АКАДЕМИЯ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК РСФСР
ИНСТИТУТ ОБЩЕГО И ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Педагогическая библиотека учителя

И. А. ГИБШ

МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ АЛГЕБРЕ В VI КЛАССЕ ВОСЬМИЛЕТНЕЙ ШКОЛЫ

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК РСФСР
МОСКВА 1963

Печатается по решению Ученого совета Института общего и политехнического образования Академии педагогических наук РСФСР

Настоящее руководство, посвященное изложению методики обучения алгебре в VI классе восьмилетней школы, имеет следующую структуру: во „Введении" систематизированы те общие сведения дидактического порядка, которые служат для обоснования методики обучения математике, и в частности алгебре, учитель использует их в процессе своей работы по осуществлению предлагаемой методики; материал книги делится на главы и параграфы, каждый из них состоит из двух частей: первая содержит учебный материал, соответствующий вопросу программы, примерно в том изложении, которое автор считает наиболее целесообразным предложить учащимся, а вторая — указания к этому материалу, в основном методические, а также те, которые нужны для освещения или углубления вопроса.

Дидактические соображения, высказанные во „Введении" в виде обобщающей системы, нашли отражение в руководстве в связи с изложением методики преподавания каждого вопроса программы, но нет сомнений в том, что учитель сам успешно конкретизирует эти соображения на основании своего опыта и творческого размышления над выбором наилучших путей усовершенствования процесса обучения.

ВВЕДЕНИЕ

ПОСТАНОВКА ОБУЧЕНИЯ АЛГЕБРЕ В ВОСЬМИЛЕТНЕЙ ШКОЛЕ

1. Общая характеристика программы. Главным требованием, которое должно быть предъявлено к программам учебных предметов восьмилетней школы, является сообщение этим программам внутренней завершенности и сосредоточение в них всех элементов данного учебного предмета, освещающих его основные понятия и идеи. Выполнение этого требования должно осуществить познавательные цели обучения и заложить фундамент для достижения надлежащего развития учащихся — общего и специального (в области данного учебного предмета).

Ныне введенная в действие программа курса алгебры для VI—VIII классов находится в соответствии с этим главным требованием. Включенные в курс алгебры восьмилетней школы понятия и идеи составляют ту ее теоретическую основу, без овладения которой невозможно достигнуть достаточно прочного, сознательного и целостного усвоения предмета, повысить уровень развития учащихся и обеспечить их подготовку к продолжению своего образования в области алгебры и вообще математики. Вместе с тем эта забота об идейности и содержательности программы все время сочетается в ней со стремлением всемерно удовлетворить требованиям доступности учебного материала и создать условия для активного усвоения его учащимися и для развития их способности к самостоятельному решению и исследованию теоретических и практических вопросов.

2. Задачи, которые должны быть решены в процессе обучения алгебре.

1) Сообщение сведений по алгебре в объеме, установленном программой.

При этом необходимо: раскрыть все основные понятия и идеи алгебры и сообщить все ее теоретические и практические положения, соблюдая научность и вместе с тем полную доступность изложения; установить связь алгебры с арифметикой; отвести надлежащее место геометрическим представлениям; использовать алгебру для решения и исследования вопросов количественного характера в области смежных дисциплин и практики; выявить средства алгебры для установления и изучения закономерностей явлений и процессов.

2) Развитие умений и навыков, связанных с изучением алгебры.

В связи с общими целями, указанными в пункте 1, практические занятия по алгебре (выполнение упражнений по решению примеров и задач, использование таблиц и графиков) приобретают при обучении алгебре столь же большое значение, как и усвоение теоретических сведений, и в очень многих случаях составляют с ним органическое целое. Эти занятия должны служить не только для закрепления приобретенных теоретических сведений, но и для того, чтобы обеспечить вполне сознательное и углубленное усвоение понятий, идей и фактов и развить способность учащихся к самостоятельному нахождению путей решения вопросов.

3) Содействие овладению учащимися средствами алгебры, служащими для ее приложения к решению практических вопросов.

Этими средствами в восьмилетней школе служат: аналитическое и графическое решение уравнений; использование (нередко во взаимном сочетании) таблиц, графиков и логарифмической линейки, а также некоторых несложных номограмм. Уже в пределах восьмилетней школы учащийся (в качестве „начинающего исследователя") может применять метод комплексного использования алгебры, геометрии и тригонометрии, предоставляющий возможность выбрать наиболее экономные и рациональные средства для решения вопроса.

4) Развитие у учащихся способности к самостоятельному решению теоретических и практических вопросов.

Эта задача приобретает первостепенную важность в особенности благодаря содержащемуся в „Законе об укреплении связи школы с жизнью и о дальнейшем развитии системы народного образования в СССР“ указанию о необходимости готовить в школе людей, обладающих не только знаниями, но и умением творчески прилагать эти знания в своей практической деятельности. Осуществлению этой задачи должно быть уделено школой исключительное внимание.

5) Развитие воспитывающих элементов изучения алгебры.

Алгебра является орудием изучения всей математики и ее применений, и овладение ею поднимает каждого учащегося в его собственных глазах, делает его более сильным при изучении и раскрытии закономерностей природы, пробуждает в нем интерес к науке. Вместе с тем изучение алгебры окажет самое благоприятное воздействие на развитие у учащегося стремления к точному, рациональному и обоснованному выполнению всех видов заданий.

6) Сообщение всему процессу обучения алгебре в восьмилетней школе такой направленности, которая в достаточной мере обеспечивала бы успешность дальнейшего изучения математики.

Курс математики восьмилетней школы представляет собой определенный фундамент, на котором будет построен курс математики, изучаемый в IX—XI классах. Это налагает на учителя математики восьмилетней школы следующие обязанности: сообщать основным понятиям и идеям алгебры ту форму и то содержание, которые в старших классах подвергались бы только дальнейшему развитию; использовать всякую возможность для создания преемственности знаний и рассматривать некоторые сведения, содержащиеся в курсе алгебры восьмилетней школы, как некоторый комплекс этих сведений, подлежащий расширению и углублению в старших классах; стремиться к цельности и гармоничности курса алгебры (и вообще математики) в школе от VI до XI класса включительно.

ОБЩИЕ ТРЕБОВАНИЯ, КОТОРЫЕ ДОЛЖНЫ БЫТЬ ПРЕДЪЯВЛЕНЫ К МЕТОДИКЕ ОБУЧЕНИЯ АЛГЕБРЕ В ВОСЬМИЛЕТНЕЙ ШКОЛЕ

Совершенно естественно исходить из того положения, что методика обучения алгебре в этой школе должна определяться, так же как и всякая методика преподавания, общими дидактическими принципами, но осуществляемыми с учетом того своеобразия, которое имеет область их приложения. Рассмотрим, какое содержание и какую форму приобретают эти принципы в применении к преподаванию курса алгебры в VI классе.

1. Активизация процесса обучения и познавательной деятельности учащихся. Для осуществления этого принципа в распоряжении учителя имеется ряд средств, из которых наиболее действенны следующие.

1,*1. Постановка вопроса, составляющего содержание главы или темы.*

Изложение каждого раздела и по возможности темы курса алгебры должно начинаться с постановки вопроса.

Постановка вопроса служит кратким введением, вступлением в главу или тему, устанавливает связь с предыдущим материалом, выясняет основную цель темы, задачу, которую предстоит решить. Это введение открывает перед классом перспективу, пробуждает интерес к решению вопроса, вовлекает учащихся в общую работу по нахождению путей этого решения.

Постановку вопроса можно осуществить в двух видах, между которыми нельзя, впрочем, провести резкой границы.

Первый вид может быть охарактеризован тем, что при его использовании учитель довольно скоро приводит учащихся в соприкосновение с новым понятием или небольшим кругом новых понятий, не предпосылая беседе более общих соображений.

Второй вид постановки вопроса состоит в таком предварительном раскрытии сущности вопроса, которое, освещая его сперва с некоторых общих позиций, только вводило бы учащихся в круг новых понятий и идей, составляющих содержание нового материала, и служило бы подготовкой для наиболее естественного восприятия этого материала. Приведем некоторые примеры, иллюстрирующие эти общие соображения в применении к обучению алгебре в VI классе.

Пример 1 Введя определение понятий о сумме и произведении рациональных чисел, задают учащимся вопрос о том, имеют ли числа, составленные по установленным правилам сложения и умножения, достаточное право называться суммой и произведением. Приводят учащихся к мысли, что, для того чтобы эти числа приобрели указанное право, необходимо, чтобы сложение и умножение рациональных чисел подчинялись основным законам арифметических действий. После этого учащиеся сообщают формулировки, делают записи этих законов и под руководством учителя приступают к доказательству закона переместительности и проверке законов сочетательности и распределительности сложения и умножения в области рациональных чисел.

Пример 2. Для установления правила о возведении одночлена в степень учитель может поставить вопрос о том, что представляет собой одночлен, и, получив ответ: „произведение степеней", свести задачу о возведении в степень одночлена к задачам о возведении в степень произведения и степени, которые учащиеся и решают под руководством учителя. Однако он тщательно следит за полным и точным использованием законов арифметических действий, необходимым для вывода соответствующих правил.

Пример 3. Теме „Формулы умножения" предпосылают сообщение о том, что имеется ряд случаев, в которых общее правило составления произведения может быть заменено более кратким, позволяющим написать результат, как говорят учащиеся, „сразу", опуская часть промежуточных вычислений. Это имеет место, если требуется выполнить преобразование следующих выражений:

$$(a \pm b)^2;\ (a+b)(a-b);\ (a \pm b)^3.$$

После того как учащиеся найдут результаты, учителю придется поработать лишь над составлением точных формулировок этих результатов и приступить к упражнениям.

Пример 4. Идею фундаментальнейшего понятия алгебры — уравнения следует правильно раскрыть уже в VI классе, рассматривая уравнение как равенство, выражающее вопрос о том, при каком значении неизвестной x два выражения, содержащие эту неизвестную, имеют равные числовые значения. Для этого сначала вводят уравнение как задание, аналогичное тому, которое предлагают на самой начальной стадии обучения грамоте, когда требуют, чтобы учащийся, заменив в написанном с помощью букв и черточек слове все черточки недостающими буквами, получил верно написанное слово (х-лодная в-да). В довольно близкой аналогии с этим заданием будет находиться задание: в равенстве $5x - 1 = 2x + 5$ вставить вместо буквы x такое число, которое обратило бы обе его части в равные числа. На первом уроке можно предлагать это задание и в виде $5? - 1 = 2? + 5$ или в виде $5x - 1 \overset{?}{=} 2x + 5$. Исходя из этого вступления, приходят к приведенному выше определению понятия об уравнении.

К необходимости решать таким образом понимаемые уравнения вполне естественно приходят в результате решения нескольких задач с помощью составления уравнений, выражающих содержание их условий.

Пример 5. Понятие о возведении числа в степень с натуральным показателем учитель устанавливает с помощью краткой беседы, имеющей целью сообщить учащимся, что подобно тому, как сложение равных слагаемых стало рассматриваться как новое действие и получило название умножения, точно так же и умножение равных сомножителей принято рассматривать как новое действие; этому действию дано название „возведение в степень“.

После этого учащиеся самостоятельно (в чем и состоит активизация их мышления на уроке и дома) должны будут выполнить достаточно большое число упражнений, причем, конечно, на первых порах будут часто ошибаться, находя не степень, а произведение основания на показатель. Как известно, эта ошибка неоднократно будет встречаться и в их последующих работах. Немалую помощь для искоренения этой ошибки окажут учащимся упражнения в устных вычислениях, нередко практикуемые на уроке. Если разница между числами 2^3 и $2 \cdot 3$, 3^2 и $3 \cdot 2$ не столь уже велика, то можно поразить воображение учащихся, сравнив числа 10^5 и $10 \cdot 5$ и подобные им пары чисел.

Пример 6. Очень содержательна тема „Квадраты и кубы чисел", которая дает учителю возможность поставить перед учащимися ряд заданий по исследованию таблиц квадратов и кубов чисел: 1) нахождение закона, по которому изменяются приращения квадратов и кубов чисел при равномерном возрастании оснований; 2) нахождение промежуточных значений с помощью решения пропорций (интерполяция); 3) построение графиков степеней x^2 и x^3.

С помощью этих графиков могут быть решены более глубокие вопросы: 4) будут ли квадрат и куб правильной (неправильной) дроби правильной (неправильной) дробью или нет; 5) какое число больше: x^2 или x^3. Тут есть над чем подумать учащимся, а усвоение найденных результатов окажется весьма полезным в дальнейшем. Кроме того, учащихся впервые осенит мысль о том, что графики — не просто картинки, а „говорящие картинки", без изучения которых факты не столь ясны, не столь наглядны. В подтверждение этого следует предложить учащимся найти ответы на вопросы 4 и 5, не опираясь на чертеж, т. е. обосновать свои выводы теоретически.

Пример 7. Изучение графиков степеней x^2 и x^3 облегчит переход к графикам зависимостей (температуры, равномерного движения и др.), по поводу которых могут быть поставлены вопросы, аналогичные указанным в примере 6. Вслед за этим учащиеся примут весьма активное участие: 1) в построении графиков наиболее характерных величин, встречающихся в природе (давления атмосферы, температуры воды в океане на различных глубинах, температуры воздуха на различных высотах и т. п.); 2) в графическом решении задач на движение; 3) в геометрическом истолковании решения уравнений первой степени.

Пример 8. Введению понятий о положительных и отрицательных числах должна быть предпослана беседа, в процессе которой выяснится, что для записи значений направленных величин арифметические (целые и дробные) числа непригодны; ввиду этого возникает необходимость в расширении запаса чисел, что и выполняется учителем одним из возможных способов.

Пример 9. Большие затруднения встретит учитель при ознакомлении учащихся с действиями над алгебраическими выражениями (целыми и дробными), если он не начнет с правильной постановки этого вопроса. Учитель должен указать, что по аналогии с тем, как в арифметике действие над двумя числами состоит в нахождении по двум данным числам третьего числа, так и в алгебре действие над двумя алгебраическими выражениями состоит: 1) в нахождении по двум данным алгебраическим выражениям третьего алгебраического выражения, числовое значение которого было бы равно соответственно сумме, разности, произведению, частному числовых значений данных выражений; 2) в замене, если это возможно, найденного результата действия более простым, но тождественно равным ему алгебраическим выражением.

1,2. *Эвристическая форма обучения.*

Эвристическая форма обучения состоит в том, что учитель в целях установления новых понятий и фактов последовательно предлагает учащимся систему целесообразно составленных и расположенных вопросов, на которые они по мере сил дают ответы, раскрывающие сущность понятий и фактов. Эффективность применения эвристической формы обучения зависит от того, в какой мере правильно составлена система предлагаемых вопросов и насколько умело учитель направляет весь ход урока.

В эвристической форме может быть проведен урок почти по каждому из вопросов программы.

Простое сообщение учебного материала в VI классе может иметь место только в тех редких случаях, когда на активное участие учащихся в раскрытии понятия и в „открытии“ фактов и правил рассчитывать невозможно или очень трудно. Значительная же часть теоретического материала, входящего в курс алгебры VI класса, при умелом руководстве может быть освоена учащимися самостоятельно, а в сочетании с ее приложением на практике будет содействовать их математическому развитию и доставит им удовлетворение и даже радость творчества.

2. Осуществление принципа доступности. Для достижения доступности излагаемого материала учитель все время обращается к тем приемам, которые 1) обеспечивают плавность перехода от одних понятий к другим, первоначальное ознакомление с которыми уже состоялось; 2) позволяют использовать достаточно прозрачную аналогию; 3) сопровождаются привлечением наглядности (главным образом геометрических представлений); 4) органически связаны с поясняющими теорию упражнениями.

Пример 1. Составление общих формул решения текстовых задач, формулировка законов арифметических действий, правила о порядке выполнения действий и употреблении скобок — эти вопросы представляют собой материал, с которым учащиеся уже были ознакомлены в арифметике, и потому при введении его на первых уроках алгебры он будет встречен как знакомый и легко воспринят.

Пример 2. Изучению понятия об алгебраическом выражении в необходимой мере содействует составление таблиц числовых значений этого выражения, благодаря чему создается представление о нем как о функции. Работа по составлению этих таблиц, активизируя процесс обучения алгебре, в очень доступной форме приближает учащегося к овладению понятием об алгебраическом выражении, которое он начинает осознавать не как простую совокупность букв и чисел, а как запись множества чисел, составленных из данных чисел по одному и тому же закону.

Пример 3. Весьма трудный для начинающего изучать алгебру раздел о положительных и отрицательных числах можно сделать доступным, если ввести эти числа как значения направленных величин и все учение о них основать именно на таком их понимании. Особенно благоприятные результаты могут быть достигнуты в том случае, если в качестве направленной величины, значениями которой служат положительные и отрицательные числа, выбрать п е р е м е щ е н и е точки или тела по прямой, превращенной в ось; этот вид движения давно знаком учащимся из повседневной жизни и из арифметики.

Пример 4. Основное, но также трудное понятие алгебры об абсолютном значении числа a становится вполне доступным учащимся при условии, если его определять как **расстояние** точки A, изображающей число a, от начальной точки оси O.

Пример 5. При установлении понятия о неравенстве рациональных чисел целесообразнее всего распространить тот смысл этого понятия, который оно имеет в области натуральных чисел, на рациональные числа; для этого надо либо ограничиться чисто геометрическим истолкованием терминов „больше“ и „меньше“ (правее, левее на оси), либо также установить, что $a > b$, если $a = b + c$, где c — положительное число (в случае натуральных чисел a, b, c нет необходимости добавлять, что c — положительное число).

Пример 6. Усвоение смысла действий над алгебраическими выражениями и сознательное применение этих действий будут достигнуты, если они будут истолковываться как тождественные преобразования, т. е. как преобразования, изменяющие вид алгебраического выражения, но не изменяющие числового значения, получаемого им при данной системе значений входящих в него букв.

При этом условии учащимся станут вполне ясными не только смысл действий над алгебраическими выражениями, но и причина, по которой для вывода правил действий над алгебраическими выражениями применяются законы арифметических действий.

Пример 7. Решение уравнений посредством использования зависимостей между данными действий и их результатами полностью основано на твердом знании зависимостей, установленных в курсе арифметики, и, конечно, будет доступным учащимся в той мере, в которой они научены применять эти зависимости. Особенно успешно пройдет работа по решению уравнений, если учащиеся выполнили достаточное число подготовительных упражнений („примеров с иксом“) при изучении курса арифметики.

3. Осуществление принципа наглядности. Весьма большое значение в деле построения правильной методики преподавания алгебры в восьмилетней школе, и в частности в VI классе, имеет осуществление принципа наглядности. Понимая термин „наглядность“ в его буквальном смысле, учитель широко привлекает в качестве средства обучения алгебре использование учащимися **геометрических представлений**, отводя им здесь то же место, которое в геометрии занимают модели. Приученные уже в арифметике изображать числа с помощью диаграмм, учащиеся считают вполне понятным способ изображения чисел с помощью вертикальных отрезков, и учителю остается сделать лишь один шаг, чтобы внедрить мысль о графике как о *линии*, изображающей ход изменения некоторой переменной величины. Едва ли следует откладывать первое ознакомление с этой основной идеей до VII класса: уже в VI классе она становится вполне доступной учащимся, а об ее познавательном и методическом значении говорить, конечно, излишне.

Пример 1. Уже после составления таблицы числовых значений алгебраического выражения, содержащего одну букву, которую рассматривают как переменную, эти числовые значения могут быть изображены вертикальными отрезками, а закономерность изменения выражения — ломаной или плавной кривой линией. Открывается непосредственная возможность установить связь с географией, физикой и, должно быть, с операциями, выполняемыми на уроках труда.

Пример 2. Начать изучение множества числовых значений выражения можно со степеней x^2 и x^3, для чего следует построить таблицы числовых значений этих степеней и изобразить их изменение с помощью графика, а затем использовать его для нахождения промежуточных значений степеней x^2 и x^3, не содержащихся в таблице (т. е. для интерполяции). Эта вполне доступная учащимся VI класса идея увлечет их и может быть положена в основу интересной лабораторной работы.

Пример 3. Исключительную роль играет элемент наглядности при изложении учения о рациональных числах. Каждое рациональное число рассматривается как значение некоторой направленной величины и изображается сначала направленным отрезком (вектором), расположенным на оси, а затем точкой оси. Благодаря второму способу изображения каждому рациональному числу оказывается соответствующей на числовой оси — при заданной на ней единице измерения — вполне определенная (единственная) точка.

Этот факт, сам по себе весьма значительный, в ряде случаев позволяет сообщать изложению теории алгебры необходимую наглядность, переводя абстрактные элементы теории на ясный геометрический язык.

Начатое в первом разделе программы первоначальное ознакомление с графиком изменения переменной величины может быть во втором разделе развито и доведено до сообщения сведений о графике зависимости одной переменной величины (температуры, пути точки при ее равномерном движении) от другой (времени).

Установив опытным путем, что пропорциональная зависимость изображается прямой линией, учитель познакомит учащихся с графическим решением арифметических задач на движение и задач из геометрии и физики, приводящих к использованию пропорциональной зависимости величин.

Приведенные выше примеры указывают те случаи, в которых возможно и с методической стороны необходимо применение наглядности, состоящей в непосредственном обращении к зрительным образам. Однако такое раскрытие понятия, которое делает восприятие его учащимися возможно более ощутимым, легко и вместе с тем глубоко усваиваемым, осуществляется также посредством внесения в методику преподавания элемента конкретности, во вполне достаточной мере предпосылаемого каждому определению и предложению, которое должно быть в конце концов облечено в абстрактную форму.

Пример 4. С основными законами арифметических действий можно глубоко познакомить учащихся только при том условии, если их сущность и справедливость будут тщательно установлены на конкретных примерах, относящихся к числам как количественным характеристикам множеств и к отрезкам как геометрическим представлениям непрерывных аддитивных величин.

Пример 5. С понятием о пропорциональной зависимости учащиеся сначала знакомятся в арифметике на большом числе конкретных примеров. Без предварительной конкретизации этого понятия определение $y = ax$, предлагаемое в алгебре, не выявило бы в необходимой мере его сущности. И только доказательство того, что равенство $y = ax$ является компактным выражением пропорциональности величин y и x в уже известном учащимся смысле:

$$y_2 : x_2 = y_1 : x_1 = a,$$

оправдало бы в глазах учащихся алгебраическое определение пропорциональной зависимости.

Пример 6. Основные свойства уравнений, выражаемые теоремами об их равносильности, обычно только сообщаются учащимся и разъясняются на примерах. Однако на этих же примерах может быть дано вполне строгое доказательство обоих свойств, состоящее в таком проведении необходимых общих рассуждений, которое совсем не опирается на индивидуальные отличия рассматриваемых конкретных алгебраических выражений. В этом случае абстрактность рассуждения как бы снимается благодаря тому, что внимание учащихся все время сосредоточивается на конкретных объектах, не уводя их на более высокую (следующую) ступень абстракции.

4. Осуществление принципа научности. Тот факт, что преподавание математики в восьмилетней школе должно отличаться доступностью и наглядностью, вполне совместим с необходимостью требовать, чтобы в должной мере соблюдался п р и н ц и п н а у ч н о с т и.

Для этого надо, чтобы преподавание велось на таком теоретическом уровне, который обеспечил бы правильное, не противоречащее научному выявление сущности каждого понятия и каждого предложения и безошибочное в логическом отношении проведение рассуждений. От этого требования нельзя отказаться, если иметь в виду, что уже в восьмилетней школе обучение математике должно оказать влияние на развитие умственных и творческих способностей учащихся.

Необходимо принять во внимание, что научное доказательство, безошибочное логическое рассуждение содействуют подлинному пониманию вопроса и что ненаучное, т. е. нестрогое, недостаточно обоснованное, доказательство приучает неглубоко, некритически относиться к рассуждению, принимать за доказанное то, что не обосновано, внешне, формально усваивать материал. Положения, не поддающиеся на данном этапе доказательству, должны быть приняты без доказательства. Однако надо иметь в виду, что всякое рассуждение, проведенное на примере, но без апеллирования к индивидуальным свойствам (отличиям) этого примера, имеет полную доказательную силу.

Пример 1. Распространение законов арифметических действий на область рациональных чисел может быть строго выполнено на примерах для закона переместительности и лишь проверено на примерах для законов сочетательности и распределительности.

Только после доказательства того, что законы сложения и умножения, установленные в арифметике для целых и дробных чисел, справедливы и для рациональных чисел, мы имеем право назвать числа, получаемые по правилам сложения и умножения рациональных чисел, соответственно их суммой и произведением. В этом состоит научное оправдание введения этих названий.

Пример 2. Обоснование правил действий над алгебраическими выражениями можно будет считать научным только при том условии, если каждое преобразование, выполняемое по этим правилам, будет представлено как т о ж д е с т в е н н о е преобразование.

Пример 3. Определения тождества и уравнения будут находиться в согласии с научным толкованием этих понятий, если они будут рассматриваться как равенства, выражающие соответственно: 1) у т в е р ж д е н и е, что два алгебраических выражения $f(x)$ и $g(x)$ имеют равные числовые значения при всех (допустимых) значениях буквы (аргумента) x; 2) в о п р о с о том, при каких значениях буквы (аргумента) x алгебраические выражения $f(x)$ и $g(x)$ имеют равные числовые значения.

Пример 4. Основное свойство алгебраической дроби и правила действий над алгебраическими дробями не должны быть приняты без доказательства только на том основании, что это свойство и правила имеют аналогичное содержание в применении к арифметическим дробям.

Пример 5. Рассуждения, проведенные на примере числовых уравнений для доказательства теорем о равносильности двух уравнений, нисколько не теряют в своей научности, если эти рассуждения имеют общий характер, т. е. относятся к **л ю б о й** паре уравнений.

5. Развитие логического мышления учащихся и их способности к самостоятельному решению вопросов.

5,1. Ознакомление учащихся в процессе обучения алгебре с элементами формальной логики.

Эта проблема стоит, конечно, перед всей школой в целом и должна решаться в связи с преподаванием всех учебных предметов. Однако развитие логического мышления может быть осуществляемо с наибольшим успехом именно на уроках математики, так как при ее изучении логические элементы могут быть выявлены с наибольшей четкостью.

Из них большую образовательную ценность имеют умения: 1) осознать определение понятия как выделение некоторого вида из рода, указать существенные признаки этого понятия; 2) правильно выполнить деление класса на подклассы, выделить виды из рода и отличать видовые признаки от родовых; 3) отличать признак от определения; 4) точно установить и сформулировать все условия и заключение подлежащего доказательству предложения; 5) установить для данного предложения обратное предложение; 6) установить, является ли условие (признак) необходимым или достаточным.

Конечно, развитие логического мышления должно проводиться с определенной постепенностью, усиливаясь по мере приближения к старшим классам, где умственный уровень учащихся, их интересы и естественно возникающая у них потребность в правильных определениях и рассуждениях содействуют этому. Однако учитель, преподающий алгебру, начиная уже с VI класса имеет достаточную возможность привлекать внимание учащихся к логической стороне устанавливаемых определений и проводимых рассуждений и на этом материале развивать у них способность к логическому мышлению. Можно быть уверенным в том, что при умелой работе учителя в этой области учащиеся живо заинтересуются относящимся к ней материалом, охотно и даже с увлечением воспримут его; и недалек будет тот день, когда они будут „ловить“ своих товарищей в отступлениях от доступной им строгости изложения учебного материала — в неполноте, недостаточности обоснования, неправильности классификации и даже в более тонких логических недочетах рассуждений.

1) Составление таблицы числовых значений алгебраического выражения дает возможность заронить понятие о соответствии между элементами двух множеств. Могут быть приведены другие примеры существования или установления соответствия между элементами множеств.

2) Сумма c и разность d натуральных чисел a и b суть числа, выражающие число элементов соответственно множества C, полученного от сложения множеств A и B, и множества D, полученного от вычитания из множества A множества B. Опираясь на это определение суммы двух натуральных чисел, можно доказать свойства переместительности и сочетательности сложения натуральных чисел.

3) Законы арифметических действий формулируются в виде предложений, истинность которых либо доказывается, либо принимается. В алгебре появляются первые теоремы (в сущности — арифметические). Доказательство переместительного свойства сложения двух рациональных чисел представляет собою строгое рассуждение, в котором используется ранее установленное предложение (выражающее свойство сложения двух арифметических чисел). Как выразить эти теоремы с помощью условного предложения?

4) К логическим понятиям следует отнести понятия о выполнимости и однозначности действия над числами в данной области: в области арифметических (целых и дробных положительных) чисел сложение и умножение — действия, всегда (т. е. для двух любых чисел) выполнимые и однозначные (существуют единственная сумма и единственное произведение); в области рациональных чисел теми же свойствами обладают сложение, вычитание и умножение. Свойство выполнимости и однозначности этих действий можно кратко выразить так: для каждой пары данных чисел можно найти одну и только одну сумму, одну и только одну разность, одно и только одно произведение. Термин „единственность" надо предпочесть термину „однозначность", который целесообразно ввести позже — в старших классах. Понятия о выполнимости действия и единственности его результата могут быть впервые введены в VI классе.

5) Деление множества рациональных чисел может быть выполнено по двум основаниям — признакам (по знакам и по абсолютному значению) в одном или другом порядке. Понятие о делении множества обобщается; дается понятие о системе единственно возможных случаев; рассматриваются примеры: натуральные числа — четные и нечетные; числа, дающие при делении на 3 остатки 0, 1, 2; дроби — правильные и неправильные; рациональные числа — положительные, нуль, отрицательные; треугольники — остроугольные, прямоугольные, тупоугольные; уравнения — имеющие конечное число корней, бесконечное число корней, не имеющие корней; соотношения между числами a и b: $a = b$, $a > b$, $a < b$; соотношения между отрезками A и B: $A = B$, $A > B$, $A < B$; точка плоскости лежит внутри окружности, на окружности, вне окружности; две окружности на плоскости — 5 взаимных положений и т. п.

6) Понятия об утверждении и отрицании совмещаются в формулировке закона противоречия: из двух утверждений: „A обладает свойством α“ и „A не обладает свойством α“ — верно (истинно, имеет место) только одно; если первое истинно, то второе ложно, и, наоборот, если первое ложно, то второе истинно. Эта весьма простая мысль используется в рассуждениях многократно, почти всегда. Зная, что „a есть четное число“, учащийся уже уверен в том, что противоположное утверждение „a есть нечетное число“ само собою отвергается; ему и в голову не приходит, что здесь находит себе применение закон противоречия. Но учитель может попутно, не выделяя вопроса, остановить внимание учащихся на том, что истинность одного из двух противоположных суждений влечет за собой как следствие ложность другого. Упоминание об этом помогает выяснить смысл и сформулировать закон противоречия.

7) Всякий раз, как будет выявлена и установлена система единственно возможных и исключающих друг друга соотношений, можно будет привести учащихся к пониманию сущности способа доказательства от противного, состоящего в необходимости принять одно из системы единственно возможных и исключающих друг друга соотношений на том основании, что все остальные отвергнуты (см. пункт 5).

5,2. *Развитие способности к самостоятельному решению вопросов.*

При условии, если обучение постоянно протекает при активной деятельности учащихся и если состояние активности сделалось для них привычным и необходимым, можно сказать, что создана вполне благоприятная обстановка для работы над развитием у учащихся способности самостоятельно искать пути решения различных теоретических и практических вопросов. Достижение этой цели должно быть одной из главных задач, которые стоят перед учителем математики, и в частности алгебры.

Если при обучении геометрии в VI классе решение этой задачи может быть выполнено различными средствами, то при обучении алгебре для этого имеются сравнительно ограниченные возможности. Тем не менее и в этой области надо использовать каждый представляющийся случай, каждый подходящий элемент рассуждения.

1) Выбор и расположение упражнений надо организовать так, чтобы каждое следующее из данной системы упражнений хотя бы незначительно отличалось от предыдущего в принципиальном отношении, т. е. не буквально повторяло его, а требовало некоторого размышления, учета того условия, которым новое упражнение отличается от старого. Затруднение, требующее некоторого усилия мысли, может состоять лишь в весьма небольшом изменении условия (новые коэффициенты, иные знаки, иное расположение членов, чуть более высокие показатели и т. п.), но все же изменение должно быть введено.

2) Проявить свою самостоятельность и изобретательность учащиеся могут при нахождении различных рационализирующих приемов, с которыми учитель настойчиво знакомит всех (а не только сильных) учащихся. Это может иметь место при выборе ими наиболее целесообразного порядка выполнения действия, наиболее выгодной комбинации слагаемых суммы или членов уравнения, наилучшего способа составления уравнения и т. п.

3) Более сложными для учащихся являются те задания по алгебре, которые объединяются в сборниках под общим заглавием „задачи на доказательство“ (см., например, пособие для учителей И. В. Барановой

и С. Е. Ляпина „Задачи на доказательство по алгебре", Л., Учпедгиз, 1954). Постепенное включение в задания по алгебре задач на доказательство, без сомнения, повысит содержательность и эффективность упражнений и уровень преподавания алгебры и будет, наряду и во взаимодействии с соответствующими упражнениями по геометрии, содействовать усовершенствованию знаний и развитию творческих способностей учащихся.

Однако достижение этих результатов возможно только при условии, если учитель будет развивать творческую мысль учащихся прежде всего на примере своего преподавания, не сообщая учащимся готовых формулировок и результатов, а предварительно намечая наиболее естественный, наиболее обосновываемый, оправдываемый путь решения вопроса, и именно по этому пути будет вести учащихся к нахождению доказательств предложений и выполнению упражнений.

Еще большее значение для выработки у учащихся умения самостоятельно решать математические вопросы имеет включение в изложение предмета всех обобщений, общих указаний, которые можно сделать относительно применения используемых методов, приемов, способов доказательств предложений и решения примеров и задач. Именно эти общие указания могут помочь учащемуся начать необходимое рассуждение, подсказать нужное решение вопроса, дать ему в руки некоторую руководящую нить.

Такого рода общие указания в особенности необходимы и целесообразны там, где учащиеся обычно испытывают затруднения (например, при обучении действиям над рациональными числами, разложению многочленов на множители, выполнению действий над алгебраическими дробями, составлению уравнений по условиям задач).

Конечно, число этих общих указаний увеличивается и поле их применения расширяется по мере продвижения в дальнейшие разделы курса алгебры восьмилетней школы, но начало этому виду работы учителя и ученика может и должно быть положено уже в VI классе (см., например, главу I, § 1 и 2 в указанном выше пособии).

4) Непосредственное отношение к сказанному имеет ряд весьма полезных пособий, содержащих системы

вопросов, которые могут быть предложены учащимся на всех стадиях урока и для домашних заданий. Вдумчивое использование этих вопросов, органически включенное в процесс обучения математике, и в частности алгебре, окажет весьма заметную помощь учителю в его работе по повышению уровня знаний и развитию творческих способностей учащихся.

6. Идейность и содержательность учебного материала. При всей как будто ограниченности круга понятий и идей, сосредоточенных в курсе математики, и в частности алгебры, восьмилетней школы, образовательное значение этого курса в весьма большой мере зависит от того, с какой глубиной будет раскрыто перед учащимися содержание всех этих понятий и идей. Работа учителя в этом направлении должна быть выполнена не только для решения необходимых образовательных задач, но и для повышения интереса учащихся к предмету и их активности в процессе усвоения ими учебного материала.

1) Переход от чисел к буквам представляет собой очень важную ступень абстракции, на которой изучаются те свойства некоторой области чисел, которые являются для них общими, не зависящими от их индивидуальных свойств. Благодаря употреблению букв для обозначения чисел можно, например, выразить мысль о том, что законы арифметических действий имеют силу для всех целых и дробных чисел, рассматриваемых в арифметике. Можно довести это рассуждение до вывода: „Алгебра есть язык математики".

2) Как оживит в глазах учащихся молчащее, неподвижное алгебраическое выражение процесс составления для него таблицы числовых значений и в соответствующих случаях построенный по этой таблице график! Этим путем будет положено начало формированию понятия о функциональной зависимости и идеи о геометрическом представлении этой зависимости.

3) Введение положительных и отрицательных чисел должно быть освещено как второй этап расширения области (запаса) чисел, которому предшествовал первый этап — введение дробных чисел. Дробные числа вместе с целыми числами выражают результаты измерения (служат значениями) положительных скалярных величин и могут быть изображены точками на числовом луче;

вновь введенные отрицательные числа вместе с положительными числами выражают результаты измерения (служат значениями) направленных скалярных величин. Понятия об этих видах направленных скалярных величин могут быть положены в основу общего понятия о величине, для чего достаточно сосредоточить внимание учащихся на том, что хотя понятия „равно", „больше" и „меньше" для каждой из этих величин имеют различный смысл (равенство и неравенство отрезков по длине, тел по весу, сосудов по емкости; перемещений, изменений температуры, давления и т. д.), но они обладают рядом **общих свойств**: $a = a$; если $a = b$, то $b = a$; если $a = b$, $b = c$, то $a = c$; если $a > b$, то $b < a$; если $a > b$, $b > c$, то $a > c$.

Всякое множество элементов, по отношению к которым установлен смысл понятий „равно", „больше", „меньше", и составляет множество величин.

4) Введение действий над рациональными числами должно исходить из использования общего понятия о действиях над числами как об операциях, относящих каждой паре данных чисел третьего числа по определенному правилу. Тот же смысл имеют действия, выполняемые над некоторыми другими объектами (отрезками, дугами, углами; направленными отрезками на оси, векторами; силами). Однако правила, по которым выполняются действия, не могут быть произвольными: сложение должно обладать свойствами переместительности и сочетательности, а умножение — свойствами переместительности, сочетательности и распределительности. Сложение и умножение рациональных чисел удовлетворяют этому требованию.

5) Исключительно важна и плодотворна идея уравнения. Рассматривая тождество и уравнение как равенства вида $f(x)$ $g(x)$, выражающие соответственно утверждение, что это равенство имеет место (справедливо, выполняется) при всех (допустимых) значениях буквы x, или вопрос о том, при каких значениях буквы x оно имеет место, — уточняют взгляд на алгебру как на язык математики. Вместе с тем устанавливают, что самую существенную черту алгебры, отличающую ее от арифметики, составляет не то, что алгебра употребляет буквенную символику, а то, что ее основным содержанием служит задача о решении уравнений.

6) Уже в VI классе можно впервые заронить важнейшую идею анализа о представлении чисел сначала точками на оси, а затем точками на ориентированной плоскости и о связанном с этой идеей понятии графика зависимости между величинами. Всякому учителю математики вполне понятно, что его работа над сообщением и углублением этой богатой по содержанию идеи окажется исключительно плодотворной в теоретическом и практическом отношении и что поэтому надо использовать каждый представляющийся случай, чтобы придать изложению, как сейчас говорят, функциональный характер.

К идее функции приходят от идей изменения, зависимости, соответствия. Уже в восьмилетней школе можно сделать вполне доступными понятия о множестве (классе), о соответствии между элементами множеств, об их сумме и произведении, о делении класса на подклассы, о виде и роде.

7) В основу понятия о действиях над алгебраическими выражениями должно быть положено понятие о тождестве. Нельзя считать, что учащиеся усвоили теорию этих действий, если они не научились относиться к ним как к тождественным преобразованиям, основанным на законах арифметических действий; отсюда будет следовать правильное понимание и сознательное выполнение требования „доказать тождество".

РАЗВИТИЕ УМЕНИЙ И НАВЫКОВ, СВЯЗАННЫХ С ОБУЧЕНИЕМ АЛГЕБРЕ

1. Принципы построения и содержание системы упражнений по курсу алгебры. В основу построения системы упражнений по курсу алгебры в восьмилетней школе должны быть положены два принципа, которые на первый взгляд могут показаться противоречащими один другому, но на самом деле органически связаны между собою.

С одной стороны, все предлагаемые упражнения должны быть расположены с определенной постепенностью и доведены т о л ь к о д о т о й с т е п е н и с л о ж н о с т и (по структуре и содержанию), которая — пусть при руководстве учителя — окажется по силам учащимся. Но, с другой стороны, выбор и расположение упражнений должны всемерно содействовать активной работе учащихся и развитию у них способности к самостоятельному разысканию рациональных путей решения примеров и задач.

Содержание системы упражнений определяется в основном изучаемым материалом, но параллельно с изучением нового — в связи с ним или независимо от него, т. е. в порядке повторения,— следует возвращаться к ранее изученному материалу и практиковавшимся уже способам и приемам выполнения упражнений.

Упражнения по алгебре, выполняемые в VI и дальнейших классах, приобретут необходимое образовательное и развивающее значение и вызовут у учащихся интерес и стремление к самостоятельной деятельности, если учитель сообщит этим упражнениям ряд важных свойств.

1) Хорошие результаты в указанных отношениях достигаются, если в упражнения вносится элемент вариативности их формы или содержания: вслед за данным упражнением предлагается упражнение, представляющее собою как будто вариант предыдущего, но на самом деле имеющее хотя бы незначительное принципиальное отличие от него.

2) Весьма большое значение при обучении алгебре имеет работа учителя над развитием у учащихся способности к нахождению и применению наиболее рациональных приемов решения вопросов. В этой области многое должно быть добыто учащимися путем выполнения ряда существенных указаний учителя, которые он систематически делает в процессе преподавания им алгебры, но немало может быть найдено и изобретено учащимися, приученными к этим поискам, имеющими в них потребность и находящими в них удовлетворение.

К числу рационализирующих приемов (уже в пределах курса алгебры VI класса) могут быть отнесены: выбор порядка выполнения действий; умножение многочлена на многочлен по способу „собирания“ членов произведения, содержащих одну и ту же степень главной буквы; преобразование дроби посредством умножения ее числителя и знаменателя на надлежаще выбранный множитель; комбинирование слагаемых алгебраической суммы или членов уравнения в группы для предварительного выполнения действий в каждой группе; выделение из дроби ее целой части; доказательство тождества многочленов посредством расположения их по степеням одной и той же буквы и т. п.

3) С упражнениями на нахождение числовых значений алгебраических выражений могут быть связаны интересные упражнения на доказательство справедливости сначала равенств при данной системе значений входящих в них букв, а затем тождеств, что составляет весьма полезную пропедевтику для изучения понятия о тождестве.

4) Углубить понимание учащимися значения буквенных обозначений для теоретических исследований очень помогает ознакомление их с нахождением общего вида чисел, обладающих заданными свойствами, и выполнение упражнений, подводящих к несложным, но весьма занимательным вопросам теоретической арифметики (например, к вопросам о делимости натуральных чисел, о свойствах взаимно простых чисел), вполне доступным учащимся VI класса.

5) Сведения об однородных и симметричных многочленах не только оживляют изучение действий над ними, но могут служить основанием для контроля, для проверки результата по его виду, а также для легко запоминаемых обобщений (например, для усвоения признаков делимости суммы или разности одинаковых степеней на сумму или разность оснований).

6) Выполнение учащимися лабораторных работ также может служить широким полем для их самостоятельной деятельности, в особенности если эти работы имеют математическое содержание и требуют для их выполнения некоторых размышлений (например, о возможности применить для решения вопроса или задачи графический метод, о наиболее рациональном выборе осей и масштабов на них, об употреблении таблиц для вычислений, о виде зависимости величин, о правомерности изображения этой зависимости прямой, о степени точности результата и т. п.).

7) Хотя бы в ограниченной мере и в VI классе имеется возможность применять неодинаковые способы выбора неизвестной при составлении уравнения по условию задачи и этим путем более рационально выполнять ее решение.

2. Виды систем упражнений, выполняемых в классе и в домашних заданиях. Очевидно, что в классе деятельность учителя должна быть использована всемерно, с наибольшей продуктивностью. Поэтому выбор и расположение отбираемых им для работы в классе упражнений должны удовлетворять тому требованию, чтобы каждое упражнение было достаточно эффективным, обучало, не только закрепляло, но и углубляло знания, заставляло учащихся думать, размышлять. Самый большой враг успешности обучения — скука, равнодушие. Наоборот, вполне обеспечивают успешность обучения интерес, желание и даже жажда „дойти до всего своим умом", проявить (и показать другим — и это хорошо!) свое умение самостоятельно решать вопрос. Может ли это умение прийти в действие, проявиться при „топтании на месте", при затверживании, близком к зубрежке? Конечно, не может. Живой ветер искания, исследования, стремления к достижению должен непрестанно веять в классе. Уже в VI классе при обучении алгебре это настроение принесет неоценимую пользу для развития учащихся и для подготовки их к дальнейшему изучению математики.

Иначе следует осуществлять выбор и расположение упражнений для домашних заданий. Не оставляя заботы о развитии у учащихся способности к самостоятельному нахождению путей решения примеров и задач, учитель предложит им упражнения для закрепления теории и приобретения прочных умений и навыков в области изучаемой темы.

В обоих случаях, т. е. в классе и дома, учащийся должен работать над достаточно содержательными упражнениями, вызывающими у него желание выполнить их, проверить свои знания и умения, приобрести уверенность в своих силах, получить удовлетворение. Это может быть достигнуто различными средствами.

1) Упражнения в нахождении числовых значений алгебраических выражений представят бóльший интерес для учащихся, если они будут облечены в форму требований доказать справедливость равенства при данных или (в случае тождества) при любых значениях входящих в него букв.

2) Выполнению действий над рациональными числами можно сообщить конкретное содержание, если приме-

нить его к нахождению средних значений (температур, приращений переменной величины, результатов измерений) и отклонений от этих средних значений (являющихся в случае измерения случайными ошибками).

3) Вообще может и должна быть установлена связь со смежными дисциплинами (физикой, географией) и производственным обучением (техникой), которые могут доставить для применения алгебры разнообразный и содержательный материал.

4) К упражнениям по алгебре, имеющим заинтересовывающее учащихся содержание и рассчитанным на их самостоятельную деятельность, относятся лабораторные работы, к которым могут быть отнесены: составление таблиц значений данного алгебраического выражения и посильное исследование по ним характера изменения этого выражения (в отношении равномерности, возрастания или убывания, ограниченности, границ изменения); нахождение промежуточных значений алгебраического выражения (интерполяция); построение графика изменения алгебраического выражения (зависимости); чтение графика зависимости, т. е. указание ее свойств по графику; построение графика зависимости по эмпирическим формулам, по результатам выполненных учащимися наблюдений и измерений; приближенное нахождение площадей фигур (например, по формуле Симпсона) и т. п.

5) Значительно большее место, чем это сделано в программе, должно быть уделено в курсе VI класса решению уравнений и составлению их по условиям задач, в особенности по условиям задач, относящихся к смежным дисциплинам.

3. Обучение устному счету при выполнении упражнений по алгебре. Необходимо признать, что применение устного счета при выполнении упражнений по алгебре еще не нашло себе в школе удовлетворительного осуществления — ни по широте, ни по существу. Между тем при обучении алгебре этот прием заслуживает не меньшего внимания и принесет не меньше пользы, чем при обучении арифметике, где устный счет, по-видимому, занял прочное место.

Умение не все записывать, а выполнять часть вычислений и преобразований устно требует предварительного осознания структуры выражения, подлежащего преобразованию, быстрого проявления сообразительности, вообще некоторого усилия ума вместо несколько гасящего мысль почти механического записывания. Устный счет, экономя время и, пожалуй, силы, позволяет больше заметить, увидеть и глубже понять операцию; он доставляет и большее удовлетворение выполняющему упражнение, так как непрерывно поддерживает в нем состояние размышляющего человека.

Может быть, именно поэтому учащиеся, употребляющие параллельно с письменным и устный счет, тверже, сознательнее и безошибочнее выполняют и письменные упражнения.

Упражнения в устном счете по алгебре хорошо развивают способность учащихся к большему сосредоточению внимания при выполнении письменных упражнений, к самоконтролю и проверке результата по его соответствию или несоответствию ожидаемому, предварительно намеченному результату.

Устному счету сродни и арифметическая „прикидка" результата, и устное выполнение упражнений на доказательство по геометрии (в том числе без чертежа).

4. Самостоятельная работа учащихся. Этот вид работы: 1) ставит учащегося именно в то положение, в котором он должен был бы находиться на протяжении всего периода изучения им математики, т. е. в положение ищущего, прилагающего некоторое усилие мысли; 2) укрепляет уверенность учащегося в усвоении им знаний и умении применить их, поднимает его моральное состояние; 3) позволяет узнать, приобрели ли учащиеся на данном этапе достаточно сознательные и прочные знания и умения.

В зависимости от объема задания, предложенного учащимся для самостоятельной работы, оно может быть рассчитано на весь урок или на часть его: и в том и в другом случае учитель может рассматривать эту работу как контрольную.

Надо добиться того, чтобы учащийся пристрастился к самостоятельной работе, выполнял ее с удовольствием, зная, что безошибочное и удачное ее выполнение еще раз докажет наличие у него твердых знаний и способности ответить на те вопросы и преодолеть те трудности, которые содержатся в задании. Это будет достигнуто, если в задание будут включены вопросы, требующие от учащегося не простого привлечения правила или формулы, а некоторых несложных размышлений, исканий и допускающие различные пути решения. Кроме того, по крайней мере один из вопросов должен принадлежать к тем, которые рассчитаны на наличие у учащегося элементарных творческих способностей, так называемого математического мышления.

Постановка самостоятельной работы учащихся, основанная на пробуждении у них живого интереса к науке, на здоровом соревновании, на их стремлении во что бы то ни стало самостоятельно найти решение вопроса, создаст атмосферу, при которой эта работа перестанет быть для учащихся „несчастьем", а будет доставлять им удовлетворение и радость.

СРЕДСТВА ВОСПИТАТЕЛЬНОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ НА УЧАЩИХСЯ ПРИ ОБУЧЕНИИ АЛГЕБРЕ

Основным средством воспитательного воздействия на учащихся является, конечно, твердо проводимое привлечение их к *активному* участию в процессе овладения учебным материалом и в выполнении заданий всех видов. Выработка у учащихся такого стремления к активной умственной деятельности, которое должно постепенно сделаться для них вполне привычным, постоянно свойственным их уму, обеспечит повышение их интереса к данной ветви науки и воспитает в них любовь к научным знаниям и даже преклонение перед наукой. В особенности этого легко достигнуть в нашей стране, где наука поднялась на небывалую высоту и имеет грандиозные завоевания. Из различных областей науки, содействовавших этому ее расцвету, в настоящее время можно без преувеличения на первое место поставить математику.

Глубоко и широко понимаемая идея активности охватывает и любознательность, и инициативу, и самостоятельную деятельность, и проявление творческих способностей. Все обучение в советской школе предполагает создание такой *атмосферы*, которая содействовала бы возникновению и развитию всех важнейших сторон умственной деятельности человека, готовящегося на высоком теоретическом и практическом уровне выполнять порученный ему общественно полезный труд.

Этой основной задаче должны быть подчинены все виды и этапы обучения — сообщение нового материала, занятия по выполнению упражнений и лабораторных работ, повторение, углубление и проверка знаний учащихся. Всюду и всегда, как только представляется возможность, должны быть призваны к действию мышление учащегося, его активное участие в общей и индивидуальной работе. Это направление должно быть основным при проведении урока и отборе материала для урока, домашних заданий, лабораторной работы, углубления и проверки знаний. Вопрос о том, будет ли предложенный материал учить думать, размышлять, соображать, заинтересовывать и даже увлекать — никогда не должен оставаться вне поля зрения учителя, а, наоборот, всегда должен волновать и беспокоить его.

Приведенные общие соображения относятся к преподаванию всей математики (и, конечно, не только математики). Однако и в процессе обучения алгебре в VI классе они могут быть осуществлены в немалой степени.

Вместе с тем на этой начальной стадии должны найти себе надлежащее, совсем не второстепенное место еще некоторые элементы воспитательной работы учителя.

Именно серьезным средством воспитания при обучении алгебре может служить выбор таких задач, условия которых имели бы как образовательное значение, устанавливая связь между алгеброй и смежными дисциплинами, так и, в особенности, воспитательное значение в направлении выработки у учащихся верных представлений о размерах, формах и содержании осуществляемого государством грандиозного строительства.

Сообщение всему процессу обучения математике, и в частности алгебре, определяющего его элемента созидания, исканий и достижений, даже „открытий" весьма благотворно повлияет на выработку у учащихся наиболее ценных качеств: у них воспитывается воля, настойчивость в достижении цели, усидчивость и выдержка в преодолении трудностей и препятствий; непрерывно учащиеся все в большей степени приобретают элементарные творческие навыки, умение самостоятельно облечь вопрос в математическую форму, решить и исследовать его.

Наконец, приобретение учащимися сведений по истории отечественной математики, ее исключительных достижений наполняет их сердца любовью к Родине.

В настоящее время, когда производительный и общественно полезный труд составляет органическую часть деятельности учащихся в период их пребывания в школе, воспитание у них высокоидейного отношения к труду произойдет в результате их нового образа жизни в обстановке производства.

В частности, убеждение в практической применимости математики укрепится у учащихся благодаря их ознакомлению с использованием сведений из алгебры и геометрии при решении возникающих технических вопросов; откроется новое поле для приложения творческой мысли учащихся, для развития их инициативы и изобретательности.

ГЛАВА I

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ

§ 1. УПОТРЕБЛЕНИЕ БУКВ ДЛЯ ОБОЗНАЧЕНИЯ ЧИСЕЛ

1. О введении в курс алгебры. Начинать курс алгебры с сообщения сколько-нибудь обстоятельных исторических сведений о возникновении алгебры или с разъяснения названия науки (слова „алгебра") едва ли возможно, так как для этого надо было бы предполагать наличие у учащихся хотя бы первоначального представления об уравнении.

Преподаватель может только указать, что алгеброй занимались уже в древности вавилоняне и египтяне, в начале нашей эры — греки (Диофант), а позднее — индийцы, арабы и узбеки, излагавшие алгебру на арабском языке. Сообщение следует сопровождать показом соответствующих стран на карте и весьма краткой характеристикой отношения этих народов к математическим знаниям.

Не раскрывая содержания слова „алгебра", можно сказать, что алгебра есть язык математики, с помощью которого ученые могут сделать доступными для понимания всех народов свои исследования и достигнутые результаты. Пользование выработанными в алгебре методами позволяет математикам в значительной мере облегчить свою работу по выполнению вычислений и решению разнообразных задач, не поддающихся решению с помощью арифметики. Алгебра помогла ответить на многие важные вопросы, возникшие в геометрии, механике, физике, астрономии, технике и других науках.

2. Введение букв. Введение букв в алгебру может быть осуществлено тремя способами, каждый из которых имеет свое значение и должен быть использован.

2, *1*. *Первый способ*. Первый способ заключается в составлении о б щ и х ф о р м у л решения арифметических задач.

1) С помощью равенства вида

$$x = A, \tag{1}$$

где A есть арифметическое выражение, составленное из данных ч и с е л, указывают, в какой зависимости от данных чисел находится искомое число x; оставляя без изменения словесную формулировку задачи, заменяют данные числа другими числами и вновь находят равенство вида (1).

2) Выясняют, что при этой замене выражение A сохраняется в отношении совокупности и порядка выполнения указанных в нем действий; от замены числовых данных изменяется только результат выполнения этих действий, т. е. значение неизвестной x.

3) Приходят к выводу, что равенство вида (1) могло бы сослужить хорошую службу всем, кто пожелал бы иметь краткое и ясное указание, какие действия и в каком порядке надо выполнить над числами, данными в условии к а ж д о й задачи рассматриваемого содержания (типа), чтобы найти искомое число; для этого достаточно было бы в выражении A вместо данных чисел написать просто названия тех величин, значения которых даны.

Например, для решения задачи на смешение можно пользоваться следующим равенством:

$$\text{Цена смеси} = \\ = \frac{\text{цена I сорта} \times \text{вес I сорта} + \text{цена II сорта} \times \text{вес II сорта}}{\text{вес смеси}}.$$

Можно составить и более общую формулу, которая охватит задачи на нахождение пробы сплава, температуры или крепости смеси.

4) Однако, учитывая громоздкость такой записи, люди уже давно условились обозначать наиболее

употребительные величины определенными буквами латинского алфавита. Если для величин данной задачи такие обозначения и не установлены, то все же проще будет сопровождать найденное равенство, указывающее ход решения задачи, соответствующей табличкой обозначений. Например, при наличии таблицы:

Сорт	Количество (вес, объем)	Качество (цена, проба, температура, крепость)
I	a	p
II	b	q
Смесь	$a+b$	x

равенство $x=\frac{pa+qb}{a+b}$ дает легко обозримое и запоминаемое указание о ходе решения задачи на смешение.

Равенство, указывающее, какие действия и в каком порядке надо выполнить над данными в условии задачи числами, чтобы найти искомое число, называется **общей формулой** решения задачи.

С составления общих формул решения арифметических задач различных типов и начнется ознакомление учащихся с введением букв для обозначения чисел.

Вместе с тем составление общих формул может быть использовано для повторения методов решения арифметических задач.

Приведем еще примеры задач, которые могут быть использованы в тех же целях.

1) Бассейн наполняется одним краном в отдельности за a мин., другим в отдельности за b мин. За сколько времени наполнится бассейн при совместном действии этих кранов?

2а) Из двух пунктов, расстояние между которыми равно d *км*, выходят одновременно навстречу друг другу два поезда со скоростями a и b *км* в час. Через сколько часов поезда встретятся?

2б) Из двух пунктов выходят одновременно друг другу навстречу два поезда со скоростями a и b *км* в час и встречаются через t час. Как велико расстояние между пунктами?

3) Бассейн объемом в p $м^3$ наполняется насосом за a час. За какое время наполнится водой тем же насосом другой бассейн, объемом в q $м^3$?

4) Паровая машина делает в минуту n оборотов, ход поршня равен l *см*. Найти скорость поршня.

Решение. При полном обороте поршень делает 2 хода, так что число ходов в минуту равно $2n$. Так как длина хода равна l *см*, то скорость поршня равна $\frac{2nl}{60}\ \frac{см}{сек}$.

5) Одно из зубчатых колес имеет m зубьев, другое — n зубьев. Сколько оборотов сделает второе колесо за промежуток времени, в течение которого первое сделает k оборотов?

Решение. Число проскочивших зубьев каждого колеса за k оборотов первого колеса равно km. Следовательно, число оборотов второго колеса равно $\frac{km}{n}$.

6) Длина комнаты равна a *м*, ширина b *м*, высота h *м*. Найти общую поверхность пола, потолка и стен (вместе с дверью и окнами).

Ответ: $2(a+b)h+2ab$.

7) Вклад, равный a руб., приносит в год $p\%$ прибыли. Сколько процентов прибыли принесет он за t лет?

Ответ: $\frac{apt}{100}$.

8) По плану завод должен выпускать в день a автомобилей. Фактически завод выпускает в среднем b автомобилей в день, перевыполняя дневную норму на m автомобилей. Выразить зависимость между числами a, b и m.

9) Автомобиль за t час. проехал a *км*, делая в час по d *км*. Выразить зависимость между числами t, a и d.

10) Ставка рабочего равна a руб. в месяц; дополнительный заработок составляет $p\%$ ставки. Фактический заработок равен m руб. Выразить зависимость между числами a, m и p.

11) При делении целого числа a на целое число b найдены частное q и остаток r. Выразить зависимость между числами a, b, q, r.

2, 2. *Второй способ.* Второй способ введения букв связан с аналитическим выражением функциональной зависимости между величинами, установленной в геометрии, механике, физике, астрономии, технике. Учитель сообщает, что найденные наукой количественные соотношения (зависимости) между величинами очень удобно и наглядно могут быть записаны, если эти величины (точнее — значения их) обозначить буквами.

В VI классе могут быть приведены простейшие зависимости:

$S=bh$ (площадь параллелограмма);

$S=2\ (a+b)c$ (боковая поверхность бруска с измерениями a, b, c);

$T=2\ (a+b)c+2ab$ (его полная поверхность);

$V=abc$ (его объем);

$s=vt$ (равномерное движение);

$P=dV$ (зависимость между весом P, удельным весом d и объемом V тела);

$p=\frac{P}{S}$ (p есть давление, производимое силой P на площадь S);

$A=a+\frac{apt}{100}$ (наращенный капитал).

Помимо этого, учитель найдет в технических справочниках немало доступных примеров, точно или приближенно выражающих некоторые интересные закономерности.

Учитель может дать учащимся хотя бы самое элементарное представление о путях открытия законов, состоящих: 1) в накоплении наблюдений, записываемых в виде таблиц, и 2) в открытии закономерностей, аналитически выражаемых в виде формул. О графическом представлении функциональной зависимости говорить еще рано, но, когда в сравнительно недалеком будущем к этому представится возможность, почва будет несколько подготовлена.

Замечание. Конечно, второй способ отличается от первого не по существу, а лишь по постановке вопроса.

К формулам, которые выражают законы природы, но возникли из эмпирических формул, относятся формулы, выражающие закон падения тел Галилея, закон всемирного притяжения, свойства идеальных газов и т. д. В качестве эмпирических формул, установленных с помощью обработки таблиц числовых значений величины, могут быть указаны, например, следующие:

1) формула $v=0{,}31\,t$, выражающая зависимость между скоростью v охлаждения и избытком t температуры охлаждающегося тела над температурой окружающего пространства;

2) формула $u=54+0{,}5t$, выражающая вес u количества некоторого вещества (бромистого калия), могущего раствориться в 100 *г* воды при температуре $t°$; составлена на основании таблицы:

$t°$	0	20	40	60	80
u	53,4	64,6	74,6	84,7	93,5

3) формула $H=17v^2-200$, выражающая зависимость между скоростью v (в узлах) и мощностью H (в лошадиных силах) машины на судне; составлена на основании таблицы*:

h	290	560	1144	1810	2300
v	5	7	9	11	12

2,3. *Третий способ*. Третий способ, которым можно выяснить значение введения букв для обозначения чисел, состоит в переводе на алгебраический язык формулировок законов (основных свойств) арифметических действий.

Однако ввиду некоторой отвлеченности этого способа и, главное, недостаточной показательности доставляемых им выражений его лучше изложить несколько позже, использовав для другой цели, а для осуществления поставленной цели удовлетвориться первыми двумя способами.

3. Понятие об алгебраическом выражении. В результате упражнений на употребление букв с указанными выше целями учащиеся составят доста-

* Узел соответствует 1 морской миле в час, т. е. 1,852 *км* в час. Лошадиная сила равна 75 *кГм* в сек.

точное число алгебраических выражений, и учитель может считать, что он подготовил почву для определения этого понятия. Из существующих нескольких определений целесообразнее остановиться на следующем:

Определение. Совокупность чисел и букв, соединенных между собою посредством знаков, которые указывают, какие действия и в каком порядке надо произвести над данными числами и значениями букв, называется алгебраическим выражением.

Заметим, что здесь к знакам отнесены также и скобки.

4. Понятие о возведении в степень. С действиями возведения в степень учащихся можно было познакомить уже в курсе арифметики в связи с разложением чисел на простые множители. Если это не было осуществлено, то в курсе алгебры придется сообщить все сведения о возведении чисел в натуральную степень впервые, что будет иметь образовательное значение и вместе с тем позволит ввести новые, более сложные по виду и структуре алгебраические выражения.

По поводу введения понятия о действии возведения числа в степень следует сделать только одно замечание — выражение „повторить сомножителем" недостаточно точно и ясно, поэтому надо предпочесть определение, не содержащее этого выражения, именно: степенью некоторого числа a называется произведение нескольких сомножителей, каждый из которых равен числу a; нахождение какой-либо степени числа называется возведением этого числа в степень; число, которое возводится в степень, называется основанием степени, а число, указывающее, в которую степень возводится основание, т. е. сколько равных между собою чисел взято для составления степени, называется показателем степени.

После введения этого действия для учащихся сделаются понятными формулы: площади квадрата $S=a^2$; объема куба $V=a^3$; единицы давления $\frac{Г}{см^2}$, единицы удельного веса $\frac{Г}{см^3}$ и другие содержащие степени.

Указания к § 1 (пункты 2—4)

2.* Обозначение чисел буквами должно начинаться и входить в практику уже в арифметике, предоставляющей для этого широкие возможности — при решении задач одного и того же типа, при записи законов арифметических действий, при решении простейших уравнений (задач с иксом) на основании зависимостей между данными числами и результатами действий над ними.

Внесение этих элементарных идей алгебры в курс арифметики, в настоящее время все больше поддерживаемое и проводимое в жизнь учителями, заслуживает всемерного одобрения, так как создает плавный переход от арифметики к алгебре — „арифметизирует" алгебру и „алгебраизирует" арифметику.

В этом направлении надо, конечно, идти еще дальше. Все сильнее раздаются голоса в пользу того, что весь курс арифметики, изучаемый в VI классе, может и должен быть включен в курс алгебры этого класса.

В полной мере это предложение относится к разделу „Пропорции. Прямая и обратная пропорциональность величин".

В самом деле, из арифметического определения прямой пропорциональности двух величин x и y, требующего существования пропорции

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{x_2}{x_1}, \tag{1}$$

непосредственно следует ее алгебраическое определение, так как пропорция (1) влечет за собой пропорцию

$$\frac{y_2}{x_2} = \frac{y_1}{x_1}, \tag{2}$$

указывающую, что для любого значения x первой величины и соответствующего ему значения y второй величины отношение $\frac{y}{x}$ сохраняет некоторое постоянное значение k, так что для любой пары таких значений имеет место равенство

$$y = kx.$$

* Пункты „Указаний" соответствуют пунктам теоретического материала.

Точно так же из арифметического определения обратной пропорциональности двух величин x и y, требующего существования пропорции

$$(3) \qquad \frac{y_2}{y_1}=\frac{x_1}{x_2},$$

непосредственно следует ее алгебраическое определение, так как пропорция (3) влечет за собою равенство

$$(4) \qquad x_1y_1=x_2y_2,$$

указывающее, что для **любого** значения x первой величины и соответствующего ему значения y второй величины произведение xy сохраняет некоторое постоянное значение k, так что для любой пары таких значений имеет место равенство

$$xy=k$$

и, следовательно, при $x \neq 0$ — равенство

$$y=\frac{k}{x}.$$

Таким образом, имеется возможность уже в арифметике употреблять буквы при обозначении функциональной зависимости между величинами.

Употребление букв для записи законов (основных свойств) арифметических действий целесообразнее включить в тему „Распространение законов арифметических действий на рациональные числа". В пользу этого говорят три соображения: 1) запись законов приводит к алгебраическим выражениям, которые трудно использовать для иллюстрации этого понятия. 2) содержательное изучение законов и их следствий может представить интерес и быть достаточно доступным для усвоения их учащимися VI класса на более поздней стадии прохождения курса алгебры, когда эти законы имеют непосредственное применение, а именно при обосновании действий над одночленами и многочленами; 3) на этой стадии учащимся будет уже понятен тождественный характер равенств, выражающих законы действий.

Однако независимо от места и времени изучения в курсе алгебры законов (основных свойств) арифметических действий над числами необходимо принять во внимание следующие соображения.

Если закон переместительности сложения и умножения формулируется всегда так, что формулировка ясно выражает его сущность, то этого нельзя сказать о законе сочетательности, так как это название закона становится оправданным только при записи его с помощью равенств:

(1) $$a+b+c=a+(b+c) \text{ и } abc=a(bc)$$

и, в особенности, при распространении этого закона на случай нескольких слагаемых или сомножителей:

(2) $$a+b+c+d+e=a+(b+c)+(d+e) \text{ и т. п.};$$

$$abcde=a(bcd)e \text{ и т. п.}$$

Поэтому, должно быть, целесообразнее уже в арифметике, а затем и в алгебре давать этому закону сперва формулировку, соответствующую записям (1) и (2), а после этого формулировку, соответствующую прочтению этих равенств в обратном порядке, т. е. выражающую равенства, получающиеся из равенств (1) и (2) посредством перестановки их частей.

Равенствам (1) и (2) можно дать одну из следующих формулировок:

При сложении нескольких чисел любую группу рядом стоящих слагаемых можно заменить их суммой.

При умножении нескольких чисел любую группу рядом стоящих сомножителей можно заменить их произведением.

Сумма нескольких чисел не изменится, если любую группу рядом стоящих слагаемых заменить их суммой.

Произведение нескольких чисел не изменится, если любую группу рядом стоящих сомножителей заменить их произведением.

Для того чтобы к какому-либо числу прибавить несколько чисел последовательно, т. е. одно вслед за другим, достаточно к этому числу прибавить сумму всех чисел, которые требуется прибавить последовательно. Для того чтобы какое-либо число умножить на несколько чисел последовательно, т. е. одно вслед за другим, достаточно это число умножить на произведение всех чисел, на которые требуется умножить последовательно.

После приведения этих (или аналогичных им, но в точности повторяющих их) формулировок можно согласиться с тем, чтобы учащиеся в своей практике пользовались и более краткими формулировками, — например, такими:

Сумма нескольких чисел не зависит от способа группировки слагаемых.

Произведение нескольких чисел не зависит от способа группировки сомножителей.

После этого учитель должен обратиться ко второй формулировке закона сочетательности сложения и умножения, соответствующей записи его в виде равенств

$$a + (b + c + d) = a + b + c + d; \quad a(bcd) = abcd.$$

Эти равенства обычно формулируются так:

Для того чтобы к какому-либо числу прибавить сумму нескольких чисел, можно прибавить к нему первое слагаемое, к полученному результату — второе слагаемое и т. д. Для того чтобы какое-либо число умножить на произведение нескольких чисел, можно умножить это число на первый сомножитель, полученный результат — на второй сомножитель и т. д.

Обычная формулировка закона распределительности вполне выражает его сущность и усваивается учащимися без затруднений. Учащимся будет интересно и полезно узнать следующее общее правило:

Для того чтобы над результатом сложения или умножения выполнить действие той же ступени, надо выполнить это второе действие только над **одним** компонентом первого действия:

$$(a + b + c) \pm h = (a \pm h) + b + c = a + (b \pm h) + c = \\ = a + b + (c \pm h);$$

$$(abc) \cdot p = (ap) \cdot bc = a \cdot (bp) \cdot c = ab \cdot (cp);$$

$$(abc) : p = (a : p) bc = a (b : p) c = ab (c : p).$$

Для того чтобы над результатом сложения или умножения выполнить действие следующей ступени, надо выполнить это второе действие над **каждым** компонентом первого действия:

$$(a + b + c)p = ap + bp + cp;$$

$$(abc)^m = a^m b^m c^m.$$

Если изучение законов арифметических действий выполняется в первом разделе программы („Алгебраические выражения"), то оно должно носить характер повторения тех сведений, которые были приобретены учащимися об этих законах в арифметике, и сопровождаться иллюстрацией их на примерах (так, как это сделано в § 5 учебника*).

Но если ознакомление с законами действий будет выполнено во втором разделе программы („Рациональные числа") и включено в тему „Распространение законов арифметических действий на рациональные числа", то справедливость этих законов может быть установлена посредством рассуждений, проводимых на примерах, но все же содержащих все необходимые логические элементы (примерно так, как это сделано в § 14 и 19 учебника или в § 4 настоящего руководства).

3. Формулировка определения понятия об алгебраическом выражении не установилась окончательно. Кроме приведенной в пункте 3 § 1-го формулировки, в которой употреблен термин „совокупность", приемлемы и другие формулировки.

Употребление автором учебника термина „запись" заставляет думать, что он предпочитает этот термин термину „совокупность".

Несколько подкупает и то решение вопроса, которое нашли авторы учебника по алгебре Д. К. Фаддеев и И. С. Соминский и редактор руководства по алгебре С. И. Новоселов, рассматривающие понятие „алгебраическое выражение" как вид родового понятия „выражение". Однако с этим нелегко согласиться: едва ли можно считать, что у учащихся создано общее понятие „выражение", которое будет содействовать раскрытию понятия „алгебраическое выражение".

Следует внести полную ясность в понятие „алгебраическое выражение", не допуская смешения его с понятием „формула". Формула есть общее понятие для равенства и неравенства; с помощью формулы записывается тот факт, что между двумя арифметическими или алгебраическими выражениями существуют отношения равенства или неравенства. Так, общая формула решения арифметической задачи есть равен-

* А. Н. Барсуков, Алгебра. Учебник для VI—VIII классов. Под ред. С. И. Новоселова, М., Учпедгиз, изд. 6, 1961.

ство, выражающее, какая зависимость существует между значением x искомой величины и значениями $a, b, c, \ldots$ данных величин. Формулами являются равенства, выражающие различные законы в арифметике, геометрии, физике, химии и других науках. Формулами являются неравенства, существующие между средним арифметическим и средним геометрическим неравных чисел, и другие неравенства между величинами.

4. При ознакомлении учащихся с действием возведения в натуральную степень используется аналогия с действием умножения на натуральное число. Учитель значительно облегчит свою работу по этой теме, если он впервые введет понятие о степени с натуральным показателем при изучении разложения чисел на простые множители. Избегать этого порядка изложения материала у него нет убедительных оснований, а польза от своевременного введения простого и легко усваиваемого понятия значительна: учащиеся приобретают понятие о к р а т н о с т и простого множителя, удобно записывают и наглядно выявляют результат разложения на множители и структуру числа, уже на этой стадии выполняют простейшие упражнения, относящиеся к натуральным степеням, а в близком будущем получают представление о квадратах и кубах чисел натурального ряда и посредством графического изображения этих квадратов и кубов (в виде отрезков) об их росте. Все это может быть легко и с бесспорным интересом воспринято учащимися даже в V классе.

Но если этим вопросом не занимались в курсе арифметики, то он может быть с достаточной полнотой (в двух темах) рассмотрен в указанных направлениях в курсе алгебры VI класса.

§ 2. ЧИСЛОВЫЕ ЗНАЧЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО ВЫРАЖЕНИЯ

5. Понятие о числовом значении алгебраического выражения. Если вместо букв, входящих в алгебраическое выражение, мы подставим данные числа и выполним все указанные в нем действия, то получим число, которое, конечно, зависит от того, какие значения даны входящим в это алгебраическое выражение буквам. Это число называют **числовым значением** алгебраического выражения, которое оно получает при данных *значениях* входящих в него букв.

Возьмем алгебраическое выражение $3x^2$. Если мы будем давать букве x любые числовые значения, то выражение $3x^2$ будет получать не любые числовые значения, а **соответствующие** тем, которые были даны букве x. Значит, все числовые значения, которые будет получать выражение $3x^2$, будут составляться из числовых значений буквы x по определенному **правилу, закону**, указываемому выражением $3x^2$, т. е. по такому правилу: каждое числовое значение буквы x возводится в квадрат и полученный результат умножается на 3. Таким образом, все числовые значения выражения $3x^2$, как те, которые мы получим, так и те, которые можно получить, давая букве x новые значения,— составляют не какое-либо беспорядочное, хаотическое множество чисел, а, напротив, некоторое множество чисел, имеющих одно происхождение: *каждое из этих чисел находится в определенной зависимости от числового значения буквы* x и в этом смысле **соответствует** ему.

6. Составление таблицы числовых значений алгебраического выражения. Для того чтобы ясно представить себе (видеть) это соответствие, обычно составляют таблицу, в которую включают значения буквы или букв, входящих в данное алгебраическое выражение, и соответствующие значения алгебраического выражения.

Например, если алгебраическое выражение $2x^3$ мы обозначим буквой y, то таблица будет иметь вид*:

x	0	1	2	3	...	-1	-2	-3	...
y	0	2	16	54	...	-2	-16	-54	...

или сокращенный вид:

x	0	±1	±2	±3	...
y	0	±2	±16	±54	...

Здесь верхним знакам в первой строке соответствуют верхние знаки во второй строке, а нижним — нижние.

* Включение в эту и следующие таблицы отрицательных значений буквы x позволяет использовать их и в следующей главе.

Если требуется составить таблицу числовых значений алгебраического выражения $3x^2y$, содержащего две буквы, то ей можно придать вид:

x	0	± 1	± 2	± 3	± 4	...
y	0	1	2	3	4	...
$3x^2y$	0	3	24	81	192	...

или вид:

$x \backslash y$	0	1	2	3	4	...
0	0	0	0	0	0	...
± 1	0	3	6	9	12	...
± 2	0	12	24	36	48	...
± 3	0	27	54	81	108	...
± 4	0	48	96	144	192	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

Последняя таблица называется таблицей **с двойным входом**. В ней значения алгебраического выражения помещаются на пересечении той вертикали и той горизонтали, которые возглавляются данными значениями двух букв, входящих в выражение. Такой именно вид имеет таблица умножения, по аналогии с которой можно составить таблицу сложения; в первой содержатся значения выражения xy, а во второй — значения выражения $x+y$, соответствующие натуральным значениям букв x и y.

Составление числовых значений алгебраического выражения приобретает содержательный смысл, когда это алгебраическое выражение указывает закон, по которому происходит изменение какой-либо непрерывной величины в зависимости от одной или нескольких независимых величин; такими алгебраическими выражениями служат правые части **формул**, выражающих зависимость какой-либо непрерывной величины от других величин.

Например, могут быть использованы формулы:

$S = bh$ (площадь прямоугольника);

$s = vt$ (равномерное движение);

$P = dV$ (зависимость между весом P, удельным весом d и объемом V тела);

$p = \frac{P}{S}$ (p есть давление, производимое силой P на площадь S);

$l_t = l_0 (1 + \alpha t)$ (линейное расширение стержня).

Если величина находится в зависимости от двух независимых величин, то сначала одной из этих величин приписывается постоянное значение, а другая рассматривается как изменяющаяся (переменная) величина, и таблица числовых значений составляется при этом предположении. Затем можно перейти к составлению таблиц числовых значений зависимых величин в предположении, что изменяются обе независимые величины; при этом получаются таблицы с двойным входом.

Например, по формуле

$$V = b^2 h,$$

выражающей объем V бруска, сечением которого служит квадрат со стороной b, в зависимости от его длины h, можно составить таблицы числовых значений объема V: 1) при постоянном b и переменном h; 2) при постоянном h и переменном b; 3) при переменных b и h.

По формуле

$$S = x(12 - x),$$

выражающей площадь S прямоугольника с полупериметром 12, в зависимости от его основания x, можно составить таблицу числовых значений площади S при переменном x. На основании этой таблицы можно заключить, что площадь S имеет наибольшее значение при $x = 6$.

По формуле

$$p = x + \frac{36}{x},$$

выражающей полупериметр p прямоугольника с площадью 36, в зависимости от его основания x, можно составить таблицу числовых значений полупериметра p при переменном x. На основании этой таблицы можно заключить, что полупериметр p имеет наименьшее значение при $x = 6$.

7. Порядок действий и употребление скобок. При выполнении упражнений на нахождение числовых значений алгебраических выражений естественно возникает вопрос о порядке действий. С этим вопросом учащиеся встречались в арифметике, и теперь придется только систематизировать имеющиеся у них правила и распространить их на выражения, содержащие степени.

Предлагаемые учебником в § 4 правила 1, 2, 3 не обладают необходимой систематичностью и ввиду этого не могут служить для учащихся четким руководством к действию. Целесообразнее заменить их теми правилами порядка выполнения действий, которые предложены в „Алгебре" А. П. Киселева *.

Еще обстоятельнее это сделано в „Сборнике алгебраических задач" Н. А. Шапошникова и Н. К. Вальцова:

„При нахождении числового значения алгебраического выражения действия выполняются в следующем порядке:

1) если выражение не содержит скобок, то сперва выполняют действия третьей ступени (возведение в степень и извлечение корня), затем — действия второй ступени (умножение и деление) и, наконец, действия первой ступени (сложение и вычитание); при этом действия одной и той же ступени выполняются в том порядке, в котором они записаны; такой порядок действий называется н о р м а л ь н ы м;

2) если же выражение содержит скобки, то это означает, что следует отступить от нормального порядка действий; в этом случае сперва выполняют все действия над числами, которые заключены в скобки, а затем — все остальные действия, причем как первая, так и вторая группа действий выполняется в нормальном порядке;

3) черта в обозначениях дроби заменяет скобки" **.

8. Квадраты и кубы целых чисел.

8,*1*. Если мы будем последовательно возводить в квадрат целые числа:

(1) $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, \ldots,$

---

* А. П. К и с е л е в, Алгебра, ч. I, изд. 24, М., Учпедгиз, 1950.

** Н. А. Ш а п о ш н и к о в и Н. К. В а л ь ц о в, Сборник алгебраических задач, ч. I, изд. 3, М., Учпедгиз, 1934, § 9, стр. 17—18.

составляющие натуральный ряд чисел, то мы получим ряд квадратов этих чисел:

$$(2) \qquad 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, \\ 196, 225, 256, 289, 361, 400, \ldots .$$

Этот ряд чисел, как и натуральный ряд чисел, можно, конечно, продолжать без конца, он конца не имеет: за каждым числом ряда (2) непосредственно следует число, которое служит квадратом некоторого числа натурального ряда.

В то время как в ряде (1) содержатся *все без исключения* натуральные числа, в ряд (2) вошли далеко не все натуральные числа; например, числа 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 19, ... не содержатся в этом ряде. Таким образом, многие натуральные числа не служат квадратами натуральных чисел.

Легко заметить, что целые числа, у которых цифра единиц есть 2, 3, 7, 8, не являются квадратами целых чисел; эти цифры легко запомнить, так как они попарно дополняют друг друга до 10 ($2+8=3+7$). Следовательно, можно сказать, что, для того чтобы целое число было квадратом другого целого числа, необходимо, чтобы оно не оканчивалось ни одной из цифр 2, 3, 7, 8.

В то время как числа (1) возрастают равномерно:

$$2-1=3-2=4-3=5-4=6-5=7-6= \\ =8-7=9-8=10-9= \quad =1,$$

числа (2) возрастают неравномерно:

$$4-1=3;\ 9-4=5;\ 16-9=7;\ 25-16=9; \\ 36-25=11;\ 49-36=13;\ 64-49-15;\ \ldots;$$

но нетрудно заметить, что последовательно составляемые разности двух смежных квадратов (2) изменяются по определенному закону — они представляют собой ряд нечетных чисел:

$$3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, \ldots .$$

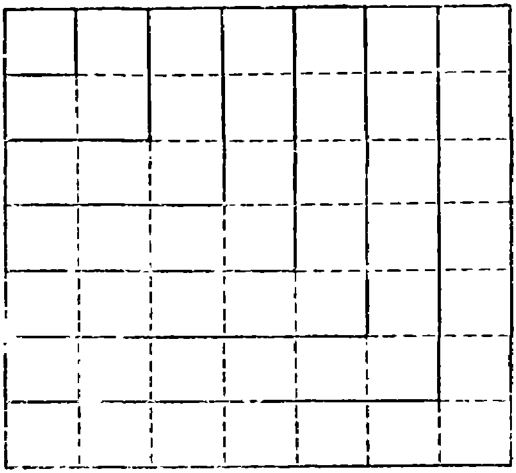
Следовательно, ряд (2) квадратов целых чисел можно получить из ряда нечетных чисел:

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, \ldots,$$

последовательно составляя их суммы:

$$1+3=4;\ 1+3+5=9;\ 1+3+5+7=16; \\ 1+3+5+7+9=25;\ \ldots .$$

Об этом дает наглядное представление черт. 1.



Черт 1

Если мы будем последовательно возводить в куб целые числа (1), то получим ряд кубов этих чисел:

(3) 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000, ...

Это — бесконечный ряд чисел: за каждым числом ряда (3) непосредственно следует число, которое служит кубом некоторого числа натурального ряда. Все натуральные числа, не принадлежащие ряду (3), не служат кубами натуральных чисел. Интересно заметить, что последней цифрой целых чисел, являющихся кубами целых чисел, может служить любая из цифр 0, 1, 2, 3, ... ,9, употребляемых для обозначения чисел по десятичной системе.

8,2. Так как при решении многих задач необходимо находить квадраты и кубы чисел, то для облегчения этой работы составлены специальные таблицы, в которых приведены приближенные значения их.

Для того чтобы найти квадрат десятичной дроби, заключенной между двумя помещенными в таблицу целыми числами, основываются на том наблюденном нами факте, что равным приращениям чисел соответствуют почти равные приращения квадратов этих чисел. Так, когда мы перешли, например, от числа 11 к числу 12, т. е. когда число 11 получило приращение 1, квадрат числа 11 получил приращение 23 ($12^2 - 11^2 = 144 - 121 = 23$), а когда мы перешли от числа 12 к числу 13, т. е. когда число 12 получило то же приращение 1, квадрат числа 12 получил приращение 25, почти равное приращению 23.

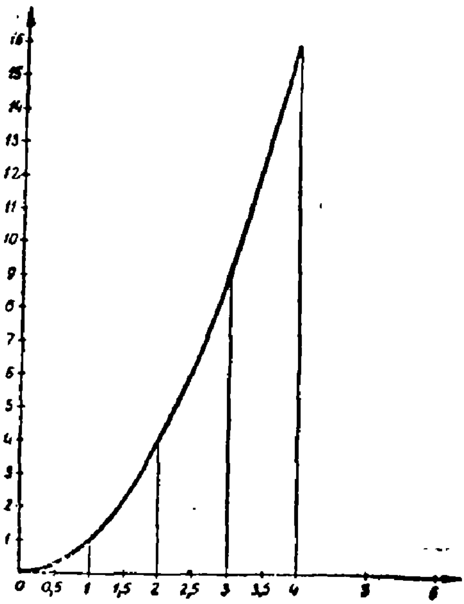
Допустим, что требуется найти квадрат числа 11,3. Поступаем следующим образом. Находим по таблице квадраты чисел 11 и 12, т. е. числа 121 и 144. Далее рассуждаем так: если число 11 получит приращение 1, то квадрат числа 11, т. е. число 121, получит приращение 23; если же число 11 получит приращение 0,1, то число 121 получит приращение, равное 1 десятой приращения 23, т. е. числу 2,3; наконец, если число 11 получит приращение 0,3, то число 121 получит приращение, равное 3 десятым приращения 23, т. е. числу 6,9. Следовательно,

$$11{,}3^2 = 121 + 6{,}9 = 127{,}9.$$

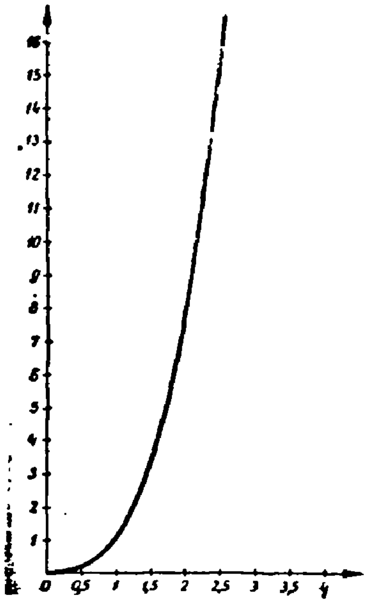
Точно так же найдем, например, что:

$$11{,}7^2 = 11^2 + 23\cdot 0{,}7 = 121 + 16{,}1 = 137{,}1;$$
$$11{,}38^2 = 11^2 + 23\cdot 0{,}38 = 121 + 8{,}74 = 129{,}74.$$

8,*3*. Для того чтобы наглядно представить себе, как изменяются квадраты и кубы чисел, построим их графические изображения так, как это указано на чертежах 2а и 2б. На этих чертежах горизонтальные отрезки изображают числа 1, 2, 3, 4, 5, а вертикальные отрезки — соответствующие этим числам квадраты или кубы. Если мы соединим возможно более плавно



Черт. 2а



Черт. 2б

верхние концы вертикальных отрезков, то получим кривую линию, дающую представление об изменении квадратов и кубов чисел в зависимости от изменения их оснований.

Но поскольку первая кривая определилась лишь небольшим числом точек, для уточнения ее построим некоторое число промежуточных точек. Мы достигнем этого, если построим также вертикальные отрезки, изображающие числа:

$$0{,}5^2;\ 1{,}5^2;\ 2{,}5^2;\ 3{,}5^2;\ 4{,}5^2;\ \ldots,$$

для чего эти числа придется предварительно округлить, заменив их числами:

$$0{,}3;\ 2{,}3;\ 6{,}3;\ 12{,}3;\ 20{,}3;\ \ldots,$$

и принять за единицу 2 клетки листа „арифметической" тетради.

8,*4*. Построенные кривые позволяют уже на этом этапе сделать два вывода: при возрастании основания x степени x^2 и x^3 возрастают; при возведении в квадрат и куб правильной дроби вновь получается правильная дробь, а при возведении в квадрат и куб неправильной *дроби вновь получается неправильная* дробь.

К первому выводу учащиеся приходят в результате наблюдения того факта, что кривая все время поднимается вверх, а ко второму — в результате наблюдения расположения кривой относительно прямой, параллельной оси абсцисс и отстоящей от нее на расстоянии одной единицы масштаба. Установление этих свойств с помощью аналитических рассуждений должно быть отнесено к следующему этапу изучения тех же кривых.

Указания к § 2 (пункты 5—8)

5. Введение понятия о числовых значениях алгебраического выражения имеет две цели: 1) выявить ту идею, что каждое алгебраическое выражение представляет собой общий вид бесконечного множества арифметических выражений, составленных по одному и тому же правилу (посредством одних и тех же действий, которые требуется выполнить в одном и том же порядке), и 2) установить понятие о функциональной зависимости на примере наличия этой зависимости между алгебраическим выражением и группой входящих в него букв.

Первая цель достигается уже тогда, когда учащиеся получают алгебраическое выражение в результате составления общих формул решения текстовых задач (§ 1, пункт 2, *1*). Учителю остается лишь каждый раз обращать внимание учащихся на эту роль алгебраического выражения, состоящую в том, что оно представляет собой общий вид всех арифметических выражений, которые могут быть получены в результате решения данной задачи при различных системах значений величин.

Вторая цель может быть достигнута только при тщательных объяснениях учителя и употреблении им терминов, указывающих на наличие функциональной зависимости данного алгебраического выражения (которое рассматривается как функция) от группы входящих в него букв (которые рассматриваются как независимые переменные). Само собою разумеется, что о специальных терминах здесь и речи не может быть. Но это ни в какой мере не препятствует тому, чтобы учащиеся хорошо поняли и усвоили основную идею, которую можно охарактеризовать следующими выражениями: „каждой группе (системе) значений букв, входящих в алгебраическое выражение, соответствует определенное значение этого выражения“, „каждая группа (система) значений букв... вызывает, порождает определенное значение алгебраического выражения“ и т. п.

6. Однако, если эта идея будет выражена только в словесной, хотя и доходчивой форме, ее еще нельзя будет считать раскрытой до конца. Тут на помощь учителю должно прийти вполне наглядное и легко осуществимое средство — составление таблиц значений независимой переменной или независимых переменных и зависимой переменной (функции). Сначала составляются таблицы для алгебраических выражений, содержащих одну букву, а затем — для алгебраических выражений, содержащих две буквы.

В связи с этим представляется хорошая возможность показать учащимся готовые таблицы, ограничив первое ознакомление с этими таблицами только объяснением их содержания и структуры.

Однако эти таблицы дадут учащимся представление лишь о дискретных (а не непрерывных) переменных n^2, $\frac{1000}{n}$, πn, $\frac{\pi n^2}{4}$. Между тем требуется, чтобы ознакомление с таблицами помогло дать учащимся первоначальное представление о непрерывной изменяемости. С этой целью надо привести несколько *формул*, выражающих законы изменения каких-либо непрерывных величин в зависимости от изменения одной или двух величин, и составить таблицы числовых значений этих непрерывных величин.

Учитель найдет и использует немало формул, относящихся к смежным дисциплинам (геометрии, физике, химии, географии, естествознанию) и встречающихся в практической деятельности учащихся (в области производства и сельского хозяйства), что часто будет иметь и познавательное значение.

Таблицы числовых значений величин, составленные по формулам, выражающим зависимость этих величин от других величин, могут служить для осуществления одной из трех форм задания функциональной зависимости — так называемой *табличной формы* и позволяют получить некоторое представление о ходе изменения величин, зависящих от других величин, — об их возрастании и убывании, об их наибольших и наименьших значениях, о сравнительной быстроте их роста.

Таким образом, составление таблиц числовых значений величин может иметь целью не только приобретение некоторых практических навыков, но и первоначальное ознакомление учащихся с понятием о функциональной зависимости величин.

Весьма полезно познакомить учащихся с возможностью установления формул (эмпирических и точных), выражающих изменение какой-либо величины, на основании изучения системы табличных значений этой величины. Например, исследование значений пути, пройденного цилиндриком, скатывающимся вниз по наклонной плоскости, за 1, 2, 3, ... сек., привело Галилея к открытию закона падения тел. Позже тот же опыт проводился на машине Атвуда,

Наконец, уже на этой стадии следует осуществить первоначальное ознакомление учащихся с графическим представлением значений таблицы. Это смело делает В. Л. Гончаров в „Начальной алгебре" *.

---

* В. Л. Гончаров, Начальная алгебра, изд. 2, М., Изд-во АПН РСФСР, 1960, гл. II, § 7, 8, 11.

7. Учителя хорошо знают, что при выполнении упражнений на вычисление арифметических выражений и нахождение числовых значений алгебраических выражений учащиеся часто допускают ошибки именно в соблюдении порядка действий.

Поэтому уже при обучении арифметике необходимо провести с учащимися разъяснительную беседу и указать ряд примеров, структура которых чаще всего вызывает ошибки и при решении которых надо быть особенно настороженным, внимательным. Эта работа должна быть продолжена при обучении алгебре.

Уже на этой стадии можно выполнять упражнения на введение скобок, не влекущее за собой изменения результата вычисления, и на введение скобок с целью изменения порядка действий и результата. При этом придется воспользоваться сведениями учащихся о правилах прибавления и вычитания суммы и умножения и деления на произведение, приобретенными ими в арифметике. Такие упражнения могут служить для первого ознакомления с преобразованиями, называемыми раскрытием скобок и заключением в скобки.

Например, для того чтобы вычислить выражение

$$\left(-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+3-\frac{5}{6}\right)+\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{3}-2\right),$$

применяют сперва раскрытие скобок:

$$-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+3-\frac{5}{6}+\frac{3}{4}-\frac{1}{3}-2,$$

а затем заключение в скобки:

$$(3-2)+\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)-\frac{5}{6}=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{5}{6}=$$

$$=\frac{12}{12}+\frac{4}{12}+\frac{3}{12}-\frac{10}{12}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}.$$

8. Тема „Квадраты и кубы чисел“ явно не предусмотрена программой курса алгебры в VI классе. Но предыдущая тема („Степени с натуральным показателем“) позволяет и даже наталкивает на то, чтобы хотя бы вкратце (в первом приближении) рассмотреть с учащимися свойства квадратов и кубов чисел натурального ряда. Целесообразно:

1) установить понятия о рядах (последовательностях) квадратов и кубов чисел натурального ряда, о бесконечности каждого из них, об их возрастании, и притом неограниченном (первое ознакомление с этими понятиями);

2) объяснить, что, обратно, далеко не всякое натуральное число есть квадрат или куб (и вообще натуральная степень) другого натурального числа;

3) рассмотреть ряд (последовательность) приращений квадратов натуральных чисел и установить закономерность их составления (сперва на числах, а затем в общем виде):

$$(n+1)^2 - n^2 = 2n + 1;$$

убедиться, что, и обратно, сумма n последовательных чисел есть квадрат числа n, т. е. n^2 (см. черт. 1):

$1 = 1^2$; $1 + 3 = 2^2$; $1 + 3 + 5 = 3^2$; ... ; $1+3+5+ ... + (2n-1) = n^2$;

4) попытаться сделать то же для приращений кубов натуральных чисел:

$$(n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1;$$

5) на клетчатой бумаге построить графические изображения (в виде вертикальных отрезков — ординат) квадратов и кубов натуральных чисел и выделить изображения приращений этих квадратов и кубов;

6) разделить промежуток от 1 до 2 на 10 частей и, найдя, что приращения квадратов чисел, соответствующих точкам деления, т. е. чисел:

(a) 1; 1,1; 1,2; 1,3; 1,4; 1,5; 1,6; 1,7; 1,8; 1,9; 2,

равны числам:

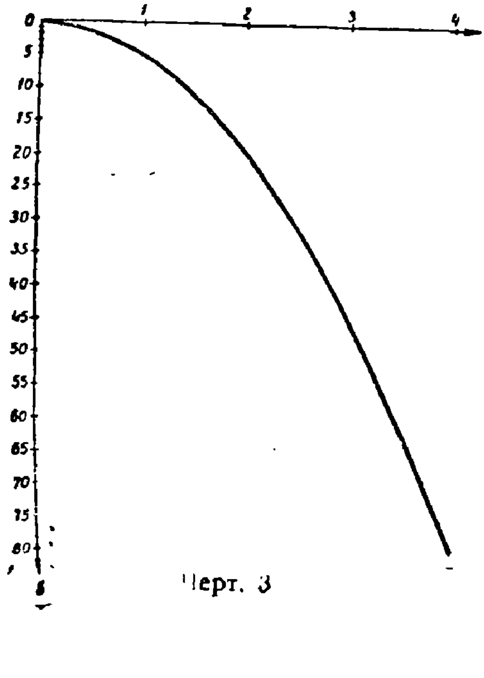
(h) 0,21; 0,23; 0,25; 0,27; 0,29; 0,31; 0,33; 0,35; 0,37; 0,39,

убедиться, что и в этом случае приращения возрастают по простому правилу — каждое следующее приращение отличается от предыдущего на одно и то же число 0,02;

7) отсюда заключить, что равным приращениям чисел (a) соответствуют не равные, но почти равные, мало отличающиеся одно от другого числа (h), так что в пределах двух соседних промежутков их можно принять за равные и считать, что равным приращениям чисел (a) соответствуют равные приращения квадратов этих чисел;

8) основываясь на этом предположении, находить значения квадратов чисел, которые заключены в любом из промежутков, определяемых числами (a).

Большой интерес у учащихся вызовут сведения о построенной ими по точкам параболе как о кривой, по которой движется тело, брошенное с некоторой высоты параллельно горизонту (черт. 3) и спускающееся за первую секунду приблизительно на 4 *м* 90 *см*, за первые две секунды — на 19 *м* 60 *см*, за первые три секунды — на 44 *м* 10 *см* и т. д.



Черт. 3

Говоря о параболе, учитель включит в свой рассказ о ней сведения о других кривых линиях (окружности, эллипсе, гиперболе, синусоиде, винтовой линии), которые наблюдаются в природе и с которыми учащиеся могли уже познакомиться на уроках геометрии, физики и техники.

Теперь учителю представляется хорошая возможность вернуться к вопросу о выражении зависимостей между величинами с помощью формул и познакомить учащихся с формулой

$$s = 4{,}9\,t^2,$$

где t есть время свободного падения тела в сек. и s — пройденный им за это время путь в *м*.

Наконец, можно сообщить учащимся (без вывода или с выводом на внеклассных занятиях) формулы:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2};$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

ЛАВА II

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА. УРАВНЕНИЯ

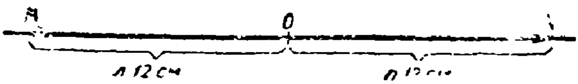
§ 3. ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ И ОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

9. Два способа введения понятия положительных и отрицательных чисел. Введение положительных и отрицательных чисел может быть обосновано: 1) необходимостью выражать числами так называемые направленные величины; 2) идеей о дополнении числового луча до числовой оси.

9,*1. Выражение числами направленных величин.*

Перемещения. Допустим, что некоторая точка P движется по прямой, начиная свое движение от данной на этой прямой точки O. Если известно, что точка P прошла расстояние в 12 *см*, то мы знаем только то, что точка P переместилась на 12 *см* от своего начального положения O, но где именно, в какой точке прямой оказалась точка P в результате этого движения, мы не знаем. Это объясняется тем, что нам неизвестно, в каком направлении точка P прошла расстояние в 12 *см*, — вправо или влево от точки O. Если точка P прошла расстояние в 12 *см* вправо от точки O и совпала с некоторой точкой A прямой, то мы будем говорить, что она совершила по прямой перемещение OA; если же точка P прошла расстояние в 12 *см* влево от точки O и совпала с некоторой точкой B прямой, то мы будем говорить, что она совершила по прямой перемещение OB (черт. 4).

Поставим перед собой вопрос: как выразить каждое из этих перемещений числом? Если мы скажем, что каждое из этих перемещений равно 12 *см*, то этим обозначением не будет указано направление, в котором они были совершены, и можно будет подумать, что перемещения OA и OB одинаковы. Мы оказываемся в затруднении — имеющихся в нашем распоряжении арифметических* чисел явно не хватает; эти числа могут указать размер (длину) перемещения, но не могут указать направления, в котором оно произошло.



Черт. 4

Выйдем из этого затруднения следующим образом — будем к числу, указывающему размер (длину) перемещения, присоединять значок *п* или *л*, указывающий направление этого перемещения, и запишем: перемещение $OA = п$ 12 *см*, перемещение $OB = л$ 12 *см*, где значок *п* заменяет слово „вправо", а значок *л* заменяет слово „влево".

Раньше (при решении арифметических задач на движение) мы имели дело с величиной, которая называлась расстоянием, пройденным точкой (движущимся телом) при ее (его) движении; расстояние есть величина, которая имеет только размер и вполне выражается арифметическим числом. Теперь мы познакомились с новой величиной — перемещением точки по прямой; эта величина имеет не только размер (длину), но и направление и выражается некоторым новым числом — арифметическим числом, сопровождаемым значком (*п* или *л*).

Каждое перемещение, совершенное движущейся точкой P по данной прямой, можно очень удобно изобразить стрелкой, началом которой служит та точка прямой, с которой точка P совпадала в начале своего перемещения, а концом — та точка прямой, с которой точка P совпадала в конце своего перемещения. Так, перемещение точки P из положения M в положение N изображается стрелкой MN, а перемещение этой точки из положения M' в положение N' — стрелкой $M'N'$

---

* Так на первых порах удобно называть целые и дробные числа, изучаемые в арифметике.

(черт. 5); при этом, обозначая перемещение движущейся точки P из положения M в положение N через MN, первой буквой (M) указывают начальное положение точки P, а второй буквой (N) — ее конечное положение; изображая же перемещение MN стрелкой MN, острие стрелки помещают у ее конца (см. чертежи 4 и 5).

Черт 5

Приход и расход. Если торговое предприятие имеет определенный запас товара, который может увеличиваться в результате поступления некоторого количества этого товара (приход) или уменьшаться в результате выдачи некоторого количества того же товара (расход), то для записи изменений основного запаса, которые происходят в результате этих поступлений и выдач, удобно употреблять числа со значками n и p, заменяющими слова „приход" и „расход".

Так, если на склад поступило 235 *кг* товара, то можно записать, что наличный запас товара изменился на n 235 *кг*, а если со склада было выдано 110 *кг* товара, то можно записать, что наличный запас товара изменился на p 110 *кг*.

Эти числа n 235 и p 110 будут представлять собою значения направленной величины, которую можно назвать изменением наличного запаса товара.

Изменения температуры. Измеряя температуру воздуха каждый час и записывая ее, на метеорологической станции получили следующую таблицу температур за время от 7 час. утра до 7 час. вечера (т. е. до 19 час.):

Время, час.	7	8	9	10	11	12	13
Температура, °C	0,3	2,1	4,1	6,3	-7,4	8,2	8,4

Время, час.	14	15	16	17	18	19
Температура, °C	8,7	9,3	9,9	9,5	8,4	6,8

По этой таблице можно проследить, как изменялась температура в течение времени ее наблюдения. Ясно видно, что температура сначала повышалась и в 16 час. достигла своего наибольшего значения, а затем начала убывать. Для того чтобы установить, с какой скоростью происходили эти изменения температуры, вычислим, какие изменения она претерпевала в течение каждого часа наблюдения. Для выражения результатов этих вычислений нам придется вновь прибегнуть к числам со значками, а именно: будем обозначать каждое повышение температуры арифметическим числом со значком *в* (что означает — выше), а каждое понижение температуры — арифметическим числом со значком *н* (что означает — ниже). Тогда результаты наших вычислений можно будет представить в виде следующей таблицы:

Промежутки времени, час.	7—8	8—9	9—10	10—11	11—12	12—13
Изменения температуры, °C	*в* 1,8	*в* 2,0	*в* 2,2	*в* 1,1	*в* 0,8	*в* 0,2
Промежутки времени, час.	13—14	14—15	15—16	16—17	17—18	18—19
Изменения температуры, °C	*в* 0,3	*в* 0,6	*в* 0,6	*н* 0,4	*н* 1,1	*н* 1,6

Точно так же, как и перемещения точки по прямой в одном или другом направлении, каждое изменение температуры можно изобразить стрелкой, расположенной на прямой. Но для того чтобы видно было, изображает ли стрелка повышение или понижение температуры, надо условиться, в каком из двух направлений прямой мы будем откладывать (строить) стрелки, изображающие повышение температуры, а в каком — стрелки, изображающие понижение температуры.

Например, если мы условимся первые стрелки откладывать вправо, а вторые — влево, то изменения, которые претерпела температура за период наблюдения от 7 до 19 час., можно будет в соответствии с таблицей изобразить так, как указано на черт. 6.

Стрелка AB изображает повышение температуры на 9°,6, а стрелка BC, отложенная от точки B в противоположном направлении, — понижение температуры на

3°,1; таким образом, за весь период наблюдения температура повысилась на 9°,6 — 3°,1, т. е. на 6°,5; это окончательное изменение температуры изображается стрелкой AC.

Черт. 6

Для того чтобы стрелки AB и BC имели требуемые длины, мы для построения их выбрали масштаб, т. е. приняли некоторый отрезок AE за единицу измерения, что и указали на чертеже, нанеся на него направленный отрезок AE, изображающий 1°.

Итак, мы видим, что для выражения различных направленных величин числами понадобились новые числа — числа со значками (*п* 5, *л* 5; *п* 8, *р* 8; *в* 3°, *н* 3°). Мы рассмотрели только три направленные величины, а их имеется гораздо больше: всякое изменение какой-либо абсолютной (ненаправленной) величины есть направленная величина. Например, изменение длины стержня или объема тела при нагревании и охлаждении, уровня воды в реке, атмосферного давления, влажности воздуха и т. п. — все это направленные величины. Но если мы для каждой из них будем вводить числа с двумя значками, из которых один будет указывать на увеличение, а другой — на уменьшение, то придется иметь дело со слишком большим числом пар значков, и мы в них очень скоро запутаемся, перестанем в них разбираться.

Поэтому ученые предложили вместо всех возможных пар значков ввести только одну пару: + и — с тем, чтобы + указывал на изменение какой-либо величины в одном направлении, а — в другом (противоположном). При этом способе обозначения числа (+ 8) и (— 12) будут выражать, например: перемещения по прямой на 8 единиц вправо и на 12 единиц влево; приход в 8 единиц и расход в 12 единиц; повышение температуры на 8° и понижение на 12° и т. п.

Таким образом, роль всех прежних значков теперь будут играть знаки + и —, которые вместе с числом, перед которым они стоят, мы будем заключать в скобки.

Определение. Числа со знаком + (плюс) называются положительными числами, а числа со знаком — (минус) называются отрицательными числами.

Все целые и дробные положительные и все целые и дробные отрицательные числа и число 0 (нуль) имеют общее название — рациональные числа.

Каждое из положительных и отрицательных чисел выражает некоторую направленную величину, указывая ее размер и ее направление. Поэтому мы будем говорить, что каждое из положительных и отрицательных чисел есть значение некоторой направленной величины.

Как мы видели выше, каждое перемещение и каждое изменение температуры может быть изображено стрелкой, расположенной на прямой. Но стрелка отличается от обычного геометрического отрезка прямой тем, что одна из двух точек прямой, определяющих стрелку, задается как ее начало, а другая, указываемая ее оперением, как ее конец. Таким образом, в то время как точки A и B, определяющие обычный геометрический отрезок прямой, так сказать, равноправны, ввиду чего AB и BA — лишь два различных обозначения одного и того же отрезка, точки, определяющие стрелку, не равноправны: одна из них является началом стрелки, а другая — концом. В этом состоит существенное отличие стрелки от обычного геометрического отрезка.

Благодаря этому своему отличительному свойству стрелка имеет не только длину, как каждый отрезок прямой, но и направление. Именно, под направлением стрелки понимают то направление, в котором перемещается точка, движущаяся от ее начала к ее концу. Ввиду этого каждый отрезок, который, подобно стрелке, определяется двумя точками, заданными как начало и конец, называется направленным отрезком.

Определение 1. Отрезок, определяемый двумя точками, которые заданы как начало и как конец, называется направленным отрезком.

Мы можем теперь сказать, что каждое перемещение точки по прямой и каждое изменение температуры может быть изображено некоторым направленным отрезком, расположенным на прямой. Для того чтобы построить изображение какой-либо из указанных направленных величин, нам достаточно было только знать ее значение, т. е. то положительное или отрицательное число, которым эта величина выражается.

Очевидно, что все, что мы сказали об изображении направленным отрезком каждого перемещения и каждого изменения температуры, полностью относится к изображению какой угодно направленной величины, значение которой дано, известно, найдено.

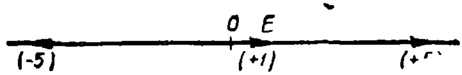
Для этого изображения надо иметь некоторую прямую, на которой каким-либо способом указано: 1) в каком из двух ее направлений мы условливаемся откладывать (строить) направленные отрезки для изображения направленных величин, имеющих положительные значения; 2) какой отрезок мы принимаем за единицу измерения, т. е. за отрезок, который должен изображать направленную величину, имеющую значение $(+1)$.

Определение 2. Прямая, на которой указано, в каком из двух ее направлений должны быть отложены на ней направленные отрезки, чтобы они изображали направленные величины, имеющие положительные значения, называется осью, причем это указанное направление оси называется положительным направлением оси, а противоположное направление — отрицательным направлением оси.

Обыкновенно положительное направление оси указывают стрелкой, поставленной на этой оси.

Но можно (и в теоретическом отношении даже предпочтительнее) поступить иначе. Именно, можно, взяв на оси некоторую точку O, называемую начальной точкой (обозначение которой O соответствует латинскому слову „origo“, что значит „начало“), отложить от этой точки в положительном направлении отрезок OE, равный выбранной единице измерения, т. е. такой, который изображает направленную величину, имеющую значение $(+1)$ (черт. 7); тогда направление этого „единичного отрезка“ OE и будет указывать положительное направление оси.

Если мы имеем в своем распоряжении (т. е. построили) такую ось с указанным на ней единичным отрезком OE, то для построения на ней направленного отрезка, который должен служить изображением направленной величины, имеющей данное значение $(+5)$, строим на этой оси отрезок, который имеет длину 5, и придаем ему направление, совпадающее с положительным направлением оси; точно так же для построения на оси направленного отрезка, который должен служить изображением направленной величины, имеющей данное значение (-5), строим на ней отрезок, который имеет длину 5, и придаем ему направление, совпадающее с отрицательным направлением оси.



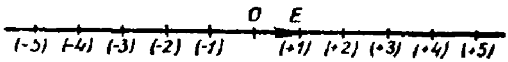
Черт. 7

Так как каждое положительное и каждое отрицательное число можно рассматривать как значение некоторой направленной величины, то мы приходим к выводу, что каждому положительному и каждому отрицательному числу соответствует на оси с заданным на ней единичным отрезком вполне определенный по длине и направлению направленный отрезок, изображающий ту направленную величину, значением которой служит данное положительное или отрицательное число. За начало этого направленного отрезка можно принять л ю б у ю точку оси, на которой он строится. Этот важный факт выражают кратко, говоря, что каждое положительное или отрицательное число можно изобразить некоторым вполне определенным по длине и направлению направленным отрезком, расположенным на оси с заданным на ней единичным отрезком. Для этого достаточно построить на указанной оси отрезок заданной длины, который имеет положительное направление, если дано положительное число, и отрицательное направление, если дано отрицательное число.

Обратно: если на оси с заданным на ней единичным отрезком построен направленный отрезок, то его можно рассматривать как изображение некоторого положительного или отрицательного числа, абсолютное значение которого равно длине этого направленного отрезка и знак которого есть + в случае, если его направление совпадает с положительным направлением оси, и — в случае, если его направление совпадает с отрицательным направлением оси.

Определение. Положительное или отрицательное число, изображением которого служит данный направленный отрезок, называется алгебраическим значением этого направленного отрезка.

Геометрическое представление рациональных чисел. Теперь допустим, что на данной оси с выбранной на ней начальной точкой O и заданным на ней единичным отрезком OE (черт. 8) построены направленные



Черт. 8

отрезки, имеющие одно и то же начало O и изображающие числа

$$(+1),\ (+2),\ (+3),\ldots,\ (-1),\ (-2),\ (-3),\ldots .$$

Тогда концы этих отрезков займут на оси вполне определенные положения, совпадая с определенными точками оси, которые мы и отметим соответствующими этим точкам числами

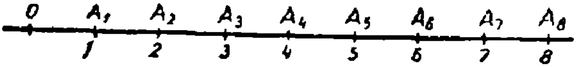
$$(+1),\ (+2),\ (+3),\ldots,\ (-1),\ (-2),\ (-3),\ldots .$$

В результате этого построения направленных отрезков, изображающих все целые положительные и отрицательные числа, мы для каждого целого числа найдем на оси соответствующую ему точку, которая определяется этим числом.

Точно так же мы можем поступить и в том случае, если данное число есть любое рациональное (положительное или отрицательное) число a. Именно: построив направленный отрезок OA с началом O, изображающий рациональное число a, мы найдем на оси соответствующую ему точку A, которая определяется числом a.

Ввиду этого все множество рациональных чисел может быть представлено на оси — с заданными на ней начальной точкой и единичным отрезком — некоторым множеством соответствующих этим числам точек, из которых каждая вполне определяется одним и только одним рациональным числом. О каждой из этих точек говорят, что она служит *изображением* соответствующего ей рационального числа.

9,2. *Числовой луч и его продолжение.* В арифметике мы изучали целые и дробные числа. Мы знаем, что этих чисел имеется бесконечное множество, но что все-таки их можно расположить в определенном порядке, пользуясь тем, что из каждых двух неравных чисел одно меньше другого. Мы представим себе этот порядок особенно ясно, если постараемся каждое число изобразить в виде точки на геометрическом луче (полупрямой) с вершиной O (черт. 9).



Черт. 9

Если мы, приняв какой-либо отрезок за единицу измерения, станем откладывать этот отрезок вдоль луча от его начала O один, два, три и т. д. раз, то получим отрезки, концы которых A_1, A_2, A_3,... будут представлять собой точки, находящиеся от начала O на расстояниях, равных 1, 2, 3,... единицам измерения; вот эти точки можно рассматривать как изображения целых чисел 1, 2, 3,... на данном луче. Для того чтобы построить на луче изображение дробного числа, например числа $\frac{15}{8}$, надо будет отложить вдоль данного луча от его начала O отрезок, равный $\frac{15}{8}$ отрезка, принятого за единицу измерения; тогда конец этого отрезка будет представлять собой точку, находящуюся от начала O на расстоянии, равном $\frac{15}{8}$ единицы измерения; эту точку можно будет рассматривать как изображение числа $\frac{15}{8}$.

Таким образом, каждому целому и дробному числу при выбранной единице измерения (или, как иначе говорят, при выбранном единичном отрезке) на данном луче соответствует вполне определенная (одна и только одна) точка, которая служит его *изображением*.

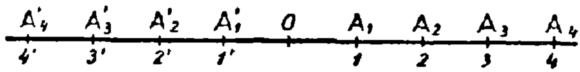
Для того чтобы найти эту точку, достаточно отложить на луче от его начала O отрезок OA, длина которого при выбранной единице измерения выражается данным числом; тогда конец A этого отрезка OA и будет служить изображением данного числа.

Обратно, если точка A принадлежит лучу с началом O и выбранным на нем единичным отрезком OE, то для того, чтобы узнать, служит ли точка A изображением какого-либо целого или дробного числа, надо узнать, содержит ли в себе отрезок OA единичный отрезок OE целое число раз или составляет ли отрезок OA какую-либо дробь единичного отрезка OE; в первом случае точка A служит изображением целого числа, а во втором случае — дробного числа. Если же не имеют места ни первый, ни второй случай, то точка A не служит изображением никакого числа.

Определение. Геометрический луч с началом O и с выбранным на нем единичным отрезком OE называется числовым лучом.

Из геометрии известно, что каждый геометрический луч представляет собой одну из двух частей прямой (полупрямую), на которые эта прямая делится взятой на ней точкой O; каждый из двух образовавшихся этим путем лучей составляет продолжение другого.

Допустим, что OE есть числовой луч с началом O и единичным отрезком OE. Продолжим этот луч, т. е. дополним его лучом, который вместе с данным лучом будет составлять прямую OE.



Черт. 10

Если теперь мы станем откладывать единичный отрезок OE один, два, три и т. д. раз не вправо от точки O, т. е. не в ту сторону, в которой находится точка E, а влево от точки O, т. е. в противоположную сторону, то мы получим отрезки, концы которых A_1', A_2', A_3',... (черт. 10) будут представлять собой точки, расположенные влево от точки O на расстояниях, равных 1, 2, 3,... единицам измерения. Эти точки, так же как и точки

$A_1, A_2, A_3,\ldots$, можно рассматривать как изображения некоторых чисел, соответствующих отрезкам $OA'_1, OA'_2, OA'_3,\ldots$ которые также имеют длины, равные 1, 2, 3,... единицам измерения, но концы которых расположены не вправо, а влево от начала O. Очевидно, что эти числа должны обозначаться так, чтобы они указывали расстояния изображающих их точек A'_1, A'_2, $A'_3,\ldots$ от начала O и вместе с тем расположение этих точек по отношению к началу O.

Можно было бы для обозначения этих чисел употреблять арифметические числа 1, 2, 3,..., сопровождаемые каким-либо значком, например значком $'$ (прим, штрих), и принять, что точки A'_1, A'_2, $A'_3,\ldots$ служат изображениями чисел

$$1', 2', 3',\ldots .$$

Тогда утверждение, что точка A'_{10} служит изображением числа $10'$, означало бы, что эта точка расположена на прямой OE влево от начала O на расстоянии 10 единичных отрезков.

Точно так же если мы отложим влево от начала O отрезок, составляющий какую-либо дробь единичного отрезка OE, например отрезок, равный $\frac{15}{8}$ OE, то конец этого отрезка будет представлять собою точку, расположенную влево от начала O на расстоянии, равном $\frac{15}{8}$ единичного отрезка; эту точку можно будет рассматривать как изображение числа $\left(\frac{15}{8}\right)'$.

В результате введения этих новых чисел (чисел со значком $'$) окажется, что если посредством целых и дробных арифметических чисел мы могли в точности указать (описать, охарактеризовать) положение на луче OE каждой точки, расстояние которой от начала O выражалось целым или дробным числом, то посредством новых чисел (чисел со значком $'$) мы будем в состоянии в точности указать положение также и тех точек, которые расположены на продолжении луча OE на расстоянии, выражающемся целым или дробным числом.

Мы выбрали для новых чисел обозначения:

$$1',\ 2',\ 3',\ldots .$$

Но можно было бы выбрать и какие-либо другие обозначения, например, обозначения:

$$\bar{1},\ \bar{2},\ \bar{3},\ldots,$$

которые получаются, если арифметические числа сопровождать черточкой, поставленной над каждым из них.

Однако оказалось, что в качестве такого значка, которым можно сопровождать арифметические числа для того, чтобы получить числа, изображаемые точками прямой OE, расположенными влево от точки O, удобнее всего взять знак — (минус), т. е. лучше всего дать новым числам обозначения:

$$(-1),\ (-2),\ (-3),\ldots,$$

употребляя в качестве значка знак — и заключая число вместе со знаком — в скобки.

При этом условии, например, число $(-3{,}5)$ будет являться числом, изображаемым той точкой прямой OE, которая расположена влево от начала O на расстоянии, равном 3,5 единичных отрезков.

Итак, если мы возьмем прямую и примем какую-либо ее точку O за начальную, то все точки этой прямой распадутся на точки, расположенные вправо от начальной точки O и влево от нее. Мы условились рассматривать точки, расположенные вправо от начальной точки O на расстояниях 1, 2, 3,..., как точки, изображающие эти числа, а точки, расположенные влево от начальной точки O, как точки, изображающие числа (-1), (-2), (-3),... .

Это значит, что точки, изображающие числа 1, 2, 3,... и (-1), (-2), (-3),..., расположены по разные стороны начальной точки O, или, иначе говоря, в двух противоположных направлениях. Для построения точек, изображающих числа 1, 2, 3,..., надо откладывать единичный отрезок по прямой в одном направлении, а для построения точек, изображающих числа (-1), (-2), (-3),..., надо откладывать единичный отрезок по прямой в другом (противоположном) направлении.

Эти два направления представляют собой те направления, в которых какая-либо точка может передвигаться (перемещаться) по прямой. Для того чтобы отличать эти направления, одно из них указывают стрелкой и называют **положительным**, а другое — **отрицательным**. Обыкновенно за положительное направление принимают то, в котором расположена точка E, изображающая число 1, а за отрицательное — то, в котором расположена точка, изображающая число (-1).

Определение. Числа, изображаемые точками, расположенными в положительном направлении от начальной точки O, называются положительными, а числа, изображаемые точками, расположенными в отрицательном направлении от начальной точки O, называются отрицательными.

Таким образом, положительные числа представляют собой не что иное, как арифметические числа, а отрицательные числа являются уже новыми числами, которые мы присоединили к положительным числам.

Все целые и дробные положительные и все целые и дробные отрицательные числа и число 0 (нуль) имеют общее название — рациональные числа.

10. Числовая ось. Каждый из двух описанных выше (в пунктах 9,*1* и 9,*2*) путей введения понятия о положительных и отрицательных числах, естественно, приводит к понятию о числовой оси.

Определение. Ось, на которой задана некоторая ее точка O, называемая начальной точкой оси, и построен *отрезок* OE, *изображающий* число $(+1)$ *и* называемый единичным отрезком, называется числовой осью.

Очевидно, что задание на числовой оси ее начальной точки O и единичного отрезка OE позволяет построить на этой оси по данному положительному или отрицательному числу a изображающий его направленный отрезок OA и изображающую его точку A. Поэтому каждому положительному или отрицательному числу a соответствует на данной числовой оси (т. е. на оси с заданными на ней начальной точкой и единичным отрезком) одна и только одна точка A, являющаяся изображением этого числа.

Это следует из того, что на прямой всегда можно построить отрезок OA заданной длины и расположить его конец A в положительном или отрицательном направлении (по отношению к его началу O) в зависимости от знака числа a.

Обратно, если на числовой оси задана точка A, расстояние которой от начальной точки O оси равно целому числу m или дробному числу $\frac{m}{n}$ единичных отрезков, то эту точку A можно рассматривать как изображение положительного числа $(+m)$ или $\left(+\frac{m}{n}\right)$, если точка A расположена в положительном направлении от начальной точки O, или отрицательного числа $(-m)$ или $\left(-\frac{m}{n}\right)$, если точка A расположена в отрицательном направлении от начальной точки O.

Определение. Два числа, изображенные точками, симметрично расположенными относительно начальной точки O оси, называются противоположными числами.

Подобно тому как отрицательное число, противоположное положительному числу a, обозначают через $(-a)$, условились и положительное число, противоположное отрицательному числу a, обозначать через $(-a)$.

11. Абсолютное значение числа. Каждое рациональное число есть значение некоторой направленной величины, выражающее ее размер и ее направление. Если мы изобразим рациональное число a точкой A на числовой оси, то размер направленной величины, выражаемой числом a, наглядно (геометрически) будет представлен отрезком OA, т. е. расстоянием точки A от начальной точки оси O, а направление этой величины (положительное или отрицательное) будет указываться направлением, в котором должна перемещаться движущаяся точка, чтобы из положения O перейти в положение A.

Если a есть положительное число, то расстояние изображающей его точки A от начальной точки O оси выражается как раз этим положительным числом; если a есть отрицательное число, то расстояние изображающей его точки A от начальной точки O оси выражается не числом a, а противоположным ему числом $(-a)$; наконец, если число a есть нуль, то расстояние изображающей его точки A от начальной точки O оси выражается числом 0.

Определение. Число, выражающее расстояние точки A, которая служит изображением числа a на числовой оси, от начальной точки O этой оси, называется абсолютным значением числа a.

Абсолютное значение числа a обозначается так: $|a|$.

Следовательно:

1) если a есть положительное число, то $|a| = a$;

2) если a есть отрицательное число, то $|a| = -a$;

3) если a есть нуль, то $|a| = 0$.

12. Сравнение чисел. Знаки неравенства. Подобно тому как в основе понятий „равно", „больше", „меньше" для арифметических чисел лежит смысл этих понятий для абсолютных (не направленных) величин (таких, как длина, площадь, объем, время, вес, плотность и т. п.), в основу тех же понятий для рациональных чисел должен быть положен смысл этих понятий для направленных величин.

Утверждение, что отрезок A больше отрезка B, имеет тот смысл, что отрезок A может быть представлен в виде суммы отрезка B и некоторого отрезка C:

$$A = B + C.$$

Точно так же утверждение, что арифметическое число a больше арифметического числа b, означает, что число a есть сумма числа b и некоторого числа c: $a = b + c$.

Если число a изображается на числовом луче с начальной точкой O отрезком OA, а число b отрезком OB, то в случае, когда точка A расположена правее, чем точка B, так что имеет место равенство

$$OB + BA = OA,$$

мы говорим, что отрезок OA больше, чем отрезок OB, и что число a больше числа b.

Именно этот геометрический критерий (признак) кладется в основу при определении понятий „равно", „больше", „меньше" для рациональных чисел. Его и принимают в виде определения.

Определение. Если рациональные числа a и b изображаются на числовой оси соответственно точками A и B, то

1) при совпадении точек A и B говорят, что число a равно числу b;

2) при расположении точек в порядке B, A говорят, что число a больше числа b или что число b меньше числа a;

3) при расположении точек в порядке A, B говорят, что число a меньше числа b или что число b больше числа a.

На письме слова „равно“, „больше“, „меньше“ заменяют соответственно знаками $=$, $>$, $<$, так что:

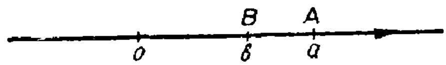
при условии 1 пишут $a = b$;

при условии 2 пишут $a > b$ или $b < a$;

при условии 3 пишут $a < b$ или $b > a$.

Это определение относится как к тому случаю, когда обе точки A и B расположены справа или слева от начальной точки O оси, так и к тому случаю, когда эти точки расположены по разные стороны от начальной точки O.

Если точки A и B расположены справа (в положительном направлении) от начальной точки O в порядке OBA, так что $OA > OB$ (черт. 11а), то им соответствуют положительные числа a и b, причем, согласно определению, $a > b$. Мы можем сказать, что для того, чтобы



Черт. 11а

Черт. 11б

положительное число a было больше, чем положительное число b, достаточно, чтобы изображение A числа a находилось на большем расстоянии от начальной точки O, чем изображение B числа b, т. е. чтобы выполнялось неравенство $OA > OB$.

Если точки A и B расположены слева (в отрицательном направлении) от начальной точки O в порядке ABO, так что $OB < OA$ (черт. 11б), то им соответствуют отрицательные числа a и b, причем, согласно определению, $b > a$. Мы можем сказать, что для того, чтобы отрицательное число b было больше, чем отрицательное число a, достаточно, чтобы изображение B числа b находилось на меньшем расстоянии от начальной точки O, чем изображение A числа a, т. е. чтобы выполнялось неравенство $OB < OA$.

Но, как мы знаем из пункта 11, расстояние каждой точки оси от ее начальной точки O выражается абсолютным значением того числа, изображением которого служит эта точка. Следовательно, только что найденный признак наличия неравенства $b > a$ между двумя отрицательными числами a и b можно выразить и так: для того чтобы отрицательное число b было больше отрицательного числа a, достаточно, чтобы абсолютное значение числа b было меньше, чем абсолютное значение числа a.

Так как каждая точка P положительной полуоси расположена вправо от начальной точки O оси, т. е. следует за нею, так что имеет место расположение OP, а каждая точка N отрицательной полуоси расположена влево от начальной точки O оси, т. е. предшествует ей, так что имеет место расположение NO, то согласно определению заключаем, что каждое положительное число p больше числа 0, а каждое отрицательное число n меньше числа 0.

Поэтому если a есть положительное число, то это можно записать так: $a > 0$, и если a есть отрицательное число, то это можно записать так: $a < 0$.

Очевидно, что — и обратно: если известно, что $a > 0$, то a есть положительное число, и если известно, что $a < 0$, то a есть отрицательное число.

Наконец, так как каждая точка P положительной полуоси расположена вправо от каждой точки N отрицательной полуоси, т. е. следует за ней, так что имеет место расположение NP, то согласно определению заключаем, что каждое положительное число p больше каждого отрицательного числа n. Из всех выведенных признаков наличия между числами a и b неравенства $a > b$ можно сделать общий вывод:

Вывод. Число a больше числа b, если для перехода по оси от изображения B числа b к изображению A числа a необходимо переместиться по оси в положительном направлении на отрезок (расстояние) BA.

Указания к § 3 (пункты 9—12)

9. Введение понятия о рациональных числах и сведений о действиях над ними представляет немалые затруднения в связи с необходимостью довести до сознания учащихся VI класса материал, носящий при его научном изложении в основном абстрактный характер.

По этой причине методика преподавания учения о рациональных числах считает наиболее целесообразным основывать школьное изложение этого учения на той трактовке его, которую оно имело при своем возникновении и постепенно приобретало при дальнейшем развитии, когда положительные и отрицательные числа употреблялись для выражения таких величин, как имущество и долг, приход и расход, температура выше и ниже нуля и т. п.

Однако постепенно, при критическом отношении к этим величинам, из них были выделены и оставлены для рассмотрения только те, которые представляют собою а д д и т и в н ы е н а п р а в л е н н ы е величины, т. е. величины, которые, как говорят, могут быть понимаемы в двух противоположных смыслах и для которых установлено понятие о сумме. К таким величинам относятся, например: перемещения; изменения запаса (продуктов, товара, материала, топлива, выработки и т. п.); изменения температуры и давления атмосферы, влажности воздуха; изменения численности населения и т. п.

Множество всех перемещений обладает следующими свойствами: 1) любое перемещение имеет размер (длину) и одно из двух возможных направлений; 2) для любых двух перемещений можно найти (указать, составить) третье перемещение, заменяющее последовательное выполнение этих двух перемещений,— их сумму.

Этими же двумя свойствами обладает каждое множество перечисленных выше направленных величин. Например, любое изменение температуры имеет размер и направление (увеличение или уменьшение), и два последовательных изменения температуры дают в результате (в сумме) некоторое третье, заменяющее их изменение температуры и т. п.

Наоборот, этими свойствами не обладает, например, множество температур, так как, говоря о двух температурах в 5° тепла и 7° холода, лишь с натяжкой можно сказать, что они имеют противоположный смысл (а еще труднее — что они имеют противоположное направление), и совсем нельзя сказать, какая температура может быть принята за их сумму. Поэтому использование температуры (а не изменения температуры) в качестве примера направленной величины, как это сделано в учебнике, может только помешать правильному введению понятия о рациональном числе.

По-видимому, основывать школьное изложение учения о рациональных числах на свойствах направленных величин и в методологическом отношении будет вполне оправданным: ведь все свойства рациональных чисел в действительности являются о т р а ж е н и я м и свойств направленных величин, которыми они обладают независимо от их числового выражения. *Иначе говоря, для* установления свойств рациональных чисел направленные величины играют ту же роль, которую выполняют конечные множества для установления свойств натуральных чисел и непрерывные абсолютные величины и их геометрические образы для установления свойств арифметических (целых и дробных) чисел.

Вот те причины, в силу которых для введения рациональных чисел в курс алгебры VI класса очень долгое время использовался и в настоящее время заслуживает предпочтения тот путь, сущность которого изложена в пункте 9,*1* и который может быть назван „содержательным".

Следуя этому пути, можно дать с о д е р ж а т е л ь н о е определение рациональным числам как числам, выражающим направленные величины, и сумме рациональных чисел как числу, выражающему сумму направленных величин.

Другой путь, который следует назвать ф о р м а л ь н ы м, выбрал В. Л. Гончаров в „Начальной алгебре". Сущность этого пути изложена в пункте 9,*2*. Он отличается от содержательного пути 9,*1* тем, что рациональные числа определяются вне связи с какими-нибудь конкретными величинами, а в сущности как символы, относимые к определенным точкам оси (т. е. прямой с выбранными на ней начальной точкой O и единичным отрезком OE), которые рассматриваются как и з о б р а ж е н и я этих чисел. Конечно, нельзя сказать, что эти символы совершенно бессодержательны: в них вкладывается то же содержание, которое имеют положительные (арифметические) числа, как числа, изображаемые точками луча с началом O и выражающие расстояния этих точек от начала O. Теперь остается применить ту же идею к точкам, принадлежащим продолжению луча OE влево от начала O и отличающимся от точек луча OE своим расположением относительно начала O. Возникает качественное отличие точек продолжения луча OE от точек луча OE, которое состоит в их расположении относительно начала O и требует введения новых чисел, так как старых чисел оказывается недостаточно: все они уже использованы для обозначения точек, расположенных на луче OE. Но новые числа по существу имеют то же назначение, что и старые. Поэтому для обозначения новых чисел можно употребить старые числа, сопровождая их, в отличие от этих старых чисел, каким-либо значком. Таким значком может служить знак $'$ (прим, штрих) или знак $\overline{}$ (черточка, поставленная над числом). Но по соображениям, которые выясняются позже, в качестве такого значка выбирают знак — (минус), заключая его вместе с числом, перед которым он стоит, в скобки: (-1), (-2), $(-3), \ldots$; $\left(-\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{2}{3}\right)$, $\left(-\frac{15}{8}\right), \ldots$; и т. п

Необходимо иметь в виду, что именно употребление знаков + и — в качестве значков (*п* и *л* и т. п.), а не знаков действий вызывает у учащихся — во всяком случае на первых порах — некоторое непонимание и неудовлетворение: почему вдруг, думают они, знаки действий + и — играют какую-то иную роль? Поэтому некоторые методисты предлагают обозначать отрицательные числа сначала с помощью черточки, поставленной над числом: $\overline{1}$, $\overline{2}$, $\overline{3}, \ldots$, и лишь затем заменять это обозначение обычным обозначением. Надо признать, что такой прием заслуживает одобрения. Введя это обозначение, можно постепенно развивать всю теорию обычным путем и, лишь доведя изложение до того момента, когда будет установлено, что, например:

$$\overline{5} = 0 - 5,$$

заменить обозначение $\overline{5}$ обозначением (-5), получающимся из разности $0 - 5$ посредством опускания нуля, по аналогии с тем, как мы опускаем нуль при сложении:

$$0 + 5 = (+5).$$

Этот прием введения обозначения отрицательных чисел посредством знака — (минус) после предварительного обозначения их каким-либо иным значком неоднократно проверялся на опыте и давал положительные результаты.

Однако можно утверждать, что все сомнения и неудовлетворенность учащихся по поводу использования знаков + и — как знаков действий и знаков чисел отпадут только тогда, когда будет введено понятие об алгебраической сумме и они поймут, что каждый знак действия, соединяющий члены этой суммы, может быть одновременно принят и за знак числа, перед которым он стоит, ввиду чего опасаться смешения этих двух ролей знаков + и — нет оснований.

10. Понятие о числовой оси является основным. В нем воплощена весьма важная идея о геометрическом представлении чисел, дающем возможность создать наглядную картину области чисел, заменив абстрактное понятие числа его конкретным образом или его моделью. Как известно, „геометризация“ области чисел послужила мощным средством не только для изучения их свойств, но и для научного исследования и открытия этих свойств. Точно так же невозможно переоценить значение геометрических представлений и при усвоении аналитических математических дисциплин.

Поэтому введение понятия о числовой оси должно быть выполнено с возможно большей глубиной и обстоятельностью. Необходимо выявить: 1) соответствие между числами (на данном этапе — рациональными, а позже — действительными) и точками числовой оси; 2) однозначность, а позже взаимную однозначность этого соответствия при условии задания оси с определенным началом и определенным единичным отрезком; 3) возможность построения точки, соответствующей данному числу, и обратно — нахождения числа, соответствующего данной точке оси, т. е. ее абсциссы.

Можно обратить внимание учащихся на одинаковость структуры множества точек оси и множества области рациональных (а позже — действительных) чисел, выражающуюся в упорядоченности того и другого множества и в уплотненности их в одном и том же смысле.

С понятием о числовой оси целесообразно связать понятие о противоположных числах и их обозначении, обратив особое внимание учащихся на то, что если $a > 0$, то $(-a) < 0$, а если $a < 0$, то $(-a) > 0$.

11. Понятие об абсолютном значении числа (этот термин предпочтительнее термина „абсолютная величина“) играет в алгебре, как известно, весьма важную роль как в теоретическом, так и в практическом отношении, и с ним необходимо постепенно знакомить учащихся.

В самом начале понятие об абсолютном значении числа целесообразно связать с его геометрическим представлением, отождествляя абсолютное значение числа a с длиной изображающего это число направленного отрезка OA или с расстоянием изображающей это число точки A от начальной точки O числовой оси. Этот геометрический образ абсолютного значения числа a очень помогает учащимся наглядно представить себе идею, на которой основано сравнение рациональных чисел, а также некоторые соотношения, углубляющие понятие об абсолютном значении числа.

Особенно важно, чтобы учащиеся уже в VI классе осознали и умели иллюстрировать на чертеже эквивалентность соотношений:

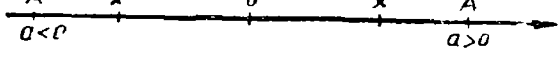
$$|x| < a \text{ и } -a < x < a, \text{ где } a > 0,$$

говоря, что если абсолютное значение числа x меньше, чем число a, то точка X, изображающая число x, ближе к начальной точке O, чем точка A, изображающая число a, и, следовательно, расположена между начальной точкой O и точкой A — справа от точки O, если a есть положительное число, и слева от точки O, если a есть отрицательное число.

Этот переход от одного из неравенств:

$$|x| < a \text{ и } -a < x < a$$

к другому учащийся должен проиллюстрировать (черт. 12) и кратко объяснить, заменяя термин „между“



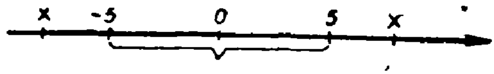
Черт. 12

выражением „в промежутке между числами a и $-a$“ или более кратко — „в промежутке $(-a;\ a)$“, где a есть данное число. Например, неравенство $|x|<5$ означает, что число x заключено в промежутке $(-5;\ 5)$.

Еще точнее будет выражение „внутри промежутка“. Оно понадобится, если учитель пожелает поставить и решить с классом вопрос о смысле неравенства

$$|x|>5,$$

чтобы получить ответ: это значит, что число x расположено „вне промежутка“ $(-5;\ 5)$, т. е. либо справа от числа 5, если x есть положительное число, либо слева от числа (-5), если x есть отрицательное число.



Черт. 13

Этот ответ, как и предыдущие, учитель получит без труда, если учащиеся прочно усвоят определение абсолютного значения числа, как числа, выражающего расстояние точки X от начальной точки O, и будут рассуждать так: „абсолютное значение числа x больше числа 5; значит, расстояние точки X от точки O больше, чем 5, т. е. точка X расположена либо вправо от точки 5, либо влево от точки (-5), как это ясно показывает черт. 13“.

12. На этой стадии сравнение рациональных чисел выполняется посредством обращения к геометрическим представлениям этих чисел (направленными отрезками или точками на числовой оси). Такой способ сравнения чисел с у щ е с т в е н н о отличается от способа сравнения арифметических чисел, который опирается на абсолютное (количественное) значение этих чисел, а не на относительное (порядковое) значение их. Учащийся, конечно, согласится называть бо́льшим то из двух рациональных чисел, изображение которого точкой расположено вправо от изображения меньшего числа, тем более, что такое расположение имеют изображения двух неравных арифметических чисел, и о том, что одно из них больше другого, ученик знает без

этого нового критерия. Но полное оправдание соглашения будет достигнуто только после того, как будет доказано, что

$$(1) \qquad a > b, \text{ если } a = b + c,$$

где c — положительное число, т. е. что большее из двух чисел может быть получено из меньшего числа посредством прибавления к нему положительного числа. Этот критерий будет уже воспринят учащимся как количественный и поэтому больше его удовлетворяющий. Вместе с тем ему будет в сущности сообщен обычный научный критерий неравенства двух чисел, состоящий в том, что

$$(2) \qquad a > b, \text{ если } a - b > 0,$$

так как критерий (2) есть лишь иная форма критерия (1).

В этом именно плане и проведено рассуждение, изложенное в пункте 12. Оно как раз и завершается установлением критерия (1). Однако пока этот критерий выражен словами и не представлен в форме (1). Представить его в форме (1) можно будет только после установления понятий о сумме двух чисел и о геометрическом способе нахождения этой суммы (§ 4, пункт 13).

Поскольку здесь же выполняется сравнение каждого числа с числом 0, не представит затруднений ввести символику $a > 0$ и $a < 0$ для обозначения того, что a есть соответственно положительное или отрицательное число.

§ 4. ДЕЙСТВИЯ НАД РАЦИОНАЛЬНЫМИ ЧИСЛАМИ

13. Сложение рациональных чисел.

13,*1*. *Вывод правила*. Методика выработала в основном два способа вывода правила сложения рациональных чисел — содержательный и формальный. Наука допускает только формальный путь вывода этого правила — путь соглашения, условия, который имеет научное (чисто теоретическое) оправдание. Но поскольку содержательный путь вывода также может быть обоснован посредством введения понятия о сумме направленных величин, наглядно представляемых направленными отрезками, его следует признать в большей мере соответствующим уровню понимания и развития учащихся VI класса.

Мы изложим два вывода правила сложения рациональных чисел.

Содержательный вывод

Задача 1. Движущаяся точка P последовательно совершила по прямой, начиная от некоторой точки O, два перемещения: OA и AB, т. е. сперва переместилась из точки O в точку A, а затем — из точки A в точку B. Очевидно, что вместо того, чтобы последовательно выполнять перемещения OA и AB, точка P могла бы сразу выполнить перемещение OB, которое, таким образом, можно считать заменяющим последовательное выполнение перемещений OA и AB, или, как говорят, их суммой.

Поставим перед собой задачу: зная каждое из двух составляющих (слагаемых) перемещений, найти заменяющее их перемещение (их сумму).

Если расстояния OA и AB, пройденные точкой P при ее первом и втором перемещении, равны, например, 12 *см* и 8 *см*, то могли представиться следующие 4 случая:

перемещение $OA=$	перемещение $AB=$
п 12 *см*	*п* 8 *см*
л 12 *см*	*л* 8 *см*
п 12 *см*	*л* 8 *см*
л 12 *см*	*п* 8 *см*

По соображению (или сопровождая решение задачи чертежом) найдем, что перемещение OB $(OB = OA + AB)$ будет выражаться следующими числами: 1) *п* 20 *см;* 2) *л* 20 *см;* 3) *п* 4 *см;* 4) *л* 4 *см.*

Во всех 4 случаях мы находим число, которое выражает сумму двух последовательных перемещений. Поэтому будет вполне естественно, если найденные числа мы примем за суммы данных чисел и запишем:

$$(1)\quad \begin{aligned} &п\ 12 + п\ 8 = п\ 20; \\ &л\ 12 + л\ 8 = л\ 20; \\ &п\ 12 + л\ 8 = п\ 4; \\ &л\ 12 + п\ 8 = л\ 4. \end{aligned}$$

Задача 2. Сегодня запас овощей на складе подвергся изменению сперва на 820 *кг*, а затем на 360 *кг*. Какое изменение запаса овощей произошло на складе за сегодняшний день?

Могли иметь место следующие 4 случая:

первое изменение:	второе изменение:
п 820	*п* 360
п 820	*р* 360
р 820	*п* 360
р 820	*р* 360

По соображению найдем, что общее изменение (сумма двух изменений) запаса овощей на складе за сегодняшний день выражается следующими числами:

1) *п* 1180; 2) *п* 460; 3) *р* 460; 4) *р* 1180.

Так как эти числа выражают то изменение запаса овощей на складе, которое произошло в результате его двух последовательных изменений и которое можно рассматривать как их сумму, то будет вполне естественным, если мы примем эти числа за суммы данных чисел и запишем:

$$
\text{(II)}\qquad
\begin{aligned}
&п\ 820 + п\ 360 = п\ 1180;\\
&п\ 820 + р\ 360 = п\ \ 460;\\
&р\ 820 + п\ 360 = р\ \ 460;\\
&р\ 820 + р\ 360 = р\ 1180.
\end{aligned}
$$

Задача 3. За промежуток времени от 7 часов утра до 1 часа дня произошло изменение температуры воздуха на t_1°, а за промежуток времени от 1 час. дня до 7 час. вечера — на t_2°. Какое изменение претерпела температура воздуха за весь день, т. е. за промежуток времени от 7 час. утра до 7 час. вечера?

Могли иметь место следующие 4 случая:

t_1°	t_2°
в 5°	*в* 2°
н 5°	*н* 2°
в 5°	*н* 2°
н 5°	*в* 2°

По соображению найдем, что общее изменение (сумма двух изменений) температуры выражается следующими числами:

1) *в* 7°; 2) *н* 7°; 3) *в* 3°; 4) *н* 3°.

Так как эти числа выражают то изменение температуры, которое произошло в результате ее двух последовательных изменений и которое можно рассматривать как их сумму, то будет вполне естественным, если мы примем эти числа за суммы данных чисел и запишем:

$$(\text{III})\qquad \begin{aligned} &\textit{в}\ 5^\circ + \textit{в}\ 2^\circ = \textit{в}\ 7^\circ;\\ &\textit{н}\ 5^\circ + \textit{н}\ 2^\circ = \textit{н}\ 7^\circ;\\ &\textit{в}\ 5^\circ + \textit{н}\ 2^\circ = \textit{в}\ 3^\circ;\\ &\textit{н}\ 5^\circ + \textit{в}\ 2^\circ = \textit{н}\ 3^\circ. \end{aligned}$$

Если мы всмотримся в результаты (I), (II), (III), полученные при нахождении числа, выражающего сумму двух направленных величин (двух перемещений, двух изменений запаса продуктов на складе, двух изменений температуры воздуха), то мы сумеем найти правило, по которому сумма двух чисел составляется из слагаемых.

Правило.

1°. Для того чтобы сложить два числа с одинаковыми знаками, надо сложить абсолютные значения этих чисел и перед найденной суммой поставить общий знак данных слагаемых.

2°. Для того чтобы сложить два числа с разными знаками, надо из большего абсолютного значения вычесть меньшее абсолютное значение и перед найденной разностью поставить знак того из данных слагаемых, которое имеет большее абсолютное значение.

Теперь обратим внимание на следующий особый случай, которого мы не рассмотрели. Ведь могло быть и так, что два последовательных изменения направленной величины выражались числом, имеющим разные знаки, но одно и то же абсолютное значение, т. е. противоположными числами. Каким числом в этом случае будет выражаться сумма этих изменений, т. е. изменение, заменяющее два рассматриваемых последовательных изменения? На этот вопрос не трудно ответить.

1) Если бы в задаче 1 перемещение OA выражалось числом *п* 12, а перемещение AB — числом *л* 12, то в результате этих двух перемещений движущаяся

точка P вернулась бы в исходное положение O, т. е. совершила бы перемещение, которое можно выразить числом 0. Это дает нам право принять, что

$$п12 + л12 = 0.$$

Очевидно, что точно так же

$$л12 + п12 = 0.$$

2) Если бы в задаче 2 первое изменение запаса овощей на складе выражалось числом $п820$, а второе изменение — числом $р820$, то в результате этих двух изменений первоначальный запас овощей не подвергся бы никакому изменению, а отсутствие изменения мы можем выразить числом 0. Это дает нам право принять, что

$$п820 + р820 = 0.$$

То же рассуждение привело бы нас к выводу, что

$$р820 + п820 = 0.$$

3) Если бы в задаче 3 было известно, что

$$t_1^\circ = в\ 5^\circ,\ t_2^\circ = н\ 5^\circ,$$

то общее изменение температуры за сутки выразилось бы числом 0°; это дает нам право принять, что

$$в5^\circ + н5^\circ = 0.$$

Если бы было известно, что $t_1^\circ = н5^\circ$, $t_2^\circ = в5^\circ$, то мы нашли бы, что

$$н5^\circ + в5^\circ = 0.$$

Из рассмотренных примеров можно заключить, что правило сложения двух чисел необходимо дополнить следующим пунктом:

3°. Сумма двух противоположных чисел равна нулю.

Наконец, принимая во внимание, что в случае, если одно из слагаемых есть 0, то сумму можно найти как по правилу 1°, так и по правилу 2°, приходим к выводу, что:

1) $п12 + 0 = п12 + п0 = п12;$
$л12 + 0 = л12 + л0 = л12;$
2) $п820 + 0 = п820 + п0 = п820;$
$р820 + 0 = р820 + р0 = р820;$
3) $в5^\circ + 0^\circ = в5^\circ + в0^\circ = в5^\circ;$
$н5^\circ + 0 = н5^\circ + н0^\circ = н5^\circ.$

Таким образом:

4^0. Сумма двух слагаемых, из которых одно равно нулю, равна другому слагаемому *.

Число, составленное из двух данных рациональных чисел по правилам 1^0—4^0, мы условились называть их суммой на том основании, что оно выражает направленную величину, являющуюся суммой направленных величин, выражаемых двумя данными числами.

Однако возникает вопрос: обладает ли сложение рациональных чисел теми основными свойствами, которыми обладает сложение арифметических чисел, т. е. свойствами переместительности и сочетательности?

Для ответа на этот вопрос рассмотрим, например, сложение чисел со значками *п* и *л*, выражающих перемещения точки по прямой:

$$1)\quad п7 + п5 = п5 + п7,$$
$$л7 + л5 = л5 + л7,$$

так как $7 + 5 = 5 + 7$;

$$2)\quad п7 + л5 = л5 + п7,$$
$$л7 + п5 = п5 + л7,$$

так как сложение двух чисел с противоположными знаками выполняется независимо от того, в каком порядке расположены слагаемые.

Эти результаты можно было предвидеть. В самом деле, если точка совершила по прямой сперва перемещение *п*7, а затем перемещение *п*5, то она оказалась в точке *п*12; но если бы она совершила сперва перемещение *п*5, а затем перемещение *п*7, то она опять оказалась бы в точке *п*12, так как расстояние $7 + 5$, пройденное ею в первый раз, равно расстоянию $5 + 7$, пройденному ею во второй раз (сумма двух отрезков не зависит от порядка, в котором выполняется их сложение).

Точно так же, если точка совершила по прямой сперва перемещение *п*7, а затем перемещение *л*5, то она оказалась в точке *п*2. Но если бы она совершила сперва перемещение *л*5, а затем перемещение *п*7, то она

* Впрочем, к этому выводу можно прийти и непосредственно, имея в виду, что 0 есть число, выражающее отсутствие изменения рассматриваемой направленной величины.

не только вернулась бы в начальное положение, но и прошла бы еще в положительном направлении расстояние 2, т. е. опять оказалась бы в точке $п2$.

$$3)\ п7 + п5 + п8 = п7 + (п5 + п8),$$
$$л7 + л5 + л8 = л7 + (л5 + л8),$$

так как $7 + 5 + 8 = 7 + (5 + 8)$;

$$4)\ п7 + п5 + л8 = п7 + (п8 + л8),$$
$$п7 + л5 + п8 = п7 + (л5 + п8),$$
$$л7 + п5 + л8 = л7 + (п5 + л8),$$
$$л7 + л5 + п8 = л7 + (л5 + п8),$$

так как обе части каждого из этих равенств равны одному и тому же числу; в этом мы убеждаемся проверкой.

Эти равенства имеют следующий конкретный смысл. Если, например, точка совершила по прямой одно вслед за другим три перемещения: $п7$, $п5$ и $л8$, то она сперва оказалась в точке $п12$, а затем в точке $п4$; но если бы мы заменили второе и третье перемещения их суммой $л3$ и заставили бы точку совершить перемещения $п7$ и $л3$, то окончательно она опять оказалась бы в точке $п4$; значит, замена группы перемещений $п5$ и $л8$ их суммой $л3$ не повлияла на окончательный результат трех перемещений.

В предыдущих рассуждениях мы не только использовали правило сложения положительных и отрицательных чисел, но также приняли во внимание и тот смысл, который имеют значки $п$ и $л$.

Однако в справедливости свойств переместительности и сочетательности сложения можно убедиться только на основании правила сложения положительных и отрицательных чисел. Для этого мы в качестве значков чисел возьмем знаки + (плюс) и — (минус), т. е. будем решать вопрос в общем виде, независимо от того, какой именно частный смысл имеют значки + и —. Рассмотрим следующие случаи:

$$1)\ (+7) + (+5) = (+5) + (+7),$$
$$(-7) + (-5) = (-5) + (-7),$$

так как $7 + 5 = 5 + 7$;

$$2)\ (+7) + (-5) = (-5) + (+7),$$
$$(-7) + (+5) = (+5) + (-7),$$

так как сложение двух чисел с разными знаками выполняется независимо от того, в каком порядке расположены слагаемые;

3) $(+7)+(+5)+(+8)=(+7)+[(+5)+(+8)]$,
$(-7)+(-5)+(-8)=(-7)+[(-5)+(-8)]$,

так как $7+5+8=7+(5+8)$;

4) $(+7)+(+5)+(-8)=(+7)+[(+5)+(-8)]$,
$(+7)+(-5)+(+8)=(+7)+[(-5)+(+8)]$,
$(-7)+(+5)+(-8)=(-7)+[(+5)+(-8)]$,
$(-7)+(-5)+(+8)=(-7)+[(-5)+(+8)]$,

так как обе части каждого из этих равенств равны одному и тому же числу. Но в этом мы убеждаемся только **проверкой**, не доказывая справедливости этих равенств на основании правила сложения,— этот путь доказательства возможен, но весьма нелегок.

Формальный вывод

В арифметике изучалось сложение целых и дробных чисел. При этом в обоих случаях смысл действия сложения был одинаков, и это действие обладало свойствами переместительности и сочетательности.

Теперь нам предстоит ввести правило сложения рациональных чисел. Рассмотрим все случаи, которые могут представиться:

1) Найдем сумму двух положительных чисел:

$$(+5)+(+3)=?$$

Так как положительные числа — это наши прежние арифметические числа, то

$$(+5)+(+3)=5+3=8.$$

Следовательно

(1) $$(+5)+(+3)=(+8).$$

Посмотрим на числовую ось. Для того чтобы найти на ней точку 8, надо из точки 5 передвинуться (переместиться) вправо (в положительном направлении) на отрезок, равный 3 единичным отрезкам. Таким образом, знак $+$ второго слагаемого указывает, в каком направлении надо переместиться от точки 5, а абсолютное значение 3 указывает на длину этого перемещения.

2) Теперь пусть первое слагаемое будет отрицательным числом:

$$(-5) + (+3) = ?$$

Применим тот же способ нахождения суммы, который мы употребили в случае 1. Именно, примем за сумму то число, которое мы найдем, когда из точки (-5) переместимся в положительном направлении на отрезок, равный 3 единичным отрезкам; этим числом будет число (-2). Следовательно, мы примем, что

(2) $$(-5) + (+3) = (-2).$$

3) Найдем сумму положительного и отрицательного числа:

$$(+5) + (-3) = ?$$

Второе слагаемое имеет знак — (минус). Истолкуем этот знак как указание, что теперь для нахождения суммы надо переместиться от точки $(+5)$ не вправо, а влево (в отрицательном направлении); абсолютное значение 3 второго слагаемого указывает, что длина этого перемещения должна быть равна 3. Выполнив это, придем к точке $(+2)$. Следовательно, примем, что

(3) $$(+5) + (-3) = (+2).$$

4) По аналогии с предыдущим случаем найдем, что

(4) $$(-5) + (-3) = (-8).$$

Мы нашли сумму двух чисел во всех случаях, в которых слагаемые имеют неравные абсолютные значения.

5) Найдем сумму противоположных чисел:

$$(+5) + (-5) = ?$$

Для нахождения суммы надо переместиться от точки $(+5)$ влево на отрезок, равный 5 единичным отрезкам. Очевидно, что мы придем в точку *O*, которая служит начальной точкой оси. Ей соответствует число 0 (нуль). Следовательно, мы примем, что

(5) $$(+5) + (-5) = 0.$$

Аналогично получим, что

(5) $$(-5) + (+5) = 0.$$

6) Если второе слагаемое есть число 0:

$$(+5) + 0 \text{ или } (-5) + 0,$$

то из точки, указываемой первым слагаемым, не надо перемещаться ни вправо, ни влево, так что

(6) $$(+5)+0=(+5);\ (-5)+0=(-5).$$

Очевидно, что

(6) $$0+(+5)=(+5);\quad 0+(-5)=(-5),$$

так как перемещение из точки O вправо на 5 единиц приведет к точке $(+5)$, а перемещение из точки O влево на 5 единиц приведет к точке (-5).

К какому же правилу мы пришли? Можно ли все рассмотренные случаи объединить в одно правило?

Всматриваясь в результаты (1) — (6), мы замечаем, что приходится различать 3 случая: случай, когда слагаемые имеют одинаковые знаки, случай, когда они имеют противоположные знаки, и случай, когда по крайней мере одно из слагаемых есть 0.

Принимая это во внимание, приходим к следующему правилу нахождения суммы двух рациональных чисел:

Правило.

1^0. Для того чтобы сложить два рациональных числа с одинаковыми знаками, надо сложить абсолютные значения этих чисел и перед найденной суммой поставить общий знак данных слагаемых.

2^0. Для того чтобы сложить два числа с разными знаками, надо из большего абсолютного значения вычесть меньшее абсолютное значение и перед найденной разностью поставить знак того из данных слагаемых, которое имеет большее абсолютное значение.

3^0. Сумма двух противоположных чисел равна нулю.

4^0. Сумма двух слагаемых, из которых одно равно нулю, равна другому слагаемому.

13,*2*. *Основные свойства сложения двух чисел.* Как мы знаем из пункта 13,*1*, сложение рациональных чисел обладает двумя основными свойствами (подчиняется двум законам) — свойством переместительности и свойством сочетательности.

Первому из этих свойств, выражаемому равенством

$$a+b=b+a,$$

можно дать одну из следующих формулировок:

1) Сумма не изменяется при изменении порядка слагаемых.

2) Сумма не изменяется при перестановке слагаемых.

3) Сумма не зависит от порядка, в котором расположены слагаемые.

Эти формулировки могут быть заменены другими вариантами, правильно выражающими сущность закона переместительности.

Второму свойству, выражаемому равенством

$$a+b+c=a+(b+c),$$

можно дать формулировки, приведенные в указаниях к пункту 2 § 1. При этом формулировка, соответствующая равенству

$$a+(b+c)=a+b+c,$$

выражает правило прибавления к числу a суммы $b+c$ двух чисел.

13,3. *Сумма нескольких чисел.* Сумма нескольких рациональных чисел имеет тот же смысл, что и сумма нескольких арифметических чисел. Именно: под суммой нескольких чисел, заданных в определенном порядке, понимают то число, которое получится, когда мы выполним сложение этих чисел в том порядке, в котором они записаны, т. е. сложим два первых числа, к полученной сумме прибавим третье число, к полученной сумме прибавим четвертое число и т. д., пока не исчерпаем все слагаемые.

Если бы не условились так понимать сумму нескольких чисел, заданных в определенном порядке, то пришлось бы, например, сумму $a+b+c+d+e$ записать так:

$$\{[(a+b)+c]+d\}+e,$$

что, конечно, значительно усложнило бы запись выражений. Введенное условие избавляет нас от необходимости употреблять такие сложные записи.

Свойства сложения нескольких чисел. Сложение нескольких чисел обладает теми же основными свойствами, что и сложение двух чисел, т. е. свойствами переместительности и сочетательности.

1) При сложении нескольких чисел можно изменять порядок слагаемых:

$$a+b+c+d+e=c+a+e+d+b=$$
$$=b+d+e+c+a \text{ и т. п.}$$

2) При сложении нескольких чисел любую группу рядом стоящих слагаемых можно заменить их суммой:

$$a + b + c + d + e = a + (b + c) + (d + e) =$$
$$= a + (b + c + d) + e \text{ и т. п.}$$

3) В частности, если равенство

$$a + b + c + d + e = a + (b + c + d + e)$$

прочесть справа налево, то свойству сочетательности, выражаемому им, можно дать и другую формулировку:

Для того чтобы прибавить сумму нескольких чисел, достаточно последовательно прибавить все слагаемые этой суммы.

Эти свойства могут быть легко проверены (проиллюстрированы) на числовых примерах. Однако, приняв справедливость свойства переместительности для двух слагаемых:

$$a + b = b + a$$

и свойства сочетательности для трех слагаемых:

$$a + (b + c) = a + b + c,$$

можно доказать справедливость этих свойств для любого числа слагаемых. Например:

1) $a + (b + c + d) = a + b + c + d$?

$$a + (b + c + d) = a + [(b + c) + d] =$$
$$= a + (b + c) + d = a + b + c + d.$$

2) $a + b + c + d = c + a + d + b$?

$$a + b + c + d = (a + b) + c + d = c + (a + b) + d =$$
$$= c + a + b + d = c + a + (b + d) = c + a + (d + b) =$$
$$= c + a + d + b.$$

Свойства сложения нескольких чисел позволяют нахождение суммы нескольких чисел выполнять по следующему правилу:

1) Если все слагаемые имеют одинаковые знаки, то их складывают по правилу сложения чисел с одинаковыми знаками.

2) Если же слагаемые имеют неодинаковые знаки, то сперва отдельно находят сумму всех положительных чисел и сумму всех отрицательных чисел, а затем эти суммы складывают по правилу сложения двух чисел с противоположными знаками.

13,4. *Приложения.*

1) Если точка, выйдя из начальной точки O оси, совершила по оси перемещения

$$(-10),\ (+18),\ (-5),\ (+12),\ (+3),\ (-6),$$

то она оказалась в точке, определяемой суммой

$$(-10)+(+18)+(-5)+(+12)+(+3)+(-6),$$

т. е. суммой

$$[(+18)+(+12)+(+3)]+[(-10)+(-5)+(-6)],$$

равной числу $(+12)$.

Следовательно, совокупность перемещений, которые точка выполнила последовательно, можно заменить перемещением $(+12)$.

2) Если кассир сберегательной кассы записывает принятые им вклады в виде положительных чисел, а произведенные выдачи в виде отрицательных чисел, то для подсчета наличия кассы — в конце выполнения им этих операций — он должен найти сумму всех записанных им положительных и отрицательных чисел.

3) Если известно, какие изменения, выражаемые положительными и отрицательными числами, температура воздуха претерпела в течение каждого из наблюдений, то для того, чтобы узнать, какое изменение температуры произошло за весь период наблюдений, достаточно найти сумму всех отмеченных отдельных изменений.

4) Если известно, что с 12 час. дня 15 марта по 12 час. дня 16 марта наблюдались следующие температуры:

Время 15 марта	Температура	Время 16 марта	Температура
12 час. дня	0°	3 час. ночи	—2°
3 час. дня	1,5°	6 час. утра	—3°
6 час. дня	0°	9 час. утра	—1,5°
9 час. дня	—0,5°	12 час. дня	0°
12 час. ночи	—1°	—	—

то из данных таблицы может быть найдена **средняя** суточная температура за указанный период. Для этого достаточно найти среднее арифметическое значение всех наблюденных температур, т. е. число

$$\frac{0+1{,}5+0+(-0{,}5)+(-1)+(-2)+(-3)+(-1{,}5)+0}{9};$$

это число равно $-0°{,}7$.

14. Вычитание рациональных чисел.

14,*1*. *Вывод правила*. Вычитание рациональных чисел есть действие, имеющее тот же смысл, что и вычитание арифметических чисел. Именно: вычесть из одного рационального числа другое рациональное число значит найти такое третье число, которое в сумме со вторым данным числом дает первое данное число.

Допустим, что требуется:

1) из числа $(+12)$ вычесть число $(+5)$;
2) из числа $(+12)$ вычесть число (-5);
3) из числа (-12) вычесть число $(+5)$;
4) из числа (-12) вычесть число (-5).

Значит, требуется найти число ?, которое удовлетворяло бы равенству:

1) $(+5)+? = (+12)$;
2) $(-5)+? = (+12)$;
3) $(+5)+? = (-12)$;
4) $(-5)+? = (-12)$.

Очевидно, что в случае 1 искомое число есть $(+7)$, а в случае 4 искомое число есть (-7).

В случае 2 для получения суммы $(+12)$ мы поступим так: сперва прибавим к слагаемому (-5) противоположное число $(+5)$, тогда получим число 0; а теперь к числу 0 прибавим число $(+12)$, что и даст нужное число $(+12)$:

$$(-5)+(+5)+(+12)=(+12).$$

Но так как

$$(-5)+(+5)+(+12)=(-5)+[(+5)+(+12)],$$

то выходит, что в случае 2

$$? = (+5)+(+12).$$

Значит, мы нашли, что

$$(+12)-(-5)=(+12)+(+5)=(+17). \tag{2}$$

В случае 3 для получения суммы (-12) мы поступим так: сперва прибавим к слагаемому $(+5)$ противоположное число (-5), тогда мы получим число 0; а теперь к числу 0 мы прибавим число (-12), что и даст нам нужное число (-12):

$$(+5)+(-5)+(-12)=(-12).$$

Но так как

$$(+5)+(-5)+(-12)=(+5)+[(-5)+(-12)],$$

то выходит, что в случае 3

$$?=(-5)+(-12).$$

Значит, мы нашли, что

$$(3)\qquad (-12)-(+5)=(-12)+(-5)=(-17).$$

Если мы всмотримся в равенства (2) и (3), то легко заметим, что в случаях 2 и 3 вычитание выполняется очень просто: для нахождения разности достаточно к уменьшаемому прибавить число, противоположное вычитаемому.

В случаях 1 и 4 мы нашли разность по соображению, но легко видеть, что правило, найденное нами для случаев 2 и 3, применимо и здесь:

1) $(+12)-(+5)=(+12)+(-5)=(+7)$;
4) $(-12)-(-5)=(-12)+(+5)=(-7)$.

Мы пришли к следующему общему правилу.

Правило. Для того чтобы из одного рационального числа вычесть другое рациональное число, достаточно к уменьшаемому прибавить число, противоположное вычитаемому.

Доказательство этого правила мы дали на числовых примерах. Но оно может быть проведено и в общем виде. Именно, допустим, что требуется найти разность двух рациональных чисел a и b. Это значит, что надо найти число ?, которое удовлетворяет равенству

$$b+?=a.$$

Легко видеть, что искомое число ? есть сумма

$$(-b)+a,$$

где $(-b)$ есть число, противоположное числу b. В самом деле,

$$b+[(-b)+a]=[b+(-b)]+a=0+a=a.$$

Значит,

$$? = (-b) + a = a + (-b),$$

т. е.

$$a - b = a + (-b), \tag{II}$$

что и требовалось доказать.

Можно провести доказательство правила вычитания путем проверки выражающего его равенства (II). Именно:

$$a + (-b) + b = a + [(-b) + b] = a + 0 = a.$$

14,2. *Выполнимость и однозначность вычитания.* В области арифметических чисел из одного числа можно вычесть другое только в том случае, если уменьшаемое больше вычитаемого или равно ему. В области же рациональных чисел вычитание выполняется без каких бы то ни было ограничений, или, как говорят, всегда: уменьшаемым и вычитаемым могут быть какие угодно рациональные числа — положительные, отрицательные или нуль. Следовательно, в области рациональных чисел вычитание есть действие „всегда выполнимое".

Вместе с тем разность двух данных рациональных чисел всегда имеет только одно (единственное) значение. В самом деле, если бы имели место два равенства

$$a - b = c \quad \text{и} \quad a - b = c',$$

где $c' \neq c$, то они влекли бы за собою равенства

$$a = b + c \quad \text{и} \quad a = b + c'$$

и, следовательно, равенство

$$b + c = b + c',$$

которое при $c' \neq c$ невозможно.

Следовательно, в области рациональных чисел вычитание есть действие „однозначное".

Таким образом, после расширения области арифметических чисел до области рациональных чисел выражение $a - b$, которое при арифметических значениях букв a и b не всегда имело числовое значение, при каждой системе рациональных значений этих букв имеет вполне определенное (одно и только одно) значение.

Следовательно, мы можем теперь сказать, что каждым двум рациональным числам, заданным в определенном порядке, соответствует одно и только одно рациональное число, являющееся их суммой, и одно и только одно рациональное число, являющееся их разностью, так что как в результате сложения, так и в результате вычитания двух данных рациональных чисел вновь получаем рациональное число, т. е. число той области, которой принадлежит каждое из двух данных чисел.

Этим же свойством обладает и область, состоящая из всех целых чисел (т. е. из положительных и отрицательных целых чисел и нуля).

Но не всякая область чисел обладает этим свойством. Если мы будем выполнять сложение и вычитание над числами, составляющими область всех четных целых чисел, то вновь будем получать четные целые числа, т. е. числа той же области. Но если будем выполнять сложение и вычитание над числами, составляющими область всех нечетных целых чисел, то мы уже не будем получать числа, принадлежащие той же области, так как сумма и разность двух нечетных чисел есть четное число.

К тем же выводам мы придем, если будем выполнять сложение и вычитание в области чисел, делящихся, например, на число 3, и в области чисел, дающих при делении на 3 остаток.

14,3. *Свойства вычитания.* Из свойств переместительности и сочетательности, которыми обладает сложение нескольких чисел, вытекает следующее свойство вычитания суммы нескольких чисел.

Для того чтобы вычесть сумму нескольких чисел, достаточно последовательно вычесть все слагаемые этой суммы:

$$(1)\qquad a-(b+c+d)=a-b-c-d.$$

Это равенство легко доказывается проверкой. Именно, мы докажем, что оно верно, если докажем, что сумма разности $a-b-c-d$ и вычитаемого $b+c+d$ равна уменьшаемому. Найдем эту сумму:
$a-b-c-d+(b+c+d)=a-b-c-d+b+c+d.$
Но так как

$$a-b-c-d+b+c+d=$$
$$=a+(-b)+(-c)+(-d)+b+c+d,$$

то, пользуясь свойствами переместительности и сочетательности сложения нескольких чисел, последовательно находим:

$$a + (-b) + (-c) + (-d) + b + c + d =$$
$$= a + [(-b) + b] + [(-c) + c] + [(-d) + d] =$$
$$= a + 0 + 0 + 0 = a.$$

Следовательно, равенство (1) верно.

Правило вычитания суммы чисел можно применить и для вычитания разности чисел, так как каждую разность чисел мы можем заменить суммой. Пользуясь этим, последовательно находим:

$$a - (b - c) = a - [b + (-c)] = a - b - (-c) =$$
$$= a - b + c.$$

Например:

$$8 - (3 - 10) = 8 - [3 + (-10)] = 8 - 3 - (-10) =$$
$$= 8 - 3 + 10 = 15.$$

Тот же результат мы получили бы, если бы сначала выполнили действие в скобках:

$$8 - (3 - 10) = 8 - (-7) = 15.$$

15. Алгебраическая сумма. Тот факт, что *вычитание* какого-либо числа из другого числа сводится к *сложению* уменьшаемого с числом, противоположным вычитаемому, лежит в основе важного понятия об *алгебраической сумме*.

Возьмем выражение

$$(1) \qquad (+4) + (-5) - (-3) + (-1) - (+7),$$

полученное путем соединения нескольких положительных и отрицательных чисел знаками сложения и вычитания (+ и —). Если мы выполним в нем все вычитания, то это выражение заменится равным выражением

$$(2) \qquad (+4 + (-5) + (+3) + (-1) + (-7),$$

представляющим собой результат соединения положительных и отрицательных чисел только знаком сложения (+), т. е. *сумму* этих чисел.

В частности, выражение

$$(3) \qquad 4 - 5 + 3 - 1 - 7,$$

полученное путем соединения нескольких **положительных** чисел знаками сложения и вычитания ($+$ и $-$), можно заменить выражением

$$4+(-5)+3+(-1)+(-7), \tag{4}$$

указывающим, что знаки **действий** ($+$ и $-$), соединяющие положительные числа в выражении (3), можно рассматривать как знаки **чисел**, а самое выражение (3) — как сумму чисел, написанных вместе с их знаками одно вслед за другим.

Поэтому на вопрос о том, что представляют собою знаки $+$ и $-$ в выражении (3): знаки ли действий или знаки чисел, надо ответить, что их можно рассматривать как знаки чисел, написанных одно вслед за другим с их знаками и являющихся **слагаемыми**, так что выражение (3) есть не что иное, как выражение (4), в котором знаки $+$, обозначающие сложение, опущены.

Определение. Каждое выражение, полученное путем соединения нескольких чисел знаками $+$ и $-$, называется **алгебраической суммой**.

Алгебраическая сумма обладает свойствами переместительности и сочетательности:

$$4-5+3-1-7=4+3-5-1-7,$$

а также теми свойствами сложения, которые основаны на свойствах переместительности и сочетательности:

$$4+(-5+3-1-7)=4-5+3-1-7$$

(прибавление суммы);

$$4-(-5+3-1-7)=4+5-3+1+7$$

(вычитание суммы).

В этих примерах выражение в скобках есть сумма, и с ней мы поступили согласно правилам прибавления и вычитания суммы, причем прибавление выполняли посредством приписывания слагаемых с их знаками, а вычитание — посредством приписывания чисел, противоположных слагаемым, с их знаками.

Так как скобки, в которые была заключена прибавляемая или вычитаемая сумма, мы опускали, то это преобразование называется **раскрытием скобок**, в которые заключена алгебраическая сумма.

Очевидно, что возможно и обратное преобразование, именно: любую группу рядом стоящих слагаемых алгебраической суммы можно заключить в скобки; при этом мы можем поставить перед скобками знак + или —; в первом случае все слагаемые группы, заключаемой в скобки, вносятся в эти скобки со своими знаками, а во втором случае — с противоположными знаками:

$$4-5+3-1-7=(4-5)+(3-1-7)=$$
$$=4-(5-3)-(1+7)=4-(5-3+1)-7.$$

Заметим, что знаки + или —, которые мы поставили перед скобками, не содержались в данной сумме, а были внесены в выражение при выполнении преобразования. Это преобразование называется **заключением группы слагаемых алгебраической суммы в скобки.**

Два рассмотренных преобразования состоят в непосредственном применении равенства

$$a+(b+c+d)=a+b+c+d,$$

выражающего свойство сочетательности сложения, и равенства

$$a-(b+c+d)=a-b-c-d,$$

являющегося следствием предыдущего, при условии, что они рассматриваются слева направо (раскрытие скобок) и справа налево (заключение в скобки).

Указанные упражнения, требующие применения свойств алгебраических сумм, могут рассматриваться как полезные и ценные в теоретическом и методическом отношениях пропедевтические упражнения, подготовляющие восприятие и усвоение учащимися действий над многочленами.

16. Умножение рациональных чисел.

16,*1*. *Вывод правила.* Методика выработала в основном два способа вывода правила умножения рациональных чисел — содержательный и формальный. Наука допускает только формальный путь вывода этого правила — путь соглашения, условия, который имеет научное (чисто теоретическое) оправдание. Однако если можно было бы выбрать этот путь в старшем классе (например, в повторительном или углубляющем обзоре учения о числе), то предложить учащимся VI класса формальное и, следовательно, абстрактное изложение вопроса об умножении рациональных чисел значило бы создать немалые трудности при усвоении ими объяснений учителя и оставить наиболее мыслящих из них неудовлетворенными. Поэтому в VI классе целесообразнее использовать второй способ изложения вопроса — содержательный, основанный на решении одной или нескольких конкретных задач.

Мы изложим два вывода правила умножения рациональных чисел.

Содержательный вывод

Задача. Точка P перемещается по оси со скоростью 5 *см* в секунду. В данный момент она совпадает с точкой O оси. Найти положение точки P в момент, отстоящий от данного на 10 сек. (т. е. в момент, следующий за данным через 10 сек. или предшествующий данному на 10 сек.).

Очевидно, что предстоит ответить на следующие вопросы: 1) где будет находиться точка P через 10 сек. после данного момента, если она движется по оси в положительном направлении; 2) где находилась точка P за 10 сек. до данного момента, если она движется по оси в положительном направлении; 3) где будет находиться точка P через 10 сек. после данного момента, если она движется по оси в отрицательном направлении; 4) где находилась точка P за 10 сек. до данного момента, если она движется по оси в отрицательном направлении.

Рассуждая так же, как при решении арифметической задачи, легко придем к следующим выводам:

если точка P движется по оси в положительном направлении, то 1) через 10 сек. после данного момента она будет находиться в точке A, расположенной в положительном направлении от точки O на расстоянии 50 *см* от нее, а 2) за 10 сек. до данного момента она находилась в точке B, расположенной в отрицательном направлении от точки O на расстоянии 50 *см* от нее; если точка P движется по оси в отрицательном направлении, то 3) через 10 сек. после данного момента она будет находиться в точке B, а 4) за 10 сек. до данного момента она находилась в точке A.

Теперь попробуем записать данные и найденные искомые в этой задаче величины с помощью положительных и отрицательных чисел. Для этого условимся записывать скорость движения точки P в том случае, когда она движется в положительном направлении, через $(+5)$, а в том случае, когда она движется в отрицательном направлении, через (-5). Вполне естественным будет также, если мы обозначим длину промежутка времени, отделяющего данный момент от следующего за ним через 10 сек., через $(+10)$, а длину промежутка времени, отделяющего данный момент от предшествующего ему на 10 сек., через (-10).

При этих обозначениях условие задачи и найденные решения могут быть записаны в виде следующих схем:

$$1)\ \frac{(+5),\ (+10)}{(+50)}; \qquad 2)\ \frac{(+5),\ (-10)}{(-50)};$$

$$3)\ \frac{(-5),\ (+10)}{(-50)}; \qquad 4)\ \frac{(-5),\ (-10)}{(+50)}.$$

Здесь числами $(+50)$ и (-50) выражены ответы на вопрос задачи; число $(+50)$ означает, что точка P будет находиться или находилась в точке, расположенной в положительном направлении от точки O на расстоянии 50 *см* от нее (т. е. в точке A), а число (-50) означает, что точка P будет находиться или находилась в точке, расположенной в отрицательном направлении от точки O на расстоянии 50 *см* от нее (т. е. в точке B). С помощью какого действия мы решали задачу в каждом из 4 случаев?

Во всех этих случаях мы решали задачу так: выполнив умножение арифметических чисел 5 и 10, находили их произведение 50, а затем по соображению приписывали к числу 50 знак $+$ или $-$.

Если мы теперь внимательно присмотримся к тому, как эти результаты $(+50)$ или (-50) можно непосредственно получить (составить) из данных чисел, записанных над чертой, то придем к выводу, что 1) абсолютное значение результата равно произведению абсолютных значений данных чисел; 2) знак результата есть $+$ или $-$ в зависимости от того, имеют ли данные числа одинаковые или противоположные знаки.

Действие, состоящее в нахождении по двум данным рациональным числам нового (третьего) числа при помощи этого (только что найденного) правила, называется **умножением** этих рациональных чисел.

Определение 1. Произведением двух рациональных чисел называется рациональное число, абсолютное значение которого равно произведению абсолютных значений данных чисел и знак которого есть $+$ или $-$ в зависимости от того, имеют ли данные числа одинаковые или противоположные знаки.

Это определение имеет ясный смысл, если множимое и множитель — числа, отличные от нуля. Для случая, когда множимое или множитель есть 0, должно быть установлено дополнительное определение.

Определение 2. Если один, по крайней мере, из двух сомножителей есть 0, то за произведение этих чисел принимается число 0*:

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0.$$

Из определений 1 и 2 вытекает следующее правило:

Правило. Для того чтобы умножить одно рациональное число на другое, надо абсолютное значение множимого умножить на абсолютное значение множителя и найденное произведение взять со знаком $+$ или $-$ в зависимости от того, имеют ли множимое и множитель одинаковые или противоположные знаки.

Из этого правила следует, что знак произведения двух рациональных чисел находится по следующему правилу, называемому правилом знаков: при умножении одинаковые знаки дают плюс, а противоположные знаки дают минус. Хотя эти выражения недостаточно точны, но для запоминания и применения на практике они очень удобны.

Формальный вывод

В арифметике изучалось умножение на целое и на дробное число. При этом решались различные задачи: найти значение величины, в данное число раз большей, чем данная величина, и найти значение величины, составляющей данную дробь от данной величины. Однако в обоих случаях действие умножения обладало одними и теми же свойствами:

свойством переместительности:

(1) $$ab = ba;$$

свойством сочетательности:

(2) $$a(bc) = (ab)c;$$

---

* Впрочем, определение 2 можно вывести как следствие из определения 1, если принять во внимание, что $0 = (+0) = (-0)$.

свойством распределительности (относительно сложения):

$$(3) \qquad (a+b)\,c = ac + bc.$$

Мы покажем, что для того, чтобы и умножение рациональных чисел обладало теми же тремя свойствами, необходимо и достаточно за произведение двух рациональных чисел п р и н я т ь такое рациональное число, абсолютное значение которого равно произведению абсолютных значений данных чисел и знак которого есть + или — в зависимости от того, имеют ли данные числа одинаковые или противоположные знаки.

В самом деле, при этом о п р е д е л е н и и произведения двух рациональных чисел равенства (1), (2), (3) будут выполняться:

1) $$\left.\begin{aligned}(+8)\cdot(+5) &= (+5)\cdot(+8)\\ (-8)\cdot(-5) &= (-5)\cdot(-8)\end{aligned}\right\},\ \text{так как } +(8\cdot 5) = +(5\cdot 8);$$

$$\left.\begin{aligned}(+8)\cdot(-5) &= (-5)\cdot(+8)\\ (-8)\cdot(+5) &= (+5)\cdot(-8)\end{aligned}\right\},\ \text{так как } -(8\cdot 5) = -(5\cdot 8).$$

Если у двух сомножителей знаки одинаковые (противоположные), то и после перестановки этих сомножителей их знаки будут одинаковыми (противоположными), а произведение абсолютных значений двух сомножителей, как известно из арифметики, не зависит от их порядка (свойство переместительности умножения).

Вообще, если

$$a = \pm A;\ b = \pm B,$$

где A и B — абсолютные значения соответственно чисел a и b, то в зависимости от того, имеют ли числа a и b одинаковые или противоположные знаки, имеем:

$$ab = +(AB),\ ba = +(BA);\ ab = ba;$$
$$ab = -(AB),\ ba = -(BA);\ ab = ba.$$

2) $$\left.\begin{aligned}(+4)\cdot[(+3)\cdot(+5)] &= [(+4)\cdot(+3)]\cdot(+5)\\ (+4)\cdot[(-3)\cdot(-5)] &= [(+4)\cdot(-3)]\cdot(-5)\\ (-4)\cdot[(+3)\cdot(-5)] &= [(-4)\cdot(+3)]\cdot(-5)\\ (-4)\cdot[(-3)\cdot(+5)] &= [(-4)\cdot(-3)]\cdot(+5)\end{aligned}\right\},\ \text{так как } +[4\cdot(3\cdot 5)] = +[(4\cdot 3)\cdot 5];$$

$$\left.\begin{aligned}(+4)\cdot[(+3)\cdot(-5)] &= [(+4)\cdot(+3)]\cdot(-5)\\ (+4)\cdot[(-3)\cdot(+5)] &= [(+4)\cdot(-3)]\cdot(+5)\\ (-4)\cdot[(+3)\cdot(+5)] &= [(-4)\cdot(+3)]\cdot(+5)\\ (-4)\cdot[(-3)\cdot(-5)] &= [(-4)\cdot(-3)]\cdot(-5)\end{aligned}\right\},\ \text{так как } -[4\cdot(3\cdot 5)] = -[(4\cdot 3)\cdot 5].$$

Из этих примеров видно, что если 0 или 2 (четное число) из трех сомножителей имеет знак —, то, как бы мы ни группировали эти три сомножителя, их произведение будет иметь знак +; если же 1 или 3 (нечетное число) из трех сомножителей имеет знак —, то, как бы мы ни группировали эти три сомножителя, их произведение будет иметь знак —. А произведение абсолютных значений трех сомножителей, как известно из арифметики, не зависит от их группировки (свойство сочетательности умножения).

Вообще, если

$$a = \pm A, \quad b = \pm B, \quad c = \pm C,$$

где A, B, C — абсолютные значения соответственно чисел a, b, c, то в зависимости от того, имеется ли среди этих чисел четное (0 или 2) или нечетное (1 или 3) число отрицательных, имеем:

$$a(bc) = + [A(BC)]; \quad (ab)c = + [(AB)C];$$
$$a(bc) = (ab)c;$$
$$a(bc) = - [A(BC)]; \quad (ab)c = - [(AB)C];$$
$$a(bc) = (ab)c.$$

3) Распределительное свойство умножения (относительно сложения), выражаемое равенством (3), проверяем только на примерах (см. учебник, § 19, пункт 3).

При этом целесообразно сперва рассмотреть случай, когда числа a и b имеют одинаковые знаки, а затем — случай, когда эти числа имеют противоположные знаки; тогда будут исчерпаны все комбинации.

Вообще, если $a = \pm A$, $b = \pm B$, $c = \pm C$, то, например, в случае $a < 0$, $b < 0$, $c > 0$ равенство (3) сведется к равенству

$$[-(A + B)] \cdot (+C) = (-AC) + (-BC),$$

а в случае $a < 0$, $b > 0$, $c > 0$ и $A > B$ к равенству

$$[-(A - B)] \cdot (+C) = (-AC) + (+BC).$$

Справедливость первого равенства следует из того, что $(A+B)C = AC + BC$, а второго — из того, что $(A - B)C = AC - BC$ и $AC > BC$.

Мы установили, что при соблюдении принятого нами правила умножения двух рациональных чисел все три основные свойства этого действия имеют место. Следовательно, выбор правила умножения оказался обоснованным.

Но к необходимости именно этого выбора можно прийти и на основании решения задач, требующих по данным значениям некоторых направленных величин найти значение какой-либо направленной величины, находящейся от данных величин в определенной зависимости. К таким задачам относится приведенная выше, а также задачи № 125—127 из „Сборника задач" (стр. 24).

16,2. *Произведение нескольких чисел.* Произведение нескольких рациональных чисел имеет тот же смысл, что и произведение нескольких арифметических чисел. Именно: под произведением нескольких чисел, заданных в определенном порядке, понимают то число, которое получится, когда мы выполним умножение этих чисел в том порядке, в котором они записаны, т. е. умножим первое число на второе, полученное произведение умножим на третье число, полученное произведение умножим на четвертое число и т. д., пока не исчерпаем все данные сомножители.

Если бы не условились так понимать произведение нескольких чисел, заданных в определенном порядке, то пришлось бы, например, произведение $abcde$ записывать так:

$$\{[(ab)\,c]\,d\}\,e,$$

что, конечно, значительно усложнило бы запись выражений. Введенное условие избавляет нас от необходимости употреблять такие сложные записи.

В § 18 учебника изложено простое рассуждение, приводящее к следующим выводам:

1) Абсолютное значение произведения нескольких чисел равно произведению абсолютных значений этих чисел.

2) Произведение нескольких чисел есть положительное число, если число отрицательных сомножителей четное.

3) Произведение нескольких чисел есть отрицательное число, если число отрицательных сомножителей нечетное.

Следовательно, знак произведения нескольких чисел зависит только от четности или нечетности числа входящих в это произведение отрицательных сомножителей.

17. Деление рациональных чисел.

17,*1*. *Вывод правила.* Деление рациональных чисел есть действие, имеющее тот же смысл, что и деление арифметических чисел. Именно: разделить одно рациональное число на другое рациональное число значит найти такое третье число, которое в произведении со вторым данным числом дает первое данное число.

Из этого определения действия деления непосредственно следует равенство

(IV_1) $$(a:b)\cdot b=a$$

и тот факт, что

(IV_2) $$\text{если } a:b=c, \text{ то } a=bc.$$

Каждое из этих двух предложений выражает зависимость между делимым, делителем и частным, получаемым при делении одного числа на другое. Этой зависимостью в форме (IV_1) или (IV_2) пользуются при доказательстве предложений, относящихся к делению чисел.

Допустим, что требуется:

1) число $(+24)$ разделить на число $(+8)$;
2) число $(+24)$ разделить на число (-8);
3) число (-24) разделить на число $(+8)$;
4) число (-24) разделить на число (-8).

Значит, требуется найти число ?, которое удовлетворяло бы равенству:

1) $(+8)\cdot ? = (+24)$;
2) $(-8)\cdot ? = (+24)$;
3) $(+8)\cdot ? = (-24)$;
4) $(-8)\cdot ? = (-24)$.

Так как абсолютное значение 24 произведения равно произведению абсолютного значения 8 множимого на абсолютное значение множителя ?, т. е.

$$(\text{абсолютное значение числа } ?)\cdot 8=24,$$

то абсолютное значение числа ? есть частное от деления числа 24 на число 8, т. е. 3.

Что же касается знака числа ?, то его можно найти, опираясь на тот хорошо известный нам факт, что если произведение двух чисел имеет знак +, то сомножители имеют одинаковые знаки, а если это произведение имеет знак —, то сомножители имеют противоположные знаки. Поэтому

в случае 1 искомое число ? есть $(+3)$;
в случае 2 искомое число ? есть (-3);
в случае 3 искомое число ? есть (-3);
в случае 4 искомое число ? есть $(+3)$.

Мы пришли к выводу, что

$$1)\ (+24):(+8)=(+3);$$
$$2)\ (+24):(-8)=(-3);$$
$$3)\ (-24):(+8)=(-3);$$
$$4)\ (-24):(-8)=(+3).$$

Этот вывод можно сформулировать в виде следующего правила.

Правило. Для того чтобы разделить одно рациональное число на другое, достаточно абсолютное значение делимого разделить на абсолютное значение делителя и найденное частное взять со знаком + или со знаком — в зависимости от того, имеют ли делимое и делитель одинаковые или противоположные знаки.

С помощью того же рассуждения мы найдем, что это правило может применяться, если делимое есть какое угодно рациональное число, а делитель — рациональное число, отличное от нуля.

17,2. *Свойства деления.*

Учебник, § 21.

Докажем эти свойства на числовых примерах.

$$(a+b):c=(a:c)+(b:c).$$

$$[12+(-28)+32]:4=(12:4)+[(-28):4]+(32:4).$$

Доказательство (проверкой):

$$\{(12:4)+[(-28):4]+(32:4)\}\cdot 4=$$
$$=(12:4)\cdot 4+[(-28):4]\cdot 4+(32:4)\cdot 4=12+(-28)+32.$$

Мы использовали равенство (IV_1).

$$(abc):m=(a:m)\,bc=a\,(b:m)\,c=ab\,(c:m).$$

1) $$[12\cdot(-18)\cdot 30]:6=(12:6)\cdot(-18)\cdot 30.$$

Доказательство (проверкой):

$$(12:6)\cdot(-18)\cdot 30\cdot 6=(12:6)\cdot 6\cdot(-18)\cdot 30=$$
$$=12\cdot(-18)\cdot 30.$$

2) $$[12\cdot(-18)\cdot 30]:6=12\cdot[(-18):6]\cdot 30.$$

Доказательство (проверкой):

$$12\cdot[(-18):6]\cdot 30\cdot 6=12\cdot[(-18):6]\cdot 6\cdot 30=$$
$$=12\cdot\{[(-18):6]\ 6\}\cdot 30=12\cdot(-18)\cdot 30.$$

3) $$[12\cdot(-18)\cdot 30]:6=12\ (-18)\cdot(30:6).$$

Доказательство (проверкой):

$$12\cdot(-18)\cdot(30:6)\cdot 6=12\cdot(-18)\cdot[(30:6)\cdot 6]=$$
$$=12\cdot(-18)\cdot 30.$$

Мы использовали равенство (IV_1).

$$a:(bc)=(a:b):c.$$
$$120:[2\cdot(-3)]=(120:2\ :(-3).$$

Доказательство (проверкой):

$$[(120:2):(-3)]\cdot 2\cdot(-3)=[\ 120:2):(-3)]\cdot(-3,\cdot 2=$$
$$=(120:2,\cdot 2=120.$$

Мы дважды использовали равенство (IV_1).

18. **Возведение чисел в натуральную степень.** Возведение арифметических чисел в натуральную степень рассмотрено в § 1 (пункт 4). Для рациональных чисел это действие имеет тот же смысл. Именно: если a есть рациональное число, то n-й степенью этого числа называют произведение n сомножителей, каждый из которых равен числу a; нахождение какой-либо степени числа называют возведением этого числа в степень; число, которое возводится в степень, называется основанием степени, а число, указывающее, в которую степень возводится основание (т. е. из скольких равных сомножителей составлена степень), — показателем степени; n-я степень числа a записывается в виде a^n, так что

$$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a\cdot a}_{n\ \text{раз}}.$$

Так как n-я степень числа a есть произведение нескольких сомножителей, то к ней относятся выводы, сделанные по поводу этого произведения в пункте 16,*2*:

1) Всякая степень положительного числа есть положительное число.

В самом деле, если a есть положительное число, то произведение

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot a}_{n \text{ раз}}$$

n сомножителей есть положительное число (вывод 2). Это свойство степени можно кратко записать так: если $a>0$, то и $a^n>0$.

2) Степень отрицательного числа есть положительное число, если показатель — четное число, и отрицательное число, если показатель — нечетное число.

В самом деле, если a есть отрицательное число, то произведение

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot a}_{n}$$

n сомножителей есть положительное число, если число сомножителей n четное, и отрицательное число, если число сомножителей n — нечетное (вывод 3). Это свойство степени можно кратко записать так: если $a<0$, то при n четном $a^n>0$, а при n нечетном $a^n<0$.

3) Степень числа 0 равна нулю:

$$0^n=\underbrace{0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot \ldots \cdot 0 \cdot 0}_{n \text{ раз}}=0.$$

Значит, если $a=0$, то и $a^n=0$ (свойство 4 произведения нескольких чисел).

Из определения степени непосредственно вытекают следующие теоремы.

Теорема I. Произведение нескольких степеней одного и того же числа есть степень этого числа, показатель которой равен сумме показателей сомножителей. В самом деле,

$$a^4 \cdot a^3 \cdot a^5=(a \cdot a \cdot a \quad a) \cdot (a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a)=$$
$$=a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \text{ (по свойству сочетательности)}=$$
$$=a^{12} \text{ (по определению степени)}.$$

Вообще $\qquad a^m a^n a^p=a^{m+n+p}.$

Следствие. Если степень возвести в новую степень, то получается степень того же основания с показателем, равным произведению двух данных показателей степеней:

$$(a^m)^n=a^{mn}.$$

Например:

$$(a^2)^3=a^2\cdot a^2\cdot a^2=a^{2+2+2}=a^{2\cdot 3},$$
$$(a^5)^2=a^5\cdot a^5=a^{5+5}=a^{5\cdot 2}.$$

Вообще

$$(a^m)^n=\underbrace{a^m\cdot a^m\cdot\ldots\cdot a^m}_{n\text{ раз}}=a^{\overbrace{m+m+\ldots+m}^{n\text{ раз}}}=a^{m\cdot n}.$$

Пользуясь этим следствием, докажем, что степень $(-1)^n$ числа (-1) равна числу $(+1)$ при n четном и числу (-1) при n нечетном, т. е. что

$$(-1)^{2n}=1;\ (-1)^{2n+1}=(-1);$$
$$(-1)^{10}=[(-1)^2]^5=(+1)^5=(+1);$$
$$(-1)^{11}=(-1)^{10}\cdot(-1)=(+1)\cdot(-1)=(-1).$$

Теперь становится ясным, почему произведение нескольких сомножителей имеет знак $+$ или $-$ в зависимости от четности или нечетности числа входящих в это произведение отрицательных сомножителей.

Теорема 2. Для того чтобы возвести в степень произведение, достаточно возвести в эту степень каждый сомножитель в отдельности и полученные степени перемножить.

В самом деле,

$(abc)^4=(abc)\cdot(abc)\cdot(abc)\cdot(abc)$ (по определению степени) $=$

$=abc\,abc\,abc\,abc$ (по свойству сочетательности) $=$

$=aaaa\,bbbb\,cccc$ (по свойству переместительности) $=$

$=(aaaa)\,(bbbb)\cdot(cccc)$ (по свойству сочетательности) $=$

$=a^4b^4c^4$ (по определению степени).

Например:

$$(2\cdot5\cdot9)^4=2^4\cdot5^4\cdot9^4;$$
$$(3\cdot7)^5=3^5\cdot7^5;$$
$$(4\cdot10\cdot13\cdot18)^2=4^2\cdot10^2\cdot13^2\cdot18^2.$$

Этот результат подтверждает тот общий вывод, к которому мы пришли на стр. 43. Именно: если над результатом действия какой-либо ступени, выполненным над несколькими числами, требуется выполнить действие более высокой ступени, то это второе действие должно быть выполнено над **каждым** из данных чисел.

В рассматриваемом случае над произведением (результатом действия второй ступени) выполняется возведение в степень (действие третьей ступени); поэтому второе действие распространяется на все элементы (компоненты) первого действия, т. е. на все сомножители.

Равенство

$$(abc)^4 = a^4 b^4 c^4,$$

читаемое справа налево, позволяет установить, что и

$$a^4 b^4 c^4 = (abc)^4.$$

Этот факт окажется практически полезным при решении вопроса о том, представляет ли данное число данную степень другого числа.

Указания к § 4 (пункты 13—18).

13. В пункте 13 рассмотрены два вывода правила сложения рациональных чисел — содержательный и формальный. Такие названия этим выводам даны по той причине, что первый из них основан на истолковании рациональных чисел как чисел, выражающих конкретные направленные величины, а второй — на введенном выше формальном определении рациональных чисел как чисел, изображаемых точками на оси. Каждый из этих выводов имеет достоинства и недостатки.

Главное достоинство первого вывода состоит в том, что он продолжает идею, которая лежит в основе понятия о сумме целых и дробных чисел как о числе, выражающем сумму тех конечных множеств или тех абсолютных непрерывных величин, которые выражаются слагаемыми; при нахождении суммы рациональных чисел указанная идея применяется к непрерывным направленным величинам. Учащийся подводится к правилу посредством конкретных соображений, представляющихся ему вполне понятными и естественными; ввиду этого и правило становится „прозрачным“, прочно связанным с конкретными представлениями, которые всегда могут помочь усвоить, хорошо запомнить и, если придется, возобновить его в памяти.

Другим достоинством первого вывода является возможность осуществить его на примере р а з л и ч н ы х направленных величин, тем самым как бы демонстрируя его широкую применимость.

Некоторый недостаток первого вывода заключается в том, что он не позволяет сразу перейти к изображению рациональных чисел точками на оси, а требует сначала приведения рациональных чисел в соответствие с изображающими их направленными отрезками с общим началом O, концы которых оказываются точками, принимаемыми за изображения рациональных чисел.

Большим достоинством второго вывода является то, что он с самого начала строится на геометрической основе, т. е. связывается с изображением рациональных чисел точками на числовой оси.

Этот вывод также окажется вполне доступным пониманию учащихся. Правда, он имеет недостаток, состоящий в том, что в его основу кладется соглашение (условие) называть суммой чисел a и b то число, которое будет найдено, если мы от числа a переместимся по числовой оси вправо (если $b>0$) или влево (если $b<0$) на отрезок, длина которого равна абсолютному значению числа b. Однако поскольку это определение суммы двух чисел вводится неявно и служит естественным обобщением определения суммы двух положительных (арифметических) чисел, безоговорочно принимаемым учащимися, — этот недостаток, конечно, остается незамеченным учащимися и сколько-нибудь существенного влияния на ход вывода не оказывает. Этот второй вывод, так же как и первый, вполне заслуживает одобрения.

К сожалению, в ряде учебников (в том числе и в „Алгебре" А. Н. Барсукова) допускается ошибка, состоящая в том, что еще до решения задачи по соображению и введения с о г л а ш е н и я называть действие, с помощью которого из данных чисел найдено искомое число, сложением, ответ задачи представляется в виде выражения $a+b$, т. е. заранее принимается, что он является суммой рациональных чисел, хотя понятие об этой сумме только предстоит установить.

14. Правило вычитания рациональных чисел может быть найдено („открыто") указанным в пункте 14 путем, но может быть и сразу сообщено учащимся и тотчас же проверено.

Должно быть, первый путь представит некоторый интерес для учащихся и вызовет их активность, а это не только полезно, но и поможет запомнить правило. В VI классе в особенности надо использовать каждую возможность для пробуждения активности учащихся.

Можно попытаться некоторое время до сообщения правила предлагать учащимся находить разность с помощью примерно таких рассуждений:

1) $5-7=x$; $5=7+x$; x не может быть положительным числом, так как $5<7$; значит, x есть отрицательное число с абсолютным значением, равным разности $7-5$, т. е. 2; $x=(-2)$;

2) $(-5)-7=x$; $(-5)=7+x$; x не может быть положительным числом, так как $(-5)<0$; значит, x есть отрицательное число с абсолютным значением, равным сумме $7+5$, т. е. 12; $x=(-12)$;

3) $5-(-7)=x$; $5=(-7)+x$; x не может быть отрицательным числом, так как $5>0$; значит, x есть положительное число с абсолютным значением, равным сумме $5+7$, т. е. 12; $x=(+12)$;

4) $(-5)-(-7)=x$; $(-5)=(-7)+x$; x не может быть отрицательным числом, так как $5<7$; значит, x есть положительное число с абсолютным значением, равным разности $7-5$, т. е. 2; $x=(+2)$.

В результате таких рассуждений находят и записывают разность, после чего сообщают правило.

Этот путь несколько труднее предложенного в пункте 14, но он заставляет подумать, в чем его ценность. Вместе с тем проверяется прочность усвоения учащимися правила сложения рациональных чисел.

Усвоение и закрепление правила вычитания рациональных чисел проводят, сперва сохраняя знак + у положительных чисел, а затем опуская его. Однако в этом втором случае при вычитании положительного числа учащийся должен подразумевать знак + и сознательно заменять его на —:

$$5-7=5-(+7)=5+(-7).$$

Несколько позже, когда будет введено понятие об алгебраической сумме, учащийся сразу запишет, что $5-7=5+(-7)$.

После того как учащимися будет усвоено правило вычитания рациональных чисел, следует предложить им ряд задач с конкретным содержанием, для решения которых надо употребить вычитание. Например, если заданы первое перемещение точки по оси и результат двух последовательных перемещений, то второе перемещение может быть найдено посредством вычитания:

$$\frac{(-12)\ \text{см},\ (+42)\ \text{см}}{?};$$

так как $(-12)+?=(+42)$, то

$$?=(+42)-(-12)=(+54).$$

Если заданы первое изменение температуры и результат ее двух последовательных изменений, то второе изменение может быть найдено посредством вычитания:

$$\frac{(+7)^0,\ (-2)^0}{?};$$

так как $(+7)^0+?=(-2)^0$, то

$$?=(-2)^0-(+7)^0=(-9)^0.$$

Такого рода задачи учитель, конечно, легко составит сам.

Можно было бы начать введение вычитания чисел с решения этих задач, т. е. с конкретного толкования этого действия. Так, по-видимому, предлагается поступить в „Сборнике задач“ (задачи № 106, 108, стр. 20—21).

15. В результате изучения понятия об алгебраической сумме учащиеся должны прочно усвоить следующее:

1) если положительные и отрицательные числа соединены знаками + и —, то выражение можно заменить выражением, в котором положительные и отрицательные числа будут соединены только знаком + (отсюда название „алгебраическая сумма“);

2) если знаками + и — соединены только положительные числа, то эти знаки можно рассматривать как знаки чисел, а выражение — как результат сложения положительных и отрицательных чисел посредством последовательного приписывания их одного к другому, так что знак +, обозначающий сложение, не пишется, а только подразумевается.

Такое понимание можно закрепить, если потребовать, чтобы учащиеся последовательно называли все слагаемые суммы $4-5+3-1-7$, рассматривая знаки

$+$ и $-$ как знаки чисел: $(+4)$, (-5), $(+3)$, (-1), (-7), а также чтобы они умели хотя бы мысленно представить эту сумму в виде

$$(+4)+(-5)+(+3)+(-1)+(-7),$$

в котором знак сложения $+$ не подразумевается, а имеется.

Установив понятие об алгебраической сумме и обратив внимание учащихся на то, что эта сумма обладает всеми свойствами суммы, предлагают учащимся упражнения на применение этих свойств при сложении и вычитании алгебраических сумм, в процессе которого алгебраическая сумма рассматривается как сумма положительных и отрицательных чисел и ее слагаемые четко различаются.

16. Вывод правила умножения рациональных чисел преподаватель выполнит одним из двух способов. Отдельные авторы учебников следовали либо только первому пути (А. П. Киселев, А. Н. Барсуков), либо только второму (В. А. Гончаров), либо второму пути с последующим объяснением его целесообразности на примере задач, относящихся к направленным величинам (П. С. Александров и А. Н. Колмогоров, Д. К. Фаддеев и И. С. Соминский).

По-видимому, второй (формальный) путь едва ли окажется в достаточной мере доходчивым для учащихся VI класса: вывод правила, являющийся соглашением, будет непонятен им вследствие необычности такого способа, который до сих пор ни разу не встречался; чисто формальное рассуждение не будет соответствовать уровню их развития. Поэтому представляется более целесообразным начинать с первого способа, но вслед за этим обосновывать право приписывать найденному действию, с помощью которого была решена задача, название умножения тем, что это действие обладает тремя основными свойствами, определяющими именно умножение.

Вместе с тем необходимо иметь в виду, что если обозначение скорости v равномерного движения по оси посредством рациональных чисел (указывающих не только абсолютное значение скорости, но и направление движения) не вызывает у учащихся непонимания, то обозначение длин промежутков времени, следующих за начальным моментом или предшествующих ему, требует пояснений.

По поводу вывода правила умножения рациональных чисел, помещенного в § 17 учебника, сделаем следующие замечания.

1) Нельзя „время отсчитывать в прошедшее"; через t обозначается длина промежутка времени, следующего за начальным или предшествующего ему.

2) Не имея еще понятия о произведении рациональных чисел, нельзя заранее (до решения задачи и установления этого понятия) утверждать, что ответом на задачу будет во всех четырех случаях служить именно произведение at рациональных чисел a и t.

Предлагая учащимся упражнения на умножение рациональных чисел, сперва пользуются обозначением положительных чисел, содержащим знак $+$, но вскоре этот знак опускают.

17. 1) Для вывода правила деления в VI классе достаточно ограничиться рассмотрением на числовых примерах 4 возможных случаев, как это сделано в пункте 17,*1*.

Можно рассчитывать на то, что учащиеся вполне самостоятельно найдут и сформулируют это правило, останется только закрепить его с помощью выполнения упражнений.

2) Свойства деления, приведенные в § 21 учебника, должны быть сформулированы и оправданы только на числовых примерах. Однако важно, чтобы учащиеся поняли, что эти свойства были в свое время установлены в арифметике для арифметических (целых и дробных) чисел и что здесь речь идет о распространении этих свойств на рациональные числа.

Доказательства свойств деления целесообразно привести на числовых примерах или в общем виде в пункте, посвященном делению одночленов и многочлена на одночлен (см. § 9).

Впрочем, если ограничиться числовыми примерами, то можно попытаться дать это доказательство и здесь, поступая так, как указано в пункте 17,*2*.

Проведя доказательство свойства 1 и обратив внимание учащихся на то, как используется равенство (IV_1), учитель предоставляет учащимся доказать свойства 2 и 3 самостоятельно; при этом доказательство свойства 3 потребует некоторого усилия с их стороны.

18. Сведениями о возведении рациональных чисел в натуральную степень дополняются и расширяются сведения о возведении в натуральную степень арифметических чисел. Все определения сохраняются. Возникает вопрос о знаке степени при положительном и отрицательном основаниях, для решения которого достаточно обратиться к определению.

Из определения же вытекает и теорема 1 (стр. 112) о произведении нескольких степеней одного и того же основания. Эта теорема имеет важное следствие:

$$(a^m)^n = a^{mn};$$

оно может оказаться полезным при выполнении упражнений, если принять во внимание, что

$$a^{mn} = (a^m)^n.$$

Например:

$$a^{12}=(a^2)^6=(a^3)^4=(a^4)^3=(a^6)^2.$$

Отсюда следует, что число a^{12} есть квадрат, куб, четвертая и шестая степень некоторых чисел.

Доказательство теоремы требует применения свойства сочетательности и определения степени. На этом этапе изучения алгебры учащийся уже тщательно осознал и обосновал каждый переход и не считает, что эти переходы „сами собой разумеются“ и не требуют никаких объяснений.

Надо достичь того, чтобы учащийся отличал произведение $a^3 \cdot a^4$ от степени $(a^3)^4$ и понимал, что в первом случае число сомножителей увеличивается на 4, а во втором случае — в 4 раза.

Наконец, из определения же вытекает и теорема 2 (стр. 113). Если сообщение ее доказательства учащимся VI класса, по мнению учителя, окажется затруднительным, то можно будет ограничиться ознакомлением с ней на нескольких примерах и указанием на то, что в данном случае действие третьей ступени, выполняемое над результатом действия второй ступени, распространяется на все элементы (компоненты) этого действия низшей ступени.

После этого, читая равенство

$$(abc)^4 = a^4b^4c^4$$

и аналогичные ему справа налево, делают вывод о замене произведения степеней с одним и тем же показателем той же степенью произведения оснований (причем эта формулировка, конечно, не приводится).

Теперь может быть поставлен вопрос: представляет ли число 196 какую-либо степень другого числа? Для ответа разлагаем число 196 на простые множители:

$$196=2^2\cdot7^2$$

и заключаем, что $196=(2\cdot7)^2=14^2$.

В связи с рассмотрением действия возведения в степень целесообразно вернуться к вопросу о трех ступенях действий и об основных свойствах каждого из них, завершив это повторение указанием, что возведение в степень не обладает свойством переместительности и что поэтому для него возможны два обратных действия — разыскание основания степени по степени и ее показателю и разыскание показателя степени по степени и ее основанию.

Вероятно, у учащихся вызовут интерес простые упражнения на выполнение этих обратных действий, задаваемые в виде уравнений:

$$x^m=b \text{ и } a^x=b.$$

Особенно желательно более обстоятельное (по числу упражнений) рассмотрение первого обратного действия (в случаях $m=2$ и $m=3$), т. е. извлечения квадратного и кубического корня, и решение простых задач на нахождение линейных элементов фигуры по ее площади и линейных элементов тела по его объему.

Выше было указано, как установить, что

$$196=14^2.$$

Но можно, конечно, и даже предпочтительнее воспользоваться таблицами квадратов и кубов чисел.

§ 5. УРАВНЕНИЯ

19. Понятие о тождестве и уравнении.

19,*1*. *Понятие о тождестве.* Рассмотрение основных свойств арифметических действий и записи их с помощью букв позволяет достигнуть нескольких целей: 1) приводятся в систему сведения учащихся об основных свойствах арифметических действий, приобретенные ими при изучении арифметики; 2) учащиеся знакомятся еще с одной областью применения букв; 3) даются простейшие примеры тождественных равенств.

Запись законов арифметических действий с помощью равенств служит первым примером записи утверждений (утвердительных предложений), выраженных в словесной форме, в виде алгебраических равенств, т. е. в символической (для учащихся — алгебраической) форме.

Обращая внимание учащихся на тот основной факт, что каждое из равенств, выражающих свойства действий, верно для всех без исключения чисел, для которых эти действия выполнимы, учитель приводит их к понятию о тождественном равенстве, или о тождестве. Учащиеся будут очень заинтересованы, если учитель уже здесь покажет им примеры простых (как, например, формулы сокращенного умножения) тождеств и каждое из них истолкует как равенство, выражающее некоторое утверждение относительно результатов действий над числами.

19,*2*. *Понятие об уравнении.* Итак, тождество есть равенство, выражающее утверждение, что два алгебраических выражения имеют разные числовые значения при всех (допустимых) значениях входящих в эти выражения букв. Но алгебра есть язык математики, а в каждом языке существуют и другого рода предложения — вопросительные. Имеются ли такие предложения в алгебраическом языке? Да, имеются.

Допустим, что мы задаем в словесной форме такой вопрос: какое число обладает тем свойством, что если к нему прибавим число 5, то оно увеличится втрое? Этот вопрос, выраженный словами, мы можем записать в виде равенства

$$? + 5 = 3 \cdot ?,$$

где знак ? обозначает неизвестное число, или, обозначая неизвестное число через x, в виде равенства

$$x+5=3\cdot x,$$

которое, таким образом, надо понимать как запись вопроса о том, при каком значении буквы x числовое значение выражения $x+5$ окажется равным числовому значению выражения $3x$.

Теперь присмотримся внимательнее к равенству

$$x+5=3x. \tag{1}$$

Слева и справа от знака равенства находятся алгебраические выражения, содержащие одну и ту же букву. Давая этой букве значения, взятые наудачу (например, значения 0, 1, 2), мы вообще не получим для левой и правой частей равенства (1) равных значений. Может быть, их и вовсе нет? Желая поставить (задать) вопрос о том, существуют ли такие значения некоторой буквы, при которых два данных выражения, содержащих эту букву, принимают равные числовые значения, мы соединяем их знаком равенства и тем самым записываем указанный вопрос в виде равенства.

Определение. Равенство, выражающее вопрос, при каком значении некоторой буквы два алгебраических выражения, содержащих эту букву, имеют равные числовые значения, называется уравнением.

Каждая текстовая задача предлагается в виде распространенного вопросительного предложения. Если этот вопрос мы выразим в алгебраической форме, т. е. с помощью равенства, то и получим уравнение.

20. Решение уравнений первой степени с одной неизвестной. В VI классе уравнения решаются на основании зависимостей между данными числами и результатами выполнения действий над ними. Эти зависимости, изученные в арифметике в словесной форме, могут быть записаны следующим образом:

1) если $a+b=c$, то $a=c-b$, $b=c-a$;
2) если $a-b=d$, то $a=b+d$, $b=a-d$;
3) если $a\cdot b=c$, то $a=c:b$, $b=c:a$;
4) если $a:b=d$, то $a=bd$, $b=a:d$.

Доказательства зависимостей 1—4 для арифметических чисел были даны на числовых примерах в арифметике; доказательства же этих зависимостей для рациональных чисел должны быть даны при изучении соответствующих действий над рациональными числами, а здесь могут быть записаны и доказаны в общем виде.

Именно:

1) При условии $a+b=c$ зависимости

$$a=c-b \text{ и } b=c-a$$

следуют из определения разности.

2) При условии $a-b=d$ зависимость $a=b+a$ следует из определения разности, а зависимость $b=a-d$ выводится из зависимости $a=b+d$ также на основании определения разности.

3) При условии $a \cdot b=c$ зависимости $a=c:b$ и $b=c:a$ следуют из определения частного.

4) При условии $a:b=d$ зависимость $a=bd$ следует из определения частного, а зависимость $b=a:d$ выводится из зависимости $a=bd$ также на основании определения частного

Все эти зависимости могут быть установлены на числовых примерах, для чего надо использовать приведенные общие обоснования каждой зависимости.

Например, вопрос о том, как найти неизвестный делитель по данному делимому и данному частному, решается в таком порядке:

1) если $10:x=2$, то, согласно определению частного, x есть число, которое при умножении на 2 дает 10, т. е. x есть частное от деления числа 10 на число 2; $x=10:2=5$;

2) вообще, если $a:x=d$, то $a=x \cdot d$ и $x=a:d$;

3) неизвестный делитель равен данному делимому, деленному на данное частное.

Следует иметь в виду, что при решении уравнения на основании указанных зависимостей неявно исходят из предположения, что искомое число, удовлетворяющее уравнению, существует и под буквой x (или другой), обозначающей неизвестное число, подразумевают именно это число, существование которого предполагают.

Например, для решения уравнения

$$3x_{1}-2=4$$

надо предположить, допустить, что существует такое значение буквы x, при котором выражение $3x-2$ имеет числовое значение 4; из этого предположения следует, что $3x=6$, а отсюда, что $x=2$.

Но верны и обратные переходы: если $x=2$, то $3x=6$ и $3x-2=4$.

Следовательно, для того чтобы имело место равенство $3x-2=4$, не только необходимо (первое рассуждение), но и достаточно (второе рассуждение), чтобы неизвестная x имела значение 2.

Ввиду этого решение уравнения, выполненное на основании указанных зависимостей, из теоретических (принципиальных) соображений в проверке не нуждается, т. е. в этом случае проверка не составляет органической, существенной части процесса решения уравнения; она выполняется только из практических соображений — с целью узнать, не была ли допущена какая-либо ошибка при вычислениях.

21. Таблицы и графики. К тем сведениям о числовых таблицах и графиках, которые уже известны учащимся из прошлого (пункт 8), присоединим некоторые новые сведения, углубляющие и дополняющие их знания в этих областях.

21,*1*. Прежде всего познакомимся с таблицами квадратов и кубов чисел, помещенными в сборнике „Четырехзначные математические таблицы для средней школы“ В. М. Брадиса под номерами XI и XIII. В этом сборнике автор кратко указывает, как пользоваться каждой таблицей. Выполняя указания автора, можно без труда находить требуемые числа.

В таблице XI даны квадраты чисел от 1,00 до 9,99.

Для того чтобы воспользоваться указанием автора таблиц о способе нахождения квадрата числа, меньшего, чем 1, и большего, чем 10, но изображающегося 4 цифрами, надо, как указано на стр. 28 таблиц, опираться на свойство степеней (квадрата и куба), состоящее в том, что

$$(ab)^2=a^2b^2;\ (ab)^3=a^3b^3;$$

с этим свойством мы познакомились в пункте 18.

Например,

$$21{,}43^2=2{,}143^2\cdot 10^2=4{,}593\cdot 100=459{,}3.$$

При этом если бы мы не воспользовались готовой поправкой 13, соответствующей четвертой цифре 3, то могли бы поступить так, как в пункте 8, т. е. могли бы сами рассчитать эту поправку с помощью следующего рассуждения: если число 2,14 увеличивается на 10 тысячных, то его квадрат 4,580 увеличивается на 4,623—4,580, т. е. на 43 тысячных; поэтому если число 2,14 увеличится на 3 тысячных, то его квадрат увеличится на $43 \cdot \frac{3}{10}$ тысячных, т. е. на 12,9 тысячных. Следовательно,

$$2{,}143^2 = 4{,}580 + 0{,}0129 = 4{,}5929;$$

$$214{,}3^2 = 4{,}5929 \cdot 10^2 = 459{,}29;$$

этот результат при округлении совпадает с найденным по таблице.

21,2. Допустим, что мы выполнили некоторое число измерений одной и той же величины, например длины отрезка при помощи линейки с делениями), и получили следующие результаты: 133,7 *см*, 133,6 *см*, 133,9 *см*, 133,8 *см*, 133,5 *см*.

Как доказывается в науке (теории вероятностей), наиболее вероятным (близким к истинному) значением измеряемой величины является среднее арифметическое всех наблюденных значений, т. е. число

$$\frac{133{,}7 + 133{,}6 + 133{,}9 + 133{,}8 + 133{,}5}{5},$$

которое, очевидно, равно сумме

$$133 + \frac{0{,}7 + 0{,}6 + 0{,}9 + 0{,}8 + 0{,}5}{5},$$

т. е. числу 133,7.

Проследим, как велики отклонения результатов отдельных измерений от найденного среднего значения; очевидно, что они выражаются числами:

(1) $\qquad 0{,}0; \; -0{,}1; \; +0{,}2; \; +0{,}1; \; -0{,}2.$

Как и следовало ожидать, сумма всех отклонений (положительных и отрицательных) от среднего равна нулю:

(2) $\qquad 0{,}0 + (-0{,}1) + 0{,}2 + 0{,}1 + (-0{,}2) = 0.$

Мы не знаем истинного значения длины измеряемого отрезка, но если за это значение принять найденное среднее значение всех наблюденных значений, то отклонения (1) могут рассматриваться как **ошибки наблюдений**. Из равенства (2) заключаем, что ошибки, падающие в одну сторону от истинного значения, **уравновешиваются (компенсируются)** ошибками, падающими в другую сторону. Если ошибки вызваны несовершенством выполнения измерений (а не несовершенством употребленных для измерения приборов, инструментов), т. е. зависят только от наблюдателя, то они называются **случайными**.

21,3. Рассмотрим следующую таблицу значений температуры воздуха, полученных путем наблюдения ее в течение суток:

Время (в часах) . . .	12	14	16	18	20	22	24	2	4	6	8	10	12
Температура, °C	4	6	7	6	3,5	1	—1	—2,5	—3	—2,2	0	0,7	1,3

Сначала найдем из этих наблюдений среднюю температуру за истекшие сутки — так называемую среднюю суточную температуру. За эту температуру принимают среднее арифметическое всех наблюденных значений температуры, т. е. число

$$\frac{4+6+7+6+3{,}5+1+(-1)+(-2{,}5)+(-3)+(-2{,}2)+0+0{,}7+1{,}3}{13};$$

оно равно 1,6.

Теперь вычислим, как велики были отклонения наблюденных значений температуры от средней суточной температуры, и составим из них таблицу:

Время (в часах) . .	12	14	16	18	20	22	24	2	4	6	8	10	12
Отклонения температуры, °C	2,4	4,4	5,4	4,4	1,9	— 0,6	— 2 6	— 4,1	— 4,6	— 3,8	— 1,6	— 0,9	— 0,3

Таким образом, в течение промежутка времени от 12 до 20 час. температура была выше средней суточной температуры, а от 22 до 12 час. — ниже;

в 16 час. наблюдалась наивысшая температура ($1,6+5,4=7$), а в 4 часа — наинизшая ($1,6-4,6=-3$).

Конечно, эти отклонения от средней температуры не могут рассматриваться как ошибки наблюдения — они вызваны изменениями, происходившими в природе, и указывают, как (с какой скоростью, интенсивностью) происходили эти изменения.

21,*4*. В пунктах 10 и 8 мы уже изложили первые сведения о геометрическом представлении чисел: 1 об изображении их направленными отрезками на числовой оси и 2) об изображении их отрезками, перпендикулярными к числовой оси. Во втором случае отрезки служили для изображения значений какой-либо величины, заданных в виде таблицы (например, значений температуры воздуха, найденных посредством измерения ее через определенные промежутки времени). Мы хорошо знали (понимали), что каждому моменту времени, а не только моменту наблюдения соответствует вполне определенная температура воздуха, но предсказать, какая температура наступит в следующий момент наблюдения, не могли, так как не знали, подчиняется ли изменение температуры какому-либо определенному правилу, закону; совсем иначе обстояло бы дело, если бы такой закон существовал и был открыт наукой; тогда, зная этот закон, мы могли бы находить температуру не в результате наблюдения, а посредством вычисления.

Однако существует ряд величин, законы изменения которых науке известны — они открыты учеными и выражены ими с помощью некоторой формулы, указывающей, как по значению величины, в зависимости от которой рассматриваемая величина изменяется, найти посредством вычисления значение этой рассматриваемой величины.

Например, ученые открыли закон, по которому происходит падение тяжелых тел; оказалось, что путь s (в метрах), пройденный падающим телом за t секунд, может быть найден по формуле:

$$s = 4,9\,t^2.$$

С формулами, позволяющими найти значения величины посредством вычисления, мы познакомились уже в геометрии. Например, мы знаем, что если основание и высота прямоугольника измерены и равны, например, b *см* и h *см*, то площадь его S может быть вычислена по формуле:

$$S = bh.$$

Из физики мы знаем формулу:

$$s = vt,$$

связывающую путь s, пройденный телом при равномерном движении, скорость v этого движения и время t, в течение которого происходит движение.

По этой формуле можно:

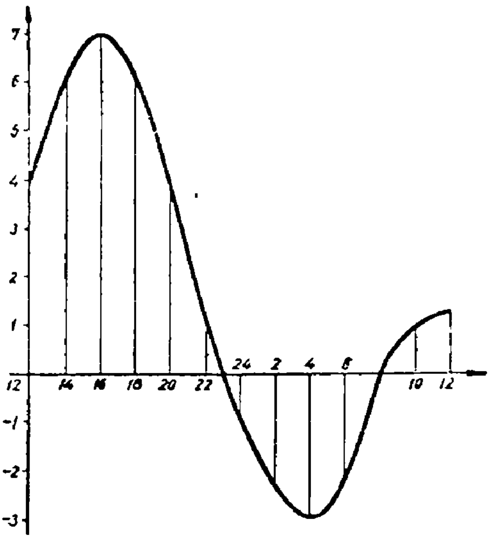
1) зная v и t, вычислять s;

2) зная s и t, вычислять v; $v = \frac{s}{t}$;

3) зная s и v, вычислять t; $t = \frac{s}{v}$.

21,5. В пункте 8 указано, как можно изобразить (представить геометрически) значения какой-либо величины, помещенные в таблицу. Мы рассмотрели этот вопрос на примере таблицы квадратов и кубов чисел. Применяя указания, сделанные в пункте 8 (или в § 26 учебника), построим по таблице, приведенной на стр. 127, черт. 14, на котором каждое значение температуры, помещенное в таблице, изображено направленным отрезком, соответствующим указанному на оси моменту наблюдения.

Мы понимаем, что температура изменялась непрерывно: например, приняв в 12 час. значение 4°, не сразу (не скачком) принимала в 14 час. значение 6°, а за промежуток времени от 12 до 14 час.



Черт. 14

имела все без исключения значения от 4° до 6°. Мы этих значений не наблюдали, но если бы выполнили наблюдение, допустим, в 13 час., то нашли бы некоторое значение температуры, заключенное между 4° и 6°, или, как говорят, принадлежащее промежутку от 4° до 6°.

Следовательно, мы имеем все основания строить направленные отрезки, изображающие значения, которые температура принимала во весь период наблюдения. Правда, это невозможно, так как этих значений имеется бесконечное множество. Но из опыта мы знаем, что температура изменялась не скачками, а непрерывно. Поэтому, если соединим вершины построенных отрезков возможно более плавной кривой линией, то, по нашему убеждению, она пройдет через вершины всех остальных направленных отрезков. Эта кривая линия наглядно представляет, как, вероятнее всего, в действительности изменялась температура в течение периода наблюдения. Она называется графиком температуры, соответствующим этому периоду.

21,*б*. При построении графика температуры мы использовали таблицу ее значений, найденных посредством наблюдения. Но промежуточных значений температуры мы не имели. Если бы они нам понадобились, то уже ничего нельзя было бы сделать — время прошло, а значений температуры за прошедшее время, конечно, нельзя было бы найти посредством наблюдения.

В гораздо более выгодном положении мы находимся тогда, когда требуется построить график величины, изменение которой происходит по закону, выражаемому формулой.

Пусть, например, требуется построить график пути, который проходит тело, прямолинейно движущееся с постоянной скоростью. Если скорость v равна 3 *км* в час, то движение происходит по закону, выражаемому формулой:

$$s = 3t, \tag{1}$$

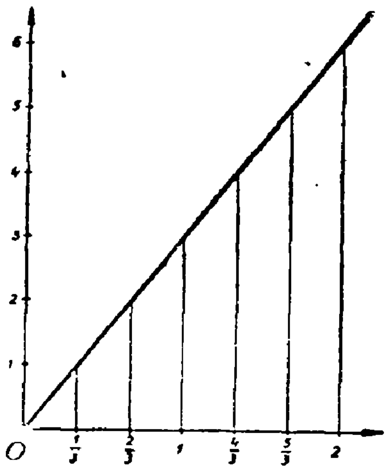
где t есть время движения (в часах), а s — пройденный за это время путь (в километрах).

Для построения графика пути мы предварительно, пользуясь формулой (1), составляем таблицу значений времени t и соответствующих значений пути s; при этом букве t мы даем любые (произвольные) значения, отделенные одно от другого любыми промежутками, а букве s — те значения, которые соответствуют значениям, полученным буквой t.

Допустим, что мы составили следующую таблицу:

t	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1	$1\frac{1}{3}$	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{2}{3}$	2	$2\frac{1}{2}$
s	0	1	$1\frac{1}{2}$	2	3	4	$4\frac{1}{2}$	5	6	$7\frac{1}{2}$

Если теперь мы возьмем числовую ось с выбранными на ней начальной точкой O и единичным отрезком $O1$ и нанесем на нее точки с абсциссами 0, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, 1, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{3}$, 2, а затем, приняв за единицу тот же или другой отрезок, проведем из этих точек перпендикуляры, имеющие соответственно 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 единиц (черт. 15), то эти перпендикуляры и будут служить изображениями (геометрическими представлениями) пути, пройденного телом за время, указанное отрезком числовой оси.



Черт. 15

Для того чтобы получить график, изображающий изменение пути в зависимости от изменения времени, достаточно соединить вершины перпендикуляров возможно более плавной линией. В данном случае мы ясно видим, что такой плавной линией служит **прямая** линия, которая определяется начальной точкой O оси и вершиной **любого** из построенных перпендикуляров.

Однако не случайно ли это? Нет, не случайно. То, что именно так и должно было произойти в данном случае, будет доказано позже в курсе математики, а сейчас мы можем проверить этот факт следующим образом: если мы восставим перпендикуляры из каких-либо других точек оси, например из точек, имеющих абсциссы $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$, до пересечения их с прямой, которую мы назвали графиком пути, а затем измерим эти перпендикуляры с помощью принятого для них единичного отрезка, то получим как раз те числа $1\frac{1}{2}$, $4\frac{1}{2}$, $7\frac{1}{2}$, которые мы нашли из формулы (1).

Точно так же на прямой, определяемой начальной точкой O оси и вершиной какого-либо перпендикуляра, длина которого найдена из формулы (1), будет расположена вершина любого перпендикуляра, длина которого s найдена из формулы (1), т. е. равна $3t$, где t есть абсцисса той точки числовой оси, из которой восставлен перпендикуляр. Все эти вершины так же непрерывно заполняют построенную прямую, как непрерывно протекало время, в течение которого происходило рассматриваемое равномерное движение тела.

Однако не надо впадать в грубую ошибку и принимать эту прямую за путь, пройденный телом. Пути, пройденные телом, изображаются, как было разъяснено, перпендикулярами, восставленными из точек числовой оси, а та прямая, которую мы построили и назвали графиком пути, указывает ход изменения пути в зависимости от изменения времени.

Мы пришли к выводу, что если движение было равномерным, то графиком пути при этом движении будет служить прямая линия. В дальнейшем курсе алгебры будет доказано, что, и обратно, если график пути при некотором движении есть прямая линия, то это движение равномерное. Этот факт позволяет, построив график пути при некотором движении, установить, было ли оно равномерным или не было таким.

21,7. Зная, как строится график пути, пройденного телом при равномерном движении, можно: 1) графически решать задачи на движение (тела встречаются, тела догоняют друг друга); 2) хорошо разбираться графиках железнодорожного движения.

Указания к § 5 (пункты 19—21)

19. В пунктах 19,*1* и 19,*2* введены понятия о тождестве и уравнении. Это — виды равенства.

1) Поскольку учащиеся уже при изучении арифметики неоднократно встречались с равенствами и употребляли знак = в смысле „получится“ (из левой части правая часть), едва ли следует оформлять это понятие в виде определения в самом начале курса алгебры, предоставляя учащемуся употреблять слово „равенство“ в усвоенном им в арифметике смысле.

2) В курсе математики равенством мы называем не само отношение равенства, а только обозначение (письменное или устное) того факта, что между двумя выражениями (арифметическими или алгебраическими) существует (имеет место) отношение равенства.

3) Но в то время как наличие отношения равенства двух арифметических выражений имеет определенный смысл, состоящий в том, что два числа равны, наличие отношения равенства двух алгебраических выражений надо понимать как наличие отношения равенства их числовых значений: если относительно наличия отношения равенства выражается утверждение, то равенство, посредством которого обозначается (записывается) это утверждение, есть тождество; если же относительно наличия отношения равенства выражается вопрос, то равенство, посредством которого обозначается (записывается) этот вопрос, есть уравнение.

Таким образом, под равенством двух выражений целесообразно понимать именно обозначение (запись), относящуюся к наличию отношения равенства между двумя выражениями. Когда позже придется выполнять действия над тождественными равенствами, то эти действия будут заключаться в составлении из двух записей третьей, выражающей то утверждение, которое следует из двух утверждений, выражаемых данными равенствами. Если же мы одно уравнение заменяем другим, равносильным первому, то это преобразование состоит в том, что мы запись одного вопроса заменяем записью другого вопроса.

19,*1*. Понятие о тождестве явно не встречается в программе курса алгебры для VI класса. Однако едва ли целесообразно оставлять ознакомление учащихся с этим важным понятием до VII класса. Так не следует делать по следующим причинам: 1) в курсе алгебры VI класса приходится главным образом иметь дело с тождествами; 2) если не ввести своевременно понятие о тождестве, то нельзя будет раскрыть смысл действий над алгебраическими выражениями, представляющих собой именно тождественные преобразования; 3) понятие об уравнении будет выявлено с надлежащей глубиной при противопоставлении его понятию о тождестве.

В то же время, как показывает опыт, усвоение учащимися понятия о тождестве обычно не вызывает затруднений, а, наоборот, содействует повышению их интереса к алгебре и может быть удачно связано с их самостоятельной деятельностью.

С большой пользой для своего математического образования и развития учащиеся будут выполнять упражнения на доказательство тождеств. Эти упражнения обычно так и задаются в форме: „доказать тождество", но могут предлагаться и в равнозначащей форме: „доказать справедливость равенства". При этом доказательство может проводиться несколькими способами, о которых подробно говорится в главе III.

19,*2*. Определение, которое дано понятию об уравнении в пункте 19,*2*, представляется наиболее целесообразным по ряду причин.

Во-первых, оно соответствует научному определению уравнения как равенства двух функций, т. е. как равенства вида

$$(1) \qquad f(x) = g(x),$$

если речь идет об уравнении с одной неизвестной. Но какой смысл может иметь это равенство? Ведь для функций не установлено понятия о равенстве: если говорят, что две функции равны, то указывают, при каких значениях независимой переменной имеет место это равенство, понимая, что слово „равны" относится к ч и с л о в ы м з н а ч е н и я м этих функций. Следовательно, запись (1) может выражать либо утверждение, что функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют равные числовые значения при всех (любых) значениях переменной x, принадлежащих некоторому числовому множеству M, т. е. тождественно равны в этом множестве, либо вопрос о том, при каких значениях независимой переменной x эти функции приобретают (имеют) равные числовые значения. Во втором случае равенство (1) и называется уравнением.

Во-вторых, определение понятия об уравнении, данное в пункте 19,2, относится ко всем без исключения видам уравнений, так что во всем дальнейшем курсе алгебры (и вообще математики в средней и высшей школе) его изменять не придется; оно прочно будет усвоено уже в VI—VIII классах и навсегда войдет в обиход учащегося с тем, чтобы служить основанием каких угодно теоретических вопросов, относящихся к уравнениям (например, теории равносильности алгебраических и трансцендентных уравнений и систем этих уравнений).

В-третьих, вызывающий столько толков вопрос о том, является ли тождество видом уравнения, получает вполне разумное решение, состоящее в том, что ответ на этот вопрос может быть дан только в том случае, если указано, с какой целью задается равенство — с целью ли выразить утверждение, что это равенство верно при всех значениях, принадлежащих данному множеству M, или с целью выразить вопрос, существует ли такое множество M значений переменной, для которого обе части равенства, содержащие эту переменную, имеют равные числовые значения.

Так, равенство

$$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

есть тождество, если оно написано с целью выразить утверждение, что обе его части имеют равные числовые значения при всех (любых, произвольных) значениях буквы x, и в то же время есть уравнение, если оно написано с целью выразить вопрос, существуют ли значения буквы x и какие именно, при которых обе его части имеют равные числовые значения.

Это решение спора не содержит в себе ничего парадоксального, вполне логично, находится в полном соответствии с определениями понятий тождества и уравнения и может быть с удовлетворением воспринято учащимися.

Наконец, требует особого разъяснения следующий важный факт. Если составлена ф о р м у л а, выражающая зависимость между двумя или несколькими величинами и имеющая вид равенства, то она не является ни тождеством, ни уравнением. Но всякий раз, как всем величинам, входящим в эту формулу, кроме одной, будут даны определенные значения, можно, рассматривая формулу как уравнение по отношению к величине, значение которой неизвестно, решить это уравнение и этим путем найти значение неизвестной величины.

Например, если в формуле:

(1) $$V = b^2h,$$

выражающей зависимость между объемом V бруска, стороной b квадрата, служащего его сечением, и его длиной h, мы дадим определенные значения двум из трех величин b, h, V, т. е. будем их считать известными, то, рассматривая эту формулу как уравнение, найдем значение третьей величины:

$$V = b^2h;\ b = \sqrt{\frac{V}{h}};\ \ h = \frac{V}{b^2}.$$

Именно в этом смысле надо понимать термины „уравнение прямой, окружности, параболы, гиперболы“ и т. п., употребляемые в аналитической геометрии.

Равенства

(2) $$y = ax + b;\ x^2 + y^2 = r^2;\ y = ax^2 + bx + c;\ y = \frac{a}{x}$$

выражают зависимости, существующие между координатами каждой точки, принадлежащей соответственно прямой, окружности, параболе, гиперболе. Если буквы a, b; r; a, b, c; a, входящие в равенства (2), имеют определенные значения, то каждое из равенств (2) можно рассматривать как уравнение по отношению к координатам x и y и, решая его, выражать одну из этих координат в зависимости от другой.

20. Зависимости, на основании которых решаются уравнения в VI классе, впервые изучаются в арифметике.

В алгебре они должны быть установлены (доказаны или проверены) для рациональных чисел. Но независимо от того, доказываются ли они или проверяются на числовых примерах, нет оснований отказываться от обоснования их справедливости с помощью соображений, приведенных в пункте 20. Для того чтобы эти рассуждения не показались учащимся скучными, следует не сосредоточивать их на одном уроке, а проводить в связи с изучением соответствующих действий над рациональными числами и теперь лишь систематизировать.

Не следует думать, что эти соображения являются чем-то само собой разумеющимся. Для учащегося VI класса слова „по определению разности, частного" без сопровождения их разъяснениями учителя в лучшем случае окажутся просто формально заученными, а вообще — непонятными, бессодержательными. Между тем очень важно, чтобы учащийся понимал, что, например, утверждение $a:b=d$ совершенно равносильно (адекватно) утверждению $a=bd$, где $b\neq 0$, и что никакого другого смысла оно не имеет, так как именно этот смысл вложен в определение понятия о частном от деления числа a на число b. Поэтому здесь и всюду дальше, где придется ссылаться на определения, надо всемерно подчеркивать эту равносильность утверждений, получаемых в результате использования (применения) определения понятия.

Учитель поступит именно так, как следует, если он не торопясь, спокойно будет добиваться ответа на вопросы: „Что это значит $a-b=c$, $a:b=d$? Почему первое равенство можно заменить равенством $a=b+c$, а второе — равенством $a=bd$? Можно ли сказать, что эти равенства следуют, вытекают из предыдущих равенств? Почему?"

Ответ должен быть получен в такой форме, которая свидетельствовала бы о понимании учащимся того факта, что равенства $a-b=c$ и $a:b=d$ суть не что иное, как записи соответственно фактов $a=b+c$ и $a=bd$, где $b\neq 0$.

Если учитель пожелает сообщить учащимся первые сведения об уравнениях до изучения ими действий над рациональными числами, то они будут иметь право основывать свои рассуждения только на сведениях из арифметики.

В. Л. Гончаров в „Начальной алгебре" вводит понятие об уравнении и его решении в самом начале курса алгебры — вслед за ознакомлением учащихся с алгебраическими выражениями и их числовыми значениями.

По-видимому, целесообразно присоединиться к этому автору и предварительно ввести краткие сведения о решении уравнений в области арифметических чисел с тем, что сведения о решении уравнений в области рациональных чисел будут сообщены уже на базе изученных сведений об уравнениях.

В пользу такого порядка убедительно говорит тот факт, что „примеры и задачи с иксом“ решаются уже в арифметике и что в последнее время этим примерам и задачам сознательно уделяется в арифметике все большее место.

Этому совсем не приходится удивляться, если твердо принять ту точку зрения, что уравнение есть запись вопроса: стóит лишь какой-либо вопрос, относящийся к числам, записать в виде равенства, как получается уравнение, которое требуется решить. А путь решения также окажется вполне естественным, если обратить внимание на то, что искомое есть слагаемое, уменьшаемое, вычитаемое, сомножитель, делимое, делитель; умение находить эти числа учащийся приобрел при изучении арифметики. Поэтому при указанном определении понятия об уравнении (которого — и это очень важно! — ему не придется изменять при изучении всего дальнейшего курса алгебры) как введение этого понятия, так и применение его к решению примеров не представляет никаких затруднений, а наоборот, вызывает у учащихся интерес к предмету и желание самостоятельно заниматься им.

Особенный интерес и удовлетворение обнаруживают учащиеся в тех случаях, когда алгебра вносит значительное облегчение в решение задачи, нелегко поддающейся арифметическому решению.

Самый процесс решения уравнений в VI классе не требует от учащегося других усилий, кроме нахождения ответа на вопрос, чтó представляет собой член уравнения, содержащий неизвестную (x, y, . . .),— слагаемое, уменьшаемое, вычитаемое, сомножитель, делимое или делитель. Опыт говорит, что сначала под руководством учителя, а вскоре самостоятельно учащийся выполняет решение не очень сложного уравнения вполне сознательно и почти не затрудняясь; приобретенные им в этой области навыки отличаются прочностью и устойчивостью в течение всего года и в достаточной мере устраняют возможность допущения им ошибок.

На первых порах, когда учащийся еще нуждается в помощи учителя, уроки (не больше 2—3) должны проводиться в эвристической форме; она выражается в постановке вопросов, выявляющих последовательные шаги процесса решения уравнений (что представляет собой неизвестный член уравнения?) и смысл найденного результата (что представляет собой найденное число? как оно называется? как проверить правильность ответа?). С помощью этих вопросов углубляются и закрепляются понятия об уравнении и его корне, вводятся выражения „число удовлетворяет уравнению", „число не удовлетворяет уравнению".

21. Программа алгебры для VI класса восьмилетней школы предлагает завершить раздел „Рациональные числа. Уравнения" темой „Графики температуры и равномерного движения".

Однако этот вопрос был бы изучен недостаточно полно и глубоко, если бы ему не предшествовало изучение таблиц и их различных применений. Поэтому весьма целесообразно уделить 3—4 урока этой важной теме, вооружающей учащегося полезными и интересными сведениями политехнического характера.

Сначала учащийся расширяет и углубляет те сведения о нахождении по таблицам квадратов и кубов чисел, которые он приобрел при первоначальном ознакомлении с этими таблицами (гл. I, § 2, пункт 8). При этом он научается находить поправки на четвертую цифру данного числа как по таблицам, так и посредством вычисления. Упражнения в работе с таблицами квадратов и кубов чисел выполняются и независимо от решения задач, и в связи с этим, когда надлежащая практика приобретена, что открывает возможность применять некоторые правила приближенных вычислений.

Затем учащемуся предлагается изучить числовые таблицы и в другом отношении. Именно: на примере таблиц значений каких-либо величин (длин, объемов, температур, давлений, удлинений, расширений и т. п.), найденных посредством наблюдений и измерений, учащимся дается представление о среднем значении и отклонениях от среднего значения, которые для систем значений величины, полученных посредством измерения, могут быть рассматриваемы как случайные ошибки измерений.

Ознакомление учащихся с графиками начинается с построения графиков температур. При этом обращается их внимание на тот факт, что точки графика, являющиеся промежуточными по отношению к построенным в соответствии с таблицей, не могут быть построены точно, так как их уже нельзя получить на основании наблюдений, но что они дополняются нами посредством проведения через построенные точки возможно более плавной линии (кривой).

Если на основании таблицы наблюденных значений величины учащиеся нашли среднее значение и составили таблицу отклонений от него (см. стр. 127), то построение графика этой величины на основании первой таблицы может быть заменено построением графика отклонений значений величины от среднего значения на основании второй таблицы. В этом случае среднее значение величины будет играть роль относительного нуля, от которого производится отсчет в ту и другую сторону (вверх и вниз). Это очень поучительно и найдет свое применение в практике построения графиков величин, когда за относительный нуль принимается некоторое значение величины.

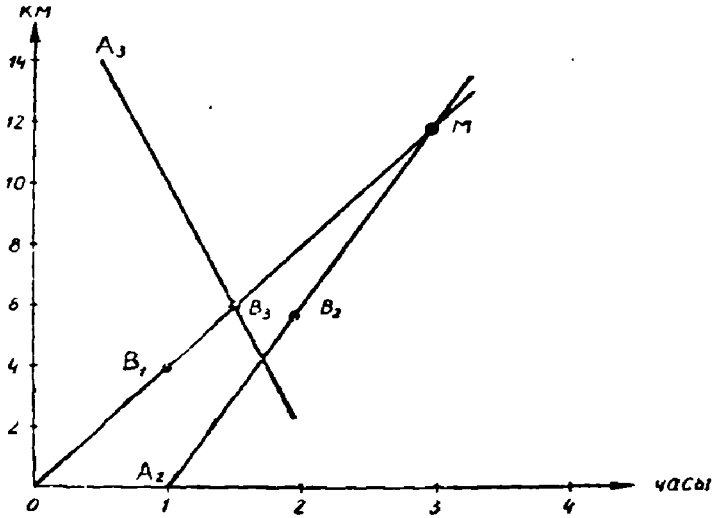
Иначе обстоит дело, когда график величины строится на основании формулы, указывающей ее зависимость от другой величины, область изменения которой задается или выбирается нами из тех или иных соображений.

При построении графика по формуле все значения величины, выражаемой этой формулой, вычисляются по одному и тому же правилу, подчиняются одному и тому же закону, ввиду чего соответствующие им точки располагаются на плоскости не хаотично, не вразброс, а в некотором порядке, определяющем вид той кривой, которая называется графиком изменения рассматриваемой величины.

Умея строить график зависимости $s = vt$, учащиеся могут графически решать задачи на движение.

Например, если первый пешеход идет со скоростью 4 *км* в час, а второй, отправляясь через 1 час после первого в том же направлении, идет со скоростью 6 *км* в час, то ответ на вопрос, когда второй пешеход догонит первого и на каком расстоянии от точки его отправления, может быть получен посредством построения графиков движения того и другого пешехода (см. на черт. 16 прямые OB_1 и A_2B_2).

Если через $\frac{1}{2}$ после момента отправления первого пешехода из точки, находящейся в 14 *км* от точки



Черт. 16

отправления путников, навстречу им, т. е. в противоположном направлении, выезжает верховой, делающий 8 *км* в час, то для ответа на вопрос, где он встретит каждого из путников и в какие моменты, достаточно построить график движения верхового (см. на черт. 16 прямую A_3B_3). С помощью этих построений мы найдем, что: 1) встреча произойдет в 12 *км* от точки отправления и через 3 часа после отправления первого пешехода; 2) верховой встретит первого пешехода через $1\frac{1}{2}$ часа после его отправления в 6 *км* от точки отправления, а второго пешехода — несколько раньше $1\frac{3}{4}$ часа и несколько дальше, чем в $4\frac{1}{4}$ *км*.

Алгебраическое решение тех же задач привело бы к уравнениям:

1) $4x = 6\ (x-1);\ x = 3,\ 4x = 12;$

2) $4x + 8\left(x - \frac{1}{2}\right) = 14;\ x = \frac{3}{2};\ 4x = 6;$

3) $6\ (x - 1) + 8\left(x - \frac{1}{2}\right) = 14;\ x = 1\frac{5}{7};\ 6\ (x - 1) = 4\frac{2}{7}.$

В результате тщательного усвоения решения этой задачи на движение и нескольких аналогичных задач, которые предложит учитель, учащиеся без труда разберутся в графике железнодорожного движения. Такой график в увеличенном масштабе будет под руководством учителя подробно рассмотрен и практически использован в классе и вне класса.

ГЛАВА III

ДЕЙСТВИЯ НАД ЦЕЛЫМИ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ ВЫРАЖЕНИЯМИ

§ 6. ОДНОЧЛЕНЫ И МНОГОЧЛЕНЫ

22. Одночлены. Из алгебраических выражений мы прежде всего рассмотрим такие, которые имеют очень простой вид, так как содержат только два действия — возведение в степень и умножение.

Определение. Алгебраическое выражение, представляющее собой произведение какого-либо числа и одной или нескольких букв, взятых каждая в определенной степени, называется о д н о ч л е н о м. Отдельное число, выраженное цифрами (т. е. не обозначенное буквой), также называется одночленом.

Например, выражения

$$-3a^2bc^3;\ 0{,}4xy;\ \frac{7}{8}x^3y^2;\ -ax^2;\ bx^7;\ -a;\ a$$

суть одночлены.

Числовой множитель, входящий в состав одночлена, называется к о э ф ф и ц и е н т о м. Обычно коэффициент помещается впереди всех множителей, составляющих одночлен.

Так, одночлены

$$-3a^2bc^3;\ 0{,}4xy;\ \frac{7}{8}x^3y^2$$

имеют соответственно коэффициенты

$$(-3);\ 0{,}4;\ \frac{7}{8}.$$

Одночлены

$$-ax^2;\ bx^7;\ -a;\ a$$

не имеют коэффициентов, но так как

$$-ax^2 \equiv (-1)ax^2;\ bx^7 \equiv 1\cdot bx^7;\ -a \equiv (-1)\cdot a;\ a \equiv 1\cdot a,$$

то удобно рассматривать их как одночлены соответственно с коэффициентами

$$(-1);\ 1;\ (-1);\ 1,$$

которые, как говорят, подразумеваются.

Каждое отдельное число представляет собой одночлен, в который не входят буквенные множители.

Очень важно обратить внимание на то, что если мы коэффициент одночлена заменим противоположным числом, то получим одночлен, числовое значение которого есть число, противоположное числовому значению данного одночлена. Например, одночлены

$$5a^3b^2 \text{ и } -5a^3b^2$$

имеют противоположные числовые значения, так как числовые значения произведений

$$(+5)a^3b^2 \text{ и } (-5)a^3b^2$$

отличаются только знаками.

Каждый одночлен имеет некоторое измерение. Именно: измерением одночлена называется сумма показателей всех входящих в него букв. Например, одночлены

$$3a^2;\ -5ab^3;\ a^4bc^5$$

имеют соответственно второе, четвертое и десятое измерение. Очевидно, что измерение одночлена указывает, произведением скольких сомножителей он является, если его представить без показателей:

$$3aa;\ -5abbb;\ aaaabccccc.$$

Значит, бесконечное множество всех одночленов можно разделить на бесконечные классы, отнеся к первому все одночлены первого измерения, ко второму — второго измерения и т. д. Казалось бы, что одночлены

$$8ab^3c \text{ и } -9x^5$$

совершенно различны, а между тем они относятся к одному и тому же классу — к классу одночленов пятого измерения.

Определение. Два одночлена, которые отличаются один от другого только своими коэффициентами или вовсе не отличаются один от другого, называются подобными одночленами.

Например, одночлены

$$4ax^5; \ -\frac{3}{2}ax^5; \ 0{,}3ax^5 —$$

подобные одночлены.

23. Многочлены. Приведение подобных членов.

23,*1. Многочлены.* В свое время (§ 4, пункт 15) мы, соединяя несколько чисел знаками + и —, составляли арифметическое выражение, которое можно было рассматривать как сумму чисел и было названо алгебраической суммой. Подобно тому как мы поступали с числами, можно поступить с одночленами. Именно: соединяя несколько одночленов знаками + и —, мы получим некоторое алгебраическое выражение, которое имеет особое название.

Определение. Алгебраическое выражение, которое получится, если мы соединим несколько одночленов знаками + и —, называется многочленом.

Например, выражение

$$ab^3 - 3a^2c^2 - 7b^4 + 4bc^3$$

есть многочлен.

Возникает вопрос, нельзя ли и здесь, т. е. при нахождении числового значения многочлена, знаки + и —, соединяющие одночлены, из которых он составлен, рассматривать не как знаки действий, а как знаки коэффициентов, перед которым они стоят, а самый многочлен — как сумму, слагаемые которой последовательно приписаны один к другому со знаками их коэффициентов.

Покажем, что так можно поступить.

В самом деле, если, например, в многочлене

(1) $$a^3b - 3a^2c^2 - 7b^4 + 4bc^3$$

мы будем рассматривать знаки + и —, соединяющие одночлены, из которых он составлен, как знаки действий, то для нахождения числового значения этого многочлена надо будет из числового значения одночлена ab^3 вычесть числовое значение одночлена $3a^2c^2$, затем из полученного вычесть числовое значение одночлена $7b^4$ и к полученному прибавить числовое значение одночлена $4bc^3$.

Если же знаки $+$ и $-$, стоящие перед коэффициентами 1, 3, 7, 4, мы будем рассматривать как знаки этих коэффициентов, а самый многочлен (1) как сумму одночленов

$$+ab^3;\quad -3a^2c^2;\quad -7b^4;\quad +4bc^3,$$

то для нахождения числового значения этого многочлена (1) надо будет выполнить сложение числовых значений этих одночленов.

Но мы знаем, что вычитание числовых значений одночленов $3a^2c^2$ и $7b^4$, которое надо было выполнить в первый раз, сводилось к прибавлению чисел, противоположных этим числовым значениям, т. е. к прибавлению числовых значений одночленов $-3a^2c^2$ и $-7b^4$, а это как раз мы и делали во второй раз.

Следовательно, в обоих случаях мы найдем один и тот же результат, т. е. убедимся в том, что числовое значение многочлена не зависит от того, будем ли мы рассматривать знаки $+$ и $-$, соединяющие одночлены, из которых он состоит, как знаки действий или как знаки коэффициентов, перед которыми они стоят.

Этот вывод можно кратко выразить так: многочлен $ab^3 - 3a^2c^2 - 7b^4 + 4bc^3$ тождественно равен многочлену $ab^3 + (-3a^2c^2) + (-7b^4) + 4bc^3$.

Поэтому впредь всякий раз, когда понадобится, мы будем иметь возможность рассматривать каждый многочлен как сумму одночленов, последовательно приписанных один к другому со знаками их коэффициентов. При этом толковании многочлена одночлены, из которых он состоит, называются его членами. Например, многочлен

$$(1)\qquad ab^3 - 3a^2c^2 - 7b^4 + 4bc^3$$

имеет члены:

$$+ab^3;\quad -3a^2c^2;\quad -7b^4;\quad +4bc^3.$$

Может случиться, что все члены многочлена имеют одно и то же (одинаковое) измерение. Такие многочлены имеют особенности, о которых будет сказано дальше — при выполнении действий над многочленами.

Определение. Многочлены, все члены которых имеют одно и то же (одинаковое) измерение, называются однородными. Если это измерение равно числу k, то говорят, что многочлен имеет измерение k.

Например, многочлен (1) есть однородный многочлен четвертого измерения. Интересно, что если мы в этом многочлене заменим букву a произведением ka, букву b — произведением kb и букву c — произведением kc, то получим произведение

(2) $$k^4(ab^3 - 3a^2c^2 - 7b^4 + 4bc^3)$$

многочлена (1) на k^4, т. е. на множитель k в степени, равной измерению данного однородного многочлена. Тот результат (выделение множителя k^4), который мы получили, возможен только в случае, если данный многочлен однородный.

23,2. *Приведение подобных членов.* Среди членов многочлена могут оказаться подобные.

Сперва допустим, что все члены многочлена подобные. Таким является, например, многочлен

(1) $$4ax^3 - 8ax^3 - ax^3 + 2ax^3.$$

Мы уже знаем, что этот многочлен можно представить в виде

(2) $$4ax^3 + (-8ax^3) + (-ax^3) + 2ax^3.$$

Но, принимая во внимание, что

$$4ax^3 = (+4)ax^3; \quad -8ax^3 = (-8)ax^3; \quad -ax^3 = (-1)ax^3;$$
$$2ax^3 = (+2)ax^3,$$

мы можем записать многочлен (2) также в виде:

(3) $$(+4)\cdot ax^3 + (-8)\cdot ax^3 + (-1)\cdot ax^3 + (+2)\cdot ax^3.$$

Мы видим, что многочлен (3) представляет собой сумму произведений выражения ax^3 на числа $(+4)$, (-8), (-1), $(+2)$. Но, как следует из свойства распределительности умножения (§ 4, пункт 16), такая сумма может быть заменена произведением

(4) $$[(+4) + (-8) + (-1) + (+2)]\cdot ax^3,$$

получающимся посредством умножения на общий множитель ax^3 суммы всех тех чисел, на которые он умножался последовательно, т. е. суммы

$$(+4) + (-8) + (-1) + (+2).$$

Но эта сумма равна числу (—3), так что

$$[(+4)+(-8)+(-1)+(+2)]ax^3=(-3)ax^3.$$

Следовательно, окончательно данный многочлен (1) может быть заменен одночленом $(-3)ax^3$. Таким образом, имеет место тождество

$$4ax^3-8ax^3-ax^3+2ax^3\equiv-3ax^3.$$

Мы пришли к выводу, что если все члены многочлена подобны между собой, то этот многочлен тождественно равен одночлену, который представляет собой произведение суммы коэффициентов всех членов данного многочлена на общую буквенную часть этих членов.

Определение. Преобразование, состоящее в замене многочлена, все члены которого подобны между собой, одночленом, представляющим собой произведение суммы коэффициентов всех членов данного многочлена на их общую буквенную часть, называется приведением подобных членов многочлена.

В многочлене может вовсе не быть подобных членов, но может быть не только одна, а несколько групп подобных членов. Тогда, применяя переместительное и сочетательное свойства сложения, выполняют приведение каждой группы подобных одночленов и заменяют эти группы тождественно равными одночленами, в результате чего весь многочлен заменяется тождественно равным ему многочленом.

Указания к § 6 (пункты 22, 23)

22. Определение понятий об одночлене и многочлене в школьном курсе алгебры в настоящее время приведено в соответствие с научным и отличается от тех, которые давались этими понятиями раньше (см., например, „Алгебру" А. П. Киселева). Согласно научному определению одночлена такие выражения, как

$$(1)\qquad \frac{3a^2b}{c^3};\quad \frac{a+b}{c};\quad \frac{a}{b+c},$$

которые раньше относились к одночленам, не являются одночленами, так как не представляют собой произведения числа и степеней букв.

Выражения вида

$$(2) \qquad 2(a+b)^3; \quad -5(a+b)(c+d); \quad \frac{1}{2}a(b+c)^3$$

также не относятся к одночленам, так как не удовлетворяют тому требованию, чтобы сомножителями произведения, называемого одночленом, служили числа и степени отдельных букв, а не выражений, составленных из букв. Конечно, можно было бы не ставить этого ограничения и называть одночленами и выражения вида (2), но это не принесло бы никакой пользы и не понадобилось бы в дальнейшем, например, для охвата какой-либо формулировкой более общего класса алгебраических выражений. Неотнесение выражений вида (2) к одночленам не вызывает никаких противоречий и неясностей; просто надо согласиться с тем, что из целых рациональных алгебраических выражений могут быть выделены класс выражений, называемых одночленами, и класс выражений, называемых многочленами, но что при этом существуют целые рациональные выражения, которые не являются ни одночленами, ни многочленами.

Выражение $\frac{2a^5}{3}$, строго говоря, не является одночленом, но его можно заменить тождественно равным ему выражением $\frac{2}{3}a^5$, которое является одночленом; имея в виду эту возможность, выражения вида $\frac{2a^5}{3}$ также относят к одночленам.

Для одночленов вводится понятие об измерении их; это понятие важно в теоретическом и, в особенности, практическом отношении (что выявится позже — при выполнении упражнений). Пока оно только закрепляется на ряде примеров. Если учащийся спросит, которое измерение имеет одночлен, не содержащий буквенных множителей, то можно уже здесь сообщить ему, что он, как говорят, имеет **нулевое измерение**. Этот термин будет легко принят учащимся, так как тот факт, что отсутствие буквенных множителей в одночлене связывается с понятием нуля, покажется ему вполне естественным.

23,1. Многочлен определяется как выражение, полученное путем соединения нескольких одночленов знаками $+$ и $-$. В этом определении ничего не говорится о том, следует ли понимать эти знаки как знаки действий сложения и вычитания. Но поскольку многочлен определяется как некоторое алгебраическое выражение, эти знаки следует понимать как знаки действий, которые необходимо будет выполнять над числовыми значениями входящих в его состав одночленов когда будем находить его числовое значение.

Пока мы не ввели понятий о сумме и разности одночленов (см. пункт 24), нельзя говорить, что многочлен есть сумма или разность одночленов, но можно утверждать лишь то, что его числовое значение есть сумма или разность числовых значений одночленов, от соединения которых он получился. Это непосредственно следует из определения многочлена.

Но для вывода правил действий над одночленами и многочленами (а эти действия представляют собой тождественные преобразования!) необходимо установить одно весьма важное свойство многочлена, которое может быть сформулировано в виде следующей теоремы.

Теорема. При нахождении числового значения многочлена знаки $+$ и $-$, соединяющие одночлены, можно рассматривать как знаки коэффициентов, перед которыми они стоят, а самый многочлен как сумму, слагаемые которой последовательно приписаны одно к другому со знаками их коэффициентов.

В пункте 23 доказательство этой теоремы проведено на примере, но рассуждению придан общий характер. Однако это рассуждение затруднено необходимостью неоднократно употреблять термин „числовое значение". На помощь может прийти простая символика, которая будет легко усвоена учащимися при весьма небольшом усилии учителя. Именно: условимся числовое значение алгебраического выражения A обозначать символом $[A]$. Употребление этого символа не только упростит оформление доказательства, но будет играть и вспомогательную обучающую роль, все время подчеркивая, что речь идет не о самом выражении A, а о его числовом значении.

Пользуясь этим символом, можно провести доказательство, рассмотренное в пункте 23, следующим образом.

Если в многочлене

$$(1)\qquad ab^3-3a^2c^2-7b^4+4bc^3$$

мы будем рассматривать знаки $+$ и $-$, соединяющие одночлены, из которых он составлен, как знаки действий, то найдем, что

$$[ab^3-3a^2c^2-7b^4+4bc^3]=[ab^3]-[3a^2c^2]-[7b^4]+[4bc^3].$$

Если же знаки $+$ и $-$, стоящие перед коэффициентами 1, 3, 7, 4, мы будем рассматривать как знаки этих коэффициентов, а самый многочлен как сумму одночленов

$$+ab^3;\ -3a^2c^2;\ -7b^4;\ +4bc^3,$$

то найдем, что

$$[ab^3-3a^2c^2-7b^4+4bc^3]=[+ab^3]+[-3a^2c^2]+[-7b^4]+$$
$$+[+4bc^3].$$

Но так как

$$[ab^3]-[3a^2c^2]-[7b^4]+[4bc^3]=$$
$$=[+ab^3]+[-3a^2c^2]+[-7b^4]+[+4bc^3],$$

то оказывается, что в обоих случаях числовое значение данного многочлена равно одному и тому же числу.

Для того чтобы учащийся вполне ясно понял это рассуждение, необходимо напомнить ему, что числами, противоположными числам $[3a^2c^2]$ и $[7b^4]$, соответственно являются числа $[-3a^2c^2]$ и $[-7b^4]$.

Понятия об измерении одночленов и однородных многочленах следует вводить в алгебру возможно раньше, останавливаясь на них всякий раз, когда для этого представляется возможность. Не говоря уже о том, что в понятии об однородности многочлена содержится некоторый элемент изящества, столь свойственного математике, использование этого понятия неоднократно позволяет осмысливать формулы и их структуру, обосновывать доказательство тождеств и более целенаправленно выполнять некоторые тождественные преобразования.

Так, легко установить на примерах, что сумма однородных многочленов одного и того же измерения есть однородный многочлен т о г о ж е измерения и что произведение однородных многочленов, имеющих соответственно измерения m и n, есть однородный многочлен измерения mn.

23,2. С приведением подобных членов приходится знакомить учащихся в связи с введением понятия о многочлене и о членах многочлена (см. пункт 23), имея в виду и тщательно подчеркивая при выяснении сущности приведения подобных членов, что оно состоит в замене многочлена, члены которого подобны, одночленом, тождественно равным заменяемому многочлену, и что именно в этом и состоит преобразование.

§ 7. СЛОЖЕНИЕ, ВЫЧИТАНИЕ И УМНОЖЕНИЕ ОДНОЧЛЕНОВ И МНОГОЧЛЕНОВ

24. Смысл действий над алгебраическими выражениями. Если в арифметике каждое действие состоит в нахождении по двум данным числам нового (третьего) числа, то в алгебре выполнение действия над двумя выражениями состоит 1) в соединении их знаком выполняемого действия, т. е. в составлении этим способом нового (третьего) выражения, и 2) в замене найденного выражения, если это возможно, другим выражением, тождественно равным найденному.

Например, сложение двух данных выражений $3a^2b$ и $5bc^3$ состоит в составлении из них нового (третьего) выражения $3a^2b+5bc^3$ посредством соединения данных выражений знаком $+$; это новое выражение и представляет собой сумму данных выражений.

Если бы требовалось найти сумму выражений $3a^2b$ и $(-7a^2b)$, то мы сперва нашли бы искомую сумму в виде выражения $3a^2b+(-7a^2b)$, а затем заменили бы его тождественно равным выражением $(-4a^2b)$.

В обоих случаях найденное выражение, названное нами суммой двух данных выражений, обладает тем важным основным свойством, что его числовое значение равно сумме числовых значений данных выражений.

Вообще, если A и B — какие угодно алгебраические выражения, то суммой, разностью, произведением, частным этих выражений называется соответственно новое (третье) выражение

$$(1) \qquad A+B;\ A-B;\ AB;\ \frac{A}{B},$$

полученное из данных выражений A и B посредством соединения их знаком выполняемого действия.

Такое определение сумме, разности, произведению и частному двух данных алгебраических выражений A и B мы имеем право дать на том основании, что числовое значение каждого из этих выражений равно соответственно сумме, разности, произведению, частному числовых значений данных выражений A и B.

Если мы условимся числовое значение алгебраического выражения P обозначать в виде $[P]$, то только что высказанную мысль о нашем праве дать выражениям (1) соответственно названия суммы, разности, произведения и частного можно будет записать следующим образом:

$$[A+B]=[A]+[B];\ [A-B]=[A]-[B];$$
$$[AB]=[A]\,[B];\quad \left[\frac{A}{B}\right]=\frac{[A]}{[B]}.$$

Справедливость этих равенств вытекает из установленных правил о порядке выполнения действий при нахождении числового значения данного алгебраического выражения.

Однако выполнение действия над двумя алгебраическими выражениями A и B не ограничивается, конечно, только составлением выражений (1). Алгебра учит (и в этом состоит учение о действиях над алгебраическими выражениями), в каких случаях и *как именно* каждое из выражений (1), т. е. найденные сумма, разность, произведение и частное, может быть заменено выражением, тождественно равным найденному и часто в то же время более простым.

25. Сложение одночленов. Допустим, что требуется сложить одночлены:

$$1)\ 3a^2b \text{ и } 5ab^3;\ 2)\ 3a^2b \text{ и } -5ab^3;$$
$$3)\ -3a^2b \text{ и } 5ab^3;\ 4)\ -3a^2b \text{ и } -5ab^3.$$

Как было выяснено выше (пункт 24), для того чтобы выполнить сложение каких-либо двух алгебраических выражений, достаточно соединить их знаком $+$ указывающим выполняемое действие. Поэтому в случаях 1—4 мы получим следующие **суммы**:

$$1)\ 3a^2b+5ab^3;\ 2)\ 3a^2b+(-5ab^3);$$
$$3)\ -3a^2b+5ab^3;\ 4)\ -3a^2b+(-5ab^3).$$

В случаях 1 и 3 найденные суммы не могут быть представлены в более простом виде. Но в случаях 2 и 4 найденные суммы могут быть представлены проще. Именно: если мы в них знак $+$, указывающий действие сложения, опустим, а второе слагаемое припишем к первому со знаком его коэффициента, т. е со знаком —, то суммы в случаях 2 и 4 примут соответственно вид:

$$2)\ 3a^2b-5ab^3;\ 4)\ -3a^2b-5ab^3$$

Но имеем ли мы право так делать? Можно ли утверждать, что

$$3a^2b+(-5ab^3)=3a^2b-5ab^3;$$
$$-3a^2b+(-5ab^3)=-3a^2b-5ab^3?$$

Да, можно и вот почему. Ведь выражения

$$5ab^3 \text{ и } -5ab^3$$

при любых числовых значениях букв a и b имеют числовые значения, которые являются **противоположными** числами, так как если одно и то же число ab^3 умножить на противоположные числа 5 и —5, то в произведении также получатся противоположные числа. Поэтому, если выражение

$$3a^2b-5ab^3$$

мы будем рассматривать как разность, то для нахождения его числового значения надо будет к числовому значению уменьшаемого $3a^2b$ прибавить числовое значение выражения $-5ab^3$, противоположное числовому значению вычитаемого $5ab^3$. Следовательно,

$$3a^2b-5ab^3=3a^2b+(-5ab^3),$$

и мы вправе были сумму 3 представить в виде (заменить равным ей выражением)

$$3a^2b-5ab^3.$$

По тем же соображениям мы можем сумму „4" представить в виде (заменить равным ей выражением)

$$-3a^2b - 5ab^3.$$

Если теперь мы изучим результаты, полученные во всех 4 случаях:

1) $3a^2b$, $5ab^3$; $3a^2b + 5ab^3$;

2) $3a^2b$, $-5ab^3$; $3a^2b - 5ab^3$;

3) $-3a^2b$, $5ab^3$; $-3a^2b + 5ab^3$;

4) $-3a^2b$, $-5ab^3$; $-3a^2b - 5ab^3$,

то придем к следующему правилу:

Правило I. Для того чтобы к одночлену прибавить другой одночлен, достаточно к первому слагаемому приписать второе слагаемое со знаком его коэффициента.

26. Сложение многочлена и одночлена. Очевидно, что в предыдущем рассуждении не имел значения тот факт, что первым слагаемым служил именно одночлен. Мы пришли бы к тому же выводу (правилу), если бы первым слагаемым служил многочлен. Поэтому правило 1 можно заменить другим:

Правило I. Для того чтобы к одночлену или многочлену прибавить одночлен, достаточно к первому слагаемому приписать второе слагаемое со знаком его коэффициента.

27. Сложение многочленов. Для обоснования правила сложения многочленов необходимо использовать свойство сочетательности сложения:

$$a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c,$$

которое может быть обобщено и на случай суммы нескольких слагаемых:

$$a + (b + c + d + e + f) = a + b + c + d + e + f.$$

Допустим, что требуется к одночлену $3a^2b$ прибавить многочлен $5ab^3 - 7b^2c^2 - a^3c + 4a^2bc$. Для того чтобы выполнить это сложение, достаточно соединить слагаемые знаком $+$; получим сумму:

$$(1) \qquad 3a^2b + (5ab^3 - 7b^2c^2 - a^3c + 4a^2bc).$$

Но, принимая во внимание, что многочлен есть не что иное, как сумма одночленов, последовательно приписанных один к другому со знаками их коэффициентов, мы можем представить сумму (1) сперва в виде

(2) $$3a^2b + [5ab^3 + (-7b^2c^2) + (-a^3c) + 4a^2bc],$$

а затем, основываясь на свойстве сочетательности сложения, в виде

(3) $$3a^2b + 5ab^3 + (-7b^2c^2) + (-a^3c) + 4a^2bc.$$

Наконец, пользуясь правилом сложения одночленов, можно представить сумму (3) в виде

(4) $$3a^2b + 5ab^3 - 7b^2c^2 - a^3c + 4a^2bc.$$

Мы пришли к следующему правилу:

Правило 2. Для того чтобы к одночлену прибавить многочлен, достаточно к этому одночлену последовательно прибавить все члены многочлена, т. е. последовательно приписать эти члены к одночлену со знаками их коэффициентов.

Очевидно, что в предыдущем рассуждении не имел значения тот факт, что первым слагаемым служил именно одночлен. Мы пришли бы к тому же выводу (правилу), если бы первым слагаемым служил многочлен. Поэтому правило 2 можно заменить другим:

Правило II. Для того чтобы к одночлену или многочлену прибавить многочлен, достаточно к первому слагаемому последовательно прибавить все члены второго слагаемого, т. е. последовательно приписать эти члены к первому слагаемому со знаками их коэффициентов.

Например:

$$5x^3 - 7x^2y + 2xy^2 - 4y^3 + (3x^2 - xy - 6y^2) +$$
$$+ (8x - 9y) + 10 = 5x^3 - 7x^2y + 2xy^2 - 4y^3 + 3x^2 -$$
$$- xy - 6y^2 + 8x - 9y + 10.$$

В найденной сумме нет подобных членов. Но если в результате сложения многочленов получается многочлен, имеющий одну или несколько групп подобных членов, то выполняется также приведение в каждой из этих групп подобных членов. В основе этого преобразования также лежат свойства переместительности и сочетательности сложения, позволяющие при сложении нескольких слагаемых сперва расположить их в каком угодно порядке, а затем какую угодно группу рядом стоящих слагаемых заменить их суммой.

$$a+b+c+d+e+f=a+(b+c+d)+(e+f).$$

28. Вычитание одночленов. Допустим, что требуется вычесть:

1) из одночлена $3a^2b$ одночлен $5ab^3$;
2) из одночлена $3a^2b$ одночлен $-5ab^3$;
3) из одночлена $-3a^2b$ одночлен $5ab^3$;
4) из одночлена $-3a^2b$ одночлен $-5ab^3$.

Как было установлено выше (пункт 24), для того чтобы выполнить вычитание каких-либо двух алгебраических выражений, достаточно соединить уменьшаемое и вычитаемое знаком —, указывающим выполняемое действие. Поэтому в случаях 1—4 мы получим следующие разности:

$$1)\ 3a^2b-5ab^3;\ 2)\ 3a^2b-(-5ab^3);$$
$$3)\ -3a^2b-5ab^3;\ 4)\ -3a^2b-(-5ab^3).$$

В случаях 1 и 3 найденные разности не могут быть представлены в более простом виде. Но в случаях 2 и 4 найденные разности могут быть представлены проще. Именно: если мы в них знак —, указывающий действие вычитания, опустим, а вычитаемое припишем к уменьшаемому со знаком, противоположным знаку его коэффициента, т. е. со знаком +, то разности 2 и 4 примут соответственно вид:

$$2)\ 3a^2b+5ab^3;\ 4)\ -3a^2b+5ab^3.$$

Но имеем ли мы право так делать? Можно ли утверждать, что

$$3a^2b-(-5ab^3)=3a^2b+5ab^3;$$
$$-3a^2b-(-5ab^3)=-3a^2b+5ab^3?$$

Да, можно, и вот почему. Ведь выражения

$$5ab^3 \text{ и } -5ab^3$$

при любых числовых значениях букв a и b имеют числовые значения, которые являются противоположными числами. Поэтому для нахождения числового значения разности $3a^2b-(-5ab^3)$ надо будет к числовому значению уменьшаемого $3a^2b$ прибавить числовое значение выражения $5ab^3$, противоположное числовому значению выражения $-5ab^3$.

Следовательно:

$$3a^2b - (-5ab^3) = 3a^2b + 5ab^3,$$

и мы вправе были разность 3 представить в виде (заменить равным ей выражением)

$$3a^2b + 5ab^3.$$

По тем же соображениям мы можем разность 4 представить в виде (заменить равным ей выражением)

$$-3a^2b + 5ab^3.$$

В случаях 1 и 3 разность получена нами путем соединения уменьшаемого и вычитаемого знаком $-$. Но и здесь полученный результат может рассматриваться как сумма уменьшаемого и вычитаемого, взятого со знаком, противоположным знаку его коэффициента:

$$3a^2b - 5ab^3 = 3a^2b + (-5ab^3);$$
$$-3a^2b - 5ab^3 = -3a^2b + (-5ab^3).$$

Если мы теперь изучим результаты, полученные во всех четырех случаях:

1) $3a^2b$, $5ab^3$; $3a^2b - 5ab^3$;
2) $3a^2b$, $-5ab^3$; $3a^2b + 5ab^3$;
3) $-3a^2b$, $5ab^3$; $-3a^2b - 5ab^3$;
4) $-3a^2b$, $-5ab^3$; $-3a^2b + 5ab^3$,

то придем к следующему правилу:

Правило 3. Для того чтобы из одночлена вычесть другой одночлен, достаточно к уменьшаемому приписать вычитаемое со знаком, противоположным знаку его коэффициента.

Очевидно, что в предыдущем рассуждении не имело значения то, что уменьшаемым служил именно одночлен. Мы пришли бы к тому же выводу, если бы уменьшаемым служил многочлен. Поэтому правило 3 можно заменить другим:

Правило III. Для того чтобы из одночлена или многочлена вычесть одночлен, достаточно к уменьшаемому приписать вычитаемое со знаком, противоположным знаку его коэффициента.

29. Вычитание многочленов. Для обоснования правила вычитания многочленов необходимо использовать правило вычитания из какого-либо числа суммы нескольких чисел, выражаемое равенством

$$a-(b+c+d)=a-b-c-d.$$

Следует привести его доказательство:

$$\begin{aligned} &a-b-c-d+(b+c+d)= \\ &=a+(-b)+(-c)+(-d)+b+c+d= \\ &=a+(-b)+b+(-c)+c+(-d)+d= \\ &=a+[(-b)+b]+[(-c)+c]+[(-d)+d]= \\ &=a+0+0+0=a, \end{aligned}$$

состоящее в применении понятия об алгебраической сумме чисел и свойств сочетательности, переместительности и опять сочетательности сложения.

Допустим, что требуется из одночлена $3a^2b$ вычесть многочлен $5ab^3-7b^2c^2-a^3c+4a^2bc$. Для того чтобы выполнить это вычитание, достаточно соединить уменьшаемое и вычитаемое знаком $-$; мы получим разность

(1) $$3a^2b-(5ab^3-7b^2c^2-a^3c+4a^2bc).$$

Но, принимая во внимание, что вычитаемое есть алгебраическая сумма, мы можем представить разность (1) сперва в виде

(2) $$3a^2b-[5ab^3+(-7b^2c^2)+(-a^3c)+4a^2bc],$$

а затем, основываясь на приведенном выше правиле вычитания суммы, в виде

(3) $$3a^2b-5ab^3-(-7b^2c^2)-(-a^3c)-4a^2bc.$$

Наконец, пользуясь правилом вычитания одночленов, можно представить разность (3) в виде

(4) $$3a^2b-5ab^3+7b^2c^2+a^3c-4a^2bc.$$

Мы пришли к следующему правилу:

Правило 4. Для того чтобы из одночлена вычесть многочлен, достаточно из этого одночлена последовательно вычесть все члены многочлена, т. е. последовательно приписать эти члены к одночлену со знаками, противоположными знакам их коэффициентов.

Очевидно, что в предыдущем рассуждении не имело значения то, что уменьшаемым служил одночлен. Мы пришли бы к тому же выводу, если бы уменьшаемым служил многочлен. Поэтому правило 4 можно заменить другим:

Правило IV. Для того чтобы из одночлена или многочлена вычесть многочлен, достаточно из уменьшаемого последовательно вычесть все члены вычитаемого, т. е. последовательно приписать эти члены к уменьшаемому со знаками, противоположными знакам их коэффициентов.

Например:

$$5x^3 - 7x^2y + 2xy^2 - 4y^3 - (3x^2 - xy - 6y^2) - \\ - (8x - 9y) - 10 = 5x^3 - 7x^2y + 2xy^2 - 4y^3 - \\ - 3x^2 + xy + 6y^2 - 8x + 9y - 10.$$

В найденной разности нет подобных членов. Но если в результате вычитания многочленов получается многочлен, имеющий одну или несколько групп подобных членов, то выполняется также приведение каждой из них.

30. Умножение одночленов. Для того чтобы умножение одночленов, правило выполнения которого предстоит вывести, можно было доводить до конца во всех случаях, целесообразно предпослать выводу этого правила следующее простое предложение:

Теорема 1. Произведение двух или нескольких степеней одного и того же числа равно степени того же числа, показатель которой есть сумма показателей сомножителей.

Например:

$$a^5 \cdot a^3 = a^8.$$

В самом деле:

$$a^5 \cdot a^3 = (a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a) \text{ (по определению степени)} = \\ = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \text{ (по правилу умножения на произведение)} = \\ = a^8 \text{ (по определению степени).}$$

С помощью такого же рассуждения докажем, что $a^5 \cdot a^3 \cdot a^4 = a^{5+3+4} = a^{12}$ и что вообще

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n},$$

где m и n — натуральные (положительные целые числа).

Доказав эту теорему, выражающую правило умножения степеней одного и того же основания, обратимся к выводу правила умножения одночленов. Допустим, что требуется найти произведение одночленов

$$5a^3b \text{ и } 3xy^3.$$

Для того чтобы найти произведение этих одночленов, достаточно соединить их знаком умножения, т. е. точкой:

(1) $$(5a^3b)\cdot(3xy^3).$$

Это и есть искомое произведение. Однако, пользуясь свойствами умножения, произведение (1) можно представить в более простом виде. Именно:

$(5a^3b)\cdot(3xy^3) = 5\cdot a^3\cdot b\cdot 3\cdot x\cdot y^3$ (по правилу умножения на произведение) $=$

$= 5\cdot 3\cdot a^3\cdot b\cdot x\ y^3$ (по свойству переместительности) $=$

$= (5\cdot 3)\cdot a^3\cdot b\cdot x\cdot y^3$ (по правилу группировки сомножителей) $=$

(2) $$= 15a^3bxy^3.$$

Данные одночлены представляют собой произведения степеней различных оснований. Поэтому упрощение выразилось лишь в том, что в произведении сомножители были переставлены и после этого группа рядом стоящих коэффициентов была заменена их произведением.

Но возьмем одночлены, в число сомножителей которых входят степени одного и того же основания:

$$5a^3bx^2y \text{ и } -3b^2x^3z^2.$$

Их произведением служит выражение

$$(5a^3bx^2y)\cdot(-3b^2x^3z^2).$$

Оно может быть представлено в более простом виде. Именно:

$$(5a^3bx^2y)\cdot(-3b^2x^3z^2) =$$

$= 5\cdot a^3\cdot b\cdot x^2\cdot y\cdot(-3)\cdot b^2\cdot x^3\cdot z^2$ (по правилу умножения на произведение) $=$

$= 5\cdot(-3)\cdot a^3\cdot b\cdot b^2\cdot x^2\cdot x^3\cdot y\cdot z^2$ (по свойству переместительности) $=$

$= [5\cdot(-3)]\cdot a^3\cdot[b\cdot b\ ]\cdot[x^2\cdot x^3]\cdot y\cdot z^2$ (по правилу группировки сомножителей) $=$

$= -15a^3b^3x^5yz^2$ (по правилу умножения степеней с одним и тем же основанием).

Мы пришли к следующему правилу:

Правило V. Для того чтобы перемножить два одночлена, достаточно перемножить их коэффициенты и к найденному произведению приписать сперва каждую букву, входящую как в первый, так и во второй одночлен, с показателем, равным сумме тех показателей, с которыми она входит в эти одночлены, а затем — каждую букву, входящую только в первый или только во второй одночлен, с ее показателем.

31. Умножение многочлена на одночлен. Для обоснования правила умножения многочлена на одночлен необходимо использовать свойство распределительности умножения (гл. II, § 4, пункт 16), выражаемое равенством

$$(a+b)c = ac + bc,$$

или, в более общем случае, равенством

$$(a+b+c+d+e)f = af + bf + cf + df + ef.$$

Допустим, что требуется умножить многочлен

$$3ax^3 - 5b^2x^2 - 7a^3b$$

на одночлен $2ab^2x$.

Для того чтобы выполнить это умножение, достаточно соединить множимое и множитель знаком умножения, т. е. точкой; мы получим произведение

$$(1) \qquad (3ax^3 - 5b^2x^2 - 7a^3b)\cdot(2ab\ x).$$

Но, принимая во внимание, что уменьшаемое есть алгебраическая сумма, мы можем представить произведение (1) сперва в виде

$$[3ax^3 + (-5b^2x^2) + (-7a^3b)]\cdot(2ab^2x),$$

а затем, основываясь на свойстве переместительности умножения, в виде

$$(3ax^3)\cdot(2ab^2x) + (-5b^2x^2)\cdot(2ab^2x) +$$
$$+ (-7a^3b)\cdot(2ab^2x).$$

Теперь, пользуясь правилом умножения одночленов, можно представить произведение (1) в виде

$$6a^2b^2x^4 + (-10ab^4x^3) + (-14a^4b^3x).$$

Наконец, выполнив сложение одночленов, получим:

$$6a^2b^2x^4 - 10ab^4x^3 - 14a^4b^3x.$$

Мы пришли к следующему правилу:

Правило VI. Для того чтобы умножить многочлен на одночлен, достаточно каждый член многочлена умножить на этот одночлен и полученные произведения сложить.

Очевидно, что это правило относится и к умножению одночлена на многочлен.

32. Умножение многочлена на многочлен. Для обоснования правила умножения многочлена на многочлен необходимо использовать правило умножения одной суммы чисел на другую сумму чисел, выражаемое равенством

$$(a+b+c)\,(d+e)=ad+bd+cd+ae+be+ce.$$

Допустим, что требуется умножить многочлен

$$3ax^3-5b^2x^2-7a^3b$$

на многочлен

$$2ab^2x-b^4.$$

Для того чтобы выполнить это умножение, достаточно соединить множимое и множитель знаком умножения, т. е. точкой; мы получим произведение

(1) $$(3ax^3-5b^2x^2-7a^3b)\cdot(2ab^2x-b^4).$$

Но, принимая во внимание, что как уменьшаемое, так и вычитаемое есть алгебраическая сумма, мы можем представить произведение сперва в виде

$$[3ax^3+(-5b^2x^2)+(-7a^3b)]\cdot[2ab^2x+(-b^4)],$$

а затем, основываясь на правиле умножения одной суммы чисел на другую сумму чисел, в виде

$$(3ax^3)\cdot(2ab^2x)+(-5b^2x^2)\cdot(2ab^2x)+(-7a^3b)\cdot(2ab^2x)+$$
$$+(3ax^3)\cdot(-b^4)+(-5b^2x^2)\cdot(-b^4)+(-7a^3b)\cdot(-b^4).$$

Теперь, пользуясь правилом умножения одночленов, можно представить произведение (1) в виде

$$6a^2b^2x^4+(-10ab^4x^3)+(-14a^4b^3x)+(-3ab^4x^3)+$$
$$+5b^6x^2+7a^3b^5.$$

Наконец, выполнив сложение одночленов, получим:

$$6a^2b^2x^4-10ab^4x^3-14a^4b^3x-3ab^4x^3+5b^6x^2+7a^3b^5.$$

Мы пришли к следующему правилу:

Правило VII. **Для того чтобы умножить многочлен на многочлен, достаточно каждый член множимого умножить на каждый член множителя и полученные произведения сложить.**

Пример 1. Найти произведение многочленов

$$2x^3 - 4ax^2 + 2a^2x - 3a^3 \text{ и } 2x^2 + 4ax + 6a^2.$$

Последовательно находим:

$$(2x^3 - 4ax^2 + 2a^2x - 3a^3)\cdot(2x^2 + 4ax + 6a^2) =$$
$$= 4x^5 - 8ax^4 + 4a^2x^3 - 6a^3x^2 + 8ax^4 - 16a^2x^3 +$$
$$+ 8a^3x^2 - 12a^4x + 12a^2x^3 - 24a^3x^2 + 12a^4x - 18a^5 =$$
$$= 4x^5 - 22a^3x^2 - 18a^5.$$

После выполнения приведения подобных членов в произведении осталось три члена.

Заметим, что множимое и множитель представляют собою однородные многочлены соответственно третьего и второго измерения, а произведение — однородный многочлен пятого ($5 = 3 + 2$) измерения.

Пример 2. Найти произведение многочленов

$$x^4 - 2ax^3 + 8a^3x - 16a^4 \text{ и } x^2 + 2ax + 4a^2.$$

Последовательно находим:

$$(x^4 - 2ax^3 + 8a^3x - 16a^4)\cdot(x^2 + 2ax + 4a^2) =$$
$$= x^6 - 2ax^5 + 8a^3x^3 - 16a^4x^2 + 2ax^5 - 4a^2x^4 +$$
$$+ 16a^4x^2 - 32a^5x + 4a^2x^4 - 8a^3x^3 + 32a^5x - 64a^6 =$$
$$= x^6 - 64a^6.$$

Таким образом, после выполнения приведения подобных членов в произведении осталось только два члена.

Заметим, что множимое и множитель представляют собой однородные многочлены соответственно четвертого и второго измерения, а произведение — однородный многочлен шестого ($6 = 4 + 2$) измерения.

33. Умножение расположенных многочленов. Если множимое и множитель представляют собой многочлены, расположенные по отношению к одной и той же букве и притом одновременно по убывающим или возрастающим степеням этой буквы, то умножение этих многочленов можно будет легче выполнить, если каждое из частных произведений (полученных от умножения множимого на первый, на второй, на третий, . . . , на последний член множителя) будем подписывать одно под другим, располагая члены, содержащие одну и ту же степень главной буквы, в одном и том же столбце. Этот порядок записи последовательно получаемых произведений позволяет сразу выявить содержащиеся в произведении подобные члены и выполнить их приведение.

Пример 3. Для преобразования произведения

$$(x^3+2x^2+2x+1)\cdot(x^2-x+1)$$

употребляем следующую запись:

$$\begin{array}{rrrrrr}
x^3 & +2x^2 & +2x & +1 & & \\
 & x^2 & -x & +1 & & \\
\hline
x^5+2x^4 & +2x^3 & +x^2 & & & \\
-x^4 & -2x^3 & -2x^2 & -x & & \\
 & x^3 & +2x^2 & +2x & +1 & \\
\hline
x^5+x^4 & +x^3 & +x^2 & +x & +1. &
\end{array}$$

К тому же результату мы, конечно, придем, если расположим множимое и множитель одновременно по возрастающим степеням главной буквы:

$$\begin{array}{l}
1+2x+2x^2+x^3\\
1-x+x^2\\
\hline
1+x+x^2+x^3+x^4+x^5.
\end{array}$$

Пример 4. Для преобразования произведения

$$(a^4-3a^2b^2+2ab^3-b^4)\ (2a^3+a^2b-3b^3)$$

двух многочленов, расположенных по убывающим степеням буквы a, употребляем следующую запись:

$$\begin{array}{llllllll}
a^4 & & -3a^2b^2 & +2ab^3 & -b^4 & & & \\
 & 2a^3+a^2b & & & -3b^3 & & & \\
\hline
2a^7 & & -6a^5b^2 & +4a^4b^3 & -2a^3b^4 & & & \\
 & a^6b & & -3a^4b^3 & +2a^3b^4 & -a^2b^5 & & \\
 & & & -3a^4b^3 & & +9a^2b^5 & -6ab^6 & +3b^7 \\
\hline
2a^7 & +a^6b & -6a^5b^2 & -2a^4b^3 & & +8a^2b^5 & -6ab^6 & +3b^7.
\end{array}$$

Места членов, не содержащих следующей в порядке убывания степени главной буквы, остаются свободными, незаполненными.

Пример 5. Для преобразования произведения

$$(2x^4-5x^3+2x^2-3x+1)\cdot(x^3+x^2-3x-1)$$

можно употребить ту же запись, что и при решении примера 3. Но можно поступить и иначе, применив так называемый „способ собирания членов“, содержащих одну и ту же степень главной буквы.

Для этого употребляем запись:

$$
\begin{array}{r|l}
x^7 & 2x^7 \\
x^6 & 2x^6-5x^6=-3x^6 \\
x^5 & -6x^5-5x^5+2x^5=-9x^5 \\
x^4 & -2x^4+15x^4+2x^4-3x^4=12x^4 \\
x^3 & 5x^3-6x^3-3x^3+x^3=-3x^3 \\
x^2 & -2x^2+9x^2+x^2=8x^2 \\
x^1 & 3x-3x=0 \\
x^0 & -1 \\
\hline
 & 2x^7-3x^6-9x^5+12x^4-3x^3+8x^2-1.
\end{array}
$$

Механизм составления каждой строки нетрудно уловить: для получения члена, содержащего какую-либо степень главной буквы, мы перемножали все те и только те члены множимого и множителя, которые могут дать в произведении требуемый член, принимая во внимание, что

$$
\begin{aligned}
&7=4+3;\\
&6=4+2=3+3;\\
&5=4+1=3+2=2+3;\\
&4=4+0=3+1=2+2=1+3;\\
&3=3+0=2+1=1+2=0+3;\\
&2=2+0=1+1=0+2;\\
&1=1+0=0+1;\\
&0=0+0.
\end{aligned}
$$

Иначе говоря, мы перебирали, по направлению от левой руки к правой, каждый член множимого и „домножали“ его на тот член множителя, который в произведении со взятым членом множимого дает требуемый член произведения.

Очевидно, что, следуя этому общему пути, можно приведенную выше запись сократить до следующей:

$$
\begin{array}{r|l}
x^7 & 2 \\
x^6 & 2-5=-3 \\
x^5 & -6-5+2=-9 \\
x^4 & -2+15+2-3=12 \\
x^3 & 5-6-3+1=-3 \\
x^2 & -2+9+1=8 \\
x^1 & 3-3=0 \\
x^0 & -1 \\
\hline
 & 2x^7-3x^6-9x^5+12x^4-3x^3+8x^2-1.
\end{array}
$$

В результате проведения достаточного числа упражнений эти вычисления, т. е. подсчет коэффициентов, в несложных случаях можно выполнять и устно.

Из примеров 3—5 (в особенности после рассмотрения примера 5) легко заключить, что в результате перемножения двух многочленов, расположенных по убывающим степеням одной и той же буквы, получается многочлен, обладающий свойствами:

1) он представляет собой многочлен, расположенный по убывающим степеням той же буквы, которая была принята за главную при расположении множимого и множителя;

2) высший член произведения равен произведению высшего члена множимого на высший член множителя;

3) низший член произведения равен произведению низшего члена множимого на низший член множителя;

4) так как высший и низший члены произведения получаются только этим путем, то в произведении не могут оказаться члены, подобные высшему и нижнему, так что высший и низший члены не могут уничтожиться в результате приведения подобных членов, выполняемого после раскрытия скобок.

Указания к § 7 (пункты 24—33)

24. Выполнение действий над одночленами и в меньшей степени над многочленами связано у учащихся с некоторым непониманием, основанным на том, что смысл этих действий кажется им отличным от смысла действий над числами. Но это затруднение учащихся будет устранено, если они приобретут правильное понятие о действиях над алгебраическими выражениями (см. пункт 24), а именно — если они будут знать, что, соединив два алгебраических выражения знаком выполняемого действия, они не обозначают это действие, а уже получают его результат, так что выражения

(1) $$A+B;\quad A-B;\quad AB;\quad \frac{A}{B}$$

уже представляют собой соответственно сумму, разность, произведение и частное двух алгебраических выражений A и B.

Назвать, например, выражение $A+B$ суммой двух выражений A и B дает нам право тот факт, что числовое значение выражения $A+B$, принимаемое им **при какой угодно** системе значений входящих в его состав букв, равно сумме числовых значений выражений A и B, принимаемых этими выражениями при той же системе значений входящих в их состав букв. То же самое имеет место по отношению к выражениям

$$A-B;\ AB;\ \frac{A}{B}.$$

Таким образом, соединение данных алгебраических выражений знаком действия должно рассматриваться как первый (существенный) этап при выполнении действия, и результат этого соединения учащиеся должны сознательно называть суммой, разностью, произведением, частным.

Такое толкование первого этапа выполнения действия не только устранит указанное выше затруднение, возникающее у учащихся, но и окажется полезным в дальнейшем, например, при определении многочлена как суммы, полученной в результате соединения нескольких одночленов знаками + и —, алгебраической дроби — как результата соединения двух алгебраических выражений знаком деления (чертой).

Второй этап (шаг) выполнения действия над двумя алгебраическими выражениями состоит в замене выражения, **найденного** в результате применения первого этапа, **тождественно равным** ему выражением. Этот этап выдается многими как существенный, исчерпывающий содержание требования выполнить действие над данными алгебраическими выражениями. Конечно, требование выполнить действие ассоциируется в сознании учащегося с требованием выполнить некоторые преобразования; однако следует объяснить ему, что эти преобразования составляют все-таки второй этап процесса выполнения действия, который и не всегда возможен.

25. Задавая упражнения на сложение одночленов, надо предлагать некоторую группу одночленов, расположенных в определенном порядке, но еще не соединенных знаками сложения, так как это соединение учащиеся должны выполнить сами в качестве первого шага операции сложения.

Тот факт, что числовые значения двух одночленов, которые имеют одинаковую буквенную часть, но коэффициенты которых — противоположные числа, при всех значениях входящих в эти одночлены букв также являются противоположными числами,— предварительно устанавливается на ряде примеров. При этом подчеркивается, что числовое значение одночлена может иметь тот же знак, что и его коэффициент, или противоположный знак, так что знак, стоящий перед одночленом, является знаком его коэффициента, а не знаком числового значения одночлена.

Замена выражения $A + (-B)$ выражением $A - B$, выполняемая на основании правила вычитания чисел, может быть названа **тождественным преобразованием**; но на данном примере нецелесообразно возобновлять знакомство учащихся с этим понятием.

Важно обратить внимание учащихся на то, что сумма $A + B$ одночленов A и B обладает свойством переместительности, т. е. что имеет место **тождество**

$$(\mathrm{I}) \qquad A + B \equiv B + A.$$

Справедливость тождества (I) вытекает из того, что

$$[A + B] = [A] + [B], \ [B + A] = [B] + [A],$$

а

$$[A] + [B] = [B] + [A].$$

Таким образом, замена суммы $A + B$ суммой $B + A$ приводит к новому выражению, отличающемуся от данного по форме (виду), но имеющему **то же числовое значение**, что и данное. На этот смысл каждого тождественного преобразования следует обращать внимание учащихся неоднократно, так как выражаемое каждым тождеством утверждение относится именно к **числовым значениям** его частей, а не к каким-либо иным свойствам алгебраических выражений, составляющих эти части. Быть может, если не в VI, то в следующих классах явному выражению этой мысли будет содействовать *введение символа* $[A]$ *для* обозначения числового значения выражения A.

27. Перед выводом правила сложения многочленов учитель возобновляет в памяти учащихся точную (словесную и символическую) формулировку сочетательного свойства сложения. При этом условии после представления прибавляемого многочлена в виде суммы одночленов учащиеся сами найдут правило сложения многочленов.

Замена выражения $A+(B+C)$, где A, B, C — одночлены или многочлены, выражением $(A+B)+C$ может быть выполнена на основании сочетательного свойства сложения чисел только в том случае, если под этими выражениями понимать их числовые значения. Поэтому строгое доказательство следовало бы провести в таком порядке: так как

$$[A+(B+C)]=[A]+[(B+C)]=[A]+([B]+[C]);$$
$$[(A+B)+C]=[(A+B)]+[C]=([A]+[B])+[C],$$

а по свойству сочетательности сложения

$$[A]+([B]+[C])=([A]+[B])+[C],$$

то

(II) $$A+(B+C)\equiv(A+B)+C.$$

К этому тождеству учитель приведет учащихся с помощью рассуждений, указанных выше (в пункте 27), т. е. не подчеркивая, что в них речь идет не о самих алгебраических выражениях, а об их числовых значениях, но в конечном счете он тщательно объяснит точный смысл найденного тождества как утверждения, что выражения $A+(B+C)$ и $(A+B)+C$ имеют равные числовые значения при любых системах значений входящих в них букв.

Таким указанием на тождественный характер преобразования и соответствующей проверкой на числах следует от времени до времени сопровождать выполнение учащимися сложения многочленов. Однако эта проверка на числах отнюдь не должна выдаваться за доказательство тождества. Доказательством тождества должна называться проверка, состоящая в установлении наличия в обеих частях равенства одних и тех же членов.

После установления тождества (II) и разъяснения его точного смысла учитель обратит внимание учащихся на то, что этому тождеству может быть дана следующая формулировка: сложение многочленов обладает свойством сочетательности.

28. Вывод правила вычитания одночлена из одночлена проводится по тому же плану, который применен в случае сложения одночленов: к этому правилу учащиеся

приводятся в результате рассмотрения 4 единственно возможных случаев. Замена разности $A - (-B)$ суммой $A + B$ обосновывается ссылкой на правило вычитания чисел, но при этом объясняется, что оно применяется не к самим одночленам A и B, которые не являются числами, а к их числовым значениям $[A]$ и $[B]$, так что тождество

$$A - (-B) \equiv A + B$$

обосновывается справедливостью числового равенства

$$[A] - [-B] = [A] + [B].$$

В случаях 1 и 3 тождества не получается; поэтому справедливость правила 3 для этих случаев устанавливается на основе того факта, что результат вычитания может быть и в случаях 1 и 3 получен по тому же правилу, что и в случаях 2 и 4.

29. Вывод правила вычитания многочленов, так же как и правила сложения многочленов, основан на применении некоторого арифметического равенства. Поэтому строгий вывод правила вычитания должен иметь следующий вид:

$$[A - (B + C + D)] = [A] - [B + C + D] =$$
$$= [A] - ([B] + [C] + [D]) = [A] - [B] - [C] - [D],$$

где $[A]$, $[B]$, $[C]$, $[D]$ — числовые значения одночленов A, B, C, D. С другой стороны:

$$[A - B - C - D] = [A] - [B] - [C] - [D];$$

следовательно:

$$[A - (B + C + D)] = [A - B - C - D],$$

а это значит, что

$$A - (B + C + D) \equiv A - B - C - D.$$

Таким образом доказано, что замена выражения $A - (B + C + D)$ выражением $A - B - C - D$ есть тождественное преобразование.

Именно этот смысл должен вложить учитель в правило вычитания многочленов. Выведя его с помощью указанных выше (в пункте 29) рассуждений, учитель завершит их заключением, что применение этого правила есть тождественное преобразование.

30. После вывода равенства

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

следует поставить вопрос о том, является ли это равенство тождеством, и установить, что оно представляет собой тождество, так как выполняется при любых значениях основания a, но, правда, при одном важном условии, состоящем в том, что значениями показателей m и n могут служить только натуральные (положительные целые) числа. Таким образом, на этом примере учащиеся впервые знакомятся с равенством, которое является тождеством в некоторой ограниченной области чисел.

При обосновании правила умножения одночленов приходится использовать свойство сочетательности в двух направлениях (умножение на произведение и группировка сомножителей), и для учащихся VI класса будет понятнее, на какое именно правило мы опираемся при выводе, если будем называть эти правила, а не просто ссылаться на свойство сочетательности произведения.

Правило V состоит из трех частей: 1) найди произведение коэффициентов; 2) последовательно припиши к нему произведения степеней одного и того же основания; 3) к результату припиши каждую букву, входящую только в множимое или только в множитель, с ее показателем. На это должно быть обращено внимание учащихся как при формулировке правила, которая добывается учителем при их содействии, так и при обучении пользоваться этим правилом. В результате учащиеся легко усвоят правило и научатся верно формулировать его своими словами. При выполнении упражнений на умножение одночленов учащиеся на первых порах должны будут каждый раз проверять себя, все ли три шага ими сделаны, благодаря чему приобретут соответствующий навык.

В результате обоснования правила V учащиеся придут к пониманию того, что выполнение умножения одночленов по этому правилу есть тождественное преобразование. Если сперва учитель только укажет на этот факт и ограничится проверкой его на числовых примерах (что представляет собой не только поучительное, но и вообще очень полезное упражнение), то в дальнейшем (при повторении и обобщении накопленных фактов) он даже в VI классе имеет возможность объяснить наличие тождественного равенства тем, что это равенство получено в результате применения свойств чисел. Для этого учителю надо будет, проверив, например, справедливость равенства

$$(5a^3bx^2y)\cdot(-3b^2x^3z^2) = -15a^3b^3x^5yz^2$$

при определенной системе числовых значений букв a, b, x, y, z, поставить перед учащимися вопрос о том, верно ли (выполняется ли) это равенство и при любой другой системе числовых значений этих букв, и, получив утвердительный ответ, прийти вместе с учащимися к доказательству тождественного равенства выражений

$$(5a^3bx^2y)\cdot(-3b^2x^3z^2) \text{ и } -15a^3b^3x^5yz^2$$

посредством тех же последовательных переходов, которые послужили для вывода правила V, но обращаясь с каждым из сомножителей

$$a^3,\ b,\ x^2,\ y,\ b^2,\ x^3,\ z^2$$

как с числом и называя их числами, т. е. говоря:

Для того чтобы число $(5a^3bx^2y)$ умножить на произведение $(-3b^2x^3z)$ нескольких чисел, достаточно...

Но, основываясь на свойстве переместительности чисел, можно произведение

$$5\cdot a^3\cdot b\cdot x^2\cdot y\cdot(-3)\cdot b^2\cdot x^3\cdot z^2$$

заменить равным ему произведением

$$5\cdot(-3)\cdot a^3\cdot b\cdot b^2\cdot x^2\cdot x^3\ y\cdot z^2$$

тех же чисел.

Теперь, основываясь на правиле группировки сомножителей при нахождении произведения нескольких чисел, мы можем полученное произведение 9 чисел заменить равным ему произведением

$$[5\cdot(-3)]\cdot a^3\cdot[b\cdot b^2]\cdot[x^2\cdot x^3]\cdot y\cdot z^2$$

6 чисел.

Применяя правило умножения степеней одного и того же основания, мы можем последнее произведение заменить равным ему произведением:

$$-15a^3b^3x^5yz^2.$$

Это рассуждение, проведенное в VI классе, раскроет учащимся смысл доказываемого тождества и убедит их в его справедливости.

Однако тот факт, что, говоря о равенстве выражений, составляющих левую и правую части тождества, мы имеем в виду равенство их числовых значений, выступает в явном виде только при доказательстве тождества в форме, которую мы неоднократно применяли выше.

Именно: обозначая числовое значение какого-либо выражения M, которое оно имеет при некоторой системе входящих в него букв, через $[M]$, мы можем провести доказательство, например, тождества

$$(5a^3bx^2)\cdot(-3b^2x^3) \equiv -15a^3b^3x^5$$

следующим образом. С одной стороны,

$$[(5a^3bx^2)\cdot(-3b^2x^3)] = [5a^3bx^2]\cdot[-3b^2x^3] =$$
$$=(5[a^3][b][x^2])\cdot(-3[b^2][x^3]) =$$
$$= 5[a^3][b][x^2](-3)[b^2][x^3] = 5\cdot(-3)[a^3][b][b^2][x^2][x^3] =$$
$$= (-15)[a^3]([b][b^2])([x^2][x^3]) = (-15)[a^3][b^3][x^5].$$

С другой стороны:

$$[-15a^3b^3x^5] = (-15)[a^3][b^3][x^5].$$

Следовательно:

$$[(5a^3bx^2)\cdot(-3b^2x^3)]=[-15a^3b^3x^5],$$

т. е.

$$(5a^3bx^2)\cdot(-3b^2x^3) \equiv -15a^3b^3x^5.$$

31. При обучении выполнению умножения многочлена на одночлен надо в течение некоторого (небольшого) периода времени заставлять учащихся сперва письменно, а затем устно 1) представлять множимое в виде с у м м ы, 2) находить произведение каждого слагаемого этой суммы на множитель и 3) находить сумму полученных произведений. Приученные к такому порядку выполнения умножения многочлена на одночлен, учащиеся будут в дальнейшем мысленно следовать именно этому пути, что выработает у них прочный и сознательный навык.

32. Этот навык будет немедленно использован ими при выполнении умножения многочлена на многочлен.

Однако при выполнении умножения многочлена на многочлен к указанному навыку должна присоединиться привычка точно соблюдать определенный порядок: сперва **все** члены множимого умножают на первый член множителя, затем **все** члены множимого умножают на второй член множителя и т. д. до конца. Возможен, конечно, и другой порядок: сначала первый член множимого умножают на **все** члены множителя, затем второй член множимого умножают на **все** члены множителя и т. д. до конца. Соблюдения какого-либо из этих порядков необходимо строго требовать от учащихся.

Применяя рассуждение, проведенное нами (в пункте 30) для доказательства того, что выполнение умножения одночлена на одночлен есть тождественное преобразование, мы докажем, что и выполнение умножения многочлена на одночлен и многочлена на многочлен также представляют собой **тождественные** преобразования.

Строгое доказательство этих предложений может быть проведено следующим образом.

Если $A+B+C$ есть многочлен, где A, B, C — его члены, а D — одночлен, то, с одной стороны:

$$[(A+B+C)\cdot D]=[A+B+C]\cdot[D]=$$
$$=([A]+[B]+[C])\cdot[D]=[A]\cdot[D]+[B]\cdot[D]+[C]\cdot[D],$$

а с другой стороны:

$$[AD+BD+CD]=[AD]+[BD]+[CD]=$$
$$=[A]\cdot[D]+[B][D]+[C]\cdot[D].$$

Следовательно:

$$[(A+B+C)\cdot D]=[AD+BD+CD],$$

т. е.

$$(A+B+C)\cdot D\equiv AD+BD+CD.$$

Пользуясь доказанным тождеством, последовательно получаем:

$$(A+B+C)\cdot(D+E)\equiv$$
$$A\cdot(D+E)+B\cdot(D+E)+C\cdot(D+E)\equiv$$
$$\equiv(AD+AE)+(BD+BE)+(CD+CE)\equiv$$
$$\equiv AD+AE+BD+BE+CD+CE.$$

33. К понятию о расположенных многочленах учащиеся подводятся постепенно. С этим понятием они знакомятся уже при установлении различных видов многочленов (§ 6, пункт 23), а также при выполнении сложения и вычитания. При выполнении умножения расположенных многочленов можно сделать вполне прозрачными как самый процесс преобразования, так и структуру произведения, если применить способ „собирания членов“, который подробно иллюстрируется при решении примера 5.

Однако к применению этого способа надо приучать не сразу на примере, аналогичном примеру 5, а сперва на самых простых примерах вида $(x + a)(x + b)$ с тем, чтобы после этого перейти к примерам вида:

$$(ax + b)(cx + d);\ (ax^2 + bx + c)(dx + e);$$
$$(ax^2 + bx + c)\ (dx^2 + ex + f).$$

Надо, чтобы учащиеся в таких случаях даже не склонны были находить частные (промежуточные) произведения письменно, а стремились (уверенно и безошибочно) составлять эти произведения устно, находя зрительно члены множимого и множителя, требуемые для составления очередного члена произведения, и действуя по схеме „крест-накрест“ или по схеме „шаг вперед (по множимому) — шаг назад (по множителю)“.

§ 8. ВОЗВЕДЕНИЕ ОДНОЧЛЕНА В НАТУРАЛЬНУЮ СТЕПЕНЬ. ФОРМУЛЫ УМНОЖЕНИЯ

34. Свойства степени с натуральным показателем. Для обоснования правила возведения одночлена в натуральную степень необходимо использовать две следующие теоремы, которые вместе с теоремой 1 (стр. 160) выражают свойства степеней с натуральным показателем.

Теорема 2. Для того чтобы возвести в степень произведение нескольких сомножителей, достаточно возвести в эту степень каждый сомножитель в отдельности и найденные результаты перемножить, т. е.

$$(abc)^m = a^m \cdot b^m \cdot c^m.$$

Проведем доказательство сперва для частных случаев.

1°. Докажем, что

$$(abc)^2 = a^2b^2c^2.$$

Последовательно получаем:

$(abc)^2 = (abc)\cdot(abc)$ (по определению степени) $=$
$= abc\ abc$ (по правилу об умножении на произведение) $=$
$= aabbcc$ (по свойству переместительности умножения) $=$
$= (aa)(bb)(cc)$ (по правилу группировки сомножителей) $=$
$= a^2b^2c^2$ (по определению степени).

2°. Докажем, что

$(abc)^3 = a^3b^3c^3$.

Пользуясь указанными обоснованиями каждого шага, последовательно получаем:

$$\begin{aligned}(abc)^3 &= (abc)\cdot(abc)\cdot(abc) = \\ &= abc\ abc\ abc = \\ &= aaa\ bbb\ ccc = \\ &= (aaa)\ (bbb)\ (ccc) = \\ &= a^3b^3c^3.\end{aligned}$$

Пользуясь теми же обоснованиями каждого шага, последовательно получаем:

$$\begin{aligned}(abc)^m &= \underbrace{(abc)\cdot(abc)\ \ldots\ (abc)}_{m \text{ раз}} = \\ &= abc\ abc\ \ldots\ abc = \\ &= aa\ \ldots\ abb\ \ldots bcc\ \ldots\ c = \\ &= (aa\ \ldots\ a)\cdot(bb\ \ldots\ b)\cdot(cc\ \ldots c) = \\ &= a^mb^mc^m.\end{aligned}$$

Теорема 3. Для того чтобы возвести степень числа в новую степень, достаточно возвести это число в степень, равную произведению обоих показателей степеней, т. е.

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

Проведем доказательство сперва для частных случаев.

1°. Докажем, что $(a^m)^2 = a^{2m}$.

Последовательно получаем:

$(a^m)^2 = a^m \cdot a^m$ (по определению степени) $=$

$= a^{m+m}$ (по правилу перемножения степеней одного и того же основания) $=$

$= a^{2m}$ (по определению произведения).

2°. Докажем, что

$$(a^m)^3 = a^{3m}.$$

Пользуясь указанными обоснованиями каждого шага, последовательно получаем:

$$(a^m)^3 = a^m \cdot a^m \cdot a^m = \\ = a^{m+m+m} = \\ = a^{3m}.$$

Теперь докажем, что если показатель n есть любое натуральное число, то

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

Пользуясь теми же обоснованиями каждого шага, последовательно получаем:

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \ \dots \ a^m}_{n \text{ раз}} = \\ = a^{m+m+\ \cdots \ +m} = \\ = a^{m \cdot n}.$$

Теорему 3 можно сформулировать еще следующим образом:

При возведении степени какого-либо числа в новую степень получается степень того же числа с показателем, равным произведению обоих показателей степеней.

35. Степень одночлена. Допустим, что требуется возвести в 4-ю степень одночлен $2a^3bc^5$.

Последовательно получаем:

$$(2a^3bc^5)^4 = 2^4(a^3)^4b^4(c^5)^4 \text{ (теорема 2)} = \\ = 16a^{12}b^4c^{20} \text{ (теорема 3)}.$$

Точно так же мы поступим при возведении в степень любого одночлена и придем к выводу, что из теорем 2 и 3 непосредственно вытекает следующее правило:

Правило VIII. Для того чтобы возвести в какую-либо степень одночлен, достаточно возвести в эту степень его коэффициент и умножить на показатель этой степени показатели всех букв, входящих в одночлен.

36. Формулы умножения. Умножение многочлена на многочлен всегда можно выполнить по общему правилу VII. Однако подмечены случаи, когда для получения произведения можно не выполнять некоторых промежуточных преобразований. Рассмотрим эти случаи.

I. При умножении суммы $A+B$ двух выражений на их разность $A-B$ всегда получается разность квадратов этих выражений, т. е. имеет место тождество:

$$(I) \qquad (A+B)(A-B) \equiv A^2-B^2.$$

Докажем его. Допустим, что при некоторых значениях букв, входящих в выражения A и B, эти выражения имеют числовые значения a и b. Тогда числовое значение левой части будет равно произведению $(a+b)(a-b)$, а правой части — разности a^2-b^2. Но

$$(1) \qquad (a+b)(a-b) = a^2+ab-ab-b^2 = a^2-b^2.$$

Следовательно, тождество (I) верно.

Пример 1.

$$(5a^3b^2+3a^2b^3)(5a^3b^2-3a^2b^3) = (5a^3b^2)^2-(3a^2b^3)^2 = \\ = 25a^6b^4-9a^4b^6.$$

II. При умножении суммы $A+B$ двух выражений на эту же самую сумму, т. е. при возведении суммы $A+B$ в квадрат, всегда получается выражение вида $A^2+2AB+B^2$, так что имеет место тождество

$$(II) \qquad (A+B)^2 \equiv A^2+2AB+B^2.$$

Докажем его. Числовое значение левой части есть число $(a+b)^2$, а правой части — число $a^2+2ab+b^2$. Но

$$(2) \qquad (a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2+ba+ab+b^2 = \\ = a^2+2ab+b^2.$$

Следовательно, тождество (II) верно.

III. При умножении разности $A-B$ выражений на эту же самую разность, т. е. *при возведении разности* $A-B$ в квадрат, всегда получается выражение вида $A^2-2AB+B^2$, так что имеет место тождество

$$(III) \qquad (A-B)^2 \equiv A^2-2AB+B^2.$$

Докажем его. Числовое значение левой части есть число $(a-b)^2$, а правой части — число $a^2-2ab+b^2$. Но

$$(a-b)^2=(a-b)(a-b)=a^2-ba-ab+b^2= \\ =a^2-2ab+b^2.$$

Следовательно, тождество (III) верно.

IV. При возведении суммы $A+B$ двух выражений в куб всегда получается выражение вида

$$A^3+3A^2B+3AB^2+B^3,$$

так что имеет место тождество

$$\text{(IV)} \qquad (A+B)^3 \equiv A^3+3A^2B+3AB^2+B^3.$$

Докажем его. Числовое значение левой части есть число $(a+b)^3$, а правой части — число $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$. Но

$$(a+b)^3=(a+b)^2(a+b)=(a^2+2ab+b^2)(a+b)= \\ =a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

Следовательно, тождество (IV) верно.

V. При возведении разности $A-B$ двух выражений в куб всегда получается выражение вида

$$A^3-3A^2B+3AB^2-B^3,$$

т. е. имеет место тождество

$$\text{(V)} \qquad (A-B)^3 \equiv A^3-3A^2B+3AB^2-B^3.$$

Докажем его. Числовое значение левой части есть число $(a-b)^3$, а правой части — число $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$. Но

$$(a-b)^3=(a-b)^2(a-b)=(a^2-2ab+b^2)(a-b)= \\ =a^3-2a^2b+ab^2-a^2b+2ab^2-b^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.$$

Тождества (I) — (V), позволяющие выполнить умножение сокращенно, т. е. написать результат умножения без промежуточных преобразований, называются **формулами умножения**.

Указания к § 8 (пункты 34—36)

34. Теоремы 2 и 3 в VI классе доказываются только для частных случаев 1° и 2° ($m=2$, $m=3$; $n=2$, $n=3$). Но общий случай записывается в виде равенств:

$$\text{(2)} \qquad (abc)^n=a^nb^nc^n;$$

$$\text{(3)} \qquad (a^m)^n=a^{mn}.$$

Как показывает опыт, формула (3) усваивается учащимися не без труда и легко смешивается ими с формулой

(1) $$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Поэтому учителю предстоит выполнить некоторую работу над тем, чтобы учащиеся вполне осознали различие между этими формулами и научились правильно применять их.

Для этого следует:

а) разрешить учащимся пользоваться в целях применения равенств (1) и (3) их краткими формулировками — „При умножении степеней одного и того же основания показатели складываются“, „При возведении степени в степень показатели перемножаются (а основание остается без изменения, или сохраняется)“ —, опуская и только подразумевая слова, заключенные в скобки;

б) обратить внимание учащихся на то, что в формуле (1) над степенями выполняется умножение (прямое действие второй ступени), а над показателями — сложение (прямое действие первой ступени), но в формуле (3) над степенью выполняется возведение в степень (прямое действие третьей ступени), а над показателями — умножение (прямое действие второй ступени):

$a^m \cdot a^n$ — умножение; $m + n$ — сложение;

$(a^m)^n$ — возведение в степень; mn — умножение;

в) выполнить с учащимися ряд упражнений на представление данной степени в виде степени какой-либо другой степени:

$$a^{12} = (a^2)^6 = (a^3)^4 = (a^4)^3 = (a^6)^2 \text{ и т. п.}$$

Точно так же, как равенство (1), равенство (3) выполняется при любых значениях основания a, но при условии, что показатели m и n суть натуральные (положительные целые) числа. Следовательно, в этой области чисел равенство (3) есть тождество.

Равенство (2) выполняется при любых значениях оснований a, b, c, но при условии, что показатель m есть натуральное (положительное целое) число. Следовательно, в этой области чисел равенство (2) есть тождество.

Учитель вновь приобретает возможность ознакомить учащихся с понятием о равенстве, которое является тождеством в определенной ограниченной области чисел.

35. После вывода правила VIII приступают к упражнениям на возведение одночленов в степень. Сперва это преобразование должно выполняться учащимися в соответствии с правилом почти механически и лишь от времени до времени прерываться ссылками на теоремы 2 и 3, но затем — по прошествии некоторого времени — следует потребовать от учащихся осмысливания каждого из двух шагов преобразования и умения сознательно сослаться на каждую из теорем 2 и 3.

Наконец, может быть поставлен вопрос о том, является ли равенство

$$(2a^3bc^5)^4 = 16a^{12}b^4c^{20}$$

тождеством, т. е. о том, какое именно утверждение выражается этим равенством. Ответ должен состоять в объяснении того факта, что левая и правая части этого равенства при любых значениях букв a, b, c имеют равные числовые значения.

36. Изложенный в пункте 36 вывод формул умножения выявляет научную сущность вопроса, но не предназначен для точного использования в VI классе. В этом классе целесообразнее принять один из следующих путей:

а) Предложив учащимся найти произведение

$$(a+b)(a-b)$$

и степени

$$(a+b)^2;\ (a-b)^2;\ (a+b)^3;\ (a-b)^3,$$

в каждом из этих случаев рассматривают вид полученного многочлена, устанавливают число его членов и показатель однородности (2 и 3) и выясняют его структуру, для чего располагают сомножители в столбик:

$$\begin{array}{ccc} a+b & \quad a+b & \quad a+b \\ a-b & \quad a+b & \quad a+b \\ & & \quad a+b \end{array}$$

и вновь выполняют действия (по аналогии с упражнениями 42 и 46). Обращают внимание на то, что каждый член произведения до приведения содержит по одному представителю от каждого двучленного сомножителя и что коэффициенты 2 и 3 указывают, сколько раз может быть получена данная комбинация множителей.

Например:

$$3a^2b = a\cdot a\cdot b + a\cdot b\cdot a + b\cdot a\cdot a;$$
$$3ab^2 = a\cdot b\cdot b + b\cdot a\cdot b + b\cdot b\cdot a,$$

тогда структура произведений становится вполне ясной.

Учащиеся поймут, что, например, результатом возведения однородного многочлена первого измерения $a+b$ в куб является однородный многочлен третьего измерения, содержащий все одночлены третьего измерения, которые можно составить из букв a, b, c:

$$3+0=2+1=1+2=0+3.$$

Затем указывают, что, так как полученные формулы появились в результате умножения многочленов, то они представляют собой тождественные равенства (тождества). Поэтому, заменяя буквы a и b какими угодно выражениями A и B, мы получим равенства:

(I) $$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2;$$
(II) $$(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2;$$
(III) $$(A \pm B)^3 = A^3 \pm 3A^2B + 3AB^2 \pm B^3,$$

которые будут тождествами по отношению ко всем буквам, входящим в выражения A и B.

б) Обозначив через A и B какие угодно выражения, предлагают учащимся найти произведение

$$(A+B)(A-B)$$

и степени

$$(A+B)^2;\ (A-B)^2;\ (A+B)^3;\ (A-B)^3$$

и, записав результаты в виде равенств (I), (II), (III), тщательно разбирают состав и структуру правых частей каждой из них, содействуя выработке формулировок этих формул и их запоминанию.

Прочное усвоение „формул умножения“ (как их следует называть) будет достигнуто в результате выполнения учащимися достаточного числа упражнений, в процессе которого они будут принимать во внимание схему, диктуемую формулой.

Например, для выполнения упражнения

$$(3a^2x^3 + 2a^3x^2)(3a^2x^3 - 2a^3x^2)$$

учащиеся в течение некоторого времени должны сначала обозначать результат в виде

$$(3a^2x^3)^2 - (2a^3x^2)^2,$$

а затем уже находить окончательный результат:

$$9a^4x^6 - 4a^6x^4.$$

Точно так же для выполнения упражнения

$$(3a^2x^3 - 2a^3x^2)^2$$

учащиеся сперва обозначают результат в виде

$$(3a^2x^3)^2 - 2(3a^2x^3)(2a^3x^2) + (2a^3x^2)^2,$$

а затем преобразуют его к виду:

$$9a^4x^6 - 12a^5x^5 + 4a^6x^4.$$

Польза от такого порядка выполнения умножения по формулам состоит в том, что учащийся строго соблюдает схему, указанную формулой, и сосредоточивает свое внимание на том, какое именно действие над одночленами надо выполнить — возведение в степень или умножение, и поэтому не ошибается при нахождении показателей степеней (умножением или сложением).

В предупреждение нередко встречающейся существенной ошибки надо тщательно объяснить учащимся, что при возведении в квадрат или куб двучлена $A - B$ он рассматривается как р а з н о с т ь членов A и B, а не как алгебраическая сумма $A + (-B)$ и что если мы пожелаем рассматривать этот двучлен как сумму, то при возведении его в квадрат или куб надо будет применить формулу квадрата или куба суммы членов A и $(-B)$.

Формулы для $(A \pm B)^3$ следует ввести еще в следующей форме:

$$(A + B)^3 = A^3 + B^3 + 3AB\,(A + B),$$
$$(A - B)^3 = A^3 - B^3 - 3AB\,(A - B),$$

нередко более удобной для приложений.

В качестве упражнений для усвоения учащимися формул умножения целесообразно предлагать примеры на доказательство тождеств, требующие использования этих формул (см. упражнения к гл. III).

Заслуживает большого внимания опыт учителей, связывающих обучение учащихся формулам умножения с применением этих формул к разложению многочленов на множители. Для достижения этой цели учащимся предлагается усвоить формулы умножения посредством чтения их не только слева направо, но и справа налево, что содействует более глубокому осознанию структуры формул и облегчает запоминание их. Вместе с тем значительно расширяется область упражнений и создается возможность поднять интерес учащихся при изучении этого раздела.

К тем же положительным результатам учитель придет в том случае, если он свяжет обучение учащихся делению многочлена на одночлен с применением этого действия к разложению многочлена на множители посредством вынесения из всех его членов общего множителя.

При указанной перестановке материала с частью раздела „Разложение многочленов на множители“ учащиеся уже будут знакомы.

§ 9. ДЕЛЕНИЕ ОДНОЧЛЕНОВ И МНОГОЧЛЕНОВ НА ОДНОЧЛЕН

37. Деление одночленов. Для обоснования правила деления одночлена на одночлен необходимо использовать следующее предложение.

Теорема 4. Частное от деления степени какого-либо числа на степень того же числа с меньшим показателем равно степени того же числа, показатель которой есть разность показателей делимого и делителя, т. е.

$$\text{если } m > n, \text{ то } a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Доказательство. Для доказательства того, что при условии $m > n$ частное от деления числа a^m на число a^n равно числу a^{m-n}, достаточно доказать, что произведение частного a^{m-n} на делитель a^n равно делимому a^m. Но это верно, так как

$$a^{m-n} \cdot a^n = a^{m-n+n} = a^m.$$

Теперь допустим, что требуется найти частное от деления одночлена $8a^3bc^4$ на одночлен $2ab^2d$.

Для того чтобы найти это частное, достаточно соединить данные одночлены знаком деления (чертой):

$$(8a^3bc^4):(2ab^2d) = \frac{8a^3bc^4}{2ab^2d}.$$

Найденное частное уже не является одночленом. Однако при некотором условии частное двух одночленов также может быть представлено в виде одночлена. Именно: такая возможность существует при условии, если каждая буква, входящая в делитель, входит также в делимое и притом с показателем, не меньшим, чем тот, с которым она входит в делитель.

1) В самом деле, пусть требуется разделить одночлен $8a^3b^5c^4$ на одночлен $2ab^2$. Буквы a и b, входящие в делитель соответственно с показателями 1 и 2, входят в делимое с бо́льшими показателями 3 и 5. Поэтому в данном случае частное

$$\frac{8a^3b^5c^4}{2ab^2},$$

полученное от деления одночлена $8a^3b^5c^4$ на одночлен $2ab^2$, может быть заменено (тождественно равным ему) одночленом

$$4a^2b^3c^4,$$

который получится, если мы коэффициент делимого разделим на коэффициент делителя и к найденному частному припишем сперва каждую букву, входящую в делимое и делитель, с показателем, равным разности этих показателей, а затем каждую букву, входящую только в делимое, с ее показателем.

Действительно, одночлен $4a^2b^3c^4$ представляет собой как раз тот одночлен, который при умножении на одночлен $2ab^2$ дает (воспроизводит) одночлен $8a^3b^5c^4$, т. е.

$$4a^2b^3c^4 \cdot 2ab^2 = 8a^3b^5c^4.$$

Но это равенство, как известно (§ 7, пункт 30), есть тождество (выполняется тождественно); поэтому и равенство

$$\frac{8a^3b^5c^4}{2ab^2} = 4a^2b^3c^4$$

также есть тождество.

2) Если же какая-либо буква входит в делимое и делитель с о д н и м и т е м ж е показателем, то, заменяя частное одночленом, надо такого рода букву вовсе не включать в окончательный результат.

Например:

$$\frac{8a^3b^5c^4}{2a^3b^2} = 4b^3c^4,$$

так как

$$4b^3c^4 \cdot 2a^3b^2 = 8a^3b^5c^4.$$

Мы пришли к следующему выводу:

Если требуется разделить одночлен A на одночлен B и если при этом каждая буква, входящая в делитель B, входит и в делимое и притом с показателем, не меньшим, чем тот, с которым она входит в делитель, то частное $\frac{A}{B}$ от деления одночлена A на одночлен B может быть представлено в виде некоторого одночлена C.

Правило. Для того чтобы найти этот одночлен C, достаточно коэффициент делимого разделить на коэффициент делителя и к найденному частному приписать сначала каждую букву, входящую в делимое с бо́льшим показателем, чем в делитель, с показателем, равным разности этих показателей, а затем каждую букву, входящую только в делимое, с ее показателем; буквы же, входящие в делимое и делитель с одним и тем же показателем, вовсе не включают в одночлен C.

Определение. Если частное $\frac{A}{B}$ от деления одночлена A на одночлен B может быть заменено одночленом, то говорят, что одночлен A делится на одночлен B, или что деление одночлена A на одночлен B „выполняется нацело".

Для того чтобы одночлен A делился на одночлен B, достаточно, чтобы каждая буква, входящая в одночлен B, входила в одночлен A с показателем, не меньшим, чем тот, с которым она входит в одночлен B. Это условие называется условием (признаком) делимости одночлена на одночлен.

38. Деление многочлена на одночлен. Для обоснования правила деления многочлена на одночлен необходимо использовать свойство распределительности деления относительно сложения (гл. II, § 4, пункт 17), выражаемое равенством

$$(a+b+c):d=(a:d)+(b:d)+(c:d).$$

Допустим, что требуется разделить многочлен

$$5a^2b^3-3b^2c^4+2ac^5$$

на одночлен $7ab^2c^2$.

Для того чтобы выполнить это деление, достаточно соединить делимое и делитель знаком деления, т. е. чертой; мы получим частное

$$(1)\qquad \frac{5a^2b^3 - 3b^2c^4 + 2ac^5}{7ab^2c^3}.$$

Так как в данном случае ни один член делимого не делится на делитель, то применять свойство распределительности деления нецелесообразно. В самом деле, заменить частное (1) выражением

$$(2)\qquad \frac{5a^2b^3}{7ab^2c^3} - \frac{3b^2c^4}{7ab^2c^3} + \frac{2ac^5}{7ab^2c^3}$$

мы имеем право, так как выражение (2), на основании свойства распределительности деления, тождественно равно частному (1), но выражение (2) не проще выражения (1) и не может быть дальше упрощено.

Иначе обстоит дело, если все члены многочлена делятся на одночлен.

Пусть требуется разделить многочлен

$$5a^2b^2c^2 - 3abc^4 + 2a^3c^3$$

на одночлен $7ac^2$. Теперь частное

$$(3)\qquad \frac{5a^2b^2c^2 - 3abc^4 + 2a^3c^3}{7ac^2}$$

может быть, на основании свойства распределительности деления, заменено сначала тождественно равным ему выражением

$$(4)\qquad \frac{5a^2b^2c^2}{7ac^2} - \frac{3abc^4}{7ac^2} + \frac{2a^3c^3}{7ac^2},$$

а затем — выражением

$$(5)\qquad \frac{5}{7}ab^2 - \frac{3}{7}bc^2 + \frac{2}{7}a^2c,$$

найденным из предыдущего выражения (4) по правилу деления одночлена на одночлен (пункт 37) и, следовательно, тождественно равным этому выражению (4).

На практике промежуточные переходы лишь подразумевают и записывают только задание и результат. Например:

$$(5a^2b^2c^2 - 3abc^4 + 2a^3c^3):7ac^2 = \frac{5}{7}ab^2 - \frac{3}{7}bc^2 + \frac{2}{7}a^2c.$$

Указания к § 9 (пункты 37, 38)

37. Вопрос о делении одночленов вполне аналогичен вопросу о делении положительных целых чисел, в результате которого получается либо целое число, либо дробь, не сводящаяся к целому числу. Этой аналогией необходимо воспользоваться при изложении теории деления одночлена на одночлен.

Прежде всего, в полном соответствии с тем определением, которое дано было в пункте 37, частным двух одночленов надо называть алгебраическое выражение, полученное посредством соединения этих одночленов знаком деления (чертой), независимо от того, может ли составленное таким путем частное подвергнуться упрощению или нет. Затем рассматривается только тот случай, когда найденное частное может быть заменено тождественно равным ему одночленом. Рассмотрение же случая, когда частное, являющееся в сущности алгебраической дробью, в результате сокращения приводится к дроби, а не к одночлену, приходится выполнить позже — в разделе „Алгебраические дроби", где операция сокращения дробей получит надлежащее обоснование.

В теме же „Деление одночленов" замена частного одночленом (в том случае, когда она возможна) основывается на том, что тождественность равенства $\frac{A}{B} = C$, где A, B, C — одночлены, есть следствие тождественности равенства $A = B \cdot C$.

Для того чтобы сделать явным тот факт, что речь идет о равенстве числовых значений левой и правой части рассматриваемых равенств, можно, введя для числового значения алгебраического выражения F символ $[F]$, оформить рассуждение следующим образом.

Так как

$$A \equiv BC,$$

то имеет место числовое равенство

$$[A] = [BC] = [B] \cdot [C];$$

отсюда следует, что (при условии $[B] \neq 0$) выполняется числовое равенство

$$\left[\frac{A}{B}\right] = \frac{[A]}{[B]} = [C],$$

а это значит, что

$$\frac{A}{B} \equiv C.$$

Если учитель будет просто отождествлять одночлены A, B, C с их числовыми значениями и рассматривать равенство $A = B \cdot C$ как выражение результата умножения чисел, то такое объяснение будет представлять собой едва ли допустимое даже в VI классе „упрощенчество“ и пример чисто механической замены понятий о действиях над алгебраическими выражениями понятиями о действиях над числами. Тождественный характер преобразования непременно должен быть осознан учащимися.

38. При выводе правила деления многочлена на одночлен мы пользовались свойством распределительности деления (относительно сложения), выражаемым равенством

$$(a + b + c):d = (a:d) + (b:d) + (c:d).$$

Но это свойство относится, конечно, не к многочлену $A + B + C$, который служит делимым, и к одночлену D, который служит делителем, а к их числовым значениям $[A + B + C]$ и $[D]$.

Иначе говоря, опираясь на свойство распределительности деления, мы имеем право записать только то, что

$$([A] + [B] + [C]):[D] = [A]:[D] + [B]:[D] + [C]:[D].$$

Поэтому

$$\left[\frac{A+B+C}{D}\right] = \frac{[A+B+C]}{[D]} = \frac{[A]+[B]+[C]}{[D]} =$$

$$= \frac{[A]}{[D]} + \frac{[B]}{[D]} + \frac{[C]}{[D]} = \left[\frac{A}{D}\right] + \left[\frac{B}{D}\right] + \left[\frac{C}{D}\right].$$

Таким образом:

$$\left[\frac{A+B+C}{D}\right] = \left[\frac{A}{D}\right] + \left[\frac{B}{D}\right] + \left[\frac{C}{D}\right].$$

Но это значит, что имеет место тождество:

$$\frac{A+B+C}{D} \equiv \frac{A}{D} + \frac{B}{D} + \frac{C}{D}.$$

Мы привели строгое доказательство этого тождества. Однако учитель воспримет из него и сообщит учащимся только сущность, смысл содержащегося в доказанном тождестве утверждения и, проведя рассуждение так, как изложено в пункте 38, тщательно выявит тот факт, что замена одного выражения другим возможна и происходит именно вследствие *равенства их числовых значений*, т. е. тождественного равенства их.

В практическом отношении важно рассмотреть случаи, когда деление выполняется нацело и когда частное представляется только в виде суммы частных, получаемых от деления членов делимого на делитель, т. е. в виде

$$\frac{A}{D}+\frac{B}{D}+\frac{C}{D}.$$

Однако в обоих случаях деление может быть выполнено и частное может быть представлено в виде некоторого выражения, тождественно равного найденному частному.

УПРАЖНЕНИЯ

Прилагаемые к „Методике обучения алгебре в VI классе" упражнения не имеют целью заменить какой бы то ни было сборник задач. Они составлены для того, чтобы на их примере дать учителю возможность познакомиться: 1) с осуществлением принципа вариативности, т. е. такого построения систем упражнений, при котором в их содержание и форму вносятся хотя бы незначительные принципиальные отличия; 2) с решениями многих упражнений, имеющими теоретическое и методическое значение и в немалом числе случаев содействующими активизации процесса обучения алгебре и усвоения ее учащимися.

Более трудные упражнения могут предлагаться учащимся для повышения уровня их знаний и математического развития.

Упражнения к § 1

1. Составить общие формулы решения для следующих задач:

1) Из двух пунктов, находящихся на расстоянии d *км*, выходят одновременно навстречу друг другу два пешехода. Первый проходит в час a *км*, второй — b *км*. Через сколько часов они встретятся?

2) Из двух пунктов, находящихся на расстоянии d *км*, отправляются одновременно в одном и том же направлении велосипедист и пешеход. Первый проезжает в час a *км*, второй проходит в час b *км*. Через сколько часов велосипедист догонит пешехода?

2. Составить общие формулы решения следующих задач:

1) Поезд шел m час. со скоростью a *км* в час, а затем еще n час. со скоростью b *км* в час. Найти среднюю скорость движения поезда за все время.

2) В 8 часов утра температура воздуха была равна $t°$; к 1 часу дня она поднялась на $a°$, а к 10 часам вечера опустилась на $b°$. Найти среднюю температуру воздуха за время наблюдения.

3. Составить общие формулы решения следующих задач:

1) В магазине 2 куска сукна: первый стоит a руб. при цене одного метра в p руб., а второй стоит b руб. при цене одного метра в q руб. На сколько метров первый кусок длиннее второго?

2) Цена телеграммы обыкновенно составляется так: к постоянной основной таксе в a коп. прибавляется плата за каждое слово в b коп. Найти цену телеграммы, содержащей n слов.

3) Имеются два сосуда, в которые налито соответственно a и b ведер воды. Из первого сосуда вылили во второй половину того, что содержалось во втором сосуде. Сколько ведер воды оказалось в сосудах после переливания?

4) Между двумя булочными надо распределить m *кг* хлеба так, чтобы одна из них получила на p *кг* больше, чем другая. Сколько килограммов хлеба получит каждая булочная?

5) Вес сосуда с водой равен p *г*, а вес этого же сосуда с другой жидкостью равен q *г*; пустой сосуд весит n *г*. Найти удельный вес этой жидкости.

4. Решить следующие примеры на обозначение чисел:

1) Написать общий вид: всех четных чисел; всех нечетных чисел; всех чисел, которые кратны числу 5; всех чисел, которые при делении на 3 дают в остатке 2; всех четных чисел, не делящихся на 4.

2) Если m есть целое число, то как выразятся два следующих за ним целых числа и два предшествующих целых числа.

3) Если m есть четное (нечетное) число, то как выразятся два следующих за ним четных (нечетных) числа и два предшествующих четных (нечетных) числа.

4) Записать, что число a при делении на число b дает в частном число q и в остатке число r.

5) Какой вид могут иметь числа, не делящиеся на 3; на 4; на 5?

6) Какое получится число, если в произведении $a \cdot b$ множимое увеличим в m раз, а множитель — в n раз?

Какое получится число, если в сумме $a+b$ первое слагаемое увеличим на число m, а второе — на число n?

Какое получится число, если в сумме $a+b$ первое слагаемое увеличим в m раз, а второе в n раз?

7) Написать: число, состоящее из a десятков и b единиц; число, обозначаемое теми же цифрами a и b, но расположенными в обратном порядке; сумму цифр этого числа.

8) Написать: общий вид трехзначного числа; число, обозначаемое теми же цифрами, но расположенными в обратном порядке; сумму цифр этого числа. Привести примеры.

9) Четырехзначное число изображается цифрами a, b, 0, c в указанном порядке. Сколько в нем единиц?

Ответ: $1000\,a + 100\,b + c$.

5. Записать алгебраически следующие соотношения между числами:

1) Сумма и произведение чисел a и b равны между собой $\left(a = 3;\ b = \frac{3}{2}\right)$.

2) Если числа a, b, c умножить соответственно на числа m, n, p, то получатся равные произведения ($a = 2$; $b = 3$; $c = 5$; $m = 15$; $n = 10$; $p = 6$).

3) Сумма частных, полученных от деления числа x на числа y и z, равна числу s ($x=20$; $y=2$; $z=4$; $s=15$).

4) Сумма чисел x и y больше, чем число a, а их разность меньше, чем число b ($x=3$; $y=2$; $a=4$; $b=5$).

5) Сумма чисел f, g, h меньше произведения первых двух и больше частного последних двух чисел ($f=5$; $g=8$; $h=2$).

6) Число a на c больше (меньше) числа b (привести примеры).

7) Число a в m раз больше (меньше) числа b (привести примеры).

8) Произведение чисел h и k на столько больше числа a, на сколько число a больше частного тех же чисел ($h=14$; $k=7$; $a=50$).

9) Сумма чисел x и y в m раз больше, а их разность в m раз меньше числа z ($x=5$; $y=3$; $m=2$; $z=4$).

10) Сумма чисел u и v во столько раз меньше их произведения, во сколько раз разность этих чисел меньше их частного $\left(u=3\frac{1}{3};\ v=2\right)$.

11) Если к числу x последовательно прибавить числа a и b, то получатся два числа, разность квадратов которых равна сумме квадратов прибавленных чисел ($a=6$; $b=2$; $x=1$).

12) Если к числу c прибавить, а из числа d вычесть число t, то произведение полученных чисел будет равно произведению данных ($c=3$; $d=7$; $t=4$).

Упражнения имеют целью развить у учащихся умение заменять словесные выражения соотношений между числами их алгебраическими выражениями. Каждый из примеров может служить предметом самостоятельной работы учащихся: 1) по проверке записанного соотношения при указанных в скобках значениях букв; 2) по нахождению других систем значений, при которых соотношение выполняется. Учащиеся придут к выводу, что они могут произвольно выбрать все значения, кроме одного, которое определится выбранными значениями. В нетрудных случаях они найдут искомые системы по соображению.

Упражнения к § 2

1. Найти числовые значения выражений:

1) $2+n$, $2n$, n^2, 2^n при $n=5$.

2) a^2+2x^2-2ax при $a=2$, $x=1$; *ответ:* 2.

Вычисляя устно, находим: $4+2-4=2$.

3) $a^3+b^3+c^3$ при $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{2}{3}$, $c=\frac{5}{6}$; *ответ:* 1.

Последовательно находим:

$$\frac{1}{8}+\frac{8}{27}+\frac{125}{216}=\frac{27+64+125}{216}=1.$$

4) $x^2+\frac{x}{a}+\frac{1}{a^2}$ при $a=2$, $x=1{,}1$; *ответ:* 2,01.

Последовательно находим:

$$1{,}21+\frac{1{,}1}{2}+\frac{1}{4}=1{,}21+\frac{3{,}2}{4}=1{,}21+0{,}8=2{,}01.$$

5) $\frac{a^2b^2}{a^3+b^3}$ при $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{3}$; *ответ:* $\frac{6}{35}$.

Записав дробь $\frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{9}}{\frac{1}{8}+\frac{1}{27}}$, умножаем ее числитель и знаменатель на $8\cdot 27$:

$$\frac{2\cdot 3}{27+8}=\frac{6}{35}.$$

Применен прием упрощения сложных дробей.

Примечание: При выполнении упражнения 1 можно следовать указанной форме записи „цепочкой", но допустима (а в сложных случаях и предпочтительнее) запись „по вопросам". В том и другом случае возможно большая часть вычислений должна выполняться устно (в уме) и с использованием рациональных приемов (см. примеры 4 и 5).

2. Проверить справедливость равенств:

1) $a^2b^2=a^2+b^2$ при $a=\frac{5}{3}$, $b=\frac{5}{4}$.

2) $3a^2-4b^2=ab$ при $a=\frac{10}{3}$, $b=\frac{5}{2}$.

3) $x^2+y=x+y^2$ при $x=\frac{1}{4}$, $y=\frac{3}{4}$.

4) $x^3+11x=6x^2+6$ при $x=1$, $x=2$, $x=$.

Упражнение 2 имеет целью показать на примерах, что два различных алгебраических выражения, содержащих одни и те же буквы, могут при определенной системе значений этих букв принимать р а в н ы е значения. Здесь же целесообразно удостовериться в том, что при другой системе (произвольно выбранных учащимися) значений букв равенство не имеет места.

3. Найти числовые значения выражений:

1) $a^2+b^2+c^2-2ab+2ac-2bc$ при $a=5$, $b=7$, $c=3$.

Решение. $25+49+9-70+30-42=1$.

Замечание. Во избежание затруднений лучше, используя правила вычитания суммы, соблюдать порядок:

$$(25 + 49 + 9 + 30) - (70 + 42) = 1.$$

2) $\frac{a^2}{4} + b^2 + \frac{c^2}{9} + ab - \frac{ac}{3} - \frac{2bc}{3}$ при $a=2$, $b=3$, $c=1$.

Решение: $\frac{4}{4} + 9 + \frac{1}{9} + 6 - \frac{2}{3} - \frac{6}{3} =$

$= \left(1 + 9 + 6 + \frac{1}{9}\right) - \left(\frac{2}{3} + 2\right) = 16\frac{1}{9} - 2\frac{2}{3} = 13\frac{4}{9}.$

3) $(a + b - c)\ (a + c - b)\ (b + c - a)$ при $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$.

Решение: $(1 + 2 - 3)(1 + 3 - 2)(2 + 3 - 1) =$
$= 0 \cdot 2 \cdot 4 = 0.$

Замечание. Произведение обращается в нуль вместе с одним, по крайней мере, из своих сомножителей.

4) $(3a + 4b)\ (4b - 3a) - 36a^2b$ при $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{1}{2}$.

Решение. $\left(\frac{3}{3} + \frac{4}{2}\right)\left(\frac{4}{2} - \frac{3}{3}\right) - 36 \cdot \frac{1}{18} = 1.$

5) $(1 + 2a + 3b)\ (1 + 2a - 3b) - 4a^2b$ при $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{1}{2}$.

Решение. $\left(1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{2}\right)\left(1 + \frac{2}{3} - \frac{3}{2}\right) - \frac{4}{18} = \frac{11}{36}.$

6) $4a^2(a^2 + b - c) - (b + c)(c - a^2 - b) +$
$+ (a + b)^2 (c^2 - b + a^2)$ при $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$.

Решение. $4 \cdot 1 \cdot (1 + 2 - 3) - (2 + 3)\ (3 - 1 - 2) +$
$+ (1 + 2)^2\ (9 - 2 + 1) = 0 - 0 + 72 = 72.$

7) $\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ при $a=2$, $b=3$, $c=6$.

Решение. Представляя данное выражение в виде

$$\frac{ab + 1}{c} + \frac{bc + 1}{a} + \frac{ac + 1}{b},$$

находим:

$$\frac{7}{6} + \frac{19}{2} + \frac{13}{3} = \frac{90}{6} = 15.$$

8) $(x + y - z)^2 + (x + y)^2\ (x - y + z) + (x - y)^3$ при $x = 5$, $y = 1$, $z = 3$.

Решение. $(5+1-3)^2+(5+1)^2\ (5-1+3)+$
$+(5-1)^3=9+36\cdot 7+64=325.$

9) $a^2\cdot[(a^2+2ab+b^2)^2-(a^2-b^2)^2]$ при $a=4, b=1.$

Решение. $16\cdot(25^2-15^2)=6400.$

10) $3x^5+2x^4-8x^3-2x^2+x+10$ при $x=1;\ x=4.$

Решение. При $x=1$ числовое значение многочлена сводится к сумме его коэффициентов:

$$3+2-8-2+1+10=(3+2+1+10)-(8+2)=6.$$

При $x=4$ числовое значение многочлена можно получить посредством следующих вычислений:

$$3x^5=3x\cdot x^4=3\cdot 4\cdot x^4=12x^4;\ 12x^4+2x^4=14x^4;$$
$$14x^4=14x\cdot x^3=14\cdot 4\cdot x^3=56x^3;\ 56x^3-8x^3=48x^3;$$
$$48x^3=48x\cdot x^2=48\cdot 4\cdot x^2=192x^2;\ 192x^2-2x^2=190x^2;$$
$$190x^2=190x\cdot x=190\cdot 4\cdot x=760x;\ \ 760x+x=761x;$$
$$761x=761\cdot 4=3044;\ 3044+10=3054.$$

11) $6x^5+5x^4-4x^3+8x^2-2$ при $x=2$ и $x=\frac{1}{2}$; *ответы:* 270 и 0.

Решение. При $x=\frac{1}{2}$ последовательно находим:

$$6x^5=6x\cdot x^4=3x^4;\ 3x^4+5x^4=8x^4;$$
$$8x^4=8x\cdot x^3=4x^3;\ \ 4x^3-4x^3=0;$$
$$8x^2=8x\cdot x=4x=2;\ 2-2=0.$$

12) $12x^6+5x^5+3x^4+4x^3-11x^2-6x+3$ при $x=3$ и $x=\frac{1}{3}$; *ответы:* 10 200 и 0.

4. Найти числовые значения выражений:

1) $b^2-(c^2+d^2)$ при $b=9,\ c=8,\ d=4$; *ответ:* *1*;

2) $2x^3y\ (x^2-6y^2+1)$ при $x=5,\ \ y=2$; *ответ:* 1000;

3) $(3a^2b-a^3)\ (3ab^2-b^3)$ при $a=2,\ b=1$; *ответ:* 20.

Можно предварительно представить данное выражение в виде

$$a^2\,(3b-a)\cdot b^2\,(3a-b);$$

4) $(a^2-bc)^3:3ab^2c^3$ при $a=4,\ b=5,\ c=2$; *ответ:* 0,09.

Получаем:

$$\frac{(16-10)^3}{3\cdot 4\cdot 25\cdot 8}=\frac{6\cdot 6\cdot 6}{3\cdot 4\cdot 25\cdot 8}=\frac{9}{100};$$

5) $2mnx^2 : (m^2x^2 + n^2x^2)^3$ при $m = 3$, $n = 4$, $x = 0{,}2$; *ответ:* 0,96.

Получаем:

$$\frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot 0{,}04}{(9x^2+16x^2)^3} = \frac{24\cdot 0{,}04}{(25\cdot 0{,}04)^3} = \frac{24\cdot 0{,}04}{1} = 0{,}96;$$

6) $(x^4 + 4a^4) : (x + 4a)$ при $x = 1$, $a = 3$; *ответ:* 25.

Получаем:

$$\frac{1+4\cdot 81}{1+4\cdot 3} = \frac{325}{13} = 25;$$

7) $\frac{(x+4a)^2}{x^2+4a^2}$ при $x = 8$, $a = 3$; *ответ:* 4.

8) $\frac{a^3+ax^2+x^3}{(3a+x)^2}$ при $a = 0$, $x = 1$; при $a = 4$, $x = 5$; *ответ:* 1.

9) $\left(\frac{x^2}{x+y} + \frac{y^2}{x-y}\right)^2$ при $x = 6$; $y = 3$; *ответ:* 49.

10) $\left(\frac{x^2}{x+y}\right)^2 + \left(\frac{y^2}{x-y}\right)^2$ при $x = 6$, $y = 3$; *ответ:* 25.

5. Доказать, что:

1) если $a = \frac{5}{7}$, $b = \frac{3}{7}$, то разность чисел a и b равна разности их кубов;

2) если $s = 4$, $t = 2$, то произведение чисел s и t равно отношению их кубов;

3) если $x = 1\frac{2}{3}$, $y = 1\frac{1}{4}$, то при делении суммы квадратов чисел x и y на квадрат первого числа в частном получается квадрат второго числа;

4) если $a = 5$, $b = 3$, то сумма чисел a и b, умноженная на их разность, превышает произведение этих чисел на 1.

Указание. Предварительно записать доказываемые свойства данных чисел алгебраически („перевести на алгебраический язык“).

Упражнение 5 представляет собой лишь иную форму упражнения 4, любой из примеров которого учитель может предложить и в виде примеров настоящего упражнения. Требование „доказать“ усилит интерес к выполнению этих примеров.

6. Проверить следующие равенства, подставив в них вместо букв л ю б ы е числа:

1) $(2a-3)^2+(4a-5)=4(a-1)^2$;

2) $(5a-13b)(5a+13b)-(4a+12b)(4a-12b)=$
$=(3a+5b)(3a-5b)$;

3) $(bx+2a^2)(3bx-2a^2)+(2bx+a^2)(2bx-3a^2)=$
$=7(bx+a^2)(bx-a^2)$;

4) $(a^2+2ab-b^2)^2+(a^2-2ab-b^2)^2=2(a^2+b^2)^2$;

5) $4(m^2+m-1)^2+(m^2-4m-1)^2=5(m^2+1)^2$;

6) $(x^2-1)^2-(x^2-1)(2x-1)+(2x-1)^2=$
$=(x^2-x+1)^2$.

Примечание. Равенства 1 — 6 — тождества. Это упражнение проводится до введения понятия о тождестве. Учащиеся произвольно выбирают значения букв; при этом все, работая самостоятельно на месте, получают один и тот же результат. Начинают с более легких тождеств,— например с тождеств, содержащих одну букву. Аналогичные примеры тождеств учитель легко составит и сам.

7. Составить таблицу числовых значений и построить график по формуле:

1) $$s=\pi r^2,$$

где s — площадь круга в *см*^{2}, r — радиус круга в *см*, полагая $r=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$.

Масштаб: по горизонтали 1 *см*=1, по вертикали 1 *см*=50.

2) $$p=\left(\frac{t}{100}\right)^4,$$

где p — давление (насыщенного) пара в *кг* на 1 *см*^{2}, t — температура в °С, полагая $t=100°$, 110°, 115°, 120°, 125°.

Масштаб: по горизонтали 2 *см* = 5, по вертикали 2 *см* = 1. При этом по горизонтали надо отложить только превышение температуры t над 100°, т. е. начало горизонтальной оси соответствует значению $t=100°$.

, $$s=4{,}9\,t^2,$$

где s — путь свободно падающего тяжелого тела в *м*, t — время падения в сек., для t от 0° до 10° через 1°.

Масштаб: по горизонтали 1 *см* = 1, по вертикали 1 *см* = 25.

8. Скорость звука в воздухе при t° может быть найдена по формуле:

$$v = 331 + 0{,}6t,$$

где v — скорость звука в *м/сек.*, t — температура воздуха в °С.

1) Построить график зависимости скорости звука от температуры в пределах от 0° до 40°.

Масштаб: по горизонтали 1 *см* = 4°, по вертикали 1 *см* = 4 *м/сек.*

Указание. По вертикали начинаем отсчет от значения 331, т. е. откладываем только превышение над значением 331.

2) Найти по графику, как велика скорость звука при t = 10°, 20°, 30°, 40°. Проверить результат вычислением.

3) Найти по графику, при какой температуре скорость звука равна 337, 343, 350 *м/сек.* Проверить результат вычислением.

9. Сосуд с водой подогревался на газовой горелке. Каждую минуту отмечались показания термометра. Получилась таблица:

18°, 23°, 29°, 36°, 48°, 53°, 59°, 65°, 70°.

1) Изобразить графически изменение температуры.

Масштаб: по горизонтали 1 *см* = 1 мин., по вертикали 1 *мм* = 1°.

2) Составить таблицу приращений температуры и изобразить графически изменение их. Происходило ли это изменение равномерно? В которую минуту (от начала опыта) наблюдалось наибольшее приращение температуры? Принимая, что в течение каждой минуты нагревание происходило равномерно, т. е. что в равные части (доли) минуты происходили равные приращения температуры, вычислить, какую температуру имела вода через $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$, $4\frac{1}{2}$ мин. после начала опыта. Как велика средняя температура, которую имела вода в течение опыта? В какой момент она могла бы наблюдаться?

Провести опыт вполне самостоятельно, составить таблицу наблюденных значений температуры воды и ответить на все поставленные вопросы.

10. При испытании подъемного крана было найдено, что между тяжестью w и усилием p, которое необходимо для поднятия этой тяжести с помощью крана, имеется зависимость, выражаемая следующей таблицей:

w кГ	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
p кГ	1,1	1,63	2,13	2,63	3,15	3,64	4,2	4,7	5,21	5,7

1) Округлив значения усилия p, изобразить его зависимость от тяжести w графически (на миллиметровой бумаге).

Масштаб: по горизонтали 1 *см* $= 5$ *кГ*; по вертикали 1 *см* $= 1$ *кГ*.

2) Составить таблицу приращений, которые получает усилие p при увеличении тяжести w на 10 *кГ*.

Принимая во внимание, что эти приращения сохраняют почти одно и то же значение, изменяясь от 0,49 до 0,56, можно считать, что равным приращениям тяжести w соответствуют равные приращения усилия p. Это имеет своим следствием тот факт, что график рассматриваемой зависимости очень близок к прямой.

Пользуясь найденным свойством приращений усилия p, мы можем найти приближенные значения этой величины для промежуточных значений тяжести w. Например, если $w = 44$ *кГ*, то соответствующее усилие p находится с помощью следующего рассуждения:

если $w = 40$, то $p = 2{,}63$;

если w получит приращение 10, т. е. сделается равным 50, то p будет иметь значение 3,15, т. е. получит приращение 0,52;

если w получит приращение 4, т. е. сделается равным 44, то p получит приращение, равное $\frac{4}{10}$ от 0,52, т. е. 0, 208; следовательно, если $w = 44$ *кГ*, то

$$p = 2{,}63 + 0{,}208 = 2{,}838 \approx 2{,}84 \text{ кГ}.$$

Итак, если из таблицы значений двух зависящих одна от другой величин можно заключить, что равным приращениям первой величины соответствуют почти равные приращения второй, то это имеет своим следствием тот факт, что график рассматриваемой зависимости очень близок к прямой.

Для построения этого графика поступают так: 1) графически изображают вертикальными отрезками содержащиеся в таблице значения зависимой величины; 2) проводят прямую линию так, чтобы она по возможности ближе подошла к этим точкам, прошла через возможно большее их число, и притом так, чтобы точки, не попавшие на прямую, равномерно распределились над и под ней. Эту операцию проще всего производить с помощью тонкой натянутой нити или же с помощью прозрачного листа бумаги, на котором нанесена тонкая прямая линия; вследствие этого самый способ носит название „способа натянутой нити".

Пользуясь построенной прямой, можно по указанному способу находить промежуточные значения зависимой величины, не содержащиеся в таблице, т. е. выполнять графическую интерполяцию. С идеей интерполяции учащиеся продолжают знакомиться в дальнейшем курсе алгебры.

Упражнения к § 3

1. Термометр в полдень показывал 18°. К 6 час. вечера температура изменилась на 4°. Какую температуру показывал термометр в 6 час. вечера? Сколько решений может иметь эта задача? Почему?

2. Термометр показывает в комнате +15°, а на улице —4°. На сколько градусов температура в комнате выше наружной? На сколько делений шкалы переместится столбик ртути, если термометр вынести из комнаты на улицу?

3. В Москве средняя температура июля равна 24°; средняя же температура января меньше на 35°. Найти эту температуру.

4. Термометр показывал в 6 час. утра —5°, в 9 час. утра —2°, в полдень +8°, в 3 часа дня +6°, а в 6 час. вечера 0°. Найти, какие изменения (положительные или отрицательные приращения) получила температура за время между каждыми двумя наблюдениями. Изобразить эти изменения направленными отрезками на вертикальной оси, рассматриваемой как шкала термометра.

5. Найти разность между широтами городов:

1) Москвы (54°45′ с. ш.) и Кейптауна (33°56′ ю. ш.);

2) Архангельска (64°33′ с. ш.) и Буэнос-Айреса (34°36′ ю. ш.);

3) Ленинграда (59°57′ с. ш.) и Сиднея (33°52′ ю. ш.).

Изобразить эти города точками, а пути между ними — направленными дугами на окружности, рассматриваемой как меридиан (на карте, на глобусе).

6. Среднее арифметическое чисел 74, 81, 72, 79, 80, 76 равно 77. Выразить положительными и отрицательными числами отклонения данных чисел от их среднего арифметического. Убедиться в том, что сумма всех положительных отклонений и сумма всех отрицательных отклонений выражаются противоположными числами.

7. Маятник отклонился от положения равновесия на угол 3°20′, а затем совершил колебание в противоположную сторону на угол 6°30′. На какой угол от положения равновесия маятник отклонился после этих двух колебаний? Как можно записать числами каждое из двух составляющих колебаний и окончательное положение маятника?

8. Средняя годовая температура воздуха в Одессе равна 10°,1. Средняя температура января равна — 3°,2, февраля —2°,4, марта 2°,2, апреля 8°,9, июня 20°,6, июля 23,°1. Выразить положительными и отрицательными числами отклонения указанных средних месячных температур от средней годовой температуры. Изобразить средние температуры вертикальными направленными отрезками, перпендикулярными к горизонтальной оси с отметками, соответствующими времени их наблюдения.

9. Написать все целые числа, заключающиеся между числами: 1) (— 3) и (+ 3); 2) (— 5) и (+ 2); 3) (— 4) и (— 1).

10. Найти с помощью числовой оси, на сколько:

1) число (+ 8) больше числа (— 3);

2) число (— 3) больше числа (— 8);

3) число (+ 8) больше числа (—8).

Проследить по числовой оси, какие перемещения надо сделать, чтобы из точки, изображающей меньшее из двух данных чисел, прийти в точку, изображающую большее из этих чисел? В каком случае это перемещение выражается положительным числом? Почему? Какой вывод можно сделать из этих наблюдений?

Ответ. Для того чтобы из точки, изображающей меньшее число, перейти к точке, изображающей большее число, надо выполнить перемещение в положительном направлении, т. е. перемещение, изображаемое **положительным** направленным отрезком.

11. Объяснить с помощью числовой оси, почему:

1) из того, что $(+5)>(-7)$, следует, что, обратно, $(-7)<(+5)$;

2) из того, что $(+5)>(-7)$ и $(-7)>(-10)$, следует, что $(+5)>(-10)$.

Всегда ли можно утверждать, что:

1) если $a>b$, то $b<a$;

2) если $a>b$ и $b>c$, то $a>c$?

12. Объяснить с помощью числовой оси, почему каждое положительное число больше каждого отрицательного числа.

Ответ: 1) Потому что точка, изображающая положительное число, расположена вправо от начала оси, а точка, изображающая отрицательное число,— влево от начало оси. 2) Потому что для перехода от точки, изображающей отрицательное число, к точке, изображающей положительное число, надо сделать перемещение в положительном направлении, т. е. перемещение, изображаемое положительным направленным отрезком.

13. Как записать, что число a заключено между числами (-3) и $(+3)$? Ответ пояснить на числовой оси.

Ответы: $-3<a<3$; $|a|<3$.

14. Точка A с абсциссой a ближе к началу координат, чем точка B с абсциссой b. Как это можно записать? Ответ пояснить чертежом.

Ответ. $|a|<|b|$.

15. Известно, что $|a|<3$. Имеется ли на числовой оси точка, абсцисса x которой: 1) меньше, чем a; 2) больше, чем a?

Ответ. Требованию удовлетворяют все точки, расположенные: 1) слева от промежутка $(-3, +3)$; 2) справа от промежутка $(-3, +3)$.

16. Сравнить абсолютное значение суммы чисел:

$$1)\ (+3) \text{ и } (+5);\ 2)\ (-3) \text{ и } (-5);$$
$$3)\ (+3) \text{ и } (-5);\ 4)\ (-3) \text{ и } (+5)$$

с суммой абсолютных значений этих чисел.

Ответ:

1) $|(+3)+(+5)|=|(+3)|+|(+5)|$;
2) $|(-3)+(-5)|=|(-3)|+|(-5)|$;
3) $|(+3)+(-5)|<|(+3)|+|(-5)|$;
4) $|(-3)+(+5)|<|(-3)|+|(+5)|$.

Какой вывод можно сделать из этих примеров? Всегда ли так будет? Дать ответ, основанный на рассмотрении правила сложения двух чисел с одинаковыми и с противоположными знаками.

17. Отметить на числовой оси точки, соответствующие числам:

$(+10)$; $(+4)$; (-7); $(-10{,}2)$; $(+5{,}4)$; $(-12{,}6)$,

приняв масштаб: 1 единица в 0,5 *см*.

18. Принимая на числовой оси масштаб: 1 единица в 0,5 *см*, записать числа, соответствующие следующим точкам: 1) точке B, расположенной справа от начала на расстоянии 3,5 *см*; 2) точке K, лежащей слева от начала на расстоянии 4,5 *см*; 3) точке O — началу оси.

Упражнения к § 4

1. Найти следующие суммы:

1) $\left(-\frac{1}{2}\right)+2$; $\frac{3}{4}+(-2)$; $\left(-\frac{5}{3}\right)+(-3)$;

2) $\left(-\frac{2}{5}\right)+\frac{3}{10}$; $\frac{3}{8}+\left(-\frac{1}{6}\right)$; $\left(-\frac{11}{18}\right)+\left(-\frac{5}{12}\right)$.

Если имеются слагаемые с дробными абсолютными значениями, то предварительно приводят все слагаемые к общему знаменателю. Например:

$$\frac{3}{4}+(-2)=\frac{3}{4}+\left(-\frac{8}{4}\right)=\left(-\frac{5}{4}\right);$$

$$\frac{3}{8}+\left(-\frac{1}{6}\right)=\frac{9}{24}+\left(-\frac{4}{24}\right)=\frac{5}{24}.$$

2. Найти следующие суммы:

1) $3+7+(-5)+2+(-4)$;

2) $(-5)+9+(-2)+(-4)+(-9)$;

3) $\left(-\frac{5}{2}\right)+\frac{4}{3}+\left(-\frac{1}{6}\right)+3+\left(-\frac{3}{4}\right)$.

1-й способ. Выполняем сложение чисел в том порядке, в котором они записаны. Например:

$$2)\ (-5)+9=4;\ \ 4+(-2)=2;\ \ 2+(-4)=(-2);$$
$$(-2)+(-9)=(-11).$$

2-й способ. Находим сначала сумму положительных слагаемых, затем сумму отрицательных слагаемых и, наконец, сумму двух найденных сумм. Например:

$2)\ 9;\ \ (-5)+(-2)+(-4)+(-9)=(-20);\ \ 9+(-20)=$
$=(-11).$

Заметив, что среди слагаемых имеются противоположные числа 9 и (-9), которые при сложении взаимно уничтожаются, можно было свести вычисление к нахождению суммы остальных слагаемых:

$$(-5)+(-2)+(-4)=(-11).$$

$$3)\ \frac{4}{3}+3=\frac{13}{3};\ \left(-\frac{5}{2}\right)+\left(-\frac{1}{6}\right)+\left(-\frac{3}{4}\right)=$$
$$=\left(-\frac{30}{12}\right)+\left(-\frac{}{12}\right)+\left(-\frac{9}{12}\right)=\left(-\frac{41}{12}\right);$$
$$\frac{13}{3}+\left(-\frac{41}{12}\right)=\frac{52}{12}+\left(-\frac{41}{12}\right)=\frac{11}{12}.$$

3. Выполнить действия:

$$(-2)+(-4)-(-7)+(+2)-(+5).$$

Заменяем все вычитания сложением и поступаем так, как в упражнениях 1 и 2.

4. Выполнить действия:

1) $-4+7-6+2-8+5;$

2) $-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+3-\frac{5}{6}+\frac{3}{4}-\frac{1}{3}-2.$

Рассматривая каждое из этих выражений как алгебраическую сумму, т. е. относя знаки к числам, перед которыми они стоят, последовательно находим:

$$1)\ 7+2+5=14;\quad (-4)+(-6)+(-8)=(-18);$$
$$14+(-18)=(-4);$$

$$2)\ \frac{2}{3}+3+\frac{3}{4}=\frac{8}{12}+\frac{36}{12}+\frac{9}{12}=\frac{53}{12};$$
$$\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{5}{6}\right)+\left(-\frac{1}{3}\right)+(-2)=$$

$$=\left(-\frac{3}{6}\right)+\left(-\frac{5}{6}\right)+\left(-\frac{2}{6}\right)+\left(-\frac{12}{6}\right)=\left(-\frac{22}{6}\right);$$

$$\frac{53}{12}+\left(-\frac{14}{12}\right)=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}.$$

Допустима и желательна рационализация вычислений, которая при решении примера 2 может выразиться в выгодном сочетании слагаемых:

$$(3-2)+\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)-\frac{5}{6}=$$
$$=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{5}{6}=1+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{3}-\frac{5}{6}\right)=$$
$$=1+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=\frac{3}{4}.$$

Конечно, возможны и другие комбинации. Учащиеся будут придумывать их не без интереса.

5. Выполнить действия:

1) $(8-10+13)+(-17+23-15)$;

2) $(-3+4-5)-(2-7+6)$.

1-й способ. Выполняем действия сначала в скобках:

1) $8-10+13=11$; $-17+23-15=-9$;

2) $-3+4-5=-4$; $2-7+6=1$,

а затем над полученными результатами:

1) $11-9=2$;

2) $-4-1=-5$

2-й способ. Применяя правила прибавления и вычитания суммы, последовательно находим:

1) $8-10+13-17+23-15=(8+13+23)+$
$+(-10-17-15)=44-42=2$;

2) $-3+4-5-2+7-6=(4+7)+(-3-5-2-6)=$
$=11-16=-5$.

6. Выполнить действия:

$$\left(2-\frac{1}{9}+\frac{4}{3}\right)-\left(\frac{3}{5}+\frac{2}{3}-\frac{1}{15}\right)+\left(-\frac{2}{9}+1-\frac{5}{3}\right).$$

Последовательно получаем:

$$2-\frac{1}{9}+\frac{4}{3}-\frac{3}{5}-\frac{2}{3}+\frac{1}{15}-\frac{2}{9}+1-\frac{5}{3}=$$
$$=(2+1)+\left(\frac{4}{3}-\frac{2}{3}-\frac{5}{3}\right)+\left(-\frac{3}{5}+\frac{1}{15}\right)+$$
$$+\left(-\frac{1}{9}-\frac{2}{9}\right)=3-1-\frac{8}{15}-\frac{1}{3}=2-\frac{13}{15}=\frac{17}{15}.$$

Если учащиеся уже ознакомлены с преобразованием, называемым заключением нескольких слагаемых суммы в скобки (пункт 15), то они могли бы, заключая в скобки суммы $-\frac{3}{5}+\frac{1}{15}$ и $-\frac{1}{9}-\frac{2}{9}$, поставить перед скобками не знак $+$, а знак $-$ и написать:

$$-\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{15}\right) \text{ и } -\left(\frac{1}{9}+\frac{2}{9}\right).$$

7. Выполнить действия:

$$2-[8-5+(5-2+4)-(6-1+3)].$$

1-й способ. Последовательно получаем:

$$2-(8-5+7-8)=2-8+5-7+8=$$
$$=(2+5-7)+(8-8)=0.$$

2-й способ. Последовательно получаем:

$$2-8+5-(5-2+4)+(6-1+3)=$$
$$=2-8+5-5+2-4+6-1+3=$$
$$=(2+2-4)+(5-5)-8+8=0.$$

В первом случае мы сначала раскрыли круглые скобки, а затем квадратные, во втором случае — сначала квадратные скобки, а затем круглые.

8. Выполнить умножение:

$$(-2)\ (+4)\ (+3)\ (-7).$$

Так как $2\cdot4\cdot3\cdot7=168$, а число отрицательных сомножителей четное, то искомое произведение есть $(+168)$.

9. Выполнить умножение:

$$\left(+\frac{2}{3}\right)(-5)\left(-\frac{3}{8}\right)(-2)\left(+\frac{3}{4}\right).$$

Так как

$$\frac{2\cdot5\cdot3\cdot2\cdot3}{3\cdot8\cdot4}=\frac{15}{8},$$

а число отрицательных сомножителей нечетное, то искомое произведение есть $\left(-\frac{15}{8}\right)$.

В несложных случаях полезно предлагать учащимся находить абсолютное значение произведения устно, комбинируя сомножители выгодным способом. Например:

$$\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{8}\right)\cdot\left(2\cdot\frac{3}{4}\right)\cdot 5=\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{2}\cdot 5=\frac{15}{8}.$$

10. Выполнить умножение:

$$(-2+4-7)\cdot(-5).$$

1-й способ.

$$-2+4-7=-5;\quad(-5)\cdot(-5)=25.$$

2-й способ.

$$(-2)\,(-5)+4\,(-5)+(-7)\,(-5)=$$
$$=10-20+35=25.$$

Очевидно, что для решения этого примера 1-й способ оказался более простым. Но применение обоих способов дает возможность проверить свойство распределительности умножения.

11. Выполнить умножение:

$$\left(-\frac{1}{2}+5+\frac{1}{3}-4\right)\cdot(-6).$$

1-й способ.

$$-\frac{1}{2}+5+\frac{1}{3}-4=(5-4)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{6};$$
$$\frac{5}{6}\cdot(-6)=(-5).$$

2-й способ.

$$\left(-\frac{1}{2}\right)(-6)+5\,(-6)+\frac{1}{3}\,(-6)+(-4)\,(-6)=$$
$$=3-30-2+24=(-5).$$

Для решения этого примера удобен и 2-й способ.

12. Выполнить умножение:

$$(-3+13-4)\,(2-7-6).$$

1-й способ.

$$-3+13-4=6;\quad 2-7-6=-11;$$
$$6\,(-11)=-66.$$

2-й способ.

$$(-3)\cdot 2 + 13\cdot 2 + (-4)\cdot 2 + (-3)\cdot(-7) + 13\cdot(-7) +$$
$$+(-4)\cdot(-7) + (-3)\cdot(-6) + 13\cdot(-6) + (-4)\cdot(-6) =$$
$$= -6 + 26 - 8 + 21 - 91 + 28 + 18 - 78 + 24 =$$
$$= (26 + 21 + 28 + 18 + 24) + (-6 - 8 - 91 - 78) =$$
$$= 117 - 183 = -66.$$

Для решения этого примера 2-й способ неудобен.

13. Выполнить действие:

$$\left(-\frac{3}{4} + \frac{2}{3} - \frac{7}{6}\right)^2.$$

Так как

$$-\frac{3}{4} + \frac{2}{3} - \frac{7}{6} = -\frac{9}{12} + \frac{8}{12} - \frac{14}{12} = -\frac{15}{12} = -\frac{5}{4},$$

то искомая степень есть $\left(-\frac{5}{4}\right)^2$, т. е. $\frac{25}{16}$.

14. Выполнить действия:

$$(3 - 2 + 4)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)\left(-4 + \frac{1}{5}\right).$$

Так как

$$3 - 2 + 4 = 5;\ \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6};\ \ -4 + \frac{1}{5} = -\frac{19}{5},$$

то искомое произведение равно произведению

$$5\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(-\frac{19}{5}\right),\ \text{т. е. числу } -\frac{19}{6}.$$

15. Выполнить действия:

$$\left(1 - \frac{3}{4} + \frac{1}{5}\right)^2\left(-\frac{7}{4} + 2 - \frac{1}{3}\right)^3.$$

Так как

$$1 - \frac{3}{4} + \frac{1}{5} = \frac{20}{20} - \frac{15}{20} + \frac{4}{20} = \frac{9}{20};\ \left(\frac{9}{20}\right)^2 = \frac{81}{400};$$
$$-\frac{7}{4} + 2 - \frac{1}{3} = -\frac{21}{12} + \frac{24}{12} - \frac{4}{12} = -\frac{1}{12};$$
$$\left(-\frac{1}{12}\right)^3 = -\frac{1}{1728},$$

то искомое произведение равно произведению.

$$\frac{81}{400}\cdot\left(-\frac{1}{1728}\right),\ \text{т. е. числу } -\frac{3}{25600}$$

Несколько поучительнее было бы проводить вычисления в круглых скобках так:

$$1-\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{5}\right)=1-\frac{11}{20}=\frac{9}{20}; \quad -\frac{7}{4}+2-\frac{1}{3}=$$
$$=2-\left(\frac{7}{4}+\frac{1}{3}\right)=2-\frac{25}{12}=-\frac{1}{12}.$$

16. Выполнить действия:

$$\left[(-2)^3+\left(-\frac{3}{4}\right)^2+4\right]\left(5-\frac{6}{11}-3\right).$$

Ответ: (-5).

17. Выполнить деление:

$$1)\ \frac{-2+3-7}{5-2+11};\quad 2)\ \frac{\frac{5}{4}-3-\frac{4}{3}}{-4+\frac{1}{6}-\frac{3}{2}}.$$

Решения.

$$1)\ -2+3-7=-6;\ 5-2+11=14;$$
$$(-6):14=-\frac{3}{7}.$$

2) *1-й способ.*

$$\frac{5}{4}-3-\frac{4}{3}=-\frac{37}{12};\ -4+\frac{1}{6}-\frac{3}{2}=-\frac{16}{3};$$
$$\left(-\frac{37}{12}\right):\left(-\frac{16}{3}\right)=\frac{37}{64}.$$

2-й способ. Умножив делимое и делитель на общий знаменатель 12 всех содержащихся в них дробей, сведем деление данных чисел к нахождению частного:

$$\frac{15-36-16}{-48+2-18}.$$

Ответ: $\frac{37}{64}$.

18. Выполнить действия:

$$\frac{\frac{8}{3}-2+\frac{1}{2}}{-4+\frac{3}{4}+\frac{5}{2}}-\frac{\frac{3}{7}-\frac{2}{5}+1}{\frac{3}{2}-\frac{4}{7}-1}.$$

Решение.

$$\frac{\left(\frac{8}{3}-2+\frac{1}{2}\right)\cdot 12}{\left(-4+\frac{3}{4}+\frac{5}{2}\right)\cdot 12}=\frac{32-24+6}{-48+9+30}=\frac{14}{(-9)}=-\frac{14}{9};$$

$$\frac{\left(\frac{3}{7}-\frac{2}{5}+1\right)\cdot 70}{\left(\frac{3}{2}-\frac{4}{7}-1\right)\cdot 70}=\frac{30-28+70}{105-40-70}=\frac{72}{(-5)}=-\frac{72}{5};$$

$$-\frac{14}{9}-\left(-\frac{72}{5}\right)=-\frac{14}{9}+\frac{72}{5}=\frac{578}{45}=12\frac{38}{45}.$$

19. Найти числовые значения многочленов:

1) x^3-3x^2+3x-1 при $x=-2$; $x=3$; $x=-\frac{1}{3}$;

2) $a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$ при $a=2$, $b=-1$; $a=-\frac{1}{3}$, $b=\frac{1}{3}$;

3) $2a^2-ab-3b^2+4a-b+2$ при $a=-1$, $b=2$.

Решения.

1-й способ. Непосредственно подставляем данное значение буквы x:

$$(-2)^3-3(-2)^2+3(-2)-1=$$
$$=-8-12-6-1=-27.$$

2-й способ. Последовательно находим:

$$x^3=x\cdot x^2=(-2)x^2;\ (-2)x^2+(-3)x^2=$$
$$=(-5)x^2=(-5)x\cdot x=10x;$$
$$10x+3x=13x=13(-2)=-26;\ -26-1=-27.$$

Замечание. Зная, что

$$x^3-3x^2+3x-1=(x-1)^3,$$

учитель после трех подстановок познакомит учащихся на этом примере с понятием тождества.

2) $2^4+4\cdot 2^3\cdot(-1)+6\cdot 2^2(-1)^2+4\cdot 2\cdot(-1)^3+$
$+(-1)^4=16-32+24-8+1=1.$

Замечание.

$$a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4\equiv(a+b)^4.$$

3) $2\cdot(-1)^2-(-1)\cdot 2-3\cdot 2^2+4(-1)-2+2=$
$=2+2-12-4-2+2=-12.$

Указание. Если учащиеся не приобрели еще навыка в непосредственной подстановке в многочлен данных числовых значений входящих в него букв, то можно на первых порах допускать выполнение предварительных (подготовительных) вычислений. Например:

1) $x=-2$; $x^2=4$; $x^3=-8$;

2) $a = 2$; $a^2 = 4$; $a^3 = 8$; $a^4 = 16$; $b = -1$; $b^2 = 1$;
$b^3 = -1$; $b^4 = 1$.

20. Найти числовое значение выражения

$$(a^2 - b^2)^2 - (a^2 + b^2)^2 + 4a^2b^2$$

при: 1) $a = 15$, $b = -8$; 2) $a = -20$, $b = 10$.

Решение. Последовательно вычисляем:

$$a^2 = 125,\ b^2 = 64;\ a^2 - b^2 = 61;\ a^2 + b^2 = 189;$$
$$61^2 - 189^2 + 4 \cdot 225 \cdot 64 = 0.$$

2) Тот же результат.

Замечание. Данное выражение тождественно равно нулю.

21. Найти числовое значение выражения

$$am(a + m) - \frac{a^4m + am^4}{a^2 + 2am + m^2}$$

при $a = 2$, $m = -5$.

Решение. Последовательно вычисляем:

$am = -10$; $a + m = -3$;

$a^4m + am^4 = 16 \cdot (-5) + 2 \cdot 625 = -80 + 1250 = 1170$;

$a^2 + 2am + m^2 = 4 - 20 + 25 = 9$;

$$30 - \frac{1170}{9} = 30 - 130 = -100.$$

Замечание. Данное выражение тождественно равно выражению $\frac{3a^2m^2}{a + m}$.

22. Найти числовое значение выражения

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3(y + z)(z + x)(x + y)$$

при $x = -4$, $y = 2$, $z = 1$; $x = -3$, $y = 4$, $z = -1$; $x = \frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{3}$, $z = \frac{1}{6}$.

Решение. Предварительно вычисляем:

$$x^3 = -64,\ y^3 = 8,\ z^3 = 1;\ y + z = 3,\ z + x = -3,$$
$$x + y = -2;$$

пользуясь этими результатами, находим:

$$-64 + 8 + 1 + 3 \cdot 3 \cdot (-3) \cdot (-2) = -1.$$

Ответы: -1; 0; $\frac{1}{27}$

Замечание. Данное выражение тождественно равно выражению $(x+y+z)^3$.

23. Найти числовое значение выражения

$$x(x-2y)^3+y(2x-y)^3$$

при $x=-\frac{3}{4}$, $y=-\frac{1}{4}$; $x=2$, $y=-2$.

Решение. Предварительно вычисляем:

$$x-2y=\left(-\frac{3}{4}\right)-2\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{4};$$

$$2x-y=2\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)-\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{5}{4};$$

теперь находим:

$$\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^3+\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(-\frac{5}{4}\right)^3=$$

$$\frac{3}{4^4}+\frac{5^3}{4^4}=\frac{128}{256}=\frac{1}{2}.$$

Ответы: $\frac{1}{2}$; 0.

Замечание. Данное выражение тождественно равно выражению $(x-y)(x+y)^3$.

24. Найти числовое значение выражения

$$x(y+z)^2+y(z+x)^2+z(x+y)^2-4xyz$$

при $x=3$, $y=-2$, $z=1$; $x=-\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{3}$, $z=-\frac{5}{6}$.

Решение. Предварительно вычисляем:

$$(y+z)^2=(-1)^2=1;\ (z+x)^2=4^2=16;$$

$$(x+y)^2=1^2=1;\ xyz=-6;$$

теперь находим:

$$3\cdot 1+(-2)\cdot 16+1\cdot 1-4\cdot(-6)=3-32+1+24=-4.$$

Ответы: (-4); $\left(-\frac{1}{9}\right)$.

Замечание. Данное выражение тождественно равно выражению $(x+y)(y+z)(z+x)$.

25. Найти числовое значение выражения

$$\frac{x^2+xy}{x^2+y^2}\left(\frac{x}{x-y}-\frac{y}{x+y}\right)$$

при:

1) $x=-9$, $y=1$; 2) $x=-15$, $y=-12$; 3) $x=7$, $y=-8$.

Решение.

1) $x^2 + xy = 81 - 9 = 72$; $x^2 + y^2 = 81 + 1 = 82$; $x - y = -10$; $x + y = -8$;

$$\frac{72}{82} \cdot \left(\frac{9}{10} + \frac{1}{8}\right) = \frac{72}{82} \cdot \frac{82}{80} = \frac{9}{10}.$$

2) *Ответ:* 5.

3) *Ответ:* $\frac{7}{15}$.

Замечание. Данное выражение тождественно равно выражению $\frac{x}{x-y}$.

26. Найти числовое значение выражения

$$\frac{x^2 + \frac{1}{x}}{x + \frac{1}{x} - 1}$$

при: 1) $x = -2$; 2) $x = \frac{1}{3}$; 3) $x = -\frac{3}{4}$.

Решение. 1) Требуется найти числовое значение выражения

$$\frac{4 - \frac{1}{2}}{-2 - \frac{1}{2} - 1}.$$

Для этого умножим делимое и делитель на знаменатель 2 и заменим полученное выражение равным ему выражением

$$\frac{8 - 1}{-4 - 1 - 2}.$$

Ответ: -1.

2) Требуется найти числовое значение выражения

$$\frac{\frac{1}{9} + 3}{\frac{1}{3} + 3 - 1}.$$

Для этого умножим делимое и делитель на 9 и заменим полученное выражение равным ему выражением

$$\frac{1 + 27}{3 + 27 - 9};$$

оно равно числу $\frac{4}{3}$.

3) В этом случае последовательно находим:

$$\frac{\frac{9}{16}-\frac{4}{3}}{-\frac{3}{4}-\frac{4}{3}-1}=\frac{\left(\frac{9}{16}-\frac{4}{3}\right)\cdot 48}{\left(-\frac{3}{4}-\frac{4}{3}-1\right)\cdot 48}=$$

$$=\frac{27-64}{-36-64-48}=\frac{1}{4}.$$

Данное выражение тождественно равно выражению $x+1$.

27. Найти числовое значение выражения

$$\frac{x-\frac{x-1}{x+1}}{1+\frac{x(x-1)}{x+1}}$$

при $x=-3$; $x=\frac{1}{2}$.

Решение. При $x=\frac{1}{2}$ последовательно находим:

$$\frac{x-1}{x+1}=\frac{\frac{1}{2}-1}{\frac{1}{2}+1}=\frac{\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdot 2}{\left(\frac{1}{2}+1\right)\cdot 2}=\frac{1-2}{1+2}=-\frac{1}{3};$$

$$\frac{x(x-1)}{x+1}=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{6};$$

$$\frac{\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{3}\right)}{1-\frac{1}{6}}=\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\cdot 6}{\left(1-\frac{1}{6}\right)\cdot 6}=\frac{3+2}{6-1}=1.$$

Тот же результат найдем при $x=-3$.

Замечание. Данное выражение тождественно равно 1 $(x\neq-1)$.

Указание. Учитель может воспользоваться этим примером для введения понятия о допустимых значениях алгебраического выражения.

28. Найти числовое значение выражения

$$\frac{1}{a^2-3b^2+2ab}+\frac{1}{b^2-3a^2+2ab}-\frac{2}{3a^2+10ab+3b^2}$$

при: 1) $a=2$, $b=-3$; 2) $a=-\frac{1}{3}$, $b=\frac{1}{4}$.

Решение.

1) $a^2 - 3b^2 + 2ab = -35$; $b^2 - 3a^2 + 2ab = -15$;

$$3a^2 + 10ab + 3b^2 = -21;$$

$$-\frac{1}{35} - \frac{1}{15} + \frac{2}{21} = 0.$$

2) Тот же результат.

Замечание. Данное выражение тождественно равно нулю ($a \neq b$, $a \neq -3b$, $b \neq -3a$).

29. Найти числовое значение выражения

$$\frac{4ab + 2b^2 - 12a^2}{3(a^2 - b^2)} + \frac{2a - b}{a - b} + \frac{7a}{3(a + b)}$$

при: 1) $a = -1$, $b = -3$; 2) $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{2}{3}$.

Решение.

2)
$$\frac{-\frac{4}{3} + \frac{8}{9} - 3}{\frac{3}{1} - \frac{4}{3}} = \frac{-48 + 32 - 108}{27 - 48} = \frac{124}{21};$$

$$\frac{1 + \frac{2}{3}}{\frac{1}{2} + \frac{2}{3}} = \frac{6 + 4}{3 + 4} = \frac{10}{7};$$

$$\frac{\frac{7}{2}}{\frac{3}{2} - 2} = \frac{7}{3 - 4} = -7;$$

$$\frac{124}{21} + \frac{10}{7} - 7 = \frac{1}{3}.$$

Замечание. Данное выражение тождественно равно числу $\frac{1}{3}$.

30. Найти числовое значение выражения

$$[(x + 1)y - (x - 1)]^2 - [(y + 1)x - (y - 1)]^2$$

при: 1) $x = \frac{3}{2}$, $y = \frac{2}{3}$; 2) $x = -1$, $y = 1$;

3) $x = 4$, $y = -4$.

Решение.

1) $x + 1 = \frac{5}{2}$; $x - 1 = \frac{1}{2}$; $y + 1 = \frac{5}{3}$; $y - 1 = -\frac{1}{3}$;

$$\left(\frac{5}{2} \cdot \frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{3} \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{3}\right)^2 = -\frac{20}{3}.$$

2) *Ответ*: 0. 3) *Ответ:* 480.

Замечание. Данное выражение тождественно равно выражению $4(xy + 1)(y - x)$.

Упражнения к § 7—9

1. Найти сумму одночленов:

$$-2a^2b;\ 4a^2b;\ \frac{1}{2}a^2b;\ -\frac{2}{3}a^2b.$$

Так как все данные одночлены подобны, то для их сложения достаточно (устно или письменно) найти сумму их коэффициентов и к этой сумме приписать общую буквенную часть данных одночленов.

Ответ: $\frac{11}{6}a^2b.$

2. Найти сумму одночленов:

$$3b^3c;\ -a^2c^2;\ -8ab^2c;\ 9a^2c^2;\ -7b^3c.$$

1) Находим сумму:

$$3b^3c - a^2c^2 - 8ab^2c + 9a^2c^2 - 7b^3c$$

и выполняем приведение подобных членов:

$$-4b^3c + 8a^2c^2 - 8ab^2c.$$

2) Сначала (устно) выполняем приведение подобных одночленов и последовательно записываем результаты.

3) Обращаем внимание учащихся на то, что все данные одночлены однородны (имеют одинаковое, именно четвертое измерение: $3 + 1 = 2 + 2 = 1 + 2 + 1$), ввиду чего сумма оказалась однородным многочленом того же измерения.

3. Найти сумму одночленов:

$$\frac{5a^2}{6};\ \frac{a^2}{5};\ \frac{2a^2}{3};\ \frac{3a^2}{2}.$$

Представляя эти одночлены соответственно в виде

$$\frac{5}{6}a^2;\ \frac{1}{5}a^2;\ \frac{2}{3}a^2;\ \frac{3}{2}a^2,$$

т. е. выделяя коэффициенты, находим их сумму.

Ответ: $\frac{16}{5}a^2$, или $\frac{16a^2}{5}$.

4. Найти сумму одночленов:

$$\frac{3xy^2}{2};\ -\frac{5xy^2}{3};\ -\frac{2xy^2}{5};\ \frac{7xy^2}{15}.$$

Ответ: $-\frac{xy^2}{10}$.

5. Найти сумму одночленов:

$$9(a^2 - b^2);\quad -4(a^2 - b^2);\quad -10(a^2 - b^2).$$

Ответ: $-5(a^2 - b^2)$.

6. Найти сумму одночленов:

$$\frac{3(a^2 - b^2)}{2};\quad -\frac{5(a^2 - b^2)}{3};\quad -\frac{2(a^2 - b^2)}{5};\quad \frac{7(a^2 - b^2)}{15}.$$

Ответ: $-\dfrac{a^2 - b^2}{10}$.

7. Упростить выражение

$$abc + [-2bcd + (-3bcd)] + [4abc + (-5abc)] + 6bcd.$$

1-й способ. Выполняем действия:

1) $-2bcd + (-3bcd) = -5bcd$;

2) $4abc + (-5abc) = -abc$;

3) $abc - 5bcd - abc + 6bcd = bcd$.

2-й способ. Выполняем (устно) приведение подобных членов и последовательно записываем результат: $0 + bcd = bcd$.

8. Представить в виде суммы одночленов выражения:

1) $x^2 - 4xy - y^2$; 2) $-3ayz - bxz + 5cxy$.

9. Представить одночлен $-4a^2x^2$ в виде суммы четырех равных слагаемых.

10. Написать однородный многочлен пятого измерения, содержащий буквы a и b. Как велико наибольшее число членов, которое может иметь такой многочлен?

11. Найти сумму многочленов:

$$2a + b - c - d;\quad -3a + 2b + c + 2d;$$
$$4a - 3b - 2c + 5d;\quad 2a - b + 5c - 3d.$$

1-й способ. Так как слагаемые многочлены явно содержат подобные члены, то лучше всего расположить эти слагаемые „в столбик“, подписывая подобные члены один под другим:

$$\begin{aligned}
2a + b - c - d&;\\
-3a + 2b + c + 2d&;\\
4a - 3b - 2c + 5d&;\\
2a - b + 5c - 3d&,
\end{aligned}$$

а затем выполнять приведение подобных членов в каждой вертикали и последовательно складывать получаемые результаты:

$$5a - b + 3c + 3d.$$

2-й способ. Записав сумму в виде многочлена:

$$(2a + b - c - d) + (-3a + 2b + c + 2d) +$$
$$+ (4a - 3b - 2c + 5d) + (2a - b + 5c - 3d),$$

устно „собирают" члены, содержащие букву a, находят их сумму и записывают ее, затем также поступают с членами, содержащими букву b, букву c, букву d, и приходят к результату.

Примечание. Может показаться, что 2-й способ не отличается от 1-го, но это не так: 2-й способ освобождает от лишней записи („в столбик"), приучает выполнять устные алгебраические вычисления, позволяет записать результат в виде тождественного равенства.

12. Найти сумму многочленов:

$$\frac{a}{2} - \frac{b}{3} + \frac{3c}{5}; \quad \frac{2a}{3} + \frac{b}{4} - c; \quad -3a - \frac{b}{2} + \frac{2c}{3};$$
$$a + \frac{4b}{3} - \frac{c}{2}.$$

Выделяя коэффициенты, представляем данные многочлены в виде:

$$\frac{1}{2}a - \frac{1}{3}b + \frac{3}{5}c; \quad \frac{2}{3}a + \frac{1}{4}b - c;$$
$$-3a - \frac{1}{2}b + \frac{2}{3}c; \quad a + \frac{4}{3}b - \frac{1}{2}c,$$

а затем выполняем сложение одним из двух способов (см. пример 11).

Ответ: $-\frac{5}{6}a + \frac{3}{4}b - \frac{7}{30}c.$

13. Найти сумму многочленов:

$$2x^3 - 4x^2 + 7x + 1; \quad -x^3 + 2x^2 + 3x - 5; \quad 4x^3 - 7x^2 - 5x + 6.$$

Данные многочлены содержат только одну, и притом одну и ту же, букву x и расположены по убывающим степеням этой буквы. Если бы они были заданы не в расположенном виде, то надо было бы расположить их по степеням входящей в них буквы x и лишь затем складывать (одним из двух способов, указанных в примере 11; однако здесь предпочтительнее применить устный счет).

14. Найти сумму многочленов:

$$x^4-2x^3+5x^2-2x+1;\quad -x^3+4x-3;$$
$$-3x^4+2x^2+3x+2;\quad x^4-3x+4.$$

Так как не каждый из данных многочленов содержит все степени буквы x, по которым они расположены, то целесообразно расположить их для сложения в следующий столбик:

$$\begin{array}{rrrrr}
x^4 & -2x^3 & +5x^2 & -2x & +1 \\
 & -\;x^3 & & +4x & -3 \\
-3x^4 & & +2x^2 & +3x & +2 \\
x^4 & & & -3x & +4,
\end{array}$$

так что члены, содержащие одну и ту же степень буквы x, окажутся в одной и той же вертикали; это облегчит нахождение подобных членов.

Ответ: $-x^4-3x^3+7x^2+2x+4$.

15. Найти сумму многочленов:

$$a^4-6a^3b+2a^2b^2-3ab^3-b^4;$$
$$3a^4-2a^3b+4a^2b^2+5ab^3-2b^4;$$
$$-\;a^4+3a^3b-8a^2b^2+7ab^3+5b^4.$$

Данные многочлены содержат по две буквы (a и b), причем они однородны, так как их члены имеют по отношению к этим буквам одно и то же (четвертое) измерение; вместе с тем каждый из них расположен по убывающим степеням одной из этих букв и по возрастающим степеням другой буквы. Благодаря такому расположению в каждой вертикали оказываются подобные члены.

Ответ: $3a^4-5a^3b-2a^2b^2+9ab^3+2b^4$.

Заметим, что в результате сложения однородных многочленов одного и того же измерения мы получили однородный многочлен того же измерения.

16. Найти сумму многочленов:

$$x^2-3xy-y^2+2x-3y+1;$$
$$-2x^2+xy+2y^2-5x+2y-3;$$
$$3x^2-4xy+7y^2-6x+4y+5;$$
$$-\;x^2+5xy-3y^2+4x-7y-8.$$

Данные многочлены содержат две буквы (x и y), но они не однородны, потому что в каждом из них имеется группа членов второго измерения, группа членов первого измерения и один член нулевого измерения. Так как эти группы следуют одна за другой в порядке убывания их измерений, а члены каждой группы расположены по убывающим степеням одной и той же буквы (в данном случае буквы x), то в каждой вертикали оказываются подобные члены.

Ответ: $x^2 - xy + 5y^2 - 5x - 4y - 5$.

17. Найти сумму многочленов:

$$-7x^3 + 5x^2y - 8xyz + 2xz^2; \quad -7y^3 + 5y^2z + 4xyz - x^2z;$$
$$-3x^2y + 2x^2z - 6xyz + 11xz^2;$$
$$x^3 - x^2y + x^2z - xyz + xy^2 - xz^2 + yz^2.$$

Собирая подобные члены, складываем их коэффициенты и записываем результат в таком виде:

x^3	$-7+1=-6$	y^3	$-7=-7$	z^3	0
x^2y	$5-3-1=1$	y^2z	$5=5$		
x^2z	$-1+2+1=2$	yz^2	$1=1$		
xy^2	$1=1$				
xz^2	$2+11-1=12$				
xyz	$-8+4-6-1=-11$				

Ответ: $-6x^3 + x^2y + 2x^2z + xy^2 + 12xz^2 - 11xyz - 7y^3 + 5y^2z + yz^2$.

Примечание. Принцип такого расположения членов понятен: сперва мы собрали группу членов, содержащих букву x, и расположили их по убывающим степеням этой буквы; затем оставшиеся члены (не содержащие буквы x) расположили по степени буквы y; остался один член, содержащий букву z (в данном примере с коэффициентом 0). Но можно следовать и другим принципам.

1) Можно расположить члены в следующем порядке:

$$x^3,\ y^3,\ z^3;\quad x^2y,\ y^2z,\ z^2x;\quad xy^2,\ yz^2,\ zx^2;\quad xyz,$$

выполняя в первом члене (x^3; x^2y; xy^2; xyz) каждой группы круговую перестановку.

2) Можно расположить члены в порядке:

$$x^3,\ y^3,\ z^3;\quad x^2y,\ x^2z,\ y^2z;\quad xy^2,\ xz^2,\ yz^2;\quad xyz,$$

исходя из основного расположения x, y, z этих букв и умножая каждую степень каждой из них только на все последующие буквы (допустим шутку: „Гляди вперед и не оборачивайся!").

18. Вычесть:

1) одночлен $2ax^3$ из одночлена $6ax^3$;

2) одночлен $-\frac{2}{3}b^2y^2$ из одночлена $-\frac{5}{6}b^2y^2$;

3) одночлен $\frac{1}{8}c^3z$ из одночлена $-\frac{3}{4}c^3z$.

Находим разность и выполняем приведение подобных членов:

1) $6ax^3-2ax^3=4ax^3$;

2) $-\frac{5}{6}b^2y^2+\frac{2}{3}b^2y^2=-\frac{1}{6}b^2y^2$;

3) $-\frac{3}{4}c^3z-\frac{1}{8}c^3z=-\frac{7}{8}c^3z$.

19. Из одночлена $\frac{4m^2n^3}{5}$ вычесть одночлен $-\frac{3m^2n^3}{4}$.

Выделив коэффициенты данных одночленов, находим их разность и выполняем приведение подобных членов:

$$\frac{4}{5}m^2n^3-\left(-\frac{3}{4}m^2n^3\right)=\frac{4}{5}m^2n^3+\frac{3}{4}m^2n^3=\frac{31}{20}m^2n^3.$$

20. Из одночлена $\frac{5(a^3-b^3)}{6}$ вычесть одночлен $\frac{a^3-b^3}{9}$.

Выделив коэффициенты данных одночленов, находим их разность и выполняем приведение подобных членов:

$$\frac{5}{6}(a^3-b^3)-\frac{1}{9}(a^3-b^3)=\frac{13}{18}(a^3-b^3).$$

21. Выполнить действия:

$$3a^3b+[-2ab^3-(-7a^2b^2-3a^2b^2)].$$

Последовательно получаем:

$$-10a^2b^2;\quad -2ab^3+10a^2b^2;\quad 3a^2b-2ab^3+10a^2b^2.$$

22. Из многочлена $2x^4-7x^3+3x^2-4x+3$ вычесть многочлен $x^4-5x^3-2x^2-5x+1$.

Для этого к первому многочлену прибавляем многочлен $-x^4+5x^3+2x^2+5x-1$, полученный из второго многочлена посредством изменения знаков у коэффициентов всех его членов на противоположные.

Ответ: $x^4-2x^3+5x^2+x+2$.

23. Выполнить следующие действия:

$$(4x^3 - 2x^2 + x + 1) - (3x^3 - x^2 - x - 7) - \\ - (x^3 - 4x^2 + 2x + 8).$$

1-й способ. Выполняем сложение многочленов:

$$\begin{array}{r} 4x^3 - 2x^2 + \ \ x + 1 \\ -3x^3 + \ \ x^2 + \ \ x + 7 \\ -x^3 \ \ + 4x^2 - 2x - 8 \\ \hline 0 + 3x^2 + 0 + 0. \end{array}$$

2-й способ. Устно собираем члены, содержащие одну и ту же степень буквы x, и последовательно складываем их:

$$4x^3 - 3x^3 - x^3 = 0; \ -2x^2 + x^2 + 4x^2 = 3x^2; \\ x + x - 2x = 0; \ 1 + 7 - 8 = 0.$$

Ответ: $3x^2$.

24. Выполнить следующие действия:

$$2a - 3b + c - (4a - b + 2c) - [a + 3b - c - (2b + c)] + \\ + [-2a + b + c + (4b - c)] - [-(a + b) + 5a + b - c]$$

1-й способ. Раскрываем квадратные скобки:

$$2a - 3b + c - (4a - b + 2c) - a - 3b + c + (2b + c) - \\ - 2a + b + c + (4b - c) + (a + b) - 5a - b + c.$$

Собираем члены, содержащие одну и ту же букву:

$$2a - 4a - a - 2a + a - 5a = -9a; \\ -3b + b - 3b + 2b + b + 4b + b - b = 2b; \\ c - 2c + c + c + c - c + c = 2c.$$

2-й способ. Сразу собираем члены, содержащие одну и ту же букву:

$$2a - 4a - a - 2a + a - 5a = -9a; \\ -3b + b - 3b + 2b + b + 4b + b - b = 2b; \\ c - 2c + c + c + c - c + c = 2c.$$

Ответ: $-9a + 2b + 2c$.

Конечно, можно было бы сперва раскрыть только круглые скобки вне и внутри квадратных, а затем собирать члены, содержащие одну и ту же букву.

Во всех случаях последовательное собирание членов полезно сочетать с устным выполнением сложения их, что содействует развитию у учащихся навыка устного счета.

25. Доказать тождество:

$$5a^3b-[-3ab^3-(4a^2b^2-2a^4)+b^4]\equiv$$
$$\equiv 4a^2b^2-2a^4-[b^4-(5a^3b+3ab^3)].$$

1) Выполняя действия в обеих частях равенства, получим один и тот же результат.

2) Не выполняя действий, устанавливаем, что каждому одночлену левой части соответствует равный ему (совпадающий с ним) одночлен в правой части:

$$5a^3b=-(-5a^3b);\quad -(-3ab^3)=-(-3ab^3);$$
$$-(-4a^2b^2)=4a^2b^2;\ -[-(-2a^4)]=-2a^4;$$
$$-b^4=-b^4.$$

26. Найти произведение одночленов:

$$-\frac{3}{4}x^4y^2z^3 \text{ и } -\frac{1}{9}x^2z.$$

Согласно правилу V находим:

$$\left(-\frac{3}{4}x^4y^2z^3\right)\cdot\left(-\frac{1}{9}x^2z\right)=\frac{1}{12}x^6y^2z^4.$$

27. Найти произведение одночленов:

$$2a^2b;\quad -\frac{1}{2}ac^3;\quad -\frac{2}{3}bc.$$

Согласно правилу V находим:

$$(2a^2b)\cdot\left(-\frac{1}{2}ac^3\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}bc\right)=\frac{2}{3}a^3b^2c^4.$$

28. Найти произведение одночленов:

$$5\frac{1}{2}(a+b)^2;\quad 5\frac{1}{3}(a+b)^3;\quad 5\frac{1}{4}(a+b)^4.$$

Ответ: $154\ (a+b)^9$.

29. Найти произведение одночленов:

$$5ab^2(x+y)^3;\quad 3a^2b(x-y)^3.$$

Ответ: $15a^3b^3(x+y)^3(x-y)^3$.

30. Найти произведение одночленов:

$$(-4xyz^2);\ \left(-\frac{3}{2}x^2yz\right);\ \left(\frac{2}{3}x^2y^3z\right);\ (-5xz).$$

Вычисляя устно, находим:

1) $(-4)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\frac{2}{3}\cdot(-5)=-20;$

2) $x\cdot x^2\cdot x^2\cdot x=x^6;$

3) $y\cdot y\cdot y^3=y^5;$

4) $z^2\cdot z\cdot z\cdot z=z^5.$

Ответ: $-20x^6y^5z^5$.

31. Выполнить действия:

1) $(a^2x^3 - 4a^2x^3)\ (2ax^6 + 3ax^6)$;

2) $\left(\frac{8}{9}a^3b^4\right)(-0{,}9a^3b^4)\ \left(\frac{8}{9}a^3b^4 - 0{,}9a^3b^4\right)$;

3) $5(2a^6 + 3a^6) - 7(4a^8 - 9a^8)$.

Ответы: 1) $-15a^3x^9$; 2) $\frac{2}{225}a^9b^{12}$; 3) $25a^6 + 35a^8$.

32. Умножить многочлен $5a^2 - 4b^3 + 3a^4b - 7ab^2$ на одночлен $6a^3b^4$.

Согласно правилу VI находим:

$$(5a^2 - 4b^3 + 3a^4b - 7ab^2)\cdot(6a^3b^4) = \\ = 30a^5b^4 - 24a^3b^7 + 18a^7b^5 - 42a^4b^6.$$

В произведении нет подобных членов, потому что иначе они были бы и в множимом, а там таких членов нет.

33. Умножить одночлен $3a^2b$ на многочлен $3a^3 - 4a^2b + 6ab^2 - b^3$.

Согласно правилу VI находим:

$$(3a^2b)\cdot(3a^3 - 4a^2b + 6ab^2 - b^3) = \\ = 9a^5b - 12a^4b^2 + 18a^3b^3 - 3a^2b^4.$$

Так как множитель есть однородный многочлен третьего измерения, а множимое есть одночлен третьего измерения, то произведение оказалось однородным многочленом шестого $(6 = 3 + 3)$ измерения. Кроме того, произведение, так же как и множитель, расположено по убывающим степеням буквы a и по возрастающим степеням буквы b.

34. Найти произведение выражений:

$$\frac{2}{7}x^3y,\quad \frac{3}{4}x^2y^3z,\quad \frac{4}{5}x^2y^2 - 5xy^3.$$

Ответ: $\left(\frac{2}{7}x^3y\right)\left(\frac{3}{4}x^2y^3z\right)\left(\frac{4}{5}x^2y^2 - 5xy^3\right) =$

$$\frac{6}{35}x^7y^6z - \frac{15}{14}x^6y^7z.$$

Найдя коэффициент $\frac{6}{35}$, сразу приписываем к нему множители x^7, y^6, z, а найдя коэффициент $-\frac{15}{14}$, сразу приписываем к нему множители x^6, y^7, z, получая их посредством перемножения степеней одной и той же буквы, содержащихся в данных выражениях.

35. Упростить выражение

$$(x^2 - xy + y^2)z + (y^2 - yz + z^2)x + (z^2 - xz + x^2)y + 3xyz$$

и показать, что оно тождественно равно выражению

$$xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x).$$

1-й способ. Выполняя действия в каждом из данных выражений, получаем:

1) $x^2z - xyz + y^2z + xy^2 - xyz + xz^2 + yz^2 - xyz +$
$+ x^2y + 3xyz = x^2z + y^2z + xy^2 + xz^2 + yz^2 + x^2y;$

2) $x^2y + xy^2 + y^2z + yz^2 + xz^2 + x^2z.$

Так как найденные многочлены отличаются только порядком слагаемых, то они тождественно равны.

2-й способ. Требуется доказать тождество:

$$(x^2 - xy + y^2)z + (y^2 - yz + z^2)x + (z^2 - xz + x^2)y + 3xyz \equiv xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x).$$

Сперва замечаем, что в его левой части сумма $-xyz - xyz - xyz$ и член $3xyz$ взаимно уничтожаются. Затем, у с т н о находя члены x^2z, y^2z, y^2x, z^2x, z^2y, x^2y, убеждаемся, что каждый из этих членов имеется и в правой части.

3-й способ. Так как левая и правая части равенства после раскрытия скобок обратятся в многочлены, то, располагая эти многочлены по убывающим степеням буквы x, можно представить их в виде:

1) $(z+y)x^2 + (-yz + y^2 - yz + z^2 - yz + 3yz)x +$
$+ y^2z + yz^2;$

2) $(y+z)x^2 + (y^2 + z^2)x + yz(y+z)$

и убедиться, что в обоих многочленах коэффициенты при одинаковых степенях буквы x равны.

Замечание. Конечно, учащимся VI класса будет вполне доступен 1-й способ, а при указаниях учителя будет понятен и 2-й способ; что же касается 3-го способа, то его следует применять лишь постепенно — сперва во внеклассной работе, затем (после приобретения учащимися прочного навыка в расположении многочлена по степеням какой-либо буквы и достаточного числа упражнений) в классе в процессе повторения курса в конце года, а также в следующих классах, но отказываться от него ввиду его образовательного значения не следует.

36. Доказать тождество

$$(x^2 - 11x + 28)(x - 2) \equiv (x^2 - 9x + 14)(x - 4).$$

Собирая члены, содержащие одну и ту же степень буквы x, получаем слева:

$$x^3 + (-2 - 11)x^2 + (22 + 28)x - 56,$$

а справа:

$$x^3 + (-4 - 9)x^2 + (36 + 14)x - 56,$$

т. е. в обеих частях один и тот же многочлен

$$x^3 - 13x^2 + 50x - 56.$$

37. Найти произведение многочленов

$$2x + y - 1 \text{ и } 3x - 2y + 1.$$

Представляя произведение в виде

$$[(2x + y) - 1] \cdot [(3x - 2y) + 1],$$

последовательно находим:

$$(2x + y)(3x - 2y) + (2x + y) - (3x - 2y) - 1 =$$
$$= 6x^2 - xy - 2y^2 - x + 3y - 1.$$

Прием состоит в предварительной группировке членов данных многочленов по измерениям: $2x + y$ и $3x - 2y$ — однородные двучлены первого измерения, а -1 и 1 — свободные члены. Это позволило выполнить умножение двучленов „накрест“ и легче сделать приведение подобных членов.

38. Найти произведение многочленов

$$2a^4 + 3a^2b^2 - b^4 \text{ и } a^2 + 3ab - 2b^2.$$

1-й способ.

$$\begin{array}{lllllll}
 & & 2a^4 + 3a^2b^2 - b^4 & & & & \\
 & & a^2 + 3ab - 2b^2 & & & & \\
\hline
2a^6 & & +3a^4b^2 & & -a^2b^4 & & \\
 & +6a^5b & & +9a^3b^3 & & -3ab^5 & \\
 & & -4a^4b^2 & & -6a^2b^4 & & +2b^6 \\
\hline
2a^6 & +6a^5b & -a^4b^2 & +9a^3b^3 & -7a^2b^4 & -3ab^5 & +2b^6
\end{array}$$

2-й способ. Применяя способ собирания членов, содержащих одну и ту же степень буквы a, получаем:

$$2a^6+6a^5b+(-4b^2+3b^2)a^4+9a^3b^3+(-6b^4-b^4)a^2-$$
$$-3ab^5+2b^6=$$
$$=2a^6+6a^5b-a^4b^2+9a^3b^3-7a^2b^4-3ab^5+2b^6.$$

39. Найти произведение многочленов

$$x^5-ax^4+a^2x^3-a^3x^2+a^4x-a^5 \text{ и } x+a.$$

Ответ: x^6-a^6 (однородный многочлен шестого измерения).

40. Найти произведение многочленов

$$x^3-3ax^2+3a^2x-a^3 \text{ и } x^2-2ax+a^2.$$

Ответ: $x^5-5ax^4+10a^2x^3-10a^3x^2+5a^4x-a^5$.

41. Доказать тождество

$$(x^3-3ax^2+3a^2x-a^3)(x^2-2ax+a^2)\equiv$$
$$\equiv(x^4-4ax^3+6a^2x^2-4a^3x+a^4)(x-a).$$

Обе части — однородные многочлены пятого измерения, расположенные по убывающим степеням буквы x, их члены, содержащие одинаковые степени этой буквы, имеют равные коэффициенты.

42. Найти произведение двучленов

$$x+a;\ x+b;\ x+c,$$

отличающихся только вторыми членами.

1-й способ. Последовательно получаем:

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab;$$
$$(x+a)(x+b)(x+c)=[x^2+(a+b)x+ab](x+c)=$$
$$=x^3+[(a+b)c+ab]x+abc=$$
$$=x^3+(ab+ac+bc)x+abc.$$

2-й способ.

$$\begin{array}{c} x+a \\ x+b \\ x+c \\ \hline x^3+(c+b+a)x^2+(bc+ac+ab)x+abc. \end{array}$$

Рассуждаем так:

$x\cdot x\cdot x=x^3;$
$x\cdot x\cdot c+x\cdot x\cdot b+x\cdot x\cdot a=(a+b+c)x^2;$
$x\cdot bc+x\cdot ac+x\cdot ab=(bc+ac+ab)x;$
$a\cdot b\cdot c=abc.$

Выражения $a+b+c$, $ab+ac+bc$, abc легко запомнить: $a+b+c$ есть сумма вторых членов данных двучленов; abc есть их произведение; $ab+ac+bc$ получится, если мы каждый из вторых членов a, b, c умножим на все члены, следующие за ним: ab, ac, bc.

Выражения $a+b+c$, $ab+bc+ac$, abc обладают одним важным свойством: подобно тому как сумма $a+b+c$ не изменяется при перестановке ее слагаемых и произведение abc не изменяется при перестановке его сомножителей, так и многочлен $ab+bc+ac$ не изменяется при перестановке любых двух входящих в него букв:

$$\begin{aligned} ab+bc+ac &= ba+ac+bc \quad (\text{переставили } a \text{ и } b) = \\ &= cb+ba+ca \quad (\text{переставили } a \text{ и } c) = \\ &= ba+ac+bc \quad (\text{переставили } a \text{ и } b). \end{aligned}$$

В результате каждой из этих перестановок получается многочлен, отличающийся от данного только порядком его членов или порядком сомножителей, входящих в его члены, и, следовательно, тождественно равный данному многочлену. Именно этот смысл имеет утверждение, что многочлен не изменяется при перестановке каждой пары входящих в него букв.

Определение. Алгебраическое выражение, которое не изменяется при перестановке каждой пары входящих в него букв, называется симметричным.

Точнее говоря, данное алгебраическое выражение называется симметричным, если при перестановке каждой пары входящих в него букв оно преобразуется в другое выражение, тождественно равное данному.

Примерами симметричных выражений могут также служить многочлены:

$$a^2+b^2+c^2; \quad a^3+b^3+c^3;$$
$$a^2b+b^2c+c^2a+ab^2+bc^2+ca^2.$$

43. Найти произведение двучленов

$$x+2; \quad x-5; \quad x-11.$$

1-й способ. Последовательно получаем:

$$(x+2)(x-5)=x^2-3x-10;$$
$$\begin{aligned} &(x^2-3x-10)(x-11)= \\ &= x^3+(-11-3)x^2+(33-10)x+110= \\ &= x^3-14x^2+23x+110. \end{aligned}$$

2-й способ. Пользуясь общим результатом, найденным в упражнении 42, получаем:

$$(x+2)(x-5)(x-11)=$$
$$=x^3+(2-5-11)x^2+(-10-22+55)x+110=$$
$$=x^3-14x^2+23x+110.$$

44. Найти произведение двучленов

$$x-a;\ x-b;\ x-c.$$

Так как

$$(x-a)(x-b)(x-c)=$$
$$=[x+(-a)][x+(-b)][x+(-c)],$$

то, пользуясь общим результатом, найденным в упражнении 42, получаем:

$$(x-a)(x-b)(x-c)=$$
$$=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc.$$

45. Найти произведение двучленов

$$(x-2)(x-5)(x-8).$$

Пользуясь общим результатом, найденным в упражнении 44, получаем:

$$(x-2)(x-5)(x-8)=$$
$$=x^3-(2+5+8)x^2+(2\cdot 5+2\cdot 8+5\cdot 8)x-2\cdot 5\cdot 8=$$
$$=x^3-15x^2+66x-80.$$

46. Найти произведение двучленов

$$(x+y)(y+z)(z+x).$$

1-й способ. Последовательно получаем:

$$(x+y)(y+z)=xy+y^2+xz+yz;$$
$$(xy+y^2+xz+yz)(z+x)=$$
$$=xyz+y^2z+xz^2+yz^2+x^2y+xy^2+x^2z+xyz=$$
$$=2xyz+x^2y+x^2z+y^2z+xy^2+xz^2+yz^2.$$

2-й способ.

$$\begin{array}{c} x+y \\ y+z \\ z+x \\ \hline (xyz+yzx)+(xy\cdot x+xz\cdot z+yz\cdot y)+ \\ +(x\cdot zx+y\cdot yx+z\cdot yz)= \\ =2xyz+x^2y+xz^2+y^2z+x^2z+xy^2+yz^2. \end{array}$$

Выполняем умножение в таком порядке: 1) перемножаем между собой члены в первом столбце и члены во втором столбце; 2) умножаем произведение двух членов первого столбца на тот член второго столбца, который принадлежит не взятой еще строке; 3) умножаем каждый член первого столбца на произведение тех двух членов второго столбца, которые принадлежат не взятым еще двум строкам.

Этот способ умножения позволяет учащимся глубже понять структуру произведения: *1) каждый член произведения* содержит по одному представителю каждого из трех сомножителей; 2) произведение трех однородных многочленов первого измерения есть однородный многочлен третьего измерения.

47. Умножить:

1) $a+b$ на $a-b$;
2) a^2+ab+b^2 на $a-b$;
3) $a^3+a^2b+ab^2+b^3$ на $a-b$;
4) $a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4$ на $a-b$.

Ответы: 1) a^2-b^2; 2) a^3-b^3; 3) a^4-b^4; 4) a^5-b^5.

Обратить внимание на то, что множимое есть однородный многочлен, и найти закон составления произведения.

48. Умножить:

1) $a-b$ на $a+b$;
2) a^2-ab+b^2 на $a+b$;
3) $a^3-a^2b+ab^2-b^3$ на $a+b$;
4) $a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4$ на $a+b$.

Ответы: 1) a^2-b^2; 4) a^3+b^3; 3) a^4-b^4; 4) a^5+b^5.

Обратить внимание на то, что множимое есть однородный многочлен, члены которого имеют поочередно знаки $+$ и $-$; найти закон составления произведения.

49. Вычислить квадрат многочлена $a+b+c$.

Ответ: $a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$.

Обратить внимание на то, что многочлен, представляющий собой квадрат многочлена $a+b+c$, состоит из двух групп членов ($a^2+b^2+c^2$ и $2ab+2ac+2bc$) второго измерения, каждый из которых содержит одного представителя множимого $a+b+c$ и одного представителя множителя $a+b+c$, что становится вполне наглядным, если расположить многочлены один под другим:

$$\begin{matrix} a+b+c, \\ a+b+c \end{matrix}$$

и заметить, что первая группа членов произведения получается при перемножении членов, принадлежащих одному и тому же столбику:

$$a \cdot a + b \cdot b + c \cdot c,$$

а вторая — посредством умножения членов одного столбика на члены двух других столбиков:

$$ab + ac + ba + bc + ca + cb = 2ab + 2ac + 2bc.$$

50. Найти сокращенным путем следующие произведения:

1) $(x^2+1)(x+1)(x-1)$; $(4x^2+y^2)(2x+y)(2x-y)$;
2) $(m+n-p)(m+n+p)$; $(a+b+c)(a-b-c)$;
3) $(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$.

Для решения примера 3 группируем первый сомножитель со вторым и третий с четвертым. При этом каждую из этих групп представляем в виде произведения суммы двух выражений на разность тех же выражений; для этого в каждом из сомножителей группы ставим на первое место члены с одинаковыми знаками, а на второе место — члены с противоположными знаками; получаем:

$$[(b+c)+a][(b+c)-a][a-(b-c)][a+(b-c)] = \\ = [(b+c)^2-a^2][a^2-(b-c)^2].$$

Но можно сгруппировать сомножители еще двумя способами:

$$[(a+c)+b][(a+c)-b][b+(c-a)][b-(c-a)] = \\ = [(a+c)^2-b^2][b^2-(c-a)^2];$$

$$[(a+b)+c][(a+b)-c][c+(b-a)][c-(b-a)] = \\ = [(a+b)^2-c^2][c^2-(b-a)^2].$$

51. Найти сокращенным путем произведение

$$(2a-3b+4c-5d)(2a+3b+4c+5d).$$

Так как члены сомножителей либо не отличаются один от другого, либо отличаются только знаками их коэффициентов, то имеется возможность представить один из сомножителей в виде суммы двух выражений, а другой в виде разности тех же выражений; для этого в первом сомножителе ставим на первое место совпадающие члены, а на второе место — члены, отличающиеся знаками:

$$[(2a + 4c) - (3b + 5d)]\,[(2a + 4c) + (3b + 5d)] =$$
$$= (2a + 4c)^2 - (3b + 5d)^2 =$$
$$= 4a^2 + 16ac + 16c^2 - 9b^2 - 30bd - 25d^2.$$

52. Доказать, что следующие равенства суть тождества:

1) $(a + b)^2 = (a - b)^2 + 4ab$;
2) $(x + 2y)^2 - (y + 2x)^2 = 3\,(y^2 - x^2)$;
3) $2\,(a + b)^2 - 2(a - b)^2 = (a + 2b)^2 - (a - 2b)^2$;
4) $(x - y)^2 = (y - x)^2$; $(a - 1)^2 = (1 - a)^2$;
5) $4\,(a + 2b)\,(b + 2a) = 9\,(a + b)^2 - (a - b)^2$;
6) $(9x - 1)^2 - 2(7x + 3)^2 = (x - 9)^2 - 2\,(3x + 7)^2$.

1-й способ. В одной или обеих частях равенства выполняем все указанные действия и приводим их к одному и тому же виду.

2-й способ. Устно убеждаемся, что каждый не уничтожающийся член левой части имеется и в правой части и что этими членами исчерпывается вся правая часть.

3-й способ. Если учащиеся умеют читать каждую формулу не только слева направо, но и справа налево и знают, что

$$a^2 - b^2 = (a + b)\,(a - b),$$

то применят эту формулу к решению примеров 2, 3, 5.

Пример 4 полезно решить также посредством существенного указания, что $(x - y) = (-1)\,(y - x)$, которое неоднократно понадобится учащимся и позже.

53. Представить в виде одночленов следующие частные:

1) $\dfrac{6a^4b^5c^3}{2a^2b^2}$; 2) $\dfrac{15x^5y^3z^4}{-3x^2yz^3}$;

3) $\dfrac{-8a^7b^4c^4}{2a^2b^2c}$; 4) $\dfrac{-\frac{3}{4}\,x^3yz^4}{-\frac{15}{2}\,xyz^3}$.

Важно, чтобы учащиеся понимали, что каждое из данных выражений есть частное.

Ответы: 1) $3ab^3c^2$; 2) $-5x^3y^2z$; 3) $-4bc^4$; 4) $\frac{1}{10}x^2z$.

54. Почему нельзя представить в виде одночленов частные:

$$1)\ \frac{a^2b^5c}{a^4b^2c^3};\quad 2)\ \frac{x^3yz}{xy^4z};\quad 3)\ \frac{a^3b^2c^2}{a^4b};$$

$$4)\ \frac{x^4y^4}{x^3y^5z};\quad 5)\ \frac{ab}{x^2y}\ ?$$

55. Упростить частные:

$$1)\ \frac{(a+b)^3c^2}{(a+b)};\quad 2)\ \frac{(m-1)^3x^2}{(m-1)^2x^2};\quad 3)\ \frac{(a^2+ab+b^2)^3}{(a^2+ab+b^2)^2};$$

$$4)\ \frac{6m^2(n+2p)^5q}{-3m(n+2p)};\quad 5)\ \frac{\frac{1}{2}a^5(b-c)^3(b+c)^5}{\frac{3}{4}a(b-c)^2}.$$

56. Преобразовать частное:

1) $\frac{a^2x^2}{a^2+x^2}$ посредством подстановки $x=a$;

2) $\frac{xy}{\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{4}y^2}$ посредством подстановки $x=\frac{1}{2}ab$; $y=\frac{1}{3}ab$;

3) $\frac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz+xz}$ посредством подстановки $x=y=z$;

4) $\frac{(x-y)^5-(x^5-y^5)}{(x-y)^3+(x^3-y^3)}$ посредством подстановки $y=-x$.

Ответы: 1) $\frac{1}{2}a^2$; 2) 3; 3) 1; 4) $3x^2$.

57. Преобразовать выражение

$$p(p-a)+(p-b)(p-c),$$

полагая в нем $p=\frac{a+b+c}{2}$.

Решение. Сперва упростим данное выражение:

$$p^2-ap+p^2-bp-cp+bc=2p^2-(a+b+c)p+bc.$$

Подставляя в последний многочлен вместо суммы $a+b+c$ ее значение $2p$, находим:

$$2p^2 - 2p^2 + bc = bc.$$

Замечания. 1) Часто бывает выгодно с п е р в а упростить то выражение, в которое предстоит сделать подстановку.

2) Так как задано значение буквы p, то после раскрытия скобок в данном выражении располагаем результат по степеням этой буквы.

3) Заменяем не букву p данным ее значением, а, наоборот, ее значение буквой p.

58. Преобразовать выражение

$$bc(p-a) + ca(p-b) + ab(p-c) - p^3 -$$

$$-(p-a)(p-b)(p-c), \text{ полагая в нем } p = \frac{a+b+c}{2}.$$

Ответ: $-2abc$ (см. предыдущий пример).

59. Представить в виде многочлена следующие частные:

1) $\dfrac{2x^7 - 4x^6 + 3x^5 + 7x^4}{6x^3}$; 2) $\dfrac{4a^6b^3 - 3a^5b^4 + 5a^3b^3}{-a^2b^3}$.

Ответы: 1) $\frac{1}{3}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{6}x$;
2) $-4a^4 + 3a^3b - 5a$.

60. Почему нельзя представить в виде многочлена частные:

1) $\dfrac{3x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 7x - 1}{3x^2}$; 2) $\dfrac{2a^2 - 3b^2 + c^2}{abc}$?

61. Упростить частные:

1) $\dfrac{2x^2(a+b)^4 - 2xy(a+b)^3 + x(a+b)^2}{4x(a+b)^2}$;

2) $\dfrac{10x(a-b)^2 - 7x^2(a-b)^3 + 5x(a-b)^4}{-5x(a-b)^2}$;

3) $\dfrac{-7a(x-y^2)^3 + 8a^2(x-y^2)^6 - 9a^3b(x-y^2)^5}{-12a(x-y^2)^3}$;

4) $\dfrac{\left(\frac{1}{3}a - 4a^2\right)^2 + \left(\frac{1}{4}a - 3a^2\right)^2}{\left(\frac{5}{12}a\right)^2}$.

Ответ: $1 - 24a + 144a^2$.

СОДЕРЖАНИЕ

Глава I

Алгебраические выражения

Глава II

Рациональные числа. Уравнения

Глава III

Действия над целыми алгебраическими выражениями

Упражнения

Исидор Аронович Гибш

МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ АЛГЕБРЕ В VI КЛАССЕ ВОСЬМИЛЕТНЕЙ ШКОЛЫ

Редактор *Э. К. Викулина*
Обложка художника *Л. В. Зоберн*
Художественный редактор *Т. И. Добровольнова*
Технический редактор *В. В. Тарасова*
Корректоры *В. С. Антонова, В. А Седова*

Сдано в набор 15/IV 1962 г. Подписано к печати 5/X-1962 г.
Формат 84×108¹/₃₂. Бум. л. 3,75 Печ. л. 15,0 Усл п л. 12,3 Уч. изд. л. 11,58
Тираж 66000 экз. Зак 485. Цена 41 коп.

Изд во АПН РСФСР, Москва, Погодинская ул., 8.
Сортавальская книжная типография Министерства культуры КАССР
г. Сортавала, Карельская, 42.