Н. РЫБКИН

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ТРИГОНОМЕТРИИ

ДЛЯ 8, 9 и 10 КЛАССОВ
СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

УЧПЕДГИЗ
1946

Н. РЫБКИН

СБОРНИК ЗАДАЧ
ПО
ТРИГОНОМЕТРИИ

С ПРИЛОЖЕНИЕМ ЗАДАЧ
ПО ГЕОМЕТРИИ,
ТРЕБУЮЩИХ ПРИМЕНЕНИЯ
ТРИГОНОМЕТРИИ

ДЛЯ 8, 9 и 10 КЛАССОВ
СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

Утверждён Министерством просвещения РСФСР

ИЗДАНИЕ ОДИННАДЦАТОЕ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
МОСКВА • 1946 • ЛЕНИНГРАД

СОДЕРЖАНИЕ.

Часть I.

Тригонометрия.

Часть II.

Задачи по геометрии, требующие применения тригонометрии

Редактор *С. А. Пономарёв.* Техн. редактор *В. П. Рожин*

Подписано к печати 5/VII 1946 г. М 03209. Печ. л. $6^1/_4$. Уч. изд. л. [illegible],59. Тир. 170 т. экз.
Зак. № 5[illegible]5 Цена без переплёта 1 рубль. Переплёт 4[illegible] коп.

2-я типография „Печатный Двор" им. А. М. Горького, треста „Полиграфкнига" ОГИЗа при Совете Министров РСФСР. Ленинград, Гатчинская, 26.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ТРИГОНОМЕТРИЯ.

§ 1. Измерение дуг и углов.

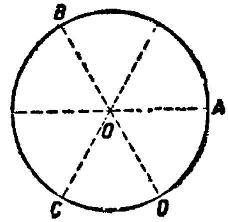
Обобщение понятий угла и дуги.

1. Какой угол описывает в течение 4 часов часовая стрелка часов? минутная стрелка?

2. Колесо машины в 2 секунды делает 6 оборотов. На сколько градусов повернётся колесо за 1 секунду? за 10 секунд?

3. Зубчатое колесо имеет 72 зубца. На сколько градусов колесо повернётся при обороте на 1; 30; 144; 300 зубцов?

4. Начертить положение подвижного радиуса для угла, равного: $+45°$; $-30°$; $+225°$; $-135°$; $-90°$; $+450°$; $-810°$; $+2070°$. Для каких из этих углов подвижные радиусы совпадают?



Черт. 1.

5. Выразить в градусах сумму дуг: $\smile ABCAB + \smile BAC + \smile CDA$ (черт. 1).

6. Написать общий вид углов для случаев, когда подвижной радиус занимает положение: 1) OB; 2) OD (черт. 1), и найти несколько частных значений этих углов.

Радианное измерение.

7. 1) Радиус круга равен 5 *см*. Вычислить длину дуги, содержащей 18°.

2) В круге радиуса R определить длину дуги, содержащей $\alpha°$.

8. 1) С помощью числа π составить выражения в радианах для следующих дуг: a) 30°; b) 45°; c) 60°; d) 135°; e) 15°; f) 22°30′; g) 36°; h) 75°; i) 108°; k) 150°; l) 157°30′; m) 162°.

2) Выразить в радианах: a) 51°; b) 27°; c) 76°30′; d) 12°30′; e) 28°42′; f) 73°21′; g) 117°; h) 216°13′ ($\pi = 3{,}14159$).

3) Выразить в радианах внутренний угол правильных 3-угольника, 4-угольника, 5-угольника, 6-угольника и n-угольника.

9. 1) Выразить в градусах и минутах углы, равные 1,5; 2; 0,75 радиана ($\pi = 3{,}14159$), а также $\frac{\pi}{6}$; $\frac{2}{3}\pi$; $1\frac{1}{2}\pi$; $\frac{\pi}{8}$; $\frac{3}{4}\pi$; $1\frac{1}{5}\pi$ радианов.

2) Выразить (с помощью таблиц) в градусной мере углы, радианные меры которых: 0,6981; 1,3090; 0,2356; 1,0071; 3,8048; 0,48; 1,3; 0,8.

Угловая скорость.

10. Колесо, радиус которого равен 1,2 *м*, делает в минуту 300 оборотов.

1) Найти его угловую скорость ω в 1 сек. $\left(\text{угловая скорость выражается в } \frac{\text{радиан}}{\text{секунда}}\right)$.

2) Найти окружную скорость той точки колеса, которая отстоит от центра на 20 *см*.

3) Найти окружную скорость точки, находящейся на окружности колеса.

4) Доказать, что окружная скорость вращения точки, отстоящей от центра на расстоянии r, равна $r\omega$.

11. Угловая скорость вала равна $21 \frac{\text{радиан}}{\text{секунда}}$. Определить число его оборотов в минуту.

§ 2. Изменение тригонометрических функций с изменением угла.

1. В какой четверти все тригонометрические функции положительны? Существует ли четверть, в которой все функции отрицательны?

2. Если угол принадлежит *треугольнику*, то какие из его тригонометрических функций могут быть отрицательны и когда именно?

3. Какие знаки имеют тригонометрические функции половины угла в *треугольнике*?

4. В каких пределах может изменяться сумма $1 + \sin x$?

5. Какие из следующих равенств возможны:

1) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{ab}}{\frac{1}{2}(a+b)}$; 2) $\cos\beta = a + \frac{1}{a}$; 3) $\sec\alpha = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}$?

6. Может ли быть отрицательной дробь $\frac{\cos x}{\sec x}$?

Упростить выражения в задачах 7—13:

7. $a \cdot \sin 0^\circ + b \cdot \cos 90^\circ + c \cdot \operatorname{tg} 180^\circ$.

8. $a \cdot \operatorname{tg} 0^\circ + b \cdot \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2} + c \cdot \sec 0^\circ$.

9. $a \cdot \cos 0^\circ + b \cdot \cos 180^\circ + c \cdot \cos 360^\circ$.

10. $a^2 \cdot \sin\frac{\pi}{2} + 2ab \cdot \sec\pi - b^2 \cdot \sin\frac{3}{2}\pi$.

11. $a^2 \cdot \operatorname{cosec} 90° - 2ab \cdot \sin 180° + b^2 \cdot \operatorname{cosec} 270°$.

12. $a^2 \cdot \sin 2\pi + 2ab \cdot \cos\frac{3}{2}\pi + b^2 \cdot \operatorname{tg} 2\pi$.

13. $a^3 \cdot \operatorname{ctg} 270° + b^3 \cdot \operatorname{tg} 90°$.

14. В круге радиуса 5 *см* построить углы в 30°; 120°; 225°; —30°; —120°; —560° и четыре тригонометрические линии этих углов. Измерив с точностью до 1 *мм* тригонометрические линии, найти (с точностью до 0,1) значения следующих функций: 1) $\operatorname{tg} 30°$; 2) $\cos 120°$; 3) $\sin 225°$; 4) $\cos(-30°)$; 5) $\operatorname{tg}(-120°)$; 6) $\operatorname{ctg}(-560°)$.

15. Определить знак каждой из следующих разностей: 1) $\sin 20° - \sin 21°$; 2) $\cos 20° - \cos 21°$; 3) $\operatorname{tg} 20° - \operatorname{tg} 21°$; 4) $\operatorname{ctg} 20° - \operatorname{ctg} 21°$; 5) $\cos 20° - \cos 120°$; 6) $\sin 120° - \sin 240°$; 7) $\operatorname{tg} 120° - \operatorname{tg} 40°$; 8) $\operatorname{ctg} 30° - \operatorname{ctg} 130°$.

16. Какая функция в каждой из следующих пар имеет большее значение: 1) $\sin 20°$ или $\cos 20°$? 2) $\sin 50°$ или $\cos 50°$? 3) $\operatorname{tg} 40°$ или $\operatorname{ctg} 40°$? 4) $\operatorname{tg} 50°$ или $\operatorname{ctg} 50°$?

Построение и нахождение угла.

17. Построить углы, синусы которых равны: 1) 0,6; 2) $-\frac{1}{2}$. Найти их величину с точностью до 1°.

18. Построить углы, косинусы которых равны: 1) $\frac{2}{3}$; 2) —0,4.

19. Построить углы, тангенсы которых равны: 1) +1,5; 2) —1.

20. Построить углы, котангенсы которых равны: 1) —2; 2) +1.

21. По данному общему виду угла x написать его частные положительные значения, меньшие 360° (2π):

1) $x = 15° + 120° \cdot n$; 2) $x = -60° + 360° \cdot n$;
3) $x = -10° + 60° \cdot n$; 4) $x = \pm 120° + 720° \cdot n$;
5) $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi \cdot n$; 6) $x = -\frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot n$;
7) $x = (-1)^n \cdot 45° + 180° \cdot n$; 8) $x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{3} \pm \pi \cdot n$.

22. Написать общие решения уравнений, найдя углы (с точностью до 1°) построением и измерением:

1) $\operatorname{tg} x = 2,6$; 2) $\operatorname{tg} x = -0,8$; 3) $\cos x = 0,9$;
4) $\cos x = -\frac{2}{3}$; 5) $\sin x = 0,25$; 6) $\sin x = -\frac{5}{7}$.

В задачах 23—31 требуется найти значение той тригонометрической функции, которая содержится в уравнении, и построить углы.

23. $\sin^2 x - 3 = 2\sin x$.
24. $\cos^2 x + \cos x = 1$.
25. $6\sin^4 x = 1 - \sin^2 x$.
26. $\sin^2 x = 2\sin x$.
27. $\operatorname{tg}^2 x = 2\operatorname{tg} x$.
28. $\sec^2 x = 2\sec x$.
29. $\operatorname{ctg}^3 x + 4\operatorname{ctg} x = 0$.
30. $\dfrac{2}{1+\operatorname{tg} x} = 0$.
31. $(\cos x - 2)\cdot(2\operatorname{cosec} x + 1) = 0$.

Обратные круговые функции.

32. Выразить x с помощью обратных круговых функций из уравнений:
1) $\operatorname{tg} x = m$; 2) $\cos x = m$; 3) $\sin x = m$.
Какие значения можно подразумевать под m в каждом из этих уравнений?

33. Записать с помощью обратных круговых функций равенства:

1) $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$; 2) $\sin(-45^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
4) $\cos 90^\circ = 0$; 5) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$; 6) $\operatorname{tg} 0^\circ = 0$;
7) $\operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3}$; 8) $\operatorname{ctg} 45^\circ = 1$; 9) $\sin x = 0{,}23$;
10) $\cos x = 0{,}5762$; 11) $\operatorname{tg} x = 0{,}468$; 12) $\operatorname{ctg} x = 1{,}237$.

34. Выразить с помощью таблиц в градусах и радианах:

1) $\arcsin 0{,}7314$; 2) $\arccos 0{,}3987$;
3) $\operatorname{arc\,tg} 3{,}677$; 4) $\operatorname{arc\,ctg} 0{,}5117$.

35. Найти x из уравнений:

1) $\arcsin x = \frac{\pi}{4}$; 2) $\arccos x = \frac{\pi}{6}$; 3) $\operatorname{arc\,tg} x = \frac{\pi}{3}$;
4) $\arcsin\frac{x}{3} = \alpha$; 5) $\arccos\frac{x}{a} = \frac{b}{c}$; 6) $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x} = \alpha$.

36. Построить:

1) $\arcsin 0{,}8$; 2) $\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)$; 3) $\arccos\frac{2}{3}$;
4) $\arccos(-0{,}75)$; 5) $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}$; 6) $\operatorname{arc\,tg}(-1{,}5)$;
7) $\operatorname{arc\,tg} 1{,}2$; 8) $\operatorname{arc\,ctg}(-0{,}6)$; 9) $\operatorname{arc\,sec} 1\frac{1}{2}$;
10) $\operatorname{arc\,cosec}(-2)$.

§ 3. Зависимость между тригонометрическими функциями одного и того же угла.

Выразить тригонометрические функции угла α:

1. Через $\sin\alpha$. **2.** Через $\cos\alpha$.

3. Через $\operatorname{tg}\alpha$. **4.** Через $\operatorname{ctg}\alpha$.

Найти тригонометрические функции угла α, если дано

5. $\sin\alpha = 0{,}8$. **6.** $\sin\alpha = -0{,}3$. **7.** $\cos\alpha = \frac{2}{3}$.

8. $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$. **9.** $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{5}$. **10.** $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{9}{40}$.

11. $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{8}{15}$. **12.** $\operatorname{ctg}\alpha = -3$. **13.** $\sec\alpha = 3$.

14. $\sec\alpha = -1\frac{9}{20}$. **15.** $\operatorname{cosec}\alpha = 2{,}6$. **16.** $\operatorname{cosec}\alpha = -\sqrt{3}$

Предполагая $0 < b < a$, найти тригонометрические функции угла α по данным задач 17—19.

17. $\sin\alpha = \frac{a-b}{a+b}$. **18.** $\cos\alpha = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$. **19.** $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$.

Найти тригонометрические функции угла α, если:

20. α — угол положительный острый и $\operatorname{tg}\alpha = 4\frac{19}{20}$.

21. α — угол треугольника и $\cos\alpha = -0{,}28$.

22. α — угол III четверти и $\sin\alpha = -\frac{12}{13}$.

23. α — угол IV четверти и $\operatorname{ctg}\alpha = -1{,}05$.

Упростить выражения в задачах 24—52:

24. $1 - \sin^2\alpha$. **25.** $1 - \cos^2\alpha$.

26. $\frac{\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha}$. **27.** $\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha - 1}$.

28. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha$. **29.** $\sec^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha$.

30. a) $\frac{\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$; b) $\frac{\cos\alpha\cdot\cos\beta}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$. **31.** a) $\frac{1-\sin^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}$; b) $\frac{\cos^2\alpha - 1}{\sin^2\alpha - 1}$.

32. $\sin\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha$. **33.** $\cos\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha$. **34.** $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{cosec}\alpha$

35. $\sin\alpha\cdot\sec\alpha$. **36.** $\cos\alpha\cdot\operatorname{cosec}\alpha$. **37.** $\operatorname{ctg}\alpha\cdot\sec\alpha$.

38. $\sin\alpha : \operatorname{tg}\alpha$. **39.** $\operatorname{tg}\alpha : \operatorname{ctg}\alpha$.

40. $1 - \cos^2\alpha + \sin^2\alpha$. **41.** $1 - \sin^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha\cdot\sin^2\alpha$

42. $(1 + \operatorname{tg}^2\alpha)\cdot\cos^2\alpha$.

43. $(\operatorname{tg}\alpha\cdot\cos\alpha)^2 + (\operatorname{ctg}\alpha\cdot\sin\alpha)^2$. **44.** $(\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{cosec}\alpha)^2 - 1$

45. $\sin^2\alpha\cdot\sec^2\alpha+\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$.

46. $\frac{\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}\cdot\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta+1$. 47. $\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\sin\beta}\cdot\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta+1$.

48. $\frac{1-\sin^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha$.

49. $\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sec\alpha+\operatorname{cosec}\alpha}$. 50. $\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}$.

51. $(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)^2-(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha)^2$. 52. $\frac{\cos^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha}{\sin^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha}$.

53. $\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$ выразить: a) через $\sin\alpha$ и b) через $\cos\alpha$.

54. $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha$ выразить через $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$.

55. $\frac{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha}$ выразить через $\operatorname{tg}\alpha$.

56. $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$ выразить через $\operatorname{ctg}\alpha$.

57. $\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$ выразить: a) через $\operatorname{tg}\alpha$ и b) через $\operatorname{ctg}\alpha$.

58. $\frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$ выразить: a) через $\operatorname{tg}\alpha$ и b) через $\operatorname{ctg}\alpha$.

59. Выразить $\sec\alpha$ через $\operatorname{ctg}\alpha$, если α — угол IV четверти.

60. Вычислить $\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha=\frac{5}{4}$.

61. Определить $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$, если $\sin\alpha+\cos\alpha=m$.

62. $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=m$; определить: $\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha$ и $\operatorname{tg}^3\alpha+\operatorname{ctg}^3\alpha$.

Доказать тождества в задачах 63—92:

63. $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$.

64. $\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$. 65. $\frac{\sec\alpha-1}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sec\alpha+1}$.

66. $\sin^2\alpha-\sin^2\beta=\cos^2\beta-\cos^2\alpha$.

67. $\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha=\sec^2\alpha-\operatorname{cosec}^2\alpha$.

68. $\frac{\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=\sec^2\alpha\cdot\operatorname{cosec}^2\alpha$. 69. $\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}=\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta$.

70. $\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sec\alpha+\operatorname{cosec}\alpha}=\sin\alpha\cdot\cos\alpha$. 71. $\frac{\sin\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{cosec}\alpha}=\sin\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha$.

72. $\frac{\sec\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{cosec}\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\sec\alpha\cdot\operatorname{cosec}\alpha$.

73. $\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\frac{\sec\alpha+\operatorname{cosec}\alpha}{\sec\alpha-\operatorname{cosec}\alpha}$.

74. $\frac{1+\sin\alpha}{1+\cos\alpha}\cdot\frac{1+\sec\alpha}{1+\operatorname{cosec}\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$. 75. $\frac{1-\sin\alpha}{1-\cos\alpha}:\frac{1+\sec\alpha}{1+\operatorname{cosec}\alpha}=\operatorname{ctg}^3\alpha$.

76. $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{\operatorname{ctg}\alpha}=1$. 77. $\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}+\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}=1$.

78. $\frac{\sin^2\alpha}{\sec^2\alpha-1}+\frac{\cos^2}{\operatorname{cosec}^2\alpha-1}=1$. 79. $\operatorname{cosec}\alpha-\sin\alpha=\cos\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha$.

80. $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=\sec\alpha\cdot\operatorname{cosec}^2\alpha$.

81. $\sec^2\alpha+\operatorname{cosec}^2\alpha=\sec^2\alpha\cdot\operatorname{cosec}^2\alpha$.

82. $\sec^2\alpha(\operatorname{cosec}^2\alpha-1)=\operatorname{cosec}^2\alpha$.
83. $1+\sin\alpha+\cos\alpha+\operatorname{tg}\alpha=(1+\cos\alpha)(1+\operatorname{tg}\alpha)$.
84. $(\sin\alpha-\operatorname{cosec}\alpha)(\cos\alpha-\sec\alpha)=\sin\alpha\cdot\cos\alpha$.
85. $(\sin\alpha+\operatorname{tg}\alpha)(\cos\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)=(1+\sin\alpha)(1+\cos\alpha)$.
86. $\sin\alpha(1+\operatorname{tg}\alpha)+\cos\alpha(1+\operatorname{ctg}\alpha)=\sec\alpha+\operatorname{cosec}\alpha$.
87. $\sin^3\alpha(1+\operatorname{ctg}\alpha)+\cos^3\alpha(1+\operatorname{tg}\alpha)=\sin\alpha+\cos\alpha$.
88. $\operatorname{tg}^3\alpha\cdot\operatorname{cosec}^2\alpha-\operatorname{cosec}\alpha\cdot\sec\alpha+\operatorname{ctg}^3\alpha\cdot\sec^2\alpha=\operatorname{tg}^3\alpha+\operatorname{ctg}^3\alpha$.
89. $\sec^2\alpha+\operatorname{cosec}^2\alpha=(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)^2$.
90. $\left(\dfrac{\sin\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{cosec}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}\right)^2=\dfrac{\sin^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{cosec}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha}$.
91. $\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha=\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\sin^2\alpha$.
92. $\left(\sqrt{\dfrac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}-\sqrt{\dfrac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}\right)^2=4\operatorname{tg}^2\alpha$.

Решить уравнения 93—113. Построив по найденной из уравнения функции угол и измерив его (с точностью до 1°) транспортиром, ответ написать в общем виде.

93. $\sin^2x=1+\cos^2x$.
94. $\sin x\cdot\operatorname{tg}x=\frac{3}{2}$.
95. $\sin x=\operatorname{ctg}x$.
96. $\cos x-1+2\sin x\cdot\operatorname{tg}x=0$
97. $\sin^2x+\cos x=0$.
98. $\sec x=\operatorname{tg}^2x$.
99. $2\cos^2x=3\sin x+2$.
100. $\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x=\frac{3}{2}$.
101. $\cos x=2\operatorname{tg}x$.
102. $\operatorname{cosec}x-\sin x=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}x$.
103. $2\operatorname{tg}x=-3\operatorname{cosec}x$.
104. $2\sec x=\operatorname{cosec}x$.
105. $2\cos^2x+4\sin^2x=3$.
106. $2(\cos^2x-\sin^2x)=1$.
107. $\sin^4x-\cos^4x=0{,}5$.
108. $1+\sin x\cos x-\sin x-\cos x=0$.

Решить однородные относительно синуса и косинуса уравнения или приводящиеся к однородным относительно синуса и косинуса:

109. $\sin x=\cos x$.
110. $\sin x-\sqrt{3}\cos x=0$.
111. $3\sin^2x=\cos^2x$.
112. $\sin^2x+2\sin x\cos x=3\cos^2x$.
113. $1-3\cos^2x=2\sin x\cos x$.

§ 4. Функции дополнительных и пополнительных углов.

1. Привести к углу, меньшему 45°: 1) $\sin 73°$; 2) $\cos 80°40'$; 3) $\operatorname{tg}69°25'40''$; 4) $\operatorname{ctg}59°59'$.

2. Привести к тем же функциям острого угла: 1) $\sin 112°20'$; 2) $\cos 99°25'35''$; 3) $\operatorname{tg}108°48'36''$; 4) $\operatorname{ctg}140°40'$.

3. Привести к углу, меньшему 45°: 1) $\sin 121°40'$ 2) $\sin 163°35'$ 3) $\cos 158°17'$; 4) $\cos 98°21'$; 5) $\operatorname{tg} 160°27'32''$ 6) $\operatorname{tg} 106°32'$; 7) $\operatorname{ctg} 120°28'40''$; 8) $\operatorname{ctg} 140°42'$.

Упростить выражения:

4. $\dfrac{\operatorname{tg}(180°-\alpha)}{\operatorname{ctg}(90°-\alpha)}$. **5.** $\dfrac{\cos^2(90°-\alpha)-1}{\cos(180°-\alpha)}$.

6. $\sin(\pi-\alpha)\cdot\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)$. **7.** $\dfrac{\operatorname{tg}(\pi-\alpha)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$.

8. $\sin(90°-\alpha)+\sin(90°+\alpha)+2\cos(180°-\alpha)$.

9. $\cos(90°-\alpha)+\cos(90°+\alpha)$.

10. $\operatorname{tg} 43°\cdot\operatorname{tg} 45°\cdot\operatorname{tg} 47°$.

11. $\cos(180°-\alpha)\cdot\sin(90°+\alpha)\cdot\operatorname{tg}(180°-\alpha)\cdot\operatorname{ctg}(90°+\alpha)$.

12. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)+\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$.

13. $\dfrac{2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\operatorname{tg}(\pi-\alpha)}{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\sin(\pi-\alpha)}$.

14. $\dfrac{\operatorname{tg}(180°-\alpha)\cos(180°-\alpha)\operatorname{tg}(90°-\alpha)}{\sin(90°+\alpha)\operatorname{ctg}(90°+\alpha)\operatorname{tg}(90°+\alpha)}$.

15. Показать, что:

$\sin(45°+\alpha)=\cos(45°-\alpha)$; $\cos(45°+\alpha)=\sin(45°-\alpha)$ и т. д.

§ 5. Таблицы натуральных величин тригонометрических функций.

По таблицам натуральных тригонометрических величин найти числовые значения следующих функций:

1. 1) $\sin 15°$; 2) $\sin 45°$; 3) $\sin 60°$; 4) $\sin 73°$; 5) $\sin 38°30'$; 6) $\sin 69°24'$; 7) $\sin 11°50'$; 8) $\sin 87°10'$.

2. 1) $\operatorname{tg} 20°$; 2) $\operatorname{tg} 45°$; 3) $\operatorname{tg} 85°$; 4) $\operatorname{tg} 72°30'$; 5) $\operatorname{tg} 17°42'$; 6) $\operatorname{tg} 53°13'$; 7) $\operatorname{tg} 20°48'$; 8) $\operatorname{tg} 83°7'$; 9) $\operatorname{tg} 85°28'$; 10) $\operatorname{tg} 88°30'$; 11) $\operatorname{tg} 89°48'$; 12) $\operatorname{tg} 89°59'$.

3. 1) $\cos 65°$; 2) $\cos 45°$; 3) $\cos 30°$; 4) $\cos 73°$; 5) $\cos 38°30'$; 6) $\cos 20°24'$; 7) $\cos 61°10'$; 8) $\cos 78°46'$; 9) $\cos 2°52'$; 10) $\cos 1°20'$.

4. 1) $\operatorname{ctg} 20°$; 2) $\operatorname{ctg} 45°$; 3) $\operatorname{ctg} 37°30'$; 4) $\operatorname{ctg} 71°24'$; 5) $\operatorname{ctg} 69°13'$; 6) $\operatorname{ctg} 19°37'$; 7) $\operatorname{ctg} 88°15'$; 8) $\operatorname{ctg} 5°$; 9) $\operatorname{ctg} 2°27'$; 10) $\operatorname{ctg} 90°$; 11) $\operatorname{ctg} 1°53'$.

Найти величину острых углов по данным значениям их функций:

5. 1) $\sin\alpha=0{,}3420$; 2) $\sin\beta=0{,}5948$; 3) $\sin\gamma=0{,}842$; 4) $\sin x=0{,}9293$; 5) $\sin y=1{,}0024$; 6) $\sin z=0{,}3932$.

6. 1) $\operatorname{tg}\alpha=0{,}4452$; 2) $\operatorname{tg}\beta=11{,}43$; 3) $\operatorname{tg}\gamma=2{,}675$; 4) $\operatorname{tg}x=0{,}5452$; 5) $\operatorname{tg}y=5{,}558$; 6) $\operatorname{tg}z=0{,}5$; 7) $\operatorname{tg}u=0{,}42$; 8) $\operatorname{tg}v=12{,}9$; 9) $\operatorname{tg}w=6{,}63$.

7. 1) $\cos\alpha=0{,}891$; 2) $\cos\beta=0{,}910$; 3) $\cos\gamma=0{,}6361$; 4) $\cos x=1{,}0008$; 5) $\cos y=0{,}8189$; 6) $\cos z=0{,}4485$.

8. 1) $\operatorname{ctg}\alpha=2{,}747$; 2) $\operatorname{ctg}\beta=0{,}4142$; 3) $\operatorname{ctg}\gamma=1{,}768$; 4) $\operatorname{ctg}x=1{,}4948$; 5) $\operatorname{ctg}y=0{,}6946$; 6) $\operatorname{ctg}z=1{,}6946$; 7) $\operatorname{ctg}u=7{,}115$; 8) $\operatorname{ctg}v=10{,}23$; 9) $\operatorname{ctg}w=20$.

Найти по таблицам значения следующих функций тупых углов:

9. $\sin 105°$; $\sin 172°8'$; $\sin 140°15'$; $\sin 115°22'$.

10. $\cos 118°$; $\cos 156°30'$; $\cos 98°42'$; $\cos 169°17'$.

11. $\operatorname{tg} 121°$; $\operatorname{tg} 160°24'$; $\operatorname{tg} 101°41'$; $\operatorname{tg} 147°39'$.

12. $\operatorname{ctg} 175°$; $\operatorname{ctg} 124°30'$; $\operatorname{ctg} 171°13'$; $\operatorname{ctg} 111°11'$.

§ 6. Решение прямоугольных треугольников.

Обозначения. В прямоугольном треугольнике ABC угол $A=\alpha$, угол $B=\beta$, угол $C=90°$, катет $BC=a$, катет $AC=b$ и гипотенуза $AB=c$.

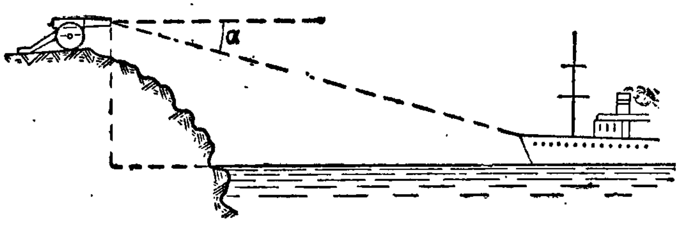
1. Дан прямоугольный треугольник ABC. Определить: 1) $\sin\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если $a=48$ *см* и $c=50$ *см*; 2) $\operatorname{tg}\alpha$ и $\cos\alpha$, если $a=15$ *м* и $b=20$ *м*; 3) $\operatorname{tg}\beta$ и $\cos\beta$, если $b=8{,}4$ *см* и $c=8{,}5$ *см*.

2. Длины сторон прямоугольного треугольника ABC в сантиметрах выражаются числами $a=7\frac{1}{5}$ и $c=17$. Определить все функции угла β.

3. В прямоугольном треугольнике ABC вычислить: 1) катет a по гипотенузе $c=30{,}6$ *см* и $\sin\alpha=\frac{2}{3}$; 2) c по $a=51$ *см* и $\sin\alpha=0{,}75$.

4. В прямоугольном треугольнике ABC вычислить катет a, если: 1) $b=14$ *м* и $\operatorname{tg}\alpha=0{,}72$; 2) $b=20{,}4$ *дм* и $\operatorname{tg}\alpha=1{,}5$.

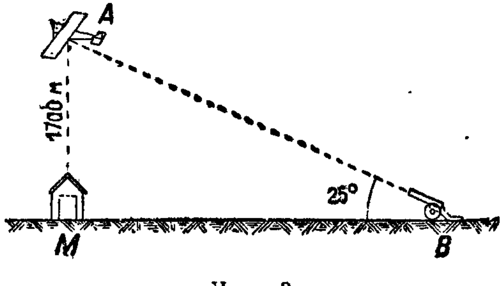
5. Дирижабль попал в полосу света прожектора, когда ось прожектора составляла с горизонтом угол в 47°. В то же время расстояние по прямой от прожектора до дирижабля было равно 3,5 *км*. Вычислить: 1) высоту подъёма дирижабля, 2) горизонтальное расстояние дирижабля от прожектора (ответы округлить до второго десятичного знака).



Черт. 2.

6. Батарея помещена на утёсе высотой в 150 *м*. Угол понижения α мишени (черт. 2), плавающей в море, определён с батареи в 9°. Чему равно расстояние (по горизонтальному направлению) от мишени до батареи?

7. Перископ подводной лодки виден на расстоянии 1500 *м* от форта, орудия которого помещены на высоте 330 *м* от поверхности воды. Определить угол, на который нужно опустить дула орудий, чтобы они были направлены на лодку.



Черт. 3.

8. Самолёт сигнализирует на батарею, что он находится как раз над мишенью на высоте 1700 *м* (черт. 3); в тот же момент наблюдатель на батарее находит, что угол высоты самолёта равен 25°. Вычислить расстояние (по горизонтали) батареи от мишени.

9. Чтобы определить ширину реки, проводят на одном берегу её непосредственно у воды, базис AB, равный a метрам; из конца A базиса по перпендикулярному к нему направлению на противоположном берегу у самой воды видно дерево C; из другого же конца B базиса это дерево видно под углом β к нему. Вычислить ширину реки, если $a = 42$ *м* и $\beta = 25°28'$.

10. Из точки, отстоящей на расстоянии a метров от центра основания башни, верхушка башни видна под углом высоты α. Определить высоту башни ($a = 86{,}6$; $\alpha = 22°17'$).

11. Из окна, находящегося на высоте $h = 12$ *м* над уровнем реки, берега реки видны под углами понижения $\alpha_1 = 17°$ и $\alpha_2 = 45°$. Оба угла находятся в одной плоскости, перпендикулярной к направлению реки. Определить ширину реки.

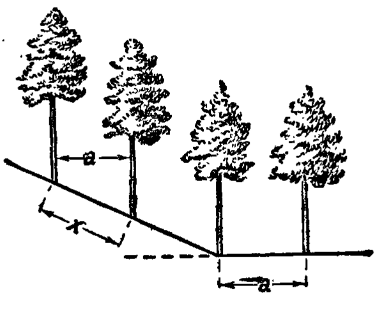
12. Горная железная дорога поднимается на 1 *м* на каждые 30 *м* пути. Найти угол подъёма.

13. Человек, пройдя вверх по склону холма 1050 *м*, поднялся на 90 *м* над плоскостью основания холма. Определить (в среднем) угол наклона холма.

14. При съёмке равномерно поднимающейся улицы длиною в 728 *м* установлено вертикальное повышение в 37,4 *м*. Определить угол подъёма и горизонтальную проекцию улицы.

15. На горке стоит шест длиною a метров. Из некоторой точки, находящейся на горизонтальной плоскости основания горки и отстоящей от верхнего конца шеста на расстоянии b метров, этот конец виден под углом α к горизонту. Определить высоту горки ($a = 2$; $b = 14$; $\alpha = 63°18'$).

16. Если на горизонтальной поверхности земли предполагается рассаживать деревья на расстоянии a метров одно от другого, то на каком расстоянии одну от другой, соответственно с этим, следует копать ямки для посадки деревьев по склону холма (черт. 4), имеющему наклон к горизонту α ($a = 3{,}5$; $\alpha = 25°18'$)?



Черт. 4.

17. На прямой MN взята точка A и из неё под острым углом α к прямой MN проведён отрезок AB длиною a метров; определить проекцию (x) отрезка AB на прямую MN и проследить изменение этой проекции при изменении угла α от 90° до 0° и обратно: от 0° до 90°.

18. Строение, имеющее 30 *м* высоты, бросает тень длиною в 45 *м*. Определить высоту солнца.

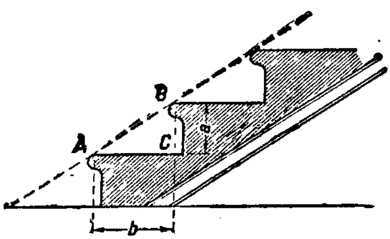
19. В полдень при высоте солнца в 28° фабричная труба бросает тень длиною в 76 *м*. Определить высоту трубы.

20. Какова высота солнца в то время: 1) когда длина тени от стоящего человека равна половине его роста; 2) когда она вдвое больше его роста и 3) когда она в $2\frac{1}{2}$ раза больше его роста?

21. Тень от вертикального шеста короче его самого на $\frac{1}{n}$ его длины. Какова высота солнца ($n = 10{,}5$)?

22. Гаубица H, стреляющая по мишени T с расстояния 2500 *м*, получила приказание перебросить огонь на другую мишень S, находящуюся на расстоянии 1500 *м* от T. На какой угол нужно повернуть орудие, если ST перпендикулярно к HT?

23. Две точки выходят одновременно из вершины прямого угла и движутся равномерно первая по одной, а вторая по другой стороне этого угла; первая проходит по a метров, а вторая по b метров в секунду. Под каким углом φ к направлению движения первой точки видна из неё вторая точка?



Черт. 5.

24. Каменная домовая лестница (черт. 5) имеет в каждом марше (т. е. между каждыми двумя поворотными площадками) по 15 ступенек, причём полезная ширина каждой ступеньки (так называемая проступь) равна $b = 27$ *см*, а высота ступеньки $a = 18$ *см*. Определить угол подъёма этой лестницы.

25. Ширина каждой ступеньки домовой лестницы равна 25 *см*. Какова должна быть высота ступеньки для того, чтобы угол подъёма лестницы был равен 40°?

26. Две прямые улицы пересекаются под углом в 51°50′. Одна из них на расстоянии 1625 *м* от места пересечения должна быть соединена кратчайшим путём со второй. Найти длину этого кратчайшего переулка.

27. Отрезок AO, соединяющий некоторую внешнюю точку A с центром O данного круга, имеет длину $c = 2{,}53$ *м*. Из точки A проведена к кругу касательная AC, образующая с прямою AO угол $\alpha = 38°46'$. Определить длину радиуса (r) и касательной (x).

28. Определить радиус круга, описанного около прямоугольного треугольника, у которого катет равен a дециметрам, а прилежащий к нему острый угол равен β.

Задачи, приводящиеся к решению прямоугольных треугольников.

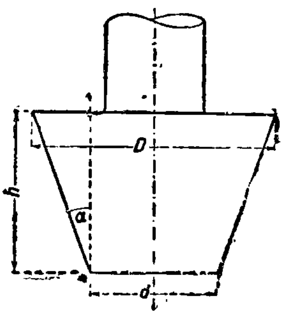
29. Образующая изображённой на чертеже 6 конической части вала имеет подъём в 12%, т. е. на каждые 100 *мм* высоты радиус увеличивается на 12 *мм*. Найти угол подъёма α и диаметр D ($h = 105$ *мм*, $d = 80$ *мм*).

30. В усечённом конусе, данном на чертеже 6, известны оба диаметра: d и D. Образующая конуса имеет подъём $1 : n$. Найти расстояние h между плоскостями оснований усечённого конуса и угол подъёма α ($n = 20$).

31. Железнодорожная насыпь высотой в 120 *м* имеет 360 *м* ширины при основании и 60 *м* ширины по верху. Вычислить угол наклона откоса к горизонту.

32. Железнодорожная насыпь имеет сверху ширину в 60 *м*, а снизу 240 *м*. Боковые стороны насыпи наклонены к горизонту под углом 35°. Определить высоту насыпи.

33. Поперечный разрез насыпи, при постройке которой был применён наибольший возможный откос $\varphi = 39°$, представляет равнобедренную трапецию. Нижнее основание трапеции $a = 10$ *м*, высота $h = 3$ *м*. Определить верхнее основание трапеции.



Черт. 6.

34. По основанию b и боковой стороне a равнобедренного треугольника определить угол при основании ($b = 28{,}13$; $a = 17{,}53$).

35. По основанию b и высоте h равнобедренного треугольника определить угол при его вершине ($b = 31{,}26$ и $h = 20{,}75$).

36. В круге радиуса R определить длину хорды, стягивающей дугу в α градусов ($R = 4{,}175$; $\alpha = 37°42'$).

37. В круге радиуса $R = 35{,}8$ *дм* проведена хорда длиною в $a = 28{,}7$ *дм*. Найти число градусов и минут в дуге, стягиваемой хордой, и расстояние хорды от центра.

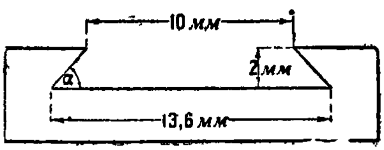
38. Хорда равна $\frac{3}{4}$ диаметра круга. Определить число градусов и минут в дуге, которая стягивается этой хордой.

39. Хорда делит окружность на две части, относящиеся между собой, как $m:n$. Длина окружности равна c метрам. Определить расстояние хорды от центра ($m:n=3:7$; $c=120$).

40. Угол α, вписанный в окружность, опирается на хорду, длина которой a сантиметров. Определить радиус круга.

41. Даны две силы: $P=4{,}372$ *кг*, и $Q=5{,}645$ *кг*, направленные перпендикулярно друг к другу. Какой угол образует равнодействующая с силой P и чему она равна?

42. Основание равнобедренного треугольника равно b дециметрам, угол при основании равен α. Определить периметр треугольника.

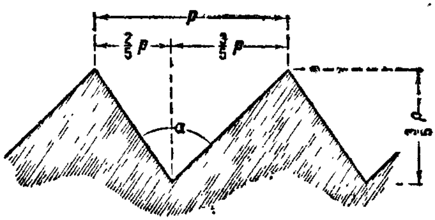


Черт. 7.

43. Основание равнобедренного треугольника равно b дециметрам, а боковая высота равна h дециметрам. Определить угол x при основании треугольника.

44. На чертеже 7 показан паз; определить угол α наклона сторон паза к его основанию.

45. На чертеже 8 показана специальная винтовая нарезка для пушечных замков. Вычислить угол α для заточки резца, служащего для нарезания этого винта.



Черт. 8.

46. Три пункта A, B и C расположены так, что их расстояния на карте выражаются следующими числами: $AB=0{,}85$ *дм*, $AC=1{,}20$ *дм*, $BC=1{,}20$ *дм*. Пункт B находится в точности к северу от пункта A. Найти направление из A на C.

47. Плечи прямолинейного рычага имеют 5 *дм* и 15 *дм* длины. На сколько дециметров подымается (по вертикали) каждый конец при повороте рычага на: 1) 40°, 2) 60° и 3) 90° от горизонтального положения?

48. Судно двигалось следующим образом (см. таблицу румбов[1]):

Направление	Пройденное расстояние в *км*
СВ 23°	10
СВ 37°	13
СВ 82°	15

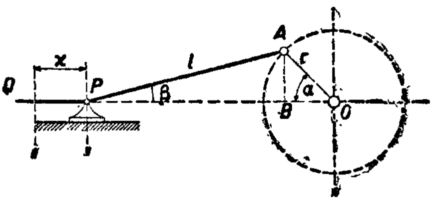
Определить расстояния, которые прошло судно к востоку и северу от точки отправления.

49. По сторонам a и b прямоугольника определить углы, которые его диагональ образует со сторонами ($a = 75{,}2$ *дм*; $b = 63{,}6$ *дм*).

50. Стороны прямоугольника равны a и b. Вычислить угол между его диагоналями ($a = 13{,}5$ *дм*; $b = 7{,}4$ *дм*).

51. В прямоугольнике середины сторон, равных a и b сантиметрам, служат вершинами 4-угольника. Определить углы, которые стороны этого 4-угольника образуют со сторонами прямоугольника ($a = 23{,}76$; $b = 58{,}28$).

52. Диагонали ромба равны d_1 и d_2 сантиметрам ($d_1 = 28$; $d_2 = 49$). Вычислить углы.



Черт 9.

53. 1) AP (черт. 9) — шатун двигателя и OA — его кривошип. Определить длину OB и AB, если $OA = r = 0{,}4$ *м*, а угол $\alpha = 30°$. Затем вычислить угол APB и длину PB проекции шатуна на направляющую OP, зная, что длина шатуна $l = 2$ *м*.

2) Доказать, что между углами α и β, образуемыми шатуном и кривошипом с горизонтальной плоскостью, существует зависимость:

$$\sin\beta = \frac{r}{l}\sin\alpha.$$

3) Найти для различных углов α соответствующий угол β при отношении $\frac{r}{l} = \frac{1}{5}$ ($\alpha = 0°$; $10°$; $20°$; $30°$; $40°$; $50°$; $60°$; $70°$; $80°$; $90°$).

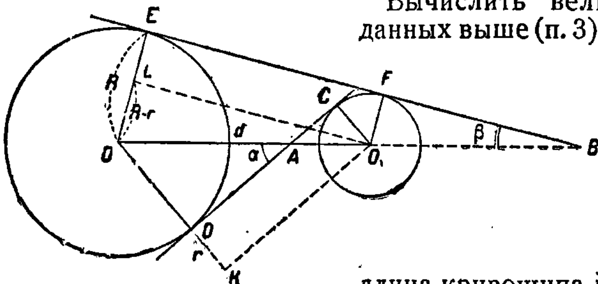
[1] Румбом называется угол между географическим меридианом места и данным направлением. Румбы отсчитываются от направлений на север или на юг в обе стороны от 0 до 90°. Перед румбом ставится указание четверти, в которой лежит данное направление: СВ — северо-восток ЮВ — юго-восток; ЮЗ — юго-запад; СЗ — северо-запад.

4) Почему при значении $\alpha=90^\circ$ угол β (в формуле данной в п. 2 этой задачи) имеет наибольшую величину

5) Как велик угол β, когда шатун и кривошип перпендикулярны друг другу?

6) Пусть при $\alpha=0$ точка P занимает положение Q. Показать, что перемещение головки шатуна $QP=x$ може быть вычислено по формуле: $x=r(1-\cos\alpha)+l(1-\cos\beta)$

Вычислить величину x дл данных выше (п. 3) углов α, есл

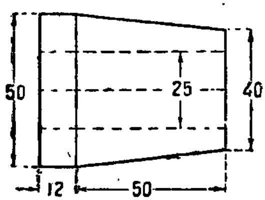


Черт. 10.

длина кривошипа $r=300$ *мм*, шатуна $l=1500$ *мм*.

54. Дан круг радиуса r сантиметров. Из точки, отстоящей от центра на расстоянии a сантиметров, проведены две касательные. Определить угол между ними ($r=3{,}35$ $a=8{,}32$).

55. Линия центров двух кругов (черт. 10) равна d сантиметрам; а радиусы их — R и r сантиметрам. Определить углы α и β, под которыми общие внутренняя и внешняя касательные этих кругов пересекают линию их центров ($R=3{,}065$; $r=1\,057$, $d=6{,}245$).



Черт. 11.

56. Из некоторой точки A окружности, радиус которой равен 5 *дм* проведены две хорды длиной в 7 *дм* и 8 *дм*. Вычислить угол, образуемый этими хордами, рассмотрев два случая, когда хорды находятся: 1) по обе стороны радиуса AO и 2) по одну сторону его.

57. В равнобедренном треугольнике высота равна h дециметрам, а боковая высота равна h_1 дециметрам. Определить угол при основании треугольника ($h=2{,}5$; $h_1=3$).

58. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна a сантиметрам, угол при вершине равен β. Определить радиусы кругов описанного (R) и вписанного (r).

59. Катет прямоугольного треугольника равен b метрам а перпендикуляр, проведённый из вершины прямого угл к гипотенузе, равен h метрам. Определить один из остры углов треугольника, а затем другой катет a и гипоте нузу c.

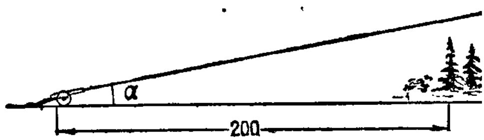
60. Определить угол между образующими конуса втулки показанной на чертеже 11.

61. Определить (с точностью до 1°) угол между обра зующими усечённого конуса для следующих коническ заточек:

Большой диаметр в *мм*	50	75	75	75	100	100
Меньший „ „ „	25	25	50	50	25	25
Высота конуса „ „	50	75	75	25	40	25

62. По диаметру земного шара, равному 12 740 *км*, и п широте места $\varphi°$ определить длину окружности параллел ного круга, соответствующего этому месту ($\varphi = 57°5$ $\pi = 3{,}14$).

63. Какой угол возвышения α (черт. 12) нужно придат орудию при стрельбе через лес, в котором верхушки д ревьев на 15 *м* превышают уровень орудия и находятс на расстоянии 200 *м* от орудия? При вычислениях к высот закрытия (в данном случае леса) обычно добавляется 0,0 дистанции, т. е. расстояния от орудия до закрытия.



Черт. 12.

64. Прямая, соединяющая орудие с целью, образует с горизонтом орудия угол, называемый *углом места цели*. Вычислить угол мест цели при стрельбе по цели, находящейся выше уровня ору дия на 65 *м*. Расстояние от орудия до цели, измеренное п карте, масштаб которой $\frac{1}{10\,000}$, оказалось равным 31,5 *с*

65. Две точки A и B удалены друг от друга на 15 *с* перед ними находится плоское зеркало на расстояни $a = 5$ *см* от одной точки и $b = 7$ *см* от другой. Как вели угол падения луча, идущего от A и отброшенного в напр влении к B?

§ 7. Решение косоугольных треугольников

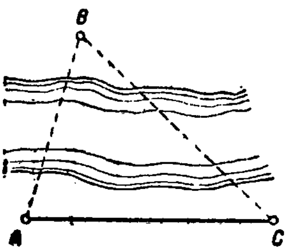
Теорема синусов.

1. Решить треугольник по следующи данным:

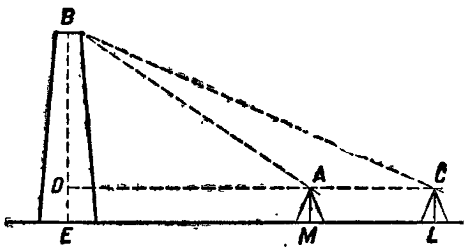
1) $a=109$; $\beta=33°24'$; $\gamma=66°59'$;

3) $c=16$; $\alpha=143°8'$; $\beta=22°37'$.

2. Требуется определить расстояние между заводом A железнодорожной станцией B по другую сторону рек (черт. 13). Известно: $AC=100$ *м*; $\angle BAC=74°$; $\angle BCA=44$



Черт. 13.



Черт. 14.

3. Чтобы найти высоту фабричной трубы, к основани которой нельзя подойти, измерили базис $AC=11$ *м*, пр должение которого упирается в основание трубы (черт. 14 Угол $BAD=49°$; $\angle BCD=35°$. Высота угломерного сн ряда равна 1,37 *м*. Чему равна высота трубы?

Черт. 15.

4. Для определения высоты вер тикального предмета AB от ос нования его A проведён бази AC, равный b метрам, повыша ющийся от A к C под углом $\alpha°$ плоскости горизонта (черт. 15 Из конца C базиса верхушка пре мета видна под углом $\beta°$ к гори зонту. Определить высоту пре мета.

5. На горе, склон которо понижается к горизонту под углом $\beta°$, стоит дерево. Тен дерева, падающая вниз по склону горы, при высоте солнц $\alpha°$ имеет длину l метров. Определить высоту дерева.

6. Одна из диагоналей параллелограма равна d и дели его угол на части в $\alpha°$ и $\beta°$. Определить стороны параллело грама.

7. В треугольнике даны сторона a и два прилежащих к ней угла β° и γ°. Определить биссектрисы l_a, l_b и l всех углов треугольника.

8. Чтобы определить ширину реки, непосредственно у воды по берегу реки провешили базис AB длиной c метров и наметили дерево C, стоящее на другом берегу у самой воды; затем измерили $\angle CAB = \alpha^\circ$ и $\angle ABC = \beta$. Вычислить ширину реки против дерева C ($c = 400$; $\alpha = 45^\circ$; $\beta = 30^\circ$).

9. В треугольнике ABC даны $\angle A = \alpha^\circ$; $\angle C = \gamma^\circ$ и высота $AD = h_a$ метрам. Определить длину его сторон.

Площадь треугольника.

10. Для определения площади треугольника ABC измерили две его стороны a и b и угол между ними γ. Вычислить площадь ($a = 125$ *м*; $b = 160$ *м*; $\gamma = 52^\circ$).

11. В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна b, а угол при вершине α. Определить площадь ($b = 10$ *м*; $\alpha = 72^\circ 20'$).

12. Если длины двух сторон треугольника a и b будут оставаться постоянными, угол же γ, составленный ими, будет изменяться в пределах от 0° до 180°, то при каком значении γ площадь треугольника будет наибольшей?

13. Доказать, что площадь параллелограма равна произведению двух смежных сторон его на синус угла между ними.

14. Доказать, что площадь всякого 4-угольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними.

15. Определить площадь ромба по его стороне a и по углу α ($a = 7{,}5$ *см*; $\alpha = 22^\circ 10'$).

16. Определить площадь Q прямоугольника по длине его диагонали d и по углу φ между диагоналями. Определить максимум Q при изменении φ от 0° до 180°.

17. Основания трапеции a и b, боковая сторона c, прилежащий к ней угол α. Определить площадь трапеции.

18. Площадь параллелограма 12 *дм*^{2}, стороны его $a = 3{,}7$ *дм* и $b = 4{,}2$ *дм*. Определить углы параллелограма.

19. Площадь треугольника 71,24 *см*^{2}; стороны его $a = 15$ *см* и $b = 13$ *см*. Определить угол между ними.

20. Определить площадь участка земли, имеющего вид треугольника, одна из сторон которого c, а две другие образуют с первой углы α и β ($c = 20$; $\alpha = 65^\circ 30'$; $\beta = 84^\circ 30'$).

21. Две из прямолинейных границ лесного участка сходятся под углом $BAC = \alpha$. Требуется от этого участка отрезать площадь DAE в Q кв. метров при помощи прямой DE, наклонённой к стороне AC под углом $AED = \gamma$. Такую

прямую легко провешить, если будут известны стороны AE и AD. Определить длину этих сторон.

22. В треугольнике ABC даны: угол $C=\gamma$ и высоты h_a и h_b, проведенные из вершин A и B. Определить площадь треугольника.

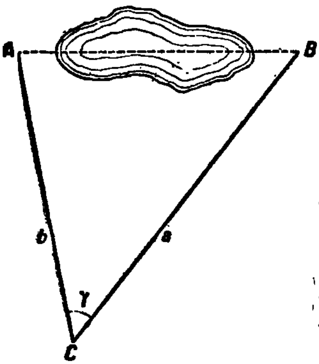
23. Определить площадь треугольника по двум углам α и β и по высоте h_b.

Теорема косинусов.

24. В треугольнике ABC дано: $b=7$; $c=10$; $\alpha=56°29'$. Найти a.

25. Решить треугольник ABC по следующим данным:

1) $a=10$; $b=15$; $\gamma=123°17'$.
2) $a=0{,}2$; $c=0{,}6$; $\beta=23°28'$.
3) $c=40$; $a=100$; $\beta=16°28'$.



Черт. 16.

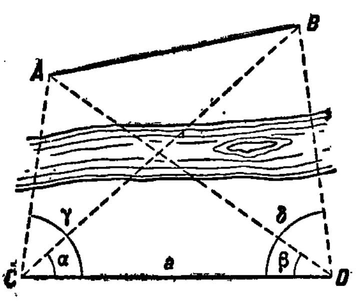
26. Чтобы определить расстояние между двумя пунктами A и B, между которыми пройти было нельзя (черт. 16), выбрали третий пункт C так, что из него были видны и доступны оба пункта A и B; затем измерили расстояние $BC=a$, $AC=b$ и угол $ACB=\gamma$. Вычислить AB ($a=100$ *м*; $b=80$ *м*; $\gamma=48°57'$).

27. В треугольнике ABC даны стороны $a=3$, $b=4$, $c=6$. Найти угол γ.

28. Стороны параллелограма 4 *м* и 5 *м*. Угол его 52°. Найти обе диагонали.

29. Две силы: $P=100$ *кг* и $Q=200$ *кг* приложены к материальной точке под углом $\alpha=50°$ друг к другу. Определить величину равнодействующей R и углы, которые она составляет с силами P и Q.

30. Для определения расстояния между двумя недоступными пунктами A и B (черт. 17) измерили базис CD, не проходящий между пунктами A и B и равный a метрам, и углы: $ACD=\gamma$, $BCD=\alpha$, $ADC=\beta$ и $BDC=\delta$. Вычислить AB, если $a=2000$; $\alpha=52°40'$; $\beta=42°1'$; $\gamma=86°40'$, $\delta=81°15'$.



Черт. 17.

§ 8. Формулы приведения.

1. Синус, косинус, тангенс и котангенс углов

$$a)\ 162°30';\ b)\ 230°;\ c)\ 335°$$

привести к *тем же* функциям острого угла.

2. Синус, косинус, тангенс и котангенс углов

$$a)\ 25°30'20'';\ b)\ 130°;\ c)\ 250°);\ d)\ 340°$$

заменить сходными по названию функциями острого угла

3. Тригонометрические функции углов

$$a)\ 75°;\ b)\ 150°;\ c)\ 200°;\ d)\ 315°$$

заменить функциями, аргументы которых не превышают 45°

Привести к наименьшему положительному аргументу

4. a) $\sin 2000°$; b) $\sin(-1000°)$; c) $\cos 1500°$; d) $\cos(-2900°)$

5. e) $\operatorname{tg} 600°$; f) $\operatorname{tg}(-40°)$; g) $\operatorname{ctg} 1305°$; h) $\operatorname{ctg}(-300°)$.

6. i) $\sec 1900°$; k) $\sec(-2150°)$; l) $\operatorname{cosec} 500°$; m) $\operatorname{cosec}(-80°)$

7. a) $\sin(-7{,}3\pi)$; b) $\cos\frac{34}{9}\pi$; c) $\operatorname{tg}\left(-\frac{79}{11}\pi\right)$; d) $\operatorname{cosec}(-0{,}6\pi)$

Вычислить:

8. a) $\sin(-1350°)$; b) $\cos 720°$; c) $\operatorname{tg} 900°$; d) $\operatorname{ctg}(-450°)$.

9. a) $\sin\frac{19}{6}\pi$; b) $\cos\frac{11}{2}\pi$; c) $\operatorname{tg}\frac{16}{3}\pi$; d) $\sec 9\pi$.

10. Тригонометрические функции угла 50° выразить чере функции его смежного угла.

Упростить выражения (в задачах 11—21):

11. $\sin(90°+\alpha)+\cos(180°-\alpha)+\operatorname{tg}(270°+\alpha)+\operatorname{ctg}(360°-\alpha)$.

12. $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\cos(\pi-\alpha)+\operatorname{tg}(\pi-\alpha)-\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$.

13. $\sin^2(270°-\alpha)+\sin^2(360°-\alpha)$. 14. $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\operatorname{tg}(2\pi-\alpha)$.

15. $a^2+b^2+2ab\cdot\cos(180°-\alpha)$. 16. $\frac{\sin(-\alpha)\cdot\operatorname{tg}(-\alpha)}{\cos(-\alpha)\cdot\operatorname{ctg}(-\alpha)}$.

17. $\frac{\operatorname{cosec}(-\alpha)\cdot\operatorname{cosec}(90°+\alpha)}{\sec(-\alpha)\cdot\sec(180°+\alpha)}$. 18. $\frac{\sin(\pi+\alpha)\cdot\sec\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\operatorname{tg}(\pi-\alpha)\cdot\sec(2\pi-\alpha)}$.

19. $\sin 160°\cdot\cos 110°+\sin 250°\cdot\cos 340°+\operatorname{tg} 110°\cdot\operatorname{tg} 340°$

20. $\frac{\sin(90°-\alpha)\cdot\operatorname{tg} 132°\cdot\operatorname{cosec} 222°\cdot\sin 90°}{\cos(180°+\alpha)\cdot\sec 312°\cdot\operatorname{ctg} 48°\cdot\cos 180°}$.

21. $\frac{\operatorname{tg}(270^\circ-\alpha)\cdot\sin 130^\circ\cdot\operatorname{cosec}220^\circ\cdot\sin 270^\circ}{\operatorname{ctg}(180^\circ-\alpha)\cdot\cos 50^\circ\cdot\sec 320^\circ\cdot\cos 360^\circ}$.

22. Преобразовать тригонометрические функции следующих углов:
a) $\alpha-90^\circ$; b) $\alpha-180^\circ$; c) $\alpha-270^\circ$; d) $\alpha-360^\circ$.

23. Определить $\cos x$ из уравнения:
$$3\sin^2(360^\circ-x)-7\sin(x-90^\circ)+3=0.$$

24. Определить $\sin x$, если $\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\sin\frac{\pi}{2}=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$.

25. Определить $\operatorname{tg}x$ из уравнения:
$$\sin(2\pi-x)\cos(\pi-x)+\sin^2\left(\frac{3}{2}\pi-x\right)-\sin^2(2\pi-x)=0.$$

Решить уравнения (в задачах 26—30):

26. $\sin^2(270^\circ-x)+2\cos(360^\circ-x)=3$.

27. $\sin(x-90^\circ)=-\sin(x-180^\circ)$.

28. $\cos(\pi+x)=-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$.

29. $\operatorname{tg}(x+\pi)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$. 30. $\sin(x+90^\circ)=-\operatorname{ctg}(360^\circ-x)$.

§ 9. Теорема сложения.

Синус и косинус суммы и разности.

1. Вычислить $\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)$, если $\sin\alpha=0{,}625$ и $\sin\beta=0{,}8$.

2. Разложить и упростить:
a) $\sin(\alpha+60^\circ)+\sin(\alpha-60^\circ)$;
b) $\cos(30^\circ+\alpha)-\cos(30^\circ-\alpha)$.

3. Дано: $\cos\alpha=0{,}6$; $0<\alpha<90^\circ$. Найти $\sin(\alpha+30^\circ)$.

4. Дано: $\sin\alpha=\sqrt{0{,}2}$; $0<\alpha<90^\circ$. Найти $\cos(60^\circ+\alpha)$.

5. Дано: $\cos\alpha=0{,}5$; $\sin\beta=-0{,}4$; $270^\circ<\alpha<360^\circ$; $180^\circ<\beta<270^\circ$. Найти $\sin(\alpha-\beta)$ и $\cos(\alpha+\beta)$.

6. Дано: $\sin\alpha=\frac{2}{3}$; $\cos\beta=-\frac{3}{4}$; α во II четверти, β—в III. Найти $\sin(\alpha+\beta)$ и $\cos(\alpha-\beta)$.

7. Найти $\sin(\alpha+\beta)$, если $\sin\alpha=0{,}6$ и $\sin\beta=0{,}8$.

8. Углы α и β — положительные острые:
$$\cos\alpha=\frac{1}{7};\ \cos(\alpha+\beta)=-\frac{11}{14}.$$ Определить $\cos\beta$.

9. Вычислить: a) $\sin 75^\circ$ и $\cos 75^\circ$, заменяя 75° через $45^\circ+30^\circ$; b) $\sin 15^\circ$ и $\cos 15^\circ$, заменяя 15° через $45^\circ-30^\circ$.

10. Формулы, выражающие $\sin(\alpha \pm \beta)$ и $\cos(\alpha \pm \beta)$, применить к случаям: a) $\alpha = 0°; 90°; 180°; 270°; 360°$; b) $\beta = 90°; 180°; 270°; 360°$; c) $\alpha = \beta$.

11. Если углы α и β — положительные и $\alpha + \beta < 90°$, то $\sin(\alpha + \beta) < \sin\alpha + \sin\beta$. Доказать это: 1) по чертежу и 2) по формуле.

12. $\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}$ и $\frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta)}$ выразить: a) через $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{tg}\beta$; b) через $\operatorname{ctg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\beta$.

13. Разложить $\sin(\alpha + \beta + \gamma)$ и $\cos(\alpha + \beta + \gamma)$.

14. Дано: $\sin\alpha = \frac{3}{5}$; $\sin\beta = \frac{12}{13}$; $\sin\gamma = \frac{7}{25}$, где α, β и γ — острые углы. Найти $\sin(\alpha + \beta + \gamma)$ и $\cos(\alpha + \beta - \gamma)$.

Тангенс суммы и разности.

15. Разложить и упростить $\operatorname{tg}(45° \pm \alpha)$.

16. Найти $\operatorname{tg} 105°$ [$= \operatorname{tg}(60° + 45°)$].

17. Дано: $\operatorname{tg}\alpha = 3$; найти $\operatorname{tg}(45° - \alpha)$.

18. Дано: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$ и $\operatorname{tg}\beta = -2$. Найти $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ и $\operatorname{ctg}(\alpha - \beta)$.

19. $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta)$ выразить через $\operatorname{ctg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\beta$.

20. $\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta)$ выразить: a) через $\operatorname{ctg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\beta$; b) через $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{tg}\beta$.

21. Разложить $\operatorname{tg}(\alpha + \beta + \gamma)$.

Упростить следующие выражения (в задачах 22—26):

22. $\frac{\sin(\alpha - \beta) + 2\cos\alpha\sin\beta}{2\cos\alpha\cos\beta - \cos(\alpha - \beta)}$. 23. $\frac{\cos\alpha\cos\beta - \cos(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta) - \sin\alpha\sin\beta}$.

24. $\frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)}$. 25. $\frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}$.

26. $\frac{\sin(45° + \alpha) - \cos(45° + \alpha)}{\sin(45° + \alpha) + \cos(45° + \alpha)}$.

Доказать тождества (в задачах 27—37):

27. $\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta$.

28. $\cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) = \cos^2\alpha - \sin^2\beta$.

29. $\sin(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\alpha + \sin\beta \cdot \cos\beta$.

30. $(\sin\alpha + \cos\alpha) \cdot (\sin\beta - \cos\beta) = \sin(\beta - \alpha) - \cos(\beta + \alpha)$

31. $\cos(\alpha + \beta) \cdot \sin\beta - \cos(\alpha + \gamma) \cdot \sin\gamma = \sin(\alpha + \beta) \cdot \cos\beta - \sin(\alpha + \gamma) \cdot \cos\gamma$.

32. a) $\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha - \beta)}$; b) $\frac{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta} = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}$.

33. $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg} 2\alpha = \operatorname{cosec} 2\alpha$. 34. $\sin\alpha - \cos\alpha \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

35. $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)-\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}(\alpha+\beta)\cdot\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta$.
36. $\cos\alpha+\cos(120^\circ-\alpha)+\cos(120^\circ+\alpha)=0$.
37. $\frac{1}{2}(\cos\alpha+\sqrt{3}\cdot\sin\alpha)=\cos(60^\circ-\alpha)$.

38. Если $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$ и $\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{3}$, причём углы α и β — острые, то $\alpha+\beta=45^\circ$. Доказать.

39. Если α, β и γ — острые углы, тангенсы которых равны $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$ и $\frac{1}{8}$, то $\alpha+\beta+\gamma=45^\circ$. Доказать.

40. Дано: $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{3}{4}$; $\operatorname{ctg}\beta=\frac{1}{7}$; α и β — острые углы. Доказать, что $\alpha+\beta=135^\circ$.

Решить уравнения (в задачах 41—54).
41. $\sin(x+30^\circ)+\cos(x-30^\circ)=0$.
42. $\cos(\alpha+x)\cdot\cos(\alpha-x)+0{,}75=\cos^2\alpha$.
43. $\cos(\alpha-\beta)\cdot\sin(\gamma-x)=\cos(\alpha+\beta)\cdot\sin(\gamma+x)$.
44. $\operatorname{tg}(x+45^\circ)+\operatorname{tg}(x-45^\circ)=2\operatorname{ctg}x$.
45. $\sin(x+\alpha)+\sin(x-\alpha)=\cos\alpha$.
46. $\sin(\alpha-x):\cos(\alpha+x)=a:b$.
47. $\operatorname{tg}(x+\alpha)\cdot\operatorname{tg}(x-\alpha)=m$. 48. $\sin 2x\cdot\cos x=\cos 2x\cdot\sin x$.
49. $\sin x\cdot\sin 2x=\cos x\cdot\cos 2x$. 50. $\cos 2x\cdot\cos 3x=\cos 5x$.
51. $\sin(\alpha+x)-\cos x\cdot\sin\alpha=\cos\alpha$.
52. $2\sin x=\sin(45^\circ-x)$. 53. $\sin(45^\circ-x)=\frac{1}{2}\cos(45^\circ+x)$.
54. $\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=\frac{1}{2}$.

§ 10. Умножение и деление аргумента.

Формулы умножения.

1. Вычислить: a) $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$, если $\sin\alpha=0{,}8$; b) $\operatorname{tg}2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha=-3$.

2. В равнобедренном треугольнике синус угла при основании равен $\frac{5}{13}$; определить синус и косинус угла при вершине.

3. Если $0<\alpha<45^\circ$, то $\sin 2\alpha<2\sin\alpha$. Доказать это: 1) по чертежу и 2) пользуясь формулой для $\sin 2\alpha$.

4. Дано: $\sin\alpha=0{,}8$; $90^\circ<\alpha<180^\circ$. Найти $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$.

5. Дано: $\cos\alpha=\sqrt{\frac{1}{3}}$; $270^\circ<\alpha<360^\circ$. Найти $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$.

6. Дано: $\operatorname{tg}\alpha=3$. Найти $\operatorname{tg}2\alpha$.

7. $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$ выразить: a) только через $\sin\alpha$; b) только через $\cos\alpha$.

8. $\operatorname{ctg} 2\alpha$ выразить: a) через $\operatorname{ctg}\alpha$ и b) через $\operatorname{tg}\alpha$.

9. $\sec 2\alpha$ выразить через $\sec\alpha$.

10. a) $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ выразить через $\sin\frac{\alpha}{2}$ и $\cos\frac{\alpha}{2}$; b) $\operatorname{tg}\alpha$ выразить через $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

11. $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ выразить через $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

12. Показать, что *все* тригонометрические функции угла α выражаются ***рационально*** через $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

13. Дано: $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{2}{3}$. Найти $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$.

14. Дано: $\operatorname{ctg}\alpha=\sqrt{2}+1$. Найти $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\operatorname{tg} 2\alpha$.

15. $\sin 3\alpha$, $\cos 3\alpha$ и $\operatorname{tg} 3\alpha$ выразить соответственно через $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$.

16. $\sin 4\alpha$, $\cos 4\alpha$ выразить через $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$.

Формулы деления.

17. Вычислить $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если $180^\circ<\alpha<270^\circ$ и $\sin\alpha=-0{,}6$.

18. Найти синус, косинус, тангенс и котангенс угла 15°, полагая $15^\circ=\frac{30^\circ}{2}$. (Результаты сравнить с полученными в задаче 9, § 9.)

19. Найти синус, косинус, тангенс и котангенс угла $22^\circ 30'$ $\left(=\frac{45^\circ}{2}\right)$.

20. В равнобедренном треугольнике косинус угла при вершине равен $\frac{7}{25}$; определить синус и косинус угла при основании.

21. Вычислить $\sin\frac{\alpha}{4}$, если $450^\circ<\alpha<540^\circ$ и $\sin\alpha=\frac{336}{625}$

22. Вычислить $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4}$, если$^\circ<\frac{\alpha}{4}<90^\circ$ и $\cos\alpha=\frac{3}{5}$.

23. Если $\cos\alpha=\frac{40}{41}$ и $\cos\beta=\frac{60}{61}$, причём углы α и β — положительные острые, то $\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{1}{41\cdot 61}$. Проверить.

24. Проверить: $\operatorname{tg} 7^\circ 30'=\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-2$.

25. Выразить $\sin\frac{\alpha}{2}$ и $\cos\frac{\alpha}{2}$ через $\sin\alpha$.

26. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$ выразить соответственно через $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$.

27. Определить $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если $180^\circ<\alpha<270^\circ$ и $\operatorname{tg}\alpha=\frac{4}{3}$.

Доказать тождества (в задачах 28—49):

28. a) $2\sin(90^\circ-\alpha)\cdot\sin\alpha=\sin 2\alpha$; b) $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=-\cos 2\alpha$.

29. a) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=1+\sin 2\alpha$; b) $\left(\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2=1-\sin\alpha$.

30. a) $\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\sin 2\alpha$; b) $\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\cos 2\alpha$.

31. $\cos^2(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha-\beta)-\cos 2\alpha\cdot\cos 2\beta=1$.

32. $\frac{\cos\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}+\operatorname{cosec}\frac{\alpha}{2}}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)\sin\alpha$.

33. $\frac{\cos^2\alpha}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}=-\frac{1}{4}\sin 2\alpha$.

34. a) $\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha=2\operatorname{cosec}2\alpha$; b) $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha=2\operatorname{ctg}2\alpha$;

35. a) $\sin 2\alpha-\operatorname{tg}\alpha=\cos 2\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha$; b) $\sin 2\alpha-\operatorname{ctg}\alpha=-\cos 2\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha$.

36. $\frac{1}{1-\operatorname{tg}\alpha}-\frac{1}{1+\operatorname{tg}\alpha}=\operatorname{tg}2\alpha$.

37. $\operatorname{tg}(\alpha+45^\circ)+\operatorname{tg}(\alpha-45^\circ)=2\operatorname{tg}2\alpha$.

38. $2\sin(45^\circ+\alpha)\cdot\sin(45^\circ-\alpha)=\cos 2\alpha$.

39. $\frac{1-\operatorname{tg}^2(45^\circ-\alpha)}{1+\operatorname{tg}^2(45^\circ-\alpha)}=\sin 2\alpha$. 40. $\sin 3\alpha\cdot\operatorname{cosec}\alpha-\cos 3\alpha\cdot\sec\alpha=2$.

41. $4\sin\alpha\cdot\sin(60^\circ-\alpha)\cdot\sin(60^\circ+\alpha)=\sin 3\alpha$.

42. $4\cos\alpha\cdot\cos(60^\circ-\alpha)\cdot\cos(60^\circ+\alpha)=\cos 3\alpha$.

43. $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}(60^\circ-\alpha)\cdot\operatorname{tg}(60^\circ+\alpha)=\operatorname{tg}3\alpha$.

44. $\frac{\sin 3\alpha+\sin^3\alpha}{\cos 3\alpha-\cos^3\alpha}=-\operatorname{ctg}\alpha$. 45. $\frac{\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2 60^\circ}{\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{ctg}^2 60^\circ}=\operatorname{tg}3\alpha\cdot 3\operatorname{ctg}\alpha$.

46. a) $1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}$; b) $1+\sin\alpha=2\cos^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$.

47. a) $1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}$; b) $1-\sin\alpha=2\sin^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$.

48. $\frac{2\sin\alpha-\sin 2\alpha}{2\sin\alpha+\sin 2\alpha}=\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$. 49. $\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha)$.

50. Если $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{7}$ и $\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{3}$, причём углы α и β—острые, то $\alpha+2\beta=45^\circ$. Доказать.

51. Если $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{7}$ и $\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{3}$, то $\cos 2\alpha=\sin 4\beta$. Проверить.

Решить уравнения (в задачах 52—74):

52. $\sin x\cdot\cos x=0{,}25$. 53. $\sin^2 x-\cos^2 x=0{,}5$.

54. $1=\operatorname{tg}^2 x+2\operatorname{tg}x$. 55. $\sin 2x=\sin x$.

56. $a \cdot \sin x = b \cdot \cos \frac{x}{2}$.
57. $1 + \sin^2 2x = 4 \sin^2 x$.
58. $\cos 2x = \cos x$.
59. $\cos 2x = 2 \sin^2 x$.
60. $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} x$.
61. $\operatorname{tg} 2x = 3 \operatorname{tg} x$.
62. $a(1+\cos x) = b \cdot \cos \frac{x}{2}$.
63. $1 - \cos x = \sin \frac{x}{2}$.
64. $a(1 + \cos x) = b \cdot \sin x$.
65. $1 - \cos x = \sin x$.
66. $1 + \sec x = m \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}$.
67. $1 + \sec x = \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2}$.
68. $\sin 3x = 2 \sin x$.
69. $\cos 3x = 4 \cos^2 x$.
70. $\sin x \cdot \sin 3x = \frac{1}{2}$.
71. $\cos^3 x \cdot \sin 3x + \sin^3 x \cdot \cos 3x = \frac{3}{4}$.

В уравнениях 72—74 $\sin x$ и $\cos x$ выразить предварительно по формулам задачи 11:

72. $\sin x + \cos x = 1\frac{1}{4}$.
73. $4 \sin x + 3 \cos x = 2$.
74. $\sqrt{3} \sin x + \cos x = \sqrt{3}$.

§ 11. Преобразование алгебраической суммы тригонометрических функций в произведение. Вспомогательный угол.

Привести к виду, удобному для логарифмирования, и упростить:

1. a) $\sin 75^\circ + \sin 15^\circ$; b) $\sin 78^\circ - \sin 42^\circ$; c) $\cos 152^\circ + \cos 28^\circ$; d) $\cos 48^\circ - \cos 12^\circ$.
2. a) $\sin 5^\circ + \sin 20^\circ$; b) $\sin 3^\circ - \sin 5^\circ$; c) $\cos 3^\circ 15' + \cos 17^\circ$; d) $\cos 5^\circ - \cos 25^\circ$.
3. a) $\sin(30^\circ + \alpha) + \sin(30^\circ - \alpha)$; b) $\cos \frac{\alpha+\beta}{2} + \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$.
4. a) $\frac{\sin 25^\circ + \sin 15^\circ}{\sin 25^\circ - \sin 15^\circ}$; b) $\frac{\cos \alpha + \cos \beta}{\cos \alpha - \cos \beta}$.
5. a) $\sin 20^\circ + \cos 40^\circ$; b) $\cos 20^\circ - \sin 20^\circ$; c) $\sin \alpha - \cos \beta$
6. a) $\sin \alpha + \cos \alpha$; b) $\sin \alpha - \cos \alpha$.
7. a) $\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta$; b) $\operatorname{ctg}\alpha \pm \operatorname{ctg}\beta$; c) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta$; d) $\operatorname{ctg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta$
8. a) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha$; b) $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha$.
9. a) $\sin^2\alpha - \sin^2\beta$; b) $\cos^2\alpha - \cos^2\beta$.
10. a) $\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\beta$; b) $\operatorname{ctg}^2\alpha - \operatorname{ctg}\beta$; c) $\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\beta$; d) $\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\alpha$.
11. a) $1 + \sin\alpha$; b) $\sin\alpha - 1$; c) $1 - 2\sin^2\alpha$; d) $1 - 2\cos^2\alpha$
12. $\sin\alpha + \operatorname{tg}\alpha$.
13. $\operatorname{tg}\alpha - \sec\alpha$.
14. $\operatorname{cosec}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha$
15. a) $1 \pm \operatorname{tg}\alpha$; b) $1 \pm \operatorname{ctg}\alpha$.
16. $1 \pm \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta$.

17. a) $\sqrt{1+\cos\alpha}+\sqrt{1-\cos\alpha}$;

b) $\sqrt{1+\cos\alpha}-\sqrt{1-\cos\alpha}$ *).

18. $\sqrt{\operatorname{tg}\alpha+\sin\alpha}+\sqrt{\operatorname{tg}\alpha+\sin\alpha}$ *).

19. a) $\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\sin\beta\cdot\cos\beta$; b) $\sin\alpha\cdot\cos\alpha-\sin\beta\cdot\cos\beta$.

20. a) $1+\sin\alpha+\cos\alpha$; b) $1-\sin\alpha-\cos\alpha$.

21. $1-2\cos\alpha+\cos2\alpha$.

22. a) $1+\operatorname{tg}\alpha+\sec\alpha$; b) $\sec\alpha+\operatorname{tg}\alpha-1$.

23. a) $1+\sin\alpha+\cos\alpha+\operatorname{tg}\alpha$; b) $1+\sin\alpha-\cos\alpha-\operatorname{tg}\alpha$.

24. a) $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha+\sec\alpha+\operatorname{cosec}\alpha$;

b) $\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha-\sec\alpha-\operatorname{cosec}\alpha$.

25. a) $\sin\alpha+\sin\beta+\sin(\alpha+\beta)$; b) $\sin\alpha-\sin\beta+\sin(\alpha+\beta)$.

26. $\sin\alpha+\sin2\alpha+\sin3\alpha$.

Доказать тождества (в задачах 27—38):

27. $\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha-\cos\beta}=\operatorname{ctg}\dfrac{\beta-\alpha}{2}$. **28.** $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}=\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)\cdot\operatorname{tg}\beta$.

29. a) $\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}=\dfrac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$; b) $\dfrac{\sin\alpha-\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}=\dfrac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$.

30. $\dfrac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha)$. **31.** $\dfrac{\sec\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{\sec\alpha-\operatorname{tg}\alpha}=\operatorname{tg}^2\left(45^\circ+\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

32. a) $\dfrac{\operatorname{tg}2\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}2\alpha-\operatorname{tg}\alpha}=\sin2\alpha$; b) $\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}2\alpha}=\cos2\alpha$.

33. $\sqrt{1+\sin\alpha}-\sqrt{1-\sin\alpha}=2\sin\dfrac{\alpha}{2}$ (если $0<\alpha<90^\circ$).

34. $\dfrac{\sin2\alpha}{1+\cos2\alpha}\cdot\dfrac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$.

35. a) $(\sin\alpha+\sin\beta)^2+(\cos\alpha+\cos\beta)^2=4\cos^2\dfrac{\alpha-\beta}{2}$;

b) $(\sin\alpha-\sin\beta)^2+(\cos\alpha+\cos\beta)^2=4\sin^2\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

36. a) $1-\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\operatorname{tg}^2\beta=\dfrac{\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)}{\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta}$;

b) $1-\operatorname{ctg}^2\alpha\cdot\operatorname{ctg}^2\beta=-\dfrac{\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)}{\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta}$.

37. $\dfrac{\sin\alpha+\sin3\alpha+\sin5\alpha}{\cos\alpha+\cos3\alpha+\cos5\alpha}=\operatorname{tg}3\alpha$.

38. $\operatorname{tg}3\alpha-\operatorname{tg}2\alpha-\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}3\alpha\cdot\operatorname{tg}2\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha$.

Доказать, что при условии $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$ (например для углов треугольника) имеют место следующие соотношения

*) $0<\alpha<90^\circ$.

в задачах 39—49. (К этим номерам в ответах имеются указания):

39. a) $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}$;

b) $\sin\alpha+\sin\beta-\sin\gamma=4\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}$.

40. a) $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=1+4\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}$;

b) $\cos\alpha+\cos\beta-\cos\gamma=-1+4\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}$.

41. $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma$.

42. $\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma=\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta\cdot\operatorname{ctg}\gamma+$
$+\operatorname{cosec}\alpha\cdot\operatorname{cosec}\beta\cdot\operatorname{cosec}\gamma$.

43. $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$.

44. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=1$.

45. $\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\gamma+\operatorname{ctg}\beta\cdot\operatorname{ctg}\gamma=1$.

46. $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2+2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma$.

47. $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1-2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma$.

48. $\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma=4\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma$.

49. $\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma=-1-4\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma$.

Выражения 50—59 преобразовать в произведения с помощью некоторых простых углов:

50. $1+2\sin\alpha$. 51. $1-2\cos\alpha$. 52. $\sqrt{3}-2\sin\alpha$.

53. a) $\sqrt{2}+2\cos\alpha$; b) $\sqrt{2}\cdot\sin\alpha-1$. 54. $3-4\sin^2\alpha$

55. $3-4\cos^2\alpha$. 56. $1-3\operatorname{tg}^2\alpha$.

57. $3-\operatorname{ctg}^2\alpha$. 58. $1+\cos\alpha+\cos 2\alpha$,

59. a) $\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha$; b) $\cos\alpha-\cos 2\alpha+\cos 3\alpha$.

60. Преобразовать с помощью вспомогательного угла:

1) $\sqrt{a^2+b^2}$;

1) $\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$ при $p>2\sqrt{q}>0$.

61. Предполагая, что $a>b>0$, преобразовать с помощью вспомогательного угла:

1) $\frac{a+b}{a-b}$; 2) $\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}$; 3) $\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}+\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$

62. Применить вспомогательный угол к вычислению:

$$x=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cdot\cos\gamma}.$$

Следующие уравнения (63—75) решить, преобразуя сумму или разность функций в произведение:

63. $\sin 3x + \sin x = 0$. 64. $\cos 4x + \cos x = 0$.
65. $\sin 5x = \sin x$. 66. $\cos 2x = \cos x$.
67. $\cos 3x = \sin x$. 68. $\sin x + \cos x = 1$.
69. $\cos x - \sin x = 1 : \sqrt{2}$. 70. $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2(1 + \sqrt{5})$.
71. $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = 2(1 - \sqrt{2})$. 72. $\operatorname{ctg} 2x - \operatorname{ctg} 4x = 2$.
73. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 3x = \sec x \cdot \sec 3x$. 74. $\cos x + \cos 3x = \cos 2x$.
75. $\sin 3x = \sin 2x - \sin x$.

§ 12. Применение логарифмических таблиц к вычислению тригонометрических выражений и к нахождению углов.

Ответы задач этого параграфа, а также § 13 и 14 даны по четырёхзначным таблицам. Однако при решении их можно пользоваться и пятизначными таблицами. При этом необходимо иметь в виду, что иногда возможно расхождение в ответах на 1—2 единицы последнего разряда.

Найти по таблицам:

1. a) $\lg\sin 21°37'$; b) $\lg\sin 63°42'$; c) $\lg\sin 21°11'$; d) $\lg\sin 47°12'$; e) $\lg\sin 53°$; f) $\lg\sin 1°23'18''$.
2. a) $\lg\cos 32°8'$; b) $\lg\cos 50°22'$; c) $\lg\cos 44°53'$; d) $\lg\cos 62°47'$; e) $\lg\cos 30°48'$; f) $\lg\cos 89°36'26''$.
3. a) $\lg\operatorname{tg} 27°41'$; b) $\lg\operatorname{tg} 16°7'$; c) $\lg\operatorname{tg} 70°42'53''$; d) $\lg\operatorname{tg} 14°15''$; e) $\lg\operatorname{tg} 52'12''$; f) $\lg\operatorname{tg} 89°10'16''$.
4. a) $\lg\operatorname{ctg} 80°53''$; b) $\lg\operatorname{ctg} 20°26'48''$; c) $\lg\operatorname{ctg} 77°21'$; d) $\lg\operatorname{ctg} 45°30''$; e) $\lg\operatorname{ctg} 87°59'34''$; f) $\lg\operatorname{ctg} 15'40''$.

Найти острый угол, если дано:

5. $\lg\sin x =$ a) $\bar{1},4001$; b) $\bar{1},8634$; c) $\bar{1},6747$; d) $\bar{1},9341$; e) $\bar{1},8711$; f) $\bar{3},8662$.
6. $\lg\cos x =$ a) $\bar{1},8615$; b) $\bar{2},9301$; c) $\bar{1},9497$; d) $\bar{1},8493$; e) $\bar{1},8080$; f) $\bar{2},0584$.
7. $\lg\operatorname{tg} x =$ a) $\bar{2},7865$; b) $0,0066$; c) $\bar{1},4608$; d) $0,0771$; e) $0,0002$; f) $\bar{3},3500$.
8. $\lg\operatorname{ctg} x =$ a) $1,0367$; b) $\bar{1},5018$; c) $\bar{0},3738$; d) $\bar{1},3387$; e) $\bar{1}9999$; f) $\bar{2},0000$.

Вычислить с помощью логарифмов:

9. a) $\sin 20°$; b) $\cos 47°36'$; c) $\operatorname{tg} 75°36'$; d) $\operatorname{ctg} 15'$; e) $\sec 40°$; f) $\operatorname{cosec} 53°3'$.

10. a) $\sin 230^\circ$; b) $\cos 740^\circ$; c) $\operatorname{tg}(-250^\circ 10')$;
d) $\operatorname{ctg} 1000^\circ 15'$; e) $\sec(-100^\circ)$; f) $\operatorname{cosec} 500^\circ 18'$.

Найти острый угол, если дано:

11. a) $\sin x = \frac{4}{7}$; b) $\cos x = 0{,}38934$; c) $\operatorname{tg} x = 4$;
d) $\operatorname{ctg} x = 10$; e) $\sec x = 1{,}5$; f) $\operatorname{cosec} x = 2{,}65047$;
g) $\sin x = \frac{1}{2}\sin 20^\circ$; h) $\operatorname{ctg} x = 3\operatorname{ctg} 48^\circ$.

Найти углы, содержащиеся между 0° и 360°, если дано:

12. $\sin x = \frac{5}{11}$. **13.** $\sin x = -0{,}682$. **14.** $\cos x = 0{,}76213$.

15. $\cos x = -0{,}5688$. **16.** $\operatorname{tg} x = \frac{176}{353}$. **17.** $\operatorname{tg} x = -2{,}48$.

18. $\operatorname{ctg} x = 5$. **19.** $\operatorname{ctg} x = -0{,}731$. **20.** $\sec x = 15$.

21. $\sec x = -2{,}5$. **22.** $\operatorname{cosec} x = 10$. **23.** $\operatorname{cosec} x = -1\frac{2}{7}$.

В задачах 24—31 определить значение x, наименьшее по абсолютной величине:

24. $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 40^\circ + 70^\circ$. **25.** $\operatorname{ctg} x = 1 + \sin 23^\circ 15'$.
26. $\cos x = 1 - \operatorname{ctg} 66^\circ 12'$. **27.** $\sin x = \sin 37^\circ 15' - 1$.
28. $\cos x = 1 + \operatorname{tg} 117^\circ$. **29.** $\operatorname{tg} x = \sin 44^\circ + \cos 166^\circ$.
30. $\operatorname{ctg}(-x) = 1 - \cos(-20^\circ)\cdot\sec 70^\circ 46'$.

31. $\sin(x + 180^\circ) = \sqrt[3]{-\operatorname{tg} 152^\circ}$.

Вычислить следующие выражения (в задачах 32—34):

32. $(a^2 - b^2)\cdot\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cdot\cos\beta}$, если $a = 7{,}3863$; $b = 5{,}2138$; $\alpha = 42^\circ 26'$; $\beta = 68^\circ 34'$.

33. $(a + \sin\alpha)\cdot(a + \cos\alpha)$ при $a = 0{,}001$ и $\alpha = 143^\circ 12'$.

34. $a^2\cdot\sec\alpha\cdot\sqrt[4]{-\operatorname{tg} 2\alpha}$ при $a = 0{,}0204$ и $\alpha = 67^\circ 34'$.

Вычислить следующие выражения (в задачах 35—41), преобразовав их сначала в произведения:

35. $x = \pi\cdot(\sin 30^\circ 53' 30'' + \sin 80^\circ 24')$.

36. $x = \frac{\sqrt[3]{0{,}0001}}{\cos 16^\circ 41' - \sin 49^\circ 10'}$.

37. $x = \left(16\frac{768}{815}\right)^2\cdot(1 + \sin 11^\circ 7')$.

38. $x = \sqrt{2}\cdot(1 - \operatorname{tg} 61^\circ 39')$.

39. $x = \sqrt[4]{0{,}005}\cdot(1 + 2\sin 41^\circ 19')$.

40. $x = (2{,}7148)^3\cdot\sqrt{3 - 4\cos^2 72^\circ 5'}$.

41. $x=\sqrt{a^2\cdot\sin^2\alpha+b^2\cdot\cos^2\alpha}$, если
$a=0{,}0148$; $b=0{,}0040$; $\alpha=36°15'$.

Решение прямоугольных треугольников.

42—57. Основные случаи решения прямоугольных треугольников.

I. Даны гипотенуза и острый угол:

42. $c=9{,}35$; $A=65°14'$.
43. $c=627$; $A=23°30'$.
44. $c=0{,}7979$; $A=66°36'$.
45. $c=3{,}644$; $A=50°2'$.

II. Даны катет и острый угол:

46. $a=6{,}37$; $A=4°35'$.
47. $a=18{,}003$; $A=43°$.
48. $b=0{,}1738$; $A=35°55'$.
49. $b=0{,}2954$; $B=25°37'$.

III. Даны гипотенуза и катет:

50. $c=65$; $a=16$.
51. $c=113$; $b=15$.
52. $c=697$; $a=528$.
53. $c=1710{,}2$; $b=823$.

IV. Даны оба катета:

54. $a=261$; $b=380$.
55. $a=156$; $b=133$.
56. $a=0{,}09783$; $b=0{,}1003$.
57. $a=12{,}06$; $b=6{,}919$.

58—69. Равнобедренный треугольник.

Обозначения: a и c — боковые стороны; b — основание; A и C — углы при основании; B — угол при вершине; h — высота; h_1 — высота, опущенная на боковую сторону; $2p$ — периметр; S — площадь.

Решить равнобедренный треугольник по следующим данным:

58. $a=797{,}9$; $A=66°36'$.
59. $a=627$; $B=133°$.
60. $b=15{,}65$; $A=59°45'$.
61. $b=5{,}529$; $B=51°11'$.
62. $a=8{,}757$; $b=13{,}958$.
63. $b=925{,}2$; $h=721{,}4$.
64. $A=65°40'$; $h_1=20$.
65. $b=130{,}7$; $S=1955$.
66. $B=73°54'$; $S=45{,}04$.
67. $2p=40{,}65$; $A=72°46'$.
68. $S=250$; $a:b=7:4$.
69. $S=56$; $a=14$.

§ 13. Решение косоугольных треугольников с применением логарифмов.

Обозначения: a, b и c — стороны треугольника; A, B и C — противолежащие им углы; S — площадь; $2p$ — периметр; R — радиус описанного круга; r — радиус вписанного круга; h_a, l_a и m_a — высота, биссектриса и медиана соответствующие стороне a.

Основные случаи решения косоугольных треугольников.

I. Даны сторона и два угла:

1. $a=370$; $B=86°3'$; $C=50°56'$.
2. $a=450$; $A=87°55'$; $B=10°53'$.
3. $a=951$; $B=126°43'$; $C=13°41'$.
4. $a=97{,}52$; $A=102°48'$; $C=21°6'$.
5. $b=13{,}02$; $A=11°48'$; $B=133°42'$.
6. $c=15{,}94$; $A=51°38'$; $B=18°19'$.

II. Даны две стороны и угол между ними:

7. $a=510$; $b=317$; $C=76°19'$.
8. $a=225$; $b=800$; $C=36°44'$.
9. $a=2{,}29$; $c=1{,}69$; $B=29°52'$.
10. $b=28$; $c=42$; $A=124°$.
11. $a=30{,}99$; $c=69{,}01$; $B=87°43'$.
12. $b=40{,}33$; $c=32{,}11$; $A=73°40'$.

III. Даны две стороны и угол против одной из них:

13. $a=87$; $b=65$; $A=75°45'$.
14. $a=34$; $b=93$; $A=14°15'$.
15. $a=24$; $b=83$; $A=26°45'$.
16. $b=360$; $c=309$; $C=21°14'$.
17. $a=13{,}9$; $c=8{,}43$; $A=126°43'$.
18. $a=0{,}437$; $b=1{,}299$; $B=11°3'$.
19. $a=13{,}81$; $c=8{,}14$; $C=14°36'$.
20. $b=263$; $c=215$; $B=70°15'$.
21. $a=19{,}06$; $b=28{,}19$; $A=31°17'$.
22. $a=457{,}1$; $b=169{,}9$; $B=21°49'$.
23. $a=2579$; $c=10$; $A=130°22'$.

IV. Даны три стороны:

24. $a=19$; $b=34$; $c=49$. 25. $a=89$; $b=321$; $c=395$
26. $a=44$; $b=483$; $c=485$.
27. $a=0{,}099$; $b=0{,}101$; $c=0{,}158$.
28. $a=172{,}5$; $b=1135$; $c=1205$.
29. $a=421{,}6$; $b=409{,}8$; $b=335{,}9$.
30. $a=1{,}236$; $b=2{,}346$; $c=3{,}456$.

Особые случаи решения косоугольных треугольников.

31. $R=7{,}92$; $A=113°17'$; $B=48°16'$.
32. $S=501{,}9$; $A=15°28'$; $B=45°$.
33. $h_a=5{,}37$; $B=115°10'$; $C=5°8'$.
34. $l_a=0{,}758$; $B=98°31'$; $C=4°25'$.
35. $a+b=m=488{,}8$; $A=70°24'$; $B=40°16'$.
36. $a-b=n=23$; $A=108°$; $B=18°$.
37. $h_a+h_b=m=1{,}381$; $A=102°32'$; $B=58°17'$.
38. $h_a-h_c=n=60{,}8$; $B=46°24'$; $C=80°28'$.
39. $2p=420{,}7$; $A=24°37'$; $B=52°31'$.

40. $r=5$; $A=22°37'$; $B=39°18'$.
41. $c=1{,}230$; $a:b=3:4$; $B=48°$.
42. $a=63{,}51$; $b:c=9:11$; $A=95°30'$.
43. $c=226{,}8$; $h_c:b=63:65$; $B=17°4'$.
44. $a=15{,}98$; $A=46°20'$; $b=a_c$ (a_c — проекция a на c).
45. $b=29$; $l_c=31$; $A=68°43'$.
46. $S=2423$; $a=42{,}5$; $B=124°38'$.
47. $a=32$; $b=25$; $A=2B$.
48. $a+b=36{,}5$; $R=19{,}06$; $A-B=19°31'$.
49. $a+b=m=2147$; $c=353$; $C=13°41'$.
50. $a-b=n=6{,}45$; $c=18{,}3$; $C=53°40'$.
51. $a+b=m=14{,}31$; $c=5{,}18$; $A=102°38'$.
52. $a-b=n=6{,}232$; $c=15{,}14$; $A=78°40'$.
53. $S=15$; $ab=48$; $\sin A=\cos B$.
54. $h_b=60$; $h_c=36$; $a:R=\cos A$.
55. $a=23$; $b=45$; $R=25{,}09$.
56. $a=120$; $b=29$; $h_c=23{,}76$.
57. $a=6$; $b=8$; $S=12$.
58. $b=98$; $c=76$; $m_c=68$. 59. $a=20$; $b=12$; $m_c=14$.
60. $h_a=8$; $h_b=12$; $h_c=18$. 61. $b=42$; $c=28$; $l_a=12{,}81$.

§ 14. Тригонометрические уравнения.

Из уравнений 1—12 определить величину x: 1) *в общем виде* и 2) в пределах от 0° до 360° (от 0 до 2π).

1. $3\sin x=2\cos^2 x$.
2. $\sin x=\operatorname{ctg} x$.
3. $3+2\cos x=4\sin^2 x$.
4. $\sin x=-\cos x$.
5. $\operatorname{tg} x=3\operatorname{ctg} x$.
6. $\operatorname{tg} x=2\sin x$.
7. $\operatorname{ctg} x=3\cos x$.
8. $\operatorname{cosec} x=2\sin x$.
9. $\sin 3x=0{,}5$.
10. $\operatorname{ctg}\frac{2x}{5}=1$.
11. $3\operatorname{tg}^2\frac{x}{3}=1$.
12. $2\sin\left(\frac{x}{6}-\frac{\pi}{2}\right)=1$.

13. Найти зависимость между углами α и β в следующих случаях:

1) $\sin\alpha=\sin\beta$; 5) $\sin\alpha=-\sin\beta$; 9) $\sin\alpha=\cos\beta$;
2) $\cos\alpha=\cos\beta$; 6) $\cos\alpha=-\cos\beta$; 10) $\sin\alpha=-\cos\beta$;
3) $\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\beta$; 7) $\operatorname{tg}\alpha=-\operatorname{tg}\beta$; 11) $\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{ctg}\beta$;
4) $\operatorname{ctg}\alpha=\operatorname{ctg}\beta$; 8) $\operatorname{ctg}\alpha=-\operatorname{ctg}\beta$; 12) $\operatorname{tg}\alpha=-\operatorname{ctg}\beta$.

Решить уравнения (14—73):

14. $\operatorname{ctg} 10x=0$.
15. $(\cos x)^{\sin x}=1$.
16. $\sin^2 x-\cos^2 x=\cos x$.
17. $a(\sin x+\cos x)^2=b\sin 2x$.
18. $\operatorname{tg} px+\operatorname{tg} qx=0$.
19. $\sin 3x=-\cos x$.

20. $\sin 5x \cdot \operatorname{tg} 4x \cdot \cos 2x = 0$. 21. $a \sin x + b \cos x = 0$.
22. $\sin x + \cos x = \operatorname{cosec} x$. 23. $5 \cos 2x = 4 \sin x$.
24. $\cos \frac{x}{2} + \cos x = 1$. 25. $\sin(m+x) + \sin x = \cos \frac{m}{2}$.
26. $\sin 3x + \sin 2x + \sin x = 0$. 27. $\frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} x} + \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 2x} = 2{,}5$.
28. $a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = \sqrt{a^2 + b^2}$.
29. $a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = c$. 30. $2 \sin x - 9 \cos x = 7$.
31. $\frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} = \frac{1}{2}$. 32. $14{,}36 \sin x + 23 \cos x = 26{,}02$.
33. $\sqrt{3} \sin x + \cos x = \sqrt{2}$.
34. $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = 2$. 35. $\sec x = \sin x + \cos x$.
36. $\sin x + \cos x = \sec x + \operatorname{cosec} x$.
37. $\frac{\cos x}{1 + \sin x} = 2 - \operatorname{tg} x$. 38. $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \sec 80^\circ$.
39. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 3 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$.
40. $(4 - \sqrt{3})(\sec x + \operatorname{cosec} x) = 4(\sin x \cdot \operatorname{tg} x + \cos x \cdot \operatorname{ctg} x)$.
41. $\sin(x + 30^\circ) \cdot \sin(x - 30^\circ) = \sin 30^\circ$.
42. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}(45^\circ + x) = 2$.
43. $\cos(a - b) \cdot \sin(c - x) = \cos(a + b) \cdot \sin(c + x)$.
44. $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg}(x - 45^\circ) \cdot \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}(x + 45^\circ)$.
45. $\sec^2 x + 3 \sec x \cdot \operatorname{cosec} x + \operatorname{cosec}^2 x = 4$.
46. $\operatorname{tg} 3x = \sin 6x$. 47. $\sqrt{2} \cdot \cos 2x = \cos x + \sin x$.
48. $4 \sin^2 x + \sin^2 2x = 3$. 49. $2 \sin^2 x + \sin^2 2x = 2$.
50. $\sin^2 2x - \sin^2 x = \sin^2 30^\circ$. 51. $\cos 4x + \cos 2x + \cos x = 0$.
52. $\cos x - \cos 2x = \sin 3x$.
53. $a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = a \cdot \sin 2x - b \cdot \cos 2x$.
54. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x$.
55. $\operatorname{ctg}(\pi - 3x) = \operatorname{tg}(x - \pi)$. 56. $\cos \frac{x}{2} + \cos x = 1$.
57. $\operatorname{cosec} x = \operatorname{cosec} \frac{x}{2}$. 58. $\sec^2 \frac{x}{2} + \operatorname{cosec}^2 \frac{x}{2} = 16 \operatorname{ctg} x$.
59. $8 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = 1 + \sec x$. 60. $\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} = 1 + \sin 2x$.
61. $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x$. 62. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 3x = 0$.
63. $\cos x \cdot \cos 3x = \cos 5x \cdot \cos 7x$.

В уравнениях 64—73 данные выражения следует предварительно сократить (иначе получатся посторонние корни):

64. $\frac{\cos 2x}{1 + \operatorname{tg} x} = 0$. 65. $\frac{\cos 2x}{1 - \sin 2x} = 0$.
66. $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} 2x = 0$. 67. $\sin 3x \cdot \operatorname{ctg} x = 0$.
68. $\frac{\sin 2x}{\sin x} = \frac{\cos x}{\cos 2x}$. 69. $\frac{1 + \cos 2x}{2 \cos x} = \frac{\sin 2x}{1 - \cos 2x}$.

70. $\frac{1-\cos 2x}{2\sin x}=\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}$. 71. $\operatorname{ctg} x\cdot\operatorname{tg} 2x-\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{ctg} 2x=2$.

72. $\sin 3x\cdot\operatorname{tg} 2x\cdot\sec x=0$. 73. $3\sin x=1-\sqrt{3\cos^2 x-2}$.

Решить системы уравнений (74—95):

74. Найти $\sin x$ и $\sin y$, если $\sin x+\sin y=0{,}2$ и $\cos x+\cos y=-0{,}2$.

75. Определить $\cos x$ и $\cos y$ из системы:

$\cos(x+y)=\frac{1}{6}(1-2\sqrt{6})$; $\cos(x-y)=\frac{1}{6}(1+2\sqrt{6})$.

76. Найти $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{tg} y$, если $x+y=45^\circ$ и $\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y=10$.

77. Выразить x через a, b и φ, исключив α и β из системы:

$a=x\cdot\sin\alpha$; $b=x\cdot\sin\beta$; $\alpha+\beta=\varphi$.

78. Определить x и y, если $\sin(x-y)=\cos(x+y)=\frac{1}{2}$.

Определить *острые* углы из следующих систем (79—95):

79. $\sin x\cdot\cos y=0{,}36$; $\cos x\cdot\sin y=0{,}14$.
80. $\sin x\cdot\sin y=0{,}36$; $\cos x\cdot\cos y=0{,}14$.
81. $x+y=\alpha$; $\sin x+\sin y=a$.
82. $x+y=77^\circ$; $\cos x-\cos y=0{,}4898$.
83. $x+y=\alpha$; $\sin x\cdot\sin y=a$.
84. $x-y=48^\circ20'$; $\cos x\cdot\cos y=0{,}4897$.
85. $x+y=\alpha$; $\frac{\sin x}{\sin y}=\frac{m}{n}$. 86. $x+y=96^\circ38'$; $\frac{\cos x}{\cos y}=\frac{5}{3}$.
87. $x+y=\alpha$; $\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y=a$.
88. $x-y=31^\circ$; $\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} y=0{,}74$.
89. $x+y=\alpha$; $\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg} y=a$.
90. $x-y=5^\circ$; $\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg} y=0{,}8391$.
91. $x+y=\alpha$; $\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y}=\frac{m}{n}$. 92. $x-y=3^\circ46'$; $\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y}=\frac{11}{9}$.
93. $2^{\sin x+\cos y}=1$; $16^{\sin^2 x+\cos^2 y}=4$.
94. $x+y+z=180^\circ$; $\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg} y=2$; $\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg} z=3$.
95. $x+y+z=180^\circ$; $\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg} y=3$; $\operatorname{tg} y\cdot\operatorname{tg} z=14$.

§ 15. Обратные круговые функции.

(См. также § 2, № 32—36.)

Указание. При решении этих задач надо помнить об интервалах которым принадлежат главные значения тригонометрических функций

Найти, чему равны следующие выражения (1—16):

1. 1) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$; 2) $\operatorname{arcsec} 2$; 3) $\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

2. 1) $\sin\left(\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; 2) $\cos\left(2\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

3) $\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{1}{2}\right)$.

3. 1) $\operatorname{ctg}[\operatorname{arctg}(-1)]$; 2) $\sin\left(3\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

3) $\cos\left[2\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$.

4. 1) $\cos(\arccos x)$; 2) $\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right)$; 3) $\sin[\operatorname{arctg}(-2)]$.

5. 1) $\sin\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 2) $\cos\left(\arccos\frac{1}{2}\right)$; 3) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}\sqrt{3})$

6. 1) $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{4\pi}{2}\right)$; 2) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}x)$; 3) $\arccos\left(\sin\frac{\pi}{7}\right)$.

7. 1) $\sin(\arccos 0{,}8)$; 2) $\cos\left(\arcsin\frac{8}{17}\right)$; 3) $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)$.

8. 1) $\sin\left(\arcsin\frac{1}{2}+\arccos\frac{1}{2}\right)$.

2) $\cos\left(\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

9. 1) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}2+\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)$; 2) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)$.

10. $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{2a-b}{b\sqrt{3}}+\operatorname{arctg}\frac{2b-a}{a\sqrt{3}}\right)$.

11. $\sin\left(\arcsin\frac{3}{5}+\arcsin\frac{8}{17}\right)$.

12. $\cos\left(\arccos\frac{9}{\sqrt{82}}+\operatorname{arccosec}\frac{\sqrt{41}}{4}\right)$.

13. $\cos\left(2\arcsin\frac{2}{7}\right)$.

14. $\sin(2\arcsin m)$.

15. $\operatorname{tg}\left(3\operatorname{arctg}\frac{1}{4}\right)$.

16. $\sin(2\operatorname{arctg}m)$.

Проверить справедливость следующих равенств (17—31):

17. a) $\arcsin\frac{3}{5}=\arccos\frac{4}{5}$;

b) $\arcsin\sqrt{\frac{a}{a+b}}=\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a}{b}}$.

18. $\arcsin\frac{5}{13}+\arcsin\frac{12}{13}=\frac{\pi}{2}$.

19. $\arccos\frac{1}{2}+\arccos\frac{1}{7}=\arccos\left(-\frac{11}{14}\right)$.

20. $\arcsin 0{,}6-\arcsin 0{,}8=-\arcsin 0{,}28$.

21. $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$. 22. $\operatorname{arc\,ctg}\frac{1}{7}+\operatorname{arc\,ctg}\frac{3}{5}=\frac{3\pi}{4}$

23. $2\arccos a=\arccos(2a^2-1)$, предполагая, что $0\leqslant a\leqslant 1$

24. $2\arcsin m=\arccos(1-2m^2)$, предполагая, что $0\leqslant m\leqslant 1$

25. $2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{4}=\operatorname{arc\,tg}\frac{32}{43}$.

26. $\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}-\arccos\frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}$.

27. $2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{x}{a}}=\arccos\frac{a-x}{a+x}$.

28. $\arcsin\frac{4}{5}+\arccos\frac{2}{\sqrt{5}}=\arccos\frac{2}{11}$.

29. $\operatorname{arc\,tg} m+\operatorname{arc\,tg} n=\arccos\frac{1-mn}{\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}}$, полагая, что $0\leqslant m$; $0\leqslant n$.

30. $\operatorname{arc\,ctg}\sqrt{3}+\operatorname{arc\,ctg}(2+\sqrt{3})=\frac{\pi}{4}$.

31. $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}+\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{2}}{2}=\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{2}+1)^2$.

Решить уравнения (32—44):

32. $\operatorname{arc\,tg}(1+x)+\operatorname{arc\,tg}(1-x)=\frac{\pi}{4}$.

33. $\arccos(x-1)=2\arccos x$. 34. $\operatorname{arc\,tg} x=2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}$

35. $\arccos\frac{x}{2}=2\operatorname{arc\,tg}(x-1)$.

36. $\arcsin 2x=3\arcsin x$. 37. $x=\arcsin(\cos x)$.

38. $2x=\operatorname{arc\,ctg}(\operatorname{tg} x)$. 39. $\arcsin x+\arcsin\frac{x}{2}=\frac{\pi}{4}$

40. $\arcsin x+\arcsin x\sqrt{3}=\frac{\pi}{2}$.

41. $\arccos x+\arccos(1-x)=\arccos(-x)$.

42. $\operatorname{arc\,tg} x+\operatorname{arc\,tg} 3x=\frac{\pi}{2}$.

43. $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x-1}-\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x+1}=\operatorname{arc\,tg} a$.

44. $\operatorname{arc\,tg} x+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,sec} 5x=\frac{\pi}{4}$.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИИ, ТРЕБУЮЩИЕ ПРИМЕНЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИИ

§ 15а. Планиметрия.

Правильные многоугольники.

1. По данной стороне a правильног вписанного n-угольника вычислить сторс ну b правильного описанного n-угольника

2. Вычислить длину диагоналей пра вильного 7-угольника, сторона которог равна 10 *см*.

3. Определить наименьшую диагональ правильног n-угольника, сторона которого a *см*.

4. Определить длину наибольшей диагонали правильног n-угольника, сторона которого равна a *м*, для двух случаев 1) n — число чётное; 2) n — число нечётное.

Площади прямолинейных фигур.

5. Диагонали прямоугольника пересе каются под углом $75°24'$; площадь прямс угольника равна 562 $м^2$. Определить стс роны прямоугольника.

6. Около круга радиуса r описан ром с острым углом α. Определить площадь ромба ($r=5$; $\alpha=$ $=36°47'$).

7. Площадь равнобедренного треугольника Q, угол пр вершине β. Определить высоту ($Q=450$; $\beta=73°$).

8. Площадь равнобедренного треугольника Q $м^2$, основе ние b *м*. Определить угол при вершине ($Q=1956$; $b=130,7$

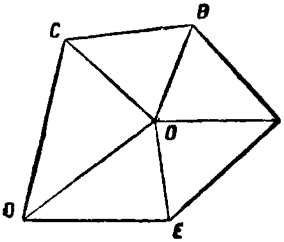
9. Определить площадь правильного n-угольника, п его стороне a *дм*: 1) $n=7$; $a=20$; 2) $n=8$; $a=1$; 3) $n=1$ $a=10$.

10. Вычислить площадь правильного n-угольника, вписан ного в круг радиуса R: 1) $n=12$; $R=7$; 2) $n=5$; $R=$

11. Вычислить площадь правильного n-угольника, описан ного около круга радиуса R.

12. Основания трапеции 25 *см* и 15 *см*; боковая сторона 12 *см*; угол между ней и большим основанием 50°. Вычислить площадь трапеции.

13. Пятиугольный участок земли был обмерен землемером так называемым полярным способом (черт. 18). Из точки O (полюс) были измерены расстояния $OA = 43$ *м*, $OB = 36$ *м*, $OC = 41$ *м*, $OD = 56$ *м* и $OE = 34$ *м* и углы: $\angle AOB = 65°30'$; $\angle BOC = 71°20'$; $\angle COD = 80°$ и $\angle DOE = 61°35$. Вычислить площадь участка.



Черт. 18.

14. Определить площадь равнобедренной трапеции, диагональ которой равна a и составляет с основаниями угол α.

15. Сторона правильного 6-угольника равна 84 *см*; вычислить сторону равновеликого ему правильного 7-угольника.

16. Правильные 9-угольник и 10-угольник имеют одинаковые периметры. Определить, как относятся их площади.

Площадь частей круга.

17. Вычислить площадь сектора, если его радиус равен 8 *см*, а радиус вписанного в него круга равен 2 *см*.

18. Определить площадь сегмента по радиусу r и дуге α: 1) $r = 4{,}73$; $\alpha = 46°44'$; 2) $r = 12$; $\alpha = 29°38'$.

19. Хорда длиной a *см* делит круг радиуса R *см* на 2 сегмента. Найти площадь меньшего из них ($a = 3{,}5$; $R = 6{,}2$).

20. В круге радиуса R *см* проведены две параллельные хорды, из которых каждая стягивает дугу в α градусов. Определить ту часть площади круга, которая заключена между хордами.

Смешанные задачи.

21. Полуокружность разделена в отношении 4 : 7 и из точки деления опущен перпендикуляр на диаметр. Определить отрезки диаметра, если его длина равна 11 *см*.

22. В параллелограме даны острый угол α и расстояния a и b от точки пересечения диагоналей до неравных сторон. Определить диагонали и площадь параллелограма.

23. Вычислить площадь, заключённую между тремя взаимно касающимися кругами, радиусы которых 1 *м*, 2 *м* и 3 *м*.

24. Определить острый угол ромба, в котором сторона есть средняя пропорциональная между диагоналями.

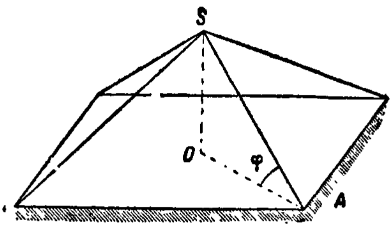
§ 16. Прямые и плоскости.

Перпендикуляр и наклонные к плоскости.

1. Угол между перпендикуляром и наклонной, проведёнными из точки M к плоскости P, равен α. Длина наклонной равна a. Определить расстояние точки M от плоскости ($a = 11{,}22$; $\alpha = 72°45'$).

2. К плоскости проведён перпендикуляр длиной p; основание его принято за центр описанной в плоскости окружности радиуса r. Определить угол между перпендикуляром и прямой, соединяющей его вершину с любой точкой окружности ($p = 4{,}54$; $r = 8$).

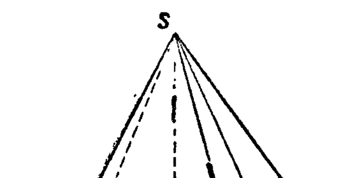
3. Через центр O квадрата, сторона которого $AB = a = 30$, проведён перпендикуляр к плоскости квадрата; на нём взят отрезок $OM = d = 20$, а из M проведён перпендикуляр AB на MC. Вычислить угол x между MC и его проекцией OC на плоскость квадрата.



Черт. 19.

4. Вычислить угол, под которым диагональ куба наклонена к его грани.

5. Над квадратной силосной ямой нужно сделать крышу в виде правильной 4-угольной пирамиды. Сторона основания равна 6,5 *м*. Высота крыши должна быть равна 2,5 *м*. Определить длину стропильной ноги SA и угол наклона её к плоскости основания (черт. 19).



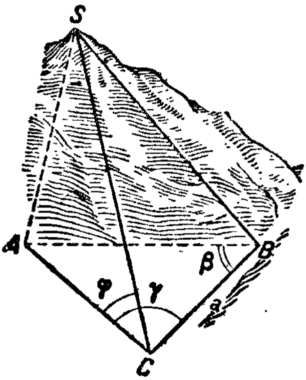
Черт. 20.

6. Высота правильной четырёхугольной пирамиды 7 *см*, сторона основания 8 *см*. Под каким углом боковое ребро наклонено к плоскости основания?

7. Шатёр, имеющий вид правильной четырёхугольной пирамиды, состоит из 4 жердей, обтянутых брезентом (черт. 20). Высота шатра SO равна 2,4 *м*; расстояние между основаниями двух ближайших жердей $AB = 2$ *м*. Определить расстояние SM

от вершины шатра до середины стороны основания, т. е. апофему пирамиды, и угол её наклона к основанию.

8. Из центра O круга, вписанного в правильный треугольник ABC, сторона которого равна a, восставлен перпендикуляр к плоскости треугольника; на нём взята точка M так, что отрезок $MA = a$; затем из M проведён отрезок $MD \perp AC$. Вычислить угол φ между MD и плоскостью треугольника ABC.

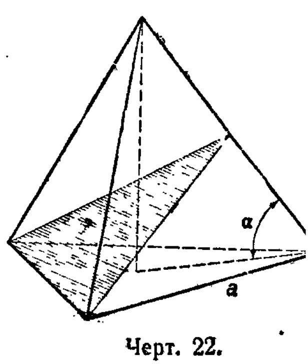


Черт. 21.

9. Наклонная образует с плоскостью угол α; через вершину этого угла проведена в данной плоскости вторая прямая под углом β к проекции наклонной на плоскость. Определить угол между этими прямыми ($\alpha = 43°53'$; $\beta = 11°10'$).

10. Прямая, находящаяся вне плоскости, пересекаясь с прямой, лежащей в плоскости, образует с этой прямой угол α, а эта последняя образует угол β с проекцией первой прямой на плоскость. Определить угол первой прямой с плоскостью ($\alpha = 8°26'$; $\beta = 5°40'$).

11. Из центра окружности, описанной около треугольника со сторонами a, b и c, восставлен к плоскости этого треугольника перпендикуляр h. Определить углы, образованные с этой плоскостью прямыми, соединяющими вершину перпендикуляра с вершинами треугольника ($h = 60$; $a = 30$; $b = 5$; $c = 29$).



Черт. 22.

12. По горизонтальной плоскости проходит прямолинейный отрезок дороги BC длиною a метров. Рядом с дорогой находится гора, вершина которой видна из точки C под углом φ к горизонту (черт. 21). Вершина S проектируется на плоскость дороги в точку A. Отрезок BC составляет с лучами, проведёнными из его концов в точку A, углы: $\angle ACB = \gamma$ и $\angle ABC = \beta$. Определить высоту горы ($a = 400$; $\beta = 40°10'$; $\gamma = 60°40'$; $\varphi = 50°50'$).

13. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна a, а боковое ребро образует с плоскостью основания угол α (черт. 22). Определить площадь сечения, проведённого через сторону основания и середину бокового ребра.

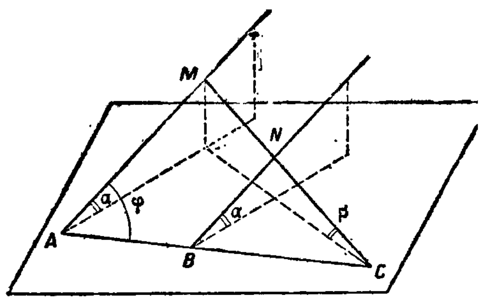
Параллельные прямые и плоскости.

14. Концы отрезка $AB = a = 13$ *см* отстоят от данной плоскости на расстояния $m = 5$ *см* и $n = 8$ *см*. Определить угол между отрезком и плоскостью (2 случая).

15. Из двух точек плоскости проведены две параллельные наклонные: AM и BN, под углом α к плоскости (черт. 23); прямая MN, пересекающая их перпендикулярно, образует с плоскостью угол β. Определить угол φ между прямой AB и прямой AM.

16. Из двух точек плоскости, удалённых друг от друга на расстояние a, проведены две параллельные наклонные под углом φ к плоскости. Определить расстояние между ними, если расстояние между их проекциями на плоскость равно b.

17. Отрезок AB параллелен плоскости. Из его концов проведены к плоскости две наклонные: $AC = c$ и $BD = d$. Наклонная AC составляет с плоскостью угол α. Определить угол наклонной BD с этой плоскостью ($c = \sqrt{6}$; $d = 3$; $\alpha = 60°$).



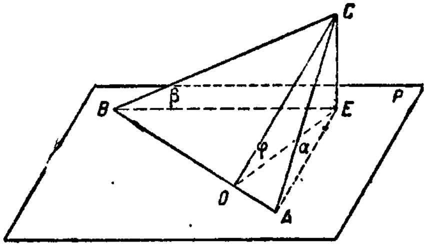
Черт. 23.

18. Из концов параллельного плоскости отрезка восставлены к нему перпендикуляры под углами α и β ($\alpha > \beta$) к плоскости. Длина отрезка равна a, расстояние между точками пересечения плоскости с восставленными перпендикулярами равно b. Определить расстояние от плоскости до отрезка (два случая).

19. Отрезки двух прямых линий, заключённые между двумя параллельными плоскостями, относятся как $2:3$, а их углы с плоскостью как $2:1$. Определить эти углы.

§ 17. Двугранные и многогранные углы.

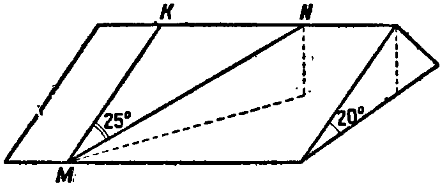
1. Дан двугранный угол α. Из точки, лежащей на одной грани этого угла на расстоянии a от ребра, восставлен перпендикуляр до пересечения с другой гранью. Определить длину этого перпендикуляра ($a = 6{,}06$ $\alpha = 41°55'$).



Черт. 24.

2. 1) Прямоугольный треугольник ABC расположен так, что гипотенуза его AB лежит на плоскости P, а катеты образуют с плоскостью P углы α и β (черт. 24). Определить угол φ между плоскостью треугольника и плоскостью P.

2) Одна сторона (AB) треугольника ABC лежит на плоскости P. Две другие стороны (CA и CB) составляют с плоскостью P углы α и β, тангенсы которых соответственно равны $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{4}$, а проекции этих сторон на ту же плоскость взаимно перпендикулярны. Определить наклон треугольника ABC к плоскости P.



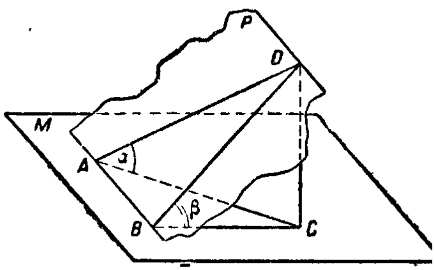
Черт. 25.

3. На крыше, имеющей наклон в 20°, проведена прямая MN (черт. 25) под углом 25° к линии наибольшего ската MK (линией наибольшего ската называется прямая, лежащая в плоскости и перпендикулярная к горизонтальной линии, проведённой на той же плоскости). Найти угол x между MN и горизонтом.

4. По склону горы с наклоном в 32° идёт дорога, составляющая 45° с линией наибольшего ската (см. задачу 3). Найти уклон дороги.

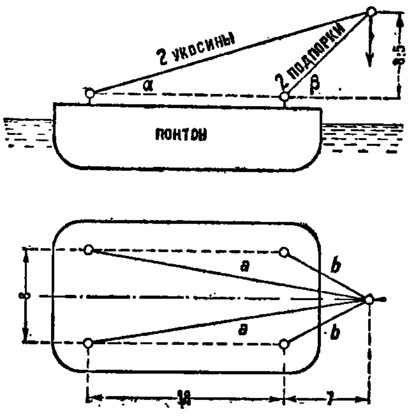
5. Из точки A плоскости M проведена наклонная AD под углом α к плоскости (черт. 26); через AD проведена плоскость P под углом $DBC = \beta$ к плоскости M. Определить угол между AD и линией пересечения плоскостей M и P.

6. Высота правильной n-угольной пирамиды вдвое менее стороны основания. Определить двугранный угол φ при основании.



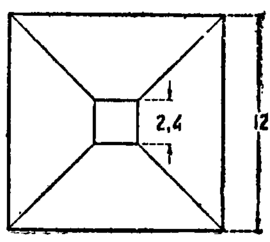
Черт. 26.

7. На чертеже 27 дана схема пловучего понтонного крана (понтон — железная плоскодонная лодка), спроектированного на вертикальную и горизонтальную плоскости. Размеры даны в метрах. Определить: a) длину укосин a и длину подпорок b; b) углы наклона укосин и подпорок к плоской поверхности понтона; c) угол между укосинами и угол между подпорками; d) угол между плоскостью укосин и плоскостью понтона; угол между плоскостью подпорок и плоскостью понтона.



Черт. 27.

8. Покрытие квадратного здания дано на плане (черт. 28); размеры даны в метрах. Верхняя площадка покрытия расположена на высоте, равной $\frac{1}{3}$ ширины здания (считая от основания крыши). Все четыре ската наклонены под одним и тем же углом к горизонтальной плоскости. Чему равен угол наклона покрытия?



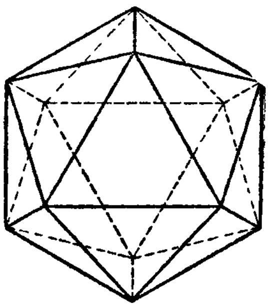
Черт. 28.

9. В прямоугольном треугольнике даны гипотенуза a и острый угол α. Определить расстояние от вершины прямого угла до плоскости, которая проходит через гипотенузу и составляет угол φ с плоскостью треугольника.

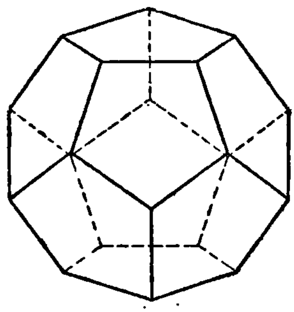
10. Основанием пирамиды служит правильный треугольник; из трёх граней одна перпендикулярна к основанию, а две другие наклонены к нему под углом α. Под какими углами наклонены к плоскости основания боковые рёбра?

11. Прямая AB параллельна плоскости P. Прямая CD пересекает AB под углом α и образует с плоскостью P угол φ. Определить угол плоскости P с плоскостью прямых AB и CD.

12. Концы рёбер прямоугольного бруса, исходящих из одной вершины, соединены прямыми. Площади треугольников, образовавшихся на гранях бруса, равны: 4 $дм^2$; 6 $дм^2$; 12 $дм^2$. Найти угол между сечением бруса плоскостью, проходящей через указанные прямые, и меньшим основанием.



Черт. 29.



Черт. 30.

13. В правильной четырёхугольной пирамиде сторона основания и боковое ребро относятся, как $\sqrt{3}:\sqrt{2}$. Через диагональ основания проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Определить наклон этой плоскости к основанию.

14. Параллелограм и плоскость P расположены так, что одна из меньших сторон параллелограма находится в плоскости P, а противоположная ей удалена от плоскости P на расстояние, равное расстоянию между большими сторонами параллелограма. Определить угол между плоскостью P и плоскостью параллелограма, если стороны параллелограма относятся, как $3:5$.

15. Вычислить угол между двумя смежными гранями:

1) правильного тетраэдра;
2) » октаэдра;
3) » икосаэдра (черт. 29);
4) » додекаэдра (черт. 30).

§ 18. Площадь проекции фигуры на плоскость.

1. Площадь параллелограма $Q = 50$ *см*^{2}. Плоскость его образует с плоскостью проекции P угол в 30°. Одна сторона параллелограма лежит в плоскости P. Найти площадь параллелограма.

2. В прямой треугольной призме через одну из сторон основания проведена плоскость, пересекающая противоположное боковое ребро и отклонённая от плоскости основания на 45°. Определить площадь сечения, если площадь основания равна Q.

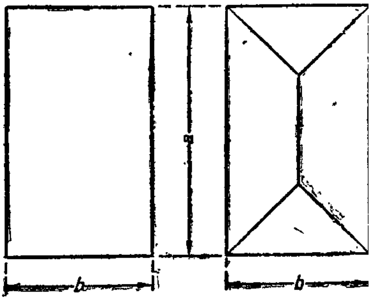
3. В правильной треугольной призме через сторону основания проведена плоскость сечения под углом α к плоскости основания. Сторона основания равна a. Найти площадь сечения.

4. Площадь пропускающего трубу отверстия в крыше равна 2 100 *см*^{2}. Угол наклона крыши 32°. Труба имеет форму квадратной призмы. Найти сторону основания призмы.

5. Размеры трубы 40 *см* $\times$ 40 *см*. Угол наклона крыши 35°. Найти площадь отверстия в крыше.

6. Четырёхскатная крыша перекрывает площадь в 28 *м*^{2}. Все скаты крыши наклонены к потолку под углом 32°53′. Найти площадь крыши.

7. Боковой скат четырёхскатной крыши представляет собой равнобочную трапецию, параллельные стороны которой 10 *м* и 6 *м*; высота трапеции равна 5 *м*. Площадь проекции ската на плоскость потолка равна 32 *м*^{2}. Найти угол наклона ската и высоту конька над потолком.



Черт. 31.

8. На чертеже 31 даны планы односкатной и четырёхскатной крыш в виде прямоугольников со сторонами a и b; скаты обеих крыш наклонены к горизонту под углом α. На которую из них требуется больше материала для окраски?

9. Яркость освещения зависит от угла, образуемого световыми лучами с освещаемой поверхностью. Пусть освещаемая площадь равна Q, а угол световых лучей с освещаемой плоскостью α. На какую площадь падали бы те же световые лучи, если бы освещаемая площадь была перпендикулярна к световым лучам? Меньше или больше будет эта площадь предыдущей? Ярче или темнее она будет освещена?

10. Какую горизонтальную площадь можно покрыть крышей с наклоном в $27°30'$ и с площадью 120 $м^2$?

§ 19. Параллелепипеды, призмы, пирамиды и их поверхности.

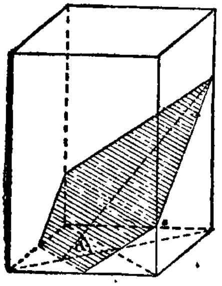
Параллелепипеды и призмы.

1. Углы, образуемые диагональю прямоугольного параллелепипеда с его рёбрами, равны α, β и γ.

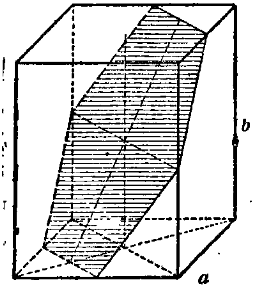
1) Доказать, что $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. 2) Вычислить γ, если $\alpha = 31°10'$ и $\beta = 69°9'$.

2. Если правильную четырёхугольную призму пересечь так, чтобы в сечении получился ромб с острым углом α, то секущая плоскость окажется параллельной диагонали основания и составит с плоскостью основания такой угол φ, что $\cos\varphi = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Доказать.

3. В правильной четырёхугольной призме (черт. 32) через середины двух последовательных сторон основания проведена плоскость, пересекающая три боковых ребра и наклонённая к плоскости основания под углом α. Сторона основания равна a. Определить площадь полученного сечения.



Черт. 32.



Черт. 33.

4. В правильной четырёхугольной призме (черт. 33) проведена плоскость через середину оси и середины двух последовательных сторон основания. Зная, что сторона основания равна a, а боковое ребро b, определить: 1) площадь полученного сечения и 2) угол между проведённой плоскостью и плоскостью основания.

5. Основанием прямой четырехугольной призмы служит ромб с острым углом α. Как надо пересечь эту призму, чтобы в сечении получить квадрат с вершинами на боковых рёбрах?

6. В прямоугольном параллелепипеде диагональ d образует с основанием угол β. Угол между диагональю основания и его стороной α. Определить боковую поверхность параллелепипеда ($\alpha = 21°35'$; $\beta = 54°24'$; $d = 17{,}89$ *м*).

7. В прямом параллелепипеде основание — ромб; меньшая диагональ ромба равна d, а острый угол α. Высота параллелепипеда равна $\frac{d}{2}$. Найти его полную поверхность ($d = 25{,}87$; $\alpha = 75°20'$).

8. Сторона основания правильной пятиугольной призмы равна a, высота призмы равна $\frac{1}{4}d$, где d — диагональ основания. Вычислить полную поверхность призмы ($a = 23{,}79$ *м*)

9. Основанием прямой призмы служит равнобедренный треугольник, в котором угол между равными сторонами a равен α. Из вершины верхнего основания проведены две диагонали равных боковых граней; угол между ними равен β. Найти боковую поверхность призмы ($a = 97{,}84$ *см* $\alpha = 63°28'$ и $\beta = 39°36'$).

10. В треугольной призме каждая сторона основания равна a. Одна из вершин основания имеет своей проекцией центр другого основания. Боковые рёбра наклонены к плоскости основания под углом α. Определить боковую поверхность призмы.

Пирамида.

11. В пирамиде, основание которой — правильный треугольник, одна из боковых граней перпендикулярна к основанию а две другие составляют с ним угол φ. Определить углы боковых рёбер с плоскостью основания ($\varphi = 30°$)

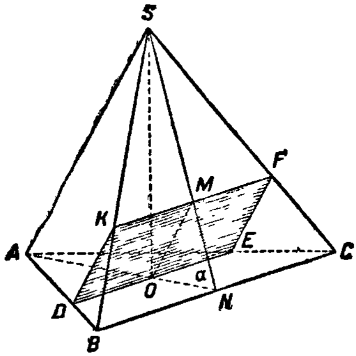
12. В правильной n-угольной пирамиде плоский угол при вершине α. Определить её двугранные углы при основании ($n = 4$; $\alpha = 60°$).

13. В правильной четырёхугольной пирамиде сторона основания равна a, а боковое ребро образует с плоскостью основания угол α. В эту пирамиду вписан куб так, что четыре из его вершин лежат на апофемах пирамиды. Определить ребро куба.

14. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна a и составляет с боковым ребром угол α Определить площадь сечения, проведённого через боковое ребро, и высоту пирамиды.

15. В правильной четырёхугольной пирамиде даны апофема c и площадь диагонального сечения P. Определить в этой пирамиде угол между боковой гранью и основанием и сторону основания ($c=5$; $P=15$).

16. В правильной четырёхугольной пирамиде высота относится к стороне основания как $m:n$. Через диагональ основания проведена наклонная плоскость так, что полученное сечение равно диагональному сечению. Определить угол между проведённой плоскостью и основанием пирамиды ($m:n=1:\sqrt{6}$).



Черт. 34.

17. В правильной треугольной пирамиде (черт. 34) даны сторона основания a и двугранный угол при основании α. Определить площадь сечения $DEFK$, проведённого через центр основания параллельно двум непересекающимся рёбрам пирамиды SA и BC ($a=3$; $\alpha=70°$).

18. В правильной четырёхугольной пирамиде двугранный угол при основании равен α. Через ребро этого двугранного угла проведена внутри пирамиды плоскость, составляющая с основанием угол β. Сторона основания равна a. Определить площадь сечения.

Применение теоремы о площади проекции к нахождению поверхности пирамиды.

19. Если все боковые грани какой-либо пирамиды одинаково наклонены к плоскости основания под углом α, то:

$$S_{бок}=\frac{Q}{\cos\alpha} \text{ и } S_{полн}=\frac{2Q\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha},$$

где S — поверхность, Q — площадь основания. Доказать.

20. (Устно.) Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник, катеты которого 6 *см* и 8 *см*. Все грани пирамиды наклонены к основанию под углом 60°. Найти $S_{бок}$.

21. 1) (Устно.) Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды равна a, а двугранный угол при основании равен 60°. Определить боковую поверхность.

2) Даны две правильные пирамиды, треугольная и шестиугольная. В каждой пирамиде сторона основания равна a,

а двугранный угол при основании равен 30°. Определить боковую поверхность каждой пирамиды.

22. В треугольной пирамиде стороны основания 13 *см*, 14 *см*, 15 *см*, а двугранные углы при основании равны каждый 60°. Определить боковую поверхность пирамиды.

23. Башня заканчивается крышей, имеющей вид правильной 8-угольной пирамиды. Боковые грани наклонены к основанию под углом 60°. Сторона основания пирамиды 1,23 *м*. Сколько квадратных метров листовой меди потребуется для покрытия крыши?

24. Площадь основания правильной пирамиды 168 $см^2$ Боковая поверхность 200 $см^2$. Найти угол наклона боковых граней к основанию.

25. (Устно.) В правильной четырёхугольной пирамиде боковая грань наклонена к основанию под углом α. Сторона основания a. Вычислить $S_{бок}$.

26. Высота правильной четырёхугольной пирамиды равна h. Двугранный угол при основании α. Определить полную поверхность.

27. Основанием пирамиды служит ромб со стороной a и острым углом α; двугранные углы при основании равны φ. Найти $S_{полн}$.

28. Апофема правильной n-угольной пирамиды равна k и составляет с плоскостью основания угол α. Найти $S_{полн}$ ($n=12$, $k=36{,}3$; $\alpha=35°40'$).

29. В основании пирамиды лежит равнобочная трапеция, параллельные стороны которой равны a и b ($b>a$). Все боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом α. Найти $S_{полн}$.

30. В основании пирамиды лежит равнобочная трапеция, диагональ которой равна l и составляет с бо́льшим основанием угол α. Все боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом φ. Определить $S_{полн}$.

Поверхность пирамиды.

31. В правильной четырёхугольной пирамиде даны: сторона основания a и плоский угол при вершине α. Определить её полную поверхность.

32. В правильной n-угольной пирамиде сторона основания a; боковое ребро составляет с плоскостью основания угол α. Определить боковую поверхность.

33. В треугольной пирамиде плоские углы при вершине α

α и β. Боковое ребро, служащее общей стороной равных углов, перпендикулярно к плоскости основания и равно a. Определить боковую поверхность этой пирамиды.

34. Основанием пирамиды служит квадрат со стороной a. Из боковых граней две перпендикулярны к основанию, а две другие образуют с ним угол α. Определить $S_{бок}$ и $S_{полн}$ этой пирамиды.

35. Основанием пирамиды служит прямоугольник. Из боковых граней две перпендикулярны к основанию, а две другие образуют с ним углы α и β. Высота пирамиды равна h. Определить её боковую поверхность.

36. Основанием пирамиды служит ромб со стороной a и острым углом α; из боковых граней две (например заключающие угол α) перпендикулярны к основанию, а две другие наклонены к нему под углом φ. Определить боковую поверхность этой пирамиды.

Усечённая пирамида.

37. В правильной n-угольной усечённой пирамиде даны: боковое ребро c и стороны оснований a и b $(a > b)$. Определить высоту усечённой пирамиды.

38. В усечённой правильной четырёхугольной пирамиде стороны большего и меньшего оснований относятся как $m:n$, боковые рёбра наклонены к плоскости большего основания под углом α. В этой пирамиде проведена плоскость через сторону большего основания и противоположную ей сторону меньшего основания. Какой угол образует эта плоскость с бо́льшим основанием пирамиды?

39. В правильной n-угольной усечённой пирамиде даны высота h и стороны оснований a и b $(a > b)$. Определить её полную поверхность.

40. Стороны оснований правильной n-угольной усечённой пирамиды равны a и b $(a > b)$, боковое ребро составляет с основанием угол α. Определить её полную поверхность.

41. В правильной n-угольной усечённой пирамиде отношение площадей оснований m^2, апофема k, угол между апофемой и высотой α. Определить её боковую поверхность.

42. В усечённой правильной четырёхугольной пирамиде даны: высота её h и углы α и β, образуемые бо́льшим основанием с боковым ребром и диагональю усечённой пирамиды. Определить её боковую поверхность $(h = 25;$ $\alpha = 50°15'$; $\beta = 35°)$.

§ 20. Цилиндр, конус, усечённый конус и их поверхности.

Цилиндр.

1. В равностороннем цилиндре точка окружности верхнего основания соединена с одной из точек окружности нижнего основания. Угол между радиусами, проведёнными в эти точки (имеется в виду угол между скрещивающимися прямыми), равен 30°. Определить угол между соединительной прямой и осью цилиндра.

2. В равностороннем цилиндре, радиус основания которого равен R, точка окружности верхнего основания соединена с точкой окружности нижнего основания. Соединительная прямая образует с плоскостью основания угол α. Определить кратчайшее расстояние между этой прямой и осью цилиндра.

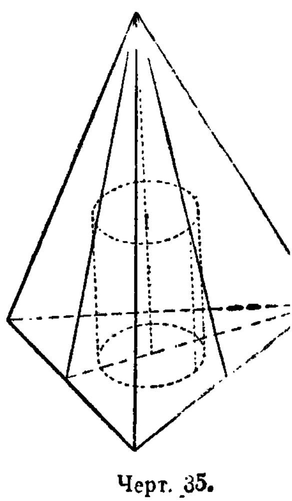
3. К цилиндру проведена касательная прямая под углом α к плоскости основания. Определить расстояние центра нижнего основания от этой прямой, если его расстояние от точки касания равно d и радиус основания равен R.

4. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно b и образует с плоскостью основания угол α. В эту пирамиду вписан равносторонний цилиндр так, что его основание лежит в плоскости основания пирамиды. Определить высоту цилиндра (черт. 35).

Конус.

5. Радиус основания конуса равен R, а образующая наклонена к плоскости основания под углом α. В этом конусе проведена плоскость через его вершину под углом φ к его высоте. Определить площадь полученного сечения.

6. Между двумя параллельными плоскостями заключён конус так, что его основание находится на одной из них, а вершина на другой. Угол между осью конуса и образующей равен α. Через середину оси проведена прямая, составляющая с нею угол β и пересекающая боковую поверхность конуса в двух точ-



Черт. 35.

ках. Отрезок этой прямой между параллельными плоскостями равен a. Определить отрезок, заключенный внутри конуса.

7. Определить ребро куба, вписанного в конус, образующая которого равна l и наклонена к плоскости основания под углом α.

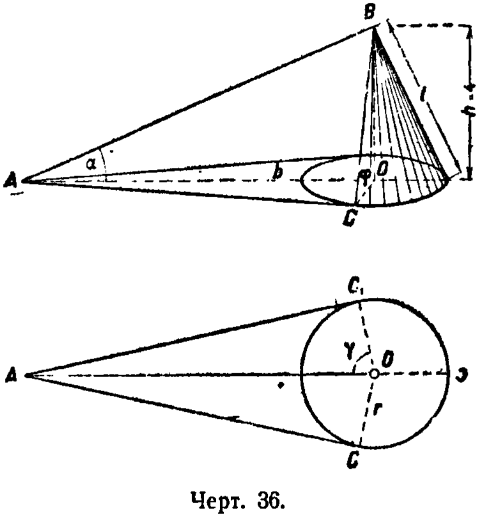
8. В конусе даны радиус основания R и угол α между образующей и плоскостью основания. В этот конус вписана прямая треугольная призма с равными рёбрами так, что её основание лежит в плоскости основания конуса. Определить длину её ребер.

Поверхность конуса.

9. Образующая конуса a наклонена к плоскости его основания под углом α. Определить полную поверхность конуса.

10. Боковая поверхность конуса втрое больше площади основания. Найти угол между образующей и основанием.

11. Определить угол между образующей и плоскостью основания в конусе, у которого площадь осевого сечения в 4 раза менее полной поверхности.



Черт. 36.

12. Определить полную поверхность конуса, если угол между образующей и плоскостью основания равен α, а площадь осевого сечения Q.

13. Через две образующие конуса, составляющие между собою угол φ, проведена плоскость, наклонённая к плоскости основания конуса под углом α. Площадь сечения равна S. Определить высоту конуса ($\varphi = 52°16'$; $\alpha = 33°10'$; $S = 617{,}5$ *см*^{2}).

14. Радиус основания конуса r; образующая наклонена к плоскости основания под углом α. Определить боковую поверхность конуса и площадь сечения, проходящего через вершину конуса под углом δ к его высоте ($r = 2{,}3$ *м*; $\alpha = 42°27'$; $\delta = 36°21'$).

15. Земляная насыпь имеет форму, данную на чертеже 36.
Дано: $\frac{h}{b}=\frac{1}{n}=0{,}05$; $\frac{h}{r}=\frac{1}{m}=\frac{2}{3}$; $h=4$ *м*. Вычислить: 1) b; 2) r; 3) $\alpha=\angle BAO$; 4) $\varphi=\angle BCO$; 5) γ; 6) площадь плана; 7) поверхность насыпи.

16. Боковая поверхность конуса равна S; образующая равна a. Найти угол при вершине осевого сечения ($S=81{,}312$ *м*^{2}, $a=10$ *м*).

17. Высота конуса H, а образующая наклонена к плоскости основания под углом α. Полная поверхность этого конуса разделена пополам плоскостью, перпендикулярной к высоте. Определить: 1) расстояние секущей плоскости от вершины конуса; 2) отношение частей боковой поверхности ($\alpha=60°$).

18. Угол при вершине в осевом сечении конуса равен α; определить центральный угол в развёртке его боковой поверхности. [Примеры: 1) равносторонний конус; 2) $\alpha=70°24'$.]

Усечённый конус.

19. Образующая усечённого конуса наклонена к его основанию, имеющему радиус R, под углом α; радиус другого основания равен r. Определить боковую поверхность усечённого конуса.

20. Высота усечённого конуса есть средняя пропорциональная между радиусами его оснований; сумма же радиусов оснований равна m. Угол, составленный образующей усечённого конуса с плоскостью его основания, равен α. Определить боковую поверхность этого усечённого конуса.

21. Через две образующие усечённого конуса, составляющие между собой угол β, проведена плоскость, пересекающая основания конуса по хордам, соответственно равным m и n ($m>n$).

Каждая хорда стягивает дугу α. Найти боковую поверхность усечённого конуса.

22. В усечённом конусе, радиусы оснований которого R и r, проведена плоскость под углом β к основанию. Эта плоскость отсекает от окружности каждого основания дугу δ. Определить площадь сечения.

23. В усечённом конусе высота равна h; образующая составляет с плоскостью нижнего основания угол α и перпендикулярна к диагонали осевого сечения, проходящей через верхний конец этой образующей. Определить боковую поверхность усечённого конуса.

24. Площади нижнего и верхнего оснований усечённого конуса и его боковая поверхность относятся, как $m:n:p$.

Определить угол между образующей и плоскостью нижнего основания.

25. В усечённом конусе диагонали осевого сечения взаимно перпендикулярны, а образующая составляет с плоскостью нижнего основания угол α и равна l. Определить боковую поверхность и полную поверхность этого усечённого конуса ($l = 12$; $\alpha = 70°20'$).

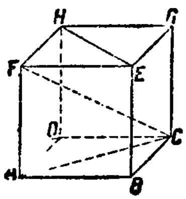
26. Образующая усечённого конуса составляет с плоскостью его основания угол α; площади основания Q и q. Определить $S_{бок}$.

§ 21. Вычисление объёмов.

Параллелепипед.

1. Диагональ l прямоугольного параллелепипеда наклонена к плоскости основания под углом φ; острый угол между диагоналями основания β. Определить объём.

2. В прямоугольном параллелепипеде диагональ основания $d=7{,}5$ *дм*, угол между диагоналями основания $\alpha=35°27'$, а угол, составляемый диагональной плоскостью, проведённой через бо́льшую из сторон основания, с плоскостью последнего, $\beta = 57°33'$. Определить объём параллелепипеда.



Черт. 37.

3. В основании прямого параллелепипеда острый угол равен α, а стороны — a и b; меньшая диагональ параллелепипеда равна большей диагонали основания. Определить объём параллелепипеда.

4. Прямой параллелепипед (черт. 37) имеет в основании параллелограм, в котором диагональ $AC = d$, сторона $CB = \frac{1}{4}AC$ и $\angle ABC = \alpha$. Диагональ параллелепипеда FC образует с плоскостью основания угол φ. Найти объём параллелепипеда, а также угол между диагоналями оснований AC и EH ($d = 14{,}28$ *дм*; $\alpha = 106°6'$; $\varphi = 57°47'$).

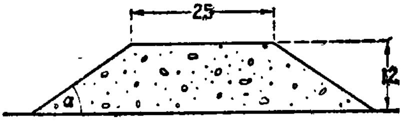
5. В параллелепипеде длины трёх рёбер, выходящих из общей вершины, a, b и c; рёбра a и b взаимно перпендикулярны, а ребро c образует с каждым из них угол α. Определить объём параллелепипеда и угол между ребром c и плоскостью того прямоугольника, который служит гранью параллелепипеда ($\alpha = 120°$).

Призма.

6. Диагональ правильной четырёхугольной призмы образует с боковой гранью угол α; сторона основания a. Определить объём призмы.

7. Через диагональ нижнего и вершину верхнего оснований правильной четырёхугольной призмы проведена плоскость, пересекающая две смежные боковые грани призмы по прямым, образующим угол $\alpha = 58°48'$. Сторона основания призмы $a = 6,4$ *см*. Определить объём призмы.

8. В правильной треугольной призме две вершины верхнего основания соединены с серединами противоположных им сторон нижнего основания. Угол между полученными прямыми, обращённый отверстием к плоскости основания, равен α; сторона основания равна a. Определить объём призмы.



Черт. 38.

9. На чертеже 38 дан разрез железнодорожной насыпи. Угол α определяется равенством $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3}$. Сколько куб. метров земли приходится на 1 погонный метр насыпи? Размеры на чертеже даны в метрах.

10. Основанием прямой призмы служит треугольник ABC, у которого сторона $AC = b = 38,03$ *дм*, сторона $BC = a = 34,84$ *дм*, угол $ACB = \gamma = 58°22'$. Боковое ребро призмы равно высоте h треугольника ABC. Определить объём призмы.

11. Высота h прямой призмы равна 20 *дм*; основанием служит прямоугольная трапеция с острым углом $\alpha = 45°42'$, описанная около круга радиуса $r = 6,15$ *дм*. Определить объём призмы.

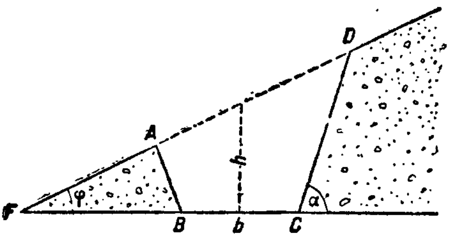
12. Требуется проложить выемку на участке земли, подымающемся под углом $\varphi = 18°30'$ к горизонту (черт. 39). Бока выемки имеют угол откоса $\alpha = 68°10'$, ширина выемки внизу $b = 14,2$ *м*, глубина в середине $h = 9,2$ *м*. Сколько куб. метров земли приходится на 1 погонный метр выемки?

13. Основанием призмы служит $\triangle ABC$, в котором $BC = a$ и $AB = AC$. Ребро AA_1 равно b и перпендикулярно к BC. Двугранный угол при ребре AA_1 равен α. Определить объём этой призмы.

Пирамида.

14. Определить объём правильной n-угольной пирамиды, боковое ребро которой b наклонено к плоскости её основания под углом β ($n=8$; $b=3{,}5$ *м*; $\beta=78^\circ39'$).

15. Определить объём правильной четырёхугольной пирамиды, боковое ребро которой равно b, а плоский угол при вершине равен α.



Черт. 39.

16. Определить объём пирамиды, если её высота равна h, боковые рёбра наклонены к плоскости основания под углом φ и в основании треугольник с углами α и β.

17. В треугольной пирамиде две боковые грани— равнобедренные прямоугольные треугольники, гипотенузы которых равны b и образуют между собой угол α. Определить объём этой пирамиды.

18. Основанием пирамиды служит трапеция, в которой каждая из боковых сторон и меньшая из параллельных имеют длину a, а острые углы равны α; боковые рёбра пирамиды образуют с плоскостью основания угол φ. Определить объём этой пирамиды.

19. Основанием пирамиды служит равнобедренная трапеция, в которой параллельные стороны a и b ($a>b$), а неравные отрезки диагоналей образуют угол α; высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания; двугранные углы, прилежащие к параллельным сторонам основания, относятся как $1:2$. Определить объём пирамиды.

20. Основанием пирамиды $SABCD$ служит параллелограм $ABCD$. Рёбра SB и SD перпендикулярны к сторонам основания BC и AD и образуют с плоскостью основания угол φ. Определить объём пирамиды, если острый угол параллелограма равен α, а площадь равна P.

21. В грани ABC пирамиды $SABC$ угол A равен $\alpha=72^\circ36'$ и угол B равен $\beta=47^\circ23'$. Объём пирамиды равен $V=317$ *см*^{3}. Проведена плоскость через ребро SC и биссектрису угла C в треугольнике ABC. На какие части разделился этой плоскостью данный объём?

22. Через ребро правильного тетраэдра проведена плоскость, делящая его объём в отношении 3 : 5. На какие части она делит двугранный угол?

Усечённая пирамида.

23. Яма для пруда имеет форму правильной усечённой четырёхугольной пирамиды. Стороны оснований $a=14$ *м* и $b=10$ *м*. Боковые грани наклонены к плоскости основания под углом $\alpha=38°$. Сколько воды может вместить эта яма?

24. В усечённой правильной четырёхугольной пирамиде даны стороны a и b большего и меньшего оснований и острый угол α в боковой грани. Определить объём ($a=28,7$; $b=15,2$; $\alpha=65°12'$).

25. В правильной n-угольной усечённой пирамиде стороны оснований a и b. Боковое ребро составляет с плоскостью оснований угол α. Найти объём.

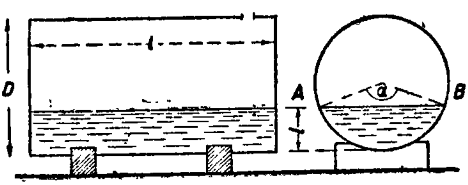
Цилиндр.

26. Боковая поверхность цилиндра в развёртке представляется прямоугольником, в котором диагональ равна d и составляет угол α с основанием. Определить объём цилиндра.

27. В круге, служащем основанием цилиндра, проведена хорда, длина которой a. Соответствующий ей центральный угол равен α. Высота цилиндра h. Найти его объём ($a=4,8$ *дм*; $\alpha=26°32'$; $h=23$ *дм*).

28. В основание равностороннего цилиндра (т. е. цилиндра, у которого диаметр основания равен образующей) вписан правильный n-угольник, сторона которого a. Определить объём этого цилиндра.

29. Горизонтально установленный цилиндрический бак наполнен жидкостью (черт. 40). Дуга AB содержит угол $\alpha=135°$. Диаметр (внутренний) бака равен $D=1,7$*м*. Длина (внутренняя) бака равна $l=3,5$ *м*. Определить количество жидкости.



Черт. 40.

30. Найти объём цилиндрической трубки, высота которой H, зная, что если через образующую внешней её поверхности провести две плоскости, касательные к внутренней поверхности, то угол между ними α, а хорда, соединяющая точки касания этих плоскостей с внутренней окружностью основания трубки, равна b.

31. В основании цилиндра проведена хорда, равная стороне правильного n-угольника, вписанного в это основание. Если соединить концы этой хорды с центром другого основания, то получится треугольник, площадь которого равна Q, а угол при вершине α. Вычислить объём данного цилиндра V.

Конус.

32. Угол откоса для мелкого песка $\varphi=31°$. Куча песка имеет вид конуса, длина окружности основания которого $c=11$ *м*. Удельный вес песка $d=1{,}6$. Узнать вес этой кучи.

33. Угол, составляемый образующей конуса с его осью, $\alpha=18°46'$; длина образующей $l=36{,}17$ *дм*. Определить объём конуса.

34. Образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом α, а высота h. Определить объём конуса.

35. Образующая конуса наклонена к плоскости его основания под углом α; радиус основания R. Определить полную поверхность S и объём V конуса.

36. Осевое сечение конуса представляет треугольник, угол при вершине которого α. Радиус круга, описанного около этого треугольника, R. Определить объём конуса.

37. Хорда a в основании конуса стягивает дугу α; угол между высотой конуса и образующей β. Определить объём этого конуса.

38. Разность между образующей и высотой конуса $d=2{,}5$ *м*, а угол между ними $\alpha=42°38'$. Определить объём этого конуса.

39. Круг, радиус которого $R=5{,}38$ *дм*, служит общим основанием двух конусов, построенных по одну сторону общего их основания. Образующая одного конуса составляет с плоскостью основания угол $\alpha=74°28'$, образующая другого составляет с той же плоскостью угол $\beta=60°12'$. Определить объём, заключённый между боковыми поверхностями этих конусов.

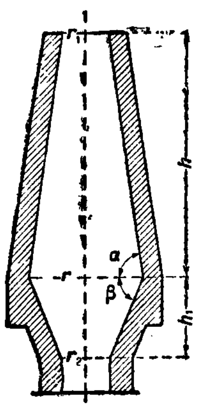
Усечённый конус.

40. Образующая усечённого конуса наклонена к его основанию, имеющему радиус R, под углом α; радиус другого основания равен r. Найти объём усечённого конуса.

41. В усечённом конусе, у которого отношение площадей оснований равно 4, образующая имеет длину l и наклонена к плоскости основания под углом φ. Определить объём конуса.

42. На чертеже 41 изображён продольный разрез доменной печи. Внутренность доменной печи состоит из двух усечён

ных конусов. Верхнее и нижнее отверстия имеют радиусы r_1 и r_2. Углы наклона образующих к основанию α и β. Общий объём V. Определить радиус общего основания конусов r, также их высоты h и h_1 ($2r_1=4{,}2$ *м*; $2r_2=4{,}9$ *м*; $\alpha=86°$; $\beta=76°$; $V=572{,}6$ *м*^{3}).



Черт. 41.

43. В усечённом конусе помещается полный конус, имеющий с ним общее меньшее основание, общую высоту и образующие, соответственно параллельные его образующим. Определить объём усечённого конуса, зная, что наибольший угол между продолжениями его образующих, из которых каждая $a=24{,}9$ *дм*, есть $\alpha=65°49'$.

44. В усечённом конусе диагонали осевого сечения взаимно перпендикулярны, а образующая составляет с плоскостью большего основания угол α и равна l. Определить объём этого усечённого конуса ($l=12$; $\alpha=70°20'$)

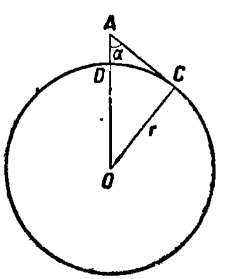
§ 22. Шар и его части.

Шар.

1. Радиус земного шара (приблизительно) равен 6370 *км*. Москва находится на 56° северной широты. Найти радиус этого круга широты.

2. Радиус земного шара равен 6370 *км*. Найти длину тропика (широта 23°27′) и полярного круга (широта 66°33′).

3. Наблюдатель, находясь на вершине горы в точке A (черт. 42), измерил угол $DAC=\alpha$, составленный лучом зрения AC, идущим к горизонту, и вертикальной линией AD. Зная радиус земли r, определить высоту горы $AD=x$.



Черт. 42.

4. В шар, объём которого $V=53{,}37$ *дм*^{3}, вписан конус. Угол, составленный двумя образующими конуса, проведёнными к концам одного диаметра основания, $\alpha=42°18'$. Определить объём конуса.

5. Образующая конуса составляет с его осью $\angle\alpha=35°18'$. Определить отношение объёма этого конуса к объёму описанного около него шара.

6. Сторона основания правильной n-угольной пирамиды равна a, двугранный угол при основании равен φ. Определить радиус шара, вписанного в пирамиду.

7. Определить радиус шара, описанного около правильной n-угольной пирамиды, если сторона основания равна a, а боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом α ($n=8$; $a=3{,}5$ *м*; $\alpha=58°37'$).

8. Основанием пирамиды служит ромб со стороной a и острым углом α; двугранные углы при основании равны φ. Определить радиус шара, вписанного в эту пирамиду.

9. В конусе даны длина C окружности основания и угол α между образующей и основанием. Определить длину линии, по которой взаимно касаются боковая поверхность конуса и поверхность вписанного в него шара.

10. В шаре из точки его поверхности проведены три равные хорды под углом α друг к другу. Определить их длину, если радиус шара равен R.

11. Определить в конусе угол между образующей и плоскостью основания, если площадь основания, поверхность вписанного шара и боковая поверхность конуса составляют арифметическую прогрессию.

12. Определить угол между образующей и плоскостью основания в конусе, объём которого в m раз более объема вписанного в него шара. Найти наименьшее значение m; вычислить угол, если $m=2\frac{1}{4}$.

13. Поперечное сечение, делящее конус по объему на равные части, проходит через центр описанного шара. Найти угол между образующей и плоскостью основания.

14. Определить угол при вершине в осевом сечении конуса, описанного около четырёх равных шаров, расположенных так, что каждый касается трёх других.

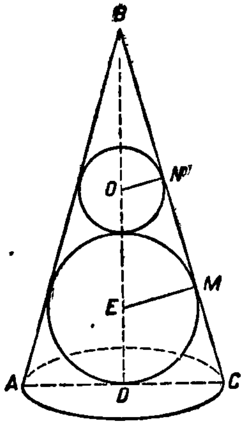
15. Около шара описан усечённый конус, боковая поверхность которого относится к поверхности шара как $m:n$. Определить угол между образующей и бо̀льшим основанием ($m:n=2:1$).

16. Определить радиус шара, описанного около усечённого конуса, в котором радиусы оснований R и r, а образующая наклонена к плоскости нижнего основания под углом α.

17. В усечённый конус, радиусы оснований которого r_1 и r_2 ($r_1>r_2$), вписан шар. Определить: 1) поверхность шара и 2) угол наклона образующей конуса к плоскости его основания.

18. В конусе помещены два шара так, что они касаются

друг друга и поверхности конуса (черт. 43); отношение радиусов EM и ON шаров равно $m:n$. Определить величину угла ABC при вершине сечения, проведённого через ось конуса ($m:n=3:1$).



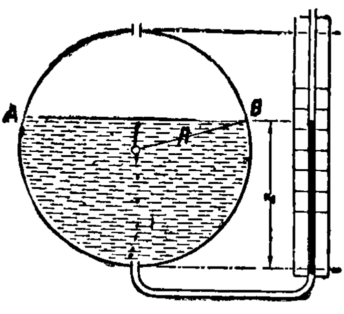
Черт. 43.

19. Радиус основания конуса равен R, образующая наклонена к плоскости основания под углом α. В этот конус вписан ряд шаров так, что первый шар касается боковой поверхности конуса и его основания, а каждый следующий — боковой поверхности конуса и предыдущего шара. Найти предел, к которому стремится сумма объёмов этих шаров, если число их бесконечно увеличивается.

Части шара.

20. Бак, имеющий вид шара, наполнен до некоторой высоты жидкостью, удельный вес которой равен d. Дуга $\smile AB$ (черт. 44) содержит $\varphi°$. Радиу((внутренний) бака равен R. Найти вес жидкости.

21. Резервуар для газа состоит из цилиндра, закрытог(сверху шаровым сегментом. Внутренние размеры цилиндра диаметр 24 *м*, высота 6 *м*. Ду га в осевом сечении шарово го сегмента, покрывающег(цилиндр, содержит 73°44 Найти ёмкость резервуара.



Черт. 44.

22. В некотором сфериче ском слое, имеющем равны основания, боковая поверх ность равновелика сумм оснований. Определить вели чину дуг в осевом сечени этого слоя.

23. Определить кривую пс верхность сферического сеı мента, если в его осевом сечении дуга равна α, а длин хорды равна a.

24. Дуга в осевом сечении сферического сегмента $\alpha =$ $=65°28'$; радиус шара, от которого отделён сегмент, $R=$ $=24$ *дм*. Определить кривую поверхность сегмента.

25. Дуга сегмента в осевом сечении сферического сектора с а хорда, её стягивающая, b. Определить объём сектор ($b=25{,}13$; $\alpha=63°17'$).

26. Объём шара равен V. Определить объём его сектора у которого центральный угол в осевом сечении равен α.

27. Определить полную поверхность сферического сектор радиуса R с углом α при вершине.

28. В коническую поверхность вписан шар; линией каса ния поверхность этого шара делится в отношении $m:n$ Определить в конической поверхности наклон образующе к оси ($m:n=1:3$).

29. Круговой сектор, дуга которого равна α (менее 180°) вращается около диаметра, проходящего вне его; объём полу ченного тела относится к объёму шара того же радиуса как $m:n$. Определить меньший из углов, образуемых диамет ром с боковыми радиусами сектора ($\alpha=90°$; $m:n=\sqrt{3}:\sqrt{8}$)

30. Радиус сферического сектора R, наибольший уго между радиусами α. Определить объём и поверхность шара вписанного в сектор.

§ 23. Тела вращения.

Тела вращения, приводимые к цилиндрам и конусам.

1. В треугольнике даны: сторона a и углы B и C. Определить поверхность и объём тела, полученного от вращени треугольника около данной стороны.

2. Площадь равнобедренного треуголь ника $Q=50$ *дм*^{2}, а угол при вершин $\beta=100°24'$. Вычислить полную поверх ность тела, образованного вращением этого треугольник около прямой, перпендикулярной к основанию и прове дённой через один из его концов.

3. Определить объём тела, образованного вращением тре угольника ABC около оси, проходящей через вершину A и параллельной стороне BC, зная, что $BC=a=23{,}54$ *дм* проекция стороны AB на ось вращения $b=7{,}33$ *дм*, а уго между AB и осью равен $\alpha=18°36'$.

4. Правильный треугольник, сторона которого a, вра щается около оси, проходящей вне его через конец ег стороны под острым углом α к этой стороне. Определит поверхность тела вращения.

5. Равнобедренный треугольник, у которого боковая сто рона равна b, а угол при вершине α, вращается около бо ковой стороны. Определить объём и поверхность тела вращения ($\alpha = 120^\circ$).

6. Ромб со стороной a и острым углом α вращается около оси, проходящей через вершину острого угла перпендикулярно к его стороне. Определить поверхность и объём тела вращения.

7. Плоская ломаная линия состоит из n равных отрезков, имеющих длину a и соединённых в виде зигзага под углом α друг к другу. Определить поверхность, образуемую вращением этой линии около оси, которая проходит через один из концов её параллельно биссектрисе угла α.

8. В треугольнике даны стороны b и c и угол между ними α; этот треугольник вращается около оси, которая проходит вне его через вершину угла α и равно наклонена к сторонам b и c. Определить объём тела вращения.

9. В треугольнике даны основание a и прилежащие углы α и $90^\circ + \alpha$. Определить объём тела, полученного от вращения этого треугольника около его высоты.

10. На полуокружности радиуса R от конца B диаметра AB отложена дуга BC, равная α (менее 90°), и через точку C проведена касательная до встречи в точке D с продолжением диаметра AB; кроме того, точка C соединена с A. Определить объём тела, которое образуется вращением треугольника ACD около стороны AD.

11. Углы треугольника ABC даны. Определить, как относятся между собою объёмы V_a, V_b и V_c тел, полученных от вращения этого треугольника последовательно около сторон a, b и c.

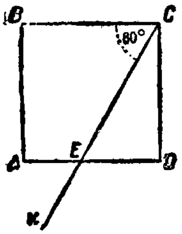
12. Два треугольника: равнобедренный с углом при вершине $\alpha = 54^\circ16'$ и равносторонний лежат в одной плоскости и имеют общее основание $b = 25{,}34$ *см*. Определить объём и поверхность тела, полученного от вращения рассматриваемой системы треугольников около оси, проходящей через одну из общих вершин этих треугольников параллельно высоте равнобедренного треугольника.

13. Площадь прямоугольного треугольника равна S; один из острых углов равен α. Через вершину этого острого угла проведена прямая, перпендикулярная к гипотенузе и лежащая в плоскости треугольника. Определить объём V тела, образуемого вращением треугольника около упомянутой оси.

14. Определить объём и поверхность тела, полученного от вращения прямоугольника около оси, проходящей через

одну его вершину перпендикулярно диагонали d, которая образует со стороной угол α ($p=34{,}06$ *м*; $\alpha=56°14'$).

15. Через вершину C квадрата $ABCD$ (черт. 45), сторона которого равна a, проведена прямая Cx, образующая со стороной BC угол $BCx=60°$ и пересекающая сторону AD в точке E. Определить объём тела, образуемого вращением четырёхугольника $EABC$ около прямой Cx.



Черт. 45.

16. Периметр прямоугольного треугольника $2p=27{,}42$ *дм*, один из углов $\alpha=41°16'$. Определить объём тела, полученного при вращении треугольника около гипотенузы.

17. В прямоугольной трапеции, описанной около круга радиуса r, острый угол α. Определить боковую поверхность тела, полученного от вращения этой трапеции около меньшей из непараллельных сторон.

18. Диагональ параллелограма, проведённая из вершины тупого угла, составляет угол β с меньшей его стороной; расстояние между бóльшими сторонами параллелограма равно h. Определить объём тела, образованного вращением параллелограма около оси, проходящей через вершину его острого угла α параллельно упомянутой диагонали.

19. Правильный многоугольник с чётным числом (n) сторон вращается около прямой, соединяющей две противоположные вершины. Выразить поверхность и объём тела вращения: 1) через радиус r вписанного круга, 2) через радиус R описанного круга и 3) через сторону a многоугольника.

20. Правильный многоугольник с чётным числом (n) сторон вращается около прямой, соединяющей середины двух противоположных сторон. Выразить поверхность и объём тела вращения: 1) через радиус r вписанного круга; 2) через радиус R описанного круга и 3) через сторону a многоугольника.

21. Правильный многоугольник с нечётным числом (n) сторон вращается около прямой, соединяющей середину стороны с противоположной вершиной. Выразить поверхность и объём тела вращения: 1) через радиус r вписанного круга, 2) через радиус R описанного круга и 3) через сторону a многоугольника.

Тела вращения, содержащие в себе части шара.

22. Определить объём V и полную поверхность S тела, образованного вращением кругового сегмента радиуса R около диаметра, проходящего через конец его дуги α.

23. Определить объём тела, образованного вращением кругового сектора с центральным углом α около диаметра $2r$ круга, от которого отделён сектор, если диаметр составляет угол β с радиусом, делящим центральный угол сектора пополам.

24. Круговой сектор, содержащий угол α, вращается около диаметра. Диаметр перпендикулярен к радиусу, делящему центральный угол этого сектора пополам. Площадь сектора равна Q. Определить поверхность тела вращения ($\alpha = 70°36'$; $Q = 211{,}8$).

25. Из конца диаметра шара проведена хорда так, что поверхность, образуемая вращением её около диаметра, делит объём шара пополам. Определить угол α между хордой и диаметром.

26. Круговой сегмент, содержащий дугу α и хорду a, вращается около диаметра, параллельного хорде. Определить поверхность и объём тела вращения.

Таблица тригонометрических функций

°	sin	tg	ctg	cos	°
0	0,000	0,000	∞	1,000	90
1	0,017	0,017	57,290	1,000	89
2	0,035	0,035	28,636	0,999	88
3	0,052	0,052	19,081	0,999	87
4	0,070	0,070	14,301	0,998	86
5	0,087	0,087	11,430	0,996	85
6	0,105	0,105	9,514	0,995	84
7	0,122	0,123	8,144	0,993	83
8	0,139	0,141	7,115	0,990	82
9	0,156	0,158	6,314	0,988	81
10	0,174	0,176	5,671	0,985	80
11	0,191	0,194	5,145	0,982	79
12	0,208	0,213	4,705	0,978	78
13	0,225	0,231	4,331	0,974	77
14	0,242	0,249	4,011	0,970	76
15	0,259	0,268	3,732	0,966	75
16	0,276	0,287	3,487	0,961	74
17	0,292	0,306	3,271	0,956	73
18	0,309	0,325	3,078	0,951	72
19	0,326	0,344	2,904	0,946	71
20	0,342	0,364	2,747	0,940	70
21	0,358	0,384	2,605	0,934	69
22	0,375	0,404	2,475	0,927	68
23	0,391	0,424	2,356	0,921	67
24	0,407	0,445	2,246	0,914	66
25	0,423	0,466	2,145	0,906	65
26	0,438	0,488	2,050	0,899	64
27	0,454	0,510	1,963	0,891	63
28	0,469	0,532	1,881	0,883	62
29	0,485	0,554	1,804	0,875	61
30	0,500	0,577	1,732	0,866	60
31	0,515	0,601	1,664	0,857	59
32	0,530	0,625	1,600	0,848	58
33	0,545	0,649	1,540	0,839	57
34	0,559	0,675	1,483	0,829	56
35	0,574	0,700	1,428	0,819	55
36	0,588	0,727	1,376	0,809	54
37	0,602	0,754	1,327	0,799	53
38	0,616	0,781	1,280	0,788	52
39	0,629	0,810	1,235	0,777	51
40	0,643	0,839	1,192	0,766	50
41	0,656	0,869	1,150	0,755	49
42	0,669	0,900	1,111	0,743	48
43	0,682	0,933	1,072	0,731	47
44	0,695	0,966	1,036	0,719	46
45	0,707	1,000	1,000	0,707	45
°	cos	ctg	tg	sin	°

ОТВЕТЫ.

§ 1.

1. $-120°$; $-1440°$. **2.** $1080°$; $10\,800°$. **3.** $5°$; $150°$; $720°$; $1500°$. **5.** 360
6. 1) $120°+360°n$; 2) $-60°+360°n$, или $300°+360°n$;
1) $120°$, $460°$, $840°$,...

7. 1) $\approx 1{,}57$ *см*; 2) $\frac{\pi R\alpha}{180}$. **8.** 1) a) $\frac{\pi}{6}$; b) $\frac{\pi}{4}$; c) $\frac{\pi}{3}$; d) $\frac{3}{4}\pi$; e) $\frac{\pi}{12}$;

f) $\frac{\pi}{8}$; g) $\frac{\pi}{5}$; h) $\frac{5}{12}\pi$; i) $\frac{3}{5}\pi$; k) $\frac{5}{6}\pi$; l) $\frac{7}{8}\pi$; m) $0{,}9\,\pi$.

2) a) $\approx 0{,}8901$; b) $\approx 0{,}4712$; c) $\approx 1{,}3352$; d) $\approx 0{,}2182$; e) $\approx 0{,}5009$;

f) $\approx 1{,}2802$; g) $\approx 2{,}0420$; h) $\approx 3{,}7737$. 3) $\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{3}{5}\pi$; $\frac{2}{3}\pi$; $\frac{\pi(n-2)}{n}$.

9. 1) $\approx 85°57'$; $\approx 114°35'$; $\approx 42°58'$; $30°$; $120°$; $270°$; $22°30'$; $135°$; $216°$.
2) $40°$; $75°$; $13°30'$; $57°42'$; $218°$; $27°30'$; $74°29'$; $45°50'$.
10. 1) $10\pi \approx 31{,}4$; 2) $\approx 6{,}28$ *м/сек*; 3) $\approx 37{,}68$ *м/сек*. **11.** ≈ 200.

§ 2.

1. В первой; нет. **4.** От 0 до 2. **5.** Лишь 1-е. **6.** Нет. **7.** 0. **8.** c.
9. $a-b+c$. **10.** $(a-b)^2$. **11.** a^2-b^2. **12.** 0. **13.** Не имеет числового значения.
14. 1) 0,6; 2) $-0{,}5$; 3) $-0{,}7$; 4) 0,9; 5) 1,7; 6) $-2{,}7$.
15. 1, 3, 7 — отрицательны; 2, 4, 5, 6, 8 — положительны.
16. 1) $\cos 20°$; 2) $\sin 50°$; 3) $\operatorname{ctg} 40°$; 4) $\operatorname{tg} 50°$.
21. 1) $15°$; $135°$; $255°$; 2) $300°$; 3) $50°$; $110°$; $170°$; $230°$; $290°$; $350°$; 4) $120°$
5) $\frac{\pi}{6}$; $\frac{5}{6}\pi$; $1\frac{1}{6}\pi$; $1\frac{5}{6}\pi$; 6) $\frac{\pi}{12}$; $1\frac{5}{12}\pi$; 7) $45°$; $136°$; 8) $\frac{\pi}{3}$; $\frac{2}{3}\pi$.
22. 1) $69°+180°n$; 2) $-39°+180°n$; 3) $\pm 26°+360°n$; 4) $\pm 132°+360°n$
5) $15°+360°n$ и $165°n+360°n$, или $(-1)^n\cdot 15°+180°n$;
6) $-45°+360°n$ и $-135°+360°\,n$, или $(-1)^{n+1}\cdot 45°+180°n$.

23. $\sin x=-1$. **24.** $\cos x=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$. **25.** $\sin x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.

26. $\sin x=0$. **27.** $\operatorname{tg} x=0$; 2. **28.** $\sec x=2$.
29. $\operatorname{ctg} x=0$. **30.** Не имеет решения. **31.** Невозможно.
32. 1) $\operatorname{arc\,tg} m+180°n$; m равно любому числу; 2) $\pm\arccos m+360°n$; $-1\leq m\leq 1$; 3) $(-1)^n\arcsin m+180°n$; $-1\leq m\leq 1$.

33. 1) $\frac{\pi}{6}=\arcsin\frac{1}{2}$; 2) $-45°=\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

3) $\frac{\pi}{4}=\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $90°=\arccos 0$; 5) $-\frac{\pi}{4}=\operatorname{arc\,tg}(-1)$;

6) $0°=\operatorname{arc\,tg} 0$; 7) $30°=\operatorname{arc\,ctg}\sqrt{3}$; 8) $45°=\operatorname{arc\,ctg} 1$;
9) $x=\arcsin 0{,}23$; 10) $x=\arccos 0{,}5762$; 11) $x=\operatorname{arc\,tg} 0{,}468$;
12) $x=\operatorname{arc\,ctg} 1{,}237$.
34. 1) $47°$, или 0,8203; 2) $66°30'$, или 1,1606; 3) $74°47'$ или 1,3052;
6) $62°54'$, или 1,0978.

35. 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\sqrt{3}$; 4) $3\sin\alpha$; 5) $a\cos\frac{b}{c}$; 6) $\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha$.

§ 3.

№ задачи	1	2	3	4
$\sin\alpha$	$(\sin\alpha)$	$\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\pm\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$
$\cos\alpha$	$\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$	$(\cos\alpha)$	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$	$\pm\dfrac{\operatorname{ctg}}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\pm\dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\pm\dfrac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$	$(\operatorname{tg}\alpha)$	$\dfrac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$\pm\dfrac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$	$\mp\dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$	$(\operatorname{ctg}\alpha)$
$\sec\alpha$	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\dfrac{1}{\cos\alpha}$	$\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$	$\pm\dfrac{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}{\operatorname{ctg}\alpha}$
$\operatorname{cosec}\alpha$	$\dfrac{1}{\sin\alpha}$	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\pm\dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}{\operatorname{tg}\alpha}$	$\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$
№ задачи	5	6	7	8
$\sin\alpha$	(0,8)	(—0,3)	$\pm\dfrac{\sqrt{5}}{3}$	$\pm\dfrac{4}{5}$
$\cos\alpha$	$\pm 0{,}6$	$\pm\dfrac{\sqrt{91}}{10}$	$\left(\dfrac{2}{3}\right)$	$\left(-\dfrac{3}{5}\right)$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\pm\dfrac{4}{3}$	$\mp\dfrac{3}{\sqrt{91}}$	$\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}$	$\mp\dfrac{4}{3}$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$\pm 0{,}75$	$\mp\dfrac{\sqrt{91}}{3}$	$\pm\dfrac{2}{\sqrt{5}}$	$\mp\dfrac{8}{4}$
$\sec\alpha$	$\pm\dfrac{5}{3}$	$\pm\dfrac{10}{\sqrt{91}}$	$\dfrac{3}{2}$	$-\dfrac{5}{3}$
$\operatorname{cosec}\alpha$	1,25	$-\dfrac{10}{3}$	$\pm\dfrac{3}{\sqrt{5}}$	$\pm\dfrac{5}{4}$

№ задачи	9	10	11	12
$\sin\alpha$	$\pm\sqrt{\frac{5}{6}}$	$\pm\frac{9}{41}$	$\pm\frac{15}{17}$	$\pm\sqrt{0,1}$
$\cos\alpha$	$\pm\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\pm\frac{40}{41}$	$\pm\frac{8}{17}$	$\pm\sqrt{0,9}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$(\sqrt{5})$	$\left(-\frac{9}{40}\right)$	$\frac{15}{8}$	$-\frac{1}{3}$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	$-\frac{40}{9}$	$\left(\frac{8}{15}\right)$	(-3)
$\sec\alpha$	$\pm\sqrt{6}$	$\pm\frac{41}{40}$	$\pm\frac{17}{8}$	$\mp\frac{\sqrt{10}}{3}$
$\operatorname{cosec}\alpha$	$\pm\sqrt{\frac{6}{5}}$	$\mp\frac{41}{9}$	$\pm\frac{17}{15}$	$\pm\sqrt{10}$
№ задачи	13	14	15	16
$\sin\alpha$	$\pm\frac{\sqrt{8}}{3}$	$\pm\frac{21}{29}$	$\frac{5}{13}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\cos\alpha$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{20}{29}$	$\pm\frac{12}{13}$	$\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\pm\sqrt{8}$	$\pm\frac{21}{20}$	$\pm\frac{5}{12}$	$\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$\pm\frac{1}{\sqrt{8}}$	$\mp\frac{20}{21}$	$\pm 2,4$	$\pm\sqrt{2}$
$\sec\alpha$	(3)	$\left(-1\frac{9}{20}\right)$	$\pm\frac{13}{12}$	$\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$
$\operatorname{cosec}\alpha$	$\pm\frac{3}{\sqrt{8}}$	$\pm\frac{29}{21}$	$(2,6)$	$(-\sqrt{3})$

№ задачи	17	18	19	20
$\sin\alpha$	$\left(\frac{a-b}{a+b}\right)$	$\pm\frac{b}{a}$	$\pm\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$	$\frac{99}{101}$
$\cos\alpha$	$\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}$	$\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right)$	$\pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$	$\frac{20}{101}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\pm\frac{a-b}{2\sqrt{ab}}$	$\pm\frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}$	$\left(\frac{a}{b}\right)$	$\left(4\frac{19}{20}\right)$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$\pm\frac{2\sqrt{ab}}{a-b}$	$\pm\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}$	$\frac{b}{a}$	$\frac{20}{99}$
$\sec\alpha$	$\pm\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}$	$\frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}$	$\pm\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}$	$\frac{101}{20}$
$\operatorname{cosec}\alpha$	$\frac{a+b}{a-b}$	$\pm\frac{a}{b}$	$\pm\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$	$\frac{101}{99}$
№ задачи	21	22	23	
$\sin\alpha$	0,96	$\left(-\frac{12}{13}\right)$	$-\frac{20}{29}$	
$\cos\alpha$	(—0,28)	$-\frac{5}{13}$	$\frac{21}{29}$	
$\operatorname{tg}\alpha$	$-\frac{24}{7}$	$\frac{12}{5}$	$-\frac{20}{21}$	
$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\frac{7}{24}$	$\frac{5}{12}$	(—1,05)	
$\sec\alpha$	$-\frac{25}{7}$	$-\frac{13}{5}$	$\frac{29}{21}$	
$\operatorname{cosec}\alpha$	$\frac{25}{24}$	$-\frac{13}{12}$	—1,45	

24. $\cos^2\alpha$. 25. $\sin^2\alpha$. 26. $1-\cos\alpha$.
27. $-(1+\sin\alpha)$. 28. $\sec^2\alpha$. 29. $\cos^2\alpha$.
30. a) $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta$; b) $\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta$. 31. a) $\operatorname{ctg}^2\alpha$; b) $\operatorname{tg}^2\alpha$.
32. $\cos\alpha$. 33. $\sin\alpha$. 34. $\sec\alpha$. 35. $\operatorname{tg}\alpha$. 36. $\operatorname{ctg}\alpha$.
37. $\operatorname{cosec}\alpha$. 38. $\cos\alpha$. 39. $\operatorname{tg}^2\alpha$.
40. $2\sin^2\alpha$. 41. $2\cos^2\alpha$. 42. 1. 43. 1.
44. $\operatorname{tg}^2\alpha$. 45. $\sec^2\alpha$. 46. $\sec^2\alpha$. 47. $\operatorname{cosec}^2\beta$.
48. $\operatorname{cosec}^2\alpha$. 49. $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$. 50. $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta$. 51. 4.
52. $\operatorname{ctg}^6\alpha$. 53. a) $2\sin^2\alpha-1$; b) $1-2\cos^2\alpha$. 54. $\dfrac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}$.
55. $\dfrac{1+\operatorname{tg}^2\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$. 56. $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}$. 57. a) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-1}{\operatorname{tg}\alpha+1}$; b) $\dfrac{1-\operatorname{ctg}\alpha}{1+\operatorname{ctg}\alpha}$.
58. a) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$; b) $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}$. 59. $\sec\alpha=-\dfrac{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}{\operatorname{ctg}\alpha}$.
60. 9. 61. $\dfrac{m^2-1}{2}$. 62. m^2-2 и m^3-3m.

93. $90^\circ+180^\circ n$. 94. $\pm 60^\circ+360^\circ n$. 95. $\pm 52^\circ+360^\circ n$
96. $360^\circ n$. 97. $\pm 128^\circ+360^\circ n$. 98. $\pm 52^\circ+360^\circ n$
99. $180^\circ n$. 100. $\approx 63^\circ+180^\circ n$ и $\approx -27^\circ+180^\circ n$.
101. $\approx(-1)^n\cdot 24^\circ+180^\circ n$. 102. $90^\circ+180^\circ n$ и $\pm 60^\circ+360^\circ n$.
103. $\pm 120^\circ+360^\circ n$. 104. $\approx 27^\circ+180^\circ n$. 105. $45^\circ+90^\circ n$.
106. $\pm 30^\circ+180^\circ n$. 107. $\pm 60+180^\circ n$.
108. $360^\circ n$ и $90^\circ+360^\circ n$. 109. $45^\circ+180^\circ n$. 110. $60^\circ+180^\circ n$.
111. $\pm 30^\circ+180^\circ n$. 112. $45^\circ+180^\circ n$ и $\approx -72^\circ+180^\circ n$.
113. $\approx 70^\circ+180^\circ n$ и $\approx -36^\circ+180^\circ n$.

§ 4.

1. 1) $\cos 17^\circ$; 2) $\sin 9^\circ20'$; 3) $\operatorname{ctg} 20^\circ34'20''$; 4) $\operatorname{tg} 30^\circ1'$.
2. 1) $\sin 67^\circ40'$; 2) $-\cos 80^\circ34'25''$; 3) $-\operatorname{tg} 71^\circ11'24''$; 4) $-\operatorname{ctg} 39^\circ20'$.
3. 1) $\cos 31^\circ40'$; 2) $\sin 16^\circ25'$; 3) $-\cos 21^\circ43'$; 4) $-\sin 8^\circ21'$. 5) $-\operatorname{tg} 19^\circ32'28''$; 6) $-\operatorname{ctg} 16^\circ32'$; 7) $-\operatorname{tg} 30^\circ28'40''$; 8) $-\operatorname{ctg} 39^\circ18'$.
4. -1. 5. $\cos\alpha$. 6. $-\cos\alpha$. 7. $-\sec\alpha$. 8. 0. 9. 0. 10. 1. 11. $-\sin^2\alpha$.
12. 0. 13. $2\cos\alpha$. 14. 1.

§ 5.

1. 1) 0,2588; 2) 0,7071; 3) 0,8660; 4) 0,9563; 5) 0,6225; 6) 0,9361; 7) 0,2051; 8) 0,9988;
2. 1) 0,3640; 2) 1; 3) 11,43; 4) 3,172; 5) 0,3191; 6) 1,3375; 7) 0,3799; 8) 8,284; 9) 12,61; 10) 38,19; 11) 286,5; 12) 3438.
3. 1) 0,4226; 2) 0,7071; 3) 0,8660; 4) 0,2924; 5) 0,7826; 6) 0,9373; 7) 0,4823; 8) 0,1948; 9) 0,9987; 10) 0,9997.
4. 1) 2,747; 2) 1; 3) 1,3032; 4) 0,3365; 5) 0,3796; 6) 2,805; 7) 0,0305; 8) 11,43; 9) 23,37; 10) 0; 11) 30,41.
5. 1) 20°; 2) 36°30′; 3) 57°21′; 4) 68°20′; 5) невозможно; 6) 23°9′.
6. 1) 24°; 2) 85°; 3) 69°30′; 4) 28°36′; 5) 79°48′; 6) 26°34′; 7) 22°47′; 8) 85°34′; 9) 81°25′.

7. 1) $27°$; 2) $24°30'$; 3) $50°30'$; 4) невозможно; 5) $35°2'$; 6) $63°21'$
8. 1) $20°$; 2) $67°30'$; 3) $29°29'$; 4) $33°47'$; 5) $55°13'$; 6) $30°33'$; 7) $8°$; 8) $5°35'$; 9) $2°52'$.
9. 0,9659; 0,1368; 0,6395; 0,9036. **10.** $-0{,}4695$; $-0{,}9171$; $-0{,}1513$; $-0{,}9825$.
11. $-1{,}6643$; $-0{,}3561$; $-4{,}836$; $-0{,}6334$.
12. $-11{,}43$; $-0{,}6873$; $-6{,}472$; $-0{,}3876$.

§ 6.

1. 1) $\sin\alpha = 0{,}96$; $\operatorname{tg}\alpha = 3\frac{3}{7} \approx 3{,}429$; 2) $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}75$; $\cos\alpha = 0{,}8$; 3) $\operatorname{tg}\beta \approx 6{,}462$; $\cos\beta \approx 0{,}1529$.

2. $\sin\beta = \frac{77}{85}$; $\cos\beta = \frac{36}{85}$; $\operatorname{tg}\beta = 2\frac{5}{36}$; $\operatorname{ctg}\beta = \frac{36}{77}$. **3.** 1) 20,4 *см*; 2) 68 *см*
4. 1) 10,08 *м*; 2) 30,6 *дм*. **5.** 1) 2,56 *км*; 2) 2,39 *км*. **6.** 947 *м*.
7. $12°43'$; **8.** 3646,5 *м* $\approx$ 3647 *м*. **9.** 20 *м*. **10.** 35,5 *м*. **11.** 27,25 *м*
12. $1°54'$. **13.** $4°55'$. **14.** $2°57'$; 727 *м*. **15.** $b\sin\alpha - a = 10{,}5$ *м*. **16.** 3,9 *м*
18. $33°41'$. **19.** ≈ 40 *м*. **20.** 1) $63°26'$; 2) $26°34'$; 3) $21°48'$.

21. $\operatorname{arc\,tg}\frac{n}{n-1} = 47°52'$. **22.** $30°58'$. **23.** $\varphi = 180° - \operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}$.
24. $33°41'$. **25.** 21 *см*. **26.** 1278 *м*. **27.** $r = 1{,}548$ *м*; $x = 1{,}928$ *м*
28. $\frac{a}{2\cos\beta}$. **29.** $6°51'$; 105,2 *мм*. **30.** $h = 10(D-d)$; $2°52'$. **31.** $38°40'$
32. 63 *м*. **33.** 2,6 *м*. **34.** $36°39'$. **35.** $73°58'$. **36.** 2,698. **37.** $47°16'$; 32,8 *дм*
38. $97°10'$.
39. $\frac{c}{2\pi}\cdot\cos\frac{180°\, m}{m+n} \approx 11{,}2$.
40. $\frac{a}{2\sin\alpha}$.
41. $52°15'$; 7,141 *кг*. **42.** $b(1+\sec\alpha)$. **43.** $\arcsin\frac{h}{b}$.
44. $48°1'$. **45.** $78°42'$.
46. $69°15'$ с направлением, идущим к северу.

47.

α	5 *дм*	15 *дм*
$40°$	3,2 *дм*	9,6 *дм*
$60°$	4,3 »	13,0 »
$90°$	5 »	15 »

48. 26,6 *км* к востоку и 21,7 *км* к северу. **49.** $40°13'$ и $49°47'$.
50. $57°28'$. **51.** $67°49'$ и $22°11'$. **52.** $120°30'$ и $59°30'$.
53. 1) $OB \approx 0{,}35$ *м*; $AB = 0{,}2$ *м*; $\beta = 5°44'$; $BP \approx 1{,}99$ *м*; 3) $0°$; $1°59'$; $3°55'$; $5°44'$; $7°23'$; $8°49'$; $9°59'$; $10°50'$; $11°22'$; $11°32'$ 5) $11°19'$; 6) 0; 5 *мм*; 22 *мм*; 48 *мм*; 83 *мм*; 125 *мм*; 173 *мм* 224 *мм*; 277 *мм*; 330 *мм*.
54. $47°30'$. **55.** $\alpha = 40°42'$; $\beta = 19°14'$.
56. 1) $82°27'$; 2) $8°43'$. **57.** $53°8'$.
58. $R = \frac{a}{2\cos\frac{\beta}{2}}$; $r = a\sin\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\left(45° - \frac{\beta}{4}\right)$.

59. $\alpha = \arcsin \frac{h}{b}$; $a = \frac{h}{\cos\alpha}$; $c = \frac{b}{\cos\alpha}$. 60. $11°26'$.
61. $28°$; $37°$; $19°$; $53°$; $86°$; $113°$. 62. 21 738 *км*.
63. $4°52'$. 64. $1°11'$. 65. $51°5'$.

§ 7.

1. 1) $b = 61$; $c = 102$; 2) $a = 39$; $b = 25$. 2. 78,7 *м*. 3. 21,1 *м*.
4. $\frac{b \sin(\alpha+\beta)}{\cos\beta}$. 5. $\frac{l \sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha}$. 6. $\frac{d \sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$ и $\frac{d \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.
7. $l_b = \frac{a \sin\gamma}{\sin\left(\frac{\beta}{2}+\gamma\right)}$; $l_c = \frac{a \sin\beta}{\sin\left(\beta+\frac{\gamma}{2}\right)}$; $l_a = \frac{a \sin\beta \sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}$.
8. $\frac{c \sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} \approx 146{,}4$ *м*.
9. $a = \frac{h_a \sin\alpha}{\sin\gamma \sin(\alpha+\gamma)}$; $b = \frac{h_a}{\sin\gamma}$; $c = \frac{h_a}{\sin(\alpha+\gamma)}$.
10. 7880 $м^2$. 11. $\frac{1}{2} b^2 \sin\alpha \approx 48$ $м^2$.
12. При $\gamma = 90°$. 15. $a^2 \sin\alpha \approx 21$ $см^2$.
16. $\frac{d^2 \sin\varphi}{2}$; максимум равен $\frac{d^2}{2}$ при $\varphi = 90°$.
17. $\frac{(a+b)\cdot c}{2} \cdot \sin\alpha$. 18. $50°33'$ и $129°27'$. 19. $46°57'$ и $133°3'$.
20. 362,3 $м^2$ 21. $AE = \sqrt{\frac{2Q \sin(\alpha+\gamma)}{\sin\alpha \sin\gamma}}$. $AD = \sqrt{\frac{2Q \sin\gamma}{\sin\alpha \sin(\alpha+\gamma)}}$.
22. $\frac{h_a h_b}{2\sin\gamma}$. 23. $\frac{h_b^2 \sin\beta}{2 \sin\alpha \sin(\alpha+\beta)}$. 24. $a = 8{,}5$.
25. 1) $c = 22$; $\alpha = 22°14'$; $\beta = 34°29'$; 2) $b = 0{,}4$; $\alpha = 11°29'$; $\gamma = 145°3'$;
3) $b = 63$; $\alpha = 153°16'$; $\gamma = 10°16'$.
26. 77 *м*. 27. $117°7'$. 28. 8,1 *м* и 4,0 *м*.
29. 275 *кг*; $16°10'$ и $33°50'$. 30. 1633 *м*.

§ 8.

1. $\cos 162°30' = -\cos 17°30'$. 2. $\sin 340° = -\cos 70°$.
3. $\sin 75° = \cos 15°$; $\sin 150° = \sin 30°$.
4. a) $-\sin 20°$; b) $\cos 10°$; c) $\sin 30°$; d) $\cos 20°$.
5. e) $\operatorname{ctg} 30°$; f) $-\operatorname{tg} 40°$; g) $\operatorname{ctg} 45°$; h) $\operatorname{tg} 30°$.
6. i) $-\operatorname{cosec} 10°$; k) $\sec 10°$; l) $\operatorname{cosec} 40°$; m) $-\sec 10°$.
7. a) $\cos 0{,}2\pi$; b) $\cos\frac{2}{9}\pi$; c) $-\operatorname{tg}\frac{2}{11}\pi$; d) $-\sec 0{,}1\pi$.
8. a) 1; b) 1; c) 0; d) 0. 9. a) $-\frac{1}{2}$; b) 0; c) $\sqrt{3}$; d) -1
10. $\cos 50° = -\cos 130°$. 11. $-2\operatorname{ctg}\alpha$. 12. $2\cos\alpha$. 13. 1.
14. -1. 15. $a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\alpha$. 16. $-\operatorname{tg}^3\alpha$.

17. $\operatorname{ctg} \alpha$. 18. $\dfrac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha}$. 19. 0. 20. $\operatorname{ctg}^2 42^\circ$

21. $-\operatorname{ctg}^2 40^\circ$.

21. $\sin(\alpha - 90^\circ) = -\cos \alpha$; $\cos(\alpha - 180^\circ) = -\cos \alpha$; $\operatorname{tg}(\alpha - 360^\circ) = \operatorname{tg} \alpha$

23. $\cos x = -\dfrac{2}{3}$. 24. $\sin x = \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 25. $\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. 26. $360^\circ \cdot n$.

27. $135^\circ + 180^\circ \cdot n$. 28. $\dfrac{\pi}{4} + \pi n$. 29. $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2}$. 30. $90^\circ (2\pi + 1)$.

§ 9.

1. -1. 2. a) $\sin \alpha$; b) $-\sin \alpha$. 3. $0{,}4\sqrt{3} + 0{,}3$;

4. $\sqrt{0{,}2} - \sqrt{0{,}15}$. 5. $0{,}2 + \sqrt{0{,}63}$; $-\sqrt{0{,}21} - \sqrt{0{,}12}$.

6. $\dfrac{1}{12}(\sqrt{35} - 6)$; $\dfrac{1}{12}(3\sqrt{5} - 2\sqrt{7})$. 7. ± 1; $\pm 0{,}28$. 8. $\dfrac{1}{2}$.

9. a) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + 1)$; $\dfrac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1)$; b) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1)$; $\dfrac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + 1)$.

12. a) $\dfrac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}$ и $\dfrac{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$; b) $\dfrac{\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha}{\operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \alpha}$ и $\dfrac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta + 1}{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta - 1}$.

13. $\sin \alpha \cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$; $\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma - \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma - \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma$.

14. $\dfrac{56}{65}$ и $\dfrac{57}{1625}$. 15. $\dfrac{1 \pm \operatorname{tg} \alpha}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha}$. 16. $-(2 + \sqrt{3})$. 17. $-\dfrac{1}{2}$.

18. -1 и $\dfrac{1}{7}$. 19. $\dfrac{\operatorname{ctg} \beta \pm \operatorname{ctg} \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta \mp 1}$. 20. a) $\dfrac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta \mp 1}{\operatorname{ctg} \beta \pm \operatorname{ctg} \alpha}$; b) $\dfrac{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}$.

21. $\dfrac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma - \operatorname{tg} \cdot \operatorname{tg} \alpha}$. 22. $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$.

23. $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta$. 24. $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta$. 25. $\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta$.

26. $\operatorname{tg} \alpha$. 41. $-45^\circ + 180^\circ n$. 42. $\pm 60^\circ + 180^\circ n$.

43. $x = \operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma) + 180^\circ n$. 44. $30^\circ (2n + 1)$.

45. $x = (-1)^n \cdot 30^\circ + 180^\circ \cdot n$. 46. $x = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{a - b \cdot \operatorname{tg} \alpha}{a \cdot \operatorname{tg} \alpha - b} + \pi n$.

47. $x = \operatorname{arc\,tg}\left(\pm \sqrt{\dfrac{m + \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + m \operatorname{tg}^2 \alpha}}\right) + \pi n$. 48. $x = 180^\circ \cdot n$ или $x = \pi n$.

49. $x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{3} \cdot n$. 50. $x = 90^\circ \cdot n$; $60^\circ \cdot n$. 51. $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$.

52. $14^\circ 38' + 180^\circ n$. 53. $45^\circ + 180^\circ n$. 54. $\pm \dfrac{\pi}{3} + 2\pi n$.

§ 10.

1. a) $\pm 0{,}96$; $-0{,}28$; b) $\dfrac{3}{4}$. 2. $\dfrac{120}{169}$; $-\dfrac{119}{169}$.

4. $-0{,}96$; $-0{,}28$. 5. $\dfrac{2}{3}\sqrt{2}$; $-\dfrac{1}{3}$. 6. $-\dfrac{3}{4}$.

7. a) $\pm 2\sin\alpha\sqrt{1-\sin^2\alpha}$; $1-2\sin^2\alpha$; b) $\pm\cos\alpha\sqrt{1-\cos^2\alpha}$; $2\cos^2\alpha-1$.

8. a) $\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\alpha}$; b) $\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha}$. 9. $\frac{\sec^2\alpha}{2-\sec^2\alpha}$.

10. a) $2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$; $\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}$; b) $\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$.

11. $\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$; $\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$. *Указание.* Сначала пишем:

$$\sin\alpha=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}} \quad \text{и} \quad \cos\alpha=\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

12. Так как через $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ остальные функции угла α выражаютс рационально, то достаточно рассмотреть $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$; относительно же и смотри решение задачи 11.

13. $\frac{12}{13}$; $\frac{5}{13}$; 2,4. 14. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$; $\frac{1}{2}\sqrt{2}$; 1.

15. $3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$; $4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$; $\frac{3\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}$.

16. $4\sin\alpha\cdot\cos^3\alpha-4\cos\alpha\cdot\sin^3\alpha$; $\cos^4\alpha-6\cos^2\alpha\cdot\sin^2\alpha+\sin^4\alpha$.

17. $\sqrt{0,9}$; $-\sqrt{0,1}$; -3.

18. $\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$; $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$; $2-\sqrt{3}$; $2+\sqrt{3}$.

19. $\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$; $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$; $\sqrt{2}-1$; $\sqrt{2}+1$.

20. $\frac{4}{5}$ и $\frac{3}{5}$. 21. $\frac{4}{5}$ 22. $\sqrt{5}-2$.

25. Имеем: $\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}=1$ и $2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=\sin\alpha$; отсюда найде

$\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{1+\sin\alpha}$ и $\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{1-\sin\alpha}$.

С помощью этих равенств получим для $\sin\frac{\alpha}{2}$ и $\cos\frac{\alpha}{2}$ по *четыр* значения.

26. $\frac{-1\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}{\operatorname{tg}\alpha}$; $\operatorname{ctg}\alpha\pm\sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha+1}$. 27. -2.

52. $x=(-1)^n\cdot 15^\circ+90^\circ\cdot n$, или $x=\frac{\pi}{2}\cdot n+(-1)^n\cdot\frac{\pi}{12}$.

53. $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$. 54. $x=22^\circ 30'+90^\circ\cdot n$, или $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}\cdot n$.

55. $x = \pi n, \quad \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n.$

56. $x_1 = \pi(2n+1); \quad x_2 = 2\cdot(-1)^n \arcsin\frac{b}{2a} + 2\pi n.$

57. $x = 45^\circ + 90^\circ \cdot n.$

58. $x = 120^\circ \cdot n.$

59. $x = \pm 30^\circ + 180^\circ \cdot n.$ 60. $x = \pi n.$ 61. $x = \pi n, \quad \pm\frac{\pi}{6} + \pi n.$

62. $x = \pi + 2\pi n; \quad x = \pm 2\arccos\frac{b}{2a} + 4\pi n.$

63. $x = 360^\circ \cdot n; \quad (-1)^n \cdot 60^\circ + 360^\circ \cdot n.$

64. $x = \pi + 2\pi n; \quad x = 2\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{a}{b} + 2\pi n.$ 65. $x = 2\pi n, \quad \frac{\pi}{2} + 2\pi n.$

66. $x = \pm\arccos\frac{m-2\pm\sqrt{m(m-8)}}{2(m+1)} + 2\pi n.$

67. $x = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}\pi n.$

68. $x = 180^\circ \cdot n; \quad \pm 30^\circ + 180^\circ \cdot n.$ 69. $x = \frac{\pi}{2} + \pi n; \quad \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n.$

70. $x = 45^\circ + 90^\circ \cdot n; \quad \pm 30^\circ + 180^\circ n.$

71. $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}\cdot n.$ 72. $72^\circ 52' + 360^\circ n$ и $17^\circ 8' + 360^\circ n.$

73. $119^\circ 34' n + 360^\circ n$ и $-13^\circ 18' + 360^\circ n.$ 74. $90^\circ + 360^\circ n$ и $30^\circ + 360^\circ n$

§ 11.

1. a) $\sqrt{1{,}5}$; b) $\sin 18^\circ$; c) 0; d) $-\sin 18^\circ$.
2. a) $2\sin 12^\circ 30' \cdot \cos 7^\circ 30'$; b) $-2\sin 1^\circ \cdot \cos 4^\circ$; c) $2\cos 10^\circ 7' 30''$; d) $2\sin 15^\circ \cdot \sin 10^\circ$.
3. a) $\cos\alpha$; b) $2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}$. 4. a) $\frac{\mathrm{tg}\,20^\circ}{\mathrm{tg}\,5^\circ}$; b) $\mathrm{ctg}\,\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\mathrm{ctg}\,\frac{\beta-\alpha}{2}$.
5. a) $2\sin 35^\circ \cdot \cos 15^\circ$; b) $\sqrt{2}\cdot\sin 25^\circ$;

   c) $2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - 45^\circ\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2} + 45^\circ\right)$.
6. $\sqrt{2}\cdot\cos(\alpha - 45^\circ)$;

   $\sqrt{2}\sin(\alpha - 45^\circ)$, или $\sin\alpha \pm \cos\alpha = \sqrt{2}\cdot\sin(\alpha \pm 45^\circ)$.
7. a) $\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$; b) $\frac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$; c) $\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\sin\beta}$; d) $\frac{\cos(\mp\beta)}{\sin\alpha\cdot\cos\beta}$.
8. a) $2\,\mathrm{cosec}\,2\alpha$; b) $-2\,\mathrm{ctg}\,2\alpha$.
9. a) $\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)$; b) $\sin(\beta+\alpha)\cdot\sin(\beta-\alpha)$.
10. a) $\frac{\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)}{\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta}$; b) $\frac{\sin(\beta+\alpha)\cdot\sin(\beta-\alpha)}{\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta}$;

    c) $-\frac{\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)}{\cos^2\alpha\cdot\sin^2\beta}$; d) $-4\,\mathrm{ctg}\,2\alpha\cdot\mathrm{cosec}\,2\alpha$.
11. a) $2\cos^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$. b) $-2\sin^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$; c) $\cos 2\alpha$; d) $-\cos 2\alpha$
12. $2\cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot\mathrm{tg}\,\alpha$. 13. $\mathrm{tg}\left(\frac{\alpha}{2} - 45^\circ\right)$. 14. $\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}$.

15. a) $\frac{\sin(45^\circ \pm \alpha)}{\cos 45^\circ \cdot \cos\alpha}$; b) $\frac{\sin(\alpha \pm 45^\circ)}{\sin 45^\circ \cdot \sin\alpha}$.

Указание. $1 = \operatorname{tg} 45^\circ = \operatorname{ctg} 45^\circ$.

16. $\frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\cos\alpha \cdot \sin\beta}$. 17. a) $2\sin\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)$; b) $2\sin\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$.

18. $2\sin\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sqrt{\operatorname{tg}\alpha}$.

19. a) $\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)$; b) $\cos(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)$.

20. a) $\sqrt{8}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{\alpha}{2}-45^\circ\right)$; b) $\sqrt{8}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\left(\frac{\alpha}{2}-45^\circ\right)$.

21. $-4\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\alpha$. 22. a) $\frac{\sqrt{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}$; b) $\frac{\sqrt{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}$.

23. a) $\frac{\sqrt{8}\cdot\sin(45^\circ+\alpha)}{\cos\alpha}\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}$; b) $\frac{\sqrt{8}\cdot\sin(45^\circ-\alpha)}{\cos\alpha}\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}$.

24. a) $\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}$; b) $\frac{\sin(\alpha-45^\circ)}{\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}$.

25. a) $4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}$; b) $4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}$.

Указание. Выражаем $\sin(\alpha+\beta)$ через функции угла $\frac{\alpha+\beta}{2}$.

26. $4\cos\alpha\cdot\sin\frac{3\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$.

39. Сначала исключаем (в левой части) угол γ, полученное выражение преобразуем и снова вводим γ. **40.** Приём тот же, что и в задаче 39.

41. В равенстве $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = -\operatorname{tg}\gamma$ раскрываем скобки и освобождаемся от знаменателя.

42. Применяя тот же приём, что и в задаче 39, сначала заменим левую часть равенства так: $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta} - \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$; затем после некоторых преобразований получим выражение: $\frac{\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot(\sin\alpha\cdot\sin\beta - \cos\alpha\cdot\cos\beta)+1}{\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin(\alpha+\beta)}$ и т. д.

43. В равенстве $\operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right) = 1 : \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$ раскрываем скобки и освобождаемся от знаменателей. **44.** Приём тот же, что и в задаче 43.

45. В равенстве $\operatorname{ctg}(\alpha+\beta) = -\operatorname{ctg}\gamma$ раскрываем скобки и освобождаемся от знаменателя.

46. Приём тот же, что и в задаче 39. Сначала получим $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2(\alpha+\beta)$, затем раскрываем скобки и заменяем $\sin^2\alpha$ и $\sin^2\beta$ через $1-\cos^2\alpha$ и $1-\cos^2\beta$ и т. д.

47. Приём такой же, как и в предыдущей задаче. Сначала получим $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2(\alpha+\beta)$, затем раскрываем скобки и заменяем $\sin^2\alpha$ и $\sin^2\beta$ через $1-\cos^2\alpha$ и $1-\cos^2\beta$ и т. д.

48. Приём такой же, как и в задаче 39. Сначала получим

$2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) - 2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)$ и т. д.

49. Приём такой же, как и в предыдущей задаче.

50. $4\sin\left(15^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(15^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$. 51. $4\sin\left(\frac{\alpha}{2}+30^\circ\right)\cdot\sin\left(\frac{\alpha}{2}-30^\circ\right)$.

52. $4\cos\left(30^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\sin\left(30^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$.

53. a) $4\cos\left(22^\circ30'+\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(22^\circ30'-\frac{\alpha}{2}\right)$;

b) $\sqrt{8}\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{2}+22^\circ30'\right)\cdot\sin\left(\frac{\alpha}{2}-22^\circ30'\right)$.

54. $3-4\sin^2\alpha=4(\sin^2 60^\circ-\sin^2\alpha)=4\sin(60^\circ+\alpha)\cdot\sin(60^\circ-\alpha)$.

55. $4\sin(\alpha+30^\circ)\cdot\sin(\alpha-30^\circ)$. 56. $\frac{4\sin(30^\circ+\alpha)\cdot\sin(30^\circ-\alpha)}{\cos^2\alpha}$.

57. $\frac{4\sin(\alpha+30^\circ)\cdot\sin(\alpha-30^\circ)}{\sin^2\alpha}$.

58. $4\cos\alpha\cdot\cos\left(30^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(30^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$.

59. a) $4\sin 2\alpha\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{2}+30^\circ\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{2}-30^\circ\right)$;

b) $4\cos 2\alpha\cdot\sin\left(30^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\sin\left(30^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$.

60. 1) $\left|\frac{a}{\cos\varphi}\right|$ при $\varphi=\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}$; 2) $p\cdot\cos^2\frac{\varphi}{2}=\sqrt{q}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}$ при $\sin\varphi=\frac{2\sqrt{q}}{p}$.

61. Вынося a за скобки и полагая $\frac{b}{a}=\cos\varphi$, получим:

1) $\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}$; 2) $2\sqrt{a}\cdot\sin\left(45^\circ+\frac{\varphi}{2}\right)$; 3) $2\operatorname{cosec}\varphi$.

62. $x=\sqrt{(a+b)^2-2ab(1+\cos\gamma)}=(a+b)\cos\varphi$, причём $\sin\varphi=\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}$.

63. $x=90^\circ\cdot n$. 64. $x=36^\circ+72^\circ\cdot n$; $60^\circ+120^\circ\cdot n$.

65. $x=\pi\cdot n$; $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\cdot n$. 66. $x=120^\circ\cdot n$.

67. $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$; $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}\cdot n$.

68. $\sqrt{2}\cdot\sin(x+45^\circ)=1$; $x=360^\circ\cdot n$; $90^\circ+360^\circ\cdot n$.

Указание. Данное уравнение решить возведением обеих частей его в квадрат, после чего отбросить посторонние корни.

69. $x=-\frac{\pi}{4}\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$. 70. $x=9^\circ+180^\circ\cdot n$; $81^\circ+180^\circ\cdot n$.

71. $x=33^\circ45'+90^\circ\cdot n$.

72. $x=7^\circ30'+90^\circ\cdot n$; $37^\circ30'+90^\circ\cdot n$ или $x=\frac{\pi}{4}n+(-1)^n\cdot\frac{\pi}{24}$.

73. $x=22^\circ30'+90^\circ\cdot n$. 74. $x=45^\circ+90^\circ\cdot n$; $\pm60^\circ+360^\circ\cdot n$.

75. $x=\frac{\pi}{2}\cdot n$; $\pm\frac{\pi}{3}\pm\frac{2\pi n}{3}$.

§ 12.

1. a) $\overline{1},5663$; b) $\overline{1},9525$; c) 1,5580; d) $\overline{1},8655$; e) $\overline{1},9023$; f) $\overline{2},3844$.
2. a) $\overline{1},9278$; b) $\overline{1},8047$; c) $\overline{1},8503$; d) $\overline{1},6602$; e) 1,9340; f) $\overline{3},8378$.
3. a) $\overline{1},7199$; b) $\overline{1},4608$; c) 0,4561; d) $\overline{1},3909$; e) $\overline{2},1814$; f) $\overline{1},8396$.

4. a) $\overline{1},2054$; b) 0,4285; c) $\overline{1},3511$; d) $\overline{1},9999$; e) $\overline{2},5447$; f) 2,3415.
5. a) 14°33′; b) 46°54′; c) 28°13′; d) 59°14′; e) 48°; f) 25′16″.
6. a) 43°22′; b) 85°7′; c) 27°3′; d) 45°1′; e) 50°1′; f) 89°20′40″.
7. c) 16°7′; d) 50°3′; e) 45°1′; f) 7′43″.
8. c) 22°55′; d) 71°41′40″; e) 45°56′; f) 89°25′37″.
9. a) 0,342; b) 0,6743; c) 3,895; d) 229,14; e) 1,305; f) 1,251.
10. a) —0,7661; b) 0,9397; c) —2,773; d) —0,181; e) —5,76; f) 1,564.
11. a) 34°51′; b) 67°5′; c) 75°58′; d) 5°43′; e) 48°11′; f) 22°10′; g) 9°51′; h) 20°19′.
12. 27°2′; 152°58′. **13.** 223°; 317°. **14.** 40°21′; 319°39′. **15.** 124°40′; 235°20′.
16. 26°30′; 206°30′. **17.** 111°58′; 291°58′. **18.** 11°19′; 191°19′.
19. 126°10′; 306°10′. **20.** 86°11′; 273°49′. **21.** 113°35′; 246°25′.
22. 5°44′; 174°16′. **23.** 231°3′; 308°57′. **24.** 74°25′. **25.** 35°38′. **26.** 56°1′.
27. —23°15′. **28.** 164°17′. **29.** —15°25′. **30.** 28°21′.
31. —54°7′. **32.** 103,6. **33.** —0,48. **34.** 0,00109. **35.** 4,887.
36. 0,2307. **37.** 342,6. **38.** —1,208. **39.** 0,617. **40.** 32,41. **41.** 0,009326

	a	*b*	*c*	*A*	*B*	*S*
42.	8,49	3,916	9,35	65°14′	24°46′	16,63
43.	250	575	627	23°30′	66°30′	71900
44.	0,7323	0,317	0,7979	66°36′	23°24′	0,116
45.	2,794	2,341	3,644	50°2′	39°58′	3,270
46.	6,37	79,45	79,7	4°35′	85°25′	253
47.	18,003	16,79	24,61	47°	43°	251,2
48.	0,1259	0,1738	0,2146	35°55′	54°5′	0,01094
49.	0,6162	0,2954	0,6832	64°23′	25°37′	0,0910
50.	16	63	65	14°15′	75°45′	504
51.	112	15	113	82°22′20″	7°37′40″	840
52.	528	455	697	49°15′	40°45′	120120
53.	1361	823	1710,2	61°15′	28°45′	555050
54.	261	380	461	34°29′	55°31′	49590
55.	156	133	205	49°33′	40°27′	10374
56.	0,09783	0,1003	0,1401	44°17′	45°43′	0,00490
57.	12,06	6,919	13,9	60°9′	29°51′	41,73

58. $B=46°48′$; $b=633{,}8$; $S=232{,}100$. **59.** $A=23°30′$; $b=1150$; $S=143{,}800$.
60. $B=60°30′$; $a=15{,}53$; $S=105$. **61.** $A=64°39′$; $a=6{,}398$; $S=15{,}95$.
62. $A=37°12′$; $B=105°36′$; $S=36{,}93$. **63.** $A=57°19′$; $B=65°22′$; $a=856{,}7$; $S=333\,720$.
64. $B=48°40′$; $b=22{,}95$; $a=26{,}64$; $S=266{,}4$. **65.** $A=24°36′$; $B=130°48′$; $a=71{,}88$.
66. $A=53°3′$; $a=9{,}68$; $b=11{,}64$. **67.** $B=34°28′$; $a=15{,}68$; $b=9{,}29$; $S=69{,}58$.

68. $A = 73°24'$; $B = 33°12'$; $a = 30{,}20$; $b = 17{,}27$. 69. $B_1 = 34°51'$; $B_2 = 145°9'$; $A_1 = 72°34'30''$; $A_2 = 17°25'30''$; $b_1 = 8{,}39$; $b_2 = 26{,}72$.

Указание. Угол B треугольника мы находим по его синусу. Этот угол может быть как острым, так и тупым. Пояснить двойственность решения также геометрически.

§ 13.

	a	b	c	A	B	C	S
1.	(370)	541	421	43°1'	(86°3')	(50°56')	77 710
2.	(450)	85	445	(87°55')	(10°53')	(81°12')	18 900
3.	(951)	1196	353	39°36'	(126°43')	(13°41')	134 550
4.	(97,52)	83,01	35,99	(102°48')	(56°6')	(21°6')	1457
5.	3,682	(13,02)	10,15	(11°48')	(133°42')	34°30'	13,57
6.	13,30	5,334	(15,94)	(51°38')	(18°19')	110°3'	33,30
7.	(510)	(317)	531,9	68°22'	35°19'	(76°19')	78 560
8.	(225)	(800)	634,1	12°15'	131°1'	(36°44')	53 830
9.	(2,29)	1,179	(1,69)	104°33'	(29°52')	45°35'	0,964
10.	62,17	(28)	(42)	(124°)	21°56'	34°4'	487,5
11.	(30,99)	74,6	(69,01)	24°32'	(87°48')	67°40'	1 069
12.	43,92	(40,33)	(32,11)	73°40'	(61°46')	44°34'	621,4
13.	(87)	(65)	76	(75°45')	46°24'	57°51'	2394
14.	(34)	(93)	65 115,3	(14°15')	137°41' 42°19'	28°4' 123°26'	744 1320
15.	(24)	(83)	—	(26°45')	—	—	—
16.	55,42 615,7	(360)	(309)	3°44' 133°48'	155°2' 24°58'	21°14'	3613 40 150
17.	(13,9)	7,102	(8,43)	(126°43')	24°11'	29°6'	24
18.	(0,437)	(1,299)	1,745	3°42'	(11°3')	165°15'	0,07226
19.	(13,81)	20,72 6,004	(8,14)	25°19' 154°41'	140°5' 10°43'	(14°36')	36,27 10,45
20.	240,8	(263)	(215)	59°29'	(70°15')	50°16'	24 350
21.	(19,06)	(28,19)	36,31 11,88	(31°17')	50°10' 129°50'	98°33' 18°53'	265,8 86,95
22.	(457,1)	(169,9)	433,8	90°	(21°49')	68°11'	36 850
23.	(2579)	2572	(10)	(130°22')	(49°28')	0°10'	9800
24.	(19)	(34)	(49)	16°26'	30°24'	133°10'	235,6
25.	(89)	(321)	(395)	7°58'	29°58'	142°4'	8783
26.	(44)	(483)	(485)	5°12'	84°48'	90°	10 626
27.	(0,099)	(0,101)	(0,158)	37°22'	38°16'	104°22'	0,004844
28.	(172,5)	(1135)	(1205)	7°42'	62°12'	100°	91 770
29.	(421,6)	(409,8)	(335,9)	68°4'	64°24'	47°32'	63 800
30.	(1,235)	(2,346)	(3,456)	10°52'	20°58'	148°10'	0,7639

31. $C=18°27'$; $a=2R\sin A=14{,}55$; $b=2R\sin B=11{,}82$; $c=$ $=2R\sin C=5{,}012$; $S=2R^2\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C=27{,}27$.

32. $C=119°32'$; $a=\sqrt{\dfrac{2S\cdot\sin A}{\sin B\cdot\sin C}}=20{,}3$; $b=55{,}9$; $c=66{,}16$.

33. $A=59°42'$; $a=\dfrac{h_a\cdot\sin A}{\sin B\cdot\sin C}=57{,}25$; $b=\dfrac{h_a}{\sin C}=60{,}01$; $c=\dfrac{h_a}{\sin B}=$ $=5{,}933$; $S=\dfrac{h_a^2}{2}\,\dfrac{\sin A}{\sin B\cdot\sin C}=153{,}7$.

34. $A=77°4'$; $a=\dfrac{l_a\sin A}{\sin B\cdot\sin C}\cdot\cos\dfrac{B-C}{2}=6{,}610$; $b=\dfrac{l_a}{\sin C}\cos\dfrac{B-C}{2}=$ $=6{,}708$; $c=\dfrac{l_a}{\sin B}\cos\dfrac{B-C}{2}=0{,}5223$; $S=\dfrac{l_a^2}{2}\cdot\dfrac{\sin A}{\sin B\cdot\sin C}\cos^2\dfrac{B-C}{2}=$ $=1{,}708$.

35. $a=\dfrac{m}{2}\cdot\sin A\cdot\sec\dfrac{C}{2}\cdot\sec\dfrac{A-B}{2}$; $b=\dfrac{m}{2}\cdot\sin B\cdot\sec\dfrac{C}{2}\cdot\sec\dfrac{A-B}{2}$; $c=m\cdot\sin\dfrac{C}{2}\cdot\sec\dfrac{A-B}{2}$; $S=\dfrac{m^2}{4}\cdot\sin A\cdot\sin B\cdot\operatorname{tg}\dfrac{C}{2}\cdot\sec^2\dfrac{A-B}{2}$; $C=$ $=69°20'$; $a=290$; $b=199$; $c=288{,}1$; $S=27\,020$.
Указание. Имеем $m=2R(\sin A+\sin B)=\ldots$, откуда определяем $2R$, а затем с помощью $2R$ составляем выражения для сторон.

36. $C=54°$; $a=\dfrac{n}{2}\cdot\sin A\cdot\operatorname{cosec}\dfrac{A-B}{2}\cdot\operatorname{cosec}\dfrac{C}{2}=34{,}07$; $b=\dfrac{n}{2}\cdot\sin B\cdot\operatorname{cosec}\dfrac{A-B}{2}\cdot\operatorname{cosec}\dfrac{C}{2}=11{,}07$; $c=n\cdot\cos\dfrac{C}{2}\cdot\operatorname{cosec}\dfrac{A-B}{2}=$ $=28{,}98$; $S=\dfrac{n^2}{2}\cdot\sin A\cdot\sin B\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{C}{2}\cdot\operatorname{cosec}^2\dfrac{A-B}{2}=152{,}5$.

37. $C=19°11'$; $c=\dfrac{m}{2}\sec\dfrac{C}{2}\sec\dfrac{A-B}{2}=0{,}7558$; $b=1{,}958$; $a=2{,}247$; $S=0{,}722$. *Указание.* $m=c(\sin A+\sin B)$.

38. $A=53°8'$; $a=n:2\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{C-B}{2}=232$; $b=210$; $c=286$; $S=24\,020$.

39. $C=102°52'$; $a=p\cdot\sin\dfrac{A}{2}\sec\dfrac{B}{2}\sec\dfrac{C}{2}=80{,}22$;

$b=p\cdot\sin\dfrac{B}{2}\sec\dfrac{A}{2}\sec\dfrac{C}{2}=152{,}7$; $c=p\cdot\sin\dfrac{C}{2}\sec\dfrac{A}{2}\sec\dfrac{B}{2}=187{,}6$;

$S=p^2\cdot\operatorname{tg}\dfrac{A}{2}\operatorname{tg}\dfrac{B}{2}\operatorname{tg}\dfrac{C}{2}=5974$.

Указание. 1-й способ. Имеем $2p=2R(\sin A+\sin B+\sin C)=$ $=8R\cdot\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$; отсюда $2R=\dfrac{\dfrac{p}{2}}{\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}}$, чем и пользуемся при вычислении с помощью чего составляем выражения для сторон, а затем для площади.

2-й способ. На продолжениях стороны AC отложим $CE=CB$ и $AD=$ $=AB$ и соединим точки D и E с B; в треугольнике DBE сторона $DE=2p$

угол $D=\frac{A}{2}$, угол $E=\frac{C}{2}$. Из равнобедренного треугольника BCE найдём $a=\frac{BE}{2}:\cos\frac{C}{2}$; для определения BE имеем из треугольника DBE:

$$BE:2p=\sin\frac{A}{2}:\sin\left(\frac{A}{2}+\frac{C}{2}\right)=\sin\frac{A}{2}:\cos\frac{B}{2}.$$

Таким путём определится a; выражения для b и c составим по аналогии.

40. $C=118°5'$; $c=r\cdot\cos\frac{C}{2}\cdot\operatorname{cosec}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{cosec}\frac{B}{2}$;

$b=r\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\operatorname{cosec}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{cosec}\frac{C}{2}$; $a=r\cdot\cos\frac{A}{2}\cdot\operatorname{cosec}\frac{B}{2}\cdot\operatorname{cosec}\frac{C}{2}$;

$S=r^2\cdot\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$.

Для вычисления удобнее воспользоваться отрезками (x, y, z) сторон от вершин (A, B, C) до точек касания; тогда получим: $x=25$, $y=14$ и $z=3$, после чего найдем: $a=z+y=17$, $b=z+x=28$, $c=x+y=30$ и $S=(x+y+z)r=42\cdot5=210$.

41.	$A=33°53'$;	$C=98°7'$;	$a=0{,}6927$;	$b=0{,}9236$;	$S=0{,}3167$.
42.	$C=47°26'$;	$B=37°4'$;	$b=38°47$;	$c=47$;	$S=897$.
43.	$A_1=75°44'$;	$C_1=87°12'$;	$a_1=220{,}2$	$b_1=66{,}66$;	$S_1=7330$.
	$A_2=104°15'$;	$C_2=58°41'$;	$b_2=257$;	$b_2=77{,}94$;	$S_2=8569$.
44.	$B=35°53'$;	$C=97°47'$;	$b=12{,}95$;	$c=21{,}905$;	$S=102{,}6$.
45.	$B=10°2'$;	$C=101°15'$;	$a=155{,}2$;	$c=163{,}4$;	$S=2207$.
46.	$A=12°8'$;	$C=43°14'$;	$b=166{,}5$;	$c=138{,}6$;	$=$
47.	$A=100°25'$;	$B=50°12'$;	$C=29°23'$;	$c=15{,}96$;	$S=196{,}2$.
48.	$A=38°49'$;	$B=19°18'$;	$C=121°53'$;	$a=23{,}84$;	$b=12{,}66$.
	$c=32{,}32$;	$S=127{,}5$;			
49.	$A=126°43'$;	$B=39°36'$;	$a=1196$;	$b=951$;	$S=134550$

Указание. $\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}C}$; отсюда $\cos\frac{A-B}{2}=\frac{m}{c}\cdot\sin\frac{C}{2}$, с помощью чего определим $\frac{A-B}{2}$; зная же $\frac{A+B}{2}$ и $\frac{A-B}{2}$; найдём A и B

50.	$A=81°28'$;	$B=44°52'$;	$a=22{,}47$;	$b=16{,}03$;	$S=145$.
51.	$B=41°5'$;	$C=36°17'$;	$a=8{,}556$;	$b=5{,}762$;	$S=14{,}58$

Указание. 1-й способ. По первой формуле Мольвейде имеем:

$$\frac{m}{c}=\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)};\ \text{отсюда}\ \frac{m+c}{m-c}=\frac{2\cos\frac{1}{2}A\cdot\cos\frac{1}{2}B}{2\sin\frac{1}{2}A\cdot\sin\frac{1}{2}B}=\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{B}{2},$$

что даёт возможность определить угол B.

2-й способ. Перемножая формулы.

$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$ и $\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$; получим:
$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{p-c}{p}$, но $\frac{p-c}{p}=\frac{2(p-c)}{2p}=\frac{a+b-c}{a+b+c}=\frac{m-c}{m+c}$.

52. $B=37^\circ44'$; $C=63^\circ36'$; $a=16{,}58$; $b=10{,}34$; $S=76{,}76$.
Указание. 1-й способ. По второй формуле Мольвейде имеем:

$$\frac{n}{c}=\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)};\ \text{отсюда}\ \frac{c+n}{c-n}=\frac{2\sin\frac{1}{2}A\cdot\cos\frac{1}{2}B}{2\cos\frac{1}{2}A\cdot\sin\frac{1}{2}B}=\operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{B}{2},$$

что даёт возможность определить угол B.

2-й способ. Разделив $\operatorname{tg}\frac{A}{2}$ на $\operatorname{tg}\frac{B}{2}$, получим $\operatorname{tg}\frac{A}{2}:\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{p-b}{p-a}$;
но $\frac{p-b}{p-a}=\frac{2(p-b)}{2(p-a)}=\frac{c+a-b}{c+b-a}=\frac{c+n}{c-n}$.

53. $A=115^\circ39'$; $B=25^\circ40'$; $C=38^\circ41'$; $a=9{,}997$; $b=4{,}801$; $c=6{,}931$.
54. $A=26^\circ34'$; $B=30^\circ4'$; $C=123^\circ22'$; $a=h_c:\sin B=71{,}81$;
$c=h_b:\sin A=134{,}16$; b $c\cdot 0{,}6=80{,}49$; $S=0{,}5\cdot c\cdot h_c=2415$.
Указание. $\operatorname{tg} A=0{,}5$; $b:c=h_c:h_b=3:5$.
55. $A=27^\circ16'$; $B_1=63^\circ42'$; $C_1=89^\circ2'$; $c_1=50^\circ19'$; $S_1=517{,}4$;
$B_2=116^\circ18'$; $C_2=36^\circ26'$; $c_2=29{,}81$; $S_2=307$.
56. $B=11^\circ25'$; $A_1=55^\circ2'$; $C_1=113^\circ33'$; $c_1=134{,}2$; $S_1=0{,}5\cdot c_1\cdot h_c=1595$
$A_2=124^\circ59'$; $C_2=43^\circ36'$; $c_2=101$; $S_2=1200$.
57. $C_1=30^\circ$; $B_1=103^\circ4'$; $A_1=46^\circ56'$; $c_1=4{,}106$; $C_2=150^\circ$; $B_2=17^\circ12'$;
$A_2=12^\circ48'$; $c_2=13{,}53$. (Двойственность решения пояснить чертежом.)
58. $A=30^\circ24'$; $B=99^\circ45'$; $C=49^\circ51'$; $a=50{,}32$; $S=1884$.
59. $A=83^\circ25'$; $B=36^\circ35'$; $C=60^\circ$; $c=17{,}434$; $S=103{,}9$.
Указание. Сначала продолжаем медиану CD на расстояние $DE=CD$ и, соединив точки B и E, определяем из треугольника CBE угол CBE.
60. $A=127^\circ10'$; $B=32^\circ5'$; $C=20^\circ45'$; $a=h_b:\sin C=33{,}88$;
$b=h_a:\sin C=22{,}59$; $c=h_a:\sin B=15{,}06$; $S=135{,}5$.

Указание. Имеем $a:b:c=\frac{2S}{8}:\frac{2S}{12}:\frac{2S}{18}=9:6:4$, что даёт возможность определить углы.

61. $A=135^\circ11'$; $B=27^\circ7'$; $C=17^\circ42'$; $a=64{,}93$; $S=414{,}5$.
Указание. Имеем (сравнивая площади треугольников):
$\frac{bc}{2}\cdot\sin A=\frac{bl_a}{2}\cdot\sin\frac{A}{2}+\frac{cl_a}{2}\cdot\sin\frac{A}{2}$; отсюда найдём $\cos\frac{A}{2}=\frac{(b+c)\,l_a}{2bc}$.

§ 14.

1. a) $x=(-1)^n\cdot 30^\circ+180^\circ\cdot n$, или $x=\pi n+(-1)^n\frac{\pi}{6}$;

b) $x=30^\circ$; 150°, или $x=\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$.

2. a) $x=\pm 51^\circ50'+360^\circ\cdot n$; b) $x=51^\circ50'$; $308^\circ10'$.

3. a) $x=\pm 72^\circ+360^\circ\cdot n$; $\pm 144^\circ+360^\circ\cdot n$, или $x=\pm\frac{2\pi}{5}+2\pi n$; $\pm\frac{4\pi}{5}+2\pi n$;

b) $x=72°, 144°, 216°$ $288°$, или $x=\frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}, \frac{6\pi}{5}, \frac{8\pi}{5}$.

4. a) $x=-45°+180°\cdot n$, или $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$, b) $x=135°, 315°$, или $x=\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$.

5. a) $x=\pm 60°+180°\cdot n$, или $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$; b) $x=60°, 120°, 240°, 300°$,

или $x=\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$.

6. a) $x=180°\cdot n$; $\pm 60°+360°\cdot n$, или $x=360° n$; $x=60°+120° n$;

b) $x=0°, 60°, 180°, 300°, 360°$, или $x=0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}, 2\pi$.

7. a) $x=90°+180°\cdot n$; $(-1)^n\cdot 19°28'+180°\cdot n$;
b) $x=19°28', 90°, 160°32', 270°$.

8. a) $x=45°+90°\cdot n$, или $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\cdot n$;

b) $x=45°, 135°, 225°, 315°$, или $x=\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$.

9. a) $x=(-1)^n\cdot 10°+16°\cdot n$, или $x=(-1)^n\cdot\frac{\pi}{18}+\frac{\pi}{3}\cdot n$;

b) $x=10°, 50°, 130°, 170°, 250°, 290°$, или $x=\frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{18}, \frac{13\pi}{18}, \frac{17\pi}{18}, \frac{25\pi}{18}, \frac{29\pi}{18}$.

10. a) $x=112°30'+450°\cdot n$, или $x=\frac{5\pi}{8}+\frac{5\pi}{2}\cdot n$; b) $x=112°30'$, или $x=\frac{5\pi}{8}$.

11. a) $x=90°(6n\pm 1)$, или $x=\frac{\pi}{2}(6n\pm 1)$; b) $90°$; или $\frac{\pi}{2}$.

12. a) $x=4\pi(3n\pm 1)$; b) нет.

13. 1) $\alpha-\beta=180°\cdot 2n$, или $\alpha+\beta=180°\cdot(2n+1)$; 2) $\alpha\pm\beta=310°\cdot n$ 3) $\alpha-\beta=180°\cdot n$; 4) $\alpha-\beta=180°\cdot n$; 5) $\alpha+\beta=180°\cdot 2n$, или $\alpha-\beta=180°\cdot(2n+1)$. 6) $\alpha\pm\beta=180°\cdot(2n+1)$; 7) $\alpha+\beta=180°\cdot n$; 8) $\alpha+\beta=180°\cdot n$; 9) $\alpha\pm\beta=90°+360°\cdot n$; 10) $\alpha\pm\beta=270°+360°\cdot n$; 11) $\alpha+\beta=90°+180°\cdot n$; 12) $\alpha-\beta=90°+180°\cdot n$.

14. $9°\cdot(2k+1)$. 15. $180° k$. 16. $60°(2k+1)$.

17. $\sin 2x=\frac{a}{b-a}$. Уравнение имеет корни, если $|a|\leqslant|b-a|$.

18. $\frac{k}{p+q}\cdot 180°$. 19. $45°(4k-1)$ и $22°30'(4k+3)$.

20. $36°\cdot n$; $45°\cdot n$. 21. $x=\operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{b}{a}\right)+180°\cdot n$.

22. $(2k+1)\cdot 90°$ и $180° k+45°$. 23. $(-1)^n\arcsin\frac{-2\pm\sqrt{54}}{10}+180°\cdot n$.

24. $\pm 2 \arccos \frac{\sqrt{17}-1}{4} + 720^\circ n$. 25. $180^\circ k + (-1)^k 30^\circ - \frac{m}{2}$.

26. $90^\circ k$ и $\pm 120^\circ + 360^\circ k$. 27. $180^\circ k$. 28. $\operatorname{tg} x = \frac{a}{b}$.

29. $x = \operatorname{arc\,tg} \frac{a}{b} \pm \arccos \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} + 2n\pi$, причём $c^2 \leqq a^2 + b^2$.

30. $x_1 = 126^\circ 52' + 360^\circ \cdot n$; $x_2 = -151^\circ 12' + 360^\circ \cdot n$.

31. $x = 360^\circ \cdot n$; $-126^\circ 52' + 360^\circ \cdot n$. 32. $x = 31^\circ 59' \pm 16^\circ 20' + 360^\circ \cdot n$.

33. $x = 15^\circ + 360^\circ \cdot n$; $105^\circ + 360^\circ \cdot n$. *Указание*. Разделив обе части данного уравнения на 2, получим: $\cos(x - 60^\circ) = \cos 45^\circ$.

34. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \cdot n$. 35. $x = 180^\circ \cdot n$; $45^\circ + 180^\circ \cdot n$.

36. $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$.

37. $x = \pm 60^\circ + 360^\circ \cdot n$.

38. $x = 10^\circ 10' + 180^\circ \cdot n$; $79^\circ 50' + 180^\circ \cdot n$.

39. $x = \pm \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + \pi n$. 40. $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$; $\frac{\pi}{6} + \pi n$; $\frac{\pi}{3} + \pi n$.

41. $x = \pm 60^\circ + 180^\circ \cdot n$.

42. $x = 75^\circ + 180^\circ \cdot n$; $15^\circ + 180^\circ \cdot n$. 43. $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b \cdot \operatorname{tg} c$.

44. $x = 60^\circ \cdot n$.

45. $x = (-1)^n \cdot 75^\circ + 180^\circ \cdot n$.

46. $x = 60^\circ \cdot n$; $15^\circ + 30^\circ \cdot n$.

47. $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$; $\pm \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} + 2\pi n$. 48. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \cdot n$.

49. $x = 90^\circ + 180^\circ \cdot n$; $x = 45^\circ + 90^\circ \cdot n$.

50. $x = 180^\circ \cdot n \pm 18^\circ$; $180^\circ \cdot n \pm 54^\circ$.

51. $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$; $\pm \frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi}{3} \cdot n$. *Указание*. $\cos 4x + \cos 2x$ заменить произведением.

52. $x = 120^\circ \cdot n$; $-90^\circ + 360^\circ \cdot n$; $45^\circ + 180^\circ \cdot n$. *Указание*. $\cos x - \cos 2x$ заменить произведением, а $\sin 3x$ разложить как $\sin 2\left(\frac{3x}{2}\right)$.

53. $x = 60^\circ + 120^\circ \cdot n$; $\operatorname{arc\,tg} \frac{b}{a} + \pi n$.

54. $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$; $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$; $\pi n + (-1)^n \frac{\pi}{6}$. *Указание*. Заменив $\sin x + \sin 3x$ и $1 + \cos 2x$ произведениями и сделав ещё некоторые преобразования, придём к такому уравнению: $\cos x (1 + 2\cos x)(1 - 2\sin x) = 0$.

55. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \cdot n$.

56. $\cos \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{17}-1}{4}$; $x = \pm 77^\circ 20' + 720^\circ \cdot n$. 57. $x = \pm \frac{2\pi}{3} = 4\pi n$.

58. $x = \frac{\pi}{2} \cdot n + (-1)^n \cdot \frac{\pi}{12}$. *Указание*. Левую часть заменим одной дробью $\left(\frac{4}{\sin^2 x}\right)$.

59. $\cos x = \frac{1}{3}$; $x = \pm 70°32' + 360° \cdot n$.

60. $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $x = \pi n$.

61. $x = 180° \cdot n$; $30° + 60° \cdot n$.

Указание. $\sin^2 3x - \sin^2 x$ заменяем произведением.

62. $x = 60° \cdot n$; $\pm 35°16' + 180° \cdot n$.

Указание. Представив данное уравнение в виде $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x = -\operatorname{tg} 3x$, разлагаем $\operatorname{tg} 3x$ как $\operatorname{tg}(x+2x)$, тогда новое уравнение распадается на следующие два: 1) $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x = 0$ и 2) $1 = -1 : (1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} 2x)$. Из уравнения (1) получим $\sin 3x = 0$, а из уравнения (2): $\operatorname{tg} x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$.

63. $x = \frac{\pi}{2} \cdot n$. *Указание.* Умножив обе части на 2, применяем равенство $2 \cos \alpha \cdot \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$.

64. $x = 45° + 180° \cdot n$. 65. $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$. 66. $x = \pm \frac{\pi}{4} + \pi n$.

67. $x = \pm 60° + 180° \cdot n$; $90° + 180° \cdot n$. 68. $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$; $x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n$.

69. Нет решений. 70. $x = \frac{\pi n}{2}$.

71. $\operatorname{tg} x = \pm(\sqrt{2} + 1)$; $\pm(\sqrt{2} - 1)$; $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4} n$.

72. $x = 60° \cdot n$.

73. $x = \pi n$. 74. 1) $\sin x = 0{,}8$; $\sin y = -0{,}6$; 2) $\sin x = -0{,}6$; $\sin y = 0{,}8$.

Указание. Уравнения $\sin y = 0{,}2 - \sin x$ и $\cos y = -0{,}2 \cos x$ возвышаем в квадрат и складываем.

75. 1) $\cos x = \frac{1}{2}$; $\cos y = \frac{1}{3}$; 2) $\cos x = -\frac{1}{2}$; $\cos y = -\frac{1}{3}$;

3) $\cos x = \frac{1}{3}$; $\cos y = \frac{1}{2}$; 4) $\cos x = -\frac{1}{3}$; $\cos y = -\frac{1}{2}$.

Указание. Взяв сумму и разность данных уравнений, выражаем из новых уравнений $\cos y$ и $\sin y$ и квадраты их складываем.

76. 1) $\operatorname{tg} x = 5 + \sqrt{34}$, $\operatorname{tg} y = 5 - \sqrt{34}$; 2) $\operatorname{tg} x = 5 - \sqrt{34}$, $\operatorname{tg} y = 5 + \sqrt{34}$.

77. $x^2 = \frac{a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos \varphi}{\sin^2 \varphi}$. *Указание.* Взяв $\cos(\alpha + \beta) = \cos \varphi$, раскрываем скобки, выражаем затем $\cos \alpha$ и $\cos \beta$ соответственно через $\sin \alpha$ и $\sin \beta$ и заменяем $\sin \alpha$ и $\sin \beta$ через $\frac{a}{x}$ и $\frac{b}{x}$.

78. 1) $x = 45° + 180°(m+n)$, $y = 15° + 180°(m-n)$; 2) $x = 105° + 180°(m+n)$, $y = -45° + 180°(m-n)$; 3) $x = -15° + 180°(m+n)$ $y = -45° + 180°(m-n)$; 4) $x = 45° + 180°(m+n)$, $y = -105 + 180°(m-n)$.

79. 1) $x = 21°21'$, $y = 8°39'$; 2) $x = 81°21'$, $y = 68°39'$.

80. 1) $x = 81°21'$, $y = 21°21'$; 2) $x = 21°21'$, $y = 81°21'$.

81. x и y определяются по их полусумме и полуразности: 1) по первому уравнению имеем $\frac{x+y}{2}=\frac{a}{2}$; 2) с помощью второго уравнения, заменив его через $2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}=a$, можно определить $\frac{x-y}{2}$.

82. $x=15°20'$, $y=61°40'$. 83. x и y определяются по их сумме и разности: 1) $x+y$ дано; 2) $x-y$ найдём с помощью второго уравнения, если умножим обе части его на 2 и $2\sin x\cdot\sin y$ заменим через $\cos(x-y)-\cos(x+y)$.

84. $x=60°$, $y=11°40'$.

85. Из первого уравнения имеем $\frac{1}{2}(x+y)=\frac{1}{2}a$, а из второго уравнения находим: $\frac{\sin x+\sin y}{\sin x-\sin y}=\frac{m+n}{m-n}$, или $\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(x+y)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(x-y)}=\frac{m+n}{m-n}$, откуда определяем $\frac{1}{2}(x-y)$. 86. $x=35°46'$; $y=60°52'$.

87. Второе уравнение можно заменить таким: $\frac{\sin(x+y)}{\cos x\cdot\cos y}=a$, откуда $\cos x\cdot\cos y=\frac{1}{a}\cdot\sin(x+y)$, или $\cos x\cdot\cos y=\frac{1}{a}\cdot\sin a$. Умножим теперь обе части на 2 и заменим $2\cos x\cdot\cos y$ через $\cos(x+y)+\cos(x-y)$ тогда можно будет определить $x-y$.

88. $x=44°20'$, $y=13°20'$.

89. Заменив второе уравнение через $\frac{\sin x\cdot\sin y}{\cos x\cdot\cos y}=\frac{a}{1}$, находим отсюда $\frac{\cos x\cdot\cos y+\sin x\cdot\sin y}{\cos x\cdot\cos y-\sin x\cdot\sin y}=\frac{1+a}{1-a}$, или $\frac{\cos(x-y)}{\cos(x+y)}=\frac{1+a}{1-a}$, и с помощью этого уравнения определяем затем $x-y$. 90. $x=45°$ $y=40°$.

91. Из второго уравнения найдём: $\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}y}=\frac{m+n}{m-n}$, или $\frac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)}=\frac{m+n}{m-n}$, с помощью чего определим затем $x-y$.

92. 1) $x-22°25'$, $y=18°39'$; 2) $x=71°21'$; $y=67°35'$.

93. Не имеет решения.

94. $\operatorname{tg}x=1$; $\operatorname{tg}y=2$; $\operatorname{tg}z=3$; $x=45°$; $y=63°26'$; $z=71°34'$. *Указание.* $\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y+\operatorname{tg}z=\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y\cdot\operatorname{tg}z$.

95. $x=30°58'$; $y=78°41'$; $z=70°21'$. (См. задачу 94.)

§ 15.

1. 1) $-\frac{\pi}{6}$; 2) $\frac{\pi}{3}$; 3) $\frac{3}{4}\pi$.
2. 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) 0; 3) $\sqrt{3}$.
3. 1) -1; 2) 1; 3) 0.
4. 1) x; 2) $\frac{3}{5}$; 3) $-\frac{2}{\sqrt{5}}$.
5. 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\sqrt{3}$.
6. 1) $\frac{4\pi}{5}$; 2) $x+\pi n$; 3) $\frac{5\pi}{14}$.

7. 1) 0,6; 2) $\frac{15}{17}$; 3) $\frac{3}{4}$. 8. 1) 1; 2) $\frac{1}{2}$. 9. 1) не существует; 2) не существует.

10. $\sqrt{3}$. 11. $\frac{77}{85}$. 12. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 13. $\frac{41}{49}$. 14. $2m\sqrt{1-m^2}$.

15. $\frac{47}{52}$. 16. $\frac{2m}{1+m^2}$. 32. $\pm\sqrt{2}$. 33. 0; $\frac{1}{2}$. 34. $\pm\sqrt{3}$.

35. $\sqrt{2}$. 36. 0; $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$. 37. $\frac{\pi}{4}+\pi n$. 38. $\pm\frac{\pi}{6}$. 39. $\sqrt{\frac{2(5-2\sqrt{2})}{17}}$.

40. $\frac{1}{2}$. 41. 0; $\frac{1}{2}$. 42. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. 43. $\pm\sqrt{\frac{2}{a}}$. 44. $\pm\frac{1}{3}$.

§ 15а.

1. $a\sec\frac{180^\circ}{n}$. 2. 18,02 *см* и 22,47 *см*. 3. $2a\cos\frac{180^\circ}{n}$.

4. 1) $2R=a\operatorname{cosec}\frac{180^\circ}{n}$; 2) $\frac{a}{2}\operatorname{cosec}\frac{90^\circ}{n}$. 5. 26,97 *м* и 20,84 *м*.

6. $4r^2\operatorname{cosec}\alpha=167$. 7. $\sqrt{Q\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}}=24{,}66$. 8. $\beta=2\operatorname{arc\,tg}\frac{b^2}{4Q}=130^\circ47'$.

9. $\frac{1}{4}na^2\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}$; 1) 1453; 2) 4,829; 3) 1120. 10. $\frac{1}{2}nR^2\sin\frac{360^\circ}{n}$; 1) 147; 2) 116,5. 11. $nR^2\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}$. 12. 183,8. 13. $\approx 41a$. 14. $a^2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{a^2}{2}\sin 2\alpha$.

15. 71 *см*. 16. $S_9 : S_{10} = 10\operatorname{ctg}20^\circ : 9\operatorname{ctg}18^\circ = 0{,}992$. 17. 21,75 *см*

18. $\pi r^2\frac{\alpha}{360^\circ}-\frac{r^2}{2}\sin\alpha$; 1) 0,98; 2) 1,63. 19. $\frac{\pi R^2\alpha}{390}-\frac{R^2\sin\alpha}{2}$; $\alpha=2\arcsin\frac{a}{2R}$; 0,59 *см*².

20. $R^2\left[\frac{\pi(180^\circ-\alpha)}{180^\circ}+\sin\alpha\right]$. 21. 3,215 *см* и 7,785 *см*.

22. $S=\frac{4ab}{\sin\alpha}$; $d_1=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}\cdot\frac{2}{\sin\alpha}$; $d_2=\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}\cdot\frac{2}{\sin\alpha}$.

23. $6-\pi\frac{90^\circ+\alpha}{72^\circ}=0{,}4643$; α = дуга большого круга между точками касания.

24. 30°.

§ 16.

1. 3,299. 2. $\operatorname{arc\,tg}\frac{r}{p}=60^\circ26'$. 3. $\operatorname{arc\,tg}\frac{2d}{a}=53^\circ8'$.

4. 35°16′. 5. 5,2 *м*; 28°33′. 6. 51°3′.

7. 2,6 *м*; 67°23′. 8. 70°32′. 9. $\cos\alpha\cdot\cos\beta=\cos\varphi$; $\varphi=45^\circ$

10. $\cos\varphi=\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$; $\varphi=6^\circ15'$. 11. $x=y=z=\operatorname{arc\,tg}\frac{4hS}{abc}=75^\circ52'$.

12. $\frac{a\sin\beta\operatorname{tg}\varphi}{\sin(\gamma+\beta)}=322{,}5$ *м*. 13. $\frac{a^2}{\sqrt{3}}\sqrt{4+\operatorname{tg}^2\alpha}$.

14. $\arcsin \frac{n \mp m}{a}$; 13°21′ или 90°. 15. $\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$.

Указание. Точки пересечения параллельных наклонных и секущей с данной плоскостью лежат на одной прямой линии.

16. $\sqrt{a^2 \sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}$. 17. $\arcsin \frac{c\sin\alpha}{d}$; 45°.

18. 1) $\sqrt{b^2 - a^2} \cdot \frac{\sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin(\alpha - \beta)}$; точки пересечения перпендикуляров с плоскостью лежат по одну сторону от плоскости, проходящей через данный отрезок и перпендикулярной к данной плоскости.
2) $\sqrt{b^2 - a^2} \cdot \frac{\sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)}$; точки пересечения перпендикуляров с плоскостью лежат по разные стороны от плоскости, проходящей через данный отрезок и перпендикулярной к данной плоскости.

Указание. Отрезок a и восставленные к нему перпендикуляры проектируем на данную плоскость; затем составляем прямоугольный треугольник с гипотенузой b и с катетом, параллельным проекции a.
19. 41°25′ и 82°50′.

§ 17.

1. $a \operatorname{tg}\alpha = 5{,}441$. 2. 1) $\varphi = \arcsin \sqrt{\sin^2\alpha + \sin^2\beta}$; 2) $\varphi = 22°37'$.
3. $x = 18°4'$; $\sin x = \sin 20° \cos 25°$. 4. 22°. 5. $\sin\varphi = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$.
6. $\frac{180°}{n}$. 7. a) 26,7 *м*; 11,7 *м*; b) $\alpha = 18°33'$; $\beta = 46°31'$; c) 17°14′, 40°; d) 18°47′; 50°32′. 8. 39°48′; 9. $\frac{a}{2}\sin 2\alpha \cdot \sin\varphi$. 10. $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}\alpha$; $\operatorname{tg} y = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha$. 11. $x = \arcsin\left(\frac{\sin\varphi}{\sin\alpha}\right)$. 12. 73°24′. 13. 30°.

14. $\varphi = \arcsin 0{,}6 = 36°52'$. 15. 1) 70°32′; 2) 109°28′; 3) 138°12′. *Указание.* Задача сводится к определению угла между боковыми гранями в правильной 5-угольной пирамиде с равными рёбрами; 4) 116°34′. *Указание.* Задача сводится к определению угла между боковыми гранями в правильной треугольной пирамиде, в которой плоский угол при вершине равен 108°.

§ 18.

1. 43,3 *см*². 2. $Q\sqrt{2}$. 3. $\frac{a^2\sqrt{3}}{4\cos\alpha}$. 4. 42,2 *см*.
5. 1953 *см*. 6. 33,35 *м*². 7. 36°52′; 3 *м*.
8. Одинаково. 9. $Q\sin\alpha$; меньше; ярче. 10. 106,4 *м*².

§ 19.

1. 67°56′. 3. $\frac{7a^2}{8\cos\alpha}$. 4. 1) $\frac{3a}{4}\sqrt{a^2 + 2b^2}$; 2) $\operatorname{arc\,tg}\frac{b\sqrt{2}}{a}$.

5. Секущая плоскость параллельна большей диагонали основания и составляет с плоскостью основания угол φ, причём $\cos\varphi = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

6. $d^2\sqrt{2}\cdot\sin 2\beta\cdot\sin(45^\circ+\alpha)\approx 393{,}1$ $м^2$. 7. $d^2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4}\approx 1963$ $м^2$.

8. $5a^2\operatorname{ctg}36^\circ\cdot\cos^2 27^\circ\approx 3092$ $м^2$.

9. $4a^2\operatorname{cosec}\frac{\beta}{2}\cdot\cos^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{4}\right)\cdot\sqrt{\sin\frac{\alpha+\beta}{3}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}\approx 34\,700$ $см^2$.

10. $\frac{1}{3}a^2\sqrt{3}\sec\alpha\cdot(1+\sqrt{1+3\sin^2\alpha})$.

11. $x=\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi\right)=16^\circ6'$; $y=\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}\varphi\right)=26^\circ34'$.

12. $x=\arccos\left(\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)=54^\circ44'$. 13. $\frac{a\sin\alpha}{2\sin(\alpha+45^\circ)}$.

14. $\frac{1}{4}a^2\sec\alpha\cdot\sqrt{\sin(\alpha+30^\circ)\sin(\alpha-30^\circ)}$.

15. $x=\frac{1}{2}\arcsin\frac{p\sqrt{2}}{c^2}=29^\circ2'$; или $x=50^\circ58'$;

$y=2c\cos x=8{,}743$; или $y=48{,}58$.

16. $\operatorname{tg}\left(45^\circ-\frac{\varphi}{2}\right)=\frac{m\sqrt{2}}{n}$; $\varphi=90^\circ-2\operatorname{arc\,tg}\frac{m\sqrt{2}}{n}=30^\circ$.

17. $\frac{a^2}{9\sqrt{3}}\sqrt{4+\operatorname{tg}^2\alpha}=1{,}962$. 18. $a^2\frac{\sin^2\alpha\cdot\cos\beta}{\sin^2(\alpha+\beta)}$. 20. 48 $см^2$.

21. 1) $2a^2$; 2) $\frac{a^2}{2}$; $3a^2$. 22. 168 $см^2$. 23. 14,61 $см^2$. 24. $32^\circ51'$

25. $a^2\sec\alpha$. 26. $4h^2\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. 27. $2a^2\sin\alpha\cdot\cos^2\frac{\varphi}{2}\cdot\sec\varphi$.

28. $2nk^2\cos\alpha\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}=6239$. 29. $(a+b)\sqrt{ab}\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot\sec\alpha$

30. $l^2\sin 2\alpha\cdot\cos^2\frac{\varphi}{2}\cdot\sec\varphi$. 31. $a^2\sqrt{2}\cdot\sin\left(45^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\operatorname{cosec}\frac{\alpha}{2}$.

32. $\frac{na^2}{4\sin\frac{180^\circ}{n}\cdot\cos\alpha}\sqrt{1-\sin^2\frac{180^\circ}{n}\cdot\cos^2\alpha}$,

или $\frac{na^2}{4}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}\sqrt{1+\frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{\cos^2\frac{180^\circ}{n}}}$.

33. $a^2\sec^2\alpha\cdot\sin\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)$.

34. $a^2\operatorname{ctg}\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$; $a^2\sqrt{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{cosec}\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$.

35. $\frac{2h^2}{\sin\alpha\sin\beta}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(45^\circ-\frac{\beta}{2}\right)$.

36. $a^2\sin\alpha\cdot\operatorname{ctg}\left(45^\circ-\frac{\varphi}{2}\right)$. 37. $\sqrt{c^2-\frac{(a-b)^2}{4}\operatorname{cosec}^2\frac{180^\circ}{n}}$.

38. $\operatorname{tg}\varphi=\operatorname{tg}\alpha\cdot\frac{m-n}{m+n}\sqrt{2}$; $\varphi=\operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{tg}\alpha\cdot\frac{m-n}{m+n}\sqrt{2}\right)$.

39. $\frac{n(a+b)}{2}\sqrt{\frac{(a-b)^2}{4}\operatorname{ctg}^2\frac{180^\circ}{n}+h^2}+n\frac{a^2+b^2}{4}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}$.

40. $\frac{n(a^2-b^2)}{4\sin\frac{180^\circ}{n}}\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha+\cos^2\frac{180^\circ}{n}}+\frac{n(a^2+b^2)}{4}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}$.

41. $hk^2\frac{m+1}{m-1}\sin\alpha\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}$. 42. $2h^3\operatorname{ctg}\beta\cdot\sqrt{2+\operatorname{ctg}^2\alpha}=2928$.

§ 20.

1. $\operatorname{tg}\varphi=\sin 15^\circ$; $\varphi=\operatorname{arc\,tg}(\sin 15^\circ)=14^\circ 31'$. 2. $R\operatorname{cosec}\alpha\sqrt{-\cos 2\alpha}$.
3. $\sqrt{R^2\sin^2\alpha+d^2\cos^2\alpha}$.

Указание. Пусть будут: O — центр основания, A — точка касания, B — точка пересечения касательной прямой с плоскостью основания, C — нижний конец образующей, проходящей через A, и OD — перпендикуляр из O на AB. Тогда $\angle ABC=\alpha$, $OA=d$ и $OC=R$. Соединив также C и D, получим в треугольнике ODC прямой угол при C.

4. $\frac{b\sin 2\alpha}{2\sqrt{2}\sin(45^\circ+\alpha)}$.

5. $\left(\frac{R}{\cos\alpha\cdot\cos\varphi}\right)^2\sin\alpha\sqrt{\cos(\alpha+\varphi)\cos(\alpha-\varphi)}$.

6. $\frac{a}{4}\cdot\frac{\sin 2\alpha\cdot\sin 2\beta}{\sin(\beta+\alpha)\cdot\sin(\beta-\alpha)}$. *Указание.* Искомый отрезок определяем по частям.

7. $\frac{l\sin\alpha\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\operatorname{tg}\alpha}=l\sin\alpha\sin^2\varphi$, где φ определяется из равенства $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{2}}=\operatorname{ctg}^2\varphi$.

8. $\frac{R\sin\alpha\cdot\sin 60^\circ}{\sin(\alpha+60^\circ)}$. 9. $2\pi a^2\cos\alpha\cos\frac{\alpha}{2}$. 10. $70^\circ 32'$.

11. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\pi}{4}$; $\alpha=2\operatorname{arc\,tg}\frac{\pi}{4}=76^\circ 17'$. 12. $\pi Q\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

13. $\sin\alpha\sqrt{S\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}}=19{,}42$ *см*. 14. $22{,}52$ *м*^{2}; $4{,}442$ *м*^{3}.

15. 1) $b=nh=80$ *м*; 2) $r=mh=6$ *м*; 3) $\alpha=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{n}=2^\circ 52'$;
4) $\varphi=\operatorname{arc\,tg}\frac{2}{3}=33^\circ 41'$; 5) $\gamma=\arccos\frac{m}{n}=85^\circ 42'$;
6) $537{,}9$ *м*^{2}; 7) $646{,}5$ *м*^{3}.

16. $\sin\frac{x}{2}=\frac{S}{\pi a^2}$; $x=2\arcsin\frac{S}{\pi a^2}=30^\circ$.

17. 1) $H\cdot\cos\frac{\alpha}{2}=H\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) часть при вершине и часть при основании относятся, как $\cos^2\frac{\alpha}{2}:\sin^2\frac{\alpha}{2}$. Для равностороннего конуса

получим: 1) $x=\frac{3}{4}$ образующей; 2) 3 : 1. *Указание.* Боковые поверхности подобных конусов относятся, как квадраты высот этих конусов.

18. $360^\circ\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$; 1) 180°; 2) 207°31′. 19. $\frac{\pi(R^2-r^2)}{\cos\alpha}$.

20. $\frac{\pi m^2}{\sqrt{1+3\sin^2\alpha}}$. 21. $\frac{\pi(m^2-n^2)}{4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}$. 22. $\frac{(R^2-r^2)\sin\delta}{2\cos\beta}$.

23. $\pi h^2\sec\alpha$. 24. $\cos\varphi=\frac{m-n}{p}$. 25. $S_{бок}=\pi l^2\sin\alpha=426$;

$S_{полн}=2\pi l^2\sin\left(\frac{\alpha}{2}+15^\circ\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-15^\circ\right)=652$. 26. $\frac{Q-q}{\cos\alpha}$.

§ 21.

1. $\frac{1}{2}l^2\sin\beta\cdot\sin\varphi\cdot\cos^2\varphi$. 2. $\frac{1}{2}d^2\sin\alpha\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta=58{,}6$.

3. $2ab\sin\alpha\sqrt{ab\cos\alpha}$.

4. $\frac{1}{4}d^2\sin\left[\alpha+\arcsin\left(\frac{\sin\alpha}{4}\right)\right]\operatorname{tg}\varphi=100$ *дм*^{2}; 30°.

5. $V=abc\sqrt{-\cos 2\alpha}$; $x=45^\circ$. 6. $\frac{a^3}{\sin\alpha}\sqrt{\cos 2\alpha}$.

7. $\frac{a^3\sqrt{2\cos\alpha}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}=271{,}8$ *см*^{3}. 8. $\frac{3a^3}{8\sin\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\sin(60^\circ+\alpha)\sin(60^\circ-\alpha)}$.

9. 516 *м*^{3}. 10. $V=\frac{a^2b^2\sin^2\gamma}{2(a+b)\cos\varphi}=17\,850$ *дм*^{3}. *Указание.*

$a^2+b^2-2ab\cos\gamma=(a+b)^2\cos^2\varphi$, где $\sin\varphi=\frac{2\sqrt{ab}\cos\frac{\gamma}{2}}{a+b}$ (см. § 11, № 62).

11. $\frac{4r^2h\cos^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\alpha}=3{,}627$ *м*^{3}.

12. *Указание.* Сначала вычислить площадь треугольника FCD а затем площадь FAB; ≈ 170 *м*^{2}.

13. *Указание.* Выразить объём с помощью перпендикулярного сечения $\frac{a^2b^2}{4}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

14. $\frac{1}{6}nb^3\cdot\cos^2\beta\cdot\sin\beta\cdot\sin\frac{360^\circ}{n}=1{,}535$ *м*^{3}.

15. $\frac{4}{3}b^3\sin^2\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha}$.

16. $\frac{2}{3}h^3\operatorname{ctg}^2\varphi\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin(\alpha+\beta)$. 17. $\frac{b^3}{6}\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha}$.

18. $\frac{2}{3}a^3\cos^3\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\varphi$. 19. $\frac{1}{24}(a+b)^2\sqrt{a(a-2b)}\cdot\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$.

20. $\frac{1}{6}P\sqrt{P\operatorname{tg}\alpha}\cdot\operatorname{tg}\varphi$. *Указание.* Пусть высота пирамиды встречает основание в точке E. Тогда линия BED есть *прямая,* перпендикулярная к BC и AD.

21. $V_A=\dfrac{V\sin\beta}{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}=138{,}9$ *см*^{3}.

Указание. $V_A:V_B=\sin B:\sin A$

22. 45°18′ и 25°14′.

23. $V=\frac{a^3-b^3}{6}\operatorname{tg}\alpha=\frac{a^3}{6}\cos^2\varphi\operatorname{tg}\alpha$, где $\sin^2\varphi=\frac{b^3}{a^3}$; $V=227$ *м*^{3}.

24. $V=\frac{a^3-b^3}{6\cos\alpha}\sqrt{-\cos 2\alpha}=\frac{a^3\cos^2\varphi}{6\cos\alpha}\sqrt{-\cos 2\alpha}$, $V=4304$.

25. $\dfrac{n(a^3-b^3)\operatorname{ctg}\frac{180°}{n}}{24\sin\frac{180°}{n}}\cdot\operatorname{tg}\alpha$. 26. $\dfrac{d^3\cos\alpha\cdot\sin 2\alpha}{8\pi}$.

27. $\dfrac{\pi a^2h}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}=7900$ *дм*^{3}. 28. $\dfrac{\pi a^3}{4\sin^3\frac{180°}{n}}$.

29. $V=\frac{D^2}{8}\cdot\frac{\pi\alpha}{180}\cdot\frac{\sin(45°-\varphi)}{\cos 45°\cdot\cos\varphi}\cdot l$, где $\operatorname{tg}\varphi=\frac{\sin\alpha\cdot 180}{\pi\alpha}$; $V\approx 2{,}1$ *м*^{3}

30. $\dfrac{\pi b^2H}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}$.

31. $V=\dfrac{\pi Q}{\cos\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{180°}{n}}\sqrt{Q\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{180°}{n}+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{180°}{n}-\frac{\alpha}{2}\right)}$.

32. $\frac{c^3d\operatorname{tg}\varphi}{24\pi^2}\approx 5{,}4$ *т*. 33. $\frac{\pi}{3}l^3\sin^2\alpha\cos\alpha\approx 4856$ *дм*^{3}.

34. $\frac{\pi h^3}{3}\operatorname{ctg}^2\alpha$.

35. $S=\frac{2\pi R^2}{\cos\alpha}\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}$; $V=\frac{\pi R^3}{3}\operatorname{tg}\alpha$.

36. $\frac{\pi R^3}{3}\sin^2\alpha\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{2}{3}\pi R^3\sin^2\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}$.

37. $\dfrac{\pi a^3\operatorname{ctg}\beta}{24\sin^3\frac{\alpha}{2}}$. 38. $\dfrac{\pi d^3\operatorname{ctg}\alpha}{3\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}}=299$ *м*^{3}.

39. $\dfrac{\pi R^3\sin(\alpha-\beta)}{3\cos\alpha\cos\beta}=302$ *дм*^{3}. 40. $\frac{\pi}{3}(R^3-r^3)\operatorname{tg}\alpha$.

41. $\frac{7}{6}\pi l^3 \sin 2\varphi \cos\varphi$.

42. $r=\sqrt[3]{\frac{\frac{3}{\pi}V+r_1^3\operatorname{tg}\alpha+r_2^3\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}}=3{,}45$ *м*; $h_1=(r-r_1)\operatorname{tg}\alpha=19$ *м*; $h_2=(r-r_2)\operatorname{tg}\beta=4$ *м*.

43. $\frac{7}{6}\pi a^3 \sin\alpha \sin\frac{\alpha}{2}=28\,030$ *дм*³. 44. $\frac{\pi}{12}l^3\sin\alpha(2-\cos 2\alpha)=1182$.

§ 22.

1. 3562 *км*. 2. 36 710 *км*, 15 930 *км*. 3. $\frac{2r\sin^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\alpha}$.

4. $\frac{V}{2}\sin^2\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}=10{,}52$ *дм*³. 5. $\frac{\sin^2 2\alpha\cdot\cos^2\alpha}{2}=0{,}2963$.

6. $\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}$. 7. $\frac{a}{2\sin\frac{180^\circ}{n}\sin 2\alpha}=5{,}145$ *м*.

8. $\frac{a}{2}\sin\alpha\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$. 9. $2C\sin\frac{\alpha}{2}$.

10. $x=2R\cdot\operatorname{cosec}60^\circ\cdot\sqrt{\sin\left(60^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\sin\left(60^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}$. *Указание*. Проведя из общей точки хорд ещё диаметр и обозначив хорду через x, выразим расстояние от её конца до диаметра: оно будет равно $x\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{cosec}60^\circ$. Проведя полуокружность большого круга, содержащую взятые диаметр и хорду, и соединив конец хорды с другим концом диаметра, составим уравнение: $x\cdot\sqrt{4R^2-x^2}=2R\cdot x\sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{cosec}60^\circ$.

11. 70°32′.

12. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{2m}}}$; $\alpha_1=78^\circ28'$; $\alpha_2=60^\circ$; $m=2$ (наименьш.)

13. $\sin\alpha=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$; $\alpha=52^\circ32'$. 14. $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$; $\alpha=70^\circ32'$.

15. $\sin\alpha=\sqrt{\frac{n}{m}}$; $(\alpha=45^\circ)$. 16. $\frac{\sqrt{R^2+r^2+2Rr\cos 2\alpha}}{\sin 2\alpha}$.

17. 1) $4\pi r_1r_2$; 2) $\cos z=\frac{r_1-r_2}{r_1+r_2}$, или $\operatorname{tg}\frac{z}{2}=\sqrt{\frac{r_2}{r_1}}$.

18. $\sin\frac{ABC}{2}=\frac{m-n}{m+n}$.

19. $\frac{4}{3}\pi R^3\cdot\frac{\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^6\frac{\alpha}{2}}$, или $\frac{2}{3}\pi R^3\operatorname{tg}2\varphi$, полагая, $\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}=\operatorname{tg}\varphi$.

20. $\frac{4}{3}\pi R^3 d\cos^4\frac{\varphi}{4}\left(3-2\cos^2\frac{\varphi}{4}\right)$. 21. 3652 $м^3$.

22. $\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{2}-1$; $\alpha=48°54'$. 23. $\frac{\pi a^3}{4}\sec^3\frac{\alpha}{4}$.

24. $4\pi R^3\sin^3\frac{\alpha}{4}=574{,}8$ $дм^3$. 25. $\frac{\pi b^3\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}}{12\sin^3\frac{\alpha}{2}}=4276$ $дм^3$. 26. $V\cdot\sin^3\frac{\alpha}{4}$.

27. $\frac{\pi R^3\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos^3\varphi}$, где $\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}}$. 28. $\sin\alpha=\frac{n-m}{n+m}$; $(\alpha=30°)$.

29. $\sin\left(x+\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{m}{n}\operatorname{cosec}\frac{\alpha}{2}$; $(x=15°)$.

30. $\frac{\pi R^3\sin^3\frac{\alpha}{2}}{6\cos^6\left(45°-\frac{\alpha}{4}\right)}$; $\frac{\pi R^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^4\left(45°-\frac{\alpha}{4}\right)}$.

§ 23.

1. $S=\pi a^2\cdot\frac{\sin B\cdot\sin C\cdot\cos\frac{1}{2}(B-C)}{\sin(B+C)\cdot\cos\frac{1}{2}(B+C)}$; $V=\frac{\pi a^3}{3}\cdot\frac{\sin^2 B\cdot\sin^2 C}{\sin^2(B+C)}$.

2. $4\pi Q\operatorname{ctg}\left(45°-\frac{\beta}{4}\right)=1736$ $дм^2$.

3. $\frac{2}{3}\pi ab^2\operatorname{tg}^2\alpha=300$ $дм^3$. 4. $2\pi a^2\sqrt{3}\cdot\sin(30°+\alpha)$.

5. $\frac{1}{3}\pi b^3\sin^2\alpha$; $4\pi b^2\sin\alpha\sin\left(15°+\frac{\alpha}{4}\right)\cos\left(15°-\frac{\alpha}{4}\right)$; при $\alpha=120°$ $V=\frac{\pi b^3}{4}$; $S=\frac{1}{2}\pi b^2\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)$. 6. $8\pi a^2\cos^2\frac{\alpha}{2}$; $2\pi a^3\sin\alpha\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}$.

7. $\pi a^2 n^2\sin\frac{\alpha}{2}$. 8. $\frac{\pi}{3}\cdot bc(b+c)\sin\alpha\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$.

9. $\frac{\pi}{6}\cdot\frac{a^3\operatorname{tg}2\alpha}{\cos 2\alpha}$. 10. $\frac{2}{3}\pi R^3\operatorname{tg}\alpha\cdot\sin\alpha\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}$.

11. $V_a:V_b:V_c=\operatorname{cosec}A:\operatorname{cosec}B:\operatorname{cosec}C$.

12. $V=\frac{\pi b^3\sin\left(30°+\frac{\alpha}{2}\right)}{2\sin\frac{\alpha}{2}}=47\,090$ $см^3$;

$S=\frac{4\pi b^2}{\sin\frac{\alpha}{2}}\sin\left(15°+\frac{\alpha}{4}\right)\cos\left(15°-\frac{\alpha}{4}\right)=8460$ $см^2$.

13. $\frac{4}{3}\pi(1+\cos^2\alpha)\sqrt{\frac{S^3}{\sin 2\alpha}}$.

14. $\frac{1}{2}\pi d^3 \sin 2\alpha = 57\,380$ *м*³; $4\pi d^2 \cdot \sin 45^\circ \cos(45^\circ - \alpha) = 10\,110$ *м*².

15. $\frac{10-3\sqrt{3}}{6\sqrt{3}}\pi a^3$. **16.** $\frac{\pi p^3 \sqrt{2}\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\cos^2\alpha}{3\cos^3\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)} = 378{,}4$ *дм*³.

17. $\frac{8\pi r^3}{\sin^2\alpha}\cos^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$. **18.** $\frac{2\pi h^3}{\sin(\alpha+\beta)}\cdot\left(\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\right)^2$.

19. 1) $S = 4\pi r^2 \cdot \sec\frac{180^\circ}{n}$; $V = \frac{4}{3}\pi r^3 \sec\frac{180^\circ}{n}$;

2) $S = 4\pi r^2 \cdot \cos\frac{180^\circ}{n}$; $V = \frac{4}{3}\pi R^3 \cos^2\frac{180^\circ}{n}$;

3) $S = \pi a^2\,\mathrm{ctg}^2\frac{180^\circ}{n}\cdot\sec\frac{180^\circ}{n}$; $V = \frac{\pi}{6}a^3\,\mathrm{ctg}^3\frac{180^\circ}{n}\sec\frac{180^\circ}{n}$.

20. 1) $S = 2\pi r^2\left(2+\mathrm{tg}^2\frac{180^\circ}{n}\right)$; $V = \frac{2}{3}\pi r^3\left(2+\mathrm{tg}^2\frac{180^\circ}{n}\right)$;

2) $S = 2\pi R^2\left(1+\cos^2\frac{180^\circ}{n}\right)$; $V = \frac{2}{3}\pi R^3\cos\frac{180^\circ}{n}\left(1+\cos^2\frac{180^\circ}{n}\right)$

3) $S = \pi a^2\left(\mathrm{ctg}^2\frac{180^\circ}{n}+0{,}5\right)$; $V = \frac{\pi a^3}{6}\,\mathrm{ctg}\frac{180^\circ}{n}\left(\mathrm{ctg}^2\frac{180^\circ}{n}+0{,}5\right)$.

21. 1) $S = 4\pi r^2\cdot\cos^4\frac{90^\circ}{n}\sec^2\frac{180^\circ}{n}$; $V = \frac{4}{3}\pi r^3\cos^4\frac{90^\circ}{n}\cdot\sec^3\frac{180^\circ}{n}$;

2) $S = 4\pi R^2\cdot\cos^4\frac{90^\circ}{n}$; $V = \frac{4}{3}\pi R^3\cdot\cos^4\frac{90^\circ}{n}\cos\frac{180^\circ}{n}$;

3) $S = \frac{\pi a^2}{4}\cdot\mathrm{ctg}^2\frac{90^\circ}{n}$; $V = \frac{\pi a^3}{24}\,\mathrm{ctg}\frac{180^\circ}{n}\cdot\mathrm{ctg}^2\frac{90^\circ}{n}$.

22. $V = \frac{4}{3}\pi R^3\cdot\sin^4\frac{\alpha}{2}$; $S = 8\pi R^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{4}$. **23.** $\frac{4}{3}\pi r^3\sin\beta\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$.

24. $2Q\cdot\frac{360^\circ}{\alpha}\left(2\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right) = 2Q\cdot\frac{360^\circ}{\alpha}\cdot\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\varphi\right)\cdot\mathrm{cosec}\,\varphi = 425$ (причём $\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{1}{2}$).

25. $\cos\alpha = \sqrt[4]{\frac{1}{2}}$; $\alpha = 32^\circ 47'$. **26.** $\pi a^2\cdot\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{4}$; $\frac{\pi a^3}{6}$.