АКАДЕМИЯ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК РСФСР
Институт методов обучения

ПЕДАГОГИЧЕСКАЯ БИБЛИОТЕКА УЧИТЕЛЯ

А. Д. СЕМУШИН

МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ ПО СТЕРЕОМЕТРИИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК РСФСР
Москва 1959

Печатается по решению
Ученого совета
Института методов обучения
АПН РСФСР

Предлагаемая работа представляет собой один из возможных вариантов перестройки системы обучения решению задач на построение в курсе стереометрии.

Автор книги подробно излагает методику построений на стереометрическом чертеже, используя собственный опыт работы в школе, а также идеи Ж. Адамара и Н. Ф. Четверухина.

Книга предназначена для учителей математики, преподавателей и студентов педагогических институтов.

ВВЕДЕНИЕ

Задачи на построение в пространстве решаются двумя принципиально различными методами: в воображении и эффективно[1].

В процессе решения задач на построение в воображении устанавливается лишь факт существования решения, само же построение искомого элемента не выполняется. По идее метода элементы, определяемые условием задачи, не задаются ни непосредственно в пространстве, ни на плоском чертеже, а удерживаются в воображении. Решение задачи сводится к перечислению такой совокупности геометрических операций, фактическое выполнение которых (в случае если их можно было бы выполнить) приводит к построению искомого элемента. Задача считается решенной, если удается отыскать рассматриваемую совокупность построений.

Проиллюстрируем прием решения задач на построение в воображении на примере решения следующей задачи.

Задача 1. Построить плоскость, параллельную данной плоскости β и проходящую через данную точку B.

Решение. Допустим, что точка B не лежит в плоскости β Решение задачи в этом случае свелось бы к перечислению следующей совокупности построений: 1) в плоскости β проводим две пересекающиеся прямые a и b; 2) через прямую a и точку B проводим плоскость γ_1; 3) в плоскости γ через точку B проводим прямую a_1, параллельную прямой a; 4) через прямую b и точку B проводим плоскость γ_2; 5) в плоскости γ_2 через точ-

[1] Такая классификация могла бы быть проведена и для методов решения задач на построение на плоскости.

ку B проводим прямую b_1, параллельную прямой b; 6) через две пересекающиеся прямые a_1 и b_1 проводим плоскость β. Плоскость β' — искомая.

Перечисленные шесть операций не только не выполняются, но некоторые из них не могут быть выполненными. В самом деле, если прямые a и b в первоначально заданной плоскости могли бы быть проведены с помощью линейки и карандаша, то для построения плоскостей γ_1, γ_2 и β' в практике не существует инструментов, с помощью которых можно было бы вычерчивать непосредственно в пространстве плоскости и проводить построения в них. Невозможно, следовательно, в плоскостях γ_1 и γ_2 провести и прямые a_1 и b_1.

Из приведенного примера видно, что в воображении удерживаются не только заданные элементы, но и элементы, получаемые в процессе построения, а также решение задачи. В этом смысле воображаемыми являются и сами построения.

Чертеж при решении в воображении задач на построение может не выполняться. В тех же случаях, когда к нему прибегают, он играет вспомогательную роль: чертеж необходим только для облегчения работы воображения, когда пространственное воображение плохо развито или когда построения оказываются громоздкими.

В процессе решения стереометрических задач на построение эффективными методами искомые элементы строятся по некоторому числу заданных фактическим выполнением построений на чертеже с помощью фиксированного набора инструментов. В отличие от задач на построение, решаемых в воображении, при эффективном решении задача не может считаться решенной без выполнения чертежа.

В элементарной геометрии за последние 10—20 лет достаточно четко выделились два подхода к эффективному решению стереометрических задач на построение. Первый по времени опубликования представлен в курсе стереометрии Ж. Адамара [1][1]; второй разработан проф. Н. Ф. Четверухиным [22, 23]. В дальнейшем первый подход называется эффективным методом решения задач на

[1] См. список литературы в конце книги.

построение, а второй — решением задач на построение на проекционном чертеже.

При решении задач на построение эффективным методом (по Адамару) элементы, определяемые условием, задаются на плоском чертеже в натуральную величину, без искажений. Для построения искомого элемента в воображении отыскивается последовательность плоских сечений заданного геометрического тела, каждое из которых при помощи заданных элементов и элементов, получаемых в процессе решения, строится в натуральную величину. Последовательность плоских сечений отыскивается так, чтобы хотя бы в одно из них входили искомые элементы, построением которых в сечении заканчивается решение задачи.

Рассмотрим пример решения задачи на построение эффективным методом.

Задача 2. Построить радиус шара, вписанного в правильную треугольную пирамиду со стороной основания a и высотой H.

Решение. Сторона основания a и высота H пирамиды задана на рис. 1 в натуральную величину. По ним строим основание ($\triangle ABC$) и высоту (BD) основания пирамиды (рис. 2). По определившейся высоте (BD) основания и высоте ($SO_1 = H$) пирамиды (рис. 3) строим сечение пирамиды плоскостью, проходящей через апофему SD грани и высоту пирамиды. В этом сечении радиус (OT) шара определится как перпендикуляр, опущенный на апофему грани из точки (O) пересечения высоты ($SO_1 = H$) пирамиды с биссектрисой (OD) угла, образованного апофемой грани и высотой основания пирамиды.

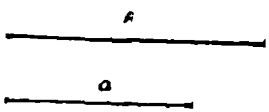


Рис. 1

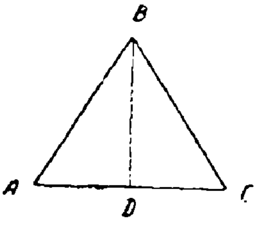


Рис. 2

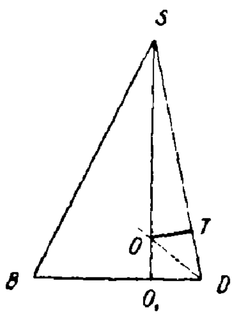


Рис. 3

При решении задач на построение на проекционном чертеже (по Четверухину) элементы, определяемые условием задачи, задаются на изображении оригинала (точки, линии, плоскости, геометрические тела пространства в любой из материальных реализаций или воображаемые). Для эффективного решения задач на построение (по Четверухину) используются полные изображения[1], построения на которых выполняются без какой бы то ни было степени произвола.

Решение «Задачи 1» на проекционном чертеже выполняется следующим образом.

Решение. Элементы, определяемые условием задачи, задаются на изображении так, как это выполнено на рис. 4а.

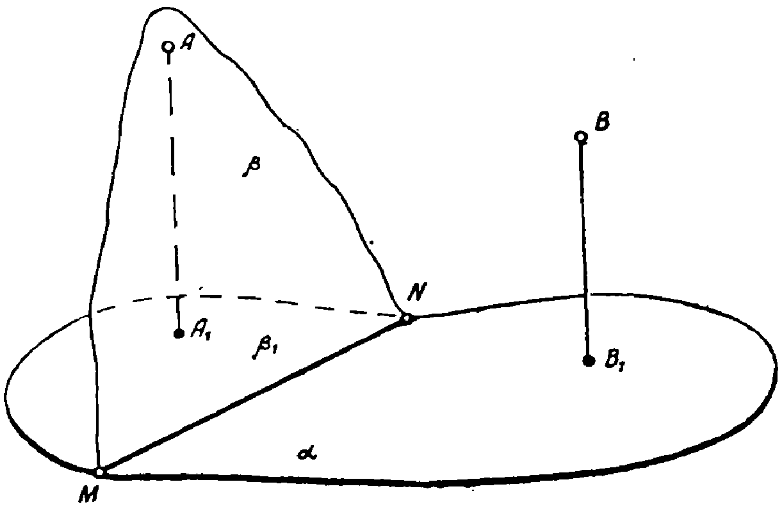


Рис. 4а

В плоскости β (β_1) строим AM (A_1M) и AN (A_1N) (рис. 4б). В соответствии с условностями проекционного чертежа прямые AM (A_1M) и AN (A_1N) служат прямыми, принадлежащими плоскости β (β_1). С помощью линейки и угольника проводим через B (B_1)

[1] Определение полных изображений дано в «Приложении» на стр. 13.

прямые BN_1 (B_1N_1) и BM_1 (B_1M_1), параллельные прямым AN (A_1N) и AM (A_1M). Такие прямые строятся единственным образом и действительно изображают прямые, параллельные прямым AN (A_1N) и AM (A_1M). Пересекающиеся прямые BN_1 (B_1N_1) и BM_1 (B_1M_1) определяют искомую плоскость β' (β'_1).

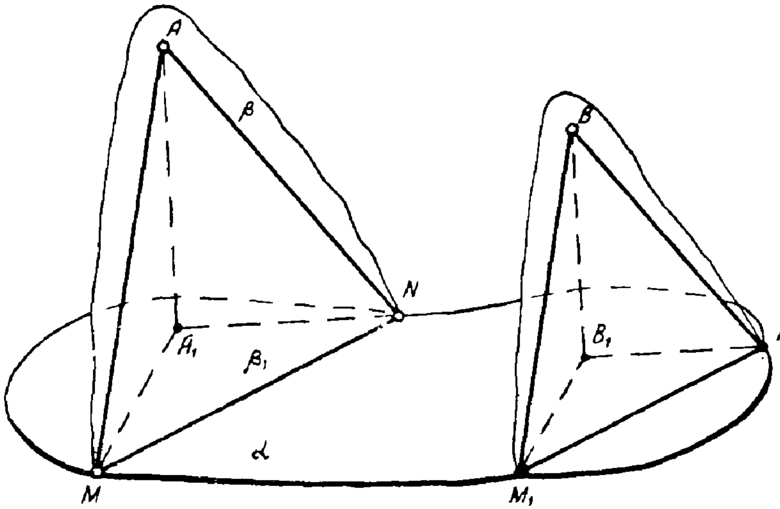


Рис. 4б

В курсе стереометрии средней школы задачи на построение решаются преимущественно в воображении. Такой подход к решению задач на построение представляет некоторый интерес. В процессе решения задач на построение развивается пространственное воображение учащихся, это в свою очередь облегчает учащимся прохождение всего остального программного материала.

В то же время необходимо иметь в виду, что овладение методами решения задач на построение в воображении предполагает уже достаточно высокий уровень развития пространственного воображения учащихся.

Кроме того, решение задач на построение при традиционной методике заканчивается доказательством существования или единственности решения и не доводится до фактического отыскания решения построением, как это делается, например, в планиметрии, тогда как «главная цель» [22] и практическая ценность задач на построение в планиметрии и в стереометрии состоит в отыскании решения фактическим построением инструментами. Именно так решаются эти задачи на производстве, в чертежно-конструкторской практике.

Отмеченные недочеты традиционной системы обучения решению задач на построение удается восполнить при обучении учащихся решению задач на построение на проекционном чертеже.

Обучение решению задач на построение на проекционном чертеже служит активным и гибким средством развития пространственного воображения учащихся. При элементарном прилежании к окончанию курса IX класса удается настолько развить пространственное воображение всех учащихся, что они свободно решают достаточно сложные задачи на построение в воображении.

Практика решения задач на построение на проекционном чертеже облегчает учащимся усвоение стереометрии, развивает навыки в построении изображений, облегчает понимание курса черчения. Знания и умения, приобретаемые учащимися, оказываются полезными для продолжения образования, для применения полученных знаний в повседневной практической деятельности. Особенно это относится к той части учащихся, которая после окончания школы идет на производство.

В этом состоит политехническое значение задач на построение, решаемых на проекционном чертеже.

Отметим, наконец, что решение задач на проекционном чертеже не исключает, а дополняет решение задач в воображении. В некоторых случаях решению задачи на проекционном чертеже целесообразно предпослать воображаемое решение задачи с иллюстративным чертежом. Оправдан и обратный порядок решения. В тех же случаях, когда решение задач на проекционном чертеже становится громоздким (например, построение общего перпендикуляра к двум скрещивающимся прямым), в школе достаточно ограничиться решением этой задачи в воображении с выполнением иллюстративного чертежа.

Теоретические обоснования решения задач на проекционном чертеже выполнены проф. Н. Ф. Четверухиным в работах: «Чертежи пространственных фигур в курсе геометрии» [23], «Вопросы методологии и методики геометрических построений в школьном курсе геометрии» [22], «Стереометрические задачи на проекционном чертеже», ч. I и II [24; 25]. В этих же работах обоснованы возможность и необходимость включения их в школу.

Однако до настоящего времени не закончена разработка методики изучения этого материала в школе. Требует уточнения объем материала, подлежащего изучению. Не определено и место изучения этих задач в школе. Обучение решению задач на построение не должно быть инородным телом в курсе стереометрии, привеском к нему. Желательно, чтобы эти задачи составили органическую часть курса, неразрывное целое с ним.

В данной работе излагается проверенный в практике преподавания вариант обучения решению задач на построение на проекционном чертеже. Разработке его предшествовала экспериментальная работа, в ходе которой проверялись различные варианты методики обучения решению задач на построение. Ниже приводятся некоторые данные о классах, в которых проводились экспериментальные работы.

Наименование классов	Фамилия преподавателя, проводившего экспериментальную работу	Учебные годы, в течение которых проводилась экспериментальная работа
I (С.)	А. Д. Семушин	1947/48, 1948/49
II (С.)	А. Д. Семушин	1949/50, 1950/51
III (С.)	А. Д. Семушин	1951/52, 1952/53
IV (С.)	А. Д. Семушин	1955/56, 1956/57
IV (Ш. 1)	Г. В. Шичалин	1955/56, 1956/57
IV (Ш. 2)	Г. В. Шичалин	1955/56, 1956/57
V (Г.)	И. С. Гольдберг	1956/57, 1957/58
VI (С.)	А. Д. Семушин	1957/58 (начало)
VI (Г.)	И. С. Гольдберг	1957/58 (начало)

Экспериментальная работа в основном проводилась в IX—X классах средней школы № 327 (Москва) с 1947 по 1958 г. В 1955/56 учебном году в экспериментальную работу включилась средняя школа № 204 (базовая школа Института методов обучения АПН РСФСР), в которой работа по обучению решению задач на проекционном чертеже проводится по настоящее время.

Классы, в которых проводилась экспериментальная работа, в дальнейшем именуются I (С.), IV (Ш. 1), IV (Ш. 2), V (Г.) и т. д. Римская цифра при принятой системе обозначения указывает на порядковый номер выпуска в общей системе экспериментальной работы; буква в скобках—на фамилию преподавателя, проводившего опытную проверку; арабскими цифрами в скобках различаются параллельные классы в одном выпуске.

Все классы, кроме класса IV (Ш. 1) были классами средней успеваемости. Класс IV (Ш. 1) считался самым слабым в школе. Работа с I, II и III выпусками проводилась в мужской школе, а с остальными выпусками—в смешанной. В каждом классе число учащихся было обычно около 30.

Проведенная экспериментальная работа показала, что разработка методики обучения решению задач на построение на проекционном чертеже должна проводиться с учетом всей системы первых уроков по стереометрии, с учетом методики обучения учащихся построению изображений. Это обстоятельство определило структуру настоящей работы.

В § 1 излагаются главные принципы, положенные в основу обучения учащихся построению изображений в экспериментальных классах.

В § 2 рассматривается система и методика обучения решению задач на построение, указывается место этих задач в курсе стереометрии.

В § 3 подводятся итоги экспериментальной работы.

В «Приложении» рассмотрен вопрос об определении понятий полноты и метрической определенности изображений. Последнее сделано для того, чтобы определить математическое содержание задач на построение, решаемых на проекционном чертеже.

§ 1. ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ В КУРСЕ СТЕРЕОМЕТРИИ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

1. Обучение построению изображений на первых уроках стереометрии

Наибольшие трудности в обучении построению изображений возникают на первых уроках стереометрии. Происходит это потому, что для ознакомления учащихся с новыми отношениями между прямыми, прямыми и плоскостями, для доказательства теорем, высказываемых об этих образах, приходится прибегать к изображениям изучаемых объектов. В то же время для обоснования приемов построения изображений необходимо знакомство с рядом положений, доказываемых в курсе стереометрии.

Выходом из создавшегося положения является возможно более широкое привлечение моделей для доказательства теорем на первых уроках стереометрии. Доказательства на моделях полезно сопровождать иллюстративными чертежами-картинками, выполняемыми без осознанно сформулированных правил, опираясь на интуицию и жизненный опыт учащихся. В этот период обучения учитель должен позаботиться лишь о том, чтобы предостеречь учащихся от грубых ошибок.

Применение иллюстративного чертежа в этих условиях крайне полезно, так как при сопоставлении чертежа и модели у учащихся с первых шагов изучения стереометрии будет вырабатываться восприятие чертежа как эквивалента модели, как одной из материальных реализаций изучаемых абстрактных геометрических образов.

Интуитивные приемы выполнения чертежей-картинок, в меру возможного, на каждом шагу изучения стереометрии должны обосновываться. Чертежи-картинки в результате такой работы предстанут перед учащимися чертежами-изображениями, выполняемыми по правилам параллельной проекции, проекционными чертежами-моделями, на которых стереометрические задачи, как и в планиметрии, решаются эффективно-фактическим построением.

К обоснованию приемов построения изображений, к решению задач на проекционном чертеже возможно и нужно приступать с первых уроков по стереометрии.

Для укрепления интуитивного представления об изображении на первом же уроке стереометрии, характеризуя трудности ее изучения, учащимся следует раскрыть смысл привычных для них изображений куба, спичечной коробки и т. д. как проекций оригиналов или их подобных копий. Добиться этого можно, если на классную стену отбросить солнечную тень, например, проволочной модели куба.

До сознания учащихся должна быть доведена мысль, что при изучении стереометрии не представляется возможным вычерчивать в пространстве прямые, задаваемые двумя точками плоскости, определяемые тремя точками, как это делалось в планиметрии карандашом на листе бумаги. Учащимся следует рассказать, что вместо прямых и плоскостей, вычерчиваемых непосредственно в пространстве, мы будем иметь дело с воображаемыми пространственными фигурами и формами, с их моделями и изображениями.

Используя солнечную тень и чертеж параллелепипеда, условливаемся, что прямые оригинала будем изображать прямыми, параллельные прямые оригинала — параллельными на изображении. Условливаемся, кроме того, куски плоскости изображать на первых порах параллелограммами так же, как это делается для граней параллелепипеда. Вызвать наглядное представление об изображении вертикально и горизонтально расположенных плоскостей оригинала удобно, если на чертеже параллелепипеда (рис. 5,*б*) стереть все линии, кроме тех, которые изображают какую-либо из граней параллелепипеда (рис. 5,*а* и 5,*в*). Тот же прием можно применить и для изображения различно расположенных прямых.

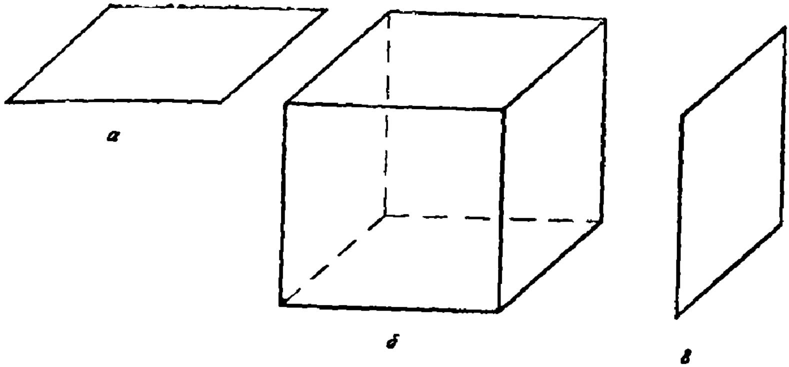


Рис. 5

Перечисленных интуитивно ясных представлений об изображении прямых и плоскостей вполне достаточно для доказательства теорем, которые позволят в дальнейшем дать строгое обоснование построения изображений.

На втором, третьем уроке, как только будет рассмотрено отношение параллельности прямых в пространстве, дается более строгое определение понятий «проекция» и «изображение». Различать эти понятия, как показала экспериментальная работа, полезно для усвоения приемов построения изображений.

2. Определение проекции

Допустим, что в нашем распоряжении имеется некоторое тело-оригинал, пучок проектирующих лучей и некоторая плоскость, принимаемая за плоскость проекций. Предположим, а при этом предположении и будем вести дальнейшее изложение материала, что проектирующие лучи и плоскость проекций пересекаются.

Назовем точку пересечения проектирующей прямой с плоскостью изображений *следом* проектирующей прямой на плоскости проекций.

Проведем через каждую точку оригинала проектирующую прямую до пересечения с картинной плоскостью. След проектирующей прямой на плоскости проекций называют *проекцией точки*; все множество следов — *проекцией оригинала*.

Эффективное[1] осуществление только что описанного процесса называется **проектированием** оригинала.

Необходимость эффективного осуществления проектирования для получения проекций является нежелательным, обременительным обстоятельством. Оказывается, что число точек, подлежащих эффективному проектированию для построения проекций фигур, может быть сведено до 2, 3 или 4.

Более рациональные приемы построения проекций, а в дальнейшем и приемы построения изображений, основываются на свойствах параллельной проекции.

Сопоставляя различные свойства оригинала и его проекции, приходим к выводу, что проекция теряет часть свойств, присущих оригиналу. Но вместе с тем ряд свойств оригинала сохраняется при проектировании, остается принадлежностью как оригинала, так и его проекции.

Например, проекции равных отрезков и равных углов оригинала не всегда остаются равными; проекцией окружности не всегда является окружность. В то же время:

1°. Проекция точки, принадлежащей данной линии оригинала, принадлежит проекции этой линии.

2°. Проекцией прямой является прямая.

3°. Проекции параллельных прямых параллельны.

4°. Проекция точки, делящей отрезок оригинала в данном отношении, делит проекцию отрезка в том же отношении.

Обобщенное свойство 4°. Отношение двух отрезков, расположенных на одной прямой или на параллельных прямых оригинала, равно отношению соответственных проекций этих отрезков.

Доказательство свойств 1° — 4° общеизвестно. Поэтому укажем только место в системе первых уроков по стереометрии, когда следует приступить к рассмотрению этих свойств с учащимися.

Сразу после определения проекции, используя понятие параллельности в пространстве, доказываются свойства 1°, 2°, 4°. Доказательство этих свойств проводится на моделях, в качестве которых используются каранда-

---

[1] Фактически выполняемое при помощи проектирующего аппарата.

ши, ученические ручки, спицы. Проектирующие прямые либо воображаются, либо обозначаются параллельными между собой спицами.

Рассматриваемые отношения воспринимаются наиболее доходчиво, если доказательства сопровождаются проектированием моделей с помощью солнечных лучей или проекционного аппарата.

Чертежи к доказательству рассматриваемых свойств выполняются позже, когда учащиеся освоятся как с построением, так и пониманием изображений.

Ознакомление со свойствами 1°, 2°, 4°, а позже и со свойством 3° ведется в порядке выполнения упражнений на уроке одновременно с изучением текущего материала.

Доказательство свойства 3° становится возможным после изучения параллельности плоскостей. Объяснения учителя и в этом случае целесообразно сопровождать демонстрацией проектирования параллельных прямых. При необходимости с помощью карандаша или спицы обозначаются по одной проектирующей прямой, проведенной через каждую из параллельных прямых. Таким образом определяются параллельные проектирующие плоскости, в которых лежат проектируемые прямые. После этого понимание доказательства уже не представляет затруднений.

Доказанные свойства 1°—4° позволяют упростить процесс получения проекции, отказаться от необходимости эффективно осуществлять процесс проектирования каждой точки оригинала.

В самом деле, уже для построения проекции прямой достаточно эффективно спроектировать лишь две точки прямой оригинала.

Оказывается, что для построения проекций плоской фигуры[1] достаточно непосредственным проектированием получить проекции трех не лежащих на одной прямой точек оригинала, проекции которых также не лежат на одной прямой. Назовем три точки оригинала и три точки картинной плоскости, удовлетворяющие этим требованиям, базисными точками оригинала, а их про-

[1] Оригинал, все точки которого лежат в одной плоскости: плоский многоугольник, плоская кривая линия.

екции — базисными точками картинной плоскости. Треугольники, определяемые базисными точками, назовем **базисными треугольниками**.

Для получения проекции пространственной фигуры[1] достаточно непосредственным проектированием построить проекции четырех не лежащих в одной плоскости точек оригинала, проекции которых по три не лежат на одной прямой. Назовем четыре точки оригинала и четыре точки картинной плоскости, удовлетворяющие выставленным требованиям, **базисными точками оригинала** и, соответственно, базисными точками картинной плоскости. Тетраэдр, определенный базисными точками оригинала, назовем **базисным тетраэдром**, а четырехугольник вместе с диагоналями, определяемый базисными точками картинной плоскости,— **базисным четырехугольником**.

После того как получены проекции базисных точек, проекции остальных точек как плоской, так и пространственной фигур могут быть построены на основании свойств 1°—4°, не прибегая к эффективному осуществлению процесса проектирования. Раскроем такую возможность.

Построение проекций плоских фигур. Возьмем в качестве оригинала четырехугольник $A'B'C'D'$ (рис. 6). Примем точки A', B' и C' за базисные и спроектируем их эффективно. Пусть их проекциями на картинной плоскости будут точки A, B и C.

После построения проекций базисных точек проекция любой четвертой точки, например вершины D', может быть получена без привлечения проектирующего аппарата.

В самом деле $\triangle ABC$ явится проекцией $\triangle A'B'C'$. Проведем в четырехугольнике $A'B'C'D'$ диагонали, точку их пересечения обозначим K'. Проекцией отрезка $A'C'$ в соответствии со свойством 2° будет отрезок AC. Проекция точки K' может быть построена в силу свойств 1° и 4°: точка K должна лежать на отрезке AC и делить его в отношении $AK : KC = A'K' : K'C'$.

Соединяя прямой точки B и K, получим проекцию прямой $B'K'$ (свойство 1°, 2°). Проекцию точки D' после

---

[1] Оригинал, все точки которого не умещаются в одной плоскости.

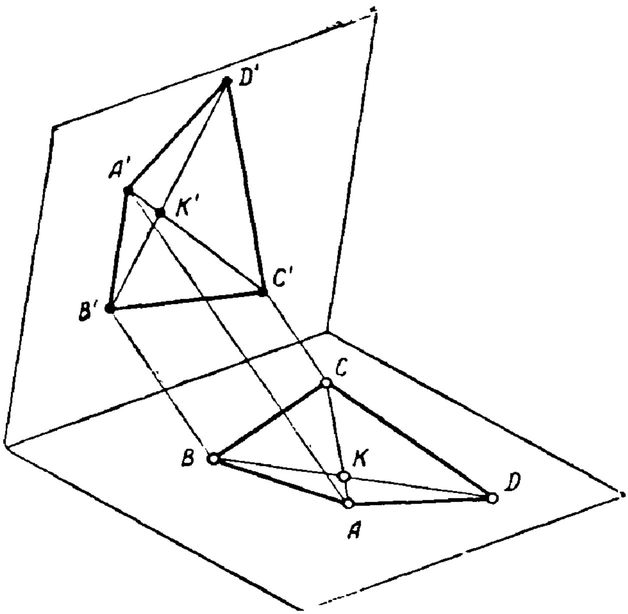


Рис. 6

этого получим, если построим отрезок KD—четвертый пропорциональный к трем известным BK, $B'K'$ и $K'D'$ (свойство 4°) [1]. Соединив прямыми точки C и D, A и D, получим четырехугольник $ABCD$ — проекцию четырехугольника $A'B'C'D'$.

Рассмотренным методом, не прибегая к осуществлению эффективного проектирования, может быть построена проекция как любой точки оригинала, так и любой точки плоскости оригинала.

Построение проекций пространственных фигур. Пусть оригиналом, подлежащим проектированию, будет многогранник $D'M'$ (рис. 7). Примем за базисные точки оригинала вершины A', B', C' и D' рассматриваемого многогранника. Спроектируем эффективно базисные точки A', B', C' и D' оригинала по какому-либо наперед заданному направлению на картинную плоскость. Пусть их проекциями, например, по направлению $B'B$ будут точки A, B, C и D картинной плоскости.

[1] На этом примере рассмотрен характер использования свойств 1°—4° для построения проекций. В дальнейшем явная ссылка на эти свойства будет проводиться реже.

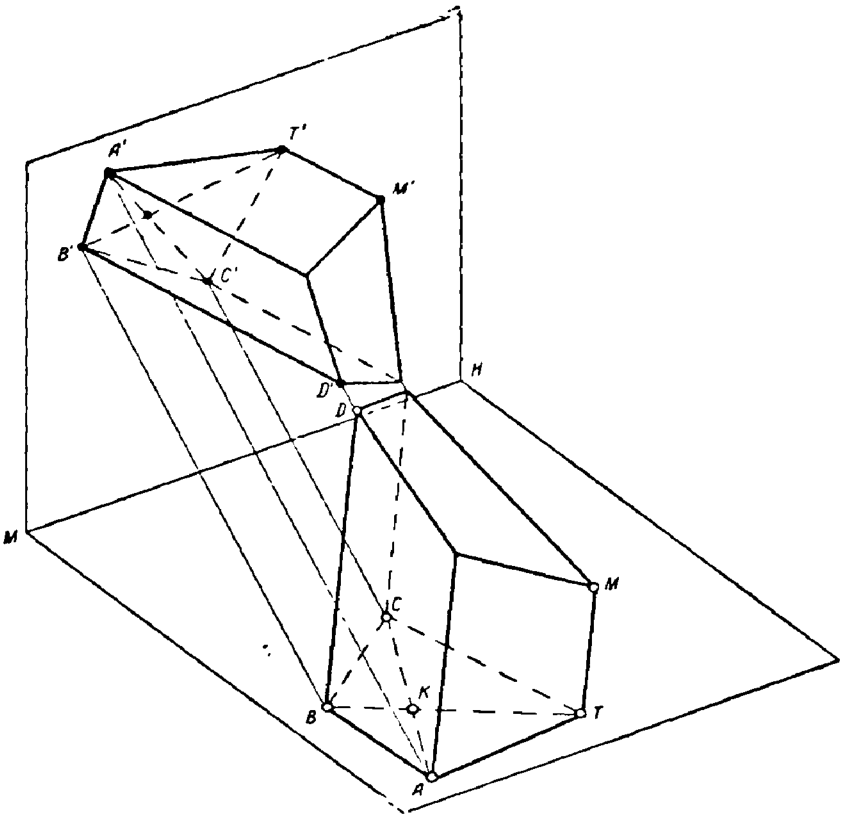


Рис. 7

Рассмотрим теперь способ, позволяющий построить проекцию любой четвертой точки оригинала, не прибегая к осуществлению эффективного проектирования.

Найдем, например, проекцию точки M', для чего в оригинале проведем следующее дополнительное построение: через точку M' проведем прямую, параллельную прямой $D'B'$, до пересечения с плоскостью треугольника $A'B'C'$. На нашем чертеже построенная прямая $M'T'$ совпадает с ребром данного многогранника. Точкой пересечения прямой $M'T'$ с плоскостью основания служит вершина T'. Построим проекцию точки M'.

После того как в оригинале определилось положение точки T', становится возможным построение ее проекции методом, описанным выше. На рис. 7 выполнено построение проекции точки T' как точки, принадлежащей плоскости треугольника $A'B'C'$. Положение точки M после этого определится, если через точку T проведем прямую, параллельную прямой DB, и отложим на этой прямой отрезок MT — четвертый пропорциональный к трем известным $B'D'$, BD и $M'T'$ (расширенное свойство 4°).

Таким же образом строятся изображения остальных вершин многогранника.

За базисные точки можно принимать различные точки оригинала. Выгоднее, однако, за базисные точки принимать вершины многогранников.

3. Определение изображения

Выше было дано определение «проекции». Рассмотрим теперь понятие «изображение».

Определение. Изображением геометрического тела называется проекция оригинала, подобного данному геометрическому телу.

В соответствии с приведенным определением проекция есть изображение как проектируемого оригинала, так и всего множества фигур, подобных ему. Вместе с тем изображение не всегда есть проекция конкретного оригинала, по которому оно строилось. Например, изображение здания на листе бумаги есть проекция не самого здания, а проекция подобной копии (модели) здания.

Из этого примера видно, что необходимость различать понятия «проекция» и «изображение» отражает потребность повседневной жизненной практики.

Для построения изображения в соответствии с его определением достаточно спроектировать какую-либо фигуру (при этом нам безразлично какую, лишь бы ее проекция уместилась на отведенном для этой цели листе бумаги) из совокупности фигур, подобных той, изображение которой строится. Из вышеизложенного следует, что для построения изображения к эффективному проектированию придется прибегать лишь для построения изображения базисных точек, проектируемой фигуры.

Нетрудно обнаружить, что изображением даже одних и тех же базисных точек оригинала может быть довольно разнообразное сочетание базисных точек картинной плоскости. Убедиться в этом можно, если, не меняя направления проектирования, сначала фиксировать положение оригинала, а затем либо подобно преобразовывать оригинал, либо, сохраняя размеры оригинала, менять его положение относительно картинной плоскости. Изображение базисных точек оригинала будет различным и в том случае, если, не меняя ни размеров оригинала, ни его положения относительно картинной плоскости, изменять направление проектирования.

В таком случае спрашивается, какие же точки картинной плоскости могут быть приняты за изображение базисных точек оригинала?

Ответ на этот вопрос дается первой и второй теоремами существования.

Оказывается, что за изображение трех базисных точек плоского оригинала могут быть приняты любые три не лежащие на одной прямой точки картинной плоскости. За изображение четырех базисных точек пространственного оригинала могут быть приняты любые четыре по три не лежащие на одной прямой точки картинной плоскости [1].

Высказанное утверждение следует понимать в том смысле, что для каждого выбранного сочетания базисных точек оригинала и изображения всегда найдется такая фигура (из множества подобных той, изображение которой строится), такое ее положение относительно картинной плоскости и такое направление проектирования, при наличии которых и осуществлении эффективного проектирования оригинала базисные точки плоскости изображений будут проекциями базисных точек оригинала.

Доказательство этих положений действительно освободит процесс построения изображений от необходимости прибегать к осуществлению эффективного проектирования. Базисные точки можно будет выбирать произвольно со свободой выбора, определяемой понятием ба-

---

[1] За изображение трех базисных точек плоской фигуры могут быть приняты три лежащие на одной прямой точки картинной плоскости. За изображение базисных точек пространственной фигуры на картинной плоскости могут быть приняты четыре точки, из которых любые три могут лежать на одной прямой.

Однако в данной работе не рассматриваются такие вырождающиеся случаи изображения базисных точек оригинала.

зисных точек; дальнейшее же построение изображения будет осуществляться на основе свойств 1° — 4°.

За базисные точки различных индивидуальных представителей подобных между собой оригиналов следует принимать сходственные точки подобных фигур и геометрических тел.

4. Первая теорема существования

Докажем важную теорему, которая позволит освободить построение изображений планиметрических оригиналов от необходимости прибегать к осуществлению эффективного проектирования.

Первая теорема существования. За изображение любого наперед заданного треугольника оригинала может быть принят любой треугольник картинной плоскости.

Возьмем в качестве оригинала произвольный треугольник $A'B'C'$ (рис. 8а) и докажем, что произвольный треугольник ABC (рис. 8б) картинной плоскости является его изображением. В соответствии с определением изображения для доказательства теоремы необходимо установить, что среди треугольников, подобных

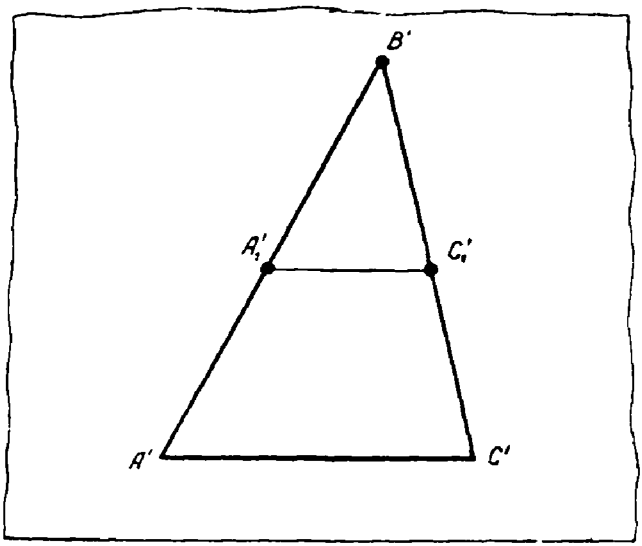


Рис. 8а

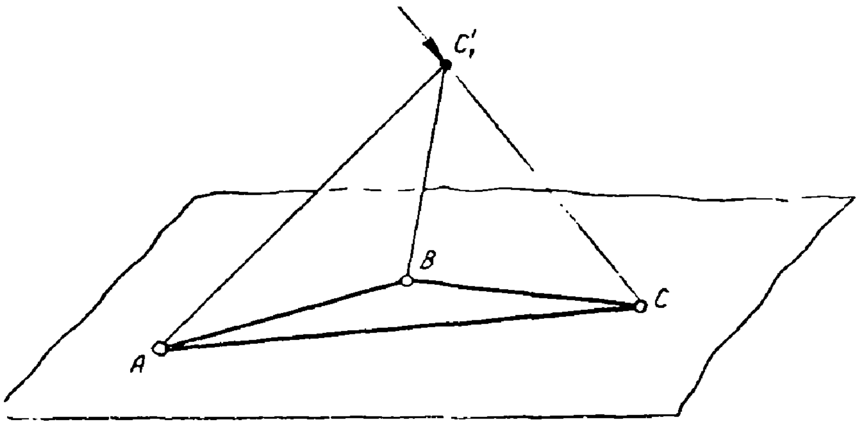


Рис. 86

треугольнику $A'B'C'$, существует такой вспомогательный треугольник, такое его положение относительно картинной плоскости и такое направление проектирования, что треугольник ABC будет проекцией этого вспомогательного треугольника. Покажем, что перечисленные требования могут быть выполнены.

Совместим сторону $A'B'$ треугольника оригинала со стороной AB треугольника ABC, если эти стороны равны. В случае если эти стороны окажутся не равными, то предварительно проведем подобное преобразование треугольника $A'B'C'$ так, чтобы, например, сторона A'_1B' равнялась бы стороне AB, и после этого совместим сторону A'_1B' со стороной AB. Вершина C'_1 может занимать различное положение в пространстве. Фиксируем одно из возможных положений треугольника ABC'_1 ($\triangle ABC'_1 \equiv \triangle A'_1B'C'_1$). Соединим, далее, вершины C'_1 и C прямой и примем направление $C'_1\,C$ за направление проектирования.

При фиксированном размере треугольника $A'_1B'C'$, при фиксированном его положении и направлении проектирования треугольник ABC является проекцией треугольника ABC'_1 и, следовательно, изображением треугольника $A'B'C'$. В самом деле, проекцией точки C'_1 является точка C, проекцией точек A'_1 и B' при том же направлении проектирования являются точки A и B.

При вращении треугольника $A'_1B'C'_1$ около стороны $A'_1B' = AB$ вершина C'_1 будет занимать различные положения, для каждого из которых определяется различное направление проектирования. Перенося треугольник $A'_1B'C'_1$ параллельно самому себе по направлению проектирования, обнаруживаем, что треугольник оригинала может занимать различные положения относительно картинной плоскости.

Однако для целей построения изображения нас чаще всего не будет интересовать ни положение оригинала относительно картинной плоскости, ни его размеры, ни направление проектирования, при котором получено изображение. Для обоснования приемов построения изображений достаточно факта, что существует фигура, подобная данной, существует такое направление проектирования и такое положение оригинала относительно плоскости изображений, при наличии которых и при осуществлении эффективного процесса проектирования данный треугольник картинной плоскости служит изображением данного треугольника оригинала.

Один из моментов доказательства этой теоремы с использованием для этой цели шарнирной модели пирамиды[1] (рис. 15) зафиксирован на рис. 9. Удобство

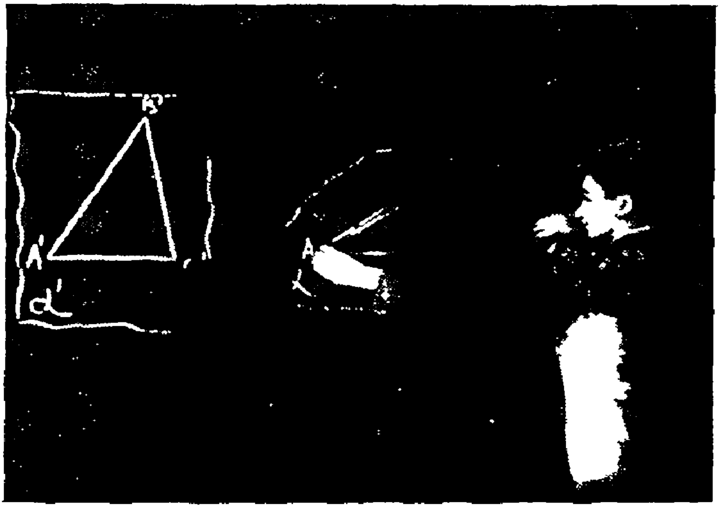


Рис. 9

[1] Эта модель включена в обязательный список наглядных пособий для школы.

этой модели состоит в том, что на ней можно провести доказательство теоремы без чертежа. Разъединенные части бокового ребра в этом случае позволяют для каждого положения треугольника оригинала $A'B'C'$ и треугольника ABC картинной плоскости обозначить направление проектирования.

Применение модели для доказательства первой теоремы существования позволяет наглядно и убедительно поставить задачу доказательства теоремы, раскрыть ее содержание и различие понятий «проекция» и «изображение». С применением модели учащиеся наглядно убеждаются, что для каждого наперед заданного треугольника оригинала существует такой вспомогательный треугольник, подобный данному, такое его положение в пространстве и такое направление проектирования, при которых произвольный треугольник картинной плоскости является проекцией вспомогательного треугольника и изображением данного.

5. Построение изображений плоских фигур

Выше было установлено, что для построения проекции планиметрического оригинала необходимо спроектировать (эффективно) лишь базисные точки. В соответствии с первой теоремой существования для построения изображений плоских фигур оказывается возможным вовсе отказаться от необходимости прибегать к эффективному проектированию.

В самом деле, за изображение базисных точек оригинала, в силу первой теоремы существования, могут быть приняты три не лежащие на одной прямой точки картинной плоскости.

Изображение остальных точек оригинала после этого может быть получено только на основе свойств 1°—4°, т. е. тоже без осуществления эффективного проектирования.

Рассмотрим на примере построения изображения произвольного пятиугольника, как фактически осуществляется построение изображения в этом случае.

В соответствии с первой теоремой существования за изображение базисных точек A', B' и C' пятиугольника $A'B'C'D'E'$ (рис. 10) на картинной плоскости принимаем три произвольные точки A, B и C (рис. 11). Отрезки AB

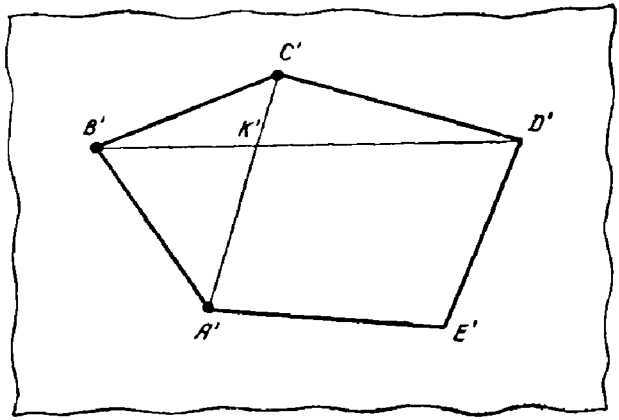


Рис. 10

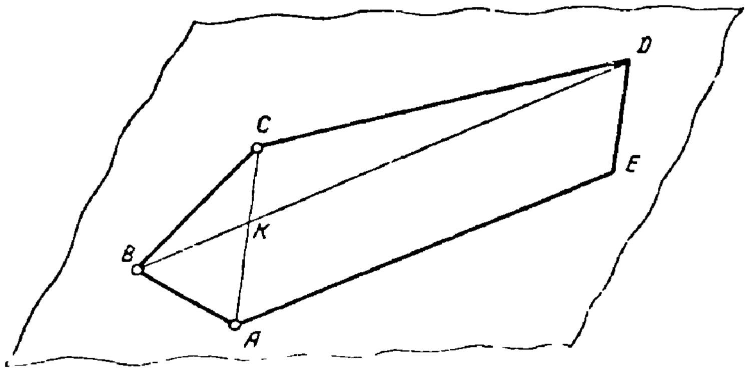


Рис. 11

и BC служат изображением сторон $A'B'$ и $B'C'$ пятиугольника оригинала.

Для построения изображения точки D' проведем в пятиугольнике $A'B'C'D'E'$ диагонали $A'C'$ и $B'D'$, обозначив точку их пересечения буквой K'. Отрезок AC будет изображением диагонали $A'C'$, а точка K, делящая отрезок AC в отношении $AK:KC=A'K':K'C'$, будет изображением точки K'. Точки B и K определяют прямую, на которой лежит изображение точки D'. Изображение точки D' получим, если на продолжении отрезка BK от точки K отложим отрезок KD—четвертый пропорциональный к трем известным отрезкам $B'K'$, $K'D'$ и BK.

Проведя в пятиугольнике $A'B'C'D'E'$ диагональ $B'E'$, рассмотренным уже путем строим изображение вершины E'. Пятиугольник $ABCDE$ после этого будет изображением пятиугольника $A'B'C'D'E'$.

К рассмотренному общему методу построения изображений следует прибегать только при построении изображений оригиналов произвольной структуры. Ниже рассматриваются частные приемы, рационализирующие построение изображений фигур, наиболее часто встречающихся в курсе стереометрии средней школы.

Построение изображений квадрата, ромба, прямоугольника, параллелограмма. Построение изображений перечисленных многоугольников на основе свободного выбора базисных точек и свойств 1°—4° выполняется особенно просто.

За изображения трех вершин, например D', A' и B', квадрата (рис. 12,*а*) могут быть приняты три произвольные точки D, A и B картинной плоскости или, что то же самое, за изображение сторон $A'B'$ и $A'D'$ могут быть выбраны два отрезка AB и AD, образующие между собой произвольный угол и имеющие произвольную длину (рис. 12,*б*). Изображение сторон $B'C'$ и $D'C'$ получим, если в соответствии со свойством 3° через точки B и D проведем прямые, соответственно параллельные прямым AD и AB, до пересечения в C.

Из приведенных соображений следует, что за изображение квадрата может быть принят произвольный параллелограмм картинной плоскости.

Точно таким путем строятся изображения ромба, прямоугольника, параллелограмма.

За изображение каждой из этих фигур может быть принят произвольный параллелограмм, и нам нет необ-

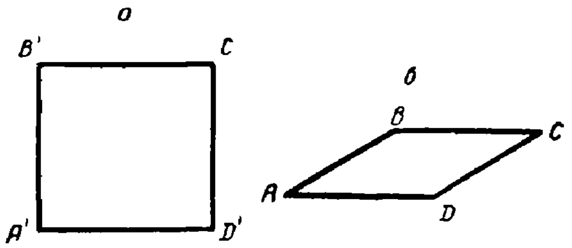


Рис. 12

ходимости связывать себя ни с раз и навсегда заданным соотношением длин сторон параллелограмма-изображения, ни с фиксированными углами между этими сторонами.

Построение изображения правильного шестиугольника. Для построения изображения правильного шестиугольника обратимся к оригиналу (рис. 13) и рассмотрим некоторые его свойства, которые определят способ построения изображения.

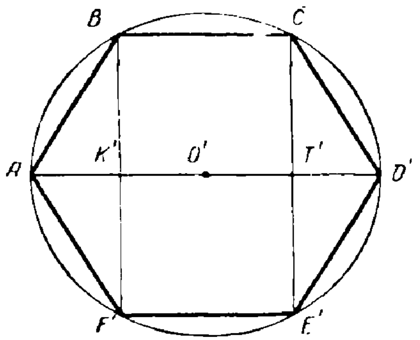


Рис. 13

Проведем в шестиугольнике диагонали $B'F'$ и $C'E'$, образовавшийся при этом четырехугольник $B'C'E'F'$ — прямоугольник. Диагональ $A'D'$ делит стороны прямоугольника $B'F'$ и $C'E'$ пополам и делится сама этими сторонами и центром окружности на равные отрезки $A'K' = K'O' = O'T' = T'D'$.

Обнаруженных свойств достаточно для построения изображения шестиугольника. В самом деле, за изображение прямоугольника $B'C'E'F'$ может быть принят в плоскости проекций произвольный параллелограмм $BCEF$ (рис. 14). В силу свойства 4°, точки K' и T' изобразятся точками K и T, делящими стороны BF и CE пополам; точка O изобразится серединой отрезка KT, а изображение вершин A и D получается на прямой KT, если отложим от точек K и T отрезки, равные $\frac{KT}{2} = KO$.

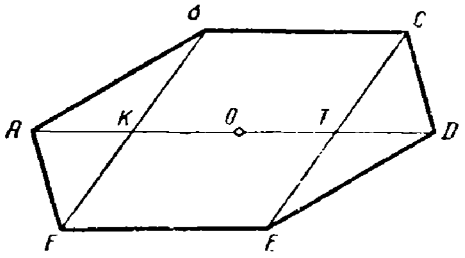


Рис. 14

На основе свободного выбора базисных точек и свойств 1°—4° может быть построено изображение любой плоской фигуры.

6. Вторая теорема существования

Вторая теорема существования. За изображение любого наперед заданного тетраэдра на картинной плоскости может быть принят любой четырехугольник вместе с его диагоналями[1].

Теорему в школе не следует доказывать. Содержание же ее может быть раскрыто достаточно точно.

Методика ознакомления учащихся со второй теоремой существования. Сразу же после введения понятия

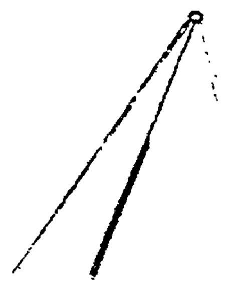


Рис. 15

о базисе эффективным проектированием какой-либо треугольной пирамиды, принимаемой за базисный тетраэдр оригинала, демонстрируется, что за изображение вершин тетраэдра (базиса оригинала) может быть при-

---

[1] В данной работе не рассматриваются вырождающиеся четырехугольники (например, четырехугольники, три вершины которых лежат на одной прямой). В средней школе нет необходимости подниматься до такой степени абстракции истолкования геометрических понятий. В то же время необходимо иметь в виду, что некоторые вырождающиеся четырехугольники могут быть приняты за изображение тетраэдра.

нято довольно разнообразное сочетание базисных точек картинной плоскости. Для такого эксперимента удобна шарнирная модель пирамиды (рис. 15), так как на ней изменение базиса изображения можно продемонстрировать не только в зависимости от положения оригинала относительно картинной плоскости, ни только от изменения направления проектирования, но и в зависимости от изменения размеров оригинала при подобном преобразовании.

Факт же, что за изображение базисных точек оригинала могут быть приняты любые четыре по три не лежащие на одной прямой точки картинной плоскости, принимается без доказательства.

Текст теоремы учащимся полезно записать в тетради.

При ознакомлении учащихся со второй теоремой существования еще раз подчеркивается различие между изображениями и проекцией на примере постановки за-

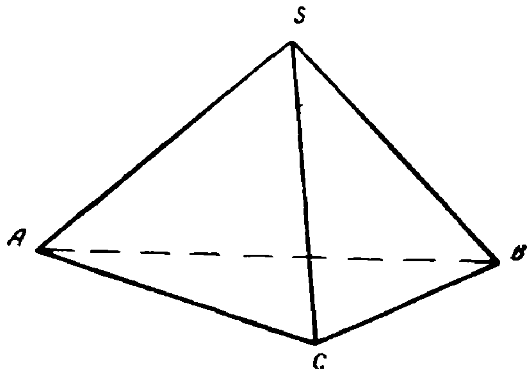


Рис. 16

дачи доказательства этой теоремы. Учащиеся должны понимать, что четырехугольник $SBCA$ (рис. 16) не обязательно будет проекцией пирамиды (рис. 15), за изображение которой он может быть принят. Учащиеся должны понимать, что четырехугольник $SBCA$ является изображением пирамиды в том смысле, что среди пирамид, подобных данной, существует такая пирамида, такое ее положение и такое направление проектирования, при которых четырехугольник $SBCA$ будет проекцией вспомогательной пирамиды и, следовательно, изображением данной пирамиды.

7. Построение изображений пространственных фигур

Покажем, что с доказательством второй теоремы становится возможным совершенно освободиться от необходимости прибегать к эффективному проектированию при построении изображений стереометрических оригиналов.

В самом деле, за изображение базисных точек A', B', C' и D' (базисный тетраэдр $D'A'B'C'$) многогранника $T'D'$, представленного на рис. 17, в соответствии со второй теоремой существования на картинной плоскости могут быть приняты (рис. 18) четыре по три не лежащие на одной прямой точки A, B, C и D (базисный четырехугольник).

Изображение любой пятой точки оригинала, например вершины M', может и должно быть построено. Для этого сначала в оригинале через точку M' проводим прямую, параллельную ребру $D'B'$, до пересечения с плоскостью базисного треугольника $A'B'C'$ (в рассматриваемом примере эта прямая совпадает с ребром

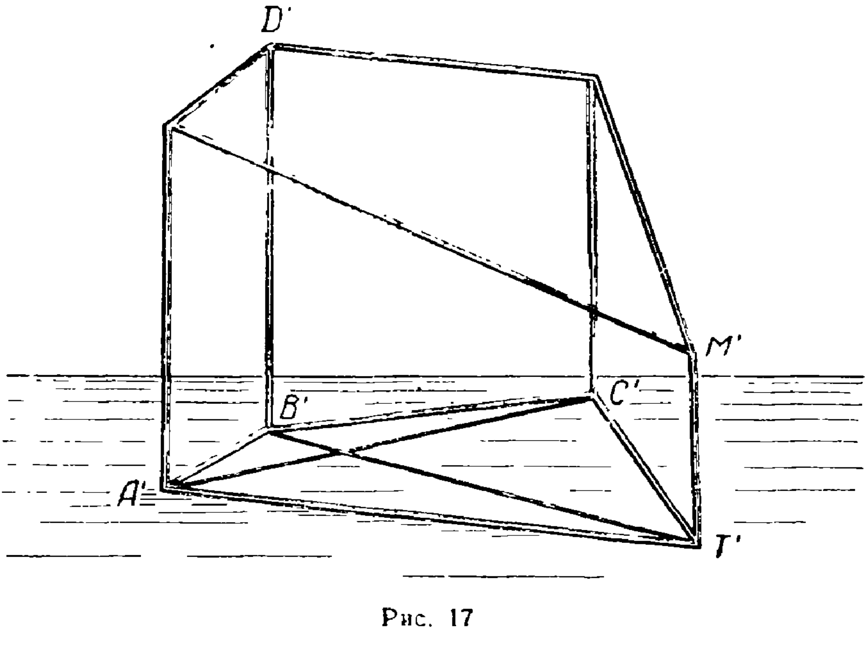


Рис. 17

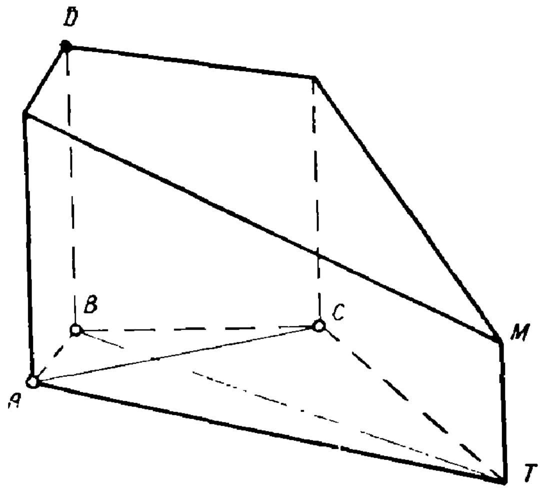


Рис. 18

$M'T'$ заданного многогранника). По базисным точкам A', B', C' и A, B, C строим точку T — изображение точки T'. Изображение вершины M' после этого получим, если на прямой, проведенной через точку T параллельно BD, отложим отрезок TM — четвертый пропорциональный к трем известным BD, $B'D'$ и $T'M'$. Таким же методом может быть построено изображение любой другой точки оригинала и изображение оригинала в целом (рис. 18).

Из рассмотренного общего способа построения изображений стереометрических оригиналов видно, что произвольно со свободой произвола, определяемой второй теоремой существования, может выполняться изображение четырех и только четырех не лежащих в одной плоскости точек оригинала (базисных точек). Изображения остальных точек оригинала должны быть построены с привлечением свойств 1°—4°.

При построении изображений стереометрических оригиналов рассмотренным способом, как и при построении изображений планиметрических оригиналов, мы чаще всего не будем знать ни положения оригинала относительно картинной плоскости, ни направления проектирования, при которых могло бы быть получено изображение, если бы процесс проектирования осуществлялся эффективно.

Построение изображений многогранников. Построение изображений многогранников сводится к построению изображений вершин и ребер оригинала. Для большей наглядности чертежа иногда строится изображение высот и некоторых других линий.

Упрощение общих методов построения изображений удается достигнуть за счет удачного выбора базисных точек, за счет удачного выбора порядка построения изображения отдельных элементов оригинала.

За базисные точки в оригинале могут быть приняты любые четыре точки, лишь бы они не лежали в одной плоскости. Однако наиболее простые схемы построения изображения получаются, если за базисные точки принимать вершины многогранников. При этом три из них выбирают в одном из оснований, а четвертую — вне этого основания. Три базисные точки в оригинале основания и одна вне основания выбираются и при построении изображений тел вращения.

При такой системе выбора базисных точек, кроме упрощения схем построения изображения, удается достигнуть материальной осязаемости построений. Действительно, по трем базисным точкам основания оригинала и им соответствующим точкам на картинной плоскости, как и при построении модели оригинала, сначала строится изображение основания оригинала. Затем, используя четвертую пару базисных точек, строят изображения остальных вершин, изображения ребер в многогранниках, образующих в цилиндрах и конусах изображения других необходимых линий оригинала.

Построение изображения оснований следует проводить методами построения изображений планиметрических оригиналов [1], широко используя упрощающие приемы. При этом надо иметь в виду то обстоятельство, что внешне упрощающие приемы часто кажутся не связанными с построением изображений планиметрических оригиналов по трем базисным точкам, так как изображения в этом случае появляются сразу большими комплексами точек. Однако каждое такое построение требует для его выполнения свободного выбора трех базисных точек, а потому при построении изображений стереометрических оригиналов каждое из построений ос-

[1] См. § 1, п. 5.

нования, осуществляемых упрощающими методами, равноценно использованию права свободного выбора на картинной плоскости трех базисных точек из четырех.

Упрощение построения изображений может быть достигнуто и за счет установления подходящей последовательности в чередовании выбора базисных точек и построения изображения. Нет, например, необходимости для построения изображения выбирать на картинной плоскости положение сразу всех четырех базисных точек. Иногда бывает выгодно сначала фиксировать три базисные точки изображения, соответствующие трем базисным точкам основания оригинала, и по ним построить изображение основания. Так как после этого при любой из схем построения изображения основания остается право свободного выбора еще четвертой базисной точки, то выбирают ее и после этого достраивают изображение в целом.

Только одно такое изменение порядка, не нарушая верности и удобовыполнимости построения изображения, позволяет сравнительно просто достигнуть наглядности изображения.

Построение изображений треугольных пирамид. Задача о построении изображений треугольных пирамид полностью решается на основании второй теоремы существования.

Действительно, за изображение любой наперед заданной пирамиды (например, правильной треугольной пирамиды, у которой боковое ребро в два раза больше стороны основания) на картинной плоскости может быть принят любой четырехугольник вместе с диагоналями, если никакие три вершины его не лежат на одной прямой. Каждое из изображений, представленных, например, на рис. 19, является верным, удобовыполнимым, но не каждое—наглядным.

На рис. 19,*а* высота SO изображена не вертикальной прямой, и это приводит к тому, что оригинал пирамиды мы представляем наклонным. Изображение «б» — не наглядно, так как изображение высоты SO совпадает с изображением бокового ребра SC. Отсутствие штриховых линий на изображении «в» также затрудняет воспроизведение оригинала, особенно тогда, когда не обозначены вершины. Изображение «г» скорее создаст представление о правильном тетраэдре, чем о правиль-

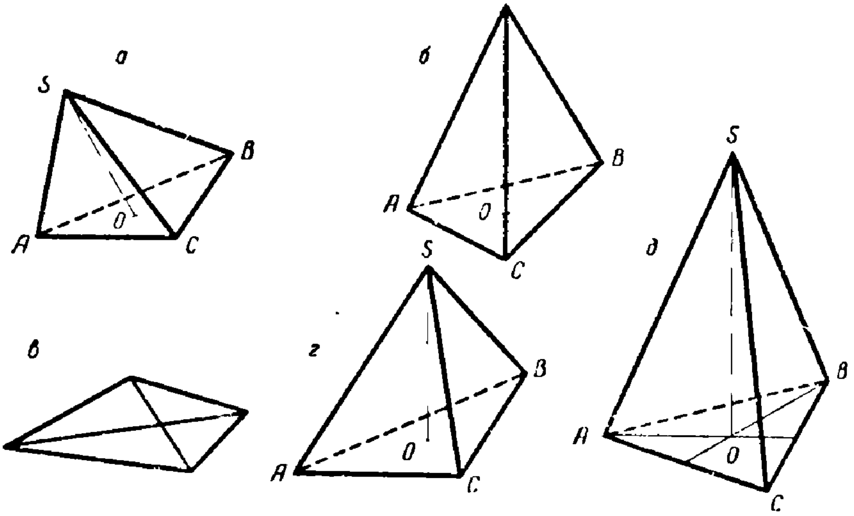


Рис. 19

ной пирамиде, у которой боковое ребро в два раза больше стороны основания.

Полнее вызывает представление об оригинале изображение «д». Это изображение мы воспринимаем как пирамиду, у которой боковые ребра больше сторон основания. Штриховые линии на изображении создают представление различной удаленности ребер основания от наблюдателя. Ребро AB воспринимается как невидимое, что и было бы на самом деле, если оригинал пирамиды был изготовлен из непрозрачного материала. Вертикальное положение отрезка SO вызывает представление высоты пирамиды.

Высота[1] пирамиды, как и изображения любых дру-

[1] В данном случае речь идет об изображении высоты, а не о высоте оригинала. Установившееся употребление одного и того же термина для обозначения двух понятий не вносит путаницы, во-первых, потому, что по контексту обычно ясно, в каком из двух значений употребляется тот или иной термин. В противном случае делаются уточнения, ссылки; во-вторых, потому, что изображение чаще всего воспринимается нами как эквивалент, заменитель оригинала.

Однако в обозначениях оригинал и изображение следует различать, и в данной работе такое различие проводится. В примере вызвавшим ссылку, оригинал обозначается $S'O'$ (буквами с индексами), а изображение—SO (буквами без индексов).

гих линий заданного оригинала, должна быть построена, ни одна из этих линий на изображении не может быть проведена произвольно после того, как определилось положение базисных точек. В рассмотренных примерах изображения правильной пирамиды отрезок SO действительно обозначает высоту оригинала.

Для построения изображения высоты достаточно построить изображение двух ее точек. Одна из этих точек, точка S, определилась при построении изображения вершин пирамиды. За вторую точку в рассматриваемом примере удобно принять изображение основания высоты (точку O). Для ее построения обратимся к оригиналу и определим положение точки O' в оригинале.

В правильной треугольной пирамиде точка O' является центром основания и лежит на пересечении медиан основания. Это свойство основания высоты пирамиды позволяет построить точку O — изображение точки O' — без эффективного использования оригинала. На рис. 19 положение точки O получено как точки пересечения медиан треугольника основания пирамиды.

В рассмотренном примере изображение высоты строилось после того, как было закончено построение изображения собственно пирамиды. При такой последовательности построений не всегда легко удается получить наглядное изображение. Действительно, при одновременном выборе положения всех четырех базисных точек трудно предугадать выбор положения вершины S так, чтобы изображение высоты, построенной в дальнейшем, оказалось бы вертикальной прямой.

Однако наглядности изображения удается достигнуть сравнительно быстро и просто, если несколько изменить рассмотренную выше последовательность выполнения построения изображения пирамиды с высотой. Удобно, например, сначала построить изображение основания пирамиды — треугольника ABC (рис. 20,*а*). В этом треугольнике построить изображение основания высоты пирамиды — точку O (рис. 20,*б*), провести через эту точку вертикальную прямую OP (рис. 20,*в*), и только после этого, воспользовавшись правом свободного выбора[1] четвертой базисной точки, принять за

[1] Свободой выбора, определяемой второй теоремой существования.

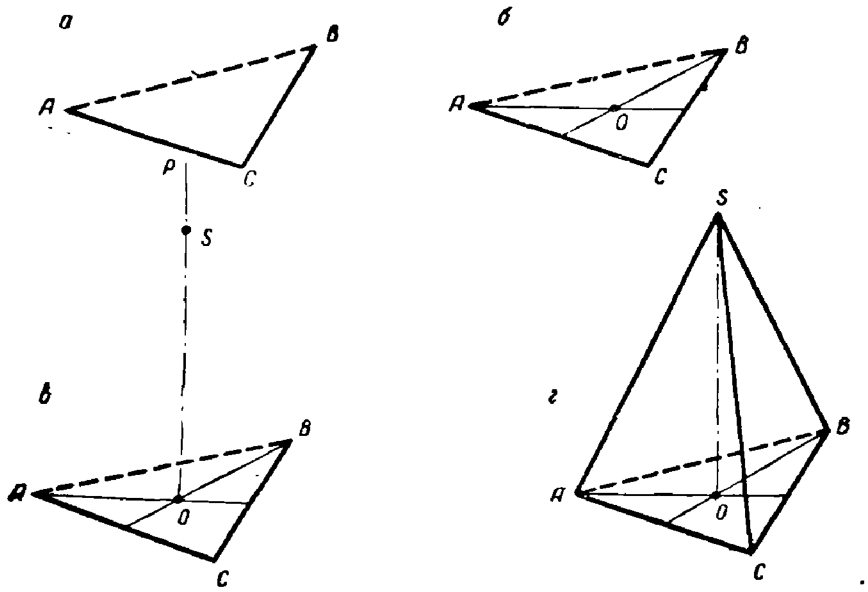


Рис. 20

изображение вершины пирамиды одну из точек прямой OP (точка S на рис. 20,*в*), определившейся при такой последовательности построений раньше, чем положение вершины S. Наконец, соединив вершину S с точками A, B и C, достраивается изображение пирамиды (рис. 20,*г*).

Вышеописанная последовательность выполнения построений дает верное, удобовыполнимое и наглядное изображение. Однако выполнение построений по рассматриваемой схеме осуществимо только в том случае, если нам заранее известно положение основания высоты пирамиды, изображение которой должно быть построено.

Вопрос об определении положения основания высоты может быть решен до построения изображения, вне всякой связи с построением изображения. Положение основания высоты пирамиды можно установить и на первоначально выполненном не наглядном изображении.

Построение изображений многоугольных пирамид. Техника построения изображений многоугольных пирамид также довольно проста.

В оригинале за базисные точки принимают вершины пирамиды: три — в основании и четвертую — вне основания — собственно вершину пирамиды. На плоскости проекций фиксируют соответственные базисные точки изображения.

По первым трем базисным точкам, взятым в плоскости основания пирамиды оригинала, и им соответствующим базисным точкам плоскости проекций строят изображение основания пирамиды. После этого достраивается изображение в целом.

Как и в случае построения изображений треугольных пирамид, не следует за изображение четырех базисных точек оригинала принимать сразу четыре базисные точки плоскости проекций. Целесообразно положение вершины S — четвертой базисной точки на плоскости проекций — выбирать после того, как будет построено изображение основания пирамиды и на нем — изображение основания высоты пирамиды. За изображение вершины пирамиды в этом случае следует принимать одну из точек вертикальной прямой, проведенной через изображение основания высоты пирамиды.

Построение изображений призм. Построение изображений призм проводится наиболее просто, если за базисные точки в оригинале принимать вершины призм: три — в одном основании призмы и четвертую—в другом основании. Три базисные точки оригинала, представляющие, например, вершины нижнего основания, и им соответствующие базисные точки картинной плоскости позволяют приемами, рассмотренными выше, построить изображение нижнего основания призмы. Четвертая пара базисных точек при обусловленном выборе базиса в оригинале обеспечивает удобовыполнимость построения всего изображения.

Конкретный прием построения изображений призм рассмотрим на частном примере.

Пример 1. Построить изображение правильной треугольной призмы со стороной основания a и высотой H.

Примем в оригинале за базисные точки три вершины (A_1', B_1', C_1') нижнего основания и вершину A' верхнего основания. Пусть, далее, изображением базисного треугольника A_1' B_1' C_1' в плоскости проекций будет базисный треугольник $A_1B_1C_1$ (рис. 21,a). Выберем на картинной плоскости четвертую базисную точку A так, чтобы ребро A'_1, A' изображалось вертикальной прямой A_1A (рис. 21,*б*). Такой выбор осуществляется просто, если предварительно через A_1 провести вертикальную прямую и на ней, сообразуясь с размерами оригинала, фиксировать точку A.

Построение изображения остальных точек призмы не может после этого осуществляться произвольно: все построения проводятся на основе свойств параллельной проекции. Действительно, в оригинале рёбра A'_1A', B'_1B', C'_1C' равны и параллельны, следовательно, и их изображения B_1B и C_1C должны быть равны и парал-

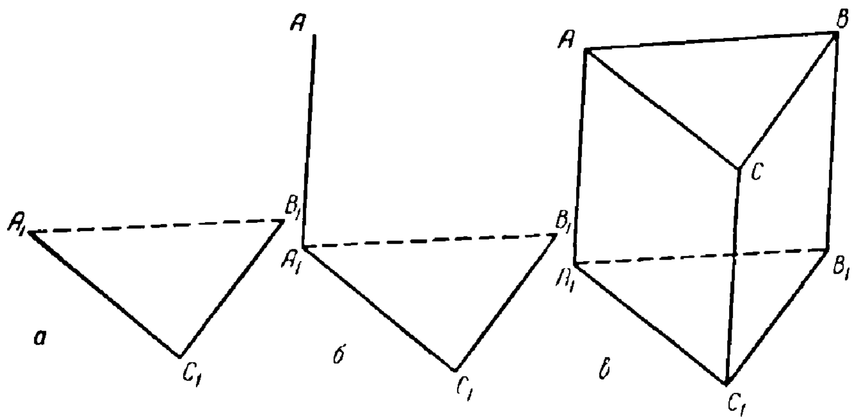


Рис. 21

лельны отрезку A_1A, размер и положение которого на картинной плоскости обусловливаются выбором четвертой базисной точки.

Изображение в таком случае может быть достроено следующим образом: через точки B_1 и C_1 проводим прямые, параллельные A_1A, и откладываем на них отрезки B_1B и C_1C, равные A_1A (рис. 21,*в*). Соединив прямыми точки A, B и C, получаем изображение правильной треугольной призмы.

Рекомендуемая схема выполнения построений дает верные, удобовыполнимые и наглядные изображения всех геометрических тел, с которыми приходится сталкиваться в средней школе.

§ 2. МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ В КУРСЕ СТЕРЕОМЕТРИИ

В процессе экспериментальной работы систематически изучался вопрос об обучении учащихся решению задач на построение на проекционном чертеже и в воображении. С эффективным методом решения задач на построение по Адамару[1], как показывает изучение состояния преподавания математики, приходится эпизодически сталкиваться в связи с решением вычислительных задач и задач на доказательство как в курсе стереометрии IX класса, так и, главным образом, в курсе X класса. Такого рода знакомством с этим методом можно и ограничиться.

Как показал опыт преподавания, обучение решению задач на построение лучше начинать с обучения решению задач на проекционном чертеже, так как понимание этих задач не требует хорошо развитого пространственного воображения учащихся. Более того, в процессе решения этих задач пространственное воображение настолько развивается, что с определенного момента учащимся становится посильно освоение задач на построение, решаемых в воображении. В этом случае учащиеся после знакомства с новым методом на примере решения одной-двух задач остальные задачи решают самостоятельно. Такой порядок прохождения материала не исключает возможности рассмотрения решения отдельных задач на построение в воображении до систематического изучения метода.

Обучение решению задач на построение на проекционном чертеже строится так, чтобы учащиеся знако-

---

[1] См. «Введение», стр. 4—5

мились с этими задачами в порядке возрастающей трудности, и так, чтобы ранее решаемые задачи в основном подготавливали учащихся к пониманию решения последующих задач. Последнее достигается тем, что в работе рассматриваются следующие типы задач: а) задачи, решаемые при введении проекционного чертежа; б) задачи-упражнения по текущему материалу; в) задачи на построение точек и линий пересечения прямых и плоскостей; г) программные задачи на построение; д) задачи на построение сечений.

1. Введение проекционного чертежа

Под решением задач на проекционном чертеже понимают решение позиционных и метрических задач на полном изображении.

В школе не следует давать формально-логического определения проекционного чертежа. Понятие о нем удобнее всего ввести через изображение оригинала определенной структуры. Невнимание существующих учебных руководств к укреплению связи оригинала и изображения составляет одну из основных трудностей понимания учащимися проекционного чертежа.

Введение понятия о проекционном чертеже удобно выполняется в нижеописываемой последовательности. Наиболее подходящим моментом для проведения такой работы являются уроки, непосредственно следующие за уроками, на которых доказывалась первая теорема существования и на которых учащиеся познакомились с методами построения изображений планиметрических оригиналов.

Практика в построении изображений плоских многоугольников может проводится одновременно с решением задач на проекционном чертеже.

Введение проекционного чертежа удобно аргументировать необходимостью устранения неопределенности восстановления оригинала по иллюстративному чертежу (неполное изображение).

В классе с максимальной степенью наглядности устанавливается, что на иллюстративном чертеже точка картинной плоскости служит изображением не только точки оригинала, но и прямой (проектирующей). Прямая картинной плоскости может изображать не только прямую, но и плоскость (проектирующую).

Параллельные прямые картинной плоскости изображают не только параллельные прямые оригинала, но и скрещивающиеся прямые, лежащие в параллельных проектирующих плоскостях, равно как и сами эти плоскости. Четыре точки картинной плоскости изображений представляют, например, изображение как четырех точек одной плоскости оригинала, так и четырех точек, не лежащих в одной плоскости. Внимание учащихся обращается и на тот факт, что по иллюстративному чертежу невозможно составить представление об относительном взаимном расположении двух изображенных точек или прямых, о взаимном расположении изображенных на картинной плоскости точки и прямой, точки и плоскости, прямой и плоскости и т. п. Невозможно судить о принадлежности точек к прямым и плоскостям, прямых к плоскостям.

При необходимости можно легко придумать и другие примеры, раскрывающие неопределенность восстановления оригинала по иллюстративному изображению. Ради развития пространственного воображения даже полезно задавать различные комбинации точек и прямых на картинной плоскости и определять различные оригиналы этих изображений.

Наглядность изучения рассматриваемых примеров может быть достигнута различными средствами. Для выяснения, например, оригиналов, изображением которых являются четыре точки картинной плоскости, «спицами» обозначаем проектирующие прямые, проходящие через каждую из четырех заданных точек. Устанавливаем, что каждая из точек проектирующей прямой может быть оригиналом. Комбинируя выбор этих точек на проектирующих прямых, устанавливаем, что четыре точки картинной плоскости могут быть приняты за изображение довольно разнообразного сочетания четырех точек оригинала, да и не только точек.

С неопределенностью рассматриваемых изображений можно знакомить учащихся сразу после введения понятия об изображении.

Перед введением проекционного чертежа все эти факты следует обобщить.

В порядке ближайшей цели учащимся указывается на необходимость отыскания такого способа построения изображений пространственных фигур, при котором только по изображению можно было бы с безусловной достоверностью судить о взаимном расположении точек, прямых и плоскостей пространства. Прием построения изображений должен быть таким, чтобы только по изображению позволял бы определить, параллельны или непараллельны прямые оригинала, скрещиваются они или пересекаются, принадлежит точка прямой или плоскости, прямая — плоскости.

Далее учащимся сообщается, что сформулированных целей можно достигнуть, если изображения пространственных фигур, как и изображения плоских оригиналов, строить по базису с привлечением свойств 1°—4°.

Структура оригинала. Сложность обоснования построения изображений пространственных фигур по базису связана с трудностями обозначения в пространстве базиса и оригинала вообще.

Оригиналами планиметрии могут быть модели, вещи материального мира, чертежи, выполненные на плоскости с помощью карандаша и других инструментов, воображаемый оригинал, являющийся абстракцией всех материальных реализаций оригинала.

В стереометрии отсутствует оригинал-чертеж, получаемый при помощи карандаша и чертежных инструментов. В самом деле, мы не можем (нет такого карандаша) отмечать точки, вычерчивать прямые, строить плоскости непосредственно в пространстве так, как это делается карандашом на плоскости с помощью инструментов.

При построении изображений пространственных оригиналов приходится обращаться к оригиналу-модели, к вещам окружающего нас мира или к воображаемому оригиналу. Впервые же проекционный чертеж должен появиться для учащихся как проекция (изображение) одной из материальных реализаций стереометрического оригинала. Такого подхода к введению проекционного чертежа требуют интересы развития пространственных представлений и пространственного воображения учащихся, интересы обучения учащихся построению изображений. С этой целью учащимся следует рассказать о способах обозначения точек, прямых и плоскостей в повседневной жизни, создать модель как абстракцию этих способов.

В жизни точки обозначаются концами колышков,

Рис. 22

вбитых в землю, концами шестов, подпирающих ветку фруктового дерева, гвоздем, вбитым в стену, изоляторами телеграфных столбов, геодезическими вышками и т. п. Во всех этих случаях обозначение точки связывается с некоторой плоскостью (плоскостью земли, пола) и расстоянием этой точки от фиксированной плоскости.

Удобно и в геометрии точки пространства обозначать концами параллельных между собой отрезков (вместе с этими отрезками), проведенными через каждую точку пространства до пересечения с одной и той же плоскостью, называемой основной плоскостью. Параллельные между собой отрезки назовем проектирующими отрезками; их точки пересечения с основной плоскостью — основаниями. Проектирование, необходимое для обозначения точек в оригинале, назовем внутренним в отличие от внешнего проектирования, необходимого в дальнейшем для построения изображения оригинала.

Точки пространства в таком случае будут обозначаться концами проектирующих отрезков вместе с отрезками, их следами на основной плоскости и самими этими плоскостями. Модель такого способа определения точек пространства представлена на рис. 22.

Целесообразно в качестве проектирующих отрезков модели брать перпендикуляры, не называя их так до изучения перпендикулярности прямой и плоскости. Такой выбор обозначения точек на модели теснее свяжет модель, а в последующем—и воображаемый оригинал с соответствующими отношениями в окружающем нас материальном мире. Позже, в порядке обобщения постановки задачи, перпендикуляры могут быть заменены отрезками проектирующих прямых любого наперед заданного направления внутреннего проектирования.

Прямые в окружающем нас мире обозначаются жердями, укрепленными на столбах, нитями или проволокой, натянутыми между двумя опорами; плоскости — щитами, листами фанеры или жести, определяемыми тремя точками. Положение прямой определяется двумя точками, а положение плоскости — тремя точками. Для нужд геометрии на модели прямые будем обозначать прямыми, проведенными через две заданные точки, и проекциями прямых на основную плоскость (рис. 23). Плоскости будем обозначать треугольниками, определяемыми тремя заданными точками, и проекциями сторон треугольника на основную плоскость (рис. 24).

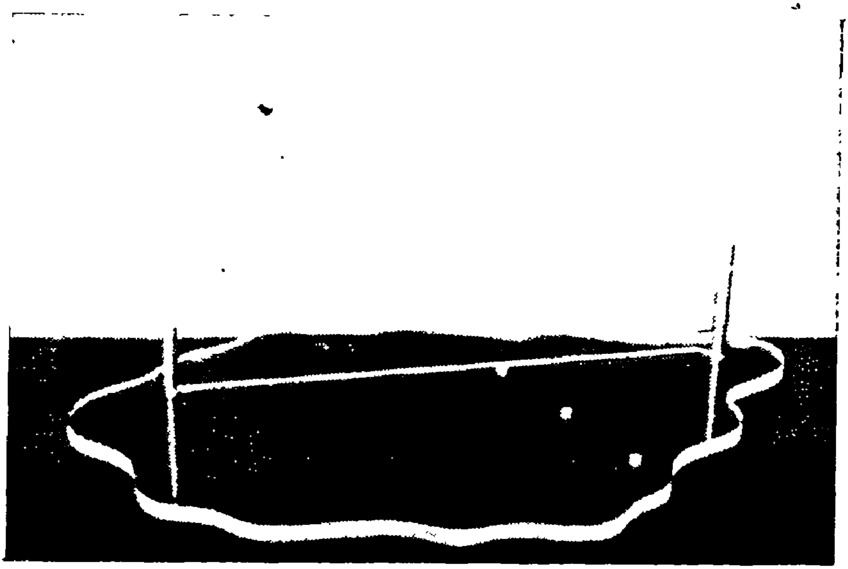


Рис. 23

Рис. 24

Таким путем может быть определена любая точка пространства, любая прямая и плоскость. В записи точку оригинала будем обозначать не одной буквой A' (конец проектирующего отрезка), а двумя точками A' (A'_1), где A'_1 обозначает основание проектирующего отрезка. Прямые будем обозначать двумя буквами a' (a'_1) с указанием в скобках проекции прямой на основную плоскость. Плоскости, соответственно, будем обозначать двумя строчными буквами греческого алфавита, например α' (α'_1), β' (β'_1).

Проекционный чертеж получим как изображение оригинала указанной структуры.

Понятие о второй теореме существования. Поскольку проекционный чертеж вводится через изображение оригинала по базису, то в этот период удобно познакомить учащихся со второй теоремой существования. На примере построения изображения оригинала, описанного в предшествующем пункте, такое ознакомление осуществляется особенно просто, убедительно, наглядно.

Сначала вводим понятие о базисе в оригинале и на изображении и показываем, что для построения изображения достаточно эффективно спроектировать лишь базисные точки оригинала. Приняв за базисные точки в оригинале три точки A_1', B' (B_1') и C' (C_1') в основной плоскости и одну точку A' вне плоскости и соответствующие точки A_1, B (B_1), C (C_1) и A на изображении (рис. 25), показываем, что изображение любой другой точки M' (M'_1) может быть получено без эффективного проектирования по базису с привлечением свойств 1°—4°. Учащимся сообщается и прием построения: при помощи базисного треугольника основной плоскости и

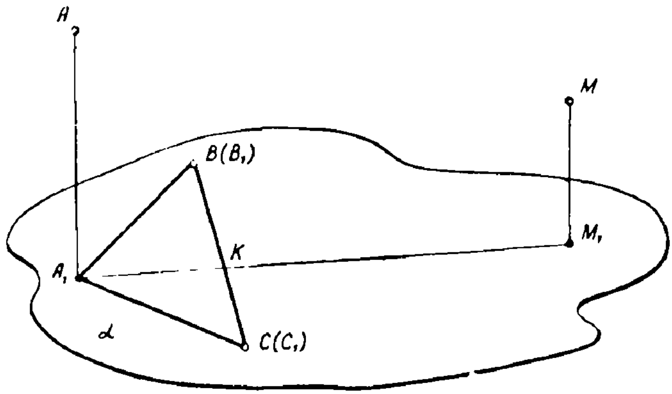


Рис. 25

его изображения (рис. 25) строим точку M_1 — изображение точки M'_1,— через M_1 проводим прямую, параллельную AA_1, и откладываем на этой прямой отрезок M_1M — четвертый пропорциональный к $M_1'M'$, AA_1 и $A'A_1'$.

Рассказ полезно сопровождать демонстрацией эффективного проектирования модели-оригинала. Отбросив солнечную тень модели на лист бумаги, отмечаем на нем базисные точки, а затем, убрав модель, по определившемуся базису и оригиналу строим изображение какой-либо пятой точки. Непосредственным проектированием модели показываем, что изображением базисных точек может быть различное сочетание точек картинной плоскости.

В заключение беседы раскрываем содержание второй теоремы существования и приводим учащихся к мысли, что для построения изображений стереометрических оригиналов, как и планиметрических, нет необходимости прибегать к эффективному проектированию. Этот повод еще раз используется для разъяснения смысла понятия «изображение».

Подчеркивается мысль, что для построения изображения стереометрического оригинала изображение лишь четырех точек может выбираться произвольно со степенью произвола, определяемой второй теоремой существования, и что изображение любой другой точки, заданной в оригинале, может и должно быть построено. Построение это при фиксированном базисе выполняется единственным образом.

Таким образом, уже в начале оказывается завершенным один из этапов обучения построению изображений, показывающий, что построение изображения может быть выполнено без эффективного осуществления проектирования.

Проекционный чертеж. К понятию проекционного чертежа можно прийти, если получить изображение одной из моделей обозначения точек в пространстве по базису и с привлечением свойств 1°—4°.

Рассмотрим возможности осуществления этого пути[1] на примере модели обозначения точек с помощью основной плоскости (рис. 22).

Фиксировав базисные точки, так, как это было сделано в связи с введением понятия о второй теореме существования, строим изображение (рис. 25) точки M (M_1). Показываем, что на таком чертеже может быть построено, и единственным образом, изображение любой наперед заданной точки оригинала.

Обосновывается и обратное утверждение, что в случае если изображение точки будет представлено вместе

---

[1] Н. Ф. Четверухин в книге «Стереометрические задачи на проекционном чертеже», Учпедгиз, 1955, исходит из того, что учащиеся умеют строить изображения оригиналов, могут мысленно воспроизвести оригинал. Практически же введение проекционного чертежа приходится использовать для обучения построению изображений, для обучения воспроизведению по изображению воображаемого оригинала. Если не использовать обучение решению задач на проекционном чертеже для обучения построению изображений, то либо надо откладывать ознакомление с проекционным чертежом на более дальний срок, либо мириться с тем, что учащиеся будут запоминать приемы решения задач, а не овладевать ими.

с основанием проектирующего отрезка на основной плоскости, то при фиксированном базисе изображение определяет единственную точку.

Как результат проведенных построений дается определение заданной точки: «Точка называется заданной на изображении, если при фиксированных базисах она является изображением единственной точки оригинала».

На построенном нами изображении (рис. 25) заданными окажутся не только те точки, изображение которых предварительно было построено по оригиналу, но и те точки, для которых одна из точек картинной плоскости принята за изображение собственно точки оригинала, а другая — за изображение ее основания.

Полученный таким образом проекционный чертеж представляет метрически определенное изображение. Обобщаем понимание проекционного чертежа до понимания полного изображения, не останавливаясь на решении метрических задач.

С этой целью учащимся сообщается, что точка M (M_1) на рис. 25 является изображением не только точки M' (M'_1), по которой первоначально строилось изображение. В самом деле базис картинной плоскости является изображением не только базиса, по которому первоначально строилось изображение точки M' (M'_1), но и любого другого базиса оригинала. Построим точку оригинала, изображением которой является M (M_1), при одном из новых базисов в оригинале и при старом базисе на картинной плоскости. Точка M (M_1) задана на изображении, и в оригинале ей будет соответствовать единственная точка M'' (M''). Для того чтобы точки M' (M'_1) и M'' (M''_1) были заведомо различные, достаточно для нового базиса в оригинале изменить лишь только одну точку, например лежащую в основной плоскости.

С другой стороны, за изображение любого из базисов оригинала может быть принято другое сочетание четырех базисных точек картинной плоскости. Точка M (M_1) окажется заданной для каждой пары базисов оригинала и изображения. Следовательно, для каждой пары базисов в оригинале будет своя точка, изображением которых является одна точка M (M_1) картинной плоскости.

Учащимся следует разъяснить, что задачи, решаемые на проекционном чертеже, могут соотноситься к одному оригиналу и к каждому из оригиналов, изображением которых является данный проекционный чертеж, или к некоторой части этих оригиналов. Соответственно, и методы решения этих задач могут быть верны либо для одного оригинала и его изображения, либо для каждого из оригиналов и их изображения, либо для части оригиналов и их изображения.

Рассмотрим в первую очередь решение задач на построение, которые будут соотноситься к каждому из оригиналов, изображением которых является данный проекционный чертеж. Перестанем для этого связывать оригинал и изображение с раз и навсегда фиксированным базисом, сохранив при этом способ обозначения точек, «заданных на изображении».

При необходимости любой из базисов в оригинале и на изображении может быть доопределен, по изображению может быть построен один оригинал, и все построения на изображении могут связываться с построениями в этом оригинале. Однако построения на изображении после введенного выше соглашения должны будут соотноситься не с одним оригиналом, получаемым через посредство одной фиксированной пары базисов, а с каждым оригиналом, изображением которых является данный проекционный чертеж.

После всех введенных нами соглашений устанавливаем, что точку T (T_1) на изображении будем обозначать концом T (рис. 26) проектирующего отрезка TT_1 вместе с основанием T_1, проектирующим отрезком TT_1 и основной плоскостью α. Отрезок TT_1 будем чертить вертикально ради достижения наглядности и укрепления связи изображения с оригиналом; в оригинале при принятых соглашениях точки обозначаются вертикально расположенными спицами модели или столбами и колышками. Учащимся сообщается, что точки, так обозначенные, называются **з а д а н н ы м и**.

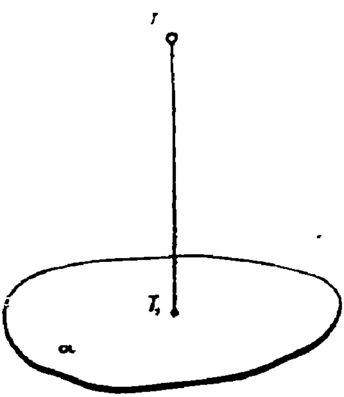


Рис. 26

Прямые будем задавать при помощи двух заданных точек (рис. 27) и изображать на картинной плоскости прямой $AB \equiv a$ и ее проекцией на основную плоскость $A_1B_1 \equiv a_1$.

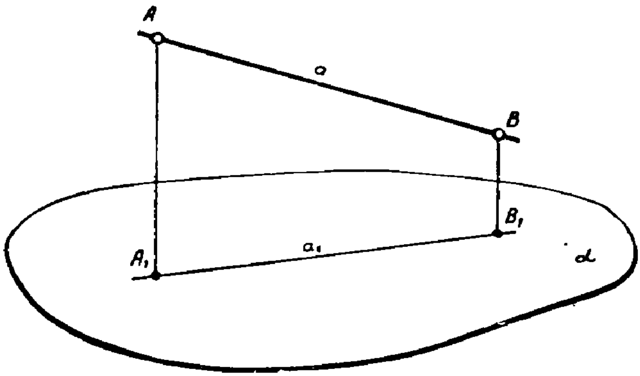


Рис. 27

Плоскости будем задавать при помощи трех заданных точек (рис. 28) и изображать треугольником $ABC \equiv \beta$ и его проекцией $A_1B_1C_1 \equiv \beta_1$ на основную плоскость.

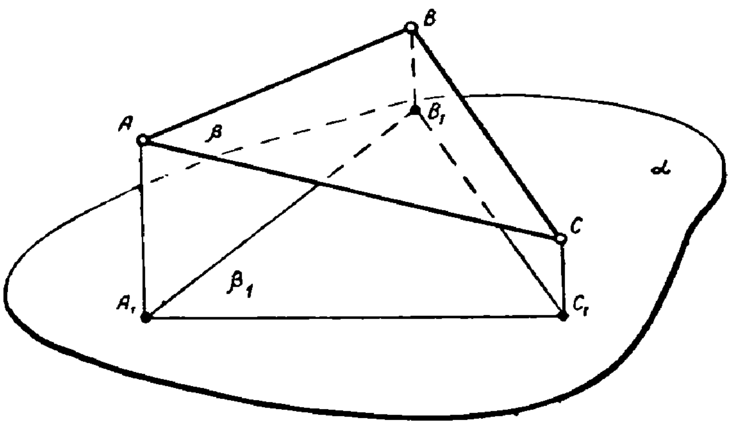


Рис 28

Прямые плоскости оказываются заданными на изображении в том же смысле, что и точка.

Вводимые способы изображения прямых и плоскостей желательно сопоставлять с соответствующими приемами обозначения прямых и плоскостей в окружающей нас обстановке. Например, изображение прямой на рис. 27 рассматривать как образ прямой, задаваемой концами двух столбов боковой стенки строящегося сарая с поперечной жердью AB для крышки и бревном A_1B_1 для пола. Прообразами принятого нами способа изображения прямых являются провод телеграфной линии, натянутой между двумя столбами и тропинкой между ними на земле, трамплин для прыжков в воду, гимнастический бум и т. д.

Принятый способ изображения плоскости можно сопоставить с тентом, натянутым на трех колышках на пляже, и тенью тента на земле при условии, что колья установлены по направлению лучей солнца (направление внутреннего проектирования). Прообразом такого изображения плоскости является конструкция «легкого стула» на трех ножках.

Так может быть введено понятие о проекционном чертеже. Раннее введение проекционного чертежа удобно тем, что к эффективному решению задач на построение оказывается возможным приступить чуть ли не с первых уроков стереометрии.

Введение проекционного чертежа и решение задач на построение на нем не должны рассматриваться как два отдельных этапа обучения. Разделение этих вопросов в данной книге необходимо для более четкого определения содержания изучаемого материала.

Одной из трудностей обучения решению задач на построение на проекционном чертеже является отсутствие в существующей учебной литературе достаточного числа четко выделенных простейших задач, овладение которыми обеспечивало бы понимание учащимися приемов решения более сложных задач. Кроме того, в складывающейся методике не определилось еще число достаточно общих и аргументированных принципов, которыми можно было бы руководствоваться при отыскании решения задач. Эти недочеты накладывают на методику обучения решению задач на построение в пространстве нежелательный отпечаток сложности.

Преодоление этих недочетов является важнейшей задачей совершенствования методики обучения решению задач на проекционном чертеже. Одна из попыток частичного решения этой задачи излагается ниже.

Достижение осознанного понимания изучаемого материала при любой структуре обучения станет возможным, если решение задач не будет ограничиваться только механическим выполнением построений. От учащихся необходимо требовать устных пояснений по ходу выполняемых построений, аргументированного обоснования их. Следует также добиваться, чтобы и построения, проводимые в контрольных работах, сопровождались письменными объяснениями.

Изучение всех намечаемых ниже вопросов проводится в порядке упражнений одновременно с прохождением текущего программного материала. Отдельный урок следует, быть может, отвести только на разъяснение постановки проблемы с тем, чтобы на этом же уроке приступить к решению первых задач.

2. Задачи, решаемые при введении проекционного чертежа

Задачи этого раздела нет необходимости решать сосредоточенно в одном месте. Набором нижеприводимых задач следует пользоваться по мере ознакомления учащихся с понятием проекционного чертежа для закрепления вновь вводимых понятий, перед решением составных задач, элементом которых является данная простейшая.

Первой группой таких задач являются упражнения, раскрывающие, что неопределенность восстановления оригинала по иллюстративному чертежу устранена на проекционном чертеже. Учитель показывает, что на проекционном чертеже «точка» изображает только точку оригинала, «прямая» — прямую, «плоскость» — плоскость. И притом для каждой пары базисов определяется единственная точка, прямая или плоскость оригинала. Ничего подобного не дает иллюстративный чертеж, так как даже после доопределения на нем и в оригинале базисов остается неопределенной принадлежность точек к прямым и плоскостям, определяемым через базис, а потому и невозможно построение соответственных точек оригинала.

На проекционном чертеже становится возможным определять только по изображению взаимное расположение точек, прямых и плоскостей. В порядке упражнения с учащимися рассматриваются способы изображения различных случаев взаимного расположения точки и основной плоскости (рис. 29), описывается

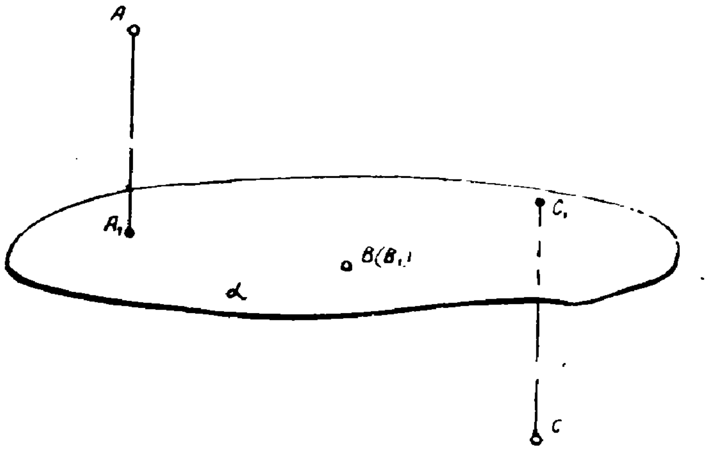


Рис. 29

взаимное расположение точек для произвольного чертежа (лежит в плоскости, над плоскостью, под плоскостью, выше или ниже одна относительно другой, дальше или ближе от наблюдателя, рис. 30). Описание взаимного расположения следует относить не к чертежу, а

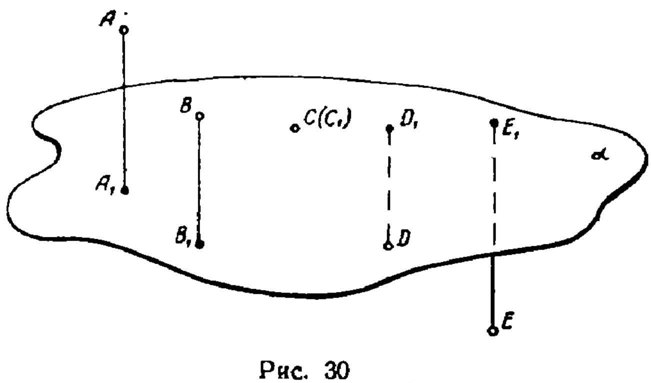


Рис. 30

к одному из мыслимых оригиналов. Особенно хорошо, если эти описания сопровождаются демонстрацией модели.

В порядке сравнения проекционного чертежа с иллюстративным решается следующая задача.

Задача 1. Дать описание взаимного расположения точек $ABCD$ и плоскости α, изображения которых представлены на иллюстративном чертеже (рис. 31а). До-

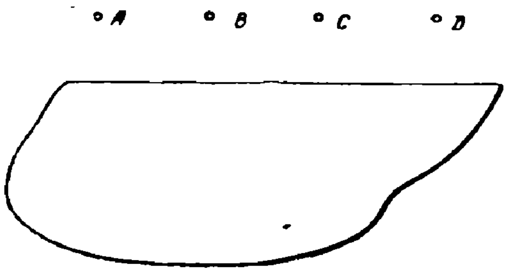


Рис. 31а

полнить иллюстративный чертеж до проекционного и дать описание взаимного расположения точек для него (рис. 31б).

При дополнении чертежа до проекционного полезно добиться от учащихся, чтобы в результате были бы представлены различные случаи взаимного расположе-

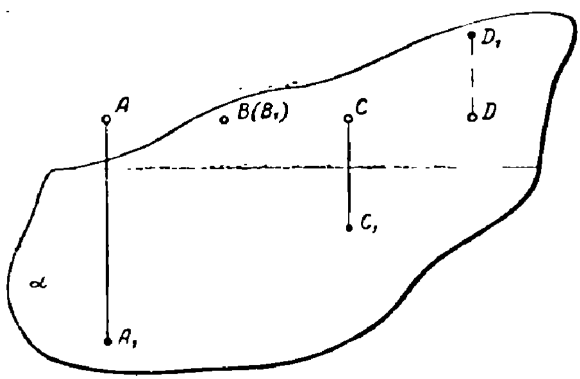


Рис. 31б

ния точек и основной плоскости. Особое внимание следует уделить тем случаям, которые содействуют правильному пониманию изображения плоскости. Учащиеся должны понимать, что к а ж д а я из точек может быть представлена: как лежащая в плоскости α —B (B_1), как лежащая над плоскостью α — точка A (A_1), как лежащая под плоскостью α — точка D (D_1). На рис. 31 б поставленной цели удалось достигнуть, продолжив контуры, изображающие плоскость.

Этой же цели может служить и задача 2.

Задача 2. Дополнить иллюстративный чертеж (рис. 32) так, чтобы каждая из точек A, B и C изображала точку, лежащую в основной плоскости, над основной плоскостью, под основной плоскостью.

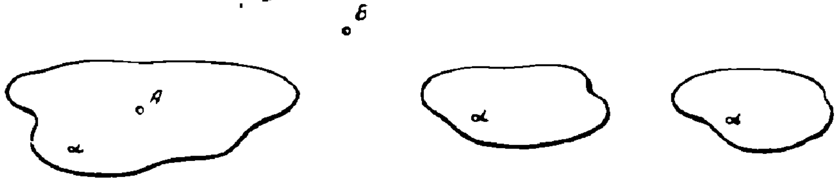


Рис. 32

По возможности и в дальнейшем решения задач следует сопровождать сопоставлением с решением тех же задач на иллюстративном чертеже.

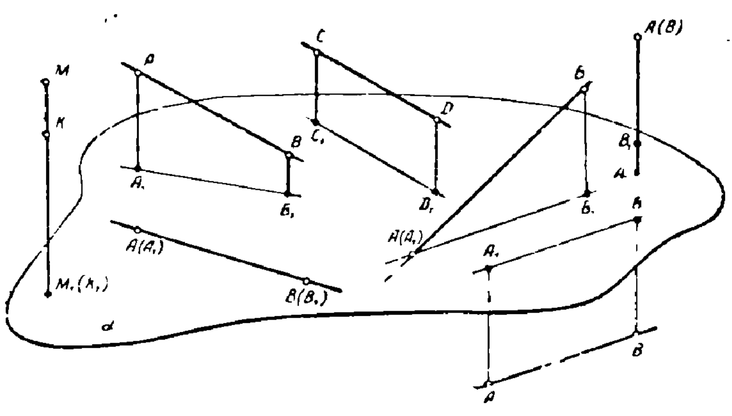


Рис. 33

Задача 3. Начертить различные случаи изображения прямых на проекционном чертеже.

Одно из возможных решений этой задачи представлено на рис. 33, на котором изображены прямые, параллельные основной плоскости, пересекающие ее или лежащие в ней, проектирующая прямая внутреннего проектирования, проектирующая прямая внешнего проектирования и иные прямые, заданные различным сочетанием двух точек.

В порядке сравнения с иллюстративным чертежом (рис. 34) полезно обратить внимание учащихся на то, что прямая a на рис. 34 может быть принята за изоб-

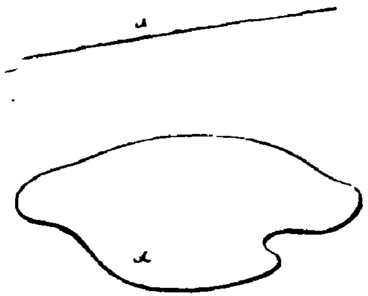


Рис. 34

ражение прямой, параллельной плоскости α, а на рис. 33 прямая CD (C_1D_1) является изображением прямой, параллельной плоскости α. Этот факт учащимся необходимо даже доказать и добиться понимания этого доказательства.

Прямая a на иллюстративном чертеже (рис. 34) есть изображение любой из прямых проектирующей плоскости, пересекающей картинную плоскость. Эта проектирующая плоскость пересекает плоскость α. Среди прямых проектирующей плоскости имеются прямые, лежащие в плоскости α, пересекающие ее и параллельные ей. Следовательно, прямая a может быть принята за изображение любой из этих прямых. В то же время прямая C_1D_1, построенная в оригинале по любой паре базисов, будет параллельна прямой $C'_1D'_1$, лежащей в основной плоскости оригинала, так как $C'C'_1$ и $D'D'_1$ в оригинале будут равны и параллельны.

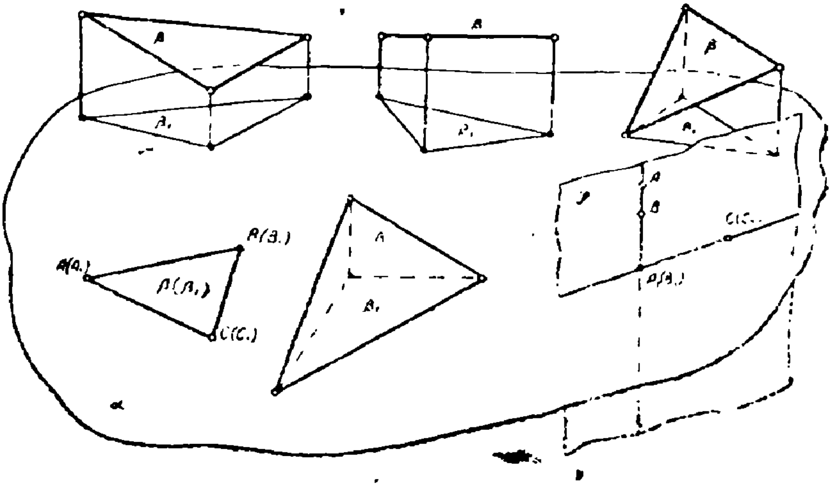


Рис. 35

Доказательство этих положений проводится без оформления каких бы то ни было записей с возможно более широкой иллюстрацией рассматриваемых отношений прямых и плоскостей на моделях и вещах классной обстановки.

Задача 4. Начертить различные случаи изображения плоскостей на проекционном чертеже.

Учащиеся должны видеть и уметь изобразить каждый из случаев, представленных на рис. 35.

В связи с решением задач 3 и 4 учащихся следует познакомить с новой терминологией: проектирующая прямая (прямая MK (M_1K_1) на рис. 33), проектирующая плоскости (плоскость φ на рис. 35). Эта терминология относится к внутреннему проектированию, так как все построения на проекционном чертеже рассматриваются как построения в оригинале. В тех же случаях, когда внутреннее и внешнее проектирование противопоставляется, говорят—проектирующая прямая, проектирующая плоскость внешнего или соответственно внутреннего проектирования.

Необходимо добиться, чтобы учащиеся видели проектирующие плоскости и на рис. 33.

Решение этих задач следует использовать для пополнения образов прямых и плоскостей в пространстве.

Кроме модели образами прямых, параллельных основной плоскости, могут быть гимнастический турник, бум, трапеция. Образами изображенных плоскостей являются лист фанеры, лежащий одним срезом на основной плоскости и опирающийся одной точкой на конец колышка, частокол из плотно поставленных кольев, дощатая вертикально стоящая гимнастическая стенка. Наиболее полезным следует считать достижение положения, когда учащиеся сами придумывают материальные реализации рассматриваемых изображений.

Решение задач по типу рассмотренных свободно можно переносить на домашние задания. Необходимые уточнения и дополнения вносятся при проверке выполнения домашних работ. Усвоение рассматриваемых понятий полезно постоянно контролировать в порядке ответов учащихся на вопросы: «Постройте изображение прямой (плоскости), параллельной основной плоскости, пересекающую ее, лежащую в ней», «Постройте изображение проектирующей прямой (плоскости)», «Изобразите проектирующую прямую (плоскость) внешнего проектирования».

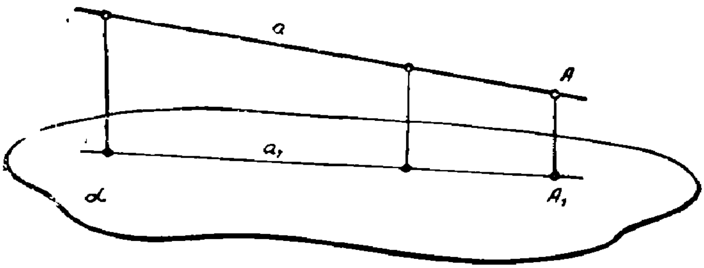


Рис. 36

Задача 5. Построить изображение точки, принадлежащей заданной прямой a (a_1).

Одно из решений этой задачи представлено на рис. 36 точкой A (A_1). Полученное решение полезно сравнить с решением той же задачи на иллюстративном чертеже.

С учащимися следует рассмотреть несколько построений в различных оригиналах, соответственных построению на изображении. Одной из задач, решаемых таким построением, является определение размера третьей подпорки для бревна, укрепленного на двух столбах.

Задача 6. Дополнить изображение, представленное на рис. 37, так, чтобы точки[1] A (A_x), B_x (B_1), C_x (C_1), $D_x(D_1)$ принадлежали (не принадлежали) заданной прямой a (a_1).

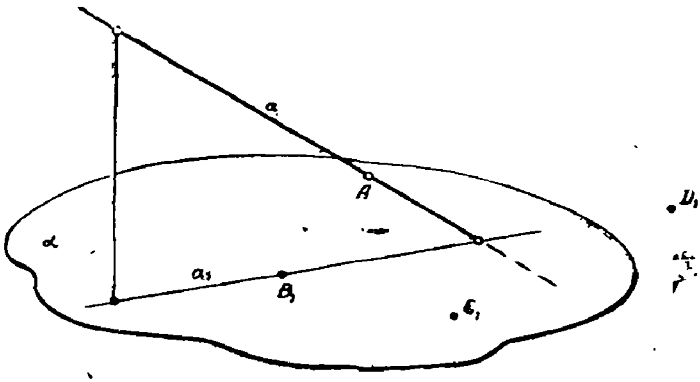


Рис. 37

Задача 7. Определить, принадлежат точки A (A_1) и B (B_1) прямой a (a_1), изображенной на рис. 38.

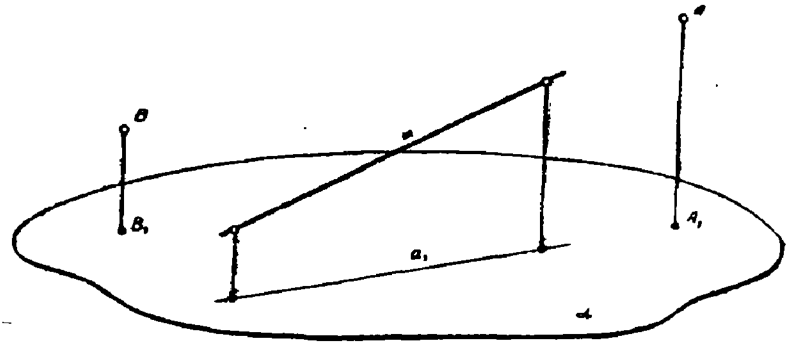


Рис 38

Задача 8. Построить изображение прямой (рис. 39), принадлежащей каждой из двух заданных плоскостей ABC $(A_1B_1C_1)$ или TMN (T_1MN).

---

[1] Буква с нижним индексом «х» обозначает искомый элемент задачи.

Решениями будут прямые AB (A_1B_1), BC (B_1C_1), AC (A_1C_1), TM (T_1M), MN и TN (T_1N). Решениями будут также и прямые, определяемые двумя точками, принадлежащими перечисленным прямым. Любая из этих точек может быть построена (задача 5). На рис. 39 решениями, следовательно, будут прямые BH (B_1H_1), DE (D_1E_1), TE (T_1E), OP (OP_1).

После решения задачи 9 можно будет задавать прямые, принадлежащие заданным плоскостям, как прямые, проходящие через две произвольные точки этих плоскостей.

Задача 9. Построить изображение точки, принадлежащей плоскости β (β_1), заданной тремя точками или проектирующей плоскостью φ (рис. 40).

Решениями задачи будут точки, принадлежащие как прямыми AB (A_1B_1), BC (B_1C_1), AC (A_1C_1), так и любой другой прямой плоскости β (β_1) или плоскости φ. На рис. 40 точки D (D_1), H (H_1) принадлежат плоскости β(β_1), а точки K (K_1), T (T_1), P (P_1) принадлежат проектирующей плоскости.

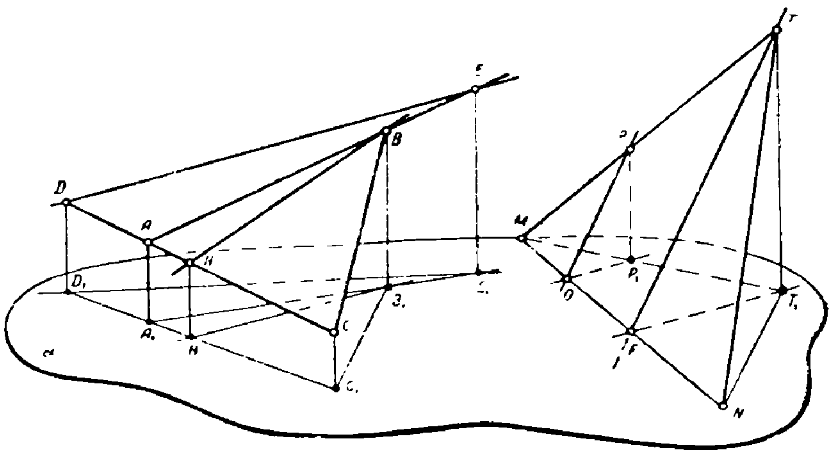


Рис. 39

Построение точек, принадлежащих плоскости, как и в случае с прямой (задача 5), можно рассматривать как определение размера четвертого столба под крышу сарая по трем известным или размера четвертой подпорки для тента, натянутого на трех шестах.

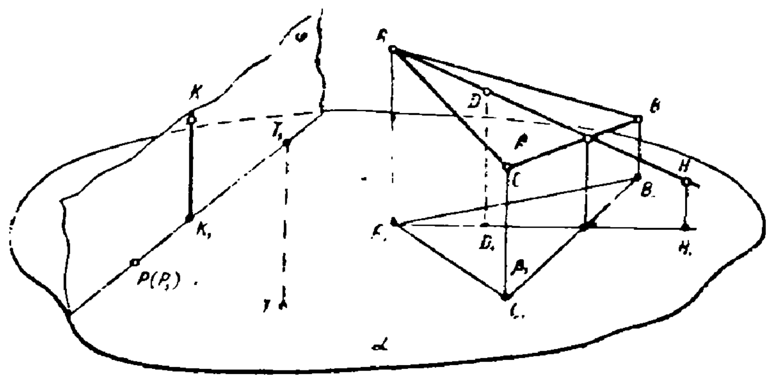


Рис. 40

Для решения задач 10 и 11 учитель выполняет соответствующий чертеж на доске, после чего один из учащихся выполняет решение у доски.

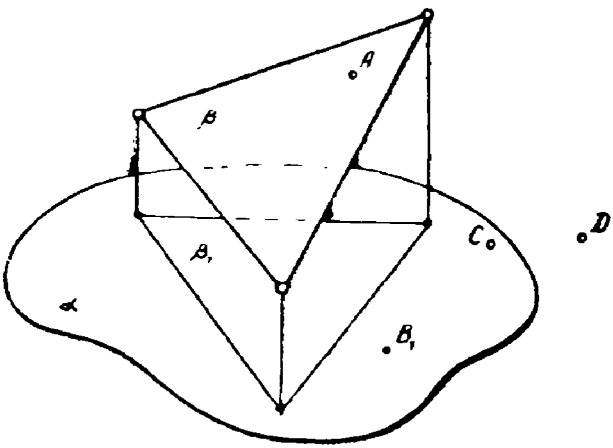


Рис. 41а

Задача 10. Дополнить изображение, представленное на рис. 41а так, чтобы точки A (A_x), B_x (B_1), C (C_x), D (D_x) и точки K (K_x), H (H_x), T_x (T_1), P (P_x), M_x (M_1) на рис. 41б принадлежали (не принадлежали) соответственно плоскостям β и φ.

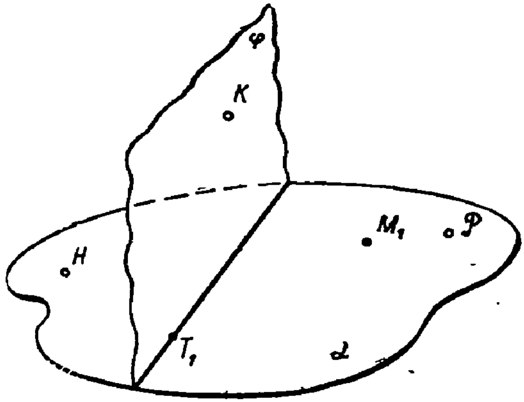


Рис. 41б

Задача 11. Определить, принадлежат ли точки A (A_1), B (B_1), C (C_1), D (D_1) плоскости β(β_1), изображенной на рис. 42.

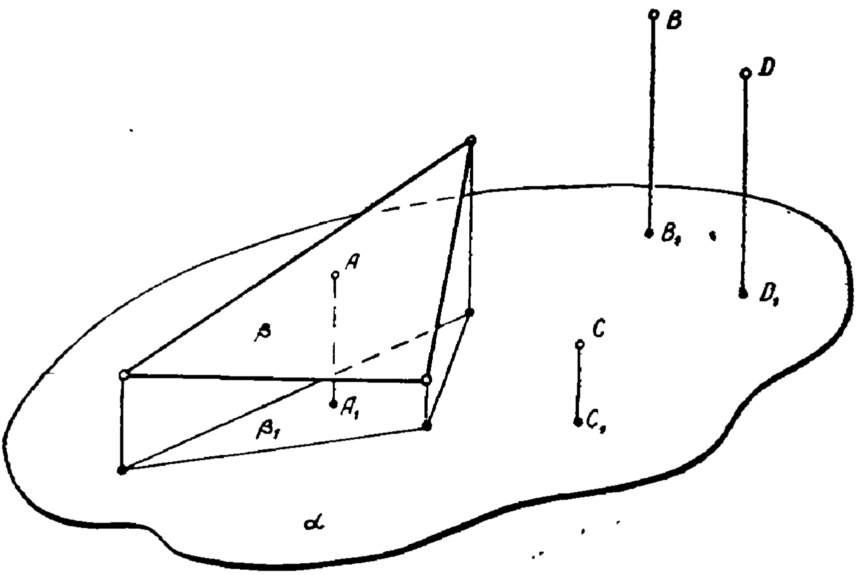


Рис. 42

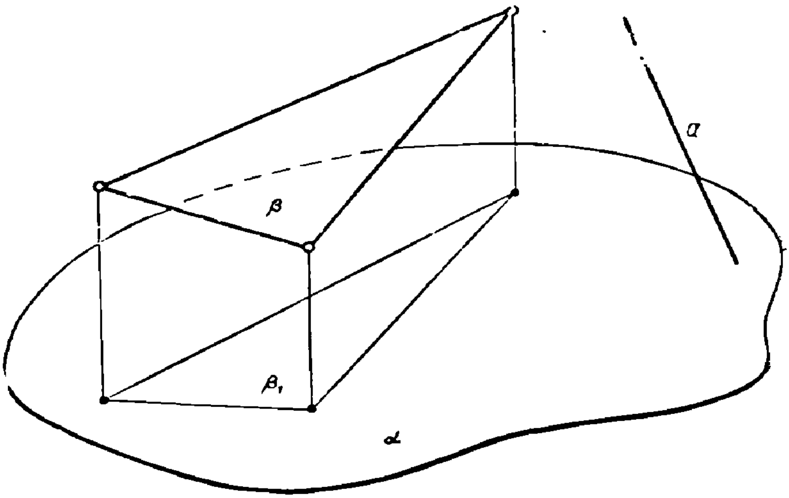


Рис. 43а

Задача 12. Дополнить изображение (рис. 43а) так, чтобы прямая a (a_x) принадлежала плоскости β (β_1).

Для решения задачи проводим (задача 8) в плоскости β (β_1) (рис. 43б) прямые CT (C_1T_1) и CM (C_1M_1) до пересечения с прямой a в точках A и B. Рассматриваем точки A и B как точки прямых CT (C_1T_1) и CM (C_1M_1).

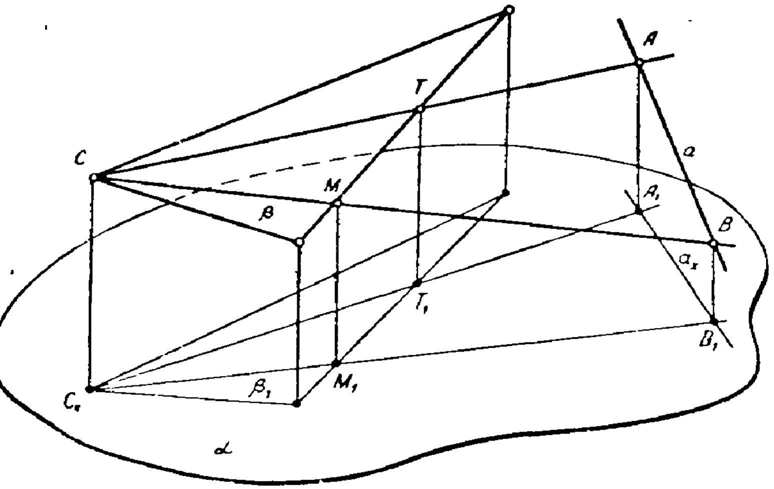


Рис. 43б

Основаниями точек A и B будут соответственно точки A_1 и B_1 (задача 5).

Прямая a (a_x)—искомая. Действительно, точки C (C_1) и T (T_1) принадлежат плоскости β (β_1), значит, и прямая CT (C_1T_1) лежит в плоскости β (β_1). Точка A (A_1) принадлежит прямой CT (C_1T_1), а следовательно, и плоскости β (β_1). Таким же образом доказывается, что и точка B (B_1) принадлежит плоскости β (β_1). Две точки A (A_1) и B (B_1) прямой a (a_x) лежат в плоскости β (β_1), значит, и прямая AB (A_1B_1) лежит в этой плоскости.

Доказательство решения должно завершать решение каждой задачи на построение на проекционном чертеже. В данной задаче это доказательство сводилось к рассмотрению цепочки принадлежностей. Эти доказательства полезны тем, что учащиеся знакомятся с применением «свойств плоскости», узнают о выполнимости свойства транзитивности для отношения принадлежности точек, прямых и плоскостей.

Ниже как выполнение построения, так и его доказательство будут излагаться только для тех случаев, когда осуществление хотя бы одного из этих этапов решения задачи будет значительно отличаться от осуществления тех же этапов в предшествующих задачах.

В качестве заданных плоскостей и прямых в задачах 5—12, а также и в некоторых последующих задачах следует брать плоскости, заданные по возможности различным образом. Важно уметь решить все задачи для проектирующих плоскостей, внутреннего проектирования и желательно — для прямых и плоскостей внешнего проектирования. Таким путем можно обеспечить значительное разнообразие задач, решаемых в классе.

Точки и прямые следует задавать и вне начерченной части ранее заданных прямых (плоскостей), вне контура изображенной части основной плоскости. Сначала можно разрешать учащимся продолжать контуры заданных прямых и плоскостей так, как это сделано при решении задачи 1 (рис. 31). Постепенно следует приучать, чтобы учащиеся воспринимали прямые (рис. 43б) и точки (рис. 48) как прямые и точки, принадлежащие заданным плоскостям и без расширения начерченных контуров плоскостей. В некоторых же случаях нельзя позволять учащимся расширять заданные контуры изображенных плоскостей. Такие упражнения призваны развить у учащихся правильные представления о прямой и плоскости.

Достигнуть выполнения этих требований возможно, так как чертежи — условия к задачам — учителю приходится выполнить на доске самому. Учащиеся копируют их у себя в тетрадях, и только после этого выполняется решение задачи: одним из учащихся — на доске, остальными — в тетрадях. Таким же образом учащиеся получают условия задач для решения дома.

В ходе упражнений учащимся сообщаются и новые необходимые определения.

В этот первый период следует дать определения «следа» прямой и заданной плоскости. Определения записываются в тетради.

Определение. Следом заданной прямой (плоскости) на основной плоскости называется точка (прямая) пересечения прямой (плоскости) с основной плоскостью.

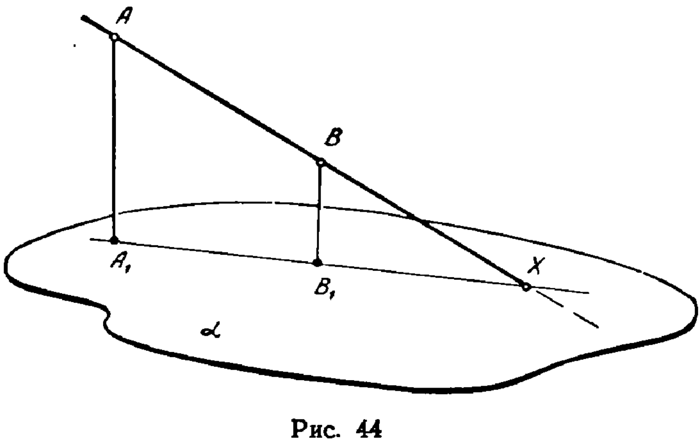


Рис. 44

Задача 13. Построить точку пересечения данной прямой AB (A_1B_1) с основной плоскостью (рис. 44).

Решением этой задачи является точка пересечения (если она существует) прямых AB и A_1B_1, так как в оригинале эти прямые лежат в одной и той же проектирующей плоскости.

При определении точек пересечения прямых полезно приучать учащихся с первых же шагов рассматривать построения на проекционном чертеже как проекцию соответственных построений в одной из материальных реализаций оригинала и устанавливать принадлежность или непринадлежность рассматриваемых прямых одной и той же плоскости оригинала. В данном случае, например, построение точки пересечения прямых AB и A_1B_1 можно рассматривать как проекцию построений на листе фанеры, представляющем проектирующую плоскость AA_1BB_1.

Задача 14. Построить прямую, по которой плоскость β (β_1), заданная тремя точками $A(A_1)$, $B(B_1)$ и $C(C_1)$, пересекается с основной плоскостью (рис. 45, 46, 47).

Учащимся сообщается, что для построения линии пересечения двух плоскостей достаточно знать две точки, принадлежащие обеим плоскостям, или одну точку и направление линии пересечения этих плоскостей.

Для решения задачи по первой схеме (рис. 45) строятся две прямые, например $AC(A_1C_1)$ и $AB(A_1B_1)$, принадлежащие плоскости β (β_1), и после этого строятся точки пересечения этих прямых с плоскостью α (задача 13). Прямая XY—искомая, так как точки X и Y принадлежат и плоскости β (β_1) и плоскости α.

Решение задач по второй схеме становится возможным, если известны какие-либо дополнительные условия. Пусть, например, для чертежа на рис. 46 определено, что прямая $AB(A_1B_1)$ параллельна плоскости α, тогда и линия пересечения плоскостей β (β_1) и α должна быть параллельна $AB(A_1B_1)$. Одна точка, через которую проходит прямая пересечения плоскостей, определится как точка пересечения произвольной прямой, принадлежащей плоскости β (β_1) с основной плоскостью. На рис. 46 такой точкой является точка X, а прямая XY, параллельная $AB(A_1B_1)$,—искомая.

На рис. 47 представлено решение той же задачи для такого расположения точек $A(A_1)$, $B(B_1)$ и $C(C_1)$ и такого достаточно малого контура изображенной части плоскости α, при которых для определения положения точек X и Y приходится проводить прямые, отличные от прямых, определяемых тремя заданными точками, как это имело место в предшествующих случаях. Впрочем, решение этой задачи полезно провести, увеличив контуры изображенной части плоскости α до необходимых

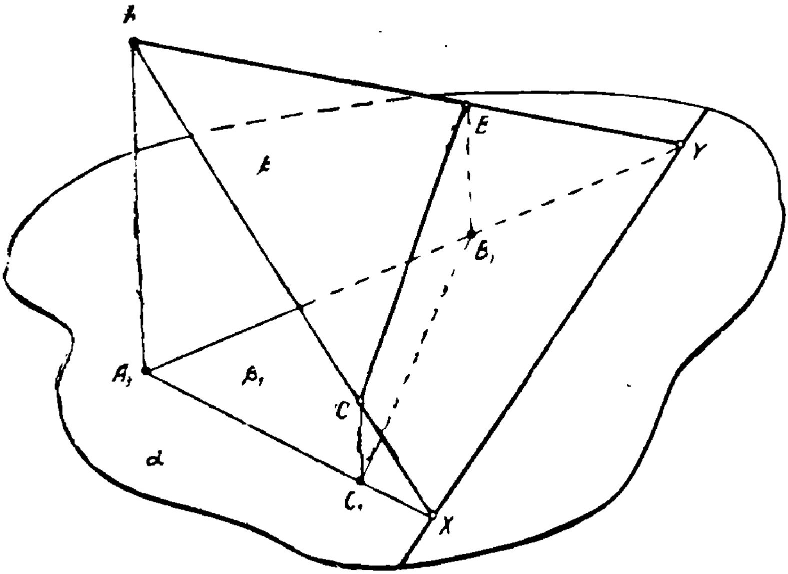


Рис. 45

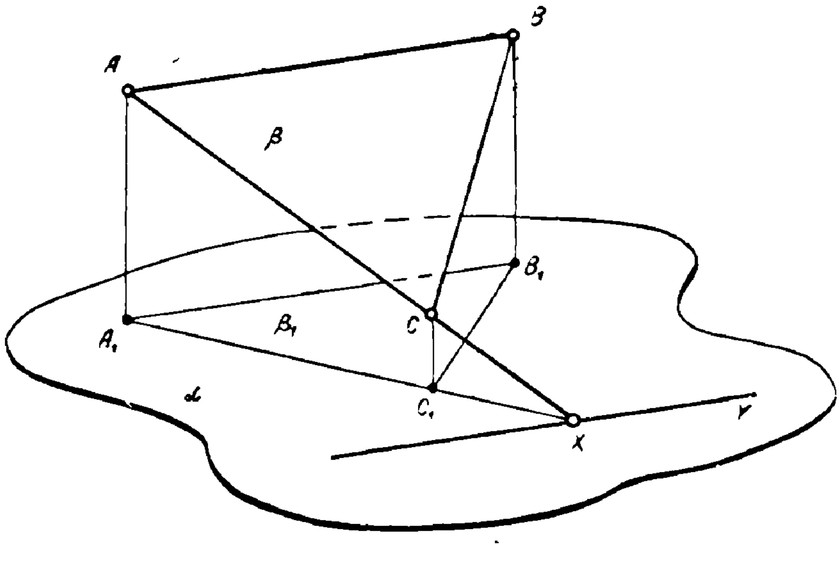


Рис. 46

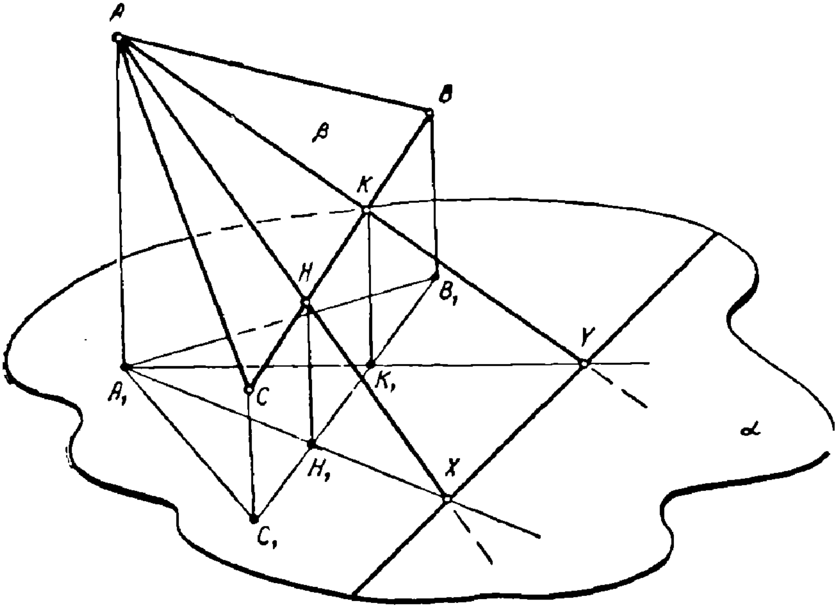


Рис. 47

размеров с тем, чтобы, как и в предшествующем случае, воспользоваться прямыми AB (A_1B_1) и $AC(A_1C_1)$.

Может быть, предварительно следует решить отдельно задачу на построение точки пересечения прямой и

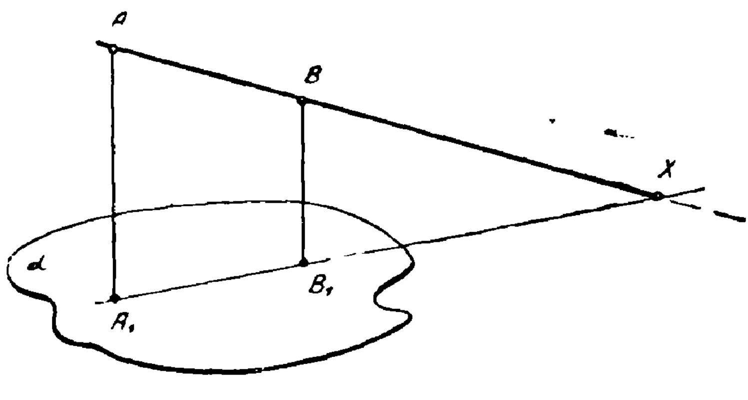


Рис. 48

основной плоскости для случая, когда след прямой лежит вне первоначально заданных контуров основной плоскости, рис. 48.

Задача 15. Построить прямую, проходящую через заданную точку.

Задача 16. Построить плоскость, проходящую через данную прямую.

Решению двух последних задач, как и многих других простейших, следует уделить серьезное внимание. От понимания или непонимания решения такого рода задач часто зависит успех усвоения решения усложненных задач. Учителю, перед тем как приступить к решению составной задачи, следует выделить в ней простейшие задачи и в зависимости от общей подготовки класса либо предварительно решить эти задачи, либо обратить на них внимание учащихся по ходу решения основной задачи.

3. Задачи на построение по материалу текущего изучения курса стереометрии

Когда учащиеся освоятся с проекционным чертежом и первыми задачами, следует приступить к систематическому решению задач на построение, связанных с изучением взаимного расположения точек, прямых и плоскостей и составляющих основное содержание первых разделов курса стереометрии IX класса. Решение этих задач послужит своевременным поводом для повторения ранее изученного программного материала, будет содействовать более глубокому пониманию текущего материала.

К числу таких задач должны быть отнесены задачи 5—16 из предшествующего пункта, в которых рассматривается взаимное расположение точек и прямых, точек и плоскостей, прямых и плоскостей[1].

Задача 17. Построить (рис. 49) изображение прямой $x(x_1)$, параллельной данной прямой $a(a_1)$ и проходящей через данную точку $K(K_1)$.

Данная задача представляет собой перефразировку известной задачи, условие которой относится непосред-

[1] При решении задач 5—16 и нижеприводимых 17—28 необходимо соблюдать преемственность.

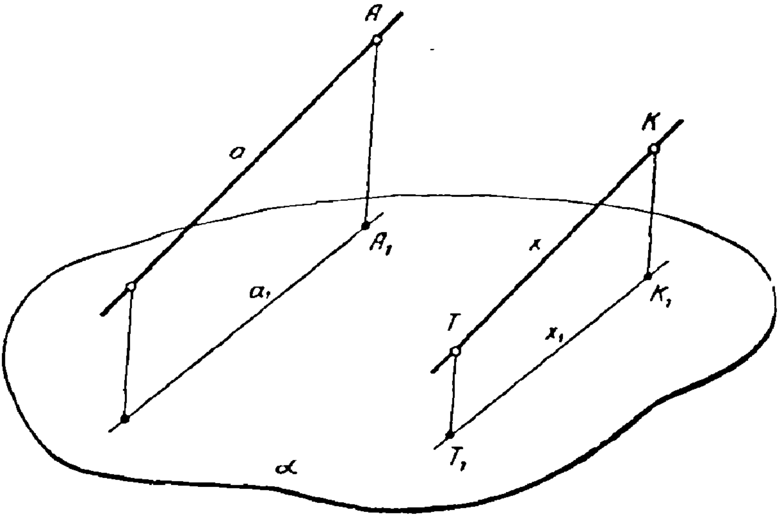


Рис. 49

ственно к оригиналу: «Через точку $K'(K'_1)$, расположенную вне данной прямой $a'(a'_1)$, провести прямую $x'(x'_1)$, параллельную данной прямой». Несмотря на различие формулировок, в стереометрии обе имеют одинаковый практический смысл, так как решение задач в обоих случаях выполняется на изображении. Ввиду этого обстоятельства впредь обе формулировки будем считать равноправными и пользоваться той из них, которая в каждом из конкретных случаев будет более проста в редакционном отношении.

Решение задач на проекционном чертеже, как и всякой задачи на построение, следует проводить по схеме: анализ, построение (синтез), доказательство, исследование. Рассмотрим осуществление каждого из этих этапов на примере данной задачи.

А н а л и з. В оригинале по условию $a' \parallel x'$, следовательно, параллельны и их проекции на основную плоскость $(a' \parallel x'_1)$. Изображения параллельных прямых параллельны, т. е. $a \parallel x$ и $a_1 \parallel x_1$ (рис. 49).

П о с т р о е н и е. Через точки K и K_1 проводим прямые x и x_1, соответственно параллельные прямым a и a_1, и строим для произвольной точки T прямой x ее основание T_1. Прямая $x(x_1)$ — искомая.

Доказательство. Прямые a_1 и x_1 параллельны по построению и являются изображением прямых a'_1 и x'_1, лежащих в одной (основной) плоскости оригинала. Для каждого из базисов оригинала и изображения прямые a'_1 и x'_1 будут параллельны. Параллельными, как проектирующие прямые, в оригинале будут и прямые $A'A'_1$ и $K'K'_1$, а следовательно, и проектирующие плоскости, в которых лежат прямые a' и x'.

В результате оказывается, что прямые a' и x' лежат одновременно в параллельных проектирующих плоскостях внутреннего и внешнего проектирования, т. е. являются двумя из четырех прямых, по которым пересекаются эти четыре плоскости. Но все прямые, по которым пересекаются четыре попарно параллельных плоскости, будут параллельны между собой, т. е. будут параллельны и прямые a' и x'.

Исследование. Задача имеет одно решение, так как через точки K и K_1 можно провести по одной прямой x и x_1, соответственно параллельных прямым a и a_1. Прямые же x и x_1 на изображении определяют одну прямую.

Часто приходится решать и более узкую задачу о построении параллельных прямых.

Задача 18. Построить изображение параллельных прямых. Задача решается на основе анализа, проведенного в задаче 17. Несколько различных решений данной задачи представлено на рис. 50.

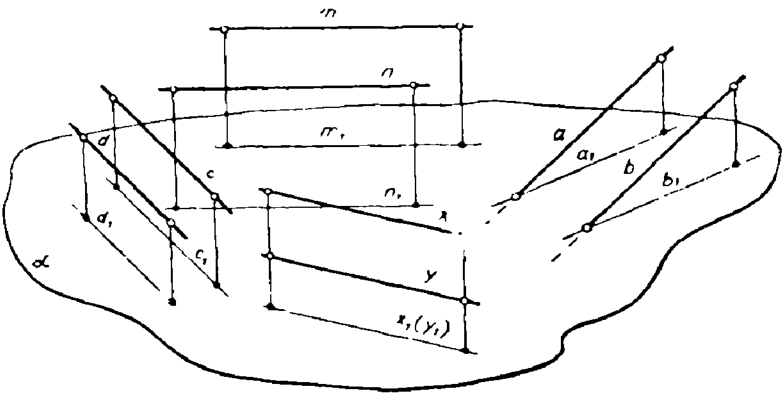


Рис. 50

Полезно, если для каждого способа обозначения параллельных прямых на проекционном чертеже, учащиеся смогут отыскать соответствующие образы параллельных прямых в оригинале.

Примерами обозначения параллельных прямых в пространстве могут служить параллельные брусья в различных положениях, эстакадная железнодорожная линия на участке спуска или подъема, параллельно идущие телефонные линии, верхние и нижние перекладины забора.

Задача 19. Построить изображение пересекающихся прямых.

На рис. 51 приведено два решения этой задачи.

Примерами обозначения такого расположения прямых в оригинале могут служить отводы от электрической линии.

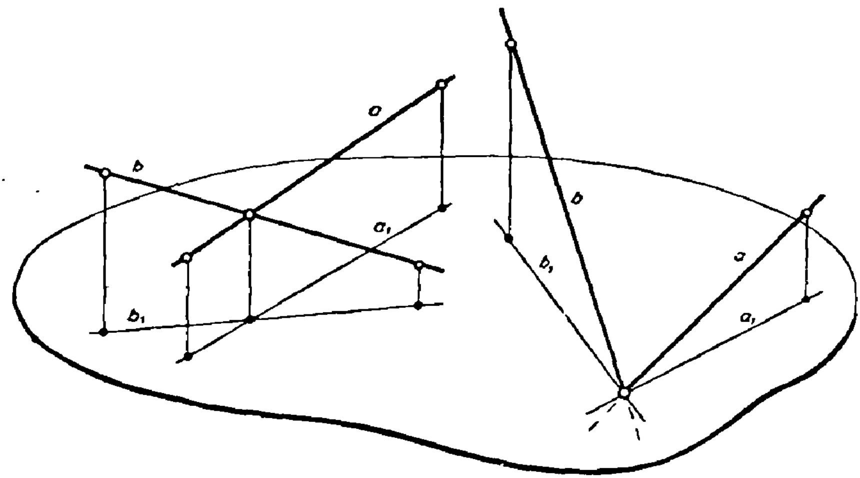


Рис. 51

Задача 20. Построить изображение скрещивающихся прямых.

На рис. 52 представлены различные случаи изображения скрещивающихся прямых.

Первый слева чертеж представляет наиболее произвольное расположение прямых в оригинале. Образом такого расположения скрещивающихся прямых могут служить низковольтная $в(в_1)$ и высоковольтная $a(a_1)$ линии электрической сети с тропинками под ними.

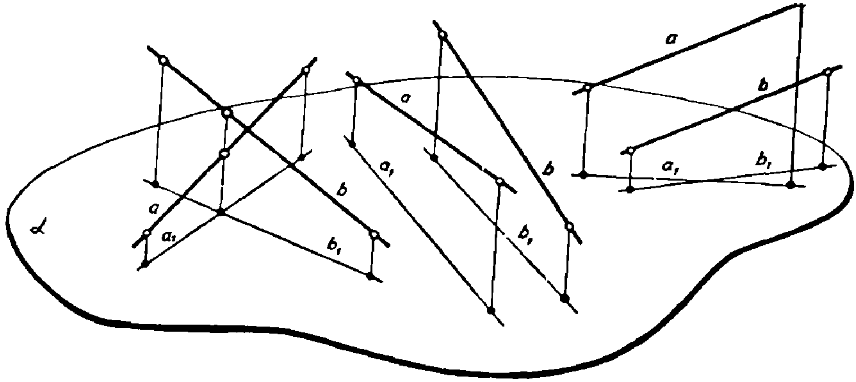


Рис. 52

На среднем чертеже изображен случай, когда скрещивающиеся прямые лежат в параллельных проектирующих плоскостях внутреннего проектирования. Образом такого расположения скрещивающихся прямых может служит любое из непараллельных расположений опорных жердей гимнастических брусьев.

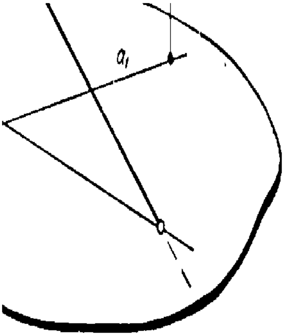
На крайнем справа чертеже скрещивающиеся прямые оригинала оказались в параллельных проектирующих плоскостях внешнего проектирования.

Таким образом, при изображении скрещивающихся прямых может оказаться, что либо собственно прямые, либо их проекции на основную плоскость изобразятся параллельными прямыми.

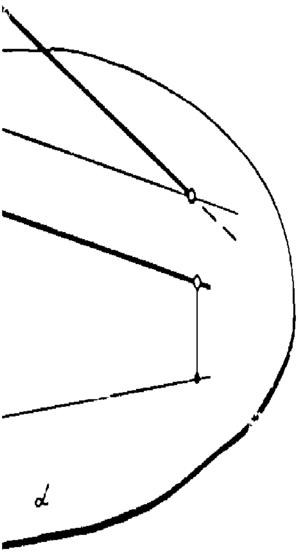
Содержание задач на построение, решаемых с целью закрепления изученного программного материала, следует разнообразить. Решение задач типа 20, 21 и 22 не только вносит разнообразие в упражнения, но и способствует лучшему развитию пространственного воображения. Задачи типа 21 полезно решать на заранее подготовленных чертежах-плакатах.

Задача 21. Определить, какое из взаимных расположений прямых $a(a_1)$ и $в(в_1)$ представлены на рис. 53—55.

Задача 22. Дополнить изображения, представленные на рис. 56—59, так, чтобы прямые $a(a_1)$ и $в_x(в)$ $c(c_x)$ и $d(d_x)$, $m_x(m_1)$ и $n_x(n_1)$, $l(l_x)$ и $к(к_x)$изображали пересекающиеся, параллельные или скрещивающиеся прямые.



ис. 53



ис. 54

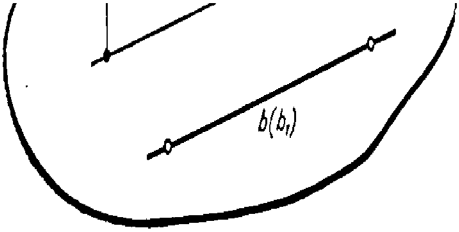


Рис. 55

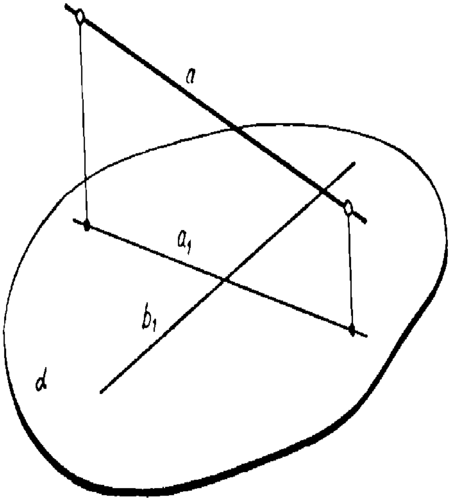


Рис. 56

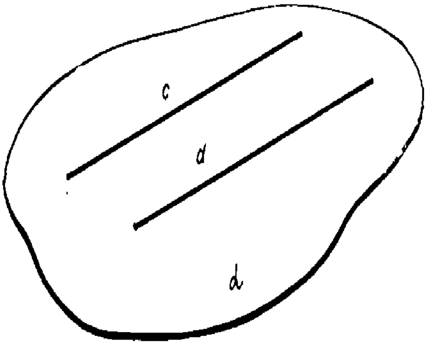


Рис. 57

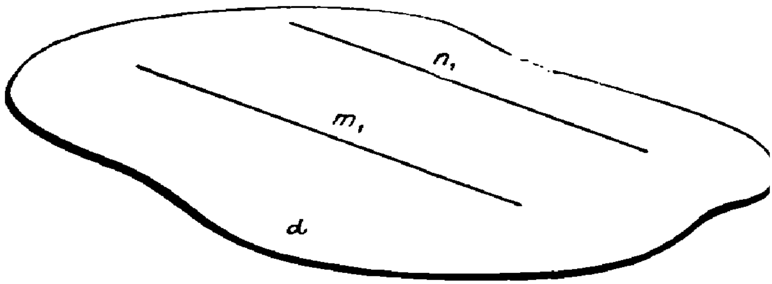


Рис. 58

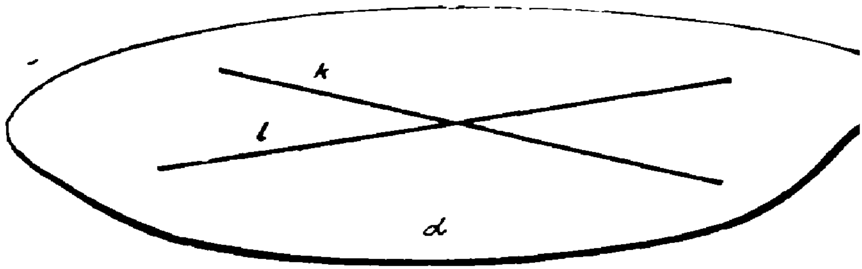


Рис. 59

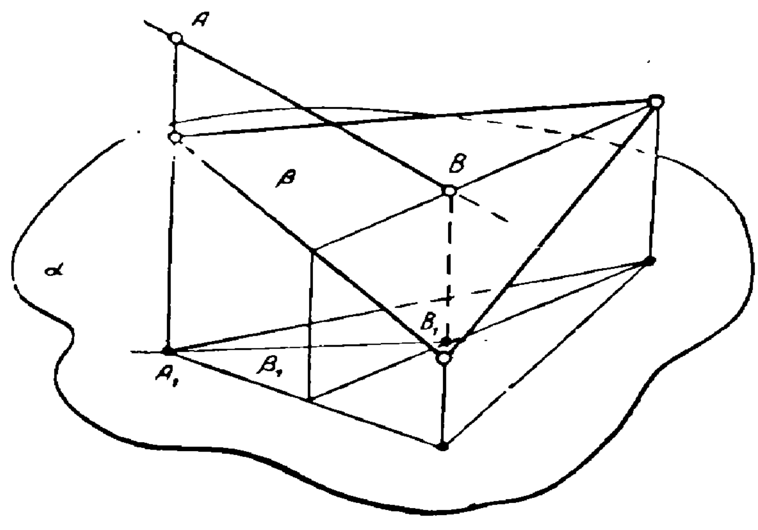


Рис. 60

Задача 23. Построить изображение прямой, пересекающей заданную плоскость.

Для решения задачи достаточно провести прямую через точку $B(B_1)$, принадлежащую плоскости (задача 9), и точку $A(A_1)$, не принадлежащую плоскости (задача 10).

На рис. 60 прямая AB (A_1B_1) представляет одно из таких решений.

Задача 24. Построить изображение прямой, параллельной заданной плоскости.

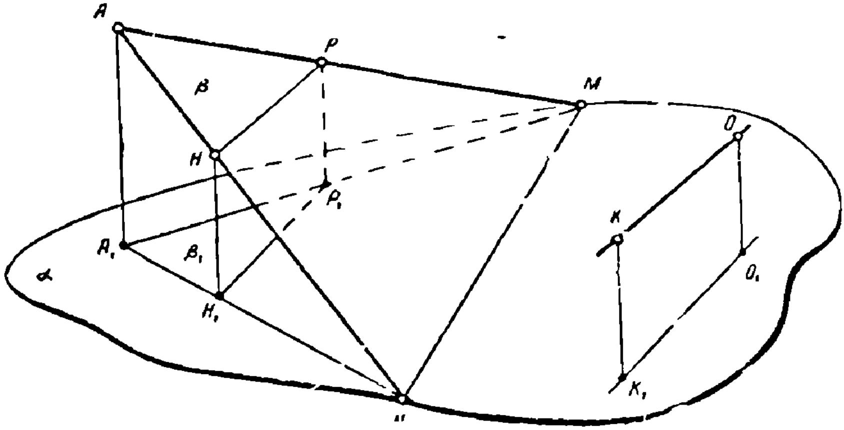


Рис. 61

Строим прямую $HP(H_1P_1)$, принадлежащую заданной плоскости (задача 8), и через произвольную точку $K(K_1)$, не принадлежащую этой плоскости (рис. 61), проводим прямую KO (K_1O_1), параллельную прямой HP (H_1P_1) (задача 17).

Задача 25. Дополнить изображение, представленное на рис. 62, так, чтобы прямая $a(a_x)$ была бы параллельна заданной плоскости, лежала в ней, пересекала ее.

Задача 26. Через данную точку провести плоскость, параллельную двум данным прямым $a(a_1)$ и $в(в_1)$.

Задача 27. Через одну из скрещивающихся прямых провести плоскость, параллельную другой заданной прямой.

Задача 28. Через заданную точку $K(K_1)$ провести плоскость, параллельную заданной плоскости $\beta(\beta_1)$.

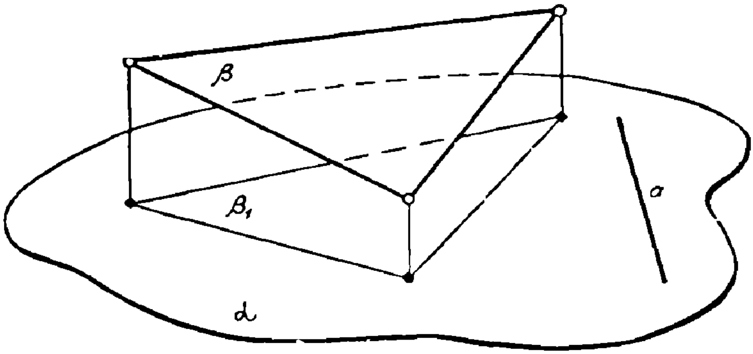


Рис. 62

Задача имеет решение, если точка $K(K_1)$ не принадлежит заданной плоскости. Пусть точка $K(K_1)$ — одна из таких точек. Проводим через нее две прямые, параллельные двум пересекающимся прямым и принадлежащим плоскости β (β_1).

На рис. 63 в качестве таких прямых в плоскости $\beta(\beta_1)$ выбраны прямые AM (A_1M) и MN. Плоскость $KXY(K_1XY)$ — искомая.

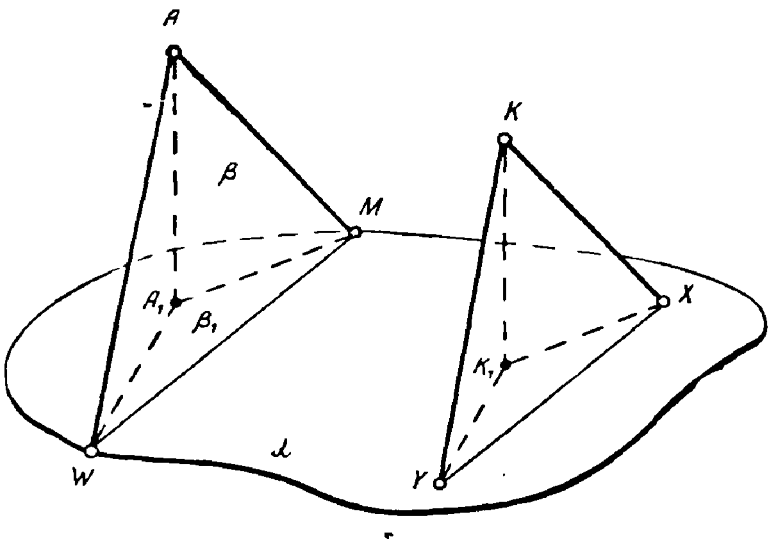


Рис. 63

Решение перечисленных задач проводится путем непосредственного применения изучаемых положений курса стереометрии. Несколько более опосредствованными методами решаются задачи на построение точек пересечения прямых с плоскостью, построение прямых пересечения плоскостей. Выделим эти задачи, объединенные общностью метода, в отдельную группу.

4. Задачи на построение точек и линий пересечения прямых и плоскостей

В итоге обучения решению этих задач учащихся следует познакомить с двумя принципами, на основе которых выполняется построение точек пересечения прямой с плоскостью и построение прямой, по которой пересекаются плоскости.

1) Для построения линии пересечения двух плоскостей достаточно знать две точки прямой, по которой пересекаются плоскости, или одну точку и направление прямой. Точки прямой, по которой пересекаются плоскости, определяются как точки пересечения *произвольной прямой одной* из заданных плоскостей с другой плоскостью.

2) Для построения точки пересечения прямой с плоскостью достаточно построить линию пересечения *произвольной вспомогательной плоскости*, проведенной через данную прямую, с данной плоскостью. Точка пересечения данной прямой с данной плоскостью определяется как точки пересечения данной прямой с линией пересечения вспомогательной и данной плоскостей.

Казалось бы, в решении обеих задач имеется круг. Однако последовательное применение этих принципов к совокупности задач с частными случаями взаимного расположения прямых и плоскостей показывает, что круга нет. Более того, при таком подходе к решению этих задач определяется четкий конкретный путь обучения построению точек и линий пересечения прямых и плоскостей.

Принципы, сформулированные выше, могут быть сообщены учащимся либо сразу в порядке обобщения задач 13 и 14, либо после решения еще нескольких задач этого типа. Однако и в случае осуществления второй схемы преподавателю, не формулируя принципов явно, следует выделять их при рассмотрении каждой из задач.

Задача 29. Построить линию пересечения заданных проектирующих плоскостей (рис. 64).

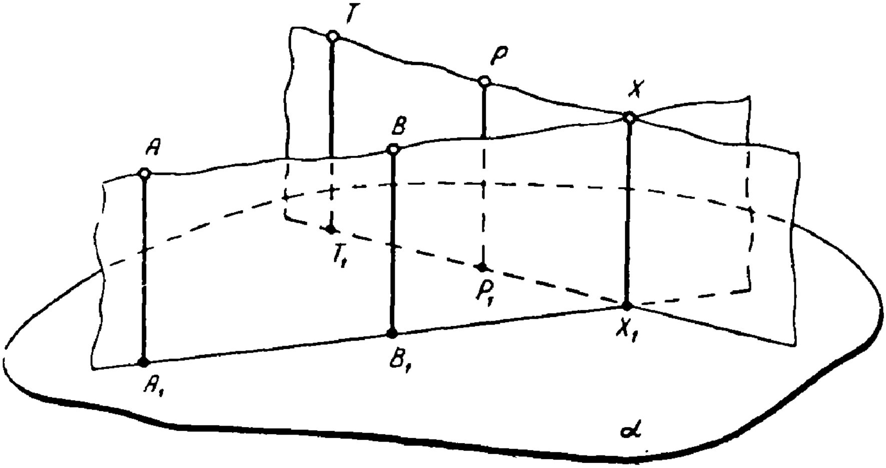


Рис. 64

Пусть проектирующие плоскости заданы проектирующими прямыми AA_1 и BB_1, TT_1 и PP_1. Одной точкой линии пересечения заданных плоскостей будет точка X_1 —точка пересечения следов обеих плоскостей. В оригинале линия пересечения проектирующих плоскостей будет проектирующей прямой, как линия пересечения двух плоскостей, проведенных через параллельные (проектирующие) прямые. Следовательно, и на изображении прямая XX_1, по которой пересекаются проектирующие плоскости, будет параллельна AA_1.

Как решение этой задачи, так и всех остальных следует рассматривать через возможно бо́льшую совокупность частных случаев. Проектирующие прямые, определяющие проектирующие плоскости, могут располагаться так, что линия пересечения плоскостей будет находиться либо между одной из пар проектирующих прямых, либо между обеими парами. Проектирующие плоскости следует задавать не только одной парой проектирующих прямых, но и проектирующей прямой и точкой, лежащей в основной плоскости.

Во всех случаях решения следует связывать с построениями в оригинале. Если, например, проектирующую плоскость рассматривать как частокол с плотно примыкающими друг к другу кольями, то учащиеся должны понимать, что линия пересечения будет колом, который находится одновременно и в первой и во второй изгородях. Линию пересечения проектирующих плоскостей можно рассматривать как стык двух листов фанеры, являющихся образами проектирующих плоскостей.

Задача 30. Построить (рис. 65) точку пересечения произвольно заданной прямой $a(a_1)$ с проектирующей плоскостью φ.

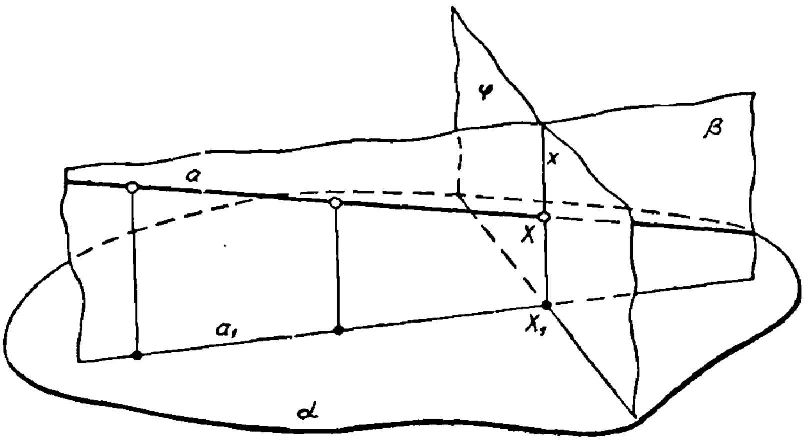


Рис. 65

Для решения задачи проводим через заданную прямую $a(a_1)$ вспомогательную проектирующую плоскость и строим линию (x) пересечения вспомогательной и заданной проектирующих плоскостей (задача 29). Точка $X(X_1)$ — точка пересечения прямых x и a на изображении — является изображением точки пересечения этих прямых, так как в оригинале эти прямые лежат в одной плоскости. Вместе с тем точка $X(X_1)$ будет точкой пересечения прямой $a(a_1)$ с проектирующей плоскостью φ.

В самом деле, точка $X(X_1)$ принадлежит прямым $a(a_1)$ и x. Прямая x, как линия пересечения плоскостей

β и φ, принадлежит плоскости φ. Следовательно, и точка $X(X_1)$ принадлежит плоскости φ, т. е. действительно точка $X(X_1)$ является точкой пересечения прямой $a(a_1)$ и заданной плоскости.

Доказательство в последующих задачах проводится таким же образом, как это было только что выполнено, поэтому описание этого этапа будет опускаться.

Прообразом решения задачи 30 в оригинале может служить определение на стене (проектирующая плоскость) центра отверстия для трубы $a(a_1)$, подводимой к зданию на опорах.

Сначала при выполнении чертежей полезно обозначать вспомогательные плоскости обрывами и обрезами так, как это сделано на рис. 65. Позже, чтобы не загромождать чертежа посторонними линиями, от такого обозначения вспомогательных плоскостей следует отказаться и приучить учащихся воображать их.

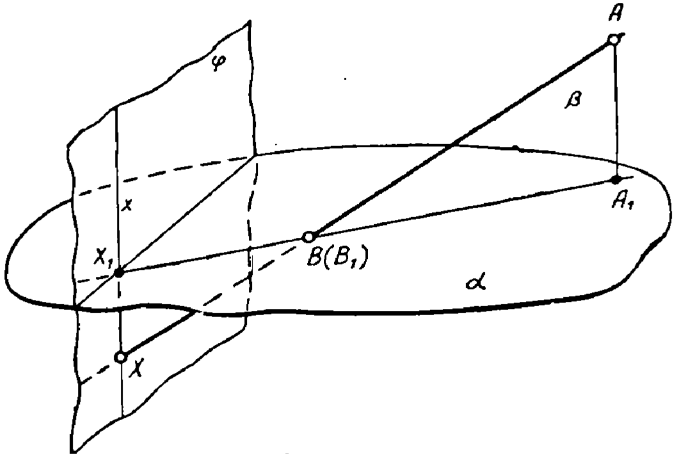


Рис. 66

На рис. 66 представлено такое оформление чертежа к решению той же задачи при задании прямой точкой и следом.

В классе следует рассмотреть решение задачи и при других случаях взаимного расположения заданных прямой и проектирующей плоскости.

Задача 31. Построить линию пересечения произвольно заданной плоскости β (β_1) и проектирующей плоскости φ.

Построим на рис. 67 две произвольные прямые $a(a_1)$ и $в(в_1)$, принадлежащие плоскости β (β_1), и найдем точки — $X(X_1)$ и Y (Y_1) — пересечения этих прямых с проектирующей плоскостью φ (задача 30). Прямая $XY(X_1Y_1)$ — искомая.

Решение этой и следующей задач удобно использовать для обобщения приемов решения задач до принципов, сформулированных в начале п. 4 (§ 2). Учащимся следует при этом указать, что, хотя для построения двух точек линии пересечения заданных плоскостей, можно выбирать произвольные прямые $a(a_1)$ и $в(в_1)$ любой из заданных плоскостей[1], однако удачный выбор прямых часто облегчает решение задачи.

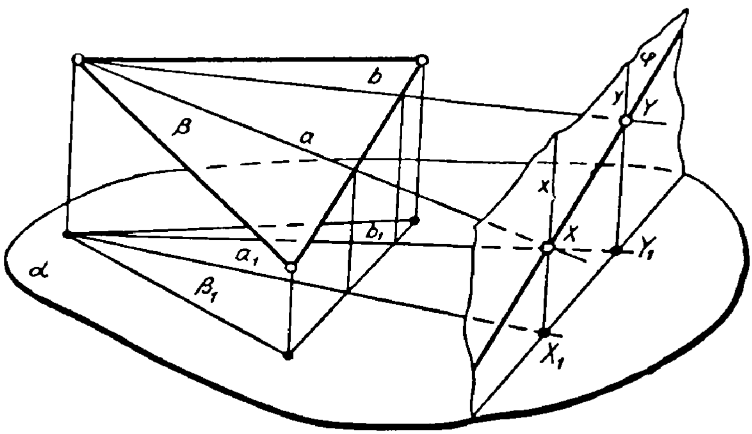


Рис. 67

Решая задачи при другом взаимном расположении заданных плоскостей (рис. 68—70), учащихся следует приучать к отысканию наиболее рациональных путей построения линии пересечения. Так, на рис. 68 в качестве таких прямых приняты прямые $a(a_1)$ и $в(в_1)$, определяемые точками, задающими плоскость β (β_1), на рис. 69 за такие прямые приняты прямая $в(в_1)$ — след плоскости β (β_1) на основной плоскости и прямая $a(a_1)$ плоскости $\beta(\beta_1)$.

---

[1] Выбор прямых для этой цели в проектирующей плоскости станет возможным после решения задачи 32.

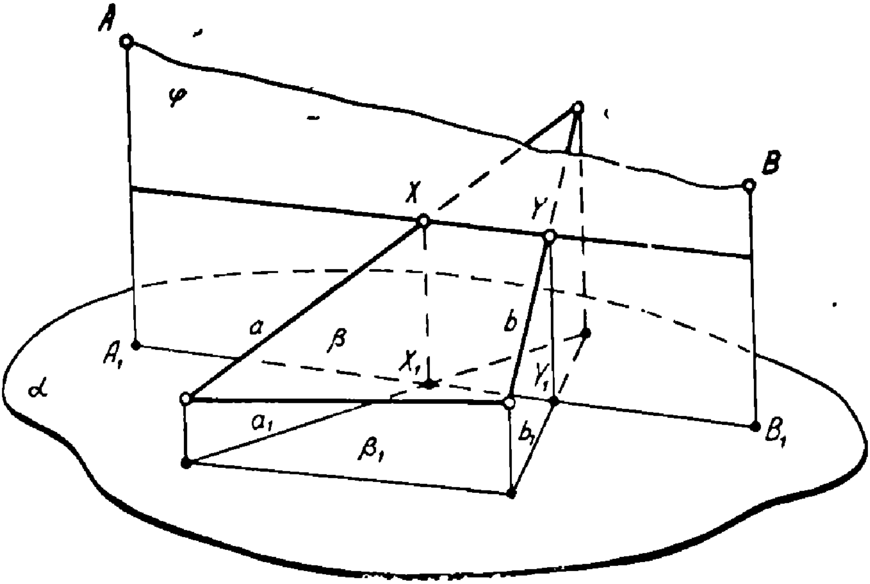


Рис. 68

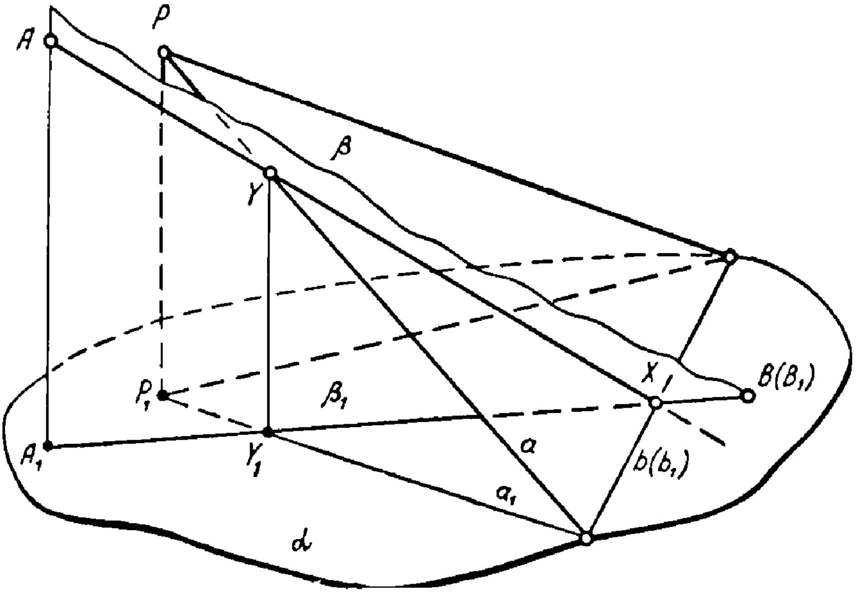


Рис. 69

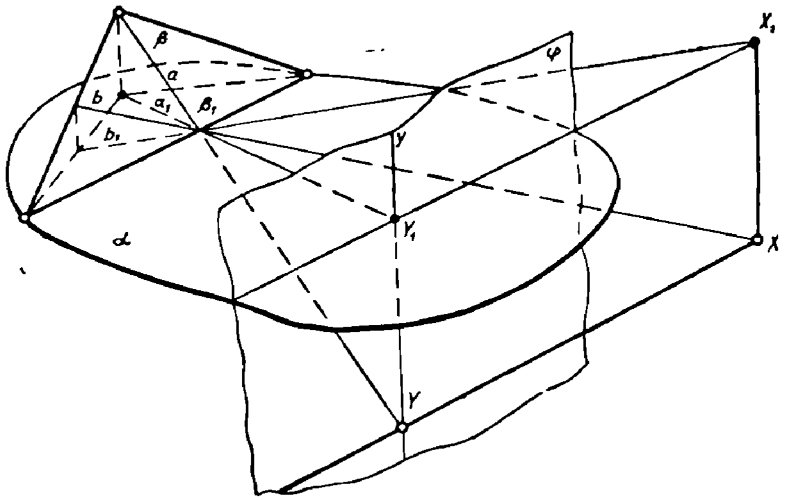


Рис. 70

Как и в предшествующих задачах, проектирующую плоскость следует задавать при различных положениях проектирующих прямых AA_1 и BB_1 (рис. 67, 68, 70), проектирующей прямой AA_1 и точки $B(B_1)$, лежащей в основной плоскости (рис. 69). В комбинации с различными способами (рис. 67, 70) задания плоскости β (β_1) учитель может получить большое число примеров для проведения упражнений в классе и дома и для проведения контрольных работ.

Задача 32. Построить точку пересечения произвольно заданной плоскости с произвольно заданной прямой.

Пусть на рис. 71 прямая $a(a_1)$ задана точками $A(A_1)$ и $B(B_1)$. Проводим через нее вспомогательную проектирующую[1] плоскость φ и строим прямую $x(x_1)$ — линию пересечения этой плоскости с заданной (задача 31). В оригинале прямые $x(x'_1)$ и $a'(a'_1)$ лежат в одной плоскости φ Следовательно, изображением точки пересечения этих прямых будет точка $X(X_1)$ — точка пересечения прямых x и a.

---

[1] После решения задачи 33 станет возможным проводить произвольную плоскость. Однако из всех плоскостей для осуществления наиболее рационального решения задачи следует выбирать наиболее подходящую для этой цели. На рис. 71 такой плоскостью будет проектирующая плоскость BB_1AA_1, уже имеющаяся на проекционном чертеже.

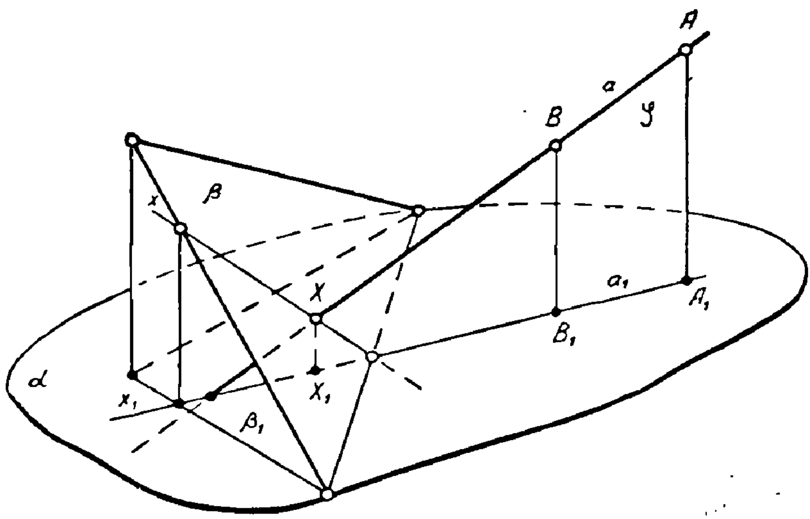


Рис. 71

При построении точки пересечения прямых на изображении следует приучать учащихся устанавливать принадлежность этих прямых к одной и той же плоскости оригинала. Этот методический прием позволяет предупредить распространенную ошибку учащихся, когда они на изображении находят точку пересечения скрещивающихся прямых, проекции которых на изображении могут пересекаться.

Особое внимание при решении этой задачи следует уделить построению точек пересечения проектирующих прямых с различным образом заданными плоскостями, так как решение этой задачи является составным элементом построения сечений в многогранниках и телах вращения. На примере решения этой же задачи можно проиллюстрировать выполнимость второго принципа построения точек и линий пересечения прямых и плоскостей (п. 4, § 2).

В самом деле, для построения точки пересечения проектирующей прямой MM_1 (рис. 72, 73) с плоскостью $\beta(\beta_1)$ можно уже через MM_1 провести произвольную вспомогательную плоскость, так как для любой из вспомогательных и любой из заданных плоскостей может быть построена прямая $x(x_1)$, по которой они пересека-

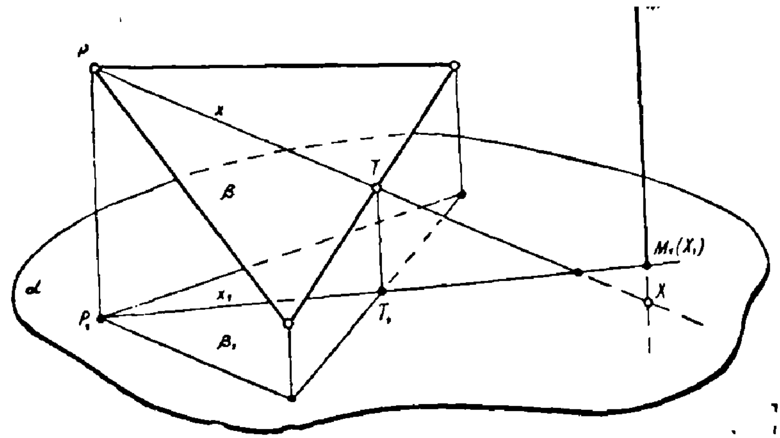


Рис. 72

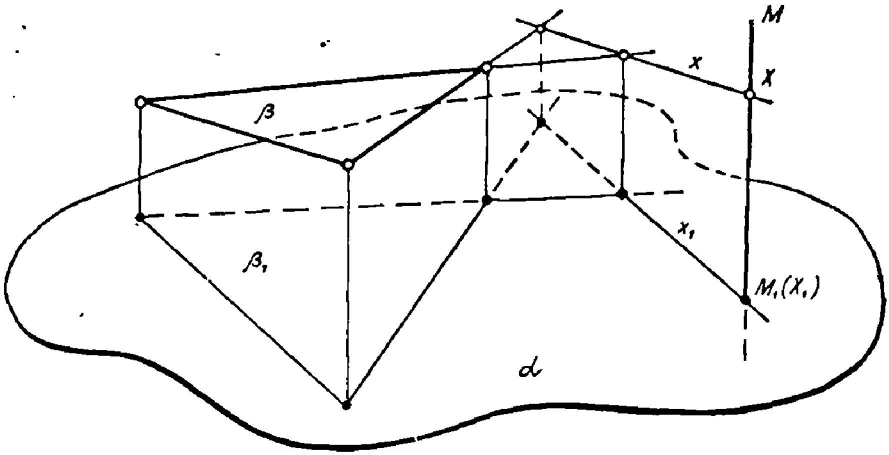


Рис. 73

ются. Точка пересечения проектирующей прямой с плоскостью после этого находится как точка пересечения прямых MM_1 и x.

Однако в повседневной практике из всех вспомогательных плоскостей выбирается наивыгоднейшая. На рис. 72 в качестве такой плоскости взята плоскость, определяемая прямой MM_1 и точкой $P(P_1)$. В этом случае одна из точек линии — прямая $x(x_1)$ — пересечения заданной плоскости со вспомогательной оказывается заданной и достаточно построить лишь одну точку линии пересечения этих плоскостей. На рис. 72 такой точкой служит точка $T(T_1)$.

Второй пример решения задачи 32 представлен на рис. 73.

С обоснованием способа построения точки пересечения проектирующей прямой с произвольно заданной плоскостью получил полное обоснование первый принцип построения линии пересечения плоскостей. Действительно, для построения двух точек линии пересечения двух плоскостей можно теперь выбирать по паре прямых в любой из заданных плоскостей.

Например, при решении задачи 31 (рис. 67) можно было бы в качестве вспомогательных прямых $a(a_1)$ и $в(в_1)$ выбрать любую из прямых проектирующей плоскости и построить точки пересечения этих прямых с плоскостью β (β_1).

Если бы в плоскости φ были выбраны проектирующие прямые x и y, в качестве вспомогательных плоскостей были бы взяты плоскости, проведенные через эти прямые и точку $P(P_1)$, то схема построения точек $X(X_1)$ и $Y(Y_1)$ осталась бы такой, как она выполнена на рис. 67

Выполнимость второго принципа получит полное обоснование после решения задачи 33, т. е. после того, как учащиеся освоятся с построением линии пересечения двух произвольно заданных плоскостей.

Задача 33. Построить линию пересечения двух произвольно заданных плоскостей.

Решение задачи в соответствии с выставленными принципами, понимание которых учащимся к этому моменту должно быть подготовлено, не должно уже вызывать затруднений. В одной из заданных плоскостей (рис. 74), например в плоскости φ (φ_1), берутся две произвольные вспомогательные прямые $a(a_1)$ и $в(в_1)$ и строятся точки — точки $X(X_1)$ и $Y(Y_1)$ — пересечения этих прямых с плоскостью β (β_1). Прямая $XY(X_1Y_1)$— искомая.

В повседневной практике в качестве вспомогательных прямых выбирают те, которые имеются уже на чертеже: следы плоскостей, прямые, определяемые точками, задающими плоскость. Одна точка линии пересечения плоскостей, заданных на рис. 75, определяется как точка пересечения следов плоскостей — точка

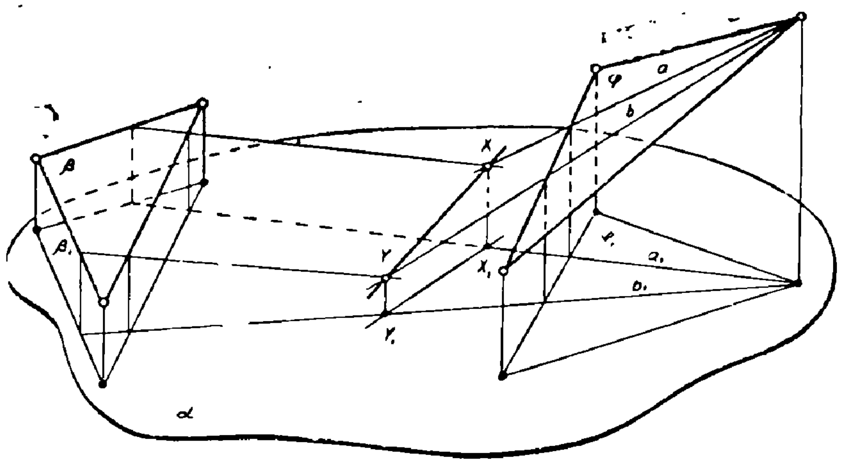


Рис. 74

$X(X_1)$. В качестве второй вспомогательной прямой $a(a_1)$ взята прямая, лежащая в проектирующей плоскости $PP_1\ TT_1$.

Решением задачи 33 заканчивается обоснование принципов построения прямых, по которым пересекаются плоскости, и точек пересечения прямых и плоскостей. Однако в классе следует решить еще несколько

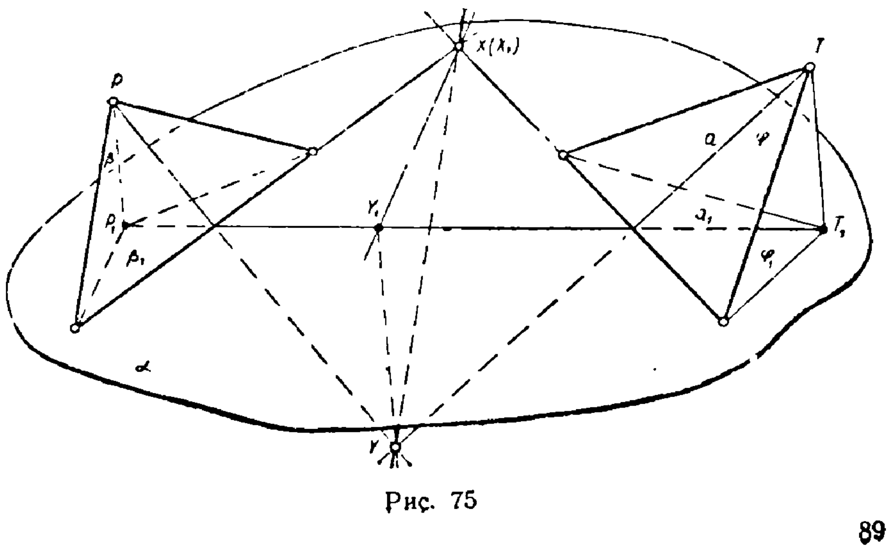


Рис. 75

задач, решение которых сводится к построению точек и линий пересечения прямых и плоскостей.

Задача 34. Построить линию пересечения двух параллельных плоскостей третьей плоскостью.

Задача 35. Построить точку пересечения трех попарно непараллельных плоскостей.

Задача 36. Через данную точку провести прямую, параллельную двум данным плоскостям.

Задача 37. В двух данных плоскостях через данные точки в каждой из них провести параллельные между собой прямые.

Задача 38. В данной плоскости через данную в ней точку провести прямую, параллельную второй данной плоскости.

Задача 39. В данной плоскости провести прямую, параллельную второй данной плоскости и пересекающую данную прямую.

Задача 40. Через данную точку провести прямую, параллельную данной плоскости и пересекающую данную прямую.

Задача 41. Через данную точку провести прямую, пересекающую две данные скрещивающиеся прямые.

Задача 42. Провести прямую, пересекающую две данные скрещивающиеся прямые и параллельную третьей данной прямой.

Задача 43. Построить одну прямую, пересекающую две данные прямые и параллельную данной плоскости.

Задача 44. Построить одну прямую, пересекающую три данные попарно скрещивающиеся прямые.

Задача 45. Через две данные прямые провести плоскости, пересекающиеся по прямой, лежащей в данной плоскости.

При решении каждой из задач в затруднительных случаях следует прибегать к анализу.

Анализ проводится на иллюстративном чертеже, а построение—на проекционном. С первых же шагов необходимо добиваться, чтобы учащиеся проводили доказательство и исследование решений. Рассмотрим осуществление каждого из этих этапов на примере решения задачи 45.

А н а л и з. Допустим, что задача решена и искомые плоскости β и γ пересекаются по прямой x (рис. 76) на данной плоскости φ. Данные прямые a и $в$ пересекают данную плоскость на прямой x.

Следовательно, линия пересечения искомых плоскостей должна проходить через точки пересечения данных прямых с данной плоскостью.

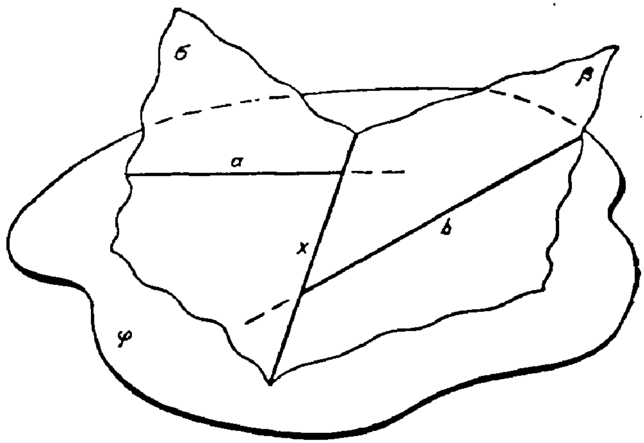


Рис. 76

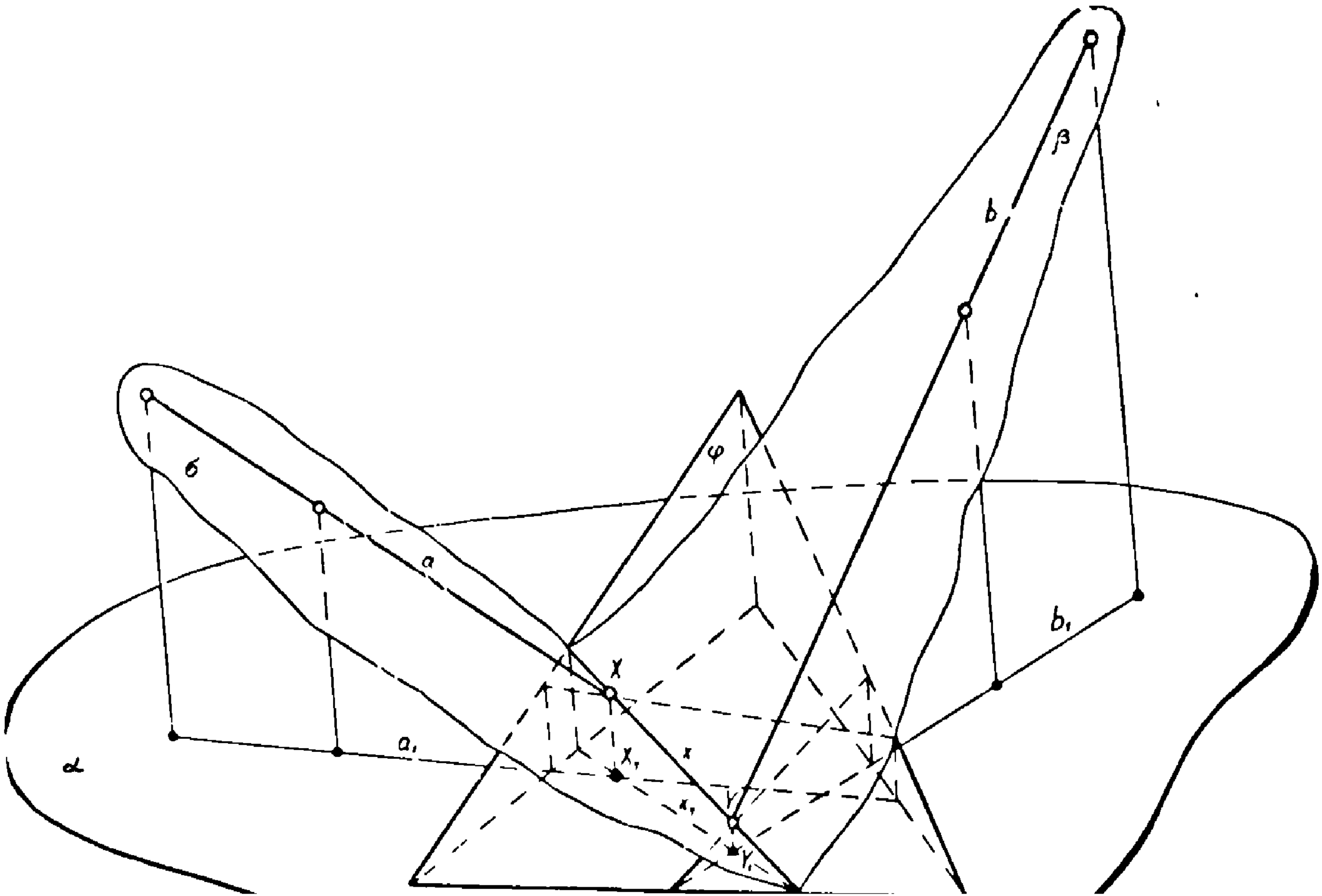
Построение. Строим (рис. 77) точки $X(X_1)$ и $Y(Y_1)$ — точки пересечения данных прямых $a(a_1)$ и $в(в_1)$ с заданной плоскостью φ (φ_1). Пересекающиеся прямые $a(a_1)$ и $x(x_1)$, $в(в_1)$ и $x(x_1)$ определяют искомые плоскости β (β_1) и σ (σ_1).

Решение задачи упрощается, если за плоскость φ принять основную плоскость.

Доказательство. Плоскости β (β_1) и σ (σ_1) — искомые, так как в них по построению лежат данные прямые $a(a_1)$ и $в(в_1)$ и они пересекаются по прямой $x(x_1)$, лежащей в данной плоскости.

Исследование. Задача неопределенна, если данные прямые параллельны между собой и параллельны данной плоскости. Задача не имеет решения, если данные прямые скрещивающиеся и каждая из них параллельна данной плоскости. В противном случае задача имеет одно решение.

Задачи 34—45 представляют собой материал для развития навыка в построении точек и линий пересече-


β
b
σ
a
φ
b₁
X
x
X₁
x₁
Y
Y₁
a₁
α

ния прямых и плоскостей. Удобны они и для иллюстрации различия в постановке решения задач на построение на иллюстративном и проекционном чертежах. Для достижения сформулированных целей нет необходимости решать эти задачи одну за другой, как это следует, например, поступить по отношению к задачам 29—33. Более того, можно вообще ограничиться выборочным решением некоторых из задач 34—45. К решению оставшихся задач полезно вернуться в X классе в порядке повторения ранее изученного материала.

Обучение решению задач на построение по рассматриваемой системе не предполагает, что учащиеся, приступающие к изучению стереометрии, владеют необходимым запасом пространственных представлений, имеют развитое пространственное воображение. Наоборот, оно исходит из необходимости активно пополнять запас пространственных представлений учащихся, развивать их пространственное воображение.

Желаемое будет достигнуто тем быстрее и полнее, чем чаще, разносторонне и глубже на первых порах изучения стереометрии будут устанавливаться связи оригинала с изображением.

Связь оригинала с изображением следует поддерживать и в дальнейшем при построении чертежей к решению задач и к доказательству теорем.


Рис. 77

5. Решение задач на построение в воображении

Определение этого метода решения задач на построение выполнено во «Введении»[1].

Несмотря на то, что школьная практика накопила большой опыт обучения решению задач на построение в воображении, математическая постановка проблемы решения этих задач сколько-нибудь удовлетворительно не отработана до настоящего времени. В самом деле, решение задачи на построение в воображении сводится к перечислению геометрических операций, каждая из которых признается «выполнимой». Для строгой постановки проблемы решения задач этим методом должен быть составлен точный перечень «выполнимых» (конструктивных) операций. Задача на построение в вооб-

[1] См. стр. 3—4.

ражении после этого считалась бы решенной, если построение искомого элемента сводилось к «выполнению» только принятых конструктивных операций.

К настоящему моменту не только не составлен сколько-нибудь удовлетворительный перечень «выполнимых» операций, но и не найден объективный критерий для его составления. В учебных руководствах представлено несколько точек зрения по вопросу отбора выполнимых операций [1; 17; 19; 24; 22]. Однако отбор выполнимых операций авторами этих руководств проведен с большой степенью произвола, известный произвол допускается и в истолковании некоторых из принятых конструктивных операций.

Однако и при такой неопределенной математической постановке проблемы решения задач на построение в воображении, обучение решению этих задач в средней школе полезно и необходимо.

Владение методом решения задач на построение в воображении облегчает понимание ряда задач на построение, знакомство с которыми обязательно для учащихся (например, построение перпендикуляра к двум скрещивающимся прямым).

Решение этой задачи на проекционном чертеже громоздко, воспроизведение пространственного образа по проекционному чертежу труднее, чем по иллюстративному чертежу, применяемому при решении задачи в воображении.

Навык в решении задач на построение в воображении оказывается полезным для проведения анализа условия задачи и отыскания эффективного способа ее решения (задача 45).

К решению задач на построение в воображении приходится прибегать при доказательстве ряда теорем существования в курсе стереометрии (существование перпендикуляра к плоскости, существование взаимно-перпендикулярных плоскостей, существование призм и т. п.).

В процессе решения задач на построение учащиеся осваиваются с пониманием и выполнением иллюстративного чертежа, навык владения которым необходим для изучения всего программного материала.

В экспериментальных классах была принята следующая система выполнимых операций:

1) через три точки, через прямую и точку, через две пересекающиеся или две параллельные прямые можно провести плоскость;

2) линия пересечения двух пересекающихся плоскостей может быть построена;

3) в построенных плоскостях выполнимы все построения, проводимые с линейкой, угольником, циркулем и малкой (транспортир в смысле малки).

Наиболее подходящим моментом для начала систематического обучения решению задач на построение в воображении служит окончание практики в решении задач на построение точек и линий пересечения прямых и плоскостей. К этому моменту учащиеся успевают освоиться с эффективными методами решения задач и понимание нового метода решения задач на построение, вводимого в сравнении со старым, обычно не вызывает затруднений.

Решение задачи на построение в воображении раскрывается учащимся как доказательство существования решения, а решение задачи на проекционном чертеже — как его фактическое построение. Это различие особенно успешно осваивается учащимися, если на первых шагах обучения решению задач на построение в воображении каждую из рассматриваемых задач решать обоими методами.

Рассмотрим примеры такого подхода к обучению учащихся решению задач на построение.

Задача 46. Через точку, расположенную вне данной прямой, провести прямую, параллельную данной прямой.

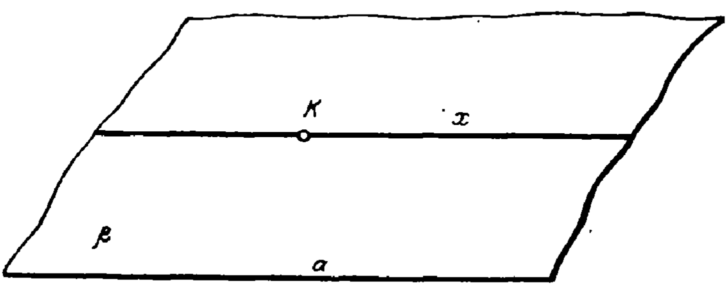


Рис. 78

Решение 1. Точка K (рис. 78) и прямая a определяют плоскость β. В этой плоскости через точку K проводим прямую x, параллельную прямой a.

Решение 2. Через точку K (черт. 49) проводим прямую x, параллельную прямой a, и прямую x_1, параллельную прямой a_1. Задав на прямой $x(x_1)$ какую-нибудь точку $T(T_1)$, заканчиваем решение задачи на построение.

После доказательства правильности и единственности решения внимание учащихся обращается на то, что в первом решении (рис. 78) ни построение плоскости β, ни построение прямой x фактически не выполнялось, что в перечисленных операциях признается только факт существования плоскости β и прямой x, что при изложении решения с одинаковым правом можно употреблять слова: «определяет», «существует», «строим», «проводим» и др. Внимание учащихся должно быть обращено и на то, что не определяет решения и выполняемый при этом иллюстративный чертеж (рис. 78), так как на нем прямая x служит изображением не только прямой, параллельной прямой a.

По отношению ко второму решению указывается, что все построения выполнялись эффективно с помощью линейки и угольника, что выполненный при этом чертеж (рис. 49) определяет прямую $x(x_1)$, параллельную прямой $a(a_1)$, и только такую прямую.

К пониманию всех изложенных положений в рассматриваемой системе обучения учащиеся вполне подготовлены. Более того, как решение, так и анализ задач 47—50 они могут выполнить самостоятельно.

Задача 47. Через точку, расположенную вне данной плоскости, провести прямую, параллельную данной плоскости.

Задача 48. Через точку, расположенную вне данной плоскости, провести плоскость, параллельную данной плоскости (рис. 79 и 4).

Задача 49. Через прямую, параллельную данной плоскости, провести плоскость, параллельную данной.

Задача 50. Через точку, не принадлежащую двум скрещивающимся прямым, провести плоскость, параллельную этим прямым (рис. 80 и 81).

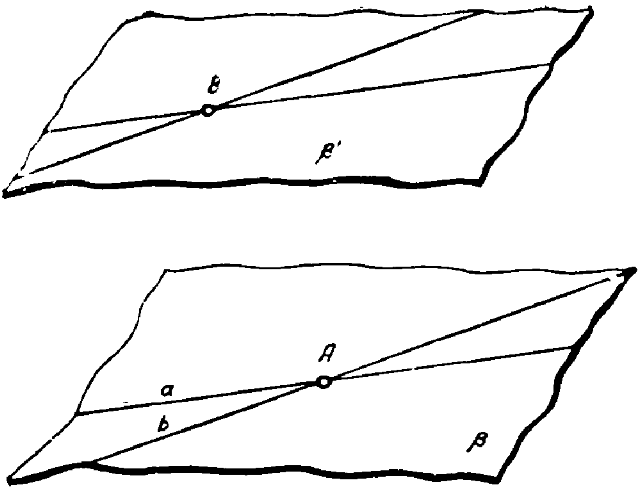


Рис. 79

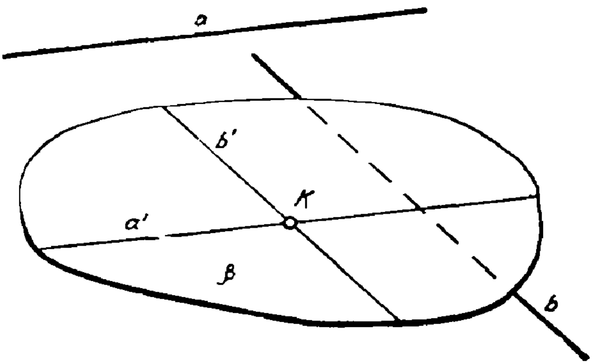


Рис. 80

Решение задач 46—50 проводилось двумя методами, для решения всех других задач учащимся экспериментальных классов разрешалось применять любой метод. Построения, выполненные в предшествующих задачах, при решении каждой следующей задачи считались выполненными. Это освобождало учащихся от необходимости перечислять конструктивные операции ранее усвоенных построений, из которых складывается решение новой задачи, четко выделяло на первый план идею решения новой задачи. Как видно из приведенных примеров (рис. 78, 79, 80), иллюстративный чертеж не загромаждался излишними построениями, кроме того, задачу часто оказывалось возможным решить без чертежа, т. е. действительно в воображении.

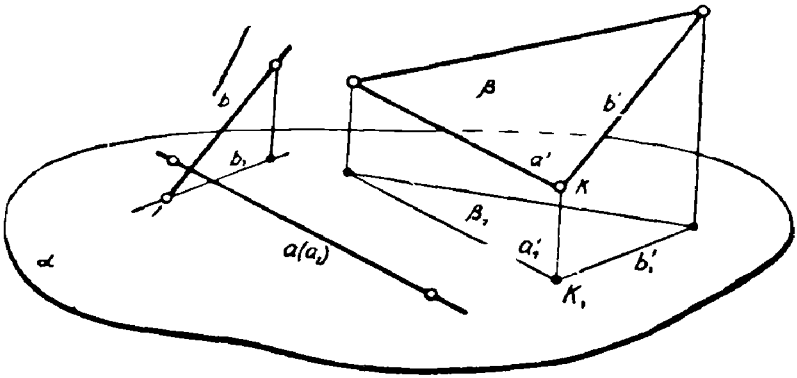


Рис. 81

Решение задачи 50 излагалось учащимся следующим образом.

Через данную точку K (рис. 80) проводим прямые a' и $в'$, параллельные данным скрещивающимся прямым a и $в$. Две пересекающиеся прямые a' и $в'$ определяют искомую плоскость.

Решая задачи на построение, в воображении при необходимости следует проводить анализ условия задачи, доказательство и исследование решения.

Учащиеся старших классов должны понимать, что анализ — сильное средство отыскания решения. Учитель должен учить их пользоваться этим средством. В то же время довольно часто приходится наблюдать, когда учителя заставляют учащихся проводить анализ к решению каждой задачи, хотя прием построения всем учащимся кристально ясен и без анализа. Для того чтобы не подавить интерес учащихся к решению стереометрических задач на построение, проводить анализ следует главным образом в тех случаях, когда он необходим для отыскания или удобен для изложения решения.

Доказательство решения проводится посредством установления ряда принадлежностей, и проводить его в явной форме надо в тех случаях, когда возникает сомнение в правильности решения или когда учитель сомневается в понимании излагаемого учащимся решения.

Несколько больше следовало бы уделять внимания вопросу исследования решений, особенно доказательству единственности.

При соблюдении «методической меры» в обучении решению задач на построение в воображении число задач, решаемых в классе, может быть даже увеличено по сравнению с числом задач, рекомендуемых для решения программами. В экспериментальных классах решались, например, следующие задачи.

Задача 51. Через данную прямую провести плоскость, параллельную другой данной прямой.

Задача 52. Через данную точку в пространстве провести плоскость, перпендикулярную данной прямой.

Задача 53. Через данную точку провести прямую, перпендикулярную данной плоскости.

Задача 54. Через данную точку провести плоскость, перпендикулярную данной плоскости и параллельную данной прямой.

Задача 55. Построить прямую, перпендикулярную двум данным скрещивающимся прямым и пересекающую их.

Задача 56. Через данную точку провести прямую, пересекающую две данные скрещивающиеся прямые.

Задача 57. Провести прямую, пересекающую две данные скрещивающиеся прямые и параллельную третьей данной прямой.

Систематическое рассмотрение метода решения задач на построение в воображении заканчивается в IX классе. Однако к решению отдельных задач этим методом следует обращаться и в X классе. В X классе можно было бы рассмотреть решение задач 56, 57 и др.

6. К решению задач на построение сечений

Работа по ознакомлению учащихся с проекционным чертежом может быть продолжена в IX классе (IV четверть) при обучении учащихся решению задач на построение сечений многогранников. Особое внимание при этом следует обратить на преемственность рассмотренных выше методов построения точек пересечения прямых и плоскостей, линий пересечения плоскостей и методов построения сечений геометрических тел.

Обучение решению задач на построение сечений можно проводить в следующем плане.

Во-первых, первоначальное ознакомление учащихся с методами построения сечений следует проводить на метрически определенных изображениях. Удобно, например, это проделать на изображении куба и правильного тетраэдра, сопровождая построения на изображении демонстрацией соответствующих отношений на модели. Все это будет способствовать укреплению связи изображения и оригинала.

Во-вторых, точки, определяющие секущую плоскость, следует задавать по возможности при разнообразном взаимном расположении этих точек и многогранника, сечение которого строится.

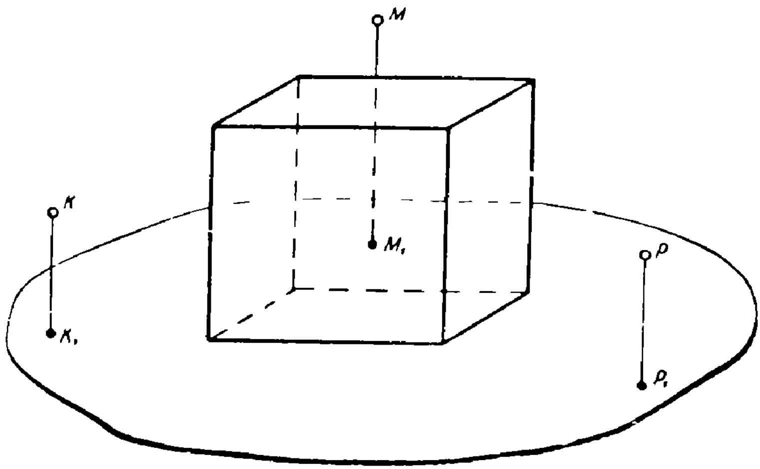


Рис. 82а

На рис. 82 приведена последовательность первых таких задач. Секущая плоскость на этих чертежах задается точками $K(K_1)$, $M(M_1)$ и $P(P_1)$.

При обучении решению как этих задач, так и любой из последующих учащимся следует выделять отдель-

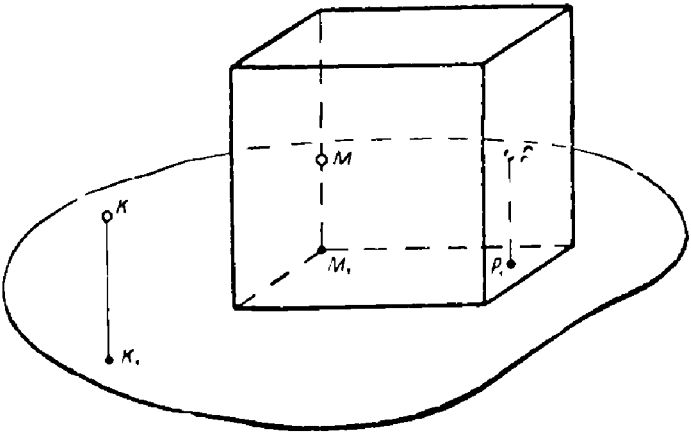


Рис. 82б

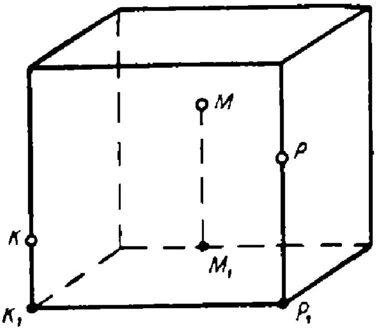


Рис. 82в

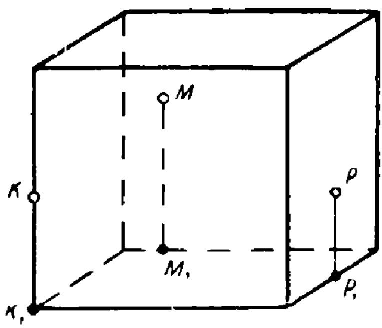


Рис. 82г

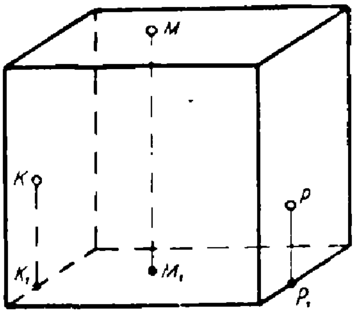


Рис. 82д

ные этапы решения, представляющие собой известные уже учащимся задачи на проекционном чертеже.

Для построения сечения куба, представленного на рис. 83а, достаточно, например, найти точку пересечения ребра CC_1 с плоскостью KMP $(K_1M_1P_1)$. Метод построения этой точки удобно раскрыть учащимся на примере решения уже известной им задачи: на проекцион-

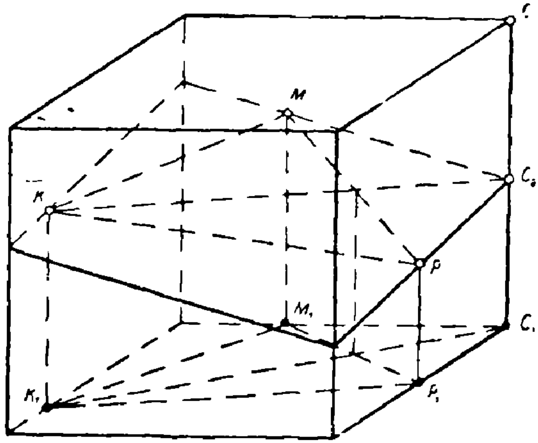


Рис. 83а

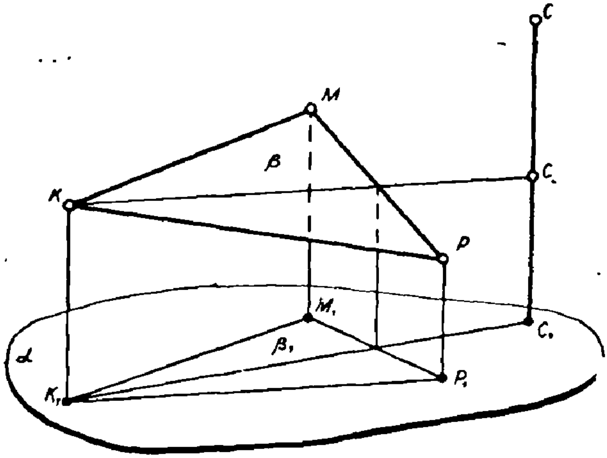


Рис. 83б

ном чертеже (рис. 83б) построить точку пересечения плоскости β (β_1) и проектирующей прямой CC_1. На вспомогательном чертеже следует лишь по возможности точно воспроизвести взаимное расположение точек $K(K_1)$, $M(M_1)$, $P(P_1)$ и прямой CC_1.

В порядке обеспечения преемственности в решении задач на проекционном чертеже важно подчеркнуть мысль, что в качестве вспомогательной плоскости CC_1 KK_1 могла бы быть принята произвольная плоскость, проведенная через ребро CC_1. Вместе с тем учащихся сразу следует приучать к рациональному выбору вспомогательных плоскостей.

При построении сечения куба (рис. 84а) плоскостью KMP ($K_1M_1P_1$) не следует препятствовать приме-

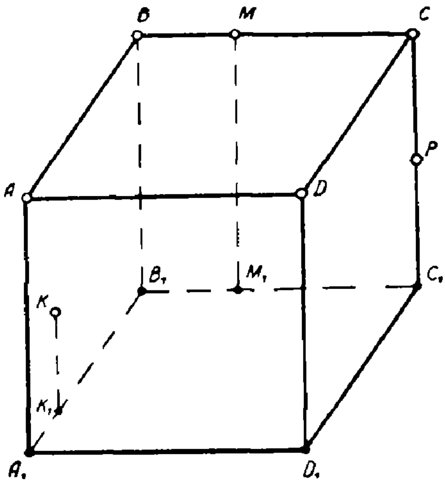


Рис. 84а

нению общего метода (рис. 84б). Однако решение этой задачи следует вести до тех пор, пока учащиеся не догадаются, что наиболее подходящей вспомогательной плоскостью будет плоскость грани BB_1CC_1 (рис. 84в), а не плоскости BB_1EE_1.

В то же время для построения сечения правильной шестиугольной призмы, высота которой равна стороне основания, плоскостью KMP ($K_1M_1P_1$) удобнее при-

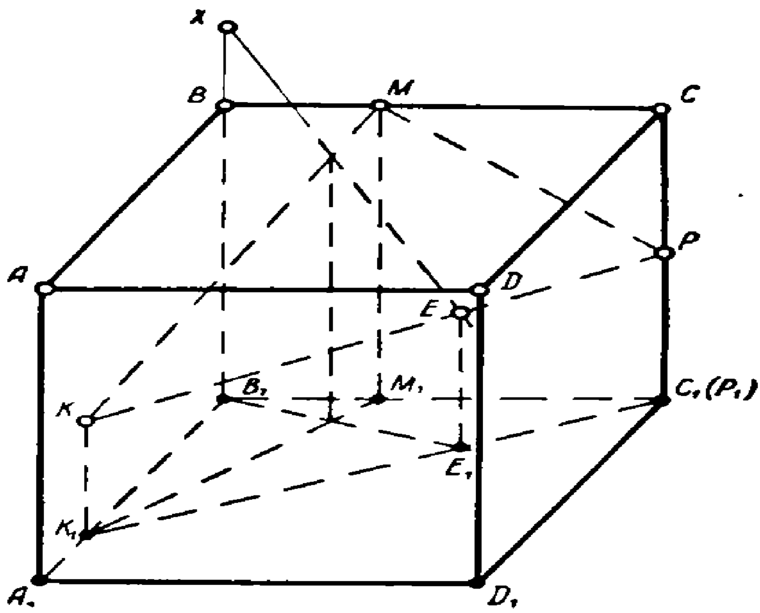


Рис. 84б

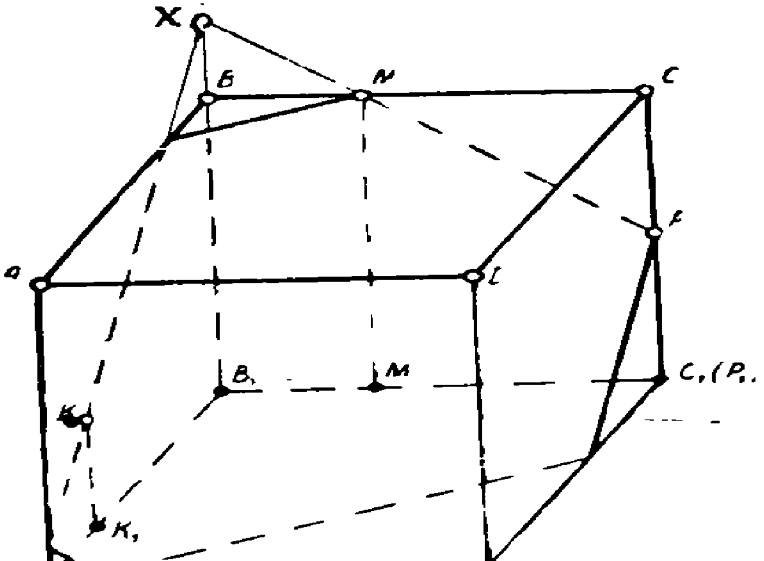


Рис. 84в

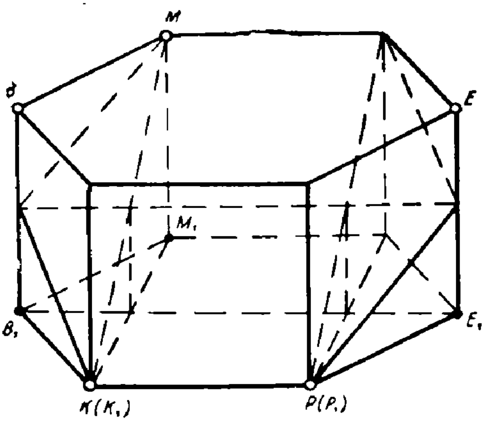


Рис. 85

нять в качестве вспомогательной плоскость BB_1EE_1 (рис. 85). В этом случае с помощью одной вспомогательной плоскости одновременно строятся точки пересечения секущей плоскости с двумя ребрами призмы.

Такой подход к решению задач на построение сечений дает надежное общее средство решения этих задач и позволяет развивать изобретательность учащихся при отыскании частных приемов.

Важный момент обучения решению задач на построение сечений при рассматриваемой методике составляет выделение в условии задач элементов, задающих секущую плоскость. Если условием задачи секущая плоскость задана точкой и прямой, или пересекающимися прямыми, или параллельными прямыми, то, выбирая на них три точки, сводим решение задачи к построению сечения плоскостью, заданной тремя точками.

При построении сечения правильной шестиугольной призмы плоскостью, проходящей через сторону верхнего основания и образующей с основанием данный двугранный угол, прежде всего определяется пара пересекающихся прямых, задающих эту плоскость.

Секущая плоскость определяется парой пересекающихся прямых AB и MM_1 (рис. 86) и при построении сечения правильной шестиугольной пирамиды плоскостью, проходящей через данную точку M_1 основания пирамиды, параллельно одной из больших диагоналей основания и параллельно высоте пирамиды.

Выделение секущей плоскости — один из важных этапов решения задач на построение сечений.

При решении задач на построение сечений в доходчивой форме удается познакомить учащихся с понятиями полного и метрически определенного изображений, с решением позиционных и метрических задач.

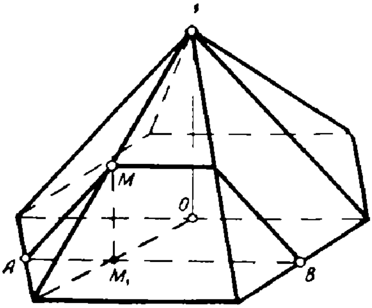


Рис. 86

Изображение многогранников вводится как метрически определенное в соответствии с вышеизложенной методикой обучения построению изображений (стр. 30). К понятию полного изображения можно подвести учащихся, если добиться от них понимания, что изображение, построенное по наперед заданному оригиналу, есть в то же время изображение более широкого класса фигур. Учащиеся должны понимать, что изображение, например, правильного тетраэдра является вместе с тем и изображением всех треугольных пирамид. Изображение правильной четырехугольной призмы, высота которой в два раза больше стороны основания, является в то же время и изображением четырехугольных призм, в основании которых лежит не только квадрат и высота которых не только в два раза больше стороны основания, изображением не только прямых призм, но и наклонных.

Навык в построении сечений целесообразнее вырабатывать на полных изображениях, не связывая себя без необходимости с оригиналами наперед заданной формы. Это тем более полезно, что на полных изображениях раскрываются и некоторые общие свойства многогранников.

Полезно, например, не только построить сечение правильной треугольной призмы (рис. 87) секущей плоскостью $A_1O_2C_1$, где O_2 — середина оси призмы, но и доказать, что плоскость пересечет верхнее и нижнее основания любой из правильных треугольных призм.

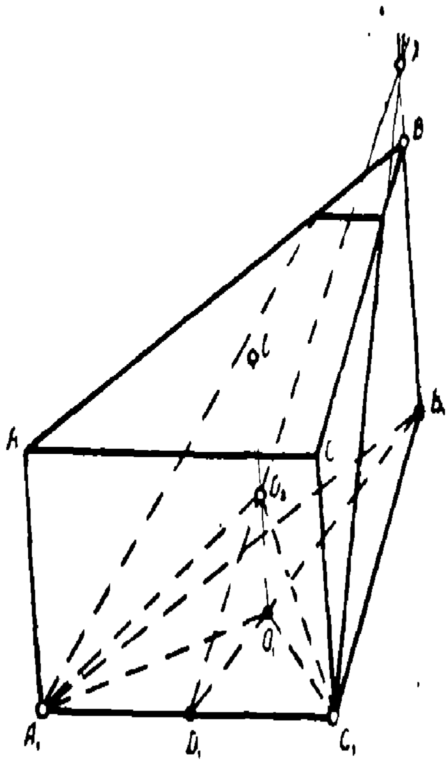


Рис. 87

Для построения сечения достаточно найти точку (X) пересечения ребра BB_1 с прямой O_1O_2, по которой пересекаются вспомогательная плоскость BB_1DO_1 с секущей плоскостью. Отрезок $XB_1 = 3O_1O_2$, так как $D_1B_1 = 3D_1O_1$, и, следовательно, D_1O_2 пересечет верхнее основание.

Широкие возможности для проведения такой работы представляет построение изображений к задачам с буквенными данными.

§ 3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Доступность для учащихся изложенной системы задач на построение

Экспериментальная работа со всеми выпусками[1] показала, что овладение эффективными методами решения задач на построение совместно с воображаемыми доступно учащимся.

Опыт работы с первым выпуском показал, что проекционный чертеж необходимо теснее связывать с оригиналами, изображением которых он является. В противном случае некоторые учащиеся не видят в выполняемых по определенным правилам построениях отражения соответственных отношений между вещами материального мира, между геометрическими элементами моделей. Учащиеся экспериментальных классов имели две части книги Н. Ф. Четверухина «Стереометрические задачи на проекционном чертеже» [24; 25]. По этим книгам они повторяли материал, пройденный в классе, самостоятельно изучали решение некоторых задач.

С учащимися IX класса выпуска I (С.) укрепление связей проекционного чертежа с оригиналом проводилось путем отыскания в окружающей нас обстановке прообразов выполняемых изображений. Эта работа увлекала учащихся, и они обычно находили прообразы не только для исходных данных и окончательного решения задачи, но и для всех промежуточных и вспомогательных построений.

---

[1] См. стр. 9.

Учащимся последующих выпусков понятие о проекционном чертеже вводилось как изображение оригинала определенной структуры (п. 1, § 2). Применение модели (рис. 22—24) при описываемой методике позволило не только избежать недоработок, выявленных в процессе работы с первым выпуском, но и преодолеть ряд других трудностей.

Отпала, например, необходимость на первых шагах изучения стереометрии вводить одновременно трудные для усвоения учащимися понятия о внутреннем (способ обозначения точек) и внешнем (для построения изображения) проектировании. С этими понятиями учащиеся лучше осваиваются после того, как ими прочно усвоено понятие изображения. Хотя, как показывает опыт, в школе можно было бы совсем обойтись без понятий внутреннего параллельного и центрального проектирований.

Применение модели, наглядно иллюстрирующей принятый на проекционном чертеже способ обозначения точек, прямых и плоскостей с помощью основной плоскости, позволяет на ранней ступени изучения стереометрии в пропедевтическом порядке познакомить учащихся со второй теоремой существования (теоремой Польке — Шварца).

Воспринимая проекционный чертеж как изображение конкретно заданного оригинала, учащиеся с каждой системой изображенных точек, прямых и плоскостей связывают определенный оригинал и тем самым определенное взаимное расположение изображенных на проекционном чертеже геометрических элементов. Так при решении задач на проекционном чертеже закладываются основы для понимания полного и неполного изображений. Отмеченную направленность в восприятии изображения удается еще более четко выделить при сравнении иллюстративного (неполного) и проекционного (полного) чертежей.

В ходе опытной проверки совершенствовалась методика обучения учащихся решению собственно задач на построение. Уже для учащихся I выпуска известную трудность представляли выполнения построений: точки, принадлежащей или не принадлежащей наперед заданной прямой или плоскости; прямой, принадлежащей или не принадлежащей заданной плоскости; построение плоскости, проходящей через заданную прямую. Обучение решению перечисленных, а также ряда других простейших задач было включено в общую систему обучения учащихся решению задач на проекционном чертеже.

Обучение решению важных для изучения курса стереометрии задач на построение точек пересечения прямых и плоскостей, линии пересечения плоскостей было облегчено после того, как учащимся II и IV выпусков были сформулированы два принципа решения этих задач (стр. 79).

Рассматриваемые принципы были распространены на обучение учащихся IX класса построению сечений многогранников. Это позволило, как показывает опытная проверка, в значительной степени преодолеть трудности в отыскании так называемых «вспомогательных» построений, выполняемых при решении задач на построение сечений.

В работе со II выпуском особенно остро стала ощущаться недостаточная связь проекционного чертежа с текущим программным материалом. При проведении экспериментальной работы с III выпуском в значительной степени была преодолена и эта недоработка. Проекционный чертеж с пользой стал применяться для иллюстрации различных случаев взаимного расположения точек, прямых, плоскостей и для решения программных задач на построение совместно с решением тех же задач в воображении.

Доступность изучения методов решения задач на построение доказывается материалами контрольных работ. С каждым выпуском экспериментальных классов проводилось по три контрольных работы.

В первой контрольной работе каждому учащемуся предлагалось решить две задачи: одна на построение точки пересечения проектирующей прямой и произвольно расположенной плоскости, другая на построение линии пересечения проектирующей и произвольно заданной плоскостей.

Взаимное расположение прямых и плоскостей каждому учащемуся задавалось на билетах из клетчатой бумаги, с которых условия задач копировались в тетради для контрольных работ. Образцы билетов приведены на рис. 88—95.

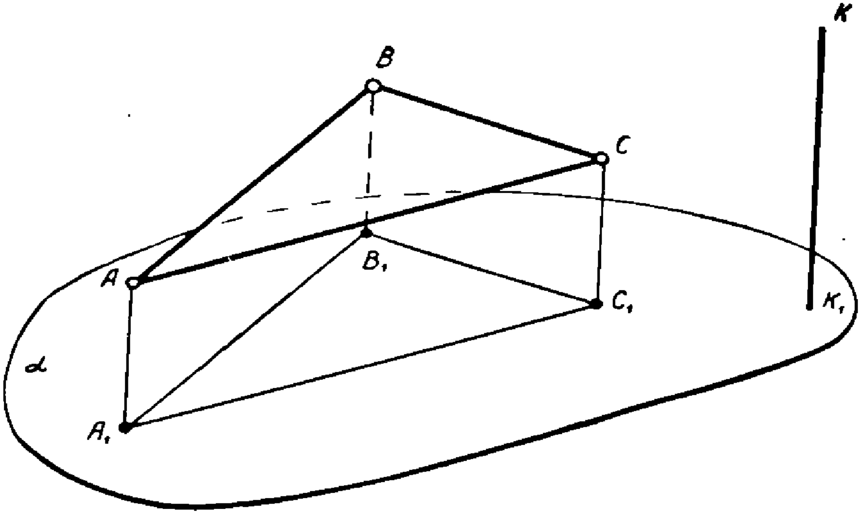


Рис. 88

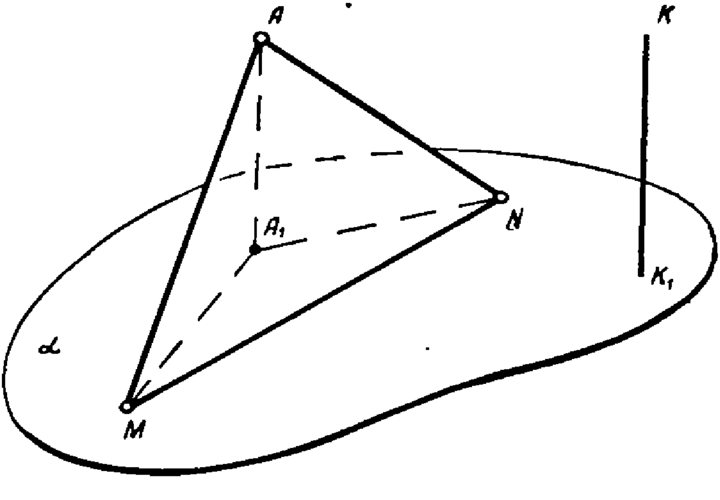


Рис. 89

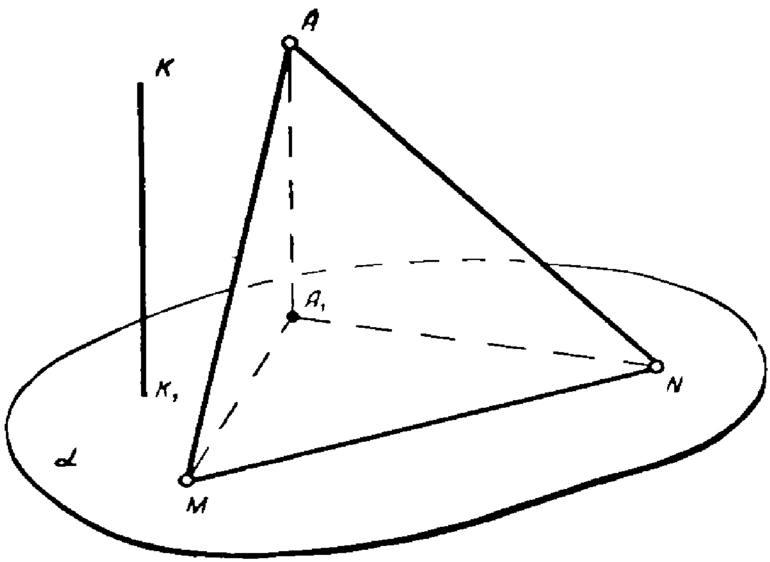


Рис. 90

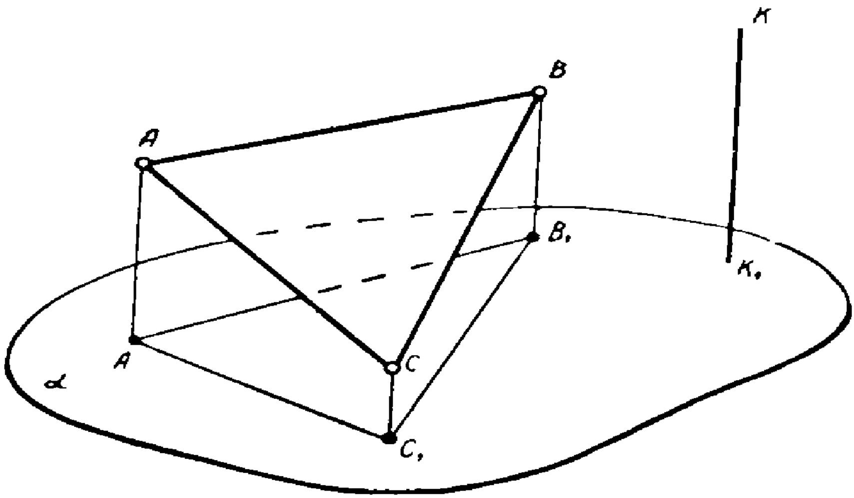


Рис. 91

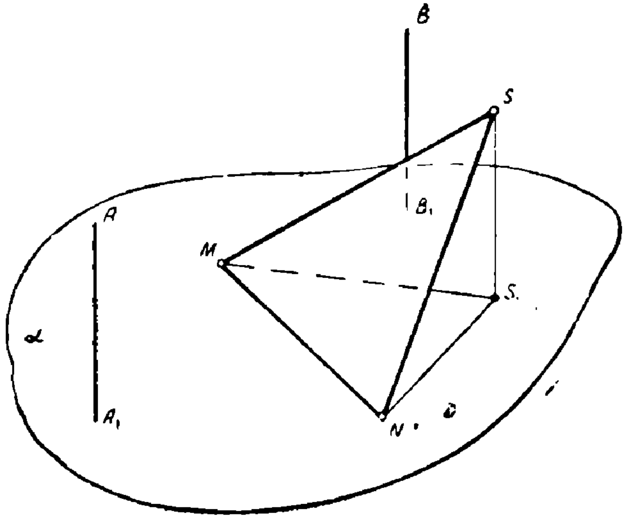


Рис. 92

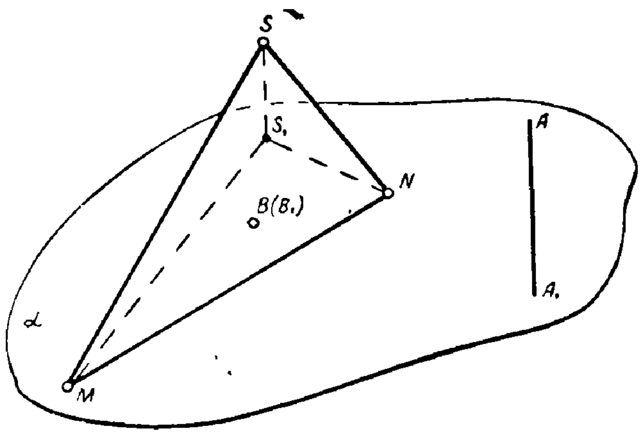


Рис. 93

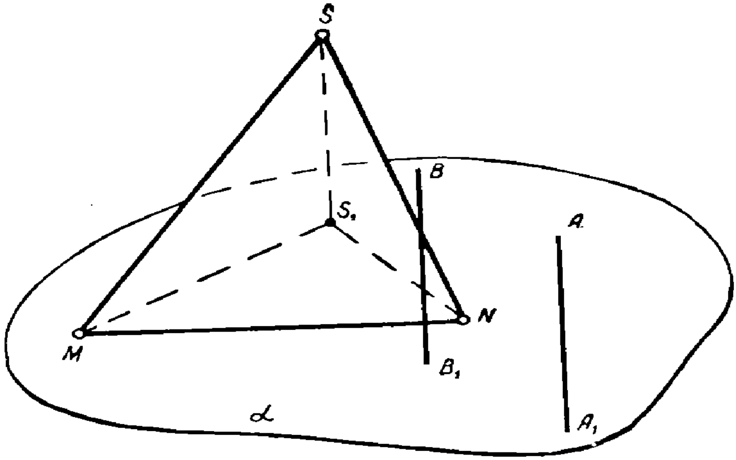


Рис. 94

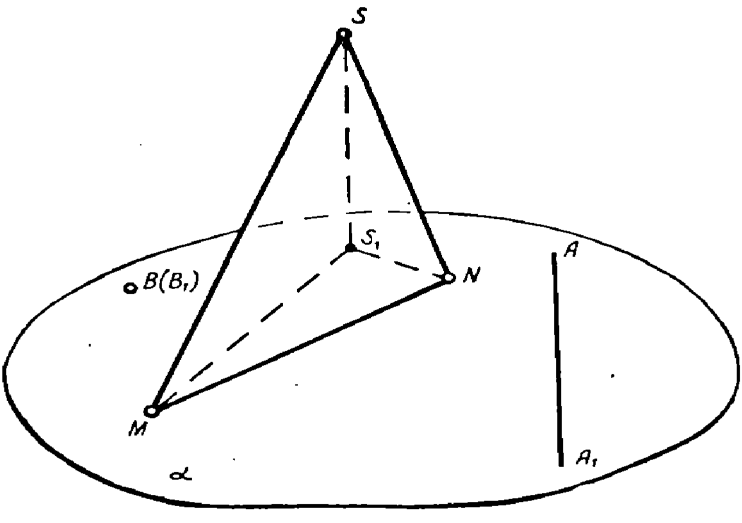
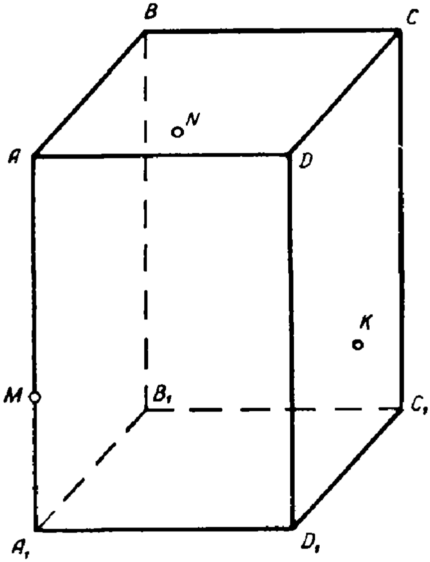


Рис. 95

Первая контрольная работа проводилась в девятых классах.

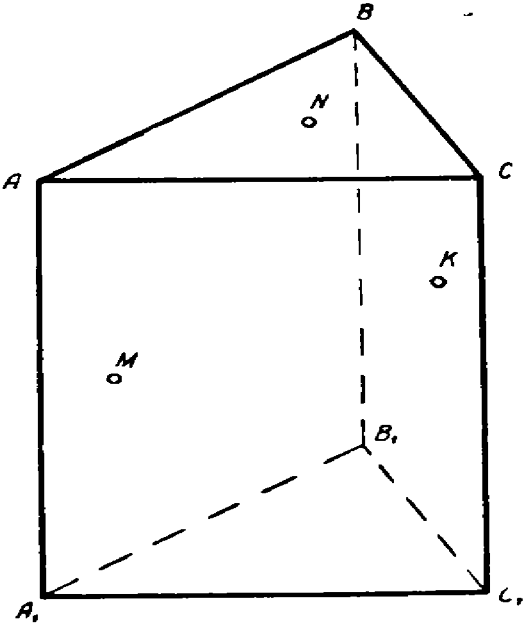
Во второй контрольной работе учащимся была предложена задача на построение сечений призм плоскостями, заданными тремя точками. Точки секущих плоскостей задавались как на ребрах, так и на гранях призм. Расположение точек для каждого учащегося задавалось на билете, копия с которого снималась учащимися в тетради. Задаваемые изображения были неполными, и учащимся самостоятельно по дополнительным условиям, указываемым на билетах, приходилось обозначать принадлежность точек к граням, прежде чем приступить к решению задачи. Это посильное усложнение условия задач помогало контролировать уровень развития пространственного воображения учащихся. Образцы билетов предлагавшихся на контрольных работах, приведены на рис. 96—99.

Вторая контрольная работа с частью выпусков проводилась в девятых классах, с частью выпусков —в десятых классах.



$(\cdot)N \subset BB_1CC_1$
$(\cdot)K \subset CC_1DD_1$

Рис. 96



$(\cdot) M \subset AA_1CC_1$
$(\ ) N \subset BB_1AA_1$
$(\ ) K \subset BB_1CC_1$

Рис 97

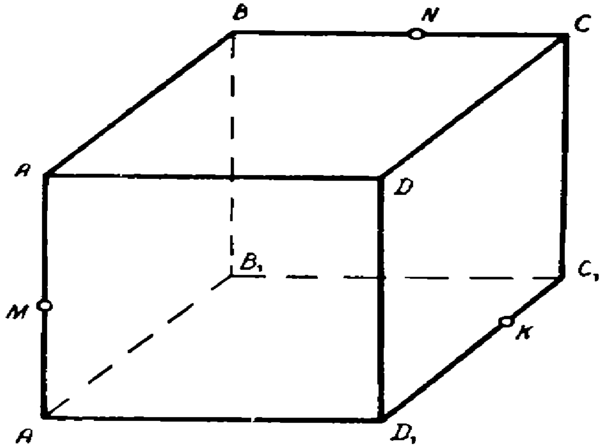


Рис. 98

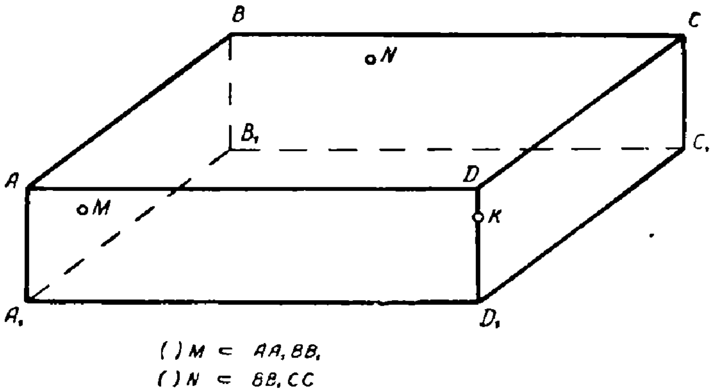


Рис. 99

В третьей контрольной работе в различных выпусках давались различные традиционные задачи на построение сечений многогранников и вычисление площадей сечений. Эта контрольная работа со всеми выпусками проводилась в десятых классах.

Результаты контрольных работ, проводившихся во всех классах I—VI выпусков, не хуже, чем результаты любых других контрольных работ, проводившихся с учащимися экспериментальных классов по текущему программному материалу.

Выполнение построений учащиеся сопровождали письменными пояснениями, раскрывающими достаточно глубокое усвоение изученного материала. Ниже приводятся примеры оформления контрольных работ учащимися.

Пример 1. Решение ученика М., выпуск IV (С.).

«I. Построить линию пересечения проектирующей плоскости, определяемой проектирующей прямой AA_1 и точкой $B(B_1)$, и произвольно заданной плоскости $\beta(\beta_1)$.

Линия пересечения двух плоскостей определится двумя точками, лежащими одновременно в обеих плоскостях. Одной из этих точек (рис. 100) будет точка пересечения следов A_1B_1 и MN (они пересекутся, так как лежат в одной плоскости). Точка $X(X_1)$ принадлежит обеим плоскостям, так как она по построению принадлежит и прямой A_1B_1, лежащей в проектирующей плоскости γ, и прямой MN, лежащей в плоскости $\beta(\beta_1)$.

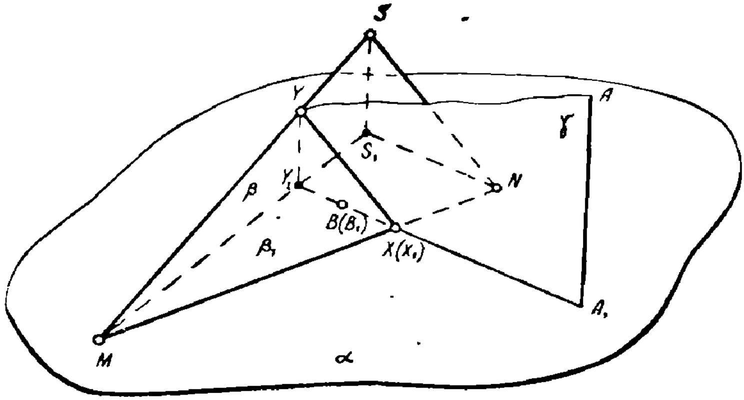


Рис. 100

Продолжим прямую A_1B_1 до пересечения с MS_1 (они пересекутся, так как лежат в одной плоскости) и восставим перпендикуляр Y_1Y до пересечения с прямой SM. Точка $Y(Y_1)$ принадлежит и плоскости γ (она лежит на проектирующей прямой, принадлежащей этой плоскости), и плоскости β (β_1) (она лежит на прямой MS, принадлежащей плоскости β).

Мы нашли две точки, принадлежащие обеим плоскостям. Следовательно, прямая XY (X_1Y_1) — искомая.

II. Построить точку пересечения проектирующей прямой KK_1 с произвольно заданной плоскостью β (β_1).

Проектирующая прямая KK_1 (рис. 101) определяет нам бесчисленное множество проектирующих плоскостей. Построим линию пересечения одной из них (γ) с данной плоскостью β (β_1). Эти плоскости пересекутся (задача 1) по прямой XY (X_1Y_1). Продолжив ее до пересечения с KK_1 (они лежат в одной плоскости), получим точку $Z(Z_1)$, которая и есть искомая.

Действительно, точка $Z(Z_1)$ принадлежит прямой KK_1 (по построению) и плоскости β (β_1), так как точка $Z(Z_1)$ принадлежит прямой XY, а прямая XY—плоскости $\beta(\beta_1)$».

При выполнении контрольных работ от учащихся требовалось, чтобы описания решений были предельно краткими: разрешалось, например, ранее изученные приемы решения задач использовать без каких бы то ни было разъяснений.

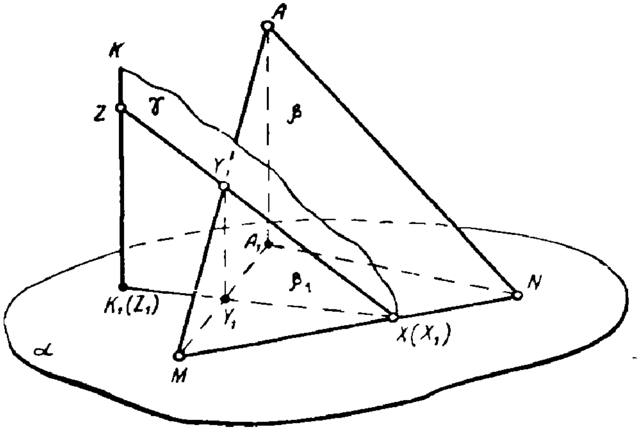


Рис. 101

Пример 2. Решение ученика П., выпуск IV (Ш.2). «Построить сечение параллелепипеда плоскостью, определяемой точками $M(M_1)$, $N(N_1)$ и $K(K_1)$.

Построение. Для построения сечения найдем точки пересечения ребер BB_1 и DD_1 с секущей плоскостью.

Построив в основании параллелепипеда (рис. 102) проекцию секущей плоскости, находим точки пересечения диагонали B_1D_1 с проекциями A_1N_1 и A_1K_1. Диагональ B_1D_1 является проекцией некоторой прямой, которая находится в секущей плоскости. Точки L и P определяют эту прямую на секущей плоскости (линия пересечения секущей плоскости и плоскости диагонального сечения).

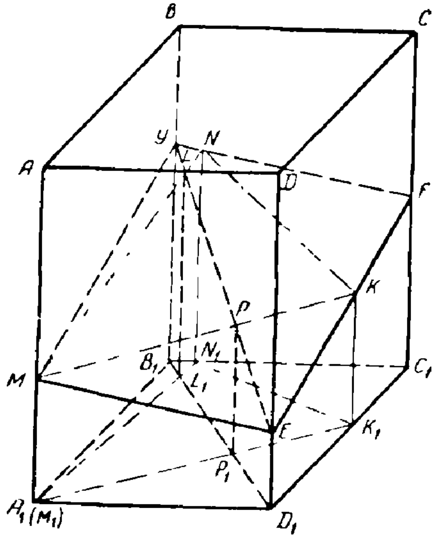


Рис 102

Проведя через эти точки прямую LP до пересечения ее с ребром BB_1 в точке G и ребром DD_1 в точке E, мы получим точки пересечения секущей плоскости с ребрами.

Через полученные и заданные точки строим сечение $MGFE$ параллелепипеда секущей плоскостью».

Обе приведенные работы оценены баллом «5». Оценка «3» ставилась в тех случаях, когда построение выполнялось правильно, а описания решения или не было, или оно было проведено с ошибками. В случае если построение выполнялось с ошибками или оказывалось незаконченным, то работа оценивалась баллом «2».

Плохие оценки, как правило, получали учащиеся, которым трудно дается изучение математики. На повторных контрольных, проводившихся с этими учащимися, или на последующих контрольных работах учащиеся успешно справлялись с решением задач.

За время экспериментальной работы не было ни одного учащегося, который не смог освоиться с решением задач на построение в объеме, предусматриваемом изложенной системой. Выяснилось также, что интерес учащихся к решению задач на проекционном чертеже несравненно более высок, чем к задачам, решаемым в воображении. Решения задач как во время текущих занятий, так и на контрольных работах учащиеся по своей инициативе оформляли не только аккуратно, но и любовно.

2. Развитие пространственного воображения

Многие из мероприятий, описанных выше, способствовали такой организации процесса обучения, при которой создавались наиболее благоприятные условия для работы по развитию пространственного воображения учащихся.

В значительной степени способствовало этому составление простейших задач, связанных с введением проекционного чертежа, и задач, способствующих закреплению текущего программного материала. Эти первоначально решаемые задачи создавали посильное напряжение воображения учащихся, развивали его и, естественно, подготавливали учащихся к решению более сложных задач.

Не менее важную роль в деле развития пространственного воображения играла постоянно устанавливаемая связь проекционного чертежа с геометрическими образами действительности, изображением которых он служит. При проведении такой работы у учащихся вырабатывалась способность воспринимать проекционный чертеж как одну из материальных реализаций изучаемых геометрических образов, а курс стереометрии в экспериментальных классах получил доступную наглядную основу для его изучения.

Уже в IX классе проекционный чертеж учащимися воспринимался как заменитель модели, и они часто правильно решали задачи на не наглядном, а иногда и ошибочном изображении. Такое положение имело место и в проведенных контрольных работах, когда учащиеся по неверно выполненному чертежу давали правильные и глубокие описания решения (эти учащиеся на повторных контрольных работах обычно получали высшую оценку).

Материальности восприятия чертежа способствовала и получившая широкое распространение среди учащихся раскраска чертежей цветными карандашами. При решении задач различные плоскости раскрашивались различными цветами, в процессе раскраски часто обнаруживались ошибки в выполнении чертежа и чертеж достигал наибольшей степени наглядности (рис. 103, 104).

Известным показателем успеха в работе по развитию пространственного воображения учащихся экспериментальных классов может служить следующий случай.

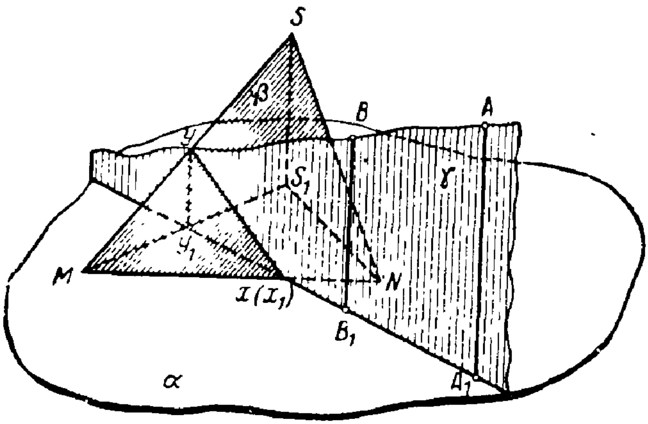


Рис. 103

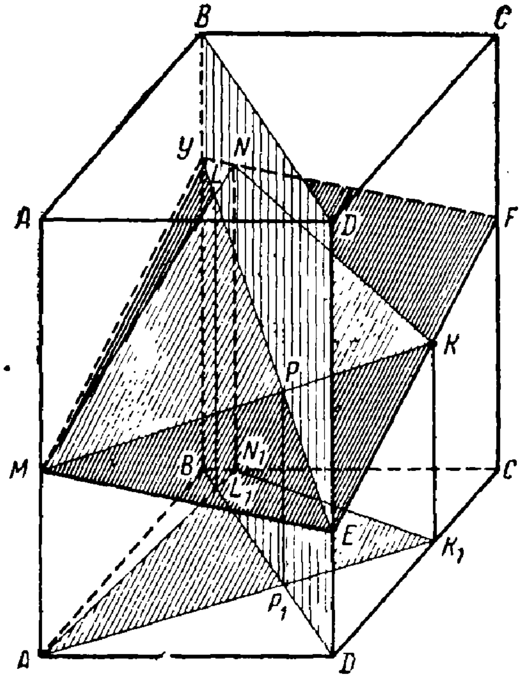


Рис. 104

По недосмотру в проверочной работе для десятых классов, проводившейся в 11 областях РСФСР, вкралась ошибка. В задаче: «В правильной четырехугольной призме проведено сечение через середины двух смежных ребер верхнего основания и через центр нижнего основания. Определить и обосновать вид полученного сечения, а также вычислить его площадь, если сторона основания равна a и острый угол сечения равен 45°». Но при таком угле не существует либо призмы, либо сечения (рис. 105).

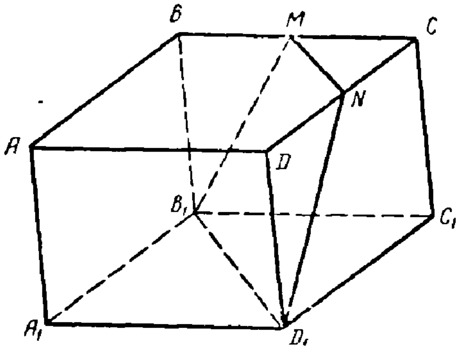


Рис. 105

Большинство учащихся, писавших этот вариант работы, не обнаружило ошибки в условии задачи, сделало чертеж и вычислило площадь несуществующего сечения.

В экспериментальном классе II выпуска ошибка в условии задачи была обнаружена учащимися через 3—5 минут после того, как они приступили к решению задачи. Острый угол в 45° был заменен на 60°, и все последующие контрольные работы проводились уже по верному тексту.

Успех в решении вычислительных задач учащимися экспериментальных классов в значительной степени может быть объяснен достаточно хорошо развитым пространственным воображением.

3. Качество усвоения программного материала

Осуществление выдвигаемого плана обучения учащихся решению задач на построение стало возможным за счет рационального использования времени, отводимого на изучение стереометрии, за счет значительного сокращения числа традиционных вычислительных задач, решаемых в курсе стереометрии IX—X классов. Создавшийся при этом резерв времени шел не только на обучение решению задач на построение, но и на общее повышение качества преподавания стереометрии. Систематическое обучение учащихся решению задач на построение изображений лишь облегчало им понимание курса стереометрии, создавало известные предпосылки для более быстрого и глубокого прохождения программного материала.

Основная масса учащихся не испытывала, например, затруднений при доказательстве теорем ни в ходе текущих занятий, ни на экзаменах. Более того, многие учащиеся проявляли инициативу в отыскании доказательств, отличных от доказательств, приведенных в учебнике.

Навык в решении задач на проекционном чертеже учащиеся по своей инициативе применяли к выполнению чертежей для доказательства теорем. При выполнении чертежа к теореме о боковой поверхности призмы перпендикулярное сечение строилось учащимися после того, как секущая плоскость была задана тремя точками (рис. 106).

Свободное владение материалом учебника допускало более глубокое изложение некоторых из его разделов. Раздел о перпендикулярности прямой и плоскости излагался в обобщенной формулировке признака перпендикулярности прямой и плоскости.

Большее внимание, чем в традиционном курсе, уделялось задачам на построение и доказательство, задачам на геометрические места. Отлично от традиционного излагался и раздел об измерении площадей и объемов.

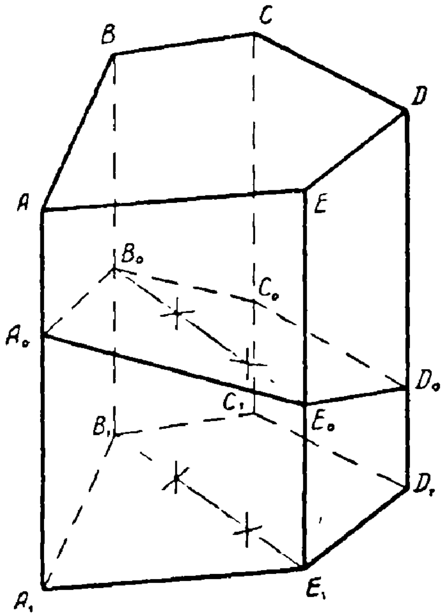


Рис. 106

Некоторое представление об отмеченных изменениях можно составить по задачам, предлагавшимся учащимся на переводных экзаменах за IX класс и экзаменах на аттестат зрелости в X классе. Ниже приводится список[1] экзаменационных задач, предлагавшихся учащимся II—IV выпусков.

[1] В приводимые списки не включены традиционные вычислительные задачи по планиметрии и стереометрии.

IX класс

1) Доказать, что прямая и плоскость, перпендикулярные к одной и той же плоскости, параллельны.

2) Доказать, что если одна из двух параллельных прямых параллельна плоскости, то и другая прямая параллельна этой плоскости.

3) Доказать, что если плоскость перпендикулярна к одной из двух параллельных плоскостей, то она перпендикулярна и к другой.

4) Доказать, что если плоскость α и прямая a, лежащая вне плоскости, перпендикулярны к прямой b, то прямая a и плоскость α параллельны.

5) Доказать, что плоскость и не принадлежащая ей прямая параллельны, если прямая и плоскость перпендикулярны к одной и той же плоскости. Верны ли обратные теоремы?

6) Доказать, что на плоскости существуют прямые, перпендикулярные прямой, пересекающей плоскость.

7) Доказать, что прямая, пересекающая одну из двух параллельных плоскостей, пересекает и другую.

8) Доказать, что перпендикуляр к плоскости пересекает эту плоскость.

9) Доказать, что прямая, перпендикулярная к двум пересекающимся прямым плоскости, пересекает ее.

10) Доказать, что прямая, образующая равные углы с тремя пересекающимися прямыми одной плоскости, перпендикулярна этой плоскости.

11) Найти геометрическое место точек пространства, равноудаленных от: а) двух данных точек; б) трех данных точек; в) четырех данных точек.

12) Доказать, что геометрическим местом точек, равноудаленных от граней двухгранного угла, является биссектральная плоскость.

13) Доказать, что биссектральные плоскости двугранных углов трехгранного угла пересекаются по одной прямой.

14) Доказать, что плоскости, проходящие через ребра трехгранного угла и биссектрисы его противоположных граней, пересекаются по одной прямой.

15) Построить общий перпендикуляр противоположных ребер правильного тетраэдра.

16) Построить общий перпендикуляр ребра и диагонали куба.

17) Из точки, лежащей на какой-либо грани правильного тетраэдра, опустить перпендикуляр на его другие грани.

18) Из точки, лежащей на какой-либо грани правильной треугольной призмы, опустить перпендикуляр на ее другие грани.

19) Построить линию пересечения проектирующей плоскости с плоскостью, заданной точкой и ее следом.

20) Построить сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки $K(K_1)$, $M(M_1)$ и $T(T_1)$. (Изображение параллелепипеда и расположение точек секущей плоскости задавались на билете.)

21) Найти площадь сечения правильной треугольной пирамиды плоскостью, проведенной через середины ребер AB и BC и параллельно ребру SA. Сторона основания пирамиды равна a, боковое ребро равно l.

22) В правильной треугольной пирамиде проведено сечение через середину ребра AC параллельно двум другим непересекающимся ребрам пирамиды. Вычислить площадь сечения, если боковое ребро пирамиды равно l, а сторона основания — a.

23) В правильной треугольной пирамиде $SABC$ проведено сечение через высоту и ребро AS. Доказать, что плоскость полученного сечения перпендикулярна грани SBC.

X класс

1) Во всякий тетраэдр можно вписать единственный шар.

2) Около всякого тетраэдра можно описать единственный шар.

3) В прямой круговой конус можно вписать единственный шар.

4) Доказать, что в правильном тетраэдре центры шаров, вписанного и описанного, совпадают.

5) Для того чтобы около призмы можно было описать шар, необходимо и достаточно, чтобы призма была прямой и около ее основания можно было описать окружность. Доказать.

6) Доказать, что шар, вписанный в прямой круговой цилиндр, касается его боковой поверхности по окружности.

7) Доказать, что параллелепипед, в котором две диагональные плоскости перпендикулярны плоскости основания, прямой.

8) Доказать, что отношение параллельности прямых (плоскостей) обладает свойством транзитивности.

9) Доказать, что многоугольники, равносоставленные по разложению, равновелики.

10) Доказать, что многоугольники, равносоставленные по дополнению, равновелики.

11) Доказать, что равновеликие треугольники, имеющие по равной стороне, равносоставлены.

12) Доказать, что равновеликие треугольник и многоугольник равносоставлены.

13) Определить расстояние от ребра куба до диагонали, не пересекающейся с ребром, если ребро куба равно a.

14) Доказать, что не существует сечения куба плоскостью, имеющей форму правильного пятиугольника.

В число экзаменационных задач для X класса (всех выпусков) включались также позиционные и метрические задачи на построение, задачи на доказательство и другие задачи по типу задач для IX класса.

О ПОНЯТИИ ПОЛНОТЫ И МЕТРИЧЕСКОЙ ОПРЕДЕЛЕННОСТИ ИЗОБРАЖЕНИЯ

В практике изображения часто строятся не только по наперед заданному оригиналу на основе базиса и с привлечением свойств параллельной проекции, как это выполнялось выше. Всегда, например, возможно начертить некоторую совокупность линий (рис. 107, 108, 109) и рассматривать ее как изображение некоторого оригинала. Как в последнем случае, так и в ряде других случаев встает задача восстановления оригинала по чертежу, принимаемому за изображение.

При решении возникающей в этих условиях задачи изображение в зависимости от условий, накладываемых на него, обладает различными свойствами.

Чертеж, представленный на рис. 107, можно, например, рассматривать как изображение прямой a', параллельной плоскости α'. Действительно, в оригинале существует (и не одна) такая прямая a' и такая плоскость α', что проекциями их будут прямая a и плоскость α.

В том же смысле рис. 108 можно рассматривать как изображение правильной четырехугольной призмы, высота которой равна 12 *см*, а стороны основания равны

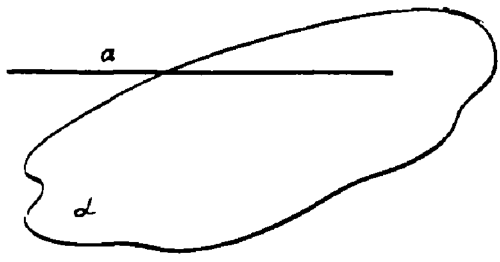


Рис. 107

6 *см*. Соответственно рис. 109 можно рассматривать как изображение правильного тетраэдра и прямой a, пересекающей две его грани.

В то же время рис. 107 можно рассматривать как изображение прямой, лежащей в плоскости, или прямой, пересекающей плоскость. При этом за изображение точки пересечения можно произвольно принять любую точку прямой a.

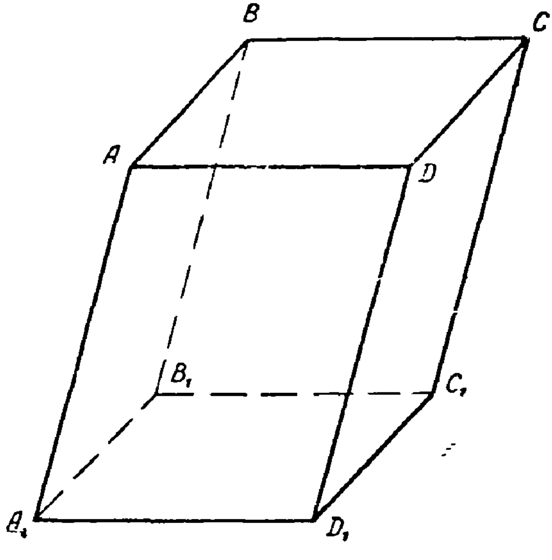


Рис. 108

Рис. 108 в соответствии с вышепринятым определением изображения представляет собой изображение всех правильных четырехугольных призм, высота которых в два раза больше стороны основания. Этот же чертеж можно рассматривать как изображение всех параллелепипедов вообще (прямых и наклонных, с различным соотношением высот и сторон основания), так как точки A_1, B_1, C_1 и A могут быть приняты за изображение базисных точек (например, вершин) любого из параллелепипедов. Однако независимо от формы оригинала точка пересечения прямой $a(a_1)$ с гранями параллелепипеда на рис. 116 строится единственным способом, а не произвольно, как это может быть выполнено для прямой a и некоторых граней пирамиды на рис. 109.

Изображение же высоты параллелепипеда до тех пор, пока не определилась форма оригинала, и на рис. 116 может быть выполнено произвольно. С другой стороны, если рис. 108 принять за изображение параллелепипеда, в основании которого лежит квадрат и ребро

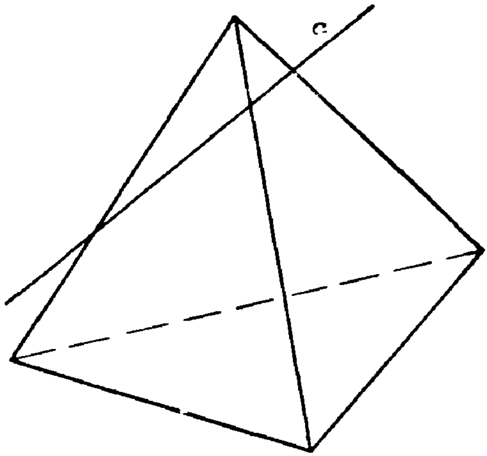


Рис. 109

AA_1 которого образует с плоскостью квадрата угол в $60°$, а с ребрами A_1B_1 и A_1D_1—равные углы, то и изображение высоты после такого соглашения не может быть выполнено произвольно, а должно быть построено точно так же, как для правильной треугольной пирамиды (рис. 19) единственным способом строится изображение высоты SO.

В школьном курсе стереометрии рассматриваются многие другие условия, оказывающие влияние на свойства изображения.

К числу условий, определяющих существенно различные свойства изображений, относятся:

а) Наличие на изображении базиса.

б) Определение принадлежности изображаемых точек к базису.

в) Словесное связывание изображения с оригиналом.

1. Об определении принадлежностей изображаемых точек к базису картинной плоскости

Допустим, что базис на изображении определен (за базис всегда могут быть приняты четыре по три не лежащие на одной прямой точки изображения).

При принятом условии будем говорить, что принадлежность изображаемых точек к базису картинной плоскости определена, если для каждого базиса оригинала может быть построена единственная фигура, изображением которой является данный чертеж картинной плоскости.

Не для всякого изображения оригинал восстанавливается с такой определенностью. Для чертежа, представленного на рис. 107, даже после того как мы определим на нем базис и фиксируем базис в оригинале, положение прямой a' относительно плоскости α' останется неопределенным. С другой стороны, для всех изображений, построенных по базису с привлечением свойств 1°—4°, для каждого базиса в оригинале, повторяя процесс, обратный процессу построения изображения, может быть построена единственная фигура, изображением которой является данный чертеж.

Рассмотрим некоторые способы определения принадлежности изображаемых точек к базису картинной плоскости.

При построении изображения по базису с привлечением свойств параллельной проекции изображение каждой точки появлялось через совокупность построений прямых, первоначально определяемых базисными точками, а затем и точками, изображение которых оказывалось построенным ранее. В результате изображаемая точка определялась как точка, принадлежащая одной из этих прямых.

В самом деле, для построения изображения точки, лежащей в плоскости одного из базисных треугольников (рис. 10), достаточно было в оригинале провести прямую через одну из базисных точек и изображаемую точку до пересечения с одной из сторон базисного треугольника. Положение же прямой на картинной плоскости определялось как прямой, проходящей через изображение базисной точки и соответствующей точки, принадлежащей изображению соответствующей стороны базисного треугольника (рис. 11). Положение изображаемой точки после этого определялось как точки, принадлежащей последней прямой.

Для изображения точки, не лежащей в плоскости базисного треугольника, через эту точку в оригинале проводилась прямая, параллельная одному из ребер базисного тетраэдра до пересечения с плоскостью одного из базисных треугольников (рис. 17). Затем на картинной плоскости строилось изображение следа параллельной прямой в плоскости соответствующего базисного треугольника (рис. 18.) и через изображение следа проводилась прямая, параллельная изображению

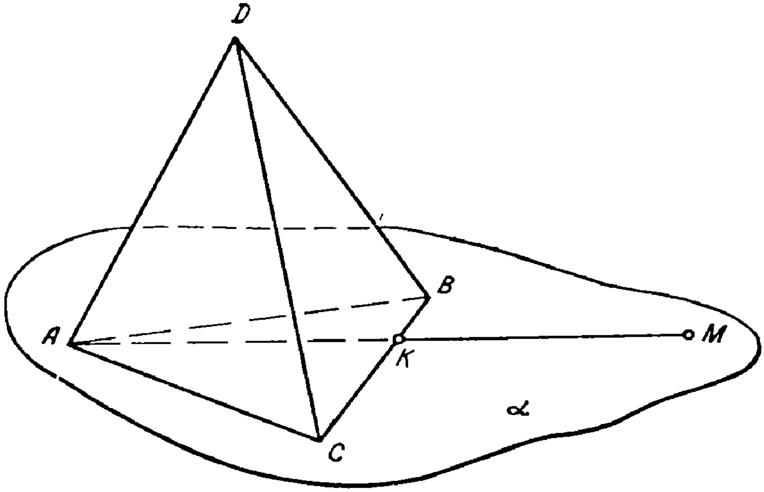


Рис. 110

соответствующего ребра базисного тетраэдра. Изображение точки после этого определялось как точки, принадлежащей последней прямой.

Положим отмеченные свойства в основу способа определения принадлежности изображаемых точек к базису на картинной плоскости.

Назовем одну из плоскостей, определяемых базисными точками в оригинале, и ее изображение основной плоскостью. На рис. 110 за основную плоскость принята плоскость, определяемая точками A, B и C.

Принадлежность к базису изображения точки, лежащей в основной плоскости, во всех случаях будем задавать через принадлежность этой точки (M) к прямой, определяемой двумя точками (A и K) на сторонах базисного треугольника (рис. 110).

Принадлежность к базису изображения точек, не лежащих в основной плоскости, будем задавать через принадлежность изображаемой точки (M) к прямой, пересекающей основную плоскость, с указанием следа (M_1) от пересечения этой прямой с основной плоскостью (рис. 111, *а, б*).

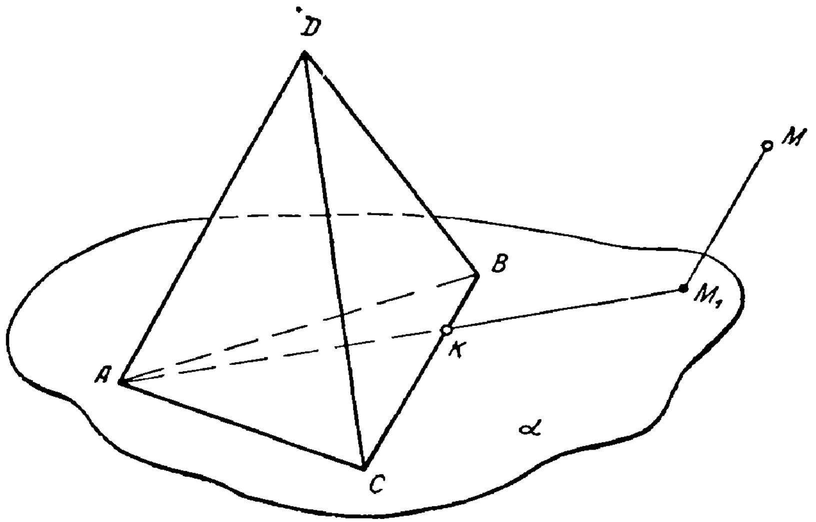


Рис. 111а

В **одних случаях** в качестве такой прямой будем принимать прямую, параллельную, например, изображению ребра AD базисного тетраэдра (рис. 111а) или изображению какой-либо прямой DO, принадлежность двух точек (D и O) которой к базису определена ранее (рис. 111б). Условно принимается, что прямые DA и MM_1, DO и MM_1 параллельны не только на изображении, но и в оригинале.

В **других случаях** принадлежность изображенной точки к базису будет определяться через принадлежность данной точки M (рис. 112) к прямой, соединяющей базисную точку D, не лежащую в основной плоскости, с точкой M и заданием следа (M_1) этой прямой.

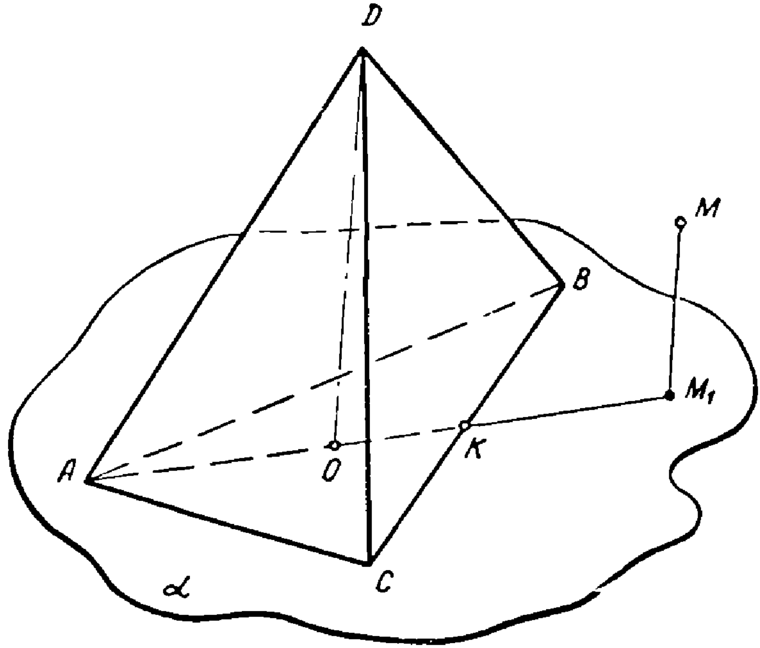


Рис. 111б

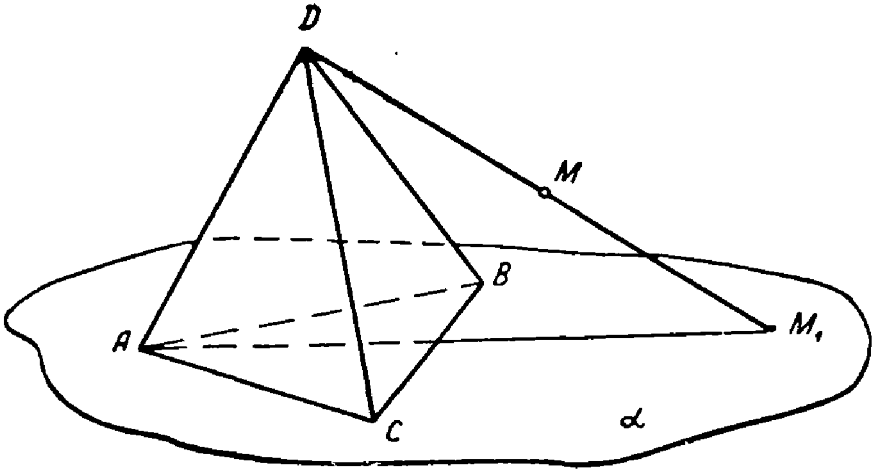


Рис. 112

Во всех случаях изображаемую точку будем обозначать двумя буквами $M(M_1)$[1].

Рассмотренные способы обозначения точек определяют принадлежность изображаемых точек к базису.

В самом деле, фиксировав в оригинале базис и повторяя в оригинале процесс, обратный уже рассмотренному выше процессу построения изображения, получим единственную фигуру, изображением которой будет исходный чертеж.

2. Заданные элементы

Не всегда базис изображения явно представлен на картинной плоскости, так как решение громадного числа задач на изображение успешно выполняется без эффективного использования базиса. Однако свойства изображения существенно зависят от того, может или не может быть определен базис картинной плоскости так, чтобы при этом оказалась определенной принадлежность всех точек изображения к одному и тому же базису.

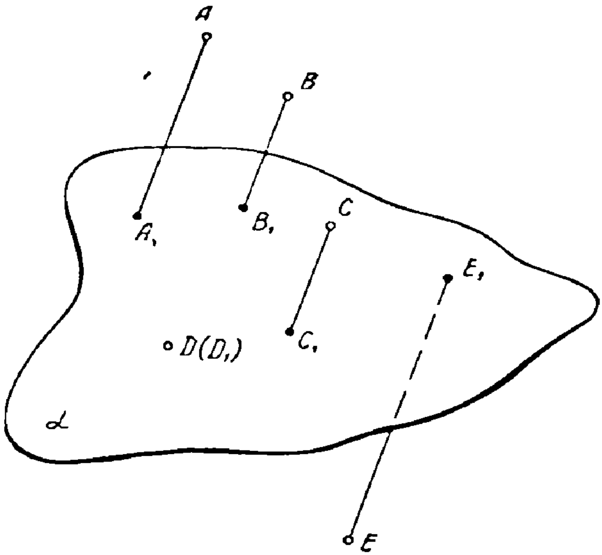


Рис. 113

[1] Для точек, лежащих в основной плоскости, M и M_1 совпадают.

Важным для более четкого различения свойств изображений является понятие «заданных на изображении элементов».

Определение. Точки называются заданными на изображении, если на нем определен или может быть определен базис так, чтобы при этом оказалась определенной принадлежность этих точек к базису.

Изображения точек на рис. 113 при соглашениях, принятых выше (п. 1), являются заданными на изображении, хотя базис на них явно и не представлен.

В самом деле, примем плоскость $A_1B_1C_1$ за основную и точки $A_1B_1C_1$ и C — за базисные. В таком случае для каждого базиса в оригинале может быть построена, например, единственная точка E' (E'_1), изображением которой является точка $E(E_1)$. Заданной будет и точка $M(M_1)$ на рис. 114, так как за базис могут быть приняты точки M, M_1 и две любые другие точки основной плоскости, каждая из которых является заданной.

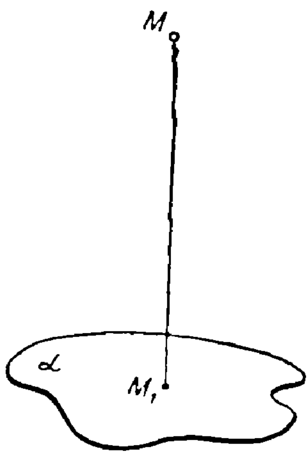


Рис. 114

Определение. Прямая (плоскость, фигура) называется заданной на изображении, если все ее точки заданы на изображении. Вместе с тем задать прямую и плоскость можно, соответственно, двумя и тремя заданными на изображении точками.

Теорема 1. Прямая, определяемая двумя заданными на изображении точками, задана.

Действительно, две заданные на изображении точки определяют для каждого базиса в оригинале единственную прямую, изображением которой в соответствии со свойствами параллельной проекции будет прямая, определяемая на картинной плоскости заданными точками.

Таким же образом доказывается теорема 2.

Теорема 2. Плоскость, определяемая тремя заданными точками, задана.

Изображения кривых линий задаются различным числом точек в зависимости от вида кривой линии.

3. Полнота и метрическая определенность изображения

Экономное обозрение различных свойств изображений, умелое использование их для практики, определение границ произвола при выполнении построений на изображении тесно связано с понятиями полноты и метрической определенности изображения.

Разделим все изображения, выполняемые в параллельной проекции, на полные и неполные[1] (иллюстративный чертеж): полные изображения в свою очередь разделим на метрически определенные (обратимые) и метрически неопределенные.

Полные изображения. На изображении, выполненном в параллельной проекции, может оказаться, что либо все точки будут заданными (рис. 113), либо только часть их (рис. 109). Положим эти свойства изображения в основу видовых отличий полного и неполного изображений.

Определение. Изображение называется полным, если все точки на нем заданные.

В противном случае изображение называется неполным.

Изображения, представленные на рис. 108, 111, 113, будут полными. Полными будут также все изображения, построенные по конкретному оригиналу на основе базиса с привлечением свойств параллельной проекции. Полными являются любые изображения планиметрических оригиналов. Изображения же, представленные на рис. 107, 109, 122, будут неполными.

Рассмотрим некоторые свойства полных и неполных изображений.

Свойство 1. По полному изображению для каждого базиса картинной плоскости и каждого базиса в оригинале может быть построена одна фигура, изображением которой является рассматриваемый чертеж картинной плоскости.

Истинность этого утверждения следует непосредственно из определения полного изображения. Из опре-

---

[1] В некоторых случаях рассматриваются сверхполные изображения. В приведенную классификацию они не включены, так как, будучи неверными «изображениями», они не являются и изображениями.

деления же изображения следует, что полное изображение служит в то же время изображением всего множества фигур, подобных построенной по паре фиксированных базисов.

Свойство 2. Полное изображение только по изображению позволяет определять относительное взаимное расположение изображенных точек, прямых и плоскостей.

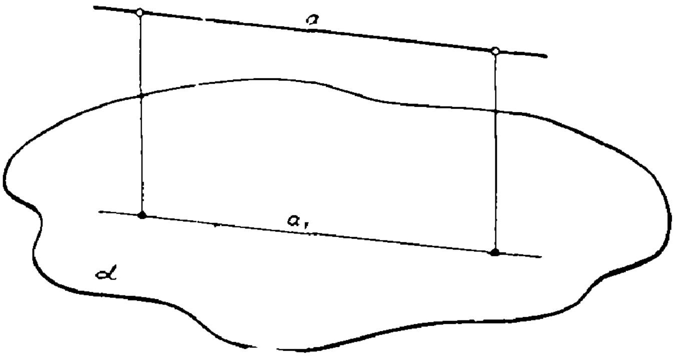


Рис. 115

Действительно, для того чтобы составить представление об истинном расположении изображенных элементов в оригинале, достаточно хотя бы в воображении воспроизвести оригинал для какой-либо из пар базисов. Фактически эта работа проводится нами подсознательно при рассматривании изображения.

Таким путем мы безошибочно определяем, что на рис. 115 представлено изображение прямой $a(a_1)$, параллельной плоскости α; что на рис. 116 прямая $a(a_1)$ пересекает грани параллелепипеда и т. д.

Иногда свойство 2 выражают словами: «Полное изображение исчерпывающе определяет позиционные свойства (свойства положения) оригинала».

Докажем теперь одно из самых важных свойств полного изображения.

Свойство 3. На полном изображении точка пересечения прямых или прямой и плоскости, линия пересечения двух плоскостей не может приниматься произвольно, а должна быть и может быть построена только на изображении.

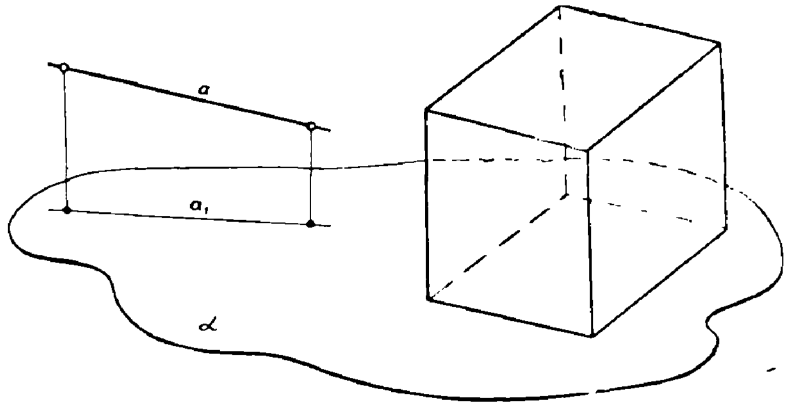


Рис. 116

а) Докажем сначала первую часть утверждения. Для этого построим по какой-либо паре базисов тот единственный оригинал, изображением которого является данный чертеж. Точки или линии пересечения прямых и плоскостей для этого оригинала определяются единственным образом, следовательно, и их изображение на картинной плоскости определяется единственным образом, т. е. должно быть построено, а не приниматься произвольно.

Эти же точки и линии пересечения, построенные на картинной плоскости, будут изображением соответствующих точек и линий пересечения для любых других оригиналов, построенных по любой другой паре базисов оригинала и изображения.

Действительно, восстановим один из этих оригиналов. Для фиксированной пары базисов получим единственный оригинал. Рассмотрим в нем прямые и плоскости, соответственные изображениям тех прямых и плоскостей, которые приходилось проводить на картинной плоскости для построения изображений точек и линий пересечения заданных прямых и плоскостей. Каждой такой плоскости или прямой в оригинале будет соответствовать единственная плоскость или прямая, а их точки или линии пересечения в силу свойств параллельной проекции будут соответствовать точкам и линиям пересечения, построенным на изображении.

б) Возможность построения только на изображении точек и линий пересечения прямых и плоскостей докажем для какой-либо одной из систем обозначения заданных точек.

Пусть две прямые пересекаются в оригинале. Точка пересечения этих прямых на полном изображении определяется как точка пересечения изображений этих прямых.

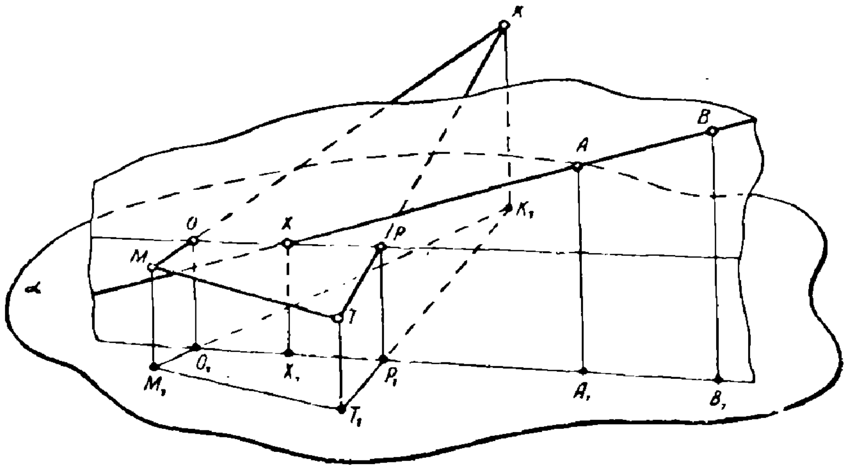


Рис. 117

Пусть, далее, прямая AB (A_1B_1) и плоскость MKT $(M_1K_1T_1)$ представляют изображение пересекающихся прямой и плоскости (рис. 117). Для построения изображения их точки пересечения проведем плоскость AA_1BB_1 до пересечения с плоскостями MM_1KK_1 и TT_1KK_1. Линии (OO_1 и PP_1) пересечения этих плоскостей параллельны прямой AA_1 и пересекутся с плоскостью MKT $(M_1K_1T_1)$ в точках $O(O_1)$ и $P(P_1)$.

В таком случае прямая OP (O_1P_1) есть линия пересечения плоскостей MKT $(M_1K_1T_1)$ и AA_1BB_1, а следовательно, прямые AB (A_1B_1) и OP (O_1P_1) лежат в одной плоскости. Точка пересечения этих прямых — точка $X(X_1)$ — есть одновременно и точка пересечения прямой AB (A_1B_1) и плоскости MKT $(M_1K_1T_1)$.

Наконец, для построения изображения линии пересечения двух плоскостей достаточно провести теперь в одной из этих плоскостей две прямые и построить их точки пересечения с другой плоскостью. Эти точки пересечения определят прямую, по которой пересекутся данные плоскости.

Отмеченные свойства вносят некоторую определенность в вопрос о восстановлении оригинала по полному изображению, в вопрос об определении границ произвола при выполнении построений на полном изображении.

Такой определенностью не обладает уже иллюстративный чертеж (неполное изображение). По нему нельзя судить о взаимном расположении геометрических элементов. Например, изображение, представленное на рис. 107, может рассматриваться как изображение и прямой, параллельной плоскости, и прямой, пересекающей плоскость. При этом, как уже отмечалось выше, за изображение точки пересечения прямой и плоскости может быть принята произвольная точка прямой a.

Уже из приведенных примеров видно, что некоторые построения на иллюстративном чертеже могут выполняться сравнительно произвольно. Однако необходимо иметь в виду, что этот произвол имеет границы.

Метрически определенные изображения. Полное изображение мы можем связывать с одной фигурой, построенной по какой-либо фиксированной паре базисов в оригинале и на картинной плоскости. Можно полное изображение связывать с оригиналами, построенными при различных сочетаниях базисов картинной плоскости и оригинала.

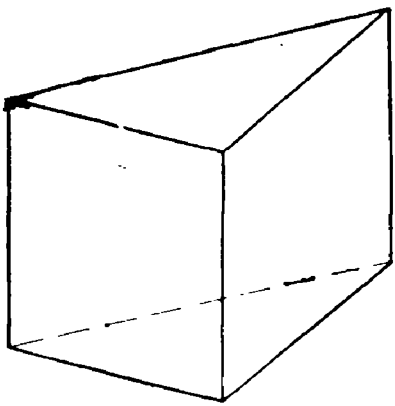


Рис. 118

В первом случае чертеж будет представлять изображение как фигуры, построенной по фиксированной паре базисов, так и всего множества фигур, подобных исходной. Например, чертеж, выполненный на рис. 118, можно рассматривать как изображение правильной треугольной призмы, все ребра которой равны 6 *см.* В то же время этот чертеж представляет изображение всех правильных треугольных призм, подобных рассмотренной.

Во втором случае тот же чертеж будет представлять изображение не только множество подобных между собой фигур. Этот чертеж мы можем рассматривать либо как изображение всех существующих треугольных призм (прямых и наклонных, правильных и неправильных), либо как изображение только правильных призм, либо только прямых призм, в основании которых лежит прямоугольный треугольник, и т. п.

Положим перечисленные свойства в основу видовых отличий метрически определенного и метрически неопределенного изображений.

Определение. Полное изображение, форма оригинала которого определена[1], называется метрически определенным (обратимым).

В противном случае изображение называется метрически неопределенным (необратимым).

Метрически определенными изображениями являются, например, все изображения, построенные выше по оригиналам с наперед заданными размерами. или по оригиналам наперед заданной формы.

Метрически определенными будут те полные изображения, которые мы словесно (условно) связываем с оригиналом конкретных размеров или оригиналом определенной формы из всего множества оригиналов, изображением которых является данный чертеж.

Полное изображение может стать метрически определенным и при других условиях. Некоторые из этих условий рассматриваются в п. 5, «Границы произвола при выполнении построений в задачах, решаемых на изображении».

Изображения же правильной четырехугольной пирамиды на рис. 121, прямой треугольной призмы на рис. 118, параллелепипеда на рис. 108 без каких-либо дополнительных условий представляют собой метрически неопределенные изображения, так как каждое из

[1] Под словами «форма оригинала определена» понимается, что может быть построена хотя бы одна фигура из всего множества подобных, изображением которых является данный чертеж. Иногда эту же мысль выражают словами, что «оригинал определен с точностью до подобия».

них в этом случае принимается за изображение не только множества подобных между собой фигур.

Метрически определенные и метрически неопределенные изображения, будучи полными изображениями, обладают всеми свойствами последних.

Вместе с тем, каждое из рассматриваемых изображений обладает важными для наших целей видовыми свойствами.

Свойство 1. На метрически определенном изображении ни одно построение не может выполняться произвольно.

В самом деле, все построения в оригинале выполняются единственным образом, следовательно, и соответственные построения на изображении выполняются единственным образом, а не произвольно.

Такой связностью в построениях на изображении не обладает никакой другой вид изображений. Напротив, каждый из них допускает некоторый произвол в построениях на изображении.

Свойство 2. На полном метрически неопределенном изображении часть построений может выполняться с некоторой степенью произвола.

Примером такого произвола может служить упомянутое выше (стр. 130) построение изображения высоты параллелепипеда.

4. Задачи, решаемые на изображении

После того как изображение построено, нередко приходится решать задачи на этом изображении. Определим характер и содержание таких задач.

Обратимся сначала к задачам, которые приходится решать с многогранниками и различными другими геометрическими фигурами, заданными в оригинале. Если, например, нам заданы в оригинале прямая и плоскость или две плоскости, то возникает задача построения соответственно точки и линии пересечения заданных геометрических образов, построения перпендикуляра, опускаемого из какой-либо точки прямой или плоскости на другую плоскость, построение углов наперед заданной величины.

В оригинале многогранников приходится строить перпендикуляры, опускаемые из вершин многогранника на плоскости, перпендикуляры в гранях, углы и отрезки наперед заданных размеров, биссектрисы заданных углов, делить отрезки в заданном отношении и т. п. Такие же задачи приходится решать в оригиналах конусов, цилиндров, шаров и иных геометрических тел.

Наконец, с неизбежностью возникает необходимость изображения построений, проводимых в оригинале, после того как изображение самого геометрического тела построено. Решение последней задачи будем называть задачей, решаемой на изображении, независимо от того, эффективно или только в воображении выполняются построения в оригинале.

Все задачи, решаемые на изображении, можно разделить на два класса: позиционные и метрические. Такое наименование примем и для соответственных задач, решаемых в оригинале.

К позиционным задачам отнесем задачи, связанные лишь с построением точек и линий пересечения прямых и плоскостей, задачи, связанные с определением взаимного расположения геометрических образов, представленных на изображении.

Из числа задач, распространенных в школе, к позиционным задачам относятся задачи на построение точек пересечения прямых и плоскостей, на построение изображения линий пересечения плоскостей, на построение сечений многогранников и некоторых видов тел вращения. Многочисленные примеры решения позиционных задач рассматриваются в § 2.

К метрическим задачам отнесем задачи, связанные с построением отрезков и углов наперед заданной величины.

Из числа школьных задач, решаемых на изображении, к метрическим задачам относятся задачи на построение изображений высот и перпендикуляров вообще, линейных углов двугранного угла, и углов и отрезков заданной величины, биссектрис углов и биссектральных плоскостей, построение сечений наперед заданной формы и многое другое.

5. Границы произвола при выполнении построений в задачах, решаемых на изображении

Выше на основе понятия базиса и свойств параллельной проекции были определены границы произвола при построении изображения по наперед заданному оригиналу. Однако уже из примеров, рассмотренных в пп. 1—3 «Приложения», видно, что с произволом и определением его границ при выполнении построений на картинной плоскости приходится сталкиваться и после того, как изображение построено — при выполнении построений в задачах, решаемых на изображении.

Необходимо видеть различные причины произвола в выполнении построений в каждом отдельном случае и использовать его при выполнении чертежей к доказательству теорем, к решению стереометрических задач на построение, к решению задач вообще. Систематизация вопроса об определении границ произвола при выполнении построений в задачах, решаемых на изображении, становится возможной после проведенного деления на виды как изображений, так и задач, решаемых на них.

На полном изображении при решении позиционных задач нет построений, которые на нем могли бы быть выполнены произвольно. Все построения являются следствием уже заданных на изображении элементов. В этом смысле будем говорить, что на полном изображении не остается никакого произвола в выполнении построений при решении позиционных задач. Истинность этого утверждения следует из «свойства 3» (стр. 130) полного изображения.

В отношении метрических задач виды полного изображения обладают уже различными возможностями.

На метрически определенном изображении не остается никакого произвола в выполнении построений при решении как позиционных, так и метрических задач. Это утверждение следует из «свойства 1» (стр. 143) метрически определенных изображений.

На метрически неопределенном изображении не остается произвола в выполнении построений при решении позиционных задач и допустим некоторый произвол в выполнении построений при решении метрических задач.

Истинность первого утверждения следует из того, что метрически неопределенное изображение — полное.

Характер и понятие о границах произвола при решении метрических задач определим на примерах.

Пример 1. Построить высоту треугольной пирамиды, изображение которой представлено на рис. 119.

Рассматриваемое изображение — метрически неопределенное, так как оно в данном случае принимается за изображение всех треугольных пирамид вообще.

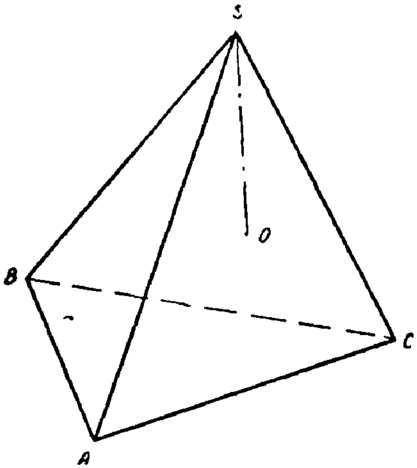


Рис. 119

За изображение высоты может быть принят произвольный отрезок SO. Действительно, среди всех оригиналов найдется по крайней мере одна пирамида с построенной в ней высотой, изображением которой будет рис. 119. Построим такую пирамиду.

Примем в оригинале произвольный треугольник $A'B'C'$ за основание пирамиды и построим в плоскости этого треугольника точку O', соответственную точке O. Восставим после этого к плоскости треугольника $A'B'C'$ в точке O' перпендикуляр и его произвольную точку S' примем за вершину искомой пирамиды. Изображением построенной пирамиды $S'A'B'C'$ с высотой $S'O'$ и будет рис. 119.

Пример 2. Построить высоту треугольной пирамиды, все боковые грани которой одинаково наклонены к плоскости основания (рис. 120).

Изображение, представленное на рис. 120, также метрически неопределенное.

Основанием высоты на этом изображении может служить не единственная точка, так как в оригиналах всех пирамид, изображением которых является рассматриваемый чертеж, основания высот могут занимать различные положения. В то же время надо понимать, что и не всякая точка в плоскости треугольника ABC может быть принята за основание высоты пирамиды.

В самом деле, основанием высоты рассматриваемой пирамиды служит центр окружности, вписанной в треугольник $A'B'C'$. Центр же окружности, вписанной в треугольник, лежит внутри треугольника. У нас нет оснований утверждать, что центром окружности может быть всякая точка, принадлежащая внутренней области треугольника.

В таких случаях, чтобы не ошибиться в построении изображения высоты пирамиды, строят оригинал одного из оснований пирамиды, вписывают в него окружность и на картинной плоскости строят точку, соответственную построенному центру окружности. Последнюю точку и принимают за изображение основания высоты пирамиды.

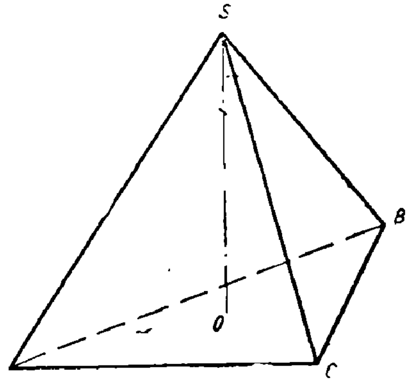


Рис. 120

Рассмотренный прием построения изображения высоты может быть применен для решения всех метрических задач на метрически неопределенном изображении [1]. Необходимые вспомогательные построения в повседневной школьной практике выполняются приближенно (от руки).

На метрически неопределенном изображении произвольно можно выполнять решение двух, трех и более метрических задач. В первом примере произвольно можно было бы выполнить построение изображения линейного угла одного из двугранных углов, образованных боковыми гранями, и принять одну из подходящих точек треугольника ABC за центр окружности, вписанной в него.

Однако после ряда таких построений метрически неопределенное изображение может стать метрически определенным. В школьном курсе математики не пред-

---

[1] Доказательство положения, что за изображение центра окружности может быть принята любая точка внутренней области треугольника, образованного средними линиями треугольника ABC, обременительно для школы. Этого факта, видимо, не следует и сообщать учащимся. Предлагаемый же выше прием решения метрических задач на метрически неопределенном изображении полезен тем, что в доступной форме будет содействовать укреплению связи оригинала и изображения.

ставляется возможным сформулировать в достаточно общем виде критерии перехода метрически неопределенного изображения в метрически определенное, а в дальнейшем критерий перехода иллюстративного чертежа в полное изображение. Поэтому ограничимся в освещении этого вопроса рассмотрением частных случаев, с которыми чаще всего приходится сталкиваться в школе.

Пример 3. На изображении пирамиды, в основании которой лежит ромб и все боковые грани которой одинаково наклонены к плоскости основания, построить изображение перпендикуляра, опущенного из точки пересечения диагоналей основания на боковую грань, и линейные углы всех двугранных углов при основании пирамиды.

Пусть рис. 121 представляет изображение заданной пирамиды. Изображением высоты пирамиды будет отрезок, соединяющий вершину пирамиды с точкой пересечения диагоналей ромба. Это построение для всех оригиналов выполняется единственным образом.

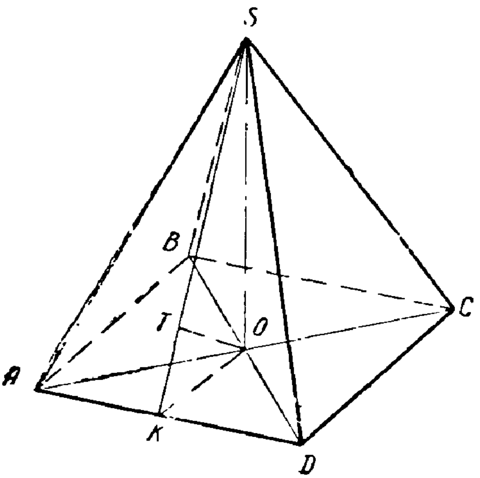


Рис. 121

За изображение линейного угла двугранного угла при ребре AD может быть принят любой угол SKO, лишь бы вершина K лежала на отрезке AD и не совпадала с его концами. Действительно, среди всех ромбов найдется такой, в котором перпендикуляр, опущенный на сторону $A'D'$, разделит ее в отношении $AK:KD=A'K':K'D'$. Чтобы убедиться в этом, достаточно построить прямоугольный треугольник $A'O'D'$, в котором высота, опущенная из вершины прямого угла O', делит гипотенузу в рассматриваемом отношении. Отложив после этого на продолжении катетов отрезки $O'B'=O'D'$ и $O'C'=O'A'$, получим искомый ромб.

Все ромбы, построенные по рассматриваемому условию, подобны между собой. Следовательно, построение линейного угла $K'O'$ определило в оригинале форму основания пирамиды. Изображение же в целом по-прежнему остается метрически неопределенным, так как неопределенным остается положение вершины S'.

После решения первой метрической задачи число видов оригиналов, изображением которых служит рис. 121, уменьшилось. Однако так как среди этих оригиналов будут не только подобные между собой, то на рассматриваемом изображении можно «произвольно» выполнить решение еще нескольких метрических задач.

На рис. 121 можно, например, еще произвольно построить изображение перпендикуляра, опущенного из точки O на грань ASD. За изображение основания этого перпендикуляра может быть принята произвольная точка T отрезка KS, за исключением его концов.

Примем отрезок OT за изображение перпендикуляра, опущенного из точки O' на грань $A'S'D'$. Покажем, что существует такая пирамида, изображением которой является рис. 121. Для этого построим прямоугольный треугольник $S'K'O'$, в котором перпендикуляр, опущенный из вершины (O') прямого угла, делит гипотенузу $S'K'$ в отношении $S'T' : T'K' = ST : TK$, а один из катетов равен отрезку $O'K'$. Примем после этого катет $S'O'$ за высоту пирамиды.

Все треугольники, построенные по описанным выше условиям, будут подобны между собой. Подобными будут и пирамиды, таким путем построенные. Следовательно, рис. 121 будет изображением только подобных между собой оригиналов, и изображение, представленное на рис. 121, стало метрически определенным.

Не всегда просто увидеть, какое из произвольных построений на изображении определяет форму оригинала. Полезно поэтому, приняв нижеприводимые факты без доказательства, запомнить, что «произвольный» выбор на изображении точки пересечения высот треугольника, центра окружности, описанной около треугольника и вписанной в него, определяет форму основания оригинала.

Необходимо при этом иметь в виду, что как и в случае построения изображения центра окружности, вписанной в треугольник (пример 2), не всякая точка картинной плоскости может быть принята за точку пересечения высот треугольника, его биссектрис, центра окружности, описанной около треугольника. Как в перечисленных, так и во многих других затруднительных случаях, можно построить соответствующие элементы для одного из оригиналов и рассматривать чертеж как изображение этого конкретного оригинала.

При построениях на метрически неопределенном изображении, следовательно, необходимо строго следить за моментом, начиная с которого изображение оказывается связанным с оригиналом определенной формы, так как соответственно этому кончается произвол в выполнении построений при решении метрических задач.

Иллюстративный чертеж (неполное изображение) допускает наибольший произвол в выполнении построений при решении как позиционных, так и метрических задач.

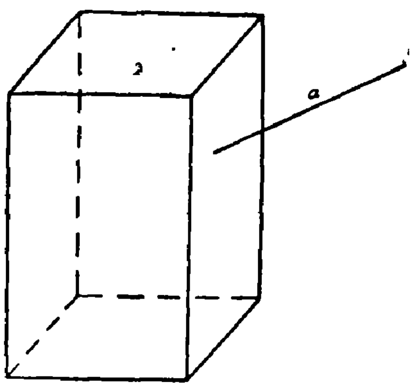


Рис. 122

Рис. 107, 109, 122 представляют собой неполные изображения. За изображение точки пересечения прямой *a* и плоскости (рис. 107), как уже отмечалось выше, может быть произвольно принята любая точка прямой *a*; произвольно же за изображение точек пересечения прямой *a* с одной и даже с двумя гранями призмы (рис. 122) или пирамиды (рис. 109) могут быть приняты различные точки прямой *a*.

Произвольно на иллюстративном чертеже могут решаться и метрические задачи. Например, за основание перпендикуляра, опущенного из точки *A* прямой *a* на плоскость α (рис. 123), может быть принята любая точка картинной плоскости. С меньшей свободой, но также произвольно, может быть изображен перпендикуляр из точки *B* на ту же плоскость.

Однако как и при построениях на метрически неопределенном изображении, произвол при решении пози-

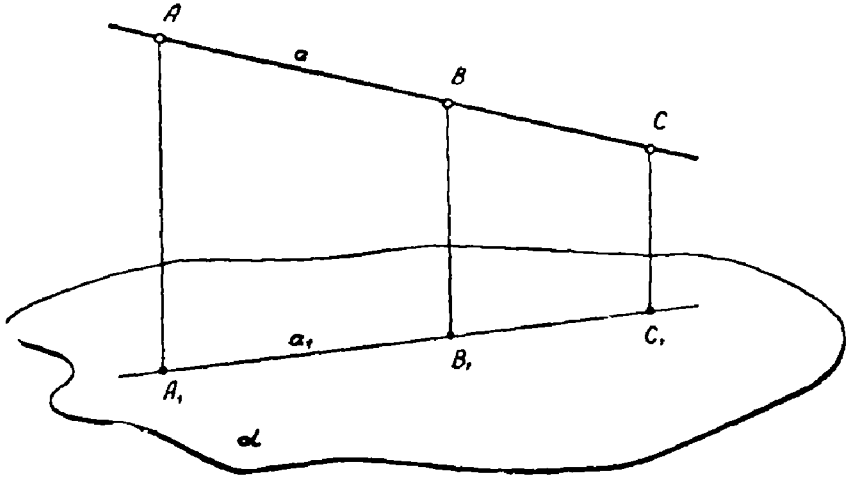


Рис. 123

ционных и метрических задач на иллюстративном чертеже имеет границы, так как после некоторого числа построений иллюстративный чертеж может стать сначала полным, а затем и метрически определенным или даже сразу метрически определенным.

Проследим на примерах условия, при которых иллюстративный чертеж переходит в полное изображение.

Пример 4. Построить изображение перпендикуляров из точек AB и C прямой a на плоскость α (рис 123).

За изображение перпендикуляров из точек A и B могут быть приняты два произвольных параллельных отрезка. После этого точки $A(A_1)$ и $B(B_1)$ прямой $a(a_1)$ окажутся заданными (стр. 136), а вместе с тем окажется заданной (теорема I, стр. 136) и прямая $a(a_1)$. Построение перпендикуляра из точки C на плоскость ввиду этого для каждого из оригиналов выполняется единственным образом. Следовательно, и изображение его уже не может выполняться произвольно, а должно быть построено: перпендикуляр изобразится прямой CC_1, параллельной прямой AA_1 с основанием C_1 перпендикуляра на прямой A_1B_1.

Пример 5. На изображении (рис. 109, 122) построить точки пересечения прямой a с двумя гранями призмы (пирамиды) и с плоскостью основания.

Примем произвольные точки M и K прямой a за изображение точек пересечения этой прямой с двумя гранями призмы (рис. 124). Сделать это можно, так как для каждой фиксированной пары базисов в оригинале и на картинной плоскости можно построить единственную призму и точки пересечения прямой a с ее гранями.

Изображение прямой после построений точек M и K стало заданным, а изображение в целом — полным.

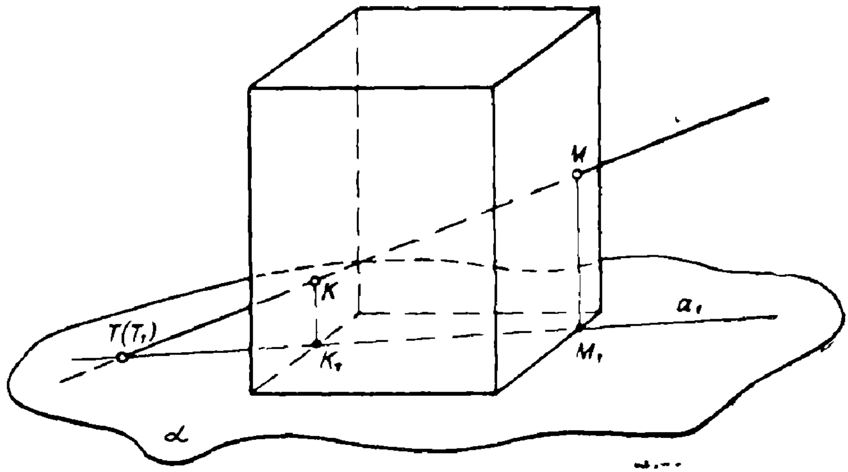


Рис. 124

Следовательно, на этом окончен произвол в решении позиционных задач и точка пересечения прямой a с любой из заданных плоскостей должна быть построена, как это и выполнено для прямой $a(a_1)$ и плоскости α на рис. 124.

Точно так же решается вопрос о построении на изображении точек пересечения прямой с гранями и плоскостью основания для пирамиды (рис. 125).

Из приведенных примеров видно, что неполное изображение (иллюстративный чертеж) становится полным, как только окажутся заданными все точки изображения. При этом необходимо помнить, что прямая и плоскость становятся заданными, как только, соответственно, две или три их точки оказываются заданными.

Приведем теперь пример, когда после ряда произвольных построений на неполном изображении оно сразу становится метрически определенным.

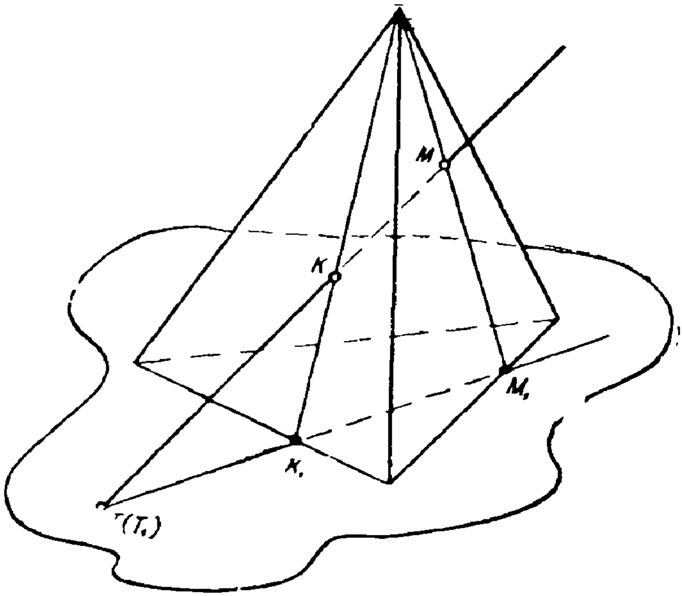


Рис. 125

Пример 6. Построить точки пересечения прямой a с гранями правильной четырехугольной призмы, боковые ребра которой в три раза больше стороны основания (рис. 122).

Пусть на рис. 122 изображена правильная четырехугольная призма, определяемая условием задачи. Изображение призмы — метрически определенное, хотя в целом изображение, представленное на рис. 122, является неполным: точки прямой a не заданы на изображении.

Как и в примере 5, за изображение точек пересечения прямой с двумя гранями призмы могут быть приняты две произвольные точки (M и K) прямой a. Как только это будет сделано, изображение станет не только полным, но и метрически определенным, так как окажется определенной форма оригинала, а вместе с тем будет положен конец произволу в построениях как при решении позиционных, так и метрических задач.

При построениях на иллюстративном чертеже, следовательно, необходимо строго следить за моментом, начиная с которого все точки на изображении окажутся заданными (изображение становится полным), за моментом, начиная с которого оказывается определенной форма оригинала (изображение становится метрически определенным), так как соответственно этому сначала кончается произвол в построениях при решении позиционных задач, а затем и при решении метрических задач. Если же иллюстративный чертеж переходит сразу в метрически определенное изображение, то тем самым кладется конец произволу в выполнении построений как при решении позиционных задач, так и метрических задач.

6. Об эффективном методе решения задач на построение в стереометрии

Как известно, в стереометрии не представляется возможным решать задачи на построение, фактически выполняя построения с помощью линейки, циркуля, «пластинки-плоскости» непосредственно в пространстве, как это делается на плоскости при решении задач на построение в планиметрии. При сложившемся положении задачи на построение в стереометрии приходится решать либо в воображении, доказывая таким путем факт существования решения, либо решать эти задачи на изображении.

В последнем случае на картинной плоскости сначала изображаются заданные элементы, а затем каждый шаг воображаемых построений в оригинале. Эффективное[1] решение каждой новой задачи на построение в пространстве состояло бы из решения цепочки вспомогательных позиционных и метрических задач. Соответственно и на изображении решение задачи на построение складывается из последовательности позиционных и метрических задач.

Из всех задач, решаемых на изображении, значительный интерес, например, для инженерной практики представляет решение позиционных задач на полном изображении и метрических задач на метрически опреде-

[1] Фактически выполняемое.

ленном изображении. В этом случае решение задач на построение условно называют «решением задач на построение на проекционном чертеже»[1].

Значение задач на построение, решаемых на проекционном чертеже, состоит в том, что ни одно построение на них не может выполняться произвольно, а является следствием заданных на изображении элементов. Решение в этих задачах, следовательно, находится эффективно-фактическим построением с помощью фиксированного набора инструментов, а не произвольно, как это выполняется, например, на иллюстративном чертеже.

Каждый шаг решения задачи на построение на проекционном чертеже допускает строго определенное истолкование на модели или на конструируемой вещи. Более того, конечные результаты решения могут быть перенесены на любую из материальных реализаций изображения. Таким образом, только по плоскому чертежу могут быть получены размеры, форма и другие данные об оригинале пространственной фигуры.

Из приведенных положений видна роль задач на построение, решаемых на проекционном чертеже, для производства, для практики вообще. Этими же положениями раскрывается положительное значение обучения учащихся эффективным методам решения задач на построение в стереометрии.

7. Область применения иллюстративного чертежа

Значительный интерес для школьного курса геометрии представляет и иллюстративный чертеж (неполное изображение).

Иллюстративный чертеж допускает наибольший произвол в построениях на изображении. Ввиду этого неполное изображение удобно при выполнении чертежей к доказательству теорем, чертежей к задачам на построение, решаемым в воображении,— во всех случаях, когда чертеж служит лишь вспомогательным средством для достижения основной цели.

Выполнение исходного чертежа и последующих построений на нем при доказательстве теоремы или ре-

---

[1] Этот термин нельзя признать удачным, так как буквальное понимание его допускает значительно более широкое толкование понятия по сравнению с определенным выше.

шений задач на построение в воображении нарушает нормальное течение мысли, хотя и необходимо для закрепления промежуточных результатов работы воображения. Использование для этой цели полных изображений с последующими эффективными построениями на них обременительно в этих случаях. Наоборот, применение иллюстративного чертежа с довольно широким произволом при выполнении построений на нем наиболее удачно разрешает трудности выполнения чертежей в рассматриваемых случаях: чертеж выполняется быстро и не слишком нарушает течение мысли; чертеж закрепляет промежуточные этапы проводимых рассуждений и тем самым облегчает работу воображения, способствует его развитию.

Перечисленные качества иллюстративного чертежа особенно ценны на первых шагах изучения стереометрии, когда у учащихся нет еще навыка в обращении со стереометрическими образами. Позже при доказательстве теорем не будет представлять затруднений и применение полных изображений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Адамар Ж. Элементарная геометрия. Пособие для учителей средней школы. М., Учпедгиз, 1951.
2. Барыбин К. С. и Исаков А. К. Сборник задач по математике. М., Учпедгиз, 1952.
3. Владимирский Г. А. и Калецкий С. Ю. Черчение, ч. II. М., Учпедгиз, 1954.
4. Воробьев П. С. Решение задач по стереометрии методом прямоугольных проекций. Журн «Математика в школе», 1953, № 3.
5. Гельфанд М. Б. О решении задач на построение сечений многогранников. Журн. «Математика в школе», 1956, № 4.
6. Прошников Н. П. Задачи и упражнения в курсе стереометрии как средство развития пространственных представлений и пространственного воображения учащихся, диссертация. М., 1951.
7. Ирошников Н. П. Из опыта обучения решению задач на построение, сборник «Из опыта работы передовых учителей». М., изд-во АПН РСФСР, 1950.
8. Ирошников Н. П. Построение изображений в курсе стереометрии, сборник «Решение задач в средней школе». М., изд-во АПН РСФСР, 1952.
9. Китаенко В. Ф. и Поспелов Н. И. Как решать задачи по стереометрии. Латгосиздат, Рига, 1952.
10. Кочеткова Е. С. Сборник задач на построение по стереометрии. М., Учпедгиз, 1956.
11. Лоповок Л. М. Сборник стереометрических задач на построение. М., Учпедгиз, 1950.
12. Ляпин С. Е. Методика преподавания математики, ч. II. М., Учпедгиз, 1956
13. Меньших Б. В. Задачи на построение в курсе стереометрии. Журн. «Математика в школе», 1956, № 4.
14. Назаревский Г. А. О развитии пространственных представлений на уроках геометрии. Журн. «Математика в школе», 1951, № 5, 1953, № 3.
15. Орленко М. И. Решение геометрических задач на построение в средней школе, пособие для учителей. Минск, Учпедгиз БССР, 1953.
16. Панкратов А. А. Связь преподавания геометрии и черчения в средней школе, диссертация. М., 1953.
17. Романовский Б. Б. Задачи на построение в стереометрии. М., Учпедгиз, 1940.

18. Семушин А. Д. Построение и применение изображений в курсе стереометрии средней школы, диссертация. М., 1955.
19. Франк М. Л. Геометрический чертеж в курсе стереометрии. Л., 1941.
20. Черкасов Р. С. Сборник стереометрических задач. М., Учпедгиз, 1956.
21. Четверухин Н. Ф. Проблема изображения пространственных фигур в условиях преподавания. «Известия АПН РСФСР», т. 4, 1946.
22. Четверухин Н. Ф. Вопросы методологии и методики геометрических построений в школьном курсе геометрии. «Известия АПН РСФСР», т. 6, 1946.
23. Четверухин Н. Ф. Чертежи пространственных фигур в курсе геометрии. М., Учпедгиз, 1946.
24. Четверухин Н. Ф. Стереометрические задачи на проекционном чертеже, ч. I, М.—Л., изд-во АПН РСФСР, 1947.
25. Четверухин Н. Ф. Стереометрические задачи на проекционном чертеже, ч. II — Метрические задачи. М.—Л., изд-во АПН РСФСР, 1948.

СОДЕРЖАНИЕ

Алексей Дмитриевич Семушин

МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ
НА ПОСТРОЕНИЕ ПО СТЕРЕОМЕТРИИ

Редактор Г. Г. Гуськов
Переплет художника М. А. Силкиной
Худож. редактор Т. И. Добровольнова
Техн. редактор В. В. Новоселова
Корректоры И. Н. Вишнякова и Н. П. Антиповская

Сдано в набор 16/VIII 1958 г. Подписано к печати 25/XII 1958 г.
Формат 84 × 108/32 Бум. л. 2,50 Печ. л. 10 Усл. п. л. 8,2
Уч.-изд. л. 7,58
А 010596 Тираж 28 000 Зак 783

Изд-во АПН РСФСР, Москва, Погодинская ул., 8.
Типография изд-ва АПН РСФСР, Москва, Лобковский пер., 5/16.
Цена 3 р. 05 к.