\frac{4\pi}{5}-i\sin\frac{4\pi}{5}$$

$$\alpha^4=\cos\frac{8\pi}{5}+i\sin\frac{8\pi}{5}=\cos\left(2\pi-\frac{2\pi}{5}\right)+i\sin\left(2\pi-\frac{2\pi}{5}\right)$$

$$=\cos\frac{2\pi}{5}-i\sin\frac{2\pi}{5}$$

$$\alpha^5=\cos\frac{10\pi}{5}+i\sin\frac{10\pi}{5}=1$$

т.-е. возвышеніемъ α въ степени съ показателями: 1, 2, 3, 4 и 5 мы получаемъ всевозможныя значенія $\sqrt[5]{1}$.

Не трудно убѣдиться въ общности этого свойства для всякаго *простого* m. Пусть

$$\alpha = \cos\frac{2k_1\pi}{m} + i \sin\frac{2k_1\pi}{m}$$

гдѣ k_1 есть какое угодно значеніе k, заключающееся между 0 и m (для такихъ значеній α будетъ мнимое количество). Покажемъ, что во 1-хъ, всякая степень α есть корень ур. $x^m=1$, и во 2-хъ, отъ возвышенія α въ степени съ показателями: $1, 2, 3 \ldots m-1, m$ мы не можемъ получить двухъ одинаковыхъ значеній, *если* m *число простое.*

1) Каково бы ни было цѣлое число p, $(\alpha^p)^m = (\alpha^m)^p = 1^p = 1$, т.-е. α^p удовлетворяетъ ур. $x^m=1$; значитъ, α^p есть одно изъ значеній $\sqrt[m]{1}$.

2) Предположимъ, что $\alpha^g=\alpha^h$, гдѣ g и h суть два различныхъ числа изъ ряда: $1, 2, 3, \ldots m-1, m$. Тогда

$$\cos\frac{2k_1g\pi}{m} + i \sin\frac{2k_1g\pi}{m} = \cos\frac{2k_1h\pi}{m} + i \sin\frac{2k_1h\pi}{m}$$

откуда

$$\frac{2k_1g\pi}{m} = \frac{2k_1h\pi}{m} + 2l\pi$$

гдѣ l какое-нибудь цѣлое число.

Послѣднее равенство даетъ:

$$\frac{k_1(g-h)}{m} = l = \text{цѣлое число.}$$

Такъ какъ m число простое, то это равенство будетъ имѣть мѣсто только тогда, когда или k_1, или $g-h$ дѣлится на m; но ни то, ни другое невозможно, такъ какъ и k_1, и $g-h$ меньше m. Слѣд., нельзя допустить, чтобы $\alpha^g=\alpha^h$.

Если же, такимъ образомъ, рядъ $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3 \ldots \alpha^{m-1}, \alpha^m$ состоитъ изъ *различныхъ* количествъ и каждое изъ нихъ есть какое-нибудь значеніе $\sqrt[m]{1}$, то этотъ рядъ представляетъ всевозможныя значенія $\sqrt[m]{1}$.

77. Рѣшеніе уравненія $x^m = A$. Когда A есть комплексное количество $r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$, вопросъ сводится къ нахожденію всѣхъ значеній $\sqrt[m]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}$. Эти значенія, какъ мы видѣли, выражаются формулой:

$$x = \sqrt[m]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{m} + \frac{2k\pi}{m}\right) + i \sin\left(\frac{\varphi}{m} + \frac{2k\pi}{m}\right)\right] \qquad [1]$$

въ которой k означаетъ числа: $0, 1, 2, 3 \ldots (m-1)$.

Пусть теперь A будетъ вещественное положительное число. Такъ какъ

$$A = A(\cos 0 + i \sin 0)$$

то рѣшенія уравн. $x^m = A$ получатся для этого случая изъ формулы [1], если въ ней положимъ $\varphi = 0$. Слѣд.

$$x = \sqrt[m]{A} = + \sqrt[m]{A}\left(\cos\frac{2k\pi}{m} + i\ \sin\frac{2k\pi}{m}\right) \qquad [2]$$

Такъ какъ множитель, стоящій въ скобкахъ, представляетъ всевозможныя значенія $\sqrt[m]{1}$ (§ 75), то заключаемъ: *всевозможныя значенія корня m-й степени изъ положительнаго числа A получатся, если ариѳметическое значеніе этого корня умножимъ на каждое значеніе* $\sqrt[m]{1}$. Напр., значенія $\sqrt[3]{8}$ будутъ:

$$2 \cdot 1,\ 2\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\quad 2\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

т.-е. $\qquad 2,\quad -1+i\sqrt{3},\quad -1-i\sqrt{3}$

Пусть, наконецъ, A будетъ вещественное отрицательное число $-A_1$. Такъ какъ $-A_1 = A_1(\cos\pi + i\ \sin\pi)$, то рѣшенія ур. $x^m = -A_1$ получатся изъ формулы [1] замѣной въ ней φ на π. Слѣд.

$$x = \sqrt[m]{-A_1} = + \sqrt[m]{A_1}\left(\cos\frac{(2k+1)\pi}{m} + i\ \sin\frac{(2k+1)\pi}{m}\right) \qquad [3]$$

Примѣры: 1) Значенія $\sqrt[3]{-8}$ будутъ:

$$2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\ \sin\frac{\pi}{3}\right),\quad 2\left(\cos\frac{3\pi}{3}+i\ \sin\frac{3\pi}{3}\right),\quad 2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\ \sin\frac{5\pi}{3}\right)$$

т.-е. $\qquad 2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right), -2,\quad 2\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

2) Значенія $\sqrt[3]{-1}$ будутъ:

$$\cos\frac{\pi}{3}+i\ \sin\frac{\pi}{3},\ \cos\frac{3\pi}{3}+i\ \sin\frac{3\pi}{3},\ \cos\frac{5\pi}{3}+i\ \sin\frac{5\pi}{3}$$

т.-е. $\qquad \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\quad -1,\ \frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

III. Дѣленіе окружности на равныя части.

78. Элементарная геометрія указываетъ способы, посредствомъ которыхъ помощью циркуля и линейки можно дѣлить окружность на такое число равныхъ частей (или—что то же—

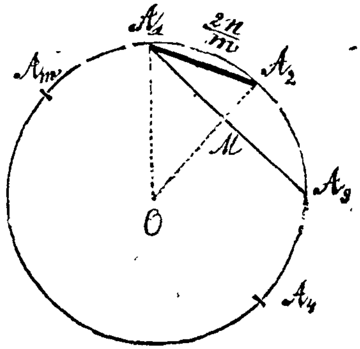
вписывать въ окружность правильные многоугольники такого числа сторонъ), которое выражается слѣдующими числами:

2, 4, 8, 16................	вообще	2^n
3, 6, 12, 24..............	„	3.2^n
5, 10, 20, 40.............	„	5.2^n
15*), 30, 60, 120...........	„	$5.3.2^n$

Но элементарная геометрія не рѣшаетъ вопроса о томъ, можно ли помощью циркуля и линейки (единственные приборы, которыми ограничивается элементарная геометрія) дѣлить окружность на какое-либо иное число равныхъ частей. Впервые этотъ вопросъ былъ рѣшенъ алгебраически знаменитымъ *Гауссомъ*, въ его сочиненіи: „Disquisitiones arithmeticae“, изданномъ въ 1801 году.

79. Покажемъ, какая связь существуетъ между рѣшеніемъ двучленнаго ур. $x^m = 1$ и дѣленіемъ окружности на m равныхъ частей.

Пусть окружность, радіусъ которой принятъ за единицу, раздѣлена на m равныхъ частей въ точкахъ: A_1, A_2, A_3,.... A_m. Тогда хорда, соединяющая какія-нибудь двѣ сосѣднія точки, напр. хорда $A_1 A_2$, будетъ стороною правильнаго m угольника, вписаннаго въ эту окружность. Вмѣсто того, чтобы искать длину этой хорды, будемъ находить величину перпендикуляра A_1M, представляющаго собою $sin\frac{2\pi}{m}$, или величину отрѣзка OM, выражающаго $cos\frac{2\pi}{m}$. Если будетъ найдена какая-нибудь изъ этихъ линій, то легко построить и хорду A_1A_2.



*) Такъ какъ $\frac{1}{15}=\frac{1}{6}-\frac{1}{10}$, то пятнадцатая часть окружности найдется, если изъ шестой части вычтемъ десятую.

Вообразимъ теперь, что мы сумѣли рѣшить двучл. ур. $x^m=1$ и притомъ двоякимъ способомъ: алгебраически и при помощи тригонометрическихъ функцій. Конечно, значенія корней, полученныя тѣмъ и другимъ способомъ, должны быть соотвѣтственно равны между собою. Корни этого уравненія, выведенные алгебраическимъ путемъ, имѣютъ видъ $a+bi$, гдѣ a и b суть нѣкоторыя вещественныя числа, соизмѣримыя или несоизмѣримыя; въ послѣднемъ случаѣ они выражены въ радикалахъ изъ соизмѣримыхъ чиселъ. Корни же двучленнаго уравненія, найденные тригонометрическимъ путемъ, имѣютъ, видъ $\cos\frac{2k\pi}{m}+i\sin\frac{2k\pi}{m}$, гдѣ k предполагается равнымъ 0, 1, 2, 3,...$(m-1)$. Одинъ изъ нихъ (при $k=1$) есть $\cos\frac{2\pi}{m}+i\sin\frac{2\pi}{m}$.

Предположимъ теперь, что мы опредѣлили, какому изъ корней, выраженныхъ алгебраически, соотвѣтствуетъ этотъ корень, выраженный тригонометрически; тогда мы получимъ равенство:

$$\cos\frac{2\pi}{m}+i\sin\frac{2\pi}{m}=a+bi$$

изъ котораго найдемъ: $\cos\frac{2\pi}{m}=a$ и $\sin\frac{2\pi}{m}=b$

Найдя такимъ образомъ алгебраическія выраженія для $\cos\frac{2\pi}{m}$ и $\sin\frac{2\pi}{m}$, задаемся вопросомъ, можно ли эти выраженія построить при помощи циркуля и линейки? Извѣстно, что этими приборами можно строить лишь такія линіи, которыя выражаются раціональными формулами или такими ирраціональными, которыя содержатъ только квадратные радикалы или приводимые къ квадратнымъ (4-й, 8-й, 16-и и т. д. степени); потому, если число m таково, что a и b окажутся выраженіями, которыя можно построить циркулемъ и линейкой, то окружность при помощи этихъ приборовъ можно раздѣлить на m равныхъ частей; въ противномъ случаѣ вопросъ невозможенъ.

Такимъ образомъ все дѣло въ томъ, чтобы рѣшить ур. $x^m=1$. Тригонометрически, какъ мы видѣли, это возможно всегда; возможно также и алгебраически, но въ большинствѣ случаевъ при помощи такихъ соображеній, которыя выходятъ изъ предѣловъ элементарной алгебры.

80. Приводимъ здѣсь безъ доказательства нѣкоторые главнѣйшие выводы, къ которымъ приходитъ Высшая Алгебра:

1) *Рѣшеніе ур.* $x^m=1$, *при* m *составномъ, сводится къ рѣшенію уравненія того же вида, у которыхъ показатели степеней суть простыя числа, или степени простыхъ чиселъ, дѣлящія* m.

2) *Рѣшеніе ур.* $x^m=1$, *при* m *простомъ, сводится на рѣшеніе уравненій того же вида, у которыхъ показатели степеней суть простыя числа, дѣлящія* $m-1$.

Изъ послѣдней теоремы выводится извѣстное предложеніе Гаусса, что при помощи циркуля и линейки окружность можно раздѣлить на такое число m равныхъ частей, которое, будучи *простымъ*, выражается формулой 2^p+1. Дѣйствительно, въ этомъ случаѣ $m-1$ дѣлится только на одно простое число 2, и слѣдов. рѣшеніе уравн. $x^m=1$ даетъ въ результатѣ формулы, содержащія только *квадратные* радикалы. Полагая въ равенствѣ $m=2^p+1$ число p последовательно равнымъ: 1, 2, 3, 4... и выбрасывая составныя числа, найдемъ, что окружность при помощи циркуля и линейки можно раздѣлить на 3, 5, 17, 257 (при $p=8$), 65537 (при $p=16$). . равныхъ частей

81. Въ статьѣ о двучленныхъ уравненіяхъ (§§ 223 и 224 „Элем. алгебры“) мы указали пріемы агебраическаго рѣшенія простѣйшихъ изъ нихъ. Пользуясь этими пріемами, покажемъ, для примѣра какъ раздѣлить окружность на 3 и на 5 равныхъ частей. Предварительно замѣтимъ, что если требуется раздѣлить окружность на четное число, $2m$, равныхъ частей, достаточно раздѣлить ее сначала на m частей и затѣмъ каждую часть раздѣлить пополамъ (что возможно при помощи циркуля и линейки). Слѣд., указавъ, какъ дѣлить окружность на 3 и на 5 равныхъ частей, мы тѣмъ самымъ укажемъ дѣленіе на 6, 12..., 10, 20... равныхъ частей.

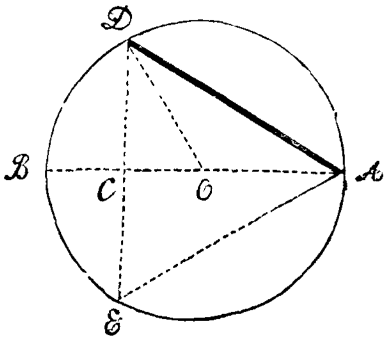
Чтобы раздѣлить окружность на 3 равныя части, надо найти выраженія для $cos\frac{2\pi}{3}$ или для $sin\frac{2\pi}{3}$; для этого рѣшимъ ур. $x^3=1$. Корни этого уравненія, выраженные алгебраически (§ 223 „Элем. алгебры)“, будутъ:

$$1, \quad -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Тѣ же корни тригометрически выразятся такъ:

$$1,\ \cos\frac{2\pi}{3} - i\,\sin\frac{2\pi}{3},\ \ \cos\frac{2\pi}{3} - i\,\sin\frac{2\pi}{3}$$

Сравнивая два вида корней, находимъ что $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$.



Поэтому дѣлимъ радіусъ OB пополамъ въ точкѣ C и черезъ середину проводимъ $\perp ED$; тогда $OC = -\frac{1}{2}$ будетъ косинусомъ дуги AD: слѣд., эта дуга равна $\frac{2\pi}{3}$ и хорда AD есть сторона правильнаго треугольника, вписаннаго въ данную окружность.

Чтобы раздѣлить окружность на 5 равныхъ частей, надо найти выраженія для $\cos\frac{2\pi}{5}$ или для $\sin\frac{2\pi}{5}$; для этого рѣшимъ ур. $x^5 = 1$. Чтобы рѣшить его алгебраически, представимъ его такъ:

$$(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)=0$$

Значитъ, оно распадается на два уравненія:

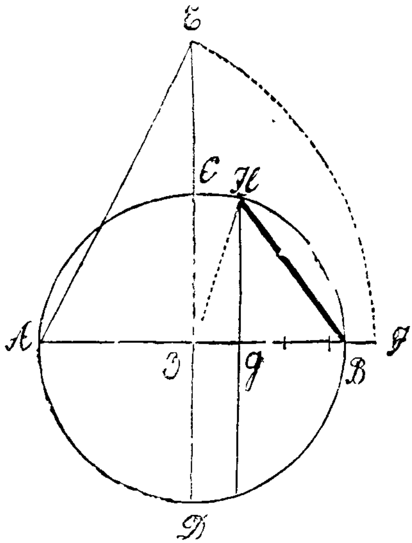
$$x-1=0 \ \text{ и } \ x^4+x^3+x^2+x+1=0$$

Первое даетъ: $x_1 = 1$. Второе принадлежитъ къ возвратнымъ ур. 4-й степени (§ 219 „Элем. алгебры"). Раздѣливъ всѣ его члены на x^2 и измѣнивъ порядокъ членовъ, можемъ представить его такъ:

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)-1=0$$

Положимъ, что $x+\frac{1}{x}=y$; тогда $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$ и, слѣд., уравненіе приметъ видъ:

$$y^2+y-1=0$$



Откуда: $y_1 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

$$y_{11} = \frac{-1-\sqrt{5}}{5}$$

значить: $x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

и $x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$

т.-е. $x^2-\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}x+1=0$

и $x^2+\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}x+1=0$

Первое уравненіе даетъ:

$$x=\frac{\sqrt{5}-1}{4}\pm\sqrt{\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{16}-1}$$

$$=\frac{\sqrt{5}-1}{4}\pm\frac{\sqrt{-2\sqrt{5}-10}}{4}$$

$$x=\frac{\sqrt{5}-1}{4}\pm i\,\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

Изъ второго уравненія находимъ:

$$x=-\frac{\sqrt{5}+1}{4}\pm i\,\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{5}$$

Найдемъ теперь корни уравн. $x^5=1$ тригономическимъ путемъ. Какъ мы видѣли выше, эти корни будутъ:

$$1,\ \cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5},\ \cos\frac{4\pi}{5}+i\sin\frac{4\pi}{5},\ \cos\frac{4\pi}{5}-i\sin\frac{4\pi}{5},\ \cos\frac{2\pi}{5}-i\sin\frac{2\pi}{5}$$

Сравнивая два вида корней, замѣчаемъ, что $\cos\dfrac{2\pi}{5}$ можетъ равняться или $\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$, или $-\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$; но такъ какъ $\dfrac{2\pi}{5}<\dfrac{\pi}{2}$, то $\cos\dfrac{2\pi}{5}>0$ и потому $\cos\dfrac{2\pi}{5}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Построеніе понятно изъ прилагаемаго чертежа: $OE=2\ OC$;

$AE=\sqrt{5}$; $AF=AE$; $OF=\sqrt{5}-1$; $OG=\frac{1}{4}OF=\cos\frac{2\pi}{5}$;

HB есть сторона правильнаго 5-угольника.

IV. Одно изъ примѣненій формулы Моавра

82. Возвысивъ двучленъ $\cos\varphi+i\sin\varphi$ въ степень m по биному Ньютона, получимъ:

$$(\cos\varphi+i\sin)^m=\cos^m\varphi+m\sin\varphi\cos^{m-1}\varphi i+\frac{m(m-1)}{1.2}\sin^2\varphi\cos^{m-2}\varphi i^2$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\sin^3\varphi\cos^{m-3}\varphi i^3+\ldots+\sin^m\varphi i^m$$

Замѣнивъ i^2 черезъ -1, i^3 черезъ $-i$, i^4 черезъ $+1$ и т. д. и отдѣливъ члены, не содержащіе i, отъ членовъ, содержащихъ i, получимъ:

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^m=\left[\cos^m\varphi-\frac{m(m-1)}{1.2}\sin^2\varphi\cos^{m-2}\varphi+\right.$$
$$\left.+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}\sin^4\varphi\cos^{m-4}\varphi-\ldots\right]+$$
$$+i\left[m\sin\varphi\cos^{m-1}\varphi-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\sin^3\varphi\cos^{m-3}\varphi+\ldots\right]$$

Съ другой стороны, формула Моавра даетъ:

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^m=\cos m\varphi+i\sin m\varphi.$$

Примѣняя теперь теорему 2-ю § 70, находимъ слѣдующія тригонометрическія зависимости:

$$\cos m\varphi=\cos^m\varphi-\frac{m(m-1)}{1.2}\sin^2\varphi\cos^{m-2}\varphi+\ldots$$

$$\sin m\varphi=m\sin\varphi\cos^{m-1}\varphi-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\sin^3\varphi\cos^{m-3}\varphi+\ldots$$

Полагая m равнымъ 2, 3 и 4 и т. д., найдемъ:

$$\cos 2\varphi=\cos^2\varphi-\sin^2\varphi \qquad \sin 2\varphi=2\sin\varphi\cos\varphi$$
$$\cos 3\varphi=\cos^3\varphi-3\sin^2\varphi\cos\varphi \qquad \sin 3\varphi=3\sin\varphi\cos^3\varphi-\sin^3\varphi$$
$$\cos 4\varphi=\cos^4\varphi-6\sin^2\varphi\cos^2\varphi+\sin^4\varphi$$
$$\sin 4\varphi=4\sin\varphi\cos^3\varphi-4\sin^3\varphi\cos\varphi \text{ и т. д.}$$

Оглавленіе.