№ 27.

Доброгаевъ, Н. И.

ПОДРОБНЫЯ РѢШЕНІЯ

и объясненія 2—10-ю способами всѣхъ безъ исключенія

АЛГЕБРАИЧЕСКИХЪ ЗАДАЧЪ

первыхъ и вторыхъ номеровъ

Н. А. ШАПОШНИКОВА и Н. К. ВАЛЬЦОВА

(для самообразованія)

Цѣна 1 руб.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ
ВЫПУСКЪ ВТОРОЙ

ОТДѢЛЕНІЯ IV и V

Разложеніе выраженій на простыхъ множителей. Преобразованіе дробныхъ выраженій

(всего 1540 примѣровъ и задачъ).

Собственность книгоиздательства С. А. КОЗЛОВСКАГО

Адресъ издателя Бѣлая-Церковь, Кіевской губерніи

(У него тамъ же и главный складъ всѣхъ его изданій)

О всѣхъ изданіяхъ С. А. Козловскаго см. II—VIII стран. въ началѣ этой книги

ОДЕССА

Типографія С. И. Мерка, бывш. А. Шульце, Ланжероновская ул., № 30.

1909

(Напечатано 30 ноября 1908 г.)

Условія высылки книгъ

книгоиздательствомъ

Степана Александровича

Козловскаго

(Бѣлая-Церковь, Кіевской губ.)

I. Во избѣжаніе недоразумѣній **требованія** необходимо **писать точно, ясно и опредѣленно, непремѣнно указывая №№ книгъ по этому списку**. Высылаемъ только книги упоминаемыя въ немъ, да сборники задачъ къ нашимъ рѣшеніямъ, при покупкѣ послѣднихъ (съ цѣны сборниковъ никому скидки не дѣлаемъ). Порученій по покупкѣ чужихъ изданій не исполняемъ.

II. **Наложеннымъ платежомъ безъ задатка не высылаемъ** никому, кромѣ книготорговцевъ и постоянныхъ нашихъ покупателей, лично извѣстныхъ издателю своей аккуратностью.

III. При требованіи книгъ всего лучше высылать всѣ деньги впередъ (можно и почтовыми марками не дороже 35 коп., гербовыхъ марокъ не принимаемъ). (Для заказчика выгоднѣе высылать сразу всѣ деньги впередъ иначе за пересылку денегъ приходится платить два раза—при высылкѣ задатка и при уплатѣ наложеннаго платежа). **Деньги и заказъ убѣдительно просимъ посылать сразу, однимъ отправленіемъ** (Пересылка денегъ до 25 р. переводомъ по почтѣ стоитъ 15 к., и на отрѣзномъ купонѣ можно безъ особой доплаты написать весь заказъ и письмо). Не высылать денегъ въ заказныхъ или простыхъ письмахъ во избѣжаніе пропажи ихъ на почтѣ. Марки на значительную сумму слѣдуетъ высылать заказнымъ письмомъ, такъ-какъ простыя письма съ марками часто пропадаютъ на почтѣ. Если заказчикомъ въ одно и то же время или чрезъ нѣсколько дней посылается вторичное письмо о томъ же, то необходимо въ этомъ, второмъ письмѣ упомянуть, что оно вторичное иначе одинъ и тотъ же заказъ можетъ быть высланъ два раза. Писемъ совсѣмъ неоплаченныхъ или не сполна оплаченныхъ не получаемъ съ почты.

IV. Остатки денегъ заказчиковъ записываются и засчитываются при послѣдующемъ заказѣ или, по желанію заказчика, возвращаются ему, за удержаніемъ 16 к. на пересылку. Остатки денегъ заносятся въ алфавитныя книги конторы, которыя хранятся 10 лѣтъ, слѣд., остающіяся деньги во всякое время могутъ быть засчитаны или возвращены заказчику, по первому его о томъ требованію.

V. Желающіе имѣть счетъ на высланныя книги благоволятъ заявлять объ этомъ при требованіи книгъ. (Счетъ на сумму болѣе 5 р. оплачивается пятикопеечнымъ гербовымъ сборомъ за счетъ заказчика). О высылкѣ книгъ заказчика не увѣдомляемъ. Высылка книгъ производится въ день полученія заказа и не позже, чѣмъ на 3-ій день. О всякомъ почему-либо не исполненномъ заказѣ посылается заказчику увѣдомленіе и на всякое письмо, касающееся нашихъ изданій, дается отвѣтъ, если приложена почтовая марка или если у насъ остаются деньги заказчика. Слѣдовательно, если въ теченіе 3 недѣль на письмо не получилось отвѣта, то это значитъ, что или намъ оно не доставлено, или нашъ отвѣтъ не дошелъ до заказчика. Въ такомъ случаѣ надобно повторить Всѣ почтовые расходы по перепискѣ и высылкѣ циркуляровъ, а также гербовые по счетамъ относятся на счетъ заказчика

VI Просимъ провѣрять вложеніе бандеролей и посылокъ тотчасъ по полученіи и сообщать намъ о недостачахъ и о неправильностяхъ, по возможности, въ тотъ же день и во всякомъ случаѣ не позднѣе 7 дней, чтобы мы могли навести справки и исправить упущенія **Книгъ, высланныхъ согласно съ требованіемъ, обратно не принимаемъ и не обмѣниваемъ, равно какъ не принимаемъ обратно книгъ разрѣзанныхъ и потрепанныхъ** Черезъ мѣсяцъ послѣ высылки книгъ наводить какія-либо справки о неправильностяхъ высылки отказываемся

VII Всякаго рода переписку, спустя 5 недѣль послѣ отвѣта, уничтожаемъ и послѣ этого срока дѣлать какія-либо справки отказываемся Адреса записываемъ только нашихъ крупныхъ постоянныхъ заказчиковъ, поэтому просимъ на каждомъ письмѣ повторять разборчиво свой полный адресъ, указывая ближайшую почтовую станцію (т е то мѣсто, гдѣ есть почтовая контора или почтовое отдѣленіе съ пріемомъ и выдачею денегъ) и желѣзнодорожную (при большихъ требованіяхъ) Можно выписывать отъ насъ книги сразу для нѣсколькихъ лицъ на имя одного лица (для сокращенія расходовъ на пересылку)

VIII При высылкѣ сразу нашихъ изданій на 5 руб, по полученіи впередъ всѣхъ денегъ или $^1/_3$ задатка, даемъ безплатную пересылку При высылкѣ сразу на 15—25 руб, по полученіи всѣхъ денегъ впередъ, — уступка въ 20% и наша пересылка

IX Книгопродавцамъ обычная уступка На коммиссію и вообще въ кредитъ книгъ никому не даемъ, не исключая и книгопродавцевъ На книгопродавческихъ требованіяхъ долженъ быть штемпель фирмы, иначе заказъ будетъ выполненъ съ обычной уступкой для частныхъ лицъ

X За указанные сроки выхода нашихъ изданій отвѣтственности на себя не принимаемъ ибо въ этомъ отношеніи мы вполнѣ зависимъ отъ аккуратности типографій и жел дорогъ Книги находившіяся въ печати во время поступленія на нихъ требованія, высылаются заказчику, по указанному имъ адресу, немедленно по выходѣ ихъ въ свѣтъ, если за нихъ конторой книгоиздательства были уже получены деньги слѣд, повторять требованіе нѣтъ никакой надобности этимъ только усложнится работы конторы

XI Лицъ выписывающихъ отъ насъ книги, позволяемъ себѣ считать согласившимися на наши условія

XII *Настоящимъ циркуляромъ всѣ прежніе отмѣняются*

XIII Новыя изданія печатаемъ болѣе крупными четкими шрифтами на хорошей бумагѣ

XIV Просимъ указать всѣ книжные магазины и редакціи газетъ и журналовъ Вашей мѣстности

Почтовая такса для пересылки бандеролей съ печатными произведеніями (книгами) на всякое разстояніе 1) *вѣсовой сборъ* по 2 коп за каждые 4 лота, при чемъ неполные 4 лота считаются за полные 2) *за заказъ 7 коп* на всякій вѣсъ бандероли (бандеролью можно высылать не болѣе 4 фун, т е 128 лот) и 3) *за наложеніе платежа 10 коп* съ каждой бандероли или посылки, если сумма наложеннаго платежа меньше 5 р или=5 р; свыше этого — по 2 к съ рубля или части рубля (до 5 р берется 10 к со всякой суммы наложеннаго платежа)

Почтовая такса для посылокъ безъ цѣны а) *I-ый поясъ*—до всѣхъ городовъ и почтовыхъ отдѣленій Европейской Россіи съ Закавказьемъ до 2 фун — 25 к, до 7 фун — 45 к, до 12 фун — 65 к. б) *II й поясъ*—до губерній и областей Западной Сибири и Средней Азіи (Акмолинская, Закаспійская, Самаркандск., Семипалатинская, Семирѣченская, Сыръ-Дарьинская, Тобольская, Томская, Тургайская и Ферганская): до 2 фун — 45 к, до 7 фун — 85 к, до

12 фун.—1 руб. 25 коп. в) *III-й поясъ*—до губерній и областей Восточной Сибири (Амурская, Енисейская, Забайкальская, Иркутская, Приморская, Якутская и островъ Сахалинъ) до 2 фун — 65 к., до 7 фун —1 р 25 к, до 12 фун —1 р 65 к

За посылки вѣсомъ свыше 12 фун за каждый фунтъ взимается при разстояніи до 500 верс —5 к, до 1000 верс —10 к, до 2000 вер —20 к, до 3000 верс —25 к, до 4000 вер —30 к. и до 10000 вер —35 к

За провозъ 1 пуда книгъ по желѣзн. дорогѣ пассажирскими поѣздами берется за разстояніе 50 верс —5 к, 100 в —10 к, 200 в —20 к, 300 в —30 к, 400 в —36 к 500 в —40 к., 600 в —44 к, 700 в —48 к, 800 в —52 к, 900 в —56 к, 1000 в —59 к 1200 в —63 к, 1300 в —68 к, 1600 в —76 к, 2000 в —86 к, 2500 в —1 р 2 к, 3000 в — 1 р 10 к 3500 в —1 р 22 к, 4000 в —1 р 34 к, 4700 в —1 р 50 к Кромѣ того за каждую отправку считается 56 к гербовыхъ, почтовыхъ расходовъ и за доставку на вокзалъ, за исключеніемъ отправокъ для книгопродавцевъ

Мы отправляемъ книги по почтѣ посылками безъ цѣны только тогда, когда вѣсъ отправки болѣе 88 лот, и если на посылку не приходится налагать платежа т е когда всѣ деньги полностью высланы вмѣстѣ съ заказомъ, если же на отправку приходится налагать платежъ и если она вѣситъ менѣе 4 фун., т. е 128-ми лот, то посылаемъ бандеролью Если отправка вѣситъ болѣе 12 фун, то высылаемъ по желѣзн дорогѣ пассажирской или большой скоростью или двумя почтовыми посылками безъ цѣны, какъ дешевле

КОНТОРОЙ книгоиздателя Степана Александровича Козловскаго (Бѣлая-Церковь, Кіевской губ) высылаются слѣдующія его изданія для самообразованія:

№ 1 *Козловскій С А* Полныя рѣшенія 2—5 ю способ и подробн объясненія всѣхъ задачъ Сборника ариѳмет задачъ преимущественно для учениковъ старш клас средн учеб зав. В Арбузова, В Минина, А Минина и Д Назарова Изд 2-ое 1909 Ц 60 к съ пер 73 коп., налож платеж 83 к (Вѣсъ 10 лот., съ оболочкой 12 л)

№ 2 *Козловскій, С А* Полныя рѣш многими (2—10) способами и подробн объясн всѣхъ ариѳ задачъ (для самообуч) сборника И П Верещагина, съ весьма подробной теоріей ариѳметики, съ указаніемъ всевозможныхъ способовъ рѣш объясн, повѣрки зад (указаны всѣ методы рѣш. различныхъ ариѳм зад съ подробн ихъ характеристиками и историческими о нихъ справками) и мн др Часть I-я Цѣлыя числа—простыя и составн именован (№№ 1—1313 включит). Изд. 2-ое, измѣненное и пополненное. 1905 Цѣна 1 р, съ перес 1 р 17 к, налож плат 1 р 27 к. (Вѣсъ 14 лот., съ оболочкой 16 л)

№ 3 *Козловскій, С А.* То же Часть II-я Дроби—простыя и десятичныя (съ № 1314 по № 2521 включит) 2 ое, исправл. и дополн изд. 1906 Цѣна 80 к, съ перес 95 к, налож платеж. 1 р. 5 к (Вѣсъ 10 лот съ оболочкой 12 л)

№ 4 *Козловскій, С А* То же Часть III Вып I Отношенія, пропорціи и правила тройныя—простое и сложное, простыхъ процентовъ, учета векселей, цѣпное и пропорціональнаго дѣленія (товарищества) (№ 2522—№ 3045 включит) 2-ое изд, вновь составленное 1905 Цѣна 1 р, съ перес. 1 р 17 к, налож плат 1 р 27 к (Вѣсъ 16 лот., съ оболоч 18 л.)

№ 5 *Козловскій, С А.* То же Часть III Вып II Правило смѣшенія, задачи на уравненіе сроковъ платежей и на опредѣленіе среднихъ процентовъ (съ № 3046 по № 3177 включит). Изд 2 е, вновь составленное. 1906 Цѣна 40 к, съ перес 51 к налож плат 61 коп (Вѣсъ 4 лота, съ оболочкой 6 лот)

№ 6 *Козловскій, С А.* То же. Часть III § 57 Смѣшанныя задачи для повторительнаго курса (№ 3178—№ 3374 включит). Изд 4 е вновь составленное 1908 Цѣна 60 к., съ перес 75 к, налож плат 85 к (Вѣсъ 12 л, съ оболочкой 14 л.)

№ 7 *Козловскій, С. А* Подробныя рѣшенія и объясненія всевозможн (2—8) способ всѣхъ ариѳм. зад (для самообученія) сборника А Малинина и К Буренина Часть I я Цѣлыя числа (простыя и составныя именованныя) Задачи съ № 1 по № 1330 включит Со многими подробными статьями, какъ-то объ употребленіи скобокъ, составленіи и вычисленіи ариѳ формулъ о задачахъ на вычисленіе времени площадей и объемовъ, о пробѣ, о географической широтѣ и долготѣ мѣстъ и проч Изд 3-е, испр и дополн 1909 Въ 6 8 д л 188 стран плотной четкой печати Цѣна 80 к, съ перес 97 к налож. плат 1 р. 7 к (Вѣсъ $13^1/_2$ л, съ оболоч $15^1/_2$ л)

№ 8. *Козловскій, С. А* То же Часть II Дроби—простыя и десятичныя, отношенія пропорціи, простое и сложное тройныя правила и подробная ихъ теорія (№ 1331—№ 2590 включит.) 3-е исправ и дополн изд 1909 Цѣна 1 р, съ перес. 1 р 17 к., нал плат 1 р 27 к (Вѣсъ 14 л., съ оболоч 16 л)

№ 9 *Козловскій*, *С А* То же Часть III. Правила процентовъ—простыхъ и сложныхъ учета векселей, цѣпное, товарищества (пропорціональное дѣленіе), смѣшенія и уравненія сроковъ платежей (№ 2891 — № 3390 включит), съ прибавл весьма подробн теоріи всѣхъ тройн правилъ и проч. Изд. 3-ье, дополн. 1909 Цѣна 1 р, съ пер. 1 р 15 к., налож платеж 1 р 25 к. (Вѣсъ 14 л., съ оболоч. 16 л.).

№ 10 *Козловскій*, *С А* То же Часть IV Задачи на всѣ ариѳм дѣйствія изъ § 51 (№ 3391—№ 3814 включительно) съ указаніемъ всевозможн методовъ рѣш и подробн объясн задачъ и массой разныхъ свѣдѣній (для самообученія) 2 е, исправленное изданіе. 1908 Ц 90 к, съ перес 1 р 7 к нал пл 1 р 17 к. (Вѣсъ 16 л, съ оболоч. 18 л.)

№ 11 *Козловскій* *С А* Таблица умноженія и полная таблица всѣхъ русскихъ и метрическихъ мѣръ Полныя образцовыя рѣшенія и объясненія всѣхъ видовъ ариѳм зад на вычисленіе времени, площадей и объемовъ 2-е изд Ц 20 к, съ перес 29 к. налож плат 39 к. (Выйдетъ лѣтомъ 1909 г)

№ 12 *Козловскій*, *С А* Полныя рѣш различными (2—5) способ и подроб объяснен всѣхъ ариѳм задачъ и всѣхъ дробныхъ числен примѣровъ А И Гольденберга, вып I и II Ц 60 к, съ перес 73 к., нал пл 83 к (Вѣсъ 7 л., съ оболоч. 9 л.).

№ 13 *Козловскій*, *С А* Сборникъ 200 зад, служившихъ въ 1873—1903 г г темами на экзаменахъ зрѣлости въ гимназіяхъ и на выпускныхъ экзаменахъ въ реальныхъ училищахъ въ Петербургск, Московск и Казанск учебн округахъ, съ полными образцовыми рѣш и объясн, съ разнообразными указаніями относительно расположенія вычисленій, характера словесныхъ объясненій, повѣрки задачъ со всѣхъ отдѣловъ ариѳм и проч Методы рѣш всѣхъ типовъ ариѳм зад, съ подроб характеристикой каждаго изъ нихъ съ прибавл рѣш и подробн объясн наиболѣе трудныхъ и интересныхъ ариѳметич задачъ Систематичес сборника Арбузова, Минпныхъ В. и А. Назарова, Мазинга, Шапошникова и Вальцева, Стеблева, Леве, Веленса, Воронова Качашевича, В Вильгальмъ и др [Въ книгѣ имѣются всѣ типы ариѳмет. задачъ съ подробн рѣш и объясн Книга эта составлена весьма полно и обстоятельно Въ ней помѣщенъ и текстъ (условія) всѣхъ 200 зад Книга весьма хороша какъ руководство для рѣш. всевозможныхъ сложныхъ задачъ со всего курса ариѳметики] Вып I 1903 Ц 80 к, съ перес 95 к, нал пл 1 р 5 к (Вѣсъ 12 л., съ оболоч. 14 л.).

№ 14 *Козловскій*, *С А* То же Вып II Сборникъ 220 ариѳм темъ зрѣлости Харьковск., Одесск, Кіевск, Виленск, Варшавск., Оренбургскаго, Сибирскаго, Юрьевскаго, Кавказскаго и всѣхъ другихъ учебн округовъ, съ полными рѣшеніями и объясненіями [Въ книгѣ помѣщенъ и текстъ (условія) этихъ 220 зад] Ц 60 к съ перес. 73 к., нал. пл 83 к. (Выйдетъ лѣтомъ 1909 г)

№ 15 *Козловскій*, *С А* Какъ научиться рѣшать ариѳм задачи и что для этого надо знать Подробная теорія ариѳметики Методы рѣшеній всѣхъ типовъ ариѳм зад, съ подробн ихъ характеристиками, масса всевозможн интересн свѣдѣній и образцы рѣшеній и объясненій разныхъ ариѳм задачъ. Пособіе для учащихъ и учащихся высшихъ и среднихъ учебн. завед, для лицъ, поступающихъ въ учебныя заведенія и для самообразованія. Въ этой книгѣ помѣщены и рѣшенія наиболѣе трудныхъ типичныхъ задачъ на цѣлыя числа изъ сборника А Стеблева. Часть I Цѣлыя числа—простыя и составныя именов 1908. Ц 80 к, съ перес 97 к., наложен плат 1 р 7 к (Вѣсъ 15 л, съ оболоч. 17 л.)

№ 16 *Козловскій*, *С А* То же Часть II Дроби—простыя и десятичныя (Выйдетъ въ 1910 г)

№ 17 *Козловскій*, *С А*. То же Часть III Тройныя правила (Выйдетъ въ 1910 г)

№ 18 *Козловскій*, *С А* Полныя рѣш и объясненія 2—10 ю способ всѣхъ ариѳм зад и численныхъ примѣровъ (для самообученія) сборника I-й части В А Евтушевскаго (цѣлыя числа—простыя и составныя именованныя), съ подробной теоріей ариѳметики и многими др свѣдѣніями (Выйдетъ въ концѣ 1909 г)

№ 19 *Козловскій*, *С А* Полныя рѣш и объясн всевозможн (2—7) способ всѣхъ ариѳм зад и численныхъ примѣровъ В А Евтушевскаго ч II вып I Дроби—простыя, десятичныя періодическія и непрерывныя (зад №№ 1—848 и численные примѣры №№ 1—980 и 1186—1257 включит), со всѣми подробностями касательно теоріи дробей, методовъ рѣш зад и проч 1907 Ц 1 р, съ перес 1 р 15 к, нал плат 1 р 25 к (Вѣсъ 13 л, съ обол. 15 л)

№ 19а Полныя рѣш. (2—8) способ и подробныя объясненія всѣхъ задачъ и примѣровъ приготов курса простыхъ дробей изъ II ой части Евтушевскаго (зад и прим №№ 1—475 включит), съ весьма подробной теоріей простыхъ дробей и разными свѣдѣніями относительно рѣш задачъ 1907. Ц 30 к, съ перес. заказн банд 41 к, наложен. платеж 51 к (Вѣсъ 5 л., съ оболоч 7 л).

№ 20 *Козловскій* *С А* То же Вып II. Отношенія, пропорціи и правила тройныя—простое и сложное, процентовъ (простыхъ и сложныхъ) и учета векселей (Зад №№ 844—1367 и числен примѣры №№ 981—1185 включ) 1907. Въ 6 8 д л 288 стран весьма плотной печати Ц. 1 р 20 к, съ перес 1 р 39 к, нал. плат 1 р 49 к. (Вѣсъ 22 л., съ оболоч. 24 л.)

№ 20а *Козловскій, С. А.* То же Вып. III. Правила товарищества (пропорціональное дѣленіе) цѣнное, смѣшенія, вычисленія пробы и повторительный (10) отдѣлъ (Задачи №№ 1368—157... включ.) 1908. Ц. 60 к., съ перес. 73 к., нал. плат. 83 к. (Вѣсъ 9 л., съ оболоч. 11 л.)

№ 21. *Маковкинъ, Н. Н.* Полныя рѣш. и объясн. всевозможными способами всѣхъ алгебраич. зад. (первыхъ и вторыхъ нумеровъ) Н. А. Шапошникова и Н. Н. Вальцова, ч. II (для самообуч.) Вып. I. Отдѣленія VII, VIII и IX (Возведеніе въ степень и извлеченіе корня. Ирраціональныя выраженія. Уравненія II-ой степени). Всего 1980 зад. 1903. Цѣна 1 р. 40 к., съ перес. 1 р. 59 к., налож. платеж. 1 р. 69 к. (Вѣсъ 20 л., съ оболоч. 22 л.)

№ 22. *Доброгаевъ, Н. И.* Полныя рѣшенія 2—5-ю способ. и подробныя объясненія всѣхъ безъ исключенія алгебраич. зад. (первыхъ и вторыхъ нумеровъ) Н. А. Шапошникова и Н. К. Вальцова, часть II-я, вып. II (для самообученія). Отдѣленія X и XI. (Уравненія высшихъ степеней. Неопредѣленный анализъ). Всего 700 зад. 1905. Цѣна 1 р., съ перес. 1 р. 15 к., нал. плат. 1 р. 25 к. (Вѣсъ 13 л., съ оболоч. 15 л.)

№ 23. *Доброгаевъ, Н. И.* То же Вып. III. Отдѣлы XII и XIII (Прогрессіи. Логариѳмы. Ихъ примѣненіе). Всего 680 зад. 1906. Цѣна 1 р., съ перес. 1 р. 15 к., нал. плат. 1 р. 25 коп. (Вѣсъ 13 л., съ оболоч. 15 л.)

№ 24. *Доброгаевъ, Н. И.* То же Вып. IV. Отд. XIV—дополнительныя статьи алгебры. (Общій наиб. дѣлит. и наим. кратное. Соединенія. Биномъ Ньютона. Непрерывныя дроби. Отысканіе наименьшихъ и наибольшихъ значеній. Способъ неопредѣленныхъ множителей. Общія свойства системы счисленія). 1907. Въ б. 8 д. листа 288 стр. плотной печати. Цѣна 1 р. 20 к., съ перес. 1 р. 37 к., налож. плат. 1 р. 47 к. (Вѣсъ 16 л., съ оболоч. 18 л.)

№ 25. *Доброгаевъ, Н. И.* Полныя рѣш. и объясн. всѣхъ (60) алг. зад. общаго отдѣла II ч. Шапошникова и Вальцова. Цѣна 40 к., съ пер. 51 к., нал. плат. 61 к. (Вѣсъ 5 л., съ обол. 7 л.)

№ 26. *Доброгаевъ, Н. И.* Полныя рѣш. 2—5 способ. и подробн. объясн. всѣхъ безъ исключ. (2040) алг. зад. (первыхъ и вторыхъ нумеровъ) Н. А. Шапошникова и Н. К. Вальцова, ч. I., вып. I (для самообуч.). Отд. I, II, III (Основное знакоположеніе. Дѣйствія съ явно выраженными количествами. Преобразованія выраженій). 1908. Ц. 80 к., съ перес. 93 к., нал. плат. 1 р. 3 к. (Вѣсъ $8^1/_3$ л., съ оболочкой $10^1/_3$ л.)

№ 27. *Доброгаевъ, Н. И.* То же. Ч. I, вып. II (для самообуч.). Отд. IV и V (Разложеніе выраженій на простыхъ множителей. Преобразованіе дробныхъ выраженій). Всего 1540 примѣровъ и задачъ первыхъ и вторыхъ нумеровъ. Въ б. 8 д. листа 220 стран. плотной четкой печати. 1909. Ц. 1 р., съ перес. 1 р. 15 к., нал. пл. 1 р. 25 к.

№ 27а. *Доброгаевъ, Н. И.* То же. Ч. I-я, вып. III (для самооб.). Отд. VI (Рѣшеніе и составленіе уравненій I-ой степени). Всего 1000 прим. и зад. первыхъ и вторыхъ нумеровъ. 1909. Цѣна 70 к., съ перес. 85 к., нал. пл. 95 к.

№ 28. *Василевскій, В. Ѳ.* Полныя рѣш. разн. способами и подробныя объясн. всѣхъ 280 задачъ сборника геометрич. зад. съ примѣненіемъ тригонометріи (для учениковъ гимназій и реальныхъ училищъ) Н. Сорокина, преподавателя Кіево-Печерской гимназіи (для самообразованія), съ 309 чертежами въ текстѣ, съ описаніемъ теоремы Гюльдена и съ приложеніемъ и объясненіемъ всѣхъ формулъ, употребляемыхъ при рѣшеніи этихъ задачъ. 1908. Въ б. 8 д. л. 204 стран. плотной печати. Ц. 1 р., съ перес. 1 р. 17 к., налож. плат. 1 р. 27 к. (Вѣсъ $14^2/_3$ л., съ оболочкой $16^2/_3$ л.)

№ 29. *Каганъ, Ш. Е.* Полныя рѣш. и объясненія всѣхъ 295 стереометрич. и планиметрическихъ зад. Н. Рыбкина, требующихъ примѣненія тригонометріи (съ 270 чертеж. въ текстѣ). 1904. Ц. 1 р., съ перес. 1 р. 11 к., нал. плат. 1 р. 21 к. (Вѣсъ 6 л., съ оболоч. 8 л.) Просимъ не смѣшивать книги № 29 съ книгой № 75.

№ 30. *Пенгонжкевичъ, К. Б.*, инспекторъ Екатеринбургской мужской гимназіи. Систематическій сборникъ задачъ по элементарной физикѣ. Курсъ сред. учебн. зав. Вып. I. Механика. Гидростатика и Аэростатика. (Курсъ VI класса гимназій и V класса реальныхъ училищъ), 913 зад. съ рѣш. типовыхъ зад. Каждому отдѣлу задачъ предпослана обстоятельно изложенная теорія тѣхъ физическихъ законовъ, на основаніи которыхъ рѣшаются задачи соотвѣтствующаго отдѣла, причемъ выведены и всѣ формулы для рѣш. зад.) 1904. Ц. 70 к., съ перес. 83 к., нал. пл. 93 к. (Вѣсъ 9 л., съ оболоч. 11 л.) Допущенъ ученымъ комитетомъ М. Н. Пр. въ качествѣ пособія для средн. учебн. зав. (Увѣдомленіе Департамента Народнаго Просвѣщенія отъ 9 октября 1907 г. за № 22389)

№ 31. *Пенгонжкевичъ, К. Б.* То же II-ой вып. (послѣдній). Теплота. Свѣтъ. Звукъ. Магнитизмъ. Электростатика. Динамическое электричество. Дополненіе механическаго отдѣла (Равномѣрное круговое движеніе. Маятникъ и машина Атвуда. Импульсъ силы и количество движенія. Ударъ тѣлъ. Механическая работа. Законъ живыхъ силъ. Простыя машины.—Рычагъ, блокъ, воротъ. Наклонная плоскость, клинъ, винтъ. Энергія). Этотъ выпускъ составленъ по той же системѣ, что и I-й. 1907. Въ б. 8 д. л. 266 стр. плотной печати. Ц. 1 р., съ перес. 1 р. 19 к., наложен. плат. 1 р. 29 к. (Вѣсъ 21 л., съ оболоч. 23 л.) Допущенъ ученымъ комитетомъ М. Н. Пр. въ качествѣ пособія для средн. учебн. зав. (Увѣдомленіе Департам. Народн. Просв. отъ 9 октября 1907 г. за № 22389)

Отзывъ печати о книгахъ №№ 30 и 31 (см № 44 за 190. г журнала „Физикъ-Любитель“)

„Намъ уже приходилось говорить („Ф.-Л.“ — , стран 64) о первомъ выпускѣ этой книги, содержащемъ задачи по механикѣ, гидростатикѣ и вышедшемъ изъ печати въ 1904 году Настоящій выпускъ содержитъ еще большее количество задачъ, чѣмъ первый (1750 №№); какъ и въ первомъ, каждому отдѣлу предшествуетъ обстоятельный конспектъ, съ указаніемъ формулъ и методовъ рѣшенія приведенныхъ въ отдѣлѣ примѣровъ Изложенію предшествуютъ справочныя таблицы

У насъ извѣстны нѣсколько переводныхъ задачниковъ по физикѣ на русскомъ же языкѣ въ этой книгѣ мы имѣемъ первый оригинальный трудъ въ этой области Мы можемъ привѣтствовать его исполненіе, потребовавшее огромной массы труда, и дающее превосходный и обширный матеріалъ для выбора задачъ по физикѣ подходящихъ въ любой программѣ этого предмета въ учебныхъ заведеніяхъ различныхъ типовъ“

Отзывъ журнала „Самообразованіе“ о книгахъ №№ 30 и 31 (см № 7 за 1908 г.). «Обращаемъ особенное вниманіе г г читателей на толково составленный «Систематическій сборникъ задачъ по элементарной физикѣ», который можетъ послужить неоцѣнимымъ пособіемъ при изученіи физики»

№ 31а *Пенгонжкевичъ, Б Б* Основанія анализа безконечно малыхъ, съ 730 примѣрами для упражненія и 31 чертежомъ въ текстѣ Курсъ 7 класса реальныхъ училищъ (по программѣ 1907 г). 1909 Въ б 8 д л 164 стр плотной печати **Цѣна 1 р.**, съ перес 1 р 15 к, налож. плат 1 р 25 к

№ 39. *Пенгонжкевичъ, Б Б* Основанія аналитической геометріи по программѣ реальныхъ училищъ 1907 г (Печатается и выйдетъ въ іюнѣ—іюлѣ 1909 г)

№ 32 *Барзамъ, Б С* Полныя рѣшенія и объясненія разными способами всѣхъ безъ исключенія смѣшанныхъ алгебраич задачъ для повторительнаго курса 5, 6, 7 и 8 класс гимн сборн **А К Кліоновскаго, преподавателя Калишской мужск гимназіи** [по послѣднему изд), съ прибавленіемъ всѣхъ алгебр темъ зрѣлости Варшавскаго и нѣкоторыхъ Московскаго учебнаго округа за разные годы] **1905. Цѣна 1 р**, съ перес 1 р 17 к., налож плат. 1 р 27 к (Вѣсъ 12 л, съ оболоч 14 л)

№ 32в *Тандійчукъ, Г А* Указатель рѣшеній соотвѣтствующихъ нумеровъ задачъ 3 го, 4 го и 2 го изданій Сборника смѣшанныхъ алгебр зад **А К Кліоновскаго**, съ приложеніемъ, подробн рѣшеніемъ и объясненіемъ 25 задачъ, прибавленныхъ въ 3-мъ и 4-омъ изданіяхъ алгебр задачника А К. Кліоновскаго 1908 **Цѣна 30 к**, съ перес 41 к, налож плат 51 к (Вѣсъ 3 л, съ оболоч 5 л) Книги №№ 32 и 32в высылаются только общ вмѣстѣ за 1 р 27 к, налож плат за 1 р 37 к

№ 33 *Козловскій, С А* и *Барзамъ, Б С* Полныя рѣшенія 2—5 способ и подр объясн всѣхъ 633 геом зад **В П Минина** (№№ 1—633 включит), съ 171 черт въ текстѣ Изд 2-ое 1909 **Ц 1 р**, съ перес 1 р 17 к, нал плат 1 р 27 к

№ 34 Рѣшеніе всѣхъ 222 геом зад **В П Минина**, требующихъ примѣненія тригонометріи (см №№ 634—853 геометрическаго сборника В П Минина и соотвѣтствующіе имъ №№ 844—1064 тригонометрическаго сборника его же) печатаются 2-мъ изданіемъ и выйдутъ въ мартѣ—апрѣлѣ 1909 г **Цѣна 60 к** При каждой задачѣ поставлены соотвѣтствующіе №№ обоихъ сборниковъ *В П Минина*—геометрическаго и тригонометрическаго, такъ что книга № 34 одинаково подходитъ къ обоимъ изъ этихъ сборниковъ

№ 35 *Куржина, М и Данскій, В М* Сборникъ 63-хъ обработанныхъ образцовыхъ сочиненій литературнаго и отвлеченнаго характера на темы по русскому языку, задаваемыя въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ 1905 **Цѣна 60 к**, съ перес заказной банд 73 к., налож плат 83 к (Вѣсъ 7 л., съ оболоч 9 л)

№ 35а *Гольденбергъ, Л* Сборникъ 35 разработанныхъ литературныхъ и историко литературныхъ сочиненій на темы по русскому языку Для среднихъ и низшихъ учебныхъ заведеній 1909. **Цѣна 40 к**, съ пересылкой 51 к, наложен. платеж 61 коп (Вѣсъ $5^1/_2$ л, съ оболоч $7^1/_2$ л)

№ 36 *Коляновскій, Д П* Полныя рѣш 2—5 спос и подр объясн всѣхъ 760 задачъ учебника прямолинейной тригонометріи **Н Рыбкина** для сред. уч. зав. Въ б 8-ю д л 168 стран плотной печати 1908 **Цѣна 1 р** съ перес. 1 р. 15 к, нал плат. 1 р 25 к (Вѣсъ $9^1/_2$ л., съ об лоч. $11^1/_2$ л)

№ 37а *Зихманъ, А Я* Полныя рѣш и объясненія всѣхъ 256+337 геометрич задачъ **А Ю Давидова** (гимназическій курсъ), съ чертежами и задачами въ текстѣ (На построеніе 256 зад и на вычисленіе 337 зад) 1909 **Цѣна 1 р 20 к**, съ перес 1 р, 39 к. налож платеж 1 р 49 к

№ 51 *Зихманъ, А Я* Полныя рѣшенія и подробныя объясненія нѣсколькими (1—5) способами всѣхъ безъ исключенія (402+24) зад элементарной геометріи для средн учебн зав **А Киселева**, съ 444 чертежами въ текстѣ (Въ книгѣ этой помѣщены и условія всѣхъ задачъ) 1903 Въ б 8-ю долю листа 228 стран плотной печати **Цѣна 1 р**, съ перес 1 р 17 к, налож плат 1 р 27 к (Вѣсъ 17 л, съ оболоч 19 л)

№ 69 *Василевскій В Ѳ* Подробныя рѣшенія и объясненія разными способами всѣхъ 289+87 стереометрическихъ зад, рѣшаемыхъ при помощи тригонометріи, **А К Кліоновскаго, преподавателя Калишской мужской гимназіи**, съ 389 чертежами въ текстѣ, съ описаніемъ теоремы Гюльдена и приложеніемъ и объясненіемъ всѣхъ формулъ, употребляемыхъ при рѣшеніи упомянутыхъ зад (по 4-му дополненному изданію 1906). **Цѣна 1 р**, съ перес 1 р 17 к, нал платеж. 1 р 27 к (Выйдетъ въ іюлѣ 1909 г).

№ 71 *Доброгаевъ, Н Й* Полныя рѣшенія и объясненія разными способами всѣхъ 356 геом. задачъ, помѣщенныхъ въ краткомъ курсѣ геометріи З Вулиха, съ 133 чертежами въ текстѣ и массой разныхъ свѣдѣній [Въ книгѣ рѣшеній помѣщены и условія (текстъ всѣхъ 356 задачъ] Цѣна 80 к, съ перес. 95 к, нал плат 1 р 5 к

№ 73в *Козловскій, С А* Полныя рѣшенія и подробныя объясненія 2—10 ю способами всѣхъ задачъ сборника ариѳм задачъ для среднихъ учебныхъ заведеній А Стеблова Вып IV Смѣшанныя задачи для повторительнаго курса всей ариѳметики (съ № 2080—по № 2199 включительно) Съ указаніемъ всѣхъ методовъ рѣш ариѳ зад и мн др свѣдѣній (Въ этой книгѣ помѣщенъ и текстъ всѣхъ задачъ). 1909. Цѣна 60 к, съ перес 73 коп налож плат 83 к (Обращаемъ вниманіе читателя на эту книгу какъ содержащую трудныя типичныя и весьма интересныя по содержанію задачи, не встрѣчающіяся въ друг. ариѳ сборникахъ).

№ 74 *Козловскій, С А* Полныя рѣш и подробн объясн 2—10-ю способ всѣхъ ариѳм задачъ сборника Н А Шапошникова и Н Н Вальцова *Часть I я—цѣлыя чис.* (простыя и составныя именованныя) Съ описаніемъ всѣхъ методовъ рѣш ариѳ зад и др теоретическими и практическими свѣдѣніями Въ 6 8-ю д л 140 стран плотной печати 1909. Цѣна 60 к., съ перес 75 к, налож плат 85 к (Вѣсъ $10^2/_3$ л, съ оболоч $12^2/_3$ л)

74а *Козловскій, С. А* То же Часть II—дроби простыя и десятичныя (съ № 1 по № 1450 включит) Выйдетъ въ іюнѣ 1909 г

74б *Козловскій, С А* То же Часть III—тройныя правила (съ № 1451 по № 2280 включит) Выйдетъ въ декабрѣ 1909 г

№ 75 Василевскій, В Ѳ Полныя рѣшенія нѣсколькими способами и подробныя объясненія всѣхъ задачъ сборника геометр задачъ на вычисленіе Н Рыбкина. Часть I-я—планиметрія (Выйдетъ въ іюлѣ 1909 г). Не смѣшивать съ № 29)

75а *Василевскій, В Ѳ* То же Часть II-я—стереометрія (Выйдетъ въ декабрѣ 1909 г)

№ 77 Колянковскій, Д П Полныя рѣшенія многими способами и подробныя объясненія всѣхъ 1075 тригонометрич. задачъ сборника В. П Минина (Выйдетъ въ апрѣлѣ 1909 г)

Отзывъ печати.

О всѣхъ этихъ изданіяхъ весьма лестные отзывы печати « *Справочныя изданія г Козловскаго неоцѣнимы* Рѣшенія задачъ изъ извѣстныхъ, широко распространенныхъ сборниковъ, отличаются общедоступностью, сжатостью и ясностью самаго изложенія, при чемъ указываются всѣ методы рѣш задачъ, съ подробными и вполнѣ удачно составленными характеристиками ихъ и изложена самая полная и обстоятельная теорія ариѳметики и др отдѣловъ математики Опечатокъ почти нѣтъ Цѣны за книжки, сравнительно съ столичными изданіями, весьма скромныя. Книги г Козловскаго вполнѣ устраняютъ надобность въ репетиторѣ, пріобрѣтеніе ихъ смѣло можно порекомендовать тѣмъ, кто въ подобныхъ изданіяхъ дѣйствительно нуждается“ (См „Южный календарь-альманахъ“ 1902 г и журналъ „Юго-Западную Недѣлю“ 1903 г., № 41)

NB Съ своей стороны добавлю, что я получаю массу благодарностей отъ разныхъ лицъ особенно за книги, составленныя мной.

С А. Козловскій

Главный складъ всѣхъ вышепоименованныхъ изданій у Степана Александровича Козловскаго, къ которому и нужно обращаться съ требованіями и справками по адресу Бѣлая Церковь, Кіевской губ, С А Козловскому. При запросахъ и справкахъ, когда требуется отвѣтъ, обязательно прилагать 7 или 3 к марку или открытку Вмѣсто мелкихъ денегъ можно высылать почтовыя марки достоинствомъ не свыше 50 к.

Предположены къ выпуску въ 1909 и 1910 г.г.

№ 52. Рѣш всѣхъ алгебр. зад И П. Верещагина
№ 70 Рѣш всѣхъ тригонометрическихъ задачъ А Малинина
№ 72 Полныя рѣш. и объясн всѣхъ геом зад А Малинина для уѣздн училищъ
№ 73 Полныя рѣш. и объясн всѣхъ ариѳ зад А Стеблова чч I и II
№ 76 Полныя рѣш и объясн всѣхъ геом зад А Воинова
№ 78 Полныя рѣш. и объясн всѣхъ тригонометр зад А Воинова.
№ 79 Полныя рѣш и объясн. всѣхъ тригонометр зад И Верещагина
№ 80 Полныя рѣш. и объясн. всѣхъ тригонометр зад Е Пржевальскаго
№ 81 Полныя рѣш и объясн всѣхъ тригонометр зад Злотчанскаго
№ 82 Полныя рѣш. и объясн. всѣхъ геом зад Малинина и Егорова.

Принимаемъ изданіе книгъ по математикѣ, но только хорошихъ во всѣхъ отношеніяхъ и вполнѣ приспособленныхъ для самообразованія. Рукописи писать четко и разборчиво.

ОТДѢЛЕНІЕ IV.

Разложеніе выраженій на простыхъ множителей.

Отдѣлъ алгебры трактующій о способахъ разложенія выраженій на простыхъ множителей, имѣетъ весьма важное значеніе Преобразовывая выраженія часто къ простѣйшему виду, разложеніе важно уже постольку поскольку вообще алгебра занимается *преобразованіемъ* выраженій (къ этому сводятся, какъ мы видѣли раньше, напр., всѣ алгебраическія дѣйствія), въ частности, особое значеніе оно пріобрѣтаетъ при нахожденіи общ наиб дѣлителя (съ оговоркой въ предисловіи къ рѣш зад § 3) и наим кратнаго, въ ученіи объ алгебраическихъ дробяхъ (отд V), наконецъ при рѣшеніи уравненій

Отмѣчая важность разложенія, нельзя не указать и на полную неопредѣленность его практическаго примѣненія достаточно сказать по этому поводу, что не существуетъ общаго правила для преобразованія даннаго выраженія въ произведеніе простыхъ множителей, и если въ часто встрѣчающихся случаяхъ (какъ, напр , разность квадратовъ) операція совершается довольно просто, то въ случаяхъ, болѣе или менѣе отличающихся отъ обычныхъ типовъ, дѣло встрѣчаетъ иногда значительныя препятствія *) Въ этомъ отношеніи, можно сказать, степень успѣха стоитъ въ прямой зависимости отъ личнаго навыка, а послѣдній въ свою очередь, достигается единственно упражненіемъ, веденнымъ въ систематическомъ порядкѣ

Дальнѣйшее изложеніе и имѣетъ, между прочимъ, цѣлью привести задачи на разложеніе въ систему, дать—въ рамкахъ существующихъ условій—по возможности въ исчерпывающемъ видѣ опредѣленную формулировку *основныхъ методовъ разложенія* придерживаясь вмѣстѣ съ тѣмъ расположенія матеріала въ «Сборникѣ»

§ 1. Преобразованіе многочленовъ въ произведеніе безъ посредства формулъ сокращеннаго умноженія и дѣленія.

1-ый случай разложенія *вынесеніе за скобки одночленнаго множителя*, общаго всѣмъ членамъ даннаго полинома 1° Передъ скобками ставится одночленъ—общій множитель, его коэффиціентъ (числовой) есть общій

*) Не говоря о томъ, что невозможно по первому взгляду опредѣлить, является ли данное выраженіе *первообразнымъ, простымъ* въ томъ смыслѣ, какой придается этому термину на стр 70 «Сборника»,—вообще сужденіе о неразложимости въ произведеніе множителей измѣняется по мѣрѣ расширенія понятія о числѣ. Такъ, въ настоящемъ отдѣленіи разсматриваются выраженія лишь съ раціональными членами, но заведомо простое съ этой точки зрѣнія выраженіе $a-b$ гдѣ a и b—числа первоначальныя, является составнымъ съ введеніемъ понятія объ ирраціональныхъ количествахъ, и это бываетъ полезно въ нѣкоторыхъ случаяхъ преобразованій Или—при помощи мнимыхъ величинъ «первообразное» выраженіе a^2+b^2 легко разлагается въ произведеніе множителей, какъ разность квадратовъ a^2 и $(bi)^2$, гдѣ $i=\sqrt{-1}$.

наиб дѣлитель числовыхъ коэффицiентовъ при членахъ даннаго полинома, его буквенное выраженiе состоитъ изъ буквъ, *общихъ* всѣмъ членамъ даннаго полинома, при чемъ каждой изъ такихъ буквъ придается показатель (степени), наименьшiй между тѣми показателями, съ которыми эта буква входитъ въ составъ членовъ полинома 2° Въ скобкахъ ставится частное отъ дѣленiя даннаго полинома на найденнаго вышеуказаннымъ путемъ общаго множителя 3°. Этому общему множителю можно приписать какъ знакъ «+», такъ и знакъ «—», и въ зависимости отъ этого выраженiе въ скобкахъ либо сохраняетъ знаки даннаго полинома, либо перемѣняетъ ихъ на обратные

Это—наиболѣе часто встрѣчающiйся и вмѣстѣ съ тѣмъ простой случай разложенiя, весьма важно вполнѣ усвоить его, т к его идея встрѣчается во многихъ методахъ разложенiя Къ нему относятся №№ 1—30 «Сборника»

1 $5a-5b=5(a-b)$ **Иначе** $5a-5b=-5(-a+b)=-5(b-a)$ Легко видѣть, что результаты получ тождественные, различные лишь по формѣ **1′**. $6a+6b=6(a+b)$ **Или** $6a+6b=-6(-a-b)$, но этотъ способъ въ данномъ случаѣ даетъ результатъ въ неудобномъ видѣ

2 $ab+bc=b(a+c)$ **2′** $ab-bc=b(a-c)$ **Или** $ab-bc=-b(-a+c)=-b(c-a)$

3 $6a-9b=3(2a-3b)$ **Иначе** $6a-9b=-3(-2a+3b)=-3(3b-2a)$ **3′** $10a+15b=5(2a+3b)$

4 $3ax+6ay=3a(x+2y)$ **4′**. $6ay-8ax=2a(3y-4x)$ **Или** $6ay-8ax=-2a(-3y+4x)=-2a\,(4x-3y)$

5 $2x-2=2(x-1)$ **Иначе** $2x-2=-2(-x+1)=-2(1-x)$ **5′** $3x+3=3(x+1)$

6 $6+3x=3(2+x)$ **6′** $6-3x=3(2-x)$ **Или** $6-3x=-3(-2+x)=-3(x-2)$

7 $a^2+ab=a(a+b)$ **7′** $ab-b^2=b(a-b)$ **Или** $ab-b^2=-b(-a+b)=-b(b-a)$

8 $a^5-a^3=a^3(a^2-1)$ **Иначе** $a^5-a^3=-a^3(-a^2+1)=-a^3(1-a^2)$ **8′** $a^7+a^4=a^4(a^3+1)$

Замѣчанiе къ №№ 8 и 8 Разложенiе, собственно, до конца не доведено, имѣемъ (§ 2, 7-ой спос разлож, 1°) $a^2-1=a^2-1^2=(a+1)(a-1)$, а потому $a^5-a^3=a^3(a^2-1)=a^3(a+1)(a-1)$ Затѣмъ (№ 147), т к $a^3+1=a^3+1^3=(a+1)(a^2-a+1)$ то $a^7+a^4=a^4(a^3+1)=a^4(a+1)(a^2-a+1)$

9 $a^2b^2+b^4=b^2(a^2+b^2)$ **9′** $a^4+a^2b^2=a^2(a^2+b^2)$

10 $a^3b^4-a^6=a^3(b^4-a^3)$ **Иначе** $a^3b^4-a^6=-a^3(-b^4+a^3)=-a^3(a^3-b^4)$ **10′**. $a^4b^3-b^6=b^3(a^4-b^3)$ **Или** $a^4b^3-b^6=-b^3(-a^4+b^3)=-b^3(b^3-a^4)$

11 $a^2x^5+x^6=x^5(a^2+x)$ **11′** $a^2x^6+x^5=x^5(a^2x+1)$

12 $a^2x^6+x^4y^2=x^4(a^2x^2+y^2)$ **12′** $a^2x^4+x^6y^2=x^4(a^2+x^2y^2)$

13 $4ab-2bc=2b(2a-c)$ **Иначе** $4ab-2bc=-2b(-2a+c)=-2b(c-2a)$ **13′**. $6ab-3bc=3b(2a-c)$ **Или** $6ab-3bc=-3b(-2a+c)=-3b(c-2a)$

14 $9a^4-6a^3b=3a^3(3a-2b)$ **Иначе**. $9a^4-6a^3b=-3a^3(-3a+2b)=-3a^3(2b-3a)$ **14′** $10ab^3-15b^4=5b^3(2a-3b)$ **Или**. $10ab^3-15b^4=-5b^3(-2a+3b)=-5b^3(3b-2a)$

15 $10a^4x^2+35a^2x^4=5a^2x^2(2a^2+7x^2)$ **15′**. $21a^3x^6-14a^6x^3=7a^3x^3(3x^3-2a^3)$ **Или** $21a^3x^6-14a^6x^3=-7a^3x^3(-3x^3+2a^3)=-7a^3x^3(2a^3-3x^3)$

16 $12a^6x^4-4a^3x^2=4a^3x^2(3a^3x^2-1)$ **Иначе** $12a^6x^4-4a^3x^2=-4a^3x^2(-3a^3x^2+1)=-4a^3x'(1-3a^3x^2)$ **16′**. $18a^7x^5+9a^6x^3=9a^6x^3(2ax^2+1)$

17 $6a^{n+1}+12a^n=6a^n(a+2)$ **17′** $4a^n-8a^{n-1}=4a^{n-1}(a^{n-n+1}-2)=$ $=4a^{n-1}(a-2)$

18 $3a^{n-2}-6a^n$ Т к при цѣломъ и положительномъ n*) $n-2<n$, то выносимъ за скобки a^{n-2}, а не a^n, именно $3a^{n-2}(1-2a^{n-n+2})=$ $=3a^{n-2}(1-2a^2)$ Иначе $3a^{n-2}-6a^n=-3a^{n-2}(-1+2a^2)=-3a^{n-2}(2a^2-1)$ **18′** $10a^{n+2}+5a^n=5a^n(2a^{n+2-n}+1)=5a^n(2a^2+1)$

19 $a^{m+n}-a^n$ Здѣсь различаемъ 3 случая m—число положительное, т е $m>0$, m—отрицательно, т е $m<0$ и $m=0$, замѣтимъ, что во всѣхъ случаяхъ n—необходимо положительно (см выноску къ № 18) **I случай** $m>0$, въ такомъ случаѣ $m+n>n$, а потому выносимъ за скобки a^n, именно $a^{m+n}-a^n=a^n(a^{m+n-n}-1)=a^n(a^m-1)$ **II случай** $m<0$, тогда $m+n<n$, и за скобки слѣдуетъ вынести a^{m+n} Обозначимъ абсолютную величину m черезъ μ, слѣд, $m=-\mu$, при чемъ $\mu>0$, или $\mu=-m$ Имѣемъ $a^{m+n}-a^n=a^{n-\mu}-a^n=a^{n-\mu}(1-a^{n-n+\mu})=a^{n-\mu}(1-a^{\mu})$ [Или же $a^{m+n}-a^n=a^{m+n}(1-a^{n-m-n})=a^{m+n}(1-a^{-m})=a^{n-\mu}(1-a^{\mu})$, отсюда между прочимъ слѣдуетъ, что $n>\mu$] **III случай** $m=0$ Тогда $a^{m+n}-a^n=$ $=a^n-a^n=0$ **19′** Если $n>0$, то $a^m+a^{m+n}=a^m(1+a^{m+n-m})=a^m(1+a^n)$ если же $n<0$, то, обозначивъ его абсол величину черезъ v, такъ что $n=-v$, получ $a^m+a^{m+n}=a^{m+n}(a^{m-m-n}+1)=a^{m+n}(a^{-n}+1)=$ $=a^{m-v}(a^v+1)$, наконецъ, при $n=0$ будемъ имѣть $a^m+a^{m+n}=a^m+$ $+a^m=2a^m$

Замѣчанія 1°—къ № 19 Полученный результатъ $a^n(a^m-1)$—не окончательный, именно (§ 2, 6°), имѣемъ $a^n(a^m-1)=a^n(a-1)(a^{m-1}+a^{m-2}+a^{m-3}+\ldots+a^2+a+1)$ **2°**—къ № 19′ Результатъ $a^m(1+a^n)=a^m(a^n+1)$ при *нечетномъ* n не окончательный, ибо въ этомъ случаѣ имѣемъ (§ 2, 7°) $a^n+1=(a+1)(a^{n-1}-a^{n-2}+a^{n-3}-\ldots+a^2-$ $-a+1)$

20 $b^{3n}+b^{2n}=b^{2n}(b^{3n-2n}+1)=b^{2n}(b^n+1)$ О случаѣ нечетнаго n—см замѣч 2° къ № 19′ **20′** $b^{3n}-b^{2n-1}=b^{2n-1}(b^{3n-2n+1}-1)=b^{2n-1}(b^{n+1}-1)$ Положимъ $n+1=m$, тогда результатъ будетъ $b^{2m-3}(b^m-1)$, о преобразованіи выраженія въ скобкахъ—см замѣч 1° къ № 19

21 Т к при n цѣломъ и положительномъ $2n-1<3n-1$ то выносимъ за скобки b^{2n-1}, именно $b^{3n-1}-b^{2n-1}=b^{2n-1}(b^{3n-1-2n+1}-1)=$ $=b^{2n-1}(b^n-1)$, см также замѣч 1° къ № 19. **21′** При n цѣломъ и положит $3n+1\leqq 4n$, а потому $b^{3n+1}+b^{4n}=b^{3n+1}(1+b^{4n-3n-1})=b^{3n+1}(b^{n-1}+1)$, см замѣч 2° къ № 19′ для случая, когда $n-1$—нечетно, т е когда n—четно

22 $a^{2n}b^n+a^{5n}b^{2n}=a^{2n}b^n(1+a^{5n-2n}b^{2n-n})=a^{2n}b^n(a^{3n}b^n+1)$ **22′** $a^nb^{3n}-$ $-a^{2n}b^n=a^nb^n(b^{3n-n}-a^{2n-n})=a^nb^n(b^{2n}-a^n)$

Замѣчанія 1°—къ № 22 Т к $a^{3n}b^n+1=(a^3b)^n+1=x^n+1$, гдѣ $x=a^3b$, то о случаѣ нечетнаго n—см замѣч 2° къ № 19′ **2°**—къ № 22′ Т к $b^{2n}-a^n=(b^2)^n-a^n=x^n-a^n$, гдѣ $x=b^2$, то о дальнѣйшемъ разложеніи—см замѣч 1° къ № 19

23 $ax-bx+cx=x(a-b+c)$ **23′** $-ax+bx-cx=-x(a-b+c)$

Указаніе Если въ данномъ многочленѣ болѣе 2-хъ членовъ, то иногда бываетъ выгоднѣе выносить за скобки общаго множителя со

---

*) Каковымъ n и является въ данномъ случаѣ, ибо пока мы имѣемъ дѣло только съ *цѣлыми и положительными степенями количествъ*

знакомъ «—», а не «+»,—между прочимъ, когда большинство членовъ имѣютъ знакъ «—»*), съ цѣлью получить въ скобкахъ большинство положительныхъ членовъ (примѣры №№ 23′, 24 и др)

24 $-2a+ax-ay=-a(2-x+y)$ 24′ $2a-ax+3ay=a(2-x+3y)$

25 $3ab-6a^2b^2+9a^3b^3=3ab(1-2ab+3a^2b^2)$ 25′ $-2a^3b^3+4a^2b^2-6ab=-2ab(a^2b^2-2ab+3)$

26 $-8a^3b+12a^2b^2-20a^4b^3=-4a^2b(2a-3b+5a^2b^2)$ 26′. $9a^5b^2-6a^3b^3+15a^2b^5=3a^2b^2\ (3a^3-2ab+5b^3)$

27 $8a^4c^3-6a^4c^2+16a^3c^4=2a^3c^2(4ac-3a+8c^2)$ 27′ $-16a^4c^3+12a^2c^4-20a^5c^2=-4a^2c^2(4a^2c-3c^2+5a^3)$

28 $-15a^5c^7+5a^8c^6-10a^9c^5=-5a^5c^5(3c^2-a^3c+2a^4)$ 28′ $24a^6c^6-16a^9c^7+40a^{10}c^5=8a^6c^5(3c-2a^3c^2+5a^4)$

29 $54a^3b^5-42a^5c^6-24a^4b^7=6a^3(9b^5-7a^2c^6-4ab^7)$ 29′ $35a^5b^4-40a^3c^4+15a^2b^3=5a^2(7a^3b^4-8ac^4+3b^3)$

30 $42a^5b^4-35a^3b^5+56b^3c^4=7b^3(6a^5b-5a^3b^2+8c^4)$ 30′ $48a^4b^5-54a^2b^6-30b^4c^3=6b^4(8a^4b-9a^2b^2-5c^3)$

2-ой случай разложенія *вынесеніе за скобки многочленнаго множителя*, общаго всѣмъ членамъ даннаго полинома 1° Полиномъ въ этомъ случаѣ имѣетъ видъ $A_1B_1C_1 \quad +A_2B_2C_2 \quad +A_3B_3C_3$. + и т д, гдѣ A_k, B_k, C_k, $(k=1, 2, 3, \quad)$ суть въ свою очередь (всѣ или нѣкоторыя) многочленныя выраженія 2° Если въ этомъ полиномѣ, напр, $A_1=\alpha^m$, $A_2=\alpha^n$, $A_3=\alpha^p$, , гдѣ α—въ свою очередь полиномъ, а $m, n, p,$. —цѣлыя положительныя числа, при чемъ, положимъ, $m \leqq n \leqq p$. ,—то за скобки выносимъ *многочленъ* α въ степени m, иначе,—выносимъ общаго множителя $\pm\alpha^m$ по образцу того, какъ это производится въ 1-мъ случаѣ 3° Так образ, данный случай приводится къ 1 му случаю разложенія 4° Къ нему относятся №№ **31—36**

31 $a^2(a+x)+x^2(a+x)=(a+x)\ [a^2\ \ 1+x^2\ \ 1]=(a+x)(a^2+x^2)$ 31′. $a^2(a-x)+x^2(a-x)=(a-x)\ [a^2\ \ 1+x^2\ \ 1]=(a-x)(a^2+x^2)$

32 $2p(p-q)+3q(p-q)=(p-q)(2p+3q)$ 32′ $2p(p+q)-3q(p+q)=(p+q)(2p-3q)$

33 $a(x+1)-2x(x+1)=(x+1)(a-2x)$ 33′. $2a(x-1)-x(x-1)=(x-1)(2a-x)$

34 $2(p-1)^2-4q(p-1)=(p-1)\,[2(p-1)^{2-1}-4q]=(p-1)\,[2(p-1)-4q]=(p-1)(2p-4q-2)=(p-1)\ \ 2(p-2q-1)=2(p-1)\,(p-2q-1)$ 34′. $4q(p+1)+2(p+1)^2=(p+1)\,[4q+2(p+1)]=(p+1)(2p+4q+2)=(p+1)\ \ 2(p+2q+1)=2(p+1)(p+2q+1)$

35 $mn(m^2+n^2)-n^2(m^2+n^2)=(m^2+n^2)\ \ (mn-n^2)=(m^2+n^2)\ \ n(m-n)=(m^2+n^2)(m-n)n$ 35′ $m^2(m^2+n^2)-mn(m^2+n^2)=(m^2+n^2)\ \ (m^2-mn)=(m^2+n^2)\cdot m(m-n)=(m^2+n^2)(m-n)m$

---

*) Или, напр, когда первый членъ многочлена имѣетъ знакъ «—» Необходимо бываетъ также выносить общаго множителя за скобки со знакомъ «—» въ нѣкоторыхъ случаяхъ разложенія

Далѣе. въ случаѣ *квадратнаго ур-ія* выраженіе въ лѣвой части его всегда приводятъ къ такому виду, чтобы высшій членъ, т е содержащій неизвѣстное во 2 ой степени, былъ со знакомъ «+» если, поэтому, высшій членъ имѣетъ знакъ «—», то послѣдній обязательно выносится за скобки, съ общимъ множителемъ (коэффиціентовъ, для сокращенія ур-ія или для иной цѣли), если таковой имѣется (иногда имъ считаютъ коэффиціентъ при квадратѣ неизвѣстнаго, аналогично въ случаѣ трехчлена или же неравенства 2-ой степени, для наслѣдованія корней).

36 $4m^2(n^2-2)+2mn(n^2-2)=(n^2-2)\ (4m^2+2mn)=(n^2-2)\ 2m(2m+n)=2m(2m+n)(n^2-2)$ **36′** $2m^2(n^2+2)-4mn(n^2+2)=(n^2+2)(2m^2-4mn)=(n^2+2)\ 2m(m-2n)=2m(m-2n)(n^2+2)$

3-iй случай разложенія *группировка членовъ для обнаруженія многочленнаго множителя,* общаго всѣмъ группамъ членовъ даннаго полинома 1° Всѣ члены даннаго полинома разбиваются на группы, прилично подобранныя, при чемъ въ отдѣльныхъ группахъ можетъ быть и по одному лишь члену 2° Для обнаруженія въ группахъ многочленнаго множителя, общаго всѣмъ группамъ, каждая изъ нихъ заключается въ скобки, и имъ приписывается либо знакъ $+$, либо $-$ въ первомъ случаѣ члены, входящіе въ группу, сохраняютъ свои знаки, во второмъ—мѣняютъ ихъ на обратные 3° Послѣ этого задача приводится ко 2-му случаю разложенія 4° Къ разсматриваемому случаю принадлежатъ №№ 37—50

37 Въ выраженіи $a(x+y)+x+y$ относимъ членъ $a(x+y)$—къ одной группѣ, а члены $+x$ и $+y$ —къ другой, съ ихъ знаками, такъ что обѣ группы будутъ со знакомъ «$+$», а именно $a(x+y)+(x+y)$ Это же выраженіе легко обнаруживаетъ общаго множителя $x+y$, вынеся его за скобки (2 случ) получ $(x+y)(a+1)$ **37′** $a(x-y)+x-y=a(x-y)+(x-y)=(x-y)(a+1)$

38 $2b(x-1)+x-1=2b(x-1)+(x-1)=(x-1)(2b+1)$ **38′** $2b(x+1)+x+1=2b(x+1)+(x+1)=(x+1)(2b+1)$

39 $2a(y+1)-y-1$ Къ первой группѣ относимъ членъ $2a(y+1)$, ко второй—члены $-y$ и -1, для того же, чтобы въ группахъ обнаружился общій (многочленный) множитель, заключаемъ 2-ю группу въ скобки со знакомъ «$-$», тогда получ выраженіе $2a(y+1)-(y+1)$, которое, по вынесеніи общаго множителя $y+1$, разлагается въ произведеніе $(y+1)(2a-1)$ Мы могли бы оставить членамъ второй группы ихъ знаки и заключить ее въ скобки съ плюсомъ, но тогда слѣдуетъ придать «$-$» первой группѣ, 1-я группа $-[-2a(y+1)]=-[2a(-y-1)]=-2a(-y-1)$, 2-я группа $+(-y-1)$, все выраженіе$=-2a(-y-1)+(-y-1)=(-y-1)(-2a+1)$, что приводится легко къ болѣе простому виду $(y+1)(2a-1)$ Какъ видимъ, первый способъ скорѣе даетъ этотъ послѣдній простой результатъ **39′** $3a(y-1)-y+1=3a(y-1)-(y-1)=(y-1)(3a-1)$

40 $b(x-y)-x+y=b(x-y)-(x-y)=(x-y)(b-1)$ **40′** $b(x+y)-x-y=b(x+y)-(x+y)=(x+y)(b-1)$

41. $4x(a^n+x^n)-a^n-x^n=4x(a^n+x^n)-(a^n+x^n)=(a^n+x^n)(4x-1)$ Замѣтимъ однако, что при нечетномъ n множитель a^n+x^n есть составное выраженіе (№ 19′, замѣч и др) **41′** $5a(x^n-a^n)-a^n+x^n=5a(x^n-a^n)+(x^n-a^n)=(x^n-a^n)(5a+1)$ См № 19 замѣч и др

42 $3a(a^n-y^n)-y^n+a^n=3a(a^n-y^n)+(a^n-y^n)=(a^n-y^n)(3a+1)$ Задача вполнѣ схожа съ № 41′ **42′** $2x(y^n+x^n)-x^n-y^n=2x(x^n+y^n)-(x^n+y^n)=(x^n+y^n)(2x-1)$ О случаѣ нечетнаго n—см № 41

43 $m(q-p)-(p-q)=m(q-p)+[-(p-q)]=m(q-p)+(-p+q)=m(q-p)+(q-p)=(q-p)(m+1)$. **43′** $n(p-q)+(q-p)=n(p-q)-[-(q-p)]=n(p-q)-(-q+p)=n(p-q)-(p-q)=(p-q)(n-1)$

44 $6a(2p-q)+3b(q-2p)=6a(2p-q)-[-3b(q-2p)]=6a(2p-q)-[+3b(-q+2p)]=6a(2p-q)-3b(2p-q)=(2p-q)(6a-3b)=(2p-q)\ 3(2a-b)=3(2a-b)(2p-q)$ **44′** $6a(p-2q)-3b(2q-p)=6a(p-2q)+[-3b(2q-p)]=$

$=6a(p-2q)+[3b(-2q+p)]=6a(p-2q)+3b(p-2q)=(p-2q)(6a+3b)=$ $=(p-2q)\ 3(2a+b)=3(2a+b)(p-2q)$

45 $p(1-a+a^2)-1+a-a^2=p(1-a+a^2)-(1-a+a^2)=(1-a+a^2)(p-$ $-1)$ 45′ $p(1-a-a^2)+1-a-a^2=p(1-a-a^2)+(1-a-a^2)=(1-a-a^2)(p+1)$

46 $q(b^3+b^2-b)+b^3+b^2-b=q(b^3+b^2-b)+(b^3+b^2-b)=(b^3+b^2-b)(q+$ $+1)=b(b^2+b-1)(q+1)$ 46′ $q(b^3-b^2+b)-b^3+b^2-b=q(b^3-b^2+b)-(b^3-$ $-b^2+b)=(b^3-b^2+b)(q-1)=b(b^2-b+1)(q-1)$

47 $2(p-q)^2-5q(q-p)=2(p-q)^2+5q(-q+p)=2(p-q)^2+5q(p-q)=$ $=(p-q)[2(p-q)+5q]=(p-q)(2p-2q+5q)=(p-q)(2p+3q)$ 47′ $2p(p-$ $-q)-3(q-p)^2=-2p(q-p)-3(q-p)^2=-(q-p)[2p+3(q-p)]=-(q-p)$ $(2p+3q-3p)=(-q+p)(3q-p)=(p-q)(3q-p)$

48 $3p(p-q)-5(q-p)^2=-3p(q-p)-5(q-p)^2=-(q-p)[3p+5(q-p)]=$ $=-(q-p)(3p+5q-5p)=(p-q)(5q-2p)$ 48′ $3(p-q)^2-2q(q-p)=3(p-$ $-q)^2+2q(p-q)=(p-q)[3(p-q)+2q]=(p-q)(3p-3q+2q)=(p-q)(3p-q)$

49 $a(b-1)+c(1-b)-b+1=a(b-1)-c(b-1)-(b-1)=(b-1)(a-$ $-c-1)$ **Иначе** $a(b-1)+c(1-b)-b+1=-a(1-b)+c(1-b)+(1-b)=$ $=(1-b)(-a+c+1)=(1-b)(1+c-a)$ Легко видѣть, что въ обоихъ способахъ результаты тождественны, 49′ $a(1-b)+c(b-1)-b+1=a(1-b)-$ $-c(1-b)+(1-b)=(1-b)(a-c+1)$ **Иначе** $a(1-b)+c(b-1)-b+1=-$ $-a(b-1)+c(b-1)-(b-1)=(b-1)(-a+c-1)$ Легко доказать, что $(1-$ $-b)(a-c+1)=(b-1)(-a+c-1)$.

50 $a(2-x^2)+b(x^2-2)-2+x^2=a(2-x^2)-b(2-x^2)-(2-x^2)=(2-x^2)(a-$ $-b-1)$ **Или** $a(2-x^2)+b(x^2-2)-2+x^2=-a(x^2-2)+b(x^2-2)+(x^2-2)=(x^2-$ $-2)(-a+b+1)$ Разумѣется результаты въ обоихъ способахъ тождественны 50′ $a(x^3-3)+b(3-x^3)-3+x^3=a(x^3-3)-b(x^3-3)+(x^3-3)=$ $=(x^3-3)(a-b+1)$ **Или** $a(x^3-3)+b(3-x^3)-3+x^3=-a(3-x^3)+b(3-$ $-x^3)-(3-x^3)=(3-x^3)(-a+b-1)$ Легко видѣть что $(x^3-3)(a-b+$ $+1)=(3-x^3)(-a+b-1)$

4-ый случай разложенія *обнаруженіе общаго многочленнаго множителя посредствомъ группировки членовъ и вынесенія въ группахъ общаго одночленнаго множителя*, различнаго для каждой группы 1° Члены даннаго полинома соединяются въ группы, приличнымъ образомъ выбранныя (подобно тому, какъ въ случ 3 мъ) 2° Во всѣхъ или въ нѣкоторыхъ группахъ выносится за скобки, со знакомъ + или —, смотря по обстоятельствамъ, общій въ нихъ одночленный множитель (какъ въ случ 1-мъ), различный вообще для каждой группы 3° Обнаружившійся послѣ этого многочленный множитель, общій всѣмъ группамъ, выносится за скобки передъ всѣми группами (какъ въ случ 2-мъ) 4° Къ разсматриваемому случаю относятся №№ 51—58, 64, 66. 69—70 и 79—80′.

Так обр, этотъ случай—сложный изъ первыхъ трехъ случаевъ разложенія

51 **I-ый способъ** $ac+ad+bc+bd=(ac+ad)+(bc+bd)=a(c+d)+$ $+b(c+d)=(c+d)(a+b)$ **2-ой способъ** $ac+ad+bc+bd=(ac+bc)+(ad+$ $+bd)=c(a+b)+d(a+b)=(a+b)(c+d)$ 51′ **I способъ** $ac-ad+bc-bd=$ $=(ac-ad)+(bc-bd)=a(c-d)+b(c-d)=(c-d)(a+b)$. **2 способъ** $ac-ad+$ $+bc-bd=(ac+bc)-(ad+bd)=c(a+b)-d(a+b)=(a+b)(c-d)$

52 **I-ый спос** $ac-ad-bc+bd=(ac-ad)-(bc-bd)=a(c-d)-b(c-d)=$ $=(c-d)(a-b)$ **2-ой спос** $ac-ad-bc+bd=(ac-bc)-(ad-bd)=c(a-b)-$ $-d(a-b)=(a-b)(c-d)$ 52′ **I спос** $ac+ad-bc-bd=(ac+ad)-(bc+bd)=$ $=a(c+d)-b(c+d)=(c+d)(a-b)$ **2 спос** $ac+ad-bc-bd=(ac-bc)+(ad-$ $-bd)=c(a-b)+d(a-b)=(a-b)(c+d)$

53 $x^3-x^2z+2xz^2-2z^3=(x^3-x^2z)+(2xz^2-2z^3)=x^2(x-z)+2z^2(x-z)=$ $=(x-z)(x^2+2z^2)$ **Другой способъ** $x^3-x^2z+2xz^2-2z^3=(x^3+2xz^2)-(x^2z+$ $+2z^3)=x(x^2+2z^2)-z(x^2+2z^2)=(x^2+2z^2)(x-z)$ **53′** $x^3+x^2z+2xz^2+2z^3=$ $=(x^3+x^2z)+(2xz^2+2z^3)=x^2(x+z)+2z^2(x+z)=(x+z)(x^2+2z^2)$ **Другой спос** $x^3+x^2z+2xz^2+2z^3=(x^3+2xz^2)+(x^2z+2z^3)=x(x^2+2z^2)+z(x^2+2z^2)=$ $=(x^2+2z^2)(x+z)$

54 **I-ое рѣшенiе** $x^3+x^2z-2xz^2-2z^3=(x^3+x^2z)-(2xz^2+2z^3)=x^2(x+$ $+z)-2z^2(x+z)=(x+z)(x^2-2z^2)$ **2-ое рѣшенiе** $x^3+x^2z-2xz^2-2z^3=$ $=(x^3-2xz^2)+(x^2z-2z^3)=x(x^2-2z^2)+z(x^2-2z^2)=(x^2-2z^2)(x+z)$ **54′** **I рѣшенiе** $x^3-x^2z-2xz^2+2z^3=(x^3-x^2z)-(2xz^2-2z^3)=x^2(x-z)-2z^2(x-$ $-z)=(x-z)(x^2-2z^2)$ **II рѣшенiе** $x^3-x^2z-2xz^2+2z^3=(x^3-2xz^2)-(x^2z-$ $-2z^3)=x(x^2-2z^2)-z(x^2-2z^2)=(x^2-2z^2)(x-z)$

55 **I-ое рѣшенiе** $a^3+2a^2+2a+4=(a^3+2a^2)+(2a+4)=a^2(a+2)+2(a+$ $+2)=(a+2)(a^2+2)$ **2-ое рѣш** $a^3+2a^2+2a+4=(a^3+2a)+(2a^2+4)=a(a^2+$ $+2)+2(a^2+2)=(a^2+2)(a+2)$ **55′** **I рѣш** $a^3-2a^2-2a+4=(a^3-2a^2)-$ $-(2a-4)=a^2(a-2)-2(a-2)=(a-2)(a^2-2)$ **II рѣш** $a^3-2a^2-2a+4=$ $=(a^3-2a)-(2a^2-4)=a(a^2-2)-2(a^2-2)=(a^2-2)(a-2)$

56 **I-ое рѣш** $a^3+2a^2-2a-4=(a^3+2a^2)-(2a+4)=a^2(a+2)-2(a+2)=(a+2)$ (a^2-2) **2 ое рѣш** $a^3+2a^2-2a-4=(a^3-2a)+(2a^2-4)=a(a^2-2)+2(a^2-$ $-2)=(a^2-2)(a+2)$ **56′** **I рѣш** $a^3-2a^2+2a-4=(a^3+2a)-(2a^2+4)=$ $=a(a^2+2)-2(a^2+2)=(a^2+2)(a-2)$ **II рѣш** $a^3-2a^2+2a-4=(a^3-2a^2)+$ $+(2a-4)=a^2(a-2)+2(a-2)=(a-2)(a^2+2)$

57 **I-ый способъ** $a^2b^3-abc^2d+ab^2cd-c^3d^2=(a^2b^3-abc^2d)+(ab^2cd-$ $-c^3d^2)=ab(ab^2-c^2d)+cd(ab^2-c^2d)=(ab^2-c^2d)(ab+cd)$ **2-ой спос** $a^2b^3-abc^2d+$ $+ab^2cd-c^3d^2=(a^2b^3+ab^2cd)-(abc^2d+c^3d^2)=ab^2(ab+cd)-c^2d(ab+cd)=$ $=(ab+cd)(ab^2-c^2d)$ **57′** **I способъ** $a^2b^3+abc^2d+ab^2cd+c^3d^2=(a^2b^3+$ $+abc^2d)+(ab^2cd+c^3d^2)=ab(ab^2+c^2d)+cd)(ab^2+c^2d)=(ab^2+c^2d)(ab+cd)$ **II спос** $a^2b^3+abc^2d+ab^2cd+c^3d^2=(a^2b^3+ab^2cd)+(ac^2d+c^3d^2)=ab^2(ab+cd)+$ $+c^2d(ab+cd)=(ab+cd)(ab^2+c^2d)$

58 **I-ый способъ** $a^2b^3+abc^2d-ab^2cd-c^3d^2=(a^2b^3+abc^2d)-(ab^2cd+$ $+c^3d^2)=ab(ab^2+c^2d)-cd(ab^2+c^2d)=(ab^2+c^2d)(ab-cd)$ **2-ой спос** a^2b^3+ $+abc^2d-ab^2cd-c^3d^2=(a^2b^3-ab^2cd)+(abc^2d-c^3d^2)=ab^2(ab-cd)+c^2d(ab-$ $-cd)=(ab-cd)(ab^2+c^2d)$ **58′** **I спос** $a^2b^3-abc^2d-ab^2cd+c^3d^2=(a^2b^3-$ $-abc^2d)-(ab^2cd-c^3d^2)=ab(ab^2-c^2d)-cd(ab^2-c^2d)=(ab^2-c^2d)(ab-cd)$ **II спос** $a^2b^3-abc^2d-ab^2cd+c^3d^2=(a^2b^3-ab^2cd)-(abc^2d-c^3d^2)=ab^2(ab-$ $-cd)-c^2d(ab-cd)=(ab-cd)(ab^2-c^2d)$

№№ 59—62′ представляютъ 2-ой случай разложенiя, при чемъ въ результатѣ, получаемомъ по вышеприведенному правилу (передъ рѣш № 31), оказывается возможнымъ сдѣлать нѣкоторыя упрощенiя (приведенiе подобныхъ членовъ въ выраженiи производителя)

59 $(4a-5b)(3m-2p)+(4b-a)(3m-2p)=(3m-2p)\ [(4a-5b)+(4b-$ $-a)]=(3m-2p)(4a-5b+4b-a)=(3m-2p)(3a-b)$ **59′**. $(4a+5b)(3p-$ $-2m)-(4b+a)(3p-2m)=(3p-2m)\ [(4a+5b)-(4b+a)]=(3p-2m)(4a+$ $+5b-4b-a)=(3p-2m)(3a+b)$.

60 $(5a-2b)(2m+3p)-(2a-7b)(2m+3p)=(2m+3p)\ [(5a-2b)-(2a-$ $-7b)]=(2m+3p)(5a-2b-2a+7b)=(2m+3p)(3a+5b)$ **60′** $(2a-5b)(2p+$ $+3m)+(4a-7b)(2p+3m)=(2p+3m)\ [(2a-5b)+(4a-7b)]=(2p+3m)(2a-$ $-5b+4a-7b)=(2p+3m)(6a-12b)=6(a-2b)(2p+3m)$

61. $(7a-3x)(5c-2d)-(6a-2x)(5c-2d)=(5c-2d)[(7a-3x)-(6a-2x)]=(5c-2d)(7a-3x-6a+2x)=(5c-2d)(a-x)$. **61'.** $(3x-7a)(2d-5c)+(6a-2x)(2d-5c)=(2d-5c)[(3x-7a)+(6a-2x)]=(2d-5c)(3x-7a+6a-2x)=(2d-5c)(x-a)$.

62. $(4a-3x)(5c+2d)-(6a-4x)(5c+2d)=(5c+2d)[(4a-3x)-(6a-4x)]=(5c+2d)(4a-3x-6a+4x)=(5c+2d)(x-2a)$. **62'.** $(3x-4a)(2d+5c)+(6a-4x)(2d+5c)=(2d+5c)[(3x-4a)+(6a-4x)]=(2d+5c)(3x-4a+6a-4x)=(2d+5c)(2a-x)$.

№№ 63—68 и 71—72' (кромѣ 64 и 66) при рѣшеніи допускаютъ примѣненіе 1-го и 4 го случаевъ разложенія; №№ 64 и 66, 69—70 и 73—76' иллюстрируютъ 4 ый способъ.

63. **1-ый способъ.** $6x^3-6mx^2-3m^2x+3m^3=3(2x^3-2mx^2-m^2x+m^3)=3[(2x^3-2mx^2)-(m^2x-m^3)]=3[2x^2(x-m)-m^2(x-m)]=3[(x-m)(2x^2-m^2)]=3(x-m)(2x^2-m^2)$. **2-ой способъ.** $6x^3-6mx^2-3m^2x+3m^3=3(2x^3-2mx^2-m^2x+m^3)=3[(2x^3-m^2x)-(2mx^2-m^3)]=3[x(2x^2-m^2)-m(2x^2-m^2)]=3(2x^2-m^2)(x-m)$. **3-ій способъ.** $6x^3-6mx^2-3m^2x+3m^3=(6x^3-6mx^2)-(3m^2x-3m^3)=6x^2(x-m)-3m^2(x-m)=(x-m)(6x^2-3m^2)=(x-m)\cdot 3(2x^2-m^2)=3(x-m)(2x^2-m^2)$. **4-ый способъ.** $6x^3-6mx^2-3m^2x+3m^3=(6x^3-3m^2x)-(6mx^2-3m^3)=3x(2x^2-m^2)-3m(2x^2-m^2)=(2x^2-m^2)(3x-3m)=(2x^2-m^2)\cdot 3(x-m)=3(2x^2-m^2)(x-m)$. **63'.** **I спос.** $6m^3-6m^2x+3mx^2-3x^3=3(2m^3-2m^2x+mx^2-x^3)=3[(2m^3-2m^2x)+(mx^2-x^3)]=3[2m^2(m-x)+x^2(m-x)]=3(m-x)(2m^2+x^2)$. **II спос.** $6m^3-6m^2x+3mx^2-3x^3=3(2m^3-2m^2x+mx^2-x^3)=3[(2m^3+mx^2)-(2m^2x+x^3)]=3[m(2m^2+x^2)-x(2m^2+x^2)]=3(2m^2+x^2)(m-x)$. **III спос.** $6m^3-6m^2x+3mx^2-3x^3=(6m^3-6m^2x)+(3mx^2-3x^3)=6m^2(m-x)+3x^2(m-x)=(m-x)(6m^2+3x^2)=(m-x)\cdot 3(2m^2+x^2)=3(m-x)(2m^2+x^2)$. **IV спос.** $6m^3-6m^2x+3mx^2-3x^3=(6m^3+3mx^2)-(6m^2x+3x^3)=3m(2m^2+x^2)-3x(2m^2+x^2)=(2m^2+x^2)(3m-3x)=3(2m^2+x^2)(m-x)$.

Указаніе. Изъ рѣш. этихъ №№-ровъ легко усматривается сущность 4-хъ пріемовъ, которые могутъ быть примѣнены при рѣш. №№ 63—68' и 71—72 (кромѣ №№ 64 и 66). Вмѣстѣ съ тѣмъ можно замѣтить, что 1 ый способъ—наиболѣе послѣдователенъ, а потому не желая, кромѣ того, повторяться, мы рѣшимъ послѣдующіе №№-ра только этимъ способомъ, любой изъ остальныхъ можетъ служить повѣркой.

64. **1-ый способъ.** $56a^2-40ab+63ac-45bc=(56a^2-40ab)+(63ac-45bc)=8a(7a-5b)+9c(7a-5b)=(7a-5b)(8a+9c)$. **2-ой спос.** $56a^2-40ab+63ac-45bc=(56a^2+63ac)-(40ab+45bc)=7a(8a+9c)-5b(8a+9c)=(8a+9c)(7a-5b)$. **64'.** **I спос.** $56a^2-40ac-63ab+45bc=(56a^2-40ac)-(63ab-45bc)=8a(7a-5c)-9b(7a-5c)=(7a-5c)(8a-9b)$. **II спос.** $56a^2-40ac-63ab+45bc=(56a^2-63ab)-(40ac-45bc)=7a(8a-9b)-5c(8a-9b)=(8a-9b)(7a-5c)$.

65. $8a^2c-8a^2x-6cx^3+6x^4=2(4a^2c-4a^2x-3cx^3+3x^4)=2[(4a^2c-4a^2x)-(3cx^3-3x^4)]=2[4a^2(c-x)-3x^3(c-x)]=2(c-x)(4a^2-3x^3)$. **65'.** $8a^2x-8a^2c+6c^3x-6c^4=2(4a^2x-4a^2c+3c^3x-3c^4)=2[(4a^2x-4a^2c)+(3c^3x-3c^4)]=2[4a^2(x-c)+3c^3(x-c)]=2(x-c)(4a^2+3c^3)$.

66. **1-ый способъ.** $32ac^2-15cx^2+48ax^2-10c^3=(32ac^2+48ax^2)-(15cx^2+10c^3)=16a(2c^2+3x^2)-5c(3x^2+2c^2)=(2c^2+3x^2)(16a-5c)$. **2-ой спос.** $32ac^2-15cx^2+48ax^2-10c^3=(32ac^2-10c^3)+(48ax^2-15cx^2)=2c^2(16a-5c)+3x^2(16a-5c)=(16a-5c)(2c^2+3x^2)$. **66'.** **I способъ.** $32ax^2-15c^2x+48ac^2-10x^3=(32ax^2+48ac^2)-(10x^3+15c^2x)=16a(2x^2+3c^2)-5x(2x^2+3c^2)=(2x^2+3c^2)(16a-5x)$. **II спос.** $32ax^2-15c^2x+48ac^2-10x^3=(32ax^2-10x^3)+(48ac^2-15c^2x)=2x^2(16a-5x)+3c^2(16a-5x)=(16a-5x)(2x^2+3c^2)$.

67 $4a^2bc-6ab^2c+8a^2bd-12ab^2d=2ab\ (2ac-3bc+4ad-6bd)=2ab[(2ac-3bc)+(4ad-6bd)]=2ab[c(2a-3b)+2d(2a-3b)]=2ab(2a-3b)(c+2d)$ **67′** $4a^2bc-8a^2bd-6ab^2c+12ab^2d=2ab(2ac-4ad-3bc+6bd)=2ab\,[(2ac-4ad)-(3bc-6bd)]=2ab[2a(c-2d)-3b(c-2d)]=2ab(c-2d)(2a-3b)$

68 $6a^3b^2-12a^3b^3-15a^2b^3+30a^2b^4=3a^2b^2\ \ (2a-4ab-5b+10b^2)=3a^2b^2[(2a-4ab)-(5b-10b^2)]=3a^2b^2[2a(1-2b)-5b(1-2b)]=3a^2b^2(1-2b)(2a-5b)$ **68′** $6a^3b^2-15a^2b^3+12a^3b^3-30a^2b^4=3a^2b^2(2a-5b+4ab-10b^2)=3a^2b^2[(2a-5b)+(4ab-10b^2)]=3a^2b^2[(2a-5b)+2b(2a-5b)]=3a^2b^2(2a-5b)(1+2b)$

69 **1-ый способъ.** $2a^3b^2-3abc^2d+2a^2bcd-3c^3d^2=(2a^3b^2-3abc^2d)+(2a^2bcd-3c^3d^2)=ab\ \ (2a^2b-3c^2d)+cd\,.\,(2a^2b-3c^2d)=(2a^2b-3c^2d)(ab+cd)$ **2-ой спос** $2a^3b^2-3abc^2d+2a^2bcd-3c^3d^2=(2a^3b^2+2a^2bcd)-(3abc^2d+3c^3d^2)=2a^2b(ab+cd)-3c^2d(ab+cd)=(ab+cd)(2a^2b-3c^2d)$ **69′** **I спос** $2a^3b^2-2a^2bcd-3abc^2d+3c^3d^2=(2a^3b^2-2a^2bcd)-(3abc^2d-3c^3d^2)=2a^2b(ab-cd)-3c^2d(ab-cd)=(ab-cd)(2a^2b-3c^2d)$ **II спос** $2a^3b^2-2a^2bcd-3abc^2d+3c^3d^2=(2a^3b^2-3abc^2d)-(2a^2bcd-3c^3d^2)=ab(2a^2b-3c^2d)-cd(2a^2b-3c^2d)=(2a^2b-3c^2d)(ab-cd)$

70 **1-ый способъ** $5a^2b^3-2abc^2d-5ab^2cd+2c^3d^2=(5a^2b^3-2abc^2d)-(5ab^2cd-2c^3d^2)=ab(5ab^2-2c^2d)-cd(5ab^2-2c^2d)=(5ab^2-2c^2d)(ab-cd)$ **2 ой спос** $5a^2b^3-2abc^2d-5ab^2cd+2c^3d^2=(5a^2b^3-5ab^2cd)-(2abc^2d-2c^3d^2)=5ab^2(ab-cd)-2c^2d(ab-cd)=(ab-cd)(5ab^2-2c^2d)$ **70′** **I спос** $5a^2b^3-5ab^2cd+2abc^2d-2c^3d^2=(5a^2b^3-5ab^2cd)+(2abc^2d-2c^3d^2)=5ab^2(ab-cd)+2c^2d(ab-cd)=(ab-cd)(5ab^2+2c^2d)$ **II спос** $5a^2b^3-5ab^2cd+2abc^2d-2c^3d^2=(5a^2b^3+2abc^2d)-(5ab^2cd+2c^3d^2)=ab\ (5ab^2+2c^2d)-cd\ (5ab^2+2c^2d)=(5ab^2+2c^2d)(ab-cd)$

71 $16a^4b^3c^2-12a^3b^4+8a^2b^2c^2-6ab^3=2ab^2(8a^3bc^2-6a^2b^2+4ac^2-3b)=2ab^2[(8a^3bc^2-6a^2b^2)+(4ac^2-3b)]=2ab^2\,[2a^2b(4ac^2-3b)+(4ac^2-3b)]=2ab^2(4ac^2-3b)(2a^2b+1)$ **Иначе** $16a^4b^3c^2-12a^3b^4+8a^2b^2c^2-6ab^3=2ab^2\,.\,(8a^3bc^2-6a^2b^2+4ac^2-3b)=2ab^2\,[(8a^3bc^2+4ac^2)-(6a^2b^2+3b)]=2ab^2\,[4ac^2(2a^2b+1)-3b(2a^2b+1)]=2ab^2(2a^2b+1)(4ac^2-3b)$ **71′** $16a^3b^4c^2-12a^4b^3-8a^2b^2c^2+6a^3b=2a^2b(8ab^3c^2-6a^2b^2-4bc^2+3a)=2a^2b[(8ab^3c^2-6a^2b^2)-(4bc^2-3a)]=2a^2b[2ab^2(4bc^2-3a)-(4bc^2-3a)]=2a^2b(4bc^2-3a)(2ab^2-1)$ **Другой спос** $16a^3b^4c^2-12a^4b^3-8a^2b^2c^2+6a^3b=2a^2b(8ab^3c^2-6a^2b^2-4bc^2+3a)=2a^2b[(8ab^3c^2-4bc^2)-(6a^2b^2-3a)]=2a^2b[4bc^2(2ab^2-1)-3a(2ab^2-1)]=2a^2b(2ab^2-1)(4bc^2-3a)$

72 $6a^4bc-18a^5b^3c-15a^2b^2+45a^3b^4=3a^2b(2a^2c-6a^3b^2c-5b+15ab^3)=3a^2b[(2a^2c-6a^3b^2c)-(5b-15ab^3)]=3a^2b[2a^2c(1-3ab^2)-5b(1-3ab^2)]=3a^2b(1-3ab^2)\,(2a^2c-5b)$ См «указаніе» послѣ рѣш № 63′ **72′** $6ab^2c-18a^3b^5c+15a^2b^2-45a^4b^5=3ab^2(2c-6a^2b^3c+5a-15a^3b^3)=3ab^2[(2c+5a)-(6a^2b^3c+15a^3b^3)]=3ab^2[(2c+5a)-3a^2b^3(2c+5a)]=3ab^2(2c+5a)(1-3a^2b^3)$ **Иначе** $6ab^2c-18a^3b^5c+15a^2b^2-45a^4b^5=3ab^2\,(2c-6a^2b^3c+5a-15a^3b^3)=3ab^2\,[(2c-6a^2b^3c)+(5a-15a^3b^3)]=3ab^2[2c(1-3a^2b^3)+5a(1-3a^2b^3)]=3ab^2(1-3a^2b^3)\,(2c+5a)$

Указаніе Въ условіи № 72′, въ «Сборникѣ», *опечатка* знакъ при членѣ $15a^2b^2$ даннаго полинома (3-ій членъ) долженъ быть «+», а не «—», какъ напечатано

73 **1-ый способъ** $ax^2+bx^2+bx+ax+a+b=(ax^2+bx^2)+(ax+bx)+(a+b)=x^2(a+b)+x(a+b)+(a+b)=(a+b)(x^2+x+1)$ **2-ой спос** $ax^2+bx^2+bx+ax+a+b=(ax^2+ax)+(bx^2+bx)+(a+b)=ax(x+1)+bx(x+1)+(a+b)=[ax(x+1)+bx(x+1)]+(a+b)=(x+1)(ax+bx)+(a+b)=(x+1)x(a+b)+(a+b)=(a+b)\,[(x+1)x+1]=(a+b)\,(x^2+x+1)$ **3-ій спос** $ax^2+bx^2+bx+ax+a+b=(ax^2+a)+(bx^2+b)+(ax+$

$+bx)=a(x^2+1)+b(x^2+1)+x(a+b)=(x^2+1)(a+b)+x(a+b)=(a+b)[(x^2+1)+x]=(a+b)(x^2+x+1)$ **4-ый спос** $ax^2+bx^2+bx+ax+a+b=(ax^2+ax+a)+(bx^2+bx+b)=a(x^2+x+1)+b(x^2+x+1)=(x^2+x+1)(a+b)$ **73'** **I спос** $ax^2-bx^2-bx+ax+a-b=(ax^2-bx^2)+(ax-bx)+(a-b)=x^2(a-b)+x(a-b)+(a-b)=(a-b)(x^2+x+1)$ **II спос** $ax^2-bx^2-bx+ax+a-b=(ax^2+ax)-(bx^2+bx)+(a-b)=ax(x+1)-bx(x+1)+(a-b)=(x+1)(ax-bx)+(a-b)=(x+1)x(a-b)+(a-b)=(a-b)[(x+1)x+1]=(a-b)(x^2+x+1)$ **III спос** $ax^2-bx^2-bx+ax+a-b=(ax^2+a)-(bx^2+b)+(ax-bx)=a(x^2+1)-b(x^2+1)+x(a-b)=(x^2+1)(a-b)+x(a-b)=(a-b)[(x^2+1)+x]=(a-b)(x^2+x+1)$ **IV спос** $ax^2-bx^2-bx+ax+a-b=(ax^2+ax+a)-(bx^2+bx+b)=a(x^2+x+1)-b(x^2+x+1)=(x^2+x+1)(a-b)$

74 **1-ый способъ** $ax^2-bx^2+bx-ax+a-b=(ax^2-bx^2)-(ax-bx)+(a-b)=x^2(a-b)-x(a-b)+(a-b)=(a-b)(x^2-x+1)$ **2-ой спос** $ax^2-bx^2+bx-ax+a-b=(ax^2-ax)-(bx^2-bx)+(a-b)=[ax(x-1)-bx(x-1)]+(a-b)=x(x-1)(a-b)+(a-b)=(a-b)[x(x-1)+1]=(a-b)(x^2-x+1)$ **3-ій спос** $ax^2-bx^2+bx-ax+a-b=(ax^2+a)-(bx^2+b)-(ax-bx)=a(x^2+1)-b(x^2+1)-x(a-b)=(x^2+1)(a-b)-x(a-b)=(a-b)[(x^2+1)-x]=(a-b)(x^2-x+1)$ **4-ый спос** $ax^2-bx^2+bx-ax+a-b=(ax^2-ax+a)-(bx^2-bx+b)=a(x^2-x+1)-b(x^2-x+1)=(x^2-x+1)(a-b)$ **74'** **I спос** $ax^2+bx^2-bx-ax+a+b=(ax^2+bx^2)-(ax+bx)+(a+b)=x^2(a+b)-x(a+b)+(a+b)=(a+b)(x^2-x+1)$ **II спос** $ax^2+bx^2-bx-ax+a+b=(ax^2-ax)+(bx^2-bx)+(a+b)=[ax(x-1)+bx(x-1)]+(a+b)=x(x-1)(a+b)+(a+b)=(a+b)[x(x-1)+1]=(a+b)(x^2-x+1)$ **III спос** $ax^2+bx^2-bx-ax+a+b=(ax^2+a)+(bx^2+b)-(ax+bx)=a(x^2+1)+b(x^2+1)-x(a+b)=(x^2+1)(a+b)-x(a+b)=(a+b)[(x^2+1)-x]=(a+b)(x^2-x+1)$ **IV спос** $ax^2+bx^2-bx-ax+a+b=(ax^2-ax+a)+(bx^2-bx+b)=a(x^2-x+1)+b(x^2-x+1)=(x^2-x+1)(a+b)$.

75 **1-ый способъ** $ax^2-bx^2+ax-cx^2-bx-cx=x(ax-bx+a-cx-b-c)=x[(ax+a)-(bx+b)-(cx+c)]=x[a(x+1)-b(x+1)-c(x+1)]=x(x+1)(a-b-c)$ **2-ой спос** $ax^2-bx^2+ax-cx^2-bx-cx=x(ax-bx+a-cx-b-c)=x[(ax-bx-cx)+(a-b-c)]=x[x(a-b-c)+(a-b-c)]=x\cdot(a-b-c)(x+1)=x(x+1)(a-b-c)$ **3-ій спос** $ax^2-bx^2+ax-cx^2-bx-cx=x(ax-bx+a-cx-b-c)=x[(ax-bx)+(a-b)-(cx+c)]=x[x(a-b)+(a-b)-c(x+1)]=x[(a-b)(x+1)-c(x+1)]=x\{(x+1)[(a-b)-c]\}=x(x+1)(a-b-c)$ **4-ый спос** $ax^2-bx^2+ax-cx^2-bx-cx=x(ax-bx+a-cx-b-c)=x[(ax-cx)+(a-c)-(bx+b)]=x[x(a-c)+(a-c)-b(x+1)]=x[(a-c)(x+1)-b(x+1)]=x(x+1)[(a-c)-b]=x(x+1)(a-b-c)$ **5-ый спос** $ax^2-bx^2+ax-cx^2-bx-cx=(ax^2+ax)-(bx^2+bx)-(cx^2+cx)=ax(x+1)-bx(x+1)-cx(x+1)=x(x+1)(a-b-c)$. **6-ой спос** $ax^2-bx^2+ax-cx^2-bx-cx=(ax^2-bx^2-cx^2)+(ax-bx-cx)=x^2(a-b-c)+x(a-b-c)=(a-b-c)(x^2+x)=(a-b-c)x(x+1)$ **7-ой способъ** $ax^2-bx^2+ax-cx^2-bx-cx=(ax^2-bx^2)+(ax-bx)-(cx^2+cx)=[x^2(a-b)+x(a-b)]-cx(x+1)=x(a-b)(x+1)-cx(x+1)=x(x+1)[(a-b)-c]=x(x+1)(a-b-c)$ **8-ой спос** $ax^2-bx^2+ax-cx^2-bx-cx=(ax^2-cx^2)+(ax-cx)-(bx^2+bx)=x^2(a-c)+x(a-c)-bx(x+1)=x(a-c)(x+1)-bx(x+1)=x(x+1)[(a-c)-b]=x(x+1)(a-b-c)$ **75'** **I спос** $ax^2+bx^2+ax-cx^2+bx-cx=x(ax+bx+a-cx+b-c)=x[(ax+a)+(bx+b)-(cx+c)]=x[a(x+1)+b(x+1)-c(x+1)]=x(x+1)(a+b-c)$ **II спос** $ax^2+bx^2+ax-cx^2+bx-cx=x(ax+bx+a-cx+b-c)=x[(ax+bx-cx)+(a+b-c)]=x[x(a+b-c)+(a+b-c)]=x(a+b-c)(x+1)$ **III спос**

$ax^2+bx^2+ax-cx^2+bx-cx=x(ax+bx+a-cx+b-c)=x[(ax+bx)+(a+b)-(cx+c)]=x[x(a+b)+(a+b)-c(x+1)]=x[(a+b)(x+1)-c(x+1)]=x\{(x+1)[(a+b)-c]\}=x(x+1)(a+b-c)$ IV спос $ax^2+bx^2+ax-cx^2+bx-cx=x(ax+bx+a-cx+b-c)=x[(ax-cx)+(a-c)+(bx+b)]=x[x(a-c)+(a-c)+b(x+1)]=x[(a-c)(x+1)+b(x+1)]=x(x+1)(a-c+b)$ V спос $ax^2+bx^2+ax-cx^2+bx-cx=(ax^2+ax)+(bx^2+bx)-(cx^2+cx)=a\quad x(x+1)+b\,.\,x(x+1)-c\quad x(x+1)=x(x+1)(a+b-c)$ VI спос $ax^2+bx^2+ax-cx^2+bx-cx=(ax^2+bx^2-cx^2)+(ax+bx-cx)=x^2(a+b-c)+x(a+b-c)=(a+b-c)(x^2+x)=(a+b-c)x(x+1)$ VII спос $ax^2+bx^2+ax-cx^2+bx-cx=(ax^2+bx^2)+(ax+bx)-(cx^2+cx)=x^2(a+b)+x(a+b)-cx(x+1)=x(a+b)\quad(x+1)-c\quad x(x+1)=x(x+1)(a+b-c)$ VIII способъ $ax^2+bx^2+ax-cx^2+bx-cx=(ax^2-cx^2)+(ax-cx)+(bx^2+bx)=x^2(a-c)+x(a-c)+bx(x+1)=x(a-c)(x+1)+bx(x+1)=x(x+1)(a-c+b)$

76 1-ый способъ $ax^2-bx^2-ax+cx^2+bx-cx=x(ax-bx-a+cx+b-c)=x[(ax-a)-(bx-b)+(cx-c)]=x[a(x-1)-b(x-1)+c(x-1)]=x(x-1)(a-b+c)$ **2-ой спос** $ax^2-bx^2-ax+cx^2+bx-cx=x(ax-bx-a+cx+b-c)=x[(ax-bx+cx)-(a-b+c)]=x[x(a-b+c)-(a-b+c)]=x[(a-b+c)(x-1)]=x(x-1)(a-b+c)$ **3-ій спос** $ax^2-bx^2-ax+cx^2+bx-cx=x(ax-bx-a+cx+b-c)=x[(ax-bx)+(cx-c)-(a-b)]=x[x(a-b)-(a-b)+c(x-1)]=x[(a-b)(x-1)+c(x-1)]=x(x-1)(a-b+c)$ **4-ый спос** $ax^2-bx^2-ax+cx^2+bx-cx=x(ax-bx-a+cx+b-c)=x[(ax+cx)-(bx-b)-(a+c)]=x[x(a+c)-(a+c)-b(x-1)]=x[(a+c)(x-1)-b(x-1)]=x(x-1)(a+c-b)$ **5-ый спос** $ax^2-bx^2-ax+cx^2+bx-cx=(ax^2-ax)-(bx^2-bx)+(cx^2-cx)=a\,x(x-1)-b\,x(x-1)+c\,x(x-1)=x(x-1)(a-b+c)$ **6-ой спос** $ax^2-bx^2-ax+cx^2+bx-cx=(ax^2-bx^2+cx^2)-(ax-bx+cx)=x^2(a-b+c)-x(a-b+c)=x(a-b+c)\quad(x-1)=x(x-1)(a-b+c)$ **7-ой спос** $ax^2-bx^2-ax+cx^2+bx-cx=(ax^2-bx^2)+(cx^2-cx)-(ax-bx)=x^2(a-b)-x(a-b)+cx(x-1)=x(a-b)\quad(x-1)+cx(x-1)=x(x-1)(a-b+c)$ **8-ой спос** $ax^2-bx^2-ax+cx^2+bx-cx=(ax^2+cx^2)-(bx^2-bx)-(ax+cx)=x^2(a+c)-x(a+c)-bx(x-1)=x(a+c)(x-1)-bx(x-1)=x(x-1)(a+c-b)$ **76′** I спос $ax^2+bx^2-ax+cx^2-bx-cx=x(ax+bx-a+cx-b-c)=x[(ax-a)+(bx-b)+(cx-c)]=x[a(x-1)+b(x-1)+c(x-1)]=x(x-1)(a+b+c)$ II спос $ax^2+bx^2-ax+cx^2-bx-cx=x(ax+bx-a+cx-b-c)=x[(ax+bx+cx)-(a+b+c)]=x[x(a+b+c)-(a+b+c)]=x(a+b+c)(x-1)=x(x-1)(a+b+c)$ III спос $ax^2+bx^2-ax+cx^2-bx-cx=x(ax+bx-a+cx-b-c)=x[(ax+bx)-(a+b)+(cx-c)]=x[x(a+b)-(a+b)+c(x-1)]=x[(a+b)(x-1)+c(x-1)]=x(x-1)(a+b+c)$ IV спос $ax^2+bx^2-ax+cx^2-bx-cx=x(ax+bx-a+cx-b-c)=x[(ax+cx)+(bx-b)-(a+c)]=x[x(a+c)-(a+c)+b(x-1)]=x[(a+c)(x-1)+b(x-1)]=x(x-1)(a+c+b)$ V спос $ax^2+bx^2-ax+cx^2-bx-cx=(ax^2-ax)+(bx^2-bx)+(cx^2-cx)=a\,.\,x(x-1)+b\quad x(x-1)+c\quad x(x-1)=x\,(x-1)\,(a+b+c)$ VI спос $ax^2+bx^2-ax+cx^2-bx-cx=(ax^2+bx^2+cx^2)-(ax+bx+cx)=x^2(a+b+c)-x(a+b+c)=x(a+b+c)\quad(x-1)=x(x-1)(a+b+c)$ VII спос $ax^2+bx^2-ax+cx^2-bx-cx=(ax^2+bx^2)-(ax+bx)+(cx^2-cx)=x^2(a+b)-x(a+b)+cx(x-1)=x(a+b)(x-1)+cx(x-1)=x(x-1)[(a+b)+c]=x(x-1)(a+b+c)$ VIII спос $ax^2+bx^2-ax+cx^2-bx-cx=(ax^2+cx^2)+(bx^2-bx)-(ax+cx)=x^2(a+c)-x(a+c)+bx(x-1)=x(a+c)\quad(x-1)+bx(x-1)=x(x-1)[(a+c)+b]=x(x-1)(a+c+b)$

5-ый случай разложенія *прежде, чѣмъ примѣнять для разложен даннаго выраженія одинъ изъ вышеупомянутыхъ пріемовъ, иногда бывае необходимо раскрыть скобки въ выраженіи* (№№ 77—78 *)).

77 $(ax+by)^2+(ay-bx)^2+c^2x^2+c^2y^2=(ax)^2+2\ ax\,.\,by+(by)^2+(ay)^2-2\,.\,ay\ \ bx+(bx)^2+c^2x^2+c^2y^2=a^2x^2+2abxy+b^2y^2+a^2y^2-2abxy+b^2x^2+c^2x^2+c^2y^2=a^2x^2+b^2y^2+a^2y^2+b^2x^2+c^2x^2+c^2y^2$ Так образ, задача сво дится къ разложенію многочлена $a^2x^2+b^2y^2+a^2y^2+b^2x^2+c^2x^2+c^2y$ **1-ый способъ** $a^2x^2+b^2y^2+a^2y^2+b^2x^2+c^2x^2+c^2y^2=(a^2x^2+a^2y^2)+(b^2x^2+b^2y^2)+(c^2x^2+c^2y^2)=a^2(x^2+y^2)+b^2(x^2+y^2)+c^2(x^2+y^2)=(x^2+y^2)(a^2+b^2+c^2)$ **2-ой спос** $a^2x^2+b^2y^2+a^2y^2+b^2x^2+c^2x^2+c^2y^2=(a^2x^2+b^2x^2+c^2x^2)+(a^2y^2+b^2y^2+c^2y^2)=x^2(a^2+b^2+c^2)+y^2(a^2+b^2+c^2)=(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2$

77′ $(ay+bx)^2+(ax-by)^2-c^2x^2-c^2y^2=(ay)^2+2\ ay\ \ bx+(bx)^2+(ax)^2-2\ \ ax\ \ by+(by)^2-c^2x^2-c^2y^2=a^2y^2+2abxy+b^2x^2+a^2x^2-2abxy+b^2y^2-c^2x^2-c^2y^2=a^2y^2+b^2x^2+a^2x^2+b^2y^2-c^2x^2-c^2y^2$, послѣднее выраженіе будемъ разлагать въ произведеніе простыхъ множителей **I спос** $a^2y^2+b^2x^2+a^2x^2+b^2y^2-c^2x^2-c^2y^2=(a^2x^2+a^2y^2)+(b^2x^2+b^2y^2)-(c^2x^2+c^2y^2)=a^2(x^2+y^2)+b^2(x^2+y^2)-c^2(x^2+y^2)=(x^2+y^2)(a^2+b^2-c^2)$ **II спос** $a^2y^2+b^2x^2+a^2x^2+b^2y^2-c^2x^2-c^2y^2=(a^2x^2+b^2x^2-c^2x^2)+(a^2y^2+b^2y^2-c^2y^2)=x^2(a^2+b^2-c^2)+y^2(a^2+b^2-c^2)=(a^2+b^2-c^2)(x^2+y^2)$

78 $(ay+bx)^3+(ax+by)^3-(a^3+b^3)(x^3+y^3)=(ay)^3+3\ (ay)^2\ \ bx+3\ \ ay\ \ (bx)^2+(bx)^3+(ax)^3+3\ (ax)^2\ by+3\ ax\ (by)^2+(by)^3-(a^3x^3+b^3x^3+a^3y^3+b^3y^3)=a^3y^3+3a^2bxy^2+3ab^2x^2y+b^3x^3+a^3x^3+3a^2bx^2y+3ab^2xy^2+b^3y^3-a^3x^3-b^3x^3-a^3y^3-b^3y^3=3a^2bxy^2+3ab^2x^2y+3a^2bx^2y+3ab^2xy^2$ Послѣднее выраженіе мы и преобразуемъ въ произведеніе **1-ый спос** $3a^2bxy^2+3ab^2x^2y+3a^2bx^2y+3ab^2xy^2=3abxy(ay+bx+ax+by)=3abxy[(ax+bx)+(ay+by)]=3abxy[x(a+b)+y(a+b)]=3abxy(a+b)(x+y)$ **2-ой способъ** $3a^2bxy^2+3ab^2x^2y+3a^2bx^2y+3ab^2xy^2=3abxy(ay+bx+ax+by)=3abxy[(ax+ay)+(bx+by)]=3abxy[a(x+y)+b(x+y)]=3abxy(x+y)(a+b)$ **3-ій способъ** $3a^2bxy^2+3ab^2x^2y+3a^2bx^2y+3ab^2xy^2=(3a^2bx^2y+3ab^2x^2y)+(3a^2bxy^2+3ab^2xy^2)=3abx^2y(a+b)+3abxy^2(a+b)=[3abxy(a+b)]\ \ x+[3abxy(a+b)]\ \ y=3abxy(a+b)(x+y)$ **4 ый способъ** $3a^2bxy^2+3ab^2x^2y+3a^2bx^2y+3ab^2xy^2=(3a^2bx^2y+3a^2bxy^2)+(3ab^2x^2y+3ab^2xy^2)=3a^2bxy(x+y)+3ab^2xy(x+y)=3abxy(x+y)\ \ a+3abxy(x+y)\ \ b=3abxy(x+y)(a+b)$

Другое рѣшеніе (5-ый способъ) Положимъ, что $A=(ay+bx)^3+(ax+by)^3$ и $B=(a^3+b^3)(x^3+y^3)$, такъ что данное выраженіе выразится въ видѣ $A-B$ Разложим A—въ произведеніе множителей и преобразуемъ множителей B къ иному вид

1° Разложеніе A Т к $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$, то, полагая въ этой формулѣ $\alpha=ay+bx$ и $\beta=ax+by$, получ

$$A=[(ay+bx)+(ax+by)]\,[(ay+bx)^2-(ay+bx)(ax+by)+(ax+by)^2]=(ay+bx+ax+by)[(ay)^2+2\ ay\ \ bx+(bx)^2-(a^2xy+abx^2+aby^2+b^2xy)+(ax)^2+2\ \ ax\ \ by+(by)^2]=[(ax+bx)+(ay+by)]\,(a^2y^2+4abxy+b^2x^2-a^2xy-abx^2-aby^2-b^2xy+a^2x^2+b^2y^2)=[x(a+b)+y(a+b)](a^2y^2+4abxy+\text{ и т д }+a^2x^2+b^2y^2)=(a+b)(x+y)(a^2y^2+4abxy+b^2x^2-a^2xy-abx^2-aby^2-b^2xy+a^2x^2+b^2y^2)$$

2° Преобразованіе B По вышеприведенной формулѣ $\alpha^3+\beta^3=$ и т д имѣемъ

$$B=(a+b)(a^2-ab+b^2)(x+y)(x^2-xy+y^2)=(a+b)(x+y)(a^2x^2-abx^2+b^2x^2-a^2xy+abxy-b^2xy+a^2y^2-aby^2+b^2y^2)$$

Теперь разложеніе выраженія $A-B$, являющагося даннымъ, представляетъ 2 о *случай разложенія*, дѣйствительно имѣемъ

$$A-B=(a+b)(x+y)(a^2y^2+4abxy+b^2x^2-a^2xy-abx^2-aby^2-b^2xy+a^2x^2+b^2y^2)-(a+b)(x+y)(a^2x^2-abx^2+b^2x^2-a^2xy+abxy-b^2xy+a^2y^2-aby^2+b^2y^2)=$$

---

*) Кромѣ того, сюда же могутъ быть отнесены и №№ 81—82′, 91—92′.

$=(a+b)(x+y)[(a^2y^2+4abxy+b^2x^2-a^2xy-abx^2-aby^2-b^2xy+a^2x^2+b^2y^2)-(a^2x^2-abx^2+b^2x^2-a^2xy+abxy-b^2xy+a^2y^2-aby^2+b^2y^2)]=(a+b)(x+y)\ (a^2y^2+4abxy+b^2x^2-a^2xy-abx^2-aby^2-b^2xy+a^2x^2+b^2y^2-a^2x^2+abx^2-b^2x^2+a^2xy-abxy+b^2xy-a^2y^2+aby^2-b^2y^2)=(a+b)(x+y)\ 3abxy=3abxy(a+b)(x+y)$

78′ $(ax+by)^3-(ay+bx)^3+(a^3-b^3)(y^3-x^3)=(ax)^3+3\ (ax)^2\ by+3\ ax\ .\ (by)^2+(by)^3-[(ay)^3+3\ (ay)^2\ bx+3\ ay\ (bx)^2+(bx)^3]+(a^3y^3-b^3y^3-a^3x^3+b^3x^3)=a^3x^3+3a^2bx^2y+3ab^2xy^2+b^3y^3-a^3y^3-3a^2bxy^2-3ab^2x^2y-b^3x^3+a^3y^3-b^3y^3-a^3x^3+b^3x^3=3a^2bx^2y+3ab^2xy^2-3a^2bxy^2-3ab^2x^2y$
Итакъ, задача сводится къ разложенію выраженія $P=3a^2bx^2y+3ab^2xy^2-3a^2bxy^2-3ab^2x^2y$ **I спос.** $P=3abxy\ (ax+by-ay-bx)=3abxy[(ax-bx)-(ay-by)]=3abxy\ [x(a-b)-y(a-b)]=3abxy(a-b)(x-y)$ **II спос** $P=3abxy(ax+by-ay-bx)=3abxy[(ax-ay)-(bx-by)]=3abxy[a(x-y)-b(x-y)]=3abxy\ (x-y)(a-b)=3ab(a-b)xy(x-y)$ **III спос.** $P=(3a^2bx^2y-3ab^2x^2y)-(3a^2bxy^2-3ab^2xy^2)=3abx^2y(a-b)-3abxy^2(a-b)=3abxy(a-b)\ x-3abxy(a-b)\ y=3abxy(a-b)(x-y)$ **IV спос** $P=(3a^2bx^2y-3a^2bxy^2)-(3ab^2x^2y-3ab^2xy^2)=3a^2bxy(x-y)-3ab^2xy(x-y)=3abxy(x-y)\ (a-b)=3abxy(a-b)(x-y)$

Другое рѣшеніе (V способъ) Введемъ обозначенія $A=(ax+by)^3-(ay+bx)^3$, $B=(a^3-b^3)(y^3-x^3)$, тогда данное выраженіе выразится въ видѣ $A+B$ Преобразуемъ предварительно A и B при чемъ примемъ во вниманіе извѣстную формулу $\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$ Полагая въ ней $\alpha=ax+by$, $\beta=ay+bx$, получ

$A=[(ax+by)-(ay+bx)]\ [(ax+by)^2+(ax+by)\ (ay+bx)+(ay+bx)^2]=(ax+by-ay-bx)[(ax)^2+2\ ax\ by+(by)^2+(a^2xy+aby^2+abx^2+b^2xy)+(ay)^2+2\ ay\ bx+(bx)^2]=[(ax-bx)-(ay-by)](a^2x^2+4abxy+b^2y^2+a^2xy+aby^2+abx^2+b^2xy+a^2y^2+b^2x^2)=[x(a-b)-y(a-b)](a^2x^2+4abxy+b^2y^2+$ и т. д. $+a^2y^2+b^2x^2)=(a-b)(x-y)\ (a^2x^2+4abxy+b^2y^2+a^2xy+aby^2+abx^2+b^2xy+a^2y^2+b^2x^2)$

$B=(a^3-b^3)(y^3-x^3)=(a-b)(a^2+ab+b^2)(y-x)(y^2+yx+x^2)=(a-b)(y-x)(a^2y^2+aby^2+b^2y^2+a^2yx+abyx+b^2yx+a^2x^2+abx^2+b^2x^2)=(a-b)(y-x)(a^2y^2+aby^2+b^2y^2+a^2xy+abxy+b^2xy+a^2x^2+abx^2+b^2x^2)$

Переставивъ нѣкоторые члены, представимъ выраженія A и B въ такомъ видѣ

$A=(a-b)(x-y)(a^2x^2+b^2y^2+a^2xy+aby^2+abx^2+b^2xy+a^2y^2+b^2x^2+4abxy)=(a-b)(x-y)\ (S+4abxy)$,

$B=(a-b)(y-x)\ (a^2x^2+b^2y^2+a^2xy+aby^2+abx^2+b^2xy+a^2y^2+b^2x^2+abxy)=(a-b)(y-x)\ (S+abxy)$,

гдѣ $S=a^2x^2+b^2y^2+a^2xy+aby^2+abx^2+b^2xy+a^2y^2+b^2x^2$

Так образ., данное выраженіе, равное $A+B$, будетъ

$A+B=(a-b)(x-y)(S+4abxy)+(a-b)(y-x)(S+abxy)=(a-b)(x-y)(S+4abxy)-(a-b)(x-y)(S+abxy)=(a-b)(x-y)[(S+4abxy)-(S+abxy)]=(a-b)(x-y)(S+4abxy-S-abxy)=(a-b)(x-y)\ 3abxy=3abxy(a-b)(x-y)$

---

79 **1-ый способъ** $x^3+ax^2+abx+bx^2+bcx+acx+cx^2+abc=(x^3+ax^2)+(bx^2+abx)+(cx^2+acx)+(bcx+abc)=x^2(x+a)+bx(x+a)+cx(x+a)+bc(x+a)=(x+a)(x^2+bx+cx+bc)=(x+a)\ [(x^2+bx)+(cx+bc)]=(x+a)\ [x(x+b)+c(x+b)]=(x+a)(x+b)(x+c)$ **2-ой спос** $x^3+ax^2+abx+bx^2+bcx+acx+cx^2+abc=(x^3+bx^2)+(ax^2+abx)+(cx^2+bcx)+(acx+abc)=x^2(x+b)+ax(x+b)+cx(x+b)+ac(x+b)=(x+b)(x^2+ax+cx+ac)=(x+b)[(x^2+ax)+(cx+ac)]=(x+b)\ .\ [x(x+a)+c(x+a)]=(x+b)\ (x+a)\ (x+c)$ **3-ій спос** $x^3+ax^2+abx+bx^2+bcx+acx+cx^2+abc=(x^3+cx^2)+(ax^2+acx)+(bx^2+bcx)+(abx+abc)=x^2(x+c)+ax(x+c)+bx(x+c)+ab(x+c)=(x+c)(x^2+ax+bx+ab)=(x+c)\ [(x^2+ax)+(bx+ab)]=(x+c)\ [x(x+a)+b(x+a)]=(x+c)(x+a)(x+b)$ 79′. **I спос** $x^3+bx^2-abx-ax^2+bcx+cx^2-acx-abc=(x^3-ax^2)+(bx^2-abx)+(cx^2-acx)+(bcx-abc)=x^2(x-a)+bx(x-a)+cx(x-a)+bc(x-a)=(x-a)(x^2+bx+cx+bc)=(x-a)[(x^2+bx)+(cx+bc)]=$

$=(x-a)[x(x+b)+c(x+b)]=(x-a)(x+b)(x+c)$ **II спос** $x^3+bx^2-abx-ax^2+bcx+cx^2-acx-abc=(x^3+bx^2)-(ax^2+abx)+(cx^2+bcx)-(acx+abc)=x^2(x+b)-ax(x+b)+cx(x+b)-ac(x+b)=(x+b)(x^2-ax+cx-ac)=(x+b)[(x^2-ax)+(cx-ac)]=(x+b)[x(x-a)+c(x-a)]=(x+b)(x-a)(x+c)$ **III спос** $x^3+bx^2-abx-ax^2+bcx+cx^2-acx-abc=(x^3+cx^2)-(ax^2+acx)+(bx^2+bcx)-(abx+abc)=x^2(x+c)-ax(x+c)+bx(x+c)-ab(x+c)=(x+c)(x^2-ax+bx-ab)=(x+c)[(x^2-ax)+(bx-ab)]=(x+c)[x(x-a)+b(x-a)]=(x+c)(x-a)(x+b)$

80 **1-ый способъ** $x^3-cx^2+acx-ax^2-bcx+bx^2-abx+abc=(x^3-ax^2)+(bx^2-abx)-(cx^2-acx)-(bcx-abc)=x^2(x-a)+bx(x-a)-cx(x-a)-bc(x-a)=(x-a)(x^2+bx-cx-bc)=(x-a)[(x^2+bx)-(cx+bc)]=(x-a)[x(x+b)-c(x+b)]=(x-a)(x+b)(x-c)$ **2-ой спос** $x^3-cx^2+acx-ax^2-bcx+bx^2-abx+abc=(x^3+bx^2)-(ax^2+abx)-(cx^2+bcx)+(acx+abc)=x^2(x+b)-ax(x+b)-cx(x+b)+ac(x+b)=(x+b)(x^2-ax-cx+ac)=(x+b)[(x^2-ax)-(cx-ac)]=(x+b)[x(x-a)-c(x-a)]=(x+b)(x-a)(x-c)$ **3-ій спос** $x^3-cx^2+acx-ax^2-bcx+bx^2-abx+abc=(x^3-cx^2)-(ax^2-acx)+(bx^2-bcx)-(abx-abc)=x^2(x-c)-ax(x-c)+bx(x-c)-ab(x-c)=(x-c)(x^2-ax+bx-ab)=(x-c)[(x^2-ax)+(bx-ab)]=(x-c)[x(x-a)+b(x-a)]=(x-c)(x-a)(x+b)$

80′ **I спос** $x^3-ax^2-acx+cx^2+abx-bx^2-bcx+abc=(x^3-ax^2)-(bx^2-abx)+(cx^2-acx)-(bcx-abc)=x^2(x-a)-bx(x-a)+cx(x-a)-bc(x-a)=(x-a)(x^2-bx+cx-bc)=(x-a)[(x^2-bx)+(cx-bc)]=(x-a)[x(x-b)+c(x-b)]=(x-a)(x-b)(x+c)$ **II спос** $x^3-ax^2-acx+cx^2+abx-bx^2-bcx+abc=(x^3-bx^2)-(ax^2-abx)+(cx^2-bcx)-(acx-abc)=x^2(x-b)-ax(x-b)+cx(x-b)-ac(x-b)=(x-b)(x^2-ax+cx-ac)=(x-b)[(x^2-ax)+(cx-ac)]=(x-b)[x(x-a)+c(x-a)]=(x-b)(x-a)(x+c)$ **III спос** $x^3-ax^2-acx+cx^2+abx-bx^2-bcx+abc=(x^3+cx^2)-(ax^2+acx)-(bx^2+bcx)+(abx+abc)=x^2(x+c)-ax(x+c)-bx(x+c)+ab(x+c)=(x+c)(x^2-ax-bx+ab)=(x+c)[(x^2-ax)-(bx-ab)]=(x+c)[x(x-a)-b(x-a)]=(x+c)(x-a)(x-b)$

6-ой случай разложенія *разложеніе нѣкоторыхъ изъ членовъ даннаго полинома въ алгебраическую сумму новыхъ членовъ* 1° Новые члены подобны разлагаемому члену 2° Коэффиціентъ разлагаемаго члена, взятый со знакомъ послѣдняго, разбивается въ алгебраическую сумму слагаемыхъ (обыкновенно двухъ) которыя (съ ихъ знаками) и служатъ коэффиціентами новыхъ членовъ 3° Послѣ такого преобразованія даннаго выраженія полученный полиномъ разлагается въ произведеніе простыхъ множителей п общимъ пріемамъ, подгоняя разложеніе его къ одному изъ «*случаевъ разложенія*» 4° Подъ разбираемый случай подходятъ №№ 81—116′, а такж №№ 117—120′, послѣ ихъ преобразованія посредствомъ пріема *I-го случая* 5° Особаго вниманія заслуживаетъ разложеніе по разбираемому методу А] трехчлена 2-ой степени и В] вообще многочленовъ высшихъ степеней

А] *Трехчленомъ 2-ой степени* наз выраженіе вида ax^2+bx+c, въ которомъ a и b —*коэффиціенты* [положительные или отрицательные, обыкновенно $a>0$, вообще, коэффиціентъ a считаютъ положительнымъ, если же онъ отрицателенъ, то, вынеся «—» за скобки, не принимаютъ его (т е. «—») до окончательнаго результата во вниманіе], c—такъ наз *свободный* или *извѣстный членъ* и x—главная буква («*неизвѣстное*», «*перемѣнное*») Разсмотримъ 2 случая когда $a=1$ и когда a не равно 1 Случаевъ, когда $a=0$ либо $b=0$, либо $c=0$, мы не касаемся, не желая слишкомъ отвлекаться

1-ый случай коэффиціентъ при x^2 есть 1, тогда самому трехчлену придаютъ общій видъ x^2+px+q Назовемъ p—*среднимъ* коэффиціентомъ, q—*свободный членъ* Въ такомъ случаѣ о возможности разложенія и о самомъ разложеніи трехчлена судят по слѣдующему правилу

Правило *Трехчленъ* x^2+px+q *можетъ быть разложенъ въ произведеніе двухъ со множителей тогда и только тогда, когда возможно разложить средній коэффиціентъ — въ алгебраическую сумму двухъ количествъ, а свободный членъ — въ произведеніе тѣхъ же количествъ Если это возможно то средній членъ* px *разлагается въ алгебраическую сумму двухъ подобныхъ ему членовъ, коэффиціенты которыхъ суть вышеупомянутыя количества*, дальнѣйшее дѣйствіе совершается, какъ въ случаѣ 4-мъ

Самое опредѣленіе искомыхъ количествъ производится опытнымъ путемъ, знаки же ихъ опредѣляются на основаніи слѣдующихъ соображеній Пусть искомыя количества будутъ α и β, такъ что $\alpha+\beta=p$, $\alpha\beta=q$ Различаемъ слѣд случаи 1) p—положительно и q—также, т е $p>0$, $q>0$, въ этомъ случаѣ α и β имѣютъ одинаковые знаки (ибо $q>0$) и оба положительны ($p>0$) 2) $p>0$, $q<0$ т е q—отрицательно Тогда α и β— разныхъ знаковъ, но большее изъ нихъ по числовой величинѣ (напр, α, если $[\alpha]>[\beta]$)— положительно ($\alpha>0$, $\beta<0$) 3) p и q — отрицательны, т е $p<0$, $q<0$ Слѣд, и въ этомъ случаѣ α и β—разныхъ знаковъ, но большее изъ нихъ по абсолютной величинѣ (напр, α, если $[\alpha]>[\beta]$)—отрицательно (т е $\alpha<0$, $\beta>0$) 4) $p<0$, $q>0$ Тогда α и β— одинаковыхъ знаковъ, и большее изъ нихъ по числовой величинѣ (напр, α, если $[\alpha]>[\beta]$)— отрицательно (такъ что $\alpha<0$, $\beta<0$)

2 ой случай коэффиціентъ при x^2 не $=$ 1-цѣ, мы его, притомъ можемъ считать положительнымъ, ибо въ противномъ случаѣ какъ уже имѣли случай замѣтить, знакъ «—» всегда можетъ быть вынесенъ на время за скобки итакъ въ трехчленѣ вида ax^2+bx+c количество $a>0$ и не $=1$*) Особенность этого случая заключается въ томъ что *коэффиціентъ* b *средняго члена разлагается въ алгебраическую сумму двухъ количествъ, произведеніе которыхъ должно быть = произведенію коэффиціентовъ* a *и* c *крайнихъ членовъ* Общій же методъ разложенія подобенъ прежнему (въ случаѣ, когда коэффиціентъ при x^2 есть 1)

В] При разложеніи въ произведеніе *многочленовъ высшихъ степеней* (>2) можно дать облегчающія дѣйствіе правила для того случая когда данный многочленъ расположенный по степенямъ x, содержитъ множителемъ по крайней мѣрѣ одинъ простѣйшій двучленъ (биномъ) 1-ой степени вида $x\pm a$ Въ этомъ случаѣ вышеупомянутый двучленный множитель открывается по слѣд признаку

Правило *Если многочленъ расположенный по степенямъ главной буквы* x *обращается въ нуль при замѣнѣ* x *черезъ нѣкоторое положительное количество* a, *то этотъ многочленъ дѣлится на* $x-a$ *и слѣд, содержитъ множителемъ двучленъ* $x-a$, *если же многочленъ обращается въ нуль при замѣнѣ* x *черезъ отрицательное количество* $-a$, *то онъ дѣлится на* $x+a$ *и, слѣд, заключаетъ* $x+a$ *множителемъ* **), количество a, при нашихъ условіяхъ, является цѣлымъ

Так образ, вопросъ сводится къ опредѣленію количества a т к зная a, не трудно произвести выдѣленіе множителя $x\pm a$ по пріему *6-го случая* разложенія, опредѣленно подбирая къ каждому члену, начиная съ высшаго, часть слѣдующаго члена такъ, чтобы пара группируемыхъ членовъ содержала множителемъ $x\pm a$ Опредѣленное правило для нахожденія a можно дать для того случая, когда коэффиціентъ при высшей степени x есть 1 при чемъ весь многочленъ имѣетъ видъ

$x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\ \ldots\ +a_kx^{m-k}+\ \ldots\ +a_{m-1}x+a_m$, гдѣ m—число цѣлое, а a_k ($k=1, 2, 3, \ldots m-1, m$) есть коэффиціентъ $(k+1)$ го члена полинома, *послѣдній членъ* его есть a_m и не содержитъ x (въ значащей степени) вовсе

Въ этомъ случаѣ *обращать многочленъ въ нуль при подстановкѣ вмѣсто* x, *могутъ лишь дѣлители, положительные или отрицательные, послѣдняго члена полинома*, т е a_m

Так образ, разлагаемъ послѣдній членъ на первоначальныхъ множителей и составляемъ рядъ чиселъ какъ изъ первоначальныхъ, такъ и изъ составныхъ дѣлителей этого члена, затѣмъ каждое изъ чиселъ этого ряда, взятое со знакомъ «+», и

---

*) Разумѣется, кромѣ того, a — число цѣлое, ибо вообще мы разсматриваемъ случаи разложенія выраженій съ цѣлыми коэффиціентами въ произведеніе выраженій также съ цѣлыми коэффиціентами

**) На основаніи такъ наз *теоремы Безу*, см также №№ 365 и 365 (§ 5 этого отд) Вообще, надо сказать, что полная и строгая теорія разложенія какъ трехчлена, такъ и многочлена выходитъ изъ рамокъ настоящаго курса

«—», подставляемъ въ полиномъ вмѣсто x; если при какой-либо подстановкѣ полиномъ обращается въ 0, то по вышеприведенному правилу этимъ опредѣляется второй членъ бинома $x \pm a$, на который дѣлится полиномъ и который является однимъ изъ множителей послѣдняго

Если *нѣсколько* дѣлителей послѣдняго члена полинома обращаютъ его въ 0 то это указываетъ на то, что полиномъ разлагается на нѣсколько множителей вида $x \pm a$, легко понять, что число такихъ дѣлителей послѣдняго члена не можетъ превышать показателя степени высшаго члена полинома

---

81 $x^2+(m+n)x+mn=x^2+mx+nx+mn=(x^2+mx)+(nx+mn)=x(x+m)+n(x+m)=(x+m)(x+n)$ Группировать члены можно было бы иначе $x^2+mx+nx+mn=(x^2+nx)+(mx+mn)=x(x+n)+m(x+n)=(x+n)(x+m)$, но т. к. группировка членовъ въ данномъ случаѣ не играетъ главной роли (каковую исполняетъ въ задачахъ на *6-ой случай разложенія* разбивка средняго члена трехчлена на алгебраическую сумму двухъ слагаемыхъ) то при рѣшеніи послѣдующихъ задачъ мы будемъ примѣнять одинъ способъ (и притомъ однообразный въ цѣляхъ систематизаціи) группировки, во избѣжаніе излишняго нагроможденія матеріала, что могло бы затемнить основную мысль рѣшенія задачи. 81′ $x^2-(m+n)x+mn=x^2-mx-nx+mn=(x^2-mx)-(nx-mn)=x(x-m)-n(x-m)=(x-m)(x-n)$

82 $x^2-(a+2)x+2a=x^2-ax-2x+2a=(x-ax)-(2x-2a)=x(x-a)-2(x-a)=(x-a)(x-2)$ 82′ $x^2+(a+3)x+3a=x^2+ax+3x+3a=(x^2+ax)+(3x+3a)=x(x+a)+3(x+a)=(x+a)(x+3)$

83 $x^2+8x+15=x^2+(3+5)x+3\cdot5=x^2+3x+5x+15=(x^2+3x)+(5x+15)=x(x+3)+5(x+3)=(x+3)(x+5)$ 83′ $x^2+7x+10=x^2+(2+5)x+2\cdot5=x^2+2x+5x+10=(x^2+2x)+(5x+10)=x(x+2)+5(x+2)=(x+2)(x+5)$

84 $x^2+12x+35=x^2+(5+7)x+5\cdot7=x^2+5x+7x+35=(x^2+5x)+(7x+35)=x(x+5)+7(x+5)=(x+5)(x+7)$ 84′ $x^2+10x+21=x^2+(3+7)x+3\cdot7=x^2+3x+7x+21=(x^2+3x)+(7x+21)=x(x+3)+7(x+3)=(x+3)(x+7)$

85 $x^2-5x+6=x^2+(-2-3)x+(-2)(-3)=x^2-2x-3x+6=(x^2-2x)-(3x-6)=x(x-2)-3(x-2)=(x-2)(x-3)$ 85′ $x^2-9x+14=x^2+(-2-7)x+(-2)(-7)=x^2-2x-7x+14=(x^2-2x)-(7x-14)=x(x-2)-7(x-2)=(x-2)(x-7)$

86 $x^2-13x+22=x^2+(-2-11)x+(-2)(-11)=x^2-2x-11x+22=(x^2-2x)-(11x-22)=x(x-2)-11(x-2)=(x-2)(x-11)$ 86′. $x^2-16x+39=x^2+(-3-13)x+(-3)(-13)=x^2-3x-13x+39=(x^2-3x)-(13x-39)=x(x-3)-13(x-3)=(x-3)(x-13)$.

87 $x^2+5x+4=x^2+(1+4)x+1\cdot4=x^2+x+4x+4=(x^2+x)+(4x+4)=x(x+1)+4(x+1)=(x+1)(x+4)$ 87 $x^2+7x+6=x^2+(1+6)x+1\cdot6=x^2+x+6x+6=(x^2+x)+(6x+6)=x(x+1)+6(x+1)=(x+1)(x+6)$

88. $x^2+11x+30=x^2+(5+6)x+5\cdot6=x^2+5x+6x+30=(x^2+5x)+(6x+30)=x(x+5)+6(x+5)=(x+5)(x+6)$ 88′ $x^2+11x+24=x^2+(3+8)x+3\cdot8=x^2+3x+8x+24=(x^2+3x)+(8x+24)=x(x+3)+8(x+3)=(x+3)(x+8)$

89 $x^2-3x+2=x^2+(-1-2)x+(-1)(-2)=x^2-x-2x+2=(x^2-x)-(2x-2)=x(x-1)-2(x-1)=(x-1)(x-2)$ 89′. $x^2-6x+5=x^2+(-1-5)x+(-1)\cdot(-5)=x^2-x-5x+5=(x^2-x)-(5x-5)=x(x-1)-5(x-1)=(x-1)(x-5)$

90 $x^2-13x+30=x^2+(-3-10)x+(-3)\ (-10)=x^2-3x-10x+30=(x^2-3x)-(10x-30)=x(x-3)-10(x-3)=(x-3)(x-10)$ **90′** $x^2-13x+40=x^2+(-5-8)x+(-5)\ (-8)=x^2-5x-8x+40=(x^2-5x)-(8x-40)=x(x-5)-8(x-5)=(x-5)(x-8)$

91 $x^2+(m-n)x-mn=x^2+mx-nx-mn=(x^2+mx)-(nx+mn)=x(x+m)-n(x+m)=(x+m)(x-n)$ **91′** $x^2-(m-n)x-mn=x^2-mx+nx-mn=(x^2-mx)+(nx-mn)=x(x-m)+n(x-m)=(x-m)(x+n)$

92 $x^2-(a-3)x-3a=x^2-ax+3x-3a=(x^2-ax)+(3x-3a)=x(x-a)+3(x-a)=(x-a)(x+3)$ **92′** $x^2+(a-2)x-2a=x^2+ax-2x-2a=(x^2+ax)-(2x+2a)=x(x+a)-2(x+a)=(x+a)(x-2)$

93 $x^2+3x-10=x^2+(5-2)x+5\ (-2)=x^2-2x+5x-10=(x^2-2x)+(5x-10)=x(x-2)+5(x-2)=(x-2)(x+5)$ **93′** $x^2-3x-10=x^2+(-5+2)x+(-5)\,.\,2=x^2+2x-5x-10=(x^2+2x)-(5x+10)=x(x+2)-5(x+2)=(x+2)(x-5)$

94 $x^2-7x-30=x^2+(3-10)x+3\ (-10)=x^2+3x-10x-30=(x^2+3x)-(10x+30)=x(x+3)-10(x+3)=(x+3)(x-10)$ **94′.** $x^2+7x-30=x^2+(10-3)x+10\,.\,(-3)=x^2-3x+10x-30=(x^2-3x)+(10x-30)=x(x-3)+10(x-3)=(x-3)(x+10)$

95 $x^2+5x-24=x^2+(8-3)x+8\ (-3)=x^2+8x-3x-24=(x^2-3x)+(8x-24)=x(x-3)+8(x-3)=(x-3)(x+8)$ **95′** $x^2-5x-24=x^2+(3-8)x+3\ (-8)=x^2+3x-8x-24=(x^2+3x)-(8x+24)=x(x+3)-8(x+3)=(x+3)(x-8)$

96 $x^2-10x-24=x^2+(2-12)x+2\ (-12)=x^2+2x-12x-24=(x^2+2x)-(12x+24)=x(x+2)-12(x+2)=(x+2)(x-12)$ **96′** $x^2+10x-24=x^2+(12-2)x+12\ (-2)=x^2+12x-2x-24=(x^2-2x)+(12x-24)=x(x-2)+12(x-2)=(x-2)(x+12)$

97 $x^2+2x-3=x^2+(3-1)x+3\ (-1)=x^2+3x-x-3=(x^2-x)+(3x-3)=x(x-1)+3(x-1)=(x-1)(x+3)$ **97′** $x^2+4x-5=x^2+(5-1)x+5\ (-1)=x^2+5x-x-5=(x^2-x)+(5x-5)=x(x-1)+5(x-1)=(x-1)(x+5)$

98 $x^2-9x-10=x^2+(1-10)x+1\ (-10)=x^2+x-10x-10=(x^2+x)-(10x+10)=x(x+1)-10(x+1)=(x+1)(x-10)$ **98′.** $x^2-6x-7=x^2+(1-7)x+1\ (-7)=x^2+x-7x-7=(x^2+x)-(7x+7)=x(x+1)-7(x+1)=(x+1)(x-7)$

99 $x^2+x-42=x^2+(7-6)x+7\ (-6)=x^2+7x-6x-42=(x^2-6x)+(7x-42)=x(x-6)+7(x-6)=(x-6)(x+7)$ **99′.** $x^2+x-56=x^2+(8-7)x+8\ (-7)=x^2+8x-7x-56=(x^2-7x)+(8x-56)=x(x-7)+8(x-7)=(x-7)(x+8)$

100 $x^2-5x-36=x^2+(4-9)x+4\ (-9)=x^2+4x-9x-36=(x^2+4x)-(9x+36)=x(x+4)-9(x+4)=(x+4)(x-9)$ **100′** $x^2-21x-100=x^2+(4-25)x+4\ (-25)=x^2+4x-25x-100=(x^2+4x)-(25x+100)=x(x+4)-25(x+4)=(x+4)(x-25)$

101 $a^2+7ab+12b^2=a^2+(3b+4b)\ a+3b\ 4b=a^2+3ab+4ab+12b^2=(a^2+3ab)+(4ab+12b^2)=a(a+3b)+4b(a+3b)=(a+3b)(a+4b)$ **101′** $a^2-7ab+12b^2=a^2+(-3b-4b)\ a+(-3b)\ (-4b)=a^2-3ab-4ab+12b^2=(a^2-3ab)-(4ab-12b^2)=a(a-3b)-4b(a-3b)=(a-3b)(a-4b)$

102 $a^2-3ab-10b^2=a^2+(2b-5b)\ a+2b\ (-5b)=a^2+2ab-5ab-10b^2=(a^2+2ab)-(5ab+10b^2)=a(a+2b)-5b(a+2b)=(a+2b)(a-5b)$ **102′**

$a^2+3ab-10b^2=a^2+(5b-2b)\,a+5b\,(-2b)=a^2+5ab-2ab-10b^2=(a^2-2ab)+(5ab-10b^2)=a(a-2b)+5b(a-2b)=(a-2b)(a+5b)$

103 $a^2-12ab+35b^2=a^2+(-5b-7b)\,a+(-5b)\,(-7b)=a^2-5ab-7ab+35b^2=(a^2-5ab)-(7ab-35b^2)=a(a-5b)-7b(a-5b)=(a-5b)(a-7b)$ **103'** $a^2+12ab+35b^2=a^2+(5b+7b)\,a+5b\;7b=a^2+5ab+7ab+35b^2=(a^2+5ab)+(7ab+35b^2)=a(a+5b)+7b(a+5b)=(a+5b)(a+7b)$

104 $a^2+4ab-45b^2=a^2+(9b-5b)\,a+9b\,(-5b)=a^2+9ab-5ab-45b^2=(a^2-5ab)+(9ab-45b^2)=a(a-5b)+9b(a-5b)=(a-5b)(a+9b)$ **104'** $a^2-4ab-45b^2=a^2+(5b-9b)\,a+5b\,(-9b)=a^2+5ab-9ab-45b^2=(a^2+5ab)-(9ab+45b^2)=a(a+5b)-9b(a+5b)=(a+5b)(a-9b)$

105 $a^2-7ab-18b^2=a^2+(2b-9b)\,a+2b\,(-9b)=a^2+2ab-9ab-18b^2=(a^2+2ab)-(9ab+18b^2)=a(a+2b)-9b(a+2b)=(a+2b)(a-9b)$ **105'** $a^2+7ab-18b^2=a^2+(9b-2b)\,a+9b\,(-2b)=a^2+9ab-2ab-18b^2=(a^2-2ab)+(9ab-18b^2)=a(a-2b)+9b(a-2b)=(a-2b)(a+9b)$

106 $a^2+ab-20b^2=a^2+(5b-4b)\,a+5b\,(-4b)=a^2+5ab-4ab-20b^2=(a^2-4ab)+(5ab-20b^2)=a(a-4b)+5b(a-4b)=(a-4b)(a+5b)$ **106'** $a^2-ab-20b^2=a^2+(4b-5b)\,a+4b\,(-5b)=a^2+4ab-5ab-20b^2=(a^2+4ab)-(5ab+20b^2)=a(a+4b)-5b(a+4b)=(a+4b)(a-5b)$

107 $6a^2+13ab+6b^2=$(замѣтимъ, что $6\;6=36=4\;9$)$=6a^2+(4b+9b)\,a+6b^2=6a^2+4ab+9ab+6b^2=(6a^2+4ab)+(9ab+6b^2)=2a(3a+2b)+3b(3a+2b)=(3a+2b)(2a+3b)$ **107'** $10a^2+29ab+10b^2=$(замѣтимъ, что $10\;10=100=4\;25$)$=10a^2+(4b+25b)\,a+10b^2=10a^2+4ab+25ab+10b^2=(10a^2+4ab)+(25ab+10b^2)=2a(5a+2b)+5b(5a+2b)=(5a+2b)(2a+5b)$

108 $10a^2-29ab+10b^2=$(замѣтимъ что $10\;10=100=-4\;-25$, а $-4-25=-29$)$=10a^2+(-4b-25b)\,a+10b^2=10a^2-4ab-25ab+10b^2=(10a^2-4ab)-(25ab-10b^2)=2a(5a-2b)-5b(5a-2b)=(5a-2b)(2a-5b)$. **108'** $6a^2-13ab+6b^2=$(замѣтимъ, что $6\;6=36=-4\;-9$, а $-4-9=-13$)$=6a^2+(-4b-9b)\,a+6b^2=6a^2-4ab-9ab+6b^2=(6a^2-4ab)-(9ab-6b^2)=2a(3a-2b)-3b(3a-2b)=(3a-2b)(2a-3b)$

109 $6a^2+7ab-5b^2=$(замѣтимъ, что $6\;-5=-30=10\;-3$, а $10-3=7$)$=6a^2+(10b-3b)\,a-5b^2=6a^2+10ab-3ab-5b^2=(6a^2-3ab)+(10ab-5b^2)=3a(2a-b)+5b(2a-b)=(2a-b)(3a+5b)$ **109'** $10a^2+13ab-3b^2=$(замѣтимъ, что $10\;-3=-30=15\;-2$, а $15-2=13$)$=10a^2+(15b-2b)\,a-3b^2=10a^2+15ab-2ab-3b^2=(10a^2-2ab)+(15ab-3b^2)=2a(5a-b)+3b(5a-b)=(5a-b)(2a+3b)$

110 $10a^2-13ab-3b^2=$(замѣтимъ, что $10\;-3=-30=-15\;2$, а $2-15=-13$)$=10a^2+(2b-15b)\,a-3b^2=10a^2+2ab-15ab-3b^2=(10a^2+2ab)-(15ab+3b^2)=2a(5a+b)-3b(5a+b)=(5a+b)(2a-3b)$ **110'** $6a^2-7ab-5b^2=$(замѣтимъ, что $6\;-5=-30=-10\;3$ а $3-10=-7$)$=6a^2+(3b-10b)\,a-5b^2=6a^2+3ab-10ab-5b^2=(6a^2+3ab)-(10ab+5b^2)=3a(2a+b)-5b(2a+b)=(2a+b)(3a-5b)$

---

111 $x^3+8x^2+17x+10$ Дѣлители послѣдняго члена 10 суть (теорію см. выше, стран 15 п B) ±1, ±2, ±5, ±10. Замѣтивъ, что обращать въ нуль данный многочленъ могутъ лишь *отрицательныя* значенія x (ибо всѣ члены многочлена положительны), испытываемъ въ качествѣ таковыхъ только отрицательныхъ дѣлителей -1, -2, -5 и -10. Видимъ, что $[x^3+8x^2+17x+10]_{x=-1}=(-1)^3+8\,(-1)^2+17\,(-1)+10=-1+8-17+10=18-18=0$, $[x^3+8x^2+17x+10]_{x=-2}=(-2)^3+8\,(-2)^2+$

$+17(-2)+10=-8+32-34+10=42-42=0$, $[x^3+8x^2+17x+10]_{x=-5}=$ $=(-5)^3+8.(-5)^2+17(-5)+10=-125+200-85+10=210-210=0$ Так образ убѣждаемся, что данный многочленъ содержитъ слѣд двучленныхъ множителей $x+1$, $x+2$, $x+5$ Больше множителей содержащихъ степень (или степени) x кромѣ найденныхъ трехъ, данный многочленъ 3-*ьей* степени, очевидно, не можетъ имѣть не имѣетъ онъ и множителей, не содержащихъ x Слѣд произведеніе найденныхъ биномовъ $x+1$, $x+2$ и $x+5$ и представитъ искомое разложеніе даннаго многочлена на множителей

$$x^3+8x^2+17x+10=(x+1)(x+2)(x+5)$$

Этотъ результатъ получается (какъ повѣрка) и непосредственно по пріему *6-го случая* разложенія $x^3+8x^2+17x+10=x^3+x^2+7x^2+7x+$ $+10x+10=(x^3+x^2)+(7x^2+7x)+(10x+10)=x^2(x+1)+7x(x+1)+10(x+$ $+1)=(x+1)(x^2+7x+10)=(x+1)[x^2+(2+5)x+2\ 5]=(x+1)(x^2+2x+$ $+5x+10)=(x+1)[(x^2+2x)+(5x+10)]=(x+1)[x(x+2)+5(x+2)]=(x+$ $+1)(x+2)(x+5)$

Указаніе На практикѣ въ случаѣ, если данъ *многочленъ 3 ей степени* относительно главной буквы (x), какъ у насъ, при отыскиваніи двучленныхъ множителей (вида $x\pm a$) ограничиваются нахожденіемъ только *одного* такого множителя по *вышеизложенному* пріему Дѣйствительно, выдѣливъ его, получ произведеніе двучлена 1-ой степени (вида $x\pm a$) на многочленъ (трехчленъ) 2-ой степени, послѣдній же разлагается въ произведеніе по вполнѣ опредѣленнымъ правиламъ (какъ №№ 81—110)

111′ $x^3+9x^2+23x+15$ Множитель—1 послѣдняго члена $+15$ даннаго многочлена обращаетъ послѣдній въ 0 при подстановкѣ $x=-1$, отсюда заключаемъ о существованіи двучленнаго множителя $x+1$*) даннаго многочлена Этимъ облегчается разложеніе его

$x^3+9x^2+23x+15=x^3+x^2+8x^2+8x+15x+15=(x^3+x^2)+(8x^2+8x)+$ $+(15x+15)=x^2(x+1)+8x(x+1)+15(x+1)=(x+1)(x^2+8x+15)=(x+$ $+1)[x^2+(3+5)x+3\ 5]=(x+1)(x^2+3x+5x+15)=(x+1)[(x^2+3x)+(5x+$ $+15)]=(x+1)[x(x+3)+5(x+3)]=(x+1)(x+3)(x+5)$

112 $x^3+10x^2+31x+30$ Множитель—2 послѣдняго члена 30 даннаго многочлена (см № 111, указаніе) обращаетъ его въ 0 по подстановкѣ вмѣсто x, слѣд многочленъ имѣетъ двучленный множитель $x+2$, что полезно имѣть въ виду при разложеніи

$x^3+10x^2+31x+30=x^3+2x^2+8x^2+16x+15x+30=(x^3+2x^2)+(8x^2+$ $+16x)+(15x+30)=x^2(x+2)+8x(x+2)+15(x+2)=(x+2)(x^2+8x+15)=$ $=(x+2)[x^2+(3+5)x+3\ 5]=(x+2)(x^2+3x+5x+15)=(x+2)[(x^2+3x)+$ $+(5x+15)]=(x+2)[x(x+3)+5(x+3)]=(x+2)(x+3)(x+5)$ **112′** Множитель—2 послѣдняго члена 24 полинома $x^3+9x^2+26x+24$ обращаетъ его въ 0 при подстановкѣ на мѣсто x, слѣд, данный многочленъ содержитъ множителемъ двучленъ $x+2$, и дѣйствительно

$x^3+9x^2+26x+24=x^3+2x^2+7x^2+14x+12x+24=x^2(x+2)+7x(x+2)+$ $+12(x+2)=(x+2)(x^2+7x+12)=(x+2)[x^2+(3+4)x+3.4]=(x+2)(x^2+3x+4x+$ $+12)=(x+2)[(x^2+3x)+(4x+12)]=(x+2)[x(x+3)+4(x+3)]=(x+2)(x+3)(x+4)$.

---

*) На этотъ счетъ полезно имѣть въ виду слѣдующее практическое **правило**: *если сумма коэффиціентовъ четныхъ степеней x—са + свободный* (послѣдній) *членъ = суммѣ коэффиціентовъ нечетныхъ степеней x—са, то многочленъ имѣетъ множителя $x+1$* Такъ, у насъ $+9+(+15)=+24=+1+(+23)$

113 Множитель $+1$ послѣдняго члена $+6$ многочлена x^3-2x^2-5x обращаетъ его въ 0 при подстановкѣ вмѣсто x, это указываетъ н существованіе множителя $x-1$ *) даннаго многочлена (№ 111, указаніе и въ самомъ дѣлѣ

$x^3-2x^2-5x+6=x^3-x^2-x^2+x-6x+6=(x^3-x^2)-(x^2-x)-(6x-6)$ $=x^2(x-1)-x(x-1)-6(x-1)=(x-1)(x^2-x-6)=(x-1)[x^2+(2-3)x$ $+2(-3)]=(x-1)(x^2+2x-3x-6)=(x-1)[(x^2+2x)-(3x+6)]=(x-$ $[x(x+2)-3(x+2)]=(x-1)(x+2)(x-3)$ **113'** Сумма коэффиціентовъ при x свободнаго члена въ выраженіи $x^3-6x^2+11x-6$ равна 0, именно $+1$ $+(-6)+(+11)+(-6)=0$, слѣд (выноска къ рѣш № 113), данный многочлен содержитъ множителемъ двучленъ $x-1$, дѣйствительно

$x^3-6x^2+11x-6=x^3-x^2-5x^2+5x+6x-6=(x^3-x^2)-(5x^2-5x)+(6x$ $-6)=x^2(x-1)-5x(x-1)+6(x-1)=(x-1)(x^2-5x+6)=(x$ $-1)[x^2+(-2-3)x+(-2)(-3)]=(x-1)(x^2-2x-3x+6)=(x-1)[(x^2$ $-2x)-(3x-6)]=(x-1)[x(x-2)-3(x-2)]=(x-1)(x-2)(x-3)$

114 Алгебраическая сумма коэффиціентовъ при x и свободнаг (послѣдняго) члена многочлена $x^3-9x^2+23x-15$ равна нулю, а именно $+1+(-9)+(+23)+(-15)=0$, отсюда заключаемъ (см правило въ выноск къ рѣш № 113), что одинъ изъ множителей даннаго многочлена ест двучленъ $x-1$, что облегчаетъ разложеніе

$x^3-9x^2+23x-15=x^3-x^2-8x^2+8x+15x-15=(x^3-x^2)-(8x^2-8x$ $+(15x-15)=x^2(x-1)-8x(x-1)+15(x-1)=(x-1)(x^2-8x+15)=(x-1)[x^2$ $+(-3-5)x+(-3)(-5)]=(x-1)(x^2-3x-5x+15)=(x-1)[(x^2-3x)-(5x$ $-15)]=(x-1)[x(x-3)-5(x-3)]=(x-1)(x-3)(x-5)$ **114'**. Т к сумма коэффиці ентовъ при x и свободнаго члена $+1+(+1)+(-17)+(+15)$ многочлен $x^3+x^2-17x+15$ равна 0, то (выноска къ рѣш № 113) одинъ изъ множите лей многочлена есть $x-1$, дѣйствительно

$x^3+x^2-17x+15=x^3-x^2+2x^2-2x-15x+15=(x^3-x^2)+(2x^2-2x)$ $-(15x-15)=x^2(x-1)+2x(x-1)-15(x-1)=(x-1)(x^2+2x-15)=(x$ $-1)[x^2+(5-3)x+5(-3)]=(x-1)(x^2+5x-3x-15)=(x-1)[(x^2-3x)$ $+(5x-15)]=(x-1)[x(x-3)+5(x-3)]=(x-1)(x-3)(x+5)$

115 Множитель $+2$ послѣдняго члена -24 многочлена x^3-9x^2 $+26x-24$ обращаетъ его въ 0 при подстановкѣ въ него на мѣсто x ибо $2^3-9\ 2^2+26\ 2-24=8-36+52-24=60-60=0$ Это указываетъ н то, что данный многочленъ содержитъ двучленнаго множителя $x-2$ вслѣдствіе чего разложеніе облегчается (№ 111, указаніе)

$x^3-9x^2+26x-24=x^3-2x^2-7x^2+14x+12x-24=(x^3-2x^2)-(7x^2$ $-14x)+(12x-24)=x^2(x-2)-7x(x-2)+12(x-2)=(x-2)(x^2-7x+12)$ $=(x-2)[x^2+(-3-4)x+(-3)(-4)]=(x-2)(x^2-3x-4x+12)=(x$ $-2)[(x^2-3x)-(4x-12)]=(x-2)[x(x-3)-4(x-3)]=(x-2)(x-3)(x-4)$ **115'**. Множитель $+2$ свободнаго члена $+24$ многочлена x^3-3x^2-10 $+24$ обращаетъ его въ 0, при $x=2$, ибо $2^3-3\ 2^2-10\ 2+24=8-12$ $-20+24=32-32=0$, слѣд, многочленъ содержитъ множителемъ $x+2$

---

*) Относительно этого множителя существуетъ слѣд полезное практическо правило *если алгебраическая сумма коэффиціентовъ при x въ многочленѣ сложен ная съ свободнымъ* (послѣднимъ) *членомъ*, $=0$, *то многочленъ содержитъ двучленнаг множителя $x-1$* Такъ, въ данномъ многочленѣ имѣемъ $+1+(-2)+(-5)+(+6)=0$

$x^3-3x^2-10x+24=x^3-2x^2-x^2+2x-12x+24=(x^3-2x^2)-(x^2-2x)-(12x-24)=x^2(x-2)-x(x-2)-12(x-2)=(x-2)(x^2-x-12)=(x-2)[x^2+(3-4)x+3\ (-4)]=(x-2)(x^2+3x-4x-12)=(x-2)[(x^2+3x)-(4x+12)]=(x-2)[x(x+3)-4(x+3)]=(x-2)(x+3)(x-4)$

116 Т к множитель $+2$ послѣдняго члена $+30$ многочлена $x^3-4x^2-11x+30$ обращаетъ его въ нуль (ибо $2^3-4\ 2^2-11\ 2+30=8-16-22+30=38-38=0$) при замѣнѣ имъ x, то отсюда выводимъ, что двучленъ $x-2$ является множителемъ многочлена, что подтверждается и непосредственнымъ разложенiемъ (см № 111, указанiе)

$x^3-4x^2-11x+30=x^3-2x^2-2x^2+4x-15x+30=(x^3-2x^2)-(2x^2-4x)-(15x-30)=x^2(x-2)-2x(x-2)-15(x-2)=(x-2)(x^2-2x-15)=(x-2)[x^2+(3-5)x+3\ (-5)]=(x-2)(x^2+3x-5x-15)=(x-2)[(x^2+3x)-(5x+15)]=(x-2)[x(x+3)-5(x+3)]=(x-2)(x+3)(x-5)$ **116′** Множитель $+2$ послѣдняго члена -30 полинома $x^3-10x^2+31x-30$ обращаетъ въ 0 его, при замѣнѣ въ немъ x черезъ $+2$, именно $2^3-10\ 2^2+31\ 2-30=8-40+62-30=70-70=0$, это значитъ, что полиномъ обладаетъ множителемъ $x-2$, и въ самомъ дѣлѣ

$x^3-10x^2+31x-30=x^3-2x^2-8x^2+16x+15x-30=(x^3-2x^2)-(8x^2-16x)+(15x-30)=x^2(x-2)-8x(x-2)+15(x-2)=(x-2)(x^2-8x+15)=(x-2)[x^2+(-3-5)x+(-3)\ (-5)]=(x-2)(x^2-3x-5x+15)=(x-2)[(x^2-3x)-(5x-15)]=(x-2)[x(x-3)-5(x-3)]=(x-2)(x-3)(x-5)$

№№ 117—120 вполнѣ подобны предыдущимъ, съ прибавленiемъ лишь одночленнаго множителя x (*1-ый случ разл*) Ссылки на теорiю (на стр 15, п в]), указанiе къ рѣш № 111 и проч —сохраняютъ свою силу при рѣш этихъ задачъ

117 $x^4+11x^3+38x^2+40x=x(x^3+11x^2+38x+40)=x(x^3+2x^2+9x^2+18x+20x+40)=x[(x^3+2x^2)+(9x^2+18x)+(20x+40)]=x[x^2(x+2)+9x(x+2)+20(x+2)]=x(x+2)(x^2+9x+20)=x(x+2)[x^2+(4+5)x+4\ 5]=x(x+2)(x^2+4x+5x+20)=x(x+2)[(x^2+4x)+(5x+20)]=x(x+2)[x(x+4)+5(x+4)]=x(x+2)(x+4)(x+5)$ **117′** $x^4+12x^3+47x^2+60x=x(x^3+12x^2+47x+60)=x(x^3+3x^2+9x^2+27x+20x+60)=x[(x^3+3x^2)+(9x^2+27x)+(20x+60)]=x[x^2(x+3)+9x(x+3)+20(x+3)]=x(x+3)(x^2+9x+20)=x(x+3)[x^2+(4+5)x+4\ 5]=x(x+3)(x^2+4x+5x+20)=x(x+3)[(x^2+4x)+(5x+20)]=x(x+3)[x(x+4)+5(x+4)]=x(x+3)(x+4)(x+5)$

118 $x^4-4x^3-17x^2+60x=x(x^3-4x^2-17x+60)=x(x^3-3x^2-x^2+3x-20x+60)=x[(x^3-3x^2)-(x^2-3x)-(20x-60)]=x[x^2(x-3)-x(x-3)-20(x-3)]=x(x-3)(x^2-x-20)=x(x-3)[x^2+(4-5)x+4\ (-5)]=x(x-3)(x^2+4x-5x-20)=x(x-3)[(x^2+4x)-(5x+20)]=x(x-3)[x(x+4)-5(x+4)]=x(x-3)(x+4)(x-5)$ **118′** $x^4-3x^3-18x^2+40x=x(x^3-3x^2-18x+40)=x(x^3-2x^2-x^2+2x-20x+40)=x[(x^3-2x^2)-(x^2-2x)-(20x-40)]=x[x^2(x-2)-x(x-2)-20(x-2)]=x(x-2)(x^2-x-20)=x(x-2)[x^2+(4-5)x+4\ (-5)]=x(x-2)(x^2+4x-5x-20)=x(x-2)[(x^2+4x)-(5x+20)]=x(x-2)[x(x+4)-5(x+4)]=x(x-2)(x+4)(x-5)$

119 $x^4-11x^3+38x^2-40x=x(x^3-11x^2+38x-40)=x(x^3-2x^2-9x^2+18x+20x-40)=x[(x^3-2x^2)-(9x^2-18x)+(20x-40)]=x[x^2(x-2)-9x(x-2)+20(x-2)]=x(x-2)(x^2-9x+20)=x(x-2)[x^2+(-4-5)x+(-4)\ (-5)]=x(x-2)(x^2-4x-5x+20)=x(x-2)[(x^2-4x)-(5x-20)]=x(x-2)[x(x-4)-5(x-4)]=x(x-2)(x-4)(x-5)$

119′ $x^4-12x^3+47x^2-60x=x(x^3-12x^2+47x-60)=x(x^3-3x^2-9x^2+27x+20x-60)=x[(x^3-3x^2)-(9x^2-27x)+(20x-60)]=x[x^2(x-3)-9x(x-$

$-3)+20(x-3)]=x(x-3)(x^2-9x+20)=x(x-3)[x^2+(-4-5)x+(-4)(-5)]=x(x-3)(x^2-4x-5x+20)=x(x-3)[(x^2-4x)-(5x-20)]=x(x-3)[x(x-4)-5(x-4)]=x(x-3)(x-4)(x-5)$

120 $x^4-6x^3-7x^2+60x=x(x^3-6x^2-7x+60)=x(x^3+3x^2-9x^2-27x+20x+60)=x[(x^3+3x^2)-(9x^2+27x)+(20x+60)]=x[x^2(x+3)-9x(x+3)+20(x+3)]=x(x+3)(x^2-9x+20)=x(x+3)[x^2+(-4-5)x+(-4)(-5)]=x(x+3)(x^2-4x-5x+20)=x(x+3)[(x^2-4x)-(5x-20)]=x(x+3)[x(x-4)-5(x-4)]=x(x+3)(x-4)(x-5)$ **120′** $x^4-7x^3+2x^2+40x=x(x^3-7x^2+2x+40)=x(x^3+2x^2-9x^2-18x+20x+40)=x[(x^3+2x^2)-(9x^2+18x)+(20x+40)]=x[x^2(x+2)-9x(x+2)+20(x+2)]=x(x+2)(x^2-9x+20)=x(x+2)[x^2+(-4-5)x+(-4)(-5)]=x(x+2)(x^2-4x-5x+20)=x(x+2)[(x^2-4x)-(5x-20)]=x(x+2)[x(x-4)-5(x-4)]=x(x+2)(x-4)(x-5)$

---

§ 2. Преобразованіе многочленовъ въ произведені помощью формулъ сокращ. умноженія и дѣленія.

7-ой случай разложенія *помощью формулъ сокращеннаго умноженія и дѣленія*)*

1° Формула $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ говоритъ, что *разность квадратовъ двухъ чиселъ разлагается въ произведеніе суммы ихъ на ихъ разность*

2° Формула $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$ говоритъ, что *сумма квадратовъ двухъ чиселъ сложенная съ удвоеннымъ произведеніемъ ихъ разлагается въ квадратъ суммы этихъ чиселъ*

3° Формула $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$ говоритъ что *сумма квадратовъ двухъ чиселъ уменьшенная на удвоенное произведеніе ихъ, разлагается въ квадратъ ихъ разности*

4° Формула $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$ говоритъ, что *сумма кубовъ двухъ чиселъ сложенная съ суммой утроенныхъ произведеній квадрата перваго числа на второе и квадрата второго на первое, разлагается въ кубъ суммы этихъ чиселъ*

5° Формула $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$ говоритъ, что *разность кубовъ двухъ чиселъ, сложенная съ утроеннымъ произведеніемъ перваго числа на квадратъ второго и уменьшенная на утроенное произведеніе квадрата перваго числа на второе разлагается въ кубъ разности перваго числа и второго*

6° Формула $a^m-b^m=(a-b)(a^{m-1}+a^{m-2}b+a^{m-3}b^2+\ldots+a^2b^{m-3}+ab^{m-2}+b^{m-1})$ даетъ *разложеніе (въ произведеніе) разности m-ыхъ степеней двухъ чиселъ* при всякомъ цѣломъ и положительномъ показателѣ степени m и выражаетъ законъ составленія второго сомножителя (суммы) произведенія. Замѣтимъ слѣдующіе часто встрѣчающіеся частные случаи этого разложенія именно когда 1) $m=3$, 2) $m=5$ (случай $m=2$, какъ особо частный и важный, представленъ въ п 1°).

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2) \quad \| \quad a^5-b^5=(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)$$

7° Формула $a^m+b^m=(a+b)(a^{m-1}-a^{m-2}b+a^{m-3}b^2-a^{m-4}b^3+\ldots+a^2b^{m-3}-ab^{m-2}+b^{m-1})$, при m нечетномъ, даетъ *разложеніе (въ произвед.) суммы нечетныхъ степеней двухъ чиселъ* и выражаетъ законъ составленія второго сомножителя (многочлена съ чередующимися знаками начиная съ «+») произведенія. Полезно замѣтить частные случаи когда 1) $m=3$ и 2) $m=5$

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2) \quad \| \quad a^5+b^5=(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)$$

Въ поясненіе вышеизложеннаго нелишне замѣтить, что словесное выраженіе формулъ сокращеннаго умноженія и дѣленія необходимо для сознательнаго ихъ примѣненія въ цѣляхъ разложенія выраженій на множителей.

*) Срв задачи этого §-фа съ задачами § 14 отд III, гдѣ дѣлимое преобразовывается по тому же методу. Пріемы настоящаго случая часто встрѣчаются на практикѣ, и ихъ усвоеніе весьма важно

По формулѣ п 1° рѣшаются №№ 121—130, 136—140′, по форм п 2°—№№ 131, 132 133, 134′, 135, 141′, 142, 143, 144, по форм п 3°—№№ 131, 132, 133′, 134, 135′, 141, 142′, 143 144′, 145, 145′, по форм п 4°—№№ 154, 155′, 156, 157′, по форм п 5°—№№ 154′, 155, 156′, 157, по форм п 6°—№№ 146, 147 148, 149, 150′, 151 152, 153′, 158′, 159, 160; по форм п 7°—№№ 146′ 147, 148, 149, 150, 151, 152′, 153 158, 159, 160 Вообще же, «случай 7 ой» разложенія охватываетъ №№ 121—160′

121 $4-x^2=2^2-x^2=(2+x)(2-x)$ **121′** $x^2-4=x^2-2^2=(x+2)(x-2)$

122 $y^2-9=y^2-3^2=(y+3)(y-3)$ **122′** $9-y^2=3^2-y^2=(3+y)(3-y)$

123 $25-a^2=5^2-a^2=(5+a)(5-a)$ **123′** $a^2-25=a^2-5^2=(a+5)(a-5)$

124 $b^2-36=b^2-6^2=(b+6)(b-6)$ **124′** $36-b^2=6^2-b^2=(6+b)(6-b)$

125 $a^2b^2-100=abab-10\cdot 10=(ab)^2-10^2=(ab+10)(ab-10)$ **125′** $100-a^2b^2=10\cdot 10-ab\cdot ab=10^2-(ab)^2=(10+ab)(10-ab)$

126 $1-4c^2=1\cdot 1-2c\cdot 2c=1^2-(2c)^2=(1+2c)(1-2c)$ **126′** $4c^2-1=2c\cdot 2c-1\cdot 1=(2c)^2-1^2=(2c+1)(2c-1)$

127 $9x^2-1=3x\cdot 3x-1\cdot 1=(3x)^2-1^2=(3x+1)(3x-1)$ **127′** $1-9x^2=1\cdot 1-3x\cdot 3x=1^2-(3x)^2=(1+3x)(1-3x)$

128 $m^2-n^2=(m+n)(m-n)$ **128′** $n^2-m^2=(n+m)(n-m)$

129 $49x^2-y^2=7x\cdot 7x-y^2=(7x)^2-y^2=(7x+y)(7x-y)$ **129′** $y^2-49x^2=y^2-7x\cdot 7x=y^2-(7x)^2=(y+7x)(y-7x)$

130 $4m^2-9n^2=2m\cdot 2m-3n\cdot 3n=(2m)^2-(3n)^2=(2m+3n)(2m-3n)$ **130′** $9n^2-4m^2=3n\cdot 3n-2m\cdot 2m=(3n)^2-(2m)^2=(3n+2m)(3n-2m)$

131 $a^2+6a+9=a^2+2\cdot a\cdot 3+3^2=(a+3)^2$ **131′** $a^2-6a+9=a^2-2\cdot a\cdot 3+3^2=(a-3)^2$

132 $m^2-10m+25=m^2-2\cdot m\cdot 5+5^2=(m-5)^2$ **132′** $m^2+10m+25=m^2+2\cdot m\cdot 5+5^2=(m+5)^2$

133 $p^2+4pq+4q^2=p^2+2\cdot p\cdot 2q+2q\cdot 2q=p^2+2\cdot p\cdot 2q+(2q)^2=(p+2q)^2$ **133′** $p^2-4pq+4q^2=p^2-2\cdot p\cdot 2q+(2q)^2=(p-2q)^2$.

134 $x^2-8xy+16y^2=x^2-2\cdot x\cdot 4y+4y\cdot 4y=x^2-2\cdot x\cdot 4y+(4y)^2=(x-4y)^2$ **134′** $x^2+8xy+16y^2=x^2+2\cdot x\cdot 4y+4y\cdot 4y=x^2+2\cdot x\cdot 4y+(4y)^2=(x+4y)^2$

135 $z^2+14z+49=z^2+2\cdot z\cdot 7+7^2=(z+7)^2$ **135′** $z^2-14z+49=z^2-2\cdot z\cdot 7+7^2=(z-7)^2$

136 $25a^2-36b^2=5a\cdot 5a-6b\cdot 6b=(5a)^2-(6b)^2=(5a+6b)(5a-6b)$ **136′** $36a^2-25b^2=6a\cdot 6a-5b\cdot 5b=(6a)^2-(5b)^2=(6a+5b)(6a-5b)$

137 $16c^2-81d^2=4c\cdot 4c-9d\cdot 9d=(4c)^2-(9d)^2=(4c+9d)(4c-9d)$ **137′**. $81c^2-16d^2=9c\cdot 9c-4d\cdot 4d=(9c)^2-(4d)^2=(9c+4d)(9c-4d)$

138 ${}^4/_9m^2-100n^2={}^2/_3m\cdot{}^2/_3m-10n\cdot 10n=({}^2/_3m)^2-(10n)^2=({}^2/_3m+10n)({}^2/_3m-10n)$ **138′** ${}^4/_9n^2-100m^2={}^2/_3n\cdot{}^2/_3n-10m\cdot 10m=({}^2/_3n)^2-(10m)^2=({}^2/_3n+10m)({}^2/_3n-10m)$

139 ${}^{25}/_{36}p^2-{}^4/_{49}q^2={}^5/_6p\cdot{}^5/_6p-{}^2/_7q\cdot{}^2/_7q=({}^5/_6p)^2-({}^2/_7q)^2=({}^5/_6p+{}^2/_7q)({}^5/_6p-{}^2/_7q)$ **139′** ${}^4/_{49}p^2-{}^{25}/_{36}q^2={}^2/_7p\cdot{}^2/_7p-{}^5/_6q\cdot{}^5/_6q=({}^2/_7p)^2-({}^5/_6q)^2=({}^2/_7p+{}^5/_6q)({}^2/_7p-{}^5/_6q)$

140 ${}^{64}/_{81}x^2y^2-{}^1/_{25}z^2={}^8/_9xy\cdot{}^8/_9xy-{}^1/_5z\cdot{}^1/_5z=({}^8/_9xy)^2-({}^1/_5z)^2=({}^8/_9xy+{}^1/_5z)({}^8/_9xy-{}^1/_5z)$ **140′**. ${}^1/_{25}x^2y^2-{}^{64}/_{81}z^2={}^1/_5xy\cdot{}^1/_5xy-{}^8/_9z\cdot{}^8/_9z=({}^1/_5xy)^2-({}^8/_9z)^2=({}^1/_5xy+{}^8/_9z)({}^1/_5xy-{}^8/_9z)$

141 $a^4-2a^2x+x^2=a^2\cdot a^2-2a^2x+x^2=(a^2)^2-2\cdot(a^2)^1\cdot x+x^2=(a^2-x)^2$ **141′** $a^2+2ax^2+x^4=a^2+2ax^2+x^2\cdot x^2=a^2+2\cdot a\cdot(x^2)^1+(x^2)^2=(a+x^2)^2$

142 $b^2+2bc^3+c^6=b^2+2bc^3+c^3\cdot c^3=b^2+2\cdot b\cdot(c^3)^1+(c^3)^2=(b+c^3)^2$ **142′** $b^6-2b^3c+c^2=b^3\cdot b^3-2b^3c+c^2=(b^3)^2-2\cdot(b^3)^1\cdot c+c^2=(b^3-c)^2$

143 $m^8-6m^4y^3+9y^6=m^4\ m^4-2\ 3m^4y^3+3y^3\ 3y^3=(m^4)^2-2\ (m^4)^1 . (3y^3)^1+(3y^3)^2=(m^4-3y^3)^2$ **143′** $m^6+6m^3y^4+9y^8=m^3\ m^3+2 . 3m^3y^4+3y^4\ 3y^4=(m^3)^2+2\ (m^3)^1\ (3y^4)^1+(3y^4)^2=(m^3+3y^4)^2$

144 $k^{16}+10k^8l^5+25l^{10}=k^8\ k^8+2\ 5k^8l^5+5l^5\ 5l^5=(k^8)^2+2\ (k^8)^1\ (5l^5)^1+(5l^5)^2=(k^8+5l^5)^2$ **144′** $k^{10}-10k^5l^8+25l^{16}=k^5\ k^5-2\ 5k^5l^8+5l^8\ 5l^8=(k^5)^2-2\ (k^5)^1\ (5l^8)^1+(5l^8)^2=(k^5-5l^8)^2$

145 $4p^{12}-20p^6z^5+25z^{10}=2p^6\ 2p^6-2\ 2\ 5p^6z^5+5z^5\ 5z^5=(2p^6)^2-2 . (2p^6)^1\ (5z^5)^1+(5z^5)^2=(2p^6-5z^5)^2$. **145′** $4p^{10}-20p^5z^6+25z^{12}=2p^5\ 2p^5-2\ 2\ 5p^5z^6+5z^6\ 5z^6=(2p^5)^2-2\ (2p^5)^1\ (5z^6)^1+(5z^6)^2=(2p^5-5z^6)^2$

146 $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ **146′** $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ Замѣтимъ, что количества a^2+ab+b^2 и a^2-ab+b^2 *неразложимы*

147 $m^3+1=m^3+1^3=(m+1)(m^2-m\ 1+1^2)=(m+1)(m^2-m+1)$ **147′** $m^3-1=m^3-1^3=(m-1)(m^2+m\ 1+1^2)=(m-1)(m^2+m+1)$

148. $n^3-8=n^3-2^3=(n-2)(n^2+n\ 2+2^2)=(n-2)(n^2+2n+4)$ **148′** $n^3+8=n^3+2^3=(n+2)(n^2-n\ 2+2^2)=(n+2)(n^2-2n+4)$

149 $27+c^3=3^3+c^3=(3+c)(3^2-3\ c+c^2)=(3+c)(9-3c+c^2)$ **149′** $c^3-27=c^3-3^3=(c-3)(c^2+c\ 3+3^2)=(c-3)(c^2+3c+9)$

150 $(2p)^3+q^3=[(2p)^1+q^1][(2p)^2-(2p)^1\ q^1+q^2]=(2p+q)(2p\ 2p-2pq+q^2)=(2p+q)(4p^2-2pq+q^2)$, но $(2p)^3=2p\ 2p\ 2p=8p^3$, слѣд., мы нашли, что $8p^3+q^3=(2p+q)(4p^2-2pq+q^2)$ **150′** $p^3-(3q)^3=[p^1-(3q)^1][p^2+p^1\ (3q)^1+(3q)^2]=(p-3q)(p^2+3pq+3q\ 3q)=(p-3q)(p^2+3pq+9q^2)$ Но $(3q)^3=+3q\ 3q\ 3q=27q^3$, слѣд., мы показали, что $p^3-27q^3=(p-3q)(p^2+3pq+9q^2)$

151 $27x^3-8y^3=3x\ 3x.3x-2y\ 2y\ 2y=(3x)^3-(2y)^3=[(3x)^1-(2y)^1][(3x)^2+(3x)^1\ (2y)^1+(2y)^2]=(3x-2y)(3x\ 3x+3\ 2xy+2y\ 2y)=(3x-2y)(9x^2+6xy+4y^2)$ **151′** $8x^3+27y^3=2x\ 2x\ 2x+3y\ 3y\ 3y=(2x)^3+(3y)^3=[(2x)^1+(3y)^1][(2x)^2-(2x)^1\ (3y)^1+(3y)^2]=(2x+3y)(2x\ 2x-2.3xy+3y\ 3y)=(2x+3y)(4x^2-6xy+9y^2)$

152 $x^5-y^5=(x-y)(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4)$ **152′** $x^5+y^5=(x+y)(x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4)$

153 $x^7+y^7=(x+y)(x^6-x^5y+x^4y^2-x^3y^3+x^2y^4-xy^5+y^6)$ **153′** $x^7-y^7=(x-y)(x^6+x^5y+x^4y^2+x^3y^3+x^2y^4+xy^5+y^6)$

154 $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$ Разлагая по общему правилу, имѣемъ $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a^3+b^3)+(3a^2b+3ab^2)=(a+b)(a^2-ab+b^2)+3ab(a+b)=(a+b)[(a^2-ab+b^2)+3ab]=(a+b)(a^2-ab+b^2+3ab)=(a+b)(a^2+2ab+b^2)=(a+b)(a+b)^2=(a+b)^{1+2}=(a+b)^3$ Еще иначе $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=a^3+a^2b+2a^2b+ab^2+2ab^2+b^3=(a^3+a^2b)+(2a^2b+2ab^2)+(ab^2+b^3)=a^2(a+b)+2ab(a+b)+b^2(a+b)=(a+b)(a^2+2ab+b^2)=(a+b) . (a+b)^2=(a+b)^3$ **154′** $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$ Эта формула подтверждается слѣдующими выкладками $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a^3-b^3)-(3a^2b-3ab^2)=(a-b)(a^2+ab+b^2)-3ab(a-b)=(a-b)[(a^2+ab+b^2)-3ab]=(a-b)(a^2+ab+b^2-3ab)=(a-b)(a^2-2ab+b^2)=(a-b)(a-b)^2=(a-b)^{1+2}=(a-b)^3$ Другой способъ $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=a^3-a^2b-2a^2b+ab^2+2ab^2-b^3=(a^3-a^2b)-(2a^2b-2ab^2)+(ab^2-b^3)=a^2(a-b)-2ab(a-b)+b^2(a-b)=(a-b)(a^2-2ab+b^2)=(a-b)(a-b)^2=(a-b)^3$

155 $n^3-6n^2p+12np^2-8p^3=n^3-3\ n^2\ 2p+3\ n\ 2p\ 2p-2p\ 2p\ 2p=n^3-3\ n^2\ (2p)^1+3.n^1\ (2p)^2-(2p)^3=(n-2p)^3$ **155′** $n^3+6n^2p+12np^2+8p^3=n^3+3\ n^2\ 2p+3\ n\ 2p\ 2p+2p.2p\ 2p=n^3+3\ n^2\ (2p)^1+3\ n^1\ (2p)^2+(2p)^3=(n+2p)^3$

156 $27p^3+27p^2y+9py^2+y^3=3p\,3p\,3p+3\,3p\,3p\,y+3\,3p\,y^2+y^3=(3p)^3+3\,(3p)^2\,y^1+3\,(3p)^1\,y^2+y^3=(3p+y)^3$ **156′** $27p^3-27p^2y+9py^2-y^3=3p\,3p\,3p-3\,3p\,3p\,y+3\,3p\,y^2-y^3=(3p)^3-3\,(3p)^2\,y^1+3\,(3p)^1\,y^2-y^3=(3p-y)^3$

157 $8x^3-60x^2z+150xz^2-125z^3=2x\,2x\,2x-3\,2x\,2x\,5z+3\,2x\,5z\,5z-5z\,5z\,5z=(2x)^3-3\,(2x)^2\,(5z)^1+3\,(2x)^1\,(5z)^2-(5z)^3=(2x-5z)^3$ **157′** $8x^3+60x^2z+150xz^2+125z^3=2x\,2x\,2x+3\,2x\,2x\,5z+3\,2x\,5z\,5z+5z\,5z\,5z=(2x)^3+3\,(2x)^2\,(5z)^1+3\,(2x)^1\,(5z)^2+(5z)^3=(2x+5z)^3$

158 $125a^3x^6+216b^6y^3=5ax^2\,5ax^2\,5ax^2+6b^2y\,6b^2y\,6b^2y=(5ax^2)^3+(6b^2y)^3=[(5ax^2)^1+(6b^2y)^1]\,[(5ax^2)^2-(5ax^3)^1\,(6b^2y)^1+(6b^2y)^2]=(5ax^2+6b^2y)\,(5ax^2\,5ax^2-5ax^2\,6b^2y+6b^2y\,6b^2y)=(5ax^2+6b^2y)(25a^2x^4-30ab^2x^2y+36b^4y^2)$ **158′** $216a^6x^3-125b^3y^6=6a^2x\,6a^2x\,6a^2x-5by^2\,5by^2\,5by^2=(6a^2x)^3-(5by^2)^3=[(6a^2x)^1-(5by^2)^1]\,[(6a^2x)^2+(6a^2x)^1\,(5by^2)^1+(5by^2)^2]=(6a^2x-5by^2)\,(6a^2x\,6a^2x+6a^2x\,5by^2+5by^2\,5by^2)=(6a^2x-5by^2)(36a^4x^2+30a^2bxy^2+25b^2y^4)$

159 $243m^5y^5-32n^{10}z^{10}=3my\,3my\,3my.3my\,3my-2n^2z^2\,2n^2z^2\,2n^2z^2\,2n^2z^2\,2n^2z^2=(3my)^5-(2n^2z^2)^5=[(3my)^1-(2n^2z^2)^1][(3my)^4+(3my)^3\,(2n^2z^2)^1+(3my)^2\,(2n^2z^2)^2+(3my)^1\,(2n^2z^2)^3+(2n^2z^2)^4]=(3my-2n^2z^2)\,(3my\,3my\,3my\,3my+3my\,3my\,3my\,2n^2z^2+3my.3my\,2n^2z^2\,2n^2z^2+3my\,2n^2z^2\,2n^2z^2\,2n^2z^2+2n^2z^2\,2n^2z^2\,2n^2z^2\,2n^2z^2)=(3my-2n^2z^2)\,(81m^4y^4+54m^3n^2y^3z^2+36m^2n^4y^2z^4+24mn^6yz^6+16n^8z^8)$ **159′** $32n^5y^5+243m^{10}z^{10}=2ny\,2ny\,2ny\,2ny\,2ny+3m^2z^2\,3m^2z^2\,3m^2z^2\,3m^2z^2\,3m^2z^2=(2ny)^5+(3m^2z^2)^5=[(2ny)^1+(3m^2z^2)^1]\,[(2ny)^4-(2ny)^3\,(3m^2z^2)^1+(2ny)^2\,(3m^2z^2)^2-(2ny)^1\,(3m^2z^2)^3+(3m^2z^2)^4]=(2ny+3m^2z^2)\,(2ny\,2ny\,2ny\,2ny-2ny\,2ny\,2ny\,3m^2z^2+2ny.2ny\,3m^2z^2\,3m^2z^2-2ny\,3m^2z^2\,3m^2z^2\,3m^2z^2+3m^2z^2\,3m^2z^2\,3m^2z^2\,3m^2z^2)=(2ny+3m^2z^2)(16n^4y^4-24m^2n^3y^3z^2+36m^4n^2y^2z^4-54m^6nyz^6+81m^8z^8)$

160 $32p^5z^{10}+243q^{10}u^5=2pz^2\,2pz^2\,2pz^2\,2pz^2\,2pz^2+3q^2u\,3q^2u\,3q^2u\,3q^2u\,3q^2u=(2pz^2)^5+(3q^2u)^5=[(2pz^2)^1+(3q^2u)^1]\,[(2pz^2)^4-(2pz^2)^3\,(3q^2u)^1+(2pz^2)^2\,(3q^2u)^2-(2pz^2)^1\,(3q^2u)^3+(3q^2u)^4]=(2pz^2+3q^2u)(2pz^2\,2pz^2\,2pz^2\,2pz^2-2pz^2\,2pz^2\,2pz^2\,3q^2u+2pz^2\,2pz^2\,3q^2u\,3q^2u-2pz^2\,3q^2u.3q^2u\,3q^2u+3q^2u\,3q^2u\,3q^2u\,3q^2u)=(2pz^2+3q^2u)\,(16p^4z^8-24p^3q^2z^6u+36p^2q^4z^4u^2-54pq^6z^2u^3+81q^8u^4)$ **160′** $243p^{10}z^5-32q^5u^{10}=3p^2z\,3p^2z\,3p^2z\,3p^2z\,3p^2z-2qu^2\,2qu^2\,2qu^2\,2qu^2\,2qu^2=(3p^2z)^5-(2qu^2)^5=[(3p^2z)^1-(2qu^2)^1]\,[(3p^2z)^4+(3p^2z)^3\,(2qu^2)^1+(3p^2z)^2\,(2qu^2)^2+(3p^2z)^1\,(2qu^2)^3+(2qu^2)^4]=(3p^2z-2qu^2)\,(3p^2z\,3p^2z\,3p^2z\,3p^2z+3p^2z\,3p^2z\,3p^2z\,2qu^2+3p^2z\,3p^2z\,2qu^2\,2qu^2+3p^2z.2qu^2\,2qu^2\,2qu^2+2qu^2\,2qu^2.2qu^2\,2qu^2)=(3p^2z-2qu^2)(81p^8z^4+54p^6qz^3u^2+36p^4q^2z^2u^4+24p^2q^3zu^6+16q^4u^8)$

№№ **161—240** заключаютъ всѣ разобранные выше (7) случаи разложенія и, являясь смѣшаннаго характера представляютъ въ этомъ смыслѣ общій случай, такъ сказать, разложенія При рѣшеніи ихъ надо послѣдовательно испытывать, не представляетъ ли данная задача того или иного случая разложенія, и считать разложеніе оконченнымъ не прежде, чѣмъ убѣдившись, что къ найденнымъ множителямъ не подходитъ ни одинъ изъ «случаевъ разложенія» Лишь послѣ этого можно сказать, что данное выраженіе разложено на *простыхъ* множителей Полезно однако имѣть въ виду, что *терминъ «простой множитель» имѣетъ здѣсь относительное значеніе*, именно, по отношенію къ извѣстнымъ намъ признакамъ и методамъ разложенія *)

*) «Если данныя цѣлыя выраженія суть *цѣлые многочлены*, то разложеніе ихъ на цѣлыхъ сомножителей представляетъ задачу, выходящую, въ большинствѣ случаевъ, изъ предѣловъ элементарной алгебры» (*Н Билибинъ*, «Учебникъ алгебры» изд 4, стр 36)

161 $10a^4b^2-40a^2b^4=10a^2b^2(a^2-4b^2)=10a^2b^2(a^2-2b\cdot 2b)=2\cdot 5a^2b^2[a^2-(2b)^2]=2\cdot 5a^2b^2(a+2b)(a-2b)$ **161′** $90a^3b^2-10ab^4=10ab^2(9a^2-b^2)=10ab^2(3a\cdot 3a-b^2)=2\cdot 5ab^2[(3a)^2-b^2]=2\cdot 5ab^2(3a+b)(3a-b)$

162 $75a^6b-12a^2b^5=3a^2b(25a^4-4b^4)=3a^2b(5a^2\cdot 5a^2-2b^2\cdot 2b^2)=3a^2b[(5a^2)^2-(2b^2)^2]=3a^2b(5a^2+2b^2)(5a^2-2b^2)$ **162′** $12a^6b^2-75a^2b^6=3a^2b^2(4a^4-25b^4)=3a^2b^2(2a^2\cdot 2a^2-5b^2\cdot 5b^2)=3a^2b^2[(2a^2)^2-(5b^2)^2]=3a^2b^2(2a^2+5b^2)(2a^2-5b^2)$

163 $2ab^2-4ab+2a=2a(b^2-2b+1)=2a(b^2-2\cdot b\cdot 1+1^2)=2a(b-1)^2$ **163′** $3ab^2+6ab+3a=3a(b^2+2b+1)=3a(b^2+2\cdot b\cdot 1+1^2)=3a(b+1)^2$

164. $a^3b^4+4a^3b^2+4a^3b^3=a^3b^2(b^2+4+4b)=a^3b^2(b^2+2\cdot b\cdot 2+2^2)=a^3b^2(b+2)^2$ **164′** $ab^7-4ab^5+4ab^3=ab^3(b^4-4b^2+4)=ab^3(b^2\cdot b^2-2\cdot 2b^2+2\cdot 2)=ab^3[(b^2)^2-2\cdot(b^2)^1\cdot 2+2^2]=ab^3(b^2-2)^2$

165 $-8a^3x-18ax^3+24a^2x^2=-2ax(4a^2+9x^2-12ax)=-2ax(4a^2-12ax+9x^2)=-2ax(2a\cdot 2a-2\cdot 6ax+3x\cdot 3x)=-2ax[(2a)^2-2\cdot(2a)^1\cdot(3x)^1+(3x)^2]=-2ax(2a-3x)^2$ **165′** $-27a^3x-12ax^3+36a^2x^2=-3ax(9a^2+4x^2-12ax)=-3ax(9a^2-12ax+4x^2)=-3ax(3a\cdot 3a-2\cdot 6ax+2x\cdot 2x)=-3ax[(3a)^2-2\cdot(3a)^1\cdot(2x)^1+(2x)^2]=-3ax(3a-2x)^2$

166 $-16a^3x^8+72a^4x^7-81a^5x^6=-a^3x^6(16x^2-72ax+81a^2)=-a^3x^6(4x\cdot 4x-2\cdot 4\cdot 9ax+9a\cdot 9a)=-a^3x^6[(4x)^2-2\cdot(4x)^1\cdot(9a)^1+(9a)^2]=-a^3x^6(4x-9a)^2$ **166′** $-9a^6x^5+48a^7x^4-64a^8x^3=-a^6x^3(9x^2-48ax+64a^2)=-a^6x^3(3x\cdot 3x-2\cdot 3\cdot 8ax+8a\cdot 8a)=-a^6x^3[(3x)^2-2\cdot(3x)^1\cdot(8a)^1+(8a)^2]=-a^6x^3(3x-8a)^2$

167 $(2a-3b)^2-4b^2=(2a-3b)^2-2b\cdot 2b=(2a-3b)^2-(2b)^2=[(2a-3b)^1+(2b)^1][(2a-3b)^1-(2b)^1]=(2a-3b+2b)(2a-3b-2b)=(2a-b)(2a-5b)$ **Другое рѣшеніе.** Раскрываемъ скобки (5-ый случ. разл.) и приводимъ подобные члены: $(2a-3b)^2-4b^2=(2a)^2-2\cdot 2a\cdot 3b+(3b)^2-4b^2=2a\cdot 2a-12ab+3b\cdot 3b-4b^2=4a^2-12ab+9b^2-4b^2=4a^2-12ab+5b^2$. Этотъ трехчленъ разлагаемъ по образцу №№ 107—110′ (см. «случ. 6-ой разлож.» передъ рѣш. № 81) $4a^2-12ab+5b^2=$ (замѣтимъ, что $4\cdot 5=20=(-2)\cdot(-10)$) $=4a^2+(-2b-10b)\cdot a+5b^2=4a^2-2ab-10ab+5b^2=(4a^2-2ab)-(10ab-5b^2)=2a(2a-b)-5b(2a-b)=(2a-b)(2a-5b)$ **167′** $9a^2-(2a+3b)^2=3a\cdot 3a-(2a+3b)^2=(3a)^2-(2a+3b)^2=[(3a)^1+(2a+3b)^1][(3a)^1-(2a+3b)^1]=(3a+2a+3b)(3a-2a-3b)=(5a+3b)(a-3b)$ **Другое рѣш.** $9a^2-(2a+3b)^2=9a^2-[(2a)^2+2\cdot 2a\cdot 3b+(3b)^2]=9a^2-(2a\cdot 2a+12ab+3b\cdot 3b)=9a^2-(4a^2+12ab+9b^2)=9a^2-4a^2-12ab-9b^2=5a^2-12ab-9b^2=$ (замѣтимъ: $5\cdot(-9)=-45=3\cdot(-15)$) $=5a^2+(3-15)ab-9b^2=5a^2+3ab-15ab-9b^2=(5a^2+3ab)-(15ab+9b^2)=a(5a+3b)-3b(5a+3b)=(5a+3b)(a-3b)$

168 **1-ый способъ.** $16c^2-(3c+5d)^2=4c\cdot 4c-(3c+5d)^2=(4c)^2-(3c+5d)^2=[4c+(3c+5d)][4c-(3c+5d)]=(4c+3c+5d)(4c-3c-5d)=(7c+5d)(c-5d)$ **2-ой спос.** $16c^2-(3c+5d)^2=16c^2-[(3c)^2+2\cdot 3c\cdot 5d+(5d)^2]=16c^2-(3c\cdot 3c+30cd+5d\cdot 5d)=16c^2-(9c^2+30cd+25d^2)=16c^2-9c^2-30cd-25d^2=7c^2-30cd-25d^2=$ (замѣтимъ, что $7\cdot(-25)=-175=5\cdot(-35)$, а $5-35=-30$) $=7c^2+5cd-35cd-25d^2=c(7c+5d)-5d(7c+5d)=(7c+5d)(c-5d)$ **168′** **I-ый спос.** $(5c-3d)^2-25d^2=(5c-3d)^2-5d\cdot 5d=(5c-3d)^2-(5d)^2=[(5c-3d)+(5d)][(5c-3d)-(5d)]=(5c-3d+5d)(5c-3d-5d)=(5c+2d)(5c-8d)$ **II спос.** $(5c-3d)^2-25d^2=(5c)^2-2\cdot 5c\cdot 3d+(3d)^2-25d^2=25c^2-30cd+9d^2-25d^2=25c^2-30cd-16d^2=$ (замѣтимъ: $25\cdot(-16)=-400=10\cdot(-40)$, а $10-40=-30$) $=25c^2+10cd-40cd-16d^2=5c(5c+2d)-8d(5c+2d)=(5c+2d)(5c-8d)$

169 1-ый способъ $9(5m-4p)^2-64m^2=3(5m-4p)\cdot3(5m-4p)-8m\cdot8m=[3(5m-4p)]^2-(8m)^2=[3(5m-4p)+8m][3(5m-4p)-8m]=(15m-12p+8m)(15m-12p-8m)=(23m-12p)(7m-12p)$ **2-ой спос** $9(5m-4p)^2-64m^2=9[(5m)^2-2\cdot5m\cdot4p+(4p)^2]-64m^2=9(25m^2-40mp+16p^2)-64m^2=225m^2-360mp+144p^2-64m^2=161m^2-360mp+144p^2=$(замѣтимъ, что $161\cdot144=23184=-84\cdot-276$, а $-84-276=-360$) $=161m^2-84mp-276mp+144p^2=7m(23m-12p)-12p(23m-12p)=(23m-12p)(7m-12p)$ **169′ I спос** $100m^2-9(3m-2p)^2=10m\cdot10m-3(3m-2p)\cdot3(3m-2p)=(10m)^2-[3(3m-2p)]^2=[10m+3(3m-2p)][10m-3(3m-2p)]=(10m+9m-6p)(10m-9m+6p)=(19m-6p)\cdot(m+6p)$ **II спос** $100m^2-9(3m-2p)^2=100m^2-9[(3m)^2-2\cdot3m\cdot2p+(2p)^2]=100m^2-9(9m^2-12mp+4p^2)=100m^2-81m^2+108mp-36p^2=19m^2+108mp-36p^2=$(замѣтимъ $19\cdot-36=-684=-6\cdot114$, а $-6+114=108$) $=19m^2-6mp+114mp-36p^2=m(19m-6p)+6p(19m-6p)=(19m-6p)(m+6p)$

170 1-ый способъ $(n+3q)^2-4(q-n)^2=(n+3q)^2-2(q-n)\cdot2(q-n)=(n+3q)^2-[2(q-n)]^2=[(n+3q)+2(q-n)][(n+3q)-2(q-n)]=(n+3q+2q-2n)(n+3q-2q+2n)=(5q-n)(q+3n)$ **2-ой спос** $(n+3q)^2-4(q-n)^2=n^2+2\cdot n\cdot3q+(3q)^2-4(q^2-2qn+n^2)=n^2+6nq+9q^2-4q^2+8nq-4n^2=5q^2+14qn-3n^2=$(замѣтимъ, что $5\cdot-3=-15=-1\cdot15$, а $-1+15=14$) $=5q^2-qn+15qn-3n^2=q(5q-n)+3n(5q-n)=(5q-n)(q+3n)$ **170′ I спос.** $16(n+q)^2-(3q-n)^2=4(n+q)\cdot4(n+q)-(3q-n)^2=[4(n+q)]^2-(3q-n)^2=[4(n+q)+(3q-n)][4(n+q)-(3q-n)]=(4n+4q+3q-n)(4n+4q-3q+n)=(3n+7q)(5n+q)$ **II спос** $16(n+q)^2-(3q-n)^2=16(n^2+2nq+q^2)-[(3q)^2-2\cdot3q\cdot n+n^2]=16n^2+32nq+16q^2-9q^2+6nq-n^2=15n^2+38nq+7q^2=$(замѣтимъ $15\cdot7=105=3\cdot35$ а $3+35=38$) $=15n^2+3nq+35nq+7q^2=3n(5n+q)+7q(5n+q)=(5n+q)(3n+7q)$

171 $5a^{11}x^5-20a^8x^4y+20a^5x^3y^2=5a^5x^3\cdot(a^6x^2-4a^3xy+4y^2)=5a^5x^3(a^3x\cdot a^3x-2\cdot2y\cdot a^3x+2y\cdot2y)=5a^5x^3[(a^3x)^2-2\cdot(a^3x)^1\cdot(2y)^1+(2y)^2]=5a^5x^3(a^3x-2y)^2$ **171′** $2a^5x^{11}+12a^4x^8y+18a^3x^5y^2=2a^3x^5(a^2x^6+6ax^3y+9y^2)=2a^3x^5(ax^3\cdot ax^3+2\cdot3y\cdot ax^3+3y\cdot3y)=2a^3x^5[(ax^3)^2+2\cdot(ax^3)^1\cdot(3y)^1+(3y)^2]=2a^3x^5(ax^3+3y)^2$

172 $3a^6x^{10}+30a^4x^5y^2+75a^2y^4=3a^2(a^4x^{10}+10a^2x^5y^2+25y^4)=3a^2(a^2x^5\cdot a^2x^5+2\cdot5y^2\cdot a^2x^5+5y^2\cdot5y^2)=3a^2[(a^2x^5)^2+2\cdot(a^2x^5)^1\cdot(5y^2)^1+(5y^2)^2]=3a^2(a^2x^5+5y^2)^2$ **172′** $5a^{10}x^4y^2-40a^5x^2y^4+80y^6=5y^2(a^{10}x^4-8a^5x^2y^2+16y^4)=5y^2(a^5x^2\cdot a^5x^2-2\cdot4y^2\cdot a^5x^2+4y^2\cdot4y^2)=5y^2[(a^5x^2)^2-2\cdot(a^5x^2)^1\cdot(4y^2)^1+(4y^2)^2]=5y^2(a^5x^2-4y^2)^2$

173 $a^{2m+3}-2a^{m+6}b^n+a^9b^{2n}=a^9(a^{2m+3-9}-2a^{m+6-9}b^n+b^{2n})=a^9(a^{2m-6}-2a^{m-3}b^n+b^{2n})=a^9(a^{(m-3)+(m-3)}-2a^{m-3}b^n+b^{n+n})=a^9(a^{m-3}\cdot a^{m-3}-2\cdot a^{m-3}\cdot b^n+b^n\cdot b^n)$*) $=a^9[(a^{m-3})^2-2\cdot(a^{m-3})^1\cdot(b^n)^1+(b^n)^2]=a^9(a^{m-3}-b^n)^2$ **173′.** $a^{2n}b^7+2a^nb^{m+5}+b^{2m+3}=b^7(a^{2n}+2a^nb^{m+5-7}+b^{2m+3-7})=b^7(a^{2n}+2a^nb^{m-2}+b^{2m-4})=b^7(a^{n+n}+2a^nb^{m-2}+b^{(m-2)+(m-2)})=b^7(a^n\cdot a^n+2\cdot a^n\cdot b^{m-2}+b^{m-2}\cdot b^{m-2})=b^7[(a^n)^2+2\cdot(a^n)^1\cdot(b^{m-2})^1+(b^{m-2})^2]=b^7(a^n+b^{m-2})^2$

Замѣчаніе При цѣлыхъ положительныхъ показателяхъ дѣйствія № 173 имѣютъ смыслъ при $m>3$, а № 173′—при $m>2$ гдѣ m—цѣлое число

174 $36a^{n+2}+16a^{n-2}b^2+48a^nb=4a^{n-2}$**) $(9a^{n+2-(n-2)}+4b^2+12a^{n-(n-2)}b)=4a^{n-2}(9a^{n+2-n+2}+12a^{n-n+2}b+4b^2)=4a^{n-2}(9a^4+12a^2b+4b^2)=4a^{n-2}(3a^2$

---

*) *При умноженіи степеней одинаковыхъ буквъ показатели степеней складываются*

**) Ибо при цѣлыхъ положительныхъ показателяхъ имѣемъ $n-2<n<n+2$

$3a^2+2\cdot 3a^2\cdot 2b+2b\cdot 2b)=4a^{n-2}[(3a^2)^2+2\cdot(3a^2)^1\cdot(2b)^1+(2b)^2]=4a^{n-2}(3a^2+$ $+2b)^2$ **174'** $12a^{m+4}+27a^{m-2}b^2-36a^{m+1}b=$(при $m>2$)$=3a^{m-2}(4a^{m+4-(m-2)}+$ $+9b^2-12a^{m+1-(m-2)}b)=3a^{m-2}\ (4a^{m+4-m+2}+9b^2-12a^{m+1-m+2}b)=$ $=3a^{m-2}(4a^6-12a^3b+9b^2)=3a^{m-2}(2a^3\cdot 2a^3-2\cdot 2a^3\cdot 3b+3b\cdot 3b)=3a^{m-2}[(2a^3)^2-$ $-2\cdot(2a^3)^1\cdot(3b)^1+(3b)^2]=3a^{m-2}(2a^3-3b)^2$

175. $x^2+2xy+y^2-z^2=(x^2+2xy+y^2)-z^2=(x+y)^2-z^2=[(x+y)^1+$ $+z^1][(x+y)^1-z^1]=(x+y+z)(x+y-z)$

Данное выраженіе можно было бы разложить иначе, искусственнымъ образомъ, подводя его подъ особый случай разложенія, похожій на 6-ой

8-ой случай разложенія *введеніе новыхъ членовъ,* не подобныхъ членамъ даннаго выраженія *) 1° Иногда бываетъ необходимо ввести новый членъ (или нѣсколько ихъ) для дополненія членовъ даннаго выраженія, чтобы составить подходящія группы 2° Вводя новый (или новые) членъ нельзя упустить изъ виду въ дальнѣйшей группировкѣ членъ (или члены), противоположный по знаку, но равный по абсолютной величинѣ введенному новому члену, эти члены взаимно уничтожаются и все выраженіе остается безъ перемѣны, что и даетъ право на вышеуказанныя манипуляціи (въ этомъ — смыслъ разбираемаго случая) 3° Членъ (или члены), нейтрализующій новый вводимый членъ, входитъ въ послѣдующія группы

Руководясь этими данными, а также методомъ случ 6 го, имѣемъ (2-ой способъ) $x^2+2xy+y^2-z^2=x^2+xy+xz+xy+y^2+yz-xz-yz-z^2=(x^2+xy+xz)+(xy+y^2+yz)-(xz+$ $+yz+z^2)=x(x+y+z)+y(x+y+z)-z(x+y+z)=(x+y+z)(x+y-z)$

Еще иначе, 3-ій способъ (по тому же пріему) $x^2+2xy+y^2-z^2=x^2+xy-xz+xy+$ $+y^2-yz+xz+yz-z^2=(x^2+xy-xz)+(xy+y^2-yz)+(xz+yz-z^2)=x(x+y-z)+y(x+y-$ $-z)+z(x+y-z)=(x+y-z)(x+y+z)$

Но въ виду очевиднаго преимущества въ смыслѣ простоты и краткости перваго способа мы будемъ пользоваться въ дальнѣйшемъ исключительно имъ

175' $x^2-y^2-2yz-z^2=x^2-(y^2+2yz+z^2)=x^2-(y+z)^2=[x+(y+z)][x-$ $-(y+z)]=(x+y+z)(x-y-z)$

176 $9-y^2-6yz-9z^2=9-(y^2+6yz+9z^2)=9-(y^2+2\cdot y\cdot 3z+3z\cdot 3z)=$ $=9-[y^2+2\cdot y\cdot 3z+(3z)^2]=3^2-(y+3z)^2=[3+(y+3z)][3-(y+3z)]=$ $=(3+y+3z)(3-y-3z)$ **176'** $z^2+8yz+16y^2-16=(z^2+8yz+16y^2)-$ $-16=(z^2+2\cdot z\cdot 4y+4y\cdot 4y)-16=[z^2+2\cdot z\cdot 4y+(4y)^2]-16=(z+4y)^2-$ $-4^2=(z+4y+4)(z+4y-4)$

177 $25z^2-4x^2+12xy-9y^2=25z^2-(4x^2-12xy+9y^2)=25z^2-(2x\cdot 2x-$ $-2\cdot 2\cdot 3xy+3y\cdot 3y)=5z\cdot 5z-[(2x)^2-2\cdot 2x\cdot 3y+(3y)^2]=(5z)^2-(2x-$ $-3y)^2=[5z+(2x-3y)][5z-(2x-3y)]=(5z+2x-3y)(5z-2x+3y)$ **177'.** $4y^2-12yz+9z^2-25x^2=(4y^2-12yz+9z^2)-25x^2=(2y\cdot 2y-2\cdot 2\cdot 3yz+$ $+3z\cdot 3z)-5x\cdot 5x=[(2y)^2-2\cdot 2y\cdot 3z+(3z)^2]-(5x)^2=(2y-3z)^2-(5x)^2=$ $=(2y-3z+5x)(2y-3z-5x)$

178 $4y^2-20yz+25z^2-36=(2y\cdot 2y-2\cdot 2\cdot 5yz+5z\cdot 5z)-36=[(2y)^2-$ $-2\cdot 2y\cdot 5z+(5z)^2]-6^2=(2y-5z)^2-6^2=[(2y-5z)+6][(2y-5z)-6]=$ $=(2y-5z+6)(2y-5z-6)$ **178'** $49-4x^2+20xy-25y^2=49-(2x\cdot 2x-$ $-2\cdot 2\cdot 5xy+5y\cdot 5y)=49-[(2x)^2-2\cdot 2x\cdot 5y+(5y)^2]=7^2-(2x-5y)^2=$ $=[7+(2x-5y)][7-(2x-5y)]=(7+2x-5y)(7-2x+5y)$

179 1-ый спос $a^3+a^2b-ab^2-b^3=(a^3+a^2b)-(ab^2+b^3)=a^2(a+b)-b^2(a+$ $+b)=(a+b)(a^2-b^2)=(a+b)(a+b)(a-b)=(a+b)^2(a-b)$ 2-ой спос a^3+a^2b- $-ab^2-b^3=(a^3-ab^2)+(a^2b-b^3)=a(a^2-b^2)+b(a^2-b^2)=(a^2-b^2)(a+b)=(a+b)$ $(a-b)(a+b)=(a+b)^2(a-b)$ 3-ій спос $a^3+a^2b-ab^2-b^3=(a^3-b^3)+(a^2b-$ $-ab^2)=(a-b)(a^2+ab+b^2)+ab(a-b)=(a-b)\ (a^2+ab+b^2+ab)=(a-b)$

---

*) Классическій примѣръ — выводъ формулы $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$, а именно a^2- $-b^2=a^2-b^2+ab-ab=(a^2+ab)-(ab+b^2)=a(a+b)-b(a+b)=(a+b)(a-b)$

$(a^2+2ab+b^2)=(a-b)(a+b)^2$ **4-ый способъ.** Дополнимъ данное выраженіе до *куба разности* количествъ a и b (разности—въ виду знака «—» при b^3), имѣемъ $a^3+a^2b-ab^2-b^3=(a^3-3a^2b+3ab^2-b^3)+4a^2b-4ab^2=(a-b)^3+4ab(a-b)=(a-b)\ [(a-b)^2+4ab]=(a-b)(a^2-2ab+b^2+4ab)=(a-b)(a^2+2ab+b^2)=(a-b)(a+b)^2$ **5-ый спос** Дополнимъ данное выраженіе до *куба суммы* количествъ a и b, имѣемъ $a^3+a^2b-ab^2-b^3=(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)-2a^2b-4ab^2-2b^3=(a+b)^3-2b(a^2+2ab+b^2)=(a+b)^3-2b(a+b)^2=(a+b)^2\,[(a+b)-2b]=(a+b)^2(a-b)$ **179′** **I спос** $a^3-a^2b-ab^2+b^3=(a^3-u^2b)-(ab^2-b^3)=a^2(a-b)-b^2(a-b)=(a-b)(a^2-b^2)=(a-b)(a+b)(a-b)=(a-b)^2(a+b)$ **II спос** $a^3-a^2b-ab^2+b^3=(a^3-ab^2)-(a^2b-b^3)=a(a^2-b^2)-b(a^2-b^2)=(a^2-b^2)(a-b)=(a+b)(a-b)(a-b)=(a+b)(a-b)^2$ **III спос.** $a^3-a^2b-ab^2+b^3=(a^3+b^3)-(a^2b+ab^2)=(a+b)\ (a^2-ab+b^2)-ab\,(a+b)=(a+b)(a^2-ab+b^2-ab)=(a+b)(a^2-2ab+b^2)=(a+b)(a-b)^2$ **IV спос** $a^3-a^2b-ab^2+b^3=$(дополняемъ до куба суммы)$=(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)-4a^2b-4ab^2=(a+b)^3-4ab(a+b)=(a+b)\,[(a+b)^2-4ab]=(a+b)(a^2+2ab+b^2-4ab)=(a+b)(a^2-2ab+b^2)=(a+b)(a-b)^2$ **V спос** $a^3-a^2b-ab^2+b^3=$(дополняемъ до куба разности)$=(a^3-3a^2b+3ab^2-b^3)+2a^2b-4ab^2+2b^3=(a-b)^3+2b(a^2-2ab+b^2)=(a-b)^3+2b(a-b)^2=(a-b)^2[(a-b)+2b]=(a-b)^2(a+b)$

180 **1-ый способъ** $ac^2-ab^2+b^2c-c^3=(ac^2-ab^2)-(c^3-b^2c)=a(c^2-b^2)-c(c^2-b^2)=(c^2-b^2)(a-c)=(c+b)(c-b)(a-c)$ **2-ой спос** $ac^2-ab^2+b^2c-c^3=(ac^2-c^3)-(ab^2-b^2c)=c^2(a-c)-b^2(a-c)=(a-c)(c^2-b^2)=(a-c)(c+b)(c-b)$ **180′** **I спос.** $ab^2-ac^2-bc^2+b^3=(ab^2-ac^2)+(b^3-bc^2)=a(b^2-c^2)+b(b^2-c^2)=(b^2-c^2)(a+b)=(b+c)(b-c)(a+b)$ **II спос** $ab^2-ac^2-bc^2+b^3=(ab^2+b^3)-(ac^2+bc^2)=b^2(a+b)-c^2(a+b)=(a+b)(b^2-c^2)=(a+b)(b+c)(b-c)$

181 $(a-b)(a^2-c^2)-(a-c)(a^2-b^2)=(a-b)(a+c)(a-c)-(a-c)(a+b)(a-b)=(a-b)(a-c)\,[(a+c)-(a+b)]=(a-b)(a-c)(a+c-a-b)=(a-b)(a-c)(c-b)$ **181′** $(a^2-b^2)(b-c)-(a-b)(b^2-c^2)=(a+b)(a-b)(b-c)-(a-b)(b+c)(b-c)=(a-b)\,(b-c)\,[(a+b)-(b+c)]=(a-b)(b-c)(a+b-b-c)=(a-b)(b-c)(b-c)(a-c)$

182 **1-ый спос** $a^2b^4c^2-a^2b^2c^4+a^4b^2c^2-a^4c^4=a^2c^2(b^4-b^2c^2+a^2b^2-a^2c^2)=a^2c^2[(b^4-b^2c^2)+(a^2b^2-a^2c^2)]=a^2c^2[b^2(b^2-c^2)+a^2(b^2-c^2)]=a^2c^2(b^2-c^2)(b^2+a^2)=a^2c^2(b+c)(b-c)(a^2+b^2)$ **2-ой спос.** $a^2b^4c^2-a^2b^2c^4+a^4b^2c^2-a^4c^4=a^2c^2\,(b^4-b^2c^2+a^2b^2-a^2c^2)=a^2c^2\,[(b^4+a^2b^2)-(b^2c^2+a^2c^2)]=a^2c^2\,[b^2(b^2+a^2)-c^2(b^2+a^2)]=a^2c^2(b^2+a^2)(b^2-c^2)=a^2c^2(a^2+b^2)(b+c)(b-c)$ **182′** **I спос** $a^4b^2c^2-a^2b^2c^4+a^2b^4c^2-b^4c^4=b^2c^2(a^4-a^2c^2+a^2b^2-b^2c^2)=b^2c^2[(a^4-a^2c^2)+(a^2b^2-b^2c^2)]=b^2c^2\,[a^2(a^2-c^2)+b^2(a^2-c^2)]=b^2c^2(a^2-c^2)(a^2+b^2)=b^2c^2(a+c)(a-c)(a^2+b^2)$ **II спос** $a^4b^2c^2-a^2b^2c^4+a^2b^4c^2-b^4c^4=b^2c^2(a^4-a^2c^2+a^2b^2-b^2c^2)=b^2c^2\,[(a^4+a^2b^2)-(a^2c^2+b^2c^2)]=b^2c^2\,[a^2(a^2+b^2)-c^2(a^2+b^2)]=b^2c^2(a^2+b^2)(a^2-c^2)=b^2c^2(a^2+b^2)(a+c)(a-c)$

183 **I-ый способъ** $a^4-b^2(2a-b)^2=a^2\ \ a^2-b(2a-b)\ \ b(2a-b)=(a^2)^2-[b(2a-b)]^2=[(a^2)^1+b(2a-b)]\,[(a^2)^1-b(2a-b)]=(a^2+2ab-b^2)(a^2-2ab+b^2)=(a^2+2ab-b^2)(a-b)^2$ **2-ой способъ** $a^4-b^2(2a-b)^2=a^4-b^2(4a^2-4ab+b^2)=a^4-4a^2b^2+4ab^3-b^4=(a^4-b^4)-(4a^2b^2-4ab^3)=(a^2\,.\,a^2-b^2\,.\,b^2)-4ab^2(a-b)=[(a^2)^2-(b^2)^2]-4ab^2(a-b)=(a^2+b^2)(a^2-b^2)-4ab^2(a-b)=(a^2+b^2)(a+b)(a-b)$ *) $-4ab^2(a-b)=(a-b)[(a^2+b^2)(a+b)-4ab^2]=(a-b)$

---

*) Выраженіе a^4-b^4 можно было бы разлагать и по формулѣ 6° (въ началѣ § 2 «7 ой случай разложенія»), полагая въ ней $m=4$, такъ что $a^4-b^4=(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$, каковое разложеніе удобно въ данномъ случаѣ

$(a^3+ab^2+a^2b+b^3-4ab^2)=(a-b)(a^3-3ab^2+a^2b+b^3)=$ (одинъ изъ способовъ разложенія второго сомножителя) $=(a-b)(a^3-a^2b+2a^2b-2ab^2-ab^2+b^3)=(a-b)[(a^3-a^2b)+(2a^2b-2ab^2)-(ab^2-b^3)=(a-b)[a^2(a-b)+2ab(a-b)-b^2(a-b)]=(a-b)\cdot(a-b)(a^2+2ab-b^2)=(a-b)^2(a^2+2ab-b^2)$. **183'** I спос. $b^4-a^2(a-2b)^2=b^2\cdot b^2-a(a-2b)\cdot a(a-2b)=(b^2)^2-[a(a-2b)]^2=[(b^2)^1+a(a-2b)][(b^2)^1-a(a-2b)]=(b^2+a^2-2ab)(b^2-a^2+2ab)=(b-a)^2(b^2+2ab-a^2)$. II спос. $b^4-a^2(a-2b)^2=b^4-a^2(a^2-4ab+4b^2)=b^4-a^4+4a^3b-4a^2b^2=(b^4-a^4)+4a^2b(a-b)=(b-a)(b^3+b^2a+ba^2+a^3)-4a^2b(b-a)=(b-a)(b^3+b^2a+ba^2+a^3-4a^2b)=(b-a)(b^3+b^2a-3ba^2+a^3)=(b-a)(b^3-b^2a+2b^2a-2ba^2-ba^2+a^3)=(b-a)[(b^3-b^2a)+(2b^2a-2ba^2)-(ba^2-a^3)=(b-a)[b^2(b-a)+2ba(b-a)-a^2(b-a)=(b-a)(b-a)(b^2+2ba-a^2)=(b-a)^2(b^2+2ba-a^2)$.

184 I-ый спос. $a^4-16c^2(c-a)^2=a^2\cdot a^2-4c(c-a)\cdot 4c(c-a)=(a^2)^2-[4c(c-a)]^2=[(a^2)^1+4c(c-a)][(a^2)^1-4c(c-a)]=(a^2+4c^2-4ac)(a^2-4c^2+4ac)=(a^2-2\cdot 2ac+2c\cdot 2c)(a^2+4ac-4c^2)=[a^2-2\cdot a\cdot(2c)^1+(2c)^2](a^2+4ac-4c^2)=(a-2c)^2(a^2+4ac-4c^2)$. 2-ой спос. $a^4-16c^2(c-a)^2=a^4-16c^2(c^2-2ac+a^2)=a^4-16c^4+32ac^3-16a^2c^2=(a^4-16c^4)-(16a^2c^2-32ac^3)=(a^4-2c\cdot 2c\cdot 2c\cdot 2c)-16ac^2(a-2c)=$ (см. рѣш. § 2, въ началѣ, 7-ой случ.; 6°) $=[a^4-(2c)^4]-16ac^2(a-2c)=(a-2c)[a^3+a^2\cdot(2c)^1+a\cdot(2c)^2+(2c)^3]-16ac^2(a-2c)=(a-2c)(a^3+2a^2c+4ac^2+8c^3)-16ac^2(a-2c)=(a-2c)(a^3+2a^2c+4ac^2+8c^3-16ac^2)=(a-2c)(a^3+2a^2c-12ac^2+8c^3)=(a-2c)(a^3-2a^2c+4ac^2-8ac^2-4ac^2+8c^3)=(a-2c)[(a^3-2a^2c)+(4a^2c-8ac^2)-(4ac^2-8c^3)]=(a-2c)[a^2(a-2c)+4ac(a-2c)-4c^2(a-2c)]=(a-2c)\cdot(a-2c)(a^2+4ac-4c^2)=(a-2c)^2(a^2+4ac-4c^2)$.
184' I спос. $c^4-16a^2(c-a)^2=c^2\cdot c^2-4a(c-a)\cdot 4a(c-a)=(c^2)^2-[4a(c-a)]^2=[(c^2)^1+4a(c-a)]\,[(c^2)^1-4a(c-a)]=(c^2+4ac-4a^2)(c^2-4ac+4a^2)=(c^2+4ac-4a^2)(c^2-2\cdot 2ac+2a\cdot 2a)=(c^2+4ac-4a^2)[c^2-2\cdot c\cdot(2a)^1+(2a)^2]=(c^2+4ac-4a^2)(c-2a)^2$. II спос. $c^4-16a^2(c-a)^2=c^4-16a^2(c^2-2ac+a^2)=c^4-16a^2c^2+32a^3c-16a^4=(c^4-16a^4)-(16a^2c^2-32a^3c)=[c^4-(2a)^4]-16a^2c(c-2a)=(c-2a)[c^3+c^2\cdot(2a)^1+c\cdot(2a)^2+(2a)^3]-16a^2c(c-2a)=(c-2a)(c^3+2ac^2+4a^2c+8a^3)-16a^2c(c-2a)=(c-2a)(c^3+2ac^2+4a^2c+8a^3-16a^2c)=(c-2a)(c^3+2ac^2-12a^2c+8a^3)=(c-2a)(c^3-2ac^2+4ac^2-8a^2c-4a^2c+8a^3)=(c-2a)[(c^3-2ac^2)+(4ac^2-8a^2c)-(4a^2c-8a^3)]=(c-2a)[c^2(c-2a)+4ac(c-2a)-4a^2(c-2a)]=(c-2a)(c-2a)(c^2+4ac-4a^2)=(c-2a)^2(c^2+4ac-4a^2)$.

185 1-ый способъ. $(a-b)^2+2b(b-a)+b^2=(a-b)^2-2b(a-b)+b^2=(a-b)^2-2\cdot(a-b)^1\cdot b^1+b^2=[(a-b)-b]^2=(a-b-b)^2=(a-2b)^2$. 2-ой спос. $(a-b)^2+2b(b-a)+b^2=a^2-2ab+b^2+2b^2-2ab+b^2=a^2-4ab+4b^2=a^2-2\cdot a\cdot(2b)^1+(2b)^2=(a-2b)^2$. **185'** I спос. $(b-a)^2+2a(a-b)+a^2=(b-a)^2-2a(b-a)+a^2=(b-a)^2-2\cdot(b-a)^1\cdot a^1+a^2=[(b-a)-a]^2=(b-2a)^2$. II способъ. $(b-a)^2+2a(a-b)+a^2=b^2-2ab+a^2+2a^2-2ab+a^2=b^2-4ab+4a^2=b^2-2\cdot b\cdot(2a)^1+(2a)^2=(b-2a)^2$.

Замѣчаніе. Первые способы рѣш. №№ 185 и 185' можно было бы видоизмѣнить на основаніи того, что $(a-b)^2=(b-a)^2$ *). Дѣйствительно имѣемъ: **185** 3-ій спос. $(a-b)^2+2b(b-a)+b^2=(b-a)^2+2\cdot(b-a)\cdot b+b^2=[(b-a)+b]^2=(2b-a)^2=(a-2b)^2$. **185'** III спос. $(b-a)^2+2a(a-b)+a^2=(a-b)^2+2\cdot(a-b)\cdot a+a^2=[(a-b)+a]^2=(2a-b)^2=(b-2a)^2$.

---

*) Эту формулу легко доказать, напр.: $(a-b)^2=(a-b)\cdot(a-b)=[-(b-a)]\cdot[-(b-a)]=-(b-a)\cdot-(b-a)=+(b-a)(b-a)=(b-a)^2$. Однако отсюда вовсе не слѣдуетъ, что $(a-b)^1=(b-a)^1$. Этотъ софизмъ разъясняется въ ученіи о радикалахъ.

особъ $(2a-b)^2-2b(b-2a)+b^2=(2a-b)^2+2b(2a-b)+$
$2(2a-b)b+b^2=[(2a-b)+b]^2=(2a-b+b)^2=(2a)^2=$
ой спос $(2a-b)^2-2b(b-2a)+b^2=(2a)^2-2\ 2a\ b+b^2-$
$=2a\ 2a-4ab+b^2-2b^2+4ab+b^2=4a^2$ **186′** **I способъ**
$-2b)+a^2=(2b-a)^2+2a(2b-a)+a^2=(2b-a)^2+$
$^2=[(2b-a)+a]^2=(2b-a+a)^2=(2b)^2=2b\ 2b=4b^2$ **II спос**
$2b)+a^2=(2b)^2-2\ 2b\ a+a^2-2a^2+4ab+a^2=2b\ 2b-4ab+$

пособъ $(m^2+1)^2-4m^2=(m^2+1)^2-2m\ 2m=(m^2+1)^2-$
$)+2m][(m^2+1)-2m]=(m^2+2\ m\ 1+1^2)(m^2-2\ m\ 1+$
$-1)^2$ **2-ой способъ** $(m^2+1)^2-4m^2=(m^2)^2+2\ (m^2)^1$
$m^2+2m^2+1-4m^2=m^4-2m^2+1=(m^2)^2-2\ (m^2)^1.1+1^2=(m^2-$
$=[(m+1)(m-1)]^2=(m+1)(m-1)\ (m+1)(m-1)=(m+$
7′ **I спос** $4m^2-(m^2+1)^2=(2m)^2-(m^2+1)^2=[2m+(m^2+$
$1)]=-(m^2+2m+1)(m^2-2m+1)=-(m^2+2\ m\ 1+1^2)\ (m^2-$
$-(m+1)^2(m-1)^2$ **II спос** $4m^2-(m^2+1)^2=4m^2-(m^2)^2-$
$=4m^2-(m^2)^2-2m^2-1^2=-(m^2)^2+2m^4-1^2=-[(m^2)^2-2$
$-(m^2-1)^4=-(m^2-1^2)^2=-[(m+1)(m-1)]^2=-(m+1)$
$-1)=-(m+1)^2(m-1)^2$

особъ $36m^2-(m^2+9)^2=(6m)^2-(m^2+9)^2=[6m+(m^2+$
$)]=(m^2+6m+9)(-m^2+6m-9)=(m^2+2\ m\ 3+3^2)\ [-(m^2-$
$3)^2\ [-(m-3)^2]=-(m+3)^2(m-3)^2$ **2-ой спос** $36m^2-(m^2+9)^2=$
$+2\ m^2\ 9+9^2]=36m^2-(m^2)^2-18m^2-9^2=-(m^2)^2+18m^2-$
$2\ m^2\ 9+9^2]=-(m^2-9)^2=-(m^2-3^2)^2=-[(m+3)(m-$
$(m-3)(m+3)(m-3)=-(m+3)^2(m-3)^2$ **188′** **I спо-**
$36m^2=(m^2+9)^2-(6m)^2=(m^2+9+6m)(m^2+9-6m)=$
$3^2)(m^2-2\ m\ 3+3^2)=(m+3)^2(m-3)^2$ **II спос** $(m^2+9)^2-$
$2\ m^2\ 9+9^2-4\ m^2\ 9=(m^2)^2-2\ m^2\ 9+9^2=(m^2-9)^2=$
$m+3)(m-3)]^2=(m+3)(m-3)(m+3)(m-3)=(m+3)^2$

$)^2-4=(m^2+4m)^2-2^2=(m^2+4m+2)(m^2+4m-2)$ Выраже-
(вида $a^2\pm 2ab\pm b$) неразложимы **189′** $(m^2+6m)^2-9=$
$=(m^2+6m+3)(m^2+6m-3)$
$+6m)^2=3^2-(m^2+6m)^2=[3+(m^2+6m)][3-(m^2+6m)]=(3+$
$-m^2)$ **190′** $4-(m^2+4m)^2=2^2-(m^2+4m)^2=[2+(m^2+4m)][2-$
$+4m+m^2)(2-4m-m^2)$

ратной формулѣ куба разности $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=$
ая въ ней $a=p+q$ $b=p-q$, имѣемъ
$+q)^2(p-q)+3(p+q)(p-q)^2-(p-q)^3=[(p+q)-(p-q)]^3=$
$=(2q)^3=2q\ 2q\ 2q=8q^3$. Въ качествѣ повѣрки результата
непосредственное раскрытіе скобокъ въ данномъ вы-
ѣмъ приведеніе подобныхъ членовъ **191′** Полагая въ
лѣ куба суммы $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$ количество
чество $b=p+q$, получ
$-q)^2(p+q)+3(p-q)(p+q)^2+(p+q)^3=[(p-q)+(p+$
$+q)^3=(2p)^3=2p\ 2p\ 2p=8p^3$

въ формулѣ, приведенной въ рѣш № 191′, $a=p-2q$
что $(p-2q)^3+3(p-2q)^2(p+q)+3(p-2q)(p+q)^2+(p+q)^3=$

$=[(p-2q)+(p+q)]^3=(p-2q+p+q)^3=(2p-q)^3$ **192′** Въ формулѣ, приведенной въ рѣш № 191, положимъ $a=2p-q$, $b=p-q$, тогда $(2p-q)^3-3(2p-q)^2(p-q)+3(2p-q)(p-q)^2-(p-q)^3=[(2p-q)-(p-q)]^3=(2p-q-p+q)^3=p^3$

193 $a^5-9ab^4=a(a^4-9b^4)=a(a^2\ a^2-3b^2\ 3b^2)=a[(a^2)^2-(3b^2)^2]=a(a^2+3b^2)(a^2-3b^2)$ **193′** $ab^4-4a^5=a(b^4-4a^4)=a(b^2\ b^2-2a^2\ 2a^2)=a[(b^2)^2-(2a^2)^2]=a(b^2+2a^2)(b^2-2a^2)$

194 $4n^6-m^4n^2=n^2(4n^4-m^4)=n^2(2n^2.2n^2-m^2\ m^2)=n^2[(2n^2)^2-(m^2)^2]=n^2(2n^2+m^2)(2n^2-m^2)$ **194′** $9m^6-m^2n^4=m^2(9m^4-n^4)=m^2(3m^2\ 3m^2-n\ n^2)=m^2[(3m^2)^2-(n^2)^2]=m^2(3m^2+n^2)(3m^2-n^2)$

195 $a^3b-b^4=b(a^3-b^3)=$ (№ 146) $=b(a-b)(a^2+ab+b^2)$ **195′** $a^4-ab^3=a(a^3-b^3)=a(a-b)(a^2+ab+b^2)$

196 $2m^4+2mn^3=2m(m^3+n^3)=$ (№ 146) $=2m(m+n)(m^2-mn+n^2)$ **196′** $2m^3n+2n^4=2n(m^3+n^3)=2n(m+n)(m^2-mn+n^2)$

197 $3a^4-12=3(a^4-4)=3[(a^2)^2-2^2]=3(a^2+2)(a^2-2)$ **197′** $12-3a^4=3(4-a^4)=3[2^2-(a^2)^2]=3(2+a^2)(2-a^2)$.

198 $16-2a^6=2(8-a^6)=2(2\ 2\ 2-a^2\ a^2\ a^2)=2[2^3-(a^2)^3]=$ (срв № 146) $=2(2-a^2)[2^2+2^1.(a^2)^1+(a^2)^2]=2(2-a^2)(4+2a^2+a^4)$. **198′** $2a^6-16=2(a^6-8)=2[(a^2)^3-2^3]=2[(a^2)^1-2^1][(a^2)^2+(a^2)^1.2^1+2^2]=2(a^2-(a^4+2a^2+4)$

199 $24a^4+3ab^3=3a(8a^3+b^3)=3a(2a\ 2a\ 2a+b^3)=3a[(2a)^3+b^3]=$ (срв № 146′) $=3a\ [(2a)^1+b^1][(2a)^2-(2a)^1\ b^1+b^2]=3a(2a+b)(4a^2-2ab+b^2)$ **199′** $3a^4-81ab^3=3a(a^3-27b^3)=3a(a^3-3b\ 3b\ 3b)=3a[a^3-(3b)^3]=3a[a^1-(3b)^1][a^2+a^1\ (3b)^1+(3b)^2]=3a(a-3b)(a^2+3ab+9b^2)$.

200 $81a^4b-36b^5=9b(9a^4-4b^4)=9b(3a^2\ 3a^2-2b^2\ 2b^2)=9b[(3a^2)^2-(2b^2)^2]=3^2\ b.(3a^2+2b^2)(3a^2-2b^2)$ **200′** $36a^4b-16b^5=4b(9a^4-4b^4)=4b(3a^2\ 3a^2-2b^2\ 2b^2)=4b[(3a^2)^2-(2b^2)^2]=2^2\ b\ (3a^2+2b^2)(3a^2-2b^2)$

201 Данное выраженіе $A=m^2+2mn+n^2-mp-np$ **1-ый способ** $A=(m^2+2mn+n^2)-(mp+np)=(m+n)^2-p(m+n)=(m+n)[(m+n)-p]=(m+n)(m+n-p)$ **2-ой спос** $A=m^2+mn+mn+n^2-mp-np=(m^2+mn)+(mn+n^2)-(mp+np)=m(m+n)+n(m+n)-p(m+n)=(m+n)(m+n-p)$ **3-ій спо** $A=m^2+mn+mn+n^2-mp-np=(m^2+mn-mp)+(mn+n^2-np)=m(m+n-p)+n(m+n-p)=(m+n-p)(m+n)$. **201′** Данное выраженіе $B=n^2-2mn+m^2-mq+nq$ **I способъ** $B=(n^2-2nm+m^2)+(nq-mq)=(n-m)^2+q(n-m)=(n-m)(n-m+q)$ **II спос** $B=n^2-nm-nm+m^2-mq+nq=(n^2-nm)-(nm-m^2)+(nq-mq)=n(n-m)-m(n-m)+q(n-m)=(n-m)(n-m+q)$ **III спос** $B=n^2-nm-nm+m^2-mq+nq=(n^2-nm+nq)-(nm-m^2+mq)=n(n-m+q)-m(n-m+q)=(n-m+q)(n-m)$

202 $A=mp-np-m^2+2mn-n^2$ **1-ый способъ** $A=(mp-np)-(m^2-2mn+n^2)=p(m-n)-(m-n)^2=(m-n)[p-(m-n)]=(m-n)(p-m+n$ **2-ой способъ** $A=mp-np-m^2+mn+mn-n^2=(mp-np)-(m^2-mn)+(mn-n^2)=p(m-n)-m(m-n)+n(m-n)=(m-n)(p-m+n)$ **3-ій спо** $A=mp-np-m^2+mn+mn-n^2=(mp-m^2+mn)-(np-mn+n^2)=m(p-m+n)-n(p-m+n)=(p-m+n)(m-n)$ **202′** $B=nq+mq-m^2-2mn-n^2$ **I спос** $B=(mq+nq)-(m^2+2mn+n^2)=q(m+n)-(m+n)^2=(m+n)[q-(m+n)]=(m+n)(q-m-n)$. **II способъ** $B=mq+nq-m^2-mn-mn-n^2=(mq+nq)-(m^2+mn)-(mn+n^2)=q(m+n)-m(m+n)$

$-n(m+n)=(m+n)(q-m-n)$ **III спос** $B=mq+nq-m^2-mn-mn-n^2=(mq-m^2-mn)+(nq-mn-n^2)=m(q-m-n)+n(q-m-n)=(q-m-n)(m+n)$

203 $x^6z^2-2x^4y^2z^2+x^2y^4z^2=x^2z^2(x^4-2x^2y^2+y^4)=x^2z^2[(x^2)^2-2(x^2)^1(y^2)^1+(y^2)^2]=x^2z^2(x^2-y^2)^2=x^2z^2[(x+y)(x-y)]^2=x^2z^2(x+y)(x-y)(x+y)(x-y)=x^2z^2(x+y)^2(x-y)^2$ **203'** $x^4y^2z^2-2x^2y^2z^4+y^2z^6=y^2z^2(x^4-2x^2z^2+z^4)=y^2z^2[(x^2)^2-2(x^2)^1(z^2)^1+(z^2)^2]=y^2z^2(x^2-z^2)^2=y^2z^2[(x+z)(x-z)]^2=y^2z^2(x+z)(x-z)(x+z)(x-z)=y^2z^2(x+z)^2(x-z)^2$

204 Срв № 182 $x^2y^4z^2-x^4y^2z^2-x^2y^2z^4+x^4z^4=x^2z^2(y^4-x^2y^2-y^2z^2+x^2z^2)$ так образ., вопросъ сводится къ разложенію выраженія $A=y^4-x^2y^2-y^2z^2+x^2z^2$ **1-ый способъ** $A=(y^4-x^2y^2)-(y^2z^2-x^2z^2)=y^2(y^2-x^2)-z^2(y^2-x^2)=(y^2-x^2)(y^2-z^2)=(y+x)(y-x)(y+z)(y-z)$ **2-ой способъ** $A=(y^4-y^2z^2)-(x^2y^2-x^2z^2)=y^2(y^2-z^2)-x^2(y^2-z^2)=(y^2-z^2)(y^2-x^2)=(y+z)(y-z)(y+x)(y-x)$ Но данное выраженіе, какъ мы видѣли выше, $=x^2z^2A$, слѣд., его разложеніе есть $x^2z^2(y+x)(y-x)(y+z)(y-z)$ **204'** $x^4y^2z^2-x^2y^4z^2-x^2y^2z^4+y^4z^4=y^2z^2(x^4-x^2y^2-x^2z^2+y^2z^2)=y^2z^2\,B$, гдѣ $B=x^4-x^2y^2-x^2z^2+y^2z^2$, разложимъ B **I-ый способъ** $B=(x^4-x^2y^2)-(x^2z^2-y^2z^2)=x^2(x^2-y^2)-z^2(x^2-y^2)=(x^2-y^2)(x^2-z^2)=(x+y)(x-y)(x+z)(x-z)$ **II способъ** $B=(x^4-x^2z^2)-(x^2y^2-y^2z^2)=x^2(x^2-z^2)-y^2(x^2-z^2)=(x^2-z^2)(x^2-y^2)=(x+z)(x-z)(x+y)(x-y)$ А т. к. данное выраженіе $=y^2z^2\,B$, то искомое разложеніе его будетъ $y^2z^2(x+y)(x-y)(x+z)(x-z)$

205 1-ый способъ $u^2+3u^3-u^4-3u=u(u+3u^2-u^3-3)=u[(u-3)-(u^3-3u^2)]=u[(u-3)-u^2(u-3)]=u(u-3)(1-u^2)=u(u-3)(1^2-u^2)=u(u-3)(1+u)(1-u)$ **2 ой способъ** $u^2+3u^3-u^4-3u=u(u+3u^2-u^3-3)=u[(u-u^3)-(3-3u^2)]=u[u(1-u^2)-3(1-u^2)]=u(1-u^2)(u-3)=u(1^2-u^2)(u-3)=u(1+u)(1-u)(u-3)$ **3 ій спос** $u^2+3u^3-u^4-3u=-u(u^3-3u^2-u+3)=$(замѣтимъ, что $1+(-3)+(-1)+(+3)=0$, см № 113, выноска)$=-u(u^3-u^2-2u^2+2u-3u+3)=-u[(u^3-u^2)-(2u^2-2u)-(3u-3)]=-u[u^2(u-1)-2u(u-1)-3(u-1)]=-u(u-1)(u^2-2u-3)=+u(1-u)(u^2+u-3u-3)=u(1-u)[u(u+1)-3(u+1)]=u(1-u)(u+1)(u-3)$ **4-ый способъ** $u^2+3u^3-u^4-3u=-u(u^3-3u^2-u+3)=$(замѣтимъ, что $+1+(-1)=-3+(+3)$, № 111, выноска)$=-u(u^3+u^2-4u^2-4u+3u+3)=-u[u^2(u+1)-4u(u+1)+3(u+1)]=-u(u+1)(u^2-4u+3)=-u(u+1)(u^2-u-3u+3)=-u(u+1)[u(u-1)-3(u-1)]=-u(1+u)(u-1)(u-3)=u(1+u)(1-u)(u-3)$ **205' I способъ** $u^2-2u^3-u^4+2u=u(u-2u^2-u^3+2)=u[(u+2)-(u^3+2u^2)]=u[(u+2)-u^2(u+2)]=u(u+2)(1-u^2)=u(u+2)(1^2-u^2)=u(u+2)(1+u)(1-u)$ **II способъ** $u^2-2u^3-u^4+2u=u(u-2u^2-u^3+2)=u[(u-u^3)+(2-2u^2)]=u[u(1-u^2)+2(1-u^2)]=u(1-u^2)(u+2)=u(1^2-u^2)(u+2)=u(1+u)(1-u)(u+2)$ **III спос** $u^2-2u^3-u^4+2u=-u(u^3+2u^2-u-2)=$(№ 113, выноска)$=-u(u^3-u^2+3u^2-3u+2u-2)=-u[(u^3-u^2)+(3u^2-3u)+(2u-2)]=-u[u^2(u-1)+3u(u-1)+2(u-1)]=-u(u-1)(u^2+3u+2)=-u(u-1)(u^2+u+2u+2)=-u(u-1)[u(u+1)+2(u+1)]=-u(u-1)(u+1)(u+2)=u(1-u)(1+u)(u+2)$ **IV способъ** $u^2-2u^3-u^4+2u=-u(u^3+2u^2-u-2)=$(№ 111 выноска)$=-u(u^3+u^2+u^2+u-2u-2)=-u[(u^3+u^2)+(u^2+u)-(2u+2)]=-u[u^2(u+1)+u(u+1)-2(u+1)]=-u(u+1)(u^2+u-2)=-u(u+1)(u^2-u+2u-2)=$

$=-u(u+1)[u(u-1)+2(u-1)]=-u(u+1)(u-1)(u+2)=u(1+u)(1-u)(2+u)$

206 **1-ый способъ** $u^4+u^3+u+1=(u^4+u^3)+(u+1)=u^3(u+1)+(u+1)=(u+1)(u^3+1)=$ (№ 147) $=(u+1)\ (u+1)(u^2-u+1)=(u+1)^2(u^2-u+1)$ **2-ой способъ** $u^4+u^3+u+1=(u^4+u)+(u^3+1)=u(u^3+1)+(u^3+1)=(u^3+1)\ (u+1)=(u+1)(u^2-u+1)\ (u+1)=(u+1)^2(u^2-u+1)$ **206′** **I способ** $u^4-u^3-u+1=(u^4-u^3)-(u-1)=u^3(u-1)-(u-1)=(u-1)\ (u^3-1)=$ (№ 147) $=(u-1)\ (u-1)(u^2+u+1)=(u-1)^2(u^2+u+1)$ **II способ** $u^4-u^3-u+1=(u^4-u)-(u^3-1)=u(u^3-1)-(u^3-1)=(u^3-1)\ (u-1)=(u-1)(u^2+u+1)\ (u-1)=(u-1)^2(u^2+u+1)$

207 $x^2+2xy+y^2-z^2+2zu-u^2=(x^2+2xy+y^2)-(z^2-2zu+u^2)=(x+y)^2-(z-u)^2=[(x+y)+(z-u)][(x+y)-(z-u)]=(x+y+z-u)(x+y-z+u)$ **207′** $x^2-2xy+y^2-z^2-2zu-u^2=(x^2-2xy+y^2)-(z^2+2zu+u^2)=(x-y)^2-(z+u)^2=[(x-y)+(z+u)]\ [(x-y)-(z+u)]=(x-y+z+u)(x-y-z-u)$

208 **1-ый способъ** $(x^2+xy-y^2)^2-(x^2-xy+y^2)^2=[(x^2+xy-y^2)+(x^2-xy+y^2)]\ [(x^2+xy-y^2)-(x^2-xy+y^2)]=(x^2+xy-y^2+x^2-xy+y^2)(x^2+xy-y^2-x^2+xy-y^2)=2x^2(2xy-2y^2)=2x^2\ 2y(x-y)=4x^2y(x-y)$ **2-ой способъ** См отд III, § 10 Принимая во вниманіе формулу *квадрата трехчлена*

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$ имѣемъ $(x^2+xy-y^2)^2-(x^2-xy+y^2)^2=(x^2)^2+(xy)^2+(-y^2)^2+2\ x^2\ xy+2\ x^2\ (-y^2)+2\ xy\ (-y^2)-[(x^2)^2+(-xy)^2+(y^2)^2+2\ x^2\ (-xy)+2\ x^2\ y^2+2\ (-xy)\ y^2]=x^4+x^2y^2+y^4+2x^3y-2x^2y^2-2xy^3-(x^4+x^2y^2+y^4-2x^3y+2x^2y^2-2xy^3)=x^4+x^2y^2+y^4+2x^3y-2x^2y^2-2xy^3-x^4-x^2y^2-y^4+2x^3y-2x^2y^2+2xy^3=4x^3y-4x^2y^2=4x^2y(x-y)$ **208′** **I способъ** $(x^2+xy-y^2)^2-(x^2-xy-y^2)^2=[(x^2+xy-y^2)+(x^2-xy-y^2)]\ [(x^2+xy-y^2)-(x^2-xy-y^2)]=(x^2+xy-y^2+x^2-xy-y^2)(x^2+xy-y^2-x^2+xy+y^2)=(2x^2-2y^2)\ 2xy=2(x^2-y^2)\ 2xy=4xy(x+y)(x-y)$ **II способъ** См формулу *квадрата трехчлена* въ рѣш № 208, спос 2-ой $(x^2+xy-y^2)^2-(x^2-xy-y^2)^2=(x^2)^2+(xy)^2+(-y^2)^2+2\ x^2\ xy+2\ x^2\ (-y^2)+2\ xy\ (-y^2)-[(x^2)^2+(-xy)^2+(-y^2)^2+2\ x^2\ (-xy)+2\ x^2\ (-y^2)+2\cdot(-xy)\ (-y^2)]=x^4+x^2y^2+y^4+2x^3y-2x^2y^2-2xy^3-(x^4+x^2y^2+y^4-2x^3y-2x^2y^2+2xy^3)=x^4+x^2y^2+y^4+2x^3y-2x^2y^2-2xy^3-x^4-x^2y^2-y^4+2x^3y+2x^2y^2-2xy^3=4x^3y-4xy^3=4xy(x^2-y^2)=4xy(x+y)(x-y)$

209 $2a^2b-18b^7+12b^4-2b=2b(a^2-9b^6+6b^3-1)=2b\ [a^2-(9b^6-6b^3+1)]=2b\ [a^2-(3b^3\ 3b^3-2\ 3b^3+1\ 1)]=2b\ \{a^2-[(3b^3)^2-2\ 3b^3\ 1+1^2]\}=2b[a^2-(3b^3-1)^2]=2b[a+(3b^3-1)]\ [a-(3b^3-1)]=2b(a+3b^3-1)(a-3b^3+1)$ **209′** $2ab^2-18a^7-12a^4-2a=2a(b^2-9a^6-6a^3-1)=2a[b^2-(9a^6+6a^3+1)]=2a\ [b^2-(3a^3\ 3a^3+2\ 3a^3+1\ 1)]=2a\ \{b^2-[(3a^3)^2+2\ 3a^3\ 1+1^2]\}=2a[b^2-(3a^3+1)^2]=2a[b+(3a^3+1)]\ [b-(3a^3+1)]=2a(b+3a^3+1)(b-3a^3-1)$

210 **1-ый способъ** $(a^3+1)^2-(b^3-1)^2=[(a^3+1)+(b^3-1)]\ [(a^3+1)-(b^3-1)]=(a^3+1+b^3-1)\ (a^3+1-b^3+1)=(a^3+b^3)(a^3-b^3+2)=$ (№ 146) $=(a+b)(a^2-ab+b^2)(a^3-b^3+2)$ **2-ой способъ** $(a^3+1)^2-(b^3-1)^2=(a^3)^2+2\ a^3\ 1+1^2-[(b^3)^2-2\ b^3\cdot1+1^2]=a^3\ a^3+2a^3+1-(b^3\cdot b^3-2b^3+1)=a^6+2a^3+1-b^6+2b^3-1=a^6+2a^3-b^6+2b^3=(a^6-b^6)+(2a^3+2b^3)=$ (см № 228, спос 1-ый) $=[(a^3)^2-(b^3)^2]+2(a^3+b^3)=(a^3+b^3)\ (a^3-b^3)+2\ (a^3$

$+b^3)=(a^3+b^3)(a^3-b^3+2)=(a+b)(a^2-ab+b^2)(a^3-b^3+2)$. **210′** **I способъ** $(a^3-1)^2-(b^3-1)^2=[(a^3-1)+(b^3-1)][(a^3-1)-(b^3-1)]=(a^3-1+b^3-1)$ $(a^3-1-b^3+1)=(a^3+b^3-2)(a^3-b^3)=$(№ 146)$=(a^3+b^3-2)(a-b)(a^2+ab+$ $+b^2)$ **II способъ** $(a^3-1)^2-(b^3-1)^2=(a^3)^2-2\;a^3\;1+1^2-[(b^3)^2-2$ $b^3\;1+1^2]=a^3\;a^3-2a^3+1-(b^3\;b^3-2b^3+1)=a^6-2a^3+1-b^6+2b^3-$ $-1=a^6-2a^3-b^6+2b^3=(a^6-b^6)-(2a^3-2b^3)=$(№ 228 I-ый спос)$=[(a^3)^2-$ $-(b^3)^2]-2(a^3-b^3)=(a^3+b^3)(a^3-b^3)-2(a^3-b^3)=(a^3-b^3)(a^3+b^3-2)=$ $=(a-b)(a^2+ab+b^2)(a^3+b^3-2)$.

211 **1 ый способъ.** $m^3+8+6m^2+12m=m^3+6m^2+12m+8=m^3+3$ $m^2\;2+3\;m\;2^2+2^3=(m+2)^3$ по формулѣ куба суммы $(a+b)^3=a^3+3a^2b+$ $+3ab^2+b^3$ **2-ой способъ** $m^3+8+6m^2+12m=(m^3+8)+(6m^2+12m)=$ $=(m^3+2^3)+6m(m+2)=(m+2)(m^2-m\;2+2^2)+6m(m+2)=(m+2)(m^2-$ $-2m+4)+6m(m+2)=(m+2)(m^2-2m+4+6m)=(m+2)(m^2+4m+4)=$ $=(m+2)(m^2+2\;m\;2+2^2)=(m+2)(m+2)^2=(m+2)^3$ Остальные способы не достопримѣчательны. **211′.** **I способъ** $m^3+8-6m^2-12m=(m^3+8)-$ $-(6m^2+12m)=$(№ 148)$=(m^3+2^3)-6m(m+2)=(m+2)(m^2-m\;2+2^2)-$ $-6m(m+2)=(m+2)(m^2-2m+4)-6m(m+2)=(m+2)(m^2-2m+4-6m)=$ $=(m+2)(m^2-8m+4)$ **II способъ** $m^3+8-6m^2-12m=m^3-6m^2-12m+$ $+8=$(см теорію передъ рѣш № 81, B])$=m^3+2m^2-8m^2-16m+4m+8=(m^3+$ $+2m^2)-(8m^2+16m)+(4m+8)=m^2(m+2)-8m(m+2)+4(m+2)=(m+$ $+2)(m^2-8m+4)$ **III способъ** $m^3+8-6m^2-12m=m^3-8m^2+4m+2m^2-$ $-16m+8=(m^3-8m^2+4m)+(2m^2-16m+8)=m(m^2-8m+4)+2(m^2-8m+$ $+4)=(m^2-8m+4)(m+2)$

Замѣчаніе Множитель m^2-8m+4 не разлагается болѣе въ произведеніе раціональныхъ сомножителей, однако *доказать* это мы пока не имѣемъ возможности (доказательство помощью теоріи квадратнаго ур-ія, въ ученіи объ его корняхъ, или же—по способу неопредѣленныхъ множителей)

212 **1-ый способъ** $m^3-8+6m^2-12m=(m^3-8)+(6m^2-12m)=$ $=$(№ 148)$=(m^3-2^3)+6m(m-2)=(m-2)(m^2+m\;2+2^2)+6m(m-2)=$ $=(m-2)(m^2+2m+4)+6m(m-2)=(m-2)(m^2+2m+4+6m)=$ $=(m-2)(m^2+8m+4)$, множитель m^2+8m+4 — простой (см замѣчаніе къ рѣш № 211) **2-ой способъ** $m^3-8+6m^2-12m=m^3+6m^2-$ $-12m-8=$(см теорію передъ рѣш № 81, п B])$=m^3-2m^2+8m^2-$ $-16m+4m-8=(m^3-2m^2)+(8m^2-16m)+(4m-8)=m^2(m-2)+$ $+8m(m-2)+4(m-2)=(m-2)(m^2+8m+4)$ **3-ій способъ** m^3-8+6m^2- $-12m=m^3+8m^2-2m^2+4m-16m-8=(m^3+8m^2+4m)-(2m^2+16m+8)=$ $=m(m^2+8m+4)-2(m^2+8m+4)=(m^2+8m+4)(m-2)$ **212′** Срв № 211 **I спос** $m^3-8-6m^2+12m=m^3-3\;m^2\;2+3\;m\;2^2-2^3=(m-2)^3$ по формулѣ куба разности $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ **II спос** m^3- $-8-6m^2+12m=(m^3-8)-(6m^2-12m)=(m^3-2^3)-6m(m-2)=$(№ 148)$=$ $=(m-2)(m^2+m\,.\,2+2^2)-6m(m-2)=(m-2)(m^2+2m+4)-6m\,.\,(m-2)=$ $=(m-2)(m^2+2m+4-6m)=(m-2)(m^2-4m+4)=(m-2)(m^2-2\,.\,m\;2+$ $+2^2)=(m-2)(m-2)^2=(m-2)^3$

213 **1-ый способъ** $(a^2+3a+1)^2-1=(a^2+3a+1)^2-1^2=[(a^2+3a+1)+$ $+1][(a^2+3a+1)-1]=(a^2+3a+2)(a^2+3a)=(a^2+a+2a+2)\;a(a+3)=[a(a+$ $+1)+2(a+1)]a(a+3)=(a+1)(a+2)a(a+3)=a(a+1)(a+2)(a+3)$ **2-ой спос** По формулѣ *квадрата трехчлена* (№ 208, спос 2-ой) имѣемъ $(a^2+3a+1)^2-$ $-1=(a^2)^2+(3a)^2+1^2+2\;a^2\;3a+2\;a^2\;1+2\;3a\;1-1=a^2\;a^2+3a$ $.\,3a+1+6a^3+2a^2+6a-1=a^4+6a^3+11a^2+6a$ Итакъ, вопросъ сводится къ разложенію на простыхъ множителей выраженія $N=a^4+6a^3+11a^2+$ $+6a$, разлагая N (простѣйшимъ образомъ), имѣемъ $N=a(a^3+6a^2+11a+$

$+6)=$ (см зад Шап и Вальц, ч I стр 65 разложенie выраженiя $x^3+6x^2+11x+6$) $=a(a^3+a^2+5a^2+5a+6a+6)=a[a^2(a+1)+5a(a+1)+6(a+1)]=a(a+1)(a^2+5a+6)=a(a+1)(a^2+2a+3a+6)=a(a+1)[a(a+2)+3(a+2)]=a(a+1)(a+2)(a+3)$

Замѣчанiе (ко 2-му спос) Изъ рѣшенiя вытекаетъ, что $N=a^4+6a^3+11a^2+6a$, при цѣлыхъ значенiяхъ числа a, есть *произведенiе 4-хъ послѣдовательныхъ цѣлыхъ чиселъ* (a, $a+1$, $a+2$, $a+3$) Но если изъ натуральнаго ряда цѣлыхъ чиселъ

$$-\infty, \qquad -4\ \ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3, \qquad +\infty$$

выдѣлить группу 4-хъ послѣдовательныхъ чиселъ, то, очевидно, среди нихъ всегда окажется 1) 2 четныхъ числа, 2) по крайней мѣрѣ *одно* число, кратное 3, 3) *одно* кратное 4 Слѣд, произведенiе чиселъ, составляющихъ эту группу, будетъ всегда кратно 2 3 4=*24* —Отсюда вытекаетъ слѣд

теорема *Число $a^4+6a^3+11a^2+6a$ при всевозможныхъ цѣлыхъ значенiяхъ a дѣлится на 24*

213′ I способъ $(a^2-3a+1)^2-1=(a^2-3a+1)^2-1^2=[(a^2-3a+1)+1][(a^2-3a+1)-1]=(a^2-3a+2)(a^2-3a)=(a^2-a-2a+2)\ a(a-3)=[a(a-1)-2(a-1)]\ a(a-3)=(a-1)(a-2)\ a(a-3)=a(a-1)(a-2)(a-3)$ **II спос** По форм въ спос 2-мъ № 208 имѣемъ $(a^2-3a+1)^2-1=[a^2+(-3a)+1]^2-1=(a^2)^2+(-3a)^2+1^2+2\ a^2\ (-3a)+2\ a^2\ 1+2\ (-3a)\ 1-1=a^2\ a^2+(-3a)\cdot(-3a)+1-6a^3+2a^2-6a-1=a^4+9a^2-6a^3+2a^2-6a=a^4-6a^3+11a^2-6a$ Разложимъ количество $N=a^4-6a^3+11a^2-6a$, полученное изъ даннаго выраженiя путемъ различныхъ преобразованiй $N=a(a^3-6a^2+11a-6)=a(a^3-a^2-5a^2+5a+6a-6)=a[(a^3-a^2)-(5a^2-5a)+(6a-6)]=a[a^2(a-1)-5a(a-1)+6(a-1)]=a(a-1)(a^2-5a+6)=$ (срв № 85) $=a(a-1)(a^2-2a-3a+6)=a(a-1)[(a^2-2a)-(3a-6)]=a(a-1)[a(a-2)-3(a-2)]=a(a-1)(a-2)(a-3)$

Замѣч ко II спос Т к число $N=a^4-6a^3+11a^2-6a$ разложилось въ произведенiе 4-хъ послѣдовательныхъ цѣлыхъ (при цѣломъ a) чиселъ a, $a-1$, $a-2$ и $a-3$, то къ нему можно примѣнить заключенiе теоремы въ „замѣч" къ рѣш № 213 N дѣлится на 24

214 1-ый способъ $(a^2-2a+2)^2-1=(a^2-2a+2)^2-1^2=[(a^2-2a+2)+1][(a^2-2a+2)-1]=(a^2-2a+3)(a^2-2a+1)=(a^2-2a+3)(a^2-2\ a\ 1+1^2)=(a^2-2a+3)(a-1)^2$ **2-ой способъ** См форм квадрата трехчлена во 2-мъ спос рѣш № 208 го $(a^2-2a+2)^2-1=[a^2+(-2a)+2]^2-1=(a^2)^2+(-2a)^2+2^2+2\ a^2\ (-2a)+2\ a^2\ 2+2\ (-2a)\ 2-1=a^4+4a^2+4-4a^3+4a^2-8a-1=a^4-4a^3+8a^2-8a+3=$ (см п В] теорiи передъ рѣш № 81) $=a^4-a^3-3a^3+3a^2+5a^2-5a-3a+3=(a^4-a^3)-(3a^3-3a^2)+(5a^2-5a)-(3a-3)=a^3(a-1)-3a^2(a-1)+5a(a-1)-3(a-1)=(a-1)(a^3-3a^2+5a-3)=(a-1)(a^3-a^2-2a^2+2a+3a-3)=(a-1)[(a^3-a^2)-(2a^2-2a)+(3a-3)]=(a-1)[a^2(a-1)-2a(a-1)+3(a-1)]=(a-1)(a-1)(a^2-2a+3)=(a-1)^2(a^2-2a+3)$ Множитель a^2-2a+3—простой (см замѣч къ рѣш № 211′) **214′ I способъ** $(a^2-2a-1)^2-4=(a^2-2a-1)^2-2^2=[(a^2-2a-1)+2][(a^2-2a-1)-2]=(a^2-2a+1)(a^2-2a-3)=(a^2-2\ a\ 1+1^2)(a^2+a-3a-3)=(a-1)^2[a(a+1)-3(a+1)]=(a-1)^2(a+1)(a-3)$ **II способъ** См № 208, 2 ой спос, форм $(a^2-2a-1)^2-4=[a^2+(-2a)+(-1)]^2-4=(a^2)^2+(-2a)^2+(-1)^2+2\ a^2\ (-2a)+2\ a^2\ (-1)+2\ (-2a)\ (-1)-4=a^4+(-2a)\ (-2a)+(-1)\ (-1)-4a^3-2a^2+4a-4=a^4+4a^2+1-4a^3-2a^2+4a-4=a^4-4a^3+2a^2+4a-3=$ (см выноску къ № 113) $=a^4-a^3-3a^3+3a^2-a^2+a+3a-3=(a^4-a^3)-(3a^3-3a^2)-(a^2-a)+(3a-3)=a^3(a-1)-3a^2(a-1)-a(a-1)+3(a-1)=(a-1)(a^3-3a^2-a+3)=$ (см тамъ же) $=(a-1)(a^3-a^2-2a^2+2a-3a+3)=(a-1)[(a^3-a^2)-(2a^2-$

$-2a)-(3a-3)]=(a-1)[a^2(a-1)-2a(a-1)-3(a-1)]=(a-1)(a-1)(a^2-2a-3)=(a-1)^2(a^2+a-3a-3)=(a-1)^2[a(a+1)-3(a+1)]=(a-1)^2(a+1)(a-3)$

215 **1-ый способъ** $a^5-a^3+a^2-1=(a^5-a^3)+(a^2-1)=a^3(a^2-1)+(a^2-1)=(a^2-1)(a^3+1)=(a^2-1^2)(a^3+1^3)=$ (№ 147) $=(a+1)(a-1)(a+1)(a^2-a\cdot 1+1^2)=(a+1)^2(a-1)(a^2-a+1)$ **2-ой способъ** $a^5-a^3+a^2-1=(a^5+a^2)-(a^3+1)=a^2(a^3+1)-(a^3+1)=(a^3+1)(a^2-1)=(a^3+1^3)(a^2-1^2)=(a+1)(a^2-a+1)(a+1)(a-1)=(a+1)^2(a^2-a+1)(a-1)$ **3-ій способъ** $a^5-a^3+a^2-1=(a^5-1)-(a^3-a^2)=$ (см теорію передъ рѣш № 121, форм 6° при $m=5$, № 152) $=(a^5-1^5)-a^2(a-1)=(a-1)(a^4+a^3\cdot 1+a^2\cdot 1^2+a\cdot 1^3+1^4)-a^2(a-1)=(a-1)(a^4+a^3+a^2+a+1)-a^2(a-1)=(a-1)(a^4+a^3+a^2+a+1-a^2)=(a-1)(a^4+a^3+a+1)=(a-1)[(a^4+a^3)+(a+1)]=(a-1)[a^3(a+1)+(a+1)]=(a-1)(a+1)(a^3+1)=(a-1)(a+1)(a+1)(a^2-a+1)=(a-1)(a+1)^2(a^2-a+1)$ **215′** **I способъ** $a^5+a^3+a^2+1=(a^5+a^3)+(a^2+1)=a^3(a^2+1)+(a^2+1)=(a^2+1)(a^3+1)=$ (№ 147) $=(a^2+1)(a^3+1^3)=(a^2+1)(a+1)(a^2-a\cdot 1+1^2)=(a^2+1)(a+1)(a^2-a+1)$ **II способъ** $a^5+a^3+a^2+1=(a^5+a^2)+(a^3+1)=a^2(a^3+1)+(a^3+1)=(a^3+1)(a^2+1)=(a^3+1^3)(a^2+1)=(a+1)(a^2-a+1)(a^2+1)$ **III способъ** $a^5+a^3+a^2+1=(a^5+1)+(a^3+a^2)=$ (№ 152) $=(a^5+1^5)+a^2(a+1)=(a+1)(a^4-a^3\cdot 1+a^2\cdot 1^2-a\cdot 1^3+1^4)+a^2(a+1)=(a+1)(a^4-a^3+a^2-a+1)+a^2(a+1)=(a+1)(a^4-a^3+a^2-a+1+a^2)=(a+1)(a^4-a^3+2a^2-a+1)=(a+1)(a^4-a^3+a^2+a^2-a+1)=(a+1)[(a^4+a^2)-(a^3+a)+(a^2+1)]=(a+1)[a^2(a^2+1)-a(a^2+1)+(a^2+1)]=(a+1)(a^2+1)(a^2-a+1)$

216 $a^5+a^2-a^3-1$ (см № 215) **216′** **I способъ** $a^5-a^2-a^3+1=(a^5-a^2)-(a^3-1)=a^2(a^3-1)-(a^3-1)=(a^3-1)(a^2-1)=$ (№ 147) $=(a^3-1^3)(a^2-1^2)=(a-1)(a^2+a\cdot 1+1^2)(a+1)(a-1)=(a-1)^2(a^2+a+1)(a+1)$ **II способъ.** $a^5-a^2-a^3+1=(a^5-a^3)-(a^2-1)=a^3(a^2-1)-(a^2-1)=(a^2-1)(a^3-1)=(a^2-1^2)(a^3-1^3)=(a+1)(a-1)(a-1)(a^2+a\cdot 1+1^2)=(a+1)(a-1)^2(a^2+a+1)$ **III способъ.** $a^5-a^2-a^3+1=(a^5+1)-(a^3+a^2)=$ (№ 152) $=(a^5+1^5)-a^2(a+1)=(a+1)(a^4-a^3\cdot 1+a^2\cdot 1^2-a\cdot 1^3+1^4)-a^2(a+1)=(a+1)(a^4-a^3+a^2-a+1)-a^2(a+1)=(a+1)(a^4-a^3+a^2-a+1-a^2)=(a+1)(a^4-a^3-a+1)=$ (срв № 206) $=(a+1)[(a^4-a^3)-(a-1)]=(a+1)[a^3(a-1)-(a-1)]=(a+1)(a-1)(a^3-1)=(a+1)(a-1)(a-1)(a^2+a+1)=(a+1)(a-1)^2(a^2+a+1)$

217 Срв № 212 $x^3-27a^3-9ax^2+27a^2x=x^3-9ax^2+27a^2x-27a^3=x^3-3\cdot x^2\cdot 3a+3\cdot x\cdot 3a\cdot 3a-3a\cdot 3a\cdot 3a=x^3-3\cdot x^2\cdot(3a)^1+3\cdot x^1\cdot(3a)^2-(3a)^3=(x-3a)^3$ **217′** Срв № 212 $x^3-27a^3+9ax^2-27a^2x=(x^3-27a^3)+(9ax^2-27a^2x)=[x^3-(3a)^3]+9ax(x-3a)=(x-3a)[x^2+x\cdot 3a+(3a)^2]+9ax(x-3a)=(x-3a)(x^2+3ax+9a^2)+9ax(x-3a)=(x-3a)(x^2+3ax+9a^2+9ax)=(x-3a)(x^2+12ax+9a^2)$

Замѣчаніе Выраженіе $x^2+12ax+9a^2$ не разлагается болѣе на произведеніе простѣйшихъ множителей.—Вообще, для уясненія характера даннаго выраженія $x^3-27a^3+9ax^2-27a^2x$ полезно замѣнить его другимъ равнозначащимъ, положивъ $3a=y$; тогда данное выраженіе будетъ $x^3-y^3+3x^2y-3xy^2$ и его легче, чѣмъ данное, разложить по способамъ, указаннымъ въ рѣш № 212

218 **1-ый способъ** См № 146 $(a+x)^3-(a-x)^3=[(a+x)-(a-x)][(a+x)^2+(a+x)(a-x)+(a-x)^2]=(a+x-a+x)(a^2+2ax+x^2+a^2-x^2+a^2-2ax+x^2)=2x(3a^2+x^2)$ **2-ой способъ** $(a+x)^3-(a-x)^3=a^3+3a^2x+3ax^2+x^3-(a^3-3a^2x+3ax^2-x^3)=a^3+3a^2x+3ax^2+x^3-a^3+3a^2x-3ax^2+x^3=6a^2x+2x^3=2x(3a^2+x^2)$ **218′** **I способъ** $(a+x)^3+(a-x)^3=$ (№ 146) $=$

$=[(a+x)+(a-x)][(a+x)^2-(a+x)(a-x)+(a-x)^2]=(a+x+a-x)(a^2+2ax+x^2-a^2+x^2+a^2-2ax+x^2)=2a(a^2+3x^2)$ **II способъ** $(a+x)^3+(a-x)^3=a^3+3a^2x+3ax^2+x^3+a^3-3a^2x+3ax^2-x^3=2a^3+6ax^2=2a(a^2+3x^2)$

219 **1-ый способъ** $x^4+2ax^3-a^4-2a^3x=(x^4-a^4)+(2ax^3-2a^3x)=$ (№ 223) $=[(x^2)^2-(a^2)^2]+2ax(x^2-a^2)=(x^2+a^2)(x^2-a^2)+2ax(x^2-a^2)=(x^2-a^2)(x^2+a^2+2ax)=(x+a)(x-a)(x+a)^2=(x+a)^3(x-a)$ **2-ой способъ** См въ рѣш № 175—«8 ой случ разл» $x^4+2ax^3-a^4-2a^3x=x^4-ax^3+3ax^3-3a^2x^2+3a^2x^2-3a^3x+a^3x-a^4=(x^4-ax^3)+(3ax^3-3a^2x^2)+(3a^2x^2-3a^3x)+(a^3x-a^4)=x^3(x-a)+3ax^2(x-a)+3a^2x(x-a)+a^3(x-a)=(x-a)(x^3+3ax^2+3a^2x+a^3)=(x-a)(x+a)^3$ Это—простѣйшие способы **219′** **I способъ** $x^4-2ax^3-a^4+2a^3x=(x^4-a^4)-(2ax^3-2a^3x)=$ (№ 223) $=[(x^2)^2-(a^2)^2]-2ax(x^2-a^2)=(x^2+a^2)(x^2-a^2)-2ax(x^2-a^2)=(x^2-a^2)(x^2+a^2-2ax)=(x+a)(x-a)(x^2-2xa+a^2)=(x+a)(x-a)(x-a)^2=(x+a)(x-a)^3$. **II способъ** $x^4-2ax^3-a^4+2a^3x=x^4+ax^3-3ax^3-3a^2x^2+3a^2x^2+3a^3x-a^3x-a^4=(x^4+ax^3)-(3ax^3+3a^2x^2)+(3a^2x^2+3a^3x)-(a^3x+a^4)=x^3(x+a)-3ax^2(x+a)+3a^2x(x+a)-a^3(x+a)=(x+a)(x^3-3x^2a+3xa^2-a^3)=(x+a)(x-a)^3$.

220 См рѣш № 223 спос 1 ый $(a+x)^4-(a-x)^4=(a+x)^2(a+x)^2-(a-x)^2(a-x)^2=[(a+x)^2]^2-[(a-x)^2]^2=$ (№ 128) $=[(a+x)^2+(a-x)^2][(a+x)^2-(a-x)^2]=[(a+x)^2+(a-x)^2][(a+x)+(a-x)][(a+x)-(a-x)]=(a^2+2ax+x^2+a^2-2ax+x^2)(a+x+a-x)(a+x-a+x)=(2a^2+2x^2)\cdot 2a\cdot 2x=2(a^2+x^2)\cdot 4ax=8ax(a^2+x^2)$

Указанiе Это—простѣйшее рѣшенiе, можно было бы рѣшить еще 2-мя способами, какъ въ № 223, но въ видахъ простоты мы ихъ пропускаемъ Наконецъ замѣтимъ, что формула разложенiя бинома *Ньютона* даетъ весьма простое рѣшенiе, однако выходящее изъ рамокъ настоящаго курса (по послѣднему способу результатъ получ скорѣе всего).

220′ $(x-a)^4-(x+a)^4=[(x-a)^2]^2-[(x+a)^2]^2=[(x-a)^2+(x+a)^2][(x-a)^2-(x+a)^2]=[(x-a)^2+(x+a)^2][(x-a)+(x+a)][(x-a)-(x+a)]=(x^2-2xa+a^2+x^2+2xa+a^2)(x-a+x+a)(x-a-x-a)=(2x^2+2a^2)\cdot 2x\cdot(-2a)=2(x^2+a^2)\cdot(-4ax)=-8ax(x^2+a^2)$

221 Срв № 187 **1-ый способъ** $(a^6+b^2)^2-4a^6b^2=(a^6+b^2)^2-2a^3b\cdot 2a^3b=(a^6+b^2)^2-(2a^3b)^2=[(a^6+b^2)+2a^3b][(a^6+b^2)-2a^3b]=(a^6+2a^3b+b^2)(a^6-2a^3b+b^2)=[(a^3)^2+2\cdot a^3\cdot b+b^2][(a^3)^2-2\cdot a^3\cdot b+b^2]=(a^3+b)^2(a^3-b)^2$ **II спос** $(a^6+b^2)^2-4a^6b^2=(a^6)^2+2a^6b^2+(b^2)^2-4a^6b^2=(a^6)^2-2a^6b^2+(b^2)^2=(a^6-b^2)^2=[(a^3)^2-b^2]^2=[(a^3+b)(a^3-b)]^2=(a^3+b)(a^3-b)(a^3+b)(a^3-b)=(a^3+b)^2(a^3-b)^2$ **221′** **1-ый способъ** $4a^2b^6-(a^2+b^6)^2=2ab^3\cdot 2ab^3-(a^2+b^6)^2=(2ab^3)^2-(a^2+b^6)^2=[2ab^3+(a^2+b^6)][2ab^3-(a^2+b^6)]=(a^2+2ab^3+b^6)(-a^2+2ab^3-b^6)=[a^2+2\cdot a\cdot b^3+(b^3)^2]\{-[a^2-2\cdot a\cdot b^3+(b^3)^2]\}=(a+b^3)^2[-(a-b^3)^2]=-(a+b^3)^2(a-b^3)^2$ **II способъ** $4a^2b^6-(a^2+b^6)^2=4a^2b^6-(a^2)^2-2a^2b^6-(b^6)^2=-(a^2)^2+2a^2b^6-(b^6)^2=-[(a^2)^2-2\cdot a^2\cdot b^6+(b^6)^2]=-(a^2-b^6)^2=-[a^2-(b^3)^2]^2=-[(a+b^3)(a-b^3)]^2=-(a+b^3)(a-b^3)(a+b^3)(a-b^3)=-(a+b^3)^2(a-b^3)^2$.

222 **1-ый способъ** $4a^6b^4-(a^6+b^4)^2=2a^3b^2\cdot 2a^3b^2-(a^6+b^4)^2=(2a^3b^2)^2-(a^6+b^4)^2=[2a^3b^2+(a^6+b^4)][2a^3b^2-(a^6+b^4)]=(a^6+2a^3b^2+b^4)(-a^6+2a^3b^2-b^4)=[(a^3)^2+2\cdot a^3\cdot b^2+(b^2)^2]\{-[(a^3)^2-2\cdot a^3\cdot b^2+(b^2)^2]\}=(a^3+b^2)^2[-(a^3-b^2)^2]=-(a^3+b^2)^2(a^3-b^2)^2$ **2 ой способъ** $4a^6b^4-(a^6+b^4)^2=4a^6b^4-[(a^6)^2+2\cdot a^6\cdot b^4+(b^4)^2]=4a^6b^4-(a^6)^2-2a^6b^4-(b^4)^2=-(a^6)^2+2a^6b^4-(b^4)^2=-[(a^6)^2-2\cdot a^6\cdot b^4+(b^4)^2]=-(a^6-b^4)^2=-[(a^3)^2-(b^2)^2]^2=-[(a^3+b^2)(a^3-b^2)]^2=-(a^3+b^2)(a^3-b^2)(a^3+b^2)(a^3-b^2)=$

$=-(a^3+b^2)^2(a^3-b^2)^2$ **222′ I спос** $(a^4+b^6)^2-4a^4b^6=(a^4+b^6)^2-(2a^2b^3)^2=$ $=[(a^4+b^6)+2a^2b^3][(a^4+b^6)-2a^2b^3]=(a^4+2a^2b^3+b^6)\,.\,(a^4-2a^2b^3+b^6)=$ $=[(a^2)^2+2\ \ a^2\ \ b^3+(b^3)^2]\ [(a^2)^2-2\ \ a^2\ \ b^3+(b^3)^2]=(a^2+b^3)^2(a^2-b^3)^2$ **II способъ** $(a^4+b^6)^2-4a^4b^6=(a^4)^2+2a^4b^6+(b^6)^2-4a^4b^6=(a^4)^2-2a^4b^6+$ $+(b^6)^2=(a^4-b^6)^2=[(a^2)^2-(b^3)^2]^2=[(a^2+b^3)(a^2-b^3)]^2=(a^2+b^3)(a^2-b^3)$ $(a^2+b^3)(a^2-b^3)=(a^2+b^3)^2\ \ (a^2-b^3)^2$.

223 1-ый способъ $x^4-y^4=(x^2)^2-(y^2)^2=[(x^2)^1+(y^2)^1][(x^2)^1-(y^2)^1]=$ $=(x^2+y^2)(x^2-y^2)=(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$ **2-ой способъ** См теорію передъ рѣш № 121, 7-ой случ разл, 6°, при $m=4$ По формулѣ разложенія разности одинаковыхъ степеней имѣемъ $x^4-y^4=(x-y)(x^3+x^2y+xy^2+y^3)=$ $=(x-y)[(x^3+x^2y)+(xy^2+y^3)]=(x-y)[x^2(x+y)+y^2(x+y)]=(x-y)(x+y)(x^2+$ $+y^2)$ **3-ій способъ** [См № 175, 8-ой случ разл] Дополнимъ данное выраженіе (абсолютныя величины его членовъ суть полные квадраты) до точнаго квадрата (вида $a^2+2ab+b^2$) суммы двухъ количествъ x^2 и y^2 Т к $(x^2+$ $+y^2)^2=(x^2)^2+2\ \ x^2\ \ y^2+(y^2)^2=x^4+2x^2y^2+y^4$, то для означенной цѣли достаточно прибавить къ данному выраженію $2x^2y^2+2y^4$, а чтобы первое не измѣнилось по величинѣ, послѣднее выраженіе надо приписать также—съ измѣненными на обратные знаками—къ данному выраженію Дѣйствительно $x^4-y^4=x^4+2x^2y^2+y^4-2x^2y^2-2y^4$, теперь разлагаемъ послѣднее выраженіе по обычнымъ правиламъ $x^4-y^4=(x^2+2x^2y^2+y^4)-$ $-(2x^2y^2+2y^4)=(x^2+y^2)^2-2y^2(x^2+y^2)=(x^2+y^2)[(x^2+y^2)-2y^2]=(x^2+y^2)$ $(x^2-y^2)=(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$ **4-ый способъ** (см предыдущ) $x^4-y^4=$ $=x^4-2x^2y^2+y^4+2x^2y^2-2y^4=(x^4-2x^2y^2+y^4)+(2x^2y^2-2y^4)=(x^2-y^2)^2+$ $+2y^2(x^2-y^2)=(x^2-y^2)(x^2-y^2+2y^2)=(x^2-y^2)(x^2+y^2)=(x+y)(x-y)(x^2+$ $+y^2)$ **5 ый способъ** *Разность четныхъ степеней* x^m-y^m (количество m—четное) *дѣлится на сумму первыхъ степеней* $x+y$ Поэтому, x^4-y^4 дѣлится на $x+y$ и въ частномъ оказывается выраженіе $x^3-x^2y+xy^2-y^3$ Слѣд. по свойству дѣленія имѣемъ $x^4-y^4=(x+y)(x^3-x^2y+xy^2-y^3)=(x+y)$ $[(x^3-x^2y)+(xy^2-y^3)]=(x+y)[x^2(x-y)+y^2(x-y)]=(x+y)(x-y)(x^2+y^2)$ **223′ I способъ**, $y^4-x^4=(y^2)^2-(x^2)^2=(y^2+x^2)(y^2-x^2)=(y^2+x^2)(y+x)$ $(y-x)$ **II способъ** $y^4-x^4=(y-x)(y^3+y^2x+yx^2+x^3)=(y-x)[y^2(y+x)+$ $+x^2(y+x)]=(y-x)(y+x)(y^2+x^2)$ **III способъ** $y^4-x^4=y^4+2y^2x^2+$ $+x^4-2y^2x^2-2x^4=(y^4+2y^2x^2+x^4)-(2y^2x^2+2x^4)=(y^2+x^2)^2-2x^2(y^2+$ $+x^2)=(y^2+x^2)(y^2+x^2-2x^2)=(y^2+x^2)(y^2-x^2)=(y^2+x^2)(y+x)(y-x)$ **IV способъ** $y^4-x^4=y^4-2y^2x^2+x^4+2y^2x^2-2x^4=(y^4-2y^2x^2+x^4)+(2y^2x^2-$ $-2x^4)=(y^2-x^2)^2+2x^2(y^2-x^2)=(y^2-x^2)(y^2-x^2+2x^2)=(y+x)(y-x)(y^2+x^2)$ **V способъ** Т. к y^4-x^4 дѣлится на $y+x$, то на основаніи дѣленія, принимая во вниманіе что въ частномъ получ $y^3-y^2x+yx^2-x^3$, будемъ имѣть $y^4-x^4=(y+x)(y^3-y^2x+yx^2-x^3)=(y+x)[y^2(y-x)+x^2(y-x)]=$ $=(y+x)(y-x)(y^2+x^2)$

Замѣчаніе къ 5 мъ способамъ рѣш №№ 223′ и 223 Вообще если m—число *четное*, то разность x^m-y^m разлагается въ произведеніе по формулѣ (срв съ форм 6° въ нач § 2)

$$x^m-y^m=(x+y)(x^{m-1}-x^{m-2}y+x^{m-3}y^2-\qquad -y^{m-1})$$

224 I ый способъ См № 175, 8-й случ разлож $x^4+x^2y^2+y^4=x^4+2x^2y^2+$ $+y^4-x^2y^2=[(x^2)^2+2\ \ x^2\ \ y^2+(y^2)^2]-x^2y^2=(x^2+y^2)^2-(xy)^2=(x^2+y^2+xy)(x^2+$ $+y^2-xy)$ **2-ой спос** Изъ извѣстной формулы $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+$ $+b^2)$ вытекаетъ, что $a^2+ab+b^2=\dfrac{a^3-b^3}{a-b}$. Подставляя въ эту формулу значенія $a=x^2$ и $b=y^2$ и замѣчая, что $(x^2)^2=x^2 \cdot x^2=x^4$, $(y^2)^2=y^2 \cdot y^2=y^4$, получ.

$$x^4+x^2y^2+y^4=\frac{(x^2)^3-(y^2)^3}{x^2-y^2}=\frac{x^2x^2x^2-y^2y^2y^2}{x^2-y^2}=\frac{x^6-y^6}{x^2-y^2}$$

Но $x^6-y^6=x^3x^3-y^3y^3=(x^3)^2-(y^3)^2=(x^3+y^3)(x^3-y^3)=(x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2)$ а потому

$$x^4+x^2y^2+y^4=\frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2)}{x^2-y^2}=$$

$$=\frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2)}{(x+y)(x-y)}=(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)$$

224′ I спос $3x^2y^2-x^4-y^4=-(x^4-3x^2y^2+y^4)=-(x^4-2x^2y^2+y^4-x^2y^2)=-\{[(x^2)^2-2 \cdot x^2 \cdot y^2+(y^2)^2]-xy \cdot xy\}=-[(x^2-y^2)^2-(xy)^2]=-(x^2-y^2+xy)(x^2-y^2-xy)$ **Иначе** $3x^2y^2-x^4-y^4=x^2y^2+2x^2y^2-x^4-y^4=x^2y^2-(x^4-2x^2y^2+y^4)=(xy)^2-(x^2-y^2)^2=[xy+(x^2-y^2)][xy-(x^2-y^2)]=(xy+x^2-y^2)(xy-x^2+y^2)$ Легко понять, что этотъ результатъ тождественъ съ первымъ

225 $3x^4y^4-x^8-y^8=x^4y^4+2x^4y^4-x^8-y^8=x^4y^4-(x^8-2x^4y^4+y^8)=x^2y^2 \cdot x^2y^2-[(x^4)^2-2 \cdot x^4 \cdot y^4+(y^4)^2]=(x^2y^2)^2-(x^4-y^4)^2=[(x^2y^2)^1+(x^4-y^4)][(x^2y^2)^1-(x^4-y^4)]=(x^2y^2+x^4-y^4)(x^2y^2-x^4+y^4)$ **Нѣсколько иначе** $3x^4y^4-x^8-y^8=-(x^8-3x^4y^4+y^8)=-(x^8-2x^4y^4+y^8-x^4y^4)=-\{[(x^4)^2-2 \cdot x^4 \cdot y^4+(y^4)^2]-x^2y^2 \cdot x^2y^2\}=-[(x^4-y^4)^2-(x^2y^2)^2]=-(x^4-y^4+x^2y^2)(x^4-y^4-x^2y^2)=(x^4-y^4+x^2y^2)(x^2y^2-x^4+y^4)$ **225′ I спос** $x^8+x^4y^4+y^8=x^8+2x^4y^4+y^8-x^4y^4=[(x^4)^2+2 \cdot x^4 \cdot y^4+(y^4)^2]-x^2y^2 \cdot x^2y^2=(x^4+y^4)^2-(x^2y^2)^2=(x^4+y^4+x^2y^2)(x^4+y^4-x^2y^2)=$(№ 224)$=(x^2+y^2+xy)(x^2+y^2-xy)(x^4+y^4-x^2y^2)$

II спос См № 224, спос 2-ой Подставляя въ формулу $a^2+ab+b^2=\frac{a^3-b^3}{a-b}$ значенія $a=x^4$, $b=y^4$ и замѣчая, что $(x^4)^2=x^8$, $(y^4)^2=y^8$, $(x^4)^3=x^4x^4x^4=x^{12}$, $(y^4)^3=y^{12}$, получ.

$$x^8+x^4y^4+y^8=\frac{x^{12}-y^{12}}{x^4-y^4}=\frac{x^{12}-y^{12}}{(x^2+y^2)(x^2-y^2)}$$

Но $x^{12}-y^{12}=(x^6)^2-(y^6)^2=(x^6+y^6)(x^6-y^6)=[(x^2)^3+(y^2)^3][(x^2)^3-(y^2)^3]=[(x^2)^1+(y^2)^1][(x^2)^2-x^2 \cdot y^2+(y^2)^2][(x^2)^1-(y^2)^1][(x^2)^2+x^2 \cdot y^2+(y^2)^2]=(x^2+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)(x^2-y^2)(x^4+x^2y^2+y^4)$, слѣдоват,

$$x^8+x^4y^4+y^8=\frac{(x^2+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)(x^2-y^2)(x^4+x^2y^2+y^4)}{(x^2+y^2)(x^2-y^2)}=$$

$=(x^4-x^2y^2+y^4)(x^4+x^2y^2+y^4)=$ (№ 224)$=(x^4-x^2y^2+y^4)(x^2+y^2+xy)(x^2+y^2-xy)$

226 I-ый способъ $x^8+x^4+1=(x^8+2x^4+1)-x^4=[(x^4)^2+2 \cdot (x^4)^1 \cdot 1+1^2]-x^2 \cdot x^2=(x^4+1)^2-(x^2)^2=[(x^4+1)^1+(x^2)^1][(x^4+1)^1-(x^2)^1]=(x^4+x^2+1)(x^4-x^2+1)=[(x^4+2x^2+1)-x^2](x^4-x^2+1)=\{[(x^2)^2+2 \cdot (x^2)^1 \cdot 1+1^2]-x^2\}(x^4-x^2+1)=[(x^2+1)^2-x^2](x^4-x^2+1)=[(x^2+1)+x][(x^2+1)-x](x^4-x^2+1)=(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)$

2-ой способъ См № 224 спос 2-й, 225', спос II Полагая въ формулѣ $a^2+ab+b^2=\frac{a^3-b^3}{a-b}$ количество $a=x^4$, $b=1$ и замѣчая, что $(x^4)^2=x^4x^4=x^8$, $(x^4)^3=x^8x^4=x^{12}$ и $1^n=1$, получ

$$x^8+x^4+1=\frac{x^{12}-1}{x^4-1}=\frac{x^{12}-1}{(x^2)^2-1^2}=\frac{x^{12}-1}{(x^2+1)(x^2-1)}$$

Но $x^{12}-1=x^6x^6-1=(x^6)^2-1^2=(x^6+1)(x^6-1)=[(x^2)^3+1^3][(x^2)^3-1^3]=[(x^2)^1+1][(x^2)^2-(x^2)^1\cdot 1+1^2][(x^2)^1-1][(x^2)^2+(x^2)^1\cdot 1+1^2]=(x^2+1)(x^4-x^2+1)(x^2-1)(x^4+x^2+1)=(x^2+1)(x^4-x^2+1)(x^2-1)[(x^4+2x^2+1)-x^2]=(x^2+1)(x^4-x^2+1)(x^2-1)[(x^2+1)^2-x^2]=(x^2+1)(x^4-x^2+1)(x^2-1)(x^2+1+x)(x^2+1-x)$, а потому

$$x^8+x^4+1=\frac{(x^2+1)(x^4-x^2+1)(x^2-1)(x^2+1+x)(x^2+1-x)}{(x^2+1)(x^2-1)}=$$
$$=(x^4-x^2+1)(x^2+a+1)(x^2-x+1)$$

Замѣчаніе Полагая въ выраженіи $x^8+x^4y^4+y^8$ количество $y=1$, получ $x^8+x^4\cdot 1^4+1^8$, или x^8+x^4+1 Поэтому, для рѣшенія данной задачи можно было бы воспользоваться выводами и матеріаломъ рѣш № 225

226' $3x^4-x^8-1=x^4+2x^4-x^8-1=x^4-(x^8-2x^4+1)=x^4-[(x^4)^2-2\cdot x^4\cdot 1+1^2]=(x^2)^2-(x^4-1)^2=[(x^2)^1+(x^4-1)][(x^2)^1-(x^4-1)]=(x^4+x^2-1)(-x^4+x^2+1)$ **Иначе** $3x^4-x^8-1=-(x^8-3x^4+1)=-[(x^8-2x^4+1)-x^4]=-\{[(x^4)^2-2\cdot x^4\cdot 1+1^2]-x^2x^2\}=-[(x^4-1)^2-(x^2)^2]=-[(x^4-1)+(x^2)^1][(x^4-1)-(x^2)^1]=-(x^4+x^2-1)(x^4-x^2-1)$ —Замѣтимъ, что данное выраженіе получ при подстановкѣ въ условіе № 225 значенія $y=1$

227 $3x^6-x^{12}-1=x^6-(x^{12}-2x^6+1)=x^6-(x^6\cdot x^6-2x^6+1)=x^3\cdot x^3-[(x^6)^2-2\cdot(x^6)^1\cdot 1+1^2]=(x^3)^2-(x^6-1)^2=[(x^3)^1+(x^6-1)^1][(x^3)^1-(x^6-1)^1]=(x^3+x^6-1)(x^3-x^6+1)$ **Иначе** $3x^6-x^{12}-1=-(x^{12}-3x^6+1)=-[(x^{12}-2x^6+1)-x^6]=-[(x^6-1)^2-(x^3)^2]=-(x^6-1+x^3)(x^6-1-x^3)$ **227'** I способъ $x^{12}+x^6+1=(x^{12}+2x^6+1)-x^6=[(x^6)^2+2\cdot(x^6)^1\cdot 1+1^2]-(x^3)^2=(x^6+1)^2-(x^3)^2=[(x^6+1)^1+(x^3)^1][(x^6+1)^1-(x^3)^1]=(x^6+x^3+1)(x^6-x^3+1)$

II способъ См №№ 224, 225', 226—спос. II-е Положимъ въ формулѣ

$a^2+ab+b^2=\frac{a^3-b^3}{a-b}$ количество $a=x^6$, $b=1$, тогда, замѣтивъ, что

$(a^6)^2=a^{12}$ $1^n=1$, $(a^6)^3=a^6a^6a^6=a^{18}$, получ. $x^{12}+x^6+1=\frac{x^{18}-1}{x^6-1}$ Но $x^{18}-1=(x^9)^2-1^2=(x^9+1)(x^9-1)$ $x^6-1=(x^3)^2-1^2=(x^3+1)(x^3-1)$ а потому

$$x^{12}+x^6+1=\frac{(x^9+1)(x^9-1)}{(x^3+1)(x^3-1)}$$

А т к $x^3+1=(x^3)^3+1^3=[(x^3)^1+1][(x^3)^2-(x^3)^1\cdot 1+1^2]=(x^3+1)(x^6-x^3+1)$, $x^9-1=(x^3)^3-1^3=[(x^3)^1-1][(x^3)^2+(x^3)^1\cdot 1+1^2]=(x^3-1)(x^6+x^3+1)$ —то

$$x^{12}+x^6+1=\frac{(x^3+1)(x^6-x^3+1)(x^3-1)(x^6+x^3+1)}{(x^3+1)(x^3-1)}=$$
$$=(x^6-x^3+1)(x^6+x^3+1)$$

Общій случай, охватывающій частные случаи, каковы №№ 224, 225′, 226, 227′ Трехчленъ вида $a^{2n}+a^nb^n+b^{2n}$, въ которомъ есть 1) полные квадраты (ибо $A^{2n}=A^{n+n}=A^n\cdot A^n=[A^n]^2$) двухъ количествъ (со знаками +) и 2) положительное произведеніе этихъ количествъ,—легко разлагается въ произведеніе двухъ сомножителей, если n—число четное, слѣдующимъ образомъ (замѣтимъ, что n, какъ четное число, можно представить въ видѣ $2m$, гдѣ m—нѣкоторое цѣлое число, см. отд. I № 11).

$$a^{2n}+a^nb^n+b^{2n}=(\text{при } n=2m)=a^{4m}+a^{2m}b^{2m}+b^{4m}=a^{4m}+2a^{2m}b^{2m}+b^{4m}-a^{2m}b^{2m}=$$
$$=a^{2m}\cdot a^{2m}+2a^{2m}b^{2m}+b^{2m}\cdot b^{2m}-a^m a^m b^m b^m=$$
$$=(a^{2m})^2+2\,(a^{2m})^1\,(b^{2m})^1+(b^{2m})^2-a^mb^m\cdot a^mb^m=(a^{2m}+b^{2m})^2-(a^mb^m)^2=$$
$$=[(a^{2m}+b^{2m})^1+(a^mb^m)^1][(a^{2m}+b^{2m})^1-(a^mb^m)^1]=(a^{2m}+a^mb^m+b^{2m})(a^{2m}-a^mb^m+b^{2m})$$

Если, далѣе, число m также четное (№№ 225, 226), то первый множитель преобразовывается подобнымъ же образомъ и т. д. Замѣтимъ еще другой способъ разложенія.

Имѣемъ формулу $m^2+mn+n^2=\dfrac{m^3-n^3}{m-n}$, полагая въ ней $m=a^n$, $n=b^n$, $n=2m$, получ.

$$(a^n)^2+a^nb^n+(b^n)^2=a^n\cdot a^n+a^nb^n+b^n\cdot b^n=a^{2n}+a^nb^n+b^{2n}=$$
$$=\frac{(a^n)^3-(b^n)^3}{a^n-b^n}=\frac{a^na^na^n-b^nb^nb^n}{a^n-b^n}=\frac{a^{3n}-b^{3n}}{a^n-b^n}=(\text{при } n=2m)=$$
$$=\frac{a^{3\cdot 2m}-b^{3\cdot 2m}}{a^{2m}-b^{2m}}=\frac{a^{6m}-b^{6m}}{a^{2m}-b^{2m}}=\frac{a^{3m}\cdot a^{3m}-b^{3m}\cdot b^{3m}}{a^m\cdot a^m-b^m\cdot b^m}=\frac{(a^{3m})^2-(b^{3m})^2}{(a^m)^2-(b^m)^2}=$$
$$=\frac{(a^{3m}+b^{3m})(a^{3m}-b^{3m})}{(a^m+b^m)(a^m-b^m)}=\frac{[(a^m)^3+(b^m)^3]\,[(a^m)^3-(b^m)^3]}{(a^m+b^m)(a^m-b^m)}=$$
$$=\frac{[(a^m)^1+(b^m)^1]\,[(a^m)^2-a^m\cdot b^m+(b^m)^2]\,[(a^m)^1-(b^m)^1]\,[(a^m)^2+a^m\cdot b^m+(b^m)^2]}{(a^m+b^m)(a^m-b^m)}=$$
$$=\frac{(a^m+b^m)(a^{2m}-a^mb^m+b^{2m})(a^m-b^m)(a^{2m}+a^mb^m+b^{2m})}{(a^m+b^m)(a^m-b^m)}=$$
$$=(a^{2m}-a^mb^m+b^{2m})(a^{2m}+a^mb^m+b^{2m})$$

Въ заключеніе, замѣтимъ, что разсматриваемый трехчленъ $a^{2n}+a^nb^n+b^{2n}$ можно изобразить въ болѣе простомъ видѣ, упрощающемъ, кромѣ того, рѣшеніе, особенно по 2-му способу, именно, раздѣлимъ нашъ трехчленъ на b^{2n}

$$(a^{2n}+a^nb^n+b^{2n}):b^{2n}=\frac{a^{2n}}{b^{2n}}+\frac{a^nb^n}{b^{2n}}+1=\frac{a^{2n}}{b^{2n}}+\frac{a^nb^n}{b^nb^n}+1=\frac{a^{2n}}{b^{2n}}+$$
$$+\frac{a^n}{b^n}+1\ ^{*)}=\left(\frac{a}{b}\right)^{2n}+\left(\frac{a}{b}\right)^n+1=\alpha^{2n}+\alpha^n+1,$$

---

*) Имѣемъ $\dfrac{x^p}{y^p}=\dfrac{xxx\ldots}{yyy\ldots}=\dfrac{x}{y}\cdot\dfrac{x}{y}\cdot\dfrac{x}{y}\ldots\dfrac{x}{y}\ (p \text{ разъ})=\left(\dfrac{x}{y}\right)^p$;

поэтому $\dfrac{a^{2n}}{b^{2n}}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^{2n}$ и $\dfrac{a^n}{b^n}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^n$

гдѣ $\alpha={}^a/_b$ Отсюда видно, что данный трехчленъ $a^{2n}+a^nb^n+b^{2n}=A\ b^{2n}$ и что вопросъ сводится къ разложенію болѣе простого трехчленнаго выраженія $A=\alpha^{2n}+\alpha^n+1$ (напр, №№ 226, 227)

228 1-ый способъ $x^6-y^6=(x^3)^2-(y^3)^2=[(x^3)^1+(y^3)^1][(x^3)^1-(y^3)^1]=(x^3+y^3)(x^3-y^3)=$ (№№ 146 и 146) $=(x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2)$ **2-ой способъ** $x^6-y^6=(x^2)^3-(y^2)^3=$ (№ 146) $=[(x^2)^1-(y^2)^1][(x^2)^2+(x^2)^1\cdot(y^2)^1+(y^2)^2]=(x^2-y^2)(x^4+x^2y^2+y^4)=$ (№ 224) $=(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$ **3-ій способъ** Полагая въ формулѣ п 6^0 (см выше § 2, теорія передъ рѣш № 121) $a=x$, $b=y$ $m=6$, получ

$x^6-y^6=(x-y)(x^5+x^4y+x^3y^2+x^2y^3+xy^4+y^5)=(x-y)[(x^5+x^4y)+(x^3y^2+x^2y^3)+(xy^4+y^5)]=(x-y)[x^4(x+y)+x^2y^2(x+y)+y^4(x+y)]=(x-y)(x+y)(x^4+x^2y^2+y^4)=$ (№ 224) $=(x-y)(x+y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$ **4-ый способъ** Полагая въ формулѣ, приведенной въ «замѣчаніи» къ рѣш № 223′, показатель $m=6$ (число четное), получ

$x^6-y^6=(x+y)(x^5-x^4y+x^3y^2-x^2y^3+xy^4-y^5)=(x+y)[(x^5-x^4y)+(x^3y^2-x^2y^3)+(xy^4-y^5)]=(x+y)[x^4(x-y)+x^2y^2(x-y)+y^4(x-y)]=(x+y)(x-y)(x^4+x^2y^2+y^4)=$ (№ 224) $=(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$

5 ый способъ Замѣчая, что $x^6=(x^3)^2$ и $y^6=(y^3)^2$ т е оба члена даннаго выраженія суть полные квадраты (по абсол велич), дополнимъ его до *квадрата разности* двухъ количествъ x^3 и y^3, основываясь на формулѣ $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

$x^6-y^6=(x^3)^2-(y^3)^2=(x^6-2x^3y^3+y^6)+2x^3y^3-2y^6=(x^3-y^3)^2+2y^3(x^3-y^3)=(x^3-y^3)[(x^3-y^3)+2y^3]=(x^3-y^3)(x^3+y^3)=(x-y)(x^2+xy+y^2)(x+y)(x^2-xy+y^2)$ **6-ой способъ** Замѣтивъ что $x^6=(x^2)^3$ и $y^6=(y^2)^3$, дополнимъ данное выраженіе до точнаго *куба разности* двухъ количествъ x^2 и y^2, по формулѣ $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$

$x^6-y^6=(x^6-3x^4y^2+3x^2y^4-y^6)+3x^4y^2-3x^2y^4=(x^2-y^2)^3+3x^2y^2(x^2-y^2)=(x^2-y^2)[(x^2-y^2)^2+3x^2y^2]=(x+y)(x-y)(x^4-2x^2y^2+y^4+3x^2y^2)=(x+y)(x-y)(x^4+x^2y^2+y^4)=$ (№ 224) $=(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$

228′ I способъ $y^6-x^6=(y^3)^2-(x^3)^2=(y^3+x^3)(y^3-x^3)=(y+x)(y^2-yx+x^2)(y-x)(y^2+yx+x^2)$ **II спос** $y^6-x^6=(y^2)^3-(x^2)^3=(y^2-x^2)[(y^2)^2+y^2x^2+(x^2)^2]=(y+x)(y-x)(y^4+y^2x^2+x^4)=$ (№ 224) $=(y+x)(y-x)(y^2+yx+x^2)(y^2-yx+x^2)$ **III способъ** $y^6-x^6=(y-x)(y^5+y^4x+y^3x^2+y^2x^3+yx^4+x^5)=(y-x)[y^4(y+x)+y^2x^2(y+x)+x^4(y+x)]=(y-x)(y+x)(y^4+y^2x^2+x^4)=$ (№ 224) $=(y-x)(y+x)(y^2+yx+x^2)(y^2-yx+x^2)$ **IV способъ** $y^6-x^6=(y+x)(y^5-y^4x+y^3x^2-y^2x^3+yx^4-x^5)=(y+x)[y^4(y-x)+y^2x^2(y-x)+x^4(y-x)]=(y+x)(y-x)(y^4+y^2x^2+x^4)=$ (№ 224) $=(y+x)(y-x)(y^2+yx+x^2)(y^2-yx+x^2)$

V способъ. $y^6-x^6=(y^6-2y^3x^3+x^6)+2y^3x^3-2x^6=(y^3-x^3)^2+2x^3(y^3-x^3)=(y^3-x^3)+2x^3)=(y^3-x^3)(y^3+x^3)=(y-x)(y^2+yx+x^2)(y+x)(y^2-yx+x^2)$ **VI способъ** $y^6-x^6=(y^6-3y^4x^2+3y^2x^4-x^6)+3y^4x^2-3y^2x^4=(y^2-x^2)^3+3y^2x^2(y^2-x^2)=(y^2-x^2)[(y^2-x^2)^2+3y^2x^2]=(y+x)(y-x)(y^4-2y^2x^2+x^4+3y^2x^2)=(y+x)(y-x)(y^4+y^2x^2+x^4)=$ (№ 224) $=(y+x)(y-x)(y^2+yx+x^2)(y^2-yx+x^2)$

229 $4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2=2bc\ 2bc-(b^2+c^2-a^2)^2=(2bc)^2-(b^2+c^2-a^2)^2=[(2bc)^1+(b^2+c^2-a^2)][(2bc)^1-(b^2+c^2-a^2)]=(2bc+b^2+c^2-a^2)(2bc-b^2-c^2+a^2)=$ *) $[(b^2+2bc+c^2)-a^2]\{-[(b^2-2bc+c^2)-a^2]\}=[(b+c)^2-a^2]\{-[(b-c)^2-a^2]\}=-[(b+c)^1+a][(b+c)^1-a][(b-c)^1+a][(b-c)^1-a]=(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)$ **229′** $(c^2+a^2-b^2)^2-4a^2c^2=(c^2+a^2-b^2)^2-(2ac)^2=[(c^2+a^2-b^2)^1+$

---

*) Дальше можно продолжать такъ $[(b^2+2bc+c^2)-a^2][a^2-(b^2-2bc+c^2)]=[(b+c)^2-a^2][a^2-(b-c)^2]=(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)$

$+(2ac)^1][(c^2+a^2-b^2)^1-(2ac)^1] = [(a^2+2ac+c^2)-b^2][(a^2-2ac+c^2)-b^2] = [(a+c)^2-b^2][(a-c)^2-b^2] = (a+c+b)(a+c-b)(a-c+b)(a-c-b)$

230 $(c^2-a^2-b^2)^2-4a^2b^2=(c^2-a^2-b^2)^2-(2ab)^2=(c^2-a^2-b^2+2ab)(c^2-a^2-b^2-2ab)=[c^2-(a^2-2ab+b^2)][c^2-(a^2+2ab+b^2)]=[c^2-(a-b)^2][c^2-(a+b)^2]=[c+(a-b)][c-(a-b)][c+(a+b)][c-(a+b)]=(c+a-b)(c-a+b)(c+a+b)(c-a-b)$ **230′** $4b^2c^2-(a^2-b^2-c^2)^2-(2bc)^2-(a^2-b^2-c^2)^2=[2bc+(a^2-b^2-c^2)][2bc-(a^2-b^2-c^2)]=[a^2-(b^2-2bc+c^2)]\ [(b^2+2bc+c^2)-a^2]=[a^2-(b-c)^2][(b+c)^2-a^2]=(a+b-c)(a-b+c)(b+c+a)(b+c-a)$

231 $a^2b^2+c^2d^2-a^2c^2-b^2d^2-4abcd=ab\ ab+cd\ cd-ac\ ac-bd\ bd-2abcd-2abcd=[(ab)^2-2\ ab\ cd+(cd)^2]-[(ac)^2+2\ ac\ bd+(bd)^2]=(ab-cd)^2-(ac+bd)^2=[ab-cd+(ac+bd)]\ [ab-cd-(ac+bd)]=(ab-cd+ac+bd)(ab-cd-ac-bd)$ **231′** $a^2b^2+c^2d^2-a^2c^2-b^2d^2+4abcd=(ab)^2+(cd)^2-(ac)^2-(bd)^2+2abcd+2abcd=[(ab)^2+2\ ab\ cd+(cd)^2]-[(ac)^2-2\ ac\ bd+(bd)^2]=(ab+cd)^2-(ac-bd)^2=[(ab+cd)+(ac-bd)][(ab+cd)-(ac-bd)]=(ab+cd+ac-bd)(ab+cd-ac+bd)$

232 $a^2c^2+b^2d^2-b^2c^2-a^2d^2+4abcd=ac\ ac+bd\,.\,bd-bc\ bc-ad\,.\,ad+2acbd+2bcad=[(ac)^2+2\ ac\ bd+(bd)^2]-[(bc)^2-2\ bc\ ad+(ad)^2]=(ac+bd)^2-(bc-ad)^2=[(ac+bd)+(bc-ad)][(ac+bd)-(bc-ad)]=(ac+bd+bc-ad)(ac+bd-bc+ad)$ **232′** $a^2c^2+b^2d^2-b^2c^2-a^2d^2-4abcd=(ac)^2+(bd)^2-(bc)^2-(ad)^2-2acbd-2bcad=[(ac)^2-2\ ac\ bd+(bd)^2]-[(bc)^2+2\ bc\ ad+(ad)^2]=(ac-bd)^2-(bc+ad)^2=[(ac-bd)+(bc+ad)]\ [(ac-bd)-(bc+ad)]=(ac-bd+bc+ad)(ac-bd-bc-ad)$

233 $4(ad+bc)^2-(a^2-b^2-c^2+d^2)^2=2(ad+bc)\ 2(ad+bc)-(a^2-b^2-c^2+d^2)^2=[2(ad+bc)]^2-(a^2-b^2-c^2+d^2)^2=[2(ad+bc)+(a^2-b^2-c^2+d^2)]\ [2(ad+bc)-(a^2-b^2-c^2+d^2)]=(2ad+2bc+a^2-b^2-c^2+d^2)(2ad+2bc-a^2+b^2+c^2-d^2)=[(a^2+2ad+d^2)-(b^2-2bc+c^2)][(b^2+2bc+c^2)-(a^2-2ad+d^2)]=[(a+d)^2-(b-c)^2][(b+c)^2-(a-d)^2]=[(a+d)+(b-c)][(a+d)-(b-c)][(b+c)+(a-d)][(b+c)-(a-d)]=(a+b-c+d)(a-b+c+d)(a+b+c-d)(b+c+d-a)$ **233′** $4(ad-bc)^2-(b^2-a^2+c^2-d^2)^2=[2(ad-bc)]^2-(b^2-a^2+c^2-d^2)^2=[2(ad-bc)+(b^2-a^2+c^2-d^2)]\ [2(ad-bc)-(b^2-a^2+c^2-d^2)]=(2ad-2bc+b^2-a^2+c^2-d^2)(2ad-2bc-b^2+a^2-c^2+d^2)=[(b^2-2bc+c^2)-(a^2-2ad+d^2)][(a^2+2ad+d^2)-(b^2+2bc+c^2)]=[(b-c)^2-(a-d)^2][(a+d)^2-(b+c)^2]=[(b-c)+(a-d)][(b-c)-(a-d)][(a+d)+(b+c)]\ [(a+d)-(b+c)]=(a+b-c-d)(b-c+d-a)(a+b+c+d)(a-b-c+d)$

234. $(c^2-b^2+d^2-a^2)^2-4(ab-cd)^2=(c^2-b^2+d^2-a^2)^2-[2(ab-cd)]^2=[(c^2-b^2+d^2-a^2)+2(ab-cd)][(c^2-b^2+d^2-a^2)-2(ab-cd)]=(c^2-b^2+d^2-a^2+2ab-2cd)(c^2-b^2+d^2-a^2-2ab+2cd)=[(c^2-2cd+d^2)-(a^2-2ab+b^2)][(c^2+2cd+d^2)-(a^2+2ab+b^2)]=[(c-d)^2-(a-b)^2][(c+d)^2-(a+b)^2]=[(c-d)+(a-b)][(c-d)-(a-b)][(c+d)+(a+b)][(c+d)-(a+b)]=(a-b+c-d)(c-d-a+b)(a+b+c+d)(c+d-a-b)$ **234′** $(b^2-c^2-d^2+a^2)^2-4(ab+cd)^2=(b^2-c^2-d^2+a^2)^2-[2(ab+cd)]^2=[(b^2-c^2-d^2+a^2)+2(ab+cd)]\ [(b^2-c^2-d^2+a^2)-2(ab+cd)]=(b^2-c^2-d^2+a^2+2ab+2cd)(b^2-c^2-d^2+a^2-2ab-2cd)=[(a^2+2ab+b^2)-(c^2-2cd+d^2)][(a^2-2ab+b^2)-(c^2+2cd+d^2)]=[(a+b)^2-(c-d)^2][(a-b)^2-(c+d)^2]=[(a+b)+(c-d)]\ [(a+b)-(c-d)][(a-b)+(c+d)][(a-b)-(c+d)]=(a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)(a-b-c-d)$

235 $A=bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)=b^2c-bc^2+c^2a-ca^2+a^2b-ab^2$ **1-ый способъ** $A=(b^2c-ca^2)-(bc^2-c^2a)-(ab^2-a^2b)=c(b^2-a^2)-c^2(b-a)-ab(b-$

$-a)=c(b+a)(b-a)-c^2(b-a)-ab(b-a)=(b-a)[c(b+a)-c^2-ab]=(b-a)$ $(cb+ca-c^2-ab)=(b-a)[(ca-c^2)-(ab-cb)]=(b-a)[c(a-c)-b(a-c)]=$ $=(b-a)(a-c)(c-b)$ **2-ой способъ** $A=(b^2c-ab^2)-(bc^2-a^2b)+(c^2a-ca^2)=$ $=b^2(c-a)-b(c^2-a^2)+ca(c-a)=b^2(c-a)-b(c+a)(c-a)+ca(c-a)=(c-a)[b^2-$ $-b(c+a)+ca]=(c-a)(b^2-bc-ba+ca)=(c-a)[(ca-bc)-(ba-b^2)]=(c-$ $-a)[c(a-b)-b(a-b)]=(c-a)(a-b)(c-b)$ **3-iй способъ** $A=(b^2c-bc^2)+$ $+(a^2b-ca^2)-(ab^2-c^2a)=bc(b-c)+a^2(b-c)-a(b^2-c^2)=bc(b-c)+a^2(b-$ $-c)-a(b+c)(b-c)=(b-c)[bc+a^2-a(b+c)]=(b-c)(bc+a^2-ab-ac)=$ $=(b-c)[(bc-ab)-(ac-a^2)]=(b-c)[b(c-a)-a(c-a)]=(b-c)(c-a)(b-a)$

Замѣчанія 1° Легко видѣть, что $(b-a)(a-c)(c-b)=(c-a)(a-b)(c-b)=(b-c)(c-a)$ $(b-a)$, доказывается посредствомъ вынесенія за скобки знака „— въ 2 хъ сомножителяхъ **2°** При вышеприведенныхъ группировкахъ мы приняли за основной — членъ b^2c, но можно было бы за таковой принять члены c^2a или a^2b, и въ каждомъ случаѣ члены группировались бы тремя способами, подобно вышеуказаннымъ Так образ выраженіе A можно было бы разложить (3 3=) 9—ью способами Наконецъ, видоизмѣняя каждый методъ тѣмъ, что за основной членъ сталъ бы браться отрицательный членъ ($-bc^2$, $-ca^2$, или $-ab^2$), мы нашли бы что полное число такихъ способовъ= =(9 2=)18

235' $B=bc(b-c)-ac(a+c)+ab(a+b)=b^2c-bc^2-a^2c-ac^2+a^2b+ab^2$. **I способъ** $B=(b^2c+ab^2)-(bc^2-a^2b)-(a^2c+ac^2)=b^2(c+a)-b(c^2-a^2)-$ $-ac(a+c)=b^2(c+a)-b(c+a)(c-a)-ac(c+a)=(c+a)[b^2-b(c-a)-ac]=$ $=(c+a)(b^2-bc+ab-ac)=(c+a)[(ab+b^2)-(ac+bc)]=(c+a)[b(a+b)-$ $-c(a+b)]=(c+a)(a+b)(b-c)$ **II способъ** $B=(b^2c-bc^2)+(a^2b-a^2c)+$ $+(ab^2-ac^2)=bc(b-c)+a^2(b-c)+a(b^2-c^2)=bc(b-c)+a^2(b-c)+a(b+c)(b-$ $-c)=(b-c)[bc+a^2+a(b+c)]=(b-c)(bc+a^2+ab+ac)=(b-c)[(ac+a^2)+$ $+(bc+ab)]=(b-c)[a(c+a)+b(c+a)]=(b-c)(c+a)(a+b)$ **III способъ** $B=(b^2c-a^2c)-(bc^2+ac^2)+(a^2b+ab^2)=c(b^2-a^2)-c^2(b+a)+ab(a+b)=$ $=c(b+a)(b-a)-c^2(b+a)+ab(b+a)=(b+a)[c(b-a)-c^2+ab]=(b+a)(cb-$ $-ac-c^2+ab)=(b+a)[(ab+cb)-(ac+c^2)]=(b+a)[b(a+c)-c(a+c)]=(b+a)$ $(a+c)(b-c)$

236 $A=bc(b+c)+ca(c-a)-ab(a+b)=b^2c+bc^2+c^2a-ca^2-a^2b-ab^2$. **1-ый способъ** $A=(b^2c+bc^2)-(ab^2-c^2a)-(a^2b+ca^2)=bc(b+c)-a(b^2-c^2)-$ $-a^2(b+c)=bc(b+c)-a(b+c)(b-c)-a^2(b+c)=(b+c)[bc-a(b-c)-$ $-a^2]=(b+c)(bc-ab+ac-a^2)=(b+c)[(ac-a^2)+(bc-ab)]=(b+c)[a(c-a)+$ $+b(c-a)]=(b+c)(c-a)(a+b)$ **2-ой способъ** $A=(b^2c-ca^2)+(bc^2+c^2a)-$ $-(a^2b+ab^2)=c(b^2-a^2)+c^2(b+a)-ab(a+b)=c(b+a)(b-a)+c^2(b+a)-$ $-ab(b+a)=(b+a)[c(b-a)+c^2-ab]=(b+a)(cb-ca+c^2-ab)=(b+a)[(cb+$ $+c^2)-(ab+ca)]=(b+a)[c(b+c)-a(b+c)]=(b+a)(b+c)(c-a)$ **3-iй спос** $A=(b^2c-$ $-ab^2)+(bc^2-a^2b)+(c^2a-ca^2)=b^2(c-a)+b(c^2-a^2)+ca(c-a)=b^2(c-a)+b(c+a)(c-$ $-a)+ca(c-a)=(c-a)[b^2+b(c+a)+ca]=(c-a)(b^2+bc+ba+ca)=(c-a)[(ba+b^2)+$ $+(ca+bc)]=(c-a)[b(a+b)+c(a+b)]=(c-a)(a+b)(b+c)$ **236'** $B=bc(b+c)-$ $-ac(a+c)-ab(a-b)=b^2c+bc^2-a^2c-ac^2-a^2b+ab^2$ **I-ый спос** $B=(b^2c+bc^2)+$ $+(ab^2-ac^2)-(a^2b+a^2c)=bc(b+c)+a(b^2-c^2)-a^2(b+c)=bc(b+c)+a(b+c)$ $(b-c)-a^2(b+c)=(b+c)[bc+a(b-c)-a^2]=(b+c)(bc+ab-ac-a^2)=(b+c)$ $[(bc+ab)-(ac+a^2)]=(b+c)[b(c+a)-a(c+a)]=(b+c)(c+a)(b-a)$ **II способъ** $B=(b^2c-a^2c)+(bc^2-ac^2)+(ab^2-a^2b)=c(b^2-a^2)+c^2(b-a)+ab(b-$ $-a)=c(b+a)(b-a)+c^2(b-a)+ab(b-a)=(b-a)[c(b+a)+c^2+ab]=(b-a)$ $(cb+ca+c^2+ab)=(b-a)[(ca+c^2)+(ab+cb)]=(b-a)[c(a+c)+b(a+c)]=$ $=(b-a)(a+c)(c+b)$ **III способъ** $B=(b^2c+ab^2)+(bc^2-a^2b)-(a^2c+ac^2)=$ $=b^2(c+a)+b(c^2-a^2)-ac(a+c)=b^2(c+a)+b(c+a)(c-a)-ac(c+a)=(c+$

$+a)[b^2+b(c-a)-ac]=(c+a)(b^2+bc-ba-ac)=(c+a)[(bc+b^2)-(ac+ba)]=$ $=(c+a)[b(c+b)-a(c+b)]=(c+a)(c+b)(b-a)$

237 $A=a^6-a^5-a^2+a=a(a^5-a^4-a+1)$ **1-ый способъ** $A=a[(a^5-$ $-a^4)-(a-1)]=a[a^4(a-1)-(a-1)]=a(a-1)(a^4-1)=a(a-1)[(a^2)^2-1^2]=$ $=a(a-1)(a^2+1)(a^2-1)=a(a-1)(a^2+1)(a^2-1^2)=a(a-1)(a^2+1)(a+1)(a-1)=$ $=a(a-1)^2(a^2+1)(a+1)$ **2-ой способъ** $A=a[(a^5-a)-(a^4-1)]=a[a(a^4-$ $-1)-(a^4-1)]=a(a^4-1)(a-1)=a[(a^2)^2-1^2](a-1)=a(a^2+1)(a^2-1)(a-1)=a(a^2+$ $+1)(a+1)(a-1)(a-1)=a(a^2+1)(a+1)(a-1)^2$ **3-ій способъ** $A=a[(a^5+$ $+1)-(a^4+a)]=$ (№№ 152 и 147) $=a[(a^5+1^5)-a(a^3+1)]=a[(a+1)(a^4-a^3\cdot$ $1+a^2\cdot 1^2-a\cdot 1^3+1^4)-a(a+1)(a^2-a\cdot 1+1^2)]=a(a+1)[a^4-a^3+a^2-$ $-a+1-a(a^2-a+1)]=a(a+1)(a^4-a^3+a^2-a+1-a^3+a^2-a)=a(a+1)(a^4-$ $-2a^3+2a^2-2a+1)=a(a+1)[(a^4-2a^3+a^2)+(a^2-2a+1)]$*) $=a(a+1)[a^2(a^2-2a+$ $+1)+(a^2-2a+1)]=a(a+1)(a^2-2a+1)(a^2+1)=a(a+1)(a^2-2\cdot a\cdot 1+1^2)$ $(a^2+1)=a(a+1)(a-1)^2(a^2+1)$ **237′** $B=a^6+a^5-a^2-a=a(a^5+a^4-a-1)$ **I спос** $B=a[(a^5+a^4)-(a+1)]=a[a^4(a+1)-(a+1)]=a(a+1)(a^4-1)=a(a+1)[(a^2)^2-$ $-1^2]=a(a+1)(a^2+1)(a^2-1)=a(a+1)(a^2+1)(a^2-1^2)=a(a+1)(a^2+1)(a+$ $+1)(a-1)=a(a+1)^2(a-1)(a^2+1)$ **II способъ** $B=a[(a^5-a)+(a^4-1)]=$ $=a[a(a^4-1)+(a^4-1)]=a(a^4-1)(a+1)=a[(a^2)^2-1^2](a+1)=a(a^2+1)(a^2-$ $-1)(a+1)=a(a^2+1)(a+1)(a-1)(a+1)=a(a^2+1)(a+1)^2(a-1)$ **III способъ** $B=a[(a^5-1)+(a^4-a)]=a[(a^5-1^5)+a(a^3-1)]=$ (№№ 152 и 147) $=a[(a-1)$ $(a^4+a^3\cdot 1+a^2\cdot 1^2+a\cdot 1^3+1^4)+a(a-1)(a^2+a\cdot 1+1^2)]=a(a-1)[a^4+$ $+a^3+a^2+a+1+a(a^2+a+1)]=a(a-1)(a^4+a^3+a^2+a+1+a^3+a^2+a)=$ $=a(a-1)(a^4+2a^3+2a^2+2a+1)=a(a-1)[(a^4+2a^3+a^2)+(a^2+2a+1)]$**) $=$ $=a(a-1)[a^2(a^2+2a+1)+(a^2+2a+1)]=a(a-1)(a^2+2a+1)(a^2+1)=a(a-$ $-1)(a^2+2\cdot a\cdot 1+1^2)(a^2+1)=a(a-1)(a+1)^2(a^2+1)$

238 $A=a^{12}+a^{10}-a^7+2a^6-a^5-2a^{11}=a^5(a^7-2a^6+a^5-a^2+2a-1)$ **1-ый способъ** $A=a^5[(a^7-2a^6+a^5)-(a^2-2a+1)]=a^5[a^5(a^2-2a+1)-(a^2-2a+$ $+1)]=a^5(a^2-2a+1)(a^5-1)=$ (№ 152) $=a^5(a^2-2\cdot a\cdot 1+1^2)(a^5-1^5)=a^5(a-1)^2(a-$ $-1)(a^4+a^3\cdot 1+a^2\cdot 1^2+a\cdot 1^3+1^4)=a^5(a-1)^3(a^4+a^3+a^2+a+1)$ **2 ой способъ** $A=a^5[(a^7-a^2)-(2a^6-2a)+(a^5-1)]=a^5[a^2(a^5-1)-2a(a^5-1)+$ $+(a^5-1)]=a^5(a^5-1)(a^2-2a+1)=a^5(a^5-1^5)(a^2-2\cdot a\cdot 1+1^2)=a^5(a-1)$ $(a^4+a^3\cdot 1+a^2\cdot 1^2+a\cdot 1^3+1^4)(a-1)^2=a^5(a-1)^3(a^4+a^3+a^2+a+1)$ Это—типичные и простѣйшіе способы **238′** $B=a^{12}+a^{10}+a^7-2a^6+a^5-$ $-2a^{11}=a^5(a^7-2a^6+a^5+a^2-2a+1)$ **I способъ** $B=a^5[(a^7-2a^6+a^5)+(a^2-$ $-2a+1)]=a^5[a^5(a^2-2a+1)+(a^2-2a+1)]=a^5(a^2-2a+1)(a^5+1)=$ $=$ (№ 152) $=a^5(a^2-2\cdot a\cdot 1+1^2)(a^5+1^5)=a^5(a-1)^2(a+1)(a^4-a^3\cdot 1+a^2\cdot$ $1^2-a\cdot 1^3+1^4)=a^5(a-1)^2(a+1)(a^4-a^3+a^2-a+1)$ **II способъ** $B=$ $=a^5[(a^7+a^2)-(2a^6+2a)+(a^5+1)]=a^5[a^2(a^5+1)-2a(a^5+1)+(a^5+1)]=$ $=a^5(a^5+1)(a^2-2a+1)=a^5(a^5+1^5)(a^2-2\cdot a\cdot 1+1^2)=a^5(a+1)(a^4-a^3\cdot$ $1+a^2\cdot 1^2-a\cdot 1^3+1^4)(a-1)^2=a^5(a+1)(a^4-a^3+a^2-a+1)(a-1)^2$

239 **1 ый способъ** $x(x^3-a^3)+ax(x^2-a^2)+a^3(x-a)=x^4-a^3x+ax^3-$

---

*) Вотъ другой способъ разложенія выраженія $a^4-2a^3+2a^2-2a+1=a^4+a^2-2a^3-$ $-2a+a^2+1=(a^4+a^2)-(2a^3+2a)+(a^2+1)=a^2(a^2+1)-2a(a^2+1)+(a^2+1)=(a^2+1)(a^2-2a+$ $+1)=(a^2+1)(a-1)^2$

**) Другой способъ разложенія выраженія $a^4+2a^3+2a^2+2a+1=a^4+a^2+2a^3+2a+$ $+a^2+1=a^2(a^2+1)+2a(a^2+1)+(a^2+1)=(a^2+1)(a^2+2a+1)=(a^2+1)(a+1)^2$

$-a^3x+a^3x-a^4=x^4+ax^3-a^3x-a^4=(x^4+ax^3)-(a^3x+a^4)=$ *) $=x^3(x+a)-a^3(x+a)=(x+a)(x^3-a^3)=$ (№ 146) $=(x+a)(x-a)(x^2+ax+a^2)$ **2-ой способъ** $x(x^3-a^3)+ax(x^2-a^2)+a^3(x-a)=x(x-a)(x^2+xa+a^2)+ax(x+a)(x-a)+a^3(x-a)=(x-a)[x(x^2+ax+a^2)+ax(x+a)+a^3]=(x-a)(x^3+ax^2+a^2x+ax^2+a^2x+a^3)=(x-a)(x^3+2ax^2+2a^2x+a^3)=(x-a)[(x^3+a^3)+(2ax^2+2a^2x)]=(x-a)[(x+a)(x^2-xa+a^2)+2ax(x+a)]=(x-a)(x+a)(x^2-xa+a^2+2ax)=(x-a)(x+a)(x^2+ax+a^2)$ **3-ій способъ** $x(x^3-a^3)+ax(x^2-a^2)+a^3(x-a)=x(x^3-a^3)+ax^3-a^3x+a^3x-a^4=x(x^3-a^3)+ax^3-a^4=x(x^3-a^3)+a(x^3-a^3)=(x^3-a^3)(x+a)=(x-a)(x^2+xa+a^2)(x+a)$ **239'** **I способъ** $x(x^3+a^3)+ax(x^2-a^2)+a^3(x+a)=x^4+a^3x+ax^3-a^3x+a^3x+a^4=x^4+ax^3+a^3x+a^4=(x^4+ax^3)+(a^3x+a^4)=$ **) $=x^3(x+a)+a^3(x+a)=(x+a)(x^3+a^3)=$ (№ 146) $=(x+a)(x+a)(x^2-x\ a+a^2)=(x+a)^2(x^2-ax+a^2)$ **II способъ** $x(x^3+a^3)+ax(x^2-a^2)+a^3(x+a)=x(x+a)(x^2-xa+a^2)+ax(x+a)(x-a)+a^3(x+a)=(x+a)[x(x^2-ax+a^2)+ax(x-a)+a^3]=(x+a)(x^3-ax^2+a^2x+ax^2-a^2x+a^3)=(x+a)(x^3+a^3)=(x+a)(x+a)(x^2-xa+a^2)=(x+a)^2(x^2-ax+a^2)$ **III способъ** $x(x^3+a^3)+ax(x^2-a^2)+a^3(x+a)=x(x^3+a^3)+ax^3-a^3x+a^3x+a^4=x(x^3+a^3)+ax^3+a^4=x(x^3+a^3)+a(x^3+a^3)=(x^3+a^3)(x+a)=(x+a)(x^2-xa+a^2)(x+a)=(x+a)^2(x^2-ax+a^2)$

240 **1-ый способъ** Расположимъ данное выраженіе по убывающимъ степенямъ буквы a, имѣемъ $(a-x)y^3-(a-y)x^3+(x-y)a^3=ay^3-xy^3-ax^3+x^3y+a^3(x-y)=a^3(x-y)-a(x^3-y^3)+xy(x^2-y^2)$ Въ полученномъ трехчленѣ легко замѣчается общій множитель $x-y$ Итакъ, $a^3(x-y)-a(x^3-y^3)+xy(x^2-y^2)=a^3(x-y)-a(x-y)(x^2+xy+y^2)+xy(x+y)(x-y)=(x-y)[a^3-a(x^2+xy+y^2)+xy(x+y)]=(x-y)(a^3-ax^2-axy-ay^2+x^2y+xy^2)=(x-y)[(a^3-ax^2)-(axy-x^2y)-(ay^2-xy^2)]=(x-y)[a(a^2-x^2)-xy(a-x)-y^2(a-x)]=(x-y)[a(a+x)(a-x)-xy(a-x)-y^2(a-x)]=(x-y)(a-x)[a(a+x)-xy-y^2]=(x-y)(a-x)(a^2+ax-xy-y^2)=(x-y)(a-x)[(a^2-y^2)+(ax-xy)]=(x-y)(a-x)[(a+y)(a-y)+x(a-y)]=(x-y)(a-x)(a-y)[(a+y)+x]=(x-y)(a-x)(a-y)(a+x+y)$ **2-ой спос** Расположимъ данное выраженіе по степенямъ буквы x, а именно $(a-x)y^3-(a-y)x^3+(x-y)a^3=(y-a)x^3+ay^3-xy^3+a^3x-a^3y=(y-a)x^3-(y^3-a^3)x+(y^2-a^2)ay=(y-a)x^3-(y-a)(y^2+ya+a^2)x+(y+a)(y-a)ay=(y-a)[x^3-(y^2+ay+a^2)x+(y+a)ay]=(y-a)(x^3-xy^2-axy-a^2x+ay^2+a^2y)=(y-a)[(x^3-xy^2)-(axy-ay^2)-(a^2x-a^2y)]=(y-a)[x(x^2-y^2)-ay(x-y)-a^2(x-y)]=(y-a)[x(x+y)(x-y)-ay(x-y)-a^2(x-y)]=(y-a)(x-y)[x(x+y)-ay-a^2]=(y-a)(x-y)(x^2+xy-ay-a^2)=(y-a)(x-y)[(x^2-a^2)+(xy-ay)]=(y-a)(x-y)[(x+a)(x-a)+y(x-a)]=(y-a)(x-y)(x-a)[(x+a)+y]=(y-a)(x-y)(x-a)(x+y+a)$ **3 ій способъ** Расположимъ данное выраженіе по степенямъ буквы y, тогда получ $(a-x)y^3-(a-y)x^3+(x-y)a^3=(a-x)y^3-ax^3+x^3y+a^3x-a^3y=(a-x)y^3-(a^3-x^3)y+(a^2-x^2)ax=(a-x)y^3-(a-x)(a^2+ax+x^2)y+(a+x)(a-x)ax=(a-x)[y^3-(a^2+ax+x^2)y+(a+x)ax]=(a-x)(y^3-a^2y-axy-x^2y+a^2x+ax^2)=(a-x)[(y^3-a^2y)-(axy-a^2x)-(x^2y-ax^2)]=(a-x)[y(y^2-a^2)-ax(y-a)-x^2(y-a)]=(a-x)[y(y+a)(y-a)-ax(y-a)-x^2(y-a)]=(a-x)(y-a)[y(y+a)-$

---

*) Вотъ другіе (простѣйшіе) способы разложенія даннаго выраженія $A=x^4+ax^3-a^3x-a^4$ **2 й спос** $A=(x^4-a^3x)+(ax^3-a\ )=x(x^3-a^3)+a(x^3-a^3)=(x^3-a^3)(x+a)=(x-a)(x^2+xa+a^2)(x+a)$ **3 й спос** $A=(x^4-a^4)+(ax^3-a^3x)=$ (№ 223, спос 1-й) $=[(x^2)^2-(a^2)^2]+ax(x^2-a^2)=(x^2+a^2)(x^2-a^2)+ax(x^2-a^2)=(x^2-a^2)(x^2+a^2+ax)=(x+a)(x-a)(x^2+ax+a^2)$

**) Иначе $x^4+ax^3+a^3x+a^4=(x^4+a^3x)+(ax^3+a^4)=x(x^3+a^3)+a(x^3+a^3)=(x^3+a^3)(x+a)=(x+a)(x^2-xa+a^2)(x+a)=(x+a)^2(x^2-ax+a^2)$

$-ax - x^2] = (a-x)(y-a)(y^2+ay-ax-x^2) = (a-x)(y-a)[(y^2-x^2)+(ay-ax)] = (a-x)(y-a)[(y+x)(y-x)+a(y-x)] = (a-x)(y-a)(y-x)(y+x+a)$ — Легко видѣть (см отв во всѣхъ 3 хъ способахъ), что $(x-y)(a-x)(a-y)(a+x+y) = (y-a)(x-y)(x-a)(x+y+a) = (a-x)(y-a)(y-x)(y+x+a)$ **240′** **I способъ** $(a+x)y^3+(a-y)x^3-(x+y)a^3 = ay^3+xy^3+ax^3-x^3y-(x+y)a^3 = (x^3+y^3)a-(x^2-y^2)xy-(x+y)a^3 = (x+y)(x^2-xy+y^2)a-(x+y)(x-y)xy-(x+y)a^3 = (x+y)[(x^2-xy+y^2)a-(x-y)xy-a^3] = (x+y)(ax^2-axy+ay^2-x^2y+xy^2-a^3) = (x+y)[(ax^2-a^3)-(x^2y+axy)+(xy^2+ay^2)] = (x+y)[a(x^2-a^2)-xy(x+a)+y^2(x+a)] = (x+y)[a(x+a)(x-a)-xy(x+a)+y^2(x+a)] = (x+y)(x+a)[a(x-a)-xy+y^2] = (x+y)(x+a)(ax-a^2-xy+y^2) = (x+y)(x+a)[(y^2-a^2)-(xy-ax)] = (x+y)(x+a)[(y+a)(y-a)-x(y-a)] = (x+y)(x+a)(y-a)[(y+a)-x] = (x+y)(x+a)(y-a)(y-x+a)$ **II способъ** $(a+x)y^3+(a-y)x^3-(x+y)a^3 = ay^3+xy^3+(a-y)x^3-a^3x-a^3y = (a-y)x^3-(a^3-y^3)x-(a^3y-ay^3) = (a-y)x^3-(a-y)(a^2+ay+y^2)x-ay(a^2-y^2) = (a-y)x^3-(a-y)(a^2+ay+y^2)x-ay(a+y)(a-y) = (a-y)[x^3-(a^2+ay+y^2)x-ay(a+y)] = (a-y)(x^3-a^2x-axy-xy^2-a^2y-ay^2) = (a-y)[(x^3-a^2x)-(axy+a^2y)-(xy^2+ay^2)] = (a-y)[x(x^2-a^2)-ay(x+a)-y^2(x+a)] = (a-y)[x(x+a)(x-a)-ay(x+a)-y^2(x+a)] = (a-y)(x+a)[x(x-a)-ay-y^2] = (a-y)(x+a)(x^2-ax-ay-y^2) = (a-y)(x+a)[(x^2-y^2)-(ax+ay)] = (a-y)(x+a)[(x+y)(x-y)-a(x+y)] = (a-y)(x+a)(x+y)(x-y-a)$ **III способъ** $(a+x)y^3+(a-y)x^3-(x+y)a^3 = (a+x)y^3+ax^3-x^3y-a^3x-a^3y = (a+x)y^3-(a^3+x^3)y-(a^2-x^2)ax = (a+x)y^3-(a+x)(a^2-ax+x^2)y-(a+x)(a-x)ax = (a+x)[y^3-(a^2-ax+x^2)y-(a-x)ax] = (a+x)(y^3-a^2y+axy-x^2y-a^2x+ax^2) = (a+x)[(y^3-a^2y)+(axy-a^2x)-(x^2y-ax^2)] = (a+x)[y(y^2-a^2)+ax(y-a)-x^2(y-a)] = (a+x)[y(y+a)(y-a)+ax(y-a)-x^2(y-a)] = (a+x)(y-a)[y(y+a)+ax-x^2] = (a+x)(y-a)(y^2+ay+ax-x^2) = (a+x)(y-a)[(y^2-x^2)+(ay+ax)] = (a+x)(y-a)[(y+x)(y-x)+a(y+x)] = (a+x)(y-a)(y+x)(y-x+a)$ — Легко видѣть, что $(x+y)(x+a)(y-a)(y-x+a) = (a-y)(x+a)(x+y)(x-y-a) = (a+x)(y-a)(y+x)(y-x+a)$

§ 3. Отысканіе общаго наибольшаго дѣлителя.

Нахожденіе *общаго наибольшаго дѣлителя* алгеораическихъ выраженій производится совершенно подобно тому, какъ опредѣляется въ ариѳметикѣ общ наиб дѣлит цѣлыхъ чиселъ *по способу разложенія на первоначальныхъ множителей* *) Отсюда ясно, что вопросъ въ концѣ концовъ сводится къ разложенію данныхъ алгебраическихъ выраженій на простыхъ множителей После этого (а если выраженія даны уже въ «готовомъ» видѣ то сразу) искомый *общій наиб дѣлитель* составляется изъ произведенія общаго наиб дѣлителя коэффиціентовъ и общихъ буквенныхъ множителей, при чемъ каждый изъ послѣднихъ берется съ показателемъ, наименьшимъ между тѣми, съ которыми этотъ множитель входитъ въ данныя выраженія — Т к во всей операціи разложеніе играетъ подчиненную роль (въ качествѣ вспомогательнаго средства, то, дабы нагроможденіемъ излиш-

---

*) Болѣе совершенный и строгій въ научномъ смыслѣ *способъ послѣдовательныхъ дѣленій* въ приложеніи къ отысканію общаго наиб дѣлит алгебраическихъ выраженій имѣетъ много общаго съ этимъ способомъ въ ариѳметикѣ Однако онъ выходитъ изъ рамокъ настоящаго элементарнаго курса (см ч II „Сборника", отд XIV, § 1)

Приступая къ ученію о наиб дѣлителѣ (и наименьшемъ кратномъ), не мѣшаетъ имѣть въ виду, что „единица не причисляется къ простымъ числамъ но единица отнюдь не причисляется къ составнымъ числамъ она остается въ сторонѣ [„Высшая алгебра" Ю Сохоцкаго, ч II, п 6, Спб 1888] няго матеріала не затемнить основной цѣли, мы будемъ ограничиваться въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ приведеніемъ *простѣйшаго* способа разложенія

Данныя выраженія для краткости будемъ обозначать черезъ P, Q, R S, , а ихъ общаго наиб дѣлителя — черезъ D

---

241 $P=ab$, $Q=ac$, $D=a$ **241′** $P=ab$, $Q=bc$ $D=b$

242 $P=abc$, $Q=abd$, $D=ab$ **242′** $P=abd$ $Q=bcd$ $D=bd$

243 $P=5ab$, $Q=10bc=2\ 5bc$ $D=5b$ **243′** $P=6ab=2\ 3ab$, $Q=4ac=2^2ac$ $D=2a$

244 $P=18abd=2\ 3^2abd$, $Q=27bcd=3^3bcd$, $D=3^2bd=9bd$ **244′** $P=16abc=2^4abc$, $Q=24abd=2^3\ 3abd$, $D=2^3ab=8ab$

245 $P=4x^3y^2=2^2x^3y^2$, $Q=18x^2y=2\ 3^2x^2y$, $D=2x^2y$ **245′** $21x^2y^3=3\ 7x^2y^3$, $Q=9xy^2=3^2xy^2$, $D=3xy^2$

246 $P=32x^3y^4=2^5x^3y^4$, $Q=48x^2y^3=2^4\ 3x^2y^3$, $D=2^4x^2y^3=16x^2y^3$ **246′** $P=27x^3y^2=3^3x^3y^2$, $Q=72x^5y^3=2^3\ 3^2x^5y^3$, $D=3^2x^3y^2=9x^3y^2$

247 $P=35x^4y^4z^6=5\ .\ 7x^4y^4z^6$, $Q=49x^6y^5z^4=7^2x^6y^5z^4$, $D=7x^4y^4z^4$ **247′** $P=36x^5y^6z^7=2^2\ 3^2x^5y^6z^7$ $Q=48x^7y^6z^5=2^4\ 3x^7y^6z^5$, $D=2^2\ 3x^5y^6z^5=12x^5y^6z^5$

248 $P=21x^2y^4z^3=3\ 7x^2y^4z^3$, $Q=32x^5y^3z^4=2^5x^5y^3z^4$, $D=x^2y^3z^3$ **248′** $P=14x^5y^3z^5=2\ 7x^5y^3z^5$ $Q=15x^3y^4z^3=3\ 5x^3y^4z^3$ $D=x^3y^3z^3$

249 $P=6a^3b^2c=2\ 3a^3b^2c$, $Q=12a^2bc^3=2^2\ 3a^2bc^3$. $R=18a^4b^3c^2=2\ 3^2a^4b^3c^2$, $D=2\ 3a^2bc=6a^2bc$ *Отвѣтъ* въ «Сборникѣ» $6a^3bc$ *невѣренъ* по отношенію къ буквѣ a **249′** $P=4ab^2c^3=2^2ab^2c^3$, $Q=8a^3bc^2=2^3a^3bc^2$, $R=24a^2b^3c^4=2^3\ 3a^2b^3c^4$, $D=2^2abc^2=4abc^2$

250 $P=9a^2b^7c^3=3^2a^2b^7c^3$, $Q=12a^3bc^4=2^2\ 3a^3bc^4$ $R=21a^2c^5=3\ .\ 7a^2c^5$, $D=3a^2c^3$ **250′** $P=5a^3b^4c^2$ $Q=15a^5bc^4=3\ 5a^5bc^4$ $R=35a^4c^7=5\ 7a^4c^7$, $D=5a^3c^2$

251 $P=32a^mb^{2n}=2^5a^mb^nb^n$, $Q=8a^{2m}b^n=2^3a^ma^mb^n$, $R=26a^{2m}b^{2n}=2\ 13a^ma^mb^nb^n$ $D=2a^mb^n$ **251′** $P=27a^{2n}b^m=3^3a^na^nb^m$, $Q=72a^nb^{2m}=2^3\ 3^2a^nb^mb^m$, $R=42a^{2n}b^{2m}=2\ 3\ 7a^na^nb^mb^m$, $D=3a^nb^m$

252 $P=6a^{2n}b^{2m-1}=2\ 3a^{2n}b^{2m-1}$, $Q=12a^{n+1}b^{m+2}=2^2\ 3a^{n+1}b^{m+2}$, $R=9a^5b^m=3^2a^5b^m$, $D=3a^5b^m$, при чемъ предполагается (обязательно), что $5<2n$ и $5<n+1$ $m<2m-1$ **252′** $P=12a^{2m}b^{2n-1}=2^2\ 3a^{2m}b^{2n-1}$, $Q=8a^mb^3=2^3a^mb^3$, $R=6a^{m+3}b^n=2\ 3a^{m+3}b^n$ $D=2a^mb^3$, при условіи, что $3\leqq n$ и $3\leqq 2n-1$ Что же касается показателей степеней a, то очевидно что $m<2m$ и $m<m+3$ (m—положит цѣлое число)

253 $P=4(m+n)^2=2^2\ (m+n)^2$, $Q=6(m+n)=2\ 3\ (m+n)$, $D=2(m+n)$ **253′** $P=9(m-n)=3^2\ .\ (m-n)$, $Q=6(m-n)^2=2\ 3\ (m-n)^2$ $D=3(m-n)$

254 *) $P=10a(m-n)^3=2\ 5a(m-n)^3$, $Q=15ab(m-n)^2=3\ 5ab(m-n)^2$, $D=5a(m-n)^2$ **254′** $P=8ac(m+n)^2=2^3ac(m+n)^2$, $Q=12bc(m+n)^3=2^2\ 3bc(m+n)^3$, $D=2^2c(m+n)^2=4c(m+n)^2$

255 $P=(m+n)^2$, $Q=3a^2(m-n)^2$, данныя выраженія P и Q—взаимно простыя **255′** $2ab(m-n)^2$ и $(m+n)^2$ суть выраженія, взаимно простыя

---

*) *Отвѣтъ* въ „Сборникѣ" $5(m-n)^2$ *ошибоченъ* должно быть $5a(m-n)^2$

256 $P=5a(m^2+n^2)$, $Q=7b(m^2-n^2)=7b(m+n)(m-n)$, отсюда видно, что P и Q—выраженія взаимно простыя *Общимъ множителемъ взаимно простыхъ выраженій можно считать 1-цу* **256'** $10b(m+n)^2=2\ \ 5(m+n)^2$ и $3a(m^2+n^2)$—выраженія взаимно простыя

257 $P=ab+bp=b\,.\,(a+p)$ $Q=b\,.\,c$, $D=b$ **257'** $P=ac-ap=a\,.\,(c-p)$, $Q=a\ \ d$ $D=a$

258 $P=n^2-np=n\ \ (n-p)$, $Q=abn^3$, $D=n$ **258'** $P=a^3-a^2p=a^2(a-p)$, $Q=ap^3n$, $D=a$

259 $P=a^4b^2c-a^2bc^3+a^4b=a^2b(abc-c^3+a^2)$, $Q=a^2b^3cd$, $D=a^2b$ **259'** $P=a^2b^3c+a^3b^4c^2-ab^5=ab^3(ac+a^2bc^2-b^2)$, $Q=a^3b^2cd$, $D=ab^2$

260 $P=8a^4n^3+6a^4n^2-16a^5n^7=2a^4n^2(4n+3-8an^5)$, $Q=8a^3n^6p^2=2^3a^3n^6p^2$, $D=2a^3n^2$ **260'** $P=9a^3n^4-6a^2n^3+18a^7n^5=3a^2n^3(3an-2+6a^5n^2)$, $Q=9a^6n^3p^3=3^2a^6n^3p^3$, $D=3a^2n^3$

261 $P=18a^7b^4-12a^6b^5c^2+30a^9b^{10}d=6a^6b^4\ \ (3a-2bc^2+5a^3b^6d)=2\ \ 3a^6b^4(3a-2bc^2+5a^3b^6d)$ $Q=5a^9b^{11}$, $D=a^6b^4$ **261'** $P=8a^4b^7+12a^5b^6c^3-20a^{10}b^9d=4a^4b^6(2b+3ac^3-5a^6b^3d)=2^2a^4b^6(2b+3ac^3-5a^6b^3d)$, $Q=3a^7b^5$, $D=a^4b^5$

262 $P=20a^4b^3+15a^3n^6-35b^6n^5=5(4a^4b^3+3a^3n^6-7b^6n^5)$, $Q=5a^2b^2n^4$, $D=5$ искомый общ наиб дѣлитель—числовой, т к лишь коэффиціенты членовъ данныхъ выраженій имѣютъ общ наиб дѣлит буквенныя же части ихъ суть выраженія взаимно простыя **262'** $P=35a^3b^4-14a^2n^4+42b^5n^6=7(5a^3b^4-2a^2n^4+6b^5n^6)$, $Q=7a^2b^4n^2$, $D=7$

263 $P=10ab-5a=5a(2b-1)$ $Q=34bc+17c=17c(2b+1)$, количества P и Q (какъ и въ № 256)—взаимно простыя ($D=1$) **263'** $P=20ab+4a=4a(5b+1)$, $Q=55ac-11c=11c(5a-1)$, $D=1$, т е P и Q—взаимно простыя выраженія

264 $P=18a^3b+4a^2c=2a^2(9ab+2c)$ $Q=27a^4b^2-6a^3bc=3a^3b(9ab-2c)$ отсюда видно, что общ наиб дѣлит P и Q=общ н дѣл $2a^2$ и $3a^3b$ и $=a^2$ **264'** $P=32a^4b-12a^3b^2c=4a^3b(8a-3bc)=2^2a^3b(8a-3bc)$, $Q=24a^3b^2+9a^2b^3c=3a^2b^2(8a+3bc)$, D=общ наиб дѣл 2^2a^3b и $3a^2b^2$ и $=a^2b$

265 $P=24a^6b^4c^2-28a^4b^3c^4=4a^4b^3c^2(6a^2b-7c^2)$, $Q=36a^4b^4c^4-42a^2b^3c^6=6a^2b^3c^4(6a^2b-7c^2)$, $D=2a^2b^3c^2(6a^2b-7c^2)$ **265'** $P=40a^4b^4c^5+64a^3b^2c^8=8a^3b^2c^5(5ab^2+8c^3)$, $Q=60a^6b^4c^3+96a^5b^2c^6=12a^5b^2c^3(5ab^2+8c^3)$, $D=4a^3b^2c^3\ (5ab^2+8c^3)$

266 $P=24a^2+36ab-48ac=12a(2a+3b-4c)=2^2\,.\,3a(2a+3b-4c)$, $Q=30a^3+45a^2b-60a^2c)=15a^2(2a+3b-4c)=3\ \ 5a^2(2a+3b-4c)$, $D=3a(2a+3b-4c)$ **266'** $P=18a^3+36a^2b-54a^2c=18a^2(a+2b-3c)=2\ \ 3^2a^2(a+2b-3c)$, $Q=12a^4-24a^3b+36a^3c=12a^3(a-2b+3c)=2^2\ \ 3a^3(a-2b+3c)$; $D=2\ \ 3a^2=6a^2$

267 $P=9a^4b-27a^3b^2+18a^2b^3=9a^2b(a^2-3ab+2b^2)=9a^2b(a^2-ab-2ab+2b^2)=3^2a^2b\,[(a^2-ab)-(2ab-2b^2)]=3^2a^2b[a(a-b)-2b(a-b)]=$

$$=3^2a^2b(a-b)(a-2b)$$

$$Q=24a^7b^3-72a^6b^4+48a^5b^5=24a^5b^3(a^2-3ab+2b^2)=$$

$$=2^3\ \ 3a^5b^3(a-b)(a-2b),$$

$$D=3a^2b(a-b)(a-2b)$$

267' $P=16a^4b-64a^3b^2+48a^2b^3=16a^2b(a^2-4ab+3b^2)=16a^2b(a^2-ab-3ab+3b^2)=16a^2b[(a^2-ab)-(3ab-3b^2)]=2^4a^2b[a(a-b)-3b(a-b)]=$

$=2^4a^2b(a-b)(a-3b)$,

$Q=12a^5b^3-48a^4b^4+36a^3b^5=12a^3b^3(a^2-4ab+3b^2)=$
$=2^2\cdot 3a^3b^3(a-b)(a-3b)$,

$D=2^2a^2b(a-b)(a-3b)=4a^2b(a-b)(a-3b)$

268 $P=10a^2b^3-75a^3b^4+25a^4b^2=5a^2b^2(2b-15ab^2+5a^2)$, $Q=14a^3b^2-35a^4b^4-49a^2b^4=7a^2b^2\cdot(2a-5a^2b^2-7b^2)$, слѣд., D = общ. наиб. дѣл. $5a^2b^2$ и $7a^2b^2$ и $=a^2b^2$. **268'** $P=35a^2b^4-42a^7b^5+14a^3b^3=7a^2b^3(5b-6a^5b^2+2a)$, $Q=30a^6b^2+45a^2b^6-25a^4b^4=5a^2b^2(6a^4+9b^4-5a^2b^2)$, D = общ. наиб. дѣл. $7a^2b^3$ и $5a^2b^2$ и $=a^2b^2$.

269 $P=4(a+1)^2=2^2(a+1)(a+1)$, $Q=6(a^2-1)=6(a^2-1^2)=2\cdot 3(a+1)(a-1)$, $D=2(a+1)$. **269'** $P=9(a-1)^2=3^2(a-1)(a-1)$, $Q=6(a^2-1)=6(a^2-1^2)=2\cdot 3(a+1)(a-1)$, $D=3(a-1)$.

270 $P=18(x^2-y^2)=2\cdot 3^2(x+y)(x-y)$, $Q=27(x-y)^2=3^3(x-y)(x-y)$, $D=3^2(x-y)=9(x-y)$. **270'** $P=56(x+y)^2=2^3\cdot 7(x+y)(x+y)$, $Q=16(x^2-y^2)=2^4(x+y)(x-y)$, $D=2^3(x+y)=8(x+y)$.

271 $P=4(a+1)^3=2^2(a+1)^3$, $Q=6(a^2-1)=6(a^2-1^2)=2\cdot 3(a+1)(a-1)$, $D=2(a+1)$. **271'** $P=6(a-1)^3=2\cdot 3(a-1)^3$, $Q=9(a^2-1)=9(a^2-1^2)=3^2(a+1)(a-1)$. $D=3(a-1)$.

272 $P=12(x-y)^3=2^2\cdot 3(x-y)^3$, $Q=18(x^2-y^2)=2\cdot 3^2(x+y)(x-y)$. $D=2\cdot 3(x-y)=6(x-y)$. **272'** $P=18(x^2-y^2)=2\cdot 3^2(x+y)(x-y)$, $Q=24(x+y)^3=2^3\cdot 3(x+y)^3$, $D=2\cdot 3(x+y)=6(x+y)$.

273 $P=a^6-b^6=$ (№ 228) $=(a^3+b^3)(a^3-b^3)=(a+b)(a^2-ab+b^2)(a-b)(a^2+ab+b^2)$, $Q=a^2-b^2=(a+b)(a-b)$, $D=(a+b)(a-b)=Q$. **273'** $P=a^6+b^6=(a^2)^3+(b^2)^3=$ (№ 146) $=[(a^2)^1+(b^2)^1][(a^2)^2-(a^2)^1(b^2)^1+(b^2)^2]=(a^2+b^2)(a^4-a^2b^2+b^4)$, $Q=a^2+b^2$. $D=a^2+b^2=Q$.

Вообще (№№ 273 и 273'), *если* Q *дѣлится на* P, *то искомый общій наиб. дѣлитель* D *и есть данное выраженіе* Q, *т. е.* $D=Q$.

274 $P=a^5-b^5=$ (№ 152) $=(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)$, $Q=a^3-b^3=$ (№ 146) $=(a-b)(a^2+ab+b^2)$. $D=a-b$. **274'** $P=a^5+b^5=$ (№ 152') $=(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)$, $Q=a^3+b^3=$ (№ 146') $=(a+b)(a^2-ab+b^2)$. $D=a+b$.

275. $P=9(x^2-y^2)=3^2(x+y)(x-y)$, $Q=6(x^4-y^4)=$ (№ 223) $=6[(x^2)^2-(y^2)^2]=6(x^2+y^2)(x^2-y^2)=2\cdot 3(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$, $D=3(x+y)(x-y)$. **275'** $P=8(x^2+y^2)^2=2^3(x^2+y^2)^2$, $Q=12(x^4-y^4)=2^2\cdot 3(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$. $D=2^2(x^2+y^2)=4(x^2+y^2)$.

276 $P=12(x^2+y^2)^2=2^2\cdot 3(x^2+y^2)^2$, $Q=8(x^4-y^4)=$ (№ 223) $=8[(x^2)^2-(y^2)^2]=8(x^2+y^2)(x^2-y^2)=2^3(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$, $D=2^2(x^2+y^2)=4(x^2+y^2)$. **276'** $P=18(x^2-y^2)^2=18(x^2-y^2)(x^2-y^2)=18(x+y)(x-y)(x+y)(x-y)=2\cdot 3^2(x+y)^2(x-y)^2$, $Q=12(x^4-y^4)=12(x^2+y^2)(x^2-y^2)=2^2\cdot 3(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$, $D=2\cdot 3(x+y)(x-y)=6(x^2-y^2)$.

277 $P=4x^2-12xy+9y^2=(2x)^2-2\cdot 2x\cdot 3y+(3y)^2=(2x-3y)^2$, $Q=4x^2-9y^2=$ (срв. № 130) $=(2x)^2-(3y)^2=(2x+3y)(2x-3y)$, $D=2x-3y$. **277'** $P=9x^2+24xy+16y^2=(3x)^2+2\cdot 3x\cdot 4y+(4y)^2=(3x+4y)^2$. $Q=9x^2-16y^2=(3x)^2-(4y)^2=(3x+4y)(3x-4y)$, $D=3x+4y$.

278 $P=25x^2+60xy+36y^2=(5x)^2+2\cdot 5x\cdot 6y+(6y)^2=(5x+6y)^2$, $Q=36y^2-25x^2=$ (срв. № 136) $=(6y)^2-(5x)^2=(6y+5x)(6y-5x)$, $D=5x+6y$

278′ $P=4x^2-28xy+49y^2=(2x)^2-2\ 2x\ 7y+(7y)^2=(2x-7y)^2$, $Q=49y^2-4x^2=(7y)^2-(2x)^2=(7y+2x)(7y-2x)=-(2x+7y)(2x-7y)$, $D=2x-7y$*)

279 $P=a^2-1=a^2-1^2=(a+1)(a-1)$, $Q=a^2+4a+3=a^2+a+3a+3=a(a+1)+3(a+1)=(a+1)(a+3)$, $D=a+1$ **279′** $P=a^2-1=a^2-1^2=(a+$ $(a-1)$, $Q=a^2-4a+3=a^2-a-3a+3=a(a-1)-3(a-1)=(a-1)(a-3)$, $D=a-$

280 $P=a^2-4=$ (срв № 121) $=a^2-2^2=(a+2)(a-2)$, $Q=a^2-5a+6=$ (срв № 85) $=a^2-2a-3a+6=a(a-2)-3(a-2)=(a-2)(a-3)$, $D=a-2$ **28** $P=a^2-4=a^2-2^2=(a+2)(a-2)$, $Q=a^2+5a+6=a^2+2a+3a+6=a(a+2)+3(a+2)=(a+2)(a+3)$, $D=a+2$

281 $P=x^2+8x+15=$ (№ 83) $=x^2+3x+5x+15=x(x+3)+5(x+3)=(x+3)(x+5)$, $Q=x^2+9x+20=x^2+4x+5x+20=x(x+4)+5(x+4)=(x$ $(x+5)$, $D=x+5$. **281′** $P=x^2-8x+15=x^2-3x-5x+15=x(x-3)-5(x-3)=(x-3)(x-5)$, $Q=x^2-9x+20=x^2-4x-5x+20=x(x-4)-5(x-4)=(x-4)(x-5)$, $D=x-5$

282 $P=x^2-9x+14=$ (№ 85′) $=x^2-2x-7x+14=x(x-2)-7(x-2)=(x-2)(x-7)$, $Q=x^2-11x+28=x^2-4x-7x+28=x(x-4)-7(x-4)=(x-4)(a-7)$, $D=x-7$ **282′** $P=x^2+9x+14=x^2+2x+7x+14=x(x+2)+7(x+2)=(x+2)(x+7)$, $Q=x^2+11x+28=x^2+4x+7x+28=x(x+4)+7(x+4)=(x+4)(x+7)$, $D=x+7$

283 $x^2+2x-120=x^2-10x+12x-120=x(x-10)+12(x-10)=(x-10)(x+12)$, $Q=x^2-2x-80=x^2+8x-10x-80=x(x+8)-10(x+8)=(x+8)(x-10)$, $D=x-10$ **283′** $P=x^2-2x-120=x^2+10x-12x-120=x(x+10)-12(x+10)=(x+10)(x-12)$, $Q=x^2+2x-80=x^2-8x+10x-80=x(x-8)+10(x-8)=(x-8)(x+10)$, $D=x+10$

284 $P=x^2+15x+36=x^2+3x+12x+36=x(x+3)+12(x+3)=(x+3$ $(x+12)$, $Q=x^2+9x-36=x^2-3x+12x-36=x(x-3)+12(x-3)=(x-3)(x+12)$, $D=x+12$ **284′** $P=x^2-15x+36=x^2-3x-12x+36=x(x-3)-12(x-3)=(x-3)(x-12)$, $Q=x^2-9x-36=x^2+3x-12x-36=x(x+3)-12(x+3)=(x+3)(x-12)$ $D=x-12$

285 $P=x^3-4x^2-5x=x(x^2-4x-5)=$
$=x(x^2+x-5x-5)=x[x(x+1)-5(x+1)]=\quad x(x+1)(x-5)$,
$Q=x^3-6x^2+5x=x(x^2-6x+5)=$ (№ 89′) $=$
$=x(x^2-x-5x+5)=x[x(x-1)-5(x-1)]=\quad x(x-1)(x-5)$,

$D=x(x-5)$

285′ $P=x^3+4x^2-5x=x(x^2+4x-5)=$
$=$ (№ 97) $=x(x^2-x+5x-5)=x[x(x-1)+5(x-1)]=\quad x(x-1)(x+5)$,
$Q=x^3+6x^2+5x=x(x^2+6x+5)=$
$=x(x^2+x+5x+5)=x[x(x+1)+5(x+1)]=\quad x(x+1)(x+5)$,

$D=x(x+5)$

286 $P=x^3+4x^2-5x=$ (см P въ № 285) $=\quad x(x-1)(x+5)$,
$Q=x^3-6x^2+5x=$ (см Q въ № 285) $=\quad x(x-1)(x-5)$

$D=x(x-1)$

286′ $P=x^3-4x^2-5x=$ (см P въ № 285) $=\quad x(x+1)(x-5)$,
$Q=x^3+6x^2+5x=$ (см Q въ № 285) $=\quad x(x+1)(x+5)$,

$D=x(x+1)$

---

*) Или $D=7y-2x$, не вынося „—" въ Q за скобки и представивъ P въ видѣ $(7y-2x)^2$ *вообще* знакъ D не играетъ особенной роли

287 $P=x^4+2a^2x^2+a^4+ax^3+a^3x=(x^4+2x^2a^2+a^4)+(ax^3+a^3x)=[(x^2)^2+2(x^2)^1(a^2)^1+(a^2)^2]+ax(x^2+a^2)=(x^2+a^2)^2+ax(x^2+a^2)=(x^2+a^2)(x^2+a^2+ax)$, $Q=x^3-a^3=$(срв № 146)$=(x-a)(x^2+ax+a^2)$, $D=x^2+ax+a^2$

287′ $P=x^4+2a^2x^2+a^4-ax^3-a^3x=(x^4+2a^2x^2+a^4)-(ax^3+a^3x)=$(№ 287)$=(x^2+a^2)^2-ax(x^2+a^2)=(x^2+a^2)(x^2+a^2-ax)$, $Q=x^3+a^3=$(срв № 146′)$=(x+a)(x^2-ax+a^2)$, $D=x^2-ax+a^2$

288 $P=x^4-a^4+ax^3-a^3x=(x^4-a^4)+(ax^3-a^3x)=[(x^2)^2-(a^2)^2]+ax(x^2-a^2)=(x^2+a^2)(x^2-a^2)+ax(x^2-a^2)=(x^2-a^2)(x^2+a^2+ax)=(x+a)(x-a)(x^2+ax+a^2)$, $Q=x^3+a^3=(x+a)(x^2-ax+a^2)$ $D=x+a$ 288′ $P=x^4-a^4-ax^3+a^3x=(x^4-a^4)-(ax^3-a^3x)=(x^2+a^2)(x^2-a^2)-ax(x^2-a^2)=(x^2-a^2)(x^2+a^2-ax)=(x+a)(x-a)(x^2-ax+a^2)$ $Q=x^3-a^3=(x-a)(x^2+ax+a^2)$, $D=x-a$

289 $P=3x^3-3x^2y+xy^2-y^3=(3x^3-3x^2y)+(xy^2-y^3)=3x^2(x-y)+y^2(x-y)=(x-y)(3x^2+y^2)$, $Q=4x^3-x^2y-3xy^2=x(4x^2-xy-3y^2)=x(4x^2-4xy+3xy-3y^2)=x[(4x^2-4xy)+(3xy-3y^2)]=x[4x(x-y)+3y(x-y)]=x(x-y)(4x+3y)$, $D=x-y$ 289′ $P=3x^3+3x^2y-xy^2-y^3=(3x^3+3x^2y)-(xy^2+y^3)=3x^2(x+y)-y^2(x+y)=(x+y)(3x^2-y^2)$, $Q=4x^2y+xy^2-3y^3=y(4x^2+xy-3y^2)=y(4x^2+4xy-3xy-3y^2)=y[(4x^2+4xy)-(3xy+3y^2)]=y[4x(x+y)-3y(x+y)]=y(x+y)(4x-3y)$, $D=x+y$

290 $P=x^4+2x^3y+2x^2y^2+2xy^3+y^4=(x^4+2x^3y+x^2y^2)+(x^2y^2+2xy^3+y^4)=x^2(x^2+2xy+y^2)+y^2(x^2+2xy+y^2)=(x^2+2xy+y^2)(x^2+y^2)=(x+y)^2(x^2+y^2)$, $Q=x^4+2x^3y-2xy^3-y^4=(x^4+2x^3y+x^2y^2)-(x^2y^2+2xy^3+y^4)=x^2(x^2+2xy+y^2)-y^2(x^2+2xy+y^2)=(x^2+2xy+y^2)(x^2-y^2)=(x+y)^2(x+y)(x-y)$ $D=(x+y)^2$ Предлагаемъ другой, быть можетъ, болѣе удобный способъ разложенія P и Q (разложеніе P и Q весьма поучительно, какъ примѣръ группировки членовъ) $P=(x^4+2x^2y^2+y^4)+(2x^3y+2xy^3)=(x^2+y^2)^2+2xy(x^2+y^2)=(x^2+y^2)(x^2+y^2+2xy)=(x^2+y^2)(x+y)^2$, $Q=(x^4-y^4)+(2x^3y-2xy^3)=[(x^2)^2-(y^2)^2]+2xy(x^2-y^2)=(x^2+y^2)(x^2-y^2)+2xy(x^2-y^2)=(x^2-y^2)(x^2+y^2+2xy)=(x+y)(x-y)(x+y)^2$, такъ что $D=(x+y)^2$ 290′ $P=x^4-2x^3y+2x^2y^2-2xy^3+y^4=(x^4-2x^3y+x^2y^2)+(x^2y^2-2xy^3+y^4)=x^2(x^2-2xy+y^2)+y^2(x^2-2xy+y^2)=(x^2-2xy+y^2)(x^2+y^2)=(x-y)^2(x^2+y^2)$, $Q=x^4-2x^3y+2xy^3-y^4=(x^4-2x^3y+x^2y^2)-(x^2y^2-2xy^3+y^4)=x^2(x^2-2xy+y^2)-y^2(x^2-2xy+y^2)=(x^2-2xy+y^2)(x^2-y^2)=(x-y)^2(x+y)(x-y)$, $D=(x-y)^2$ **Другой способъ** (иное разложеніе P и Q) $P=(x^4+2x^2y^2+y^4)-(2x^3y+2xy^3)=(x^2+y^2)^2-2xy(x^2+y^2)=(x^2+y^2)(x^2+y^2-2xy)=(x^2+y^2)(x-y)^2$, $Q=(x^4-y^4)-(2x^3y-2xy^3)=(x^2+y^2)(x^2-y^2)-2xy(x^2-y^2)=(x^2-y^2)(x^2+y^2-2xy)=(x+y)(x-y)(x-y)^2$, $D=(x-y)^2$

291 $P=a^2-b^2=(a+b)(a-b)$, $Q=(a-b)^2$, $R=a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$, $D=a-b$ 291′ $P=a^2-b^2=(a+b)(a-b)$, $Q=(a+b)^2$ $R=a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$, $D=a+b$

292 $P=4a^2-9b^2=$(срв № 130)$=(2a)^2-(3b)^2=(2a+3b)(2a-3b)$, $Q=(2a+3b)^2$, $R=8a^3+27b^3=$(срв № 151′)$=(2a)^3+(3b)^3=(2a+3b)[(2a)^2-2a\,3b+(3b)^2]=(2a+3b)(4a^2-6ab+9b^2)$, $D=2a+3b$ 292′ $P=4a^2-9b^2=$(№ 292, P)$=(2a+3b)(2a-3b)$, $Q=(2a-3b)^2$, $R=8a^3-27b^3=(2a)^3-$

$=(3b)^3=(2a-3b)[(2a)^2+2a\cdot3b+(3b)^2]=(2a-3b)(4a^2+6ab+9b^2)$; $D=$ $=2a-3b$.

293 $P=a^4-b^4=$ (№ 223, спос I-й) $=(a^2)^2-(b^2)^2=(a^2+b^2)(a^2-b^2)=(a^2+$ $+b^2)(a+b)(a-b)$, $Q=a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ $R=a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ $D=a+b$ **293′** $P=a^4-b^4=(a^2+b^2)(a^2-b^2)=(a^2+b^2)(a+b)(a-b)$, $Q=a^3-$ $-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ $R=a^2-b^2=(a+b)(a-b)$, $D=a-b$

294 $P=a^5-b^5=$ (№ 152) $=(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)$, $Q=a^4-b^4=$ $=$ (№ 293, P) $=(a^2+b^2)(a+b)(a-b)$, $R=a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$, $D=$ $=a-b$ **294′** $P=a^5+b^5=$ (№ 152) $=(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)$, $Q=a^4-$ $-b^4=$ (№ 293, P) $=(a^2+b^2)(a+b)(a-b)$, $R=a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ $D=a+b$

295 $P=x^2+5x+6=x^2+2x+3x+6=x(x+2)+3(x+2)=(x+2)(x+3)$ $Q=x^2+x-6=x^2-2x+3x-6=x(x-2)+3(x-2)=(x-2)(x+3)$, $R=x^2+$ $+2x-3=$ (№ 97) $=x^2-x+3x-3=x(x-1)+3(x-1)=(x-1)(x+3)$, $D=$ $=x+3$ **295′** $P=x^2-x-6=x^2+2x-3x-6=x(x+2)-3(x+2)=(x+2)$ $(x-3)$, $Q=x^2-5x+6=$ (№ 85) $=x^2-2x-3x+6=x(x-2)-3(x-2)=(x-$ $-2)(x-3)$, $R=x^2-4x+3=x^2-x-3x+3=x(x-1)-3(x-1)=(x-1)(x-$ $-3)$, $D=x-3$

296 $P=x^2-7x+10=x^2-2x-5x+10=x(x-2)-5(x-2)=(x-2)(x-$ $-5)$, $Q=x^2-4x-5=x^2+x-5x-5=x(x+1)-5(x+1)=(x+1)(x-5)$, $R=$ $=x^2-8x+15=x^2-3x-5x+15=x(x-3)-5(x-3)=(x-3)(x-5)$, $D=$ $=x-5$ **296′** $P=x^2+3x-10=$ (№ 93) $=x^2-2x+5x-10=x(x-2)+5(x-$ $-2)=(x-2)(x+5)$, $Q=x^2+6x+5=x^2+x+5x+5=x(x+1)+5(x+1)=$ $=(x+1)(x+5)$, $R=x^2+2x-15=x^2-3x+5x-15=x(x-3)+5(x-3)=$ $=(x-3)(x+5)$, $D=x+5$

297 $P=x^3+3x^2-10x=x(x^2+3x-10)=$ (№ 93) $=x(x^2-2x+5x-10)=$ $=x[x(x-2)+5(x-2)]=x(x-2)(x+5)$, $Q=x^4+4x^3-12x^2=x^2(x^2+4x-$ $-12)=x^2(x^2-2x+6x-12)=x^2[x(x-2)+6(x-2)]=x^2(x-2)(x+6)$, $R=$ $=x^4-9x^3+14x^2=x^2(x^2-9x+14)=$ (№ 85) $=x^2(x^2-2x-7x+14)=x^2[x(x-$ $-2)-7(x-2)]=x^2(x-2)(x-7)$ $D=x(x-2)$ **297′** $P=x^5-7x^4+10x^3=$ $=x^3(x^2-7x+10)=$ (№ 296 P) $=x^3(x-2)(x-5)$, $Q=x^4-8x^3+12x^2=x^2(x^2-$ $-8x+12)=x^2(x^2-2x-6x+12)=x^2[x(x-2)-6(x-2)]=x^2(x-2)(x-6)$, $R=x^3+5x^2-14x=x(x^2+5x-14)=x(x^2-2x+7x-14)=x[x(x-2)+7(x-2)]=$ $=x(x-2)(x+7)$, $D=x(x-2)$

298 $P=x^5+10x^4+24x^3=x^3(x^2+10x+24)=x^3(x^2+4x+6x+24)=$ $=x^3[x(x+4)+6(x+4)]=x^3(x+4)(x+6)$, $Q=x^4-4x^3-32x^2=x^2(x^2-4x-$ $-32)=x^2(x^2+4x-8x-32)=x^2[x(x+4)-8(x+4)]=x^2(x+4)(x-8)$, $R=x^3-3x^2-$ $-28x=x(x^2-3x-28)=x(x^2+4x-7x-28)=x[x(x+4)-7(x+4)]=x(x+4)$ $(x-7)$, $D=x(x+4)$ **298′** $P=x^3+2x^2-24x=x(x^2+2x-24)=x(x^2-4x+$ $+6x-24)=x[x(x-4)+6(x-4)]=x(x-4)(x+6)$, $Q=x^4-12x^3+32x^2=$ $=x^2(x^2-12x+32)=x^2(x^2-4x-8x+32)=x^2[x(x-4)-8(x-4)]=x^2(x-4)$ $(x-8)$, $R=x^5-11x^4+28x^3=x^3(x^2-11x+28)=x^3(x^2-4x-7x+28)=$ $=x^3[x(x-4)-7(x-4)]=x^3(x-4)(x-7)$, $D=x(x-4)$

299 $P=a^3+a^2x-ax^2-x^3=a^2(a+x)-x^2(a+x)=(a+x)(a^2-x^2)=(a+$ $+x)(a+x)(a-x)=(a+x)^2(a-x)$, $Q=a^3-3ax^2+2x^3=a^3-ax^2-2ax^2+2x^3=$ $=a(a^2-x^2)-2x^2(a-x)=a(a+x)(a-x)-2x^2(a-x)=(a-x)[a(a+x)-2x^2]=$ $=(a-x)(a^2+ax-2x^2)=(a-x)(a^2-ax+2ax-2x^2)=(a-x)[a(a-x)+2x(a-$ $-x)]=(a-x)(a-x)(a+2x)=(a-x)^2(a+2x)$, $R=a^3-2a^2x-ax^2+2x^3=$

$=a^2(a-2x)-x^2(a-2x)=(a-2x)(a^2-x^2)=(a-2x)(a+x)(a-x)$, $D=a-x$ **299′** $P=a^3-a^2x-ax^2+x^3=a^2(a-x)-x^2(a-x)=(a-x)(a^2-x^2)=(a-x)(a+x)(a-x)=(a-x)^2(a+x)$, $Q=a^3-3ax^2-2x^3=a^3-ax^2-2ax^2-2x^3=a(a^2-x^2)-2x^2(a+x)=a(a+x)(a-x)-2x^2(a+x)=(a+x)[a(a-x)-2x^2]=(a+x)(a^2-ax-2x^2)=(a+x)(a^2+ax-2ax-2x^2)=(a+x)[a(a+x)-2x(a+x)]=(a+x)(a+x)(a-2x)=(a+x)^2(a-2x)$, $R=a^3+2a^2x-ax^2-2x^3=a^2(a+2x)-x^2(a+2x)=(a+2x)(a^2-x^2)=(a+2x)(a+x)(a-x)$ $D=a+x$

— **300** $P=x^2-2a^2-ax=x^2-a^2-a^2-ax=(x^2-a^2)-(a^2+ax)=(x+a)(x-a)-a(a+x)=(x+a)(x-a-a)=(x+a)(x-2a)$, $Q=x^2-6a^2+ax=x^2-4a^2-2a^2+ax=x^2-(2a)^2+(ax-2a^2)=(x+2a)(x-2a)+a(x-2a)=(x-2a)(x+2a+a)=(x-2a)(x+3a)$, $R=x^2+2ax-8a^2=x^2-2ax+4ax-8a^2=x(x-2a)+4a(x-2a)=(x-2a)(x+4a)$, $D=x-2a$ **300′** $x^2-2a^2+ax=x^2-a^2-a^2+ax=(x^2-a^2)+(ax-a^2)=(x+a)(x-a)+a(x-a)=(x-a)(x+a+a)=(x-a)(x+2a)$, $Q=x^2-6a^2-ax=x^2-4a^2-2a^2-ax=x^2-(2a)^2-(ax+2a^2)=(x+2a)(x-2a)-a(x+2a)=(x+2a)(x-2a-a)=(x+2a)(x-3a)$, $R=x^2-2ax-8a^2=x^2+2ax-4ax-8a^2=x(x+2a)-4a(x+2a)=(x+2a)(x-4a)$, $D=x+2a$

Замѣчанія 1°—къ № 300 Въ нѣкоторыхъ изданіяхъ (нов) Сборника' 2 ое выраженіе (Q) приведено съ опечаткой членъ *ax* долженъ имѣть знакъ ,—' а не ,+ (какъ въ № 300) **2°** Къ №№ 300 и 300′ Выраженія P и Q суть *двучлены 2 ой степени* (относительно *x* или *a*) и могутъ быть разложены въ произведеніе 2-хъ множителей по обычному способу и по правиламъ указаннымъ послѣ рѣш № 80, подъ рубрикой „6 й случай разл", A] Здѣсь же приведенъ иной спос соотвѣтственно расположенію членовъ P и Q въ условіи

§ 4. Отысканіе общаго наименьшаго кратнаго.

Понятіе *общаго наименьшаго кратнаго* обратно по отношенію къ понятію общ наиб дѣлителя Въ связи съ этимъ и способъ нахожденія общ наим кратнаго данныхъ выраженій будучи въ общемъ по внѣшности аналогиченъ способу нахожденія общ наиб дѣлителя (въ пріемахъ, указываемыхъ въ настоящемъ элементарномъ курсѣ), является противоположностью послѣдняго въ своихъ частностяхъ Какъ и тамъ (§ 3), главная часть метода здѣсь принадлежитъ *разложенію* данныхъ выраженій (и ихъ коэффиціентовъ) а простыхъ множителей но въ то время какъ тамъ искомый общ наиб дѣлитель составляется изъ произведенія *общихъ* всѣмъ выраженіямъ множителей, здѣсь въ составъ искомаго общ наим кратнаго входятъ *всѣ* первообразные множители и каждому изъ нихъ придается показатель степени *наибольшій* между тѣми показателями, съ которыми онъ входитъ въ данныя выраженія, между тѣмъ какъ тамъ (въ случаѣ общ наиб дѣлителя) этотъ показатель есть *наименьшій*

Условимся для краткости обозначать черезъ M общее наименьшее кратное данныхъ выраженій P, Q, R,

301 $P=ab$ $Q=bc$, $M=abc$ **301′** $P=ab$, $Q=ac$, $M=abc$

302 $P=a^2$, $Q=3ab$, $M=3a^2b$ **302′** $P=2b^2$, $Q=ab$, $M=2ab^2$

303 $P=4ab=2^2ab$, $Q=6ac=2\cdot 3ac$, $M=2^2\cdot 3abc=12abc$. **303′** $P=10ab=2\cdot 5ab$, $Q=15bc=3\cdot 5bc$, $M=2\cdot 5\cdot 3abc=30abc$

— **304** $P=8a^3=2^3a^3$, $Q=12a^4=2^2\cdot 3a^4$, $M=2^3\cdot 3a^4=24a^4$. **304′** $P=9a^4=3^2a^4$, $Q=12a^5=2^2\cdot 3a^5$, $M=3^2\cdot 2^2a^5=36a^5$

305 $P=12a^3b^2=2^2\cdot 3a^3b^2$, $Q=18ab^3=2\cdot 3^2ab^3$, $M=2^2\cdot 3^2a^3b^3=36a^3b^3$.
305′ $P=8a^2b^4=2^3a^2b^4$, $Q=12a^3b^3=2^2\cdot 3a^3b^3$, $M=2^3\cdot 3a^3b^4=24a^3b^4$

306 $P=25a^3b^4c^5=5^2a^3b^4c^5$. $Q=20a^5b^2c^6=2^2\cdot 5a^5b^2c^6$, $M=2^2\cdot 5^2a^5b^4c^6=100a^5b^4c^6$ **306′** $P=48a^5b^4c^3=2^4\cdot 3a^5b^4c^3$, $Q=72a^3b^5c^7=2^3\cdot 3^2a^3b^5c^7$, $M=2^4\cdot 3^2a^5b^5c^7=144a^5b^5c^7$

307 $P=6a^3bd^2=2\cdot 3a^3bd^2$, $Q=5ac^3e^2$ $M=2\cdot 3\cdot 5a^3bc^3d^2e^2=30a^3bc^3d^2e^2$ **307′**. $P=4ab^3e^2=2^2ab^3e^2$, $Q=7a^3cd^2$, $M=2^2\cdot 7a^3b^3cd^2e^2=28a^3b^3cd^2e^2$

308 $P=4ab^2c^3=2^2ab^2c^3$, $Q=21bc^2d^3=3\cdot 7bc^2d^3$, $M=2^2\cdot 3\cdot 7ab^2c^3d^3=84ab^2c^3d^3$ **308′** $P=9a^3b^2c=3^2a^3b^2c$, $Q=10b^3c^2d=2\cdot 5b^3c^2d$, $M=3^2\cdot 2\cdot 5a^3b^3c^2d=90a^3b^3c^2d$

309 $P=a(a+b)$, $Q=b(a+b)$, $M=ab(a+b)$ **309′** $P=a(a-b)$, $Q=c(a-b)$ $M=ac(a-b)$

310 $P=4a^2(b-1)=2^2a^2(b-1)$, $Q=6a^3(b-1)=2\cdot 3a^3(b-1)$, $M=2^2\cdot 3a^3(b-1)=12a^3(b-1)$ **310′** $P=9a^3(b+1)=3^2a^3(b+1)$, $Q=6a(b+1)=2\cdot 3a(b+1)$, $M=3^2\cdot 2a^3(b+1)=18a^3(b+1)$

311 $P=15b^5(a+b)=3\cdot 5b^5(a+b)$, $Q=18b^3(a-b)=2\cdot 3^2b^3(a-b)$, $M=3^2\cdot 5\cdot 2b^5(a+b)(a-b)=90b^5(a^2-b^2)$ **311′** $P=25b^7(a-b)=5^2b^7(a-b)$, $Q=30b^4(a+b)=2\cdot 3\cdot 5b^4(a+b)$, $M=5^2\cdot 2\cdot 3b^7(a-b)(a+b)=150b^7(a^2-b^2)$

312 $P=36a^3b^2(a-2)=2^2\cdot 3^2a^3b^2(a-2)$, $Q=24a^2b^3(a-1)=2^3\cdot 3a^2b^3(a-1)$, $M=2^3\cdot 3^2a^3b^3(a-2)(a-1)=72a^3b^3(a-1)(a-2)$ **312′**. $P=50a^5b^4(a+3)=2\cdot 5^2a^5b^4(a+3)$, $Q=75a^4b^5(a+1)=3\cdot 5^2a^4b^5(a+1)$, $M=2\cdot 3\cdot 5^2(a+3)(a+1)a^5b^5=150a^5b^5(a+1)(a+3)$

313 $P=(a+b)(c+d)$, $Q=(a+b)(c-d)$, $M=(a+b)(c+d)(c-d)=(a+b)(c^2-d^2)$ **313′** $P=(a-b)(c+d)$ $Q=(a-b)(c-d)$, $M=(a-b)(c+d)(c-d)=(a-b)(c^2-d^2)$

314 $P=(a-b)(c-d)$, $Q=(a+b)(c-d)$, $M=(a-b)(a+b)(c-d)=(a^2-b^2)(c-d)$ **314′** $P=(a+b)(c+d)$, $Q=(a-b)(c+d)$ $M=(a+b)(a-b)(c+d)=(a^2-b^2)(c+d)$

315 $P=a^2-x^2=(a+x)(a-x)$, $Q=(a-x)^2$, $M=(a+x)(a-x)^2$. **315′** $P=a^2-x^2=(a+x)(a-x)$, $Q=(a+x)^2$, $M=(a+x)^2(a-x)$

316 $P=3(a+x)$ $Q=4(a^2-x^2)=2^2(a+x)(a-x)$, $M=3\cdot 2^2(a+x)(a-x)=12(a^2-x^2)$ **316′** $P=2(a-x)$, $Q=3(a^2-x^2)=3(a+x)(a-x)$, $M=2\cdot 3(a-x)(a+x)=6(a^2-x^2)$

317 $P=x^2-4y^2=x^2-(2y)^2=(x+2y)(x-2y)$, $Q=x^2-4xy+4y^2=x^2-2\cdot x\cdot 2y+(2y)^2=(x-2y)^2$, $M=(x+2y)(x-2y)^2$ **317′** $P=x^2-9y^2=x^2-(3y)^2=(x+3y)(x-3y)$, $Q=x^2+6xy+9y^2=x^2+2\cdot x\cdot 3y+(3y)^2=(x+3y)^2$, $M=(x+3y)^2(x-3y)$

318 $P=x^2-16y^2=x^2-(4y)^2=(x+4y)(x-4y)$, $Q=x^2+8xy+16y^2=x^2+2\cdot x\cdot 4y+(4y)^2=(x+4y)^2$, $M=(x+4y)^2(x-4y)$ **318′** $P=x^2-25y^2=x^2-(5y)^2=(x+5y)(x-5y)$, $Q=x^2-10xy+25y^2=x^2-2\cdot x\cdot 5y+(5y)^2=(x-5y)^2$, $M=(x+5y)(x-5y)^2$

319 $P=a^3-b^3=$ (№ 146) $=(a-b)(a^2+ab+b^2)$, $Q=a^2-b^2=$ (№ 128) $=(a+b)(a-b)$, $M=(a-b)(a^2+ab+b^2)(a+b)=(a^3-b^3)(a+b)$ **319′** $P=a^3+b^3=$ (№ 146) $=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ $Q=a^2-b^2=$ (№ 128) $=(a+b)(a-b)$, $M=(a+b)(a^2-ab+b^2)(a-b)=(a^3+b^3)(a-b)$

320 $P=a^3+a^2b+ab^2+b^3=a^2(a+b)+b^2(a+b)=(a+b)(a^2+b^2)$, $Q=a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$, $M=(a+b)(a^2-ab+b^2)(a^2+b^2)=(a^3+b^3)(a^2+b^2)$

320′ $P=a^3-a^2b+ab^2-b^3=a^2(a-b)+b^2(a-b)=(a-b)(a^2+b^2)$, $Q=a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$, $M=(a^2+b^2)(a-b)(a^2+ab+b^2)=(a^2+b^2)(a^3-b^3)$

321 $P=2a^3-2a^2b+ab^2-b^3=2a^2(a-b)+b^2(a-b)=(a-b)(2a^2+b^2)$, $Q=3a^2-4ab+b^2=3a^2-3ab-ab+b^2=3a(a-b)-b(a-b)=(a-b)(3a-b)$, $M=(a-b)(3a-b)(2a^2+b^2)$ **321′** $P=2a^3+2a^2b-ab^2-b^3=2a^2(a+b)-b^2(a+b)=(a+b)(2a^2-b^2)$, $Q=3a^2+4ab+b^2=3a^2+3ab+ab+b^2=3a(a+b)+b(a+b)=(a+b)(3a+b)$ $M=(a+b)(3a+b)(2a^2-b^2)$

322 $P=2a^4+3a^2b^2-2a^2b-3b^3=a^2(2a^2+3b^2)-b(2a^2+3b^2)=(2a^2+3b^2)(a^2-b)$, $Q=2a^4-3a^2b^2-2a^2b+3b^3=a^2(2a^2-3b^2)-b(2a^2-3b^2)=(2a^2-3b^2)(a^2-b)$ $M=(a^2-b)(2a^2+3b^2)(2a^2-3b^2)=(a^2-b)[(2a^2)^2-(3b^2)^2]=(a^2-b)(2a^2\,2a^2-3b^2\,3b^2)=(a^2-b)(4a^4-9b^4)$ **322′** $P=2a^4+3a^2b^2+2a^2b+3b^3=a^2(2a^2+3b^2)+b(2a^2+3b^2)=(2a^2+3b^2)(a^2+b)$, $Q=2a^4+3a^2b^2-2a^2b-3b^3=$(№ 322 P)$=(2a^2+3b^2)(a^2-b)$, $M=(2a^2+3b^2)(a^2+b)(a^2-b)=(2a^2+3b^2)[(a^2)^2-b^2]=(2a^2+3b^2)(a^4-b^2)$

323 $P=x^2-7x+12=x^2-3x-4x+12=x(x-3)-4(x-3)=(x-3)(x-4)$, $Q=x^2+x-12=x^2-3x+4x-12=x(x-3)+4(x-3)=(x-3)(x+4)$, $M=(x-3)(x-4)(x+4)=(x-3)(x^2-4^2)=(x-3)(x^2-16)$ **323′** $P=x^2+5x+6=x^2+2x+3x+6=x(x+2)+3(x+2)=(x+2)(x+3)$, $Q=x^2-x-6=x^2+2x-3x-6=x(x+2)-3(x+2)=(x+2)(x-3)$, $M=(x+2)(x+3)(x-3)=(x+2)(x^2-3^2)=(x+2)(x^2-9)$

324 $P=x^2-8x+7=x^2-x-7x+7=x(x-1)-7(x-1)=(x-1)(x-7)$, $Q=x^2-6x-7=$(№ 98′)$=x^2+x-7x-7=x(x+1)-7(x+1)=(x+1)(x-7)$, $M=(x-1)(x+1)(x-7)=(x^2-1^2)(x-7)=(x^2-1)(x-7)$ **324′** $P=x^2-9x+20=x^2-4x-5x+20=x(x-4)-5(x-4)=(x-4)(x-5)$. $Q=x^2+x-20=x^2-4x+5x-20=x(x-4)+5(x-4)=(x-4)(x+5)$ $M=(x-4)(x-5)(x+5)=(x-4)(x^2-5^2)=(x-4)(x^2-25)$

325 $P=2x^2-7x+6=2x^2-3x-4x+6=x(2x-3)-2(2x-3)=(2x-3)(x-2)$ $Q=2x^2+x-6=2x^2-3x+4x-6=x(2x-3)+2(2x-3)=(2x-3)(x+2)$, $M=(2x-3)(x-2)(x+2)=(2x-3)(x^2-2^2)=(2x-3)(x^2-4)$ **325′** $P=3x^2-17x+10=3x^2-2x-15x+10=x(3x-2)-5(3x-2)=(3x-2)(x-5)$, $Q=3x^2+13x-10=3x^2-2x+15x-10=x(3x-2)+5(3x-2)=(3x-2)(x+5)$, $M=(3x-2)(x-5)(x+5)=(3x-2)(x^2-5^2)=(3x-2)(x^2-25)$

326 $P=3x^2+11x+6=3x^2+2x+9x+6=x(3x+2)+3(3x+2)=(3x+2)(x+3)$, $Q=3x^2+7x-6=3x^2-2x+9x-6=x(3x-2)+3(3x-2)=(3x-2)(x+3)$ $M=(3x+2)(3x-2)(x+3)=[(3x)^2-2^2](x+3)=(9x^2-4)(x+3)$ **326′** $P=2x^2-5x-12=2x^2+3x-8x-12=x(2x+3)-4(2x+3)=(2x+3)(x-4)$. $Q=2x^2-11x+12=2x^2-3x-8x+12=x(2x-3)-4(2x-3)=(2x-3)(x-4)$, $M=(2x+3)(2x-3)(x-4)=[(2x)^2-3^2](x-4)=(4x^2-9)(x-4)$

327 $P=x^2-4=$(№ 121′)$=x^2-2^2=(x+2)(x-2)$ $Q=x^3+2x^2+4x+8=x^2(x+2)+4(x+2)=(x+2)(x^2+4)$, $M=(x+2)(x-2)(x^2+4)=(x^2-4)(x^2+4)=(x^2)^2-4^2=x^4-16$ **327′** $P=x^2-4=$(№ 327, P)$=(x+2)(x-2)$, $Q=x^3-2x^2+4x-8=x^2(x-2)+4(x-2)=(x-2)(x^2+4)$, $M=(x+2)(x-2)(x^2+4)=(x^2-4)(x^2+4)=(x^2)^2-4^2=x^4-16$

328 $P=x^2-9y^2=x^2-(3y)^2=(x+3y)(x-3y)$, $Q=x^3-3x^2y+9xy-27y^2=x^2(x-3y)+9y(x-3y)=(x-3y)(x^2+9y)$, $M=(x+3y)(x-3y)(x^2+9y)=(x^2-9y^2)(x^2+9y)$ **328′** $P=x^2-9y^2=$(№ 328 P)$=x^2-(3y)^2=(x+3y)(x-3y)$, $Q=x^3+3x^2y+9xy+27y^2=(x^3+3x^2y)+(9xy+27y^2)=x^2(x+3y)+9y(x+3y)=(x+3y)(x^2+9y)$, $M=(x+3y)(x-3y)(x^2+9y)=[x^2-(3y)^2](x^2+9y)=(x^2-9y^2)(x^2+9y)$

329 $P = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1 =$ (см № 237′, III спос и выноску къ нему) $= x^4 + 2x^3 + x^2 + x^2 + 2x + 1 = x^2(x^2 + 2x + 1) + (x^2 + 2x + 1) = (x^2 + 2x + 1)(x^2 + 1) = (x+1)^2(x^2+1)$, $Q = x^3 + x^2 + x + 1 = x^2(x+1) + (x+1) = (x+1)(x^2+1)$, $M = (x+1)^2(x^2+1) = P$ **329′** $P = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 =$ (№ 237, 3 ій спос и выноска къ нему) $= x^4 - 2x^3 + x^2 + x^2 - 2x + 1 = x^2(x^2 - 2x + 1) + (x^2 - 2x + 1) = (x^2 - 2x + 1)(x^2 + 1) = (x-1)^2(x^2+1)$, $Q = x^3 - x^2 + x - 1 = x^2(x-1) + (x-1) = (x-1)(x^2+1)$, $M = (x-1)^2(x^2+1) = P$, слѣд, P дѣлится на Q безъ остатка (частное $= x - 1$)

330 $P = x^4 - 2x^3y + 2x^2y^2 - 2xy^3 + y^4 = x^4 - 2x^3y + x^2y^2 + x^2y^2 - 2xy^3 + y^4 = x^2(x^2 - 2xy + y^2) + y^2(x^2 - 2xy + y^2) = (x^2 - 2xy + y^2)(x^2 + y^2) = (x - y)^2(x^2 + y^2)$, $Q = x^4 - 2x^3y + 2xy^3 - y^4 = (x^4 - y^4) - (2x^3y - 2xy^3) =$ (№ 223 спос I ый) $= [(x^2)^2 - (y^2)^2] - 2xy(x^2 - y^2) = (x^2 + y^2)(x^2 - y^2) - 2xy(x^2 - y^2) = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 2xy) = (x+y)(x-y)(x-y)^2 = (x+y)(x-y)^3$ *), $M = (x-y)^3(x+y)(x^2 + y^2)$ Легко видѣть, что $(x-y)^3(x+y)(x^2+y^2) = (x-y)^2(x-y)(x+y)(x^2+y^2) = (x-y)^2(x^2-y^2)(x^2+y^2) = (x-y)^2[(x^2)^2 - (y^2)^2] = (x-y)^2(x^4 - y^4)$ **330′** $P = x^4 + 2x^3y + 2x^2y^2 + 2xy^3 + y^4 = x^4 + 2x^3y + x^2y^2 + x^2y^2 + 2xy^3 + y^4 = x^2(x^2 + 2xy + y^2) + y^2(x^2 + 2xy + y^2) = (x^2 + 2xy + y^2)(x^2 + y^2) = (x + y)^2(x^2 + y^2)$, $Q = x^4 + 2x^3y - 2xy^3 - y^4 = (x^4 - y^4) + (2x^3y - 2xy^3) = [(x^2)^2 - (y^2)^2] + 2xy(x^2 - y^2) = (x^2 + y^2)(x^2 - y^2) + 2xy(x^2 - y^2) = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2 + 2xy) = (x+y)(x-y)(x+y)^2 = (x+y)^3(x-y)$ **), $M = (x+y)^3(x-y)(x^2+y^2)$, что можно привести къ виду $(x+y)^2(x+y)(x-y)(x^2+y^2) = (x+y)^2(x^2-y^2)(x^2+y^2) = (x+y)^2[(x^2)^2 - (y^2)^2] = (x+y)^2(x^4 - y^4)$

331 $P = ab$, $Q = ac$, $R = cd$, $M = abcd$ **331′** $P = ab$, $Q = cd$, $R = bd$, $M = abcd$

332 $P = 4a^2b$, $Q = 2ab^2$, $R = 3ax$ $M = 4\ 3a^2b^2x = 12a^2b^2x$ **332** $P = 6a^3b = 2\ 3a^3b$, $Q = 9ab^2 = 3^2ab^2$, $R = 5bx$, $M = 2\ 3^2\ 5a^3b^2x = 90a^3b^2x$

333 $P = 8a^2b^3 = 2^3a^2b^3$, $Q = 30a^3b^3 = 2\ 3\ 5a^3b^3$, $R = 4a^2b^4 = 2^2a^2b^4$, $M = 2^3\ 3\ 5a^3b^4 = 120a^3b^4$ **333′** $P = 15a^5b^4 = 3\ 5a^5b^4$, $Q = 18a^3b^2 = 2\ 3^2a^3b^2$ $R = 9a^4b^2 = 3^2a^4b^2$ $M = 3^2\ 5\ 2a^5b^4 = 90a^5b^4$.

334 $P = 4a^2b^2x = 2^2a^2b^2x$, $Q = 6ab^3x^2 = 2\ 3ab^3x^2$, $R = 18a^2bx^3 = 2\ 3^2a^2bx^3$; $M = 2^2 . 3^2a^2b^3x^3 = 36a^2b^3x^3$ **334′** $P = 24ab^2x^3 = 2^3\ 3ab^2x^3$, $Q = 16a^3b^5x^4 = 2^4a^3b^5x^4$ $R = 6a^5bx = 2 . 3a^5bx$ $M = 2^4\ 3a^5b^5x^4 = 48a^5b^5x^4$

335 $P = 20a^2x^n = 2^2\ 5a^2x^n$, $Q = 15a^3x^{n-1} = 3\ 5a^3x^{n-1}$, $R = 10ax^{n+1} = 2\ 5ax^{n+1}$, $M = 2^2\ 5\ 3a^3x^{n+1} = 60a^3x^{n+1}$, ибо $n+1 > n > n-1$ **335′** $P = 28a^mx^3 = 2^2\ 7a^mx^3$, $Q = 14a^{m-2}x = 2\ 7a^{m-2}x$, $R = 21a^{m+2}x^4 = 3\ 7a^{m+2}x^4$, $M = 2^2\ 7\ 3a^{m+2}x^4 = 84a^{m+2}x^4$, ибо $n+2 > m > m-2$

336 $P = 42a^mx^{2n} = 2\ 3\ 7a^mx^{2n}$, $Q = 35a^{m-1}x^{n+1} = 5\ 7a^{m-1}x^{n+1}$, $R = 14a^{m-2}x^{n-3} = 2\ 7a^{m-2}x^{n-3}$, $M = 2\ 3\ 5\ 7a^mx^{2n} = 210a^mx^{2n}$, ибо 1) $m > m-1 > m-2$ и 2) $2n \geqq n+1 > n-3$ при $n \geqq 1$ **336′** $P = 48a^{3m}x^{n-1} = 2 . 3a^{3m}x^{n-1}$ $Q = 32a^{2m-3}x^{n+2} = 2^5a^{2m-3}x^{n+2}$, $R = 15a^mx^{n-2} = 3 . 5a^mx^{n-2}$ $M = 2^5\ 3\ 5a^{3m}x^{n+2} = 480a^{3m}x^{n+2}$, ибо 1) $3m > 2m-3 \geqq m$ при $m \geqq 3$ и 2) $n+2 > n-1 > n-2$

---

*) Вотъ другой способъ разложенія Q, аналогичный способу разложенія P имѣемъ $Q = x^4 - 2x^3y + 2xy^3 - y^4 = x^4 - 2x^3y + x^2y^2 - x^2y^2 + 2xy^3 - y^4 = (x^4 - 2x^3y + x^2y^2) - (x^2y^2 - 2xy^3 + y^4) = x^2(x^2 - 2xy + y^2) - y^2(x^2 - 2xy + y^2) = (x^2 - 2xy + y^2)(x^2 - y^2)$ и т д Срв № 175, 8-й случай разложенія

**) Приводимъ другой способъ разложенія Q, аналогичный способу разложенія P, имѣемъ $Q = x^4 + 2x^3y - 2xy^3 - y^4 = x^4 + 2x^3y + x^2y^2 - x^2y^2 - 2xy^3 - y^4 = (x^4 + 2x^3y + x^2y^2) - (x^2y^2 + 2xy^3 + y^4) = x^2(x^2 + 2xy + y^2) - y^2(x^2 + 2xy + y^2) = (x^2 + 2xy + y^2)(x^2 - y^2)$, и т д

337 $P=x+y$, $Q=(x-y)^2$, $R=x^2-y^2=(x+y)(x-y)$, $M=(x+y)(x-y)^2$. **337′** $P=x^2-y^2=(x+y)(x-y)$, $Q=(x+y)^2$, $R=x-y$; $M=(x+y)^2(x-y)$.

338 $P=x^2-y^2=(x+y)(x-y)$, $Q=(x+y)^2$, $R=x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$, $M=(x+y)^2(x-y)(x^2-xy+y^2)$, что можно представить такъ $M=[(x+y)(x-y)][(x+y)(x^2-xy+y^2)]=(x^2-y^2)(x^3+y^3)=P\cdot R$. **338′** $P=x^2-y^2=(x+y)(x-y)$, $Q=(x-y)^2$, $R=x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$, $M=(x+y)(x-y)^2(x^2+xy+y^2)$, что можно привести къ виду $[(x+y)(x-y)][(x-y)(x^2+xy+y^2)]=(x^2-y^2)(x^3-y^3)=P\cdot R$.

339 $P=6a=2\cdot 3a$, $Q=2(a+1)$, $R=3(a+2)$, $M=2\cdot 3a(a+1)(a+2)=6a(a+1)(a+2)$. **339′** $P=12a=2^2\cdot 3a$, $Q=2(a-1)$, $R=4(a-2)=2^2(a-2)$, $M=2^2\cdot 3a(a-1)(a-2)=12a(a-1)(a-2)$.

340 $P=a^4$, $Q=2a-1$, $R=4a^2-1=$ (№ 126) $=(2a)^2-1^2=(2a+1)(2a-1)$, $M=a^4(2a+1)(2a-1)=a^4(4a^2-1)=P\cdot R$. **340′** $P=a^3$, $Q=1+3a$, $R=1-9a^2=$ (№ 127) $=1^2-(3a)^2=(1+3a)(1-3a)$, $M=a^3(1+3a)(1-3a)=a^3(1-9a^2)=P\cdot R$.

341 $P=a^2-9b^2=a^2-(3b)^2=(a+3b)(a-3b)$, $Q=(a+3b)^2$, $R=(a-3b)^2$, $M=Q\cdot R=(a+3b)(a+3b)(a-3b)(a-3b)=[(a+3b)(a-3b)][(a+3b)(a-3b)]=(a^2-9b^2)(a^2-9b^2)=(a^2-9b^2)^2=P^2$. **341′** $P=4a^2-b^2=(2a)^2-b^2=(2a+b)(2a-b)$, $Q=(2a+b)^2$, $R=(2a-b)^2$, $M=Q\cdot R=(2a+b)(2a+b)(2a-b)(2a-b)=[(2a+b)(2a-b)][(2a+b)(2a-b)]=(4a^2-b^2)(4a^2-b^2)=(4a^2-b^2)^2=P^2$.

342 $P=8ab+16b^2=8b(a+2b)=2^3b(a+2b)$, $Q=a^2b+4ab^2+4b^3=b(a^2+4ab+4b^2)=$ (№ 133) $=b[a^2+2\cdot a\cdot 2b+(2b)^2]=b(a+2b)^2$, $R=a^3$, $M=2^3a^3b(a+2b)^2=8a^3b(a+2b)^2$. **342′** $P=6ab-18b^2=6b(a-3b)=2\cdot 3b(a-3b)$, $Q=a^2b-6ab^2+9b^3=b(a^2-6ab+9b^2)=$ (срв. № 131) $=b[a^2-2\cdot a\cdot 3b+(3b)^2]=b(a-3b)^2$, $R=a^4$, $M=2\cdot 3ba^4(a-3b)^2=6a^4b(a-3b)^2$.

Указ. Въ условіи № 342 *опечатка*: второй членъ II-го выраженія долженъ быть $-6ab^2$, а не $-6ab$.

343 $P=x-1$, $Q=x^2+x+1$, $R=x^3+1=x^3+1^3=(x+1)(x^2-x\cdot 1+1^2)=(x+1)(x^2-x+1)$, $M=PQR=(x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1)=$ (№№ 147 и 147 наоборотъ) $=[(x-1)(x^2+x\cdot 1+1^2)][(x+1)(x^2-x\cdot 1+1^2)]=(x^3-1^3)(x^3+1^3)=(x^3)^2-(1^3)^2=x^3\cdot x^3-1=x^6-1$. **343′** $P=x+1$, $Q=x^2-x+1$, $R=x^3-1=$ (№ 147) $=(x-1)(x^2+x+1)$, $M=PQR=(x+1)(x^2-x+1)(x^3-1)=[(x+1)(x^2-x\cdot 1+1^2)](x^3-1)=(x^3+1^3)(x^3-1)=(x^3+1)(x^3-1)=(x^3)^2-1^2=x^6-1$.

344 $P=x^2-1^2=(x+1)(x-1)$, $Q=x^2+1$, $R=x^4+1$, $S=x^8-1=(x^4)^2-1^2=(x^4+1)(x^4-1)=(x^4+1)[(x^2)^2-1^2]=(x^4+1)(x^2+1)(x^2-1)=(x^4+1)(x^2+1)(x+1)(x-1)$, $M=(x+1)(x-1)(x^2+1)(x^4+1)=S=x^8-1$. **344** $P=x^2-1=x^2-1^2=(x+1)(x-1)$, $Q=x^3+1=$ (№ 147) $=(x+1)(x^2-x+1)$, $R=x^3-1=$ (№ 147) $=(x-1)(x^2+x+1)$, $S=x^6-1=x^3\cdot x^3-1=(x^3)^2-1^2=[(x^3)^1+1][(x^3)^1-1]=(x^3+1)(x^3-1)=(x+1)(x^2-x+1)(x-1)(x^2+x+1)$, $M=(x+1)(x-1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)$, т. е. $M=S=x^6-1$.

345 См. рѣш. отд. III § 14, формулу (6) сокращеннаго дѣленія и № 81 отд. IV. $P=x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$, $Q=x^2+(a+c)x+ac=(x+a)(x+c)$, $R=x^2+(b+c)x+bc=(x+b)(x+c)$, $M=(x+a)(x+b)(x+c)$. **345′** См. рѣш. отд. III, § 14, форм. (7) сокращ. дѣлен. и № 81′ отд. IV. $P=x^2-(a+b)x+ab=(x-a)(x-b)$, $Q=x^2-(b+c)x+bc=(x-b)(x-c)$, $R=x^2-(c+a)x+ac=(x-c)(x-a)$, $M=(x-a)(x-b)(x-c)$.

346. См. рѣш отд III § 14, форм (9), (8), (7) и №№ 91', 91, 81 отд IV $P=x^2-(a-b)x-ab=(x-a)(x+b)$, $Q=x^2+(b-c)x-bc=(x+b)(x-c)$ $R=x^2-(a+c)x+ac=(x-a)(x-c)$, $M=(x-a)(x+b)(x-c)$ **346'** См рѣш отд III, § 14, форм. (9), (6) и №№ 91 81 отд IV $P=x^2-(b-a)x-ab=x^2-(b-a)x-ba=(x-b)(x+a)$ $Q=x^2+(a+c)x+ac=(x+a)(x+c)$, $R=x^2-(b-c)x-bc=(x-b)(x+c)$, $M=(x+a)(x-b)(x+c)$

347 $P=x^2+3x+2=x^2+(1+2)x+1\cdot 2=$(№ 345, P)$=(x+1)(x+2)$, $Q=x^2+4x+3=x^2+(1+3)x+1\cdot 3=(x+1)(x+3)$ $R=x^2+5x+6=x^2+(2+3)x+2\cdot 3=(x+2)(x+3)$ $M=(x+1)(x+2)(x+3)$ **347'** $P=x^2-3x+2=x^2-(1+2)x+1\cdot 2=$(№ 345, P)$=(x-1)(x-2)$, $Q=x^2+2x-3=x^2+(3-1)x-3\cdot 1=$(№ 346, Q)$=(x+3)(x-1)$, $R=x^2+x-6=x^2+(3-2)x-3\cdot 2=(x+3)(x-2)$, $M=(x-1)(x-2)(x+3)$

348 $P=x^2+x-6=x^2+(3-2)x-3\cdot 2=$(№ 346, Q)$=(x+3)(x-2)$, $Q=x^2-3x+2=$(№ 347, P)$=(x-1)(x-2)$ $R=x^2+2x-8=x^2+(4-2)x-4\cdot 2=$(№ 346, Q)$=(x+4)(x-2)$, $M=(x-1)(x-2)(x+3)(x+4)$ Судя по отвѣту, въ условіи этого №ра *опечатка* I-ое выраженіе должно быть x^2+x-6, а не x^2-x-6 **348'** См № 345, P $P=x^2+5x+4=x^2+(1+4)x+1\cdot 4=(x+1)(x+4)$, $Q=x^2+7x+12=x^2+(3+4)x+3\cdot 4=(x+3)(x+4)$, $R=x^2+8x+15=x^2+(3+5)x+3\cdot 5=(x+3)(x+5)$ $M=(x+1)(x+3)(x+4)(x+5)$

349 $P=x^2-2x-3=$(№ 346 P)$=x^2-(3-1)x-3\cdot 1=(x-3)(x+1)$, $Q=x^3+3x^2-x-3=x^2(x+3)-(x+3)=(x+3)(x^2-1)=(x+3)(x^2-1^2)=(x+3)(x+1)(x-1)$ $R=x^3+4x^2+x-6=$(№ 113, выноска)$=x^3-x^2+5x^2-5x+6x-6=x^2(x-1)+5x(x-1)+6(x-1)=(x-1)(x^2+5x+6)=$(№ 347 R)$=(x-1)(x+2)(x+3)$, $M=(x-3)(x+1)(x+3)(x-1)(x+2)=[(x+1)(x-1)](x+2)[(x+3)(x-3)]=(x^2-1^2)(x+2)(x^2-3^2)=(x^2-1)(x+2)(x^2-9)$ **349'** $P=x^2+2x-3=$(№ 347, Q)$=(x+3)(x-1)$, $Q=x^3-3x^2-x+3=x^2(x-3)-(x-3)=(x-3)(x^2-1)=(x-3)(x^2-1^2)=(x-3)(x+1)(x-1)$, $R=x^3-4x^2+x+6=$(№ 111, выноска)$=x^3+x^2-5x^2-5x+6x+6=x^2(x+1)-5x(x+1)+6(x+1)=(x+1)(x^2-5x+6)=(x+1)[x^2-(2+3)x+2\cdot 3]=$(№ 345', P)$=(x+1)(x-2)(x-3)$, $M=(x+3)(x-1)(x-3)(x+1)(x-2)=[(x+1)(x-1)](x-2)[(x+3)(x-3)]=(x^2-1^2)(x-2)(x^2-3^2)=(x^2-1)(x-2)(x^2-9)$

350 $P=x^2-3x-10=x^2-(5-2)x-5\cdot 2=$(№ 346, P)$=(x-5)(x+2)$ $Q=x^3-5x^2-9x+45=x^2(x-5)-9(x-5)=(x-5)(x^2-9)=(x-5)(x^2-3^2)=(x-5)(x+3)(x-3)$, $R=x^3+4x^2-11x-30=$(см теорію передъ рѣш № 81, п B])$=x^3+2x^2+2x^2+4x-15x-30=x^2(x+2)+2x(x+2)-15(x+2)=(x+2)(x^2+2x-15)=(x+2)[x^2+(5-3)x-5\cdot 3]=$(№ 346, Q)$=(x+2)(x+5)(x-3)$, $M=(x-5)(x+2)(x+3)(x-3)(x+5)=(x+2)[(x+5)(x-5)][(x+3)(x-3)]=(x+2)(x^2-5^2)(x^2-3^2)=(x+2)(x^2-25)(x^2-9)$ Въ нѣкот изд «Сб.», въ выраженіи R *опечатка* 3-ій членъ его долженъ быть $-11x$, а не $+11x$ **350'**. $P=x^2+3x-10=x^2+(5-2)x-5\cdot 2=$(№ 346, Q)$=(x+5)(x-2)$, $Q=x^3+5x^2-9x-45=x^2(x+5)-9(x+5)=(x+5)(x^2-9)=(x+5)(x^2-3^2)=(x+5)(x+3)(x-3)$, $R=x^3-4x^2-11x+30=$(см теорію передъ рѣш № 81 п B])$=x^3-2x^2-2x^2+4x-15x+30=x^2(x-2)-2x(x-2)-15(x-2)=(x-2)(x^2-2x-15)=(x-2)[x^2-(5-3)x-5\cdot 3]=$(№ 346, P)$=(x-2)(x-5)(x+3)$, $M=(x+5)(x-2)(x+3)(x-3)(x-5)=(x-2)[(x+5)(x-5)][(x+3)(x-3)]=(x-2)(x^2-5^2)(x^2-3^2)=(x-2)(x^2-25)(x^2-9)$

351. $P=a^3-a^2+a-1=$(срв № 329, Q)$=a^2(a-1)+(a-1)=(a-1)(a^2+1)$, $Q=a^3+a^2+a+1=$(срв № 329, Q)$=a^2(a+1)+(a+1)=(a+1)(a^2+1)$, $R=a^4-1=(a^2)^2-1^2=(a^2+1)(a^2-1)=(a^2+1)(a+1)(a-1)$, $M=(a+$

$+1)(a-1)(a^2+1)=R=a^4-1$ **351′** $P=a^2-a+1$, $Q=a^5+a^4+a^3+a^2+a+1=a^3(a^2+a+1)+(a^2+a+1)=(a^2+a+1)(a^3+1)=(a^2+a+1)(a^3+1^3)=(a^2+a+1)(a+1)(a^2-a\cdot1+1^2)=(a^2+a+1)(a+1)(a^2-a+1)$, $R=a^6-1=$(№ 344′, R)$=(a^3+1)(a^3-1)=(a+1)(a^2-a+1)(a-1)(a^2+a+1)=Q\cdot(a-1)$, $M=R=a^6-1$

352 $P=a^3-1=$(№ 147′)$=(a-1)(a^2+a+1)$, $Q=a^3+1=$(№ 147)$=(a+1)(a^2-a+1)$, $R=a^4+a^2+1=$(срв № 224)$=(a^4+2a^2+1)-a^2=[(a^2)^2+2(a^2)\cdot1+1^2]-a^2=(a^2+1)^2-a^2=[(a^2+1)^1+a][(a^2+1)^1-a]=(a^2+a+1)(a^2-a+1)$. $M=(a-1)(a^2+a+1)(a+1)(a^2-a+1)=P\cdot Q=(a^3-1)(a^3+1)=(a^3)^2-1^2=a^6-1$ **352′** $P=a^2-1=a^2-1^2=(a+1)(a-1)$, $Q=a^4+1$, $R=a^3+a^2+a+1=$(№ 351, Q)$=(a+1)(a^2+1)$, $M=(a+1)(a-1)(a^4+1)(a^2+1)=[(a^2-1)(a^2+1)](a^4+1)=[(a^2)^2-1^2](a^4+1)=(a^4-1)(a^4+1)=(a^4)^2-1^2=a^8-1$

353 $P=a^2-2b^2-ab=$(срв № 300, P)$=a^2-b^2-b^2-ab=(a^2-b^2)-(ab+b^2)=(a+b)(a-b)-b(a+b)=(a+b)(a-b-b)=(a+b)(a-2b)$ $Q=a^2-6b^2+ab=$(№ 300, Q)$=(a^2-4b^2)+(ab-2b^2)=[a^2-(2b)^2]+b(a-2b)=(a+2b)(a-2b)+b(a-2b)=(a-2b)(a+2b+b)=(a-2b)(a+3b)$, $R=a^2-8b^2+2ab=$(срв № 300, R)$=(a^2-4b^2)+(2ab-4b^2)=(a+2b)(a-2b)+2b(a-2b)=(a-2b)(a+2b+2b)=(a-2b)(a+4b)$, $M=(a+b)(a-2b)(a+3b)(a+4b)$ **353′** См № 300, P, Q и R $P=a^2-2b^2+ab=(a^2-b^2)+(ab-b^2)=(a+b)(a-b)+b(a-b)=(a-b)(a+b+b)=(a-b)(a+2b)$, $Q=a^2-6b^2-ab=(a^2-4b^2)-(ab+2b^2)=[a^2-(2b)^2]-b(a+2b)=(a+2b)(a-2b)-b(a+2b)=(a+2b)(a-2b-b)=(a+2b)(a-3b)$, $R=a^2-8b^2-2ab=(a^2-4b^2)-(2ab+4b^2)=(a+2b)(a-2b)-2b(a+2b)=(a+2b)(a-2b-2b)=(a+2b)(a-4b)$ $M=(a-b)(a+2b)(a-3b)(a-4b)$ Указ Въ №№ 300 и 300′ вмѣсто a стоитъ x и a—вмѣсто b

354 $P=a^2-9b^2=$(№ 341, P)$=(a+3b)(a-3b)$, $Q=a^2-3b^2+2ab=(a^2-b^2)+(2ab-2b^2)=(a+b)(a-b)+2b(a-b)=(a-b)(a+b+2b)=(a-b)(a+3b)$ $R=a^2-15b^2-2ab=(a^2-9b^2)-(2ab+6b^2)=[a^2-(3b)^2]-2b(a+3b)=(a+3b)(a-3b)-2b(a+3b)=(a+3b)(a-3b-2b)=(a+3b)(a-5b)$ $M=(a+3b)(a-3b)(a-b)(a-5b)=(a-b)(a-5b)(a^2-9b^2)$ **354′** $P=a^2-9b^2=$(№ 341, P)$=(a+3b)(a-3b)$, $Q=a^2-3b^2-2ab=(a^2-b^2)-(2ab+2b^2)=(a+b)(a-b)-2b(a+b)=(a+b)(a-b-2b)=(a+b)(a-3b)$ $R=a^2-15b^2+2ab=(a^2-9b^2)+(2ab-6b^2)=(a+3b)(a-3b)+2b(a-3b)=(a-3b)(a+3b+2b)=(a-3b)(a+5b)$, $M=(a+3b)(a-3b)(a+b)(a+5b)=(a+b)(a+5b)(a^2-9b^2)$

355 $P=x^2-4=$(№ 121′)$=x^2-2^2=(x+2)(x-2)$, $Q=x^3+8=$(№ 148′)$=x^3+2^3=(x+2)(x^2-x\cdot2+2^2)=(x+2)(x^2-2x+4)$, $R=x^2+2x+4$, $M=(x+2)(x-2)(x^2-2x+4)(x^2+2x+4)=[(x+2)(x^2-2x+4)][(x-2)(x^2+2x+4)]=[(x+2)(x^2-x\cdot2+2^2)][(x-2)(x^2+x\cdot2+2^2)]=$(срв №№ 333 и 333′ отд III)$=(x^3+2^3)(x^3-2^3)=(x^3)^2-(2^3)^2=x^6-2^6=x^6-64$ **355′** $P=x^2-9=$(№ 122)$=x^2-3^2=(x+3)(x-3)$, $Q=x^3+27=$(№ 149)$=x^3+3^3=(x+3)(x^2-x\cdot3+3^2)=(x+3)(x^2-3x+9)$ $R=x^2+3x+9$, $M=(x+3)(x-3)(x^2-3x+9)(x^2+3x+9)=[(x+3)(x^2-3x+9)][(x-3)(x^2+3x+9)]=$(срв №№ 335 и 335′ отд III)$=[(x+3)(x^2-x\cdot3+3^2)][(x-3)(x^2+x\cdot3+3^2)]=(x^3+3^3)(x^3-3^3)=(x^3)^2-(3^3)^2=x^6-3^6=x^6-729$

356 $P=x^3-27=$(№ 149′)$=x^3-3^3=(x-3)(x^2+x\cdot3+3^2)=(x-3)(x^2+3x+9)$, $Q=x^3+27=$(№ 149)$=x^3+3^3=(x+3)(x^2-x\cdot3+3^2)=(x+3)(x^2-3x+9)$ $R=x^4+9x^2+81=$(срв № 224)$=(x^4+18x^2+81)-9x^2=[(x^2)^2+$

$+2\ (x^2)^2 \cdot 9+9^2]-3x\ \ 3x=(x^2+9)^2-(3x)^2=[(x^2+9)+3x][(x^2+9)-$
$-3x]=(x^2+3x+9)(x^2-3x-9)$, $M=(x-3)(x^2+3x+9)(x+3)(x^2-3x+$
$+9)=P$ $Q=(x^3-27)(x^3+27)=(x^3)^2-27^2=x^3\ x^3-27\ 27=x^6-729$
356' $P=x^3+8=$ (№ 355 Q) $=(x+2)(x^2-2x+4)$, $Q=x^3-8=$ (№ 148) $=$
$=x^3-2^3=(x-2)(x^2+x\ 2+2^2)=(x-2)(x^2+2x+4)$ $R=x^4+4x^2+16=$
$=$ (срв № 224) $=(x^4+8x^2+16)-4x^2=[(x^2)^2+2\ (x^2)^1\ 4+4^2]-2x\ 2x=$
$=(x^2+4)^2-(2x)^2=[(x^2+4)+2x][(x^2+4)-2x]=(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)$,
$M=(x+2)(x^2-2x+4)(x-2)(x^2+2x+4)=P$ $Q=(x^3+8)(x^3-8)=(x^3)^2-$
$-8^2=x^6-64$

357 $P=x^4-2x^3+2x-1=$ (№ 330, Q при $y=1$) $=(x^4-1)-(2x^3-2x)=$
$=[(x^2)^2-1^2]-2x(x^2-1)=(x^2+1)(x^2-1)-2x(x^2-1)=(x^2-1)(x^2+1-2x)=$
$=(x^2-1^2)(x^2-2\ x\ 1+1^2)=(x+1)(x-1)(x-1)^2=(x+1)(x-1)^3$, $Q=$
$=x^4-2x^3+2x^2-2x+1=$ (№ 330, P при $y=1$) $=(x^4-2x^3+x^2)+(x^2-2x+1)=$
$=x^2(x^2-2x+1)+(x^2-2x+1)=(x^2-2x+1)(x^2+1)=(x-1)^2(x^2+1)$, $R=$
$=x^3-x^2+x-1=$ (№ 329, Q) $=x^2(x-1)+(x-1)=(x-1)(x^2+1)$, $M=(x+$
$+1)(x-1)^3(x^2+1)$, что легко привести къ меньшему числу множителей
$M=(x+1)(x-1)(x-1)^2(x^2+1)=(x^2-1)(x^2+1)(x-1)^2=[(x^2)^2-1^2](x-$
$-1)^2=(x^4-1)(x-1)^2$ **357'** P и Q—срв съ № 330, при $y=1$ $P=x^4+2x^3-$
$-2x-1=(x^4-1)+(2x^3-2x)=(x^2+1)(x^2-1)+2x(x^2-1)=(x^2-1)(x^2+$
$+1+2x)=(x+1)(x-1)(x^2+2\ x\ 1+1^2)=(x+1)(x-1)(x+1)^2=(x+1)^3(x-$
$-1)$, $Q=x^4+2x^3+2x^2+2x+1=(x^4+2x^3+x^2)+(x^2+2x+1)=x^2(x^2+2x+$
$+1)+(x^2+2x+1)=(x^2+2x+1)(x^2+1)=(x+1)^2(x^2+1)$, $R=x^3+x^2+x+$
$+1=$ (№ 329 Q) $=x^2(x+1)+(x+1)=(x+1)(x^2+1)$ $M=(x+1)^3(x-1)(x^2+$
$+1)$, что можно преобразовать такъ $M=(x+1)^2[(x+1)(x-1)](x^2+1)=$
$=(x+1)^2[(x^2-1)(x^2+1)]=(x+1)^2[(x^2)^2-1^2]=(x+1)^2(x^4-1)$

Указ Судя по контексту, выраженіе P напечатано *невѣрно* въ отношеніи знаковъ 3-й и 4-й его члены должны быть отрицательны, а не со знакомъ «+»

358 $P=x^3+x^2-x-1=x^2(x+1)-(x+1)=(x+1)(x^2-1)=(x+1)(x^2-$
$-1^2)=(x+1)(x+1)(x-1)=(x+1)^2(x-1)$, $Q=x^3-3x-2=$ (№ 111, выноска) $=x^3+x^2-x^2-x-2x-2=x^2(x+1)-x(x+1)-2(x+1)=(x+1)(x^2-x-$
$-2)=(x+1)(x^2+x-2x-2)=(x+1)[x(x+1)-2(x+1)]=(x+1)(x+1)(x-$
$-2)=(x+1)^2(x-2)$*), $R=x^3-2x^2-x+2=x^2(x-2)-(x-2)=(x-2)(x^2-$
$-1)=(x-2)(x+1)(x-1)$, $M=(x+1)^2(x-1)(x-2)$ **358'**. $P=x^3-x^2-x+$
$+1=x^2(x-1)-(x-1)=(x-1)(x^2-1)=(x-1)(x^2-1^2)=(x-1)(x+1)(x-$
$-1)=(x+1)(x-1)^2$ $Q=x^3-3x+2=$ (№ 113, выноска) $=x^3-x^2+x^2-x-$
$-2x+2=x^2(x-1)+x(x-1)-2(x-1)=(x-1)(x^2+x-2)=(x-1)(x^2-x+$
$+2x-2)=(x-1)[x(x-1)+2(x-1)]=(x-1)(x-1)(x+2)=(x-1)^2(x+2)$**),
$R=x^3+2x^2-x-2=x^2(x+2)-(x+2)=(x+2)(x^2-1)=(x+2)(x+1)(x-1)$,
$M=(x+1)(x-1)^2(x+2)$

359 $P=x^3-7x+6=$ (№ 113, выноска) $=x^3-x^2+x^2-x-6x+6=x^2(x-$
$-1)+x(x-1)-6(x-1)=(x-1)(x^2+x-6)=(x-1)(x^2-2x+3x-6)=(x-$
$-1)[x(x-2)+3(x-2)]=(x-1)(x-2)(x+3)$, иначе (простѣйшій спос.)
$P=x^3-7x+6=x^3-x-6x+6=x(x^2-1)-6(x-1)=x(x+1)(x-1)-6(x-$

---

*) Вотъ другой способъ (одинъ изъ простѣйшихъ) разложенія $Q=x^3-3x-2=x^3-x-$
$-2x-2=x(x^2-1)-2(x+1)=x(x^2-1^2)-2(x+1)=x(x+1)(x-1)-2(x+1)=(x+1)[x(x-$
$-1)-2]=(x+1)(x^2-x-2)$, и т д

**) Приводимъ другой способъ (одинъ изъ простѣйшихъ) разложенія $Q=x^3-3x+2=x^3$
$-x-2x+2=x(x^2-1)-2(x-1)=x(x^2-1^2)-2(x-1)=x(x+1)(x-1)-2(x-1)=(x-1)$
$[x(x+1)-2]=(x-1)(x^2+x-2)$, и т д

$-1)=(x-1)[x(x+1)-6]=(x-1)(x^2+x-6)=$ (1-й спос) $=(x-1)(x-2)(x+3)$, $Q=x^3+2x^2-5x-6=$ (№ 111′, выноска) $=x^3+x^2+x^2+x-6x-6=x^2(x+1)+x(x+1)-6(x+1)=(x+1)(x^2+x-6)=$ (см разлож P) $=(x+1)(x-2)(x+3)$, $R=x^3-3x^2-10x+24=$ (см теорію передъ рѣш № 81, п B]) $=x^3-2x^2-x^2+2x-12x+24=x^2(x-2)-x(x-2)-12(x-2)=(x-2)(x^2-x-12)=(x-2)(x^2+3x-4x-12)=(x-2)[x(x+3)-4(x+3)]=(x-2)(x+3)(x-4)$, $M=(x-1)(x-2)(x+3)(x+1)(x-4)=(x-2)(x+3)(x-4)[(x+1)(x-1)]=(x-2)(x+3)(x-4)(x^2-1^2)=(x-2)(x+3)(x-4)(x^2-1)$ **359′** $P=x^3-7x-6=$ (№ 111′, выноска) $=x^3+x^2-x^2-x-6x-6=x^2(x+1)-x(x+1)-6(x+1)=(x+1)(x^2-x-6)=(x+1)(x^2+2x-3x-6)=(x+1)[x(x+2)-3(x+2)]=(x+1)(x+2)(x-3)$, **иначе** $P=x^3-7x-6=x^3-x-6x-6=x(x^2-1)-6(x+1)=x(x+1)(x-1)-6(x+1)=(x+1)[x(x-1)-6]=(x+1)(x^2-x-6)=$ (см выше) $=(x+1)(x+2)(x-3)$, $Q=x^3-4x^2+x+6=$ (№ 111, выноска) $=x^3+x^2-5x^2-5x+6x+6=x^2(x+1)-5x(x+1)+6(x+1)=(x+1)(x^2-5x+6)=(x+1)(x^2-2x-3x+6)=(x+1)[x(x-2)-3(x-2)]=(x+1)(x-2)(x-3)$, $R=x^3-x^2-14x+24=$ (см теорію передъ рѣш № 81, п B]) $=x^3-3x^2+2x^2-6x-8x+24=x^2(x-3)+2x(x-3)-8(x-3)=(x-3)(x^2+2x-8)=(x-3)(x^2-2x+4x-8)=(x-3)[x(x-2)+4(x-2)]=(x-3)(x-2)(x+4)$, $M=(x+1)(x+2)(x-3)(x-2)(x+4)=(x+1)[(x+2)(x-2)](x-3)(x+4)=(x+1)(x^2-2^2)(x-3)(x+4)=(x+1)(x-3)(x+4)(x^2-4)$

360 $P=x^3-2x^2-5x+6=$ (№ 113, выноска) $=x^3-x^2-x^2+x-6x+6=x^2(x-1)-x(x-1)-6(x-1)=(x-1)(x^2-x-6)=(x-1)(x^2+2x-3x-6)=(x-1)[x(x+2)-3(x+2)]=(x-1)(x+2)(x-3)$, $Q=x^3-7x-6=$ (№ 359′, P) $=(x+1)(x+2)(x-3)$, $R=x^3+10x^2+31x+30=$ (см теорію передъ рѣш № 81, п B]) $=x^3+2x^2+8x^2+16x+15x+30=x^2(x+2)+8x(x+2)+15(x+2)=(x+2)(x^2+8x+15)=(x+2)(x^2+3x+5x+15)=(x+2)[x(x+3)+5(x+3)]=(x+2)(x+3)(x+5)$ $M=(x-1)(x+2)(x-3)(x+1)(x+3)(x+5)=[(x+1)(x-1)][(x+3)(x-3)](x+2)(x+5)=(x^2-1^2)(x^2-3^2)(x+2)(x+5)=(x^2-1)(x^2-9)(x+2)(x+5)$ **360′** $P=x^3+4x^2+x-6=$ (№ 113 выноска) $=x^3-x^2+5x^2-5x+6x-6=x^2(x-1)+5x(x-1)+6(x-1)=(x-1)(x^2+5x+6)=(x-1)(x^2+2x+3x+6)=(x-1)[x(x+2)+3(x+2)]=(x-1)(x+2)(x+3)$. $Q=x^3-7x-6=$ (№ 359′, P) $=(x+1)(x+2)(x-3)$, $R=x^3+4x^2-11x-30=$ (см теорію передъ рѣш № 81, п B]) $=x^3+2x^2+2x^2+4x-15x-30=x^2(x+2)+2x(x+2)-15(x+2)=(x+2)(x^2+2x-15)=(x+2)(x^2-3x+5x-15)=(x+2)[x(x-3)+5(x-3)]=(x+2)(x-3)(x+5)$, $M=(x-1)(x+2)(x+3)(x+1)(x-3)(x+5)=[(x+1)(x-1)][(x+3)(x-3)](x+2)(x+5)=(x^2-1^2)(x^2-3^2)(x+2)(x+5)=(x^2-1)(x^2-9)(x+2)(x+5)$

§ 5. Двучленные множители и дѣлители.

361. Перемножая двучлены $x+a$, $x+b$, $x+c$, $x+d$, $x+e$ по два, по три и по четыре, незачѣмъ брать ихъ *всевозможныя* (различныя) соединенія, каковы суть **по два** $(x+a)(x+b)$, $(x+a)(x+c)$, $(x+a)(x+d)$, $(x+a)(x+e)$, $(x+b)(x+c)$ $(x+b)(x+d)$, $(x+b)(x+e)$, $(x+c)(x+d)$, $(x+c)(x+e)$ и $(x+d)(x+e)$, **по три** $(x+a)(x+b)(x+c)$, $(x+a)(x+b)(x+d)$, $(x+a)(x+b)(x+e)$, $(x+a)(x+c)(x+d)$, $(x+a)(x+c)(x+e)$, $(x+a)(x+d)(x+e)$, $(x+b)(x+c)(x+d)$, $(x+b)(x+c)(x+e)$ $(x+b)(x+d)(x+e)$ и

$(x+c)(x+d)(x+e)$, по четыре $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)$, $(x+a)(x+b)$ $(x+c)(x+e)$, $(x+a)(x+b)(x+d)(x+e)$, $(x+a)(x+c)(x+d)(x+e)$ и $(x+b)$ $(x+c)(x+d)(x+e)$, по пяти, очевидно, одно соединенie $abcde$, легко видѣть, что кромѣ вышеуказанныхъ, другихъ, отличныхъ отъ тѣхъ, произведенiй двучленовъ $x+a$, $x+b$, $x+c$, $x+d$, $x+e$ между собою быть не можетъ *), если не считать этихъ двучленовъ, взятыхъ по-одиночкѣ

Повторяемъ незачѣмъ перемножать ихъ во *всѣхъ* группировкахъ, т. к частныя группировки въ каждой изъ вышеприведенныхъ трехъ категорiй (по 2, по 3 и по 4) обнаруживаютъ одинаковое типичное строенiе Для обнаруженiя закона, управляющаго всѣми подобными умноженiями, достаточно изслѣдовать по одному произведенiю, типичному для каждой категорiи Так образ, вопросъ сводится къ изслѣдованiю слѣд произведенiй

1] $(x+a)(x+b)$, | 2] $(x+a)(x+b)(x+c)$,
3] $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)$, | 4] $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)(x+e)$

Для испытанiй взяты первыя произведенiя каждой изъ вышеприведенныхъ четырехъ категорiй —Перемножая двучлены по общимъ правиламъ (отд III, § 9), мы произведенiя представимъ въ видѣ многочлена, правильно расположеннаго по убывающимъ степенямъ буквы x, входящей въ каждый изъ сомножителей, очевидно, въ I случаѣ этотъ многочленъ будетъ 2-ой степени относительно x во II случаѣ—3 ей, въ III случаѣ—4-ой и въ IV случаѣ—5 ой (количества a, b c, d, e принимаются какъ бы за извѣстныя величины, образующiя коэффицiенты при различныхъ степеняхъ x):

1] $(x+a)(x+b)=x^2+ax+bx+ab=x^2+(a+b)x+ab$

2] $(x+a)(x+b)(x+c)=[(x+a)(x+b)](x+c)=[x^2+(a+b)x+ab](x+c)=$ $=x^3+(a+b)x^2+abx+cx^2+(a+b)cx+abc=x^3+(a+b+c)x^2+[ab+(a+$ $+b)c]x+abc=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x+abc$

3] $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=[(x+a)(x+b)(x+c)](x+d)=[x^3+(a+b+$ $+c)x^2+(ab+ac+bc)x+abc](x+d)=x^4+(a+b+c)x^3+(ab+ac+bc)x^2+$ $+abcx+dx^3+(a+b+c)dx^2+(ab+ac+bc)dx+abcd=x^4+[(a+b+c)+d]x^3+$ $+[(ab+ac+bc)+(a+b+c)d]x^2+[abc+(ab+ac+bc)d]x+abcd=x^4+$ $+(a+b+c+d)x^3+(ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2+(abc+abd+acd+bcd)x+$ $+abcd$

4] $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)(x+e)=[(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)](x+e)=$ $=[x^4+(a+b+c+d)x^3+(ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2+(abc+abd+acd+$ $+bcd)x+abcd](x+e)=x^5+(a+b+c+d)x^4+(ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^3+$ $(abc+abd+acd+bcd)x^2+abcdx+ex^4+(a+b+c+d)ex^3+(ab+ac+ad+bc+bd+$ $+cd)ex^2+(abc+abd+acd+bcd)ex+abcde=x^5+[(a+b+c+d)+e]x^4+[(ab+$ $+ac+ad+bc+bd+cd)+(a+b+c+d)e]x^3+[(abc+abd+acd+bcd)+(ab+ac+$ $+ad+bc+bd+cd)e]x^2+[abcd+(abc+abd+acd+bcd)e]x+abcde=x^5+(a+b+$ $+c+d+e)x^4+(ab+ac+ad+ae+bc+bd+be+cd+ce+de)x^3+(abc+abd+abe+$ $+acd+ace+ade+bcd+bce+bde+cde)x^2+(abcd+abce+abde+acde+bcde)x+abcde$.

---

*) Полная теорiя этого вопроса касающагося вообще *соединенiй* данныхъ элементовъ между собою въ группы, здѣсь неумѣстна и принадлежитъ отдѣлу математики, носящему назв *комбинацiоннаго анализа* —Въ частности, въ данномъ мѣстѣ вопросъ идетъ о *сочетанiяхъ* изъ данныхъ элементовъ по 2 по 3 по 4, по 5 въ каждомъ

Выводы Принимая во вниманіе, что 1) взятые для преобразованія произведенія 2-хъ, 3-хъ, 4-хъ и 5-ти двучленовъ состояли изъ сходныхъ между собой по строенію двучленовъ, 2) къ преобразованію ихъ были приложены одни и тѣ же пріемы и 3) окончательнымъ произведеніямъ придавался въ каждомъ случаѣ одинъ и тотъ же видъ правильно расположеннаго по убывающимъ степенямъ одной и той же буквы (x) многочлена — заключаемъ, что выводы, которые можно сдѣлать изъ разсмотрѣнія произведеній 2-хъ, 3-хъ, 4-хъ и 5 ти данныхъ двучленовъ можно распространить и на любое число аналогичныхъ *двучленовъ, отличающихся лишь вторыми членами*, т. е двучленовъ вида $x+a$ $x+b$ $x+c$, $x+d$, $x+e$, $x+f$, $x+g$ и т д Разсматривая же найденныя произведенія, замѣчаемъ слѣдующую закономѣрность въ ихъ строеніи

1° Каждое произведеніе — многочленъ, правильно расположенный по убывающимъ степенямъ буквы x, т е общаго члена (I-го) всѣхъ двучленовъ, при чемъ показатель высшей степени x=числу двучленовъ участвующихъ въ умноженіи, а затѣмъ показатели степеней x постепенно уменьшаются на 1-цу **2°** *Коэффиціенты* членовъ произведенія, т е степеней x коэффиціентъ *перваго* (высшаго) члена=1, коэффиц *второго* члена=суммѣ всѣхъ вторыхъ (т е различныхъ) членовъ перемножаемыхъ двучленовъ, коэф *третьяго* члена, *четвертаго*, *пятаго* и т д суть суммы произведеній только что упомянутыхъ вторыхъ членовъ, при чемъ эти послѣдніе перемножаются (всевозможными различными способами) соотвѣтственно попарно, по три, по четыре и т д **3°** *Послѣдній* членъ есть произведеніе всѣхъ вторыхъ членовъ и не содержитъ главной буквы x

Замѣчаніе о знакахъ Т к среди данныхъ двучленовъ нѣтъ знака «—» то очевидно, не будетъ его и въ произведеніи Вообще же относительно знаковъ придерживаются слѣдующихъ положеній 1) Въ двучленахъ вида $x+a$, $x+b$, $x+c$ $x+c$ и т д, отличающихся вторыми членами, *общій членъ* (первый) x *всегда считается положительнымъ*, если же онъ отрицателенъ, то знакъ «—» выносится за скобки 2) Вторые (различные) члены a b c d могутъ быть положительными или отрицательными 3) Каждому двучлену придается видъ суммы, напр если даны двучлены $x+2$ $x-3$, $x-4$ то представляются въ видѣ $x+2$, $x+(-3)$ $x+(-4)$ Придавъ имъ такой видъ, примѣняютъ къ составленію ихъ произведенія вышеуказанныя правила

361′ Умноженіе двучленовъ вида $(y-a)$, $(y-b)$, $(y-c)$, $(y-d)$ $(y-e)$ можно было бы свести къ умноженію двучленовъ вида $(x+a)$, на основаніи сказаннаго выше (№ 361 «замѣчаніе о знакахъ», п п 2 и 3), представивъ ихъ въ видѣ $y+(-a)$, $y+(-b)$, $y+(-c)$, $y+(-d)$, $y+(-e)$ напр

$$(y-a)(y-b)=[y+(-a)][y+(-b)]=y^2+[-a+(-b)]y+(-a)(-b)=$$
$$=y^2+(-a-b)y+ab=y^2-(a+b)y+ab$$

Но нелишнимъ является выводъ общаго правила подобныхъ умноженій непосредственно, на тѣхъ же основаніяхъ и по тому же пріему, что и въ № 361 Именно беремъ типичныя произведенія данныхъ двучленовъ 1] по два $(y-a)(y-b)$ 2] по три $(y-a)(y-b)(y-c)$ 3] по четыре $(y-a)(y-b)(y-c)(y-d)$ и 4] по пяти, т е всѣ $(y-a)(y-b)$ $(y-c)(y-d)(y-e)$ Производимъ умноженіе

1] $(y-a)(y-b)=y^2-ay-by+ab=y^2-(a+b)y+ab$

2] $(y-a)(y-b)(y-c)=[(y-a)(y-b)](y-c)=[y^2-(a+b)y+ab](y-c)=$
$=y^3-(a+b)y^2+aby-cy^2+(a+b)cy-abc=y^3+[-(a+b)-c]y^2+[ab+(a+$
$+b)c]y-abc=y^3-(a+b+c)y^2+(ab+ac+bc)y-abc$

3] $(y-a)(y-b)(y-c)(y-d)=[(y-a)(y-b)(y-c)](y-d)=[y^3-(a+b+$
$+c)y^2+(ab+ac+bc)y-abc](y-d)=y^4-(a+b+c)y^3+(ab+ac+bc)y^2-abcy-$

$-dy^3+(a+b+c)dy^2-(ab+ac+bc)dy+abcd=y^4+[-(a+b+c)-d]y^3+$
$+[ab+ac+bc+(a+b+c)d]y^2+[-abc-(ab+ac+bc)d]y+abcd=y^4-(a+b+$
$+c+d)y^3+(ab+ac+ad+bc+bd+cd)y^2-(abc+abd+acd+bcd)y+abcd$

4] $(y-a)(y-b)(y-c)(y-d)(y-e)=[(y-a)(y-b)(y-c)(y-d)](y-e)=$
$=[y^4-(a+b+c+d)y^3+(ab+ac+ad+bc+bd+cd)y^2-(abc+abd+acd+$
$+bcd)y+abcd](y-e)=y^5-(a+b+c+d)y^4+(ab+ac+ad+bc+bd+cd)y^3-$
$-(abc+abd+acd+bcd)y^2+abcdy-ey^4+(a+b+c+d)ey^3-(ab+ac+ad+$
$+bc+bd+cd)ey^2+(abc+abd+acd+bcd)ey-abcde=y^5+[-(a+b+c+d)-$
$-e]y^4+[ab+ac+ad+bc+bd+cd+(a+b+c+d)e]y^3+[-(abc+$
$+abd+acd+bcd)-(ab+ac+ad+bc+bd+cd)e]y^2+[abcd+(abc+abd+acd+$
$+bcd)e]y-abcde=y^5-(a+b+c+d+e)y^4+(ab+ac+ad+ae+bc+bd+be+$
$+cd+ce+de)y^3-(abc+abd+abe+acd+ace+ade+bcd+bce+bde+cde)y^2+$
$+(abcd+abce+abde+acde+bcde)y-abcde$

Выводы Какъ данные двучлены (по своему строенію) такъ и полученныя произведенія ихъ въ различныхъ группировкахъ — отличаются отъ двучленовъ и произведеній въ рѣш № 361 *только знаками* Преобразованія же и буквенныя выраженія (съ замѣною лишь x на y) одинаковы въ №№ 361 и настоящемъ 361′ Отсюда ясно, что выводы, сдѣланные въ № 361, приложимы и къ данному случаю за слѣдующими двумя оговорками 1) о замѣнѣ x черезъ y и 2) самое главное — о *правилѣ знаковъ* въ случаѣ двучленовъ вида $y-a$, $y-b$ и т д, *въ многочленѣ, представляющемъ ихъ произведенія* по два по три и т д и расположенномъ по убывающимъ степенямъ y, т е общаго всѣмъ двучленамъ члена (I-го),—*знаки его членовъ чередуются, при чемъ высшій членъ — положительный* Коэффиціенты же такіе, какъ и въ случаѣ двучленовъ вида $x+a$, $x+b$, $x+c$ и т д

362 Даны двучлены $x+1$, $x+2$, $x+3$, $x+4$, $x+5$, требуется найти по вышеприведенному правилу (№ 361) ихъ произведенія, соединяя ихъ *всѣми способами* А) по три, В) по четыре и С) всѣ вмѣстѣ

А) Какъ показано въ началѣ рѣш № 361, *всевозможныхъ различныхъ* соединеній пяти двучленовъ въ произведенія по три двучлена въ каждомъ существуетъ всего *десять* Так образ мы составимъ 10 произведеній, соединяя для каждаго по три двучлена изъ пяти $x+1$, $x+2$ $x+3$ $x+4$ $x+5$

Формула $(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x+abc$

1] $(x+1)(x+2)(x+3)=x^3+(1+2+3)x^2+(1.2+1\ 3+2\ 3)x+$
$+1\ 2\ 3=x^3+6x^2+11x+6$

2] $(x+1)(x+2)(x+4)=x^3+(1+2+4)x^2+(1\ 2+1\ 4+2\ 4)x+$
$+1\ 2\ 4=x^3+7x^2+14x+8$

3] $(x+1)(x+2)(x+5)=x^3+(1+2+5)x^2+(1\ 2+1\ 5+2.5)x+1\ 2\ 5=$
$=x^3+8x^2+17x+10$

4] $(x+1)(x+3)(x+4)=x^3+(1+3+4)x^2+(1\ 3+1\ 4+3.4)x+1\ 3\ 4=x^3+$
$+8x^2+19x+12$

5] $(x+1)(x+3)(x+5)=x^3+(1+3+5)x^2+(1.3+1\ 5+3.5)x+1\ 3\ 5=$
$=x^3+9x^2+23x+15$

6] $(x+1)(x+4)(x+5)=x^3+(1+4+5)x^2+(1\ 4+1\ 5+4\ 5)x+1.4\ 5=x^3+$
$+10x^2+29x+20$

7] $(x+2)(x+3)(x+4)=x^3+(2+3+4)x^2+(2\ 3+2\ 4+3\ 4)x+2\ 3\ 4=x^3+$
$+9x^2+26x+24$

8] $(x+2)(x+3)(x+5)=x^3+(2+3+5)x^2+(2\ 3+2\ 5+3\ 5)x+2\ 3\ 5=$ $=x^3+10x^2+31x+30$

9] $(x+2)(x+4)(x+5)=x^3+(2+4+5)x^2+(2\ 4+2\ 5+4\ 5)x+2\ 4\ 5=x^3+$ $+11x^2+38x+40$

10] $(x+3)(x+4)(x+5)=x^3+(3+4+5)x^2+(3\ 4+3\ 5+4\ 5)x+3\ 4\ 5=$ $=x^3+12x^2+47x+60$

B) Всевозможныхъ различныхъ соединенiй пяти двучленовъ въ произведенiя по четыре двучлена въ каждомъ существуетъ всего *пять* (№ 361 начало), для данныхъ двучленовъ они суть по общей формулѣ

$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=x^4+(a+b+c+d)x^3+(ab+ac+ad+bc+bd+ca)x^2+(abc+abd+$ $+acd+bcd)x+abcd$

1] $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=x^4+(1+2+3+4)x^3+(1\ 2+1\ 3+1\ 4+2\ 3+$ $+2\ 4+3\ 4)x^2+(1\ 2\ 3+1\ 2\ 4+1\ 3\ 4+2\ 3\ 4)x+1\ 2\ 3\ 4=x^4+10x^3+$ $+35x^2+50x+24$ (срв „Сборникъ" ч II отд XIV, § 3, № 51)

2] $(x+1)(x+2)(x+3)(x+5)=x^4+(1+2+3+5)x^3+(1\ 2+1\ 3+1\ 5+2.3+$ $+2\ 5+3\ 5)x^2+(1\ 2\ 3+1\ 2\ 5+1\ 3\ 5+2\ 3\ 5)x+1\ 2\ 3\ 5=x^4+11x^3+$ $+41x^2+61x+30$

3] $(x+1)(x+2)(x+4)(x+5)=x^4+(1+2+4+5)x^3+(1\ 2+1\ 4+1\ 5+$ $+2\ 4+2\ 5+4\ 5)x^2+(1\ 2\ 4+1\ 2\ 5+1\ 4\ 5+2\ 4\ 5)x+1\ 2\ 4\ 5=x^4+$ $+12x^3+49x^2+78x+40$

4] $(x+1)(x+3)(x+4)(x+5)=x^4+(1+3+4+5)x^3+(1\ 3+1\ 4+1\ 5+3\ 4+$ $+3\ 5+4\ 5)x^2+(1\ 3\ 4+1\ 3\ 5+1\ 4\ 5+3\ 4\ 5)x+1\ 3\ 4\ 5=x^4+$ $+13x^3+59x^2+107x+60$

5] $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)=x^4+(2+3+4+5)x^3+(2\ 3+2\ 4+2\ 5+$ $+3\ 4+3\ 5+4\ 5)x^2+(2\ 3\ 4+2\ 3\ 5+2\ 4\ 5+3\ 4\ 5)x+2\ 3\ 4\ 5=x^4+$ $+14x^3+71x^2+154x+120$

C) Произведенiе всѣхъ пяти двучленовъ $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+$ $+5)=x^5+(1+2+3+4+5)x^4+(1\ 2+1\ 3+1\ 4+1\ 5+2\ 3+2\ 4+2\ 5+$ $+3\ 4+3\ 5+4\ 5)x^3+(1\ 2\ 3+1\ 2\ 4+1\ 2\ 5+1\ 3\ 4+1\ 3\ 5+1\ 4\ 5+$ $+2\ 3\ 4+2\ 3\ 5+2\ 4\ 5+3\ 4\ 5)x^2+(1\ 2\ 3\ 4+1\ 2\ 3\ 5+1\ 2\ 4\ 5+$ $+1\ 3\ 4\ 5+2\ 3\ 4\ 5)x+1\ 2\ 3\ 4\ 5=x^5+15x^4+85x^3+225x^2+274x+120$ (См № 53 во II-й ч, „Сборника", отд XIV, § 3)

362' Принимая во вниманiе сказанное въ концѣ рѣш № 361' („выводы") заключаемъ, что произведенiя двучленовъ $y-1$, $y-2$, $y-3$, $y-4$, $y-5$ по три по четыре и всѣхъ вмѣстѣ будутъ отличаться отъ соотвѣтственныхъ произведенiй, найденныхъ въ рѣш № 362, двучленовъ $x+1$, $x+2$, $x+3$ $x+4$, $x+5$ лишь 1) замѣной x на y и 2) *знаками коэффицiентовъ членовъ четнаго порядка* (т е 2 го 4 го членовъ и т д), каковые знаки въ данномъ случаѣ будутъ „—" Принявъ это въ соображенiе будемъ имѣть

A) Произведенiя трехъ двучленовъ изъ пяти 1] $(y-1)(y-2)(y-3)=$ $=y^3-6y^2+11y-6$, 2] $(y-1)(y-2)(y-4)=y^3-7y^2+14y-8$, 3] $(y-1)(y-$ $-2)(y-5)=y^3-8y^2+17y-10$, 4] $(y-1)(y-3)(y-4)=y^3-8y^2+19y-12$, 5] $(y-1)(y-3)(y-5)=y^3-9y^2+23y-15$, 6] $(y-1)(y-4)(y-5)=y^3-10y^2+$ $+29y-20$, 7] $(y-2)(y-3)(y-4)=y^3-9y^2+26y-24$, 8] $(y-2)(y-3)(y-5)=$ $=y^3-10y^2+31y-30$ 9] $(y-2)(y-4)(y-5)=y^3-11y^2+38y-40$, 10] $(y-$ $-3)(y-4)(y-5)=y^3-12y^2+47y-60$

B) Произведенiя четырехъ двучленовъ изъ пяти 1] $(y-1)(y-2)(y-$ $-3)(y-4)=y^4-10y^3+35y^2-50y+24$ 2] $(y-1)(y-2)(y-3)(y-5)=y^4-$

$-11y^3+41y^2-61y+30$, 3] $(y-1)(y-2)(y-4)(y-5)=y^4-12y^3+49y^2-78y+40$, 4] $(y-1)(y-3)(y-4)(y-5)=y^4-13y^3+59y^2-107y+60$, 5] $(y-2)(y-3)(y-4)(y-5)=y^4-14y^3+71y^2-154y+120$

C) Произведеніе всѣхъ пяти данныхъ двучленовъ $(y-1)(y-2)(y-3)(y-4)(y-5)=y^5-15y^4+85y^3-225y^2+274y-120$

363. Данные двучлены $z-1$ $z+2$, $z-3$, $z+4$, $z-5$ можно представить въ однообразномъ видѣ *суммъ*, а именно $z+(-1)$, $z+2$, $z+(-3)$, $z+4$, $z+(-5)$,—и въ этомъ видѣ примѣнить къ перемноженію ихъ правила, выведенныя въ рѣш № 361 для двучленовъ вида $x+a$ (см рѣш № 361 „замѣч о знакахъ“ п п 2 и 3) Возьмемъ для примѣра нѣсколько произведеній *) данныхъ двучленовъ по 2, по 3, по 4 и всѣ

A) Произведенія двучленовъ по два 1] $(z-1)(z+2)=[z+(-1)](z+2)=z^2+[(-1)+2]z+(-1)\ 2=z^2+z-2$, 2] $(z+2)(z-5)=(z+2)[z+(-5)]=z^2+[2+(-5)]z+2\ (-5)=z^2-3z-10$, 3] $(z-3)(z-5)=[z+(-3)][z+(-5)]=z^2+[(-3)+(-5)]z+(-3)\ (-5)=z^2-8z+15$, и т п

B) Произведенія двучленовъ по три 1] $(z-1)(z+2)(z-3)=[z+(-1)](z+2)[z+(-3)]=z^3+[(-1)+2+(-3)]z^2+[(-1)\ 2+(-1)\ (-3)+2\ (-3)]z+(-1)\ 2\ (-3)=z^3+(-1+2-3)z^2+(-2+3-6)z+2\ 3=z^3-2z^2-5z+6$, 2] $(z-1)(z-3)(z-5)=[z+(-1)][z+(-3)][z+(-5)]=z^3+[(-1)+(-3)+(-5)]z^2+[(-1)\ (-3)+(-1)\ (-5)+(-3)\ (-5)]z+(-1)\ (-3)\ (-5)=z^3-(1+3+5)z^2+(3+5+15)z+(-1)\ 3\ 5=z^3-9z^2+23z-15$ и т п

C) Произведенія двучленовъ по четыре $(z-1)(z+2)(z-3)(z-5)=[z+(-1)](z+2)[z+(-3)][z+(-5)]=z^4+[(-1)+2+(-3)+(-5)]z^3+[(-1)\ 2+(-1)\ (-3)+(-1)\ (-5)+2\ (-3)+2\ (-5)+(-3)\ (-5)]z^2+[(-1)\ 2\ (-3)+(-1)\ 2\ (-5)+(-1)\ (-3)\ (-5)+2\ (-3)\ (-5)]z+(-1)\ 2\ (-3)\ (-5)=z^4-(1-2+3+5)z^3+(-2+3+5-6-10+15)z^2+(6+10-15+30)z-2\ 3\ 5=z^4-7z^3+5z^2+31z-30$, и т п

D) Произведеніе всѣхъ пяти двучленовъ $(z-1)(z+2)(z-3)(z+4)(z-5)=[z+(-1)](z+2)[z+(-3)](z+4)[z+(-5)]=z^5+[(-1)+2+(-3)+4+(-5)]z^4+[(-1)\ 2+(-1)\ (-3)+(-1)\ 4+(-1)\ (-5)+2\ (-3)+2\ 4+2\ (-5)+(-3)\ 4+(-3)\ (-5)+4\ (-5)]z^3+[(-1)\ 2\ (-3)+(-1)\ 2\ 4+(-1)\ 2\,.\,(-5)+(-1)\ (-3)\ 4+(-1)\ (-3)\,.\,(-5)+(-1)\ 4\ (-5)+2\ (-3)\ 4+2\ (-3)\ (-5)+2\ 4\ (-5)+(-3)\ 4\ (-5)]z^2+[(-1)\ 2\ (-3)\ 4+(-1)\,.\,2\ (-3)\,.\,(-5)+(-1)\ 2\ 4\ (-5)+(-1)\ (-3)\ 4\ (-5)+2\,.\,(-3)\ 4\ (-5)]z+(-1)\ 2\ (-3)\ 4\,.\,(-5)=z^5-(1-2+3-4+5)z^4+(-2+3-4+5-6+8-10-12+15-20)z^3+(6-8+10+12-15+20-24+30-40+60)z^2+(24-30+40-60+120)z-120=z^5-3z^4+(31-54)z^3+(138-87)z^2+(184-90)z-120=z^5-3z^4-23z^3+51z^2+94z-120$

363′ Подобно тому, какъ всякое выраженіе можно представить въ видѣ *алгебраической суммы* его можно изобразить и въ видѣ такъ наз *алгебраической разности*, такъ, двучленъ $x+a$ можетъ быть представленъ въ видѣ разности $x-(-a)$ Въ виду этого и вопросъ о перемноженіи двучленовъ $x+a$ $x+b$, $x+c$ и т д (№ 361) можно свести представивъ ихъ

*) *Всѣхъ* соединеній мы брать не будемъ во избѣжаніе излишняго балласта да и условіе не требуетъ этого

въ видѣ $x-(-a)$ $x-(-b)$. $x-(-c)$ и т д, къ перемноженію по формуламъ, выведеннымъ въ № 361′ для двучленовъ вида $y-a$ $y-b$, $y-c$ и т д

Предыдущее непосредственно примѣняется и въ данномъ случаѣ—для двучленовъ $z-1, z+2, z-3, z+4$ $z-5$, при этомъ мы возьмемъ тѣ же комбинаціи ихъ, что и въ № 363 съ цѣлью рельефнѣе показать приложеніе другого метода

A) Произведенія двучленовъ по два 1] $(z-1)(z+2)=(z-1)[z-(-2)]=z^2-[1+(-2)]z+1\cdot(-2)$ *) $=z^2-(1-2)z+(-2)=z^2+z-2$, 2] $(z+2)(z-5)=[z-(-2)](z-5)=z^2-[(-2)+5]z+(-2)\cdot 5=z^2-3z-10$, 3] $(z-3)(z-5)=z^2-(3+5)z+3\cdot 5=z^2-8z+15$

B) Произведенія двучленовъ по три 1] $(z-1)(z+2)(z-3)=(z-1)[z-(-2)](z-3)=z^3-[1+(-2)+3]z^2+[1\cdot(-2)+1\cdot 3+(-2)\cdot 3]z-1\cdot(-2)\cdot 3=z^3-(1-2+3)z^2+(-2+3-6)z+2\cdot 3=z^3-2z^2-5z+6$, 2] $(z-1)(z-3)(z-5)=$ (№ 362′, A и 5) $=z^3-9z^2+23z-15$

C) Произвед двучленовъ по четыре $(z-1)(z+2)(z-3)(z-5)=(z-1)[z-(-2)](z-3)(z-5)=z^4-[1+(-2)+3+5]z^3+[1\cdot(-2)+1\cdot 3+1\cdot 5+(-2)\cdot 3+(-2)\cdot 5+3\cdot 5]z^2-[1\cdot(-2)\cdot 3+1\cdot(-2)\cdot 5+1\cdot 3\cdot 5+(-2)\cdot 3\cdot 5]z+1\cdot(-2)\cdot 3\cdot 5=z^4-(1-2+3+5)z^3+(-2+3+5-6-10+15)z^2-(-6-10+15-30)z-30=z^4-7z^3+5z^2+31z-30$

D) Произведеніе всѣхъ пяти двучленовъ $(z-1)(z+2)(z-3)(z+4)(z-5)=(z-1)[z-(-2)](z-3)[z-(-4)](z-5)=z^5-[1+(-2)+3+(-4)+5]z^4+[1\cdot(-2)+1\cdot 3+1\cdot(-4)+1\cdot 5+(-2)\cdot 3+(-2)\cdot(-4)+(-2)\cdot 5+3\cdot(-4)+3\cdot 5+(-4)\cdot 5]z^3-[1\cdot(-2)\cdot 3+1\cdot(-2)\cdot(-4)+1\cdot(-2)\cdot 5+1\cdot 3\cdot(-4)+1\cdot 3\cdot 5+1\cdot(-4)\cdot 5+(-2)\cdot 3\cdot(-4)+(-2)\cdot 3\cdot 5+(-2)\cdot(-4)\cdot 5+3\cdot(-4)\cdot 5]z^2+[1\cdot(-2)\cdot 3\cdot(-4)+1\cdot(-2)\cdot 3\cdot 5+1\cdot(-2)\cdot(-4)\cdot 5+1\cdot 3\cdot(-4)\cdot 5+(-2)\cdot 3\cdot(-4)\cdot 5]z-1\cdot(-2)\cdot 3\cdot(-4)\cdot 5=z^5-(1-2+3-4+5)z^4+(-2+3-4+5-6+8-10-12+15-20)z^3-(-6+8-10-12+15-20+24-30+40-60)z^2+(24-30+40-60+120)z-2\cdot 3\cdot 4\cdot 5=z^5-(9-6)z^4+(31-54)z^3-(87-138)z^2+(184-90)z-120=z^5-3z^4-23z^3+51z^2+94z-120$

364 A) Произведенія данныхъ двучленовъ по два 1] $(u+2)(u-3)=(u+2)[u+(-3)]=u^2+[2+(-3)]u+2\cdot(-3)=u^2+(2-3)u-2\cdot 3=u^2-u-6$, 2] $(u-3)(u+6)=[u+(-3)](u+6)=u^2+[(-3)+6]u+(-3)\cdot 6=u^2+(6-3)u-3\cdot 6=u^2+3u-18$ 3] $(u-3)(u-5)=[u+(-3)][u+(-5)]=u^2+[(-3)+(-5)]u+(-3)\cdot(-5)=u^2-(3+5)u+3\cdot 5=u^2-8u+15$, и т п

B) Произведенія двучленовъ по три 1] $(u+2)(u-3)(u+4)=(u+2)[u+(-3)](u+4)=u^3+[2+(-3)+4]u^2+[2\cdot(-3)+2\cdot 4+(-3)\cdot 4]u+2\cdot(-3)\cdot 4=u^3+(2-3+4)u^2+(-6+8-12)u-2\cdot 3\cdot 4=u^3+3u^2-10u-24$, 2] $(u-3)(u+4)(u-5)=[u+(-3)](u+4)[u+(-5)]=u^3+[(-3)+4+(-5)]u^2+[(-3)\cdot 4+(-3)\cdot(-5)+4\cdot(-5)]u+(-3)\cdot 4\cdot(-5)=u^3-(3-4+5)u^2+(-12+15-20)u+3\cdot 4\cdot 5=u^3-4u^2-17u+60$, 3] $(u+4)(u-5)(u+6)=(u+4)[u+(-5)](u+6)=u^3+[4+(-5)+6]u^2+[4\cdot(-5)+4\cdot 6+(-5)\cdot 6]u+4\cdot(-5)\cdot 6=u^3+(4-5+6)u^2+(-20+24-30)u-4\cdot 5\cdot 6=u^3+5u^2-26u-120$, и т п

C) По четыре $(u+2)(u-3)(u+4)(u-5)=(u+2)[u+(-3)](u+4)[u+(-5)]=u^4+[2+(-3)+4+(-5)]u^3+[2\cdot(-3)+2\cdot 4+2\cdot(-5)+(-3)\cdot 4+(-3)\cdot(-5)+4\cdot(-5)]u^2+[2\cdot(-3)\cdot 4+2\cdot(-3)\cdot(-5)+2\cdot 4\cdot(-5)+(-3)\cdot 4$

*) По формулѣ $(z-a)(z-b)=z^2-(a+b)z+ab$

$(-5)]u+2\cdot(-3)\cdot4\cdot(-5)=u^4-2u^3+(-6+8-10-12+15-20)u^2+(-24+30-40+60)u+120=u^4-2u^3-25u^2+26u+120$ И т п

364′ A) Произведенія по два 1] $(u+2)(u-3)=[u-(-2)](u-3)=u^2-[(-2)+3]u+(-2)\cdot3=u^2-(3-2)u-2\cdot3=u^2-u-6$ 2] $(u-3)(u+6)=(u-3)[u-(-6)]=u^2-[3+(-6)]u+3\cdot(-6)=u^2-(3-6)u-3\cdot6=u^2+3u-18$, 3] $(u+2)(u+4)=[u-(-2)][u-(-4)]=u^2-[(-2)+(-4)]u+(-2)\cdot(-4)=u^2-(-2-4)u+2\cdot4=u^2+6u+8$, и т п

B) Произведенія по три 1] $(u+2)(u-3)(u+4)=[u-(-2)](u-3)[u-(-4)]=u^3-[(-2)+3+(-4)]u^2+[(-2)\cdot3+(-2)\cdot(-4)+3\cdot(-4)]u-(-2)\cdot3\cdot(-4)=u^3-(-2+3-4)u^2+(-6+8-12)u-2\cdot3\cdot4=u^3+3u^2-10u-24$, 2] $(u-3)(u+4)(u-5)=(u-3)[u-(-4)](u-5)=u^3-[3+(-4)+5]u^2+[3\cdot(-4)+3\cdot5+(-4)\cdot5]u-3\cdot(-4)\cdot5=u^3-(3-4+5)u^2+(-12+15-20)u+3\cdot4\cdot5=u^3-4u^2-17u+60$, 3] $(u+4)(u-5)(u+6)=[u-(-4)](u-5)[u-(-6)]=u^3-[(-4)+5+(-6)]u^2+[(-4)\cdot5+(-4)\cdot(-6)+5\cdot(-6)]u-(-4)\cdot5\cdot(-6)=u^3-(-4+5-6)u^2+(-20+24-30)u-4\cdot5\cdot6=u^3+5u^2-26u-120$ и т п

C) По четыре $(u+2)(u-3)(u+4)(u-5)=[u-(-2)](u-3)[u-(-4)](u-5)=u^4-[(-2)+3+(-4)+5]u^3+[(-2)\cdot3+(-2)\cdot(-4)+(-2)\cdot5+3\cdot(-4)+3\cdot5+(-4)\cdot5]u^2-[(-2)\cdot3\cdot(-4)+(-2)\cdot3\cdot5+(-2)\cdot(-4)\cdot5+3\cdot(-4)\cdot5]u+(-2)\cdot3\cdot(-4)\cdot5=u^4-(-2+3-4+5)u^3+(-6+8-10-12+15-20)u^2-(24-30+40-60)u+2\cdot3\cdot4\cdot5=u^4-2u^3-25u^2+26u+120$ И т п

365 1]

$$\begin{array}{lrrl|l}
 & x^2+ & Ax+ & B & x+a \\
 & \pm\, x^2 \pm & ax & & x+(A-a) \quad \text{частное} \\
\hline
\text{I-ый остатокъ} & & (A-a)x+ & B & \\
 & & \pm(A-a)x & \pm(A-a)a & \\
\hline
\text{2-ой остатокъ} & & & B-(A-a)a=a^2-Aa+B &
\end{array}$$

Т к 2-ой остатокъ не содержитъ буквы x, которая есть въ дѣлителѣ то, прекративъ дальнѣйшее дѣйствіе дѣленія, заключаемъ, что послѣднее нацѣло не совершается Остатокъ расположенъ по убывающимъ степенямъ буквы a

2]

$$\begin{array}{lrrrl|l}
 & x^3+ & Ax^2+ & Bx+C & & x+a \\
 & \pm\, x^3 \pm & ax^2 & & & x^2+(A-a)x+(a^2-Aa+B) \\
\hline
 & & (A-a)x^2+ & Bx+C & \text{. . . I-ый остатокъ} & \\
 & & \pm(A-a)x^2 & \pm(A-a)ax & & \\
\hline
 & & & [B-(A-a)a]x+C=(a^2-Aa+B)x+C & \text{2-ой остатокъ.} & \\
 & & & \pm(a^2-Aa+B)x & \pm(a^2-Aa+B)a & \\
\hline
 & & & & C-(a^2-Aa+B)a= & \\
\text{3-ій остатокъ} & & & & =-a^3+Aa^2-Ba+C &
\end{array}$$

3] $x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+D \,|\, \underline{x+a}$

$\quad \text{»} \mp ax^3 \qquad\qquad x^3+(A-a)x^2+(a^2-Aa+B)x-(a^3-Aa^2+Ba-C)$

$(A-a)x^3+Bx^2+Cx+D$ 1-ый остатокъ

$\text{»} \mp(A-a)ax^2$

$[B-(A-a)a]x^2+Cx+D=$

$=(a^2-Aa+B)x^2+Cx+D$. 2-ой остатокъ

$\text{»} \mp(a^2-Aa+B)ax$

$[C-(a^2-Aa+B)a]\,x+D=$

$=-(a^3-Aa^2+Ba-C)x+D$ 3-ій остатокъ

$\text{»} \pm(a^3-Aa^2+Ba-C)a$

$D+(a^3-Aa^2+Ba-C)a=$

4-ый остатокъ $=a^4-Aa^3+Ba^2-Ca+D$

Выводы Сдѣлавъ небольшія преобразованія въ частныхъ, полученныхъ во всѣхъ 3-хъ случаяхъ дѣленія, представимъ результаты послѣдняго въ таблицѣ, для наглядности

Дѣлимое	Дѣлитель	Частное	Остатокъ
x^2+Ax+B	$x+a$	$x-(a-A)$	a^2-Aa+B
x^3+Ax^2+Bx+C	$x+a$	$x^2-(a-A)x+(a^2-Aa+B)$	$-a^3+Aa^2-Ba+C$
$x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+D$	$x+a$	$x^3-(a-A)x^2+(a^2-Aa+$ $+B)x-(a^3-Aa^2+Ba-C)$	$a^4-Aa^3+Ba^2-$ $-Ca+D$

Дѣлимыми служили правильно расположенные по убывающимъ степенямъ буквы x многочлены 2-ой, 3-ей и 4-ой степени съ коэффицентами A, B, C D, слѣдовавшими при членахъ многочленовъ въ указанномъ порядкѣ, начиная со второго члена, коэффицентъ перваго$=1$, дѣлитель былъ одинъ и тотъ же двучленъ $x+a$, разсматривая же полученныя соотвѣтственно въ каждомъ случаѣ частныя и остатки, замѣчаемъ въ нихъ строеніи извѣстную правильность, закономѣрность Все это позволяетъ сдѣлать общіе выводы, *по аналогіи*, о дѣлимости многочлена вида

$$x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+Cx^{n-3}+\ \dots\ +Ux+V$$

на двучленъ $x+a$, о получающемся при этомъ частномъ и объ остаткѣ

1] *Частное* *a*) Въ частномъ получается правильно расположенный многочленъ по убывающимъ степенямъ главной буквы x при чемъ степень этого многочлена *) на 1-цу менѣе степени многочлена—дѣлимаго *b*) Коэффиценты многочлена—частнаго при высшемъ членѣ (первомъ)$=$ $=1$, при послѣдующихъ, начиная со второго, суть соотвѣтственно (по абсолютной величинѣ, т е безъ знака) многочлены, правильно расположенные относительно буквы a (2-ой членъ дѣлителя) съ мѣняющимися знаками

*) Напомнимъ кстати, что *на степень правильно расположеннаго многочлена указываетъ показатель степени главной буквы у высшаго его члена* напр., многочленъ $a^2x^5+bx^4+c^3x^3+d^3x^2+e^2x+f$ будетъ 5-ой степени (при главной буквѣ x)

$$a-\mathrm{A},\ a^2-\mathrm{A}a+\mathrm{B},\ a^3-\mathrm{A}a^2+\mathrm{B}a-\mathrm{C}\ \text{и т д}$$

гдѣ A, B, C и т д —соотвѣтственно коэффицiенты 2-го, 3 го, 4-го и т д членовъ дѣлимаго *c*) Знаки членовъ частнаго—перемѣнные всѣ нечетные члены, начиная съ перваго, положительны, всѣ четные—отрицательны

2] *Остатокъ* Онъ представляетъ собою выраженiе, получающееся отъ замѣны въ дѣлимомъ главной буквы x черезъ $-a$ т е черезъ отрицательный второй членъ двучлена — дѣлителя $x+a$ дѣйствительно имѣемъ $x^2+\mathrm{A}x+\mathrm{B}=_{(\text{при } x=-a)}=(-a)^2+\mathrm{A}\ (-a)+\mathrm{B}=(-a)(-a)-\mathrm{A}a+\mathrm{B}=a^2-\mathrm{A}a+\mathrm{B}$ $x^3+\mathrm{A}x^2+\mathrm{B}x+\mathrm{C}=_{(\text{при } x=-a)}=(-a)^3+\mathrm{A}\ (-a)^2+\mathrm{B}\ (-a)+\mathrm{C}=(-a)(-a)(-a)+\mathrm{A}\ (-a)(-a)-\mathrm{B}a+\mathrm{C}=-a^3+\mathrm{A}a^2-\mathrm{B}a+\mathrm{C}$, наконецъ $[x^4+\mathrm{A}x^3+\mathrm{B}x^2+\mathrm{C}x+\mathrm{D}]_{x=-a}=(-a)^4+\mathrm{A}\ (-a)^3+\mathrm{B}\ (-a)^2+\mathrm{C}\ (-a)+\mathrm{D}=a^4-\mathrm{A}a^3+\mathrm{B}a^2-\mathrm{C}a+\mathrm{D}$

3] *Признакъ дѣлимости* Для того чтобы дѣленiе совершилось нацѣло, необходимо и достаточно, чтобы остатокъ (послѣднiй) былъ$=0$ Слѣд данные многочлены $x^2+\mathrm{A}x+\mathrm{B}$, $x^3+\mathrm{A}x^2+\mathrm{B}x+\mathrm{C}$ $x^4+\mathrm{A}x^3+\mathrm{B}x^2+\mathrm{C}x+\mathrm{D}$ тогда раздѣлятся нацѣло на двучленъ $x+a$, если вышенайденные остатки будутъ$=0$, т е если

$$a^2-\mathrm{A}a+\mathrm{B}=0\quad -a^3+\mathrm{A}a^2-\mathrm{B}a+\mathrm{C}=0,\ a^4-\mathrm{A}a^3+\mathrm{B}a^2-\mathrm{C}a+\mathrm{D}=0$$

Но, какъ мы видѣли выше (п 2), эти остатки суть результаты подстановки $x=-a$ въ данные для дѣленiя многочлены, отсюда вытекаетъ слѣдующая весьма важная истина *если многочленъ*, подобный даннымъ, т е вида $x^n+\mathrm{A}x^{n-1}+\mathrm{B}x^{n-2}+\mathrm{C}x^{n-3}+\ \ldots\ +\mathrm{U}x+\mathrm{V}$, правильно расположенный по степенямъ главной буквы x, *обращается въ нуль при нѣкоторомъ частномъ значенiи—a главной буквы x*, т е при $x=-a$, *то онъ нацѣло дѣлится на двучленъ $x+a$* т к остатокъ оказывается$=0$

Замѣчанiя 1°. Послѣднее предложенiе остается вѣрнымъ вообще *для всякаго многочлена* содержащаго x обнаруживая его дѣлимость на двучленъ $x+a$ **2°** Это свойство доставляетъ большiя выгоды въ примѣненiи къ *разложенiю на простыхъ множителей* многочленовъ высокихъ степеней ($>$ 2-ой степени) Срв теорiю передъ рѣш № 81

365′ 1]

$$\begin{array}{r|l}
y^2+\ \ \mathrm{A}y+\ \ \mathrm{B} & y-a \\ \hline
\mp\ \ ay\qquad\qquad & y+(a+\mathrm{A})\ \ \text{частное} \\
\text{I остатокъ}\quad (a+\mathrm{A})y+\ \ \mathrm{B} & \\
\mp(a+\mathrm{A})a & \\
\text{II остатокъ}\quad (a+\mathrm{A})a+\mathrm{B}=a^2+\mathrm{A}a+\mathrm{B} &
\end{array}$$

2]

$$\begin{array}{r|l}
y^3+\ \ \mathrm{A}y^2+\ \ \mathrm{B}y+\mathrm{C} & y-a \\ \hline
\mp\ \ ay^2\qquad\qquad\qquad & y^2+(a+\mathrm{A})y+(a^2+\mathrm{A}a+\mathrm{B}) \\
(a+\mathrm{A})y^2+\ \ \mathrm{B}y+\mathrm{C} & \text{I остатокъ} \\
\mp(a+\mathrm{A})ay\qquad & \\
[(a+\mathrm{A})a+\mathrm{B}]y+\mathrm{C}=(a^2+\mathrm{A}a+\mathrm{B})y+\mathrm{C} & \text{II остатокъ} \\
\mp(a^2+\mathrm{A}a+\mathrm{B})a & \\
(a^2+\mathrm{A}a+\mathrm{B})a+\mathrm{C}= & \\
\text{III остатокъ}\quad =a^3+\mathrm{A}a^2+\mathrm{B}a+\mathrm{C} &
\end{array}$$

3] $y^4+Ay^3+\quad By^2+Cy+D \;|\; y-a$

$\quad\quad y^3+(a+A)y^2+(a^2+Aa+B)y+(a^3+Aa^2+Ba+C)$

$\quad » \pm ay^3$

$(a+A)y^3+\quad By^2+Cy+D$ I остатокъ

$\quad » \pm(a+A)ay^2$

$[(a+A)a+B]y^2+Cy+D=$

$=(a^2+Aa+B)y^2+Cy+D$ II остатокъ

$\quad » \pm(a^2+Aa+B)ay$

$[(a^2+Aa+B)a+C]y+D=$

$=(a^3+Aa^2+Ba+C)y+D$ III остатокъ

$\quad » \pm(a^3+Aa^2+Ba+C)a$

$(a^3+Aa^2+Ba+C)a+D=$

IV остатокъ $=a^4+Aa^3+Ba^2+Ca+D$

Выводы Составимъ прежде всего наглядную таблицу полученныхъ выше результатовъ

Дѣлимое	Дѣлитель	Частное	Остатокъ
y^2+Ay+B	$y-a$	$y+(a+A)$	a^2+Aa+B
y^3+Ay^2+By+C	$y-a$	$y^2+(a+A)y+(a^2+$ $+Aa+B)$	a^3+Aa^2+Ba+C
$y^4+Ay^3+By^2+Cy+D$	$y-a$	$y^3+(a+A)y^2+(a^2+$ $+Aa+B)y+(a^3+$ $+Aa^2+Ba+C)$	$a^4+Aa^3+Ba^2+$ $+Ca+D$

Эта таблица показываетъ, что результаты дѣленія многочленовъ, подобныхъ даннымъ, т е вида $y^n+Ay^{n-1}+By^{n-2}+Cy^{n-3}+\quad +Uy+V$, — на двучленъ $y-a$ вполнѣ подобны результатамъ дѣленія многочленовъ, приведенныхъ въ № 365, т е вида $x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+\quad +Ux+V$, — на двучленъ $x+a$, — за слѣдующими двумя оговорками 1) съ замѣной буквы x на y и 2) съ измѣненіемъ *правила знаковъ* въ случаѣ, если двучленъ — дѣлитель есть разность вида $y-a$ (или $x-a$), т е разность главной буквы дѣлимаго и нѣкотораго количества a, — то всѣ члены и частнаго и остатка — положительны Так образ результаты могутъ быть резюмированы такъ

1] *Частное* при дѣленіи многочлена вида $y^n+Ay^{n-1}+By^{n-2}+Cy^{n-3}+Dy^{n-4}+\quad +Uy+V$ на двучленъ $y-a$ составляется такъ же какъ и въ случаѣ его дѣленія на двучленъ $y+a$ (№ 365), съ тою лишь разницею, что знаки всѣхъ членовъ частнаго «+», а коэффиціенты перваго (высшаго), 2-го, 3-го 4-го и т д членовъ суть соотвѣтственно

1, $a+A$, a^2+Aa+B, a^3+Aa^2+Ba+C, и т д

2] *Остатокъ* представляетъ собою выраженіе, являющееся такъ сказать, *численной величиной* многочлена — дѣлимаго при $y=a$ т е при значеніи главной буквы, равномъ второму члену двучлена — дѣлителя $y-a$ по абсолютной величинѣ И въ самомъ дѣлѣ ясно, что остатокъ $a^2+Aa+B=[y^2+Ay+B]_{y=a}$,

» $a^3+Aa^2+Ba+C=[y^3+Ay^2+By+C]_{y=a}$,

» $a^4+Aa^3+Ba^2+Ca+D=[y^4+Ay^3+By^2+Cy+D]_{y=a}$

3] *Признакъ дѣлимости* Для того чтобы дѣленіе совершилось безъ остатка, необходимо чтобы въ первомъ изъ данныхъ случаевъ остатокъ $a^2+Aa+B=0$, во второмъ—остатокъ $a^3+Aa^2+Ba+C=0$, въ третьемъ — остатокъ $a^4+Aa^3+Ba^2+Ca+D=0$ и т д Сопоставляя это условіе съ природой остатковъ, выясненной въ пунктѣ 2-мъ, выводимъ слѣдующій весьма важный признакъ дѣлимости *если многочленъ вида* $y^n+Ay^{n-1}+$ $+By^{n-2}+$ $+Uy+V$ т е подобный даннымъ и въ № 365, *обращается въ нуль при нѣкоторомъ числовомъ значеніи а главной буквы у* т е при $y=+a$, *то онъ нацѣло дѣлится на двучленъ у—а,* т к остатокъ оказывается равнымъ 0, на основаніи вышеизложеннаго «Замѣчанія» въ концѣ рѣш № 365 справедливы и для настоящаго случая дѣлимости на двучленъ—разность

Замѣчаніе Въ №№ 365 и 365' разсматривались многочлены x^2+Ax+B, x^3+Ax^2+ $+Bx+C$ y^2+Ay+B y^3+Ay^2+By+C и т д представленные въ видѣ суммъ Но коэффиценты А В С и т д при различныхъ степеняхъ главной буквы (x или y) могутъ быть въ частномъ случаѣ и отрицательными (всѣ или нѣкоторые) выводы же, сдѣланные въ рѣшеніяхъ этихъ №№-овъ, имѣютъ совершенно общій характеръ вслѣдствіе чего они дѣйствительны и для многочленовъ, подобныхъ даннымъ но съ разными знаками коэффиціентовъ, каковы напр многочлены въ №№ 366 , 367 и др —Иногда нѣкоторые изъ этихъ коэффицентовъ А, В С и т д могутъ даже быть равными нулю какъ въ №№ 369, 369 и др

366 Каждый изъ данныхъ многочленовъ раздѣлимъ на каждый изъ данныхъ двучленовъ, примѣняя выводы (удобнѣе всего—по таблицѣ), сдѣланные въ рѣш № 365

А] Дѣленіе многочлена $x^3+6x^2+11x+6$ на данные двучлены $x+1$, $x+2$ $x+3$, $x+4$ и $x+5$ Сопоставляя эти данныя съ обозначеніями № 365, видимъ, что въ этомъ случаѣ коэффиціенты многочлена x^3+Ax^2+ $+Bx+C$ приняли слѣдующія частныя значенія $A=6$, $B=11$, $C=A=6$, второй же членъ a дѣлителя $x+a$ получилъ значенія 1, 2, 3, 4, 5 Для каждаго значенія a будетъ особое частное и остатокъ 1] Дѣленіе $(x^3+$ $+6x^2+11x+6)$ $(x+1)$, частное $=x^2-(1-6)x+(1^2-6\cdot 1+11)=x^2+5x+$ $+6$, остатокъ$=-1^3+6\cdot 1^2-11\cdot 1+6=-1+6-11+6=0$, т е дѣленіе *нацѣло* 2] Дѣленіе $(x^3+6x^2+11x+6)$ $(x+2)$, частное$=x^2-(2-6)x+(2^2-$ $-6\cdot 2+11)=x^2+4x+3$ остатокъ$=-2^3+6\cdot 2^2-11\cdot 2+6=-8+24-22+6=$ $=0$, т е дѣленіе *нацѣло* 3] Дѣленіе $(x^3+6x^2+11x+6)$ $(x+3)$, частное$=$ $=x^2-(3-6)x+(3^2-6\cdot 3+11)=x^2+3x+2$, остатокъ$=-3^3+6\cdot 3^2-11\cdot$ $3+6=-27+54-33+6=0$ т е дѣленіе *нацѣло* 4] Дѣленіе $(x^3+6x^2+$ $+11x+6)$ $(x+4)$ частное $=x^2-(4-6)x+(4^2-6\cdot 4+11)=x^2+2x+3$, остатокъ$=-4^3+6\cdot 4^2-11\cdot 4+6=-64+96-44+6=-6$, такъ что $x^3+6x^2+11x+6=(x+4)(x^2+2x+3)-6$ 5] Дѣленіе $(x^3+6x^2+11x+6)$ $(x+5)$, частное$=x^2-(5-6)x+(5^2-6\cdot 5+11)=x^2+x+6$, остатокъ$=$ $=-5^3+6\cdot 5^2-11\cdot 5+6=-125+150-55+6=-24$, такъ что x^3+6x^2+ $+11x+6=(x+5)(x^2+x+6)-24$

В] Результаты дѣленія многочлена $x^3+9x^2+26x+24$ на данные двучлены помѣщаемъ въ систематической таблицѣ

Дѣлимое—многочленъ $x^3+9x^2+26x+24$, $A=9$ $B=26$, $C=24$			
Дѣлитель	a	Частное $x^2-(a-A)x+(a^2-Aa+B)$	Остатокъ $-a^3+Aa^2-Ba+C$
$x+1$	1	$x^2-(1-9)x+(1^2-9\cdot1+26)=$ $=x^2+8x+18$	$-1^3+9\cdot1^2-26\cdot1+24=$ $=33-27=6$
$x+2$	2	$x^2-(2-9)x+(2^2-9\cdot2+26)=x^2+7x+12$	$-2^3+9\cdot2^2-26\cdot2+24=$ $=60-60=0$
$x+3$	3	$x^2-(3-9)x+(3^2-9\cdot3+26)=x^2+6x+8$	$-3^3+9\cdot3^2-26\cdot3+24=$ $=105-105=0$
$x+4$	4	$x^2-(4-9)x+(4^2-9\cdot4+26)=x^2+5x+6$	$-4^3+9\cdot4^2-26\cdot4+24=$ $=168-168=0$
$x+5$	5	$x^2-(5-9)x+(5^2-9\cdot5+26)=x^2+4x+6$	$-5^3+9\cdot5^2-26\cdot5+24=$ $=249-255=-6$

Таблица показываетъ что въ трехъ случаяхъ дѣленіе даннаго многочлена совершается *нацѣло*

C) Наконецъ, дѣленіе послѣдняго изъ данныхъ многочленовъ на двучлены, результаты—въ таблицѣ

Дѣлимое—многочленъ $x^3+12x^2+47x+60$, $A=12$, $B=47$, $C=60$		
Дѣлит $x+a$	Частное $x^2-(a-A)x+(a^2-Aa+B)$	Остатокъ $-a^3+Aa^2-Ba+C$
$x+1$	$x^2-(1-12)x+(1^2-12\cdot1+47)=$ $=x^2+11x+36$	$-1^3+12\cdot1^2-47\cdot1+60=72-$ $-48=24$
$x+2$	$x^2-(2-12)x+(2^2-12\cdot2+47)=$ $=x^2+10x+27$	$-2^3+12\cdot2^2-47\cdot2+60=108-$ $-102=6$
$x+3$	$x^2-(3-12)x+(3^2-12\cdot3+47)=$ $=x^2+9x+20$	$-3^3+12\cdot3^2-47\cdot3+60=168-$ $-168=0$
$x+4$	$x^2-(4-12)x+(4^2-12\cdot4+47)=$ $=x^2+8x+15$	$-4^3+12\cdot4^2-47\cdot4+60=252-$ $-252=0$
$x+5$	$x^2-(5-12)x+(5^2-12\cdot5+47)=$ $=x^2+7x+12$	$-5^3+12\cdot5^2-47\cdot5+60=360-$ $-360=0$

Такъ образ., и въ этомъ случаѣ 3 раза дѣленіе совершилось *нацѣло*

366' Вычисленіе частнаго и остатка для каждаго изъ 15-ти дѣленій (3 многочлена на 5 двучленовъ) производимъ на основаніи выводовъ и по формуламъ, приведеннымъ въ таблицѣ, при рѣш № 365' См также «замѣчаніе» къ рѣш № 365 Результаты—въ трехъ таблицахъ соотвѣтственно тремъ даннымъ многочленамъ

Дѣлимое—многочленъ $y^3-6y^2+11y-6$, $A=-6$, $B=11$, $C=-6$			
Дѣлитель	a	Частное $y^2+(a+A)y+(a^2+Aa+B)$	Остатокъ a^3+Aa^2+Ba+C
$y-1$	1	$y^2+[1+(-6)]y+[1^2+(-6)\ 1+11]=y^2+(1-6)y+(1^2-6\ 1+11)=y^2-5y+6$	$1^3+(-6)\ 1^2+11\ 6+(-6)=1^3-6\ 1^2+11\ 1-6=12-12=0$
$y-2$	2	$y^2+(2-6)y+(2^2-6\ 2+11)=y^2-4y+3$	$2^3-6\ 2^2+11\ 2-6=30-30=0$
$y-3$	3	$y^2+(3-6)y+(3^2-6\ 3+11)=y^2-3y+2$	$3^3-6\ 3^2+11\ 3-6=60-60=0$
$y-4$	4	$y^2+(4-6)y+(4^2-6\ 4+11)=y^2-2y+3$	$4^3-6\ 4^2+11\ 4-6=108-102=6$
$y-5$	5	$y^2+(5-6)y+(5^2-6\ 5+11)=y^2-y+6$	$5^3-6\ 5^2+11\ 5-6=180-156=24$

Таблица показываетъ, что въ трехъ (первыхъ) случаяхъ дѣленіе совершилось *нацѣло*

Дѣлимое—многочленъ $y^3-9y^2+26y-24$, $A=-9$ $B=26$ $C=-24$, $a=1, 2, 3, 4\ 5$		
Дѣлит $y-a$	Частное $y^2+(a+A)y+(a^2+Aa+B)$	Остатокъ a^3+Aa^2+Ba+C
$y-1$	$y^2+[1+(-9)]y+[1^2+(-9)\ 1+26]=y^2+(1-9)y+(1^2-9\ 1+26)=y^2-8y+18$	$1^3+(-9)\ 1^2+26\ 1+(-24)=1^3-9\ 1^2+26\ 1-24=27-33=-6$
$y-2$	$y^2+(2-9)y+(2^2-9\ 2+26)=y^2-7y+12$	$2^3-9\ 2^2+26\ 2-24=60-60=0$
$y-3$	$y^2+(3-9)y+(3^2-9\ 3+26)=y^2-6y+8$	$3^3-9\ 3^2+26\ 3-24=105-105=0$
$y-4$	$y^2+(4-9)y+(4^2-9\ 4+26)=y^2-5y+6$	$4^3-9\ 4^2+26\ 4-24=168-168=0$
$y-5$	$y^2+(5-9)y+(5^2-9\ 5+26)=y^2-4y+6$	$5^3-9\ 5^2+26\ 5-24=255-249=6$

Так образ, 3 раза дѣленіе разсматриваемаго многочлена произошло *нацѣло*

Дѣлимое—многочленъ $y^3-12y^2+47y-60$, $A=-12$, $B=47$, $C=-60$, $a=1, 2, 3, 4, 5$		
Дѣлит. $y-a$	Частное $y^2+(a+A)y+(a^2+Aa+B)$	Остатокъ a^3+Aa^2+Ba+C
$y-1$	$y^2+[1+(-12)]y+[1^2+(-12)\cdot 1+47]=y^2+(1-12)y+(1^2-12\cdot 1+47)=y^2-11y+36$	$1^3+(-12)\cdot 1^2+47\cdot 1+(-60)==1^3-12\cdot 1^2+47\cdot 1-60=48-72=-24$
$y-2$	$y^2+(2-12)y+(2^2-12\cdot 2+47)==y^2-10y+27$	$2^3-12\cdot 2^2+47\cdot 2-60=102-108=-6$
$y-3$	$y^2+(3-12)y+(3^2-12\cdot 3+47)==y^2-9y+20$	$3^3-12\cdot 3^2+47\cdot 3-60=168-168=0$
$y-4$	$y^2+(4-12)y+(4^2-12\cdot 4+47)==y^2-8y+15$	$4^3-12\cdot 4^2+47\cdot 4-60=252-252=0$
$y-5$	$y^2+(5-12)y+(5^2-12\cdot 5+47)==y^2-7y+12$	$5^3-12\cdot 5^2+47\cdot 5-60=360-360=0$

И для этого многочлена въ трехъ случаяхъ дѣленіе совершилось *нацѣло*.

367. Каждый изъ трехъ многочленовъ z^3-2z^2-5z+6, $z^3+3z^2-10z-24$, $z^3-4z^2-17z+60$ будемъ дѣлить (точнѣе—вычислять частное и остатокъ отъ дѣленія) на каждый изъ данныхъ двучленовъ $z-1$, $z+2$, $z-3$, $z+4$, $z-5$ по вышенайденнымъ правиламъ. При этомъ, когда дѣлителями будутъ двучлены $z-1$, $z-3$ и $z-5$, то при составленіи частнаго намъ понадобятся формулы таблицы въ рѣш. № 365′, когда же дѣлителями явятся двучлены $z+2$ и $z+4$, то будемъ примѣнять формулы таблицы въ рѣш. № 365 (какъ соотвѣтственно въ рѣш. №№ 366 и 366). Результаты въ таблицахъ *)

Дѣлимое—многочленъ z^3-2z^2-5z+6, $A=-2$, $B=-5$, $C=6$			
Дѣлит. $z\mp a$	a	Частное $z^2\pm(a\pm A)z+(a^2\pm Aa+B)$	Остатокъ $\pm a^3+Aa^2\pm Ba+C$
$z-1$	1	$z^2+[1+(-2)]z+[1^2+(-2)\cdot 1+(-5)]=z^2+(1-2)z+(1^2-2\cdot 1-5)=z^2-z-6$	$1^3+(-2)\cdot 1^2+(-5)\cdot 1+6=1^3-2\cdot 1^2-5\cdot 1+6=0$
$z-3$	3	$z^2+(3-2)z+(3^2-2\cdot 3-5)==z^2+z-2$	$3^3-2\cdot 3^2-5\cdot 3+6=0$
$z-5$	5	$z^2+(5-2)z+(5^2-2\cdot 5-5)==z^2+3z+10$	$5^3-2\cdot 5^2-5\cdot 5+6=56$
$z+2$	2	$z^2-[2-(-2)]z+[2^2-(-2)\cdot 2+(-5)]==z^2-(2+2)z+(2^2+2\cdot 2-5)=z^2-4z+3$	$-2^3+(-2)\cdot 2^2-(-5)\cdot 2+6==-2^3-2\cdot 2^2+5\cdot 2+6=0$
$z+4$	4	$z^2-(4+2)z+(4^2+2\cdot 4-5)==z^2-6z+19$	$-4^3-2\cdot 4^2+5\cdot 4+6==-70$

*) Легко понять, что формулы какъ № 365, такъ и № 365′ одинаково возможно примѣнить, когда дѣлителемъ является двучленъ вида $x+a$ или вида $x-a$. Дѣйствительно, для примѣненія къ первому случаю формулъ № 365 достаточно представить двучлена дѣлителя въ видѣ $x-(-a)$, а для примѣненія ко второму случаю формулъ № 365 - представить дѣлителя въ видѣ $x+(-a)$, въ обоихъ случаяхъ въ формулы войдетъ «$-a$».

Въ трехъ случаяхъ дѣленіе произошло "нацѣло," равно какъ и при другихъ данныхъ многочленахъ (см ниже таблицы)

Дѣлимое—многочленъ $z^3+3z^2-10z-24$ A=3, B=−10, C=−24			
Дѣлит $z\mp a$	a	Частное $z^2\pm(a\pm A)z+(a^2\pm Aa+B)$	Остатокъ $\pm a^3+Aa^2\pm Ba+C$
$z-1$	1	$z^2+(1+3)z+[1^2+3\cdot1+(-10)]=z^2+(1+3)z+(1^2+3\cdot1-10)=z^2+4z-6$	$1^3+3\cdot1^2+(-10)\cdot1+(-24)=1^3+3\cdot1^2-10\cdot1-24=-30$
$z-3$	3	$z^2+(3+3)z+(3^2+3\cdot3-10)=z^2+6z+8$	$3^3+3\cdot3^2-10\cdot3-24=0$
$z-5$	5	$z^2+(5+3)z+(5^2+3\cdot5-10)=z^2+8z+30$	$5^3+3\cdot5^2-10\cdot5-24=126$
$z+2$	2	$z^2-(2-3)z+[2^2-3\cdot2+(-10)]=z^2-(2-3)z+(2^2-3\cdot2-10)=z^2+z-12$	$-2^3+3\cdot2^2-(-10)\cdot2+(-24)=-2^3+3\cdot2^2+10\cdot2-24=0$
$z+4$	4	$z^2-(4-3)z+(4^2-3\cdot4-10)=z^2-z-6$	$-4^3+3\cdot4^2+10\cdot4-24=0$

Дѣлимое $z^3-4z^2-17z+60$, A=−4, B=−17, C=60, a=1, 3, 5, 2, 4		
Дѣлит	Частное	Остатокъ
$z-1$	$z^2+[1+(-4)]z+[1^2+(-4)\cdot1+(-17)]=z^2+(1-4)z+(1^2-4\cdot1-17)=z^2-3z-20$	$1^3+(-4)\cdot1^2+(-17)\cdot1+60=1^3-4\cdot1^2-17\cdot1+60=40$
$z-3$	$z^2+(3-4)z+(3^2-4\cdot3-17)=z^2-z-20$	$3^3-4\cdot3^2-17\cdot3+60=0$
$z-5$	$z^2+(5-4)z+(5^2-4\cdot5-17)=z^2+z-12$	$5^3-4\cdot5^2-17\cdot5+60=0$
$z+2$	$z^2-[2-(-4)]z+[2^2-(-4)\cdot2+(-17)]=z^2-(2+4)z+(2^2+4\cdot2-17)=z^2-6z-5$	$-2^3+(-4)\cdot2^2-(-17)\cdot2+60=-2^3-4\cdot2^2+17\cdot2+60=94-24=70$
$z+4$	$z^2-(4+4)z+(4^2+4\cdot4-17)=z^2-8z+15$	$-4^3-4\cdot4^2+17\cdot4+60=128-128=0$

367′ Срв рѣш № 367 (разница въ знакахъ)

Дѣлимое—многочленъ u^3+2u^2-5u-6, A=2, B=−5, C=−6			
Дѣлит $u\pm a$	a	Частное $u^2\mp(a\mp A)u+(a^2\mp Aa+B)$	Остатокъ $\mp a^3+Aa^2\mp Ba+C$
$u+1$	1	$u^2-(1-2)u+[1^2-2\cdot1+(-5)]=u^2-(1-2)u+(1^2-2\cdot1-5)=u^2+u-6$	$-1^3+2\cdot1^2-(-5)\cdot1+(-6)=-1^3+2\cdot1^2+5\cdot1-6=0$
$u+3$	3	$u^2-(3-2)u+(3^2-2\cdot3-5)=u^2-u-2$	$-3^3+2\cdot3^2+5\cdot3-6=0$
$u+5$	5	$u^2-(5-2)u+(5^2-2\cdot5-5)=u^2-3u+10$	$-5^3+2\cdot5^2+5\cdot5-6=-56$
$u-2$	2	$u^2+(2+2)u+[2^2+2\cdot2+(-5)]=u^2+(2+2)u+(2^2+2\cdot2-5)=u^2+4u+3$	$2^3+2\cdot2^2+(-5)\cdot2+(-6)=2^3+2\cdot2^2-5\cdot2-6=0$
$u-4$	4	$u^2+(4+2)u+(4^2+2\cdot4-5)=u^2+6u+19$	$4^3+2\cdot4^2-5\cdot4-6=+70$

Дѣлимое $u^3-3u^2-10u+24$, $A=-3$, $B=-10$, $C=24$, $a=1, 3, 5, 2, 4$		
Дѣлитель	Частное	Остатокъ
$u+1$	$u^2-[1-(-3)]u+[1^2-(-3)\cdot 1+(-10)]=u^2-(1+3)u+(1^2+3\cdot 1-10)=u^2-4u-6$	$-1^3+(-3)\cdot 1^2-(-10)\cdot 1+24=-1^3-3\cdot 1^2+10\cdot 1+24=30$
$u+3$	$u^2-(3+3)u+(3^2+3\cdot 3-10)=u^2-6u+8$	$-3^3-3\cdot 3^2+10\cdot 3+24=0$
$u+5$	$u^2-(5+3)u+(5^2+3\cdot 5-10)=u^2-8u+30$	$-5^3-3\cdot 5^2+10\cdot 5+24=-126$
$u-2$	$u^2+[2+(-3)]u+[2^2+(-3)\cdot 2+(-10)]=u^2+(2-3)u+(2^2-3\cdot 2-10)=u^2-u-12$	$2^3+(-3)\cdot 2^2+(-10)\cdot 2+24=2^3-3\cdot 2^2-10\cdot 2+24=0$
$u-4$	$u^2+(4-3)u+(4^2-3\cdot 4-10)=u^2+u-6$	$4^3-3\cdot 4^2-10\cdot 4+24=0$

Дѣлимое $u^3+4u^2-17u-60$, $A=4$, $B=-17$, $C=-60$ $a=1, 3, 5, 2, 4$		
Дѣлитель	Частное	Остатокъ
$u+1$	$u^2-(1-4)u+[1^2-4\cdot 1+(-17)]=u^2-(1-4)u+(1^2-4\cdot 1-17)=u^2+3u-20$	$-1^3+4\cdot 1^2-(-17)\cdot 1+(-60)=-1^3+4\cdot 1^2+17\cdot 1-60=-40$
$u+3$	$u^2-(3-4)u+(3^2-4\cdot 3-17)=u^2+u-20$	$-3^3+4\cdot 3^2+17\cdot 3-60=0$
$u+5$	$u^2-(5-4)u+(5^2-4\cdot 5-17)=u^2-u-12$	$-5^3+4\cdot 5^2+17\cdot 5-60=0$
$u-2$	$u^2+(2+4)u+[2^2+4\cdot 2+(-17)]=u^2+(2+4)u+(2^2+4\cdot 2-17)=u^2+6u-5$	$2^3+4\cdot 2^2+(-17)\cdot 2+(-60)=2^3+4\cdot 2^2-17\cdot 2-60=-70$
$u-4$	$u^2+(4+4)u+(4^2+4\cdot 4-17)=u^2+8u+15$	$4^3+4\cdot 4^2-17\cdot 4-60=0$

368 Дѣлимое—многочленъ $z^4-8z^3+5z^2+74z-120$, дѣлители—двучлены $z-2, z-3, z-4, z-5, z+2, z+3, z+4, z+5$, слѣд., согласно обозначеніямъ сдѣланнымъ въ рѣш. №№ 365′ и 365 имѣемъ

$$A=-8,\ B=5,\ C=74,\ D=-120,\ a=2,3,4,5$$

1° Дѣлитель—двучленъ вида $z-a$ (№ 365′), при чемъ $a=2,3,4,5$, для вычисленія частнаго Q и остатка R имѣемъ слѣдующія формулы

$$Q=z^3+(a+A)z^2+(a^2+Aa+B)z+(a^3+Aa^2+Ba+C),$$

$$R=a^4+Aa^3+Ba^2+Ca+D$$

Примѣняя эти формулы для каждаго изъ четырехъ вышеуказанныхъ значеній буквы, соотвѣтственно получимъ искомыя частныя и остатки

1) Дѣлитель $z-2$, т. ч. $a=2$, частное $Q=z^3+[2+(-8)]z^2+[2^2+(-8)\cdot 2+5]z+[2^3+(-8)\cdot 2^2+5\cdot 2+74]=z^3+(2-8)z^2+(4-16+5)z+(8-32+10+74)=z^3-6z^2-7z+60$ остатокъ $R=2^4+(-8)\cdot 2^3+5\cdot 2^2+74\cdot 2+(-120)=16-64+20+148-120=184-184=0$, т. е. дѣленіе нацѣло такъ что $(z^4-8z^3+5z^2+74z-120):(z-2)=z^3-6z^2-7z+60$

2) Дѣлитель $z-3$, т. ч. $a=3$, частное $Q=z^3+[3+(-8)]z^2+[3^2+(-8)\cdot 3+5]z+[3^3+(-8)\cdot 3^2+5\cdot 3+74]=z^3+(3-8)z^2+(9-24+5)z+(27-72+15+74)=z^3-5z^2-10z+44$ остатокъ $R=3^4+(-8)\cdot 3^3+5\cdot 3^2+74\cdot 3+(-120)=81-216+45+222-120=348-336=12$ слѣд. $z^4-8z^3+5z^2+74z-120=(z-3)(z^3-5z^2-10z+44)+12$

3) Дѣлитель $z-4$, такъ что $a=4$, частное $Q=z^3+[4+(-8)]z^2+[4^2+(-8)\cdot 4+5]z+[4^3+(-8)\cdot 4^2+5\cdot 4+74]=z^3+(4-8)z^2+(16-32+5)z+(64-128+20+74)=z^3-4z^2-11z+30$ остатокъ $R=4^4+(-8)\cdot 4^3+5\cdot 4^2+74\cdot 4+(-120)=256-512+80+296-120=632-632=0$, т. ч. дѣленіе нацѣло, а потому $(z^4-8z^3+5z^2+74z-120):(z-4)=z^3-4z^2-11z+30$

4) Дѣлитель $z-5$, такъ что $a=5$, частное $Q=z^3+[5+(-8)]z^2+[5^2+(-8)\cdot 5+5]z+[5^3+(-8)\cdot 5^2+5\cdot 5+74]=z^3+(5-8)z^2+(25-40+5)z+(125-200+25+74)=z^3-3z^2-10z+24$ остатокъ $R=5^4+(-8)\cdot 5^3+5\cdot 5^2+74\cdot 5+(-120)=625-1000+125+370-120=1120-1120=0$, т. ч. дѣленіе нацѣло а потому $(z^4-8z^3+5z^2+74z-120):(z-5)=z^3-3z^2-10z+24$

2° Дѣлитель—двучленъ вида $z+a$ (№ 365), при чемъ $a=2,3,4,5$, для вычисленія частнаго Q и остатка R имѣемъ формулы

$$Q=z^3-(a-A)z^2+(a^2-Aa+B)z-(a^3-Aa^2+Ba-C)$$

$$R=a^4-Aa^3+Ba^2-Ca+D$$

1) Дѣлитель $z+2$, такъ что $a=2$, частное $Q=z^3-[2-(-8)]z^2+[2^2-(-8)\cdot 2+5]z-[2^3-(-8)\cdot 2^2+5\cdot 2-74]=z^3-(2+8)z^2+(4+16+5)z-(8+32+10-74)=z^3-10z^2+25z+24$, остатокъ $R=2^4-(-8)\cdot 2^3+5\cdot 2^2-74\cdot 2+(-120)=16+64+20-148-120=100-268=-168$, слѣд., $z^4-8z^3+5z^2+74z-120=(z+2)(z^3-10z^2+25z+24)-168$

2) Дѣлитель $z+3$, такъ что $a=3$ частное $Q=z^3-[3-(-8)]z^2+[3^2-(-8)\cdot 3+5]z-[3^3-(-8)\cdot 3^2+5\cdot 3-74]=z^3-(3+8)z^2+(9+24+5)z-(27+72+15-74)=z^3-11z^2+38z-40$ остатокъ $R=3^4-(-8)\cdot 3^3+5\cdot 3^2-74\cdot 3+(-120)=81+216+45-222-120=0$, т. е. дѣленіе нацѣло слѣд., $(z^4-8z^3+5z^2+74z-120):(z+3)=z^3-11z^2+38z-40$

3) Дѣлитель $z+4$, такъ что $a=4$, частное $Q=z^3-[4-(-8)]z^2+[4^2-(-8)\cdot 4+5]z-[4^3-(-8)\cdot 4^2+5\cdot 4-74]=z^3-(4+8)z^2+(16+32+5)z-(64+128+20-74)=z^3-12z^2+53z-138$, остатокъ $R=4^4-(-8)\cdot 4^3+5\cdot 4^2-74\cdot 4+(-120)=256+512+80-296-120=848-416=432$, слѣд., $z^4-8z^3+5z^2+74z-120=(z+4)(z^3-12z^2+53z-138)+432$

4) Дѣлитель $z+5$, такъ что $a=5$, частное $Q=z^3-[5-(-8)]z^2+[5^2-(-8)\cdot 5+5]z-[5^3-(-8)\cdot 5^2+5\cdot 5-74]=z^3-(5+8)z^2+(25+40+5)z-(125+200+25-74)=z^3-13z^2+70z-276$ остатокъ $R=5^4-(-8)\cdot 5^3+5\cdot 5^2-74\cdot 5+(-120)=625+1000+125-370-120=1750-490=1260$, слѣд., результатъ дѣленія выразится такъ $z^4-8z^3+5z^2+74z-120=(z+5)(z^3-13z^2+70z-276)+1260$

368′. См. рѣш. №№ 368, 365 и 365′. Имѣемъ дѣлимое—многочленъ $u^4+8u^3+5u^2-74u-120$, такъ что $A=8$, $B=5$, $C=-74$, $D=-120$; дѣлители—двучлены $u+2$, $u+3$, $u+4$, $u+5$, $u-2$, $u-3$, $u-4$, $u-5$.

1° Дѣлитель—двучленъ вида $u+a$ (№ 365), при чемъ $a=2,3,4,5$; разберемъ каждый случай дѣленія отдѣльно.

1) Дѣлитель $u+2$, такъ что $a=2$, частное $Q=u^3-(2-8)u^2+(2^2-8\cdot2+5)u-[2^3-8\cdot2^2+5\cdot2-(-74)]=u^3-(-6)u^2+(4-16+5)u-(8-32+10+74)=u^3+6u^2-7u-60$, остатокъ $R=2^4-8\cdot2^3+5\cdot2^2-(-74)\cdot2+(-120)=16-64+20+148-120=184-184=0$, т. е. дѣленіе нацѣло, а потому $(u^4+8u^3+5u^2-74u-120):(u+2)=u^3+6u^2-7u-60$.

2) Дѣлитель $u+3$, такъ что $a=3$, частное $Q=u^3-(3-8)u^2+(3^2-8\cdot3+5)u-[3^3-8\cdot3^2+5\cdot3-(-74)]=u^3-(-5)u^2+(9-24+5)u-(27-72+15+74)=u^3+5u^2-10u-44$, остатокъ $R=3^4-8\cdot3^3+5\cdot3^2-(-74)\cdot3+(-120)=81-216+45+222-120=348-336=12$, слѣд. $u^4+8u^3+5u^2-74u-120=(u+3)(u^3+5u^2-10u-44)+12$.

3) Дѣлитель $u+4$, такъ что $a=4$, частное $Q=u^3-(4-8)u^2+(4^2-8\cdot4+5)u-[4^3-8\cdot4^2+5\cdot4-(-74)]=u^3-(-4)u^2+(16-32+5)u-(64-128+20+74)=u^3+4u^2-11u-30$, остатокъ $R=4^4-8\cdot4^3+5\cdot4^2-(-74)\cdot4+(-120)=256-512+80+296-120=632-632=0$, т. ч. дѣленіе нацѣло, а потому $(u^4+8u^3+5u^2-74u-120):(u+4)=u^3+4u^2-11u-30$.

4) Дѣлитель $u+5$, такъ что $a=5$, частное $Q=u^3-(5-8)u^2+(5^2-8\cdot5+5)u-[5^3-8\cdot5^2+5\cdot5-(-74)]=u^3-(-3)u^2+(25-40+5)u-(125-200+25+74)=u^3+3u^2-10u-24$, остатокъ $R=5^4-8\cdot5^3+5\cdot5^2-(-74)\cdot5+(-120)=625-1000+125+370-120=1120-1120=0$, т. е. дѣленіе нацѣло, а потому $(u^4+8u^3+5u^2-74u-120):(u+5)=u^3+3u^2-10u-24$.

2° Дѣлитель—двучленъ вида $u-a$ (№ 365′), при чемъ $a=2,3,4,5$; разсмотримъ эти случаи.

1) Дѣлитель $u-2$, такъ что $a=2$, частное $Q=u^3+(2+8)u^2+(2^2+8\cdot2+5)u+[2^3+8\cdot2^2+5\cdot2+(-74)]=u^3+10u^2+(4+16+5)u+(8+32+10-74)=u^3+10u^2+25u-24$, остатокъ $R=2^4+8\cdot2^3+5\cdot2^2+(-74)\cdot2+(-120)=16+64+20-148-120=100-268=-168$, слѣд. $u^4+8u^3+5u^2-74u-120=(u-2)(u^3+10u^2+25u-24)-168$.

2) Дѣлитель $u-3$, такъ что $a=3$, частное $Q=u^3+(3+8)u^2+(3^2+8\cdot3+5)u+[3^3+8\cdot3^2+5\cdot3+(-74)]=u^3+11u^2+(9+24+5)u+(27+72+15-74)=u^3+11u^2+38u+40$, остатокъ $R=3^4+8\cdot3^3+5\cdot3^2+(-74)\cdot3+(-120)=81+216+45-222-120=342-342=0$, т. ч. дѣленіе нацѣло, а потому $(u^4+8u^3+5u^2-74u-120):(u-3)=u^3+11u^2+38u+40$.

3) Дѣлитель $u-4$, такъ что $a=4$, частное $Q=u^3+(4+8)u^2+(4^2+8\cdot4+5)u+[4^3+8\cdot4^2+5\cdot4+(-74)]=u^3+12u^2+(16+32+5)u+(64+128+20-74)=u^3+12u^2+53u+138$, остатокъ $R=4^4+8\cdot4^3+5\cdot4^2+(-74)\cdot4+(-120)=256+512+80-296-120=848-416=432$, слѣд. $u^4+8u^3+5u^2-74u-120=(u-4)(u^3+12u^2+53u+138)+432$.

4) Дѣлитель $u-5$, такъ что $a=5$, частное $Q=u^3+(5+8)u^2+(5^2+8\cdot5+5)u+[5^3+8\cdot5^2+5\cdot5+(-74)]=u^3+13u^2+(25+40+5)u+(125+200+25-74)=u^3+13u^2+70u+276$, остатокъ $R=5^4+8\cdot5^3+5\cdot5^2+(-74)\cdot5+(-120)=625+1000+125-370-120=1750-490=1260$, слѣд. $u^4+8u^3+5u^2-74u-120=(u-5)(u^3+13u^2+70u+276)+1260$.

369. О дѣленіи двучленовъ вида $x^n \pm a^n$ на $x \pm a$ уже не разъ упоминалось (отд. III §§ 10 и 14, особенно—отд. IV § 2, «7-й случай разлож.» п. г. 6° и 7°). Здѣсь же мы покажемъ другой способъ дѣленія подобныхъ двучленовъ (при $n=3, 4, 5, 6$), основанный на примѣненіи выводовъ и формулъ (по таблицамъ) рѣш. №№ 365 и 365′.

1) Дѣленіе x^3+a^3 на $x+a$. Представивъ дѣлимое въ видѣ $x^3+0\cdot x^2+0\cdot x+a^3$, отчего его величина не измѣнится, заключаемъ, что заданное дѣленіе является частнымъ случаемъ дѣленія многочлена x^3+Ax^2+Bx+C на $x+a$ (№ 365), когда $A=B=0, C=a^3$. Поэтому, полагая въ формулѣ частнаго $Q=x^2-(a-A)x+(a^2-Aa+B)$ и остатка $R=-a^3+Aa^2-Ba+C$ соотвѣтственно $A=B=0, C=a^3$, найдемъ, что раздѣливъ x^3+a^3 на $x+a$, получ. частное $Q=x^2-(a-0)x+(a^2-0\cdot a+0)=x^2-ax+a^2$ и остатокъ $R=-a^3+0\cdot a^2-0\cdot a+a^3=0$, т. ч. дѣленіе совершается нацѣло.

2) Дѣленіе x^3-a^3 на $x+a$. Полагая въ вышеприведенныхъ формулахъ $A=B=0, C=-a^3$ (ибо $x^3-a^3=x^3+0\cdot a^2+0\cdot a+(-a^3)$), получ. частное $Q=x^2-(a-0)x+(a^2-0\cdot a+0)=x^2-ax+a^2$, остатокъ $R=-a^3+0\cdot a^2-0\cdot a+(-a^3)=-2a^3$, такъ что $x^3-a^3=(x+a)(x^2-ax+a^2)-2a^3$.

3) Дѣленіе x^3+a^3 на $x-a$. Полагая въ формулахъ въ рѣш. № 365′ $A=B=0$, $C=a^3$, найдемъ частное $Q=x^2+(a+0)x+(a^2+0\cdot a+0)=x^2+ax+a^2$, остатокъ $R=a^3+0\cdot a^2+0\cdot a+a^3=2a^3$, такъ что $x^3+a^3=(x-a)(x^2+ax+a^2)+2a^3$.

4) Дѣленіе x^3-a^3 на $x-a$. По тѣмъ же формуламъ, при $A=B=0, C=-a^3$, $Q=x^2+(a+0)x+(a^2+0\cdot a+0)=x^2+ax+a^2$, $R=a^3+0\cdot a^2+0\cdot a+(-a^3)=0$, такъ что $(x^3-a^3):(x-a)=x^2+ax+a^2$.

369′. Т. к. $x^4\mp a^4=x^4+0\cdot x^3+0\cdot x^2+0\cdot x+(\mp a^4)$, то при дѣленіи $x^4\mp a^4$ на $x\mp a$ по формуламъ №№ 365′ и 365 полагаемъ въ нихъ $A=B=C=0$, $D=\mp a^4$.

1) Дѣленіе x^4-a^4 на $x-a$, $Q=x^3+(a+0)x^2+(a^2+0\cdot a+0)x+(a^3+0\cdot a^2+0\cdot a+0)=x^3+ax^2+a^2x+a^3$, $R=a^4+0\cdot a^3+0\cdot a^2+0\cdot a+(-a^4)=0$. 2) Дѣленіе x^4+a^4 на $x-a$. $Q=x^3+(a+0)x^2+(a^2+0\cdot a+0)x+(a^3+0\cdot a^2+0\cdot a+0)=x^3+ax^2+a^2x+a^3$, $R=a^4+0\cdot a^3+0\cdot a^2+0\cdot a+(+a^4)=2a^4$. 3) Дѣленіе x^4+a^4 на $x+a$, $Q=x^3-(a-0)x^2+(a^2-0\cdot a+0)x-(a^3-0\cdot a^2+0\cdot a-0)=x^3-ax^2+a^2x-a^3$, $R=a^4-0\cdot a^3+0\cdot a^2-0\cdot a+a^4=2a^4$. 4) Дѣленіе x^4-a^4 на $x+a$, $Q=x^3-(a-0)x^2+(a^2-0\cdot a+0)x-(a^3-0\cdot a^2+0\cdot a-0)=x^3-ax^2+a^2x-a^3$, $R=a^4-0\cdot a^3+0\cdot a^2-0\cdot a+(-a^4)=0$.

Обобщеніе. Какъ видимъ, результаты получаются всѣ симметричные, это наводитъ на мысль объ общемъ правилѣ подобныхъ дѣленій, именно $(x^n\mp a^n):(x\mp a)$.

1-ый случай $(x^n-a^n):(x-a)$. Представимъ дѣлимое въ видѣ $x^n+0\cdot x^{n-1}+0\cdot x^{n-2}+0\cdot x^{n-3}+\ldots+0\cdot x^2+0\cdot x+(-a^n)$. Слѣд., оно является частнымъ видомъ многочлена $x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+Cx^{n-3}+\ldots+Ux+V$, о которомъ шла рѣчь въ № 365′, тамъ же изложенъ былъ законъ составленія частнаго и остатка отъ дѣленія этого многочлена на двучленъ $x-a$ (съ замѣною x на y). Примѣнимъ этотъ законъ къ составленію частнаго Q и остатка R въ разбираемомъ случаѣ, при этомъ мы должны имѣть въ виду, что у насъ $A=B=C=D=\ldots=U=0$, $V=-a^n$, т. об., получ. $Q=x^{n-1}+(a+0)x^{n-2}+(a^2+0\cdot a+0)x^{n-3}+(a^3+0$

$a^2+0\,a+0)x^{n-4}+ \quad +(a^{n-2}+0\,a^{n-3}+ \quad . \quad +0\,a+0)x+ +(a^{n-1}+0\,a^{n-2}+0\,a^{n-3}+ \quad +0\,a+0)=x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+ +a^3x^{n-4}+ \quad +a^{n-2}x+a^{n-1}$, $R=a^n+0\,a^{n-1}+0\,a^{n-2}+0\,a^{n-3}+ + \quad +0\,a+(-a^n)=a^n-a^n=0$, т. ч. дѣленіе въ этомъ случаѣ совершается нацѣло, и мы имѣемъ формулу

$$\frac{x^n-a^n}{x-a}=x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+ \quad +a^{n-2}x+a^{n-1}$$

для всякаго цѣлаго и положительнаго (четнаго или нечетнаго) значенія показателя степени n.

Примѣры № **370** раздѣлить x^5-a^5 на $x-a$. Въ этомъ случаѣ $n=5$ и по вышеприведенной формулѣ мы найдемъ

$$\frac{x^5-a^5}{x-a}=x^4+ax^3+a^2x^2+a^3x+a^4$$

№ **370′** раздѣлить x^6-a^6 на $x-a$. Въ этомъ случаѣ $n=6$, вышеуказанная формула даетъ

$$\frac{x^6-a^6}{x-a}=x^5+ax^4+a^2x^3+a^3x^2+a^4x+a^5$$

2-ой случай $(x^n+a^n)\,(x-a)$. Представивъ дѣлимое въ видѣ $x^n+0\,.x^{n-1}+0\,x^{n-2}+0\,x^{n-3}+ \quad +0\,x^2+0\,x+a^n$ видимъ, что оно является частнымъ случаемъ многочлена $x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+Cx^{n-3}+ \quad .+Ux+ +V$ при $A=B=C= \quad =U=0$ и $V=a^n$. Законъ составленія частнаго Q и остатка R отъ дѣленія вышеприведеннаго многочлена на двучленъ $x-a$ извѣстенъ намъ изъ рѣш. № 365′ (съ замѣной x на y), поэтому примѣняя его въ разсматриваемомъ случаѣ при частныхъ значеніяхъ (нулевыхъ) коэффиціентовъ различныхъ степеней главной буквы x и при $V=a^n$ получ. частное $Q=x^{n-1}+(a+0)x^{n-2}+(a^2+0\,a+0)x^{n-3}+(a^3+ +0\,a^2+0\,a+0)x^{n-4}+ \quad +(a^{n-2}+0\,a^{n-3}+0\,a^{n-4}+ \quad + +0\,a+0)x+(a^{n-1}+0\,a^{n-2}+0\,a^{n-3}+ \quad +0\,a+0)=x^{n-1}+ +ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+a^3x^{n-4}+ \quad +a^{n-2}x+a^{n-1}$, — такое же частное, какъ въ 1-мъ случаѣ, очевидно, остатокъ будетъ другой, иными словами — дѣленіе нацѣло въ разбираемомъ случаѣ невозможно дѣйствительно, $R= =a^n+0\,a^{n-1}+0\,a^{n-2}+0\,a^{n-3}+ \quad +0\,.\,a+(+a^n)=2a^n$. Отсюда находимъ формулу дѣленія 2-го случая (при четн. и нечетномъ n)

$$x^n+a^n=(x-a)(x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+ \quad +a^{n-2}x+a^{n-1})+2a^n$$

Примѣры № **370** раздѣлить x^5+a^5 на $x-a$. Въ этомъ случаѣ $n=5$, вышеприведенная формула даетъ

$$\frac{x^5+a^5}{x-a}=x^4+ax^3+a^2x^2+a^3x+a^4+\frac{2a^5}{x-a},$$

здѣсь результатъ дѣленія представленъ въ видѣ цѣлаго частнаго + дробь, числитель которой есть остатокъ, а знаменатель — дѣлитель (напр., 23 : 5=4+3/5)

№ **370′** раздѣлить x^6+a^6 на $x-a$, здѣсь показатель $n=6$. По вышенаписанной формулѣ имѣемъ

$$x^6+a^6=(x-a)(x^5+ax^4+a^2x^3+a^3x^2+a^4x+a^5)+2a^6,$$

здѣсь результатъ дѣленія представленъ въ видѣ равенства дѣлимаго произведенію дѣлителя на цѣлое частное, сложенному съ остаткомъ.

3-ій случай $(x^n-a^n)\,(x+a)$. Представимъ дѣлимое въ видѣ многочлена $x^n+0\,x^{n-1}+0\,x^{n-2}+0\,x^{n-3}+ \quad +0\,x+(-a^n)$, являющагося частнымъ видомъ многочлена $x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+Cx^{n-3}+\ldots+Ux+V$ дѣлимость котораго на двучленъ $x+a$ разобрана была въ рѣш № 365 Замѣченный законъ составленія частнаго Q и остатка R примѣнимъ въ данномъ случаѣ Именно, имѣя въ виду, что у насъ теперь $A=B=C=\ldots=U=0, V=-a^n$ находимъ частное $Q=x^{n-1}-(a-0)x^{n-2}+(a^2-0\cdot a+0)x^{n-3}-(a^3-0\cdot a^2+0\cdot a-0)x^{n-4}+\ldots\mp(a^{n-2}-0\cdot a^{n-3}+0\cdot a^{n-4}-\ldots\pm0\cdot a\mp0)x\pm(a^{n-1}-0\cdot a^{n-2}+0\cdot a^{n-3}-\ldots\mp\mp0\cdot a\pm0)=x^{n-1}-ax^{n-2}+a^2x^{n-3}-a^3x^{n-4}+\ldots\mp a^{n-2}x\pm a^{n-1}$, *остатокъ* R, какъ въ свое время было разъяснено, *получается отъ подстановки* (въ случаѣ дѣлителя $x+a$) *въ дѣлимое значенія «$-a$» вмѣсто x*, отсюда ясно, что онъ, т е R, будетъ различенъ въ зависимости отъ того, четно или нечетно n, т е показатель степени дѣлимаго a) *Показатель n— нечетное число,* тогда, т к *нечетная степень отрицательнаго числа есть также число отрицательное* (отд II, § 6), будемъ имѣть $R=[x^n-a^n]_{x=-a}=(-a)^n-a^n=-a^n-a^n=-2a^n$, а потому результатъ дѣленія изобразится

$$\frac{x^n-a^n}{x+a}=x^{n-1}-ax^{n-2}+a^2x^{n-3}-a^3x^{n-4}+\ldots-a^{n-2}x+a^{n-1}+\frac{-2a^n}{x+a}$$

или же $x^n-a^n=(x+a)(x^{n-1}-ax^{n-2}+\ldots-a^{n-2}x+a^{n-1})-2a^n$

b) *Показатель n — число четное*, тогда, т к *всякая четная степень есть число положительное* будемъ имѣть $R=[x^n-a^n]_{x=-a}=(-a)^n-a^n=+a^n-a^n=0$, т е въ этомъ случаѣ дѣленіе совершается нацѣло, и его формула—

$$\frac{x^n-a^n}{x+a}=x^{n-1}-ax^{n-2}+a^2x^{n-3}-\ldots+a^{n-2}x-a^{n-1}$$

Примѣры **№ 370** разд x^5-a^5 на $x+a$, здѣсь $n=5$ — нечетное число; дѣленіе съ остаткомъ

$$x^5-a^5=(x+a)(x^4-ax^3+a^2x^2-a^3x+a^4)-2a^5$$

№ 370' разд x^6-a^6 на $x+a$, $n=6$ — четное число, дѣленіе нацѣло.

$$\frac{x^6-a^6}{x+a}=x^5-ax^4+a^2x^3-a^3x^2+a^4x-a^5$$

4-ый случай $(x^n+a^n)(x+a)$ Представивъ дѣлимое въ видѣ $x^n+0\cdot x^{n-1}+0\cdot x^{n-2}+0\cdot x^{n-3}+\ldots+0\cdot x+a^n$ и замѣтивъ что оно — —частный случай многочлена, разсмотрѣннаго въ рѣш № 365, именно, когда $A=B=C=\ldots=U=0, V=a^n$, составляемъ частное Q и остатокъ R на основаніи выводовъ сдѣланныхъ въ указанномъ рѣш $Q=x^{n-1}-(a-0)x^{n-2}+(a^2-0\cdot a+0)x^{n-3}-\ldots\mp(a^{n-2}-0\cdot a^{n-3}+0\cdot a^{n-4}-\ldots\pm0\cdot a\mp0)x\pm(a^{n-1}-0\cdot a^{n-2}+0\cdot a^{n-3}-\ldots\mp0\cdot a\pm\pm0)=x^{n-1}-ax^{n-2}+a^2x^{n-3}-\ldots\mp a^{n-2}x\pm a^{n-1}$ при вычисленіи R разсмотримъ 2 случая (см выше 3 й случ) a) показатель n— число *нечетное*, тогда $R=[x^n+a^n]_{x=-a}=(-a)^n+a^n=-a^n+a^n=0$, т ч дѣленіе совершается нацѣло

$$\frac{x^n+a^n}{x+a}=x^{n-1}-ax^{n-2}+a^2x^{n-3}-\ldots-a^{n-2}x+a^{n-1}$$

b) Показатель n— число *четное* $R=[x^n+a^n]_{x=-a}=(-a)^n+a^n=$ $=+a^n+a^n=2a^n$ результатъ дѣленія выразится формулой

$$(x^n+a^n):(x+a)=x^{n-1}-ax^{n-2}+\ldots+a^{n-2}x-a^{n-1}+\frac{2a^n}{x+a}$$

или же $x^n+a^n=(x+a)(x^{n-1}-ax^{n-2}+\ldots+a^{n-2}x-a^{n-1})+2a^n$

Примѣры №370 разд x^5+a^5 на $x+a$, здѣсь $n=5$— нечетное число, дѣленіе будетъ нацѣло

$$\frac{x^5+a^5}{x+a}=x^4-ax^3+a^2x^2-a^3x+a^4$$

№ 370′ разд x^6+a^6 на $x+a$, $n=6$— четное число, дѣленіе нацѣло невозможно

$$x^6+a^6=(x+a)(x^5-ax^4+a^2x^3-a^3x^2+a^4x-a^5)+2a^6$$

№№ 370 и 370′ только что разобраны, начиная съ «1-го случая» обобщенія (послѣ рѣш № 369′)

Н И Доброгаевъ
Спб 1908 Ш

ОТДѢЛЕНІЕ V.

Преобразованіе дробныхъ выраженій.

§ 1. Сокращеніе дробей.

1 $\frac{6}{2a}=\frac{3}{a}$ 1′ $\frac{10}{5a}=\frac{2}{a}$ 2 $\frac{ab^2}{abc}=\frac{b}{c}$ 2′ $\frac{a^2b}{abc}=\frac{a}{c}$ 3 $\frac{9ax}{15a^2}=\frac{3x}{5a}$ 3′ $\frac{8a^2}{12ax}=\frac{2a}{3x}$ 4 $\frac{15ax^2}{35bx^3}=\frac{3a}{7bx}$ 4′ $\frac{9ax^3}{6b^2x^2}=\frac{3ax}{2b^2}$ 5 $\frac{12a^4b^2x}{18a^2b^2y}=\frac{2a^2x}{3y}$ 5′ $\frac{18a^2b^4y}{24a^3b^2x}=\frac{3b^2y}{4ax}$ 6 $\frac{20a^3b^4c^8}{48a^4b^7c^6}=\frac{5c^2}{12ab^3}$ 6′ $\frac{36a^4b^8c^5}{30a^7b^4c^3}=\frac{6b^4c^2}{5a^3}$

7 Показатели степеней членовъ данной дроби—буквенные, поэтому, при сокращеніи дроби должно имѣть въ виду относительно этихъ показателей слѣдующ.: a) показатели степеней буквы a въ числителѣ n, въ знаменателѣ $m+n$, при положительныхъ m и n имѣемъ $n<m+n$, а потому послѣ сокращенія a исчезнетъ въ числителѣ, а въ знаменателѣ показатель степени a будетъ $=m+n-n=m$. b) Показатели степеней буквы b въ числителѣ $m-n$, въ знаменателѣ n, тутъ могутъ быть 3 случая.

1-ый случай: показатели равны, т. е. $m-n=n$ (и слѣд., $m=2n$), послѣ сокращенія въ результатѣ буквы b не будетъ, а именно $\frac{a^nb^{m-n}}{a^{m+n}b^n}=\frac{a^n}{a^{m+n}}=\frac{1}{a^m}$.

2-ой случай: показатель степени b въ числителѣ больше показателя ея въ знаменателѣ, т. е. $m-n>n$ (и слѣд. $m>2n$), послѣ сокращенія b останется лишь въ числителѣ съ показателемъ $m-n-n=m-2n$ и результатъ будетъ $\frac{a^nb^{m-n}}{a^{m+n}b^n}=\frac{b^{m-2n}}{a^m}$.

3-ій случай — противоположный 2—му, т. е. $m-n<n$, въ результатѣ b окажется лишь въ знаменателѣ съ показателемъ степени $n-(m-n)=n-m+n=2n-m$, результатъ $\frac{a^nb^{m-n}}{a^{m+n}b^n}=\frac{1}{a^mb^{2n-m}}$.

7′ Показатель степени b въ числителѣ, очевидно, болѣе показателя ея въ знаменателѣ, ибо $m+n>m$ (при положительныхъ числахъ), остальное зависитъ отъ показателей степеней буквы a именно m въ числителѣ и $n-m$ въ знаменателѣ **I случай** $m=n-m$ (и, слѣд., $n=2m$), сокращая данную дробь, имѣемъ $\frac{a^m b^{m+n}}{a^{n-m} b^m}=\frac{b^{m+n}}{b^m}=b^{m+n-m}=b^n$ **II случай** $m>n-m$, т к въ этомъ случаѣ $a^m \; a^{n-m}=a^{m-n+m}=a^{2m-n}$, то результатъ будетъ $\frac{a^m b^{m+n}}{a^{n-m} b^m}=a^{2m-n}b^n$. т е число цѣлое **III случай** $m<n-m$ такъ что $\frac{a^m b^{m+n}}{a^{n-m} b^m}=\frac{b^n}{a^{n-m-m}}=\frac{b^n}{a^{n-2m}}$

8 Срв рѣш № 7 Обращаясь сначала къ показателямъ степеней b, видимъ, что при n положительномъ $2n+2<3n+2$, а потому въ результатѣ буква b будетъ въ знаменателѣ съ показателемъ степени $3n+2-(2n+2)=3n+2-2n-2=n$ Обращаясь къ буквѣ a, видимъ, что показатель ея степени въ числителѣ$=2n-1$ а въ знаменателѣ$=n+2$, и отъ ихъ взаимной величины будетъ зависѣть результатъ.

1-ый случай $2n-1=n+2$ (т е $n=3$), сокращая данную дробь получ $\frac{30a^{2n-1}b^{2n+2}}{25a^{n+2}b^{3n+2}}=\frac{6}{5b^n}=(\text{при } n=3)=\frac{6}{5b^3}$

2-ой случай $2n-1>n+2$ (т е $n>3$) послѣ сокращенія a останется въ числителѣ, и его показатель$=2n-1-(n+2)=2n-1-n-2=n-3$, так образ., имѣемъ

$$\frac{30a^{2n-1}b^{2n+2}}{25a^{n+2}b^{3n+2}}=\frac{6a^{n-3}}{5b^n}$$

3-ій случай $2n-1<n+2$, въ результатѣ a будетъ лишь въ знаменателѣ, съ показателемъ степени $n+2-(2n-1)=n+2-2n+1=3-n$, а самый результатъ $\frac{30a^{2n-1}b^{2n+2}}{25a^{n+2}b^{3n+2}}=\frac{6}{5a^{3-n}b^n}$

8′ а) Показатели степеней a—въ числителѣ $2n+1$, въ знаменателѣ $3n$ Считая n числомъ *положительнымъ* и, притомъ *цѣлымъ**), мы должны признать, что $2n+1<3n$ (равенство показателей возможно лишь при $n=1$) дѣйствительно въ противномъ случаѣ т е при $2n+1>3n$, дробь $\frac{a^{2n+1}}{a^{3n}}$ по сокращеніи приняла бы видъ цѣлаго числа $a^{2n+1-3n}=a^{1-n}$ показатель степени котораго $1-n$ при n цѣломъ и положительномъ, неравномъ 1-цѣ не можетъ быть цѣлымъ и положительнымъ Итакъ, $2n+1<3n$ а потому данная дробь $\frac{70a^{2n+1}b^{3n-1}}{21a^{3n}b^{2n-1}}=\frac{10b^{3n-1}}{3a^{3n-2n-1}b^{2n+1}}=\frac{10b^{3n-1}}{3a^{n-1}b^{2n+1}}$ Приступая къ дальнѣйшему сокращенію, разсмотримъ степени буквы b

b) Показатели степеней b въ числителѣ $3n-1$, въ знаменателѣ $2n+1$ Опуская, какъ очевидный, случай равенства (при $n=2$) показателей разберемъ случаи ихъ неравенства **I случ** $3n-1>2n+1$ (т е $n>2$)

---

*) Это—въ связи съ тѣмъ что мы (пока) изучаемъ степени съ *цѣлыми* и, притомъ *положительными* показателями

тогда, сокращая получ дробь, будемъ имѣть $\frac{10b^{3n-1}}{3a^{n-1}b^{2n+1}}=$ $=\frac{10b^{3n-1-2n-1}}{3a^{n-1}}=\frac{10b^{n-2}}{3a^{n-1}}$ **II случ** $3n-1<2n+1$ (при $n<2$) результатъ въ этомъ случаѣ будетъ $\frac{10b^{3n-1}}{3a^{n-1}b^{2n+1}}=\frac{10}{3a^{n-1}b^{2n+1-3n+1}}=\frac{10}{3a^{n-1}b^{2-n}}$

9 $\frac{a^2-2ab}{ab-2b^2}=\frac{a(a-2b)}{b(a-2b)}=\frac{a}{b}$ **9′** $\frac{2ab+b^2}{ab+2a^2}=\frac{b(2a+b)}{a(b+2a)}=\frac{b}{a}$

10 $\frac{2x^2+4xy}{3xy+6y^2}=\frac{2x(x+2y)}{3y(x+2y)}=\frac{2x}{3y}$ **10′** $\frac{10x^2-2xy}{15xy-3y^2}=\frac{2x(5x-y)}{3y(5x-y)}=\frac{2x}{3y}$

11 $\frac{42a^3-30a^2b}{35ab^2-25b^3}=\frac{6a^2(7a-5b)}{5b^2(7a-5b)}=\frac{6a^2}{5b^2}$ **11′** $\frac{14a^5+7a^4b}{10ab^3+5b^4}=$ $=\frac{7a^4(2a+b)}{5b^3(2a+b)}=\frac{7a^4}{5b^3}$

12 $\frac{12x^4+27x^3y}{16x^3y+36x^2y^2}=\frac{3x^3(4x+9y)}{4x^2y(4x+9y)}=\frac{3x}{4y}$ **12′** $\frac{39x^2y^3-36xy^4}{65x^3y-60x^2y^2}=$ $=\frac{3xy^3(13x-12y)}{5x^2y(13x-12y)}=\frac{3y^2}{5x}$

13 $\frac{20a^3b+12a^2b-24a^2c}{25ab^2+15b^2-30bc}=\frac{4a^2(5ab+3b-6c)}{5b(5ab+3b-6c)}=\frac{4a^2}{5b}$ **13′** $\frac{27a^5c^2+6a^4bc^2-9a^4c^2}{72a^2b^2c+16ab^3c-24ab^2c}=\frac{3a^4c^2(9a+2b-3)}{8ab^2c(9a+2b-3)}=\frac{3a^3c}{8b^2}$

14 $\frac{3x^4c+5x^3yc-2x^3c^2}{2xy^2c^2-3x^2y^2c-5xy^3c}=\frac{x^3c(3x+5y-2c)}{xy^2c(2c-3x-5y)}=\frac{x^2(3x+5y-2c)}{-y^2(3x+5y-2c)}=$ $=\frac{x^2}{-y^2}=-\frac{x^2}{y^2}$, ибо *знакъ числителя или знаменателя можетъ быть отнесенъ ко всей дроби* **14′***) $\frac{21x^5y^5c^3-35x^5y^3c^5-49x^3y^5c^5}{35x^2y^4c^6-15x^4y^4c^4+25x^4y^2c^6}=$ $=\frac{7x^3y^3c^3(3x^2y^2-5x^2c^2-7y^2c^2)}{5x^2y^2c^4(7y^2c^2-3x^2y^2+5x^2c^2)}=\frac{7xy(3x^2y^2-5x^2c^2-7y^2c^2)}{-5c(3x^2y^2-5x^2c^2-7y^2c^2)}=$ $=\frac{7xy}{-5c}=-\frac{7xy}{5c}$

15 $\frac{a-b}{a^2-b^2}=\frac{a-b}{(a+b)(a-b)}=\frac{1}{a+b}$ **15′** $\frac{a+b}{a^2-b^2}=\frac{a+b}{(a+b)(a-b)}=$ $=\frac{1}{a-b}$

---

*) Въ «Сборн.», въ условіи этого №-ра *опечатка*: въ послѣднемъ членѣ знаменателя должно быть c^6, а не c^5

16 $\frac{2a+1}{4a^2-1}=\frac{2a+1}{(2a)^2-1^2}=\frac{2a+1}{(2a+1)(2a-1)}=\frac{1}{2a-1}$ **16'** $\frac{3a-1}{9a^2-1}=$
$=\frac{3a-1}{(3a)^2-1^2}=\frac{3a-1}{(3a+1)(3a-1)}=\frac{1}{3a+1}$

17 $\frac{x^2-y^2}{xz+yz}=\frac{(x+y)(x-y)}{z(x+y)}=\frac{x-y}{z}$ **17'** $\frac{x^2-z^2}{xy-yz}=$
$=\frac{(x+z)(x-z)}{y(x-z)}=\frac{x+z}{y}$

18 $\frac{x^3+3x^2}{x^2-9}=\frac{x^2(x+3)}{x^2-3^2}=\frac{x^2(x+3)}{(x+3)(x-3)}=\frac{x^2}{x-3}$ **18'** $\frac{x^3-2x^2}{3x^2-12}=$
$=\frac{x^2(x-2)}{3(x^2-4)}=\frac{x^2(x-2)}{3(x+2)(x-2)}=\frac{x^2}{3(x+2)}$

19 $\frac{4a^2-2ab}{12a^2-3b^2}=\frac{2a(2a-b)}{3(4a^2-b^2)}=\frac{2a(2a-b)}{3[(2a)^2-b^2]}=\frac{2a(2a-b)}{3(2a+b)(2a-b)}=$
$=\frac{2a}{3(2a+b)}$ **19'** $\frac{5ab+15b^2}{a^2-9b^2}=\frac{5b(a+3b)}{a^2-(3b)^2}=\frac{5b(a+3b)}{(a+3b)(a-3b)}=\frac{5b}{a-3b}$

20 $\frac{7a^3b+7ab^3}{a^4-b^4}=\frac{7ab(a^2+b^2)}{(a^2)^2-(b^2)^2}=\frac{7ab(a^2+b^2)}{(a^2+b^2)(a^2-b^2)}=\frac{7ab}{a^2-b^2}=$
$=\frac{7ab}{(a+b)(a-b)}$ **20'** $\frac{a^4b^2-a^2b^4}{5a^4-5b^4}=\frac{a^2b^2(a^2-b^2)}{5(a^4-b^4)}=\frac{a^2b^2(a^2-b^2)}{5[(a^2)^2-(b^2)^2]}=$
$=\frac{a^2b^2(a^2-b^2)}{5(a^2+b^2)(a^2-b^2)}=\frac{a^2b^2}{5(a^2+b^2)}$

21 $\frac{(a-b)^2}{a^2-b^2}=\frac{(a-b)^2}{(a+b)(a-b)}=\frac{a-b}{a+b}$ **21'** $\frac{(a+b)^2}{b^2-a^2}=\frac{(b+a)^2}{(b+a)(b-a)}=$
$=\frac{b+a}{b-a}$

22 $\frac{(a+1)^3}{a^3-a}=\frac{(a+1)^3}{a(a^2-1)}=\frac{(a+1)^3}{a(a^2-1^2)}=\frac{(a+1)^3}{a(a+1)(a-1)}=\frac{(a+1)^2}{a(a-1)}$ **22'**
$\frac{(a-1)^3}{a^3-a}=\frac{(a-1)^3}{a(a^2-1)}=\frac{(a-1)^3}{a(a^2-1^2)}=\frac{(a-1)^3}{a(a+1)(a-1)}=\frac{(a-1)^2}{a(a+1)}$

23 $\frac{x^3+y^3}{2(x+y)^2}=\frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{2(x+y)^2}=\frac{x^2-xy+y^2}{2(x+y)}$ **23'** $\frac{(x-y)^2}{3x^3-3y^3}=$
$=\frac{(x-y)^2}{3(x^3-y^3)}=\frac{(x-y)^2}{3(x-y)(x^2+xy+y^2)}=\frac{x-y}{3(x^2+xy+y^2)}$

24 $\frac{y^4-x^4}{xy^2+x^3}=\frac{(y^2)^2-(x^2)^2}{x(y^2+x^2)}=\frac{(y^2+x^2)(y^2-x^2)}{x(y^2+x^2)}=\frac{y^2-x^2}{x}=$
$=\frac{(y+x)(y-x)}{x}$ **24'** См. отд. IV, № 228 $\frac{x^6-y^6}{x^4-xy^3}=\frac{(x^3)^2-(y^3)^2}{x(x^3-y^3)}=$

$= \frac{(x^3+y^3)(x^3-y^3)}{x(x^3-y^3)} = \frac{x^3+y^3}{x} = \frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{x}$

25. См. отд. IV № 152. $\frac{x^5-y^5}{x^3-y^3} = \frac{(x-y)(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4)}{(x-y)(x^2+xy+y^2)} =$

$= \frac{x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4}{x^2+xy+y^2}$. **25′.** См. отд. IV № 152. $\frac{x^5+y^5}{x^3+y^3} =$

$= \frac{(x+y)(x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4)}{(x+y)(x^2-xy+y^2)} = \frac{x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4}{x^2-xy+y^2}$

26. $\frac{2x+4}{3x^3+24} = \frac{2(x+2)}{3(x^3+8)}$ = (срв. отд. IV № 148) $= \frac{2(x+2)}{3(x^3+2^3)} =$

$= \frac{2(x+2)}{3(x+2)(x^2-x\cdot 2+2^2)} = \frac{2}{3(x^2-2x+4)}$. **26′.** $\frac{4x-12}{3x^3-81} = \frac{4(x-3)}{3(x^3-27)} =$

= (срв. отд. IV № 149) $= \frac{4(x-3)}{3(x^3-3^3)} = \frac{4(x-3)}{3(x-3)(x^2+x\cdot 3+3^2)} = \frac{4}{3(x^2+3x+9)}$

27. $\frac{16a^3-36ab^2}{6ab-9b^2} = \frac{4a(4a^2-9b^2)}{3b(2a-3b)}$ = (срв. отд. IV № 130) =

$= \frac{4a[(2a)^2-(3b)^2]}{3b(2a-3b)} = \frac{4a(2a+3b)(2a-3b)}{3b(2a-3b)} = \frac{4a(2a+3b)}{3b}$. **27′.**

$\frac{35a^2b+15b^2}{147a^6b-27a^2b^3} = \frac{5b(7a^2+3b)}{3a^2b(49a^4-9b^2)} = \frac{5(7a^2+3b)}{3a^2[(7a^2)^2-(3b)^2]} =$

$= \frac{5(7a^2+3b)}{3a^2(7a^2+3b)(7a^2-3b)} = \frac{5}{3a^2(7a^2-3b)}$

28. $\frac{243a^6b^6-675a^4b^8}{9a^2b^2-15ab^3} = \frac{27a^4b^6(9a^2-25b^2)}{3ab^2(3a-5b)} = \frac{9a^3b^4[(3a)^2-(5b)^2]}{3a-5b}$

$= \frac{9a^3b^4(3a+5b)(3a-5b)}{3a-5b} = 9a^3b^4(3a+5b)$. **28′.** $\frac{240a^2b+60a^3}{720a^3b^4-45a^5b^2} =$

$= \frac{60a^2(4b+a)}{45a^3b^2(16b^2-a^2)}$ = (срв. отд. IV № 128′) $= \frac{60a^2(4b+a)}{45a^3b^2[(4b)^2-a^2]}$

$= \frac{4(4b+a)}{3ab^2(4b+a)(4b-a)} = \frac{4}{3ab^2(4b-a)}$

29. $\frac{x^3+x^2y}{x^2+2xy+y^2} = \frac{x^2(x+y)}{(x+y)^2} = \frac{x^2}{x+y}$. **29′.** $\frac{x^3-2ax^2}{x^2-4ax+4a^2}$

$= \frac{x^2(x-2a)}{x^2-2\cdot x\cdot 2a+(2a)^2} = \frac{x^2(x-2a)}{(x-2a)^2} = \frac{x^2}{x-2a}$

30. $\frac{12x^2-8xy}{9x^2-12xy+4y^2} = \frac{4x(3x-2y)}{(3x)^2-2\cdot 3x\cdot 2y+(2y)^2} = \frac{4x(3x-2y)}{(3x-2y)^2} = \frac{4x}{3x-2y}$. **30′.**

$\frac{3a^2y^2+6xy^2}{a^4+4a^2x+4x^2} = \frac{3y^2(a^2+2x)}{(a^2)^2+2\cdot a^2\cdot 2x+(2x)^2} = \frac{3y^2(a^2+2x)}{(a^2+2x)^2} = \frac{3y^2}{a^2+2x}$

31 $\frac{a^2+2ab+b^2}{a^4-b^4}=\frac{(a+b)^2}{(a^2)^2-(b^2)^2}=\frac{(a+b)^2}{(a^2+b^2)(a^2-b^2)}=\frac{(a+b)^2}{(a^2+b^2)(a+b)(a-b)}=$
$=\frac{a+b}{(a^2+b^2)(a-b)}$

31′ $\frac{a^2-2ab+b^2}{a^4-b^4}=\frac{(a-b)^2}{(a^2)^2-(b^2)^2}=\frac{(a-b)^2}{(a^2+b^2)(a^2-b^2)}=$
$=\frac{(a-b)^2}{(a^2+b^2)(a+b)(a-b)}=\frac{a-b}{(a^2+b^2)(a+b)}$

32 $\frac{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}{a^2x+abx}=\frac{(a+b)^3}{ax(a+b)}=\frac{(a+b)^2}{ax}$

32′ $\frac{a^3-3a^2b+3ab^2-b^3}{a^3x-ab^2x}=\frac{(a-b)^3}{ax(a^2-b^2)}=\frac{(a-b)^3}{ax(a+b)(a-b)}=\frac{(a-b)^2}{ax(a+b)}$

33 $\frac{x-xy+z-zy}{1-3y+3y^2-y^3}=\frac{(x-xy)+(z-zy)}{1^3-3\cdot 1^2\cdot y+3\cdot 1\cdot y^2-y^3}=\frac{x(1-y)+z(1-y)}{(1-y)^3}=$
$=\frac{(1-y)(x+z)}{(1-y)^3}=\frac{x+z}{(1-y)^2}$

33′ $\frac{a+ac+b+bc}{1+3c+3c^2+c^3}=\frac{a(1+c)+b(1+c)}{1^3+3\cdot 1^2\cdot c+3\cdot 1\cdot c^2+c^3}=$
$=\frac{(1+c)(a+b)}{(1+c)^3}=\frac{a+b}{(1+c)^2}$

34 $\frac{20a^5x^2+16a^3bx^2}{75a^4b+120a^2b^2+48b^3}=\frac{4a^3x^2(5a^2+4b)}{3b(25a^4+40a^2b+16b^2)}=$
$=\frac{4a^3x^2(5a^2+4b)}{3b\,[(5a^2)^2+2\cdot 5a^2\cdot 4b+(4b)^2]}=\frac{4a^3x^2(5a^2+4b)}{3b(5a^2+4b)^2}=\frac{4a^3x^2}{3b(5a^2+4b)}$

34′ $\frac{16a^5b-20a^3b^2}{48a^4b^2-120a^2b^3+75b^4\ {}^{*)}}=\frac{4a^3b(4a^2-5b)}{3b^2(16a^4-40a^2b+25b^2)}=$
$=\frac{4a^3(4a^2-5b)}{3b[(4a^2)^2-2\cdot 4a^2\cdot 5b+(5b)^2]}=\frac{4a^3(4a^2-5b)}{3b(4a^2-5b)^2}=\frac{4a^3}{3b(4a^2-5b)}$

35 $\frac{ac+bx+ax+bc}{ay+2bx+2ax+by}=\frac{(ac+ax)+(bc+bx)}{(ay+2ax)+(2bx+by)}=$
$=\frac{a(c+x)+b(c+x)}{a(y+2x)+b(2x+y)}=\frac{(c+x)(a+b)}{(2x+y)(a+b)}=\frac{c+x}{2x+y}$

35′ $\frac{2az^2+2bz^2+3a^3+3a^2b}{ab^2+b^3-2ax^2-2bx^2}=\frac{2z^2(a+b)+3a^2(a+b)}{b^2(a+b)-2x^2(a+b)}=\frac{(a+b)(2z^2+3a^2)}{(a+b)(b^2-2x^2)}=$
$=\frac{3a^2+2z^2}{b^2-2x^2}$

36 $\frac{3a^3+ab^2-6a^2b-2b^3}{9a^5-ab^4-18a^4b+2b^5}=\frac{a(3a^2+b^2)-2b(3a^2+b^2)}{a(9a^4-b^4)-2b(9a^4-b^4)}=$
$=\frac{(3a^2+b^2)(a-2b)}{(9a^4-b^4)(a-2b)}=\frac{3a^2+b^2}{9a^4-b^4}=\frac{3a^2+b^2}{(3a^2)^2-(b^2)^2}=\frac{3a^2+b^2}{(3a^2+b^2)(3a^2-b^2)}=$

---

*) Въ «Сборникѣ» здѣсь *опечатка*: 3-ій членъ знаменателя долженъ быть $+75b^4$ а не $-75b^4$

$= \frac{1}{3a^2-b^2}$ **36′** $\frac{2a^3+6a^2b-ab^2-3b^3}{4a^5+12a^4b-ab^4-3b^5} = \frac{2a^2(a+3b)-b^2(a+3b)}{4a^4(a+3b)-b^4(a+3b)} =$

$= \frac{(a+3b)(2a^2-b^2)}{(a+3b)(4a^4-b^4)} = \frac{2a^2-b^2}{4a^4-b^4} = \frac{2a^2-b^2}{(2a^2)^2-(b^2)^2} =$

$= \frac{2a^2-b^2}{(2a^2+b^2)(2a^2-b^2)} = \frac{1}{2a^2+b^2}$

37 $\frac{3ac^2+3bc^2-3ab^2-3b^3}{6ac^2-6bc^2-6ab^2+6b^3} = \frac{3c^2(a+b)-3b^2(a+b)}{6c^2(a-b)-6b^2(a-b)} =$

$= \frac{(a+b)(3c^2-3b^2)}{(a-b)(6c^2-6b^2)} = \frac{(a+b)\,3(c^2-b^2)}{(a-b)\,6(c^2-b^2)} = \frac{a+b}{2(a-b)}$ **37′**

$\frac{5ac^3-5bc^3+5ab^3-5b^4}{10ac^3+10bc^3+10ab^3+10b^4} = \frac{5(ac^3-bc^3+ab^3-b^4)}{10(ac^3+bc^3+ab^3+b^4)} = \frac{ac^3-bc^3+ab^3-b^4}{2(ac^3+bc^3+ab^3+b^4)} =$

$= \frac{c^3(a-b)+b^3(a-b)}{2[c^3(a+b)+b^3(a+b)]} = \frac{(a-b)(c^3+b^3)}{2(a+b)(c^3+b^3)} = \frac{a-b}{2(a+b)}$

38 $\frac{a^5-ba^4-ab^4+b^5}{a^4-ba^3-a^2b^2+ab^3} = \frac{a^4(a-b)-b^4(a-b)}{a^3(a-b)-ab^2(a-b)} = \frac{(a-b)(a^4-b^4)}{(a-b)(a^3-ab^2)} =$

$= \frac{a^4-b^4}{a^3-ab^2} = \frac{(a^2)^2-(b^2)^2}{a(a^2-b^2)} = \frac{(a^2+b^2)(a^2-b^2)}{a(a^2-b^2)} = \frac{a^2+b^2}{a}$ **38′** $\frac{a^5-ab^4+a^4b-b^5}{a^4+a^2b^2+a^3b+ab^3} =$

$= \frac{a(a^4-b^4)+b(a^4-b^4)}{a^3(a+b)+ab^2(a+b)} = \frac{(a^4-b^4)(a+b)}{(a+b)(a^3+ab^2)} = \frac{a^4-b^4}{a^3+ab^2} = \frac{(a^2)^2-(b^2)^2}{a(a^2+b^2)} =$

$= \frac{(a^2+b^2)(a^2-b^2)}{a(a^2+b^2)} = \frac{a^2-b^2}{a} = \frac{(a+b)(a-b)}{a}$

39 $\frac{ab(x^2+y^2)+xy(a^2+b^2)}{ab(x^2-y^2)+xy(a^2-b^2)} = \frac{abx^2+aby^2+a^2xy+b^2xy}{abx^2-aby^2+a^2xy-b^2xy} =$

$= \frac{(abx^2+a^2xy)+(aby^2+b^2xy)}{(abx^2+a^2xy)-(aby^2+b^2xy)} = \frac{ax(bx+ay)+by(ay+bx)}{ax(bx+ay)-by(ay+bx)} =$

$= \frac{(bx+ay)(ax+by)}{(bx+ay)(ax-by)} = \frac{ax+by}{ax-by}$ **39′** $\frac{xy(a^2+b^2)-ab(x^2+y^2)}{xy(a^2-b^2)+ab(x^2-y^2)} =$

$= \frac{a^2xy+b^2xy-abx^2-aby^2}{a^2xy-b^2xy+abx^2-aby^2} = \frac{(a^2xy-abx^2)-(aby^2-b^2xy)}{(a^2xy+abx^2)-(aby^2+b^2xy)} =$

$= \frac{ax(ay-bx)-by(ay-bx)}{ax(ay+bx)-by(ay+bx)} = \frac{(ay-bx)(ax-by)}{(ay+bx)(ax-by)} = \frac{ay-bx}{ay+bx}$

40 См. отд. IV № 91′ и формулу 10-ую на 44 стр. «Сборника». $\frac{x^2-(a-b)x-ab}{x^3+bx^2+ax+ab} =$

$= \frac{(x-a)(x+b)}{x^2(x+b)+a(x+b)} = \frac{(x-a)(x+b)}{(x+b)(x^2+a)} = \frac{x-a}{x^2+a}$ **40′** См. отд. IV № 81

и формулу 7-ую на 44 стр. «Сб.» $\frac{x^2+(a+c)x+ac}{x^3+ax^2-cx-ac} = \frac{(x+a)(x+c)}{x^2(x+a)-c(x+a)} =$

$$=\frac{(x+a)(x+c)}{(x+a)(x^2-c)}=\frac{x+c}{x^2-c}$$

41 $$\frac{(x+a)^2-(b+c)^2}{(x+b)^2-(a+c)^2}=\frac{[(x+a)+(b+c)][(x+a)-(b+c)]}{[(x+b)+(a+c)][(x+b)-(a+c)]}=$$

$$=\frac{(x+a+b+c)(x+a-b-c)}{(x+a+b+c)(x-a+b-c)}=\frac{x+a-b-c}{x-a+b-c}$$ Срв отд IV № 170 и др. 41′

$$\frac{(x-b)^2-(a-c)^2}{(x-a)^2-(b-c)^2}=\frac{[(x-b)+(a-c)][(x-b)-(a-c)]}{[(x-a)+(b-c)][(x-a)-(b-c)]}=$$

$$=\frac{(x+a-b-c)(x-a-b+c)}{(x-a+b-c)(x-a-b+c)}=\frac{x+a-b-c}{x-a+b-c}$$

42 $$\frac{x^2+3x+2}{x^2+6x+5}=\frac{x^2+x+2x+2}{x^2+x+5x+5}=\frac{x(x+1)+2(x+1)}{x(x+1)+5(x+1)}=$$

$$=\frac{(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+5)}=\frac{x+2}{x+5}$$ 42′ $$\frac{x^2+4x+3}{x^2+7x+12}=\frac{x^2+x+3x+3}{x^2+3x+4x+12}=$$

$$=\frac{x(x+1)+3(x+1)}{x(x+3)+4(x+3)}=\frac{(x+1)(x+3)}{(x+3)(x+4)}=\frac{x+1}{x+4}$$

43 $$\frac{x^2+10x+21}{x^2-2x-15}=\frac{x^2+3x+7x+21}{x^2+3x-5x-15}=\frac{x(x+3)+7(x+3)}{x(x+3)-5(x+3)}=$$

$$=\frac{(x+3)(x+7)}{(x+3)(x-5)}=\frac{x+7}{x-5}$$ 43′ $$\frac{x^2-7x+10}{x^2+4x-12}=\frac{x^2-2x-5x+10}{x^2-2x+6x-12}=$$

$$=\frac{x(x-2)-5(x-2)}{x(x-2)+6(x-2)}=\frac{(x-2)(x-5)}{(x-2)(x+6)}=\frac{x-5}{x+6}$$

44 $$\frac{x^2-x-20}{x^2+x-30}=\frac{x^2+4x-5x-20}{x^2-5x+6x-30}=\frac{x(x+4)-5(x+4)}{x(x-5)+6(x-5)}=$$

$$=\frac{(x+4)(x-5)}{(x-5)(x+6)}=\frac{x+4}{x+6}$$ 44′ $$\frac{x^2+x-42}{x^2-x-56}=\frac{x^2-6x+7x-42}{x^2+7x-8x-56}=$$

$$=\frac{x(x-6)+7(x-6)}{x(x+7)-8(x+7)}=\frac{(x-6)(x+7)}{(x+7)(x-8)}=\frac{x-6}{x-8}$$

45 $$\frac{a^2-9ab+14b^2}{a^2-ab-2b^2}=\frac{a^2-2ab-7ab+14b^2}{a^2+ab-2ab-2b^2}=\frac{a(a-2b)-7b(a-2b)}{a(a+b)-2b(a+b)}=$$

$$=\frac{(a-2b)(a-7b)}{(a+b)(a-2b)}=\frac{a-7b}{a+b}$$ 45′ $$\frac{a^2+ab-2b^2}{a^2-7ab-18b^2}=$$

$$=\frac{a^2-ab+2ab-2b^2}{a^2+2ab-9ab-18b^2}=\frac{a(a-b)+2b(a-b)}{a(a+2b)-9b(a+2b)}=\frac{(a-b)(a+2b)}{(a+2b)(a-9b)}=$$

$$=\frac{a-b}{a-9b}$$

46 $$\frac{2a^2-ab-3b^2}{2a^2-5ab+3b^2}=\frac{2a^2+2ab-3ab-3b^2}{2a^2-2ab-3ab+3b^2}=\frac{2a(a+b)-3b(a+b)}{2a(a-b)-3b(a-b)}=$$

$$=\frac{(a+b)(2a-3b)}{(a-b)(2a-3b)}=\frac{a+b}{a-b}$$

46′ $$\frac{4a^2-7ab+3b^2}{5a^2-3ab-2b^2}=\frac{4a^2-4ab-3ab+3b^2}{5a^2-5ab+2ab-2b^2}=$$

$$=\frac{4a(a-b)-3b(a-b)}{5a(a-b)+2b(a-b)}=\frac{(a-b)(4a-3b)}{(a-b)(5a+2b)}=\frac{4a-3b}{5a+2b}$$

47 $$\frac{2x^3+5x^2+3x}{x^3-2x^2-3x}=\frac{x(2x^2+5x+3)}{x(x^2-2x-3)}=\frac{2x^2+2x+3x+3}{x^2+x-3x-3}=$$

$$=\frac{2x(x+1)+3(x+1)}{x(x+1)-3(x+1)}=\frac{(x+1)(2x+3)}{(x+1)(x-3)}=\frac{2x+3}{x-3}$$

47′ $$\frac{3x^3-5x^2+2x}{x^3+2x^2-3x}=$$

$$=\frac{x(3x^2-5x+2)}{x(x^2+2x-3)}=\frac{3x^2-3x-2x+2}{x^2-x+3x-3}=\frac{3x(x-1)-2(x-1)}{x(x-1)+3(x-1)}=$$

$$=\frac{(x-1)(3x-2)}{(x-1)(x+3)}=\frac{3x-2}{x+3}$$

48 $$\frac{x^4+(2b^2-a^2)x^2+b^4}{x^4+2ax^3+a^2x^2-b^4}=\frac{x^4+2b^2x^2-a^2x^2+b^4}{(x^2)^2+2\cdot x^2\cdot ax+(ax)^2-b^4}=$$

$$=\frac{(x^2)^2+2\cdot x^2\cdot b^2+(b^2)^2-a^2x^2}{(x^2+ax)^2-(b^2)^2}=\frac{(x^2+b^2)^2-(ax)^2}{(x^2+ax)^2-(b^2)^2}=\frac{(x^2+b^2+ax)(x^2+b^2-ax)}{(x^2+ax+b^2)(x^2+ax-b^2)}=$$

$$=\frac{x^2-ax+b^2}{x^2+ax-b^2}$$

48′ $$\frac{a^4-b^4-b^2y^2+2b^3y}{b^4+(2a^2-y^2)b^2+a^4}=\frac{a^4-(b^4-2b^3y+b^2y^2)}{b^4+2a^2b^2-b^2y^2+a^4}=$$

$$=\frac{a^4-[(b^2)^2-2\cdot b^2\cdot by+(by)^2]}{(b^2)^2+2\cdot b^2\cdot a^2+(a^2)^2-b^2y^2}=\frac{(a^2)^2-(b^2-by)^2}{(b^2+a^2)^2-(by)^2}=$$

$$=\frac{[a^2+(b^2-by)]\,[a^2-(b^2-by)]}{(b^2+a^2+by)(b^2+a^2-by)}=\frac{(a^2+b^2-by)(a^2-b^2+by)}{(a^2+b^2+by)(a^2+b^2-by)}=$$

$$=\frac{a^2-b^2+by}{a^2+b^2+by}$$

49 $$\frac{x^2+(a+b+c)x+(a+b)c}{a^2+2ab+b^2-x^2}=$$ (срв. отд. IV № 81 и формулу 7-ю на 44 стр. «Сборн.») $$=\frac{x^2+[(a+b)+c]x+(a+b)\cdot c}{(a+b)^2-x^2}=\frac{[x+(a+b)]\,(x+c)}{(a+b+x)\,(a+b-x)}=$$

$$=\frac{(x+a+b)(x+c)}{(a+b+x)(a+b-x)}=\frac{x+c}{a+b-x}$$

49′ $$\frac{x^2+(b-c-a)x-(b-c)a}{x^2-b^2+2bc-c^2}=$$

$$=\frac{x^2+[(b-c)-a]x-(b-c)\cdot a}{x^2-(b^2-2bc+c^2)}=$$ (срв. № 91 отд. IV и формулу 9-ую на 44 стр. «Сб.») $$=\frac{[x+(b-c)]\,(x-a)}{x^2-(b-c)^2}=\frac{(x+b-c)(x-a)}{[x+(b-c)]\,[x-(b-c)]}=$$

$$=\frac{(x+b-c)(x-a)}{(x+b-c)\,(x-b+c)}=\frac{x-a}{x-b+c}$$

50 $$\frac{a^3c-2a^2c^2+ac^3-ab^2c}{(a^2+c^2-b^2)^2-4a^2c^2}=\frac{ac(a^2-2ac+c^2-b^2)}{(a^2+c^2-b^2)^2-(2ac)^2}=$$

$$=\frac{ac[(a-c)^2-b^2]}{(a^2+c^2-b^2+2ac)(a^2+c^2-b^2-2ac)}=\frac{ac[(a-c)^2-b^2]}{[(a+c)^2-b^2][(a-c)^2-b^2]}=$$

$$=\frac{ac}{(a+c)^2-b^2}=\frac{ac}{(a+b+c)(a-b+c)}\quad \mathbf{50'}\quad \frac{a^2bc-b^3c+2b^2c^2-bc^3}{4b^2c^2-(a^2-b^2-c^2)^2}=$$

$$=\frac{bc(a^2-b^2+2bc-c^2)}{(2bc)^2-(a^2-b^2-c^2)^2}=\frac{bc[a^2-(b^2-2bc+c^2)]}{[2bc+(a^2-b^2-c^2)][2bc-(a^2-b^2-c^2)]}=$$

$$=\frac{bc[a^2-(b-c)^2]}{(2bc+a^2-b^2-c^2)(2bc-a^2+b^2+c^2)}=\frac{bc[a^2-(b-c)^2]}{[a^2-(b-c)^2][(b+c)^2-a^2]}=$$

$$=\frac{bc}{(b+c)^2-a^2}=\frac{bc}{(a+b+c)(c+b-a)}$$

§ 2. Приведеніе дробей къ общему знаменателю.

Приведеніе алгебраическихъ дробей къ общему знаменателю основывается (какъ и въ ариѳметикѣ) на томъ, что *если умножить члены дроби* (т. е. числителя и знаменателя) *на одно и то же количество неравное нулю, то величина дроби не измѣнится*. И въ алгебрѣ (по аналогіи съ ариѳметикой) общимъ знаменателемъ нѣсколькихъ данныхъ дробей наз. *простѣйшее* выраженіе, дѣлящееся на каждаго въ отдѣльности знаменателя дробей, иначе—общее наименьшее кратное знаменателей дробей. Все дѣйствіе распадается на слѣд. части: I. *Нахожденіе общаго наим. кратнаго знаменателей* (отд. IV, §...). II. *Нахожденіе дополнительнаго множителя* для каждой дроби, отъ наз. такъ потому, что дополняетъ соотвѣтствующаго знаменателя (путемъ умноженія) до общаго знаменателя; слѣд. дополнит. множит.=частному отъ дѣленія общ. знаменателя на данный знаменатель. III. Умноженіе числителей данныхъ дробей на соотвѣтственныхъ дополнительныхъ множителей (послѣ того, какъ знаменатели замѣнены общимъ знаменателемъ).

Послѣ этихъ выкладокъ дробямъ придается окончательный видъ, при которомъ по величинѣ онѣ не отличаются отъ данныхъ, но имѣютъ одинаковаго знаменателя. — Въ частномъ примѣрѣ дѣйствіе можетъ быть выполнено просто и быстро, но во всякомъ случаѣ оно можетъ быть расчленено на вышеуказанныя части.

51 $\frac{a}{b}=\frac{ad}{bd}$, $\frac{c}{d}=\frac{cb}{db}=\frac{bc}{bd}$ **51'** $\frac{b}{a}=\frac{bd}{ad}$, $\frac{c}{d}=\frac{ca}{da}=\frac{ac}{ad}$ **52** $\frac{a}{2b}=$ $=\frac{a\cdot 3d}{2b\cdot 3d}=\frac{3ad}{6bd}$, $\frac{c}{3d}=\frac{c\cdot 2b}{3d\cdot 2b}=\frac{2bc}{6bd}$ **52'** $\frac{b}{3a}=\frac{b\cdot 5c}{3a\cdot 5c}=\frac{5bc}{15ac}$, $\frac{d}{5c}=$ $=\frac{d\cdot 3a}{5c\cdot 3a}=\frac{3ad}{15ac}$ **53** $\frac{a}{c^2}=\frac{a\cdot b}{c^2\cdot b}=\frac{ab}{bc^2}$, $\frac{1}{b}=\frac{1\cdot c^2}{b\cdot c^2}=\frac{c^2}{bc^2}$ **53'** $\frac{b}{a^2}=$ $=\frac{b\cdot c}{a^2\cdot c}=\frac{bc}{a^2c}$, $\frac{1}{c}=\frac{1\cdot a^2}{c\cdot a^2}=\frac{a^2}{a^2c}$

54 Знаменатели данныхъ дробей a^2 и $2ab$, общій знаменатель $=2a^2b$; дополнительные множители: для первой дроби $=2a^2b:a^2=2b$, для второй $=2a^2b:2ab=a$. Так. образ., результатъ будетъ $\frac{b}{a^2}=\frac{b\cdot 2b}{a^2\cdot 2b}=\frac{2b^2}{2a^2b}$, $\frac{c}{2ab}=\frac{c\cdot a}{2ab\cdot a}=\frac{ac}{2a^2b}$ **54'** Знаменатели дробей $3bc$ и c^2, общій знаменатель$=3bc^2$, дополнит. множители для I-ой дроби$=3bc^2:3bc=c$, для 2-ой$=3bc^2:c^2=3b$, поэтому результат будет $\frac{a}{3bc}=\frac{a\cdot c}{3bc\cdot c}=\frac{ac}{3bc^2}$, $\frac{b}{c^2}=\frac{b\cdot 3b}{c^2\cdot 3b}=\frac{3b^2}{3bc^2}$

55 $\frac{x}{y}=\frac{xut}{yut}$; $\frac{z}{u}=\frac{zyt}{yut}$, $\frac{v}{t}=\frac{vyu}{yut}$. **55'** $\frac{y}{x}=\frac{yzv}{xzv}$, $\frac{u}{z}=\frac{uxv}{xzv}$, $\frac{t}{v}=\frac{txz}{xzv}$. **56** $\frac{2a^2}{b^3}=\frac{2a^2\cdot a^2c^3}{a^2b^3c^3}=\frac{2a^4c^3}{a^2b^3c^3}$, $\frac{3b^2}{a^2}=\frac{3b^2\cdot b^3c^3}{a^2b^3c^3}=\frac{3b^5c^3}{a^2b^3c^3}$, $\frac{5ab}{c^3}=\frac{5ab\cdot a^2b^3}{a^2b^3c^3}=\frac{5a^3b^4}{a^2b^3c^3}$. **56'** $\frac{a^3}{2b^2}=\frac{a^3\cdot 5a^2c^3}{2b^2\cdot a^2\cdot 5c^3}=\frac{5a^5c^3}{10a^2b^2c^3}$, $\frac{3bc}{a^2}=\frac{3bc\cdot 2b^2\cdot 5c^3}{10a^2b^2c^3}=\frac{30b^3c^4}{10a^2b^2c^3}$, $\frac{ab}{5c^3}=\frac{ab\cdot 2b^2\cdot a^2}{10a^2b^2c^3}=\frac{2a^3b^3}{10a^2b^2c^3}$.

57 $\frac{5a}{c^3}=\frac{5a\cdot a^3}{a^3c^3}=\frac{5a^4}{a^3c^3}$, $\frac{2b^2}{ac}=\frac{2b^2\cdot a^2c^2}{a^3c^3}=\frac{2a^2b^2c^2}{a^3c^3}$, $\frac{b^3}{a^3c}=\frac{b^3\cdot c^2}{a^3c^3}=\frac{b^3c^2}{a^3c^3}$. **57'** $\frac{3a}{2b^2}=\frac{3a\cdot a^3}{2a^3b^2}=\frac{3a^4}{2a^3b^2}$, $\frac{3c}{ab}=\frac{3c\cdot 2a^2b}{2a^3b^2}=\frac{6a^2bc}{2a^3b^2}$, $\frac{c^2}{a^3b}=\frac{c^2\cdot 2b}{2a^3b^2}=\frac{2bc^2}{2a^3b^2}$

58 Общій знаменатель$=4x^3\cdot 7a^2\cdot b^2=28a^2b^2x^3$, $\frac{7a}{4x^3}=\frac{7a\cdot 7a^2\cdot b^2}{28a^2b^2x^3}=\frac{49a^3b^2}{28a^2b^2x^3}$, $\frac{4bx}{7a^2}=\frac{4bx\cdot 4x^3\cdot b^2}{28a^2b^2x^3}=\frac{16b^3x^4}{28a^2b^2x^3}$, $\frac{2ac}{b^2}=\frac{2ac\cdot 4x^3\cdot 7a^2}{28a^2b^2x^3}=\frac{56a^3cx^3}{28a^2b^2x^3}$ **58'** Общ. знамен.$=5x^3\cdot 3b^2\cdot a^3=15a^3b^2x^3$, $\frac{3a^2}{5x^3}=\frac{3a^2\cdot 3b^2\cdot a^3}{15a^3b^2x^3}=\frac{9a^5b^2}{15a^3b^2x^3}$, $\frac{5y^2}{3b^2}=\frac{5y^2\cdot 5x^3\cdot a^3}{15a^3b^2x^3}=\frac{25a^3x^3y^2}{15a^3b^2x^3}$, $\frac{4b^3}{a}=\frac{4b^3\cdot 5x^3\cdot 3b^2}{15a^3b^2x^3}=\frac{60b^5x^3}{15a^3b^2x^3}$

59 Общій знаменатель$=2^2\cdot 3b^5d^3=12b^5d^3$, $\frac{3c^2}{4b^3d^2}=\frac{3c^2\cdot 3b^2d}{12b^5d^3}=\frac{9b^2c^2d}{12b^5d^3}$, $\frac{2a}{6b^2d^3}=\frac{2a\cdot 2b^3}{12b^5d^3}=\frac{4ab^3}{12b^5d^3}$, $\frac{5x}{b^5d}=\frac{5x\cdot 12d^2}{12b^5d^3}=\frac{60d^2x}{12b^5d^3}$ **59'** Общ. знам.$=3^2\cdot 2a^7b^4=18a^7b^4$, $\frac{5y}{9a^3b^4}=\frac{5y\cdot 2a^4}{18a^7b^4}=\frac{10a^4y}{18a^7b^4}$, $\frac{d^3}{6a^4b^3}=\frac{d^3\cdot 3a^3b}{18a^7b^4}=\frac{3a^3bd^3}{18a^7b^4}$; $\frac{3}{a^7b^2}=\frac{3\cdot 18b^2}{18a^7b^4}=\frac{54b^2}{18a^7b^4}$

60 Общ. знамен.$=2a^2b^2\cdot 3c^2d^2\cdot 5e^2f^2=30a^2b^2c^2d^2e^2f^2$, $\frac{3c^2}{2a^2b^2}=\frac{3c^2\cdot 15c^2d^2e^2f^2}{30a^2b^2c^2d^2e^2f^2}=\frac{45c^4d^2e^2f^2}{30a^2b^2c^2d^2e^2f^2}$, $\frac{2b^2}{3c^2d^2}=\frac{2b^2\cdot 10a^2b^2e^2f^2}{30a^2b^2c^2d^2e^2f^2}=\frac{20a^2b^4e^2f^2}{30a^2b^2c^2d^2e^2f^2}$, $\frac{a^2}{5e^2f^2}=$

$=\dfrac{a^2\cdot 6a^2b^2c^2d^2}{30a^2b^2c^2d^2e^2f^2}=\dfrac{6a^4b^2c^2d^2}{30a^2b^2c^2d^2e^2f^2}$. 60′ Общ. знамен. $=5b^2c^2\cdot 3a^2d^2\cdot 2e^2f^2=$ $=30a^2b^2c^2d^2e^2f^2$; $\dfrac{a^2}{5b^2c^2}=\dfrac{a^2\cdot 6a^2d^2e^2f^2}{30a^2b^2c^2d^2e^2f^2}=\dfrac{6a^4d^2e^2f^2}{30a^2b^2c^2d^2e^2f^2}$; $\dfrac{2b^2}{3a^2d^2}=\dfrac{2b^2\cdot 10b^2c^2e^2f^2}{30a^2b^2c^2d^2e^2f^2}=$ $=\dfrac{20b^4c^2e^2f^2}{30a^2b^2c^2d^2e^2f^2}$, $\dfrac{3c^2}{2e^2f^2}=\dfrac{3c^2\cdot 15a^2b^2c^2d^2}{30a^2b^2c^2d^2e^2f^2}=\dfrac{45a^2b^2c^4d^2}{30a^2b^2c^2d^2e^2f^2}$.

61. Общ. знаменат. $=a$, первая дробь $a=\dfrac{a}{1}=\dfrac{a\cdot a}{a}=\dfrac{a^2}{a}$; вторая дробь $\dfrac{b^2}{a}$ остается без измѣненія. 61′ $b=\dfrac{b\cdot b}{b}=\dfrac{b^2}{b}$; другая дробь $\dfrac{a^2}{b}$ — безъ перемѣны.

62. Общ. знаменат $=a^2b$, первая дробь $2b=\dfrac{2b\cdot a^2b}{a^2b}=\dfrac{2a^2b^2}{a^2b}$, вторая дробь $\dfrac{c}{a^2b}$ — безъ измѣненія. 62′ $3a=\dfrac{3a\cdot a^2c}{a^2c}=\dfrac{3a^3c}{a^2c}$; другая дробь $\dfrac{b}{a^2c}$ остается безъ измѣненія.

63. Общій знамен $=2a^2b^2$, $\dfrac{b}{a}=\dfrac{b\cdot 2ab^2}{2a^2b^2}=\dfrac{2ab^3}{2a^2b^2}$, $a^2=\dfrac{a^2\cdot 2a^2b^2}{2a^2b^2}=$ $=\dfrac{2a^4b^2}{2a^2b^2}$, $\dfrac{c}{2a^2b^2}$ — безъ измѣненія. 63′ Общ. знамен $=3a^2b^2$, $\dfrac{a}{b}=$ $=\dfrac{a\cdot 3a^2b}{3a^2b^2}=\dfrac{3a^3b}{3a^2b^2}$, $b^2=\dfrac{b^2\cdot 3a^2b^2}{3a^2b^2}=\dfrac{3a^2b^4}{3a^2b^2}$. $\dfrac{c}{3a^2b^2}$ — безъ измѣненія.

64. Общій знаменатель $=3b\cdot 2c=6bc$; $\dfrac{2a}{3b}=\dfrac{2a\cdot 2c}{6bc}=\dfrac{4ac}{6bc}$, $\dfrac{b}{2c}=\dfrac{3b\cdot 3b}{6bc}=\dfrac{9b^2}{6bc}$, $bc=\dfrac{bc\cdot 6bc}{6bc}=\dfrac{6b^2c^2}{6bc}$. 64′ Общ. знамен $=3a\cdot 2b=$ $=6ab$; $\dfrac{2b}{3a}=\dfrac{2b\cdot 2b}{6ab}=\dfrac{4b^2}{6ab}$; $\dfrac{3c}{2b}=\dfrac{3c\cdot 3a}{6ab}=\dfrac{9ac}{6ab}$, $ab=\dfrac{ab\cdot 6ab}{6ab}=$ $=\dfrac{6a^2b^2}{6ab}$.

65. Общій знаменатель $=2^3\cdot 3a^5b^3c^3=24a^5b^3c^3$; $\dfrac{x}{6a^2b}=\dfrac{x\cdot 4a^3b^2c^3}{24a^5b^3c^3}=$ $=\dfrac{4a^3b^2c^3x}{24a^5b^3c^3}$, $\dfrac{1}{8b^3c^2}=\dfrac{1\cdot 3a^5c}{24a^5b^3c^3}=\dfrac{3a^5c}{24a^5b^3c^3}$, $\dfrac{3d}{4a^5c^3}=\dfrac{3d\cdot 6b^3}{24a^5b^3c^3}=\dfrac{18b^3d}{24a^5b^3c^3}$. 65′ Общ. знамен $=2^2\cdot 3^2b^3c^3x^2=36b^3c^3x^2$; $\dfrac{3ax}{4b^2c^3}=\dfrac{3ax\cdot 9bx^2}{36b^3c^3x^2}=\dfrac{27abx^3}{36b^3c^3x^2}$, $\dfrac{2ac}{9bx^2}=$

$=\frac{2ac\cdot4b^2c^3}{36b^3c^3x^2}=\frac{8ab^2c^4}{36b^3c^3x^2}$, $\frac{1}{12b^3cx}=\frac{1\cdot3c^2x}{36b^3c^3x^2}=\frac{3c^2x}{36b^3c^3x^2}$.

66 *) Общій знаменатель $=2^3\cdot3^2a^5b^4c^5d^4=72a^5b^4c^5d^4$, $\frac{5ab}{12b^4d^3}=$ $=\frac{5ab\cdot6a^5c^5d}{72a^5b^4c^5d^4}=\frac{30a^6bc^5d}{72a^5b^4c^5d^4}$, $\frac{7a^4c}{8b^3d^4}=\frac{7a^4c\cdot9a^5bc^5}{72a^5b^4c^5d^4}=$ $=\frac{63a^9bc^6}{72a^5b^4c^5d^4}$, $\frac{b^3d^3}{18a^5c}=\frac{b^3d^3\cdot4b^4d^4}{72a^5b^4c^5d^4}=\frac{4b^7d^7}{72a^5b^4c^5d^4}$. 66′ Общ. знамен. $=$ $=2^3\cdot3^2a^8c^5d^{12}x=72a^8c^5d^{12}x$, $\frac{7b^3c}{24a^4d}=\frac{7b^3c\cdot3a^4c^4d^6x}{72a^8c^5d^{12}x}=\frac{21a^4b^3c^5d^6x}{72a^8c^5d^{12}x}$, $\frac{a^3b^4}{18c^5x}=\frac{a^3b^4\cdot4a^8d^{12}}{72a^8c^5d^{12}x}=\frac{4a^{11}b^4d^{12}}{72a^8c^5d^{12}x}$, $\frac{5b^5c^3}{36a^8d^{12}}=\frac{5b^5c^3\cdot2c^5x}{72a^8c^5d^{12}x}=$ $=\frac{10b^5c^8x}{72a^8c^5d^{12}x}$.

67. Общій знаменатель $=2^4\cdot3b^5d^4=48b^5d^4$ это — знаменатель первой дроби $\frac{7a}{48b^5d^4}$, поэтому, она остается безъ перемѣны, далѣе $\frac{3c^2}{8b^3d}=$ $=\frac{3c^2\cdot6b^2d^3}{48b^5d^4}=\frac{18b^2c^2d^3}{48b^5d^4}$, $\frac{2x^3}{3bd^2}=\frac{2x^3\cdot16b^4d^2}{48b^5d^4}=\frac{32b^4d^2x^3}{48b^5d^4}$. 67′ Общ. знамен. $=42a^7b^8=$ знаменателю второй дроби, которая, поэтому, остается безъ перемѣны $\frac{5cd}{42a^7b^8}$, $\frac{2x^2}{7a^3b}=\frac{2x^2\cdot6a^4b^7}{42a^7b^8}=\frac{12a^4b^7x^2}{42a^7b^8}$, $\frac{3z}{2ab^5}=$ $=\frac{3z\cdot21a^6b^3}{42a^7b^8}=\frac{63a^6b^3z}{42a^7b^8}$.

68. Общій знаменат. $=30a^5b^4x^3$, т. е. знаменатель второй данной дроби слѣд., она останется безъ измѣненія $\frac{1}{30a^5b^4x^3}$, $\frac{5y^2}{6a^3x}=$ $=\frac{5y^2\cdot5a^2b^4x^2}{30a^5b^4x^3}=\frac{25a^2b^4x^2y^2}{30a^5b^4x^3}$, $\frac{7x^2}{10a^2b^3}=\frac{7x^2\cdot3a^3bx}{30a^5b^4x^3}=\frac{21a^3bx^3}{30a^5b^4x^3}$. 68′ Общ. знам. $=$ $=45a^7b^3c^4=$ знаменат. первой данной дроби, которая, поэтому, остается безъ измѣненія $\frac{1}{45a^7b^3c^4}$, $\frac{2z^2}{5a^3b^2}=\frac{2z^2\cdot9a^4bc^4}{45a^7b^3c^4}=\frac{18a^4bc^4z^2}{45a^7b^3c^4}$, $\frac{7b^3y}{3ac^4}=$ $=\frac{7b^3y\cdot15a^6b^3}{45a^7b^3c^4}=\frac{105a^6b^6y}{45a^7b^3c^4}$.

69. Общій знаменатель $=2^3\cdot3a^4b^4c^3=24a^4b^4c^3$, $\frac{3a}{4b^4c^2}=\frac{3a\cdot6a^4c}{24a^4b^4c^3}=$

---

*) Въ отвѣтѣ къ этому № ру въ «Сборникѣ» опечатка: степень буквы c должна быть 5-ая, а не 6-ая, ибо 6-ой степени c вовсе нѣтъ въ условіи (изд. 15-ое).

$= \frac{18a^3c}{24a^4b^4c^3}$, $\frac{b}{6a^4c^3} = \frac{b\cdot 4b^4}{24a^4b^4c^3} = \frac{4b^5}{24a^4b^4c^3}$, $\frac{c}{2a^2b^2} = \frac{12a^2b^2c^3}{24a^4b^4c^3} =$ $= \frac{12a^2b^2c^4}{24a^4b^4c^3}$, $\frac{1}{8abc} = \frac{1\cdot 3a^3b^3c^2}{24a^4b^4c^3} = \frac{3a^3b^3c^2}{24a^4b^4c^3}$. 69'. Общ. знамен. $=2^3\cdot 5a^3b^2cd = 40a^3b^2cd$, $\frac{2}{a^3b^2} = \frac{2\cdot 40cd}{40a^3b^2cd} = \frac{80cd}{40a^3b^2cd}$, $\frac{15a}{8b^2c} =$ $= \frac{15a\cdot 5a^3d}{40a^3b^2cd} = \frac{75a^4d}{40a^3b^2cd}$, $\frac{3a^5c^3}{2b} = \frac{3a^5c^3\cdot 20a^3bcd}{40a^3b^2cd} = \frac{60a^8bc^4d}{40a^3b^2cd}$, $\frac{12abc}{5d} =$ $= \frac{12abc\cdot 8a^3b^2c}{40a^3b^2cd} = \frac{96a^4b^3c^2}{40a^3b^2cd}$.

70. Общій знаменатель $=2^2\cdot 3\cdot 7a^6b^4c^8 = 84a^6b^4c^8$, $\frac{x}{28a^3b^4c^3} =$ $= \frac{x\cdot 3a^3c^5}{84a^6b^4c^8} = \frac{3a^3c^5x}{84a^6b^4c^8}$, $\frac{y}{42a^3b^4c^5} = \frac{y\cdot 2a^3c^3}{84a^6b^4c^8} = \frac{2a^3c^3y}{84a^6b^4c^8}$, $\frac{z}{12a^6b} =$ $= \frac{z\cdot 7b^3c^8}{84a^6b^4c^8} = \frac{7b^3c^8z}{84a^6b^4c^8}$, $\frac{u}{7ac^8} = \frac{u\cdot 12a^5b^4}{84a^6b^4c^8} = \frac{12a^5b^4u}{84a^6b^4c^8}$. 70'. Общ. знамен. $=$ $=2^5\cdot 3a^7b^5c^8 = 96a^7b^5c^8$, $\frac{x}{96a^7b^4} = \frac{x\cdot bc^8}{96a^7b^5c^8} = \frac{bc^8x}{96a^7b^5c^8}$, $\frac{y}{16ac^5} =$ $= \frac{y\cdot 6a^6b^5c^3}{96a^7b^5c^8} = \frac{6a^6b^5c^3y}{96a^7b^5c^8}$, $\frac{z}{24b^5c} = \frac{z\cdot 4a^7c^7}{96a^7b^5c^8} = \frac{4a^7c^7z}{96a^7b^5c^8}$, $\frac{u}{12a^4bc^8} =$ $= \frac{u\cdot 8a^3b^4}{96a^7b^5c^8} = \frac{8a^3b^4u}{96a^7b^5c^8}$.

Замѣчаніе къ №№ 71—80. Въ этихъ задачахъ знаменателями являются многочленныя выраженія, но по вышеуказанному *отысканіе общаго знаменателя сводится къ отысканію общ. наименьшаго кратнаго* знаменателей всѣхъ дробей, а т. к. это послѣднее дѣйствіе въ случаѣ многочленовъ, требуетъ разложенія послѣднихъ на простыхъ множителей (отд. IV § 4) то слѣд. для рѣш. зад. №№ 71—80 необходимо разложить знаменателей дробей данныхъ въ нихъ на простыхъ множителей.—При этомъ для сокращенія будемъ пользоваться слѣд. условными обозначеніями:

P—знаменатель первой изъ данныхъ дробей,
Q— » второй » » »,
R— » третьей » » »,
S— » четвертой » » »
общ. знам.—общій знаменатель » »

71. $P=a+b$, $Q=a-b$, $R=a^2-b^2=(a+b)(a-b)$, общ. знам. $=(a+b)(a-b)=R$, $\frac{a}{a+b} = \frac{a(a-b)}{a^2-b^2} = \frac{a^2-ab}{a^2-b^2}$, $\frac{b}{a-b} = \frac{b(a+b)}{(a-b)(a+b)} =$ $= \frac{ab+b^2}{a^2-b^2}$, $\frac{ab}{a^2-b^2} = \frac{ab}{R}$ — безъ измѣненія. 71'. $P=a-b$, $Q=a+b$, $R=a^2-b^2=(a+b)(a-b)$, общ. знам. $=(a+b)(a-b)=R$, $\frac{a}{a-b} =$ $= \frac{a(a+b)}{(a-b)(a+b)} = \frac{a^2+ab}{a^2-b^2}$; $\frac{b}{a+b} = \frac{b(a-b)}{(a+b)(a-b)} = \frac{ab-b^2}{a^2-b^2}$, $\frac{ab}{a^2-b^2} =$ $= \frac{ab}{R}$ — безъ измѣненія.

72. $P=a-b,\ Q=a^2+ab=a(a+b),\ R=a^2b-b^3=b(a^2-b^2)=b(a+b)(a-b)$ общ. знам. $=ab(a+b)(a-b)$. $\frac{a}{a-b}=\frac{a\cdot ab(a+b)}{ab(a+b)(a-b)}=\frac{a^2b(a+b)}{ab(a^2-b^2)}$, $\frac{b^2}{a^2+ab}=\frac{b^2\cdot b(a-b)}{a(a+b)\cdot b(a-b)}=\frac{b^3(a-b)}{ab(a^2-b^2)}$, $\frac{a^3}{a^2b-b^3}=\frac{a^3\cdot a}{b(a+b)(a-b)\cdot a}=$ $=\frac{a^4}{ab(a^2-b^2)}$. 72'. $P=a+b,\ Q=a^2-ab=a(a-b)\ R=a^2b-b^3=b(a^2-b^2)=$ $=b(a+b)(a-b)$, общ. знам. $=ab(a+b)(a-b)$, $\frac{a}{a+b}=\frac{a\cdot ab(a-b)}{(a+b)\cdot ab(a-b)}=$ $=\frac{a^2b(a-b)}{ab(a^2-b^2)}$, $\frac{b^2}{a^2-ab}=\frac{b^2\cdot b(a+b)}{a(a-b)\cdot b(a+b)}=\frac{b^3(a+b)}{ab(a^2-b^2)}$, $\frac{a^3}{a^2b-b^3}=$ $=\frac{a^3\cdot a}{b(a^2-b^2)\cdot a}=\frac{a^4}{ab(a^2-b^2)}$.

73. $P=x^3-ax^2=x^2(x-a),\ Q=x+2a\ R=x^3+ax^2-2a^2x=x(x^2+ax-2a^2)=$ $=x(x^2-ax+2ax-2a^2)=x[x(x-a)+2a(x-a)]=x(x-a)(x+2a)$ общ. знам. $=x^2(x-a)(x+2a)$ I-я дробь$=\frac{3a}{P}=\frac{3a}{x^2(x-a)}=\frac{3a\cdot(x+2a)}{x^2(x-a)(x+2a)}=$ $=\frac{3ax+6a^2}{x^2(x-a)(x+2a)}$, II-я дробь$=\frac{2x}{Q}=\frac{2x}{x+2a}=\frac{2x\cdot x^2(x-a)}{x^2(x-a)(x+2a)}=$ $=\frac{2x^4-2ax^3}{x^2(x-a)(x+2a)}$ III-я дробь$=\frac{5a}{R}=\frac{5a\cdot x}{x(x-a)(x+2a)\cdot x}=$ $=\frac{5ax}{x^2(x-a)(x+2a)}$ 73'. $P=ax^2-a^2x-2a^3=a(x^2-ax-2a^2)=a(x^2+ax-$ $-2ax-2a^2)=a[x(x+a)-2a(x+a)]=a(x+a)(x-2a)$, $Q=x+a\ R=a^2x-$ $-2a^3=a^2(x-2a)$, общ. знам. $=a^2(x+a)(x-2a)$, I-я дробь$=\frac{4x}{P}=$ $\frac{4x\cdot a}{a(x+a)(x-2a)\cdot a}=\frac{4ax}{a^2(x+a)(x-2a)}$. II-я др.$=\frac{3a}{Q}=\frac{3a\cdot a^2(x-2a)}{(x+a)\cdot a^2(x-2a)}=$ $=\frac{3a^3(x-2a)}{a^2(x+a)(x-2a)}$ III-я др.$=\frac{5x}{R}=\frac{5x(x+a)}{a^2(x-2a)(x+a)}$.

74. $P=a^2-4=a^2-2^2=(a+2)(a-2)$, $Q=ab+2b=b(a+2)$ $R=2a^2-$ $-a^3=a^2(2-a)=-a^2(a-2)$ *), общ. знам. $=a^2b(a+2)(a-2)=a^2b(a^2-4)$; I-я дробь$=\frac{ab}{a^2-4}=\frac{ab\cdot a^2b}{a^2b(a^2-4)}=\frac{a^3b^2}{a^2b(a^2-4)}$, II-я дробь$=\frac{a^2}{ab+2b}=$

---

*) Знаки «+» или «—», относящіеся ко *всему* знаменателю (въ данномъ случаѣ—къ R), *не вліяютъ* на величину общаго знам., т. к. могутъ быть отнесены ко всей дроби или къ ея числителю, какъ въ данномъ случаѣ имѣемъ

III-я дробь$=\frac{b^2}{2a^2-a^3}=\frac{b^2}{a^2(2-a)}=\frac{b^2}{-a^2(a-2)}=-\frac{b^2}{a^2(a-2)}=\frac{-b^2}{a^2(a-2)}$

$=\frac{a^2\cdot a^2(a-2)}{b(a+2)\cdot a^2(a-2)}=\frac{a^4(a-2)}{a^2b(a^2-4)}$, III-я дробь $=\frac{b^2}{2a^2-a^3}=\frac{b^2}{-a^2(a-2)}=$
$=$(см выноску) $=-\frac{b^2}{a^2(a-2)}=-\frac{b^2\cdot b(a+2)}{a^2(a-2)\cdot b(a+2)}=\frac{-b^3(a+2)}{a^2b(a^2-4)}$ 74' $P=$
$=4-a^2=-(a^2-4)=-(a^2-2^2)=-(a+2)(a-2)$, $Q=ab+2b=b(a+2)$ $R=$
$=a^3-2a^2=a^2(a-2)$, общ знам $=$(см выноск к № 74)$=a^2b(a+2)(a-2)=$
$=a^2b(a^2-4)$, I-я дробь $=\frac{ab}{4-a^2}=\frac{ab}{-(a^2-4)}=-\frac{ab}{(a+2)(a-2)}=$
$=-\frac{ab\cdot a^2b}{(a+2)(a-2)\cdot a^2b}=\frac{-a^3b^2}{a^2b(a^2-4)}$, II-я дробь $=\frac{a^2}{ab+2b}=$
$=\frac{a^2\cdot a^2(a-2)}{b(a+2)\cdot a^2(a-2)}=\frac{a^4(a-2)}{a^2b(a^2-4)}$, III-я дробь $=\frac{b^2}{a^3-2a^2}=$
$=\frac{b^2\cdot b(a+2)}{a^2(a-2)\cdot b(a+2)}=\frac{b^3(a+2)}{a^2b(a^2-4)}$

75 $P=a^4-x^4=$(см. выноск к № 74)$=-(x^4-a^4)=-[(x^2)^2-(a^2)^2]=$
$=-(x^2+a^2)(x^2-a^2)=-(x^2+a^2)(x+a)(x-a)$, $Q=x^2(x^2-a^2)=x^2(x+a)$
$(x-a)$, $R=a^3(x-a)$ общ знам $=a^3x^2(x^2+a^2)(x+a)(x-a)=a^3x^2(x^4-a^4)$,
I-я дробь $=\frac{2ax}{a^4-x^4}=\frac{2ax}{-(x^4-a^4)}=-\frac{2ax\cdot a^3x^2}{(x^4-a^4)\cdot a^3x^2}=\frac{-2a^4x^3}{a^3x^2(x^4-a^4)}$,
II-я дробь $=\frac{a^2}{x^2(x^2-a^2)}=\frac{a^2\cdot a^3(x^2+a^2)}{x^2(x+a)(x-a)\cdot a^3(x^2+a^2)}=\frac{a^5(x^2+a^2)}{a^3x^2(x^4-a^4)}$,
III-я дробь $=\frac{x^2}{a^3(x-a)}=\frac{x^2\cdot x^2(x^2+a^2)(x+a)}{a^3(x-a)\cdot x^2(x^2+a^2)(x+a)}=\frac{x^4(x^2+a^2)(x+a)}{a^3x^2(x^4-a^4)}$

75 $P=x^4-a^4=-(a^4-x^4)=-(a^2+x^2)(a^2-x^2)=-(a^2+x^2)(a+x)(a-x)$,
$Q=x^2(a^2-x^2)=x^2(a+x)(a-x)$, $R=a^3(a-x)$ общ знам $=a^3x^2(a^2+x^2)(a+$
$+x)(a-x)=a^3x^2(a^4-x^4)$ I-я дробь $=\frac{ax}{x^4-a^4}=\frac{ax}{-(a^4-x^4)}=$
$=-\frac{ax\cdot a^3x^2}{(a^4-x^4)\cdot a^3x^2}=\frac{-a^4x^3}{a^3x^2(a^4-x^4)}$, II-я дробь $=\frac{2a^2}{x^2(a^2-x^2)}=$
$=\frac{2a^2\cdot a^3(a^2+x^2)}{x^2(a+x)(a-x)\cdot a^3(a^2+x^2)}=\frac{2a^5(a^2+x^2)}{a^3x^2(a^4-x^4)}$ III-я дробь $=\frac{x^2}{a^3(a-x)}=$
$=\frac{x^2\cdot x^2(a^2+x^2)(a+x)}{a^3(a-x)\cdot x^2(a^2+x^2)(a+x)}=\frac{x^4(a^2+x^2)(a+x)}{a^3x^2(a^4-x^4)}$

76 $P=6a^3+6a^2b=2\cdot3a^2(a+b)$, $Q=4a^2b-4ab^2=2^2ab(a-b)$ $R=12b(a^2+$
$+2ab+b^2)=2^2\cdot3b(a+b)^2$ общ знам $=2^2\cdot3a^2b(a+b)^2(a-b)$, I-я дробь$=$
$=\frac{A}{6a^3+6a^2b}=\frac{A\cdot2b(a+b)(a-b)}{6a^2(a+b)\cdot2b(a+b)(a-b)}=\frac{2Ab(a^2-b^2)}{12a^2b(a+b)^2(a-b)}$, II-я
дробь $=\frac{B}{4a^2b-4ab^2}=\frac{B\cdot3a(a+b)^2}{4ab(a-b)\cdot3a(a+b)^2}=\frac{3Ba(a+b)^2}{12a^2b(a+b)^2(a-b)}$, III-я

дробь $=\frac{C}{12b(a^2+2ab+b^2)}=\frac{Ca^2(a-b)}{12a^2b(a+b)^2(a-b)}$ 76' $P=9a^3-9a^2b=$ $=3^2a^2(a-b)$, $Q=6a^4b^3+6a^3b^4=2\cdot3a^3b^3(a+b)$ $R=18b(a^2+b^2-2ab)=2\cdot$ $3^2b(a-b)^2$, общ знамен $=2\cdot3^2a^3b^3(a+b)(a-b)^2=18a^3b^3(a+b)(a-b)^2$;

I-я дробь $=\frac{A}{9a^3-9a^2b}=\frac{A\cdot2ab^3(a+b)(a-b)}{9a^2(a-b)\cdot2ab^3(a+b)(a-b)}=\frac{2Aab^3(a^2-b^2)}{18a^3b^3(a+b)(a-b)^2}$,

II-я дробь $=\frac{B}{6a^4b^3+6a^3b^4}=\frac{B\cdot3(a-b)^2}{6a^3b^3(a+b)\cdot3(a-b)^2}=\frac{3B(a-b)^2}{18a^3b^3(a+b)(a-b)^2}$

III-я дробь $=\frac{C}{18b(a^2+b^2-2ab)}=\frac{Ca^3b^2(a+b)}{18a^3b^3(a+b)(a-b)^2}$

77 $P=a^2+5a+6=a^2+2a+3a+6=a(a+2)+3(a+2)=(a+2)(a+3)$ $Q=a^3+4a^2+3a=a(a^2+4a+3)=a(a^2+a+3a+3)=a[a(a+1)+3(a+1)]=$ $=a(a+1)(a+3)$ $R=(a+1)^2+(a+1)=(a+1)[(a+1)+1]=(a+1)(a+2)$ $S=a^2+3a=a(a+3)$ общ знам $=a(a+1)(a+2)(a+3)$ I-я дробь $=$ $=\frac{A}{a^2+5a+6}=\frac{A}{(a+2)(a+3)}=\frac{Aa(a+1)}{a(a+1)(a+2)(a+3)}$, II-я дробь $=$ $=\frac{B}{a^3+4a^2+3a}=\frac{B}{a(a+1)(a+3)}=\frac{B(a+2)}{a(a+1)(a+2)(a+3)}$, III-я дробь $=$ $=\frac{C}{(a+1)^2+(a+1)}=\frac{C}{(a+1)(a+2)}=\frac{Ca(a+3)}{a(a+1)(a+2)(a+3)}$ IV-я дробь $=\frac{D}{a^2+3a}=\frac{D}{a(a+3)}=\frac{D(a+1)(a+2)}{a(a+1)(a+2)(a+3)}$ 77' $P=a^4+2a^3-3a^2=$ $=a^2(a^2+2a-3)=a^2(a^2-a+3a-3)=a^2[a(a-1)+3(a-1)]=a^2(a-1)(a+3)$ $Q=a^2+a-6=a^2-2a+3a-6=a(a-2)+3(a-2)=(a-2)(a+3)$ $R=$ $=(a-1)^2-a+1=(a-1)^2-(a-1)=(a-1)[(a-1)-1]=(a-1)(a-2)$ $S=a^2-2a=a(a-2)$ общ знам $=a^2(a-2)(a-1)(a+3)$ I-я дробь $=$ $=\frac{A}{a^4+2a^3-3a^2}=\frac{A}{a^2(a-1)(a+3)}=\frac{A(a-2)}{a^2(a-2)(a-1)(a+3)}$ II-я дробь $=$ $=\frac{B}{a^2+a-6}=\frac{B}{(a-2)(a+3)}=\frac{Ba^2(a-1)}{a^2(a-2)(a-1)(a+3)}$, III-я дробь $=$ $=\frac{C}{(a-1)^2-a+1}=\frac{C}{(a-1)(a-2)}=\frac{Ca^2(a+3)}{a^2(a-2)(a-1)(a+3)}$ IV-я дробь $=$ $=\frac{D}{a^2-2a}=\frac{D}{a(a-2)}=\frac{Da(a-1)(a+3)}{a^2(a-2)(a-1)(a+3)}$

78 $P=(a-b)(a-c)$, $Q=(b-a)(b-c)=$ (сч выноску къ № 74) $=-(a-b)(b-c)$ $R=(c-a)(c-b)=-(a-c)\cdot-(b-c)=(a-c)(b-c)$ общ. знам $=(a-b)(a-c)(b-c)$ I-я дробь $=\frac{A}{(a-b)(a-c)}=\frac{A(b-c)}{(a-b)(a-c)(b-c)}$.

II-я дробь $=\frac{B}{(b-a)(b-c)}=\frac{B}{-(a-b)(b-c)}=-\frac{B}{(a-b)(b-c)}=\frac{-B(a-c)}{(a-b)(a-c)(b-c)}=$

$$=\frac{B(c-a)}{(a-b)(b-c)(a-c)},\ \text{III-я дробь}=\frac{C}{(c-a)(c-b)}=\frac{C}{(a-c)(b-c)}=$$
$$=\frac{C(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$

Замѣчаніе Отвѣтъ въ «Сборникѣ» для выраженія общ знам даетъ $(a-b)(b-c)(c-a)$, это выраженіе $=-(a-b)(b-c)(a-c)$ и, слѣд отличается лишь знакомъ отъ нашего, приведено въ задачникѣ въ виду его симметричности Однако какъ мы указывали раньше, всегда имѣетъ значеніе *абсолютная величина* общаго знаменателя а знаки $+$ или $-$ передъ нимъ не могутъ обусловливать дѣйствительной разницы въ отвѣтахъ —Вообще, въ виду вышесказаннаго, надо замѣтить что *общему знаменателю данныхъ дробей можно придавать разные виды, измѣняя знаки всѣхъ или нѣкоторыхъ множителей, составляющихъ его выраженіе* съ соотвѣтственнымъ вынесеніемъ знака «—» за скобки Внѣшній видъ общ знам будетъ въ зависимости отъ этого измѣняться, но по существу онъ будетъ однимъ и тѣмъ же—общимъ наименьшимъ кратнымъ знаменателей всѣхъ данныхъ дробей

78′ $P=(x-a)(x-b)$, $Q=(a-x)(c-x)=-(x-a)\cdot-(x-c)=(x-a)(x-c)$, $R=(b-x)(c-x)=-(x-b)\cdot-(x-c)=(x-b)(x-c)$, общ знам $=(x-a)(x-b)(x-c)$, I-я дробь $=\frac{A}{(x-a)(x-b)}=\frac{A(x-c)}{(x-a)(x-b)(x-c)}$ II-я дробь$=$

$$=\frac{B}{(a-x)(c-x)}=\frac{B}{(x-a)(x-c)}=\frac{B(x-b)}{(x-a)(x-b)(x-c)}\ \text{III-я дробь}=$$
$$=\frac{C}{(b-x)(c-x)}=\frac{C}{(x-b)(x-c)}=\frac{C(x-a)}{(x-a)(x-b)(x-c)}$$

79 $P=(a+b)(a+d)$ $Q=a^2+ac+cd+ad=a(a+c)+d(a+c)=(a+c)(a+d)$ $R=a^2+bc+ab+ac=(a^2+ab)+(ac+bc)=a(a+b)+c(a+b)=(a+b)(a+c)$ общ знам $=(a+b)(a+c)(a+d)$, I-я дробь$=\frac{A}{P}=\frac{A(a+c)}{(a+b)(a+c)(a+d)}$,

$$\text{II-я дробь}=\frac{B}{Q}=\frac{B(a+b)}{(a+b)(a+c)(a+d)}\ \text{III-я дробь}=\frac{C}{R}=$$
$$=\frac{C(a+d)}{(a+b)(a+c)(a+d)}$$ 79′ $P=x^2-(a-b)x-ab=$(см формулу 1 отд 11 «Сборника»)$=(x-a)(x+b)$, $Q=x^2+bx-bc-cx=x(x+b)-c(x+b)=$ $=(x+b)(x-c)$, $R=x^2-(a+c)x+ac=$(такъ же, форм 8 ая)$=(x-a)(x-c)$, общ знам $=(x-a)(x+b)(x-c)$ I-я дробь$=\frac{A}{P}=\frac{A(x-c)}{(x-a)(x+b)(x-c)}$. II-я дробь$=\frac{B}{Q}=\frac{B(x-a)}{(x-a)(x+b)(x-c)}$, III-я дробь$=\frac{C}{R}=\frac{C(x+b)}{(x-a)(x+b)(x-c)}$

Замѣчаніе къ №№ 80, 80 Въ случаѣ, когда знаменатели данныхъ дробей являются произведеніями двучленовъ (какъ въ №№ 80, 78 и др), при составленіи общаго знаменателя полезно руководиться, во избѣжаніе путаницы, слѣдующ планомъ (который раньше, въ соотвѣтственныхъ случаяхъ нами и приводился) каждый двучленъ, входящій въ составъ частныхъ знаменателей (вида $a+b$, $c\pm d$ и т п, вообще $m\pm n$) слѣдуетъ составлять такъ, чтобы первый его членъ былъ буквой, предшествующей второму члену (буквѣ) въ алфавитномъ порядкѣ, преобразовывая для этой цѣли, въ случаѣ необходимости, двучленъ путемъ вынесенія за скобки знака «—» (напр, $b-a=-(a-b)$) —Мы потому и не придержались отвѣта въ № 78 что этотъ отв отступаетъ отъ вышеприведеннаго правила

80 $P=(a-b)(b-c)(c-a)=-(a-b)(b-c)(a-c)$, относительно знака «—» см выноску къ № 74 и замѣч къ № 78, $Q=(c-b)(ad-bd-a^2+ab)=-(b-c)\cdot-(a^2-ab-ad+bd)=(b-c)[a(a-b)-d(a-b)]=(b-c)(a-b)(a-d)$, $R=(a-d)(a-c)(b-a)(c-b)=(a-d)(a-c)\cdot-(a-b)\cdot-(b-c)=(a-d)(a-c)(a-b)(b-c)$, общ знам $=(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)=R$, вслѣдствіе чего III-я дробь C/R остается безъ перемѣны, I-я дробь $=\frac{A}{(a-b)(b-c)(c-a)}=$

$$=-\frac{A}{(a-b)(b-c)(a-c)}=\frac{-A(a-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)}=$$

$=\frac{A(d-a)}{(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)}$, II-я дробь $=\frac{B}{(c-b)(ad-bd-a^2+ab)}=$

$=\frac{B}{(b-c)(a-b)(a-d)}=\frac{B(a-c)}{(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)}$ **80'** $P=(a-d)(b-c)(c-d)$, $Q=(a-b)(cd-bd-c^2+bc)=(a-b)[d(c-b)-c(c-b)]=(a-b)(c-b)(d-c)=(a-b)\cdot-(b-c)\cdot-(c-d)=(a-b)(b-c)(c-d)$, $R=(b-a)(c-b)(d-c)(a-d)=-(a-b)\cdot-(b-c)\cdot-(c-d)(a-d)=-(a-b)(b-c)(c-d)(a-d)$ (см выноску къ № 74), общ знам $=(a-b)(b-c)(c-d)(a-d)=-R$,

I-я дробь $=\frac{A}{(a-d)(b-c)(c-d)}=\frac{A(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-d)(a-d)}$, II-я дробь $=$

$=\frac{B}{(a-b)(cd-bd-c^2+bc)}=\frac{B}{(a-b)(b-c)(c-d)}=\frac{B(a-d)}{(a-b)(b-c)(c-d)(a-d)}$,

III-я дробь $=\frac{C}{(b-a)(c-b)(d-c)(a-d)}=\frac{C}{(a-b)(b-c)(c-d)(a-d)}=$

$=\frac{-C}{(a-b)(b-c)(c-d)(a-d)}$ что можно было предвидѣть въ виду того что общ. знам $=-R$

§ 3. Преобразованіе смѣшанныхъ дробей въ простыя и обратно.

Задачи (№№ 81—100) на *преобразованіе смѣшанныхъ дробей въ простыя* рѣшаются по простому правилу наглядно выражаемому слѣдующ равенствомъ $A\pm\frac{P}{Q}=\frac{AQ\pm P}{Q}$, гдѣ A обозначаетъ данное цѣлое выраженіе а P/Q—данную дробь передъ нею можетъ быть знакъ «+» или «—»

Дѣйствіемъ, обратнымъ вышеизложенному, является *преобразованіе простыхъ дробей въ смѣшанныя* или, другими словами исключеніе изъ данной алгебраической дроби цѣлаго выраженія (задачи №№ 101—120') Сущность этого дѣйствія достаточно ясно раскрывается вышеприведенной формулой написанной обратно $\frac{AQ+P}{Q}=A+\frac{P}{Q}$, которая показываетъ что *для исключенія цѣлаго числа изъ дроби которой знаменатель есть Q, слѣдуетъ числителя дроби разложить въ выраженіе вида $AQ+P$,* послѣ чего дальнѣйшее очевидно Но на практикѣ (особенно въ болѣе или менѣе сложныхъ случаяхъ) обыкновенно поступаютъ иначе, основываясь на томъ что вышенаписанная послѣдняя формула выражаетъ *свойство дѣленія* (съ остаткомъ), для исключенія цѣлой части дѣлять числителя на знаменателя и затѣмъ изображаютъ результатъ этого дѣленія по правилу *«дѣлимое, раздѣленное на дѣлителя = частному, сложенному съ дробью, которой числитель есть остатокъ, а знаменатель — дѣлитель»*.

Отсюда слѣдуетъ и *условіе возможности* исключенія цѣлаго числа: *степень выраженія въ числитель должна быть больше или равна степени выраженія въ знаменатель*, при чемъ оба выраженія предполагаются расположенными по убывающимъ (для удобства) степенямъ главной буквы.

Срв. также №№ 101—120 съ задачами отд. III § 13, отмѣченными звѣздочкой (по «Сборнику»).

81. $a+\frac{b}{c}=\frac{ac+b}{c}$. 81′. $a-\frac{c}{b}=\frac{ab-c}{b}$.

82. $2a-\frac{ax+a}{x}=\frac{2a\cdot x-(ax+a)}{x}=\frac{2ax-ax-a}{x}=\frac{ax-a}{x}=\frac{a(x-1)}{x}$. 82′. $2a+\frac{ax-a}{x}=\frac{2a\cdot x+(ax-a)}{x}=\frac{2ax+ax-a}{x}=\frac{3ax-a}{x}=\frac{a(3x-1)}{x}$.

83. $b^2+\frac{3a^3-b^3}{b}=\frac{b^2\cdot b+(3a^3-b^3)}{b}=\frac{b^3+3a^3-b^3}{b}=\frac{3a^3}{b}$. 83′. $b^2-\frac{2a^3+b^3}{b}=\frac{b^2\cdot b-(2a^3+b^3)}{b}=\frac{b^3-2a^3-b^3}{b}=\frac{-2a^3}{b}=-\frac{2a^3}{b}$.

84. $x-\frac{a+x}{2}=\frac{x\cdot 2-(a+x)}{2}=\frac{2x-a-x}{2}=\frac{x-a}{2}$. 84′. $x+\frac{a-x}{3}=\frac{x\cdot 3+(a-x)}{3}=\frac{3x+a-x}{3}=\frac{2x+a}{3}$.

85. $x+\frac{1-x}{x}=\frac{x\cdot x+(1-x)}{x}=\frac{x^2+1-x}{x}=\frac{x^2-x+1}{x}$. 85′. $1-\frac{1+x}{x}=\frac{x-(1+x)}{x}=\frac{x-1-x}{x}=\frac{-1}{x}=-\frac{1}{x}$.

86. $a-\frac{b-a}{2}=\frac{a\cdot 2-(b-a)}{2}=\frac{2a-b+a}{2}=\frac{3a-b}{2}$. 86′. $b+\frac{a-b}{4}=\frac{b\cdot 4+(a-b)}{4}=\frac{4b+a-b}{4}=\frac{a+3b}{4}$.

87. $1+\frac{x}{1-x}=\frac{1-x+x}{1-x}=\frac{1}{1-x}$. 87′. $1-\frac{x}{1+x}=\frac{1+x-x}{1+x}=\frac{1}{1+x}$.

88. $3-\frac{3}{a^2-1}=\frac{3\cdot(a^2-1)-3}{a^2-1}=\frac{3a^2-3-3}{a^2-1}=\frac{3a^2-6}{a^2-1^2}=\frac{3(a^2-2)}{(a+1)(a-1)}$. 88′. $4-\frac{4}{a^2+1}=\frac{4\cdot(a^2+1)-4}{a^2+1}=\frac{4a^2+4-4}{a^2+1}=\frac{4a^2}{a^2+1}$.

89. $m-n-\frac{m-n}{2}=\frac{(m-n)\cdot 2-(m-n)}{2}=\frac{2m-2n-m+n}{2}=$

$=\frac{m-n}{2}$ 89′ $m+n+\frac{n-m}{2}=\frac{(m+n)\,2+n-m}{2}=\frac{2m+2n+n-m}{2}=$

$=\frac{m+3n}{2}$

90. $5-\frac{7(m+3n)}{2m}=\frac{5\cdot 2m-7(m+3n)}{2m}=\frac{10m-7m-21n}{2m}=\frac{3m-21n}{2m}=$

$=\frac{3(m-7n)}{2m}$ 90′ $7-\frac{5(2m+n)}{3n}=\frac{7\cdot 3n-5(2m+n)}{3n}=$

$=\frac{21n-10m-5n}{3n}=\frac{16n-10m}{3n}=\frac{2(8n-5m)}{3n}$

91. $\frac{(a+b)^2}{2a}-2b=\frac{(a+b)^2-2b\cdot 2a}{2a}=\frac{a^2+2ab+b^2-4ab}{2a}=$

$=\frac{a^2-2ab+b^2}{2a}=\frac{(a-b)^2}{2a}$ 91′ $\frac{(a-b)^2}{2b}+2a=\frac{(a-b)^2+2a\cdot 2b}{2b}=$

$=\frac{a^2-2ab+b^2+4ab}{2b}=\frac{a^2+2ab+b^2}{2b}=\frac{(a+b)^2}{2b}$

92. $2a-\frac{2b^2}{a+2b}=\frac{2a(a+2b)-2b^2}{a+2b}=\frac{2a^2+4ab-2b^2}{a+2b}=$

$=\frac{2(a^2+2ab-b^2)}{a+2b}$ 92′ $2a+\frac{2b^2}{a-2b}=\frac{2a(a-2b)+2b^2}{a-2b}=$

$=\frac{2a^2-4ab+2b^2}{a-2b}=\frac{2(a^2-2ab+b^2)}{a-2b}=\frac{2(a-b)^2}{a-2b}$

93. $\frac{a^2+b^2}{a+b}+2(a-b)=$ (см. выноску къ № 91) $=\frac{a^2+b^2+2(a-b)(a+b)}{a+b}=$

$=\frac{a^2+b^2+2(a^2-b^2)}{a+b}=\frac{a^2+b^2+2a^2-2b^2}{a+b}=\frac{3a^2-b^2}{a+b}$ 93′ $\frac{a^2+b^2}{a-b}-$

$-3(a+b)=\frac{a^2+b^2-3(a+b)(a-b)}{a-b}=\frac{a^2+b^2-3(a^2-b^2)}{a-b}=$

$=\frac{a^2+b^2-3a^2+3b^2}{a-b}=\frac{-2a^2+4b^2}{a-b}=\frac{-2(a^2-2b^2)}{a-b}=-\frac{2(a^2-2b^2)}{a-b}$.

94. $a+b-\frac{a^2-3b^2}{a-b}=\frac{(a+b)(a-b)-(a^2-3b^2)}{a-b}=\frac{a^2-b^2-a^2+3b^2}{a-b}=$

$=\frac{2b^2}{a-b}$ 94′ $a-b+\frac{a^2+b^2}{a+b}=\frac{(a-b)(a+b)+(a^2+b^2)}{a+b}=\frac{a^2-b^2+a^2+b^2}{a+b}=$

$=\frac{2a^2}{a+b}$

---

*) Выраженія вида $\frac{P}{Q}\pm A$ равносильны выраженіямъ вида $\pm A+\frac{P}{Q}=\frac{\pm AQ+P}{Q}$, а потому имѣемъ $\frac{P}{Q}\pm A=\frac{P\pm AQ}{Q}$

95. $ax+4-\dfrac{ax^2-y}{x+y}=\dfrac{(ax+4)(x+y)-(ax^2-y)}{x+y}=$

$=\dfrac{ax^2+4x+axy+4y-ax^2+y}{x+y}=\dfrac{axy+4x+5y}{x+y}$. 95′. $ax-3-$

$-\dfrac{y-ax^2}{x-y}=\dfrac{(ax-3)(x-y)-(y-ax^2)}{x-y}=\dfrac{ax^2-3x-axy+3y-y+ax^2}{x-y}=$

$=\dfrac{2ax^2-axy-3x+2y}{x-y}$.

96. $\dfrac{a+x+y}{x-y}-1=$ (№ 91, вычисл.) $=\dfrac{a+x+y-(x-y)}{x-y}=\dfrac{a+x+y-x+y}{x-y}=$

$=\dfrac{a+2y}{x-y}$. 96′. $\dfrac{a-y+x}{x+y}-1=\dfrac{a-y+x-(x+y)}{x+y}=\dfrac{a-y+x-x-y}{x+y}=$

$=\dfrac{a-2y}{x+y}$.

97. $x^2-xy+y^2+\dfrac{2y^3}{x+y}=\dfrac{(x^2-xy+y^2)(x+y)+2y^3}{x+y}=$ (срв. форм. 12 с 41 стр. «Сборн.») $=\dfrac{x^3+y^3+2y^3}{x+y}=\dfrac{x^3+3y^3}{x+y}$. 97′. $x^2+xy+y^2-\dfrac{2y^3}{x-y}=$

$=\dfrac{(x^2+xy+y^2)(x-y)-2y^3}{x-y}=\dfrac{x^3-y^3-2y^3}{x-y}=\dfrac{x^3-3y^3}{x-y}$.

98. $1-\dfrac{x^2-2xy+y^2}{x^2+y^2}=\dfrac{x^2+y^2-(x^2-2xy+y^2)}{x^2+y^2}=\dfrac{x^2+y^2-x^2+2xy-y^2}{x^2+y^2}=$

$=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$. 98′. $1-\dfrac{2xy-x^2+y^2}{x^2-y^2}=\dfrac{x^2-y^2-(2xy-x^2+y^2)}{x^2-y^2}=$

$=\dfrac{x^2-y^2-2xy+x^2-y^2}{x^2-y^2}=\dfrac{2x^2-2xy-2y^2}{x^2-y^2}=\dfrac{2(x^2-xy-y^2)}{(x+y)(x-y)}$.

99. $\dfrac{5n-1}{n^2-2n+3}+2n+1=$ (см. вычисл. № 91) $=$

$=\dfrac{5n-1+(2n+1)(n^2-2n+3)}{n^2-2n+3}=\dfrac{5n-1+2n^3+n^2-4n^2-2n+6n+3}{n^2-2n+3}=$

$=\dfrac{2n^3-3n^2+9n+2}{n^2-2n+3}$. 99′. $\dfrac{5n+2}{n^2-3n+2}+2n-1=$

$=\dfrac{5n+2+(2n-1)(n^2-3n+2)}{n^2-3n+2}=\dfrac{5n+2+2n^3-n^2-6n^2+3n+4n-2}{n^2-3n+2}=$

$=\dfrac{2n^3-7n^2+12n}{n^2-3n+2}=\dfrac{n(2n^2-7n+12)}{n^2-n-2n+2}=\dfrac{n(2n^2-7n+12)}{(n-1)(n-2)}$.

100. $2-3n-\dfrac{3-2n}{2-n+n^2}=\dfrac{(2-3n)(2-n+n^2)-(3-2n)}{2-n+n^2}=$

$$=\frac{4-6n-2n+3n^2+2n^2-3n^3-3+2n}{2-n+n^2}=\frac{1-6n+5n^2-3n^3}{2-n+n^2}.$$ **100′** $2+3n-$

$$-\frac{2-n}{3-2n+n^2}=\frac{(2+3n)(3-2n+n^2)-(2-n)}{3-2n+n^2}=$$

$$=\frac{6+9n-4n-6n^2+2n^2+3n^3-2+n}{3-2n+n^2}=\frac{4+6n-4n^2+3n^3}{3-2n+n^2}$$

101 $\frac{25a}{7}=\frac{21a+4a}{7}=3a+\frac{4a}{7}$ Другое рѣшеніе $\frac{25a}{7}=$ $=\frac{28a-3a}{7}=4a-\frac{3a}{7}$ **101′** $\frac{43b}{5}=\frac{40b+3b}{5}=8b+\frac{3b}{5}$

Другое рѣш $\frac{43b}{5}=\frac{45b-2b}{5}=9b-\frac{2b}{5}$

Замѣчаніе. Изъ рѣш №№ 101—101 видно, что при исключеніи изъ алгебраической дроби цѣлаго выраженія результату можно придать *два вида* одинъ (обыкновенный) когда при дѣленіи числителя на знаменателя берется *положительный остатокъ*, въ этомъ случаѣ результатъ имѣетъ видъ суммы,—и другой когда при вышеупомянутомъ дѣленіи берется *отрицательный остатокъ* *) при чемъ результатъ получаетъ видъ разности Тѣмъ не менѣе *основнымъ* результатомъ мы будемъ считать первый, въ виду того что въ болѣе сложныхъ случаяхъ, когда необходимо будетъ дѣлить многочлены (основной способъ исключенія цѣлой части), мы будемъ получать остатокъ одного вида, соотвѣтствующій положительному остатку въ случаѣ ариѳметическаго дѣленія

102 $\frac{36ac+4b}{9}=4ac+\frac{4b}{9}$ Иначе $\frac{36ac+4b}{9}=\frac{36ac+9b-5b}{9}=$ $=4ac+b-\frac{5b}{9}$ **102′** $\frac{8ac-3b}{4}=2ac-\frac{3b}{4}$ Иначе $\frac{8ac-3b}{4}=$ $=\frac{8ac-4b+b}{4}=2ac-b+\frac{b}{4}$

103 $\frac{12a^2-5b}{6a}=2a-\frac{5b}{6a}$ **103′** $\frac{2a-15b^2}{5b}=\frac{2a}{5b}-3b$ **104** $\frac{a^2-c^2}{a}=a-\frac{c^2}{a}$ **104′** $\frac{a^2+c^2}{c}=\frac{a^2}{c}+c$

105 $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\frac{(x^2+y^2)-2y^2}{x^2+y^2}=1-\frac{2y^2}{x^2+y^2}$

Другой способъ Произведемъ дѣленіе числителя на знаменателя

$$\begin{array}{r|l} x^2-y^2 & x^2+y^2 \\ \cline{2-2} \mp x^2\mp y^2 & 1 \quad \text{частное} \\ \hline -2y^2 & \quad \text{остатокъ} \end{array}$$

На основаніи полученнаго результата, по свойству дѣленія можно выразить дѣйствіе въ видѣ равенства $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=1+\frac{-2y^2}{x^2+y^2}=$ $=1-\frac{2y^2}{x^2+y^2}$ **105′** $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}=\frac{(x^2-y^2)+2y^2}{x^2-y^2}=1+\frac{2y^2}{x^2-y^2}$ **Другой способъ** (непосредственное дѣленіе)

---

*) При всякомъ дѣленіи (ариѳметич) можно получить, кромѣ положительнаго, и отрицательный остатокъ, увеличивъ на 1цу частное получающееся при обыкновенномъ (положит) остаткѣ, напр $31:5=6+$ остатокъ 1 или $31:5=7+$ остатокъ -4

Особое значеніе отрицательные остатки пріобрѣтаютъ въ теоріи неопредѣленныхъ ур-ій (отд XI)

$$\begin{array}{l|l} x^2+\ \ y^2 & x^2-y^2 \\ \underline{\mp x^2 \pm y^2} & \overline{1} \\ \quad\ 2y^2 & \end{array}$$ частное остатокъ Слѣд. $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}=1+\frac{2y^2}{x^2-y^2}$

106. **1-ый способъ.** $\frac{x^3+y^3}{x^2-y^2}=\frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{(x+y)(x-y)}=$
$=\frac{x^2-xy+y^2}{x-y}=\frac{x(x-y)+y^2}{x-y}=x+\frac{y^2}{x-y}$. **2-ой способъ.** Произведемъ дѣленіе числителя на знаменателя

$$\begin{array}{l|l} x^3+\qquad y^3 & x^2-y^2 \\ \underline{\mp x^3 \pm xy^2} & \overline{x} \\ \quad xy^2+y^3 & \end{array}$$ остатокъ

Слѣд. $\frac{x^3+y^3}{x^2-y^2}=x+\frac{xy^2+y^3}{x^2-y^2}=$
$=x+\frac{y^2(x+y)}{(x+y)(x-y)}=x+\frac{y^2}{x-y}$

106′. **I способъ.** $\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}=\frac{x^3+xy^2-xy^2-y^3}{x^2+y^2}=\frac{x(x^2+y^2)-y^2(x+y)}{x^2+y^2}=$
$=x-\frac{y^2(x+y)}{x^2+y^2}$. **II способъ.** На основаніи дѣленія имѣемъ

$$\begin{array}{l|l} x^3-\qquad y^3 & x^2+y^2 \\ \underline{\mp x^3 \mp xy^2} & \overline{x} \\ \ -xy^2-y^3 & \end{array}$$ остатокъ

$\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}=x+\frac{-xy^2-y^3}{x^2+y^2}=x-\frac{y^2(x+y)}{x^2+y^2}$

Замѣчаніе. 1-ый способъ, основанный на разложеніи числителя въ алгебраическую сумму двухъ количествъ, изъ коихъ одно кратно знаменателя, неудобенъ въ тѣхъ случаяхъ, когда выдѣляющаяся цѣлая часть не одночленъ; тогда слѣдуетъ примѣнять другой способъ—дѣленіе числителя на знаменателя, механически обнаруживающее цѣлую часть и остатокъ.

107. $$\begin{array}{l|l} x^2+\ x & x-1 \\ \underline{\mp x^2 \pm x} & \overline{x+2} \\ \qquad 2x & \\ \quad \underline{\mp 2x \pm 2} & \\ \qquad\quad 2 & \end{array}$$

107′. $$\begin{array}{l|l} x^2-\ x & x+1 \\ \underline{\mp x^2 \mp x} & \overline{x-2} \\ \quad -2x & \\ \quad \underline{\pm 2x \pm 2} & \\ \qquad\quad 2 & \end{array}$$

остатокъ

Слѣд. $\frac{x^2+x}{x-1}=x+2+\frac{2}{x-1}$ ‖ $\frac{x^2-x}{x+1}=x-2+\frac{2}{x+1}$

108. $$\begin{array}{l|l} x^3-2 & x+2 \\ \underline{\mp x^3 \mp 2x^2} & \overline{x^2-2x+4} \\ \quad -2x^2-2 & \\ \quad \underline{\pm 2x^2 \pm 4x} & \\ \qquad\quad 4x-2 & \\ \qquad\quad \underline{\mp 4x \mp 8} & \\ \qquad\qquad -10 & \end{array}$$

108′. $$\begin{array}{l|l} x^3+2 & x-2 \\ \underline{\mp x^3 \pm 2x^2} & \overline{x^2+2x+4} \\ \quad 2x^2+2 & \\ \quad \underline{\mp 2x^2 \pm 4x} & \\ \qquad\quad 4x+2 & \\ \qquad\quad \underline{\mp 4x \pm 8} & \\ \qquad\qquad 10 & \end{array}$$

остатокъ

$\frac{x^3-2}{x+2}=x^2-2x+4+\frac{-10}{x+2}=x^2-2x+4-\frac{10}{x+2}$ ‖ $\frac{x^3+2}{x-2}=x^2+2x+4+\frac{10}{x-2}$

109 $\frac{25a^3-3b+2c}{5a^2}=\frac{25a^3-(3b-2c)}{5a^2}=\frac{25a^3}{5a^2}-\frac{3b-2c}{5a^2}=5a-\frac{3b-2c}{5a^2}$

109′ $\frac{18a^3-4b-3c}{6a^2}=\frac{18a^3-(4b+3c)}{6a^2}=\frac{18a^3}{6a^2}-\frac{4b+3c}{6a^2}=3a-\frac{4b+3c}{6a^2}$

110
$$\begin{array}{r|l} a^2+2ab+b^2 & a-b \\ \text{»} \pm ab & a+3b \\ \hline 3ab+b^2 & \\ \text{»} \pm 3b^2 & \\ \hline 4b^2 & \end{array}$$

остатокъ

110′
$$\begin{array}{r|l} a^2-2ab+b^2 & a+b \\ \text{»} \mp ab & a-3b \\ \hline -3ab+b^2 & \\ \text{»} \pm 3b^2 & \\ \hline 4b^2 & \end{array}$$

$\frac{a^2+2ab+b^2}{a-b}=a+3b+\frac{4b^2}{a-b}$ ‖ $\frac{a^2-2ab+b^2}{a+b}=a-3b+\frac{4b^2}{a+b}$.

111 $\frac{2x^3-15xy^2-12y^3}{3y^2}=\frac{2x^3}{3y^2}-\frac{15xy^2}{3y^2}-\frac{12y^3}{3y^2}=\frac{2x^3}{3y^2}-5x-4y$ **111′** $\frac{7y^3-15x^2y+10x^3}{5x^2}=\frac{7y^3}{5x^2}-\frac{15x^2y}{5x^2}+\frac{10x^3}{5x^2}=\frac{7y^3}{5x^2}-3y+2x$.

112
$$\begin{array}{r|l} x^2+2xy+3y^2 & x+3y \\ \text{»} \pm 3xy & x-y \\ \hline -xy+3y^2 & \\ \text{»} \pm 3y^2 & \\ \hline 6y^2 & \end{array}$$

остатокъ

112′
$$\begin{array}{r|l} 2x^2-5xy+y^2 & x-3y \\ \text{»} \pm 6xy & 2x+y \\ \hline xy+y^2 & \\ \text{»} \pm 3y^2 & \\ \hline 4y^2 & \end{array}$$

$\frac{x^2+2xy+3y^2}{x+3y}=x-y+\frac{6y^2}{x+3y}$ ‖ $\frac{2x^2-5xy+y^2}{x-3y}=2x+y+\frac{4y^2}{x-3y}$

113 1-ое рѣшеніе. Раздѣлимъ числителя на знаменателя; при этомъ, для того чтобы избѣгнуть дробныхъ коэффиціентовъ, расположимъ

$$\begin{array}{r|l} -2b^2+4ab-a^2 & b+2a \\ \text{»} \pm 4ab & -2b+8a \\ \hline 8ab-a^2 & \\ \text{»} \mp 16a^2 & \\ \hline -17a^2 & \end{array}$$

остатокъ

данныя выраженія по убывающимъ степенямъ буквы b, а не a. Результатъ дѣленія $\frac{-2b^2+4ab-a^2}{b+2a}=$ $=-2b+8a+\frac{-17a^2}{b+2a}=-2b+8a-\frac{17a^2}{b+2a}$. 2-ое рѣшеніе. Преобразовывая числителя, получ

$$\frac{4ab-2b^2-a^2}{2a+b}=\frac{4ab+2b^2-a^2-4b^2}{2a+b}=\frac{2b(2a+b)-(a^2+4b^2)}{2a+b}=2b-\frac{a^2+4b^2}{2a+b}$$

Замѣчаніе. Въ обоихъ рѣшеніяхъ получились различные результаты. Вообще надо замѣтить, что *при исключеніи цѣлаго выраженія изъ алгебраической дроби результатъ можетъ получить различные виды* смотря по тому, какой методъ былъ примѣненъ: преобразованіе ли числителя или же дѣленіе числителя на знаменателя, а въ случаѣ послѣдняго метода—смотря по тому, какъ были расположены выраженія числителя и знаменателя по возрастающимъ или по убывающимъ степенямъ главной буквы.

113'. I рѣшеніе. Дѣлимъ числителя на знаменателя, при чемъ для приданія результату болѣе простого вида располагаемъ члены дроби по убывающимъ степенямъ буквы b. Дойдя до остатка, прекращаемъ дѣленіе и записываемъ результатъ

$$\begin{array}{rl|l} -3b^2+9ab-a^2 & & b+3a \\ \text{»}\ \pm 9ab & & \overline{-3b+18a} \\ \hline 18ab-a^2 & & \\ \text{»}\ \mp 54a^2 & & \\ \hline -55a^2 & \text{остатокъ} & \end{array}$$

$$\frac{-3b^2+9ab-a^2}{b+3a}=-3b+18a+\frac{-55a^2}{b+3a}=-3b+18a-\frac{55a^2}{b+3a}.$$

II рѣшеніе.

$$\frac{9ab-3b^2-a^2}{3a+b}=\frac{9ab+3b^2-a^2-6b^2}{3a+b}=\frac{3b(3a+b)-(a^2+6b^2)}{3a+b}=3b-\frac{a^2+6b^2}{3a+b}$$

114.

$$\begin{array}{rl|l} 2a^3+a^2b\quad -2b^3 & & a^2+b^2 \\ \text{»}\ \mp 2ab^2 & & \overline{2a+b} \\ \hline a^2b-2ab^2-2b^3 & & \\ \text{»}\ \mp b^3 & & \\ \hline -2ab^2-3b^3 & \text{остатокъ} & \end{array}$$

$$\frac{2(a^3-b^3)+a^2b}{a^2+b^2}=2a+b+\frac{-2ab^2-3b^3}{a^2+b^2}=2a+b-\frac{2ab^2+3b^3}{a^2+b^2}$$

114'.

$$\begin{array}{r|l} 2a^3-a^2b\quad +2b^3 & a^2-b^2 \\ \text{»}\ \pm 2ab^2 & \overline{2a-b} \\ \hline -a^2b+2ab^2+2b^3 & \\ \text{»}\ \mp b^3 & \\ \hline 2ab^2+b^3 & \end{array}$$

$$\frac{2(a^3+b^3)-a^2b}{a^2-b^2}=2a-b+\frac{2ab^2+b^3}{a^2-b^2}=2a-b+\frac{b^2(2a+b)}{(a+b)(a-b)}$$

115.

$$\begin{array}{rl|l} a^3-2ab^2-b^3 & & a-2b \\ \text{»}\ \pm 2a^2b & & \overline{a^2+2ab+2b^2} \\ \hline 2a^2b-2ab^2+b^3 & & \\ \pm 4ab^2 & & \\ \hline 2ab^2+b^3 & & \\ \text{»}\ \pm 4b^3 & & \\ \hline 5b^3 & \text{остатокъ} & \end{array}$$

115'.

$$\begin{array}{r|l} a^3+2ab^2-b^3 & a+2b \\ \text{»}\ \mp 2a^2b & \overline{a^2-2ab+6b^2} \\ \hline -2a^2b+2ab^2-b^3 & \\ \text{»}\ \pm 4ab^2 & \\ \hline 6ab^2-b^3 & \\ \text{»}\ \mp 12b^3 & \\ \hline -13b^3 & \end{array}$$

$$\frac{a^3-2ab^2+b^3}{a-2b}=a^2+2ab+2b^2+\frac{5b^3}{a-2b}$$

$$\frac{a^3-b^3+2ab^2}{a+2b}=a^2-2ab+6b^2+\frac{-13b^3}{a+2b}=a^2-2ab+6b^2-\frac{13b^3}{a+2b}$$

116

$$\begin{array}{lrr|l}
 & a^4 \qquad -3a^2b^2 & +b^4 & a+b \\ \cline{4-4}
 & \mp a^3b & & a^3-a^2b-2ab^2+2b^3 \\ \cline{2-2}
\text{1-ый остатокъ} & -a^3b-3a^2b^2 & +b^4 & \\
 & \pm a^2b^2 & & \\ \cline{2-2}
\text{2-ой остатокъ} & -2a^2b^2 & +b^4 & \\
 & \pm 2ab^3 & & \\ \cline{2-2}
\text{3-ий остатокъ} & 2ab^3 & +b^4 & \\
 & & \mp 2b^4 & \\ \cline{2-3}
\text{4-ый остатокъ} & & -b^4 & \textit{остатокъ}
\end{array}$$

$$\frac{a^4-3a^2b^2+b^4}{a+b}=a^3-a^2b-2ab^2+2b^3+\frac{-b^4}{a+b}=a^3-a^2b-2ab^2+2b^3-\frac{b^4}{a+b}.$$

116'

$$\begin{array}{lrr|l}
 & a^4 \qquad +2a^2b^2 & +b^4 & a-b \\ \cline{4-4}
 & \pm a^3b & & a^3+a^2b+3ab^2+3b^3 \\ \cline{2-2}
\text{I остатокъ} \ldots & a^3b+2a^2b^2 & +b^4 & \\
 & \pm a^2b^2 & & \\ \cline{2-2}
\text{II остатокъ} & 3a^2b^2 & +b^4 & \\
 & \pm 3ab^3 & & \\ \cline{2-2}
\text{III остатокъ} & 3ab^3 & +b^4 & \\
 & & \pm 3b^4 & \\ \cline{2-3}
\text{IV остатокъ} & & 4b^4 & \textit{остатокъ}
\end{array}$$

$$\frac{a^4+2a^2b^2+b^4}{a-b}=a^3+a^2b+3ab^2+3b^3+\frac{4b^4}{a-b}.$$

117*)

$$\begin{array}{r|l}
n^3+7n^2+13n-21 & n^2+2n-3 \\ \cline{2-2}
\mp 2n^2 \pm 3n & n+5 \\ \cline{1-1}
5n^2+16n-21 & \\
\mp 10n \pm 15 & \\ \cline{1-1}
6n-6 &
\end{array}$$

остатокъ

117'

$$\begin{array}{r|l}
2n^3-5n^2+9n+15 & n^2-2n-3 \\ \cline{2-2}
\pm 4n^2 \pm 6n & 2n-1 \\ \cline{1-1}
-n^2+15n+16 & \\
\mp 2n \mp 3 & \\ \cline{1-1}
13n+13 &
\end{array}$$

*) Въ условіи этого №-ра, въ «Сборникѣ» судя по отвѣту, *опечатка* 3-й членъ числителя долженъ быть $+13n$, а не $-13n$

$$\frac{n^3+7n^2+13n-21}{n^2+2n-3}=n+5+\frac{6n-6}{n^2+2n-3}=n+5+\frac{6(n-1)}{n^2-n+3n-3}=n+5+\frac{6(n-1)}{n(n-1)+3(n-1)}=n+5+\frac{6(n-1)}{(n-1)(n+3)}=n+5+\frac{6}{n+3}$$

$$\frac{2n^3-5n^2+9n+16}{n^2-2n-3}=2n-1+\frac{13n+13}{n^2-2n-3}=2n-1+\frac{13(n+1)}{n^2+n-3n-3}=2n-1+\frac{13(n+1)}{n(n+1)-3(n+1)}=2n-1+\frac{13(n+1)}{(n+1)(n-3)}=2n-1+\frac{13}{n-3}.$$

118

$$\begin{array}{l|l}
1-5n+11n^2-3n^3 & 1-3n+2n^2 \\ \hline
\text{»} \pm 3n \mp 2n^2 & 1-2n \\ \hline
-2n+9n^2-3n^3 & \\
\text{»} \mp 6n^2 \pm 4n^3 & \\ \hline
3n^2+n^3 & \text{остатокъ}
\end{array}$$

118′

$$\begin{array}{l|l}
1+6n+13n^2+10n^3 & 1+3n+2n^2 \\ \hline
\text{»} \mp 3n \mp 2n^2 & 1+3n \\ \hline
3n+11n^2+10n^3 & \\
\text{»} \mp 9n^2 \mp 6n^3 & \\ \hline
2n^2+4n^3 &
\end{array}$$

$$\frac{1-5n+11n^2-3n^3}{1-3n+2n^2}=1-2n+\frac{3n^2+n^3}{1-3n+2n^2}=1-2n+\frac{n^2(n+3)}{2n^2-2n-n+1}=1-2n+\frac{n^2(n+3)}{2n(n-1)-(n-1)}=1-2n+\frac{n^2(n+3)}{(n-1)(2n-1)}$$

$$\frac{1+6n+13n^2+10n^3}{1+3n+2n^2}=1+3n+\frac{2n^2+4n^3}{1+3n+2n^2}=1+3n+\frac{2n^2(2n+1)}{2n^2+2n+n+1}=1+3n+\frac{2n^2(2n+1)}{2n(n+1)+(n+1)}=1+3n+\frac{2n^2(2n+1)}{(n+1)(2n+1)}=1+3n+\frac{2n^2}{n+1}$$

119

$$\begin{array}{l|l}
3m^4+m^3n \qquad -40n^4 & m^2+mn-2n^2 \\ \hline
\text{»} \mp 3m^3n \pm 6m^2n^2 & 3m^2-2mn+8n^2 \\ \hline
-2m^3n+6m^2n^2 \qquad -40n^4 & \\
\text{»} \pm 2m^2n^2 \mp 4mn^3 & \\ \hline
8m^2n^2-4mn^3-40n^4 & \\
\text{»} \mp 8mn^3 \pm 16n^4 & \\ \hline
-12mn^3-24n^4 & \text{остатокъ}
\end{array}$$

Слѣд. $\frac{3m^4+m^3n-40n^4}{m^2+mn-2n^2}=3m^2-2mn+8n^2+\frac{-12mn^3-24n^4}{m^2+mn-2n^2}=3m^2-2mn+8n^2-\frac{12mn^3+24n^4}{m^2-mn+2mn-2n^2}=3m^2-2mn+8n^2-\frac{12n^3(m+2n)}{m(m-n)+2n(m-n)}=$
$=3m^2-2mn+8n^2-\frac{12n^3(m+2n)}{(m-n)(m+2n)}=3m^2-2mn+8n^2-\frac{12n^3}{m-n}.$

$$
\begin{array}{lr|l}
\textbf{119'}\ \ 3m^4 + m^3n & -56n^4 & m^2-mn-2n^2 \\
\quad » \ \pm 3m^3n \pm 6m^2n^2 & & \overline{3m^2+4mn+10n^2} \\
\hline
\quad 4m^3n + 6m^2n^2 & -56n^4 & \\
\quad\quad » \ \pm 4m^2n^2 \pm 8mn^3 & & \\
\hline
\quad\quad 10m^2n^2 + 8mn^3 & -56n^4 & \\
\quad\quad\quad » \ \pm 10mn^3 & \pm 20n^4 & \\
\hline
\quad\quad\quad 18mn^3 & -36n^4 &
\end{array}
$$

Остатокъ

$$\frac{3m^4 + m^3n - 56n^4}{m^2-mn-2n^2} = 3m^2+4mn+10n^2+\frac{18mn^3-36n^4}{m^2-mn-2n^2} = 3m^2+4mn+$$

$$+10n^2+\frac{18n^3(m-2n)}{m^2+mn-2mn-2n^2} = 3m^2+4mn+10n^2+\frac{18n^3(m-2n)}{m(m+n)-2n(m+n)} =$$

$$= 3m^2+4mn+10n^2+\frac{18n^3(m-2n)}{(m+n)(m-2n)} = 3m^2+4mn+10n^2+$$

$$+\frac{18n^3}{m+n}$$

$$
\begin{array}{lr|l}
\textbf{120}\ \ m^4-2m^3n & -n^4 & m^2-mn+2n^2 \\
\quad » \ \pm m^3n \mp 2m^2n^2 & & \overline{m^2-mn-3n^2} \\
\hline
\quad -m^3n-2m^2n^2 & -n^4 & \\
\quad\quad » \ \mp m^2n^2 \pm 2mn^3 & & \\
\hline
\quad\quad -3m^2n^2+2mn^3 & -n^4 & \\
\quad\quad\quad » \ \mp 3mn^3 & \pm 6n^4 & \\
\hline
\quad\quad\quad -mn^3 & +5n^4 & \text{остатокъ}
\end{array}
$$

Слѣд $\dfrac{m^4-2m^3n-n^4}{m^2-nm+2n^2} = m^2-mn-3n^2+\dfrac{-mn^3+5n^4}{m^2-nm+2n^2} = m^2-mn-$

$$-3n^2-\frac{mn^3-5n^4}{m^2-nm+2n^2} = m^2-mn-3n^2-\frac{n^3(m-5n)}{m^2-nm+2n^2}$$

$$
\begin{array}{lr|l}
\textbf{120'}\ \ m^4-2m^3n & -n^4 & m^2+mn-2n^2 \\
\quad » \ \mp m^3n \pm 2m^2n^2 & & \overline{m^2-3mn+5n^2} \\
\hline
\quad -3m^3n+2m^2n^2 & -n^4 & \\
\quad\quad » \ \pm 3m^2n^2 \mp 6mn^3 & & \\
\hline
\quad\quad 5m^2n^2-6mn^3 & -n^4 & \\
\quad\quad\quad » \ \mp 5mn^3 & \pm 10n^4 & \\
\hline
\quad\quad\quad -11mn^3 & +9n^4 &
\end{array}
$$

Остатокъ . .

$$\frac{m^4-2m^3n-n^4}{m^2+mn-2n^2} = m^2-3mn+5n^2+\frac{-11mn^3+9n^4}{m^2+nm-2n^2} = m^2-3mn+5n^2-$$

$$-\frac{11mn^2+9n^3}{m^2-mn+2mn-2n^2}=m^2-3mn+5n^2-\frac{n^3(11m+9n)}{m(m-n)+2n(m-n)}=m^2-$$
$$-3mn+5n^2-\frac{n^3(11m+9n)}{(m-n)(m+2n)}$$

§ 4. Сложеніе и вычитаніе простыхъ дробей.

Для сложенія и вычитанія простыхъ дробей необходимо, чтобы онѣ имѣли общаго знаменателя, вслѣдствіе чего на практикѣ дѣйствіе сводится къ приведенію дробей къ общему знаменателю (§ 2) Самое же сложеніе и вычитаніе очень просто *составляется алгебраическая сумма числителей* (знаки передъ отдѣльными дробями относятся къ числителямъ) *которая и дѣлится на общаго знаменателя* Дальнѣйшее является преобразованіемъ результата, упрощающимъ его

121 $\frac{a}{3}+\frac{b}{3}=\frac{a+b}{3}$ 121′ $\frac{a}{4}-\frac{b}{4}=\frac{a-b}{4}$ 122 $\frac{x}{m}-\frac{y}{m}=$ $=\frac{x-y}{m}$ 122′ $\frac{x}{n}+\frac{z}{n}=\frac{x+z}{n}$

123. $\frac{a}{5}+\frac{9a}{5}=\frac{a+9a}{5}=\frac{10a}{5}=2a$ 123′. $\frac{15a}{7}-\frac{a}{7}=\frac{15a-a}{7}=$ $=\frac{14a}{7}=2a$

124 $\frac{xy}{n}-\frac{yz}{n}=\frac{xy-yz}{n}=\frac{y(x-z)}{n}$ 124′. $\frac{xy}{m}+\frac{yz}{m}=\frac{xy+yz}{m}=$ $=\frac{y(x+z)}{m}$

125 $\frac{3x}{m}-\frac{2x}{m}+\frac{x}{m}=\frac{3x-2x+x}{m}=\frac{2x}{m}$ · 125′ $\frac{x}{n}+\frac{2x}{n}-$ $-\frac{5x}{n}=\frac{x+2x-5x}{n}=\frac{-2x}{n}=-\frac{2x}{n}$

126 $\frac{3x}{n}+\frac{5x}{n}-\frac{12x}{n}=\frac{3x+5x-12x}{n}=\frac{-4x}{n}=-\frac{4x}{n}$ 126′. $\frac{3x}{m}-\frac{5x}{m}+\frac{7x}{m}=\frac{3x-5x+7x}{m}=\frac{5x}{m}$

127. $\frac{1}{a}+\frac{1}{2a}=\frac{2}{2a}+\frac{1}{2a}=\frac{2+1}{2a}=\frac{3}{2a}$ · 127′. $\frac{1}{a}+\frac{1}{3a}=\frac{3}{3a}+$ $+\frac{1}{3a}=\frac{3+1}{3a}=\frac{4}{3a}$.

128. $\frac{a}{x}-\frac{b}{mx}=\frac{am}{mx}-\frac{b}{mx}=\frac{am-b}{mx}$

128′. $\frac{a}{nx}-\frac{b}{n}=\frac{a}{nx}-\frac{bx}{nx}=\frac{a-bx}{nx}$

129 $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{n}{mn}+\frac{m}{mn}=\frac{m+n}{mn}$.

129′. $\frac{1}{n}-\frac{1}{m}=\frac{m}{mn}-\frac{n}{mn}=\frac{m-n}{mn}$

130 $\frac{m}{n}-\frac{p}{q}=\frac{mq}{nq}-\frac{np}{nq}=\frac{mq-np}{nq}$

130′ $\frac{n}{m}+\frac{p}{q}=\frac{nq}{mq}+\frac{mp}{mq}=\frac{mp+nq}{mq}$

131 $\frac{x}{15a}+\frac{y}{3}=\frac{x}{15a}+\frac{5ay}{15a}=\frac{x+5ay}{15a}$

131′ $\frac{x}{4}-\frac{y}{12b}=\frac{3bx}{12b}-\frac{y}{12b}=\frac{3bx-y}{12b}$

132 $\frac{a}{bc}-\frac{a}{bd}=\frac{ad}{bcd}-\frac{ac}{bcd}=\frac{ad-ac}{bcd}=\frac{a(d-c)}{bcd}$

132′ $\frac{b}{ac}+\frac{b}{cd}=\frac{bd}{acd}+\frac{ab}{acd}=\frac{bd+ab}{acd}=\frac{b(a+d)}{acd}$

133 $\frac{2}{m^2}+\frac{5}{mn}=\frac{2n}{m^2n}+\frac{5m}{m^2n}=\frac{2n+5m}{m^2n}$

133′ $\frac{5}{mn}+\frac{7}{n^3}=\frac{5n^2}{mn^3}+\frac{7m}{mn^3}=\frac{5n^2+7m}{mn^3}$

134 $\frac{m}{p^3q^2}-\frac{1}{p^2q^3}=\frac{mq}{p^3q^3}-\frac{1\cdot p}{p^3q^3}=\frac{mq-p}{p^3q^3}$

134′ $\frac{1}{p^5q^4}-\frac{n}{p^4q^5}=\frac{1\cdot q}{p^5q^5}-\frac{np}{p^5q^5}=\frac{q-np}{p^5q^5}$

135 $\frac{3c}{4a^3b}+\frac{5d}{6ab^4}=\frac{3c\cdot 3b^3}{12a^3b^4}+\frac{5d\cdot 2a^2}{12a^3b^4}=\frac{9b^3c+10a^2d}{12a^3b^4}$

135′. $\frac{2b}{9a^4}-\frac{7c}{6ab^3}=\frac{2b\cdot 2b^3}{18a^4b^3}-\frac{7c\cdot 3a^3}{18a^4b^3}=\frac{4b^4-21a^3c}{18a^4b^3}$

136 $\frac{ab}{10c^3d}-\frac{2c}{15d^2k^3}=\frac{ab\cdot 3dk^3}{30c^3d^2k^3}-\frac{2c\cdot 2c^3}{30c^3d^2k^3}=\frac{3abdk^3-4c^4}{30c^3d^2k^3}$.

136′. $\frac{7ak}{18c^5d^2}+\frac{5bd}{24c^2k^3}=\frac{7ak\cdot 4k^3}{72c^5d^2k^3}+\frac{5bd\cdot 3c^3d^2}{72c^5d^2k^3}=\frac{28ak^4+15bc^3d^3}{72c^5d^2k^3}$

137 $\frac{m}{a}+\frac{m}{b}+\frac{m}{c}=\frac{m\cdot bc}{abc}+\frac{m\cdot ac}{abc}+\frac{m\cdot ab}{abc}=\frac{mbc+mac+mab}{abc}=\frac{m(bc+ac+ab)}{abc}$

137′ $\frac{n}{a}+\frac{n}{b}-\frac{n}{c}=\frac{n\cdot bc}{abc}+\frac{n\cdot ac}{abc}-\frac{n\cdot ab}{abc}=\frac{nbc+nac-nab}{abc}=\frac{n(bc+ac-ab)}{abc}$.

138 $\frac{a}{xy}-\frac{b}{xz}-\frac{c}{yz}=\frac{az}{xyz}-\frac{by}{xyz}-\frac{cx}{xyz}=\frac{az-by-cx}{xyz}$

138′ $\frac{a}{x^2}+\frac{b}{ax}-\frac{c}{bx}=\frac{a\ ab}{abx^2}+\frac{b\ bx}{abx^2}-\frac{c\ ax}{abx^2}=\frac{a^2b+b^2x-acx}{abx^2}$

139 $\frac{n}{2b}+\frac{n}{3b}-\frac{n}{4b}=\frac{3\ 2\ n}{12b}+\frac{4\ n}{12b}-\frac{3\ n}{12b}=\frac{6n+4n-3n}{12b}=$

$=\frac{7n}{12b}$ 139′ $\frac{m}{15a}-\frac{m}{5a}-\frac{m}{6a}=\frac{2\ m}{30a}-\frac{3\ 2\ m}{30a}-\frac{5\ m}{30a}=$

$=\frac{2m-6m-5m}{30a}=\frac{-9m}{30a}=\frac{-3m}{10a}=-\frac{3m}{10a}$

140 $\frac{3a}{bc}-\frac{5a}{bd}+\frac{4d}{bf}=\frac{3adf}{bcdf}-\frac{5acf}{bcdf}+\frac{4dcd}{bcdf}=\frac{3adf-5acf+4cd^2}{bcdf}$

140′ $\frac{2a}{bc}+\frac{8a}{bg}-\frac{2c}{bd}=\frac{2adg}{bcdg}+\frac{8acd}{bcdg}-\frac{2ccg}{bcdg}=\frac{2adg+8acd-2c^2g}{bcdg}=$

$=\frac{2(adg+4acd-c^2g)}{bcdg}$

141 $\frac{3b}{5a^2}-\frac{a}{6b^2}-\frac{8c}{15ab}=\frac{3b\ 6b^2}{30a^2b^2}-\frac{a\ 5a^2}{30a^2b^2}-\frac{8c\ 2ab}{30a^2b^2}=$

$=\frac{18b^3-5a^3-16abc}{30a^2b^2}$ 141′ $\frac{4a}{9b^3}-\frac{5b}{6a^3}+\frac{c}{10a^2b^2}=\frac{4a\ 10a^3}{90a^3b^3}-$

$-\frac{5b\ 15b^3}{90a^3b^3}+\frac{c\ 9ab}{90a^3b^3}=\frac{40a^4-75b^4+9abc}{90a^3b^3}$

142 $\frac{5a}{12y^3z^2}-\frac{b}{15yz^4}+\frac{3c}{10y^5}=\frac{5a\ 5y^2z^2}{60y^5z^4}-\frac{b\ 4y^4}{60y^5z^4}+\frac{3c\ 6z^4}{60y^5z^4}=$

$=\frac{25ay^2z^2-4by^4+18cz^4}{60y^5z^4}$ 142′ $\frac{4a}{21x^5}+\frac{11b}{14x^8y^2}-\frac{c}{6x^2y^6}=\frac{4a\ 2x^3y^6}{42x^8y^6}+$

$+\frac{11b\ 3y^4}{42x^8y^6}-\frac{c\ 7x^6}{42x^8y^6}=\frac{8ax^3y^6+33by^4-7cx^6}{42x^8y^6}$

143 $\frac{c^2y^8}{a^3b^5x^2}-\frac{x^5y^6}{a^4b^2c^4}-\frac{a^8z^3}{bc^2x^7}=\frac{c^2y^8\ ac^4x^5}{a^4b^5c^4x^7}-\frac{x^5y^6\ b^3x^7}{a^4b^5c^4x^7}-$

$-\frac{a^8z^3\ a^4b^4c^2}{a^4b^5c^4x^7}=\frac{ac^6x^5y^8-b^3x^{12}y^6-a^{12}b^4c^2z^3}{a^4b^5c^4x^7}$ 143′ $\frac{x^8y}{a^2b^3c^4}-\frac{c^6y^3}{ab^5x^3}+$

$+\frac{a^5b^4}{c^5x^4}=\frac{x^8y\ b^2cx^4}{a^2b^5c^5x^4}-\frac{c^6y^3\ ac^5x}{a^2b^5c^5x^4}+\frac{a^5b^4\ a^2b^5}{a^2b^5c^5x^4}=\frac{b^2cx^{12}y-ac^{11}xy^3+a^7b^9}{a^2b^5c^5x^4}$

144 $\frac{a^{n-1}}{c^2x^{n-3}}-\frac{b^4x^n}{c^4x^{n-2}}-\frac{1}{ac^4x^n}=\frac{a^{n-1}\ ac^2x^3}{ac^4x^n}-\frac{b^4x^n\ ax^2}{ac^4x^n}-\frac{1\ c^3}{ac^4x^n}=$

$=\frac{a^{n-1+1}c^2x^3-ab^4x^2x^n-c^3}{ac^4x^n}=\frac{a^nc^2x^3-ab^4x^2x^n-c^3}{ac^4x^n}$ 144′ $\frac{b^{n-1}}{c^3x^{n+2}}-$

$$-\frac{a^3z^n}{b^2x^{n+1}} - \frac{1}{bcx^n} = \frac{b^{n-1}\ b^2}{b^2c^3x^{n+2}} - \frac{a^3z^n\ c^3x}{b^2c^3x^{n+2}} - \frac{1\ bc^2x^2}{b^2c^3x^{n+2}} =$$

$$= \frac{b^{n-1+2} - a^3c^3xz^n - bc^2x^2}{b^2c^3x^{n+2}} = \frac{b^{n+1} - a^3c^3xz^n - bc^2x^2}{b^2c^3x^{n+2}}$$

145 $\frac{9a^n}{12b^6c^4} - \frac{5b^{n-2}}{15ab^5} + \frac{2c^{n-1}}{24ac^2}$ =(сокращаемъ данныя дроби)= $\frac{3a^n}{4b^6c^4} -$

$$-\frac{b^{n-2-5}}{3a} + \frac{c^{n-1-2}}{12a} = \frac{3a^n}{4b^6c^4} - \frac{b^{n-7}}{3a} + \frac{c^{n-3}}{12a} = \frac{3a^n\ 3a}{12ab^6c^4} - \frac{b^{n-7}.4b^6c^4}{12ab^6c^4} +$$

$$+\frac{c^{n-3}\ b^6c^4}{12ab^6c^4} = \frac{9a^{n+1} - 4b^{n-1}c^4 + b^6c^{n+1}}{12ab^6c^4}$$

145′ $\frac{7b^n}{18ac^2} - \frac{3a^{n-2}}{5b^4c^6} - \frac{4c^{n-3}}{9a^4b^2} =$

$$= \frac{7b^n.5a^3b^4c^4}{90a^4b^4c^6} - \frac{3a^{n-2}\ 18a^4}{90a^4b^4c^6} - \frac{4c^{n-3}\ 10b^2c^6}{90a^4b^4c^6} =$$

$$= \frac{35a^3b^{n+4}c^4 - 54a^{n-2+4} - 40b^2c^{n-3+6}}{90a^4b^4c^6} = \frac{35a^3b^{n+4}c^4 - 54a^{n+2} - 40b^2c^{n+3}}{90a^4b^4c^6}$$

146 $\frac{a^{n-1}}{4bc^{m-n}} + \frac{b^n}{3a^mc} - \frac{c^{m+1}}{2ab^{m+n}} = \frac{a^{n-1}\ 3a^mb^{m+n-1}}{12a^mb^{m+n}c^{m-n}} +$

$$+\frac{b^n\ 4b^{m+n}c^{m-n-1}}{12a^mb^{m+n}c^{m-n}} - \frac{c^{m+1}\ 6a^{m-1}c^{m-n}}{12a^mb^{m+n}c^{m-n}} =$$

$$= \frac{3a^{n-1+m}b^{m+n-1} + 4b^{n+m+n}c^{m-n-1} - 6a^{m-1}c^{m+1-m}}{12a^mb^{m+n}c^{m-n}} =$$

$$= \frac{3a^{m+n-1}b^{m+n-1} + 4b^{m+2n}c^{m-n-1} - 6a^{m-1}c^{2m-n+1}}{12a^mb^{m+n}c^{m-n}}$$

146′ $\frac{b^{n-1}}{2ac^{m-n}} -$

$$-\frac{a^{n-1}}{9b^{m+n}} - \frac{c^n}{3a^nb} = \frac{b^{n+1}\ 9a^{n-1}b^{m+n}}{18a^nb^{m+n}c^{m-n}} - \frac{a^{n-1}\ 2a^nc^{m-n}}{18a^nb^{m+n}c^{m-n}} -$$

$$-\frac{c^n\ 6b^{m+n-1}c^{m-n}}{18a^nb^{m+n}c^{m-n}} = \frac{9a^{n-1}b^{n+1+m+n} - 2a^{n-1+n}c^{m-n} - 6b^{m+n-1}c^{n+m-n}}{18a^nb^{m+n}c^{m-n}} =$$

$$= \frac{9a^{n-1}b^{m+2n+1} - 2a^{2n-1}c^{m-n} - 6b^{m+n-1}c^m}{18a^nb^{m+n}c^{m-n}}$$

147 $\frac{a+b}{b} + \frac{a-b}{b} = \frac{a+b+a-b}{b} = \frac{2a}{b}$ **Иначе** $\frac{a+b}{b} + \frac{a-b}{b} =$

$= \frac{a}{b} + 1 + \frac{a}{b} - 1 = 2\frac{a}{b}$ **147′** $\frac{x+y}{x} - \frac{x-y}{x} = \frac{x+y-(x-y)}{x} =$

$= \frac{x+y-x+y}{x} = \frac{2y}{x}$ **Иначе** $\frac{x+y}{x} - \frac{x-y}{x} = 1 + \frac{y}{x} - \left(1 - \frac{y}{x}\right) =$

$= 1 + \frac{y}{x} - 1 + \frac{y}{x} = 2\frac{y}{x}$

148 $\frac{c+d}{3c} - \frac{c-d}{4c} = \frac{4(c+d)}{12c} - \frac{3(c-d)}{12c} = \frac{4(c+d) - 3(c-d)}{12c} =$

$= \frac{4c+4d-3c+3d}{12c} = \frac{c+7d}{12c}$ **148** $\frac{z+u}{6z} + \frac{z-u}{4z} = \frac{2(z+u)}{12z} +$

$$+\frac{3(z-u)}{12z}=\frac{2(z+u)+3(z-u)}{12z}=\frac{2z+2u+3z-3u}{12z}=\frac{5z-u}{12z}$$

149 $$\frac{5a-2b}{2}+\frac{3a-5b}{3}=\frac{3(5a-2b)}{6}+\frac{2(3a-5b)}{6}=$$
$$=\frac{3(5a-2b)+2(3a-5b)}{6}=\frac{15a-6b+6a-10b}{6}=\frac{21a-16b}{6}$$

149' $$\frac{2a-3b}{4}+\frac{3a-2b}{5}=\frac{5(2a-3b)}{20}+\frac{4(3a-2b)}{20}=\frac{5(2a-3b)+4(3a-2b)}{20}=$$
$$=\frac{10a-15b+12a-8b}{20}=\frac{22a-23b}{20}.$$

150 $$\frac{15a+4b}{12}-\frac{3b-22a}{9}=\frac{3(15a+4b)}{36}-\frac{4(3b-22a)}{36}=$$
$$=\frac{3(15a+4b)-4(3b-22a)}{36}=\frac{45a+12b-12b+88a}{36}=\frac{133a}{36}$$

150' $$\frac{5a-4b}{8}-\frac{31a-8b}{12}=\frac{3(5a-4b)}{24}-\frac{2(31a-8b)}{24}=\frac{3(5a-4b)-2(31a-8b)}{24}=$$
$$=\frac{15a-12b-62a+16b}{24}=\frac{-47a+4b}{24}$$

151 $$\frac{3a+2b}{a}+\frac{2a^2-2b^2}{ab}=\frac{(3a+2b)b}{ab}+\frac{2a^2-2b^2}{ab}=$$
$$=\frac{(3a+2b)b+(2a^2-2b^2)}{ab}=\frac{3ab+2b^2+2a^2-2b^2}{ab}=\frac{2a^2+3ab}{ab}=\frac{a(2a+3b)}{ab}=$$
$$=\frac{2a+3b}{b}$$

151' $$\frac{2a^2-2b^2}{ab}-\frac{2a-3b}{b}=\frac{2a^2-2b^2}{ab}-\frac{(2a-3b)a}{ab}=$$
$$=\frac{2a^2-2b^2-(2a-3b)a}{ab}=\frac{2a^2-2b^2-2a^2+3ab}{ab}=\frac{3ab-2b^2}{ab}=\frac{b(3a-2b)}{ab}=$$
$$=\frac{3a-2b}{a}$$

152 $$\frac{b^2+3ac}{bc}-\frac{ab+4bc}{ac}=\frac{(b^2+3ac)a}{abc}-\frac{(ab+4bc)b}{abc}=$$
$$=\frac{(b^2+3ac)a-(ab+4bc)b}{abc}=\frac{ab^2+3a^2c-ab^2-4b^2c}{abc}=\frac{3a^2c-4b^2c}{abc}=$$
$$=\frac{c(3a^2-4b^2)}{abc}=\frac{3a^2-4b^2}{ab}$$

152' $$\frac{x^2-2ab}{ax}+\frac{2b^2-3ax}{bx}=\frac{(x^2-2ab)b}{abx}+$$
$$+\frac{(2b^2-3ax)a}{abx}=\frac{(x^2-2ab)b+(2b^2-3ax)a}{abx}=\frac{bx^2-2ab^2+2ab^2-3a^2x}{abx}=$$
$$=\frac{bx^2-3a^2x}{abx}=\frac{x(bx-3a^2)}{abx}=\frac{bx-3a^2}{ab}$$

$$153\quad \frac{4a-23b}{4}-\frac{4a-25b}{6}+\frac{19b-4a}{12}=\frac{(4a-23b)3}{12}-\frac{(4a-25b)2}{12}+$$

$$+\frac{19b-4a}{12}=\frac{(4a-23b)3-(4a-25b)2+19b-4a}{12}=$$

$$=\frac{12a-69b-8a+50b+19b-4a}{12}=\frac{0}{12}=0,$$ ибо *если дѣлимое* $=0$, *а дѣлитель не есть нуль то частное* $=0$ 153'

$$\frac{3x-2y}{3}-\frac{4y+2x}{5}+\frac{22y-9x}{15}=$$

$$=\frac{(3x-2y)5}{15}-\frac{(4y+2x)3}{15}+\frac{22y-9x}{15}=\frac{(3x-2y)5-(4y+2x)3+(22y-9x)}{15}=$$

$$=\frac{15x-10y-12y-6x+22y-9x}{15}=\frac{0}{15}=0$$

$$154.\quad \frac{3a-4b}{7}-\frac{2a-b-c}{3}+\frac{15a-4c}{12}-\frac{a-4b}{21}=\frac{(3a-4b)12}{7\cdot 12}-$$

$$-\frac{(2a-b-c)28}{3\cdot 28}+\frac{(15a-4c)7}{12\cdot 7}-\frac{(a-4b)4}{21\cdot 4}=$$

$$=\frac{(3a-4b)12-(2a-b-c)28+(15a-4c)7-(a-4b)4}{84}=$$

$$=\frac{36a-48b-56a+28b+28c+105a-28c-4a+16b}{84}=$$

$$=\frac{81a-4b}{84}\quad 154'\quad \frac{4x+5y}{18}-\frac{7x+3y-10z}{30}+\frac{2x-5z}{45}-\frac{2z-y}{9}=$$

$$=\frac{(4x+5y)5}{18\cdot 5}-\frac{(7x+3y-10z)3}{30\cdot 3}+\frac{(2x-5z)2}{45\cdot 2}-\frac{(2z-y)10}{9\cdot 10}=$$

$$=\frac{(4x+5y)5-(7x+3y-10z)3+(2x-5z)2-(2z-y)10}{90}=$$

$$=\frac{20x+25y-21x-9y+30z+4x-10z-20z+10y}{90}=\frac{3x+26y}{90}$$

$$155\quad \frac{5a^2-ab+c}{12}-\frac{2ab-a^2-3c}{18}-\frac{-2a^2+2ab}{24}=\frac{(5a^2-ab+c)6}{12\cdot 6}-$$

$$-\frac{(2ab-a^2-3c)4}{18\cdot 4}-\frac{(-2a^2+2ab)3}{24\cdot 3}=$$

$$=\frac{(30a^2-6ab+6c)-(8ab-4a^2-12c)-(-6a^2+6ab)}{72}=$$

$$=\frac{30a^2-6ab+6c-8ab+4a^2+12c+6a^2-6ab}{72}=$$

$$=\frac{40a^2-20ab+18c}{72}=\frac{2(20a^2-10ab+9c)}{72}=\frac{20a^2-10ab+9c}{36}$$

155′ $$\frac{24a-10b^2+7ac}{20}-\frac{4a-2b^2+3ac}{12}-\frac{-10b^2+15a}{30}=$$

$$=\frac{(24a-10b^2+7ac)3}{20\cdot 3}-\frac{(4a-2b^2+3ac)5}{12\cdot 5}-\frac{(-10b^2+15a)2}{30\cdot 2}=$$

$$=\frac{(72a-30b^2+21ac)-(20a-10b^2+15ac)-(-20b^2+30a)}{60}=$$

$$=\frac{72a-30b^2+21ac-20a+10b^2-15ac+20b^2-30a}{60}=$$

$$=\frac{22a+6ac}{60}=\frac{2a(11+3c)}{60}=\frac{a(3c+11)}{30}$$

156 $$\frac{20a^2b+c^2}{10a^3b^2}+2ab^2-\frac{3}{2ab}=\frac{20a^2b+c^2}{10a^3b^2}+\frac{2ab^2\cdot 10a^3b^2}{10a^3b^2}-$$

$$-\frac{3\cdot 5a^2b}{10a^3b^2}=\frac{20a^2b+c^2+20a^4b^4-15a^2b}{10a^3b^2}=\frac{5a^2b+20a^4b^4+c^2}{10a^3b^2}$$

156′ $$\frac{5}{3a^2b}-3a^3b^2-\frac{20a^2b^2-c^3}{15a^4b^3}=\frac{5\cdot 5a^2b^2}{15a^4b^3}-\frac{3a^3b^2\cdot 15a^4b^3}{15a^4b^3}-\frac{20a^2b^2-c^3}{15a^4b^3}$$

$$=\frac{25a^2b^2-45a^7b^5-20a^2b^2+c^3}{15a^4b^3}=\frac{5a^2b^2-45a^7b^5+c^3}{15a^4b^3}$$

157 $$\frac{6-a^2}{6a}+\frac{a}{2}+\frac{2}{a}-\left(\frac{a}{3}+\frac{3}{a}\right)=\frac{6-a^2}{6a}+\frac{a\cdot 3a}{6a}+\frac{2\cdot 6}{6a}-$$

$$-\frac{a\cdot 2a}{6a}-\frac{3\cdot 6}{6a}=\frac{6-a^2+3a^2+12-2a^2-18}{6a}=\frac{0}{6a}=\text{(см. реш. № 153)}$$

$=0$ **157′** $$\frac{30+3a^2}{10a}+\frac{a}{5}-\frac{5}{a}-\left(\frac{a}{2}-\frac{2}{a}\right)=\frac{30+3a^2}{10a}+\frac{a\cdot 2a}{10a}-$$

$$-\frac{5\cdot 10}{10a}-\frac{a\cdot 5a}{10a}+\frac{2\cdot 10}{10a}=\frac{30+3a^2+2a^2-50-5a^2+20}{10a}=\frac{0}{10a}=0$$

158 $$\frac{5a-7b}{3b}-\frac{c-3a}{a}+\frac{a+5c}{5a}-\frac{11a}{6b}=\frac{(5a-7b)\cdot 10a}{3b\cdot 10a}-$$

$$-\frac{(c-3a)\cdot 30b}{a\cdot 30b}+\frac{(a+5c)\cdot 6b}{5a\cdot 6b}-\frac{11a\cdot 5a}{6b\cdot 5a}=$$

$$=\frac{(50a^2-70ab)-(30bc-90ab)+(6ab+30bc)-55a^2}{30ab}=$$

$$=\frac{50a^2-70ab-30bc+90ab+6ab+30bc-55a^2}{30ab}=\frac{-5a^2+26ab}{30ab}=$$

$$=\frac{a(-5a+26b)}{30ab}=\frac{26b-5a}{30b}$$ **158′** $$\frac{3a+2c}{4b}-$$

$$-\frac{5b+a}{6a}-\frac{5c-8b}{10b}+\frac{5b}{6a}=\frac{(3a+2c)\cdot 15a}{4b\cdot 15a}-\frac{(5b+a)\cdot 10b}{6a\cdot 10b}$$

$$-\frac{(5c-8b)\cdot 6a}{10b\cdot 6a}+\frac{5b\cdot 10b}{6a\cdot 10b}=$$

$$=\frac{(45a^2+30ac)-(50b^2+10ab)-(30ac-48ab)+50b^2}{60ab}=$$

$$=\frac{45a^2+30ac-50b^2-10ab-30ac+48ab+50b^2}{60ab}=\frac{45a^2+38ab}{60ab}=$$

$$=\frac{a(45a+38b)}{60ab}=\frac{45a+38b}{60b}$$

Другой способъ $\frac{3a+2c}{4b}-\frac{5b+a}{6a}-\frac{5c-8b}{10b}+\frac{5b}{6a}=\frac{3a+2c}{4b}-\frac{5b}{6a}-\frac{a}{6a}-\frac{5c-8b}{10b}+$

$$+\frac{5b}{6a}=\frac{3a+2c}{4b}-\frac{1}{6}-\frac{5c-8b}{10b}=\frac{(3a+2c)\cdot 15}{60b}-\frac{1\cdot 10b}{60b}-\frac{(5c-8b)\cdot 6}{60b}=$$

$$=\frac{(45a+30c)-10b-(30c-48b)}{60b}=\frac{45a+30c-10b-30c+48b}{60b}=\frac{45a+38b}{60b}$$

159. $\frac{5a+3c}{9c}-\frac{a^2-bc}{2ac}-\frac{2a}{b}+\frac{4a-b}{2b}-\frac{3b-a}{6a}=\frac{(5a+3c)\cdot 2ab}{9c\cdot 2ab}-$

$$-\frac{(a^2-bc)\cdot 9b}{2ac\cdot 9b}-\frac{2a\cdot 18ac}{b\cdot 18ac}+\frac{(4a-b)\cdot 9ac}{2b\cdot 9ac}-\frac{(3b-a)\cdot 3bc}{6a\cdot 3bc}=$$

$$=\frac{(10a^2b+6abc)-(9a^2b-9b^2c)-36a^2c+(36a^2c-9abc)-(9b^2c-3abc)}{18abc}=$$

$$=\frac{10a^2b+6abc-9a^2b+9b^2c-36a^2c+36a^2c-9abc-9b^2c+3abc}{18abc}=$$

$=\frac{a^2b}{18abc}=\frac{a}{18c}$ 159′. $\frac{3b+8a}{6a}-\frac{5a^2+2bx}{5ax}+\frac{3a}{b}+\frac{3a-5x}{3x}-\frac{9a-b}{3b}=$

$$=\frac{(3b+8a)\cdot 5bx}{6a\cdot 5bx}-\frac{(5a^2+2bx)\cdot 6b}{5ax\cdot 6b}+\frac{3a\cdot 30ax}{b\cdot 30ax}+\frac{(3a-5x)\cdot 10ab}{3x\cdot 10ab}-$$

$$-\frac{(9a-b)\cdot 10ax}{3b\cdot 10ax}=$$

$$=\frac{(15b^2x+40abx)-(30a^2b+12b^2x)+90a^2x+(30a^2b-50abx)-(90a^2x-10abx)}{30abx}=$$

$$=\frac{15b^2x+40abx-30a^2b-12b^2x+90a^2x+30a^2b-50abx-90a^2x+10abx}{30abx}=$$

$$=\frac{3b^2x}{30abx}=\frac{b}{10a}$$

160. $\frac{6c+5b}{6bc}+\frac{3a-5b}{15ab}-\frac{a-7c}{12ac}-\frac{4c-5b}{20bc}+\frac{3}{4a}=\frac{(6c+5b)\cdot 10a}{6bc\cdot 10a}+$

$$+\frac{(3a-5b)\cdot 4c}{15ab\cdot 4c}-\frac{(a-7c)\cdot 5b}{12ac\cdot 5b}-\frac{(4c-5b)\cdot 3a}{20bc\cdot 3a}+\frac{3\cdot 15bc}{4a\cdot 15bc}=$$

$$=\frac{(60ac+50ab)+(12ac-20bc)-(5ab-35bc)-(12ac-15ab)+45bc}{60abc}=$$

$$=\frac{60ac+50ab+12ac-20bc-5ab+35bc-12ac+15ab+45bc}{60abc}=$$

$$=\frac{60ac+60ab+60bc}{60abc}=\frac{60(ac+ab+bc)}{60abc}=\frac{ab+ac+bc}{abc}$$ каковое выраженіе легко преобразовывается къ виду $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$.

160'. $$\frac{6a+c}{6bc}-\frac{5a-4b}{4ac}-\frac{4b-5c}{5ab}+\frac{18b-5a}{30ab}+\frac{5}{4c}=\frac{(6a+c)\,10a}{6bc\cdot 10a}-$$

$$-\frac{(5a-4b)\,15b}{4ac\cdot 15b}-\frac{(4b-5c)\,12c}{5ab\cdot 12c}+\frac{(18b-5a)\,2c}{30ab\cdot 2c}+\frac{5\cdot 15ab}{4c\cdot 15ab}=$$

$$=\frac{(60a^2+10ac)-(75ab-60b^2)-(48bc-60c^2)+(36bc-10ac)+75ab}{60abc}=$$

$$=\frac{60a^2+10ac-75ab+60b^2-48bc+60c^2+36bc-10ac+75ab}{60abc}=$$

$$=\frac{60a^2+60b^2+60c^2-12bc}{60abc}=\frac{60(a^2+b^2+c^2)-12bc}{60abc}=\frac{a^2+b^2+c^2}{abc}-\frac{1}{5a}$$

Указаніе. Если бы числитель 3-ей данной дроби былъ $3b-5c$, а не $4b-5c$, или числитель 4-ой дроби $24b-5a$, а не $18b-5a$, то отвѣтъ былъ бы болѣе простой, аналогичный предыдущему №-ру: $\frac{a^2+b^2+c^2}{abc}$.

Замѣчаніе къ №№ 147—160'. Въ тѣхъ случаяхъ, когда числители данныхъ для сложенія и вычитанія дробей являются *многочленами*, а знаменатели—*одночленами*, весьма удобнымъ способомъ *повѣрки* можетъ служить слѣд.: дѣлимъ числителя каждой дроби на ея знаменателя, по правилу дѣленія многочлена на одночленъ (отд. III, § 12) и затѣмъ, упрощая результатъ, приводимъ подобные члены. Напр. возьмемъ № 159.

$$\frac{3b+8a}{6a}-\frac{5a^2+2bx}{5ax}+\frac{3a}{b}+\frac{3a-5x}{3x}-\frac{9a-b}{3b}=\frac{3b}{6a}+\frac{8a}{6a}-\frac{5a^2}{5ax}-\frac{2bx}{5ax}+\frac{3a}{b}+\frac{3a}{3x}-$$

$$-\frac{5x}{3x}-\frac{9a}{3b}+\frac{b}{3b}=\frac{b}{2a}+\frac{4}{3}-\frac{a}{x}-\frac{2b}{5a}+\frac{3a}{b}+\frac{a}{x}-\frac{5}{3}-\frac{3a}{b}+\frac{1}{3}=\frac{b}{2a}-$$

$$-\frac{2b}{5a}=\frac{5b-4b}{2\cdot 5a}=\frac{b}{10a}$$

Укажемъ еще въ качествѣ примѣра на 2-ой способъ рѣш. № 158'.

Въ задачахъ №№ 161—190' съ многочленными знаменателями дробей мы въ началѣ рѣш. будемъ опредѣлять общ. знам. (= общій знаменатель), обозначая для удобства и ясности выкладокъ (срв. №№ 71—80) чрезъ P, Q, R, ... знаменателей данныхъ дробей, по-порядку.

161. Общ. знам. $=(a-b)(a+b)=a^2-b^2$, $$\frac{b}{a-b}+\frac{a}{a+b}=\frac{b(a+b)}{(a-b)(a+b)}+$$

$$+\frac{a(a-b)}{(a+b)(a-b)}=\frac{b(a+b)+a(a-b)}{a^2-b^2}=\frac{ab+b^2+a^2-ab}{a^2-b^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}.$$

161'. Общ. знам. $=(a-b)(a+b)=a^2-b^2$. $$\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}=\frac{a(a+b)}{(a-b)(a+b)}-$$

$$-\frac{b(a-b)}{(a+b)(a-b)}=\frac{a(a+b)-b(a-b)}{a^2-b^2}=\frac{a^2+ab-ab+b^2}{a^2-b^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$$

162 $P=1-a^2=1^2-a^2=(1+a)(1-a)$ $Q=a^2+1$, общ знам $=P\cdot Q=(1-a^2)(1+a^2)=1^2-(a^2)^2=1-a^4$, $\frac{x}{1-a^2}-\frac{x}{a^2+1}=\frac{x(a^2+1)}{1-a^4}-\frac{x(1-a^2)}{1-a^4}=\frac{x(a^2+1)-x(1-a^2)}{1-a^4}=\frac{a^2x+x-x+a^2x}{1-a^4}=\frac{2a^2x}{1-a^4}$ **162′** $P=a^3+1=a^3+1^3=(a+1)(a^2-a+1)$ $Q=a^3-1=a^3-1^3=(a-1)(a^2+a+1)$, общ знам $=P\cdot Q=(a^3+1)(a^3-1)=(a^3)^2-1^2=a^6-1$ $\frac{x}{a^3+1}+\frac{x}{a^3-1}=\frac{x(a^3-1)}{a^6-1}+\frac{x(a^3+1)}{a^6-1}=\frac{x(a^3-1)+x(a^3+1)}{a^6-1}=\frac{a^3x-x+a^3x+x}{a^6-1}=\frac{2a^3x}{a^6-1}$

163 $P=2(a+b)$ $Q=a^2-b^2=(a+b)(a-b)$, общ знам $=2(a+b)(a-b)=2(a^2-b^2)$, $\frac{a-b}{2(a+b)}+\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}=\frac{(a-b)(a-b)}{2(a+b)(a-b)}+\frac{(a^2+b^2)\cdot 2}{(a^2-b^2)\cdot 2}=\frac{(a-b)^2+2(a^2+b^2)}{2(a^2-b^2)}=\frac{a^2-2ab+b^2+2a^2+2b^2}{2(a^2-b^2)}=\frac{3a^2-2ab+3b^2}{2(a^2-b^2)}$ **163′** $P=a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ $Q=2(a-b)$, общ знам $=(a+b)(a-b)\cdot 2=2(a^2-b^2)$ $\frac{2a^2+b^2}{a^2-b^2}-\frac{a+b}{2(a-b)}=\frac{(2a^2+b^2)\cdot 2}{(a^2-b^2)\cdot 2}-\frac{(a+b)\cdot(a+b)}{2(a-b)\cdot(a+b)}=\frac{(2a^2+b^2)\cdot 2-(a+b)^2}{2(a^2-b^2)}=\frac{4a^2+2b^2-a^2-2ab-b^2}{2(a^2-b^2)}=\frac{3a^2-2ab+b^2}{2(a^2-b^2)}$

164 $\frac{2a+3x}{2a-3x}-\frac{2a-3x}{3x-2a}=\frac{2a+3x}{2a-3x}-\frac{2a-3x}{-(2a-3x)}=\frac{2a+3x}{2a-3x}+\frac{2a-3x}{2a-3x}=\frac{2a+3x+2a-3x}{2a-3x}=\frac{4a}{2a-3x}$ **164′** $\frac{4a+x}{4a-x}+\frac{4a-x}{x-4a}=\frac{4a+x}{4a-x}+\frac{4a-x}{-(4a-x)}=\frac{4a+x}{4a-x}-\frac{4a-x}{4a-x}=\frac{4a+x-4a+x}{4a-x}=\frac{2x}{4a-x}$

165 $P=2(a+1)^3$, $Q=(a+1)^2$ $R=2(a+1)$ общ знам $=P=2(a+1)^3$, $\frac{a^3}{2(a+1)^3}-\frac{a^2}{(a+1)^2}+\frac{a}{2(a+1)}=\frac{a^3}{2(a+1)^3}-\frac{a^2\cdot(a+1)\cdot 2}{2(a+1)^3}+\frac{a\cdot(a+1)^2}{2(a+1)^3}=\frac{a^3-2a^2(a+1)+a(a^2+2a+1)}{2(a+1)^3}=\frac{a^3-2a^3-2a^2+a^3+2a^2+a}{2(a+1)^3}=\frac{a}{2(a+1)^3}$ **165′** $\frac{a^3}{6(a-1)^3}-\frac{a^2}{3(a-1)^2}+\frac{a}{6(a-1)}=\frac{a^3}{6(a-1)^3}-\frac{a^2\cdot 2(a-1)}{6(a-1)^3}+\frac{a(a-1)^2}{6(a-1)^3}=\frac{a^3-2a^2(a-1)+a(a^2-2a+1)}{6(a-1)^3}=\frac{a^3-2a^3+2a^2+a^3-2a^2+a}{6(a-1)^3}=\frac{a}{6(a-1)^3}$

166 $P=a-b$, $Q=a+b$, $R=a^2-b^2=(a+b)(a-b)$, общ знам $=R=a^2-b^2$,

$$\frac{a}{a-b}+\frac{3a}{a+b}-\frac{2ab}{a^2-b^2}=\frac{a(a+b)}{a^2-b^2}+\frac{3a(a-b)}{a^2-b^2}-\frac{2ab}{a^2-b^2}=$$

$$=\frac{a(a+b)+3a(a-b)-2ab}{a^2-b^2}=\frac{a^2+ab+3a^2-3ab-2ab}{a^2-b^2}=\frac{4a^2-4ab}{a^2-b^2}=$$

$$=\frac{4a(a-b)}{(a+b)(a-b)}=\frac{4a}{a+b}$$

166′ $P=a-b$, $Q=a^2-b^2=(a+b)(a-b)$, $R=a+b$, общ знам $=Q=a^2-b^2$,

$$\frac{a}{a-b}-\frac{2a^2}{a^2-b^2}+\frac{4a}{a+b}=\frac{a(a+b)}{(a-b)(a+b)}-\frac{2a^2}{a^2-b^2}+$$

$$+\frac{4a(a-b)}{(a+b)(a-b)}=\frac{a(a+b)-2a^2+4a(a-b)}{a^2-b^2}=\frac{a^2+ab-2a^2+4a^2-4ab}{a^2-b^2}=$$

$$=\frac{3a^2-3ab}{a^2-b^2}=\frac{3a(a-b)}{(a+b)(a-b)}=\frac{3a}{a+b}.$$

167 $$\frac{2}{2a+3}+\frac{3}{3-2a}+\frac{2a+15}{4a^2-9}=\frac{2}{2a+3}+\frac{3}{-(2a-3)}+\frac{2a+15}{(2a)^2-3^2}=$$

$$=\frac{2}{2a+3}-\frac{3}{2a-3}+\frac{2a+15}{(2a+3)(2a-3)}=\frac{2(2a-3)}{(2a+3)(2a-3)}-$$

$$-\frac{3(2a+3)}{(2a-3)(2a+3)}+\frac{2a+15}{(2a+3)(2a-3)}=\frac{2(2a-3)-3(2a+3)+(2a+15)}{(2a+3)(2a-3)}=$$

$$=\frac{4a-6-6a-9+2a+15}{4a^2-9}=\frac{0}{4a^2-9}=$$(см рѣш № 153) $=0$

167′ $$\frac{3}{2a-1}+\frac{7}{2a+1}-\frac{4-20a}{1-4a^2}=\frac{3}{2a-1}+\frac{7}{2a+1}-\frac{4-20a}{-(4a^2-1)}=$$

$$=\frac{3}{2a-1}+\frac{7}{2a+1}+\frac{4-20a}{4a^2-1}=\frac{3}{2a-1}+\frac{7}{2a+1}+\frac{4-20a}{(2a)^2-1^2}=$$

$$=\frac{3}{2a-1}+\frac{7}{2a+1}+\frac{4-20a}{(2a+1)(2a-1)}=\frac{3(2a+1)}{(2a-1)(2a+1)}+$$

$$+\frac{7(2a-1)}{(2a+1)(2a-1)}+\frac{4-20a}{(2a+1)(2a-1)}=\frac{3(2a+1)+7(2a-1)+(4-20a)}{(2a+1)(2a-1)}=$$

$$=\frac{6a+3+14a-7+4-20a}{4a^2-1}=\frac{0}{4a^2-1}=$$(рѣш № 153) $=0$

168 $$\frac{2}{4a-3}+\frac{3}{4a+3}-\frac{16a-6}{16a^2-9}=\frac{2}{4a-3}+\frac{3}{4a+3}-\frac{16a-6}{(4a)^2-3^2}=$$

$$=\frac{2}{4a-3}+\frac{3}{4a+3}-\frac{16a-6}{(4a+3)(4a-3)}=\frac{2(4a+3)}{(4a-3)(4a+3)}+$$

$$+\frac{3(4a-3)}{(4a+3)(4a-3)}-\frac{16a-6}{(4a+3)(4a-3)}=\frac{2(4a+3)+3(4a-3)-(16a-6)}{(4a+3)(4a-3)}=$$

$$=\frac{8a+6+12a-9-16a+6}{(4a+3)(4a-3)}=\frac{4a+3}{(4a+3)(4a-3)}=\frac{1}{4a-3}$$

168' $$\frac{5}{5+3a}+\frac{3}{5-3a}-\frac{3a-35}{9a^2-25}=\frac{5}{3a+5}+\frac{3}{-(3a-5)}-\frac{3a-35}{9a^2-25}=$$

$$=\frac{5}{3a+5}-\frac{3}{3a-5}-\frac{3a-35}{(3a)^2-5^2}=\frac{5}{3a+5}-\frac{3}{3a-5}-$$

$$-\frac{3a-35}{(3a+5)(3a-5)}=\frac{5(3a-5)}{(3a+5)(3a-5)}-\frac{3(3a+5)}{(3a-5)(3a+5)}-$$

$$-\frac{3a-35}{(3a+5)(3a-5)}=\frac{5(3a-5)-3(3a+5)-(3a-35)}{(3a+5)(3a-5)}=$$

$$=\frac{15a-25-9a-15-3a+35}{(3a+5)(3a-5)}=\frac{3a-5}{(3a+5)(3a-5)}=\frac{1}{3a+5}$$

169 $$\frac{2}{a}+\frac{3}{b-2a}-\frac{2a-3b}{4a^2-b^2}=\frac{2}{a}+\frac{3}{-(2a-b)}-\frac{2a-3b}{(2a)^2-b^2}=$$

$$=\frac{2}{a}-\frac{3}{2a-b}-\frac{2a-3b}{(2a+b)(2a-b)}=\frac{2(2a+b)(2a-b)}{a(2a+b)(2a-b)}-$$

$$-\frac{3a(2a+b)}{a(2a+b)(2a-b)}-\frac{(2a-3b)a}{a(2a+b)(2a-b)}=\frac{2(2a+b)(2a-b)-3a(2a+b)-(2a-3b)a}{a(2a+b)(2a-b)}=$$

$$=\frac{2(4a^2-b^2)-(6a^2+3ab)-(2a^2-3ab)}{a(2a+b)(2a-b)}=\frac{8a^2-2b^2-6a^2-3ab-2a^2+3ab}{a(2a+b)(2a-b)}=$$

$$=\frac{-2b^2}{a(4a^2-b^2)}=\frac{2b^2}{-a(4a^2-b^2)}=\frac{2b^2}{a(b^2-4a^2)}$$

169' $$\frac{6a+6b}{ab+2a^2}+\frac{8}{b-2a}+$$

$$+\frac{4a+2b}{4a^2-b^2}=\frac{6a+6b}{a(b+2a)}+\frac{8}{b-2a}+\frac{4a+2b}{(2a)^2-b^2}=\frac{6a+6b}{a(2a+b)}-$$

$$-\frac{8}{2a-b}+\frac{4a+2b}{(2a+b)(2a-b)}=\frac{(6a+6b)(2a-b)}{a(2a+b)(2a-b)}-\frac{8a(2a+b)}{(2a-b)a(2a+b)}+$$

$$+\frac{(4a+2b)a}{(2a+b)(2a-b)a}=\frac{(6a+6b)(2a-b)-8a(2a+b)+(4a+2b)a}{a(2a+b)(2a-b)}=$$

$$=\frac{12a^2+12ab-6ab-6b^2-16a^2-8ab+4a^2+2ab}{a(2a+b)(2a-b)}=\frac{-6b^2}{a(4a^2-b^2)}=$$

$$=\frac{6b^2}{-a(4a^2-b^2)}=\frac{6b^2}{a(b^2-4a^2)}$$

170 $$\frac{a(16-a)}{a^2-4}+\frac{3+2a}{2-a}-\frac{2-3a}{a+2}=\frac{a(16-a)}{a^2-2^2}+\frac{3+2a}{-(a-2)}-$$

$$-\frac{2-3a}{a+2}=\frac{a(16-a)}{(a+2)(a-2)}-\frac{3+2a}{a-2}-\frac{2-3a}{a+2}=\frac{a(16-a)}{(a+2)(a-2)}-$$

$$-\frac{(3+2a)(a+2)}{(a-2)(a+2)}-\frac{(2-3a)(a-2)}{(a+2)(a-2)}=$$

$$=\frac{a(16-a)-(3+2a)(a+2)-(2-3a)(a-2)}{(a+2)(a-2)}=$$

$$=\frac{16a-a^2-3a-2a^2-6-4a-2a+3a^2+4-6a}{(a+2)(a-2)}=\frac{a-2}{(a+2)(a-2)}=$$

$=\frac{1}{a+2}$ **170′** $\frac{2a(5a+4)}{a^2-9}-\frac{4+5a}{3+a}+\frac{5a+1}{3-a}=\frac{2a(5a+4)}{a^2-3^2}-$

$$-\frac{4+5a}{a+3}+\frac{5a+1}{-(a-3)}=\frac{2a(5a+4)}{(a+3)(a-3)}-\frac{5a+4}{a+3}-\frac{5a+1}{a-3}=$$

$$=\frac{2a(5a+4)}{(a+3)(a-3)}-\frac{(5a+4)(a-3)}{(a+3)(a-3)}-\frac{(5a+1)(a+3)}{(a-3)(a+3)}=$$

$$=\frac{2a(5a+4)-(5a^2+4a-15a-12)-(5a+1)(a+3)}{(a+3)(a-3)}=$$

$$=\frac{10a^2+8a-5a^2-4a+15a+12-5a^2-a-15a-3}{(a+3)(a-3)}=\frac{3a+9}{(a+3)(a-3)}=$$

$$=\frac{3(a+3)}{(a+3)(a-3)}=\frac{3}{a-3}$$

171 $P=x-2$, $Q=x+2$ $R=(x+2)^2$, общ знам $=(x+2)^2(x-2)$ $\frac{1}{x-2}+$

$$+\frac{3}{x+2}+\frac{2x}{(x+2)^2}=\frac{(x+2)^2}{(x-2)(x+2)^2}+\frac{3(x+2)(x-2)}{(x+2)^2(x-2)}+\frac{2x(x-2)}{(x+2)^2(x-2)}=$$

$$=\frac{(x+2)^2+3(x^2-4)+2x(x-2)}{(x+2)^2(x-2)}=\frac{x^2+4x+4+3x^2-12+2x^2-4x}{(x+2)^2(x-2)}=$$

$=\frac{6x^2-8}{(x+2)^2(x-2)}=\frac{2(3x^2-4)}{(x+2)^2(x-2)}$ **171′** $P=x+3$ $Q=x-3$ $R=(x-3)^2$,
общ знам $=(x+3)(x-3)^2$, $\frac{3}{x+3}-\frac{1}{x-3}-\frac{4x-10}{(x-3)^2}=\frac{3(x-3)^2}{(x+3)(x-3)^2}-$

$$-\frac{(x+3)(x-3)}{(x+3)(x-3)^2}-\frac{(4x-10)(x+3)}{(x+3)(x-3)^2}=$$

$$=\frac{3(x^2-6x+9)-(x^2-9)-(4x^2-10x+12x-30)}{(x+3)(x-3)^2}=$$

$$=\frac{3x^2-18x+27-x^2+9-4x^2-2x+30}{(x+3)(x-3)^2}=\frac{-2x^2-20x+66}{(x+3)(x-3)^2}=$$

$$=\frac{-2(x^2+10x-33)}{(x+3)(x-3)^2}=-\frac{2(x^2+10x-33)}{(x+3)(x-3)^2}$$

172 *) $\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+2}+\frac{1}{x+3}=\frac{(x+2)(x+3)}{(x+1)(x+2)(x+3)}+$

---

*) Если по аналогіи съ № 172′, сдѣлать отрицательной дробь $\frac{2}{x+2}$, то результатъ будетъ $\frac{-2}{(x+1)(x+2)(x+3)}$

$$+\frac{2(x+1)(x+3)}{(x+1)(x+2)(x+3)}+\frac{(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+2)(x+3)}=$$ (отд IV №№ 361 и 362)=

$$=\frac{(x^2+5x+6)+2(x^2+4x+3)+(x^2+3x+2)}{(x+1)(x+2)(x+3)}=$$

$$=\frac{x^2+5x+6+2x^2+8x+6+x^2+3x+2}{(x+1)(x+2)(x+3)}=\frac{4x^2+16x+14}{(x+1)(x+2)(x+3)}=$$

$$=\frac{2(2x^2+8x+7)}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$

172′ $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-3}-\frac{2}{x-2}=\frac{(x-2)(x-3)}{(x-1)(x-2)(x-3)}+$

$$+\frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}-\frac{2(x-1)(x-3)}{(x-1)(x-2)(x-3)}=$$ (отд IV №№ 361′ и 362′)=

$$=\frac{(x^2-5x+6)+(x^2-3x+2)-2(x^2-4x+3)}{(x-1)(x-2)(x-3)}=$$

$$=\frac{x^2-5x+6+x^2-3x+2-2x^2+8x-6}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{2}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

173 $P=2a+2=2(a+1)$, $Q=10a-10=2\cdot 5(a-1)$, $R=10a+15=5(2a+3)$, общ знам $=2\cdot 5(a+1)(a-1)(2a+3)=10(a^2-1)(2a+3)$, $\frac{5}{2a+2}-$

$$-\frac{1}{10a-10}-\frac{24}{10a+15}=\frac{5\cdot 5(a-1)(2a+3)}{2(a+1)\cdot 5(a-1)(2a+3)}-\frac{(a+1)(2a+3)}{10(a-1)(a+1)(2a+3)}-$$

$$-\frac{24\cdot 2(a^2-1)}{5(2a+3)\cdot 2(a^2-1)}=\frac{25(2a^2-2a+3a-3)-(2a^2+2a+3a+3)-48(a^2-1)}{10(a^2-1)(2a+3)}=$$

$$=\frac{50a^2+25a-75-2a^2-5a-3-48a^2+48}{10(a^2-1)(2a+3)}=\frac{20a-30}{10(a^2-1)(2a+3)}=$$

$$=\frac{10(2a-3)}{10(a^2-1)(2a+3)}=\frac{2a-3}{(a^2-1)(2a+3)}$$

173′ $\frac{2}{3a+6}+\frac{1}{12-6a}-$

$$-\frac{1}{2a+5}=\frac{2}{3(a+2)}+\frac{1}{6(2-a)}-\frac{1}{2a+5}=\frac{2\cdot 2(2-a)(2a+5)}{3(a+2)\cdot 2(2-a)(2a+5)}+$$

$$+\frac{(a+2)(2a+5)}{6(2-a)(a+2)(2a+5)}-\frac{6(a+2)(2-a)}{(2a+5)\cdot 6(a+2)(2-a)}=$$

$$=\frac{4(4a-2a^2+10-5a)+(2a^2+4a+5a+10)-6(2^2-a^2)}{6(2+a)(2-a)(2a+5)}=$$

$$=\frac{16a-8a^2+40-20a+2a^2+4a+5a+10-24+6a^2}{6(2^2-a^2)(5+2a)}=\frac{5a+26}{6(4-a^2)(5+2a)}$$

174 $P=a-b$, $Q=a+b$, $R=a^2+b^2$, общ знам $=(a-b)(a+b)(a^2+b^2)=$ $=(a^2-b^2)(a^2+b^2)=(a^2)^2-(b^2)^2=a^4-b^4$ $\frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a+b}-\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}=$

$$=\frac{(a+b)(a+b)(a^2+b^2)}{(a-b)(a+b)(a^2+b^2)}+\frac{(a-b)(a-b)(a^2+b^2)}{(a+b)(a-b)(a^2+b^2)}-\frac{(a^2-b^2)(a+b)(a-b)}{(a^2+b^2)(a+b)(a-b)}=$$

$$=\frac{(a+b)^2(a^2+b^2)+(a-b)^2(a^2+b^2)-(a^2-b^2)(a^2-b^2)}{a^4-b^4}=$$

$$=\frac{(a^2+b^2)\,[(a+b)^2+(a-b)^2]-(a^2-b^2)^2}{a^4-b^4}=$$

$$=\frac{(a^2+b^2)(a^2+2ab+b^2+a^2-2ab+b^2)-[(a^2)^2-2a^2b^2+(b^2)^2]}{a^4-b^4}=$$

$$=\frac{(a^2+b^2)(2a^2+2b^2)-(a^4-2a^2b^2+b^4)}{a^4-b^4}=\frac{2(a^2+b^2)^2-a^4+2a^2b^2-b^4}{a^4-b^4}=$$

$$=\frac{2(a^4+2a^2b^2+b^4)-a^4+2a^2b^2+b^4}{a^4-b^4}=\frac{2a^4+4a^2b^2+2b^4-a^4+2a^2b^2-b^4}{a^4-b^4}=$$

$$=\frac{a^4+6a^2b^2+b^4}{a^4-b^4}.$$

Замѣчаніе. Въ примѣрахъ, подобныхъ настоящему № 174, полезно, въ цѣляхъ большей краткости, производить сложеніе и вычитаніе *по частямъ*, соединяя слагаемыя и вычитаемыя въ группы, находя результаты для каждой группы и наконецъ производя дѣйствіе надъ группами для полученія окончательнаго результата. Такъ, въ послѣднемъ примѣрѣ сначала находимъ сумму первыхъ двухъ дробей, а затѣмъ соединяемъ ее съ послѣдней дробью. Такимъ образомъ будемъ имѣть

$$\frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a+b}-\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}=\frac{(a+b)^2+(a-b)^2}{(a-b)(a+b)}-\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}=\frac{2(a^2+b^2)}{a^2-b^2}-\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}=$$

$$=\frac{2(a^2+b^2)^2-(a^2-b^2)^2}{(a^2-b^2)(a^2+b^2)}=\frac{2a^4+4a^2b^2+2b^4-a^4+2a^2b^2-b^4}{(a^2)^2-(b^2)^2}=\frac{a^4+6a^2b^2+b^4}{a^4-b^4}$$

Отсюда видно, что въ группы соединяются однородныя, такъ сказать, дроби,—съ *сходными знаменателями* (одинаковое число членовъ и подобные члены, одно и то же измѣреніе и т. п.); если и числители оказываются сходными между собою (какъ и въ № 174), то выгода отъ подобнаго соединенія лишь увеличивается.

174'. См. замѣч. къ № 174. $\frac{2a}{a+2b}-\frac{a+2b}{a-2b}-\frac{8ab}{a^2+4b^2}=\frac{2a(a-2b)}{(a+2b)(a-2b)}-$

$$-\frac{(a+2b)(a+2b)}{(a-2b)(a+2b)}-\frac{8ab}{a^2+4b^2}=\frac{2a(a-2b)-(a+2b)^2}{a^2-(2b)^2}-\frac{8ab}{a^2+4b^2}=$$

$$=\frac{2a^2-4ab-a^2-4ab-4b^2}{a^2-4b^2}-\frac{8ab}{a^2+4b^2}=\frac{a^2-8ab-4b^2}{a^2-4b^2}-\frac{8ab}{a^2+4b^2}=$$

$$=\frac{(a^2-8ab-4b^2)(a^2+4b^2)}{(a^2-4b^2)(a^2+4b^2)}-\frac{8ab(a^2-4b^2)}{(a^2+4b^2)(a^2-4b^2)}=$$

$$=\frac{a^4-8a^3b-4a^2b^2+4a^2b^2-32ab^3-16b^4-8a^3b+32ab^3}{(a^2)^2-(4b^2)^2}=\frac{a^4-16a^3b-16b^4}{a^4-16b^4}$$

175. $P=a^2-b^2=(a+b)(a-b)$, $Q=(a+b)^2$, $R=(a-b)^2$, общ. знам. $=$ $=(a+b)^2(a-b)^2=(a+b)(a-b)\cdot(a+b)(a-b)=(a^2-b^2)(a^2-b^2)=(a^2-b^2)^2$

$$\frac{1}{a^2-b^2}+\frac{1}{(a+b)^2}-\frac{1}{(a-b)^2}=\frac{a^2-b^2}{(a^2-b^2)^2}+\frac{(a-b)^2}{(a+b)^2(a-b)^2}-$$

$$-\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2(a+b)^2}=\frac{a^2-b^2+(a-b)^2-(a+b)^2}{(a^2-b^2)^2}=\frac{a^2-b^2+a^2-2ab+b^2-a^2-2ab-b^2}{(a^2-b^2)^2}=$$

$$=\frac{a^2-4ab-b^2}{(a^2-b^2)^2}$$

175' $P=(2a-3b)^2$ $Q=(2a+3b)^2$, $R=4a^2-9b^2=(2a)^2-(3b)^2=(2a+3b)(2a-3b)$, общ знам $=(2a+3b)^2(2a-3b)^2=[(2a+3b)\ (2a-3b)]\ [(2a+3b)(2a-3b)]=[(2a)^2-(3b)^2]\ [(2a)^2-(3b)^2]=(4a^2-9b^2)^2$

$$\frac{1}{(2a-3b)^2}+\frac{1}{(2a+3b)^2}-\frac{1}{4a^2-9b^2}=\frac{(2a+3b)^2}{(2a-3b)^2(2a+3b)^2}+$$

$$+\frac{(2a-3b)^2}{(2a+3b)^2(2a-3b)^2}-\frac{4a^2-9b^2}{(4a^2-9b^2)^2}=\frac{(2a+3b)^2+(2a-3b)^2-(4a^2-9b^2)}{(4a^2-9b^2)^2}=$$

$$=\frac{4a^2+12ab+9b^2+4a^2-12ab+9b^2-4a^2+9b^2}{(4a^2-9b^2)^2}=\frac{4a^2+27b^2}{(4a^2-9b^2)^2}$$

176 $P=a+4$, $Q=a^2-4a+16$, $R=a^3+64=a^3+4^3=(a+4)(a^2-a\cdot 4+4^2)=(a+4)(a^2-4a+16)=P\cdot Q$ общ знам $=R=a^3+64$,

$$\frac{2}{a+4}-\frac{a-3}{a^2-4a+16}-\frac{a^2-9a}{a^3+64}=\frac{2(a^2-4a+16)}{a^3+64}-\frac{(a-3)\ (a+4)}{a^3+64}-\frac{a^2-9a}{a^3+64}=$$

$$=\frac{2(a^2-4a+16)-(a-3)(a+4)-(a^2-9a)}{a^3+64}=$$

$$=\frac{2a^2-8a+32-a^2-a+12-a^2+9a}{a^3+64}=$$

$$=\frac{44}{a^3+64}$$

176' $P=a-3$, $Q=a^2+3a+9$, $R=a^3-27=a^3-3^3=(a-3)(a^2+a\cdot 3+3^2)=(a-3)(a^2+3a+9)=P\cdot Q$, общ знам $=R=a^3-27$,

$$\frac{1}{a-3}+\frac{a-3}{a^2+3a+9}+\frac{3a-2a^2}{a^3-27}=\frac{a^2+3a+9}{a^3-27}+\frac{(a-3)\ (a-3)}{a^3-27}+$$

$$+\frac{3a-2a^2}{a^3-27}=\frac{a^2+3a+9+(a-3)^2+(3a-2a^2)}{a^3-27}=$$

$$=\frac{a^2+3a+9+a^2-6a+9+3a-2a^2}{a^3-27}=\frac{18}{a^3-27}$$

177 $P=2a-3b$, $Q=4a^2+6ab+9b^2$, $R=8a^3-27b^3=(2a)^3-(3b)^3=(2a-3b)[(2a)^2+2a\cdot 3b+(3b)^2]=(2a-3b)(4a^2+6ab+9b^2)=P\cdot Q$ общ знам $=R=8a^3-27b^3$,

$$\frac{1}{2a-3b}-\frac{2a+3b}{4a^2+6ab+9b^2}-\frac{6ab}{8a^3-27b^3}=$$

$$=\frac{4a^2+6ab+9b^2}{8a^3-27b^3}-\frac{(2a+3b)\ (2a-3b)}{8a^3-27b^3}-\frac{6ab}{8a^3-27b^3}=$$

$$=\frac{4a^2+6ab+9b^2-[(2a)^2-(3b)^2]-6ab}{8a^3-27b^3}=\frac{4a^2+6ab+9b^2-4a^2+9b^2-6ab}{8a^3-27b^3}=$$

$=\frac{18b^2}{8a^3-27b^3}$ 177′ $P=16a^2-20ab+25b^2$ $Q=4a+5b$, $R=64a^3+125b^3=$
$=(4a)^3+(5b)^3=(4a+5b)[(4a)^2-4a\cdot5b+(5b)^2]=(4a+5b)(16a^2-20ab+$
$+25b^2)=Q\cdot P$, общ. знам. $=R=64a^3+125b^3$. $\frac{4a+5b}{16a^2-20ab+25b^2}-$
$-\frac{1}{4a+5b}-\frac{60ab-7a^2}{64a^3+125b^3}=\frac{(4a+5b)\cdot(4a+5b)}{64a^3+125b^3}-\frac{16a^2-20ab+25b^2}{64a^3+125b^3}-$
$-\frac{60ab-7a^2}{64a^3+125b^3}=\frac{(4a+5b)^2-(16a^2-20ab+25b^2)-(60ab-7a^2)}{64a^3+125b^3}=$
$=\frac{16a^2+40ab+25b^2-16a^2+20ab-25b^2-60ab+7a^2}{64a^3+125b^3}=\frac{7a^2}{64a^3+125b^3}$

178. $P=x^2+xy+y^2$, $Q=x^2-xy+y^2$, $R=x^4+x^2y^2+y^4=$ (отд. IV № 224)$=$
$=(x^4+2x^2y^2+y^4)-x^2y^2=(x^2+y^2)^2-(xy)^2=(x^2+y^2+xy)(x^2+y^2-xy)=$
$=P\cdot Q$. общ. знам. $=R=PQ=x^4+x^2y^2+y^4$. $\frac{x+y}{x^2+xy+y^2}+\frac{x-y}{x^2-xy+y^2}+$
$+\frac{2}{x^4+x^2y^2+y^4}=\frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{x^4+x^2y^2+y^4}+\frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{x^4+x^2y^2+y^4}+$
$+\frac{2}{x^4+x^2y^2+y^4}=\frac{(x^3+y^3)+(x^3-y^3)+2}{x^4+x^2y^2+y^4}=\frac{x^3+y^3+x^3-y^3+2}{x^4+x^2y^2+y^4}=$
$=\frac{2x^3+2}{x^4+x^2y^2+y^4}=\frac{2(x^3+1)}{x^4+x^2y^2+y^4}=\frac{2(x+1)(x^2-x+1)}{x^4+x^2y^2+y^4}$ 178′. Задача вполнѣ тождественная съ № 178, съ измѣненіемъ лишь буквы y на z и знаковъ передъ второй*) и третьей дробями. $P=x^2+zx+z^2$, $Q=x^2-xz+z^2$, $R=x^4+z^4+x^2z^2=$(срв. отд. IV № 224)$=(x^4+2x^2z^2+z^4)-x^2z^2=$
$=(x^2+z^2)^2-(xz)^2=(x^2+z^2+xz)(x^2+z^2-xz)=P\cdot Q$. общ. знам. $=R=x^4+$
$+x^2z^2+z^4$. $\frac{x+z}{x^2+zx+z^2}+\frac{z-x}{x^2-xz+z^2}-\frac{2}{x^4+z^4+x^2z^2}=\frac{(x+z)(x^2-xz+z^2)}{x^4+x^2z^2+z^4}+$
$+\frac{(z-x)(z^2+zx+x^2)}{x^4+x^2z^2+z^4}-\frac{2}{x^4+z^4+x^2z^2}=\frac{(x^3+z^3)+(z^3-x^3)-2}{x^4+x^2z^2+z^4}=$
$=\frac{x^3+z^3+z^3-x^3-2}{x^4+x^2z^2+z^4}=\frac{2z^3-2}{x^4+x^2z^2+z^4}=\frac{2(z^3-1)}{x^4+x^2z^2+z^4}=$
$=\frac{2(z-1)(z^2+z+1)}{x^4+x^2z^2+z^4}$

179. $\frac{2}{(x-a)(b-a)}-\frac{2}{(b-x)(a-b)}+\frac{3}{(x-a)(x-b)}=\frac{2}{(x-a)(b-a)}-$

*) Дѣйствительно, вторая дробь въ № 178: $-\frac{z-x}{x^2-xz+z^2}=\frac{-(x-z)}{x^2-xz+z^2}=$
$=-\frac{x-z}{x^2-xz+z^2}$

$$-\frac{2}{-(x-b)\cdot-(b-a)}+\frac{3}{(x-a)(x-b)}=\frac{2}{(x-a)(b-a)}-\frac{2}{(x-b)(b-a)}+$$

$$+\frac{3}{(x-a)(x-b)}=\frac{2(x-b)}{(x-a)(x-b)(b-a)}-\frac{2(x-a)}{(x-a)(x-b)(b-a)}+$$

$$+\frac{3(b-a)}{(x-a)(x-b)(b-a)}=\frac{2(x-b)-2(x-a)+3(b-a)}{(x-a)(x-b)(b-a)}=$$

$$=\frac{2x-2b-2x+2a+3b-3a}{(x-a)(x-b)(b-a)}=\frac{b-a}{(x-a)(x-b)(b-a)}=\frac{1}{(x-a)(x-b)}$$

179' $$\frac{3}{(x-c)(a-c)}-\frac{3}{(a-x)(c-a)}+\frac{4}{(c-x)(a-x)}=\frac{3}{(x-c)(a-c)}-$$

$$-\frac{3}{-(x-a)\cdot-(a-c)}+\frac{4}{-(x-c)\cdot-(x-a)}=\frac{3}{(x-c)(a-c)}-$$

$$-\frac{3}{(x-a)(a-c)}+\frac{4}{(x-c)(x-a)}=\frac{3(x-a)}{(x-c)(a-c)(x-a)}-$$

$$-\frac{3(x-c)}{(x-a)(a-c)(x-c)}+\frac{4(a-c)}{(x-c)(x-a)(a-c)}=$$

$$=\frac{3(x-a)-3(x-c)+4(a-c)}{(x-a)(x-c)(a-c)}=\frac{3x-3a-3x+3c+4a-4c}{(x-a)(x-c)(a-c)}=$$

$$=\frac{a-c}{(x-a)(x-c)(a-c)}=\frac{1}{(x-a)(x-c)}$$

180 $P=3a-3x=3(a-x)$, $Q=2a-2c=2(a-c)$, $R=a^2-ac+cx-ax=$ $=(a^2-ac)-(ax-cx)=a(a-c)-x(a-c)=(a-c)(a-x)$. общ. знам. $=P\cdot Q=$ $=3(a-x)\cdot 2(a-c)=6R=6(a-c)(a-x)$. $\frac{a+2x}{3a-3x}-\frac{3c-a}{2a-2c}+$

$$+\frac{a^2-cx}{a^2-ac+cx-ax}=\frac{(a+2x)\cdot 2(a-c)}{3(a-x)\cdot 2(a-c)}-\frac{(3c-a)\cdot 3(a-x)}{2(a-c)\cdot 3(a-x)}+$$

$$+\frac{(a^2-cx)\cdot 6}{(a-c)\cdot(a-x)\cdot 6}=$$

$$=\frac{2(a^2+2ax-ac-2cx)-3(3ac-a^2-3cx+ax)+6(a^2-cx)}{6(a-c)(a-x)}=$$

$$=\frac{2a^2+4ax-2ac-4cx-9ac+3a^2+9cx-3ax+6a^2-6cx}{6(a-c)(a-x)}=$$

$$=\frac{11a^2+ax-11ac-cx}{6(a-c)(a-x)}=\frac{(11a^2-11ac)+(ax-cx)}{6(a-c)(a-x)}=\frac{11a(a-c)+x(a-c)}{6(a-c)(a-x)}=$$

$$=\frac{(a-c)(11a+x)}{6(a-c)(a-x)}=\frac{11a+x}{6(a-x)}$$

180' $P=6c+3x=3(2c+x)$, $Q=4c+2b=$ $=2(2c+b)$, $R=4c^2+bx+2bc+2cx=(4c^2+2bc)+(2cx+bx)=2c(2c+b)+$ $+x(2c+b)=(2c+b)(2c+x)$, общ. знам. $=P\cdot Q=3(2c+x)\cdot 2(2c+b)=6R=$

$$=6(2c+b)(2c+x)\quad \frac{2c-2x}{6c+3x}-\frac{3b+2c}{4c+2b}+\frac{bx-4c^2}{4c^2+bx+2bc+2cx}=$$

$$=\frac{2(c-x)\,2(2c+b)}{3(2c+x)\,2(2c+b)}-\frac{(3b+2c)\,3(2c+x)}{2(2c+b)\,3(2c+x)}+\frac{(bx-4c^2)\,6}{(2c+b)(2c+x)\,6}=$$

$$=\frac{4(2c^2-2cx+bc-bx)-3(6bc+4c^2+3bx+2cx)+(6bx-24c^2)}{6(2c+b)(2c+x)}=$$

$$=\frac{8c^2-8cx+4bc-4bx-18bc-12c^2-9bx-6cx+6bx-24c^2}{6(2c+b)(2c+x)}=$$

$$=\frac{-28c^2-14cx-14bc-7bx}{6(2c+b)(2c+x)}=\frac{-7(4c^2+2cx+2bc+bx)}{6(2c+b)(2c+x)}=\frac{-7R}{6R}=$$

$$=\frac{-7}{6}=-1^1/_6$$

Такой результатъ получится, если передъ 3-ей (послѣдней) дробью будетъ знакъ «+»; если же передъ нею будетъ знакъ «—», то получ

$$\frac{8c^2-8cx+4bc-4bx-18bc-12c^2-9bx-6cx-6bx+24c^2}{6(2c+b)(2c+x)}=$$

$$=\frac{20c^2-14cx-14bc-19bx}{6(2c+b)(2c+x)}$$

181. $P=a^2-7a+12=a^2-3a-4a+12=a(a-3)-4(a-3)=(a-3)(a-4)$, $Q=a^2-4a+3=a^2-a-3a+3=a(a-1)-3(a-1)=(a-1)(a-3)$, $R=(a^2-5a+4)(a-3)=(a^2-a-4a+4)(a-3)=[a(a-1)-4(a-1)](a-3)=(a-1)(a-4)(a-3)$, общ. знам. $=R=(a-1)(a-3)(a-4)$. $\frac{1}{a^2-7a+12}+$

$$+\frac{2a-1}{a^2-4a+3}-\frac{2a-5}{(a^2-5a+4)(a-3)}=\frac{a-1}{(a-3)(a-4)(a-1)}+$$

$$+\frac{(2a-1)(a-4)}{(a-1)(a-3)(a-4)}-\frac{2a-5}{(a-1)(a-4)(a-3)}=\frac{a-1+(2a-1)(a-4)-(2a-5)}{(a-1)(a-3)(a-4)}=$$

$$=\frac{a-1+2a^2-a-8a+4-2a+5}{(a-1)(a-3)(a-4)}=\frac{2a^2-10a+8}{(a-1)(a-3)(a-4)}=$$

$$=\frac{2(a^2-5a+4)}{(a-1)(a-3)(a-4)}=\frac{2(a^2-5a+4)}{(a^2-5a+4)(a-3)}=\frac{2}{a-3}$$

181′. $P=a^2+3a+2=a^2+a+2a+2=a(a+1)+2(a+1)=(a+1)(a+2)$, $Q=a^2+4a+3=a^2+a+3a+3=a(a+1)+3(a+1)=(a+1)(a+3)$, $R=a^2+5a+6=a^2+2a+3a+6=a(a+2)+3(a+2)=(a+2)(a+3)$, общ. знам. $=(a+1)(a+2)(a+3)$.

$$\frac{1}{a^2+3a+2}+\frac{2a}{a^2+4a+3}+\frac{1}{a^2+5a+6}=\frac{a+3}{(a+1)(a+2)(a+3)}+$$

$$+\frac{2a(a+2)}{(a+1)(a+3)(a+2)}+\frac{a+1}{(a+2)(a+3)(a+1)}=\frac{a+3+2a(a+2)+a+1}{(a+1)(a+2)(a+3)}=$$

$$=\frac{a+3+2a^2+4a+a+1}{(a+1)(a+2)(a+3)}=\frac{2a^2+6a+4}{(a+1)(a+2)(a+3)}=\frac{2(a^2+3a+2)}{(a+1)(a+2)(a+3)}=$$

$$=\frac{2(a^2+3a+2)}{(a^2+3a+2)(a+3)}=\frac{2}{a+3}$$

182 $P=a^2-a-12=a^2+3a-4a-12=a(a+3)-4(a+3)=(a+3)(a-4)$, $Q=a^2+4a+3=a^2+a+3a+3=a(a+1)+3(a+1)=(a+1)(a+3)$ $R=a^2-3a-4=a^2+a-4a-4=a(a+1)-4(a+1)=(a+1)(a-4)$, общ знам $=(a+1)(a+3)(a-4)$ $\frac{a+1}{a^2-a-12}+\frac{a+4}{a^2+4a+3}-\frac{2(a-3)}{a^2-3a-4}=$

$$=\frac{(a+1)^2}{(a+3)(a-4)(a+1)}+\frac{(a+4)(a-4)}{(a+1)(a+3)(a-4)}-\frac{2(a-3)(a+3)}{(a+1)(a-4)(a+3)}=$$

$$=\frac{(a+1)^2+(a^2-4^2)-2(a^2-3^2)}{(a+1)(a+3)(a-4)}=\frac{a^2+2a+1+a^2-16-2a^2+18}{(a+1)(a+3)(a-4)}=$$

$$=\frac{2a+3}{(a+1)(a+3)(a-4)}$$

182' $P=a^2+4a-5=a^2-a+5a-5=a(a-1)+5(a-1)=(a-1)(a+5)$ $Q=a^2-7a+6=a^2-a-6a+6=a(a-1)-6(a-1)=(a-1)(a-6)$ $R=a^2-a-30=a^2+5a-6a-30=a(a+5)-6(a+5)=(a+5)(a-6)$, общ знам $=(a-1)(a+5)(a-6)$, $\frac{a+6}{a^2+4a-5}+\frac{a+5}{a^2-7a+6}-$

$$-\frac{2(a+1)}{a^2-a-30}=\frac{(a+6)(a-6)}{(a-1)(a+5)(a-6)}+\frac{(a+5)^2}{(a-1)(a-6)(a+5)}-$$

$$-\frac{2(a+1)(a-1)}{(a+5)(a-6)(a-1)}=\frac{(a^2-6^2)+(a+5)^2-2(a^2-1)}{(a-1)(a+5)(a-6)}=$$

$$=\frac{a^2-36+a^2+10a+25-2a^2+2}{(a-1)(a+5)(a-6)}=\frac{10a-9}{(a-1)(a+5)(a-6)}$$

183 $P=a^2-b^2+2bc-c^2=a^2-(b^2-2bc+c^2)=a^2-(b-c)^2=[a+(b-c)]$ $[a-(b-c)]=(a+b-c)(a-b+c)$ а потому $\frac{(a+b)^2-c^2}{a^2-b^2+2bc-c^2}+\frac{a-b-c}{a+b-c}-$

$$-\frac{a+b+c}{a-b+c}=\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{(a+b-c)(a-b+c)}+\frac{a-b-c}{a+b-c}-\frac{a+b+c}{a-b+c}=$$

$$=\frac{a+b+c}{a-b+c}+\frac{a-b-c}{a+b-c}-\frac{a+b+c}{a-b+c}=\frac{a-b-c}{a+b-c}$$

ибо первая и третья дроби, какъ равныя по абсолютной величинѣ, но съ противоположными знаками, взаимно уничтожаются **183'** $R=a^2-2ab+b^2-c^2=$ $=(a^2-2ab+b^2)-c^2=(a-b)^2-c^2=(a-b+c)(a-b-c)$ а потому $\frac{a+b+c}{a-b-c}+$

$$+\frac{a+b-c}{a-b+c}-\frac{(a-c)^2-b^2}{a^2-2ab+b^2-c^2}=\frac{a+b+c}{a-b-c}+\frac{a+b-c}{a-b+c}-$$

$$-\frac{(a-c+b)(a-c-b)}{(a-b+c)(a-b-c)}=\frac{a+b+c}{a-b-c}+\frac{a+b-c}{a-b+c}-\frac{a-c+b}{a-b+c}=\frac{a+b+c}{a-b-c}+$$

$$+\frac{a+b-c}{a-b+c}-\frac{a+b-c}{a-b+c}=\frac{a+b+c}{a-b-c}$$

184 Данныя дроби, каждая въ отдѣльности допускаютъ сокращенie а потому предварительно сократимъ ихъ

$$\frac{x^2-(y-z)^2}{(x+z)^2-y^2}+\frac{y^2-(x-z)^2}{(x+y)^2-z^2}+\frac{z^2-(x-y)^2}{(y+z)^2-x^2}=\frac{[x+(y-z)][x-(y-z)]}{(x+z+y)(x+z-y)}+$$

$$+\frac{[y+(x-z)][y-(x-z)]}{(x+y+z)(x+y-z)}+\frac{[z+(x-y)][z-(x-y)]}{(y+z+x)(y+z-x)}=\frac{(x+y-z)(x-y+z)}{(x+y+z)(x-y+z)}+$$

$$+\frac{(x+y-z)(z+y-x)}{(x+y+z)(x+y-z)}+\frac{(x-y+z)(z+y-x)}{(x+y+z)(z+y-x)}=\frac{x+y-z}{x+y+z}+$$

$$+\frac{z+y-x}{x+y+z}+\frac{x-y+z}{x+y+z}=\frac{x+y-z+z+y-x+x-y+z}{x+y+z}=\frac{x+y+z}{x+y+z}=$$

$=1$ **184'** Предварительно данныя дроби слѣдуетъ сократить

$$\frac{x^2-(y+z)^2}{(x-y)^2-z^2}+\frac{(x-z)^2-y^2}{x^2-(y-z)^2}-\frac{(x+y)^2-z^2}{(x+z)^2-y^2}=\frac{[x+(y+z)][x-(y+z)]}{(x-y+z)(x-y-z)}+$$

$$+\frac{(x-z+y)(x-z-y)}{[x+(y-z)][x-(y-z)]}-\frac{(x+y+z)(x+y-z)}{(x+z+y)(x+z-y)}=\frac{(x+y+z)(x-y-z)}{(x-y+z)(x-y-z)}+$$

$$+\frac{(x+y-z)(x-y-z)}{(x+y-z)(x-y+z)}-\frac{(x+y+z)(x+y-z)}{(x+y+z)(x-y+z)}=\frac{x+y+z}{x-y+z}+\frac{x-y-z}{x-y+z}-$$

$$-\frac{x+y-z}{x-y+z}=\frac{x+y+z+x-y-z-x-y+z}{x-y+z}=\frac{x-y+z}{x-y+z}=1$$

185 $$\frac{1}{(m-n)(m-p)}+\frac{1}{(n-m)(n-p)}+\frac{1}{(p-m)(p-n)}=\frac{1}{(m-n)(m-p)}+$$

$$+\frac{1}{(m-p)(n-p)}+\frac{1}{-(m-p)\cdot-(n-p)}=\frac{1}{(m-n)(m-p)}-$$

$$-\frac{1}{(m-n)(n-p)}+\frac{1}{(m-p)(n-p)}=\frac{n-p}{(m-n)(m-p)(n-p)}-$$

$$-\frac{m-p}{(m-n)(n-p)(m-p)}+\frac{m-n}{(m-p)(n-p)(m-n)}=\frac{(n-p)-(m-p)+(m-n)}{(m-n)(m-p)(n-p)}=$$

$$=\frac{n-p-m+p+m-n}{(m-n)(m-p)(n-p)}=\frac{0}{(m-n)(m-p)(n-p)}=(\text{№ } 153)=0$$ **185'**

$$\frac{m}{(m-n)(m-p)}+\frac{n}{(n-m)(n-p)}+\frac{p}{(p-m)(p-n)}=\frac{m}{(m-n)(m-p)}+$$

$$+\frac{n}{-(m-n)(n-p)}+\frac{p}{-(m-p)\cdot-(n-p)}=\frac{m}{(m-n)(m-p)}-$$

$$-\frac{n}{(m-n)(n-p)}+\frac{p}{(m-p)(n-p)}=\frac{m(n-p)}{(m-n)(m-p)(n-p)}-$$

$$-\frac{n(m-p)}{(m-n)(n-p)(m-p)}+\frac{p(m-n)}{(m-p)(n-p)(m-n)}=\frac{m(n-p)-n(m-p)+p(m-n)}{(m-n)(m-p)(n-p)}=$$

$$=\frac{mn-mp-mn+np+mp-np}{(m-n)(m-p)(n-p)}=\frac{0}{(m-n)(m-p)(n-p)}=0$$

186 $P=a^2-ab-ac+bc=a(a-b)-c(a-b)=(a-b)(a-c)$, $Q=b^2-ab+ac-bc=(ac-bc)-(ab-b^2)=c(a-b)-b(a-b)=(a-b)(c-b)$, $R=(c-a)(c-b)=-(a-c)(c-b)$ при чемъ этотъ «—» слѣдуетъ отнести ко всей дроби (третьей) общ знам $=(a-b)(a-c)(c-b)$ $\frac{a^2}{a^2-ab-ac+bc}+$

$$+\frac{b^2}{b^2-ab+ac-bc}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}=\frac{a^2(c-b)}{(a-b)(a-c)(c-b)}+$$

$$+\frac{b^2(a-c)}{(a-b)(c-b)(a-c)}-\frac{c^2(a-b)}{(a-c)(c-b)(a-b)}=\frac{a^2(c-b)+b^2(a-c)-c^2(a-b)}{(a-b)(a-c)(c-b)}=$$

$$=\frac{a^2c-a^2b+ab^2-b^2c-ac^2+bc^2}{(a-b)(a-c)(c-b)}=\frac{(a^2c-a^2b+ab^2-ac^2)+(bc^2-b^2c)}{(a-b)(a-c)(c-b)}=$$

$$=\frac{a(ac-ab+b^2-c^2)+bc(c-b)}{(a-b)(a-c)(c-b)}=\frac{a[(ac-ab)-(c^2-b^2)]+bc(c-b)}{(a-b)(a-c)(c-b)}=$$

$$=\frac{a[a(c-b)-(c+b)(c-b)]+bc(c-b)}{(a-b)(a-c)(c-b)}=\frac{a(c-b)[a-(c+b)]+bc(c-b)}{(a-b)(a-c)(c-b)}=$$

$$=\frac{(c-b)[a(a-c-b)+bc]}{(a-b)(a-c)(c-b)}=\frac{a(a-b-c)+bc}{(a-b)(a-c)}=\frac{a^2-ab-ac+bc}{(a-b)(a-c)}=$$

$$=\frac{a(a-b)-c(a-b)}{(a-b)(a-c)}=\frac{(a-b)(a-c)}{(a-b)(a-c)}=1$$

186′ $P=(b-c)(a-c)$ $Q=ac-a^2+ab-bc=(ab-bc)-(a^2-ac)=b(a-c)-a(a-c)=(a-c)(b-a)=-(a-c)(a-b)$ при чемъ этотъ «—» слѣдуетъ отнести ко всей дроби (второй) вслѣдствіе чего она сдѣлается положительной $R=ab+bc-b^2-ac=(ab-b^2)-(ac-bc)=b(a-b)-c(a-b)=(a-b)(b-c)$, общ знам $=$

$$=(a-b)(b-c)(a-c)\quad\frac{ab(a-b)}{(b-c)(a-c)(a-b)}+\frac{bc(b-c)}{(a-c)(a-b)(b-c)}-$$

$$-\frac{ac(a-c)}{(a-b)(b-c)(a-c)}=\frac{ab(a-b)+bc(b-c)-ac(a-c)}{(a-b)(b-c)(a-c)}=\text{(срв отд IV №235)}=$$

$$=\frac{a^2b-ab^2+b^2c-bc^2-a^2c+ac^2}{(a-b)(b-c)(a-c)}=\frac{(a^2b-ab^2-a^2c+ac^2)+(b^2c-bc^2)}{(a-b)(b-c)(a-c)}=$$

$$=\frac{a(ab-b^2-ac+c^2)+bc(b-c)}{(a-b)(b-c)(a-c)}=\frac{a[(ab-ac)-(b^2-c^2)]+bc(b-c)}{(a-b)(b-c)(a-c)}=$$

$$=\frac{a[a(b-c)-(b+c)(b-c)]+bc(b-c)}{(a-b)(b-c)(a-c)}=\frac{a(b-c)[a-(b+c)]+bc(b-c)}{(a-b)(b-c)(a-c)}=$$

$$=\frac{a(b-c)(a-b-c)+bc(b-c)}{(a-b)(b-c)(a-c)}=\frac{(b-c)[a(a-b-c)+bc]}{(a-b)(b-c)(a-c)}=$$

$$=\frac{a(a-b-c)+bc}{(a-b)(a-c)}=\frac{a^2-ab-ac+bc}{(a-b)(a-c)}=\frac{a(a-b)-c(a-b)}{(a-b)(a-c)}=$$

$$=\frac{(a-b)(a-c)}{(a-b)(a-c)}=1$$

Замѣчаніе къ рѣш. №№ 186 и 186'. Послѣ сложенія дробей въ числителяхъ суммъ получавшихся въ этихъ задачахъ оказывались выраженія, интересныя съ точки зрѣнія разложенія ихъ на простыхъ множителей. Въ текстѣ для этой цѣли предложенъ наглядный способъ разложенія, но съ однимъ лишнимъ (вспомогательнымъ) введеніемъ скобокъ, здѣсь же мы приведемъ другой непосредственный способъ, а именно 1°—къ № 186. Выраженіе числителя суммы $a^2(c-b)+b^2(a-c)-c^2(a-b)=a^2c-a^2b+ab^2-b^2c-ac^2+bc^2=$ $=(a^2c-a^2b)-(ac^2-ab^2)+(bc^2-b^2c)=a^2(c-b)-a(c^2-b^2)+bc(c-b)=a^2(c-b)-a(c+b)(c-b)+$ $+bc(c-b)=(c-b)[a^2-a(c+b)+bc]$ и т. д., самое главное—выдѣленіе перваго множителя—исполнено. 2°—къ № 186' $ab(a-b)+bc(b-c)-ac(a-c)=a^2b-ab^2+b^2c-bc^2-a^2c+ac^2=$ $=(a^2b-a^2c)-(ab^2-ac^2)+(b^2c-bc^2)=a^2(b-c)-a(b^2-c^2)+bc(b-c)=a^2(b-c)-a(b+c)(b-c)+$ $+bc(b-c)=(b-c)[a^2-a(b+c)+bc]$ и т. д.

187. $P=(n-p)(p-m)$, $Q=mp-m^2+mn-np=m(p-m)-n(p-m)=(p-m)(m-n)$, $R=mn+np-n^2-mp=n(m-n)-p(m-n)=(m-n)(n-p)$

общ. знам. $=(m-n)(n-p)(p-m)$, $\frac{m+n}{(n-p)(p-m)}+\frac{n+p}{mp-m^2+mn-np}+$

$$+\frac{p+m}{mn+np-n^2-mp}=\frac{(m+n)(m-n)}{(n-p)(p-m)(m-n)}+\frac{(n+p)(n-p)}{(p-m)(m-n)(n-p)}+$$

$$+\frac{(p+m)(p-m)}{(m-n)(n-p)(p-m)}=\frac{(m+n)(m-n)+(n+p)(n-p)+(p+m)(p-m)}{(m-n)(n-p)(p-m)}=$$

$$=\frac{m^2-n^2+n^2-p^2+p^2-m^2}{(m-n)(n-p)(p-m)}=\frac{0}{(m-n)(n-p)(p-m)}=(№\ 133)=0$$

187'. $P=(m-n)(m-p)$, $Q=n^2+np-mn-mp=n(n+p)-m(n+p)=(n+p)(n-m)$, $R=np-mn-mp+p^2=(np+p^2)-(mn+mp)=p(n+p)-m(n+p)=$

$=(n+p)(p-m)$ а потому данныя дроби будутъ $\frac{m^2+np}{(m-n)(m-p)}+$

$$+\frac{n^2+mp}{n^2+np-mn-mp}+\frac{p^2+mn}{np-mn-mp+p^2}=\frac{m^2+np}{(m-n)(m-p)}+$$

$$+\frac{n^2+mp}{(n+p)(n-m)}+\frac{p^2+mn}{(n+p)(p-m)}=\frac{m^2+np}{-(n-m)\cdot-(p-m)}+$$

$$+\frac{n^2+mp}{(n+p)(n-m)}+\frac{p^2+mn}{(n+p)(p-m)}=\frac{m^2+np}{(n-m)(p-m)}+$$

$$+\frac{n^2+mp}{(n+p)(n-m)}+\frac{p^2+mn}{(n+p)(p-m)}\text{*)}=\frac{(m^2+np)(n+p)}{(n-m)(p-m)(n+p)}+$$

$$+\frac{(n^2+mp)(p-m)}{(n+p)(n-m)(p-m)}+\frac{(p^2+mn)(n-m)}{(n+p)(p-m)(n-m)}=$$

$$=\frac{(m^2+np)(n+p)+(n^2+mp)(p-m)+(p^2+mn)(n-m)}{(n-m)(p-m)(n+p)}=$$

*) Слѣд. общ. знам. $=(n-m)(p-m)(n+p)$

$$=\frac{m^2n+n^2p+m^2p+np^2+n^2p+mp^2-mn^2-m^2p+p^2n+mn^2-mp^2-m^2n}{(n-m)(p-m)(n+p)}=$$

$$=\frac{2n^2p+2np^2}{(n-m)(p-m)(n+p)}=\frac{2np(n+p)}{(n-m)(p-m)(n+p)}=\frac{2np}{(n-m)(p-m)}$$

188 $$\frac{1}{a(a-b)(a-c)}+\frac{1}{b(b-a)(b-c)}+\frac{1}{c(c-a)(c-b)}=$$

$$=\frac{1}{a(a-b)(a-c)}+\frac{1}{b\cdot-(a-b)(b-c)}+\frac{1}{c\cdot-(a-c)\cdot-(b-c)}=$$

$$=\frac{1}{a(a-b)(a-c)}-\frac{1}{b(a-b)(b-c)}+\frac{1}{c(a-c)(b-c)}$$ *) =

$$=\frac{bc(b-c)}{a(a-b)(a-c)\;bc(b-c)}-\frac{ac(a-c)}{b(a-b)(b-c)\;ac(a-c)}+\frac{ab(a-b)}{c(a-c)(b-c)\;ab(a-b)}=$$

$$=\frac{bc(b-c)-ac(a-c)+ab(a-b)}{abc(a-b)(a-c)(b-c)}$$ =(№ 186 и замѣч. къ нему)=

$$=\frac{b^2c-bc^2-a^2c+ac^2+a^2b-ab^2}{abc(a-b)(a-c)(b-c)}=\frac{bc(b-c)+(a^2b-a^2c)-(ab^2-ac^2)}{abc(a-b)(a-c)(b-c)}=$$

$$=\frac{(b-c)[bc+a^2-a(b+c)]}{abc(a-b)(a-c)(b-c)}=\frac{bc+a^2-ab-ac}{abc(a-b)(a-c)}=\frac{a(a-b)-c(a-b)}{abc(a-b)(a-c)}=$$

$$=\frac{bc(b-c)+a^2(b-c)-a(b^2-c^2)}{abc(a-b)(a-c)(b-c)}=\frac{bc(b-c)+a^2(b-c)-a(b+c)(b-c)}{abc(a-b)(a-c)(b-c)}=$$

$$=\frac{(a-b)(a-c)}{abc(a-b)(a-c)}=\frac{1}{abc}$$

188′ $$\frac{bc}{a(a^2-b^2)(a^2-c^2)}+\frac{ac}{b(b^2-a^2)(b^2-c^2)}+$$

$$+\frac{ab}{c(c^2-a^2)(c^2-b^2)}=\frac{bc}{a(a^2-b^2)(a^2-c^2)}+\frac{ac}{b\cdot-(a^2-b^2)(b^2-c^2)}+$$

$$+\frac{ab}{c\cdot-(a^2-c^2)\cdot-(b^2-c^2)}=\frac{bc}{a(a^2-b^2)(a^2-c^2)}-\frac{ac}{b(a^2-b^2)(b^2-c^2)}+$$

$$+\frac{ab}{c(a^2-c^2)(b^2-c^2)}$$ **) $$=\frac{bc\;bc(b^2-c^2)}{a(a^2-b^2)(a^2-c^2)\;bc(b^2-c^2)}-$$

$$-\frac{ac\;ac(a^2-c^2)}{b(a^2-b^2)(b^2-c^2)\;ac(a^2-c^2)}+\frac{ab\;ab(a^2-b^2)}{c(a^2-c^2)(b^2-c^2)\;ab(a^2-b^2)}=$$

$$=\frac{b^2c^2(b^2-c^2)-a^2c^2(a^2-c^2)+a^2b^2(a^2-b^2)}{abc(a^2-b^2)(b^2-c^2)(a^2-c^2)}=\frac{b^4c^2-b^2c^4-a^4c^2+a^2c^4+a^4b^2-a^2b^4}{abc(a^2-b^2)(a^2-c^2)(b^2-c^2)}=$$

$$=\frac{(b^4c^2-b^2c^4)+(a^4b^2-a^4c^2)-(a^2b^4-a^2c^4)}{abc(a^2-b^2)(a^2-c^2)(b^2-c^2)}=$$

$$=\frac{b^2c^2(b^2-c^2)+a^4(b^2-c^2)-a^2(b^4-c^4)}{abc(a^2-b^2)(a^2-c^2)(b^2-c^2)}=\frac{b^2c^2(b^2-c^2)+a^4(b^2-c^2)-a^2(b^2+c^2)(b^2-c^2)}{abc(a^2-b^2)(a^2-c^2)(b^2-c^2)}=$$

$$=\frac{(b^2-c^2)[b^2c^2+a^4-a^2(b^2+c^2)]}{abc(a^2-b^2)(a^2-c^2)(b^2-c^2)}=\frac{b^2c^2+a^4-a^2(b^2+c^2)}{abc(a^2-b^2)(a^2-c^2)}=$$

*) Слѣд. общ. знаменатель $=abc(a-b)(a-c)(b-c)$

**) Слѣд. общ. знам. $=abc(a^2-b^2)(a^2-c^2)(b^2-c^2)$

$$=\frac{b^2c^2+a^4-a^2b^2-a^2c^2}{abc(a^2-b^2)(a^2-c^2)}=\frac{a^2(a^2-b^2)-c^2(a^2-b^2)}{abc(a^2-b^2)(a^2-c^2)}=\frac{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}{abc(a^2-b^2)(a^2-c^2)}=$$

$$=\frac{1}{abc}.$$

Замѣчаніе. Относительно выраженія числителя $b^2c^2(b^2-c^2)-a^2c^2(a^2-c^2)+a^2b^2(a^2-b^2)$ суммы данныхъ дробей слѣдуетъ замѣтить слѣд.: полагая въ немъ $a^2=a'$, $b^2=b'$, $c^2=c'$, послѣ соотвѣтственной подстановки приведемъ его къ виду

$$b'c'(b'-c')-a'c'(a'-c')+a'b'(a'-b'),$$

а это послѣднее выраженіе (опуская значки) есть числитель суммы дробей № 188 (также и № 186), вслѣдствіе этого полезно имѣть въ виду разложеніе числителя суммы дробей № 188: къ нему сводится и разложеніе числителя суммы данныхъ дробей.

189. $P=a^2-1=a^2-1^2=(a+1)(a-1)$, $Q=a^3-a^2+a-1=a^2(a-1)+(a-1)=(a-1)(a^2+1)$, $R=a^3+a^2+a+1=a^2(a+1)+(a+1)=(a+1)(a^2+1)$, $S=a^4-1=(a^2)^2-1^2=(a^2+1)(a^2-1)=(a^2+1)(a+1)(a-1)$ общ. знам. $=S=(a^2+1)(a+1)(a-1)=a^4-1$,

$$\frac{a}{a^2-1}+\frac{a^2+a-1}{a^3-a^2+a-1}+\frac{a^2-a-1}{a^3+a^2+a+1}-\frac{2a^3}{a^4-1}=\frac{a(a^2+1)}{(a^2-1)(a^2+1)}+\frac{(a^2+a-1)(a+1)}{(a-1)(a^2+1)(a+1)}+\frac{(a^2-a-1)(a-1)}{(a+1)(a^2+1)(a-1)}-$$

$$-\frac{2a^3}{a^4-1}=\frac{a(a^2+1)+(a^2+a-1)(a+1)+(a^2-a-1)(a-1)-2a^3}{a^4-1}=$$

$$=\frac{a^3+a+a^3+a^2-a+a^2+a-1+a^3-a^2-a-a^2+a+1-2a^3}{a^4-1}=$$

$$=\frac{a^3+a}{a^4-1}=\frac{a(a^2+1)}{(a^2+1)(a^2-1)}=\frac{a}{a^2-1}.$$

189'. $P=a^2-1=a^2-1^2=(a+1)(a-1)$, $Q=a^3-2a^2+2a-1=(a^3-1^3)-(2a^2-2a)=(a-1)(a^2+a\cdot 1+1^2)-2a(a-1)=(a-1)(a^2+a+1-2a)=(a-1)(a^2-a+1)$, $R=a^3+2a^2+2a+1=(a^3+1^3)+(2a^2+2a)=(a+1)(a^2-a\cdot 1+1^2)+2a(a+1)=(a+1)(a^2-a+1+2a)=(a+1)(a^2+a+1)$, $S=a^6-1=(a^3)^2-1^2=(a^3+1)(a^3-1)=(a+1)(a^2-a+1)(a-1)(a^2+a+1)$, общ. знамен. $=S=(a+1)(a-1)(a^2+a+1)(a^2-a+1)=a^6-1$,

$$\frac{1}{a^2-1}+\frac{a+1}{a^3-2a^2+2a-1}+\frac{a-1}{a^3+2a^2+2a+1}-$$

$$-\frac{2a^4+9a^2-a+3}{a^6-1}=\frac{(a^2+a+1)(a^2-a+1)}{(a+1)(a-1)(a^2+a+1)(a^2-a+1)}+$$

$$+\frac{(a+1)(a+1)(a^2+a+1)}{(a-1)(a^2-a+1)(a+1)(a^2+a+1)}+\frac{(a-1)(a-1)(a^2-a+1)}{(a+1)(a^2+a+1)(a-1)(a^2-a+1)}-$$

$$-\frac{2a^4+9a^2-a+3}{a^6-1}=$$

$$=\frac{[(a^2+1)+a][(a^2+1)-a]+(a+1)^2(a^2+a+1)+(a-1)^2(a^2-a+1)-(2a^4+9a^2-a+3)}{a^6-1};$$

упростимъ числитель этой дроби, раскрывъ въ немъ скобки и сдѣлавъ приведеніе подобныхъ членовъ:

$[(a^2+1)+a][(a^2+1)-a]+(a+1)^2(a^2+a+1)+(a-1)^2(a^2-a+1)-(2a^4+9a^2-a+3)=(a^2+1)^2-a^2+(a^2+2a+1)(a^2+a+1)+(a^2-2a+1)(a^2-a+1)-$

$-2a^4-9a^2+a-3=a^4+2a^2+1-a^2+a^4+2a^3+a^2+a^3+2a^2+a+a^2+2a+1+$ $+a^4-2a^3+a^2-a^3+2a^2-a+a^2-2a+1-2a^4-9a^2+a-3=a^4+a$. Так образ. дробь выражающая алг. сумму данныхъ дробей будетъ

$$\frac{a^4+a}{a^6-1}=\frac{a(a^3+1)}{a^6-1}=\frac{a(a^3+1)}{(a^3+1)(a^3-1)}=\frac{a}{a^3-1}$$

190 $\dfrac{a-b}{a+b}+\dfrac{b-c}{b+c}+\dfrac{c-a}{c+a}+\dfrac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=$

$$=\frac{(a-b)(b+c)(c+a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}+\frac{(b-c)(a+b)(c+a)}{(b+c)(a+b)(c+a)}+\frac{(c-a)(a+b)(b+c)}{(c+a)(a+b)(b+c)}+$$

$$+\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=$$

$$=\frac{(a-b)(b+c)(c+a)+(a+b)(b-c)(c+a)+(a+b)(b+c)(c-a)+(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=$$

$$=\frac{(a-b)[(b+c)(c+a)+(b-c)(c-a)]+(a+b)[(b-c)(c+a)+(b+c)(c-a)]}{(a+b)(b+c)(c+a)}=$$

$$=\frac{(a-b)[bc+c^2+ab+ac+bc-c^2-ab+ac]+(a+b)[bc-c^2+ab-ac+bc-ab+c^2-ac]}{(a+b)(b+c)(c+a)}=$$

$$=\frac{(a-b)(2bc+2ac)+(a+b)(2bc-2ac)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=\frac{2c(a-b)(a+b)+2c(a+b)(b-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=$$

$$=\frac{2c(a-b)(a+b)-2c(a+b)(a-b)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=(\text{№ 23})=\frac{0}{(a+b)(b+c)(c+a)}=0$$

190 $\dfrac{2}{a-b}+\dfrac{2}{b-c}+\dfrac{2}{c-a}+\dfrac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{(a-b)(b-c)(c-a)}=$

$$=\frac{2(b-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}+\frac{2(c-a)(a-b)}{(b-c)(c-a)(a-b)}+\frac{2(a-b)(b-c)}{(c-a)(a-b)(b-c)}+$$

$$+\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{(a-b)(b-c)(c-a)}=$$

$$=\frac{2(b-c)(c-a)+2(c-a)(a-b)+2(a-b)(b-c)+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{(a-b)(b-c)(c-a)}=$$

$$=\frac{[(a-b)^2+2(a-b)(b-c)+(b-c)^2]+(c-a)^2+2(b-c)(c-a)+2(c-a)(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=$$

$$=\frac{[(a-b)+(b-c)]^2+(c-a)^2+2(b-c)(c-a)+2(c-a)(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=$$

$$=\frac{(a-c)^2+(c-a)^2+2(b-c)(c-a)+2(c-a)(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}\ ^{*)}=$$

---

*) Т. к. $(a-c)^2=[-(c-a)]^2=+(c-a)^2$, то, слѣд. $(a-c)^2=(c-a)^2$, а потому $(a-c)^2+(c-a)^2=(c-a)^2+(c-a)^2=2(c-a)^2$. Но отсюда не слѣдуетъ заключать, что, если $(a-c)^2=(c-a)^2$, то $(a-c)^1=(c-a)^1$, какъ доказывается и въ *теоріи радикаловъ*.

$$=\frac{2(c-a)^2+2(b-c)(c-a)+2(c-a)(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=\frac{2(c-a)(c-a+b-c+a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=$$

$$=\frac{2\cdot 0}{(a-b)(b-c)}=\frac{0}{(a-b)(b-c)}=0$$

§ 5. Умноженіе дробей.

191 $\frac{a}{b}\cdot c=\frac{a\cdot c}{b}$ это равенство выражаетъ правило составленія произведенія при умноженіи дроби на цѣлое число

191′ $c\cdot\frac{b}{a}=\frac{c\cdot b}{a}$ эта формула выражаетъ правило составленія произведенія для случая умноженія цѣлаго числа на дробь

Къ случаямъ умноженія, представленнымъ №№ 191 и 191′, относятся №№ 192—200′, 211—212 и нѣск. другихъ.

192 $m\cdot\frac{x}{y}=\frac{mx}{y}$ **192′** $\frac{y}{x}\cdot p=\frac{yp}{x}$ **193** $\frac{1}{x}\cdot x=\frac{x}{x}=1$

Число $\frac{1}{x}$ по отношенію къ x наз. *обратнымъ*, вообще, *произведеніе числа на обратное относительно него $=1$ и т. д.* **193′** $z\cdot\frac{1}{z}=1$

194 $m^2\cdot\frac{n}{m^2}=\frac{m^2n}{m^2}=n$ Или $m^2\cdot\frac{n}{m^2}=m^2\cdot\frac{1}{m^2}\cdot n=1\cdot n=n$ **194′** $\frac{m}{n^2}\cdot n^2=\frac{mn^2}{n^2}=m$ Или $\frac{m}{n^2}\cdot n^2=m\cdot\frac{1}{n^2}\cdot n^2=m\cdot 1=m$

195 $\frac{4a^2}{b^2}\cdot 3b^2c^3=\frac{4a^2\cdot 3b^2c^3}{b^2}=4a^2\cdot 3c^3=12a^2c^3$ **195′** $7a^3c^2\cdot\frac{5b^2}{a^3}=$
$=\frac{7a^3c^2\cdot 5b^2}{a^3}=7c^2\cdot 5b^2=35b^2c^2$

196 $2a^2b^3\cdot\left(-\frac{5c^2d}{a^2b^3}\right)=-\frac{2a^2b^3\cdot 5c^2d}{a^2b^3}=-2\cdot 5c^2d=-10c^2d$ **196′** $\frac{7c^3}{a^5b^4}\cdot(-3a^5b^4)=$
$=-\frac{7c^3\cdot 3a^5b^4}{a^5b^4}=-7c^3\cdot 3=-21c^3$

197 $\frac{4x^2y^2}{15p^4q^9}\cdot 45p^2q^2=\frac{4x^2y^2\cdot 45p^2q^2}{15p^4q^9}=\frac{4x^2y^2\cdot 3}{p^2q^7}=\frac{12x^2y^2}{p^2q^7}$ **197′** $9x^7y^{11}\cdot\frac{4p^2m^2}{27x^2y^4}=\frac{9x^7y^{11}\cdot 4p^2m^2}{27x^2y^4}=\frac{x^5y^7\cdot 4p^2m^2}{3}={}^4/_3m^2p^2x^5y^7=1^1/_3m^2p^2x^5y^7$

198 $4m^2x^3\cdot\left(-\frac{3a^2m^3}{8x^5}\right)=-\frac{4m^2x^3\cdot 3a^2m^3}{8x^5}=-\frac{m^2\cdot 3a^2m^3}{2x^2}=-\frac{3a^2m^5}{2x^2}$

198′ $\frac{2n^3}{9a^3x^4}\ -6a^6x^3 = -\frac{2n^3\ 6a^6x^3}{9a^3x^4} = -\frac{2n^3\ 2a^3}{3x} = -\frac{4a^3n^3}{3x}$

199 $5(a+b)^6(a-b)^n\ \frac{3b}{10(a+b)^3(a-b)^{n-2}} = \frac{5(a+b)^6(a-b)^n\ 3b}{10(a+b)^3(a-b)^{n-2}} = \frac{(a+b)^3(a-b)^{n-n+2}\ 3b}{2} = {}^3/_2 b(a+b)^3(a-b)^2$ **199′** $\frac{7c}{6(a-b)^4(a+b)^{n-3}}\ 12(a-b)^8(a+b)^{n-1} = \frac{7c\ 12(a-b)^8(a+b)^{n-1}}{6(a-b)^4(a+b)^{n-3}} = \frac{7c\ 2(a-b)^4(a+b)^{n-1-n+3}}{1} = 14c(a-b)^4(a+b)^2$

200 $-2b^nc^3(x-1)^n\ \frac{3c}{b^p(x-1)^{n-2}} = -\frac{2b^nc^3(x-1)^n\ 3c}{b^p(x-1)^{n-2}} = -\frac{2b^nc^3(x-1)^{n-n+2}\ 3c}{b^p} = -\frac{6b^nc^4(x-1)^2}{b^p}$ Если $n>$ или $=p$ то въ результатѣ будетъ цѣлое число $-6b^{n-p}c^4(x-1)^2$, если же $n<p$ то результатомъ будетъ алг дробь $-\frac{6c^4(x-1)^2}{b^{p-n}}$ **200′** $-\frac{5b}{c^n(x-1)^{n-3}}\ 2b^3c^p\ -(x-1)^n = +\frac{5b\ 2b^3c^p(x-1)^n}{c^n(x-1)^{n-3}} = \frac{10b^4c^p(x-1)^{n-n+3}}{c^n}$ =(при $p>$ или $=n$)$= 10b^4c^{p-n}(x-1)^3$ = (при $p<n$)$= \frac{10b^4(x-1)^3}{c^{n-p}}$

201 $\frac{x}{y}\ \frac{z}{u} = \frac{x\ z}{y\ u}$, эта формула выражаетъ правило умноженія алгебраической дроби на алгебраическую дробь **201′** $\frac{x}{z}\ \frac{u}{y} = \frac{xu}{zy}$

202 $\frac{3a}{5b}\ -\frac{b}{a} = -\frac{3ab}{5ba} = -\frac{3}{5} = -0{,}6$ **202′** $\frac{5b}{3a}\ -\frac{a}{b} = -\frac{5ba}{3ab} = -\frac{5}{3} = -1^2/_3$

203 $\frac{2a}{3b}\ \frac{6bc}{5a^2} = \frac{2a\ 6bc}{3b\ 5a^2} = \frac{2\ 2c}{5a} = \frac{4c}{5a}$ **203′** $\frac{12a^2}{5b^2}\ \frac{10ab}{9c^2} = \frac{12a^2\ 10ab}{5b^2\ 9c^2} = \frac{4a^2\ 2a}{b\ 3c^2} = \frac{8a^3}{3bc^2}$

204 $\frac{a^3c^2d}{pqm}\ \frac{pm^3}{a^4c^3} = \frac{a^3c^2dpm^3}{pqma^4c^3} = \frac{dm^2}{acq}$ **204′** $\frac{a^2b^2}{m^2n^3}\ \frac{a^9m^7}{n^5b^{11}} = \frac{a^2b^2a^9m^7}{m^2n^3n^5b^{11}} = \frac{a^{11}m^5}{b^9n^8}$

205 $\frac{4a^nb^4}{9c^5d^3}\ -\frac{15c^2d^m}{2ab^2} = -\frac{4a^nb^4\ 15c^2d^m}{9c^5d^3\ 2ab^2} = -\frac{2a^{n-1}b^2.5d^{m-3}}{3c^3} =$

$= -\dfrac{10a^{n-1}b^2d^{m-3}}{3c^3}$, при чемъ предполагается что $m \geqq 3$ и $n \geqq 1$ **205**

$-\dfrac{6a^5b^2}{5c^n d^4} \cdot \dfrac{10cd^2}{9a^2b^m} = -\dfrac{6a^5b^2 \cdot 10cd^2}{5c^n d^4 \cdot 9a^2b^m} = -\dfrac{2a^3 \cdot 2}{3c^{n-1}d^2b^{m-2}} = -\dfrac{4a^3}{3b^{m-2}c^{n-1}d^2}$

при чемъ необходимо $m \geqq 2$, $n \geqq 1$ во избѣжаніе отрицательныхъ показателей въ отв.

206 $-\dfrac{4a^{2n-1}b^2}{c^{p-n}d^3} \cdot \dfrac{3c^{n+p}d^m}{2a^3b} = -\dfrac{4a^{2n-1}b^2 \cdot 3c^{n+p}d^m}{c^{p-n}d^3 \cdot 2a^3b} =$

$= -\dfrac{4a^{2n-1-3} \cdot 3c^{n+p-p+n}d^{m-3}}{b^3} = -\dfrac{6a^{2n-4}c^{2n}d^{m-3}}{b^3}$, при чемъ предполагается что $m \geqq 3$ и $2n-4 \geqq 0$ (т. е. $n \geqq 2$) **206′** $\dfrac{9a^2b^{n-2}}{c^3d^{m-p}}$

$\cdot \dfrac{2cd^{m+p}}{3a^5b^2} = -\dfrac{9a^2b^{n-2} \cdot 2cd^{m-p}}{c^3d^{m-p} \cdot 3a^5b^2} = -\dfrac{3b^{n-2-2} \cdot 2d^{m+p-m+p}}{c^2a^3} =$

$= -\dfrac{6b^{n-4}d^{2p}}{a^3c^2}$, при чемъ $n \geqq 4$

207 $\dfrac{x^2}{yz} \cdot \dfrac{y^2}{xz} \cdot \dfrac{z^2}{xy} = \dfrac{x^2y^2z^2}{yzxzxy} = 1$ **207′** $\dfrac{x^2y^2}{z^4} \cdot \dfrac{x^2z^2}{y^4} \cdot \dfrac{y^2z^2}{x^4} =$

$= \dfrac{x^2y^2x^2z^2y^2z^2}{x^4y^4z^4} = 1.$

208 $\dfrac{5a^2b}{3cd} \cdot \dfrac{4b^2c}{15a^2} \cdot \dfrac{9c^2d}{16b^3} = \dfrac{5a^2b \cdot 4b^2c \cdot 9c^2d}{3cd \cdot 15a^2 \cdot 16b^3} = \dfrac{c^2}{4}$ **208′** $\dfrac{2a^8d^7}{3b^8}$

$\cdot \dfrac{5a^4b^5}{4c^4d^5} \cdot \dfrac{18b^2c^3}{25a^4d} = \dfrac{2a^8d^7 \cdot 5a^4b^5 \cdot 18b^2c^3}{3b^8 \cdot 4c^4d^5 \cdot 25a^4d} = \dfrac{3a^8}{5bc}$

209 $\dfrac{a^{2n+2}}{b^{m-n}} \cdot \dfrac{b^{m+n}}{a^{2n+3}} \cdot \dfrac{a^{3n-2}}{b^{mn}} = \dfrac{a^{2n+2} \cdot b^{m+n} \cdot a^{3n-2}}{b^{m-n} \cdot a^{2n+3} \cdot b^{mn}} =$

$= \dfrac{a^{2n+2+3n-2}b^{m+n}}{a^{2n+3}b^{m-n+mn}} = \dfrac{a^{5n}b^{m+n}}{a^{2n+3}b^{m-n+mn}} = \dfrac{a^{5n-2n-3}}{b^{m-n+mn-m-n}} = \dfrac{a^{3n-3}}{b^{mn-2n}}$, при чемъ предположено что $mn \geqq 2n$, если же $mn < 2n$ то результатъ $=$

$= \dfrac{a^{5n}b^{m+n}}{a^{2n+3}b^{m-n+mn}} = a^{3n-3}b^{m+n-m+n-mn} = a^{3n-3}b^{2n-mn}$ **209′** $\dfrac{a^{m-1}}{b^{n+m}} \cdot \dfrac{b^{n-2m}}{a^{m+5}}$

$\cdot \dfrac{a^{2m-2}}{b^{mn+m}} = \dfrac{a^{m-1}b^{n-2m}a^{2m-2}}{b^{n+m}a^{m+5}b^{mn+m}} = \dfrac{a^{m-1+2m-2}b^{n-2m}}{a^{m+5}b^{n+m+mn+m}} = \dfrac{a^{3m-3}b^{n-2m}}{a^{m+5}b^{mn+2m+n}} =$

$= \dfrac{a^{3m-3-m-5}}{b^{mn+2m+n-n+2m}} = \dfrac{a^{2m-8}}{b^{mn+4m}}$ при чемъ $2m-8 \geqq 0$ т. е. $2m \geqq 8$, или $m \geqq 4$, если же $m < 4$ то $\dfrac{a^{3m-3}b^{n-2m}}{a^{m+5}b^{mn+2m+n}} = \dfrac{1}{a^{m+5-3m}b^{+3mn+2m+n-n+2m}} =$

$= \dfrac{1}{a^{8-2m}b^{mn+4m}}$

$$210\quad \frac{x^{m+n}y^{r+p}}{z^{n+p}u^{p+m}}\cdot\frac{z^{n-1}u^m}{x^{n-p}y^p}\cdot\frac{z^p}{y^n}=\frac{x^{m+n}y^{n+p}z^{n-1}u^m z^p}{z^{n+p}u^{p+m}x^{n-p}y^p y^n}=$$

$$=\frac{x^{m+n}y^{n+p}z^{n-1+p}u^m}{x^{n-p}y^{p+n}z^{n+p}u^{p+m}}=\frac{x^{m+n-n+p}}{z^{n+p-n+1-p}u^{p+m-m}}=\frac{x^{m+p}}{zu^p}\qquad 210'$$

$$\frac{x^{m-n}y^{n-p}}{z^{n-p}u^{p-m}}\cdot\frac{z^{p+n}u^m}{x^{n+p}y^p}\cdot\frac{u^m}{x^p}=\frac{x^{m-n}y^{n-p}z^{p+n}u^{m+m}}{x^{n+p+p}y^p z^{n-p}u^{p-m}}=\frac{x^{m-n}y^{n-p}z^{p+n}u^{2m}}{x^{n+2p}y^p z^{n-p}u^{p-m}}=$$

$$=\frac{z^{p+n-n+p}u^{2m-p+m}}{x^{n+2p-m+n}y^{p-n+p}}=\frac{z^{2p}u^{3m-p}}{x^{2n+2p-m}y^{2p-n}}$$ при чемъ предположено что $3m>p$, $2n+2p>m$ и $2p>n$

$$211\quad \frac{3bx^2}{8(x+y)^4c^3}\cdot 6(x+y)^2c^4x^3=\frac{3bx^2\cdot 6(x+y)^2c^4x^3}{8(x+y)^4c^3}=$$

$$=\frac{9bcx^5}{4(x+y)^2}\qquad 211'\quad \frac{5ac^3}{9(x-y)^5x^2}\cdot 15(x-y)^2c^3x^4=$$

$$=\frac{5ac^3\cdot 15(x-y)^2c^3x^4}{9(x-y)^5x^2}=\frac{25ac^6x^2}{3(x-y)^3}$$

$$212\quad 4(a-b)^5x^3y^n\cdot\frac{3(a+c)^2}{14(a-b)^3x^ny^3}=\frac{4(a-b)^5x^3y^n\cdot 3(a+c)^2}{14(a-b)^3x^ny^3}=$$

$$=\frac{6y^{n-3}(a-b)^2(a+c)^2}{7x^{n-3}},$$ при условіи $n\geqslant 3$ $\quad 212'\quad 6(a+b)^4x^ny^2\cdot$

$$\cdot\frac{2(a-c)^3}{21(a+b)^2x^2y^n}=\frac{6(a+b)^4x^ny^2\cdot 2(a-c)^3}{21(a+b)^2x^2y^n}=\frac{4x^{n-2}(a+b)^2(a-c)^3}{7y^{n-2}}$$ при чемъ $n\geqslant 2$

$$213\quad \frac{12a^{n-2}(a+x)^2c^5}{d^3}\cdot\frac{5c^2}{3a^{n-4}(a+x)^5}=\frac{12a^{n-2}(a+x)^2c^5\cdot 5c^2}{d^3\cdot 3a^{n-4}(a+x)^5}=$$

$$=\frac{20a^{n-2-n+4}c^7}{d^3(a+x)^3}=\frac{20a^2c^7}{d^3(a+x)^3}\qquad 213'\quad \frac{18a^5(a-x)^3c^{n-2}}{d^4}\cdot$$

$$\cdot\frac{5a^2}{9c^{n-4}(a-x)^5}=\frac{18a^5(a-x)^3c^{n-2}\cdot 5a^2}{9c^{n-4}(a-x)^5\cdot d^4}=\frac{10a^7c^{n-2-n+4}}{d^4(a-x)^2}=$$

$$=\frac{10a^7c^2}{d^4(a-x)^2}$$

$$214\quad \frac{4a^2b(n-2)^3}{9c^nd^3}\cdot\frac{3b^2d^3}{10a^m(n-2)^2}=\frac{4a^2b(n-2)^3\cdot 3b^2d^3}{9c^nd^3\cdot 10a^m(n-2)^2}=$$

$$=\frac{2b^3(n-2)}{15a^{m-2}c^n}\qquad 214'\quad \frac{25c^3d^2(n+3)^4}{4a^nb^3}\cdot\frac{8a^2b^3}{15d^m(n+3)^3}=$$

$$=\frac{25c^3d^2(n+3)^4\cdot 8a^2b^3}{4a^nb^3\cdot 15d^m(n+3)^3}=\frac{10c^3(n+3)}{3a^{n-2}d^{m-2}},$$ при чемъ $n\geqslant 2$ и $m\geqslant 2$

$$215\quad \frac{2}{3c^r}\cdot\frac{3c^nx^{p-1}}{10y^n}\cdot\frac{5x^{p+2}}{7y^2}=+\frac{2\cdot 3c^nx^{p-1}\cdot 5x^{p+2}}{3c^r\cdot 10y^n\cdot 7y^2}=$$

$$=\frac{c^{n-r}x^{p-1+p+2}}{7y^{n+2}}=\frac{c^{n-r}x^{2p+1}}{7y^{n+2}},$$ при условіи, что $n \geqq r$, если же $n<r$, то результатъ будетъ $\frac{x^{2p+1}}{7c^{r-n}y^{n+2}}$.

215′ $$\frac{3}{5x^r} - \frac{10c^{p-2}x^n}{9y^n} - \frac{6c^{p+1}}{7y^3} = +\frac{3\;10c^{p-2}x^n\;6c^{p+1}}{5x^r\;9y^n\;7y^3} = \frac{4c^{p-2+p+1}x^{n-r}}{7y^{n+3}} = \frac{4c^{2p-1}x^{n-r}}{7y^{n+3}},$$ предполагая что $n \geqq r$, иначе т. е. если $n<r$ результатъ будетъ $\frac{4c^{2p-1}}{7x^{r-n}y^{n+3}}$ $p \geqq 1/2$.

216 $$\frac{d^p}{16x^3y^4} - \frac{10x^5c^{n-3}}{f^{n-1}} - \frac{d^{p-2n}f^{n-4}}{5c^nx^p} = +\frac{d^p\;10x^5c^{n-3}\;d^{p-2n}f^{n-4}}{16x^3y^4\;f^{n-1}\;5c^nx^p} = \frac{d^{p+p-2n}x^5}{8x^{p+3}y^4f^{n-1-n+4}c^{n-n+3}} =$$ $$= \frac{d^{2p-2n}}{8c^3f^3x^{p+3-5}y^4} = \frac{d^{2p-2n}}{8c^3f^3x^{p-2}y^4}$$

216′ $$\frac{15c^2x^{n-3}}{d^{n-2}} - \frac{f^p}{27c^3y^3} - \frac{6f^{p-2n}d^{n-4}}{c^px^n} = +\frac{15c^2x^{n-3}\;f^p\;6f^{p-2n}d^{n-4}}{d^{n-2}\;27c^3y^3\;c^px^n} = \frac{10c^2f^{p+p-2n}}{3c^pd^{n-2-n+4}x^{n-n+3}y^3} =$$ $$= \frac{10f^{2p-2n}}{3c^{p-2}d^2x^3y^3}$$

И въ № 216 и въ 216′ предполагается, что $p \geqq 2$, кромѣ того по условію $2p \geqq 2n$, т. е. $p \geqq n$.

217 $$\frac{a+1}{b}\;\frac{4b^2}{a^2-1} = \frac{(a+1)\;4b^2}{b\;(a+1)(a-1)} = \frac{4b}{a-1}$$

217′ $$\frac{1-a}{3b^2}\;\frac{b^3}{1-a^2} = \frac{(1-a)\;b^3}{3b^2\;(1^2-a^2)} = \frac{b(1-a)}{3(1+a)\,(1-a)} = \frac{b}{3(1+a)}$$

218 $$\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\;\frac{3x}{x-y} = \frac{(x+y)(x-y)\;3x}{(x^2+y^2)(x-y)} = \frac{3x(x+y)}{x^2+y^2}$$

218′ $$\frac{x+y}{4y^2}\;\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} = \frac{(x+y)(x^2+y^2)}{4y^2(x+y)(x-y)} = \frac{x^2+y^2}{4y^2(x-y)}$$

219 $$-\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} - \frac{3a^2}{4a-4b} = +\frac{(a+b)\,(a-b)\;3a^2}{(a^2+b^2)\;4(a-b)} = \frac{3a^2(a+b)}{4(a^2+b^2)}$$

219′ $$-\frac{b^2-a^2}{a^2} - \frac{b^2+a^2}{5a+5b} = +\frac{(b+a)\,(b-a)\;(b^2+a^2)}{a^2\;5(a+b)} = \frac{(b-a)\,(b^2+a^2)}{5a^2}.$$

220 $$\frac{ab+ac}{bd-cd}\;\frac{ab-ac}{bd+cd} = \frac{a(b+c)\;a(b-c)}{d(b-c)\;d(b+c)} = \frac{a}{d}\;\frac{a}{d} = \frac{a^2}{d^2}$$

220′ $$\frac{ab-ad}{bc+cd}\;\frac{ab+ad}{bc-cd} = \frac{a(b-d)\;a(b+d)}{c(b+d)\;c(b-d)} = \frac{a}{c}\;\frac{a}{c} = \frac{a^2}{c^2}$$

221 $-\frac{(x-y)^2}{(x+y)y^3}\ \frac{y}{x(x+y)} = -\frac{(x-y)^2y}{(x+y)y^3x(x+y)} = -\frac{(x-y)^2}{xy^2(x+y)^2}$

221′ $\frac{(a+b)^2}{(a-b)b}\ \frac{b^3}{(a-b)^3} = \frac{(a+b)^2b^3}{(a-b)b(a-b)^3} = \frac{b^2(a+b)^2}{(a-b)^4}$

222 $\frac{x^3+y^3}{x-y}\ \frac{x+y}{x^3-y^3} = \frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)(x+y)}{(x-y)(x-y)(x^2+xy+y^2)} =$

$= \frac{(x+y)^2(x^2-xy+y^2)}{(x-y)^2(x^2+xy+y^2)}$ **222′** $\frac{a^3-b^3}{a+b}\ \frac{a-b}{a^3+b^3} = \frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)(a-b)}{(a+b)(a+b)(a^2-ab+b^2)} =$

$= \frac{(a-b)^2(a^2+ab+b^2)}{(a+b)^2(a^2-ab+b^2)}$.

223 $\frac{a^2+ab}{a^2-b^2}\ \frac{a^3-b^3}{ab(a+b)} = \frac{a(a+b)\ (a-b)(a^2+ab+b^2)}{(a+b)(a-b)\ ab(a+b)} = \frac{a^2+ab+b^2}{b(a+b)}$

223′ $\frac{x^2-xy}{y(x+y)}\ \frac{x^3+y^3}{x^2-y^2} = \frac{x(x-y)\ (x+y)(x^2-xy+y^2)}{y(x+y)\ (x+y)(x-y)} = \frac{x(x^2-xy+y^2)}{y(x+y)}$

224 $\frac{b^4-a^4}{a^2+2ab+b^2}\ \frac{a+b}{b^2-ab} = \frac{(b^2+a^2)(b^2-a^2)\ (a+b)}{(a+b)^2\ b(b-a)} =$

$= \frac{(b^2+a^2)(b+a)(b-a)}{(a+b)b(b-a)} = \frac{b^2+a^2}{b}$ **224′** $\frac{x^4-y^4}{x^2-2xy+y^2}\ \frac{x-y}{x^2+yx} =$

$= \frac{(x^2+y^2)(x^2-y^2)(x-y)}{(x-y)^2\ x(x+y)} = \frac{(x^2+y^2)(x+y)(x-y)}{(x-y)x(x+y)} = \frac{x^2+y^2}{x}$

225 $\frac{b(a-c)}{a^2+2ac+c^2}\ \frac{a(c+a)}{a^2-2ac+c^2} = \frac{b(a-c)\ a(c+a)}{(a+c)^2\ (a-c)^2} = \frac{ba}{(a+c)(a-c)} =$

$= \frac{cb}{a^2-c^2}$ **225′** $\frac{a(b+c)}{b^2-2bc+c^2}\ \frac{b(c-b)}{b^2+2bc+c^2} = \frac{a(b+c)\ b(c-b)}{(c^2-2cb+b^2)\ (b+c)^2} =$

$= \frac{ab(c-b)}{(c-b)^2(b+c)} = \frac{ab}{(c-b)(c+b)} = \frac{ab}{c^2-b^2}$

226 $\frac{2a(p^2-q^2)^2}{bp}\ \frac{p^3}{(p-q)(p+q)^2} = \frac{2a(p^2-q^2)^2\ p^3}{bp\ (p-q)(p+q)(p+q)} =$

$= \frac{2ap^2(p^2-q^2)^2}{b(p^2-q^2)(p+q)} = \frac{2ap^2(p^2-q^2)}{b(p+q)} = \frac{2ap^2(p+q)(p-q)}{b(p+q)} = \frac{2ap^2(p-q)}{b}$ **226′**

$\frac{3x(x^2-y^2)^2}{ay}\ \frac{a^3}{(x+y)(x-y)^2} = \frac{3x(x^2-y^2)^2\ a^3}{ay\ (x+y)(x-y)(x-y)} =$

$= \frac{3a^2x(x^2-y^2)^2}{y(x^2-y^2)(x-y)} = \frac{3a^2x(x^2-y^2)}{y(x-y)} = \frac{3a^2x(x+y)(x-y)}{y(x-y)} = \frac{3a^2x(x+y)}{y}$

Замѣчаніе къ № 226 Другой способъ сокращенія дроби $\frac{(x^2-y^2)^2}{(x+y)(x-y)^2} =$ $= \frac{[(x+y)(x-y)]^2}{(x+y)(x-y)^2} = \frac{(x+y)(x-y)\ (x+y)(x-y)}{(x+y)(x-y)^2} = x+y$.—Подобнымъ же образомъ со кращаемъ и дробь, данную въ № 226 мъ $\frac{(p^2-q^2)^2}{(p-q)(p+q)^2}=\frac{[(p+q)(p-q)]^2}{(p-q)(p+q)^2}=\frac{(p+q)^2(p-q)^2}{(p-q)(p+q)^2}=$ $=p-q$

227 $\frac{x^2+xy+y^2}{x^3+3xy(x+y)+y^3}\ \frac{x^2-y^2}{x^3-y^3}=\frac{x^2+xy+y^2}{x^3+3x^2y+3xy^2+y^3}$

$\frac{(x+y)(x-y)}{(x-y)(x^2+xy+y^2)}=\frac{(x^2+xy+y^2)(x+y)(x-y)}{(x+y)^3(x-y)(x^2+xy+y^2)}=\frac{1}{(x+y)^2}$ 227'

$\frac{a^2-ab+b^2}{a^3-3ab(a-b)-b^3}\cdot\frac{a^2-b^2}{a^3+b^3}=\frac{a^2-ab+b^2}{a^3-3a^2b+3ab^2-b^3}$

$\frac{(a+b)(a-b)}{(a+b)(a^2-ab+b^2)}=\frac{(a^2-ab+b^2)(a+b)(a-b)}{(a-b)^3(a+b)(a^2-ab+b^2)}=\frac{1}{(a-b)^2}$

228 $\frac{a^2-2ab+b^2}{a^2-ab+b^2}\ \frac{a^3+b^3}{a-b}=\frac{(a-b)^2(a+b)(a^2-ab+b^2)}{(a^2-ab+b^2)(a-b)}=(a-b)(a+$ $+b)=a^2-b^2$ 228' $\frac{a^2+2ab+b^2}{a^3-b^3}\ \frac{a^2+ab+b^2}{a+b}=\frac{(a+b)^2(a^2+ab+b^2)}{(a-b)(a^2+ab+b^2)(a+b)}=$ $=\frac{a+b}{a-b}$

229 $\frac{x^2+(a+b)x+ab}{x^2-(a-c)x-ac}\ \frac{x^2-c^2}{x^2-a^2}$ =(см 7-ую и 10-ую форм на стр 44 „Сборн")= $=\frac{(x+a)(x+b)(x+c)(x-c)}{(x-a)(x+c)(x+a)(x-a)}=\frac{(x+b)(x-c)}{(x-a)(x-a)}=\frac{(x+b)(x-c)}{(x-a)^2}$ 229'

$\frac{x^2-(a+c)x+ac}{x^2+(b+c)x+bc}\ \frac{x^2-b^2}{x^2-a^2}$ =(см 8-ую и 7-ую формулы на 44 стр „Сборн")= $=\frac{(x-a)(x-c)(x+b)(x-b)}{(x+b)(x+c)(x+a)(x-a)}=\frac{(x-c)(x-b)}{(x+c)(x+a)}$.

230 $\frac{1-a^2}{(1+ax)^2-(a+x)^2}\ \frac{x+x^2}{1-x}=\frac{(1^2-a^2)}{[(1+ax)+(a+x)][(1+ax)-(a+x)]}\cdot$

$\cdot\frac{x(1+x)}{1-x}=\frac{(1+a)(1-a)\cdot x(1+x)}{(1+a+x+ax)(1-a-x+ax)(1-x)}=$

$=\frac{x(1+a)(1-a)(1+x)}{[(1+a)+x(1+a)][(1-a)-x(1-a)](1-x)}=$

$=\frac{x(1+a)(1-a)(1+x)}{(1+a)(1+x)(1-a)(1-x)(1-x)}=\frac{x}{(1-x)(1-x)}=\frac{x}{(1-x)^2}$. 230'

$\frac{(a+x)^2-(1+ax)^2}{1-x^2}\ \frac{1+a}{a^2-a}=\frac{[(a+x)+(1+ax)][(a+x)-(1+ax)]}{1^2-x^2}\cdot$

$\cdot\frac{1+a}{a(a-1)}=\frac{(a+x+1+ax)(a+x-1-ax)(1+a)}{(1+x)(1-x)a(a-1)}=$

$=\frac{[(a+ax)+(1+x)][(a-ax)-(1-x)](1+a)}{(1+x)(1-x)a(a-1)}=$

$$=\frac{[a(1+x)+(1+x)][a(1-x)-(1-x)](1+a)}{(1+x)(1-x)a(a-1)}=$$
$$=\frac{(1+x)(a+1)(1-x)(a-1)(1+a)}{(1+x)(1-x)a(a-1)}=\frac{(a+1)(1+a)}{a}=\frac{(a+1)^2}{a}$$

№№ 231—250 отличаются тѣмъ, что въ нихъ производителями являются не просто алгебраическія дроби, а многочленныя выраженія, членами коихъ входятъ и алгебраическія дроби. Поэтому, при производствѣ умноженія въ этихъ примѣрахъ можно поступать различно, такъ, можно 1) *умножать по общему правилу умноженія многочлена на многочленъ*, не прибѣгая къ постороннимъ преобразованіямъ сомножителей, и лишь, въ случаѣ нужды, преобразовывать, въ цѣляхъ упрощенія, произведеніе, 2) приводить умноженіе къ виду, въ какомъ даны №№ 217—230 и др., т. е. *преобразовывать сомножителей къ виду алгебраическихъ дробей*, выполняя дѣйствія сложенія и вычитанія, показанныя въ скобкахъ, *и затѣмъ производить дѣйствіе по правилу умноженія такихъ дробей*. 3) вообще упрощать и преобразовывать данное выраженіе (какъ, напр., въ № 234), пользуясь преимущественно правилами разложенія на множителей.

231. **1-ое рѣшеніе.** $(a+b)(^1/_a+^1/_b)=a\cdot{}^1/_a+b\cdot{}^1/_a+a\cdot{}^1/_b+b\cdot{}^1/_b=1+{}^b/_a+$ $+{}^a/_b+1={}^a/_b+{}^b/_a+2$. **2-ое рѣшеніе.** $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=(a+b)$ $\left(\frac{b}{a\cdot b}+\frac{a}{b\cdot a}\right)=(a+b)\cdot\frac{b+a}{ab}=\frac{(a+b)(b+a)}{ab}=\frac{(a+b)^2}{ab}$, каковому выраженію легко придать видъ получ. выше, а именно $\frac{(a+b)^2}{ab}=$ $=\frac{a^2+2ab+b^2}{ab}=\frac{a^2}{ab}+\frac{2ab}{ab}+\frac{b^2}{ab}=\frac{a}{b}+2+\frac{b}{a}$. **231.** **I рѣш.** $(a-b)$ $(^1/_b-{}^1/_a)=a\cdot{}^1/_b-b\cdot{}^1/_b-a\cdot{}^1/_a+b\cdot{}^1/_a={}^a/_b-1-1+{}^b/_a={}^a/_b+{}^b/_a-2$. **II рѣш.** $(a-b)\cdot\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)=(a-b)\cdot\left(\frac{a}{b\cdot a}-\frac{b}{a\cdot b}\right)=(a-b)\cdot\frac{a-b}{ab}=$ $=\frac{(a-b)\cdot(a-b)}{ab}=\frac{(a-b)^2}{ab}$, это выраженіе легко привести къ выше приведенному виду, а именно $\frac{(a-b)^2}{ab}=\frac{a^2-2ab+b^2}{ab}=\frac{a^2}{ab}-\frac{2ab}{ab}+$ $+\frac{b^2}{ab}=\frac{a}{b}-2+\frac{b}{a}$.

232. **1-ое рѣшеніе.** $(^1/_a+{}^1/_b)\cdot(^c/_a-{}^c/_b)={}^1/_a\cdot{}^c/_a+{}^1/_b\cdot{}^c/_a-{}^1/_a\cdot{}^c/_b-{}^1/_b\cdot{}^c/_b=$ $=\frac{c}{a^2}+\frac{c}{ab}-\frac{c}{ab}-\frac{c}{b^2}=\frac{c}{a^2}-\frac{c}{b^2}=\frac{b^2c-a^2c}{a^2b^2}=\frac{c(b^2-a^2)}{a^2b^2}$. **2-ое рѣш.** $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{c}{a}-\frac{c}{b}\right)=\left(\frac{b}{a\cdot b}+\frac{a}{b\cdot a}\right)\left(\frac{c\cdot b}{a\cdot b}-\frac{c\cdot a}{b\cdot a}\right)=\frac{b+a}{ab}\cdot\frac{bc-ac}{ab}=$ $=\frac{(b+a)\cdot c(b-a)}{ab\cdot ab}=\frac{c(b^2-a^2)}{a^2b^2}$. **3-ье рѣшеніе.** $(^1/_a+{}^1/_b)\cdot(^c/_a-{}^c/_b)=(^1/_a+$

$+{}^1/_b)\ c({}^1/_a-{}^1/_b)=c\,[({}^1/_a)^2-({}^1/_b)^2]=c\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)=c\left(\frac{b^2}{a^2\,b^2}-\frac{a^2}{b^2\,a^2}\right)=$
$=c\ \frac{b^2-a^2}{a^2b^2}$ 232′ I рѣшеніе $({}^1/_{ac}-{}^1/_{bc})\ ({}^1/_a+{}^1/_b)={}^1/_{ac}\ {}^1/_a-{}^1/_{bc}\ {}^1/_a+$
$+{}^1/_{ac}\ {}^1/_b-{}^1/_{bc}\ {}^1/_b=\ \frac{1}{a^2c}-\frac{1}{abc}+\frac{1}{abc}-\frac{1}{b^2c}=\frac{1}{a^2c}-\frac{1}{b^2c}=\frac{b^2}{a^2c\ b^2}\ -$
$-\frac{a^2}{b^2c\ a^2}=\frac{b^2-a^2}{a^2b^2c}$ II рѣшен $\left(\frac{1}{ac}-\frac{1}{bc}\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=\left(\frac{b}{ac\ b}\ -\right.$
$\left.-\frac{a}{bc\ a}\right)\left(\frac{b}{a\ b}+\frac{a}{b\ a}\right)=\frac{b-a}{abc}\ \frac{b+a}{ab}=\frac{(b-a)\ (b+a)}{abc\ ab}=\frac{b^2-a^2}{a^2b^2c}$
III рѣш Т к ${}^1/_{ac}-{}^1/_{bc}=({}^1/_{ac}\ {}^1/_c-{}^1/_{bc}\ {}^1/_c)\ \ {}^1/_c=({}^1/_a-{}^1/_b)\ {}^1/_c$ то получ
$({}^1/_{ac}-{}^1/_{bc})({}^1/_a+{}^1/_b)={}^1/_c({}^1/_a-{}^1/_b)({}^1/_a+{}^1/_b)={}^1/_c[({}^1/_a)^2-({}^1/_b)^2]={}^1/_c\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)=$
$={}^1/_c\left(\frac{b^2}{a^2\,b^2}-\frac{a^2}{b^2\,a^2}\right)={}^1/_c\ \frac{b^2-a^2}{a^2b^2}$, что приводится къ виду
$\frac{b^2-a^2}{c\ a^2b^2}=\frac{b^2-a^2}{a^2b^2c}$

233 1-ый способъ $\left(a+\frac{a^2}{c}\right)\cdot\left(a+\frac{bc}{a}\right)=a^2+a\ \frac{a^2}{c}+a$
$\frac{b}{a}+\frac{a^2}{c}\ \frac{bc}{a}=a^2+\frac{a^3}{c}+\qquad\frac{a^2c}{c}+\frac{a^3}{c}+\frac{bc\ c}{c}+\frac{ab\ c}{c}=$
$=\frac{a^2c+a^3+bc^2+abc}{c}=\frac{a^2(c+a)+bc(c+a)}{c}=\frac{(a+c)(a^2+bc)}{c}$ 2 ой
способъ $\left(a+\frac{a^2}{c}\right)\left(a+\frac{bc}{a}\right)=\frac{ac+a^2}{c}\ \frac{a^2+bc}{a}=\frac{(ac+a^2)\ (a^2+bc)}{c\ a}=$
$=\frac{a(c+a)(a^2+bc)}{ac}=\frac{(a+c)(a^2+bc)}{c}$ Иначе По 7-ой формулѣ $(x+a)(x+$
$+b)=x^2+(a+b)x+ab$ на 44 стр «Сборн» имѣемъ. $\left(a+\frac{a^2}{c}\right)$
$\left(a+\frac{bc}{a}\right)=a^2+\left(\frac{a^2}{c}+\frac{bc}{a}\right)a+\frac{a^2}{c}\cdot\frac{bc}{a}=a^2+\frac{(a^3+bc^2)a}{ac}+ab=$
$=\frac{(a^2+ab)\ c+(a^3+bc^2)}{c}=\frac{a^2c+abc+a^3+bc^2}{c}=\frac{a^2(c+a)+bc(a+c)}{c}=$
$=\frac{(a+c)(a^2+bc)}{c}$ 233′ I способъ $\left(\frac{a^2}{b}-a\right)\ \left(c-\frac{bc}{a}\right)=\frac{a^2}{b}\ c-$
$-ac-\frac{a^2}{b}\ \frac{bc}{a}+a\ \frac{bc}{a}=\frac{a^2c}{b}-ac-ac+bc=\frac{a^2c}{b}-2ac+bc=$

$$=\frac{a^2c}{b}-\frac{2ac\cdot b}{b}+\frac{bc\cdot b}{b}=\frac{a^2c-2abc+b^2c}{b}=\frac{c(a^2-2ab+b^2)}{b}=$$

$$=\frac{c(a-b)^2}{b}.$$ **II способъ** $$\left(\frac{a^2}{b}-a\right)\left(c-\frac{bc}{a}\right)=\frac{a^2-ab}{b}\cdot\frac{ca-bc}{a}=$$

$$=\frac{a(a-b)\cdot c(a-b)}{b\cdot a}=\frac{c(a-b)^2}{b}.$$ **III способъ.** $$\left(\frac{a^2}{b}-a\right)\left(c-\frac{bc}{a}\right)=$$

$$=a\left(\frac{a}{b}-1\right)\cdot c\left(1-\frac{b}{a}\right)=ac\cdot\frac{a-b}{b}\cdot\frac{a-b}{a}=\frac{c(a-b)^2}{b}.$$

234. 1-ый способъ. $$\left(\frac{a+x}{2x}\right)^2-\left(\frac{a-x}{2x}\right)^2=\left(\frac{a+x}{2x}+\frac{a-x}{2x}\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{a+x}{2x}-\frac{a-x}{2x}\right)=\frac{a+x+a-x}{2x}\cdot\frac{a+x-a+x}{2x}=\frac{2a}{2x}\cdot\frac{2x}{2x}=\frac{ax}{x^2}=\frac{a}{x}.$$

2-ой способъ. Т. к. $$\left(\frac{A}{B}\right)^2=\frac{A}{B}\cdot\frac{A}{B}=\frac{A^2}{B^2},$$ то $$\left(\frac{a+x}{2x}\right)^2-\left(\frac{a-x}{2x}\right)^2=$$

$$=\frac{(a+x)^2}{(2x)^2}-\frac{(a-x)^2}{(2x)^2}=\frac{(a+x)^2-(a-x)^2}{(2x)^2}=\frac{a^2+2ax+x^2-(a^2-2ax+x^2)}{2x\cdot 2x}=$$

$$=\frac{a^2+2ax+x^2-a^2+2ax-x^2}{4x^2}=\frac{4ax}{4x^2}=\frac{a}{x}.$$ **234′. I способъ.**

$$\left(\frac{a-x}{a+x}\right)^2-\frac{a^2}{x^2}=\left(\frac{a-x}{a+x}\right)^2-\left(\frac{a}{x}\right)^2 \text{*)} =\left(\frac{a-x}{a+x}+\frac{a}{x}\right)\left(\frac{a-x}{a+x}-\frac{a}{x}\right)=$$

$$=\frac{(a-x)x+a(a+x)}{(a+x)x}\cdot\frac{(a-x)x-a(a+x)}{(a+x)x}=\frac{ax-x^2+a^2+ax}{(a+x)x}\cdot$$

$$\cdot\frac{ax-x^2-a^2-ax}{(a+x)x}=\frac{(2ax-x^2+a^2)\cdot(-x^2-a^2)}{(a+x)x\cdot(a+x)x}=\frac{(2ax-x^2+a^2)\cdot-(x^2+a^2)}{(a+x)x(a+x)x}=$$

$$=-\frac{(a^2+2ax-x^2)(x^2+a^2)}{(a+x)^2x^2}.$$ **II способъ** $$\left(\frac{a-x}{a+x}\right)^2-\frac{a^2}{x^2}=\frac{(a-x)^2}{(a+x)^2}-$$

$$-\frac{a^2}{x^2}=\frac{a^2-2ax+x^2}{a^2+2ax+x^2}-\frac{a^2}{x^2}=\frac{(a^2-2ax+x^2)x^2-a^2(a^2+2ax+x^2)}{(a^2+2ax+x^2)x^2}=$$

$$=\frac{a^2x^2-2ax^3+x^4-a^4-2a^3x-a^2x^2}{(a+x)^2x^2}=\frac{x^4-2ax^3-2a^3x-a^4}{(a+x)^2x^2}=$$

$$=\frac{(x^4-a^4)-(2ax^3+2a^3x)}{(a+x)^2x^2}=\frac{(x^2+a^2)(x^2-a^2)-2ax(x^2+a^2)}{(a+x)^2x^2}=$$

$$=\frac{(x^2+a^2)(x^2-2ax-a^2)}{(a+x)^2x^2}.$$

---

*) Дѣйствительно, $\frac{a^2}{x^2}=\frac{aa}{xx}=\frac{a}{x}\cdot\frac{a}{x}=\left(\frac{a}{x}\right)^2$, заключая обратно, имѣемъ вообще: $\left(\frac{a}{x}\right)^2=\frac{a^2}{x^2}$.

235 1-ый способъ $\frac{ab}{a+b}\cdot\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)=\frac{ab}{a+b}\cdot\frac{a}{b}-\frac{ab}{a+b}\cdot\frac{b}{a}=\frac{ab\cdot a}{(a+b)b}-\frac{ab\cdot b}{(a+b)a}=\frac{a^2}{a+b}-\frac{b^2}{a+b}=\frac{a^2-b^2}{a+b}=\frac{(a+b)(a-b)}{a+b}=$ $=a-b$ 2-ой спос. $\frac{ab}{a+b}\cdot\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)=\frac{ab}{a+b}\cdot\frac{a\cdot a-b\cdot b}{ab}=$ $=\frac{ab\,(a^2-b^2)}{(a+b)\,ab}=\frac{(a+b)(a-b)}{a+b}=a-b$

235' I способъ $\frac{ab}{a-b}\cdot\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)=\frac{ab}{a-b}\cdot\frac{a}{b}-\frac{ab}{a-b}\cdot\frac{b}{a}=\frac{ab\cdot a}{(a-b)\,b}-\frac{ab\cdot b}{(a-b)\,a}=$ $=\frac{a^2}{a-b}-\frac{b^2}{a-b}=\frac{a^2-b^2}{a-b}=\frac{(a+b)(a-b)}{a-b}=a+b$ II способъ $\frac{ab}{a-b}\cdot\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)=\frac{ab}{a-b}\cdot\frac{a\cdot a-b\cdot b}{ab}=\frac{ab\,(a^2-b^2)}{(a-b)\,ab}=\frac{a^2-b^2}{a-b}=$ $=\frac{(a+b)(a-b)}{a-b}=a+b$

236 1-ый способъ $\left(1-\frac{a-b}{a+b}\right)\left(2+\frac{2b}{a-b}\right)=2-2\frac{a-b}{a+b}+$ $+1\cdot\frac{2b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}\cdot\frac{2b}{a-b}=2-\frac{2(a-b)}{a+b}+\frac{2b}{a-b}-\frac{(a-b)\,2b}{(a+b)(a-b)}=2-$ $-\frac{2(a-b)}{a+b}+\frac{2b}{a-b}-\frac{2b}{a+b}=\frac{2(a+b)(a-b)}{(a+b)(a-b)}-\frac{2(a-b)\,(a-b)}{(a+b)\,(a-b)}+$ $+\frac{2b\,(a+b)}{(a-b)\,(a+b)}-\frac{2b(a-b)}{(a+b)\,(a-b)}=$

$$=\frac{2(a^2-b^2)-2(a-b)^2+2b(a+b)-2b(a-b)}{a^2-b^2}=$$

$$=\frac{2a^2-2b^2-2(a^2-2ab+b^2)+2ab+2b^2-2ab+2b^2}{a^2-b^2}=$$

$$=\frac{2a^2-2b^2-2a^2+4ab-2b^2+2ab+2b^2-2ab+2b^2}{a^2-b^2}=\frac{4ab}{a^2-b^2}$$

2-ой способъ $\left(1-\frac{a-b}{a+b}\right)\left(2+\frac{2b}{a-b}\right)=\frac{a+b-(a-b)}{a+b}\cdot$ $\frac{2(a-b)+2b}{a-b}=\frac{a+b-a+b}{a+b}\cdot\frac{2a-2b+2b}{a-b}=\frac{2b\cdot 2a}{(a+b)\,(a-b)}=$ $=\frac{4ab}{a^2-b^2}$

236' I способъ $\left(1+\frac{a+b}{a-b}\right)\left(2-\frac{2a}{a+b}\right)=2+$ $+2\frac{a+b}{a-b}-1\cdot\frac{2a}{a+b}-\frac{a+b}{a-b}\cdot\frac{2a}{a+b}=2+\frac{2(a+b)}{a-b}-\frac{2a}{a+b}-\frac{(a+b)\,2a}{(a-b)\,(a+b)}=$

$$=2+\frac{2(a+b)}{a-b}-\frac{2a}{a+b}-\frac{2a}{a-b}=\frac{2(a+b)(a-b)}{(a+b)(a-b)}+\frac{2(a+b)(a+b)}{(a-b)(a+b)}-$$

$$-\frac{2a(a-b)}{(a+b)(a-b)}-\frac{2a(a+b)}{(a-b)(a+b)}=$$

$$=\frac{2(a^2-b^2)+2(a+b)^2-2a(a-b)-2a(a+b)}{a^2-b^2}=$$

$$=\frac{2a^2-2b^2+2(a^2+2ab+b^2)-2a^2+2ab-2a^2-2ab}{a^2-b^2}=$$

$$=\frac{2a^2-2b^2+2a^2+4ab+2b^2-2a^2+2ab-2a^2-2ab}{a^2-b^2}=$$

$=\frac{4ab}{a^2-b^2}$ II способъ $\left(1+\frac{a+b}{a-b}\right)\left(2-\frac{2a}{a+b}\right)=\frac{a-b+(a+b)}{a-b}\cdot$
$\frac{2(a+b)-2a}{a+b}=\frac{a-b+a+b}{a-b}\cdot\frac{2a+2b-2a}{a+b}=\frac{2a\cdot 2b}{(a-b)(a+b)}=$
$=\frac{4ab}{a^2-b^2}$

237 I-ый способъ $\left(\frac{a+x}{a}-\frac{x-y}{x}\right)\frac{a^2}{x^2+ay}=\frac{a+x}{a}\cdot\frac{a^2}{x^2+ay}-$
$-\frac{x-y}{x}\cdot\frac{a^2}{x^2+ay}=\frac{(a+x)a^2}{a(x^2+ay)}-\frac{(x-y)a^2}{x(x^2+ay)}=\frac{(a+x)a}{x^2+ay}-\frac{(x-y)a^2}{x(x^2+ay)}=$
$=\frac{(a+x)a\cdot x-(x-y)a^2}{x(x^2+ay)}=\frac{a^2x+ax^2-a^2x+a^2y}{x(x^2+ay)}=\frac{ax^2+a^2y}{x(x^2+ay)}=\frac{a(x^2+ay)}{x(x^2+ay)}=$
$=\frac{a}{x}$ 2-ой способъ $\left(\frac{a+x}{a}-\frac{x-y}{x}\right)\frac{a^2}{x^2+ay}=\left[\frac{(a+x)x}{ax}-\right.$
$\left.-\frac{(x-y)a}{xa}\right]\frac{a^2}{x^2+ay}=\frac{(a+x)x-(x-y)a}{ax}\cdot\frac{a^2}{x^2+ay}=\frac{ax+x^2-ax+ay}{ax}\cdot$
$\frac{a^2}{x^2+ay}=\frac{(x^2+ay)a^2}{ax(x^2+ay)}=\frac{a}{x}$ 3-ій способъ $\left(\frac{a+x}{a}-\frac{x-y}{x}\right)$
$\frac{a^2}{x^2+ay}=\left(1+\frac{x}{a}-1+\frac{y}{x}\right)\frac{a^2}{x^2+ay}=\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{x}\right)\frac{a^2}{x^2+ay}=$
$=\frac{x\cdot x+y\cdot a}{ax}\cdot\frac{a^2}{x^2+ay}=\frac{(x^2+ay)a^2}{ax(x^2+ay)}=\frac{a}{x}$.

237' I способъ $\left(\frac{a-x}{a}+\frac{y-x}{x}\right)\frac{a^2}{ay-x^2}=\frac{a-x}{a}\cdot\frac{a^2}{ay-x^2}+$
$+\frac{y-x}{x}\cdot\frac{a^2}{ay-x^2}=\frac{(a-x)a^2}{a(ay-x^2)}+\frac{(y-x)a^2}{x(ay-x^2)}=\frac{(a-x)a}{ay-x^2}+\frac{(y-x)a^2}{x(ay-x^2)}=$
$=\frac{(a-x)a\cdot x}{(ay-x^2)x}+\frac{(y-x)a^2}{x(ay-x^2)}=\frac{(a-x)ax+(y-x)a^2}{x(ay-x^2)}=\frac{a^2x-ax^2+a^2y-a^2x}{x(ay-x^2)}=$

$$=\frac{a^2y-ax^2}{x(ay-x^2)}=\frac{a(ay-x^2)}{x(ay-x^2)}=\frac{a}{x}$$

II способъ

$$\left(\frac{a-x}{a}+\frac{y-x}{x}\right)\frac{a^2}{ay-x^2}=\left[\frac{(a-x)\,x}{a\,x}+\frac{(y-x)\,a}{x\,a}\right]\frac{a^2}{ay-x^2}=\frac{(a-x)x+(y-x)a}{ax}\cdot\frac{a^2}{ay-x^2}=\frac{ax-x^2+ay-ax}{ax}\cdot\frac{a^2}{ay-x^2}=\frac{(-x^2+ay)\,a^2}{ax\,(ay-x^2)}=\frac{a}{x}$$

III способъ

$$\left(\frac{a-x}{a}+\frac{y-x}{x}\right)\frac{a^2}{ay-x^2}=\left(1-\frac{x}{a}+\frac{y}{x}-1\right)\frac{a^2}{ay-x^2}=\left(\frac{y}{x}-\frac{x}{a}\right)\frac{a^2}{ay-x^2}=\frac{y\,a-x\,x}{xa}\cdot\frac{a^2}{ay-x^2}=\frac{(ay-x^2)\,a^2}{ax\,(ay-x^2)}=\frac{a}{x}$$

238. 1-ый способъ

$$\frac{x^2+xy}{x^2+y^2}\left(\frac{x}{x-y}-\frac{y}{x+y}\right)=\frac{x^2+xy}{x^2+y^2}\cdot\frac{x}{x-y}-\frac{x^2+xy}{x^2+y^2}\cdot\frac{y}{x+y}=\frac{x(x+y)\,x}{(x^2+y^2)(x-y)}-\frac{x(x+y)\,y}{(x^2+y^2)\,(x+y)}=\frac{(x+y)x^2}{(x^2+y^2)(x-y)}-$$

$$-\frac{xy}{x^2+y^2}=\frac{(x+y)x^2}{(x^2+y^2)(x-y)}-\frac{xy\,(x-y)}{(x^2+y^2)\,(x-y)}=\frac{(x+y)x^2-xy(x-y)}{(x^2+y^2)(x-y)}=$$

$$=\frac{x^3+x^2y-x^2y+xy^2}{(x^2+y^2)(x-y)}=\frac{x^3+xy^2}{(x^2+y^2)(x-y)}=\frac{x(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)(x-y)}=\frac{x}{x-y}$$

2-ой способъ

$$\frac{x^2+xy}{x^2+y^2}\left(\frac{x}{x-y}-\frac{y}{x+y}\right)=\frac{x^2+xy}{x^2+y^2}\left[\frac{x\,(x+y)}{(x-y)\,(x+y)}-\frac{y(x-y)}{(x+y)\,(x-y)}\right]=\frac{x^2+xy}{x^2+y^2}\cdot\frac{x(x+y)-y(x-y)}{(x+y)(x-y)}=\frac{x(x+y)\,(x^2+xy-xy+y^2)}{(x^2+y^2)\,(x+y)(x-y)}=$$

$$=\frac{x(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)(x-y)}=\frac{x}{x-y}$$

238′. I способъ

$$\frac{xy-y^2}{x^2+y^2}\left(\frac{x}{x+y}+\frac{y}{x-y}\right)=$$

$$=\frac{xy-y^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{x}{x+y}+\frac{xy-y^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{y}{x-y}=\frac{y(x-y)\,x}{(x^2+y^2)\,(x+y)}+\frac{y(x-y)\,y}{(x^2+y^2)\,(x-y)}=$$

$$=\frac{xy(x-y)}{(x^2+y^2)(x+y)}+\frac{y^2}{x^2+y^2}=\frac{xy(x-y)}{(x^2+y^2)(x+y)}+\frac{y^2\,(x+y)}{(x^2+y^2)\,(x+y)}=$$

$$=\frac{xy(x-y)+y^2(x+y)}{(x^2+y^2)\,(x+y)}=\frac{x^2y-xy^2+xy^2+y^3}{(x^2+y^2)(x+y)}=\frac{x^2y+y^3}{(x^2+y^2)(x+y)}=$$

$$=\frac{y(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)(x+y)}=\frac{y}{x+y}$$

II способъ

$$\frac{xy-y^2}{x^2+y^2}\left(\frac{x}{x+y}+\frac{y}{x-y}\right)=$$

$$=\frac{xy-y^2}{x^2+y^2}\left[\frac{x\,(x-y)}{(x+y)\,(x-y)}+\frac{y\,(x+y)}{(x-y)\,(x+y)}\right]=\frac{xy-y^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{x(x-y)+y(x+y)}{(x+y)\,(x-y)}=\frac{xy-y^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{x^2-xy+xy+y^2}{(x+y)(x-y)}=$$

$$=\frac{y(x-y)\,(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)\,(x+y)\,(x-y)}=\frac{y}{x+y}$$

239 **1-ый способъ** $\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{x}{a}+1\right)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{x}{a}+1\right)=\left(\frac{x^2}{a^2}-\right.$ $\left.-\frac{xa}{a^2}+\frac{a^2}{a^2}\right)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{xa}{a^2}+\frac{a^2}{a^2}\right)=\frac{x^2-ax+a^2}{a^2}\cdot\frac{x^2+ax+a^2}{a^2}=$ (срв. отд. III № 292) $=\frac{(x^2-ax+a^2)\,(x^2+ax+a^2)}{a^2\cdot a^2}=\frac{[(x^2+a^2)-ax]\,[(x^2+a^2)+ax]}{a^4}=$ $=\frac{(x^2+a^2)^2-(ax)^2}{a^4}=\frac{(x^2)^2+2\cdot x^2\cdot a^2+(a^2)^2-ax\cdot ax}{a^4}=\frac{x^4+2a^2x^2+a^4-a^2x^2}{a^4}=$ $=\frac{x^4+a^2x^2+a^4}{a^4}$ **2-ой способъ** $\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{x}{a}+1\right)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{x}{a}+1\right)=$ $=\left[\left(\frac{x^2}{a^2}+1\right)-\frac{x}{a}\right]\left[\left(\frac{x^2}{a^2}+1\right)+\frac{x}{a}\right]=\left(\frac{x^2}{a^2}+1\right)^2-\left(\frac{x}{a}\right)^2=$ $=\left(\frac{x^2}{a^2}\right)^2+2\cdot\frac{x^2}{a^2}\cdot 1+1^2-\frac{x^2}{a^2}=\frac{x^4}{a^4}+2\frac{x^2}{a^2}+1-\frac{x^2}{a^2}=\frac{x^4}{a^4}+\frac{x^2}{a^2}+1=$ $=\frac{x^4}{a^4}+\frac{x^2\cdot a^2}{a^4}+\frac{a^4}{a^4}=\frac{x^4+a^2x^2+a^4}{a^4}$

239′ **I способъ** $\left(1+\frac{a}{x}-\frac{a^2}{x^2}\right)\left(1-\frac{a}{x}-\frac{a^2}{x^2}\right)=\left(\frac{x^2}{x^2}+\frac{ax}{x^2}-\right.$ $\left.-\frac{a^2}{x^2}\right)\left(\frac{x^2}{x^2}-\frac{ax}{x^2}-\frac{a^2}{x^2}\right)=\frac{x^2+ax-a^2}{x^2}\cdot\frac{x^2-ax-a^2}{x^2}=$ $=\frac{(x^2+ax-a^2)\,(x^2-ax-a^2)}{x^2\cdot x^2}=\frac{[(x^2-a^2)+ax]\,[(x^2-a^2)-ax]}{x^4}=$ $=\frac{(x^2-a^2)^2-(ax)^2}{x^4}=\frac{(x^2)^2-2\cdot x^2\cdot a^2+(a^2)^2-ax\cdot ax}{x^4}=$ $=\frac{x^4-2a^2x^2+a^4-a^2x^2}{x^4}=\frac{x^4-3a^2x^2+a^4}{x^4}$ **II способъ** $\left(1+\frac{a}{x}-\right.$ $\left.-\frac{a^2}{x^2}\right)\left(1-\frac{a}{x}-\frac{a^2}{x^2}\right)=\left[\left(1-\frac{a^2}{x^2}\right)+\frac{a}{x}\right]\left[\left(1-\frac{a^2}{x^2}\right)-\frac{a}{x}\right]=$ $=\left(1-\frac{a^2}{x^2}\right)^2-\left(\frac{a}{x}\right)^2=1^2-2\cdot 1\cdot\frac{a^2}{x^2}+\left(\frac{a^2}{x^2}\right)^2-\frac{a^2}{x^2}=1-2\frac{a^2}{x^2}+$ $+\frac{a^4}{x^4}-\frac{a^2}{x^2}=1-3\frac{a^2}{x^2}+\frac{a^4}{x^4}=\frac{x^4}{x^4}-\frac{3a^2x^2}{x^4}+\frac{a^4}{x^4}=\frac{x^4-3a^2x^2+a^4}{x^4}$

240 **1-ый способъ** $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{a^2}{x^2}-\frac{a}{x}-\frac{x}{a}+1\right)\cdot\left(\frac{x}{a}-\frac{a}{x}\right)=$ $=\frac{x^2}{a^2}\cdot\frac{x}{a}+\frac{a^2}{x^2}\cdot\frac{x}{a}-\frac{a}{x}\cdot\frac{x}{a}-\frac{x}{a}\cdot\frac{x}{a}+1\cdot\frac{x}{a}-\frac{x^2}{a^2}\cdot\frac{a}{x}-$ $-\frac{a^2}{x^2}\cdot\frac{a}{x}+\frac{a}{x}\cdot\frac{a}{x}+\frac{x}{a}\cdot\frac{a}{x}-1\cdot\frac{a}{x}=\frac{x^3}{a^3}+\frac{a}{x}-1-\frac{x^2}{a^2}+$

$$+\frac{x}{a}-\frac{x}{a}-\frac{a^3}{x^3}+\frac{a^2}{x^2}+1-\frac{a}{x}=\frac{x^3}{a^3}-\frac{x^2}{a^2}+\frac{a^2}{x^2}-\frac{a^3}{x^3}=$$ (общ. знам. есть a^3x^3) $$=\frac{x^3\cdot x^3}{a^3x^3}-\frac{x^2\cdot ax^3}{a^2\cdot ax^3}+\frac{a^2\cdot a^3x}{x^2\cdot a^3x}-\frac{a^3\cdot a^3}{x^3a^3}=\frac{x^6-ax^5+a^5x-a^6}{a^3x^3}.$$

2-ой способъ $$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{a^2}{x^2}-\frac{a}{x}-\frac{x}{a}+1\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{a}{x}\right)=\left(\frac{x^2\cdot x^2}{a^2x^2}+\frac{a^2\cdot a^2}{x^2a^2}-\frac{a\cdot a^2x}{x\cdot a^2x}-\frac{x\cdot ax^2}{a\cdot ax^2}+\frac{a^2x^2}{a^2x^2}\right)\left(\frac{x\cdot x}{ax}-\frac{a\cdot a}{ax}\right)=$$

$$=\frac{x^4+a^4-a^3x-ax^3+a^2x^2}{a^2x^2}\cdot\frac{x^2-a^2}{ax}=$$

$$=\frac{(x^4+a^4-a^3x-ax^3+a^2x^2)(x+a)(x-a)}{a^2x^2\cdot ax}=$$

$$=\frac{[(x+a)(x^4-ax^3+a^2x^2-a^3x+a^4)](x-a)}{a^3x^3}=\frac{(x^5+a^5)(x-a)}{a^3x^3}=$$

$$=\frac{x^6+a^5x-ax^5-a^6}{a^3x^3}.$$

240. I способъ $$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{a^2}{x^2}+\frac{a}{x}+\frac{x}{a}+1\right)\left(\frac{a}{x}-\frac{x}{a}\right)=\frac{x^2}{a^2}\cdot\frac{a}{x}+\frac{a^2}{x^2}\cdot\frac{a}{x}+\frac{a}{x}\cdot\frac{a}{x}+\frac{x}{a}\cdot\frac{a}{x}+\frac{a}{x}-\frac{x^2}{a^2}\cdot\frac{x}{a}-\frac{a^2}{x^2}\cdot\frac{x}{a}-\frac{a}{x}\cdot\frac{x}{a}-\frac{x}{a}\cdot\frac{x}{a}-\frac{x}{a}=\frac{x}{a}+\frac{a^3}{x^3}+\frac{a^2}{x^2}+1+\frac{a}{x}-$$

$$-\frac{x^3}{a^3}-\frac{a}{x}-1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{x}{a}=\frac{a^3}{x^3}+\frac{a^2}{x^2}-\frac{x^2}{a^2}-\frac{x^3}{a^3}=\frac{a^3\cdot a^3}{x^3a^3}+\frac{a^2\cdot a^3x}{x^2\cdot a^3x}-\frac{x^2\cdot ax^3}{a^2\cdot ax^3}-\frac{x^3\cdot x^3}{a^3x^3}=\frac{a^6+a^5x-ax^5-x^6}{a^3x^3}.$$

II способъ $$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{a^2}{x^2}+\frac{a}{x}+\frac{x}{a}+1\right)\left(\frac{a}{x}-\frac{x}{a}\right)=\left(\frac{x^2\cdot x^2}{a^2x^2}+\frac{a^2\cdot a^2}{x^2a^2}+\frac{a\cdot a^2x}{x\cdot a^2x}+\frac{x\cdot ax^2}{a\cdot ax^2}+\frac{a^2x^2}{a^2x^2}\right)\left(\frac{a\cdot a}{xa}-\frac{x\cdot x}{xa}\right)=\frac{x^4+a^4+a^3x+ax^3+a^2x^2}{a^2x^2}\cdot\frac{a^2-x^2}{ax}=$$

$$=\frac{(x^4+a^4+a^3x+ax^3+a^2x^2)(a+x)(a-x)}{a^2x^2\cdot ax}=$$

$$=\frac{[(a^4+a^3x+a^2x^2+ax^3+x^4)(a-x)](a+x)}{a^3x^3}=\frac{(a^5-x^5)(a+x)}{a^3x^3}=$$

$$=\frac{a^6-ax^5+a^5x-x^6}{a^3x^3}.$$

241. 1-ый способъ $$\left(\frac{x+y}{x}-\frac{2x}{x-y}\right)\cdot\frac{y-x}{x^2+y^2}=\frac{x+y}{x}$$

$$\cdot\frac{y-x}{x^2+y^2}-\frac{2x}{x-y}\cdot\frac{y-x}{x^2+y^2}=\frac{(y+x)(y-x)}{x(x^2+y^2)}-\frac{2x(y-x)}{(x-y)(x^2+y^2)}=$$

$$=\frac{y^2-x^2}{x(x^2+y^2)}+\frac{2x(x-y)}{(x-y)(x^2+y^2)}=\frac{y^2-x^2}{x(x^2+y^2)}+\frac{2x}{x^2+y^2}=$$

$$=\frac{y^2-x^2}{x(x^2+y^2)}+\frac{2x\cdot x}{(x^2+y^2)\,x}=\frac{y^2-x^2+2x^2}{x(x^2+y^2)}=\frac{x^2+y^2}{x(x^2+y^2)}=\frac{1}{x}$$ 2-ой спос

$$\left(\frac{x+y}{x}-\frac{2x}{x-y}\right)\cdot\frac{y-x}{x^2+y^2}=\left[\frac{(x+y)(x-y)}{x(x-y)}-\frac{2x\cdot x}{(x-y)\,x}\right]\cdot\frac{y-x}{x^2+y^2}=$$

$$=\frac{x^2-y^2-2x^2}{x(x-y)}\cdot\frac{y-x}{x^2+y^2}=\frac{(-x^2-y^2)(y-x)}{x(x-y)(x^2+y^2)}=\frac{-(x^2+y^2)\cdot-(x-y)}{x(x-y)(x^2+y^2)}=$$

$=\frac{1}{x}$. **241′** I способъ $\left(\frac{2x}{x+y}+\frac{y-x}{x}\right)\cdot\frac{x+y}{x^2+y^2}=\left[\frac{2x\cdot x}{(x+y)\,x}+\frac{(y-x)(x+y)}{x(x+y)}\right]\cdot\frac{x+y}{x^2+y^2}=\frac{2x^2+(y-x)(y+x)}{x(x+y)}\cdot\frac{x+y}{x^2+y^2}=$

$=\frac{2x^2+y^2-x^2}{x(x+y)}\cdot\frac{x+y}{x^2+y^2}=\frac{(x^2+y^2)(x+y)}{x(x+y)(x^2+y^2)}=\frac{1}{x}$. II способъ

$$\left(\frac{2x}{x+y}+\frac{y-x}{x}\right)\cdot\frac{x+y}{x^2+y^2}=\frac{2x}{x+y}\cdot\frac{x+y}{x^2+y^2}+\frac{y-x}{x}\cdot\frac{x+y}{x^2+y^2}=$$

$$=\frac{2x(x+y)}{(x+y)(x^2+y^2)}+\frac{(y-x)(y+x)}{x(x^2+y^2)}=\frac{2x}{x^2+y^2}+\frac{y^2-x^2}{x(x^2+y^2)}=\frac{2x\cdot x}{(x^2+y^2)\,x}+$$

$$+\frac{y^2-x^2}{x(x^2+y^2)}=\frac{2x^2+y^2-x^2}{x(x^2+y^2)}=\frac{x^2+y^2}{x(x^2+y^2)}=\frac{1}{x}$$

242 1-ый способъ $\frac{3x^2+3xy}{4xy+6ay}\cdot\left(\frac{x}{ax+ay}+\frac{3}{2x+2y}\right)=$

$$=\frac{3x^2+3xy}{4xy+6ay}\cdot\frac{x}{ax+ay}+\frac{3x^2+3xy}{4xy+6ay}\cdot\frac{3}{2x+2y}=\frac{3x(x+y)\cdot x}{2y(2x+3a)\cdot a(x+y)}+$$

$$+\frac{3x(x+y)\cdot 3}{2y(2x+3a)\cdot 2(x+y)}=\frac{3x^2}{2ay(2x+3a)}+\frac{9x}{4y(2x+3a)}=$$

$$=\frac{3x^2\cdot 2}{2ay(2x+3a)\cdot 2}+\frac{9x\cdot a}{4y(2x+3a)\cdot a}=\frac{6x^2+9ax}{4ay(2x+3a)}=\frac{3x(2x+3a)}{4ay(2x+3a)}=$$

$=\frac{3x}{4ay}$ 2-ой способъ $\frac{3x^2+3xy}{4xy+6ay}\cdot\left(\frac{x}{ax+ay}+\frac{3}{2x+2y}\right)=$

$$=\frac{3x^2+3xy}{4xy+6ay}\cdot\left[\frac{x}{a(x+y)}+\frac{3}{2(x+y)}\right]=\frac{3x^2+3xy}{4xy+6ay}\cdot$$

$$\cdot\left[\frac{x\cdot 2}{a(x+y)\cdot 2}+\frac{3\cdot a}{2(x+y)\cdot a}\right]=\frac{3x(x+y)}{2y(2x+3a)}\cdot\frac{2x+3a}{2a(x+y)}=$$

$=\frac{3x(x+y)(2x+3a)}{2y(2x+3a)\cdot 2a(x+y)}=\frac{3x}{2y\cdot 2a}=\frac{3x}{4ay}$ **242′** I способъ $\frac{3xy-3x^2}{4xy-6ay}\cdot$

$$\cdot\left(\frac{x}{ay-ax}+\frac{3}{2x-2y}\right)=\frac{3xy-3x^2}{4xy-6ay}\cdot\frac{x}{ay-ax}+\frac{3xy-3x^2}{4xy-6ay}\cdot\frac{3}{2x-2y}=$$

$$=\frac{3x(y-x)\cdot x}{2y(2x-3a)\cdot a(y-x)}+\frac{3x(y-x)\cdot 3}{2y(2x-3a)\cdot 2(x-y)}=\frac{3x^2}{2ay(2x-3a)}+$$

$+\frac{-9x(x-y)}{4y(2x-3a)(x-y)} = \frac{3x^2}{2ay(2x-3a)} - \frac{9x}{4y(2x-3a)} =$
$= \frac{3x^2\cdot 2}{2ay(2x-3a)\cdot 2} - \frac{9x\cdot a}{4y(2x-3a)\cdot a} = \frac{6x^2-9ax}{4ay(2x-3a)} = \frac{3x(2x-3a)}{4ay(2x-3a)} =$
$= \frac{3x}{4ay}$ **II способъ** $\frac{3xy-3x^2}{4xy-6ay}\left(\frac{x}{ay-ax}+\frac{3}{2x-2y}\right) =$
$= \frac{3xy-3x^2}{4xy-6ay}\left[\frac{x}{a(y-x)}+\frac{3}{2(x-y)}\right] = \frac{3xy-3x^2}{4xy-6ay}\left[\frac{x\cdot 2}{a(y-x)\cdot 2}+\right.$
$\left.+\frac{3\cdot a}{-2(y-x)\cdot a}\right] = \frac{3xy-3x^2}{4xy-6ay}\left[\frac{2x}{2a(y-x)} - \frac{3a}{2a(y-x)}\right] =$
$= \frac{3x(y-x)}{2y(2x-3a)}\cdot\frac{2x-3a}{2a(y-x)} = \frac{3x(y-x)\cdot(2x-3a)}{2y(2x-3a)\cdot 2a(y-x)} = \frac{3x}{2y\cdot 2a} = \frac{3x}{4ay}$

243. I-ый способъ $\left(1+a-\frac{a^2+3}{a+1}\right)(1-a^2) = 1+a-\frac{a^2+3}{a+1} -$
$-a^2-a^3+a^2\cdot\frac{a^2+3}{a+1} = 1+a-a^2-a^3-\frac{a^2+3}{a+1}+\frac{a^2(a^2+3)}{a+1} =$
$= 1+a-a^2-a^3+\frac{a^2(a^2+3)-(a^2+3)}{a+1} = 1+a-a^2-a^3+$
$+\frac{(a^2+3)(a^2-1)}{a+1} = 1+a-a^2-a^3+\frac{(a^2+3)(a+1)(a-1)}{a+1} = 1+a-a^2-$
$-a^3+(a^2+3)(a-1) = 1+a-a^2-a^3+a^3+3a-a^2-3 = -2+4a-2a^2 =$
$= -2(1-2a+a^2) = -2(1^2-2\cdot 1\cdot a+a^2) = -2(1-a)^2$ **2-ой способъ**
$\left(1+a-\frac{a^2+3}{a+1}\right)(1-a^2) = \frac{(1+a)(a+1)-(a^2+3)}{a+1}(1-a^2) =$
$= \frac{(a+1)^2-(a^2+3)}{a+1}(1-a^2) = \frac{(a^2+2a+1-a^2-3)(1-a^2)}{a+1} =$
$= \frac{(2a-2)(1+a)(1-a)}{1+a} = (2a-2)(1-a) = -2(1-a)(1-a) = -2(1-a)^2$, или же $(2a-2)(1-a) = 2(a-1)\cdot-(a-1) = -2(a-1)^2$, см. выноску къ № 190'

243'. I способъ $\left(1-a+\frac{a^2-3}{a-1}\right)(1-a^2) = 1-a+\frac{a^2-3}{a-1}-a^2+a^3-a^2\cdot$
$\cdot\frac{a^2-3}{a-1} = 1-a-a^2+a^3+\frac{a^2-3}{a-1}-\frac{a^2(a^2-3)}{a-1} = 1-a-a^2+a^3+$
$+\frac{a^2-3-a^2(a^2-3)}{a-1} = 1-a-a^2+a^3+\frac{(a^2-3)(1-a^2)}{a-1} = 1-a-a^2+a^3+$
$+\frac{(a^2-3)(1^2-a^2)}{a-1} = 1-a-a^2+a^3+\frac{(a^2-3)(1+a)(1-a)}{-(1-a)} = 1-a-a^2+$
$+a^3-(a^2-3)(1+a) = 1-a-a^2+a^3-(a^2-3+a^3-3a) = 1-a-a^2+a^3-a^2+$
$+3-a^3+3a = 4+2a-2a^2 = 2(2+a-a^2)$ **II способъ** $\left(1-a+\frac{a^2-3}{a-1}\right)(1-$

$$-a^2) = \frac{(1-a)(a-1)+(a^2-3)}{a-1}(1-a^2) =$$

$$= \frac{-(a-1)^2+a^2-3}{a-1}(1-a^2) = \frac{[-(a^2-2a+1)+a^2-3]\,(1^2-a^2)}{a-1} =$$

$$= \frac{(-a^2+2a-1+a^2-3)(1+a)(1-a)}{-(1-a)} = -(2a-4)(1+a) = -2(a-2)(a+1) = -2(a^2-a-2).$$

Замѣчаніе. Умноженіе количествъ, подобныхъ выраженіямъ въ №№ 243 и 245 (см. первые способы), удобно производить по такому плану: принимая во вниманіе, что множимое есть *смѣшанная дробь*, а множитель—цѣлое выраженіе, *составляемъ произведеніе, умножая множителя на цѣлую часть множимаго, взятую цѣликомъ, и затѣмъ на дробь множимаго*. Поясним это на примѣрѣ № 243. Имѣемъ $\left(1+a-\frac{a^2+3}{a+1}\right)(1-a^2) = \left[(1+a)-\frac{a+3}{a+1}\right](1-a^2) = (1+a)(1-a^2) - \frac{a^2+3}{a+1}(1-a^2) = (1+a)(1-a^2) - \frac{(a+3)(1-a^2)}{a+1}$ и т. д.

244. $$\left(\frac{a^2+1}{2a-1} - \frac{a}{2}\right)\left(\frac{3-a}{a+2}-1\right) = \left[\frac{(a^2+1)\cdot 2}{(2a-1)\cdot 2} - \frac{a(2a-1)}{2(2a-1)}\right]\cdot\frac{3-a-(a+2)\cdot 1}{a+2} = \frac{(a^2+1)\cdot 2-a(2a-1)}{2(2a-1)}\cdot\frac{3-a-a-2}{a+2} =$$

$$= \frac{2a^2+2-2a^2+a}{2(2a-1)}\cdot\frac{1-2a}{a+2} = \frac{(2+a)\cdot(1-2a)}{2(2a-1)\cdot(a+2)} = \frac{-(2a-1)}{2(2a-1)} = -\frac{1}{2}.$$

244. $$\left(\frac{a}{2} - \frac{a^2+1}{2a+1}\right)\left(\frac{3+a}{2-a}-1\right) = \left[\frac{a(2a+1)}{2(2a+1)} - \frac{(a^2+1)\cdot 2}{(2a+1)\cdot 2}\right]\cdot\frac{3+a-1\cdot(2-a)}{2-a} = \frac{2a^2+a-(2a^2+2)}{2(2a+1)}\cdot\frac{3+a-2+a}{2-a} = \frac{a-2}{2(2a+1)}\cdot$$

$$\cdot\frac{1+2a}{2-a} = \frac{(a-2)\cdot(1+2a)}{2(2a+1)\cdot(2-a)} = \frac{a-2}{2(2-a)} = \frac{-(2-a)}{2(2-a)} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Замѣчаніе. Въ случаяхъ, подобныхъ №№ 244 и 244, т. е. когда и множимое и множитель *не одночлены*, удобнѣе примѣнять именно тотъ способъ рѣшенія, который мы назвали выше «вторымъ» и которымъ только что воспользовались, другой же способъ («первый»), непосредственно примѣняющій правило умноженія многочлена на многочленъ, здѣсь неудобенъ.

245. $$\frac{1-a^2}{1+b}\cdot\frac{1-b^2}{a+a^2}\cdot\left(1+\frac{a}{1-a}\right) = \frac{1^2-a^2}{1+b}\cdot\frac{1^2-b^2}{a(1+a)}\cdot\frac{1-a+a}{1-a} =$$

$$= \frac{(1+a)(1-a)\cdot(1+b)(1-b)\cdot 1}{(1+b)\cdot a(1+a)\cdot(1-a)} = \frac{1-b}{a}.$$

245'. $$\frac{1-b^2}{1-a}\cdot\frac{1-a^2}{b-b^2}\cdot\left(1-\frac{b}{1+b}\right) =$$

$$= \frac{1^2-b^2}{1-a}\cdot\frac{1^2-a^2}{b(1-b)}\cdot\frac{1+b-b}{1+b} = \frac{(1+b)(1-b)\cdot(1+a)(1-a)\cdot 1}{(1-a)\cdot b(1-b)\cdot(1+b)} = \frac{1+a}{b}.$$

246. $$\frac{a^2-x^2}{a+b}\cdot\frac{a^2-b^2}{ax+x^2}\cdot\left(a+\frac{ax}{a-x}\right) = \frac{a^2-x^2}{a+b}\cdot\frac{a^2-b^2}{ax+x^2}\cdot$$

$$\frac{a(a-x)+ax}{a-x} = \frac{(a+x)(a-x)}{a+b} \; \frac{(a+b)(a-b)}{x(a+x)} \; \frac{a^2}{a-x} =$$

$$= \frac{(a+x)(a-x)\,(a+b)(a-b)\,a^2}{(a+b)\,x(a+x)\,(a-x)} = \frac{a^2(a-b)}{x}$$

246' $$\frac{a^2-b^2}{a^2-ax} \; \frac{a^2-x^2}{a-b} \left(x - \frac{ax}{a+x}\right) = \frac{a^2-b^2}{a^2-ax} \; \frac{a^2-x^2}{a-b} \; \frac{x(a+x)-ax}{a+x} = \frac{(a+b)(a-b)}{a(a-x)} \; \frac{(a+x)(a-x)}{a-b} \; \frac{x^2}{a+x} = \frac{(a+b)(a-b)\,(a+x)(a-x)\,x^2}{a(a-x)\,(a-b)\,(a+x)} = \frac{x^2(a+b)}{a}$$

247 **1-ый способъ** $$\frac{3}{5x} - \frac{3}{x+y}\left(\frac{x+y}{5x} - x - y\right) = \frac{3}{5x} - \left(\frac{3}{x+y} \; \frac{x+y}{5x} - \frac{3}{x+y}\,(x+y)^{*)}\right) = \frac{3}{5x} - \frac{3\,(x+y)}{(x+y)\,5x} + \frac{3\,(x+y)}{x+y} = \frac{3}{5x} - \frac{3}{5x} + 3 = 3$$

2-ой способъ $$\frac{3}{5x} - \frac{3}{x+y}\left(\frac{x+y}{5x} - x - y\right) = \frac{3}{5x} - \frac{3}{x+y}\left[\frac{x+y}{5x} - (x+y)\right] = \frac{3}{5x} - \frac{3}{x+y} \; \frac{x+y-(x+y)\,5x}{5x} = \frac{3}{5x} - \frac{3}{x+y} \; \frac{(x+y)\,(1-5x)}{5x} = \frac{3}{5x} - \frac{3\,(x+y)\,(1-5x)}{(x+y)\,5x} = \frac{3}{5x} - \frac{3(1-5x)}{5x} = \frac{3-3(1-5x)}{5x} =$$

$$= \frac{3-3+15x}{5x} = \frac{15x}{5x} = 3$$

247' **I способъ** $$\frac{3}{5x} + \frac{3}{y-x}\left(\frac{x-y}{5x} - x + y\right) = \frac{3}{5x} + \frac{3}{y-x}\left[\frac{x-y}{5x} + (y-x)\right] = \frac{3}{5x} + \frac{3}{y-x} \; \frac{x-y}{5x} + \frac{3}{y-x}\,(y-x) = \frac{3}{5x} + \frac{3\,-(y-x)}{(y-x)\,5x} + \frac{3\,(y-x)}{y-x} = \frac{3}{5x} + \frac{-3}{5x} + 3 = 3$$

II способъ $$\frac{3}{5x} + \frac{3}{y-x}\left(\frac{x-y}{5x} - x + y\right) = \frac{3}{5x} + \frac{3}{y-x} \; \frac{x-y+5x\,(-x+y)}{5x} = \frac{3}{5x} + \frac{3}{y-x} \; \frac{x-y-5x(x-y)}{5x} = \frac{3}{5x} + \frac{3}{-(x-y)} \; \frac{(x-y)\,(1-5x)}{5x} = \frac{3}{5x} + \frac{3\,(x-y)\,(1-5x)}{-(x-y)\,5x} = \frac{3}{5x} - \frac{3(1-5x)}{5x} = \frac{3-(3-15x)}{5x} = \frac{3-3+15x}{5x} =$$

$$= \frac{15x}{5x} = 3$$

---

*) Въ самомъ дѣлѣ имѣемъ $\frac{3}{x+y}\left(\frac{x+y}{5x} - x - y\right) = \frac{3}{x+y}\left[\frac{x+y}{5x} - (x+y)\right] = \frac{3}{x+y} \; \frac{x+y}{5x} - \frac{3}{x+y}\,(x+y)$ и т. д.

$$248 \quad \left(\frac{2x}{x-y}+\frac{x-y}{y}\right)\left(1-\frac{y-1}{x}-\frac{y}{x^2}\right)=\left[\frac{2x\,y}{(x-y)y}+\frac{(x-y)\,(x-y)}{(x-y)y}\right]\cdot$$

$$\left[\frac{x^2}{x^2}-\frac{(y-1)x}{x^2}-\frac{y}{x^2}\right]=\frac{2xy+(x-y)^2}{(x-y)y}\cdot\frac{x^2-(y-1)x-y}{x^2}=$$

$$=\frac{2xy+x^2-2xy+y^2}{(x-y)y}\cdot\frac{x^2-xy+x-y}{x^2}=\frac{(x^2+y^2)\cdot(x^2-xy+x-y)}{(x-y)y\,x^2}=$$

$$=\frac{(x^2+y^2)\,[x(x-y)+(x-y)]}{(x-y)y\;x^2}=\frac{(x^2+y^2)\,(x-y)\,(x+1)}{x^2y(x-y)}=\frac{(x^2+y^2)\,(x+1)}{x^2y}$$

$$248' \quad \left(\frac{x+y}{y}-\frac{2x}{x+y}\right)\left(1+\frac{y+1}{x}+\frac{y}{x^2}\right)=\left[\frac{(x+y)\;(x+y)}{y(x+y)}-\frac{2x\;y}{(x+y)y}\right]\cdot$$

$$\left[\frac{x^2}{x^2}+\frac{(y+1)\,x}{x^2}+\frac{y}{x^2}\right]=\frac{(x+y)^2-2xy}{(x+y)y}\cdot\frac{x^2+(y+1)x+y}{x^2}=$$

$$=\frac{x^2+2xy+y^2-2xy}{(x+y)y}\cdot\frac{x^2+xy+x+y}{x^2}=\frac{(x^2+y^2)\cdot(x^2+xy+x+y)}{(x+y)y\;x^2}=$$

$$=\frac{(x^2+y^2)\,[x(x+y)+(x+y)]}{x^2y(x+y)}=\frac{(x^2+y^2)\,(x+y)\,(x+1)}{x^2y(x+y)}=$$

$$=\frac{(x^2+y^2)\,(x+1)}{x^2y}$$

$$249 \quad \left(\frac{x}{yz}-\frac{y}{xz}-\frac{z}{xy}-\frac{2}{x}\right)\left(1-\frac{2z}{x+y+z}\right)=\left(\frac{x\;x}{xyz}-\frac{y\;y}{xyz}-\right.$$

$$\left.-\frac{z\;z}{xyz}-\frac{2\;yz}{xyz}\right)\cdot\frac{1\;(x+y+z)-2z}{x+y+z}=\frac{x^2-y^2-z^2-2yz}{xyz}\cdot$$

$$\cdot\frac{x+y+z-2z}{x+y+z}=\frac{(x^2-y^2-z^2-2yz)\;(x+y-z)}{xyz\;(x+y+z)}=$$

$$=\frac{[x^2-(y^2+2yz+z^2)]\,(x+y-z)}{xyz(x+y+z)}=\frac{[x^2-(y+z)^2]\,(x+y-z)}{xyz(x+y+z)}=$$

$$=\frac{[x+(y+z)]\,[x-(y+z)](x+y-z)}{xyz(x+y+z)}=\frac{(x+y+z)\;(x-y-z)\;(x+y-z)}{xyz(x+y+z)}=$$

$$=\frac{(x-y-z)\;(x+y-z)}{xyz}=\frac{[(x-z)-y]\;[(x-z)+y]}{xyz}=\frac{(x-z)^2-y^2}{xyz}$$

$$249' \quad \left(\frac{y}{xz}-\frac{x}{yz}-\frac{z}{xy}+\frac{2}{y}\right)\left(1+\frac{2z}{x+y-z}\right)=\left(\frac{y\;y}{xyz}-\frac{x\;x}{xyz}-\right.$$

$$\left.-\frac{z\;z}{xyz}+\frac{2\;xz}{xyz}\right)\cdot\frac{1\;(x+y-z)+2z}{x+y-z}=\frac{y^2-x^2-z^2+2xz}{xyz}\cdot\frac{x+y-z+2z}{x+y-z}=$$

$$=\frac{(y^2-x^2-z^2+2xz)\;(x+y+z)}{xyz\;(x+y-z)}=\frac{[y^2-(x^2-2xz+z^2)]\,(x+y+z)}{xyz(x+y-z)}=$$

$$=\frac{[y^2-(x-z)^2]\,(x+y+z)}{xyz(x+y-z)}=\frac{[y+(x-z)]\;[y-(x-z)]\,(x+y+z)}{xyz(x+y-z)}=$$

$$= \frac{(y+x-z)(y-x+z)(x+y+z)}{xyz(x+y-z)} = \frac{(x+y+z)(y-x+z)}{xyz} =$$

$$= \frac{[(y+z)+x][(y+z)-x]}{xyz} = \frac{(y+z)^2-x^2}{xyz}$$

250 $$\left(\frac{4xy}{z^2-x^2-y^2+2xy}-1\right)\left(1-\frac{2x}{x+y+z}\right) =$$

$$= \frac{4xy-(z^2-x^2-y^2+2xy)}{z^2-x^2-y^2+2xy} \cdot \frac{(x+y+z)-2x}{x+y+z} = \frac{4xy-z^2+x^2+y^2-2xy}{z^2-x^2-y^2+2xy} \cdot \frac{x+y+z-2x}{x+y+z} = \frac{x^2+y^2+2xy-z^2}{z^2-x^2-y^2+2xy} \cdot \frac{y+z-x}{x+y+z} =$$

$$= \frac{(x^2+y^2+2xy-z^2)(y+z-x)}{(z^2-x^2-y^2+2xy)(x+y+z)} = \frac{[(x^2+2xy+y^2)-z^2](y+z-x)}{[z^2-(x^2-2xy+y^2)](x+y+z)} =$$

$$= \frac{[(x+y)^2-z^2](y+z-x)}{[z^2-(x-y)^2](x+y+z)} = \frac{[(x+y)+z][(x+y)-z](y+z-x)}{[z+(x-y)][z-(x-y)](x+y+z)} =$$

$$= \frac{(x+y+z)(x+y-z)(y+z-x)}{(z+x-y)(z-x+y)(x+y+z)} = \frac{(x+y-z)(y+z-x)}{(z+x-y)(y+z-x)} = \frac{x+y-z}{x-y+z}$$

250′ $$\left(\frac{2(x^2+y^2-z^2)}{z^2-x^2-y^2-2xy}+1\right)\left(\frac{2(z-y)}{x-y+z}-1\right) =$$

$$= \frac{2(x^2+y^2-z^2)+(z^2-x^2-y^2-2xy)}{z^2-x^2-y^2-2xy} \cdot \frac{2(z-y)-(x-y+z)}{x-y+z} =$$

$$= \frac{2x^2+2y^2-2z^2+z^2-x^2-y^2-2xy}{z^2-x^2-y^2-2xy} \cdot \frac{2z-2y-x+y-z}{x-y+z} =$$

$$= \frac{x^2+y^2-z^2-2xy}{z^2-x^2-y^2-2xy} \cdot \frac{z-y-x}{x-y+z} = \frac{(x^2+y^2-z^2-2xy)(z-y-x)}{(z^2-x^2-y^2-2xy)(x-y+z)} =$$

$$= \frac{[(x^2-2xy+y^2)-z^2](z-y-x)}{[z^2-(x^2+2xy+y^2)](x-y+z)} = \frac{[(x-y)^2-z^2](z-y-x)}{[z^2-(x+y)^2](x-y+z)} =$$

$$= \frac{[(x-y)+z][(x-y)-z](z-y-x)}{[z+(x+y)][z-(x+y)](x-y+z)} = \frac{(x-y+z)(x-y-z)(z-y-x)}{(z+x+y)(z-x-y)(x-y+z)} =$$

$$= \frac{(x-y-z)(z-x-y)}{(z+x+y)(z-x-y)} = \frac{x-y-z}{x+y+z}$$

§ 6. Дѣленіе дробей.

Какъ и въ ариѳметикѣ, дѣленіе алгебраическихъ дробей обратно умноженію сводится къ нему а именно *дѣленіе на дробь замѣняется умноженіемъ на дробь обратную вышеупомянутой*.—Замѣтимъ, что всякое цѣлое число A можетъ считаться дробью со знаменателемъ 1 въ видѣ $\frac{A}{1}$, а дробь обратная дроби $\frac{a}{b}$ есть $\frac{b}{a}$.

251 $\frac{a}{b}\ a=\frac{a\ a}{\cdot b}=\frac{1}{b}$, или же, по общему правилу (№ 253), $\frac{a}{b}\ a=\frac{a}{b\ a}=\frac{1}{b}$, ибо $\frac{a}{b}\ a=\frac{a}{b}\ \frac{1}{a}$ 251′ $c\ \frac{c}{b}=c\ \frac{b}{c}=$ $=\frac{c\ b}{c}=b$

252 $a^3\ \frac{a^2}{c}=a^3\ \frac{c}{a^2}=\frac{a^3c}{a^2}=ac$ 252′ $\frac{a^2b}{c}\ a^2=\frac{a^2b\ a^2}{c}=\frac{b}{c}$, или же, по общему правилу (№ 253), $\frac{a^2b}{c}\ a^2=\frac{a^2b}{c\ a^2}=\frac{b}{c}$ ибо $\frac{a^2b}{c}\ a^2=$ $=\frac{a^2b}{c}\cdot\frac{1}{a^2}$

253 $\frac{x}{y}\ z=\frac{x}{y}\ \frac{1}{z}=\frac{x}{y\ z}$, это равенство выражаетъ правило составленія частнаго при дѣленіи алгебраической дроби на цѣлое число 253′ $y\ \frac{x}{z}=y\ \frac{z}{x}=\frac{y\ z}{x}$ такъ составляется частное отъ дѣленія цѣлаго числа на алгебраическую дробь

254 $x\ \frac{y}{z}=$(№ 253′)$=\frac{xz}{y}$ 254′ $\frac{x}{z}\ y=$(№ 253)$=\frac{x}{zy}$ 255 $\frac{1}{b}\ a=$ $=\frac{1}{b\ a}=\frac{1}{ab}$ 255′ $c\ \frac{1}{d}=\frac{c\ d}{1}=cd$ 256 $m\ \frac{1}{n}=m\ \frac{n}{1}=mn$ 256′ $\frac{1}{p}\ q=\frac{1}{pq}$

257 $\frac{ab}{cd}\ abc=\frac{ab}{cd\ abc}=\frac{1}{c^2d}$ 257′ $abc\ \frac{ab}{cd}=\frac{abc\ cd}{ab}=c^2d$

258 $x^3y^2z\ \frac{xy}{m}=\frac{x^3y^2z\ m}{xy}=mx^2yz$ 258′ $\frac{xy}{m}\ x^3y^2z=$ $=\frac{xy}{m\ x^3y^2z}=\frac{1}{mx^2yz}$

259 $\frac{9m^3n^2}{8pq}\ 8n^2=\frac{9m^3n^2}{8pq\ 8n^2}=\frac{9m^3}{8pq\ 8}=\frac{9m^3}{64pq}$ 259′ $8n^2\ \frac{9m^3n^2}{8pq}=$ $=\frac{8n^2\ 8pq}{9m^3n^2}=\frac{8\ 8pq}{9m^3}=\frac{64pq}{9m^3}$

260 $10a^2b^3\ \frac{50a^3b^4}{7c^2}=\frac{10a^2b^3\ 7c^2}{50a^3b^4}=\frac{7c^2}{5ab}$ 260′ $\frac{50a^3b^4}{7c^2}\ 10a^2b^3=$ $=\frac{50a^3b^4}{7c^2\ 10a^2b^3}=\frac{5ab}{7c^2}$

$49x^2y^3 : \frac{7x^2y^2}{11pq} = \frac{49x^2y^3 \cdot 11pq}{7x^2y^2} = 7y \cdot 11pq = 77pqy$. **261′**. $7x^2y^2 : \frac{49x^2y^3}{11pq} = \frac{7x^2y^2 \cdot 11pq}{49x^2y^3} = \frac{11pq}{7y}$.

262. $9x^4y^5z^6 : \frac{27x^6y^9z^7}{4m^3n^2} = \frac{9x^4y^5z^6 \cdot 4m^3n^2}{27x^6y^9z^7} = \frac{4m^3n^2}{3x^2y^4z}$. **262′**. $27x^6y^9z^7 : \frac{9x^4y^5z^6}{4m^3n^2} = \frac{27x^6y^9z^7 \cdot 4m^3n^2}{9x^4y^5z^6} = 3x^2y^4z \cdot 4m^3n^2 = 12m^3n^2x^2y^4z$.

263. $\frac{a}{b} : \frac{1}{b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{1} = \frac{a}{b} \cdot b = a$ или же по общему правилу, $\frac{a}{b} : \frac{1}{b} = \frac{a \cdot b}{b \cdot 1} = \frac{a}{1} = a$. **263′**. $\frac{1}{a} : \frac{b}{a} = \frac{1}{a} \cdot \frac{a}{b} = \frac{1}{b}$, ибо $\frac{1}{a} : \frac{b}{a} = \frac{1}{a} \cdot \frac{a}{b}$.

264. $\frac{x}{y} : \frac{x}{z} = \frac{x}{y} \cdot \frac{z}{x} = \frac{x \cdot z}{y \cdot x} = \frac{z}{y}$, вообще *«когда дѣлятся дроби съ одинаковыми числителями, то можно отбросить числителей и составить обратное частное отъ дѣленія знаменателей, т. е. раздѣлить второго знаменателя на перваго»* (см. «Сборн.», стр. 91). **264′**. $\frac{z}{y} : \frac{z}{x} = \frac{x}{y}$, и въ самомъ дѣлѣ $\frac{z}{y} : \frac{z}{x} = \frac{z}{y} \cdot \frac{x}{z} = \frac{z \cdot x}{y \cdot z} = \frac{x}{y}$.

265. Срв. прав. въ № 264. $\frac{1}{c} : \frac{6ab}{c} = \frac{1}{c} \cdot \frac{c}{6ab} = \frac{1 \cdot c}{c \cdot 6ab} = \frac{1}{6ab}$; вообще *«когда дѣлятся дроби съ одинаковыми знаменателями, то знаменателей можно прямо отбросить и составить частное отъ дѣленія числителей»* («Сборн.», стр. 91). **265′**. $\frac{6ab}{c} : \frac{1}{c} = \frac{6ab}{1} = 6ab$; дѣйствительно, $\frac{6ab}{c} : \frac{1}{c} = \frac{6ab}{c} \cdot \frac{c}{1} = \frac{6ab}{c} \cdot c = 6ab$.

266. $\frac{ab}{xy} : \frac{3}{xy} = \frac{ab}{3}$ по правилу въ рѣш. № 265. **266′**. $\frac{3}{xy} : \frac{ab}{xy} = \frac{3}{ab}$ (см. тамъ же).

267. $\frac{24xy}{7ab} : \frac{16z}{9ab} = \frac{24xy \cdot 9ab}{7ab \cdot 16z} = \frac{3xy \cdot 9}{7 \cdot 2z} = \frac{27xy}{14z}$. **267′**. $\frac{21ab}{5xy} : \frac{14ab}{15z} = \frac{21ab \cdot 15z}{5xy \cdot 14ab} = \frac{3 \cdot 3z}{xy \cdot 2} = \frac{9z}{2xy}$.

268. $\frac{18x^2y}{25zu} : \frac{6x^2y}{35pz} = \frac{18x^2y \cdot 35pz}{25zu \cdot 6x^2y} = \frac{3 \cdot 7p}{5u} = \frac{21p}{5u}$. **268′**. $\frac{16zu}{9xu}$

$$\frac{55pu}{6xy^2}=\frac{10zu\;6xy^2}{9xy^2\;55pu}=\frac{2z\;2}{3\;11p}=\frac{4z}{33p}.$$

$$\textbf{269}\quad \frac{7ab}{3mn}\quad\frac{5pq}{11xy}=\frac{7ab\;11xy}{3mn\;5pq}=\frac{77abxy}{15mnpq}\qquad \textbf{269}'\quad \frac{5pq}{11xy}\quad\frac{7ab}{3mn}=$$

$$=\frac{5pq\;3mn}{11xy\;7ab}=\frac{15mnpq}{77abxy}$$

$$\textbf{270}\quad \frac{42mp}{65nq}\quad\frac{15a^2}{26b^2}=\frac{42mp\;26b^2}{65nq\;15a^2}=\frac{14mp\;2b^2}{5nq\;5a^2}=\frac{28b^2mp}{25a^2nq}\qquad \textbf{270}'$$

$$\frac{18a^2}{85b^2}\quad\frac{27mp}{34nq}=\frac{18a^2\;34nq}{85b^2\;27mp}=\frac{2a^2\;2nq}{5b^2\;3mp}=\frac{4a^2nq}{15b^2mp}$$

$$\textbf{271}\quad \frac{14a^2b^3c}{39d^5s^7}\quad\frac{35a^4b^5}{9d^7s}=\frac{14a^2b^3c\;9d^7s}{39d^5s^7\;35a^4b^5}=\frac{2c\;3d^2}{13s^6\;5a^2b^2}=\frac{6cd^2}{65a^2b^2s^6},\qquad \textbf{271}'.$$

$$\frac{25p^4q^5}{49x^4y^6}\quad\frac{30p^7sq^8}{77xy^8}=\frac{25p^4q^5\;77xy^8}{49x^4y^6\;30p^7sq^8}=\frac{5\;11y^2}{7x^3\;6p^3q^3s}=\frac{55y^2}{42p^3q^3sx^3}$$

$$\textbf{272}\quad \frac{a^{3n+2}}{b^{m-1}}\quad\frac{a^{2n+3}}{b^{1+m}}=\frac{a^{3n+2}\;b^{1+m}}{b^{m-1}\;a^{2n+3}}=a^{3n+2-2n-3}b^{1+m-m+1}=a^{n-1}b^2.$$

$$\textbf{272}'\quad \frac{a^{3n-2}}{b^{mn+1}}\quad\frac{a^{n+2}}{b^{2m+mn}}=\frac{a^{3n-2}\;b^{2m+mn}}{b^{mn+1}\;a^{n+2}}=a^{3n-2-n-2}b^{2m+mn-mn-1}=a^{2n-4}b^{2m-1}.$$

$$\textbf{273}\quad \frac{a^2b^4}{x^3y^n}\quad\frac{b^{m+3}y^{m-n}}{a^{n-1}x^{n+2}}=\frac{a^2b^4\;a^{n-1}x^{n+2}}{x^3y^n\;b^{m+3}y^{m-n}}=\frac{a^{2+n-1}x^{n+2-3}}{b^{m+3-4}y^{m-n+n}}=$$

$$=\frac{a^{n+1}x^{n-1}}{b^{m-1}y^m}\qquad \textbf{273}'\quad \frac{a^3c^n}{x^2b^n}\quad\frac{a^{n+5}c^{n+1}}{x^{n-4}b^{n+2}}=\frac{a^3c^n\;x^{n-4}b^{n+2}}{x^2b^n\;a^{n+5}c^{n+1}}=\frac{x^{n-4-2}b^{n+2-n}}{a^{n+5-3}c^{n+1-n}}=$$

$$=\frac{b^2x^{n-6}}{a^{n+2}c}$$

$$\textbf{274}\quad \frac{a^{m+n}b^{n+p}}{x^{n+p}y^{p+m}}\quad\frac{a^{n-p}b^{p-m}}{x^{p-1}y^{m-2}}=\frac{a^{m+n}b^{n+p}\;x^{p-1}y^{m-2}}{x^{n+p}y^{p+m}\;a^{n-p}b^{p-m}}=$$

$$=\frac{a^{m+n-n+p}b^{n+p-p+m}}{x^{n+p-p+1}y^{p+m-m+2}}=\frac{a^{m+p}b^{m+n}}{x^{n+1}y^{p+2}}\qquad \textbf{274}'\quad \frac{a^{m-n}b^{n-p}}{x^{n-p}y^{p-m}}$$

$$\frac{x^{p+1}y^{m+2}}{a^{n+p}b^{p+m}}=\frac{a^{m-n}b^{n-p}\;a^{n+p}b^{p+m}}{x^{n-p}y^{p-m}\;x^{p+1}y^{m+2}}=\frac{a^{m-n+n+p}b^{n-p+p+m}}{x^{n-p+p+1}y^{p-m+m+2}}=$$

$$=\frac{a^{m+p}b^{m+n}}{x^{n+1}y^{p+2}}$$

Замѣчанія къ №№ 272—274. 1°— къ № 272. Сокращеніе степеней a произведено въ предположеніи, что $n \geqslant 1$. 2°— къ № 272'. Степени a и b сокращены при условіи, что 1) $2n \geqslant 4$, т. е. $n \geqslant 2$ и 2) $2m \geqslant 1$. 3°— къ № 273. Сокращенія произведены при условіи, что m и $n \geqslant 1$. 4°— къ № 273'. Сокращенія имѣютъ (пока) смыслъ при $n \geqslant 6$.

5°— къ № 274. Судя по отвѣту и по контексту, въ условіи этого № ра въ «Сборникѣ» *опечатка*: степень y въ дѣлимомъ должна быть $(p+m)$—ая, а не $p+n$, либо въ дѣлителѣ степень y должна быть $(n-2)$—ая, а не $m-2$. Замѣтимъ, что въ виду условія № 274' первое толкованіе вѣроятнѣе.

275 $\frac{a+b}{a-b}\;\frac{b+a}{b-a} = \frac{(a+b)(b-a)}{(a-b)(b+a)} = \frac{b-a}{a-b} = \frac{-(a-b)}{a-b} = -1$

275′ $\frac{a+b}{a-b}\;\frac{b-a}{b+a} = \frac{(a+b)(b+a)}{(a-b)(b-a)} = \frac{(a+b)^2}{(a-b)\;-(a-b)} = \frac{(a+b)^2}{-(a-b)^2} = -\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2} = -\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-2ab+b^2}$ **Иначе** $\frac{a+b}{a-b}\;\frac{b-a}{b+a} = \frac{a+b}{a-b}\;\frac{b+a}{b-a} = \frac{a+b}{a-b}\;\frac{a+b}{-(a-b)} = \frac{a+b}{a-b}\;-\frac{a+b}{a-b} = -\left(\frac{a+b}{a-b}\;\frac{a+b}{a-b}\right) = -\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2$

276 $\frac{3p}{5p+5q}\;\frac{9q-9p}{10q+10p} = \frac{3(p-q)}{5(p+q)}\;\frac{9(q-p)}{10(q+p)} = \frac{3(p-q)\,10(q+p)}{5(p+q)\,9(q-p)} = \frac{2(p-q)}{3(q-p)} = \frac{2(p-q)}{-3(p-q)} = \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3}$

276′ $\frac{5p-5q}{2p+2q}\;\frac{15q-15p}{4q+4p} = \frac{5(p-q)}{2(p+q)}\;\frac{15(q-p)}{4(q+p)} = \frac{5(p-q)\,4(q+p)}{2(p+q)\,15(q-p)} = \frac{2(p-q)}{3(q-p)} = \frac{2(p-q)}{-3(p-q)} = \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3}.$

277 $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}\;\frac{3x^2+3y^2}{x+y} = \frac{(x^2+y^2)\,(x+y)}{(x^2-y^2)\,(3x^2+3y^2)} = \frac{(x^2+y^2)(x+y)}{(x+y)(x-y)\,3(x^2+y^2)} = \frac{1}{3(x-y)}$

277′ $\frac{5x^2-5y^2}{x^2+y^2}\;\frac{x-y}{x^2+y^2} = \frac{(5x^2-5y^2)\,(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)\,(x-y)} = \frac{5(x^2-y^2)}{x-y} = \frac{5(x+y)(x-y)}{x-y} = 5(x+y)$

278 $\frac{6ab-6b^2}{a(a+b)}\;\frac{2b^2}{a(a^2-b^2)} = \frac{(6ab-6b^2)\,a(a^2-b^2)}{a(a+b)\,2b^2} = \frac{6b(a-b)(a+b)(a-b)}{2b^2(a+b)} = \frac{3(a-b)^2}{b}$

278′ $\frac{3a^2}{b(b^2-a^2)}\;\frac{6ab-6a^2}{(a+b)a} = \frac{3a^2\,(a+b)\,a}{b(b^2-a^2)\,(6ab-6a^2)} = \frac{3a^3(a+b)}{b(b+a)(b-a)\,6a(b-a)} = \frac{a^2}{2b(b-a)^2}$

279 $\frac{y^2-4x^2}{y^2+4xy}\;\frac{y^2-2xy}{xy+4x^2} = \frac{(y^2-4x^2)\,(xy+4x^2)}{(y^2+4xy)\,(y^2-2xy)} = \frac{[y^2-(2x)^2]x(y+4x)}{y(y+4x)y(y-2x)} = \frac{(y+2x)(y-2x)x(y+4x)}{y^2(y+4x)(y-2x)} = \frac{x(2x+y)}{y^2}$

279′ $\frac{x^2-9y^2}{xy-2y^2}\;\frac{xy+3y^2}{x^2-2xy} = \frac{(x^2-9y^2)\,(x^2-2xy)}{(xy-2y^2)\,(xy+3y^2)} = \frac{[x^2-(3y)^2]\,x(x-2y)}{y(x-2y)y(x+3y)} = \frac{(x+3y)(x-3y)x}{y^2(x+3y)} = \frac{x(x-3y)}{y^2}$

280 $\frac{6p^3}{p^3-q^3}\;\frac{2p^2}{p^2+pq+q^2} = \frac{6p^3\,(p^2+pq+q^2)}{(p^3-q^3)\,2p^2} = \frac{3p(p^2+pq+q^2)}{(p-q)(p^2+pq+q^2)} = \frac{3p}{p-q}$

280′ $\frac{6p^4}{p^2-pq+q^2}\;\frac{12p^5}{p^3+q^3} = \frac{6p^4\,(p^3+q^3)}{(p^2-pq+q^2)\,12p^5} =$

284' $\dfrac{x-y+z}{x-y-z} \quad \dfrac{x^2+y^2-2xy-z^2}{z^2-x^2-y^2-2xy} = \dfrac{(x-y+z)(z^2-x^2-y^2-2xy)}{(x-y-z)(x^2+y^2-2xy-z^2)} =$

$= \dfrac{(x-y+z)[z^2-(x^2+2xy+y^2)]}{(x-y-z)[(x^2-2xy+y^2)-z^2]} = \dfrac{(x-y+z)[z^2-(x+y)^2]}{(x-y-z)[(x-y)^2-z^2]} =$

$= \dfrac{(x-y+z)[z+(x+y)][z-(x+y)]}{(x-y-z)(x-y+z)(x-y-z)} = \dfrac{(z+x+y)(z-x-y)}{(x-y-z)^2} = \dfrac{z^2-(x+y)^2}{(x-y-z)^2}$

285 $\dfrac{a^2+2a-3}{a^2+4a+4} \quad \dfrac{a^2-9}{a^2+3a+2} = \dfrac{(a^2+2a-3)(a^2+3a+2)}{(a^2+4a+4)(a^2-9)} =$

$= \dfrac{(a^2-a+3a-3)(a^2+a+2a+2)}{(a^2+2\cdot a\cdot 2+2^2)(a^2-3^2)} = \dfrac{[a(a-1)+3(a-1)][a(a+1)+2(a+1)]}{(a+2)^2(a+3)(a-3)} =$

$= \dfrac{(a-1)(a+3)(a+1)(a+2)}{(a+2)^2(a+3)(a-3)} = \dfrac{(a-1)(a+1)}{(a+2)(a-3)} = \dfrac{a^2-1^2}{(a+2)(a-3)} =$

$= \dfrac{a^2-1}{(a+2)(a-3)}$ **285'** $\dfrac{a^2-3a+2}{a^2-6a+9} \quad \dfrac{a^2-2a+1}{a^2-5a+6} = \dfrac{(a^2-3a+2)(a^2-5a+6)}{(a^2-6a+9)(a^2-2a+1)} =$

$= \dfrac{(a^2-a-2a+2)(a^2-2a-3a+6)}{(a^2-2\cdot a\cdot 3+3^2)(a^2-2\cdot a\cdot 1+1^2)} = \dfrac{[a(a-1)-2(a-1)][a(a-2)-3(a-2)]}{(a-3)^2(a-1)^2} =$

$= \dfrac{(a-1)(a-2)(a-2)(a-3)}{(a-3)^2(a-1)^2} = \dfrac{(a-2)^2}{(a-3)(a-1)}$

286 $\dfrac{a^2-2a-15}{a^2-8a+16} \quad \dfrac{a^2-8a+15}{a^2-a-12} = \dfrac{(a^2-2a-15)(a^2-a-12)}{(a^2-8a+16)(a^2-8a+15)} =$

$= \dfrac{(a^2+3a-5a-15)(a^2+3a-4a-12)}{(a^2-2\cdot a\cdot 4+4^2)(a^2-3a-5a+15)} = \dfrac{[a(a+3)-5(a+3)][a(a+3)-4(a+3)]}{(a-4)^2[a(a-3)-5(a-3)]} =$

$= \dfrac{(a+3)(a-5)(a+3)(a-4)}{(a-4)^2(a-3)(a-5)} = \dfrac{(a+3)^2}{(a-3)-(a-4)}$ **286'** $\dfrac{a^2-3a-28}{a^2-25}$

$\dfrac{a^2+3a-4}{a^2+2a-35} = \dfrac{(a^2-3a-28)(a^2+2a-35)}{(a^2-25)(a^2+3a-4)} =$

$= \dfrac{(a^2+4a-7a-28)(a^2-5a+7a-35)}{(a^2-5^2)(a^2-a+4a-4)} = \dfrac{[a(a+4)-7(a+4)][a(a-5)+7(a-5)]}{(a+5)(a-5)[a(a-1)+4(a-1)]} =$

$= \dfrac{(a+4)(a-7)(a-5)(a+7)}{(a+5)(a-5)(a-1)(a+4)} = \dfrac{(a-7)(a+7)}{(a+5)(a-1)} = \dfrac{a^2-7^2}{(a+5)(a-1)} =$

$= \dfrac{a^2-49}{(a+5)(a-1)}$

287 $\dfrac{x^6+1}{x^2-1} \quad \dfrac{(x^2-1)^2+x^2}{x^2-2x+1} = \dfrac{(x^6+1)(x^2-2x+1)}{(x^2-1)[(x^2-1)^2+x^2]} =$

$= \dfrac{[(x^2)^3+1^3](x^2-2\cdot x\cdot 1+1^2)^{*)}}{(x^2-1^2)[(x^2)^2-2\cdot x^2\cdot 1+1^2+x^2]} = \dfrac{[(x^2)^1+1][(x^2)^2-(x^2)^1\cdot 1+1^2](x-1)^2}{(x+1)(x-1)(x^4-x^2+1)} =$

---

*) Въ формулѣ $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$ полагаемъ $\alpha=x^2$, $\beta=1$ тогда $x^6+1=$ $=(x^2)^3+1^3=(x^2+1)[(x^2)^2-(x^2)^1\cdot 1+1^2]=$ и т. д.

$$= \frac{(p+q)(p^2-pq+q^2)}{2p(p^2-pq+q^2)} = \frac{p+q}{2p}$$

281 $\frac{a^2-2ab+b^2}{a^2-ab+b^2} : \frac{a-b}{a^3+b^3} = \frac{(a^2-2ab+b^2)(a^3+b^3)}{(a^2-ab+b^2)(a-b)} =$

$= \frac{(a-b)^2(a+b)(a^2-ab+b^2)}{(a^2-ab+b^2)(a-b)} = (a-b)(a+b) = a^2-b^2$ **281′** $\frac{a^2+2ab+b^2}{a^3-b^3} :$

$\frac{a+b}{a^2+ab+b^2} = \frac{(a^2+2ab+b^2)(a^2+ab+b^2)}{(a^3-b^3)(a+b)} = \frac{(a+b)^2(a^2+ab+b^2)}{(a-b)(a^2+ab+b^2)(a+b)}$

$= \frac{a+b}{a-b}$

282 $\frac{a^2+b^2}{1+x+x^2} : \frac{a^4-b^4}{1+x^2+x^4} = \frac{(a^2+b^2)(1+x^2+x^4)}{(1+x+x^2)(a^4-b^4)} =$

$= \frac{(a^2+b^2)[(1+2x^2+x^4)-x^2]}{(1+x+x^2)[(a^2)^2-(b^2)^2]} = \frac{(a^2+b^2)[(1+x^2)^2-x^2]}{(1+x+x^2)(a^2+b^2)(a^2-b^2)}$

$= \frac{(1+x^2+x)(1+x^2-x)}{(1+x+x^2)(a^2-b^2)} = \frac{1-x+x^2}{a^2-b^2}$ **282′** $\frac{a^2-b^2}{1+y^2+y^4} : \frac{a^4-b^4}{1-y+y^2}$

$= \frac{(a^2-b^2)(1-y+y^2)}{(1+y^2+y^4)(a^4-b^4)} = \frac{(a^2-b^2)(1-y+y^2)}{[(1+2y^2+y^4)-y^2][(a^2)^2-(b^2)^2]} =$

$= \frac{(a^2-b^2)(1-y+y^2)}{[(1+y^2)^2-y^2](a^2+b^2)(a^2-b^2)} = \frac{1-y+y^2}{(1+y^2+y)(1+y^2-y)(a^2+b^2)}$

$= \frac{1}{(1+y+y^2)(a^2+b^2)}$

283 См. формулы 7-ю и 10-ю на 44 стр. Сборника. $\frac{x^2+(a+b)x+ab}{x^2-(a-c)x-ac} :$

$\frac{x^2-a^2}{x^2-c^2} = \frac{[x^2+(a+b)x+ab](x^2-c^2)}{[x^2-(a-c)x-ac](x^2-a^2)} = \frac{(x+a)(x+b)(x+c)(x-c)}{(x-a)(x+c)(x+a)(x-a)}$

$= \frac{(x+b)(x-c)}{(x-a)^2}$ **283′** $\frac{x^2+ax-cx-ac}{x^2+bx+cx+bc} : \frac{x^2-a^2}{x^2-b^2} =$

$= \frac{(x^2+ax-cx-ac)(x^2-b^2)}{(x^2+bx+cx+bc)(x^2-a^2)} = \frac{[x(x+a)-c(x+a)](x+b)(x-b)}{[x(x+b)+c(x+b)](x+a)(x-c)}$

$= \frac{(x+a)(x-c)(x+b)(x-b)}{(x+b)(x+c)(x+a)(x-a)} = \frac{(x-b)(x-c)}{(x-a)(x+c)}$

284 $\frac{x^2+y^2+2xy-z^2}{z^2-x^2-y^2+2xy} : \frac{x+y+z}{y+z-x} = \frac{(x^2+y^2+2xy-z^2)(y+z-x)}{(z^2-x^2-y^2+2xy)(x+y+z)}$

$= \frac{[(x^2+2xy+y^2)-z^2](y+z-x)}{[z^2-(x^2-2xy+y^2)](x+y+z)} = \frac{[(x+y)^2-z^2](y+z-x)}{[z^2-(x-y)^2](x+y+z)}$

$= \frac{(x+y+z)(x+y-z)(y+z-x)}{[z+(x-y)][z-(x-y)](x+y+z)} = \frac{(x+y-z)(y+z-x)}{(x-y+z)(z-x+y)} = \frac{x+y-z}{x-y+z}$

$$= \frac{(x^2+1)(x^4-x^2+1)(x-1)}{(x+1)(x^4-x^2+1)} = \frac{(x^2+1)(x-1)}{x+1}$$

287′. $$\frac{x^6-1}{x^2+2x+1} : \frac{x^4+x^2+1}{x^2-1} = \frac{(x^6-1)(x^2-1)}{(x^2+2x+1)(x^4+x^2+1)} = \frac{[(x^2)^3-1^3](x^2-1^2)}{(x^2+2\cdot x\cdot 1+1^2)(x^4+x^2+1)} =$$

$$= \frac{[(x^2)^1-1^1][(x^2)^2+(x^2)^1\cdot 1^1+1^2](x+1)(x-1)}{(x+1)^2(x^4+x^2+1)} =$$

$$= \frac{(x^2-1)(x^4+x^2+1)(x-1)}{(x+1)(x^4+x^2+1)} = \frac{(x^2-1^2)(x-1)}{x+1} = \frac{(x+1)(x-1)(x-1)}{x+1} =$$

$=(x-1)^2$. **Другой способъ**: $$\frac{x^6-1}{x^2+2x+1} : \frac{x^4+x^2+1}{x^2-1} =$$

$$= \frac{(x^6-1)(x^2-1)}{(x^2+2x+1)(x^4+x^2+1)} = \frac{[(x^3)^2-1^2](x+1)(x-1)}{(x+1)^2[(x^4+2x^2+1)-x^2]} =$$

$$= \frac{(x^3+1)(x^3-1)(x-1)^{**)}}{(x+1)[(x^2+1)^2-x^2]} = \frac{(x+1)(x^2-x+1)(x-1)(x^2+x+1)(x-1)}{(x+1)(x^2+1+x)(x^2+1-x)} =$$

$=(x-1)(x-1)=(x-1)^2$

288. $$\frac{x^4-3x^2+1}{x^3-27} : \frac{x^2+x-1}{x^2+3x+9} = \frac{(x^4-3x^2+1)(x^2+3x+9)}{(x^3-27)(x^2+x-1)} =$$

$$= \frac{[(x^4-2x^2+1)-x^2](x^2+3x+9)}{(x^3-3^3)(x^2+x-1)} = \frac{[(x^2-1)^2-x^2](x^2+3x+9)}{(x-3)(x^2+x\cdot 3+3^2)(x^2+x-1)} =$$

$$= \frac{(x^2-1+x)(x^2-1-x)(x^2+3x+9)}{(x-3)(x^2+3x+9)(x^2+x-1)} = \frac{x^2-x-1}{x-3}$$

288′. $$\frac{y^4-2y^3+y^2-1}{8y^3+1} : \frac{y^2-y-1}{4y^2-2y+1} = \frac{(y^4-2y^3+y^2-1)(4y^2-2y+1)}{(8y^3+1)(y^2-y-1)} =$$

$$= \frac{[(y^4-2y^3+y^2)-1][(2y)^2-2y+1]}{[(2y)^3+1^3](y^2-y-1)} = \frac{\{[(y^2)^2-2(y^2)^1 y+y^2]-1\}(4y^2-2y+1)}{(2y+1)[(2y)^2-2y\cdot 1+1^2](y^2-y-1)} =$$

$$= \frac{[(y^2-y)^2-1^2](4y^2-2y+1)}{(2y+1)(4y^2-2y+1)(y^2-y-1)} = \frac{(y^2-y+1)(y^2-y-1)}{(2y+1)(y^2-y-1)} = \frac{y^2-y+1}{2y+1}$$

289. $$\frac{25p^4+10p^2+4}{25p^2-10p+4} : \frac{125p^6-8}{125p^3+8} = \frac{(25p^4+10p^2+4)(125p^3+8)}{(25p^2-10p+4)(125p^6-8)} =$$

$$= \frac{[(5p^2)^2+2\cdot 5p^2+2^2][(5p)^3+2^3]}{[(5p)^2-2\cdot 5p+2^2][(5p^2)^3-2^3]} = \frac{(25p^4+10p^2+4)(5p+2)[(5p)^2-5p\cdot 2+2^2]}{(25p^2-10p+4)(5p^2-2)[(5p^2)^2+5p^2\cdot 2+2^2]} =$$

$$= \frac{5p+2}{5p^2-2}$$

289. $$\frac{q^2+3q+9}{q^4-3q^2+9} : \frac{q^3-27}{q^6+27} = \frac{(q^2+3q+9)(q^6+27)}{(q^4-3q^2+9)(q^3-27)} =$$

---

*) Въ формулѣ $\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$ полагаемъ $\alpha=x^2$, $\beta=1$, тогда $x^6-1=(x^2)^3-1^3=[(x^2)^1-1][(x^2)^2+(x^2)^1\cdot 1^1+1^2]=$ и т. д.

**) Имѣемъ вообще $A^3\pm1=(A\pm1)(A^2\mp A+1)$, легко провѣрить, а равно и доказать теоретически справедливость этой формулы.

$$= \frac{(q^2+3q+9)[(q^2)^3+3^3]}{(q^4-3q^2+9)(q^3-3^3)} = \frac{(q^2+3q+9)[(q^2)^1+3]\,[(q^2)^2-(q^2)^1\cdot 3+3^2]}{(q^4-3q^2+9)\,(q-3)\,(q^2+q\cdot 3+3^2)} =$$

$$= \frac{(q^2+3q+9)(q^2+3)\,(q^4-3q^2+9)}{(q^4-3q^2+9)\,(q-3)\,(q^2+3q+9)} = \frac{q^2+3}{q-3}$$

290 $$\frac{6p^2q^3}{m+n} : \left\{\frac{3(m-n)q}{7(r+s)} : \left[\frac{4(r-s)}{21p^2q^2} : \frac{r^2-s^2}{4(m^2-n^2)}\right]\right\} = \frac{6p^2q^3}{m+n} :$$

$$: \left\{\frac{3(m-n)q}{7(r+s)} : \left[\frac{4(r-s)\cdot 4(m^2-n^2)}{21p^2q^2\cdot(r^2-s^2)}\right]\right\} = \frac{6p^2q^3}{m+n} :$$

$$: \frac{3(m-n)q\,[21p^2q^2\cdot(r^2-s^2)]}{7(r+s)\,[4(r-s)\cdot 4(m^2-n^2)]} = \frac{6p^2q^3\cdot\{7(r+s)\cdot[4(r-s)\cdot 4(m^2-n^2)]\}}{(m+n)\cdot\{3(m-n)q\cdot[21p^2q^2\cdot(r^2-s^2)]\}} =$$

$$= \frac{6p^2q^3\cdot 7(r+s)\cdot 4(r-s)\cdot 4(m+n)(m-n)}{(m+n)\cdot 3(m-n)q\cdot 21p^2q^2\cdot(r+s)(r-s)} = \frac{2\cdot 4\cdot 4}{3} = \frac{32}{3} = 10^2/_3$$

290′ $$\frac{4m^3n^2}{m-n} : \left\{\frac{m(m+n)}{p-q} : \left[\frac{5(p+q)}{m^2n^2} : \frac{15(p^2-q^2)}{4(m^2-n^2)}\right]\right\} = \frac{4m^3n^2}{m-n} : \left[\frac{m(m+n)}{p-q} :\right.$$

$$\left. : \frac{5(p+q)\cdot 4(m^2-n^2)}{m^2n^2\cdot 15(p^2-q^2)}\right] = \frac{4m^3n^2}{m-n} : \frac{m(m+n)\cdot[m^2n^2\cdot 15(p^2-q^2)]}{(p-q)\cdot[5(p+q)\cdot 4(m^2-n^2)]} =$$

$$= \frac{4m^3n^2\cdot\{(p-q)\cdot[5(p+q)\cdot 4(m^2-n^2)]\}}{(m-n)\cdot\{m(m+n)\cdot[m^2n^2\cdot 15(p^2-q^2)]\}} =$$

$$= \frac{4m^3n^2\,(p-q)\,5(p+q)\,4(m+n)(m-n)}{(m-n)\,m(m+n)\,m^2n^2\,15(p+q)\,(p-q)} = \frac{4\cdot 4}{3} = \frac{16}{3} = 5^1/_3$$

Замѣчаніе. №№ 290—290′ характеризуютъ примѣненіе различныхъ скобокъ при дѣленіи алгебраич. дробей. Мы видѣли, что при сложеніи и вычитаніи можно было раскрывать скобки, начиная какъ съ малыхъ, такъ и съ фигурныхъ (отд. III § 6); при умноженіи скобки весьма просто раскрываются; наконецъ, въ случаѣ дѣленія, какъ только что показано, раскрытіе скобокъ слѣдуетъ начинать съ внутреннихъ, постепенно переходя къ внѣшнимъ.

$$\frac{\frac{a}{m}+\frac{b}{m}}{\frac{c}{m}} = \frac{\frac{a+b}{m}}{\frac{c}{m}} = \frac{a+b}{m} : \frac{c}{m} = \frac{(a+b)\cdot m}{m\cdot c} = \frac{a+b}{c} \qquad 291'$$

$$\frac{\frac{b}{n}-\frac{c}{n}}{\frac{a}{n}} = \frac{\frac{b-c}{n}}{\frac{a}{n}} = \frac{b-c}{n} : \frac{a}{n} = \frac{(b-c)\cdot n}{n\cdot a} = \frac{b-c}{a}$$

292 $$\frac{\frac{m}{x}-\frac{n}{y}}{\frac{m}{x}+\frac{n}{x}} = \frac{\frac{my}{xy}-\frac{nx}{xy}}{\frac{m}{x}+\frac{n}{x}} = \frac{\frac{my-nx}{xy}}{\frac{m+n}{x}} = \frac{my-nx}{xy} :$$

$$: \frac{m+n}{x} = \frac{(my-nx)\cdot x}{xy\cdot(m+n)} = \frac{my-nx}{(m+n)y}$$

292′ $$\frac{\frac{n}{z}+\frac{m}{z}}{\frac{m}{x}-\frac{n}{z}} = \frac{\frac{m+n}{z}}{\frac{mz}{xz}-\frac{nx}{xz}} =$$

$$= \frac{\frac{m+n}{z}}{\frac{mz-nx}{xz}} = \frac{m+n}{z} \quad \frac{mz-nx}{xz} = \frac{(m+n)\ xz}{z\ (mz-nx)} = \frac{(m+n)x}{mz-nx}$$

293 $$\frac{\frac{a}{x^2}-\frac{b}{xy}}{\frac{c}{xy^2}} = \frac{\frac{ay}{x^2y}-\frac{bx}{x^2y}}{\frac{c}{xy^2}} = \frac{\frac{ay-bx}{x^2y}}{\frac{c}{xy^2}} = \frac{ay-bx}{x^2y} \quad \frac{c}{xy^2} =$$

$$= \frac{(ay-bx)\ xy^2}{x^2y\ c} = \frac{(ay-bx)y}{cx}$$

293' $$\frac{\frac{a}{xy}+\frac{c}{y^2}}{\frac{b}{x^2y}} = \frac{\frac{ay}{xy^2}+\frac{cx}{xy^2}}{\frac{b}{x^2y}} =$$

$$= \frac{\frac{ay+cx}{xy^2}}{\frac{b}{x^2y}} = \frac{ay+cx}{xy^2} \quad \frac{b}{x^2y} = \frac{(ay+cx)\ x^2y}{xy^2\ b} = \frac{(ay+cx)x}{by}$$

294 $$\frac{\frac{p}{yz}-\frac{q}{x^2}}{\frac{p}{xz}+\frac{q}{y^2}} = \frac{\frac{px^2}{x^2yz}-\frac{qyz}{x^2yz}}{\frac{py^2}{xy^2z}+\frac{qxz}{xy^2z}} = \frac{\frac{px^2-qyz}{x^2yz}}{\frac{py^2+qxz}{xy^2z}} =$$

$$= \frac{(px^2-qyz)\ xy^2z}{x^2yz\ (py^2+qxz)} = \frac{(px^2-qyz)y}{(py^2+qxz)x}$$

294' $$\frac{\frac{p}{y^2}+\frac{q}{xz}}{\frac{p}{x}-\frac{q}{xy}} = \frac{\frac{pxz}{xy^2z}+\frac{qy^2}{xy^2z}}{\frac{py}{xy}-\frac{q}{xy}} =$$

$$= \frac{\frac{pxz+qy^2}{xy^2z}}{\frac{py-q}{xy}} = \frac{(pxz+qy^2)\ xy}{xy^2z\ (py-q)} = \frac{pxz+qy^2}{yz(py-q)}$$

295 $$\left(m+\frac{mn}{m-n}\right):\left(m-\frac{mn}{m+n}\right) = \frac{m(m-n)+mn}{m-n} : \frac{m(m+n)-mn}{m+n} =$$

$$= \frac{m^2-mn+mn}{m-n} \quad \frac{m^2+mn-mn}{m+n} = \frac{m^2}{m-n} \quad \frac{m^2}{m+n} =$$

$$= \frac{m^2\ (m+n)}{(m-n)\ m^2} = \frac{m+n}{m-n}$$

295' $$\left(1-\frac{y}{x+y}\right):\left(1+\frac{y}{x-y}\right) = \frac{1\ (x+y)-y}{x+y} :$$

$$: \frac{1\ (x-y)+y}{x-y} = \frac{x+y-y}{x+y} : \frac{x-y+y}{x-y} = \frac{x}{x+y} : \frac{x}{x-y} = \frac{x\ (x-y)}{(x+} =$$

$$= \frac{x-y}{x+y}$$

296 $$\left(\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}\right):\left(\frac{x-y}{x+y}+\frac{x+y}{x-y}\right) = \Bigg[\frac{(x+y)(x+y)}{(x-y)(x+y)} -$$

$$-\frac{(x-y)(x-y)}{(x+y)(x-y)}\Big]:\Big[\frac{(x-y)(x-y)}{(x+y)(x-y)}+\frac{(x+y)(x+y)}{(x-y)(x+y)}\Big]=\frac{(x+y)^2-(x-y)^2}{(x+y)(x-y)}:$$

$$:\frac{(x-y)^2+(x+y)^2}{(x+y)(x-y)}=\frac{(x+y+x-y)(x+y-x+y)}{x^2-y^2}:\frac{x^2-2xy+y^2+x^2+2xy+y^2}{x^2-y^2}=$$

$$=\frac{2x\cdot 2y}{x^2-y^2}:\frac{2x^2+2y^2}{x^2-y^2}=\frac{4xy\,(x^2-y^2)}{(x^2-y^2)\,(2x^2+2y^2)}=\frac{4xy}{2(x^2+y^2)}=\frac{2xy}{x^2+y^2}$$

296′ $\left(\frac{2-n}{2+n}-\frac{n+2}{n-2}\right):\left(\frac{2+n}{2-n}+\frac{n-2}{n+2}\right)=\Big[\frac{(2-n)(n-2)}{(2+n)(n-2)}-$

$$-\frac{(n+2)(2+n)}{(n-2)(2+n)}\Big]:\Big[\frac{(2+n)(n+2)}{(2-n)(n+2)}+\frac{(n-2)(2-n)}{(n+2)(2-n)}\Big]=\frac{-(2-n)^2-(2+n)^2}{-(2+n)(2-n)}:$$

$$:\frac{(2+n)^2-(2-n)^2}{(2+n)(2-n)}=\frac{(2-n)^2+(2+n)^2}{(2+n)(2-n)}:\frac{[(2+n)+(2-n)][(2+n)-(2-n)]}{2^2-n^2}=$$

$$=\frac{2^2-2\cdot2\cdot n+n^2+2^2+2\cdot2\cdot n+n^2}{2^2-n^2}:\frac{(2+n+2-n)\,(2+n-2+n)}{4-n^2}=$$

$$=\frac{4-4n+n^2+4+4n+n^2}{4-n^2}:\frac{4\cdot 2n}{4-n^2}=\frac{8+2n^2}{4-n^2}:\frac{8n}{4-n^2}=\frac{(8+2n^2)\,(4-n^2)}{(4-n^2)\,8n}=$$

$$=\frac{8+2n^2}{8n}=\frac{2(4+n^2)}{8n}=\frac{n^2+4}{4n}$$

297 $\left(\frac{x^2}{2a^2}-4+\frac{6a^2}{x^2}\right)\cdot\left(\frac{x}{2a}-\frac{3a}{x}\right)=\left(\frac{x^2\cdot x^2}{2a^2\cdot x^2}-\frac{4\cdot 2a^2x^2}{2a^2x^2}+\right.$

$$\left.+\frac{6a^2\cdot 2a^2}{2a^2x^2}\right)\cdot\left(\frac{x\cdot x}{2ax}-\frac{3a\cdot 2a}{2ax}\right)=\frac{x^4-8a^2x^2+12a^4}{2a^2x^2}\cdot\frac{x^2-6a^2}{2ax}=$$

$$=\frac{(x^4-8a^2x^2+12a^4)\,2ax}{2a^2x^2\,(x^2-6a^2)}=\frac{x^4-2a^2x^2-6a^2x^2+12a^4}{ax(x^2-6a^2)}=$$

$$=\frac{x^2(x^2-2a^2)-6a^2(x^2-2a^2)}{ax(x^2-6a^2)}=\frac{(x^2-2a^2)(x^2-6a^2)}{ax(x^2-6a^2)}=\frac{x^2-2a^2}{ax}$$ 297′

$$\left(\frac{x}{2a^2}-\frac{2a}{x^2}\right)\cdot\left(\frac{x^3}{4a^3}-\frac{1}{4}-\frac{3a^3}{x^3}\right)=\left(\frac{x\cdot x^2}{2a^2x^2}-\frac{2a\cdot 2a^2}{2a^2x^2}\right)\cdot$$

$$\left(\frac{x^3\cdot x^3}{4a^3x^3}-\frac{a^3x^3}{4a^3x^3}-\frac{3a^3\cdot 4a^3}{2a^3x^3}\right)=\frac{x^3-4a^3}{2a^2x^2}\cdot\frac{x^6-a^3x^3-12a^6}{4a^3x^3}=$$

$$=\frac{(x^3-4a^3)\,4a^3x^3}{2a^2x^2\,(x^6-a^3x^3-12a^6)}=\frac{2ax(x^3-4a^3)}{x^6+3a^3x^3-4a^3x^3-12a^6}=$$

$$=\frac{2ax(x^3-4a^3)}{x^3(x^3+3a^3)-4a^3(x^3+3a^3)}=\frac{2ax(x^3-4a^3)}{(x^3+3a^3)(x^3-4a^3)}=\frac{2ax}{x^3+3a^3}$$

298 $\left(x+\frac{y-x}{1+xy}\right):\left(1+\frac{y-x}{1-xy}\cdot x\right)=\frac{x(1+xy)+(y-x)}{1+xy}:$

$$:\frac{1\cdot(1-xy)+(y-x)x}{1-xy}=\frac{x+x^2y+y-x}{1+xy}:\frac{1-xy+xy-x^2}{1-xy}=\frac{x^2y+y}{1+xy}:$$

$$\frac{1-x^2}{1-xy}=\frac{(x^2y+y)\ (1-xy)}{(1+xy)\ (1-x^2)}=\frac{y(1+x^2)(1-xy)}{(1+xy)(1-x^2)}$$

298′ $\left(x+\frac{y^2}{x+y}\right):$

$$\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{x+y}\right)=\frac{x(x+y)+y^2}{x+y}:\left[\frac{y\ (x+y)}{x(x+y)}+\frac{x\ x}{x(x+y)}\right]=\frac{x^2+xy+y^2}{x+y}:$$

$$\frac{xy+y^2+x^2}{x(x+y)}=\frac{(x^2+xy+y^2)\ x(x+y)}{(x+y)\ (xy+y^2+x^2)}=x$$

299 $\left(\frac{m+n}{m-n}+\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}\right):\left(\frac{m-n}{m+n}-\frac{m^3-n^3}{m^3+n^3}\right)=\left(\frac{m+n}{m-n}+\right.$

$$\left.+\frac{m^2+n^2}{(m+n)(m-n)}\right):\left(\frac{m-n}{m+n}-\frac{m^3-n^3}{(m+n)(m^2-mn+n^2)}\right)=\left[\frac{(m+n)(m+n)}{(m-n)(m+n)}+\right.$$

$$\left.+\frac{m^2+n^2}{(m+n)(m-n)}\right]:\left[\frac{(m-n)(m^2-mn+n^2)}{(m+n)(m^2-mn+n^2)}-\frac{m^3-n^3}{m^3+n^3}\right]=$$

$$=\frac{(m+n)^2+(m^2+n^2)}{(m+n)(m-n)}:\frac{(m-n)(m^2-mn+n^2)-(m^3-n^3)}{(m+n)(m^2-mn+n^2)}=$$

$$=\frac{m^2+2mn+n^2+m^2+n^2}{(m+n)(m-n)}:\frac{m^3-m^2n-m^2n+mn^2+mn^2-n^3-m^3+n^3}{(m+n)(m^2-mn+n^2)}=$$

$$=\frac{2m^2+2mn+2n^2}{(m+n)(m-n)}:\frac{-2m^2n+2mn^2}{(m+n)(m^2-mn+n^2)}=$$

$$=\frac{(2m^2+2mn+2n^2)\ (m+n)(m^2-mn+n^2)}{(m+n)(m-n)\ (-2m^2n+2mn^2)}=\frac{2(m^2+mn+n^2)(m^2-mn+n^2)}{(m-n)\ -2mn(m-n)}=$$

$$=\frac{[(m^2+n^2)+mn]\,[(m^2+n^2)-mn]}{-mn(m-n)^2}=-\frac{(m^2+n^2)^2-(mn)^2}{mn(m-n)^2}=$$

$$=-\frac{(m^2)^2+2\ m^2\ n^2+(n^2)^2-mn\ mn}{mn(m-n)^2}=-\frac{m^4+2m^2n^2+n^4-m^2n^2}{mn(m-n)^2}=$$

$$=-\frac{m^4+m^2n^2+n^4}{mn(m-n)^2}$$

299 $\left(\frac{m+n}{m-n}-\frac{m^3+n^3}{m^3-n^3}\right)\ \left(\frac{m-n}{m+n}+\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}\right)=\left[\frac{m+n}{m-n}-\right.$

$$\left.-\frac{m^3+n^3}{(m-n)(m^2+mn+n^2)}\right]\ \left[\frac{m-n}{m+n}+\frac{m^2+n^2}{(m+n)\ (m-n)}\right]=$$

$$=\left[\frac{(m+n)(m^2+mn+n^2)}{(m-n)(m^2+mn+n^2)}-\frac{m^3+n^3}{(m-n)(m^2+mn+n^2)}\right]\ \left[\frac{(m-n)(m-n)}{(m+n)\ (m-n)}+\right.$$

$$\left.+\frac{m^2+n^2}{(m+n)\ (m-n)}\right]=\frac{(m+n)(m^2+mn+n^2)-(m^3+n^3)}{(m-n)(m^2+mn+n^2)}$$

$$\frac{(m-n)^2+(m^2+n^2)}{(m+n)(m-n)}=\frac{m^3+m^2n+m^2n+mn^2+mn^2+n^3-m^3-n^3}{(m-n)(m^2+mn+n^2)}$$

$$\frac{m^2-2mn+n^2+m^2+n^2}{(m+n)(m-n)}=\frac{2m^2n+2mn^2}{(m-n)(m^2+mn+n^2)}\quad\frac{2m^2-2mn+2n^2}{(m+n)(m-n)}=$$

$$= \frac{(2m^2n+2mn^2)\ (m+n)(m-n)}{(m-n)(m^2+mn+n^2)\ (2m^2-2mn+2n^2)} =$$

$$= \frac{2mn(m+n)(m+n)}{(m^2+mn+n^2)\ 2(m^2-mn+n^2)} = \frac{mn(m+n)^2}{[(m^2+n^2)+mn]\,[(m^2+n^2)-mn]} =$$

$$= \frac{mn(m+n)^2}{(m^2+n^2)^2-(mn)^2} = \frac{mn(m+n)^2}{(m^2)^2+2m^2n^2+(n^2)^2-mn\ mn} =$$

$$= \frac{mn(m+n)^2}{m^4+2m^2n^2+n^4-m^2n^2} = \frac{mn(m+n)^2}{m^4+m^2n^2+n^4}$$

300 $$\left[\frac{9m^2-3n^2}{4mn} - \frac{m-4n}{5n}\right]\ \left[\frac{2m+n}{3m} - \frac{5n^2-3m^2}{16m^2}\right] =$$

$$= \left[\frac{(9m^2-3n^2)\ 5}{4mn\ 5} - \frac{(m-4n)\ 4m}{5n\ 4m}\right]\ \left[\frac{(2m+n)\ 16m}{3m\ 16m} -\right.$$

$$\left. - \frac{(5n^2-3m^2)\ 3}{16m^2\ 3}\right] = \frac{(9m^2-3n^2)\ 5-(m-4n)\ 4m}{20mn}$$

$$\frac{(2m+n)\ 16m-(5n^2-3m^2)\ 3}{48m^2} = \frac{45m^2-15n^2-4m^2+16mn}{20mn}$$

$$\frac{32m^2+16mn-15n^2+9m^2}{48m^2} = \frac{41m^2+16mn-15n^2}{20mn}$$

$$\frac{41m^2+16mn-15n^2}{48m^2} = \frac{(41m^2+16mn-15n^2)\ 48m^2}{20mn\ (41m^2+16mn-15n^2)} = \frac{48m^2}{20mn} = \frac{12m}{5n}$$

300' $$\left[\frac{5m^3+n^3}{2mn^2} - \frac{8m^2-5n}{3m^{*)}}\right]\ \left[\frac{2(m-2n^2)}{21n} + \frac{m}{12n} + \frac{13n^2}{84m^2}\right] =$$

$$= \left[\frac{(5m^3+n^3)\ 3}{2mn^2\ 3} - \frac{(8m^2-5n)\ 2mn}{3m\ 2n^2}\right]\ \left[\frac{2(m-2n^2)\ 4m^2}{21n\ 4m} + \right.$$

$$\left. + \frac{m\ 7m^2}{12n\ 7m^2} + \frac{13n^2\ n}{84m^2\ n}\right] = \frac{3(5m^3+n^3)-2n^2(8m^2-5n)}{6mn^2}$$

$$\frac{8m^2(m-2n^2)+7m^3+13n^3}{84m^2n} = \frac{15m^3+3n^3-16m^2n^2+10n^3}{6mn^2}$$

$$\frac{8m^3-16m^2n^2+7m^3+13n^3}{84m^2n} = \frac{15m^3-6m^2n^2+13n^3}{6mn^2}$$

$$\frac{15m^3-16m^2n^2+3n^3}{84m^2n} = [illegible] = \frac{84m^2n}{6mn^2} = \frac{14m}{n}$$

301 $$\frac{1+\frac{1}{a-1}}{1-\frac{1}{a+1}} = \frac{\frac{1\ (a-1)+1}{a-1}}{\frac{1\ (a+1)-1}{a+1}} = \frac{a-1+1}{a-1}\ \frac{a+1-1}{a+1} = \frac{a}{a-1}$$

---

*) Этотъ знаменатель, судя по окружающему тексту, долженъ быть $3m$, а не 3; послѣдній слѣдуетъ считать *опечаткой*.

$$\frac{(q-p)(q-6p)+4p^2}{q-6p} = \frac{(q-p)^2-(4p)^2}{q-p} \quad \frac{q^2-pq-6pq+6p^2+4p^2}{q-6p} =$$

$$= \frac{(q-p+4p)(q-p-4p)}{q-p} \quad \frac{q^2-7pq+10p^2}{q-6p} = \frac{(q+3p)(q-5p)}{q-p}$$

$$\frac{q^2-2pq-5pq+10p^2}{q-6p} = \frac{(q+3p)(q-5p)}{q-p} \quad \frac{q(q-2p)-5p(q-2p)}{q-6p} =$$

$$= \frac{(q+3p)(q-5p)}{q-p} \quad \frac{(q-2p)(q-5p)}{q-6p} = \frac{(q+3p)(q-5p)(q-6p)}{(q-p)(q-2p)(q-5p)} =$$

$$= \frac{(q+3p)(q-6p)}{(q-p)(q-2p)}$$

304′ $$\frac{\dfrac{q^2}{q+6p}-p}{q+3p-\dfrac{p^2}{q+3p}} = \frac{\dfrac{q^2-p(q+6p)}{q+6p}}{\dfrac{(q+3p)(q+3p)-p^2}{q+3p}} = \frac{q^2-p(q+6p)}{q+6p}$$

$$\frac{(q+3p)^2-p^2}{q+3p} = \frac{q^2-pq-6p^2}{q+6p} \quad \frac{(q+3p)^2-p^2}{q+3p} = \frac{q^2+2pq-3pq-6p^2}{q+6p}$$

$$\frac{(q+3p+p)(q+3p-p)}{q+3p} = \frac{q(q+2p)-3p(q+2p)}{q+6p} \quad \frac{(q+4p)(q+2p)}{q+3p} =$$

$$= \frac{(q+2p)(q-3p)}{q+6p} \quad \frac{(q+4p)(q+2p)}{q+3p} = \frac{(q+2p)(q-3p)(q+3p)}{(q+6p)(q+4p)(q+2p)} =$$

$$= \frac{(q-3p)(q+3p)}{(q+6p)(q+4p)} = \frac{q^2-(3p)^2}{(q+6p)(q+4p)} = \frac{q^2-3p\cdot 3p}{(q+6p)(q+4p)} =$$

$$= \frac{q^2-9p^2}{(q+6p)(q+4p)}$$

№№ **305—310** — задачи смѣшаннаго характера болѣе сложныя на всѣ четыр дѣйствія над алгебраическими дробями

305 $$\left[\left(\frac{a^2+b^2}{b}-a\right)\cdot\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)\right] \quad \frac{a^2-b^2}{a^3+b^3} = \left[\frac{a^2+b^2-ab}{b}\right.$$

$$\left.\left(\frac{a}{ab}-\frac{b}{ab}\right)\right] \quad \frac{(a+b)(a-b)}{(a+b)(a^2-ab+b^2)} = \left[\frac{a^2+b^2-ab}{b} \quad \frac{a-b}{ab}\right]$$

$$\frac{a-b}{a^2-ab+b^2} \quad \frac{(a^2+b^2-ab)\,ab}{b\,(a-b)} \quad \frac{a-b}{a^2-ab+b^2} = \frac{(a^2+b^2-ab)\,(a-b)}{(a-b)\,(a^2-ab+b^2)} = a$$

305′ $$\left[\left(\frac{a^2+b^2}{a}+b\right)\left(b-\frac{b^2}{a+b}\right)\right] \quad \frac{a^3-b^3}{a^2-b^2} = \left[\frac{a^2+b^2+ab}{a}\right.$$

$$\left.\frac{b(a+b)-b^2}{a+b}\right] \quad \frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{(a+b)(a-b)} = \left[\frac{a^2+ab+b^2}{a} \quad \frac{ab+b^2-b^2}{a+b}\right]$$

$$\frac{a^2+ab+b^2}{a+b} = \left[\frac{a^2+ab+b^2}{a} \quad \frac{ab}{a+b}\right] \quad \frac{a^2+ab+b^2}{a+b} = \frac{(a^2+ab+b^2)\,ab}{a\,(a+b)}$$

$$\frac{a^2+ab+b^2}{a+b} = \frac{(a^2+ab+b^2)\,b\,(a+b)}{(a+b)\,(a^2+ab+b^2)} = b$$

$$\frac{a}{a+1}=\frac{a\,(a+1)}{(a-1)\,a}=\frac{a+1}{a-1}$$

301' $$\frac{1-\dfrac{2}{x+2}}{1+\dfrac{2}{x-2}}=\frac{\dfrac{1\,(x+2)-2}{x+2}}{\dfrac{1\,(x-2)+2}{x-2}}=$$

$$=\frac{x+2-2}{x+2}\quad\frac{x-2+2}{x-2}=\frac{x}{x+2}\quad\frac{x}{x-2}=\frac{x\,(x-2)}{(x+2)\,x}=\frac{x-2}{x+2}$$

302 $$\frac{a-\dfrac{b^2}{a+b}}{b-\dfrac{a^2}{a+b}}=\frac{\dfrac{a(a+b)-b^2}{a+b}}{\dfrac{b(a+b)-a^2}{a+b}}=\frac{a^2+ab-b^2}{a+b}\quad\frac{ab+b^2-a^2}{a+b}=(\text{№ } 263)$$

$$=\frac{a^2+ab-b^2}{ab+b^2-a^2}$$

302' $$\frac{\dfrac{x^2}{x-y}-y}{x-\dfrac{y^2}{x-y}}=\frac{\dfrac{x^2-y(x-y)}{x-y}}{\dfrac{x(x-y)-y^2}{x-y}}=\frac{x^2-xy+y^2}{x-y}$$

$$\frac{x^2-xy-y^2}{x-y}=(\text{№ } 263)=\frac{x^2-xy+y^2}{x^2-xy-y^2}$$

303 $$\frac{p+2-\dfrac{1}{p+2}}{p+2+\dfrac{p}{p+2}}=\frac{\dfrac{(p+2)(p+2)-1}{p+2}}{\dfrac{(p+2)(p+2)+p}{p+2}}=\frac{(p+2)^2-1}{p+2}\quad\frac{(p+2)^2+p}{p+2}$$

$$=\frac{(p+2)^2-1^2}{p+2}\quad\frac{p^2+2\,p\,2+2^2+p}{p+2}=\frac{(p+2+1)(p+2-1)}{p+2}\quad\frac{p^2+4p+4+p}{p+2}$$

$$=\frac{(p+3)\,(p+1)}{p+2}\quad\frac{(p^2+p)+(4p+4)}{p+2}=\frac{(p+1)\,(p+3)}{p+2}\quad\frac{p(p+1)+4(p+1)}{p+2}$$

$$=\frac{(p+1)(p+3)}{p+2}\quad\frac{(p+1)(p+4)}{p+2}=\frac{(p+1)(p+3)\,(p+2)}{(p+2)\,(p+1)(p+4)}=\frac{p+3}{p+4}$$ **303'**

$$\frac{p-1+\dfrac{6}{p-6}}{p-2+\dfrac{3}{p-6}}=\frac{\dfrac{(p-1)(p-6)+6}{p-6}}{\dfrac{(p-2)(p-6)+3}{p-6}}=(\text{№ } 263 \text{ прав.})=\frac{(p-1)(p-6)+6}{(p-2)(p-6)+3}=$$

$$=\frac{p^2-7p+6+6}{p^2-8p+12+3}=\frac{p^2-7p+12}{p^2-8p+15}=\frac{p^2-3p-4p+12}{p^2-3p-5p+15}=\frac{p(p-3)-4(p-3)}{p(p-3)-5(p-3)}$$

$$=\frac{(p-3)(p-4)}{(p-3)(p-5)}=\frac{p-4}{p-5}$$

304 $$\frac{q-p-\dfrac{16p^2}{q-p}}{q-p+\dfrac{4p^2}{q-6p}}=\frac{\dfrac{(q-p)(q-p)-16p^2}{q-p}}{\dfrac{(q-p)(q-6p)+4p^2}{q-6p}}=\frac{(q-p)^2-16p^2}{q-p}$$

306 $\left[\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{2}{a+b}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\right] \frac{(a+b)^2}{ab}=\left[\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{2}{a+b}\right.$ $\left.\left(\frac{b}{ab}+\frac{a}{ab}\right)\right] \frac{(a+b)^2}{ab}=\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{2}{a+b} \frac{a+b}{ab}\right) \frac{(a+b)^2}{ab}=\left(\frac{1}{a^2}+\right.$ $\left.+\frac{1}{b^2}+\frac{2\ (a+b)}{(a+b)\ ab}\right) \frac{(a+b)^2}{ab}=\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{2}{ab}\right) \frac{(a+b)^2}{ab}$ *) $=\left(\frac{b^2}{a^2b^2}+\right.$ $\left.+\frac{a^2}{b^2a^2}+\frac{2ab}{a^2b^2}\right) \frac{(a+b)^2}{ab}=\frac{b^2+a^2+2ab}{a^2b^2} \frac{(a+b)^2}{ab}=\frac{(a+b)^2}{a^2b^2}$ $\frac{(a+b)^2}{ab}=$ (№ 264, прив) $=\frac{ab}{a^2b^2}=\frac{1}{ab}$

306′ $\left[\frac{1}{a^2}+\frac{1}{9b^2}-\frac{2}{a-3b}\left(\frac{1}{3b}-\frac{1}{a}\right)\right]\cdot\frac{(3b-a)^2}{3ab}=\left[\frac{1}{a^2}+\frac{1}{9b^2}-\frac{2}{a-3b}\right.$ $\left.\left(\frac{a}{3b\ a}-\frac{3b}{a\ 3b}\right)\right] \frac{(3b-a)^2}{3ab}=\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{9b^2}-\frac{2}{a-3b} \frac{a-3b}{3ab}\right) \frac{(3b-a)^2}{3ab}=$ $=\left[\frac{1}{a^2}+\frac{1}{9b^2}-\frac{2\ (a-3b)}{(a-3b)\ 3ab}\right] \frac{(3b-a)^2}{3ab}=\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{9b^2}-\frac{2}{3ab}\right)$ $\frac{(3b-a)^2}{3ab}$ **) $=\left(\frac{9b^2}{a^2\ 9b^2}+\frac{a^2}{9b^2\cdot a^2}-\frac{2\ 3ab}{3ab\ 3ab}\right) \frac{(3b-a)^2}{3ab}=$

---

*) Другой способъ дальнѣйшаго преобразованія. Т. к. $\frac{1}{a^2}=\frac{1}{a\ a}=\frac{1}{a}\ \frac{1}{a}=$ $=\left(\frac{1}{a}\right)^2,\ \frac{1}{b^2}=\left(\frac{1}{b}\right)^2,\ \frac{2}{ab}=2\ \frac{1}{ab}=2\ \frac{1}{a}\ \frac{1}{b}$, то имѣемъ $\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{2}{ab}\right)$ $\cdot\frac{(a+b)^2}{ab}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2 \frac{(a+b)\ (a+b)}{ab}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2\left[\frac{a+b}{ab}\ (a+b)\right]=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2$ $\left[\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right)\ (a+b)\right]=\frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\ (a+b)}=\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{a+b}=\frac{\frac{b}{ab}+\frac{a}{ab}}{a+b}=\frac{\frac{b+a}{ab}}{a+b}=$ $=\frac{b+a}{ab}\ (a+b)=\frac{b+a}{ab(a+b)}=\frac{1}{ab}$

**) Другой способъ дальнѣйшаго преобразованія. Т. к. $\frac{1}{a^2}=\frac{1}{a\ a}=\frac{1}{a}\ \frac{1}{a}=$ $=\left(\frac{1}{a}\right)^2\ \frac{1}{9b^2}=\frac{1}{3b\ 3b}=\frac{1}{3b}\ \frac{1}{3b}=\left(\frac{1}{3b}\right)^2.\ \frac{2}{3ab}=2\ \frac{1}{a\ 3b}=2\ \frac{1}{a}\ \frac{1}{3b}$, то $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{9b^2}-\frac{2}{3ab}\right) \frac{(3b-a)^2}{3ab}=\left[\left(\frac{1}{a}\right)^2-2\ \frac{1}{a}\ \frac{1}{3b}+\left(\frac{1}{3b}\right)^2\right] \frac{(3b-a)\ (3b-a)}{3ab}=$ $=\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{3b}\right)\left[\frac{3b-a}{3ab}\ (3b-a)\right]=\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{3b}\right)^2\left[\left(\frac{3b}{3ab}-\frac{a}{3ab}\right)\ (3b-a)\right]=$ $=\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{3b}\right)^2\left[\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{3b}\right)(3b-a)\right]=\frac{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{3b}\right)^2}{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{3b}\right)\ (3b-a)}=\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{3b}}{3b-a}=$ $=\frac{\frac{3b}{a\ 3b}-\frac{a}{3b\ a}}{3b-a}=\frac{\frac{3b-a}{3ab}}{3b-a}=\frac{3b-a}{3ab}\ (3b-a)=\frac{3b-a}{3ab\ (3b-a)}=\frac{1}{3ab}$

$$=\frac{9b^2+a^2-2\cdot 3ab}{9a^2b^2}:\frac{(3b-a)^2}{3ab}=\frac{(3b)^2-2\cdot 3b\cdot a+a^2}{9a^2b^2}:\frac{(3b-a)^2}{3ab}=$$

$$=\frac{(3b-a)^2}{9a^2b^2}:\frac{(3b-a)^2}{3ab}=(\text{№ } 264)=\frac{3ab}{9a^2b^2}=\frac{1}{3ab}$$

307 $$\frac{x+\frac{1}{y}}{x+\frac{z}{yz+1}}-\frac{1}{y(xyz+x+z)}=\frac{\frac{xy+1}{y}}{\frac{x(yz+1)+z}{yz+1}}-\frac{1}{y(xyz+x+z)}=$$

$$=\frac{xy+1}{y}:\frac{xyz+x+z}{yz+1}-\frac{1}{y(xyz+x+z)}=\frac{(xy+1)(yz+1)}{y(xyz+x+z)}-$$

$$-\frac{1}{y(xyz+x+z)}=\frac{(xy+1)(yz+1)-1}{y(xyz+x+z)}=\frac{xy^2z+yz+xy+1-1}{y(xyz+x+z)}=$$

$$=\frac{xy^2z+yz+xy}{y(xyz+x+z)}=\frac{y(xyz+z+x)}{y(xyz+x+z)}=1$$

307' $$\frac{y-\frac{1}{z}}{y-\frac{x}{xz-1}}-\frac{1}{z(xyz-y-x)}=\frac{\frac{yz-1}{z}}{\frac{y(xz-1)-x}{xz-1}}-\frac{1}{z(xyz-y-x)}=$$

$$=\frac{yz-1}{z}:\frac{xyz-y-x}{xz-1}-\frac{1}{z(xyz-y-x)}=\frac{(yz-1)\cdot(xz-1)}{z(xyz-y-x)}-$$

$$-\frac{1}{z(xyz-y-x)}=\frac{(yz-1)(xz-1)-1}{z(xyz-y-x)}=\frac{xyz^2-xz-yz+1-1}{z(xyz-y-x)}=$$

$$=\frac{xyz^2-xz-yz}{z(xyz-y-x)}=\frac{z(xyz-x-y)}{z(xyz-y-x)}=1$$

308 $$\frac{3abc}{bc+ac-ab}-\frac{\frac{a-1}{a}+\frac{b-1}{b}+\frac{c-1}{c}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}}=\frac{3abc}{bc+ac-ab}-$$

$$-\frac{\frac{(a-1)bc}{abc}+\frac{(b-1)ac}{abc}+\frac{(c-1)ab}{abc}}{\frac{bc}{abc}+\frac{ac}{abc}-\frac{ab}{abc}}=\frac{3abc}{bc+ac-ab}-$$

$$-\frac{(a-1)bc+(b-1)ac+(c-1)ab}{abc}:\frac{bc+ac-ab}{abc}=(\text{№ } 263)=\frac{3abc}{bc+ac-ab}-$$

$$-\frac{(a-1)bc+(b-1)ac+(c-1)ab}{bc+ac-ab}=\frac{3abc-[(a-1)bc+(b-1)ac+(c-1)ab]}{bc+ac-ab}=$$

$$=\frac{3abc-(abc-bc+abc-ac+abc-ab)}{bc+ac-ab}=\frac{3abc-(3abc-bc-ac-ab)}{bc+ac-ab}=$$

$$=\frac{3abc-3abc+bc+ac+ab}{bc+ac-ab}=\frac{ab+ac+bc}{bc+ac-ab}$$

308′ $$\frac{3xyz}{xy+yz+zx}+\frac{\frac{1-x}{x}+\frac{1-y}{y}-\frac{1+z}{z}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}=\frac{3xyz}{xy+yz+zx}+$$

$$+\frac{\frac{(1-x)yz}{xyz}+\frac{(1-y)xz}{xyz}-\frac{(1+z)xy}{xyz}}{\frac{yz}{xyz}+\frac{xz}{xyz}+\frac{xy}{xyz}}=\frac{3xy}{xy+yz+zx}+$$

$$+\frac{(1-x)yz+(1-y)xz-(1+z)xy}{xyz}\quad\frac{yz+xz+xy}{xyz}=(\text{№ }263)=$$

$$=\frac{3xyz}{xy+yz+zx}+\frac{(1-x)yz+(1-y)xz-(1+z)xy}{yz+xz+xy}=$$

$$=\frac{3xyz+[(1-x)yz+(1-y)xz-(1+z)xy]}{xy+yz+zx}=$$

$$=\frac{3xyz+(yz-xyz+xz-xyz-xy-xyz)}{xy+yz+zx}=\frac{3xyz+(yz+zx-xy-3xyz)}{xy+yz+zx}=$$

$$=\frac{3xyz+yz+zx-xy-3xyz}{xy+yz+zx}=\frac{yz+zx-xy}{xy+yz+zx}$$

309 $$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b+c}}\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)=\frac{\frac{b+c}{a(b+c)}+\frac{a}{a(b+c)}}{\frac{b+c}{a(b+c)}-\frac{a}{a(b+c)}}$$

$$\frac{1\ 2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{\frac{b+c+a}{a(b+c)}}{\frac{b+c-a}{a(b+c)}}\quad\frac{(b^2+2bc+c^2)-a^2}{2bc}=(\text{№ }263$$

правило) $$=\frac{b+c+a}{b+c-a}\quad\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}=\frac{b+c+a}{b+c-a}\cdot\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}=$$

$$=\frac{(b+c+a)(b+c+a)(b+c-a)}{(b+c-a)\ 2bc}=\frac{(a+b+c)^2}{2bc}$$

309′ $$\frac{\frac{1}{b-c}+\frac{1}{a}}{\frac{1}{b-c}-\frac{1}{a}}\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)=\frac{\frac{a}{a(b-c)}+\frac{b-c}{a(b-c)}}{\frac{a}{a(b-c)}-\frac{b-c}{a(b-c)}}$$

$$\frac{1\ 2bc-(b^2+c^2-a^2)}{2bc}=\frac{\frac{a+b-c}{a(b-c)}}{\frac{a-b+c}{a(b-c)}}\quad\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc}=(\text{№ }263)=$$

$$=\frac{a+b-c}{a-b+c}\cdot\frac{a^2-(b^2-2bc+c^2)}{2bc}=\frac{a+b-c}{a-b+c}\cdot\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}=\frac{a+b-c}{a-b+c}\cdot$$

$$\cdot\frac{[a+(b-c)][a-(b-c)]}{2bc}=\frac{a+b-c}{a-b+c}\cdot\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc}=$$

$$=\frac{(a+b-c)(a+b-c)(a-b+c)}{(a-b+c)\,2bc}=\frac{(a+b-c)^2}{2bc}$$

310 $$\frac{\left[\frac{(a+b)^2}{4ab}-1\right]\left[\frac{(a-b)^2}{4ab}+1\right]}{(a+b)^3-3a^2b-3ab^2}:\frac{[(a+b)^2-ab][(a-b)^2+ab]}{(a-b)^3+3ab(a-b)}=$$

$$=\frac{\frac{(a+b)^2-4ab}{4ab}\cdot\frac{(a-b)^2+4ab}{4ab}}{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3-3a^2b-3ab^2}:\frac{(a^2+2ab+b^2-ab)(a^2-2ab+b^2+ab)}{a^3-3a^2b+3ab^2-b^3+3a^2b-3ab^2}=$$

$$=\frac{\frac{[(a+b)^2-4ab]\,[(a-b)^2+4ab]}{4ab\cdot4ab}}{a^3+b^3}:\frac{(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)}{a^3-b^3}=$$

$$=(\S\ 23)=\frac{[(a+b)^2-4ab]\,[(a-b)^2+4ab]}{4ab\cdot4ab\,(a^3+b^3)}:\frac{(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)}{(a-b)(a^2+ab+b^2)}=$$

$$=\frac{(a^2+2ab+b^2-4ab)(a^2-2ab+b^2+4ab)}{16a^2b^2(a^3+b^3)}:\frac{a^2-ab+b^2}{a-b}=$$

$$=\frac{(a^2-2ab+b^2)(a^2+2ab+b^2)(a^2-ab+b^2)}{16a^2b^2(a+b)(a^2-ab+b^2)(a-b)}=\frac{(a-b)^2(a+b)^2}{16a^2b^2(a+b)(a-b)}$$

$$=\frac{(a-b)(a+b)}{16a^2b^2}=\frac{a^2-b^2}{16a^2b^2}$$

310' $$\frac{\left[1+\frac{(a-b)^2}{ab}\right]\left[\frac{(a+b)^2}{ab}-1\right]}{a^4-a^3b+ab^3-b^4}$$

$$:\frac{a^4+a^3b-ab^3-b^4}{[(a+b)^3-a^3-b^3][a^3-b^3-(a-b)^3]}=\frac{\frac{ab+(a-b)^2}{ab}\cdot\frac{(a+b)^2-ab}{ab}}{a^3(a-b)+b^3(a-b)}:$$

$$:\frac{a^3(a+b)-b^3(a+b)}{(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3-a^3-b^3)(a^3-b^3-a^3+3a^2b-3ab^2+b^3)}=$$

$$=\frac{\frac{[ab+(a-b)^2]\,[(a+b)^2-ab]}{ab\cdot ab}}{(a-b)(a^3+b^3)}:\frac{(a+b)(a^3-b^3)}{(3a^2b+3ab^2)(3a^2b-3ab^2)}=$$

$$=\frac{[ab+(a-b)^2]\,[(a+b)^2-ab]}{a^2b^2\,(a-b)(a^3+b^3)}:\frac{(a+b)(a^3-b^3)}{3ab(a+b)\cdot3ab(a-b)}=$$

$$=\frac{(ab+a^2-2ab+b^2)(a^2+2ab+b^2-ab)}{a^2b^2(a-b)(a+b)(a^2-ab+b^2)}:\frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{3ab\cdot3ab(a-b)}=$$

$$=\frac{(a^2-ab+b^2)(a^2+ab+b^2)(a^2+ab+b^2)}{9a^4b^4(a-b)(a+b)(a^2-ab+b^2)}=\frac{(a^2+ab+b^2)^2}{9a^4b^4(a^2-b^2)}.$$

Замѣчаніе. Если бы въ числителѣ первой данной дроби было не умноженіе, а дѣленіе выраженій, заключенныхъ въ квадратныя скобки, а именно $\left[1+\frac{(a-b)^2}{ab}\right]:\left[\frac{(a+b)^2}{ab}-1\right]$, то при послѣдующихъ преобразованіяхъ всего выраженія произошло бы два лишнихъ сокращенія: 1) въ первой дроби въ числителѣ, при дѣленіи выше упомянутыхъ выраженій уничтожился бы, согласно правилу въ рѣш. № 263, общій дѣлимому и дѣлителю знаменатель ab, и 2) вслѣдствіе этого сократился бы множитель a^2+ab+b^2, общій числителю и знаменателю окончательнаго результата. Такъ образ. результатъ былъ бы таковъ $\frac{1}{9a^2b^2(a^2-b^2)}$ — похожій на отв. къ № 310.

§ 7. Употребленіе отрицательныхъ показателей

Обозрѣвая всевозможные случаи дѣленія въ алгебрѣ, легко замѣтить, что всякій разъ дѣйствіе сводится къ дѣленію степеней одинаковыхъ количествъ, одночленныхъ или многочленныхъ. Правило этого дѣленія, какъ мы видѣли, состоитъ въ томъ, что для полученія частнаго берется то же основные степени и ему придается въ качествѣ показателя степени разность показателей дѣлимаго и дѣлителя. Такъ, если въ общемъ случаѣ задано дѣленіе $a^p:a^q$, то частное изобразится въ видѣ a^{p-q}. При этомъ мы въ свое время оговаривались (отд. III, № 435), что составленіе частнаго по вышеприведенному правилу возможно лишь при $p>q$, что при $p=q$ частное получается непосредственно и $=1$ въ силу того, что всякое число, дѣленное само на себя, даетъ въ результатѣ 1-цу, и что, наконецъ, при $p<q$ дѣленіе невозможно и частное выразится дробью $\frac{a^p}{a^q}$.

Алгебра, стремясь къ обобщенію результатовъ путемъ особыхъ допущеній, устраняетъ вышеприведенныя изъятія и исключенія и устанавливаетъ, какъ общее правило, что

$$a^p:a^q=a^{p-q},$$

каковы бы ни были относительныя величины цѣлыхъ чиселъ p и q. Познакомимся же съ этими допущеніями, для чего разберемъ смыслъ частнаго a^{p-q} при разныхъ относительныхъ величинахъ показателей p и q.

Первый случай $p>q$. Значеніе степени a^{p-q} съ *положительнымъ* показателемъ $p-q$ намъ уже извѣстно (отд. I, § 3).

Второй случай $p=q$, такъ что $p-q=0$, и результатъ принимаетъ видъ a^0 — степени съ *нулевымъ* показателемъ. Дѣйствительное значеніе символа a^0 раскрывается изъ слѣд.: если $p=q$, то $a^p=a^q$, а потому $a^p:a^q=a^p:a^p=1$, что безусловно очевидно; но съ другой стороны, по общему правилу дѣленія $a^p:a^q=a^{p-q}=$ (при $p=q$) $=a^{p-p}=a^0$.

$a^p:a^q=a^p:a^p=a^{p-p}=a^0$

$a^p:a^q=a^p:a^p=1$

Сравнивая два результата, получ., что $a^0=1$. При этомъ нашъ выводъ имѣетъ совершенно общій характеръ, ибо величины p, q и a выбраны были вполнѣ произвольно.

Заключая обратно о значеніи полученнаго частнаго $a^0=1$, находимъ, что *всякое количество съ показателемъ степени, равнымъ нулю, $=1$ и есть условное обозначеніе частнаго отъ дѣленія степеней одинаковыхъ количествъ въ томъ случаѣ, когда показатели степеней дѣлимаго и дѣлителя равны*. Такъ, имѣемъ $a^0=1^0=1$, $(ax^2+bx+c)^0=1$, $(-4)^0=1$, $(-a)^0=1$ и т. п. Но $-4^0=-1$, $-a^0=-1$, ибо здѣсь нулевой показатель относится лишь къ абс. величинѣ количества, знакъ же остается неизмѣннымъ передъ остальнымъ выраженіемъ.

Третій случай $p<q$, такъ что $p-q$ есть число отрицательное. Пусть $q=p+m$, гдѣ m означаетъ избытокъ q надъ p и есть число положительное, тогда

$$a^p:a^q=a^p:a^{p+m}=a^{p-p-m}=a^{-m},$$

и мы приходимъ къ степени a^{-m} съ *отрицательнымъ* показателемъ. Смыслъ ея мы поймемъ, произведя дѣленіе другимъ путемъ, а именно

$$a^p:a^q=\frac{a^p}{a^q}=\frac{a^p}{a^{p+m}}=\frac{a^p}{a^p\cdot a^m}=\frac{1}{a^m}$$

Въ результатѣ получ. дробь, которой числитель $=1$-цѣ, а знаменатель—прежняя степень, но съ положительнымъ показателемъ. Сравнивая оба результата дѣленія $a^p:a^q$ при $q=p+m$, гдѣ $m>0$, имѣемъ $a^{-m}=\frac{1}{a^m}$. Этотъ выводъ имѣетъ вполнѣ общій характеръ.

Заключая обратно о значеніи полученнаго частнаго a^{-m} и о смыслѣ символа a^{-m}, находимъ, что *всякое количество съ отрицательнымъ показателемъ степени равно дроби, у которой числитель 1-ца, а знаменатель—прежняя степень, но съ положительнымъ показателемъ; степень съ отрицательнымъ показателемъ есть условное обозначеніе частнаго отъ дѣленія степеней одинаковыхъ количествъ въ томъ случаѣ, когда показатель дѣлителя больше показателя дѣлимаго, и именно—больше на величину, равную абсолютной величинѣ отрицательнаго показателя.* Такъ напр. $d^{-4}=\frac{1}{d^4}$, $2^{-2}=\frac{1}{2^2}=1/4$, $3^{-1}=1/3$, $(a+b)^{-1}=\frac{1}{a+b}$.

Разобранными случаями исчерпывается дѣленіе степеней одинаковыхъ количествъ и слѣдствія, изъ этого дѣленія вытекающія, при всевозможныхъ *цѣлыхъ* значеніяхъ количествъ n, p и q и *цѣлыхъ и дробныхъ* значеніяхъ количества a.

Изъ всего сказаннаго въ достаточной мѣрѣ выясняется происхожденіе степеней съ отрицательными и нулевыми показателями и ихъ числовое значеніе; для наглядности приведемъ еще формулы, выясняющія преобразованія на практикѣ символовъ a^0 и a^{-m}, гдѣ a— какое угодно, а m— цѣлое положительное число:

$$a^0=1,\quad a^{-m}=\frac{1}{a^m},\quad a^m=\frac{1}{a^{-m}}$$

Послѣднія два равенства обнаруживаютъ свойство *обратности* степеней съ равнопротивоположными показателями.

Въ заключеніе, бросая общій взглядъ на обобщеніе понятія о степени, выражающееся во введеніи отрицательныхъ и нулевого показателей, полезно сравнить его съ другимъ подобнымъ ему обобщеніемъ въ области дѣйствія вычитанія. Подобно тому, какъ дѣйствіе вычитанія въ случаѣ, когда вычитаемое превышаетъ уменьшаемое, приводитъ къ расширенію понятія о числѣ путемъ введенія въ алгебру отрицательныхъ чиселъ,—такъ и при дѣленіи степеней одинаковыхъ количествъ, когда показатель степени дѣлителя $>$ или $=$ показателю степени дѣлимаго, алгебра расширяетъ понятіе о степени, вводя отрицательныхъ показателей и нулевыхъ и придавая имъ вышеобъясненный смыслъ.

Въ дальнѣйшемъ мы увидимъ, что на этомъ обобщенія алгебры не останавливаются какъ въ области простыхъ чиселъ, такъ и въ области показателей степеней.

---

311. $2^0=1$, $3^1=3$, $3^2=9$, $2^{-3}=\frac{1}{2^3}=1/2\cdot2\cdot2=1/8$, $(1/2)^2=1/2\cdot1/2=\frac{1}{2\cdot2}=1/4$, $(1/3)^{-2}=\frac{1}{(1/3)^2}=\frac{1}{1/3\cdot1/3}=3\cdot3=9$, $(4/5)^0=1$, $(2/5)^3=2/5\cdot2/5\cdot2/5=\frac{2\cdot2\cdot2}{5\cdot5\cdot5}=8/125$, $(2/5)^{-3}=$

$=\frac{1}{(^2/_5)^3}=\frac{1}{^8/_{125}}=\frac{125}{8}=15^5/_8$, $(1^1/_3)^2=1^1/_3\cdot 1^1/_3=^4/_3\cdot ^4/_3=\frac{4\cdot 4}{3\cdot 3}=^{16}/_9=1^7/_9$;

$(2^1/_3)^{-2}=\frac{1}{(2^1/_3)^2}=\frac{1}{2^1/_3\cdot 2^1/_3}=\frac{1}{^7/_3\cdot ^7/_3}=\frac{3\cdot 3}{7\cdot 7}=^9/_{49}$. **311'**. $2^0=1$, $2^3=$

$=2\cdot 2\cdot 2=8$, $3^{-2}=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{3\cdot 3}=^1/_9$, $(^1/_2)^{-2}=\frac{1}{(^1/_2)^2}=\frac{1}{^1/_2\cdot ^1/_2}=2\cdot 2=4$,

$(^3/_4)^0=1$, $(^3/_4)^2=^3/_4\cdot ^3/_4=\frac{3\cdot 3}{4\cdot 4}=^9/_{16}$, $(^3/_4)^{-3}=\frac{1}{(^3/_4)^3}=\frac{1}{^3/_4\cdot ^3/_4\cdot ^3/_4}=\frac{4\cdot 4\cdot 4}{3\cdot 3\cdot 3}=$

$=^{64}/_{27}=2^{10}/_{27}$, $(1^2/_3)^3=1^2/_3\cdot 1^2/_3\cdot 1^2/_3=^5/_3\cdot ^5/_3\cdot ^5/_3=\frac{5\cdot 5\cdot 5}{3\cdot 3\cdot 3}=^{125}/_{27}=$

$=4^{17}/_{27}$, $(1^2/_3)^{-3}=\frac{1}{(1^2/_3)^3}=\frac{1}{^{125}/_{27}}=^{27}/_{125}$.

312. $(-5)^2=-5\cdot -5=25$, $(-3)^{-3}=\frac{1}{(-3)^3}=\frac{1}{-3\cdot -3\cdot -3}=\frac{1}{-27}=$

$=-^1/_{27}$, $(-4)^0=1$, $(-^2/_3)^4=-^2/_3\cdot -^2/_3\cdot -^2/_3\cdot -^2/_3=+\frac{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}{3\cdot 3\cdot 3\cdot 3}=$

$=^{16}/_{81}$, $(-^3/_2)^{-4}=\frac{1}{(-^3/_2)^4}=\frac{1}{-^3/_2\cdot -^3/_2\cdot -^3/_2\cdot -^3/_2}=\frac{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}{+3\cdot 3\cdot 3\cdot 3}=^{16}/_{81}$ *).

$(-1^1/_4)^3=-1^1/_4\cdot -1^1/_4\cdot -1^1/_4=-^5/_4\cdot ^5/_4\cdot ^5/_4=-\frac{5\cdot 5\cdot 5}{4\cdot 4\cdot 4}=-^{125}/_{64}=$

$=-1^{61}/_{64}$, $(-1^1/_4)^{-3}=\frac{1}{(-1^1/_4)^3}=\frac{1}{-^{125}/_{64}}=-^{64}/_{125}$. **312'**. $(-4)^3=-4\cdot$

$-4\cdot -4=-64$, $(-5)^{-2}=\frac{1}{(-5)^2}=\frac{1}{-5\cdot -5}=+^1/_{25}$, $(-7)^0=1$,

$(-^3/_4)^3=-^3/_4\cdot -^3/_4\cdot -^3/_4=-\frac{3\cdot 3\cdot 3}{4\cdot 4\cdot 4}=-^{27}/_{64}$, $(-^4/_3)^{-3}=\frac{1}{(-^4/_3)^3}=$

$=\frac{1}{-^4/_3\cdot -^4/_3\cdot -^4/_3}=\frac{3\cdot 3\cdot 3}{-4\cdot 4\cdot 4}=-^{27}/_{64}$, $(-1^1/_2)^4=-1^1/_2\cdot -1^1/_2\cdot$

$-1^1/_2\cdot -1^1/_2=+^3/_2\cdot ^3/_2\cdot ^3/_2\cdot ^3/_2=\frac{3\cdot 3\cdot 3\cdot 3}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}=^{81}/_{16}=5^1/_{16}$, $(-1^1/_2)^{-4}=$

$=\frac{1}{(-1^1/_2)^4}=\frac{1}{+^{81}/_{16}}=^{16}/_{81}$.

---

*) Отсюда слѣдуетъ, что $(-^3/_2)^{-4}=(-^2/_3)^4$, или отбрасывая знакъ «—», $(^3/_2)^{-4}=(^2/_3)^4$. Этотъ результатъ можно обобщить, слѣд., вообще

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-m}=\left(\frac{b}{a}\right)^m$$

См. также рѣш. № 341, друг. рѣш.

313 $[3-2(^2/_5)^0]^{-3}=(3-2\cdot 1)^{-3}=(3-2)^{-3}=1^{-3}=\frac{1}{1^3}=\frac{1}{1}=1$,
вообще, $1^{-m}=1$, равно и $1^m=1$ **313′** $[2(^5/_3)^0-3]^3=(2\cdot 1-3)^3=(2-3)^3=(-1)^3=-1\cdot -1\cdot -1=-1$, вообще, $(-1)^m=-1$ если m—число нечетное, если же m— четное число то $(-1)^m=+1$

314 $\frac{3\cdot 5^{-1}-2^0}{3^{-2}}=\frac{3\cdot ^1/_5-1}{\frac{1}{3^2}}=3^2(3\cdot ^1/_5-1)=3\cdot 3(^3/_5-1)=9\cdot -^2/_5=$
$=-\frac{9\cdot 2}{5}=-^{18}/_5=-3^3/_5$ **314′** $\frac{3^0-2\cdot 5^{-1}}{2^{-3}}=\frac{1-2\cdot ^1/_5}{\frac{1}{2^3}}=\frac{2^3(1-2\cdot ^1/_5)}{1}=$
$=2\cdot 2\cdot 2(1-^2/_5)=8\cdot ^3/_5=^{8\cdot 3}/_5=^{24}/_5=4^4/_5$

315 $[^2/_3-(^4/_5)^{-1}]^0=1$ **315′** $[(^3/_7)^{-2}+^4/_5]^0=1$

316 $[(^3/_7)^{-2}-^4/_5]^{-1}=\left[\frac{1}{(^3/_7)^2}-\frac{4}{5}\right]^{-1}=\left[\frac{1}{^3/_7\cdot ^3/_7}-\frac{4}{5}\right]^{-1}=$
$=\left[\frac{7\cdot 7}{3\cdot 3}-\frac{4}{5}\right]^{-1}=(^{49}/_9-^4/_5)^{-1}=(^{49\cdot 5}/_{9\cdot 5}-^{4\cdot 9}/_{5\cdot 9})^{-1}=(^{245}/_{45}-^{36}/_{45})^{-1}=$
$=(^{209}/_{45})^{-1}=\frac{1}{^{209}/_{45}}=^{45}/_{209}$ **316′** $[^2/_3+(^4/_7)^{-2}]^{-1}=\left[\frac{2}{3}+\frac{1}{(^4/_7)^2}\right]^{-1}=$
$=\left[\frac{2}{3}+\frac{1}{^4/_7\cdot ^4/_7}\right]^{-1}=\left(\frac{2}{3}+\frac{7\cdot 7}{4\cdot 4}\right)^{-1}=\left(\frac{2\cdot 16}{3\cdot 16}+\frac{49\cdot 3}{16\cdot 3}\right)^{-1}=(^{32}/_{48}+$
$+^{147}/_{48})^{-1}=(^{179}/_{48})^{-1}=\frac{1}{^{179}/_{48}}=^{48}/_{179}$

317 $[2-(^4/_3)^2]^{-2}\cdot(^3/_5)^{-1}=(2-^4/_3\cdot ^4/_3)^{-2}\cdot\frac{1}{^3/_5}=(2-^{4\cdot 4}/_{3\cdot 3})^{-2}\cdot$
$\frac{5}{3}=(2-^{16}/_9)^{-2}\cdot ^5/_3=(2-1^7/_9)^{-2}\cdot ^5/_3=(^2/_9)^{-2}\cdot ^5/_3=\frac{1}{(^2/_9)^2}\cdot ^5/_3=\frac{1}{^2/_9\cdot ^2/_9}\cdot\frac{5}{3}=\frac{9\cdot 9\cdot 5}{2\cdot 2\cdot 3}=$
$=\frac{3\cdot 9\cdot 5}{2\cdot 2}=^{135}/_4=33^3/_4$ **317′** $[(^5/_3)^2-3]^{-2}\cdot(^3/_5)^{-1}=(^5/_3\cdot ^5/_3-3)^{-2}\cdot\frac{1}{^3/_5}=$
$=(^{5\cdot 5}/_{3\cdot 3}-3)^{-2}\cdot\frac{5}{3}=(^{25}/_9-3)^{-2}\cdot ^5/_3=(-^2/_9)^{-2}\cdot ^5/_3=\frac{1}{(-^2/_9)^2}\cdot ^5/_3=\frac{1}{-^2/_9\cdot -^2/_9}\cdot ^5/_3=$
$=\frac{9.9}{2\cdot 2}\cdot\frac{5}{3}=\frac{3\cdot 9\cdot 5}{2\cdot 2}=^{135}/_4=33^3/_4$ Изъ сравненія результатовъ этого №-ра и предыдущаго слѣдуетъ, что

$$[2-(^4/_3)^2]^{-2}\cdot(^3/_5)^{-1}=[(^5/_3)^2-3]^{-2}\cdot(^3/_5)^{-1}$$

318 $\frac{3^{-1}-(^2/_3)^{-2}}{2-(^3/_4)^2}\cdot(5^0-^2/_5)=\frac{\frac{1}{3^1}-\frac{1}{(^2/_3)^2}}{2-^3/_4\cdot ^3/_4}\cdot(1-^2/_5)=$

$$=\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}}}{2-\frac{3\cdot3}{4\cdot4}}\cdot\frac{5}{7}=\frac{\frac{1}{3}-\frac{3\cdot3}{2\cdot2}}{2-\frac{9}{16}}\cdot\frac{5}{7}=\frac{\frac{1}{3}-\frac{9}{4}}{\frac{23}{16}}\cdot\frac{5}{7}=\frac{\frac{4}{3\cdot4}-\frac{9\cdot3}{4\cdot3}}{\frac{23}{16}}\cdot\frac{5}{7}=$$

$$=\frac{\frac{4}{12}-\frac{27}{12}}{\frac{23}{16}}\cdot\frac{5}{7}=\frac{-\frac{23}{12}}{\frac{23}{16}}\cdot\frac{5}{7}=-\frac{23\cdot16\cdot5}{12\cdot23\cdot7}=-\frac{4\cdot5}{3\cdot7}=-\frac{20}{21}.$$

318'. $\frac{2(3/2)^{-2}-2^{-1}}{3-(4/3)^2}(3/5-7^0)=\frac{2\cdot\frac{1}{(3/2)^2}-\frac{1}{2^1}}{3-\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3}}(3/5-1)=$

$$=\frac{2\cdot\frac{1}{\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}}{3-\frac{4\cdot4}{3\cdot3}}\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)=-\frac{2\cdot\frac{2\cdot2}{3\cdot3}-\frac{1}{2}}{3-\frac{16}{9}}\cdot\frac{2}{5}=-\frac{\frac{2\cdot2\cdot2\cdot2}{3\cdot3\cdot2}-\frac{3\cdot3}{2\cdot3\cdot3}}{3-1\frac{7}{9}}\cdot$$

$$\cdot\frac{2}{5}=-\frac{\frac{16}{18}-\frac{9}{18}}{1\frac{2}{9}}\cdot\frac{2}{5}=-\frac{\frac{7}{18}\cdot2}{\frac{11}{9}\cdot5}=-\frac{7\cdot2\cdot9}{18\cdot11\cdot5}=-\frac{7}{11\cdot5}=-\frac{7}{55}$$

319 $[(1-3^{-2})^{-2}-2]^{-1}\cdot(2/3)^0=\left[\left(1-\frac{1}{3^2}\right)^{-2}-2\right]^{-1}\cdot1=$

$$=\left[\left(1-\frac{1}{3\cdot3}\right)^{-2}-2\right]^{-1}=[(1-1/9)^{-2}-2]^{-1}=[(8/9)^{-2}-2]^{-1}=$$

$$=\left[\frac{1}{(8/9)^2}-2\right]^{-1}=\left[\frac{1}{\frac{8}{9}\cdot\frac{8}{9}}-2\right]^{-1}=\left[\frac{9\cdot9}{8\cdot8}-2\right]^{-1}=(81/64-2)^{-1}=(1\tfrac{17}{64}-$$

$$-1\tfrac{64}{64})^{-1}=(-47/64)^{-1}=\frac{1}{(-47/64)^1}=-64/47=-1\tfrac{17}{47}$$

319' $[(1+2^{-3})^{-2}-2]^{-1}\cdot(3/5)^0=\left[\left(1+\frac{1}{2^3}\right)^{-2}-2\right]^{-1}\cdot1=$

$$=\left[\left(1+\frac{1}{2\cdot2\cdot2}\right)^{-2}-2\right]^{-1}=[(1+1/8)^{-2}-2]^{-1}=[(9/8)^{-2}-2]^{-1}=$$

$$=\left[\frac{1}{(9/8)^2}-2\right]^{-1}=\left[\frac{1}{\frac{9}{8}\cdot\frac{9}{8}}-2\right]^{-1}=\left(\frac{8\cdot8}{9\cdot9}-2\right)^{-1}=(64/81-2)^{-1}=$$

$$=(-1\tfrac{17}{81})^{-1}=\frac{1}{(-1\frac{17}{81})^1}=\frac{1}{-98/81}=-81/98$$

320 $\{[1+(2/3)^2]^{-1}-(5/7)^0\}^{-2}(2/13)^3=[(1+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3})^{-1}-1]^{-2}\cdot\frac{2}{13}\cdot\frac{2}{13}\cdot$

$$\cdot\frac{2}{13}=[(1\tfrac{4}{9})^{-1}-1]^{-2}\frac{2\cdot2\cdot2}{13\cdot13\cdot13}=\left(\frac{1}{1\frac{4}{9}}-1\right)^{-2}\frac{8}{13\cdot13\cdot13}=\left(\frac{1}{13/9}-1\right)^{-2}\cdot$$

$$\cdot\frac{8}{13\cdot13\cdot13}=(9/13-1)^{-2}\frac{8}{13\cdot13\cdot13}=(-4/13)^{-2}\frac{8}{13\cdot13\cdot13}=\frac{1}{(-4/13)^2}\cdot\frac{8}{13\cdot13\cdot13}=$$

$$=\frac{1\cdot8}{-\frac{4}{13}\cdot\left(-\frac{4}{13}\right)\cdot13\cdot13\cdot13}=\frac{8}{4\cdot4\cdot13}=\frac{1}{2\cdot13}=1/26$$

320' $\{[1-(5/3)^2]^{-1}+(3/8)^0\}^{-2}(7/4)^3=[(1-\frac{5}{3}\cdot\frac{5}{3})^{-1}+1]^{-2}(7/4)^3=$

$$=[(1-\tfrac{5\cdot5}{3\cdot3})^{-1}+1]^{-2}(7/4)^3=[(1-25/9)^{-1}+1]^{-1}(7/4)^3=[(1-2\tfrac{7}{9})^{-1}+$$

$+1]^{-2}(7/4)^3=[(-1\frac{7}{9})^{-1}+1]^{-2}\cdot(7/4)^3=\left[\frac{1}{(-1\frac{7}{9})^1}+1\right]^{-2}(7/4)^3=$

$=\left[\frac{1}{-1\frac{7}{9}}+1\right]^{-2}(7/4)^3=\left[\frac{1}{-\frac{16}{9}}+1\right]^{-2}(7/4)^3=(-9/16+1)^{-2}(7/4)^3=$

$=(7/16)^{-2}(7/4)^3=\frac{(7/4)^3}{(7/16)^2}=\frac{7/4\cdot 7/4\cdot 7/4}{7/16\cdot 7/16}=\frac{7\cdot7\cdot7\cdot16\cdot16}{7\cdot7\cdot4\cdot4\cdot4}=7\cdot4=28$

Указаніе. Показатель —2 въ условіи, относящійся къ квадратнымъ скобкамъ является *опечаткой* «Сборника», долженъ быть, какъ показано, показатель —1.

Къ №№ 321—366′. Изъ формулъ $a^{-m}=\frac{1}{a^m}$ и $a^m=\frac{1}{a^{-m}}$ вытекаютъ слѣд. свойства степеней съ отрицательными показателями, полезныя при упрощеніи и преобразованіи дробныхъ выраженій, въ числители и знаменатели коихъ входятъ въ качествѣ множителей степени съ отрицательными показателями. 1° *Входящая сомножителемъ въ числитель степень съ отрицательнымъ показателемъ можетъ быть перенесена въ знаменатель также сомножителемъ, но съ положительнымъ показателемъ* и обратно. 2° *Степень съ отрицательнымъ показателемъ, входящая въ качествѣ сомножителя въ знаменатель дроби, можетъ быть перенесена въ числитель дроби, также въ качествѣ сомножителя, но съ положительнымъ показателемъ.*

Совершенно подобное преобразованіе можно произвести и со степенью съ положительнымъ показателемъ, что можно выразить такъ: 3° *Степень съ положительнымъ показателемъ, входящая въ качествѣ сомножителя въ какой либо членъ дроби (числитель или знаменатель), можетъ быть перенесена въ другой членъ дроби (сверху внизъ или снизу вверхъ) также въ качествѣ сомножителя, но съ отрицательнымъ показателемъ степени.*

Свойства 1° и 2° особенно примѣняются при рѣш. №№ 321—342′, свойство 3°— при рѣш. №№ 343—356′, всѣ же свойства, приведенныя выше, находятъ примѣненіе въ преобразованіяхъ смѣшаннаго характера въ №№ 357—366.

321. $a^{-3}b^0=\frac{1}{a^3}\cdot1=\frac{1}{a^3}$ **321′**. $\frac{a^0}{b^{-2}}=a^0\cdot\frac{1}{b^{-2}}=1\cdot b^2=b^2$

322. $\frac{a^0}{a^{-m}}=\frac{1}{a^{-m}}=a^m$ **322′**. $a^{-n}b^0=a^{-n}\cdot1=a^{-n}=\frac{1}{a^n}$

323. $x^{-a}\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{x^a}\cdot\frac{1}{1}=\frac{1}{x^a}$ **323′**. $a^0\cdot\frac{1}{x^{-a}}=1\cdot x^a=x^a$

324. $a^{-5}\cdot\frac{1}{x^{-3}}=\frac{1}{a^5}\cdot x^3=\frac{1\cdot x^3}{a^5}=\frac{x^3}{a^5}$ **324′**. $x^{-2}a^{-3}=\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{a^3}=$

$=\frac{1\cdot1}{a^3x^2}=\frac{1}{a^3x^2}$.

325. $(x+y)^0=1$ **325′**. $x^0+y^0=1+1=2$

326. $x^0-y^0=1-1=0$ **326′**. $(x-y)^0=1$

327. $\frac{a^{-5}}{a^{-3}}=a^{-5}\cdot\frac{1}{a^{-3}}=\frac{1}{a^5}\cdot a^3=\frac{a^3}{a^5}=\frac{1}{a^2}$ **327′**. $\frac{a^{-2}}{a^{-5}}=a^{-2}$

$\cdot\frac{1}{a^{-5}}=\frac{1}{a^2}\cdot a^5=\frac{a^5}{a^2}=a^3$

Результаты №№ 327 и 327′ можно представить такъ $\frac{1}{a^2} = a^{-2} = a^{3-5} = a^{-5-(-3)}$, $a^3 = a^{5-2} = a^{-2-(-5)}$, но $a^{-5-(-3)}$ есть обозначенiе результата отъ дѣленiя $a^{-5} : a^{-3}$, подобно этому $a^{-2-(-5)}$ есть обозначенiе частнаго отъ дѣленiя $a^{-2} : a^{-5}$, т. е. дѣленiя, заданнаго условiями №№ 327 и 327′. Эти примѣры и подобные имъ показываютъ, что *правило дѣленiя степеней одинаковыхъ количествъ распространяется и на томъ случай, когда показатели степеней дѣлимаго и дѣлителя отрицательны*. Срв. №№ 371 и слѣд.

328. Согласно сказанному только что имѣемъ $\frac{a^{-x}}{a^{-y}} = a^{-x+y} = a^{y-x}$. Тотъ же результатъ можно получить и обычнымъ путемъ:

$$\frac{a^{-x}}{a^{-y}} = a^{-x} \cdot \frac{1}{a^{-y}} = \frac{1}{a^x} \cdot a^y = \frac{a^y}{a^x} = a^{y-x},$$

каковы бы ни были соотносительныя величины x и y. **328′.** $\frac{x^{-a}}{x^{-b}} = \frac{x^b}{x^a} = x^{b-a}$, что можно было бы получить и непосредственно (№ 327.) $\frac{x^{-a}}{x^{-b}} = x^{-a} : x^{-b} = x^{-a-(-b)} = x^{-a+b} = x^{b-a}$.

329. $\frac{a^{n-4}}{a^{-5}} = a^{n-4} \cdot a^5 = a^{n-4+5} = a^{n+1}$, или $\frac{a^{n-4}}{a^{-5}} =$ (№ 327.) $= a^{n-4-(-5)} = a^{n-4+5} = a^{n+1}$. **329′.** $\frac{a^{-3}}{a^{4-n}} = \frac{1}{a^3 \cdot a^{4-n}} = \frac{1}{a^{3+4-n}} = \frac{1}{a^{7-n}}$, или $\frac{a^{-3}}{a^{4-n}} = a^{-3-(4-n)} = a^{-3-4+n} = a^{n-7}$. Легко видѣть, что оба результата тождественны, т. е., что $\frac{1}{a^{7-n}} = a^{n-7}$, ибо $a^{n-7} = a^{-(7-n)} = \frac{1}{a^{7-n}}$.

330. $\frac{(1-m)^{-1}}{m^{-2}} = \frac{m^2}{(1-m)^1} = \frac{m^2}{1-m}$. **330′.** $\frac{m^{-2}}{(1+m)^{-1}} = \frac{(1+m)^1}{m^2} = \frac{m+1}{m^2}$.

331. $\frac{-2a^{-4}b^0}{3c^0x^{-2}} = \frac{-2a^{-4} \cdot 1}{3 \cdot 1 \cdot x^{-2}} = \frac{-2x^2}{3a^4} = -\frac{2x^2}{3a^4}$. **331′.** $\frac{3a^0b^{-2}}{-5c^{-4}x^0} = \frac{3 \cdot 1 \cdot b^{-2}}{-5c^{-4} \cdot 1} = \frac{3c^4}{-5b^2} = -\frac{3c^4}{5b^2}$.

332. $\frac{5a^{-3}}{3a^{-5}} \cdot \frac{-3^0}{5^{-1}} = \frac{5a^{-3}}{3a^{-5}} \cdot \frac{-1}{5^{-1}} = \frac{-5a^5 \cdot 5}{3a^3} = \frac{-25a^2}{3} = -\frac{25a^2}{3} =$

$= -{}^{25}/_3 a^2 = -8^1/_3 a^2$ **332′** $\frac{2a^{-5}\cdot 3^{-2}}{3a^{-4}\cdot -4^0} = \frac{2a^{-5}\cdot 3^{-2}}{3a^{-4}\cdot -1} = \frac{2a^4}{-3a^5\cdot 3^2} =$

$= -\frac{2}{3^3 a} = -\frac{2}{27a}$

333 $\frac{(a^0+b^0)^{-2}x^{-5}}{4^{-1}x^{-3}} = \frac{(1+1)^{-2}x^{-5}}{4^{-1}x^{-3}} = \frac{2^{-2}x^{-5}}{4^{-1}x^{-3}} = \frac{4^1x^3}{2^2x^5} = \frac{4}{4x^2} = \frac{1}{x^2}$

333′ $\frac{(a^{-1}+b^{-4})^0x^{-3}}{2^{-1}x^{-5}} = \frac{1\cdot x^{-3}}{2^{-1}x^{-5}} = \frac{2^1x^5}{x^3} = 2x^2$

334 $(1-a^{-2})^{-1} = \frac{1}{(1-a^{-2})^1} = \frac{1}{1-a^{-2}} = \frac{1}{1-\frac{1}{a^2}} = \frac{1}{\frac{a^2-1}{a^2}} = \frac{a^2}{a^2-1} =$

$= \frac{a^2}{a^2-1^2} = \frac{a^2}{(a+1)(a-1)}$ **334′** $(2-a^{-1})^{-2} = \frac{1}{(2-a^{-1})^2} =$

$= \frac{1}{\left(2-\frac{1}{a}\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{2a-1}{a}\right)^2} = \frac{1}{\frac{2a-1}{a}\cdot\frac{2a-1}{a}} = \frac{a\cdot a}{(2a-1)^2} =$

$= \frac{a^2}{(2a)^2-2\cdot 2a+1^2} = \frac{a^2}{4a^2-4a+1}$

335 $\frac{2^0(x^0+y^0+z^0)^{-2}}{6^{-1}a^{-3}} = \frac{1(1+1+1)^{-2}}{6^{-1}a^{-3}} = \frac{3^{-2}}{6^{-1}a^{-3}} = \frac{6^1\cdot a^3}{3^2} = \frac{6a^3}{9} =$

$= \frac{2a^3}{3} = {}^2/_3 a^3$ **335′** $\frac{6^{-1}a^0}{b^{-3}(x^0+y^0+z^0)^{-2}} = \frac{6^{-1}\cdot 1}{b^{-3}(1+1+1)^{-2}} =$

$= \frac{6^{-1}}{b^{-3}\cdot 3^{-2}} = \frac{b^3\cdot 3^2}{6^1} = \frac{9b^3}{6} = \frac{3b^3}{2} = {}^3/_2 b^3 = 1^1/_2 b^3$

336 $\frac{a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}}{ab+ac+bc} = \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{ab+ac+bc} = \frac{\frac{bc}{abc}+\frac{ac}{abc}+\frac{ab}{abc}}{ab+bc+ac} =$

$= \frac{\frac{bc+ac+ab}{abc}}{ab+bc+ac} = (\text{№ } 251) = \frac{bc+ac+ab}{abc(ab+bc+ac)} = \frac{1}{abc}$ **336′**

$\frac{a+b+c}{a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}} = \frac{a+b+c}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} = \frac{a+b+c}{\frac{bc}{abc}+\frac{ac}{abc}+\frac{ab}{abc}} =$

$= \frac{a+b+c}{\frac{bc+ac+ab}{abc}} = \frac{(a+b+c)abc}{bc+ac+ab}$

337 $\frac{a+b}{a^{-1}+b^{-1}} = \frac{a+b}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{a+b}{\frac{b}{ab}+\frac{a}{ab}} = \frac{a+b}{\frac{b+a}{ab}} = \frac{(a+b)\,ab}{b+a} = ab$

337' $\dfrac{b^{-2}-a^{-2}}{a-b} = \dfrac{\dfrac{1}{b^2}-\dfrac{1}{a^2}}{a-b} = \dfrac{\dfrac{a^2}{b^2a^2}-\dfrac{b^2}{a^2b^2}}{a-b} = \dfrac{\dfrac{a^2-b^2}{a^2b^2}}{a-b} =$

$= \dfrac{a^2-b^2}{a^2b^2(a-b)} = \dfrac{(a+b)(a-b)}{a^2b^2(a-b)} = \dfrac{a+b}{a^2b^2}$

338 $\dfrac{a^{-3}+a^{-2}b^{-2}}{a^{-1}b^{-1}} = \dfrac{\dfrac{1}{a^3}+\dfrac{1}{a^2}\,\dfrac{1}{b^2}}{\dfrac{1}{a}\,\dfrac{1}{b}} = ab\left(\dfrac{1}{a^3}+\dfrac{1}{a^2b^2}\right) = \dfrac{ab}{a^3}+$

$+\dfrac{ab}{a^2b^2} = \dfrac{b}{a^2}+\dfrac{1}{ab} = \dfrac{b\,b}{a^2b}+\dfrac{a}{ab\,a} = \dfrac{b^2}{a^2b}+\dfrac{a}{a^2b} = \dfrac{a+b^2}{a^2b}$ 338'

$\dfrac{a^{-2}b^{-1}}{a^{-2}+a^{-1}b^{-2}} = \dfrac{\dfrac{1}{a^2}\,\dfrac{1}{b}}{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{a}\,\dfrac{1}{b^2}} = \dfrac{1}{a^2b\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{ab^2}\right)} = \dfrac{1}{\dfrac{a^2b}{a^2}+\dfrac{a^2b}{ab^2}} =$

$= \dfrac{1}{b+\dfrac{a}{b}} = \dfrac{1}{\dfrac{b^2+a}{b}} = \dfrac{b}{a+b^2}$

39 $\dfrac{a^{-1}-b^{-1}}{a^{-2}-b^{-2}} = \dfrac{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}}{\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}} = \dfrac{\dfrac{b}{ab}-\dfrac{a}{ba}}{\dfrac{b^2}{a^2b^2}-\dfrac{a^2}{b^2a^2}} = \dfrac{\dfrac{b-a}{ab}}{\dfrac{b^2-a^2}{a^2b^2}} =$

$= \dfrac{b-a)a^2b^2}{ab(b^2-a^2)} = \dfrac{(b-a)ab}{(b+a)(b-a)} = \dfrac{ab}{a+b}$ **Другой способъ** $\dfrac{a^{-1}-b^{-1}}{a^{-2}-b^{-2}} =$

$= \dfrac{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}}{\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}} = \dfrac{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}}{\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}} = \dfrac{1}{\dfrac{b}{ab}+\dfrac{a}{ba}} = \dfrac{1}{\dfrac{b+a}{ab}} =$

$= \dfrac{ab}{a+b}$ 339' $\dfrac{a^{-2}-b^{-2}}{a^{-1}+b^{-1}} = \dfrac{\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}} = \dfrac{\dfrac{b^2}{a^2b^2}-\dfrac{a^2}{b^2a^2}}{\dfrac{b}{ab}+\dfrac{a}{ba}} =$

$= \dfrac{\dfrac{b^2-a^2}{a^2b^2}}{\dfrac{b+a}{ab}} = \dfrac{(b^2-a^2)ab}{a^2b^2(b+a)} = \dfrac{(b+a)(b-a)}{ab(b+a)} = \dfrac{b-a}{ab}$ **Иначе** $\dfrac{a^{-2}-b^{-2}}{a^{-1}+b^{-1}} =$

$$=\frac{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=\frac{\left(\frac{1}{a}\right)^2-\left(\frac{1}{b}\right)^2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=\frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=$$

$$=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b}{ab}-\frac{a}{ab}=\frac{b-a}{ab}.$$

340 $$\frac{a^{-4}-b^{-4}}{a^{-2}+b^{-2}}=\frac{\frac{1}{a^4}-\frac{1}{b^4}}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}=\frac{\frac{b^4}{a^4b^4}-\frac{a^4}{b^4a^4}}{\frac{b^2}{a^2b^2}+\frac{a^2}{b^2a^2}}=\frac{\frac{b^4-a^4}{a^4b^4}}{\frac{b^2+a^2}{a^2b^2}}=$$

$$=\frac{(b^4-a^4)a^2b^2}{a^4b^4(b^2+a^2)}=\frac{(b^2)^2-(a^2)^2}{a^2b^2(b^2+a^2)}=\frac{(b^2+a^2)(b^2-a^2)}{a^2b^2(b^2+a^2)}=\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}=\frac{(b+a)(b-a)}{a^2b^2}$$

Другое рѣшеніе $$\frac{a^{-4}-b^{-4}}{a^{-2}+b^{-2}}=\frac{\frac{1}{a^4}-\frac{1}{b^4}}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}=\frac{\left(\frac{1}{a^2}\right)^2-\left(\frac{1}{b^2}\right)^2}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}=$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}=\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}=\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}$$

340′ $$\frac{a^{-2}-b^{-2}}{a^{-4}-b^{-4}}=$$

$$=\frac{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{a^4}-\frac{1}{b^4}}=\frac{\frac{b^2}{a^2b^2}-\frac{a^2}{a^2b^2}}{\frac{b^4}{a^4b^4}-\frac{a^4}{a^4b^4}}=\frac{\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}}{\frac{b^4-a^4}{a^4b^4}}=\frac{(b^2-a^2)a^4b^4}{a^2b^2(b^4-a^4)}=\frac{(b^2-a^2)a^2b^2}{(b^2)^2-(a^2)^2}=$$

$$=\frac{(b^2-a^2)a^2b^2}{(b^2+a^2)(b^2-a^2)}=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$$

Иначе $$\frac{a^{-2}-b^{-2}}{a^{-4}-b^{-4}}=\frac{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{a^4}-\frac{1}{b^4}}=$$

$$=\frac{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}}{\left(\frac{1}{a^2}\right)^2-\left(\frac{1}{b^2}\right)^2}=\frac{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}}{\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)}=\frac{1}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}=$$

$$=\frac{1}{\frac{b^2}{a^2b^2}+\frac{a^2}{a^2b^2}}=\frac{1}{\frac{b^2+a^2}{a^2b^2}}=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$$

341 $$\left(1-\frac{a^{-n}-b^{-n}}{a^{-n}+b^{-n}}\right)^{-2}=\left[\frac{a^{-n}+b^{-n}-(a^{-n}-b^{-n})}{a^{-n}+b^{-n}}\right]^{-2}=$$

$$=\left[\frac{a^{-n}+b^{-n}-a^{-n}+b^{-n}}{a^{-n}+b^{-n}}\right]^{-2}=\left(\frac{2b^{-n}}{a^{-n}+b^{-n}}\right)^{-2}=\frac{1}{\left(\frac{2b^{-n}}{a^{-n}+b^{-n}}\right)^{2}}=$$

$$=\frac{1}{\frac{2b^{-n}}{a^{-n}+b^{-n}}\cdot\frac{2b^{-n}}{a^{-n}+b^{-n}}}=\frac{(a^{-n}+b^{-n})(a^{-n}+b^{-n})}{2b^{-n}\cdot 2b^{-n}}=\frac{(a^{-n}+b^{-n})^2}{4\cdot\frac{1}{b^n}\cdot\frac{1}{b^n}}=$$

$$=\frac{b^n b^n\left(\frac{1}{a^n}+\frac{1}{b^n}\right)^2}{4}=\frac{b^{n+n}\left[\frac{b^n}{a^n b^n}+\frac{a^n}{a^n b^n}\right]^2}{4}=\frac{b^{2n}\left[\frac{a^n+b^n}{a^n b^n}\right]^2}{4}=$$

$$=\frac{b^{2n}\cdot\frac{a^n+b^n}{a^n b^n}\cdot\frac{a^n+b^n}{a^n b^n}}{4}=\frac{b^{2n}(a^n+b^n)^2}{4a^n b^n a^n b^n}=\frac{b^{2n}(a^n+b^n)^2}{4a^{n+n}b^{n+n}}=$$

$$=\frac{b^{2n}(a^n+b^n)^2}{4a^{2n}b^{2n}}=\frac{(a^n+b^n)^2}{4a^{2n}}$$

Другое рѣш. Выкладки можно было бы значительно укоротить, воспользовавшись формулою, приведенною въ выноскѣ къ рѣш. № 312, а именно $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m}=\left(\frac{b}{a}\right)^m$, справедливость которой легко показать непосредственнымъ преобразованіемъ:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-m}=\frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^m}=\frac{1}{\frac{a^m}{b^m}}=\frac{b^m}{a^m}=\left(\frac{b}{a}\right)^m$$

Примѣняя эту формулу къ данному случаю, имѣемъ (съ перваго выч. преобразованія выше)

$$\left(\frac{2b^{-n}}{a^{-n}+b^{-n}}\right)^{-2}=\left(\frac{a^{-n}+b^{-n}}{2b^{-n}}\right)^2=\left[\frac{(a^{-n}+b^{-n})b^n}{2}\right]^2=[{}^1/_2(a^{-n}b^n+b^{-n}b^n]^2=$$

$$=[{}^1/_2(a^{-n}b^n+b^{-n+n})]^2=[{}^1/_2(a^{-n}b^n+b^0)]^2=\left[{}^1/_2\left(\frac{b^n}{a^n}+1\right)\right]^2=$$

$$=\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{b^n+a^n}{a^n}\right]^2=\left(\frac{a^n+b^n}{2a^n}\right)^2=\frac{a^n+b^n}{2a^n}\cdot\frac{a^n+b^n}{2a^n}=\frac{(a^n+b^n)(a^n+b^n)}{2^2a^{n+n}}=$$

$$=\frac{(a^n+b^n)^2}{4a^{2n}}$$

341. $$\left(1+\frac{a^{-n}+b^{-n}}{a^{-n}-b^{-n}}\right)^{-2}=\left[\frac{a^{-n}-b^{-n}+(a^{-n}+b^{-n})}{a^{-n}-b^{-n}}\right]^{-2}=$$

$$=\left[\frac{a^{-n}-b^{-n}+a^{-n}+b^{-n}}{a^{-n}-b^{-n}}\right]^{-2}=\left[\frac{2a^{-n}}{a^{-n}-b^{-n}}\right]^{-2}=$$ (см. формулу въ выноскѣ къ № 312)

$$=\left[\frac{a^{-n}-b^{-n}}{2a^{-n}}\right]^2=\left[\frac{(a^{-n}-b^{-n})a^n}{2}\right]^2=[{}^1/_2(a^{-n}a^n-b^{-n}a^n)]^2=$$

$$=[{}^1/_2(a^{-n+n}-a^nb^{-n})]^2=[{}^1/_2(a^0-a^nb^{-n})]^2=\left[{}^1/_2\left(1-\frac{a^n}{b^n}\right)\right]^2=\left[\frac{1}{2}\right.$$

$$\left[\frac{b^n-a^n}{b^n}\right]^2=\left[\frac{b^n-a^n}{2b^n}\right]^2=\left[-\frac{a^n-b^n}{2b^n}\right]^2=-\frac{a^n-b^n}{2b^n}\cdot-\frac{a^n-b^n}{2b^n}$$

$$=+\frac{(a^n-b^n)(a^n-b^n)}{2^2b^{n+n}}=\frac{(a^n-b^n)^2}{4b^{2n}}$$

342 $$\left[\frac{a^{-n}+b^{-n}}{a^{-2n}-b^{-2n}}\left(\frac{1}{b^{-n}}-\frac{1}{a^{-n}}\right)\right]^{-1}=\left[\frac{\frac{1}{a^n}+\frac{1}{b^n}}{\frac{1}{a^{2n}}-\frac{1}{b^{2n}}}(b^n-a^n)\right]^{-1}=\left[\frac{\frac{b^n}{a^nb^n}+\frac{a^n}{a^nb^n}}{\frac{b^{2n}}{a^{2n}b^{2n}}-\frac{a^{2n}}{a^{2n}b^{2n}}}(b^n-a^n)\right]^{-1}=$$

$$=\left[\frac{\frac{b^n+a^n}{a^nb^n}(b^n-a^n)}{\frac{b^{2n}-a^{2n}}{a^{2n}b^{2n}}}\right]^{-1}=\left[\frac{(b^n+a^n)(b^n-a^n)a^{2n}b^{2n}}{a^nb^n(b^{2n}-a^{2n})}\right]^{-1}=$$

$$=\left[\frac{[(b^n)^2-(a^n)^2]a^{2n-n}b^{2n-n}}{b^{2n}-a^{2n}}\right]^{-1}=\left[\frac{(b^nb^n-a^na^n)a^nb^n}{b^{2n}-a^{2n}}\right]^{-1}=$$

$$=\left[\frac{(b^{n+n}-a^{n+n})a^nb^n}{b^{2n}-a^{2n}}\right]^{-1}=\left[\frac{(b^{2n}-a^{2n})a^nb^n}{b^{2n}-a^{2n}}\right]^{-1}=(a^nb^n)^{-1}=$$

$$=\frac{1}{a^nb^n}$$

342' $$\left[\frac{a^{-2n}-b^{-2n}}{a^{-n}-b^{-n}}\left(\frac{1}{a^{-n}}+\frac{1}{b^{-n}}\right)\right]^{-1}=\left[\frac{\frac{1}{a^{2n}}-\frac{1}{b^{2n}}}{\frac{1}{a^n}-\frac{1}{b^n}}(a^n+b^n)\right]^{-1}=$$

$$=\left[\frac{\frac{b^{2n}}{a^{2n}b^{2n}}-\frac{a^{2n}}{a^{2n}b^{2n}}}{\frac{b^n}{a^nb^n}-\frac{a^n}{a^nb^n}}(a^n+b^n)\right]^{-1}=\left[\frac{\frac{b^{2n}-a^{2n}}{a^{2n}b^{2n}}(a^n+b^n)}{\frac{b^n-a^n}{a^nb^n}}\right]^{-1}=$$

$$=\left[\frac{(b^{2n}-a^{2n})(a^n+b^n)a^nb^n}{a^{2n}b^{2n}(b^n-a^n)}\right]^{-1}=\left[\frac{(b^{n+n}-a^{n+n})(a^n+b^n)}{a^{2n-n}b^{2n-n}(b^n-a^n)}\right]^{-1}=$$

$$=\left[\frac{(b^nb^n-a^na^n)(a^n+b^n)}{a^nb^n(b^n-a^n)}\right]^{-1}=\left[\frac{[(b^n)^2-(a^n)^2](a^n+b^n)}{a^nb^n(b^n-a^n)}\right]^{-1}=$$

$$=\left[\frac{(b^n+a^n)(b^n-a^n)(a^n+b^n)}{a^nb^n(b^n-a^n)}\right]^{-1}=\left[\frac{(a^n+b^n)}{a^nb^n}\right]^{-1}=$$

$$=\frac{1}{\left[\frac{(a^n+b^n)^2}{a^nb^n}\right]^1}=\frac{1}{\frac{(a^n+b^n)^2}{a^nb^n}}=\frac{a^nb^n}{(a^n+b^n)^2}$$

343 $\frac{1}{9}=9^{-1}$, или $\frac{1}{9}=\frac{1}{3^2}=3^{-2}$ **343'** $\frac{1}{4}=4^{-1}$, или $\frac{1}{4}=$ $=\frac{1}{2^2}=2^{-2}$

344 $\frac{1}{2^3}=2^{-3}$, но $2^3=2\cdot2\cdot2=8$ слѣд., $2^{-3}=\frac{1}{8}=8^{-1}$ **344'** $\frac{1}{3^3}=3^{-3}$, но $3^3=3\cdot3\cdot3=27$, слѣд. $^1/_{27}=3^{-3}$

345 $\frac{1}{a^m}=a^{-m}$ **345** $\frac{1}{m^a}=m^{-a}$

346 $\frac{a^m}{b^n}=a^mb^{-n}$ **346'** $\frac{b^n}{a^m}=a^{-m}b^n$

347. $5a\frac{1}{b^2}=5ab^{-2}$ **347'** $3b\frac{1}{a^3}=3a^{-3}b$

348 $\frac{m}{x^6}=mx^{-6}$ **348'** $\frac{m}{6^x}=6^{-x}m$ Зная правила возвышенія въ степень произведенія, можно придать результату другой видъ, а именно $\frac{m}{6^x}=\frac{m}{(2\cdot3)^x}=\frac{m}{2^x3^x}=2^{-x}3^{-x}m$

349 $\frac{a^5}{2b^2}=2^{-1}a^5b^{-2}$ **349'** $\frac{b^2}{5a^4}=5^{-1}a^{-4}b^2$

350 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=x^{-1}+y^{-1}$ **350'** $\frac{xy}{x+y}=xy(x+y)^{-1}$

351 $\frac{1}{2^3}-\frac{1}{x^2}=2^{-3}-x^{-2}=$ (№ 344) $=8^{-1}-x^{-2}$ **351'** $\frac{1}{3^2}+\frac{1}{x^3}=$ $=3^{-2}+x^{-3}=9^{-1}+x^{-3}$ ибо $\frac{1}{3^2}=\frac{1}{3\cdot3}=\frac{1}{9}=9^{-1}$

352 $\frac{x^m}{x^5}+\frac{y^3}{y^n}=x^{m-5}+y^{3-n}$, каковы бы ни были соотносительныя величины 1) m и 5 и 2) 3 и n **352** $\frac{x^2}{x^m}-\frac{y^n}{y^4}=x^{2-m}-y^{n-4}$

353 $\frac{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{q^2}}{\frac{1}{p}-\frac{1}{y}}=\frac{x^{-2}-q^{-2}}{p^{-1}-y^{-1}}=\frac{x^{-2}-q^{-2}}{(p^{-1}-y^{-1})^1}=(x^{-2}-q^{-2})(p^{-1}-y^{-1})^{-1}$

353′ $$\frac{\frac{1}{p}+\frac{1}{y}}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{q^2}}=\frac{p^{-1}+y^{-1}}{x^{-2}+q^{-2}}=\frac{p^{-1}+y^{-1}}{(x^{-2}+q^{-2})^1}=(p^{-1}+y^{-1})(x^{-2}+q^{-2})^{-1}.$$

Изъ этихъ примѣровъ видно, что введеніе отрицательныхъ показателей иногда приноситъ значительное упрощеніе *внѣшняго* вида выраженій: вмѣсто сложныхъ («двухъэтажныхъ») дробей получились произведенія простыхъ, сравнительно, двучленовъ.

354 $$\frac{1}{\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^3}\right)^m}=\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^3}\right)^{-m}=(x^{-2}-y^{-3})^{-m}$$ 354′.

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{x^m}-\frac{1}{y^n}\right)^3}=\left(\frac{1}{x^m}-\frac{1}{y^n}\right)^{-3}=(x^{-m}-y^{-n})^{-3}$$

355 $$\frac{\left(\frac{1}{m^3}+\frac{1}{n^4}\right)^3}{\left(\frac{1}{x^5}-\frac{1}{y^2}\right)^2}=\left(\frac{1}{m^3}+\frac{1}{n^4}\right)^3\left(\frac{1}{x^5}-\frac{1}{y^2}\right)^{-2}=(m^{-3}+n^{-4})^3(x^{-5}-$$

$$-y^{-2})^{-2}$$ 355′ $$\frac{\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^3}\right)^2}{\left(\frac{1}{m^4}+\frac{1}{n^5}\right)^3}=\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^3}\right)^2\left(\frac{1}{m^4}+\frac{1}{n^5}\right)^{-3}=(x^{-2}-$$

$$-y^{-3})^2(m^{-4}+n^{-5})^{-3}$$

356 $$\frac{1}{\frac{x+y}{x-y}}=1:\frac{x+y}{x-y}=\frac{x-y}{x+y}=\frac{x-y}{(x+y)^{+1}}=(x-y)(x+y)^{-1}$$

Этотъ результатъ можно было бы получить другимъ путемъ, зная 1) правила возвышенія степени въ новую степень и 2) что эти правила остаются въ силѣ и для отрицательныхъ показателей степеней, имѣя это въ виду получ.

$$\frac{1}{\frac{x+y}{x-y}}=\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{-1}=[(x+y)(x-y)^{-1}]^{-1}=(x+y)^{-1}(x-y)^{-1\cdot-1}=(x+y)^{-1}(x-y)^{+1}=$$
$$=(x+y)^{-1}(x-y)$$

356′ $$\frac{1}{\frac{x-y}{x+y}}=1:\frac{x-y}{x+y}=\frac{x+y}{x-y}=(x+y)(x-y)^{-1}$$

Другой способъ (см. № 356, второй спос.) $$\frac{1}{\frac{x-y}{x+y}}=\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^{-1}=[(x-y)(x+$$

$$+y)^{-1}]^{-1}=(x-y)^{-1}(x+y)^{-1\cdot-1}=(x-y)^{-1}(x+y)^{+1}=(x-y)^{-1}(x+y)$$

357 $$\frac{a^2b^{-3}}{x^{-4}}=a^2b^{-3}x^4=\frac{1}{a^{-2}b^3x^{-4}}=\frac{a^2x^4}{b^3}=\frac{b^{-3}}{a^{-2}x^{-4}}$$ 357′ $$\frac{a^3x^{-2}}{b^{-4}}=$$

$$= a^3x^{-2}b^4 = \frac{1}{a^{-3}b^{-4}x^2} = \frac{a^3b^4}{x^2} = \frac{x^{-2}}{a^{-3}b^{-4}}$$

358 $$\frac{4a^4b^{-2}}{9c^2d^{-4}} = \frac{2^2a^4b^{-2}}{3^2c^2d^{-4}} = 2^2\ 3^{-2}a^4b^{-2}c^{-2}d^4 = \frac{1}{2^{-2}\ 3^2a^{-4}b^2c^2d^{-4}} =$$

$$= \frac{2^2a^4d^4}{3^2c^2b^2} = \frac{3^{-2}b^{-2}c^{-2}}{2^{-2}a^{-4}d^{-4}}$$ **358′** $$\frac{8a^{-4}b^2}{27c^{-2}d^3} = \frac{2^3a^{-4}b^2}{3^3c^{-2}d^3} = 2^3\ 3^{-3}a^{-4}b^2c^2d^{-3} =$$

$$= \frac{1}{2^{-3}\ 3^3a^4b^{-2}c^{-2}d^3} = \frac{2^3b^2c^2}{3^3a^4d^3} = \frac{3^{-3}a^{-4}d^{-3}}{2^{-3}b^{-2}c^{-2}}$$

359 $$\frac{a^m}{b^{-n}x^p} = a^mb^nx^{-p} = \frac{1}{a^{-m}b^{-n}x^p} = \frac{a^mb^n}{x^p} = \frac{x^{-p}}{a^{-m}b^{-n}}$$ **359′**

$$\frac{b^{-m}}{a^nx^{-p}} = a^{-n}b^{-m}x^p = \frac{1}{a^nb^mx^{-p}} = \frac{x^p}{a^nb^m} = \frac{a^{-n}b^{-m}}{x^{-p}}$$

360 $$\frac{2}{3^3a^{-q}b^p} = 2\ 3^{-3}a^qb^{-p} = \frac{1}{2^{-1}\ 3^3a^{-q}b^p} = \frac{2a^q}{3^3b^p} = \frac{3^{-3}b^{-p}}{2^{-1}a^{-q}}$$

360′ $$\frac{3}{2^2a^2b^{-p}} = 3\ 2^{-2}a^{-2}b^p = \frac{1}{3^{-1}\ 2^2a^2b^{-p}} = \frac{3b^p}{2^2a^2} = \frac{2^{-2}a^{-2}}{3^{-1}b^{-p}}$$

361. $$\frac{8a^{-3}b^4(c-d)^4}{5^{-1}c^2(c+d)^{-4}} = \frac{2^3a^{-3}b^4(c-d)^4}{5^{-1}c^2(c+d)^{-4}} = 2^3\ 5a^{-3}b^4(c-d)^4(c+d)^4c^{-2} =$$

$$= 8\ .\ 5a^{-3}b^4c^{-2}\,[(c+d)\,(c-d)]^4 = 40a^{-3}b^4c^{-2}(c^2-d^2)^4 =$$

$$= \frac{1}{5^{1}\ 2^{-3}a^3b^{-4}c^2(c+d)^{-4}(c-d)^{-4}} = \frac{1}{40^{-1}a^3b^{-4}c^2(c^2-d^2)^{-4}} =$$

$$= \frac{8\ 5^1b^4(c-d)^4(c+d)^4}{a^3c^2} = \frac{40b^4(c^2-d^2)^4}{a^3c^2} = \frac{a^{-3}c^{-2}}{5^{-1}\ 8^{-1}b^{-4}(c+d)^{-4}(c-d)^{-4}} =$$

$$= \frac{a^{-3}c^{-2}}{40^{-1}b^{-4}(c^2-d^2)^{-4}} = \frac{a^{-3}c^{-2}}{40^{-1}b^{-4}\left(\frac{1}{c^{-2}}-\frac{1}{d^{-2}}\right)^{-4}}$$

361′ $$\frac{3^{-1}a^3(c+d)^{-2}}{4b^{-2}c^{-4}(c-d)^2} = \frac{1}{4\ 3^1a^{-3}b^{-2}c^{-4}(c-d)^2(c+d)^2} =$$

$$= \frac{1}{12a^{-3}b^{-2}c^{-4}[(c-d)\,(c+d)]^2} = \frac{1}{12a^{-3}b^{-2}c^{-4}(c^2-d^2)^2} =$$

$$= 12^{-1}a^3b^2c^4(c^2-d^2)^{-2} = \frac{a^3b^2c^4}{12(c^2-a^2)^2} = \frac{12^{-1}(c^2-d^2)^{-2}}{a^{-3}b^{-2}c^{-4}} =$$

$$= \frac{12^{-1}\left(\frac{1}{c^{-2}}-\frac{1}{d^{-2}}\right)}{a^{-3}b^{-2}c^{-4}}$$

362 $$\frac{(c+d)^md^{-3}}{2^{-3}a^nb^{-m}} = 2^3a^{-n}b^md^{-3}(c+d)^m = 8a^{-n}b^md^{-3}(c+d)^m =$$

$$=\frac{1}{2^{-3}a^nb^{-m}d^3(c+d)^{-m}}=\frac{8b^m(c+d)^m}{a^nd^3}=\frac{a^{-n}d^{-3}}{2^{-3}b^{-m}(c+d)^{-m}}=$$

$$=\frac{a^{-n}d^{-3}}{2^{-3}b^{-m}\left(\frac{1}{c^{-1}}+\frac{1}{d^{-1}}\right)^{-m}}$$

362' $\frac{2^{-2}a^{-n}b^m}{(c-d)^{-n}d^5}=2^{-2}a^{-n}b^md^{-5}(c-d)^n=$

$$=\frac{1}{2^2a^nb^{-m}d^5(c-d)^{-n}}=\frac{(c-d)^nb^m}{2^2a^nd^5}=\frac{2^{-2}a^{-n}d^{-5}}{b^{-m}(c-d)^{-n}}=$$

$$=\frac{2^{-2}a^{-n}d^{-5}}{b^{-m}\left(\frac{1}{c^{-1}}-\frac{1}{d^{-1}}\right)^{-n}}$$

363 $\frac{27a^{-2n}(a-c)^{-3}x^2}{4c^{-n}(x-z)^{-6n}z^3}=27\cdot4^{-1}a^{-2n}c^nx^2z^{-3}(a-c)^{-3}(x-z)^{6n}=$

$$=3^3\cdot2^{-2}a^{-2n}c^nx^2z^{-3}(a-c)^{-3}(x-z)^{6n}=\frac{1}{2^2\cdot3^{-3}a^{2n}c^{-n}x^{-2}z^3(a-c)^3(x-z)^{-6n}}=$$

$$=\frac{27c^nx^2(x-z)^{6n}}{4a^{2n}z^3(a-c)^3}=\frac{2^{-2}a^{-2n}z^{-3}(a-c)^{-3}}{3^{-3}c^{-n}x^{-2}(x-z)^{-6n}}=$$

$$=\frac{2^{-2}a^{-2n}z^{-3}\left(\frac{1}{a^{-1}}-\frac{1}{c^{-1}}\right)^{-3}}{3^{-3}c^{-n}x^{-2}\left(\frac{1}{x^{-1}}-\frac{1}{z^{-1}}\right)^{-6n}}$$

363' $\frac{25a^n(x-z)^{-5n}z^{-3}}{8x^{3n}(a-c)^{-2}c^{-3}}=$

$$=\frac{5^2}{2^3}a^nc^3x^{-3n}z^{-3}(a-c)^2(x-z)^{-5n}=5^2\cdot2^{-3}a^nc^3x^{-3n}z^{-3}(a-c)^2(x-z)^{-5n}=$$

$$=\frac{1}{2^3\cdot5^{-2}a^{-n}c^{-3}x^{3n}z^3(a-c)^{-2}(x-z)^{5n}}=\frac{25a^nc^3(a-c)^2}{8x^{3n}z^3(x-z)^{5n}}=$$

$$=\frac{2^{-3}x^{-3n}z^{-3}(x-z)^{-5n}}{5^{-2}a^{-n}c^{-3}(a-c)^{-2}}=\frac{2^{-3}x^{-3n}z^{-3}\left(\frac{1}{x^{-1}}-\frac{1}{z^{-1}}\right)^{-5n}}{5^{-2}a^{-n}c^{-3}\left(\frac{1}{a^{-1}}-\frac{1}{c^{-1}}\right)^{-2}}$$

364 $\frac{a^{-2n+1}(x+z)^3}{8b^{-n}(a-b)^{-n+2}z^{3-n}}=8^{-1}a^{-2n+1}b^nz^{-3+n}(a-b)^{n-2}(x+z)^3=$

$$=2^{-3}a^{-2n+1}b^nz^{n-3}(a-b)^{n-2}(x+z)^3=\frac{1}{8a^{2n-1}b^{-n}z^{3-n}(a-b)^{-n+2}(x+z)^{-3}}=$$

$$=(\text{если } n>3^{*)})=\frac{b^nz^{n-3}(a-b)^{n-2}(x+z)^3}{8a^{2n-1}}=\frac{2^{-3}a^{1-2n}}{b^{-n}z^{3-n}(a-b)^{2-n}(x+z)^{-3}}=$$

---

*) Въ самомъ дѣлѣ, если $n>3$, то тогда и подавно $n>0$ $n>2$ а также $2n>1$ такъ что въ слѣдующемъ за этой скобкой выраженіи всѣ показатели степеней — *положительны*

$$:\frac{2^{-3}a^{1-2n}}{b^{-n}z^{3-n}\left(\frac{1}{a^{-1}}-\frac{1}{b^{-1}}\right)^{2-n}\left(\frac{1}{x^{-1}}+\frac{1}{z^{-1}}\right)^{-3}}.$$

364′ $$\frac{9a^{-n}(x-z)^{n-3}z^{-n-1}}{b^{n-2}(a+b)^{-n+3}}=3^2a^{-n}b^{-n+2}z^{-n-1}(a+b)^{n-3}(x-z)^{n-3}=$$

$$=\frac{1}{3^{-2}a^nb^{n-2}z^{n+1}(a+b)^{3-n}(x-z)^{-n+3}}=\text{*)}\ \frac{9(a+b)^{n-3}(x-z)^{n-3}}{a^nb^{n-2}z^{n+1}}=$$

$$\frac{a^{-n}b^{-n+2}z^{-n-1}}{3^{-2}(a+b)^{-n+3}(x-z)^{-n+3}}=\frac{a^{-n}b^{2-n}z^{-n-1}}{3^{-2}\left(\frac{1}{a^{-1}}+\frac{1}{b^{-1}}\right)^{3-n}\left(\frac{1}{x^{-1}}-\frac{1}{z^{-1}}\right)^{3-n}}.$$

365 $$\frac{a^{-3}\ \frac{1}{b^{-n}}\ (m-n)^p\ \frac{1}{(y-z)^2}}{c^{-m}d^{-n}\ \frac{1}{m^p}\ \frac{1}{(x+y)^{-3}}}=\frac{a^{-3}b^n(m-n)^p(y-z)^{-2}}{c^{-m}d^{-n}m^{-p}(x+y)^3}=$$

$$=a^{-3}b^nc^md^nm^p(m-n)^p(x+y)^{-3}(y-z)^{-2}=$$

$$=\frac{1}{a^3b^{-n}c^{-m}d^{-n}m^{-p}(m-n)^{-p}(x+y)^3(y-z)^2}=$$

$$=\frac{b^nc^md^nm^p(m-n)^p}{a^3(x+y)^3(y-z)^2}=\frac{a^{-3}(x+y)^{-3}(y-z)^{-2}}{b^{-n}c^{-m}d^{-n}m^{-p}(m-n)^{-p}}=$$

$$\frac{a^{-3}\left(\frac{1}{x^{-1}}+\frac{1}{y^{-1}}\right)^{-3}\left(\frac{1}{y^{-1}}-\frac{1}{z^{-1}}\right)^{-2}}{b^{-n}c^{-m}d^{-n}m^{-p}\left(\frac{1}{m^{-1}}-\frac{1}{n^{-1}}\right)^{-p}}$$

365′ $$\frac{a^3\ \frac{1}{b^n}\ (m-n)^{-p}\ \frac{1}{(y+z)^{-2}}}{c^md^n\ \frac{1}{m^{-p}}\ \frac{1}{(x-y)^3}}=$$

$$\frac{a^3b^{-n}(m-n)^{-p}(y+z)^2}{c^md^nm^p(x-y)^{-3}}=a^3b^{-n}c^{-m}d^{-n}m^{-p}(m-n)^{-p}(x-y)^3(y+z)^2=$$

$$=\frac{1}{a^{-3}b^nc^md^nm^p(m-n)^p(x-y)^{-3}(y+z)^{-2}}=$$

$$=\frac{a^3(x-y)^3(y+z)^2}{b^nc^md^nm^p(m-n)^p}=\frac{b^{-n}c^{-m}d^{-n}m^{-p}(m-n)^{-p}}{a^{-3}(x-y)^{-3}(y+z)^{-2}}=$$

$$\frac{b^{-n}c^{-m}d^{-n}m^{-p}\left(\frac{1}{m^{-1}}-\frac{1}{n^{-1}}\right)^{-p}}{a^{-3}\left(\frac{1}{x^{-1}}-\frac{1}{y^{-1}}\right)^{-3}\left(\frac{1}{y^{-1}}+\frac{1}{z^{-1}}\right)^{-2}}$$

*) При условии $n>3$ тогда и подавно $n>0$ и $n>2$ см. выноску въ предыдущ. №-р.

$$366\quad \frac{\dfrac{(m+n)^{-p}}{(m-n)^{-q}}\cdot a^{2n+1}\cdot\dfrac{x^{-a}}{(y-z)^{b}}}{b^{-1-n}\cdot\dfrac{(p-q)^{m}}{(p+q)^{-n}}\cdot z^{2-n}}=$$

$$=\frac{(m+n)^{-p}(m-n)^{q}a^{2n+1}x^{-a}(y-z)^{-b}}{b^{-1-n}(p-q)^{m}(p+q)^{n}z^{2-n}}=$$

$$=a^{2n+1}b^{n+1}x^{-a}z^{n-2}(m+n)^{-p}(m-n)^{q}(p+q)^{-n}(p-q)^{-m}(y-z)^{-b}=$$

$$=\frac{1}{a^{-2n-1}b^{-n-1}x^{a}z^{2-n}(m+n)^{p}(m-n)^{-q}(p+q)^{n}(p-q)^{m}(y-z)^{b}}=$$

$$=(\text{при } n>2)=\frac{a^{2n+1}b^{n+1}z^{n-2}(m-n)^{q}}{x^{a}(m+n)^{p}(p+q)^{n}(p-q)^{m}(y-z)^{b}}=$$

$$=\frac{x^{-a}(m+n)^{-p}(p+q)^{-n}(p-q)^{-m}(y-z)^{-b}}{a^{-2n-1}b^{-n-1}z^{-n+2}(m-n)^{-q}}=$$

$$=\frac{x^{-a}\left(\dfrac{1}{m^{-1}}+\dfrac{1}{n^{-1}}\right)^{-p}\left(\dfrac{1}{p^{-1}}+\dfrac{1}{q^{-1}}\right)^{-n}\left(\dfrac{1}{p^{-1}}-\dfrac{1}{q^{-1}}\right)^{-m}\left(\dfrac{1}{y^{-1}}-\dfrac{1}{z^{-1}}\right)^{-b}}{a^{-2n-1}b^{-n-1}z^{-n+2}\left(\dfrac{1}{m^{-1}}-\dfrac{1}{n^{-1}}\right)^{-q}}$$

$$366'\quad \frac{\dfrac{(m-n)^{p}}{(m+n)^{-q}}\cdot b^{2n-1}\cdot\dfrac{z^{-a}}{(x-y)^{b}}}{a^{n-1}\cdot\dfrac{(p+q)^{-m}}{(p-q)^{n}}\cdot x^{-n-1}}=$$

$$=\frac{b^{2n-1}(m-n)^{p}(m+n)^{q}z^{-a}(x-y)^{-b}}{a^{n-1}x^{-n-1}(p+q)^{-m}(p-q)^{-n}}=$$

$$=a^{-n+1}b^{2n-1}x^{n+1}z^{-a}(m-n)^{p}(m+n)^{q}(p-q)^{n}(p+q)^{m}(x-y)^{-b}=$$

$$=\frac{1}{a^{n-1}b^{-2n+1}x^{-n-1}z^{a}(m+n)^{-q}(m-n)^{-p}(p+q)^{-m}(p-q)^{-n}(x-y)^{b}}=$$

$$=(\text{при } n>1)=\frac{b^{2n-1}x^{n+1}(m+n)^{q}(m-n)^{p}(p+q)^{m}(p-q)^{n}}{a^{n-1}z^{a}(x-y)^{b}}=$$

$$=\frac{a^{-n+1}z^{-a}(x-y)^{-b}}{b^{-2n+1}x^{-n-1}(m+n)^{-q}(m-n)^{-p}(p+q)^{-m}(p-q)^{-n}}=$$

$$=\frac{a^{-n+1}z^{-a}\left(\dfrac{1}{x^{-1}}-\dfrac{1}{y^{-1}}\right)^{-b}}{b^{-2n+1}x^{-n-1}\left(\dfrac{1}{m^{-1}}+\dfrac{1}{n^{-1}}\right)^{-q}\left(\dfrac{1}{m^{-1}}-\dfrac{1}{n^{-1}}\right)^{-p}\left(\dfrac{1}{p^{-1}}+\dfrac{1}{q^{-1}}\right)^{-m}\left(\dfrac{1}{p^{-1}}-\dfrac{1}{q^{-1}}\right)^{-n}}$$

367 $a^{-2}\cdot a^{7}=a^{-2+7}=a^{5}$, и дѣйствительно $a^{-2}=\frac{1}{a^{2}}$, слѣд. $a^{-2}\cdot a^{7}=$

$=\frac{1}{a^{2}}\cdot a^{7}=\frac{a^{7}}{a^{2}}=a^{7-2}=a^{5}$. 367′ ... $a^{-5}=a^{2-5}=a^{-3}=\frac{1}{a^{3}}=$

момъ дѣлѣ т к $a^{-5}=\frac{1}{a^5}$ то $a^2 \cdot a^{-5}=a^2 \; \frac{1}{a^5}=\frac{a^2}{a^5}=\frac{1}{a^{5-2}}=$
$=\frac{1}{a^3}=a^{-3}$

368 $a^{-10} \; a^{-7}=a^{-10-7}=a^{-17}=\frac{1}{a^{17}}$ Так образ вообще *умноженіе степеней одинаковыхъ буквъ состоитъ въ алгебраическомъ сложеніи показателей степеней, съ удержаніемъ прежняго основанія* (см выноску къ № 372) Провѣряемъ результатъ даннаго примѣра, т к $a^{-10}=\frac{1}{a^{10}}$, $a^{-7}=\frac{1}{a^7}$, то $a^{-10} \; a^{-7}=\frac{1}{a^{10}} \; \frac{1}{a^7}=\frac{1}{a^{10} \; a^7}=\frac{1}{a^{10+7}}=\frac{1}{a^{17}}=a^{-10-7}=a^{-17}$ **368'** a^{-12} . $a^{-2}=a^{-12-2}=a^{-14}=\frac{1}{a^{14}}$.

369 $a^{-m} \; a^{2m}=a^{-m+2m}=a^m$ **369'** $a^{-3m} \; a^{2m}=a^{-3m+2m}=$
$=a^{-m}=\frac{1}{a^m}$

370 $a^{m+1} \; a^{-3}=a^{m+1-3}=a^{m-2}$ **370'** $a^{-m-1} \; a^3=a^{-m-1+3}=$
$=a^{-m+2}=\frac{1}{a^{m-2}}$

371 $a^{-7} \; a^4=a^{-7-4}=a^{-11}=\frac{1}{a^{11}}$, и дѣйствительно, $a^{-7}=\frac{1}{a^7}$, слѣд, $a^{-7} \; a^4=\frac{1}{a^7} \; a^4=\frac{1}{a^7 \; a^4}=\frac{1}{a^{11}}=a^{-7} \; a^{-4}=a^{-11}$ **371'** $a^8 \; a^{-3}=a^{8+3}=$
$=a^{11}$, въ самомъ дѣлѣ, т к $a^{-3}=\frac{1}{a^3}$, то $a^8 \; a^{-3}=a^8 \; \frac{1}{a^3}=\frac{a^8 \; a^3}{1}=$
$=a^{8+3}=a^{8-(-3)}=a^{11}$

372 $a^{-5} \; a^{-2}=a^{-5-(-2)}=a^{-5+2}=a^{-3}=\frac{1}{a^3}$ Дѣйствительно, т к. $a^{-5}=\frac{1}{a^5}$, $a^{-2}=\frac{1}{a^2}$, то $a^{-5} \; a^{-2}=\frac{1}{a^5} \; \frac{1}{a^2}=\frac{1}{a^5} \frac{a^2}{1}=\frac{1}{a^{5-2}}=a^{-5+2}=a^{-3}$
372' $a^{-4} \; a^{-9}=a^{-4-(-9)}=a^{-4+9}=a^5$

Вообще, *дѣленіе степеней одинаковыхъ буквъ состоитъ въ алгебраическомъ вычитаніи *) показателя степени дѣлителя изъ показателя степени дѣлимаго*

373 $a^{-m} \; a^{-2m}=a^{-m+2m}=a^m$. **373'** $a^{-3m} \; a^{-2m}=a^{-3m+2m}=$
$=a^{-m}=\frac{1}{a^m}$.

---

*) Алгебраически *сложить* съ даннымъ количествомъ другое значитъ приписать къ первому второе, сохраняя знакъ послѣдняго По аналогіи съ этимъ *алгебраическимъ вычитаніемъ наз приписываніе къ данному количеству другого перемѣнив знакъ этого послѣдняго на обратный*

374 $a^{-5n}\ a^{8n}=a^{-5n-8n}=a^{-13n}=\frac{1}{a^{13n}}$ **374′** $a^{n}\ a^{-5n}=$ $=a^{n+5n}=a^{6n}$

375 $2^{-5}\ 2^{3}=2^{-5+3}=2^{-2}=\frac{1}{2^{2}}=\frac{1}{2\ 2}={}^{1}/_{4}$ Иначе Т к $2^{-5}=$ $=\frac{1}{2^{5}}={}^{1}/_{2\ \ 2\ \ 2\ \ 2\ \ 2}={}^{1}/_{32}$ $2^{3}=2\ \ 2\ \ 2=8$, то $2^{-5}\ \ 2^{3}={}^{1}/_{32}\ \ 8={}^{8}/_{32}=$ $={}^{1}/_{4}$. **375′** $2^{3}\ 2^{-5}=2^{3+5}=2^{8}=2\ \ 2\ \ 2\ \ 2\ \ 2\ \ 2\ \ 2\ \ 2=256$ Иначе 2^{3} $2^{-5}=8\ {}^{1}/_{32}=8\ \ 32=256$

376. $2^{-3}\ 2^{-2}=2^{-3+2}=2^{-1}=\frac{1}{2^{1}}={}^{1}/_{2}$ Иначе Т к $2^{-3}=\frac{1}{2^{3}}=$ $={}^{1}/_{2\ \ 2\ \cdot\ 2}={}^{1}/_{8}$ $2^{-2}=\frac{1}{2^{2}}={}^{1}/_{2\ \ 2}={}^{1}/_{4}$, то $2^{-3}\ 2^{-2}={}^{1}/_{8}\ {}^{1}/_{4}={}^{1\ 4}/_{8\ 1}={}^{1}/_{2}$

376′ $2^{-2}\ \ 2^{-3}=2^{-2-3}=2^{-5}=\frac{1}{2^{5}}={}^{1}/_{2\ \ 2\ \ 2\ \ 2\ \ 2}={}^{1}/_{32}$ Или $2^{-2}\ 2^{-3}=$ $={}^{1}/_{4}\ \ {}^{1}/_{8}={}^{1}/_{4\ \ 8}={}^{1}/_{32}$

377 $3^{-1}\ 3^{-4}=3^{-1+4}=3^{3}=3\ \ 3\ \ 3=27$ Иначе Т к $3^{-1}={}^{1}/_{3}$ $3^{-4}=\frac{1}{3^{4}}=$ $={}^{1}/_{3\ \ 3\ \ 3\ \ 3}={}^{1}/_{81}$, то $3^{-1}\ 3^{-4}={}^{1}/_{3}\ \ {}^{1}/_{81}={}^{1\ 81}/_{3\ 1}=27$ **377′** $3^{2}\ \ 3^{-3}=$ $=3^{2-3}=3^{-1}=\frac{1}{3^{1}}={}^{1}/_{3}$ Или $3^{2}\ \ 3^{-3}=9\ \ {}^{1}/_{27}={}^{9}/_{27}={}^{1}/_{3}$

378 $5^{-1}\ \ 5^{-3}=5^{-1-3}=5^{-4}=\frac{1}{5^{4}}=\frac{1}{5\ 5\ 5\ 5}={}^{1}/_{625}$ Иначе Т к $5^{-1}={}^{1}/_{5}$, $5^{-3}=\frac{1}{5^{3}}={}^{1}/_{5\ \ 5\ \ 5}={}^{1}/_{125}$, то $5^{-1}\ \ 5^{-3}={}^{1}/_{5}\ \ {}^{1}/_{125}={}^{1}/_{5\ \ 125}=$ $={}^{1}/_{625}$ **378′** $5^{-2}\ \ 5=5^{-2}\ \ 5^{1}=5^{-2-1}=5^{-3}=\frac{1}{5^{3}}={}^{1}/_{5\ \ 5\ \ 5}={}^{1}/_{125}$ Или $5^{-2}=$ $={}^{1}/_{5\ \ 5}={}^{1}/_{25}$, слѣд $5^{-2}\ \ 5={}^{1}/_{25}\ \ 5={}^{1}/_{25\ \ 5}={}^{1}/_{125}$

379 $a^{-3}\ \ a^{5}\ \ a^{-7}=a^{-3+5-7}=a^{-5}=\frac{1}{a^{5}}$ См рѣш № 368 **379′** a^{3} $a^{-4}\ \ a^{-1}=a^{3-4-1}=a^{-2}=\frac{1}{a^{2}}$

380 $a^{-2}\ \ a^{-3}\ \ a=a^{-2-3+1}=a^{-4}=\frac{1}{a^{4}}$ **380′** $a\ \ a^{-3}\ \ a^{2}=a^{1-3+2}=$ $=a^{0}=1$.

381 $a^{-m}\ \ a^{-n}\ \ a^{2m}=a^{-m-n+2m}=a^{m-n}$ **381′** $a^{-2m}\ \ a^{-2n}\ \ a^{3n}=$ $=a^{-2m-2n+3n}=a^{n-2m}$

382 $a^{-3m}\ \ a^{2m}\ \ a^{-m}=a^{-3m+2m-m}=a^{-2m}=\frac{1}{a^{2m}}$ **382′** a^{5m}. $a^{2m}\ \ a^{-9m}=a^{5m+2m-9m}=a^{-2m}=\frac{1}{a^{2m}}$

383 $8a^{-4}b \; 3a^{-2}b^{-2}c^{-1} = 8 \; 3a^{-4-2}b^{1-2}c^{-1} = 24a^{-6}b^{-1}c^{-1} = \dfrac{24}{a^6bc}$

383′ $-2a^{-3}b^{-3} \; 4a^5b^{-2}c$ По прежнимъ правиламъ (отд III § 11) это— случай невозможнаго дѣленія, ибо въ дѣлителѣ есть буква (c), которой нѣтъ въ дѣлимомъ Но со введеніемъ отрицательныхъ и нулевыхъ показателей это препятствіе устраняется, и является возможность составлять частное, по общимъ правиламъ, въ видѣ цѣлаго выраженія Мы знаемъ, что всякое количество «въ нулевой степени» приравнивается 1-цѣ 1-ца же (положительная) въ качествѣ множителя не измѣняетъ величины выраженія, отсюда слѣдуетъ

ПРАВИЛО *Ко всякому алгебраическому выраженію можно приписывать, въ качествѣ множителя, какую-либо букву съ нулевымъ показателемъ степени, не измѣняя величины выраженія отъ этого*

Так образ, введемъ множителемъ c^0 въ дѣлимое и приступимъ къ дѣленію по общимъ правиламъ $-2a^{-3}b^{-3} \; 4a^5b^{-2}c = -2a^{-3}b^{-3}c^0 \; 4a^5b^{-2}c^1 =$

$= -{}^2/_4 a^{-3-5}b^{-3+2}c^{0-1} = -{}^1/_2 a^{-8}b^{-1}c^{-1} = -\dfrac{1}{2a^8bc}$

384 См № 383′ правило ${}^2/_3 a^{-5}b^4c^{-2} \; {}^2/_{15} a^{-2}c^2d^{-3} = {}^2/_3 a^{-5}b^4c^{-2}d^0$

${}^2/_{15} a^{-2}c^2d^{-3} = {}^{2\,15}/_{3\,2} a^{-5+2}b^4c^{-2-2}d^{0+3} = 5a^{-3}b^4c^{-4}d^3 = \dfrac{5b^4d^3}{a^3c^4}$ **384′**

$6a^3b^{-3}c^{-5} \,.\; 3^{-1}a^{-5}b^4c^2 = 6 \; \dfrac{1}{3^1} \; a^{3-5}b^{-3+4}c^{-5+2} = 2a^{-2}bc^{-3} = \dfrac{2b}{a^2c^3}$

385 $2^{-2}a^{-m}b^pc^{-q} \; 2^{-4}a^{-m}b^{-p}c^q = 2^{-2-4}a^{-m-m} \; b^{p-p}c^{-q+q} =$

$= 2^{-6}a^{-2m}b^0c^0 = \dfrac{1}{2^6a^{2m}} = \dfrac{1}{2 \; 2 \; 2 \; 2 \; 2 \; 2a^{2m}} = \dfrac{1}{64a^{2m}}$ **385′** ${}^4/_{15} a^{-3}b^{-p}c^4$

$({}^3/_2)^{-1}a^{-5}b^{-3p}c^8 = {}^4/_{15} a^{-3}b^{-p}c^4 \; \dfrac{1}{{}^3/_2} a^{-5}b^{-3p}c^8 = {}^4/_{15} a^{-3}b^{-p}c^4 \; {}^2/_3 a^{-5}b^{-3p}c^8 =$

$= \dfrac{4 \; 3}{15 \; 2} a^{-3+5}b^{-p+3p}c^{4-8} = {}^2/_5 a^2b^{2p}c^{-4} = \dfrac{2a^2b^{2p}}{5c^4}$

386 $-6a^{-m}b^2c^p \; -3a^{-n}b^{-4}c^{-p-1}d^{-n} =$ (№ 383, правило) $= -6a^{-m}b^2c^pd^0$ $-3a^{-n}b^{-4}c^{-p-1}d^{-n} = + {}^6/_3 a^{-m+n}b^{2+4}c^{p+p+1}d^{0+n} = 2a^{n-m}b^6c^{2p+1}d^n$

Если показатель степени c въ дѣлимомъ $=p$, въ дѣлителѣ $= -p-1$, какъ и напечатано, то въ частномъ онъ, очевидно, долженъ быть $= p-(-p-1) = p+p+1 = 2p+1$, а не $2p-1$ **386′** $-3^{-1}a^{-n}b^3c^{-p} \; -3^3a^{-m}b^5c^{p+1}d^n =$

$= +3^{-1+3}a^{-n-m}b^{3+5}c^{-p+p+1}d^n = 3^2a^{-m-n}b^8cd^n = \dfrac{9b^8cd^n}{a^{m+n}}$.

387 $(m^{-5} - m^{+3} + m^{-1}) \; m^4 = m^{-5} \; m^4 - m^{+3} \; m^4 + m^{-1} \; m^4 = m^{-1} - m^7 + m^3 =$

$= -m^7 + m^3 + \dfrac{1}{m}$ **387′** $(m^{-8} + m^{-6} - m^{+4}) \; m^6 = m^{-8} \; m^6 + m^{-6} \; m^6 - m^4 \; m^6 =$

$= m^{-8-6} + m^{-6-6} - m^{-4-6} = m^{-14} + m^{-12} - m^{-2} = \dfrac{1}{m^{14}} + \dfrac{1}{m^{12}} - \dfrac{1}{m^2}$

388 $(m^{-8}+m^7-m^{-3})\;-m^{-7}=-m^{-8}\;m^{-7}-m^7\;m^{-7}+m^{-3}\;m^{-7}=$ $=-m^{-8+7}-m^{7+7}+m^{-3+7}=-m^{-1}-m^{14}+m^4=-m^{14}+m^4-\frac{1}{m}$. **388'**. $(m^{-2}-m^{-4}+m^8)\;-m^{-4}=-m^{-2}\cdot m^{-4}+m^{-4}\;m^{-4}-m^8\;m^{-4}=$ $=-m^{-2-4}+m^{-4-4}-m^{8-4}=-m^{-6}+m^{-8}-m^4=-\frac{1}{m^6}+\frac{1}{m^8}-m^4$

389 $(p^{-4}-p^{-3}q+p^{-2}q^2-p^{-1}q^3+q^4)\;p^4q^{-4}=p^{-4}p^4q^{-4}-p^{-3}qp^4q^{-4}+$ $+p^{-2}q^2p^4q^{-4}-p^{-1}q^3p^4q^{-4}+q^4p^4q^{-4}=p^0q^{-4}-pq^{-3}+p^2q^{-2}-p^3q^{-1}+p^4q^0=$ $=\frac{1}{q^4}-\frac{p}{q^3}+\frac{p^2}{q^2}-\frac{p^3}{q}+p^4.$

389' См № 383', прав $(p^{-8}+p^{-6}q^2+p^{-4}q^4+p^{-2}q^6+q^8)\;p^{-4}q^4=p^{-}$ $p^{-4}q^4+p^{-6}q^2\;p^{-4}q^4+p^{-4}q^4\;p^{-4}q^4+p^{-2}q^6\;p^{-4}q^4+q^8\;p^{-4}q^4=p^{-8}q^0$ $p^{-4}q^4+p^{-6+4}q^{2-4}+1+p^{-2+4}q^{6-4}+p^0q^8\;p^{-4}q^4=p^{-8+4}q^{0-4}+p^{-2}q^{-2}+$ $+1+p^2q^2+p^{0+4}q^{8-4}=p^{-4}q^{-4}+\frac{1}{p^2q^2}+1+p^2q^2+p^4q^4=p^4q^4+p^2q^2+1+$ $+\frac{1}{p^2q^2}+\frac{1}{p^4q^4}$

390 См № 383' правило $(p^{-10}+p^{-8}q^4+p^{-6}q^6+p^{-4}q^8)\;-p^{-6}q^8=$ $=-p^{-10}q^0\;p^{-6}q^8-p^{-8}q^4\;p^{-6}q^8-p^{-6}q^6\;p^{-6}q^8-p^{-4}q^8\;p^{-6}q^8=$ $=-p^{-10+6}q^{0-8}-p^{-8+6}q^{4-8}-p^{-6+6}q^{6-8}-p^{-4+6}q^{8-8}=-p^{-4}q^{-8}-p^{-2}q^{-4}-$ $-p^0q^{-2}-p^2q^0=-\left(\frac{1}{p^4q^8}+\frac{1}{p^2q^4}+\frac{1}{q^2}+p^2\right)$

390' $(p^{-7}-p^{-5}q+p^{-3}q^3-p^{-1}q^5+q^7)\;-p^5q^{-3}=-p^{-7}q^{-3}p^5+p^{-5}qp^5q^{-3}-$ $-p^{-3}q^3p^5q^{-3}+p^{-1}q^5p^5q^{-3}-q^7p^5q^{-3}=-p^{-2}q^{-3}+p^0q^{-2}-p^2q^0+p^4q^2-$ $-p^5q^4=-\frac{1}{p^2q^3}+\frac{1}{q^2}-p^2+p^4q^2-p^5q^4$

391 По формулѣ $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ для произведенія суммы двухъ количествъ на ихъ разность имѣемъ $(a^{-3}+b^{-5})\;(a^{-3}-b^{-5})=(a^{-3})^2-$ $-(b^{-5})^2=a^{-3}\cdot a^{-3}-b^{-5}\;b^{-5}=a^{-3-3}-b^{-5-5}=a^{-6}-b^{-10}=\frac{1}{a^6}-$ $-\frac{1}{b^{10}}$ **391'** См отд III № 527 Т к $a^{-6}=a^{-3-3}=a^{-3+(-3)}=a^{-3}\cdot$ $\cdot a^{-3}=(a^{-3})^2$ и подобнымъ же образомъ $b^{-4}=(b^{-2})^2$, то $(a^{-6}-b^{-4})$ $(a^{-3}+b^{-2})=[(a^{-3})^2-(b^{-2})^2]\;(a^{-3}+b^{-2})=[(a^{-3}+b^{-2})\,(a^{-3}-b^{-2})]\cdot$ $(a^{-3}+b^{-2})=a^{-3}-b^{-2}=\frac{1}{a^3}-\frac{1}{b^2}$

392 Срв № 527 отд III Т к $a^{-2m}=a^{-m-m}=a^{-m+(-m)}=a^{-m}\cdot$ $\cdot a^{-m}=(a^{-m})^2$ и подобнымъ же образомъ $b^{-2m}=(b^{-m})^2$ то $(a^{-2m}-$ $-b^{-2m})\;(a^{-m}+b^{-m})=[(a^{-m})^2-(b^{-m})^2]\;(a^{-m}+b^{-m})=[(a^{-m}+b^{-m})$ $(a^{-m}-b^{-m})]\;(a^{-m}+b^{-m})=a^{-m}-b^{-m}=\frac{1}{}-\frac{1}{}$ **392'** См № 391

$(a^{-m}+b^{-n})\ (a^{-m}-b^{-n})=(a^{-m})^2-(b^{-n})^2=a^{-m}\ a^{-m}-b^{-n}\ b^{-n}=$
$=a^{-m-m}-b^{-n-n}=a^{-2m}-b^{-2n}=\dfrac{1}{a^{2m}}-\dfrac{1}{b^{2n}}$

393 $(a^{-m}+b^{-m})\ (a^{-n}-b^{-n})=a^{-m}a^{-n}+b^{-m}a^{-n}-a^{-m}b^{-n}-$
$-b^{-m}b^{-n}=a^{-m-n}+a^{-n}b^{-m}-a^{-m}b^{-n}-b^{-m-n}=a^{-(m+n)}+a^{-n}b^{-m}-$
$-a^{-m}b^{-n}-b^{-(m+n)}=\dfrac{1}{a^{m+n}}+\dfrac{1}{a^nb^m}-\dfrac{1}{a^mb^n}-\dfrac{1}{b^{m+n}}$ **393'** См №№ 391',
392 и отд III 527 Т к $a^{-4m}=a^{-2m-2m}=a^{-2m+(-2m)}=a^{-2m}\ a^{-2m}=$
$=(a^{-2m})^2$ и подобнымъ образомъ $b^{-4m}=(b^{-2m})^2$, то $(a^{-4m}-b^{-4m})$
$(a^{-2m}-b^{-2m})=[(a^{-2m})^2-(b^{-2m})^2]\ \ (a^{-2m}-b^{-2m})=[(a^{-2m}+b^{-2m})$
$(a^{-2m}-b^{-2m})]\ \ (a^{-2m}-b^{-2m})=a^{-2m}+b^{-2m}=\dfrac{1}{a^{2m}}+\dfrac{1}{b^{2m}}$

394 См отд III № 529 и отд IV № 146 По формулѣ $a^3-b^3=(a-b)$
(a^2+ab+b^2) и на основанiи того что $a^{-3m}=a^{-m-m-m}=a^{-m}\ a^{-m}$
$a^{-m}=(a^{-m})^3$, а также $b^{-3m}=(b^{-m})^3$, имѣемъ $(a^{-3m}-b^{-3m})\ (a^{-m}-$
$-b^{-m})=[(a^{-m})^3-(b^{-m})^3]\ \ (a^{-m}-b^{-m})=\{[(a^{-m})^1-(b^{-m})^1]\,[(a^{-m})^2+$
$+(a^{-m})^1\ (b^{-m})+(b^{-m})^2]\}\ \ (a^{-m}-b^{-m})=[(a^{-m}-b^{-m})\ (a^{-m}a^{-m}+$
$+a^{-m}b^{-m}+b^{-m}b^{-m})]\ \ (a^{-m}-b^{-m})=a^{-m+(-m)}+a^{-m}b^{-m}+b^{-m+(-m)}=$
$=a^{-m-m}+a^{-m}b^{-m}+b^{-m-m}=a^{-2m}+a^{-m}b^{-m}+b^{-2m}=\dfrac{1}{a^{2m}}+\dfrac{1}{a^mb^m}+$
$+\dfrac{1}{b^{2m}}=\dfrac{b^{2m}}{a^{2m}b^{2m}}+\dfrac{a^mb^m}{a^mb^ma^mb^m}+\dfrac{a^{2m}}{a^{2m}b^{2m}}=\dfrac{a^{2m}+a^mb^m+b^{2m}}{a^{2m}b^{2m}}$ **394'**.
$(a^{-2m}+b^{-2m})\ \ (a^{-n}+b^{-n})=a^{-2m}a^{-n}+b^{-2m}a^{-n}+a^{-2m}b^{-n}+b^{-2m}b^{-n}=$
$=a^{-2m+(-n)}+a^{-n}b^{-2m}+a^{-2m}b^{-n}+b^{-2m+(-n)}=a^{-2m-n}+a^{-n}b^{-2m}+$
$+a^{-2m}b^{-n}+b^{-2m-n}=a^{-(2m+n)}+a^{-n}b^{-2m}+a^{-2m}b^{-n}+b^{-(2m+n)}=$
$=\dfrac{1}{a^{2m+n}}+\dfrac{1}{a^nb^{2m}}+\dfrac{1}{a^{2m}b^n}+\dfrac{1}{b^{2m+n}}=\dfrac{b^{2m+n}}{a^{2m+n}b^{2m+n}}+$
$+\dfrac{a^{2m}b^n}{a^nb^{2m}a^{2m}b^n}+\dfrac{a^nb^{2m}}{a^{2m}b^na^nb^{2m}}+\dfrac{a^{2m+n}}{a^{2m+n}b^{2m+n}}=$
$=\dfrac{a^{2m+n}+a^{2m}b^n+a^nb^{2m}+b^{2m+n}}{a^{2m+n}b^{2m+n}}$

395 $(x^{-2}+x^{-1}+x^0)\ (x^{-1}-x)=(x^{-2}+x^{-1}+1)\ (x^{-1}-x)=x^{-2}x^{-1}+$
$+x^{-1}x^{-1}+x^{-1}-x^{-2}x-x^{-1}x-x=x^{-2-1}+x^{-1-1}+x^{-1}-x^{-2+1}-x^{-1+1}-$
$-x=x^{-3}+x^{-2}+x^{-1}-x^{-1}-x^0-x=x^{-3}+x^{-2}-1-x=\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x^2}-1-$
$-x=\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{x}{x^3}-\dfrac{x^3}{x^3}-\dfrac{x^4}{x^3}=\dfrac{1+x-x^3-x^4}{x^3}$ **395'** $(x^{-2}+x^{-1}+x)(x^{-2}-$
$-x^{-1})=x^{-2}x^{-2}+x^{-1}x^{-2}+xx^{-2}-x^{-2}x^{-1}-x^{-1}x^{-1}-xx^{-1}=x^{-2-2}+$
$+x^{-1-2}+x^{1-2}-x^{-2-1}-x^{-1-1}-x^{1-1}=x^{-4}+x^{-3}+x^{-1}-x^{-3}-x^{-2}-$

$$-x^0=x^{-4}-x^{-2}+x^{-1}-1=\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}-1=\frac{1}{x^4}-\frac{x^2}{x^4}+\frac{x^3}{x^4}-\frac{x^4}{x^4}=$$
$$=\frac{1-x^2+x^3-x^4}{x^4}$$

396 Согласно съ формулой $(a^2-ab+b^2)\ (a+b)=a^3+b^3$ (формула 12-ая на 44 стр «Сборника») имѣемъ $(x^{-2}-a^{-1}x^{-1}+a^{-2})\ (x^{-1}+a^{-1})=(x^{-1}\ x^{-1}-$ $-a^{-1}x^{-1}+a^{-1}a^{-1})(x^{-1}+a^{-1})=[(x^{-1})^2-(x^{-1})^1\ (a^{-1})^1+(a^{-1})^2][(x^{-1})^1+$ $+(a^{-1})^1]=(x^{-1})^3+(a^{-1})^3=x^{-1}x^{-1}x^{-1}+a^{-1}a^{-1}a^{-1}=x^{-1-1-1}+$ $+a^{-1-1-1}=x^{-3}+a^{-3}=\frac{1}{x^3}+\frac{1}{a^3}$. **396′** По формулѣ 11 ой на 44 стр «Сборника» имѣемъ $(a^2+ab+b^2)(a-b)=a^3-b^3$, по формулѣ же 3-ей $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$, кромѣ того, $x^{-2}=x^{-1-1}=x^{-1+(-1)}=x^{-1}x^{-1}=$ $=(x^{-1})^2$, а также $a^{-2}=(a^{-1})^2$. Так образ последовательно будемъ имѣть $(x^{-2}+a^{-1}x^{-1}+a^{-2})\ (x^{-2}-a^{-2})=(x^{-2}+a^{-1}x^{-1}+a^{-2})[(x^{-1})^2-$ $-(a^{-1})^2]=[(x^{-1})^2+x^{-1}\ a^{-1}+(a^{-1})^2]\ [(x^{-1}+a^{-1})\ (x^{-1}-a^{-1})]=$ $=\{[(x^{-1})^2+(x^{-1})\ (a^{-1})^1+(a^{-1})^2](x^{-1}-a^{-1})\}(x^{-1}+a^{-1})=[(x^{-1})^3-$ $-(a^{-1})^3](x^{-1}+a^{-1})=(x^{-1}x^{-1}x^{-1}-a^{-1}a^{-1}a^{-1})\ (x^{-1}+a^{-1})=(x^{-1-1-1}-$ $-a^{-1-1-1})\ (x^{-1}+a^{-1})=(x^{-3}-a^{-3})(x^{-1}+a^{-1})=x^{-3}x^{-1}-a^{-3}x^{-1}+$ $+x^{-3}a^{-1}-a^{-3}a^{-1}=x^{-4}-a^{-3}x^{-1}+a^{-1}x^{-3}-a^{-4}=\frac{1}{x^4}-\frac{1}{a^3x}+\frac{1}{ax^3}-$ $-\frac{1}{a^4}=\frac{a^4+a^3x-ax^3-x^4}{a^4x^4}$

397 $(x^{-4}+a^2x^{-2}+a^4)\ (x^2-a^{-2})=x^{-4}x^2+a^2x^{-2}x^2+a^4x^2-x^{-4}a^{-2}-$ $-a^2x^{-2}a^{-2}-a^4a^{-2}=x^{-4+2}+a^2x^{2-2}+a^4x^2-a^{-2}x^{-4}-a^{2-2}x^{-2}-a^{4-2}=$ $=x^{-2}+a^2x^0+a^4x^2-a^{-2}x^{-4}-a^0x^{-2}-a^2=x^{-2}+a^2+a^4x^2-a^{-2}x^{-4}-x^{-2}-$ $-a^2=a^4x^2-a^{-2}x^{-4}=a^4x^2-\frac{1}{a^2x^4}$ **397′** $(x^6-a^{-3}x^3+a^{-6})\ (x^{-3}+a^3)=$ $=x^6x^{-3}-a^{-3}x^3x^{-3}+a^{-6}x^{-3}+x^6a^3-a^{-3}x^3a^3+a^{-6}a^3=x^{6-3}-a^{-3}x^{3-3}+$ $+a^{-6}x^{-3}+a^3x^6-a^{-3+3}x^3+a^{-6+3}=x^3-a^{-3}x^0+a^{-6}x^{-3}+a^3x^6-a^0x^3+$ $+a^{-3}=x^3-a^{-3}+a^{-6}x^{-3}+a^3x^6-x^3+a^{-3}=a^3x^6+a^{-6}x^{-3}=a^3x^6+\frac{1}{a^6x^3}$

Къ №№ 398—400 Располагая данные для дѣленія многочлены по степенямъ главной буквы (обыкновенно—по убывающимъ степенямъ), слѣдуетъ поступать такъ если въ многочленахъ попадаются степени съ отрицательными показателями, то въ *правильно* расположенномъ*) многочленѣ по убывающимъ степенямъ главной буквы сначала должны слѣдовать (считая слѣва) члены съ *положительными* степенями главной буквы при чемъ показатели постепенно уменьшаются, доходя до 1 цы, затѣмъ долженъ быть членъ (или члены) съ *нулевымъ* показателемъ и наконецъ послѣ этого должны итти члены съ *отрицательными* показателями степеней главной буквы при чемъ эти показатели постепенно увеличиваются *по абсолютной величинѣ* Замѣтимъ, что членовъ съ нулевымъ показателемъ можетъ и не быть въ дѣлимомъ если они не даны, но если въ дѣлимомъ есть членъ (или члены), не содержащій главной буквы, то къ нему *обязательно* слѣдуетъ приписать, въ качествѣ множителя главную букву съ нулевымъ показателемъ степени для наглядности при расположеніи дѣлимаго (То же можно сказать и относительно дѣлителя)

*) А какъ мы знаемъ, это—необходимое условіе для того чтобы дѣленіе было правильнымъ

398 $(6x^2+11+4x^{-2})\ (2x+x^{-1})=(6x^2+11x^0+4x^{-2})\ (2x+x^{-1})$. **398'** $(8x^4-10+3x^{-4})\ (4x^2-3x^{-2})=(8x^4-10x^0+3x^{-4})\ (4x^2-3x^{-2})$

$$\begin{array}{l|l} 6x^2+11x^0+4x^{-2} & 2x^1+x^{-1} \\ \hline \quad \mp 3x^0 & 3x+4x^{-1} \\ \quad 8x^0+4x^{-2} & \\ \quad \mp 4x^{-2} & \\ \hline \quad 0 & \end{array} \qquad \text{остатокъ} \qquad \begin{array}{l|l} 8x^4-10x^0+3x^{-4} & 4x^2-3x^{-2} \\ \hline \quad \pm 6x^0 & 2x^2-x^{-2} \\ \quad -4x^0+3x^{-4} & \\ \quad \mp 3x^{-4} & \\ \hline \quad 0 & \end{array}$$

Частное $3x+4x^{-1}=3x+\dfrac{4}{x}$ Частное $2x^2-x^{-2}=2x^2-\dfrac{1}{x^2}$

399 $(2x+3+3x^{-1}+x^{-2})\ (x+1+x^{-1})=(2x^1+3x^0+3x^{-1}+x^{-2})\ (x^1+x^0+x^{-1})$

$$\begin{array}{l|l} 2x+3x^0+3x^{-1}+x^{-2} & x^1+x^0+x^{-1} \\ \hline \mp 2x^0\mp 2x^{-1} & 2+x^{0-1}=2+x^{-1}=2+\dfrac{1}{x}. \\ \hline \quad x^0+\ x^{-1}+x^{-2} & \\ \quad \mp\ x^{-1}\mp x^{-2} & \\ \hline \quad 0 & \end{array}$$

остатокъ

399'. $(2x-3+3x^{-1}-x^{-2})\ (x-1+x^{-1})=(2x^1-3x^0+3x^{-1}-x^{-2})\ (x^1-x^0+x^{-1})$

$$\begin{array}{l|l} 2x-3x^0+3x^{-1}-x^{-2} & x^1-x^0+x^{-1} \\ \hline \pm 2x^0\mp 2x^{-1} & 2-x^{0-1}=2-x^{-1}=2-\dfrac{1}{x} \\ \hline \quad -x^0+\ x^{-1}-x^{-2} & \\ \quad \mp\ x^{-1}\pm x^{-2} & \\ \hline \quad 0 & \end{array}$$

остатокъ

400 $(^2/_3x^2-{}^4/_3-{}^3/_2x^{-2}+x^{-4})\ (4x-2x^{-1})=(^2/_3x^2-{}^4/_3x^0-{}^3/_2x^{-2}+x^{-4})\ (4x^1-2x^{-1})$

$$\begin{array}{l|l} ^{1)}\ ^2/_3x^2-{}^4/_3x^0-{}^3/_2x^{-2}+x^{-4} & 4x^1-2x^{-1} \\ \hline \quad \pm{}^1/_3x^0\ ^{2)} & ^1/_6x-{}^1/_4x^{-1}-{}^1/\ x^{-3} \\ \hline ^{3)}\ -\ x^0-{}^3/_2x^{-2}+x^{-4} & \text{I-ый остатокъ} \\ \quad \mp{}^1/_2x^{-2}\ ^{4)} & \\ ^{5)}\ -\ 2x^{-2}+x^{-4} & \text{2-ой остатокъ} \\ \quad \mp x^{-4}\ ^{6)} & \\ \hline \quad 0 & \text{3-ій остатокъ} \end{array}$$

Вспомогательныя вычисленія $^{1)}$ Опредѣленіе перваго(высшаго) члена частнаго, онъ $={}^2/_3x^2\ 4x^1={}^2/_{3\ 4}x^{2-1}={}^1/_{3\ 2}x^1={}^1/_6x$

$^{2)}$ Произведеніе дѣлителя на первый членъ частнаго $(4x^1-2x-\ )\ {}^1/_6x=4x\ {}^1/_6x-2x^{-1}\ {}^1/_6x={}^4/_6x^2-{}^2/_6x^{-1+1}={}^2\ {}_3x^2-{}^1/_3x^0$

$^{3)}$ Опредѣленіе второго члена частнаго, онъ $=-x^0\ 4x^1=-{}^1/_4x^{0-1}=-{}^1/_4x^{-1}$

$^{4)}$ Произведеніе дѣлителя на второй членъ частнаго $(4x^1-2x^{-1})-{}^1/_4x^{-1}=-4x^1\ /_4x^{-1}+2x^{-1}\ {}^1/_4x^{-1}=-{}^4/_4x^{1-1}+{}^2/_4x^{-1-1}=-x^0+{}^1/_2x^{-2}$

$^{5)}$ Опредѣленіе третьяго (онъ же и послѣдній) члена частнаго онъ $=-2x^{-2}\ 4x^1=-{}^4\ x^{-2-1}=-\ \ x^{-3}$

⁶) Произведеніе дѣлителя на третій членъ частнаго $(4x^1-2x^{-1})\cdot -\frac{1}{2}x^{-3} = -4x^1\cdot\frac{1}{2}x^{-3}+2x^{-1}\cdot\frac{1}{2}x^{-3} = -\frac{4}{2}x^{1-3}+\frac{2}{2}x^{-1-3} = -2x^{-2}+x^{-4}$

Представимъ полученное частное безъ отрицательныхъ показателей:

$$\frac{1}{6}x-\frac{1}{4}x^{-1}-\frac{1}{2}x^{-3}=\frac{1}{6}x-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x^1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^3}=\frac{x}{6}-\frac{1}{4x}-\frac{1}{2x^3}$$

400′ $(\frac{3}{2}x^4-\frac{3}{2}+\frac{10}{3}x^{-4}-x^{-8}):(9x^2-3x^{-2})=(\frac{3}{2}x^4-\frac{3}{2}x^0+\frac{10}{3}x^{-4}-x^{-8}):(9x^2-3x^{-2})$

$$\begin{array}{ll}
{}^{1)}\ \frac{3}{2}x^4-\frac{3}{2}x^0+\frac{10}{3}x^{-4}-x^{-8} & \left|\ \begin{array}{l} 9x^2-3x^{-2} \\ \hline \frac{1}{6}x^2-\frac{1}{9}x^{-2}+\frac{1}{3}x^{-6} \end{array}\right. \\
\quad\ ,,\quad \pm\frac{1}{2}x^0\ {}^{2)} & \\ \hline
{}^{3)}\ \quad -\ x^0+\frac{10}{3}x^{-4}-x^{-8} & \text{I остатокъ} \\
\qquad ,\ \mp\frac{1}{3}x^{-4}\ {}^{4)} & \\ \hline
{}^{5)}\qquad 3x^{-4}-x^{-8} & \text{II остатокъ} \\
\qquad\quad ,\ \pm x^{-8}\ {}^{6)} & \\ \hline
\qquad\qquad 0 & \text{III остатокъ}
\end{array}$$

Полученное частное представимъ въ нѣсколько иномъ видѣ, уничтоживъ степени съ отрицательными показателями

$$\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{9}x^{-2}+\frac{1}{3}x^{-6}=\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{x^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^6}=\frac{x^2}{6}-\frac{1}{9x^2}+\frac{1}{3x^6}$$

Вспомогательныя вычисленія ¹) Нахожденіе перваго (высшаго) члена частнаго, онъ $=\frac{3}{2}x^4:9x^2=\frac{3}{2}:9\,x^{4-2}=\frac{1}{2}:3\,x^2=\frac{1}{6}x^2=\frac{x^2}{6}$

²) Произведеніе перваго члена частнаго на дѣлителя $(9x^2-3x^{-2})\cdot\frac{1}{6}x^2=9x^2\cdot\frac{1}{6}x^2-3x^{-2}\cdot\frac{1}{6}x^2=\frac{9}{6}x^4-\frac{3}{6}x^{-2+2}=\frac{3}{2}x^4-\frac{1}{2}x^0$

³) Нахожденіе втораго члена частнаго, онъ $=-x^0:9x^2=-\frac{1}{9}x^{0-2}=-\frac{1}{9}x^{-2}=-\frac{x^{-2}}{9}=-\frac{1}{9x^2}$

⁴) Произведеніе втораго члена частнаго на дѣлителя $(9x^2-3x^{-2})\cdot-\frac{1}{9}x^{-2}=-9x^2\cdot\frac{1}{9}x^{-2}+3x^{-2}\cdot\frac{1}{9}x^{-2}=-\frac{9}{9}x^{2-2}+\frac{3}{9}x^{-2-2}=-x^0+\frac{1}{3}x^{-4}$

⁵) Нахожденіе третьяго (и послѣдняго) члена частнаго этотъ членъ $=3x^{-4}:9x^2=\frac{3}{9}x^{-4-2}=\frac{1}{3}x^{-6}=\frac{x^{-6}}{3}=\frac{1}{3x^6}$

⁶) Произведеніе третьяго члена частнаго на дѣлителя $(9x^2-3x^{-2})\cdot\frac{1}{3}x^{-6}=9x^2\cdot\frac{1}{3}x^{-6}-3x^{-2}\cdot\frac{1}{3}x^{-6}=\frac{9}{3}x^{2+(-6)}-\frac{3}{3}x^{-2+(-6)}=3x^{2-6}-1x^{-2-6}=3x^{-4}-x^{-8}$

Повѣрка задачъ на умноженіе и дѣленіе алгебраическихъ выраженій въ составъ которыхъ входятъ степени главной буквы съ отрицательными показателями (о нулевыхъ говорить не приходится), какъ въ №№ 387—400 и др. производится весьма удобно путемъ уничтоженія степеней съ отрицательными показателями и выполненія послѣ этого показанныхъ дѣйствій надъ обыкновенными выраженіями по общимъ правиламъ. Выяснимъ сказанное на примѣрахъ провѣривъ нѣкоторые №№ по вышеуказанному способу.

№ 397 $(x^{-4}+a^2x^{-2}+a^4)(x^2-a^{-2})=\left(\frac{1}{x^4}+\frac{a^2}{x^2}+a^4\right)\left(x^2-\frac{1}{a^2}\right)=\left(\frac{1}{x^4}+\frac{a^2x^2}{x^4}+\frac{a^4x^4}{x^4}\right)\left(\frac{x^2a^2}{a^2}-\frac{1}{a^2}\right)=\frac{a^4x^4+a^2x^2+1}{x^4}\cdot\frac{a^2x^2-1}{a^2}=\frac{(a^4x^4+a^2x^2+1)\cdot(a^2x^2-1)}{x^4\cdot a^2}=$

$$=\frac{a^6x^6+a^4x^4+a^2x^2-a^4x^4-a^2x^2-1}{a^2x^4}=\frac{a^6x^6-1}{a^2x^4}=\frac{a^6x^6}{a^2x^4}-\frac{1}{a^2x^4}=a^4x^2-\frac{1}{a^2x^4}$$

Замѣтимъ, что произведеніе $(a^4x^4+a^2x^2+1)(a^2x^2-1)$ могло бы быть преобразовано и иначе, искусственнымъ путемъ на основаніи формулы $(a^2+ab+b^2)(a-b)=a^3-b^3$ а именно $(a^4x^4+a^2x^2+1)(a^2x^2-1)=[(a^2x^2)^2+(a^2x^2)\cdot 1+1^2][(a^2x^2)-1]=(a^2x^2)^3-1^3=a^2x^2\cdot a^2x^2\cdot a^2x^2-1=a^6x^6-1$

№ 396′ $(x^{-2}+a^{-1}x^{-1}+a^{-2}):(x^{-2}-a^{-2})=\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{ax}+\frac{1}{a^2}\right):\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{a^2}\right)=$

$$=\left(\frac{a^2}{x^2a^2}+\frac{ax}{a^2x^2}+\frac{x^2}{a^2x^2}\right):\left(\frac{a^2}{a^2x^2}-\frac{x^2}{a^2x^2}\right)=\frac{a^2+ax+x^2}{a^2x^2}\cdot\frac{a^2-x^2}{a^2x^2}=\frac{(a^2+ax+x^2)(a^2-x^2)}{a^2x^2\cdot a^2x^2}=$$

$$=\frac{(a^2+ax+x^2)(a+x)(a-x)}{a^4x^4}=\frac{[(a^2+ax+x^2)(a-x)](a+x)}{a^4x^4}=\frac{(a^3-x^3)(a+x)}{a^4x^4}=$$

$$=\frac{a^4-ax^3+a^3x-x^4}{a^4x^4}=\frac{1}{x^4}-\frac{1}{a^3x}+\frac{1}{ax^3}-\frac{1}{a^4}$$

№ 400 $(\frac{2}{3}x^2-\frac{4}{3}-\frac{3}{2}x^{-2}+x^{-4}):(4x-2x^{-1})=\left(\frac{2x^2}{3}-\frac{4}{3}-\frac{3}{2x^2}+\frac{1}{x^4}\right):\left(4x-\right.$

$$\left.-\frac{2}{x}\right)=\left(\frac{2x^2\cdot 2x^4}{3\cdot 2x^4}-\frac{4\cdot 2x^4}{3\cdot 2x^4}-\frac{3\cdot 3x^2}{2x^2\cdot 3x^2}+\frac{6}{x^4\cdot 6}\right):\frac{4x\cdot x-2}{x}=\frac{4x^6-8x^4-9x^2+6}{6x^4}:$$

$$:\frac{4x^2-2}{x}=\frac{(4x^6-8x^4-9x^2+6)\cdot x}{6x^4\cdot(4x^2-2)}=\frac{4x^6-8x^4-9x^2+6}{6x^3\cdot 2(2x^2-1)}=\frac{4x^6-8x^4-9x^2+6}{12x^3(2x^2-1)}=$$

$$=\frac{4x^6-2x^4-6x^4+3x^2-12x^2+6}{12x^3(2x^2-1)}=\frac{2x^4(2x^2-1)-3x^2(2x^2-1)-6(2x^2-1)}{12x^3(2x^2-1)}=$$

$$=\frac{(2x^2-1)(2x^4-3x^2-6)}{12x^3(2x^2-1)}=\frac{2x^4-3x^2-6}{12x^3}=\frac{2x^4}{12x^3}-\frac{3x^2}{12x^3}-\frac{6}{12x^3}=\frac{x}{6}-\frac{1}{4x}-\frac{1}{2x^3}$$

№ 399 $(2x-3+3x^{-1}-x^{-2}):(x-1+x^{-1})=\left(2x-3+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}\right):\left(x-1+\right.$

$$\left.+\frac{1}{x}\right)=\left(\frac{2x\cdot x^2}{x^2}-\frac{3x^2}{x^2}+\frac{3x}{x^2}-\frac{1}{x^2}\right):\frac{(x-1)x+1}{x}=\frac{2x^3-3x^2+3x-1}{x^2}:\frac{x^2-x+1}{x}=$$

$$=\frac{(2x^3-3x^2+3x-1)\cdot x}{x^2\cdot(x^2-x+1)}=\frac{2x^3-3x^2+3x-1}{x(x^2-x+1)}=\frac{2x^3-3x^2+3x-1}{x^3-x^2+x}=2+\frac{-x^2+x-1}{x^3-x^2+x}=$$

$$\begin{array}{l|l} 2x^3-3x^2+3x-1 & x^3-x^2+x \\ \underline{\pm 2x^3 \mp 2x^2 \pm 2x} & \overline{\;2\;} \\ -x^2+x-1 & \text{остатокъ} \end{array}\quad=2+\frac{-(x^2-x+1)}{x(x^2-x+1)}=2+\frac{-1}{x}=2-\frac{1}{x}$$

И т. д. и т. д.

Вообще же слѣдуетъ сказать, что на практикѣ при дѣленіи многочленовъ, отрицательные показатели въ выраженіяхъ дѣлимаго и дѣлителя рѣдко встрѣчаются и въ этихъ случаяхъ ихъ стараются сейчасъ же уничтожить, чтобы приведя выраженія къ обычному виду, судить о возможности дѣленія по общимъ признакамъ.

Рѣшенія всѣхъ задачъ VI отдѣленія помѣщены въ книгѣ № 27а.

Н. И. Доброгаевъ
м. Немировъ, Под. губ.

Замѣченныя главнѣйшія опечатки.

Стран	Строка	№ зад	НАПЕЧАТАНО	ДОЛЖНО БЫТЬ
7	22 (снизу	57′	$ab(ab^2+c^2d)+cd)(ab^2+\ {}^2d)$	$ab(ab^2+c^2d)+cd(ab^2+c^2d)$
25	10 (сверху	158	$-(5ax^3)^1$	$-(5ax^2)^1$
32	2 »	192′	тогда $(2p-q)^3-$	тогда $(2p-q)^2-$
43	12 сн	228′	$=(y^3-x^3+2x^3)=$	$=(y^3-x^3)\,(y^3-x^3+2x^3)=$
50	9 св	259	$P=a^4b^2c-$	$P=a^4b^2c-$
104	4 »	80	$=(a-d)(a-c)\quad-(a-$ $-b)-(b-c)=$	$=(a-d)(a-c)\quad-(a-$ $-b)\quad-(b-c)=$
104	18 сн	80′	$\frac{C}{(a-b)(b-c)(c\quad d)(a-d)}$	$\frac{C}{-(a-b)(b-c)(c-d)(a-b)}$
135	8 »	185	$+\frac{1}{(m-n)(n-p)}$	$+\frac{1}{-(m-n)(n-p)}$
143	2 »	209′	$\frac{1}{a^{m+\ -3m}b^{+mn+2m+n-n+2m}}$	$\frac{1}{a^{m+\ -3m+3}b^{mn+2m+n-n+2m}}$

ЗАДАЧА Сократить дробь $\frac{(a+b)^5-(a^5+b^5)}{(a+b)^3-(a^3+b^3)}$

Рѣш *Сумма одинаковыхъ нечетныхъ степеней двухъ количествъ дѣлится на сумму основаній*, а потому a^5+b^5 и a^3+b^3 дѣлятся на $a+b$ слѣд a^5+ $+b^5$ и a^3+b^3 содержитъ множителя $a+b$ Дѣйствительно производя дѣленіе и составляя частное по извѣстному правилу, приравняемъ дѣлимое произведенію дѣлителя на частное тогда получ (срз №№ 152′ и 146′ отд IV алг зад Шап и Вальц ч I)

$$a^5+b^5=(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)\quad a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

Так обр, данная дробь послѣдовательно представится въ видѣ

$$\frac{(a+b)^5-(a^5+b^5)}{(a+b)^3-(a^3+b^3)}=\frac{(a+b)^5-(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)}{(a+b)^3-(a+b)(a^2-ab+b^2)}=$$

$$=\frac{(a+b)\,[(a+b)^4-(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)]}{(a+b)[(a+b)^2-(a^2-ab+b^2)]}=$$

$$=\frac{(a+b)^2(a+b)^2-(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)}{(a+b)^2-(a^2-ab+b^2)}=$$

$$=\frac{(a^2+2ab+b^2)^2-(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)}{a^2+2ab+b^2-a^2+ab-b^2}=$$

$$=\frac{(a^2)^2+(2ab)^2+(b^2)^2+2\,a^2\,2ab+2\,a^2\,b^2+2\,2ab\,b^2-(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)}{3ab}=$$

$$=\frac{a^4+4a^2b^2+b^4+4a^3b+2a^2b^2+4ab^3-a^4+a^3b-a^2b^2+ab^3-b^4}{3ab}=$$

$$=\frac{5a^3b+5a^2b^2+5ab^3}{3ab}=\frac{5ab(a^2+ab+b^2)}{3ab}=\frac{5(a^2+ab+b^2)}{3}={}^5/_3(a^2+ab+b^2)$$

Въ 6 ой передѣлкѣ мы примѣнили къ преобразованію квадрата трехчлена $a^2+2ab+b^2$ формулу $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz$, данную, между прочимъ, на 44 стр «Сборника» Шап и Вальц (3 ая формула)

Н Доброгаевъ

ЗАДАЧА Разложить въ произведеніе множителей выраженіе $a^4+b^4-a^2b^2k$

Рѣш Обозначивъ данное выраженіе черезъ А, получ $A=a^4+b^4-ka^2b^2=(a^2)^2+(b^2)^2-ka^2b^2$, откуда видно, что первые два члена А— полные квадраты, именно—сумма квадратовъ двухъ количествъ a^2 и b^2 слѣд, до точнаго квадрата суммы этихъ количествъ недостаетъ удвоеннаго произведенія ихъ, что вытекаетъ изъ формулы $x^2+y^2+2xy=(x+y)^2$ Итакъ, придадимъ къ А и отнимемъ отъ А количество $2a^2b^2$, тогда будемъ имѣть (очевидно отъ этого А по величинѣ не измѣнится)

$$A=a^4+b^4-ka^2b^2+2a^2b^2-2a^2b^2=(a^4+2a^2b^2+b^4)-ka^2b^2-2a^2b^2=$$
$$=(a^2+b^2)^2-a^2b^2(k+2)=(a^2+b^2)^2-a^2b^2l^2,$$

гдѣ $l^2=k+2$ и, слѣд, по опредѣленію корня $l=\sqrt{k+2}$ Но $a^2b^2l^2=abl$ $abl=(abl)^2$, такъ что наше выраженіе А будетъ

$$A=(a^2+b^2)^2-(abl)^2=[(a^2+b^2)+abl][(a^2+b^2)-abl]=$$
$$=(a^2+b^2+abl)(a^2+b^2-abl)$$

а т к мы выше черезъ l обозначили $\sqrt{k+2}$ то

$$A=(a^2+b^2+ab\sqrt{k+2})(a^2+b^2-ab\sqrt{k+2})$$

Особые случаи Формула разложенія А показываетъ, что искомое разложеніе А будетъ тогда раціонально, т е не будетъ содержать корней когда количество k приметъ такія числовыя значенія при которыхъ числовое значеніе выраженія $k+2$ будетъ точнымъ квадратомъ Напр, если $k=-2$ то $k+2=0$, и тогда получ, что $A=a^4+b^4-(-2)a^2b^2=(a^2+b^2+ab\sqrt{0})(a^2+b^2-ab\sqrt{0})=(a^2+b^2+ab\ 0)(a^2+b^2-ab\ 0)=(a^2+b^2)(a^2+b^2)=(a^2+b^2)^2$

Н Доброгаевъ (Одесса).