МЕТОДИКА

ПРИГОТОВИТЕЛЬНАГО КУРСА

АЛГЕБРЫ,

ПОСОБІЕ ДЛЯ УЧАЩИХЪ.

СОСТАВИЛИ

В. ЕВТУШЕВСКІЙ и А. ГЛАЗЫРИНЪ.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.

ВЪ ТИПОГРАФІИ В. БЕЗОБРАЗОВА И КОМП.

(Вас. Остр., 8 л., д. № 45)

1876.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

Стран.

Введеніе VII

ЧАСТЬ I.

Алгебра абсолютныхъ чиселъ.

ОТДѢЛЪ I.

Глава I. Понятіе о формулѣ, ея составленіе и вычисленіе.

§ 1. Анализъ задачи 1
§ 2. Опредѣленіе формулы, ея составленіе и вычисленіе 6

Глава II. Раздѣленіе формулъ по даннымъ числамъ.

§ 3. Задачи частныя и общія 7
§ 4. Частная и общая формула рѣшенія задачи 9
§ 5. Обозначеніе общихъ чиселъ 11
§ 6. Характеръ упражненій на этотъ отдѣлъ . . . . —

Глава III. Раздѣленіе формулъ по дѣйствіямъ.

§ 7. Раздѣленіе формулъ по числу дѣйствій 13
§ 8. Раздѣленіе сложныхъ формулъ по роду дѣйствій и порядку дѣйствій 14
§ 9. Вычисленіе многочлена и употребленіе скобокъ 16
§ 10. Характеръ упражненій 18

Глава IV. Упрощеніе сложныхъ формулъ.

Стран.

§ 11. Цѣлый коэффиціентъ общаго числа 18
§ 12. Дробный коэффиціентъ общаго числа 20
§ 13. Коэффиціентъ сложнаго одночлена 21
§ 14. Вычисленіе одночлена съ коэффиціентомъ 22
§ 15. Характеръ упражненій 23
§ 16. Понятіе о степени 24
§ 17. Сокращенное обозначеніе степени 25
§ 18. Сокращенное обозначеніе одночлена, представляющаго произведеніе нѣсколькихъ степеней 26
§ 19. Вычисленіе одночлена съ коэффиціентомъ и показателями 27
§ 20. Характеръ упражненій 28
§ 21. Многочленъ съ одною буквою въ каждомъ членѣ и всѣ члены его подобны 29
§ 22. Члены многочлена всѣ подобны и въ каждомъ членѣ болѣе одной буквы 30
§ 23. Многочленъ, всѣ члены котораго подобны и имѣютъ показателей . . —
§ 24. Приведеніе подобныхъ членовъ такого многочлена, въ которомъ есть различныя группы подобныхъ членовъ 31
§ 25. Характеръ упражненій 33

ОТДѢЛЪ II.

Глава I. Понятіе объ уравненіи, его составленіе и рѣшеніе.

§ 26. Анализъ задачъ 34
§ 27. Основные виды уравненія и рѣшеніе ихъ при помощи разсужденія, соотвѣтствующаго каждому виду 36
§ 28. Опредѣленіе уравненія, его корня и рѣшенія 43
§ 29. Составленіе уравненія 44
§ 30. Рѣшеніе уравненія по общему правилу 46
§ 31. Особенный случай при рѣшеніи уравненій, когда приходится сумму или разность двухъ чиселъ умножать на какое-нибудь число . 50
§ 32. Характеръ упражненій 52

Глава II. Раздѣленіе уравненій по даннымъ числамъ и рѣшеніе буквенныхъ уравненій.

§ 33. Раздѣленіе уравненій 52
§ 34. Рѣшеніе буквенныхъ уравненій 53
§ 35. Характеръ упражненій 57

ЧАСТЬ II.

Алгебра относительныхъ чиселъ.

Глава I. Понятіе объ относительныхъ числахъ и сравнительная ихъ величина.

Стран.

§ 36. Понятіе о положительномъ, отрицательномъ и абсолютномъ числѣ . 61
§ 37. Обозначеніе положительнаго и отрицательнаго числа 66
§ 38. Сравнительная величина положительнаго и отрицательнаго числа . . 68
§ 39. Характеръ упражненій 69

Глава II. Вычитаніе большаго числа изъ меньшаго.

§ 40. Разности, въ которой вычитаемое больше уменьшаемаго 69
§ 41. Многочленъ, въ которомъ приходится вычитать большее число изъ меньшаго 71
§ 42. Характеръ упражненій 73

Глава III. Четыре дѣйствія съ относительными числами.

§ 43. Сложеніе частныхъ относительныхъ чиселъ, двухъ и нѣсколькихъ . 73
§ 44. Сложеніе общихъ относительныхъ чиселъ, двухъ и нѣсколькихъ . . 77
§ 45. Сложеніе подобныхъ относительныхъ одночленовъ или приведеніе . 79
§ 46. Вычитаніе частныхъ относительныхъ чиселъ 81
§ 47. Вычитаніе общихъ относительныхъ чиселъ 83
§ 48. Умноженіе относительнаго числа на абсолютное . . . . —
§ 49. Дѣленіе относительнаго числа на абсолютное 85
§ 50. Характеръ упражненій . . . . —

Глава IV. Формула.

§ 51. Формула съ относительными числами 86
§ 52. Характеръ упражненій 87

Глава V. Уравненіе.

§ 53. Уравненія съ относительными рѣшеніями 87
§ 54. Характеръ упражненій 90

ВВЕДЕНІЕ.

Необходимость приготовительнаго (пропедевтическаго) курса алгебры подвергается вообще большему сомнѣнію, чѣмъ необходимость такихъ курсовъ ариѳметики и геометріи. Это легко объясняется слѣдующими обстоятельствами. Ученикъ, приступающій къ изученію ариѳметики и геометріи, имѣетъ только отрывочныя, не всегда вѣрныя и полныя, представленія о числѣ, о геометрическомъ протяженіи и о тѣхъ основныхъ соотношеніяхъ, въ которыя могутъ быть поставлены различныя числа и различныя протяженія. Отсюда ясно, что ученикъ не можетъ прямо приступить къ изученію ариѳметики и геометріи въ ихъ научной формѣ, гдѣ основныя понятія не вырабатываются, а сразу опредѣляются, гдѣ отношенія между ними разсматриваются во всей полнотѣ и являются въ окончательно организованномъ видѣ. Ранѣе такого систематическаго изученія ариѳметики и геометріи нужно имѣющіяся отдѣльныя представленія о числѣ и протяженіи исправить, дополнить, образовать изъ нихъ понятія и показать возможность тѣхъ основныхъ отношеній, въ которыя могутъ быть поставлены между собою различныя числа и различныя протяженія. Въ этомъ состоитъ задача, отсюда же видна и необходимость приготовительныхъ курсовъ ариѳметики и геометріи.

Что касается алгебры, то вопросъ о преподаваніи ея стоитъ иначе. Ученикъ, приступающій къ изученію алгебры, уже ознакомился съ ея естественной предшественницей, ариѳметикой. Онъ имѣетъ понятіе о числѣ, знаетъ что надъ числами возможны различныя дѣйствія, умѣетъ совершать эти дѣйствія и при помощи ихъ рѣшать различныя задачи. Но вѣдь алгебра есть также наука о числахъ, она также совершаетъ надъ ними различныя дѣйствія, дѣйствія надъ одночленами и многочленами, — разница въ томъ, что числа въ алгебрѣ общія; рѣшая уравненія, она при помощи ихъ рѣшаетъ задачи. Отсюда на первый взглядъ естественно заключить, что, давъ понятіе объ общемъ числѣ, можно прямо приступить къ систематическому курсу алгебры, т. е. къ дѣйствіямъ надъ одночленами, многочленами, рѣшенію уравненій и т. д. Но такой выводъ вѣренъ только на первый взглядъ. Для болѣе обстоятельнаго рѣшенія вопроса о постановкѣ преподаванія алгебры, мы разсмотримъ подробнѣе, въ чемъ состоитъ содержаніе алгебры, и каково его отношеніе къ содержанію ариѳметики.

По опредѣленію *Конта* предметъ математическаго анализа вообще, а въ частности алгебраическаго, состоитъ въ отысканіи неизвѣстныхъ величинъ посредствомъ дѣйствій надъ величинами данными. Этотъ общій вопросъ подраздѣляется на 3 частныхъ основныхъ вопроса: 1) Отысканіе неизвѣстной величины посредствомъ двухъ данныхъ величинъ, причемъ изъ условій задачи прямо слѣдуютъ дѣйствія надъ двумя данными величинами для отысканія неизвѣстной. 2) Отысканіе неизвѣстной величины посредствомъ нѣсколькихъ данныхъ, причемъ изъ условій задачи прямо слѣдуютъ дѣйствія надъ данными для отысканія неизвѣстной. 3) Отысканіе неизвѣстной величины посредствомъ нѣсколькихъ данныхъ, причемъ изъ условій задачи прямо слѣдуютъ дѣйствія надъ неизвѣстнымъ и данными для полученія нѣкоторой опредѣленной величины, и уже по этимъ дѣйствіямъ надо опредѣлить дѣйствія надъ одними данными для отысканія неизвѣстной.

Уже a priori нельзя не признать вѣрности такой классификаціи математическихъ вообще, въ частности алгебраическихъ вопросовъ. Въ самомъ дѣлѣ искомая величина не можетъ составляться изъ меньшаго числа данныхъ величинъ, чѣмъ двѣ; что же касается бо́льшаго числа, то оно неограниченно. Отсюда вытекаетъ первое раздѣленіе вопросовъ, по числу данныхъ величинъ: вопросы съ двумя данными величинами и вопросы съ нѣсколькими данными величинами. Съ другой стороны неизвѣстная величина составляется изъ данныхъ всегда посредствомъ дѣйствій (сложенія, вычитанія, умноженія, дѣленія и т. д.), и такъ какъ въ составъ вопросовъ входятъ только данныя величины и неизвѣстныя, то ясно, что на основаніи условій вопроса дѣйствія могутъ распредѣляться только между данными и неизвѣстными величинами. Отсюда вытекаетъ второе раздѣленіе вопросовъ, по дѣйствіямъ: въ однихъ вопросахъ изъ условій задачи дѣйствія прямо слѣдуютъ надъ данными для отысканія неизвѣстной; въ другихъ вопросахъ изъ условій вопроса прямо слѣдуютъ дѣйствія надъ неизвѣстнымъ и данными для отысканія нѣкоторой опредѣленной величины. Отъ соединенія этихъ двухъ подраздѣленій математическихъ вопросовъ и вытекаютъ тѣ 3 основныхъ вопроса, о которыхъ упомянуто выше.

Правильность приведенной классификаціи алгебраическихъ вопросовъ, несмотря на ея видимое различіе съ обыкновеннымъ дѣленіемъ алгебры на дѣйствія надъ одночленами и многочленами и рѣшеніе уравненій, можетъ быть еще подтверждена тѣмъ, что все обычное содержаніе алгебры легко объясняется приведенной классификаціей Конта.

Въ самомъ дѣлѣ, для рѣшенія вопросовъ перваго рода является необходимость пониманія значенія основныхъ дѣйствій и составленія *простыхъ* формулъ: $a + b$, $a - b$, ab, $\frac{a}{b}$ и т. д. Для рѣшенія вопросовъ втораго рода является необходимость составленія сложныхъ формулъ, т. е. такихъ, въ которыхъ данныхъ чиселъ больше двухъ, а дѣйствій больше одного. Какія именно дѣйствія надо употребить, это прямо слѣдуетъ изъ условій задачи и опредѣленій дѣйствій. Такъ какъ общія формулы, выражая рѣшенія общихъ задачъ, могутъ примѣняться и къ рѣшенію частныхъ задачъ, то естественно является потребность по возможности упростить общую формулу до ея вычисленія, т. е. до подстановки опредѣленныхъ чиселъ вмѣсто буквъ. Эта потребность въ упрощеніи сложныхъ формулъ ведетъ къ употребленію коэффиціента, показателя и къ дѣйствіямъ надъ одночленами (сложеніе и вычитаніе подобныхъ членовъ, умноженіе и дѣленіе одночленовъ съ одинаковыми количествами). Рѣшеніемъ вопросовъ втораго рода не можетъ быть объяснена *необходимость* дѣйствій надъ многочленами, напр. умноженіе и дѣленіе многочленовъ не всегда ведутъ къ упрощенію формулъ, но иногда и къ ихъ усложненію. Вопросы третьяго рода суть очевидно тѣ вопросы, содержаніе которыхъ выражается уравненіемъ, и слѣдовательно для рѣшенія ихъ является необходимость въ рѣшеніи уравненій. Рѣшеніе уравненій требуетъ перенесенія извѣстныхъ членовъ въ одну часть уравненія, а неизвѣстныхъ въ другую, но къ такому перенесенію встрѣчаются иногда препятствія. Напр., въ составъ уравненія можетъ входить многочленъ, составленный изъ неизвѣстной и данныхъ, и умножаться на одночленъ или другой многочленъ; въ такомъ случаѣ прежде перенесенія членовъ необходимо сдѣлать умноженіе многочленовъ. При рѣшеніи буквеннаго уравненія требуется выводить неизвѣстную за скобки, слѣдовательно является необходимость въ дѣленіи многочлена, и т. п. Короче сказать, вопросы третьяго рода таковы, что требуютъ для своего рѣшенія не только рѣшенія уравненій, но и дѣйствій надъ многочленами.

Такимъ образомъ видно, что классификаціей Конта, можетъ быть объяснено все содержаніе алгебры. Отличіе же ея отъ обычной классификаціи алгебраическаго матерьяла состоитъ въ томъ, что послѣдняя имѣетъ въ виду абстрактную, уже образовавшуюся алгебру, между тѣмъ какъ классификація Конта имѣетъ въ виду тѣ *вопросы природы*, которые подлежатъ изученію алгебраическаго анализа.

Если обратиться къ ариѳметикѣ, то легко видѣть, что и все ея содержаніе клонится къ рѣшенію тѣхъ же трехъ основныхъ вопросовъ, намѣченныхъ Контомъ, только въ болѣе частномъ видѣ. Въ самомъ дѣлѣ, вопросы перваго рода приводятъ въ ариѳметикѣ къ пониманію значенія каждаго основнаго дѣйствія, а также къ выполненію этихъ дѣйствій надъ частными числами, однозначными и многозначными, цѣлыми и дробными, въ опредѣленной системѣ нумераціи, между тѣмъ какъ въ алгебрѣ дѣйствія совершаются надъ общими числами или надъ формулами. Вопросы втораго рода для рѣшенія своего не требуютъ никакихъ новыхъ средствъ, а требуютъ также только пониманія значенія каждаго дѣйствія и умѣнья ихъ исполнять, и потому не даютъ повода ни къ какой новой теоріи. Вопросы третьяго рода, т. е. такіе, въ которыхъ изъ условій задачи прямо слѣдуютъ дѣйствія надъ неизвѣстнымъ и данными для полученія нѣкоторой опредѣленной величины, также рѣшаются въ ариѳметикѣ. Таковы: отысканіе цѣлаго по части, задачи на тройное правило, правило товарищества, смѣшенія и т. д. Но разница въ сравненіи съ алгеброю здѣсь та, что каждый частный вопросъ такого рода въ ариѳметикѣ рѣшается по особому правилу, напр. правилу тройному, процентовъ, учета векселей, товарищества и т. д.; между тѣмъ какъ въ алгебрѣ всѣ задачи такого рода приводятся къ одной отвлеченной задачѣ: найти такое число, что если надъ нимъ и данными числами исполнить нѣкоторыя указанныя дѣйствія, то получится нѣкоторое опредѣленное число. Правда и въ алгебрѣ такія отвлеченныя задачи группируются по степенямъ неизвѣстнаго, по числу неизвѣстныхъ, но ясно, что эти подраздѣленія несравненно болѣе общія, чѣмъ въ ариѳметикѣ, а способы рѣшенія ихъ однообразнѣе.

Сравнивая между собою изложенную характеристику алгебры и ариѳметики, нельзя не придти къ заключенію, что алгебра рѣшаетъ тѣ же вопросы, какъ и ариѳметика, только въ болѣе общемъ видѣ, и потому, согласно съ *Ньютономъ*, можетъ быть названа *общею ариѳметикою*. Общность ея заключается: 1) въ томъ, что дѣйствія она совершаетъ надъ общими числами, или надъ формулами; 2) въ томъ, что всѣ вопросы третьяго рода приводятся въ ней къ одному вопросу: найти такое число, что если надъ нимъ исполнить нѣкоторыя указанныя дѣйствія, то получится нѣкоторая опредѣленная величина, т. е. къ рѣшенію уравненій.

Излагая свою классификацію математическихъ вопросовъ, Контъ нападаетъ на Ньютоново опредѣленіе алгебры, какъ *общей* ариѳметики. Онъ предполагаетъ, что Ньютонъ называетъ алгебру общей ариѳметикой *только* потому, что въ ней употребляются общія числа, общіе знаки, и такимъ образомъ, по мнѣнію Конта, подъ Ньютоново опредѣленіе алгебры не подходитъ рѣшеніе численныхъ уравненій. Но такое предположеніе Конта ошибочно: Ньютонъ на причины своего опредѣленія алгебры, какъ общей ариѳметики, смотритъ такъ, какъ нами изложено выше, и это можно подтвердить слѣдующими доводами.

Прежде всего, уже одно заглавіе Ньютоновой алгебры подтверждаетъ высказанное нами мнѣніе и опровергаетъ Конта. Полное заглавіе этого сочиненія такое: Arithmetica universalis sive de compositione et resolutione arithmetica". Сопоставленіе второй половины заглавія съ первою, кажется, позволяетъ думать, что Ньютонъ опредѣляетъ алгебру, какъ общую ариѳметику не только потому, что въ ней разсматриваются общія числа, но и потому, что всѣ вопросы третьяго рода приводятся къ одному отвлеченному вопросу, рѣшенію уравненій.

Далѣе въ первыхъ же строкахъ своего сочиненія Ньютонъ говоритъ слѣдующее: „Вычисленіе (computatio) производится или при помощи чиселъ (per numeros), какъ въ обыкновенной ариѳметикѣ, или же при помощи буквъ (per species), какъ это свойственно анализу. И ариѳметика и анализъ покоятся на тѣхъ же основаніяхъ и стремятся къ одной цѣли, только ариѳметика опредѣленно и частно, алгебра же неопредѣленно и обще, такъ что почти всѣ положенія, въ ней встрѣчающіяся, преимущественно заключенія, могутъ быть названы *теоремами*. Однако алгебра имѣетъ большое преимущество передъ ариѳметикой. Въ то время какъ въ ариѳметикѣ вопросы рѣшаются путемъ перехода отъ данныхъ количествъ къ искомымъ, въ алгебрѣ по большей части приходится идти путемъ обратнымъ: отъ искомыхъ, какъ бы данныхъ, къ даннымъ, какъ бы искомымъ, чтобы какимъ нибудь образомъ придти къ заключенію или уравненію, изъ котораго уже возможно найти искомое. Такимъ образомъ рѣшаются труднѣйшія задачи, рѣшенія которыхъ напрасно было бы требовать отъ одной ариѳметики. Однако ариѳметика настолько помогаетъ алгебрѣ во всѣхъ ея дѣйствіяхъ, что не слѣдуетъ на нее смотрѣть только какъ на усовершенствованную науку счета (scientiam computandi); поэтому ту и другую я излагаю вмѣстѣ“.

Наконецъ въ подтвержденіе нашего мнѣнія можемъ указать еще и на то обстоятельство, что тотъ отдѣлъ своего сочиненія, въ которомъ излагается рѣшеніе задачъ посредствомъ уравненія, Ньютонъ называетъ: „Resolutio quaestionum arithmeticarum“.

И такъ доказано, что алгебру можно разсматривать какъ *общую ариѳметику*, т. е., что она рѣшаетъ тѣ же вопросы, какъ и ариѳметика, только въ болѣе общемъ видѣ и общими способами. Естественно, что этотъ взглядъ на алгебру слѣдуетъ проводить и въ ея преподаваніи. Но показавъ, что алгебра есть общая ариѳметика, мы изложили вмѣстѣ съ тѣмъ тѣ двѣ системы, въ которыхъ можно представить содержаніе алгебры. Одна система — обыкновенная книжная система, въ которой сначала излагаются дѣйствія надъ одночленами и многочленами, потомъ рѣшеніе уравненій и наконецъ приложеніе ихъ къ рѣшенію вопросовъ или задачъ. Эта система имѣетъ очевидно въ виду абстрактную, уже образовавшуюся алгебру и можетъ быть названа *синтетическою*. Другая система, система Конта, прежде всего характеризуетъ тѣ 3 основныхъ вопроса, рѣшеніемъ которыхъ занимается алгебра, а потомъ по мѣрѣ надобности излагаетъ ту или другую теорію, потребную для рѣшенія разсматриваемаго вопроса. Эта система главнымъ образомъ имѣетъ въ виду тѣ вопросы природы, которые подлежатъ рѣшенію алгебры и по ходу своему можетъ быть названа *аналитическою*. Которой изъ двухъ системъ слѣдуетъ отдать предпочтеніе при первоначальномъ преподаваніи алгебры, въ этомъ едва ли можно колебаться при современномъ состояніи дидактики. Выборъ слѣдуетъ рѣшить въ пользу системы *аналитической*.

„Учи сообразно съ природою" говоритъ Дистервегъ въ своихъ дидактическихъ правилахъ. Но природа не представляетъ человѣку готовыхъ теорій для рѣшенія вопросовъ, а представляетъ ему опредѣленные вопросы, для рѣшенія которыхъ онъ самъ создаетъ теоріи. Если вести преподаваніе по аналитической системѣ, то ученикъ постоянно будетъ видѣть цѣль, къ которой онъ долженъ стремиться, а это важно для поддержанія его интереса къ ученію. Такъ, если въ какой-либо задачѣ будемъ перемѣнять данныя числа, оставляя условія и вопросъ безъ перемѣны, то ученику легко будетъ замѣтить, что рядъ дѣйствій для рѣшенія задачи остается одинъ и тотъ же, и что слѣдовательно онъ не зависитъ отъ значенія данныхъ чиселъ, а только отъ условій и вопроса задачи. Отсюда уясняется цѣль и значеніе частнаго и общаго числа, частной и общей задачи. Ученикъ увидитъ, что если рѣшеніе частной задачи состоитъ въ отысканіи числа, то рѣшеніе общей приводится только къ составленію формулы. Общая формула можетъ служить для рѣшенія множества частныхъ задачъ одного рода, если вмѣсто буквъ подставлять соотвѣтствующія частныя числа и дѣлать указанныя въ формулѣ дѣйствія, слѣдовательно весьма естественно желаніе упростить формулу ранѣе подстановки частныхъ чиселъ. Отсюда вытекаетъ потребность въ коэффиціентѣ, показателѣ, соединеніи подобныхъ членовъ, въ упрощеніи формулъ умноженія и дѣленія одинаковыхъ количествъ съ показателями. Далѣе, хотя въ курсѣ ариѳметики ученикъ уже встрѣчалъ задачи обоихъ родовъ относительно распредѣленія дѣйствій между данными и неизвѣстными, но едва ли приводилъ къ сознанію рѣзкое различіе такого рода задачъ. Теперь, сравнивъ между собою такія двѣ задачи, въ которыхъ рядъ дѣйствій одинъ и тотъ же, но въ одной задачѣ, по условіямъ ея, его приходится совершить надъ данными для отысканія неизвѣстнаго, а въ другой, по ея условіямъ, его слѣдуетъ совершить надъ неизвѣстнымъ и данными для полученія нѣкоторой опредѣленной величины, ученикъ пойметъ, что относительно распредѣленія дѣйствій все множество существующихъ задачъ приводится всего къ двумъ общимъ задачамъ. Формула для рѣшенія первой задачи вытекаетъ прямо изъ условій, формула же для рѣшенія второй прямо изъ условій не вытекаетъ. Является потребность въ общемъ способѣ рѣшенія второй общей задачи. Такой способъ состоитъ въ составленіи и рѣшеніи уравненія. Рѣшая такія уравненія, въ которыхъ сумму и разность приходится умножать на нѣкоторое число, ученикъ увидитъ необходимость дѣйствій надъ многочленами.

Если же вести преподаваніе алгебры по системѣ синтетической, то цѣль общаго числа, формулы, дѣйствій надъ одночленами и многочленами и рѣшенія уравненій, ученикъ увидитъ только тогда, когда пройдетъ этотъ большой, утомительный и самъ по себѣ не интересный отдѣлъ.

Правда, что по аналитической системѣ неудобно проходить курсъ алгебры во всей полнотѣ, но этого и не нужно, такъ какъ задача всякаго пропедевтическаго курса состоитъ въ ознакомленіи ученика съ сущностью основныхъ вопросовъ разсматриваемой науки и съ рѣшеніемъ ихъ въ простѣйшихъ случаяхъ. Послѣ того, какъ ученикъ узнаетъ, въ чемъ состоятъ вопросы, рѣшаемые алгеброй, и какъ они рѣшаются въ простѣйшихъ случаяхъ, у него естественно явится желаніе рѣшать ихъ и въ другихъ болѣе сложныхъ случаяхъ, а для этого уже служитъ полный систематическій курсъ предмета, который, не опасаясь быть непонятымъ и наскучить ученику, можно вести по системѣ синтетической.

Первоначальный курсъ по синтетической системѣ былъ бы не только не интересенъ, но и недостаточно понятенъ. „Начинай ученіе съ той точки, на которой стоитъ ученикъ и, съ нея начиная, веди его далѣе безъ перерывовъ, безъ пробѣловъ, основательно и постоянно впередъ“ говоритъ Дистервегъ въ тѣхъ же дидактическихъ правилахъ. Но міръ формулъ и отвлеченныхъ уравненій, есть міръ чуждый ученику, занимавшемуся до сихъ поръ только ариѳметикой; его математическій міръ состоитъ изъ задачъ, попадавшихся въ ариѳметикѣ. Поэтому слѣдуетъ познакомить ученика съ формулой, какъ съ выраженіемъ рѣшенія задачи; слѣдуетъ познакомить его съ уравненіемъ, какъ выраженіемъ содержанія задачи и съ его рѣшеніемъ, какъ средствомъ для рѣшенія задачи, и при всемъ этомъ должно соблюдать достаточную постепенность.

Существуетъ мнѣніе, что приготовительный курсъ алгебры слѣдуетъ ограничить однимъ вопросомъ о формулѣ, не трогая уравненія, и потóмъ приступить къ систематическому курсу. Но противъ этого мнѣнія можно представить слѣдующія возраженія. Во первыхъ, тогда для ученика неясна будетъ цѣль дѣйствій надъ многочленами, а во вторыхъ (и это самое важное), понятіе объ алгебрѣ, какъ объ общей ариѳметикѣ, будетъ выяснено не вполнѣ, а только въ половину, чѣмъ будетъ нарушено одно изъ основныхъ правилъ дидактики, по которому „учебный матерьялъ каждаго учебнаго предмета слѣдуетъ раздѣлять на извѣстныя части, изъ которыхъ каждая представляла бы собою нѣчто цѣлое“. „Такимъ образомъ, говоритъ Дистервегъ, поясняя это правило, ученикъ пріучается обозрѣвать весь предметъ, какъ въ цѣломъ, такъ и въ частяхъ его. Пройдя зоконченную часть предмета, онъ получаетъ, такъ сказать, пунктъ для отдыха, когда онъ можетъ обозрѣть пройденное, повторить его, и такимъ образомъ будетъ привыкать къ методическому ученію, идущему по предначертанному плану. Если эта постепенность ученія можетъ быть сдѣлана таковою, что ученикъ будетъ напередъ отгадывать и опредѣлять, на основаніи предыдущей ступени, ступень послѣдующую, изъ предыдущей вытекающую, то тѣмъ лучше, ибо это принесетъ пользу строгому логическому образованію учащихся, дастъ имъ возможность къ общему наглядному обозрѣнію предмета, а въ тоже время дастъ случай и учителю глубже заглянуть въ природу своихъ питомцевъ и болѣе правильно рѣшить, которые изъ нихъ способны къ чисто научнымъ занятіямъ, и которые — нѣтъ.

Изъ предыдущаго изложенія видна вся необходимость или по крайней мѣрѣ значительная польза первоначальнаго курса *алгебры*, веденнаго по аналитической системѣ. Это и есть *приготовительный* (пропедевтическій курсъ) алгебры. Цѣль и содержаніе его на основаніи предыдущаго можно резюмировать слѣдующимъ образомъ:

1) Приготовительный курсъ алгебры имѣетъ цѣлію показать, какъ частные вопросы, рѣшаемые ариѳметикой, преобразуются въ вопросы общіе, рѣшаемые алгеброй, и какъ дѣйствительно рѣшаются эти общіе вопросы въ простѣйшихъ случаяхъ.

2) Первый отдѣлъ приготовительнаго курса алгебры должны составить: обращеніе задачи съ данными частными *числами* въ задачу съ числами *общими*. Выраженіе рѣшенія общей задачи *формулою*. Примѣненіе общей формулы къ рѣшенію частныхъ задачъ, т. е. вычисленіе формулы. Упрощеніе формулы до вычисленія.

3) Второй отдѣлъ приготовительнаго курса алгебры должны составить: выдѣленіе изъ безчисленнаго множества задачъ двухъ общихъ задачъ, различающихся распредѣленіемъ дѣйствій между данными и неизвѣстными по условіямъ задачи. Выраженіемъ посредствомъ уравненія той общей задачи, въ которой отыскивается такое число, что если надъ нимъ и надъ данными исполнить нѣкоторыя указанныя дѣйствія, то получится нѣкоторая опредѣленная величина. Рѣшеніе уравненій въ простѣйшихъ случаяхъ.

Если бы алгебра имѣла дѣло только съ абсолютными числами, то содержаніе ея приготовительнаго курса ограничивалось бы рѣшеніемъ вышеизложенныхъ существенныхъ вопросовъ алгебры. Но такъ какъ въ алгебрѣ разсматриваются еще и числа относительныя (положительныя и отрицательныя), то необходимо ихъ ввести и въ составъ приготовительнаго курса; они должны составить вторую часть этого курса: алгебру относительныхъ чиселъ. Касательно относительныхъ чиселъ въ приготовительномъ курсѣ разсматриваются тѣ же два существенныхъ вопроса алгебры, вопросъ о формулѣ и вопросъ объ уравненіи. Но этимъ двумъ вопросамъ должно быть предпослано выясненіе понятія объ относительныхъ числахъ и 4-хъ дѣйствій надъ ними въ простѣйшихъ случаяхъ, такъ какъ относительныя числа вовсе не разсматривались въ ариѳметикѣ. Разсмотрѣніе вопроса о формулѣ и уравненіи отличается здѣсь, во второй части, краткостью, сравнительно съ первою частью, такъ какъ здѣсь уже нѣтъ надобности выяснять *понятіе* о формулѣ и уравненіи, а слѣдуетъ только показать, что отрицательныя числа имѣютъ *примѣненіе* не только при рѣшеніи простыхъ задачъ, но и при рѣшеніи сложныхъ, притомъ какъ тѣхъ, которыя прямо рѣшаются по формулѣ, такъ и тѣхъ, которыя для рѣшенія своего требуютъ рѣшенія уравненія.

Выяснивъ въ общихъ чертахъ цѣль и содержаніе предлагаемаго приготовительнаго курса алгебры, обратимся къ мотивамъ подробностей содержанія и системы этого курса.

Глава I посвящена понятію о формулѣ, ея составленію и вычисленію. Хотя формула является *необходимо* только при рѣшеніи задачи съ общими числами, но чтобы не вводить заразъ двухъ новыхъ понятій, общаго числа и формулы, первоначально знакомимъ ученика съ формулою при рѣшеніи частной задачи. Такое знакомство съ формулой на частной задачѣ важно еще и въ томъ отношеніи, что скорѣе позволяетъ перейти къ вычисленію формулы, что очень важно, такъ какъ пріучаетъ ученика смотрѣть на формулу, не только какъ на указаніе ряда дѣйствій для отысканія неизвѣстной, но и какъ на нѣкоторое число, такъ какъ надъ формулами производятся дѣйствія, какъ надъ числами.

Элементы формулъ суть данныя числа и дѣйствія. Первыя берутся прямо изъ задачи, вторыя узнаются по условіямъ задачи и вопросу. Поэтому для основательнаго знакомства съ формулой естественно начать съ анализа задачи, различивъ въ ней 3 основныхъ части, данныя числа, условія и вопросъ, съ чего и начинается первая глава курса.

Такъ какъ во всякой формулѣ заключаются два элемента, данныя числа и дѣйствія, то и различаться формулы могутъ по даннымъ числамъ и дѣйствіямъ. Отсюда является глава II — раздѣленіе формулъ по даннымъ числамъ и глава III — раздѣленіе формулъ по дѣйствіямъ. Хотя вся глава II направлена къ выясненію различія между частной и общей формулой, но ясно, что начать её слѣдуетъ съ выясненія различія между частной и общей задачей, частнымъ и общимъ числомъ, такъ какъ формула въ этомъ курсѣ первоначально должна явиться какъ выраженіе рѣшенія вопроса, а не сама по себѣ, и только послѣ обобщенія задачъ уже выясняется различіе между частной и общей формулой. Съ обозначеніемъ общаго числа ученикъ знакомится только въ концѣ главы, чтобы онъ не смѣшивалъ сущность понятія объ общемъ числѣ со значкомъ, который служитъ для обозначенія этого числа.

Дѣленіе формулъ по дѣйствіямъ въ главѣ III — ведено прямо въ отвлеченномъ видѣ, такъ какъ ученикъ ранѣе уже достаточно ознакомился и съ частной и съ общей формулой, такъ что она можетъ служить предметомъ самостоятельнаго разсмотрѣнія. Относительно дѣйствій формулы могутъ подраздѣляться по тремъ признакамъ: числу дѣйствій, роду ихъ и порядку. По числу дѣйствій формулы раздѣляются на *простыя* и *сложныя*. Въ простыхъ формулахъ указывается по одному дѣйствію, въ сложныхъ по нѣсколько дѣйствій. По роду и порядку дѣйствій формулы раздѣляются на *многочлены* и *одночлены*. *Многочленомъ* называется такая формула, въ которой послѣдній рядъ дѣйствій — рядъ сложеній и вычитаній. Одночленомъ называется такая формула, въ которой последнее дѣйствіе есть умноженіе или дѣленіе. Мы отступили въ этомъ случаѣ отъ общепринятыхъ опредѣленій многочлена и одночлена, такъ какъ они невѣрны. Такъ какъ для полнаго пониманія формулы важно не только умѣть составлять ее, но и находить ея численную величину, то въ этой же главѣ дано правило для вычисленія многочлена.

Чтобы удобнѣе производить вычисленіе формулъ, естественно до вычисленія сдѣлать въ нихъ возможныя упрощенія. Отсюда глава IV — упрощеніе сложныхъ формулъ.

Многочленъ, составленный изъ одинаковыхъ слагаемыхъ, или изъ разныхъ группъ одинаковыхъ слагаемыхъ, упрощается посредствомъ одного или нѣсколькихъ коеффиціентовъ.

Одночленъ, составленный изъ одинаковыхъ множителей, или различныхъ группъ одинаковыхъ множителей, упрощается посредствомъ одного или нѣсколькихъ показателей.

Многочленъ составленный изъ подобныхъ слагаемыхъ и вычитаемыхъ членовъ упрощается посредствомъ сложенія и вычитанія ихъ, т. е. посредствомъ приведенія подобныхъ членовъ.

Въ правилѣ для соединенія подобныхъ членовъ мы рѣзко отличаемъ правило для первой группы отъ правилъ для прочихъ группъ, такъ какъ результатъ отъ первой группы есть количество абсолютное, а результаты отъ прочихъ группъ — количества относительныя, хотя они таковыми въ этой части курса и не называются.

Умноженіе и дѣленіе одинаковыхъ количествъ съ показателями также относится къ упрощенію формулъ, но оно въ этотъ курсъ не вошло, какъ ненужное въ последующихъ частяхъ его, хотя и не представляетъ никакого затрудненія.)

Во второмъ отдѣлѣ алгебры абсолютныхъ чиселъ разсматривается уравненіе.

Въ главѣ I этого отдѣла выясняется понятіе объ уравненіи, его составленіе и рѣшеніе. Такъ какъ цѣль пропедевтики алгебры составляетъ прежде всего преобразованіе частныхъ ариѳметическихъ вопросовъ въ вопросы общіе, поэтому глава I и начинается анализомъ ариѳметическихъ задачъ, вслѣдствіе котораго изъ множества частныхъ задачъ выдѣляются 2 общихъ задачи, отличающіяся одна отъ другой распредѣленіемъ дѣйствій между данными и неизвѣстнымъ. Именно сравниваются между собою 2 такія задачи, изъ условій которыхъ вытекаетъ одинъ и тотъ же рядъ дѣйствій, но одинъ разъ его, по условіямъ задачи, слѣдуетъ производить надъ данными для отысканія неизвѣстной, а другой разъ надъ неизвѣстной и данными для полученія нѣкоторой данной величины. Содержаніе второй задачи и выражается уравненіемъ. Въ первой части этого уравненія получается формула изъ неизвѣстнаго и данныхъ чиселъ, а во второй данное число. Такое уравненіе не есть уравненіе общаго вида, поэтому, чтобы не дать ученикамъ неполнаго понятія объ уравненіи, еще рѣшаются три задачи. Уравненія, которыми выражается ихъ содержаніе, содержатъ въ первой части формулу изъ неизвѣстнаго и данныхъ чиселъ, а во второй или формулу изъ данныхъ чиселъ, или неизвѣстное число, или формулу изъ неизвѣстнаго и данныхъ. Послѣ разсмотрѣнія этихъ основныхъ видовъ уравненія уже дается опредѣленіе уравненія, какъ равенства, выражающаго содержаніе задачи, въ одной или въ обѣихъ частяхъ котораго указываются дѣйствія надъ неизвѣстнымъ и данными. Чтобы рельефнѣе выдѣлить *общій признакъ* задачъ, рѣшаемыхъ уравненіемъ, выясняется еще, что уравненіе само по себѣ представляетъ слѣдующую отвлеченную задачу: найти такое число, что если надъ нимъ исполнить нѣкоторыя указанныя дѣйствія, то получится нѣкоторая опредѣленная величина. *Корень* уравненія опредѣляется какъ численная величина неизвѣстнаго или формула, показывающая дѣйствія надъ данными для отысканія неизвѣстнаго, такъ какъ въ этомъ курсѣ бываетъ дано не отвлеченное уравненіе, а конкретная задача. Изъ извѣстныхъ правилъ для составленія уравненія принято, какъ болѣе общее и сообразное съ духомъ курса, слѣдующее: для составленія уравненія надо какую-нибудь величину, входящую въ задачу, выразить въ двухъ видахъ посредствомъ неизвѣстнаго и данныхъ, и два полученныхъ выраженія соединить знакомъ равенства. Въ правилѣ для рѣшенія уравненія выпущено уничтоженіе знаменателя, такъ какъ въ тѣхъ простѣйшихъ случаяхъ, какіе встрѣчаются въ этомъ курсѣ, оно не необходимо. Наконецъ въ концѣ главы рѣшаются такія уравненія, гдѣ приходится умножать сумму и разность на нѣкоторое число, съ цѣлію показать ученикамъ необходимость дѣйствій надъ многочленами.

Въ главѣ II уравненія раздѣляются по даннымъ числамъ, на численныя и буквенныя, и показывается рѣшеніе послѣднихъ.

Далѣе слѣдовало бы разсмотрѣть раздѣленіе уравненій по числу неизвѣстныхъ — уравненія съ однихъ, съ двумя и т. д. неизвѣстными; потомъ раздѣленіе ихъ по дѣйствіямъ надъ неизвѣстными — первой, второй и т. д. степени. Но эти вопросы, какъ по своей сложности, такъ и по цѣли приготовительнаго курса, не могутъ входить въ его составъ.

Обращаясь ко второй части курса, алгебрѣ относительныхъ чиселъ, мы должны замѣтить, что здѣсь встрѣчаются затрудненія не только методическаго характера, но и научнаго. Не смотря на то, что 300 лѣтъ назадъ Декартъ указалъ случаи, въ которыхъ положительныя и отрицательныя числа служатъ для выраженія дѣйствительныхъ величинъ, до сихъ поръ относительно этихъ чиселъ существуютъ двѣ теоріи, прямо противоположныя одна другой. Одна изъ нихъ полагаетъ, что отрицательныя и положительныя числа представляютъ *нѣкоторыя дѣйствительныя* величины; другая же говоритъ, что отрицательныя и положительныя числа, отдѣльно взятыя, *не имѣютъ никакого значенія и употребляются въ алгебрѣ* только для обобщенія правилъ. Не вдаваясь въ оцѣнку научныхъ достоинствъ той и другой теоріи, мы останавливаемся на первой, какъ болѣе пригодной въ педагогическомъ отношеніи. Этимъ мы не хотимъ сказать, чтобы она не имѣла достоинствъ научныхъ. Напротивъ, на сторонѣ ея находятся такіе авторитеты науки, какихъ едва-ли можетъ указать на своей сторонѣ теорія чистаго обобщенія. Таковы Ньютонъ, Эйлеръ, Гауссъ. Вотъ что говоритъ Ньютонъ о положительныхъ и отрицательныхъ числахъ въ своей „Arithmetica universalis“:

„Количества бываютъ или *утвердительныя* (affirmativae), т. е. *больше, чъмъ ничего*, или *отрицательныя* (negativae), т. е. *меньше, чъмъ ничего*. Такъ въ дѣлахъ житейскихъ капиталы могутъ быть названы имуществомъ утвердительнымъ, а долги имуществомъ отрицательнымъ. Такъ въ мѣстномъ движеніи, движеніе впередъ можетъ быть названо движеніемъ утвердительнымъ, а движеніе назадъ — движеніемъ отрицательнымъ, потому что первое увеличиваетъ, а послѣднее уменьшаетъ совершенный путь. Точно также въ геометріи, если линія проведенная въ какую-нибудь одну сторону, считается за утвердительную, то проведенная въ противоположную сторону, будетъ отрицательная. Пусть нпр. AB проведена вправо, а BC влѣво. Если AB будемъ считать за утвердительную, то BC слѣдуетъ считать за отрицательную, потому что отъ проведенія ея AB уменьшается; именно: или приводится къ болѣе короткой AC, или къ нулю, если точка C упадетъ въ самую A, или къ меньшей нуля, если BC будетъ длиннѣе AB, на которую она наносится. Отрицательныя количества должны быть обозначены знакомъ —, утвердительныя должны быть предшествуемы знакомъ +. Въ аггрегатѣ количествъ знакъ + означаетъ, что подчиненное ему количество должно быть приложено къ прочимъ, а знакъ —, что оно должно быть вычтено“.

Разсматривая вычисленіе многочлена ($12 - 3 - 5 + 2 - 1$), Эйлеръ говоритъ, что численная величина его неизмѣнится, если мѣнять порядокъ его членовъ, лишь бы каждый членъ сохранялъ свой знакъ. „Такъ какъ здѣсь, прибавляетъ онъ, главное дѣло состоитъ въ томъ, какой знакъ имѣетъ передъ собою каждое число, то обыкновенно въ алгебрѣ числа со стоящими передъ ними знаками разсматриваютъ какъ отдѣльныя величины; при этомъ числа со знакомъ + называютъ утвердительными или положительными величинами, а числа со знакомъ — отрицательными величинами“. Далѣе Эйлеръ поясняетъ значеніе отрицательныхъ и положительныхъ чиселъ при помощи капитала и долга. (Vollständige Anleitung Zur Algebra von Hrn. Leonhard Euler, St. Petersburg, 1802. Стр. 9, 10, 11).

Мнѣніе Гаусса объ отрицательныхъ и положительныхъ числахъ выражено имъ въ слѣдующихъ словахъ: „Положительныя и отрицательныя числа только тамъ находятъ приложеніе, гдѣ существуетъ противоположное исчисляемому, которое при соединеніи съ нимъ уничтожаетъ его. Точнѣе говоря, это предположеніе только тогда имѣетъ мѣсто, когда исчисляемое есть не субстанціи (сами по себѣ разсматриваемые предметы), но отношенія между какими-нибудь двумя предметами. Пусть эти предметы расположены въ нѣкоторый рядъ, нпр. A, B, C, D, ..., и пусть отношенія A къ B, B къ C, и т. д. будутъ равны между собою. Тогда къ понятію о противоположности здѣсь принадлежитъ не болѣе, какъ перестановка членовъ отношенія, такъ что если отношеніе (или переходъ) A къ B обозначимъ чрезъ $+1$, то отношеніе B къ A должно быть представлено чрезъ -1. Такъ какъ рядъ нашъ въ обѣ стороны безграниченъ, то каждое реальное цѣлое число представляетъ отношеніе одного, произвольно взятаго за начало, члена ряда къ какому-нибудь другому опредѣленному члену ряда." (Gauss, Werke, B. II, S. 176 in dem Aufsatze von 1831).

Какъ ни различно выражены взгляды этихъ трехъ математиковъ на положительныя и отрицательныя числа, но всѣ они сходятся во первыхъ въ томъ, что положительныя и отрицательныя числа представляютъ дѣйствительныя величины, а во вторыхъ въ томъ, что величины эти суть величины *относительныя*, т. е. представляющія измѣненія нѣкоторыхъ другихъ величинъ. Такихъ опредѣленій положительныхъ и отрицательныхъ чиселъ мы держались и въ нашемъ курсѣ. Положительнымъ числомъ мы называемъ такое, которое при прибавленіи къ другому служитъ къ его увеличенію. Отрицательнымъ числомъ мы называемъ такое, которое при прибавленіи къ другому числу служитъ къ его уменьшенію. *Относительнымъ* же числомъ вообще называемъ такое, которое показываетъ *измѣненіе* другаго числа, его увеличеніе или уменьшеніе.

Въ главѣ I алгебры относительныхъ чиселъ выясняется понятіе о положительномъ и отрицательномъ числѣ, ихъ обозначеніе и сравнительная величина положительныхъ и отрицательныхъ чиселъ между собою и съ нулемъ. Держась того взгляда, что относительное число есть число реальное, понятіе о немъ можно выяснять изъ разности двухъ абсолютныхъ чиселъ, или изъ сложенія абсолютной величины съ относительной. Мы предпочли послѣдній способъ, такъ какъ при немъ рельефнѣе выступаетъ на видъ относительность новаго числа. Къ обозначенію относительныхъ чиселъ мы переходимъ только послѣ полнаго выясненія понятія объ относительномъ числѣ, чтобы ученики не смѣшивали значка съ самымъ числомъ. Послѣ обозначенія выясняется сравнительная величина относительныхъ чиселъ и нуля; здѣсь замѣтимъ кстати, что только при взглядѣ на положительныя и отрицательныя числа, какъ на числа *относительныя*, понятіе о сравнительной величинѣ ихъ выступаетъ съ полною ясностью.

Въ главѣ II разсматривается вычитаніе большаго числа изъ меньшаго. Сначала разность, въ которой вычитаемое больше уменьшаемаго, потомъ многочленъ, въ которомъ сумма членовъ со знакомъ — больше суммы членовъ со знакомъ +. Такимъ образомъ въ этой части алгебры многочленъ получаетъ болѣе общее значеніе, чѣмъ въ первой. Именно, хотя члены его остаются абсолютными числами, но сумма членовъ съ — бываетъ больше суммы членовъ съ +.

Въ главѣ III разсматриваются 4 дѣйствія надъ относительными числами. Правила выводятся или на основаніи задачъ, или на основаніи опредѣленій положительныхъ и отрицательныхъ чиселъ и опредѣленій соотвѣтствующихъ дѣйствій. При этомъ каждый разъ мы старались формулировать правило, сначала для умственнаго вычисленія, а уже потомъ для письменнаго, чтобы не пріучить учениковъ къ безсознательному механизму. При сложеніи нѣсколькихъ относительныхъ чиселъ получается многочленъ со значеніемъ еще болѣе общимъ, чѣмъ прежде, такъ какъ члены его суть числа относительныя.

Въ главѣ IV рѣшаются задачи съ относительными числами по сложной формулѣ, а въ главѣ V рѣшаются задачи съ относительными числами при помощи уравненія. Значеніе той и другой главы уже объяснено ранѣе.

Предлагаемый пропедевтическій курсъ алгебры слѣдуетъ проходить по окончаніи курса ариѳметики, т. е. послѣ дѣйствій съ цѣлыми числами, дробями обыкновенными и десятичными, и рѣшенія различныхъ задачъ приведеніемъ къ единицѣ, или при помощи пропорцій, все равно. Для прохожденія его требуется $1^1/_2$ — 2 годовыхъ уроковъ. Въ предлагаемой книгѣ онъ развитъ съ большими подробностями, но при самомъ прохожденіи можетъ быть и сокращенъ, смотря по способностямъ учениковъ.

Разсмотримъ теперь вкратцѣ состояніе вопроса о преподаваніи алгебры въ Германіи и во Франціи.

Приготовительный курсъ алгебры въ нѣмецкой литературѣ и школахъ ограничивается вообще однимъ вопросомъ о формулѣ, именно ея составленіемъ и вычисленіемъ, хотя попадаются и такіе отдѣльные курсы, въ которыхъ кромѣ формулы разсматривается еще и уравненіе, именно составленіе уравненій и ихъ рѣшеніе въ простѣйшихъ случаяхъ. Какъ примѣръ курсовъ перваго рода можно указать введеніе въ весьма распространенномъ сборникѣ задачъ *Heis*—а (*Eduard Heis*. Sammlung von Beispielen und Aufgaben aus der allgemeinen Arithmetik u. Algebra. 1871. Vorbegriffe, стр. 1—10). Примѣрами курсовъ втораго рода могутъ служить курсъ *Lübsen*—а, входящій въ составъ его учебника ариѳметики и алгебры (*Lübsen*. Lehrbuch der Arithmetik und Algebra, 1874. Стр. 63—88), и курсъ Grünfeld—а, напечатанный въ видѣ отдѣльной брошюры (*Grünfeld*. Ueber mathemat. Unterricht. 1869). Но ограничивая приготовительный курсъ алгебры вообще однимъ вопросомъ о формулѣ, нѣмцы какъ бы чувствуютъ недостаточность такого курса и стараются сдѣлать возможныя облегченія въ систематическомъ курсѣ. Такъ дѣйствія надъ относительными числами проходятъ отдѣльно отъ дѣйствій надъ абсолютными, буквенное вычисленіе и рѣшеніе уравненій первой степени проходятъ обыкновенно два раза, сперва въ простѣйшихъ случаяхъ, а потомъ въ болѣе сложныхъ. Все это въ совокупности приводитъ къ тому, что для прохожденія полнаго курса 4-хъ дѣйствій и уравненій первой степени, требуется 2 года времени. Предлагаемый здѣсь приготовительный курсъ вмѣстѣ съ систематическимъ курсомъ 4-хъ дѣйствій и уравненій 1-ой степени, требуетъ времени никакъ не болѣе, если еще не меньше. Но кажется нельзя сомнѣваться, что этотъ курсъ представляетъ для учениковъ больше интереса, чѣмъ четырехкратное періодическое прохожденіе четырехъ дѣйствій съ буквенными выраженіями. Кромѣ этого, кажется, съ нѣкоторою увѣренностью можно сказать, что онъ принесетъ и больше пользы научному развитію учениковъ, показывая имъ, какъ одна наука (алгебра) возникаетъ изъ другой родственной ей науки (ариѳметики), пріучая ихъ смотрѣть на науку, какъ на нѣчто органически-цѣлое.

Что касается Франціи, то, не смотря на ея вообще пассивное отношеніе къ педагогическимъ вопросамъ, её слѣдуетъ считать истиннымъ отечествомъ пропедевтики алгебры. Начало ея положено однимъ изъ замѣчательнѣйшихъ французскихъ математиковъ, Клеро (въ 1748 году). Причину такого отступленія отъ обыкновеннаго порядка вощей, можетъ быть слѣдуетъ искать въ томъ обстоятельствѣ, что пропедевтика алгебры, представляя собою переходъ отъ одной науки къ другой, имѣетъ болѣе умозрительный характеръ, чѣмъ пропедевтика ариѳметики и геометріи, которыя представляютъ переходъ лишь отъ житейскаго опыта и наблюденія къ наукѣ. Съ другой стороны основателемъ новой алгебры былъ французскій математикъ Віетъ (Viète), и ни въ одной странѣ Европы въ 18-мъ вѣкѣ состояніе математическаго анализа не было такъ блестяще, какъ во Франціи.

Послушаемъ, что говоритъ Lacroix (авторъ многочисленныхъ учебниковъ по математикѣ, пользующихся заслуженною извѣстностію во всемъ педагогическомъ мірѣ) въ своихъ „Essais sur l'enseignement" о содержаніи и изложеніи алгебры со временъ Діофанта и до конца 18-го вѣка.

„Когда заданіе рѣшаемыхъ вопросовъ усложняется, то раскрытіе ихъ послѣдствій, или, что тоже, выраженіе условій, которымъ должны удовлетворять неизвѣстныя, становится очень длинно, чтобъ быть довѣрену памяти, и очень пространно на обыкновенномъ языкѣ, чтобы, написавъ его, можно было охватить всѣ части его однимъ взглядомъ. Между тѣмъ различныя подробности этого выраженія, будучи только дѣйствіями, иногда указанными, иногда исполненными надъ данными и неизвѣстными числами, и комбинированными между собою сообразно съ природою вопроса, состоятъ изъ небольшаго числа словъ, часто повторяющихся, которыя очень просто можно представить сократительными знаками. Вотъ все, что можно замѣтить въ „Ариѳметикѣ Діофанта", самомъ древнемъ изъ достигшихъ до насъ трактатовъ объ алгебрѣ. Такъ какъ вопросы, которые онъ разсматриваетъ въ своихъ первыхъ книгахъ, очень просты и заключаются въ уравненіяхъ, не превосходящихъ второй степени, то онъ употребляетъ только нѣсколько знаковъ, одни для означенія неизвѣстныхъ чиселъ, другіе для указанія сложенія и вычитанія ихъ между собою и съ данными числами. Остальное выражено обыкновеннымъ языкомъ и содержитъ только разсужденія того же рода и той же формы, какъ и разсужденія написаннаго методически трактата объ обыкновенной ариѳметикѣ.

Если перейти къ алгебристамъ, которые слѣдовали за Діофантомъ, начиная съ Леонарда изъ Пизы, который училъ этой наукѣ въ Европѣ еще въ тринадцатомъ вѣкѣ, по сочиненіямъ арабовъ, то тамъ не найдемъ ничего другаго. Но основанія для отысканія неизвѣстныхъ уже не были болѣе такъ просты, какъ у Діофанта. Прибѣгали къ геометрическимъ разсужденіямъ и фигурамъ, потому что не осмѣливались положиться на заключенія, извлеченныя изъ одного комбинированія знаковъ, т. е. вычисленія. Много техническихъ терминовъ было заимствовано изъ такихъ разсужденій, но они на столько теперь забыты, что почти никто ихъ не понимаетъ.

Віетъ, понявъ, что разсужденія, служащія для открытія ряда дѣйствій надъ данными задачи, могутъ быть сдѣланы независимы отъ этихъ данныхъ, если помѣшать имъ смѣшиваться и сливаться, такъ сказать, однимъ съ другими, вслѣдствіе ариѳметическихъ вычисленій, распространилъ на обозначеніе количествъ извѣстныхъ употребленіе буквъ, которое до него было принято только для неизвѣстныхъ величинъ. Это нововведеніе заставило сдѣлать большой шагъ въ наукѣ, и Декартъ своимъ обозначеніемъ показателей дополнилъ совокупность символовъ, необходимыхъ для выраженія различныхъ отношеній, которыя ариѳметическія дѣйствія устанавливаютъ между числами, а также для того, чтобы дать каждому изъ этихъ чиселъ родъ имени, съ которымъ связаны всѣ свойства, которыми оно должно обладать въ данномъ вопросѣ.

Если вспомнить данное мною въ предыдущемъ параграфѣ понятіе о математическомъ анализѣ („Въ синтезѣ данное предложеніе есть всегда слѣдствіе ряда разсужденій, образующихъ доказательство; это есть сложеніе, ибо прибавляютъ, такъ сказать, основаніе къ основанію до тѣхъ поръ, пока не достигнутъ этого слѣдствія. Въ анализѣ, напротивъ, предполагая вопросъ рѣшеннымъ и проводя его чрезъ различныя формы, или дѣлая различныя преобразованія въ заданіи, достигаютъ наконецъ искомаго рѣшенія. Таковъ путь вычисленія при рѣшеніи уравненій.“), то будетъ ясно, какъ послѣ сжатаго выраженія всѣхъ условій задачи, замѣчаютъ различныя слѣдствія, вытекающія изъ этого выраженія и состоящія по большей части въ преобразованіяхъ, помощію которыхъ группируютъ количества такимъ образомъ, чтобы отдѣлить искомыя отъ извѣстныхъ. Но въ этой части алгебраическаго рѣшенія задачъ, часто случается повторять разсужденія, имѣющія цѣлію измѣнить порядокъ нѣкоторыхъ указанныхъ дѣйствій, которыя въ этомъ первомъ порядкѣ мѣшали бы освобожденію неизвѣстныхъ (dégagement); отсюда являются нѣкоторые способы преобразовывать выраженія по законамъ, которые быстро замѣчаются и составляютъ способы вычисленія. Результаты не будутъ болѣе, какъ въ ариѳметикѣ, опредѣленныя числа, но собранія отдѣльныхъ дѣйствій, которыя могутъ быть исполнены лишь тогда, когда хотятъ перейти къ спеціальному примѣненію ихъ для данныхъ чиселъ.

Сказанное мною, конечно, покажется отвлеченнымъ для тѣхъ, кто не имѣетъ даже первыхъ понятій объ алгебрѣ, ибо эту науку, можетъ быть еще труднѣе, чѣмъ всякую другую, резюмировать независимо отъ ея приложеній. Но я думаю, что читатели, занимавшіеся ею, узнаютъ здѣсь ту картину идей, которую посредствомъ небольшаго числа примѣровъ, хорошо выбранныхъ, слѣдуетъ ввести въ головы молодыхъ людей, чтобы они не спрашивали, что означаетъ и для чего пригодно это *вычисленіе* съ буквами и знаками, которыя кажется не имѣютъ никакого прямого отношенія къ числамъ, — вычисленіе, для результатовъ котораго *нельзя найти численной величины*, пока оно не приведено къ численнымъ вопросамъ. Но не смотря на то, въ видахъ сокращенія, а можетъ быть и вслѣдствіе естественной склонности у самыхъ просвѣщенныхъ людей, которые не слѣдили за обученіемъ молодыхъ людей, предполагать, что все привычное имъ должно казаться столь же простымъ и для другихъ, самые уважаемые авторы, писавшіе по алгебрѣ, не задумывались надъ трудностями, которыя могутъ въ ней встрѣчать начинающіе. Излагая прежде всего правила для дѣйствій надъ буквенными количествами, выгоды которыхъ имъ были хорошо извѣстны, чтобы пройти скорѣе скучный отдѣлъ этихъ правилъ, они принуждали читателей принимать на вѣру и учить почти механически тѣ способы, которыхъ природа и цѣль находилась для послѣднихъ еще въ глубокомъ мракѣ.

Клеро (Clairaut) былъ первый (въ 1748 году), который, пролагая себѣ философскій путь, пролилъ живой свѣтъ на основанія алгебры. Читатели его сочиненія принимаютъ, такъ сказать, участіе въ изобрѣтеніи науки; они схватываютъ предметъ съ первыхъ шаговъ и не спрашиваютъ болѣе, что означаютъ эти загадочные символы, которые, кажется, только какимъ-то волшебствомъ приводятъ къ результатамъ, часто непонятнымъ. Все объяснено, все имѣетъ приложеніе, ничего не представляется такого, чтобы не было необходимо или не вытекало изъ предыдущаго. Его „Основанія алгебры“ получили сначала весь успѣхъ, котораго они заслуживали, и если бы онъ заключилъ въ должные предѣлы принятый имъ въ изложеніи путь изобрѣтенія, нѣтъ никакого сомнѣнія, что онъ одержалъ бы верхъ надъ всѣми другими авторами. Но этотъ путь необходимый для того, чтобы просвѣтить и ободрить начинающихъ изученіе алгебры, становится мелочнымъ и загроможденнымъ подробностями, когда ему строго слѣдуютъ и за предѣлами первыхъ понятій. Такимъ образомъ послѣднія части этой книги не были уже такъ хорошо приняты, какъ первая; можно даже сказать, что основныя правила алгебры мало въ нихъ были замѣтны; вслѣдствіе разсѣянія ихъ въ частныхъ примѣрахъ, часто случалось, что молодые люди, прослѣдивъ съ успѣхомъ всѣ вычисленія (opérations) этого автора, испытывали еще много затрудненій, когда хотѣли сами исполнить эти дѣйствія. Вмѣсто того, чтобы столь счастливый планъ, какъ планъ Клеро, стараться освободить отъ его недостатковъ, его бросили совсѣмъ, чтобы возвратиться къ прежнему способу изложенія основаній алгебры, и съ этой точки зрѣнія наука отстала. Въ многочисленныхъ изданіяхъ книгъ слѣдовавшихъ за книгой Клеро, не введено почти ничего новаго, не смотря на обширныя и плодотворныя изысканія Эйлера, Варинга и Лагранжа по теоріи уравненій.“

Таково было положеніе дѣлъ, когда *Лагранжъ* и *Лапласъ* были приглашены принять на себя курсъ анализа въ Нормальной школѣ (École Normale). Лапласъ воспроизвелъ планъ, которому слѣдовалъ Клеро, какъ единственно пригодный для разумнаго обученія этой наукѣ; онъ обратилъ вниманіе профессоровъ на тѣ богатства, которыя заключались въ академическихъ коллекціяхъ. Его работы и работы его сотоварища увеличили еще массу этихъ богатствъ, и уже болѣе не было возможно возвратиться къ прежней рутинѣ.

Безъ сомнѣнія, тѣ, кого ихъ геній влечетъ неудержимо къ наукѣ, которую со временемъ они должны усовершенствовать, смогутъ сами преодолѣть еще бо́льшія трудности, чѣмъ проистекающія изъ несовершенства элементарныхъ книгъ; они силою своей головы исправляютъ недостатки метода, тамъ замѣчаемые, возстановляютъ связи, тамъ недостающія. Но нельзя того же сказать о тѣхъ, которые для изученія науки не приносятъ съ собою особенно выдающихся способностей и замѣтной наклонности къ ея умозрѣніямъ.

Ихъ успѣхи зависятъ по большей части отъ способа изложенія первыхъ понятій науки, но можно даже сказать, что то, что необходимо для менѣе способныхъ, существенно полезно и для ускоренія успѣховъ учениковъ наиболѣе одаренныхъ.“

Понимая достоинства и недостатки плана Клеро и считая возможнымъ сохранить первыя и уничтожить послѣдніе, Лакруа самъ составилъ учебникъ алгебры (первое изданіе вышло въ концѣ 18-го вѣка, послѣднее, 23-е — въ 1871 году), который состоитъ изъ обыкновеннаго систематическаго курса и введенія, содержащаго въ себѣ курсъ приготовительный.

Замѣтивъ, что въ ариѳметикѣ встрѣчается много такихъ вопросовъ, въ рѣшеніи которыхъ можно различить двѣ части, отысканіе дѣйствій для опредѣленія неизвѣстнаго и выполненіе этихъ дѣйствій, Лакруа свое введеніе начинаетъ съ рѣшенія задачи именно такого рода, т. е. такой, которая для рѣшенія своего требуетъ рѣшенія уравненія. Въ этой задачѣ какъ условія, такъ и данныя числа, выражены словами. Все разсужденіе, необходимое для рѣшенія, выражается также исключительно при помощи словъ. Понятно, что хотя такимъ образомъ и возможно рѣшить задачу, но рѣшеніе ея выходитъ слишкомъ длинно. Отсюда является необходимость сократительныхъ знаковъ, именно знаковъ дѣйствій, знака равенства, обозначенія неизвѣстнаго буквой. Первое сокращеніе, которое представляется возможнымъ въ обозначеніи данныхъ чиселъ, это замѣна ихъ опредѣленными числами, которыя пишутся цифрами. Но въ такомъ случаѣ является новое неудобство: въ окончательномъ отвѣтѣ получается только число, и совершенно скрывается рядъ дѣйствій, который надо совершить надъ данными числами для отысканія неизвѣстной. Отсюда уясняется необходимость новыхъ сократительныхъ знаковъ, знаковъ для обозначенія данныхъ чиселъ, именно буквъ. Послѣ этого рѣшается задача, въ которой данныя числа уже обозначены буквами. При рѣшеніи ея получается формула, о которой здѣсь въ первый разъ и дается понятіе ученику. Остальную часть введенія составляетъ рѣшеніе уравненій первой степени съ одною неизвѣстною. Въ своихъ „Essais“ Лакруа совѣтуетъ также упражнять учениковъ въ вычисленіи формулъ.

Соглашаясь съ Лакруа въ томъ, что первоначальный курсъ алгебры долженъ быть построенъ по аналитической системѣ, можно однако противъ сго системы сдѣлать весьма важное замѣчаніе. Важный недостатокъ ея состоитъ въ томъ, что на рѣшеніе уравненій Лакруа смотритъ какъ на единственный самостоятельный вопросъ, рѣшаемый алгеброй, всѣ же прочіе вопросы ставитъ въ положеніе, исключительно подчиненное вопросу объ уравненіи, а потому формулу выясняетъ послѣ уравненія. Между тѣмъ, имѣя въ виду систему Конта, нельзя не согласиться, что кромѣ вопросовъ, требующихъ для рѣшенія своего рѣшенія уравненія, есть другіе самостоятельные вопросы, для рѣшенія которыхъ изъ условій задачи прямо слѣдуютъ дѣйствія надъ данными числами. Рѣшеніе такихъ задачъ въ общихъ числахъ — необходимо приводитъ къ формулѣ. Такъ какъ съ одной стороны вопросы этого рода суть вопросы самостоятельные, а съ другой для составленія точнаго понятія объ уравненіи необходимо понятіе о формулѣ, такъ какъ уравненіе есть равенство двухъ формулъ, то въ нашемъ курсѣ вопросъ о формулѣ мы и разсматриваемъ раньше вопроса объ уравненіи.

Что касается дальнѣйшаго положенія вопроса о начальномъ курсѣ алгебры во французской учебной литературѣ, то замѣтимъ, что введеніе Лакруа съ весьма незначительными измѣненіями входитъ во всѣ послѣдующіе лучшіе учебники алгебры, какъ то: Lefébure de Fourcy, Meyer et Choquet, Bertrand, Briot.

Вмѣстѣ съ предлагаемой „Методикой приготовительнаго курса алгебры“, которая должна служить пособіемъ для учителей, мы выпускаемъ въ свѣтъ другое сочиненіе „Вопросы, задачи и примѣры“ къ приготовительному курсу алгебры, предназначенное для учениковъ. Методика раздѣлена на главы, а задачи на отдѣлы. Въ концѣ каждой главы методики сдѣлано указаніе, какой отдѣлъ вопросовъ и задачъ относится къ этой главѣ. Повторительные вопросы предназначены для внѣклассной работы. По нимъ ученикъ можетъ припомнить тѣ выводы, до которыхъ онъ былъ доведенъ учителемъ на урокѣ. Задачи же для закрѣпленія выводовъ слѣдуетъ задавать какъ въ классѣ, такъ и въ видѣ внѣклассной работы къ слѣдующему уроку. Что касается числа помѣщенныхъ задачъ, то оно слишкомъ велико для годичнаго курса. Всѣ эти задачи не могутъ быть продѣланы въ одинъ годъ и помѣщены для того, чтобы не стѣснять учителя въ выборѣ ихъ.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ.

АЛГЕБРА АБСОЛЮТНЫХЪ ЧИСЕЛЪ.

ОТДѢЛЪ I.

ФОРМУЛА.

ГЛАВА I.

Понятіе о формулѣ, ея составленіе и вычисленіе.

§ 1. Анализъ задачи.

З а д а ч а. Смѣшали 24 фун. кофе, по 46 коп. за фунтъ, съ 32 ф. кофе по 60 коп. и на всей смѣси желаютъ получить прибыли 2 р. 80 к. По чемъ слѣдуетъ продавать каждый фунтъ смѣшаннаго кофе?

Что ищется въ задачѣ? Цѣна 1 фун. смѣшаннаго кофе.

Можно-ли сразу (однимъ дѣйствіемъ) узнать эту неизвѣстную? Нельзя.

Что нужно опредѣлить прежде? Нужно опредѣлить вѣсъ всей смѣси и сумму, за которую слѣдуетъ продать всю смѣсь, чтобы получить прибыли 2 р. 80 к. А для этого еще раньше надо узнать стоимость всего перваго сорта кофе и стоимость всего втораго сорта.

Сколько-же въ этой задачѣ всѣхъ неизвѣстныхъ, которыя надо опредѣлить? Пять.

Какая самая важная неизвѣстная? Цѣна, по которой слѣдуетъ продавать 1 ф. смѣшаннаго кофе.

Почему она самая важная? Потому что она спрашивается въ задачѣ.

Такая неизвѣстная, для отысканія которой составлена вся задача, называется *главною неизвѣстною* задачи.

Для чего служатъ другія неизвѣстныя? Онѣ помогаютъ отыскать главную неизвѣстную.

Такія неизвѣстныя, безъ опредѣленія которыхъ нельзя найти главную, называются *вспомогательными*.

Посредствомъ чего рѣшаемъ мы всякую задачу? Посредствомъ дѣйствій надъ числами.

Какія числа послужатъ для опредѣленія первой вспомогательной неизвѣстной? 46 и 24.

Такія числа, надъ которыми надо производить дѣйствіе для отысканія неизвѣстной, называются *данными числами*.

Какое дѣйствіе нужно сдѣлать съ этими данными для опредѣленія первой неизвѣстной? Надо 46 умножить на 24.

Почему нужно сдѣлать именно умноженіе? Мы знаемъ, что 1 ф. кофе стоитъ 46 коп. и что такихъ фунтовъ 24, то цѣна 24 фунтовъ въ 24 раза болѣе цѣны одного фунта, а чтобы 46 увеличить въ 24 раза, надо умножить его на 24.

Изъ какихъ словъ задачи вы извлекли все это разсужденіе? Изъ словъ: Перваго сорта кофе было 24 ф. и каждый фунтъ стоилъ 46 коп.

Что эти слова показываютъ относительно чиселъ 46 и 24? Они показываютъ значеніе въ задачѣ чиселъ 46 и 24.

Такія слова, которыя опредѣляютъ значеніе данныхъ чиселъ въ задачѣ, называются *условіями* задачи.

Кромѣ условія откуда еще видно, что 46 надо умножить на 24? Изъ вопроса задачи.

Скажите ту задачу, которую мы рѣшаемъ съ числами 46 и 24, отдѣльно отъ всей нашей задачи! Одинъ фунтъ кофе стоитъ 46 коп.; сколько стоитъ 24 фунта.

Сколько дѣйствій надо произвести для ея рѣшенія? Одно дѣйствіе.

Такая задача, для рѣшенія которой требуется совершить надъ данными числами только одно дѣйствіе, называется *простою*. Если-же для рѣшенія задачи требуется совершить болѣе одного дѣйствія, то она называется *сложною*.

Сдѣланный нами разборъ (анализъ) простой задачи и ея рѣшеніе сокращенно можно записать такъ:

1) Неизвѣстная: Цѣна кофе 1-го сорта.
Данныя: 46 и 24.
Условія: 1 фун. стоитъ 46 коп., всѣхъ фунтовъ было 24.
Дѣйствіе: 46×24.

Затѣмъ продолжается дальнѣйшій разборъ данной задачи.

Вся наша задача простая или сложная? Сложная, потому что для рѣшенія ея требуется совершить нѣсколько дѣйствій.

На сколько простыхъ задачъ разбивается наша сложная задача? На 5, потому что въ ней 5 неизвѣстныхъ.

Какая вторая простая задача? Было 2-го сорта кофе 32 фун., цѣною по 60 коп. за фун. Сколько стоитъ весь 2-й сортъ?

Какія въ этой задачѣ числа данныя, условія, вопросъ и необходимое для ея рѣшенія дѣйствіе?

Со словъ учениковъ учитель записываетъ на классной доскѣ:

2) Неизвѣст.: Цѣна 2-го сорта кофе.
Данныя: 60 и 32.
Условія: 1 ф. стоитъ 60 к., всѣхъ фунтовъ 32.
Дѣйствіе: 60×32.

Какая третья задача? Какія въ ней данныя, условія, вопросъ и какое дѣйствіе, необходимое для ея рѣшенія?

На доскѣ записывается:

3) Неизвѣст.: Цѣна всего смѣшаннаго кофе съ прибылью.
Данныя: 46×24; 60×32; 280.
Условія: Цѣна 1-го сорта 46×24; цѣна 2-го сорта 60×32; прибыль 2 р. 80 коп.
Дѣйствіе: $46 \times 24 + 60 \times 32 + 280$.

Въ случаѣ затрудненія учениковъ при составленіи данныхъ этой задачи, учитель поясняетъ, что числа найденныя изъ рѣшенія предшествовавшихъ простыхъ задачъ, каковы 46×24 и 60×32, служатъ данными для послѣдующихъ и могутъ войти въ составъ ихъ или окончательно вычисленными или въ видѣ формулъ.

Разборъ четвертой и пятой задачъ и ихъ рѣшенія ученики, по требованію учителя, записываютъ на своихъ доскахъ или въ тетрадяхъ:

4) Неизвѣст.: Вѣсъ смѣшаннаго кофе.
Данныя: 24 и 32.
Условія: Вѣсъ 1-го сорта 24 фун.; вѣсъ 2-го сорта 32 ф.
Дѣйствіе: $24 + 32$.

5) Неизвѣст: Цѣна одного фун. смѣшанн. кофе.
Данныя: $24 + 32$; $46 \times 24 + 60 \times 32 + 280$.
Условія: Смѣш. кофе вѣситъ $24 + 32$ фун.; смѣш. кофе проданъ за $46 \times 24 + 60 \times 32 + 280$ к.

Дѣйствіе: $\frac{46 \times 24 + 60 \times 32 + 280}{24 + 32}$.

Когда получили послѣднее выраженіе, то вполнѣ-ли рѣшили данную намъ задачу? Нѣтъ, не вполнѣ, потому что еще не нашли неизвѣстной величины.

Что-же показываетъ полученное выраженіе? Оно показываетъ, какія дѣйствія надо сдѣлать надъ данными числами для рѣшенія задачи или для отысканія неизвѣстной.

Если написать только одно это выраженіе отдѣльно, то будетъ-ли явно видно, что дѣйствія надъ данными числами дѣлаются для отысканія неизвѣстной? Изъ одного этого выраженія видно только, что надъ числами данными въ задачѣ нужно сдѣлать нѣкоторыя дѣйствія, но для чего они дѣлаются — выраженіе само по себѣ не показываетъ.

Чтобы коротко и точно записать не только какія дѣйствія надо сдѣлать надъ данными числами, но и для чего ихъ нужно сдѣлать, надо записать такъ:

$$x = \frac{46 \times 24 + 60 \times 32 + 280}{24 + 32}.$$

Какъ можно назвать все вновь полученное выраженіе? Равенствомъ, потому что два числа (или выраженія), соединенныя между собою знакомъ равенства, называются равенствомъ.

Такимъ образомъ въ видѣ чего можно кратко и точно записать рѣшеніе задачи? Въ видѣ равенства.

Что находится въ первой части этого равенства? Неизвѣстная (x).

А во второй? Выраженіе, показывающее какія дѣйствія надо сдѣлать надъ данными числами, чтобы получить неизвѣстную.

Найдите-же величину неизвѣстной! ($x = 59$).

Послѣ анализа этой задачи (или какой нибудь другой), сдѣланнаго на урокѣ, нужно, для закрѣпленія пройденнаго, дать ученикамъ къ слѣдующему уроку внѣклассную работу — анализъ одной изъ задачъ, приложенныхъ въ концѣ этой главы. Ученики должны въ своихъ тетрадяхъ написать разборъ задачи точно и сжато, въ видѣ табличекъ, подобныхъ тѣмъ, какія писались въ классѣ.

Смотря по достоинству исполненной работы, можно будетъ сдѣлать еще разъ въ классѣ анализъ какой-либо задачи, или же перейти прямо къ выводамъ изъ прежде сдѣланнаго анализа задачи и ея рѣшенія.

Выводы. Какъ раздѣляются задачи по числу дѣйствій необходимыхъ для ихъ рѣшенія? На простыя и сложныя.

Какая задача называется простою и какая сложною? Простою назыв. задача, для рѣшенія которой требуется одно дѣйствіе. Сложною задачею назыв. такая, для рѣшенія которой требуется сдѣлать нѣсколько дѣйствій.

Чѣмъ опредѣляется число простыхъ задачъ, на которыя распадается данная сложная задача? Числомъ неизвѣстныхъ вспомогательныхъ и главныхъ.

Какія части различаются въ каждой задачѣ? Въ задачѣ различаются: данныя числа, условіе и вопросъ. *Данными* называются тѣ числа въ задачѣ, которыя извѣстны и надъ которыми надо производить дѣйствіе для отысканія неизвѣстной. *Условіями* называются выраженія, опредѣляющія значеніе каждаго даннаго въ задачѣ числа. Изъ *вопроса* задачи мы узнаемъ, какая неизвѣстная ищется въ задачѣ.

Какъ рѣшается задача? Посредствомъ дѣйствій надъ данными числами.

Какъ мы узнаемъ, какія именно дѣйствія надо сдѣлать надъ данными числами для рѣшенія задачи? По условію и вопросу задачи.

Чѣмъ опредѣляется число дѣйствій, необходимыхъ для рѣшенія данной сложной задачи? Числомъ простыхъ задачъ, на которыя распадается сложная задача.

Какъ коротко и точно записать рѣшеніе задачи? Въ видѣ равенства, въ первой части котораго находится неизвѣстная x, а во второй выраженіе, показывающее какія дѣйствія надо сдѣлать надъ данными числами для полученія неизвѣстной.

§ 2. Опредѣленіе формулы, ея составленіе и вычисленіе.

Послѣ окончательнаго усвоенія этихъ выводовъ можно, не опасаясь непониманія, получать формулу рѣшенія задачи (названіе это дано будетъ въ свое время) быстрѣе; можно рѣшать задачу по строкамъ (см. „Методика Ариѳметики", Евтушевскаго) и въ концѣ каждой строки только обозначать дѣйствіе, необходимое для отысканія соотвѣтствующей вспомогательной неизвѣстной, но не вычислять ее; такимъ образомъ въ концѣ послѣдней строки и получится формула рѣшенія задачи. При этомъ постоянно предлагаются вопросы о томъ, что показываетъ формула, и какъ точно и кратко записать рѣшеніе задачи.

Для примѣра приводимъ здѣсь такое рѣшеніе задачи.

З а д а ч а. Работникъ нанятъ былъ на 18 недѣль за 119 руб. 70 коп. Изъ этого времени онъ прогулялъ 8 дней, но за то въ другіе дни работалъ больше положеннаго времени, такъ что кромѣ условленной суммы ему приплатили еще 4 руб. 20 коп. Сколько онъ получилъ за каждый рабочій день?

С т р о ч к и:

1) Работникъ всего получилъ $11970 + 420$ коп.
2) Въ 18 недѣляхъ заключается дней 7×18
3) Рабочихъ дней было $7 \times 18 - 8$.
4) За каждый рабочій день работникъ получилъ

$$\frac{11970 + 420}{7 \times 18 - 8}.$$

Что показываетъ послѣднее выраженіе? Видно-ли что дѣйствія дѣлаются именно для отысканія неизвѣстной? Какъ-же точно записать рѣшеніе задачи?

$$x = \frac{11970 + 420}{7 \times 18 - 8} = 105.$$

Наконецъ, послѣ навыка въ этомъ способѣ составленія формулы рѣшенія задачи, можно, давъ ученикамъ задачу, прямо требовать у него выраженія, показывающаго рѣшеніе задачи и затѣмъ выспросить значеніе отдѣльныхъ частей этого выраженія.

Задача. 61 работнику отдано 8070 р.; изъ нихъ 25 работниковъ получили по 150 руб., а остальное получили прочіе работники поровну. По скольку получили всѣ прочіе?

Скажите выраженіе, показывающее какъ опредѣлить неизвѣстную задачи!

$$x = \frac{8070 - 150 \times 25}{61 - 25}.$$

Что здѣсь означаетъ число 150×25? Что означаетъ весь числитель? Что означаетъ весь знаменатель? Что означаетъ все выраженіе? Все выраженіе означаетъ какія дѣйствія надо сдѣлать надъ данными числами для полученія главной неизвѣстной, то есть, по скольку получилъ каждый изъ остальныхъ работниковъ.

Такое выраженіе называется *формулою* рѣшенія задачи. И такъ что же называется формулою рѣшенія задачи? Выраженіе, показывающее, какія дѣйствія надо сдѣлать надъ данными въ задачѣ числами для отысканія неизвѣстной.

Какъ составляется формула? Обозначаются дѣйствія надъ данными на основаніи условій и вопроса задачи.

Найдите изъ написанной формулы чему равно x! ($x = 120$).

Число 120 называется *численной величиной* формулы. Найти численную величину неизвѣстной значитъ *вычислить формулу*.

Повторительные вопросы и задачи, относящіеся къ этому отдѣлу, смот. въ „Вопросахъ и задачахъ“ (пособіе для учащихся), отдѣлъ I.

ГЛАВА II.

Раздѣленіе формулъ по даннымъ числамъ.

§ 3. Задачи частныя и общія.

Задача. Изъ 38 аршинъ сукна портной сдѣлалъ 6 шинелей и 2 сюртука. На каждую шинель пошло $5^1/_2$ арш. Сколько пошло на каждый сюртукъ, если оба сюртука были одинаковой величины?

По какой формулѣ рѣшается эта задача?

По формулѣ $x = \frac{38 - 5^1/_2 \times 6}{2}$.

Что показываетъ эта формула? Какія дѣйствія надо сдѣлать надъ данными числами для отысканія неизвѣстной.

На основаніи чего вы узнаете, что надъ данными числами надо сдѣлать то или другое дѣйствіе? На основаніи условій задачи и вопроса.

Изъ какого условія слѣдуетъ, что $5\frac{1}{2}$ надо умножить на 6; изъ какого — что изъ 38 надо вычесть $5\frac{1}{2} \times 6$; — что $38 - 5\frac{1}{2} \times 6$ надо раздѣлить на 2?

Вычислите эту формулу! Отвѣтъ $x = 2\frac{1}{2}$.

Придумайте каждый, по образцу этой задачи, новую задачу, въ которой условія и вопросъ оставались бы тѣ-же, но данныя числа были бы другія.

Изъ 39 арш. сукна портной сдѣлалъ 4 шинели и 5 сюртуковъ. На каждую шинель пошло 6 арш. Сколько сукна пошло на каждый сюртукъ, если они были одинаковой величины?

Запишите формулу, по которой рѣшается эта задача!

$$x = \frac{39 - 6 \times 4}{5}$$

Чѣмъ эта формула отличается отъ первой и въ чемъ сходна съ ней? Отличается данными числами, а сходна рядомъ дѣйствій.

Почему рядъ дѣйствій въ обѣихъ формулахъ одинъ и тотъ-же? Потому что условія и вопросъ въ задачѣ не перемѣнились.

Значитъ рядъ дѣйствій въ нашей формулѣ пригоденъ для какихъ задачъ? Для всѣхъ задачъ съ одинаковыми условіями и вопросомъ, но съ различными данными числами.

Чѣмъ именно данныя числа одной изъ такихъ задачъ могутъ отличаться отъ данныхъ чиселъ другой? Числомъ единицъ или частей единицы въ нихъ заключающихся.

По образцу нашей задачи составьте такую задачу, чтобы видно было, что каждое данное въ этой задачѣ число можетъ имѣть сколько угодно единицъ или частей единицы.

З а д а ч а. Изъ нѣсколькихъ аршинъ сукна портной сдѣлалъ нѣсколько шинелей и сюртуковъ. На каждую шинель пошло нѣкоторое данное число аршинъ. Сколько аршинъ пошло на каждый сюртукъ?

Число 38, данное въ первой задачѣ, какимъ числомъ замѣнено въ этой задачѣ? Нѣсколько аршинъ.

Чѣмъ замѣнены числа: 6 шинелей, 2 сюртука, $5\frac{1}{2}$ аршинъ?

Чѣмъ вообще данныя числа послѣдней задачи отличаются отъ данныхъ чиселъ предъидущей задачи? Въ послѣдней задачѣ данныя числа содержатъ въ себѣ сколько угодно единицъ или частей единицы, а въ предъидущей задачѣ они имѣли опредѣленное число единицъ или частей единицы.

Данныя числа новой задачи называются *общими*, а данныя числа прежнихъ задачъ—*частными*. Точно также новая задача называется *общею*, а прежнія—*частными*.

Скажите примѣръ частнаго именованнаго числа! 7 пудовъ, $5\,^1/_3$ саженъ.

Скажите примѣръ общаго именованнаго числа! Нѣсколько пудовъ, нѣсколько саженъ.

Скажите примѣръ частнаго отвлеченнаго числа! 8 единицъ, $^4/_5$ единицы.

Скажите примѣръ общаго отвлеченнаго числа! Нѣсколько единицъ, нѣсколько частей единицы.

Итакъ какихъ двухъ родовъ данныя числа, по числу единицъ въ нихъ заключающихся, различаются въ задачахъ? Числа частныя и общія.

Какое число называется частнымъ и какое общимъ? Число, въ которомъ находится опредѣленное число единицъ или частей единицы, называется частнымъ числомъ. Число же, въ которомъ можетъ содержаться сколько угодно единицъ или частей единицы, называется общимъ числомъ.

Какихъ двухъ родовъ, по даннымъ числамъ, могутъ быть задачи? Задачи частныя и общія.

Какая задача называется частною и какая общею? Частною—такая, въ которой данныя числа частныя—опредѣленныя, а общею—такая, въ которой данныя числа общія—какія угодно по величинѣ.

Сколько частныхъ задачъ, одинаковыхъ по условіямъ и вопросу, замѣняетъ собою одна общая задача? Безчисленное множество, такъ какъ данныя въ нихъ числа могутъ имѣть всевозможныя значенія.

§ 4. Частная и общая формула рѣшенія задачи.

Займемся теперь рѣшеніемъ нашей общей задачи.

Какія двѣ части можно различить въ рѣшеніи всякой частной задачи? Составленіе формулы и ея вычисленіе.

Какое число получается для неизвѣстной послѣ рѣшенія частной задачи? Частное число.

Почему-же вначалѣ оно означается буквою, а не цифрою, какъ всѣ частныя числа? Потому что значеніе его бываетъ неизвѣстно до рѣшенія задачи.

Могутъ-ли обѣ упомянутыя части существовать въ рѣшеніи общей задачи? Первая можетъ, а вторая нѣтъ, потому что данныя числа, дѣйствіями надъ которыми опредѣляется неизвѣстная, не имѣютъ опредѣленнаго значенія.

Въ чемъ-же можетъ состоять рѣшеніе общей задачи? Можно найти формулу, которая укажетъ рядъ дѣйствій надъ данными числами.

Составьте формулу для рѣшенія нашей общей задачи!

$$x = \frac{\text{Число арш. всего сукна} - \text{чис. арш. на 1 шинель} \times \text{число шинелей}}{\text{число сюртуковъ}}.$$

Чѣмъ эта формула отличается отъ прежнихъ формулъ и въ чемъ сходна съ ними?

Отличается данными числами, а сходна рядомъ дѣйствій. Данныя числа здѣсь общія, а въ прежнихъ формулахъ частныя. Рядъ дѣйствій тотъ же самый, потому что условія и вопросъ не перемѣнились.

Такая формула называется *общею*, а прежнія — *частными.*

И такъ какая формула называется частною, и какая общею? Частною называется формула, которая составлена изъ частныхъ чиселъ. Общею называется формула, составленная изъ общихъ чиселъ.

Общая формула можетъ служить для рѣшенія всѣхъ частныхъ задачъ, одинаковыхъ по условіямъ и вопросу съ тою общею задачею, для рѣшенія которой формула составлена.

Какъ воспользоваться общею формулою для рѣшенія частныхъ задачъ одинаковаго содержанія съ общею? Нужно вмѣсто общихъ данныхъ чиселъ поставить въ формулу соотвѣтствующія имъ частныя числа, тогда получится частная формула, которую и надо вычислить, чтобы получить числовую величину неизвѣстной.

Составьте частную задачу по образцу нашей общей задачи!

Задача. У портнаго былъ 41 арш. сукна, изъ котораго онъ сдѣлалъ 7 шинелей и 3 сюртука. На каждую шинель пошло 5 арш. Сколько сукна пошло на каждый сюртукъ?

Поставьте въ общую формулу числа, данныя въ этой задачѣ и найдите числовую величину неизвѣстной:

$$x = \frac{41 - 5 \times 7}{3} = 2.$$

§ 5. Обозначеніе общихъ чиселъ.

Какое преимущество имѣетъ общая формула предъ частною? Она можетъ служить для рѣшенія всѣхъ частныхъ задачъ одинаковыхъ по содержанію.

Какое неудобство представляетъ общая формула при ея написаніи? Слишкомъ длинно пишется.

Чтобы устранить это неудобство принято обозначать общія данныя числа буквами латинской азбуки. А для отличія данныхъ въ задачѣ чиселъ отъ искомыхъ — неизвѣстныхъ, данныя числа обозначаютъ первыми буквами азбуки: a, b, c, d...., а неизвѣстныя — послѣдними: x, y, z....

Скажите нашу общую задачу съ новымъ обозначеніемъ данныхъ чиселъ!

Задача. У портнаго было a аршинъ сукна, изъ котораго онъ сдѣлалъ b шинелей и c сюртуковъ. Сколько сукна пошло на каждый сюртукъ, если на каждую шинель пошло f аршинъ?

Составьте формулу рѣшенія.

$$x = \frac{a - f \times b}{c}.$$

Примѣчаніе. Учитель показываетъ, что произведеніе f на b можно записать такъ $f.b$ или просто fb, такъ какъ въ этой общей формулѣ f не означаетъ разряда десятковъ.

По образцу общей задачи учащіеся составляютъ новую частную задачу и рѣшаютъ ее, подставляя данныя числа вмѣсто буквъ въ общую формулу.

§ 6. Характеръ упражненій на этотъ отдѣлъ.

Упражненія, предлагаемыя учащимся на этотъ отдѣлъ, состоятъ въ слѣдующемъ:

1) По данной частной задачѣ составить общую задачу. Составить формулу для рѣшенія этой послѣдней и воспользоваться ею для рѣшенной данной частной задачи.

2) Для данной общей задачи составить общую формулу. По данной общей задачѣ составить частную задачу того же рода и воспользоваться общею формулою для рѣшенія этой частной задачи.

3) Прочитать написанную общую формулу.

4) Вычислить данную общую формулу, если извѣстны частныя значенія входящихъ въ нее общихъ чиселъ.

5) Разложить данное число по данной формулѣ. (Смотри послѣднія задачи, относящіяся къ этому отдѣлу въ „Вопрос., прим. и задачахъ".)

6) Составить формулы, выражающія связь между данными элементами и искомыми результатами четырехъ ариѳметическихъ дѣйствій.

Примѣчаніе. Упражненія 1 и 2, состоящія въ составленіи общихъ задачъ и формулъ ихъ рѣшенія и въ примѣненіи этихъ формулъ къ рѣшенію частныхъ задачъ, весьма важны и на нихъ слѣдуетъ достаточно остановиться, чтобы учащіеся при рѣшеніи задачъ пріобрѣли навыкъ ставить на первомъ планѣ содержаніе задачи, а не числа, входящія въ нея. Неумѣнье учащихся рѣшать болѣе или менѣе сложныя по содержанію задачи въ большинствѣ случаевъ объясняется тѣмъ, что, получивъ задачу для рѣшенія, они, прежде составленія плана рѣшенія всей задачи, сосредоточиваютъ свое вниманіе на рѣшеніи вопроса, какое дѣйствіе надо сдѣлать съ ближайшими въ задачѣ данными числами. Общія задачи не даютъ повода учащимся къ такому пріему рѣшенія: онѣ сосредоточиваютъ вниманіе учащихся на условіяхъ и вопросѣ задачи, а не на данныхъ числахъ. При упражненіяхъ 3 и 4 слѣдуетъ предлагать учащимся обстоятельно вопросы относительно порядка, въ которомъ должно читать формулу и совершать указанныя въ ней дѣйствія. Пониманіе порядка дѣйствій послужитъ основой для разработки вопроса, составляющаго предметъ слѣдующей главы. Упражненія 5 и 6 представляютъ обильный матеріалъ для выясненія понятія о формулѣ и связи между элементами и результатами четырехъ дѣйствій.

Повторительные вопросы и задачи для упражненій, относящіеся къ этой главѣ, смот. въ „Вопр. и задач." (пособіе для учащихся), отдѣлъ II.

ГЛАВА III.

Раздѣленіе формулъ по дѣйствіямъ.

§ 7. Раздѣленіе формулъ по числу дѣйствій.

Что называется формулой?

Какъ различаются формулы по даннымъ числамъ?

Какая формула называется частною и какая общею?

Кромѣ чиселъ, что еще входитъ въ составъ формулы? Дѣйствія.

Какія дѣйствія мы встрѣчали въ формулахъ? Сложеніе, вычитаніе, умноженіе и дѣленіе.

Сколько можно составить формулъ при помощи этихъ четырехъ дѣйствій и почему? Безчисленное множество формулъ, потому что дѣйствія могутъ идти въ различномъ порядкѣ и могутъ повторяться.

Какое наименьшее число дѣйствій можетъ указывать формула? Одно.

Изъ чиселъ a и b составьте такія формулы, которыя указывали бы по одному дѣйствію надъ ними.

$$a+b,\ a-b,\ ab,\ \frac{a}{b}.$$

Такія формулы называются *простыми*.

Скажите нѣсколько такихъ формулъ, въ которыхъ было бы больше одного дѣйствія!

$$a+b-c,\ \frac{a+b}{c},\ \frac{a-b}{c},\ a-b+c,\ a+\frac{b-c}{d}+fg \text{ и пр.}$$

Можно-ли перечитать всѣ такія формулы? Нѣтъ, ихъ-то именно и есть безчисленное множество.

Такія формулы называются *сложными*. И такъ, на основаніи чего различаютъ формулы простыя и сложныя? На основаніи числа дѣйствій, указываемыхъ формулами.

Какая формула называется простою и какая сложною? *Простою* называется формула, которая указываетъ надъ данными числами только одно дѣйствіе. *Сложною* называется формула, въ составъ которой входитъ болѣе одного дѣйствія.

§ 8. Раздѣленіе сложныхъ формулъ по роду дѣйствій и порядку дѣйствій.

Сколько дѣйствій можетъ быть въ сложной формулѣ? Два, три, четыре и вообще сколько угодно.

Скажите нѣсколько формулъ въ два дѣйствія!

$$a+b-c;\ a-b+c;\ a-b-c;\ ab-c;\ a-bc;$$

$$\frac{a}{b}+c;\ \frac{a}{b}-c;\ a-\frac{b}{c};\ a-\frac{c}{b}\ \text{и т. п.}$$

Скажите нѣсколько формулъ въ три дѣйствія!

$$a+b-c-d;\ a-b-c-d;\ ab-cd;\ ab-\frac{c}{d}\ \text{и т. п.}$$

Слѣдовательно, если въ сложныхъ формулахъ число дѣйствій одинаково, то чѣмъ еще, относительно дѣйствій, могутъ различаться такія формулы? Родомъ дѣйствій: въ одной сложеніе и вычитаніе, въ другой сложеніе и умноженіе, въ третьей умноженіе, вычитаніе и дѣленіе и т. д.

Скажите нѣсколько формулъ, въ которыхъ было бы только сложеніе и вычитаніе!

$$a+b-c+d-f;\ a-b-c-d-f;\ \text{и т. п.}$$

Такія формулы называются *многочленами*, а слагаемыя и вычитаемыя числа *членами* многочлена.

Скажите нѣсколько многочленовъ съ другими буквами!

$$m+n-k-l;\ m-n-k-l;\ m-n+k-l\ \text{и т. п.}$$

Скажите нѣсколько формулъ, въ которыхъ было бы только умноженіе и дѣленіе!

$$abc;\ abcd;\ \frac{ab}{cd};\ \frac{abc}{df};\ \frac{a}{bcd};\ \text{и т. п.}$$

Такія формулы называются *одночленами*.

Скажите нѣсколько одночленовъ съ другими буквами!

$$mnkl;\ \frac{mpk}{c};\ \frac{klh}{mp};\ \text{и т. п.}$$

И такъ, какая формула называется многочленомъ и какая одночленомъ? Многочленомъ называется такая сложная формула, въ которой надъ данными числами указываются только дѣйствія сложеніе и вычитаніе. Одночленомъ называется такая формула, въ которой надъ данными числами указываются только дѣйствія умноженіе и дѣленіе.

Что называется членомъ многочлена? Каждое изъ данныхъ чиселъ, которыя въ немъ складываются и вычитаются.

Скажите нѣсколько формулъ, въ которыхъ одинаковы число дѣйствій и родъ дѣйствій!

$$ab + \frac{c}{d} - \frac{f}{g};\quad \frac{ab+c}{d} - \frac{f}{g};\quad \frac{a+b-c}{d} \times \frac{f}{g};\ \text{и т. п.}$$

Слѣдовательно, кромѣ числа и рода дѣйствій, чѣмъ еще могутъ отличаться между собою сложныя формулы? Порядкомъ дѣйствій.

Скажите нѣсколько формулъ, въ которыхъ рядъ послѣднихъ дѣйствій состоялъ бы изъ сложеній и вычитаній!

$$ab + cd - fg;\quad ab + \frac{c}{d} - \frac{f}{g};\quad \frac{a}{b+c} - d + fg;\ \text{и т. п.}$$

На какія изъ двухъ формулъ болѣе похожи эти формулы — на многочленъ, или на одночленъ? На многочленъ.

Въ чемъ сходство и разница? Сходство въ томъ, что послѣдній рядъ дѣйствій и въ многочленѣ и въ этихъ формулахъ есть рядъ сложеній и вычитаній. Разница въ томъ, что въ многочленѣ складываются и вычитаются просто данныя числа, а здѣсь формулы, составленныя изъ этихъ чиселъ.

Такія формулы, какъ здѣсь приведенныя, также называются многочленами.

Какъ же полнѣе опредѣлить, какая сложная формула называется многочленомъ? Сложная формула называется многочленомъ или въ такомъ случаѣ, когда она надъ данными числами указываетъ только дѣйствія сложеніе и вычитаніе, или же, когда, при другихъ дѣйствіяхъ, послѣдній рядъ дѣйствій будетъ рядъ сложеній и вычитаній.

Какъ полнѣе опредѣлить, что называется членомъ многочлена? Если въ составъ формулы входятъ только дѣйствія сложеніе и вычитаніе, то членомъ называется каждое изъ слагаемыхъ или вычитаемыхъ чиселъ; если же, кромѣ сложенія и вычитанія, въ формулѣ есть и другія дѣйствія, то членомъ многочлена называется каждая изъ формулъ, или каждое изъ данныхъ чиселъ, складываемыхъ и вычитаемыхъ въ послѣднемъ рядѣ сложеній и вычитаній.

Напишите многочленъ, въ которомъ было бы три члена!

$$ab - cd + fg;\quad ab - \frac{c}{d} - \frac{f}{g};\quad \frac{a+b}{k} - \frac{m}{n} + gh;\ \text{и т. п.}$$

Прочтите каждый членъ отдѣльно!

Такіе многочлены называются *трехчленами*.

Напишите нѣсколько многочленовъ, въ которыхъ было бы по четыре члена!

$$ab + cd - m + \frac{k}{f};\ ab - \frac{c}{d} + mp - \frac{a-b}{c};\ \text{и т. п.}$$

Такіе многочлены называются *четырехчленами*.

Слѣдовательно, какъ можно раздѣлить многочлены по числу ихъ членовъ? На двучлены, трехчлены, четырехчлены и т. д.

Напишите нѣсколько формулъ, въ которыхъ входили бы различныя дѣйствія, но чтобы послѣдними дѣйствіями были или умноженіе или дѣленіе!

$$\frac{abc}{d-f+g};\ \frac{a+b-c}{d-f+g} \times k;\ \text{и т. п.}$$

Такія сложныя формулы называются *одночленами*.

Какъ-же полнѣе опредѣлить, какая сложная формула называется одночленомъ? Одночленомъ называется такая сложная формула, которая указываетъ надъ данными числами только дѣйствія умноженіе и дѣленіе, или же, при другихъ дѣйствіяхъ, указываетъ на умноженіе и дѣленіе, какъ на послѣднія дѣйствія въ ряду другихъ.

§ 9. Вычисленіе многочлена и употребленіе скобокъ.

Задача. Неизвѣстная $x = ab - cd + fg - hk$.

Вычислить величину этого многочлена, если

$a = 30$, $b = 3$, $c = 25$, $d = 2$, $f = 12$, $g = 4$, $h = 14$, $k = 5$.

Въ какомъ порядкѣ слѣдуетъ производить дѣйствія для вычисленія этого многочлена? Сперва вычислить величину каждаго члена, а потомъ съ полученными числами сдѣлать указанныя въ формулѣ вычитанія и сложенія; именно: изъ перваго произведенія вычесть второе, къ разности прибавить третье, наконецъ изъ суммы вычесть четвертое. Получится $x = 18$.

Въ какомъ еще другомъ порядкѣ можно дѣлать сложенія и вычитанія, не измѣняя численной величины многочлена? 1) Изъ перваго члена вычесть второй, изъ разности вычесть четвертый членъ и къ этой разности придать третій. 2) Изъ перваго члена вычесть второй, изъ третьяго четвертый и полученныя разности сложить. 3) Къ первому члену придать третій, изъ суммы вычесть второй, а изъ этой разности вычесть четвертый.

Какъ записать многочленъ, чтобы видны были первый и третій изъ указанныхъ пріемовъ?

1) $x = ab - cd - hk + fg$

3) $x = ab + fg - cd - hk$.

Всегда ли можно дѣлать вычитаніе и сложеніе въ первомъ изъ этихъ новыхъ порядковъ? Не всегда. Можно только тогда, когда разность $ab - cd$ больше hk; если же она меньше, то изъ меньшаго числа нельзя вычесть большаго. Въ нашемъ примѣрѣ разность $ab - cd = 40$, а членъ $hk = 70$, слѣдовательно вычитанія сдѣлать нельзя.

Всегда-ли возможно сдѣлать вычисленіе, какъ указано по третьему пріему? Всегда, если было возможно вычисленіе въ томъ порядкѣ, какой указанъ въ данномъ многочленѣ. Въ самомъ дѣлѣ въ данномъ многочленѣ изъ ab возможно вычесть cd, а послѣ прибавленія fg къ разности $ab-cd$ можно изъ полученной суммы вычесть еще hk; слѣдовательно, послѣ прибавленія fg къ ab, будетъ возможно изъ этой суммы вычесть и cd и hk.

Вычисляя многочленъ, какъ указано въ третьемъ порядкѣ, послѣ того какъ найдена сумма $ab + fg$, нельзя-ли слѣдующее вычисленіе повести иначе? Вмѣсто того, чтобы вычитать по очереди cd и hk, можно прежде cd и hk вмѣстѣ сложить и потомъ полученную сумму $cd + hk$ вычесть изъ $ab + fg$.

Чтобы показать, что нужно вычесть сумму $cd + hk$ изъ $ab + fg$, пишутъ такъ:

$$x = ab + fg - (cd + hk).$$

Въ какомъ же порядкѣ, по указанію послѣдней формулы, надо дѣлать рядъ сложеній и вычитаній для вычисленія x? Сначала надо сложить ab и fg, потомъ сложить cd и hk и вторую сумму вычесть изъ первой.

Какой изъ всѣхъ разсмотрѣнныхъ порядковъ вычисленія многочлена наиболѣе удобный? Послѣдній. Во первыхъ потому, что онъ всегда возможенъ, если былъ возможенъ данный порядокъ сложеній и вычитаній; во-вторыхъ, по этому способу приходится дѣлать только одно вычитаніе, остальныя же вычитанія обращаются въ сложеніе.

Если имѣть въ виду данный многочленъ, то какъ слѣдуетъ выразить правило для вычисленія многочлена, отличая члены его знаками + и —? Для вычисленія многочлена надо поступить слѣдующимъ образомъ: 1) найти численную величину каждаго члена; 2) сложить между собою численныя значенія тѣхъ членовъ, передъ которыми находится знакъ + или нѣтъ знака; 3) сложить численныя величины тѣхъ членовъ, передъ которыми находится знакъ —; 4) послѣднюю сумму вычесть изъ первой. Полученная разность и представитъ численную величину многочлена.

§ 10. Характеръ упражненій.

Упражненія на этотъ отдѣлъ должны состоять въ слѣдующемъ:

1) Составленіе общихъ формулъ для рѣшенія общихъ задачъ; упрощеніе этихъ формулъ для вычисленія посредствомъ скобокъ и вычисленіе при данныхъ числахъ вмѣсто буквъ.

2) Составленіе формулъ указывающихъ различные роды и порядки дѣйствій.

3) Чтеніе данныхъ формулъ.

4) Вычисленіе данныхъ многочленовъ.

5) Разложеніе данныхъ чиселъ по даннымъ формуламъ.

Какъ видно, рубрики упражненій почти тѣже, какъ и въ предъидущемъ отдѣлѣ, но разница между прежними упражненіями и новыми въ томъ, что теперь въ формулахъ приходится обозначать дѣйствія не только надъ отдѣльными общими числами, но и надъ многочленами. Это обстоятельство требуетъ употребленія скобокъ, что и слѣдуетъ достаточно выяснить на предлагаемыхъ въ „Вопр. и задачахъ“ (пособіе для учащихся), въ Отдѣлѣ III, задачахъ и примѣрахъ.

ГЛАВА IV.

Упрощеніе сложныхъ формулъ.

а) Посредствомъ коеффиціента.

§ 11. Цѣлый коеффиціентъ общаго числа.

Задача. Въ первую недѣлю іюля огородникъ собралъ a огурцовъ, во вторую b огурцами болѣе, въ третью b огурцами болѣе, чѣмъ во вторую, въ четвертую b огурцами болѣе, чѣмъ въ третью. При сортировкѣ собранныхъ огурцовъ, c штукъ оказались негодными. Сколько было собрано хорошихъ огурцовъ?

По какой формулѣ рѣшается эта задача?

$$x = a + a + b + a + b + b + a + b + b + b - c.$$

Въ какомъ порядкѣ надо дѣлать вычисленія? Сначала по порядку 9 сложеній, а потомъ изъ суммы вычесть c.

Вычислите эту формулу, если $a = 1350$, $b = 240$, $c = 360$! ($x = 6480$).

Какъ проще найти сумму первыхъ десяти чиселъ? Въ этой суммѣ a повторяется слагаемымъ 4 раза, b шесть разъ; слѣдовательно можно a умножить на 4, b умножить на 6 и оба произведенія вмѣстѣ сложить.

Запишите самую формулу проще и сдѣлайте вычисленіе по указанному пріему!

$$x = a \times 4 + b \times 6 - c = 6480.$$

Обыкновенно такую формулу пишутъ въ такомъ видѣ:

$$x = 4a + 6b - c.$$

Что показываетъ здѣсь число 4? Оно показываетъ, сколько разъ слѣдующее за нимъ общее число a надо взять слагаемымъ, или на что надо это число a умножить.

Гдѣ поставлено число 6, и что оно показываетъ?

Такія числа, какъ 4 и 6, поставленныя передъ буквами, называются *коэффиціентами.*

Въ формулахъ $5m$, $7k$, $9p$, какія числа будутъ коэффиціентами и что они означаютъ?

Напишите $8d$ въ несокращенномъ видѣ.

$$8d = d + d + d + d + d + d + d + d.$$

И такъ, какое число называется коэффиціентомъ общаго числа? Коэффиціентомъ общаго числа называется такое число, которое стоитъ передъ общимъ числомъ и показываетъ, сколько разъ надо это общее число взять слагаемымъ, или на что надо его умножить.

Какую пользу приноситъ употребленіе въ формулахъ коэффиціента? Коэффиціентъ упрощаетъ формулу и сокращаетъ вычисленіе ея.

§ 12. Дробный коэффиціентъ общаго числа.

Задача. Нужно было устроить желѣзную дорогу въ a верстъ. Въ первую недѣлю работы устроили b саженъ желѣзной дороги; во вторую столько-же и еще $\frac{1}{7}$ этого количества; въ третью столько, сколько во вторую, и еще $\frac{1}{7}$ того, что въ первую недѣлю; въ четвертую столько, сколько въ третью, и еще $\frac{1}{7}$ того, что въ первую. Сколько саженъ дороги осталось устроить послѣ четырехъ недѣль?

Сколько саженъ дороги сдѣлали во вторую недѣлю? $b +$ одну седьмую часть b.

Какое дѣйствіе надо сдѣлать, чтобы получить $\frac{1}{7}$-ую часть b? Надо b раздѣлись на 7, или b умножить на $\frac{1}{7}$.

Въ видѣ какой формулы можно записать, сколько саженей дороги сдѣлано во вторую недѣлю? $b + \frac{b}{7}$ или $b + b \times \frac{1}{7}$.

Обыкновенно пишутъ такъ: $b + \frac{1}{7}b$.

Запишите число саженей, сдѣланныхъ въ третью недѣлю! $b + \frac{1}{7}b + \frac{1}{7}b$.

Въ четвертую! $b + \frac{1}{7}b + \frac{1}{7}b + \frac{1}{7}b$.

Сколько саженей дороги сдѣлано въ 4 недѣли?

$$b + b + \tfrac{1}{7}b + b + \tfrac{1}{7}b + \tfrac{1}{7}b + b + \tfrac{1}{7}b + \tfrac{1}{7}b + \tfrac{1}{7}b.$$

Сколько саженей дороги надо было сдѣлать? $500a$.

Слѣдовательно въ видѣ какой формулы представится рѣшеніе всей задачи?

$$x = 500a - (b + b + \tfrac{1}{7}b + b + \tfrac{1}{7}b + \tfrac{1}{7}b + b + \tfrac{1}{7}b + \tfrac{1}{7}b + \tfrac{1}{7}b).$$

Въ какомъ порядкѣ надо бы дѣлать вычисленія, если бы были даны частныя значенія чиселъ a и b? Вычислить $500a$, потомъ $\frac{1}{7}b$, сдѣлать сложеніе всѣхъ членовъ многочлена въ скобкахъ и полученную сумму вычесть изъ $500a$.

Какъ полученную формулу записать въ сокращенномъ видѣ?

$$x = 500a - (4b + \tfrac{6}{7}b).$$

Чѣмъ будетъ въ этой формулѣ число 500? Какой еще коеффиціентъ есть въ этой формулѣ? Что въ этой формулѣ показываетъ число $\frac{6}{7}$? Надо взять $\frac{6}{7}$ числа b или b умножить на $\frac{6}{7}$.

Можно-ли $\frac{6}{7}$ назвать коеффиціентомъ общаго числа b? Можно, потому что $\frac{6}{7}$ здѣсь показываетъ, на сколько надо умножить b.

Какъ еще проще записать двучленъ, заключенный въ скобкахъ? $4\frac{6}{7}b$.

Знакъ какого дѣйствія подразумѣвается между 4 и $\frac{6}{7}$? Знакъ сложенія.

А между $4\frac{6}{7}$ и числомъ b? Знакъ умноженія.

Нельзя-ли выраженіе $4\frac{6}{7}b$ записать такъ, чтобы въ немъ подразумѣвался только одинъ знакъ, именно знакъ умноженія? ($\frac{34}{7}b$.)

И такъ, въ какомъ простѣйшемъ видѣ можно представить нашу формулу?

$$x = 500a - \frac{34}{7}b.$$

Вычислите x по первой формулѣ и по послѣдней, если $a = 7$, $b = 420$! ($x = 1460$).

По какой формулѣ вычислять проще? По послѣдней.

Какъ-же теперь вообще сказать, какое число называется коеффиціентомъ? Коеффиціентомъ называется частное число, стоящее передъ общимъ числомъ и показывающее, что на него надо умножить это общее число.

Въ чемъ состоитъ разница между цѣлымъ и дробнымъ коеффиціентомъ? Цѣлый коеффиціентъ показываетъ, сколько разъ нужно общее число взять слагаемымъ, а дробный — , какую часть общаго числа надо взять.

Какую пользу приноситъ тотъ и другой коеффиціентъ? Сокращаетъ формулу и вычисленіе. Въ случаѣ цѣлаго, какъ и въ случаѣ дробнаго коеффиціента, вмѣсто сложенія нѣсколькихъ чиселъ, приходится дѣлать умноженіе двухъ чиселъ, а вмѣсто многочлена писать одночленъ.

§ 13. Коеффиціентъ сложнаго одночлена.

Возьмемъ формулу, представляющую рѣшеніе нѣкоторой задачи:

$$x = ab + ab + ab + ab + ab.$$

Какая это формула по роду дѣйствій и порядку дѣйствій? Многочленъ, потому что послѣдній рядъ дѣйствій есть рядъ сложеній.

Въ какомъ порядкѣ нужно вести вычисленіе этого многочлена? Вычислить величину члена ab и взять ее слагаемымъ 5 разъ, или умножить ее на 5.

Поэтому какъ проще записать формулу?

$$x = (ab) \times 5 = 5ab.$$

Число 5 называется *коеффиціентомъ одночлена* ab.

Въ одночленѣ $4cdf$ какое число есть коеффиціентъ и почему? Число 4, потому что оно показываетъ, что одночленъ cdf надо умножить на 4.

Напишите одночленъ $6mnp$ въ несокращенномъ видѣ!

$$6mnp = mnp + mnp + mnp + mnp + mnp + mnp.$$

Напишите въ сокращенномъ видѣ многочленъ:

$$\tfrac{1}{4}ab + \tfrac{1}{4}ab + \tfrac{1}{4}ab + \tfrac{1}{4}ab + \tfrac{1}{4}ab! \ (\tfrac{5}{4}ab).$$

Что показываетъ здѣсь число $\frac{5}{4}$? Что надо взять 5 четвертей ab или ab умножить на $\frac{5}{4}$.

Какъ одночленъ $\frac{3}{8}cd$ написать въ несокращенномъ видѣ?

$$\tfrac{3}{8}cd = \tfrac{1}{8}cd + \tfrac{1}{8}cd + \tfrac{1}{8}cd.$$

§ 14. Вычисленіе одночлена съ коеффиціентомъ.

Въ одночленѣ $5abcd$ какое число есть коеффиціентъ? Что оно показываетъ?

Въ какомъ порядкѣ надо дѣлать дѣйствія для вычисленія этого одночлена? Надо a умножить на b, полученное произведеніе на c, новое произведеніе на d и наконецъ послѣднее произведеніе на 5.

Въ какомъ еще порядкѣ можно дѣлать умноженія? Въ какомъ угодно. Можно a умножить на c, произведеніе на b, новое произведеніе на d и послѣднее произведеніе на 5. Или

b умножить на d, произведеніе на a, новое произведеніе на c и послѣднее на 5; и въ другихъ порядкахъ.

Можетъ-ли коэффиціентъ участвовать въ перестановкѣ съ буквенными множителями? Можетъ, потому что и коэффиціентъ есть множитель въ одночленѣ.

Значитъ, какой еще порядокъ можно усмотрѣть изъ самой данной формулы? Число 5 умножить на a, произведеніе на b, новое произведеніе на c и послѣднее произведеніе на d.

Обыкновенно вычисленіе одночлена и дѣлаютъ въ послѣднемъ указанномъ порядкѣ. Если данныя вмѣсто буквъ числа будутъ обыкновенныя дроби, то нужно сначала обозначить умноженіе дробей, сдѣлать возможныя сокращенія равныхъ множителей въ числителѣ и знаменателѣ произведенія и потомъ сдѣлать окончательное умноженіе. Если данныя числа дроби десятичныя, или цѣлыя числа, то иногда бываетъ удобно дѣлать умноженіе и въ другомъ порядкѣ, чѣмъ тотъ, который указываетъ формула. Напр. при вычисленіи одночлена $100abc$, если $a = 0{,}2$, $b = 10$, $c = 0{,}01$, удобнѣе умножить сначала a на b, потомъ c на 100 и наконецъ ab на $100c$. Въ самомъ дѣлѣ $ab = 0{,}2 \times 10 = 2$, $c \times 100 = 0{,}01 \times 100 = 1$, $ab \times 100c = 2 \times 1 = 2$.

§ 15. Характеръ упражненій.

Упражненія на этотъ отдѣлъ, какъ и прежнія, сосредоточиваются около двухъ вопросовъ: составленіе формулы и вычисленіе ея. Введеніе коэффиціента въ одночлены вноситъ въ оба эти вопроса свои особенности. Новое упражненіе состоитъ въ обращеніи многочлена въ одночленъ при помощи коэффиціента, и обратно въ написаніи одночлена съ коэффиціентомъ въ несокращенномъ видѣ, то есть въ видѣ многочлена. Вычисленіе формулъ при данныхъ частныхъ значеніяхъ буквъ, какъ при этихъ упражненіяхъ, такъ и при послѣдующихъ, даетъ удобное средство повторить вычисленіе съ дробями обыкновенными и десятичными и развить навыкъ въ быстротѣ вычисленія.

Повторительные вопросы и задачи, относящіеся къ этому отдѣлу, смотри въ „Вопр. и задач." (пособіе для учащихся) Отдѣлъ IV.

b) Посредствомъ показателя.

§ 16. Понятіе о степени.

Задача. У помѣщика было a полей, въ каждомъ полѣ по b десятинъ земли. Съ каждой десятины онъ собралъ по c четвертей ржи и собранный хлѣбъ отправилъ продавать на ярмарку. Въ первый день было продано d четвертей ржи, во второй въ d разъ болѣе, въ третій въ d разъ болѣе. чѣмъ во второй. Сколько осталось четвертей ржи послѣ третьяго дня торговли?

Составьте формулу рѣшенія этой задачи!

$$x = abc - (d + dd + ddd).$$

Что означаетъ bc, abc, dd, ddd? Что означаетъ многочленъ въ скобкахъ?

Въ какомъ порядкѣ надо дѣлать дѣйствія для вычисленія этой формулы? Сначала надо вычислить произведеніе abc, потомъ произведеніе dd, ddd; сложить между собою численныя значенія d, dd, ddd и полученную сумму вычесть изъ произведенія abc.

Вычислите формулу, если $a = 12$, $b = 300$, $c = 24$. $d = 30$! ($x = 58470$).

Какъ вычисляли произведеніе ddd? Число 30 умножали на 30, полученное произведеніе еще на 30 и получили 27000.

Какъ записать это вычисленіе?

$$ddd = 30 \cdot 30 \cdot 30 = 27000.$$

Что особеннаго замѣчаете вы въ составѣ этого произведенія? Всѣ множители этого произведенія равны между собою.

Такое произведеніе, какъ 27000, называется *степенью* числа 30, а самое дѣйствіе умноженія 30 на 30 и произведенія еще на 30 — *возвышеніемъ* числа 30 *въ степень*.

При вычисленіи формулы не встрѣчалась-ли еще степень 30? Произведеніе $30 \cdot 30 = 900$ есть степень 30-ти, потому что получается отъ перемноженія двухъ равныхъ множителей, каждый въ 30 единицъ.

Чѣмъ различаются эти двѣ степени 30-ти? Числомъ множителей. Въ одной степени *три* равныхъ множителя, а въ другой *два*.

Поэтому 27000 называется *третьею* степенью 30-ти, а 900 — *второю* степенью. Само число 30 называется *первою* степенью 30-ти.

Скажите по порядку различныя степени 2-хъ! Первая степень 2, вторая 4, третья 8, четвертая 16 и т. д.

Почему 16 есть четвертая степень 2-хъ?

Скажите по порядку степени $\frac{1}{3}$! $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{27}$, $\frac{1}{81}$ и проч.

Почему $\frac{1}{27}$ есть третья степень $\frac{1}{8}$?

Замѣтимъ, что вторая и третья степени всякаго числа имѣютъ особенное названіе; вторая степень числа называется *квадратомъ* его, а третья степень — *кубомъ* его, такъ что „говорятъ 5 въ квадратѣ (25), 5 въ кубѣ (125)“.

И такъ, что-же называется степенью какого-либо числа? Степенью какого нибудь числа называется произведеніе нѣсколькихъ множителей, равныхъ этому числу.

Какія различаются степени одного и того же числа? Первая, вторая или квадратъ, третья или кубъ, четвертая и т. д.

Какая степень называется первою, второю, третьею и т. д.?

Что значитъ возвысить какое нибудь число въ степень? Значитъ составить произведеніе изъ нѣсколькихъ множителей, равныхъ этому числу.

Скажите третью степень 10-ти (1000)! Пятую степень 3 (243).

Для какого числа 36 будетъ второю степенью? (Для 6). Для какого числа 10000 будетъ четвертою степенью? (Для 10).

Число 64 есть какая степень 8? (Вторая). Число 125 какая степень 5? (Третья).

§ 17. Сокращенное обозначеніе степени.

Скажите, въ видѣ какой формулы можно записать пятую степень числа b, четвертую степень числа c, третью степень числа f?

$$bbbbb, \quad cccc, \quad fff.$$

Сколько множителей входитъ въ составъ перваго произведенія, въ составъ втораго, третьяго?

Такъ какъ множители каждаго изъ этихъ произведеній равны между собою, то обыкновенно такія произведенія сокращенно пишутъ такъ:

$$b^5,\quad c^4,\quad f^3.$$

Числа 5, 4, 3 въ отличіе отъ коеффиціентовъ ставятся надъ числами b, c, f справа и называются *показателями степени.*

Что показываетъ показатель въ первой изъ нашихъ формулъ, во второй, въ третьей? Въ первой формулѣ показатель 5 показываетъ, что число b нужно взять 5 разъ множителемъ для составленія степени, и т. д.

Что показываетъ показатель 6 въ выраженіи p^6?

Какъ написать эту степень въ несокращенномъ видѣ? ($p^6 = p \cdot p \cdot p \cdot p \cdot p \cdot p \cdot$).

Вычислите 2^4, 5^3, $(0,1)^2$! (16; 125; 0,01).

И такъ что-же называется показателемъ степени какого-нибудь числа? Показателемъ степени какого-нибудь числа называется другое число, которое ставится справа надъ первымъ и показываетъ, сколько разъ это первое число надо взять множителемъ для составленія степени.

Какую пользу приноситъ употребленіе показателя? Онъ сокращаетъ формулу.

Сокращаетъ-ли показатель вычисленіе формулы? Нисколько.

Можетъ-ли показатель быть дробнымъ числомъ? Нѣтъ, такъ какъ онъ показываетъ, *сколько разъ* слѣдуетъ взять множителемъ число, надъ которымъ онъ поставленъ.

§ 18. Сокращенное обозначеніе одночлена, представляющаго произведеніе нѣсколькихъ степеней.

Возьмемъ формулу: $abcdfghk$.

Эта формула представляетъ собою одночленъ или многочленъ? Будетъ-ли она степенью нѣкотораго числа?

Возьмемъ другую формулу: $aaabbccc$.

Будетъ-ли это произведеніе степенью какого-нибудь числа?

Что особеннаго представляетъ это произведеніе сравнительно съ первымъ? Въ немъ есть 3 группы множителей. Множители каждой группы равны между собою, но не равны множителямъ другой группы. Въ первомъ-же произведеніи нѣтъ равныхъ между собою множителей.

Въ какомъ порядкѣ слѣдуетъ вычислять послѣднее произведеніе? Надо a умножить на a, полученную вторую степень еще на a, третью степень на b, произведеніе еще на b, новое произведеніе на c и т. д.

Когда уже вычислено произведеніе первыхъ трехъ множителей, то какъ сокращенно записать одночленъ? (a^3bbccc).

Какъ продолжать вычисленіе? Степень a^3 надо умножить на b, полученное произведеніе еще на b.

Вмѣсто двукратнаго умноженія на b, на какое одно число можно умножить a^3? На b^2.

Какъ послѣ этого можно сокращенно записать произведеніе? (a^3b^2ccc).

Какъ еще сокращеннѣе записать произведеніе? ($a^3b^2c^3$).

Какъ формулу $llllmppp$ написать въ сокращенномъ видѣ? (l^4mp^3).

Напишите произведеніе abc^3d^4 въ несокращенномъ видѣ. ($abcccdddd$).

§ 19. Вычисленіе одночлена съ коэффиціентомъ и показателями.

Возьмемъ одночленъ: $7a^3b^2cd^4$.

Что здѣсь показываетъ коэффиціентъ 7? Онъ показываетъ, что слѣдующій за нимъ одночленъ нужно умножить на 7.

Въ какомъ порядкѣ нужно вести вычисленіе одночлена? Сначала надо вычислить a^3, потомъ b^2, потомъ d^4, затѣмъ a^3 умножить на b^2, произведеніе на c, новое произведеніе на d^4 и наконецъ полученное на 7.

Сдѣлайте это вычисленіе, если $a=\frac{3}{5}$, $b=\frac{5}{2}$; $c=\frac{1}{7}$, $d=1\frac{1}{3}$!

$$a^3 = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{27}{125};\ b^2 = \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{2} = \frac{25}{4};\ d^4 = \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{256}{81};$$

$$a^3b^2 = \frac{27 \cdot 25}{125 \cdot 4} = \frac{27}{20};\ a^3b^2c = \frac{27 \cdot 1}{20 \cdot 7} = \frac{27}{140};$$

$$a^3b^2cd^4 = \frac{27 \cdot 256}{140 \cdot 81} = \frac{64}{105};\ 7a^3b^2cd^4 = \frac{64 \cdot 7}{105} = 4\frac{1}{15}.$$

Можно-ли въ другомъ порядкѣ вести вычисленіе даннаго одночлена? Можно, потому что, если данный одночленъ представить въ несокращенномъ видѣ, то онъ будетъ:

$$7aaabbcdddd,$$

а извѣстно, что величина произведенія не измѣняется отъ перестановки множителей.

Какой порядокъ умноженія прямо видѣнъ изъ формулы, написанной безъ показателей? Надо 7 умножить на a, произведеніе еще на a, новое произведеніе еще на a и т. д.

Въ такомъ порядкѣ *обыкновенно и дѣлается вычисленіе одночлена* съ коеффиціентомъ и показателями. При этомъ сначала умноженія обозначаются, потомъ производятся возможныя сокращенія и наконецъ окончательно вычисляется формула.

Сдѣлайте вычисленіе данной формулы въ этомъ порядкѣ.

$$x = \frac{7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot}{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot} = \frac{4 \cdot 4 \cdot 4}{5 \cdot 3} = 4\frac{4}{15}.$$

§ 20. Характеръ упражненій.

Прежнія упражненія разнообразятся введеніемъ показателя. Учащіеся составляютъ упрощенныя формулы для рѣшенія задачъ. Данный одночленъ, выраженный въ несокращенномъ видѣ, пишутъ сокращенно посредствомъ коеффиціента и показателей, и обратно. Вычисляютъ одночлены и многочлены по даннымъ численнымъ значеніямъ буквъ.

Повторительные вопросы и задачи, относящіеся къ этому отдѣлу, смотри въ „Вопрос. и задач.“ (пособіе для учащихся) въ отдѣлѣ V.

c) Посредствомъ приведенія подобныхъ членовъ.

§ 21. Многочленъ съ одною буквою въ каждомъ членѣ и всѣ члены его подобны.

Возьмемъ формулу:

$$x = 7a - 3a + 6a - 2a.$$

Эта формула представляетъ одночленъ или многочленъ?

На какой порядокъ дѣйствій указываетъ формула для вычисленія многочлена? Сначала надо вычислить величину каждаго члена, потомъ изъ перваго числа вычесть второе, къ разности прибавить третье и изъ суммы вычесть четвертое.

Какое другое, болѣе удобное правило, было выведено для вычисленія многочлена? Вычислить величину каждаго члена, потомъ сложить между собою всѣ члены съ + и безъ знака, сложить между собою всѣ члены съ — и наконецъ послѣднюю сумму вычесть изъ первой.

Нельзя-ли упростить этотъ многочленъ до вычисленія, не зная численной величины a? Можно совершить съ членами многочлена указанныя въ немъ сложенія и вычитанія. Изъ $7a$ вычесть $3a$, будетъ $4a$; къ $4a$ прибавить $6a$, будетъ $10a$; изъ $10a$ вычесть $2a$, будетъ $8a$. И такъ $x = 8a$.

Какъ еще иначе упростить многочленъ, придерживаясь того порядка, въ какомъ производится его вычисленіе? Къ $7a$ прибавить $6a$, будетъ $13a$; къ $3a$ прибавить $2a$, будетъ $5a$; изъ $13a$ вычесть $5a$, будетъ $8a$.

Какъ складываются два члена, напр. $2a$ и $3a$? Складываются только коеффиціенты, а буква a пишется безъ перемѣны послѣ числа, полученнаго отъ сложенія коеффиціентовъ.

Можно-ли, не зная численной величины буквъ, упростить слѣдующій многочленъ:

$$x = 7a - 3b + 6c - 2d.$$

Нельзя, потому что члены его содержатъ въ себѣ разныя буквы.

§ 22. Члены многочлена всѣ подобны и въ каждомъ членѣ болѣе одной буквы.

Возьмемъ многочленъ: $8ab - 3ab + 9ab - 10ab$.

Что показываютъ здѣсь коеффиціенты 8, 3, 9, 10?

Можно-ли упростить этотъ многочленъ, не зная численной величины буквъ a и b? Можно; если къ $8ab$ прибавить $9ab$, то будетъ $17ab$; изъ $17ab$ вычесть $13ab$, останется $4ab$.

Можно-ли многочленъ: $8ab - 3cd + 9ab - 10bd$ упростить, не зная численной величины входящихъ въ него буквъ? Нельзя, потому что буквы въ его членахъ различны.

§ 23. Многочленъ, всѣ члены котораго подобны и имѣютъ показателей.

Возьмемъ многочленъ: $12a^3b^2 - 5a^3b^2 + 8a^3b^2 - 9a^3b^2$.

Что показываютъ здѣсь коеффиціенты 12, 5, 8, 9?

Можно-ли упростить этотъ многочленъ до вычисленія, не зная численной величины буквъ? Можно: къ $12a^3b^2$ прибавить $8a^3b^2$, будетъ $20a^3b^2$; къ $5a^3b^2$ прибавить $9a^3b^2$, будетъ $14a^3b^2$; изъ $20a^3b^2$ вычесть $14a^3b^2$, будетъ $6a^3b^2$.

Можно-ли многочленъ: $12a^3b^2 - 5a^2b^3 + 8a^4b - 9a^2b^2$ упростить, не зная численной величины буквъ? Нельзя, потому что хотя буквы въ членахъ его одинаковы, но показатели у однѣхъ и тѣхъ же буквъ различны.

И такъ, какіе многочлены можно упрощать посредствомъ сложенія и вычитанія ихъ членовъ, не зная численной величины входящихъ въ нихъ буквъ? Посредствомъ сложенія и вычитанія членовъ можно упрощать такіе многочлены, въ которыхъ члены имѣютъ одинаковыя буквы и у одинаковыхъ буквъ равные показатели, но могутъ имѣть различные коеффиціенты и различные знаки.

Такіе члены называются *подобными*, а самое упрощеніе многочлена называется *приведеніемъ подобныхъ членовъ*.

И такъ, какіе члены многочлена называются подобными между собою? Такіе, въ составъ которыхъ входятъ одинаковыя буквы съ соотвѣтственно одинаковыми показателями.

По какому правилу дѣлается приведеніе подобныхъ членовъ въ такомъ многочленѣ, всѣ члены котораго подобны между собою? 1) Складываются между собою всѣ члены со знакомъ + и членъ безъ знака; 2) складываются между собою всѣ члены со знакомъ — ; 3) послѣдняя сумма вычитается изъ первой.

Какъ дѣлается сложеніе и вычитаніе подобныхъ членовъ? Складываются и вычитаются только коеффиціенты, а слѣдующій за ними буквенный одночленъ пишется безъ перемѣны.

§ 24. Приведеніе подобныхъ членовъ такого многочлена, въ которомъ есть различныя группы подобныхъ членовъ.

Возьмемъ многочленъ:

$$7a^2b + 8b^3c - 3a^2b + 9c^2d^2 + 4b^3c - 2a^2b - 3c^2d^2 - 5b^3c + 4c^2d^2 + 4a^2b - 3b^3c - 15c^2d^2.$$

Всѣ-ли члены этого многочлена подобны между собою? Не всѣ подобны, потому что нѣкоторые отличаются между собою или буквами, или показателями надъ одинаковыми буквами; но въ этомъ многочленѣ есть различныя группы подобныхъ членовъ.

Сколько здѣсь такихъ группъ? Три.

Какіе подобные члены принадлежатъ къ первой группѣ? $7a^2b$, $3a^2b$, $4a^2b$, $2a^2b$.

Какіе подобные члены принадлежатъ ко второй, къ третьей группѣ?

Можно-ли упростить этотъ многочленъ, не зная численной величины входящихъ въ него буквъ? Можно упростить, дѣлая приведеніе подобныхъ членовъ по группамъ.

Напишите всѣ члены многочлена въ такомъ порядкѣ, чтобы видно было, что можно въ немъ сдѣлать приведеніе подобныхъ членовъ по группамъ.

$$7a^2b - 3a^2b + 4a^2b - 2a^2b + 8b^3c + 4b^3c - 5b^3c - 3b^3c + 9c^2d^2 + 4c^2d^2 - 3c^2d^2 - 15c^2d^2.$$

Въ какомъ видѣ представится многочленъ послѣ приведенія подобныхъ членовъ въ первой группѣ?

$$6a^2b + 8b^3c + 4b^3c - 5b^3c - 3b^3c + 9c^2d^2 + 4c^2d^2 - \\ - 3c^2d^2 - 15c^2d^2.$$

На какой порядокъ дальнѣйшихъ сложеній и вычитаній указываетъ теперь многочленъ? Къ $6a^2b$ прибавить $8b^3c$, къ суммѣ прибавить $4b^3c$, изъ этой суммы вычесть $5b^3c$ и т. д.

Что случится съ $6a^2b$, если къ нему придать $8b^3c$ и $4b^3c$? Увеличится на сумму $12b^3c$.

Что случится съ $6a^2b$, если вычесть изъ него $5b^3c$ и $3b^3c$? Уменьшится на сумму $8b^3c$.

Что случится съ $6a^2b$, если къ нему придать $12b^3c$ и отнять $8b^3c$? Число $6a^2b$ увеличится на разность $12b^3c - 8b^3c$, то есть на $4b^3c$.

Поэтому, вмѣсто послѣдовательнаго придаванія и вычитанія всѣхъ членовъ второй группы, какое можно сдѣлать одно дѣйствіе съ $6a^2b$? Придать къ нему $4b^3c$.

Въ какомъ видѣ представится многочленъ послѣ приведенія подобныхъ членовъ во второй группѣ?

$$6a^2b + 4b^3c + 9c^2d^2 + 4c^2d^2 - 3c^2d^2 - 15c^2d^2.$$

Какой порядокъ сложеній и вычитаній указывается въ этомъ многочленѣ? Къ $6a^2b$ прибавить $4b^3c$, къ суммѣ прибавить $9c^2d^2$, къ суммѣ прибавить $4c^2d^2$, отъ полученной суммы отнять $3c^2d^2$ и отъ полученной разности еще отнять $15c^2d^2$.

Что случится съ численной величиной двучлена $6a^2b + 4b^3c$, если къ нему прибавить $9c^2d^2$ и $4c^2d^2$? Увеличится на численную величину суммы $9c^2d^2 + 4c^2d^2$, т. е. на сумму $13c^2d^2$.

Что случится съ численной величиной двучлена $6a^2b + 4b^3c$, если изъ него вычесть $3c^2d^2$ и $15c^2d^2$? Уменьшится на $18c^2d^2$.

Что случится съ численной величиной двучлена $6a^2b + 4b^3c$, если къ нему придать $13c^2d^2$ и потомъ отнять $18c^2d^2$? Она уменьшится на разность $18c^2d^2 - 13c^2d^2$, то есть на $5c^2d^2$.

Поэтому вмѣсто послѣдовательнаго придаванія и вычитанія всѣхъ членовъ третьей группы, какое одно дѣйствіе можно сдѣлать съ двучленомъ $6a^2b + 4b^3c$? Вычесть изъ него $5c^2d^2$.

Какой тогда получится упрощенный многочленъ?

$$6a^2b + 4b^3c - 5c^2d^2.$$

Какое различіе можно замѣтить между приведеніемъ подобныхъ членовъ второй группы и третьей группы? Во второй группѣ сумму членовъ съ знакомъ — вычитали изъ суммы членовъ съ + и полученную разность въ упрощенный многочленъ поставили съ +. Въ третьей группѣ сумму членовъ съ + вычитали изъ суммы членовъ съ — и полученную разность въ упрощенный многочленъ поставили со знакомъ —.

Чѣмъ можно объяснить необходимость такого различія въ способахъ приведенія подобныхъ членовъ? Тѣмъ, что во второй группѣ сумма членовъ съ + больше суммы членовъ съ —, и слѣдовательно присоединеніе всѣхъ членовъ второй группы къ $6a^2b$ поведетъ къ увеличенію численной величины $6a^2b$: между тѣмъ, въ третьей группѣ сумма членовъ съ — больше суммы членовъ съ +, а потому присоединеніе всѣхъ членовъ этой группы къ $6a^2b + 4b^3c$ поведетъ къ уменьшенію численной величины двучлена $6a^2b + 4b^3c$.

И такъ, какія-же общія правила можно вывести для приведенія подобныхъ членовъ многочлена? 1) Надо подъискать въ многочленѣ группы подобныхъ членовъ; 2) для приведенія подобныхъ членовъ первой группы надо сложить между собою всѣ члены съ + и членъ безъ знака, сложить между собою всѣ члены съ —, послѣднюю сумму вычесть изъ первой и разность написать въ составъ упрощеннаго многочлена безъ знака; 3) для приведенія подобныхъ членовъ каждой изъ прочихъ группъ надо сложить между собою всѣ члены съ знакомъ +, сложить между собою всѣ члены съ знакомъ —, меньшую сумму вычесть изъ большей и разность написать въ упрощенномъ многочленѣ со знакомъ большей суммы. Если обѣ суммы будутъ равны, то разность ихъ будетъ нуль, который вовсе не пишется.

§ 25. Характеръ упражненій.

Упражненія состоятъ въ упрощеніи многочленовъ, имѣющихъ подобные члены и въ вычисленіи многочлена до упрощенія и послѣ упрощенія посредствомъ приведенія въ немъ подобныхъ членовъ.

Учащіеся на одномъ и томъ-же многочленѣ, вычисляя его до упрощенія и послѣ упрощенія, убѣждаются, что приведеніе подобныхъ членовъ значительно сокращаетъ нахожденіе численной величины многочлена, но не измѣняетъ этой численной величины.

Повторительные вопросы и задачи, относящіеся къ этому отдѣлу, см. въ „Вопр. и Задач." (пособіе для учащихся) въ Отдѣлѣ VI.

ОТДѢЛЪ II.

УРАВНЕНІЕ.

ГЛАВА I.

Понятіе объ уравненіи, его составленіе и рѣшеніе.

§ 26. Анализъ задачъ.

Задача. Портной продалъ 4 пары платья по 30 р. за пару, къ вырученнымъ деньгамъ добавилъ 20 рублей и составившуюся такимъ образомъ сумму раздѣлилъ поровну между 7-ю рабочими. Каждый рабочій изъ своей части внесъ 6 р. въ артельную кассу. Сколько осталось денегъ у каждаго рабочаго послѣ взноса въ кассу?

Рѣшайте задачу устно! Отв. 14 р.

По какой формулѣ рѣшается эта задача?

$$x = \frac{30 \cdot 4 + 20}{7} - 6.$$

Что показываетъ формула $30 \cdot 4$? — Какъ узнать, сколько портной получилъ за 4 пары платья.

Что показываетъ формула $30 \cdot 4 + 20$? — Какъ узнать, сколько онъ роздалъ рабочимъ денегъ.

Что показываетъ формула $\frac{30 \cdot 4 + 20}{7}$? Какъ узнать, сколько получилъ отъ хозяина каждый работникъ.

Вся формула? Какими дѣйствіями узнать, сколько осталось денегъ у каждаго работника послѣ взноса въ кассу.

Почему написана не одна формула, а цѣлое равенство? Потому что изъ одной формулы не видно явно, что дѣйствія дѣлаются для отысканія неизвѣстнаго.

И такъ, какимъ же выраженіемъ показывается явно и кратко рѣшеніе задачи? — Рѣшеніе задачи явно и кратко показывается равенствомъ, въ первой части котораго находится неизвѣстное, а во второй — формула, показывающая, какія дѣйствія надо сдѣлать надъ данными числами для отысканія неизвѣстнаго.

Задача I. Портной продалъ 5 паръ платья по одинаковой цѣнѣ, къ вырученнымъ деньгамъ добавилъ 30 рублей и составившуюся чрезъ это сумму, раздѣлилъ поровну между 14-ю рабочими. Каждый рабочій внесъ изъ своей части 7 рублей въ артельную кассу и послѣ взноса у него осталось 13 рублей. Почемъ продалъ портной каждую пару платья?

Рѣшайте задачу устно! — Отв. По 50 р.

По какой формулѣ рѣшается эта задача?

$$x = \frac{(13 + 7) \cdot 14 - 30}{5}.$$

Что показываетъ эта формула? Какія дѣйствія надо сдѣлать надъ данными числами для отысканія неизвѣстнаго.

Какую формулу было легче составить, эту или въ предыдущей задачѣ, и почему? — Въ предыдущей легче, потому что изъ условій предыдущей задачи прямо видно, какія дѣйствія надо сдѣлать надъ данными числами, чтобы получить неизвѣстное. Изъ условій же этой задачи прямо видны дѣйствія, которыя надо сдѣлать надъ *неизвѣстнымъ* и *данными* для полученія даннаго числа 13, а по нимъ уже можно судить и о необходимыхъ дѣйствіяхъ надъ данными для отысканія неизвѣстнаго.

Какія именно дѣйствія надъ неизвѣстнымъ и данными слѣдуютъ прямо изъ условій этой задачи для полученія даннаго числа 13? — Портной продалъ 5 паръ платья по одинаковой цѣнѣ, значитъ можно узнать вырученную сумму, если неизвѣстную цѣну *платья умножить на 5. Къ вырученной суммѣ портной* добавилъ 30 рублей, значитъ можно узнать составившуюся чрезъ это сумму, если къ предыдущему произведенію прибавить 30. Составившуюся сумму портной раздѣлилъ поровну между 14-ю рабочими, значитъ можно узнать часть каждаго рабочаго, если предыдущую сумму раздѣлить на 14. Каждый рабочій изъ своей части внесъ въ кассу 7 р., слѣдовательно можно узнать остатокъ 13 рублей, если изъ предыдущаго частнаго вычесть 7 рублей.

И такъ, на какіе 2 разряда можно раздѣлить задачи по трудности ихъ рѣшенія? — Къ первому разряду относятся такія задачи, изъ условій которыхъ прямо видны дѣйствія, которыя надо сдѣлать надъ данными для отысканія неизвѣстнаго. Ко второму разряду относятся такія задачи, изъ условій которыхъ прямо видны дѣйствія надъ неизвѣстнымъ и данными для полученія нѣкоторой опредѣленной величины.

Такъ какъ задачи, подобныя второй, рѣшаются труднѣе, то для рѣшенія ихъ есть особенный способъ, которымъ мы теперь и займемся.

§ 27. *Основные виды уравненія и рѣшеніе ихъ при помощи разсужденія, соотвѣтствующаго каждому виду.*

Посмотримъ, какъ при помощи знаковъ можно сокращенно записать послѣднюю задачу.

Какое неизвѣстное въ задачѣ? — Цѣна одной пары платья.

Обозначимъ его буквою x.

Въ видѣ какой формулы можно тогда записать сумму, вырученную отъ продажи платья и почему? Отв. $5x$, потому что 5 паръ въ 5 разъ дороже одной пары.

Въ видѣ какой формулы можно потомъ записать сумму, выданную всѣмъ рабочимъ вмѣстѣ? — $5x + 30$, потому что къ суммѣ, вырученной отъ продажи платья, портной добавилъ 30 рублей, чтобы сдѣлать уплату рабочимъ.

Какъ записать сумму, выданную каждому рабочему? — $\frac{5x+30}{14}$, потому что одному приходится въ 14 разъ меньше, чѣмъ 14-ти.

Какъ записать сумму, которая осталась у каждаго рабочаго послѣ взноса въ кассу? — $\frac{5x+30}{14} - 7$, потому что изъ полученной части каждый рабочій внесъ 7 рублей въ кассу.

А что въ задачѣ сказано о суммѣ, которая осталась у каждаго рабочаго послѣ взноса въ кассу? — Осталось у каждаго 13 рублей.

Какъ это записать знаками? —

$$\frac{5x+30}{14} - 7 = 13.$$

Прочитайте задачу словами?

Прочитайте задачу, какъ она записана на доскѣ, знаками?

Какъ короче?

Полученное выраженіе можно ли назвать равенствомъ? — Можно, потому что равенствомъ называется два числа, соединенныя между собою знакомъ равенства, а $\frac{5x+30}{14} - 7$ представляетъ нѣкоторое число.

Показываетъ ли это равенство, подобно прежнимъ, рѣшеніе задачи? — Нѣтъ, потому что въ прежнихъ равенствахъ въ первой части находилось только неизвѣстное, а во второй — формула, показывавшая, какія дѣйствія надо сдѣлать надъ *данными* числами, чтобы получить неизвѣстное x. Въ нашемъ же равенствѣ въ первой части находится формула, показывающая, какія дѣйствія надо сдѣлать надъ *неизвѣстнымъ* и данными, а во второй — *данное число*, которое получится, если сдѣлать дѣйствія, указанныя въ этой формулѣ.

Что же показываетъ это равенство относительно задачи? — Это равенство показываетъ *содержаніе* задачи.

Такое равенство называется *уравненіемъ*.

Въ уравненіи, какъ и въ равенствѣ, различаются двѣ части, первая и вторая.

При помощи этого уравненія можно найти и рѣшеніе задачи, т. е. узнать, чему равенъ x.

Что больше $\frac{5x+30}{14}$ или 13? — $\frac{5x+30}{14}$ болѣе 13-ти, потому что оно равно 13-ти только тогда, когда изъ него вычтено 7.

Какъ поэтому изъ 13 получить $\frac{5x+30}{14}$? — Надо къ 13-ти прибавить 7.

Какъ записать это? —

$$\frac{5x+30}{14} = 13 + 7.$$

Что больше $5x+30$ или $13+7$ и во сколько разъ? — $5x+30$ больше $13+7$ въ 14 разъ, потому что оно только тогда равно $13+7$, когда раздѣлено на 14.

Какъ поэтому получить $5x+30$ изъ $13+7$? — Надо $13+7$ умножить на 14.

Какъ записать это въ видѣ равенства? —

$$5x+30=(13+7)\cdot 14.$$

Что меньше $5x$ или $(13+7)\cdot 14$? — $5x$ меньше $(13+7)\cdot 14$ на 30, потому что оно только тогда равно $(13+7)\cdot 14$, когда къ нему прибавлено 30.

Какъ поэтому получить $5x$ изъ $(13+7)\cdot 14$? — Надо изъ $(13+7)\cdot 14$ вычесть 30.

Какъ записать это въ видѣ равенства? —

$$5x=(13+7)\cdot 14 - 30.$$

Что меньше x или $(13+7)\cdot 14 - 30$? — x меньше $(13+7)\cdot 14 - 30$ въ 5 разъ, потому что x только тогда равно $(13+7)\cdot 14 - 30$, когда умножено на 5.

Какъ поэтому получить x изъ $(13+7)\cdot 14 - 30$? — $(13+7)\cdot 14 - 30$ надо раздѣлить на 5.

Какъ записать это въ видѣ равенства? —

$$x = \frac{(13+7)\cdot 14 - 30}{5}.$$

Послѣднее равенство показываетъ ли рѣшеніе задачи? — Показываетъ, потому что въ первой части его находится только x, а во второй формула, показывающая. какія дѣйствія надо сдѣлать надъ данными числами для отысканія этого неизвѣстнаго x.

Когда нашли такую формулу, то говорятъ, что *рѣшили уравненіе.* Самая формула или число 50, полученное отъ ея вычисленія, называется *корнемъ уравненія.*

Задача II. *Четыре купца* торговали вмѣстѣ 2 года и получили прибыли въ первый годъ — 13000 руб., а во второй — 17000 рубл. Какъ имъ раздѣлить всю полученную прибыль, если второй купецъ долженъ получить вдвое болѣе перваго, третій — втрое болѣе перваго, а четвертый — 6000 р.

Какія дѣйствія въ этой задачѣ прямо слѣдуютъ изъ ея условій: дѣйствія надъ данными для отысканія неизвѣстнаго, или же дѣйствія *надъ неизвѣстнымъ* и данными для полученія нѣкоторой опредѣленной величины? — Вторыя.

Какія именно? — Часть перваго купца надо увеличить въ два раза, получится часть втораго купца; часть перваго купца надо увеличить втрое, получится часть третьяго купца; сложить части перваго, втораго, третьяго купца и 6000 р., получится вся прибыль, которая состоитъ изъ 13000 рубл. вмѣстѣ съ 17000 р.

Какъ поэтому лучше рѣшать задачу, прямо посредствомъ формулы или при помощи уравненія? — При помощи уравненія.

Будемъ же составлять уравненіе.

Сколько неизвѣстныхъ въ этой задачѣ? — Три.

Какое изъ нихъ удобнѣе для составленія уравненія и почему? — Первое, потому что легко замѣтить необходимыя надъ нимъ дѣйствія для полученія всей прибыли.

Если обозначить часть перваго купца чрезъ x, то какое будетъ уравненіе? —

$$x + 2x + 3x + 6000 = 13000 + 17000.$$

Что означаетъ x, $2x$, $3x$, 6000, $x + 2x + 3x + 6000$, $13000 + 17000$? —

Почему поставленъ знакъ равенства между двумя формулами? — Потому что обѣ онѣ означаютъ одну и ту же величину, именно одну и ту же прибыль.

Представляетъ ли это равенство рѣшеніе задачи?

Почему это равенство можно назвать уравненіемъ?

Что находится въ первой и во второй части этого уравненія? — Въ первой — формула, составленная изъ неизвѣстнаго и данныхъ чиселъ, а во второй — формула изъ данныхъ чиселъ.

Что сходнаго и различнаго въ этихъ двухъ формулахъ? — Обѣ означаютъ одну и ту же величину, но въ различныхъ видахъ.

Будемъ же при помощи уравненія рѣшать самую задачу.

Какъ написать проще обѣ части уравненія?

$$6x + 6000 = 30000.$$

Что меньше $6x$ или 30000 и на сколько?

Какъ поэтому получить $6x$ изъ 30000? — Надо 6000 вычесть изъ 30000.

Въ какомъ видѣ тогда представится уравненіе?

$$6x = 24000.$$

Что меньше x или 24000 и во сколько разъ?

Какъ поэтому получить x изъ 24000?

Какъ записать это въ видѣ равенства?

$$x = \frac{24000}{6}.$$

Если вычислить, то что получится? —

$$x = 4000.$$

Когда нашли $x = 4000$, то говорятъ, что *рѣшили уравненіе*. Число 4000 называется *корнемъ уравненія*.

Вполнѣ ли мы рѣшили задачу? — Нѣтъ, отвѣтили только на первый вопросъ.

Какъ узнать часть втораго купца, часть третьяго?

Какъ при помощи уравненія повѣрить, что задача рѣшена вѣрно? — Вмѣсто x надо поставить 4000 въ уравненіе и сдѣлать въ обѣихъ частяхъ указанныя дѣйствія. Результаты въ обѣихъ частяхъ должны быть равны.

Задача III. Отецъ оставилъ 3-мъ сыновьямъ наслѣдство, которое они должны раздѣлить слѣдующимъ образомъ: первый долженъ получить $1/2$ всего наслѣдства безъ 1000 рублей, второй — $1/3$ всего наслѣдства безъ 800 р., а третій — $1/4$ всего наслѣдства безъ 600 руб. Спрашивается, какъ велико все наслѣдство и сколько получилъ каждый? —

Какія дѣйствія прямо слѣдуютъ изъ условій задачи: дѣйствія надъ данными для отысканія неизвѣстнаго, или же дѣйствія надъ неизвѣстнымъ и данными для полученія нѣкоторой опредѣленной величины? — Послѣднія.

Сколько неизвѣстныхъ въ задачѣ и какія?

Какое удобнѣе для составленія уравненія и почему? —

Все наслѣдство.

Если обозначить все наслѣдство черезъ x, то какое будетъ уравненіе? —

$$1/2\,x - 1000 + 1/3\,x - 800 + 1/4\,x - 600 = x.$$

Что означаетъ формула $1/2\,x - 1000$, $1/3\,x - 800$, $1/4\,x - 600$, вся формула $1/2\,x - 1000 + 1/3\,x - 800 + 1/4\,x - 600$?

Почему между всей формулой и неизвѣстнымъ поставленъ знакъ равенства?

Почему все выраженіе можно назвать равенствомъ?

Почему это равенство не показываетъ рѣшенія задачи?

Почему это равенство можно назвать уравненіемъ?

Что находится въ первой и во второй частяхъ этого уравненія?

Въ чемъ сходство и различіе между обѣими частями уравненія?

Будемъ при помощи этого уравненія рѣшать задачу.

Какъ упростить первую часть уравненія? — Сложить между собою $1/2\,x$, $1/3\,x$, $1/4\,x$; сложить между собою 1000, 800 и 600 и послѣднюю сумму вычесть изъ первой.

Въ какомъ видѣ представится тогда уравненіе? —

$$13/12\,x - 2400 = x.$$

Сколькими частями $13/12\,x$ больше x? — На $1/12\,x$.

А на сколько рубл. $13/12\,x$ больше x? — На 2400.

Слѣдовательно, чему равна $1/12\,x$?

$$1/12\,x = 2400.$$

Поэтому чему равенъ x?

$$x = 2400 \times 12.$$
$$x = 28800.$$

Какъ называется число 28800 относительно уравненія?

Какъ называется отысканіе числа 28800 относительно уравненія? — *Рѣшеніемъ уравненія.*

Какъ повѣрить, что уравненіе рѣшено вѣрно?

Задача IV. Въ пачкѣ нѣсколько грифелей. Если дать по 5 каждому мальчику, то останется 3 грифеля; если же дать по 3 грифеля каждому, то останется 7 грифелей. Сколько мальчиковъ и сколько грифелей?

Какія дѣйствія прямо слѣдуютъ изъ условій задачи: дѣйствія надъ данными для полученія неизвѣстнаго, или надъ неизвѣстнымъ и данными для полученія нѣкоторой опредѣленной величины? — Послѣднія.

Сколько неизвѣстныхъ въ задачѣ и какія?

Какое удобнѣе для составленія уравненія и почему? — Число мальчиковъ, потому что и т. д.

Если обозначить число мальчиковъ чрезъ x, то какое будетъ уравненіе задачи? —

$$5x + 3 = 3x + 7.$$

Что означаетъ формула $5x + 3$? — Какія дѣйствія надо сдѣлать надъ неизвѣстнымъ и данными, на основаніи перваго способа раздачи, для полученія числа грифелей.

Что означаетъ формула $3x + 7$?

Почему между двумя формулами поставленъ знакъ равенства?

Почему все выраженіе можно назвать равенствомъ?

Почему это равенство не показываетъ рѣшенія задачи?

Почему это равенство можно назвать уравненіемъ?

Что находится въ первой и во второй частяхъ этого уравненія?

Въ чемъ сходны и чѣмъ различаются эти формулы? — Сходны въ томъ, что показываютъ одну и ту же величину, а различны по виду.

Будемъ при помощи уравненія рѣшать задачу.

Что больше $5x$ или $3x$ и на сколько? — $5x$ больше $3x$ на $2x$.

Почему, не смотря на то, что $5x > 3x$, все-таки $5x + 3$ равно $3x + 7$? — Потому что къ $5x$ прибавляется только 3, а къ $3x$ прибавляется 7, на 4 больше.

Слѣдовательно, чему равны $2x$? — $2x = 4$.

Что меньше x или 4, и какъ получить x изъ 4-хъ? —

$$x = {}^4/_2,\ x = 2.$$

Какъ называется число 2 относительно уравненія?
Какъ называется отысканіе числа 2 относительно уравненія?
Какъ найти другое неизвѣстное?
Какъ повѣрить, что уравненіе рѣшено вѣрно?

§ 28. Опредѣленіе уравненія, его корня и рѣшенія.

Какое равенство показываетъ рѣшеніе задачи? — Рѣшеніе задачи показываетъ равенство, въ первой части котораго находится неизвѣстное, а во второй — формула изъ данныхъ чиселъ.

Какое равенство можетъ показывать содержаніе задачи?

1) Такое, въ первой части котораго находится формула изъ неизвѣстнаго и данныхъ чиселъ, а во второй — данное число.

2) Такое, въ первой части котораго находится формула изъ неизвѣстнаго и данныхъ чиселъ, а во второй — формула изъ данныхъ чиселъ.

3) Такое, въ первой части котораго находится формула изъ неизвѣстнаго и данныхъ чиселъ, а во второй — неизвѣстное число.

4) Такое, въ обѣихъ частяхъ котораго находятся различныя формулы, составленныя изъ неизвѣстнаго и данныхъ чиселъ.

Какъ мы называли равенство, показывающее содержаніе задачи? — Уравненіемъ.

И такъ, что же называется уравненіемъ? — Уравненіемъ называется такое равенство, которое показываетъ содержаніе задачи. Въ одной его части всегда находится формула, составленная изъ неизвѣстнаго и данныхъ чиселъ, а въ другой — или данное число, или формула изъ данныхъ чиселъ, или неизвѣстное число, или формула изъ неизвѣстнаго и данныхъ чиселъ.

Какъ короче опредѣлить уравненіе? —

Уравненіе есть равенство, выражающее содержаніе задачи. Въ одной или въ обѣихъ частяхъ его указываются дѣйствія надъ неизвѣстнымъ и данными.

Какую общую (отвлеченную) задачу представляетъ всякое уравненіе само по себѣ? Найти такое число, что если надъ нимъ и данными числами исполнить нѣкоторыя дѣйствія, то получится нѣкоторая опредѣленная величина.

Когда рѣшали уравненіе, то что находили для неизвѣстнаго? Или формулу, которая показывала, какія дѣйствія надо сдѣлать надъ данными числами для отысканія неизвѣстнаго, или число.

И такъ что же значитъ рѣшить уравненіе? —

Рѣшить уравненіе, значитъ найти формулу, показывающую дѣйствія, которыя надо исполнить надъ данными числами для отысканія неизвѣстнаго, или просто численное значеніе неизвѣстнаго.

Какъ мы называли такую формулу или число? Корнемъ уравненія.

И такъ, что же называется корнемъ уравненія? Корнемъ уравненія называется или формула, указывающая дѣйствія надъ данными числами для отысканія неизвѣстнаго, или число, найденное для неизвѣстнаго.

Почему можно говорить: „рѣшить уравненіе“ вмѣсто „рѣшить задачу“? — Потому что уравненіе представляетъ самую задачу, только выраженную въ видѣ равенства.

Какъ повѣрить, что уравненіе рѣшено вѣрно? Надо число, найденное для неизвѣстнаго, подставить вмѣсто x въ уравненіе и сдѣлать указанныя въ обѣихъ частяхъ дѣйствія. Два числа, полученныя отъ вычисленія обѣихъ частей уравненія, должны быть между собою равны.

§ 29. Составленіе уравненія.

Что называется уравненіемъ? — Уравненіемъ называется равенство, показывающее содержаніе задачи. Въ одной или въ обѣихъ частяхъ его указываются дѣйствія надъ неизвѣстнымъ и данными числами.

Какіе виды уравненія мы встрѣчали?

Почему между двумя частями уравненія ставится знакъ равенства? — Потому что обѣ части уравненія всегда означаютъ одну и ту же величину.

Чѣмъ различаются одна отъ другой обѣ части уравненія? — Обѣ части уравненія различаются видомъ: или числами, или дѣйствіями, или тѣмъ и другимъ вмѣстѣ.

Слѣдовательно, кромѣ неизвѣстнаго. какую величину изъ входящихъ въ задачу надо еще выбрать для составленія уравненія? Надо выбрать такую величину, которую посредствомъ неизвѣстнаго и данныхъ можно выразить въ двухъ видахъ.

Какъ обыкновенно обозначается неизвѣстное при составленіи уравненія? — Какой-нибудь изъ послѣднихъ буквъ латинской азбуки, чаще всего буквой x.

И такъ, какъ же надо поступать для составленія уравненія? 1) Надо неизвѣстное обозначить какой-нибудь буквой, напр. x. 2) Между величинами, входящими въ задачу, выбрать такую, которую посредствомъ неизвѣстнаго и данныхъ можно выразить въ двухъ видахъ. 3) Дѣйствительно выразить эту величину посредствомъ неизвѣстнаго и данныхъ въ двухъ видахъ. 4) Полученныя два выраженія соединить знакомъ равенства.

Какъ сказать это правило для каждаго изъ четырехъ видовъ уравненія отдѣльно? —

Надо во всякомъ случаѣ обозначить неизвѣстное буквой x. Потомъ для полученія уравненія перваго вида надо изъ неизвѣстнаго и данныхъ составить такую формулу, которая означала бы ту же самую величину, какъ и нѣкоторое данное число, затѣмъ эту формулу и число соединить между собою знакомъ равенства.

Для полученія уравненія втораго вида надо составить 2 формулы, одну изъ неизвѣстнаго и данныхъ чиселъ, другую изъ однихъ данныхъ чиселъ, но чтобы обѣ онѣ означали одну и ту же величину, и эти 2 формулы соединить между собою знакомъ равенства.

Чтобы получить уравненіе третьяго вида, надо изъ неизвѣстнаго и данныхъ составить формулу, которая означала бы ту же величину, какъ и само неизвѣстное, и полученную формулу и неизвѣстное число соединить знакомъ равенства.

Чтобы получить уравненіе четвертаго вида, надо изъ неизвѣстнаго и данныхъ составить такія 2 формулы, которыя означали бы одну и ту же величину, но были бы разнаго вида, и эти двѣ формулы соединить знакомъ равенства.

Относительно какого неизвѣстнаго мы составляли уравненіе въ тѣхъ случаяхъ, когда задача содержала нѣсколько неизвѣстныхъ? — Въ такихъ случаяхъ мы составляли уравненіе относительно того неизвѣстнаго, дѣйствія надъ которымъ для полученія нѣкоторой опредѣленной величины, прямо слѣдовали изъ условій задачи.

Слѣдовательно, какъ надо поступить для составленія уравненія въ томъ случаѣ, когда задача содержитъ нѣсколько неизвѣстныхъ?

Въ такомъ случаѣ между всѣми неизвѣстными надо выбрать такое, дѣйствія надъ которымъ, для полученія нѣкоторой опредѣленной величины, прямо слѣдуетъ изъ условій задачи; послѣ этого надо выбранное неизвѣстное обозначить какой-нибудь буквой, напр. x, а дальше относительно этого неизвѣстнаго поступать такъ же, какъ и въ томъ случаѣ, когда задача содержитъ одно неизвѣстное.

§ 30. Рѣшеніе уравненія по общему правилу.

Что называется уравненіемъ?

Что значитъ рѣшить уравненіе?

Къ какому окончательному равенству приводитъ рѣшеніе уравненія? — Къ такому равенству, въ первой части котораго находится неизвѣстное, а во второй — формула, показывающая дѣйствія надъ данными числами для отысканія неизвѣстнаго, или же просто численная величина неизвѣстнаго.

Чѣмъ это равенство отличается отъ уравненія?

Въ уравненіи въ первой части, а иногда и въ обѣихъ частяхъ дѣйствія указываются надъ неизвѣстнымъ и данными, а въ этомъ равенствѣ въ первой части находится только одно неизвѣстное, во второй же части дѣйствія указываются только надъ данными, или же просто находится численное значеніе неизвѣстнаго.

Слѣдовательно, чтобы отъ уравненія приблизиться къ равенству, показывающему рѣшеніе уравненія, отъ какихъ членовъ надо избавиться въ первой части уравненія, и отъ какихъ во второй. — Въ первой части надо избавиться отъ извѣстныхъ членовъ, а во второй отъ членовъ съ неизвѣстнымъ числомъ.

Посмотримъ, какъ можно этого достигнуть.

Задача. Если изъ данной бумаги дѣлать требуемое число тетрадей, по 12 листовъ каждая, то недостанетъ 8 листовъ. Если же сдѣлать столько же тетрадей, по 9 листовъ каждая, то останется 52 листа. — Сколько требуется сдѣлать тетрадей?

Сколько неизвѣстныхъ въ задачѣ? Два, число тетрадей и число листовъ всей бумаги.

Какое удобнѣе для составленія уравненія и почему? — Число тетрадей, потому что надъ нимъ изъ условій задачи прямо слѣдуютъ дѣйствія для полученія нѣкоторой величины, именно числа листовъ всей бумаги.

Если обозначимъ число тетрадей буквою x, то какъ послѣ того составлять уравненіе по выведенному правилу? — Изъ неизвѣстнаго и данныхъ надо составить двѣ формулы разнаго вида, но такія, которыя означали бы одну и ту же величину.

Какую именно величину въ настоящей задачѣ? — Число листовъ всей данной бумаги.

Какою формулой можно выразить число листовъ всей данной бумаги, судя по первому предположенію? —

Формулою $12x - 8$, потому что $12x$ означаетъ, сколько требуется листовъ бумаги для того, чтобы сдѣлать всѣ x тетрадей по 12 листовъ, а въ задачѣ сказано, что для этого въ данной бумагѣ не хватаетъ 8 листовъ.

Какою формулою можно выразить число листовъ всей данной бумаги, судя по второму предположенію? —

Формулою $9x + 52$, потому что $9x$ означаетъ, сколько требуется листовъ бумаги для x тетрадей по 9 листовъ каждая, а въ задачѣ сказано, что послѣ этого еще останется 52 листа изъ данной бумаги.

Слѣдовательно, какое будетъ уравненіе нашей задачи?

$$12x - 8 = 9x + 52.$$ У

Посмотримъ теперь, какъ рѣшить это уравненіе, причемъ будемъ искать для неизвѣстнаго его численную величину, а не формулу.

Чтобы отъ уравненія приблизиться къ равенству, показывающему рѣшеніе задачи, отъ какого члена надо избавиться въ первой части уравненія? —

Отъ извѣстнаго члена 8.

Если не напишемъ 8 въ первой части уравненія, а напишемъ въ ней только $12x$, то что случится съ первой частью уравненія? — Она увеличится, потому что въ ней 8 вычиталось изъ $12x$.

Останется ли первая часть равна второй части уравненія $(9x + 52)$? — Она будетъ больше второй части, потому что первая увеличилась, а вторая пока осталась безъ перемѣны.

Слѣдовательно, чтобы первая часть, $12x$, была равна второй части, что надо сдѣлать со второй частью? Надо къ ней прибавить 8.

Какъ записать уравненіе въ новомъ видѣ?

$$12x = 9x + 52 + 8.$$

Слѣдовательно, если хотимъ избавиться въ какой-нибудь части уравненія отъ такого члена, который вычитается, то какъ надо поступить, чтобы сохранить равенство двухъ частей уравненія? — Надо уничтожить его въ этой части, а къ другой прибавить.

Чтобы еще приблизиться къ равенству, показывающему рѣшеніе задачи, отъ какого члена надо избавиться во второй части новаго уравненія? — Отъ члена съ неизвѣстнымъ, $9x$.

Если во второй части уничтожить $9x$, то что въ ней останется? — $52 + 8$.

Что случится тогда съ второй частью? — Она уменьшится.

Чтобы она была равна первой, что надо сдѣлать съ первою частью? — Надо изъ нея вычесть $9x$.

Какъ записать уравненіе въ новомъ видѣ? —

$$12x - 9x = 52 + 8.$$

Слѣдовательно, если хотимъ въ какой-нибудь части уравненія избавиться отъ прибавляемаго члена, то какъ надо поступить, чтобы сохранить равенство двухъ частей уравненія? — Надо въ этой части его уничтожить, а изъ другой вычесть.

Нужно ли еще въ нашемъ послѣднемъ уравненіи переносить какіе-нибудь члены изъ первой части во вторую и изъ второй части въ первую? — Нѣтъ, потому что въ первой находятся всѣ члены съ неизвѣстнымъ, а во второй — всѣ извѣстные члены.

Такое измѣненіе вида уравненія, при которомъ какой-нибудь членъ переносится изъ одной части уравненія въ другую, называется *перенесеніемъ* членовъ.

Какія же 2 правила мы нашли для перенесенія членовъ? — Если какой-нибудь членъ въ одной части уравненія прикладывается къ другому члену формулы, то при перенесеніи въ другую часть, его слѣдуетъ вычитать. Если какой-нибудь членъ въ одной части уравненія вычитается, то при перенесеніи въ другую, его слѣдуетъ прикладывать.

Какъ сказать то же правило при помощи знаковъ $+$ и $-$? — При перенесеніи членовъ изъ одной части уравненія въ другую, знакъ члена измѣняется на обратный, т. е. $+$ на $-$, и $-$ на $+$.

Будемъ продолжать рѣшеніе уравненія.

Чѣмъ уравненіе въ послѣднемъ видѣ отличается отъ окончательнаго равенства, показывающаго рѣшеніе уравненія? — Въ послѣднемъ уравненіи въ обѣихъ частяхъ находятся двучлены, тогда какъ въ окончательномъ равенствѣ находятся одночлены, въ одномъ x, а въ другомъ численное значеніе неизвѣстнаго x.

Слѣдовательно, чтобы приблизиться къ окончательному равенству, показывающему рѣшеніе уравненія, что надо сдѣлать въ обѣихъ частяхъ нашего уравненія? — Приведеніе подобныхъ членовъ.

Сдѣлайте и скажите, какъ записать уравненіе въ новомъ простѣйшемъ видѣ! —

$$3x = 60.$$

Чѣмъ это уравненіе отличается отъ окончательнаго равенства, показывающаго рѣшеніе уравненія? —

Въ уравненіи неизвѣстное имѣетъ коеффиціентъ, а въ равенствѣ его нѣтъ.

Слѣдовательно, отъ чего надо избавиться въ уравненіи, чтобы перейти къ равенству, показывающему рѣшеніе задачи? — Надо избавиться отъ коэффиціента.

Какъ же избавиться отъ коэффиціента? — Надо извѣстную часть уравненія, 60, раздѣлить на коэффиціентъ 3, потому что x въ 3 раза меньше, чѣмъ $3x$.

Сдѣлайте и скажите, какъ записать равенство, показывающее рѣшеніе уравненія!

$$x = 20.$$

И такъ, какое же правило можно вывести изъ всего предыдущаго для рѣшенія уравненія? —

Для рѣшенія уравненія можно вывести слѣдующее правило:

1) Всѣ члены съ неизвѣстнымъ надо изъ второй части перенести въ первую, а всѣ извѣстные члены изъ первой во вторую, перемѣняя при этомъ знаки у переносимыхъ членовъ на обратные.

2) Въ каждой части уравненія сдѣлать приведеніе подобныхъ членовъ.

3) Извѣстную часть уравненія раздѣлить на коэффиціентъ при неизвѣстномъ. Полученное отъ дѣленія число и будетъ корнемъ уравненія *).

Если бы при рѣшеніи хотѣли получить для неизвѣстнаго не число, а формулу, то дѣйствія надъ извѣстными числами слѣдовало бы только обозначать, но не выполнять до окончанія рѣшенія.

Примѣчаніе. Члены съ неизвѣстнымъ можно переносить и во вторую часть уравненія въ томъ случаѣ, если коэффиціентъ при неизвѣстномъ во второй части болѣе чѣмъ въ первой.

§ 31. Особенный случай при рѣшеніи уравненій, когда приходится сумму или разность двухъ чиселъ умножать на какое-нибудь число.

З а д а ч а. Изъ кофе двухъ сортовъ, въ 45 коп. и 30 коп. за фунтъ, составить смѣшанный кофе въ 33 коп. Сколько нужно

*) Уничтоженіе знаменателя вовсе устранено изъ правила, такъ какъ уравненія съ неизвѣстнымъ въ знаменателѣ вовсе не рѣшаются въ этомъ курсѣ.

взять фунтовъ того и другого сорта, чтобы составить 25 фун. смѣси?

Сколько неизвѣстныхъ? Два, число фунтовъ перваго и втораго сорта.

Относительно котораго удобнѣе составлять уравненіе? — Все равно, такъ какъ надъ тѣмъ и другимъ изъ условій задачи прямо слѣдуютъ дѣйствія для полученія опредѣленной величины.

Если обозначимъ число фунтовъ перваго сорта черезъ x, то какъ потомъ слѣдуетъ составлять уравненіе, имѣя въ виду общее правило? — Надо изъ неизвѣстнаго и данныхъ составить двѣ формулы, которыя означали бы одну и туже величину, но различались по виду.

Какую именно величину? — Стоимость всей смѣси.

Какими двумя формулами можно выразить стоимость всей смѣси, судя по условіямъ задачи? —

Формулами: $45x + (25 - x)\ 30$ и 33×25.

Почему та и другая формула означаютъ стоимость всей смѣси?

Слѣдовательно, какое же будетъ уравненіе для нашей задачи?

$$45x + (25 - x)\ 30 = 33 \cdot 25.$$

Рѣшимъ его теперь.

Если упростить вторую часть, то какой видъ получитъ уравненіе? —

$$45x + (25 - x)\ 30 = 825.$$

Чѣмъ особеннымъ отличается это уравненіе отъ прежнихъ?— Приходится разность двухъ чиселъ, $25 - x$, умножать на 30. Посмотримъ, какъ сдѣлать это умноженіе.

Какъ $25 - x$ повторить 2 раза? — Сложить $25 - x$ и $25 - x$:

$$25 - x + 25 - x = 50 - 2x.$$

Какъ $25 - x$ повторить 3 раза? — Сложить $25 - x$ съ $25 - x$ и еще съ $25 - x$:

$$25 - x + 25 - x + 25 - x = 75 - 3x.$$

Слѣдовательно, какъ можно разность двухъ чиселъ умножить на третье число? — Нужно уменьшаемое и вычитаемое умножить на третье число, и послѣднее произведеніе вычесть изъ перваго.

Слѣдовательно, что получится, если $25 - x$ умножить на 30? — Получится $750 - 30x$.

Слѣдовательно, въ какомъ новомъ видѣ можно тогда написать наше уравненіе? —

$$45x + 750 - 30x = 825.$$

Отличается ли чѣмъ-нибудь особеннымъ это уравненіе отъ прежнихъ нашихъ уравненій? — Ничѣмъ.

Слѣдовательно, его можно рѣшить по прежнему правилу.

$$45x - 30x = 825 - 750.$$
$$15x = 75.$$
$$x = 5.$$

Какъ найти число фунтовъ втораго сорта? — $25 - 5 = 20$. Какъ повѣрить, что уравненіе рѣшено вѣрно?

§ 32. Характеръ уравненій.

Упражненія состоятъ въ слѣдующемъ: 1) въ составленіи уравненій для данныхъ задачъ; 2) въ рѣшеніи уравненій при помощи соотвѣтствующаго каждому виду разсужденія; 3) въ рѣшеніи уравненій по общему правилу.

Первый пріемъ рѣшенія употребляется въ началѣ знакомства учениковъ съ уравненіемъ, пока еще не дано общаго пріема для рѣшенія уравненій.

ГЛАВА II.

Раздѣленіе уравненій по даннымъ числамъ и рѣшеніе буквенныхъ уравненій.

§ 33. Раздѣленіе уравненій.

Задача I. Одинъ господинъ, выходя изъ церкви, имѣлъ съ собою n копѣекъ. Нѣсколькимъ нищимъ онъ роздалъ по a копѣекъ, и у него осталось b коп. Сколько было нищихъ?

Къ какого рода задачамъ относится эта задача по даннымъ числамъ? — Къ общимъ задачамъ.

Къ какому разряду задачъ относится эта задача по трудности рѣшенія? — Къ тому, который рѣшается при помощи уравненія, такъ какъ изъ условій задачи прямо слѣдуютъ дѣйствія надъ неизвѣстнымъ и данными для полученія даннаго числа, а не надъ данными для полученія неизвѣстнаго.

Какое будетъ уравненіе этой задачи? —

$$ax + b = n.$$

Что означаетъ x, ax, $ax + b$, n?

Почему поставленъ знакъ равенства между формулою $ax + b$ и даннымъ числомъ n?

Чѣмъ это уравненіе отличается отъ прежнихъ уравненій по даннымъ числамъ? Данныя числа въ этомъ уравненіи общія и обозначены буквами, а въ прежнихъ были частныя и обозначались цифрами.

Новое уравненіе называется *буквеннымъ* уравненіемъ, а прежнія — *численными* уравненіями.

Итакъ на какіе 2 разряда можно раздѣлить уравненія по даннымъ числамъ? — На численныя и буквенныя.

Какое уравненіе называется численнымъ и какое буквеннымъ? — Численнымъ уравненіемъ называется такое уравненіе, въ которомъ данныя числа суть числа частныя. Буквеннымъ уравненіемъ называется такое уравненіе, въ которомъ данныя числа суть числа общія и обозначены буквами.

§ 34. Рѣшеніе буквенныхъ уравненій.

Мы занимались до сихъ поръ рѣшеніемъ численныхъ уравненій, а теперь займемся рѣшеніемъ буквенныхъ уравненій.

Отъ какого члена надо избавиться въ первой части нашего буквеннаго уравненія? — Отъ извѣстнаго члена b.

Какое число можно подразумѣвать подъ b? — Какое нибудь цѣлое или дробь.

Если уничтожить въ первой части число b, то что съ ней случится въ томъ и другомъ случаѣ? — Она уменьшится.

Слѣдовательно, чтобы первая часть уравненія сдѣлалась равна второй, что надо сдѣлать со второю частью? — Уменьшить её на b.

Какъ записать уравненіе въ новомъ видѣ? —

$$ax = n - b.$$

Какое число можно разумѣть подъ буквою a? Какое нибудь цѣлое или дробь.

Если a будетъ какое-нибудь цѣлое, то какъ найти x? — Надо раздѣлить $n - b$ на a.

Если a будетъ какая нибудь дробь, то измѣнится-ли вопросъ въ задачѣ? — Нѣтъ.

Слѣдовательно, какъ надо поступить для отысканія x и въ томъ случаѣ, если a означаетъ дробь? — И въ этомъ случаѣ надо $n - b$ раздѣлить на a

Какъ же записать равенство, показывающее рѣшеніе задачи для обоихъ случаевъ? —

$$x = \frac{n - b}{a}.$$

Задача II. Входя въ лавку, я имѣлъ m копѣекъ, изъ которыхъ израсходовалъ нѣсколько копѣекъ на покупку карандашей, въ a разъ болѣе на бумагу и въ b разъ болѣе на книгу. Затѣмъ у меня осталось еще d копѣекъ. Сколько стоятъ карандаши, бумага и книги?

Сколько неизвѣстныхъ въ этой задачѣ? — Три: цѣна карандашей, бумаги и книги.

Относительно какого изъ нихъ удобнѣе составлять уравненіе? — Относительно цѣны карандашей.

Если обозначить цѣну карандашей черезъ x, то какое будетъ уравненіе? —

$$x + ax + bx + d = m.$$

Что означаетъ ax, bx, d, $x + ax + bx + d$, что означаетъ m?

Почему поставленъ знакъ равенства между формулой и числомъ m?

Будемъ теперь рѣшать уравненіе.

Отъ какого члена надо избавиться въ первой части? — Отъ извѣстнаго члена d.

Какъ записать уравненіе въ новомъ видѣ? —

$$x + ax + bx = m - d.$$

Чѣмъ отличается это уравненіе отъ прежняго уравненія, $ax = n - b$, которое мы рѣшали? — У новаго въ первой части многочленъ, а у прежняго одночленъ.

Слѣдовательно, чтобы облегчить рѣшеніе нашего уравненія, что надо стараться сдѣлать съ многочленомъ $x + ax + bx$? — Надо стараться обратить его въ одночленъ, т. е. представить въ такомъ видѣ, чтобы послѣднее дѣйствіе было умноженіе или дѣленіе.

Какъ же это сдѣлать? — Неизвѣстное x повторяется сначала 1 разъ, потомъ a разъ, потомъ b разъ, слѣдовательно всего оно повторяется $1 + a + b$ разъ.

Слѣдовательно, какимъ же одночленомъ можно замѣнить нашъ многочленъ? — Одночленомъ $(1 + a + b)\ x$

Такое обращеніе многочлена въ одночленъ называется выведеніемъ общаго множителя (x) за скобки.

Какъ въ новомъ видѣ записать все уравненіе? —

$$(1 + a + b)\ x = m - d.$$

Отличается ли чѣмъ-нибудь существеннымъ это уравненіе отъ перваго нашего уравненія $ax = n - b$? Нѣтъ.

Слѣдовательно, какъ найти неизвѣстное x? — Надо $m - d$ раздѣлить на $1 + a + b$

Какъ коротко и точно записать рѣшеніе? —

$$x = \frac{m - d}{1 + a + b}.$$

Эта формула и будетъ корень уравненія.

Задача III. Изъ чаю двухъ сортовъ, по a руб. и b р. за фунтъ, нужно составить смѣшанный чай по c рубл. за фунтъ. Сколько нужно взять фунтовъ того и другого сорта для составленія n фунтовъ смѣси? —

Сколько неизвѣстныхъ въ задачѣ?

Относительно котораго удобнѣе составлять уравненіе? — Безразлично.

Если число фунтовъ перваго сорта, входящихъ въ смѣсь, означимъ черезъ x, то какое будетъ уравненіе?

$$ax + b\ (n - x) = cn.$$

Что особеннаго представляетъ это уравненіе сравнительно съ прежними буквенными? — Нужно разность $n - x$ умножить на b.

Какое число здѣсь можно разумѣть подъ буквою b? — Какое-нибудь цѣлое число или какую-нибудь дробь.

Какъ разность $n - x$ умножить на какое-нибудь цѣлое число? — Надо n умножить на цѣлое число, x умножить на цѣлое число и второе произведеніе вычесть изъ перваго.

Если b будетъ дробь, то перемѣнится ли рѣшаемый вопросъ? — Нисколько.

Слѣдовательно, какъ и въ случаѣ дробнаго числа b сдѣлать умноженіе $n - x$ на b? — Точно также, n умножить на b, x умножить на b и послѣднее произведеніе вычесть изъ перваго.

Слѣдовательно, въ какомъ новомъ видѣ, во всякомъ случаѣ можно представить произведеніе $(n - x)\ b$? — Въ такомъ видѣ:

$$nb - bx.$$

Въ какомъ новомъ видѣ послѣ этого представится самое уравненіе? —

$$ax + nb - bx = nc.$$

Отъ какого члена надо избавиться въ первой части уравнененія? — Отъ извѣстнаго члена nb.

Какъ записать уравненіе въ новомъ видѣ? —

$$ax - bx = nc - nb.$$

Чѣмъ существеннымъ отличается это уравненіе отъ перваго буквеннаго уравненія $ax = n - b$? — Въ первой части новаго уравненія находится двучленъ, а въ первомъ уравненіи — одночленъ.

Слѣдовательно, что надо стараться сдѣлать съ двучленомъ $ax - bx$, чтобы приблизиться къ рѣшенію уравненія? — Надо стараться замѣнить его одночленомъ.

Какъ это сдѣлать? — Въ двучленѣ $ax - bx$ неизвѣстное x сначала повторяется a разъ, а потомъ изъ него отнимается x, повторенное b разъ, слѣдовательно всего x повторяется не a разъ, а меньше на b разъ, т. е. x повторяется $a - b$ разъ.

Какимъ одночленомъ можно поэтому замѣнить двучленъ $ax - bx$? — Одночленомъ $(a - b)\ x$.

Въ какомъ новомъ видѣ можно тогда записать уравненіе? — Въ такомъ видѣ:

$$(a - b)\ x = nc - nb.$$

Отличается ли чѣмъ-нибудь существеннымъ это уравненіе отъ перваго уравненія $ax = n - b$? — Ничѣмъ.

Слѣдовательно, какъ найти неизвѣстное x? — Надо раздѣлить $nc - nb$ на $a - b$.

Какъ же записать окончательное равенство, показывающее рѣшенія уравненія? —

$$x = \frac{nc - nb}{a - b}.$$

Эта формула и будетъ корень уравненія.

Что она показываетъ? — Какія дѣйствія надо сдѣлать надъ данными числами, чтобы получить неизвѣстное.

И такъ, какое же можно вывести правило для рѣшенія буквеннаго уравненія? —

Для рѣшенія буквеннаго уравненія можно вывести слѣдующее правило:

1) Члены съ неизвѣстнымъ надо перенести въ одну часть уравненія, а извѣстные — въ другую, перемѣняя знаки на обратные.

2) Въ той части, гдѣ находится неизвѣстное, вывести его за скобки.

3) Извѣстную часть уравненія раздѣлить на извѣстнаго множителя при x, заключеннаго въ скобкахъ.

§ 35. Характеръ упражненій.

Упражненія состоятъ въ составленіи и рѣшеніи буквенныхъ уравненій по правилу или при помощи соотвѣтствующаго каждому частному случаю разсужденія.

Повторительные вопросы и задачи, относящіеся къ этому отдѣлу, см. въ „Вопр. и задачахъ“ (пособіе для учащихся), въ Отдѣлѣ VII.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ.

АЛГЕБРА ОТНОСИТЕЛЬНЫХЪ ЧИСЕЛЪ.

ГЛАВА I.

Понятіе объ относительныхъ числахъ и сравнительная ихъ величина.

§ 36. Понятіе о положительномъ, отрицательномъ и абсолютномъ числѣ.

Задача 1. Купецъ имѣлъ капиталъ въ 5000 руб. и, торгуя въ теченіи года, получилъ 300 руб. прибыли. Какъ великъ новый капиталъ купца? (5300 руб.).

Какое дѣйствіе сдѣлали съ данными числами 5000 и 300? Сложеніе, потому что къ капиталу 5000 руб. купецъ получилъ еще прибыли 300 р., слѣдовательно капиталъ его увеличился на 300 р.

Задача 2. Купецъ имѣлъ капиталъ въ 5000 руб. и, торгуя въ теченіи года, получилъ 300 руб. убытку. Какъ великъ новый капиталъ купца? (4700 р.).

Какое дѣйствіе сдѣлали съ данными числами для рѣшенія задачи? Вычитаніе, потому что къ капиталу въ 5000 р. купецъ получилъ убытку 300 руб.

Какія части различаются въ каждой задачѣ? Данныя, условія и вопросъ.

Какія данныя числа въ нашихъ задачахъ? 5000 и 300.

Какія условія? Въ первой задачѣ условія состоятъ въ томъ, что купецъ, имѣя капиталъ, получилъ на него прибыль; во второй въ томъ, что, имѣя капиталъ, купецъ получилъ на него убытокъ.

Какой вопросъ? Какъ великъ новый капиталъ (въ обѣихъ задачахъ).

Отъ чего зависитъ дѣйствіе, необходимое для рѣшенія задачи? Отъ условій и вопроса.

Почему-же, для рѣшенія двухъ нашихъ задачъ мы употре били различныя дѣйствія? Потому что въ нашихъ задачахъ различны условія: въ одной говорится, что купецъ получилъ прибыль, а въ другой — убытокъ.

Какія числа мы считали въ нашихъ задачахъ за данныя — отвлеченныя или именованныя? Отвлеченныя; наименованіе даннымъ числамъ придается условіями задачи.

Если же за данныя мы будемъ считать числа съ тѣми наименованіями, которыя они имѣютъ въ задачахъ, то каковы будутъ данныя числа въ обѣихъ нашихъ задачахъ? Въ первой 5000 р. капиталу и 300 руб. прибыли; во второй 5000 руб. капиталу и 300 руб. убытку.

Какія тогда будутъ условія и вопросъ задачи? Условія въ обѣихъ задачахъ будутъ состоять въ томъ, что, имѣя капиталъ, купецъ получилъ еще нѣкоторую сумму; вопросъ — прежній, какъ великъ новый капиталъ.

Слѣдовательно, какою изъ трехъ частей будутъ различаться наши задачи, если за данныя числа будемъ считать числа именованныя, и въ какихъ частяхъ онѣ будутъ сходны? Онѣ будутъ различаться данными числами и будутъ сходны въ условіяхъ и вопросѣ.

Поэтому для рѣшенія обѣихъ нашихъ задачъ, слѣдуетъ надъ именованными данными числами сдѣлать различныя дѣйствія, или одинаковыя. Одинаковыя, потому что условія и вопросъ въ обѣихъ задачахъ одни и тѣ же.

Какое именно дѣйствіе надо сдѣлать для рѣшенія нашихъ задачъ надъ именованными данными числами? Сложеніе, потому что имѣя капиталъ, купецъ получилъ *еще* нѣкоторую сумму (прибыль или убытокъ).

По какимъ формуламъ будутъ тогда рѣшаться обѣ задачи?

$$x_1 = 5000 \text{ руб.} + 300 \text{ руб. прибыли.}$$
$$x_2 = 5000 \text{ руб.} + 300 \text{ руб. убытку.}$$

Что случится съ капиталомъ, если къ нему прибавить 300 р. прибыли? Онъ увеличится на 300 руб.

Слѣдовательно, вмѣсто прибавленія 300 руб. прибыли, что можно сдѣлать? Прибавить просто 300 руб.

Какъ представится тогда первая формула?

$$x_1 = 5000 \text{ р.} + 300 \text{ р.} = 5300 \text{ р.}$$

Что случится съ капиталомъ, если къ нему прибавить 300 р. убытку? Капиталъ уменьшится на 300 руб.

Слѣдовательно, вмѣсто прибавленія 300 р. убытку, что надо сдѣлать съ капиталомъ 5000 р.? Надо вычесть изъ него 300 р.

Какъ представится тогда вторая формула?

$$x_2 = 5000 \text{ р.} - 300 \text{ р.} = 4700 \text{ р.}$$

Слѣдовательно, какая разница между прибавленіемъ прибыли и прибавленіемъ убытка къ капиталу? Отъ прибавленія прибыли капиталъ увеличивается на величину прибыли, а отъ прибавленія убытка капиталъ уменьшается на величину убытка.

Замѣтьте, что здѣсь 300 руб. прибыли называется числомъ *положительнымъ* относительно капитала, 300 руб. убытка — числомъ *отрицательнымъ* относительно капитала, а просто 300 р. — числомъ *абсолютнымъ*.

Задача 3. Курьеръ находился отъ мѣста A на 20 верстъ вправо, потомъ подвинулся еще по той-же дорогѣ на 5 верстъ вправо. На какомъ разстояніи курьеръ находится теперь отъ мѣста A? (На 25 верстъ).

Какимъ дѣйствіемъ рѣшили задачу и почему? Сложеніемъ, потому что отъ движенія вправо разстояніе курьера отъ мѣста A увеличилось.

Задача 4. Курьеръ находился отъ мѣста A на 20 верстъ вправо, потомъ по той-же дорогѣ подвинулся еще на 5 верстъ влѣво. На какомъ разстояніи курьеръ находится теперь отъ мѣста A? (На 15 верстъ вправо).

Какимъ дѣйствіемъ рѣшили задачу и почему? Вычитаніемъ, потому что отъ движенія на 5 верстъ влѣво первоначальное разстояніе курьера отъ мѣста A уменьшилось на 5 верстъ.

Рѣшая обѣ эти задачи различными дѣйствіями, какія числа мы считали за данныя — отвлеченныя или именованныя? Отвлеченныя 20 и 5.

Въ чемъ поэтому состоятъ условія въ этихъ двухъ задачахъ? Въ первой условія состоятъ въ томъ, что, находясь отъ мѣста *А* вправо на нѣсколько верстъ, курьеръ еще подвинулся на нѣсколько верстъ вправо; во второй въ томъ, что, находясь отъ мѣста *А* вправо на нѣсколько верстъ, курьеръ подвинулся еще на нѣсколько верстъ влѣво.

Какой вопросъ? На какомъ разстояніи находится курьеръ отъ мѣста *А*.

Если же за данныя числа считать числа именованныя, то каковы будутъ данныя числа въ задачахъ? Въ первой 20 верстъ вправо и 5 верстъ вправо; во второй 20 верстъ вправо и 5 верстъ влѣво.

Какія тогда будутъ условія и вопросъ? Условія въ обѣихъ задачахъ состоятъ въ томъ, что, находясь на нѣкоторомъ разстояніи отъ мѣста *А*, курьеръ подвинулся еще на нѣкоторое разстояніе по той-же дорогѣ. Вопросъ — одинъ и тотъ-же — какъ велико новое разстояніе отъ мѣста *А*.

Поэтому, при именованныхъ данныхъ обѣ задачи рѣшаются одинаковыми дѣйствіями или различными? Одинаковыми, потому что условія и вопросъ обѣихъ задачъ одни и тѣ же.

Какимъ именно дѣйствіемъ рѣшаются обѣ задачи при именованныхъ данныхъ? Сложеніемъ, потому что къ прежнему разстоянію, вслѣдствіе движенія, прибавилось нѣкоторое новое разстояніе.

По какимъ формуламъ будутъ тогда рѣшаться обѣ наши задачи?

$$x_1 = 20 \text{ верстъ вправо} + 5 \text{ верстъ вправо}.$$
$$x_2 = 20 \text{ верстъ вправо} + 5 \text{ верстъ влѣво}.$$

Какую выгоду мы получаемъ, считая данныя числа за именованныя? Двѣ задачи мы можемъ рѣшать по одной формулѣ сложенія.

Но что случится съ прежнимъ разстояніемъ, если курьеръ подвинется на 5 верстъ вправо? Оно увеличится на 5 верстъ.

Слѣдовательно, какъ къ 20 верс. вправо прибавить 5 верс. вправо? Надо къ 20 вер. прибавить 5 верс.

$$x_1 = 20 \text{ вер.} + 5 \text{ вер.} = 25 \text{ верстъ.}$$

Что случится съ прежнимъ разстояніемъ, если курьеръ подвинется на 5 верстъ влѣво? Прежнее разстояніе уменьшится на 5 верстъ.

Слѣдовательно, вмѣсто прибавленія 5 верстъ влѣво къ прежнему разстоянію, какъ надо поступить? Надо изъ 20 верстъ вычесть 5 верстъ.

$$x_2 = 20 \text{ верс.} - 5 \text{ верс.} = 15 \text{ верс.}$$

Слѣдовательно, какая разница между прибавленіемъ 5 верс. вправо и 5 верс. влѣво къ 20 верстамъ вправо? Отъ прибавленія перваго прежнее разстояніе (20 верс. вправо) увеличится, а отъ прибавленія втораго уменьшится на 5 верстъ.

Какое изъ чиселъ, 5 верс. вправо и 5 верс. влѣво, будетъ поэтому положительнымъ и какое отрицательнымъ относительно 20 верс. вправо? 5 верстъ вправо будетъ положительное число относительно 20 верс. вправо, потому что служитъ къ его увеличенію. а 5 верс. влѣво будетъ отрицательное число, потому что служитъ къ уменьшенію 20 верс. вправо?

Скажите абсолютное число съ такимъ-же числомъ единицъ, какъ 5 вер. вправо и 5 верс. влѣво! Просто 5 верстъ. Оно будетъ абсолютнымъ, потому что въ немъ не указано, служитъ-ли оно къ увеличенію или къ уменьшенію какого-нибудь числа.

Относительно 20 верс. *влѣво* какое изъ чиселъ, 5 верстъ вправо и 5 вер. влѣво, будетъ положительнымъ и какое отрицательнымъ? 5 верс. влѣво относительно 20 верс. влѣво будетъ положительнымъ, потому что служитъ къ его увеличенію, а 5 верс. вправо — отрицательнымъ, потому что служитъ къ его уменьшенію.

И такъ, какое число называется *положительнымъ* и какое *отрицательнымъ* относительно другаго? Число называется *положительнымъ*, если оно, при прибавленіи къ другому числу, служитъ къ его *увеличенію;* число называется *отрицательнымъ*, если, при прибавленіи къ другому, служитъ къ его *уменьшенію*.

Какое число называется *абсолютнымъ?* Абсолютнымъ называется число, въ которомъ не указано, служитъ-ли оно къ увеличенію или къ уменьшенію другаго числа, а указана только совокупность единицъ, въ немъ заключающихся.

Такъ какъ число бываетъ положительнымъ и отрицательнымъ только относительно другаго числа, то положительныя и отрицательныя числа имѣютъ общее названіе чиселъ *относительныхъ.*

Какое различіе между числомъ абсолютнымъ и относительнымъ? Абсолютное число показываетъ только количество единицъ въ немъ заключающихся; относительное-же число кромѣ того показываетъ, слѣдуетъ-ли каждую изъ этихъ единицъ вычесть или прибавить при прибавленіи всего числа къ другому числу.

Какъ короче выразить это различіе? Абсолютное число показываетъ только количество единицъ въ немъ заключающихся. Относительное число показываетъ измѣненіе другаго числа на нѣсколько единицъ.

Съ какимъ изъ чиселъ въ вычисленіи сходно абсолютное число, съ положительнымъ или отрицательнымъ? Съ положительнымъ, потому что отъ прибавленія абсолютнаго, какъ и отъ прибавленія положительнаго числа къ другому, это другое число увеличивается.

§ 37. Обозначеніе положительнаго и отрицательнаго числа.

Скажите положительное, отрицательное и абсолютное число, изъ которыхъ каждое содержало бы въ себѣ по 7 единицъ! 7 руб. прибыли, 7 руб. убытка, 7 рублей. Первое будетъ положительное, потому что служитъ къ увеличенію капитала; второе — отрицательное, потому что служитъ къ уменьшенію капитала; третье — абсолютное число, потому что въ немъ указано только количество единицъ, но не указано, служатъ-ли они къ увеличенію или уменьшенію другаго числа.

Какимъ знакомъ въ Ариѳметикѣ указывается, что данное число нужно увеличить на нѣсколько единицъ? Знакомъ плюсъ (+).

Какимъ знакомъ въ ариѳметикѣ указывается, что данное число нужно уменьшить на нѣсколько единицъ? Знакомъ минусъ (—).

Слѣдовательно, какъ можно при помощи знаковъ записать 7 руб. прибыли и 7 руб. убытка?

$$+\ 7 \text{ руб. и } -\ 7 \text{ руб.}$$

Какія слова замѣнены здѣсь знаками + и — ? Слова: „прибыль“ и „убытокъ“.

Почему слово прибыль можно замѣнить знакомъ + и слово убытокъ знакомъ — ? Потому что слово прибыль и знакъ плюсъ означаютъ, что капиталъ надо увеличить 7-ю рублями; а слово убытокъ и знакъ минусъ означаютъ, что капиталъ надо уменьшить 7-ю рублями.

Какъ сокращенно обозначить 300 руб. приб. и 300 рубл. убытку?

$$+\ 300 \text{ руб. и } -\ 300 \text{ руб.}$$

Какъ сокращенно обозначить 5 верс. вправо и 5 верс. влѣво?

$$+\ 5 \text{ верс. и } -\ 5 \text{ верс.}$$

Какъ записать рѣшеніе предъидущихъ задачъ при помощи сокращеннаго обозначенія положительнаго и отрицательнаго числа?

Задача 1. $x_1 = 5000 \text{ р.} + (+300 \text{ р.}) = 5000 \text{ р.} + 300 \text{ р.} = 5300 \text{ р.}$
Задача 2. $x_2 = 5000 \text{ р.} + (-300 \text{ р.}) = 5000 \text{ р.} - 300 \text{ р.} = 4700 \text{ р.}$
Задача 3. $x_3 = 20 \text{ вер.} + (+5 \text{ вер.}) = 20 \text{ вер.} + 5 \text{ вер.} = 25 \text{ верс.}$
Задача 4. $x_4 = 20 \text{ вер.} + (-5 \text{ вер.}) = 20 \text{ вер.} - 5 \text{ вер.} = 15 \text{ верс.}$

Что означаетъ число (+ 4), (+ 7), (+ 10),.....? Такое число, которое, при прибавленіи къ другому, служитъ къ его увеличенію на 4, 7, 10.... единицъ.

Что означаетъ число (— 4), (— 7), (— 8).....? Такое число, которое, при прибавленіи къ другому, служитъ къ его уменьшенію на 4 единицы.

Что означаетъ + a, гдѣ a абсолютное число? Такое число, которое, при прибавленіи къ другому, служитъ къ его увеличенію на a единицъ.

Что означаетъ — a, гдѣ a абсолютное число? Такое число, которое, при прибавленіи къ другому, служитъ къ его уменьшенію на a единицъ.

Какъ *обозначается положительное число?* Какъ и абсолютное, цифрой или буквой, только передъ нею ставится знакъ $+$.

Что замѣняетъ собою знакъ $+$? Особенное названіе, которое бываетъ при положительномъ числѣ.

Почему это особенное названіе можно замѣнить знакомъ $+$? Потому что и особенное названіе и знакъ $+$ показываютъ, что число надо прибавить къ нѣкоторому другому числу.

Какъ обозначается отрицательно число? Какъ и абсолютное, цифрой или буквой, только передъ нею ставится знакъ $-$.

Что замѣняетъ собою знакъ $-$? Знакъ $-$ замѣняетъ собою особенное названіе, которое бываетъ при отрицательномъ числѣ.

Почему это особенное названіе можно замѣнить знакомъ $-$? Потому что и это особенное названіе при числѣ и знакъ $-$ передъ цифрой показываютъ, что это число, при прибавленіи, надо вычесть изъ нѣкотораго другаго числа.

§ 38. Сравнительная величина положительнаго и отрицательнаго числа.

Сдѣлайте сложеніе въ слѣдующихъ случаяхъ:

$7+(+5)=?\quad 7+0=?\quad 7+(-3)=?\quad 7+(-4\tfrac{1}{2})=?$
Отв. $7+5=12,\quad 7+0=7,\quad 7-3=4,\quad 7-4\tfrac{1}{2}=2\tfrac{1}{2}$.

Разсматривая внимательно всѣ эти случаи сложенія, что можно сказать о сравнительной величинѣ положительныхъ чиселъ, отрицательныхъ и нуля, и почему?

1) Положительное число больше отрицательнаго, потому что первое, при прибавленіи къ какому-нибудь другому числу (въ нашемъ случаѣ къ 7), служитъ къ его увеличенію, а второе — къ уменьшенію.

2) Положительное число больше нуля, потому что отъ прибавленія его число увеличивается, а отъ прибавленія нуля число не измѣняется.

3) Отрицательное число меньше нуля, потому что отъ прибавленія его къ какому нибудь числу, это послѣднее число уменьшается, а отъ прибавленія нуля не измѣняется.

4) Изъ двухъ отрицательныхъ чиселъ то меньше, у котораго абсолютная величина больше, потому что отъ прибавленія его къ другому числу, послѣднее уменьшается на большее число единицъ.

§ 39. Характеръ упражненій.

Упражненія должны состоять въ опредѣленіи того, будетъ-ли данное относит. число положительное или отрицательное, въ подъискиваніи чиселъ противоположныхъ данному по своему значенію и въ опредѣленіи сравнительной величины положительнаго числа, отрицательнаго и нуля. Достаточное число примѣровъ и вопросовъ для этихъ упражненій приведено въ „Вопросахъ и задачахъ“ (пособіе для учащихся) въ Отдѣлѣ VIII вначалѣ.

ГЛАВА II.

Вычитаніе большаго числа изъ меньшаго.

§ 40. Разность, въ которой вычитаемое больше уменьшаемаго.

Задача. Купецъ продалъ свой товаръ за a рублей, а самъ купилъ его за b рублей. Какое измѣненіе произошло въ капиталѣ купца отъ этого оборота?

Какія числа a и b абсолютныя или относительныя? Абсолютныя, потому что въ нихъ не указано, служатъ-ли они къ увеличенію или уменьшенію нѣкотораго другаго числа.

По какой формулѣ рѣшается задача? ($x = a - b$).

Вычислите x, если $a = 4000$, $b = 3500$!

$x = 4000 - 3500 = 500$ руб. прибыли.

Вычислите x, если $a = 4000$, $b = 4000$!

$x = 4000 - 4000 = 0$ руб.

Вычислите x, если $a = 4000$, $b = 4500$!

$x = 4000 - 4500$.

Чѣмъ это вычитаніе отличается отъ прежнихъ вычитаній? Приходится вычитать бо́льшее число изъ меньшаго, чего до сихъ поръ не дѣлали.

Показываетъ-ли эта разность какую-нибудь дѣйствительную величину, рѣшающую задачу? Показываетъ, потому что и въ томъ случаѣ, когда покупная цѣна больше продажной, въ состояніи купца происходитъ нѣкоторое измѣненіе, именно онъ получаетъ убытокъ.

Какой убытокъ получаетъ купецъ въ настоящемъ случаѣ? Онъ получаетъ 4500 — 4000 = 500 р. убытку.

Слѣдовательно, что означаетъ разность 4000 р. — 4500 р.? Она означаетъ убытокъ въ 500 р.

500 руб. убытку число абсолютное или относительное? Относительное, такъ какъ въ немъ указано, что оно служитъ къ уменьшенію капитала.

Какое-же это будетъ число — положительное или отрицательное? Отрицательное, потому что служитъ къ уменьшенію капитала.

Какъ, поэтому, 500 руб. убытку можно обозначить сокращенно, знаками? (— 500 руб.).

Какъ записать рѣшеніе нашей задачи?

$$x = 4000 \text{ р.} - 4500 \text{ р.} = -500 \text{ руб.}$$

Слѣдовательно, какъ вычитается большее число изъ меньшаго? Надо меньшее вычесть изъ большаго и остатокъ считать за число отрицательное. (Написать его со знакомъ минусъ).

Тотъ-же случай вычитанія на отвлеченныхъ числахъ объясняется слѣдующимъ образомъ:

Изъ 4000 вычесть 4500 ($x = 4000 - 4500$).

Какъ обыкновенно повѣряется вычитаніе? Разность складывается съ вычитаемымъ и отъ сложенія должно получиться уменьшаемое.

Слѣдовательно, какъ можно опредѣлить, что значитъ вычесть одно число изъ другаго? Найти такое число, которое, будучи приложено къ вычитаемому, дастъ уменьшаемое.

Судя по этому опредѣленію, что значитъ изъ 4000 вычесть 4500? Значитъ найти такое число, которое, будучи приложено къ 4500, дастъ уменьшаемое 4000.

Можетъ-ли такое число быть положительнымъ? Не можетъ, потому что отъ прибавленія положительнаго числа къ 4500 послѣднее увеличится.

Можетъ-ли искомое число быть отрицательнымъ? Можетъ, потому что отъ прибавленія отрицательнаго числа къ 4500 послѣднее уменьшится на абсолютную величину отрицательнаго числа.

Сколько надо прибавить къ 4500, чтобы получить 4000? Надо прибавить — 500.

Слѣдовательно, какъ записать разность?

$$x = 4000 - 4500 = -500.$$

Почему — 500 есть вѣрная разность? Потому что $4500 + (-500) = 4500 - 500 = 4000$.

И такъ, отъ какого дѣйствія съ абсолютными числами можетъ произойти отрицательное число? Отъ вычитанія бо́льшаго числа изъ меньшаго.

Какъ вычесть бо́льшее число изъ меньшаго? Надо наоборотъ вычесть меньшее изъ бо́льшаго и полученную разность считать за число отрицательное.

Почему отъ вычитанія бо́льшаго числа изъ меньшаго не можетъ произойти числа абсолютнаго, или положительнаго? Потому что абсолютное или положительное число, будучи прибавлено къ вычитаемому, увеличитъ его, а не уменьшитъ, какъ требуется.

§ 41. Многочленъ, въ которомъ приходится вычитать большее число изъ меньшаго.

Какая формула называется многочленомъ? Такая, въ которой надъ данными числами указываются только дѣйствія сложеніе и вычитаніе, или же при другихъ дѣйствіяхъ — такая, въ которой послѣдній рядъ дѣйствій есть рядъ сложеній и вычитаній.

Въ какомъ случаѣ до сихъ поръ мы встрѣчали затрудненіе при вычисленіи многочлена? Въ томъ случаѣ, когда приходилось вычитать большее число изъ меньшаго.

Будетъ-ли и теперь этотъ случай представлять затрудненія? Нѣтъ, потому что при помощи отрицательныхъ чиселъ мы умѣемъ вычитать большее число изъ меньшаго.

Задача. Въ первый день торговли купецъ продалъ товару на 40 руб.; во второй день самъ уплатилъ за товаръ 70 руб. и ничего не продалъ; въ третій день продалъ товару на 25 р. и наконецъ въ четвертый день опять самъ уплатилъ 20 руб. и ничего не продалъ. Какое измѣненіе произошло въ состояніи купца по прошествіи этихъ четырехъ дней?

По какой формулѣ рѣшается задача?

$$x = 40 - 70 + 25 - 20.$$

Въ какомъ порядкѣ нужно дѣлать дѣйствія для вычисленія этой формулы? Изъ 40 вычесть 70, къ разности придать 25, изъ суммы вычесть 20.

Что получится, если изъ 40 вычесть 70? (-30).

Какъ къ -30 придать 25? Извѣстно, что отрицательное число увеличивается по мѣрѣ уменьшенія его абсолютной величины, слѣдовательно, для увеличенія -30 на 25 единицъ, надо его абсолютную величину 30 уменьшить на 25 единицъ, и слѣдовательно искомая сумма будетъ -5.

Какъ -5 уменьшить на 20 единицъ? Извѣстно, что отрицательное число уменьшается по мѣрѣ увеличенія его абсолютной величины, слѣдовательно для уменьшенія -5 на 20 единицъ, надо его абсолютную величину 5 увеличить на 20 единицъ, и слѣдовательно искомая разность будетъ -25 ($x = -25$).

Можно-ли вести вычисленіе въ другомъ порядкѣ? Можно въ какомъ угодно, не стѣсняясь, какъ прежде, вычитаніемъ большаго числа изъ меньшаго.

$$x = 40 - 70 - 20 + 25 = -25$$
$$x = 40 - 20 - 70 + 25 = -25$$
$$x = 40 - 20 + 25 - 70 = -25$$
$$x = 40 + 25 - 70 - 20 = -25$$

Обыкновенно вычисленіе и производится въ послѣднемъ порядкѣ, именно такъ: складываются между собою всѣ члены съ $+$ (и безъ знака), складываются между собою всѣ члены съ $-$, и послѣдняя сумма вычитается изъ первой.

§ 42. Характеръ упражненій.

Упражненія состоятъ въ составленіи изъ абсолютныхъ чиселъ такихъ формулъ, въ которыхъ приходится вычитать не только меньшее число изъ большаго, но и на оборотъ, и въ вычисленіи этихъ формулъ.

Упражненія, относящіяся къ Гл. I и II второй части смотри въ „Вопросахъ, задачахъ и прим.“ (пособіе для учащихся) въ Отдѣлѣ VIII.

ГЛАВА III.

Четыре дѣйствія съ относительными числами.

§ 43. Сложеніе частныхъ относительныхъ чиселъ, двухъ и нѣсколькихъ.

Задача. Купецъ, торгуя 4 года, получилъ въ первый годъ 500 руб. прибыли, во второй 400 руб. прибыли, въ третій 400 руб. убытку, въ четвертый 600 руб. убытку. Какая перемѣна произошла въ состояніи купца въ 1-й и 2-й годъ вмѣстѣ, въ 3-й и 4-й годъ вмѣстѣ, во 2-й и 3-й годъ, въ 1-й и 3-й, въ 4-й и 1-й годъ, во всѣ 4 года вмѣстѣ?

Данныя числа 500 р. приб., 400 р. приб., 400 р. убытка, 600 руб. убытка суть числа абсолютныя или относительныя и почему?

Какъ записать ихъ посредствомъ знаковъ?

$$+ 500 \text{ р.}, \ + 400 \text{ р.}, \ - 400 \text{ р.}, \ - 600 \text{ р.}$$

Будемъ рѣшать всѣ вопросы отдѣльно.

1) Какъ узнать перемѣну въ состояніи купца въ 1-й и 2-й годъ вмѣстѣ? Надо сложить + 500 р. и + 400 р.

$$x = (+ 500 \text{ р.}) + (+ 400 \text{ р.}) = + 900 \text{ р.}$$

2) Какъ узнать перемѣну въ состояніи купца въ 3-й и 4-й годъ вмѣстѣ? Сложить — 400 р. и — 600 р.

$$x = (-400 \text{ р.}) + (-600 \text{ р.}).$$

Что получится, если сдѣлать это сложеніе? 400 р. убытку, да 600 р. убыт. составятъ, очевидно, 1000 р. убыт., слѣдовательно $x = -1000$ р.

Слѣдовательно, какое можно вывести правило для сложенія между собою двухъ положительныхъ, или двухъ отрицательныхъ чиселъ? Въ томъ и другомъ случаѣ надо сложить абсолютныя величины данныхъ чиселъ и сумму считать за положительную или за отрицательную, смотря по тому, какія были слагаемыя.

3) Какъ узнать перемѣну въ состояніи купца во 2-й и 3-й годъ вмѣстѣ? Надо сложить + 400 и — 400 р.

$$x = (+400 \text{ р.}) + (-400 \text{ р.}).$$

Сколько получится отъ сложенія этихъ чиселъ? 400 р. приб. служатъ къ увеличенію капитала на 400 р., а 400 р. убытка — къ его уменьшенію на 400 р., слѣдовательно, если сложить между собою 400 р. приб. и 400 р. убытка, то получимъ число, которое въ капиталѣ никакой перемѣны не произведетъ, т. е. нуль, слѣдовательно

$$(+400) + (-400) = 0.$$

4) Какъ узнать перемѣну въ состояніи купца въ 1-й и 3-й годъ вмѣстѣ? Надо сложить + 500 р. и — 400 р.

$$x = (+500 \text{ р.}) + (-400 \text{ р.}).$$

Что получится отъ этого сложенія? 400 р. приб. съ 400 р. убытка составятъ нуль капитала, слѣдовательно въ суммѣ останется 100 р. приб. или + 100 р., значитъ

$$(+500 \text{ р.}) + (-400 \text{ р.}) = +100 \text{ р.}$$

5) Какъ узнать перемѣну въ состояніи купца въ 4-й и 1-й годъ вмѣстѣ? Надо сложить — 600 р. и + 500 р.

$$x = (-600 \text{ р.}) + (+500 \text{ р.}).$$

Сколько получится отъ сложенія? Если къ 500 р. убытка прибавить 500 р. приб., то получится нуль рублей, слѣдовательно отъ прибавленія къ 600 р. уб. 500 р. приб. получится 100 р. убытка, т. е. — 100 р., значитъ

$$(-600 \text{ р}) + (+500 \text{ р.}) = -100 \text{ р.}$$

Слѣдовательно, какія можно вывести правила для сложенія положительнаго числа съ отрицательнымъ? a) Если положительное и отрицательное число имѣютъ одинаковую абсолютную величину, то въ суммѣ получится нуль. b) Если положительное и отрицательное число имѣютъ различную абсолютную величину, то для отысканія суммы надо меньшее абсолютное число вычесть изъ бóльшаго и разность считать за число положительное или отрицательное, смотря по тому, какихъ единицъ было больше — положительныхъ или отрицательныхъ.

6) Какъ узнать перемѣну въ состояніи купца во всѣ четыре года вмѣстѣ? Надо сложить + 500 р., + 400 р., — 400 р., — — 600 р.

$$x = (+500 \text{ р.}) + (+400 \text{ р.}) + (-400 \text{ р.}) + (-600 \text{ р.}).$$

Какъ сдѣлать это сложеніе? Къ + 500 р. прибавить + 400 р. получится + 900 р., сюда прибавить — 400 руб. получится + 500 р., къ + 500 р. прибавить — 600 р. будетъ — 100 р., слѣдовательно

$$x = -100 \text{ руб.}$$

Въ какихъ еще порядкахъ можно дѣлать сложеніе? Въ какихъ угодно, напр.:

$$x = (+500) + (-400) + (+400) + (-600).$$
$$x = (+500) + (-600) + (+400) + (-400).$$
$$x = (+500) + (-600) + (-400) + (+400).$$

Вмѣсто постепеннаго прибавленія по одному числу, какъ еще можно сдѣлать сложеніе? Сложить между собою + 500 и + 400, потомъ сложить — 600 и — 400 и послѣднюю сумму придать къ первой. Первая сумма будетъ + 900, вторая — 1000, третья и окончательная будетъ — 100

Въ такомъ порядкѣ обыкновенно и производится сложеніе относительныхъ чиселъ.

И такъ, какія существуютъ два правила для сложенія нѣсколькихъ относительныхъ чиселъ? 1) Складываютъ первое число со вторымъ, сумму съ третьимъ, новую сумму съ четвертымъ и т. д., слѣдуя правиламъ для сложенія двухъ относительныхъ чиселъ; 2) складываютъ между собою всѣ положительныя числа, потомъ между собою всѣ отрицательныя числа и наконецъ послѣднюю сумму прибавляютъ къ первой, пользуясь правилами ля сложенія двухъ относительныхъ чиселъ.

Тѣ же правила для сложенія двухъ или нѣсколькихъ относительныхъ чиселъ можно вывести и на числахъ отвлеченныхъ.

1) Сложить $+ 3$ и $+ 7$.

Что показываетъ число $+ 3$? Оно показываетъ, что 3 его единицы служатъ къ увеличенію нѣкотораго числа.

Что показываетъ $+ 7$? Что 7 его единицъ служатъ къ увеличенію того-же числа?

Слѣдовательно, если сложить 3 единицы, служащихъ къ увеличенію нѣкотораго числа, съ 7-ю единицами, служащими къ увеличенію того-же числа, то сколько единицъ получится и какихъ относительно того-же числа? Получится 10 единицъ, служащихъ къ увеличенію того-же числа.

$$(+ 3) + (+ 7) = + 10.$$

2) Сложить $- 3$ и $- 7$.

Что показываютъ числа $- 3$ и $- 7$? Что 3 единицы числа $- 3$ служатъ къ уменьшенію нѣкотораго числа и 7 единицъ числа $- 7$ служатъ къ уменьшенію того-же числа.

Если-же сложить 3 единицы и 7 единицъ, уменьшающихъ одно и то же число, то сколько единицъ получится и какихъ относительно этого числа? Получится 10 единицъ, уменьшающихъ это число.

$$(- 3) + (- 7) = - 10.$$

Изъ этихъ двухъ примѣровъ и вытекаетъ извѣстное уже правило для сложенія двухъ положительныхъ или двухъ отрицательныхъ чиселъ.

3) Сложить $+3$ и -3.

Какое число получится въ суммѣ и почему? Нуль, потому что сумма 3 единицъ, увеличивающихъ нѣкоторое число и 3 единицъ, уменьшающихъ то же число, не произведетъ никакой перемѣны въ этомъ числѣ. Слѣдовательно

$$(+3) + (-3) = 0.$$

4) Сложить $+3$ и -7.

Что получится, если къ 3 положительнымъ единицамъ прибавить 3 отрицат. единицы? Нуль.

Слѣдовательно, что получится, если къ 3 положительнымъ единицамъ прибавить 7 отрицательныхъ единицъ? Четыре отрицательныхъ единицы.

$$(+3) + (-7) = -4.$$

5) Сложить -3 и $+7$.

Что получится, если къ 3 отрицательнымъ единицамъ прибавить 3 положит. единицы? Нуль.

Слѣдовательно, что получится, если къ 3 отрицательнымъ единицамъ прибавить 7 положительныхъ? Четыре положительныя единицы.

$$(-3) + (+7) = +4.$$

Изъ этихъ трехъ примѣровъ вытекаютъ указанныя ранѣе правила для сложенія двухъ противоположныхъ относительныхъ чиселъ.

6) Сложить: -3, $+7$, -5, $+6$, -8.

Сложеніе нѣсколькихъ чиселъ основано на сложеніи двухъ чиселъ и на перестановкѣ слагаемыхъ, а потому мы не будемъ входить здѣсь въ подробности.

§ 44. Сложеніе общихъ относительныхъ чиселъ, двухъ и нѣсколькихъ.

Сложить: 1) $+a$ и $+b$
2) $-a$ и $-b$.

3) $+a$ и $-b$.
4) $-a$ и $+b$.
5) $+a,\ -b,\ +c,\ -d,\ -f$.

Правила, доказанныя раньше, справедливы для какого угодно значенія опредѣленныхъ чиселъ, слѣдовательно справедливы и для общихъ чиселъ a и b. Но, не зная, какое именно опредѣленное значеніе имѣютъ числа a и b, мы не можемъ соединить ихъ въ одно число, какъ это дѣлается съ числами частными. Поэтому сумму обыкновенно записываютъ, болѣе или менѣе сокращенно, при помощи данныхъ слагаемыхъ. Такъ въ первомъ случаѣ сумму пишутъ такъ $(+a)+(+b)$, во второмъ $(-a)+(-b)$, въ третьемъ $(+a)+(-b)$ и т. д. Можно тѣ же суммы записать короче, именно

1) $+a+b$ или $+(a+b)$
2) $-a-b$ или $-(a+b)$
3) $+a-b$
4) $-a+b$
5) $+a-b+c-d-f$.

Чѣмъ формула $+a-b+c-d-f$ отличается отъ формулы $(+a)+(-b)+(+c)+(-d)+(-f)$? Въ первой опущены скобки и знакъ $+$, стоявшій между скобками?

Скобки пропускаются, потому что они особеннаго значенія здѣсь не имѣютъ и служатъ только для болѣе яснаго отдѣленія знака числа отъ знака дѣйствія. Знакъ-же между скобками можно пропустить потому, что онъ всегда одинъ и тотъ-же, и его легко подразумѣвать между слагаемыми числами. Во всѣхъ пяти формулахъ, кромѣ написанныхъ знаковъ чиселъ, знакъ $+$ дѣйствительно подразумѣвается между каждыми двумя рядомъ стоящими числами.

Почему суммы первую и вторую можно записать въ видѣ $+(a+b)$ и $-(a+b)$? Потому что, складывая два положительныхъ, или два отрицательныхъ числа, мы складываемъ ихъ абсолютныя величины a и b и всю сумму получаемъ въ первомъ случаѣ положительную, а во второмъ отрицательную.

Какъ сокращенно записать сумму

$$(+m)+(-n)+(-k)+(+l)+(-p)?$$

$$+m-n-k+l-p.$$

Знакъ $+$ передъ первымъ слагаемымъ обыкновенно не пишется, такъ какъ положительное число въ вычисленіи сходно съ абсолютнымъ, такъ что сумма пишется слѣдующимъ образомъ:

$$m-n-k+l-p.$$

Что показываютъ здѣсь знаки $+$ и $-$? Это знаки чиселъ и показываютъ, какія стоятъ послѣ нихъ числа — положительныя или отрицательныя.

Какой-же знакъ указываетъ дѣйствія надъ этими положительными и отрицательными числами? Подразумѣваемый между каждыми двумя числами знакъ $+$.

Формула $+m-n-k+l-p$ называется, подобно прежнимъ, многочленомъ, а числа $+m$, $-n$, $-k$, $+l$, $-p$ членами многочлена.

Чѣмъ-же по составу новый многочленъ отличается отъ прежняго? Въ прежнемъ многочленѣ членами были числа абсолютныя (m, n, k, l, p), а въ новомъ относительныя ($+m$, $-n$, $-k$, $+l$, $-p$). Дѣйствія надъ членами въ прежнемъ многочленѣ указывались знаками $+$ и $-$, поставленными между членами, а въ новомъ многочленѣ дѣйствія надъ членами указываются подразумѣваемымъ знакомъ $+$.

Можно-ли прежній многочленъ замѣнить новымъ и наоборотъ? Можно, потому что прибавить $-n$, значитъ вычесть n, а прибавить $+l$, значитъ прибавить l; слѣдовательно, понимая данный многочленъ по прежнему или по новому, въ вычисленіи мы прійдемъ къ одному и тому-же результату.

§ 45. Сложеніе подобныхъ относительныхъ одночленовъ или приведеніе.

Такъ какъ, кромѣ абсолютныхъ чиселъ, бываютъ еще и относительныя числа, то и одночлены могутъ быть положительные и отрицательные, то есть могутъ имѣть передъ собою знаки $+$ и $-$.

Сложить одночлены: $+7a$, $-5a$, $+3a$, $-8a$.

Въ видѣ какого многочлена выразится сумма?

$$+7a-5a+3a-8a.$$

Что здѣсь показываютъ знаки $+$ и $-$? Они показываютъ, какіе члены многочлена положительные и какіе отрицательные.

Какими же знаками указывается сложеніе членовъ? Подразумѣваемымъ знакомъ $+$.

Въ какомъ порядкѣ указывается здѣсь сложеніе членовъ? Къ $+7a$ прибавить $-5a$; къ суммѣ прибавить $+3a$; къ новой суммѣ $-8a$.

Сдѣлайте сложеніе! $+7a$ да $-5a$ составитъ $+2a$; $+2a$ да $+3a$ составитъ $+5a$; $+5a$ да $-8a$ составитъ $-3a$.

Въ какихъ еще порядкахъ можно дѣлать сложеніе? Въ какихъ угодно, напримѣръ:

$$\begin{array}{ll}
1) & +7a-5a-8a+3a \\
2) & +7a-8a+3a-5a \\
3) & +7a+3a-5a-8a \\
4) & -5a+7a-8a+3a \\
5) & -5a-8a+7a+3a \\
6) & -8a+3a-5a-7a
\end{array}$$

и проч.

Сдѣлайте сложеніе въ третьемъ порядкѣ! $+7a$ да $+3a$ составитъ $+10a$; $+10a$ да $-5a$ составитъ $+5a$; $+5a$ да $-8a$ составитъ $-3a$. Или: $+7a$ да $+3a$ составитъ $+10a$; $-5a$ да $-8a$ составитъ $-13a$, а $+10a$ да $-13a$ составитъ $-3a$.

Въ послѣднемъ порядкѣ обыкновенно и дѣлается сложеніе.

И такъ, какое-же окончательное правило можно вывести для сложенія подобныхъ относительныхъ членовъ? Нужно сложить между собою всѣ положительные подобные члены, потомъ сложить между собою всѣ отрицательные подобные члены, и наконецъ послѣднюю сумму сложить съ первой.

Какъ записать сумму одночленовъ $+8a$, $+7b$, $-6a$, $-3b$, $+7a$, $+4b$, $-10a$, $-12b$, въ такомъ порядкѣ, чтобы подобные члены слѣдовали одинъ за другимъ?

$$+8a-6a+7a-10a+7b-3b-4b-12b$$

Что получится отъ приведенія членовъ первой группы? $-a$.

Какъ потомъ надо вести сложеніе? Къ $-a$ прибавить $+7b$, къ суммѣ $-3b$, къ новой суммѣ $+4b$, къ послѣдней суммѣ $-12b$.

Вмѣсто постепеннаго прибавленія четырехъ членовъ къ $-a$, что можно сразу прибавить? Сумму этихъ четырехъ членовъ, то есть $-4b$ и получится $-a-4b$.

§ 46. Вычитаніе частныхъ относительныхъ чиселъ.

Задача. Въ теченіи двухъ лѣтъ торговли купецъ получилъ 2000 руб. прибыли; при этомъ въ первый годъ онъ получилъ 3000 руб. убытку. Что получилъ онъ во второй годъ?

Какъ записать числа 2000 руб. приб. и 3000 руб. убыт. $+2000$ руб. и -3000 руб.

По какой формулѣ рѣшается задача?

$$x = (+2000) - (-3000),$$

потому что $+2000$ есть сумма, составившаяся изъ двухъ слагаемыхъ; одно изъ нихъ (-3000) дано, а другое ищется.

Что значитъ вычесть 3000 руб. убытка изъ 2000 руб. прибыли? Значитъ найти такое число, которое, будучи прибавлено къ -3000 составило бы $+2000$ руб.

Что нужно придать къ 3000 руб. убыт., чтобы получить нуль? 3000 руб. прибыли.

Слѣдовательно, что нужно еще придать къ 3000 руб. убыт., кромѣ 3000 руб. прибыли, чтобы получить 2000 руб. приб.? 2000 руб. прибыли.

Слѣдовательно, изъ какихъ двухъ чиселъ должна состоять искомая разность? Изъ 3000 руб. приб. и 2000 руб. приб.

Какъ изъ нихъ составить искомую разность? Сложить 2000 р. приб. да 3000 руб. приб., будетъ 5000 руб. прибыли.

Какъ все вычисленіе записать знаками?

$$(+2000) - (-3000) = (+2000) + (+3000) =$$
$$= +2000 + 3000 = +5000.$$

При помощи подобной-же задачи можно разобрать такой случай вычитанія:

$$(-2000) - (-3000) = (-2000) + (+3000) = \\ = -2000 + 3000 = +1000.$$

Отсюда вытекаетъ слѣдующее правило: чтобы вычесть отрицательное число, нужно къ уменьшаемому придать положительное число, имѣющее абсолютную величину вычитаемаго.

Для письма это правило выражается такъ: въ составѣ разности уменьшаемое надо написать безъ перемѣны, а вычитаемое съ обратнымъ знакомъ.

На задачахъ, подобныхъ вышеприведенной, могутъ быть разобраны слѣдующіе два случая вычитанія:

$$(+2000)-(+3000)=(+2000)+(-3000)=+2000-3000=-1000.$$
$$(-2000)-(+3000)=(-2000)+(-3000)=-2000-3000=-5000.$$

Изъ нихъ вытекаетъ слѣдующее правило для вычитанія положительнаго числа: Чтобы вычесть положительное число изъ какого-нибудь другаго, нужно къ уменьшаемому прибавить отрицательное число, имѣющее абсолютную величину вычитаемаго.

Для письма это правило выражается такъ: Въ составѣ разности уменьшаемое надо написать безъ перемѣны, а вычитаемое съ обратнымъ знакомъ.

Тѣ же правила вычитанія можно вывести и на отвлеченныхъ числахъ.

1) $(+4) - (-9) = ?$

Что значитъ изъ $+4$ вычесть -9? Значитъ найти такое число, которое, будучи придано къ -9, составитъ $+$

Какое число нужно придать къ -9, чтобы получить нуль? $+9$.

Слѣдовательно, что кромѣ $+9$ надо еще придать къ -9, чтобы получить $+4$? Еще надо придать $+4$.

Значитъ, изъ какихъ двухъ чиселъ должно составить искомую разность? Изъ $+9$ и $+4$.

Что съ этими числами нужно сдѣлать, чтобы получить искомую разность? Къ $+9$ придать $+4$ получится $+13$.

И такъ: $(+4) - (-9) = (+4) + (+9) = +4 + +9 = +13$.

Подобнымъ же образомъ могутъ быть разобраны слѣдующіе случаи вычитанія.

$$
\begin{aligned}
&2)\ (-4) - (-9) = -4 + 9 = +5\\
&3)\ (+4) - (+9) = +4 - 9 = -5\\
&4)\ (-4) - (+9) = -4 - 9 = -13
\end{aligned}
$$

§ 47. Вычитаніе общихъ относительныхъ чиселъ.

Правила вычитанія относительныхъ чиселъ выведены при какой угодно абсолютной величинѣ уменьшаемаго и вычитаемаго, а потому они справедливы и для общихъ чиселъ. Но, не зная численной величины буквъ, мы не можемъ представить разность ихъ въ видѣ одного числа, какъ при вычитаніи частныхъ чиселъ, а ограничимся только тѣмъ, что замѣнимъ разность суммою.

$$1)\quad (+a) - (-b) = ?$$

Какъ вычесть отрицательное число? Нужно къ уменьшаемому придать положительное число, имѣющее абсолютную величину вычитаемаго; въ нашемъ случаѣ къ $+a$ придать $+b$.

Тогда $(+a) - (-b) = +a + b$ или $= +(a+b)$.

Подобнымъ же образомъ можно разобрать и другіе случаи:

$$
\begin{aligned}
&2)\ (-a) - (-b) = -a + b\\
&3)\ (+a) - (+b) = +a - b\\
&4)\ (-a) - (+b) = -a - b = -(a+b).
\end{aligned}
$$

При затрудненіи учащихся можно каждый разъ повторять на буквахъ то разсужденіе, которое дѣлалось на числахъ опредѣленныхъ.

Для общихъ чиселъ правило письменнаго вычисленія важнѣе, чѣмъ для частныхъ.

§ 48. Умноженіе относительнаго числа на абсолютное.

З а д а ч а. Купецъ продалъ 5 пудовъ сахару и на каждомъ получилъ по 3 руб. убытку. Какъ великъ весь убытокъ купца?

Какое изъ данныхъ чиселъ можно считать за абсолютное и какое за относительное? 5 пуд. число абсолютное, 3 руб. убыт. относительное.

Какъ *обозначить* данныя числа? 5 и -3.

По какой формулѣ рѣшается задача?

$$x = (-3) \times 5.$$

Что значитъ 3 руб. убыт. умножить на 5? Значитъ 3 руб. убыт. взять 5 разъ слагаемымъ. Получится 15 руб. убыт. или -15 руб.

Значитъ $(-3) \times 5 = -15$.

Слѣдовательно, по какому правилу умножается отрицательное число на абсолютное? Нужно абсолютную величину множимаго умножить *на множителя* и произведеніе считать за отрицательное, другими словами — передъ нимъ поставить знакъ —.

Это-же правило можно вывести и на отвлеченныхъ числахъ.

Умножить (-2) на 4.

Что значитъ умножить -2 на 4? Значитъ взять -2 слагаемыхъ 4 раза. Получится -8.

Подобнымъ же образомъ можно разобрать и другой случай умноженія, именно $(+3) \times 5$.

Если множитель дробь, то въ рѣшаемомъ вопросѣ измѣняется только число, а не самый вопросъ, слѣдовательно правило остается прежнее.

Умножить $-a$ на b.

Какое число здѣсь можно подразумѣвать подъ b? Абсолютное цѣлое или дробное.

А какимъ образомъ умножается отрицательное число на абсолютное? Абсолютная величина множимаго умножается на множителя и произведеніе считается за отрицательное.

Слѣдовательно, что получится отъ умноженія $-a$ на b?

$$(-a) \times b = -ab.$$

§ 49. Дѣленіе относительнаго числа на абсолютное.

Задача. Купецъ продалъ 6 пудовъ сахару и получилъ на немъ убытку 12 руб. Какъ великъ убытокъ съ одного пуда?

Какъ обозначить данныя числа? -12 и 6.

По какой формулѣ рѣшается задача?

$$x = (-12) : 6.$$

Что значитъ 12 руб. убыт. раздѣлить на 6? Значитъ найти шестую часть 12 руб. убытку.

Что получится и какъ записать?

$$(-12) : 6 = -2.$$

Отсюда вытекаетъ правило, что для дѣленія отрицательнаго числа на абсолютное, нужно абсолютную величину дѣлимаго раздѣлить на дѣлителя и частное считать за отрицательное.

Подобно какъ въ умноженіи и здѣсь разбираются слѣдующіе случаи:

1) $(-18) : 3 = -6.$ 4) $(+18) : \frac{3}{4} = +24.$

2) $(+18) : 3 = +6.$ 5) $(-a) : b = -\frac{a}{b}.$

3) $(-18) : \frac{3}{4} = -24.$ 6) $(+a) : b = +\frac{a}{b}.$

§ 50. Характеръ упражненій.

Упражненія состоятъ въ сложеніи и вычитаніи относительныхъ чиселъ, въ сложеніи и вычитаніи подобныхъ одночленовъ и въ вычисленіи формулъ, въ которыхъ встрѣчаются объясненные выше четыре дѣйствія съ относительными числами.

Упражненія, относящіяся къ Главѣ III, смотри въ „Вопрос., задачахъ и прим.“ (пособіе для учащихся) въ Отдѣлѣ IX.

ГЛАВА IV.

Формула.

§ 51. Формула съ относительными числами.

Задача. Одни часы въ теченіи первыхъ 18 дней мѣсяца уходили каждый день на $\frac{1}{12}$ минуты впередъ, а въ слѣдующіе 12 дней уходили каждый день на $\frac{1}{4}$ минуты назадъ. У другихъ часовъ въ теченіи того-же мѣсяца ходъ каждый день измѣнялся одинаково. На сколько измѣнялся суточный ходъ послѣднихъ часовъ, если въ началѣ и въ концѣ мѣсяца тѣ и другіе часы показывали одно и то же время?

Какія изъ данныхъ чиселъ можно считать за относительныя и какія за абсолютныя? $\frac{1}{12}$ минуты впередъ есть число положительное, потому что служитъ къ увеличенію того времени, которое показываютъ вѣрные часы. $\frac{1}{4}$ минуты назадъ — число отрицательное. 18 дней и 12 дней — числа абсолютныя.

Какъ сокращенно обозначить данныя числа?

$$+\frac{1}{12},\ -\frac{1}{4},\ 18,\ 12.$$

По какой формулѣ рѣшается задача?

$$x = \frac{(+{}^1/_{12}) \times 18 + (-{}^1/_4) \times 12}{18 + 12}.$$

Что означаетъ $(+\frac{1}{12}) \times 18$?. Измѣненіе хода первыхъ часовъ въ 18 дней.

Что означаетъ $(-\frac{1}{4}) \times 12$? Измѣненіе хода первыхъ часовъ въ слѣдующіе 12 дней.

Что означаетъ весь числитель формулы? Измѣненіе хода и тѣхъ и другихъ часовъ во весь мѣсяцъ.

Что означаетъ $18 + 12$? Число дней въ мѣсяцѣ.

Что выражаетъ вся формула? Измѣненіе хода вторыхъ часовъ въ сутки.

Сдѣлайте вычисленіе!

$$(+\tfrac{1}{12}) \times 18 = +\tfrac{18}{12} = +\tfrac{3}{2};\ (-\tfrac{1}{4}) \times 12 = -\tfrac{12}{4} = -3;$$

$$18 + 12 = 30;\ (+\tfrac{3}{2}) + (-3) = -\tfrac{3}{2};$$

$$(-\tfrac{3}{2}) : 30 = -\tfrac{3}{60} = -\tfrac{1}{20}.$$

И такъ, какое-же было суточное измѣненіе хода вторыхъ часовъ? $-\frac{1}{20}$ минуты.

Какъ это понимать? Это значитъ что часы отставали въ сутки на $\frac{1}{20}$ минуты сравнительно съ вѣрными часами, такъ какъ $-\frac{1}{20}$, будучи приложена къ времени, показываемому вѣрными часами, служитъ къ его уменьшенію.

§ 52. Характеръ упражненій.

Упражненія состоятъ въ рѣшеніи задачъ съ относительными данными числами помощію сложной формулы.

Упражненія, относящіяся къ Главѣ IV, смотри въ „Вопр., задачахъ и прим.“ (пособіе для учащихся) въ Отдѣлѣ X.

ГЛАВА V.

Уравненіе.

§ 53. Уравненія съ относительными рѣшеніями.

Задача. Въ настоящее время отцу 45 лѣтъ, а сыну 15 лѣтъ. Черезъ сколько лѣтъ будетъ, или сколько лѣтъ назадъ былъ отецъ старше сына въ 4 раза?

Къ какому роду задачъ относится эта задача по трудности рѣшенія? Къ тѣмъ задачамъ, которыя рѣшаются посредствомъ уравненія, потому что изъ условій задачи прямо слѣдуютъ дѣйствія надъ неизвѣстными и данными для полученія нѣкоторой величины, а не надъ данными для полученія неизвѣстной.

Какія данныя числа въ задачѣ? 18, 15, 4.

Какія это числа по значенію? Абсолютныя.

Что неизвѣстно въ задачѣ? Число будущихъ или прошедшихъ лѣтъ отъ настоящаго времени до того, когда отецъ въ 4 раза старше сына.

Это неизвѣстное число будетъ-ли число абсолютное или относительное? Относительное, потому что число будущихъ лѣтъ служитъ къ увеличенію настоящаго возраста отца и сына, а число прошедшихъ къ его уменьшенію.

Какое именно относительное число будетъ неизвѣстное, положительное или отрицательное? Если отецъ *будетъ* старше сына въ 4 раза, то неизвѣстное число, какъ служащее къ увеличенію его числа лѣтъ, будетъ положительное; если-же отецъ уже *былъ* прежде старше сына въ 4 раза, то неизвѣстное число, какъ служащее къ уменьшенію его числа лѣтъ, будетъ отрицательное.

Не зная, какое именно неизвѣстное число — положительное или отрицательное, мы обозначимъ его одной буквой x, подразумѣвая въ этой буквѣ скрытый $+$ или $-$.

Будемъ теперь составлять уравненіе.

Сколько лѣтъ будетъ отцу черезъ x лѣтъ отъ настоящаго времени? $45 + x$.

Годится-ли эта формула для обоихъ предположеній относительно неизвѣстнаго? Годится, потому что, если x означаетъ число будущихъ лѣтъ, то, какъ положительное число, оно послужитъ къ увеличенію 45; если же x означаетъ число прошедшихъ уже лѣтъ, то, какъ отрицательное число, при прибавленіи къ 45, оно послужитъ къ его уменьшенію.

Сколько лѣтъ будетъ сыну черезъ x лѣтъ отъ настоящаго времени? $15 + x$.

Пригодна-ли эта формула для обоихъ предположеній относительно неизвѣстнаго?

Что сказано въ задачѣ о лѣтахъ отца и сына черезъ x лѣтъ отъ настоящаго времени? Лѣта отца тогда въ 4 раза больше лѣтъ сына.

Слѣдовательно, какое получится уравненіе?

$$45 + x = (15 + x) \times 4.$$

Что прежде всего надо сдѣлать для рѣшенія уравненія? Умноженіе во второй части.

$$45 + x = 60 + 4x.$$

Въ какую часть уравненія лучше перенести членъ съ неизвѣстнымъ? Во вторую, чтобы не вычитать большаго числа изъ меньшаго. А извѣстное число перенести въ первую часть.

Посмотримъ, какъ сдѣлать это перенесеніе.

Какое число здѣсь можетъ быть x? Положительное или отрицательное.

Если x число положительное, то нужно-ли вновь доказывать правило перенесенія членовъ? Нѣтъ, потому что положительное число. какъ и абсолютное, при прибавленіи къ другому, служитъ къ его увеличенію.

Разсмотримъ то предположеніе, когда x число отрицательное. Какъ измѣнится первая часть уравненія, если въ ней къ 45 мы не будемъ прибавлять отрицательнаго числа x? Она увеличится на абсолютную величину x.

Слѣдовательно, что надо сдѣлать и со второю частью уравненія, чтобы она была равна первой? Надо ее также увеличить на абсолютную величину x.

Какъ увеличить вторую часть на абсолютную величину отрицательнаго x? Надо вычесть x изъ второй части, ибо вычесть отрицательное число, значить прибавить положительное, имѣющее такую же абсолютную величину.

Получится уравненіе: $45 = 60 + 4x - x$.

Слѣдовательно, прежнее правило перенесенія членовъ остается справедливо и въ томъ случаѣ, когда изъ одной части уравненія въ другую переносится отрицательное число.

Можно-ли 60 перенести въ первую часть по прежнему правилу? Можно, потому что 60 число абсолютное.

Получится уравненіе: $45 - 60 = 4x - x$.

Какое уравненіе получится послѣ приведенія подобныхъ членовъ?

$$-15 = 3x.$$

Какъ отсюда найти x? —15 раздѣлить на 3. Найдемъ $x = -5$.

Что означаетъ это число относительно задачи? Оно означаетъ, что 5 лѣтъ *назадъ* отецъ былъ вчетверо старше сына.

§ 54. Характеръ упражненій.

Упражненія состоятъ въ составленіи изъ задачъ и рѣшеніи уравненій, причемъ задачи подбираются такія, что въ рѣшеніи получаются относительныя числа, которыя требуютъ отъ учащихся обстоятельнаго разъясненія ихъ значенія.

Упражненія, относящіяся къ Главѣ V, смотри въ „Вопр., задачахъ и прим." (пособіе для учащихся) въ Отдѣлѣ XI.