СОБРАНІЕ

СТЕРЕОМЕТРИЧЕСКИХЪ ЗАДАЧЪ,

ТРЕБУЮЩИХЪ ПРИМѢНЕНІЯ

ТРИГОНОМЕТРІИ.

СОСТАВИЛЪ

Н. РЫБКИНЪ.

ИЗДАНІЕ ПЯТНАДЦАТОЕ.

(Напечатано безъ измѣненій съ тринадцатаго изданія, допущеннаго Уч. К. М. Н. П. для среднихъ учебныхъ заведеній).

Складъ при книгоиздательствѣ „ШКОЛА".
Москва, Спиридоновка, д. № 14.

МОСКВА.
Рижская Типо-Литографія (К. Я. Мишке)
Покровка, д. № 43. Тел. 5-71-23.
1916.

ПРЕДИСЛОВІЕ.

Изъ предисловія къ первому изданію.

По правиламъ о письменныхъ испытаніяхъ зрѣлости къ геометрической задачѣ, назначаемой для абитуріентовъ, «присоединяются такія данныя и условія, которыя дали бы возможность ученику обнаружить умѣнье вводить въ выкладки тригонометрическія функціи, пользоваться тригонометрическими таблицами и рѣшать треугольники» (Прав. объ испыт. 1891 г. § 57 *г*).

Настоящій небольшой сборникъ представляетъ собою опытъ учебнаго пособія, соотвѣтствующаго указаннымъ экзаменнымъ требованіямъ. Содержащіяся въ немъ задачи служатъ для совмѣстнаго примѣненія геометріи и тригонометріи; при этомъ въ однѣхъ задачахъ преобладаетъ элементъ геометрическій, въ другихъ — тригонометрическій, въ третьихъ — я старался ввести оба элемента равномѣрно.

По отношенію къ геометрическому элементу я предпочиталъ тѣ задачи, въ которыхъ удачное рѣшеніе вытекаетъ изъ соображеній вполнѣ геометрическаго характера и которыя требуютъ отъ рѣшающаго отчетливыхъ геометрическихъ представленій.

Что касается видовъ примѣненія тригонометріи, то я заботился о возможномъ ихъ разнообразіи и интересѣ; съ этою цѣлью въ число задачъ включено также нѣсколько такихъ, которыя приводятъ къ рѣшенію тригонометрическихъ уравненій.

Изъ предисловія къ третьему изданію.

При третьемъ изданіи въ книгѣ сдѣланы значительныя измѣненія, согласно указаніямъ опыта и совѣтамъ гг. преподавателей. Прежде всего — присоединены *вновь* планиметрическія задачи и тотъ отдѣлъ, который я назвалъ введеніемъ; такой отдѣлъ мнѣ казался полезнымъ, какъ подготовительный и справочный. Изъ другихъ измѣненій отмѣч. слѣдующія: 1) въ стереометрическихъ задачахъ уничтожено раздѣленіе на двѣ группы различной трудности; взамѣнъ этого я старался уравнять и уменьшить трудность задачъ, увеличивъ для этого число указаній къ нимъ; 2) стереометрическія задачи расположены, какъ и прежде, по курсу, но — для ясности — отдѣлы стереометріи теперь озаглавлены; 3) отведено видное мѣсто логариѳмическимъ вычисленіямъ, для чего я пользовался преимущественно планиметрическими задачами (вообще же я присоединялъ числовыя данныя тамъ, гдѣ ихъ подборъ можетъ вліять на ходъ рѣшенія или гдѣ вычисленіе буквенной формулы не лишено интереса).

Пятнадцатое изданіе перепечатано съ тринадцатаго.

ВВЕДЕНІЕ.

Нѣкоторыя теоремы, формулы и преобразованія, которыя потребуются далѣе въ задачахъ.

I. Въ правильномъ треугольникѣ: 1) высота равна половинѣ стороны, умноженной на $\sqrt{3}$; 2) радіусъ описаннаго круга равенъ двумъ радіусамъ вписаннаго круга.

II. Діагональ квадрата равна сторонѣ, умноженной на $\sqrt{2}$.

III. Если величина a раздѣлена въ среднемъ и крайнемъ отношеніи, то бо́льшая часть равна $\frac{a}{2}(\sqrt{5}-1)$.

IV. Площадь треугольника равна половинѣ основанія, умноженной на высоту *).

V. Для опредѣленія высоты треугольника иногда удобно пользоваться двоякимъ выраженіемъ его площади.

VI. Площадь прямолинейной фигуры, описанной около круга, равна произведенію радіуса на половину периметра.

VII. *Теоремы о трехъ* **) *перпендикулярахъ:* 1) Если наклонная перпендикулярна къ прямой, проходящей на плоскости черезъ ея основаніе, то проекція наклонной также перпендикулярна къ этой прямой. 2) Если прямая проходитъ на плоскости черезъ основаніе наклонной и перпендикулярна къ ея проекціи, то она перпендикулярна и къ наклонной.

---

*) Для задачъ *такая форма* теоремы удобнѣе обычной.

**) Два перпендикуляра упоминаются въ самомъ текстѣ теоремъ; третьимъ будетъ перпендикуляръ къ плоскости, проводимый для полученія проекціи.

VIII. Если треугольникъ или многоугольникъ проектируется на плоскость, то площадь проекціи равна проектируемой площади, умноженной на косинусъ ея угла съ плоскостью проекціи.

IX. Боковыя поверхности цилиндра, конуса и усѣченнаго конуса можно выразить *одной* формулой съ помощью высоты ихъ h и перпендикуляра c, возставленнаго изъ *средины* образующей до пересѣченія съ осью. Эта формула есть

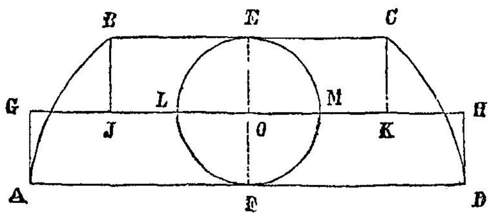
$$P = 2\pi c \,.\, h.$$

X. Пусть треугольникъ ABC вращается около оси, лежащей въ его плоскости и проходящей черезъ вершину A не внутри угла BAC, и пусть будетъ AD высота треугольника, проведенная къ сторонѣ BC. Тогда

$$\text{об.}\ (ABC) = \text{пов.}\ (BC) \cdot \frac{AD}{3}.$$

XI. Сферическимъ секторомъ *2-го рода* называютъ такую часть шара, которая самостоятельно можетъ быть получена вращеніемъ кругового сектора около *внѣшняго* діаметра. Объемъ такого тѣла равенъ поверхности шарового пояса, умноженной на $\frac{1}{3}$ радіуса шара.

XII. Выраженіе для объема сферическаго слоя удобно помнить съ переводѣ на такой чертежъ:



Черт. 1.

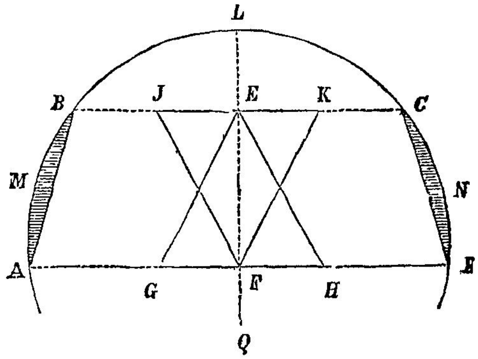
Здѣсь представлены своими *осевыми сѣченіями* четыре тѣла: сферическій слой ($ABCD$), два цилиндра половинной высоты ($AGHD$ и $IBCK$) и шаръ ($EMFL$): сферическій слой равновеликъ суммѣ цилиндровъ и шара.

Для сферическаго сегмента полагаемъ радіусъ верхняго основанія равнымъ нулю.

XIII. Пусть круговой сегментъ AMB (черт. 2) вращается около діаметра LQ и пусть будетъ EF проекція хорды AB на этотъ діаметръ. Тогда

$$\text{об. } (AMB) = \frac{1}{6}\pi AB^2 . EF.$$

Эту формулу можно перевести на такой чертежъ:



Черт. 2.

Здѣсь совокупность круговыхъ сегментовъ AMB и CND представляетъ осевое сѣченіе разсматриваемаго тѣла. Хорды AB и CD перенесены потомъ въ положенія GH и IK, при чемъ F и E суть ихъ средины. Тр-ки GEH и IFK суть осевыя сѣченія конусовъ, которыхъ сумма и дастъ искомый объемъ.

XIV. 1) $\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1) = \text{sn}\, 18^\circ = \text{cs}\, 72^\circ$.

2) $\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1) = \text{cs}\, 36^\circ = \text{sn}\, 54^\circ$.

3) $\sqrt{2}-1 = \text{tg}\, 22^\circ\, 30' = \text{ctg}\, 67^\circ\, 30'$.

4) $\sqrt{2}+1 = \text{ctg}\, 22^\circ\, 30' = \text{tg}\, 67^\circ\, 30'$.

5) $2-\sqrt{3} = \text{tg}\, 15^\circ = \text{ctg}\, 75^\circ$.

6) $2+\sqrt{3} = \text{ctg}\, 15^\circ = \text{tg}\, 75^\circ$.

XV. 1) $1+\text{cs}\,\alpha = 2\,\text{cs}^2\frac{\alpha}{2}$; 2) $1-\text{cs}\,\alpha = 2\,\text{sn}^2\frac{\alpha}{2}$.

XVI. 1) $\operatorname{sn}^2\alpha - \operatorname{sn}^2\beta = \operatorname{sn}(\alpha + \beta) \,.\, \operatorname{sn}(\alpha - \beta)$.

2) $\operatorname{cs}^2\alpha - \operatorname{cs}^2\beta = \operatorname{sn}(\beta + \alpha) \,.\, \operatorname{sn}(\beta - \alpha)$.

3) $\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\beta = \dfrac{\operatorname{sn}(\alpha + \beta) \,.\, \operatorname{sn}(\alpha - \beta)}{\operatorname{cs}^2\alpha \,.\, \operatorname{cs}^2\beta}$.

4) $\operatorname{ctg}^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\beta = \dfrac{\operatorname{sn}(\beta + \alpha) \,.\, \operatorname{sn}(\beta - \alpha)}{\operatorname{sn}^2\alpha \,.\, \operatorname{sn}^2\beta}$.

XVII. Если $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, то

$$\operatorname{sn}\alpha + \operatorname{sn}\beta + \operatorname{sn}\gamma = 4 \operatorname{cs}\frac{\alpha}{2} \operatorname{cs}\frac{\beta}{2} \operatorname{cs}\frac{\gamma}{2}.$$

XVIII. 1) $1 + \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg} 45^\circ + \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{sn}(45^\circ + \alpha)}{\operatorname{cs} 45^\circ \,.\, \operatorname{cs}\alpha}$.

2) $3 - \operatorname{ctg}^2\alpha = \operatorname{ctg}^2 30^\circ - \operatorname{ctg}^2\alpha = \dfrac{\operatorname{sn}(\alpha + 30^\circ) \,.\, \operatorname{sn}(\alpha - 30^\circ)}{\operatorname{sn}^2 30^\circ \,.\, \operatorname{sn}^2\alpha}$.

3) $\operatorname{sn}\alpha + \operatorname{cs}\alpha = \sqrt{2}\left(\operatorname{sn}\alpha \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \operatorname{cs}\alpha \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) =$

$= \sqrt{2}\,(\operatorname{sn}\alpha \,.\, \operatorname{cs} 45^\circ + \operatorname{cs}\alpha \,.\, \operatorname{sn} 45^\circ) = \sqrt{2} \,.\, \operatorname{sn}(\alpha + 45^\circ)$.

4) $1 + 2\operatorname{sn}\alpha = 2\left(\dfrac{1}{2} + \operatorname{sn}\alpha\right) = 2\,(\operatorname{sn} 30^\circ + \operatorname{sn}\alpha) =$

$$= 4 \operatorname{sn}\left(15^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) \operatorname{cs}\left(15^\circ - \frac{\alpha}{2}\right).$$

XIX. Хорда равна діаметру, умноженному на синусъ *половины* дуги.

Примѣчаніе. Эта теорема вѣрна, будетъ ли дуга менѣе 180°, равна 180°, или болѣе 180°.

XX. Сторона *всякаго* треугольника равна діаметру описаннаго круга, умноженному на синусъ противолежащаго угла ($a = 2R \,.\, \operatorname{sn} A$).

XXI. Для радіуса R круга, описаннаго около треугольника, имѣемъ:

1) $R = \dfrac{a}{2 \operatorname{sn} A}$ и 2) $R = \dfrac{abc}{4S}$, гдѣ S есть площадь тр-ка.

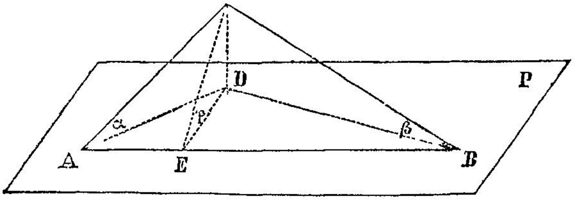
XXII. Площадь S *всякаго* треугольника выражается по сторонѣ a и угламъ B и C слѣдующей формулой:

$$S = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\operatorname{sn} B \,.\, \operatorname{sn} C}{\operatorname{sn}(B+C)}.$$

XXIII. Площадь 4-угольника равна половинѣ произведенія діагоналей на синусъ угла между ними.

Нѣсколько задачъ, рѣшенныхъ сполна — съ цѣлью указать нѣкоторые пріемы, которые понадобятся далѣе.

XXIV. *Задача 1.* Черезъ гипотенузу прямоугольнаго треугольника проходитъ плоскость, наклоненная къ катетамъ подъ углами α и β. Какой уголъ она составляетъ съ плоскостью треугольника?

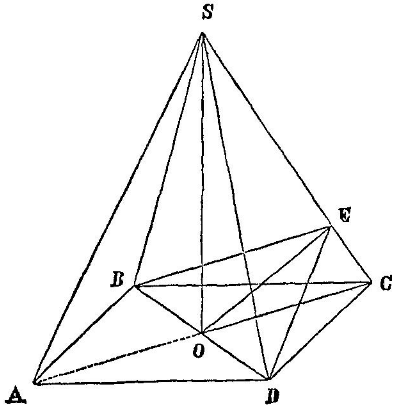


Черт. 3.

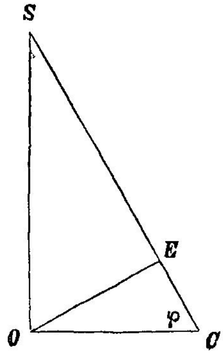
Рѣшеніе. Пусть будетъ P данная плоскость и AB гипотенуза прямоугольнаго тр-ка ABC. Чтобы получить углы α и β, проведемъ $CD \perp P$ и соединимъ D съ A и B; тогда $\angle CAD = \alpha$ и $\angle CBD = \beta$. Чтобы построить линейный уголъ двуграннаго угла между ABC и P, проведемъ $DE \perp AB$ и соединимъ E съ C; тогда получимъ $EC \perp AB$ (по 2-ой теоремѣ о трехъ перпендикулярахъ), и слѣдов. уголъ CED будетъ линейный; обозначимъ его черезъ φ.

Теперь требуется связать φ съ α и β. Для этого воспользуемся какою-нибудь линіей, какъ *основной*, съ тѣмъ, чтобы черезъ нее выражать другія линіи. Такою линіей можетъ служить общій катетъ тѣхъ треугольниковъ, которые содержатъ углы α, β и φ, т.-е. линія CD. Полагая $CD = a$, найдемъ: $AC = \frac{a}{\operatorname{sn}\alpha}$, $CB = \frac{a}{\operatorname{sn}\beta}$ и $CE = \frac{a}{\operatorname{sn}\varphi}$. Такъ какъ уголъ ACB прямой, то $AC \,.\, CB = CE \,.\, AB$ или $AC \,.\, CB = CE \,.\, \sqrt{AC^2 + CB^2}$. Подстановка предыдущихъ выраженій даетъ $\frac{a}{\operatorname{sn}\alpha} \cdot \frac{a}{\operatorname{sn}\beta} = \frac{a}{\operatorname{sn}\varphi} \sqrt{\frac{a^2}{\operatorname{sn}^2\alpha} + \frac{a^2}{\operatorname{sn}^2\beta}}$, откуда $\operatorname{sn}\varphi = \sqrt{\operatorname{sn}^2\alpha + \operatorname{sn}^2\beta}$.

XXV. *Задача* 2. Опредѣлить объемъ правильной 4-угольной пирамиды, въ которой даны сторона основанія a и двугранный уголъ между боковыми гранями α. ($\alpha = 120°$).



Черт. 4.



Черт. 5.

Рѣшеніе. Означая объемъ пирамиды черезъ V и длину SO черезъ h, будемъ имѣть $V = \frac{1}{3}a^2 h$. Чтобы опредѣлить h, введемъ линейный уголъ α; его можно построить, опуская изъ точекъ B и D перпендикуляры на ребро SC; такъ какъ линіи CB и CD равны и одинаково отклонены отъ SC, то перпендикуляры встрѣтятъ ребро въ *общей* точкѣ E. Соединивъ E съ O, получимъ $\angle BEO = DEO = \frac{\alpha}{2}$. Означая $\angle SCO$ черезъ φ, найдемъ $h = OC \,.\, \mathrm{tg}\,\varphi = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \mathrm{tg}\,\varphi$. Для опредѣленія $\mathrm{tg}\,\varphi$ имѣемъ $\mathrm{sn}\,\varphi = \frac{OE}{OC} = \frac{OE}{OD} = \mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}$; такимъ образомъ

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{\mathrm{sn}\,\varphi}{\sqrt{1 - \mathrm{sn}^2\varphi}} = \mathrm{ctg}\,\frac{\alpha}{2} : \sqrt{1 - \mathrm{ctg}^2\frac{\alpha}{2}} = \mathrm{cs}\,\frac{\alpha}{2} : \sqrt{\mathrm{sn}^2\frac{\alpha}{2} - \mathrm{cs}^2\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \mathrm{cs}\,\frac{\alpha}{2} : \sqrt{-\mathrm{cs}\,\alpha}.$$

Подставляя этотъ результатъ въ выраженіе для h, найдемъ $h = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\mathrm{cs}\,\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{-\mathrm{cs}\,\alpha}}$ *),

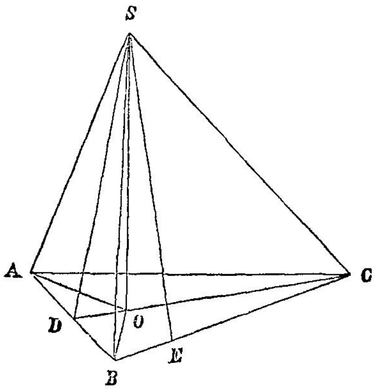
а слѣдовательно $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{6} \cdot \frac{\mathrm{cs}\,\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{-\mathrm{cs}\,\alpha}}$.

---

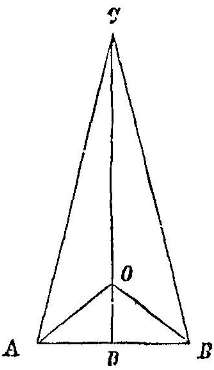
*) Тотъ же результатъ можно получить еще изъ *подобія* треугольниковъ SOC и OEC.

Въ примѣрѣ, при $\alpha = 120^\circ$, получимъ $\frac{a^3}{6}$. Замѣтимъ, что $\frac{a^3}{6}$ есть, между прочимъ, объемъ пирамиды, имѣющей основаніемъ грань куба (съ ребромъ a), а вершиной его центръ; слѣдов. въ такой пирамидѣ уголъ между боковыми гранями равенъ 120°.

XXVI. *Задача 3.* Опредѣлить объемъ и боковую поверхность треугольной пирамиды, въ которой одна изъ сторонъ основанія равна a, а плоскіе углы при ея концахъ равны α.



Черт. 6.



Черт. 7.

Рѣшеніе. Дано, что въ пирамидѣ $SABC$ ребро $AB = a$ и $\angle SAC = SAB = CAB = SBA = SBC = ABC = \alpha$.

Проведемъ SO перпендикулярно къ плоскости ABC и опредѣлимъ положеніе точки O относительно треугольника ABC.

Такъ какъ $\angle SBA = SBC$, то $\angle OBA = OBC$, и такъ какъ $\angle SAB = SAC$, то $\angle OAB = OAC$; такимъ образомъ точка O есть центръ вписаннаго круга.

Проведя въ треугольникѣ ABC высоту CD (такъ какъ $\angle CAB = CBA$, то CD пройдетъ черезъ O), получимъ: площ. $ABC = AD\,.\,CD = \frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}\operatorname{tg}\alpha = \frac{a^2}{4}\cdot\operatorname{tg}\alpha$. Далѣе, соединивъ S и D, найдемъ $SO^2 = SD^2 - DO^2$; но $SD = \frac{a}{2}\operatorname{tg}\alpha$ *) и $OD = \frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$; такимъ образомъ $SO^2 = \frac{a^2}{4}\left(\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{a^2}{4}\cdot\frac{\operatorname{sn}\frac{3\alpha}{2}\cdot\operatorname{sn}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{cs}^2\alpha\,.\,\operatorname{cs}^2\frac{\alpha}{2}}$.

*) SD будетъ перпендикулярна къ AB по 2-й теоремѣ о трехъ перпендикулярахъ.

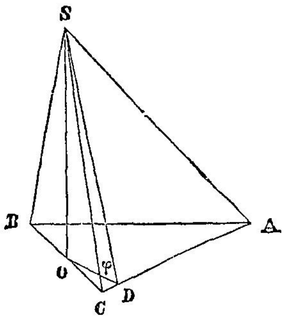
Опредѣливъ отсюда SO и пользуясь полученнымъ ранѣе выраженіемъ площади ABC, найдемъ

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2}{4}\operatorname{tg}\alpha\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{\sqrt{\operatorname{sn}\frac{3\alpha}{2}\cdot\operatorname{sn}\frac{\alpha}{2}}}{\operatorname{cs}\alpha\cdot\operatorname{cs}\frac{\alpha}{2}}=\frac{a^3}{12}\cdot\frac{\operatorname{sn}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{cs}^2\alpha}\sqrt{\operatorname{sn}\frac{3\alpha}{2}\cdot\operatorname{sn}\frac{\alpha}{2}}.$$

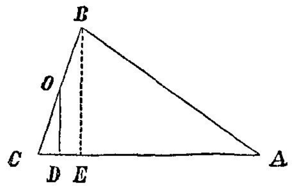
Для боковой поверхности имѣемъ: $P=$ пл. $ASB+2$ пл. SBC, или, проведя $SE\perp BC$, $P=BD.SD+BC.SE$; но $SE=SD$; такимъ образомъ

$$P=SD(BD+BC)=\frac{a}{2}\operatorname{tg}\alpha\left(\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cdot\frac{1}{\operatorname{cs}\alpha}\right)=\frac{a^2}{4}\operatorname{tg}\alpha\cdot\frac{1+\operatorname{cs}\alpha}{\operatorname{cs}\alpha}=$$
$$=\frac{a^2}{2}\cdot\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{cs}\alpha}\cdot\operatorname{cs}^2\frac{\alpha}{2}.$$

XXVII. *Задача 4.* Основаніемъ пирамиды $SABC$ служитъ треугольникъ ABC, въ которомъ AB и AC имѣютъ длину b и заключаютъ между собой уголъ α. Грань SBC перпендикулярна къ плоскости основанія, а SBA и SCA образуютъ съ плоскостью основанія уголъ φ. Опредѣлить объемъ и боковую поверхность этой пирамиды. (Выраженіе, полученное для боковой поверхности, вычислить, полагая: $b=13{,}406$; $\alpha=56°30'13''$ и $\varphi=42°16'$).



Черт. 8.



Черт. 9.

Рѣшеніе. Сначала опредѣлимъ *форму* разсматриваемой пирамиды. Въ основаніи ея, по условію, равнобедренный треугольникъ. Такъ какъ $\angle ABC=ACB$ и плоскости SBA и SCA образуютъ съ плоскостью ABC одинаковые углы, то SB и SC образуютъ одинаковые углы съ BC; такимъ образомъ тр-къ SBC равнобедренный и грани SBA и SCA равны. Далѣе, такъ какъ грань SBC перпендикулярна къ ABC, то высота пирамиды пройдетъ въ плоскости SBC, а по равенству реберъ SB и SC встрѣтитъ BC въ серединѣ; пусть будетъ SO эта высота.

Чтобы построить линейный уголъ даннаго двуграннаго, проведемъ $SD \perp AC$ и соединимъ D съ O; тогда получимъ $OD \perp CA$ (по 1-й теоремѣ о трехъ перпендикулярахъ) и слѣдов. $\angle SDO = \varphi$ *).

Для нахожденія объема опредѣлимъ сперва высоту пирамиды. Изъ тр-ка SOD имѣемъ $SO = OD . \mathrm{tg}\,\varphi$; проведя $BE \perp AC$, найдемъ $OD = \frac{1}{2} BE = \frac{1}{2} b \,\mathrm{sn}\,\alpha$; такимъ образомъ $SO = \frac{b}{2} \mathrm{sn}\,\alpha \,.\, \mathrm{tg}\,\varphi$. Теперь получимъ

$$V = \frac{1}{3}\,\text{пл. } ABC \,.\, SO = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} b^2 \mathrm{sn}\,\alpha \cdot \frac{b}{2} \mathrm{sn}\,\alpha \,.\, \mathrm{tg}\,\varphi = \frac{b^3}{12} \cdot \mathrm{sn}^2\alpha \,.\, \mathrm{tg}\,\varphi.$$

Для боковой поверхности имѣемъ: $P = \text{пл. } SBC + 2\,\text{пл. } SCA = OC \,.\, SO + AC . SD$. Здѣсь $OC = b . \mathrm{sn}\frac{\alpha}{2}$, $SO = \frac{b}{2} \mathrm{sn}\,\alpha . \mathrm{tg}\,\varphi$ (по предыдущему), $AC = b$ и $SD = \frac{OD}{\mathrm{cs}\,\varphi} = \frac{b}{2} \cdot \frac{\mathrm{sn}\,\alpha}{\mathrm{cs}\,\varphi}$ (выраженіе для OD см. выше). Подставляя, получимъ

$$P = b\,\mathrm{sn}\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{b}{2} \mathrm{sn}\,\alpha \,.\, \mathrm{tg}\,\varphi + b \,.\, \frac{b}{2} \cdot \frac{\mathrm{sn}\,\alpha}{\mathrm{cs}\,\varphi} = \frac{b^2}{2} \cdot \frac{\mathrm{sn}\,\alpha}{\mathrm{cs}\,\varphi} (1 + \mathrm{sn}\frac{\alpha}{2} \cdot \mathrm{sn}\,\varphi).$$

Вычислимъ теперь полученное выраженіе.

1-й способъ. Сначала отдѣльно вычислимъ $x = \mathrm{sn}\frac{\alpha}{2} \cdot \mathrm{sn}\,\varphi$, послѣ чего вычислимъ $P = \frac{b^2}{2} \cdot \frac{\mathrm{sn}\,\alpha}{\mathrm{cs}\,\varphi} (1 + x)$, выполнивъ предварительно сложеніе. Вычисленіе таково:

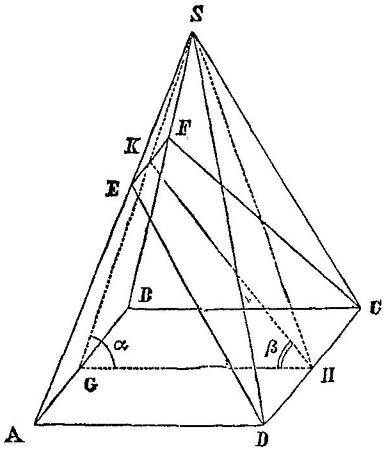
$$\begin{array}{rl} & \lg \mathrm{sn}\frac{\alpha}{2} = 9{,}67518 - 10 \\ + & \lg \mathrm{sn}\,\varphi = 9{,}82775 - 10 \\ \hline & \lg x = 9{,}50293 - 10 \\ & x = 0{,}31837 \\ & 1 + x = 1{,}31837 \end{array}
\qquad
\begin{array}{rl} & 2 \lg b = 2{,}25460 \\ + & \lg \mathrm{sn}\,\alpha = 9{,}92113 - 10 \\ & \lg (1 + x) = 0{,}12004 \\ & \lg 0{,}5 = 9{,}69897 - 10 \\ \hline & 1{,}99474 \\ - & \lg \mathrm{cs}\,\varphi = 9{,}86924 - 10 \\ \hline & \lg P = 2{,}12550 \\ & P = 133{,}506 \text{ (кв. ед.)}. \end{array}$$

2-й способъ. Такъ какъ $\mathrm{sn}\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{sn}\,\varphi < 1$, то можно положить $\mathrm{sn}\frac{\alpha}{2} \cdot \mathrm{sn}\,\varphi = \mathrm{cs}\,\vartheta$; тогда получимъ $P = \frac{b^2 . \mathrm{sn}\,\alpha}{\mathrm{cs}\,\varphi} \cdot \mathrm{cs}^2\frac{\vartheta}{2}$. Вычисленіе по этому способу будетъ таково:

$$\begin{array}{rl} & \lg \mathrm{sn}\frac{\alpha}{2} = 9{,}67518 - 10 \\ + & \lg \mathrm{sn}\,\varphi = 9{,}82775 - 10 \\ \hline & \lg \mathrm{cs}\,\vartheta = 9{,}50293 - 10 \\ & \vartheta = 71^\circ 26' 8'' \\ & \frac{\vartheta}{2} = 35^\circ 43' 4'' \end{array}
\qquad
\begin{array}{rl} & 2 \lg b = 2{,}25460 \\ + & \lg \mathrm{sn}\,\alpha = 9{,}92113 - 10 \\ & 2 \lg \mathrm{cs}\frac{\vartheta}{2} = 9{,}81900 - 10 \\ \hline & 1{,}99473 \\ - & \lg \mathrm{cs}\,\varphi = 9{,}86924 - 10 \\ \hline & \lg P = 2{,}12549 \\ & P = 133{,}503 \text{ (кв. ед.)}. \end{array}$$

*) Или: изъ точки O опускаемъ перпендикуляръ на AC и полученную точку соединяемъ съ S (тогда примѣнится 2-я теор. о трехъ перпенд.).

XXVIII. *Задача 5.* Въ правильной 4-угольной пирамидѣ двугранный уголъ при основаніи равенъ α. Черезъ ребро основанія проведена внутри пирамиды плоскость, составляющая съ основаніемъ уголъ β. Въ какомъ отношеніи она дѣлитъ площади боковыхъ граней?



Черт. 10.

Рѣшеніе. Пусть будетъ $SABCD$ данная пирамида и $EFCD$ сѣченіе, о которомъ идетъ рѣчь; замѣтимъ, что $EF \parallel AB$. Чтобы построить линейные углы для α и β, соединимъ средины G, H и K линій AB, CD и EF; тогда $\angle KGH = \alpha$ и $\angle KHG = \beta$.

Грани SAD и SBC раздѣлены слѣдами ED и FC, очевидно, одинаково; поэтому вопросъ сводится только на опредѣленіе отношеній

$$\frac{SEF}{AEFB} \text{ и } \frac{SED}{EAD}.$$

Продолжимъ теперь плоскость GKH; она пройдетъ черезъ S и дастъ еще два слѣда: KS, составляющій продолженіе GK, и SH.

1) Имѣемъ $\frac{SEF}{SAB} = \frac{SK^2}{SG^2}$, такъ какъ взятые треугольники подобны, а SK и SG ихъ сходственныя высоты. Такъ какъ $SG = SH$, то $\frac{SK}{SG} = \frac{SK}{SH}$; но послѣднее отношеніе можно опредѣлить изъ тр-ка SKH, замѣтивъ, что $\angle SHK = \alpha - \beta$ и $\angle SKH = \alpha + \beta$ (какъ внѣшній для тр-ка KGH): получимъ $\frac{SK}{SH} = \frac{\operatorname{sn}(\alpha - \beta)}{\operatorname{sn}(\alpha + \beta)}$. Такимъ образомъ $\frac{SEF}{SAB} = \frac{\operatorname{sn}^2(\alpha - \beta)}{\operatorname{sn}^2(\alpha + \beta)}$, откуда

$$\frac{SEF}{AEFB} = \frac{\operatorname{sn}^2(\alpha - \beta)}{\operatorname{sn}^2(\alpha + \beta) - \operatorname{sn}^2(\alpha - \beta)} = \frac{\operatorname{sn}^2(\alpha - \beta)}{\operatorname{sn} 2\alpha . \operatorname{sn} 2\beta}.$$

2) Имѣемъ $\frac{SED}{SAD} = \frac{SE}{SA}$, такъ какъ взятые треугольники имѣютъ общую высоту (принимая за вершину точку D); но $\frac{SE}{SA} = \frac{SK}{SG}$, а по предыдущему $\frac{SK}{SG} = \frac{\operatorname{sn}(\alpha - \beta)}{\operatorname{sn}(\alpha + \beta)}$; слѣдовательно $\frac{SED}{SAD} = \frac{\operatorname{sn}(\alpha - \beta)}{\operatorname{sn}(\alpha + \beta)}$. Отсюда

$$\frac{SED}{EAD} = \frac{\operatorname{sn}(\alpha - \beta)}{\operatorname{sn}(\alpha + \beta) - \operatorname{sn}(\alpha - \beta)} = \frac{\operatorname{sn}(\alpha - \beta)}{2 \operatorname{cs} \alpha \operatorname{sn} \beta}.$$

XXIX. *Задача 6.* Въ правильной треугольной пирамидѣ опредѣлить уголъ между основаніемъ и боковымъ ребромъ, если онъ на α менѣе угла между основаніемъ и апоѳемой. ($\alpha = 10°$).

Рѣшеніе. Означая искомый уголъ черезъ x, а черезъ h, R и r соотвѣтственно высоту пирамиды, радіусъ основанія и апоѳему основанія, будемъ имѣть систему уравненій:

$$h = R \,.\, \mathrm{tg}\, x; \quad h = r \,.\, \mathrm{tg}\,(x + \alpha); \quad R = 2\,r.$$

Исключивъ линейные элементы, получимъ: $\mathrm{tg}\,(x+\alpha) = 2\,\mathrm{tg}\,x$; отсюда:

$$\frac{\mathrm{tg}\,(x+\alpha)}{\mathrm{tg}\,x} = 2; \quad \frac{\mathrm{tg}\,(x+\alpha) + \mathrm{tg}\,x}{\mathrm{tg}\,(x+\alpha) - \mathrm{tg}\,x} = 3; \quad \frac{\mathrm{sn}\,(2\,x+\alpha)}{\mathrm{sn}\,\alpha} = 3.$$

Такимъ образомъ — для опредѣленія x будемъ имѣть уравненіе $\mathrm{sn}\,(2x+\alpha) = 3\,\mathrm{sn}\,\alpha$. Задача невозможна, если $\mathrm{sn}\,\alpha > \frac{1}{3}$.

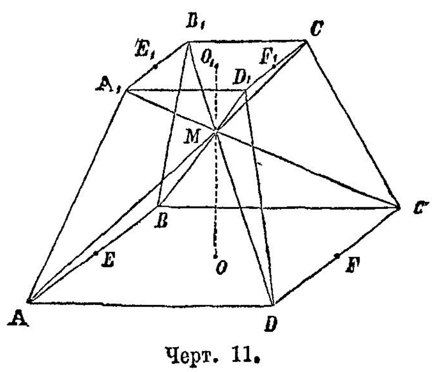
Произведя вычисленіе при $\alpha = 10°$, найдемъ:

$$2x_1 + 10° = 31°\,23'\,43''; \quad x_1 = 10°\,41'\,52''$$
$$2x_2 + 10° = 148°\,36'\,17''; \quad x_2 = 69°\,28'\,9''.$$

XXX. *Задача 7.* Въ усѣченной правильной 4-угольной пирамидѣ стороны нижняго и верхняго основаній относятся какъ $m : n$, а двугранный уголъ при нижнемъ основаніи равенъ α. Опредѣлить углы между діагоналями этой пирамиды (обращенные отверстіемъ къ плоскости основанія).

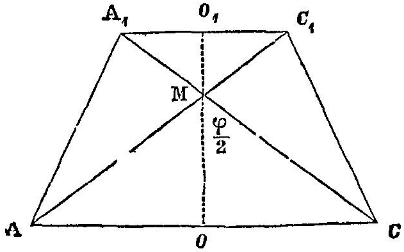
Рѣшеніе. Пусть будутъ: $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ нижнее и верхнее основанія усѣченной пирамиды, M точка пересѣченія ея діагоналей, O и O_1 центры основаній. Точка M находится на линіи OO_1.

Величину угла, опирающагося на діагональ основанія (напримѣръ $\angle AMC$), означимъ черезъ φ, а величину угла, опирающагося на сторону основанія (напр. $\angle CMD$), черезъ φ_1.

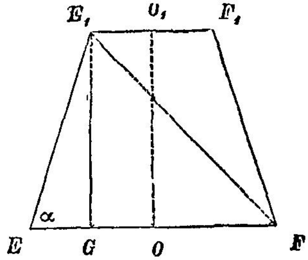


Черт. 11.

1) Проведемъ сѣченіе AA_1C_1C (черт. 12). Изъ треугольника OMC получимъ $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}=\frac{OC}{OM}$. Такъ какъ стороны основаній, по условію, относятся какъ $m:n$, то можно принять $AB=2mx$ и $A_1B_1=2nx$, послѣ чего найдемъ: $OC=mx\sqrt{2}$ и $O_1C_1=nx\sqrt{2}$. Что касается OM, то изъ подобія треугольниковъ слѣдуетъ, что въ точкѣ M ось OO_1 дѣлится въ отношеніи



Черт. 12.



Черт. 13.

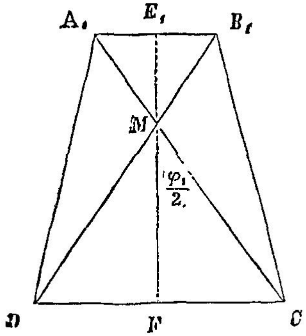
$m:n$ и $OM=OO_1\cdot\frac{m}{m+n}$; выразимъ поэтому сперва OO_1. Означая черезъ E и E_1 средины реберъ AB и A_1B_1, черезъ F и F_1 средины реберъ CD и C_1D_1, образовавъ трапецію EE_1F_1F (черт. 13) и опустивъ на EF перпендикуляръ E_1G, получимъ:

$$O_1O=E_1G=EG\,.\,\operatorname{tg}\alpha=(m-n)\,x\,.\,\operatorname{tg}\alpha.$$

Такимъ образомъ $OM=(m-n)\,x\,.\,\operatorname{tg}\alpha\cdot\frac{m}{m+n}$.

Теперь, пользуясь полученными выраженіями для OC и OM, найдемъ:

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}=\frac{m+n}{m-n}\sqrt{2}\,.\,\operatorname{ctg}\alpha.$$



Черт. 14.

2) Проведемъ сѣченіе A_1B_1CD и въ немъ линію E_1F (черт. 14). Изъ треугольника MFC найдемъ $\operatorname{tg}\frac{\varphi_1}{2}=\frac{FC}{MF}$; $FC=mx$, а изъ подобія треугольниковъ слѣдуетъ, что въ точкѣ M линія E_1F дѣлится въ отношеніи $m:n$ и $MF=E_1F\cdot\frac{m}{m+n}$. Чтобы выразить E_1F, обратимся къ сѣченію EE_1F_1F (черт. 13); будемъ имѣть $E_1F^2=E_1G^2+FG^2$; E_1G по предыдущему равно $(m-n)\,x\,.\,\operatorname{tg}\alpha$, а $FG=FO+OG=FO+O_1E_1=(m+n)x$. Послѣ подстановки E_1G и FG и преобразованій получимъ:

$E_1F^2 = x^2 \cdot \dfrac{m^2+n^2+2mn\cs 2\alpha}{\cs^2\alpha}$; слѣдовательно

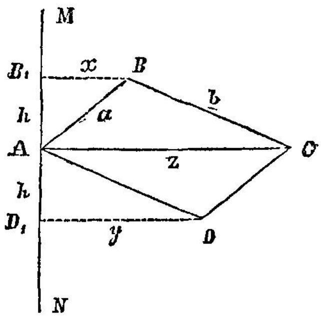
$$MF = \frac{x}{\cs\alpha}\cdot\sqrt{m^2+n^2+2mn\cs 2\alpha}\,.\frac{m}{m+n}.$$

Возвращаясь теперь къ $\tg\frac{\varphi_1}{2}$ и замѣняя FC и MF полученными выраженіями, найдемъ:

$$\tg\frac{\varphi_1}{2} = \frac{(m+n)\,.\cs\alpha}{\sqrt{m^2+n^2+2mn\cs 2\alpha}}.$$

XXXI. *Задача 8.* Параллелограммъ, имѣющій стороны a и b и острый уголъ α, вращается около перпендикуляра къ большей діагонали, проведеннаго черезъ конецъ ея (въ плоскости парал-ма). Опредѣлить поверхность и объемъ тѣла вращенія.

Рѣшеніе. Пусть будетъ $ABCD$ вращаемый параллелограммъ и MN ось вращенія. Опустивъ на эту ось перпендикуляры BB_1 и DD_1, означимъ BB_1 черезъ x, DD_1 черезъ y, AC черезъ z и $AB_1 = AD_1$ черезъ h. Искомую поверхность означимъ черезъ S, а объемъ черезъ V.



Черт. 15.

1) Выразимъ, чему равны поверхности, описанныя отдѣльными сторонами параллелограмма, и полученныя выраженія сложимъ.

Имѣемъ:

$$\begin{array}{ll} & \text{пов. }(AB) = \pi xa \\ + & \text{пов. }(BC) = \pi(x+z)b \\ & \text{пов. }(CD) = \pi(y+z)a \\ & \text{пов. }(AD) = \pi yb \\ \hline \text{Отсюда:} & S = \pi(x+y+z)(a+b). \end{array}$$

Замѣчая, что $x+y=z$, найдемъ $S = 2\pi(a+b)z$; наконецъ, опредѣляя z изъ треугольника ABC и подставляя полученное выраженіе, будемъ имѣть

$$S = 2\pi(a+b)\sqrt{a^2+b^2+2ab\cs\alpha}.$$

2) Для опредѣленія объема имѣемъ:

$$V = \text{об. }(AB_1BC) + \text{об. }(AD_1DC) - \text{об. }(AB_1B) - \text{об. }(AD_1D).$$

Далѣе:

$$\begin{array}{ll} & \text{об. }(AB_1BC) = \frac{\pi}{3}h(x^2+z^2+xz) \\ + & \\ & \text{об. }(AD_1DC) = \frac{\pi}{3}h(y^2+z^2+yz) \\ - & \\ & \text{об. }(AB_1B) = \frac{\pi}{3}x^2h \\ - & \\ & \text{об. }(AD_1D) = \frac{\pi}{3}y^2h \\ \hline \end{array}$$

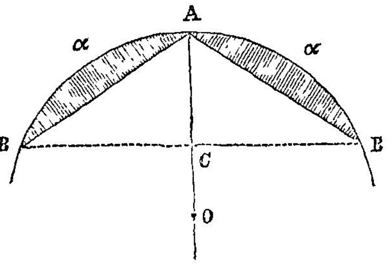
(См. слѣд. стр.)

Отсюда: $V = \frac{\pi}{3} h \left[2z^2 + z(x+y)\right] = \pi hz^2 = \pi \,.\, hz \,.\, z.$

Произведеніе hz выражаетъ удвоенную площадь треугольника ABC, поэтому равно $ab \operatorname{sn} \alpha$, а величина z опредѣлена ранѣе. Такимъ образомъ

$$V = \pi ab \operatorname{sn} \alpha \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \operatorname{cs} \alpha}.$$

XXXII. *Задача 9.* Круговой сегментъ, дуга котораго равна α (менѣе $180°$), вращается около діаметра, проведеннаго изъ конца дуги. Опредѣлить объемъ и поверхность тѣла вращенія, если радіусъ дуги равенъ R.



Черт. 16.

Рѣшеніе. Пусть на черт. 16 заштрихованная фигура представляетъ осевое сѣченіе разсматриваемаго тѣла и пусть будетъ AO ось, а O центръ дуги. Соединивъ B съ B_1, получимъ $BB_1 \perp AO$. Линія BB_1 можетъ проходить или выше центра, или черезъ центръ, или ниже центра (въ зависимости отъ α); соотвѣтственно этому можетъ получиться разница и въ подробностяхъ рѣшенія; но предпочтительнѣе, конечно, тотъ способъ, гдѣ положеніе линіи BB_1 безразлично; его и примѣнимъ.

1) По § XIII имѣемъ $V = \frac{1}{6} \pi AB^2 \,.\, AC$; но $AB = 2R \,.\, \operatorname{sn} \frac{\alpha}{2}$ (см. § XIX) и $AC = AB \,.\, \operatorname{sn} \angle ABC = 2R \operatorname{sn} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{sn} \frac{\alpha}{2} = 2R \operatorname{sn}^2 \frac{\alpha}{2}$; такимъ образомъ

$$V = \frac{\pi}{6} \cdot 4R^2 \,.\, \operatorname{sn}^2 \frac{\alpha}{2} \,.\, 2R \,.\, \operatorname{sn}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{4}{3} \pi R^3 \,.\, \operatorname{sn}^4 \frac{\alpha}{2}.$$

2) Искомая поверхность состоитъ изъ кривой поверхности сферическаго сегмента, которая описана дугой AB, и боковой поверхности конуса, которая описана хордой AB. Такимъ образомъ

$$S = \text{пов.}\, (\smile AB) + \text{пов.}\, (AB) = 2\pi R \,.\, AC + \pi BC \,.\, AB.$$

Для опредѣленія BC имѣемъ: $BC = \frac{1}{2} BB_1 = \frac{1}{2} 2R \operatorname{sn} \frac{2\alpha}{2} = R \,.\, \operatorname{sn} \alpha$; выраженія для AB и AC найдены ранѣе. Подставляя, получимъ:

$$S = 2\pi R \,.\, 2R \operatorname{sn}^2 \frac{\alpha}{2} + \pi R \operatorname{sn} \alpha \,.\, 2R \operatorname{sn} \frac{\alpha}{2};$$

отсюда, замѣняя $\operatorname{sn} \alpha$ черезъ $2 \operatorname{sn} \frac{\alpha}{2} \operatorname{cs} \frac{\alpha}{2}$, найдемъ:

$$S = 4\pi R^2 \operatorname{sn}^2 \frac{\alpha}{2} \left(1 + \operatorname{cs} \frac{\alpha}{2}\right) = 8\pi R^2 \operatorname{sn}^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{cs}^2 \frac{\alpha}{4}.$$

XXXIII. *Задача 10.* Взята дуга AB равная α (менѣе 180°) и черезъ средину ея проведена касательная; въ точки A и B проведены радіусы и продолжены до встрѣчи съ касательной въ точкахъ C и D. Фигура, ограниченная прямыми AC, CD, DB и дугой AB, вращается около оси, которая проходитъ черезъ центръ дуги параллельно касательной. Опредѣлить объемъ тѣла вращенія, если радіусъ дуги равенъ R.

Рѣшеніе. Пусть будетъ $ACDB$ (черт. 17) образующая фигура и E точка касанія. Прежде всего замѣтимъ, что объемъ, описанный фигурой ACE, есть половина искомаго; будемъ поэтому разсматривать вращеніе ACE.

Соединивъ E съ O и проведя $CF \perp MN$, увидимъ, что $ACE = OFCE - OFC - OAE$; соотвѣтственно этому будемъ имѣть:

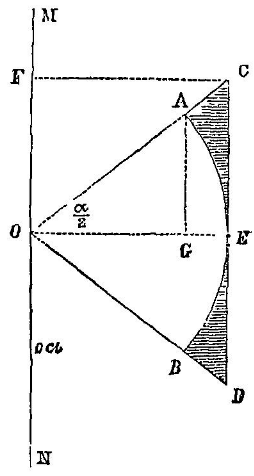
об. $(ACE) =$ об. $(OFCE) -$ об. $(OFC) -$ об. (OAE).

Далѣе находимъ (проведя еще $AG \perp OE$):

$$\text{об. } (OFCE) = \pi \, . \, OE^2 \, . \, CE = \pi R^2 \, . \, R \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$$

$$\text{об. } (OFC) = \frac{\pi}{3} \cdot FC^2 \, . \, OF = \frac{\pi}{3} R^2 \, . \, R \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$$

$$\text{об. } (OAE) = 2\pi R \, . \, AG \cdot \frac{R}{3} = \frac{2}{3} \pi R^3 \operatorname{sn}\frac{\alpha}{2} \text{*)}$$



Черт. 17.

$$\text{Слѣдов. об. } (ACE) = \frac{2}{3} \pi R^3 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\left(1 - \operatorname{cs}\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{4}{3} \pi R^3 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \operatorname{sn}^2\frac{\alpha}{4}.$$

Но объемъ, описанный фигурой ACE, есть половина искомаго; такимъ образомъ

$$V = \frac{8}{3} \pi R^3 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \operatorname{sn}^2\frac{\alpha}{4}.$$

XXXIV. *Задача 11.* Въ нѣкоторомъ конусѣ линія касанія вписаннаго шара дѣлитъ боковую поверхность такъ, что часть при вершинѣ и часть при основаніи относятся какъ $4 : 5$. Какъ наклонена въ этомъ конусѣ образующая къ плоскости основанія?

Рѣшеніе. Означимъ черезъ SO, SA и SA_1 соотвѣтственно высоту конуса, образующую и ея отрѣзокъ отъ вершины конуса до точки прикосно-

*) Круговымъ секторомъ OAE будетъ описанъ сферическій секторъ 2-го рода (см. § XI).

вопія къ шару. Изъ соотношенія частей боковой поверхности слѣдуетъ, что $SA_1 : SA = 2 : 3$, послѣ чего можно принять $SA_1 = 2x$ и $SA = 3x$. Соединивъ точки A и O, получимъ $AO = AA_1 = x$; наконецъ, означая искомый уголъ SAO черезъ α, найдемъ:

$$\cos\alpha = \frac{AO}{AS} = \frac{1}{3};\quad \alpha = 70°31'43''.$$

XXXV. *Задача 12.* Опредѣлить плоскій уголъ при вершинѣ правильной 4-угольной пирамиды, если центры вписаннаго и описаннаго шаровъ совпадаютъ.

Рѣшеніе. Означимъ черезъ α, R, r, x и y соотвѣтственно *половину* искомаго угла, радіусы шаровъ, апоѳему пирамиды и апоѳему основанія. Тогда будемъ имѣть слѣдующую систему уравненій:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x};\quad \frac{R}{r} = \frac{x}{y};\quad (R+r)^2 = x^2 - y^2;\quad R^2 - r^2 = 2y^2.$$

Изъ 3-го и 4-го уравненія находимъ $\frac{R+r}{R-r} = \frac{x^2-y^2}{2y^2}$. Дѣля здѣсь числителя и знаменателя первой части на R, а числителя и знаменателя второй части на x^2, и пользуясь уравненіями 2-мъ и 1-мъ, получимъ

$$\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{2\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Раздѣливъ обѣ части на $1+\operatorname{tg}\alpha$*), будемъ имѣть $\frac{1}{1-\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{2\operatorname{tg}^2\alpha}$ или $(1-\operatorname{tg}\alpha)^2 = 2\operatorname{tg}^2\alpha$; извлекая теперь изъ обѣихъ частей положительный квадратный корень**), найдемъ $1-\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2}\cdot\operatorname{tg}\alpha$, откуда $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2}-1$ и слѣдов. $\alpha = 22°30'$. Искомый уголъ равенъ $2\alpha = 45°$.

---

*) $1+\operatorname{tg}\alpha = 0$ не пригодно для *задачи*.

**) $1-\operatorname{tg}\alpha = -\sqrt{2}\cdot\operatorname{tg}\alpha$ не пригодно для *задачи* (по условію $0 < 2\alpha < 90°$, слѣдов. $0 < \operatorname{tg}\alpha < 1$).

Стереометрическія задачи.

Замѣчаніе. 1) Въ словахъ: „дуга a“, „опредѣлить величину дуги и т. п. имѣется въ виду градусное выраженіе дуги или ея центральнаго угла. 2) Въ словахъ: „плоскость M наклонена къ плоскости P подъ угломъ a“, „двугранный уголъ a“, „опредѣлить уголъ между плоскостями“ и т. п. безразлично имѣются въ виду двугранный уголъ и его линейный уголъ. 3) Подъ названіями: „цилиндръ“ и „конусъ“ разумѣются прямой круглый цилиндръ и прямой круглый конусъ. 4) Относительно тѣлъ вращенія предполагается, что ось вращенія лежитъ въ плоскости вращаемой фигуры. 5) Условія задачи, приводимыя въ скобкахъ послѣ текста, напримѣръ ($\alpha = 120°$) въ № 43, ($m : n = 1 : 3$) въ № 178 и т. д., означаютъ, что найденное общее рѣшеніе слѣдуетъ примѣнить къ данному частному случаю.

Линіи и плоскости въ пространствѣ (1—15).

1. Отрѣзки двухъ прямыхъ линій, заключенные между двумя параллельными плоскостями*), относятся какъ $2 : 3$, а ихъ углы съ плоскостью какъ $2 : 1$. Опредѣлить эти углы.

2. Изъ внѣшней точки проведены къ плоскости двѣ наклонныя; ихъ проекціи на эту плоскость суть a и b ($a > b$), а разность угловъ наклоненія къ плоскости равна 45°. Опредѣлить разстояніе отъ общей точки наклонныхъ до плоскости. ($a = 6$; $b = 1$).

3. Изъ внѣшней точки A проведены къ плоскости прямыя AB и AC, составляющія съ плоскостью углы β и $90° - \beta$, а между собой уголъ α. Опредѣлить углы B и C въ тре-

*) Взять *общій* случай, т.-е. предположить, что данные отрѣзки не лежатъ на одной плоскости.

угольникѣ ABC, полученномъ чрезъ соединеніе точекъ B и C. ($\alpha = 90^\circ - 2\beta$).

4. Изъ точки A плоскости M проведена наклонная AB подъ угломъ α къ плоскости; черезъ AB проведена плоскость P подъ угломъ β къ плоскости M. Опредѣлить уголъ между AB и линіей пересѣченія плоскостей M и P.

5 Въ прямоугольномъ треугольникѣ даны гипотенуза a и острый уголъ α. Опредѣлить разстояніе отъ вершины прямого угла до плоскости, которая проходитъ черезъ гипотенузу и составляетъ уголъ φ съ плоскостью треугольника.

6. Прямая AB параллельна плоскости P. Прямая CD пересѣкаетъ AB подъ угломъ α и образуетъ съ плоскостью P уголъ φ. Опредѣлить уголъ плоскости P съ плоскостью прямыхъ AB и CD.

7. Изъ двухъ точекъ плоскости проведены двѣ параллельныя наклонныя подъ угломъ α къ плоскости; прямая, пересѣкающая ихъ перпендикулярно, образуетъ съ плоскостью уголъ β. Опредѣлить уголъ наклонныхъ съ линіей, соединяющей ихъ слѣды.

8. Параллелограммъ и плоскость P расположены такъ, что одна изъ меньшихъ сторонъ параллелограмма находится въ плоскости P, а противоположная ей удалена отъ плоскости P на разстояніе равное разстоянію между бо́льшими сторонами параллелограмма. Опредѣлить уголъ между плоскостью P и плоскостью параллелограмма, если стороны параллелограмма относятся какъ $3:5$.

9. Изъ двухъ точекъ плоскости, удаленныхъ на разстояніе a, проведены двѣ параллельныя наклонныя подъ угломъ φ къ плоскости. Опредѣлить разстояніе между ними, если разстояніе между ихъ проекціями на плоскость равно b.

10. Дана плоскость P и параллельная ей прямая AB на разстояніи a отъ нея. Изъ точки этой прямой возставлены къ ней два перпендикуляра, образующіе съ плоскостью P углы α и β ($\alpha > \beta$). Опредѣлить разстояніе между точками, въ которыхъ они пересѣкаютъ плоскость P. (Два случая.)

11. Изъ концовъ параллельнаго плоскости отрѣзка возставлены къ нему перпендикуляры подъ углами α и β ($\alpha > \beta$) къ плоскости. Опредѣлить разстояніе отъ плоскости до отрѣзка, если его длина равна a, а разстояніе между точками пересѣченія плоскости съ возставленными перпендикулярами равно b. (Два случая.)

12. На ребрѣ двуграннаго угла φ взятъ отрѣзокъ c и изъ его концовъ возставлены къ нему въ различныхъ граняхъ перпендикуляры a и b. Опредѣлить длину прямой, соединяющей концы этихъ перпендикуляровъ. ($\varphi = 120°$; $a = 1$; $b = 2$; $c = 3$).

13. Въ трегранномъ углѣ каждый изъ двугранныхъ угловъ равенъ φ. Какъ удалена отъ его вершины точка, которая находится внутри его на разстояніи b отъ каждаго ребра?

14. Въ трегранномъ углѣ плоскіе углы равны α. Какъ удалена отъ его вершины точка, которая находится внутри его на разстояніи a отъ каждой грани?

15. Въ трегранномъ углѣ $SABC$ углы ASB и ASC равны между собой; уголъ BSC равенъ α; ребро SA образуетъ съ гранью BSC уголъ β. На ребрахъ SB и SC отложены равные отрѣзки SM и SN и черезъ M и N проведена плоскость, дающая въ сѣченіи съ гранями правильный треугольникъ. Опредѣлить уголъ между проведенной плоскостью и гранью MNS. ($\alpha = 90°$; $\beta = 60°$).

16. Пусть будутъ α, β и γ углы, образуемые діагональю прямоугольнаго параллелепипеда съ его ребрами. **Углы, линіи и плоскости въ многогранникахъ (16—39).**

1) Доказать, что $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

2) Вычислить γ, если $\alpha = 31°10'24''$ и $\beta = 69°9'36''$.

17. Въ треугольной призмѣ площади боковыхъ граней относятся какъ $40 : 37 : 13$. Опредѣлить углы между ними.

18. Основаніемъ пирамиды служитъ правильный треугольникъ; изъ боковыхъ граней одна перпендикулярна къ основанію, а двѣ другія наклонены къ нему подъ угломъ α. Какъ наклонены къ плоскости основанія боковыя ребра?

19. Основаніемъ пирамиды служитъ квадратъ; двугранные углы при немъ относятся какъ $1 : 2 : 4 : 2$. Опредѣлить эти углы.

20. Въ правильной 4-угольной пирамидѣ даны апоема c и площадь діагональнаго сѣченія P. Опредѣлить въ этой пирамидѣ уголъ между боковой гранью и основаніемъ и сторону основанія. ($c=5$; $P=15$).

21. Въ правильной n-угольной пирамидѣ плоскій уголъ при вершинѣ равенъ α; опредѣлить ея двугранные углы (при основаніи и между боковыми гранями).

22. Въ усѣченной правильной 4-угольной пирамидѣ стороны нижняго и верхняго основаній относятся какъ $m:n$; боковыя ребра наклонены къ плоскости нижняго основанія подъ угломъ α. Въ этой пирамидѣ проведена плоскость черезъ сторону нижняго основанія и противоположную ей сторону верхняго основанія. Какой уголъ образуетъ эта плоскость съ нижнимъ основаніемъ пирамиды?

23. Опредѣлить двугранный уголъ 1) въ правильномъ тетраэдрѣ и 2) въ правильномъ октаэдрѣ.

24. Опредѣлить двугранный уголъ 1) въ правильномъ икосаэдрѣ и 2) въ правильномъ додекаэдрѣ.

25. Въ *основаніи прямого параллелепипеда* острый уголъ равенъ α, а стороны суть a и b; меньшая діагональ параллелепипеда равна большей діагонали основанія. Опредѣлить площадь сѣченія, которое проходитъ черезъ первую изъ этихъ діагоналей параллельно второй.

26. Правильную 4-угольную призму требуется пересѣчь такъ, чтобы въ сѣченіи получился ромбъ съ острымъ угломъ α. Опредѣлить положеніе сѣкущей плоскости.

27. Основаніемъ прямого параллелепипеда служитъ ромбъ съ острымъ угломъ α. Какъ надо пересѣчь этотъ параллелепипедъ, чтобы въ сѣченіи получить квадратъ съ вершинами на боковыхъ ребрахъ?

28. Въ правильной 4-угольной призмѣ черезъ средины двухъ послѣдовательныхъ сторонъ основанія проведена плоскость, пересѣкающая три боковыхъ ребра и наклоненная къ плоскости основанія подъ угломъ α. Опредѣлить углы и площадь полученнаго сѣченія, если сторона основанія равна a.

29. Въ правильной 4-угольной призмѣ проведена плоскость черезъ средину оси и средины двухъ послѣдовательныхъ сторонъ основанія. Зная, что сторона основанія равна a, а боковое ребро b, опредѣлить: 1) площадь полученнаго сѣченія, 2) его углы и 3) уголъ между проведенной плоскостью и плоскостью основанія.

30. Черезъ сторону основанія правильной 6-угольной призмы проведена плоскость, пересѣкающая противоположную боковую грань и наклоненная къ основанію подъ угломъ α. Опредѣлить углы многоугольника, полученнаго въ сѣченіи.

31. Въ правильной 4-угольной пирамидѣ сторона основанія и боковое ребро относятся какъ $\sqrt{3}:\sqrt{2}$. Черезъ діагональ основанія проведена плоскость параллельная боковому ребру. Опредѣлить наклонъ этой плоскости къ основанію и углы сѣченія.

32. Въ правильной пирамидѣ $SABC$ высота равна радіусу основанія*) ABC. Черезъ вершину A проведена плоскость, параллельная ребру BC и перпендикулярная къ грани BSC. Опредѣлить уголъ между этой плоскостью и основаніемъ.

33. Въ правильной треугольной пирамидѣ сторона основанія равна a и составляетъ съ боковымъ ребромъ уголъ α. Опредѣлить площадь сѣченія, проведеннаго черезъ боковое ребро и высоту пирамиды.

34. Въ правильной треугольной пирамидѣ сторона основанія равна a, а боковое ребро образуетъ съ плоскостью основанія уголъ α. Опредѣлить площадь сѣченія, проведеннаго черезъ сторону основанія и середину бокового ребра. ($a = 10$; $\alpha = 48°\,16'\,36''$).

35. Въ правильной 4-угольной пирамидѣ высота относится къ сторонѣ основанія какъ $m:n$. Черезъ діагональ основанія проведена наклонная плоскость такъ, что полученное сѣченіе равно діагональному сѣченію. Опредѣлить уголъ между проведенной плоскостью и основаніемъ пирамиды. ($m:n = 1:\sqrt{6}$).

---

*) Т.-е. разстоянію отъ центра основанія до его вершины.

36. Въ правильной треугольной пирамидѣ даны сторона основанія a и двугранный уголъ при основаніи α. Опредѣлить площадь сѣченія, проведеннаго черезъ центръ основанія параллельно двумъ не пересѣкающимся ребрамъ пирамиды. ($a = 3$; $\alpha = 70°$).

37. Въ правильной 4-угольной пирамидѣ двугранный уголъ при основаніи равенъ α; черезъ его ребро проведена внутри пирамиды плоскость, составляющая съ основаніемъ уголъ β. Опредѣлить площадь сѣченія, если сторона основанія равна a.

38. Въ правильной 4-угольной пирамидѣ сторона основанія равна a, а боковое ребро образуетъ съ плоскостью основанія уголъ α. Въ этой пирамидѣ проведена плоскость черезъ вершину основанія параллельно его діагонали и подъ угломъ φ къ его плоскости. Опредѣлить площадь полученнаго сѣченія.

39. Въ правильной 4-угольной пирамидѣ сторона основанія равна a, а боковое ребро образуетъ съ плоскостью основанія уголъ α. Въ эту пирамиду вписанъ кубъ такъ, что четыре изъ его вершинъ лежатъ на апоѳемахъ пирамиды. Опредѣлить ребро куба.

Поверхность и объемъ параллелепипедовъ и призмъ (40—56).

40. Прямая призма пересѣчена двумя параллельными плоскостями подъ угломъ α къ боковому ребру. Опредѣлить поверхность, заключенную между этими плоскостями, если разстояніе между ними равно a, а периметръ основанія данной призмы равенъ $2p$.

41. Основаніемъ прямой призмы служитъ равнобедренный треугольникъ съ боковыми сторонами b и угломъ α между ними; боковая поверхность этой призмы равновелика суммѣ ея основаній. Опредѣлить ея объемъ.

42. Основаніемъ призмы служитъ правильный треугольникъ, сторона котораго равна a; центръ нижняго основанія служитъ проекціей одной изъ вершинъ верхняго основанія; боковыя ребра наклонены къ плоскости основанія подъ угломъ α. Опредѣлить объемъ и боковую поверхность этой призмы. ($a = 6$; $\alpha = 50°$).

43. Въ параллелепипедѣ длины трехъ реберъ, выходящихъ изъ общей вершины, суть a, b и c; ребра a и b взаимно перпендикулярны, а ребро c образуетъ съ каждымъ изъ нихъ уголъ α. Опредѣлить объемъ параллелепипеда и уголъ между ребромъ c и плоскостью прямоугольника. ($\alpha = 120°$).

44. Грани нѣкотораго параллелепипеда суть ромбы, равные между собой и расположенные такъ, что встрѣчаются вмѣстѣ три острыхъ плоскихъ угла. Опредѣлить объемъ этого параллелепипеда, если сторона ромба равна a, а острый уголъ α.

45. Опредѣлить объемъ параллелепипеда, въ которомъ даны площади P и Q двухъ граней, ихъ общее ребро a и уголъ между ними α.

46. Опредѣлить объемъ параллелепипеда, если площади его діагональныхъ сѣченій суть P и Q, длина ихъ линіи пересѣченія равна a и уголъ между ними равенъ α.

47. Въ основаніи прямого параллелепипеда острый уголъ равенъ α, а стороны суть a и b; меньшая діагональ параллелепипеда равна большей діагонали основанія. Опредѣлить объемъ этого параллелепипеда.

48. Высота прямого параллелепипеда равна h; его діагонали образуютъ съ плоскостью основанія углы β и γ ($\beta > \gamma$); острый уголъ основанія равенъ α. Опредѣлить объемъ параллелепипеда.

49. Въ прямомъ параллелепипедѣ даны діагональ основанія a и не пересѣкающаяся съ ней діагональ параллелепипеда b; даны также углы α и β, образуемые діагональю b съ плоскостью основанія и съ плоскостью діагональнаго сѣченія, проведеннаго черезъ a. Опредѣлить объемъ параллелепипеда.

50. Параллелепипедъ, ограниченный шестью равными между собой ромбами, назовемъ равностороннимъ ромбоэдромъ.

1) Показать, что если острый уголъ ромба α не превышаетъ $60°$, то можно получить только одинъ видъ равносторонняго ромбоэдра; если же α болѣе $60°$, то возможенъ еще второй видъ.

(См. слѣд. стр.)

2) Предположимъ случай двухъ видовъ и означимъ черезъ V_1 объемъ равносторонняго ромбоэдра того вида, какой возможенъ всегда, и черезъ V_2 объемъ ромбоэдра второго вида (ограниченнаго такими же ромбами) Требуется выразить отношеніе V_1 къ V_2 въ зависимости отъ угла α.

51. Черезъ ребро куба проведена плоскость, дѣлящая его объемъ въ отношеніи 2 : 3. На какія части она дѣлитъ двугранный уголъ?

52. Опредѣлить объемъ правильной 4-угольной призмы, если ея діагональ образуетъ съ боковой гранью уголъ α, а сторона основанія равна a.

53. Въ правильной 4-угольной призмѣ уголъ между діагоналями, обращенный отверстіемъ къ боковой грани, равенъ α, а боковое ребро равно b. Опредѣлить объемъ этой призмы.

54. Въ правильной треугольной призмѣ двѣ вершины верхняго основанія соединены со срединами противоположныхъ имъ сторонъ нижняго основанія. Уголъ между полученными линіями, обращенный отверстіемъ къ плоскости основанія, равенъ α; сторона основанія равна a. Опредѣлить объемъ призмы.

55. Опредѣлить объемъ прямой призмы по слѣдующимъ условіямъ: основаніемъ ея служитъ 4-угольникъ, въ которомъ два противоположные угла прямые; діагональ основанія, соединяющая вершины непрямыхъ угловъ, дѣлитъ одинъ изъ нихъ на части α и β; длина этой діагонали равна l; площадь діагональнаго сѣченія, не содержащаго l, равна P.

56. Основаніемъ призмы служитъ треугольникъ ABC, въ которомъ $BC = a$ и $AB = AC$. Ребро AA_1 равно b и перпендикулярно къ BC*); двугранный уголъ при ребрѣ AA_1 равенъ α. Опредѣлить объемъ этой призмы.

Поверхность и объемъ пирамидъ (57—87).

57. Опредѣлить полную поверхность правильной 4-угольной пирамиды, если ея высота равна h, а двугранный уголъ при основаніи равенъ α.

---

*) Здѣсь имѣется въ виду уголъ двухъ линій, не лежащихъ въ одной плоскости.

58. Въ усѣченной правильной 4-угольной пирамидѣ даны высота ея h и углы α и β, образуемые большимъ основаніемъ съ боковымъ ребромъ и діагональю усѣченной пирамиды. Опредѣлить ея боковую поверхность. ($h = 25$; $\alpha = 50^\circ 15'$; $\beta = 35^\circ 40''$).

59. Въ правильной 4-угольной пирамидѣ даны сторона основанія a и плоскій уголъ при вершинѣ α. Опредѣлить ея полную поверхность и объемъ.

60. Въ треугольной пирамидѣ плоскіе углы при вершинѣ суть α, α и β; боковое ребро, служащее общей стороной равныхъ угловъ, перпендикулярно къ плоскости основанія и равно a. Опредѣлить объемъ и боковую поверхность этой пирамиды.

61. Основаніемъ пирамиды служитъ ромбъ со стороной a и острымъ угломъ α; двугранные углы при основаніи равны φ. Опредѣлить объемъ и полную поверхность пирамиды.

62. Въ нѣкоторой пирамидѣ*) каждый изъ двугранныхъ угловъ при основаніи равенъ α; площадь основанія равна S; периметръ его равенъ $2p$. Опредѣлить объемъ и полную поверхность этой пирамиды.

63. Основаніемъ пирамиды служитъ квадратъ со стороной a; изъ боковыхъ граней двѣ перпендикулярны къ основанію, а двѣ другія образуютъ съ нимъ уголъ α. Опредѣлить объемъ, боковую поверхность и полную поверхность этой пирамиды.

64. Основаніемъ пирамиды служитъ прямоугольникъ; изъ боковыхъ граней двѣ перпендикулярны къ основанію, а двѣ другія образуютъ съ нимъ углы α и β; высота пирамиды равна h. Опредѣлить ея объемъ и боковую поверхность.

65. Основаніемъ пирамиды служитъ ромбъ со стороной a и острымъ угломъ α; изъ боковыхъ граней двѣ**) перпендикулярны къ основанію, а двѣ другія наклонены къ нему подъ угломъ φ. Опредѣлить объемъ и боковую поверхность этой пирамиды.

---

*) *Вообще* неправильной.

**) Напр. заключающія уголъ α.

66. Опредѣлить объемъ правильной 4-угольной пирамиды, въ которой боковое ребро равно b, а плоскій уголъ при вершинѣ равенъ α.

67. Опредѣлить объемъ правильной n-угольной пирамиды, въ которой площадь основанія равна S, а боковыя грани наклонены къ плоскости основанія подъ угломъ α.

68. Основаніемъ прямой призмы служитъ треугольникъ, въ которомъ даны сторона c и прилежащіе углы α и β; черезъ данную сторону проведена плоскость, пересѣкающая противоположное боковое ребро и наклоненная къ плоскости основанія подъ угломъ φ. Опредѣлить площадь сѣченія и объемъ части, заключенной между сѣченіемъ и основаніемъ.

69. Опредѣлить объемъ пирамиды, если ея высота равна h, боковыя ребра наклонены къ плоскости основанія подъ угломъ φ и въ основаніи треугольникъ съ углами α и β.

70. Въ треугольной пирамидѣ двѣ боковыя грани суть равнобедренные прямоугольные треугольники, гипотенузы которыхъ равны b и образуютъ между собой уголъ α. Опредѣлить объемъ этой пирамиды.

71. Основаніемъ пирамиды служитъ параллелограммъ, діагонали котораго пересѣкаются подъ угломъ φ. Высота пирамиды проходитъ черезъ точку пересѣченія діагоналей основанія и равна h. Неравныя боковыя ребра образуютъ съ плоскостью основанія углы α и β. Опредѣлить объемъ этой пирамиды. ($\alpha + \beta = 90°$).

72. Основаніемъ пирамиды служитъ трапеція, въ которой каждая изъ боковыхъ сторонъ и меньшая изъ параллельныхъ имѣютъ длину a, а острые углы равны α; боковыя ребра пирамиды образуютъ съ плоскостью основанія уголъ φ. Опредѣлить объемъ этой пирамиды.

73. Основаніемъ пирамиды служитъ прямоугольный треугольникъ, площадь котораго равна S; боковыя ребра равны между собой; двугранные углы при катетахъ основанія суть α и β. Опредѣлить объемъ этой пирамиды.

74. Въ треугольной пирамидѣ всѣ боковыя ребра и двѣ стороны основанія имѣютъ длину b; уголъ между названными сторонами основанія равенъ a. Опредѣлить объемъ этой пирамиды.

75. Въ пирамидѣ $SABC$ ребро SA перпендикулярно къ плоскости основанія ABC; ребро BC равно a; грань BSC наклонена къ основанію подъ угломъ α и площадь ея равна P. Опредѣлить объемъ этой пирамиды.

76. Пирамида съ равными боковыми ребрами имѣетъ въ основаніи прямоугольникъ, стороны котораго суть a и b; соотвѣтствующіе этимъ сторонамъ плоскіе углы при вершинѣ пирамиды относятся какъ $3:1$. Опредѣлить объемъ этой пирамиды.

77. Основаніемъ пирамиды служитъ равнобедренная трапеція, въ которой параллельныя стороны суть a и b $(a > b)$, а неравные отрѣзки діагоналей образуютъ уголъ α; высота пирамиды проходитъ черезъ точку пересѣченія діагоналей основанія; двугранные углы, прилежащіе къ параллельнымъ сторонамъ основанія, относятся какъ $1:2$. Опредѣлить объемъ пирамиды.

78. Опредѣлить объемъ пирамиды по слѣдующимъ условіямъ: основаніемъ этой пирамиды служитъ параллелограммъ, діагонали котораго образуютъ уголъ α и имѣютъ длину a и b; высота проходитъ черезъ точку пересѣченія діагоналей основанія; сумма четырехъ угловъ, образуемыхъ боковыми ребрами съ плоскостью основанія, равна $90°$.

79. Основаніемъ пирамиды служитъ равнобедренный треугольникъ, у котораго боковая сторона имѣетъ длину a и образуетъ съ неравной стороной уголъ α (болѣе $45°$); боковыя ребра наклонены къ плоскости основанія подъ угломъ β. Въ этой пирамидѣ проведена плоскость черезъ ея высоту и вершину угла α. Опредѣлить площадь полученнаго сѣченія и объемы частей, на которыя проведенная плоскость дѣлитъ данную пирамиду.

80. Основаніемъ пирамиды $SABCD$ служитъ параллелограммъ $ABCD$. Ребра SB и SD перпендикулярны къ сторонамъ основанія BC и AD и образуютъ съ плоскостью основанія уголъ φ. Опредѣлить объемъ пирамиды, если острый уголъ параллелограмма равенъ α, а площадь равна P.

81. Основаніемъ пирамиды служитъ равнобедренный треугольникъ, котораго боковыя стороны имѣютъ длину b и образуютъ уголъ α; боковыя ребра пирамиды перпендикулярны къ противоположнымъ имъ сторонамъ основанія*); двугранный уголъ при основаніи противоположный углу α равенъ φ. Опредѣлить объемъ пирамиды. ($\alpha = 120°$; $\varphi = 30°$).

82. Въ треугольной пирамидѣ двѣ грани равновелики и образуютъ уголъ α; ихъ общая сторона равна a, а кратчайшее разстояніе между нею и противоположнымъ ребромъ равно b. Опредѣлить объемъ пирамиды.

83. Въ грани ABC пирамиды $SABC$ уголъ A равенъ $72°\,36'\,45''$ и уголъ B равенъ $47°\,23'\,15''$. Объемъ пирамиды равенъ 317,058 куб. дюймовъ. Проведена плоскость черезъ ребро SC и линію, дѣлящую пополамъ уголъ C въ треугольникѣ ABC. На какія части раздѣлился этой плоскостью данный объемъ?

84. Въ пирамидѣ съ равными двугранными углами при основаніи проведены плоскости, дѣлящія эти углы пополамъ.

1) Доказать, что эти плоскости пересѣкаются въ одной точкѣ (и получается такимъ образомъ поверхность многограннаго угла, дѣлящая пирамиду на двѣ части).

2) Опредѣлить отношеніе объема верхней части къ объему нижней, если двугранный уголъ при основаніи данной пирамиды равенъ

85. Въ правильной треугольной пирамидѣ, высота которой равна радіусу основанія, черезъ одну изъ вершинъ основанія проведена плоскость, параллельная его сторонѣ и дѣлящая объемъ пирамиды въ отношеніи 9 : 16 (бóльшая часть — при основаніи). Опредѣлить уголъ между этой плоскостью и основаніемъ пирамиды.

86. Черезъ ребро правильнаго тетраэдра проведена плоскость, дѣлящая его объемъ въ отношеніи 3 : 5. На какія части она дѣлитъ двугранный уголъ?

87. Опредѣлить объемъ усѣченной правильной 4-угольной пирамиды, если даны стороны a и b нижняго и верхняго

*) Ср. № 56.

основаній и острый уголъ α въ боковой грани. ($a = 25{,}704$; $b = 15{,}23$; $\alpha = 65^\circ 12'$).

Комбинаціи цилиндра и конусовъ съ линіями, плоскостями и многогранниками (83—101).

88. Въ равностороннемъ цилиндрѣ*) точка верхней окружности соединена съ одной изъ точекъ нижней окружности; уголъ между радіусами, проведенными въ эти точки**), равенъ 30°. Опредѣлить уголъ между соединительной прямой и осью цилиндра.

89. Въ равностороннемъ цилиндрѣ, котораго радіусъ основанія равенъ R, точка верхней окружности соединена съ точкой нижней окружности; соединительная прямая образуетъ съ плоскостью основанія уголъ α. Опредѣлить кратчайшее разстояніе между этой прямой и осью цилиндра.

90. Къ цилиндру проведена касательная прямая подъ угломъ α къ плоскости основанія. Опредѣлить разстояніе центра нижняго основанія отъ этой прямой, если его разстояніе отъ точки касанія равно d и радіусъ основанія равенъ R.

91. Между двумя параллельными плоскостями заключенъ конусъ такъ, что его основаніе находится въ одной изъ нихъ, а вершина на другой. Уголъ между осью конуса и образующей равенъ α. Черезъ средину оси проведена прямая, составляющая съ ней уголъ β и пересѣкающая боковую поверхность конуса въ двухъ точкахъ. Отрѣзокъ этой прямой между параллельными плоскостями равенъ a. Опредѣлить отрѣзокъ, заключенный внутри конуса.

92. Прямая касательная къ конусу составляетъ съ образующей, проходящей черезъ точку касанія, уголъ α и наклонена къ плоскости основанія подъ угломъ β. Опредѣлить уголъ между образующей и плоскостью основанія.

93. Радіусъ основанія конуса равенъ r, а образующая наклонена къ плоскости основанія подъ угломъ α. Въ этомъ конусѣ проведена плоскость чрезъ его вершину подъ угломъ φ къ его высотѣ. Опредѣлить площадь полученнаго сѣченія.

---

*) Т.-е. въ цилиндрѣ, у котораго осевое сѣченіе равностороннее.

**) Здѣсь имѣется въ виду уголъ между линіями, не лежащими въ одной плоскости.

94. На плоскости лежатъ вокругъ общей вершины n равныхъ послѣдовательно касательныхъ конусовъ. Опредѣлить уголъ при вершинѣ въ ихъ осевомъ сѣченіи. ($n = 6$).

95. Въ усѣченномъ конусѣ черезъ двѣ образующія проведена плоскость, которая наклонена къ плоскости основанія подъ угломъ φ. Опредѣлить площадь полученнаго сѣченія, если радіусы основаній усѣченнаго конуса суть R и r, а его образующая наклонена къ плоскости нижняго основанія подъ угломъ α.

96. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно b и образуетъ съ плоскостью основанія уголъ α. Въ эту пирамиду вписанъ равносторонній цилиндръ такъ, что его основаніе лежитъ въ плоскости основанія пирамиды. Опредѣлить высоту цилиндра.

97. Опредѣлить ребро куба, вписаннаго въ конусъ, образующая котораго равна l и наклонена къ плоскости основанія подъ угломъ α. ($l = 31{,}6947$; $\alpha = 50^\circ\,34'$).

98. Въ конусѣ даны радіусъ основанія r и уголъ α между образующей и плоскостью основанія. Въ этотъ конусъ вписана прямая треугольная призма съ равными ребрами такъ, что ея основаніе лежитъ въ плоскости основанія конуса. Опредѣлить длину ея реберъ.

99. Внутри куба, ребро котораго равно a, помѣщается конусъ такъ, что его вершина совпадаетъ съ одной изъ вершинъ куба, а окружность основанія касается трехъ граней, сходящихся въ противоположной вершинѣ; образующая этого конуса составляетъ съ его осью уголъ α. Означая черезъ r радіусъ его основанія, 1) вычислить r, если $a = 10$ и $\alpha = 14^\circ\,44'\,9''$; 2) выразить r черезъ a и α.

100. Радіусъ основанія конуса равенъ r, а образующая наклонена къ плоскости основанія подъ угломъ φ. Около этого конуса описана пирамида, имѣющая въ основаніи прямоугольный треугольникъ съ острымъ угломъ α. Опредѣлить объемъ и боковую поверхность этой пирамиды.

101. Въ правильной 4-угольной пирамидѣ боковое ребро равно b и образуетъ съ плоскостью основанія уголъ α. Въ эту пирамиду *вписанъ равносторонній* цилиндръ такъ, что боковою поверхностью онъ касается основанія пирамиды, а окружностями основаній касается всѣхъ боковыхъ граней ея*). Опредѣлить въ этомъ цилиндрѣ радіусъ основанія.

102. Опредѣлить полную поверхность конуса, если уголъ между образующей и плоскостью основанія равенъ α, а площадь осевого сѣченія равна Q. Поверхность и объемъ цилиндра и конусовъ (102—109).

103. Уголъ при вершинѣ въ осевомъ сѣченіи конуса равенъ α; опредѣлить центральный уголъ въ разверткѣ его боковой поверхности.

[Примѣры: 1) равносторонній конусъ**); 2) $\alpha = 70^\circ 24'$].

104. Опредѣлить уголъ между образующей и плоскостью основанія въ конусѣ, у котораго площадь осевого сѣченія въ 4 раза менѣе полной поверхности.

105. Высота конуса равна h, а образующая наклонена къ плоскости основанія подъ угломъ α. Полная поверхность этого конуса раздѣлена пополамъ плоскостью перпендикулярной къ высотѣ. Опредѣлить 1) разстояніе сѣкущей плоскости *отъ вершины конуса* и 2) *отношеніе* частей боковой поверхности. ($\alpha = 60^\circ$).

106. Въ усѣченномъ конусѣ высота равна h; образующая составляетъ съ плоскостью нижняго основанія уголъ α и перпендикулярна къ линіи, соединяющей верхній конецъ ея съ нижнимъ концомъ противоположной образующей. Опредѣлить боковую поверхность этого усѣченнаго конуса.

107. Площади нижняго и верхняго основаній усѣченнаго конуса и его боковая поверхность относятся какъ $m : n : p$. Опредѣлить уголъ между образующей и плоскостью нижняго основанія.

108. Въ усѣченномъ конусѣ діагонали осевого сѣченія взаимно перпендикулярны, а образующая составляетъ съ плоскостью нижняго основанія уголъ α и равна l. Опредѣлить объемъ, боковую поверхность и полную поверхность этого усѣченнаго конуса. ($l = 12$; $\alpha = 70^\circ 20'$).

---

*) Ось цилиндра параллельна діагонали основанія пирамиды.

**) Т.-е. конусъ, у котораго осевое сѣченіе равностороннее.

109. Боковая поверхность цилиндра раздѣлена въ отношеніи $k:m:n$ ребрами вписанной призмы. Опредѣлить отношеніе боковыхъ поверхностей цилиндра и призмы.

Тѣла вращенія приводимыя къ цилиндрамъ и конусамъ (110—128).

110. Равнобедренный треугольникъ съ угломъ α при основаніи вращается около перпендикуляра къ основанію, проведеннаго черезъ одинъ изъ его концовъ. Опредѣлить поверхность тѣла вращенія, если площадь треугольника равна P.

111. Ломаная линія состоитъ изъ n равныхъ отрѣзковъ, имѣющихъ длину a и соединенныхъ въ видѣ зигзага подъ угломъ α другъ къ другу. Опредѣлить поверхность, образуемую вращеніемъ этой линіи около оси, которая проходитъ черезъ одинъ изъ концовъ ея параллельно равнодѣлящей угла α.

112. Правильный треугольникъ, сторона котораго равна a, вращается около оси, проходящей внѣ его черезъ конецъ его стороны подъ острымъ угломъ α къ этой сторонѣ. Опредѣлить поверхность тѣла вращенія.

113. Перпендикуляръ, опущенный изъ центра основанія конуса на образующую, вращается около оси конуса. Предполагая, что поверхность вращенія дѣлитъ объемъ конуса пополамъ, опредѣлить уголъ между его образующей и осью.

114. Равнобедренный треугольникъ, у котораго боковая сторона равна b, а уголъ при вершинѣ α, вращается около боковой стороны. Опредѣлить объемъ и поверхность тѣла вращенія. ($\alpha = 120^\circ$).

115. Въ треугольникѣ даны сторона a и углы B и C. Опредѣлить поверхность и объемъ тѣла, полученнаго отъ вращенія треугольника около данной стороны.

116. Въ треугольникѣ даны стороны b и c и уголъ между ними α; этотъ треугольникъ вращается около оси, которая проходитъ внѣ его черезъ вершину угла α и равно наклонена къ сторонамъ b и c. Опредѣлить объемъ тѣла вращенія.

117. Въ треугольникѣ даны основаніе a и прилежащіе углы α и $90^\circ + \alpha$. Опредѣлить объемъ тѣла, полученнаго отъ вращенія этого треугольника около его высоты.

118. Ромбъ со стороной a и острымъ угломъ α вращается около оси, проходящей черезъ вершину остраго угла перпендикулярно къ его сторонѣ. Опредѣлить поверхность и объемъ тѣла вращенія.

119. На полуокружности, радіусъ которой равенъ R отъ конца A діаметра AB отложена дуга AC равная α (менѣе 90°), и изъ точки C проведена хорда CD параллельная AB; точки C и D соединены съ A. Опредѣлить объемъ тѣла, образуемаго вращеніемъ треугольника ACD около діаметра AB.

120. Въ полукругѣ радіуса R проведена хорда, параллельная діаметру и стягивающая дугу α; концы ея соединены съ концами діаметра. Опредѣлить объемъ и поверхность тѣла, образуемаго вращеніемъ полученной трапеціи около діаметра.

121. На полуокружности радіуса R отъ конца B діаметра AB отложена дуга BC, равная α (менѣе 90°), и черезъ точку C проведена касательная до встрѣчи въ точкѣ D съ продолженіемъ діаметра AB; кромѣ того точка C соединена съ A. Опредѣлить объемъ тѣла, которое образуется вращеніемъ треугольника ACD около стороны AD.

122. Углы треугольника суть A, B и C. Опредѣлить, какъ относятся между собою объемы V_a, V_b и V_c тѣлъ, полученныхъ отъ вращенія этого треугольника послѣдовательно около сторонъ a, b и c.

123. Тупоугольный равнобедренный треугольникъ вращается около оси, которая проходитъ черезъ точку пересѣченія его высотъ параллельно большей сторонѣ. Опредѣлить объемъ тѣла вращенія, если тупой уголъ равенъ α, а противоположная ему сторона a.

124. Въ тупоугольномъ треугольникѣ даны большая сторона b и прилежащіе углы α и γ. Этотъ треугольникъ вращается около оси, проходящей черезъ центръ описаннаго круга параллельно сторонѣ b. Опредѣлить объемъ тѣла вращенія. ($b = 10$; $\alpha = 50°$; $\gamma = 23° 17'$).

125. Прямоугольникъ вращается около оси, которая проходитъ черезъ его вершину параллельно его діагонали. Опредѣлить объемъ и поверхность тѣла вращенія, если площадь прямоугольника равна S, а діагонали его образуютъ уголъ α.

126. *Правильный многоугольникъ съ четнымъ числомъ* (n) сторонъ вращается около линіи, соединяющей двѣ противоположныя вершины. Выразить поверхность и объемъ тѣла вращенія: 1) по радіусу r вписаннаго круга, 2) по радіусу R описаннаго круга и 3) по сторонѣ a многоугольника.

127. Правильный многоугольникъ съ четнымъ числомъ (n) сторонъ вращается около линіи, соединяющей средины двухъ противоположныхъ сторонъ. Выразить поверхность и объемъ тѣла вращенія: 1) по радіусу r вписаннаго круга, 2) по радіусу R описаннаго круга и 3) по сторонѣ a многоугольника.

128. *Правильный* многоугольникъ съ нечетнымъ числомъ (n) сторонъ вращается около линіи, соединяющей средину стороны съ противоположной вершиной. Выразить поверхность и объемъ тѣла вращенія: 1) по радіусу r вписаннаго круга, 2) по радіусу R описаннаго круга и 3) по сторонѣ a многоугольника.

Комбинаціи шара съ линіями и плоскостями (129—131).

129. Въ шарѣ изъ точки его поверхности проведены три равныя хорды подъ угломъ α другъ къ другу. Опредѣлить ихъ длину, если радіусъ *шара* равенъ R.

130. Радіусъ шара равенъ R. Изъ точки, удаленной отъ центра на разстояніе l, проведены къ шару n касательныхъ прямыхъ, равномѣрно распредѣленныхъ вокругъ линіи l. Опредѣлить разстояніе между точками касанія и уголъ между касательными.

(Найти уголъ между касательными, если $n = 6$ и линія l дѣлится поверхностью шара въ среднемъ и крайнемъ отношеніи, при чемъ внутренній отрѣзокъ болѣе внѣшняго.)

131. Черезъ одну точку проведены къ шару четыре касательныя плоскости, образующія равные послѣдовательные углы. *Опредѣлить разстояніе* отъ общей точки плоскостей до центра шара, если уголъ между плоскостями равенъ α, а радіусъ шара равенъ R. ($\alpha = 120°$).

Поверхность и объемъ шара и его частей (132—147)

132. Въ сферическомъ сегментѣ дуга осевого сѣченія равна α. Опредѣлить въ этомъ сегментѣ разность между кривой поверхностью и площадью основанія, если поверхность всего шара равна S.

133. Въ нѣкоторомъ сферическомъ слоѣ имѣющемъ равныя основанія, боковая поверхность равновелика суммѣ основаній. Опредѣлить величину дугъ въ осевомъ сѣченіи этого слоя.

134. Опредѣлить кривую поверхность сферическаго сегмента, если въ его осевомъ сѣченіи дуга равна α, а длина хорды равна a.

135. Опредѣлить величину дуги въ осевомъ сѣченіи сферическаго сегмента, котораго кривая поверхность относится къ площади основанія какъ $m:n$. $(m:n=4:1)$.

136. Опредѣлить центральный уголъ въ осевомъ сѣченіи сферическаго сектора, если его сферическая поверхность равновелика конической.

137. Кривая поверхность сферическаго сегмента равновелика боковой поверхности конуса, имѣющаго основаніе общее съ сегментомъ, а вершину на поверхности шара. Опредѣлить въ конусѣ уголъ между образующей и осью.

138. Шаръ пересѣченъ плоскостью, составляющей уголъ α съ радіусомъ шара, проведеннымъ къ окружности сѣченія. Полагая поверхность шара равной S, опредѣлить величину ея частей (по обѣ стороны сѣкущей плоскости) и площадь сѣченія шара.

139. Черезъ точку, взятую на поверхности шара, проведены двѣ плоскости: касательная и дѣлящая поверхность шара въ среднемъ и крайнемъ отношеніи. Опредѣлить уголъ между ними.

140. Объемъ шара равенъ V. Опредѣлить объемъ его сектора, у котораго центральный уголъ въ осевомъ сѣченіи равенъ α.

141. Опредѣлить центральный уголъ въ осевомъ сѣченіи сферическаго сектора, если его наибольшее поперечное сѣченіе дѣлитъ его объемъ пополамъ.

142. Объемъ конуса раздѣленъ пополамъ сферической поверхностью, имѣющей центръ въ его вершинѣ. Опредѣлить радiусъ этой поверхности, если образующая конуса равна l, а наибольшiй уголъ между образующими равенъ α.

143. Изъ вершины конуса, какъ изъ центра, описана внутри его сферическая поверхность касательная къ основанiю конуса. Опредѣлить уголъ при вершинѣ въ осевомъ сѣченiи этого конуса, если указанная поверхность дѣлитъ его объемъ пополамъ.

144. Круговой секторъ, радiусъ котораго равенъ R, а центральный уголъ α, вращается около дiаметра перпендикулярнаго къ среднему радiусу этого сектора. Опредѣлить объемъ тѣла вращенiя.

145. Круговой секторъ вращается около дiаметра параллельнаго его хордѣ. Поверхность, образованная вращенiемъ хорды, дѣлитъ объемъ, полученный отъ вращенiя сектора, пополамъ. Опредѣлить центральный уголъ сектора.

146. Круговой секторъ, дуга котораго равна α (менѣе 180°), вращается около дiаметра, проходящаго внѣ его; объемъ полученнаго тѣла относится къ объему шара того же радiуса какъ $m:n$. Опредѣлить меньшiй изъ угловъ, образуемыхъ дiаметромъ съ боковыми радiусами сектора. ($\alpha=90^\circ$; $m:n=\sqrt{3}:\sqrt{8}$).

147. Сферическiй слой и цилиндръ имѣютъ оба основанiя общiя; объемъ слоя вдвое болѣе объема цилиндра. Опредѣлить величину дугъ въ осевомъ сѣченiи слоя.

Тѣла вращенiя, содержащiя въ своемъ составѣ части шара (148—156).

148. Радiусомъ R описана четверть окружности и посрединѣ ея взята дуга α; проведена также хорда этой дуги. Полученный круговой сегментъ вращается около одного изъ боковыхъ радiусовъ квадранта. Опредѣлить поверхность тѣла, образуемаго этимъ вращенiемъ.

149. Круговой секторъ, содержащiй уголъ α, вращается около дiаметра перпендикулярнаго къ среднему радiусу этого сектора. Опредѣлить поверхность тѣла вращенiя, если площадь сектора равна Q. ($\alpha=70^\circ 36'$; $Q=211{,}8$).

150. Взята дуга AB равная α (менѣе 90°) и изъ точки B проведена касательная до встрѣчи въ точкѣ C съ продолженіемъ радіуса OA. Фигура, ограниченная прямыми CA и CB и дугой AB, вращается около линіи CA. Опредѣлить объемъ тѣла вращенія, если радіусъ дуги равенъ R.

151. На полуокружности отъ концовъ діаметра AB отложены равныя дуги AC и BD (меньшія 90°); точки C и D соединены съ A. Фигура, ограниченная прямыми AC и AD и дугой CD, вращается около діаметра. Опредѣлить объемъ тѣла вращенія, если радіусъ полуокружности равенъ R, а каждая изъ дугъ AC и BD равна α.

152. На полуокружности отъ концовъ діаметра AB отложены равныя дуги AC и BD (меньшія 90°) и изъ точекъ C и D проведены касательныя до взаимнаго пересѣченія въ точкѣ E. Фигура, ограниченная касательными EC и ED и дугой CD, вращается около діаметра. Опредѣлить объемъ тѣла вращенія, если радіусъ полуокружности равенъ R, а каждая изъ дугъ AC и BD равна α.

153. Отъ конца A радіуса OA отложена дуга AB равная α (менѣе 90°); изъ точки B проведена параллель къ AO до встрѣчи въ точкѣ C съ радіусомъ перпендикулярнымъ къ OA; на радіусѣ OA отложена часть AD равная BC и точка D соединена съ C. Фигура, ограниченная прямыми BC, CD и DA и дугой AB, вращается около оси OC. Опредѣлить объемъ тѣла вращенія, если радіусъ дуги равенъ R.

154. Изъ конца діаметра шара проведена хорда такъ, что поверхность, образуемая вращеніемъ ея около діаметра, дѣлитъ объемъ шара пополамъ. Опредѣлить уголъ между хордой и діаметромъ.

155. Круговой сегментъ, содержащій дугу α (менѣе 90°), вращается около діаметра перпендикулярнаго къ одному изъ крайнихъ радіусовъ дуги. Опредѣлить поверхность и объемъ тѣла вращенія, если радіусъ дуги равенъ R.

156. Круговой сегментъ, содержащій дугу α и хорду a, вращается около діаметра параллельнаго хордѣ. Опредѣлить поверхность и объемъ тѣла вращенія.

Комбинаціи шара съ многогранниками (157—176).

157. Около шара описанъ прямой параллелепипедъ, котораго объемъ въ *m* разъ болѣе объема шара. Опредѣлить углы въ основаніи этого параллелепипеда.

158. Радіусъ шара, описаннаго около правильной треугольной призмы, равенъ R и, проведенный въ одну изъ вершинъ призмы, составляетъ уголъ α съ боковой гранью, содержащей эту вершину. Опредѣлить ребра призмы.

159. Опредѣлить двугранный уголъ при основаніи правильной пирамиды, если центръ вписаннаго въ нее шара дѣлитъ ея высоту въ среднемъ и крайнемъ отношеніи.

160. Опредѣлить радіусъ шара, описаннаго около правильной n-угольной пирамиды, если сторона основанія равна a, а боковое ребро наклонено къ плоскости основанія подъ угломъ α.

161. Въ правильной пирамидѣ радіусъ основанія*) равенъ r, а боковое ребро образуетъ съ плоскостью основанія уголъ α. Опредѣлить разстояніе отъ плоскости основанія до центра описаннаго шара. ($\alpha = 67°30'$; $45°$; $22°30'$).

162. Опредѣлить радіусъ шара, описаннаго около треугольной пирамиды, въ которой стороны основанія содержатъ 13 дюймовъ, 14 дюймовъ и 15 дюймовъ, а боковыя ребра наклонены къ плоскости основанія подъ угломъ $24°17'50''$

163. Восьмигранникъ составленъ изъ двухъ равныхъ правильныхъ 4-угольныхъ пирамидъ съ общимъ основаніемъ; боковое ребро пирамиды равно b, а плоскій уголъ при вершинѣ равенъ α. Опредѣлить радіусъ шара, вписаннаго въ восьмигранникъ. (Полученную формулу примѣнить къ правильному октаэдру.)

164. Основаніемъ пирамиды служитъ ромбъ со стороной a и острымъ угломъ α; двугранные углы при основаніи равны φ. Опредѣлить радіусъ шара, вписаннаго въ эту пирамиду.

---

*) *Иначе: радіусъ окружности, описанной около основанія.*

165. Опредѣлить радіусъ шара, вписаннаго въ правильную n-угольную пирамиду, если сторона основанія равна a, а плоскій уголъ при вершинѣ равенъ α,

166. Около шара описана усѣченная правильная 4-угольная пирамида, въ которой стороны бóльшаго и меньшаго оснований относятся какъ $m:n$. Какъ наклонены къ плоскости бóльшаго основанія боковая грань и боковое ребро?

167. Основаніемъ пирамиды служитъ прямоугольникъ съ угломъ α между діагоналями, а боковыя ребра образуютъ съ плоскостью основанія уголъ φ. Опредѣлить объемъ этой пирамиды, если радіусъ описаннаго около нея шара равенъ R.

168. Въ треугольной пирамидѣ два боковыхъ ребра образуютъ съ плоскостью основанія уголъ β; третье ребро перпендикулярно къ ней и равно b; уголъ основанія при этомъ ребрѣ равенъ α. Опредѣлить радіусъ шара, описаннаго около этой пирамиды.

169. Основаніемъ пирамиды служитъ равнобедренный треугольникъ, котораго равныя стороны имѣютъ длину b. Соотвѣтствующія имъ боковыя грани перпендикулярны къ плоскости основанія и образуютъ между собой уголъ α; уголъ между третьей боковой гранью и плоскостью основанія равенъ также α. Опредѣлить радіусъ шара, вписаннаго въ эту пирамиду.

170. Опредѣлить двугранный уголъ при основаніи правильной 4-угольной пирамиды, если радіусъ описаннаго шара въ $2\frac{1}{2}$ раза болѣе радіуса вписаннаго шара.

171. Въ шаръ радіуса R вписана правильная треугольная пирамида, у которой двугранный уголъ при основаніи равенъ α. Выразить сторону (a) основанія и боковое ребро (b) этой пирамиды въ зависимости отъ R и α.

172. Въ правильную n-угольную пирамиду, у которой сторона основанія равна a, а двугранный уголъ при основаніи равенъ α, вписанъ шаръ. Опредѣлить разстояніе между точками, въ которыхъ шаръ касается двухъ послѣдовательныхъ боковыхъ граней пирамиды.

173. Площадь основанія пирамиды равна Q; а каждый изъ двугранныхъ угловъ при основаніи равенъ α; эта пирамида пересѣчена плоскостью, проведенной черезъ центръ вписаннаго шара параллельно основанію. Опредѣлить площадь сѣченія.

174. Боковая поверхность куба разсѣчена на двѣ части сферической поверхностью, которая проходитъ черезъ вершины нижняго основанія и касается плоскости верхняго основанія. Опредѣлить величину части при нижнемъ основаніи, полагая ребро куба равнымъ a.

175. Въ правильной 4-угольной пирамидѣ даны боковое ребро b и плоскій уголъ при вершинѣ α. Требуется опредѣлить часть ея поверхности, заключенную внутри шара, для котораго высота пирамиды служитъ діаметромъ.

176. Въ правильной 6-угольной пирамидѣ сторона основанія равна a, а боковое ребро образуетъ съ плоскостью основанія уголъ α. Какъ велика часть ея поверхности, заключенная внутри шара, который касается основанія и боковыхъ реберъ?

Комбинаціи шара и его частей съ круглыми тѣлами (177—190).

177. Въ конусѣ даны длина C окружности основанія и уголъ α между образующей и основаніемъ. Опредѣлить длину линіи, по которой взаимно касаются боковая поверхность конуса и поверхность вписаннаго въ него шара.

178. Въ коническую поверхность вписанъ шаръ; линіей касанія поверхность этого шара дѣлится въ отношеніи $m : n$. Опредѣлить въ конической поверхности наклонъ образующей къ оси. ($m : n = 1 : 3$).

179. Опредѣлить въ конусѣ уголъ между образующей и плоскостью основанія, если площадь основанія, поверхность вписаннаго шара и боковая поверхность конуса составляютъ ариѳметическую прогрессію.

180. Опредѣлить уголъ между образующей и плоскостью основанія въ конусѣ, который въ m разъ болѣе вписаннаго въ него шара.

(Найти наименьшее значеніе m; вычислить уголъ, если $m = 2\frac{1}{4}$).

181. Поперечное сѣченіе, дѣлящее объемъ конуса пополамъ, проходитъ через центръ описаннаго шара. Найти уголъ между образующей и плоскостью основанія.

182. Радіусъ основанія конуса равенъ R, а образующая наклонена къ плоскости основанія подъ угломъ α. Въ этотъ конусъ вписанъ рядъ шаровъ такъ, что первый шаръ касается боковой поверхности конуса и его основанія, а каждый слѣдующій — боковой поверхности конуса и предыдущаго шара. Найти предѣлъ, къ которому стремится сумма объемовъ этихъ шаровъ, если число ихъ безконечно увеличивается.

183. Опредѣлить уголъ при вершинѣ въ осевомъ сѣченіи конуса, описаннаго около четырехъ равныхъ шаровъ, расположенныхъ такъ, что каждый касается трехъ другихъ.

184. Около шара описанъ усѣченный конусъ, котораго боковая поверхность относится къ поверхности шара какъ $m : n$. Опредѣлить уголъ между образующей и большимъ основаніемъ. ($m : n = 2 : 1$).

185. Опредѣлить радіусъ шара, описаннаго около усѣченнаго конуса, въ которомъ радіусы основаній суть R и r, а образующая наклонена къ плоскости нижняго основанія подъ угломъ α.

186. Замкнутый рядъ изъ n равныхъ послѣдовательно касающихся шаровъ съ центрами въ одной плоскости внѣшне касается шара, радіусъ котораго относится къ предыдущему какъ $p : 1$ *).

Требуется: 1) найти, какимъ условіямъ должны удовлетворять n и p, чтобы данная комбинація была возможна; 2) указать наименьшее изъ возможныхъ значеній p; 3) опредѣлить n по данному p. ($p = 1$; 2).

187. Въ сферическомъ секторѣ даны центральный уголъ осевого сѣченія a и площадь P наибольшаго поперечнаго сѣченія. Опредѣлить поверхность шара, вписаннаго въ этотъ секторъ.

---

*) *Примѣчаніе.* Положеніе кольца на шарѣ *не* обусловлено (оно можетъ быть экваторіальное, но также и иное).

188. Опредѣлить величину дуги въ осевомъ сѣченіи сферическаго сегмента, если его объемъ въ m разъ болѣе объема вписаннаго въ него конуса. ($m = 2$; 3).

189. Внутри конуса проведена сферическая поверхность, опирающаяся на окружность его основанія и касающаяся его боковой поверхности. Предполагая, что проведенная поверхность дѣлитъ объемъ конуса пополамъ, опредѣлить уголъ между его образующей и плоскостью основанія.

190. Конусъ и сферическій сегментъ (меньшій полушара) имѣютъ общее основаніе, а боковыя поверхности ихъ взаимно касаются. Опредѣлить въ конусѣ уголъ между образующей и основаніемъ, если боковая поверхность конуса въ m разъ болѣе боковой поверхности сегмента. ($m = \frac{3}{2}$).

Планиметрическія задачи.

Замѣчаніе. 1) Въ словахъ: „дуга a", „опредѣлить *величину* дуги" и т. п. имѣется въ виду *градусное* выраженіе дуги или ея центральнаго угла. 2) Условія задачи, приводимыя въ скобкахъ послѣ текста, напр. ($a=72°$ въ № 199, ($n=7$; $a=15$) въ № 214 и т. д., означаютъ, что найденное общее рѣшеніе слѣдуетъ примѣнить къ данному частному случаю.

---

191. Полуокружность раздѣлена въ отношеніи 4 : 7 и изъ точки дѣленія опущенъ перпендикуляръ на діаметръ. Опредѣлить отрѣзки діаметра, если его длина равна 11 дюймамъ.

192. Перпендикуляръ къ гипотенузѣ, возставленный изъ ея середины, дѣлитъ одинъ изъ катетовъ на части 6,83972 дюйм. и 3,16028 дюйм. Вычислить другой катетъ и прилежащій къ нему острый уголъ.

193. Въ прямоугольномъ треугольникѣ изъ вершины прямого угла, какъ изъ центра, описана дуга *касательная* къ гипотенузѣ. Опредѣлить углы треугольника, если эта дуга дѣлитъ его площадь пополамъ.

194. Изъ точки A на сторонѣ NM остраго угла MNP опущенъ перпендикуляръ AB на сторону NP, изъ точки B — перпендикуляръ BC на сторону NM, изъ точки C — перпендикуляръ CD на сторону NP, и такъ далѣе безъ конца. Найти предѣлъ суммы этихъ перпендикуляровъ, если уголъ MNP равенъ α, а отрѣзокъ NA равенъ a.

195. Даны двѣ взаимно перпендикулярныя прямыя MN и PQ, пересѣкающіяся въ точкѣ O. На линіи OM взята точка A и изъ нея проведена къ OP наклонная AB подъ угломъ ABO превы шающимъ 45°; изъ точки B проведена къ линіи NO наклонная BC подъ угломъ BCO равнымъ углу ABO; при точкѣ C сдѣлано такое же построеніе, и т. д. Найти предѣльную длину спиралевидной ломаной линіи $ABCD$..., если $OA = a$ и $\angle ABO = \alpha$. ($a = 10$; $\alpha = 50°$).

196. Опредѣлить діагонали и площадь равнобедренной трапеціи, въ которой верхнее основаніе и боковыя стороны имѣютъ длину a, а острый уголъ равенъ α.

197. Въ 4-угольникѣ $ABCD$ діагонали AC и BD образуютъ уголъ α со стороной AB и соотвѣтственно перпендикулярны къ сторонамъ BC и AD. Опредѣлить въ этомъ 4-угольникѣ площадь и сторону CD, зная, что сторона AB равна a.

198. Къ кругу радіуса r проведены изъ общей точки двѣ касательныя, составляющія уголъ α. Чрезъ средину меньшей изъ дугъ, заключенныхъ между точками касанія, проведена третья касательная. Опредѣлить ея отрѣзокъ между двумя первыми касательными. ($r = 10$; $\alpha = 73° 44' 24''$).

199. Хорда дуги α равна a. Опредѣлить хорду дуги 4α. ($\alpha = 72°$).

200. Въ правильномъ 5-угольникѣ діагонали взаимнымъ пересѣченіемъ образуютъ также правильный 5-угольникъ. Какъ относится сторона новаго 5-угольника къ сторонѣ даннаго?

201. Стороны правильныхъ вписанныхъ и описанныхъ многоугольниковъ съ удвоеннымъ числомъ сторонъ выразить въ зависимости отъ длины первоначальныхъ сторонъ и отъ числа ихъ.

202. Опредѣлить радіусы двухъ внѣшне *касающихся* круговъ, если дано разстояніе d между ихъ центрами и уголъ α между внѣшними общими касательными.

203. Въ прямоугольникъ $ABCD$ вписаны два равныхъ круга такъ, что одинъ кругъ касается сторонъ AB и BC, а другой — сторонъ CD и AD и кромѣ того круги касаются между собою. Линія, соединяющая центры этихъ круговъ, составляетъ съ одной изъ сторонъ прямоугольника уголъ α, а радіусъ круговъ равенъ r. Опредѣлить стороны прямоугольника.

204. Опредѣлить сторону квадрата, вписаннаго въ прямоугольный треугольникъ съ гипотенузой c и острымъ угломъ α. ($c = 15$; $\alpha = 24° 9' 30''$).

Примѣчаніе. Задача представляетъ *два* случая.

205. *Около* прямоугольника описана *дуга* такъ, что она замыкается одной изъ сторонъ прямоугольника и проходитъ черезъ концы противоположной ей стороны. Опредѣлить радіусъ этой дуги, если ея величина есть α, а площадь прямоугольника равна P. ($\alpha = 221^\circ 17' 36''$; $P = 35$).

206. Въ параллелограммѣ острый уголъ равенъ α; меньшая діагональ перпендикулярна къ меньшимъ сторонамъ и равна a. Опредѣлить бо́льшую діагональ и периметръ. ($\alpha = 65^\circ 27'$ $a = 0,31628$).

207. Въ параллелограммѣ даны острый уголъ α и разстоянія a и b отъ точки пересѣченія діагоналей до неравныхъ сторонъ. Опредѣлить діагонали и площадь параллелограмма.

208. Въ ромбъ вписанъ кругъ и точки касанія соединены между собой. Опредѣлить площадь полученнаго 4-угольника, если сторона ромба равна a, а острый уголъ равенъ α.

209. Изъ вершины O прямого угла, какъ изъ центра, описана между его сторонами дуга MN радіусомъ равнымъ R. На дугѣ MN, посрединѣ ея, взята часть AB равная α. Проведена хорда AB и опущены перпендикуляры AC и BD на одну изъ сторонъ прямого угла. Опредѣлить площадь трапеціи $CABD$.

210. Въ трапеціи параллельныя стороны суть 30 вершк. и 18 вершк., а непараллельныя 20 вершк. и 15 вершк. Опредѣлить ея углы, діагонали и площадь.

211. Въ 4-угольникѣ $ABCD$ углы B и D прямые, $\angle BAC = \alpha$, $\angle DAC = \beta$; діагональ AC равна a. Опредѣлить діагональ BD и площадь 4-угольника. ($a = 14$; $\alpha = 59^\circ 33' 48''$; $\beta = 78^\circ 16' 12''$).

212. Два равные ромба наложены такъ, что точки пересѣченія діагоналей совпадаютъ, а самые ромбы повернуты одинъ относительно другого на 90°. Опредѣлить площадь полученнаго такимъ образомъ звѣздчатаго 4-угольника, если въ ромбахъ острый уголъ равенъ α, а бо́льшая діагональ равна a.

213. Въ прямоугольномъ треугольникѣ меньшій острый уголъ равенъ α. Стороны этого треугольника служатъ сходственными сторонами трехъ подобныхъ между собой многоугольниковъ. Разность площадей двухъ меньшихъ изъ нихъ равна Q. Опредѣлить площадь каждаго многоугольника.

214. Около круга описанъ правильный n-угольникъ и въ тотъ же кругъ вписанъ правильный n-угольникъ. Разность ихъ периметровъ равна a. Опредѣлить длину окружности. ($n = 7$; $a = 15$).

215. Около круга описанъ правильный n-угольникъ и въ тотъ же кругъ вписанъ правильный n-угольникъ. Разность ихъ площадей равна Q. Опредѣлить площадь круга. ($n = 19$; $Q = 10$).

216. Два круга внѣшне касаются. Ихъ общая внутренняя касательная образуетъ съ общими внѣшними уголъ α. Разстояніе между центрами круговъ равно d. Опредѣлить отрѣзокъ общей внутренней касательной, заключенный между общими внѣшними касательными.

217. Опредѣлить длину окружности, вписанной въ сегментъ, если *величина* его дуги есть α, а *длина* дуги равна l. ($\alpha = 120°$; $180°$; $240°$).

218. Опредѣлить *длину* дуги, если ея хорда равна 413 сантим., а хорда двойной дуги равна 524 сантиметрамъ.

219. Въ сегментѣ даны: хорда равная 100 дюймамъ и высота равная 23 дюйм.; опредѣлить *длину* дуги.

220. Изъ точки, взятой на окружности радіуса R, проведены двѣ равныя хорды, составляющія уголъ α. Опредѣлить часть площади круга, заключенную внутри угла α. ($R = 4{,}57$; $\alpha = 68° 45''$).

221. На окружности радіуса R взята дуга α (менѣе $180°$) и изъ концовъ ея проведены касательныя до взаимнаго пересѣченія. Опредѣлить площадь, ограниченную обѣими касательными и большей изъ дугъ, заключенныхъ между точками касанія. ($R = 15$; $\alpha = 130° 24'$).

222. Опредѣлить площадь общей части двухъ равныхъ пересѣкающихся круговъ, если ихъ радіусъ равенъ R, а разстояніе между центрами равно a. ($R = 6$; $a = 8{,}107$).

223. Опредѣлить площадь общей части двухъ пересѣкающихся круговъ, если ихъ радіусы суть 10 дюйм. и 13 дюйм. и общая хорда равна 10 дюймамъ.

224. Вычислить площадь, заключенную между тремя взаимно касающимися кругами, которыхъ радіусы суть 1 дюймъ, 2 дюйма и 3 дюйма.

225. Въ равнобедренномъ треугольникѣ уголъ при основаніи равенъ α; высота болѣе радіуса вписаннаго круга на m. Опредѣлить основаніе и радіусъ описаннаго круга.

226. Въ равнобедренномъ треугольникѣ съ боковой стороной a и угломъ при основаніи α проведена параллель къ основанію равная суммѣ нижнихъ отрѣзковъ боковыхъ сторонъ. Найти длину этой параллели.

227. Кругъ радіуса r охватывается кольцомъ изъ n равныхъ круговъ, соединенныхъ такъ, что каждый касается двухъ смежныхъ съ нимъ и даннаго круга. Опредѣлить радіусъ круговъ, составляющихъ кольцо. ($n = 6$).

228. Опредѣлить острый уголъ ромба, въ которомъ сторона есть средняя пропорціональная между діагоналями.

229. Полуокружность раздѣлена на три части, хорды которыхъ относятся какъ 1 : 2 : 1. Опредѣлить эти части.

230. Опредѣлить уголъ при основаніи равнобедреннаго треугольника, въ которомъ отношеніе высоты къ радіусу описаннаго круга равно m. ($m = \frac{1}{2}$).

231. Опредѣлить углы ромба, если его периметръ въ m разъ болѣе суммы діагоналей. (Указать границы для m).

232. Въ трапеціи, вписанной въ полукругъ*), сумма діагоналей въ m разъ болѣе суммы основаній. Опредѣлить углы этой трапеціи. (Указать границы для m).

233. Въ прямоугольномъ треугольникѣ даны гипотенуза c и острый уголъ α. Гипотенуза раздѣлена пропорціонально прилежащимъ катетамъ и точка дѣленія соединена съ вершиной прямого угла. Опредѣлить длину соединительной линіи.

234. Въ прямоугольномъ треугольникѣ опредѣлить площадь и острый уголъ, если равнодѣлящая этого угла дѣлитъ площадь треугольника въ отношеніи 125 : 237 и равна 0,031647.

235. Опредѣлить углы треугольника, зная, что два изъ нихъ относятся какъ 1 : 3, а равнодѣлящая третьяго угла дѣлитъ площадь треугольника въ отношеніи 5 : 2.

---

*) Большимъ основаніемъ трапеціи служитъ діаметръ полукруга.

236. Въ треугольникѣ ABC проведены высоты BD и CE, и точки D и E соединены. Требуется опредѣлить отношеніе площадей треугольниковъ ADE и ABC, если уголъ A равенъ α. ($\alpha = 45°$; $150°$).

237. Въ прямоугольномъ треугольникѣ проведена параллель къ гипотенузѣ равная одному изъ катетовъ; уголъ противъ этого катета равенъ α. Въ какомъ отношеніи раздѣлилась площадь треугольника?

238. Опредѣлить площадь прямоугольнаго треугольника по острому углу α и радіусу r вписаннаго круга.

239. Въ прямоугольномъ треугольникѣ даны острый уголъ α и разстояніе a отъ вершины другого остраго угла до центра вписаннаго круга. Опредѣлить площадь даннаго треугольника.

240. Въ равнобедренномъ треугольникѣ уголъ при вершинѣ раздѣленъ на три равныя части прямыми, пересѣкающими основаніе. Какъ относится средній отрѣзокъ основанія къ каждому изъ крайнихъ, если уголъ при вершинѣ равенъ α?

241. Въ треугольникѣ даны стороны b и c и уголъ A. Опредѣлить равнодѣлящую этого угла.

242. Въ треугольникѣ дано: $S = 15$; $a \cdot b = 48$ и условіе $\sin A = \cos B$. Опредѣлить углы и радіусъ описаннаго круга.

243. Пусть будетъ O центръ круга, вписаннаго въ треугольникъ ABC. Дано: площадь $AOB = 35$ кв. фут., площадь $BOC = 50$ кв. фут. и площадь $AOC = 65$ кв. фут. Опредѣлить углы и стороны треугольника ABC.

244. Въ параллелограммѣ даны: сторона равная 20 дюйм., діагональ равная 50 дюйм. и уголъ между діагоналями, содержащій $40°24'$. Вычислить другія стороны и вторую діагональ.

245. Въ прямоугольной трапеціи со взаимно перпендикулярными діагоналями даны меньшая боковая сторона a и уголъ α между ней и одной изъ діагоналей. Опредѣлить площадь этой трапеціи и бóльшую боковую сторону. ($a = 20$; $\alpha = 58° 51' 38''$).

246. Около сегмента описана трапеція, боковыя стороны которой касаются дуги сегмента въ ея концахъ. Опредѣлить стороны этой трапеціи, если дуга сегмента равна α, а хорда a.

247. Изъ общей точки проведены къ окружности касательная и центральная сѣкущая; уголъ между ними равенъ α, а длина сѣкущей равна l. Опредѣлить радіусъ окружности. ($l = 400,12$; $\alpha = 42°35'$).

248. Изъ концовъ дуги AB равной α (менѣе 180°) проведены касательныя до взаимнаго пересѣченія въ точкѣ C. Разстояніе отъ точки C до средины дуги AB равно a. Опредѣлить длину касательныхъ и дуги. ($\alpha = 130°54'$; $a = 31,528$).

249. Опредѣлить сторону квадрата, вписаннаго въ секторъ*), если уголъ сектора равенъ α, а радіусъ R. ($\alpha = 70°18'$; $R = 20$).

250. Даны двѣ концентрическія окружности. Въ большей изъ нихъ проведена хорда касательная къ меньшей; она стягиваетъ дугу α. Кратчайшее разстояніе между окружностями**) равно a. Опредѣлить площадь кольца.

251. Вычислить площадь сектора, если его радіусъ равенъ 8 вершк., а радіусъ вписаннаго въ него круга равенъ 2 вершкамъ.

252. Въ прямоугольномъ треугольникѣ одинъ изъ катетовъ равенъ 10 дюйм. и служитъ діаметромъ наложеннаго на треугольникъ полукруга. Отрѣзокъ гипотенузы, заключенный внутри этого полукруга, относится къ внѣшнему отрѣзку, какъ 5 : 4. Опредѣлить площадь общей части треугольника и полукруга.

253. Прямая равная 20 дюйм служитъ діаметромъ полукруга и катетомъ равновеликаго ему прямоугольнаго треугольника, при чемъ полукругъ и треугольникъ расположены по одну сторону данной прямой. Опредѣлить площадь ихъ общей части.

254. На окружности радіуса R отложены послѣдовательно дуги α, β и α, и концы первой дуги соединены съ концами третьей. Опредѣлить часть площади круга, заключенную между полученными параллельными хордами. ($R = 5$; $\alpha = 42°17'$; $\beta = 71°20'15''$).

255. Отъ конца A радіуса OA отложена дуга AMB равная α (менѣе 90°); изъ точки B проведена параллель къ AO до встрѣчи въ точкѣ C съ радіусомъ перпендикулярнымъ къ OA; на радіусѣ OA отложена часть AD равная BC, и точка D соединена съ C.

---

*) Изъ вершинъ квадрата двѣ лежатъ на боковыхъ радіусахъ сектора, а двѣ другія на дугѣ.

**) Иначе: ширина кольца.

Опредѣлить площадь фигуры $AMBCD$, если радіусъ дуги равенъ R. ($R = 12$; $\alpha = 68^\circ 20'$).

256. Около окружности описана равнобедренная трапеція, периметръ которой въ m разъ болѣе окружности. Опредѣлить ея углы. ($m = 2$).

257. Изъ вершины остраго угла ромба описана внутри его дуга радіусомъ равнымъ сторонѣ ромба; изъ вершины второго остраго угла описана дуга касательная къ первой. Опредѣлить углы ромба, если площади полученныхъ секторовъ относятся какъ $m : n$. ($m : n = 173 : 124$).

258. Въ равнобедренномъ треугольникѣ опредѣлить уголъ при основаніи, если отношеніе радіуса вписаннаго круга къ радіусу круга описаннаго равно m. ($m = \frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$).

259. Опредѣлить уголъ между двумя хордами, пересѣкающимися внутри окружности, если точка пересѣченія удалена отъ центра на $\frac{3}{5}$ радіуса и дѣлитъ одну хорду пополамъ, а другую въ отношеніи $4 : 9$.

260. Внутри окружности пересѣкаются, въ точкѣ O, хорды AB и CD. Площади треугольниковъ AOC и BOD относятся какъ $2 : 3$, а уголъ между хордами, содержащійся въ этихъ треугольникахъ, равенъ 30°. Опредѣлить дуги AC и BD.

261. Изъ внѣшней точки A проведены къ кругу двѣ взаимно перпендикулярныя сѣкущія ABD и ACE. Площади треугольниковъ ABC и ADE относятся какъ $m : n$. Опредѣлить величину дугъ BC и DE, заключенныхъ внутри угла DAE. ($m : n = 1 : 3$).

262. Изъ точки A проведены къ кругу касательная AB и центральная сѣкущая ACD. Опредѣлить уголъ A, если площади треугольниковъ ABC и ABD относятся какъ $m : n$. ($m : n = 1 : 3$).

263. Къ концентрической окружности, которая дѣлитъ площадь круга въ отношеніи $m : n$*), проведена касательная Какую дугу она отсѣкаетъ отъ большей окружности? ($m = n$; $m : n = 1 : 3$; $3 : 1$; $9 : 16$).

264. Два равныхъ круга имѣютъ внѣшнее касаніе между собой и съ однимъ и тѣмъ же третьимъ кругомъ, радіусъ котораго вдвое

*) m соотвѣтствуетъ части, находящейся при центрѣ.

меньше. Точки касанія круговъ соединены между собой. Опредѣлить углы полученнаго треугольника.

265. Въ остроугольномъ равнобедренномъ треугольникѣ проведена высота и опущенъ перпендикуляръ изъ конца основанія на боковую сторону. Опредѣлить отрѣзки этого перпендикуляра, образованные пересѣченіемъ съ высотой, если боковая сторона равна b и составляетъ съ основаніемъ уголъ α. ($b = 0{,}32145$; $\alpha = 61^\circ 56' 42''$).

266. Треугольникъ имѣетъ рамку, ширина которой вездѣ одинакова, а площадь равна площади треугольника. Опредѣлить ширину рамки, если въ треугольникѣ даны сторона a и углы при ней β и γ. ($a = 10$; $\beta = 60^\circ$; $\gamma = 40^\circ 30'$).

267. Ромбъ со стороной a и острымъ угломъ α раздѣленъ на три равновеликія части прямыми, проведенными изъ вершины одного остраго угла. Опредѣлить длину этихъ прямыхъ. ($a = 45$; $\alpha = 54^\circ 9' 40''$).

268. Въ трапеціи $ABCD$ даны основанія: $BC = 5$ дюйм. и $AD = 8$ дюйм. и діагонали: $BD = 5$ дюйм. и $AC = 12$ дюймамъ. Опредѣлить углы и боковыя стороны.

269. Въ равнобедренный треугольникъ вписанъ безконечный рядъ круговъ такъ, что первый кругъ касается боковыхъ сторонъ и основанія, а каждый слѣдующій касается боковыхъ сторонъ и предыдущаго круга. Найти предѣлъ суммы ихъ площадей, зная, что площадь треугольника равна S, а уголъ при вершинѣ равенъ α.

270. Оставивъ построеніе и вопросъ задачи № 269, считать въ треугольникѣ данными основаніе a и уголъ при немъ β, Задачу рѣшить, сравнивая площади послѣдовательныхъ круговъ.

271. Въ равнобедренномъ треугольникѣ даны боковая сторона b и уголъ при основаніи α. Опредѣлить разстояніе отъ центра вписаннаго круга до центра описаннаго круга.

272. Около круга радіуса r описана прямоугольная трапеція съ острымъ угломъ . Опредѣлить ея стороны и площадь.

273. Въ полуокружность радіуса R вписана трапеція такъ, что 1) ея основанія параллельны діаметру полуокружности, 2) верхнее основаніе на столько же удалено отъ высшей точки полуокружности, на сколько нижнее отъ діаметра, и 3) боковая сторона стягиваетъ дугу α. Опредѣлить площадь этой трапеціи.

274. Разстояніе между центрами двухъ круговъ равно d; общая внутренняя касательная ихъ составляетъ съ линіей центровъ уголъ α, общая внѣшняя — уголъ β. Опредѣлить радіусы этихъ круговъ.

275. Къ двумъ внѣшне касающимся кругамъ проведены внѣшнія общія касательныя, и соотвѣтствующія точки касанія соединены между собой. Опредѣлить площадь полученной трапеціи, если проведенныя касательныя имѣютъ длину*) a и наклонены къ линіи центровъ подъ угломъ α.

276. Изъ общей точки проведены къ кругу касательная и сѣкущая. Касательная равна 8 дюйм., сѣкущая 10 дюйм., а уголъ между ними содержитъ 50°. Опредѣлить радіусъ круга.

277. Къ кругу радіуса R проведены изъ общей точки двѣ сѣкущія: ABC и ADE, при чемъ ABC проходитъ черезъ центръ. Дуги CE и BD равны α и β. Опредѣлить длину AB. ($R = 5$; $\alpha = 80°\,17'$ $\beta = 20°\,17'$).

278. Изъ центра, взятаго на высотѣ равнобедреннаго треугольника, описана между его боковыми сторонами дуга касательная къ основанію. Опредѣлить радіусъ этой дуги, если ея величина есть α, а боковыя стороны треугольника имѣютъ длину a и составляютъ между собой уголъ β.

279. Въ треугольникѣ ACB между сторонами CA и CB проведена прямая MN, параллельная AB и равная суммѣ отрѣзковъ AM и BN. Опредѣлить длину MN, если длина AB есть c, а углы A и B соотвѣтственно равны α и β.

280. Въ параллелограммѣ стороны относятся какъ $m : n$; площадь его равна P; разность квадратовъ діагоналей равна Q. Опредѣлить стороны и углы этого параллелограмма. ($m : n = 3 : 5$; $P = 45$; $Q = 200$).

281. Изъ точки, взятой на окружности радіуса R, проведены двѣ равныя хорды подъ угломъ α между собой. Опредѣлить радіусъ круга, касательнаго къ обѣимъ хордамъ и заключенной между ними дугѣ.

282. Изъ концовъ данной дуги (меньшей 180°) проведены касательныя до взаимнаго пересѣченія, и въ полученную фигуру впи-

---

*) Между точками касанія.

санъ кругъ. Опредѣлить его радіусъ, если ве ги есть α, а ея хорда имѣетъ длину a.

283. Опредѣлить сторону квадрата, вписаннаго въ сегментъ, дуга котораго равна α (менѣе 180°), а хорда a. ($\alpha = 90^\circ$; $145^\circ 20' 32''$).

284. Въ треугольникѣ ABC, прямоугольномъ при C, между вершинами A и B проведена дуга касательная къ катету AC, а изъ вершины C, какъ изъ центра, описана дуга касательная къ первой дугѣ. Опредѣлить радіусъ второй дуги, если гипотенуза AB равна c, а уголъ BAC равенъ α. ($c = 10$; $\alpha = 58^\circ 17'$).

285. Правильный n-угольникъ и кругъ имѣютъ общій центръ, при чемъ вершины многоугольника лежатъ внѣ круга; изъ вершинъ многоугольника, какъ изъ центровъ, описаны между его сторонами дуги касательныя къ кругу. Радіусъ круга выбранъ такъ, что онъ равновеликъ суммѣ полученныхъ секторовъ. Опредѣлить радіусъ круга, если сторона многоугольника равна a. ($n = 10$).

286. Въ квадратъ вписанъ другой квадратъ, площадь котораго составляетъ $\frac{3}{4}$ площади перваго. Опредѣлить углы между сторонами обоихъ квадратовъ.

287. Во всякомъ параллелограммѣ равнодѣлящія всѣхъ его угловъ образуютъ прямоугольникъ. Опредѣлить углы параллелограмма, въ которомъ стороны такого прямоугольника относятся какъ $3:5$.

288. Одна діагональ параллелограмма образуетъ съ его сторонами углы $\alpha = 70^\circ 24' 12''$ и $\beta = 48^\circ 18' 12''$. Какіе углы образуетъ вторая діагональ?

289. Опредѣлить углы параллелограмма, въ которомъ отношеніе сторонъ и отношеніе діагоналей есть $1:2$.

290. Внутри круга пересѣкаются подъ прямымъ угломъ двѣ хорды. Отрѣзки одной относятся какъ $4:5$, а отрѣзки другой — какъ $5:16$. На какія четыре части дѣлится этими хордами окружность?

291. Опредѣлить уголъ между двумя сѣкущими, проведенными изъ общей точки, если первая сѣкущая проходитъ черезъ центръ и дѣлится окружностью въ отношеніи $4:21$*), а вторая сѣкущая дѣлится окружностью въ отношеніи $1:3$.

---

*) Число 4 соотвѣтствуетъ внѣшнему отрѣзку.

292. Опредѣлить уголъ между касательной и сѣкущей, проведенными изъ общей точки, если радіусъ окружности, касательная и сѣкущая относятся какъ $\sqrt[3]{2} : \sqrt{2} : 2$.

293. Вывести съ помощью тригонометріи формулу $R = \frac{abc}{4S}$.

294. Въ данный треугольникъ вписанъ кругъ, и точки касанія соединены между собой. Опредѣлить стороны полученнаго треугольника по сторонамъ даннаго.

295. Въ треугольникъ вписанъ кругъ, и точки касанія соединены между собою. Опредѣлить отношеніе площади S_1 новаго треугольника къ площади S даннаго 1) въ зависимости отъ угловъ даннаго и 2) въ зависимости отъ его сторонъ.

ОТВѢТЫ.

Замѣчаніе. 1) Полученныя выраженія большею частью приведены къ виду удобному для нахожденія численной величины, причемъ въ нѣсколькихъ случаяхъ для этого введенъ вспомогательный уголъ; 2) встрѣчающіяся логарифмическія вычисленія произведены съ помощью пятизначныхъ таблицъ (при этомъ, отбрасывая $\frac{1}{2}$, я увеличивалъ предыдущую цифру на единицу*); $\lg \pi = 0{,}49715$); для нѣкоторыхъ задачъ удобно пользоваться кромѣ того таблицей квадратныхъ корней.

1. $82^\circ 49' 10''$ и $41^\circ 24' 35''$. **2.** $x = \frac{1}{2}[a - b \pm \sqrt{(a-b)^2 - 4ab}]$. Въ примѣрѣ: $x_1 = 3$ и $x_2 = 2$. *Указаніе.* Имѣемъ: $\beta - \alpha = 45^\circ$; $\operatorname{tg} \alpha = \frac{x}{a}$; $\operatorname{tg} \beta = \frac{x}{b}$.

3. $\frac{C+B}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$; $\operatorname{tg} \frac{C-B}{2} = \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg}(45^\circ - \beta)$.

Если $\alpha = 90^\circ - 2\beta$, то $B = \beta$ и $C = 90^\circ + \beta$. *Указаніе.* Задача сводится къ опредѣленію угловъ треугольника, въ которомъ извѣстно отношеніе двухъ сторонъ и уголъ между ними.

4. $\operatorname{sn} \varphi = \frac{\operatorname{sn} \alpha}{\operatorname{sn} \beta}$. **5.** $x = \frac{a}{2} \operatorname{sn} 2\alpha \,.\, \operatorname{sn} \varphi$. **6.** $\operatorname{sn} x = \frac{\operatorname{sn} \varphi}{\operatorname{sn} \alpha}$.

7. $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sn} \alpha}{\operatorname{sn} \beta}$. *Указаніе.* Слѣды параллельныхъ наклонныхъ слѣдъ ихъ сѣкущей лежатъ на одной прямой линіи.

8. $\operatorname{sn} \varphi = 0{,}6$; $\varphi = 36^\circ 52' 11''$. **9.** $x = \sqrt{a^2 \operatorname{sn}^2 \varphi + b^2 \operatorname{cs}^2 \varphi}$.

10. Если перпендикуляры направлены въ разныя стороны, то $x = a \cdot \frac{\operatorname{sn}(\alpha+\beta)}{\operatorname{sn}\alpha \,.\, \operatorname{sn}\beta}$; если же въ одну сторону, то $x = a \cdot \frac{\operatorname{sn}(\alpha-\beta)}{\operatorname{sn}\alpha \,.\, \operatorname{sn}\beta}$.

*) Напр.: если $a = 50^\circ 40' 15''$ и $\lg a = 2{,}69835$, то я принималъ: $\frac{a}{2} = 25^\circ 20' 8''$ и $0{,}1 \lg a = 0{,}26984$, и т. п.

11. Если перпендикуляры направлены въ одну сторону, то $x = \sqrt{b^2 - a^2} \cdot \frac{\operatorname{sn}\alpha \cdot \operatorname{sn}\beta}{\operatorname{sn}(\alpha - \beta)}$; если же въ разныя стороны, то $x = \sqrt{b^2 - a^2} \cdot \frac{\operatorname{sn}\alpha \cdot \operatorname{sn}\beta}{\operatorname{sn}(\alpha + \beta)}$. *Указаніе.* Отрѣзокъ a и возставленные къ нему перпендикуляры проектируемъ на данную плоскость; затѣмъ составляемъ прямоугольный треугольникъ съ гипотенузой b и съ катетомъ параллельнымъ проекціи a.

12. $x^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab \cdot \operatorname{cs}\varphi$. Въ примѣрѣ $x = 4$.

Указаніе. Изъ конца отрѣзка c проводимъ параллель къ b, а изъ конца b параллель къ c; точку пересѣченія этихъ параллелей соединяемъ съ концомъ a.

13. $x = \left(b \cdot \operatorname{sn}\frac{\varphi}{2} \cdot \operatorname{cs}30^\circ\right) : \sqrt{\operatorname{sn}\left(\frac{\varphi}{2} + 30^\circ\right)\operatorname{sn}\left(\frac{\varphi}{2} - 30^\circ\right)}$.

Указаніе. Пусть будетъ S вершина треграннаго угла и O данная точка. Проведя черезъ O плоскость перпендикулярно къ SO, образуемъ правильную треугольную пирамиду, и задача сведется на опредѣленіе ея высоты по данному углу между боковыми гранями и данному разстоянію между центромъ основанія и боковымъ ребромъ.

Означимъ основаніе пирамиды черезъ ABC и проведемъ черезъ O плоскость перпендикулярно къ SA: пусть будутъ D, B_1 и C_1 точки ея пересѣченія съ ребрами AS, AB и AC; тогда $OD = b$ и $\angle ODB_1 = ODC_1 = \frac{\varphi}{2}$.

Далѣе опредѣляемъ OA и AD и пользуемся подобіемъ треугольниковъ SOA и ODA.

14. $x = a\sqrt{3} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. *Указаніе.* Пусть будутъ: S вершина треграннаго угла, O данная точка и ABC сѣченіе треграннаго угла плоскостью, проходящей черезъ O перпендикулярно къ SO. Проведя $SD \perp AB$ и $OE \perp SD$, будемъ имѣть $OE = a$. Далѣе находимъ $\frac{x}{a} = \frac{SD}{OD}$ и вычисляемъ вторую часть.

15. $\operatorname{sn}(x + \beta) = \dfrac{\operatorname{sn}\beta \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}}$. Въ указанномъ частномъ случаѣ искомый уголъ равенъ 90°*) (формула даетъ еще $x = -30°$; какъ *можно воспользоваться этимъ значеніемъ?*).

16. $67°54'50''$. ($\alpha + \beta$ должно превышать 90°; обнаружить это при помощи указаннаго тригонометрическаго соотношенія**) и подтвердить геометрическими соображеніями).

17. $93°41'42''$; $67°22'48''$; $18°55'30''$.

18. 1) $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \operatorname{tg}\alpha$; 2) $\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha$.

19. Искомые углы суть: 30°, 60°, 120° и 60°.

Указаніе. Означая меньшій уголъ черезъ α, получимъ:

$$\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}4\alpha = 2\operatorname{ctg}2\alpha;$$

$$\text{отсюда}\quad \operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}2\alpha = \operatorname{ctg}2\alpha - \operatorname{ctg}4\alpha;$$

далѣе выражаемъ ctg черезъ sn и cs и приводимъ обѣ части уравненія къ виду дробей.

20. $\operatorname{sn}2\varphi = \frac{P\sqrt{2}}{c^2}$; $a = 2c \,.\, \operatorname{cs}\varphi$. Эти формулы даютъ *два* рѣшенія. Въ примѣрѣ: $\varphi_1 = 29°\,1'\,34''$ и $a_1 = 8{,}744$; $\varphi_2 = 60°\,58'\,26''$ и $a_2 = 4{,}85211$.

21. $\operatorname{cs}\varphi = \operatorname{ctg}\frac{180°}{n} : \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$; $\operatorname{sn}\frac{\varphi_1}{2} = \operatorname{cs}\frac{180°}{n} : \operatorname{cs}\frac{\alpha}{2}$.

Указаніе. Для опредѣленія угла между боковыми гранями опускаемъ изъ вершинъ основанія A и C перпендикуляры на ребро SB.

22. $\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\alpha \cdot \frac{m-n}{m+n} \cdot \sqrt{2}$. (Ср § XXX введенія.)

23. 1) $70°31'43''$; 2) $109°28'16''$.

24. 1) $\operatorname{sn}\frac{\alpha}{2} = \frac{\operatorname{sn}54°}{\operatorname{sn}60°}$, $\alpha = 138°11'36''$;

2) $\operatorname{sn}\frac{\alpha_1}{2} = \frac{\operatorname{sn}30°}{\operatorname{sn}36°}$, $\alpha_1 = 116°33'45''$. *Указаніе.* (1) сводится на опредѣленіе угла между боковыми гранями въ правильной 5-угольной пирамидѣ съ равными ребрами. (2) сводится на опредѣленіе угла между боковыми гранями въ правильной треугольной пирамидѣ, въ которой плоскій уголъ при вершинѣ равенъ 108°.

---

*) Взявъ для $x + \beta$ *тупой* уголъ, соотвѣтствующій данному синусу.

**) Его можно представить въ слѣдующемъ видѣ: $\operatorname{cs}^2\gamma = -\operatorname{cs}(\alpha+\beta)\operatorname{cs}(\alpha-\beta)$.

25. $S=\sqrt{ab\,(a+b\,\mathrm{cs}\,\alpha)\,(b+a\,\mathrm{cs}\,\alpha)}$. *Указаніе.* Въ сѣченіи получается прямоугольникъ.

26 Сѣкущая плоскость должна быть параллельна діагонали основанія и составлять съ плоскостью основанія уголъ, косинусъ котораго равенъ $\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}$.

27. Сѣкущая плоскость должна быть параллельна большей діагонали основанія и составлять съ плоскостью основанія уголъ, косинусъ котораго равенъ $\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}$.

28. Пусть будетъ *ABCDE* искомое сѣченіе, при чемъ *A* и *B* суть средины сторонъ основанія. Соединивъ *C* и *E* и означая уголъ *BCE* черезъ φ, получимъ для опредѣленія угловъ:

$$\angle A=B=180^\circ-\varphi;\ \angle BCD=AED=2\varphi;\ \angle D=180^\circ-2\varphi;$$
$$\mathrm{ctg}\,\varphi=\mathrm{cs}\,\alpha.$$

Площадь сѣченія равна $\frac{7a^2}{8\,\mathrm{cs}\,\alpha}$.

29. 1) $\frac{3a}{4}\cdot\sqrt{a^2+2b^2}$. 2) Пусть будутъ *A* и *B* середины сторонъ основанія и *ABCDEF* искомое сѣченіе; соединивъ *C* и *F* и означая уголъ *BCF* черезъ φ, найдемъ:

$$\angle BCD=AFE=2\varphi;\ \angle A=B=D=E=180^\circ-\varphi;\ \mathrm{tg}\,\varphi=\frac{\sqrt{a^2+2b^2}}{a}.$$

3) $\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{b\sqrt{2}}{a}$.

30. Пусть будетъ *AB* сторона основанія и *ABCDEF* искомое сѣченіе; соединивъ *C* и *F* и означая уголъ *BCF* черезъ φ, найдемъ:

$$\angle BCD=AFE=2\varphi;\ \angle A=B=D=E=180^\circ-\varphi;\ \mathrm{tg}\,\varphi=\frac{\sqrt{3}}{\mathrm{cs}\,\alpha}.$$

31. Уголъ между сѣченіемъ и основаніемъ равенъ 30°; углы сѣченія: 30°, 120° и 30°. **32.** 26° 33′ 54″.

33. $S=\frac{a^2}{4\,\mathrm{cs}\,\alpha}\sqrt{\mathrm{sn}\,(\alpha+30^\circ)\,.\,\mathrm{sn}\,(\alpha-30^\circ)}$; (показать, что $\alpha>30^\circ$).

34. $P=\frac{a^2}{4\sqrt{3}}\cdot\sqrt{4+\mathrm{tg}^2\alpha}$. Для вычисленія: $P=\frac{a^2}{2}\cdot\frac{\mathrm{tg}\,30^\circ}{\mathrm{cs}\,\varphi}$, полагая $\frac{1}{2}\,\mathrm{tg}\,\alpha=\mathrm{tg}\,\varphi$; $P=33{,}0962$.

35. $\operatorname{ctg}\left(45^\circ+\frac{\varphi}{2}\right)=\frac{m\sqrt{2}}{n}$. Въ примѣрѣ $\varphi=30^\circ$.

36. $S=\frac{a^2}{9\sqrt{3}}\cdot\sqrt{4+\operatorname{tg}^2\alpha}=1,962$. *Указаніе*. Въ сѣченіи получается прямоугольникъ.

37. $P=\frac{a^2 \,.\, \operatorname{sn}^2\alpha \,.\, \operatorname{cs}\beta}{\operatorname{sn}^2(\alpha+\beta)}$.

38. $S=\frac{a^2}{\operatorname{cs}\varphi}\cdot\frac{\operatorname{sn}(\alpha-\varphi)}{\operatorname{sn}(\alpha+\varphi)}$.

39. $x=\frac{a}{2}\cdot\frac{\operatorname{sn}\alpha}{\operatorname{sn}(45^\circ+\alpha)}$.

40. $P=2p\,.\,a\,.\operatorname{csc}\alpha$.

41. $V=\frac{b^3}{8}\cdot\operatorname{sn}^2\alpha\,.\operatorname{sc}^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{4}\right)$.

42. $V=\frac{a^3}{4}\cdot\operatorname{tg}\alpha=64,3543$; $P=\frac{a^2}{\sqrt{3}\,.\operatorname{cs}\alpha}(1+\sqrt{1+3\operatorname{sn}^2\alpha})$

или, полагая $3\operatorname{sn}^2\alpha=\operatorname{tg}^2\varphi$, $P=\frac{\left(a\,.\operatorname{cs}\frac{\varphi}{2}\right)^2}{\operatorname{cs}30^\circ\ \operatorname{cs}\alpha\,.\operatorname{cs}\varphi}=86,058$.

43. $V=abc\,.\sqrt{-\operatorname{cs}2\alpha}$; $\operatorname{sn}x=\sqrt{-\operatorname{cs}2\alpha}$. Въ примѣрѣ $x=45^\circ$.

44. $V=2a^3\,.\operatorname{sn}\frac{\alpha}{2}\cdot\sqrt{\operatorname{sn}\frac{3\alpha}{2}\cdot\operatorname{sn}\frac{\alpha}{2}}$.

45. $V=\frac{P\,.\,Q}{a}\cdot\operatorname{sn}\alpha$.

46. $V=\frac{P\,.\,Q}{2a}\cdot\operatorname{sn}\alpha$.

47. $V=2ab\,.\operatorname{sn}\alpha\,.\sqrt{ab\,.\operatorname{cs}\alpha}$.

48. $V=\frac{h^3}{4}\cdot\frac{\operatorname{sn}(\beta+\gamma)\,.\operatorname{sn}(\beta-\gamma)}{\operatorname{sn}^2\beta\,.\operatorname{sn}^2\gamma}\cdot\operatorname{tg}\alpha$.

49. $V=\frac{ab^2}{2}\cdot\operatorname{sn}\alpha\,.\operatorname{sn}\beta$.

50. $\frac{V_1}{V_2}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\sqrt{-\operatorname{tg}\frac{3\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$.

51. $38^\circ 39' 35''$ и $51^\circ 20' 25''$.

52. $V=\frac{a^3}{\operatorname{sn}\alpha}\cdot\sqrt{\operatorname{cs}2\alpha}$ (пользуясь полученнымъ выраженіемъ, указать, какія значенія можетъ принимать α).

53. $V=-b^3\cdot\frac{\operatorname{cs}^2\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{cs}\alpha}$.

54. $V=\frac{3a^3}{8\operatorname{sn}\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\operatorname{sn}\left(60^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\operatorname{sn}\left(60^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}$.

55. $V=\frac{P\,.\,l}{2}\operatorname{cs}(\alpha-\beta)$. 56. $V=\frac{a^2b}{4}\,.\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

Указаніе. Выразить объемъ съ помощью перпендикулярнаго сѣченія.

57. $P=4h^2\,.\operatorname{ctg}\alpha\,.\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

58. $P=2h^2\,.\operatorname{ctg}\beta\,.\sqrt{2+\operatorname{ctg}^2\alpha}=2927{,}67$.

59. $V=\frac{a^3}{6\operatorname{sn}\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\operatorname{cs}\alpha}$; $S=\frac{a^2\sqrt{2}}{\operatorname{sn}\frac{\alpha}{2}}\operatorname{sn}\left(45^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)$.

60. $V=\frac{a^3\,.\operatorname{sn}\frac{\beta}{2}}{3\operatorname{cs}^2\alpha}\cdot\sqrt{\operatorname{sn}\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)\cdot\operatorname{sn}\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)}$;

$$P=\frac{a^2}{\operatorname{cs}^2\alpha}\cdot\operatorname{sn}\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)\cdot\operatorname{cs}\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right).$$

61. $V=\frac{a^3}{6}\cdot\operatorname{sn}^2\alpha\,.\operatorname{tg}\varphi$; $S=2a^2\,.\operatorname{sn}\alpha\,.\operatorname{cs}^2\frac{\varphi}{2}\cdot\operatorname{sc}\varphi$.

62. $V=\frac{1}{3}\cdot\frac{S^2}{p}\cdot\operatorname{tg}\alpha$; $P=2S\cdot\frac{\operatorname{cs}^2\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{cs}\alpha}$.

63. $V=\frac{a^3}{3}\cdot\operatorname{tg}\alpha$; $P=a^2\,.\operatorname{ctg}\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$;

$S=a^2\cdot\frac{\sqrt{2}\,.\operatorname{cs}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{sn}\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}$. 64. $V=\frac{h^3}{3}\cdot\operatorname{ctg}\alpha\,.\operatorname{ctg}\beta$;

$$P=\frac{2h^2}{\operatorname{sn}\alpha\,.\operatorname{sn}\beta}\cdot\operatorname{cs}\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\operatorname{cs}\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\operatorname{cs}\left(45^\circ-\frac{\beta}{2}\right).$$

65. $V=\frac{a^3}{3}\operatorname{sn}^2\alpha\,.\operatorname{tg}\varphi$; $P=a^2\operatorname{sn}\alpha\,.\operatorname{ctg}\left(45^\circ-\frac{\varphi}{2}\right)$.

66. $V=\frac{4}{3}b^3\,.\operatorname{sn}^2\frac{\alpha}{2}\cdot\sqrt{\operatorname{cs}\alpha}$.

67. $V=\frac{1}{3}S\cdot\sqrt{\frac{S}{n}\cdot\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}\,.\operatorname{tg}\alpha}$.

68. $S=\frac{c^2}{2}\cdot\frac{\operatorname{sn}\alpha\,.\operatorname{sn}\beta}{\operatorname{sn}(\alpha+\beta)\,.\operatorname{cs}\varphi}$; $V=\frac{c^3}{6}\cdot\frac{\operatorname{sn}^2\alpha\,.\operatorname{sn}^2\beta\,.\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{sn}^2(\alpha+\beta)}$.

69. $V=\frac{2}{3}h^3 \cdot \mathrm{ctg}^2\varphi \cdot \mathrm{sn}\,\alpha \cdot \mathrm{sn}\,\beta \cdot \mathrm{sn}(\alpha+\beta)$.

70. $V=\frac{b}{6}\cdot \mathrm{sn}\frac{\alpha}{2}\cdot\sqrt{\mathrm{cs}\,\alpha}$.

71. $V=\frac{2}{3}h^3\,\mathrm{ctg}\,\alpha\cdot\mathrm{ctg}\,\beta\cdot\mathrm{sn}\,\varphi$. Въ примѣрѣ $V=\frac{2}{3}h^3\,\mathrm{sn}\,\varphi$.

72. $V=\frac{2}{3}a^3\,\mathrm{cs}^3\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\,\varphi$. 73. $V=\frac{S}{6}\sqrt{2S\cdot\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\mathrm{tg}\,\beta}$.

74. $V=\frac{b^3}{3}\cdot\mathrm{sn}\frac{\alpha}{2}\cdot\sqrt{\mathrm{sn}\left(60^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\,\mathrm{sn}\left(60^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}$. Изъ формулы видно, что α должно быть менѣе 120°. Подтвердить это геометрически.

75. $V=\frac{1}{3}\cdot\frac{P^2}{a}\cdot\mathrm{sn}\,2\alpha$.

76. $V=\frac{ab}{6}\cdot\sqrt{\frac{(a-b)(a^2-2ab-b^2)}{3b-a}}$. *Указаніе*. Обозначая черезъ h высоту пирамиды и черезъ α *половину* меньшаго плоскаго угла при вершинѣ, получимъ систему уравненій:

$$h^2=\frac{b^2}{4}\,\mathrm{ctg}^2\,\alpha-\frac{a^2}{4};\quad a:b=\mathrm{sn}\,3\alpha:\mathrm{sn}\,\alpha,$$

откуда исключаемъ уголъ α.

77. $V=\frac{1}{24}(a+b)^2\sqrt{a(a-2b)}\cdot\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}$.

78. $V=\frac{ab}{24}\cdot\mathrm{sn}\,\alpha\cdot[\sqrt{(a+b)^2+4ab}-(a+b)]$.

79. 1) Площадь сѣченія $S=-\frac{a^2\cdot\mathrm{cs}\,\alpha\cdot\mathrm{tg}\,\beta}{2\cdot\mathrm{cs}\,3\alpha}$;

2) объемъ части, прилежащей къ боковой сторонѣ равнобедреннаго треугольника, $V_1=-\frac{a^3\cdot\mathrm{cs}^2\alpha\cdot\mathrm{tg}\,\beta}{6\cdot\mathrm{cs}\,3\alpha}$;

3) объемъ части, прилежащей къ основанію равнобедреннаго треугольника, $V_2=\frac{a^3\cdot\mathrm{cs}^2\alpha\cdot\mathrm{cs}\,2\alpha\cdot\mathrm{tg}\,\beta}{3\cdot\mathrm{cs}\,3\alpha}$.

80. $V=\frac{1}{6}P\sqrt{P\cdot\mathrm{tg}\,\alpha}\cdot\mathrm{tg}\,\varphi$. *Указаніе.* Пусть высота пирамиды встрѣчаетъ основаніе въ точкѣ E. Тогда линія BED есть *прямая* перпендикулярная къ BC и AD.

81. $V=\frac{1}{3}\left(b \,.\, \operatorname{sn}\frac{\alpha}{2}\right)^3 \operatorname{tg}\varphi$; въ примѣрѣ $V=\frac{b^3}{8}$.

Указаніе. Высота данной пирамиды проходитъ черезъ точку пересѣченія высотъ основанія.

82. $V=\frac{ab^2}{3}\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. *Указаніе.* Пусть будетъ $SABC$ данная пирамида. Рѣшеніе упрощается, если перенести вершину S по линіи параллельной BC такъ, чтобы новое положеніе ребра SA было перпендикулярно къ BC.

83. Обозначая объемъ части при вершинѣ A черезъ V_A, найдемъ $V_A=138{,}052$. *Указаніе.* $V_A : V_B = \operatorname{sn} B : \operatorname{sn} A$.

84. $1 : \operatorname{cs}\alpha$. **85.** $\operatorname{tg}\alpha=\frac{4}{13}$, $\alpha=17^\circ\,6'\,11''$.

Указаніе. Означимъ основаніе пирамиды черезъ ABC и допустимъ, что сѣкущая плоскость проходитъ черезъ точку A. Проведемъ плоскость черезъ ребро SA и высоту пирамиды SO; пусть будетъ SAD полученное сѣченіе и AE линія его пересѣченія съ первой плоскостью; изъ точки E опустимъ перпендикуляръ EF на линію AD.

Сначала, сравнивая объемы частей пирамиды, опредѣлимъ отношеніе $SE : ED$; послѣ этого нетрудно выразить линіи EF и AF черезъ радіусъ основанія.

86. Искомыя части двуграннаго угла суть: $x=45^\circ\,17'\,22''$ и $y=25^\circ\,14'\,22''$. *Указаніе.* 1) Во-первыхъ, имѣемъ $x+y=70^\circ\,31'\,43''$ (см. № 23); во-вторыхъ, сравнивая объемы частей тетраэдра, найдемъ, что $\frac{\operatorname{sn} x}{\operatorname{sn} y}=\frac{5}{3}$. Изъ второго уравненія получимъ

$$\operatorname{tg}\frac{x-y}{2} : \operatorname{tg}\frac{x+y}{2}=(5-3):(5+3)$$

и такимъ образомъ опредѣлимъ $\frac{x-y}{2}$.

2) Къ той же задачѣ можно примѣнить еще способъ сходный съ указаннымъ въ № 85. $\left(\text{Тогда получимъ } \operatorname{tg}x=\frac{5}{7}\sqrt{2} \text{ и } \operatorname{tg}y=\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$.

87. $V=\frac{a^3-b^3}{6\operatorname{cs}\alpha}\cdot\sqrt{-\operatorname{cs}2\alpha}=4302{,}4$.

88. $14^\circ\,30'\,39''$. **89.** $x=\frac{R}{\operatorname{sn}\alpha}\cdot\sqrt{-\operatorname{cs}2\alpha}$.

90. $x^2 = R^2 \operatorname{sn}^2 \alpha + d^2 \operatorname{cs}^2 \alpha$. *Указаніе*. Пусть будутъ: O центръ основанія, A точка касанія, B точка пересѣченія касательной прямой съ плоскостью основанія, C нижній конецъ образующей, проходящей черезъ A, и OD перпендикуляръ изъ O на AB. Тогда $\angle ABC = \alpha$, $OA = d$ и $OC = R$. Соединивъ также C и D, получимъ въ треугольникѣ ODC прямой уголъ при C.

91. $x = \frac{a}{4} \cdot \frac{\operatorname{sn} 2\alpha \,.\, \operatorname{sn} 2\beta}{\operatorname{sn}(\beta + \alpha) \,.\, \operatorname{sn}(\beta - \alpha)}$. *Указаніе*. Искомый отрѣзокъ опредѣляемъ по частямъ. **92.** $\operatorname{sn} x = \frac{\operatorname{sn} \beta}{\operatorname{cs} \alpha}$.

93. $S = \left(\frac{r}{\operatorname{cs} \alpha \,.\, \operatorname{cs} \varphi}\right)^2 \cdot \operatorname{sn} \alpha \,.\, \sqrt{\operatorname{cs}(\alpha + \varphi) \,.\, \operatorname{cs}(\alpha - \varphi)}$.

94. $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \operatorname{sn} \frac{180^\circ}{n}$; $n = 6$ соотвѣтствуетъ $\alpha = 53^\circ 7' 48''$.

Указаніе. Означимъ высоту конуса черезъ h и искомый уголъ черезъ α. Пусть будутъ SA и SB проекціи (на данную плоскость) высотъ двухъ послѣдовательныхъ конусовъ; для треугольника ASB имѣемъ:

$$AB = 2h \,.\, \operatorname{sn} \frac{\alpha}{2}; \quad SA = SB = h \,.\, \operatorname{cs} \frac{\alpha}{2}; \quad \angle S = \frac{360^\circ}{n}.$$

95. $S = \frac{(R^2 - r^2) \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{sn}^2 \varphi \,.\, \operatorname{cs} \alpha} \cdot \sqrt{\operatorname{sn}(\varphi + \alpha) \,.\, \operatorname{sn}(\varphi - \alpha)}$.

Указаніе. Удобно сначала найти площадь сѣченія полнаго конуса (тою же плоскостью).

96. $x = \frac{b \,.\, \operatorname{sn} 2\alpha}{2\sqrt{2} \,.\, \operatorname{sn}(45^\circ + \alpha)}$. **97.** $x = \frac{l \,.\, \operatorname{sn} \alpha \,.\, \sqrt{2}}{\sqrt{2} + \operatorname{tg} \alpha}$ или: $x = l \,.\, \operatorname{sn} \alpha \,.\, \operatorname{sn}^2 \varphi$, если раздѣлить числителя и знаменателя на $\sqrt{2}$ и положить $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{2}} = \operatorname{ctg}^2 \varphi$. Въ примѣрѣ $x = 13{,}1621$.

98. $x = \frac{r \,.\, \operatorname{sn} 60^\circ \,.\, \operatorname{sn} \alpha}{\operatorname{sn}(60^\circ + \alpha)}$. **99.** 1) Обозначая черезъ φ уголъ между діагональю куба и его гранью, получимъ:

$$\operatorname{ctg} \varphi = \sqrt{2}, \quad \varphi = 35^\circ 15' 51''; \quad r = \frac{a \,.\, \operatorname{sn} \alpha}{\operatorname{sn}(\alpha + \varphi)} = 3{,}32046;$$

2) $r = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2} + \operatorname{ctg} \alpha}$. **100.** $V = \frac{r^3}{3} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{ctg}\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \operatorname{tg} \varphi$;

$P = r^2 . \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg}\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) . \operatorname{sc}\varphi$. *Указаніе.* Означая периметръ основанія черезъ $2p$, получимъ: $V = \frac{1}{3}pr^2 \operatorname{tg}\varphi$ и $P = pr \operatorname{sc}\varphi$; далѣе замѣняемъ pr черезъ $\frac{1}{2}ab$, обозначая черезъ a и b катеты основанія.

101. $r = l\sqrt{2} . \operatorname{sn}\frac{\alpha}{2} . \operatorname{sn}\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$. *Указаніе.* Продолживъ плоскость основанія цилиндра, получимъ въ пересѣченіи съ гранями пирамиды треугольникъ подобный діагональному сѣченію. Означая *половину* основанія треугольника черезъ x и радіусъ основанія цилиндра черезъ r, будемъ имѣть: $x = r . \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$ и $x + r = l . \operatorname{cs}\alpha$.

102. $S = \pi . Q . \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. **103.** $x = 360^\circ . \operatorname{sn}\frac{\alpha}{2}$. Въ примѣрахъ: 1) $x = 180^\circ$; 2) $x = 207^\circ 31' 7''$.

104. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{4}$, $\alpha = 76^\circ 17' 32''$.

105. 1) $x = h . \operatorname{cs}\frac{\alpha}{2}$; 2) часть при вершинѣ и часть при основаніи относятся какъ $\operatorname{cs}^2\frac{\alpha}{2} : \operatorname{sn}^2\frac{\alpha}{2}$. Для равносторонняго конуса получимъ: 1) $x = \frac{3}{4}$ образующей; 2) $3 : 1$. *Указаніе (для втораго вопроса).* Боковыя поверхности подобныхъ конусовъ относятся какъ квадраты высотъ этихъ конусовъ.

106. $P = \pi h^2 \operatorname{sc}\alpha$. **107.** $\operatorname{cs}\alpha = \frac{m - n}{p}$.

108. $V = \frac{\pi}{12} l^3 \operatorname{sn}\alpha . (2 - \operatorname{cs}2\alpha)$; $P = \pi l^2 \operatorname{sn}\alpha$; $S = \pi l^2 \operatorname{sn}\alpha + \pi\frac{l^2}{2} = 2\pi l^2 \operatorname{sn}\left(\frac{\alpha}{2} + 15^\circ\right) \operatorname{cs}\left(\frac{\alpha}{2} - 15^\circ\right)$ Въ примѣрѣ: $V = 1181{,}51$; $P = 426$; $S = 426 + 226{,}195 = 652{,}195$. *Указаніе.* $R + r = h$.

109. $\pi : [4 . \operatorname{cs}(k\alpha) . \operatorname{cs}(m\alpha) . \operatorname{cs}(n\alpha)]$, гдѣ $\alpha = 90^\circ : (k + m + n)$.

110. $S = 4\pi . P . \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. **111.** $S = \pi a^2 n^2 \operatorname{sn}\frac{\alpha}{2}$.

112. $P = 2\pi a^2\sqrt{3} \,.\, \mathrm{sn}\,(30^\circ + \alpha)$.

113. $\mathrm{cs}\,\alpha = \sqrt[4]{\frac{1}{2}}$, $\alpha = 32^\circ\, 45'\, 53''$.

114. $V = \frac{\pi}{3} b^3 \mathrm{sn}^2\,\alpha$; $P = 4\pi b^2 \,\mathrm{sn}\,\alpha \,.\, \mathrm{sn}\left(15^\circ + \frac{\alpha}{4}\right) \cdot \mathrm{cs}\left(15^\circ - \frac{\alpha}{4}\right)$.

При $\alpha = 120^\circ$ найдемъ: $V = \frac{\pi b^3}{4}$; $P = \frac{\pi b^2}{2} \cdot \sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)$.

115. $P = \pi a^2 \frac{\mathrm{sn}\,B \,.\, \mathrm{sn}\,C \,.\, \mathrm{cs}\,\frac{1}{2}(B - C)}{\mathrm{sn}\,(B + C) \,.\, \mathrm{cs}\,\frac{1}{2}(B + C)}$; $V = \frac{\pi a^3}{3} \,.\, \frac{\mathrm{sn}^2 B \;\; \mathrm{sn}^2 C}{\mathrm{sn}^2 (B + C)}$.

116. $V = \frac{\pi}{3} \cdot bc(b + c) \,.\, \mathrm{sn}\,\alpha \,.\, \mathrm{cs}\,\frac{\alpha}{2}$. 117. $V = \frac{\pi}{6} \cdot \frac{a^3\, \mathrm{tg}\, 2\alpha}{\mathrm{cs}\, 2\alpha}$.

118. $P = 8\pi a^2 \,.\, \mathrm{cs}^2\,\frac{\alpha}{2}$; $V = 2\pi a^3 \,.\, \mathrm{sn}\,\alpha \,.\, \mathrm{cs}^2\,\frac{\alpha}{2}$.

119. $V = \frac{2}{3}\pi R^3 \,.\, \mathrm{sn}\,\alpha \,.\, \mathrm{sn}\,2\alpha$.

120. $V = \frac{8}{3}\pi R^3 \,.\, \mathrm{cs}^2\,\frac{\alpha}{2} \cdot \mathrm{sn}\left(15^\circ + \frac{\alpha}{4}\right) \cdot \mathrm{cs}\left(15^\circ - \frac{\alpha}{4}\right)$;

$P = 8\pi R^2 \,.\, \mathrm{cs}\,\frac{\alpha}{2} \cdot \mathrm{sn}\left(22^\circ\, 30' + \frac{1}{8}\alpha\right) \,.\, \mathrm{cs}\left(22^\circ\, 30' - \frac{3}{8}\alpha\right)$.

121. $V = \frac{2}{3}\pi R^3 \,.\, \mathrm{tg}\,\alpha \,.\, \mathrm{sn}\,\alpha \,.\, \mathrm{cs}^2\,\frac{\alpha}{2}$.

122. $V_a : V_b : V_c = \mathrm{csc}\,A : \mathrm{csc}\,B : \mathrm{csc}\,C$.

Указаніе. $V_a = \frac{1}{3}\pi h_a^2 \,.\, a = \frac{4}{3}\pi\,\frac{\Delta^2}{a}$, гдѣ Δ означаетъ площадь треугольника.

123. $V = \frac{\pi a^3}{3} \cdot \mathrm{sn}\left(\frac{\alpha}{2} + 30^\circ\right) \cdot \mathrm{sn}\left(\frac{\alpha}{2} - 30^\circ\right) \cdot \mathrm{csc}^2\,\frac{\alpha}{2}$. *Указаніе.* Означая черезъ x разстояніе отъ стороны a до оси вращенія и черезъ h высоту даннаго треугольника, найдемъ $V = \frac{\pi a}{3} h(3x - h)$; послѣ чего опредѣляемъ x и h.

124. $V = \frac{\pi b^3}{6} \cdot \frac{\mathrm{sn}\,\alpha \,.\, \mathrm{sn}\,\gamma}{\mathrm{sn}^2(\alpha + \gamma)} \cdot (3\,\mathrm{cs}\,\alpha \,.\, \mathrm{cs}\,\gamma - \mathrm{sn}\,\alpha \,.\, \mathrm{sn}\,\gamma)$ или $V = \frac{\pi b^3}{8} \cdot \frac{\mathrm{sn}\,2\alpha \,.\, \mathrm{sn}\,2\gamma}{\mathrm{sn}^2(\alpha + \gamma)} \cdot \mathrm{sn}^2\,\varphi$, полагая $\frac{1}{3}\mathrm{tg}\,\alpha \,.\, \mathrm{tg}\,\gamma = \mathrm{cs}^2\,\varphi$. Въ примѣрѣ $V = 253{,}824$. См. указ. къ № 123.

125. $V = \pi S \,.\, \sqrt{2S \,.\, \mathrm{sn}\,\alpha}$; $P = 4\pi S\sqrt{2} \,.\, \mathrm{sn}\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)$.

126. Означая черезъ φ уголъ между R и r (равный $\frac{180^\circ}{n}$, гдѣ n есть число сторонъ), найдемъ:

1) $S = 4\pi r^2 \,.\, \mathrm{sc}\,\varphi$; $V = \frac{4}{3}\pi r^3 \,.\, \mathrm{sc}\,\varphi$.

2) $S = 4\pi R^2 \,.\, \mathrm{cs}\,\varphi$; $V = \frac{4}{3}\pi R^3 \,.\, \mathrm{cs}^2\varphi$.

3) $S = \pi a^2 \,.\, \mathrm{ctg}^2\varphi \,.\, \mathrm{sc}\,\varphi$; $V = \frac{\pi}{6} a^3 \,.\, \mathrm{ctg}^3\varphi \,.\, \mathrm{sc}\,\varphi$.

Указаніе. Для 1) примѣняемъ §§ IX и X введенія; 2) и 3) получимъ съ помощью 1).

127. Означая черезъ φ уголъ между R и r (равный $\frac{180^\circ}{n}$, гдѣ n есть число сторонъ), найдемъ:

1) $S = 2\pi r^2 (2 + \mathrm{tg}^2\varphi)$; $V = \frac{2}{3}\pi r^3 (2 + \mathrm{tg}^2\varphi)$.

2) $S = 2\pi R^2 (1 + \mathrm{cs}^2\varphi)$; $V = \frac{2}{3}\pi R^3 \,\mathrm{cs}\,\varphi\, (1 + \mathrm{cs}^2\varphi)$.

3) $S = \pi a^2 (\mathrm{ctg}^2\varphi + 0{,}5)$; $V = \frac{\pi a^3}{6}\,\mathrm{ctg}\,\varphi\, (\mathrm{ctg}^2\varphi + 0{,}5)$.

См. указаніе къ № 126.

128. Означая черезъ φ уголъ между R и r (равный $\frac{180^\circ}{n}$, гдѣ n есть число сторонъ), найдемъ:

1) $S = 4\pi r^2 \,.\, \mathrm{cs}^4\frac{\varphi}{2} \cdot \mathrm{sc}^2\varphi$; $V = \frac{4}{3}\pi r^3 \,.\, \mathrm{cs}^4\frac{\varphi}{2} \cdot \mathrm{sc}^2\varphi$.

2) $S = 4\pi R^2 \,.\, \mathrm{cs}^4\frac{\varphi}{2}$; $V = \frac{4}{3}\pi R^3 \,.\, \mathrm{cs}^4\frac{\varphi}{2} \cdot \mathrm{cs}\,\varphi$.

3) $S = \frac{\pi a^2}{4} \cdot \mathrm{ctg}^2\frac{\varphi}{2}$; $V = \frac{\pi a^3}{24} \cdot \mathrm{ctg}\,\varphi \,.\, \mathrm{ctg}^2\frac{\varphi}{2}$.

См. указаніе къ № 126.

129. $x = 2R \,.\, \mathrm{csc}\,60^\circ \,.\, \sqrt{\mathrm{sn}\left(60^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \mathrm{sn}\left(60^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}$.

Указаніе Проведя изъ общей точки хордъ еще діаметръ и означая хорду черезъ x, выразимъ разстояніе отъ ея конца до діаметра. оно будетъ равно $x \,.\, \mathrm{sn}\frac{\alpha}{2} \cdot \mathrm{csc}\,60^\circ$. Проведя полуокружность больщюго круга, содержащую взятые діаметръ и хорду, и соединивъ конецъ хорды съ другимъ концомъ діаметра, составимъ уравненіе:

$$x \cdot \sqrt{4R^2 - x^2} = 2R \cdot x \operatorname{sn}\frac{\alpha}{2} \csc 60^\circ.$$

130. $x = \frac{2R \cdot \sqrt{l^2 - R^2}}{l} \cdot \operatorname{sn}\frac{180^\circ}{n}$; $\operatorname{sn}\frac{\alpha}{2} = \frac{R}{l} \cdot \operatorname{sn}\frac{180^\circ}{n}$; $(\alpha = 36^\circ)$.

131. $x = \frac{R}{\sqrt{-\operatorname{cs}\alpha}}$; при $\alpha = 120^\circ$ получается $x = R\sqrt{2}$.

Указаніе. 1) Уголъ между послѣдовательными радіусами, проведенными въ точки касанія, равенъ $180^\circ - \alpha$; 2) $R^2 = x \cdot y$, гдѣ y есть высота пирамиды, имѣющей вершины въ центрѣ шара и въ точкахъ касанія.

132. $x = S \cdot \operatorname{sn}^4\frac{\alpha}{4}$. **133.** $\operatorname{sn}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{2} - 1$*), $\alpha = 48^\circ 56' 22''$.

134. $P = \pi \cdot \frac{a^2}{4} \cdot \operatorname{sc}^2\frac{\alpha}{4}$. **135.** $\operatorname{cs}\frac{\alpha}{4} = \sqrt{\frac{n}{m}}$; $(\alpha = 240^\circ)$.

136. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4} = \frac{1}{2}$. $\alpha = 106^\circ 15' 36''$. *Замѣчаніе.* Въ такомъ секторѣ наибольшее поперечное сѣченіе дѣлитъ ось въ отношеніи 2 : 3.

137. $\operatorname{sn}\alpha = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$**), $\alpha = 38^\circ 10' 23''$.

138. Части поверхности шара суть: 1) $S \cdot \operatorname{sn}^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$ и 2) $S \cdot \operatorname{cs}^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$; площадь сѣченія равна $\frac{S}{4} \cdot \operatorname{cs}^2\alpha$.

139. $\operatorname{cs}\varphi = \sqrt{5} - 2$, $\varphi = 76^\circ 20' 43''$. **140.** $x = V \cdot \operatorname{sn}^2\frac{\alpha}{4}$.

141. Выражая по радіусу шара и искомому углу объемъ сферическаго сектора и объемъ конуса, получимъ уравненіе $\operatorname{sn}^2\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{cs}\frac{\alpha}{2} = 2\operatorname{sn}^2\frac{\alpha}{4}$, откуда $\operatorname{cs}\frac{\alpha}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{5}+1}$***) и слѣдов. $\alpha = 103^\circ 39' 20''$.

(См. слѣд. стр.)

*) Для вычисленія: $\operatorname{sn}\frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg} 22^\circ 30'$.

**) Для вычисленія: $\operatorname{sn}\alpha = 2\operatorname{sn} 18^\circ$.

***) Для вычисленія: $\operatorname{cs}\frac{\alpha}{4} = \sqrt{\operatorname{cs} 36^\circ}$.

Замѣчаніе. Изъ полученнаго слѣдуетъ, между прочимъ, что $\operatorname{cs}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$, а это показываетъ, что въ данномъ сферическомъ секторѣ наибольшее поперечное сѣченіе дѣлитъ ось въ среднемъ и крайнемъ отношеніи.

142. $R=\frac{l}{2}\cdot\sqrt{\operatorname{sn}\alpha\,.\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4}}.$ **143.** $8\operatorname{sn}^2\frac{\alpha}{4}=\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$; отсюда получимъ: $2\sqrt{2}\operatorname{sn}\frac{\alpha}{4}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$*); $\operatorname{cs}\frac{\alpha}{4}=\frac{1}{8}(\sqrt{2}+\sqrt{34})$; $\alpha=100^\circ\,21'\,20''$.

144. $V=\frac{4}{3}\pi R^3\,.\operatorname{sn}\frac{\alpha}{2}.$ **145.** $\alpha=90^\circ$.

146. $\operatorname{sn}\left(x+\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{m}{n}\cdot\operatorname{csc}\frac{\alpha}{2}$; $(x=15^\circ)$.

147. $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{2}{3}}$; $\alpha=101^\circ\,32'\,10''$.

148. $S=4\pi R^2\,.\sqrt{2}\,.\operatorname{sn}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{cs}^2\frac{\alpha}{4}.$

149. $S=2Q\cdot\frac{360^\circ}{\alpha}\left(2\operatorname{sn}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{cs}\frac{\alpha}{2}\right)$ или, полагая $2=\operatorname{ctg}\varphi$, $S=2Q\cdot\frac{360^\circ}{\alpha}\cdot\operatorname{sn}\left(\frac{\alpha}{2}+\varphi\right).\operatorname{csc}\varphi$. Въ примѣрѣ $S=4259{,}1$.

150. $V=\frac{4}{3}\pi R^3\,.\operatorname{sn}^4\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{sc}\alpha.$ **151.** $V=\frac{4}{3}\pi R^3\operatorname{cs}\alpha.$

152. $V=\frac{2}{3}\pi R^3\operatorname{cs}\alpha\,.\operatorname{ctg}^2\alpha.$

153. $V=\frac{4}{3}\pi R^3\operatorname{sn}\alpha\,.\operatorname{cs}\left(30^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{cs}\left(30^\circ-\frac{\alpha}{2}\right).$

154. $\operatorname{cs}\alpha=\sqrt{\frac{1}{2}}$, $\alpha=32^\circ\,45'\,53''$. *Указаніе.* Примѣнить § XIII введенія.

155. $S=4\pi R^2\operatorname{sn}\alpha\,.\operatorname{cs}^2\frac{\alpha}{4}$; $V=\frac{2}{3}\pi R^3\operatorname{sn}\alpha\,.\operatorname{sn}^2\frac{\alpha}{2}.$

156. $P=\pi a^2\,.\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4}$; $V=\frac{\pi a^3}{6}.$ **157.** $\operatorname{sn}\alpha=\frac{6}{m\pi}.$

---

*) $2\sqrt{2}\operatorname{sn}\frac{\alpha}{4}=-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ непригодно для задачи.

158. Сторона основанія равна $2R \,.\, \sqrt{3} \,.\, \mathrm{sn}\,\alpha$; боковое ребро равно $4R \,.\, \sqrt{\mathrm{sn}\,(30^\circ + \alpha)\,\mathrm{sn}\,(30^\circ - \alpha)}$. *Указаніе.* Перпендикуляръ изъ центра описаннаго шара на боковую грань призмы равенъ апоѳемѣ основанія.

159. $\mathrm{cs}\,\alpha = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$, $\alpha = 51^\circ\,49'\,38''$.

160. $R = a : \left(2\,\mathrm{sn}\,\frac{180^\circ}{n} \cdot \mathrm{sn}\,2\alpha\right)$. *Указаніе.* Пусть будетъ SA боковое ребро, O центръ основанія и SS_1 діаметръ шара; тогда будемъ имѣть $SA^2 = SS_1 \,.\, SO$ *).

161. *Выражая разстояніе, направленное вверхъ отъ основанія,* положительнымъ числомъ, а противоположное отрицательнымъ, получимъ *общую* формулу: $x = -r \,.\, \mathrm{ctg}\,2\alpha$. Въ примѣрахъ $x = r$; 0; $-r$.

162. 10,8325 дюймовъ.

163. $r = b \,.\, \sqrt{\mathrm{cs}\,\alpha} \,.\, \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$. Въ правильномъ октаэдрѣ $r = \frac{b}{6}\sqrt{6}$.

164. $r = \frac{a}{2} \cdot \mathrm{sn}\,\alpha \,.\, \mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}$.

165. $r = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{\frac{\mathrm{sn}\,(\varphi - \frac{1}{2}\alpha)}{\mathrm{sn}\,(\varphi + \frac{1}{2}\alpha)}} \cdot \mathrm{ctg}\,\varphi$, гдѣ $\varphi = \frac{180^\circ}{n}$.

Указаніе. Пусть будутъ: SA апоѳема пирамиды, AC апоѳема основанія и O центръ вписаннаго шара. Сначала опредѣляемъ SA, AC и SC; далѣе пользуемся тѣмъ, что въ треугольникѣ SAC линія AO, какъ дѣлящая уголъ A пополамъ, дѣлитъ сторону SC въ отношеніи $SA : AC$ **).

166. 1) $\mathrm{cs}\,\alpha = \frac{m - n}{m + n}$; 2) $\mathrm{tg}\,\beta = \frac{\sqrt{2mn}}{m - n}$.

167. $V = \frac{2}{3} R^3 \,.\, \mathrm{sn}^3\,2\varphi \,.\, \mathrm{tg}\,\varphi \,.\, \mathrm{sn}\,\alpha$,

168. $R = \frac{b}{2} \cdot \sqrt{1 + \mathrm{ctg}^2\beta \,.\, \mathrm{sc}^2\frac{\alpha}{2}}$.

169. $r = b \,.\, \mathrm{cs}\frac{\alpha}{2} \cdot \mathrm{tg}\frac{\alpha}{4}$.

---

*) Этотъ способъ прилагается одинаково, будетъ ли центръ шара внутри пирамиды или внѣ ея.

**) $SA : AC = \mathrm{ctg}\,\frac{\alpha}{2} : \mathrm{ctg}\,\varphi$; такимъ образомъ для опредѣленія OC надо SC раздѣлить на $\mathrm{ctg}\,\frac{\alpha}{2} + \mathrm{ctg}\,\varphi$ и результатъ умножить на $\mathrm{ctg}\,\varphi$.

170. *Указаніе.* Означая черезъ α, R, r, a, b и h соотвѣтственно *половину* искомаго угла, радіусы шаровъ, *половину* стороны основанія, боковое ребро пирамиды и ея высоту, найдемъ:

$$R=\frac{5}{2}r;\quad r=a\,.\,\mathrm{tg}\,\alpha;\quad 2R\,.\,h=b^2;\quad h=a\,.\,\mathrm{tg}\,2\alpha;\quad b^2=h^2+2a^2.$$

Исключивъ линейные элементы, получимъ уравненіе, которое можно привести къ слѣдующему:

$$6\,\mathrm{tg}^4\,\alpha-5\,\mathrm{tg}^2\,\alpha+1=0;$$

отсюда: $\mathrm{tg}^2\,\alpha_1=\frac{1}{2}$, $\alpha_1=35^\circ 15'53''$; $\mathrm{tg}^2\,\alpha_2=\frac{1}{3}$, $\alpha_2=30^\circ$.

Искомый уголъ содержитъ $70^\circ 31'46''$ или 60°.

171. *Указаніе.* Пусть будетъ φ уголъ между боковымъ ребромъ и плоскостью основанія; тогда

$a=R\sqrt{3}\,.\,\mathrm{sn}\,2\varphi$	отсюда, по исключеніи φ, получимъ:
$b=2R\,.\,\mathrm{sn}\,\varphi$	$a=4R\sqrt{3}\,\frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{4+\mathrm{tg}^2\,\alpha}$; $b=2R\cdot\frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\sqrt{4+\mathrm{tg}^2\,\alpha}}$.
$2\,\mathrm{tg}\,\varphi=\mathrm{tg}\,\alpha$	

172. $x=2a\,.\,\mathrm{cs}\,\frac{180^\circ}{n}\cdot\mathrm{sn}^2\frac{\alpha}{2}$. **173.** $x=\frac{Q}{4}\cdot\mathrm{sc}^4\frac{\alpha}{2}$.

174. Искомая часть боковой поверхности куба равна $\frac{a^2}{4}\left[\pi\cdot\frac{\alpha}{36^\circ}:5\right]$, гдѣ α есть острый уголъ, опредѣляемый условіемъ $\mathrm{tg}\,\alpha=2$.

175. $P=\left(b\,.\,\mathrm{cs}\,\alpha\,.\,\mathrm{sc}\frac{\alpha}{2}\right)^2\cdot\left[\mathrm{sn}\,\alpha+\pi\cdot\frac{\alpha}{180^\circ}\right]$.

176. $P=\dfrac{24\pi a^2\,\mathrm{sn}^4\frac{\alpha}{2}}{4-\mathrm{cs}^2\,\alpha}$. **177.** $x=2C\,.\,\mathrm{sn}^2\frac{\alpha}{2}$.

178. $\mathrm{sn}\,\alpha=\frac{n-m}{n+m}$; $(\alpha=30^\circ)$. **179.** Принимая за основную линію (для выраженія другихъ) радіусъ основанія, получимъ $8\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}=1+\frac{1}{\mathrm{cs}\,\alpha}$; отсюда: $\mathrm{cs}\,\alpha=\frac{1}{3}$, $\alpha=70^\circ 31\ 43''$.

180. $\mathrm{tg}\,\alpha=4m\,.\,\mathrm{tg}^3\frac{\alpha}{2}$; откуда $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{2m}}}$ (показать, что дѣйствительные корни уравненія оба пригодны).

При $m=2\frac{1}{4}$ получается: $\alpha_1=78^\circ 27'50''$ и $\alpha_2=60^\circ$.

181. $\operatorname{sn}\alpha=\sqrt{\frac{1}{2}}$, $\alpha=52°32'$. 182. $x=\frac{4}{3}\pi R^3\cdot\frac{\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^6\frac{\alpha}{2}}$

или $x=\frac{2}{3}\pi R^3.\operatorname{tg}2\varphi$, полагая $\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}=\operatorname{tg}\varphi$. *Указаніе*. Пусть будутъ O и O_1 центры двухъ послѣдовательныхъ шаровъ, а r и r_1 — ихъ радіусы. Чтобы найти $\frac{r_1}{r}$, соединяемъ O и O_1, проводимъ r и r_1 въ точки касанія одной образующей и изъ O_1 проводимъ до r параллель къ этой образующей; тогда найдемъ $\frac{r-r_1}{r+r_1}=\operatorname{cs}\alpha$. (Иной способъ см. въ указаніи къ № 270.)

183. $\operatorname{sn}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\alpha=70°31'46''$.

184. $\operatorname{sn}\alpha=\sqrt{\frac{n}{m}}$; при $m:n=2:1$ уголъ $\alpha=45°$.

185. *Указаніе*. Означая черезъ z, y и x соотвѣтственно радіусъ описаннаго шара, *половину* образующей и разстояніе отъ центра шара до образующей, найдемъ (проведя вспомогательныя линіи):

$$x=\frac{R+r}{2}:\operatorname{sn}\alpha;\quad y=\frac{R-r}{2\operatorname{cs}\alpha};\quad z^2=x^2+y^2;$$

отсюда $$z=\sqrt{R^2+r^2+2Rr.\operatorname{cs}2\alpha}:\operatorname{sn}2\alpha.$$

186. 1) $n\geqq 3$; $\operatorname{csc}\frac{180°}{n}-1\leqq p$; 2) $\frac{2}{\sqrt{3}}-1=0{,}15470\ldots$;

3) $3\leqq n\leqq\frac{180°}{\alpha}$, гдѣ α есть острый уголъ, имѣющій синусомъ $\frac{1}{p+1}$. При $p=1$ получимъ $n=3$; 4; 5; 6. При $p=2$ получимъ $n=3$; 4; 5; 6; 7; 8; 9.

187. $S=P.\operatorname{sc}^4\left(45°-\frac{\alpha}{4}\right)$. 188. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}=\sqrt{2m-3}$. Въ примѣрѣ $\alpha=180°$; $240°$. 189. Выражая объемы конуса и сферическаго сегмента по радіусу основанія и углу α, получимъ $\operatorname{tg}\alpha=3\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}$; отсюда: $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\sqrt{2}-1}$, $\alpha=65°31'48''$.

190. Выражая боковыя поверхности по радіусу основанія и искомому углу, получимъ $\frac{1}{\operatorname{cs}\alpha}:\left(\frac{2}{\operatorname{sn}\alpha}\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)=m$ или $\operatorname{tg}\alpha:2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=m$; отсюда $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{m-1}{m}}$. Въ примѣрѣ $\alpha=60°$.

191. 3,21521 дюйм. и 7,78479 дюйм.

192. 6,06586 дюйм.; $58°45'35''$.

193. $\operatorname{sn}2\alpha=\frac{2}{\pi}$; $\alpha=19°46'12''$ или $70°13'48''$.

194. $x=a\,.\,\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. **195.** $l=a\cdot\frac{\operatorname{sn}45°}{\operatorname{sn}(\alpha-45°)}=81{,}1317$.

196. $x=2a\,.\operatorname{cs}\frac{\alpha}{2}$; $S=2a^2\,.\operatorname{sn}\alpha\,.\operatorname{cs}^2\frac{\alpha}{2}$.

197. $S=a^2\,.\operatorname{sn}\alpha\,.\operatorname{cs}^3\alpha$; $CD=a\,.\operatorname{cs}2\alpha$.

198. $x=2r\,.\operatorname{tg}\left(45°-\frac{\alpha}{4}\right)=10$. **199.** $x=4a\,.\operatorname{cs}\alpha\,.\operatorname{cs}\frac{\alpha}{2}$. Въ примѣрѣ $x=a$.

200. $a_1:a=\operatorname{sn}18°:\operatorname{cs}36°=(\sqrt{5}-1):(\sqrt{5}+1)$.

201. $a_{2n}=\frac{1}{2}a_n\,.\operatorname{sc}\frac{90°}{n}$; $b_{2n}=\frac{1}{2}b_n\cdot\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{90°}{n}\right)$.

202. $R=d\,.\operatorname{cs}^2\left(45°-\frac{\alpha}{4}\right)$; $r=d\,.\operatorname{sn}^2\left(45°-\frac{\alpha}{4}\right)$.

203. $x=4r\,.\operatorname{cs}^2\frac{\alpha}{2}$; $y=4r\,.\operatorname{cs}^2\left(45°-\frac{\alpha}{2}\right)$.

204. 1) Если на гипотенузѣ находится *сторона* квадрата, то $x=c\cdot\frac{\operatorname{sn}2\alpha}{2+\operatorname{sn}2\alpha}=4{,}0783$; 2) если на гипотенузѣ находится *вершина* квадрата, то $x=\frac{c}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{\operatorname{sn}2\alpha}{\operatorname{sn}(45°+\alpha)}=4{,}2379$.

205. $R=\sqrt{-\frac{P}{2\operatorname{sn}\alpha}}=5{,}14967$.

206. Вторая діагональ $=a\sqrt{1+4\operatorname{ctg}^2\alpha}=0{,}42839$; периметръ $=2a\,.\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=0{,}98435$

207. $S=\frac{4ab}{\operatorname{sn}\alpha}$; $l_1=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}\cdot\frac{2}{\operatorname{sn}\alpha}$;

$l_2=\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}\cdot\frac{2}{\operatorname{sn}\alpha}$. 208. $S=\frac{a^2}{2}\cdot\operatorname{sn}^3\alpha$.

209. $S=\frac{R^2}{2}\operatorname{sn}\alpha$. (Такимъ образомъ трапеція $CABD$ равновелика треугольнику AOB. Какъ доказать это геометрически?)

210. Углы при большемъ основаніи: 48°21′ и 94°56′24″; діагонали: 34,6777 вершк. и 22,4165 вершк.; площадь 358,667 кв. вершк.

211. $BD=a\,.\operatorname{sn}(\alpha+\beta)=9{,}398$;

$$S=\frac{a^2}{2}\cdot\operatorname{sn}(\alpha+\beta)\,.\operatorname{cs}(\alpha-\beta)=62{,}3114.$$

212. $S=\frac{a^2}{\sqrt{2}}\cdot\operatorname{sn}\frac{\alpha}{2}\cdot\csc\left(45°+\frac{\alpha}{2}\right)$.

213. $\frac{Q\,.\operatorname{sn}^2\alpha}{\operatorname{cs}2\alpha}$, $\frac{Q\,.\operatorname{cs}^2\alpha}{\operatorname{cs}2\alpha}$ и $\frac{Q}{\operatorname{cs}2\alpha}$.

214. $C=\frac{\pi}{2n}a\,.\operatorname{ctg}\frac{180°}{n}\cdot\csc^2\frac{90°}{n}=141{,}16$.

215. $x=\frac{\pi}{n}\cdot Q\cdot\operatorname{ctg}\frac{180°}{n}\cdot\csc^2\frac{180°}{n}=365{,}767$.

216. $x=d\,.\operatorname{sn}\alpha$. 217. $x=l\cdot\frac{360°}{\alpha}\cdot\operatorname{sn}^2\frac{\alpha}{4}$. Въ примѣрахъ $x=\frac{3}{5}l$; l; $\frac{9}{8}l$. 218. 497,978 сантим. 219. 113,558 дюйм.

220. $S=\pi R^2\cdot\frac{\alpha}{180°}+R^2\operatorname{sn}\alpha=44{,}1576$. 221. $S=R^2\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+$ $+\pi R^2\cdot\frac{360°-\alpha}{360°}=937{,}764$. 222. $S=\pi R^2\cdot\frac{\varphi}{90°}-R^2\cdot\operatorname{sn}2\varphi$, гдѣ φ есть острый уголъ, котораго косинусъ равенъ $a:2R$. Въ примѣрѣ $S=95{,}5525$. 223. 15,779 кв. дюйм. или 311,820 кв. дюйм. 224. Означая черезъ x искомое число кв. дюйм. и черезъ α дугу между точками касанія на большемъ кругѣ, найдемъ (окончательно): $x=6-\pi\cdot\frac{90°+\alpha}{72°}=0{,}46425$.

225. $x=2m\,.\operatorname{cs}\alpha\,.\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$; $R=\frac{m}{4}\csc^2\frac{\alpha}{2}$.

226. $x = a \,.\, \mathrm{cs}\, \alpha \,.\, \mathrm{sc}^2 \frac{\alpha}{2}$.

227. $x = \frac{r}{2} \cdot \mathrm{sn} \frac{180°}{n} \cdot \mathrm{csc}^2 \left(45° - \frac{90°}{n}\right)$. При $n = 6$ имѣемъ $x = r$.

228. $\alpha = 30°$. **229.** Означая через x величину одной изъ меньшихъ частей, найдемъ: $\mathrm{sn}\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} = \mathrm{sn}\, 60° - \mathrm{sn}\, 30° = \ldots$; $x = 42° 56' 34''$.

230. $\mathrm{sn}\,\alpha = \sqrt{\frac{m}{2}}$. Въ примѣрѣ $\alpha = 30°$.

231. $\mathrm{sn}\left(45° + \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{m}$. Для возможности задачи требуется соотношеніе: $\sqrt{2} < m < 2$.

232. $\mathrm{sn}\,\alpha = \frac{1}{m}$. Для m найдемъ: $1 < m < \sqrt{2}$.

233. $x = \frac{c}{2} \cdot \frac{\mathrm{sn}\, 2\alpha}{\mathrm{sn}\,(45° + \alpha)}$. **234** $\alpha = 58° 10' 6''$; $S = 0{,}00061607$. **235.** $\alpha = 20° 42' 18''$. *Указаніе.* Изъ пропорціи $\mathrm{sn}\, 3\alpha : \mathrm{sn}\,\alpha = 5 : 2$, составивъ производную, найдемъ: $\mathrm{cs}\, 2\alpha =$ и т. д. **236.** $\mathrm{cs}^2 \alpha : 1$. $(1 : 2;\ 3 : 4)$.

237. $1 : \mathrm{ctg}^2 \alpha$. **238.** $S = r^2 \,.\, \mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2} \cdot \mathrm{ctg}\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)$.

Указать *геометрическій* смыслъ этого результата, представивъ его въ видѣ $S = \left[r \,.\, \mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}\right] \cdot \left[r \,.\, \mathrm{ctg}\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)\right]$.

239. $S = \frac{a^2}{2} \cdot \mathrm{cs}\,\alpha \,.\, \mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}$. **240.** Ср. : кр. $= \mathrm{cs}\frac{\alpha}{2} : \mathrm{cs}\frac{\alpha}{6}$.

241. $x = \frac{2bc}{b + c} \cdot \mathrm{cs}\frac{A}{2}$. *Указаніе.* Воспользоваться выраженіями площади тр-ковъ или сдѣлать вспомогательное построеніе (такое же, какъ въ геометрической теоремѣ о равнодѣлящей угла въ тр-кѣ).

242. $C = 38° 40' 56''$; $B = 25° 39' 32''$; $R = \sqrt{24 : \mathrm{sn}\, 2B} = 5{,}54475$.

243. $\angle BAC = 49° 34' 58''$; $\angle ABC = 98° 12' 48''$; $AB = 14{,}5663$ фут.; $BC = 20{,}8090$ фут.; $AC = 27{,}0513$ фут.

Указаніе. Имѣемъ $AB : BC : AC = 7 : 10 : 13$. Для повѣрки *всего* вычисленія можетъ служить формула $S = p^2 \,.\, \mathrm{tg}\frac{A}{2}\, \mathrm{tg}\frac{B}{2}\, \mathrm{tg}\frac{C}{2}$.

244. Означая сторону парал-ма смежную съ данной черезъ x, а вторую діагональ черезъ y, получимъ:

1) $x_1 = 52,8711$ и $y_1 = 61,5252$;
2) $x_2 = 30,9350$ и $y_2 = 14,6280$.

Указаніе. Сначала вычисляемъ y. Для опредѣленія x примѣняемъ геометрическую зависимость между сторонами и діагоналями парал-ма: тогда $x = \frac{\sqrt{850}}{\operatorname{cs}\varphi}$, при чемъ $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{\sqrt{1700}}$ *).

245. $S = a^2 . \operatorname{csc} 2\alpha = 451,867$; $b = a\sqrt{1 + 4\operatorname{ctg}^2 2\alpha} = 29,014$.

246. Длина боковыхъ сторонъ $\frac{a}{4} \cdot \operatorname{sc}^2 \frac{\alpha}{4}$; длина верхняго основанія $\frac{a}{2} \cdot \operatorname{sc}^2 \frac{\alpha}{4}$.

247. $R = \frac{l}{2} \operatorname{sn}\alpha . \operatorname{sc}^2\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right) = 161,478$.

248. Длина касательной равна $a . \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{4} = 49,0611$; длина дуги равна $\pi . a . \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{4} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\alpha}{180°} = 51,2$.

249. $x^2 = \frac{4R^2}{1 + \left(2 + \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}\right)^2}$. Для вычисленія полагаемъ $2 + \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \operatorname{ctg}\varphi$; тогда $x = 2R . \operatorname{sn}\varphi = 11,2251$. *Указаніе.* Къ той сторонѣ квадрата, которая служитъ хордой, проводимъ изъ центра радіусъ и перпендикуляръ.

250. $S = \pi a^2 . \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{4}$. 251. 21,7495 кв. вершк.

252. Пусть будетъ α острый уголъ при данномъ катетѣ. Тогда: $\operatorname{sn}\alpha = \frac{2}{3}$ и $S = \pi . 25 \cdot \frac{\alpha}{180°} + \frac{25}{2} \cdot \operatorname{sn} 2\alpha = 30,6659$ (квадр. дюйм.).

253. 115,1523 кв. дюйм.

254. $S = \pi R^2 \cdot \frac{\alpha}{180°} - R^2 \operatorname{sn}\alpha \operatorname{cs}(\alpha + \beta) = 25,1889$.

*) При данныхъ *несложныхъ* числахъ этотъ способъ короче, чѣмъ двукратное рѣшеніе тр-ка по двумъ сторонамъ и углу между ними.

255. $S = \pi R^2 \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} + R^2 . \operatorname{sn}\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{cs}\frac{3\alpha}{2} = 68{,}3664.$

256. $\operatorname{sn}\alpha = \frac{4}{m\pi}.$ Въ примѣрѣ $\alpha = 30^\circ 32' 24''$.

257. Означая черезъ α острый уголъ ромба, найдемъ $\operatorname{cs}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{m}+\sqrt{n}}{2\sqrt{m}}.$ Для вычисленія раздѣлимъ числителя и знаменателя на $\sqrt{m}$ и положимъ $\sqrt{\frac{n}{m}} = \operatorname{cs}\varphi$; тогда будемъ имѣть $\operatorname{cs}\frac{\alpha}{2} = \operatorname{cs}^2\frac{\varphi}{2}.$ Въ примѣрѣ $\alpha = 45^\circ 10' 24''$.

258. $\operatorname{sn}2\alpha . \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = m$, откуда $\operatorname{sn}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4}(1 \pm \sqrt{1-2m})$ или, полагая $2m = \operatorname{sn}^2\varphi$, $\operatorname{sn}\frac{\alpha_1}{2} = \operatorname{sn}45^\circ . \operatorname{cs}\frac{\varphi}{2}$ и $\operatorname{sn}\frac{\alpha_2}{2} = \operatorname{sn}45^\circ . \operatorname{sn}\frac{\varphi}{2}.$ Въ примѣрахъ: 1) $\alpha = 60^\circ$; 2) $\alpha_1 = 81^\circ 34' 52''$ и $\alpha_2 = 31^\circ 24'$.

Упражненіе. Показать, что при всякомъ m углы α_1 и α_2 связаны равенствомъ $\operatorname{cs}\alpha_1 + \operatorname{cs}\alpha_2 = 1$.

259. $33^\circ 44' 57''$. **260.** Означая дуги BD и AC черезъ x и y, получимъ (окончательно): $\operatorname{ctg}\frac{y}{2} = \sqrt{6} + \sqrt{3} = \sqrt{3}(\sqrt{2}+1)$ $= \operatorname{ctg}30^\circ . \operatorname{ctg}22^\circ 30'$; $y = 26^\circ 53' 56''$; $x = 33^\circ 6' 4''$.

Указаніе. Имѣемъ $\operatorname{sn}\frac{x}{2} : \operatorname{sn}\frac{y}{2} = \sqrt{3} : \sqrt{2}$.

261. Означая величину дугъ DE и BC черезъ x и y, будемъ имѣть $\frac{x-y}{2} = 90^\circ$ и $\operatorname{sn}\frac{y}{2} : \operatorname{sn}\frac{x}{2} = \sqrt{m} : \sqrt{n}$ (изъ отошенія площадей тр-ковъ, которые подобны); отсюда $\operatorname{tg}\frac{y}{2} = \sqrt{\frac{m}{n}}.$ Въ примѣрѣ: $y = 60^\circ$; $x = 240^\circ$.

262. $\operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{A}{2}\right) = \sqrt{\frac{m}{n}}.$ Въ примѣрѣ $A = 30^\circ$.

263. $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{m}{n}}.$ Въ примѣрахъ $\alpha = 90^\circ$; 120°; 60°; $106^\circ 15' 36''$. **264.** Треугольникъ равнобедренный съ угломъ при вершинѣ $48^\circ 11' 21''$.

265. $x = b\,.\,\mathrm{ctg}\,\alpha = 0,171316$; $y = -b\,.\,\mathrm{cs}\,2\alpha\,.\,\mathrm{ctg}\,\alpha = 0,095528$.

266. $x = a\,(\sqrt{2}-1)\,.\,\mathrm{sn}\frac{\beta}{2}\cdot\mathrm{sn}\frac{\gamma}{2}\cdot\mathrm{csc}\frac{\beta+\gamma}{2} = 0,93233$.

267. $x = \frac{a}{3}\cdot\sqrt{13+12\,\mathrm{cs}\,\alpha} = 67,1257$.

268. $\angle BAD = 37^\circ\,13'$; $\angle ADC = 123^\circ\,41'\,24''$; $AB = 7,631$ дюйм.; $CD = 5,547$ дюйм. *Указаніе.* Сначала изъ вершины C проводимъ $CE \parallel BD$ и опредѣляемъ углы тр-ка ACE. — Для повѣрки окончательныхъ результатовъ можетъ служить равенство: $AB\,.\,\mathrm{sn}\,BAD = CD\,.\,\mathrm{sn}\,ADC$.

269. $x = S\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\mathrm{cs}\,\frac{\alpha}{2}$. *Указаніе.* Задачу можно свести на сравненіе площади круга съ площадью описанной около него равнобедренной трапеціи.

270. $x = \frac{\pi a^2}{16}\cdot\mathrm{sn}\,\beta\,.\,\mathrm{tg}\,\beta$. *Указаніе.* Пусть будутъ O и O_1 центры двухъ послѣдовательныхъ круговъ и пусть ихъ общая касательная пересѣкаетъ боковую сторону тр-ка въ точкѣ M. Тогда изъ треугольника O_1MO найдемъ $\frac{r_1}{r} = \frac{O_1M^2}{OM^2}$ *) $= \mathrm{tg}^2\frac{\beta}{2}$. (Иной способъ см. въ указаніи къ № 182.)

271. $x = -\frac{b}{2}\cdot\dfrac{\mathrm{cs}\,\dfrac{3\alpha}{2}}{\mathrm{sn}\,\alpha\,.\,\mathrm{cs}\,\dfrac{\alpha}{2}}$. Разсмотрѣть случаи: $\alpha > 60^\circ$; $\alpha = 60^\circ$; $\alpha < 60^\circ$.

272. Стороны трапеціи суть: $2r$; $r\,.\,\dfrac{\mathrm{sn}\left(45^\circ+\dfrac{\alpha}{2}\right)\cdot\sqrt{2}}{\mathrm{cs}\,\dfrac{\alpha}{2}}$; $\dfrac{2r}{\mathrm{sn}\,\alpha}$; $r\cdot\dfrac{\mathrm{sn}\left(45^\circ+\dfrac{\alpha}{2}\right)\cdot\sqrt{2}}{\mathrm{sn}\,\dfrac{\alpha}{2}}$. Площадь равна $4r^2\,.\,\dfrac{\mathrm{sn}^2\left(45^\circ+\dfrac{\alpha}{2}\right)}{\mathrm{sn}\,\alpha}$.

---

*) Проекціи катетовъ на гипотенузу относятся какъ квадраты этихъ катетовъ.

273. Пусть будетъ φ дуга между концомъ діаметра и нижнимъ основаніемъ трапеціи. Тогда $S = 4R^2 \operatorname{cs}^2\left(\varphi + \frac{\alpha}{2}\right) \operatorname{sn}\frac{\alpha}{2} \operatorname{cs}\frac{\alpha}{2}$; но изъ условія (2) слѣдуетъ, что $R \,.\, \operatorname{sn}\varphi = R - R\operatorname{sn}(\varphi + \alpha)$, откуда $\operatorname{sn}\left(\varphi + \frac{\alpha}{2}\right) = 1 : 2\operatorname{cs}\frac{\alpha}{2}$. Съ помощью этого равенства и нѣкоторыхъ послѣдующихъ преобразованій получимъ для S, окончательно,

$$S = 4R^2 \operatorname{sn}\left(60^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \operatorname{sn}\left(60^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

274. $R = d \,.\, \operatorname{sn}\frac{\alpha+\beta}{2} \operatorname{cs}\frac{\alpha-\beta}{2}$; $r = d \,.\, \operatorname{sn}\frac{\alpha-\beta}{2} \operatorname{cs}\frac{\alpha+\beta}{2}$.

275. $S = a^2 \operatorname{cs}\alpha$. *Указаніе.* Полусумма основаній трапеціи равна $R\operatorname{cs}\alpha + r\operatorname{cs}\alpha$, но $(R + r)\operatorname{cs}\alpha$ равно a. (Какъ *проходитъ* средняя линія данной трапеціи?)

276. 3,99155 дюйм. **277.** $AB = 2R\operatorname{cs}\frac{\alpha}{2}\operatorname{sn}\frac{\beta}{2}\operatorname{csc}\frac{\alpha-\beta}{2} =$ $= 2{,}69213$. **278.** $r = \frac{a}{4} \cdot \operatorname{sn}\beta \,.\, \operatorname{csc}\frac{\alpha}{4} \cdot \operatorname{sc}\frac{\alpha - 2\beta}{4}$.

Указаніе. Провести радіусъ въ точку пересѣченія дуги съ боковой стороной и въ новомъ треугольникѣ взять отношеніе суммы двухъ сторонъ къ одной изъ нихъ.

279. $x = \frac{c}{2} \cdot \operatorname{cs}\frac{\alpha-\beta}{2} \cdot \operatorname{sc}\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{sc}\frac{\beta}{2}$. *Указаніе.* Изъ конца линіи MN проводимъ параллель къ боковой сторонѣ; тогда изъ полученнаго треугольника найдемъ $\frac{x}{c - x} = \frac{\operatorname{sn}\alpha + \operatorname{sn}\beta}{\operatorname{sn}(\alpha + \beta)}$.

280. Означая черезъ α острый уголъ и черезъ b и c стороны, найдемъ: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4P}{Q}$; $b = \sqrt{\frac{P}{\operatorname{sn}\alpha} \cdot \frac{m}{n}}$; $c = \sqrt{\frac{P}{\operatorname{sn}\alpha} \cdot \frac{n}{m}}$. Въ примѣрѣ: $\alpha = 41^\circ 59' 14''$; $c = 10{,}5883$; $b = c \,.\, 0{,}6 = 6{,}35298$.

281. $r = 2R \,.\, \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{\alpha}{4}\right)$. **282.** $r = \frac{a}{4} \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{4} \cdot \operatorname{sc}^2\frac{\alpha}{4}$.

283. $x = \frac{2}{5} a \,.\, \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{5}{4}\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} - 1\right)$. Въ примѣрахъ: 1) $x = \frac{1}{5} a$; 2) $x = a \,.\, 0{,}3395$. *Указаніе.* Продолживъ сторону квадрата до пересѣченія съ дополнительной (до 360°) дугой и означая черезъ y разстояніе хорды отъ центра, будемъ имѣть.

$$\left(\frac{a}{2}+\frac{x}{2}\right)\left(\frac{a}{2}-\frac{x}{2}\right)=x(2y+x).$$

284. $r=\frac{c}{2\,\mathrm{sn}\,\alpha}(\sqrt{1+\mathrm{sn}^2 2\alpha}-1)$. Для вычисленія полагаемъ $\mathrm{sn}\,2\alpha=\mathrm{tg}\,\varphi$; тогда $r=c\,.\,\mathrm{sn}^2\frac{\varphi}{2}\cdot\mathrm{sc}\,\varphi\,.\,\mathrm{csc}\,\alpha=2{,}00809$.

285. $x=\frac{a}{2}\cdot\mathrm{csc}\frac{180^\circ}{n}\cdot\frac{\sqrt{n-2}}{\sqrt{n-2}+\sqrt{2}}$. При $n=10$ получимъ $x=\frac{4a}{3(\sqrt{5}-1)}$ или $x=\frac{2}{3}R$, означая черезъ R радіусъ многоугольника

Замѣчаніе. Можно доказать, что x всегда менѣе апоѳемы многоугольника.

286. $9^\circ 44' 13''$. **287.** Острый уголъ $=61^\circ 55' 40''$.

288. $41^\circ 57' 51''$ и $27^\circ 19' 45''$. *Указаніе.* Искомые углы опредѣлятся изъ треугольника, который содержитъ уголъ $\alpha+\beta$ между сторонами, относящимися какъ $\mathrm{sn}\,\alpha : \mathrm{sn}\,\beta$.

289. $\mathrm{cs}\,\alpha=\frac{3}{4}$; $\alpha=41^\circ 24' 35''$.

290. $53^\circ 7' 48''$; $115^\circ 59' 22''$; $126^\circ 52' 12''$; $64^\circ 0' 22''$.

291. $30^\circ 27'$. **292.** $79^\circ 19' 44''$ или $4^\circ 3' 56''$.

293. *Указаніе.* Имѣемъ: $R=\frac{a}{2\,\mathrm{sn}\,A}$ и $S=\frac{1}{2}bc\,.\,\mathrm{sn}\,A$.

294. Если a_1 соединяетъ точки касанія сторонъ угла A, то

$$a_1=2(p-a)\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}.$$

Указаніе. 1) $a_1=2(p-a)\,.\,\mathrm{sn}\frac{A}{2}$*) или 2) $a_1=2r\,.\,\mathrm{cs}\frac{A}{2}$.

295. *Указаніе.* Пусть будетъ O центръ вписаннаго круга, а D, E и F — точки его касанія къ сторонамъ AB, BC и AC. Радіусъ его обозначимъ черезъ r.

Выразимъ сначала S_1 и S черезъ r и углы A, B и C.

I. $S_1=\frac{r^2}{2}\cdot\mathrm{sn}\,DOF+\frac{r^2}{2}\cdot\mathrm{sn}\,DOE+\frac{r^2}{2}\cdot\mathrm{sn}\,EOF$; такъ какъ

*) $p-a$ есть длина отрѣзка отъ вершины A до точки касанія.

взятые углы суть дополненія до 180° къ угламъ A, B и C, то

$$S_1 = \frac{r^2}{2}(\operatorname{sn} A + \operatorname{sn} B + \operatorname{sn} C)$$

или*)

$$S_1 = 2r^2 \,.\, \operatorname{cs}\frac{A}{2}\operatorname{cs}\frac{B}{2}\operatorname{cs}\frac{C}{2}. \qquad (1)$$

II. $S = r \,.\, p = r(AD + BE + CF) =$

$$= r^2\left(\operatorname{ctg}\frac{A}{2} + \operatorname{ctg}\frac{B}{2} + \operatorname{ctg}\frac{C}{2}\right)$$

или**)

$$S = r^2 \,.\, \operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}. \qquad (2)$$

Раздѣливъ теперь (1) на (2), получимъ

$$\frac{S_1}{S} = 2\operatorname{sn}\frac{A}{2}\operatorname{sn}\frac{B}{2}\operatorname{sn}\frac{C}{2}.$$

Переходя съ угловъ на стороны, найдемъ

$$\frac{S_1}{S} = 2 \cdot \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}.$$

Замѣчаніе. Изъ послѣдняго равенства слѣдуетъ, между прочимъ, что $\frac{S_1}{S} = \frac{1}{2} \cdot \frac{r}{R}$.

---

*) Если $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, то $\operatorname{sn}\alpha + \operatorname{sn}\beta + \operatorname{sn}\gamma = 4\operatorname{cs}\frac{\alpha}{2}\operatorname{cs}\frac{\beta}{2}\operatorname{cs}\frac{\gamma}{2}$.

**) Если $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, то $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$.