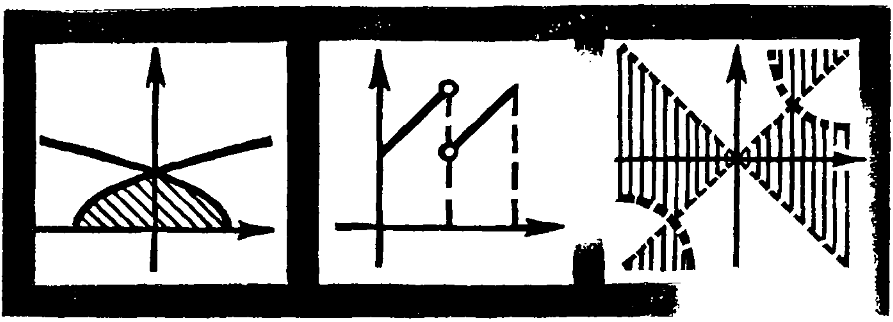


Библиотека учителя математики

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО АЛГЕБРЕ И НАЧАЛАМ АНАЛИЗА

ДЛЯ 9-10 КЛАССОВ

Библиотека учителя математики

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО АЛГЕБРЕ И НАЧАЛАМ АНАЛИЗА для 9 и 10 классов

ПОСОБИЕ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ

МОСКВА «ПРОСВЕЩЕНИЕ» 1978

Ивлев Б. М., Земляков А. Н., Томашевич Ф. В., Калиниченко Ю. В.

Рекомендовано Главным управлением школ Министерства просвещения СССР

Сборник задач по алгебре и началам анализа для 9 и 10 классов. Пособие для учителей. М., «Просвещение», 1978. 272 с. с ил. (Б-ка учителя математики)

На обороте тит. л. авт.: Б. М. Ивлев, А. Н. Земляков, Ф. В. Томашевич, Ю. В. Калиниченко.

В данный сборник включены задачи по всем разделам курса алгебры и начал анализа для 9 и 10 классов общеобразовательной школы, а также задачи для внеклассных и индивидуальных занятий с учащимися. Часть задач имеет своей целью помочь учителю формировать основные понятия и факты курса.

Почти все задачи снабжены либо указаниями, либо подробными решениями.

С $\frac{60501-712}{103(03)-78}$ **подписное** **512+517.2**

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА VI

Дифференциальные уравнения

ГЛАВА VII

Уравнения, неравенства, системы уравнений и неравенств

ПРЕДИСЛОВИЕ

Это пособие предназначено для учителей, ведущих математику в старших классах. Оно содержит задачи, охватывающие практически всю тематику курса «Алгебра и начала анализа» в IX—X классах.

Структура книги в основном соответствует структуре учебных пособий для IX и X классов. Центральное место занимают главы, посвященные новым в средней школе понятиям. В отличие от учебника то или иное понятие (предел функции, непрерывность, производная, интеграл) рассматривается сразу для всех классов элементарных функций (рациональных, степенных, иррациональных, показательных, логарифмических, тригонометрических). Такая компоновка материала облегчает использование настоящего пособия при повторении курса IX—X классов. В книге дано большое число примеров приложений анализа как к геометрии, так и к физике (главы «Интеграл» и «Дифференциальные уравнения»). Опыт показывает, что использование примеров и задач прикладного характера вызывает интерес учащихся и, как следствие, лучшее понимание материала.

Часть задач вплотную примыкает к упражнениям из учебных пособий «Алгебра и начала анализа», некоторые задачи дополняют соответствующий материал этих пособий. Такие задачи можно использовать непосредственно на уроках. Особо упомянем «наглядные» задачи, в которых, например, требуется изобразить графики функций, удовлетворяющих тем или иным условиям, или же что-нибудь показать на графике. Решение таких задач облегчает понимание учащимися основных понятий анализа, таких, как монотонность, экстремумы, производная и т. д.

В последней главе собраны задачи, примыкающие к теме «Системы уравнений и неравенств» учебного пособия для X класса, но охватывающие значительно большее число вопросов, чем в этой теме. По существу здесь рассматриваются почти все классы уравнений, неравенств, систем, изучаемые с VII класса.

Для облегчения использования задач этого сборника в начале параграфов часто приводятся «Напоминания», содержащие нужные определения и теоремы из основного курса (со ссылкой на соответствующие пункты учебных пособий А-6 — «Алгебра-6», А-7 — «Алгебра-7», ..., А-10 — «Алгебра и начала анализа-10» по изданиям 1972-76 гг). Отметим, что иногда в «Напоминаниях» известные понятия освещаются с другой точки зрения, нежели в учебных пособиях. В основном это объясняется более кратким изложением теоретического материала. В конце условия тех задач, к которым приведено более или менее полное решение, поставлен специальный значок ↓. К большинству остальных задач даны указания или ответы.

Задачи, отмеченные звездочкой, — необязательный материал. Они либо более трудные, либо выходят за рамки школьной программы — их использовать на факультативных или кружковых занятиях и для индивидуальной работы с учащимися.

В пособии частично учтен опыт двухлетнего преподавания по новым программам и учебным пособиям в IX—X классах средних школ, а также опыт Всесоюзной заочной математической школы; в частности, в сборнике помещен ряд задач из материалов этой школы.

За время подготовки данного сборника произошла разгрузка курса алгебры и начала анализа—исключены темы «Метод математической индукции» и «Элементы комбинаторики». Они перешли в программу факультативного курса для IX класса. Удалены также и некоторые другие вопросы. Поэтому при использовании сборника учителю необходимо проявить осторожность, чтобы не вызывать перегрузки учащихся, а также учесть, что значительная часть упражнений данного сборника предназначена для занятий на факультативах во время, специально выделенное для решения задач.

Авторы и издательство будут благодарны за замечания и предложения по улучшению этого сборника задач. Просим направлять их по адресу: 129846, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41, издательство «Просвещение», редакция математики.

Авторы

Глава I ИНДУКЦИЯ И ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

§ 1. Метод математической индукции

Напоминание[1]. *Принцип математической индукции.* Если предложение $A(n)$, в котором n — натуральное число, (1) истинно для $n = 1$, (2) из того, что оно истинно для $n = k$ (где k — любое натуральное число), следует, что оно истинно и для следующего натурального числа $n = k + 1$, то предложение $A(n)$ истинно для любого натурального числа n.

На этом принципе основан метод доказательства — *метод математической индукции*, являющийся по существу проверкой того, что доказываемое предложение удовлетворяет двум указанным выше условиям: (1) $A(1)$ — истинно; (2) для любого натурального k из истинности $A(k)$ следует истинность $A(k+1)$.

(1—4). Докажите равенство:

1. $\frac{1^2}{1\cdot 3} + \frac{2^2}{3\cdot 5} + \ldots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$. ↓

2. $1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! + \ldots + n\cdot n! = (n+1)! - 1$. ↓

3. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$. ↓

4. $\frac{0}{1} + \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \ldots + \frac{n-1}{n!} = 1 - \frac{1}{n!}$. ↓

5. $1\cdot 2^n + 2\cdot 2^{n-1} + \ldots + n2^1 + (n+1) = 2^{n+2} - (n+3)$. ↓

(6—8). Докажите, что для любого натурального n истинно следующее предложение.

6. $10^{n+1} - 10(n+1) + n$ делится на 81. ↓

7*. $n^7 + 6n$ делится на 7. ↓

Указание. Воспользуйтесь формулой Ньютона.

8*. $3^{3n+2} + 2^{4n+1}$ делится на 11. ↓

(9—10). Докажите, что для любого натурального n справедливо неравенство.

9. $4^n > n^2$. ↓

10. $2^n > n^2 - 2n + 2$. ↓

[1] См.: А-9, п. 2.

11. Докажите, что плоскость, разбитую на части n прямыми или n окружностями, можно закрасить синей и красной краской так, чтобы две любые соседние области были закрашены разными красками.

З а м е ч а н и е. Не следует забывать, что условие (2) применимости принципа математической индукции надо проверять для в с е х натуральных чисел одновременно, как показывает задача 12.

12. Найдите ошибку в приводимом ниже доказательстве предложения «Все числа равны между собой».

Обозначим через $A(n)$ предложение «Любые n чисел равны между собой». $A(1)$ справедливо, так как одно число равно самому себе. Докажем, что из $A(k)$ следует $A(k+1)$. Занумеруем данные $(k+1)$ чисел номерами от 1 до $(k+1)$. Тогда в силу $A(k)$ первые k чисел равны между собой; в частности, все эти числа равны k-му числу. Числа со второго по $(k+1)$-е также равны между собой в силу $A(k)$; в частности, $(k+1)$-е число равно k-му. Итак, все $(k+1)$ числа равны между собой (все они равны k-му числу). ↓

13*. Докажите, что для любого простого p число $n^p - n$ делится на p. ↓ (Рассмотрите сначала случаи $p = 2, 3, 5$.)

Пусть о предложении $A(n)$ известно следующее:

1) Для некоторого числа m предложение $A(m)$ истинно.

2) Для произвольного $k \geqslant m$ из истинности $A(k)$ следует истинность $A(k+1)$.

Тогда предложение $A(n)$ истинно для любого целого $n \geqslant m$.

14*. Докажите, что:

а) $3^n > 2^n + 3n$ при $n \geqslant 3$; б) $n^3 > 3n + 3$ при $n \geqslant 3$;

в) $2^n > n^2$ при $n \geqslant 5$; г) $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$ при $n \geqslant 2$. ↓

Можно доказывать истинность $A(k+1)$, считая истинными все предыдущие высказывания, т. е. $A(1), A(2), \ldots, A(k)$.

15*. Докажите первую часть основной теоремы арифметики: любое натуральное число $n \geqslant 2$ либо простое, либо представляется в виде произведения простых чисел. ↓

16*. Известно, что $x + \frac{1}{x}$ — целое число. Докажите, что при любом натуральном n число $x^n + \frac{1}{x^n}$ также целое. ↓

Иногда доказываемое предложение трудно (или невозможно) доказать при помощи метода математической индукции, однако более сильное предложение этим методом доказывается.

17*. Докажите, что неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{2n}} \geqslant \frac{C_{2n}^n}{2^{2n}}$$

справедливо при любом натуральном n. ↓

Указание. Докажите более сильное неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{2n+1}} \geqslant \frac{C_{2n}^{n}}{2^{2n}}.$$

При наличии двух или нескольких переменных задачу иногда удается решить, применяя метод математической индукции по одной из переменных.

18*. Докажите для $0 < k < n$ (в остальном n и k — любые натуральные числа) равенство

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ldots + (-1)^k C_n^k = (-1)^k C_{n-1}^k. \downarrow$$

Указание. Примените индукцию по переменной k.

Иногда бывает удобно воспользоваться усложненными методами, основанными на принципе математической индукции. К таким методам относится, например, «возвратная» индукция. Суть этого метода состоит в том, что требуемое утверждение доказывается сначала для некоторой возрастающей последовательности $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$ чисел, а затем доказывается, что из истинности $A(n)$ следует истинность $A(n-1)$, — мы как бы «возвращаемся» назад. Чаще всего в роли такой последовательности выступает последовательность 1; 2; 4; 8; ...; 2^n; ... (т. е. сначала методом математической индукции доказывается предложение $B(n) = A(2^n)$).

19*. Докажите методом возвратной индукции неравенства:

а) $\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$ для любых неотрицательных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (*теорема о среднем арифметическом и среднем геометрическом*);

б) $\sin \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n}{n} \geqslant \frac{\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 + \ldots + \sin \alpha_n}{n}$

при $0 < \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n < \pi$. ↓

20*. Докажите, что если $a + b > 0$, то $2^{n-1}(a^n + b^n) \geqslant (a + b)^n$. ↓

21*. Докажите, что при любом натуральном n число $2^{3^n} + 1$ делится на 3^{n+1} и не делится на 3^{n+2}.

§ 2. Элементы комбинаторики

1°. Задачи на определение числа перестановок, размещений, сочетаний.

1. Сколько существует пятизначных чисел, состоящих из цифр 1, 2, 3, 4, 5? ↓

2. Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 5, 7, 8, если каждую из них можно использовать не более одного раза? ↓

3. Из слова «кот» перестановками букв можно получить такие слова: *кот*, *кто*, *ток*, *тко*, *окт*, *отк*. Их называют анаграммами. Сколько анаграмм можно составить из слова «логарифм»? ↓

4. Сколько существует различных трехцветных флагов с тремя вертикальными полосами одинаковой ширины, если можно использовать материю 7 цветов?

5. Сколько пятизначных чисел, не кратных пяти, можно составить из цифр 1, 3, 5, 7, 9, используя каждую такую цифру в любом из чисел по одному разу? ↓

6. Сколькими способами можно рассадить учащихся в классе, если мест 34, а присутствует 30 человек?

7. Сколькими способами можно расставить 8 ладей на шахматной доске так, чтобы они не били друг друга? ↓

8. Каждая сторона квадрата разбита на n частей. Сколько можно получить треугольников, вершинами которых являются точки деления? (Вершины квадрата считаются точками деления.)

2°. Правило произведения. Если элемент A можно выбрать a способами и если после каждого выбора этого элемента существует b способов выбора элемента B, то упорядоченную пару элементов $(A; B)$ можно выбрать ab способами.

Правило произведения можно применять многократно. Так, если на каждый способ выбора пары $(A; B)$ существует c способов выбора элемента C, то (упорядоченную) тройку $(A; B; C)$ можно выбрать abc способами. «Правило произведения» помогает решать многие комбинаторные задачи. Например, это правило было использовано в учебнике IX класса (см. пункты 4—6) при получении рекуррентных формул $P_n = n \cdot P_{n-1}$, $A_n^{m+1} = A_n^m \cdot (n - m)$, формулы $A_n^m = C_n^m \cdot P_m$ и т. д.

9. Сколько прямоугольников изображено на рисунке 1? Ответьте на тот же вопрос, если размеры наибольшего прямоугольника $p \times q$. ↓

10. Номер автомашины состоит из трех букв русского алфавита (33 буквы) и четырех цифр. Сколько существует различных номеров автомашин? ↓

11. Сколькими способами можно разложить 7 монет различного достоинства по 3 карманам? ↓

12. У одного человека 6 книг по математике, а у другого 10. Сколькими способами можно обменять 3 книги одного из них на 3 книги другого?

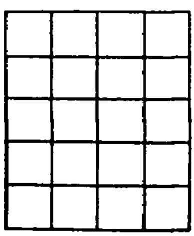


Рис. 1

13. Сколько есть шестизначных чисел, делящихся на 5? ↓

14. Сколько можно составить пятизначных чисел, в десятичной записи которых хотя бы один раз встречается цифра 5? ↓

15. Сколько есть пятизначных чисел, делящихся на 5, в записи которых нет одинаковых цифр? ↓

16. Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 5, 7, 8, если каждую из них можно использовать любое число раз? ↓

17*. На одной из параллельных прямых дано n, а на другой k точек. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

18*. На одной из параллельных прямых дано n, а на другой k точек. Каждая точка одной прямой соединена с каждой точкой другой прямой. Найти число точек пересечения полученных отрезков, если известно, что никакие три отрезка не проходят через одну и ту же точку. (Точки, лежащие на данных прямых, не считаются.)

3°. Разные задачи.

19. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 составлены всевозможные пятизначные числа (без повторения цифр) так, что четные цифры не стоят рядом. Сколько получилось чисел?

20. В языке одного древнего племени было 4 гласных и 6 согласных; причем при составлении слов гласные и согласные непременно чередовались. Сколько слов из девяти букв могло быть в этом языке?

21. Сколькими способами можно составить ожерелье из 6 бусинок, из которых 2 черные, а 4 зеленые (ожерелья, получающиеся передвижением бусинок по кругу, считаются одинаковыми). ↓

22*. Три разные цифры ставятся по кругу. Сколько существует таких расстановок (две расстановки, отличающиеся поворотом круга, считаются одинаковыми). ↓

23*. Сколькими способами можно усадить 20 человек за круглым столом, считая способы одинаковыми, если их можно получить один из другого движением по кругу. ↓

24*. Мама каждый день выдает сыну на десерт по одному фрукту, у нее есть 3 одинаковых яблока, 5 одинаковых груш, 2 одинаковых персика и 1 апельсин. Сколькими способами она может выдать эти фрукты в течение 11 дней? ↓

25*. Сколько делителей имеет число:

а) $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$;

б) $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^5 \cdot 7^7 \cdot 11^{11}$;

в) $10!$?

26*. Сколько имеется различных дорог на клетчатой бумаге длины $m + n$, ведущих из одной вершины прямоугольника размером $m \times n$ до противоположной? (Путь может идти по границе прямоугольника. Два пути считаются различными, если они отличаются хотя бы одним отрезком.)

27*. Пусть в условиях предыдущей задачи $m = n$. Сколько существует путей, проходящих через точку с координатами $(k;\ n - k)$? (Такие точки лежат на диагонали, выделенной на рисунке 2.) Выведите из результатов этой и предыдущей задач равенство

$$C_{2n}^n = (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^{n-1})^2 + (C_n^n)^2.$$

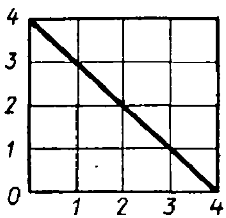


Рис. 2

(28—29)*. Вычислите сумму.

28. а) $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + nC_n^n$;

б) $C_n^0 - 2C_n^1 + 3C_n^2 - \ldots + (-1)^n (n+1) C_n^n$. ↓

29. $\frac{C_n^0}{1} + \frac{C_n^1}{2} + \frac{C_n^2}{3} + \ldots + \frac{C_n^n}{n+1}$. ↓

4°. Формула Ньютона.

Напоминание[1]. *Формула Ньютона*:

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \\ + \ldots + C_n^1 a b^{n-1} + b^n.$$

30. Найдите коэффициент при x^3 в разложении:

а) $(1+x)^6$; б) $(2+x)^5$; в) $(1+2x)^5$; г) $(3+2x)^4$.

31. Напишите разложение по формуле Ньютона:

а) $(a-b)^6$; б) $(2x-3y)^5$; в)* $(a+b+2c)^4$ (указание: $a+b+2c = (a+b)+2c$).

32*. Найдите коэффициент при x^4 в разложении

$$(1+x-x^2)^9. \downarrow$$

Для доказательства тождеств, связывающих биномиальные коэффициенты, часто применяют следующий прием: берется некоторая степень бинома (обычно вида $(a+x)^k$, где x — переменная, а a — некоторое фиксированное число) и двумя способами подсчитывается коэффициент при x в некоторой степени или значение получившегося многочлена в какой-либо точке.

33*. Докажите равенство (для $k \leqslant n$)

$$C_{2n}^k = C_n^0 \cdot C_n^k + C_n^1 \cdot C_n^{k-1} + C_n^2 \cdot C_n^{k-2} + \ldots + C_n^k \cdot C_n^0,$$

пользуясь тождеством $(1+x)^{2n} = (1+x)^n (1+x)^n$. ↓

34*. Докажите равенство

$$n \cdot 2^{n-1} = n + (n-1) C_n^1 + (n-2) C_n^2 + (n-3) C_n^3 + \ldots \\ \ldots + (n-(n-1)) C_n^{n-1} + (n-n) C_n^n.$$

Указание. $((1+x)^n)' = n(1+x)^{n-1}$.

Суммы коэффициентов многочленов обычно отыскивают подстановкой конкретных значений переменных.

35. Найдите сумму всех коэффициентов многочлена

$$p(x) = (2x^7 - 3)^{13} (x^3 - 2)^{17}.$$

36. Для многочлена $p(x) = (x^2+1)^{17}! (2x-3)^{1977}$ найдите: а) сумму всех коэффициентов: б) сумму коэффициентов при четных степенях; в) сумму коэффициентов при нечетных степенях.

37*. Пользуясь тождествами $(1+x)^{n+2} = (1+x)^n (1+2x+x^2)$ и $(1+x)^{n+1} = (1+x)^n (1+x)$, докажите равенства:

а) $C_{n+1}^{k+1} = C_n^{k+1} + C_n^k$; б) $C_{n+2}^{k+2} = C_n^k + 2C_n^{k+1} + C_n^{k+2}$.

5°. Теория вероятностей*.

Напоминание[2]. Предположим, что в результате некоторого опыта может получиться конечное число взаимно исключаю-

---

[1] См.: А-9, п. 9.

[2] См.: А-9, п. 10.

щих друг друга равновероятных исходов. Тогда под *вероятностью* данного события понимают отношение числа благоприятствующих этому событию исходов к общему числу исходов.

В конкретных задачах практического содержания разделение возможных исходов на равновероятные обычно осуществляется на основании некоторой симметрии исходной задачи. Например, «разумно» считать, что при бросании игральной кости все исходы (т. е. выпадение любой цифры) равновероятны, а такие два исхода, как выпадение единицы и выпадение любой цифры, кроме единицы, неравновероятны. Общее число исходов и число благоприятных исходов чаще всего можно определить с помощью формул комбинаторики.

38*. В урне находится 12 шаров: пять белых и семь черных. Наугад вынимается три шара. Какова вероятность того, что среди вынутых шаров: а) все три черные; б) два черных и один белый; в) один черный и два белых; г) все три белые? ↓

39*. На карточке субботнего спортлото 36 чисел: от 1 до 36. Каждый играющий в спортлото зачеркивает 5 из них. Во время тиража определяются 5 выигравших чисел. Выигравшей считается карточка, на которой верно зачеркнуты 3, 4 или 5 чисел (есть выигрыши трех категорий). Какова вероятность того, что карточка с зачеркнутыми наугад числами будет: а) выигравшей; б) карточкой с тремя угаданными номерами; в) с четырьмя; г) с пятью?

40*. Что вероятнее: выиграть у равносильного противника 3 партии из четырех или 5 из восьми (при игре без ничьих)? ↓

41*. На шести одинаковых карточках написаны буквы Ш, А, Р, А, Д, А. Из этих шести карточек наугад берутся три. Какова вероятность того, что из выбранных карточек: а) можно составить слово *шар*; б) составлено слово *шар*, если карточки кладутся в том же порядке, в каком берутся? ↓

42*. При каком наименьшем числе людей в компании вероятность того, что хотя бы два из них родились: а) в один и тот же месяц (считайте, что всем месяцам отвечает одинаковая вероятность); б) в один и тот же день года — будет больше половины (считайте, что 29 февраля не может быть днем рождения)? ↓

43*. а) В некоторых селах России когда-то существовало следующее гадание. Девушка зажимает в руке 6 травинок так, чтобы их концы торчали сверху и снизу, и ее подружка связывает концы травинок попарно сверху и снизу в отдельности. Если при этом травинки оказываются связанными в одно кольцо, то это должно означать, что в текущем году девушка выйдет замуж. Какова вероятность того, что связанные наугад травинки образуют кольцо? ↓

б) Решите ту же задачу для $2n$ травинок.

Глава II ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА. БЕСКОНЕЧНЫЕ ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ИХ ПРЕДЕЛЫ

§ 1. Рациональные и иррациональные числа

1. Докажите, что число:

а) $\sqrt{3}$; б) $\sqrt{17}$; в) $\sqrt[3]{12}$; ↓ г) $\log_2 3$; ↓ д) $\lg 2$ иррационально.

Замечание к задаче 1. Можно показать, что вообще: 1) $\sqrt[k]{p}$, $k, p \in N$ является иррациональным числом, если p не является k-й степенью натурального числа; 2) $\log_b a$, $a, b \in N$ является иррациональным числом, если найдется простой множитель, входящий в разложение на простые множители одного из чисел a и b и не входящий в разложение другого.

Доказательства аналогичны приведенным в разделе «Решения» доказательствам иррациональности чисел в) и г). Они проводятся методом от противного, при этом получается противоречие с теоремой о единственности разложения натуральных чисел на простые множители (*основной теоремой арифметики*).

(2—4). Докажите иррациональность чисел.

2. а) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; б)* $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$; ↓ в) * $\log_{18} 36$. ↓

3*. а) $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$; ↓ б) $\sqrt{\log_2 3}$; ↓ в) $\operatorname{tg} 5°$. ↓

4. а) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$; б)* $\dfrac{\sqrt{3}}{1+\sqrt[3]{2}}$. ↓

5. Будет ли число $a+b$ рациональным (иррациональным), если: а) a и b рациональны; б) a и b иррациональны; в) одно из этих чисел (например, a) рационально, а другое иррационально?

6. Та же задача для произведения $a \cdot b$.

7*. Приведите примеры, показывающие, что число вида a^b может быть как рациональным, так и иррациональным во всех четырех вариантах (a и b рациональны, a рационально, b иррационально; a иррационально, b рационально, a и b — иррациональны). ↓

Замечание. Не следует пытаться определить, рационально или иррационально число по его «внешнему виду», — это может привести к ошибкам (см. задачи 8 и 15).

8. Докажите, что следующие числа рациональные:

а) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-2\sqrt{6}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}-\frac{\sqrt{6-4\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}-3}$. ↓

Если выражение R содержит знаки корня — радикалы, а выражение RS их не содержит, то выражение S называется *сопряженным* к R. Домножив числитель и знаменатель дроби Q/R на такое сопряженное выражение, получим дробь без радикалов (иррациональностей) в знаменателе.

9*. Укажите выражение, сопряженное к выражению:

а) $\sqrt{x}+\sqrt{y}$; б) $\sqrt{x}-\sqrt{y}$; в) $\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}$; г) $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}$;
д) $x+\sqrt{y}+\sqrt{z}$; е) $\sqrt{x}-\sqrt[3]{y}$; ж) $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z}$. ↓

(10—11)*. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе.

10. а) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$;
в) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}$; г) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}}$.

11. а) $\frac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$; б) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}}$; в) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{5}}$.

12. Упростите выражение

$$(2\sqrt{8}+3\sqrt{5}-7\sqrt{2})(\sqrt{72}-5\sqrt{20}-2\sqrt{2}).$$

При тождественных преобразованиях выражений с радикалами иногда бывают полезны формулы:

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}+\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}, \quad (1)$$

$$\sqrt{A-\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}-\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}. \quad (2)$$

13*. Докажите формулы (1) и (2).

14*. Упростите выражение:

а) $\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}$; б) $\sqrt{3-\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}$.

15*. Докажите, что рационально число

$$\sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{847}{27}}}+\sqrt[3]{6-\sqrt{\frac{847}{27}}}.$$

Иногда полезно применить *теорему о рациональных корнях многочлена* $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ *с целыми коэффициен-*

тами: если $\frac{p}{q}$ $\left(\frac{p}{q}\right.$ — несократимая дробь$\left.\right)$ — корень этого многочлена, то p — делитель свободного члена a_n, q — делитель старшего коэффициента a_0. Например, если уравнение $4x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$ имеет рациональный корень, то этот корень — одно из чисел ± 2; ± 1; $\pm \frac{1}{2}$; $\pm \frac{1}{4}$. Данное уравнение действительно имеет корень $x = \frac{1}{2}$, что позволяет его решить: поделив левую часть на $2x - 1$, получим квадратное уравнение $2x^2 - x + 2 = 0$.

16*. Докажите эту теорему. Указание. Подставьте $x = \frac{p}{q}$ и умножьте сначала обе части полученного равенства на q^{n-1}, а затем умножьте последнее равенство на $\frac{q}{p}$. ↓

17*. Докажите, что уравнение $x^3 + x^2 y + y^3 = 0$ не имеет рациональных решений, кроме $(x; y) = (0; 0)$. Указание. Поделите обе части уравнения на y^3 (при $y \neq 0$) и примените теорему о рациональных корнях к получившемуся многочлену переменной $t = \frac{x}{y}$.

18*. Докажите, что числа: а) $\cos 20°$; б) $\sin 10°$ — иррациональные. Указание. Постройте многочлены с такими корнями и докажите, что они не имеют рациональных корней. ↓

19*. Докажите, что число 0,1234567891011121314151617181920... (после запятой выписываются подряд все натуральные числа) иррационально.

20*. а) Могут ли числа 10, 11, 12 быть членами одной геометрической прогрессии (не обязательно соседними);

б) докажите, что числа $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{7}$ не могут быть никакими (не обязательно соседними) членами одной арифметической прогрессии;

в) докажите, что числа $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{7}$ не могут быть никакими (не обязательно соседними) членами одной геометрической прогрессии.

§ 2. Действительные числа и приближенные вычисления

1. Представьте число в виде бесконечной десятичной дроби:

а) $\frac{1}{7}$; б) $\frac{9}{11}$; в) $\frac{5}{12}$; г) $\frac{4}{15}$.

2. Представьте в виде обыкновенной периодическую десятичную дробь: а) 0,(13); б) 1,2(3); в) 0,(857142).

3. Какое из чисел больше:

а) 0,428571 или $\frac{3}{7}$; б) $\sqrt{2} + \sqrt{11}$ или $\sqrt{3} + 3$;

в) $\log_{\frac{1}{2}} 3$ или $\log_3 \frac{1}{2}$; г)* $\log_2 3$ или $\log_3 5$?

4. Найдите первые три десятичных приближения по недостатку и по избытку чисел: а) 11,2; б) $\frac{10}{13}$; в) $\sqrt{7}$; г) $\frac{1}{2}+\frac{7}{9}$.

5. Найдите первые три десятичных знака суммы чисел: а) $\frac{1}{4}$ и $\sqrt{3}$; б) $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$; в) 0,12547632... и 1,127423... .

Напоминание[1]. Пусть x — некоторая величина, a — ее приближенное значение. Тогда $\Delta = (x-a)$ называют *погрешностью*, $\varepsilon = \frac{x-a}{a}$ — *относительной погрешностью* приближенного значения a величины x. Любые числа h и w, такие, что $|\Delta| \leqslant h$ и $|\varepsilon| < w$, называют соответственно *границей погрешности* и *границей относительной погрешности*.

6. Найдите погрешность и относительную погрешность приближенного значения a величины x, если: а) $x = \frac{1}{9}$, $a = 0{,}1$; б) $x = \sqrt{2}$, $a = 1{,}5$.

Напоминание[2]. *Значащими цифрами* чисел в десятичной записи называют все его цифры, начиная с первой слева, отличные от нуля.

7. Для x и a из задачи 6 найдите наименьшую границу погрешности и относительной погрешности, имеющие одну значащую цифру.

Напоминание[3]. Цифра α значения a называется *верной*, если гарантированная граница погрешности приближенного значения a величины x не превосходит единицы того разряда, в котором записана данная цифра. При выполнении действий с приближенными значениями обычно оставляют в исходных и промежуточных данных одну запасную цифру (десятичный знак при сложении и вычитании и значащую цифру при умножении и делении).

8. Укажите верные цифры в записи числа a, если:

а) $a = 0{,}04367$, $h = 0{,}01$; б) $a = 0{,}23648$, $h = 0{,}03$.

9. Выполните действия, если известно, что в исходных приближенных значениях все цифры верные:

а) $0{,}236 + 6{,}3$; б) $3{,}467 - 9{,}0$; в) $0{,}7 \cdot 1{,}34875$; г) $5 : 2{,}52355$.

Замечание. При округлении приближенных значений не следует забывать о погрешности округления.

10. Округлите число a до: а) сотых; б) десятых; в) единиц и укажите (с одной значащей цифрой) новую границу погрешности, если:

1) $a = 3{,}36954$, $h = 0{,}3$; 2) $a = 36{,}963721$, $h = 0{,}0001$.

[1] См.: А-8, п. 6.
[2] См.: А-8, п. 6.
[3] См.: А-8, п. 7.

11. Округлите числа так, чтобы в их записи оставались только верные десятичные знаки, если:

а) $a = 0{,}45286$, $h = 0{,}003$; б) $a = 7{,}6426$, $h = 0{,}001$.

12. Найдите границу погрешности и относительной погрешности четвертых десятичных приближений по недостатку и избытку числа:

а) $\frac{2}{3}$; б) $\sqrt{2}$; в) 0,354297...

(результаты округлите до одной значащей цифры).

З а м е ч а н и е. Округлять значения границы погрешности и относительной погрешности можно только с избытком.

Задачи 13—18 предполагают вычисления без таблиц.

13*. Вычислите с одним знаком после запятой:

а) $\sqrt[3]{3}$; б) $\log_2 3$; в) $\sin 80°$; г) $\sin 20°$.

14*. Найдите число цифр и первую цифру числа 125^{100}, если известно, что $\lg 16 = 1{,}20412...$.

15*. Известно $x^2 = 0{,}9999...$ Со сколькими десятичными знаками можно найти x?

16. Известно, что $a = 1{,}45...$ и $b = 1{,}10$.

а) Можно ли утверждать, что $a + b = 2{,}55...$?

б) Со сколькими десятичными знаками можно вычислить ab?

17*. Вычислите с точностью до 1 число

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{17}} - \frac{1}{\sqrt{18}}\right)}.$$

18*. Известно, что $\pi = 3{,}14...$. Вычислите π^π с точностью до 10.

§ 3. Последовательность. Предел последовательности

Н а п о м и н а н и е[1]. *Последовательностью* называют функцию, областью определения которой является множество натуральных чисел. Значение этой функции $f(n)$ в точке n часто называют n-м *членом последовательности* и обозначают f_n. Для задания последовательностей употребляются те же способы, что и для задания функций. Дополнительно для последовательностей используют *рекуррентный способ задания*: задается первый член последовательности (или несколько первых членов) и формула, позволяющая вычислить $(n + 1)$-й член последовательности по предыдущему (или нескольким предыдущим) члену.

1. Числовая последовательность задана рекуррентно: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n + 1$. Найдите сумму первых пяти ее членов.

Число A называется *пределом последовательности* (a_n), если для любого $\varepsilon > 0$ все члены последовательности a_n, кроме, быть

---

[1] См.: А-9, п. 19.

может, конечного их числа, лежат в ε-окрестности $]A-\varepsilon;\ A+\varepsilon[$ точки A, т. е. найдется такой номер N, что при $n>N$ будет выполнено неравенство $|a_n - A|<\varepsilon$.

(2—3). На основании определения предела последовательности докажите равенство.

2. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^2}=0$.

3*. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1,\ a>0$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$. ↓

Напоминание[1]. При вычислении пределов последовательностей используются теоремы о пределах:

Если существуют $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$ и $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=B$, то существуют и равны правым частям соответствующих формул следующие пределы:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}ka_n=kA$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=A+B$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=A\cdot B$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{A}{B}$, если $B\neq 0$.

Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=x_0$, то справедлива формула

д) $\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)=f(\lim\limits_{n\to\infty}a_n)$.

4. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)$, $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)$, $\lim\limits_{n\to\infty}(x_ny_n)$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$, если:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=-1$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=-\sqrt{2}$.

5. Известно, что $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{4}{9}$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=-1$. Найдите:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}(2x_n+3y_n)$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3x_n}{0,1y_n}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{-x_n}{y_n}}$.

(6—14). Вычислите предел последовательности.

6. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-1}{3n+4}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}-\frac{n}{n+1}\right)$.

7. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n^2+1}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-3}{2n^2+1}$.

8. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n-3)(n+5)}{2n^2+3n-2}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-3n+4}{2n^2-1}-\frac{n-3}{3n+5}\right)$.

[1] См.: А-9, п. 27.

9. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{2n-1}\cdot\frac{2n+1}{4n+1}\cdot\frac{n^2-3n+1}{5n+1}\right)$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n-1)(n+1)(n+3)(n+5)}{1-3n^2+4n^4}$.

10*. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{16}-\frac{1}{64}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{4^{n-1}}\right)$. ↓

11. а) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})$.

12*. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n}$, если $a>b>0$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n+c^n}$, $a>b>c>0$.

13*. а) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+3n+1}-n)$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{4n^2-3n}-2n)$.

14*. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\ln(2n+1)-\ln\left(2n-\frac{1}{2}\right)\right)$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}2^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$.

15. Пусть последовательность (x_n) сходится, а последовательность (y_n) расходится. Что можно утверждать о сходимости последовательностей: а) (x_n+y_n); б) $(x_n\cdot y_n)$? Приведите соответствующие примеры. ↓

16. Пусть последовательности (x_n) и (y_n) расходятся. Что можно утверждать о сходимости последовательностей: а) (x_n+y_n); б) $(x_n\cdot y_n)$? Приведите соответствующие примеры. ↓

17. а) Пусть (y_n)—произвольная последовательность, а $\lim x_n = 0$. Можно ли утверждать, что $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$?

б) Укажите какое-либо условие на последовательность (y_n), чтобы утверждение задачи а) стало верным.

в) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$. Следует ли отсюда, что либо $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$, либо $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$? Приведите соответствующие примеры.

18*. Имеет ли предел последовательность:

а) $a_n=\sin n°$; б) $a_n=\frac{\cos n}{n}$?

Если ответ да, то чему равен этот предел?

19*. Найдите пределы, используя правило д) и результат задачи 3:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln a$, $a>0$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\log_2 n}{n}$.

20*. На основании определения предела докажите теорему о пределе промежуточной функции: если для любого n $a_n\leqslant b_n\leqslant c_n$

и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = A$, то существует и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$, также равный A. ↓

21*. Докажите, что если существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, то существует и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}+x_n}{n}$, равный $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$. ↓

Приведите пример, показывающий, что обратное утверждение неверно.

§ 4. Теорема Вейерштрасса и ее применение

Напоминание[1]. Последовательность (a_n) называется *ограниченной*, если $|a_n| < C$ для любого n, где $C > 0$ — некоторое число. Для последовательности, как и для всякой функции, определено понятие монотонности. На практике удобнее пользоваться несколько более простым определением: последовательность (a_n) называется *возрастающей* (*убывающей*, *невозрастающей*, *неубывающей*), если для любого n справедливо неравенство $a_{n+1} > a_n$ (соответственно $a_{n+1} < a_n$, $a_{n+1} \leqslant a_n$, $a_{n+1} \geqslant a_n$).

При исследовании на монотонность конкретных последовательностей чаще всего выясняют знак разности $a_{n+1} - a_n$ или (для положительных последовательностей) сравнивают с единицей отношение $\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

1. Докажите методом математической индукции эквивалентность двух определений возрастающей последовательности: (1) для любых натуральных m и n из неравенства $m > n$ следует неравенство $a_m > a_n$ и (2) для любого натурального n верно неравенство $a_{n+1} > a_n$.

2. Выясните, будут ли ограниченными последовательности:

а) $a_n = \frac{1}{n}$; б) $a_n = (-1)^n$; в) $a_n = \frac{n^2-3n}{n^2+3n}$; г) $a_n = 2^n$;

д) $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$; е) $a_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2}$.

3. Выясните, будут ли монотонными последовательности:

а) $a_n = \frac{n}{n+1}$; б) $a_n = n^2 - 2n$; в) $a_n = 2^n$; г) $a_n = \frac{n}{2^n}$.

4. Докажите, что последовательность $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ возрастает и ограничена. ↓

Напоминание[2]. *Теорема Вейерштрасса*. Если последовательность монотонна и ограничена, то она имеет предел.

5. Найдите предел последовательности из задачи 4. ↓

---

[1] См.: А-9, пп. 26 и 31.

[2] См.: А-9, п. 32.

Замечание. В данном случае оказалось, что для вычисления предела достаточно информации о его существовании.

6. Докажите, что последовательность a_n имеет предел:

а) $a_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2}$;

б) $a_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}$.

7. Докажите, что последовательность $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ возрастает и ограничена, а последовательность $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ убывает и ограничена.

Замечание. Из результата задачи 7 следует, что существуют пределы $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Оба эти предела равны, так как $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Отметим, что оба эти предела равны числу e.

Если уравнение записано в виде $x = f(x)$, то для его приближенного решения часто применяют следующий метод: выбирают первое приближение x_1, а следующие приближения ищут из рекуррентной формулы $x_{n+1} = f(x_n)$. В наиболее простой ситуации получающаяся последовательность удовлетворяет условиям теоремы Вейерштрасса.

8*. Переписав уравнение $x^2 = c$ в виде $x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{c}{x}\right)$, получим рекуррентную формулу $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{c}{x_n}\right)$ для приближенного вычисления квадратных корней из числа c (если взять первое приближение x_1 положительным, то получим положительный корень; если отрицательным, то отрицательный корень). Докажите, что если x_1 взять бо́льшим, чем $\sqrt{c}$, то полученная последовательность удовлетворяет условиям теоремы Вейерштрасса и, следовательно, действительно дает формулу для вычисления $\sqrt{c}$.

Оцените погрешность полученной формулы.

9*. Постройте последовательность, удовлетворяющую условиям теоремы Вейерштрасса и сходящуюся к корню уравнения $x^3 - 3x + 1 = 0$, лежащему на отрезке $[-1; 1]$. Вычислите этот корень с точностью до 0,001. Указание. $x^3 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow x = \frac{1}{3 - x^2}$. Поэтому надо положить $x_{n+1} = \frac{1}{3 - x_n^2}$.

10*. Вычислите с точностью до 0,001 корень уравнения $x = \operatorname{tg} x$, лежащий на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$. Указание. Перепишите уравнение в виде $x = \operatorname{arctg} x + \pi$ и положите $x_{n+1} = \operatorname{arctg} x_n + \pi$ (x_1 можно взять равным π).

11*. Пусть $a \geqslant 1$. Рассмотрим последовательность $x_1 = a$; $x_{n+1} = a^{x_n}$. Найдите, при каких a существует $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = b$. ↓

Число π и длина окружности.

Напоминание. *Длиной окружности* называется предел последовательности периметров правильных вписанных в эту окружность многоугольников. Площадью круга называется предел последовательности площадей правильных вписанных в эту окружность многоугольников.

Задачи 12—20 этого параграфа посвящены доказательству того, что эти пределы существуют.

12. Докажите, что периметр многоугольника M_1 больше периметра выпуклого многоугольника M_2, если M_1 содержит M_2.

13. Пусть a_n — длина стороны правильного n-угольника, вписанного в окружность единичного диаметра, а b_n — длина стороны правильного n-угольника, описанного вокруг той же окружности. Докажите, что $b_n = a_n : \sqrt{1 - a_n^2}$.

14. Докажите, что последовательность c_n периметров правильных вписанных в окружность единичного диаметра $3 \cdot 2^n$-угольников возрастает и ограничена, а последовательность C_n периметров описанных вокруг той же окружности $3 \cdot 2^n$-угольников убывает и ограничена.

15. Докажите, что пределы последовательностей задачи 14, существующие в силу теоремы Вейерштрасса, равны.

Общий предел этих последовательностей обозначается через π. Следующие две задачи посвящены доказательству того, что существуют пределы p_n и q_n, равные π, где через p_n и q_n обозначены периметры правильных n-угольников, вписанного в окружность единичного диаметра и описанного вокруг той же окружности.

16. Докажите, что для любого n верны неравенства:

а) $p_n \leqslant \pi$; б) $q_n \geqslant \pi$.

17. а) Докажите, что $p_n \geqslant \pi \sqrt{1 - \frac{16}{n^2}}$;

б) докажите, используя результаты задач 16а) и 17а), что $\lim\limits_{n \to \infty} p_n = \pi$;

в) докажите, что $\lim\limits_{n \to \infty} q_n = \pi$.

18. Докажите, что длина окружности радиуса R равна $2\pi R$.

19. Докажите, что площадь круга радиуса R равна πR^2.

20. а) Верно ли такое определение длины окружности: длиной окружности называется предел вписанных в окружность n-угольников (для каждого n выбран n-угольник какого-то вида), если известно, что длина наибольшей стороны стремится к нулю?

б) Докажите, что если к условиям задачи а) добавить условие «центр окружности лежит внутри каждого n-угольника», то определение задачи а) станет верным.

Глава III ФУНКЦИЯ

§ 1. Область определения и множество значений числовой функции

Чтобы задать числовую функцию f, нужно указать ее область определения $D(f)$ и правило, по которому каждому $x \in D(f)$ ставится в соответствие значение функции $y = f(x)$. Такое правило часто задается формулой; если область определения при этом не указывается, то считается, что функция определена всюду, где данная формула имеет смысл. В таком случае говорят о естественной области определения f.

(1—7). Найдите естественную область определения следующих функций.

1. а) $f(x) = \frac{1}{x}$; б) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$;

в) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$; г) $f(x) = \frac{x}{x^3 + x}$.

Замечание к задаче 1г). Задающее функцию f выражение можно было бы упростить: $\frac{x}{x^3 + x} = \frac{x}{x(x^2 + 1)} = \frac{1}{x^2 + 1}$.
Полученное выражение определено при всех x, но произведенное сокращение законно лишь в случае $x \neq 0$, поэтому $D(f) = \{x | x \neq 0\}$. Разумнее отыскивать $D(f)$, не упрощая выражения для $f(x)$.

Это замечание относится к использованию (при упрощениях) всех «опасных» формул, например:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}, \ \lg(ab) = \lg a + \lg b, \ \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{ctg} a = 1.$$

2. а) $f(x) = \sqrt{x}$; б) $f(x) = \sqrt{x + 2}$;

в) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$; г) $f(x) = \sqrt{2 - x^2}$.

3. а) $f(x) = \lg x$; б) $f(x) = \lg(x - 1)$;

в) $f(x) = \lg(x^2 - 1)$; г) $f(x) = \lg(4 - x^2)$.

Область определения суммы, разности или произведения двух или нескольких функций есть пересечение областей определений этих функций. Для ее отыскания составляется и затем решается система соответствующих условий.

4. а) $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}$; б) $f(x)=\frac{1}{x^2-1}+\frac{1}{x^2-3x+2}$;

в) $f(x)=\frac{1}{x-1}+\sqrt{x}$.

Замечание. Область определения функции $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x}$ есть $D(f)=\{x|x\neq 0\}$, т. е. $f(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\neq 0\\ \text{не определено при } x=0.\end{cases}$

5. а) $f(x)=\sqrt{x-1}+\sqrt{2-x}$; б) $f(x)=\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x+1}$;

в) $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{1-x^2}$.

Замечание к задаче 5б). Хотя $\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x+1}=\sqrt{x^2-1}$ в области определения функции 5 б), область определения функции $g(x)=\sqrt{x^2-1}$ шире области определения исходной функции — упрощение опять приводит к расширению области определения.

6. а) $f(x)=\sqrt{x}\lg(1-x)$; б) $f(x)=\lg(1+x)+\lg(1-x)$;

в) $f(x)=\lg x-\lg(1-x^2)$.

При отыскании области определения частного двух функций $\frac{f(x)}{g(x)}$ нужно найти пересечение $D(f)$ и $D(g)$ и выкинуть из него те значения x, при которых $g(x)=0$.

7. а) $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{\lg(1-x)}$; б) $f(x)=\frac{\lg(2x)}{\lg(x-1)}$;

в) $f(x)=\frac{\lg(3x)}{(x-3)\lg(x-1)}$.

Напоминание[1]. *Множеством* $E(f)$ *значений* функции f; $x\to f(x)$ называется множество $\{a\,|$ существует $x\in D(f)$ такое, что $f(x)=a\}$. Иными словами, множество значений функции f может быть описано как совокупность всех значений $a\in \mathbf{R}$, при которых уравнение $f(x)=a$ имеет решения.

(8—12). Найдите множество значений функции.

8. а) $f(x)=x^2+2$; б) $f(x)=x^2+2x$; в) $f(x)=x-x^2$.

9. а) $f(x)=2x+1$; б) $f(x)=\frac{1}{x+1}$; в) $f(x)=\frac{x}{x-1}$.

10. а) $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$; б) $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$; в) $f(x)=x+\frac{1}{x}$.

11. а) $f(x)=\sqrt{x}$; б) $f(x)=\sqrt{1-x}$; в) $f(x)=\sqrt{2x-x^2}$.

12. а) $f(x)=\lg x$; б) $f(x)=\lg(1-x)$; в) $f(x)=\lg(1-x^2)$.

13. Укажите на рисунке 3 области определения и множества значений соответствующих функций.

(14—15). Найдите множество значений функций:

14. а) $y=\cos^2 x-\sin^2 x$; б) $y=\cos x\sin x$; в) $y=\cos^4 x+\sin^4 x$.

[1] См.: А-9, п. 34.

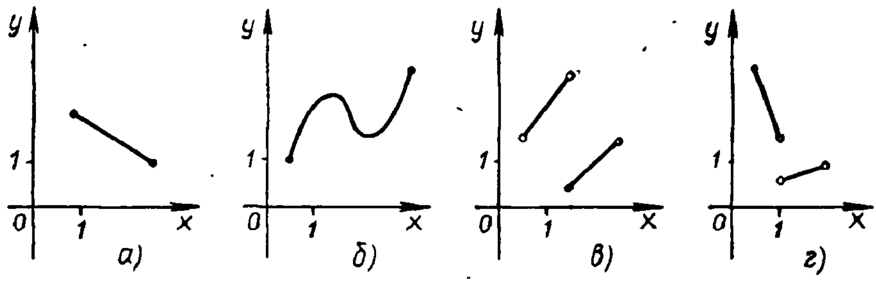


Рис. 3

15. а) $y = \cos^2 x - \sin x$; б) $y = \cos^2 x - \cos x$; в) $y = 2^{\cos x}$.

Нередко при исследовании тригонометрических функций помогает формула

$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \cos (x - \alpha),$$

где $\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$; $\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ (докажите), из которой следует, что множество значений функции $y = a \cos x + b \sin x$ — промежуток $[-\sqrt{a^2 + b^2}; \sqrt{a^2 + b^2}]$.

16. Найдите множество значений функции:

а) $y = \cos x + \sin x$; б) $y = 3 \cos x - 4 \sin x$;

в) $y = \cos^2 x - \sin x \cos x$.

17. Укажите области определения следующих функций:

а) $y = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$; б) $y = \sqrt{\cos^2 x - \sin^2 x}$; в) $y = \lg (2 \sin x + 1)$.

Напоминание. Логарифмическая функция $\log_a x$ рассматривается только при $a > 0$ и $a \neq 1$, причем $D (\log_a) = \{x \mid x > 0\}$, а $E (\log_a) = \boldsymbol{R}$.

Показательная функция $a^x = \exp_a (x)$, $x \in D (\exp_a) = \boldsymbol{R}$ рассматривается только при $a > 0$, причем если $a \neq 1$, то $E (\exp_a) = \{x \mid x > 0\}$. Согласно определению функции $\exp_a$ и $\log_a$ при $a > 0$, $a \neq 1$ взаимно обратны:

$$a^{\log_a x} = x \ (x > 0); \quad \log_a (a^x) = x \ (x \in \boldsymbol{R}).$$

18. Найдите области определения следующих функций:

а) $y = \log_x 2$; б) $\log_{x^2} (x + 1)$; в) $\log_{x^2+2x} (x^2 - 1)$.

19. Найдите множество значений следующих функций:

а) $f (x) = 2^{1-x}$; б) $f (x) = 2^{1-x^2}$;

в) $f (x) = 4^x + 2^x$; г) $f (x) = 2^x + 2^{-x}$. ↓

Напоминание[1]. *Целой частью* $[x]$ числа $x \in \boldsymbol{R}$ называется наибольшее целое число $a \in \boldsymbol{Z}$, не превосходящее x; *дробной частью* $\{x\}$ числа $x \in \boldsymbol{R}$ называется число $x - [x]$.

---

[1] См.: А-9, п. 34.

20. Найдите: а) $\left[\frac{7}{3}\right]$; б) $\left[-\frac{7}{3}\right]$; в) $[-\sqrt{2}]$.

21. Найдите: а) $\left\{\frac{7}{3}\right\}$; б) $\left\{-\frac{7}{3}\right\}$; в) $\{-\sqrt{2}\}$.

22. Упростите: а) $[x] + \{x\}$; б) $2[x] + 3\{x\}$; в) $\{x + 1\} + \{x + 5\}$.

23. Постройте графики функций:

а) $f(x) = [x]$; б) $f(x) = \{x\}$;

в) $f(x) = [x] + \{x\}$; г) $f(x) = [\{x\}]$.

24. Решите уравнения:

а) $[x - 1] = 2$; б) $\{x\} = 0$; в) $\left\{x + \frac{1}{2}\right\} = 0$.

25. Найдите естественную область определения функций:

а) $f(x) = \frac{1}{[x]}$; б) $f(x) = \frac{1}{\{x\}}$; в) $f(x) = \frac{1}{\{x\}\left\{x - \frac{1}{2}\right\}}$.

При построении некоторых графиков полезно сначала преобразовать задающее функцию выражение (не забывая об исходной области определения). Следует пользоваться и приемами из § 3.

(26—31). Постройте графики функций.

26. а) $y = \log_x (x^2)$; б) $y = 10^{\lg x - 1}$; в) $y = 10^{\lg(x-1)}$.

27. а) $y = (x^2 - 1)\log_x (\sqrt{x})$; б) $y = \log_x 2$.

28. $y = \sqrt{x} + \sqrt{-x}$. 29. $y = \sin(\arcsin x)$.

30. $y = 2^{|\log_2 x| - 1}$. 31*. $y = \operatorname{arctg}\frac{2x}{1 - x^3}$.

§ 2. Композиции функций. Обратные функции

1. Для указанных пар функций f и g найдите их композиции $f \circ g$ и $g \circ f$:

а) $f(x) = 2x$, $g(x) = x + 1$; б) $f(x) = x + 1$, $g(x) = x + 3$;

в) $f(x) = 2x$, $g(x) = x^2$; г) $f(x) = |x|$, $g(x) = 1 - x$;

д) $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$.

Замечание. Обратите внимание на то, что функции $f \circ g$ и $g \circ f$, вообще говоря, будут разными.

2. Найдите следующие композиции:

а) $\{[x]\}$; б) $[\{x^2 - 1\}]$; в) $[\{x\} + 1]$; г) $\{1 - \{1 - x\}\}$.

3*. Найдите композиции $f \circ f$, $f \circ f \circ f$, $f \circ f \circ f \circ f$, ... и, вообще, n-кратную композицию f с собой (т. е. $\underbrace{f \circ f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ значков } f}$) для следующих функций:

а) $f(x) = x - 1$; б) $f(x) = 1 - x$; в) $f(x) = 2x$;

г) $f(x) = x^2$; д) $f(x) = \frac{1}{x}$; е) $f(x) = \frac{1}{1 - x}$;

ж) $f(x) = \frac{1}{1+x}$; ↓ з) $f(x) = \sqrt{1+x}$.

4. Среди функций вида $f(x) = ax + b$ найдите все такие, что: а) $f \circ f = f$; б) $f \circ f = E$ (функция $E(x) = x$ при любом $x \in \boldsymbol{R}$). ↓

5. Рассмотрим функции следующих трех типов:

1) $f(x) = x + a$; 2) $g(x) = kx$; 3) $h(x) = |x|$. Представьте в виде композиции таких функций следующие функции:

а) $F(x) = 2x + 3$; б) $F(x) = 2|x+1| - 1$; в) $F(x) = |1 - |x||$.

Укажите по крайней мере два разных представления (при которых f, g, h используются в разных порядках).

6. Представьте в виде композиции функций вида

1) $f(x) = ax + b$; 2) $g(x) = x^n$, $n \in \boldsymbol{N}$; 3) $h(x) = \frac{1}{x}$;

4) $k(x) = \sqrt[n]{x}$, $n \in \boldsymbol{N}$ следующие функции:

а) $F(x) = (x^{10} + 1)^{10}$; б) $F(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1}$; в) $F(x) = 2x^{-3} + 1$; г) $F(x) = (2x^2 + 1)^{-3}$; д) $F(x) = \sqrt[5]{(3x^2 + 1)^{-5} + 1}$.

Напоминание[1]. Область определения $D(h)$ сложной функции $h = g \circ f$ ($h(x) = g(f(x))$) состоит из тех x, которые принадлежат $D(f)$ (т. е. определено значение $f(x)$) и для которых $y = f(x) \in D(g)$ (т. е. определено значение $g(y) = g(f(x))$).

(7—10). Найдите естественные области определения следующих функций:

7. а) $f(x) = \sqrt{1-x}$; б) $f(x) = \lg(2 - \sqrt{x})$; в) $f(x) = \sqrt{\lg(1-x)}$.

8. а) $\lg \lg x$; б) $\lg \lg \lg x$; в) $\lg \sqrt{\lg(10 - x^2)}$.

9. а) $\sqrt{[x] - 1}$; б) $\sqrt{\{x\} - 1}$; в) $\sqrt{\{x\} - \frac{1}{2}}$;

г) $\lg\{x\}$; д) $\lg \lg \{x\}$.

10*. Найдите области определения n-кратных композиций $f \circ f \circ \ldots \circ f$ следующих функций:

а) $\frac{1}{x}$; б) $\frac{1}{1-x}$; в) $\frac{1}{1+x}$; г) $\sqrt{1+x}$; д) $\sqrt{x-1}$.

11*. а) При каком условии на множества $D(f)$, $D(g)$, $E(f)$, $E(g)$ области определения функций f и $h = g \circ f$ совпадают?

б) Верно ли, что множества значений функций g и $g \circ f$ совпадают?

Напоминание[2]. Функция f называется *обратимой*, если

---

[1] См.: А-9, п. 49.

[2] См.: А-8, пп. 20—21.

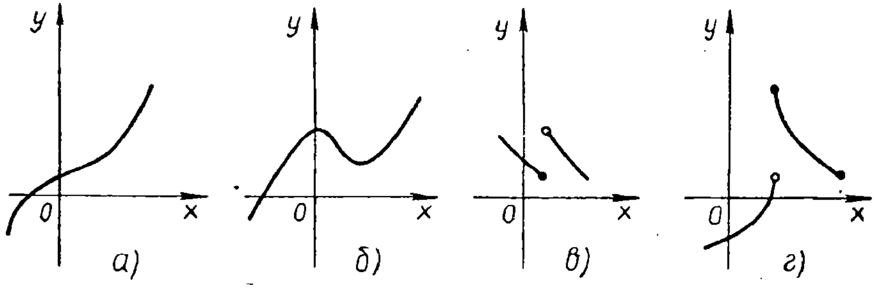


Рис. 4

разным значениям $x_1, x_2 \in D(f)$ отвечают разные значения функций: из $x_1 \neq x_2$ следует, что $f(x_1) \neq f(x_2)$. Для обратимой функции определяется обратная функция f^{-1}: $D(f^{-1}) = E(f)$, и для каждого $y \in E(f)$ значение $f^{-1}(y)$ принимается равным тому значению $x \in D(f)$, для которого $f(x) = y$, т. е. $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$.

(12—16). Выясните, какие из следующих функций обратимы:

12. а) $2x - 1$; б) $x^2 - 1$; в) $(x-1)^2$; г) x^3.

13. а) $\frac{1}{x}$; б) $\frac{1}{\sqrt{x}}$; в) $\frac{1}{2x+1}$; г) $x + \frac{1}{x}$.

14. а) $\sqrt{2x-1}$; б) $\sqrt{x^2-1}$; в) $2\sqrt{x} - 1$; г) $\sqrt{x^2}$; д) $(\sqrt{x})^2$.

15. а) $\lg(2x)$; б) $\lg 2 + \lg(x-1)$; в) $\lg^2 x$; г) $\frac{1}{\lg x}$.

16. а) $\{x\}$; б) $[x]$; в) $x + \{x\}$; г) $x - 2\{x\}$. ↓

Для отыскания формулы, задающей функцию, обратную данной функции $f(x)$, нужно выразить из уравнения $f(x) = y$ значение x через значение y и затем поменять обозначения: x на y и y на x.

(17—18). Найдите обратные функции к следующим функциям:

17. а) $2x - 1$; б) $1 - x$; в) $\frac{1}{x}$; г) $\frac{1}{x-1}$; д) $x^3 + 1$.

18. а) $\sqrt{x+1}$; б) $\lg(1-x)$; в) $\sqrt{\lg x}$; г) $\sqrt{\frac{1}{x}}$.

19. Среди функций вида

а) $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$; б) $f(x) = \frac{1}{ax+b}$, $a \neq 0$; в)* $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$

найдите все, которые совпадают с обратными к самим себе. ↓

20. Какие из функций, графики которых изображены на рисунке 4, будут обратимыми?

21. Нарисуйте несколько графиков обратимых функций (с существенно различным поведением), определенных на отрезке $[1; 2]$ и с множеством значений: а) $[1; 2]$; б) $[0; \infty[$.

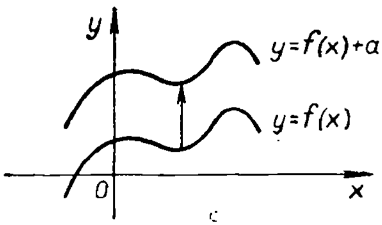


Рис. 5

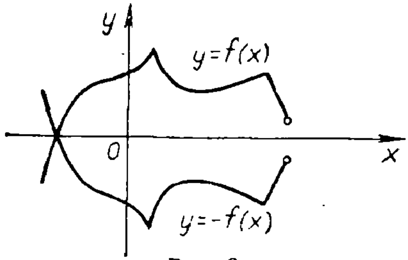


Рис. 6

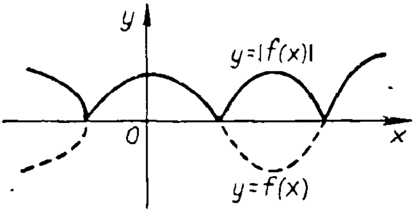


Рис. 7

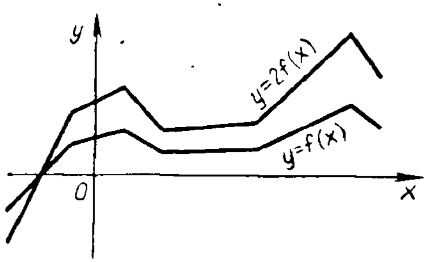


Рис. 8

§ 3. Построение графиков функций с помощью преобразований

Напоминание[1]. *Графиком функции* f называется множество $\{(x; y) | \; x \in D(f), y = f(x)\}$ координатной плоскости Oxy.

Замечание. В анализе в отличие от физики единица длины выбирается единая для обеих осей. В противном случае некоторые часто используемые факты неверны, например:

1) прямая $y = x$ есть биссектриса I и III координатных углов;

2) прямая $y = kx$ образует с осью Ox угол α, такой, что $\operatorname{tg}\alpha = k$ (т. е. k — угловой коэффициент прямой);

3) расстояние между двумя точками $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ координатной плоскости может быть вычислено по формуле

$$r = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2};$$

4) графики взаимно обратных функций $y = f(x)$ и $y = f^{-1}(x)$ симметричны относительно прямой $y = x$ и т. п. (поясните).

Знаяграфик функции $y = f(x)$, можно простыми геометрическими преобразованиями строить графики ряда других функций. Постепенно перечислим важнейшие приемы (I—VIII).

I. Прибавляя к ординате каждой точки графика функции $y = f(x)$ одну и ту же величину a, получаем график функции $y = f(x) + a$ (рис. 5).

[1] См.: А-9, п. 34.

Таким образом, график функции $y = f(x) + a$ получается из графика $y = f(x)$ параллельным переносом на величину a вдоль оси Oy, т. е. переносом с координатами $(0; a)$.

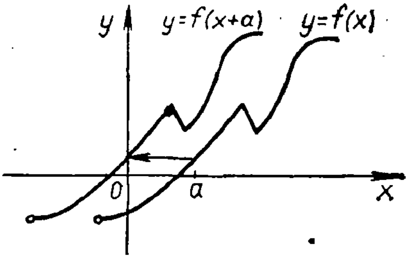


Рис. 9

II. График функции $y = -f(x)$ (рис. 6) получается из графика $y = f(x)$ симметрией относительно оси Ox (при этой симметрии каждая точка $(x; y)$ переходит в точку $(x; -y)$ с противоположной ординатой).

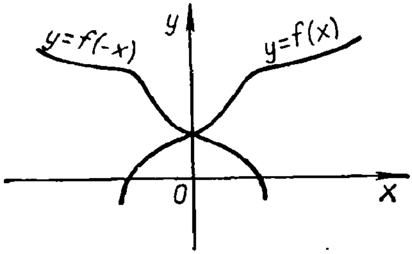


Рис. 10

(1—2). Постройте графики функций.

1. а) $y = -\sqrt{x} + 2$;

б) $y = x^2 + 2$; в) $y = -\frac{1}{x} + 1$.

2. а) $y = \lg\frac{1}{x} - 1$;

б) $y = [x] + 1$;

в) $y = -\{x\} + 2$.

III. График $y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{при } f(x) \geqslant 0 \\ -f(x) & \text{при } f(x) < 0 \end{cases}$ (рис. 7), является объединением части графика $y = f(x)$, лежащей над осью Ox (для которой $f(x) \geqslant 0$) с образом оставшейся части графика $y = f(x)$ (для которой $f(x) < 0$) при симметрии относительно оси Ox.

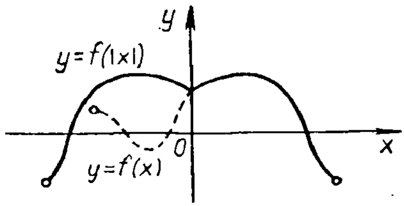


Рис. 11

(3—5). Постройте графики следующих функций:

3. а) $y = |x - 1|$; б) $y = |x^2 - 1|$; в) $y = |-x^2 - 1|$.

4. а) $y = ||x| - 1|$; б) $y = |||x| - 1| - 1|$; в) $y = -|2 - |x||$.

5. а) $y = |\sqrt{x} - 2|$; б) $y = |\lg x|$; в) $y = |\lg(10x) - 2|$.

IV. График функции $y = kf(x)$ (рис. 8) при $k > 0$ получается умножением ординаты каждой точки графика $y = f(x)$ на число k, т. е. сжатием к оси Ox в отношении $1 : k$ (напомним, что при $k > 1$ такое сжатие является растяжением в k раз). Если же $k < 0$, то соответствующее преобразование будет композицией симметрии относительно оси Ox (см. п. II) и сжатия к этой же оси в отношении $1 : |k|$ (в любом порядке).

(6—7). Постройте графики следующих функций:

6. а) $y = 5\sqrt{x}$; б) $y = -2\lg x + 3$; в) $y = 3|\sqrt{x} - 1|$.

7. а) $y = 3\,|\lg x - 1|$; б) $y = |3\lg x - 1|$;
в) $y = 3\,|\lg |x|| - 1$; г) $y = 3\,(|\lg |x|| - 1)$.

V. Посмотрим, как по графику функции $y = f(x)$ строится график $y = f(x + a)$. Взяв точку x, находим значение функции f в сдвинутой на a (относительно точки x) точке $x + a$; это значение $f(x + a)$ и будет значением новой функции в точке x. Соответствующая точка графика $y = f(x + a)$ получается из точки $(x + a;\ f(x + a))$ старого графика обратным сдвигом вдоль оси Ox на величину a. Иначе говоря, график функции $y = f(x + a)$ получается из графика $y = f(x)$ параллельным переносом с координатами $(-a;\ 0)$ (рис. 9).

8. Постройте графики функций:

а) $y = \sqrt{x + 2}$; б) $y = \lg(x - 3)$; в) $y = |\lg(x + 2) - 3|$.

9. Докажите, что график любой квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ конгруэнтен графику $y = ax^2$ (и более того, получается из него параллельным переносом).

Чтобы получить график функции $y = \frac{x}{x+1}$, можно поступить так:

$$y = \frac{x}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}.$$

Таким образом, искомый график получается из графика $y = \frac{1}{x}$ композицией следующих преобразований:

1) параллельный перенос с координатами $(-1;\ 0)$;
2) симметрии $(x;\ y) \to (x;\ -y)$ относительно оси Ox;
3) параллельный перенос с координатами $(0;\ 1)$.

10. Постройте графики функций:

а) $y = \frac{x}{x-1}$; б) $y = \frac{2x}{x+1}$; в) $y = \frac{3x+2}{x+3}$.

11. Докажите, что график любой дробно-линейной функции $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ (при $c \neq 0$) конгруэнтен графику $y = \frac{k}{x}$, где $k = \frac{bc-ad}{c^2}$ и, более того, получается из последнего параллельным переносом. Как выглядит этот график в случае $bc - ad = 0$?

VI. График $y = f(-x)$ получается из графика $y = f(x)$ симметрией относительно оси Oy (при которой точка $(x;\ y)$ переходит в точку $(-x;\ y)$) (рис. 10).

12. Постройте графики функций:

а) $y = \lg(-x)$; б) $y = \sqrt{2 - x}$; в) $y = 2\lg(-1 - x)$.

VII. Чтобы построить график

$$y = f(|x|) = \begin{cases} f(x) \text{ при } x \geqslant 0, \\ f(-x) \text{ при } x < 0, \end{cases} \text{ (рис. 11)}$$

нужно объединить часть графика $y = f(x)$, лежащую правее оси Oy

(для которой $x \geqslant 0$) с образом этой же части при симметрии относительно оси Oy.

(13—15). Постройте графики функций.

13. а) $y = \lg |x|$; б) $y = \sqrt{|x| + 1}$; в) $y = -\lg (|x| + 2)$.

14. а) $y = |x^2 - 2x - 15|$; б) $y = x^2 - 2|x| - 15$; в) $y = |x^2 - 2|x| - 15|$.

15. а) $y = \lg |x - 1|$; б) $y = \lg (|x| - 1)$;
в) $y = |\lg (x - 1)|$; г) $y = |\lg |x - 1||$.

Замечание. Важно не перепутать последовательность преобразований графиков: так, в задаче 15а) сначала следует построить график $y = \lg |x|$, а затем переносом получить график $y = \lg |x - 1|$ (если сначала сделать перенос, а затем преобразование VII, то получится график 15 б)!).

VIII. Рассуждая так же, как в случае V, находим, что при $k > 0$ график функции $y = f(kx)$ получается из графика $y = f(x)$ сжатием к оси Oy в отношении $1 : \frac{1}{k}$ (при котором точка $(x; y)$ переходит в точку $\left(\frac{x}{k}; y\right)$). Отметим, что если $k > 1$, то данное преобразование будет действительно сжатием, а если $k < 1$, то растяжением в $\frac{1}{k}$ раз. В случае $k < 0$ соответствующее преобразование будет композицией сжатия к оси Oy в отношении $\frac{1}{|k|}$ и симметрии относительно той же оси (в любом порядке) (рис. 12).

(16—17). Постройте графики функций.

16. а) $y = \sqrt{2x + 1}$; б) $y = \lg \left(\frac{x}{2} - 1\right)$; в) $y = -\lg (1 - 3x)$.

17. а) $y = |2\sqrt{2|x| - 3} - 1|$; б) $y = 2 \lg \sqrt{1 - 2|x - 1|}$;
в) $y = 2|\lg |1 - \frac{1}{2}|x|| - 1|$.

18. Область определения функции $y = f(x)$ есть отрезок $[-1; 2]$. Найдите области определения следующих функций:
а) $f(x) + 1$; б) $f(x + 1)$; в) $2f(x)$; г) $f(2x)$;
д) $f(-x)$; е) $-f(x)$; ж) $|f(x)|$; з) $f(|x|)$;
и) $f(1 - x)$; к) $f(1 - |x|)$; л) $f(\sqrt{x})$; м) $f(x^2)$.

Наряду с разобранными выше «линейными» преобразованиями графиков полезно уметь делать и простейшие «нелинейные» пре-

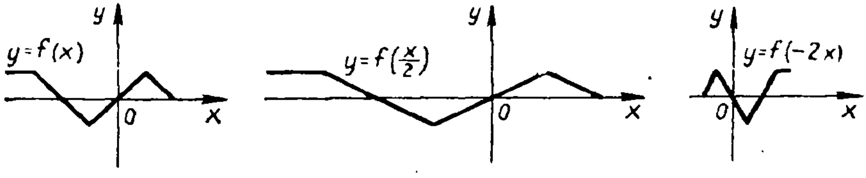


Рис. 12

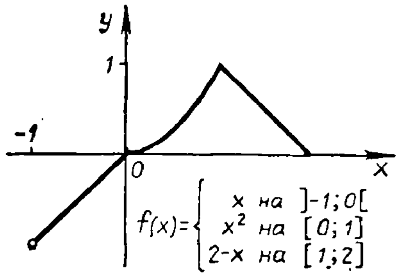


Рис. 13

образования, например приближенно строить по графику функции $y = f(x)$ графики $y = f^2(x)$; $y = \sqrt{f(x)}$; $y = f^3(x)$; $y = \frac{1}{f(x)}$ и т. п.

(19—24)*. Построийте графики функций.

19. а) $y = \lg^3(x-1)$; б) $y = (\sqrt{x}-1)^2$; в) $y = (x^2-1)^3$.

20. а) $y = \sqrt{\lg x}$; б) $y = \sqrt{|\lg x|} - 1$; в) $y = \sqrt{\lg|x| + 1}$.

21. а) $y = \sqrt{x^2-3x-10}$; б) $y = \sqrt{2\sqrt{x}-1}$; в) $y = \sqrt{|2|x|-1|+1}$.

22. а) $y = \lg^3(x+1)$; б) $y = (\sqrt{x}-1)^3$; в) $y = (x^2-2)^3$.

23. а) $y = \frac{1}{x^2-1}$; б) $y = \frac{1}{x^2-2|x|-8}$; в) $y = \frac{1}{2\lg x - 1}$.

24. а) $y = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}-5}\right)^2$; б) $y = \sqrt{(x^2+3x-28)^3}$; в) $y = \frac{1}{(|x|-1)^2}$.

25. По графику функции $y = f(x)$ (рис. 13) постройте график функции:

а) $y = f(x) - 1$; б) $y = -f(x)$; в) $y = |f(x)|$;
г) $y = f(x-2)$; д) $y = f(2x)$; е) $y = f(-x)$; ж) $y = 2f(x)$;
з) $y = f(|x|)$; и) $y = f(1-x)$; к) $y = f(-|x|)$;
л) $y = f^2(x)$; м) $y = f^3(x)$; н) $y = \sqrt{f(x)}$; о) $y = \frac{1}{f(x)}$;
п) $y = f(|2x|-1)$; р) $y = f(x^2)$; с) $y = f(\sqrt{x})$; т) $y = f^2(-|x|)$.

(26—30). Постройте графики функций.

26. а) $y = \left[\frac{x}{2}\right]$; б) $y = \left[x - \frac{1}{2}\right]$;
в) $y = [|x|]$; г) $y = [x^2 - 1]$.

27. а) $y = \left\{\frac{x}{2}\right\}$; б) $y = \left|\{x\} - \frac{1}{2}\right|$;
в) $y = \{3x + 1\}$; г) $y = \{x^2\}$.

28. а) $y = [x]^2$; б) $y = \{x\}^2$; в) $y = [x]\{x\}$.

29. а) $y = \sqrt{[x]}$; б) $y = \sqrt{\{x\}}$; в) $y = \sqrt{\left|\{x\} - \frac{1}{2}\right|}$.

30. а) $y = \frac{1}{[x]}$; б) $y = \frac{1}{\{x\}}$; в) $y = \frac{\{x\}}{[x]}$.

31. а) $y = \sin 2x$; б) $y = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; в) $y = -\cos(3x - \pi)$.

32. а) $y = \sin^2 x$; б) $y = \sin^2 x - \cos^2 x$; в) $y = \sin x \cos x$.

(Прежде чем строить графики задачи 32, преобразуйте задающее функцию выражение.)

33. а) $y = |\sin x|$; б) $y = \sin |x|$; в) $y = \sin (x^2)$.

34. а) $y = \frac{1}{\sin x}$; б) $y = \sqrt{\sin x}$; в) $y = \lg \sin x$.

35. а) $y = 2^{\sin x}$; б) $y = 10^{\operatorname{tg} x}$; в) $y = \frac{1}{2^{\sin x + \cos x}}$.

36. а) $y = 2^{|x|}$; б) $y = 2^{1-|x|}$; в) $y = 2^{|x-1|}$.

§ 4. Монотонность функций

Напоминание[1]. Функция f называется *возрастающей на множестве* $M \subset D(f)$, если для любых $x_1, x_2 \in M$ из того, что $x_1 < x_2$, следует, что $f(x_1) < f(x_2)$. Функция f называется *убывающей на множестве* $M \subset D(f)$, если из неравенства $x_1 < x_2$ следует, что $f(x_1) > f(x_2)$. Возрастающие и убывающие функции называют также *строго монотонными* на M.

Функция f называется неубывающей на множестве $M \subset D(f)$, если для $x_1, x_2 \in M$ из неравенства $x_1 < x_2$ следует, что $f(x_1) \leqslant f(x_2)$, и невозрастающей на множестве M, если из неравенства $x_1 < x_2$ ($x_1, x_2 \in E$) следует, что $f(x_1) \geqslant f(x_2)$. Такие функции называются (просто) монотонными на M.

Если f строго монотонна на некотором промежутке ($[a; b]$, $]a; b]$, $[a; b[$ или $]a; b[$), то этот промежуток называется *промежутком монотонности* функции f (промежуток возрастания, убывания).

1. Для функций, графики которых изображены на рисунке 14, укажите промежутки строгой и нестрогой монотонности (наибольшей длины).

2. Среди перечисленных ниже функций укажите все монотонные на своей области определения (возрастающие, убывающие, невозрастающие, неубывающие).

а) $|x|$; б) $x + |x|$; в) x^2; г) x^3; д) $x^3 + x$; е) $x^3 - x$; ж) $\sin x$; з)* $\sin x + 2x$; и) $[x]$; к) $\{x\}$; л) $\frac{1}{x}$;

[1] См.: А-9, п. 35.

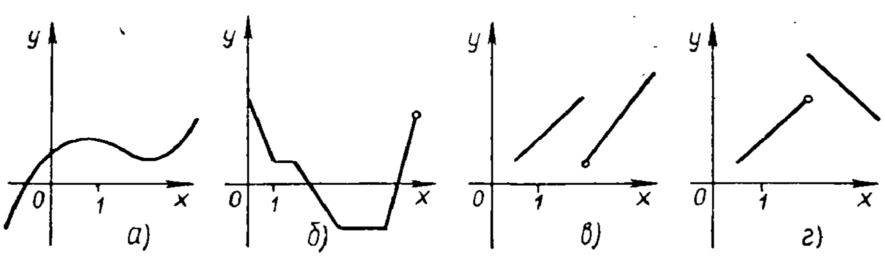


Рис. 14

м) $\frac{1}{x^2+1}$; н) 2^x; о) 2^{1-x}; п) $\lg x$; р) $\lg \frac{1}{x}$; с) $\lg (x^2)$;
т) $\sqrt{x-1}$.

3. Пусть $f(x)$ — возрастающая и положительная на всей числовой прямой функция. Докажите, что тогда:

а) функция $f^2(x)$ возрастает на всей числовой прямой;

б) функция $\frac{1}{f(x)}$ убывает на всей числовой прямой;

в) функция $\sqrt{f(x)}$ возрастает на всей числовой прямой;

г) функция $\lg f(x)$ возрастает на всей числовой прямой.

4. Верны ли утверждения пп. а) и б) задачи 3 для неположительных функций? Какими утверждениями можно заменить а) и б) в случае возрастающих и отрицательных на всей числовой прямой функций (сформулируйте и докажите).

5. Укажите промежутки (наибольшей длины) возрастания и убывания для следующих функций:

а) x^2; б) x^2+2x; в) $\sin x$; г) $-\{x\}$;
д) $\frac{1}{x}$; е) $\frac{1}{x^2}$; ж) $\frac{1}{x^2+1}$, з) $\operatorname{tg} x$.

6. Начертите график всюду определенной функции, которая:

а) возрастала бы на промежутках $]-\infty; -1]$ и $[0; 2]$ и убывала бы на промежутках $[-1; 0]$ и $[2; \infty[$;

б) имела бы бесконечное число промежутков возрастания и убывания;

в) возрастала бы на каждом промежутке вида $[n, n+1[$, где n — целое, и не являлась возрастающей ни на каком промежутке длины, большей 1;

г) возрастала бы на множестве целых значений x и убывала бы на множестве всех остальных значений $x \in \boldsymbol{R}$.

7. Начертите графики функций, удовлетворяющих условиям задачи 6 (пп. а) — г)), которые вдобавок были бы всюду отрицательными.

8. Функция $f(x)$ является возрастающей на промежутках:

а) $[0; 2]$ и $[1; 3]$; б) $[0; 2]$ и $[2; 3]$;
в) $[0; 2]$ и $]2; 3]$; г) $[0; 2[$ и $[2; 3]$. ↓

Можно ли утверждать, что в таком случае функция будет возрастающей на отрезке $[0; 3]$? (Приведите доказательства или примеры.) ↓

9. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ возрастают на множестве E. Будут ли монотонными на том же множестве E функции:

а) $f(x)+g(x)$; б) $f(x)-g(x)$; в) $2f(x)$;
г) $-f(x)$; д) $f^3(x)$; е) $f^2(x)$?

10*. Приведите примеры строго возрастающих на всей числовой оси функций $f(x)$ и $g(x)$, для которых разность $f(x)-g(x)$ была бы функцией:

а) возрастающей на всей числовой прямой;

б) убывающей на всей числовой прямой;

в) убывающей на $]-\infty; 0[$ и возрастающей на $]0; \infty[$;

г) возрастающей на $]-\infty; 0[$ и убывающей на $]0; \infty[$;

д) имеющей бесконечно много промежутков возрастания и убывания.

11. Функция $f(x)$ возрастает на всей числовой прямой. Будут ли монотонными следующие функции:

а) $f(2x)$; б) $f(-x)$; в) $f(|x|)$;
г) $f(2^x)$; д) $f(2-3x)$; е) $f(\sin x)$?

12. а) Докажите, что функция sin не может быть возрастающей ни на каком промежутке длины больше π.

б) Укажите множество $E \subset \boldsymbol{R}$, содержащее точку $x=0$ и сколь угодно большие числа x, такое, что функция sin возрастала бы на этом множестве.

13. Приведите пример функции, определенной на отрезке $[0; 1]$ и имеющей (на этом отрезке) бесконечно много промежутков возрастания и убывания. (Например, нарисуйте соответствующий график.)

14*. Приведите пример определенной на всей числовой прямой функции, которая не имела бы ни одного промежутка возрастания и убывания.

§ 5. Непрерывность функций

Задачи этого параграфа направлены на закрепление интуитивных представлений о непрерывности функций.

Напоминание[1]. Функция f называется *непрерывной в точке* x_0, если $x_0 \in D(f)$; функция f определена в некоторой окрестности $]x_0-\varepsilon; x_0+\varepsilon[$ точки x_0, и $f(x)$ стремится к $f(x_0)$ при x, стремящемся к x_0: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Функция f называется *непрерывной на множестве* $M \subset D(f)$, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Если функция f непрерывна на некотором интервале $]a; b[$, то график $y=f(x)$ функции f над этим интервалом (т. е. при $x \in]a; b[$) выглядит как «непрерывная кривая» (интуитивно ясно, что это означает; строгий смысл как раз и дается приведенными определениями). Если функция f не является непрерывной в точке x_0, то говорят, что *разрывна* в точке x_0, а сама точка x_0 называется *точкой разрыва* для функции f. Будем считать, что если $x_0 \notin D(f)$, то x_0 является точкой разрыва.

1. Укажите по графикам, изображенным на рисунке 15, точки разрыва соответствующих функций (принадлежащие интервалу $]a; b[$).

2. Укажите точки разрыва функций (доказательство приводить не надо):

---

[1] См.: А-9, п. 38.

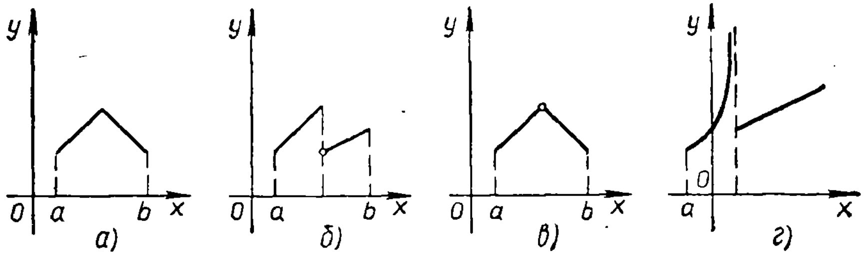


Рис. 15

а) $\frac{1}{x}$; б) $\operatorname{tg} x$; в) $\frac{1}{x^2-1}$; г) $\frac{x-1}{x^2-1}$; д) $[x]$; е) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$; ж) $\{x\}$; з) $\operatorname{tg} 2x$; и) $\{1-2x\}$.

3. Достройте графики функций, изображенные на рисунке 16, до графиков функций, непрерывных на интервале $]a; b[$. В каких случаях это невозможно? В каких случаях это можно сделать многими способами?

4. Приведите пример определенной на всей числовой прямой функции, которая была бы непрерывна всюду, за исключением точек:

а) 0; 1 и 2; б) $x=\frac{n}{3}$; $n \in \boldsymbol{Z}$; в) $x=3n+1$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

(Начертите график или задайте нужную функцию формулой.)

Напоминание. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0, то и функции $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $cf(x)$ ($c \in \boldsymbol{R}$ — постоянная), $f(x)\,g(x)$ будут непрерывными в точке x_0. То же верно и для функции $\frac{f(x)}{g(x)}$, если только она определена в точке x_0, т. е. если $g(x_0) \neq 0$.

5. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $g(x)$ определена в точке x_0 и в некоторой ее окрестности, но разрывна в этой точке. Может ли (и в каком случае) оказаться, что:

а) функция $f(x)+g(x)$ непрерывна в точке x_0;

б) функция $f(x) \cdot g(x)$ непрерывна в точке x_0? ↓

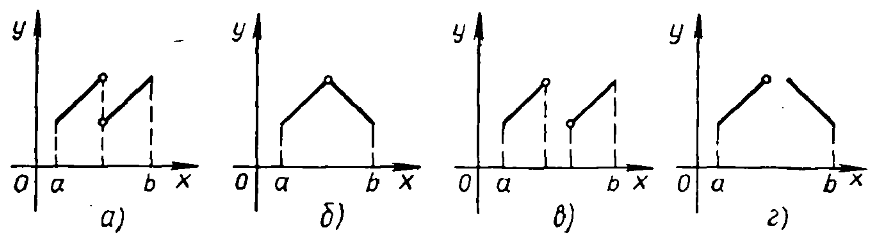


Рис. 16

6. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в точке x_0 и в некоторой ее окрестности, но обе разрывны в точке x_0. Может ли оказаться непрерывной в точке x_0 функция:

а) $f(x) + g(x)$; б) $f(x) \cdot g(x)$? ↓

7. Приведите пример функции $f(x)$, имеющей точки разрыва, и такой, чтобы функция $f^2(x)$ была непрерывна на всей числовой прямой. ↓

8*. Приведите пример определенной на всей числовой прямой функции, которая:

а) была бы разрывной во всех точках;

б) была бы непрерывной в точке $x_0 = 0$ и разрывной во всех остальных точках. ↓

9*. Приведите пример определенной и непрерывной на R функции, которая на отрезке $[0; 1]$ имела бы бесконечно много промежутков монотонности (ср. с задачей 13 § 4 — там непрерывности не требовалось).

10*. Выясните, в каких точках непрерывны, а в каких разрывны следующие функции:

а) $y = [\sin x]$; б) $y = \sin[x]$; в) $y = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0; \end{cases}$

г) $y = \begin{cases} x \sin\dfrac{1}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0; \end{cases}$ д) $y = \sin x \,\operatorname{sin} x$, где
$$\operatorname{sin} x = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x = 0, \\ -1 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Указание. В этой задаче можно пользоваться следующим фактом: если функция $F(y)$ непрерывна в точке y_0, функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, причем $f(x_0) = y_0$, то функция $h(x) = F(f(x))$ непрерывна в точке x_0.

Замечание. К непрерывным функциям мы еще вернемся в § 9.

§ 6. Экстремумы функций

Напоминание[1]. Точка $x_0 \in D(f)$ называется *точкой максимума функции* f, если существует окрестность $]x_0 - \delta; x_0 + \delta[$ точки x_0, такая, что для любой точки $x \neq x_0$ из этой окрестности $f(x) < f(x_0)$. Точка $x_0 \in D(f)$ называется *точкой минимума функции* f, если существует окрестность $]x_0 - \delta; x_0 + \delta[$ точки x_0, такая, что для любой точки $x \neq x_0$ из этой окрестности $f(x) > f(x_0)$. Точки максимума и минимума называются *точками экстремума* функции f; значение f в точке экстремума x_0 называется экстремальным (максимальным или минимальным) значением функции f.

1. Укажите точки экстремума функций (если такие точки есть), графики которых изображены на рисунке 17. Покажите на оси Oy

[1] См.: А-9, п. 36, п. 55.

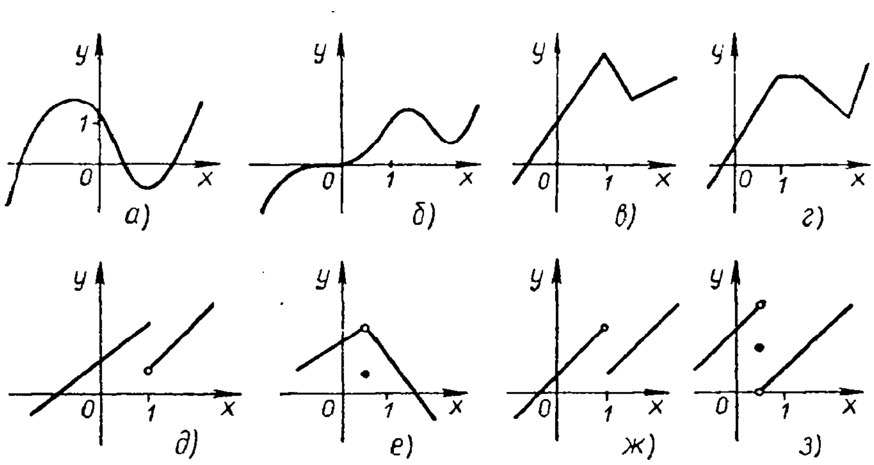


Рис. 17

экстремальные значения соответствующих функций (считая, что они определены на всей числовой прямой и при больших по абсолютной величине значениях x ведут себя, «как показано на рисунке»).

2. Укажите все точки экстремума (минимума, максимума) следующих функций:

а) $y = \sin x$; б) $y = \{x\}$; в) $y = x^2 + 2x$;

г) $y = \sin(3x-1)$; д) $y = \sin \frac{1}{x}$; е) $y = |\sin x|$.

3. Нарисуйте графики функций, определенных на всей числовой прямой и имеющих:

а) пять точек экстремума;

б) бесконечное число точек экстремума;

в) бесконечное число точек экстремума, принадлежащих отрезку $[0; 1]$.

Решите задачу в двух вариантах: 1) искомая функций может быть разрывной; 2) искомая функция всюду непрерывна.

4. Объясните, почему перечисленные ниже функции не имеют точек экстремума:

а) $[x]$; б) $\frac{1}{x}$; в) $\operatorname{tg} x$; г) $x^3 + x$; д) 10^x; е) $-\frac{1}{x^2}$.

5. Пусть функция $f(x)$ имеет экстремум в точках $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$. В каких точках имеют экстремум функции:

а) $f(2x)$; б) $f(-x)$; в) $f(|x|)$;

г) $f(x^2)$; д) $f(3-2x)$; е) $f(2^x)$?

6. Пусть функция $f(x)$ имеет экстремум в точке x_0. Какие из перечисленных функций также имеют экстремум в точке x_0:

а) $-2f(x)$; б) $f^2(x)$; в) $f^3(x)$; г) $2^{-f(x)}$?

Какого вида (максимум или минимум) может быть этот экстремум, если исходный экстремум: а) максимум; б) минимум?

7. Начертите графики следующих функций, найдите множества их значений; укажите все точки экстремума и экстремальные значения этих функций:

а) $y = \frac{1}{x^2+1}$; б) $y = \frac{2x}{x^2+1}$;

в) $y = x + \frac{1}{x}$; г) $y = 2^x + 2^{-x}$.

8. Нарисуйте график всюду определенной: а) разрывной; б) всюду непрерывной функции, у которой было бы в точности две точки экстремума, причем обе — максимума.

Замечание. Функция из п. б) задачи 8 существует, хотя это и кажется на первый взгляд неправдоподобным; если f непрерывна, то между точками максимума у нее вроде бы обязательно должна быть точка минимума. Так оно в действительности и есть, только этот минимум нестрогий — для x из некоторой окрестности соответствующей точки выполняется нестрогое неравенство $f(x) \geqslant f(x_0)$. Понятие нестрогого экстремума (точка нестрогого максимума определяется аналогичным образом) довольно часто употребляется в анализе, хотя и не входит в школьный курс.

9. а) Докажите, что если функция $f(x)$ возрастает в некотором промежутке $]x_0 - \alpha; x_0]$ — слева от точки x_0 и убывает в некотором промежутке $[x_0; x_0 + \beta[$ — справа от точки x_0, то x_0 есть точка максимума функции f;

б) Верно ли это утверждение, если рассмотреть открытые промежутки $]x_0 - \alpha; x_0[$ и $]x_0; x_0+\beta[$? (Или $]x_0 - \alpha; x_0]$ и $]x_0; x_0 + \beta[$?)

10. а) Приведите пример разрывной функции, которая в точке x_0 имела бы максимум, но тем не менее такой, что она не возрастает ни в каком промежутке вида $]x_0 - \alpha; x_0]$;

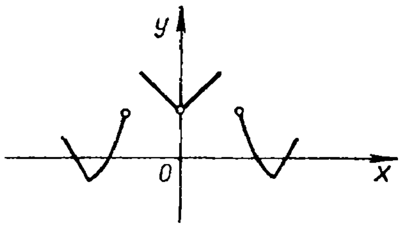


Рис. 18

б) Приведите пример всюду непрерывной функции с теми же свойствами;

в) Приведите пример разрывной функции, которая в точке x_0 имела бы максимум, причем убывала бы в некотором промежутке вида $]x_0 - \alpha; x_0[$ и возрастала бы в некотором промежутке вида $]x_0; x_0 + \beta[$. Можно ли привести пример непрерывной всюду функции, обладающей теми же свойствами? ↓

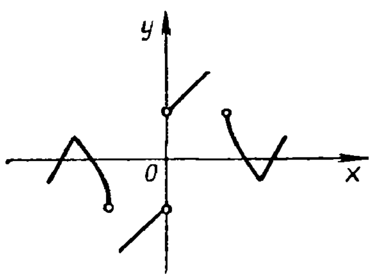


Рис. 19

11*. Функция $f(x)$ не имеет точек экстремума. Может ли функция $f^2(x)$ иметь n точек экстремума? Рассмотрите значения $n = 0$; 1; 2; 3; произвольному натуральному числу. ↓

12*. Функция, определенная на всей числовой прямой, имеет две точки экстремума, одна из которых — максимум, а другая — минимум. Могут ли быть равными значения функции в этих точках?

13*. Приведите пример обратимой функции, определенной на отрезке $[0; 1]$ и имеющей две точки экстремума.

§ 7. Частные типы функций
(Четные, нечетные, периодические функции)

Напоминание[1]. Функция f называется *четной*, если выполнены условия:

(с) если $x \in D(f)$, то и $-x \in D(f)$;

(ч) для любого $x \in D(f)$ верно равенство $f(-x) = f(x)$.

Функция f называется *нечетной*, если выполнены условие (с) и условие (н):

для любого $x \in D(f)$ верно равенство $f(-x) = -f(x)$.

Легко видеть, что необходимым и достаточным условием четности функции f является симметричность (осевая симметрия) графика $y = f(x)$ относительно оси Oy (рис. 18), а необходимым и достаточным условием нечетности — симметричность (центральная симметрия) графика относительно начала координат (рис. 19).

(1—2). Среди перечисленных функций указать все четные и нечетные.

1. а) x^2; б) x^3; в) $\frac{1}{x}$; г) $|x|$; д) $x|x|$.

2. а) $\cos x$; б) $\operatorname{tg} x$; в) $\sin x$; г) $\sin x \cos x$; д) $|\sin x|$.

3. Объясните, почему указанные ниже функции не будут ни четными, ни нечетными:

а) $\sqrt{x}$; б) $\frac{1}{x-1}$; в) $x+1$;

г) $x^2 + x + 1$; д) $\sin x + \cos x$. ↓

Замечание. Недостаточно сказать, что «раз выражения для $f(x)$, $f(-x)$ и $-f(x)$ разные, то функция $f(x)$ не будет ни четной, ни нечетной» (см. задачу 4); необходимо указать такое $x_0 \in D(f)$, чтобы $f(-x_0) \neq \pm f(x_0)$. Для начала, конечно, нужно посмотреть, удовлетворяет ли область определения $D(f)$ условию (с).

4. Докажите нечетность следующих функций:

а) $y = \log_a(x + \sqrt{x^2+1})$; б) $y = \log_a \frac{x+1}{x-1}$. ↓

5. Представьте данные функции в виде суммы четной и нечетной функций:

а) $y = 2x^3 + x^2 - x + 3$; б) $y = x(x^2 + x + 1)$;

в) $y = x(\sin x + \cos x)$. ↓

---

[1] См.: А-9, п. 68.

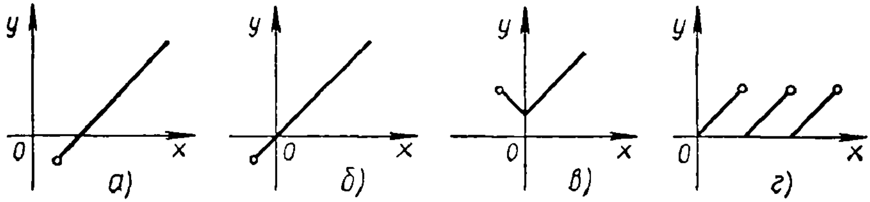


Рис. 20

6. а) Докажите, что для любой функции $f(x)$ с симметричной осью определения относительно точки 0 функция $\frac{f(x)+f(-x)}{2}$ четная, а функция $\frac{f(x)-f(-x)}{2}$ нечетная.

Замечание. Из этой задачи следует, что всякая функция с симметричной относительно точки 0 областью определения может быть представлена в виде суммы четной функции $\frac{f(x)+f(-x)}{2}$ и нечетной функции $\frac{f(x)-f(-x)}{2}$.

б) Пусть функция $f(x)$, область определения которой удовлетворяет условию (с), представлена в виде суммы четной и нечетной функций: $f(x) = f_ч(x) + f_н(x)$. Выразите $f_ч(x)$ и $f_н(x)$ через значения $f(x)$ и $f(-x)$. ↓

Замечание. Из результата задачи 6 б) следует, что представление функции с симметричной областью определения в виде суммы четной и нечетной единственно.

7. Представьте в виде суммы четной и нечетной функций следующие функции:

а) $y = 2^x$; б) $y = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$; в) $y = \frac{1}{x^2+x+1}$.

8. Какими функциями (четными; нечетными; ни четными; ни нечетными) будут:

а) сумма, разность, произведение двух четных функций;

б) сумма, разность, произведение двух нечетных функций;

в) сумма, разность, произведение четной и нечетной функций?

9. Укажите все функции, являющиеся одновременно четными и нечетными. ↓

10. Дополните, если можно, графики, изображенные на рисунке 20, до графиков всюду определенных: 1) четных функций; 2) нечетных функций.

11. Пусть $f(x)$ — произвольная функция. Верно ли, что функции: а) $f(|x|)$; б) $|f(x)|$; в) $f^2(x)$; г) $f(x) + f(-x)$ — всегда будут четными?

Напоминание[1]. Функция f называется *периодической*, если существует такое число $T \neq 0$ (период), что выполнены следующие два условия:

[1] См.: А-9, п. 69.

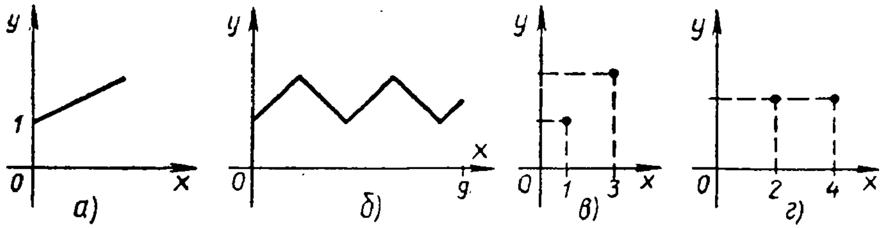


Рис. 21

а) если $x \in D(f)$, то $x + T \in D(f)$ и $x - T \in D(f)$;

б) для любого $x \in D(f)$ верно неравенство $f(x + T) = f(x)$.

Заметим, что в силу (а) если $x \in D(f)$, то и $x - T \in D(f)$, а поэтому из (б) для $x - T$ (вместо x) вытекает, что $f(x) = f(x - T)$. Таким образом, если T — период функции f, то

$$f(x) = f(x + T) = f(x - T).$$

Легко видеть, что, для того чтобы функция f была периодична с периодом T, необходимо и достаточно, чтобы ее график отображался на себя при параллельном переносе с координатами $(T; 0)$.

12. а) Может ли периодическая функция иметь только один период?

б) Докажите, что если T_1 и T_2 — периоды функции f, то и числа $T_1 + T_2$ и $T_1 - T_2$ (разность при $T_1 \neq T_2$) будут периодами f;

в) Докажите методом математической индукции, что если T_0 — период функции f, то при любом целом $n \neq 0$ число $T = nT_0$ также будет периодом этой функции.

13. Укажите все периоды следующих периодических функций (доказательство проводить не надо):

а) $y = \sin 2x$; б) $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$; в) $y = \{x\}$; г) $y = 1$ (при всех $x \in R$).

д) $D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ рационально,} \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально.} \end{cases}$

14. Дополните графики, изображенные на рисунке 21, до графиков всюду определенных периодических функций. Какой может быть наименьший положительный период у получившихся функций?

15. Дополните графики, изображенные на рисунке 22, до

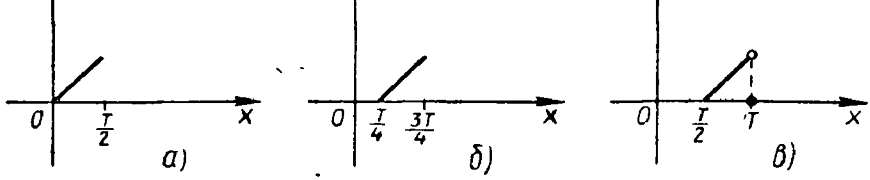


Рис. 22

графиков периодических функций с наименьшим положительным периодом T, являющихся при этом: 1) четными; 2) нечетными.

16. Найдите все периоды следующих функций:

а) $\cos^2 x$; б) $\cos^3 x$; в) $\sin(3x+1)$; г) $\sqrt{|\sin 2x|}$.

(17—19). Докажите, что следующие функции не являются периодическими.

17. а) $y = \frac{1}{x}$; б) $y = \sqrt{x}$; в) $y = \sin\sqrt{x}$. ↓

18. а) $y = x^2$; б) $y = x^2 + x + 1$; в) $y = \frac{1}{x^2+1}$. ↓

19. а) $y = \sin|x|$; б) $y = \sin\sqrt{|x|}$; в) $y = \sin(x^2)$. ↓

20*. Докажите, что если у периодической функции существует наименьший положительный период T_0, то любой другой ее период имеет вид $T = nT_0$, где $n \in \mathbf{Z}$ $(n \neq 0)$. ↓

21*. а) Докажите, что если функция $f(x)$ периодична, то для любой функции $F(x)$ композиция $(F \circ f)(x) = F(f(x))$ будет периодической функцией;

б) докажите, что если функция $f(x)$ периодична с периодом T, то композиция $g(x) = f(Ax + B)$, где $A \neq 0$, периодична (с каким периодом?). ↓

22. Постройте графики функций:

а) $\arcsin \sin x$; б) $\arccos \cos x$; в) $\arcsin \cos x$; г) $\operatorname{arctg} \operatorname{tg} x$. (Воспользуйтесь периодичностью и свойствами четности этих функций.)

Замечание. Очевидно, что если две периодические функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют хотя бы один общий период T, то их сумма $f(x) + g(x)$, разность $f(x) - g(x)$, произведение $f(x) \cdot g(x)$ будут периодическими с периодом T (проверьте!).

23. а) Верно ли, что если функции $f(x)$ и $g(x)$ периодические с общим периодом T, то и функция $\frac{f(x)}{g(x)}$ периодическая?

б) Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ периодические с одинаковым наименьшим положительным периодом T_0. Может ли у суммы этих функций:

1) не существовать наименьшего положительного периода?

2) существовать наименьший положительный период, меньший T_0? ↓

24. Докажите, что следующие указанные функции периодические, и найдите их наименьший положительный период:

а) $y = \cos x + \cos 2x$; б) $y = \cos\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{3}$;

в) $y = \cos x\sqrt{2} + \cos\frac{x}{\sqrt{2}}$.

Оказывается, что если у двух периодических функций нет общих периодов, то их сумма, разность, произведение могут быть непериодическими.

25*. Докажите, что указанные функции не являются периодическими:

а) $\cos x \cos \sqrt{2}\,x$; б) $\sin x \sin \sqrt{2}\,x$;

в) $\cos x\sqrt{2} + \cos x$; г) $\sin x + \sin \sqrt{2}\,x$. ↓

26*. Может ли быть периодической сумма всюду определенных:

а) периодической и непериодической функций;

б) двух непериодических функций? ↓

27. Существуют ли периодические функции, у которых:

а) все иррациональные числа являются периодами, а все рациональные — нет;

б) все рациональные числа являются периодами, а все иррациональные — нет? ↓

28*. Может ли а) четная; б) нечетная; в) периодическая функция иметь в точности n точек экстремума? Рассмотрите случаи $n = 0;\ 1;\ 2;\ 3$.

29*. Может ли убывающая на всей числовой прямой функция быть а) четной; б) нечетной; в) периодической; г) всюду положительной (т. е. такой, что при всей $x \in \boldsymbol{R}$ значение $f(x) > 0$); д) всюду отрицательной?

30*. Придумайте две всюду определенные периодические функции $f(x)$ и $g(x)$, не имеющие общих периодов, и такие, что их сумма периодична. ↓

§ 8. Вычисление пределов функций

Напоминание[1]. При вычислении пределов используются теоремы о пределах: если существуют пределы $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ и $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = b$, то существуют и равны правым частям соответствующих формул следующие пределы:

а) $\lim\limits_{x \to x_0} (kf(x)) = ka$; б) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = a + b$;

в) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = ab$; г) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a}{b}$, если $b \neq 0$.

Часто помогает формула д) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, если функция f непрерывна в точке x_0. Если этой формулой нельзя воспользоваться непосредственно, то сначала выражение для $f(x)$ можно попытаться преобразовать так, чтобы $f(x) = F(x)$ при $x \neq x_0$, где функция $F(x)$ непрерывна в точке x_0. Вместо теорем а) — г) можно пользоваться формулой д) и вытекающими из а) — г) теоремами о непрерывности функций kf, $f + g$, fg, $\dfrac{f}{g}$.

(1—7). Вычислите пределы функций.

---

[1] См.: А-9, п. 40.

1. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+4}{x+2}$. 2. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2}$. 3. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x+1}{x^3+1}$.

4. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+3x+2}{x^2+5x+4}$. 5. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4-1}{x^3-1}$.

При вычислении пределов бывает удобно произвести замену переменной, при этом используется следующая теорема:

е) если существует предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$ и существует предел $\lim\limits_{y\to y_0} F(y) = F(y_0)$, то существует предел

$$\lim_{x\to x_0} F(f(x)) = \lim_{y\to y_0} F(y_0), \text{ где } y = f(x),\ y_0 = \lim_{x\to x_0} f(x).$$

6. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}$ (указание: сделайте замену $\sqrt{x+1} = y$).

7. $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{\sqrt{2x+10}-2}{x+3}$.

(8—25)*. Вычислите пределы функций, используя (при необходимости) известные пределы: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x-1}{x} = \ln a$.

8. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{\sin(3-x)}$. 9. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(5x)}{3x}$. 10. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x + \sin x}{2x}$.

11. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sin(x+1)}{x^2+2x+3}$. 12. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-x-6}{\operatorname{tg} x}$. 13. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(3x)}{\operatorname{ctg}(2x)}$.

14. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(3x)}{\operatorname{tg}(2x)}$. 15. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$. 16. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}\right)$.

17. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log_a(1+x)}{x}$ (указание: сделайте замену $\log_a(1+x) = y$).

18. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+ax)}{x}$. 19. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x-b^x}{x}$. $\downarrow$

20. $\lim\limits_{x\to 0} (1+ax)^{\frac{1}{x}}$ $\left(\text{указание: } (1+ax)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln(1+ax)}{x}}\right)$.

21. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x-1}{\sin(bx)}$. 22. $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{ctg} x \cdot \ln(1+x)$. 23. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{a^x-a^2}{x^2-3x+2}$.

24. $\lim\limits_{x\to 0} (1+\sin x)^{\operatorname{ctg} x}$ $\downarrow$. 25. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+\operatorname{tg} x)}{\sin x}$.

Определение 1. $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = \infty$, если при значениях x, достаточно близких к x_0, значение $|f(x)|$ становится больше любого наперед заданного положительного числа M.

Для любого $M > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого $x \neq x_0$ из неравенства $|x - x_0| < \delta$ следует неравенство $|f(x)| > M$.

26. а) Покажите, что если $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = \infty$, то функция f разрывна в точке x_0;

б) приведите пример, показывающий, что обратное неверно: функция f разрывна в точке x_0, а $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| \neq \infty$.

(27—29). Укажите точки x_0, для которых $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = \infty$.

27. а) $\frac{1}{x+1}$; б) $\frac{x}{x+1}$; в) $\frac{x^2}{x+1}$; г) $\frac{1}{x^2-1}$;

д) $\frac{x}{x^2-1}$; е) $\frac{x+1}{x^2-1}$.

28. а) $\frac{x^2-1}{x^2+2x}$; б) $\frac{2^x}{x^3+2x}$; в) $\frac{\sin x}{x^2-1}$; г) $\frac{\sin x}{x^2-x}$;

29. а) $\frac{1}{\cos x}$; б) $\frac{1}{\sin x}$; в) $\operatorname{tg} x$; г) $\frac{x}{\sin x}$.

30. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)| = \infty$; $\lim\limits_{x\to x_0}|g(x)| = \infty$. Можно ли утверждать, что:

а) $\lim\limits_{x\to x_0}|(f(x)+g(x))| = \infty$; б) $\lim\limits_{x\to x_0}|(f(x)\cdot g(x))| = \infty$; в) $\lim\limits_{x\to x_0}|(kf(x))| = \infty$ $(k \neq 0)$?

Определение 2. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a$, если при достаточно больших значениях x значения $f(x)$ становятся сколь угодно близкими к числу a.

Для любого $\varepsilon > 0$ существует $B > 0$ такое, что при любом x из неравенства $x > B$ следует неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$.

Определение 3. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = a$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $B > 0$ такое, что при любом x из неравенства $x < -B$ следует неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$.

При отыскании пределов функций при $x \to \infty$ или $-\infty$ используются те же приемы, что и при отыскании пределов последовательностей. Для пределов при $x \to \infty$ или $-\infty$ справедливы все теоремы, верные для пределов функций при $x \to x_0$.

(31—34). Найдите следующие пределы.

31. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{x^2+x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1-x^3}{3x^3}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3-1}{x^4-1}$.

32. а) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+1} - x)$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+x} - x)$; г) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x})$.

33. а) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sin x}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to-\infty} x\sin\frac{1}{x}$; в) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\cos x}{x^2-1}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty} \cos\left(\frac{1}{2^x}\right)$.

34. а) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2^x}{2^x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2^x}{2^x+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3^x+1}{2^x+1}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2^x-1}{3^x-1}$.

35*. Пусть $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, f — всюду дифференцируемая функция. Можно ли утверждать, что и $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 0$?

36*. Пусть $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 0$. Можно ли утверждать, что тогда существует $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = C$?

§ 9. Теоремы о непрерывных функциях. Метод интервалов

1. а) Докажите, что если функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = x_0$ и $f(x_0) > 0$, то существует такая окрестность $]x_0 - \delta; x_0 + \delta[$ точки x_0, что при всех $x \in]x_0 - \delta; x_0 + \delta[$ (т. е. при $|x - x_0| < \delta$) $f(x) > 0$;

б) сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для случая $f(x_0) < 0$;

в) пусть $f(x) > 0$ при всех $x \neq x_0$ и существует предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$. Можно ли утверждать, что $a > 0$?

Большое значение в анализе имеет так называемая *теорема о промежуточных значениях функции*, непрерывной на отрезке (т. е. во всех точках отрезка).

Теорема. Если функция f непрерывна во всех точках отрезка $[a; b]$ и число c заключено между значениями $f(a)$ и $f(b)$ функции в концах отрезка, то существует точка $x_0 \in [a; b]$ такая, что $f(x_0) = c$.

Интуитивно это утверждение очевидно (рис. 23).

2. Справедлива ли теорема о промежуточных значениях в том случае, когда f может быть разрывной в точках отрезка $[a; b]$? (в точках интервала $]a; b[$? в концах отрезка $[a; b]$?)

3*. Пусть функция f непрерывна во всех точках отрезка $[a; b]$, причем для $x \in [a; b]$ значение $f(x)$ также принадлежит отрезку $[a; b]$ (иными словами, f отображает отрезок $[a; b]$ в себя). Докажите, что существует точка $x_0 \in [a; b]$ такая, что $f(x_0) = x_0$ (т. е. переходящая в себя при отображении f). ↓

Утверждение задачи 3 называется *теоремой о неподвижной точке*.

4*. Пусть функция f всюду определена, непрерывна во всех точках и периодична с периодом T. Докажите, что существует $x_0 \in \boldsymbol{R}$ такое, что $f\left(x_0 + \frac{T}{2}\right) = f(x_0)$. Следует ли отсюда, что функция будет периодичной с периодом $\frac{T}{2}$?

На теореме о промежуточном значении основан так называемый *метод интервалов* отыскания промежутков знакопостоянства данной функции f (таких промежутков, во всех точках которых функция принимает значения одного знака).

Метод интервалов основан на том свойстве, что функция может менять знак толь-

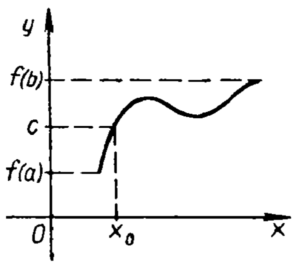


Рис. 23

ко в точках разрыва и в тех точках, в которых $f(x) = 0$. Изложим его на примере дробно-рациональных функций $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, где $p(x)$ и $q(x)$ — многочлены от переменной x.

1-й шаг метода интервалов состоит в том, что мы отмечаем на числовой оси все точки x, в которых функция $f(x)$ обращается в 0 или не определена (в данном случае такие x, при которых $p(x) = 0$ или $q(x) = 0$; для этого необходимо решить указанные уравнения). Отмеченные точки разбивают числовую ось на некоторое число интервалов (два из них будут бесконечными).

5*. Докажите, что на каждом из этих интервалов функция $f(x)$ принимает значение одного знака (знакопостоянна).

Указание. Предположив противное, воспользуйтесь утверждением теоремы о промежуточном значении.

2-й шаг метода интервалов состоит в том, чтобы проверить, какой знак принимает функция f на каждом из рассмотренных интервалов, например, вычислив конкретное значение $f(x_0)$ в соответствующих точках x_0. В действительности обычно достаточно узнать знак f на одном, скажем, самом левом (бесконечном) интервале, а затем, «идя вправо по оси», проследить за тем, как меняется знак f при переходе x через каждую из отмеченных точек.

6. Решите неравенства методом интервалов:

а) $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5) \geqslant 0$;

б) $(x^2-1)(x^3-1)(x^4-1) \geqslant 0$; в) $\dfrac{x^2-1}{x^2-5x+6} \geqslant 0$;

г) $\dfrac{x^4-1}{x^3-1} < 0$; д) $(x^2-1)\sin x \geqslant 0$; е) $\dfrac{\sin x}{\cos(x-1)} \geqslant 0$.

Прежде чем решать неравенства вида $F(x) \geqslant G(x)$ методом интервалов, следует перенести все его члены в одну часть, а затем привести их к общему знаменателю.

7. Решите методом интервалов неравенства:

а) $\dfrac{1}{x-1} \geqslant \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+1}$; б) $\dfrac{1}{x} \geqslant \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}$.

8*. Докажите, что любое кубическое уравнение $x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ имеет хотя бы один (действительный) корень.

Указание. Достаточно доказать, что при достаточно больших положительных C значение функции $f(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ в точке $x = C$ положительно, а в точке $x = -C$ отрицательно. Для этого полезно записать $f(x)$ при $x \neq 0$ в виде

$$f(x) = x^3\left(1 + \frac{a_2}{x} + \frac{a_1}{x^2} + \frac{a_0}{x^3}\right).$$

9*. Докажите, что функция $\exp_a x = a^x$ непрерывна на всей числовой оси. (Указание. Докажите сначала, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$ при любом $a > 0$, а затем воспользуйтесь этим фактом и монотонностью функции a^x.)

Глава IV ПРОИЗВОДНАЯ

§ 1. Первоначальные представления о производной (Скорость, главная часть приращения функций, касательная)

При исследовании функций важно выяснить, где они возрастают, где убывают, где имеют точки экстремума. Во многих случаях удобнее говорить не просто о возрастании или убывании функции, а даже о скорости этого возрастания или убывания в данной точке. Скорость изменения функции f в точке x_0 есть ни что иное, как производная

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x},$$

где $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Согласно своему определению, производная не может существовать в точках разрыва функции f; в частности, функция f должна быть определена в некоторой окрестности вида $]x_0 - \delta; x_0 + \delta[$ точки x_0. Кроме того, не существует производной и в точках «излома» функций — типа точки $x = 0$ для функции $f(x) = |x|$.

1. Постройте графики производных следующих функций:

а) $\{x\}$; б) $[x]$; в) $|1 - x|$; г) $x + |x|$; д) $||x - 1| - 1|$; е) $\{2x\}$. (Для решения этой задачи нужно знать, что производная линейной функции $y = kx + b$ равна k, т. е. $f'(x) = k$.)

Напоминание[1].

1) Если $f'(x) > 0$ на $]a; b[$, то f возрастает на $]a; b[$.

2) Если $f'(x) < 0$ на $]a; b[$, то f убывает на $]a; b[$.

3) Если $f(x)$ непрерывна в точке $c \in]a; b[$, а $f'(x)$ меняет знак в этой точке, т. е. $f'(x) < 0$ при $x \in]a; c[$, $f'(x) > 0$ при $x \in]c; b[$ или наоборот, то f имеет в точке c минимум или — соответственно — максимум. Если производная существует, то «почти» верны утверждения, обратные 1) и 2), — надо только заменить строгие неравенства на нестрогие. Кроме того, справедлива теорема Ферма: в точках экстремума $f'(x) = 0$.

2. По графикам функций $y = f(x)$, изображенным на рисунке 24, постройте эскизы графиков их производных $y = f'(x)$. (Чертежи для $y = f(x)$ и $y = f'(x)$ лучше всего расположить точно один под дру-

[1] См.: А-9, пп. 54, 55.

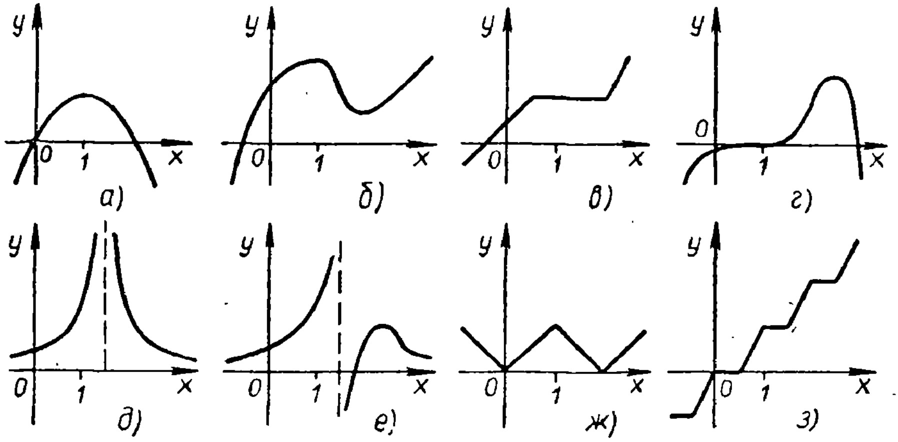


Рис. 24

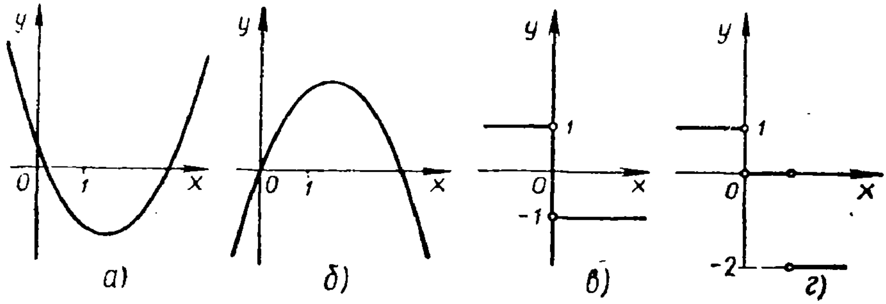


Рис. 25

гим.) Начинать следует с выяснения того, где $f'(x) > 0$, $f'(x) < 0$, $f'(x) = 0$, а затем примерно рисовать график $y = f'(x)$.

3. Постройте графики функций, производные которых имели бы графики, изображенные на рисунке 25.

4. На одном чертеже изобразите графики производных двух функций: $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ (рис. 26). (Обе функции возрастают, но сравните скорости их возрастания.)

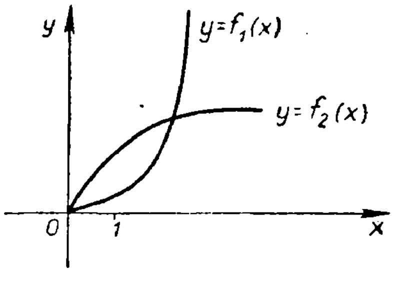


Рис. 26

5. Используя соответствующие преобразования графика $y = f(x)$, выразите через f' производные следующих функций:

а) $g(x) = f(x) - 1$;

б) $g(x) = f(x - 1)$;

в) $g(x) = -f(x)$;

г) $g(x) = -3f(x) + 2$;
д) $g(x) = f(2x)$;
е) $g(x) = f(ax+b)$.

6. Приведите пример всюду определенной функции, имеющей производную: а) всюду, кроме точек 0; 1; 2; б) только в точке 0 (в остальных точках производная не существует).

7. Приведите пример функции, у которой производная положительна в каждой точке интервала $]0; 1[$; отрицательна в каждой точке интервала $]1; 2[$, однако в точке $x = 1$ функция имеет минимум.

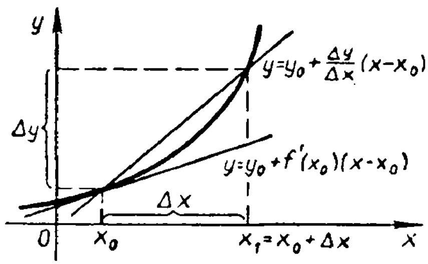


Рис. 27

8. Приведите пример функции, (строго) возрастающей на интервале $]-1; 1[$, дифференцируемой в каждой точке этого интервала и такой, чтобы производная этой функции хотя бы в одной точке интервала не была бы положительной.

Н а п о м и н а н и е[1]. Если функция f имеет производную $f'(x_0)$ в точке x_0, то касательной к графику этой функции в точке $(x_0; y_0) = (x_0; f(x_0))$ называется прямая, заданная уравнением

$$y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0).$$

Заметим, что эта прямая действительно проходит через точку $(x_0; y_0)$, а ее угловой коэффициент равен

$$k = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad \Delta y = f(x_0 + x) - f(x_0).$$

9. Напишите уравнение прямой, проходящей через две данные точки $(x_0; y_0)$ и $(x_1; y_1)$, где $x_0 \neq x_1$.

О т в е т. Угловой коэффициент прямой должен быть равен $k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$, поэтому искомое уравнение есть $y = y_0 + \frac{\Delta y}{\Delta x}(x - x_0)$.

Таким образом, уравнение касательной получается предельным переходом из уравнения секущей, проходящей через точки $(x_0; y_0)$ и $(x_0 + \Delta x; f(x_0 + \Delta x))$ графика $y = f(x)$, при Δx, стремящемся к нулю (рис. 27), — этим «оправдывается» определение касательной, данное выше. Говорят также, что «касательная к графику функции в точке M_0 графика есть предельное положение секущей, проходящей через точки M_0 и M графика, когда M стремится (находясь на графике) к M_0».

Для решения следующих задач понадобится формула дифференцирования $x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$ и тот факт, что угловой коэффициент $k =$

---
[1] См.: А-9, п. 52.

$= f'(x)$ касательной $y = kx + b$ равен $\operatorname{tg} \alpha$, где α — угол между этой прямой и осью Ox.

10. У параболы $y = \frac{4x - x^2}{4}$ проведены касательные в точках $(0; 0)$; $(2; 1)$; $(4; 0)$. Найдите их углы наклона к оси Ox.

11. Найдите угол наклона касательной к гиперболе $xy = a^2$ в точке $(a; a)$.

12. Под каким углом пересекаются с осью Oy кривые:

а) $y = \frac{1}{2}(x - 1)^2$; б) $y = \frac{1}{x-1}$?

13. При каком значении a кривая $y = \frac{ax - x^3}{4}$ пересекает ось Ox под углом 45° (хотя бы в одной из точек пересечения)?

14. Найдите точки пересечения касательной к графику $y = x^3$ в точке $(1; 1)$ с этим графиком.

15. а) Напишите уравнение касательной к параболе $y = ax^2$ в ее точке $(x_0; ax_0^2)$;

б) докажите, что существует в точности одна невертикальная прямая, проходящая через точку $(x_0; ax_0^2)$ параболы $y = ax^2$ и имеющая с параболой в точности одну общую точку. Проверьте, что это прямая — касательная к параболе;

в) для произвольной параболы $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ докажите, что касательная к ней в данной ее точке — это та из прямых, не параллельных оси Oy, которая имеет с параболой в точности одну общую точку. ↓

16. Найдите тангенс угла между касательными к графику $y = x^3 - x$ в точках с абсциссами $x_0 = -1$ и $x_1 = 1$.

17. Напишите уравнения касательных к параболе $y = x^2 - 4x + 1$, проходящих через точку:

а) $M(0; 0)$; б) $M(-1; -1)$. ↓

18. а) Найдите точки графика $y = x^3 - x$, касательная в которых к этому графику была бы параллельна прямой $y = x$;

б) найдите точку графика $y = x^2$ с абсциссой $x_0 \in]a; b[$, касательная в которой к этому графику была бы параллельна секущей, проходящей через точки $(a; a^2)$ и $(b; b^2)$. ↓

19*. Дайте геометрическую иллюстрацию к *теореме Лагранжа*: если $f(x)$ всюду дифференцируема, то ее приращение на любом отрезке $[a; b]$, т. е. $\Delta f = f(b) - f(a)$, может быть представлено в виде

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a), \qquad (*)$$

где c — некоторая точка интервала $]a; b[$.

Указание. Соотношение (*) можно переписать в виде

$$f'(c) = \frac{\Delta f}{\Delta x}, \quad \Delta x = b - a,$$

что эквивалентно равенству угловых коэффициентов касательной и секущей, — нарисуйте! ↓

20*. а) Используя то, что при симметрии относительно прямой $y = x$ график обратимой функции переходит в график обратной функции, найдите угловой коэффициент k_1 прямой, которая симметрична (относительно прямой $y = x$) прямой $y = kx + b$;

б) интуитивно ясно, что при симметрии относительно прямой $y = x$ касательная к графику обратимой функции f в точке $(x_0; y_0)$ переходит в касательную к графику обратной функции g в точке $(y_0; x_0)$ (здесь $y_0 = f(x_0)$, $x_0 = g(y_0)$). Исходя из этого предположения и из предыдущего пункта а), напишите формулу для производной обратной функции в точке y_0: $g'(y_0) = \ldots$.

21*. Для указанных ниже функций разбейте координатную плоскость на подмножества M_k по следующему признаку: из точки $(x; y) \in M_k$ к графику функции $y = f(x)$ можно провести ровно k касательных:

а) $f(x) = x^2$; б) $f(x) = x^3$. ↓

22*. а) Докажите, что касательная к гиперболе $xy = a^2$ образует с осями координат треугольник постоянной площади $2a^2$;

б) докажите,что точка касания — центр окружности, описанной около этого треугольника. ↓

Напоминание[1]. Из определения производной

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$$

при малых Δx выводится приближенная формула

$$f'(x_0) \approx \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}, \text{ или } \Delta f(x_0) \approx f'(x_0)\,\Delta x. \qquad (1)$$

Правая часть формулы (1) называется главной частью приращения функции f в точке x_0.

23*. Докажите, что эта формула дает «хорошую точность» в следующем смысле: если $h(x) = \Delta f(x_0) - f'(x_0)\Delta x$, то

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x)}{\Delta x} = 0.$$

Формулу (1) удобно использовать для приближенного вычисления значений $f(x)$ в точках $x = x_0 + \Delta x$, близких к x_0:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x. \qquad (2)$$

При этом значение функции $f(x)$ мы заменяем значением линейной функции $f(x_0) + f'(x_0)\Delta x = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, график которой есть касательная к графику $y = f(x)$ в точке $(x_0; y_0) = (x_0; f(x_0))$ (см. рис. 28).

24*. Докажите, что если $f(x_0 + \Delta x)$ представляется в виде $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + A\Delta x + h(x)$, где $\lim\limits_{\Delta x \to \infty} \frac{h(x)}{\Delta x} = 0$, то $f'(x_0) = A$.

---

[1] См: А-9, п. 51.

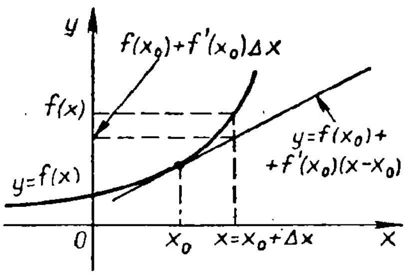


Рис. 28

Замечание. Таким образом, производная $f'(x_0)$ — это коэффициент A при Δx в приближенной формуле:

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+A\Delta x.$$

С помощью задачи 24 можно легко вывести все алгебраические свойства производной (правила дифференцирования). Например, для произведения двух функций $h(x)=f(x)\,g(x)$, перемножая левые и правые части равенств

$$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+f'(x_0)\Delta x+h_1(x),$$
$$g(x_0+\Delta x_0)=g(x_0)+g'(x_0)\Delta x+h_2(x)$$

и собирая коэффициенты при Δx, получим:

$$h(x_0+\Delta x)=f(x_0+\Delta x)\,g(x_0+\Delta x)=$$
$$=f(x_0)\,g(x_0)+(f'(x_0)\,g(x_0)+f(x_0)\,g'(x_0))\Delta x+h_3(x),$$

причем, как нетрудно проверить, для остатка $h_3(x)$ выполняется соотношение $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{h_3(x)}{\Delta x}=0$; согласно задаче 24 отсюда следует формула: $h'=(fg)'=f'g+fg'$.

25. Пусть $f'(x_0)=A$; $g'(x_0)=B$. Найдите коэффициент при Δx в главной части приращения функции $s(x)$ в точке x_0:

а) $s(x)=f(x)+g(x)$; б) $s(x)=f(x)-g(x)$; в) $s(x)=kf(x)$; г) $s(x)=f^2(x)$; д) $s(x)=f^3(x)$,

26. Напишите приближенные формулы вида (2) для следующих выражений (везде $h\approx 0$ или $\Delta x\approx 0$):

а) $(x_0+\Delta x)^3$; б) $(x_0+\Delta x)^n$; $(1+h)^n$; $(n\in N)$;

в) $\frac{1}{x_0+\Delta x}$; $\frac{1}{1+h}$; г) $\sqrt{x_0+\Delta x}$; $\sqrt{1+h}$; $\sqrt{a^2+h}$;

д) $\sqrt[3]{x_0+\Delta x}$; $\sqrt[3]{1+h}$; $\sqrt[3]{a^3+h}$; е) $\sqrt[n]{x_0+\Delta x}$; $\sqrt[n]{1+h}$; $\sqrt[n]{a^n+h}$ (в пп. г, д), е) считайте $x_0>0$).

(27—30). Вычислите приближенно и сравните полученные результаты с таблицами.

27. $\sqrt[3]{1{,}02}$. **28.** $\sqrt[3]{9}$. **29*.** $\sqrt[4]{80}$. **30*.** $\sqrt[7]{100}$.

31. Сторона квадрата равна $4\pm 0{,}1$ м. С какой (предельной) относительной погрешностью можно вычислить площадь этого квадрата?

32. С какой относительной погрешностью допустимо измерить радиус R шара, чтобы объем его можно было определить с точностью до 1%?

§ 2. Дифференцирование функций

Напоминание[1]. Формулы дифференцирования:

$(f+g)'=f'+g'$; $(fg)'=f'g+fg'$;

$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}$; $(f(g(x)))'=f'(g(x))\cdot g'(x)$.

(1—11). Найдите производную функции.

1. а) x^4-5x^3+7x-3; б) $\frac{1}{3}x^6-8\sqrt{x}+2$.

2. а) $3\sqrt[3]{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}$; б) $x^2\sqrt{x}$.

3. а) $(2x-1)^5+(1-x^2)^9$; б) $(x^2+x\sqrt[5]{x})^7$.

4. а) $\frac{x^2-3}{x+1}$; б) $\frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}+1$.

5. а) $\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{x^n}{n}$; б) $\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}$.

6. а) $\sin(3x+5)$; б) $\sin(3x^2+5)$.

7. а) $\operatorname{tg}x+\frac{1}{\cos x}-x$; б) $\frac{1}{1+\operatorname{tg}x}$.

8. а) $x\sin\ln x$; б) $\frac{\sin 3x}{\sqrt{x}}$.

9. а) $\sin^4 x+\cos^4 x$; б) $e^x\sin x+e^{-x}\cos x$.

10. а) $\ln(e^x+e^{-x})$; б) $\ln\frac{x-1}{x+1}$.

11. а) $\frac{\ln x}{e^x}$; б) $\ln\frac{\ln x}{e}\cdot\ln x$.

12*. а) $\arcsin(2x-1)+\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}$; б) $\arccos\frac{1}{x}$, $x>0$.

13*. а) $x\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$; б) $\operatorname{arctg}^2 x+\operatorname{arcctg}^2 x$.

14. Докажите, что $(|x|)'=\frac{|x|}{x}$ при $x\neq 0$.

15. Докажите, что функция f, дифференцируемая в точке x_0, непрерывна в точке x_0.

16*. Докажите, что если функция f дифференцируема на $\boldsymbol{R}$ и для любых двух значений x_1 и x_2 выполняется равенство

$$f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2),$$

то $f'(x)$ — постоянная.

17. Постройте эскиз графика функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[-1;\ 1]$, для которой $f(a)=f(b)$ и ни в какой точке интервала $]-1;\ 1[$ производная $f'(x)$ не обращается в нуль.

---

[1] См.: А-9, пп. 44, 45, 47, 50.

18. Количество теплоты Q, полученное телом при нагревании, зависит от температуры T согласно уравнению:

$$Q = T \ln T.$$

Найдите теплоемкость C тела при температуре T_1 как скорость изменения теплоты тела в момент достижения температуры T_1.

19. Какой функцией (четной, нечетной) будет производная:
а) четной функции; б) нечетной функции?

20. Будет ли периодической производная периодической функции?

Аналогично второй производной могут быть определены производные любого порядка:

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'.$$

21. Найдите $f^{(n)}(x)$ при всех $n \in N$, если:
а) $f(x) = x^m$; б) $f(x) = \sin 2x$; в) $f(x) = a^x$.

22. Напишите формулу для производных:
а) $(f \cdot g)''$; б) $(f \cdot g)'''$; в) $(f \cdot g)^{(4)}$.
Выпишите общую формулу для n-й производной произведения $(f \cdot g)^{(n)}$ и докажите эту формулу (методом математической индукции).

23*. Найдите $f^{(n)}(0)$ для функций:

а) $f(x) = x^2 e^{kx}$; б) $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ ↓

Постройте график функции из п. б).

24. Выведите формулу для
а) $\left(\frac{1}{x}\right)'$, используя, что $x \cdot \frac{1}{x} = 1$;
б) $\left(\frac{1}{f(x)}\right)'$, используя, что $f(x) \cdot \frac{1}{f(x)} = 1$
(и, конечно, формулу для производной произведения). ↓

25. Выведите формулу для:
а) $(\sqrt{x})'$, используя, что $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = x$;
б) $(\sqrt[n]{x})'$, используя, что $(\sqrt[n]{x})^n = x$;
в) $(\sqrt[n]{f(x)})'$, используя, что $(\sqrt[n]{f(x)})^n = f(x)$
(в пп. б) и в) нужно пользоваться формулой для $((h(x))^n)'$). ↓

26*. Выведите формулу

$$F'(x) = f'(g(x) \cdot g'(x)$$

для производной сложной функции (композиции) $F(x) = f(g(x))$, используя задачу 24 из § 1. ↓

27*. Выведите формулу для производной функции g, обратной к функции f, пользуясь формулой из предыдущей задачи и соотношением

$$f(g(x)) = x.$$

Получится ли та же самая формула, если исходить из соотношения

$$g(f(x)) = x?$$

(Рассмотрите, в частности, случай $g(x) = \sqrt[n]{x}$; $f(x) = x^n$.)

Замечание. Если в задаче 26 по существу доказывается существование производной композиции, то при выводе формулы из задачи 27 мы сразу исходим из предположения, что производная обратной функции существует, — это следует доказывать отдельно.

28*. Выведите формулу для производной произведения, исходя из формул для производной квадрата функции, суммы и разности функций и соотношения

$$(f + g)^2 - (f - g)^2 = 4fg. \downarrow$$

29*. Выразите через значение производной k-го порядка в точке О коэффициент при x^k у многочлена:

а) $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$; б) $(a + x)^n$, a — некоторое число. $\downarrow$

30*. Докажите формулу Ньютона, пользуясь результатом задачи 29.

§ 3. Исследование функций с применением производной

Напоминание[1]. Если функция f дифференцируема на интервале $]a; b[$, причем $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) в каждой точке этого интервала, то f возрастает (убывает) на интервале $]a; b[$. Если, кроме того, f непрерывна в каком-то из концов этого интервала, то этот конец включается в промежуток возрастания (убывания) функции f.

(1—18). Найдите промежутки монотонности следующих функций.

1. $x^3 - x^2 + x$. **2.** $x^5 - 5x^2 + 2$. **3.** $x^5 - 5x^4 + 4$.

4*. $3x^7 - 7x^3 + 21x - 21$. $\downarrow$ **5***. $(x^4 + x^2 + 1)(x - 1)$. $\downarrow$

6. $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$. $\downarrow$ **7***. $\frac{x}{x-a} - \frac{x-a}{x}$ $(a > 0)$. $\downarrow$ **8***. $\frac{x}{x-a} + \frac{x-a}{x}$ $(a>0)$.

9. $\sin x + \cos x$ в интервале $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$. **10***. $\sin^3 x + \cos^3 x$ в интервале $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$. $\downarrow$ **11***. $\sin x + \cos x - \sqrt{2}x$ в интервале $]0; 2\pi[$. $\downarrow$

12*. $\frac{\sin x}{x}$ в интервале: а) $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$; б) $\left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[$. $\downarrow$

13*. $\frac{\operatorname{tg} x}{x}$ в интервале $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$. $\downarrow$ **14***. $\cos x + \frac{x^2}{2}$ на промежутке $]0; \infty[$. $\downarrow$ **15***. $\sin x - x + \frac{x^3}{6}$ в интервале $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$. $\downarrow$

---

[1] См.: А-9, п. 54.

16*. $\operatorname{tg} x - x - \frac{x^3}{3}$ в интервале $\left]0;\ \frac{\pi}{2}\right[$. ↓ **17*.** $\frac{x}{m} - \ln x\ (m > 0)$. ↓

18*. $\sqrt[n]{x} - \ln x$. ↓

19*. Монотонна ли функция $x \cos x$ в интервале $\left]\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{2}\right[$? ↓

20. В квадратной пластине со стороной $9 + x$ $(0 \leqslant x \leqslant 9)$ сделан круглый вырез (вырезана четверть круга радиуса $2x$ с центром в вершине квадрата). Возрастает или убывает площадь пластины, когда x увеличивается от 0 до 2; от 5 до 6?

21. Многогранник («домик») составлен из двух прямых призм с квадратным и треугольным основаниями (рис. 29). Основанием «домика» служит боковая грань четырехугольной призмы. При каких значениях изменяющейся длины x стороны квадрата объем $V(x)$ многогранника является возрастающей функцией, при каких — убывающей, если периметр основания «домика» остается неизменным, равным 24?

22. Координаты $\left(\sqrt{\frac{t}{2}},\ \sin t\right)$ точки M на плоскости зависят от времени t. Найдите первые два интервала времени t, в каждом из которых расстояние $|OM|$ уменьшается с течением времени (O — начальное положение точки M при $t = 0$).

(23—26). Постройте в окрестности точки x_0 эскиз графика функции $f(x)$, если про функцию $f(x)$ известно следующее.

23. $f'(x) > 0$ слева от точки x_0; $f'(x) < 0$ справа от точки x_0 и $f'(x_0) = 0$.

24. $f'(x) > 0$ слева от точки x_0; $f'(x) < 0$ справа от точки x_0, $f(x_0) = a$; $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b < a$ и $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = 0$. Является ли x_0 точкой максимума или минимума?

25. $f'(x) < 0$ слева от точки x_0; $f'(x) > 0$ справа от точки x_0; $\lim\limits_{x \to x_0} |f'(x_0)| = \infty$, причем в точке x_0 функция $f(x)$ непрерывна.

26*. $f'(x) > 0$ слева от точки x_0; $f'(x) < 0$ справа от точки x_0; $f(x)$ непрерывна справа[1] в точке x_0, причем x_0 не является точкой максимума.

Напоминание[2]. Для нахождения экстремумов функции f находят ее критические точки (внутренние точки области определения, в которых производная равна 0 или не существует) и выбирают из них точки экстремума. Для того чтобы критическая точка x_0 была точкой максимума f, достаточно, чтобы в некотором интервале $]a;\ x_0[$ производная f' была положительна, в некотором интервале $]x_0;\ b[$ — отрицательна, а сама функция f — непрерывна в точке x_0.

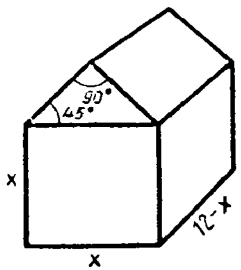


Рис. 29

[1] Функция непрерывна справа в точке x_0, если $f(x)$ стремится к $f(x_0)$ при $x > x_0$ и $x \to x_0$.

[2] См.: А-9, п. 55.

Для того чтобы критическая точка x_0 была точкой минимума f, достаточно, чтобы в некотором интервале $]a; x_0[$ производная f' была отрицательна, в некотором интервале $]x_0; b[$ — положительна, а сама функция f — непрерывна в точке x_0.

(27—30). Найдите точки и значения экстремумов функций.

27. а) $y = x^4 - 2x^2$; б) $y = x^3 - 3x^2 + 2$. ↓ **28*.** $y = \sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x-2}$; выпишите интервалы убывания. ↓ **29*.** $y = x \ln|x|$; выпишите интервалы убывания. ↓ **30*.** $y = \frac{e^x}{x^n}$ ($n \in N$); выпишите интервалы возрастания при четном n и интервалы убывания при нечетном n. ↓

31. Найдите производную и укажите точки экстремума функции:

а) $y = |x - 1|$; б) $y = |||x| - 1| - 1|$; в) $y = |x^2 - 1|$;

г) $y = x|x|$; д) $y = (x - 1)|x|$; е) $y = \{2x\}$.

(32—36). Найдите наименьшее значение функции.

32*. $x^4 - x^3 - x - 1$. ↓ **33*.** $x^8 - 4{,}8x^5$. **34*.** $\frac{x+1}{x} + \ln x$.

35*. $\frac{e^x}{x^e}$. **36*.** $x \ln^3 x$. ↓

(37—41). Найдите наибольшее значение функции.

37*. $x^2 + x^4 - x^6$. ↓ **38*.** $x^2e^{-x^2}$. **39*.** xe^{-x^2}. ↓

40*. $x \ln\frac{1}{x}$. **41*.** $\frac{\ln^2 x}{x}$.

42. Постройте график функции, дифференцируемой в интервале $]a; b[$, имеющей в интервале один минимум, два максимума и не имеющей наименьшего значения.

Напоминание[1]. Говорят, что функция f в точке $x_0 \in [a; b]$ принимает *наибольшее* (*наименьшее*) *значение* $y_0 = f(x_0)$ на отрезке $[a; b]$, если для всех $x \in [a; b]$ $f(x) \leqslant f(x_0)$ (соответственно $f(x) \geqslant f(x_0)$).

Из теорем о возрастании и убывании функции в точке следует, что если в точке $x_0 \in [a; b]$ существует производная $f'(x_0)$, причем $f'(x_0) \neq 0$, то значение $y_0 = f(x_0)$ не может быть наибольшим или наименьшим на отрезке $[a; b]$.

Таким образом, для отыскания наибольших и наименьших значений f на отрезке $[a; b]$ достаточно сравнить между собой значения f:

1) в концах отрезка $[a; b]$,

2) в критических точках $x_0 \in [a; b]$ (т. е. в таких точках x_0, в которых либо $f'(x_0)$ не существует, либо $f'(x_0) = 0$).

(43—47). Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ в указанном промежутке.

---
[1] См.: А-9, п. 59.

43. а) $f(x) = x^2 - 1$ на $[0; 3]$; б) $f(x) = x^3 - x$ на $[0; 3]$;

в) $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$ на $[0; 3]$.

44. $x^6 - x^4 - x^2$ на отрезке $[-2; \sqrt{2}]$.

45. $\sin x + 2\cos x$ на отрезке $\left[0; \frac{3\pi}{4}\right]$. ↓

46*. $\cos^2 x \sin x + \sin^2 x \cos x$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. ↓

47*. $\frac{\ln^2 x}{x}$ в промежутке $]2; e^2]$.

48*. Постройте графики функций:

а) $f(a) = \max\limits_{x \in \left\{\begin{smallmatrix}[a;\ 0] \text{ при } a<0, \\ [0;\ a] \text{ при } a>0,\end{smallmatrix}\right.} (x^3 - 3x)$; $\quad f(0) = 0$,

б) $f(a) = \min\limits_{x \in [a,\ a+1]} (x^3 - 3x)$. ↓

При решении уравнений и неравенств, доказательстве неравенств иногда полезно найти промежутки возрастания (убывания) функций, задаваемых выражениями, входящими в уравнение (неравенство).

(49—60). Решите неравенство.

49. $x^9 - x^5 + x > 1$.

50. $x^6 - 6x + 5 > 0$.

51. $x^4 - 5x < 6$.

52. $x^9 - x^5 + x < 13\sqrt{2}$.

53*. $\log_2 (x^9 - 2x^5 + 3x) \leqslant 1$. ↓

54*. $2e^{-1} < x(\ln^2 x + 1) < 2e$.

55*. $-e^{-1} \leqslant x \ln x \leqslant 0$.

56*. $-e \leqslant x \ln(-x) \leqslant e^{-1}$.

57*. $0 < x \ln |x| < e$. ↓

58*. $\sqrt{x} > \ln(x + 1)$.

59*. $e^x \geqslant x^2 + 1$.

60*. $e^{x-1} \geqslant x^{e-1}$. ↓

(61—70)*. Докажите неравенство.

61. $x^2 - x^3 < \frac{1}{6}$ на промежутке $\left]\frac{2}{3}; \infty\right[$. ↓

62. $\ln(1 + x) > \frac{x}{x+1}$ на промежутке $]0; \infty[$. ↓

63. $e^x > 1 + x$ при $x \neq 0$. ↓

64. $e^{-x} > 1 - x$ при $x \neq 0$.

65. $\ln(1 + x) < x$ на промежутке $]0; \infty[$.

66*. $(1 + x)^\alpha > 1 + \alpha x$ при $\alpha > 1$; $x > 0$. ↓

67*. $(1 + x)^\alpha < 1 + \alpha x$ при $0 < \alpha < 1$; $x > 0$. ↓

68*. $(1 + x)^\alpha > 1 + x^\alpha$ при $\alpha > 1$; $x > 0$. ↓

69*. $(1 + x)^\alpha < 1 + x^\alpha$ при $0 < \alpha < 1$; $x > 0$. ↓

70*. $\ln^3 x > x$ в интервале $]e^2; e^3[$. ↓

(71—73). Решите уравнения, сравнивая наибольшее и наименьшее значения левой и правой частей.

71*. $x^2 - x + 2 = 2\sqrt[4]{2x - 1}$. ↓

72. $2 - \cos x = \frac{1}{1 + x^2}$.

73. $2 + \sin x = \frac{1}{1 + x^2}$.

Задачи на максимум и минимум, как правило, сводятся к отысканию наибольших и наименьших значений функций на отрезках.

74. При каком значении x площадь $S(x)$ пластины задачи 20 будет наибольшей? Вычислите это наибольшее значение.

75. При каком значении длины x объем $V(x)$ «домика» задачи 21 будет наибольшим? Вычислите это наибольшее значение.

76. Зависимость стоимости R выпускаемой продукции от количества продукции P выражается формулой

$$R = aP + \frac{b}{c+P} + d,$$

где a, b, c, d — некоторые постоянные, $a > 0$, $b > 0$, $\sqrt{\frac{b}{a}} > c$, $c + P > 0$. При каком P стоимость R минимальна?

77. Проектируется оросительно-обводнительный канал с поперечным сечением в виде равнобедренной трапеции с определенной площадью и высотой. Каким должен быть острый угол трапеции, чтобы для облицовки боковых стенок и дна пошло наименьшее количество материала? (Дно — меньшее основание трапеции.) ↓

78*. Из круглого бревна диаметром D требуется изготовить брус с наибольшим по площади поперечным сечением в форме правильной прямоугольной крестовины. Укажите длину стороны внутреннего квадрата крестовины. ↓

79*. По мере наполнения стакана водой изменяется его устойчивость, которая тем больше, чем ниже центр масс стакана. Найдите уровень воды в наиболее устойчивом стакане, если стакан цилиндрический; масса пустого стакана (с невесомым дном) равна m_0; масса наполненного стакана равна m, а высота стакана равна h. Вычислите уровень при $m = 4\,m_0$.

80. а) Забором данной длины l требуется огородить наибольшую по площади прямоугольную площадку. Каковы должны быть размеры прямоугольника?

б) Решите ту же задачу, если площадка должна примыкать к реке, причем со стороны реки забор не устанавливается.

81. В каких пределах может меняться площадь прямоугольника, вписанного в треугольник с данным основанием a и высотой h? (Две вершины прямоугольника должны принадлежать основанию треугольника, две другие — его боковым сторонам.)

82. В конус высотой 1 с углом при вершине осевого сечения α вписываются всевозможные цилиндры (рис. 30). В каких пределах изменяются при этом:

а) площадь полной поверхности цилиндра;

б) площадь боковой поверхности цилиндра;

в) объем цилиндра? ↓

83. В шар радиуса 1 вписываются всевозможные конусы. В каких пределах при этом изменяется объем конуса?

84. Какие размеры имеет конус наименьше-

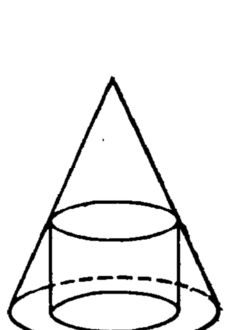


Рис. 30

го объема, описанный около шара радиуса 1?

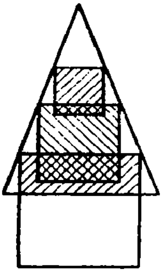


Рис. 31

85. Сумма длин всех ребер прямоугольного параллелепипеда с площадью основания S равна $4p$. При каких размерах этого параллелепипеда его объем будет наибольшим?

86. Какие размеры имеет прямоугольный параллелепипед наибольшего объема, вписанный в шар данного радиуса R?

87. К реке шириной a м под прямым углом построен канал шириной b м. Какой максимальной длины суда могут входить из реки в этот канал?

88. В равнобедренный треугольник с высотой $h = 1$ и основанием a «вписываются» всевозможные квадраты со сторонами, параллельными и перпендикулярными основанию, как показано на рисунке 31. Найдите наибольшую возможную площадь пересечения треугольника с этим квадратом.

89. Под каким углом к горизонту нужно выпустить (с данной скоростью v_0) снаряд, для того чтобы дальность его полета была наибольшей?

(90—95). Найдите кратчайшее расстояние от точки M до кривой $y = f(x)$.

90. $M(2;\ 2)$; $y = x - 1$. **91.** $M(2;\ 0)$; $y = \sqrt{x}$. ↓

92*. $M(3;\ 0)$; $y = 2\sqrt{\lg x}$. ↓ **94.** $M(10;\ 5)$; $y = x^2 + 3$.

93. $M(2;\ -2{,}5)$; $y = x^2 - 4x$. **95.** $M(98;\ 0)$; $y = x^3$.

(96—115). Исследуйте функцию при помощи производной и постройте ее график.

96. $5x^6 - 6x^5$. **97.** $\frac{x^5}{5} - 4x^2$. **98.** $\sqrt{x} - x$. **99.** $\sqrt{|x|} - x$.

100. $\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x-2}$. **101.** $\frac{x^2}{4} - \sqrt{x}$. **102.** $x\sqrt{x+1}$.

103. $x + \sqrt{|1-x|}$. **104.** $x + \sin x$. **105.** $|x| - \sin x$.

106. Постройте графики функций в случаях $a > 0$ и $a < 0$:

а) $y = x^3 + ax$; б) $y = x^3 + ax^2$; в) $y = x^4 + ax$;
г) $y = x^4 + ax^2$; д) $y = x^4 + ax^3$; е) $y = x + (1 + a)\sin x$.

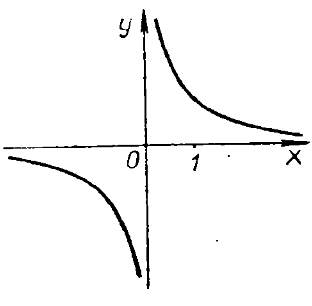


Рис. 32

При построении графиков и исследовании функций важно выяснить характер поведения функции в тех точках, где она разрывна или не определена, а также при больших по абсолютной величине значениях x, т. е., как говорят, при $x \to \infty$ или $x \to -\infty$. Скажем, для функции $f(x) = \frac{1}{x}$ точка $0 \notin D(f)$ и при $x \to 0$ значение $f(x)$ стремится к бесконечности, а при $x \to \pm\infty$ значение $f(x)$, напротив, стремится к нулю (рис. 32).

В соответствии с этим график $y = \frac{1}{x}$ имеет две асимптоты — прямые $x = 0$ и $y = 0$, к которым график неограниченно приближается.

Определение 1. Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = \infty$ (см. гл. III, § 8). В этом случае говорят, что функция $f(x)$ (или график $y = f(x)$) имеет *вертикальную асимптоту* $x = x_0$ (график f приближается к этой прямой при $x \to x_0$).

107*. а) Изобразите все возможные случаи приближения графика функции f к своей вертикальной асимптоте $x = x_0$ (на рисунке 32 изображен один случай: справа от $x = x_0$ $f(x) \to \infty$, а слева — к $-\infty$);

б) задайте формулами функции, графики которых выглядели бы так, как в п. а).

(108—110)*. Укажите все вертикальные асимптоты следующих функций; начертите графики этих функций вблизи асимптот и между ними.

108. а) $\frac{1}{x+1}$; б) $\frac{x}{x+1}$; в) $\frac{x^2}{x+1}$;

г) $\frac{1}{x^2-1}$; д) $\frac{x}{x^2-1}$; е) $\frac{x+1}{x^2-1}$.

109. а) $\frac{x^2-1}{x^2+2x}$; б) $\frac{2^x}{x^2+2x}$; в) $\frac{\sin x}{x^2-1}$; г) $\frac{\sin x}{x^2-x}$.

110. а) $\frac{1}{\cos x}$; б) $\frac{1}{\sin x}$; в) $\operatorname{tg} x$; г) $\frac{x}{\sin x}$.

(Сравните с задачами 27—29 из § 8 главы III.)

111*. Покажите, что если

$$f(x) = \frac{a(x)}{b(x)},$$

где $\lim\limits_{x \to x_0} a(x) = a_0 \neq 0$; $\lim\limits_{x \to x_0} b(x) = 0$, то $x = x_0$ — вертикальная асимптота функции f.

Замечание. В большинстве случаев для отыскания асимптот пользуются утверждением этой задачи, которое для непрерывных функций $a(x)$ и $b(x)$ означает, что если $a(x_0) \neq 0$, $b(x_0) = 0$, то функция $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$ имеет асимптоту $x = x_0$. Для правильного построения графика вблизи асимптот достаточно выяснить, каков знак функции слева и справа от асимптоты.

Определение 2. Пусть функция $f(x)$ имеет предел при $x \to \infty$ ($x \to -\infty$):

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = a \text{ (или } \lim_{x \to -\infty} f(x) = a).$$

В этом случае говорят, что функция f (или ее график $y = f(x)$) имеет *горизонтальную асимптоту* — прямую $y = a$, к которой приближается график при $x \to \infty$ ($x \to -\infty$).

112. Приведите пример функции, имеющей разные пределы при $x \to \infty$ и $x \to -\infty$ (можно сначала нарисовать график, а затем задать такую функцию формулой).

График может приближаться к своей горизонтальной асимптоте, скажем, при $x \to +\infty$ сверху $\left(\text{например, } f(x) = \frac{1}{x}\right)$, снизу $\left(f(x) = -\frac{1}{x^2}\right)$ или попеременно сверху и снизу $\left(\text{как график } y = \frac{1}{x}\sin x\right)$. Чтобы правильно нарисовать, как приближается график $y = f(x)$ к асимптоте $y = a$, достаточно выяснить, какой знак имеет разность $f(x) - a$.

(113—117)*. Постройте графики функций: найдите их вертикальные и горизонтальные асимптоты, исследуйте взаимное расположение графиков с асимптотами и изобразите ход графиков вблизи асимптот, а затем и во всей области определения.

113. а) $y = \frac{1}{x+1}$; б) $y = \frac{x}{x+1}$; в) $y = \frac{1-2x}{x+1}$.

114. а) $y = \frac{1}{x^2-4}$; б) $y = \frac{x}{x^2-4}$; в) $y = \frac{x^2}{x^2-4}$.

115. а) $y = \frac{x^2-x}{x^2-4}$; б) $y = \frac{x^2-3x}{x^2-4}$; в) $y = \frac{x^2+x-12}{x^2-4}$.

116. а) $y = \frac{1}{x^2+1}$; б) $y = \frac{x}{x^2+1}$; в) $y = \frac{x^2}{x^2+1}$.

117. а) $y = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$; б) $y = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$; в) $y = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2}$.

Легко видеть, что график функции $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x}$ при $x \to \infty$ стремится к прямой $y = x + 1$ в том смысле, что

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - (x+1)) = 0 \text{ (рис. 33).}$$

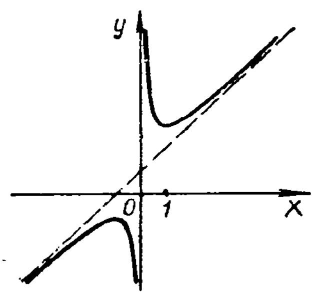


Рис. 33

Определение 3. Прямая $y = kx + l$, где $k \neq 0$, называется *наклонной асимптотой* функции f, если

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - (kx + l)) = 0.$$

Иногда для отыскания наклонных асимптот f проще всего представить выражение $f(x)$ в виде

$$f(x) = kx + l + r(x), \text{ где } \lim_{x\to\infty} r(x) = 0. \quad (*)$$

Чтобы выяснить, каково взаимное

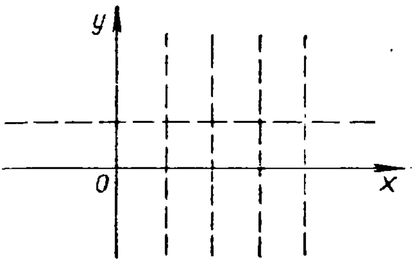


Рис. 34

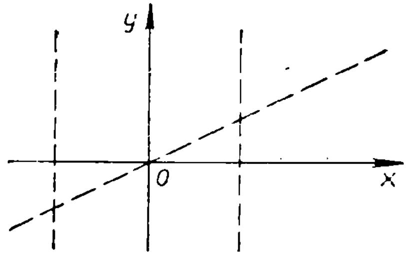


Рис. 35

расположение графика $y = f(x)$ и асимптоты $y = kx + l$, достаточно исследовать знак разности

$$f(x) - (kx + l) = r(x).$$

118*. Найдите асимптоты и постройте графики функций:

а) $y = \frac{x^2-1}{x}$; б) $y = \frac{x^2+1}{x+1}$; в) $y = \frac{x^2-1}{x-1}$;

г) $y = \frac{x^2+x}{x-1}$; д) $y = \frac{x^3}{x^2+1}$.

(Указание. Представьте y в виде (*) — разделите числитель на знаменатель с остатком.)

В случаях, когда трудно непосредственно указать представление функции в виде (*), можно пользоваться утверждением следующей задачи.

119*. Докажите, что прямая $y = kx + l$ является асимптотой функции $f(x)$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx) = l.$$

120*. Найдите наклонные асимптоты при $x \to \infty$ и $x \to -\infty$ (они будут разными!) и постройте графики следующих функций:

а) $\sqrt{x^2+1}$; б) $\sqrt{x^2+2x}$; в) $\sqrt{x^2+2x+3}$; г) $\sqrt{4x^2+x} - x$.

Замечание. $\frac{\sqrt{A}}{B} = \begin{cases} \sqrt{\frac{A}{B^2}} & \text{при } B > 0, \\ -\sqrt{\frac{A}{B^2}} & \text{при } B < 0. \end{cases}$

121*. а) Может ли график иметь:

1) три наклонные асимптоты; 2) три вертикальные асимптоты?

б) Нарисуйте несколько «существенно различных» графиков с асимптотами, изображенными на рисунках 34, 35.

в) Запишите хотя бы одну дробно-рациональную функцию, которая имела бы асимптоты такие, как в п. б).

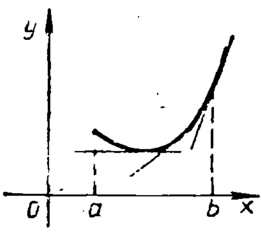


Рис. 36

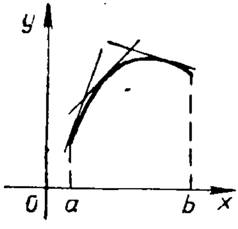


Рис. 37

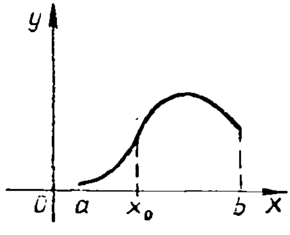


Рис. 38

122*. Может ли иметь 1) вертикальные; 2) горизонтальные; 3) наклонные асимптоты функция, являющаяся: а) четной; б) нечетной; в) периодической?

Пусть функция f дифференцируема на интервале $]a;\,b[$ и производная $f'(x)$ возрастает на этом интервале. Геометрически это означает, что с возрастанием x касательная к графику в соответствующих точках идет все «круче», и в этом случае говорят, что график направлен *выпуклостью вниз* (рис. 36). Аналогично, если $f'(x)$ убывает на $]a;\,b[$, то говорят, что график f на интервале $]a;\,b[$ направлен *выпуклостью вверх* (рис. 37). Наконец, если на интервалах $]a;\,x_0[$ и $]x_0;\,b[$ направления выпуклости графика различны, то точка $x = x_0$ называется *точкой перегиба* графика f (рис. 38).

123*. Выведите из приведенного выше определения достаточные признаки выпуклости графика f:

Если во всех точках интервала $]a;\,b[$ существует вторая производная функции f, т. е. $f''(x) = (f'(x))'$, и эта производная положительна, то на интервале $]a;\,b[$ график f направлен выпуклостью вниз; если на интервале $]a;\,b[$ $f''(x) < 0$, то график f направлен выпуклостью вверх.

124*. а) Докажите, что если в точке x_0 вторая производная $f''(x)$ меняет знак, то точка x_0 — точка перегиба графика f.

б) Докажите, что если x_0 — точка перегиба графика f и в точке x_0 существует вторая производная $f''(x)$ (это, в частности, означает, что в окрестности x_0 существует $f'(x)$), то $f''(x_0) = 0$.

в) Верно ли обратное утверждение: если $f''(x_0) = 0$, то x_0 — точка перегиба графика f?

В задачах **125—128** найдите промежутки выпуклости и точки перегиба графиков данных функций; постройте их графики.

125*. а) $y = x^2 + x$; б) $y = x^3 + x$; в) $y = x^4 - 6x^2$.

126*. а) $y = |x^2 - 1|$; б) $y = x\,|x|$; в) $y = |x^3 - x|$.

127*. а) $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$; б) $y = \dfrac{1}{1 + x^2}$; в) $y = \dfrac{2x}{1 + x^2}$.

128*. а) $y = x + \sin x$; б) $y = |x| + \sin x$; в) $y = x + |\sin x|$.

129*. Через данную точку $(x;\,y) = (2,\,4)$ проведите график функции, которая:

а) на промежутке $]-\infty;\,2[$ была бы выпукла вверх, а на $]2;\,\infty[$ — вниз;

б) на промежутке $]-\infty; 2[$ была бы выпукла вниз, а на $]2; \infty[$ — вверх.

Можно ли при этом потребовать, чтобы функция была всюду положительна?

130*. Проведите несколько существенно разных графиков функций, имеющих в точности: а) две, б) три точки перегиба, если положение точек перегиба на координатной плоскости задано.

131*. а) Пусть x_0 — точка экстремума f, $f''(x_0) \neq 0$. Как по знаку $f''(x_0)$ выяснить, будет ли у f в точке x_0 максимум или минимум?

б) Функция f имеет n точек экстремума. Докажите, что тогда у f не менее чем $n-1$ точек, в которых $f''=0$.

в) Верно ли, что если график f имеет k точек перегиба, то f имеет по крайней мере $k+1$ точку экстремума?

§ 4. Графики многочленов и дробно-рациональных функций

В этом параграфе собраны задачи, касающиеся поведения графиков многочленов и дробно-рациональных функций. Для краткости многочленом здесь и далее мы называем функцию $x \to p(x)$, где $p(x)$ — многочлен от одной переменной x. Для многочленов степени n мы будем писать $p_n(x)$ $(q_n(x))$.

1. Докажите, что k-я производная многочлена степени n есть многочлен степени $(n-k)$: $p_n^{(k)}(x) = p_{n-k}(x)$ (в частности, $p_n^{(n-1)}(x) = p_1(x)$ — линейная функция, $p_n^{(n)}(x) = c \neq 0$ — постоянная).

2*. Докажите, что ненулевой многочлен не может иметь:

а) бесконечно много корней (т. е. значения $x \in \boldsymbol{R}$ таких, что $p(x)=0$);

б) бесконечно много точек экстремума;

в) бесконечно много точек перегиба. ↓

Указание к задаче 2 (и задаче 3): воспользоваться *теоремой Ролля*, которая утверждает, что для дифференцируемой функции $f(x)$ между точками a и b, для которых $f(a)=f(b)$, лежит по крайней мере одна точка $x=c$, в которой $f'(c)=0$.

3*. а) Докажите, что многочлен степени n имеет не более чем n корней.

б) Докажите, что каждое свое значение многочлен степени n принимает не более чем при n значениях x (т. е. любая горизонтальная прямая $y=c$ пересекает график многочлена не более чем в n точках).

в) Докажите, что никакой многочлен не может быть периодической функцией. ↓

4*. Какое наибольшее число: а) точек экстремума, б) точек перегиба — может иметь многочлен степени n?

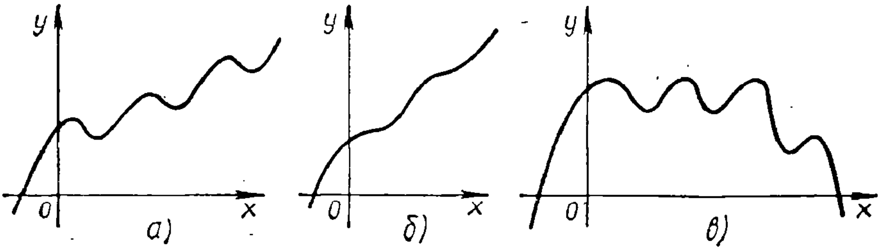


Рис. 39

5*. Пусть $R(x) = \frac{p_m(x)}{q_n(x)}$ — дробно-рациональная функция.

а) Докажите, что $R(x)$ каждое свое значение может принимать не более чем при $k = \max(m, n)$ значениях x.

б) Докажите, что $R(x)$ имеет не более чем $m + n - 1$ точек экстремума, если $m \neq n$, и не более чем $m + n - 2$ точек экстремума, если $m = n$. ↓

6*. а) Докажите, что график ненулевого многочлена $p(x)$ не может иметь промежутков постоянства (т. е. интервалов $]a, b[$ таких, что $p(x)$ при всех $x \in]a, b[$ принимает одно и то же значение).

б) Докажите, что если в выражении для дробно-рациональной функции $R(x) = \frac{p_n(x)}{q_m(x)}$ числитель $p_n(x) \neq cq_m(x)$, где c — некоторая постоянная, то функция $R(x)$ не может иметь промежутков постоянства.

7*. Какую наименьшую степень может иметь многочлен, если его график выглядит так, как показано на рисунке 39?

В следующих задачах анализируется поведение графиков многочленов при больших значениях $|x|$, или, как говорят, «на бесконечности».

8*. Докажите, что если $p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, то при достаточно больших значениях $|x|$:

а) знак $p_n(x)$ совпадает со знаком $a_n x^n$;

б) $|p_n(x)| > \frac{1}{2}|a_n x^n|$. ↓

Указание. Рассмотрите предел

$$\lim_{x \to \infty} \frac{p_n(x) - a_n x^n}{a_n x^n}.$$

9*. Докажите, что график многочлена не может выглядеть так, как показано на рисунке 40.

а) График заключен между прямыми $y = a_1$ и $y = a_2$.

б) Функция неограниченно возрастает от $-\infty$ до ∞, но график ее на всей оси направлен выпуклостью вверх. ↓

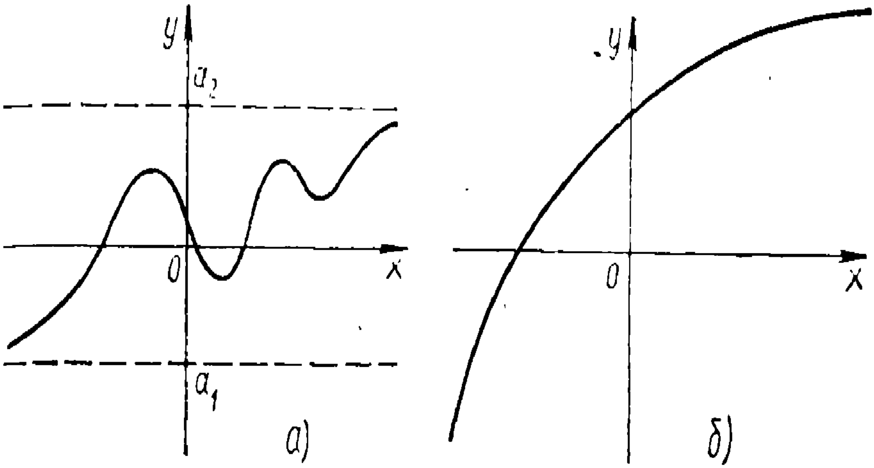


Рис. 40

10*. Докажите, что график многочлена $y = p_n(x)$ при достаточно больших x направлен выпуклостью в ту же сторону, что и график степенной функции $y = a_n x^n$ — старшего члена многочлена.

11*. Докажите, что квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ не может иметь асимптот — ни вертикальных, ни горизонтальных, ни наклонных.

12*. Пусть $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{Ax^2 + Bx + C}$ — дробно-квадратичная функция, $A \neq 0$, причем числитель и знаменатель не имеют общих корней и $f(x)$ — не постоянная. Докажите, что:

а) каждое свое значение h функция $f(x)$ принимает не более чем при двух значениях x; иными словами, уравнение $f(x) = h$ при каждом h имеет не более двух корней;

б) если при некотором h_0 уравнение $f(x) = h_0$ имеет в точности один корень $x = x_0$, то либо прямая $y = h_0$ — горизонтальная асимптота f, либо точка $x = x_0$ — точка экстремума функции f;

в) функция $f(x)$ имеет не более двух точек экстремума. ↓

Глава V ИНТЕГРАЛ

§ 1. Первообразная и интеграл

(1—2). По данному графику функции f построить примерный вид одной из первообразных для f:

1. Графики f даны на рисунке 41.

2. Графики f даны на рисунке 42.

(3—4). Найдите все первообразные для данной функции:

3. а) $f(x) = |x|$; б) $f(x) = |x - 1|$; в) $f(x) = |x^2 - 1|$.

4. а) $f(x) = \frac{1}{x^2}$; б) $f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x-1)^2}$; в) $f(x) = \frac{1}{x}$.

Замечание. В задаче 4 имеются в виду первообразные на области определения f. Отметим, что входящие в запись первообразной постоянные могут быть разными на каждом из непересекающихся промежутков, составляющих $D(f)$, поэтому ответ нельзя записывать в виде $F(x) + C$, где C — единая постоянная.

5. Докажите, что функция $f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ не имеет на всей оси ни одной первообразной. ↓

6. 1) Опишите совокупность всех первообразных функций: а) $\frac{1}{\cos^2 x}$, $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$; б) $[x]$, $x \notin \boldsymbol{Z}$; в) $2\{x\}$, $x \notin \boldsymbol{Z}$. ↓

2)* В каких из этих случаев можно подобрать постоянные так, чтобы затем первообразную доопределить в выкинутых точках до

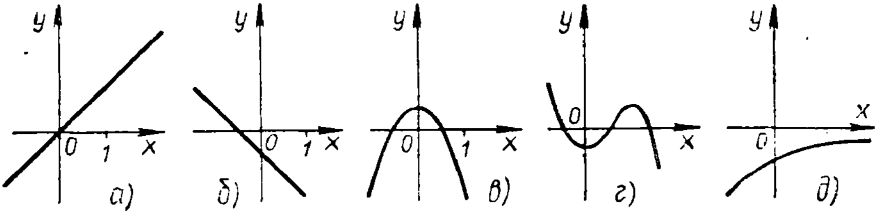


Рис. 41

всюду непрерывных функций (не дифференцируемых в указанных точках)? Нарисуйте графики таких непрерывных первообразных.

7. Найдите все функции f такие, что:

а) $f'(x) = \sin x$, $\quad f(\pi) = e$;
б) $f'(x) = \cos x$, $\quad f(e) = \pi$;
в) $f'(x) = \frac{1}{x^2}$, $\quad f(1) = f(-1) = 0$;
г) $f'(x) = \frac{1}{x-1}$, $\quad f(0) = f(3) = -1$.

8. Найдите все функции f такие, что при всех $x \in \boldsymbol{R}$:

а) $f''(x) = 0$; б) $f''(x) = 1$; в) $f''(x) = x$; г) $f''(x) = \sin x$.

9. Найдите функцию f, если:

а) $f''(x) = 1$, $\quad f(0) = f'(0) = 1$,
б) $f''(x) = -1$, $\quad f(0) = f(2) = 0$;
в) $f''(x) = 3 - x$, $\quad f(0) = 1$, $f'(1) = 0$.

10. Найдите все функции f такие, что при всех $x \in \boldsymbol{R}$:

а) $f'''(x) = 0$; б) $f^{(n+1)}(x) = 0$; в) $f'''(x) = e^x$.

11. а) Может ли первообразная периодической функции быть непериодической?

б) Что можно сказать о свойствах четности первообразной: 1) нечетной, 2) четной функции f?

Пользуясь формулой Ньютона — Лейбница,

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

следует иметь в виду, что интеграл I определен лишь в случае, когда функция f имеет первообразную во всех точках отрезка $[a, b]$.

12. При каких a и b определены следующие интегралы:

а) $\int_a^b \frac{1}{x}\,dx$; б) $\int_a^b \frac{1}{x^2-1}\,dx$?

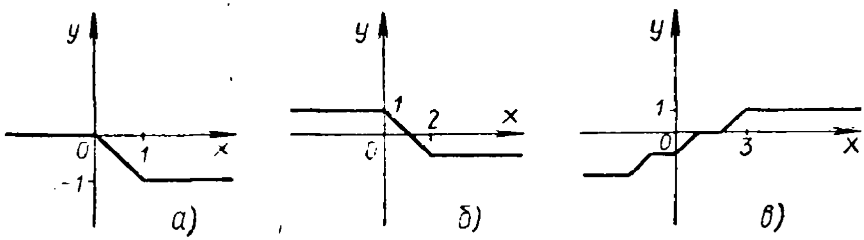


Рис. 42

13. При каких C определены интегралы:

а) $\int\limits_0^{-2} \frac{1}{x-C}\,dx$; б) $\int\limits_1^{2} \frac{1}{x^2+C}\,dx$?

14*. Найдите интегралы:

а) $\int\limits_0^2 \sqrt{x}\,dx$; б) $\int\limits_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$; в) $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$.

З а м е ч а н и е. Интегралы из задачи 14—так называемые *несобственные:* а) первообразная $\sqrt{x}$ не определена в точке 0; б) сама функция $\frac{1}{\sqrt{x}}$ не определена при $x=0$; в том и другом случае интеграл понимается как предел (при $\varepsilon \to 0$, $\varepsilon > 0$)

$$\int\limits_0^2 f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int\limits_\varepsilon^2 f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} (F(2) - F(\varepsilon)).$$

Аналогично интеграл в) также есть предел

$$\int\limits_1^\infty f(x)\,dx = \lim_{m\to\infty} \int\limits_1^m f(x)\,dx = \lim_{m\to\infty} (F(m) - F(1)).$$

15. Исходя из определения интеграла, докажите, что:
а) для любых a, b и c

$$\int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx$$

(если указанные интегралы существуют);

б) если функция f положительна и $a < b$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx > 0$; если же f отрицательна и $a < b$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx < 0$. ↓

У к а з а н и е к пункту б): считая b переменной, покажите, что функция $\Phi(b) = \int\limits_a^b f(x)\,dx$ возрастает или, соответственно, убывает.

16. Вычислите интегралы:

а) $\int\limits_0^3 |x-1|\,dx$; б) $\int\limits_{-2}^1 |x^2-1|\,dx$; в) $\int\limits_{-2}^1 (x-1)|x|\,dx$.

17*. Докажите, что:

а) если $f(x) \leqslant g(x)$ и $a < b$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)\,dx$;

б) для любой функции f при $a < b$

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\,dx;$$

в) при $a < b$ $\min\limits_{x\in[a,\, b]} f(x) \cdot (b-a) \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \max\limits_{x\in[a,\, b]} f(x)\cdot(b-a)$. $\downarrow$

18*. а) Докажите общую формулу замены в интеграле:

$$\int\limits_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int\limits_{g(a)}^{g(b)} f(z)\,dz. \downarrow$$

б) Найдите первообразные следующих функций:

1) $x\sqrt{x^2+1}$; 2) xe^{-x^2}; 3) $\operatorname{ctg} x$, $x \in]0; \pi[$.

19*. а) Докажите общую формулу «интегрирования по частям»:

$$\int\limits_a^b f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b f'(x)\,g(x)\,dx. \downarrow$$

б) Найдите первообразные следующих функций:

1) $x\cos x$; 2) xe^x; 3) x^2e^x; 4) $\ln x$.

Напоминание[1]. Если $a < b$ и $f(x) > 0$, то интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ интерпретируется как площадь криволинейной трапеции:

$$\{(x;\ y)\,|\,a \leqslant x \leqslant b,\quad 0 \leqslant y \leqslant f(x)\},$$

а в случае $f(x) < 0$ — как площадь криволинейной трапеции:

$$\{(x;\ y)\,|\,a \leqslant x \leqslant b,\ f(x) \leqslant y \leqslant 0\},$$

взятая со знаком «минус».

20. Используя интерпретацию интеграла как площади криволинейной трапеции, вычислите интегралы:

а) $\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$; б) $\int\limits_{-2}^2 ||x|-1|\,dx$; в) $\int\limits_0^5 \left|\{x\} - \frac{1}{2}\right| dx$.

---

[1] См.: А-10, п. 100.

21*. Вычислите площадь S единичного круга $\{(x; y) | x^2 + y^2 \leqslant 1\}$, взяв интеграл $\frac{1}{2}S = \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}dx$ с помощью формулы замены (см. задачу 18).

(Указание. Положите $x = \sin t$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$.)

22*. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y = \sqrt{x + a}$, $y = \sqrt{a - x}$, $y = 0$ $(a > 0)$;

б) $y = x^{\alpha}$, $y = x^{\beta}$ $(\alpha > \beta > 0,\ x \geqslant 0)$;

в) $y = ax$, $y = x^3$ (при $x \geqslant 0$, $a > 0$).

23*. Найдите значения интегралов из геометрических соображений:

а) $\int\limits_{-\pi}^{11\pi} \sin \frac{x}{3}\, dx$; б) $\int\limits_{-a}^{a} \sin 2x\, dx$; в) $\int\limits_{-10}^{10} x^5 \cos^{13} x\, dx$.

(Указание. Используйте в случае а) периодичность, в случаях б) и в) — четность.)

24*. Найдите производные следующих функций ($x \in \boldsymbol{R}$):

а) $\Phi(x) = \int\limits_{x}^{1} z^5 \cos^{13} z\, dz$;

б) $\Phi(x) = \int\limits_{1}^{2x} z^{10} \sin^{100} z\, dz$;

в) $\Phi(x) = \int\limits_{2x}^{3x} f(z)\, dz$, где f — данная функция.

25*. Найдите наименьшее и наибольшее значения следующих интегралов:

а) $\int\limits_{0}^{a} \cos \frac{x}{2}\, dx$, $a \in \boldsymbol{R}$; в) $\int\limits_{a}^{b} \cos \frac{x}{2}\, dx$, $a, b \in \boldsymbol{R}$;

б) $\int\limits_{a}^{a+\pi} \cos \frac{x}{2}\, dx$, $a \in \boldsymbol{R}$; г) $\int\limits_{a}^{b} \cos^2 x dx$, $a, b \in \boldsymbol{R}$.

§ 2. Интеграл в геометрии

Пусть Φ — плоская фигура (рис. 43). Выберем на плоскости ось Ox, обозначим через l_x прямую, проходящую через точку x перпендикулярно оси Ox. Пусть при каждом $x \in \boldsymbol{R}$ пересечение $\Phi \cap l_x$ есть либо точка, либо отрезок, либо объединение отрезков и точек, причем фигура Φ заключена между двумя прямыми l_a и l_b, $a < b$.

Обозначим через $l(x)$ сумму длин отрезков пересечения $\Phi \cap l_x$.

Тогда формула для площади фигуры Φ будет иметь вид:

$$S(\Phi) = \int_a^b l(x)\, dx$$

(при условии, что фигура Φ имеет площадь, а функция $l(x)$ непрерывна).

В самом деле, рассмотрим площадь $S(x)$ той части Φ, которая лежит левее прямой l_x. Ясно, что при малом Δx

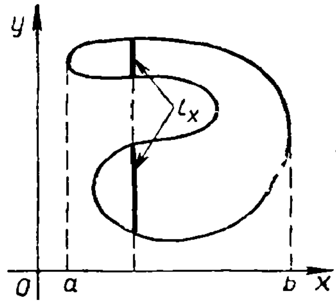


Рис. 43

$$\Delta S(x) = S(x + \Delta x) - S(x) \approx l(x) \cdot \Delta x.$$

Точный смысл этого равенства в том, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S(x)}{\Delta x} = S'(x) = l(x)$, т. е. $S(x)$ — первообразная функции $l(x)$. Далее применим формулу Ньютона — Лейбница. Такова общая схема рассуждения при доказательстве всех интегральных геометрических формул.

1. Пусть Φ — плоская фигура, имеющая площадь S_0. Общим прямым цилиндром Φ_h с основанием Φ и высотой h называется объединение всех отрезков MI_M длины h, построенных перпендикулярно плоскости Φ по одну сторону от нее для всех точек $M \in \Phi$. Приведите обоснование формулы для объема общего цилиндра Φ_h:

$$V(\Phi_h) = S_0 \cdot h.$$

2*. Пусть Φ — пространственная фигура, имеющая объем $V(\Phi)$, Ox — ось в пространстве, π_x — плоскость, проведенная через точку x перпендикулярно оси Ox, $S(x)$ — площадь фигуры $\Phi(x) = \Phi \cap \pi_x$, причем функция $S(x)$ непрерывна (рис. 44). Пусть фигура Φ заключена между плоскостями π_a и π_b. Приведите обоснование формулы *интеграла площадей*:

$$V(\Phi) = \int_a^b S(x)\, dx.$$

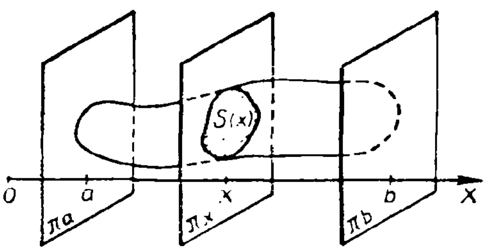


Рис. 44

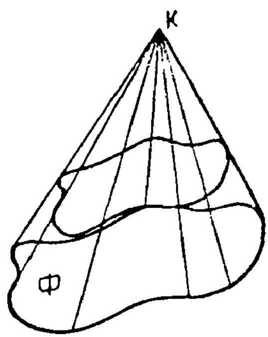


Рис. 45

3. Примените формулу интеграла площадей:

а) к произвольной призме;

б) к обычному цилиндру (прямому круговому).

(Выведите из нее известные формулы для объемов этих фигур; ось Ox нужно выбрать подходящим образом.)

4. Общим конусом Φ_K с вершиной K и основанием — плоской фигурой Φ — называется объединение всех отрезков $[KM]$, где $M \in \Phi$; считается, что Φ имеет площадь S_0, а точка K не принадлежит плоскости Φ (рис. 45).

а) Покажите, что сечения фигуры Φ_K плоскостями, параллельными плоскости основания, гомотетичны основанию Φ с центром гомотетии в точке K.

б) С помощью формулы интеграла площадей выведите формулу для объема общего конуса:

$$V(\Phi_K) = \frac{1}{3} S_0 h,$$

где h — длина высоты KH конуса Φ_K ($H \in \Phi$, прямая (KH) перпендикулярна плоскости Φ).

Замечание. Частными случаями общего конуса являются пирамида и обычный конус (т. е. конус — фигура вращения).

5. Найдите объем пересечения двух конгруэнтных цилиндров вращения с пересекающимися и перпендикулярными осями; оси пересекаются в своих серединах, а высоты цилиндров больше диаметров их оснований; задан радиус оснований цилиндров r.

Указание. Воспользуйтесь формулой интеграла площадей, выбрав ось Ox перпендикулярно осям цилиндров.

6. «Основание» фигуры — круг $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$, а каждое сечение, перпендикулярное оси Ox, — квадрат. Найдите объем фигуры.

7. Пусть функция f непрерывна и неотрицательна на отрезке $[a; b]$, Φ — фигура, полученная вращением криволинейной трапеции

$$\{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$$

относительно оси Ox. Используя формулу интеграла площадей, докажите формулу для объема Φ:

$$V(\Phi) = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx.$$

8. Диаметр $[AB]$ шара разделен а) на 3, б) на 4, в) на n конгруэнтных отрезков и через точки деления проведены плоскости, перпендикулярные диаметру. В каком отношении делят объем шара эти плоскости?

9. а) Рассматривая усеченный конус как фигуру вращения соответствующей трапеции, докажите формулу для его объема

$$V = \frac{1}{3} h (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}),$$

где S_1 и S_2 — площади оснований конусов.

б) Исходя непосредственно из формулы интеграла площадей, докажите ту же формулу для объема усеченной пирамиды.

10. Найдите отношение объемов фигур вращения параболы $y = x^2$ от точки $x = 0$ до точки $x = a$ относительно оси Ox и относительно оси Oy.

11*. Найдите объем фигуры вращения относительно оси Ox:

а) дольки синусоиды $\{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant \pi, \ 0 \leqslant y \leqslant \sin x\}$;

б) бесконечной «гиперболической» трапеции

$$\left\{(x, y) \mid x \geqslant 1, \ 0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{x}\right\}.$$

12*. Пусть функция $f(x)$ имеет непрерывную производную на отрезке $[a, b]$. Приведите обоснование формулы для длины кривой $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx.$$

Указание. Пусть $l(x)$ — длина дуги графика f от точки a до точки x. Покажите, что $\Delta l(x) \approx \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta f(x))^2} \approx \approx \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\Delta x$. Точный смысл этой формулы в том, что $l'(x) = \sqrt{1 + (f'(x))^2}$, и остается воспользоваться формулой Ньютона — Лейбница.

13*. Найдите длину дуги графика:

а) $y = x^{\frac{3}{2}}$ от точки $x = 0$ до точки $x = 1$;

б) $y = (x + 1)^{\frac{3}{2}}$ между точками $x = 2$ и $x = 8$.

14*. а) Найдите длину дуги графика $y = \sqrt{1 - x^2}$ между точками $x = \pm 1$.

б) Вычислите из геометрических соображений, не отыскивая первообразные, интеграл

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx.$$

§ 3*. Интеграл в физике

Координаты x_0 центра точечных масс $m_1, m_2, \ldots, m_n$, расположенных на оси Ox в точках с координатами $x_1, x_2, \ldots, x_n$, вычисляют по формуле

$$x_0 = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}.$$

1. Пусть вдоль стержня — отрезка $[a; b]$ оси Ox — распределена масса с плотностью $\rho(x)$. Покажите, что:

а) суммарная масса дается интегралом

$$M = \int_a^b \rho(x)\, dx;$$

б) положение центра масс вычисляется по формуле

$$x_0 = \frac{1}{M} \int_a^b x \rho(x)\, dx.$$

2. Найдите координату центра масс, если масса распределена:
а) на отрезке [0; 1] с плотностью $\rho(x) = x^2$; $\downarrow$
б) на отрезке [1; 2] с плотностью $\rho(x) = \frac{1}{x}$.

Следующие задачи **3—6** сводятся к задаче 1.

3. Однородная пластина ограничена линиями:
а) $y = hx$, $y = 0$, $x = 1$; $\downarrow$ б) $y = x^2$, $y = 0$, $x = 1$.
Найдите координаты (по осям x и y) центра масс этой пластины.

4. Найдите положение центра масс:
а) однородного полукруга радиуса R; $\downarrow$
б) однородной полуокружности радиуса R. $\downarrow$

5. Найдите положение центра масс:
а) однородного конуса высотой h;
б) однородной правильной пирамиды высотой h. $\downarrow$

6. Найдите положение центра масс:
а) однородного полушара радиуса R;
б) однородной полусферы радиуса R.

Напоминание. Если точка массой m вращается около оси Oz с угловой скоростью ω, то величина линейной скорости точки равна $v = r\omega$, где r — расстояние от точки до оси; кинетическая энергия точки, таким образом, равна $T = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} mr^2\omega^2$.

Пусть стержень длиной l $(0 \leqslant x \leqslant l)$ вращается с угловой скоростью ω вокруг оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его конец O, и пусть плотность стержня задается функцией $\rho(x)$. Разобъем стержень точками x_i на n равных частей. Тогда масса отрезка $[x_i; x_{i+1}]$ стержня приближенно равна $\rho(x_i)(x_{i+1} - x_i)$, скорость — ωx_i, кинетическая энергия $0{,}5\rho(x_i)(x_{i+1} - x_i)\,\omega^2 x_i^2$. Кинетическая энергия всего стержня приближенно равна $\sum 0{,}5\rho(x_i)\omega^2 x_i^2\, \Delta x$, а это интегральная сумма по отрезку $[0; l]$ для функции $0{,}5x^2\omega^2\rho(x)$. Переходя к пределу при $n \to \infty$, получим:

$$T = 0{,}5 \int_0^l \omega^2 x^2 \rho(x)\, dx.$$

Задачи 7—10 сводятся к рассмотренной задаче: «собирая» все точки фигуры, находящиеся на одинаковом расстоянии от оси вращения, в одну, мы не меняем кинетической энергии, поэтому достаточно вычислить кинетическую энергию вращающегося стержня с соответствующей плотностью.

7. Найдите кинетическую энергию вращения с угловой скоростью ω однородного стержня длиной l и массой M около оси Oz, если ось Oz перпендикулярна стержню и проходит через его: а) конец; б) середину. ↓

8. Найдите кинетическую энергию вращения с угловой скоростью ω однородного круга массой M и радиуса R около оси Oz:

а) проходящей через центр круга перпендикулярно его плоскости;

б) содержащей диаметр круга. ↓

9. Найдите кинетическую энергию вращения однородных: а) конуса, б) цилиндра около их осей; даны угловая скорость вращения ω, масса M, радиус основания R и высота H. ↓

10. Найдите кинетическую энергию вращения вокруг диаметра с угловой скоростью ω однородных: а) шара, б) сферы радиуса R и массой M. ↓

Напоминание. Работа против переменной силы $F(x)$, действующей на материальную точку вдоль оси Ox, при перемещении этой точки из положения $x = a$ в положение $x = b$ определяется как интеграл:

$$A\Big|_a^b = -\int_a^b F(x)\,dx.$$

11. Какую работу против упругой силы $F(x) = -kx$ нужно затратить, чтобы материальную точку перевести:

а) из положения $x = 0$ в положение $x = a$;

б) из положения $x = a$ в положение $x = -a$? ↓

12. Найдите минимальную работу против силы тяжести, выполняемую при насыпании из песка плотностью ρ конической кучи с радиусом основания R и высотой H.

13. Найдите работу против архимедовой силы выталкивания при погружении цилиндра с радиусом основания R и высотой H в жидкость плотностью ρ, если цилиндр погружается так, что: а) плоскость основания; б) ось цилиндра параллельна поверхности жидкости. В каком случае работа при обоих способах погружения будет одинакова? ↓

14. Найдите работу против архимедовой силы выталкивания при погружении конуса высотой H, объемом V в жидкость плотностью ρ, если конус погружается: а) вершиной вниз; б) вершиной вверх. ↓

Указание к задачам 13—14. Покажем, что работа против архимедовой силы выталкивания при погружении однородного тела в жидкость плотностью ρ равна ρhVg, где h— глубина погружения центра масс тела; V — объем тела. Действительно, при вычислении координаты центра масс относительно направленной вниз оси Ox мы разбиваем тело на слои шириной Δx и считаем, что эта координата приближенно равна $\sum \frac{x_i m_i}{M}$, где x_i — координаты точек деления; m_i — массы соответствующих слоев; M — масса всего тела. Так как тело однородно, то

$$\sum \frac{x_i m_i}{M} = \sum \frac{x_i V_i}{V},$$

где V_i — объем i-го слоя. При вычислении работы против архимедовой силы мы считаем, что глубина погружения i-го слоя приближенно равна x_i, а произведенная при этом работа равна $x_i V_i \rho g$. Тогда вся работа равна $\sum x_i V_i \rho g = V \rho g \sum \frac{V_i x_i}{V} = V \rho g \sum \frac{m_i x_i}{M}$. Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем:

$$\lim_{n \to \infty} \sum x_i V_i \rho g = V \rho g \lim_{n \to \infty} \sum \frac{m_i x_i}{M}.$$

Это означает, что работа A против архимедовой силы и глубина погружения h центра масс (если тело полностью погружено в жидкость) связаны соотношением $A = V \rho g h$.

15. Исходя из геометрического смысла интеграла, покажите, что при погружении в жидкость плотностью ρ тела, имеющего центр симметрии (например, куба), работа против силы выталкивания равна весу вытесненной жидкости, умноженному на расстояние от центра симметрии тела до поверхности жидкости после полного погружения тела.

Глава VI ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. Дифференциальные уравнения первого порядка

Напоминание.[1] *Линейное дифференциальное уравнение*

$$y' = ky, \tag{1}$$

где $y = y(x)$ — неизвестная функция, своими решениями имеет функции вида $y(x) = Ae^{kx}$, где A — произвольная постоянная. При отыскании первообразных для данной функции $f(x)$ мы по существу также имеем дело с *дифференциальным уравнением*

$$y' = f(x), \tag{2}$$

где $y(x)$ — неизвестная функция. Если $F(x)$ — какая-нибудь первообразная для функции f на интервале I, то любое решение дифференциального уравнения (2) на этом интервале записывается в виде $y(x) = F(x) + C$, где C — произвольная постоянная. Более общее по сравнению с (1) и (2) *дифференциальное уравнение первого порядка* задается соотношением

$$y' = \varphi(x, y), \tag{3}$$

где $\varphi(x, y)$ — некоторое выражение от x и y. Уравнение (3) выражает зависимость между первой производной неизвестной функции $y = y(x)$, значениями переменной x и значениями функции y. *Решением дифференциального уравнения* (3) называется любая функция $y(x)$, для которой во всей области ее определения выполняется соотношение (3), т. е.

$$y'(x) = \varphi(x, y(x)).$$

(1—3). Найдите все решения данных дифференциальных уравнений.

1. а) $y' = y$; б) $y' = \frac{1}{3}y$; в) $y' = -2y$.

2. а) $y' = x$; б) $y' = \sin x$; в) $y' = e^x$.

3. а) $y' = \frac{1}{x^2}$, $x > 0$; б) $y' = \frac{1}{x}$, $x > 0$.

---

[1] См.: А-10, пп. 110 и 97—98.

(4—6). Проверьте, что заданная функция является решением данного дифференциального уравнения.

4. $y = x + 1$ — решение уравнения $y' = y - x$.

5. $y = e^{x^2}$ — решение уравнения $y' = 2xy$.

6. $y = -\frac{1}{x}$ — решение уравнения $y' = y^2$.

(7—10). Найдите (угадайте) хотя бы одно решение данного дифференциального уравнения.

7*. $y' = y + x$. ↓ **8*.** $y' = y - 1$. ↓

9*. $y' = xy$. **10*.** $y' = 2y^2$.

Как видно из рассмотренных выше примеров (1) и (2), в запись решений дифференциальных уравнений первого порядка входит произвольная постоянная, и решений бесконечно много. Чтобы определить решение $y(x)$ дифференциального уравнения вида (3) однозначно, задают так называемое *начальное условие* — значение $y(x)$ в некоторой точке x_0: $y(x_0) = y_0$.

(11—13). Найдите решения следующих дифференциальных уравнений, удовлетворяющие данным начальным условиям.

11. $y' = x$,	а) $y(0) = 1$;	б) $y(1) = 0$. ↓
12. $y' = y$,	а) $y(0) = -1$;	б) $y(1) = 0$. ↓
13. $y' = 2y$,	а) $y(0) = 3$;	б) $y(1) = e$.

Указание к задачам 11—13. Сначала запишите общий вид решений этих уравнений—с произвольной постоянной, а затем найдите значение постоянной, используя начальное условие.

14. Запишите решение дифференциального уравнения $y' = ky$, удовлетворяющее начальному условию: а) $y(0) = y_0$; б) $y(x_0) = y_0$.

15*. а) Найдите общий вид решений дифференциального уравнения

$$y' = ky + a, \tag{4}$$

где $k \neq 0$ и $a \neq 0$ — заданные постоянные.

б) Найдите решение дифференциального уравнения (4), удовлетворяющее начальному условию $y(0) = y_0$.

в) Найдите решение дифференциального уравнения $y' = -2y + 4$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 5$. ↓

Указание к п. а). Покажите, что если $y(x)$ и $y_1(x)$ — два решения уравнения (4), то их разность $z(x) = y(x) - y_1(x)$ удовлетворяет обычному линейному дифференциальному уравнению $z' = kz$. Отсюда следует, что $z(x) = Ae^{kx}$, где A — произвольная постоянная; поэтому $y(x) = y_1(x) + Ae^{kx}$, т. е. произвольное решение $y(x)$ представляется в виде суммы любого *частного решения* $y_1(x)$ уравнения (4) и *общего решения* Ae^{kx} «укороченного» уравнения $y' = ky$. Частное решение отыскивается подбором. В данном случае возьмите постоянную функцию $y_1 = C$ и найдите значение C.

16*. Докажите, что общее решение $y(x)$ дифференциального уравнения $y' = ky + f(x)$, где $f(x)$ — данная функция, можно записать в виде $y(x) = y_1(x) + Ae^{kx}$, где $y_1(x)$ — любое частное решение рассматриваемого уравнения; A — произвольная постоянная. ↓

17*. Используя утверждение задачи 16, найдите общий вид решений следующих дифференциальных уравнений:

а) $y' = y - x$; б) $y' = y + x$; в) $y' = y + e^{-x}$. ↓

Указание. а), б) — см. задачи 4 и 7. в) Найдите частное решение в виде $y_1 = Ce^{-x}$ (определите значение C).

18*. Найдите общий вид решений дифференциальных уравнений:

а) $y' = xy$; б) $y' = e^x \cdot y$.

Указание. Возьмите $y(x) = e^{z(x)}$ и запишите дифференциальные уравнения, которым удовлетворяет вспомогательная функция $z(x)$.

Дифференциальные уравнения встречаются при исследовании различного рода процессов — физических, биологических и т. д. Именно часто скорость изменения той или иной величины $y=y(t)$, т. е. производную $y'(t)$, можно предсказать из соответствующих законов, тогда и получается дифференциальное уравнение. Мы рассмотрим несколько примеров процессов, приближенная математическая модель которых дается дифференциальными уравнениями первого порядка.

(А). Во многих случаях рост популяций бактерий описывается дифференциальным уравнением

$$N'(t) = \alpha N(t), \quad \alpha > 0;$$

скорость $N'(t)$ увеличения численности популяции $N(t)$ пропорциональна $N(t)$, т. е. числу имеющихся в данное время бактерий.

19. Зная коэффициент α, найдите, за какое время численность популяции возрастает вдвое. Зависит ли это время от начальной численности N_0? ↓

20. Через 12 ч после начала опыта численность популяции бактерий возросла в 3 раза. Во сколько раз увеличится число бактерий через трое суток? ↓

(Б). Скорость уменьшения количества, например массы M, радиоактивного вещества при его распаде пропорциональна количеству имеющегося вещества:

$$M'(t) = -\alpha M(t);$$

здесь $\alpha > 0$ — характеризующая данное вещество постоянная, а знак «минус» соответствует тому, что $M(t)$ уменьшается.

21. Покажите, что период полураспада радиоактивного вещества, т. е. время, за которое масса M уменьшается вдвое, обратно пропорционален постоянной распада α (и не зависит от начального количества вещества).

22. Радиоактивное вещество имеет период полураспада 1 год. Через какое время из 10 г этого вещества останется 1 г? ↓

23. Пусть за 5 дней распадается 10%некоторого радиоактивного вещества. Каков период полураспада этого вещества? ↓

(В). Пусть при распаде радиоактивное вещество X превращается в другое радиоактивное вещество Y, которое распадается со своей постоянной распада β, отличной от постоянной распада α вещества X. Такой двойной распад веществ описывается *системой* двух дифференциальных уравнений: если через $X(t)$ и $Y(t)$ обозначить массы этих веществ, то

$$\begin{cases} X'(t) = -\alpha X(t), & (5) \\ Y'(t) = -\beta Y(t) + \alpha X(t) & (6) \end{cases}$$

(положительное слагаемое $\alpha X(t)$ в уравнении (6) отвечает за прирост вещества Y за счет распада вещества X).

24*. Пусть $X(0) = X_0$, $Y(0) = 0$ (т. е. в начальный момент времени вещество Y отсутствует).

а) Найдите решение дифференциального уравнения (5) с начальным условием $X(0) = X_0$. Подставьте это решение в правую часть уравнения (6) и найдите решение $Y(t)$ получившегося уравнения, удовлетворяющее начальному условию $Y(0) = 0$. ↓

б) Исследуйте функции $X(t)$ и $Y(t)$ (найдите их промежутки монотонности и точки экстремума). На одном чертеже постройте графики этих функций.

в) Выясните, при каком соотношении между периодами полураспада T_X и T_Y веществ X и Y масса вещества Y в некоторый момент времени будет больше массы вещества X.

Указание к п. а). Воспользуйтесь утверждением задачи 16 (см. также задачу 17, в)).

(Г). Опишем приближенную математическую модель ядерного деления. При соударении нейтрона с ядром изотопа «уран-235» это ядро раскалывается на 2 осколка и 2—3 новых нейтрона, причем такое деление сопровождается выделением ядерной энергии (в виде тепла). Общее число нейтронов, в том числе и новых, пропорционально имеющемуся количеству урана, или же объему V этого куска урана. Нейтроны с некоторой вероятностью вновь разбивают ядра, однако часть из них вылетает через поверхность куска урана («испаряется»). Приблизительно число вылетающих нейтронов пропорционально площади S поверхности куска; их доля среди всех нейтронов, таким образом, пропорциональна отношению S/Y. В случае шарообразного куска радиуса r отношение S/Y равно $4\pi r^2/(4/3)\pi r^3 = 3/r$, поэтому коэффициент «испарения» нейтронов равен $\beta = \beta_0/r$, где β_0 — характеристика самого вещества «уран-235», не зависящая от объема куска. Эти рассмотрения позволяют написать дифференциальное уравнение для количества $N(t)$ нейтронов, имеющихся внутри куска в момент времени t:

$$N'(t) = \alpha N(t) - \beta N(t) = \left(\alpha - \frac{\beta_0}{r}\right) N(t) \qquad (7)$$

— слагаемое $\alpha N(t)$ отвечает за прирост нейтронов вследствие деления ядер (коэффициент α также является характеристикой только вещества), а слагаемое $-\beta N(t)$ учитывает вылет нейтронов из куска. При таком процессе мы можем управлять параметром r, т. е. менять размеры куска урана.

25. При каких значениях r функция $N(t)$ будет убывающей, а при каких возрастающей? ↓

26. Пусть для некоторого расщепляющегося вещества коэффициенты в уравнении (7) равны $\alpha = 20$ (1/с), $\beta_0 = 400$ (см/с).

а) При каких значениях радиуса r шара из этого вещества число нейтронов $N(t)$ будет возрастать?

б) Найдите наименьшее значение радиуса r, при котором шар этого радиуса через 1 с потеряет не более половины своих нейтронов. ↓

(Д). Из решения задачи 25 следует, что при значении r, большем некоторого критического значения r_0, число нейтронов $N(t)$, а с ним и количество выделяющейся энергии будет экспоненциально возрастать — эта ситуация отвечает ядерному взрыву. Масса шара вещества радиуса r_0 называется критической массой; например, для урана-235 критическая масса равна примерно 1 кг. Процесс ядерного взрыва ($r > r_0$) неуправляем; однако в случае $r < r_0$, когда происходит экспоненциальное затухание процесса ядерного деления, можно попытаться поддержать этот процесс за счет внешнего источника нейтронов. Пусть такой источник поставляет нейтроны с постоянной скоростью q. Математическая модель этой системы — ядерного реактора — описывается дифференциальным уравнением

$$N'(t) = -kN(t) + q, \quad k = \beta - \alpha = \frac{\beta_0}{r} - \alpha. \tag{8}$$

27*. Запишите решение $N(t)$ дифференциального уравнения (8), удовлетворяющее начальному условию $N(0) = N_0$. Постройте график $N = N(t)$ и найдите предел $N(t)$ при $t \to \infty$. Дайте физическое истолкование происходящего процесса. ↓

У к а з а н и е. Уравнение (8) имеет тот же вид, что и уравнение (4) из задачи 15.

З а м е ч а н и е. Математический анализ уравнения (8) показывает, что при добавлении внешнего источника нейтронов общее число нейтронов внутри уранового шара, а поэтому и количество выделяющейся ядерной энергии стабилизируется (стремится к постоянной величине). На этом процессе и основан принцип работы ядерных реакторов и атомных электростанций.

28*. Пусть из расщепляющегося вещества, описанного в задаче 26, сделан шар радиуса $r = r_0/2$ (r_0 — критический радиус), и источник нейтронов вводит в него $q = 100$ нейтронов в секунду. Найдите $N(t)$ и предельное число нейтронов N_1, если $N(0) = N_0$ ↓.

§ 2. Гармонические колебания

Н а п о м и н а н и е[1]. *Дифференциальное уравнение гармонических колебаний* с данной *частотой* $\omega > 0$ записывается в виде

$$x'' = -\omega^2 x, \tag{1}$$

где $x = x(t)$ — неизвестная функция. Если величина x меняется в зависимости от t так, что функция $x(t)$ удовлетворяет уравнению (1), то говорят, что x совершает г а р м о н и ч е с к и е к о л е б а н и я (с частотой ω). Непосредственно проверяется, что функция вида

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi), \tag{2}$$

где A и φ — произвольные постоянные, является решением дифференциального уравнения (1). Можно показать, что (2) — это общий вид решений уравнения (1), т. е. что любое гармоническое колебание с частотой ω записывается формулой вида (2). (Ниже в задачах 25—26 приводится один из способов доказательства последнего утверждения.)

1. Проверьте вычислениями, что заданные функции являются решениями соответствующих дифференциальных уравнений:

а) $x(t) = \cos 3t$ — решение уравнения $x'' = -9x$;

б) $x(t) = 3\cos(\sqrt{2}t + 1)$ — решение уравнения $x'' = -2x$ ↓;

в) $x(t) = -\cos\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ — решение уравнения $x'' = -\frac{1}{4}x$.

2. а) Покажите, что любое решение $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ дифференциального уравнения $x'' = -\omega^2 x$ можно переписать в виде $x(t) = A_0\cos(\omega t + \varphi_0)$, где $A_0 \geqslant 0$, $\varphi_0 \in [0; 2\pi[$. (Напомним, что при такой записи постоянная A_0 называется *амплитудой* колебания $x(t)$, а φ_0 — *начальной фазой*.) ↓

б) Запишите в указанном (стандартном) виде гармонические колебания:

1) $-2\cos 3t$; 2) $-\cos\left(\frac{t}{2} + \frac{5\pi}{4}\right)$;

3) $\cos(t - 3{,}3\pi)$; 4) $\cos(1{,}7\pi - 3t)$.

У к а з а н и е. Воспользуйтесь периодичностью косинуса и формулами приведения.

3. Проверьте, что следующие функции задают гармонические колебания. Укажите частоту этих колебаний. Запишите данные колебания в стандартном виде: $A\cos(\omega t + \varphi)$, $A \geqslant 0$, $\varphi \in [0, 2\pi[$.

а) $\sin t$; б) $\sin\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)$; в) $-3\sin 2t$; г) $b\sin\omega t$, $b > 0$.

4. а) Проверьте, что любое гармоническое колебание $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ можно записать в виде

$$x(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t \tag{3}$$

с некоторыми a и b (выразите a и b через A и φ).

[1] См.: А-10, п. 80.

б) Проверьте вычислением второй производной, что любая функция вида (3) задает гармоническое колебание с частотой ω. ↓

5. а) Запишите гармоническое колебание, заданное формулой (3), в стандартном виде $A \cos(\omega t + \varphi)$ (зная a и b, найдите амплитуду A и начальную фазу φ). ↓

б) Запишите в стандартном виде гармонические колебания: 1) $\cos t + \sin t$; 2) $\cos 2t - 2 \sin 2t$; 3) $3 \cos \frac{t}{2} - 4 \sin \frac{t}{2}$.

Напоминание[1]. Вычисление второй производной показывает, что сумма $x_1(t) + x_2(t)$ двух гармонических колебаний одной частоты ω является гармоническим колебанием той же частоты. Другой способ доказать это основан на представлении гармонического колебания частоты ω в виде (3) (см. задачи 4—5), т. к. сумма двух функций такого вида снова имеет вид (3): $(a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t) + (a_2 \cos \omega t + b_2 \sin \omega t) = (a_1 + a_2) \cos \omega t + (b_1 + b_2) \sin \omega t$. Поскольку любая функция $b \sin \omega t$ задает гармоническое колебание частоты ω, задачу 5 можно трактовать как отыскание суммы двух гармонических колебаний в одном частном случае. В произвольном случае складывать гармонические колебания одинаковой частоты удобно с помощью так называемых векторных диаграмм. Именно для колебания $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ рассмотрим вектор

$$\overrightarrow{OM} = A \cdot R^{\varphi}(\vec{i}),$$

где $\vec{i}$ — единичный вектор оси Ox; $R^{\varphi}(\vec{i})$ — образ вектора $\vec{i}$ при повороте на угол φ. Тогда длина $\overrightarrow{OM}$ равна амплитуде колебания, а угол $\widehat{xOM}$ — начальной фазе. Рассмотрим вращение вектора $\overrightarrow{OM}$ вокруг точки O с постоянной угловой скоростью ω. Если $M(t)$ — положение точки M в момент времени t, то

$$\overrightarrow{OM(t)} = A \cdot R^{\omega t + \varphi}(\vec{i}),$$

поэтому (согласно определению косинуса) координата точки $M(t)$ вдоль оси Ox равна $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, и эта координата совершает гармонические колебания по нашему закону (ср. $A = 10$, задача 69). Начальный вектор $\overrightarrow{OM}$ как раз и называется векторной диаграммой рассматриваемого гармонического колебания (он полностью характеризует амплитуду и начальную фазу колебания, однако не несет информации о частоте ω).

6. Постройте векторные диаграммы следующих гармонических колебаний:

а) $2 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)$; б) $3 \sin \omega t$; в) $-\cos(\omega t + 5{,}3\pi)$.

---

[1] См.: А-10, п. 82.

7. Запишите в стандартном виде гармонические колебания частоты ω, векторные диаграммы которых заданы своими координатами:

а) $\overrightarrow{OM} = \vec{r}\,(1;\ 1)$; б) $\overrightarrow{OM} = \vec{r}\,(0;\ -2)$; в) $\overrightarrow{OM} = \vec{r}\,(-3;\ 4)$.

8. а) Покажите, что векторная диаграмма $\overrightarrow{OM}$ суммы двух гармонических колебаний $x_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$ и $x_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$ получается сложением векторных диаграмм $\overrightarrow{OM_1}$ и $\overrightarrow{OM_2}$ этих колебаний. ↓

б) Используя результат п. а), найдите амплитуду A и начальную фазу φ суммы $x_1(t) + x_2(t)$ рассматриваемых гармонических колебаний (выразите A и φ через A_1, φ_1, A_2, φ_2).

в) Используя векторные диаграммы, запишите гармоническое колебание $a \cos \omega t + b \sin \omega t$ в виде $A \cos(\omega t + \varphi)$. (Ср. с задачей 5 а).)

9. Найдите сумму трех гармонических колебаний:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) + A \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{2\pi}{3}\right) + A \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{4\pi}{3}\right). \downarrow$$

10. Используя векторные диаграммы, найдите амплитуды и начальные фазы следующих сумм гармонических колебаний:

а) $\cos(\omega t + \pi) - \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$; б) $\cos(\omega t + \pi) - 2\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$;

в) $2\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + 2\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)$. ↓

11. При каком значении φ сумма гармонических колебаний $x_1(t) = \cos \omega t$ и $x_2(t) = \cos(\omega t + \varphi)$ будет иметь амплитуду: а) $\sqrt{2}$; б) $\sqrt{3}$; в) 1; г) 2? В каждом из этих случаев определите начальную фазу φ_1 суммы колебаний.

12. В каких пределах может меняться амплитуда суммы двух гармонических колебаний одинаковой частоты и данных амплитуд A_1 и A_2? При каком соотношении между начальными фазами φ_1 и φ_2 этих колебаний амплитуда их суммы будет: а) наибольшей; б) наименьшей? ↓

13. а) Пусть $x_1(t)$ и $x_2(t)$ — гармонические колебания одной частоты ω. Докажите, что функции $x_1(t) - x_2(t)$ и $kx_1(x)$ (k — произвольное число) также будут гармоническими колебаниями частоты ω. Как по векторным диаграммам исходных колебаний построить векторные диаграммы этих новых колебаний? ↓

б) * Покажите, что если функция $x(t)$ задает ненулевое гармоническое колебание частоты ω, то функция $y(t) = x^2(t)$ не задает никакого гармонического колебания[1].

в)* Найдите все случаи, в которых произведение $x_1(t)\,x_2(t)$ гармонических колебаний $x_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$ и $x_2(t) =$

---

[1] В определенном выше смысле (см. начало параграфа).

$= A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$ одинаковой частоты ω тоже будет гармоническим колебанием. ↓

14*. Докажите, что сумма гармонических колебаний $x_1(t) = 2\cos t$ и $x_2(t) = \cos 2t$ не будет гармоническим колебанием. Найдите, в каких пределах меняется величина $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$. ↓

15*. Докажите, что сумма двух гармонических колебаний ненулевых амплитуд и разных частот ω_1 и ω_2 не может быть гармоническим колебанием. ↓

16*. Докажите, что сумма двух гармонических колебаний

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \text{ и } x_2(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

будет периодической функцией тогда и только тогда, когда частоты ω_1 и ω_2 соизмеримы (т. е. отношение $\omega_1/\omega_2 = m/n$ — рациональное число) или одна из амплитуд равна нулю. ↓

Напоминание[1]. В общее решение $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ дифференциального уравнения гармонических колебаний данной частоты ω входят две произвольные постоянные: A и φ. Для их определения задают два начальных условия, обычно $x(0) = x_0$ и $x'(0) = v_0$. Если рассматривать $x(t)$ как координату материальной точки, совершающей гармонические колебания, то это будут начальная координата и начальная скорость соответственно.

17. Материальная точка совершает гармонические колебания с частотой $\omega = 3$. Определите амплитуду и начальную фазу колебаний, если в момент времени $t = 0$ координата и скорость были равны: а) $x_0 = 4$, $v_0 = 0$; ↓ б) $x_0 = 0$, $v_0 = 3$; в) $x_0 = 1$, $v_0 = 3$.

18. Материальная точка совершает гармонические колебания с частотой $\omega = 2$. Определите ее координату и скорость в момент времени $t_0 = \pi/8$, если при $t = 0$ координата и скорость были равны: а) $x_0 = 0$, $v_0 = -2$; б) $x_0 = 2$, $v_0 = 0$. ↓

19. Пусть заданы начальные условия $x(0) = x_0$ и $x'(0) = v_0$ гармонического колебания $x(t)$ с данной частотой ω. Найдите амплитуду A и начальную фазу φ этого гармонического колебания (выразите A и φ через x_0 и v_0).

20. Амплитуда и частота гармонического колебания $x(t)$ равны $A = 2$ и $\omega = 1$, начальная координата равна $x_0 = 1$. Найдите начальную скорость $v_0 = x'(0)$ этого колебания. ↓

21. Частота гармонического колебания $x(t)$ равна $\omega = 15$, а скорость $v(t) = x'(t)$ при $t = 0$ равна $v_0 = -15$, при $t = \frac{\pi}{6}$ — $v_1 = 3$. Найдите амплитуду этого колебания. ↓

22. а) Определите начальные координату x_0 и скорость v_0 гармонического колебания $x(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t$.

б) Обратно, найдите коэффициенты a и b, если заданы начальные условия x_0 и v_0. ↓

Напоминание[1]. Второй закон Ньютона, которому под-

---

[1] См.: А-10, п. 80.

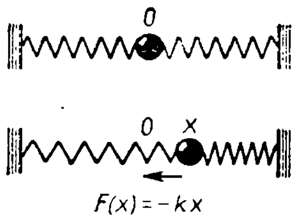


Рис. 46

чиняется движение шарика на пружине (рис. 46), записывается в виде

$$ma = -kx, \text{ или } mx'' = -kx; \qquad (4)$$

здесь $-kx = F(x)$ — величина упругой силы, действующей на шарик, если он находится в положении x; $k > 0$ — коэффициент жесткости пружины; знак «минус» перед kx соответствует тому, что упругая сила действует в направлении, противоположном смещению x шарика от положения равновесия; m—масса шарика. Соотношение (4) можно переписать так:

$$x'' = -\omega^2 x, \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Следовательно, шарик на пружине под действием упругой силы совершает гармонические колебания.

23. Шарик массой $m = 5$ г, прикрепленный к пружине, совершает гармонические колебания с частотой $\omega = 2$. Найдите коэффициент жесткости пружины. ↓

Для того чтобы отклонить шарик из положения равновесия $x = 0$ в некоторое положение x, нужно совершить работу против упругой силы, равную

$$U(x) = -\int_0^x F(u)\,du = \int_0^x ku\,du = \frac{1}{2}kx^2.$$

Принимается, что за счет произведенной работы шарик в положении x обладает *потенциальной энергией*, равной $U(x)$. (См. далее § 3, пояснение перед задачей 18; формулу для работы против переменной силы см. в § 3 гл. V.)

24. Проверьте непосредственным вычислением, что при колебании шарика массой m на пружине с коэффициентом жесткости k *полная механическая энергия*

$$E = T + U = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

сохраняется (т. е. не меняется во времени), причем эта энергия пропорциональна квадрату амплитуды колебания. ↓

Указание. Подставьте в выражение для энергии E значения $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, $v(t) = x'(t)$.

25*. Выведите закон сохранения энергии при гармонических колебаниях непосредственно из уравнения Ньютона (4), не используя представление $x(t)$ в виде $A\cos(\omega t + \varphi)$. ↓

Указание. Запишите зависимость энергии от времени в виде

$$E(t) = \frac{1}{2}mv^2(t) + \frac{1}{2}kx^2(t)$$

и вычислите производную $E'(t)$ по формуле дифференцирования сложной функции; затем учтите, что $mv' = mx'' = -kx$, и воспользуйтесь признаком постоянства функции (*А*-10, п. 98).

26*. Пусть $x(t)$ — *произвольное решение* дифференциального уравнения гармонических колебаний, или уравнения (4) (здесь мы не предполагаем, что $x(t)$ может быть записано в виде $A\cos(\omega t + \varphi)$!).

а) Покажите, что существует *тригонометрическое решение* $x_{тр}(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ уравнения (4) такое, что $x_{тр}(0) = x(0)$ и $x'_{тр}(0) = x'(0)$.

б) Используя результат задачи 13, покажите, что к разности этих двух решений $z(t) = x(t) - x_{тр}(t)$ применим закон сохранения энергии: если материальная точка движется по закону $x = z(t)$, то ее полная энергия E сохраняется.

в) Выведите из пп. а) и б), что при всех $t \in \boldsymbol{R}$ $z(t) = 0$, т. е. что произвольное решение $x(t)$ при всех значениях t совпадает с выбранным в п. а) тригонометрическим решением. ↓

З а м е ч а н и е. В итоге будет доказано принятое ранее без доказательства утверждение: *любое решение* уравнения гармонических колебаний $x'' = -\omega^2 x$ может быть записано в виде $A\cos(\omega t + \varphi)$.

27*. Пусть шарик массой m подвешен на пружине с коэффициентом жесткости k, так что к упругой силе $F(x) = -kx$ добавляется сила тяжести $F_1 = -mg$ (g — ускорение свободного падения). Второй закон Ньютона приводит к дифференциальному уравнению

$$mx'' = -kx - mg, \text{ или } x'' = -\omega^2 x - g. \qquad (5)$$

(Ось Ox направлена вертикально вверх; начало отсчета O совпадает с положением равновесия шарика на пружине при отсутствии силы тяжести.) Найдите закон движения шарика, т. е. общий вид решений дифференциального уравнения (5).

У к а з а н и е. Можно провести рассуждения, аналогичные приведенным в указании к задаче 15 а) из § 1. Другой способ: определите положение равновесия шарика, примите его за новое начало отсчета (новой координаты y), выразите y через x и запишите дифференциальное уравнение для $y(t)$; найдите $y(t)$, а затем и $x(t)$.

28*. (*Вынужденные колебания.*) Допустим, что к упругой силе $F(x) = -kx$ добавляется внешняя (*вынуждающая*) сила, меняющаяся по гармоническому закону: $F_1 = F_1(t) = b\cos\nu t$. Пусть *вынуждающая частота* ν отлична от *собственной частоты* $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Тогда второй закон Ньютона приводит к дифференциальному уравнению вынужденных колебаний, имеющему вид:

$$mx'' = -kx + b\cos\nu t, \text{ или } x'' = -\omega^2 x + a\cos\nu t \quad \left(a = \frac{b}{m}\right). \qquad (6)$$

а) Докажите, что разность $z(t) = x(t) - x_1(t)$ любых двух решений дифференциального уравнения (6) удовлетворяет укороченному уравнению $z'' = -\omega^2 z$. Выведите отсюда, что общее решение уравнения (6) представляется в виде $x(t) = x_1(t) + A\cos(\omega t+\varphi)$, где $x_1(t)$ — любое частное решение уравнения (6).

б) Подберите частное решение уравнения (6) в виде $x_1(t) = C\cos\nu t$ и запишите общий вид решений дифференциального уравнения (6). Найдите решение, удовлетворяющее начальным условиям: $x(0) = 0$, $v(0) = 0$.

в) Покажите, что независимо от амплитуды A слагаемого $A\cos(\omega t+\varphi)$ в общем решении $x(t)$ уравнения (6) максимальное значение $x(t)$ стремится к бесконечности, если вынуждающая частота ν стремится к собственной частоте ω. (Таким образом, при примерном совпадении вынуждающей частоты с собственной частотой происходит «раскачивание» — в физике этот эффект называется *резонансом*.)

г) Покажите, что при $A \neq 0$ вынужденные колебания никогда не будут гармоническими. В каком случае вынужденные колебания будут периодическими?

д) Выполняется ли закон сохранения полной механической энергии ($E = mv^2/2 + kx^2/2$) в случае вынужденных колебаний? ↓

§ 3. Дифференциальные уравнения высших порядков. Второй закон Ньютона как дифференциальное уравнение

В записи дифференциального уравнения могут участвовать и производные высших порядков, начиная со второй производной. Общее решение дифференциального уравнения n-го порядка, как правило, будет зависеть от n произвольных постоянных, которые определяются из каких-нибудь n условий. Мы ограничимся простейшими примерами и более подробно остановимся на втором законе Ньютона — одном из важнейших примеров дифференциальных уравнений второго порядка.

(1—3). Запишите общие решения для данных дифференциальных уравнений.

1. а) $y'' = 0$; б) $y'' = 1$; в) $y'' = 12x - 2$. ↓
2. а) $y'' = \sin x$; б) $y'' = e^x$; в) $y'' = e^x + e^{-x}$. ↓
3*. а) $y''' = 0$; б) $y''' = 1$; в) $y''' = x$. ↓

(4—5). Найдите решения дифференциальных уравнений, удовлетворяющие данным условиям.

4. $y'' = 0$; а) $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$; б) $y(0)=1$, $y(1)=2$. ↓
5*. $y''' = 0$; $y(0) = y(2) = 0$, $y'(0) = 1$. ↓

6*. Найдите все функции $y(x)$, n-я производная которых равна 0 на всей числовой прямой (иными словами, найдите общий вид решений дифференциального уравнения $y^{(n)} = 0$).

Движение материальной точки массы m вдоль оси Ox подчиняется второму закону Ньютона:

$$ma = F, \text{ или } mx'' = F. \qquad (1)$$

Основная задача механики, которая состоит в отыскании по известной силе F закона движения точки $x = x(t)$, таким образом, сводится к решению дифференциального уравнения второго порядка (1). Две произвольные постоянные, входящие в общее решение этого уравнения, определяются из начальных условий: $x(0) = x_0$ и $v(0) = x'(0) = v_0$. В § 2 был подробно рассмотрен один из частных случаев уравнения (1) — дифференциальное уравнение гармонических колебаний $mx'' = -kx$, или $x'' = -\omega^2 x$. В этом параграфе мы приведем ряд других примеров.

7. Движение в отсутствие силы называется *свободным*; оно описывается дифференциальным уравнением

$$mx'' = 0, \text{ или просто } x'' = 0. \downarrow$$

а) Напишите общий вид закона $x = x(t)$ свободного движения.

б) Найдите закон свободного движения с начальными условиями $x(0) = 10$, $v(0) = -3$. В какой момент времени $x(t) = -17$?

8. Если сила $F = F_0$ постоянна, то уравнение Ньютона записывается в виде

$$mx'' = F_0, \text{ или } x'' = a,$$

где $a = F_0/m$ — постоянное ускорение; поэтому такое движение называют *равноускоренным*[1].

а) Запишите общий вид закона $x = x(t)$ равноускоренного движения с данным ускорением a.

б) Пусть $a = -2$, $x(0) = 10$, $v(0) = 3$. Найдите закон движения. Выясните, в какой момент времени: 1) точка вернется в исходное положение; 2) координата x будет равна 0; 3) координата $x(t)$ будет наибольшей. Нарисуйте график движения (на координатной плоскости Otx).

9. Частный случай равноускоренного движения — *свободное падение* под действием силы тяжести:

$$F_0 = -mg, \ a = -g, \ x'' = -g.$$

(Ось Ox направлена вертикально вверх; за начало отсчета удобно выбирать уровень поверхности Земли.)

а) Напишите общий вид закона свободного падения.

б) Найдите, за какое время камень, отпущенный с высоты h, достигнет Земли. $\downarrow$

(10—13). В этих задачах ускорение свободного падения g возьмите равным 10 м/с^2.

10. Камень бросают вниз с высоты 160 м с начальной скоростью 2 м/с. Через какое время камень ударится о Землю? Какова будет его скорость в этот момент? $\downarrow$

---

[1] Напомним, что мы рассматриваем движения только вдоль прямой.

11. Мяч бросают с Земли вверх. При какой минимальной скорости бросания мяч достигнет высоты 18 м? ↓

12. Камень, брошенный вертикально вверх, ударился о Землю через время t. Какой высоты он достиг? ↓

13. Камень отпускают с высоты 24 м. Второй камень бросают на 1 с позже. Какова должна быть скорость второго камня, для того чтобы оба камня достигли Земли одновременно? ↓

14. Пусть масса материальной точки $m = 1$, а сила меняется по закону $F(t) = 4 - 12t$. Найдите закон движения точки, если $x(0) = 0$, $v(0) = 20$. В какой момент времени скорость будет: а) равна 0; б) максимальна? Нарисуйте график движения и график скорости.

15*. Сила *вязкого трения* считается пропорциональной скорости движения и направленной в сторону, противоположную направлению движения: $F_{тр} = -\lambda v = -\lambda x'$, где $\lambda > 0$ — коэффициент трения. *Свободное движение с трением* описывается дифференциальным уравнением

$$mx'' = F_{тр} = -\lambda x', \quad \text{или} \quad x'' = -\alpha x', \quad \alpha = \frac{\lambda}{m}. \qquad (2)$$

а) Найдите общий вид решений уравнения (2).

б) Запишите закон свободного движения с трением, если даны начальные условия: $x(0) = x_0$, $v(0) = v_0$. Постройте график движения $x = x(t)$, взяв $\alpha = 1$, $x_0 = 0$, $v_0 = 1$.

в) Докажите, что в случае свободного движения с трением при $t \to \infty$ координата $x(t)$ стремится к некоторому пределу x_1. Найдите x_1, зная коэффициент трения α и начальные условия x_0, v_0. К какому пределу стремится скорость $v(t) = x'(t)$ при $t \to \infty$? Дайте физическое истолкование полученных результатов. ↓

У к а з а н и е к п. а). Напишите сначала дифференциальное уравнение для скорости $v(t) = x'(t)$ и найдите $v(t)$.

16*. *Свободное падение с трением* описывается дифференциальным уравнением

$$mx'' = -mg - \lambda x', \text{ или } x'' = -g - \alpha x', \quad \alpha = \frac{\lambda}{m}. \qquad (3)$$

а) Найдите общий вид решений уравнения (3).

б) Запишите закон свободного падения с высоты $x_0 = h$ с начальной скоростью $v(0) = 0$. Постройте график $x = x(t)$ такого падения, взяв $h = 10$, $\alpha = 1$, $g = 10$.

в) Покажите, что при свободном падении с трением скорость $v(t)$ при $t \to \infty$ стремится к некоторому пределу v_1. Найдите v_1 для начальных условий: $x_0 = h$, $v_0 = 0$. ↓

У к а з а н и е к п. а). П е р в ы й с п о с о б: найдите сначала $v(t)$ (уравнение для $v(t)$ выглядит так же, как дифференциальное уравнение (4) из задачи 15 а) § 1). В т о р о й с п о с о б: покажите, что общее решение уравнения (3) записывается в виде $x(t) = x_1(t) + z(t)$, где $z(t)$ — общее решение уравнения $z'' =$

$= -\alpha z$, а $x_1(t)$ — любое частное решение уравнения (3). Вид $z(t)$ найден в предыдущей задаче (15 а)), а частное решение отыскивается в виде $x_1(t) = Bt$.

17*. а) Выведите из уравнения свободного падения $mx'' = -mg$ закон сохранения полной энергии: докажите, что величина

$$E = T + U = \frac{1}{2}mv^2 + mgx \tag{4}$$

не меняется во времени (здесь $U = mgx$ — потенциальная энергия материальной точки на высоте x).

б) Сохраняется ли полная энергия (4) при свободном падении с трением? ↓

Указание к п. а). Вычислите производную $E'(t)$ и воспользуйтесь признаком постоянства функции (А-10, п. 98).

Допустим, что действующая на материальную точку сила F зависит только от координаты точки x и не зависит ни от скорости точки, ни от времени: $F = F(x)$. Соответствующее дифференциальное уравнение Ньютона

$$mx'' = F(x)$$

удается исследовать с помощью закона сохранения энергии. Именно считается, что в каждом своем положении x материальная точка обладает некоторой *потенциальной энергией* $U(x)$, причем приращение потенциальной энергии на отрезке от a до b принимается равным работе против переменной силы $F(x)$ при перемещении точки из положения a в положение b:

$$U(b) - U(a) = A\Big|_a^b = -\int_a^b F(x)\,dx$$

(см. А-10, п. 105, а также § 3 предыдущей главы). Сравнивая эту формулу с формулой Ньютона — Лейбница, выводим, что в качестве $U(x)$ следует взять первообразную функции $-F(x)$:

$$U'(x) = -F(x).$$

Как и любая первообразная, потенциальная энергия определяется с точностью до постоянного слагаемого, которое обычно выбирается из физических соображений (точнее, из соображений удобства).

18*. По данной силе $F = F(x)$ найдите потенциальную энергию:

а) $F(x) = -mg$ (возьмите $U(0) = 0$);
б) $F(x) = -kx$ (возьмите $U(0) = 0$);
в) $F(x) = -\gamma\dfrac{mm_0}{x^2}$, $x > 0$ (считайте, что $\lim\limits_{x\to\infty} U(x) = 0$);
г) $F(x) = -mg\sin x$.

(Случаи а), б), в) соответствуют силе притяжения у поверхности Земли, упругой силе и ньютоновой силе притяжения массы m массой m_0, закрепленной в точке $x = 0$.)

19*. Выведите из уравнения Ньютона $mx'' = F(x)$ и из определяющего потенциальную энергию уравнения $U'(x) = -F(x)$ *закон* *сохранения полной механической энергии*

$$E = T + U(x) = \frac{1}{2} mv^2 + U(x),$$

докажите, что величина $E(t) = \frac{mv^2(t)}{2} + U(x(t))$ не зависит от времени (постоянна); здесь $x(t)$ — закон движения материальной точки, $v(t) = x'(t)$ — скорость.

У к а з а н и е. Используя формулу для производной сложной функции, найдите $E'(t)$.

Опишем теперь, как с помощью закона сохранения энергии можно получить качественное представление о движении материальной точки при заданной силе $F(x)$. Если материальная точка находится в положении x и имеет скорость v, то поставим ей в соответствие точку на координатной плоскости Oxv с координатами $(x; v)$ (по одной оси откладывается координата x, по другой — скорость v). При движении материальной точки x и v меняются, поэтому точка $M(x; v)$ также изменяет свое положение, описывая на плоскости Oxv некоторую кривую — так называемую *фазовую траекторию* движения. Из закона сохранения энергии вытекает, что при этом величина $E = \frac{mv^2}{2} + U(x)$ не меняется — равна некоторой постоянной h; поэтому фазовая траектория должна лежать на кривой, которая в системе координат Oxv задается уравнением

$$\frac{1}{2} mv^2 + U(x) - h,$$

на так называемой *линии уровня энергии*, Γ_h. Нарисовав линии уровня энергии при всевозможных значениях h, мы сможем при каждом значении энергии выяснить, как меняются $x(t)$ и $v(t)$ (например, в каких пределах). Для изображения линий уровня энергии удобно задающее их уравнение переписать в виде

$$v = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(h - U(x))}.$$

20*. Нарисуйте линии уровня энергии на плоскости Oxv в случаях а) и б) из задачи 18.

21*. Потенциальная энергия $U = U(x)$ задана своим графиком (рис. 47). Постройте под этим графиком линии уровня энергии

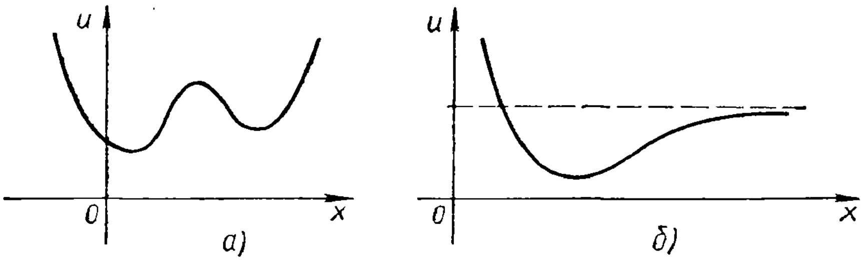


Рис. 47

Глава VII

УРАВНЕНИЯ, НЕРАВЕНСТВА, СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

§ 1. Предложения с одной переменной. Равносильность и следование предложений

Напоминание[1]. Пусть $A(x)$ — предложение (уравнение или неравенство) с одной переменной x. Число x_0 называется *решением* уравнения или неравенства $A(x)$, если при подстановке во все входящие в $A(x)$ выражения числа x_0 вместо переменной x получается истинное высказывание (верное числовое равенство или неравенство). Решения уравнений часто называют корнями этих уравнений. Решить уравнение или неравенство $A(x)$ — значит найти множество всех его решений.

Два предложения $A(x)$ и $B(x)$ называются *равносильными* (иногда говорят «*эквивалентными*»), если множество решений $A(x)$ совпадает с множеством решений $B(x)$. В этом случае пишут:

$$«A(x) \Leftrightarrow B(x)».$$

(1—4). Укажите, какие из следующих пар предложений равносильны, а какие — нет.

1. а) $x = 0$ и $x^2 = 0$; б) $x = 1$ и $x^2 = 1$; в) $x = 1$ и $\sqrt{x} = 1$.

2. а) $x = 0$ и $x^2 \leqslant 0$; б) $x = 0$ и $x^2 \geqslant 0$; в) $x^2 + 1 = 0$ и $x^2 < 0$.

3. а) $x = 0$ и $2^x = 1$; б) $x^2 = -1$ и $2^x = -1$; в) $x^2 \geqslant 0$ и $2^x \geqslant 0$.

4. а) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ и $x^2 \geqslant 0$; б) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ и $\sqrt{x} \geqslant 0$; в) $\sin^2 x + \cos^2 x = 2$ и $\sqrt{x} = -1$.

5. Приведите примеры неравносильных пар уравнений указанного вида:

а) $f(x) = g(x)$ и $f(x)h(x) = g(x)h(x)$;
б) $f(x) = g(x)$ и $f^2(x) = g^2(x)$;
в) $f(x) = g(x)$ и $f(x) + h(x) = g(x) + h(x)$.

6. Приведите примеры неравносильных пар неравенств указанного вида:

а) $f(x) > g(x)$ и $f(x)h(x) > g(x)h(x)$;
б) $f(x) > g(x)$ и $f^2(x) > g^2(x)$;
в) $f(x) > g(x)$ и $\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)}$.

---

[1] См.: А-6, п. 5, А-10, п. 119.

Основной метод решения уравнений и неравенств состоит в переходе от исходного предложения к предложениям более простого вида, равносильным исходному. При этом часто от уравнений и неравенств приходится переходить к системам уравнений и неравенств или их совокупностям. *Системой* двух предложений $A(x)$ и $B(x)$ называется предложение «$A(x)$ и $B(x)$», которое обычно записывают с помощью фигурной скобки:

$$\begin{cases} A(x) \\ B(x). \end{cases} \tag{1}$$

Иногда вместо фигурной скобки пишут союз «и». Число x_0 называется *решением системы*, если оно является решением обоих предложений $A(x)$ и $B(x)$. Множество решений системы является, таким образом, пересечением множеств решений $A(x)$ и $B(x)$.

7. Решите следующие системы:

а) $\begin{cases} x^2-3x+2=0, \\ 2x-3 \geqslant 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2-3x+2 \leqslant 0, \\ |2x| > 3; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \sin x = 0, \\ |x| \leqslant 3. \end{cases}$

Совокупностью (иногда говорят «*объединением*») двух предложений $A(x)$ и $B(x)$ называется предложение «$A(x)$ или $B(x)$», которое иногда записывают с помощью квадратной скобки:

$$\left[\begin{array}{l} A(x) \\ B(x). \end{array}\right. \tag{2}$$

Чаще вместо квадратной скобки пишут союз «или». Число x_0 называется *решением совокупности* (2), если x_0 является решением хотя бы одного из предложений $A(x)$ или $B(x)$. Таким образом, множество решений совокупности (2) является объединением множеств решений $A(x)$ и $B(x)$.

(8—9). Решите следующие совокупности предложений:

8. а) $\left[\begin{array}{l} x^2-3x+2=0, \\ 2x+3=0, \end{array}\right.$ б) $\left[\begin{array}{l} x^2-3x+2=0, \\ |2x| > 3; \end{array}\right.$ в) $\left[\begin{array}{l} \sin x = 0, \\ \cos x = 0. \end{array}\right.$

9. а) $\begin{cases} x \geqslant 0, \\ x^2 = 1 \end{cases}$ или $\begin{cases} x < 0, \\ x^2 = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x > 0, \\ x-1 > 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x < 0, \\ x-1 < 0. \end{cases}$

Можно рассматривать системы и совокупности трех и более предложений, а также совокупности систем (см. задачу 9) или системы совокупностей предложений. Определение равносильности предложений, данное в начале параграфа, дословно переносится на случай систем и совокупностей.

10. Убедитесь в равносильности следующих предложений:

а) (переход от уравнения к совокупности уравнений)

$$p(x)q(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} p(x)=0, \\ q(x)=0 \end{array}\right.$$

(в этом случае мы считаем $p(x)$ и $q(x)$ всюду определенными);

б) (освобождение от знаменателя в уравнениях)

$$\frac{p(x)}{q(x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} p(x) = 0, \\ q(x) \neq 0; \end{cases}$$

в) (переход от неравенства к совокупности систем неравенств)

$$p(x)\, q(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases} p(x) \geqslant 0, \\ q(x) \geqslant 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} p(x) \leqslant 0, \\ q(x) \leqslant 0; \end{cases}$$

г) (освобождение от знаменателя в неравенствах)

$$\frac{p(x)}{q(x)} \geqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases} p(x) \geqslant 0, \\ q(x) > 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} p(x) \leqslant 0, \\ q(x) < 0. \end{cases}$$

Замечание. Указанные в этой задаче «схемы равносильности» позволяют свести сложную задачу к системам и совокупностям более простых.

(11—13). Решите уравнения.

11. а) $(x+3)(x^2-3x+2)=0$; б) $2^x(x^2-1)=0$; в) $x \cos x = 0$.

12. а) $(x^2-1)\sqrt{x} = 0$; б) $2^x \lg x = 0$; в) $\sin x \sqrt{\cos x} = 0$.

13. а) $\frac{x^2-3x+2}{x-1} = 0$; б) $\frac{x^2-1}{\lg x} = 0$; в) $\frac{\sin x}{x} - 0$.

14. Сведите неравенства к эквивалентным совокупностям систем: а) $p(x)\, q(x) < 0$; б) $\frac{p(x)}{q(x)} \leqslant 0$; в) $\frac{p(x)\, q(x)}{r(x)} \geqslant 0$.

(15—16). Решите неравенство.

15. а) $(x+2)(x^2-1) \geqslant 0$; б) $\frac{x+2}{x^2-1} \leqslant 0$; в) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} \geqslant 0$.

16. а) $(x^2-1)\lg x \geqslant 0$; б) $(2^x-1)(x-1) \geqslant 0$; в) $\frac{\lg x}{x+1} \geqslant 0$.

Таким образом, при решении сложных неравенств полезно перенести все входящие в него выражения в одну часть неравенства и попытаться разложить полученное выражение на множители. Если в неравенство входят дробные выражения, то их целесообразно привести к общему знаменателю.

(17—18). Решите неравенство.

17. а) $x + \frac{1}{x} \geqslant \frac{5}{2}$; б) $\frac{2}{x} - \frac{1}{x-1} > 1$; в) $\frac{1}{x+2} + \frac{2}{x+3} < \frac{3}{x+4}$.

18. а) $x \lg x + 1 > x + \lg x$; б) $x^2 \cdot 2^x + 4 > 4x^2 + 2^x$.

Остановимся отдельно на разложении многочленов на множители. Здесь полезно знать, что если x_0 — корень многочлена $p(x)$ от переменной x (т. е. если $p(x_0) = 0$), то $p(x)$ разлагается на множители, причем один из множителей есть $x - x_0$. Вынести этот множитель в конкретных случаях можно способом группировки. Например, $x = -1$ — корень многочлена $x^3 - 2x^2 + 3$; разложим этот многочлен на множители способом группировки: $x^3 - 2x^2+3= = (x^3 + x^2) - (3x^2 + 3x) + (3x + 3) = (x + 1)(x^2 - 3x + 3)$; можно было также записать $x^3 - 2x^2 + 3 = (x^3 + 1) - 2(x^2 - 1)$ и воспользоваться формулами сокращенного умножения. Отыскивать рациональные корни уравнений с целыми коэффициентами можно с помощью теоремы, приведенной в § 1 главы II.

(19—20). Разложите на множители левые части уравнений и затем решите эти уравнения.

19. а) $x^3 + 2x^2 - 3 = 0$; б) $x^3 - 2x - 1 = 0$;
в) $x^4 + x^3 + x^2 - x - 2 = 0$.

20*. а) $x^4 - 2x^2 - 8x - 3 = 0$; $\downarrow$ б) $x^4 + x^3 - 2x^2 + 12x - 16 = 0$.

Указание к задаче 20. Разложите левые части уравнений на два множителя второй степени.

21. Решите неравенство:

а) $x^3 - 2x - 1 > 0$; б)* $x^4 - 2x^2 - 8x - 3 < 0$.

При разложении на множители левых частей тригонометрических уравнений пользуются формулами преобразования суммы и разности одноименных тригонометрических функций в произведение:

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};\quad \cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$
$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};\quad \sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

22. Представьте в виде произведения выражение:

а) $\cos\alpha + \sin\beta$; б) $\cos\alpha - \sin\beta$; в) $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta$. $\downarrow$

(23—25). Решите уравнение, раскладывая его левую часть на множители.

23. а) $\cos x + \cos 5x = 0$; $\downarrow$ б) $\cos 3x = \cos 7x$;
в) $\sin x - \sin 17x = 0$.

24. а) $\cos x + \sin 5x = 0$; б)* $\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} x$; в) *$\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} 3x$. $\downarrow$

25*. а) $\sin x \cos 5x = \sin 9x \cos 3x$; б) $\sin 3x = \sin 2x + \sin x$. $\downarrow$

Напоминание[1]. Говорят, что из предложения $A(x)$ *следует* предложение $B(x)$ (или «$B(x)$ *является следствием* $A(x)$»), если любое решение $A(x)$ является решением $B(x)$, т. е. если множество решений $A(x)$ является подмножеством решений $B(x)$. В этом случае пишут: «$A(x) \Longrightarrow B(x)$».

(26—28). Следует ли второе предложение из первого?

26. а) $x - 1 = 0$ и $x = 1$; б) $x = 1$ и $x^2 = 1$;
в) $x^2 = 1$ и $x = 1$.

27. а) $x = 0$ и $x > -1$; б) $x > 1$ и $x^2 > 1$;
в) $x > -1$ и $x^2 > -1$.

---

[1] См.: А-7, п. 20.

28. а) $x = 0$ и $\operatorname{tg} x = 0$; б) $x^2 < 0$ и $x = 1$;
в) $x^2 + 1 = 0$ и $\sin x = 0$.

(29—30). Всегда ли верны следования?

29. а) $f(x) = g(x) \Longrightarrow f(x)\,h(x) = g(x)\,h(x)$;
б) $f(x) = g(x) \Longrightarrow f(x) + h(x) = g(x) + h(x)$;
в) $f(x) = g(x) \Longrightarrow f^2(x) = g^2(x)$.

30. а) $f(x) > g(x) \Longrightarrow f^2(x) > g^2(x)$;
б) $f(x) > g(x) \Longrightarrow \sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)}$;
в) $\log_a f(x) > 0 \Longrightarrow f(x) > 1$.

В простых случаях уравнение с функциями $\sqrt{x}$ и $\log_a x$ можно решать следующим образом: перейти к следствиям, найти корни последнего из полученных уравнений, произвести проверку найденных значений путем подстановки в исходное уравнение. Отметим, что при решении неравенств такой подход не помогает: бесконечное множество решений, как правило, проверить не удается.

31. Решите уравнение, переходя к следствиям (с последующей проверкой): а) $\sqrt{x} = x - 2$; б) $\log_2 x = \log_2 (x^2 + x - 1)$.

Замечание. Как показывает пример уравнения 31 а), проверить, принадлежат ли полученные в итоге корни области допустимых значений уравнения (т. е. пересечению областей допустимых значений входящих в уравнение выражений), недостаточно: полученное значение может входить в эту область, но не удовлетворять уравнению.

§ 2. Простейшие уравнения. Замена переменных

(1—3). Напишите формулу для решения уравнения.

1. Простейшие алгебраические уравнения: а) $ax + b = 0$ $(a \neq 0)$; б) $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$; в) $x^n = c$ $(n \in \mathbf{N})$.

2. Простейшие показательные и логарифмические уравнения:
а) $a^x = b$; б) $\log_a x = b$.

3. Простейшие тригонометрические уравнения:
а) $\cos x = a$; б) $\sin x = a$; в) $\operatorname{tg} x = a$.

(4—6). Решите уравнение.

4. а) $2^x = 3^{x+1}$; б) $2^{x^2-3x+4} = 4$; в) $2^{\sin x} = 1$.

5. а) $\log_2 (x^2 - 3x + 6) = 2$; б) $\log_2 \sin x + 1 = 0$;
в) $\log_3 (2^x - 1) = 1$.

6*. а) $\sin \dfrac{1}{x-1} = 0$; б) $\cos (x^2 - 7) = 1$; в) $\operatorname{tg} (\sin x) = 1$.

По существу, уравнения задач 4—6 заменой переменных сводятся к простейшим: они имеют вид $f(g(x)) = a$, причем если обозначить $g(x)$ через y, то уравнение $f(y) = a$ решается по формулам из задач 1—3; найдя из этого уравнения значения y, мы решаем уравнение замены $g(x) = y$ и находим соответствующие значения x.

(7—17). Найдите подходящую замену и решите уравнение.

7. а) $x^4 - x^2 - 2 = 0$; б) $x^6 + 2x^3 - 8 = 0$.

8. а) $(x+1)^2 + \dfrac{6}{x^2+2x} = -4$; ↓

б) $\dfrac{1}{(x+2)(x-7)} + \dfrac{2}{(x-2)(x-3)} = 0{,}1$.

9*. а) $\dfrac{6x}{x^2+2x+3} + \dfrac{11x}{x^2+7x+3} = 2$; ↓

б) $\dfrac{2x}{(x+2)(x-6)} + \dfrac{2x}{(x+3)(x-4)} = 1$. ↓

10*. а) $x^2 + \dfrac{1}{x^2} + 2\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = 6$; б) $x^3 + \dfrac{1}{x^3} = 6\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$. ↓

11*. а) $x^4 + 2x^3 - 6x^2 + 2x + 1 = 0$; б) $x^4 + 3x^3 + \dfrac{1}{4}x^2 - 3x + 1 = 0$.

12*. а) $x^4 + (x+2)^4 = 82$; б) $(x+1)(x+2)(x+4)(x+5) = 40$. ↓

13*. а) $4^x - 2^{x+1} - 3 = 0$; б) $3^{3x} + 3^{2x+1} = 3^x + 3$.

14*. а) $\lg^2(x^2) + \lg x - 1 = 0$; б) $\log_x 2 + \log_2 x = \dfrac{5}{2}$.

15. а) $\cos^2 x = \sin x$; б) $\cos 2x = \sin x + 1$.

16. а) $2\sin x + 3\cos x = 0$; б) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \dfrac{5}{2}$.

17. а) $\sin 2x + \sin x \cos x = 1$; б) $\sin 3x + \sin x = 0$. ↓

Специфическая замена делается в так называемых *однородных* уравнениях (показательных и тригонометрических). Многочлен от двух переменных a и b называется однородным, если он является суммой одночленов одинаковой степени: например, однородным будет многочлен

$$a^4 - 2a^3b + \frac{1}{3}a^2b^2 + b^4.$$

Заметим, что если разделить однородный многочлен на старшую степень одной из переменных, например b, и обозначить отношение $\dfrac{a}{b}$ через t, то получится многочлен от t. В нашем примере

$$\frac{a^4}{b^4} - 2\frac{a^3}{b^3} + \frac{1}{3}\frac{a^2}{b^2} + 1 = t^4 - 2t^3 + \frac{1}{3}t^2 + 1.$$

Переменные a и b здесь можно заменить функциями от какой-то переменной x: скажем, выражение $3^{x+1} \cdot 2^x + 4^x$ однородно относительно $a = 3^x$ и $b = 2^x$ (равно $3ab + b^2$), выражение $2\cos^2 x + 3\sin x \cos x$ однородно относительно $a = \cos x$; $b =$

$= \sin x$. Уравнения вида $f(x) = 0$ с однородными левыми частями можно решать заменой $\frac{a}{b} = t$, однако, прежде чем делать замену, нужно отдельно рассмотреть случай $b = 0$.

(18—20). Решите однородные (или сводящиеся к однородным) уравнения.

18. а) $9^x = 6^x + 4^{x+0,5}$; б) $8^x + 18^x = 2 \cdot 27^x$. ↓

19. а) $\sin^2 x + 3 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x = 0$;

б) $2 \sin^2 x + 3 \sin x \cos x + 3 \cos^2 x = 1$. ↓

20. а) $\sin^2 x + 2 \sin 2x + 3 \cos^2 x = 0$;

б) $\frac{1}{2} \cos 2x + 1 + \sin 2x = 0$.↓

В случае, когда определен $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$, имеют место формулы:

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}; \quad \sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}; \quad \operatorname{tg} x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}.$$

Поэтому в любом уравнении, связывающем переменные $\sin x$, $\cos x$ и $\operatorname{tg} x$, можно сделать замену $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ (так называемую «универсальную подстановку»), после чего получится уравнение относительно переменной t. Прежде чем делать универсальную подстановку, нужно отдельно рассмотреть случай, когда $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ не определен $\left(\cos \frac{x}{2} = 0, \text{ т. е. } x = \pi + 2\pi k, \ k \in \mathbf{Z}\right)$, т.е. нужно проверить эти значения x непосредственной подстановкой в исходное уравнение.

(21—22). С помощью универсальной подстановки решите уравнение.

21*. а) $\cos x + \sin x = 1$; ↓ б) $3 \cos x - 4 \sin x = 5$;

в) $\sin x - 2 \cos x = 2$. ↓

22*. а) $\cos 2x + \operatorname{tg} x = 1$; б) $\sin 2x + \operatorname{ctg} x = 2$. ↓

23*. С помощью универсальной подстановки исследуйте общее уравнение, линейное относительно $\cos x$ и $\sin x$: $a \cos x + b \sin x = c$ (выясните, при каких значениях a, b, c есть решения, и выпишите их). ↓

При решении уравнений, симметричных относительно $\cos x$ и $\sin x$, часто помогает замена $y = \cos x + \sin x$ (при этом, например, $\cos x \sin x = 0,5 (\cos x + \sin x)^2 - 0,5 = 0,5y^2 - 0,5$; $\cos^3 x + \sin^3 x = (\cos x + \sin x)(\cos^2 x - \cos x \sin x + \sin^2 x) = y(1,5 - 0,5y^2)$ и т. д.). После того как найден y, уравнение замены можно решить с помощью универсальной подстановки или пользуясь тем, что $y = \cos x + \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

(24—27). Решите уравнение.

24*. а) $\cos x + \sin x + \cos x \sin x + 1 = 0$;

б) $\cos x + \sin x + \sin 2x + 1 = 0$.

25*. а) $\sin x - \cos x + \sin x \cos x = \frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{\sin x + \cos x} = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$.↓

26*. а) $\cos x + \sin x = \cos^3 x + \sin^3 x$; б) $\cos^3 x + \sin^3 x = \cos 2x$. ↓

27*. а) $\cos^4 x + \sin^4 x = \frac{1}{2}$; ↓ б) $\cos^8 x + \sin^8 x = \frac{17}{32}$.

§ 3. Системы уравнений с несколькими переменными

Напоминание[1]. Пусть $A(x; y)$ — предложение (уравнение, неравенство, система, совокупность уравнений, неравенств и систем) с двумя переменными. *Решением* $A(x; y)$ называется упорядоченная пара чисел $(x_0; y_0)$, при подстановке которых вместо переменных x, y предложение $A(x; y)$ становится истинным высказыванием. Решить $A(x; y)$ — значит найти множество всех его решений.

Предложения $A(x; y)$ и $B(x; y)$ называются *равносильными* (или эквивалентными), если множество решений $A(x; y)$ совпадает с множеством решений $B(x; y)$. В этом случае пишут: «$A(x; y) \Leftrightarrow B(x; y)$». Говорят, что из предложения $A(x; y)$ следует предложение $B(x; y)$, если множество решений $A(x; y)$ содержится в множестве решений $B(x; y)$. В этом случае пишут: «$A(x; y) \Longrightarrow B(x; y)$». Аналогичным образом определяются те же понятия в случае трех или большего числа переменных.

В этом параграфе мы остановимся на методах решения систем уравнений с двумя и большим числом переменных.

1. Докажите равносильность предложений:

а) правило сложения: $\begin{cases} f(x; y) = g(x; y) \\ f_1(x; y) = g_1(x; y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x; y) = g(x; y) \\ f_1(x; y) + kf(x; y) = g_1(x; y) + kg(x; y) \end{cases}$

(здесь k — любое действительное число);

б) правило подстановки: $\begin{cases} y = f(x) \\ F(x; y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ F(x; f(x)) = 0; \end{cases}$

в) правило перехода к совокупности:

$$\begin{cases} f(x; y)\, g(x; y) = 0 \\ F(x; y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x; y) = 0 \\ F(x; y) = 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} g(x; y) = 0 \\ F(x; y) = 0. \end{cases}$$

Конечно, правило сложения справедливо для систем с любым числом переменных. На нем основан изучаемый в X классе метод Гаусса решения систем линейных уравнений (метод последовательного исключения переменных).

[1] См.: А-10, п. 119.

2. Решите методом Гаусса системы:

а) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 8, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 8, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 + x_4 - 6x_5 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 - 4x_5 = 0. \end{cases}$

3*. Используя метод Гаусса, выясните, при каких значениях параметра a система не будет иметь решений (несовместна); при каких значениях a решение единственно; при каких значениях a решений бесконечно много; найдите решения:

а) $\begin{cases} x + y + z = 6, \\ x + 4y + az = 5, \\ 2x + (a+2)y + 6z = 13; \end{cases}$ б) $\begin{cases} ax + y - z = 1, \\ x + ay - z = 1, \\ -x + y + az = 1. \end{cases}$

Метод подстановки решения систем с двумя переменными заключается в том, что из одного из уравнений системы мы выражаем одну переменную через другую, например y через x: $y = f(x)$. После этого полученное выражение подставляется вместо y в другое уравнение системы. В результате получается уравнение с одной переменной x (см. задачу 1,б)). После нахождения корней полученного уравнения $x_1, \ldots, x_k$ находим соответствующие значения y, из уравнения подстановки: $y_1 = f(x_1), \ldots$.

(4—6). Решите методом подстановки систему.

4. а) $\begin{cases} x - y = 1, \\ x^2 + y^2 = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} xy = 12, \\ x^2 + y^2 = 25; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + y = 3, \\ x^4 - y^4 = 15. \end{cases}$

5. а) $\begin{cases} \log_4 x + \log_4 y = 0, \\ x + 2y = 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^3 = y^7, \\ \log_2 \dfrac{x}{y} = \dfrac{\log_2 x}{\log_2 y}. \end{cases}$

6. а) $\begin{cases} x + y = \pi, \\ \sin x + \sin y = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{2}, \\ \cos x + \cos y = 1; \end{cases}$

в)* $\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{3}, \\ \sin^2 x + \sin^2 y = \dfrac{3}{4}. \end{cases}$

Замечание. Подстановку имеет смысл делать и в системах с тремя и более переменными — тем самым мы уменьшаем число переменных. В частности, все линейные системы с двумя и тремя переменными (без параметров) быстрее всего решаются подстановками.

Часто, для того чтобы сделать подстановку, приходится делать преобразования, упрощающие систему (или хотя бы одно из ее уравнений). Заметим, что если одно или несколько уравнений можно заменить совокупностью более простых уравнений, то система будет эквивалентна совокупности более простых систем (см. задачу 1, в)). Основой для преобразований систем служит правило сложения (задача 1, а)).

(7—9). Решите систему с помощью перехода к совокупностям систем.

7. а) $\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = 4, \\ x^2 + 3xy + x + y = 6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + 3xy + y^2 = 5, \\ x^2 + xy + x^2 = 3. \end{cases}$

8. а) $\begin{cases} x^3 - y^3 = 8(x - y), \\ x^2 + y^2 = 8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^3 = 5x + y, \\ y^3 = x + 5y. \end{cases}$ ↓

9*. а) $\begin{cases} x(y + z) = 2, \\ y(x + z) = 2, \\ z(x + y) = 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y + z = 2, \\ x + y^2 + z = 2, \\ x + y + z^2 = 2. \end{cases}$ ↓

(10—11). Решите систему, используя правило сложения.

10*. а) $\begin{cases} \sin x \sin y = \dfrac{1}{4}, \\ \cos x \cos y = \dfrac{1}{4}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sin x \cos y = \dfrac{\sqrt{3}}{4}, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} y = 1. \end{cases}$ ↓

11*. а) $\begin{cases} \sin^2 x = \cos x \cos y, \\ \cos^2 x = \sin x \sin y; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \cos x + 3 \sin x = 2 \cos y, \\ \cos y + 3 \sin y = 2 \cos x. \end{cases}$

При решении систем (как и при решении уравнений) часто помогает замена переменных.

(12—17). Решите систему при помощи замены переменных.

12. а) $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4, \\ x - y = 8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = \dfrac{5}{6}\sqrt{xy}, \\ x + y = 13. \end{cases}$

13. а) $\begin{cases} 2(\log_y x + \log_x y) = 5, \\ xy = 8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \lg x + \lg y = \dfrac{5}{4}, \\ \log_x 10 + \log_y 10 = 5. \end{cases}$ ↓

14. а) $\begin{cases} 2^{2x} + 2^{2y} = 16, \\ 2^{x+y} = \sqrt{2}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (x - y)^{x+y} = 16, \\ (x - y)^2 \cdot 2^{x+y} = 64. \end{cases}$ ↓

15*. а) $\begin{cases} \sin x + \dfrac{1}{\cos y} = 2, \\ \dfrac{\sin x}{\cos y} = \dfrac{1}{2}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sin x + \sin y = 1, \\ \cos^2 x + \cos^2 y = 1{,}5. \end{cases}$

16*. а) $\begin{cases} x(y + z) = 4, \\ y(z + x) = 1, \\ z(x + y) = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5xy = 12(x + y), \\ 2yz = 3(y + z), \\ 3zx = 4(z + x). \end{cases}$

17*. $\begin{cases} \operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg} y - 5 = \dfrac{\cos z}{\sin x \sin y}, \\ \operatorname{ctg} y \cdot \operatorname{ctg} z + 11 = \dfrac{\cos x}{\sin y \sin z}, \\ \operatorname{ctg} z \cdot \operatorname{ctg} x + 7 = \dfrac{\cos y}{\sin x \sin z}. \end{cases}$ ↓

Если в уравнения системы от переменных x и y эти переменные входят симметричным образом, то полезно сделать замену $x + y = u$, $xy = v$. Отметим, что система вида

$$\begin{aligned} x + y &= a, \\ xy &= b \end{aligned} \qquad (1)$$

(так называемая система Виета) проще решается не подстановкой, а с помощью теоремы Виета: пара $(x; y)$ — решение системы (1) тогда и только тогда, когда x и y суть корни квадратного уравнения $t^2 - at + b = 0$.

18*. Запишите выражение через переменные $u = x + y$, $v = xy$: а) $x^2 + y^2$; б) $x^3 + y^3$; в) $x^4 + y^4$; г) $x^2y^3 + x^3x^2$.

(19—21). Решите систему с помощью замены.

19*. а) $\begin{cases} x + y + xy = 5, \\ x^2 + y^2 = 14; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y = 3, \\ x^4 + y^4 = 17. \end{cases}$ ↓

20*. а) $\begin{cases} x + y + xy = 0, \\ x^3 + y^3 + x^3y^3 = 12; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (x^2 + 1)(y^2 + 1) = 10, \\ (x + y)(xy - 1) = 3. \end{cases}$ ↓

21*. а) $\begin{cases} x - y + xy = 17, \\ x^2 + y^2 = 34; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3(y - x) = xy, \\ x^2 + y^2 = 7. \end{cases}$

Если левые части уравнений системы с переменными x и y — однородные выражения одной степени, а правые части также однородные и тоже одной степени:

$$\begin{cases} p_n(x; y) = p_m(x; y), \\ q_n(x; y) = q_m(x; y), \end{cases}$$

то однородное уравнение $p_n(x; y)\, q_m(x; y) = p_m(x; y)\, q_n(x; y)$ является следствием системы. Из этого уравнения можно найти возможные значения отношения $\dfrac{y}{x}$ (нужно разделить обе части на x^{m+n} — см. § 2), скажем t_1, t_2, … . Подставляя $y = t_1 x$, затем $y = t_2 x$, … в исходную систему, находим значения x и y. Таким же образом можно поступать, когда одно из уравнений системы однородно.

(22—25). Решите систему, пользуясь соображениями однородности.

22*. а) $\begin{cases} x^2 - 2xy - 3y^2 = 0, \\ x^2 - 2x + y^2 = 6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^3 - 2x^2y + y^3 = 0, \\ 2x + y^2 = 3. \end{cases}$ ↓

23*. а) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 3, \\ x^2 + xy + y^2 = 7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (x^2 + y^2)\dfrac{x}{y} = 6, \\ (x^2 - y^2)\,y = x. \end{cases}$

24*. а) $\begin{cases} 2x^2 = x + y, \\ y^2 = 2x - y; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + 2xy = x + y, \\ 2y^2 + x^2 = 2x. \end{cases}$

25*. а) $\begin{cases} x^3 = x + y, \\ x^2 + y^2 = 40; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^3 - y^3 = 3x + 5y, \\ x^2 - y^2 = 5. \end{cases}$

В некоторых случаях при решении уравнений с одной переменной полезно ввести сразу две новые переменные и свести уравнение к системе.

(26—28). Решите уравнение сведением к системе с двумя переменными.

26*. а) $\sqrt[3]{10 - x} - \sqrt[3]{3 - x} = 1$; б) $\sqrt[3]{2 - x} = 1 - \sqrt{x - 1}$.

27*. а) $\sqrt[4]{41 + x} + \sqrt[4]{41 - x} = 4$; б) $\sqrt[5]{1 + 2x} + \sqrt[5]{1 - 2x} = \sqrt[5]{2}$.

28*. а) $x^3 + 1 = 2\sqrt[3]{2x - 1}$; б) $x^2 + \dfrac{9x^2}{(3 + x)^2} = 7$.

При решении тригонометрических уравнений вида

$$f(\cos x;\ \sin x) = 0$$

иногда помогает замена $\cos x = u$, $\sin x = v$ с приписыванием уравнения $u^2 + v^2 = 1$ (т. е. уравнения $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$). Например, так можно решать линейные уравнения вида $a \cos x + b \sin x = c$.

29*. Решите уравнение сведением к системе:

а) $3 \cos x - 4 \sin x = 5$; б) $\sin x + 1 = |\cos x|$.

§ 4. Иррациональные, логарифмические и показательные уравнения

При решении иррациональных уравнений, т. е. уравнений, содержащих выражения вида $\sqrt[n]{A}$, как правило, «освобождаются» от радикалов (знаков корня) путем почленного возведения уравнения в степень. Поскольку при этом, вообще говоря, получается неравносильное уравнение, полученные значения следует проверить (подстановкой в исходное уравнение).

1*. Решите уравнение путем возведения в куб по схеме:
$A + B = C \Rightarrow A^3 + B^3 + 3AB(A + B) = C^3 \Rightarrow A^3 + B^3 + 3ABC = C^3$: а) $\sqrt[3]{x + 1} - \sqrt[3]{-3x - 1} = -\sqrt[3]{1 - x}$;
б) $\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{16 - x} = \sqrt[3]{x - 8}$.

В случае, когда при решении уравнений с радикалами в итоге получаются громоздкие корни $\left(\text{например, вида } x = \dfrac{a \pm \sqrt{b}}{c}\right)$, их проверка непосредственной подстановкой в исходное уравнение затруднительна. Целесообразнее переходить к равносильной системе, приписывая после возведения в степень к уравнению нужные для равносильности (для обратного перехода) неравенства.

2. Проверьте равносильность предложений:

а) $\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g^2(x), \\ g(x) \geqslant 0; \end{cases}$

б) $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) \geqslant 0. \end{cases}$

(Заметим, что приписывать в том и другом случае неравенство $f(x) \geqslant 0$ излишне — оно вытекает из других предложений системы.)

При решении смешанных систем (т. е. систем уравнений и неравенств) решают уравнения, а неравенства проверяют.

(3—8). Решите уравнения переходом к равносильным смешанным системам.

3. а) $\sqrt{x} = x - 1$; б) $\sqrt{x+2} = x - 1$; в) $\sqrt{x^2+5} = 2x - 1$.

4. а) $\sqrt{2 - \sqrt{3+x}} = \sqrt{4+x}$; б) $\sqrt{4 - \sqrt{1-x}} = \sqrt{2-x}$.

5. а) $\sqrt{1 + \sqrt{1+x}} = x$; б) $\sqrt{2 - \sqrt{2+x}} = x$.↓

6. а) $\sqrt{x-5} - \sqrt{9-x} = 1$; б) $\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} = 0{,}5$. ↓

7. а) $\sqrt{2x+5} - \sqrt{3x-5} = 2$; б) $\sqrt{2x-6} + \sqrt{x+4} = 5$.

8. а) $\sqrt{5x-1} - \sqrt{3x-2} = \sqrt{x-1}$;

б) $\sqrt{x+6} = \sqrt{x+7} + \sqrt{2x-5}$.

Замечание. В уравнениях типа уравнения 8 полезно найти область допустимых значений переменной и приписать соответствующее неравенство к уравнению: тогда при замене выражения $\sqrt{A} \cdot \sqrt{B}$ на $\sqrt{AB}$ не нужно учитывать, что область допустимых значений расширилась. В уравнениях вида 3—5, напротив, отыскивать область допустимых значений x ни к чему.

(9—10). Решите уравнение.

9*. $\sqrt{x - 1 - 2\sqrt{x-2}} + \sqrt{x + 7 - 6\sqrt{x-2}} = 2$.↓

10*. $\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x - \sqrt{x}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}$.

При решении уравнений с модулями (с выражениями вида $|A|$) нужно «освобождаться от модулей» или «раскрывать модули» ($|A| = A$ при $A \geqslant 0$ и $|A| = -A$ при $A < 0$). Рассмотрение различных случаев лучше записывать в виде совокупности предложений.

11. Докажите равносильность предложений:

а) $|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ f(x) = g(x) \end{cases}$ или $\begin{cases} f(x) < 0, \\ -f(x) = g(x); \end{cases}$

б) $|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ или $f(x) = -g(x)$.

(12—15). Решите уравнение, раскрыв модули.

12. а) $x^2 + |x-1| = x$; б) $x \cdot |x-2| = 1$.

13. а) $|x| + |x+2| = 2$; б) $|x+1| + |x+2| = 2$.

14. а) $|2x+1| - |3-x| = |x-4|$; б) $|x-1| + |1-2x| = 2|x|$.

15. а) $||3-2x|-1| = 2|x|$; б) $|1-|1-x|| = \frac{1}{2}$.

(16—18). Решите уравнение.

16*. а) $\sqrt{1+\cos x} = \sin x$; б) $\sqrt{2\sin 2x} + 2\sin x = 0$.

17*. $\sqrt{1+\sqrt{\sin 2x}} + \sqrt{1-\sqrt{\sin 2x}} = \sqrt{1+\sqrt{\cos x}} + \sqrt{1-\sqrt{\cos x}}$.

18. а) $2\sin x = |\cos x|$; б) $|\sin x| + |\cos x| = 1$.

При решении уравнений с логарифмическими выражениями освобождаются от логарифмов путем *потенцирования* уравнений: потенцированием равенства вида $\log_a A = \log_a B$ называется переход к равенству

$$a^{\log_a A} = a^{\log_a B},$$

т. е. $A = B$.

19. Докажите равносильность предложений:

а) $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) > 0; \end{cases}$

б) $\log_{h(x)} f(x) = k \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = (h(x))^k, \\ h(x) > 0,\ h(x) \neq 1; \end{cases}$

в) $\log_{h(x)} f(x) = \log_{h(x)} g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) > 0, \\ h(x) > 0,\ h(x) \neq 1; \end{cases}$

г) $\log_a f(x) + \log_a g(x) = k \Leftrightarrow \begin{cases} \log_a (f(x) \cdot g(x)) = k, \\ g(x) > 0. \end{cases}$

(Заметим, что во всех случаях неравенство $f(x) > 0$ вытекает из остальных предложений системы и поэтому его приписывать не нужно.)

(20—25). Решите уравнение.

20. а) $\log_2(x^2 - 3x + 1) = \log_2(2x-3)$;
б) $\log_3(x^2 + x - 7) = \log_3(x-3)$.

21. а) $\log_x(x^2 - 4x + 4) = 1$; б) $\log_x(x+1) = 2$.

22. а) $\log_{2x}(x^2 - 2x) = \log_{2x}(2x-3)$; б) $\log_x(x^2 - 2x + 3) = \log_x(2x)$.

23. а) $\lg x + \lg(x+3) = 1$; б) $\lg(x-1) + \lg(x-3) = \lg\left(\frac{3}{2}x - 3\right)$.

24*. а) $\lg \sin x = \lg \cos x$; б) $\log_2 \sin x + \log_2 \cos x = -2$.

25*. а) $\log_{2\cos x} \sin x = 1$; б) $\log_{\cos x} \sin x = 2$.

В случае, когда в уравнении встречаются логарифмы по разным основаниям и с коэффициентами, следует привести все выражения к одному основанию, избавиться от коэффициентов, пользуясь формулой $k \log_a A = \log_a A^k$, свести все логарифмы в левой и правой частях в одно выражение и, наконец, пропотенцировать уравнение. При этих преобразованиях нужно, естественно, следить за равносильностью переходов.

26. Выясните, в любом ли случае выписанные пары уравнений будут равносильны:

а) $2 \log_a f(x) = c$ и $\log_a f^2(x) = c$;

б) $\frac{1}{2}\log_a f(x) = c$ и $\log_a \sqrt{f(x)} = c$;

в) $3 \log_a f(x) = c$ и $\log_a f^3(x) = c$;

г) $\log_a f^2(x) = c$ и $2 \log_a |f(x)| = c$.

(27—28). Решите уравнение.

27. а) $\frac{1}{2}\log_{\frac{2}{5}}(x-1) - \log_{\frac{2}{5}}(x-10) = 1$; б) $\log_6 \sqrt{x-2} + \frac{1}{2}\log_6(x-11) = 1$.

28. а) $\log_4 \log_2 \frac{x}{2} = -\log_4 \log_4 x$; б) $\log_2 \log_2 x = \log_4 \log_4 x$.

(29—30). Решите уравнение, сделав подходящую замену.

29*. а) $\log_3(4^x + 15 \cdot 2^x + 27) = 2\log_3(4 \cdot 2^x - 3)$;

б) $\log_{\sqrt{10}} \sqrt{x^3} \cdot \log_{10}(100x) = 3\log_{10} x$.

30*. а) $\log_x(2x) = \sqrt{\log_x(2x^3)}$; б) $\log_2 x \cdot \sqrt{\log_x\left(\frac{1}{2}\sqrt{x}\right)} = 1$.

Показательные уравнения решают, как правило, либо с помощью замены, либо путем *логарифмирования* уравнений — переходом от равенства $a^A = a^B$ к равенству $\log_a(a^A) = \log_a(a^B)$, т. е. $A = B$. Отметим, что функцию вида $f(x)^{g(x)}$ принято считать определенной в двух случаях: $f(x) > 0$ или $f(x) = 0$ и $g(x) > 0$.

31. Убедитесь в равносильности предложений:

а) $f(x)^{g(x)} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = 0 \\ f(x) > 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} f(x) = 1 \\ x \in D(g) \end{cases}$ или $\begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) > 0; \end{cases}$

б) $f(x)^{g(x)} = f(x)^{h(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = h(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} f(x) = 1 \\ x \in D(g) \cap D(h) \end{cases}$ или

или $\begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) > 0 \\ h(x) > 0. \end{cases}$

(Здесь, как обычно, через $D(\varphi)$ обозначена область определения функции φ.)

(32—36). Решите уравнение путем логарифмирования.

32. а) $(x-2)^{x^2-4x+5}=1$; б) $\left(\frac{x^2}{2}\right)^{\sqrt{x}-1}=1$.

33. а) $x^{x+3}=x^5$; б) $x^{x+5}=x^3$.

34. а) $2^{2x-3}=4^{x^2-3x-1}$; б) $3^{x+1}=\frac{9^{4x^2}}{\sqrt{27}}$.

35*. а) $3^{\log_x 3}\cdot x^{\log_3 x}=9$; б) $x^{\log_{\sqrt{x}}(2x)}=4$.

36*. а) $(\cos x)^{\sin x}=1$; б) $(2\sin x)^{\cos x}=1$.

§ 5. Решение неравенств с одной переменной

Один из основных методов решения неравенств — сведение к системам и совокупностям более простых неравенств — был рассмотрен в § 1. При решении неравенств с рациональными функциями удобен *метод интервалов*, состоящий в следующем.

Приводим неравенство к виду $\frac{p(x)}{q(x)}\geqslant 0$ (или $\leqslant 0$, или >0, или <0), где $p(x)$ и $q(x)$ — многочлены переменной x, и отмечаем на числовой оси Ox нули числителя и знаменателя, т. е. те значения x, при которых $p(x)=0$ или $q(x)=0$.

Эти точки разобьют ось на несколько интервалов, причем на каждом из них функция $\frac{p(x)}{q(x)}$ принимает значение одного знака. (Это можно пояснить с помощью *теоремы о промежуточном значении*: если функция $f(x)$ непрерывна во всех точках отрезка $[a; b]$ и в его концах принимает значения разных знаков, то существует точка $x_0\in\,]a; b[$ такая, что $f(x_0)=0$. Выведите из этой теоремы предыдущее утверждение, рассуждая от противного. См. также § 9 главы III.)

Теперь проверяем знак $\frac{p(x)}{q(x)}$ на каждом из получившихся интервалов, подставляя конкретные значения $x=x_0$, $x=x_1$, ... из соответствующих интервалов в выражение $\frac{p(x)}{q(x)}$. (Часто достаточно определить знак $\frac{p(x)}{q(x)}$ только на одном интервале, а затем проследить за изменением знака при переходе от интервала к соседнему.) После этого выписываем ответ.

(1—3). Решите неравенство с помощью метода интервалов.

1. а) $\frac{(x^2-1)(x+2)^2}{x-3}\geqslant 0$; б) $\frac{x^2+5x+4}{(x^3-1)(x^2-2)}<0$.

2. а) $x+\frac{1}{x}\geqslant\frac{5}{2}$; б) $\frac{2}{x}-\frac{1}{x-1}>1$.

3. а) $\frac{x-2}{x+2}\geqslant\frac{2x-3}{4x-1}$; б) $\frac{1}{x+2}+\frac{2}{x+3}<\frac{3}{x+4}$.

При решении иррациональных неравенств следует освобождаться от радикалов путем возведения обеих частей неравенства в степень и переходить к эквивалентным системам неравенств или их совокупностям.

4. Покажите, что:

а) из неравенства $a<b$ не следует неравенство $a^2<b^2$;

б) из неравенства $0\leqslant a<b$ следует неравенство $a^2<b^2$;

в) из неравенства $a<b\leqslant 0$ следует неравенство $a^2>b^2$. (Двойное неравенство $A\leqslant B\leqslant C$ — это удобная сокращенная запись системы двух неравенств: $A\leqslant B$ и $B\leqslant C$.)

5. Убедитесь в равносильности предложений:

а) $\sqrt{f(x)}\leqslant g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\leqslant g^2(x)\\ f(x)\geqslant 0\\ g(x)\geqslant 0;\end{cases}$

б) $\sqrt{f(x)}\geqslant g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}g(x)<0\\ f(x)\geqslant 0\end{cases}$ или $\begin{cases}g(x)\geqslant 0\\ f(x)\geqslant 0;\end{cases}$

в) $\sqrt{f(x)}\geqslant\sqrt{g(x)}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\geqslant g(x)\\ g(x)\geqslant 0.\end{cases}$

(6—9). Решите неравенство переходом к равносильным системам (по схемам из задачи 5).

6. а) $\sqrt{x}\leqslant x-2$; б) $\sqrt{x}>x-1$; в) $\sqrt{x^2-3x+1}>\sqrt{2x-3}$.

7. а) $\sqrt{4-x^2}\leqslant 0{,}5x$; б) $\sqrt{x^2-1}\geqslant 0{,}5x+0{,}5$.

8*. а) $\sqrt{4-\sqrt{1-x}}>\sqrt{2-x}$; б) $\sqrt{2-\sqrt{3+x}}<\sqrt{4+x}$.

9*. а) $\frac{\sqrt{x+5}}{1-x}<1$; б) $\frac{\sqrt{52-x^2}}{2-x}<1$; в) $\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x}<3$.

(В задаче 9 предварительно нужно освободиться от знаменателей.)

(10—11). Решите неравенство путем освобождения от радикалов (переходя к равносильным системам).

10*. а) $\sqrt{4-x}+\sqrt{x+6}\leqslant 2$; б) $\sqrt{x-5}-\sqrt{9-x}\geqslant 1$.

11*. а) $\sqrt{x+6}>\sqrt{x+7}+\sqrt{2x-5}$;

б) $\sqrt{x+1}-\sqrt{2-x}>\sqrt{1-x}$.

Аналогичным образом при решении неравенств с логарифмическими выражениями освобождаются от логарифмов путем потенцирования неравенств, т. е. переходя от неравенства $\log_a A<\log_a B$ к неравенству $A<B$ в случае $a>1$ и к неравенству $A>B$ в случае $0<a<1$ (так как при $a>1$ функция a^x возрастает, а при $0<a<1$ убывает). При этом приписывают ограничение на область допустимых значений: $0<A<B$ или $A>B>0$.

12. Убедитесь в равносильности предложений:

а) $\log_{f(x)} g(x) \geqslant k \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 1 \\ g(x) \geqslant (f(x))^k \end{cases}$ или $\begin{cases} 0 < f(x) < 1 \\ 0 < g(x) \leqslant (f(x))^k; \end{cases}$

б) $\log_{f(x)} g(x) \geqslant \log_{f(x)} h(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 1 \\ g(x) \geqslant h(x) > 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} 0 < f(x) < 1 \\ 0 < g(x) \leqslant h(x). \end{cases}$

(13—17). Решите неравенство переходом к равносильным системам (по схемам из задачи 12).

13. а) $\lg_{0,5} \log_2 (x-1) \geqslant 0$; б) $\log_{0,5} (x+1) > \log_2 (2-x)$.

14. а) $\log_x 4 < 2$; б) $\log_x (x-2) \leqslant 0$.

15. а) $\lg (x-1) + \lg (x-2) < \lg 6$;

б) $\lg (x-1) + \lg (x-3) < \lg (1{,}5x - 3)$.

16*. а) $\log_x \dfrac{4x+5}{6-5x} < -1$; б) $\log_{x^2} \dfrac{4x-5}{|x-2|} \geqslant 0{,}5$.

17*. а) $\log_{|x|} \left(\sqrt{9-x^2} - x - 1\right) \geqslant 1$; б) $\log_{\frac{25-x^2}{16}} \left(\dfrac{24-2x-x^2}{14}\right) > 1$.

При решении простейших показательных неравенств используется логарифмирование неравенств, т. е. переход от неравенства $a^A < a^B$ к неравенству $A < B$ в случае $a > 1$ и к неравенству $A > B$ в случае $0 < a < 1$ (так как при $a > 1$ функция $\log_a x$ возрастает, а при $0 < a < 1$ убывает).

18. Убедитесь в равносильности предложений:

а) $f(x)^{g(x)} \geqslant 1 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 1 \\ g(x) \geqslant 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} 0 < f(x) < 1 \\ g(x) \leqslant 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} f(x) = 1 \\ x \in D(g); \end{cases}$

б) $f(x)^{g(x)} < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 1 \\ g(x) < 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} 0 < f(x) < 1 \\ g(x) > 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) > 0; \end{cases}$

в) $f(x)^{g(x)} \geqslant f(x)^{h(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 1 \\ g(x) \geqslant h(x) \end{cases}$ или $\begin{cases} 0 < f(x) < 1 \\ g(x) \leqslant h(x) \end{cases}$

или $\begin{cases} f(x) = 1 \\ x \in D(g) \cap D(h) \end{cases}$ или $\begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) > 0 \\ h(x) > 0. \end{cases}$

(19—21). Решите неравенство переходом к равносильным системам или совокупностям систем (по схемам из задачи 18).

19. а) $2^x > 3^{2x}$; б) $x^{2x} \geqslant x^{x^2}$.

20. а) $(x^2 + x + 1)^x < 1$; б) $(x^2 - x + 1)^x < 1$.

21. а) $0{,}5^{\log_{\frac{1}{9}} (x^2 - 3x + 1)} > 1$; б) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\log_2 \log_{\frac{1}{5}} \left(x^2 - \frac{4}{5}\right)} > 1$.

При решении простейших тригонометрических неравенств обычно используют интерпретацию неравенства на графике или же на единичной окружности: например, на рисунках 48 и 49 отмечено

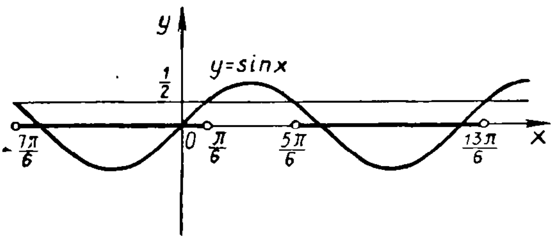


Рис. 48

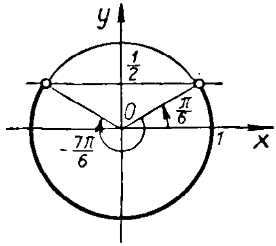


Рис. 49

множество решений неравенства $\sin x < \frac{1}{2}$ (на графике синуса и на окружности).

(22—23). Решите неравенство.

22. а) $\cos x < \frac{1}{2}$; б) $\cos x > -1$; в) $|\operatorname{tg} x| < 1$; г) $\operatorname{tg} x > 10$.

23. а) $\cos(x-1) > 0{,}5$; б) $\operatorname{tg}(2x+1) > -1$; в) $\sin x \cos x > \frac{1}{4}$.

При решении линейных тригонометрических неравенств вида $a \cos x + b \sin x \leqslant c$ можно воспользоваться введением вспомогательного аргумента, т. е. формулой

$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \alpha), \qquad (1)$$

где α — любое число, удовлетворяющее соотношениям:

$$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \quad \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \qquad (2)$$

24*. а) Докажите, что уравнения (2) совместны, т. е. существует α, удовлетворяющее обоим уравнениям; б) выведите формулу (1).

25*. Решите неравенство путем введения вспомогательного аргумента: а) $\cos x - \sin x \leqslant 1$; б) $3 \cos x + 4 \sin x \geqslant 1$; в) $\sin 2x + 2 \cos 2x < 0$.

(26—28). Решите неравенство путем перехода к равносильной системе неравенств.

26. а) $\sin x \geqslant \operatorname{tg} x$; б) $\sin 2x \leqslant \sin x$.

27*. а) $\log_2 \sin x + 1 \leqslant 0$; б) $\log_{2 \cos x} 2 \sin x < 0$.

28*. а) $(2 \cos x)^{\sin x} \geqslant 1$; б) $(\cos x)^{\sin x} < 1$.

Распространенный способ решения более сложных неравенств — замена переменной, сводящая неравенство к алгебраическому (без логарифмов, показательных и тригонометрических функций). После решения алгебраического неравенства остается решить совокупность простейших неравенств.

(29—36). Решите неравенство с помощью подходящей замены переменной.

29*. а) $\frac{1}{2^x - 1} < \frac{1}{1 - 2^{x-1}}$; б) $2^{2x+2} > 6^x + 2 \cdot 3^{2x+2}$.

30*. а) $x^{\lg x} > 10x^{-\lg x}+3$; б) $\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 \cdot \log_2 (4x) \geqslant 1$.

31.* а) $\log_x 2x \leqslant \sqrt{\log_x (2x^3)}$; б) $\sqrt{\log_x \sqrt{5x}} < -\log_x 5$.

32.* а) $\sin x \geqslant -\cos^2 x$; б) $\sin x \geqslant \cos 2x$.

33.* а) $\sin x + \cos x + \sin 2x > 1$, ↓

б) $\cos x - \sin x + \sin x \cos x > \frac{1}{2}$. ↓

34.* а) $\cos^2 x + 6 \sin x \cos x \geqslant \sin^2 x$; б) $\sin 2x + \operatorname{ctg} x < 2$.

35.* а) $\sqrt{\cos x} \leqslant \sin x$; б) $\sqrt{\sin x} > \cos x$.

36.* а) $\sqrt{5 - 2\sin x} \geqslant 6 \sin x - 1$; б) $\log_{\sin x} \operatorname{tg} x < 2 \log_{\operatorname{tg} x} \sin x + 1$.

(37—39). Решите неравенство, перенося все члены неравенства в одну часть и раскладывая полученное выражение на множители.

37*. а) $x^2 \cdot 2^x + 1 > x^2 + 2^x$;

б) $4x^2 + 3^{\sqrt{x}+1} + x \cdot 3^{\sqrt{x}} < 2x^2 \cdot 3^{\sqrt{x}} + 2x + 6$.

38*. а) $x \sin x + 1 > x + \sin x$; б) $\operatorname{tg} x \cdot \log_2 x + 2 > 2 \operatorname{tg} x + \log_2 x$.

39*. а) $\cos x + \cos 5x \geqslant 0$; б) $\sin x \cos 5x < \sin 9x \cos 3x$.

§ 6.* Частные приемы при решении уравнений и неравенств

В ряде случаев при решении уравнений или неравенств целесообразно сначала найти область допустимых значений переменной; например, иногда бывает, что неравенство выполнено при всех допустимых значениях переменной.

(1—8). Решите уравнение или неравенство, отыскав предварительно область допустимых значений переменной.

1. а) $\sqrt{x-2} + \sqrt{2x-1} = \sqrt{3-2x}$;↓

б) $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1+x^2} + \sqrt{x-1} = \sqrt{2}$.↓

2. а) $|x| + \sqrt{x^2-1} \geqslant 1$; б) $\frac{x}{\sqrt{x^2-9}} + x > 4$.

3. а) $\lg x + \sqrt{x^2-1} \geqslant 0$; б) $\log_2 (x^2+3) + \sqrt{x^2-1} \geqslant 2$.

4. а) $x + 2^x \leqslant \sqrt{1-x} + 3$; б) $x + 2^x + \sqrt{x-1} \geqslant 2 + \sqrt{x}$.

5. а) $2^{\sqrt{1-x}} \geqslant x$; б) $2^{\sqrt{1-x}} - x \lg x > 0$.

6. а) $\sin \left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{-x}}{2}\right)^2 = \sin \frac{x}{2}$; б) $\sqrt{x-1} + \sqrt{4-x^2} + \operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} > 1$.

7. а) $\sqrt{\lg \sin x} < x - 13\pi$; ↓ б) $\frac{\lg (|x|+1)}{\lg (|x|-1)} + \sqrt{x^2-4} > 1$.

8. а) $\arcsin (x^2 - 2x + 2) = \frac{\pi x}{2}$; б) $\arcsin \frac{2}{x} + \sqrt{x-1} > 1$.

Иногда при решении уравнений или неравенств полезно сравнить множества значений левой и правой частей, т. е. пользоваться ограниченностью функций сверху или снизу. Например, если окажется, что в области допустимых значений $f(x) \leqslant C$, а $g(x) \geqslant C$, то уравнение $f(x) = g(x)$ эквивалентно системе уравнений $f(x) = C$ и $g(x) = C$.

(9—19). Пользуясь ограниченностью функций (на области допустимых значений), решите уравнение или неравенство.

9. а) $x^2+\frac{1}{x^2}=1+x^{17}$; ↓ б) $\sin\frac{\pi x}{2}=x^3+\frac{1}{x^3}$.

10. а) $\cos 3x+\cos^6 x=2$; б) $\sin^2 2x+1=\cos^4 3x$.

11. а) $\cos x\cos 10x=1$; б) $\sin^5 x+\cos^6 x=1$.

12. а) $2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x$; б) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{x^2+4x+7}=\frac{\sqrt{3}}{\sin\left(\pi+\frac{\pi x}{4}\right)}$.

13. $\log_2(3+2x-x^2)=\operatorname{tg}^2\frac{\pi x}{4}+\operatorname{ctg}^2\frac{\pi x}{4}$.

14. а) $3\{x\}+2[x]=5$;↓ б) $2\{x\}+\left[x+\frac{1}{3}\right]=5$.

15. а) $[x]=\sqrt{9-x^2}$; б) $[x](x^2+x+1)=4$. ↓

16. а) $3\lg^2 x+2[x]=6$; б) $3|\sin x|+2[x]=6$.↓

17. а) $\sin^2\{x\}=\frac{1}{4}$; б) $\operatorname{arctg}[\sqrt{3}x]=\sqrt{3}$. ↓

18. а) $\cos^2(x+1)\cdot\lg(9-2x-x^2)\geqslant 1$;
б) $(4x-x^2-3)\log_2(\cos^2\pi x+1)\geqslant 1$.

19. а) $\cos(x+3\operatorname{tg}x)+(\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}^2 x)^2\leqslant -1$;
б) $(\sin(\sin x))\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(20—22). Докажите неравенство, пользуясь ограниченностью соответствующих функций.

20. а) $\sin 2^{\frac{x}{\pi}}<2^{|\sin x|}$; б) $|\sin x+\cos x|<2^{|\sin x|+0{,}5}$. ↓

21. а) $[\sin x+\cos x]\leqslant 2^{|\cos x|}$; б) $\frac{4}{3}\sin^2\{5x\}<2^{1-|\sin x|}$.

22. а) $\sin\{x\}<\sin(\{x\}+1)$; б) $\sin(\sin x)\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Если функция $f(x)$ возрастает на своей области определения, то для решения неравенства $f(x)>c$ достаточно решить уравнение $f(x)=c$: если x_0 — его корень, то решениями неравенства будут значения $x>x_0$, принадлежащие области определения f. Иногда корень уравнения можно угадать.

(23—28). Пользуясь возрастанием (убыванием) соответствующей функции, решите неравенство.

23. а) $x^5+x^4+2\sqrt{x}>4$; б) $x^{10}+\sqrt{x-1}\geqslant 1$.

24. а) $\sqrt{x}-\sqrt{1-x}>0{,}5$;↓ б) $\sqrt{x+3}+\sqrt{3x-2}<7$.

25. а) $\sqrt[4]{x-2}+\sqrt{x-3}>\sqrt{2-\sqrt[4]{x}}$; ↓
б) $\sqrt{x+\sqrt{x^3}+\sqrt{x^5}}-\sqrt{3}<\sqrt{x}-1$.

26. а) $\sqrt{x-1}+2^x+\log_2 x\geqslant 2$; б) $\sqrt{x-1}+2^x+\log_2 x<6$.

27. а) $\sqrt{1-x}+3\geqslant x+2^x$; ↓ б) $2^{\sqrt{x}}<\frac{1}{x}+1$; в) $x^x>4$, где $x>1$.

28. а) $\sin x > \cos 2x$, где $0 < x < \pi/2$; б) $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,x < 2\cos x$, где $0 < x < \pi/2$.

(29—30). Докажите неравенство, пользуясь возрастанием (убыванием) соответствующей функции.

29. а) $\sqrt[4]{x^4+66} > x+1$ при $0 < x < 2$; б) $x^x + 1 > 9x$ при $x > 3$; в) $\sqrt{x-1} + 3^x + \log_2 x < 13$ при $1 \leqslant x \leqslant 2$.

30. а) $4\,\mathrm{arcctg}\,x > \pi x$ при $x < 1$; б) $x > \mathrm{tg}\,\frac{1}{x}$ при $x > \frac{4}{\pi}$.

Соображения возрастания (убывания) при решении неравенств иногда удобнее использовать в таком виде: если $f(x)$ и $g(x)$ — строго возрастающие взаимно обратные функции, то неравенство $f(x) < a$ эквивалентно неравенству $x < g(a)$ (с соответствующими оговорками относительно области определения).

(31—34). Пользуясь свойствами взаимно обратных функций, решите неравенство.

31. а) $\arcsin x < \frac{\pi}{3}$; б) $\arcsin x < \frac{2\pi}{3}$.

32. а) $\arccos(3x-1) < \frac{\pi}{3}$; $\downarrow$ б) $\arccos(3x-1) < -\frac{\pi}{3}$.

33. а) $\mathrm{arctg}(x^2-2) \leqslant \frac{\pi}{3}$, б) $\arccos \lg(x-2) > \frac{\pi}{3}$.

34. $\frac{x}{2+x} + \frac{x}{2} \leqslant a$ при $x \geqslant 0$, где $a > 0$ — данное число. $\downarrow$

35. а) Докажите, что если $f(x)$ — возрастающая функция, то уравнения $f(f(x)) = x$ и $f(x) = x$ равносильны; $\downarrow$

б) докажите, что если $f(x)$ и $g(x)$ — строго возрастающие взаимно обратные функции, то уравнения

$$f(x) = g(x);\ f(x) = x;\ g(x) = x$$

попарно равносильны;

в) верно ли соответствующее утверждение для строго убывающих взаимно обратных функций?

(36—37). Пользуясь утверждением задачи 35а), решите уравнение.

36. а) $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{2} = x$; б) $\sqrt{a + \sqrt{a+x}} = x$ (a — произвольное число). $\downarrow$

37. а) $x^2 + x - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{4x+2} - 1\right)$; б) $x^3 + 1 = 2\sqrt[3]{2x-1}$.

Заметим, что если функция $f(x)$ четна, то при решении уравнения $f(x) = 0$ или неравенства $f(x) > 0$ достаточно найти только множество неотрицательных решений, после этого к ответу остается добавить множество, симметричное найденному относительно точки O на числовой оси.

38. Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для нечетной функции. $\downarrow$

(39—42). Пользуясь свойствами четности или нечетности, решите уравнение или неравенство.

39. а) $x^8 + x^4 - 12 < 0$; б) $x^3 + 2x > \frac{99}{x}$.

40. а) $x^2 + |x| = 12$;↓ б) $x^4 < |x + 2| + |x - 2|$.

41. а) $4 \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{x}$; б) $8x \arcsin x < \pi\sqrt{2}$.

42. а) $|\sqrt[4]{41 + x} - \sqrt[4]{41 - x}| < 2$;↓ б) $\frac{\pi x}{\sqrt{x^2 - 3}} - 4 \operatorname{arctg} \frac{x}{2} > \pi$.

При решении уравнений и неравенств иногда можно пользоваться периодичностью соответствующей функции.

(43—45). Пользуясь периодичностью функций, решите уравнение или неравенство.

43. а) $\{x\} = \{x^2\}$; б) $\{x\} < \frac{1}{3}$; в) $\{2x\} < \{x\}$.

44. а) $\{\lg x\} = \{\lg (x + 1)\}$; б) $\{3 \sin^2 x\} = \left\{\frac{1}{2} + \sin^2 x\right\}$;

в) $\{3 \cos x\} = \{\sqrt{x} + 3 \cos x\}$. ↓

45. а) $\operatorname{tg} (x^2 + 3x + 1) = \operatorname{tg} x$; б) $\sin x^2 > \frac{1}{2}$;

в) $\operatorname{tg} \{x^2\} = \operatorname{tg} \{(x + 1)^2\}$.↓

§ 7*. Графическое решение и исследование уравнений и неравенств

Если графики $y = f(x)$ и $y = g(x)$ легко построить, то уравнение $f(x) = g(x)$ иногда можно решить графически, отыскивая точки пересечения графиков. Чтобы графически решить неравенство $f(x) < g(x)$, достаточно выяснить, при каких x график $y = g(x)$ лежит выше графика $y = f(x)$.

(1—3). Пользуясь графиками, решите уравнение.

1. а) $|x| = |x - 1|$; б) $||x| - 1| = \frac{1}{2}$; в) $|x| = 2x + 2$.

2. а) $[x - 1] = 2$; б) $\{x\} = 0$; в) $\left\{x + \frac{1}{2}\right\} = 0$.

3. а) $[x] = 3x - 1$; б) $\{x\} = 0{,}25x$; в) $[x] = 5\{x\}$.

(4—7). При помощи графиков найдите число корней уравнения.

4. а) $\sqrt{x - 2} = x - 3$; б) $\sqrt{x - 2} = \frac{x}{3}$; в) $\sqrt{x - 2} = 1 + \sqrt{6 - x}$.

5. а) $|x^2 - 1| = x + 1$; б) $|x^2 - 1| + x = 0$; в) $|x^2 - 1| = |x|$.

6. а) $[x] = \sqrt{x}$; б) $[x] = \frac{x^2}{2}$; в) $[x] = \frac{x^2}{4}$.

7. а) $\{2x\} = \frac{1}{2}(x + 1)$; б) $\left|\{x\} - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$; в) $\{x\} = \frac{x^2}{100}$.

8. Выясните, при каких значениях a уравнение $[2x] = ax$ имеет: а) 6 корней; б) 9 корней. ↓

9. Найдите число корней уравнения в зависимости от значения параметра a: а) $||x| - 1| = a$; б) $||x| - 1| = ax$; в) $||x| - 1| = a(x - 1)$.

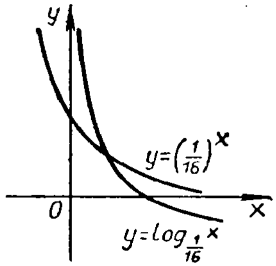


Рис. 50

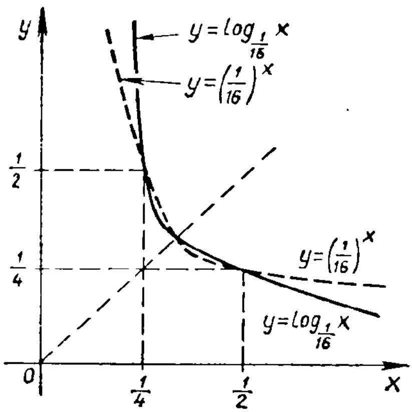


Рис. 51

(10—11). Начертите графики левой и правой частей уравнения, угадайте корни и докажите, что других корней нет (тем самым уравнение будет решено).

10. а) $2^x = 3 - x$;

б) $x + 4 = 3^{-x}$.

11. а) $\log_2 x = 3 - x$;

б) $\log_{\frac{1}{3}} x = x - 4$.

З а м е ч а н и е. При доказательстве того, что больше корней нет, чаще всего опираются на свойства монотонности правой и левой частей уравнения: если $f(x_0) = g(x_0)$, причем функция $f(x)$ строго возрастает, а функция $g(x)$ строго убывает на области допустимых значений x, то уравнение $f(x) = g(x)$ не имеет корней, отличных от x_0. Если же в обеих частях стоят возрастающие (убывающие) функции, то вывод о числе корней уравнения по эскизам графиков сделать трудно.

П р и м е р. Из чертежа (рис. 50) «ясно», что уравнение

$$\left(\frac{1}{16}\right)^x = \log_{\frac{1}{16}} x$$

имеет единственный корень x_0, причем, поскольку функции $\left(\frac{1}{16}\right)^x$ и $\log_{\frac{1}{16}} x$ взаимно обратны, соответствующая точка пересечения будет лежать на прямой $y = x$. Попробуем угадать корень.

а) Проверим $x_0 = \frac{1}{2}$: $\left(\frac{1}{16}\right)^{0,5} = \sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4}$; $\log_{\frac{1}{16}} \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, поэтому $x_0 = \frac{1}{2}$ — корень.

б) Проверим $x_0 = \frac{1}{4}$: $\left(\frac{1}{16}\right)^{0,25} = \sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \frac{1}{2}$; $\log_{\frac{1}{16}} \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$, поэтому $x_0 = \frac{1}{4}$ тоже корень. К тому же оба корня не лежат на прямой $y = x$.

Дело, конечно, в том, что графики были изображены слишком неточно. Более точный эскиз выглядит, как на рисунке 51, и графики пересекаются в трех точках, причем третий корень нельзя записать с помощью элементарных функций (это общий корень уравнений $x = \log_{\frac{1}{16}} x$ и $\left(\frac{1}{16}\right)^x = x$). Попробуйте доказать, что рассматриваемое уравнение больше корней не имеет (см. задачу 30б)).

Итак, при графическом решении уравнений следует попытаться перейти к такому эквивалентному уравнению, у которого левая часть возрастала бы, а правая — убывала или наоборот.

(12—18). Решите уравнение.

12. а) $3^x + 4^x = 25$; б) $3^x + 4^x = 5^x$; в) $2^x + 3^x = 5 \cdot 6^x$.

13. а) $(x + 2^x)\,3^x = 1$; б) $4^{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$; в) $\log_x 4 = x$. ↓

14. а) $3^x + \log_2 x = 10$; б) $3^{x+2} = \log_2(-x)$; в) $\sqrt{x-2} + 2^x = 9$.

15. а) $\sqrt{x-1} + 2^x = \lg\frac{100}{x}$; б) $-\sqrt[3]{2-x} + 3 = \lg(4-x)$.

16. а) $(3^x + 4^x)5^x = 3^x \cdot 4^x$; б) $3^x + 4^x = 5^x \cdot \log_2 x$.↓

17. а) $x^2 + \cos x = 0$; б) $\sin \pi x = x - 1$; в) $2\cos \pi x = 2x - 1$.

18. а) $\log_\pi x = -1 + \sin x \log_\pi 2$; б) $x^2 + (x+1)\sin\frac{\pi x}{6} = \frac{3+x}{2}$. ↓

19. Найдите с помощью графиков число корней уравнения:

а) $\cos \pi x = \frac{x^2}{100}$; б) $\cos \pi x = \lg\frac{x}{100}$.

20. Выясните, при каких значениях a уравнение

$$\cos x = 1 + \sin^2 ax$$

имеет хотя бы одно решение, отличное от $x_0 = 0$. ↓

Выше уже приводились примеры уравнений с параметрами — см. задачи 8, 9, 20. Предложение $A\ (x;\ a)$ с двумя переменными x и a, из которых x считается неизвестной переменной, а a — параметром (принимающим любые значения), называется предложением с параметром (уравнением с параметром, неравенством с параметром, системой с параметром и т. д.). Решить $A\ (x;\ a)$ — значит при каждом значении a найти все решения x этого предложения.

(21—23). Решите уравнение или неравенство с параметром.

21. а) $ax^2 + 2x + 1 = 0$;↓ б) $x^2 + 2ax + 1 = 0$.

22. а) $ax^2 + 2x + 1 < 0$; б) $\frac{a-x}{a+x} \geqslant a$.

23. а) $\sqrt{a+x} = x$; б) $\sqrt{a+x} \geqslant x - 1$.

При решении уравнений, неравенств и различного рода задач с параметрами нередко помогает графическая интерпретация уравнений и неравенств.

(24—25). Пользуясь графиками, решите следующие уравнения и неравенства с параметрами.

24. а) $ax \geqslant |x+1|$; б) $|1 - |x|| < a - x$.

25. а) $\sqrt{1-x^2} = a - x$; б) $\sqrt{a^2 - x^2} > x + 1$ $(a > 0)$.

(26—27). С помощью графиков найдите число корней уравнения в зависимости от значения параметра a.

26. а) $|x^2-1|=ax$; б) $|x^2-4x+3|=ax$.↓

27. а) $2\sqrt{a+x}=x+1$; б) $\sqrt{a+x+2}=\sqrt{2a-x}$.

При графическом исследовании задач с параметрами часто приходится выяснять, при каком значении a один график касается другого (один или оба графика меняются в зависимости от значения a). Если речь идет о касании параболы $y=Ax^2+Bx+C$ и прямой $y=kx+l$, то достаточно выяснить, при каком значении параметра уравнение $Ax^2+Bx+C=kx+l$ имеет единственное решение (см. § 1 главы IV). В более сложных случаях помогает производная: условие касания графиков $y=f(x)$ и $y=g(x)$ в точке $x=x_0$ записывается системой уравнений $\begin{cases} f(x_0)=g(x_0), \\ f'(x_0)=g'(x_0); \end{cases}$ из этой системы и находят нужные значения a.

(28—30). С помощью графиков и производной найдите число корней уравнения в зависимости от значения параметра a.

28. а) $x^3-3x=a$; б) $x^3+1=ax$.↓

29. а) $e^x=ax$;↓ б) $x^2e^x=a$.

30. а) $a^x=x$; б) $a^x=\log_a x$.↓

31. Выясните, при каких значениях параметра b существует $a>0$ такое, что уравнение $2a\ln x=x^2+b$ имеет единственный корень. ↓

§ 8. Предложения с двумя переменными и метод координат

(1—15). На координатной плоскости $(x; y)$ изобразите множество решений уравнения или неравенства.

1. а) $x+y=0$; б) $x^2+y^2=0$; в) $x^2-y^2=0$.

2. а) $x+y\leqslant 0$; б) $x^2+y^2=4$; в) $x^2+y^2<4$.

3. а) $x^2+2x+y^2=0$; б) $x^2+y^2+2y\leqslant 0$; в) $x^2+y^2+2y\geqslant 3$.

4. а) $xy+1\geqslant x+y$; б) $x^2y^2+1\geqslant x^2+y^2$.

5. а) $y+x^2+1\leqslant 0$; б) $y+x^2+2x\geqslant 0$.

6. а) $x\geqslant y^2$; б) $x+y^2+1\geqslant 0$.

7. а) $y\geqslant \frac{1}{x}$; б) $xy\geqslant 1$.

8. а) $|x|+y=2$; б) $|x|+|y|=2$.

9. а) $|x+y|=1$; б) $|x+y|+|x-y|=2$.

10*. а) $\{x^2+y^2\}=0$; б) $\{x\}=\{y\}$.

11*. а) $[x^2+y^2]=0$; б) $[x]=[y]$.

12*. а) $\sqrt{x}+y\geqslant 0$; б) $\sqrt{x+y}\geqslant x$.

13. а) $\log_x y\geqslant 0$; б) $\log_x(y-1)\geqslant 1$.

14. а) $x^y\geqslant 1$; б) $x^x\geqslant x^y$.

15*. а) $\cos(x+y)\leqslant 0$; б) $\cos 2x+\cos 2y\geqslant 0$.

Указание. Задачи 4, 7б), 8, 9, 12б), 13—15 следует решать, сводя предложения к равносильным системам с двумя пере-

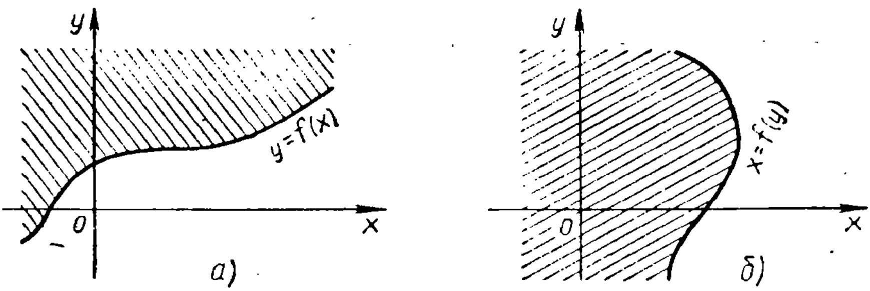


Рис. 52

менными, составленными из более простых предложений. Множества решений предложений вида $y \geqslant f(x)$ или $x \leqslant f(y)$ изображены на рисунке 52.

Кроме сведения неравенств с двумя переменными к равносильным системам и их совокупностям, при изображении на координатной плоскости $(x; y)$ множеств решений неравенств вида $\frac{p(x; y)}{q(x; y)} \geqslant 0$, где $p(x; y)$ и $q(x; y)$ — многочлены от x и y, часто помогает «метод областей» — обобщение метода интервалов на случай неравенств с двумя переменными. Именно рассмотрим множество точек $(x; y)$, при которых числитель или знаменатель выражения $\frac{p(x; y)}{q(x; y)}$ обращаются в нуль. Это множество (которое, вообще говоря, будет объединением некоторых кривых на плоскости $(x; y)$) разбивает плоскость на несколько областей. В каждой из них в силу соответствующей теоремы о непрерывных функциях двух переменных функция $\frac{p(x; y)}{q(x; y)}$ принимает значения одного знака. Остается проверить знак функции в каждой области (ср. с методом интервалов из § 5).

(16—19). Пользуясь методом областей, изобразите на плоскости $(x; y)$ множество решений неравенства.

16*. а) $xy + 1 \leqslant 0$; б) $\frac{x^2 - y^2}{(x^2 - 1)(y^2 - 1)} \leqslant 0$.

17*. а) $\frac{x^2 + y^2 - 9}{xy - 1} \geqslant 0$; б) $\frac{x^2 - y^2}{1 - xy} \geqslant 0$.

18*. а) $\frac{x + 2y}{2x - y} \geqslant 1$; б) $\frac{xy}{x - y} \leqslant 1$.

19*. а) $\frac{x + y}{1 + xy} \geqslant \frac{x - y}{1 - xy}$; б) $\frac{xy + 1}{xy - 1} \geqslant \frac{y + 1}{y - 1}$.

При изображении множеств решений тригонометрических неравенств (от переменной t) нередко помогает следующий прием: переход от неравенства к системе на плоскости $(x; y)$ путем замены переменных $x = \cos t$, $y = \sin t$ в неравенстве и добавления уравнения $x^2 + y^2 = 1$.

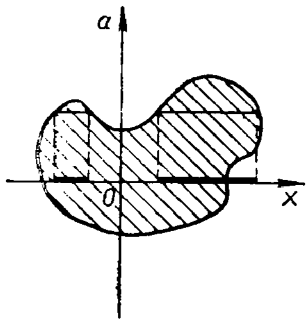


Рис. 53

(20—22). При помощи замены переменных решите неравенство.

20. а) $\cos x + \sin x \geqslant 0$;
б) $\cos x - \sin x \leqslant 1$.

21*. а) $\cos x - \sin x - \cos 2x \geqslant 0$;
б) $\operatorname{ctg} x + \dfrac{\sin x}{\cos x - 2} \geqslant 0$.

22*. а) $\sqrt{\sin x} > \cos x$;
б) $\log_{\sin x - \cos x} (\sin x - \sqrt{3} \cos x) \geqslant 0$.

Метод координат можно использовать при решении и исследовании задач с параметрами. Именно пусть есть предложение $A(x; a)$ с параметром a. Изобразим на плоскости $(x; a)$ множество M решений $A(x; a)$. Тогда при данном значении $a = a_0$ параметра a множество решений этого предложения отыскивается как проекция на ось Ox пересечения множества M с прямой $a = a_0$ (на плоскости $(x; a)$), как показано на рисунке 53.

(23—28). Пользуясь методом координат, решите уравнение, неравенство или систему с параметром a.

23*. а) $\dfrac{a + 2x}{2a - x} \geqslant 1$; б) $\dfrac{ax + 1}{ax - 1} \geqslant \dfrac{a + 1}{a - 1}$.

24*. а) $|2x - a| = x^2 + 2a$; б) $|x^2 - a| = x^2 - 4x + 2a$.

25*. а) $2\sqrt{a + x} > x + 1$; б) $\sqrt{a + \sqrt{a + x}} = x$.

26*. а) $\begin{cases} x^2 + 4x + 3 + a \leqslant 0, \\ 2x + a + 6 \geqslant 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + 2x + a \leqslant 0, \\ x^2 - 4x - 6a \geqslant 0. \end{cases}$

27*. а) $\log_a x \geqslant 1$; б) $\log_a x + \log_a (x - 2) < 1$.

28*. а) $x^{\log_a x} < a$; б) $\log_{a+x} (2a - x) \leqslant 0$.

29*. Пользуясь методом координат, выясните, при каких значениях параметра a:

а) из неравенства $|x| < a$ следует неравенство $ax \leqslant 1$;

б) из неравенства $x^2 - 4x + 3 \leqslant 0$ следует неравенство $x^2 \leqslant a^2$.

30*. Пользуясь методом координат, выясните, при каких значениях параметра a будут равносильны неравенства:

а) $x \leqslant a$ и $xa \geqslant 1$; б) $x^2 \leqslant a^2$ и $x^2 - |a| \leqslant 0$.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

Глава I

§ 1

1. (1) Проверим истинность $A(1): \frac{1^2}{1 \cdot 3} = \frac{1}{3}$ и $\frac{n(n+1)}{2(2n+1)} = \frac{1}{3}$ при $n = 1$.

(2). Докажем, что из $A(k)$ следует $A(k+1)$, т. е. если $S_k = \frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \ldots + \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{k(k+1)}{2(2k+1)}$, то $S(k+1) = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \ldots + \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)} + \frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{(k+1)(k+2)}{2(2k+3)}$.

В самом деле, $S(k+1) = S(k) + \frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k(k+1)}{2(2k+1)} + \frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k(k+1)(2k+3)+2(k+1)^2}{2(2k+1)(2k+3)} = \frac{(k+1)(2k^2+3k+2k+2)}{2(2k+1)(2k+3)} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+1)}{2(2k+1)(2k+3)} = \frac{(k+1)(k+2)}{2(2k+3)}$.

Обе части доказательства метода математической индукции проведены. Следовательно, равенство

$$\frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \ldots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+3)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$$

истинно при любом натуральном значении n.

2. (1) $A(1)$ истинно, так как $1 \cdot 1! = 1$ и $(n+1)! - 1 = 1$ при $n = 1$.

(2) Пусть $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + k \cdot k! = (k+1)! - 1$. Тогда $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + k \cdot k! + (k+1)(k+1)! = (k+1)! - 1 + (k+1)(k+1)! = (k+1)!(1+k+1) - 1 = (k+2)! - 1$.

3. (1) $A(1)$ истинно, так как $1 - \frac{1}{2} + \ldots - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$ при $n = 1$.

(2) $A(k) \Longrightarrow A(k+1)$. Пусть $A(k)$ истинно, т. е. $1 - \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} = \frac{1}{(k+1)} + \ldots + \frac{1}{2k}$. Надо доказать, что $1 -$

$-\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}=\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{2k+1}+$ $+\frac{1}{2k+2}$. В силу $A(k)$ имеем:

$\left(1-\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+$ $+\ldots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}$, и истинность $A(k+1)$ следует из того, что $\frac{1}{k+1}-\frac{1}{2k+2}=\frac{1}{2k+2}$.

4. (1) $A(1)$ истинно.

(2) Для доказательства $A(k)\Longrightarrow A(k+1)$ достаточно проверить, что $\frac{k}{(k+1)!}=\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}$.

5. (1) $A(1)$ истинно, так как при $n=1$ обе части равенства равны 4.

(2) Пусть $1\cdot 2^k+2\cdot 2^{k-1}+\ldots+k\cdot 2+(k+1)=2^{k+2}-$ $-(k+3)$. Тогда $1\cdot 2^{k+1}+2\cdot 2^k+\ldots+k\cdot 2^2+(k+1)\cdot 2+$ $+(k+2)=2(2^k+2\cdot 2^{k-1}+\ldots+k\cdot 2+k+1)+(k+2)=$ $=2(2^{k+2}-(k+3))+k+2=2^{k+3}-(k+4)$.

6. (1) $A(1)$ истинно, так как $10^{1+1}-10(1+1)+1=81$ делится на 81.

(2) Для доказательства $A(k)\Longrightarrow A(k+1)$ достаточно проверить, что $f(k+1)-f(k)$ делится на 81 (где $f(n)=10^{n+1}-$ $-10(n+1)+n$). Действительно, тогда $f(k+1)=(f(k+1)-$ $-f(k))+f(k)$ делится на 81 (оба слагаемых делятся на 81). Проверим, что $f(k+1)-f(k)$ делится на 81. Имеем: $f(k+1)-$ $-f(k)=10^{k+2}-10^{k+1}-10((k+2)-(k+1))+(k+2)-(k+1)=$ $=9\cdot 10^{k+1}-9=9(10^{k+1}-1)$ делится на 81, так как $10^{k+1}-$ -1 делится на 9 в силу соответствующего признака делимости (десятичная запись этого числа состоит из $(k+1)$ девятки).

7. (1) $n^7+6n=7$ при $n=1$; делится на 7. (2). Достаточно проверить, что $(k+1)^7+6(k+1)-k^7-6k=(k+1)^7-$ $-k^7+6$ делится на 7. Но $(k+1)^7-k^7+6=7k^6+21k^5+$ $+35k^4+35k^3+21k^2+7k+7$ делится на 7.

8. (1) $3^{3n+2}+2^{4n+1}=243+32=275$ при $n=1$; делится на 11. (2) $f(k+1)=3^{3k+5}+2^{4k+5}=27\cdot 3^{3k+2}+16\cdot 2^{4k+1}=11\times$ $\times 3^{3k+2}+16f(k)$, поэтому если $f(k)$ делится на 11, то и $f(k+1)$ делится на 11.

9. (1) При $n=1$ имеем: $4^n>n^2$, так как $4>1$.

(2) Пусть $4^k>k^2$, нужно доказать, что $4^{k+1}>(k+1)^2$. Но в силу $A(k)$ $4^{k+1}=4\cdot 4^k>4k^2$. Далее, так как $k^2\geqslant k$ и $k^2\geqslant 1$, то $4k^2\geqslant k^2+2k+1=(k+1)^2$. Окончательно, получаем: $4^{k+1}>(k+1)^2$.

10. (1) $A(1)$ истинно, так как $2>1$.

(2) Пусть $2^k>k^2-2k+2$, докажем, что $2^{k+1}>(k+1)^2-$ $-(2k+2)+2=k^2+1$. Имеем: $2^k>k^2-2k+2$ и $2^k>2k-1^{(*)}$,

поэтому $2 \cdot 2^k > (k^2 - 2k + 2) + (2k - 1) = k^2 + 1$. Неравенство (*) следует доказывать методом математической индукции: (1) $2^1 > 2 \cdot 1 - 1$. (2) Пусть $2^s > 2s - 1$, тогда $2^{s+1} = 2 \cdot 2^s = 2^s + 2^s > 2s - 1 + 2$, так как $2^s > 2s - 1$ в силу предположения индукции, а $2^s \geqslant 2$, так как $s \geqslant 1$.

11. Указание. При добавлении новой прямой или новой окружности надо заменить цвета (синий на красный и красный на синий) в одной полуплоскости или внутри круга, границей которой (которого) является добавленная прямая или добавленная окружность.

12. Доказательство $A(k) \Longrightarrow A(k+1)$ не проходит при $k = 1$, так как при таком k в множестве из первых k чисел нет второго числа.

13. (1) $A(1)$ истинно, так как 0 делится на p.

(2) Пусть $k^p - k$ делится на p, докажем, что $(k+1)^p - (k+1)$ делится на p. Для этого достаточно показать, что $B = ((k+1)^p - (k+1)) - (k^p - k) = (k+1)^p - k^p - 1$ делится на p. По формуле Ньютона получаем, что

$$B = C_p^1 \cdot k^{p-1} + C_p^2 k^{p-2} + \ldots + C_p^{p-1} k.$$

Каждый из биномиальных коэффициентов $C_p^l = \frac{p!}{l!\,(p-l)!}$ делится на p: простой множитель p входит в разложение числителя на простые множители и не входит в разложение знаменателя (все простые делители знаменателя строго меньше p). Поэтому B делится на p, откуда и вытекает, что $A(k) \Longrightarrow A(k+1)$.

14. (а) (1) $A(3)$ истинно, так как $3^3 > 2^3 + 3 \cdot 3$.

(2) Пусть $3^k > 2^k + 3k$, где $k \geqslant 3$, докажем, что $3^{k+1} > 2^{k+1} + 3(k+1)$. Имеем: $2 \cdot 3^k > 2 \cdot 2^k + 6k$ в силу $A(k)$ и $3^k > 3$ при $k \geqslant 3$. Складывая почленно эти неравенства, получаем: $3 \cdot 3^k > 2 \cdot 2^k + 6k + 3 > 2 \cdot 2^k + 3k + 3$, откуда $3^{k+1} > 2^{k+1} + 3(k+1)$;

б) (1) $A(3)$ истинно, так как $3^3 > 3 \cdot 3 + 3$.

(2) Пусть $k^3 > 3k + 3$, где $k \geqslant 3$, надо доказать, что $(k+1)^3 > 3(k+1) + 3$. Но $(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$, при этом очевидно, что $3k^2 + 3k + 1 > 3$ при $k \geqslant 3$, $k^3 > 3k + 3$ в силу $A(k)$; складывая почленно верные неравенства $3k^2 + 3k + 1 > 3$ и $k^3 > 3k + 3$, получим верное неравенство $(k+1)^3 > 3(k+1) + 3$;

в) (1) $A(5)$ истинно, так как $2^5 > 5^2$.

(2) Пусть $2^k > k^2$, где $k \geqslant 5$. Надо доказать, что $2^{k+1} > (k+1)^2$. При $k \geqslant 5$ имеем: $k^2 \geqslant 5k > 2k + 1$, поэтому и из $A(k)$ получаем: $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2k^2 = k^2 + k^2 > k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$;

г) (1) $A(2)$ истинно, так как $1 - \frac{1}{4} = \frac{n+1}{2n}$ при $n = 2$.

(2) Пусть $\Pi_k = \left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{k+1}{2k}$. Надо

доказать, что $\Pi_{k+1} = \frac{k+2}{2k+2}$. Имеем: $\Pi_{k+1} = \Pi_k \cdot \left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right) =$ $= \frac{k+1}{2k} \cdot \left(\frac{(k+1)^2 - 1}{(k+1)^2}\right) = \frac{k+1}{2k} \cdot \frac{k^2+2k}{(k+1)^2} = \frac{k+2}{2k+2}$.

В данной задаче условие $n \geqslant 2$ появилось из-за того, что A (1) просто не определено (через A (n) обозначено равенство, фигурирующее в условии задачи).

15. Обозначим через A (n) предложение «Число n либо простое, либо его можно представить в виде произведения простых множителей».

(1) A (2) истинно, так как число 2 простое.

(2) Пусть известно, что A (2), A (3), ..., A (k) истинны, где $k \geqslant 2$, т. е. известно, что любое натуральное число l, такое, что $2 \leqslant l \leqslant k$, либо само простое, либо его можно представить в виде произведения простых. Рассмотрим число $(k+1)$. Если оно простое, то A $(k+1)$ истинно; если же $(k+1)$ составное, то его можно представить в виде

$$(k+1) = l_1 \cdot l_2,$$

где l_1 и l_2 удовлетворяют неравенствам

$$2 \leqslant l_1 \leqslant k; \quad 2 \leqslant l_2 \leqslant k.$$

Поэтому каждое из них либо простое, либо **может представлено** быть в виде произведения простых.

16. (1) A (1) истинно в силу условия задачи.

(2) Пусть известно, что число $x^l + \frac{1}{x^l}$ целое при любом $1 \leqslant l \leqslant k$.

Докажем, что $x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}}$ также целое. Имеем: $x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}} =$ $= \left(x^k + \frac{1}{x^k}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}\right)$. Числа $\left(x^k + \frac{1}{x^k}\right)$ и $\left(x + \frac{1}{x}\right)$ целые в силу сделанного предположения; число $\left(x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}\right)$ при $k \geqslant 2$ целое в силу тех же причин, а при $k = 1$ оно равно 2.

17. Обозначим через A (n) неравенство $\frac{C_{2n}^n}{2^{2n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

(1) A (1) истинно, так как $\frac{C_2^1}{2^2} = \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$. (2) Пусть известно, что $\frac{C_{2k}^k}{2^{2k}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2k+1}}$. Докажем, что $\frac{C_{2k+2}^{k+1}}{2^{2k+2}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2k+3}}$. Имеем: $\frac{C_{2k+2}^{k+1}}{2^{2k+2}} = \frac{1}{2^{2k+2}} \cdot \frac{(2k+2)!}{((k+1)!)^2} = \frac{1}{2^{2k+2}} \cdot \frac{(2k+2)(2k+1)}{(k+1)^2} \cdot \frac{(2k)!}{(k!)^2} = \frac{1}{2^{2k+2}} \times$ $\times \frac{(2k+2)(2k+1)}{(k+1)^2} \cdot C_{2k}^k = \frac{C_{2k}^k}{2^{2k}} \cdot \frac{2k+1}{2k+2}$. Далее, $\frac{C_{2k}^k}{2^{2k}} \cdot \frac{2k+1}{2k+2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2k+1}} \times$

$\times \dfrac{2k+1}{2k+2}$ в силу $A(k)$, а $\dfrac{2k+1}{\sqrt{2k+1}\cdot(2k+2)} = \dfrac{\sqrt{2k+1}}{2k+2} < \dfrac{1}{\sqrt{2k+3}}$, так как $(2k+1)(2k+3) \leqslant (2k+2)^2$.

Отметим, что если доказывать тем же способом неравенство $\dfrac{C_{2n}^n}{2^{2n}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2n}}$, то получаются оценки: $\dfrac{C_{2k+2}^{k+1}}{2^{2k+2}} = \dfrac{C_{2k}^k}{2^{2k}} \cdot \dfrac{2k+1}{2k+2} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2k}} \times \dfrac{2k+1}{2k+2}$; однако неравенство $\dfrac{2k+1}{(2k+2)\sqrt{2k}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2k+2}}$ ложно (оно равносильно ложным неравенствам $\dfrac{2k+1}{\sqrt{2k(2k+2)}} \leqslant 1$,

$$(2k+1)^2 \leqslant 2k(2k+2) \text{ и } 4k^2+4k+1 \leqslant 4k^2+4k).$$

18. (1) При $k=1$ равенство справедливо для любого $n > 1$;

$$C_n^0 - C_n^1 = 1 - n = (-1)^1(n-1) = (-1)^1 \cdot C_{n-1}^1.$$

(2) Пусть теперь равенство справедливо для $k = l$ $(0 < l < n)$, и пусть $0 < l+1 < n$. Докажем справедливость равенства для $k = l+1$. Так как

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ldots + (-1)^l C_n^l = (-1)^l C_{n-1}^l$$

в силу предположения индукции, то

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^l C_n^l + (-1)^{l+1} C_n^{l+1} = (-1)^l C_{n-1}^l + (-1)^{l+1} C_n^{l+1} = (-1)^l (C_{n-1}^l - C_n^{l+1}) = (-1)^{l+1}(C_n^{l+1} - C_{n-1}^l) = (-1)^{l+1} \cdot C_{n-1}^{l+1}.$$

19. а) Докажем сначала, что

$$\sqrt[2^k]{a_1 \ldots a_{2^k}} \leqslant \frac{a_1 + \ldots + a_{2^k}}{2^k}$$

методом математической индукции (неравенство $B(k)$).

(1) $k=1$, тогда $\sqrt{a_1a_2} \leqslant \dfrac{a_1+a_2}{2} \Leftrightarrow 0 \leqslant \dfrac{a_1+a_2-2\sqrt{a_1a_2}}{2} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 0 \leqslant \dfrac{(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2})^2}{2}$.

(2) $B(k) \Longrightarrow B(k+1)$: $\sqrt[2^{k+1}]{a_1 \ldots a_{2^k} \cdot a_{2^k+1} \cdot \ldots \cdot a_{2^{k+1}}} =$

$$= \sqrt{\sqrt[2^k]{a_1a_2 \ldots a_{2^k}} \cdot \sqrt[2^k]{a_{2^k+1} \ldots a_{2^{k+1}}}} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\frac{a_1 + \ldots + a_{2^k}}{2^k} + \frac{a_{2^k+1} + \ldots + a_{2^{k+1}}}{2^k}} \text{ в силу } B(k),$$

и $\sqrt{\dfrac{a_1 + \ldots + a_{2^k}}{2^k} \cdot \dfrac{a_{2^k+1} + \ldots + a_{2^{k+1}}}{2^k}} \leqslant \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a_1 + \ldots + a_{2^k}}{2^k} + \right.$

$$\left. + \frac{a_{2^k+1} + \ldots + a_{2^{k+1}}}{2^k}\right) = \frac{a_1 + \ldots + a_{2^{k+1}}}{2^{k+1}}$$

в силу $B(1)$.

Докажем теперь $A(n) \Rightarrow A(n-1)$, где через $A(n)$ обозначено неравенство, фигурирующее в условии задачи. Для доказательства неравенства

$$\sqrt[n-1]{a_1a_2\ldots a_{n-1}} \leqslant \frac{a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}}{n-1}$$

рассмотрим верное в силу $A(n)$ неравенство

$$\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_{n-1}a_n} \leqslant \frac{a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}+a_n}{n}$$

для чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$, $a_n = \dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}}{n-1}$. Имеем:

$$a_1a_2\ldots a_{n-1}\cdot\frac{a_1+\ldots+a_{n-1}}{n-1} \leqslant \left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}+\dfrac{a_1+\ldots+a_{n-1}}{n-1}}{n}\right)^n =$$

$$= \left(\frac{\dfrac{n}{n-1}(a_1+a_2+\ldots+a_{n-1})}{n}\right)^n = \left(\frac{a_1+\ldots+a_{n-1}}{n-1}\right)^n, \text{ откуда}$$

$$a_1a_2\ldots a_{n-1} \leqslant \left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}}{n-1}\right)^{n-1} \text{ и } \sqrt[n-1]{a_1a_2\ldots a_{n-1}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}}{n-1}.$$

б) Прежде всего отметим, что если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ принадлежат отрезку $[a; b]$, то и их среднее арифметическое $\dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$ принадлежит отрезку $[a; b]$. В данной задаче этот отрезок — $[0; \pi]$, поэтому все значения синуса в этом неравенстве положительны. Докажем сначала методом математической индукции неравенство

$$\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{2^k}}{2^k} \geqslant \frac{\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\ldots+\sin\alpha_{2^k}}{2^k}$$

для натуральных k.

(1) $k=1$; $\dfrac{\sin\alpha_1+\sin\alpha_2}{2} = \sin\dfrac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\cos\dfrac{\alpha_1-\alpha_2}{2} \leqslant \sin\dfrac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$.

(2) $B(l) \Rightarrow B(l+1)$:

$$\sin\frac{\alpha_1+\ldots+\alpha_{2^l}+\alpha_{2^l+1}+\ldots+\alpha_{2^{l+1}}}{2^{l+1}} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\sin\dfrac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{2^l}}{2^l}+\sin\dfrac{\alpha_{2^l+1}+\ldots+\alpha_{2^{l+1}}}{2^l}}{2} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\dfrac{\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\ldots+\sin\alpha_{2^l}}{2^l}+\dfrac{\sin\alpha_{2^l+1}+\ldots+\sin\alpha_{2^{l+1}}}{2^l}}{2} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\sin\alpha_1+\ldots+\sin\alpha_{2^{l+1}}}{2^{l+1}}.$$

Теперь, пользуясь верным неравенством

$$\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}{n} \geqslant \frac{\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\ldots+\sin\alpha_n}{n}, \qquad (1)$$

выведем неравенство

$$\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{n-1}}{n-1} \geqslant \frac{\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\ldots+\sin\alpha_{n-1}}{n-1},$$

выбирая в неравенстве (1) в качестве α_n число $\frac{\alpha_2+\alpha_2+\ldots+\alpha_{n-1}}{n-1}$:

$$\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{n-1}+\frac{\alpha_1+\ldots+\alpha_{n-1}}{n-1}}{n} = \sin\frac{\frac{n}{n-1}(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{n-1})}{n} =$$

$$= \sin\frac{\alpha_1+\ldots+\alpha_{n-1}}{n-1} \geqslant \frac{\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\ldots+\sin\alpha_{n-1}+\sin\frac{\alpha_1+\ldots+\alpha_{n-1}}{n-1}}{n} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{n-1}{n}\sin\frac{\alpha_1+\ldots+\alpha_{n-1}}{n-1} \geqslant \frac{\sin\alpha_1+\ldots+\sin\alpha_{n-1}}{n} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (n-1)\sin\frac{\alpha_1+\ldots+\alpha_{n-1}}{n-1} \geqslant \sin\alpha_1+\ldots+\sin\alpha_{n-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{\alpha_1+\ldots+\alpha_{n-1}}{n-1} \geqslant \frac{\sin\alpha_1+\ldots+\sin\alpha_{n-1}}{n-1}.$$

20. (1) A (1) очевидно.

(2) Предположим, что $(a+b)^k \leqslant 2^{k-1}(a^k+b^k)$, тогда $(a+b)^{k+1} = (a+b)^k(a+b) \leqslant 2^{k-1}(a^k+b^k)(a+b)$. Осталось доказать, что $2^{k-1}(a^k+b^k)(a+b) \leqslant 2^k(a^{k+1}+b^{k+1})$. Имеем: $(a^k+b^k)(a+b) \leqslant 2(a^{k+1}+b^{k+1}) \Leftrightarrow a^{k+1}+a^kb+ab^k+b^{k+1} \leqslant 2(a^{k+1}+b^{k+1}) \Leftrightarrow a^kb+ab^k \leqslant a^{k+1}+b^{k+1} \Leftrightarrow a^{k+1}-a^kb+b^{k+1}-ab^k \geqslant 0 \Leftrightarrow (a^k-b^k)(a-b) \geqslant 0$.

Пусть теперь для определенности $a-b \geqslant 0$, т. е. $a \geqslant b$. Так как $a+b>0$, то $a \geqslant -b$, т. е. $a \geqslant |b|$, поэтому $a^k \geqslant |b|^k \geqslant b^k$, откуда $a^k-b^k \geqslant 0$ (случай $a \leqslant b$ рассматривается аналогично).

21. (1) При $n=1$ предложение истинно: $2^{3^1}+1=9$ делится на $3^{1+1}=9$ и не делится на $3^{1+2}=27$.

(2) Пусть $2^{3^k}+1$ делится на 3^{k+1} и не делится на 3^{k+2}. Так как

$$2^{3^{k+1}}+1=(2^{3^k})^3+1=(2^{3^k}+1)(2^{2\cdot 3^k}-2^{3^k}+1),$$

то достаточно показать, что при любом натуральном k число

$$2^{2\cdot 3^k}-2^{3^k}+1$$

делится на 3 и не делится на 9. А это верно, так как

$$2^{2\cdot 3^k}-2^{3^k}+1=(2^{3^k}+1)^2-3\cdot 2^{3^k}$$

и в полученном выражении первое слагаемое делится на $(3^{k+1})^2$, т. е. заведомо делится на 9, а второе делится на 3 и не делится на 9.

§ 2

1. Из имеющихся 5 цифр нужно составить упорядоченные множества из 5 элементов — перестановки из 5 элементов. Число их равно $5! = 120$.

2. Из имеющихся 6 цифр надо составить упорядоченные множества из 5 элементов — размещения из 6 элементов по 5. Число их равно $A_6^5 = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2$.

3. В слове «логарифм» все буквы разные.

Анаграмм будет столько, сколько существует перестановок из 8 букв этого слова: $P_8 = 8!$

4. $A_7^3 = 210$.

5. Всего из данных 5 цифр можно составить $P_5 = 5!$ чисел (см. задачу 1). Из них кратны 5 числа, оканчивающиеся цифрой 5. Таких чисел столько же, сколько существует перестановок из остальных 4 цифр, т. е. $P_4 = 4!$ Следовательно, чисел, не кратных 5, можно составить $P_5 - P_4 = 5! - 4! = 4 \cdot 4! = 96$.

6. A_{34}^{30}.

7. 8! Р е ш е н и е. Обозначим вертикали буквами a, b, c, d, e, f, g, h, а горизонтали — цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. На каждой из 8 вертикалей (горизонталей) должна стоять в точности одна ладья. Выпишем цифры от 1 до 8 в следующем порядке: на первом месте номер горизонтали ладьи, стоящей на вертикали a, на втором — номер горизонтали ладьи, стоящей на вертикали b, и т. д. Тогда каждой расстановке ладей, удовлетворяющей условию задачи, будет соответствовать в точности одна перестановка цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

8. $C_{4n}^3 - 4C_{n+1}^3$. У к а з а н и е. Всего имеется $4n$ точек деления. Каждая тройка точек из этих $4n$ определяет треугольник, кроме троек, целиком принадлежащих одной из (четырех) сторон квадрата, а на каждой стороне квадрата расположено $n + 1$ точек деления.

9. Пару вертикальных противоположных сторон можно выбрать C_{p+1}^2 способами. На каждый такой способ имеется C_{q+1}^2 способов выбора пары горизонтальных сторон. Согласно правилу произведения всего имеется $C_{p+1}^2 \cdot C_{q+1}^2$ способов выбора всех и сторон прямоугольника.

10. Первую букву можно выбрать 33 способами, вторая буква выбирается независимо от первой 33 способами, следовательно, две буквы можно выбрать $33 \cdot 33 = 33^2$ способами; третья буква выбирается тоже 33 способами, значит, три буквы можно выбрать 33^3 способами.

Первую цифру можно выбрать 10 способами, вторую также 10 способами, значит, 2 цифры — 10^2 способами, четыре цифры — 10^4 способами. Буквы и цифры номера выбираются независимо, следовательно, по правилу произведения существует всего $33^3 \cdot 10^4$ номеров.

11. Первую монету можно положить тремя способами, вторую монету тоже тремя способами, причем выбор кармана для второй монеты не зависит от того, куда положили первую. Значит, по «правилу произведения» 2 монеты можно разложить 3^2 способами, 3 монеты — 3^3 способами; добавление 1 монеты увеличивает число способов в 3 раза. Следовательно, 7 монет можно разложить по 3 карманам 3^7 способами.

12. $C_6^3 \cdot C_{10}^3$.

13. Первую цифру числа можно выбрать 9 способами (любая цифра, кроме 0), каждую следующую, кроме последней, — 10 способами, таких цифр четыре, последняя цифра может быть только 0 или 5 — 2 способа. Так как каждая цифра выбирается независимо от остальных, то «по правилу произведения» всего может быть $9 \cdot 10^4 \cdot 2 = 18 \cdot 10^4$ чисел.

14. Легко подсчитать, сколько существует пятизначных чисел, в записи которых нет цифры пять. На первом месте в таком числе может стоять любая из 8 цифр (кроме 0 и 5), на каждом из последующих — любая из 9 цифр (кроме 5), значит, пятизначных чисел, в записи которых нет цифры 5, — $8 \cdot 9^4$. Всего пятизначных чисел $9 \cdot 10^4$.

Следовательно, пятизначных чисел, в записи которых хотя бы один раз встречается цифра 5, будет $9 \cdot 10^4 - 8 \cdot 9^4$.

15. В числе, делящемся на 5, на последнем месте стоит 0 или 5. Рассмотрим отдельно эти случаи. Пусть на последнем месте стоит 0, тогда на первом любая из оставшихся 9 цифр, на втором — из 8 неиспользованных цифр, на третьем — из 7 цифр и на четвертом — из 6 цифр; всего пятизначных чисел, оканчивающихся 0, с разными цифрами будет $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$. Если на последнем месте 5, то на первом месте одна из 8 цифр (кроме 0 и 5), на втором — одна из 8 (кроме 5 и использованной для первого места), на третьем — одна из 7, на четвертом — одна из 6, всего таких чисел будет $8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$, а всего чисел, отвечающих условию задачи, $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 + 8 \cdot 8 \times \times 7 \cdot 6 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot (9 + 8) = 17 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$.

16. На первом месте в числе может стоять любая из шести данных цифр — 6 возможностей, на втором тоже любая из 6 цифр и т. д. Всего чисел по «правилу произведения» может быть 6^5.

17. $C_n^2 \cdot k + C_k^2 \cdot n$. Указание. Треугольники могут быть двух видов: 1) две вершины на первой прямой и одна на второй и 2) две вершины на второй прямой и одна на первой.

18. $C_n^2 \cdot C_k^2$. Указание. Любая точка пересечения служит точкой пересечения диагоналей выпуклого четырехугольника, две вершины которого находятся на одной из прямых (C_n^2 способов выбора), а две других — на другой (C_k^2 способов выбора). По правилу произведения получаем ответ.

19. $5! - 2 \cdot 4! = 72$. Указание. Всего пятизначных чисел из цифр 1, 2, 3, 4, 5 (без повторения) — $5!$ чисел, в которых четные цифры стоят рядом $2 \cdot 4!$ (условно считая две четные цифры, за одну получим перестановку из 4 элементов, а затем заметим, что эти две цифры можно поменять местами между собой).

20. $4^5 \cdot 6^4 + 6^5 \cdot 4^4 = 3\,317\,760$. Указание. Если слово начинается с согласной, то в нем согласные занимают I и III, V, VII и IX места (6^5 способов), а гласные — II, IV, VI, VIII места (4^5 способов). Согласно правилу произведения всего будет $6^5 \cdot 4^4$ слов, начинающихся с согласной. Аналогично имеем $4^5 \cdot 6^4$ слов, начинающихся с гласной.

21. 3 способа. Решение. 2 черные бусинки можно поставить рядом, можно поместить между ними одну зеленую бусинку или 2 зеленые бусинки.

22. Составим все размещения из 10 цифр по 3 и расположим элементы их по кругу. Полученные размещения разобьем на классы так, что размещения принадлежат одному классу, если они отличаются только поворотом круга. В каждый класс, очевидно, попадает 3 размещения. Таким образом, число классов равно $\frac{A_{10}^3}{3}$. Очевидно, что число расстановок, о которых и идет речь в задаче, равно числу классов.

23. Составим перестановки из 20 элементов, расположив элементы по кругу. Число перестановок будет равно $P_{20} = 20!$. Разобьем полученные перестановки на классы так, чтобы в один класс попали перестановки, которые могут быть получены одна из другой только поворотом. Искомое число способов равно числу классов, т. е. $\frac{20!}{20} = 19!$, так как в каждом классе будет 20 перестановок.

24. Пусть число искомых «расстановок» всех фруктов x. В каждой расстановке составим все возможные перестановки яблок, груш и персиков. Тогда число новых «расстановок» будет равно $x \cdot 3!\,5!\,2!$ (число перестановок яблок — $3!$, груш — $5!$, персиков — $2!$). Мы получили таким способом все перестановки из 11 элементов, их число $P_{11} = 11!$, откуда $x = \frac{11!}{3!\,5!\,2!}$.

Замечание. Наборы, о которых говорится в задаче 24, называются «перестановками с повторениями». Подробно о таких перестановках вы можете прочесть в книге Виленкина «Комбинаторика».

25. Если разложение числа n на простые множители имеет вид:

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k},$$

то любой делитель этого числа является числом вида

$$p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\beta_k},$$

где $0 \leqslant \beta_k \leqslant \alpha_k$; таким образом, имеется $\alpha_i + 1$ возможность для каждого простого множителя числа p. Следовательно, согласно правилу произведений число n имеет $(\alpha_1 + 1)\,(\alpha_2 + 1)\,(\alpha_k + 1)$ делителей. Для получения ответа в задаче в) нужно предварительно разложить число 10! на простые множители: $10! = 2^8 \cdot 3^4 \times$ $\times 5^2 \cdot 7$. Ответ. а) 32; б) 6912; в) 270.

26. C_{m+n}^m. Указание. Достаточно указать номера m отрезков из общего числа $m+n$, параллельных стороне прямоугольника, содержащей m кварталов.

27. Любой путь прóходит через диагональ в точке с координатами $(k;\ n-k)$, где k — некоторое число, удовлетворяющее условию $0 \leqslant k \leqslant n$. Для даннóго k таких путей $C_n^k \cdot C_n^{n-k} = (C_n^k)^2$.

28. а)
$$S = \frac{1}{2}\left((C_n^1 + 2C_n^2 + \ldots + nC_n^n) + (nC_n^0 + (n-1)C_n^1 + \ldots + C_n^{n-1})\right) = \frac{n}{2}(C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n) = \frac{n}{2}\cdot 2^n = n \cdot 2^{n-1}.$$

б) Ответ. 0 при $n > 1$; -1 при $n = 1$. Обозначим сумму
$$C_n^0 - 2C_n^1 + 3C_n^2 - \ldots + (-1)^n(n+1)C_n^n$$
через $S(n)$. $S(1) = 1 - 2 = -1$; $S(2) = 1 - 4 + 3 = 0$. Далее,
$$S(k+1) - S(k) = (C_{k+1}^0 - C_k^0) - 2(C_{k+1}^1 - C_k^1) + 3(C_{k+1}^2 - C_k^2) - \ldots + (-1)^k(k+1)(C_{k+1}^k - C_k^k) + (-1)^{k+1}(k+2)C_{k+1}^{k+1} = -2C_k^0 + 3C_k^1 - 4C_k^2 + \ldots + (-1)^k(k+1)C_k^{k-1} + (-1)^{k+1}(k+2)C_k^k = -S_k - (C_k^0 - C_k^1 + C_k^2 + \ldots + (-1)^k C_k^k).$$
Так как $C_k^0 - C_k^1 + C_k^2 + \ldots + (-1)^k C_k^k = 0$, то $S(k+1) = 0$.

Другой способ решения основан на том, что для функции
$$f(x) = C_n^0 x - C_n^1 x^2 + C_n^2 x^3 + \ldots + (-1)^n C_n^n x^{n+1} = x(C_n^0 - C_n^1 x + C_n^2 x^2 - \ldots) = x(1-x)^n$$
искомая функция является значением производной в точке $x = 1$, так как
$$f'(x) = C_n^0 - 2C_n^1 x + 3C_n^2 x^2 + \ldots + (-1)^n(n+1)C_n^n.$$
С другой стороны, $f'(x) = (1-x)^n - x \cdot n(1-x)^{n-1}$;
$$f'(1) = -1 \text{ при } n = 1;\ f'(1) = 0 \text{ при } n > 1.$$

29. Искомая сумма S есть значение в точке $x = 1$ функции
$$f(x) = \frac{C_n^0 x}{1} + \frac{C_n^1 x^2}{2} + \ldots + \frac{C_n^n x^{n+1}}{n+1}.$$

Так как $f'(x) = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n = (1+x)^n$, то $f(x) = \frac{(1+x)^{n+1}}{n+1} + C$. Постоянную C легко найти из условия $f(0) = 0$ откуда $C = \frac{-1}{n+1}$. Итак, $S = f(1) = \frac{(1+1)^{n+1}-1}{n+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

32. $(1+x-x^2)^9 = (1+x)^9 - 9(1+x)^8x^2 + 36(1+x)^7x^4 - \ldots$ В разложении остальные члены не выписаны, так как последний множитель имеет вид x^k, где $k > 4$. В каждом из выписанных слагаемых после раскрытия скобок будет в точности по одному члену, содержащему x^8: в первом слагаемом это $C_9^4x^4 = 126x^4$; во втором это $(-9C_8^2x^2x^2) = -252x^4$; в третьем это $36 \cdot 1 \cdot x^4$. Итак, коэффициент при x^4 в данном разложении равен $126 - 252 + 36 = -90$.

33. $(1+x)^{2n} = (1+x)^n \cdot (1+x)^n = (C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + \ldots + C_n^nx^n)(C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + \ldots + C_n^nx^n)$. После раскрытия скобок получим, что коэффициент при x^k у произведения равен $C_n^0 \cdot C_n^k + C_n^1 \cdot C_n^{k-1} + \ldots + C_n^k \cdot C_n^0$. С другой стороны, этот коэффициент равен C_{2n}^k (из разложения $(1+x)^{2n}$ по формуле Ньютона).

35. Легко понять, что сумма всех коэффициентов многочлена равна значению этого многочлена при $x = 1$. В данном случае $(2-3)^{13}(1-2)^{17} = 1$.

36. Указание. Сумма коэффициентов при четных степенях равна $\frac{1}{2}(p(1) + p(-1))$, а сумма коэффициентов при нечетных степенях $-\frac{1}{2}(p(1) - p(-1))$. Ответ. а) -2^{171}; б) $\frac{-2^{171}(5^{1977}+1)}{2}$; в) $\frac{2^{171}(5^{1977}-1)}{2}$.

37. Указание. Сравните «естественным образом» выписанные коэффициенты при x^{k+1} (для п. а) или при x^{k+2} (для п. б) в левой и правой частях тождеств.

38. Всего разных наборов из трех шаров C_{12}^3 (так как порядок, в котором шары вынимаются из урны, несуществен). Благоприятных исходов: а) C_7^3 (любой набор трех черных шаров); б) $C_7^2 \cdot 5$ (на любой набор двух черных шаров можно взять любой из белых); в) $7 \cdot C_5^2$; г) C_5^3. Вероятности:

а) $\frac{C_7^3}{C_{12}^3} = \frac{35}{220} = \frac{7}{44}$; б) $\frac{5C_7^2}{220} = \frac{21}{44}$;

в) $\frac{7C_5^2}{220} = \frac{7}{22}$; г) $\frac{C_5^3}{220} = \frac{1}{22}$.

39. а) $\frac{1 + 31 \cdot C_5^4 + C_{31}^2 \cdot C_5^3}{C_{36}^5} = \frac{4806}{376\,992} = \frac{267}{20944}$;

б) $\frac{C_{31}^2 \cdot C_5^3}{376\,992} = \frac{4650}{376\,992} = \frac{775}{62\,832}$;

в) $\frac{31C_5^4}{376\,992} = \frac{155}{376\,992}$; г) $\frac{1}{376\,992}$.

40. В первом случае на $2^4 = 16$ равновероятных исходов $C_4^3 = 4$ благоприятных, вероятность равна $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$; во втором случае

на $2^8 = 256$ равновероятных исходов $C_8^5 = 56$ благоприятных, вероятность равна $\frac{56}{256} = \frac{7}{32}$. В том, что вероятность первого события выше, нет никакого парадокса, так как речь идет о выигрыше в точности 3 партий из 4 и 5 партий из 8. Вероятность выиграть не менее трех партий из четырех $\left(\text{она равна } \frac{5}{16}\right)$ меньше, чем вероятность выиграть не менее пяти партий из восьми (она равна $\frac{85}{256}$).

41. а) Так как порядок, в котором берутся карточки, несуществен, то число равновероятных исходов можно считать равным $C_6^3 = 20$; число благоприятных исходов равно трем: нужно выбрать карточки с буквами Ш и Р и любую из карточек с буквой A; б) в этом случае порядок существен, поэтому в качестве равновероятных исходов надо брать выборки из трех упорядоченных элементов, т. е. размещений; число таких исходов равно $A_6^3 = 120$. Благоприятных исходов три: первой нужно взять карточку с буквой Ш, второй — любую из трех с буквой А, третьей — карточку с буквой Р. Ответ. а) $\frac{3}{20}$; б) $\frac{1}{40}$.

42. Пусть есть A равновероятных возможностей (в задаче а) $A = 12$, в задаче б) $A = 365$), b — число людей в компании. Для каждого человека существует A возможных месяцев (дней), поэтому всего различных распределений месяцев (дней) рождения A^b. Найдем число распределений, при которых все b людей родились в разные месяцы (дни). Для первого человека есть A возможных месяцев (дней), для второго $A - 1$ месяцев (дней), не совпадающих с месяцем (днем) рождения первого, для третьего $A - 2$, ..., для b-го человека $A - b + 1$ возможность. Общее число вариантов равно $A(A-1)(A-2)\ldots(A-b+1)$, т. е. числу размещений из A по b. Для вычислений это число удобнее записать в виде $\frac{A!}{(A-b)!}$. Таким образом, вероятность того, что все люди в компании родились в разные дни, равна $\frac{A!}{(A-b)!\cdot A^b}$. Нас интересует значение b, при котором эта вероятность впервые будет меньше $\frac{1}{2}$. Подсчет удобнее производить при помощи таблиц логарифмов. Требуется определить, при каком наименьшем b впервые

$$\lg(A!) - \lg(A-b)! - b\lg A + \lg 2 < 0.$$

В задаче а) для $b = 4$ получаем (так как $A = 12$):

$$\lg(12!) - \lg(8!) - 4\lg 12 + \lg 2 = 8{,}6803 - 4{,}6055 - 4{,}3167 + 0{,}3010 = 0{,}0591 > 0;$$ при $b = 5$

$$\lg(12!) - \lg(7!) - 5\lg 12 + \lg 2 = 8{,}6803 - 3{,}7024 - 5{,}3995 + 0{,}3010 = -0{,}1206 < 0.$$

Таким образом, $b = 5$. Для упрощения вычислений в задаче б) нужна таблица логарифмов факториалов. Ответ в этой задаче $b = 23$, в чем нетрудно убедиться, имея следующие значения из таблиц:
$\lg(365!) = 778,39975$; $\lg(343!) = 722,30972$; $\lg(342!) = 719,77442$; $\lg 365 = 2,56229$. Отметим еще, что при $b = 22$ вероятность того, что все дни рождения различны, приблизительно равна 0,5243, а при $b = 23$ — 0,4927.

43. Пронумеруем травинки числами от 1 до 6. (Первую травинку можно считать сверху связанной со второй, третью — с четвертой и пятую — с шестой — так выберем нумерацию.) Подсчитаем число возможных случаев. Первую травинку можно снизу связать с любой из пяти оставшихся, следующую за ней по номеру свободную травинку — с любой из трех оставшихся, наконец, последняя пара травинок связывается однозначно; итак, всего 15 возможностей. Подсчитаем число благоприятных возможностей. Первую травинку можно связать с любой, кроме второй, — 4 возможности; вторую — с любой из двух травинок свободной пары — 2 возможности; всего 8 возможностей. Искомая вероятность равна $\frac{8}{15}$; б) аналогично $p = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n-4)(2n-2)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-3)(2n-1)}$.

Глава II

§ 1

1. в) Предположим, что $\sqrt[3]{12}$ — рациональное число и что $\frac{p}{q}$, где $p \in \boldsymbol{Z}$, $q \in \boldsymbol{N}$ — его представление в виде несократимой дроби. Тогда $12 = \frac{p^3}{q^3}$, $12q^3 = p^3$, откуда следует, например, что p^3, а следовательно, и p кратны трем, т. е. $p = 3k$. Подставляя в равенство $12q^3 = p^3$ вместо p^3 число $27k^3$, получим: $12q^3 = 27k^3$, $4q^3 = 9k^3$, откуда следует, что q кратно трем. Итак, и p и q делятся на 3, что противоречит предположению о несократимости дроби $\frac{p}{q}$.

г) Так как $\log_2 3 > 0$, то можно считать, что в его представлении $\frac{p}{q}$ в виде несократимой дроби p и q — натуральные числа (в предположении, что $\log_2 3$ — рациональное число). Имеем: $2^{\log_2 3} = 3$, $2^{\frac{p}{q}} = 3$, $2^p = 3^q$, что противоречит теореме о единственности разложения на простые множители (в данном случае можно сказать проще: левая часть делится на 2, а правая — нет).

2. а) Если число $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ рационально, то рационально и число $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 = 2+3+2\sqrt{6}$, но тогда рационально и число $\sqrt{6}$.

б) Если $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3} = r$, где r рационально, то тогда $(\sqrt[3]{3})^3 = r^3 - 3r^2\sqrt{2} + 3\cdot 2r - 2\sqrt{2}$, откуда $(2+3r^2)\sqrt{2} = r^3+6r-3$, $\sqrt{2} = \frac{r^3+6r-3}{2+3r^2}$, т. е. получается, что $\sqrt{2}$ рационально.

в) $\log_{18} 36 = \frac{p}{q} \Leftrightarrow 18^p = 36^q \Leftrightarrow 2^p3^{2p} = 2^{2q}3^{2q}$, и из единственности разложения на простые множители следует, что

$\begin{cases} p = 2q \\ p = q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 0, \\ q = 0, \end{cases}$ что противоречит тому, что $q \neq 0$.

3. а) Предположим, что $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5} = r$, где r — рациональное число. Тогда $2+3+5+2\sqrt{6}+2\sqrt{10}+2\sqrt{15} = r^2$, откуда следует, что число $r_1 = 2\sqrt{6}+2\sqrt{10}+2\sqrt{15}$ также рационально; далее, число $\left(\frac{r_1}{2}\right)^2 = 6+10+15+2\sqrt{60}+2\sqrt{90}+2\sqrt{150}$ рационально, поэтому рациональны числа $r_2 = \sqrt{60}+\sqrt{90}+\sqrt{150} = 2\sqrt{15}+3\sqrt{10}+5\sqrt{6}$, $r_2 - r_1 = 3\sqrt{6}+\sqrt{10}$, $(r_2-r_1)^2 = 54+6\sqrt{60}+10$. Из последнего равенства следует рациональность числа $\sqrt{60}$.

б) Если данное число рационально, то рационально и число $\log_2 3$, что противоречит задаче 1 г).

в) Если $\operatorname{tg} 5^\circ = r$ рационален, то рациональны числа $r_1 = \operatorname{tg} 10^\circ = \frac{2\operatorname{tg} 5^\circ}{1-\operatorname{tg}^2 5^\circ} = \frac{2r_2}{1-r^2}$; $r_2 = \operatorname{tg} 15^\circ = \operatorname{tg}(10^\circ+5^\circ) = \frac{r+r_1}{1-rr_1}$ и $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{2\operatorname{tg} 15^\circ}{1-\operatorname{tg}^2 15^\circ} = \frac{2r^2}{1-r_2^2}$, что противоречит тому, что $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ — иррациональное число.

4. а) Если рационально число $r = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$, то рационально и число $\frac{1}{r} = \sqrt{2}+\sqrt{3}$, что противоречит результату задачи 2а).

б) $\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt[3]{2}} = r \Leftrightarrow \sqrt{3} = r + r\sqrt[3]{2} \Leftrightarrow \sqrt[3]{2}\cdot r = \sqrt{3} - r \Leftrightarrow 2r^3 = 3\sqrt{3} - 9r + 3\sqrt{3}r^2 - r^3 \Leftrightarrow 3r^3 + 9r = \sqrt{3}(3+3r^2) \Leftrightarrow \sqrt{3} = \frac{r^3+3r}{1+r^2}$, что противоречит иррациональности $\sqrt{3}$, если r рационально.

5. а) Да; б) может быть, а может и не быть; в) нет.

6. а) Да; б) может быть, а может и не быть; в) если рациональное число отлично от 0, то нет; если равно 0, то произведение тоже равно 0.

7. I. $2^2=4$; $2^{0,5}$; II. $3^{\log_3 2}$; $2^{0,5\log_2 3}=3^{0,5}=\sqrt{3}$; III. $(\sqrt{2})^2$; $(\sqrt{2})^3$; IV. $(\sqrt{2})^{2\log_2 3}$; $(\sqrt{2})^{\log_2 3}=\sqrt{3}$. В каждой паре первое число рационально, второе иррационально.

8. а) $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-2\sqrt{6}=\dfrac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}{3-2}-2\sqrt{6}=3+2\sqrt{6}+$ $+2-2\sqrt{6}=5$.

б) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}-\dfrac{\sqrt{6-4\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}-3}=\dfrac{\sqrt{2}\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{3+2\sqrt{2}}-\dfrac{\sqrt{6-4\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}-3}=$

$$=\frac{\sqrt{6+4\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}+3}-\frac{\sqrt{6-4\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}-3}=\frac{\sqrt{(2+\sqrt{2})^2}}{2\sqrt{2}+3}-\frac{\sqrt{(2-\sqrt{2})^2}}{2\sqrt{2}-3}=$$

$$=\frac{(2+\sqrt{2})(2\sqrt{2}-3)-(2-\sqrt{2})(2\sqrt{2}+3)}{(2\sqrt{2})^2-3^2}=4.$$

9. а) $\sqrt{x}-\sqrt{y}$; б) $\sqrt{x}+\sqrt{y}$; в) $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}$; г) $\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}$; д) сначала «убьем» $\sqrt{z}$: $(x+\sqrt{y}+\sqrt{z})\times$ $\times(x+\sqrt{y}-\sqrt{z})=x^2+2x\sqrt{y}+y-z$; сопряженным к полученному выражению является $x^2+y-z-2x\sqrt{y}$ (см. п. б). Ответ: $(x+\sqrt{y}-\sqrt{z})(x^2+y-z-2x\sqrt{y})$; е) $(\sqrt{x}+\sqrt[3]{y})\times$ $\times(x^2+x\sqrt[3]{y^2}+\sqrt[3]{y^4})$; ж) проще всего воспользоваться тождеством $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)=a^3+b^3+c^3-3abc$, положив $a=\sqrt[3]{x}$; $b=\sqrt[3]{y}$; $c=\sqrt[3]{z}$. Ответ. $(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}+$ $+\sqrt[3]{z^2}-\sqrt[3]{xy}-\sqrt[3]{xz}-\sqrt[3]{yz})\times((x+y+z)^2+3(x+y+z)\times$ $\times\sqrt[3]{xyz}+9\sqrt[3]{x^2y^2z^2})$.

10. 11. Воспользуйтесь результатом задачи 9.

13. Докажем формулу (2). Проверим сначала, что области определения левой и правой частей этой формулы совпадают:

а) левая часть: $B\geqslant 0$ и $A\geqslant\sqrt{B}$;

б) правая часть: $A-\sqrt{A^2-B}\geqslant 0$, т. е. $A\geqslant\sqrt{A^2-B}$, откуда $A\geqslant 0$ и $A^2\geqslant A^2-B$; следовательно, и $A\geqslant 0$, и $B\geqslant 0$; далее, $A^2-B\geqslant 0$, откуда $A\geqslant\sqrt{B}\geqslant 0$.

Обе части равенства (2) положительны, так как

$$\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}\geqslant\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}\Leftrightarrow\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}\geqslant$$
$$\geqslant\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}\Leftrightarrow\sqrt{A^2-B}\geqslant 0,$$

следовательно, (2) можно почленно возводить в квадрат и

$$\left(\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}-\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}\right)^2=\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}+$$
$$+\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}-2\sqrt{\frac{A^2-(\sqrt{A^2-B})^2}{4}}=A-2\sqrt{\frac{B}{4}}=$$
$$=A-\sqrt{B}=\left(\sqrt{A-\sqrt{B}}\right)^2.$$

14. а) $\sqrt{2}+1$; б) $\sqrt{4-\sqrt{3}}$.

15. Пользуясь формулой $(a+b)^3 = a^3+b^3+3ab\,(a+b))$, получаем:

$$r^3=\left(\sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{847}{27}}}+\sqrt[3]{6-\sqrt{\frac{847}{27}}}\right)^3= =6+\sqrt{\frac{847}{27}}+6-\sqrt{\frac{847}{27}}+ +3r\sqrt[3]{36-\frac{847}{27}}=12+3r\sqrt[3]{\frac{125}{27}}=12+5r.$$

Таким образом, r — корень уравнения $x^3-5x-12=0$. Легко видеть, что $x=3$ — корень этого уравнения. Докажем, что больше корней это уравнение не имеет. Построим график функции $f(x)=x^3-5x-12$ (рис. 54). Для определения числа корней уравнения

$$x^3-5x-12=0$$

нужно знать знак $f(x_0)$ в точке $x=-\sqrt{\frac{5}{3}}$ локального максимума функции $f(x)$.

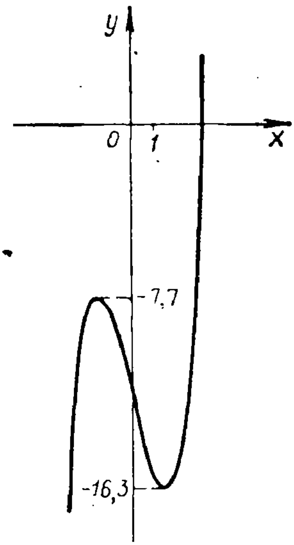


Рис. 54

Так как $f(x_0)=-\frac{5}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}+5\sqrt{\frac{5}{3}}-12=-12+\frac{10}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}\approx \approx -7{,}7<0$, то данное уравнение имеет один корень. Отметим, что корень $x=3$ легко угадывается с помощью теоремы задачи 16, а сложное выражение, которым и «зашифровано» число 3, не что иное, как корень $x=3$ уравнения $x^3-5x-12=0$, выписанный по формуле Кардано для корней уравнения III степени.

16. Пусть $x=\frac{p}{q}$, $p\in \boldsymbol{Z}$, $q\in \boldsymbol{N}$ — рациональный корень данного многочлена; $\frac{p}{q}$ — несократимая дробь. Тогда

$$a_0\left(\frac{p}{q}\right)^n+a_1\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\frac{p}{q}+a_n=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{a_0p^n}{q}+a_1p^{n-1}+a_2p^{n-2}q+\ldots+a_{n-1}pq^{n-2}+a_nq^{n-1}=0. \quad (1)$$

В левой части этого равенства должно стоять целое число. Так как p и q взаимно просты, то a_0 делится на q. Далее,

$$\frac{a_0p^n}{q}+a_1p^{n-1}+\ldots+a_nq^{n-1}=0\Leftrightarrow a_0p^{n-1}+a_1p^{n-2}q+ +\ldots+a_{n-1}q^{n-1}+a_n\frac{q^n}{p}=0,$$

и так как $\frac{a_nq^n}{p}$ — целое число, а p и q взаимно просты, то a_n

делится на p. Из доказанной теоремы следует, в частности, что если свободный член a_0 равен 1, то любой рациональный корень уравнения

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

целый.

18. Обозначим $\cos 20^\circ$ через x. Далее,

$$\cos 3\alpha = \cos 2\alpha \cos \alpha - \sin 2\alpha \sin \alpha =$$
$$= (2\cos^2 \alpha - 1) \cos \alpha - 2 \cos \alpha (1 - \cos^2 \alpha) =$$
$$= 4\cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha,$$

поэтому $\frac{1}{2} = \cos 60^\circ = \cos (3 \cdot 20^\circ) = 4x^3 - 3x$. Итак, $\cos 20^\circ$ является одним из корней уравнения $8x^3 - 6x - 1 = 0$, а это уравнение рациональных корней не имеет (достаточно проверить числа $\pm\frac{1}{8}$; $\pm\frac{1}{4}$; $\pm\frac{1}{2} \pm 1$);

б) $\sin 3\alpha = \sin 2\alpha \cos \alpha + \sin \alpha \cos 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha +$
$+ \sin \alpha (1 - 2\sin^2 \alpha) = 2 \sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha) + \sin \alpha - 2\sin^3 \alpha =$
$= 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$.

Положим, $\alpha = 10^\circ$, $\sin 10^\circ = x$. Тогда

$$\frac{1}{2} = \sin 30^\circ = \sin (3 \cdot 10^\circ) = 3 \sin 10^\circ - 4 \sin^3 10^\circ = 3x - 4x^3.$$

Таким образом, $\sin 10^\circ$ является одним из корней уравнения

$$8x^3 - 6x + 1 = 0,$$

а это уравнение не имеет рациональных корней, следовательно, $\sin 10^\circ$ — иррациональное число.

19. Указание. В десятичной записи этого числа в каком-то месте встретится подряд больше нулей, чем любая предполагаемая длина периода.

20. а) Предположим, что такая прогрессия существует. Без ограничения общности можно считать, что искомая прогрессия имеет $|q| > 1$, где q — знаменатель прогрессии. Пусть 10, 11 и 12 соответственно $(n + 1)$-й, $(m + 1)$-й и $(p + 1)$-й члены прогрессии. Тогда $10 = b_1q^n$, $11 = b_1q^m$, $12 = b_1q^p$, причем $n < m < p$.

Отсюда получаем:

$$\frac{10}{11} = q^{n-m}; \quad \frac{11}{12} = q^{m-p}; \quad \left(\frac{10}{11}\right)^{m-p} = \left(\frac{11}{12}\right)^{n-m} = q^{(n-m)(m-p)}.$$

Далее, $10^{p-m}12^{m-n} = 11^{(m-n)(p-m)}$.

В полученном равенстве левая и правая части — целые числа в силу условия $p > m > n$, однако правая часть делится на 11, а левая нет. Полученное противоречие говорит о том, что предположение неверно.

б) Пусть $\sqrt{3} = a_1 + nd$, $\sqrt{5} = a_1 + md$, $\sqrt{7} = a_1 + pd$. Тогда $\frac{\sqrt{7} - \sqrt{5}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} = \frac{(p - m)d}{(m - n)d} = r$, где r — рациональное число. Далее,

$\sqrt{7}-\sqrt{5}=r(\sqrt{5}-\sqrt{3})$, $7-2\sqrt{35}+5=r^2(5-2\sqrt{15}+3)$, откуда следует рациональность чисел $r^2\sqrt{15}-\sqrt{35}$, $(r^2\sqrt{15}-\sqrt{35})^2$, $2\sqrt{15\cdot 35}=10\sqrt{21}$, $\sqrt{21}$. Противоречие.

в) Указание. Решение аналогично решению задачи а), только равенства $\sqrt{3}=b_1q^n$, $\sqrt{5}=b_1q^m$, $\sqrt{7}=b_1q^p$ надо записать в виде $3=b_1^2q^{2n}$, $5=b_1^2q^{2m}$, $7=b_1^2q^{2p}$.

§ 2

1. а) 0,(142857); б) 0,(81); в) 0,41(6); г) 0,2(6).

2. а) $\frac{13}{99}$; б) $\frac{37}{30}$ $\left(\text{или } 1\frac{7}{30}\right)$; в) $\frac{6}{7}$.

3. а) $0{,}428571<\frac{3}{7}$; б) $\sqrt{2}+\sqrt{11}<3+\sqrt{3}$;

в) $\log_{\frac{1}{2}}3<\log_3\frac{1}{2}$; г) $\log_2 3>\log_3 5$.

4. б) 0,7 и 0,8; 0,76 и 0,77; 0,769 и 0,770; в) 2,6 и 2,7; 2,64 и 2,65; 2,645 и 2,646; г) 1,2 и 1,3; 1,27 и 1,28; 1,277 и 1,278.

5. а) 1,982; б) 3,146; в) 1,252.

6. а) $\frac{1}{90}$ и $\frac{1}{9}$; б) $\sqrt{2}-1{,}5$ и $\frac{\sqrt{2}-1{,}5}{1{,}5}\approx-0{,}058$.

7. а) 0,02 и 0,2; б) 0,09 и 0,06.

8. а) 0; 0; 4; б) 0 и 2. 9. а) 6,5; б) —5,5; в) 0,9; г) 2.

10. 1) а) 3,37; 0,4; б) 3,4; 0,4; в) 3; 0,7; 2) а) 36,96; 0,004; б) 37,0; 0,04; в) 37; 0,04.

11. а) 0,45; б) 7,64.

12. По недостатку: а) 0,00007 и 0,0002; б) 0,00002 и 0,00001; в) 0,0001 и 0,0003; по избытку: а) 0,00004 и 0,00005; б) 0,00009 и 0,00007; в) 0,000003 и 0,000009.

13. а) $\sqrt[3]{3}=1{,}4\ \ldots$, так как $1{,}4^3=2{,}744<3<1{,}5^3=3{,}375$;

б) $\log_2 3=1{,}5\ldots$, так как $2^{1,5}=2\sqrt{2}<3$, а $2^{1,6}=2^{\frac{5}{3}}>3$, поскольку $2^5>3^3$.

в) 0,9... Указание. $\sin 80^\circ>\sin 75^\circ=\sin(45^\circ+30^\circ)=$
$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}>0{,}9$, так как $\sqrt{6}+\sqrt{2}>3{,}6$. $((\sqrt{6}+\sqrt{2})^2=8+4\sqrt{3}\ldots>13$, поскольку $4\sqrt{3}>5$, а $3{,}6^2=12{,}96<13)$.

г) $\sin 20^\circ=\sin\frac{\pi}{9}<\frac{\pi}{9}<0{,}35$ и $\sin 20^\circ=\sin\frac{\pi}{9}>\frac{\pi}{9}-$
$-\frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{9}\right)^3>0{,}35-0{,}008>0{,}34$.

14. $\lg 8=\frac{3}{4}\lg 16=0{,}90309\ldots$ Далее, $\lg 125^{100}=100\lg 125=$
$=100\lg\frac{1000}{8}=100(3-\lg 8)=300-90{,}309\ldots=209{,}690\ldots$

Следовательно, в числе 125^{100} двести десять цифр. Кроме того, $\lg 4 = \frac{1}{2} \lg 16 = 0{,}60206\ldots$; $\lg 5 = 1 - \frac{1}{2} \lg 4 = 1 - 0{,}30103\ldots = 0{,}69896\ldots$, и так как $\lg 4 < (\lg 125^{100} - 209) < \lg 5$, то число 125^{100} начинается с цифры 4.

15. Известно, что $0{,}9999 < x^2 < 1$, поэтому $x < 1$ и $x > x^2 = 0{,}9999$, т. е. $0{,}9999 < x < 1$, откуда $x = 0{,}9999\ldots$.

Далее, $0{,}99995^2 = \left(1 - \frac{1}{20\,000}\right)^2 = 1 - \frac{1}{10\,000} + \frac{1}{(20\,000)^2} > 1 - \frac{1}{10\,000} = 0{,}9999$, то следующую цифру определить нельзя. Она может быть любой из цифр 4, 5, 6, 7, 8, 9.

16. а) $1{,}45 \leqslant a < 1{,}46$; $1{,}10 \leqslant b < 1{,}11$, откуда $1{,}55 \leqslant a+b < 1{,}57$. Следовательно, $a + b$ равно либо $1{,}55\ldots$, либо $1{,}56\ldots$. Ответ. Нельзя (пример, когда $a + b = 1{,}56\ldots : a = 1{,}457\ldots$ и $b = 1{,}107\ldots$).

б) $1{,}45 \cdot 1{,}10 < ab < 1{,}46 \cdot 1{,}11$, т. е. $1{,}595 < ab < 1{,}6206$, поэтому можно определить только целую часть числа ab; она равна 1.

17. $A = \dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{17}} - \dfrac{1}{\sqrt{18}}\right)} = \dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{18}-\sqrt{17}}{\sqrt{18}\cdot\sqrt{17}}} = \dfrac{\sqrt{18}\cdot\sqrt{17}}{\sqrt{18}-\sqrt{17}} = \sqrt{18} \times \sqrt{17}(\sqrt{18}+\sqrt{17}) = 18\sqrt{17} + 17\sqrt{18}$. Далее, $\sqrt{17} < 4 + \frac{1}{8}$, так как $\left(4 + \frac{1}{8}\right)^2 = 16 + 2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{8^2} = 17 + \frac{1}{64}$.

Аналогично $\sqrt{18} < 4 + \frac{1}{4}$. Поэтому

$$A = 18\sqrt{17} + 17\sqrt{18} < 18\left(4 + \frac{1}{8}\right) + 17\left(4 + \frac{1}{4}\right) = 146{,}5.$$

С другой стороны, $\sqrt{17} > 4{,}1$, $\sqrt{18} > 4{,}2$, поэтому $A = 18\sqrt{17} + 17\sqrt{18} > 18 \cdot 4{,}1 + 17 \cdot 4{,}2 = (18 + 17) \cdot 4 + 1{,}8 + 3{,}4 = 140 + 5{,}2 = 145{,}2$.

Следовательно, $145{,}2 < A < 146{,}5$.

18. $\sqrt[4]{\pi} < \frac{4}{3}$, так как $\pi < \left(\frac{4}{3}\right)^4 = \frac{256}{81} = 3{,}16\ldots$.

Далее, $\pi^3 < \pi^\pi < \pi^{3{,}25} = \sqrt[4]{\pi} \cdot \pi^3$; $30{,}95 < 3{,}14^3 < \pi^3 < 3{,}15^3 < 31{,}26$, откуда $30{,}9 < \pi^\pi < 31{,}26 \cdot \sqrt[4]{\pi} < 31{,}26 \cdot \frac{4}{3} = 41{,}7$. Итак, взяв $\pi^\pi = \frac{30{,}9 + 41{,}7}{2} = 36{,}3$, получим значение с точностью до 5,5.

§ 3

1. 57. **3.** а) Докажем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется N такое, что при $n > N$ будет выполнено неравенство $|\sqrt[n]{a} - 1| < \varepsilon$. Запишем это неравенство в виде $1 - \varepsilon < \sqrt[n]{a} < 1 + \varepsilon \Leftrightarrow (1-\varepsilon)^n < a < (1+\varepsilon)^n$.

Если $\varepsilon > 1$, то $1 - \varepsilon \leqslant 0$ и неравенство $1 - \varepsilon < \sqrt[n]{a}$ выполняется для любого n; если $0 < 1 - \varepsilon < 1$, то так как $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ (при $0 < q < 1$), то найдется номер N_1 такой, что при $n > N_1$ будет выполнено неравенство $(1-\varepsilon)^n < a$. Далее, $(1+\varepsilon)^n > 1 + n\varepsilon$, поэтому если $1 + n\varepsilon > a$, т. е. $n > \frac{a-1}{\varepsilon}$, то выполнено неравенство $a < 1 + n\varepsilon < (1+\varepsilon)^n$. Пусть теперь N — некоторое число, большее $\frac{a-1}{\varepsilon}$ и N_1, тогда одновременно выполнены неравенства $(1-\varepsilon)^n < a$ и $a < (1+\varepsilon)^n$, а значит, и неравенство $|\sqrt[n]{a} - 1| < \varepsilon$;

б) для любого $\varepsilon > 0$ неравенство $|\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt[n]{n} - 1 < \varepsilon \Leftrightarrow n < (1+\varepsilon)^n = 1 + n\varepsilon + \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2 + \ldots$, оно будет выполнено, если, например, будет выполнено неравенство

$$n < \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2 \text{ (так как } \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2 < (1+\varepsilon)^n\text{)},$$

т. е. при $2 < (n-1)\varepsilon^2 \Leftrightarrow n - 1 > \frac{2}{\varepsilon^2} \Leftrightarrow n > 1 + \frac{2}{\varepsilon^2}$.

4. а) $-\frac{1}{2}$; $1\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$; б) $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$; 0, 0.

5. а) $-2\frac{1}{9}$; б) $-13\frac{1}{3}$; в) $\frac{2}{3}$.

6. а) $\frac{2}{3}$; б) 0. **7.** а) 2; б) 0.

8. а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{6}$. **9.** а) 0,05; б) $\frac{1}{4}$.

10. а) $S_n = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\left(\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)$.

Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}$.

б) n-й член последовательности представляет собой сумму n членов геометрической прогрессии с первым членом 1 и знаменателем $\left(-\frac{1}{4}\right)$. Поэтому

$$S_n = \frac{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^n}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)} = \frac{4}{5}\left(1-\left(-\frac{1}{4}\right)^n\right) \text{ и}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{4}{5} - \frac{4}{5}\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^n = \frac{4}{5} - 0 = \frac{4}{5}.$$

11. а) 0; б) 0. Указание. а) $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$;

б) $\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1} = \frac{(n^2+1)-(n^2-1)}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}} = \frac{2}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}$.

12. а) a; б) a. Указание. а) $\sqrt[n]{a^n+b^n} = a\sqrt[n]{1+\left(\frac{b}{a}\right)^n} < a\left(1+\frac{1}{n}\left(\frac{b}{a}\right)^n\right)$ в силу неравенства Бернулли.

13. а) 1,5; б) $-\frac{3}{4}$. Указание. а) $\sqrt{n^2+3n+1}-n = \frac{n^2+3n+1-n^2}{\sqrt{n^2+3n+1}+n} = \frac{3n+1}{\sqrt{n^2+3n+1}+n} = \frac{3+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}+1}$.

б) $\sqrt{4n^2-3n}-2n = \frac{4n^2-3n-4n^2}{\sqrt{4n^2-3n}+2n} = \frac{-3n}{\sqrt{4n^2-3n}+2n} = \frac{-3}{\sqrt{4-\frac{3}{n}}+2}$.

14. а) 0; б) 1. Указание. а) $\ln(2n+1)-\ln\left(2n-\frac{1}{2}\right) = \ln\frac{2n+1}{2n-\frac{1}{2}} = \ln\frac{2+\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{2n}}$ и $\lim_{n\to\infty}\left(\ln(2n+1)-\ln\left(2n-\frac{1}{2}\right)\right) = \ln\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{2n}} = \ln 1 = 0$; б) $\lim_{n\to\infty} 2^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = 2^{\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})} = 2^0 = 1$ (см. № 11 *а*)).

15. а) Расходится; в противном случае существовал бы $\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty}(x_n+y_n) - \lim_{n\to\infty} x_n$, что противоречит условию; б) если $\lim_{n\to\infty} x_n \neq 0$, то расходится; если $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, то может сходиться (пример $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = n$), а может и расходиться (пример $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $y_n = n^2$).

16. Последовательности могут как сходиться, так и расходиться. Примеры, годные для обоих пунктов а) и б): сходящейся последовательности $x_n = (-1)^n$; $y_n = (-1)^{n+1}$; расходящейся последовательности $x_n = (-1)^n$, $y_n = n$.

17. а) Нет, пример $x_n = \frac{1}{n}$; $y_n = n^2$; б) например, достаточно потребовать, что последовательность y_n была ограниченной; в) нет, например, пусть $x_n = 0$ при четных n и $x_n = 1$ при нечетных n; $y_n = 0$ при нечетных n, $y_n = 1$ при четных n.

18. а) Нет; б) да, 0. Указание. а) Воспользуйтесь теоремой о единственности предела последовательности; б) $\left|\frac{\cos n}{n}\right| < \frac{1}{n} < \varepsilon$ при $n > \frac{1}{\varepsilon}$.

19. а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\ln a = \lim\limits_{n\to\infty} \ln \sqrt[n]{a} = \ln \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \ln 1 = 0$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log_2 n}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \log_2 \sqrt[n]{n} = \log_2 \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \log_2 1 = 0$.

20. На основании определения предела существуют числа N_1 и N_2 такие, что при $n > N_1$ будет выполнено неравенство $|a_n - A| < \varepsilon$, а при $n > N_2$ — неравенство $|c_n - A| < \varepsilon$. Тогда при $n > N$, где N — любое число, большее и N_1 и N_2, будут одновременно выполнены оба эти неравенства. Кроме того, $b_n \leqslant c_n \leqslant A + \varepsilon$ и $A - \varepsilon \leqslant a_n \leqslant b_n$, откуда $A - \varepsilon \leqslant b_n \leqslant A + \varepsilon$. Следовательно, для произвольного числа $\varepsilon > 0$ указано $N > 0$ такое, что при $n > N$ выполнено неравенство $|b_n - A| < \varepsilon$, а это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$.

21. Докажем, что для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется номер N такой, что при $n > N$ будет выполнено неравенство

$\left|\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n}{n} - A\right| < \varepsilon$, где $A = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Рассмотрим теперь номер N_1 такой, что при $n > N_1$

$$|x_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда при $n > N_1$

$$\left|\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} - A\right| = \left|\frac{(x_1 - A) + (x_2 - A) + \ldots + (x_n - A)}{n}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left|\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{N_1} - N_1 A}{n}\right| + \frac{n - N_1}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}; \quad \frac{n - N_1}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2},$$

а при $n > N$, где $N > N_1$ — некоторое число, будем иметь:

$\left|\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{N_1} - N_1 A}{n}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$, так как $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_1 + \ldots + x_{N_1} - N_1 A}{n} = 0$.

Следовательно, $\left|\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} - A\right| \leqslant \left|\frac{x_1 + \ldots + x_{N_1} - N_1 A}{n}\right| + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

§ 4

2. а) Да; б) да; в) да; г) нет; д) нет; е) да (см. № 6а).

Указание к д). $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2^n}\geqslant 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+$ $+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots+\underbrace{\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n}+\ldots+\frac{1}{2^n}}_{2^{n-1}\text{ слагаемое}}=\frac{n+2}{2}.$

3. а) Возрастает; указание: $a_n=1-\frac{1}{n}$; б) возрастает; в) возрастает; г) последовательность невозрастающая.

4. Воспользуемся методом математической индукции. $a_2=$ $=\sqrt{2+\sqrt{2}}>\sqrt{2}=a_1$ и $a_1<2$. Далее, пусть $a_{k+1}>a_k$ и $a_k<2$, тогда $a_{k+2}>a_{k+1}$, так как $\sqrt{2+a_{k+1}}>\sqrt{2+a_k}$ и $a_{k+1}=\sqrt{2+a_k}<$ $<\sqrt{2+2}=2$.

5. По теореме Вейерштрасса $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ существует. Обозначим его через A. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{2+a_n}$, откуда $A=\sqrt{2+A}$; $A^2=2+A$, т. е. A равно либо -1, либо 2. Так как $a_n>0$, то $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\geqslant 0$, следовательно, $A=2$.

6. а) Так $\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$, то $a_n<1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+$ $+\ldots+\frac{1}{n(n-1)}=1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=$ $=2-\frac{1}{n}<2$. Кроме того, $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{(n+1)^2}>0$, т. е. (a_n) возрастает. Остается применить теорему Вейерштрасса.

б) Указание. Последовательности $b_n=a_{2n}$ (т. е. $b_1=$ $=1-\frac{1}{3}$; $b_2=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}$; $b_3=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}$ и т. д.) и $c_n=a_{2n+1}$ монотонны и ограничены, поэтому они имеют предел по теореме Вейерштрасса. Остается доказать, что эти пределы совпадают. Это следует из того, что $c_n-b_n=\frac{1}{4n+1}$, откуда получаем:

$$\lim_{n\to\infty}c_n=\lim_{n\to\infty}b_n+\lim_{n\to\infty}(c_n-b_n)=\lim_{n\to\infty}b_n+0=\lim_{n\to\infty}b_n.$$

7. $$\frac{x_n}{x_{n+1}}=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}=\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n}\cdot\frac{n+1}{n+2}=\frac{n+1}{n+2}\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^n=$$

$$=\frac{n+1}{n+2}\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^n\leqslant\frac{n+1}{n+2}\left(1+\frac{n}{n(n+2)}\right)=\frac{n+1}{n+2}\cdot\frac{n+3}{n+2}=$$

$= \frac{n^2+4n+3}{n^2+4n+4} < 1 \left(\left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^n \leqslant 1 + \frac{n}{n(n+2)}\right.$ в силу неравенства Бернулли: $(1+\alpha)^n \leqslant 1 + n\alpha$ при $\alpha > 0$).

Аналогично рассматривается отношение $\frac{y_{n+1}}{y_n}$.

8. См. пример 2 п. 32 учебника для IX класса.

9. По формуле, данной в указании к задаче при $x_1 = 0$, последовательно получаем: $x_2 \approx 0{,}333$, $x_3 \approx 0{,}346$, $x_4 \approx 0{,}347$, $x_5 \approx 0{,}347$. Последовательность x_n ограничена, так как из $|x_{n-1}| < 1$ следует, что $|x_n| < 1$, и возрастает, так как $x_2 > x_1 = 0$ и из $x_n > x_{n-1}$ следует $\frac{1}{3-x_n^2} > \frac{1}{3-x_{n-1}^2}$, т. е. $x_{n+1} > x_n$ (при этом было учтено, что $|x_{n-1}| < 1$ и $|x_n| < 1$).

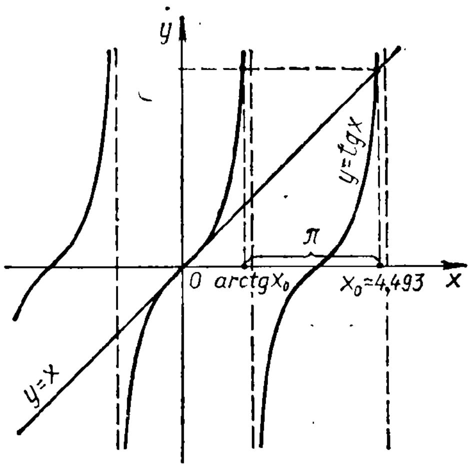


Рис. 55

10. Так как $x = \operatorname{tg} x$ и $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, то $x = \operatorname{arctg} x + \pi$ (рис. 55). Положим, $x_1 = \pi$ и $x_{n+1} = \operatorname{arctg} x_n + \pi$. Тогда $x_2 > x_1$, и если $x_n > x_{n-1}$, то $\operatorname{arctg} x_n > \operatorname{arctg} x_{n-1}$ (так как функция arctg возрастает), поэтому $x_{n+1} = \operatorname{arctg} x_n + \pi > x_n = \operatorname{arctg} x_{n-1} + \pi$. Далее, все x_n имеют на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ (так $|\operatorname{arctg} x| \leqslant \frac{\pi}{2}$ при любом x), поэтому последовательность x_n сходится в силу теоремы Вейерштрасса к некоторому числу $A \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Переходя к пределу в соотношении $x_{n+1} = \operatorname{arctg} x_n + \pi$ и пользуясь непрерывностью функции arctg, получаем:

$$A = \operatorname{arctg} A + \pi.$$

Далее, $x_2 \approx \operatorname{arctg} 3{,}14159 + 3{,}14159 \approx 4{,}404$; $x_3 = \operatorname{arctg} 4{,}404 + \pi \approx 4{,}489$; $x_4 = \operatorname{arctg} 4{,}489 + \pi \approx 4{,}493$; $x_5 = \operatorname{arctg} 4{,}493 + \pi \approx 4{,}493$. Дальше продолжать вычисления не имеет смысла. Мы все время будем получать 4,493. Это и есть значение искомого корня с точностью до 0,001.

З а м е ч а н и е к задачам 9 и 10. Для строгого обоснования того, что корень вычислен с нужной точностью, надо убедиться, что если взять: а) $x_n = 0{,}348$ в задаче 9, то $x_{n+1} = \frac{1}{3-x_n^2}$ будет меньше x_n; б) $x_n = 4{,}494$ в задаче 10, то $x_{n+1} = \operatorname{arctg} x_n + \pi$ будет меньше x_n.

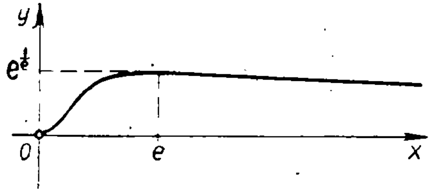


Рис. 56

11. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ существует и равен b. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n}$, откуда $b = a^b$ и $a = b^{\frac{1}{b}}$. Докажем методом математической индукции, что последовательность x_n возрастает и ограничена (сверху) числом b.

В самом деле, очевидно, что $b \geqslant 1$, поэтому $x_1 = a < a^{b^{\frac{1}{b}}} = x_2$ и $x_1 = b^{\frac{1}{b}} \leqslant b^1 = b$. Далее, пусть $x_k < b$ и $x_k < x_{k+1}$. Тогда $x_{k+1} = \left(b^{\frac{1}{b}}\right)^{x_k} = b^{\frac{1}{b}\cdot x_k} \leqslant b^{\frac{1}{b}\cdot b} \leqslant b$ и $x_{k+2} = a^{x_{k+1}} > a^{x_k} = x_{k+1}$. Таким образом, a должно быть больше или равно единице и принадлежать множеству значений функции $y = x^{\frac{1}{x}}$ $(x > 1)$. Построим график этой функции: $y = x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln x}$, $y' = x^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2}\right)$, $y' > 0$ при $x < e$, $y' < 0$ при $x > e$. Таким образом, функция возрастает на промежутке $[1; e]$ и убывает на промежутке $[e; \infty[$ (рис. 56). Итак, наибольшее значение функция $y = x^{\frac{1}{x}}$ принимает при $x = e$, т. е. искомый предел существует для $a \in \left[1; e^{\frac{1}{e}}\right]$. Отметим также, что для a, принадлежащих промежутку $\left[1; e^{\frac{1}{e}}\right[$, уравнение $x^{\frac{1}{x}} = a$ имеет 2 корня (что легко усмотреть из графика), однако так как последовательность x_n возрастает, то искомый предел b равен меньшему корню этого уравнения.

16. а) $p_n < q_{3\cdot 2^k}$ для любого k, поэтому $p_n \leqslant \lim\limits_{k\to\infty} q_{3\cdot 2^k} = \pi$;

б) $q_n > p_{3\cdot 2^k}$ для любого k, поэтому $q_n \geqslant \lim\limits_{k\to\infty} p_{3\cdot 2^k} = \pi$.

17. а) $p_n = q_n\sqrt{1 - \left(\frac{p_n}{nD}\right)^2} \geqslant \pi\sqrt{1 - \left(\frac{4D}{nD}\right)^2} = \pi\sqrt{1 - \left(\frac{4}{n}\right)^2}$, где $D = 1$ — диаметр окружности.

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \pi\sqrt{1 - \left(\frac{4}{n}\right)^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \pi = \pi$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} p_n$ существует и также равен π, так как $\pi\sqrt{1 - \left(\frac{4}{n}\right)^2} \leqslant p_n \leqslant \pi$.

20. Указание. а) Нужно потребовать, чтобы центр круга находился внутри многоугольника, иначе предел может быть равен нулю или не существовать.

б) Возьмите окружность радиуса $R - \varepsilon$ (где $\varepsilon > 0$ — любое число, меньшее R). Тогда при достаточно большем n окружность будет лежать внутри n-угольника.

Глава III

§ 1

1. а) $]-\infty; 0[\cup]0; \infty[$; б) $]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; \infty[$; в) $]-\infty; \infty[$; г) $]-\infty; 0[\cup]0; \infty[$.

2. а) $[0; \infty[$; б) $[-2; \infty[$; в) $]-\infty; -1] \cup [1; \infty[$; г) $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$.

3. а) $]0; \infty[$; б) $]1; \infty[$; в) $]-\infty; -1[\cup]1; \infty[$; г) $]-2; 2[$.

4. а) $]-\infty; -1[\cup]-1; 0[\cup]0; \infty[$; б) $]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; 2[\cup]2; \infty[$; в) $[0; 1[\cup]1; \infty[$.

5. а) $[1; 2]$; б) $[1; \infty[$; в) $[0; 1]$.

6. а) $[0; 1[$; б) $]-1; 1[$; в) $]0; 1[$.

7. а) $]0; 1[$; б) $]1; 2[\cup]2; \infty[$; в) $]1; 2[\cup]2; 3[\cup]3; \infty[$.

8. а) $[2; \infty[$; б) $[-1; \infty[$; указание: $x^2 + 2x = (x + 1)^2 - 1$; в) $\left]-\infty; \frac{1}{4}\right]$; указание: $x - x^2 = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$. Другой способ решения задачи в): уравнение $x - x^2 = a \Leftrightarrow x^2 - x + a = 0$ имеет решение при $D = (-1)^2 - 4a \geqslant 0$, т. е. при $a \leqslant \frac{1}{4}$.

9. а) $\boldsymbol{R}$; б) $]-\infty; 0[\cup]0; \infty[$; в) $]-\infty; 1[\cup]1; \infty[$; решение: $f(x) = a$ при $x = a(x - 1)$, при этом $x \neq 1$, откуда $x(a - 1) = a$ и $x = \frac{a}{a-1}$. Таким образом, при $a \neq 1$ уравнение $f(x) = a$ имеет решение.

10. а) $]0; 1]$; б) $[-1; 1]$; решение: $\frac{2x}{x^2+1} = a$ при $2x = ax^2 + a$; при $a = 0$ уравнение линейное и имеет корень $x = 0$, при $a \neq 0$ уравнение квадратное и имеет корень при $D = (-2)^2 - 4a \cdot a \geqslant 0$, т. е. при $a^2 \leqslant 1$; в) $]-\infty; -2] \cup [2; \infty[$.

11. а) и б) $[0; \infty[$; в) $[0; 1]$; решение: уравнение $\sqrt{2x - x^2} = a$ имеет корни, если $a \geqslant 0$ и при каком-либо x

$$2x - x^2 = a^2.$$

Дискриминант полученного квадратного уравнения $x^2 - 2x + a^2 = 0$ равен $4 - 4a^2$ и неотрицателен при $-1 \leqslant a \leqslant 1$; учитывая условие $a \geqslant 0$, получаем: $0 \leqslant a \leqslant 1$.

12. а) $\boldsymbol{R}$; б) $\boldsymbol{R}$; в) $]-\infty; 0]$.

14. а) $[-1; 1]$; б) $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$; в) $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$. Указание. а) $y = \cos 2x$; б) $y = \frac{1}{2}\sin 2x$; в) $y = (\cos^2 x + \sin^2 x)^2 - 2\sin^2 \cos^2 x = 1 - \frac{\sin^2 2x}{2}$.

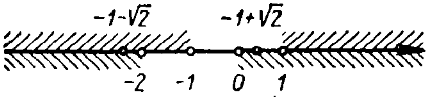


Рис. 57

16. а) $[-\sqrt{2};\ \sqrt{2}]$; б) $[-5;\ 5]$; в) $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\right]$.
В в) $\cos^2 x - \sin x \cos x = 0{,}5 \cos 2x - 0{,}5 \sin 2x + 0{,}5$.

Указание. **17.** а) $\begin{cases} \sin x \neq 0; \\ \cos x \neq 0. \end{cases}$ б) $\cos 2x \geqslant 0$; в) $\sin x > -\frac{1}{2}$.

18. а) $]0;\ 1[\ \cup\ ]1;\ \infty[$; б) $]-1;\ 0[\ \cup\ ]0;\ 1[\ \cup\ ]1;\ \infty[$; в) $]-\infty;\ -1-\sqrt{2}[\ \cup\ ]-1-\sqrt{2};\ -2[\ \cup\ ]1;\ \infty[$; решение: область определения находится из системы неравенств:

$$\begin{cases} x^2+2x>0, \\ x^2+2x\neq 1, \\ x^2-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x>0, \\ x<-2, \end{array}\right. \\ x\neq -1\pm\sqrt{2}, \\ \left[\begin{array}{l} x>1, \\ x<-1 \end{array}\right. \end{cases}$$

(рис. 57).

19. а) $]0;\ \infty[$; б) $]0;\ 2]$; в) $]0;\ \infty[$; г) $[2;\ \infty[$; решение: 2^x может быть любым положительным числом y; при положительных y уравнение $y+\frac{1}{y}=a$ имеет решение при $a\geqslant 2$ (так как $y^2+1=ay$, $y^2-ay+1=0$. $D=a^2-4\geqslant 0$ при $|a|\geqslant 2$, кроме того, корни этого уравнения имеют один и тот же знак и положительны при $a>0$, а значит, и $a\geqslant 2$ — это следует, например, из теоремы Виета).

20. а) 2; б) -3; в) -2.

21. а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{2}{3}$; в) $2-\sqrt{2}$.

22. а) x; б) $2x+\{x\}=3x-[x]$; в) $2\{x\}$.

23. а), б) Графики изображены на рисунке 58; в) так как $[x]+\{x\}=x$, то искомый график — прямая $y=x$.

24. а) $[x-1]=2 \Leftrightarrow 2\leqslant x-1<3 \Leftrightarrow 3\leqslant x<4$; б) $\{n \mid n\in \mathbf{Z}\}$; в) $\{n-\frac{1}{2} \mid n\in\mathbf{Z}\}$.

25. а) $]-\infty;\ 0[\ \cup\ [1;\ \infty[$; б) $\{x \mid x\in \mathbf{R},\ x\notin \mathbf{Z}\}$; в) $\bigcup\limits_{n\in Z}\left]\frac{n}{2};\ \frac{n+1}{2}\right[$.

26. При x, принадлежащих области определения: а) $\log_x(x^2)=2$; б) $10^{\lg x-1}=0{,}1\,x$; в) $10^{\lg(x-1)}=x-1$.

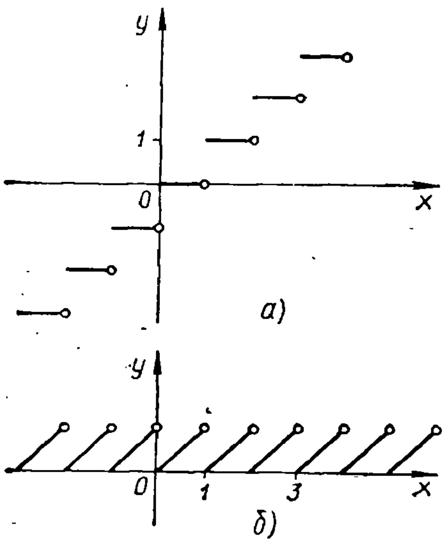


Рис. 58

27. а) $(x^2-1)\log_x(\sqrt{x})=\frac{x^2-1}{2}$. Таким образом, функции 26 и 27 а) в своей области определения совпадают с функциями, заданными правыми частями полученных формул (и конечно, не определены вне области определения). Области определения: 26а) $]0;\ 1[\cup]1;\ \infty[$; б) $]0;\ \infty[$; в) $]1;\ \infty[$. 27а) $]0;\ 1[\cup]1;\ \infty[$.

§ 2

1. а) $f(g(x))=f(x+1)=2(x+1)=2x+2$; $g(f(x))=$ $=g(2x)=2x+1$; б) $x+4$ и $x+4$; в) $2x^2$ и $4x^2$; г) $|1-x|$ и $1-|x|$; д) $\begin{cases} x \text{ при } x\geqslant 0\\ \text{не определена при } x<0\end{cases}$ и $|x|$.

2. а) 0; б) 0; решение: значение $\{f(x)\}$ для любой функции $f(x)$ заключены в промежутке $[0;\ 1[$, а целая часть любого такого числа равна 0; следовательно, для любой f функция $[\{f(x)\}]=$ $=0$ для всех x из области определения функции f; в) 1; г) $\{x\}$; решение: $\{-x\}=1-\{x\}$ при $x\notin \boldsymbol{Z}$ и $\{-x\}=\{x\}=0$ при $x\in\boldsymbol{Z}$. Далее, при любых $x\in\boldsymbol{R}$ и $n\in\boldsymbol{Z}$ имеем: $\{n+x\}=$ $=\{x\}$. Поэтому $\{1-\{1-x\}\}=\{1-\{-x\}\}=\{1-(1-$ $-\{x\})\}=\{\{x\}\}=\{x\}$ при $x\notin\boldsymbol{Z}$ и $\{1-\{1-x\}\}=0=\{x\}$ при $x\in\boldsymbol{Z}$.

3. Области определения функций из задач д) — з) находятся при решении задачи 10. а) $x-n$; б) x при четном n, $1-x$ при нечетном n; в) $2^n x$; г) x^{2^n}; д) $\frac{1}{x}$ при нечетных n; x при четных n;

е) $f(x)=\frac{1}{1-x}$, $f(f(x))=\frac{1}{1-\frac{1}{1-x}}=\frac{x-1}{x}$, $f(f(f(x)))=\frac{1}{1-\frac{x-1}{x}}=x$,

$f(f(f(f(x))))=\frac{1}{1-x}=f(x)$ и т. д.

Таким образом, n-кратная композиция f с собой:

1) при n вида $3k+1$ — функция $\frac{1}{1-x}$;

2) при n вида $3k+2$ — функция $\frac{x-1}{x}$;

3) при n вида $3k$ — функция x;

ж) $f(f(x))=\frac{1}{1+\frac{1}{1+x}}=\frac{x+1}{x+2}$, $f(f(f(x)))=\frac{1}{1+\frac{x+1}{x+2}}=$

$=\frac{x+2}{(x+2)+(x+1)}=\frac{x+2}{2x+3}$, $f(f(f(f(x))))=\frac{2x+3}{(2x+3)+(x+2)}=\frac{2x+3}{3x+5}$.

Обозначим n-кратную композицию f с собой через $f_n(x)$. Докажем, что $f_n(x)$ имеет вид $f_n(x)=\frac{a_nx+a_{n+1}}{a_{n+1}x+a_{n+2}}$, и найдем формулу, по которой можно вычислять a_n: $a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$. Известно, что $a_1=0$, $a_2=1$, $a_3=1$, далее, $f_{n+1}(x)=\frac{1}{1+f_n(x)}=$

$$= \frac{1}{1+\dfrac{a_nx+a_{n+1}}{a_{n+1}x+a_{n+2}}} = \frac{a_{n+1}x+a_{n+2}}{(a_{n+1}x+a_{n+2})+(a_nx+a_{n+1})} =$$

$$= \frac{a_{n+1}x+a_{n+2}}{(a_n+a_{n+1})\,x+(a_{n+1}+a_{n+2})} = \frac{a_{n+1}x+a_{n+2}}{a_{n+2}x+a_{n+3}}.$$

Таким образом, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ при $n \geqslant 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, т. е. последовательность представляет собой последовательность Фибоначчи. Итак, $f_n(x) = \dfrac{a_nx+a_{n+1}}{a_{n+1}x+a_{n+2}}$, где a_k — k-й член последовательности Фибоначчи.

з) $\underbrace{\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots+\sqrt{1+x}}}}}_{n \text{ знаков радикала}}$.

4. Если $f(x) = ax + b$, то $f(f(x)) = a(ax+b)+b = a^2x + ab + b$. Далее, а) равенство $f \circ f = f$ означает, что $\begin{cases} a^2 = a, \\ ab + b = b, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} a = 0, \\ ab + b = b \end{cases}$ или $\begin{cases} a = 1, \\ ab + b = b; \end{cases}$ первая система имеет решения $a = 0$, b — любое, вторая $a = 1$, $b = 0$. Таким образом, либо $f(x) = b$, либо $f(x) = x$;

б) равенство $f(f(x)) = x$ означает, что $\begin{cases} a^2 = 1, \\ ab + b = 0, \end{cases}$ откуда либо $a = 1$, $1 \cdot b + b = 0$, $2b = 0$, $b = 0$, либо $a = -1$, $-b + b = 0$, b — любое. Итак, либо $f(x) = x$, либо $f(x) = b - x$.

5. а) Например, 1) $F(x) = f \circ g$, где $g(x) = 2x$, $f(x) = x + 3$; 2) $F(x) = g \circ f$, где $g(x) = 2x$, $f(x) = x + 1{,}5$; 3) $F(x) = g \circ f \circ g$, где $g(x) = \sqrt{2}x$, $f(x) = x + \dfrac{3}{\sqrt{2}}$; в) например, $F(x) = h \circ f_1 \circ g \circ h$ и $F(x) = h \circ g \circ f_2 \circ h$, $h(x) = |x|$, $g(x) = -x$, $f_1(x) = 1 + x$, $f_2(x) = -1 + x$.

6. а) $F(x) = g \circ f \circ g$, где $g(x) = x^{10}$, $f(x) = x + 1$; в) $F(x) = f \circ h \circ g$, где $g(x) = x^3$, $h(x) = \dfrac{1}{x}$, $f(x) = 2x + 1$; д) $F(x) = k \circ f_2 \circ h \circ g_2 \circ f_1 \circ g_1$, где $g_1(x) = x^2$, $f_1(x) = 3x + 1$, $h(x) = \dfrac{1}{x}$, $f_2(x) = x + 1$, $k(x) = \sqrt[5]{x}$, $g_2(x) = x^5$.

7. а) $]-\infty; 1]$; б) $[0; 4[$; в) $]-\infty; 0]$.

8. а) $]1; \infty[$; б) $]10; \infty[$; в) $]-3; 3[$.

9. а) $[1; \infty[$; б) так как $0 \leqslant \{x\} < 1$, то $\{x\} - 1 < 0$, поэтому $D(f) = \varnothing$; в) $\bigcup\limits_{n \in Z} [n + \frac{1}{2}; n + 1[$; г) любое число, не являющееся целым, входит в область определения функции; д) $\varnothing$.

10. При решении этой задачи следует помнить, что фигурирующие в условии задачи функции — n-кратные композиции, поэтому формулы вида $y = f_n(x)$, полученные в задаче 3, справедливы при условии, что определены функции $f, f \circ f, \ldots, \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{(n-1) \text{ значок } f}$

($(n-1)$ — кратная композиция f с собой). Например, в задаче а) получена формула $f_n(x) = \frac{1}{x}$ при нечетных n, $f_n(x) = x$ при четных n, однако область определения n-кратной композиции $f_n(x)$ при четных n $]-\infty; 0[\,\cup\,]0; \infty[$; б) $D(f) =]-\infty; 1[\,\cup\,]1; \infty[$; $D(f_n) =]-\infty; 0[\,\cup\,]0; 1[\,\cup\,]1; \infty[$ при $n \geqslant 2$; в) $D(f_n) = \{x | x \in \boldsymbol{R}, x \notin B_n\}$, где $B_n = \{-1; -2; -\frac{3}{2}; -\frac{5}{3}; -\frac{8}{5}; \ldots; b_n\}$ — множество чисел вида $b_n = -\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}$, где (a_n) — последовательность Фибоначи, т. е. из множества действительных чисел нужно исключить числа вида b_n; г) достаточно, чтобы была определена функция f, $D(f_n) = [-1; \infty[$; д) $D(f) = [1; \infty[$, найдем сначала $D(f_2)$. $\sqrt{x-1} - 1 \geqslant 0$ при $\sqrt{x-1} \geqslant 1$, т. е. при $x - 1 \geqslant 1$, откуда $x \geqslant 2$. Пусть теперь известно, что область определения функции $f_n(x)$ — промежуток $[a_n; \infty[$. Тогда, так как $f_{n+1}(x) = f_n(\sqrt{x-1})$, то область определения f_{n+1} находится из условия $\sqrt{x-1} \geqslant a_n$, откуда $x - 1 \geqslant a_n^2$ и $x \geqslant a_{n+1} = a_n^2 + 1$. Таким образом, область определения функции f_n — промежуток $[a_n; \infty[$, где последовательность (a_n) задана реккурентной формулой $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a^2 + 1$ при $n \geqslant 1$.

11. а) Необходимо и достаточно, чтобы $E(f) \subseteq D(g)$;

б) вообще говоря, нет, пример $g(x) = x$, $f(x) = \sqrt{x}$, тогда $g(f(x)) = \sqrt{x}$, множество значений функции g — $\boldsymbol{R}$, а множество значений функции $g \circ f$ — промежуток $[0; \infty[$; достаточное (но не необходимое) условие совпадения $E(g)$ и $E(g \circ f)$: $D(g) \subseteq E(f)$.

12. а) и г). **13.** а), б) и в). **14.** а), в) и д).

15. а), б) и г). **16.** г). Р е ш е н и е. Функции а), б) и в) необратимы; например, функция $\{x\}$ принимает одинаковое значение 0 во всех целых точках. Функция $[x]$ принимает значение 0 во всех точках промежутка $[0; 1[$, функция $x + \{x\}$ принимает значение 0

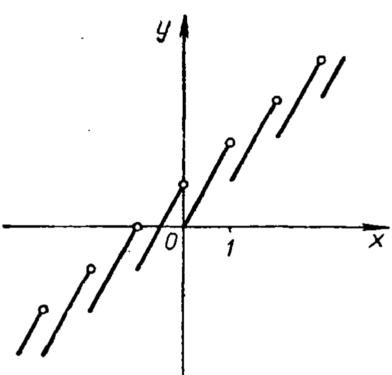


Рис. 59

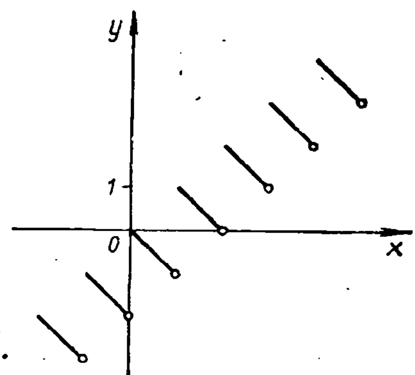


Рис. 60

в двух точках: $-\frac{1}{2}$ и 0 (рис. 59); г) на промежутке $[n; n+1[$ $x-2\{x\} = x-2(x-[x]) = x-2(x-n) = 2n-x$; множество значений функции $y = x-2\{x\}$ на этом промежутке — промежуток $]n-1; n]$; поэтому если x_1 и x_2 принадлежат разным промежуткам вида $[n; n+1[$, то $y(x_1) \neq y(x_2)$; если же x_1 и x_2 лежат в одном промежутке вида $[n; n+1[$, то $y(x_1) = 2n - x_1 \neq \neq 2n - x_2 = y(x_2)$ при $x_1 \neq x_2$. Таким образом, каждое свое значение функция $y = x - 2\{x\}$ принимает только один раз (рис. 60).

17. а) $y = 0{,}5x + 0{,}5$; б) $y = 1 - x$; в) $y = \frac{1}{x}$; г) $y = \frac{x+1}{x}$; д) $y = \begin{cases} \sqrt[3]{x-1} \text{ при } x \geqslant 1, \\ -\sqrt[3]{1-x} \text{ при } x < 1. \end{cases}$ **18.** а) $y = x^2 - 1$ при $x \geqslant 0$, при $x < 0$ функция не определена; б) $y = 1 - 10^x$; в) $y = 10^{x^2}$ при $x \geqslant 0$, при $x < 0$ функция не определена; г) $y = \frac{1}{x^2}$ при $x > 0$, при $x \leqslant 0$ функция не определена.

19. а) $y = ax + b \Leftrightarrow x = \frac{y-b}{a}$ (так как $a \neq 0$), поэтому функция, обратная данной, задается формулой $y = \frac{x-b}{a}$, откуда $a = \frac{1}{a}$ и $b = -\frac{b}{a}$. Решения этой системы: $a = 1$, $b = 0$ и $a = -1$, b — любое. Следовательно, функции вида $y = ax + b$, обратные самим себе, — это $y = x$ и $y = b - x$; б) обратная функция задается формулой $y = \frac{1-bx}{ax}$; $\frac{1-bx}{ax} = \frac{1}{ax+b}$ при любом $x\left(x \neq 0,\ x \neq -\frac{b}{a}\right)$, если $(1-bx)(ax+b) = ax$, $b - abx^2 - b^2x = 0$, $b(1 - ax^2 - bx) = 0$; так как $1 - ax^2 - bx$ не может равняться нулю при любом x при постоянных a и b, то $b = 0$. Итак, $f(x) = \frac{1}{ax}$; в) если $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, то $cxy + dy = ax + b$, $x(cy - a) = b - dy$, $x = \frac{b-dy}{cy-a}$.

Следовательно, функция, обратная данной, задается формулой $y = \frac{-dx+b}{cx-a}$. При любом $x\left(x \neq -\frac{d}{c};\ x \neq \frac{a}{c}\right)$ должно быть выпол-

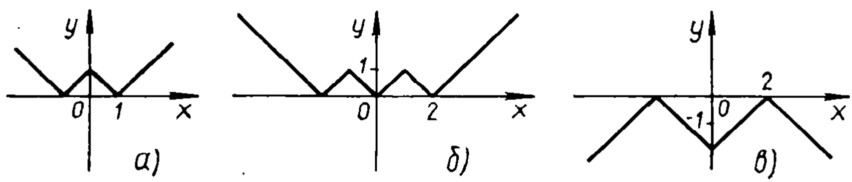


Рис. 61

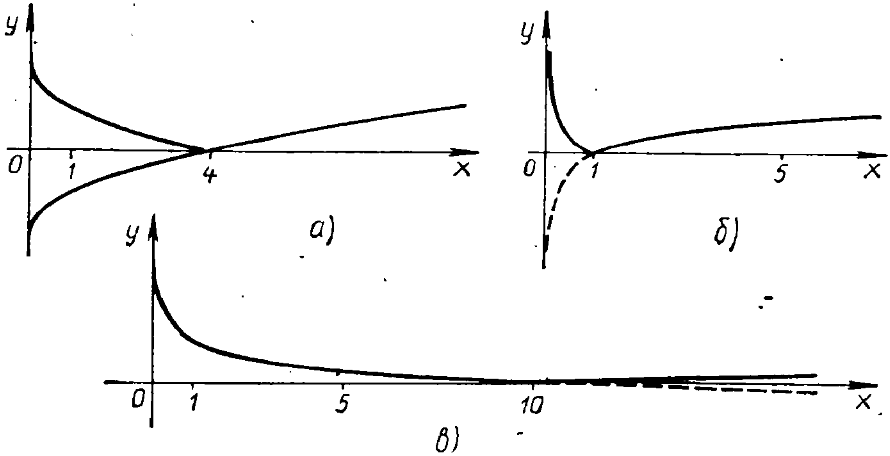

y
0
1
4
x
а)
y
0
1
5
x
б)
y
0
1
5
10
x
в)

Рис. 62

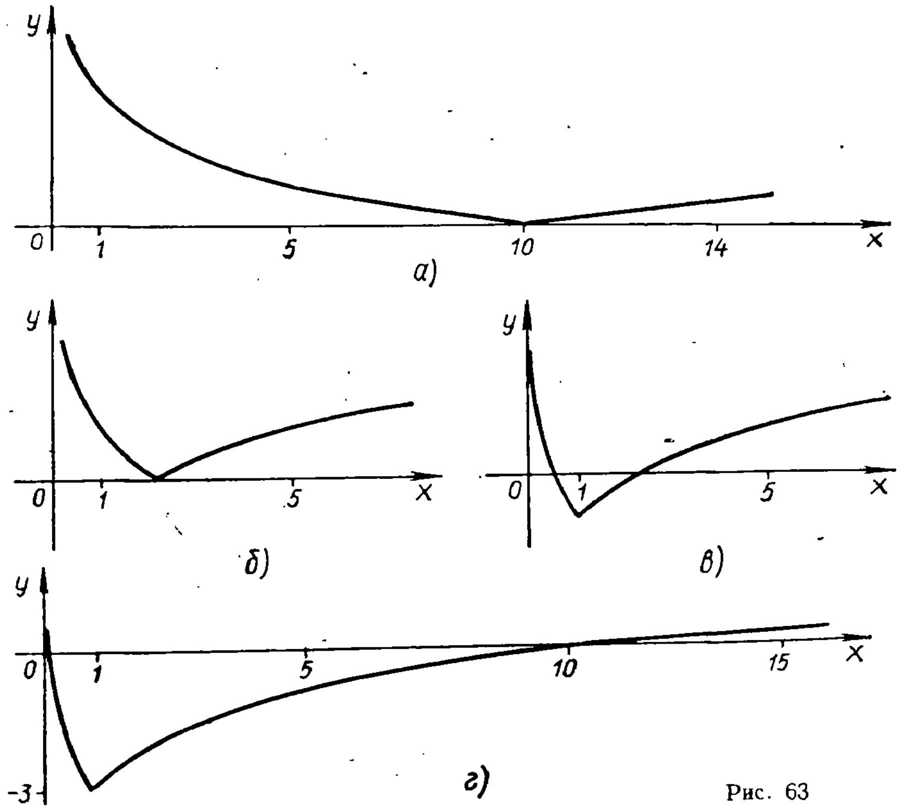

y
0
1
5
10
14
x
а)
y
0
1
5
x
б)
y
0
1
5
x
в)
y
0
1
5
10
15
x
-3
г)

Рис. 63

нено равенство $\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{-dx+b}{cx-a}$, откуда $acx^2 + (bc - a^2)x - ab = -cdx^2 + (bc - d^2)x + bd$.

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем систему:

$$\begin{cases} ac = -cd, \\ -a^2 = -d^2, \\ bd = -ab. \end{cases}$$

Если $a = -d$, то все уравнения системы обращаются в верные равенства; если $a \neq -d$, то последовательно получаем: $c = 0$, $b = 0$, $a = d$. Итак, либо $f(x) = x$, либо $f(x) = \frac{ax+b}{cx-a}$.

20. а) и г).

§ 3

4. Рис. 61. **5.** Рис. 62. **7.** Рис. 63. **9.** Указание. $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)$. **11.** Указание. $\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cx+d} = \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{x + \frac{d}{c}}$. Перенос $\vec{r}\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$. При $bc - ad = 0$ график представляет собой прямую $y = \frac{a}{c}$.

14. Рис. 64. **17.** Рис. 65. **18.** а) $[-1; 2]$; б) $[-2; 1]$; в) $[-1; 2]$; г) $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$; д) $[-2; 1]$; е) $[-1; 2]$; ж) $[-1; 2]$; з) $[-2; 2]$; и) $[-1; 2]$; к) $[-2; 2]$; л) $[0; 4]$; м) $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$. **21.** Рис. 66. **24.** Рис. 67. **26.** Рис. 68. **28.** Рис. 69.

§ 4

2. Возрастающие: x^3; $x^3 + x$; $\sin x + 2x$; 2^x; $\lg x$; $\sqrt{x-1}$; убывающие: 2^{1-x}; $\lg \frac{1}{x}$; неубывающие — все возрастающие и $x + |x|$; невозрастающие — все убывающие.

4. Нет, примером может служить функция $f(x) = x$. В формулировке а) «возрастает» следует заменить на «убывает»; формулировку б) следует оставить без изменений.

6. б) Например, функция $\left|\{x\} - \frac{1}{2}\right|$; в) например, функции $\{x\}$, $(\{x\})^2$; г) например, функция $f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{при целых } x, \\ -2^x & \text{при других } x. \end{cases}$

8. а) и б) — можно. Доказательство. Если $x_1 < x_2$ принадлежат одному из данных промежутков, то $f(x_1) < f(x_2)$, так как функция возрастает на этом промежутке; если же $x_1 < x_2$ и x_1

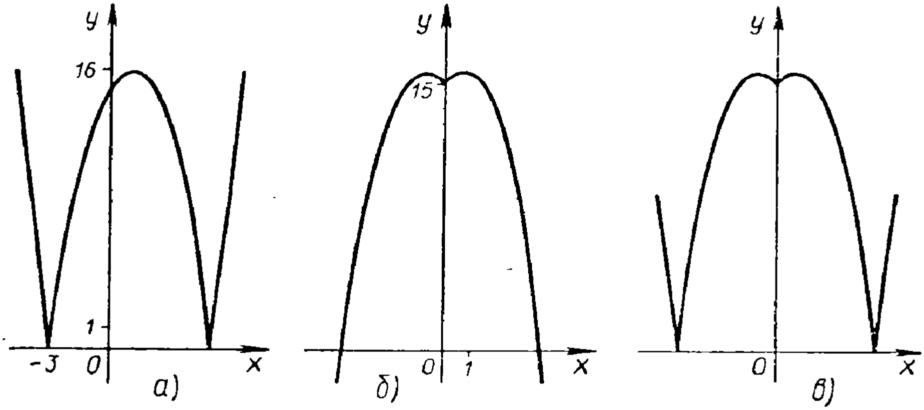


Рис. 64

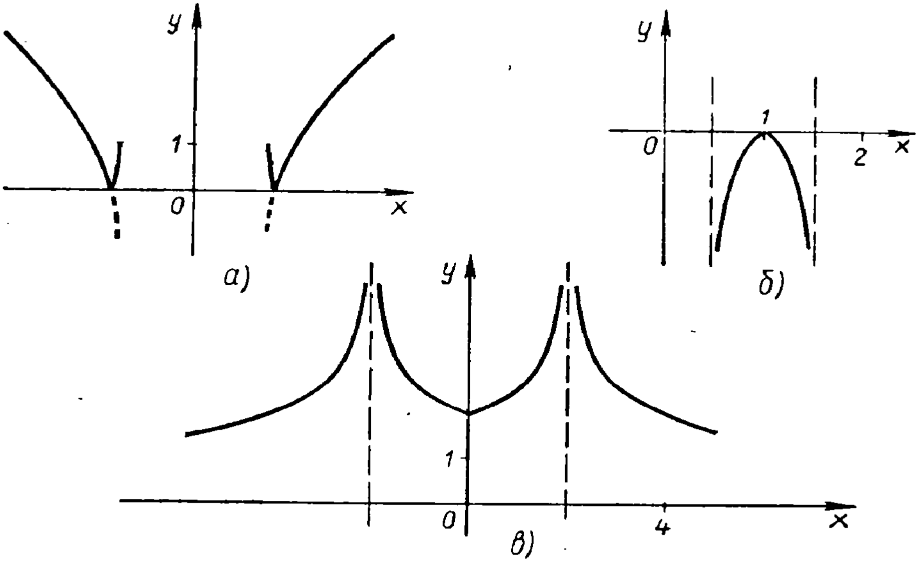


Рис. 65

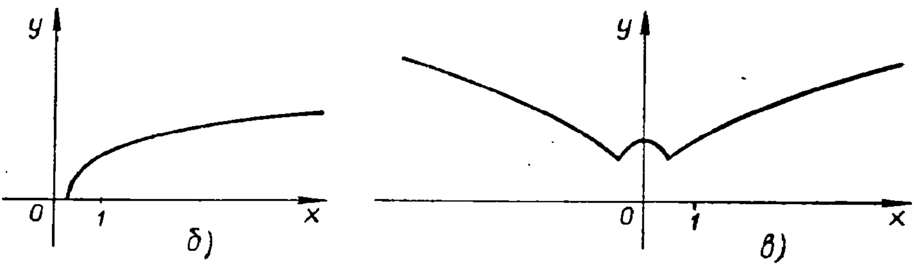


Рис. 66

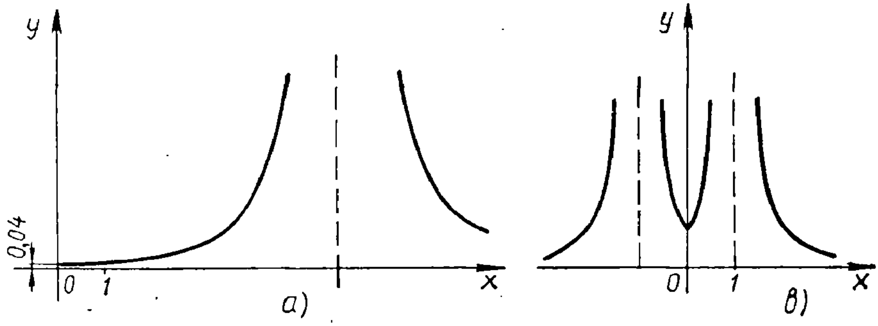


Рис. 67

принадлежат первому промежутку, а x_2 не принадлежит первому, но принадлежит второму, то

$$f(x_1) < f(2) < f(x_2);$$

в) и г) — нельзя. Пример: $f(x) = x$ на первом из промежутков и $f(x) = x - 10$ на втором из промежутков.

9. Возрастают: $f(x) + g(x)$; $2f(x)$; $f^3(x)$; убывает: $-f(x)$.

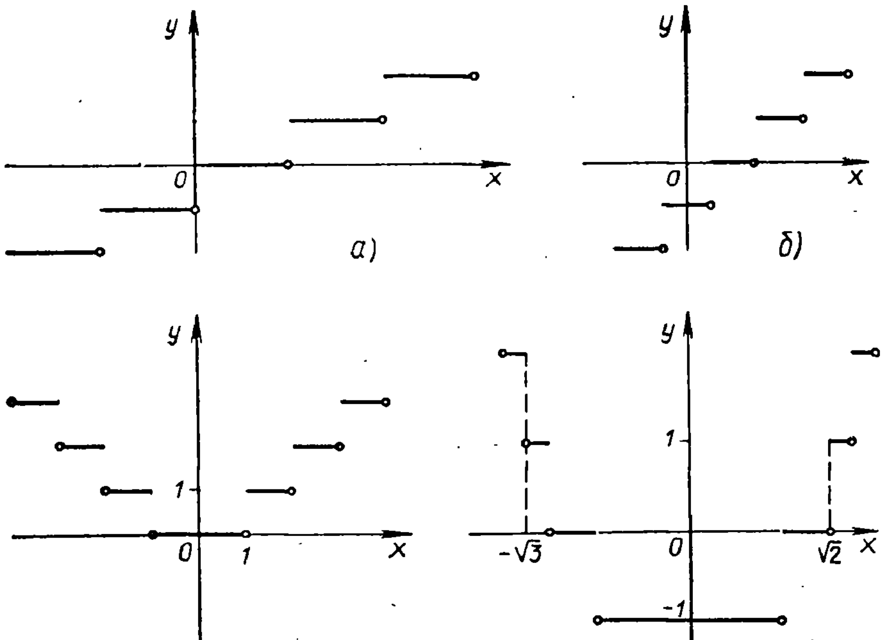


Рис. 68

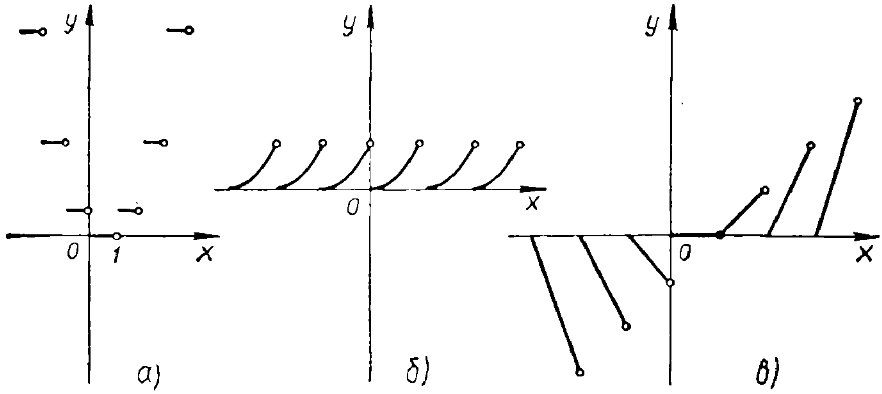


Рис. 69

10. а) $1{,}5x - x$; б) $x - 1{,}5x$; в) $(2x + |x|) - (2x - |x|)$; г) $(2x - |x|) - (2x + |x|)$; д) $(2x + \sin x) - 2x$.

11. Возрастают: $f(2x)$; $f(2^x)$; убывают: $f(-x)$; $f(2-3x)$.

13. Например, функция $\sin\frac{1}{x}$ (при $x \neq 0$), а при $x = 0$ — любое число, скажем 0.

14. Например, функция Дирихле (см. задачу 7 § 5).

§ 5

2. а) 0; б) $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; в) -1 и 1; г) -1; 1; д) $x = n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; е) $\frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; ж) n, $n \in \boldsymbol{Z}$; з) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; и) $\frac{n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

3. Невозможно в случае а); возможно многими способами в случаях в) и г).

5. а) Нет, так как в этом случае функция $g(x)$ была бы непрерывной в точке x_0 как разность непрерывных в этой точке функций $(f(x) + g(x))$ и $f(x)$;

б) может, но только в том случае, когда $f(x_0) = 0$. Если $f(x_0) \neq 0$, то $g(x)$ должна быть непрерывной в точке x_0 как частное непрерывных в этой точке функций $f(x) \cdot g(x)$ и $f(x)$. Если $f(x_0) = 0$, то функция $f(x)\,g(x)$ может быть как разрывной в точке x_0, так и непрерывной в этой точке. Например, функция $g(x) = \frac{1}{x^3}$ при $x \neq 0$, $g(0) = 0$ разрывна в точке $x_0 = 0$, для функции $f(x) = x^2$ функция $f(x)\,g(x) = \frac{1}{x}$ $(f(x)\,g(x) = 0$ при $x = 0)$ разрывна в точке $x_0 = 0$, а для функции $f(x) = x^4$ функция $f(x) \cdot g(x) = x$ непрерывна в точке $x_0 = 0$ (отметим, что $f(x) \cdot g(x) = 0 \cdot 0 = x$ при $x = 0$).

6. Да. Пусть функция $f(x)$ — произвольная функция, определенная в точке x_0 и некоторой ее окрестности, и пусть $f(x)$ разрывна в этой точке. Для пункта б) потребуем еще, чтобы $f(x)$ нигде не обращалась в нуль в этой окрестности. Тогда искомый пример в п. а) дает функция $g(x) = -f(x)$, а в п. б) — функция $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

7. 8. а) Пример, годный для обоих случаев: $f(x) = D(x) - \frac{1}{2}$, где $D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ рационально,} \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально.} \end{cases}$ — функция Дирихле.

8. б) Например, функция $f(x) = x(1 - D(x))$.

9. Например, функция $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x = 0 \text{ (см. задачу 10 г).} \\ x \sin \frac{1}{x}. \end{cases}$

§ 6

2. а) Точки максимума $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; точки минимума $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$; $n \in \boldsymbol{Z}$; б) точек максимума нет, точки минимума $x = n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; в) точек максимума нет, точка минимума $x = -1$; г) точки максимума $x = \frac{2 + \pi + 4\pi n}{6}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; точки минимума $x = \frac{2 - \pi + 4\pi n}{6}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; д) точки максимума $x = \frac{2}{\pi + 4\pi n}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; точки минимума $x = \frac{2}{-\pi + 4\pi n}$; $n \in \boldsymbol{Z}$; е) точки максимума $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; точки минимума $x = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

5. а) $x_1 = -\frac{1}{2}$; $x_2 = 0$; $x_3 = 1$; б) $x_1 = 1$; $x_2 = 0$; $x_3 = -2$; в) $x_1 = 0$; $x_2 = -2$; $x_3 = 2$; г) $x_1 = 0$; $x_2 = -\sqrt{2}$; $x_3 = \sqrt{2}$; д) $x_1 = 2$; $x_2 = 1{,}5$; $x_3 = 0{,}5$; е) $x_1 = 1$.

6. а) Функция $-2f(x)$ имеет экстремум в точке x_0, причем это максимум, если $f(x)$ имела в точке x_0 минимум, и это минимум, если $f(x)$ имела в точке x_0 максимум; б) если $f(x)$ разрывна в точке x_0, то функция $f(x)$ может не иметь экстремума в точке x_0; например, $f(x) = 1$ при $x \neq x_0$ и $f(x_0) = -1$ имеет в точке x_0 минимум, а $f^2(x) = 1$ при всех x не имеет экстремумов; сложнее ответ на этот вопрос, если дополнительно потребовать, чтобы функция $f(x)$ была непрерывной. Прежде всего отметим, что если непрерывная функция $f(x)$ имеет экстремум в точке x_0, то при $f(x_0) \neq 0$ знак $f(x)$ для x из некоторой окрестности $]x_0 - \delta; x_0 + \delta[$ совпадает со знаком $f(x_0)$, если же $f(x_0) = 0$, то знак $f(x)$ для x из некоторой окрестности $]x_0 - \delta; x_0 + \delta[$ при $x \neq x_0$ постоянен (так как $f(x) <$

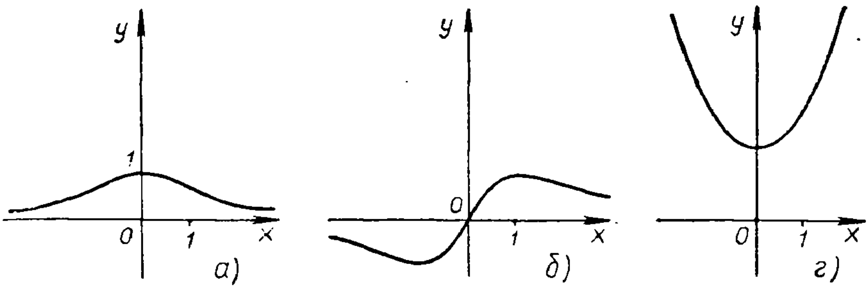


Рис. 70

$< f(x_0) = 0$, если x_0 — точка максимума, и $f(x) > f(x_0) = 0$, если x_0 — точка минимума). Таким образом, $f(x)$ будет иметь экстремум в точке x_0, причем этот экстремум того же вида, что и у функции f, если $f(x_0) > 0$, другого вида, если $f(x_0) < 0$, и минимум, если $f(x_0) = 0$; в) имеет, причем того же вида, что и функция f; указание: неравенства $f^3(x_1) > f^3(x_2)$ и $f(x_1) > f(x_2)$ равносильны; г) если $f(x)$ имеет максимум в точке x_0, то функция $2^{-f(x)}$ имеет минимум в точке x_0; если $f(x)$ имеет минимум в точке x_0, то $2^{-f(x)}$ имеет максимум в точке x_0; указание: неравенства $f(x_1) > f(x_2)$ и $2^{-f(x_1)} < 2^{-f(x_2)}$ равносильны.

7. а) Максимум в точке 0; б) минимум в точке -1, максимум в точке 1; в) максимум в точке -1, минимум в точке 1; г) минимум в точке 0; графики изображены на рисунке 70.

8. Например, рисунки 71 и 72.

9. Возьмем любое $\delta > 0$ такое, что $\delta < \alpha$, $\delta < \beta$. Тогда для любого $x \neq x_0$ и принадлежащего $]x_0 - \delta; x_0 + \delta[$, либо $x \in]x_0 - \alpha; x_0[$, либо $x \in]x_0; x_0 + \beta[$. В первом случае $f(x) < f(x_0)$, так как функция f возрастает на промежутке $]x_0 - \alpha; x_0]$, во втором случае $f(x) < f(x_0)$, так как f убывает на промежутке $[x_0; x_0 + \beta[$. Таким образом, для любого x из промежутка $]x_0 - \delta; x_0 + \delta[$, $x \neq x_0$ выполнено неравенство $f(x) < f(x_0)$; б) нет (рис. 73).

10. а) $y = 0$ при $x \neq x_0$ и $y = 1$ при $x = x_0$; б) $f(x) = -2|x| + |x| \sin \frac{1}{x}$ при $x \neq 0$ и $f(0) = 0$; принцип построения примера

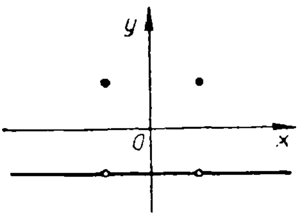


Рис. 71.

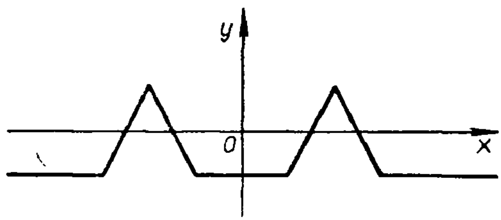


Рис. 72

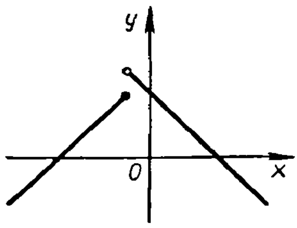


Рис. 73

более общего вида такой: рассмотрим две функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$, имеющие максимум в точке x_0 (пусть для определенности $x_0 = 0$), и такие, что для любого $x \in [-1; 1]$ и $x \neq 0$ (можно взять любой отрезок, содержащий точку $x_0 = 0$) $f_1(x) > f_2(x)$; в качестве таких функций можно взять, например, $f_1(x) = -|x|$, $f_2(x) = -2|x|$; для функции $f(x)$, обладающей требуемыми свойствами, положим в точках вида $x = \frac{1}{n}$, $n \neq 0$; $n \in \mathbf{Z}$: $f\left(\frac{1}{n}\right) = f_1\left(\frac{1}{n}\right)$ при четном n, $f\left(\frac{1}{n}\right) = f_2\left(\frac{1}{n}\right)$ при нечетном n; далее, на отрезке с концами $\frac{1}{n}$ и $\frac{1}{n+1}$ в качестве графика возьмем график любой строго монотонной функции, содержащей взятые точки (концы отрезка — абсциссы этих точек, значения $f(x)$ — ординаты), проще всего взять в качестве графика отрезок прямой; наконец, положим, $f(0) = 0$ и $f(x) = f_2(x)$ при $|x| > 1$;

в) рис. 74, нельзя, так как в этом случае функция возрастала бы на промежутке $]x_0 - \alpha; x_0[$ и убывала бы на промежутке $[x_0; x_0 + \beta[$ и в силу задачи 9 имела бы в этой точке минимум.

11. Да, пусть график функции $f(x)$ состоит из чередующихся горизонтальных и наклонных отрезков (рис. 75), причем число наклонных отрезков равно n и каждый из них пересекает ось Ox. Тогда каждый из n корней уравнения $f(x) = 0$ будет точкой минимума функции $f^2(x)$.

12. Да, рис. 76. 13. Рис. 77.

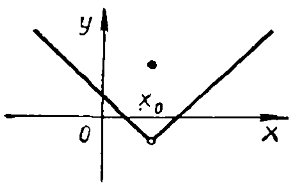


Рис. 74

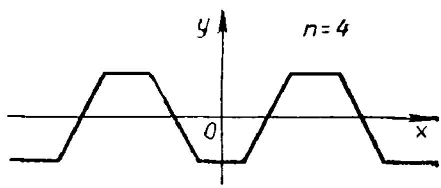


Рис. 75

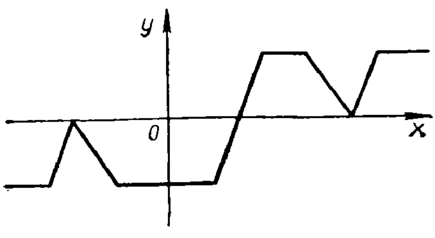


Рис. 76

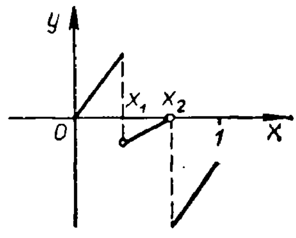


Рис. 77

§ 7

1. Четные: а) и г); нечетные: б), в) и д).

2. Четные: а) и д); нечетные: б), в) и г).

3. а) и б), например, потому что область определения не симметрична относительно точки 0; в) $f(1) = 2$, $f(-1) = 0$ и ни одно из равенств $f(1) = f(-1)$ и $f(1) = -f(-1)$ не является верным; д) $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \neq \pm f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 0$.

4. а) Область определения R (так $x + \sqrt{x^2+1} > 0$ для любого x) симметрична относительно 0 и $y(-x) = \log_a(-x + \sqrt{x^2+1}) = \log_a\left(\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right) = -\log_a(x+\sqrt{x^2+1}) = -y(x)$.

б) Область определения $D =]-\infty; -1[\ \cup\ ]1; \infty[$ симметрична относительно 0 и $y(-x) = \log_a\left(\frac{-x+1}{-x-1}\right) = \log_a\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = -\log_a\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = -y(x)$ для любого $x \in D$.

5. (В первых скобках четная функция) а) $(x^2+3) + (2x^3 - x)$; б) $(x^2) + (x^3 + x)$; в) $(x \sin x) + (x \cos x)$.

6. б) Так как $f(-x) = f_ч(-x) + f_н(-x) = f_ч(x) - f_н(x)$, то из системы $\begin{cases} f(x) = f_ч(x) + f_н(x), \\ f(-x) = f_ч(x) - f_н(x) \end{cases}$ получаем: $f_ч(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$; $f_н(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$.

7. (В первых скобках четная функция) а) $\left(\frac{2^x+2^{-x}}{2}\right) + \left(\frac{2^x-2^{-x}}{2}\right)$; б) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right)$; в) $\left(\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}\right) + \left(-\frac{x}{x^4+x^2+1}\right)$.

8. а) Четными; пусть $f(x)$ и $g(x)$ — четные функции. Докажем, например, что $h(x) = f(x) + g(x)$ — четная функция. Имеем: $h(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = h(x)$. Кроме того, $D(h) = D(f) \cap D(g)$ симметрична относительно точки 0, как пересечение двух симметричных относительно точки 0 множеств; б) сумма и разность — нечетными, произведение — четной; в) произведение — нечетная функция; сумма и разность могут быть четными только в том случае, когда заданная в условии нечетная функция одновременно является четной (см. задачу 9), аналогично сумма и разность являются нечетными функциями, если заданная в условии четная функция одновременно является нечетной, в общем случае сумма и разность — ни четные, ни нечетные функции.

9. Ясно, что должно быть выполнено условие (с) — область определения должна быть симметричной относительно точки 0. Кроме того, для любого x из этой области определения должны быть выполнены одновременно равенства $f(x) = -f(-x)$; $f(x) = f(-x)$, откуда следует, что $f(x) = 0$. Итак, одновременно

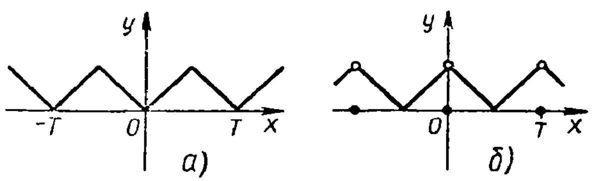


Рис. 78

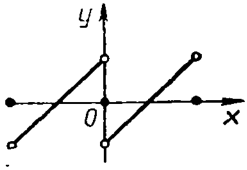


Рис. 79

четными и нечетными являются функции, область определения которых — любое симметричное относительно точки 0 множество и которые тождественно обращаются в 0 на этом множестве.

10. Нельзя дополнить: б) до четной; в) до нечетной функции.

11. Верно для функций пп. а) и г).

12. а) Нет (см. задачи б) и в)); б) $x \pm (T_1 + T_2)$; $x \pm (T_1 - T_2) \in D(f)$, если $x \in D(f)$, $f(x + T_1 + T_2) = f(x + T_1) = f(x)$; $f(x + T_1 - T_2) = f(x + T_1) = f(x)$.

13. а) $T = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; б) $T = 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; в) $T = n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; г) любое отличное от 0 действительное число; д) любое рациональное не равное 0 число; у к а з а н и е: сумма рациональных чисел — рациональное число, сумма иррационального и рационального числа — иррациональное число.

14. а) $T > 2$; б) $T = 4$, $T = 8$, $T > 9$; в) $T \notin \left\{\frac{1}{2n} \mid n \in \boldsymbol{Z}\right\}$; г) T — любое.

15. Рис. 78 (четные функции для пунктов а) и в), рис. 79 (нечетная функция для пункта в)); в остальных случаях нельзя.

16. а) πn; б) $2\pi n$; в) $\frac{2\pi n}{3}$; г) $\frac{\pi n}{2}$; везде $n \in \boldsymbol{Z}$.

17. а) Не выполнено условие (а) определения: так как $T \in D(y)$, то и $T - T = 0$ должно лежать в $D(y)$ (T — период); б) и в) пусть $T > 0$ — период, тогда так как $0 \in D(y)$, то и $-T$ должно принадлежать $D(y)$, что неверно.

Существует много вариантов доказательства; например, непериодичность функций а) и б) следует из того, что они обратимы, а любая периодическая функция необратима, так как каждое свое значение $f(x)$ она принимает в бесконечном числе точек $x + nT$, $n \in \boldsymbol{Z}$, T — любой период.

18. Например, потому, что существует значение, которое функция принимает только один раз: а) $y = 0$ при $x = 0$;
б) $y = \frac{3}{4}$ при $x = -\frac{1}{2}$; в) $y = 1$ при $x = 0$.

19. а) Пусть T — некоторый период функции $g = \sin|x|$. Можно считать, что $T > 0$ (в противном случае нужно взять период $-T > 0$). Далее $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, поэтому $y\left(\frac{\pi}{2} + T\right) = 1$. Так как $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2} + T$ положительны, то $\frac{\pi}{2} + T = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ ($y(x) = \sin x$ при положительных x), т. е. T имеет вид $2\pi n$, где n — некоторое натуральное число. Но тогда должно выполняться равенство $y\left(-\frac{\pi}{2}+\right.$ $\left.+T\right)=y\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$, что неверно, так как при любом натуральном n

$$y\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)=\sin\left|2\pi n-\frac{\pi}{2}\right|=\sin\left(2\pi n-\frac{\pi}{2}\right)=-1;$$

б) так как $y(0)=0$, то на любом отрезке длины T должен быть хотя бы один нуль функции $f(x)=\sin\sqrt{|x|}$ (если период существует и равен T). $f(x)=0$ при $x=\pi^2n^2$, $n\in \boldsymbol{Z}$. Следовательно, на отрезке $\left[\pi^2\left(n+\frac{1}{4}\right)^2;\ \pi^2\left(n+\frac{3}{4}\right)^2\right]$ длины $\left(\left(n+\frac{3}{4}\right)^2-\left(n+\right.\right.$ $\left.\left.+\frac{1}{4}\right)^2\right)\pi^2=\pi^2\left(n+\frac{1}{2}\right)$ нет ни одного нуля функции f, поэтому длина этого отрезка должна быть меньше T при любом n, что невозможно, так как $\pi^2\left(n+\frac{1}{2}\right)>T$ при $n>\frac{T}{\pi^2}-\frac{1}{2}$;

в) пусть $T>0$ — период функции $y=\sin x^2$. Тогда $y(T)=$ $=y(0)=0$. Так как $y(x)=0$ при $x^2=\pi n$, $x=\sqrt{\pi n}$, то T имеет вид $\sqrt{\pi n_0}$, где $n_0\in \boldsymbol{N}$. Но тогда на интервале $]0;\ T[$ функция имеет n_0-1 нуль (в частности, при $n_0=1$ ни одного нуля), а на интервале $]T;\ 2T[\ =\ ]\sqrt{\pi n_0};\ \sqrt{4\pi n_0}[$ $4n_0-n_0-1=3n_0-1$ нулей. Следовательно, $3n_0-1=n_0-1$, откуда $n_0=0$, что невозможно, так как n_0 — натуральное число.

20. Пусть T не имеет вида nT_0, и пусть k — наибольшее положительное число, такое, что $kT_0<T$, тогда $T=kT_0+T_1$, где $T_1>0$ строго меньше T_0. Далее, так как T и kT_0 — периоды (см. задачу 12 в)), то периодом будет и число $T_1=T-kT_0$ (задача 12 б)), что противоречит тому, что T_0 — наименьший положительный период, так как $0<T_1<T_0$.

21. а) Докажем, что если T — период функции f, то T — период функции $F\circ f$: 1) область определения функции $F\circ f$ — периодична с периодом T, так как если $x\in D(F\circ f)$ (это означает, что $x\in D(f)$ и $f(x)\in D(F)$), то $x+T$ и $x-T$ принадлежат $D(f)$, так как f периодична с периодом T (условие а)) и $f(x-T)=$ $=f(x+T)=f(x)$ лежат в области определения функции F; 2) $F(f(x+T))=F(f(x))$.

б) Докажем, что функция g периодична с периодом $\frac{T}{A}=T_1$: 1) если $x\in D(g)$, т. е. $Ax+B\in D(f)$, то $x+T_1\in D(g)$, так как $A(x+T_1)+B=(Ax+B)+T\in D(f)$, и $x-T_1\in D(g)$, так как $A(x-T_1)+B=(Ax+B)-T\in D(f)$; 2) $g(x+T_1)=$ $=f(Ax+AT_1+B)=f(Ax+B+T)=f(Ax+B)=g(x)$, т. е. $g(x+T_1)=g(x)$.

Заметим, что в задаче б) любой период T_1 функции g имеет вид $\frac{T}{A}$, где T — некоторый период функции f, это следует, например, из того, что $f(x) = g\left(\frac{x}{A} - \frac{B}{A}\right)$, в задаче а) функция $F \circ f$ может иметь периоды, которых не было у функции f; например, функция $y = \sin x$ не имеет периода π, а функция $F \circ f$ с $F(x) = x^2$ (т. е. функция $\sin^2 x$) имеет период π. Более экзотический пример: пусть $f(x) = D(x)$, где $D(x)$ — функция Дирихле (задача 13 д)), а $F(x) = |x - 0{,}5|$. Тогда функция f имеет периодом любое рациональное число, а функция $F(f(x)) = 0{,}5$ — любое число, отличное от нуля.

23. а) Да, если условиться считать, что нигде не определенная функция является периодической с любым периодом. В самом деле, область определения функции $\frac{f}{g}$ — пересечение областей определения функций f и g, причем из этого пересечения исключаются точки, в которых g обращается в нуль. Так как все эти три множества периодичны с периодом T, то и получившееся множество периодично с периодом T. Кроме того,

$$\frac{f(x+T)}{g(x+T)} = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

б) Да, примеры: 1) $\sin x$ и $1 - \sin x$; 2) $\sin x$ и $\sin 2x - \sin x$.

24. а) 2π; б) 6π; в) $2\pi\sqrt{2}$.

25. а) Пусть $T > 0$ — период функции $f(x) = \cos x \cos \sqrt{2}x$. Тогда $f(T) = f(0) = 1$. Но $|\cos x \cos \sqrt{2}\,x| = 1$ только в том случае, когда $|\cos x| = 1$ и $|\cos \sqrt{2}\,x| = 1$, т. е. при $x = \pi n$ и соответственно $x = \frac{\pi n}{\sqrt{2}}$. Следовательно, с одной стороны, $T = \pi n_1$ для некоторого целого n_1, с другой стороны, $T = \frac{\pi n_2}{\sqrt{2}}$ для некоторого целого n_2, откуда $\frac{\pi n_2}{\sqrt{2}} = \pi n_1$, $\sqrt{2} = \frac{n_2}{n_1}$, что противоречит иррациональности $\sqrt{2}$;

б) $\sin x \sin \sqrt{2}\,x = 0$ при $x = \pi n$ или $x = \frac{\pi n}{\sqrt{2}}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; и если T — период функции $f(x) = \sin x \sin \sqrt{2}\,x$, то $f(T) = f(0) = 0$. Поэтому T имеет вид либо πn, либо $\frac{\pi n}{\sqrt{2}}$.

I. Пусть T имеет вид $\frac{\pi n}{\sqrt{2}}$. Тогда $f(T + \pi) = f(\pi) = \sin \pi \times \sin \sqrt{2}\,\pi = 0$. Следовательно, $T + \pi$ является числом вида $\frac{\pi k}{\sqrt{2}}$ или числом вида πk. Если $T + \pi$ — число вида $\frac{\pi k}{\sqrt{2}}$, то $\frac{\pi n}{\sqrt{2}} + \pi = \frac{\pi k}{\sqrt{2}}$, $\sqrt{2}\pi = \pi(k - n)$, $\sqrt{2} = k - n$. Если $T + \pi$ — число вида πk, то $\frac{\pi n}{\sqrt{2}} + \pi = \pi k$, $\sqrt{2}(k-1)\pi = \pi n$, $\sqrt{2} = \frac{n}{k-1}$. В обоих случаях получили противоречие с иррациональностью $\sqrt{2}$.

II. Пусть T имеет вид πn. Тогда $f\left(T + \frac{\pi}{\sqrt{2}}\right) = f\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right) = \sin\frac{\pi}{\sqrt{2}} \sin\pi\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 0$. Следовательно, $T + \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ является числом вида πk или числом вида $\frac{\pi k}{\sqrt{2}}$. Если $T + \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ — число вида πk, то $\pi n + \frac{\pi}{\sqrt{2}} = \pi k$, $\pi = \pi(k-n)\sqrt{2}$; $\sqrt{2} = \frac{1}{k-n}$. Если $T + \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ — число вида $\frac{\pi k}{\sqrt{2}}$, то $\pi n + \frac{\pi}{\sqrt{2}} = \frac{\pi k}{\sqrt{2}}$, $\sqrt{2}n = k-1$, $\sqrt{2} = \frac{k-1}{n}$. В обоих случаях получили противоречие с иррациональностью $\sqrt{2}$;

в) пусть T — период функции $f(x) = \cos x + \cos\sqrt{2}x$. Тогда $f(T) = f(0) = 2$. Это возможно только в случае, когда одновременно равны единице $\cos x$ и $\cos\sqrt{2}x$. Дальше годится рассуждение задачи а), так как заведомо $|\cos x| = 1$ и $|\cos\sqrt{2}x| = 1$;

г) решение аналогично решению задачи б). $f(x) = \sin x + \sin\sqrt{2}x = 2\sin\left(\frac{x(1+\sqrt{2})}{2}\right)\cos\left(\frac{x(1-\sqrt{2})}{2}\right)$ обращается в нуль при $x = \frac{2\pi n}{\sqrt{2}+1}$ и $x = \frac{2\pi n + \pi}{\sqrt{2}-1} = (\pi + 2\pi n)(\sqrt{2}+1)$, $n \in \mathbf{Z}$. Так как $f(T) = f(0) = 0$, то T имеет один из двух указанных выше видов.

I. Пусть T имеет вид $\pi(2n+1)(\sqrt{2}+1)$. Тогда $f\left(T + \frac{2\pi}{\sqrt{2}+1}\right) = f\left(\frac{2\pi}{\sqrt{2}+1}\right) = 2\sin\pi\cdot\cos\frac{\pi(1-\sqrt{2})}{1+\sqrt{2}} = 0$. Если $T + \frac{2\pi}{\sqrt{2}+1}$ — число вида $\pi(2k+1)(\sqrt{2}+1)$, то $\pi(2n+1)(\sqrt{2}+1) + \frac{2\pi}{\sqrt{2}+1} = \pi(2k+1)(\sqrt{2}+1)$, $\pi(\sqrt{2}+1)(2k-2n) = \frac{2\pi}{\sqrt{2}+1}$, $(\sqrt{2}+1)^2(k-n) = 1$; $3 + 2\sqrt{2} = \frac{1}{k-n}$; $\sqrt{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-n} - 3\right)$. Если $T + \frac{2\pi}{\sqrt{2}+1}$ — число вида $\frac{2\pi k}{\sqrt{2}+1}$, то $\pi(2n+1)(\sqrt{2}+1) + \frac{2\pi}{\sqrt{2}+1} = \frac{2\pi k}{\sqrt{2}+1}$; $(2n+1)(\sqrt{2}+1) = \frac{2(k-1)}{\sqrt{2}+1}$; $(\sqrt{2}+1)^2 = \frac{2(k-1)}{2n+1}$; $3 + 2\sqrt{2} = \frac{2(k-1)}{2n+1}$; $\sqrt{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{2k-2}{2n+1} - 3\right)$. В обоих случаях получили противоречие с иррациональностью $\sqrt{2}$.

II. Случай, когда T имеет вид $\frac{2\pi n}{\sqrt{2}+1}$, разбирается аналогично.

26. Да, например: а) $(-\sin x)+(\sin x+\sin\sqrt{2}\,x)$; б) $x+$ $+(\sin x-x)$.

27. а) Нет, так как иначе числа $\sqrt{2}$ и $1-\sqrt{2}$ были бы периодами, а тогда и их сумма, равная 1, тоже период; б) да (см. задачу 13 д)).

28. Если четная (нечетная) функция имеет экстремум в точке x_0, $x_0\neq 0$, то она имеет экстремум и в точке $-x_0$. В точке 0 нечетная функция не может иметь экстремума (объясните почему), а четная может иметь, а может и не иметь (приведите примеры). Из этого следует, что число точек экстремума нечетной функции четно, а число точек экстремума четной функции может быть любым; в) периодическая функция может либо не иметь точек экстремума (например, функция $f(x)=1$), либо иметь бесконечно много точек экстремума, так как если x_0 — точка экстремума, а T — некоторый период функции f, то в точках x_0+nT функция имеет экстремум для любого целого n.

29. а) и в) — нет, б), г), д) — да.

30. Возьмем любые числа T_1, T_2 и T_3, такие, что ни для каких целых k_1, k_2 и k_3, одновременно не равных нулю,

$$k_1T_1+k_2T_2+k_3T_3\neq 0. \qquad (1)$$

Заметим, что если число T представимо в виде $k_1T_1+k_2T_2+$ $+k_3T_3$, то это представление единственно. В самом деле, если

$$T=k_1T_1+k_2T_2+k_3T_3=p_1T_1+p_2T_2+p_3T_3, \text{ то}$$

$$(k_1-p_1)\,T_1+(k_2-p_2)\,T_2+(k_3-p_3)\,T_3=0$$

и в силу (1) $k_1=p_1$, $k_2=p_2$, $k_3=p_3$.

Положим теперь:

$$f(x)=\begin{cases}-2 \text{ для } x \text{ вида } k_1T_1+k_2T_2+A,\\ \ \ 1 \text{ для } x \text{ вида } k_1T_1+k_3T_3,\\ \ \ 0 \text{ для остальных } x;\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}2 \text{ для } x \text{ вида } k_1T_1+k_2T_2+A,\\ 1 \text{ для } x \text{ вида } k_2T_2+k_3T_3,\\ 0 \text{ для остальных } x,\end{cases}$$

где A — число, которое нельзя представить в виде

$$A=k_1T_1+k_2T_2+k_3T_3,\ k_1,k_2,k_3\in\mathbf{Z}. \qquad (2)$$

Функции f и g определены корректно, так как числа вида k_1T_1+ $+k_2T_2+A$ (в которых f принимает значение -2, а g — значение 2) в силу условия (2) нельзя представить в виде $p_1T_1+p_3T_3$ (в этих точках f принимает значение 1) или в виде $p_2T_2+p_3T_3$ (в которых g принимает значение 1). Очевидно, что числа вида k_1T_1 — периоды f, числа вида kT_2 — периоды g. Далее, пусть T — период функции f. Тогда $f(T+A)=f(A)=-2$, поэтому $T+A$ — число вида $A+k_1T_1+k_2T_2$, а T — вида $k_1T_1+k_2T_2$; $f(T)=f(0)=1$, поэтому T — число вида $k_1T_1+k_3T_3$. Так как число T можно единственным образом представить в виде (1), то T имеет вид k_1T_1. Аналогично все периоды функции g имеют вид k_2T_2. Так как k_1T_1 может равняться k_2T_2 только при $k_1 = k_2 = 0$ (иначе $k_1T_1 + (-k_2)\times \times T_2 = 0$, что противоречит условию (1), то f и g не имеют общих периодов. Функция

$$f(x) + g(x) = h(x) = \begin{cases} 1 \text{ для } x \text{ вида } k_1T_1 + k_3T_3 \text{ и } x \text{ вида } k_2T_2 + k_3T_3, \\ 0 \text{ для остальных } x \end{cases}$$

периодическая с периодами вида k_3T_3. Других периодов эта функция не имеет; в самом деле, пусть T — период функции h, тогда $h(T) = h(0) = 1$; отсюда следует, что T имеет либо вид $k_1T_1 + k_3T_3$, либо вид $k_2T_2 + k_3T_3$. Если $T = k_1T_1 + k_3T_3$, то $h(T_2 + T) = h(T_2) = 1$, поэтому число $T_2 + T = T_2 + k_1T_1 + k_3T_3$ — число одного из двух описанных выше видов, но это возможно только, если $k_1 = 0$. Аналогично проверяется, что если $T = k_2T_2 + k_3T_3$, то $k_2 = 0$. Как и выше для функций f и g, проверяется, что функции f и h не имеют общих периодов, функции g и h не имеют общих периодов. Для завершения решения осталось проверить, что числа T_1, T_2, T_3, удовлетворяющие условию (1), и число A, удовлетворяющее условию (2), существуют. На самом деле таких четверок чисел T_1, T_2, T_3, A бесконечно много. Докажем, например, что числа $T_1 = \sqrt{2}$, $T_2 = \sqrt{3}$, $T_3 = \sqrt{5}$, A — любое рациональное число, отличное от нуля, удовлетворяют условиям (1) и (2). Для этого достаточно показать, что число $k_1\sqrt{2} + k_2\sqrt{3} + k_3\sqrt{5}$ иррационально, если k_1, k_2, k_3 одновременно не обращаются в нуль. Можно считать, что два из чисел k_1, k_2, k_3 не равны нулю (в противном случае утверждение очевидно). Для определенности будем считать, что $k_1 \neq 0$, $k_2 \neq 0$ (случаи $k_2 \neq 0$, $k_3 \neq 0$ и $k_1 \neq 0$, $k_3 \neq 0$ разбираются аналогично). Предположим, что $k_1\sqrt{2} + k_2\sqrt{3} + k_3\sqrt{5} = r$, где r — рациональное число. Тогда $(k_1\sqrt{2} + k_2\sqrt{3})^2 = (r - k_3\sqrt{5})^2$, откуда

$$2k_1^2 + 3k_2^2 + 2k_1k_2\sqrt{6} = r^2 + 5k_3^2 - 2rk_3\sqrt{5}.$$

Если $r = 0$ или $k_3 = 0$, то получаем, что $2rk_3\sqrt{5} = 0$ и

$$\sqrt{6} = \frac{5k_3^2 - 2k_1^2 - 3k_2^2}{2k_1k_2},$$

что противоречит иррациональности $\sqrt{6}$. Поэтому $r \neq 0$ и $k_3 \neq 0$. Далее, $2k_1k_2\sqrt{6} + 2rk_3\sqrt{5} = r_1$, где $r_1 = r^2 + 5k_3^2 - 2k_1^2 - 3k_2^2$ — рациональное число, откуда $r_1^2 = 24k_1^2k_2^2 + 20r^2k_3^2 + 8rk_1k_2k_3\sqrt{30}$ и

$$\sqrt{30} = \frac{r_1^2 - 24k_1^2k_2^2 - 20r^2k_3^2}{8rk_1k_2k_3},$$

что противоречит иррациональности числа $\sqrt{30}$. Итак, доказано, что числа $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ удовлетворяют условию (1) и что в качестве A можно взять любое рациональное число, отличное от нуля.

§ 8

1. 2. **2.** 4. **3.** $\frac{1}{3}$. **4.** $\frac{1}{3}$. **5.** $\frac{4}{3}$. **6.** 4. **7.** $\frac{1}{2}$. **8.** -1. **9.** $\frac{5}{3}$. **10.** 1. **11.** 0. **12.** 0. **13.** 0. **14.** 1,5. **15.** 0,5. **16.** 0,5.

Указание. $\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\operatorname{tg} x}\right)=\frac{1}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{\sin x}=\frac{1}{x}\cdot\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=$
$=\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}\cdot\frac{1}{\cos\frac{x}{2}}$.

17. $\frac{1}{\ln a}$. **18.** a. **19.** $\ln a-\ln b$. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}=$
$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(a^x-1)-(b^x-1)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}-\lim\limits_{x\to 0}\frac{b^x-1}{x}=\ln a-\ln b$.

20. e^a. **21.** $\frac{\ln a}{b}$. Указание. $\frac{a^x-1}{\sin(bx)}=\frac{a^x-1}{x}\cdot\frac{x}{\sin bx}$.

22. 1. Указание. $\operatorname{ctg} x\cdot\ln(1+x)=\cos x\cdot\frac{\ln(1+x)}{x}\cdot\frac{x}{\sin x}$.

23. $a^2\ln a$. Указание. $\frac{a^x-a^2}{x^2-3x+2}=\frac{a^2}{x-1}\cdot\frac{a^{x-2}-1}{x-2}$.

24. e. Указание. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\operatorname{ctg} x}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\operatorname{ctg} x\cdot\ln(1+\sin x)}=$
$=\lim\limits_{x\to 0}e^{\cos x\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x}}=e^{1\cdot 1}$.

25. 1. Указание. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\operatorname{tg} x)}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}\cdot\frac{1}{\cos x}=$
$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1$.

26. а) Из непрерывности f в точке x_0 следует, что она ограничена в некоторой окрестности этой точки, а это противоречит тому, что $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=\infty$.

27. а) $x=-1$; б) $x=-1$; в) $x=-1$; г) $x=-1$, $x=1$; д) $x=-1$, $x=1$; е) $x=1$.

28. а) $x=0$, $x=-2$; б) $x=0$, $x=-2$; в) $x=-1$, $x=1$; г) $x=1$.

29. а) $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$; б) $x=\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$;
в) $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$; е) $x=\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$, $k\neq 0$.

30. а) Нет; пример: $f(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=-\frac{1}{x}$ и $x\to 0$; б) да; в) да.

31. а) 1; б) 1; в) $-\frac{1}{3}$; г) 0.

32. а) 0; б) 0; в) $\frac{1}{2}$; г) 1.

33. а) 0; б) 1; в) 0; г) 1.

34. а) 0; б) 1; в) 1; г) 0.

35. Нет, пример: $f(x) = \frac{1}{x}\sin x^3$; тогда

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}\sin x^3 + 3x\cos x^3.$$

36. Нет, пример: $f(x) = \sqrt{x}$; тогда $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 0$.

§ 9

1. а) и б) Указание. Положите в определении предела ε равным $|f(x_0)|$ (или любому меньшему числу); в) нет, пример: $y = x^2$, $x_0 = 0$.

2. Нет.

3. Неподвижная точка отображения, задаваемого функцией f, — это нуль функции $g(x) = f(x) - x$. Заметим, что $g(a) = f(a) - a \geqslant 0$, $g(b) = f(b) - b \leqslant 0$, так как для любого x (по условию) $a \leqslant f(x) \leqslant b$, в частности, для $x = a$ и $x = b$. Если хотя бы в одном из неравенств $f(a) - a \geqslant 0$ или $f(b) - b \leqslant 0$ достигается равенство, то получается требуемый корень уравнения $g(x) = 0$, если оба неравенства строгие, то осталось применить для непрерывной функции g теорему 1 о промежуточном значении.

4. Рассмотрим функцию $g(x) = f\left(x + \frac{T}{2}\right) - f(x)$. Тогда

$$g(0) = f\left(\frac{T}{2}\right) - f(0); \quad g\left(\frac{T}{2}\right) = f(T) - f\left(\frac{T}{2}\right) = -\left(f\left(\frac{T}{2}\right) - f(0)\right).$$

Либо оба этих числа равны 0, либо они разных знаков, тогда на отрезке $\left[0; \frac{T}{2}\right]$ по теореме о промежуточном значении есть точка x_0 такая, что $g(x_0) = 0$, а в этой точке $f(x_0) = f\left(x_0 + \frac{T}{2}\right)$. Ответ на второй вопрос «нет», так как это равенство доказано только для одной точки.

6. а) $[1; 2] \cup [3; 4] \cup [5; \infty[$; б) $[1; \infty[\cup \{-1\}$; в) $]-\infty; -1] \cup [1; 2[\cup]3; \infty[$; г) $]-\infty; -1[$; д) $[-1; 0] \cup [1; \pi] \cup [2\pi n; \pi + 2\pi n]$, $n \in \boldsymbol{Z}$, $n \neq 0$;
е) $\left[\pi n; \frac{\pi}{2} + 1 + \pi n\right[$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

7. а) $]-\infty; -1[\cup [1 - \sqrt{2}; 0[\cup]1; 1 + \sqrt{2}]$;
б) $\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}; 0\right[\cup \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}; \infty\right[$.

Глава IV

§ 1

1. Рис. 80. 2. Рис. 81.

5. а) $f'(x)$; б) $f'(x-1)$; в) $-f'(x)$;
г) $-3f'(x)$; д) $2f'(2x)$; е) $af'(ax+b)$.

6. б) Например, $x^2 D(x)$, где $D(x)$ — функция Дирихле (см. задачу 7, § 5, гл. III).

7. $f(x) = \begin{cases} -(x-1)^2 & \text{при } x \neq 1, \\ -2 & \text{при } x = 1. \end{cases}$

8. $y = x^3$.

10. $\frac{\pi}{4}$; 0; $-\frac{\pi}{4}$. 11. $-\frac{\pi}{4}$. 12. а) $\frac{\pi}{4}$; б) $\frac{\pi}{4}$.

13. 4. Указание. $y' = \frac{a-3x^2}{4}$; график пересекает ось Ox в точке $x=0$ и при $a>0$ в точках $x = \pm\sqrt{a}$. Подставляя эти значения в равенство $y' = 1$, получаем 2 уравнения: $\frac{a}{4} = 1$ и $\frac{a-3a}{4} = 1$, первое из которых имеет корень $a = 4$, а второе при $a > 0$ корней не имеет.

14. Уравнение касательной $y = y_0 + 3x_0^2(x - x_0) = -1 + 3(x-1) = 3x - 2$. Абсциссы точек пересечения графика $y = x^3$ с этой прямой — корни уравнения $x^3 = 3x - 2$, причем один из корней нам уже известен: $x = 1$. Далее, $x^3 - 1 = 3(x-1)$, $(x-1)(x^2+x+1) = 3(x-1)$, $(x-1)(x^2+x-2) = 0$; корни уравнения $x^2 + x - 2 = 0$ суть 1 и -2. При $x = -2$ имеем: $y =$

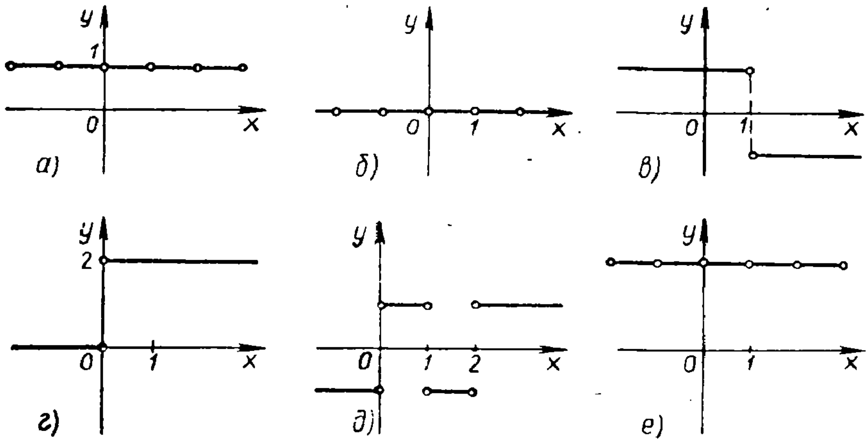


Рис. 80

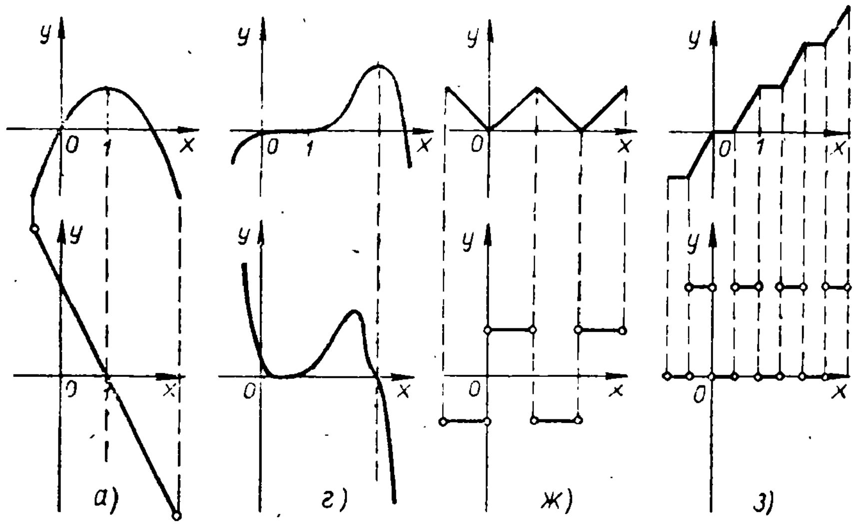


Рис. 81

$= x^3 = -8$. Итак, касательная к графику $y = x^3$ имеет с графиком еще одну общую точку — точку $(-2; -8)$.

15. а) $y = y_0 + 2ax_0(x - x_0) = 2ax_0x - y_0$; б) уравнение $ax^2 = k(x - x_0) + ax_0^2$ имеет единственное решение, если его дискриминант $(-k)^2 + 4a^2x_0^2 - 4akx_0$ равен нулю, т. е. при $k^2 - 4akx_0 + 4a^2x_0^2 = (k - 2ax_0)^2 = 0$, откуда $k = 2ax_0$; в) уравнение $ax^2 + bx + c = y_0 + k(x - x_0)$, где $y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$, имеет единственное решение при $(b - k)^2 - 4a(c - y_0 + kx_0) = 0$, $k^2 - (2b + 4ax_0)k + b^2 - 4ac + 4a^2x_0^2 + 4bx_0a + 4ac = (k - b - 2ax_0)^2 = 0$, т. е. если $k = 2ax_0 + b = y'(x_0)$.

16. $y' = 3x^2 - 1$, $y'(1) = 2$, $y'(-1) = 2$. Следовательно, касательные параллельны, т. е. угол между ними равен 0.

17. Прямая $y = kx + b$ проходит через точку $(0; 0)$ при $b = 0$, а через точку $(-1; -1)$ при $b = k - 1$. Далее, если прямая имеет с параболой в точности одну общую точку, то она является касательной к параболе в этой точке (см. задачу 15). Таким образом, нужно определить, при каких k имеет единственное решение уравнение:

а) $x^2 - 4x + 1 = kx$; б) $x^2 - 4x + 1 = kx + k - 1$.

а) $x^2 - (4 + k)x + 1 = 0, D = (4 + k)^2 - 4 = k^2 + 8k + 12$,

$D = 0$ при $k = -2$ и $k = -6$;

б) $x^2 - (4 + k)x - k + 2 = 0$, $D = (4 + k)^2 + 4(k - 2) = k^2 + 12k + 8$, $D = 0$ при $k = -6 \pm \sqrt{28}$.

Ответ. а) $y = -2x$ и $y = -6x$; б) $y = (-6 + \sqrt{28})\,x - 7 + \sqrt{28}$ и $y = (-6 - \sqrt{28})\,x - 7 - \sqrt{28}$.

Укажем (на примере задачи а)) еще два способа решения задачи 17.

I. Касательная $y = (x_0^2 - 4x_0 + 1) + (2x_0 - 4)(x - x_0)$ в точке $(x_0;\ x_0^2 - 4x_0 + 1)$ параболы проходит через точку $(0;\ 0)$, если при подстановке $(0;\ 0)$ вместо $(x;\ y)$ в уравнение касательной получим верное равенство, т. е. при $0 = (x_0^2 - 4x_0 + 1) + (2x_0 - 4) \times (-x_0)$, откуда $x_0^2 = 1$, $x_0 = \pm 1$; $k = 2x_0 - 4$, откуда $k = -2$ или $k = -6$.

II (см. задачу 9). Прямая $y = \dfrac{x_0^2 - 4x_0 + 1}{x_0}\,x$, проходящая через точки $M_0 = (0;\ 0)$ и $M_1 = (x_0;\ x_0^2 - 4x_0 + 1)$, будет касательной к параболе в ее точке M_1, если ее угловой коэффициент $\dfrac{x_0^2 - 4x_0 + 1}{x_0}$ будет равен $2x_0 - 4$, откуда получаем: $x_0 = \pm 1$; $k = -2$ или $k = -6$.

18. а) $y' = 3x^2 - 1$; $y' = 1$ при $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$; при $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$ $y = x^3 - x = \mp\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$. Ответ. $\left(\sqrt{\frac{2}{3}};\ -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ и $\left(-\sqrt{\frac{2}{3}};\ \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$;

б) тангенс угла наклона прямой, проходящей через точки $(a;\ a^2)$ и $(b;\ b^2)$, равен $\dfrac{b^2 - a^2}{b - a} = b + a$ (см. задачу 9). Тангенс угла наклона касательной к графику $y = x^2$ в точке с абсциссой x_0 равен $2x_0$. Решая уравнение $2x_0 = a + b$, находим $x_0 = \dfrac{a + b}{2}$.

19. Секущая, проведенная через две точки графика всюду дифференцируемой функции, параллельна касательной к графику с абсциссой в некоторой точке отрезка, концами которого служат абсциссы взятых точек.

21. а) Прямая $y = y_0 + k(x - x_0)$, проходящая через точку $(x_0;\ y_0)$, является касательной к графику $y = x^2$, если уравнение $x^2 - k(x - x_0) - y_0 = 0$ имеет единственное решение, т. е. при

$$k^2 - 4kx_0 + 4y_0 = 0. \tag{1}$$

Число касательных, которое можно провести из точки $(x_0;\ y_0)$ к графику $y = x^2$, равно числу корней уравнения (1). Дискриминант уравнения (I) $16x_0^2 - 16y_0 = 0$ при $y_0 = x_0^2$, т. е. в точках параболы $y = x^2$; во «внутренности» параболы этот дискриминант отрицателен; во «внешности» — положителен. Итак, M_0 — это внутренность параболы $y = x^2$; M_1 — сама парабола; M_2 — ее внешность (рис. 82).

б) Если прямая $y = y_0 + k(x - x_0)$, проходящая через точку $(x_0; y_0)$, является касательной к графику $y = x^3$, то абсцисса x общей точки графика и прямой и коэффициент k связаны соотношением $k = 3x^2$. Таким образом, число касательных, которые можно провести из точки $(x_0; y_0)$, равно числу различных значений k, фигурирующих среди решений системы уравнений:

$$\begin{cases} y = y_0 + k(x - x_0), \\ y = x^3, \\ k = 3x^2. \end{cases} \qquad (2)$$

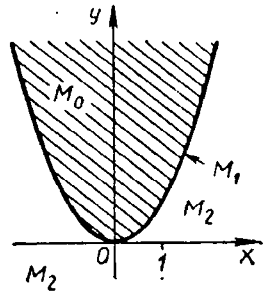


Рис. 82

Подставляя в первое уравнение системы $y = x^3$ и $k = 3x^2$, получаем:

$$x^3 = y_0 + 3x^2(x - x_0), \quad 3x^2x_0 - 2x^3 = y_0. \qquad (3)$$

Это уравнение (относительно x) может иметь 1, 2 или 3 корня. Каждому из этих корней однозначно соответствуют значения k, y, вычисляемые из третьего и второго уравнений системы (2). При этом различным корням уравнения (3) будут соответствовать различные k: значения k могут совпасть только, если наряду с корнем x_1 уравнение (3) имеет корень $-x_1$; однако последнее невозможно, так как тогда из верных равенств $3x_1^2x_0 - 2x_1^3 = y_0$ и $3x_1^2x_0 + 2x_1^3 = y_0$ следует, что $x_1 = 0$.

Исследуем теперь при каждом x_0, сколько раз функция $g(x) = 3x^2x_0 - 2x^3$ принимает значение y_0 (т. е. сколько корней имеет уравнение (3)). $g'(x) = 6xx_0 - 6x^2$, $g'(x) = 0$ при $x = 0$ и $x = x_0$. Таким образом, функция g при $x_0 \neq 0$ имеет два экстремума. Если $x_0 < 0$, то в точке x_0 функция g имеет минимум $g(x_0) = x_0^3$, в точке 0 функция g имеет максимум $g(0) = 0$ (рис. 83); при $x_0 = 0$ $g(x) = 2x^3$; при $x_0 > 0$ функция g имеет минимум в точке 0, $g(0) = 0$, максимум в точке x_0, $g(x_0) = x_0^3$ (рис. 84). Из рисунков видно, что функция $g(x) = 3x^2x_0 - 2x^3$ принимает значение y_0 три раза при y_0, принадлежащем интервалу с концами 0 и x_0^3 (при $x_0 = 0$ получается пустое множество); два раза при $y_0 = 0$ и $y_0 = x_0^3$, если $x_0 \neq 0$; один раз при остальных y_0. Итак, M_0 пусто; M_1 — заштрихованное на рисунке 85 множество, граница которого — объединение кубической параболы $y =$

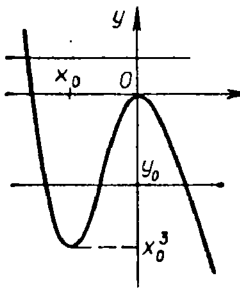


Рис. 83

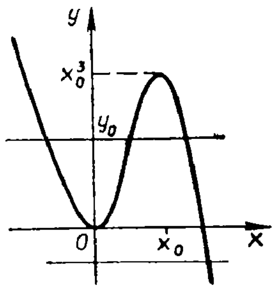


Рис. 84

... (0, 0) при-надлежит M_1, а остальная часть границы — в точности множество M_2; оставшаяся (незаштрихованная) часть плоскости — множество M_3 (естественно, что никакая точка границы M_3 не принадлежит).

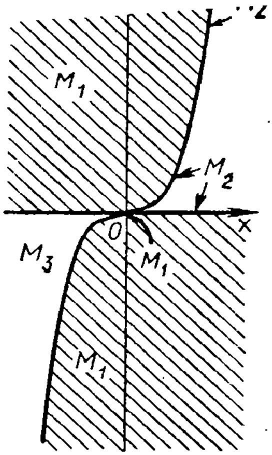


Рис. 85

22. Запишем уравнение касательной к гиперболе $y = \frac{a^2}{x}$ в точке $\left(x_0, \frac{a^2}{x_0}\right)$ гиперболы:

$$y = \frac{a^2}{x_0} - \frac{a^2}{x_0^2}(x - x_0), \quad \text{т. е.} \quad y = -\frac{a^2}{x_0^2}x + \frac{2a^2}{x_0}.$$

Точки пересечения этой касательной с осями координат — точки $(2x_0;\ 0)$ и $\left(0;\ \frac{2a^2}{x_0}\right)$.

а) Данный треугольник — прямоугольный с катетами $|2x_0|$ и $\left|\frac{2a^2}{x_0}\right|$. Его площадь равна

$$\frac{1}{2}\cdot|2x_0|\cdot\left|\frac{2a^2}{x_0}\right| = 2a^2.$$

б) Центр описанной окружности вокруг этого треугольника — середина гипотенузы, т. е. точка с координатами $x = \frac{0+2x_0}{2} = x_0$ и $y = \frac{\frac{2a^2}{x_0}+0}{2} = \frac{a^2}{x_0}$. Точка $\left(x_0;\ \frac{a^2}{x_0}\right)$ как раз и есть точка касания.

23. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{h(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} - \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x_0)\Delta x}{\Delta x} = f'(x_0) - f'(x_0) = 0.$

24. $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{A\Delta x + h(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} A + \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{h(x)}{\Delta x} = A + 0 = A.$

25. а) $A + B$; б) $A - B$; в) kA; г) $2Af(x_0)$; д) $3Af^2(x_0)$.

26. а) $x_0^3 + 3x_0^2\Delta x$; б) $x_0^n + nx_0^{n-1}\Delta x$; $1 + nh$;

в) $\frac{1}{x_0} - \frac{\Delta x}{x_0^2}$; $1 - h$; г) $\sqrt{x_0} + \frac{\Delta x}{2\sqrt{x_0}}$; $1 + \frac{h}{2}$; $a + \frac{h}{2a}$;

д) $\sqrt[3]{x_0} + \frac{\Delta x}{3\sqrt[3]{x_0^2}}$; $1 + \frac{h}{3}$; $a + \frac{h}{3a^2}$; е) $\sqrt[n]{x_0} + \frac{\Delta x}{n\sqrt[n]{x_0^{n-1}}}$; $1 + \frac{h}{n}$; $a + \frac{h}{na^{n-1}}$.

27. 1,007 (по таблицам 1,0066).

28. 2,083 (по таблицам 2,080). 29. 2,9907 (по таблицам 2,9907).
30. 1,938 (по таблицам 1,931). 31. 5%. 32. 0,33%.

§ 2

1. а) $4x^3 - 15x^2 + 7$; б) $2x^5 - \frac{4}{\sqrt{x}}$.

2. а) $\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{x\sqrt{x}}$; б) $\frac{5}{2}x\sqrt{x}$.

3. а) $10(2x-1)^4 - 18x(1-x^2)^9$; б) $7(x^2 + x\sqrt[5]{x})^6 \cdot \left(2x + \frac{6}{5}\sqrt[5]{x}\right)$.

4. а) $1 + \frac{2}{(x+1)^2}$; б) $\frac{x+1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$.

5. а) $1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}$; б) $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$.

6. а) $3\cos(3x+5)$; б) $6x\cos(3x^2+5)$.

7. а) $\frac{\sin x}{1-\sin x}$; б) $-\frac{1}{2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$.

8. а) $\sqrt{2}\sin\left(\ln x + \frac{\pi}{4}\right)$; б) $\frac{6x\cos 3x - \sin 3x}{2x\sqrt{x}}$.

9. а) $-\sin 4x$; б) $(e^x - e^{-x})(\sin x + \cos x)$.

10. а) $\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$; б) $\frac{2}{x^2-1}$.

11. а) $\frac{1 - x\ln x}{xe^x}$; б) $\frac{\ln\ln x}{x}$.

12. а) $\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} + \frac{2}{(x+1)^2+4}$; б) $\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

13. а) $\operatorname{arctg} x$; б) $\frac{2}{1+x^2}(\operatorname{arctg} x - \operatorname{arcctg} x)$.

15. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x) - f(x_0)) = \lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim\limits_{x\to x_0}(x-x_0) = f'(x_0)\cdot 0 = 0$.

16. Пусть $f'(0) = a$. Имеем: $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x) + f(\Delta x) - f(x+0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x) + f(\Delta x) - f(x) - f(0)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x - 0} = f'(0) = a.$$

17. Например, $f(x) = |x|$.

18. $C(T) = Q'(T) = \ln T + 1$, поэтому $C(T_1) = \ln T_1 + 1$.

19. а) Нечетной; б) четной. 20. Будет периодической.

21. а) $A_m^n x^{m-n}$ при $m > n$,
$m!$ при $m = n$,
0 при $m < n$.

б) $f^{(n)}(x) = (-1)^{\frac{n}{2}} \cdot 2^n \sin 2x$ при четных n, $f^{(n)}(x) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \times$ $\times\, 2^n \cos 2x$ при нечетных n; в) $a^x \ln^n a$.

22. а) $f''g + 2f'g' + fg''$; б) $f'''g + 3f''g' + 3f'g'' + fg'''$;
в) $f^{(4)}g + 4f'''g' + 6f''g'' + 4f'g''' + fg^{(4)}$; $(fg)^{(n)} = f^{(n)}g +$ $+ C_n^1 f^{(n-1)}g' + C_n^2 f^{(n-2)}g'' + \ldots + C_n^k f^{(n-k)}g^{(k)} + \ldots + fg^{(n)}$.

23. а) $f(x) = \varphi(x) \cdot \psi(x)$, где $\varphi(x) = e^{kx}$, $\psi(x) = x^2$. Имеем: $\varphi^{(n)}(x) = k^n e^{kx}$, $\psi'(x) = 2x$, $\psi''(x) = 2$, $\psi^{(p)}(x) = 0$ при $p \geqslant 3$. По формуле предыдущей задачи получаем:

$$f^{(n)} = (\varphi\psi)^{(n)} = \varphi^{(n)}\psi + n\varphi^{(n-1)}\psi' + C_n^2\varphi^{(n-2)}\psi'' + \ldots = k^n e^{kx} x^2 +$$
$$+ nk^{n-1}e^{kx} \cdot 2x + \frac{n(n-1)}{2} k^{n-2}e^{kx} \cdot 2 \text{ и } f^{(n)}(0) = n(n-1)k^{n-2}.$$

б) Прежде всего докажем, что для любого k

$$\lim_{x \to 0} \left(x^{-k} e^{-\frac{1}{x^2}}\right) = 0.$$

Действительно, для любого положительного ε $\left|\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^k}\right| < \varepsilon$ при $\left|e^{-\frac{1}{x^2}}\right| < \varepsilon |x^k|$, $-\frac{1}{x^2} < \ln \varepsilon + k \ln |x|$, $\frac{1}{|x^2|} > -\ln \varepsilon + k \ln \frac{1}{|x|}$. Для любого $y > 0$ выполняется неравенство $y > \ln y$ $\left(\text{у нас } y = \frac{1}{|x|}\right)$. Поэтому неравенство $\frac{1}{|x|^2} > -\ln \varepsilon + k \ln \frac{1}{|x|}$ будет заведомо выполняться, если $\frac{1}{|x|^2} - k\frac{1}{|x|} + \ln \varepsilon > 0$. Полученное квадратичное $\left(\text{относительно } \frac{1}{|x|}\right)$ неравенство истинно при достаточно больших $\frac{1}{|x|}$, т. е. при $|x| < \delta$, $x \neq 0$, где δ — некоторое положительное число. Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при $0 <$ $< |x| < \delta$ выполняется неравенство $\left|x^{-k} e^{-\frac{1}{x^2}}\right| < \varepsilon$, а это и означает, что $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^k} = 0$.

При $x \neq 0$ $f^{(n)}(x)$ имеет вид $\sum a_k x^{-k} e^{-\frac{1}{x^2}}$ (сумма конечного числа членов). Действительно,

$$f'(x) = \left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right)' = e^{-\frac{1}{x^2}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}},$$

т. е. первая производная имеет указанный вид и производная

$$\left(a_k x^{-k} e^{-\frac{1}{x^2}}\right)' = -k a_k x^{-k-1} e^{-\frac{1}{x^2}} + 2a_k x^{-k-3} e^{-\frac{1}{x^2}}$$

каждого такого слагаемого есть сумма двух членов указанного вида.

По определению

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}} - 0}{x} = 0.$$

Наконец, докажем методом математической индукции, что $f^{(n)}(0) = 0$. $f'(0) = 0$. Пусть $f^{(k)}(0) = 0$, тогда

$$f^{(k+1)}(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f^{(k)}(x) - f^{(k)}(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f^{(k)}(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \sum a_k x^{-k-1} e^{-\frac{1}{x^2}} = \sum a_k \cdot 0 = 0.$$

24. а) $0 = (1)' = \left(x \cdot \frac{1}{x}\right)' = x' \cdot \frac{1}{x} + x\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x} + x \cdot \left(\frac{1}{x}\right)'$, откуда $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x} : x = -\frac{1}{x^2}$; б) $0 = (1)' = \left(f(x) \cdot \frac{1}{f(x)}\right)' = f'(x) \cdot \frac{1}{f(x)} + f(x)\left(\frac{1}{f(x)}\right)'$, откуда $\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\frac{f'(x)}{f(x)} : f(x) = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$.

25. в) $f'(x) = \left(\left(\sqrt[n]{f(x)}\right)^n\right)' = n \cdot \sqrt[n]{f^{n-1}(x)} \cdot \left(\sqrt[n]{f(x)}\right)'$, откуда $\left(\sqrt[n]{f(x)}\right)' = \frac{1}{n} f'(x) \cdot \sqrt[n]{f^{1-n}(x)}$.

26. По условию

$$f(y_0 + \Delta y) = f(y_0) + f'(y_0)\Delta y + \alpha_1(y)\Delta y, \qquad (1)$$
$$g(x_0 + \Delta x) = g(x_0) + g'(x_0)\Delta x + \alpha_2(x)\Delta x, \qquad (2)$$

причем $\lim\limits_{\Delta y\to 0} \alpha_1(y) = 0$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \alpha_2(x) = 0$.

Для сложной функции $f(g(x))$ получаем:

$$f(g(x_0 + \Delta x)) = f(g(x_0) + g'(x_0)\Delta x + \alpha_2(x)\Delta x)^1 =$$
$$= f(g(x_0)) + f'(g(x_0))(g'(x_0)\Delta x + \Delta x \alpha_2(x)) + \Delta y \alpha_1(g(x)) =$$
$$= f(g(x_0)) + f'(g(x_0))g'(x_0)\Delta x + \Delta x \alpha_3(x), \quad \text{где} \quad \alpha_3(x) =$$
$$= \alpha_2(x) f'(g(x_0)) + \frac{\Delta g}{\Delta x} \alpha_1(g(x)).$$

Осталось доказать, что $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \alpha_3(x) = 0$. Имеем:

$$\lim_{\Delta x\to 0} \alpha_3(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \alpha_2(x) f'(g(x_0)) + \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} \lim_{\Delta x\to 0} \alpha_1(g(x)) = 0 + g'(x_0) \times$$
$$\times \lim_{\Delta g\to 0} \alpha_1(g(x)) = 0 + g'(x_0) \cdot 0 = 0.$$

---

[1] Применяем равенство (1) при $\Delta y = g'(x_0)\Delta x + \alpha_2(x)\Delta x$.

28. $(f\cdot g)' = \left(\dfrac{(f+g)^2-(f-g)^2}{4}\right)' = \dfrac{1}{4}(((f+g)^2)' - ((f-g)^2)') =$

$= \dfrac{1}{4}(2(f+g)(f'+g') - 2(f-g)(f'-g')) = \dfrac{1}{2}(ff' + fg' + gf' +$

$+ gg' - ff' + fg' + gf' - gg') = \dfrac{1}{2}(2f'g + 2fg') = f'g + fg'.$

29. а) Рассмотрим одночлен $a_p x^p$. Его первая производная равна $a_p p x^{p-1}$; вторая — $a_p p(p-1)x^{p-2}$, ... производная порядка $p-1$ равна $a_p p(p-1)\ldots 2x$, производная порядка p равна $a_p p(p-1)\ldots 2\cdot 1 = a_p p!$ (p — факториал). Все последующие производные равны 0. Если $k > p$, то k-я производная равна 0. Если $k < p$, то k-я производная, равная $a_p p(p-1)\ldots(p-k+1)x^{p-k}$, обращается в нуль в точке 0. Если же $k = p$, то k-я производная этого одночлена тождественно равна $a_p p!$ (в частности, и в точке 0). Итак, из всей суммы $a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ ненулевую k-ю производную в нуле будет иметь только одночлен a_kx^k. Таким образом, коэффициент a_k данного многочлена $Q(x)$ равен $\dfrac{Q^{(k)}(0)}{k!}$.

б) $((a+x)^n)' = n(a+x)^{n-1}$; $((a+x)^n)'' = n(n-1)(a+x)^{n-2}$; ...

$$\ldots ((a+x)^n)^{(k)} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)(a+x)^{n-k} = A_n^k(a+x)^{n-k}.$$

В силу п. а) $k!\cdot a_k$ равно значению k-й производной в точке $x = 0$ т. е.

$$a_k = \frac{1}{k!}A_n^k\cdot a^{n-k}.$$

30. Сравнивая результаты, полученные в пп. а) и б) задачи 29, находим, что в равенстве $(a+x)^n = a_0 + a_1x + \ldots + a_kx^k + \ldots$ $\ldots + a_n x^n$ коэффициент $a_k = \dfrac{A_n^k\cdot a^{n-k}}{k!} = C_n^k a^{n-k}$, а это и есть формула Ньютона.

§ 3

1. $y' = 3x^2 - 2x + 1 > 0$ для любого $x \in \boldsymbol{R}$. Следовательно, функция $y = x^3 - x^2 + x$ возрастает на промежутке $]-\infty;\ \infty[$.

2. $y' = 5x^4 - 10x$, $y' > 0$ при $x(x^3-2) > 0$, т. е. при $x < 0$ или при $x > \sqrt[3]{2}$ и $y' < 0$ при $x \in]0;\ \sqrt[3]{2}[$. Следовательно, y возрастает на промежутках $]-\infty;\ 0]$ и $[\sqrt[3]{2};\ \infty[$ и убывает на промежутке $[0;\ \sqrt[3]{2}]$.

3. $y' = 5x^4 - 20x^3$; $y' > 0$ при $x^3(x-4) > 0$, т. е. при $x < 0$ или $x > 4$ и $y' < 0$ при $x \in]0;\ 4[$. Следовательно, y возрастает на промежутках $]-\infty;\ 0]$ и $[4;\ \infty[$ и убывает на промежутке $[0;\ 4]$.

4. $y' = 21(x^6 - x^2 + 1) > 0$ для любого действительного x, так как при $|x| \geqslant 1$ имеем: $x^6 \geqslant x^2$ и $1 > 0$, поэтому $x^6 - x^2 +$

$+1>0$, а при $|x|<1$ уже $1-x^2>0$. Следовательно, y возрастает на всей числовой прямой.

5. $y=x^5-x^4+x^3-x^2+x-1$; $y'=5x^4-4x^3+3x^2-2x+1=x^2(5x^2-4x+1)+(2x^2-2x+1)>0$ для любого x, так как каждый из квадратных трехчленов, записанных в скобках, положителен для любого x. Следовательно, y возрастает на всей числовой прямой.

6. $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2x\sqrt{x}}=\frac{x-1}{2x\sqrt{x}}$; $y'<0$ при $0<x<1$; $y'>0$ при $x>1$. Следовательно, y убывает на $]0;\ 1]$ и y возрастает на $[1;\ \infty[$.

7. $y'=\frac{(x-a)\cdot x'-x\cdot(x-a)'}{(x-a)^2}-\frac{x(x-a)'-(x-a)x'}{x^2}=\frac{-a}{(x-a)^2}+\frac{-a}{x^2}<0$ для любого $x\in D(y)$, т. е. для $x\neq 0$ и $x\neq a$. Следовательно, y убывает на промежутках

$$]-\infty;\ 0[,\ ]0;\ a[\ \text{и}\ ]a;\ \infty[.$$

8. $y'=\frac{-a}{(x-a)^2}+\frac{a}{x^2}=a\left(\frac{a^2-2ax}{x^2(x-a)^2}\right)=a^2\left(\frac{a-2x}{x^2(x-a)^2}\right)$; $y'>0$ при $x<\frac{a}{2}$ (естественно, что $x\neq 0$); $y'<0$ при $x>\frac{a}{2}$, $x\neq a$. Следовательно, y возрастает на промежутках $]-\infty;\ 0[$ и $\left]0;\ \frac{a}{2}\right]$ и убывает на промежутках $\left[\frac{a}{2};\ a\right[$ и $]a;\ \infty[$.

9. $y'=\cos x-\sin x$; $y'>0$ при $\cos x-\sin x>0$, т. е. при $0<x<\frac{\pi}{4}$; $y'<0$ при $x\in\left]\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{2}\right[$. Следовательно, y возрастает на промежутке $\left]0;\ \frac{\pi}{4}\right]$ и убывает на промежутке $\left[\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{2}\right[$.

10. $y'=3\sin^2x\cos x-3\cos^2x\sin x=3\sin x\cos x(\sin x-\cos x)$. На промежутке $\left]0;\ \frac{\pi}{2}\right[$ $3\sin x\cos x>0$, поэтому достаточно выяснить знак $\sin x-\cos x$; $y'<0$ при $0<x<\frac{\pi}{4}$, $y'>0$ при $\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}$. Следовательно, y возрастает на промежутке $\left[\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{2}\right[$ и убывает на промежутке $\left]0;\ \frac{\pi}{4}\right]$.

11. $y'=\cos x-\sin x-\sqrt{2}<0$, так как $\cos x-\sin x=\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)<\sqrt{2}$ — на интервалах $\left]-\frac{\pi}{4}+2\pi k;\ \frac{7\pi}{4}+2\pi k\right[$, $k\in \boldsymbol{Z}$. Поэтому y убывает на каждом из промежутков $\left[-\frac{\pi}{4}+2\pi k;\ \frac{7\pi}{4}+2\pi k\right]$, $k\in \boldsymbol{Z}$, а следовательно, и на всей числовой прямой.

12. $y'=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\frac{x-\operatorname{tg} x}{x^2\cos x}<0$ на каждом из промежутков $\left]0;\ \frac{\pi}{2}\right[$ (на этом промежутке $\cos x>0$ и $x<\operatorname{tg} x$) и $\left]\frac{\pi}{2};\ \pi\right[$ (на

этом промежутке $\cos x < 0$ и $x - \operatorname{tg} x > 0$, так как $-\operatorname{tg} x > 0$ и $x > 0$). Следовательно, y убывает на промежутках $\left]0;\ \frac{\pi}{2}\right[$ и $\left]\frac{\pi}{2};\ \pi\right[$.

13. $y' = \frac{2x - \sin 2x}{2x^2 \cos^2 x} > 0$, так как $2x > \sin 2x$; следовательно, y возрастает на промежутке $\left]0;\ \frac{\pi}{2}\right[$.

14. $y' = x - \sin x > 0$ на промежутке $]0;\ \infty[$. Следовательно, на этом промежутке y возрастает.

15. $y' = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} = 2\left(\frac{x^2}{4} - \sin^2 \frac{x}{2}\right) > 0$ в интервале $\left]0;\ \frac{\pi}{2}\right[$, так как на этом интервале $\left|\frac{x}{2}\right| > \left|\sin \frac{x}{2}\right|$. Следовательно, y возрастает на интервале $\left]0;\ \frac{\pi}{2}\right[$.

16. $y' = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 - x^2 = \operatorname{tg}^2 x + 1 - 1 - x^2 = \operatorname{tg}^2 x - x^2$; $y' > 0$ при $x \neq 0$ на интервале $\left]-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right[$. Поэтому y возрастает на каждом из промежутков $\left]-\frac{\pi}{2};\ 0\right]$ и $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right[$, а следовательно, и на промежутке $\left]-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right[$.

17. $y' = \frac{1}{m} - \frac{1}{x}$; $y' < 0$ при $0 < x < m$; $y' > 0$ при $x > m$. Следовательно, y убывает на промежутке $]0;\ m]$ и возрастает на промежутке $[m;\ \infty[$.

18. $y' = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{n}\sqrt[n]{x} - 1\right)$; $y' < 0$ при $0 < x < n^n$; $y' > 0$ при $x > n^n$. Следовательно, y убывает на промежутке $]0;\ n^n]$ и возрастает на промежутке $[n^n;\ \infty[$.

19. $y' = \cos x - x \sin x$. Рассмотрим функцию $f(x) = \cos x - x \sin x$. Эта функция непрерывна на всей числовой прямой, причем $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) > 0$ и $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} < 0$. Следовательно, $f(x) > 0$ на некотором интервале вида $\left]\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{4} + \delta_1\right[$ и $f'(x) < 0$ на некотором интервале вида $\left]\frac{\pi}{2} - \delta_2;\ \frac{\pi}{2}\right[$, где δ_1 и δ_2 — достаточно малые положительные числа. Следовательно, функция $y = x \cos x$ возрастает на некотором промежутке вида $\left]\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{4} + \delta_1\right]$ и убывает на некотором промежутке вида $\left[\frac{\pi}{2} - \delta_2;\ \frac{\pi}{2}\right[$ и не может быть монотонной на промежутке $\left]\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{2}\right[$.

20. Площадь четверти круга радиуса $2x$ равна πx^2, поэтому площадь пластины равна (при $x \in]0;\ 9[$) $(9+x)^2 - \pi x^2 = S(x)$; $S'(x) = 2(9 + x - \pi x)$; $S'(x) > 0$ при $x \in]0;\ 2[$, поэтому $S(x)$ возрастает при изменении x от 0 до 2. $S'(x) < 0$ при $x \in]5;\ 6[$, поэтому $S(x)$ убывает при изменении x от 5 до 6.

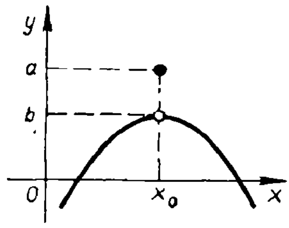


Рис. 86

21. $V(x) = \frac{5}{4}x^2(12 - x)$. $V'(x) = \frac{15}{4}x(8 - x)$; $V'(x) > 0$ при $0 < x < 8$; $V'(x) < 0$ при $8 < x < 12$ (область определения $V(x)$ — промежуток $]0;\ 12[$). Следовательно, $V(x)$ возрастает на промежутке $]0;\ 8]$ и убывает на промежутке $[8;\ 12[$.

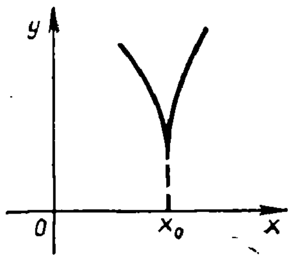


Рис. 87

22. $l(t) = |OM| = \sqrt{\frac{t}{2} + \sin^2 t}$;

$$l'(t) = \frac{\frac{1}{2} + \sin 2t}{2\sqrt{\frac{t}{2} + \sin^2 t}};\quad l'(t) < 0 \quad \text{при}$$

$\sin 2t < -\frac{1}{2}$; $l(t)$ убывает на промежутках

$$\left[\frac{7\pi}{12};\ \frac{11\pi}{12}\right] \text{ и } \left[\frac{19\pi}{12};\ \frac{23\pi}{12}\right].$$

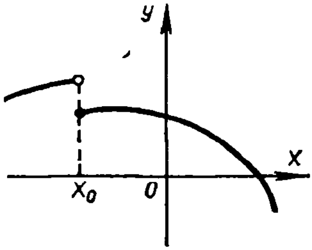


Рис. 88

23. В точке x_0 функция имеет максимум.

24. Рис. 86; x_0 — точка максимума. Указание. Рассмотрим функцию $g(x)$, совпадающую с $f(x)$ при $x \neq x_0$ и $g(x_0) = b$. Функция g будет дифференцируема в точке x_0 и иметь в этой точке максимум.

25. Рис. 87. 26. Рис. 88. (При $x_1 \geqslant x_0$ функция убывает.)

27. а) $y' = 4x^3 - 4x$; $y' = 0$ при $x = -1$; $x = 0$ и $x = 1$. В точках -1 и 1 производная меняет знак с минуса на плюс, поэтому в этих точках функция имеет минимум; $y(-1) = y(1) = -1$; в точке 0 производная меняет знак с плюса на минус, поэтому в этих точках функция имеет максимум; $y(0) = 0$.

б) $y' = 3x^2 - 6x$; $y' = 0$ при $x = 0$ и $x = 2$. В точке 0 y меняет знак с плюса на минус, поэтому в этой точке функция имеет максимум; $y(0) = 2$; в точке 2 производная меняет знак с минуса на плюс, поэтому в этой точке функция имеет минимум; $y(2) = -2$.

28. Область определения функции — промежуток $[2;\ \infty[$.

$$y' = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}\right);\quad y' = 0 \text{ при } \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{(x-2)^2},$$

т. е. при $x = 4$ ($x = 1$ не входит в область определения). Функция убывает на промежутке $[2;\ 4]$ и возрастает на промежутке $[4;\ \infty[$. В точке 4 функция имеет минимум, $y(4) = 0$.

29. Область определения функции — $]-\infty;\ 0[\ \cup\ ]0;\ \infty[$. При $x \in\ ]0;\ \infty[$ имеем: $y = x \ln x$; $y' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$; $y' = 0$ при $x = \frac{1}{e}$; $y' < 0$ при $x \in \left]0;\ \frac{1}{e}\right[$. При $x \in\ ]-\infty;\ 0[$ имеем: $y = x \ln(-x)$; $y' = \ln(-x) + 1$; $y' = 0$ при $x = -\frac{1}{e}$; $y < 0$ при $x \in \left]-\frac{1}{e};\ 0\right[$. Следовательно, в точке $-\frac{1}{e}$ функция имеет максимум; $y\left(-\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}$; в точке $\frac{1}{e}$ функция имеет минимум; $y\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$. Функция убывает на промежутках $\left[-\frac{1}{e};\ 0\right[$ и $\left]0;\ \frac{1}{e}\right]$.

30. $y' = \dfrac{x^n e^x - e^x \cdot nx^{n-1}}{x^{2n}} = \dfrac{e^x (x - n)}{x^{n+1}}$; $y' = 0$ при $x = n$, y не определен в точке 0. На промежутке $]-\infty;\ 0[$ y' положительна при четном n и отрицательна при нечетном n; на промежутке $]0;\ n[$ $y' < 0$; на промежутке $]n;\ \infty[$ $y' > 0$. Следовательно, в точке n функция имеет минимум; $y(x) = \frac{e^n}{n^n}$. При четном n функция возрастает на промежутках $]-\infty;\ 0[$ и $[n;\ \infty[$; при нечетном n функция убывает на промежутках $]-\infty;\ 0[$ и $]0;\ n]$.

31. б)
$$y' = \begin{cases} -1 \text{ при } x \in\ ]-\infty;\ -2[\ \cup\ ]-1;\ 0[\ \cup\ ]1;\ 2[, \\ 1 \text{ при } x \in\ ]-2;\ -1[\ \cup\ ]0;\ 1[\ \cup\ ]2;\ \infty[, \\ \text{не определена при } x \in \{-2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\}. \end{cases}$$
Минимум в точках 0 и ± 2; максимум в точках -1 и 1.

в)
$$y' = \begin{cases} 2x \text{ при } x \in\ ]-\infty;\ -1[\ \cup\ ]1;\ \infty[, \\ -2x \text{ при } x \in\ ]-1;\ 1[, \\ \text{не определена в точках } -1 \text{ и } 1. \end{cases}$$
Минимум в точках -1 и 1, максимум в точке 0.

г) $y' = 2|x|$, экстремумов нет ($y' = 0$ при $x = 0$).

д)
$$y' = \begin{cases} 2x - 1 \text{ при } x > 0, \\ 1 - 2x \text{ при } x < 0, \\ \text{не определена при } x = 0. \end{cases}$$
Максимум в точке 0, минимум в точке 0,5.

е) $y' = 2$ на каждом промежутке вида $\left]n;\ n + \frac{1}{2}\right[$, y' не определена при $x/2 \in \boldsymbol{Z}$. Минимум в точках $n/2, n \in \boldsymbol{Z}$.

32. $y' = 4x^3 - 3x^2 - 1 = (x - 1)(4x^2 + x + 1)$; $y' = 0$ при $x = 1$, причем на промежутке $]-\infty;\ 1[$ имеем: $y' < 0$, поэтому на этом промежутке y убывает; на промежутке $]1;\ \infty[$ имеем: $y' > 0$, поэтому y возрастает. Следовательно, в точке 1 y принимает наименьшее значение на всей числовой прямой, причем $y(1) = -2$.

33. $y(\sqrt[3]{3}) = -5{,}4\sqrt[3]{9}$. Указание. $y' = 8x^7 - 24x^4$; $y' = 0$ при $x = 0$ и $x = \sqrt[3]{3}$.

34. $y(1) = 2$. Указание. $y' = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x^2}$; $y' = 0$ при $x = 1$. Функция возрастает на промежутке $[1;\ \infty[$ и убывает на промежутке $]0;\ 1]$.

35. $y(e) = 1$. Указание. $y' = \frac{e^x(x-e)}{x^{e+1}}$; $y' = 0$ при $x = e$. (Отметим, что $D(y) =]0;\ \infty[$.)

36. $y = \ln^2 x(\ln x + 3)$; $y' = 0$ при $x = \frac{1}{e^3}$ и $x = 1$, при этом y убывает на промежутке $\left]0;\ \frac{1}{e^3}\right]$ и возрастает на промежутках $\left[\frac{1}{e^3};\ 1\right]$ и $[1;\ \infty[$, т. е. возрастает на промежутке $\left[\frac{1}{e^3};\ \infty\right[$. Если $x < \frac{1}{e^3}$, то $y(x) > y\left(\frac{1}{e^3}\right)$, так как на промежутке $\left]0;\ \frac{1}{e^3}\right]$ функция y убывает; если же $x > \frac{1}{e^3}$, то $y(x) > y\left(\frac{1}{e^3}\right)$, так как на промежутке $\left[\frac{1}{e^3};\ \infty\right[$ функция y возрастает. Следовательно, в точке $\frac{1}{e^3}$ функция принимает наименьшее значение и это наименьшее значение равно $\left(-\frac{27}{e^3}\right)$.

37. $y' = 2x(1 + 2x^2 - 3x^4)$; $y' = 0$ при $x = -1$; $x = 0$ и $x = 1$. y возрастает на промежутках $]-\infty;\ -1]$ и $[0;\ 1]$ и убывает на промежутках $[-1;\ 0]$ и $[1;\ \infty[$. Функция имеет максимумы в точках -1 и 1, причем так как на промежутке $]-\infty;\ -1]$ функция возрастает, а на промежутке $[1;\ \infty[$ убывает (т. е. ведет себя «должным образом» на бесконечных промежутках), то в одной из этих точек (или в обеих) функция принимает наибольшее значение. Имеем: $y(-1) = y(1) = 1$. Таким образом, наибольшее значение y равно 1 и достигается в двух точках: -1 и 1.

38. $y(-1) = y(1) = \frac{1}{e}$. Указание. $y' = 2xe^{-x^2}(1 - x^2)$.

39. $y' = e^{-x^2}(1 - 2x^2)$; $y' = 0$ при $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, причем в точке $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ функция имеет минимум, в точке $\frac{1}{\sqrt{2}}$ — максимум. Функция убывает на промежутках $\left]-\infty;\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ и $\left[\frac{1}{\sqrt{2}};\ \infty\right[$ и убывает на промежутке $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ (см. таблицу):

Таблица

	$\left]-\infty;\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right[$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left]-\frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right[$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left]\frac{1}{\sqrt{2}};\ \infty\right[$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	min	↗	max	↘

Из таблицы видно, что если $y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) > y(x)$ для любого $x \in$ $\in \left]-\infty; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, то функция в точке $\frac{1}{\sqrt{2}}$ достигает наибольшего значения, если же для какого-нибудь x из указанного промежутка $y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) < y(x)$, то функция не достигает наибольшего значения. В данном случае $y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}\,e^2}$ — наибольшее значение функции y (это значение положительно, а для любого x из указанного промежутка $y(x)$ — отрицательно).

40. $y\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}$. Указание. $D(y) =]0; \infty[$; $y' = -\ln x - 1$.

41. Функция имеет максимум в точке e^2 $\left(y' = \frac{\ln x\,(2 - \ln x)}{x^2}\right)$, однако $y(e^2) = \frac{4}{e^2}$ не является наибольшим значением y, так как $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\ln^2 x}{x} = \infty$. Следовательно, функция y не имеет наибольшего значения.

43. а) $f(3) = 8$ и $f(0) = -1$; б) $f(3) = 24$ и $f\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}$; в) $f(2) = \frac{1}{4}$, наименьшего значения не существует, строго говоря, задача поставлена не совсем корректно: $0 \notin D(f)$.

44. $\min\limits_{[-2;\sqrt{2}]} y = -1$; $\max\limits_{[-2;\sqrt{2}]} y = 44$. Указание. $y' = 2x(3x^4 - 2x^2 - 1)$. Критические точки: -1; 0; 1. $y(-1) = y(1) = -1$; $y(0) = 0$; $y(-2) = 44$; $y(\sqrt{2}) = 2$.

45. $\max\limits_{\left[0;\frac{3\pi}{4}\right]} y = \sqrt{5}$; $\min\limits_{\left[0;\frac{3\pi}{4}\right]} y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Решение. $y' = \cos x - 2\sin x$; $y' = 0$ при $\operatorname{tg} x = 0{,}5$. Такая точка x_1 на отрезке $\left[0; \frac{3\pi}{4}\right]$ одна и в ней $\sin x = \frac{1}{\sqrt{5}}$; $\cos x = \frac{2}{\sqrt{5}}$; $y(0) = 2$; $y(x_1) = \sqrt{5}$; $y\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

46. $\min\limits_{\left[0;\frac{\pi}{2}\right]} y = 0$; $\max\limits_{\left[0;\frac{\pi}{2}\right]} y = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Решение. $y' = \cos^3 x - 2\cos x \sin^2 x + 2\sin x \cos^2 x - \sin^3 x = (\cos x - \sin x)(1 + 3\cos x \sin x)$. На отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ критическая точка одна; $x_1 = \frac{\pi}{4}$; $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $y(0) = 0$; $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

47. $y' = \frac{\ln x (2 - \ln x)}{x^3}$. На промежутке $]2;\ e^2[$ $y' > 0$, следовательно, y — возрастающая функция. Это означает, что наименьшего значения функция не достигает (так как $2 \notin]2;\ e^2]$), а наибольшее значение равно $y(e^2) = \frac{4}{e^2}$.

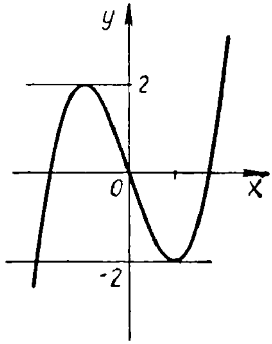


Рис. 89

48. Полезно пользоваться графиком функции $g(x) = x^3 - 3x$ (рис. 89). Из этого графика видно, что если $a < -1$, то наибольшее значение на отрезке $[a;\ 0]$ функция принимает при $x = -1$ и это значение равно 2. Можно, конечно, выяснить это и без всякого графика — чисто аналитически: $g'(x) = 0$ при $x = \pm 1$; если $a < -1$, то из точек -1 и 1 на отрезке $[a;\ 0]$ лежит только точка -1, поэтому достаточно сравнить значения g в трех точках: концах отрезка a и 0 и в точке -1; так как $g(-1) = 2 > 0 = g(0)$, то остается выяснить, какое из чисел больше: $2 = g(-1)$ или $a^3 - 3a = g(a)$. Так как $a^3 - 3a - 2 = (a+1)^2 (a-2) < 0$ при $a < -1$, то $a^3 - 3a < 2$. Поэтому наибольшее значение $g(x)$ на отрезке $[a;\ 0]$ при $a > -1$ равно 2. Аналогично любым из этих двух способов проверяется, что на промежутке $]-1;\ 0[$ $f(a) = a^3 - 3a$; на промежутке $[0;\ \sqrt{3}]$ $f(a) = 0$; на промежутке $]\sqrt{3};\ \infty[$ $f(a) = a^3 - 3a$. График функции f изображен на рисунке 90;

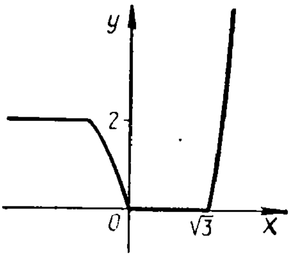


Рис. 90

б) $f(a) = a^3 - 3a$ на промежутке $]-\infty;\ -a_0]$; $f(a) = (a+1)^3 - 3(a+1)$ на промежутке $]-a_0;\ 0[$; $f(a) = -2$ на промежутке $[0;\ 1]$; $f(a) = a^3 - 3a$ на промежутке $[1;\ \infty[$, где $a_0 = \frac{1}{6}(-3 - \sqrt{33}) \approx -1{,}46$. График изображен на рисунке 91.

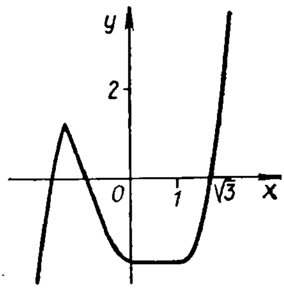


Рис. 91

49. $]1;\ \infty[$. Указание. Запишем неравенство в виде $f(x) > 0$, где $f(x) = x^9 - x^5 + x - 1$. Так как $f'(x) = 9x^8 - 5x^4 + 1 > 0$ для любого x, то функция f возрастает на всей числовой прямой. Поэтому $f(x) > f(1) = 0$ при $x > 1$ и $f(x) < f(1) = 0$ при $x < 1$.

50. $]-\infty;\ 1[\ \cup\ ]1;\ \infty[$. Указание. Функция $f(x) = x^6 - 6x + 5$ принимает наименьшее значение 0 в точке 1, следовательно, для остальных x выполнено неравенство $f(x) > f(0) = 0$.

51. $]-1;\ 2[$. 52. $]-\infty;\ \sqrt{2}[$. Указание. Функция $f(x) = x^9 - x^5 + x - 13\sqrt{2}$ имеет положительную производную и, следовательно, возрастает на всей числовой прямой. Корень уравнения $x^9 - x^5 + x = 13\sqrt{2}$ можно искать в виде $a\sqrt{2}$.

53. $]0;\ 1]$. Решение. Область определения неравенства — множество решений неравенства $x(x^8 - 2x^4 + 3) > 0$ — промежуток $]0;\ \infty[$. На этом промежутке исходное неравенство равносильно неравенству $f(x) = x^9 - 2x^5 + 3x - 2 \leqslant 0$; $f'(x) = 9x^8 - 10x^4 + 3 > 0$ для всех x, поэтому $f(x)$ возрастает и, стало быть, $f(x) \leqslant 0$ при $x \leqslant 1$ ($f(1) = 0$). Учитывая область определения, получаем ответ.

54. $\left]\frac{1}{e};\ e\right[$. Указание. Функция $f(x) = x(\ln^2 x + 1)$ возрастает, так как ее производная $f'(x) = \ln^2 x + 2\ln x + 1$ положительна при $x \neq \frac{1}{e}$. Кроме того, $f\left(\frac{1}{e}\right) = 2e^{-1}$; $f(e) = 2e$.

55. $]0;\ 1]$. Указание. Функция $f(x) = x\ln x$ на $\left]0;\ \frac{1}{e}\right]$ убывает, так как ее производная $f'(x) = 1 + \ln x < 0$ на промежутке $\left]0;\ \frac{1}{e}\right]$; $f(x)$ возрастает на $\left[\frac{1}{e};\ \infty\right[$, так как $f'(x) > 0$ на промежутке $\left]\frac{1}{e};\ \infty\right[$. Далее, на промежутке $\left]0;\ \frac{1}{e}\right]$ имеем: $f(x) < 0$ и $f(x) > f\left(\frac{1}{e}\right) = -e^{-1}$; на промежутке $\left[\frac{1}{e};\ \infty\right[$ имеем: $f(x) \geqslant f\left(\frac{1}{e}\right) = -e^{-1}$ и $f(x) \leqslant f(1) = 0$ при $x \leqslant 1$.

56. $[-e;\ 0[$. Указание. Функция $f(x) = x\ln(-x)$ возрастает на промежутке $\left]-\infty;\ -\frac{1}{e}\right]$ и убывает на промежутке $\left[-\frac{1}{e};\ 0\right[$. Все значения x из промежутка $\left[-\frac{1}{e};\ 0\right[$ являются решениями неравенства (для таких x имеем: $f(x) > 0$ и $f(x) \leqslant f\left(-\frac{1}{e}\right) = e^{-1}$).

Для x, принадлежащих промежутку $\left]-\infty;\ -\frac{1}{e}\right[$ в силу возрастания $f(x)$, на этом промежутке получим:

$$-e = f(-e) \leqslant f(x) \leqslant f\left(-\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}$$

для $-e \leqslant x \leqslant -\frac{1}{e}$ (и притом только для таких x).

57. Функция $y = x\ln|x|$ возрастает на промежутках $\left]-\infty;\ -\frac{1}{e}\right]$ и $\left[\frac{1}{e};\ \infty\right[$ и убывает на промежутках $\left[-\frac{1}{e};\ 0\right[$ и $\left]0;\ \frac{1}{e}\right]$, при-

чем $y\left(-\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}$, $y\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}$ (см. № 29). Кроме того, $y(-1)=$ $=y(1)=0$; $y(e)=e$. На промежутке $\left]-\infty;\ -\frac{1}{e}\right]$ функция y возрастает, поэтому $0<y<e$ $\left(\text{точнее } 0<y\leqslant\frac{1}{e}\right)$ при x из промежутка $\left]-1;\ -\frac{1}{e}\right]$. На промежутке $\left[-\frac{1}{e};\ 0\right[$ функция y убывает, поэтому для x из промежутка $\left]-\frac{1}{e};\ 0\right[$ имеем: $y(x)<y\left(-\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}$, кроме того, очевидно, что $y(x)>0$. Поэтому промежуток $\left]-\frac{1}{e};\ 0\right[$ целиком входит в множество решений неравенства. На промежутке $\left]0;\ \frac{1}{e}\right[$ функция y принимает только отрицательные значения, поэтому ни одно x из этого промежутка не может входить в множество решений неравенства. Наконец, на промежутке $\left[\frac{1}{e};\ \infty\right[$ функция y возрастает, поэтому для x, удовлетворяющих неравенству $1<$ $<x<e$, и только для таких x будет выполнено неравенство $y(1)=$ $=0<y(x)<e=y(e)$. Ответ. $]-1;\ 0[\ \cup\ ]1,\ e[$.

58. $]0;\ \infty[$. Указание. Неравенство равносильно неравенству $f(x)>0$, где $f(x)=\sqrt{x}-\ln(x+1)$; $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-$ $-\frac{1}{x+1}=\frac{x+1-2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(x+1)}=\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{2\sqrt{x}(x+1)}>0$ на промежутках $]0;\ 1[$ и $]1;\ \infty[$. Следовательно, $y(x)$ возрастает на промежутках $[0;\ 1]$ и $[1;\ \infty[$, а значит, и на промежутке $[0;\ \infty[$. Поэтому для $x\in\ ]0;\ \infty[$ имеем: $y(x)>y(0)=0$.

59. $[0;\ \infty[$. Указание. Логарифмируя, получаем равносильное неравенство $x\geqslant\ln(x^2+1)$. Запишем его в виде $f(x)\geqslant$ $\geqslant 0$, где $f(x)=x-\ln(x^2+1)$. Так как $f'(x)=1-\frac{2x}{x^2+1}=$ $=\frac{(x-1)^2}{x^2+1}>0$ при $x\neq 1$, то $f(x)$ — возрастающая функция на $]-\infty;\ \infty[$. Кроме того, $f(0)=0$, поэтому $f(x)\geqslant 0$ при $x\geqslant 0$.

60. $[0;\ 1]\cup[e;\ \infty[$. Решение. Функция $f(x)=\frac{e^{x-1}}{x^{e-1}}$ убывает на промежутке $]0;\ e-1]$ и возрастает на промежутке $[e-1;$ $\infty[$ $\left(\text{ее производная равна } \frac{e^{x-1}x^{e-2}(x-(e-1))}{x^{2e-2}}\right)$. Кроме того, $f(1)=f(e)=1$. Поэтому на промежутке $]0;\ e-1]$ множеством решений неравенства $f(x)\geqslant 1$ служит промежуток $]0;\ 1]$, а на промежутке $]e-1;\ \infty[$ — промежуток $[e;\ \infty[$.

61. Пусть $f(x)=x^2-x^3$. Тогда $f'(x)=2x-3x^2<0$ на промежутке $\left]\frac{2}{3};\ \infty\right[$. Следовательно, на этом промежутке

$$f(x)<f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{27}<\frac{1}{6}.$$

62. Пусть $f(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$. Тогда $f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{x}{(1+x)^2} > 0$ на промежутке $]0; \infty[$. Следовательно, на этом промежутке $f(x) > f(0) = 0$.

63. Пусть $f(x) = e^x - x - 1$. Тогда $f'(x) = e^x - 1$. $f'(x) > 0$ на промежутке $]0; \infty[$, поэтому на этом промежутке $f(x)$ возрастает, т. е. $f(x) > f(0) = 0$; $f'(x) < 0$ на промежутке $]-\infty; 0[$, поэтому на этом промежутке $f(x)$ убывает, т. е. $f(x) > f(0) = 0$.

64. Можно провести доказательство, аналогичное доказательству неравенства из № 63, а можно просто применить это неравенство для $y = -x$.

65. Пусть $f(x) = \ln(1+x) - x$. Тогда $f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x} < 0$ на промежутке $]0; \infty[$. Следовательно, на этом промежутке $f(x) < f(0) = 0$.

66. Рассмотрим функцию $f(x) = (1+x)^\alpha - \alpha x - 1$. $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} - \alpha$; $f'(x) > 0$ при $x \in]0; \infty[$, так как при $x > 0$, $\alpha > 1$ истинно неравенство $(1+x)^{\alpha-1} > 1$ ($(1+x) > 1$, а $(\alpha - 1) > 0$). Поэтому $f(x)$ возрастает, и, следовательно, $f(x) > f(0) = 0$ на промежутке $]0; \infty[$.

67. Для функции $f(x)$ из предыдущей задачи будем иметь: $f'(x) < 0$, так как $(1+x) > 1$, а $\alpha - 1 < 0$. Следовательно, $f(x)$ убывает на промежутке $]0; \infty[$, т. е. на этом промежутке $f(x) < f(0) = 0$.

68 и 69. Функция $f(x) = (1+x)^\alpha - x^\alpha - 1$ имеет производную $f'(x) = \alpha((1+x)^{\alpha-1} - x^{\alpha-1})$. При $\alpha > 1$ имеем: $f'(x) > 0$ на промежутке $]0; \infty[$, так как $(1+x) > x$ и $\alpha - 1 > 0$, поэтому $f(x) > f(0) = 0$ на этом промежутке. При $\alpha < 1$ имеем: $(1+x) > x$, $\alpha - 1 < 0$ на промежутке $]0; \infty[$, следовательно, на этом промежутке $f'(x) < 0$ и $f(x) < f(0) = 0$.

70. Исходное неравенство равносильно неравенству $3\ln\ln x > \ln x$ (полученному логарифмированием обеих частей исходного неравенства). Рассмотрим теперь функцию $f(x) = 3\ln\ln x - \ln x$. $f'(x) = \frac{3}{x\ln x} - \frac{1}{x} = \frac{3 - \ln x}{x \ln x} > 0$ на промежутке $]e^2; e^3[$. Следовательно, на этом промежутке $f(x) > f(e^2) = 3\ln 2 - 2 > 0$ (так как $8 > e^2$).

71. Вычтем из обеих частей x. Тогда наименьшее значение квадратичной функции $f(x) = x^2 - 2x + 2$ равно 1 и достигается в точке 1. Функция $g(x) = 2\sqrt[4]{2x-1} - x$ достигает наибольшего значения в точке 1 ($g'(x) = (2x-1)^{\frac{3}{4}} - 1$; $g'(x) = 0$ при $x = 1$). Ответ. $\{1\}$.

72. $\{0\}$. Указание. Левая часть не меньше 1; правая — не больше 1, причем правая часть равна 1 только при $x = 0$.

73. $\varnothing$. Указание. См. указание к № 72, кроме того, при $x = 0$ левая часть не равна 1.

74. $S\left(\frac{9}{\pi - 1}\right) = \frac{81\pi}{\pi - 1}$. Указание. Точка максимума квадратичной функции S лежит в интервале]0; 9[, поэтому наибольшее значение достигается, причем в этой точке.

75. $V(8) = 320$.

76. При $P = \sqrt{\frac{b}{a}} - c$. Указание. $R'(P) = a - \frac{b}{(c + P)^2}$. Функция R имеет одну критическую точку $P_1 = -c + \sqrt{\frac{b}{a}} > 0$; $R'(P) > 0$ при $P < P_1$, $R'(P) < 0$ при $P > P_1$, следовательно, в точке P функция R имеет минимум.

77. Наименьшее количество материала расходуется при наименьшей сумме f боковых сторон и нижнего основания сечения. Обозначим через S площадь, h — высоту, x — острый угол трапеции. Тогда

$$f(x) = \frac{2h}{\sin x} + \frac{S}{h} - h \operatorname{ctg} x,$$

$$f'(x) = \frac{h(1 - 2\cos x)}{\sin^2 x}.$$

$f'(x) = 0$ при $x = \frac{\pi}{3}$; $f'(x) < 0$ при $x < \frac{\pi}{3}$; $f'(x) > 0$ при $x > \frac{\pi}{3}$. Следовательно, при $x = \frac{\pi}{3}$ функция $f(x)$ достигает наименьшего значения.

78. Площадь поперечного сечения равна $4xy + x^2$, где x — сторона внутреннего квадрата сечения, y — высота выступа. Но $\left(\frac{x}{2} + y\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{D^2}{4}$, откуда $y = \frac{\sqrt{D^2 - x^2} - x}{2}$. Следовательно,

$$S(x) = 2x\sqrt{D^2 - x^2} - x^2,$$

$$S'(x) = \frac{2(D^2 - 2x^2 - x\sqrt{x^2 - D^2})}{\sqrt{D^2 - x^2}},$$

$S'(x) = 0$ при $x_1^2 = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{10} D^2$. Но $D^2 = x^2 + (x + 2y)^2 > 2x^2$. Следовательно, критической точкой будет точка $x_1 = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}} D$. Так как $S'(x) > 0$ при $x < x_1$ и $S'(x) < 0$ при $x > x_1$, то x_1 — точка максимума. Итак, наибольшая площадь поперечного сечения достигается при стороне внутреннего квадрата, равной $\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}} D$.

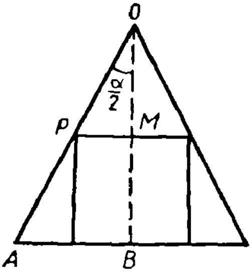


Рис. 92

79. $x = \frac{h}{1+\lambda}$, где $\lambda = \sqrt{\frac{m}{m_0}}$. При $\lambda = 4$ получим: $x = \frac{h}{3}$.

80. а) Квадрат со стороной $\frac{l}{4}$; б) $\frac{l}{4}$ и $\frac{l}{2}$.

81. $0 < S \leqslant \frac{ah}{4}$. Указание. Обозначим сторону прямоугольника, лежащую на основании, через y, а другую — через x. Тогда $\frac{h-x}{y} = \frac{h}{a}$, откуда $y = \frac{a(h-x)}{h}$.

82. Обозначим через r и h радиус и высоту цилиндра. Тогда из подобия треугольника OAB и OPM (рис. 92) получаем: $\frac{r}{R} = 1 - h$, где $R = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ — радиус основания конуса. Поэтому $1 - h = r \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, $h = 1 - r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. Требуется определить, в каких пределах могут меняться значения функций: $S_п(r) = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r\left(r + 1 - r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)$; $S_б(r) = 2\pi rh = 2\pi r\left(1 - r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)$; $V = \pi r^2 h = \pi r^2\left(1 - r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)$ при $0 < r < R$. Мы поступим следующим образом: найдем наименьшее и наибольшее значение этих функций на отрезке $[0; R]$ и исключим значения в концах этого отрезка, если эти значения функция принимает только в концах. Функции $S_п$ и $S_б$ квадратичные, поэтому достаточно сравнить их значения в концах отрезка и в точках $\frac{1}{2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - 2}$ и $\frac{1}{2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}$ соответственно. $V'(r) = 0$ при $2r - 3r^2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = 0$, т. е. $r = 0$ и $r = \frac{2}{3}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Имеем: $S_п(0) = 0$; $S_п(R) =$

$$= 2\pi\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + 1 - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right) = 2\pi\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2};$$

$S_п = \left(\frac{1}{2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - 2}\right) = \frac{\pi}{2\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - 1\right)}$, отметим, что $S_п(R) < S_п\left(\frac{1}{2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - 2}\right)$ при $\frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{4}$; $S_б(0) = 0$, $S_б(R) = 0$, $S_б\left(\frac{1}{2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}\right) = \frac{\pi}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$;

$V(0)=0,\ V(R)=0,\ V\left(\frac{2}{3}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)=\pi\cdot\frac{4}{9}\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\left(1-\frac{2}{3}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)=$
$=\frac{4\pi}{27}\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}.$

Ответ. а) $0<S_n\leqslant\frac{\pi}{2\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-1\right)}$; б) $0<S_6\leqslant\frac{\pi}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$;

в) $0<V\leqslant\frac{4\pi}{27}\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$.

83. $0<V<\frac{32\pi}{81}$. Указание. Пусть r и h — радиус основания и высота конуса, вписанного в шар. Тогда $(h-1)^2+r^2=1$, откуда $r^2=2h-h^2$. Далее, $V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}h(2h-h^2)$; $V'(r)=\frac{1}{3}\pi(4h-3h^2)$; $V'=0$ при $h=\frac{4}{3}$.

84. Высота равна 4.

89. $45°$. **90.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **91.** Квадрат расстояния от точки $(2;0)$ до точки $(x;\sqrt{x})$ равен $f(x)=(x-2)^2+x$. Функция $f(x)$ квадратичная и достигает наименьшего значения в точке 1,5, при этом $f(1{,}5)=\frac{7}{4}$. Следовательно, кратчайшее расстояние равно $\frac{\sqrt{7}}{2}$.

92. Квадрат расстояния от точки $(3;0)$ до точки $(x;2\sqrt{\ln x})$ равен $f(x)=(x-3)^2+4\ln x$; $f'(x)=\frac{2(x^2-3x+2)}{x}$, $f'(x)=0$ при $x=1$ и $x=2$. Наименьшего значения на промежутке $[1;\infty[$ (области определения функции $y=\sqrt{\ln x}$) функция f достигает в точке 2; $f(2)=1+4\ln 2$. Следовательно, кратчайшее расстояние от точки $(3;0)$ до кривой $y=2\sqrt{\ln x}$ равно $\sqrt{1+4\ln 2}$.

93. $\frac{\sqrt{5}}{2}$. Указание. Квадрат расстояния от точки $\left(2;-\frac{5}{2}\right)$ до точки $(x;x^2-4x)$ равен $f(x)=(x-2)^2+\left(x^2-4x+\frac{5}{2}\right)^2$; $f'(x)=4(x-2)(x^2-4x+3)$; $f'=0$ при $x=1$; $x=2$ и $x=3$. Функция f принимает наименьшее значение в точках 1 и 3, и это наименьшее значение равно $\frac{5}{4}$.

94. $2\sqrt{17}$. Указание. Производная квадрата расстояния от точки $(10;5)$ до точки $(x;x^2+3)$ равна $2(x-2)(2x^2+4x+5)$.

95. Квадрат расстояния от точки $(98;0)$ до точки $(x;x^3)$ равен $f(x)=(x-98)^2+x^6$; $f'(x)=2(3x^5+x-98)$; $f'(x)=0$ при $x=2$. Так как функция $g(x)=3x^5+x-98$ возрастает на $]-\infty;\infty[$ (ее производная равна $15x^4+1$), то уравнение $g(x)=0$ не может иметь более одного корня, причем $g(x)$, а следовательно, и $f'(x)$ отрицательны при $x<2$ и положительны при $x>2$.

Поэтому в точке 2 функция f достигает наименьшего значения, и это значение равно 9280. Итак, кратчайшее расстояние от точки (98; 0) до кривой $y = x^3$ равно $\sqrt{9280} \approx 96{,}33$.

96. Функция убывает на промежутке $]-\infty; 1]$ и возрастает на промежутке $[1; \infty[$. В точке 1 функция имеет минимум. Критическая точка $x = 0$ не является точкой экстремума.

97. Функция возрастает на промежутках $]-\infty; 0]$ и $[2; \infty[$; функция убывает на промежутке $[0; 2]$. В точке 0 функция имеет максимум; в точке 2 — минимум.

98. $D(y) = [0; \infty[$. Функция возрастает на промежутке $\left[0; \frac{1}{4}\right]$, убывает на промежутке $\left[\frac{1}{4}; \infty\right[$; в точке $\frac{1}{4}$ функция имеет максимум.

99. На промежутке $]-\infty; 0]$ функция убывает, имеет минимум в точке 0 и при $x \geqslant 0$ совпадает с функцией задачи 98.

100. $D(y) = [2; \infty[$. Функция убывает на промежутке $[2; 4]$, возрастает на промежутке $[4; \infty[$, имеет минимум в точке 4.

101. $D(y) = [0; \infty[$. Функция убывает на промежутке $[0; 1]$, возрастает на промежутке $[1; \infty[$; $x = 1$ — точка минимума.

102. $D(y) = [-1; \infty[$, $y' = \frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}$. Функция убывает на промежутке $\left[-1; -\frac{2}{3}\right]$, возрастает на промежутке $\left[-\frac{2}{3}; \infty\right[$; в точке $-\frac{2}{3}$ функция имеет минимум.

104. Функция возрастает на $]-\infty; \infty[$. Критические точки $x = (2k+1)\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$ не являются точками экстремума.

105. Функция убывает на промежутке $]-\infty; 0]$ и возрастает на промежутке $[0; \infty[$. Критические точки $x = 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{N}$ и $x = (-2k+1)$, $k \in \boldsymbol{N}$ не являются точками экстремума. В точке 0 функция имеет минимум.

108. а) $x = -1$; б) $x = -1$; в) $x = -1$;
г) $x = -1$ и $x = 1$; д) $x = -1$ и $x = 1$; е) $x = 1$.

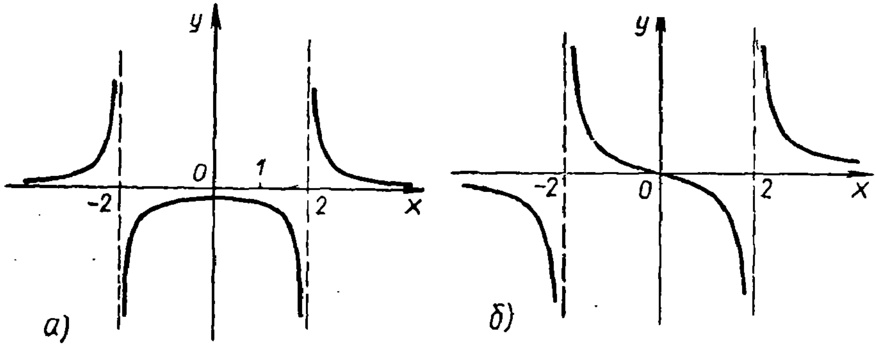
109. а) и б) $x = 0$ и $x = -2$; в) $x = -1$ и $x = 1$; г) $x = 1$.

110. а) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; б) $x = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;
в) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; г) $x = \pi n$, $n \neq 0$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

111. Из неравенств $|a(x)| > \left|\frac{a_0}{2}\right|$ и $b(x) < \varepsilon$, верных в некоторой (зависящей от a_0 и ε) окрестности точки x_0, следует неравенство $\left|\frac{a(x)}{b(x)}\right| > M$, как только $\varepsilon < \frac{|a_0|}{2M}$.

112. Например, $f(x) = \frac{x}{|x|}$.

113. Вертикальная асимптота в а) — в) $x = -1$; горизонтальные: а) $y = 0$; б) $y = 1$; в) $y = -2$; все горизонтальные при $x \to \infty$ и $x \to -\infty$.



114. Рис. 93. **116.** Вертикальных асимптот нет, все горизонтальные при $x \to \pm\infty$, а) и б) $y = 0$; в) $y = 1$.

118. а) $y = x$; б) $y = x - 1$; в) $y = x + 1$; г) $y = x + 2$; д) $y = x$.

119. Так как $f(x) = kx + l + r(x)$, где $\lim\limits_{x\to\infty} r(x) = 0$, то

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{kx}{x} + \frac{l}{x} + r(x)\right) = k + 0 + 0 = k;$$

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} (l + r(x)) = l + 0 = l.$$

120. а) $y = x$ и $y = -x$; б) и в) $y = x + 1$ и $y = -x - 1$; г) $y = x + 0{,}25$ и $y = -3x - 0{,}25$.

121. а) 1) Нет; 2) да.

122. Периодическая функция не может иметь наклонных асимптот; периодическая функция может иметь горизонтальные асимптоты только в случае, когда она постоянная; в остальных случаях ответ «да».

124. в) Нет, пример: $y = x^4$, $x_0 = 0$. **125.** а) Выпукла вниз на промежутке $]-\infty; \infty[$; точек перегиба нет; б) выпукла вверх на промежутке $]-\infty; 0[$;

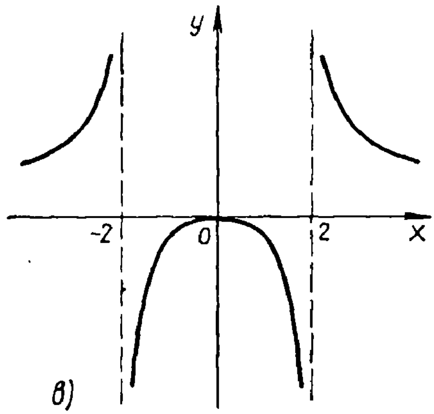


Рис. 93

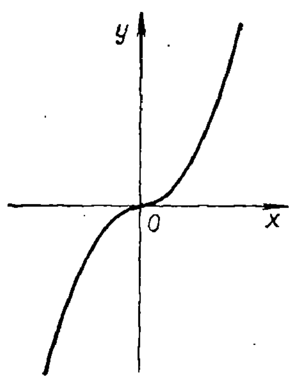


Рис. 94

выпукла вниз на промежутке $]0;\ \infty[$; 0 — точка перегиба; в) выпукла вниз на промежутках $]-\infty;\ -1[$ и $]1;\ \infty[$; выпукла вверх на промежутке $]-1;\ 1[$; -1 и 1 — точки перегиба.

126. а) Выпукла вниз на промежутках $]-\infty;\ -1[$ и $]1;\ \infty[$; выпукла вверх на промежутке $]-1;\ 1[$; -1 и 1 — точки перегиба;

б) выпукла вверх на промежутке $]-\infty;\ 0[$; выпукла вниз на промежутке $]0;\ \infty[$; 0 — точка перегиба (рис. 94);

в) выпукла вниз на промежутках $]-\infty;\ -1[$ и $]1;\ \infty[$; выпукла вверх на промежутках $]-1;\ 0[$ и $]0;\ 1[$; -1 и 1 — точки перегиба.

127. а) Выпукла вверх на промежутке $]-\infty;\ -3[$; выпукла вниз на промежутках $]-3;\ 0[$ и $]0;\ \infty[$; -3 — точка перегиба;

б) выпукла вверх на промежутке $\left]-\frac{1}{\sqrt{3}};\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right[$; выпукла вниз на промежутках $\left]-\infty;\ \frac{-1}{\sqrt{3}}\right[$ и $\left[\frac{1}{\sqrt{3}};\ \infty\right[$; $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $\frac{1}{\sqrt{3}}$ — точки перегиба;

в) $y' = \frac{2(1+x^2)-2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$;

$$y'' = 2\cdot\frac{(1+x^2)^2\cdot(-2x)-(1-x^2)\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(1+x^2)^4} = \frac{4(x^3-3x)}{(1+x^2)^3};$$

$y'' = 0$ при $x = 0$, $x = -\sqrt{3}$ и $x = \sqrt{3}$; причем в каждой из этих точек производная меняет знак, т. е. это точки перегиба. Функция выпукла вверх на промежутках $]-\infty;\ -\sqrt{3}[$ и $]0;\ \sqrt{3}[$; выпукла вниз на промежутках $]-\sqrt{3};\ 0[$ и $]\sqrt{3};\ \infty[$. В точке -1 функция имеет минимум, в точке 1 — максимум, $y(-1) = -1$, $y(1) = 1$. Функция нечетна (см. рис. 70, *б*).

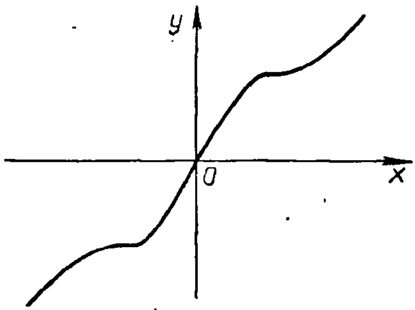


Рис. 95

128. а) $y' = 1+\cos x$; $y'' = -\sin x = (\sin x)''$, поэтому промежутки выпуклости и точки перегиба такие же, как у функции $\sin x$. Функция выпукла вниз на промежутках $]-\pi + 2\pi n;\ 2\pi n[$, $n \in \boldsymbol{Z}$, выпукла вверх на промежутках $]2\pi n;\ \pi + 2\pi n[$, $n \in \boldsymbol{Z}$; πn, $n \in \boldsymbol{Z}$, — точки перегиба; функция возрастает на $\boldsymbol{R}$ (рис. 95).

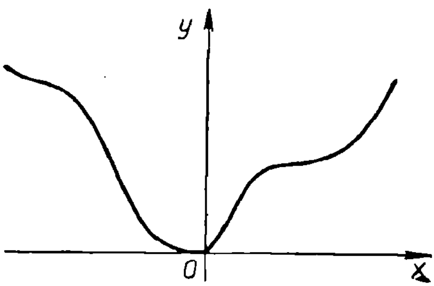


Рис. 96

б) функция четна и при $x \geqslant 0$ совпадает с функцией п. а); функция возрастает на промежутке $[0;\ \infty[$; убывает на промежутке $]-\infty;\ 0]$ (рис. 96);

в) выпукла на промежутках $]\pi n; \pi + \pi n[$, $n \in \mathbf{Z}$, точек перегиба нет (рис. 97).

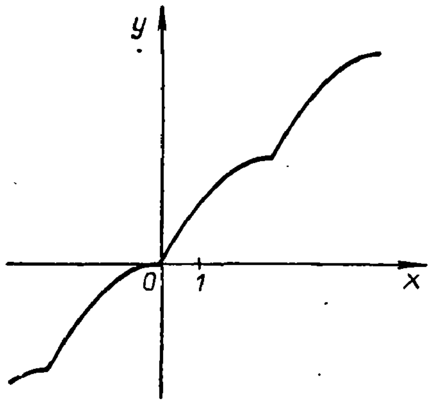


Рис. 97

129. Например, а) $f(x) = \ln(3 - x) + 4$ при $x \leqslant 2$ и $f(x) = \frac{1}{x} + 3{,}5$ при $x > 2$;

б) «симметричная» f (см. п. а)) относительно прямой $x = 2$ функция: $g(x) = \frac{1}{4 - x} + 3{,}5$ при $x < 2$, $g(x) = \ln(x - 1) + 4$ при $x \geqslant 2$. Обе функции непрерывны и положительны на всей числовой прямой.

131. а) Минимум при $f''(x_0) > 0$, так как тогда в точке $x_0 f'(x)$ меняет знак с минуса на плюс; максимум при $f''(x_0) < 0$;

б) функция $g(x) = f'(x)$ имеет не менее n нулей. По теореме Ролля имеется нуль производной g' функции g на каждом из интервалов $]x_1; x_2[$, $]x_2; x_3[$, ..., $]x_{n-1}; x_n[$, где $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_{n-1} < x_n$ — данные n нулей функции g; $g'(x) = f''(x)$, поэтому полученные $n - 1$ нулей функции g'—точки, в которых $f''(x) = 0$;

в) нет, например, функция задачи 128 а).

§ 4

2. а) По теореме Ролля между двумя нулями дифференцируемой функции лежит по крайней мере один нуль производной этой функции. Если многочлен степени n имеет бесконечно много корней, то бесконечно много корней имеет его производная, также бесконечное число корней у производной этой производной, т. е. у второй производной, у третьей производной и т. д., у n-й производной. С другой стороны, n-я производная есть постоянная и не имеет ни одного корня. Полученное противоречие показывает, что многочлен n-й степени не может иметь бесконечно много корней;

б) и в) в этом случае производная (соответственно вторая производная), являющаяся многочленом, имела бы бесконечно много корней, что противоречит п. а).

3. а) Более точное рассуждение в п. а) задачи 2 показывает, что если у многочлена n-й степени имеется $k > n$ корней, то его первая производная должна иметь не менее $(k - 1)$ корней, вторая — не менее $(k - 2)$ корней и т. д., n-я производная — не менее $(k - n)$ корней, что невозможно, так как n-я производная — постоянная, отличная от нуля;

б) если многочлен n-й степени $p_n(x)$ принимает значение c более чем в n точках, то многочлен n-й степени $p_n(x) - c$ имеет более n корней (задача 3 а));

в) в этом случае многочлен принимал бы любое свое значение более чем в n точках (точнее, в бесконечном числе точек), n — степень многочлена (задача б)).

4. а) $n-1$; б) $n-2$. Указание. См. задачу 3 а).

5. а) Если $R'(x)=C$, то C — корень уравнения $p_m(x)-Cq_n(x)=0$ и $p_m(x)-Cq_n(x)$ — многочлен степени не выше k (но не наоборот: корень такого уравнения может не входить в $D(R)$); $k=\max(n, m)$;

б) так как $R(x)$ дифференцируема в каждой точке из $D(R)$, то экстремумы могут быть только в точках, где $R'(x)=0$ (нет экстремумов, в которых производная не существует). Так как $R'(x)=$ $=\frac{p'_m(x)\,q_n(x)-p_m(x)\cdot q'_n(x)}{(q_n(x))^2}$, то $R'(x)$ может обращаться в нуль только в тех точках, где обращается в 0 многочлен $S(x)=p'_m(x)\,q_n(x)-$ $-p_m(x)\,q'_n(x)$. Так как $p'_m(x)$ — многочлен степени $m-1$, $q'_n(x)$ — многочлен степени $n-1$, то степень S не выше, чем $m+n-1$. При $m=n$ степень $S(x)$ не выше $m+n-2$. В самом деле, если $m=n$, то коэффициенты при x^{m+n-1} у многочленов $p'_m(x)\,q_n(x)$ и $p_m(x)q'_n(x)$ равны (и равны na_nb_n, где a_n и b_n — коэффициенты при x^n соответственно у p_n и q_n), поэтому у многочлена $S(x)$ коэффициент при x^{m+n-1} равен $na_nb_n-na_nb_n=0$.

6. а) Это следует из задачи 3 б); б) если $R(x)=c$ на некотором промежутке, то на этом промежутке $p_n(x)=cq_m(x)$, и, следовательно, многочлен $p_n(x)-cq_m(x)$ имеет бесконечно много корней (задача 2 а)).

7. а) 7, так как многочлен имеет 6 точек экстремума; б) 5, так как многочлен имеет 3 точки перегиба; в) 8.

8. Пусть $p_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$. Тогда

$$\lim_{x\to\infty}\frac{p_n(x)-a_nx^n}{a_nx^n}=\lim_{x\to\infty}\frac{a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0}{a_nx^n}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{a_{n-1}\frac{1}{x}+\ldots+a_1\frac{1}{x^{n-1}}+a_0\cdot\frac{1}{x^n}}{a_n}=\frac{0+\ldots+0+0}{a_n}=0.$$

Это означает, что для любого $\varepsilon>0$ (возьмем $\varepsilon=0{,}5$) при достаточно больших x будет выполнено неравенство $\left|\frac{p_n(x)-a_nx^n}{a_nx^n}\right|<$ $<\varepsilon=0{,}5$, откуда $|p_n(x)-a_nx^n|<0{,}5\,|a_nx^n|$.

а) $a_nx^n-0{,}5\,|a_nx^n|<p_n(x)<a_nx^n+0{,}5\,|a_nx^n|$, числа $a_nx^n\pm0{,}5\,|a_nx^n|$ одного знака;

б) $|a_nx^n|-|p_n(x)|\leqslant|p_n(x)-a_nx^n|<0{,}5\,|a_nx^n|$, откуда $|p_n(x)|>0{,}5\,|a_nx^n|$.

9. а) При достаточно больших $|x|$

$$|p_n(x)|>0{,}5|b_nx^n|$$

(задача 8б)); $0{,}5\,|b_nx^n|>a_2$ при $|x|>\sqrt[n]{\frac{2\,|a_2|}{|b_n|}}$, что противоречит неравенству $a_1<p_n(x)<a_2$; ($p_n(x)=b_nx^n+\ldots$)

б) $p_n(x)$, а следовательно, и $b_n x^n$ положительны при достаточно больших положительных x, откуда следует, что $b_n > 0$. При достаточно больших по модулю отрицательных x $p_n(x)$ и $b_n x^n$ отрицательны, $b_n > 0$, поэтому n нечетно. Кроме того, $n > 1$ (так как график не есть прямая). По условию график функции на всей числовой оси направлен выпуклостью вверх; это означает, что $p_n''(x)$ отрицательна при любом x. Однако p_n'' — многочлен нечетной степени (его степень равна $n-2$) и принимает как положительные, так и отрицательные значения (задача 8 а)).

10. Достаточно доказать, что при достаточно больших x знаки $p_n''(x)$ и $(a_n x^n)'' = a_n n(n-1)x^{n-2}$ совпадают. А это следует из того, что $p_n''(x)$ — многочлен со старшим коэффициентом $a_n n(n-1)x^{n-2}$ (задача 8 а)).

11. Вертикальных асимптот не может быть, так как квадратичная функция непрерывна (задача 1 а)); горизонтальных и наклонных — так как при $a \neq 0$ не существует $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{ax^2+bx+c}{x}$.

12. а) $\frac{ax^2+bx+c}{Ax^2+Bx+C} = h$ только в том случае, когда x входит в область определения f (т. е. при $Ax^2+Bx+C \neq 0$) и является корнем квадратного при $a - Ah \neq 0$ уравнения $ax^2+bx+c = h(Ax^2+Bx+C)$ (при $a = Ah$ это уравнение линейное);

в) $$f'(x) = \frac{(Ax^2+Bx+C)(2ax+b) - (ax^2+bx+c)(2Ax+B)}{(Ax^2+Bx+C)^2}. \qquad (1)$$

Критические точки — нули числителя полученной дроби, числитель представляет собой многочлен не выше второй степени, так как коэффициент при x^3 равен $2Aa - 2aA = 0$ (нули знаменателя не могут быть критическими точками, так как в этих точках функция не определена). Поэтому экстремумов не более двух. Отметим, что если h есть значение f в критической точке, то числитель дроби (1) равен

$$(Ax^2+Bx+C)(2ax+b) - h(Ax^2+Bx+C)(2Ax+B),$$

и так как в этой точке f определена, т. е. $Ax^2+Bx+C \neq 0$, то

$$2ax+b-h(2Ax+B) = 0, \qquad (2)$$

и, наоборот, из (2) следует, что $f'(x) = 0$. Таким образом, h является значением f в критической точке x тогда и только тогда, когда x и значение $h = f(x)$ связаны соотношением (2);

б) уравнение $ax^2+bx+c = h(Ax^2+Bx+C)$ равносильно уравнению $(a-Ah)x^2+(b-Bh)x+c-C=0$ и может иметь один корень только в двух случаях:

1) уравнение линейное, т. е. $a - Ah = 0$, но в этом случае $h = \frac{a}{A}$, а прямая $y = \frac{a}{A}$ как раз и есть горизонтальная асимптота графика функции f;

2) дискриминант этого уравнения равен нулю; в этом случае корень x_0 этого уравнения суть $-\frac{b-Bh}{2(a-Ah)}$, т. е. $2x_0(a-Ah)=$ $=Bh-b$; x_0 и h связаны соотношением (2) и, значит, x — критическая точка функции f (см. п. а)).

Глава V

§ 1

3. а) $0{,}5x\,|x|+C$; б) $(x-1)\,|x-1|+C$; в) $F(x)=\frac{x^3}{3}-$ $-x+C$ при $x<-1$; $F(x)=x-\frac{x^3}{3}+C+\frac{4}{3}$ при $|x|\leqslant 1$; $F(x)=\frac{x^3}{3}-x+C+\frac{8}{3}$ при $x>1$.

4. а) $\begin{cases}-\frac{1}{x}+C_1 \text{ при } x>0,\\ -\frac{1}{x}+C_2 \text{ при } x<0;\end{cases}$ б) $\begin{cases}-\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}+C_1 \text{ при } x<0,\\ -\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}+C_2 \text{ при } x\in]0;1[,\\ -\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}+C_3 \text{ при } x>1;\end{cases}$

в) $F(x)=\begin{cases}\ln x+C_1 \text{ при } x>0,\\ \ln(-x)+C_2 \text{ при } x<0.\end{cases}$

5. При $x>0$ первообразная $F(x)=x+C_1$, при $x<0$ первообразная $F(x)=-x+C_2$. Функция $F(x)$ должна быть дифференцируема на всей числовой прямой, а следовательно, непрерывной в каждой точке, в том числе и в точке 0. Поэтому $C_1=C_2$ и $F(0)=$ $=C_1$. Таким образом, $F(x)$ должна быть функцией $|x|+C$, где C — некоторая постоянная, а эта функция недифференцируема в точке 0.

6. а) $\operatorname{tg} x+C_n$, где C_n — постоянная на промежутке $\left]-\frac{\pi}{2}+\right.$ $\left.+\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right[$, $n\in \boldsymbol{Z}$; б) на интервале $]n;\ n+1[$ $F(x)=nx+$ $+C_n$; до всюду непрерывной функции такая первообразная дополняется при $C_n=\frac{-n(n+1)}{2}+C$, где C — некоторая постоянная; в) на интервале $]n;\ n+1[$ $F(x)=(x-n)^2+C_n$; до всюду непрерывной функции такая первообразная дополняется при $C_n=$ $=n+C$, где C — некоторая постоянная (рис. 98).

7. а) $-\cos x-1+e$; б) $\sin x-\sin e+\pi$; в) $-\frac{1}{x}+1$ при $x>0$ и $-\frac{1}{x}-1$ при $x<0$; г) $\ln(x-1)-\ln 2-1$ при $x>1$, $\ln(1-x)-1$ при $x<1$.

8. а) $C_1x + C_2$;

б) $\frac{x^2}{2} + C_1x + C_2$;

в) $\frac{x^3}{6} + C_1x + C_2$;

г) $-\sin x + C_1x + C_2$.

9. а) $\frac{x^2}{2} + x + 1$;

б) $-\frac{x^2}{2} + x$;

в) $-\frac{x^3}{6} + \frac{3}{2}x^2 - 2\frac{1}{2}x + 1$.

10. а) $C_1x^2 + C_2x + C_3$;

б) $C_nx^n + C_{n-1}x^{n-1} + \ldots + C_1x + C_0$;

в) $e^x + C_1x^2 + C_2x + C_3$.

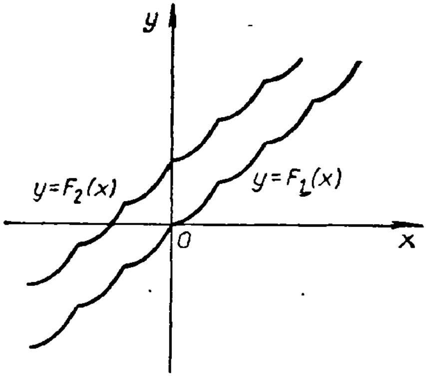


Рис. 98

11. а) Да, пример: $f(x) = \cos x + 1$; $F(x) = \sin x + x$;

б) 1) четная; 2) нечетной будет только одна из первообразных.

12. а) При a и b одного знака; б) при a и b, одновременно лежащих в одном из промежутков $]-\infty; -1[$; $]-1; 1[$; $]1; \infty[$.

13. а) При $C \notin [-2; 0]$; б) при всех C.

14. а) $\frac{4}{3}\sqrt{2}$; б) $2\sqrt{2}$; в) 1.

15. а) $(F(c) - F(a)) + (F(b) - F(c)) = F(b) - F(a)$;

б) так как $(F(x))' = f(x) > 0$, то $F(x)$ возрастает на промежутке $[a; b]$ и, следовательно, $F(b) > F(a)$.

16. а) $2\frac{1}{2}$; б) $2\frac{2}{3}$; в) $-4\frac{5}{6}$.

17. а) Так как $g(x) - f(x) \geqslant 0$, то $\int_a^b (g(x) - f(x))dx \geqslant 0$ (задача 15 б)), $\int_a^b g(x)dx \geqslant \int_a^b f(x)dx$;

б) если $\int_a^b f(x)\,dx < 0$, то $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| = -\int_a^b f(x)\,dx$ и требуемое следует из неравенства $-f(x) \leqslant |f(x)|$ и п. а); если же $\int_a^b f(x)dx \geqslant 0$, то $\left|\int_a^b f(x)dx\right| = \int_a^b f(x)dx$ и требуемое следует из неравенства $f(x) \leqslant |f(x)|$ и п. а);

в) это утверждение следует из неравенства $\min\limits_{[a;\,b]} f(x) \leqslant f(x) \leqslant \max\limits_{[a;\,b]} f(x)$ и п. а).

18. а) Для функции $f(g(x))g'(x)$ первообразной будет функция $F(g(x))$, где $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$. В самом деле, по правилу дифференцирования сложной функции

$$(F(g(x)))' = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x))\,g'(x).$$

Поэтому интеграл в левой части равен

$$F(g(b)) - F(g(a)).$$

Интеграл в правой части равен

$$F(x)\Big|_{g(a)}^{g(b)} = F(g(b)) - F(g(a)).$$

Следовательно, оба интеграла равны

$$F(g(b)) - F(g(a)).$$

б) 1) $\frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}} + C$; 2) $-\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$; 3) $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$, обозначим $\sin x$ через $y = g(x)$, тогда $g'(x) = \cos x$ и по формуле замены первообразной будет функция $G(x) = \ln|\sin x| + C_n$ на интервале $\left]\frac{\pi n}{2}; \frac{\pi(n+1)}{2}\right[$, $n \in \mathbf{Z}$.

19. а) Перепишем формулу в виде

$$\int_a^b (f(x)\,g'(x) + f'(x)\,g(x))\,dx = f(x)\,g(x)\Big|_a^b.$$

Достаточно доказать, что функция $f(x)\,g(x)$ есть первообразная для функции $f(x)\,g'(x) + f'(x)\,g(x)$, т. е., что

$$(f(x)\,g(x))' = f(x)\,g'(x) + f'(x)\,g(x),$$

но это в точности формула дифференцирования произведения двух функций;

б) 1) так как $\cos x = \sin' x$, то по формуле интегрирования по частям при $f(x) = x$, $g(x) = \sin x$, получаем:

$$\int_a^b x\cos x\,dx = x\sin x\Big|_a^b - \int_a^b \sin x\,dx,$$

и так как первообразной для $\sin x$ служит $-\cos x$, то искомая первообразная есть $x\sin x + \cos x + C$; 2) $\int_a^b xe^x dx =$

$= \int_a^b x(e^x)'\,dx = xe^x\Big|_a^b - \int_a^b e^x\,dx = (xe^x - e^x)\Big|_a^b$, поэтому первообразной для функции xe^x будет функция $xe^x - e^x + C$; 3) $x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C$; 4) $x\ln x - x + C_1$; указание: примените формулу интегрирования по частям с $f(x) = \ln x$, $g(x) = x$.

20. а) $0{,}25\pi$, у к а з а н и е: искомый интеграл равен площади четверти круга единичного радиуса; б) 2; в) 1,25.

21. $\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx=$

$$=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\sin' t\,dt=$$

$$=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt=$$

$$=\left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)+\frac{1}{4}\times$$

$$\times\left(\sin 2\cdot\frac{\pi}{2}-\sin 2\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=\frac{\pi}{2}.$$

22. При решении полезно сделать рисунки (рис. 99).

а) Графики пересекаются в точке $(0;\ \sqrt{a})$.

$$S=\int\limits_{-a}^{0}\sqrt{x+a}\,dx+$$

$$+\int\limits_{0}^{a}\sqrt{a-x}\,dx=$$

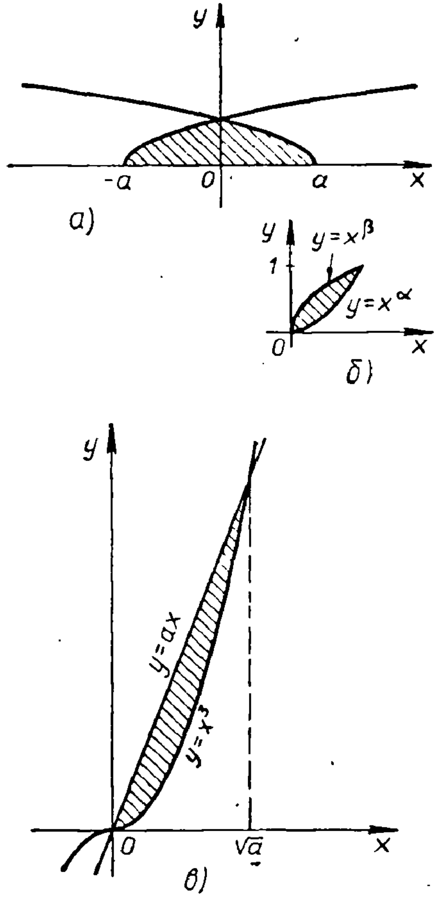


Рис. 99

$$=\frac{2}{3}(x+a)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_{-a}^{0}-\frac{2}{3}(a-x)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_{0}^{a}=\frac{4}{3}a\sqrt{a};$$

б) $S=\int\limits_{0}^{1}x^{\beta}\,dx-\int\limits_{0}^{1}x^{\alpha}\,dx=\frac{x^{\beta+1}}{\beta+1}\Bigg|_{0}^{1}-\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Bigg|_{0}^{1}=\frac{1}{\beta+1}-\frac{1}{\alpha+1};$

в) графики пересекаются в точках $(0;\ 0)$ и $(\sqrt{a};\ a\sqrt{a})$.

$$S=\int\limits_{0}^{\sqrt{a}}(ax-x^3)\,dx=\left(\frac{ax^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_{0}^{\sqrt{a}}=\frac{a^2}{4}.$$

23. а) 0; б) 0; в) 0.

24. а) $\left(\int_x^1 z^5 \cos^{13} z dx\right)' = \left(-\int_1^x z^5 \cos^{13} z\, dz\right)' = -x^5 \cos^{13} x$;

б) пусть $y = 2x$, тогда $\Phi(x) = f(g(x))$, где

$$g(x) = 2x; \quad f(y) = \int_1^y z^{10} \sin^{100} z\, dz; \quad f'(y) = y^{10} \sin^{100} y$$

(производная интеграла с переменным верхним пределом). По правилу дифференцирования сложной функции получаем:

$$\Phi'(x) = f'(g(x))\, g'(x) = 2\,(2x)^{10} \sin^{100}(2x);$$

в) пусть a — число, принадлежащее промежутку $[2x; 3x]$ при x, достаточно близких к x_0 (x_0 — точка, в которой берется производная). Тогда

$$\int_{2x}^{3x} f(z)\, dz = \int_a^{3x} f(z)\, dz - \int_a^{2x} f(z)\, dz,$$

и, делая так же, как в п. б), получим: $\Phi'(x) = 3f(3x) - 2f(2x)$.

25. а) $\int_0^a \cos\frac{x}{2}\, dx = 2\sin\frac{x}{2}\Big|_0^a = 2\sin\frac{a}{2}$. Наибольшее значение функции $\varphi(a) = 2\sin\frac{a}{2}$ равно 2 и достигается в точках $\pi + 4\pi n$, $n \in Z$; наименьшее равно -2 и достигается в точках $-\pi + 4\pi n$, $n \in Z$;

б) $\int_a^{a+\pi} \cos\frac{x}{2}\, dx = 2\sin\frac{x}{2}\Big|_a^{a+\pi} = 2\left(\cos\frac{a}{2} - \sin\frac{a}{2}\right) = 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{a}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$.

Наибольшее значение интеграла равно $2\sqrt{2}$, наименьшее — $(-2\sqrt{2})$;

в) $\int_a^b \cos\frac{x}{2}\, dx = 2\left(\sin\frac{b}{2} - \sin\frac{a}{2}\right)$. Наибольшее значение интеграла равно 4, наименьшее — (-4);

г) $\int_a^b \cos^2 x\, dx = \int_a^b \frac{1 + \cos 2x}{2}\, dx = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x\right)\Big|_a^b = \frac{b-a}{2} + \frac{\sin 2b - \sin 2a}{4}$. Второе слагаемое ограничено по модулю числом $\frac{1}{2}$, первое может быть любым действительным числом. Следовательно, наибольшего и наименьшего значений этого интеграла не существует.

§ 2

1. Выберем в плоскости Φ координатную ось Ox, обозначим через π_x плоскость, проведенную перпендикулярно оси Ox в точке x. Обозначим через $l(x)$ суммарную длину отрезков пересечения $\Phi \cap \pi_x$, а через $V(x)$ — объем той части фигуры Φ_h, которая лежит левее плоскости π_x. Покажите, что $S'(x) = l(x) \cdot h$, и примените формулу $S(\Phi) = \int\limits_a^b l(x)\,dx$. Здесь, как и далее, предполагается, что рассматриваемые фигуры таковы, что нужные функции непрерывны.

2. Обозначьте через $V(x)$ объем части Φ, лежащей левее плоскости π_x (левее по оси Ox). С помощью формулы из задачи 1 попробуйте обосновать, что $V'(x) = S(x)$.

3. Указание. Выбрать ось Ox перпендикулярно основанию призмы или цилиндра.

4. Выберем в качестве оси Ox ось, направленную от вершины конуса к основанию, перпендикулярную основанию, точка O — вершина конуса. Тогда сечение конуса плоскостью, проведенной перпендикулярно оси через точку x, где $0 \leqslant x \leqslant h$, имеет площадь $S(x) = \frac{S_0 x^2}{h^2}$. Следовательно, $V = \int\limits_0^h S(x)\,dx = S_0 \frac{x^3}{3h^2}\Big|_0^h = \frac{1}{3} S_0 h$.

5. Сечение, проходящее через точку x ($-r \leqslant x \leqslant r$), — прямоугольник со сторонами $2r$, $2\sqrt{r^2 - x^2}$. Следовательно,

$$V = \int\limits_{-r}^{r} S(x)\,dx = \int\limits_{-r}^{r} 4r\sqrt{r^2 - x^2}\,dx. \text{ Так как } \int\limits_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,dx =$$

$= \frac{1}{2}\pi r^2$ как площадь полукруга радиуса r, то $V = 2\pi r^3$.

6. Сторона квадрата в сечении, проходящем через точку x (при $-1 \leqslant x \leqslant 1$), равна $2y = 2\sqrt{1 - x^2}$, а площадь — $(4 - 4x^2)$.

$$V = \int\limits_{-1}^{1} (4 - 4x^2)\,dx = \left(4x - \frac{4x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{16}{3}.$$

8. в) Шар радиуса R — фигура, полученная вращением криволинейной трапеции

$$\{(x;\,y) \mid -R \leqslant x \leqslant R,\ 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{R - x^2} = f(x)\}.$$

Плоскости пересекают ось Ox в точках: $\frac{2R}{n} - R$, $\frac{4R}{n} - R$, ..., ..., $\frac{2iR}{n} - R$, ..., $\frac{2(n-1)R}{n} - R$. Объем i-й части равен

$$\pi \int\limits_{\frac{2iR}{n} - R}^{\frac{2(i+1)R}{n} - R} (R^2 - x^2)\,dx = \pi\left(R^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{R\left(\frac{2i}{n} - 1\right)}^{R\left(\frac{2(i+1)}{n} - 1\right)}.$$

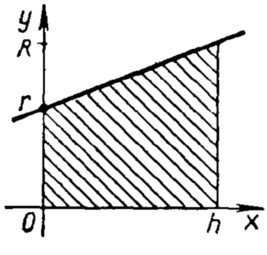


Рис. 100

9. а) Усеченный конус можно представить себе как фигуру вращения криволинейной трапеции $\{(x;\ y) \mid 0 \leqslant x \leqslant h,\ 0 \leqslant y \leqslant r + \frac{R-r}{h}x\}$, где r и R — радиусы оснований (рис. 100) относительно оси Ox. По формуле задачи 7 получаем:

$$V = \pi \int_0^h \left(r + \frac{R-r}{h}x\right)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{3}\pi \frac{h}{R-r}\left(r + \frac{R-r}{h}x\right)^3\Bigg|_0^h =$$

$$= \frac{1}{3}\pi \frac{h}{R-r}(R^3 - r^3) = \frac{1}{3}\pi h (R^2 + Rr + r^2) =$$

$$= \frac{1}{3}h\left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}\right).$$

б) Направим ось Ox от «вершины» пирамиды к основанию (по прямой, перпендикулярной основанию). Пусть координата точки пересечения меньшего основания с осью Ox равна a. Тогда площадь сечения плоскостью, проходящей через точку с координатой x, равна $S(x) = S_1 \frac{x^2}{(a+h)^2}$, где S_1 — площадь большего основания. В частности, площадь меньшего основания равна $\frac{S_1 a^2}{(a+h)^2}$. По формуле интеграла площадей

$$V = \int_a^{c+h} S_1 \frac{x^2}{(a+h^2)} = \frac{1}{3} S_1 \frac{1}{(a+h)^2} x^3 \Bigg|_a^{a+h} = \frac{1}{3} S_1 \frac{(a+h)^3 - a^3}{(a+h)^2} =$$

$$= \frac{1}{3} S_1 h \frac{3a^2 + 3ah + h^2}{(a+h)^2} = \frac{1}{3} S_1 h \left(1 + \frac{ah + 2a^2}{(a+h)^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}h\left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}\right).$$

10. Первый объем равен $\pi \int_0^a (x^2)^2\,dx = \pi \frac{x^5}{5}\Big|_0^a = \pi \frac{a^5}{5}$;

второй $\pi \int_0^{a^2} (\sqrt{y})^2\,dy = \pi \frac{y^2}{2}\Big|_0^{a^2} = \frac{\pi a^4}{2}$.

11. а) $V = \pi \int_0^\pi \sin^2 x\,dx = \pi \int_0^\pi \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \pi\left(\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}\right)\Big|_0^\pi = \frac{\pi^2}{2}$;

б) $V = \lim\limits_{a\to\infty} \pi \int_1^a \frac{1}{x^2}\,dx = \lim\limits_{a\to\infty} \pi \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^a = \lim\limits_{a\to\infty} \pi \left(1 - \frac{1}{a}\right) = \pi.$

13. а) $y' = \frac{3}{2}\sqrt{x}$. По формуле задачи 12 получаем:

$$l = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\,dx = \frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1 = \frac{8}{27}\left(\left(\frac{13}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right) =$$

$$= \frac{13\sqrt{13} - 8}{27};$$

б) $y' = \frac{3}{2}\sqrt{x+1}$; $l = \int_2^8 \sqrt{1 + \frac{9}{4} + \frac{9}{4}x}\,dx = \frac{8}{27}\left(\frac{13}{4} + \right.$

$\left. + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_2^8 = \frac{1}{27}\left(85\sqrt{85} - 31\sqrt{31}\right).$

14. а) π; б). Так как для функции $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ получаем: $f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}}$, $1 + (f'^2(x)) = \frac{1}{1 - x^2}$, то указанный интеграл есть длина полуокружности единичного радиуса, поэтому он равен π.

§ 3

2. а) По формулам задачи 1 получаем: $M = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$,

$x_0 = \frac{1}{M}\int_0^1 x\rho(x)\,dx = 3\int_0^1 x^3 dx = \frac{3x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{3}{4}$; б) $\frac{1}{\ln 2}$.

3. а) Пластинка представляет собой треугольник с вершинами $(0; 0)$; $(1; 0)$ и $(1; h)$. Разобьем отрезок $[0; 1]$ оси Ox на n конгруэнтных между собой отрезков (рис. 101) и проведем через точки деления x_i отрезки, параллельные оси Oy. Массу i-й из n получившихся полос можно считать приближенно равной $|y_i|\Delta x = |h|x_i\Delta x$. Далее, так как при переносе параллельно оси Oy абсцисса центра масс не меняется, то для ее подсчета можно считать полученную полоску материальной точкой, расположенной в точке x_0. По формуле координаты центра точечных масс, расположенных на оси Ox, получаем: $M \approx \approx \sum |h|x_i\rho\Delta x$; $x_0 \approx \approx \frac{1}{M}\sum |h|x_i^2\,\Delta x\rho$, ρ — плотность пластины; эти выражения — интегральные суммы для функций $|h|x\rho$ и $\frac{|h|\rho}{M}x^2$, соот-

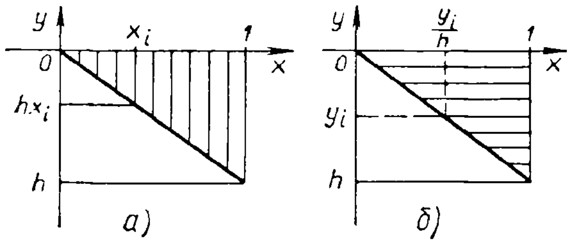


Рис. 101

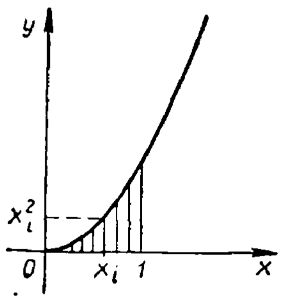


Рис. 102

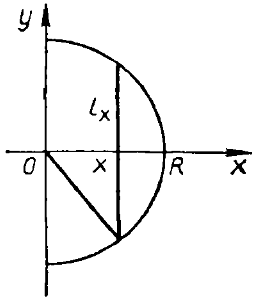


Рис. 103

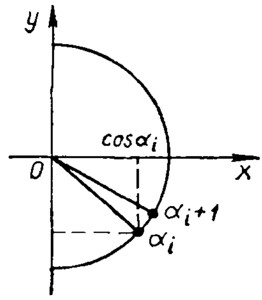


Рис. 104

ветственно. Поэтому

$$M = \int_0^1 \rho\,|h|\,x\,dx = \rho\frac{|h|}{2};\quad x_0 = \frac{|h|\rho\cdot 2}{\rho|h|}\int_0^1 x^2dx = 2\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Аналогично (при $h<0$) (рис. 101, *б*) $\Delta m_i(y) \approx -\Delta y\rho\,\frac{h-y_i}{h}$; $y_0 \approx$

$$\approx \frac{1}{M}\sum \Delta y\rho\left(1-\frac{y_i}{h}\right)y_i;\quad y_0 \approx \frac{1}{M}\rho\int_h^0\left(y-\frac{y^2}{h}\right)dy = \frac{\rho}{M}\left(\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3h}\right)\Big|_h^0 =$$

$$= -\frac{\rho h^2}{6M} = \frac{h}{3};$$

б) (рис. 102) $\Delta m_i(x) \approx \rho x_i^2\Delta x$, $M = \rho\int_0^1 x^2dx = \frac{\rho}{3}$; $x_0 \approx \sum \frac{1}{M}\rho x_i^3\Delta x$;

$$x_0 = \frac{1}{M}\int_0^1 \rho x^3dx = 3\frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{3}{4};\qquad \Delta m_i(y) \approx \rho\left(1-\sqrt{y_i}\right)\Delta y;\qquad y_0 =$$

$$= \frac{1}{M}\int_0^1 \rho\left(y - y\sqrt{y}\right)dy = \frac{3}{\rho}\cdot\rho\left(\frac{y^2}{2}-\frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}}\right)\Big|_0^1 = \frac{3}{10}.$$

4. а) Направим ось Ox из центра круга (рис. 103). В силу симметрии центр тяжести лежит на этой оси. Координата центра масс по этой оси совпадает с координатой центра масс стержня с плотностью $\rho(x)$, где $\rho(x)$ — длина отрезка, являющегося пересечением прямой l_x и полукруга (см. рис. 103). Следовательно, $\rho(x) =$ $= 2\sqrt{R^2-x^2}$, $M = \int_0^R 2\sqrt{R^2-x^2}\,dx = \frac{\pi R^2}{2}$ (как площадь полукруга), $x = \frac{1}{M}\int_0^R 2x\sqrt{R^2-x^2}\,dx = \frac{1}{M}\left(-\frac{2}{3}(R^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_0^R = \frac{2}{\pi R^2}\times$ $\times\frac{2}{3}R^3 = \frac{4R}{3\pi}$;

б) (рис. 104) разобьем полуокружность на n равных частей. Каждую из дуг будем приближенно считать материальной точкой массы $\frac{M}{n}$, где M — масса полуокружности. Координата этой точки равна $R\cos\alpha_i$, где $\alpha_i = \frac{\pi i}{n}$. Тогда по формуле координаты центра масс конечной системы материальных точек получим:

$$x \approx \frac{R}{M}\sum\frac{M}{n}\cos\alpha_i = \frac{R\cos\alpha_i}{n} \approx \frac{R}{\pi}\cdot\cos\alpha_i\Delta\alpha \quad \left(\text{т. к. } \Delta\alpha = \frac{\pi}{n}\right).$$

Полученное выражение представляет собой интегральную сумму для функции $\frac{R}{\pi}\cos\alpha$. Переходя к пределу при $n\to\infty$, имеем:

$$x = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{R}{\pi}\cos\alpha d\alpha = \frac{R}{\pi}(\sin\alpha)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2R}{\pi}.$$

5[1]. Направим ось Ox от вершины конуса вдоль прямой, перпендикулярной основанию (площади S_0). Центр масс лежит на этой оси в силу симметрии задачи, а координата h_0 по этой оси совпадает с координатой центра масс отрезка плотности $S(x)$, где $S(x)$ — площадь сечения плоскостью, перпендикулярной оси и проходящей через точку x. Так как $S(x) = \frac{x^2}{h^2}S_0$, то $M = V = \frac{1}{3}hS_0$,

$$h_0 = \frac{1}{M}\int\limits_0^h\frac{x^3}{h^2}S_0dx = \frac{S_0}{Mh^2}\cdot\frac{x^4}{4}\Big|_0^h = \frac{S_0h^2}{4M} = \frac{S_0h^2}{4\cdot\frac{1}{3}hS_0} = \frac{3}{4}h.$$

6. Направим ось Ox из центра сферы вдоль оси симметрии тела. Центр масс лежит на этой оси в силу симметрии, и его координата совпадает с координатой стержня (отрезка $[0; R]$) с плотностью: $S(x)$ в задаче а), $l(x)$ в задаче б), где $S(x)$ — площадь сечения (круга) плоскостью, перпендикулярной оси и проходящей через точку x, $l(x)$ — длина кривой (окружности) — пересечения той же плоскости со сферой. Так как

$$S(x) = \pi(R^2 - x^2);\ l(x) = 2\pi\sqrt{R^2 - x^2},$$

то: а) $x = \frac{1}{M}\int\limits_0^R xS(x)\,dx = \frac{3}{2\pi R^3}\cdot\pi\int\limits_0^R(R^2x - x^3)dx = \frac{3}{2R^3}\left(\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4}\right) = \frac{3R}{8}$;

б) $x = \frac{1}{M}\int\limits_0^R xl(x)\,dx = \frac{1}{2\pi R^2}\int\limits_0^R 2\pi\left(x\sqrt{R^2 - x^2}\right)dx = \frac{1}{R^2}\times$

$\times\left(-\frac{1}{3}(R^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_0^R = \frac{R}{3}.$

[1] Плотность конуса считаем равной 1.

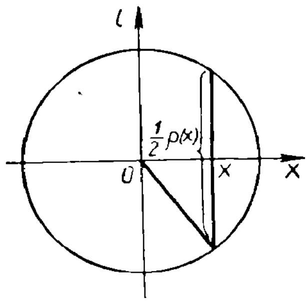


Рис. 105

7. а) Плотность $\rho(x)$ стержня постоянна и равна $\frac{M}{l}$. Таким образом,

$$T = 0{,}5\int_0^l \omega^2 x^2 \frac{M}{l}\,dx = \frac{1}{6}\omega^2 \frac{M}{l}x^3\Big|_0^l = \frac{1}{6}\omega^2 M l^2;$$

б) это по существу та же задача, только длина стержня равна $\frac{l}{2}$ (можно «согнуть» стержень вдвое в его середине):

$$T = \int_0^{\frac{l}{2}} 0{,}5\omega^2 x^2 \frac{2M}{l}\,dx = \frac{M\omega^2}{l}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^{\frac{l}{2}} = \frac{M\omega^2 l^2}{24}.$$

8. а) «Собирая» точки, лежащие на окружности радиуса x в одну, получим, что достаточно найти кинетическую энергию стержня с плотностью $2\pi x\rho$, где ρ — такая постоянная, что масса стержня $\int_0^R 2\pi x\rho\,dx$ равна M. Имеем: $2\pi\rho\frac{R^2}{2} = M$, откуда

$$\rho = \frac{M}{\pi R^2} \text{ и } T = \int_0^R 0{,}5\omega^2 x^2\cdot 2\pi x\cdot\frac{M}{\pi R^2}\,dx = \frac{\omega^2 M}{R^2}\int_0^R x^3 dx = \frac{\omega^2 M R^2}{4};$$

б) (рис. 105). Рассмотрим стержень плотности $\rho(x) = 4\sqrt{R^2 - x^2}\rho$ такой, что его масса равна M. Имеем:

$$M = \int_0^R 4\sqrt{R^2 - x^2}\cdot\rho\,dx = \pi R^2\rho, \quad \rho = \frac{M}{\pi R^2};$$

$$T = \int_0^R \frac{\omega^2 x^2 \rho(x)\,dx}{2}; \quad \int_0^R x^2\sqrt{R^2 - x^2}\,dx = \int_0^R \left(-\frac{1}{3}(R^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}\right)' x\,dx =$$

$$= -\frac{1}{3}x(R^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^R - \int_0^R \left(-\frac{1}{3}(R^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}\right)dx = 0 + \frac{1}{3}\int_0^R R^2(R^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx - \frac{1}{3}\int_0^R x^2\sqrt{R^2 - x^2}\,dx,$$

откуда

$$\frac{4}{3}\int_0^R x^2\sqrt{R^2 - x^2}\,dx = \frac{1}{3}R^2\frac{\pi R^2}{4};$$

$$\int_0^R x^2\sqrt{R^2-x^2}\,dx = \frac{\pi R^4}{16} \text{ и } T =$$

$$= \frac{M}{\pi R^2} 2\omega^2 \int_0^R x^2\sqrt{R^2-x^2}\,dx =$$

$$= \frac{M}{\pi R^2}\cdot 2\omega^2\cdot\frac{\pi R^4}{16} = \frac{M\omega^2 R^2}{8}.$$

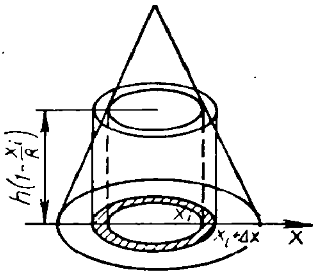


Рис. 106

9. Эту задачу можно решать так же, как и задачи 7 и 8, заменяя конус некоторым стержнем, имеющим ту же кинетическую энергию. Другой способ решения таких задач — непосредственное построение некоторой интегральной суммы в качестве приближенного значения энергии. Естественно, что так можно решать и задачи 7 и 8.

а) Разобьем радиус основания конуса на n конгруэнтных частей и проведем через точки деления цилиндрические поверхности с той же осью, что и ось конуса (рис. 106). Тогда объем части конуса, заключенного между цилиндрическими поверхностями радиусов x_i и $x_i + \Delta x$, приближенно равен разности объемов цилиндров высоты $h_i = \frac{h(R-x)}{R}$ и радиусов $x_i + \Delta x$ и x_i, т. е. $\pi\frac{h(R-x_i)}{R}((x_i + \Delta x)^2 - x_i^2) \approx \frac{2\pi h(R-x_i)x_i\Delta x}{R}$, масса этой части равна $\frac{2\pi h(R-x_i)x_i\Delta x M}{R\frac{1}{3}\pi R^2 h}$, скорость $x_i^2\omega^2$, кинетическая энергия $\frac{3(R-x_i)x_i^3 M\Delta x\omega^2}{R^3}$. Кинетическая энергия конуса приближенно равна $\sum\frac{3M\omega^2}{R^3}(R-x_i)x_i^3\Delta x$, т. е. интегральной сумме для функции $\frac{3M\omega^2}{R^3}(R-x)x^3$ по отрезку $[0; R]$. Таким образом,

$$T = \frac{3M\omega^2}{R^3}\int_0^R (R-x)\,x^3dx = \frac{3M\omega^2}{R^3}\left(\frac{Rx^4}{4}-\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^R = \frac{3}{20}M\omega^2R^2.$$

б) задача по существу не отличается от задачи 8 а). Разобьем радиус основания цилиндра на n равных частей и проведем через точки деления цилиндрические поверхности, ось которых совпадает с осью цилиндра. Тогда для части цилиндра, заключенной между цилиндрическими поверхностями радиусов x_i и $x_i + \Delta x$:

$$m_i = \frac{2\pi x_i\Delta x\cdot h}{\pi R^2 h}\cdot M = \frac{2x_i\,\Delta x\,M}{R^2},\quad \frac{1}{2}V_i^2 = \frac{\omega^2 x_i^2}{2},$$

$$T_i \approx \frac{\omega^2 M x_i^3\,\Delta x}{R^2}.$$

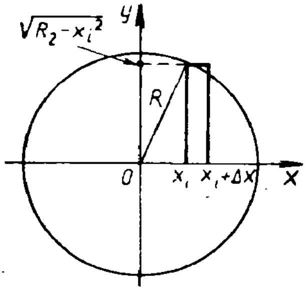


Рис. 107

Далее, $T \approx \sum \frac{\omega^2 M x_i^3 \Delta x}{R^2}$. Переходя к пределу при $n \to \infty$, получим:

$$T = \int_0^R \frac{\omega^2 M x^3 dx}{R^2} = \frac{\omega^2 M}{R^2} \int_0^R x^3 dx = \frac{\omega^2 M R^2}{4}.$$

10. а) Объем части шара, заключенной между цилиндрическими поверхностями радиусов x_i и $x_i + \Delta x$, приближенно равен разности объемов цилиндров этих радиусов высоты $2\sqrt{R^2 - x_i^2}$ (рис. 107), т. е. $2 \cdot \sqrt{R^2 - x_i^2} \cdot 2\pi x_i \Delta x$; далее, $m_i \approx \frac{4\pi x_i \sqrt{R^2 - x_i^2}\,\Delta x \cdot M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$,

$T_i \approx \frac{3\omega^2 x_i^3 M \Delta x \sqrt{R^2 - x_i^2}}{2R^3}$, $T = \int_0^R \frac{3}{2} \cdot \frac{\omega^2 M}{R^3} x^3 \sqrt{R^2 - x^2}\, dx$, поэтому (для $u = \sqrt{R^2 - x^2}$) $T = \frac{3}{2} \cdot \frac{\omega^2 M}{R^3} \int_0^R x^3 \sqrt{R^2 - x^2}\, dx = \frac{3}{2} \cdot \frac{\omega^2 M}{R^3} \int_0^R (R^2 - u^2) u^2 du =$
$= \frac{3}{2} \cdot \frac{\omega^2 M}{R^3} \left(\frac{R^5}{3} - \frac{R^5}{5} \right) = \frac{M\omega^2 R^2}{5}$.

б) Площадь поверхности части сферы, заключенной между цилиндрическими поверхностями радиусов x_i и $x_i + \Delta x$, равна $4\pi R \Delta x$. Масса этой части $\frac{4\pi R \Delta x M}{4\pi R^2}$, кинетическая энергия $\frac{M \Delta x}{R} \times$
$\times \frac{\omega^2 x_i^2}{2}$. Итак,

$$T = \frac{M\omega^2}{2R} \int_0^R x^2 dx = \frac{M\omega^3}{2R} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^R = \frac{M\omega^2 R^3}{6}.$$

11. а) $A = -\int_0^a (-kx)dx = \int_0^a kx dx = \frac{kx^2}{2}\Big|_0^a = \frac{ka^2}{2}$;

б) $A = -\int_{-a}^a (-kx)dx = \int_{-a}^a kx dx = \frac{kx^2}{2}\Big|_{-a}^a = \frac{ka^2}{2} - \frac{ka^2}{2} = 0.$

12. $\frac{\pi\rho R^2 H^3}{12}$. Указание. Работа, затраченная на насыпание усеченного конуса, ограниченного плоскостями, параллельными основанию, на расстояниях x и $x + \Delta x$ от основания, приближенно равна $\rho x S(x)\Delta x$, где $S(x)$ — площадь основания усеченного конуса (сечения плоскостью на расстоянии x от основания). Далее, $S(x) = \pi R^2 \frac{(H-x)^2}{H^2}$, $\Delta E_i = \frac{\pi\rho R^2 x (H-x)^2}{H^2}\Delta x$. Наконец, $E = \int\limits_0^H \frac{\pi\rho R^2 x (H-x)^2}{H^2}\,dx = \frac{\pi\rho R^2}{H^2}\int\limits_0^H (H^2 x - 2Hx^2 + x^3)\,dx = \frac{\pi\rho R^2 H^4}{H^2} \times \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi\rho R^2 H^2}{12}$.

13. Так как центр масс однородного цилиндра лежит на его высоте на расстоянии $\frac{1}{2}H$ от его вершины, то работа против архимедовой силы равна: а) $\frac{1}{2}HV\rho g = \frac{1}{2}\rho g\pi R^2 H^2$; б) $RV\rho g = \rho g\pi R^3 H$. Работы равны при $H = 2R$.

14. Так как центр масс однородного конуса лежит на его высоте на расстоянии $\frac{3}{4}H$ от его вершины, то работа против архимедовой силы при погружении конуса в жидкость равна: а) $\frac{1}{4}HV\rho g$; б) $\frac{3}{4}HV\rho g$.

15. Очевидно, так как центр симметрии тела совпадает с его центром масс.

Глава VI

§ 1

1. а) $y = Ae^x$; б) $y = Ae^{\frac{1}{3}x}$; в) $y = Ae^{-2x}$.

2. а) $y = \frac{1}{2}x^2 + C$; б) $y = -\cos x + C$; в) $y = e^x + C$.

3. а) $y = -\frac{1}{x} + C$; б) $y = \ln x + C$.

4. Для $y = x + 1$ $y' = 1$, $y - x = (x+1) - x = 1$.

5. Для $y = e^{x^2}$ $y' = (x^2)'e^{x^2} = 2xe^{x^2} = 2xy$.

7. Если взять $y = ax + b$, то $y' = a$, $y + x = (a+1)x + b$, и уравнение $y' = y + x$ выполнено в случае $a + 1 = 0$, $b = a$. Поэтому одним из решений будет $y(x) = -x - 1$.

8. Можно взять постоянную функцию $y(x) = 1$.

9. $y = e^{\frac{1}{2}x^2}$. **10.** $y = -\frac{1}{2x}$.

11. а) Общее решение $y(x) = x^2/2 + C$; если $y(0) = 1$, то $C = 1$, поэтому $y = x^2/2 + 1$; б) $y(1) = 1/2 + C = 0$, поэтому $C = -1/2$ и $y = x^2/2 - 1/2$.

12. а) Общее решение $y(x) = Ae^x$; $y(0) = A = -1$, поэтому $y(x) = -e^x$; б) $y(1) = Ae = 0$, поэтому $A = 0$ и $y(x) = 0$.

13. а) $y = 3e^{2x}$; б) $y = e^{2x-1}$.

14. а) $y(x) = y_0 e^{kx}$; б) $y(x) = y_0 e^{k(x-x_0)}$.

15. а) Если $y(x)$ и $y_1(x)$ — решения уравнения (4), т. е. $y' = ky + a$ и $y_1' = ky_1 + a$, то $y' - y_1' = k(y - y_1)$, или $z' = kz$ для $z = y - y_1$. Следовательно, $z = Ae^{kx}$, $y(x) = y_1(x) + Ae^{kx}$. Подставляя постоянную функцию $y_1 = C$ в уравнение (4), получим: $C' = kC + a$, т. е. $kC + a = 0$ и $C = -a/k$. Таким образом, общее решение уравнения (4) записывается в виде

$$y(x) = -\frac{a}{k} + Ae^{kx}.$$

б) $y_0 = y(0) = -a/k + A$, поэтому $A = y_0 + a/k$.

в) $y(x) = -a/k + (y_0 + a/k)e^{kx} = 2 + 3e^{-2x}$.

16. Как и в задаче 15 а), разность $z = y - y_1$ любых двух решений уравнения $y' = ky + f(x)$ удовлетворяет уравнению $z' = kz$, поэтому $z = Ae^{kx}$ и $y(x) = y_1(x) + Ae^{kx}$.

17. а) $y = x + 1 + Ae^{kx}$; б) $y = -x - 1 + Ae^{kx}$;

в) подставляя $y_1 = Ce^{-x}$ в уравнение $y' = y + e^{-x}$, получим: $-Ce^{-x} = Ce^{-x} + e^{-x}$, поэтому $-C = C + 1$, $C = -0{,}5$; $y_1 = -0{,}5e^{-x}$. Общий вид решений: $y = y_1 + Ae^x = -0{,}5e^{-x} + Ae^x$.

18. а) Если $y(x) = e^{z(x)}$ и $y' = xy$, то $(e^{z(x)})' = z'(x)e^{z(x)} = xe^{z(x)}$, поэтому $z'(x) = x$, $z(x) = x^2/2 + C$. Общий вид решений: $y(x) = Ae^{x^2/2}$, A — произвольная постоянная. б) Как и в п. а), получаем: $z'(x) = e^x$, $z(x) = e^x + C$ и $y(x) = Ae^{(e^x)}$.

19. Из уравнения $N' = \alpha N$ находим: $N(t) = N_0 e^{\alpha t}$, поэтому $N(t) = 2N_0$, если $e^{\alpha t} = 2$, откуда $\alpha t = \ln 2$ и $t = \ln 2/\alpha$. Найденное время не зависит от начального условия N_0.

20. Имеем: $N(t) = N_0 e^{\alpha t}$, $N(12) = 3N_0 = N_0 e^{12\alpha}$, поэтому $e^{12\alpha} = 3$, $N(72) = N_0 e^{72\alpha} = N_0 \cdot (e^{12\alpha})^6 = N_0 \cdot 3^6 = 729N_0$. Следовательно, число бактерий через 3 суток возрастет в 729 раз.

21. Формула для периода полураспада имеет вид $T = \ln 2/\alpha$ и выводится, как в задаче 19.

22. Если время измеряется в годах, то $T = \ln 2/\alpha = 1$, поэтому $\alpha = \ln 2$ и $M(t) = M_0 e^{-\alpha t} = 10 \cdot e^{-(\ln 2)t} = 10/2^t$. Следовательно, $M(t) = 1$, если $10/2^t = 1$, откуда искомое время равно $t = \log_2 10 \approx 3{,}3$ (лет).

23. Пусть время измеряется в сутках. Имеем: $M(t) = M_0 e^{-\alpha t}$, при $t = 5$ $M_0 e^{-5\alpha} = 0{,}9M_0$, поэтому $e^{-5\alpha} = 0{,}9$, $5\alpha = -\ln 0{,}9$ и период полураспада равен

$$T = \frac{\ln 2}{\alpha} = -\frac{5 \ln 2}{\ln 0{,}9} \approx 33 \text{ (суток)}.$$

24. а) Из уравнения (5) $X(t) = X_0 e^{-\alpha t}$, поэтому $Y(t)$ удовлетворяет уравнению $Y' = -\beta Y + \alpha X_0 e^{-\alpha t}$. Как следует из задачи 16, его общее решение записывается формулой $Y = Y_1(t) + Ae^{-\beta t}$;

частное решение $Y_1(t)$ можно найти в виде $Y_1(t) = Ce^{-\alpha t}$ — после его подстановки в уравнение для Y найдем: $-\alpha C = -\beta C + \alpha X_0$, откуда $C = \alpha X_0/(\beta - \alpha)$. Итак, общее решение есть

$$Y(t) = \frac{\alpha X_0}{\beta - \alpha} e^{-\alpha t} + Ae^{-\beta t}.$$

Для начального условия $Y(0) = 0$ получим: $\frac{\alpha X_0}{\beta - \alpha} + A = 0$, поэтому $Y(t) = \frac{\alpha X_0}{\beta - \alpha}(e^{-\alpha t} - e^{-\beta t})$.

б) Функция $X(t)$ убывает на промежутке $[0; \infty[$. Для $Y(t)$ имеем:
$Y'(t) = \frac{\alpha X_0}{\beta - \alpha}(-\alpha e^{-\alpha t} + \beta e^{-\beta t}) = 0$ при $e^{(\beta-\alpha)t} = \frac{\beta}{\alpha}$, т. е. $t = t_0 = \frac{\ln\beta - \ln\alpha}{\beta - \alpha}$, причем $Y'(t) > 0$ на промежутке $]0; t_0[$ и $Y'(t) < 0$ на промежутке $]t_0; \infty[$, $t = t_0$ — точка максимума $Y(t)$. Заметим также, что функции $X(t)$ и $Y(t)$ положительны при $t > 0$ и стремятся к 0 при $t \to \infty$. Из этого исследования нетрудно нарисовать нужные графики.

в) Рассмотрим уравнение $X(t) = Y(t)$:

$$X_0 e^{-\alpha t} = \frac{\alpha X_0}{\beta - \alpha}(e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}), \quad \frac{\alpha}{\beta - \alpha} e^{-\beta t} = \left(\frac{\alpha}{\beta - \alpha} - 1\right) e^{-\alpha t},$$

$$e^{(\alpha - \beta)t} = \frac{2\alpha - \beta}{\alpha}.$$

Поскольку $Y(0) = 0 < X(0) = X_0$, из последнего уравнения видно, что $Y(t)$ может сравняться с $X(t)$ лишь в случае $2\alpha - \beta > 0$, что для полупериодов дает соотношение $2/T_x > 1/T_y$, $2T_y > T_x$.

25. Из уравнения (7) следует, что $N(t) = N_0 \exp(\alpha - \beta_0/r)t$, поэтому функция $N(t)$ убывает в случае $\alpha - \beta_0/r < 0$, т. е. при $r < r_0 = \beta_0/\alpha$, и возрастает при $r > r_0$.

26. а) Из задачи 25 следует, что $N(t)$ будет возрастать при $r > r_0 = \beta_0/\alpha = 400/20 = 20$ (см).

б) Шар будет терять нейтроны, если $r < r_0$, причем тогда $N(t) = N_0 e^{-kt}$, где $k = \beta_0/r - \alpha$. Следовательно, $N(1) = N_0 e^{-k} > 0{,}5N_0$ при $e^{-k} > 0{,}5$, откуда $k = \beta_0/r - \alpha < \ln 2$, $r > r_1 = \frac{\beta_0}{\alpha + \ln 2}$. Таким образом, искомое наименьшее значение радиуса равно

$$r_1 = \frac{\beta_0}{\alpha + \ln 2} = \frac{400}{20 + \ln 2} \approx 19{,}3 \text{ (см)}.$$

27. Как следует из задачи 15 а), общее решение уравнения (8) имеет вид:

$$N(t) = \frac{q}{k} + Ae^{-kt}, \quad k = \frac{\beta_0}{r} - \alpha.$$

Если $N(0) = N_0$, то $q/k + A = N_0$, откуда $A = N_0 - q/k$ и

$$N(t) = \frac{q}{k} + \left(N_0 - \frac{q}{k}\right)e^{-kt}.$$

При $t \to \infty$ $N(t) \to N_1 = q/k$. В реальных условиях начальное число нейтронов обычно невелико, $N(0) = N_0 < N_1$; затем $N(t)$ начинает возрастать и стремится к пределу N_1. Отношение N_1/q называется коэффициентом размножения нейтронов; этот коэффициент равен $1/k$ и тем больше, чем меньше R, т. е. чем ближе радиус шара к критическому!

28. Коэффициент k в случае $r = r_0/2 = 10$ (см) равен $k = \beta_0/r - \alpha = 400/10 - 20 = 20$ (1/сек), поэтому $N(t) = 5 + (N_0 - 5)e^{-20t}$, а предельное число нейтронов равно $N_1 = 5$.

§ 2

1. б) $x'(t) = -3\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}\,t + 1)$, $x''(t) = -6\cos(\sqrt{2}\,t + 1) = -2x(t)$.

2. а) В случае $A < 0$ с помощью формулы $\cos\alpha = -\cos(\alpha + \pi)$ получаем: $A\cos(\omega t + \varphi) = |A|\cos(\omega t + \varphi + \pi)$, поэтому всегда можно считать гармоническое колебание $x(t)$ записанным в виде $x(t) = A_0\cos(\omega t + \varphi_1)$, где $A_0 \geqslant 0$. Представляя φ_1 как сумму $2\pi k + \varphi_0$, где k — целое, $\varphi_0 \in [0;\ 2\pi[$, из периодичности косинуса находим искомое стандартное представление:
$x(t) = A_0\cos(\omega t + \varphi_0)$, $A_0 \geqslant 0$, $\varphi_0 \in [0;\ 2\pi[$.

б) 1) $2\cos(3t + \pi)$; 2) $\cos\left(\frac{t}{2} + \frac{9\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$;

3) $\cos(t + 0{,}7\pi)$; 4) $\cos(3t - 1{,}7\pi) = \cos(3t + 0{,}3\pi)$.

3. а) $\sin' t = \cos t$; $\sin'' t = \cos' t = -\sin t$; $\omega = 1$; $\sin t = \cos(t + 1{,}5\pi)$; б) $\omega = 2$; $\sin\left(2t + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(2t + \frac{7\pi}{4}\right)$; в) $\omega = 2$; $-3\sin 2t = 3\cos\left(2t + \frac{\pi}{2}\right)$; г) $(b\sin\omega t)' = b\omega\cos\omega t$, $(b\sin\omega t)'' = -b\omega^2\sin\omega t = -\omega^2(b\sin\omega t)$; частота равна ω; $b\sin\omega t = b\cos(\omega t + 1{,}5\pi)$.

4. а) $A\cos(\omega t + \varphi) = A(\cos\omega t\cos\varphi - \sin\omega t\sin\varphi) = a\cos\omega t + b\sin\omega t$, где $a = A\cos\varphi$, $b = -A\sin\varphi$; б) $x'(t) = -a\omega\sin\omega t + b\omega\cos\omega t$, $x''(t) = -a\omega^2\cos\omega t - b\omega^2\sin\omega t = -\omega^2 x(t)$.

5. а) Исходя из формул задачи 4 а), найдем A и φ такие, что $A\cos\varphi = a$, $A\sin\varphi = -b$. Возводя эти уравнения в квадрат и складывая, получим: $A^2 = a^2 + b^2$, откуда $A = \sqrt{a^2 + b^2}$. Для определения φ (в случае $A \neq 0$) имеем уравнения

$$\cos\varphi = \frac{a}{A} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin\varphi = -\frac{b}{A} = -\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Точка с координатами $(x;\ y) = (a/A;\ -b/A)$ принадлежит единичной окружности $x^2 + y^2 = 1$ (проверьте), поэтому существует единственное значение φ, удовлетворяющее нашим условиям и принадлежащее промежутку $[0;\ 2\pi[$. Теперь имеем:

$$a \cos \omega t + b \sin \omega t = A \cos \varphi \cos \omega t - A \sin \varphi \sin \omega t = A \cos (\omega t + \varphi).$$

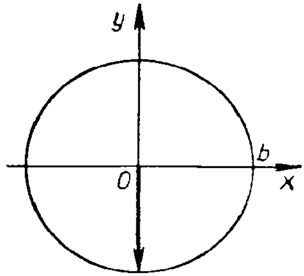


Рис. 108

Обычно это преобразование записывают так:

$$a \cos \omega t + b \sin \omega t = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos \omega t + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin \omega t\right) = A \cos (\omega t + \varphi).$$

б) 1) $\cos t + \sin t = \sqrt{2} \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos\left(t + \frac{7\pi}{4}\right)$;

2) $\cos 2t - 2\sin 2t = \sqrt{5} \cos (2t + \varphi)$, $\varphi = \arccos (1/\sqrt{5})$;

3) $3\cos \frac{t}{2} - 4 \sin \frac{t}{2} = 5\cos\left(\frac{t}{2} + \varphi\right)$, $\varphi = \arccos \frac{3}{5}$.

6. В случаях б) и в) гармоническое колебание сначала нужно записать в стандартном виде: б) $3 \sin \omega t = 3 \cos (\omega t + 1{,}5\pi)$; в) $-\cos (\omega t + 5{,}3\pi) = \cos (\omega t + 0{,}3\pi)$.

7. а) $\sqrt{2} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$; б) $2\cos\left(\omega t + \frac{3\pi}{2}\right)$; в) $5\cos (\omega t + \varphi)$, где $\varphi = \pi - \arcsin (4/5)$.

8. а) При вращении векторов $\overrightarrow{OM_1}$ и $\overrightarrow{OM_2}$ с одинаковой угловой скоростью ω их сумма $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$, построенная по правилу параллелограмма, будет вращаться с той же угловой скоростью ω, причем абсцисса $\overrightarrow{OM}$ равна сумме абсцисс векторов $\overrightarrow{OM_1}$ и $\overrightarrow{OM_2}$, т. е. $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$. Отсюда и вытекает, что вектор $\overrightarrow{OM}$ будет векторной диаграммой суммы рассматриваемых колебаний.

б) Поскольку $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$, угол $\widehat{M_1}$ треугольника OM_1M равен $\alpha = \pi - |\varphi_2 - \varphi_1|$, откуда с помощью теоремы косинусов находим: $A^2 = |\overrightarrow{OM}|^2 = |\overrightarrow{OM_1}|^2 + |\overrightarrow{OM_2}|^2 - 2|\overrightarrow{OM_1}||\overrightarrow{OM_2}| \times \cos \alpha = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cdot \cos (\varphi_2 - \varphi_1)$. Начальная фаза суммы колебаний равна величине угла xOM и определяется, например, из соотношений

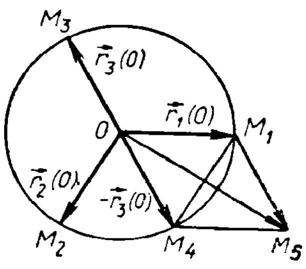


Рис. 109

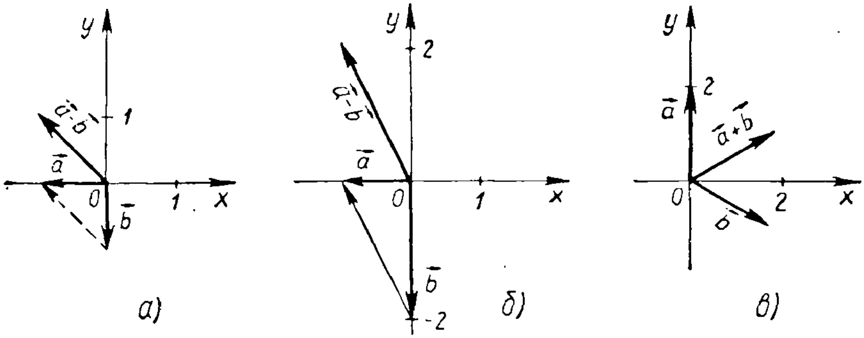


Рис. 110

$$\cos\varphi = \frac{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}{A}, \quad \sin\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A}.$$

в) Векторная диаграмма гармонического колебания $b\sin\omega t$ изображена на рисунке 108 (случай $b > 0$). По теореме Пифагора находим амплитуду суммы: $A = \sqrt{a^2 + b^2}$. Начальная фаза суммы определяется из условий:

$$\cos\varphi = \frac{a}{A}, \quad \sin\varphi = -\frac{b}{A}.$$

9. Как следует из рисунка 109, сумма $\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3}$ векторных диаграмм рассматриваемых колебаний равна $\vec{0}$, поэтому и сумма колебаний нулевая. Этот факт используется в электротехнике — в трехфазной системе передачи электроэнергии. Заметим, что амплитуда «между фазами», т. е. амплитуда разности двух из рассматриваемых колебаний, равна $A\sqrt{3}$ (векторная диаграмма одной из таких разностей есть вектор $\overrightarrow{OM_5}$ на рис. 109). Если $A = 127$, то $A\sqrt{3} \approx 220$ — этим и объясняется использование в электротехнике напряжений 127 В и 220 В.

10. а) $A = \sqrt{2}$, $\varphi = 5\pi/4$; б) $A = \sqrt{5}$, $\varphi = \arccos(-1/\sqrt{5})$; в) $A = 2$, $\varphi = \pi/6$. Векторные диаграммы этих колебаний изображены на рисунке 110; вычисления A и φ производятся, как в задаче 8 б).

11. Задача решается с помощью векторных диаграмм или с использованием формулы для A из задачи 8 б), которая в данном случае имеет вид: $A^2 = 1^2 + 1^2 + 2\cdot 1\cdot 1\cdot\cos\varphi = 2 + 2\cos\varphi$.

а) $\varphi = \pi/2$ или $3\pi/2$; соответственно $\varphi_1 = \pi/4$ или $7\pi/4$;
б) $\varphi = \pi/3$ или $5\pi/3$; соответственно $\varphi_1 = \pi/6$ или $11\pi/6$;
в) $\varphi = 2\pi/3$ или $4\pi/3$; соответственно $\varphi_1 = \pi/3$ или $5\pi/3$;
г) $\varphi = 0$, $\varphi_1 = 0$.

12. Для векторных диаграмм выполнено соотношение $\overrightarrow{OM} =$

$= \overrightarrow{OM}_1 + \overrightarrow{OM}_2$, и из рассмотрения треугольника OM_1M, в котором $|\overrightarrow{OM}| = A$, $|\overrightarrow{OM_1}| = A_1$ и $|\overrightarrow{M_1M}| = |\overrightarrow{OM_2}| = A_2$, получаем: $|A_1 - A_2| \leqslant A \leqslant A_1 + A_2$, причем амплитуда A максимальна при $\varphi_2 = \varphi_1$ (колебания в одной фазе) и минимальна при $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm\pi$ (колебания в противофазе).

13. а) Для доказательства достаточно вычислить вторые производные: $(x_1 - x_2)'' = x_1'' - x_2'' = -\omega^2 x_1 + \omega^2 x_2 = -\omega^2 (x_1 - x_2)$, $(kx_1)'' = kx_1'' = -k\omega^2 x_1 = -\omega^2 (kx_1)$. Векторные диаграммы этих колебаний суть векторы $\overrightarrow{OM}_1 - \overrightarrow{OM}_2$, $k\overrightarrow{OM}_1$.

б) Функция $y(t) = x^2(t)$ всегда неотрицательна, а функции, задающие ненулевые гармонические колебания, могут принимать отрицательные значения.

в) Имеем: $y(t) = x_1(t) \cdot x_2(t) = A_1 A_2 \cos(\omega t + \varphi_1) \cos(\omega t + \varphi_2) = \frac{1}{2} A_1 A_2 \cos\left(\omega t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) + \frac{1}{2} A_1 A_2 \cos \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}$.

Множество значений функции, задающей гармоническое колебание с амплитудой $A > 0$, есть отрезок $[-A; A]$, симметричный относительно точки 0 на числовой оси. Множество значений нашей функции будет обладать этим свойством, если второе слагаемое в формуле для $y(t)$ обращается в 0, т. е. если $A_1 = 0$, или $A_2 = 0$, или $\cos \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} = 0$, $\varphi_1 - \varphi_2 = \pm\pi$ (колебания в противофазе). Та же формула показывает, что в этих случаях $y(t)$ действительно задает гармоническое колебание.

14. $x(t) = 2\cos t + \cos 2t = 2z^2 + 2z - 1$, где $z = \cos t \in [-1; 1]$. Функция $f(z) = 2z^2 + 2z - 1$ на отрезке $[-1; 1]$ имеет наименьшее значение $-1{,}5$, а наибольшее 3; множество значений $x(t)$ поэтому есть отрезок $[-1{,}5; 3]$. Первое утверждение задачи следует из того, что наименьшее и наибольшее значения функций, задающих гармонические колебания, равны по абсолютной величине.

15. Гармонические колебания x_1 и x_2 удовлетворяют дифференциальным уравнениям $x_1'' = -\omega_1^2 x_1$ и $x_2'' = -\omega_2^2 x_2$. Допустим, что сумма $x = x_1 + x_2$ также является гармоническим колебанием с некоторой частотой ω, т. е. $x'' = -\omega^2 x$. Но тогда $x'' = x_1'' + x_2'' = -\omega_1^2 x_1 - \omega_2^2 x_2 = -\omega^2 (x_1 + x_2)$, откуда $(\omega^2 - \omega_1^2) x_1 = (\omega_2^2 - \omega^2) x_2$. Поскольку $\omega_1 \neq \omega_2$ и амплитуды x_1 и x_2 ненулевые, то $\omega \neq \omega_1$ и $\omega \neq \omega_2$, поэтому можно записать:

$$x_2 = \frac{\omega^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2 - \omega^2} x_1,$$

и гармоническое колебание x_2 должно иметь ту же частоту, что и x_1, что противоречит условию $(\omega_2 \neq \omega_1)$.

16. Если $\omega_2/\omega_1 = m/n$, то для наименьших периодов рассматриваемых колебаний $T_1 = 2\pi/\omega_1$ и $T_2 = 2\pi/\omega_2$ получим соотноше-

ние $T_1/T_2 = m/n$, поэтому у этих колебаний есть общий период $T = nT_1 = mT_2$, который будет периодом и для их суммы.

Обратно, если функция $x(t) = x_1 + x_2 = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$ периодична с периодом T, то и ее производные $x'(t)$ и $x''(t) = -\omega_1^2 x_1 - \omega_2^2 x_2$ периодичны с периодом T. Следовательно, и функция $\omega_2^2 x(t) + x''(t) = (\omega_2^2 - \omega_1^2) A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$ будет периодической с периодом T, поэтому либо $A_1 = 0$, либо $\omega_2 = \omega_1$, либо период T кратен наименьшему периоду $T_1 = 2\pi/\omega_1$ функции $\cos(\omega_1 t + \varphi_1)$, т. е. $T = nT_1$, n — целое. Аналогично, рассматривая функцию $\omega_1^2 x(t) + x''(t)$, получаем, что либо $A_2 = 0$, либо $\omega_2 = \omega_1$, либо $T = mT_2$ при некотором целом m, где $T_2 = 2\pi/\omega_2$. Таким образом, если рассматриваемая сумма периодична, то либо $A_1 = 0$, либо $A_2 = 0$, либо $\omega_2 = \omega_1$, либо $T = nT_1 = mT_2$, где m и n — целые; в двух последних случаях получаем, что ω_2 и ω_1 соизмеримы, т. е. отношение $\omega_2/\omega_1 = m/n$ — рациональное число.

17. а) $x(t) = A\cos(3t + \varphi)$; $x(0) = 4 = A\cos\varphi$; $v(t) = x'(t) = -3A\sin(3t + \varphi)$ и $v(0) = 0 = -3A\sin\varphi$; следовательно, $\sin\varphi = 0$ и $\varphi = 0$ или $\varphi = \pi$; из уравнения $A\cos\varphi = 4$ окончательно получаем: $A = 4$, $\varphi = 0$.

б) $A\cos\varphi = 0$, $-3A\sin\varphi = 3$, поэтому $A = 1$, $\varphi = 3\pi/2$;

в) $A\cos\varphi = 1$, $-3A\sin\varphi = 3$, откуда $A^2 = A^2\cos^2\varphi + A^2\sin^2\varphi = 1 + 1 = 2$, т. е. $A = \sqrt{2}$; $\cos\varphi = 1/\sqrt{2}$, $\sin\varphi = -1/\sqrt{2}$ и $\varphi = 7\pi/4$.

18. Как в предыдущей задаче, определяем A и φ и записываем закон движения $x(t) = A\cos(2t + \varphi)$; тогда $v(t) = x'(t) = -2A\sin(2t + \varphi)$, и остается подставить в эти формулы $t = \pi/8$.

а) $x(t) = \cos(2t + \pi/2)$; $x(\pi/8) = -\sqrt{2}/2$, $v(\pi/8) = -\sqrt{2}$;

б) $x(t) = 2\cos 2t$; $x(\pi/8) = \sqrt{2}$, $v(\pi/8) = -2\sqrt{2}$.

19. Для определения A и φ нужно решить систему уравнений:

$$A\cos\varphi = x_0, \quad -\omega A\sin\varphi = v_0,$$

из которой находим:

$$A^2 = A^2\cos^2\varphi + A^2\sin^2\varphi = x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}, \quad A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_1^2}{\omega^2}};$$

$$\cos\varphi = \frac{x_0}{A}, \quad \sin\varphi = -\frac{v_0}{\omega A}.$$

20. Имеем: $x(t) = 2\cos(t + \varphi)$, причем $x(0) = 2\cos\varphi = 1$, откуда $\cos\varphi = 1/2$ и $\varphi = \pm\pi/3$. Скорость равна $v(t) = -2\sin(t + \varphi)$, и при $t = 0$ получаем: $v = -2\sin\varphi = -2\sin(\pm\pi/3) = \pm\sqrt{3}$ (таким образом, начальная скорость определяется неоднозначно).

21. Имеем: $x(t) = A\cos(15t + \varphi)$, $v(t) = -15A\sin(15t + \varphi)$, причем $v(0) = -15A\sin\varphi = -15$, $v(\pi/6) = -15A\sin(5\pi/2 +$

$+ \varphi) = -15A \cos \varphi = 3$, откуда $A \sin \varphi = 1$, $A \cos \varphi = -0{,}2$, поэтому $A^2 = A \cos^2 \varphi + A \sin^2 \varphi = 0{,}04 + 1 = 1{,}04$, $A = \sqrt{1{,}04} \approx 1{,}02$.

22. а) $x(0) = a \cos 0 + b \sin 0 = a$; $v(t) = -\omega a \sin \omega t + \omega b \cos \omega t$, поэтому $v(0) = -\omega a \sin 0 + \omega b \cos 0 = \omega b$.

б) Из п. а) $a = x_0$, $b = v_0/\omega$. (Заметим, что эти формулы проще формул из задачи 19, поэтому обычно по начальным условиям записывают решение в виде $x(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t$.)

23. Так как $\omega = \sqrt{k/m}$, то $k = m\omega^2$, что в данном случае дает $k = 5 \cdot 2^2 = 20$ (г/с^2).

24. Для $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ имеем: $v(t) = -\omega A \sin(\omega t + \varphi)$, поэтому $E = (1/2)\, m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi) + (1/2)\, kA^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$. Поскольку $m\omega^2 = m(k/m) = k$, то $E = (1/2)\, kA^2 (\sin^2(\omega t + \varphi) + \cos^2(\omega t + \varphi)) = (1/2)kA^2$, что и требовалось доказать.

25. Имеем: $E'(t) = \frac{1}{2} m (2v \cdot v') + \frac{1}{2} k (2x \cdot x') = mvv' + kxx' = v \cdot mx'' + v \cdot kx = v(-kx) + v \cdot kx = 0$, поэтому функция $E(t)$ — постоянная.

26. а) Это утверждение доказано в задаче 19.

б) Согласно задаче 13, а), разность $z = x - x_{mp}$ гармонических колебаний также является гармоническим колебанием, т. е. в данном случае выполнено уравнение $mz'' = -kz$, а из него и следует закон сохранения энергии (задача 25).

в) Закон сохранения энергии при движении по закону $z(t)$ дает: $E = \frac{1}{2} m (z'(t))^2 + \frac{1}{2} kz^2(t) = C$ — постоянная. При $t = 0$ $z(0) = x(0) - x_{mp}(0) = 0$, $z'(0) = x'(0) - x'_{mp}(0) = 0$, поэтому постоянная C равна 0. Следовательно, при всех значениях t $z(t) = 0$, откуда и следует, что $x(t)$ совпадает с $x_{mp}(t)$.

27. П е р в ы й с п о с о б. Если $x(t)$ и $x_1(t)$ — решения уравнения (5), то для разности $z = x - x_1$ выполнено уравнение $z'' = -\omega^2 z$, откуда $z(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ и $x = x_1(t) + A \cos(\omega t + \varphi)$. Частное решение $x_1(t)$ можно найти в виде постоянной: подставив $x_1 = C$ в уравнение (5), получим: $x_1'' = 0 = -\omega^2 x_1 - g = -\omega^2 C - g$, откуда $C = -g/\omega^2$. Следовательно,

$$x(t) = -\frac{g}{\omega^2} + A \cos(\omega t + \varphi).$$

В т о р о й с п о с о б. Сила тяжести уравновешивает упругую силу, если $-kx - mg = 0$, т. е. $x = x_0 = -mg/k$. Взяв точку x_0 за начало отсчета координаты y, получим: $y = x + mg/k = x + g/\omega^2$, $y'' = x'' = -\nu^2 x - g = -\omega^2 (x + g/\omega^2) = -\omega^2 y$, поэтому $y(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, $x(t) = y(t) - g/\omega^2$.

28. а) $z'' = x'' - x_1'' = (-\omega^2 x + a \cos \nu t) - (-\omega^2 x_1 + a \cos \nu t) = -\omega^2 (x - x_1) = -\omega^2 z$, поэтому $z = x - x_1 = A \cos(\omega t + \varphi)$.

б) Подставив $x_1 = C\cos\nu t$ в уравнение (6), получим: $x_1'' = -C\nu^2\cos\nu t = -\omega^2 C\cos\nu t + a\cos\nu t$, $-\nu^2 C = -\omega^2 C + a$, откуда $C = a/(\omega^2 - \nu^2)$. Таким образом, общее решение (6) имеет вид:

$$x(t) = \frac{a}{\omega^2 - \nu^2}\cos\nu t + A\cos(\omega t + \varphi).$$

При нулевых начальных условиях имеем:

$$\frac{a}{\omega^2 - \nu^2} + A\cos\varphi = 0, \quad -\omega A\sin\varphi = 0,$$

откуда $\varphi = 0$ или $\varphi = \pi$, $A = \mp a/(\omega^2 - \nu^2)$, поэтому

$$x(t) = \frac{a}{\omega^2 - \nu^2}(\cos\nu t \mp \cos\omega t).$$

в) Если $\nu t = \pi k$, где k — целое, то $|x(t)| \geqslant \dfrac{a}{|\omega^2 - \nu^2|} - A$, поэтому $\max |x(t)| \to \infty$ при $\nu \to \omega$.

г) Первое утверждение следует из задачи 15. Из задачи 16 вытекает условие периодичности: $A = 0$ или ν и ω соизмеримы.

д) Дифференцируя $E(t)$, как в задаче 25, найдем:

$$E'(t) = v(-kx + b\cos\nu t) + v\cdot kx = bv\cos\nu t,$$

поэтому функция $E(t)$ непостоянна, т. е. энергия не сохраняется.

§ 3

1. а) Если $y' = z$, то $z' = 0$, поэтому $z = C_1$, т. е. $y' = C_1$, откуда $y = C_1x + C_2$.

б) $y'' = (y')' = 1$, поэтому $y' = x + C_1$, $y = x^2/2 + C_1x + C_2$.

в) $y' = 6x^2 - 2x + C_1$, $y = 2x^3 - x^2 + C_1x + C_2$.

2. а) $y' = -\cos x + C_1$, $y = -\sin x + C_1x + C_2$;

б) $y' = e^x + C_1$, $y = e^x + C_1x + C_2$;

в) $y' = e^x - e^{-x} + C_1$, $y = e^x + e^{-x} + C_1x + C_2$.

3. а) $y'' = C_1$, $y' = C_1x + C_2$, $y = (^1/_2)\,C_1x^2 + C_2x + C_3$, или $y = Ax^2 + Bx + C$, где A, B, C — произвольные постоянные.

б) $y'' = x + C_1$, $y' = \frac{1}{2}x^2 + C_1x + C_2$, $y = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3$;

в) $y'' = \frac{1}{2}x^2 + C_1$, $y' = \frac{1}{6}x^3 + C_1x + C_2$, $y = \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3$.

4. Общий вид решений $y(x) = C_1x + C_2$ (задача 1, а)).

а) $y(0) = C_2 = 1$, $y'(0) = C_1 = 2$, поэтому $y(x) = 2x + 1$;

б) $y(0) = C_2 = 1$, $y(1) = C_1 + C_2 = 2$, поэтому $C_1 = 1$, $y(x) = x + 1$.

5. Общий вид решений $y = Ax^2 + Bx + C$ (задача 3, а)), $y' = 2Ax + B$; $y(0) = C = 0$, $y(2) = 4A + 2B + C = 0$, $y'(0) = B = 1$, поэтому $C = 0$, $B = 1$, $4A = -2B - C = -2$, т. е. $A = -0{,}5$ и $y(x) = -0{,}5x^2 + x$.

6. Индукцией по n доказывается, что $y(x)$ — многочлен степени, меньшей n: $y(x) = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \ldots + C_{n-1}x^{n-1}$, где C_i — произвольные постоянные (ср. с задачами 1, а) и 3, а)).

7. а) $x(t) = At + B$.

б) $x(0) = B = 10$; $v(t) = A$, $v(0) = A = -3$, поэтому $x(t) = -3t + 10$; $-3t + 10 = -17$, если $3t = 27$, т. е. $t = 9$.

8. а) $v' = a$, $v = x' = at + C_1$, $x(t) = 0{,}5at^2 + C_1t + C_2$;

б) $x(0) = x_0 = C_2$, $v(0) = v_0 = C_1$, поэтому $x(t) = 0{,}5at^2 + v_0t + x_0$; в данном случае $x(t) = -t^2 + 3t + 10$. Далее: 1) $x(t) = 10$, если $-t^2 + 3t = 0$, откуда $t = 0$ или $t = 3$; 2) $x(t) = 0$ означает, что $t^2 - 3t - 10 = (t-5)(t+2) = 0$, т. е. $t = 5$ или $t = -2$; 3) $x'(t) = -2t + 3$, поэтому $x(t)$ имеет максимум при $t = 1{,}5$.

9. а) $x(t) = -0{,}5gt^2 + C_1t + C_2 = -0{,}5gt^2 + v_0t + x_0$, где x_0 и v_0 — начальные координата и скорость.

б) Имеем: $x_0 = h$, $v_0 = 0$, поэтому $x(t) = -0{,}5gt^2 + h$, и $x(t) = 0$ в случае $0{,}5gt^2 = h$, откуда искомое время равно $t = \sqrt{2h/g}$.

10. Имеем: $x_0 = 160$ (м), $v_0 = -2$ (м/с), $g = 10$ (м/с^2), поэтому $x(t) = -5t^2 - 2t + 160$, $v(t) = -10t - 2$. Момент падения определяется из уравнения $x(t) = 0$, т. е. $5t^2 + 2t - 160 = 0$, откуда

$$t_0 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 800}}{5} \approx \frac{27}{5} = 5{,}4 \text{ (с)}.$$

Скорость в момент соударения с Землей равна $v(t_0) \approx -10 \cdot 5{,}4 - 2 = -56$ (м/с).

11. Так как $x(0) = 0$, $v(0) = v_0$, то $x(t) = -0{,}5gt^2 + v_0t$, $x'(t) = -gt + v_0$. Наибольшее значение $x(t)$ принимает в момент времени $t_0 = v_0/g$, и оно равно $x_{\max} = -0{,}5g(v_0/g)^2 + v_0(v_0/g) = v_0^2/2g$. Имеем: $x_{\max} \geqslant 18$, если $v_0^2 \geqslant 36g = 360$, т. е. $v_0 \geqslant \sqrt{360} \approx 19$ (м/с).

12. Имеем: $x(t) = -0{,}5gt^2 + v_0t$ и $x(t) = 0$, если $t = 2v_0/g$, откуда $v_0 = gt/2$. Наибольшее значение $x(t)$ принимает при $t = t_0 = v_0/g$, и оно в данном случае будет равно

$$x_{\max} = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{g^2t^2}{8g} = \frac{1}{8}gt^2.$$

13. Уравнение движения первого камня имеет вид: $x_1(t) = 24 - 5t^2$. Для второго камня $x_2(t) = -5t^2 + C_1t + C_2$, причем $x_2(1) = 24$, $v_2(1) = v_0$, поэтому $-5 + C_1 + C_2 = 24$, $C_1 = v_0$, откуда $C_2 = 29 - v_0$ и $x_2(t) = -5t^2 + v_0t + 29 - v_0$. Первый камень ударяется о Землю в момент времени $t_0 = \sqrt{24/5} \approx 2{,}2$ (с). Приравнивая $x_2(t_0)$ нулю, найдем нужную скорость второго камня: $x_2(t_0) \approx -5 \cdot 4{,}8 + v_0 \cdot 2{,}2 + 29 - v_0 = 0$, если $1{,}2v_0 = -5$, откуда $v_0 \approx -4{,}2$ (м/с).

14. Уравнение Ньютона имеет вид: $x'' = 4 - 12t$, откуда $x' = v = 4t - 6t^2 + C_1$, $x = 2t^2 - 2t^3 + C_1t + C_2$; $x(0) = C_2 = 0$,

$v(0) = C_1 = 20$, поэтому $x(t) = 2t^2 - 2t^3 + 20t$, $v(t) = 4t - 6t^2 + 20$. Скорость равна 0, если $3t^2 - 2t - 10 = 0$, откуда $t = (1 \pm \sqrt{31})/3 \approx 2{,}2$ или $-1{,}5$ (с). Скорость максимальна, если $v'(t) = 4 - 12t = 0$, откуда $t \approx 0{,}3$ (с).

15. а) Для $v = x'$ имеем: $v' = -\alpha v$, поэтому $v(t) = Ae^{-\alpha t}$, откуда $x(t) = -(A/\alpha)e^{-\alpha t} + C$.

б) Так как $v(0) = A = v_0$, $x(0) = -A/\alpha + C = x_0$, то $A = v_0$, $C = x_0 + v_0/\alpha$ и

$$x(t) = \frac{v_0}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t}) + x_0.$$

Нужный график задается уравнением $x = 1 - e^{-t}$.

в) При $t \to \infty$ $e^{-\alpha t} \to 0$, поэтому $x(t) \to x_1 = x_0 + v_0/\alpha$, $v(t) = v_0e^{-\alpha t} \to 0$. (Наличие трения замедляет движение.)

16. а) Первый способ: $v' = -\alpha v - g$, поэтому $x'(t) = v(t) = -g/\alpha + Ae^{-\alpha t}$ (см. решение задачи 15, а) из § 1), откуда $x(t) = -(g/\alpha)t - (A/\alpha)e^{-\alpha t} + C$. Второй способ: используя предыдущую задачу 15, а), запишем общее решение в виде $x = x_1(t) - (A/\alpha)e^{-\alpha t} + C$. Если $x_1(t) = Bt$, то из уравнения (3) получим: $0 = -\alpha B - g$, откуда $B = -g/\alpha$ и, окончательно,

$$x(t) = -\frac{g}{\alpha}t - \frac{A}{\alpha}e^{-\alpha t} + C.$$

б) Имеем: $v(0) = -g/\alpha + A = 0$, $x(0) = -\dfrac{A}{\alpha} + C = h$, откуда $A = g/\alpha$, $C = h + g/\alpha^2$, поэтому

$$x(t) = -\frac{g}{\alpha}t - \frac{g}{\alpha^2}e^{-\alpha t} + h + \frac{g}{\alpha^2}.$$

Нужный график задается уравнением $x = -10t - 10e^{-t} + 20$.

в) Поскольку $v(t) = -g/\alpha + Ae^{-\alpha t}$ и $\lim\limits_{t\to\infty} Ae^{-\alpha t} = 0$, то при $t \to \infty$ $v(t) \to v_1 = -g/\alpha$. (Заметим, что предельная скорость не зависит от начальных условий. Наличие трения приводит к тому, что свободное — равноускоренное — падение превращается в почти равномерное движение.)

17. а) Как в задаче 25 из § 2, имеем:

$$E'(t) = mvv' + mgv = v(-mg) + v \cdot mg = 0,$$

поэтому функция $E(t)$ постоянна.

б) Подставляя в формулу для $E'(t)$ значение $mv' = mx'' = -mg - kv$, получим, что $E'(t) = -kv^2$, поэтому полная энергия при падении с трением убывает.

18. а) $U(x) = mgx$; б) $U(x) = \dfrac{1}{2}kx^2$;

в) $U(x) = -\gamma\dfrac{mm_0}{x}$; г) $U(x) = -mg\cos x + C$.

19. Имеем:

$$E'(t) = mvv' + U'(x) \cdot x' = v(mv') - F(x)v = 0,$$

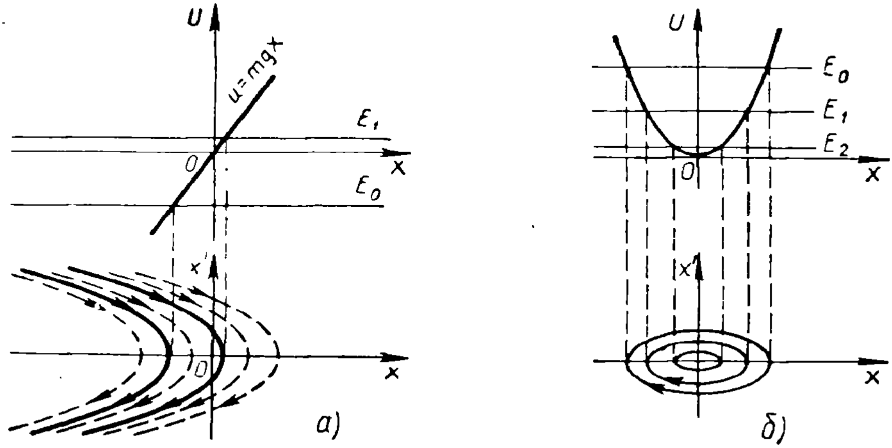


Рис. 111

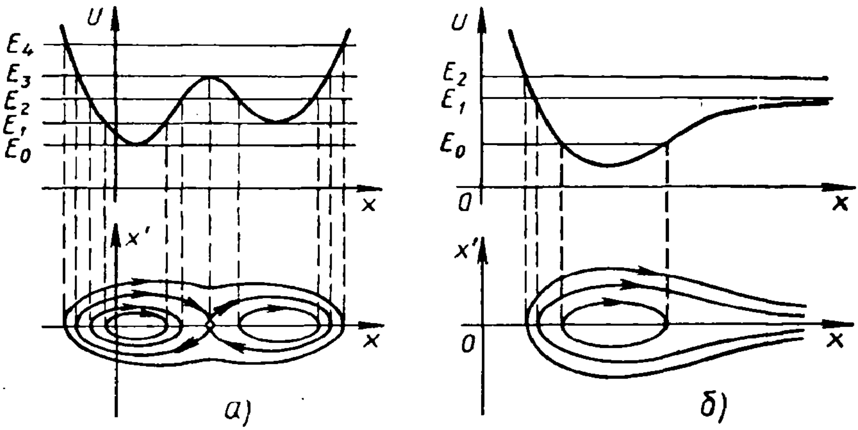


Рис. 112

поскольку $mv' = mx'' = F(x)$; следовательно, $E(t)$ — постоянная.

20. Ответ дан на рисунке 111.

21. Ответ дан на рисунке 112.

Глава VII

§ 1

1. а) и в) — равносильные пары; б) — нет.
2. а) и в) — равносильные пары; б) — нет.
3. Все пары предложений равносильны.

4. а) и в) — равносильные пары; б) — нет.

5. Например, а) $x = 1$ и $x^2 = x$; б) $x = 1$ и $x^2 = 1$; в) $x = 0$ и $x + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$.

6. Например, а) $1 > x$ и $x > x^2$; б) $x > 1$ и $x^2 > 1$; в) $x^2 > x$ и $\sqrt{x^2} > \sqrt{x}$.

7. а) $\{2\}$; б) $]1,5; 2]$; в) $\{0\}$.

8. а) $\{-1,5; 1; 2\}$; б) $]-\infty; -1,5[\cup \{1\} \cup]1,5; \infty[$; в) $\left\{\frac{\pi k}{2} \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$.

9. а) $\{-\sqrt{2}; 1\}$; б) $]-\infty; 0[\cup]1; \infty[$.

11. а) $\{-3; 1; 2\}$; б) $\{-1; 1\}$; в) $\{0\} \cup \left\{\frac{\pi}{2} + \pi k | k \in \mathbf{Z}\right\}$.

12. а) $\{0; 1\}$. Р е ш е н и е. $(x^2 - 1)\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow$ $\begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ \sqrt{x} \text{ определен, т. е. } x \geqslant 0 \end{cases}$ или $\sqrt{x} = 0$. Решение системы: $x = 1$, решение уравнения: $x = 0$;

б) $\{1\}$;

в) $\left\{\frac{\pi}{2} + \pi k;\ 2\pi k | k \in \mathbf{Z}\right\}$. У к а з а н и е. При $x = \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, имеем: $\sin x = 0$, однако $\sqrt{\cos x}$ не определен.

13. а) $\{2\}$; б) $\varnothing$; в) $\{\pi k | k \in \mathbf{Z},\ k \neq 0\}$.

15. а) $[-2; -1] \cup [1; \infty[$; б) $]-\infty; -2] \cup]-1; 1[$;
в) $]0; 0,5] \cup]1; \infty[$.

16. а) $]0; \infty[$; б) $]-\infty; 0] \cup [1; \infty[$ в) $[1; \infty[$.

17. а) $]0; 0,5] \cup [2; \infty[$; б) $]0; 1[$; в) $]-4; -3[\cup]-2,5; -2[$.

18. а) $]0; 1[\cup]10; \infty[$; б) $]-1; 1[\cup]2; \infty[$.

19. а) $\{1\}$; б) $\left\{-1;\ \frac{1-\sqrt{5}}{2};\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$; в) $\{-1; 1\}$.

20. а) $\{1 - \sqrt{2};\ 1 + \sqrt{2}\}$; б) $\{-1 - \sqrt{5};\ -1 + \sqrt{5}\}$.
Р е ш е н и е. Ответ легко следует из разложений левых частей уравнений на множители: а) $x^4 - 2x^2 - 8x - 3 = (x^2 - 2x - 1)(x^2 + 2x + 3)$; б) $x^4 + x^3 - 2x^2 + 12x - 16 = (x^2 + 2x - 4)(x^2 - x + 4)$. Для получения таких разложений можно пользоваться методом неопределенных коэффициентов. Допустив, что левую часть можно представить в виде произведения двух квадратных трехчленов с целыми коэффициентами, запишем: $x^4 - 2x^2 - 8x - 3 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + e)$, раскроем скобки и приравняем коэффициенты в левой и правой частях при одинаковых степенях переменной. При этом получится система:

$$\begin{cases} a + c = 0, \\ b + e + ac = -2; \\ bc + ae = -8, \\ be = -3. \end{cases} \tag{1}$$

Подставляя из первого уравнения $a = -c$ в остальные уравнения системы, получим:

$$\begin{cases} b + e - c^2 = -2, \\ bc - ec = -8, \\ be = -3. \end{cases}$$

Так как по предположению b и e — целые, то b и e суть числа -1 и 3 или 1 и -3. Без ограничения общности можно считать, что $b = 1$ или $b = -1$. Проверим возможность $b = 1$, $e = -3$. Тогда из первого и второго уравнений получим систему: $c^2 = 0$ и $4c = -8$, которая не имеет решений. Проверим возможность $b = -1$, $e = 3$. Тогда из первого и второго уравнений получим систему: $c^2 = 4$ и $-4c = -8$, откуда $c = 2$. Наконец, $a = -2$. Итак, $a = -2$; $b = -1$; $c = 2$ и $e = 3$ — решение системы (I), откуда и следует указанное в начале решения разложение.

21. а) $\left]-1;\ \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right[\cup \left]\frac{1+\sqrt{5}}{2};\ \infty\right[$; б) $]-1-\sqrt{2};\ 1+\sqrt{2}[$.

Указание. Воспользуйтесь задачами 19 б) и 20 а).

22. а) $\cos\alpha + \sin\beta = \cos\alpha + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha-\beta}{2}\right) \times \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$;

б) $\cos\alpha - \sin\beta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha+\beta}{2}\right) \times \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta-\alpha}{2}\right)$;

в) $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cdot\cos\beta} = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$.

23. а) $\left\{\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3};\ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} \middle| k \in \mathbf{Z}\right\}$. Решение. $\cos x + \cos 5x = 2\cos 3x\cos 2x = 0$, если $3x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ или $2x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, т. е. $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}$ или $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$;

б) $\left\{\frac{\pi k}{5};\ \frac{\pi k}{2} \middle| k \in \mathbf{Z}\right\}$; в) $\left\{\frac{\pi k}{8};\ \frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{9} \middle| k \in \mathbf{Z}\right\}$.

24. а) $\cos x + \sin 5x = \cos x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) \times \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Ответ. $\left\{\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi k}{2};\ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{3} \middle| k \in \mathbf{Z}\right\}$;

б) $\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} x = \frac{\sin 2x}{\cos 3x \cos x} = 0$, если $\sin 2x = 0$, $\cos 3x \neq 0$, $\cos x \neq 0$. Из уравнения находим: $2x = \pi k$, т. е. $x = \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$. Теперь нужно проверить условия: $\cos x \neq 0$ и $\cos 3x \neq 0$. Проще всего это сделать, отметив соответствующие точки $\left(x = \frac{\pi k}{2}\right.$ и x та-ние, что $\cos x = 0$ или $\cos 3x = 0$) на единичной окружности. Мы сделаем проверку подстановкой: $\cos\frac{\pi k}{2} = 0$, если $\frac{\pi k}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n$, т. е. при $k = 1 + 2n$; значит, значения k нужно брать только четные: $k = 2m$, $x = \frac{\pi k}{2} = \pi m$. Подставляя $x = \pi m$ в выражение $\cos 3x$, получаем, что условие $\cos 3x \neq 0$ выполнено при всех $x = \pi m$. Итак, ответ $\{\pi m \mid m \in \boldsymbol{Z}\}$;

в) $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} 3x = \frac{\sin x \sin 3x - \cos x \cos 3x}{\cos x \sin 3x} = \frac{-\cos 4x}{\cos x \sin 3x} = 0$, если $\cos 4x = 0$, $\cos x \neq 0$, $\sin 3x \neq 0$. Из уравнения получаем: $4x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, откуда $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Легко видеть, что при таких x и $\cos x \neq 0$ и $\sin 3x \neq 0$. Ответ. $\left\{\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4} \mid k \in \boldsymbol{Z}\right\}$.

25. а) Преобразуем произведения в суммы: $\sin x \cos 5x = \sin 9x \cos 3x \Leftrightarrow \sin 6x - \sin 4x = \sin 12x + \sin 6x \Leftrightarrow \sin 12x + \sin 4x = 0 \Leftrightarrow 2 \sin 8x \cos 4x = 0$, откуда $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}$ или $x = \frac{\pi k}{8}$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Легко заметить, что первое из выписанных множеств включается во второе, поэтому можно оставить только $x = \frac{\pi k}{8}$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Ответ. $\left\{\frac{\pi k}{8} \mid k \in \boldsymbol{Z}\right\}$;

б) $\sin 3x - \sin x = \sin 2x \Leftrightarrow 2 \cos 2x \sin x = 2 \cos x \sin x \Leftrightarrow \sin x (\cos 2x - \cos x) = 0 \Leftrightarrow -2 \sin x \sin \frac{3x}{2} \sin \frac{x}{2} = 0$, откуда $x = \pi k$, или $x = \frac{2\pi k}{3}$, или $x = 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Последнее из выписанных множеств включается и в первое, и во второе. Ответ. $\left\{\pi k; \frac{2\pi k}{3} \mid k \in \boldsymbol{Z}\right\}$.

26. а) и б) — да; в) — нет. **27.** а) б), в) — да.

28. а), б), в) — да. (В случаях б) и в) множество решений первого уравнения (неравенства) пусто, а из такого предложения следует любое предложение.)

29. а) и б) могут быть неверными, если выражение $h(x)$ не всюду определено; в) — всегда верно.

30. Все три следования могут быть неверными: в) при $0 < a < 1$; в случаях а) и б) приведем примеры: а) из $x > -1$ не следует $x^2 > (-1)^2$; б) из $x + 1 > x$ не следует $\sqrt{x + 1} > \sqrt{x}$ (x может быть отрицательным). **31.** а) $\{4\}$; б) $\{1\}$.

§ 2

1. а) $x = -\frac{b}{a}$; б) если $D = b^2 - 4ac < 0$, то нет решений; при $D = 0$ один корень $x = -\frac{b}{2a}$, при $D > 0$ два корня:

$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$; в) при четных n: если $c<0$, то нет решений; если $c=0$, то $x=0$; если $c>0$, то $x=\pm\sqrt[n]{c}$; при нечетном n: если $c<0$, то $x=-\sqrt[n]{|c|}$; если $c\geqslant 0$, то $x=\sqrt[n]{c}$.

2. По смыслу задачи $a>0$ и $a\neq 1$; а) при $b\leqslant 0$ нет решений, при $b>0$ один корень $x=\log_a b$; б) $x=a^b$.

3. а) Если $|a|>1$ — решений нет; если $|a|\leqslant 1$, то $x=$ $=\pm\arccos a+2\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$;

б) если $|a|>1$, то решений нет; если $|a|\leqslant 1$, то
$$x=(-1)^k\arcsin a+\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z};$$

в) $x=\operatorname{arctg} a+\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$.

4. а) $2^x=3^{x+1}\Leftrightarrow\left(\frac{2}{3}\right)^x=3\Leftrightarrow x=\log_{\frac{2}{3}}3$; б) $\{1;2\}$;

в) $\{\pi k\,|\,k\in\boldsymbol{Z}\}$.

5. а) $\{1;2\}$; б) $\{(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k\,|\,k\in\boldsymbol{Z}\}$; в) $\{2\}$.

6. а) $\left\{1+\frac{1}{\pi k}\,|\,k\in\boldsymbol{Z},\ k\neq 0\right\}$; б) $\left\{\pm\sqrt{7+2\pi k}\,|\,k\in\boldsymbol{Z},\ k\geqslant -1\right\}$,

в) $\left\{(-1)^k\arcsin\frac{\pi}{4}+\pi k\,|\,k\in\boldsymbol{Z}\right\}$.

7. а) $\{-\sqrt{2};\sqrt{2}\}$; замена $y=x^2$; б) $\{-\sqrt[3]{4};\sqrt[3]{2}\}$; замена $y=x^3$.

8. а) $\varnothing$. Указание. Замена $y=x^2+2x$, далее уравнение $y+1+\frac{6}{y}=-4$ сводится к квадратному $y^2+5y+6=0$, откуда $y=-2$ или $y=-3$; оба уравнения замены $x^2+2x=-2$ и $x^2+2x=-3$ решений не имеют; б) $\left\{\frac{5\pm\sqrt{41}}{2};\ \frac{5\pm\sqrt{161}}{2}\right\}$. Указание. Замена $x^2-5x=y$; уравнение после замены $\frac{1}{y-14}+\frac{2}{y+6}=0{,}1$ сводится к квадратному уравнению, корни которого $y=4$ или $y=34$.

9. а) Убедившись, что $x=0$ не удовлетворяет уравнению, разделим числитель и знаменатель каждой дроби на x. После этого делаем замену $y=x+\frac{3}{x}$, тогда уравнение запишется в виде $\frac{6}{y+2}+\frac{11}{y+7}=2$, откуда $y=4$ или $y=-4{,}5$. Решая уравнения замены, получаем ответ: $\left\{1;\ 3;\ \frac{-9-\sqrt{33}}{4};\ \frac{-9+\sqrt{33}}{4}\right\}$;

б) после деления числителя и знаменателя каждой дроби на x и замены $y=x-\frac{12}{x}$ получаем уравнение $\frac{2}{y-4}+\frac{2}{y-1}=1$, корни которого $y=2$ и $y=7$. Ответ. $\left\{1\pm\sqrt{13};\ \frac{7\pm\sqrt{97}}{2}\right\}$.

10. а) Пусть $y = x + \frac{1}{x}$, тогда $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$ и исходное уравнение записывается в виде $y^2 - 2 + 2y = 6$, откуда $y = 2$ или $y = -4$. Уравнение $x + \frac{1}{x} = 2$ имеет корень $x = 1$; уравнение $x + \frac{1}{x} = -4$ — корни $x = 2 \pm \sqrt{3}$. Ответ. $\{1;\ 2 \pm \sqrt{3}\}$;

б) сделаем замену $y = x + \frac{1}{x}$, тогда $x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2}\right) = y\,(y^2 - 2 - 1)$. Получившееся уравнение $y\,(y^2 - 3) = 6y$ имеет корни $y = 0$, $y = -3$ и $y = 3$. Ответ. $\left\{\frac{-3+\sqrt{5}}{2};\ \frac{-3-\sqrt{5}}{2};\ \frac{3+\sqrt{5}}{2};\ \frac{+3-\sqrt{5}}{2}\right\}$.

11. а) $\{1;\ 2 - \sqrt{3};\ 2 + \sqrt{3}\}$. Указание. Убедившись, что $x = 0$ не удовлетворяет уравнению, разделим обе его части на x^2 — получим уравнение из задачи 10 а), замена $y = x + \frac{1}{x}$;

б) $\{0{,}5;\ -2\}$. Указание. Разделим обе части уравнения на x^2 и сделаем замену $x - \frac{1}{x} = y$, тогда $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 + 2$.

12. а) Пусть $x + 1 = y$, тогда уравнение запишется в виде $(y - 1)^4 + (y + 1)^4 = 82 \Leftrightarrow 2y^4 + 12y^2 + 2 = 82$, откуда $y^2 = 4$ или $y^2 = -10$. Ответ. $\{1;\ -3\}$;

б) пусть $y = x + 3$, тогда $(x + 1)(x + 2)(x + 4)(x + 5) = (y - 2)(y - 1)(y + 1)(y + 2) = (y^2 - 4)(y^2 - 1) = y^4 - 5y^2 + 4$. Уравнение $y^4 - 5y^2 + 4 = 40$ квадратное относительно $z = y^2$ и имеет корни $z = 9$, $z = -4$, откуда $y = -3$ или $y = 3$. Ответ. $\{0;\ -6\}$. Отметим, что исходное уравнение можно было также решить при помощи замены $x^2 + 6x = y$, тогда $(x + 1)\times(x + 5) = y + 5$, $(x + 2)(x + 4) = y + 8$.

13. а) Замена $2^x = y$, тогда $y^2 - 2y - 3 = 0$, $y = 3$ или $y = -1$. Ответ. $\{\log_2 3\}$;

б) замена $3^x = y$, после этого получается уравнение $y^3 + 3y^2 - y - 3 = 0$, $(y + 3)(y^2 - 1) = 0$, откуда $y = -3$, или $y = -1$, или $y = 1$. Из уравнений замены только одно, а именно $3^x = 1$ имеет решение. Ответ. $\{0\}$.

14. а) Замена $\lg x = y$; $\lg^2 (x^2) = (2 \lg x)^2 = 4y^2$ и уравнение принимает вид: $4y^2 + y - 1 = 0$. Ответ. $\left\{10^{\frac{-1-\sqrt{17}}{8}};\ 10^{\frac{-1+\sqrt{17}}{8}}\right\}$;

б) замена $\log_2 x = y$; $\log_x 2 = \frac{1}{\log_2 x} = \frac{1}{y}$. Ответ. $\{\sqrt{2};\ 4\}$.

15. а) Замена $\sin x = y$, тогда $\cos^2 x = 1 - y^2$, получаем уравнение $y^2 + y - 1 = 0$, откуда $y = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$; условию $|y| \leqslant$

$\leqslant 1$ удовлетворяет только $y = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Ответ. $\{(-1)^k \arcsin \frac{-1+\sqrt{5}}{2} + \pi k \mid k \in Z\}$;

б) замена $\sin x = y$, тогда $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = 1 - 2y^2$. Уравнение принимает вид: $1 - 2y^2 = y + 1$, откуда $y = 0$ или $y = -0{,}5$. Ответ. $\{\pi k;\ (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k \mid k \in Z\}$.

16. а) Убеждаемся, что при x таких, что $\cos x = 0$, уравнение не удовлетворяется, после этого делим обе части на $\cos x$ и получаем уравнение $\operatorname{tg} x = -1{,}5$. Ответ. $\{-\operatorname{arctg} 1{,}5 + \pi k \mid k \in Z\}$;

б) замена $\operatorname{tg} x = y$; $y + \frac{1}{y} = \frac{5}{2}$. Ответ. $\left\{\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi k;\ \operatorname{arctg} 2 + \pi k \mid k \in Z\right\}$.

17. а) $\left\{\frac{1}{2}\ (-1)^k \arcsin \frac{2}{3} + \frac{\pi k}{2} \mid k \in Z\right\}$; б) замена $y = \sin x$, тогда $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x = 3y - 4y^3$. Уравнение принимает вид: $3y - 4y^3 + y = 0 \Leftrightarrow 4y(1 - y^2) = 0$, откуда $y = 0$ или $y = \pm 1$. Итак, $\sin x = 0$ или $\sin x = \pm 1$. Ответ. $\left\{\frac{\pi k}{2} \mid k \in Z\right\}$.

18. а) Запишем уравнение в виде $3^x \cdot 3^x = 3^x \cdot 2^x + 2 \times 2^x \cdot 2^x$; это уравнение однородное относительно 2^x и 3^x. Поскольку $2^x \neq 0$ для любого x, то можно поделить обе части уравнения на 2^{2x}. Получим уравнение $\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} = \left(\frac{3}{2}\right)^x + 2$, которое заменой $\left(\frac{3}{2}\right)^x = y$ сводится к квадратному уравнению $y^2 = y + 2$, откуда $y = -1$ или $y = 2$. Ответ. $\{\log_{\frac{3}{2}} 2\}$; б) уравнение однородное третьей степени относительно $a = 2^x$ и $b = 3^x$. Разделив обе части на $b^3 = 27^x$, после замены $\left(\frac{2}{3}\right)^x = y$ получим уравнение $y^3 + y - 2 = 0$. Один из корней этого уравнения $y = 1$, поэтому левая часть разлагается на множители, причем один из множителей $(y - 1)$. Имеем: $y^3 + y - 2 = (y - 1)(y^2 + y + 2) = 0$ при $y = 1$ или $y^2 + y + 2 = 0$. Второе уравнение корней не имеет, значит, $y = 1$. Ответ. $\{0\}$.

19. а) Если $\cos x = 0$, то из уравнения получим, что $\sin x = 0$, чего не может быть. Разделив обе части уравнения на $\cos^2 x$, получим равносильное уравнение $y^2 + 3y + 2 = 0$, где через y обозначен $\operatorname{tg} x$ Из этого уравнения находим: $y = -1$ или $y = -2$. Следовательно, $\operatorname{tg} x = -1$ или $\operatorname{tg} x = -2$. Ответ. $\left\{-\frac{\pi}{4} + \pi k;\ -\operatorname{arctg} 2 + \pi k \mid k \in Z\right\}$;

б) чтобы привести уравнение к однородному, заменим в правой части 1 на $\cos^2 x + \sin^2 x$, после чего получается уравнение задачи а). Ответ. $\left\{-\frac{\pi}{4} + \pi k; -\operatorname{arctg} 2 + \pi k \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$.

20. а) Чтобы привести уравнение к однородному, запишем $\sin 2x$ как $2 \sin x \cos x$. После деления обеих частей уравнения на $\cos^2 x$ делаем замену $\cos x = y$. Ответ. $\{-\frac{\pi}{4}+\pi k; -\operatorname{arctg} 3+ + \pi k | k \in \mathbf{Z}\}$;

б) $\cos 2x + 1 + \sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2 \cos^2 x - 1 + 1 + 2 \sin x \cos x = 0 \Leftrightarrow 2 (\cos^2 x + \sin x \cos x) = 0$ — однородное уравнение. При x таких, что $\cos x = 0$, оно выполняется, поэтому в ответ входит $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Поделив обе части на $\cos^2 x$ и сделав замену $y = \operatorname{tg} x$, получим уравнение $2 + 2y = 0$, откуда $y = -1$, т. е. $\operatorname{tg} x = -1$. Ответ. $\left\{\frac{\pi}{2} + \pi k; -\frac{\pi}{4} + \pi k \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$.

21. $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ не определен при $x = \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Подстановкой в исходное уравнение убеждаемся, что такие x не удовлетворяют уравнению ($\sin x = 0$, $\cos x = -1$, $\cos x - \sin x = -1$). Делаем замену $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, получим уравнение $\frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2} = 1$, откуда $t = 0$ или $t = 1$. Следовательно, $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 0$ или $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1$, т. е. $\frac{x}{2} = \pi k$ или $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Ответ. $\left\{\frac{\pi}{2} + 2\pi k; 2\pi k \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$;

б) $\{-2 \operatorname{arctg} 0{,}5 + 2\pi k | k \in \mathbf{Z}\}$;

в) $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ не определен при $x = \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Подстановкой в исходное уравнение убеждаемся, что такие x удовлетворяют уравнению $\sin x - 2 \cos x = 0 - (-2) = 2$. Делаем замену: $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, получим уравнение $2t - 2(1 - t^2) = 2(1 + t^2)$, $t = 2$. Ответ. $\{\pi + 2\pi k; 2 \operatorname{arctg} 2 + 2\pi k | k \in \mathbf{Z}\}$.

22. а) Делаем замену: $\operatorname{tg} x = t$ (так как $\operatorname{tg} x$ содержится в левой части уравнения, разбирать случай, когда $\operatorname{tg} x$ не определен, не нужно). Получим уравнение $\frac{1-t^2}{1+t} + t = 1 \Leftrightarrow t^3 - 2t^2 + t = 0$, $t(t-1)^2 = 0$, $t = 0$ или $t = 1$. Ответ. $\left\{\pi k; \frac{\pi}{4} + \pi k \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$; б) если $\operatorname{tg} x$ не определен, то уравнение не может удовлетворяться такими x, тогда $\operatorname{ctg} x = 0$, а $\sin 2x < 2$. Делаем замену: $\operatorname{tg} x = t$, получим уравнение $\frac{2}{1+t^2} + \frac{1}{t} = 2$, $2t + 1 + t^2 = 2t + 2t^3$, $2t^3 - 3t^2 + 2t - 1 = 0$. Легко видеть, что $t = 1$ — корень этого уравнения, поэтому левую часть можно раз-

ложить на множители, один из которых есть $t-1$, а именно $2t^3-3t^2+2t-1=(t-1)(2t^2-t+1)$. Так как уравнение $2t^2-t+1$ корней не имеет, то корень один: $t=1$. Ответ. $\left\{\frac{\pi}{4}+\pi k \mid k \in \boldsymbol{Z}\right\}$.

23. Пусть $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ не определен, тогда $x=\pi+2\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$, и после подстановки таких значений в исходное уравнение получим: $a\cdot(-1)+b\cdot 0=c$. Таким образом, рассматриваемые значения удовлетворяют уравнению, если $a=-c$. Пусть теперь $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ определен. После замены $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$ получим уравнение $a(1-t^2)+$ $+b\cdot 2t=c(1+t^2)$, откуда $(c+a)t^2-2b\,t+(c-a)=0$. Если $c+a=0$, то уравнение линейное: $-2b\,t+(c-a)=0$, и при $b\neq 0$ получаем $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{a-c}{2b}$; при $b=0$ серия корней $x=$ $=\pi+2\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$, полученная выше, будет единственной (кроме, конечно, неинтересного случая: $a=b=c=0$, в котором корнем будет любое число). При $c+a\neq 0$ уравнение квадратное с дискриминантом $D=4b^2-4(c+a)(c-a)=4(b^2+a^2-c^2)$. При $D\geqslant 0$, т. е. при $c^2\leqslant a^2+b^2$, уравнение будет иметь решения, которые легко выписать. В противном случае (т. е. при $c^2>a^2+$ $+b^2$) решений нет.

24. а) $\left\{\frac{\pi}{4}\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi k \mid k\in\boldsymbol{Z}\right\}$. Указание. Замена: $y\sin x+$ $+\cos x$; б) $\left\{\frac{3\pi}{4}+\pi k;\ \frac{\pi}{4}\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi k \mid k\in\boldsymbol{Z}\right\}$.

25. а) $\left\{\frac{\pi}{4}+\pi k \mid k\in\boldsymbol{Z}\right\}$; указание: замена: $\sin x-\cos x=y$;

б) $\left\{\frac{\pi}{4}\pm\arccos\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}+2\pi k \mid k\in\boldsymbol{Z}\right\}$. Указание. Сделаем замену: $\sin x+\cos x=y$, тогда

$$\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos x}=\frac{1}{\sin x\cos x}=\frac{2}{y^2-1}.$$

26. а) $\left\{\frac{\pi k}{2};\ -\frac{\pi}{4}+\pi k \mid k\in\boldsymbol{Z}\right\}$. Указание. $\cos x+\sin x=$ $=\cos^3 x+\sin^3 x \Leftrightarrow (\cos x+\sin x)(\sin^2 x-\sin x\cos x+\cos^2 x-1)=$

$$=0\Leftrightarrow(\cos x+\sin x)(-\sin x\cos x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}\cos x+\sin x&=0,\\ \cos x&=0,\\ \sin x&=0;\end{aligned}\right.$$

б) $\left\{-\frac{\pi}{4}+\pi k;\ 2\pi k;\ -\frac{\pi}{2}+2\pi k \mid k\in\boldsymbol{Z}\right\}$; решение: $\cos^3 x+\sin^3 x=\cos 2x\Leftrightarrow\cos^3 x+\sin^3 x-(\cos^2 x-\sin^2 x)=0\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow(\cos x+\sin x)(\cos^2 x-\sin x\cos x+\sin^2 x-(\cos x-\sin x))=$ $=0\Leftrightarrow(\cos x+\sin x)(1-\sin x\cos x+\sin x-\cos x)=0$.

Таким образом, исходное уравнение равносильно совокупности уравнений: $\cos x + \sin x = 0$ и $(1 - \sin x \cos x + \sin x - \cos x) = 0$. Первое из этих уравнений однородно, из него находим: $\operatorname{tg} x = -1$. Левую часть второго проще всего разложить на множители: $1 - \sin x \cdot \cos x + \sin x - \cos x = (1 + \sin x)(1 - \cos x)$, откуда находим, что либо $\sin x = -1$, либо $\cos x = 1$. Второе уравнение можно решать также заменой: $y = \sin x - \cos x$.

27. а) Имеем: $\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \times$ $\times \cos^2 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - 0{,}5 \sin^2 2x$. Таким образом, исходное уравнение равносильно уравнению $1 - 0{,}5\sin^2 2x = 0{,}5$, откуда $\sin 2x = \pm 1$. О т в е т. $\left\{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} \mid k \in \boldsymbol{Z}\right\}$;

б) $\left\{\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4} \mid k \in \boldsymbol{Z}\right\}$.

§ 3

2. а) $\{(0;\ 1;\ 1;\ 5)\}$; б) $\{(t;\ t;\ t;\ t;\ t) \mid t \in \boldsymbol{R}\}$.

3а) При $a = 4$ система несовместна; при $a = -3$ система имеет бесконечно много решений $\left\{\left(\frac{19 + 7k}{3};\ \frac{4k-1}{3};\ k\right) \mid k \in \boldsymbol{R}\right\}$; в остальных случаях ($a \neq -3$ и $a \neq 4$) система имеет единственное решение: $\left\{\left(6;\ \frac{1}{a-4};\ \frac{1}{4-a}\right)\right\}$; б) при $a = 0$ система несовместна; при $a = 1$ решений бесконечно много: $\{(k;\ 1;\ k)\ k \in \boldsymbol{R}\}$; при $a = -1$ решений также бесконечно много $\{(k;\ k;\ -1) \mid k \in \boldsymbol{R}\}$; в остальных случаях ($a \neq 0$ и $a \neq 1$) решение единственно: $\left\{\left(\frac{1}{a};\ \frac{1}{a};\ \frac{1}{a}\right)\right\}$.

4. а) $\{(1;\ 0);\ (0;\ -1)\}$; б) $\{(3;\ 4);\ (4;\ 3);\ (-3;\ -4);\ (-4;\ -3)\}$; в) после подстановки $y = 3 - x$ во второе уравнение и приведения подобных членов получаем уравнение $2x^3 - 9x^2 + 18x - 16 = 0$. Один из корней этого уравнения $x = 2$, далее, $2x^3 - 9x^2 + 18x -$ $- 16 = (x - 2)(2x^2 - 5x + 8)$, а уравнение $2x^2 - 5x + 8 = 0$ корней не имеет. О т в е т. $\{(2;\ 1)\}$.

5. а) $\{(1;\ 1);\ (2;\ 0{,}5)\}$; б) подстановка $y = x^{-\frac{3}{7}}$. О т в е т. $\left\{\left(2^{\frac{49}{12}};\ 2^{-\frac{7}{4}}\right)\right\}$.

6. а) $\left\{\left((-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k;\ \pi - (-1)^k \frac{\pi}{6} - \pi k\right) \mid k \in \boldsymbol{Z}\right\}$;

б) $\left\{\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ -2\pi k\right);\ \left(2\pi k;\ \frac{\pi}{2} - 2\pi k\right) \mid k \in \boldsymbol{Z}\right\}$;

в) прежде чем делать подстановку, запишем второе уравнение в виде $\frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{1 - \cos 2y}{2} = \frac{3}{4}$; $\cos 2x + \cos 2y = \frac{1}{2}$, $2\cos(x + y)\cos(x - y) = \frac{1}{2}$. О т в е т. $\left\{\left(\pi k;\ \frac{\pi}{3} - \pi k\right);\ \left(\frac{\pi}{3} + \pi k;\right.\right.$ $\left.\left.-\pi k\right) \mid k \in \boldsymbol{Z}\right\}$.

7. а) $\{(1;\ 1);\ (2;\ 0)\}$; б) $\{(1;\ 1);\ (-1;\ -1)\}$. У к а з а н и е. Почленно складывая и вычитая уравнения, получим: $xy = 1$ и $(x + y)^2 = 4$.

8. а) $\{(2;\ 2);\ (-2,\ -2);\ (0;\ \sqrt{8});\ (0;\ -\sqrt{8});\ (\sqrt{8};\ 0);\ (-\sqrt{8};\ 0)\}$;

б) $\{(0;\ 0);\ (\sqrt{6};\ \sqrt{6});\ (-\sqrt{6};\ -\sqrt{6});\ (2;\ -2);\ (-2;\ 2);$ $\left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2};\ \frac{\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2}\right);\ \left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2};\ \frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2}\right);\ \left(\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2};\ \frac{-\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}\right);\ \left(\frac{-\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2};\ \frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}\right)\}$. Указание. Почленно складывая и вычитая уравнения системы, получаем равносильную систему:

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 4(x - y), \\ x^3 + y^3 = 6(x + y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - y)(x^2 + xy + y^2 - 4) = 0, \\ (x + y)(x^2 - xy + y^2 - 6) = 0, \end{cases}$$

которая в свою очередь равносильна совокупности четырех систем:

$$\begin{cases} x = y, \\ x = -y; \end{cases} \begin{cases} x = y, \\ x^2 - xy + y^2 = 6; \end{cases} \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 4, \\ x = -y; \end{cases}$$

$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 4, \\ x^2 - xy + y^2 = 6. \end{cases}$ Последняя из этих систем равносильна системе: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ xy = -1. \end{cases}$

9. а) $\left\{\left(\pm\frac{1}{2};\ \pm\frac{1}{2};\ \pm\frac{3}{2}\right)\right\}$. Указание. Вычитая почленно 1-е уравнение из 2-го, получим: $z(x - y) = 0$, откуда либо $z = 0$, либо $x = y$. Далее, $z \neq 0$ в силу третьего уравнения системы;

б) $\{(-1 + \sqrt{3};\ -1 + \sqrt{3};\ -1 + \sqrt{3});\ (-1 - \sqrt{3};\ -1 - \sqrt{3};$ $-1 - \sqrt{3});\ (-1;\ -1;\ 2);\ (-1;\ 2;\ -1);\ (2;\ -1;\ -1);\ (0;\ 1;\ 1);$ $(1;\ 0;\ 1);\ (1;\ 1;\ 0)\}$. Указание. Вычитая почленно из первого уравнения второе, а из второго — третье, получим систему:

$$\begin{cases} (x - y)(x + y - 1) = 0, \\ (y - z)(y + z - 1) = 0, \\ x + y + z^2 = 2, \end{cases}$$

равносильную исходной, которая в свою очередь равносильна совокупности четырех систем.

10. а) $\left\{\left(\pm\frac{5\pi}{12} + \pi(m + n);\ \pm\frac{\pi}{12} + \pi(n - m)\right);\left(\pm\frac{\pi}{12} + \pi(m + n);\ \pm\frac{5\pi}{12} + \pi(n - m)\right) \middle|\ m,\ n \in \boldsymbol{Z}\right\}$; указание: почленно складывая и вычитая уравнения, получим равносильную систему:

$$\begin{cases} \cos(x - y) = 0{,}5, \\ \cos(x + y) = 0; \end{cases}$$

б) $\left\{\left((-1)^m\frac{\pi}{6} + \frac{\pi(m + n)}{2};\quad (-1)^m\frac{\pi}{6} + \frac{\pi(m - n)}{2}\right) \middle|\ m,\quad n \in \boldsymbol{Z}\right\}$.

Указание. Из уравнений системы получаем $\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{\cos y}{\sin y} = 1$, откуда $\cos x \sin y = \frac{\sqrt{3}}{4}$. Складывая и вычитая почленно уравнения системы: $\begin{cases}\sin x\cos y=\dfrac{\sqrt{3}}{4},\\ \cos x\sin y=\dfrac{\sqrt{3}}{4},\end{cases}$

получаем равносильную систему:

$$\begin{cases}\sin(x-y)=0,\\ \sin(x+y)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}.\end{cases}$$

11. а) $\left\{\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi k}{2};\ \dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi k}{2}+2\pi n\right)\mid k,\ n\in \mathbf{Z}\right\}$. Указание. Почленно сложив уравнения, получим: $\cos(x-y)=1$;

б) почленно сложив уравнения, получим:

$3(\sin x+\sin y)=\cos x+\cos y\Leftrightarrow 6\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}=2\cos\dfrac{x+y}{2}\times$

$\times\cos\dfrac{x-y}{2}$, откуда либо $\cos\dfrac{x-y}{2}=0$, либо $\operatorname{tg}\dfrac{x+y}{2}=\dfrac{1}{3}$.

12. а) $\{(9;\ 1)\}$. Указание. Замена: $\sqrt{x}=u$; $\sqrt{y}=v$;

б) $\{(4;\ 9);\ (9;\ 4)\}$. Указание. Замена $\sqrt{x}+\sqrt{y}=u$; $\sqrt{xy}=v$ приводит систему к виду: $\begin{cases}u=\dfrac{5}{6}v,\\ u^2-2v=13.\end{cases}$

13. а) $\{(2;\ 4);\ (4;\ 2)\}$. Указание. Из первого уравнения находим (так как $\log_y x=1:\log_x y$) $\log_x y=2$ или $\log_x y=\dfrac{1}{2}$;

б) $\{(10;\ \sqrt[4]{10});\ (\sqrt[4]{10};\ 10)\}$. Указание. Обозначим $\lg x$ через u, $\lg y$ через v, тогда

$$\begin{cases}u+v=\dfrac{5}{4}\\ \dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{v}=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u+v=\dfrac{5}{4}\\ \dfrac{u+v}{uv}=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u+v=\dfrac{5}{4}\\ uv=\dfrac{1}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}u=1\\ v=\dfrac{1}{4}.\end{cases}\\ \begin{cases}u=\dfrac{1}{4}.\\ v=1\end{cases}\end{array}\right.$$

14. а) $\{(0{,}5\log_2(8+\sqrt{62});\ 0{,}5\log_2(8-\sqrt{62}));\ (0{,}5\log_2(8-\sqrt{62});\ 0{,}5\log_2(8+\sqrt{62}))\}$. Указание. Сделав замену переменных $u=2^{2x}$; $v=2^{2y}$, получим систему: $\begin{cases}u+v=16,\\ uv=2\ ;\end{cases}$ б) $\{(3;\ 1);\ (3;\ -1)\}$. Решение. Сделав замену $u=x+y$; $v=x-y$, получим систему:

$$\begin{cases}v^u=16\\ v^2\cdot 2^u=64\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}v=2^{\frac{4}{u}}\\ 2^{\frac{8}{u}}\cdot 2^u=2^6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}v=2^{\frac{4}{u}}\\ 2^{\frac{8}{u}+u}=2^6,\end{cases}$$

откуда $\frac{8}{u}+u=6$, $u=2$ или $u=4$. Соответствующие значения v — числа 4 и 2. Осталось решить совокупность двух систем:

$$\begin{cases} x+y=4, \\ x-y=2 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x+y=2, \\ x-y=4. \end{cases}$$

15. а) $\left\{\left((-1)^k \arcsin\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\pi k;\quad \pm\arccos(2-\sqrt{2})+\right.\right.$ $\left.+2\pi n \mid k, n \in \boldsymbol{Z}\right\}$. Указание. Замена переменных $\sin x=u$, $\frac{1}{\cos y}=v$ приводит к системе:

$$\begin{cases} u+v=2, \\ uv=\frac{1}{2}, \end{cases}$$

решения которой: $(u;v)=\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2};\ 1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ или $\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2};\ 1-\right.$ $\left.-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. По смыслу замены $|u|\leqslant 1$; $|v|\geqslant 1$, поэтому годится только первое из полученных решений; б) $\left\{\left((-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k;\ (-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n\right|k,\right.$ $\left.n\in\boldsymbol{Z}\right\}$. Указание. После замены $u=\sin x, v=\sin y$ получим систему:

$$\begin{cases} u+v=1 \\ 1-u^2+1-v^2=1{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=1 \\ u^2+v^2=\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=\frac{1}{2} \\ v=\frac{1}{2}. \end{cases}$$

16. а) $\varnothing$. Решение. После раскрытия скобок делаем замену: $xy=a$, $xz=b$, $yz=c$; получится система линейных уравнений:

$$\begin{cases} a+b=4, \\ a+c=1, \\ b+c=2, \end{cases}$$ откуда $a+b+c=3{,}5$; $a=1{,}5$; $b=2{,}5$; $c=-0{,}5$. Система из уравнений замены

$$\begin{cases} xy=1{,}5, \\ yz=-0{,}5, \\ xz=2{,}5 \end{cases}$$

не имеет решений $\left(\text{из нее, например, следует, что } (xyz)^2=-\frac{15}{8}\right)$;

б) $\{(4;6;2);\ (0;0;0)\}$. Указание. Сначала убедимся, что если $xyz=0$, то система имеет решение $(0;0;0)$. Если же $xyz\neq 0$, то после деления обеих частей каждого из уравнений на xyz и замены $a=\frac{1}{x}$, $b=\frac{1}{y}$, $c=\frac{1}{z}$ получим систему линейных уравнений относительно переменных a, b, c.

17. $\left\{\left(\frac{\pi}{4}+\pi k;\ \operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi n;\ -\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi(2l-k-n+1);\right.\right.$

$\left\{\left(-\frac{\pi}{4}+\pi k;\ -\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi n; \operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi(2l-k-n+1)\right) \middle| k, l, n \in \mathbf{Z}\right\}$.

Решение. Сделаем замену переменных $u = \operatorname{ctg} x$; $v = \operatorname{ctg} y$; $w = \operatorname{ctg} z$ и перемножим почленно первое уравнение на второе, первое на третье, второе на третье. Тогда получится система, являющаяся следствием исходной:

$$\begin{cases}(uv-5)(vw+11) = uw(1+v^2),\\ (uv-5)(uw+7) = vw(1+u^2),\\ (vw+11)(uw+7) = uv(1+w^2)\end{cases}$$

(мы пользовались тождеством $\frac{1}{\sin^2\alpha} = 1+\operatorname{ctg}^2\alpha$). Обозначая uv через A, vw через B и vw через C, получим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases}11A-5B-C=55,\\ 7A-B-5C=35,\\ -A+7B+11C=-77.\end{cases}$$

Подставляя (из первого уравнения) $C = 11A-5B-55$ во второе и третье уравнения системы, получим:

$$\begin{cases}-48A+24B=-240\\ -120A-48B=528\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2A-B=10\\ 5A-2B=22\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}A=2\\ B=-6\end{cases}$$

Наконец, $C=-3$. Далее, $ABC = (uvw)^2$, откуда $uvw = \pm 6$, $(u, v; w) = (-1; -2; 3)$ или $(1; 2; -3)$ и $(x; y; z) = \left(\pm\frac{\pi}{4}+\pi k;\right.$ $\left.\pm\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi n; \pm\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi l\right)$, где $k, n, l \in \mathbf{Z}$. Осталось проверить, служат ли найденные значения решениями исходной системы. Проще всего это сделать следующим образом. Заметим, что первое уравнение исходной системы, возведенное почленно в квадрат, есть следствие системы, полученной после почленного перемножения первого и второго, первого и третьего, второго и третьего уравнений. Поэтому, для того чтобы удовлетворялось первое уравнение исходной системы, достаточно выбрать такое значение z, чтобы знаки левой и правой частей совпадали (о втором и третьем уравнениях заботиться уже не нужно).

18. а) u^2-2v; б) u^3-3uv;
в) $u^4-4u^2v+2v^2$; г) uv^2.

19. а) $\{(2-\sqrt{3};\ 2+\sqrt{3});\ (2+\sqrt{3};\ 2-\sqrt{3})\}$;
б) $\{(1;\ 2);\ (2;\ 1)\}$. Решение. Так как $x^4+y^4 = u^4-4u^2v+2v^2$ (где $u=x+y$; $v=xy$), то система запишется в переменных u и v в виде

$$\begin{cases}u=3,\\ u^4-4vu^2+2v^2=17.\end{cases}$$

Подставляя $u=3$ во второе уравнение системы, получим: $v^2-18v+32=0$, откуда $v=2$ или $v=16$. Решения системы замены $\begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2 \end{cases}$ — пары $(x; y) = (2; 1)$ и $(x; y) = (1; 2)$.

Вторая из систем замены — система $\begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 16 \end{cases}$ не имеет решений

20. а) $\{(1 + \sqrt{3};\ 1 - \sqrt{3});\ (1 - \sqrt{3};\ 1 + \sqrt{3})\}$;

б) $\{(-3;\ 0);\ (0;\ -3);\ (1;\ 2);\ (2;\ 1);\ (-2;\ 1);\ (1;\ -2)\}$.

Решение. После замены $x + y = u$, $xy = v$ система принимает вид: $\begin{cases} u^2 + v^2 - 2v = 9, \\ u(v - 1) = 3. \end{cases}$ Подставляя $u = \frac{3}{v-1}$ в первое уравнение системы, получим уравнение $v^4 - 4v^3 - 4v^2 + 16v = 0$, откуда $v = 0$, $v = -2$, $v = 2$ или $v = 4$. Соответствующие значения u равны: -3; -1; 3; 1.

21. а) $\{(\sqrt{17};\ \sqrt{17});\ (-\sqrt{17};\ -\sqrt{17});\ (5;\ 3);\ (-3;\ -5)\}$;

б) $\left\{\left(\frac{-1-\sqrt{13}}{2};\ \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right);\ \left(\frac{-1+\sqrt{13}}{2};\ \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)\right\}$.

Указание. Сделайте замену: $x - y = u$, $xy = v$.

22. а) $\left\{\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2};\ \frac{-1-\sqrt{13}}{2}\right);\ \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2};\ \frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right);\right.$ $\left(\frac{3(3+\sqrt{69})}{10};\ \frac{3+\sqrt{69}}{10}\right);\ \left.\left(\frac{3(3-\sqrt{69})}{10};\ \frac{3-\sqrt{69}}{10}\right)\right\}$; б) $\{(1;\ 1);\ (-3;$ $-3);\ \left(\frac{(1+\sqrt{5})(-1-\sqrt{5}\pm\sqrt{18+2\sqrt{5}})}{4};\ \frac{-1-\sqrt{5}\pm\sqrt{18+2\sqrt{5}}}{2}\right);$ $\left.\left(\frac{(1-\sqrt{5})(\sqrt{5}-1\pm\sqrt{18-2\sqrt{5}})}{4};\ \frac{\sqrt{5}-1\pm\sqrt{18-2\sqrt{5}}}{2}\right)\right\}$.

Решение. Если $y = 0$, то и $x = 0$ (из первого уравнения); эти значения не удовлетворяют второму уравнению. При $y \neq 0$ поделим обе части первого из уравнений на y^3. При этом для переменной $t = \frac{x}{y}$ получим уравнение $t^2 - 2t + 1 = 0$, корни которого $t = 1$, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ и $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. После подстановок $x = y$, $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot y$ и $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}\cdot y$ получим совокупность трех квадратных уравнений относительно y.

23. б) $\left\{(\sqrt[4]{8};\ \sqrt[4]{2});\ (-\sqrt[4]{8};\ -\sqrt[4]{2});\ \left(\sqrt[4]{\frac{27}{4}};\ \sqrt[4]{\frac{3}{4}}\right);\ \left(-\sqrt[4]{\frac{27}{4}};\right.\right.$ $\left.\left.-\sqrt[4]{\frac{3}{4}}\right)\right\}$.

24. а) $\{(0;\ 0);\ (1;\ 1)\}$; б) $\left\{(0;\ 0);\ \left(\frac{2}{3};\ \frac{2}{3}\right);\ \left(\frac{3+2\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}};\ \frac{2+\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}}\right);\right.$ $\left.\left(\frac{3-2\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}};\ \frac{2-\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}}\right)\right\}$. Указание. После «перекрестного» перемножения частей обоих уравнений получается однородное уравнение. После деления обеих частей этого уравнения на y^3 получается уравнение $t^3 + 3t^2 - 2t - 2 = 0$ относительно переменной $t = \frac{x}{y}$, имеющее корни $t = 1$; $t = 2 + \sqrt{2}$; $t = 2 - \sqrt{2}$.

25. а) $\{(2; 6); (-2; -6)\}$; б) $\{(3; 2); (-3; -2)\}$.

26. а) $\{2\}$; указание. Замена $\sqrt[3]{10 - x} = u$, $\sqrt[3]{3 - x} = v$ сводит уравнение к системе: $\begin{cases} u - v = 1, \\ u^3 - v^3 = 7, \\ v \geqslant 0; \end{cases}$

б) $\{1; 2\}$. Указание. Замена $\sqrt[3]{2 - x} = u$; $\sqrt{x - 1} = v$.

27. а) $\{-40; 40\}$; б) $\{-0{,}5; 0{,}5\}$.

28. а) $\left\{1; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$. Указание. Замена $y = \sqrt[3]{2x - 1}$.

§ 4

1. а) $\{-1\}$. Решение. После почленного возведения уравнения в куб и подстановки $-\sqrt[3]{1 - x}$ вместо $\sqrt[3]{x + 1} - \sqrt[3]{-3x - 1}$ получаем: $x + 1 + 3x + 1 + 3\sqrt[3]{x + 1}\sqrt[3]{-3x - 1} \cdot \sqrt[3]{1 - x} = x - 1$, откуда $-\sqrt[3]{x + 1}\sqrt[3]{-3x - 1}\sqrt[3]{1 - x} = x + 1$ и

$$-(x + 1)(3x + 1)(x - 1) = (x + 1)^3.$$

Следовательно, либо $x = -1$, либо $3x^2 - 2x - 1 = -x^2 - 2x - 1$, т. е. $x = 0$. Из двух полученных значений годится только $x = -1$; б) $\{8\}$.

3. а) $\left\{\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}$; б) $\left\{\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right\}$; в) $\{2\}$.

4. а) $\left\{\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right\}$; б) $\left\{\frac{-5+\sqrt{13}}{2}\right\}$.

5. а) $\left\{\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$; б) $\left\{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$. Решение. Будем переходить к равносильным смешанным системам: $\sqrt{2 - \sqrt{2 + x}} = x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 - \sqrt{2 + x} = x^2 \\ x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2 + x} = 2 - x^2 \\ x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + x = (2 - x^2)^2 \\ x \geqslant 0, \\ x^2 \leqslant 2. \end{cases}$$

Таким образом, достаточно решить уравнение $x^4 - 4x^2 - x + 2 = 0$ и из полученных корней этого уравнения выбрать удовлетворяющие условию $0 \leqslant x \leqslant \sqrt{2}$. Угадывая (например, по теореме о рациональных корнях многочлена с целыми коэффициентами) корни $x = 2$ и $x = -1$, получаем: $x^4 - 4x^2 - x + 2 = (x + 1)(x - 2) \times (x^2 + x - 1)$. Корни уравнения $x^2 + x - 1 = 0$ — числа $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ и $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. Из четырех полученных значений указанному условию удовлетворяет только $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

6. а) $\frac{14+\sqrt{7}}{2}$; б) $1-\frac{\sqrt{97}}{8}$. Решение. $\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1}=$ $=0{,}5 \Leftrightarrow \sqrt{3-x}=\frac{1}{2}+\sqrt{x+1} \Leftrightarrow 3-x=\frac{1}{4}+\sqrt{x+1}+x+$

$$+1 \Leftrightarrow \frac{7}{4}-2x=\sqrt{x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{7}{4}-2x\right)^2=x+1 \\ x \leqslant \frac{7}{8} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{49}{16}-7x+4x^2=x+1 \\ x \leqslant \frac{7}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x+\frac{33}{64}=0 \\ x \leqslant \frac{7}{8} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \pm \frac{\sqrt{97}}{8} \\ x \leqslant \frac{7}{8} \end{cases} \Leftrightarrow x=1-\frac{\sqrt{97}}{8}.$$

9. Так как $x-1-2\sqrt{x-2}=(\sqrt{x-2}-1)^2$, $x+7-$ $-6\sqrt{x-2}=(\sqrt{x-2}-3)^2$, то уравнение можно записать в виде $|y-1|+|y-3|=2$, где через y обозначен $\sqrt{x-2}$. Корни полученного уравнения заполняют промежуток $[1; 3]$. Следовательно, $1 \leqslant x-2 \leqslant 3$, откуда $3 \leqslant x \leqslant 11$. Ответ. $[3; 11]$.

10. $\left\{\frac{25}{16}\right\}$. Указание. После тождественных преобразований уравнение приводится к виду: $\sqrt{x}-\sqrt{x-1}=0{,}5$.

12. а) $\{1\}$; б) $\{1+\sqrt{2}; 1\}$. **13.** а) $[-2; 0]$; б) $\left\{-\frac{1}{2}; -2\frac{1}{2}\right\}$.

14. а) $\{1{,}5\}$; б) $\{0{,}4; 2\}$. **15.** а) $\{0{,}5\}$; б) $\left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1\frac{1}{2}; 2\frac{1}{2}\right\}$.

16. а) $\left\{\frac{\pi}{2}+2\pi k; \pi+2\pi k \mid k \in \boldsymbol{Z}\right\}$. Указание. $\sqrt{1+\cos x}=$ $=\sin x \Leftrightarrow \begin{cases} 1+\cos x=\sin^2 x \\ \sin x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+\cos x=1-\cos^2 x \\ \sin x \geqslant 0 \end{cases}$

б) $\left\{\pi k; -\frac{3\pi}{4}+2\pi k \mid k \in \boldsymbol{Z}\right\}$. Указание. $\sqrt{2\sin 2x}+2\sin x=$ $=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4\sin x\cos x=4\sin^2 x \\ \sin x \leqslant 0. \end{cases}$

17. $\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k; \frac{\pi}{6}+2\pi k \mid k \in \boldsymbol{Z}\right\}$. Указание. Исходное уравнение равносильно смешанной системе: $\begin{cases} \sin 2x=\cos x, \\ \cos x \geqslant 0, \end{cases}$

20. а) $\{4\}$; б) $\varnothing$. **21.** а) $\{3\}$; б) $\left\{\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

22. а) $\{3\}$; б) $\{3\}$. **23.** а) $\{2\}$; б) $\{4\}$.

24. а) $\left\{\frac{\pi}{4}+2\pi k \mid k \in \boldsymbol{Z}\right\}$. Указание. $\lg\sin x=\lg\cos x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\sin x=\cos x,\\ \sin x>0;\end{cases}$. б) $\left\{\frac{\pi}{12}+2\pi k;\ \frac{5\pi}{12}+2\pi k\mid k\in\boldsymbol{Z}\right\}$. Указание. $\log_2\sin x+\log_2\cos x=-2\Leftrightarrow\begin{cases}\sin x=\frac{1}{4\cos x}\\ \sin x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin 2x=\frac{1}{2}\\ \sin x>0.\end{cases}$

25. а) $\{\operatorname{arctg}2+2\pi k\mid k\in\boldsymbol{Z}\}$;

б) $\left\{\arcsin\frac{-1+\sqrt{5}}{2}+2\pi k\mid k\in\boldsymbol{Z}\right\}$. Указание. $\cos x>0$ и $\sin x=\cos^2 x$.

27. а) $\{21, 25\}$; б) $\{14\}$. 28. а) $\{4\}$; б) $\{\sqrt{2}\}$.

29. а) $\{\log_2 3\}$. Указание. После замены $y=2^x$ и потенцирования уравнение принимает вид: $y^2+15y+27=(4y-3)^2$. Корни этого уравнения — числа 3 и $-0{,}4$; б) $\{0{,}1;\ 1\}$; указание: замена $y=\lg x$, тогда $3y(2+y)=3y$, откуда $y=0$ или -1.

30. а) $\{2\}$; б) сделаем замену $\log_x 2=y$; получим уравнение $\frac{1}{y}\sqrt{\frac{1}{2}-y}=1\Leftrightarrow\begin{cases}y^2=0{,}5-y\\ y>0\end{cases}\Leftrightarrow y=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$.

Ответ. $\left\{2^{\frac{2}{\sqrt{3}-1}}\right\}$.

32. а) $\{3\}$; б) $\{1;\ \sqrt{2}\}$. 33. а) $\{0;\ 1;\ 2\}$; б) $\{0;\ 1\}$.

34. а) $\{2-\sqrt{3{,}5};\ 2+\sqrt{3{,}5}\}$; б) $\left\{\frac{5}{8};\ -\frac{1}{2}\right\}$.

35. а) 3; $3^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$; $3^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}$; б) $\varnothing$.

36. а) $\{2\pi k\mid k\in\boldsymbol{Z}\}$; б) $\left\{(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k;\ \frac{\pi}{2}+2\pi k\mid k\in\boldsymbol{Z}\right\}$.

§ 5

1. а) $\{-2\}\cup[-1;\ 1]\cup]3;\ \infty[$; б) $]-\infty;\ -4[\ \cup\ ]-\sqrt{2};\ -1[\ \cup\ ]1;\ \sqrt{2}[$.

2. а) $]0;\ 0{,}5]\cup[2;\ \infty[$; б) $]0;\ 1[$.

3. а) $]-\infty;\ -2[\ \cup\left]\frac{1}{4};\ 1\right]\cup[4;\ \infty[$; б) $]-4;\ -3[\ \cup\ ]-2{,}5;\ -2[$.

6. а) $[4;\ \infty[$; б) $\left[0;\ \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right[$; в) $]4;\ \infty[$.

8. а) $\left]\frac{-5+\sqrt{13}}{2};\ 1\right]$; б) $\left]\frac{-3-\sqrt{5}}{2};\ 1\right]$.

9. в) $[-0{,}5;\ 0[\ \cup\ ]0;\ 0{,}5]$.

10. а) $\varnothing$; б) $\left[\frac{14+\sqrt{7}}{2};\ 9\right]$.

11. а) $\varnothing$; б) $\left]\frac{2}{\sqrt{5}};\ 1\right]$.

13. а) $]2;\ 3]$; б) $\left]-1;\ \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right[\ \cup\left]\frac{1+\sqrt{5}}{2};\ 2\right[$.

14. а) $]0;\ 1[\ \cup\ ]2;\ \infty[$; б) $]2;\ 3]$.

15. а) $]2;\ 3[$; б) $]3;\ 4[$. 16. б) $[\sqrt{6}-1;\ 2[\ \cup\ ]2;\ 5]$.

17. а) $\left[-\sqrt{8};\ -1\right[\cup \left[\frac{-2+\sqrt{44}}{5};\ 1\right[$; б) $]-3;\ 1[\,\cup\,]3;\ 4[$.

19. а) $]-\infty;\ 0[$; б) $[1;\ 2]$. **20.** а) $]-\infty;\ -1[$.

21. а) $]-\infty;\ 0[\,\cup\,]3;\ \infty[$; б) $\left]-\frac{3}{\sqrt{5}};\ -1\right[\cup \left]1;\ \frac{3}{\sqrt{5}}\right[$.

22. а) $\left]\frac{\pi}{3}+2\pi k;\ \frac{5\pi}{3}+2\pi k\right[,\ k\in \boldsymbol{Z}$;

б) $]-\pi+2\pi k;\ \pi+2\pi k[,\ k\in \boldsymbol{Z}$;

в) $\left]-\frac{\pi}{4}+\pi k;\ \frac{\pi}{4}+\pi k\right[,\ k\in \boldsymbol{Z}$;

г) $\left]\operatorname{arctg} 10+\pi k;\ \frac{\pi}{2}+\pi k\right[,\ k\in \boldsymbol{Z}$.

23. а) $\left]1-\frac{\pi}{3}+2\pi k;\ 1+\frac{\pi}{3}+2\pi k\right[,\ k\in \boldsymbol{Z}$;

б) $\left]-\frac{1}{2}-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2};\ -\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}\right[,\ k\in \boldsymbol{Z}$;

в) $\left]\frac{\pi}{12}+\pi k;\ \frac{5\pi}{12}+\pi k\right[,\ k\in \boldsymbol{Z}$.

25. а) $\left[2\pi k;\ 2\pi k+\frac{3\pi}{2}\right],\ k\in \boldsymbol{Z}$; указание: $\cos x-\sin x = \sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$;

б) $\left[-\arccos\frac{1}{5}+\arccos\frac{3}{5}+2\pi k;\ \arccos\frac{1}{5}+\arccos\frac{3}{5}+2\pi k\right]$, $k\in \boldsymbol{Z}$; указание: $3\cos x+4\sin x = 5\cos(x-\alpha)$, где $\alpha = \arccos\frac{3}{5}$;

в) $\left]\frac{1}{2}\arccos\frac{2}{\sqrt{5}}+\frac{\pi}{4}+\pi k;\ \frac{1}{2}\arccos\frac{2}{\sqrt{5}}+\frac{3\pi}{4}+\pi k\right[,\ k\in \boldsymbol{Z}$; указание: $\sin 2x+2\cos 2x = \sqrt{5}\cos\left(2x-\arccos\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

26. а) $\left]-\frac{\pi}{2}+\pi k;\ \pi k\right],\ k\in \boldsymbol{Z}$; указание: $\sin x \geqslant \operatorname{tg} x \Leftrightarrow \left\{\frac{\sin x(\cos x-1)}{\cos x}\geqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases}\sin x\geqslant 0\\ \cos x<0\end{cases}\right.$ или $\begin{cases}\sin x\leqslant 0\\ \cos x>0;\end{cases}$

б) $\left[-\frac{\pi}{3}+2\pi k;\ 2\pi k\right] \cup \left[\frac{\pi}{3}+2\pi k;\ \pi+2\pi k\right],\ k\in \boldsymbol{Z}$; указание: $\sin 2x\leqslant \sin x \Leftrightarrow 2\sin x\cos x\leqslant \sin x \Leftrightarrow \sin x(2\cos x-1)\leqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases}\sin x\geqslant 0\\ \cos x\leqslant 0{,}5\end{cases}$ или $\begin{cases}\sin x\leqslant 0\\ \cos x\geqslant 0{,}5.\end{cases}$

27. а) $\left]2\pi k;\ \frac{\pi}{6}+2\pi k\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}+2\pi k;\ \pi+2\pi k\right[,\ k\in \boldsymbol{Z}$; указание: $\log_2 \sin x+1\leqslant 0 \Leftrightarrow \log_2\sin x\leqslant -1 \Leftrightarrow \begin{cases}\sin x\leqslant \frac{1}{2}\\ \sin x>0;\end{cases}$

б) $\left]2\pi k;\ \frac{\pi}{6}+2\pi k\right[\cup \left]\frac{\pi}{3}+2\pi k;\ \frac{\pi}{2}+2\pi k\right[,\ k\in \boldsymbol{Z}$; указан и е: $\log_{2\cos x} 2\sin x < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < 2\cos x < 1 \\ 2\sin x > 1 \end{cases}$ или $\begin{cases} 2\cos x > 1 \\ 0 < 2\sin x < 1. \end{cases}$

28. б) $\left]2\pi k;\ \frac{\pi}{2}+2\pi k\right]$, $k \in \boldsymbol{Z}$; у к а з а н и е: $\cos x^{\sin x} < 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \geqslant 0 \\ \sin x > 0. \end{cases}$

29. а) $]-\infty;\ 0[\ \cup\ ]2-\log_2 3;\ 1[$. Р е ш е н и е. Замена $y = 2^{x-1}$ приводит неравенство к виду $\frac{1}{2y-1} < \frac{1}{1-y} \Leftrightarrow \frac{2-3y}{(1-y)(2y-1)} < 0$, откуда $-\infty < y < \frac{1}{2}$ или $\frac{2}{3} < y < 1$; б) $]-\infty;\ -2[$. Р е ш е н и е. После деления обеих частей неравенства на положительное (при любом x) выражение 3^{2x} и замены $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ получаем неравенство $4y^2 - y - 18 > 0$. Его решения — промежутки $]-\infty;-2[$ и $\left]\frac{9}{4};\ \infty\right[$. Так как по смыслу замены $y > 0$, то первому промежутку не соответствует никаких x; осталось решить неравенство $\left(\frac{2}{3}\right)^x > \frac{9}{4}$.

30. а) $]0;\ 10^{-\sqrt{\lg 5}}[;\ ]10^{\sqrt{\lg 5}};\ \infty[$;

б) $[2^{-\sqrt{2}};\ 0{,}5[\ \cup\ ]1;\ 2^{\sqrt{2}}]$; у к а з а н и е: перейдите к логарифмам по основанию 2, введите переменную $y = \log_2 x$ и примените метод интервалов.

31. а) $]0;\ \sqrt[3]{0{,}5}]\ \cup\ [2;\ \infty[$; б) $]0{,}04;\ 1[$.

32. а) У к а з а н и е. $\sin x \leqslant \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

33. а) $\left]2\pi k;\ \frac{\pi}{2}+2\pi k\right[$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Р е ш е н и е. Обозначим $\sin x + \cos x$ через y, отметим, что $y = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$. Тогда $y + y^2 - 1 > 1$; $y^2 + y - 2 > 0$, откуда $y > 1$ или $y < -2$. Неравенство $\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) < -2$ не имеет решений, решения неравенства $1 < \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ удовлетворяют условию $-\frac{\pi}{4} + 2\pi k < x - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$;

б) $\left]-\frac{3\pi}{4}+2\pi k;\ \frac{\pi}{4}+2\pi k\right[$, $k \in \boldsymbol{Z}$. У к а з а н и е. Пусть $y = \cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. Тогда $2y - y^2 > 0$.

34. б) $\left]\frac{\pi}{4}+\pi k;\ \pi+\pi k\right[$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Р е ш е н и е. $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ являются решениями неравенства. При $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$ замена

$y = \operatorname{tg} x$ приводит неравенство к виду: $\frac{(1-y)(2y^2-y+1)}{y(y^2+1)} < 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \frac{1-y}{y} < 0$, откуда $y < 0$ или $y > 1$.

35. б) $\left]\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2} + 2\pi k;\ \pi + 2\pi k\right]$, $k \in \mathbf{Z}$.

36. а) $\left[-\frac{7\pi}{6} + 2\pi k;\ \frac{\pi}{6} + 2\pi k\right]$, $k \in \mathbf{Z}$;

б) $\left]2\pi k;\ \frac{\pi}{4} + 2\pi k\right[\cup \left]\arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2} + 2\pi k;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right[$, $k \in \mathbf{Z}$.

37. а) $]-1;\ 0[\ \cup\ ]1;\ \infty[$; указание: $x^2 \cdot 2^x + 1 > x^2 + 2^x \Leftrightarrow (x^2-1)(2^x-1) > 0$; б) $[0;\ \log_3^2 2[\ \cup \left]\frac{3}{2};\ \infty\right[$.

38. а) $\left]-\frac{3\pi}{2} + 2\pi k;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right[$, $k \in \mathbf{Z}, k \leqslant -1$ и промежуток $\left]-\frac{3\pi}{2};\ 1\right[$; указание: $x \sin x + 1 > x + \sin x \Leftrightarrow (\sin x - 1)(x - 1) > 0$; б) указание: неравенство равносильно совокупности систем:

$$\begin{cases} 0 < x < 4, \\ \operatorname{tg} x < 1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x > 4, \\ \operatorname{tg} x > 1. \end{cases}$$

39. б) $\left]\frac{\pi k}{2};\ \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2};\ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}\right[$, $k \in \mathbf{Z}$.

Указание. $\sin x \cos 5x < \sin 9x \cos 3x \Leftrightarrow \sin 6x - \sin 4x < \sin 6x + \sin 12x \Leftrightarrow \sin 4x + \sin 12x > 0 \Leftrightarrow 2 \sin 8x \cos 4x > 0 \Leftrightarrow$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 4x > 0, \\ \cos 4x \neq 0. \end{cases}$$

§ 6

1. а) $\varnothing$. Решение. Область допустимых значений переменной — $\varnothing$, так как эта область совпадает с множеством решений системы неравенств:

$$\begin{cases} x - 2 \geqslant 0, \\ 2x - 1 \geqslant 0, \\ 3 - 2x \geqslant 0; \end{cases}$$

б) $\{1\}$. Решение. Область допустимых значений переменной состоит из одной точки: $x = 1$. Поэтому для решения уравнения достаточно проверить, удовлетворяет ли $x = 1$ исходному уравнению.

2. а) $]-\infty;\ -1]\ \cup\ [1;\ \infty[$. Указание. Область определения неравенства: $]-\infty;\ -1]\ \cup\ [1;\ \infty[$, причем в области определения неравенство истинно при любом x;

б) $]3;\ \infty[$. Указание. Область определения неравенства: $]-\infty;\ -3[\ \cup\ ]3;\ \infty[$. При $x < -3$ неравенство обращается в ложное высказывание, а при $x > 3$ — в истинное.

3. а) $[1; \infty[$; б) $]-\infty; -1] \cup [1; \infty[$.

4. а) $]-\infty; 1]$; б) $[1; \infty[$. Указание. При $x \geqslant 1$ (т. е. в области определения неравенства) неравенство обращается в истинное высказывание, так как при таких x имеем: $x \geqslant \sqrt{x}$ и $2^x \geqslant 2$.

5. а) $]-\infty; 1]$; указание: при $x \in]-\infty; 1]$ (области определения неравенства) имеем: $2^{\sqrt{1-x}} \geqslant 2^0 = 1 \geqslant x$;

б) $]0; 1]$; указание: при $x \in]0; 1]$ (области определения неравенства) имеем: $2^{\sqrt{1-x}} \geqslant 2^0 = 1 > 0 > x \lg x$.

6. а) $\{0\}$; б) $[1; 2[$.

7. а) $\left\{\frac{\pi}{2} + 2\pi k | k \in Z, k \geqslant 7\right\}$. Решение. Область определения неравенства состоит из точек, в которых $\sin x = 1$, т. е. это множество $\left\{\frac{\pi}{2} + 2\pi k | k \in Z\right\}$. В области определения должно быть выполнено неравенство $0 < \frac{\pi}{2} + 2\pi k - 13\pi$, откуда $k \geqslant 7$;

б) $]-\infty; -2[\cup]2; \infty[$.

8. а) $\{1\}$; указание: так как $x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 > 1$ при $x \neq 1$, то область определения уравнения состоит только из одной точки: $x = 1$; б) $[2; \infty[$; указание: область определения находится из системы $\begin{cases} |x| \geqslant 1 \\ \left|\frac{2}{x}\right| \leqslant 1 \end{cases}$, решением которой служит промежуток $[2; \infty[$. При $x \geqslant 2$ имеем: $\arcsin \frac{2}{x} > 0$, $\sqrt{x-1} \geqslant 1$, поэтому исходное неравенство обращается в истинное высказывание.

9. а) $\{1\}$; решение: левая часть при любом x из области определения не меньше 2; правая часть при $x < 1$ строго меньше 2; если же $x > 1$, то правая часть больше левой, так как при таких x имеем: $\frac{1}{x^2} < 1$, $x^2 < x^{17}$; б) $\varnothing$; указание: правая часть по модулю не меньше 2, а левая (по модулю) не больше 1.

10. а) $\{2\pi k | k \in Z\}$; указание: необходимо и достаточно, чтобы одновременно $\cos 3x = 1$ и $\cos^6 x = 1$; б) $\{\pi k | k \in Z\}$; указание: необходимо и достаточно, чтобы одновременно $\sin 2x = 0$ и $\cos^4 3x = 1$, т. е. $x = \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$ и $x = \frac{\pi l}{3}$, $l \in Z$.

11. а) $\{2\pi k | k \in Z\}$; указание: в силу ограниченности функции косинус уравнение равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} \cos x = 1, \\ \cos 10x = 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos x = -1, \\ \cos 10x = -1; \end{cases}$$

б) $\left\{\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k | k \in Z\right\}$; указание: $\sin^5 x + \cos^6 x \leqslant \sin^2 x + \cos^2 x = 1$, причем равенство достигается только при $\sin^5 x = \sin^2 x$ и $\cos^6 x = \cos^2 x$.

12. а) $\left\{\frac{\pi}{4}+2\pi k \mid k\in \boldsymbol{Z}\right\}$; б) $\{-2\}$; указание: x^2+4x+ $+7=(x+2)^2+3>3$ при $x\neq -2$, поэтому при таких x имеем: $0<\frac{\pi}{x^2+4x+7}<\frac{\pi}{3}$; $0<\operatorname{tg}\frac{\pi}{x^2+4x+7}<\sqrt{3}$, с другой стороны, правая часть по модулю не меньше $\sqrt{3}$, следовательно, при $x\neq -2$ уравнение не имеет решений.

13. $\{1\}$. **14.** а) $\left\{\frac{7}{3}\right\}$; решение: так как $x=\{x\}+[x]$, то уравнение можно записать в виде $\{x\}=5-2x$. Так как $0\leqslant\{x\}<1$ для любого x, то (для решения уравнения) должно быть выполнено неравенство $0\leqslant 5-2x<1$, откуда $2<x\leqslant 2{,}5$. Следовательно, $\{x\}=x-2$ и уравнение принимает вид: $x-2=$ $=5-2x$, откуда $x=\frac{7}{3}$. Осталось проверить, что полученное значение — корень уравнения; б) $\{4{,}5;\ 5\}$.

15. а) $\{\sqrt{5}\}$; б) $\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$. Решение. Так как $x^2+x+1=$ $=(x+0{,}5)^2+0{,}75>0$ для любого x, то при $[x]\leqslant 0$ корней нет. При $[x]\geqslant 2$ получаем: $[x]\,(x^2+x+1)>2\cdot(4+2+1)=$ $=14$. Следовательно, $[x]=1$ и уравнение принимает вид: x^2+ $+x+1=4$, откуда $x=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$, причем только одно из полученных значений удовлетворяет условию $[x]=1$.

16. а) $\{10^{-\sqrt{2}}\}$; б) $\left\{-\arcsin\frac{2}{3}+\pi;\ \pi\right\}$. Решение. В силу ограниченности функции $3\sin x$ получаем: $0\leqslant 6-2[x]\leqslant 3$, откуда $1{,}5\leqslant[x]\leqslant 3$, т. е. $[x]=2$ или $[x]=3$.

I. Пусть $x=2$. Уравнение принимает вид: $3|\sin x|=2$, откуда $x=\pm\arcsin\frac{2}{3}+\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$. Из полученных значений промежутку $[2;\ 3[$ принадлежит только $x=\pi-\arcsin\frac{2}{3}$.

II. Пусть $[x]=3$. Уравнение принимает вид: $3|\sin x|=0$, откуда $x=\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$. Из полученных значений промежутку $[3;\ 4[$ принадлежит только $x=\pi$.

17. а) $\left\{\frac{\pi}{6}+k \mid k\in\boldsymbol{Z}\right\}$; решение: обозначим $\{x\}$ через y. Тогда $\sin y=\pm\frac{1}{2}$, откуда $y=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. Так как по смыслу замены $0\leqslant y<1$, то из найденных значений подходит только $y=\frac{\pi}{6}$. Итак, $\{x\}=\frac{\pi}{6}$, откуда $x=\frac{\pi}{6}+k$, $k\in\boldsymbol{Z}$;

б) $\varnothing$; решение: для любого y имеем: $\operatorname{arctg} y<\frac{\pi}{2}<\sqrt{3}$.

18. а) $\{-1\}$; б) $\{2\}$.

20. а) При любом x значения левой части не больше 1, значения правой части не меньше 1, поэтому неравенство может нарушаться только при тех x, при которых $\sin 2^{\frac{x}{\pi}} = 2^{|\sin x|} = 1$. Однако $2^{|\sin x|} = 1$ при $x = \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; при этих значениях $\sin 2^{\frac{x}{\pi}}$ строго меньше 1 (так как $2^k \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ ни при каких целых k и n); б) при любом x значение левой части не больше 2, причем равенство достигается только в точках $\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, значение правой части не меньше $\sqrt{2}$, причем равенство достигается только в точках πn, $n \in \boldsymbol{Z}$. Для окончания доказательства осталось заметить, что пересечение множеств

$$\left\{\frac{\pi}{4} + \pi k \mid k \in \boldsymbol{Z}\right\} \text{ и } \{\pi n \mid n \in \boldsymbol{Z}\}$$

пусто.

21. а) Значения левой части не больше 1, а правой — не меньше 1; б) значения левой части не больше, чем $\frac{4}{3}\sin^2 1 < \frac{4}{3}\sin^2\frac{\pi}{3} = 1$, а значения правой части — не меньше 1.

22. а) $\sin(\{x\} + 1) - \sin\{x\} = 2\sin\frac{1}{2}\cos\left(\{x\} + \frac{1}{2}\right) > 2\cos\left(1 + \frac{1}{2}\right)\sin\frac{1}{2} > 2\cos\frac{\pi}{2}\sin\frac{1}{2} = 0$, так как $\{x\} < 1$ и функция cos убывает на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$;

б) $\sin(\sin x) < \sin 1 < \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

23. а) $]1; \infty[$. Указание. Функция $y = x^5 + x^4 + 2\sqrt{x} - 4$ возрастает в своей области определения — промежутке $[0; \infty[$ и обращается в нуль при $x = 1$; б) $[1; \infty[$. Указание. Функция $y = x^{10} + \sqrt{x-1} - 1$ возрастает в своей области определения — промежутке $[1; \infty[$ и обращается в нуль при $x = 1$.

24. а) $\left]\frac{4+\sqrt{7}}{8}; 1\right]$. Решение. Запишем неравенство в виде $f(x) > 0$, где $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{1-x} - 0{,}5$. Так как $f(x)$ возрастает в своей области определения — промежутке $[0; 1]$ и $f(0) < 0$, $f(1) > 0$, то множеством решений неравенства служит промежуток $]x_0; 1]$, где x_0 — корень уравнения $f(x) = 0$. Возведем обе части уравнения $\sqrt{1-x} = \sqrt{x} - \frac{1}{2}$: $2x - \sqrt{x} - \frac{3}{4} = 0$. Решая получившееся квадратное уравнение относительно $y = \sqrt{x}$, получаем, что $y = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{4}$, и так как $y \geqslant 0$, то годится только корень $y = \frac{1+\sqrt{7}}{4}$, откуда следует, что $x_0 = \frac{4+\sqrt{7}}{8}$. Отметим, что в данном случае проверку можно не делать, так как известно, что корень уравнения $f(x) = 0$ существует, а мы получили единственное «подозрительное» значение; б) $\left[\frac{2}{3}; 6\right[$.

25. а) [3; 16]. Решение. Область определения функции $y = \sqrt[4]{x-2} + \sqrt{x-3} - \sqrt{2 - \sqrt[4]{x}}$ — промежуток [3; 16], причем на этом промежутке y возрастает. Поэтому для любого $x \in [3; 16]$ выполняется неравенство $y(x) \geqslant y(3) > 0$; б)]0; 1[. Указание. Исходное неравенство равносильно неравенству $f(x) < 0$, где $f(x) = \sqrt{x}\left(\sqrt{1 + \sqrt{x} + \sqrt{x^3}} - 1\right) + 1 - \sqrt{3}$; $D(f) = [0; \infty[$; на $D(f)$ функция f возрастает и $f(1) = 0$.

26. а) [1; ∞[; б) [1; 2[.

27. а)]—∞; 1]. Решение. Функция $f(x) = \sqrt{1-x} + 3 - x - 2^x$ убывает в своей области определения — промежутке]—∞; 1]. Следовательно, для любого $x \in D(f)$ выполнено неравенство $f(x) \geqslant f(1) = 0$, равносильное исходному; б)]0; 1[; в)]2; ∞[. Указание. Функция $f(x) = x^x$ возрастающая $(x^x = e^{x \ln x})$.

28. а) $\left]\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right[$. Указание. На интервале $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ функция $f(x) = \sin x - \cos 2x$ возрастает, причем $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$;

б) $\left]0; \frac{\pi}{6}\right[$. Указание. На интервале $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ функция $f(x) = 3\operatorname{tg} x - 2\cos x$ возрастает, причем $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$.

29. а) Указание. Функция $f(x) = \sqrt[4]{x^4 + 66} - x$ убывает на промежутке [0; 2], так как

$$\sqrt[4]{x^4+66} - x = \frac{\sqrt{x^4+66} - x^2}{\sqrt[4]{x^4+66} + x} = \frac{66}{\left(\sqrt[4]{x^4+66} + x\right)\left(\sqrt{x^4+66} + x^2\right)}.$$

б) Докажем более сильное неравенство $x^x > 9x$ при $x > 3$. На промежутке [3; ∞[функция $f(x) = x(x^{x-1} - 9)$ возрастает (ср. задачу 27 в)), поэтому для $x > 3$ верно неравенство $f(x) > f(3) = 0$, откуда $x^x > 9x$.

в) Функция $f(x) = \sqrt{x-1} + 3^x + \log_2 x$ возрастает на промежутке [1; 2], поэтому для $x \in [1; 2]$ справедливо неравенство $f(x) \leqslant f(2) = 11 < 13$.

30. а) Функция $f(x) = 4\operatorname{arcctg} x - \pi x$ убывает на промежутке]—∞; 1], поэтому для x из промежутка]—∞; 1[истинно неравенство $f(x) > f(1) = 0$.

31. а) $\left[-1; \frac{\sqrt{3}}{2}\right[$; б) [—1; 1]. Замечание. Переходить от неравенства $\arcsin x < \frac{2\pi}{3}$ к неравенству $\sin(\arcsin x) < \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ нельзя, так как $\frac{2\pi}{3} \notin E(\arcsin)$.

32. а) $\left]\frac{1}{2};\ \frac{2}{3}\right]$. Решение. Пусть $f(x) = \arccos(3x - 1)$, тогда $D(f) = \left[0;\ \frac{2}{3}\right]$. Так как функция arccos строго убывающая, то решениями служат $x \in D(f)$, для которых $3x - 1 > \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$; б) $\varnothing$. Указание. $-\frac{\pi}{3} \notin E(\arccos)$, причем $E(\arccos) = [0; \pi]$, а $-\frac{\pi}{3} < 0$.

33. а) $\left[-\sqrt{2+\sqrt{3}};\ \sqrt{2+\sqrt{3}}\right]$; б) $\left[2{,}1;\ 2+\sqrt{10}\right[$.

34. $[0;\ a - 2 + \sqrt{a^2+4}]$. Решение. Найдем функцию, обратную функции $y = \frac{x}{2+x} + \frac{x}{2}$. Имеем: $2x + 2x + x^2 = 4y + 2xy$, откуда $x = y - 2 + \sqrt{y^2+4}$ (перед корнем знак «плюс», так как $x \geqslant 0$). Функция $g(y) = y - 2 + \sqrt{y^2+4}$ возрастающая при $y \geqslant 0$, поэтому неравенство $y \leqslant a$ равносильно неравенству $0 \leqslant g(y) \leqslant g(a)$, т. е. $0 \leqslant x \leqslant g(a)$.

35. а) Очевидно, что любой корень уравнения $f(x) = x$ является корнем уравнения $f(f(x)) = f(x)$. Пусть теперь x_0 — корень уравнения $f(f(x)) = x$. Докажем, что $f(x_0) = x_0$. Действительно, если $f(x_0) > x_0$, то $f(f(x_0)) > f(x_0)$, а если $f(x_0) < x_0$, то $f(f(x_0)) < f(x_0)$. В обоих случаях получаем противоречие с равенством $f(f(x_0)) = f(x_0)$;

в) нет, пример: пусть $f(x) = 1 - x$, тогда $g(x) = 1 - x$ (функция f совпадает с обратной к себе функцией); уравнения $f(x) = x$ и $g(x) = x$ имеют один корень: $x = \frac{1}{2}$; уравнение $f(x) = g(x)$ имеет корнем любое действительное число.

36. а) $\left(1;\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2};\ \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$. Решение. Уравнение имеет вид: $f(f(x)) = x$, где $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}$ — строго возрастающая функция. Уравнение $f(x) = x$ равносильно уравнению $x^3 - 2x + 1 = 0$. Один из корней этого уравнения $x = 1$ и $x^3 - 2x + 1 = (x - 1)(x^2 + x - 1)$; б) при $a < -\frac{1}{4}$ корней нет; при $a = \frac{1}{4}$ один корень: $x = \frac{1}{2}$; при $-\frac{1}{4} < a \leqslant 0$ два корня: $x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4a}}{2}$; при $a > 0$ один корень: $x = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$. Решение. Уравнение имеет вид: $f(f(x)) = x$, где $f(x) = \sqrt{x+a}$ — строго возрастающая функция. Следовательно, исходное уравнение равносильно уравнению $f(x) = x$:

$$\sqrt{a+x} = x \Leftrightarrow \begin{cases} a + x = x^2, \\ x \geqslant 0. \end{cases}$$

Решая квадратное уравнение $x^2 - x - a = 0$, получаем:

а) при $D = 1 + 4a < 0$ корней нет;

б) при $D = 1 + 4a = 0$ $\left(a = -\frac{1}{4}\right)$ корень один: $x = \frac{1}{2}$, причем этот корень удовлетворяет условию $x \geqslant 0$;

в) при $D = 1 + 4a > 0$ $\left(\text{при } a > -\frac{1}{4}\right)$ два корня:

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{1 + 4a}}{2} \text{ и } x_2 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2},$$

причем из них нужно выбрать неотрицательные. Для этого достаточно решить (относительно a) неравенства $x_1 \geqslant 0$ и $x_2 \geqslant 0$. В данном случае корень x_2 всегда неотрицателен, а x_1 — только при $a \leqslant 0$.

37. а) $\{-0,5;\ 0,5\}$; б) $\left\{1;\ \frac{-1 + \sqrt{5}}{2};\ \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}\right\}$.

Указание. Уравнение имеет вид: $f(x) = g(x)$, где $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}$ — возрастающая функция, а $g(x)$ — функция, обратная функции f. Следовательно, исходное уравнение равносильно уравнению $f(x) = x$, которое мы уже решали (см. решение задачи 36 а)).

38. Для решения уравнения $f(x) = 0$, где $f(x)$ — нечетная функция, достаточно найти множество неотрицательных решений, после этого к ответу нужно добавить множество, симметричное найденному относительно точки 0 на числовой прямой; для решения неравенства $f(x) > 0$, где $f(x)$ — нечетная функция, достаточно найти множество положительных решений неравенств $f(x) > 0$ и $f(x) < 0$, для получения ответа нужно к множеству положительных решений неравенства $f(x) > 0$ добавить множество, симметричное относительно точки 0 на числовой прямой, множеству положительных решений неравенства $f(x) < 0$.

39. а) $]-\sqrt[4]{3};\ \sqrt[4]{3}[$; указание: функция $f(x) = x^8 + x^4 - 12$ четная; множество неотрицательных решений — промежуток $[0;\ \sqrt[4]{3}[$; б) $]-\sqrt{11};\ -3[\ \cup\ ]0;\ 3[\ \cup\ ]11;\ \infty[$; решение: функция $f(x) = x^3 + 2x - \frac{99}{x}$ нечетная; при $x > 0$ неравенство $f(x) > 0$ равносильно неравенству $x^4 + 2x^2 - 99 > 0$, квадратичному относительно переменной $y = x^2$, а неравенство $f(x) < 0$ — неравенству $x^4 + 2x^2 - 99 < 0$. Множество положительных решений неравенства $f(x) > 0$ — объединение промежутков $]0;\ 3[$ и $]\sqrt{11};\ \infty[$; множество положительных решений неравенства $f(x) < 0$ — промежуток $]3;\ \sqrt{11}[$.

40. а) $\{-3;\ 3\}$. Решение. Функция $f(x) = x^2 + |x| - 12$ четна, причем для $x \geqslant 0$ уравнение принимает вид: $x^2 + x - 12 = 0$, имеющее один неотрицательный корень: $x = 3$. В силу четности

$f(x)$ исходное уравнение имеет еще один корень: $x = -3$; б) $]-\sqrt{2}; \sqrt{2}[$.

41. а) $\{-1; 1\}$; б) $]-\sqrt{0,5}; \sqrt{0,5}[$.

42. а) $]-40;40[$. Указание. При $x \geqslant 0$ получаем: $f(x) = |\sqrt[4]{41+x} - \sqrt[4]{41-x}| - 2 = \sqrt[4]{41+x} - \sqrt[4]{41-x} - 2$. На промежутке $[0; \infty[$ функция $f(x)$ возрастает и обращается в нуль при $x = 40$, поэтому (для неотрицательных x) решением исходного неравенства служит промежуток $[0; 40[$. Осталось воспользоваться четностью функции $f(x)$; б) $]-\infty; -2[\cup]\sqrt{3}; 2[$.

43. а) $\left\{\left(\frac{1-\sqrt{1+4n}}{2}; \frac{1+\sqrt{1+4n}}{2}\right) \middle| n \in \boldsymbol{Z},\ n \geqslant 0\right\}$; указание: $x^2 - x = n$, где $n \in \boldsymbol{Z}$; б) $\left[k;\ k + \frac{1}{3}\right[$, $k \in \boldsymbol{Z}$; указание: на промежутке $[0; 1[$ длины, равной периоду функции $y = \{x\}$, множеством решений служит промежуток $\left[0; \frac{1}{3}\right[$;

в) $\left[k + \frac{1}{2};\ k + 1\right[$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

44. а) $\left\{\frac{1}{10^k - 1} \middle| k \in \boldsymbol{N}\right\}$; б) $\left\{\pm \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2} \middle| k \in \boldsymbol{Z}\right\}$;

в) $\{n^2 | n \in \boldsymbol{Z}\}$. Решение. Периодическая функция $f(x)$ с наименьшим положительным периодом T, возрастающая на промежутке длины T, принимает равные значения в тех точках, расстояние между которыми кратно T. Так как функция $f(x) = \{x\}$ обладает указанным свойством ($T = 1$), то $\{3 \cos x\} = \{\sqrt{x} + 3 \cos x\}$ в том и только в том случае, когда $3 \cos x - (\sqrt{x} + 3 \cos x) = n$, где $n \in \boldsymbol{Z}$. Следовательно, $x = n^2$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

45. а) $\{-1 \pm \sqrt{\pi n} \mid n \in \boldsymbol{Z},\ n \geqslant 0\}$. Указание. $x^2 + 3x + 1 - x = \pi n$, откуда $(x + 1)^2 = \pi n$, $x = -1 \pm \sqrt{\pi n}$, $n \geqslant 0$;

б) $\left]-\sqrt{2\pi k + \frac{5\pi}{6}};\ -\sqrt{2\pi k + \frac{\pi}{6}}\right[\cup \left]\sqrt{2\pi k + \frac{\pi}{6}};\ \sqrt{2\pi k + \frac{5\pi}{6}}\right[$, $k \in \boldsymbol{Z}$, $k \geqslant 0$;

в) $\left\{\frac{k-1}{2} | k \in \boldsymbol{Z}\right\}$. Решение. $\operatorname{tg}\{x^2\} = \operatorname{tg}\{(x + 1)^2\}$ в том и только в том случае, когда $\{(x + 1)^2\} - \{x^2\} = \pi n$, где $n \in \boldsymbol{Z}$ и $\{x^2\} \in D(\operatorname{tg})$. Так как множество значений функции $y = \{x\}$ — промежуток $[0; 1[$, то $n = 0$. Следовательно, $\{(x + 1)^2\} = \{x^2\}$, откуда получаем, что $(x + 1)^2 - x^2 = k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, т. е. $x = \frac{k-1}{2}$. Осталось проверить, что точки $\left\{\left(\frac{k-1}{2}\right)^2\right\}$, $k \in \boldsymbol{Z}$ входят в область определения тангенса. Но это очевидно, так как при нечетных k это точка 0, а при четных k — точка $\frac{1}{4}$.

§ 7

1. а) $\{0{,}5\}$; б) $\{-1{,}5;\ -0{,}5;\ 0{,}5;\ 1{,}5\}$; в) $\left\{-\frac{2}{3}\right\}$.

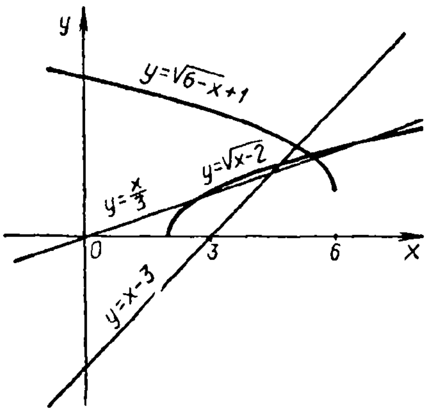
2. а) $[3;\ 4[$; б) $\{n \mid n \in \mathbf{Z}\}$; в) $\left\{\frac{1}{2} + n \mid n \in \mathbf{Z}\right\}$.

4. а) 1; б) 2; в) 1 (рис. 113). **5.** а) 3; б) 2; в) 4 (рис. 114).

6. а) 2; б) 3; в) 4 (рис. 115). **7.** а) 3; б) 2; в) 19 (рис. 116).

8. а) $\left]1\frac{2}{3};\ 1\frac{5}{7}\right] \cup \left[2\frac{2}{5};\ 2\frac{1}{2}\right[$; б) $\left]1\frac{7}{9};\ 1\frac{4}{5}\right] \cup \left[2\frac{1}{4};\ 2\frac{2}{7}\right[$.

Р е ш е н и е. Прямая $y = ax$ пересекает график функции $y = 2[x]$ над промежутком $[n;\ n+1[$, где $n \neq 0$, если угловой коэффициент a заключен между числами $\frac{2n}{n}$ и $\frac{2n}{n+1}$, т. е. принадлежит промежутку



24

Рис. 113

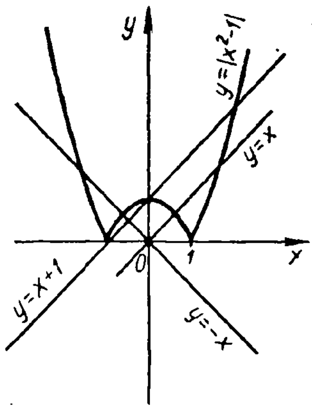


Рис. 114

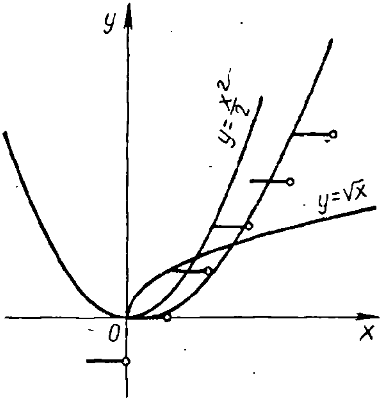


Рис. 115

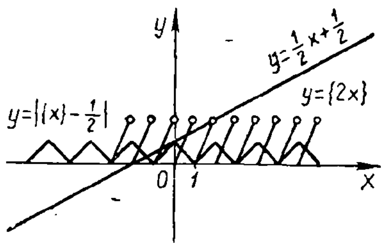


Рис. 116

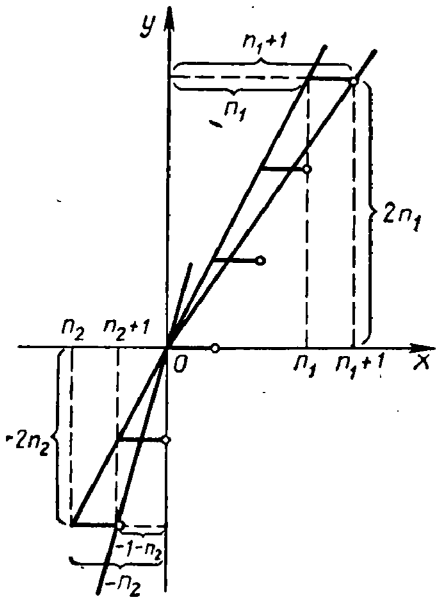


Рис. 117

$\left]2-\frac{2}{n+1};\ 2\right]$ при положительном n и промежутку $\left[2;\ 2-\frac{2}{n+1}\right[$ при отрицательном n (рис. 117). При $n=0$ для любого a есть точка пересечения графиков — точка $(0;\ 0)$. Далее, если прямая $y=ax$ (где $a\neq 2$) пересекает график $y=2\ [x]$ над промежутком $[n;\ n+1[$ при каком-либо n_0, то она пересекает этот график над всеми промежутками $[n;\ n+1[$ при n, заключенным между 0 и n_0, и не пересекает график над промежутками, соответствующими n знака, противоположного n_0 (это видно из полученных формул). Таким образом, в задаче а) остается выбрать a так, чтобы прямая $y=ax$ пересекала отрезок, соответствующий $n=5$ $\left(\text{т. е. } a\in\left]1\frac{2}{3};\ 2\right]\right)$, и не пересекала график над промежутком, соответствующим $n=6$ $\left(\text{т. е. } a\notin\left]1\frac{5}{7};\ 2\right]\right)$, или же пересекала график над отрезком, соответствующим $n=-5$ $\left(a\in\left[2;\ 2\frac{1}{2}\right[\right)$, и не пересекала график над отрезком, соответствующим $n=-6$ $\left(\text{т. е. } a\notin\left[2;\ 2\frac{2}{5}\right[\right)$.

10. а) $\{2\}$; б) $\{-1\}$. **11.** а) $\{2\}$; б) $\{3\}$.

12. а) $\{2\}$; б) $\{2\}$; в) $\{-1\}$; указание: данное уравнение равносильно уравнению $f(x)=5$, где $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x+\left(\frac{1}{3}\right)^x$, а функция $f(x)$ строго убывающая.

13. а) $\{0\}$; б) $\{0{,}25\}$; в) $\{2\}$; решение: интервал $]0;\ 1[$ не содержит корней уравнения (левая часть отрицательна, а правая — положительна). На промежутке $]1;\ \infty[$ функция $y=\log_x 4$ строго убывает, а функция $y=x$ строго возрастает.

14. а) $\{2\}$; б) $\{-2\}$; в) $\{3\}$.

15. а) $\{1\}$; б) $\{-6\}$. **16.** а) $\{-2\}$; б) $\{2\}$; решение: уравнение равносильно уравнению $\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x=\log_2 x$, которое не может иметь больше одного корня, так как в левой части стоит убывающая функция переменного x, а в правой — возрастающая. Корень $x = 2$ находится подбором, например, при помощи графиков.

17. а) $\varnothing$; б) $\{1\}$; в) $\{0{,}5\}$.

18. а) $\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$; б) $\{1\}$; решение: выполним преобразования:

$$x^2 + (x+1)\sin\frac{\pi x}{6} = \frac{3+x}{2} \Leftrightarrow \sin\frac{\pi x}{6} = \frac{-2x^2+x+3}{2(x+1)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{\pi x}{6} = -x + \frac{3}{2} \text{ (рис. 118).}$$

19. а) $\{20\}$; указание: достаточно подсчитать число положительных корней (и затем удвоить полученное число); графики пересекаются в двух точках на каждом из первых пяти отрезков длины 2: 2 корня на отрезке $[0; 2]$, 2 корня на отрезке $[2; 4]$ и т. д. (причем концы этих отрезков не есть корни); б) 198.

20. Так как $\cos x \leqslant 1$, а $1 + \sin^2 ax \geqslant 1$ для любого x, то равенство возможно только в случае $\cos x = 1$, $\sin ax = 0$. Следовательно, с одной стороны, x должно иметь вид: $x = 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; с другой стороны, вид $\frac{\pi k}{a}$, $k \in \boldsymbol{Z}$ (если $a \neq 0$). Поэтому для некоторых $n \neq 0$, $k \neq 0$ должны быть выполнены равенства $x = 2\pi n = \frac{\pi k}{a}$, откуда $a = \frac{k}{2n}$. Так как $a = 0$ также удовлетворяет условию, то получаем, что a может быть любым рациональным числом.

21. а) $a < 0$, $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-a}}{a}$; $a = 0$, $x = -\frac{1}{2}$; $0 < a < 1$, $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-a}}{a}$; $a = 1$, $x = -1$; $a > 1$, решений нет. Решение. При $a = 0$ уравнение линейное: $2x + 1 = 0$, откуда $x = -\frac{1}{2}$. При $a \neq 0$ уравнение квадратное, его дискриминант равен $D = 4 - 4a$, причем:

а) при $D < 0$ решений нет;

б) при $D = 0$ (т. е. $a = 1$) один корень: $x = -1$;

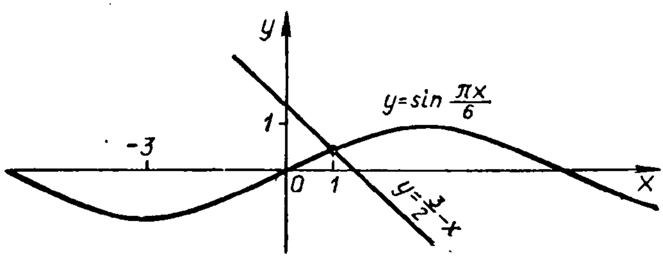


Рис. 118

в) при $D > 0$ (т. е. при $a < 1$ и $a \neq 0$) два корня: $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-a}}{a}$.

22. б)

$$\begin{array}{ll} a < -1 &]-\infty; -a[\cup \left[\frac{a-a^2}{1+a}; \infty\right[; \\ a = -1 &]-\infty; -a[; \\ -1 < a < 0 & \left[\frac{a-a^2}{1+a}; -a\right]; \\ a = 0 & \varnothing \\ a > 0 & \left]-a; \frac{a-a^2}{1+a}\right]. \end{array}$$

23. а) Уравнение было решено при решении задачи 36 б) § 6.

25. а)

$$\begin{array}{ll} a < -1 & \left[a; \frac{-1+\sqrt{2a^2-1}}{2}\right[; \\ -1 \leqslant a < -\frac{\sqrt{2}}{2} & \left]\frac{-1-\sqrt{2a^2-1}}{2}; \frac{-1+\sqrt{2a^2-1}}{2}\right[; \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant a \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2} & \varnothing; \\ \frac{\sqrt{2}}{2} < a \leqslant 1 & \left]\frac{-1-\sqrt{2a^2-1}}{2}; \frac{-1+\sqrt{2a^2-1}}{2}\right[; \\ a > 1 & \left[-a; \frac{-1+\sqrt{2a^2-1}}{2}\right[; \end{array}$$

б) $a < 1-\sqrt{3}$ $\varnothing$; $a = 1-\sqrt{3}$ $\{1-\sqrt{3}\}$; $1-\sqrt{3} < a < -0{,}5$ $\{1-\sqrt{3}; -1+\sqrt{3+4a}\}$; $a = -0{,}5$ $\{1-\sqrt{3}\}$; $-0{,}5 < a < 1+\sqrt{3}$ $\{1-\sqrt{3}; -1+\sqrt{3+4a}\}$; $a \geqslant 1+\sqrt{3}$ $\{1-\sqrt{3}; 1+\sqrt{3}\}$.

26. а) Два корня при любом a; б) $a < -4-\sqrt{12}$ $\{x_1; x_2\}$; $a = -4-\sqrt{12}$ $\{-3\}$; $-4-\sqrt{12} < a < 0$ $\varnothing$; $a = 0$ $\{1; 3\}$ $0 < a < 4-\sqrt{12}$ $\{x_1; x_2; x_3; x_4\}$, $a = 4-\sqrt{12}$ $\{x_1; x_2; \sqrt{3}\}$; $a > 4-\sqrt{12}$ $\{x_1; x_2\}$, где $x_{1,2} = \frac{4+a \pm \sqrt{a^2+8a+4}}{2}$,

$$x_{3,4} = \frac{4-a \pm \sqrt{a^2-8a+4}}{2}.$$

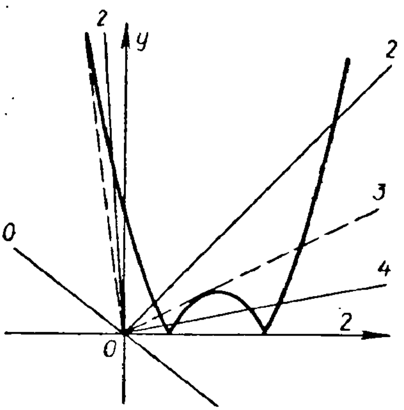


Рис. 119

Указание. Построим график $y = |x^2 - 4x + 3|$ и семейство графиков $y = ax$ (рис. 119). «Критические» значения параметра a — это $a = 0$, а также такие значения a, при которых дискриминант одного из уравнений $x^2 - 4x + 3 - ax = 0$ или $x^2 - 4x + 3 + ax = 0$ обращается в нуль (при таких a прямая $y = ax$ касается либо параболы $y = x^2 - 4x + 3$, либо параболы $y = -x^2 + 4x - 3$). Число корней для соответствующих значений a указано на рисунке.

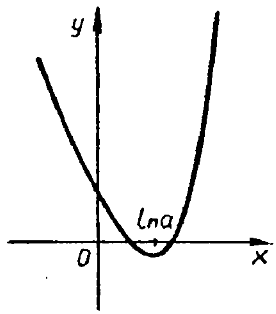


Рис. 120

28. а) Построим график функции $y = x^3 - 3x$, $y' = 3x^2 - 3$; $y' = 0$ при $x = \pm 1$. В точке -1 функция имеет максимум, $y(-1) = 2$, в точке 1 функция имеет минимум, $y(1) = -2$ (см. рис. 89). Из рисунка видно, что при $a \in]-2; 2[$ исходное уравнение имеет три корня, при $a = \pm 2$ — два корня, при остальных a — один корень;

б) при $a < 1{,}5\sqrt[3]{2}$ — один корень; при $a = 1{,}5\sqrt[3]{2}$ — два корня, при $a > 1{,}5\sqrt[3]{2}$ — три корня. Указание. Запишите уравнение в виде $x^2 + \frac{1}{x} = a$, постройте график функции $y = x^2 + \frac{1}{x}$ и проделайте те же рассуждения, что и при решении задачи а).

29. а) Требуется (для каждого a) определить, сколько корней имеет уравнение $f(x) = 0$, где $f(x) = e^x - ax$. Исследуем функцию $f(x)$. $f'(x) = e^x - a$. Если $a \leqslant 0$, то $f'(x) > 0$ для любого x, поэтому f возрастает на всей числовой прямой и принимает каждое значение из множества значений в точности один раз. Если $a < 0$, то $E(f) = \boldsymbol{R}$; если $a = 0$, то $E(f) =]0; \infty[$. Следовательно, при $a < 0$ уравнение имеет один корень, а при $a = 0$ корней нет. Пусть теперь $a > 0$. Тогда $f'(x) = 0$ при $e^x = a$, т. е. при $x = \ln a$. f возрастает на промежутке $[\ln a; \infty[$, убывает на промежутке $]-\infty; \ln a]$; в точке $x = \ln a$ функция имеет минимум, причем $f(\ln a) = a(1 - \ln a)$ (рис. 120, $a = 3$). Множество значений функции f — промежуток $[a(1 - \ln a); \infty[$, и каждое свое значение (кроме $a(1 - \ln a)$) функция f принимает в точности два раза. Таким образом, при $a(1 - \ln a) < 0$, т. е. при $a > e$, уравнение имеет два корня, при $a = e$ — один корень, при $a(1 - \ln a) > 0$, т. е. при $0 < a < e$, корней нет. Ответ. При $a < 0$ — один корень, при $0 \leqslant a < e$ корней нет, при $a = e$ — один корень, при $a > e$ — два корня.

30. а) Нет корней при $a > e^{\frac{1}{e}}$, один корень при $0 < a \leqslant 1$, $a = e^{\frac{1}{e}}$, два корня при $1 < a < e^{\frac{1}{e}}$. Указание. Функция $f(x) = a^x - x$ убывает при $0 < a < 1$, имеет одну точку экстремума (минимум) при $a > 1$ (эта точка — корень уравнения $f'(x) = a^x \ln a - 1 = 0$ — точка $x_0 = -\log_a(\ln a)$). Значение f в этой точке

$$f(x_0) = a^{x_0} - x_0 = \frac{1}{\ln a} - \log_a\left(\frac{1}{\ln a}\right)$$

обращается в нуль при

$$a^{\frac{1}{\ln a}} = a^{\log_a\left(\frac{1}{\ln a}\right)}; \quad a^{\frac{1}{\ln a}} = \frac{1}{\ln a}; \quad \frac{1}{\ln a}\ln a = \ln\left(\frac{1}{\ln a}\right); \quad \frac{1}{\ln a} = e; \ \ln a =$$

$$= \frac{1}{e}; \quad a = e^{\frac{1}{e}};$$

б) I. Пусть $a > 1$. Тогда:

если $a^x > x$, то $x > \log_a x$, поэтому $a^x > \log_a x$;

если $a^x < x$, то $x < \log_a x$, поэтому $a^x < \log_a x$;

если $a^x = x$, то $x = \log_a x$, поэтому $a^x = \log_a x$. Таким образом, число корней уравнения $a^x = \log_a x$ (при $a > 1$) равно числу корней уравнения $a^x = x$ и равно (см. задачу а)): двум при $1 < a < e^{\frac{1}{e}}$, одному при $a = e^{\frac{1}{e}}$, нулю при $a > e^{\frac{1}{e}}$.

II. Пусть $0 < a < 1$. Положим, $f(x) = a^x - \log_a x$. Тогда $f'(x) = a^x \ln a - \frac{1}{x \ln a} = \frac{xa^x \ln^2 a - 1}{x \ln a}$. Так как $\ln a < 0$, знак f' совпадает со знаком функции $g(x) = 1 - xa^x \ln^2 a$. Исследуем функцию $g(x)$. $g'(x) = -a^x \ln^2 a\,(1 + x \ln a)$. $g'(x) = 0$ при $x = x_0 = -\frac{1}{\ln a}$, $g'(x) > 0$ при $x > -\frac{1}{\ln a}$, $g'(x) < 0$ при $0 < x < -\frac{1}{\ln a}$ (напомним, что $\ln a < 0$). Далее, $g(0) = 1$ и $g(x) \to 1$ при $x \to \infty$. Следовательно, $g(x)$ убывает от 1 до $g(x_0)$ на промежутке $[0; x_0]$ и возрастает от $g(x_0)$ до 1 на промежутке $[x_0; \infty[$. Если $g(x_0) < 0$, то функция g обращается в нуль в двух точках x_1 и x_2, принадлежащих соответственно промежуткам $]0; x_0[$ и $[x_0; \infty[$. В каждой из этих точек f' также обращается в нуль и меняет знак с плюса на минус в точке x_1 и с минуса на плюс в точке x_2. Поэтому функция f имеет максимум в точке x_1 и минимум в точке x_2. Если $g(x_0) = 0$, то g, а следовательно, и f' положительны на промежутках $]0; x_0[$ и $]x_0; \infty[$. Поэтому f возрастает на промежутках $]0; x_0]$ и $[x_0; \infty[$, а значит, и на промежутке $]0; \infty[$. Наконец, если $g(x_0) > 0$, то f возрастает на промежутке $]0; \infty[$.

Найдем, при каких a значение g в точке x_0 отрицательно:

$$g(x_0) = 1 + \ln a \cdot a^{-\frac{1}{\ln a}} < 0 \text{ при } \ln a \cdot a^{-\frac{1}{\ln a}} < -1; \quad a^{-\frac{1}{\ln a}} >$$
$$> -\frac{1}{\ln a}; \quad -\frac{1}{\ln a}\ln a > \ln\left(-\frac{1}{\ln a}\right) = -\ln(-\ln a); \ -\ln(-\ln a) < -1;$$
$$\ln(-\ln a) > 1; \quad -\ln a > e; \quad \ln a < -e; \quad 0 < a < e^{-e}.$$

Отметим, что любой корень уравнения $a^x = x$ является также корнем уравнений $x = \log_a x$ и $a^x = \log_a x$. При $0 < a < 1$ уравнение $a^x = x$ имеет в точности один корень x_3 (см. задачу а)). Мы проверим, что $x_3 \in \,]x_1; x_2[$, откуда будет следовать, что $f(x_1) > 0$, а $f(x_2) < 0$, так как f убывает на промежутке $[x_1; x_2]$. Далее, x_3 принадлежит промежутку $]x_1; x_2[$ тогда и только тогда, когда

$g(x_3) < 0$. Найдем $g(x_3)$: $g(x_3) = 1 - x_3 a^{x_3} \ln^2 a = 1 - x_3^2 \ln^2 a$, так как $a^{x_3} = x_3$. Кроме того, $a = x_3^{\frac{1}{x_3}}$, поэтому $\ln a = \frac{\ln x_3}{x_3}$, т. е. $g(x_3) = 1 - x_3^2 \frac{\ln^2 x_3}{x_3^2} = 1 - \ln^2 x_3$. Нужно проверить, что $\ln^2 x_3 > 1$, т. е. $x_3 < \frac{1}{e}$.

Рассмотрим функцию $\varphi(x) = x^{\frac{1}{x}}$. Сразу отметим, что $\varphi(x_3) = x_3^{\frac{1}{x_3}} = a$ и $\varphi\left(\frac{1}{e}\right) = e^{-e}$. На промежутке $\left]0; \frac{1}{e}\right]$ функция φ возрастает. В самом деле, $\varphi(x) = x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln x}{x}}$ и $\varphi'(x) = e^{\frac{\ln x}{x}}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2}\right) > 0$ на промежутке $\left]0; \frac{1}{e}\right]$. Далее, $0 < a < e^{-e}$, т. е. $0 < \varphi(x_3) < \varphi\left(\frac{1}{e}\right)$, из этого неравенства в силу возрастания φ следует неравенство $0 < x_3 < \frac{1}{e}$.

Множество значений функции f при любом $a \in]0; 1[$ — вся числовая прямая. Так как при $e^{-e} < a < 1$ функция f возрастает, то она принимает каждое свое значение в точности один раз, в том числе и значение 0. При $0 < a < e^{-e}$ функция f возрастает на промежутке $]0; x_1]$, убывает на промежутке $[x_1; x_2]$, возрастает на промежутке $[x_2; \infty[$, причем $f(x_1) > 0$, а $f(x_2) < 0$ (рис. 121). Из рисунка видно, что каждое свое значение из промежутка $]f(x_2); f(x_1)[$ функция принимает три раза, в том числе она принимает три раза значение 0. Ответ. При $0 < a < e^{-e}$ уравнение имеет три корня, при $1 < a < e^{\frac{1}{e}}$ — два корня, при $a = e^{\frac{1}{e}}$ и $e^{-e} \leqslant a < 1$ — один корень, при $a > e^{\frac{1}{e}}$ корней нет.

31. При $b \in]-\infty; 1]$. Решение. Функция $f(x) = x^2 - 2a \ln x$ имеет минимум при $f'(x) = 2x - \frac{2a}{x} = 0$, т. е. при $x = \sqrt{a}$. Функция f убывает от ∞ до $f(\sqrt{a}) = a - a \ln a$ на промежутке $]0; \sqrt{a}]$, возрастает от $f(\sqrt{a}) = a - a \ln a$ до ∞ на промежутке $[\sqrt{a}; \infty[$. Следовательно, каждое свое значение (кроме $a - a \ln a$) функция принимает два раза, а значение $a - a \ln a$ — один раз. Таким образом, должно быть выполнено равенство $a - a \ln a = b$ и

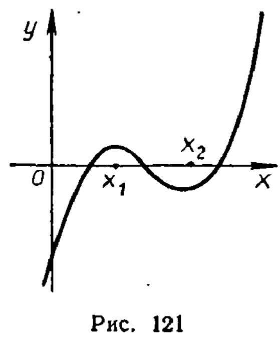


Рис. 121

осталось узнать, при каких b имеет корни уравнение (относительно a) $a - a \ln a = b$. Таким образом, нужно найти множество значений функции $g(a) = a - a \ln a$. Функция g имеет максимум при $g'(a) = 1 - a \cdot \frac{1}{a} - \ln a = -\ln a = 0$, т. е. при $a = 1$. При этом g возрастает от 0 до 1 на промежутке $]0; 1]$ и убывает от 1 до $-\infty$ на промежутке $[1; \infty[$. Следовательно, $E(g) =]-\infty; 1]$. Отметим, что для $0 < b < 1$ существует два таких значения a, при $b = 1$ и $b < 0$ — одно.

§ 8

1. а) Прямая; б) начало координат — точка (0; 0);

в) пара прямых — биссектрисы координатных углов.

2. а) Полуплоскость; б) окружность радиуса 2 с центром в начале координат; в) внутренность круга радиуса 2 с центром (0; 0).

3. а) Окружность радиуса 1 с центром (—1; 0);

б) круг радиуса 1 с центром (0; —1); в) внешность круга (вместе с границей) радиуса 2 с центром (0; —1).

4. а) Объединение двух углов, образованных прямыми $x = 1$ и $y = 1$.

10. а) Внутренность круга радиуса 1 с центром (0; 0).

17. б) Множество изображено на рисунке 122.

20. б) $\left[2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in \mathbf{Z}$. Р е ш е н и е. Замена $u = \sin x$, $v = \cos x$ приводит к системе $\begin{cases} v - u < 1, \\ u^2 + v^2 = 1. \end{cases}$ Множество решений этой системы — пересечение единичной окружности и полуплоскости $v \leqslant u + 1$ (рис. 123), соответствующие точки P_x выделены на рисунке (дуга ABC).

22. а) $\left]\arcsin \frac{\sqrt{5} - 1}{2} + 2\pi k; \quad \pi + 2\pi k\right]$, $k \in \mathbf{Z}$;

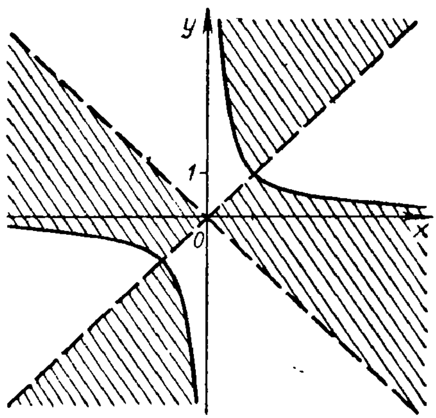


Рис. 122

б) $\left]\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ \frac{5\pi}{4}+2\pi k\right[\cup\left]\frac{\pi}{3}+2\pi k;\ \frac{\pi}{2}+2\pi k\right[,\quad k\in\mathbb{Z}.$

23. а) $a<0\ \left]2a;\ -\frac{a}{3}\right],\ a=0\ \varnothing,\ a>0\left[-\frac{a}{3};\ 2a\right[;$

б) $a<0\ \left]-\infty;\ \frac{1}{a}\right[\cup\left[1;\ \infty\right[;$ $a=0\,]-\infty;\ \infty[;\ 0<a<1\ ]-\infty;\ 1]\cup\left]\frac{1}{a};\ \infty\right[;\ a=1\ \varnothing;\ a>1\ \left]\frac{1}{a};\ 1\right].$

24. а) $a<-8\ \{1-\sqrt{1-3a};\ 1+\sqrt{1-3a}\};\ a=-8\ \{-4;\ 6\};\ -8<a<0\ \{-1-\sqrt{1-a};\ 1+\sqrt{1-3a}\};$ $a=0\,\{-2;\ 0;\ 2\};\ 0<a<\frac{1}{3}\ \{-1\pm\sqrt{1-a};\ 1\pm\sqrt{1-3a}\};\ a=\frac{1}{3}\left\{-1-\sqrt{\frac{2}{3}};\ -1+\sqrt{\frac{2}{3}};\ 1\right\};\ \frac{1}{3}<a<1\ \{-1-\sqrt{1-a};\ -1+\sqrt{1-a}\};$ $a=1\ \{-1\};\ a>1\ \varnothing.$

25. б) См. ответ к задаче 36 б) § 6.

26. а) $a<-8\,\varnothing,\ a=-8\ \{1\};\ -8<a\leqslant 0\ [x_3;\ x_2];\ 0<a<1\,[x_1;\ x_2];\ a=1\ \{-2\};\ a>1\ \varnothing$, где $x_1=-2-\sqrt{1-a};\ x_2=-2+\sqrt{1-a};\ x_3=-0,5a-3.$

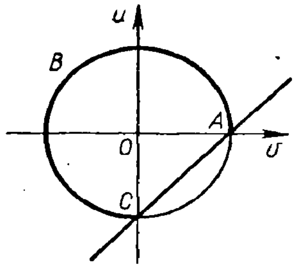


Рис. 123

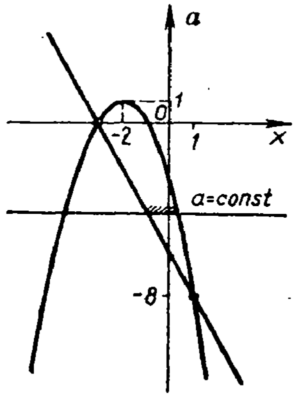


Рис. 124

У к а з а н и е (рис. 124). «Критические» значения параметра — ординаты точек пересечения прямой и параболы ($a=-8$ и $a=0$) и ордината вершины параболы ($a=1$). Абсциссы точек пересечения прямой $a=-2x-6$ и параболы $a=-x^2-4x-3$ с прямыми $a=a_0$, где a_0 — постоянная, суть числа x_1, x_2 и x_3 (при $a=a_0$).

Приложение ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ НА ПОВТОРЕНИЕ

Эти задания предлагались школьникам на республиканских и заключительном турах Всесоюзной математической олимпиады в 1977 г. К каждому из 10 вопросов дано 5 вариантов ответа (А, Б, В, Г и Д), из которых в точности один правильный. На отыскание правильных ответов давалось от 30 до 45 мин (во всех классах). Вопросы заданий на республиканских турах охватывают узловые вопросы школьной программы, для выполнения заданий заключительного тура нужно более свободное владение программным материалом.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ РЕСПУБЛИКАНСКИХ ТУРОВ

VIII класс

Алгебра

1. Сколько стрелок можно оставить на рисунке 125 так, чтобы они задавали функцию с областью определения $X \subset \{x_1;\ x_2;\ x_3\}$? (А)Только 3; Б) все 6; В) от 0 до 3, Г) от 3 до 6; Д) от 0 до 6.)

2. При каких значениях m дробь $\frac{m^3 - m}{2\sqrt{m}}$ равна 0?
(А) При $m = 0;\ 1;\ -1$; Б) при $m = 0;\ 1$; В) при $m = 0$; Г) при $m = 1$; Д) при $m = 1;\ -1$.)

3. Какое множество задает на координатной плоскости уравнение $x^2 - y^2 = 0$?

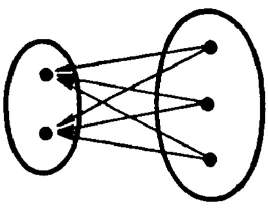


Рис. 125

(А) Пустое множество; Б) точку; В) прямую; Г) объединение двух прямых; Д) окружность.)

4. При каких значениях a и b справедливо соотношение $\sqrt{ab} = \sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b}$?
(А) Только при $a = b = 0$; Б) при $a \leqslant 0$ и $b \leqslant 0$; В) при a и b одного знака; Г) при любых a и b; Д) ни при каких a и b.)

5. Число A задано с точностью до 0,01, число B — с точностью до 0,02. С какой точностью можно указать число $2A - B$? (А) 0,01; Б) 0,02; В) 0,04; Г) 0,00; Д) ответ зависит от значений А и В.)

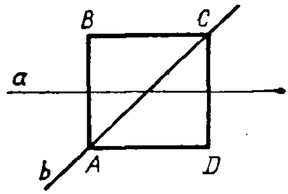


Рис. 126

Геометрия

6. В треугольнике длины сторон равны 3; 5 и n, где n натуральное. Укажите возможные значения n.
(А) $n \geqslant 3$; Б) $n \geqslant 5$; В) $n \leqslant 8$; Г) $3 \leqslant n \leqslant 7$; Д) $3 \leqslant n \leqslant 5$.)

7. Укажите значение $\cos(90° + \alpha)$.
(А) $\sin \alpha$; Б) $\cos \alpha$; В) $-\sin \alpha$; Г) $-\cos \alpha$; Д) это значение не определено.)

8. $ABCD$ — квадрат. Найдите образ вершины A при композиции $S_b \circ S_a$ симметрий, относительно указанных на рисунке 126 осей a и b.
(А) A; Б) B; В) C; Г) D; Д) точка, не являющаяся вершиной квадрата.)

9. В треугольнике ABC отрезок AM — медиана. Укажите вектор $\vec{x} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}$.
(А) $\overrightarrow{AB}$; Б) $\overrightarrow{AC}$; В) $\overrightarrow{BA}$; Г) $\overrightarrow{CA}$; Д) $\overrightarrow{BC}$.)

10. Высота правильного треугольника ABC равна 1. На каком расстоянии от вершины A следует провести прямую, параллельную прямой BC, которая делила бы треугольник на две части одинаковой площади?
$\left(\text{А}) \ \frac{1}{2}; \quad \text{Б}) \ \frac{2}{3}; \quad \text{В}) \ \frac{3}{4}; \quad \text{Г}) \ \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \text{Д}) \ \frac{\sqrt{3}}{2}.\right)$

IX класс

Алгебра и начала анализа

1. Сколькими способами 12 человек можно распределить на работу в две смены (первую и вторую) по 6 человек?
$\left(\text{А}) \ C_{12}^6; \quad \text{Б}) \ A_{12}^6; \quad \text{В}) \ \frac{1}{2}C_{12}^6; \quad \text{Г}) \ C_{12}^6 \cdot C_{12}^6; \quad \text{Д}) \ P_6.\right)$

2. Даны два действительных числа: $A = 0{,}1093\ldots$ и $B = 0{,}3006\ldots$. Сколько заведомо верных десятичных знаков после запятой можно указать у их суммы $A + B$?
(А) Четыре; Б) три; В) два; Г) один; Д) ни одного.)

3. Какими из свойств монотонности и ограниченности обладает последовательность $a_n = -\frac{1}{n^2}$?
(А) Возрастает и не ограничена; Б) убывает и не ограничена; В) возрастает и ограничена; Г) убывает и ограничена; Д) не ограничена и не является монотонной.)

4. Функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x = x_0$. Что можно сказать о пределе $\lim\limits_{\Delta x \to 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0))$?
(А) Равен 0; Б) равен $f(x_0)$; В) равен $-f(x_0)$; Г) равен $f'(x_0)$; Д) не существует.)

5. Укажите производную функции $(x^{10} + 1)^{10}$. (А) $10(x^{10} + 1)^9$; Б) $100(x^{10}+1)^9$; В) $10x^9(x^{10} + 1)^9$; Г) $100x^9(x^{10} + 1)^9$; Д) $x^9(x^{10}+1)^9$.)

Геометрия

6. Плоскость пересекает ребра AB, BC и CD тетраэдра $ABCD$ (не в вершинах). Какое еще ребро тетраэдра будет пересекать эта плоскость?
(А) AC; Б) AD; В) BD; Г) никакое; Д) два ребра.)

7. См задачу 6 для VIII класса.

8. См. задачу 8 для VIII класса.

9 См. задачу 9 для VIII класса.

10. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — векторы в пространстве, $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 90°$, $(\widehat{\vec{b}, \vec{c}}) = 90°$. Какова возможная величина угла $\varphi = (\widehat{\vec{a}, \vec{c}})$?
(А) $\varphi = 0°$; Б) $\varphi = 90°$; В) $\varphi = 180°$; Г) $0° \leqslant \varphi \leqslant 90°$; Д) $0° \leqslant \varphi \leqslant 180°$.)

X класс

Алгебра и начала анализа

1. См. задачу 4 для IX класса.

2. Укажите производную функции $\sin(x^2)$.
(А) $2\sin x$; Б) $\cos(x^2)$; В) $2x\sin(x^2)$; Г) $2x\cos(x^2)$; Д) $\sin 2x$.)

3. Расположите в порядке возрастания числа $C = \cos 1000°$, $S = \sin 1000°$ и $T = \operatorname{tg} 1000°$.
(А) $T < C < S$; Б) $C < S < T$; В) $T < S < C$; Г) $S < C < T$; Д) $S < T < C$.)

4. Сколько существует первообразных для функции $f(x) = e^{\sin x}$, график которых проходил бы через точку (17; 1) на координатной плоскости?
(А) Ни одной; Б) одна; В) две; Г) три; Д) бесконечно много.)

5. При каких значениях a справедливо соотношение $\exp(\exp(\ln(\ln a))) = a$?
(А) Ни при каких; Б) при любых; В) при $a > 0$; Г) при $a > 1$; Д) при $a > e$.)

Геометрия

6. См. задачу 6 для IX класса.

7. Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равно -1. Какова возможная величина угла $\varphi = (\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$?
(А) $\varphi = 0°$; Б) $\varphi = 90°$; В) $\varphi = 180°$; Г) $\varphi < 90°$; Д) $\varphi > 90°$.)

8. Плоскости заданы уравнениями $x - y + z = 0$ и $y - x - z = 1$. Каково их взаимное расположение?

(А) Совпадают; Б) параллельны, но не совпадают; В) перпендикулярны; Г) пересекаются, но не перпендикулярны; Д) по уравнениям установить нельзя.)

9. Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна 2. В каких пределах может заключаться площадь полной поверхности S этой пирамиды?

(А) Площадь S — любая; Б) $S > 2$; В) $S > 4$; Г) $2 < S < 4$; Д) $3 < S < 4$.)

10. Высота правильной пирамиды равна 1. На каком расстоянии от вершины нужно провести плоскость, параллельную основанию, для того чтобы она разбивала пирамиду на две части равного объема?

(А) $\frac{1}{2}$; Б) $\sqrt{\frac{1}{2}}$; В) $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$; Г) $\sqrt[4]{\frac{1}{2}}$; Д) $\frac{3}{4}$.)

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ТУРА

VIII класс

Алгебра

1. График какой функции выглядит так, как показано на рисунке 127?

(А) $y = x^2 + 2x - 3$; Б) $y = x^2 - 2x + 3$; В) $y = -x^2 - 2x + 1$; Г) $y = -x^2 + 2x + 1$; Д) $y = -x^2 + 2x - 1$.)

2. Какие из функций, заданных на рисунке 128 с помощью стрелок, являются обратимыми?

(А) Только f_1; Б) f_1 и f_2; В) f_1 и f_3; Г) f_3 и f_4; Д) все обратимые.)

3. Сколько решений имеет уравнение

$$\frac{25(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{(x-5)(x-3)(x-1)} = \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{(x-5)(x-3)(x-1)}?$$

(А) Ни одного; Б) бесконечно много; В) пять; Г) три; Д) одно.)

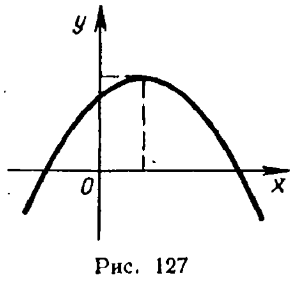


Рис. 127

4. На сколько процентов увеличится покупательная способность населения

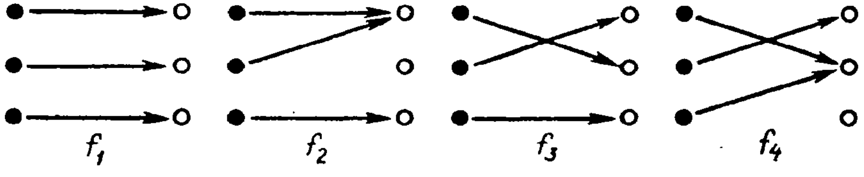


Рис. 128

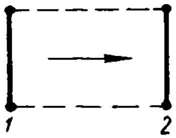


Рис. 129

(т. е. количество товаров, которое можно приобрести на данную сумму денег), если цены на все товары снизить на 20%? (А) 20%; Б) 25%; В) 40%; Г) 10%; Д) 12%.

5. Сколько существует геометрических прогрессий с четвертым членом $a_4 = 5$ и восьмым членом $a_8 = 80$?
(А) Одна; Б) две; В) три; Г) бесконечно много; Д) ни одной.)

Геометрия

6. Сколько существует перемещений плоскости, отображающих первый из указанных отрезков (сторон прямоугольника) на второй (рис. 129)?
(А) Одно; Б) два; В) три; Г) четыре; Д) бесконечно много.)

7. Сколько существует прямых, равноудаленных от трех данных точек, не принадлежащих одной прямой?
(А) Одна; Б) две; В) три; Г) бесконечно много, Д) ни одной.)

8. Сколько существует прямых, разбивающих данный треугольник на две части равной площади?
(А) Одна; Б) две; В) три; Г) шесть; Д) бесконечно много.)

9. Сколькими способами на сторонах данного квадрата можно расставить стрелки так, чтобы сумма соответствующих четырех векторов (по длине равных сторонам квадрата) равнялась $\vec{0}$?
(А) 1 способ; Б) 2 способа; В) 4 способа; Г) 8 способов; Д) 16 способов.)

10. Треугольники T_1 и T_2 на плоскости подобны с коэффициентом подобия 2. Сколько существует треугольников, гомотетичных треугольнику T_1 с заданным центром гомотетии и конгруэнтных треугольнику T_2?
(А) Один; Б) два; В) три; Г) бесконечно много; Д) ни одного.)

IX класс

Алгебра и начала анализа

1. Сколькими способами группу из 12 человек можно разбить на три подгруппы — из 3, 4 и 5 человек?
(А) $C_{12}^3 + C_9^4$; Б) $C_{12}^3 \cdot C_9^4$; В) $C_{12}^3 + C_{12}^4$; Г) $C_{12}^3 \cdot C_{12}^4$; Д) $C_{12}^3 \cdot C_{12}^4 \cdot C_{12}^5$.)

2. Известно, что последовательности (a_n) и $(a_n b_n)$ сходящиеся, а последовательность (b_n) расходящаяся. Чему может быть равен предел $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$?
(А) Такого не бывает; Б) a может быть любым; В) a может быть любым, кроме $a = 0$; Г) $a = 0$; Д) $a = 1$.)

3. Чему равен $\lim\limits_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{4-x}$?
(А) 0; Б) $-\frac{1}{2}$; В) $-\frac{1}{4}$; Г) $\frac{1}{4}$; Д) этот предел не существует.)

4. По какой формуле вычисляется производная функции $h(x) = f(x^2)$?
(А) $h'(x) = f(2x)$; Б) $h'(x) = 2f(x)$; В) $h'(x) = f'(2x)$; Г) $h'(x) = 2x \cdot f(x^2)$; Д) $h'(x) = 2x \cdot f'(x^2)$.)

5. См. задачу 1 для VIII класса.

Геометрия

6. Сколько существует перемещений пространства, отображающих данный отрезок на себя?
(А) Одно; Б) два; В) три; Г) четыре; Д) бесконечно много.)

7. Сколько существует прямых, пересекающих каждую из трех данных попарно скрещивающихся прямых?
(А) Бесконечно много; Б) ни одной; В) одна; Г) две; Д) три.)

8. Сколько существует плоскостей, равноудаленных от четырех данных точек, не принадлежащих одной плоскости?
(А) Одна; Б) три; В) четыре; Г) семь; Д) ни одной.)

9. Ортогональная проекция угла AOB на плоскость есть некоторый угол $A_1O_1B_1$. Какое значение может иметь величина угла $A_1O_1B_1$, если угол AOB прямой?
(А) Только 90°; Б) любое значение от 0° до 180°; В) любое значение от 0° до 90°; Г) любое значение от 90° до 180°; Д) любое значение от 45° до 135°.)

10. В пространстве даны два отличных от $\vec{0}$ вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Сколько существует векторов $\vec{x}$ длины 1, таких, что $\vec{x} \cdot \vec{a} = 0$ и $\vec{x} \cdot \vec{b} = 0$?
(А) Ни одного; Б) один; В) два; Г) бесконечно много; Д) ответ зависит от $\vec{a}$ и $\vec{b}$.)

X класс

Алгебра и начала анализа

1. См задачу 1 для VIII класса.

2. Расположите числа $\sin 1$, $\cos 2$ и $\operatorname{ctg} 3$ в порядке возрастания (аргументы даны в радианах).
(А) $\operatorname{ctg} 3 < \cos 2 < \sin 1$; Б) $\sin 1 < \cos 2 < \operatorname{ctg} 3$; В) $\cos 2 < \sin 1 < \operatorname{ctg} 3$; Г) $\operatorname{ctg} 3 < \sin 1 < \cos 2$; Д) $\cos 2 < \operatorname{ctg} 3 < \sin 1$.)

3. См. задачу 3 для VIII класса.

4. См. задачу 4 для VIII класса.

5. Сколько существует геометрических прогрессий с четвертым членом $a_4 = -2$ и десятым членом $a_{10} = -1$?
(А) Ни одной; Б) одна; В) две; Г) три; Д) бесконечно много.)

Геометрия

6. Плоскость пересекает куб, но не проходит ни через одну из его вершин. Сколько ребер куба может пересекать эта плоскость? (А) 3 или 4; Б) от 3 до 5; В) от 3 до 6; Г) от 3 до 7; Д) от 3 до 10.
7. См. задачу 7 для IX класса.
8. См. задачу 8 для IX класса.
9. См. задачу 9 для IX класса.
10. См. задачу 8 для VIII класса.

Верные ответы

Задания для республиканских туров

VIII класс В, Г, Г, Б, В; Г, В, Г, Б, Г
IX класс А, Г, В, А, Г; Б, Г, Г, Б, Д
X класс А, Г, В, Б, Г; Б, Д, Б, Г, В

Задания для заключительного тура

VIII класс Г, В, Г, Б, Б; Г, В, Д, В, Б
IX класс Б, Г, В, Д, Г; Д, А, Г, Б, Д
X класс Г, А, Г, Б, В; В, А, Г, Б, Д

ИБ № 1615

Борис Михайлович Ивлев,
Александр Николаевич Земляков,
Федор Васильевич Томашевич,
Юрий Владимирович Калиниченко

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО АЛГЕБРЕ
И НАЧАЛАМ АНАЛИЗА ДЛЯ 9 И 10 КЛАССОВ

Редактор Э. К. ВИКУЛИНА
Художник обложки Б. Л. ЮДКИН
Художественный редактор Е. Н. КАРАСИК
Технический редактор Т. В. САМСОНОВА
Корректор Л. П. МИХЕЕВА

Сдано в набор 9/II.1978 г. Подписано к печати 21/VII. 1978 г. ф-т 60×90 1/16. Бумага тип. № 3. Гарнитура литер. Печать высокая. Усл. печ. л. 17. Уч.-изд. л. 16,19. Тираж 260 000 экз. Заказ 486. Цена 60 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного комитета Совета Министров РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Саратовский ордена Трудового Красного Знамени полиграфический комбинат Росглавполиграфпрома Государственного комитета Совета Министров РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Саратов, ул. Чернышевского, 59.