В. А. ИГНАТЬЕВ, А. С. ПЧЕЛКО, Я. А. ШОР

МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ АРИФМЕТИКИ

Учпедгиз
1956

В. А. ИГНАТЬЕВ, А. С. ПЧЁЛКО и Я. А. ШОР

МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ АРИФМЕТИКИ

В НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЕ

Пособие
для педагогических училищ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
Москва 1956

ОТ ИЗДАТЕЛЬСТВА

Настоящая книга «Методика преподавания арифметики» В. А. Игнатьева, А. С. Пчелко и Я. А. Шор выпускается пробным изданием как один из возможных вариантов учебника для педагогических училищ. Государственное учебно-педагогическое издательство просит отзывы и замечания на эту книгу направлять по адресу: Москва, Чистые пруды, 6, редакция математики.

ОТ АВТОРОВ.

Составляя учебное пособие по методике арифметики для педагогических училищ, авторы стремились дать изложение этого учебного предмета на достаточно высоком идейном уровне. В этих целях в пособии подчёркнуты теоретические и принципиальные положения методики, дано обоснование отдельных методов и приёмов преподавания, сделано по некоторым вопросам обобщение передового опыта. Всё это приближает данное пособие к типу учебника по методике арифметики.

В то же время авторы учитывали, что методика арифметики есть наука сугубо конкретная, что в ней большое значение имеют конкретные примеры и образцы, раскрывающие методические идеи. Поэтому они стремились с возможной полнотой разработать и практическую сторону преподавания арифметики, чтобы учащиеся педучилищ могли ясно представить себе и легче усвоить практику обучения в школе начальной арифметике. Однако при изложении практических вопросов авторы старались не перегружать книгу частностями, деталями, отдельными приёмами и методическими рекомендациями, чтобы не увеличивать чрезмерно объём пособия, рассчитанного на ограниченное число учебных часов.

Авторы имели в виду, что недостаток конкретных примеров, иллюстрирующих то или иное методическое положение, будет восполнен преподавателями, ведущими эту учебную дисциплину. Последние всегда могут в процессе преподавания по мере необходимости конкретизировать методические принципы, используя для этой цели как свой личный опыт, так и передовой опыт массовой школы.

I. ОБЩАЯ ЧАСТЬ.

МЕТОДИКА АРИФМЕТИКИ И ЗНАЧЕНИЕ ЕЁ ИЗУЧЕНИЯ.

Методика арифметики есть педагогическая наука, в которой рассматриваются цели и задачи обучения детей арифметике, принципы построения программы и учебников, организация, методы и приёмы преподавания, процесс усвоения учащимися знаний и навыков по этому учебному предмету.

Методика арифметики как наука создавалась в течение последних двух веков. В ней сосредоточен в обобщённом виде лучший опыт многих поколений педагогов. В советской методике получает отражение передовой опыт советских учителей. Советские учителя и методисты непрерывно совершенствуют методы преподавания и обогащают методику новыми достижениями.

Изучение методики арифметики необходимо для всех, кто готовит себя к педагогической деятельности. Изучение методики вооружает будущего учителя знанием методов и приёмов преподавания, проверенных на практике и дающих положительные результаты.

Знание методики арифметики является той основой, на которой может успешно развиваться собственная творческая деятельность учителя по усовершенствованию методов и приёмов обучения детей арифметике и дальнейшему развитию методики как науки.

Задачи преподавания начальной арифметики.

В советской школе математическому образованию учащихся уделяется большое внимание. Достаточно сказать, что на преподавание арифметики в учебном плане отводится в каждом классе по 6 часов в неделю.

На уроках арифметики дети приобретают ряд знаний и математических понятий о числе и действиях над числами, о мерах и измерении, приобретают ряд умений и навыков вычислять устно и письменно, решать задачи, измерять. Все эти знания, умения и навыки составляют курс начальной арифметики, являющейся необходимой основой для изучения на последующей ступени обучения систематического курса арифметики.

Изучение арифметики развивает и воспитывает ум и чувства ребёнка, формирует коммунистическое мировоззрение.

Уроки арифметики способствуют развитию логического мышления детей, т. е. мышления правильного, последовательного, свободного от противоречий, доказательного.

Поскольку мышление неотделимо от речи и их развитие происходит в тесной взаимосвязи, обучение арифметике способствует развитию речи детей. Это достигается благодаря правильному употреблению арифметической терминологии, точной формулировке правил и определений, вопросов при решении задач.

В решении задач, как и во всякой творческой работе, большую роль играет деятельность воображения. Читая условие задачи, ученик стремится возможно яснее представить себе данную в ней арифметическую ситуацию, представить факты и явления, изложенные в задаче. Поэтому изучение арифметики способствует развитию творческого воображения детей.

На занятиях арифметикой у детей воспитывается привычка к точности и аккуратности, к чистоте и порядку, к самопроверке и применению наиболее рациональных приёмов в работе. Одним из средств для достижения этой цели служит правильное ведение тетради по арифметике.

Преподавание арифметики способствует идейно-политическому воспитанию учащихся, воспитанию у них коммунистической морали, чувства советского патриотизма. Это осуществляется главным образом через задачи, в сюжетном содержании которых находит своё отражение практика социалистического строительства.

Всё то, чему обучаются дети на уроках арифметики: счёт, вычисления, измерения, денежные расчёты, решение несложных арифметических задач, находит постоянное, широкое и непосредственное применение в практической жизни. Поэтому школа, разрешая образовательные и воспитательные задачи, в то же время вооружает детей знаниями, навыками и умениями, которые имеют большое практическое значение.

Таким образом, преподавание арифметики оказывает всестороннее воздействие на учащегося, на развитие его способностей и дарований. Ставя своей основной задачей дать ученику строго определённую сумму первоначальных математических знаний и навыков, школа в то же время использует обучение этому предмету для умственного и нравственного развития учащегося и для политехнического обучения.

АНАЛИЗ ПРОГРАММЫ.

В I—IV классах изучается курс начальной арифметики, который характеризуется практической направленностью и конкретностью своего содержания, тесной и очевидной для детей связью получаемых ими арифметических знаний с жизненной практикой, с некоторыми доступными детям теоретическими обобщениями.

Курс начальной арифметики является частью систематического курса арифметики как учебного предмета средней школы.

В I классе начальной школы ребёнок начинает своё образование; здесь же он впервые приступает и к изучению арифметики как учебного предмета. Поэтому курс начальной арифметики начинается с самых элементарных и вместе с тем основных сведений из арифметики — с формирования у детей конкретных представлений о числах первого десятка, о натуральном ряде чисел. В соответствии с тем, что число — понятие оперативное, оно сейчас же делается предметом действия, т. е. дети с первых шагов обучения в школе приступают к изучению арифметических действий — сначала сложения и вычитания, а потом умножения и деления. Далее на протяжении четырёх лет обучения идёт постепенное расширение области изучаемых чисел и действий над ними.

Характерной особенностью курса начальной арифметики является концентрическое расположение в нём учебного материала.

Содержание начальной арифметики составляют постепенно расширяющиеся концентры: первый десяток, второй десяток, первая сотня, первая тысяча, числа любой величины (последний в свою очередь делится на два подконцентра: а) шестизначные числа в пределе миллиона и б) двенадцатизначные числа). В каждом концентре изучается нумерация и четыре арифметических действия, за исключением первого десятка, в пределе которого изучаются только сложение и вычитание. Каждый концентр, давая учащимся новые знания, включает в себя и всё содержание предыдущих концентров. Деление курса начальной арифметики на концентры обусловлено возрастными особенностями младших школьников и необходимостью соблюдать в процессе обучения постепенный переход от простого к сложному, от лёгкого к трудному. Благодаря концентрическому расположению материала знания, сообщаемые детям на каждой ступени обучения, имеют такой объём и такую степень отвлечённости и общности, которые соответствуют умственному развитию учащихся.

Благодаря этому при концентрическом расположении материала ученик возвращается к одному и тому же понятию неоднократно, повторяет его на расширенной основе и, как следствие этого, усваивает его сознательно и прочно.

В задачу начальной школы входит научить детей хорошо владеть устными и письменными вычислениями. В соответствии с этим обе эти системы получают в курсе начальной арифметики достаточно полное отражение, развиваясь во взаимосвязи. Однако в I и II классах, где дети имеют дело с небольшими числами, школа учит их пользоваться приёмами только устных вычислений; в последующих классах учащиеся овладевают навыками письменных вычислений, продолжая совершенствовать навыки устного счёта и знакомясь с новыми вычислительными приёмами. Выдвижение на первое место устных вычислений диктуется необходимостью вооружить детей уже младших классов практическими навыками, которые необходимы им в быту, в труде, в ученье. Кроме того, пользование устными приёмами помогает учащимся лучше усвоить структуру числа, его десятичный состав.

Твёрдое знание четырёх арифметических действий с целыми числами составляет основную задачу начальной школы. Знать арифметическое действие — это значит понимать цель и смысл действия, хорошо владеть терминологией действия, знать законы действия, уметь выполнять действия, пользуясь наиболее рациональными устными и письменными приёмами вычислений и знанием таблиц действий, знать зависимость между компонентами действия, изменение результата действия в зависимости от изменения данных и, наконец, уметь правильно применять действия при решении задач.

Весь этот большой и сложный материал раскрывается перед учащимися постепенно, последовательно, в строгой системе, с той степенью широты и глубины, какая доступна пониманию детей данного возраста.

Перечисленные выше компоненты знания действий в зависимости от их сложности изучаются в I—IV классах с неодинаковой глубиной и законченностью.

Законченным является знание терминологии действий. Полностью овладевают учащиеся начальной школы техникой письменных вычислений, а также формулировками, в которых выражается зависимость между компонентами каждого действия.

В процессе устных вычислений (при применении приёма округления) у учащихся накапливаются представления и об изменении результатов действий при изменении компонентов, но это знание не завершается усвоением соответствующих формулировок.

Программа не требует от учащихся теоретических сведений о законах арифметических действий, но зато в ней предусмотрено всё необходимое для того, чтобы выработать у учащихся умение пользоваться основными свойствами арифметических действий на практике. Материалом для этой цели служат прежде всего упражнения в устных вычислениях. В процессе этих упражнений дети научаются пользоваться: а) переместительным свойством сложения; б) переместительным свойством умножения; в) сочетательным свойством сложения в случае сложения нескольких слагаемых в III и IV классах; г) сочетательным свойством умножения при умножении на круглые десятки, сотни, тысячи и при усвоении в IV классе приёма последовательного умножения и деления; д) с распределительным свойством умножения и деления, начиная со II класса, где учащиеся учатся приёму умножения и деления двузначного числа на однозначное.

Названия и формулировки последних двух законов вследствие их сложности учащимся не даются.

Таким образом курс начальной арифметики в части изучения четырёх арифметических действий обеспечивает сообщение учащимся значительной суммы знаний и твёрдые вычислительные навыки, которые служат достаточной основой для успешного изучения систематического курса арифметики в V и VI классах.

Задачи. Следующей большой составной частью курса начальной арифметики являются арифметические задачи. Как и арифметические действия, они входят в программу каждого класса и решаются на протяжении всего курса в связи с изучением арифметических действий. На решении задач учащиеся постигают смысл каждого действия, в решении задач находят своё применение и закрепление вычислительные навыки. Но главное их значение состоит в том, что они развивают мышление и речь учащихся, развивают смётку, сообразительность, умение логично рассуждать, обосновывать и доказывать свои суждения. Роль задач особенно повышается в связи с введением политехнического обучения; на задачах с производственным содержанием, отражающим трудовую деятельность людей, расширяется политехнический кругозор учащихся. Задачи используются и в воспитательных целях.

Вследствие большого и разностороннего значения задачам уделяется в школе большое внимание и отводится много времени. В объяснительной записке к программе сказано, что около половины всего времени, отводимого на арифметику, должно выделяться на решение задач.

Мир задач обширен и крайне разнообразен. Из этого множества задач для начальных (I—IV) классов отобраны такие задачи, решение которых способствует успешному и достаточно полному достижению вышеуказанных целей, стоящих перед преподаванием арифметики в этих классах.

Так, значительную группу задач составляют простые задачи, решаемые одним действием, которые помогают: а) усвоению основных случаев применения каждого арифметического действия, заданного как в прямой, так и в косвенной форме; б) формированию у детей основных математических понятий (понятий разностного и кратного сравнения, понятий увеличения и уменьшения числа на несколько единиц и в несколько раз, понятий деления на равные части и деления по содержанию и др.).

Эти задачи различны по степени своей трудности, и в соответствии с этим они изучаются во всех классах. В программе каждого класса указаны (не всегда, впрочем, точно и определённо) виды простых задач, решению которых должны быть обучены дети данного класса.

Вторую значительную группу задач, решаемых во всех классах, начиная с первого, составляют сложные или составные задачи. При отборе таких задач имеется в виду достижение следующих целей: а) закрепление у учащихся умения на более сложном материале правильно применять арифметические действия; б) углубление тех основных математических понятий, формирование которых начинается на простых задачах; в) вооружение учащихся такими умениями и навыками, которые требуются в практической жизни — в различного рода расчётах, связанных с использованием числа и меры; г) расширение политехнического кругозора учащихся; д) развитие логического мышления и речи учащихся, овладение простейшими формами анализа и синтеза в применении их к количественной стороне жизненных явлений; е) понимание функциональной зависимости между величинами.

Основное требование при отборе задач для каждого класса — это **доступность** данного вида задач пониманию учащихся того класса, на который эта задача рассчитана.

Одним из показателей посильности или непосильности задачи для детей данного возраста является **количество действий**, которое надо выполнить для решения задачи. Основываясь на этом признаке, в программе приняты, как правило, для I класса задачи в 1—2 действия, для II класса задачи в 1—3 действия, для III класса задачи в 1—5 действий и для IV класса — в 1—6 действий. Понятно, что от этих норм возможны отступления, так как трудность задач зависит не только от количества действий, посредством которых они решаются.

Среди составных задач, решаемых в I—IV классах, видное место занимают задачи с пропорциональными величинами (задачи на простое тройное правило, решаемые способом приведения к единице и способом отношений, задачи на пропорциональное деление, задачи на нахождение чисел по сумме и отношению и др.). Главное назначение этих задач — накопить у детей достаточный запас конкретных представлений о пропорциональной (пока только прямой) зависимости между величинами, которая часто встречается в науке и в практике.

Кроме указанных, в эту группу входят задачи, в которых искомые величины находятся по двум разностям (одна из них данная). Значение этих задач состоит в том, что на них дети учатся устанавливать причинно-следственные связи между данными и искомыми в задаче величинами.

Введённые в курс начальной арифметики задачи **на движение** способствуют уяснению зависимости между такими распространёнными в практике и науке величинами, как скорость, путь и время, и, кроме того, развитию у детей пространственных представлений.

Задачи на нахождение чисел по сумме и отношению помогают формировать у детей абстрактное понятие о части.

Большое место в IV классе занимают задачи на вычисление площадей, объёмов, простейшие задачи на вычисление времени; они способствуют развитию у детей пространственных представлений и вооружают детей жизненно-практическими навыками.

Таким образом, курс начальной арифметики в части решения задач наполнен большим и содержательным материалом, усвоение которого даёт учащимся ряд математических знаний, развивает мышление и речь и тем самым готовит их для успешного изучения систематического курса арифметики в V и VI классах.

Математика занимается изучением не только количественных отношений, но и пространственных форм. Количественные отношения рассматриваются в арифметике, пространственные формы — в геометрии. И то и другое — необходимые составные части элементарного математического образования.

Учитывая это, в курс начальной арифметики включают и начатки геометрии. Роль геометрических знаний особенно возрастает в политехнической школе, которая предъявляет большие требования к измерительной культуре учащихся, к развитию их пространственных представлений.

Пространственные представления сложные. Они включают в себя представления расстояний, направлений, величин, форм, положений.

Развитие этих представлений происходит постепенно, начиная с I класса. В I, II и III классах дети знакомятся с мерами длины, пользуются ими для измерения различных расстояний и таким образом уточняют свои представления о расстояниях, о протяжённости.

Пользуясь постоянно квадратиками, прямоугольниками, треугольниками и кружочками, как счётным дидактическим материалом, учащиеся уже в младших классах воспринимают конкретную, пока ещё предметную форму. В III классе у них формируется понятие о прямоугольнике, квадрате, о свойствах их сторон и углов, а в IV классе дети знакомятся с кубом как геометрическим телом.

Эти знания используются для вооружения детей практическими навыками измерения площадей, имеющих форму прямоугольника, и объёма тел, имеющих форму куба и прямоугольного параллелепипеда.

Главное при изучении геометрического материала состоит в том, чтобы дать детям чёткие зрительные геометрические образы прямой и её отрезка, углов, прямоугольника, квадрата, куба и на этой основе рассмотреть элементарные свойства этих фигур и тел.

Большое значение геометрического материала заключается также в методе его изучения, который от начала до конца является активным, наглядным, конкретно-предметным, зрительно-осязательным.

Таким образом, вводя в программу начальной школы геометрический материал, школа разрешает ряд задач образовательного и воспитательного характера и среди них задачу осуществления в начальных классах элементов политехнического обучения.

Измерение всегда приводит к получению именованного числа, т. е. такого числа, при котором стоят наименования единиц измерения. В практической жизни, в трудовой деятельности человека именованные числа имеют большое и частое применение. Учитывая запросы и потребности практической жизни, школа вводит в программу начальной арифметики изучение мер, упражнения в измерении, показывает ребёнку образование сначала простого, а потом и составного именованного числа и, наконец, вводит изучение действий над составными именованными числами. Эти действия имеют много особенностей, усложняющих (по сравнению с действиями над отвлечёнными и простыми именованными числами) процесс их усвоения.

Поэтому они вводятся после того, как учащиеся хорошо усвоят механизм действий с отвлечёнными числами, т. е. в IV классе.

Изучение раздела «Именованные числа» в курсе начальной арифметики имеет большое практическое значение и вместе с тем подготавливает учащихся к успешной работе на следующей ступени обучения. В частности, знание мер необходимо для успешного изучения в VI классе физики, а в VII классе — химии.

Последним в курсе начальной арифметики является сравнительно небольшой раздел «Простейшие дроби», изучаемый в IV классе. Программа по этому разделу предусматривает только первоначальное знакомство с наиболее употребительными в жизни долями единицы — $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$, с которыми ученик встречается нередко в практической жизни. Числа «половина», «четверть», «восьмая» встречаются и в таких учебных предметах, как труд, пение, рисование.

Знакомство с долями имеет существенное значение и для подготовки учащихся к успешному изучению систематического курса дробей в V классе.

Таким образом, в курсе начальной арифметики основное место занимает изучение четырёх арифметических действий над целыми числами и решение арифметических задач. Твёрдое усвоение этих разделов обеспечивает достаточную подготовку учащихся начальных классов к успешному изучению систематического курса арифметики в пятых классах.

АРИФМЕТИКА КАК ОСНОВА ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ОБУЧЕНИЯ

Будучи общеобразовательным учебным предметом, арифметика в то же время служит и целям политехнического обучения, являясь одной из главных основ этого обучения.

Производственная и трудовая деятельность человека основана на точных математических расчётах и строится с соблюдением строго установленных количественных отношений между различными элементами производства. Знание производства (работы двигателей, машин, технологических процессов и организации) невозможно без знания количественных отношений, лежащих в его основе. А последнее в свою очередь требует знания числа и меры, умения оперировать с числом, что и составляет основное содержание арифметики.

Задаче политехнического обучения служит не один какой-либо раздел арифметики и даже не совокупность отдельных тем и разделов программы, а всё содержание начальной арифметики. вся совокупность знаний и навыков, получаемых на уроках арифметики.

Сюда относятся прежде всего вычислительные навыки. Умение хорошо владеть техникой устных и письменных вычислений существенно необходимо для политехнического обучения. Школа должна поддерживать вычислительную культуру учащихся на высоком уровне. Недостаточное внимание к вопросам изучения четырёх арифметических действий, в частности к вопросам устного счёта, нанесло бы ущерб как общему образованию, так и политехническому обучению учащихся.

Для политехнического обучения имеет большое значение и твёрдое знание мер, вооружение учащихся твёрдыми навыками измерения, взвешивания. Измерения разнообразных величин часто встречаются в производственном процессе. Измерение — непременный и постоянный спутник трудовой деятельности человека.

Измерения сопровождают практическую деятельность и самого ребёнка на уроках ручного труда, в классе, в работе на учебно-опытном участке, на занятиях в кружке «Умелые руки», на уроках естествознания при постановке опытов и наблюдений. На этих занятиях ученику приходится измерять длину отрезков на бумаге и на земле, измерять протяжённость различных предметов, взвешивать, определять ёмкость сосудов, вычислять площади и объёмы, определять длительность тех или иных промежутков времени.

В политехнической школе возрастает значение и тех знаний, которые связаны с изучением начатков геометрии. В трудовой деятельности взрослых и в практических занятиях учащихся, особенно в занятиях по моделированию, встречается надобность конструировать предметы (игрушки, модели механизмов и прочее).

Конструирование требует от ученика умения хорошо разбираться в форме, в протяжённости и величине, в относительном расположении предметов. Изучение геометрического материала в значительной мере направлено на развитие у детей этих представлений.

Для развития политехнического кругозора учащихся большое значение имеет решение арифметических задач с производственным содержанием. В таких задачах говорится о мощи нашей советской техники, о том, как машины, облегчая труд человека, повышают производительность его труда; в таких задачах затрагиваются вопросы технологии, обработки сырья и получения из него изделия. В задачниках имеется немало таких задач, содержанием которых является переработка молока для получения масла и сыра, хлопка и шерсти для получения ткани, картофеля или пшеницы для получения крахмала, свёклы для получения сахара, руды для получения чугуна и железа и т. д.

В них указывается обычно количественное отношение между сырьём и готовой продукцией. Многие задачи имеют своей тематикой сельскохозяйственное производство; решая их, учащиеся знакомятся с количественными отношениями элементов этого производства. В задачах на вычисление времени время выступает как один из важнейших факторов повышения производительности труда.

Итак, арифметика, являясь общеобразовательным учебным предметом, в то же время всем своим содержанием служит задаче политехнического обучения.

УЧЕБНИКИ АРИФМЕТИКИ.

Содержание программы раскрывается в учебниках. Каждый класс имеет особый учебник, составленный в соответствии с программой данного класса.

Учебный материал — задачи и примеры — расположен в учебниках по темам, указанным в программе. При расположении материала учитывается необходимость соблюдения дидактических принципов, которые требуют постепенного перехода от простого к сложному, от лёгкого к трудному, от конкретного к отвлечённому, от близкого к далёкому.

В учебниках соблюдается в основном тоже важный для усвоения арифметики принцип *повторения*. Повторение пройденного вводится в новый материал; созданы по мере необходимости *повторительные* разделы; изложению нового материала предпосылается, как правило, повторение того из пройденного, что служит опорой и основой для нового.

Для учебников арифметики характерно сближение теории с практикой, установление связи учебного материала с жизненным опытом учащихся. Это находит своё выражение в практических заданиях, в жизненной и близкой детям тематике задач.

Многие задачи построены на реальных числах и фактах, которые даются обычно в обобщённом виде, как типические в нашей жизни.

Преобладающей темой задач является трудовая деятельность людей. В некоторых задачах находит отражение общественно полезный труд самих детей.

Большинство задач имеет обычную *структуру*: условие, числовые данные, вопрос. Наряду с этим имеются задачи с условием, которое требуется дополнить вопросом, задачи-вопросы, для решения которых нужно подобрать числовые данные, задачи, оформленные в таблицы. Подобного рода задачи введены для того, чтобы активизировать мысль ученика, помочь ему глубже понять функциональную зависимость между величинами, побудить его к творческой деятельности. В учебнике введено небольшое число задач-расчётов, которые заставляют детей находить нужные числа в окружающей жизни, применять при их решении теоретические знания на практике. Кроме того, в учебниках дан материал, на основе которого дети должны сами составлять задачи: рисунки, картинки, схематично записанные условия задач, готовые решения и др.

Некоторые задачи сопровождаются заданиями составить аналогичные задачи на сюжетно-числовом материале из окружающей жизни, в частности из жизни своего класса.

Примеры расположены в порядке, который обеспечивает в основном постепенное нарастание сложности и трудности их решения. Наряду с готовыми примерами в учебниках имеются задания по составлению учащимися своих примеров, аналогичных данным; некоторые примеры даны с готовым решением для проверки их учащимися. Чтобы обеспечить в упражнениях самоконтроль, в учебнике III класса к некоторым примерам дано указание, что при условии правильного их решения и при выполнении того или иного действия над результатами должно получиться данное число. Чтобы повысить у детей интерес к упражнениям, в учебниках для I и II классов нередко применяется разнообразное оформление примеров: они помещаются в прямоугольники, треугольники, в окружности и др. В учебниках для III и IV классов даны образцы выполнения арифметических действий: в III классе — над отвлечёнными числами, в IV классе — над составными именованными числами.

Примеры, а также и задачи даются как для устного, так и для письменного решения. В III и IV классах материал для устного счёта выделен в особые главы; кроме того, некоторые устные примеры и задачи даются для подготовки учащихся к письменным вычислениям и письменному решению задач. Следует, однако, иметь в виду, что учебники не обеспечивают учителя полностью материалом для устного счёта. Такой материал нужно подбирать учителю в дополнение к учебникам из специальных сборников задач и упражнений для устного счёта.

Кроме задач и примеров, учебники содержат в себе предусмотренные программой теоретические сведения: правила, определения, формулировки некоторых выводов и обобщений, подлежащих усвоению наизусть.

Чтобы преподавание арифметики способствовало развитию у детей пространственных представлений, в учебниках даются отрезки прямой и геометрические фигуры, включены задания по измерению и черчению.

Новые понятия, вводимые в учебник, обычно иллюстрируются рисунком или чертежом. Наибольшее число иллюстраций дано в учебниках для I и II классов, где преподавание должно быть особенно наглядным.

К учебнику для I класса приложена в форме вкладки разрезная таблица, которая содержит набор цифр и знаков арифметических действий, квадратиков и кружков для счёта, образцы монет. Этот материал обычно разрезается учащимися и используется в процессе обучения в качестве наглядных пособий.

МЕТОДЫ ОБУЧЕНИЯ АРИФМЕТИКЕ.

Образование арифметических понятий и усвоение материала по арифметике представляют собой длительный и сложный процесс, имеющий своё начало, развитие и завершение.

В этом процессе надо различать:

а) первоначальное знакомство с новым материалом и осмысливание его содержания;

б) усвоение материала путём запоминания, заучивания;

в) приобретение навыков и умений посредством упражнений;

г) закрепление знаний и навыков путём повторения;

д) применение знаний и навыков на практике.

Таким образом, учащийся, усваивая тот или иной материал по арифметике, проходит длинный и сложный путь от первоначального знакомства с новым понятием до твёрдого овладения им и применения его на практике.

Знания, приобретаемые учащимися, должны быть конкретными, точными, хорошо осознанными, действенными и прочными. Навыки должны обладать такими же качествами; кроме того, они должны быть в известной мере автоматизированными. Чтобы знания и навыки обладали этими качествами, учитель должен уметь хорошо объяснять новые понятия и хорошо упражнять учащихся в приобретении ими навыков.

Методы и приёмы объяснения.

Каждое арифметическое понятие, каждый более или менее сложный вычислительный или измерительный навык состоит из отдельных элементов. От учителя при объяснении требуется умение расчленять сложное целое на его составные части и располагать их для объяснения в таком порядке, при котором трудность усвоения нарастает постепенно и каждая предыдущая ступень является опорой для последующей. «Тот хорошо учит, кто хорошо расчленяет», — говорили представители древней педагогики.

Для ясного понимания необходимо не только расчленение, но и объединение отдельных элементов в одно целое. После работы над отдельными элементами последние нужно связать и обобщить по существенным признакам. Обобщения часто сопровождаются формулировкой вывода или арифметического правила. В обобщении совершается переход от конкретного и единичного к общему, отвлечённому. В процессе обобщения подчёркиваются существенные, характерные, типичные признаки понятия, благодаря чему углубляется его понимание. Уроки арифметики, посвящаемые объяснению нового материала, в большинстве случаев должны заканчиваться обобщениями.

Чтобы понять новое, надо с в я з а т ь это новое с тем, что уже хорошо известно. Сущность понимания состоит в осознании связей новых знаний с ранее приобретёнными и более элементарными. «Понимание, мышление, — говорит И. П. Павлов, — состоит насквозь из ассоциаций, сперва элементарных, а потом из связей элементарных ассоциаций, т. е. из сложных ассоциаций». Отсюда следует, что перед объяснением нового материала нужно установить, с какими ранее изученными понятиями связано то новое, что подлежит объяснению. Установив это, нужно воспроизвести их в памяти учащихся и повторить. Повторение обычно проводится заранее (на предшествующих уроках) или чаще всего на том уроке, на котором даётся объяснение нового материала.

При объяснении нового материала по арифметике учитель предлагает учащимся ряд отдельных задач или отдельных примеров, иначе говоря, ряд частных конкретных математических фактов. Эти факты учащиеся наблюдают, сравнивают, подвергают анализу и из рассмотрения единичных фактов делают общие выводы, формулируют правила. Такой метод объяснения, когда учитель направляет мысль ученика от единичного к общему, от частных суждений к общим, называется и н д у к т и в н ы м методом. Индуктивный метод находит частое применение при обучении начальной арифметике. Все первичные математические понятия вырабатываются этим методом.

В тесной связи с индуктивным методом применяется и другой метод, когда мысль ученика движется от общего к частному, когда общие суждения, выводы и правила являются основой для получения новых знаний. И этот метод познания — д е д у к т и в н ы й метод — находит своё применение в начальной школе. Когда выведенное правило применяется к частным случаям решения примеров или задач, в этих случаях учащийся идёт дедуктивным путём.

При объяснении нового материала в начальных классах используется преимущественно вопросо-ответная форма. Желая объяснить то или иное понятие, учитель подбирает примеры, задачи, иллюстрирует их наглядными пособиями и ставит перед учащимися ряд вопросов, на которые ученики дают ответы; эти ответы подводят учащихся к тем выводам и обобщениям, которые составляют содержание объясняемого материала. Достоинство такой формы объяснения заключается в том, что при помощи её легко привлечь внимание детей к предмету объяснения, легко вызвать активность учащихся. Вопросы заставляют учащихся думать, дают их мысли определённое направление, держат учащихся в состоянии творческого напряжения. По ответам учеников учителю легко судить, насколько правильно они понимают и усваивают то, что объясняется.

Использование вопросо-ответной формы обучения не исключает связного изложения материала самим учителем. Это нужно делать тогда, когда надо привести в связь отдельные вопросы темы, систематизировать сообщённые знания, сделать обобщения, сообщить такие знания, которые не опираются на личный опыт детей (в решении примеров и задач).

При объяснении нового материала огромное значение имеет применение **наглядности**. Принцип наглядности находит своё обоснование в учении И. П. Павлова о двух сигнальных системах.

Всякое объяснение, даваемое учителем, осуществляется посредством речи, **живого слова**. В формировании арифметических понятий живое слово, ясное и понятное учащимся, играет большую роль. Оно даёт возможность делать отвлечения и обобщения.

Но как ни важно живое слово (вторая сигнальная система), оно только тогда действует правильно и эффективно, когда опирается на первую сигнальную систему, которая является ближайшим проводником действительности.

В применении к методике это означает, что в школьной практике нельзя ограничиваться только словесными объяснениями, ибо слова являются, по выражению академика И. П. Павлова, «вторыми сигналами», «сигналами сигналов», т. е. представляют собой «отвлечение от действительности», обобщение, которое возможно только на базе конкретного материала. Такой материал даётся восприятиями и ощущениями, идущими от предметного мира, от того, что в школьной практике называется наглядностью, наглядными пособиями. Отсюда следует, что обучение арифметике в начальной школе должно быть наглядным, образным, конкретным. К развитию отвлечённого, абстрактного мышления, к образованию общих математических понятий надо идти, отправляясь от наглядного обучения. Большое значение наглядности обусловлено также и тем, что ребёнок мыслит образно, конкретно. Он хорошо понимает то, что наглядно, конкретно, и наоборот, для него неясны и непонятны отвлечённые суждения. Учащийся может запомнить эти суждения, но, если они не подкреплены наглядностью, они будут для него бессодержательными фразами.

Наглядность нужна для образования у детей первых понятий о числе, для расширения круга числовых представлений, для объяснения вычислительных приёмов и для объяснения решения задач.

Различные разделы курса арифметики требуют применения наглядных пособий различного рода; например, когда изучается первый и второй десяток, в качестве наглядных пособий используются предметы: палочки, кубики, спички, кружочки и т. д. Когда же учащиеся переходят к изучению нумерации и действий в пределе сотни и тысячи, наглядными пособиями являются пучки палочек или бумажные ленты, разделённые на метры, дециметры и сантиметры. Когда же область чисел расширяется всё больше и учащиеся переходят к изучению нумерации чисел любой величины, в качестве наглядных пособий используются условные изображения числа на счётах или на абаке. В дальнейшем приходится ограничиваться уже цифровыми образами. Итак, при расширении числовой области меняются и наглядные пособия: естественные предметы и группы предметов переходят в условные образы, а эти последние в конце концов уступают своё место цифрам.

Самым убедительным для учащегося на первых порах обучения является процесс счёта или вычислений на натуральных предметах. Затем следуют картинки или рисунки с изображением предметов. В дальнейшем, по мере развития мышления и воображения учащихся, наряду с предметами и их изображениями наглядность в процесс обучения могут вносить условные схемы, таблицы, чертежи.

Высоко оценивая наглядность и широко применяя её, надо в то же время помнить, что наглядность не самоцель, а только средство для достижения подлинной цели — научить ученика производить вычисления без наглядных пособий, научить решать задачи на основе только рассуждения. Поэтому наглядность надо применять тогда, когда она необходима, и от наглядности надо отходить, как только ученики хорошо поймут объясняемое.

В зависимости от способа изготовления различают готовые и самодельные наглядные пособия.

К готовым пособиям относятся такие, которые изготовляются на фабриках или в мастерских по установленным образцам, например: классные счёты, арифметический ящик, таблица умножения, модели мер, таблицы квадратных и кубических мер, таблицы для устного счёта и многие другие. Но в преподавании арифметики нельзя обойтись и без самодельных пособий, изготовляемых самим учителем. Сюда относятся: палочки и пучки палочек, плакаты для решения задач, различного рода таблицы, схемы и т. п.

В арифметике много вопросов, которые нужно иллюстрировать тем или иным наглядным пособием. При наличии творческой инициативы и интереса к делу всегда можно найти ту форму наглядности, которая наилучшим образом вскроет сущность изучаемого понятия и доведёт его до сознания учащегося.

При показе наглядных пособий ученик получает известные зрительные образы, которые помогают многое уяснить ему. Но ученик при этом остаётся только зрителем. Активность же ученика достигает высшего предела тогда, когда он **сам** что-либо **делает**, когда в работе участвует не только его голова, но и руки. Отсюда вытекает необходимость вооружить наглядными пособиями каждого учащегося и заставить его в течение урока работать с ними. Наглядные пособия, которые находятся в индивидуальном пользовании ученика и имеют значение рабочего материала, получили название **дидактического материала**.

Особенно необходим дидактический материал для учащихся младших классов. Ученикам I класса для усвоения счёта и арифметических действий в пределе 10, 20, 100 нужно иметь в качестве предметов счёта палочки (прутики, спички, связанные в пучки), набор кружочков, прямоугольников и квадратов, сделанных из картона, разрезные цифры, модели монет в 1, 2, 3, 5, 10 копеек из картона или толстой бумаги (для изучения состава чисел).

К изготовлению дидактического материала привлекаются сами учащиеся, которые делают необходимые им пособия на уроках ручного труда или дома.

Методы и приёмы упражнений.

Многие арифметические знания должны претворяться в умения, в навыки; таковы навыки вычислительные, измерительные, навыки черчения. Арифметические навыки приобретаются посредством упражнений. В процессе упражнений навык формируется, закрепляется и в известном смысле автоматизируется.

Вообще упражнениями достигаются две цели: с одной стороны, благодаря упражнениям выполнение действия становится всё более и более правильным, лёгким, скорым, автоматичным, а с другой стороны, многократное повторение одинаковых операций приводит к лучшему, более глубокому их пониманию.

Задача упражнений состоит в том, чтобы создавать и непрерывно совершенствовать навык.

Чтобы арифметические упражнения достигали своей цели, они должны удовлетворять следующим требованиям.

Ученику необходимо ясно представлять себе, чего он должен добиться в результате упражнений. Учитель должен показать ученику образец решения примера, решения задачи, рассуждения, и этот образец должен быть в сознании ученика, когда он выполняет упражнения.

После каждого упражнения ученик должен видеть его результаты, чувствовать своё продвижение, знать, чего он достиг и какие недочёты или ошибки ему остаётся ещё преодолеть. На них учитель должен указать и поставить задачи для дальнейших упражнений.

В первоначальных упражнениях, следующих за объяснением учителя, ученик подробно воспроизводит те рассуждения, которыми учитель сопровождал своё объяснение. Но по мере овладения навыком эти рассуждения должны становиться всё короче и схематичнее.

Первые упражнения в решении примеров и задач проводятся под руководством учителя. Но чем дальше, тем больше самостоятельности должно быть в работе учащихся. Упражнения должны сопровождаться и заканчиваться самостоятельной работой учащихся.

В создании прочных вычислительных навыков большое значение имеет к о л и ч е с т в о упражнений. Хорошие навыки в решении примеров и задач получаются в результате только большого количества решённых задач и примеров. Чем сложнее навык, тем больше упражнений требуется для овладения им.

В упражнениях нужно ставить перед учащимися каждый раз о д н у какую-либо т р у д н о с т ь, давать один какой-либо элемент сложного навыка. Нельзя ставить ученика перед необходимостью преодолевать одновременно несколько трудностей.

Для закрепления знаний и навыков должно быть использовано п о в т о р е н и е. Каждый урок арифметики, продвигая учащихся по пути усвоения н о в о г о, должен быть использован в той или иной мере и для п о в т о р е н и я пройдённого.

Повторение пройденного должно проходить главным образом в связи с изучением нового материала.

Независимо от этого нужно повторять пройденное и вне прямой связи с новым материалом, выделяя на повторение специальные уроки.

Заключительным этапом при выработке арифметических навыков является применение их на практике.

В ы ч и с л и т е л ь н ы е н а в ы к и находят своё практическое применение в решении широкого круга самых разнообразных задач.

И з м е р и т е л ь н ы е н а в ы к и могут найти широкое применение в практике измерительных работ, проводимых в классе, дома, на открытой местности, например при благоустройстве школьного двора, при разбивке школьного огорода, разбивке грядок под разные культуры или цветочных клумб, в измерении площадей при сельскохозяйственных работах (запашке и уборке урожая).

У м е н и е р е ш а т ь з а д а ч и может быть использовано в практических целях для разрешения жизненных вопросов, связанных с расчётами и выдвигаемых потребностями самого учащегося или окружающей средой — семьёй, школой, колхозом, тем или иным предприятием.

Некоторые сведения по арифметике подлежат з а у ч и в а н и ю и у с в о е н и ю н а и з у с т ь. Сюда относятся: таблицы сложения и вычитания в пределе 20 в I классе, таблицы умножения и деления во II классе, таблицы мер длины, веса, времени в III классе, таблицы квадратных и кубических мер в IV классе, а также различные определения и правила во всех классах.

Запоминание таблиц и правил достигается в значительной мере при помощи упражнений и многократных повторений при решении примеров и задач. Наряду с этим надо давать учащимся и специальные задания — заучить тот или иной параграф, ту или иную часть таблицы, то или иное правило.

Учащиеся должны хорошо знать тот минимум определений и правил, который содержится в принятых для начальных школ учебниках. От учащихся нужно требовать близкого к тексту запоминания и воспроизведения определений и правил, так как это приучает их точно, коротко и правильно формулировать математические предложения. Формулируя определение или правило, ученик должен уметь проиллюстрировать его на соответствующем примере.

ВОПРОСЫ ОРГАНИЗАЦИИ ПРЕПОДАВАНИЯ АРИФМЕТИКИ.

Планирование.

Преподавание арифметики может быть успешным только при наличии плана в работе, в котором разные цели и задачи обучения находят своё гармоническое сочетание со строгим учётом времени.

Плановость в работе обеспечивает систему и последовательность изложения, которые необходимы для твёрдого усвоения материала учащимися. При выполнении плана необходимо следить за усвоением учащимися изучаемого и в случае необходимости, вносить в план изменения.

В процессе обучения арифметике учитель должен иметь тематический план. В тематическом плане тема разбивается на отдельные части таким образом, чтобы содержание каждой части могло уложиться в один-два урока.

При разработке тематического плана учитывается объём материала, составляющего содержание данной темы, количество уроков и количество материала в учебнике на данную тему.

В тематическом плане не только развёртывается содержание данной темы, но и указывается материал из пройденного для повторения. Указываются также контрольные работы, когда и по каким разделам они будут проведены. Отмечаются даты прохождения темы — начало работы, её конец, дата заключительной контрольной работы.

Тематический план регулирует распределение материала по урокам и целесообразное использование каждого часа.

На основе тематического плана составляется развёрнутый, конкретный план очередного урока.

Урок арифметики.

В зависимости от цели и содержания уроки арифметики могут быть четырёх типов:

1) уроки, на которых объясняется новый материал;

2) уроки, на которых путём упражнений закрепляются навыки — в письменных вычислениях, в решении задач, в устном счёте;

3) уроки, на которых повторяется пройденное;

4) уроки, на которых знания учащихся проверяются посредством письменных контрольных работ.

Такое деление уроков на типы носит, однако, условный характер, так как на каждом уроке (за исключением письменных контрольных работ) должны иметь место и расширение знаний, и упражнения, и проверка, и повторение. Но на одних уроках главной целью является выяснение нового понятия, на других — упражнение, на третьих — повторение, на четвёртых — проверка знаний учащихся. В зависимости от этой главной цели каждый урок может быть отнесён к тому или иному типу.

Уроки первого типа — объяснение нового материала — являются наиболее сложными. От качества этих уроков зависит чёткость восприятия, глубина и ясность понимания изучаемого материала. Уроки этого типа имеют примерно такую структуру:

1) проверка домашнего задания;

2) сообщение цели урока и подготовка учащихся к восприятию нового материала;

3) объяснение нового материала;

4) первоначальные упражнения;

5) обобщение и выводы;

6) задание на дом.

Объяснение нового материала на этих уроках составляет главную часть урока; этой части уделяется и больше внимания и больше времени.

Уроки второго типа — уроки-упражнения — по своей структуре и содержанию несколько проще, чем уроки первого типа. Главное здесь заключается в умелом подборе примеров и задач, в том, чтобы эти примеры были разнообразны и исчерпывали все случаи каждого действия, все разновидности задач на данное правило. Кроме того, в задачу этих уроков входит научить учащихся работать самостоятельно, поэтому, готовясь к таким урокам, учитель тщательно продумывает вопрос о соотношении между работой под его непосредственным руководством, полусамостоятельной и самостоятельной работой детей.

Уроки повторения проводятся обычно по окончании пройденной темы, а также в конце четверти и в конце учебного года. Они, как правило, предшествуют контрольным работам. В содержание таких уроков входит пройденное по данной теме или нескольким темам.

Остановимся кратко на характеристике каждого этапа уроков первых двух типов.

1. Проверка домашнего задания в начале урока проводится регулярно, ежедневно. Цель проверки — установить, как выполнено задание: правильно или неправильно, самостоятельно или несамостоятельно, с достаточным или недостаточным пониманием. Способ проверки может быть разный в зависимости от того,

в каком классе проводится проверка и какой материал проверяется.

а) Вызванный ученик читает решённые им примеры или задачи по тетради, а остальные ученики следят за его ответами по своим тетрадям. Обнаруженные ошибки тут же исправляются.

б) Вызванный для проверки ученик читает решение примеров и задач не по тетради, а по задачнику (тетрадь ученика в это время находится у учителя). Этот способ применим главным образом в I и II классах, где решаются примеры и задачи с небольшими числами и используются устные приёмы вычислений.

в) Два-три ученика вызываются к классной доске, где они по указанию учителя решают заданные на дом примеры или полностью, или только частично. Такой способ проверки применим главным образом в III и IV классах, где изучаются письменные вычисления с многозначными числами.

При всех способах проверки последнюю нужно проводить в достаточно быстрых темпах, чтобы она, как правило, не занимала более 10—12 минут. Для этого учителю необходимо пользоваться в некоторых случаях выборочной проверкой (одни примеры проверить подробно, с объяснением, а в других примерах проверить только ответы), избегать пространных записей на классной доске, не задерживать весь класс на объяснении и исправлении таких ошибок, которые носят единичный характер.

Необходимо иметь в виду, что каждая домашняя работа ученика подвергается тщательной проверке учителем на дому по тетрадям № 1 и 2.

2. Устный счёт обычно следует за проверкой домашнего задания. Ему отводится от 5 до 8 минут. Упражнение в устном счёте проводится по возможности ежедневно.

Устный счёт часто используется для того, чтобы установить связь нового материала с пройденным, с тем, что уже известно учащимся. При такой постановке устного счёта урок приобретает целостный характер, одна часть подкрепляет другую, все этапы ведут к единой цели. Вместе с тем устный счёт может иметь и самостоятельное содержание, например, когда учащиеся знакомятся с особыми приёмами устных вычислений.

3. Объяснение и упражнения проводятся с соблюдением тех требований, о которых говорилось выше.

4. Урок завершается заданием на дом. Это короткий по времени, но важный по значению этап урока. Задание на дом даётся до звонка, при полном внимании учащихся, чтобы они поняли, что и как им нужно сделать к следующему уроку, какие примеры (задачи) решить, сколько, в какой форме, что и как записать, что усвоить наизусть и т. д. Но всегда и подробно раскрывать содержание предстоящей работы, ход решения задачи или примера не-

целесообразно. Это значило бы проделать работу за ученика, лишить задание элемента новизны.

По объёму домашнее задание должно быть таково, чтобы выполнение его требовало от учащихся I и II классов 20—30 минут, а от учащихся III и IV классов 30—40 минут

Подготовка к уроку. План и конспект урока.

Каждый урок требует от учителя основательной к нему подготовки. Подготовка нужна к каждому этапу урока.

При подготовке к проверке домашних заданий нужно решить примеры и задачи, заданные на дом, и получить к ним ответы; это позволит учителю вести проверку уверенно, не затягивая её. Если предполагается проверить не все, а только некоторые примеры в выборочном порядке, то выбрать наиболее характерные и трудные примеры. Наметить тех учеников, которые должны быть опрошены, и продумать те вопросы, которые будут предложены им для проверки знаний.

Чтобы подготовиться к упражнению в устном счёте, нужно подобрать материал (примеры и задачи) для устного счёта; если их недостает в задачнике, составить свои; наметить форму занятий устным счётом.

Готовясь к сообщению нового материала, необходимо продумать, что должно быть повторено из пройденного для лучшего понимания сообщаемого материала, и подобрать материал для повторения пройденного. Продумать, в какой форме может быть сообщена учащимся цель урока. Подобрать примеры и задачи, на которых будет дано объяснение нового материала, и расположить их в определённой системе. Подготовить необходимые наглядные пособия и продумать способ их применения. Наметить формулировку вывода, правила. Подготовить примеры или задачи для первых упражнений.

Готовясь к упражнениям, нужно подобрать в задачнике материал, примеры и задачи в соответствии с целью урока. Наметить, какие примеры или задачи будут решены под непосредственным руководством учителя и какие самостоятельно. Наметить примеры и задачи для домашнего задания.

Подготовка к уроку завершается записью плана или составлением конспекта урока. В плане кратко записывается содержание каждого этапа урока, причём форма и содержание плана варьируются в зависимости от содержания урока и его целевой установки.

Если краткую запись плана сделать более конкретной и подробной, то план превратится в конспект. В конспекте подробно излагается ход урока. Часто конспект излагается в форме вопросов учителя и ожидаемых ответов ученика.

Анализ урока арифметики.

Каждый урок арифметики имеет свою цель. Проводя урок, учитель держит эту цель в поле своего внимания и стремится к её достижению. После урока необходимо продумать ход урока и оценить его результаты.

Учитель должен воспитать в себе привычку к самоконтролю. Только тот учитель растёт и совершенствуется в педагогическом мастерстве, который проводит критический анализ своей работы. Анализирующая мысль учителя должна быть в первую очередь направлена на недостатки, замеченные им на уроке.

Выявив недостатки, нужно установить их причину. При таком отношении к делу практическая работа учителя будет осмысленной; проведённая через контроль сознания и самокритики она поднимает качество обучения и гарантирует от повторения ошибок.

Наряду с недостатками нужно уметь замечать и то хорошее, ценное, что бывает на уроке.

Дети нередко отличаются изобретательностью, острой сообразительностью; они иногда дают оригинальные и вместе с тем рациональные приёмы устных вычислений, придумывают свои, нередко остроумные, способы и приёмы решения задач.

Нужно не только подмечать эти факты, но и фиксировать их в дневниках или в записных книжках, а затем обобщать их, накапливая материал для усовершенствования урока.

Примерная схема анализа пробных уроков.

Проверка домашнего задания. Все ли ученики выполнили домашнее задание. Установлена ли причина невыполнения задания (если таковое было). Тщательность и темп проверки. Исправлены и объяснены ли допущенные ошибки. Выявлена ли самостоятельность выполнения работы учащимися.

Упражнение в устном счёте. Материал упражнений, его соответствие цели урока и программе. Форма упражнений, её соответствие цели урока и интересам учащихся. Уделялось ли внимание применению наиболее рациональных приёмов вычислений. Все ли учащиеся работали достаточно активно и самостоятельно.

Объяснение нового материала. Понятно ли для детей сформулирована цель урока. Установлена ли связь нового материала со старым. Удачно ли подобраны наглядные пособия; хорошо ли они использованы. Обеспечена ли стройность и систематичность в развёртывании материала. Всегда ли ясно, точно и правильно ставились вопросы. Не было ли погрешностей против научности в изложении материала. Привлекались ли учащиеся к формулировке вывода. В достаточной ли мере была использована активность и самостоятельность учащихся при объяснении нового материала.

При анализе урока, на котором решаются задачи, отмечаются достоинства и недостатки: в усвоении условия задачи, в методе разбора задачи, в составлении плана решения, в записи вычислений. В какой мере учитель опирался при решении задачи на самостоятельность и творчество самих учащихся.

Воспиталельная сторона урока. Порядок и дисциплина на уроке. Соблюдение на уроке «Правил для учащихся». Связь учебного материала (задач) с современностью. Отражение в содержании задач практики социалистического строительства.

Соблюдение на уроке общедидактических требований. Вовлекался ли в работу весь класс. Оказывалась ли помощь отстающим. Исправлялись ли неправильные или неточные ответы учащихся. Вовремя ли и в понятной ли форме дано учащимся домашнее задание. Речь и поведение на уроке самого учителя (его педагогический такт).

Итоги анализа урока (подводятся руководителем). Достоинства и недостатки урока со стороны: а) научности изложения, б) правильности и целесообразности методических приёмов, в) организации занятий, г) стройности, целостности и подчинения всех частей урока его основной цели. В какой мере достигнута образовательная и воспитательная цель урока.

ПРОВЕРКА И ОЦЕНКА ЗНАНИЙ УЧАЩИХСЯ.

Обучение арифметике должно сопровождаться систематической проверкой знаний учащихся.

Существуют два основных способа проверки знаний по арифметике: 1) устный опрос и 2) письменные контрольные работы. Кроме того, в этих целях используются: а) повседневные наблюдения учителя за работой учащихся в классе и б) письменные домашние работы учащихся.

Устный опрос.

Путём устного опроса могут быть проверены: устный счёт, письменные вычисления, решение задач.

Проверка знаний в форме устного опроса может быть приурочена к проверке домашних заданий. Планируя урок, учитель намечает для опроса двух-трёх учеников. Они отвечают заданный урок. В дополнение к этому учитель предлагает им вопросы из ранее пройденного.

Для проверки знаний учащихся могут быть использованы и другие этапы урока; во время упражнений учитель может вызвать учащегося к доске и проверить его знания; это же может быть сделано и во время самостоятельной работы учащихся.

При оценке ответов учитывается:

в устном счете — правильность и быстрота вычислений, умение пользоваться наиболее рациональным для каждого данного случая приёмом вычислений;

в письменных вычислениях — умение правильно и уверенно выполнять арифметическое действие или преобразование, умение объяснять выполняемое действие;

в решении задачи — знание способа и приёма решения задачи, умение объяснить решение.

Письменные контрольные работы.

Письменные контрольные работы дают возможность одновременно в течение короткого срока (одного урока) проверить знания всех учащихся в классе и сделать документально обоснованный вывод о знании учащимися материала, который является содержанием контрольной работы.

Контрольная работа проводится по окончании изучения того или иного раздела или темы. Ей уделяется особый урок, оценка её результатов заносится в классный журнал и учитывается при выведении отметки за четверть.

Содержание контрольной работы определяется содержанием пройденного раздела. В неё входит всё главное и существенное из этого раздела.

Контрольные работы могут быть или комбинированные, т. е. состоящие из примеров и задач, или однородные, т. е. состоящие только из примеров или только из задач. Последние имеют преимущество перед первыми: в них внимание учащихся не разбрасывается на выполнение работ, различных по форме и содержанию, что даёт возможность учащимся полнее выявить свои знания, а оценка в таких условиях приобретает бо́льшую определённость. В III и IV классах рекомендуется проводить преимущественно однородные работы.

Примеры и задачи для контрольной работы составляются либо самим учителем, либо берутся готовыми из различных источников. Содержание задачи должно полностью отвечать тому, что учениками фактически пройдено.

Задачи и примеры в контрольной работе даются в двух одинаковых по трудности вариантах. Ответы ни к задачам, ни к примерам не сообщаются.

Листочки для черновых записей в I, II классах не допускаются. Но в IV классе, где работы носят более сложный характер, учащимся разрешается пользоваться черновиком при условии, что черновики сдаются вместе с контрольной работой. Однако и при пользовании черновиком в контрольной работе, переписанной набело, все записи должны быть полными, со всеми промежуточными вычислениями.

Проверка и оценка контрольных работ проводится без промедления. Оценка ставится в зависимости от количества и качества ошибок.

Ошибки бывают разные. Одни ошибки свидетельствуют о незнании или непонимании учащимися программного материала, неумении применять правило, выполнять то или иное действие. Другие ошибки являются результатом не вполне твёрдых знаний или недостаточной устойчивости внимания.

Ошибки первого рода являются более грубыми. Ошибки второго рода — менее грубыми.

Грубыми ошибками следует считать:

1) ошибки в вычислениях как в примерах, так и при решении задач;

2) ошибки в решении задачи: неточность в плане, пропуск действия, неправильный выбор действий, неправильный выбор числовых данных, неправильная постановка вопросов.

Менее грубыми ошибками считаются:

1) нерациональный приём в вычислениях;

2) пропуск наименований либо постановка их там, где не следует ставить;

3) неточно сформулированный вопрос к действию при решении задачи;

4) ошибки, допущенные при списывании числовых данных или знака действия, при правильном решении; например, вместо $65 + 18 = 83$ ученик записал $66 + 18 = 84$ или $65 - 18 = 47$; при решении же задач неправильное применение знака действия (выбор действия) считается грубой ошибкой;

5) не доведенные до конца преобразования; например, в простом именованном числе не сделано превращение: 325 *кг* $\times$ 160 = = 52 000 *кг*.

Повторяющиеся одни и те же негрубые ошибки (например, неправильная постановка наименований) принимаются за одну ошибку.

Оценка контрольной работы проводится по тем критериям, которые установлены Министерством просвещения РСФСР и опубликованы в «Нормах оценки успеваемости учащихся по арифметике».

Закончив проверку и поставив оценки, учитель анализирует ошибки, допущенные детьми, и устанавливает, какие вопросы оказались слабо усвоенными.

Ошибки, допущенные при решении задач, классифицируются по таким рубрикам: а) ошибки в ходе решения, б) ошибки в вычислениях, в) ошибки в формулировке вопросов, г) ошибки в постановке наименований.

Особый урок посвящается анализу результатов контрольной работы. Этот урок учитель начинает с краткой характеристики выполненной работы, показывает допущенные ошибки, выясняет, как они должны быть исправлены.

Отметив работу класса в целом, учитель характеризует работу отдельных учеников, после чего работы раздаются учащимся на руки для того, чтобы они могли исправить ошибки. На этом же уроке проводятся упражнения, которые помогают ликвидировать допущенные ошибки.

После просмотра, оценки и анализа результатов контрольной работы учитель составляет ведомость по следующей форме:

№ п/п	Содержание работы	Сколько учащихся выполняли работу	Сколько учащихся выполнили работу		Процент правильных решений	Типичные ошибки
			правильно	неправильно		
1.	Задача (текст задачи)					
	Примеры (перечень примеров)					
2.						
3.						

Оценка работы учащихся:
«5» — . . . учащихся
«4» — . . . учащихся и т. д.

Эта ведомость даёт ясное представление о том, как справился класс с каждым примером и с задачей, что усвоено твёрдо или слабо, над чем надо продолжать работу в дальнейшем в порядке повторения и закрепления пройденного.

В дополнение к ведомости учитель составляет список учащихся, допустивших ошибки, с указанием, где сделана ошибка и какая именно.

Этот список покажет, на кого из учащихся надо обратить особое внимание, над чем именно надо работать с каждым из них.

Если в результате устной или письменной проверки у отдельных учащихся обнаружатся в знаниях те или иные пробелы, то учителю нужно принять меры к немедленной их ликвидации, используя для этого различные формы занятий в классе и во внеклассное время, в зависимости от степени отставания ученика.

«Математика, — говорит Н. К. Крупская, — это цепь понятий: выпадет одно звенышко — и непонятно будет дальнейшее».

Если пробел касается одного какого-нибудь вопроса и объясняется недостатком упражнений, то ученику даются добавочные задания для самостоятельного их выполнения в классе или дома.

Если же пробел в знаниях затрагивает более или менее широкий круг вопросов и зависит от непонимания их сущности, то целесообразно провести с учеником дополнительные индивидуальные задания во внеурочное время, чтобы не тормозить работу всего класса. Дополнительные занятия всегда должны быть строго индивидуализированы и сопровождаться широким использованием наглядных пособий.

ТЕТРАДЬ ПО АРИФМЕТИКЕ.

Тетрадь по арифметике — одна из необходимых и важных принадлежностей ученика при обучении его этому предмету. В ней фиксируются упражнения, решаются задачи, выполняются различного рода математические задания. От того, как ученик ведёт тетрадь, во многом зависят его успехи. С первых дней занятий надо учить ученика правильно вести тетрадь и неослабно следить за этим на протяжении всего срока обучения. Правильное ведение тетради помогает ученику лучше овладеть вычислительными и измерительными навыками и способствует воспитанию у детей привычки к чистоте и опрятности, к точности и аккуратности.

Тетрадь по арифметике должна быть чистой, опрятной. Все записи должны быть аккуратными, симметрично расположенными, с чётко и красиво написанными цифрами.

Цифры, как и буквы, пишутся с наклоном. В I классе цифры пишутся в две клетки (рис. 1), во II классе — в одну клетку (рис. 2), в III и IV классах немного меньше, чем в одну клетку (рис. 3). Наименования при цифрах пишутся в половину клетки, в I классе — в клетку. При записи чисел следует придерживаться правила: «Каждой цифре — своя клетка».

В тексте задачи или вопроса цифры пишутся немного выше клетки.

Каждый новый раздел должен начинаться записью его заглавия. Работа каждого дня должна датироваться, при этом пишутся число и месяц.

При решении задачи, взятой из учебника, указывается только её номер.

Тетради по арифметике регулярно, по возможности ежедневно, просматриваются учителем. Поэтому целесообразно ученику иметь две тетради — тетрадь № 1 и тетрадь № 2, чтобы ученик, сдав учителю для проверки одну тетрадь, в другой тетради мог выполнять домашнее задание.

Для контрольных работ служат особые тетради, в которых выполняются все контрольные письменные работы. Эти тетради выдаются ученикам после работы для исправления ошибок, после чего они хранятся у учителя.

При просмотре тетрадей и оценке работ надо учитывать не только правильность решения задачи, примеров, но и качество записей, состояние тетради. Если ученик плохо пишет цифры, надо исправлять неправильные начертания, тут же написать эти цифры и предложить ученику по данному образцу написать цифры несколько раз. Если ученик плохо записывает действия, числа, то и в этом случае надо действовать показом.

Все свои записи и замечания учитель должен делать в ученической тетради аккуратно, чтобы они могли служить для ученика образцом для подражания.

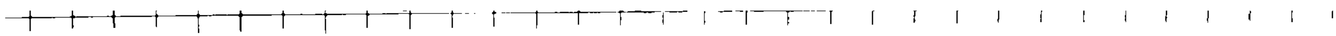


Рис. 1.

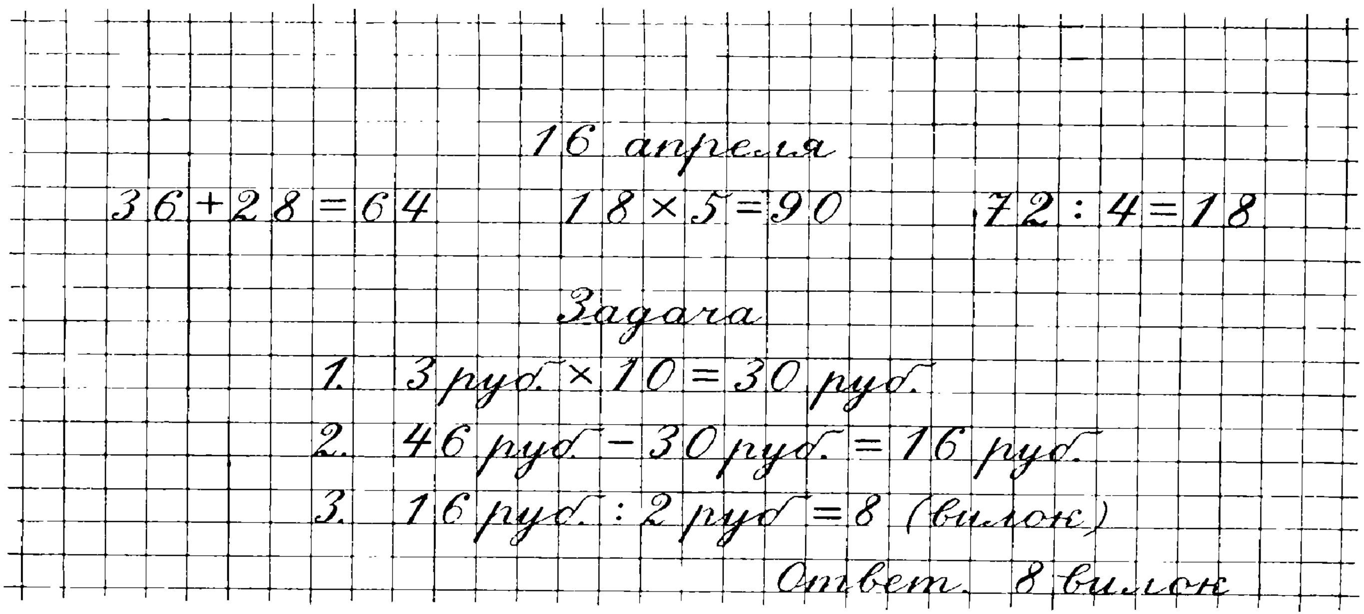

16 апреля
36 + 28 = 64
18 × 5 = 90
72 : 4 = 18
Задача
1. 3 руб. × 10 = 30 руб.
2. 46 руб. − 30 руб. = 16 руб.
3. 16 руб. : 2 руб. = 8 (вилок)
Ответ. 8 вилок

Рис 2

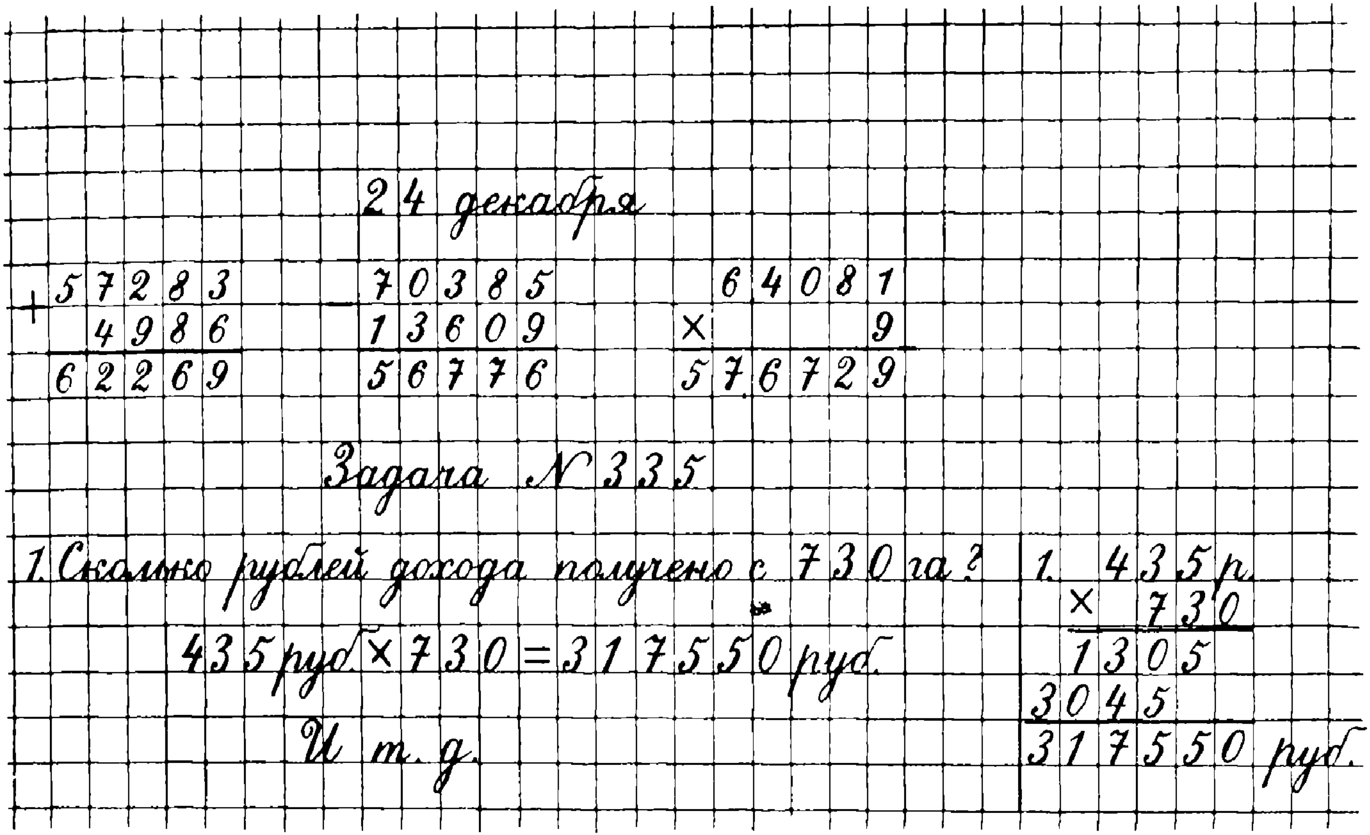

24 декабря
+57283
4986
62269
−70385
13609
56776
64081
×9
576729
Задача № 335
1. Сколько рублей дохода получено с 730 га?
435 руб.×730=317550 руб.
И т. д.
1. 435 р.
×730
1305
3045
317550 руб.

Рис. 3.

Как исправлять ошибки в тетрадях.

Если при выполнении работы допущена ошибка, ученику надо уметь найти эту ошибку и исправить её. Учителю не надо спешить с указанием ошибки и тем более с подсказом готового ответа.

Гораздо важнее научить ученика самостоятельно находить ошибку. Исправляя тетради, учителю достаточно во многих случаях только подчеркнуть ошибочный результат, а ученик сам должен определить, в чём состоит ошибка, и исправить её. Например, ученик II класса, решая пример 39 + 28, получил в ответе 66. Учителю в таком случае нужно подчеркнуть этот ответ и заставить ученика перерешить пример, найти в нём ошибку и исправить её

Но бывают случаи, когда самостоятельное нахождение и исправление ошибки для ученика трудно. Например, ученик IV класса, решая пример на деление (24 472 : 437), получил неверное частное (551 вместо 56) вследствие того, что взял неверную вторую цифру в частном (5 вместо 6), и получил остаток, равный делителю. Очевидно, ученик в данном случае недостаточно понял механизм письменного деления. Самостоятельно разобраться в этой ошибке ученику трудно. Поэтому учитель поступит правильно, если подчеркнёт не только неверный ответ, но и неверный остаток — 437. Можно сделать и ещё большее: дать тут же верное решение и написать: «Остаток всегда должен быть меньше делителя».

Правильное решение послужит для ученика образцом, по которому он должен по заданию учителя выполнить несколько аналогичных примеров.

При исправлении ошибки в примерах ученик должен все поправки делать аккуратно, неверные цифры зачёркивать и сверху записывать верные. Нельзя допускать исправления по написанным цифрам.

Сложнее обстоит дело с исправлением ошибок при решении задач. Там встречается целый комплекс ошибок, имеющих разные причины: ошибки мышления или ошибки логического порядка, ошибки в вычислениях, ошибки стилистического характера при записи вопросов. Каждый вид ошибок требует особого к себе подхода, особых приёмов исправления.

Логические ошибки находят своё выражение в неправильной постановке вопросов, в неправильной или неточной их формулировке. Если весь план неправильно составлен, то такая работа не поддаётся исправлению; её нужно перечеркнуть, а ученику подробно объяснить, как решается данная задача, и заставить его решать эту задачу заново. Если в работе неправильно сформулированы только некоторые отдельные вопросы, то эти вопросы исправляются учителем; учитель зачёркивает неправильно сформулированный вопрос и надписывает вопрос в правильной редакции.

Если допущена ошибка в вычислениях, то эту ошибку учитель подчёркивает, а ученик сам исправляет её. Если ошибка в вычислениях допущена в начале или в середине работы, но работа доведена до конца и привела к неправильному ответу, то достаточно подчеркнуть только первое неправильное вычисление и ответ; ученик же в таком случае должен вновь решить всю задачу.

Ошибки стилистического характера также исправляются учителем. Каждая ошибка, исправленная учителем, внимательно просматривается учеником, а подчёркнутая им, исправляется, причём, если нужно, ученик переписывает неверно решённую задачу в исправленном виде.

РЕШЕНИЕ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ.

Решение задач имеет большое значение в деле математического и общего развития учащихся. Велико значение задач для политехнического обучения. В доступной форме, не загромождая задачи сложной терминологией или громоздким текстом, они должны знакомить детей с элементарными вопросами из области производства и сельского хозяйства, научить детей составлять простейшие расчёты, сметы. Подробнее о значении задач сказано при анализе программ.

Задача и её элементы.

Арифметической задачей называется требование определить числовое значение искомых величин, если даны числовые значения других величин и указана зависимость, которая связывает эти величины как между собой, так и искомыми величинами.

Следует отличать задачу от примера. *Численным примером называется такое арифметическое выражение, в котором указаны действия и порядок их выполнения.* Даже самая простая задача отличается от примера тем, что действие, необходимое для решения, не указано, его надо выбрать.

Элементы задачи: а) числовые значения данных величин; б) условие задачи, выражающее зависимость между данными и искомыми; в) вопрос задачи, т. е. требование определить числовое значение искомой величины. Условие задачи, как и вопрос, формулируется чётко, ясно, немногословно. Числовые данные должны быть реальными и соответствовать программе.

Простые и составные задачи.

Задача называется простой, если она решается *одним действием*. Задачи, для решения которых требуются *два или более действия*, называются *составными*. Не следует думать, что отнесение задачи к простым говорит о «простоте», лёгкости её решения. Простые задачи бывают разной степени трудности. Некоторые простые задачи оказываются труднее, чем составные, и потому к их решению приступают после того, как учащиеся уже решают составные задачи. Так, например, задачи на разностное и кратное сравнение решаются во II классе, а простые задачи, связанные с зависимостью между компонентами действий и результатом, решаются в IV классе.

Значение простых задач. На простых задачах учащиеся знакомятся со структурой задачи и её составными элементами, научаются правильно применять арифметические действия, закрепляют навыки в арифметических вычислениях, познают простейшие зависимости между данными и искомыми величинами. Умение решать простые задачи является той основой, на которой строится умение решать составные задачи.

Виды простых задач. Основными видами простых задач, решаемых в начальной школе, являются:

1) *на сложение*: а) нахождение суммы; б) увеличение числа на несколько единиц;

2) *на вычитание*: а) нахождение остатка; б) уменьшение числа на несколько единиц; в) разностное сравнение двух чисел;

3) *на умножение*: а) нахождение суммы нескольких равных слагаемых; б) увеличение числа в несколько раз;

4) *на деление*: а) деление на равные части; б) уменьшение числа в несколько раз; в) нахождение части числа; г) деление по содержанию; д) кратное сравнение двух чисел.

Кроме указанных, выделяют простые задачи, выраженные в косвенной форме. Смысл этих задач заключается в том, что в них искомое находится на основании зависимости между компонентами действия и их результатом. Приведём примеры таких задач.

«После того, как мальчик отдал своему брату 2 карандаша, у него осталось 5 карандашей. Сколько карандашей было у мальчика?» Здесь по вычитаемому и остатку требуется найти уменьшаемое. Трудность решения задачи состоит в том, что термины «отдал», «осталось» ассоциируются с вычитанием, а задача решается сложением.

«Когда к лежавшим на тарелке яблокам добавили ещё 2 яблока, на тарелке стало всего 7 яблок. Сколько яблок было сначала на тарелке?» Здесь по сумме и одному слагаемому надо найти другое слагаемое. Трудность решения состоит в том, что слова: «добавили», «всего», «ещё» — ассоциируются со сложением, а задача решается вычитанием.

Существуют также задачи в косвенной форме для умножения и деления. Перечисленные виды простых задач являются лишь основными, и ими не исчерпывается всё разнообразие простых задач.

Обучение решению простых задач.

Для решения простой задачи ученик должен понять содержание задачи, расчленить её на условие и вопрос, суметь установить связь между элементами задачи. На основе этой связи ученик выбирает действие, решает задачу и получает ответ, как заключительный этап работы над задачей. Таким образом, первые шаги, связанные с обучением решению простых задач, заключаются в том, чтобы дети ознакомились с содержанием задачи и элементами. Постепенно учитель вводит термины: з а д а ч а, р е ш е н и е, в о п р о с, о т в е т, несколько позднее — у с л о в и е.

Наиболее трудным для учащихся является на первых порах выделение вопроса и повторение условия. Выделение вопроса является трудным потому, что задачи вначале решаются выполнением действий над предметами; ученик видит результат решения задачи (ответ) и не чувствует необходимости выделения вопроса. С трудом усваивают дети повторение условия, поэтому оно проводится различными приёмами, по частям, по наводящим вопросам учителя. Затем дети несколько раз повторяют условие целиком. Учитель предлагает отдельно повторить условие, отдельно вопрос, выдвигая сначала на первое место умение воспроизвести условие и выделить вопрос.

В простых задачах в вопросе заключается сущность задачи; он направляет мысль учащегося, помогает выбрать необходимое для решения действие. С усложнением задач углубляется и варьируется работа над вопросом задачи. По мере того как учащиеся изучают различные виды простых задач, учитель, сохраняя примерно тот же текст задачи, иногда меняет вопрос. Это обращает внимание учащихся на вопрос, показывает, как изменение вопроса влияет на изменение решения. Так, например, во II классе к задаче: «У девочки было 3 тетради в клетку и 6 тетрадей в линейку» — можно ставить вопросы: «Сколько всего было тетрадей? На сколько (или во сколько раз) тетрадей в линейку было больше, чем тетрадей в клетку? На сколько (или во сколько раз) тетрадей в клетку было меньше, чем тетрадей в линейку?»

Решение простой задачи происходит по следующим этапам

1) сообщение условия,
2) повторение условия,
3) выделение вопроса,
4) решение задачи,
5) формулировка ответа,
6) запись решения.

Р е ш е н и е з а д а ч и. Решение простой задачи состоит в выборе действия, выполнении этого действия, т. е. нахождении ответа. Первые задачи решаются с применением предметов (палочек, картинок), над которыми выполняются действия. Постепенно степень наглядности уменьшается, а тексты задач менее ясно выражают то действие, которое надо выполнить. Если, например, первые задачи на сложение сопровождаются фактическим сложением предметов и в задаче пользуются словом «прибавить», то затем меняется и условие задачи и степень наглядности. «В коробку положили сначала 4 карандаша, потом ещё 3 карандаша. Сколько всего положили карандашей в коробку?» Вместо «прибавили» — положили», вместо полной наглядности применяется частичная: в коробку кладут 4 карандаша, потом 3, а сумма уже не видна. В дальнейшем степень наглядности сокращается: «В коробке было 4 карандаша (они уже не видны), туда положили ещё 3 карандаша (их показывают). Сколько всего стало карандашей?» Так постепенно снижается роль наглядности, пока не наступает момент, когда можно полностью отказаться от применения наглядных пособий. Однако при переходе к новому виду простых задач необходимо вновь выполнить все этапы: а) решение сопровождается действием над предметами; б) широко применяется наглядность; в) формулировка задачи ясно указывает на то действие, которое следует применить; г) постепенно уменьшается наглядность и усложняются задачи.

Через некоторое время (примерно со второго месяца обучения в I классе) перед учащимися ставятся вопросы: «Как ты узнал? Как ты нашёл ответ? Как решил задачу?» Требуя полных ответов, учитель вводит, таким образом, объяснение решения.

Задачи, в которых нет вопроса, или задачи с недостающими данными (либо совсем без данных) помогают учащимся понять, что для выполнения действия необходимо иметь два числа.

Решение некоторых задач записывается. Вначале учащиеся записывают решение в тетрадях только после того, как учитель сделал эту запись на доске. О записи наименований будет сказано ниже.

Простые задачи являются той основой, на которой строится решение составных задач, поэтому работа над ними должна иметь место в течение всех четырёх лет обучения. Постепенно усложняя эти задачи, предлагая их в косвенной форме, требуя от учащихся обобщения простых задач, учитель добивается того, чтобы простые задачи были прочно усвоены учащимися. Значительную роль в этом деле играет решение простых задач во время устного счёта. Умение решать простые задачи различных видов, в различных формулировках, умение свободно ориентироваться в них в значительной степени облегчит учащимся решение составных задач.

Переход от простых задач к составным.

Переход к составным задачам, решаемым двумя действиями, является важным этапом в деле обучения решению задач. Этот переход имеет место в I классе при изучении второго десятка. Особенностью составной задачи, решаемой двумя действиями, является невозможность ответа на вопрос задачи без предварительного решения первой задачи. Ответ первой задачи даёт ту недостающую числовую величину, без которой нельзя выполнить второе действие.

Следовательно, при решении задачи в два действия главным является выяснение того, что надо узнать сначала и что можно будет узнать потом. Другими словами, ученики должны научиться составлять план решения.

Исходным моментом при решении первой составной задачи является задача, которая в процессе решения расчленяется на две простых. Рассмотрим решение следующей задачи: «В коробке было 8 перьев, туда положили ещё 6 перьев, а потом из коробки взяли 5 перьев. Сколько перьев осталось в коробке?» Учитель записывает данные: 8 пер.; 6 пер.; 5 пер. Решение задачи иллюстрируется на предметах. В коробку кладутся перья, оттуда вынимается 5 перьев. Для учащихся остаётся скрытым общее и оставшееся количество перьев.

После повторения условия задачи дети решают её в уме, находят ответ. Учитель показывает детям, что в коробке действительно осталось 7 перьев. На вопрос учителя, как они решали задачу, дети обычно отвечают: «От 12 перьев отнять 5 перьев, останется 7 перьев». Тогда учитель обращает внимание детей на данные числа в условии задачи, на то, что в нём нет числа 12, и спрашивает: «Откуда же взяли 12?» Смысл беседы направлен на то, чтобы установить: а) что сначала узнали, б) что потом узнали.

По вопросам учителя дети объясняют, что они узнали в первом действии и что — во втором действии. В результате на доске и в тетрадях учащихся фиксируется запись решения:

1) 8 пер. + 6 пер. = 14 пер.
2) 14 пер. — 5 пер. = 9 пер.

При помощи решения нескольких аналогичных задач учащиеся убеждаются в наличии задач, на которые сразу нельзя дать ответ, и что такие задачи решаются двумя действиями. При решении задачи в два действия учащиеся должны поставить вопрос к первой задаче, так как этого вопроса нет в условии задачи. Поэтому подготовительным упражнением является подбор вопроса к числовым данным. «Девочка собрала сначала 7 грибов, а потом ещё 5 грибов. Что можно узнать?» После решения нескольких задач ученики сами составляют задачи, решаемые двумя действиями. Полезным является придумывание задач к примерам; тем самым устанавливается связь между примером и задачей и ведётся подготовка к записи решения задачи при помощи числовой формулы.

При разборе задач, решаемых двумя действиями, надо ставить вопросы: «Можем ли сразу ответить на вопрос задачи? Почему не можем? Что мы сумеем сразу узнать? С чего начнём решение задачи?»

Некоторой подготовкой к решению составных задач служит решение таких пар простых задач, из которых вторая является как бы продолжением первой задачи. Например:

«Во дворе играли 6 мальчиков. Два мальчика ушли домой. Сколько мальчиков осталось во дворе?»

«Во дворе было 4 мальчика. Потом пришли ещё 3 мальчика. Сколько мальчиков стало во дворе?»

Такие упражнения имеются в задачнике для I класса при изучении первого десятка и ставят своей целью облегчить переход к составным задачам.

Составные задачи.

Решение составной задачи разбивается на следующие этапы: а) усвоение условия; б) разбор задачи; в) составление плана решения; г) решение, т. е. выполнение действий; д) формулировка ответа.

Эти этапы тесно связаны между собой, и нередко усвоение условия является уже и разбором задачи с попутным составлением плана и т. д.

В практике работы над задачей могут иметь место и дополнительные этапы: составление аналогичной задачи, проверка решения, запись решения числовой формулой и др. С другой стороны, в ряде случаев нет необходимости пройти все перечисленные выше этапы. Так, например, если для учащихся ход решения ясен сразу же после ознакомления с условием, то вслед за этим этапом можно приступить к составлению плана и решению задачи.

Усвоение условия задачи.

Первый этап — работа над условием задачи — состоит из двух звеньев: ознакомление с условием и изучение его содержания.

Ознакомление учащихся с условием задачи может происходить различным образом: учитель может изложить задачу в виде более или менее подробного рассказа; передать её содержание наизусть; прочитать по учебнику, сопровождая сообщение условия краткой записью данных (или графиком, или рисунком). Сообщение условия задачи может сопровождаться инсценировкой, показом картины или другими видами наглядности. Общеизвестна польза применения наглядности для ознакомления с условием задачи и для отыскания способа решения. Известно также, что степень наглядности уменьшается по мере продвижения учащихся из класса в класс. Вместе с тем слишком яркая наглядность, загромождённая рядом излишних деталей, может нередко отвлекать ученика от установления зависимости между величинами. С другой стороны, не всегда наглядность может быть убедительной; порой она только усложняет понимание условия, создаёт дополнительные трудности. Следовательно, нужно в каждом случае решать вопрос о полезности и необходимости применения наглядности и об удачном подборе формы наглядности.

Одной из форм ознакомления с условием является задание ученикам прочитать задачу самим.

При всех этих способах необходимо добиваться сознательного усвоения условия задачи. Для этой цели полезны: разъяснение некоторых слов, терминов; уяснение жизненного смысла задачи (кому и зачем приходится решать такие задачи); изменение в расположении текста условия. В некоторых случаях учителю или учащимся самим приходится прочесть задачу два-три раза, либо два-три раза повторить вопрос, либо выделить отдельные места из условия.

З а п и с ь у с л о в и я. Хорошо организованная запись условия не только является важным средством для ознакомления с содержанием задачи, но и помогает установлению зависимости между данными и искомыми величинами.

При краткой записи условия можно записать числовые данные на доске в том порядке, в каком они даны в условии, или придать записи вид схемы или таблицы. Поясним сказанное примерами.

З а д а ч а. В швейной мастерской из 100 *м* сатина сшили 12 платьев и 7 халатов. На каждое платье шло 5 *м* сатина, а на халат 4 *м*. Сколько метров сатина осталось?

Условие этой задачи можно записать так:

100 *м*	12 плат. по 5 *м* 7 хал. по 4 *м*	Сколько метров сатина осталось?

З а д а ч а. На трёх баржах доставлено 3020 *т* зерна: на первой 1306 *т*, а на второй на 128 *т* меньше, чем на первой. Сколько зерна доставлено на третьей барже?

Условие этой задачи можно записать в виде таблицы:

Баржи	Количество зерна
1-я	1306 *т*
2-я	на 128 *т* меньше, чем 1-я
3-я	?
Всего	3020 *т*

Или:

Всего 3020 *т*	На 1-й барже 1306 *т* На 2-й — на 128 *т* меньше, чем на 1-й На 3-й — ?

З а д а ч а. Одна артель получила заказ на пошивку 6400 фуражек для школьников, другая — 7250 фуражек. Через месяц первой артели осталось сшить 586 фуражек, а второй 1760 фуражек. На сколько больше сшила за месяц первая артель, чем вторая?

Запись условия таблицей:

Артели	Заказали фуражек	Сшили	Осталось сшить фуражек
1-я	6400	?	586
2-я	7250	?	1760

На сколько больше фуражек сшила за месяц первая артель, чем вторая?

Задача. Совхоз сдавал государству зерно в течение трёх дней, по 286 *т* ежедневно. После этого осталось сдать ещё 570 *т*. Сколько всего тонн зерна совхоз должен был сдать государству?

Графическая запись условия:

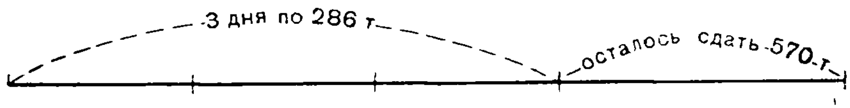


Рис 4

Краткая запись условия должна быть не только краткой, но и организованной, наглядной, помогающей лучше осознать зависимость между данными и искомыми величинами. Но в ряде случаев учитель может отказаться от наглядной записи условия, считая, что данную задачу ученик уже может решить и без такой записи. При решении нетрудных задач можно во многих случаях обойтись без записи условия.

Необходимо постепенно приучать детей самостоятельно оформлять запись условия при помощи схем, таблиц, графиков. Для этой цели следует практиковать выполнение таких заданий в порядке классной и домашней работы.

После записи условия ученики повторяют условие задачи по вопросам учителя или в целом, объясняют значение данных в задаче величин или чисел, иногда излагают сначала, о чём говорится в задаче, а потом уже целиком — с включением числовых данных.

Полезен пересказ учащимися условия своими словами. В отдельных случаях, в частности при решении многих устных или лёгких задач, при наличии подробной записи на доске, при уверенности учителя в том, что учащиеся легко справятся с решением, можно приступить к решению и без повторения условия. Это повысит темп урока и будет способствовать развитию памяти и внимания.

Давая задание на дом, необходимо почаще напоминать детям о том, что надо внимательно прочесть условие, иногда два-три раза, вдуматься в каждое слово, кратко записать условие (в отдельных случаях), повторить условие, не заглядывая в задачник, а потом уже приступить к обдумыванию хода решения и составлению плана.

Разбор задачи.

Убедившись в том, что условие понято и усвоено учащимися, учитель переходит к разбору задачи.

Исходным при разборе задачи может быть либо вопрос задачи, либо числовые данные. В первом случае рассуждение начинается с выяснения тех данных, которыми надо располагать для ответа на вопрос задачи. Если эти данные (или некоторые из них) отсутствуют, тогда возникают новые вопросы, для разрешения которых опять отыскиваются данные в условии. При отсутствии ответа на эти новые вопросы процесс разбора задачи продолжается в этом же направлении, т. е. в поисках данных, необходимых для решения вновь поставленных вопросов. Так продолжается постепенное расчленение составной задачи на простые до тех пор, пока не будут поставлены такие вопросы, для решения которых в условии имеются необходимые данные. После этого можно приступить к составлению плана и решению задачи.

При таком разборе задачи в мыслительном процессе преобладают элементы анализа. Разумеется, что, отыскивая необходимые данные для ответа на вопрос задачи, ученик всё время должен иметь в виду задачу в целом.

Разбор задачи может протекать в противоположном направлении, имея своим исходным пунктом числовые данные, отправляясь от которых решающий идёт к вопросу задачи. В этом случае разбор задачи заключается в отборе двух величин из числа имеющихся данных в условии задачи. К этим величинам подбирается вопрос, и таким образом составляется первая простая задача. Затем процесс повторяется: берутся ещё две величины (либо из условия, либо с использованием данных, полученных при решении предыдущих простых задач), вновь подбирается вопрос, и составляется следующая простая задача. Если в итоге такого разбора будет составлена такая (или такие) простая задача, вопрос которой совпадает с вопросом данной задачи, то можно приступить к решению. В этом разборе ведущими в мыслительном процессе выступают элементы синтеза.

Разумеется, что, подбирая пары чисел для составления простой задачи, ученик всё время должен иметь в виду главный вопрос задачи. (Из этих данных можно узнать следующее. А нужно ли это для решения задачи?)

Имея в виду, как это было сказано выше, что мыслительный процесс, связанный с разбором задачи, является аналитико-синтетическим, нельзя при разборе задачи оторвать вопрос задачи от данных или наоборот. Проиллюстрируем разбор задачи на конкретном примере.

З а д а ч а. Колхозник продал кооперативу 18 *кг* яблок по 4 руб. за 1 *кг* и 15 *кг* груш по 6 руб. за 1 *кг*. Часть полученных денег он израсходовал на покупку 9 *м* сатина по 14 руб. за метр. Сколько денег у него осталось?

Сначала изучается условие задачи: «О чём говорится в задаче? Что сказано о проданных яблоках? о проданных грушах? о купленном сатине?» Затем выясняется значение всех числовых данных, содержащихся в условии задачи. Наконец, переходят к вопросу: «Что же спрашивается в задаче?» После этого разбор задачи протекает в форме постановки вопросов аналитического порядка: «Что нужно знать для того, чтобы определить, сколько денег осталось у колхозника?»

Для ответа на вопрос задачи нужны данные: а) сумма денег, полученных за проданные фрукты; б) сумма, израсходованная на покупку сатина. Этих данных в условии нет, следовательно, теперь нужно решить две задачи: а) определить вырученную сумму; б) определить израсходованную сумму. Чтобы определить сумму, вырученную за проданные фрукты, нужно знать, сколько получено за яблоки и сколько за груши. Следовательно, задача «а» в свою очередь распадается на две новые задачи: в) определение суммы, полученной за яблоки; г) определение суммы, полученной за груши.

Для решения задачи «в» нужны данные: 1) количество проданных яблок; 2) цена 1 *кг* яблок. Эти данные в условии имеются. Аналогично решается вопрос в отношении определения суммы, вырученной за проданные груши. Остаётся определить израсходованную сумму. Для ответа на этот вопрос нужны данные: 1) количество купленного сатина; 2) цена 1 *м* сатина. Эти данные в условии имеются. На основе этого разбора можно составить план решения. Сначала узнаем, сколько колхозник получил за яблоки, затем узнаем, сколько он получил за груши. Потом мы сумеем узнать, сколько он получил денег за все фрукты. После того как мы узнаем, сколько денег он израсходовал на покупку сатина, мы сумеем узнать, сколько денег у него осталось, т. е. ответить на вопрос задачи.

Схематически такой путь разбора задачи показан на рисунке 5.

Но эту задачу можно было бы разобрать по-иному, исходя из данных, ставя вопросы синтетического порядка. В этом случае разбор может протекать примерно так. Сначала, как и в первом образце разбора, идёт ознакомление с содержанием задачи: «О чём говорится в задаче? Что сказано о проданных яблоках?» и т. д.

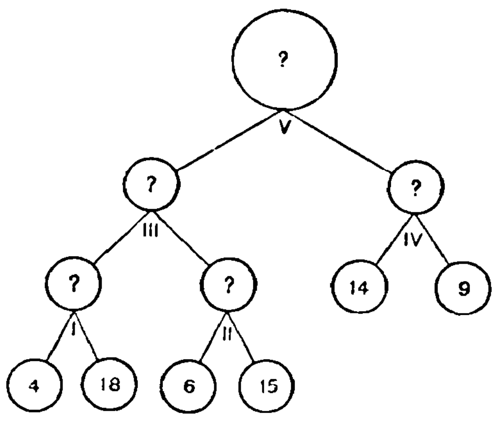


Рис. 5.

Далее учитель сосредоточивает внимание детей на вопросе задачи и на тех данных, которые нужны для ответа на вопрос задачи. Учитель добивается, чтобы ученики установили, что для определения остатка денег у колхозника, надо знать, сколько он выручил и сколько он израсходовал. После этого учитель обращается к данным и беседа принимает следующий характер: «Нам нужно знать, сколько колхозник выручил за проданные яблоки и груши. Посмотрите на условие. Какие имеются данные о количестве проданных яблок и о цене 1 *кг* яблок? Что можно будет узнать?» Таким образом, ученики составят простую задачу с вопросом: «Сколько колхозник получил за проданные яблоки?» Аналогично будет составлена простая задача с вопросом: «Сколько получил колхозник за проданные груши?» Дальнейший ход беседы: «Нам нужно знать, сколько всего получил колхозник за проданные фрукты. Какие мы получим данные о сумме, вырученной колхозником за яблоки? за груши? Что мы сумеем узнать?» В результате появится простая задача с вопросом: «Сколько денег колхозник получил за все проданные фрукты?» Колхозник израсходовал часть полученных денег. «Что он купил? Посмотрите на условие. Какие даны числа, по которым можно будет узнать, сколько денег израсходовал колхозник?» Так появится задача с вопросом: «Сколько денег израсходовал колхозник на покупку сатина?» Наконец: «Узнали мы, сколько денег получил колхозник за фрукты? Узнали мы, сколько он заплатил за сатин? Что спрашивается в задаче? Можем мы ответить на вопрос задачи?» В результате ставится вопрос: «Сколько денег осталось у колхозника?»

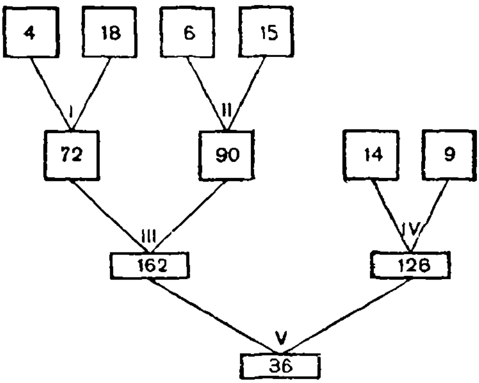


Рис. 6

Схематически такой путь разбора задачи показан на рисунке 6.

Из приведённого примера видно, что при разборе задачи мыслительная деятельность ученика носит аналитико-синтетический характер, переключаясь от условия и данных к вопросу и обратно.

Ученик непрерывно связывает вопрос задачи с её условием. Для этого он продумывает вопрос о необходимых данных для решения задачи и, тщательно изучая условие, определяет, какие имеются данные в задаче и как их надо использовать, каких данных нет и как их отыскать. Составляя из данных в условии величин простые задачи, ученик всё время связывает составленные им задачи с вопросом, т. е. определяет, будут ли эти задачи приближать его к решению задачи в целом. На конкретных примерах следует неоднократно показывать ученику, что нельзя брать из условия задачи первые попавшиеся данные и придумывать к ним какие-нибудь вопросы, т. е. надо предостерегать ученика от механических манипуляций над числами. Надо учить тому, что если избранный приём не привёл к решению, то следует ещё раз внимательно изучить условие и сделать попытку (может быть, не одну) применить другой приём.

Так как разбор задачи состоит столько же в подыскании данных, необходимых для решения задачи, сколько и в объединении имеющихся данных для составления задач, то полезны упражнения в виде простых задач с недостающими данными или с отсутствующим вопросом.

Примеры. 1) Купили мяч за 5 руб. и куклу. Сколько всего заплатили за игрушки? 2) Купили мяч и куклу. Сколько всего заплатили за игрушки?

Такие упражнения помогают учащимся понять, что для решения простой задачи нужно иметь две данные величины. Вместе с тем следует предлагать учащимся задачи, в которых имеются данные, но нет вопроса, и предлагать им подобрать вопрос. «В одном бидоне 12 *л* молока, а в другом 4 *л*». К этим данным могут быть поставлены вопросы: 1) Сколько литров молока в двух бидонах? 2) и 3) На сколько литров молока в одном бидоне больше (меньше), чем в другом? 4) и 5) Во сколько раз в одном бидоне больше (меньше), чем в другом? Такие упражнения приучают детей к составлению задач и к выбору действия в зависимости от поставленного вопроса. Важную роль при разборе задачи играет постановка вопроса «Почему?»

Пример. Велосипедист в первый день был в пути 5 часов, а во второй день 7 часов, причём скорость движения была одинаковой. Во второй день он проехал на 24 *км* больше, чем в первый. Сколько километров проехал велосипедист за два дня?

При разборе этой задачи полезен вопрос: «Почему велосипедист во второй день проехал на 24 *км* больше, чем в первый?»

Составление плана и запись решения задач.

После того как проведён разбор задачи, необходимо составить план решения, т. е. наметить те простые задачи и тот порядок их расположения, который приведёт к решению данной задачи. Составление плана, как правило, должно предшествовать решению задачи. В тех же случаях, когда решение задачи несложно, числовые данные невелики, вычисления выполняются устно, составление плана может протекать параллельно с решением. В младших классах план излагается в устной форме, а в III и IV классах также и в письменной форме. Следует приучать к рациональному расположению записи вычислений. Так, например, при устном выполнении вычислений действие записывается в строчку. «Сколько километров прошёл поезд за 8 часов при скорости 60 *км* в час?»

$$60 \text{ км} \times 8 = 480 \text{ км}.$$

При записи решения задач следует максимально использовать устные и полуписьменные вычисления. Когда же вычисления выполняются письменно, то надо обращать внимание на рациональное их расположение в тетради (образцы записей даны ниже). Если запись действия даётся в строчку вслед за вопросом, а вычисление выполняется в столбик, то нередко для упрощения можно воспользоваться переместительным свойством умножения или сложения. Так, например, в строчку запишем: $37 \text{ м} \times 2348 = 86\,876 \text{ м}$, а вычисление столбиком выполним так: $\begin{array}{r} 2348 \\ \times 37 \end{array}$, не ставя наименований.

В I классе, когда дети приступают к решению задач, наименования у компонентов не ставятся, но запись читается так, как будто бы при числах имеются наименования. Например, запись $3 + 1 = 4$ читается: «К трём яблокам прибавить одно яблоко, получится четыре яблока». По мере того как дети научаются писать буквы, запись наименования даётся одной буквой: 3 к. + 1 к. = 4 к., где к. означает карандаш. На следующих этапах имеет место переключение на обычную форму записи: дер. (деревья), сат. (сатин), пион. (пионеры). В некоторых случаях при записи наименований их приходится обобщать: вместо «мальчиков и девочек» — «детей» (или «учеников», или «туристов»), вместо «сосен и берёз» — «деревьев» и т. д.

Грамотной записи при решении арифметических задач придаётся такое же значение, как и в упражнениях по русскому языку. При записи вопросов нельзя допускать сокращённой записи слов. Запись «Сколько метров сатина продано в первый день?» не может быть дана в таком виде: «Ск. *м* сат. прод. в 1-й день?»

В классе часть задач решается учениками с письменным планом либо под руководством учителя, либо самостоятельно. В первое время, когда происходит переход к решению задач с письменным планом, необходимо решить в классе некоторое количество задач с записью плана на доске и в тетрадях, чтобы подготовить детей к самостоятельному выполнению таких заданий. Кроме того, запись плана должна иметь место тогда, когда решается задача нового вида или типа или же задача, в которой трудна формулировка вопросов. Вообще же запись плана отнимает много времени, и поэтому больше решается задач с устным планом и записью действий, чем с письменным планом. В домашних заданиях от учащихся обычно требуется решение задачи с письменным планом, чего, однако, не следует делать в отношении всех задаваемых задач.

И в домашних заданиях нужно варьировать требования, предлагая некоторые задачи для решения с письменным планом, другие — с записью только действий или же для устного решения.

Следует применять различные виды записи плана и объяснения решения.

Рассмотрим эти виды записей.

Задача. Для детского дома купили 96 *м* сатина и 70 *м* полотна. 1 *м* сатина стоит 12 руб., а 4 *м* полотна стоили столько, сколько 5 *м* сатина. Сколько стоила вся покупка?

Запись плана в форме вопросов и следующих за ними действий:

1. Сколько рублей уплатили за 96 *м* сатина?

$$12 \text{ руб.} \times 96 = 1152 \text{ руб.}$$

2. Сколько рублей уплатили за 4 *м* полотна?

$$12 \text{ руб.} \times 5 = 60 \text{ руб.}$$

3. Сколько стоил 1 *м* полотна?

$$60 \text{ руб.} : 4 = 15 \text{ руб.}$$

4. Сколько рублей уплатили за 70 *м* полотна?

$$15 \text{ руб.} \times 70 = 1050 \text{ руб.}$$

5. Сколько стоила вся покупка?

$$1152 \text{ руб.} + 1050 \text{ руб.} = 2202 \text{ руб.}$$

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}12\\96\end{array}\\ \hline 72\\ +\,108\\ \hline 1152 \end{array} \qquad \begin{array}{r} +\begin{array}{r}1152\\1050\end{array}\\ \hline 2202 \end{array}$$

Ответ. Вся покупка стоила 2202 руб.

Запись плана, в котором вопросы отделены от решения.

План решения.

1. Сколько рублей уплатили за 96 *м* сатина?
2. Сколько рублей уплатили за 4 *м* полотна? И т. д.

Решение.

1. 12 руб. $\times$ 96 = 1152 руб.
2. 12 руб. $\times$ 5 = 60 руб. И т. д.

Запись плана в виде утвердительных предложений.

1. Стоимость 96 *м* сатина:

$$12 \text{ руб.} \times 96 = 1152 \text{ руб.}$$

2. Стоимость 4 *м* полотна:

$$12 \text{ руб.} \times 5 = 60 \text{ руб.} \qquad \text{И т. д.}$$

Примечание. В этой записи план также может быть отделён от решения.

Наиболее доступной и распространённой является первая из указанных форм записи. Она и должна занимать преобладающее место в начальной школе. Вместе с тем полезно обучать детей и другим видам записи. Запись, когда план отделяется от решения, представляет собой более высокую ступень и повышает математическую культуру ученика. Запись плана в утвердительной форме приучает к сжатой и чёткой математической речи.

Объяснение при решении задач.

Уже с первых шагов обучения решению задач учителя добиваются от учеников объяснения решения. Это требование первоначально выражается в том, что ученик рассказывает, что он сделал (прибавил, отнял и т. д.), затем появляется вопрос «почему?» («зачем?», «что мы сумеем потом узнать?»).

Сначала ученики по наводящим вопросам учителя дают краткое объяснение, которое постепенно становится более полным; дети сами формулируют вопросы в устной, а затем и в письменной форме, научаются самостоятельно излагать план и решение составной задачи, объясняя при этом выбор действий, ход рассуждений, полученный результат. Учитель должен сам излагать в развёрнутом виде объяснение решения некоторых задач, показывая тем самым образец объяснения, по которому должны равняться ученики.

Требовать от учащихся развёрнутого объяснения решения в письменной форме не следует ввиду трудности этого для детей данного возраста. Однако несложные письменные пояснения результатов действий вполне доступны учащимся начальной школы и должны применяться.

В приведённой выше задаче такая форма объяснения приняла бы вид:

1) 12 руб. $\times$ 96 = 1152 руб. уплатили за сатин.
2) 12 руб. $\times$ 5 = 60 руб. стоят 4 *м* полотна.
3) 60 руб. : 4 = 15 руб. — цена 1 *м* полотна. И т. д.

Числовая формула.

Решение ряда задач может быть записано при помощи числовой формулы, объединяющей все действия, необходимые для решения данной задачи. Эта работа начинается в конце третьего года обучения и продолжается в IV классе. Умение составлять числовые формулы помогает более сознательному усвоению порядка действий, пониманию роли скобок и подготавливает к изучению буквенных формул. Числовые формулы показывают связь между примером и задачей. Сначала формулы составляются для тех случаев, когда не требуется применения скобок, начиная с задач в одно-два действия, а затем и для тех, когда нужно воспользоваться круглыми скобками.

Решение задачи выполняется в обычном порядке, а затем записывается в виде строчки. Покажем это на задачах.

«На фабрике из 872 *м* сатина сшили платья для взрослых, а из 528 *м* — для детей. На платье для взрослого шло по 4 *м* сатина, а на детское — по 2 *м*. Сколько всего сшили платьев?»

Сначала решение записывается так:

1) 872 *м* : 4 *м* = 218 (плат.);
2) 528 *м* : 2 *м* = 264 (плат.);
3) 218 плат. + 264 плат. = 482 плат.

После этого решение записывается в строчку:

$$872 : 4 + 528 : 2 = 482 \text{ (плат.)}.$$

В числовой формуле наименования не пишутся при компонентах, а только в результате.

После нескольких таких упражнений учащимся предлагается записать решение несложных задач сразу при помощи числовой формулы. Следующим этапом является введение скобок в числовую формулу, при этом предварительно повторяются примеры на порядок действий.

Затем решается задача примерно такого вида: «Расстояние между двумя городами 350 *км*. Одновременно из этих городов вышли навстречу два поезда: грузовой, проходивший по 30 *км* в час, и почтовый, проходивший по 40 *км* в час. Через сколько часов поезда встретились?»

Решение: 1) 30 *км* + 40 *км* = 70 *км*;
2) 350 *км* : 70 *км* = 5 (час.).

Запись числовой формулой. а) 350 : 30 + 40. Такая запись показывает учащимся, что нельзя будет получить нужного результата, так как сначала по ходу решения надо сделать сложение, между тем при записи 350 : 30 + 40 следует сначала сделать деление в соответствии с существующим порядком действий. Необходимо нарушить установленный порядок действий и сначала выполнить сложение, а потом деление. Это достигается при помощи скобок, и числовая формула примет вид: 350 : (30 + 40) = = 5 (час.).

После этого решаются задачи на составление формул как со скобками, так и без них. Необходимо учесть трудность составления формул, и поэтому следует ограничиться задачами в 3, 4, 5 действий, подбирая такие задачи, решение которых приводит к несложным числовым формулам.

ОСНОВНЫЕ ПРИЁМЫ РАБОТЫ НАД ЗАДАЧАМИ.

Изучение зависимости между величинами.

Важным условием для умения решать задачи является знание зависимости между величинами, что облегчает нахождение тех величин, которые нужны для ответа на вопрос задачи. Работа в этом направлении ведётся уже с первого класса. Начиная с III класса следует систематически работать над обобщением понятий о зависимости между величинами, в особенности над теми, которые наиболее часто встречаются на практике и в задачах: цена, количество, стоимость; скорость, время, путь; расход материала на одно изделие, количество изделий и общий расход материала; оплата труда, время, общий заработок; площадь, урожай с гектара, общий сбор и т. д.

Эта работа может протекать примерно так. Решается ряд задач, в которых нужно узнать стоимость всей покупки. Учащиеся сами составляют аналогичные задачи. На основе этой работы проводится обобщение. Что же надо знать, чтобы ответить на вопрос, сколько всего уплачено денег? Надо знать, сколько предметов купили и сколько платили за каждую вещь.

Подтверждая правильность таких ответов, учитель указывает, что обычно говорят: надо знать количество купленных предметов и цену одного предмета, тогда можно будет узнать общую стоимость.

Аналогично с этим учащимися решается и составляется ряд задач, в которых по данной стоимости и количеству определяется цена или по данной стоимости и цене определяется количество. Когда зависимость в достаточной степени усвоена, учитель ставит перед учащимися вопросы в отвлечённой форме, уже не прибегая к числовым данным или к условию задачи. Какие данные нужны для определения стоимости? (Количество и цена.) Какие данные нужны для определения цены? (Стоимость и количество.) Что мы сумеем узнать, если будем знать количество и цену? (Стоимость.) Как мы это узнаем? (Число, показывающее цену, умножим на число, показывающее количество.) Что мы сумеем узнать, если нам известны стоимость и количество? (Цену.) Как мы это узнаем? (Число, показывающее стоимость, разделим на число, показывающее количество.) Составьте задачу на определение стоимости (или количества, или цены). Как вы составили задачу? Какие вы взяли данные? (Количество и цену.) Составьте задачу, в которой известны стоимость и цена. Что вы будете узнавать в этой задаче?

Таким же образом проводится усвоение зависимости между скоростью, временем и пройденным расстоянием и ряда других зависимостей. Видоизменяя эти упражнения, можно им придать и другой характер. Например: какие величины могут встретиться в задачах, в которых надо будет узнать заработок каждого рабочего, количество собранной пшеницы, расход горючего материала, количество израсходованного (оставшегося) материала на пошивку каких-то изделий (пальто и костюмов или платьев детских и взрослых), объём воды, наполняющей бассейн при совместной работе двух труб, и т. д.?

Составление задач учащимися.

Составление задачи самими учениками помогает понять структуру задачи и роль её элементов, глубже понять зависимость между величинами и применять её в задачах. Составление задач — это творческий процесс, способствующий развитию детской самодеятельности, инициативы и находчивости, а также устной и письменной речи. Всё это ведёт к повышению интереса к предмету, даёт удовлетворение «составителю» задачи, в особенности при одобрении учителя, и рождает стимул для дальнейшей работы.

Составление задач (а также и примеров) даёт хороший результат, если эта работа проводится систематически, с использованием различных приёмов, с постепенным усложнением заданий по составлению задач и находится в тесной связи с решением готовых задач.

Составление задач учащимися может их подвести к обобщениям, в частности в отношении задач, сходных по способу решения. Необходимо следить за реальностью данных, выбираемых учениками для своих задач, расширяя их полезные практические сведения, например об урожайности, удойности, скоростях движения и т. д.

Составление задач надо начинать с I класса.

Преимущественно задачи составляются учениками устно, однако в III классе и главным образом в IV классе могут иметь место задания на дом на составление задач в письменной форме. Полезны упражнения на составление задач на основе краткой записи условия. Умение давать краткую запись условия, в особенности в виде схемы, и составление задачи на основе такой записи, взаимно дополняя друг друга, помогают ученику понять структуру составной задачи. При всей полезности работы по составлению задач учениками следует иметь в виду, что эта работа играет вспомогательную роль; главным остаётся решение готовых задач.

Виды работы по составлению задач учениками.

В практике работы школ применяются самые разнообразные виды заданий по составлению задач учениками. Широкое применение имеют задания с использованием картинок, плакатов, в которых нарисованы предметы и имеются числовые данные, например цены, количество. Ученикам может быть предложено составить задачи на определённые числа (именованные или отвлечённые) либо на заданные действия без заданных чисел («Составьте задачу в два действия: сложение и вычитание» и т. д.). Широко практикуется составление задач по аналогии с решёнными задачами (на увеличение числа на несколько единиц или в несколько раз), определённого вида (на движение, на приведение к единице и т. д.). Нередко ученикам предлагается составить задачи:

по примерам (к данному примеру составить задачу, особенно в порядке домашних заданий, к решаемым «столбикам»);

по числовой формуле: составьте задачу, которая решалась бы так: а) $(45 + 35) \times 8$; б) $960 - 720 = 240$; $240 : 60 = 4$, в) $960 : (35 + 45 + 40)$;

дополнить задачу недостающими данными или вопросом или закончить условие и поставить вопрос.

а) Швейная мастерская сшила ... платьев из сатина и ... из ситца. На платье из сатина шло ... метров, а из ситца ... метров Сколько всего израсходовано материала?

б) Туристы ехали 36 часов поездом и 8 часов на автомашинах Скорость поезда 40 *км* в час. Дополнить задачу и решить её.

Составление обратных задач.

Каждая из этих форм может различным образом варьироваться, принимать интересный, увлекательный характер. Учащиеся не только с интересом выполняют эти упражнения, но и чувствуют, что они полезны для них, помогают им в овладении умением решать готовые задачи.

Следует учитывать трудности, с которыми связана для детей работа по составлению задач, и те ошибки, которые ими допускаются. Помимо подбора нереальных данных или неверной жизненной ситуации, в составляемых задачах ученики допускают различные ошибки, основанные на неверном применении арифметических действий, на непонимании зависимости между величинами и др. Ошибки при составлении задач могут явиться следствием того, что задание на составление задачи дано тогда, когда ученики ещё недостаточно усвоили или поняли задачу того или иного вида или типа. Так, например, непонимание различия между увеличением (уменьшением) числа на несколько единиц или в несколько раз, недостаточное понимание задач на встречное движение, на тройное правило и других приводит к тому, что ученики не справляются с составлением подобных задач. Поэтому надо осторожно подходить к этим заданиям и проводить подготовительные упражнения. Сначала составление задач находится под непосредственным руководством учителя, и переход к самостоятельному составлению задач детьми проводится тогда, когда есть уверенность в том, что ученики смогут справиться с этой работой.

Самостоятельное решение задач учащимися.

Без самостоятельной работы учащихся невозможно овладение ими умением решать задачи.

Самостоятельное решение задач учениками укрепляет навыки в решении задач и составлении плана решения. Наблюдая за ходом работы учеников, учитель проверяет усвоение решаемых в данное время задач, а также прочность усвоения изученных ранее видов задач, обнаруживает пробелы в знаниях учащихся. Самостоятельные работы учащихся помогают им выполнять домашние задания.

К самостоятельной работе нужно подготавливать учеников посредством коллективной работы. Задание должно быть посильным для учеников. Во время самостоятельной работы учитель ведёт наблюдение за работой класса в целом и отдельных учащихся, оказывая помощь наиболее слабым ученикам. Всякая самостоятельная работа должна быть проверена. Это достигается либо наблюдением за работой учеников, либо записью решения на доске или изложением учащимися хода решения, либо проверкой учителем работы на дому.

Виды самостоятельной работы.

Будучи чрезвычайно разнообразной по своему содержанию и целям, самостоятельная работа организуется самым различным образом. Укажем некоторые из практикуемых приёмов проведения самостоятельной работы в классе по решению задач, имея в виду различную степень самостоятельности учеников.

Задача решается на доске, решение потом стирается или завешивается, а ученикам предлагается записать решение в тетрадях (только действия или же вопросы и действия). Варьируя этот приём, можно на доске записать только результаты каждого действия, а учащиеся потом решают задачу самостоятельно, контролируя своё решение по записям на доске. Возможно разобрать и решить коллективно часть задачи, предложив учащимся самим закончить решение задачи. Степень самостоятельности повышается, если разбор задачи, составление плана и выбор действий выполняются устно, после чего ученики сами выполняют решение, либо же устно составляется план (только вопросы), а ученики должны выбрать действия и записать решение в тетрадях. Наконец, работа может носить вполне самостоятельный характер, если ученикам предлагается решить такие-то номера задач по учебнику. В случае необходимости могут быть даны предварительные указания к решению.

Индивидуальная самостоятельная работа отдельных учеников может идти параллельно с коллективной. В классе всегда найдётся несколько учеников, которые решат задачу быстрее, чем это сделано на доске, или ранее других выполнят самостоятельную работу. Чтобы не оставлять их в бездействии, учитель должен иметь в запасе дополнительные задачи (написанные на листочках или подобранные из задачника) и предлагать их этим учащимся.

Можно разобрать решение одной-двух задач, фиксируя на доске только краткую запись условия. От учащихся требуется потом самостоятельно записать в тетрадях решение этих задач.

Весьма удобной формой самостоятельной работы является использование карточек. Комплекты таких карточек даны в сборниках Н. С. Поповой «Дидактический материал по арифметике», получивших широкое распространение в школе. Эти карточки можно использовать самыми различными способами в процессе самостоятельной работы учащихся по решению задач.

Решение задач различными способами.

Использование различных способов решения задач является одним из ценных методических приёмов в деле обучения решению задач. Подход к решению одной и той же задачи различными путями способствует более глубокому пониманию зависимостей, содержащихся в задаче. Решение задач различными способами воспитывает у детей умение сравнивать различные способы решения и оценивать преимущества более рационального, экономного способа решения. Учитель обращает внимание учеников на новаторов производства, на рационализаторов и изобретателей, которые находят лучшие способы работы, повышают производительность труда.

Необходимо всячески поощрять работу учащихся в данном направлении, ставить им повышенные оценки за удачный или оригинальный способ решения. Даже тогда, когда новый способ не содержит заметных преимуществ, сам по себе процесс его отыскания заслуживает поддержки, так как он способствует развитию ученика. Учитель должен внимательно выслушивать заявления учащихся о применённых ими других способов решения, подтверждая правильность предлагаемых способов решения или разъясняя их непригодность или нецелесообразность.

Возможность решения задач различными способами вытекает из математической структуры задачи. Можно указать значительную группу задач, решение которых основано на формуле $ac \pm bc = (a \pm b)c$ или $a : c \pm b : c = (a \pm b) : c$, т. е. на применении распределительного закона умножения или деления относительно сложения или вычитания, что позволяет решать эти задачи не тремя, а двумя действиями. В частности, это относится ко многим задачам на движение. Например: «Два поезда вышли одновременно навстречу из двух городов и встретились через 5 часов. Один из поездов шёл со скоростью 45 *км* в час, а другой — 60 *км* в час. Найти расстояние между городами».

Решение.

I способ. 1) 45 *км* $\times$ 5 = 225 *км*
2) 60 *км* $\times$ 5 = 300 *км*
3) 225 *км* + 300 *км* = 525 *км*

II способ. 1) 45 *км* + 60 *км* = 105 *км*
2) 105 *км* $\times$ 5 = 525 *км*

З а д а ч а. В одном куске 32 *м* сукна, а в другом 28 *м* такого же сукна. 1 *м* сукна стоит 180 руб. На сколько первый кусок сукна стоит больше второго?

Р е ш е н и е.

I с п о с о б. 1) 180 руб. $\times$ 32 = 5760 руб.
2) 180 руб. $\times$ 28 = 5040 руб.
3) 5700 руб. — 5040 руб. = 720 руб.

II с п о с о б. 1) 32 *м* — 28 *м* = 4 *м*
2) 180 руб. $\times$ 4 = 720 руб.

Второй способ не только даёт экономию в одно действие, но и настолько упрощает решение, что оно выполняется устно.

Усложняя указанную выше формулу, получаем большую группу задач, решение которых примет вид:

$$ab \pm ac + de \pm fe = a(b \pm c) + e(d \pm f).$$

З а д а ч а. Один ученик купил 8 тетрадей по 14 коп. и 5 карандашей по 18 коп., а другой ученик — 11 таких же тетрадей и 7 карандашей. Сколько они уплатили всего за покупки?

Р е ш е н и е.

I с п о с о б. 1) 14 коп. $\times$ 8 = 112 коп.
2) 18 коп. $\times$ 5 = 90 коп.
3) 112 коп. + 90 коп. = 202 коп. = 2 руб. 02 коп.
4) 14 коп. $\times$ 11 = 154 коп. = 1 руб. 54 коп.
5) 18 коп. $\times$ 7 = 126 коп. = 1 руб. 26 коп.
6) 1 руб. 54 коп. + 1 руб. 26 коп. = 2 руб. 80 коп.
7) 2 руб. 02 коп. + 2 руб. 80 коп. = 4 руб. 82 коп.

II с п о с о б. 1) 8 тет. + 11 тет. = 19 тет.
2) 14 коп. $\times$ 19 = 266 коп. = 2 руб. 66 коп.
3) 5 кар. + 7 кар. = 12 кар.
4) 18 коп. $\times$ 12 = 216 коп. = 2 руб. 16 коп.
5) 2 руб. 66 коп. + 2 руб. 16 коп. = 4 руб. 82 коп.

В практике работы мы находим весьма значительное количество задач, допускающих различные способы решения, причём эти способы равноценны. С этим особенно часто встречаются учителя при проверке домашних заданий, когда многие ученики заявляют, что они решали задачу другим способом. Эти способы решений обычно отличаются лишь порядком расположения действий, и математической их основой являются законы действий и следствия из них, в частности свойства ряда сложений и вычитаний или же ряда умножений и делений. Так, например: $a + b - c = a - c + b$, если $a \geqslant c$; $a \cdot b : c = a : b \cdot c$, если $a \vdots c$; $ab + cd - ef = cd + ab - ef = ab - ef + cd$, если $ab \geqslant ef$, и т. д.

Разумеется, здесь возможно значительное количество различных комбинаций, поэтому и решение многих задач допускает перестановку порядка действий. Учитель должен быстро ориентироваться в возможности изменения порядка расположения вопросов: это облегчит ему проверку решения.

Задача. Бригада шофёров, работая во время хлебозаготовок на трёх машинах, делала по 5 рейсов в день и грузила по 22 *ц* зерна на машину. Сколько зерна доставила бригада за 21 день работы?

На основе переместительности и сочетательности умножения имеем: $abcd = (ab)cd = (bc)ad = (ad)bc$ и т. д., поэтому возможны различные способы решения.

I способ.
1) 5 рейс. $\times$ 3 = 15 рейс.
2) 22 *ц* $\times$ 15 = 330 *ц*
3) 330 *ц* $\times$ 21 = 6930 *ц*

II способ.
1) 5 рейс. $\times$ 3 = 15 рейс.
2) 15 рейс. $\times$ 21 = 315 рейс.
3) 22 *ц* $\times$ 315 = 6930 *ц*

III способ.
1) 22 *ц* $\times$ 3 = 66 *ц*
2) 66 *ц* $\times$ 5 = 330 *ц*
3) 330 *ц* $\times$ 21 = 6930 *ц*

IV способ.
1) 22 *ц* $\times$ 5 = 110 *ц*
2) 110 *ц* $\times$ 3 = 330 *ц*
3) 330 *ц* $\times$ 21 = 6930 *ц*

В зависимости от способа решения меняются и формулировки вопросов. Возможны и другие способы решения этой задачи. Ученики не могут, конечно, сразу ориентироваться в том, что выбранный ими путь решения ничем по существу не отличается от решения другими учениками, но учитель обязан предвидеть разнообразные способы, которыми ученики могут решить ту или иную задачу. Порой простое применение переместительного и сочетательного свойства ряда сложений и вычитаний может дать более рациональный способ решения. Так, например, при решении задачи вида $a - b + c - d + l$ возможны способы:

I	1) $a - b = m$	II.	1) $a + c + e = f$
	2) $m + c = p$		2) $b + d = t$
	3) $p - d = f$		3) $f - t = l$
	4) $k + e = l$		

Примечание. Имеется в виду такое соотношение данных, при котором задача решается в положительных числах.

Можно указать различные методические приёмы решения задач несколькими способами. При проверке домашнего задания может обнаружиться, что ученики решали задачу различными способами. Нередко эти способы настолько близки друг к другу, что нет смысла выделять время на их рассмотрение. Учитель ограничивается кратким пояснением о возможности применения этих способов. Если же какой-либо из способов заслуживает предпочтения, то путём разбора применённых способов решения можно установить их сравнительную ценность. Если ученики решили задачу нерациональным способом, то учитель объясняет возможность более краткого и удобного решения.

В тех случаях, когда возможен лучший способ решения, учитель может предложить ученикам решить задачу вторично, другим способом. Следует также использовать в порядке классной и домашней работы указание в учебнике к некоторым задачам: «Решить двумя способами».

Признавая ценность и полезность применения различных способов решения, следует подчеркнуть необходимость соблюдать чувство меры. Не нужно излишне перегружать учащихся требованиями о решении задач различными способами. Использование различных способов решения следует применять тогда, когда оно способствует лучшему пониманию зависимости между величинами, развивает сообразительность учащихся, даёт заметный эффект в смысле экономии сил и времени при решении задачи, способствует проверке решения, — словом, тогда, когда это разумно и целесообразно.

Решение задач различными способами может быть с успехом использовано во внеклассной (кружковой) работе. Выбрав такие задачи, которые можно решать различными способами, в том числе и более изящными, учитель за некоторое время до занятия кружка сообщает ученикам эти задачи. Учащиеся пытаются отыскать различные способы решения. На очередном занятии кружка, эти решения заслушиваются, обсуждаются, выявляются лучшие из предложенных способов.

Преобразование задачи.

Полезным упражнением в деле обучения решению задач могут служить различные способы преобразования задачи.

У с л о ж н е н и е у с л о в и я. Задача может быть усложнена даже при помощи простого изменения формулировки вопроса. После решения задачи· «У мальчика было 2 тетради в линейку, а тетрадей в клетку на 6 больше. Сколько тетрадей в клетку было у мальчика?» — можно продолжить ту же задачу, но с вопросом «Сколько всего тетрадей было у мальчика?»

Такие упражнения вырабатывают внимательное отношение к вопросу задачи, понимание роли каждого слова в задаче.

У с л о ж н е н и е з а с ч ё т в к л ю ч е н и я в т е к с т з а д а ч и н о в ы х д а н н ы х. Покажем это на примере. Первоначальный текст задачи: «Отправляясь на курорт, рабочий проехал 900 *км* поездом и 150 *км* автомобилем. Сколько всего километров проехал рабочий?»

Текст задачи после включения дополнительных данных в условие: 1) Отправляясь на курорт, рабочий ехал 20 часов поездом со скоростью 45 *км* в час и 3 часа автомобилем со скоростью 50 *км* в час.

2) Отправляясь на курорт, рабочий проехал поездом 20 часов со скоростью 45 *км* в час и 3 часа ехал автомобилем. Скорость автомобиля на 5 *км* в час больше скорости поезда.

Вопрос всё время остаётся таким же, как и в основной задаче. Таким образом, на такой задаче учащиеся имеют возможность проследить постепенное усложнение задачи при одном и том же вопросе в зависимости от соотношения между данными и искомыми величинами. Учащимся может быть предложена основная задача с заданием усложнить её путём включения дополнительных данных в условие. Такая работа носит творческий характер; она будет увлекательной и полезной для учащихся.

Преобразование задачи, когда ответ включается в условие задачи, а одна из данных величин становится искомой, весьма полезно для изучения зависимости между величинами.

Задача. Швейная мастерская сшила 20 костюмов и 15 пальто. На костюм шло 3 *м* сукна, а на пальто 2 *м* 80 *см*. Сколько всего израсходовано материала?

Решение этой задачи приводит к ответу: 102 *м*.

Более полному усвоению зависимости между данными величинами способствует решение преобразованной задачи: в условие включается ответ (102 *м*) и исключается одно из данных (например, количество сшитых костюмов).

Получаем следующую задачу: «Мастерская израсходовала 102 *м* сукна на пошивку 15 пальто и нескольких костюмов. На каждый костюм шло 3 *м*, а на пальто 2 *м* 80 *см*. Сколько сшито костюмов?»

Дальше возможно такое преобразование: включаем в первоначальное условие 102 *м* и исключаем из условия расход материала на 1 костюм (3 *м*). Получаем новую задачу: «Мастерская израсходовала 102 *м* сукна на пошивку 20 костюмов и 15 пальто. Сколько метров шло на костюм, если на пальто шло 2 *м* 80 *см*?»

Можно получить ещё две задачи за счёт исключения других данных из условия. Таким образом, путём преобразования данной задачи ярко выступает зависимость между общим расходом материала, количеством изделий и расходом материала на одно изделие. Более высокой ступенью применения этого способа может служить такая форма преобразования задачи.

Задача. На корм корове расходуется в день 12 *кг* сена, а лошади — 15 *кг* сена. Сколько сена надо израсходовать в день для 5 коров и 8 лошадей?

Условие кратко записывается на доске так.

5 кор. — по 12 *кг*
8 лош. — по 15 *кг* Сколько всего сена расходуется в день?

После устного решения предлагается учащимся исключить из условия количество коров, включить полученный ответ и составить новую задачу. В дальнейшем можно предлагать одной группе учащихся исключить первое данное, другой — второе данное и т. д., а потом заслушать составленные ими задачи.

Такого рода упражнения, способствующие более глубокому и полному познанию зависимости между величинами, сыграют весьма полезную роль в деле обучения решению задач. Наконец, решение преобразованной задачи является одним из лучших способов проверки решения.

Проверка правильности решения задачи.

Проверка решения, как всякий вид самоконтроля, помимо образовательного, имеет большое воспитательное значение. Проверка приучает критически мыслить, анализировать свою работу, служит хорошим средством предупреждения или исправления ошибок. Проверка решения может проводиться следующим образом:

1) Проверяют соответствие ответа условию задачи.

2) Составляют проверочную (обратную) задачу (включение ответа в условие задачи, исключение одного из данных и решение полученной задачи).

Примечание. Составление одной проверочной задачи не является достаточным для полной проверки правильности решения составной задачи. Надо, однако, учитывать, что составление даже одной проверочной задачи может иметь ограниченное место в начальных классах. Кроме того, учителю надо иметь в виду, что в некоторых случаях проверочная задача может оказаться такой, что решение её выходит за рамки программы данного класса или начальной школы.

3) Решают задачу другим способом.

В тех случаях, когда проверка решения может потребовать ряда дополнительных действий, она является трудной и малодоступной для учащихся. Поэтому учитель должен заранее продумать вопрос о целесообразности проверки той или иной задачи. Проверка может быть частичной и полной. Частичная проверка может и не обнаружить ошибки в решении. Так, например, в задачах на нахождение чисел по сумме и кратному отношению сумма может соответствовать условию задачи, а кратное отношение не отвечать требованию задачи. Следует проводить полную проверку, если она не сложна. Весьма полезна как в задачах, так и вычислениях примерная оценка правильности ответа. Так, например, в задачах на тройное правило учащиеся могут предварительно (или после решения) указать, должен ли быть ответ больше или меньше одной из данных величин.

Если в задаче на пропорциональное деление необходимо распределить заработанную рабочими сумму в зависимости от количества изготовленных изделий, то ученик, анализируя ответ, устанавливает, что бо́льшую сумму получил тот, чья выработка больше. Такая примерная оценка ответа может иметь место и в ряде других задач. Полезна также оценка ответа с точки зрения жизненной его правдоподобности. Получив, например, ответ «Скорость пешехода 10 *км* в час» (или больше), «На костюм шло 5 *м* материи» (или больше), «Мешок картофеля весит больше центнера» и т. д., ученик должен прийти к выводу о необходимости проверки решением.

Проверка возможна также при помощи решения задачи с округлёнными данными. Проверку следует большей частью производить устно. Письменная проверка может применяться лишь для той части решения, в которой нужны вычисления с большими числами.

МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

Нельзя дать строгое определение типовой задачи, так как нет строго выдержанной классификации типовых задач. Типовыми задачами обычно называют такие, которые решаются особыми приёмами, т. е. объединяются по методу решения или по ходу рассуждений. К таким задачам, решаемым в начальной школе, относятся задачи на простое тройное правило, на пропорциональное деление, на нахождение чисел по двум разностям или по их сумме и отношению, на нахождение среднего арифметического. Кроме того, к типовым задачам относятся в некоторых случаях и такие, которые объединяются по своей тематике. К ним относятся задачи на движение, на вычисление площадей и объёмов, на время. Выделение этих задач в группы ставит своей целью изучение особого рода зависимостей, имеющих большое практическое значение.

Разбор типовых задач, предусмотренных программой начальной школы, может быть проведён также аналитико-синтетическим методом, как и нетиповых арифметических задач. Некоторые особенности имеет разбор задач на нахождение неизвестных по двум разностям и нахождение двух чисел по их сумме и кратному отношению, о чём будет подробно сказано при рассмотрении этих типов задач.

Как и при решении любых арифметических задач, следует: при изучении нового типа начинать с устного решения задач на небольших числах, чтобы не отвлекать внимания учащихся вычислениями; использовать запись условия при помощи схем, графиков; применять наглядные пособия при объяснении решения первых задач, а также при решении более трудных задач; давать задачи, содержащие близкий и доступный учащимся материал.

Решение типовых задач помогает учащимся сделать обобщения. Они должны научиться распознавать задачу по её структуре и видеть общий ход рассуждения для всех задач данного типа. Это потребует от ученика напряжённой умственной работы, преодоления ряда трудностей. При обучении решению типовых задач надо обратить внимание на выполнение следующих методических указаний.

1. Проведение подготовительной работы, заключающейся в решении задач, содержащих отдельные моменты, которые войдут как составные элементы предстоящей к разбору типовой задачи. Подготовительные задачи должны способствовать усвоению учащимися той зависимости между величинами, которая составляет основу той или иной типовой задачи.

2. Для усвоения нового типа задач необходимо решить подряд несколько таких задач. В дальнейшем необходимо чередовать новые задачи с решением нетиповых или других типов задач. Длительное решение подряд задач одного типа может привести к тому, что учащиеся начнут решать их механически, по трафарету.

По мере углубления работы над задачей определённого типа необходимо разнообразить задачу, видоизменять расположение данных величин и постановку вопроса, включать в условие дополнительные данные. Всё это будет способствовать тому, что учащиеся научатся выделять существенные признаки изучаемой задачи. Следует периодически повторять пройденные типы задач, восстанавливая в памяти детей характерные особенности этих задач и приёмы их решения.

3. В более лёгких случаях полезны упражнения на составление учащимися типовых задач; это поможет им выделить то общее, что составляет основу этого типа задач. Надо при этом учитывать посильность таких заданий для детей. Что касается терминологии, требования к учащимся давать название типа задачи, то это не обязательно, а в ряде случаев нежелательно. В тех случаях, когда учащиеся сознательно могут связать название задачи с методом её решения, применение таких названий типовых задач будет полезно. Учащиеся могут сказать, что эта задача решается приведением к единице, что эта задача на движение, на вычисление времени, на части, но не следует давать учащимся, а тем более требовать от них такой терминологии, которая для них недоступна, как, например, нахождение чисел по их сумме и кратному отношению, на пропорциональное деление и т. д.

Переходим к изложению методов обучения решению отдельных типовых задач, расположив задачи не в той последовательности, в какой они даны в программе для начальной школы, а соединив их в группы, близкие друг к другу по характеру рассуждения или по методу решения.

Задачи с пропорциональными величинами.

Решение этих задач имеет важное значение. На доступном детям материале учитель имеет возможность развивать у учащихся функциональное мышление, чему способствует изучение простейших и вместе с тем широко распространённых случаев зависимости между величинами. На этих задачах ярко выделяется идея изменения одной величины в зависимости от изменения другой. В результате решения ряда задач следует подвести учащихся к обобщениям как в отношении зависимости между величинами, так и в отношении общности в методе решения.

Задачи на простое тройное правило. Способ приведения к единице.

Задачи на простое тройное правило отнесены по программе на III класс, однако простейшие виды этих задач и термин «задачи на приведение к единице» даны в учебнике для II класса.

В качестве подготовительных могут быть решены устно такие задачи: «5 тетрадей стоят 80 коп. Сколько стоит 1 тетрадь?»; «На 6 платьев пошло 24 *м* материи. Сколько материи пойдёт на 1 платье?» и т. д. Затем решаются следующие задачи: «1 тетрадь стоит 16 коп. Сколько надо заплатить за 2, 3, 4 тетради?»; «На 1 платье пошло 4 *м* материи. Сколько метров материи пойдёт на 2, 3, 4, 5, 7 платьев?»

Поставленные вопросы в этих задачах раскрывают характерные признаки пропорциональной зависимости, которые составят основу для изучения задач. Можно иллюстрировать решение этих задач на наглядных пособиях, на рисунках.

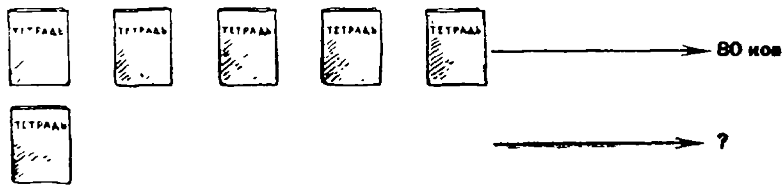


Рис. 7.

Полезно предложить учащимся самим составить аналогичные задачи.

После решения нескольких подготовительных задач (количество их зависит от уровня подготовки учащихся, от того, в какой степени они усвоили зависимости, рассматриваемые в подготовительных задачах) можно перейти к решению задачи:

«В 3 мешках было 150 *кг* картофеля. Сколько килограммов картофеля будет в 7 таких мешках?»

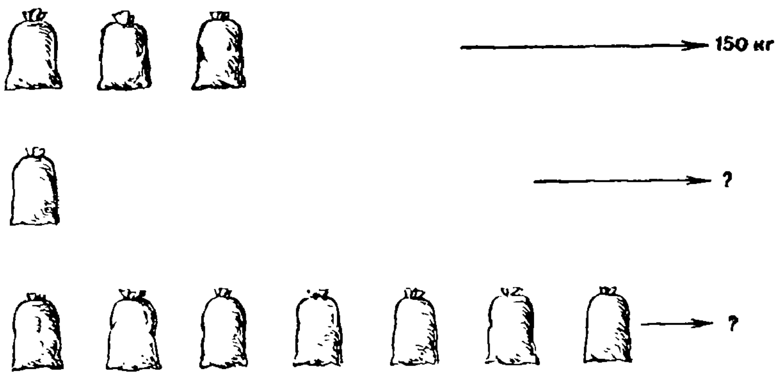


Рис 8

Краткая запись условия может быть дана в двух видах:

а) 3 меш. — 150 *кг*
7 „ — ?

б) 3 меш. — 150 *кг*
7 „ х „

Разбор задачи. Чтобы узнать, сколько весят 7 мешков картофеля, надо знать вес одного мешка. Этого мы не знаем, но сумеем узнать, так как в условии указано, что 3 мешка картофеля весят 150 *кг*. Решение должно сопровождаться объяснением, раскрывающим смысл рассматриваемой зависимости. 3 мешка картофеля весят 150 *кг*, а один мешок — в 3 раза меньше (150 *кг* : : 3 = 50 *кг*). Один мешок картофеля весит 50 *кг*, а 7 мешков весят в 7 раз больше (50 *кг* $\times$ 7 = 350 *кг*). На доске и в тетрадях записывается план решения. Учащиеся должны также сделать в своих тетрадях краткую запись условия.

На данном примере мы видим, насколько синтез и анализ взаимно дополняют друг друга, неразрывно связаны между собой.

Дальнейшая работа должна заключаться в решении ряда таких задач. После того как ход рассуждения будет усвоен учащимся, следует перейти к более сложным задачам, решение которых связано с выполнением дополнительных действий.

Работа над усвоением задач данного типа сопровождается устным решением таких задач, самостоятельным составлением их учащимися. Следует особое внимание уделять усвоению зависимости между величинами, устанавливать, почему «меньше» или «больше» во столько-то раз. Приступая к решению приведённой выше задачи, можно спросить, должно ли в ответе получиться число, большее или меньшее, чем 150 *кг*, и почему. Такая предварительная оценка ожидаемого ответа имеет огромное практическое и воспитательное значение.

Систематически приучая к оценке ожидаемого ответа, мы тем самым предупредим множество ошибок, а самое главное научим детей критически, с точки зрения жизненной практики, рассматривать полученный от решения результат. В этом отношении задачи с пропорциональными величинами дают очень удобный материал для предварительной оценки результата.

Способ обратного приведения к единице.

Подготовительные задачи. На одно платье идёт 4 *м* ткани. Сколько платьев можно сшить из 8 *м*? из 12 *м*? из 36 *м*? На одну тетрадь нужно 12 листов бумаги. Сколько тетрадей можно изготовить из 24 листов? из 48 листов? из 72 листов?

Задача. В 3 ящика уложили 24 *кг* яблок. Сколько нужно таких же ящиков, чтобы уложить 56 *кг* яблок?

Отличительная особенность этих задач заключается в следующем.

Задачи с прямым приведением к единице решаются двумя действиями: 1) делением на равные части, 2) увеличением числа в несколько раз. При решении задач способом обратного приведения к единице имеем: 1) деление на равные части, 2) деление по содержанию.

Решение ряда задач на простое тройное правило позволяет подвести детей к обобщениям не только в усвоении простейших зависимостей между величинами, но и в отношении метода решения.

Разобрав устно решение нескольких задач с небольшими числами, учитель в беседе с детьми устанавливает общее в способе решения: сначала узнавали, сколько стоит один метр материи, сколько проходил поезд в один час, сколько весит одна шпала и т. д., т. е. приводили к одному, к единице, и потому мы такие задачи называем задачами на приведение к единице.

Способ отношений.

Решение задач способом отношений значительно труднее, чем приведением к единице, поэтому изучение их отнесено к IV классу. Но термин «отношение» не даётся. Подготовительными будут простые задачи на деление по содержанию и на кратное сравнение. Кроме того, полезны такие устные задачи: «Надо было взвесить 12 *кг* картофеля. На весы клали по 2 *кг*. Сколько раз пришлось взвешивать?»; «На подводу клали по 7 мешков зерна. Сколько раз пришлось съездить, чтобы перевезти 63 мешка зерна?»

Переход к задаче, решаемой способом отношений, необходимо сделать так, чтобы: 1) связать эти задачи с ранее пройденными задачами на простое тройное правило, 2) подобрать числовые данные так, чтобы дети видели невозможность решения прежним способом и необходимость найти новый приём для решения.

Задача. 2 столовые ложки весят 100 *г*. Сколько весят 5 таких же ложек?

Решение этой задачи не встречает затруднений, тем более, что предварительно с учащимися были повторены задачи, решаемые приведением к единице.

Задача. 3 чайные ложки весят 80 *г*. Сколько весят 15 таких же ложек?

Учащиеся видят, что задача такая же, как и предыдущая, но прежний способ решения невозможен, так как 80 на 3 не делится. Для облегчения отыскания способа решения можно дать графическую иллюстрацию условия:

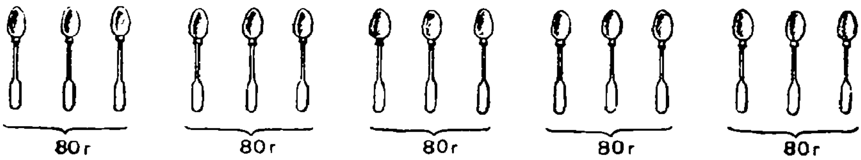


Рис. 9.

Устанавливается, что 15 ложек весят больше, чем 3 ложки, что по 80 *г* надо будет взять 5 раз, так как в 15 ложках содержится 5 раз по 3 ложки. После устного решения двух-трёх задач с подробным разбором и (в случае необходимости) с иллюстрацией следует записать решение задачи с планом. Для данной задачи эта запись примет вид:

1. Сколько раз по 3 ложки содержится в 15 ложках? (или: Во сколько раз 15 ложек больше 3 ложек?)

$$15 \text{ лож.} : 3 \text{ лож.} = 5$$

2. Сколько весят 15 чайных ложек?

$$80 \text{ г} \times 5 = 400 \text{ г}$$

Идея пропорциональной зависимости с особенной отчётливостью выделяется в задачах, решаемых способом отношений. Чтобы сделать эту зависимость ещё более ясной для учащихся, полезно провести устное решение задач данного вида при помощи таблиц. Дети списывают эти таблицы с доски, производя устно вычисления и внося результат в свои таблицы.

Время	Путь
2 часа	75 *км*
4 „	?
6 „	?
8 „	?
10 „	?
16 „	?

Время	Путь
3 часа	110 *км*
?	220 „
?	330 „
?	440 „
?	770 „
?	990 „

Большое практическое значение имеют задачи следующего характера: «Килограмм хлеба стоит 1 руб. 70 коп. Сколько надо заплатить за 400 *г*?» Узнаём стоимость 100 *г* хлеба, а потом 400 *г*. «Килограмм конфет стоит 18 руб. Сколько надо заплатить за 650 *г*?» 500 *г* стоит 9 руб.; 100 *г* — 1 руб. 80 коп., 50 *г* — 90 коп. Следовательно, за 650 *г* надо уплатить 11 руб. 70 коп. Такие расчёты часто встречаются на практике.

Задачи на пропорциональное деление.

Задачи этого типа изучаются в III классе непосредственно после решения задач на тройное правило, так как идёт продолжение работы над величинами, находящимися в пропорциональной зависимости. По характеру рассуждения эти задачи тесно примыкают к задачам на простое тройное правило. В задачах на пропорциональное деление рассматриваются такие практические вопросы, которые доступны и знакомы детям ещё задолго до начала изучения задач этого типа в III классе. Поэтому подготовительными могут быть задачи, решаемые не только во II, но даже и в I классе. Например: «Купили 3 *л* молока, а потом ещё 2 *л* и всего заплатили 10 руб. Сколько стоит литр молока?» Во II классе задачи этого вида могут быть усложнены вопросом: «Сколько заплатили в первый раз? во второй раз?»

Таким образом, подготовительная работа должна заключаться в устном решении несложных задач на пропорциональное деление, после чего можно перейти к более трудным задачам. Дадим образец решения задачи: «Двое рабочих получили 160 руб. Первый работал 5 дней, а второй 3 дня. Сколько заработал каждый из них, если дневной заработок их был одинаковый?»

Краткая запись условия:

160 руб.	1-й — 5 дней	Сколько заработал	⟶	1-й рабочий?
	2-й — 3 дня		⟶	2-й рабочий?

Нетрудно установить, что при одинаковой оплате в день заработная сумма зависит от числа проработанных дней. Затем рассуждение можно провести так: «Чтобы узнать, сколько получил каждый рабочий, надо знать, сколько дней он работал и сколько платят в день. Сколько дней работал каждый, нам известно, а сколько платят в день, мы сумеем узнать, так как можно узнать, сколько всего проработано дней и сколько всего уплачено за работу». После этого намечается план решения и производится решение с записью плана на доске и в тетрадях.

Решение этой задачи имеет сходство с задачей на простое тройное правило, решаемой способом прямого приведения к единице: сначала деление на равные части, а потом умножение.

Рассмотрим задачу: «С двух участков собрано 9 мешков картофеля, одинакового веса. С первого участка собрано 250 *кг* картофеля, а со второго 200 *кг*. Сколько мешков картофеля собрали с каждого участка?»

Решение этой задачи приводит к обратному приведению к единице: сначала деление на равные части (450 *кг* : 50 *кг*), а потом деление по содержанию (250 *кг* : 50 *кг* и 200 *кг* : 50 *кг*).

Из сказанного видно, что сначала следует решать задачи на пропорциональное деление, сходные по решению с прямым приведением к единице.

В дальнейшем при решении задач устанавливается целый ряд жизненно важных зависимостей: распределение урожая среди колхозников производится пропорционально количеству трудодней, зарплата — пропорционально количеству изготовленных изделий, оплата за коммунальные услуги — пропорционально количеству жильцов, за свет — количеству ламп (или свечей), стоимость каждой покупки (при одинаковой цене) — количеству купленных предметов и т. д.

Термин «пропорциональное деление» ввиду его трудности в начальной школе не применяется. После решения задач на деление пропорционально двум числам следует перейти к решению задач на деление пропорционально трём числам. Ход рассуждений остаётся прежним.

Наконец, следует решать и задачи на деление пропорционально двум рядам чисел. Например: «Две бригады лесорубов получили за работу 2170 руб. В первой бригаде было 8 человек, и работали они по 4 дня каждый. Во второй бригаде было 5 человек, и работали они по 6 дней каждый. Сколько денег получила каждая бригада, если дневной заработок рабочих был одинаков?» В беседе с учащимися следует установить, что заработок бригады зависит от количества рабочих и от количества дней, которое работал каждый, следовательно, от общего числа дней, проработанных каждой бригадой. Поэтому необходимо узнать, за сколько рабочих дней уплачено 2170 руб., сколько рублей платили за один рабочий день, и тогда можно будет узнать, сколько заработала каждая бригада.

Задачи на пропорциональное деление чрезвычайно разнообразны, имеют ряд разновидностей и охватывают большой круг практически важных вопросов. Решение этих задач должно иметь место не только при изучении этого типа задач, но и при дальнейшей работе по арифметике.

Задачи на нахождение неизвестного по двум разностям.

Несмотря на то, что эти задачи рассматривают также пропорциональную зависимость между величинами, обнаружить эту зависимость нелегко. Решение этих задач не опирается непосредственно на жизненный опыт детей. Наконец, анализ этих задач не может быть проведён в привычной для учащихся форме. В силу этих причин задачи данного типа следует отнести к трудным для усвоения и нуждающимся в тщательной подготовке, применении наглядности, инсценировке. Усвоение рассуждений и характера зависимости, фигурирующей в этих задачах, способствует математическому развитию детей.

Главное внимание учителя должно быть обращено на осознание учащимися роли данной в условии задачи разности и способа её использования при решении задачи. Для этой цели нужны подготовительные упражнения.

«Мальчик купил 2 карандаша, и девочка купила 2 таких же карандаша. Кто заплатил больше? Мальчик купил 2 карандаша, а девочка 3 таких же карандаша. Кто заплатил больше? На сколько девочка заплатила больше, если 1 карандаш стоил 12 коп.? На сколько девочка купила больше карандашей, чем мальчик, если она заплатила на 12 коп. больше, чем мальчик? на 24 коп.? на 36 коп.? на 60 коп.?»

«Мальчик купил 2 простых карандаша, а девочка столько же химических карандашей. Химический карандаш на 6 коп. дороже простого. На сколько девочка заплатила больше, чем мальчик (или мальчик меньше, чем девочка)? Мальчик купил несколько простых карандашей, а девочка столько же химических карандашей. По скольку карандашей они купили, если девочка заплатила на 6 коп. больше, чем мальчик? на 12 коп.? на 24 коп.? на 60 коп.?»

Другой пример. «Мешок с картофелем весит 50 *кг*. На одну машину погрузили на 1 мешок больше, чем на другую. На сколько килограммов погрузили больше на первую машину? Тот же вопрос, если погрузили на 2, 3 . . . мешка больше».

«На две машины грузили мешки с картофелем, по 50 *кг* в каждом. На сколько мешков погрузили на одну машину больше, чем на другую, если на неё погрузили на 50 *кг* больше? на 100 *кг*? на 300 *кг*? на 500 *кг*?»

Следует проделать ряд таких упражнений (на покупку, на вес, на движение, на расход материала), иллюстрируя некоторые из них при помощи рисунков, графиков или сопровождая их инсценировкой. Желательно, чтобы учащиеся сами составили подобные упражнения. Такая подготовительная работа окажет существенную помощь при переходе к решению задач данного типа. В результате этих упражнений учащиеся должны выяснить, почему девочка заплатила на 12 коп. (на 24 коп. . . .) больше, чем мальчик, почему на одну машину погрузили на 2 мешка (3 мешка, . . .) больше, чем на другую; почему при одинаковом времени движения пассажирский поезд прошёл на 10 *км* (20 *км*, 30 *км*, . . .) больше, чем грузовой.

Затем следует решение несложной задачи. «Одна девочка купила 3 тетради, а другая купила 5 тетрадей и заплатила на 32 коп. больше. Сколько заплатила каждая девочка за купленные ею тетради?»

Примечание. Сначала следует решить эту задачу с вопросом: «Сколько стоит одна тетрадь?»

Краткая запись условия:

1-я — 3 тетр. 2-я — 5 тетр.	на 32 коп. больше	Сколько → 1-я девочка? заплатила → 2-я девочка?

Графическая иллюстрация:

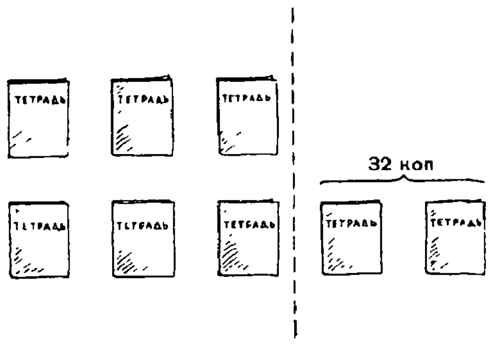


Рис. 10.

Разбор задачи можно провести так. Чтобы узнать, сколько заплатила каждая девочка, надо знать, сколько она купила тетрадей и сколько стоит каждая тетрадь. Мы знаем, что одна девочка купила 3 тетради, а другая 5 тетрадей, т. е. на 2 тетради больше, и поэтому уплатила на 32 коп. больше. Отсюда легко узнать, сколько стоит одна тетрадь. Наиболее важным моментом является выяснение цены одной тетради, но преодоление этой трудности облегчается при помощи ряда подготовительных упражнений. Дальнейшая работа заключается в том, чтобы учащиеся усвоили ход рассуждений, научились правильно формулировать вопросы, умели составлять подобного рода задачи, после чего можно перейти к решению задач данного типа, усложнённых дополнительными данными.

Задачи на нахождение двух чисел по сумме и кратному отношению.

Эти задачи следует отнести к задачам на пропорциональное деление, так как в них требуется разделить число на части, находящиеся между собой в данном отношении. Впоследствии, в VI классе, эти задачи так и будут восприниматься учащимися, как задачи на пропорциональное деление. Однако в IV классе такой подход был бы преждевременным.

В то время как отправным моментом при введении задач на пропорциональное деление служило использование жизненного опыта детей, в задачи на нахождение чисел по сумме и кратному отношению приходится ввести отвлечённое понятие — об условной единице, о «части», имеющее большое значение при решении мнотих задач. Необходимо тщательно подойти к усвоению детьми понятия «части».

Следует сначала решить с учащимися знакомую им задачу на пропорциональное деление. «Из отстоявшихся 10 *л* молока получили 1 бидон сливок, а оставшееся молоко налили в 4 таких же бидона. Сколько получилось литров сливок и сколько литров снятого молока?»

Задача решается устно и устанавливается, что сливок получилось меньше — только 1 часть, а снятого молока осталось больше — 4 части. Затем эта же задача предлагается в новой формулировке: «Из 10 *л* молока получается 1 часть сливок и 4 таких же части снятого молока. Сколько получилось сливок и сколько снятого молока?» Задача вновь разбирается и решается по-новому: «1 часть сливок и 4 таких же части снятого молока. Всего 5 равных частей. Сливок получилась 1 часть, или 10 *л* : 5 = 2 *л*, а снятого молока 4 части, или 2 *л* $\times$ 4 = 8 *л*». При этом надо обратить внимание учащихся, что снятого молока получилось 4 части, или в 4 раза больше.

Следующим этапом явится решение ряда задач устно и письменно, в которых будет встречаться термин «части». «Разделить 12 карандашей между двумя учениками так, чтобы одному досталась одна часть, а другому две такие же части». «Разложить 10 палочек (кубиков, кружочков) на две кучки так, чтобы в одной была одна часть, а в другой 4 такие же части».

Эти упражнения проводятся на наглядных пособиях, сопровождаются инсценировкой (деление карандашей, тетрадей между учениками, раскладывание яблок на тарелки и т. д.).

Цель этих упражнений заключается в том, чтобы: 1) учащиеся усвоили термин «часть» и научились им пользоваться; 2) научились определять общее количество частей; 3) убедились, что 3, 4, 5, ... частей — это в 3, 4, 5, ... раз больше, чем одна часть, или, наоборот, 1 часть в 3, 4, 5, ... раз меньше, чем 3, 4, 5, ... частей. Большое значение имеет здесь самостоятельное составление задач учащимися. Им придётся задуматься над подбором чисел, так как при неудачном подборе задача «не получится», не будет «делиться».

Необходимость «подобрать» числа сыграет большую роль в осознании учащимися структуры задач данного типа. Затем следует решение задач, в которых вместо термина «части» будут применяться другие обороты речи: «больше», «меньше», «длиннее», «дороже» и т. д. Сначала можно вновь рассмотреть некоторые ранее решенные задачи, но в другой формулировке, например: «Разделить 12 карандашей между двумя учениками так, чтобы одному досталось в 2 раза больше, чем другому» — и установить, что и эта задача тоже на части.

Необходимо добиваться, чтобы ученики умели переключаться от формулировки: a больше b в c раз — на формулировку: b меньше a в c раз (или обратно). Для этой цели служат упражнения вида: «У Тани 10 карандашей, а у Вали 5 карандашей. Во сколько раз у Тани больше карандашей, чем у Вали? Во сколько раз у Вали меньше карандашей, чем у Тани?» Или: «1 *м* сатина стоит 12 руб., а метр шёлка 60 руб. Во сколько раз метр сатина дешевле метра шёлка? Во сколько раз метр шёлка дороже метра сатина?» Следует предлагать учащимся самим придумывать такие задачи.

Подготовительные упражнения позволят перейти к решению задач в их обычной редакции. Приведём образец записи условия и плана задачи данного типа.

«Колхоз отправил груши и яблоки, всего 1350 *кг*. Яблок было в 4 раза больше, чем груш. Сколько отправлено груш и сколько яблок?»

Разбор условия заключается в том, чтобы установить, что груш в 4 раза меньше, чем яблок, или, по-другому скажем, что можно принять количество отправленных груш за 1 часть, яблок — за 4 такие части, а всего будет 5 равных частей.

Запись условия и решения:

1350 *кг*	груш — 1 часть яблок — 4 части	Сколько отправлено → груш? → яблок?

1) Сколько равных частей составляют 1350 *кг*?

1 ч. + 4 ч. = 5 ч.

2) Сколько отправлено килограммов груш?

1350 *кг* : 5 = 270 *кг*

3) Сколько отправлено килограммов яблок?

270 *кг* × 4 = 1080 *кг*

Ответ. 270 *кг* груш; 1080 *кг* яблок.

Проверка подтверждает, что всего отправлено 1350 *кг* фруктов и что яблок в 4 раза больше, чем груш. Подвести учащихся к обобщению можно следующим образом: решить устно несколько задач данного типа и сделать на доске краткую запись условия и решения.

Условие		Условие		Условие	
200 *кг* овощей	свёклы — 1 часть картофеля — 3 части	35 автомашин	легковых — 1 часть грузовых — 6 частей	63 *м* ткани	ситца — 1 часть сатина — 8 частей

Решение	Решение
1) 1 ч. + 3 ч. = 4 ч.	1) 1 ч. + 6 ч. = 7 ч.
2) 200 *кг* : 4 = 50 *кг*	2) 35 маш. : 7 = 5 маш.
3) 50 *кг* × 3 = 150 *кг*	3) 5 маш. × 6 = 30 маш.

Решение

1) $1\ ч. + 8\ ч. = 9\ ч.$
2) $63\ м : 9 = 7\ м$
3) $7\ м \times 8 = 56\ м$

Такая таблица поможет сделать обобщение: «Видим, что во всех этих задачах мы знали сумму двух чисел и во сколько раз одно число больше (или меньше) другого. Мы решали эти задачи так: меньшее число принимали за одну часть, узнавали, сколько всего частей, и потом находили сначала меньшее, а потом и большее число. Такие задачи будем называть **задачами на части**».

Задачи на движение.

Задачи на движение занимают большое место во всех разделах математики на протяжении всего курса обучения в средней школе.

Как ни элементарны задачи на движение в курсе арифметики в начальной школе, но и они разнообразны, и усвоение их решения представляет большие трудности для детей. Лишь соблюдение строгой последовательности, широкое использование наглядности, детально продуманная методика обучения дадут возможность преодолеть эти трудности и добиться хороших результатов. Несмотря на то, что содержание многих задач связано с движением, не все эти задачи являются задачами на движение. Так, например, задача: «Турист проехал поездом 400 *км*, а пароходом на 150 *км* меньше. Сколько всего километров проехал турист?» — не рассматривается как задача на движение. К последним следует отнести лишь те задачи, в которых на основе зависимости между временем, скоростью и расстоянием нужно найти какие-либо из этих элементов.

Надо указать на то, что нередко в задачах на движение компоненты изучаемой зависимости даны в неявном виде, что задачи на движение даются часто в комбинации с другими видами задач, что придаёт им ещё более разнообразный характер.

Задачи на встречное движение изучаются с III класса.

Во II классе при решении простых и составных задач закладываются основы терминологии: расстояние (путь), скорость, время. В задачах на сложение можно узнать, сколько всего пройдено метров, километров. Усложняя вопрос, можно узнать, какой пройден путь, какое расстояние. В задачах на умножение и деление также определяется пройденный путь, выясняется, сколько прошли в 1 час или в 1 минуту, вводится термин «скорость».

При изучении разностного и кратного сравнения встречаются задачи, в которых надо определить, на сколько (во сколько раз) скорость, путь или время движения одного из тел больше другого.

При помощи иллюстраций, инсценировок, графика постепенно дети усваивают терминологию, затем на ряде задач они научаются выбирать действие для определения одного из компонентов движения, если даны два других компонента. Этому способствует составление учащимися задач, устное решение этих задач и заполнение (или устное решение) таблиц вида:

Вычислить пройденный путь:

	Скорость в час (в *км*)	Время (в часах)	Путь (в *км*)
Пешеход	4	3	
Лошадь	9	5	
Лодка	6	4	
Велосипедист	12	6	
Пароход	25	15	
Грузовой поезд	35	17	
Почтовый поезд	45	8	
Скорый поезд	55	11	
Грузовой автомобиль	35	7	
Легковой автомобиль	60	9	
Самолёт (реактивный)	850	4	

Аналогичные таблицы следует составить на вычисление скорости и времени движения.

Следует решить ряд задач, в которых один из компонентов остаётся постоянным, чтобы учащиеся замечали влияние другого компонента. Например: сколько пройдёт за час пешеход со скоростью 4 *км* в час? лодка со скоростью 6 *км* в час? велосипедист, мотоциклист, моторная лодка, плот, теплоход, ...?

Понятие скорости (быстрее, медленнее) и её влияние на пройденное расстояние при помощи таких упражнений будут становиться более отчётливыми. Оставляя постоянным время движения или пройденный путь, можно провести аналогичные упражнения, помогающие подметить влияние других компонентов движения на изменение времени, скорости. Общеизвестна роль графика при решении задач на движение. Надо уже со II класса приучать к изображению на отрезках расстояния, скорости, к определению затраченного времени путём деления отрезка, показывающего пройденный путь, на отрезки, показывающие скорость. Нужно учить при помощи стрелок показывать направление движения, при помощи букв отмечать начальный и конечный пункты движения.

Выше мы показали приёмы изучения зависимости между компонентами движения на простых задачах. Это изучение углубляется в процессе решения составных задач. В этих задачах появляется ряд новых моментов: перерыв в пути, изменение скорости движения, вычисление оставшегося до намеченного пункта расстояния, определение необходимой скорости, чтобы пройти оставшийся путь за известное время, и т. д.

Решение составных задач на движение углубляет и расширяет понимание зависимости между элементами движения. Новые понятия, связанные с движением одного тела, содержатся в задачах на движение из одного пункта в другой и обратно: стоянка в конечном пункте, различная скорость при движении; направление, обратное (противоположное) первому, сохранение прежнего расстояния, но возможное при этом изменение времени и скорости. Новые понятия встречаются в задачах, в которых движение происходит сначала в одном, а потом в противоположном направлении и в которых вводится понятие о собственной скорости, о скорости течения, о скорости движения по течению (или по ветру), против течения, о разности этих скоростей.

Задачи на встречное движение.

Существенно новым в этих задачах явится направление движения, участие в нём двух тел. Подготовительная работа должна быть направлена на усвоение учащимися следующих понятий: при встречном движении тела сближаются; в результате движения тела через некоторое время могут встретиться; до встречи тела могут пройти одинаковый путь и неодинаковый путь; при одновременном выходе время движения до встречи для обоих тел будет одинаковым и при различной скорости. Все эти моменты можно иллюстрировать графиками, наглядными пособиями с движущимися телами, инсценировками, несложными задачами. Кроме того, надо повторить задачи на зависимость между компонентами движения и задачи на пропорциональное деление, решение которых имеет общее с решением задач на встречное движение. В порядке нарастания трудностей можно рекомендовать такой порядок расположения задач: 1) одновременный выход тел с одинаковой скоростью; 2) одновременный выход тел с различной скоростью; 3) неодновременный выход с одинаковой, а потом с различной скоростью. Это будут основные задачи на встречное движение. Во всех этих задачах могут быть поставлены вопросы об определении расстояния между двумя пунктами или о пути, пройденном каждым из тел, о времени движения, о скорости.

При дальнейшем усложнении все рассмотренные виды задач могут быть даны для случая, когда встреча не наступила, или для случая движения после встречи, затем задачи могут быть усложнены рядом дополнительных моментов, присоединением других видов задач и т. д. Отнюдь не следует рассматривать все эти разновидности задач сразу. После изучения основных видов задач следует время от времени возвращаться к решению задач на встречное движение, вводя те или иные дополнительные моменты. Необходимо решить несколько несложных задач на движение в противоположных направлениях (не навстречу друг другу) из одного или из различных пунктов, с одновременным или неодновременным выходом, с одинаковой или неодинаковой скоростью. Решение некоторого количества задач в классе и дома следует сопровождать графиками. Дадим образец решения задачи на встречное движение, в которой требуется определить расстояние между двумя пунктами. «Из двух городов одновременно вышли навстречу друг другу скорый и пассажирский поезда. Скорый проходил 50 *км* в час, а пассажирский 40 *км*. Поезда встретились через 3 часа. Найти расстояние между городами». Для определения расстояния между городами нужно знать путь, пройденный каждым поездом в отдельности, а для этого нужно знать скорость каждого поезда и время его движения. Эти данные в задаче имеются.

Графическая иллюстрация условия:

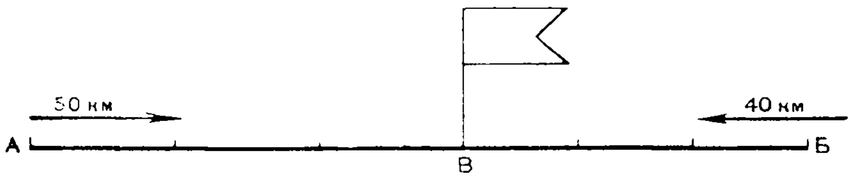


Рис. 11

Считаем одну клетку за 10 *км*. Берём одну полоску бумаги, длиной в 5 клеток, и откладываем её от точки *А* три раза — получаем точку *В*; отрезок *АВ* показывает путь, пройденный скорым поездом. Другую полоску, длиной в 4 клетки, откладываем 3 раза от точки *Б*, получаем отрезок *БВ*, показывающий путь, пройденный пассажирским поездом. Само собой разумеется, что всё это выполняется с активным участием класса и в процессе беседы. Имеем следующее решение задачи:

1. Сколько километров прошёл скорый поезд до встречи?

$$50 \text{ км} \times 3 = 150 \text{ км}$$

2. Сколько километров прошёл пассажирский поезд до встречи?

$$40 \text{ км} \times 3 = 120 \text{ км}$$

3. Чему равно расстояние между городами?

$$150 \text{ км} + 120 \text{ км} = 270 \text{ км}$$

Одновременно устанавливаем полоску в 5 клеток от *А* и в 4 клетки от *Б* и выясняем, на сколько километров сблизились поезда через час после их выхода. Вновь передвигаем полоски и повторяем это же рассуждение и, наконец, повторяем эту передвижку третий раз.

Три раза поезда приближались друг к другу, каждый раз по 90 *км*, поэтому нетрудно узнать расстояние между городами:

1. На сколько километров сближались поезда в один час?

$$50\ км + 40\ км = 90\ км$$

2. Чему равно расстояние между городами?

$$90\ км \times 3 = 270\ км$$

Как и всегда, при решении задач различными способами, если имеется более краткий, следует подчеркнуть его преимущество (облегчает и ускоряет человеческий труд).

Недостаток графика при обоих способах решения заключается в том, что нужно заранее его вычертить с делением на 27 клеток, т. е. не представляется возможности выполнять график в процессе решения. Этого можно было бы избежать, откладывая 3 полоски по 5 клеток от *А* до *В*, а затем 3 полоски по 4 клетки от *В* до *Б*, но это противоречило бы смыслу задачи — встречному движению.

Заметим, что имеются задачи на встречное движение, которые по методу решения сходны с задачами на совместную работу. В особенности это выделяется в задачах такого характера: «Расстояние между двумя станциями 450 *км*. Один поезд может проехать это расстояние за 10 часов, а другой за 15 часов. Через сколько времени встретятся поезда, если они выйдут одновременно навстречу друг другу?» До решения таких задач полезно решить одну-другую задачу на совместную работу.

Задачи на вычисление среднего арифметического.

Эти задачи изучаются в IV классе. Тематика этих задач связана с рядом вопросов практического характера, знакомых детям и доступных их пониманию: средняя зарплата, выработка, урожайность, скорость, температура и т. д. Введение понятия о среднем арифметическом следует провести на основе решения несложных задач.

1) Мама в один день израсходовала 32 руб., а в другой — 36 руб. Сколько денег она израсходовала бы в каждый день, если бы расходовала деньги поровну?

2) Поезд в первый час прошёл 37 *км*, во второй — 43 *км*, а в третий — 40 *км*. Сколько километров он проходил бы в час, если всё время шёл бы с одинаковой скоростью?

После решения и составления учащимися нескольких аналогичных задач учитель подводит учащихся к понятиям: «средний расход», «средний заработок», «средняя скорость», «средний доход (денежный, натуральный) на один трудодень» и т. д. — и указывает, что такие задачи часто приходится в жизни решать и что в арифметике их называют задачами на вычисление среднего арифметического. Сначала решаются несложные задачи, например:

«Рабочий заработал в январе 820 руб., в феврале 960 руб., в марте 920 руб. Каков его средний месячный заработок за это время?» Решение этой задачи не встретит затруднений. Учитель спрашивает: «Почему мы делили на 3?» «А если нам нужно было бы узнать средний заработок за 4 месяца и мы знали бы заработок за каждый месяц в отдельности, то как бы стали узнавать средний заработок?» Вместе с тем можно указать, что такие вычисления приходится делать, когда вычисляют сумму, причитающуюся за отпуск, когда устанавливают пенсию, когда оплачивают по больничному листку и т. д.

Более трудными являются задачи следующего содержания: «С одного участка, размером в 12 *га*, было собрано по 24 *ц*, а с другого участка, размером в 6 *га*, собрано по 27 *ц* пшеницы с 1 *га*. Каков был средний урожай пшеницы с одного гектара?»

Решению этой задачи следует предпослать небольшой анализ, т. е. установить, что нужно знать общую площадь и общее количество собранной пшеницы, после чего можно перейти к составлению плана и к решению задачи.

В процессе решения задач на нахождение среднего арифметического полезно провести практические работы; учащиеся находят: среднюю величину своего шага, среднее количество шагов от дома до школы (при небольшом расстоянии) и вычисляют расстояние от школы до дома; средний результат измерения, взвешивания и т. д.

Задачи на нахождение среднего арифметического могут быть использованы в воспитательных целях. Можно сравнить: средний урожай колхоза (или района, области) с урожаем у Героев Социалистического Труда, среднюю скорость вождения поездов со скоростью вождения передовиками-машинистами, среднюю суточную выработку экскаватора, достигаемую выдающимися работниками, с установленной нормой и т. д. Можно использовать данные из жизни колхоза, предприятия, района, города, обратиться за материалами к местной печати.

Нет необходимости требовать от учащихся формулировки «среднее арифметическое». Главное, чтобы дети осмыслили характер этих задач и способ их решения.

Задачи на нахождение одной или нескольких частей числа, на вычисление площадей и объёмов, на вычисление времени даны в соответствующих разделах методики.

МЕТОДИКА УСТНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ.

Значение устного счёта и виды занятий устными вычислениями.

Устному счёту в начальной школе придаётся большое значение. Устный счёт имеет широкое практическое применение, развивает сообразительность учащихся, прививает им интерес и любовь к арифметике, развивает и укрепляет внимание и память. Основное отличие устных вычислений от письменных заключается в том, что письменные вычисления выполняются, как правило, по определённому для данного действия алгоритму, в то время как выполнение устных вычислений связано с применением разнообразных приёмов. Так, например: $48 \times 15 = 48 \times 10 + 48 \times 5 = (50 - 2) \times 15 = (40 + 8) \times 15 = 48 \times 5 \times 3 = 48 \times 15 = 48 : 2 \times 30$ и т. д.

На занятии устным счётом в III и IV классах начальной школы, где уделяется большое внимание письменным вычислениям, ежедневно отводится от 5 до 10 минут. Упражнения в устных вычислениях могут быть следующих видов:

1) устные вычисления, которые не сопровождаются записями (беглый **слуховой** счёт);

2) устные вычисления, сопровождаемые предварительной записью примеров (*зрительный* счёт);

3) устные вычисления с последующей записью результатов произведённых вычислений (*комбинированная* форма счёта, или *полуписьменный* счёт);

4) устное решение задач.

Приёмы устного счёта.

К числу общих приёмов устного счёта относятся приёмы сложения, вычитания, умножения и деления, вытекающие из основных законов арифметических действий и основанные на разложении чисел на разряды и выполнении действий, начиная с единиц высшего разряда.

$329 + 415$. Складываем 3 и 4 сотни, получаем 7 сотен; 29 и 15 единиц — 44 единицы, всего 744 (*сочетательность*).

Числа можно разлагать и иначе — на десятки и единицы (как легче); например, 329 и 238 складываем так: 32 десятка и 23 десятка дают в сумме 55 десятков; 8 и 9 единиц — 17 единиц, всего 567.

Чтобы устно перемножить два числа, пользуясь распределительным законом умножения, начинаем умножать одно число на другое, но не с единиц, как при письме, а с высших разрядов; полученные числа складываем и получаем искомое произведение.

Например: 48×7. Умножаем: $40 \times 7 = 280$ и $8 \times 7 = 56$, результаты складываем: $280 + 56 = 336$.

Деление начинаем, как всегда, с высших разрядов, разложив предварительно делимое на кратные делителю слагаемые (*распределительность* при делении суммы). Например, $224 : 4$. Разлагаем 224 на 200 и 24 и делим: $200 : 4 = 50$ и $24 : 4 = 6$, частные складываем: $50 + 6 = 56$.

К частным приёмам устного счёта относятся *перестановка* или *перегруппировка* компонентов действий и приёмы *округления* их.

Перестановки или перегруппировки, вытекающие из переместительного и сочетательного свойств суммы и произведения, видны на следующих примерах:

1) $7+9+3+1=(9+1)+(7+3)$;
2) $23+38+27+22=(23+27)+(38+22)$;
3) $15\times7\times4=15\times4\times7=60\times7=420$.

Впервые с перестановкой слагаемых учащиеся знакомятся при изучении таблицы сложения в объёме 10, а с перестановкой сомножителей — при изучении таблицы умножения. Позднее эти приёмы расширяются и углубляются при изучении чисел любой величины.

Способ округления. Число называется круглым тогда, когда оно оканчивается одним или несколькими нулями или, что тоже, состоит только из десятков, сотен и т. д. Например: 30, 300, 5000 и т. д.

При выполнении арифметических действий часто полезно одно число делать круглым (округлять), прибавляя к нему несколько единиц или отнимая их.

Произведя арифметическое действие, нужно эти единицы вычесть, если мы их прибавляли, и прибавить, если отнимали (при сложении). Например, 149 и 98 складываем так: $149+100=249$; $249-2$ (мы две единицы прибавили к 98) $=247$.

Округление компонентов действия можно проследить на следующих примерах:

1) $49+37=(50+37)-1$ округление при сложении;
2) $118+107+88=(120+100+90)-2+7-2$;

3) $77-38=(80-38)-3$	округление уменьшаемого;
4) $63-29=(63-30)+1$	округление вычитаемого;
5) $73\times9=73\times10-73\times1$	округление множителя;
6) $198\times8=200\times8-2\times8$	округление множимого;
7) $912:48=(960:48)-(48:48)$	округление делимого.

В IV классе применяются ещё приёмы последовательного умножения и деления. Например:

1) $36\times12=(36\times2\times2)\times3$.
2) $675:15=(675:3):5$.

В приводимых примерах множитель 12 и делитель 15 разложены на множители. Этот приём основывается на умножении и делении числа на произведение. Он применяется в IV классе, но подготовительная работа имеет место в III классе при умножении и делении на круглые десятки и сотни. Например:

$18\times20=18\times10\times2=18\times2\times10$;
$300:30=300:10:3=300:3:10$.

С умножением на 9 и 99 можно познакомить учащихся в IV классе.

Умножению на 9 и 99 предшествует повторение умножения на единицу с нулями.

Умножение на 5 и 50 изучается в IV классе. Умножение на 5 и 50 заменяется умножением на единицу с нулями с последующим делением на 2.

Например: $63 \times 5 = 63 \times 10 : 2 = 630 : 2 = 315$.

Умножение на 25 можно производить путём умножения числа на 100 с последующим делением на 4, так как 25 составляет четвёртую часть 100 или равно $100 : 4$; например, $48 \times 25 = 48 \times 100 : 4 = 4800 : 4 = 1200$. Если множимое число кратно 4, можно множимое сначала разделить на 4, а потом умножить число на 100.

С общими приёмами устного счёта учащиеся знакомятся, изучая арифметические действия в объёме 10, 20, 100 и выше, приобретая при этом необходимую беглость вычислений сначала в объёме 100 и 1000 (круглые десятки), а позднее и над числами более 1000, когда эти действия сводятся к вычислениям в пределе 100.

Например: $380 \times 2 = 38$ дес. $\times 2 = 78$ дес., или 780

$12\,000 \times 5 = 12$ тыс. $\times 5 = 60$ тыс., или 60 000.

Виды упражнений устным счётом.

Быстрота счёта возникает в результате длительных упражнений. Так как однообразное повторение одних и тех же упражнений порождает скуку и притупляет интерес к предмету, необходимо прибегать к разнообразным формам работы, содействующим развитию быстроты вычислений. Многие упражнения в счёте могут быть даны в виде занимательных игр. Развитию быстроты счёта содействуют общеизвестные игры типа: «Лучший счётчик», «Лесенка», «Счёт эстафетой», «Молчанка» и др.

Беглость счёта закрепляется также присчитыванием и отсчитыванием, счётом в виде рядов. Присчитывание и отсчитывание двойками, тройками и т. д. до 20 в I классе сменяется присчитыванием и отсчитыванием двузначных чисел во II—IV классах. Присчитывание и отсчитывание имеют широкое распространение. Они одинаково важны как для сложения и вычитания, так и для умножения и деления.

Для живости и занимательности присчитывание и отсчитывание проводят иногда в виде игр: «Цепочка», «Счёт змейкой» и др.

При игре «Цепочка» один ученик по вызову учителя называет, поворачиваясь в сторону своего соседа, 5, тот в сторону сидящего сзади его — 10 и т. д. до 50. Так же проводится игра «Счёт змейкой». Последовательное прибавление или отнимание одного и того же числа по рядам (правый — левый) производит при быстрой смене учащихся, встающих для ответа, впечатление движущейся по классу змейки.

При проведении устных вычислений можно пользоваться таблицами Шохор-Троцкого, Эменова, Шапошникова и др. Употребление названных таблиц экономит время и сообщает вычислениям большую скорость. При вычислении по таблицам формулировки упрощаются. Так, если даны по вертикали для сложения числа 5, 7, 6, 3, 9 и т. д., учащиеся, складывая эти числа, говорят лишь готовые ответы: 12, 18, 21, 30.

Чтобы лучше раскрыть широкие счётные возможности, которые заключены в таблицах, приведём для примера таблицу, которой можно пользоваться во II—IV классах.

	А	Б	В	Г	Д	Е	Ж	З	И	К
I	3	12	23	33	40	52	64	75	82	93
II	1	16	25	31	42	55	60	74	80	100
III	5	11	20	34	45	51	69	72	84	95
IV	0	19	27	32	44	59	61	76	89	92
V	7	14	29	36	49	53	67	79	87	98
VI	2	17	21	30	47	58	62	78	85	96
VII	4	10	28	34	48	56	65	70	88	91
VIII	6	18	24	38	46	50	63	77	81	99
IX	8	15	2	35	43	57	68	71	83	94
X	9	13	26	37	41	54	65	75	85	90

1. Можно к числам ряда *В* прибавить числа ряда *Б* и последовательно называть получающиеся результаты.

2. Можно также из числа ряда *Д* вычитать числа ряда *В* и к полученным результатам прибавлять числа ряда *А*.

3. Можно суммы, полученные от сложения или вычитания двух рядов, умножать или делить (с остатком) на одно из чисел ряда *А*.

4. Подобные же вычисления можно производить до стыка между горизонтальными и вертикальными рядами.

5. Той же таблицей можно пользоваться, объединяя по два, по три числа в виде суммы с последующим делением или в виде разности с последующим умножением и т. д.

6. Из таблицы могут быть взяты числа для внетабличных действий (умножения и деления и деления с остатком). Например: «Назовите числа, которые делятся на 14, 15 и т. д. без остатка»; «умножьте числа ряда *Б* на 5» и др.

Для чисел в пределе 1000 можно использовать другую таблицу Шапошникова [1].

Устный счёт можно проводить по карточкам. Такие карточки содержат примеры для устных вычислений, вопросы, требующие от учащихся умения пользоваться арифметической терминологией или теорией, и задачи.

Например для III класса:

1. 9×3; 6×6; 8×9.
2. $72 : 4$; $60 : 5$; $81 : 9$.
3. Увеличить 16 в четыре раза; увеличить 8 в шесть раз.
4. Уменьшить 84 в шесть раз; уменьшить 36 в девять раз.
5. Один парашютист сделал 80 прыжков, а другой в 3 раза

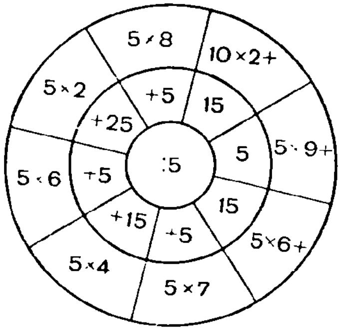


Рис. 12.

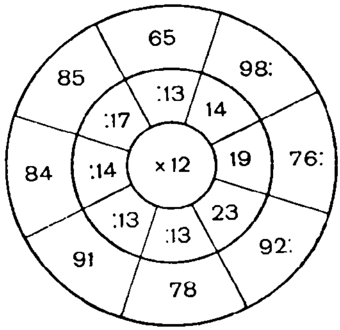


Рис. 13.

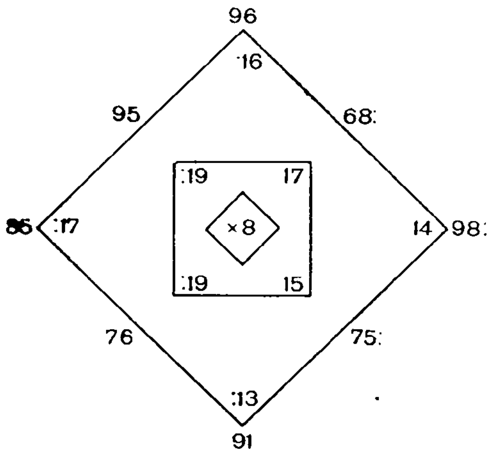


Рис. 14

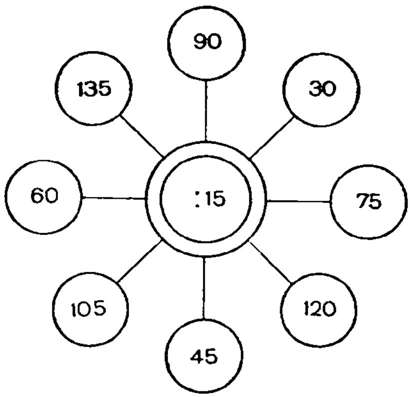


Рис. 15.

[1] Таблицы К. К. Шапошникова имеются в нескольких вариантах.

больше. На сколько прыжков второй парашютист сделал больше первого?

Карточки могут быть использованы фронтально, когда все учащиеся данного класса снабжаются ими, а учитель проверяет правильность ответов по вопросам. Карточками могут снабжаться отвечающие у доски ученики или при проверке домашнего задания, или при опросе. Они читают по карточке задание и дают ответы. К проверке их ответов привлекается весь класс.

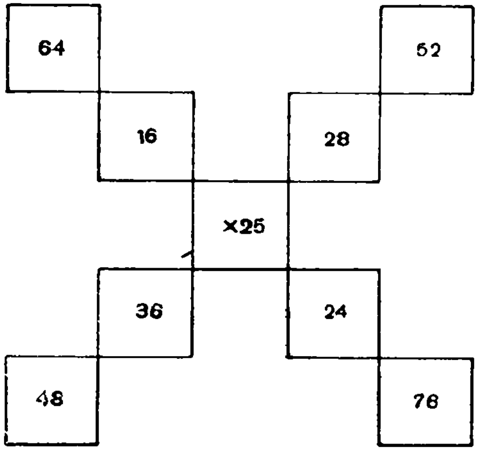


Рис. 16.

Правильность постановки устного счёта немыслима без настойчивой работы по развитию математической речи. Следует следить за склонением числительных, умением толково объяснять ход вычислений и решения задачи.

Для поддержания на должной высоте интереса к счёту можно прибегать к задумыванию чисел, отгадыванию задуманных чисел, круговому счёту, вычислениям по счётным фигурам и др. (рис. 12—16).

В привитии навыков устного счёта имеют значение задания на дом упражнений для устных вычислений.

Устный счёт и решение задач.

При занятиях устным счётом численные примеры, как правило, чередуются с задачами, закрепляющими ту тему арифметики, которая в данный момент изучается. Сложной задаче предшествует аналогичная, с небольшими числами.

Задачи для устного счёта должны отличаться лёгкостью построения, простотой и ясностью своего языка и конкретностью содержания. В I и во II классах должны преобладать задачи в 1, 2, 3 действия приведённого вида.

Устные задачи, как и примеры, не записываются на доске, если в них нет трудных для запоминания чисел. Учитель сосредоточивает внимание учащихся на задаче, читает её медленно, наблюдает за количеством поднятых рук и спрашивает ответы у нескольких учащихся. Если в классе есть учащиеся, не решившие задачу, предлагает кому-нибудь из учеников объяснить её.

Особое внимание нужно обратить на то, чтобы задачи для устного счёта были интересны и занимательны для учащихся, активизировали учеников и давали необходимый материал для размышлений.

Опрос по устному счёту.

В привитии навыков устного счёта большое значение имеет опрос учащихся.

При опросе не следует ограничиваться ответом одного ученика, а нужно спросить двух-трёх учащихся.

В I и во II классах вместо ответов вслух можно пользоваться показом цифр, записью ответов на листочках бумаги или в тетрадях. Так, если учитель даёт пример: $5 + 7 - 8$, учащиеся могут показать ответ цифрой. Во II классе ответы могут составляться из двух цифр, которые показываются учениками так, чтобы учитель мог прочесть число и проверить правильность ответа.

При опросе не следует в первую очередь спрашивать ответ у лучших учеников класса, так как их ответы могут механически повторяться другими.

Не нужно сразу подтверждать правильность полученного учащимися ответа, а стараться выявить, нет ли других ответов.

Учитель должен проверять, правильно ли учащиеся производят вычисления в уме, не пользуются ли они нерациональными приёмами вычислений, т. е. такими, которые на данном этапе счётных навыков не должны иметь места: счёт по пальцам, присчитывание единицами вместо счёта группами; письменное вычисление в уме, начиная с единиц низшего разряда, и др.

Учителя должны вести учёт навыков устного счёта по отдельным приёмам.

Для проверки навыков рекомендуется проведение контрольных работ по устным вычислениям. Контрольные работы, рассчитанные на 5—10 минут, состоят из примеров, задач и вопросов, на которые учащиеся пишут на листках или в тетрадях только ответ; работы проверяются, и ставятся отметки.

Дидактический материал для работы по устному счёту.

Чтобы работа по устному счёту шла успешно, следует иметь необходимый для устного счёта дидактический материал. К изготовлению нужно привлекать учащихся.

Дадим примерный перечень дидактического материала:

1. Занимательные квадраты полные и неполные (рис. 17, 18, 19), простые и сложные.

Проверить занимательный квадратик (рис. 17).

Дополнить каждый ряд до 1000 (рис. 18) и проверить.

Ниже даётся для проверки сложный занимательный квадрат (рис. 19).

После проверки учитель стирает один верхний, нижний, правый и левый ряды цифр и просит проверить оставшуюся часть занимательного квадрата и т. д.

С занимательными квадратами может быть организована игра «Кто скорее?» Вызываются два ученика, которые считают вслух

53	66	59	72	65
70	58	71	64	52
57	75	63	51	69
74	62	55	68	56
61	54	67	60	70

Рис. 17.

130		360
780	120	
	370	340

Рис. 18.

31	13	14	32	35
30	26	21	28	20
33	27	25	23	17
16	22	29	24	34
15	37	36	18	19

Рис. 19.

указанные учителем строчки или столбики. Ученик, давший первым правильный итог строки или столбика, считается выигравшим.

2. Счётные фигуры: «Сложите числа в каждом треугольнике» (рис. 20).

«Прибавляйте к 31 по 1, по 2, . . .» (рис. 21).

Разбейте группу учащихся на две части: пусть одна половина считает вправо от 1, а другая — влево. «Кто скорее?» (рис. 22).

«Отнимайте от 12 по 4, по 2, . . .» (рис. 23).

3. Лото. В настоящее время в продаже имеются лото фигурные и цифровые, что облегчает работу учителя и даёт ему в руки готовую модель. Можно рекомендовать лото из карточек двух видов: заданий и ответов.

Но ввиду несложности этих игрушек их можно приготовить самостоятельно.

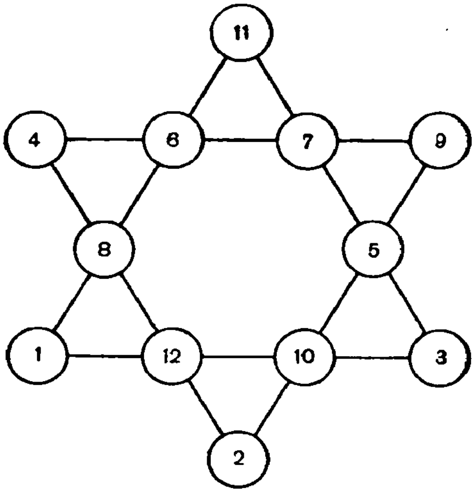


Рис 20

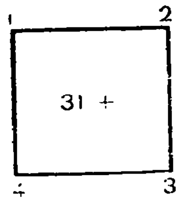


Рис 21.

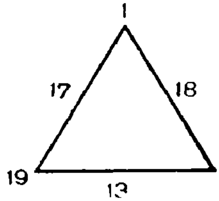


Рис. 22.

4. Счётные таблицы. Таблицы сложения, вычитания, умножения и деления с ответами и без них; таблица Пифагора, палочки Эккерта (рис. 24) и др.

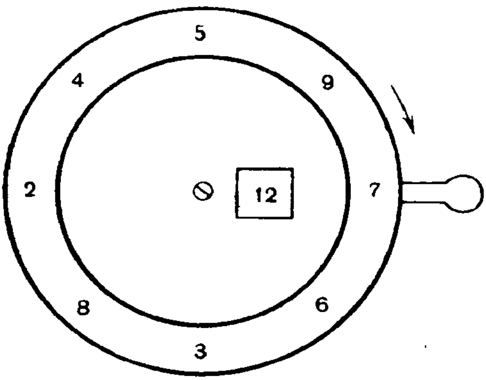


Рис. 23.

Работа ведётся так. Вывешиваются две полоски, между ними ставятся знаки сложения или вычитания, и предлагается учащимся устно сложить или вычесть, записать ответы на бумажке и положить её на стол. Учитель отмечает порядок подачи записок, проверяет их и выявляет таким образом «лучших счётчиков». Присоединяя полоски с нулями, можно составлять примеры на круглые десятки и сотни. Палочки можно соединять по две для упражнения в вычислениях с двузначными числами, по три — для трёхзначных чисел. Палочки Эккерта можно эффективно использовать при занятиях в двухкомплектной школе.

5. Подвижные (движущиеся и вращающиеся) счётные приборы. Устройство подвижных моделей довольно примитивно. На картонный или фанерный лист наклеивается кусок бумаги с отверстиями для двух чисел и знака действия; числа и знаки

•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
1	3	5	7	9	8	5	1	0	0
7	9	1	4	5	3	1	5	0	0
2	5	7	6	8	1	4	2	0	0
6	8	4	1	3	7	6	8	0	0
3	4	8	5	7	2	5	3	0	0
8	7	3	9	2	5	2	4	0	0
4	2	9	3	6	8	6	3	0	0
9	6	2	8	1	4	3	2	0	0
5	1	6	2	4	9	4	5	0	0
4	5	8	6	9	7	3	4	0	0

Рис. 24.

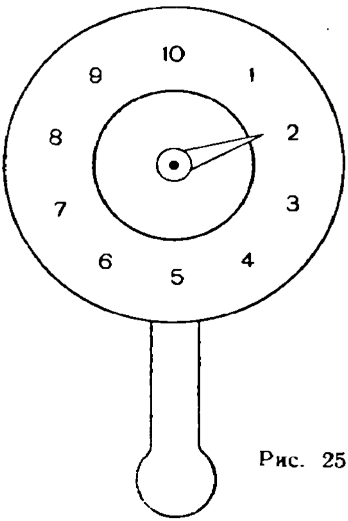


Рис. 25.

пишутся на лентах, которые движутся сквозь прорезы в картоне или фанере. Циферблат (рис. 25) наклеен на картон и прикреплён к деревянной ручке.

Учитель левой рукой держит циферблат, а правой управляет стрелкой. Сначала стрелка ставится против одной из цифр; дети в уме складывают это число с предыдущим и говорят результат. Пользуясь этим прибором, можно прибавлять, отнимать, умножать и делить называемые учителем числа на число, закреплённое на циферблате стрелкой.

II. ЧАСТНЫЕ МЕТОДИКИ.

МЕТОДИКА ИЗУЧЕНИЯ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ ПО КОНЦЕНТРАМ.

ПЕРВЫЙ ДЕСЯТОК.

Первый концентр начинается с изучения чисел от 1 до 10. Первый десяток выделяется в самостоятельный концентр потому, что 10 является основанием нашей системы счисления и числа первого десятка и действия над ними наиболее доступны и понятны детям семилетнего возраста.

Изучая нумерацию чисел первого десятка, дети усваивают названия чисел от 1 до 10, узнают, что при подсчёте предметов той или иной совокупности (множества) каждое число означает не только место, занимаемое данным числом в натуральном ряду чисел, но и сколько всего предметов находится в группе пересчитываемых предметов. Учащиеся, усвоив нумерацию чисел первого десятка, должны твёрдо знать, какое место занимает каждое из чисел в натуральном ряду чисел, сколько единиц в данном числе, какое число ему предшествует и какое за ним следует. Таким образом, число имеет не одно значение, а несколько; оно может быть **порядковым** (первая единица, вторая единица, третья), **собирательным** или **количественным** (пять палочек, пятеро, шесть единиц), может показывать **отношения** между числами и предметами (пять меньше шести и больше четырёх).

Группы пересчитываемых предметов должны быть разнообразными; чем больше разнообразия, тем легче создаётся у учащихся отвлечённое представление о числе.

Нужно следить за тем, чтобы восприятие числовых групп (множество), по возможности, опиралось на разнообразные ощущения: **зрительные**, **слуховые**, **осязательные**, **мускульные** и др.

По мере развития численных представлений дети приобретают навык определять небольшое число предметов без пересчитывания их движением глаз. При упражнении в запоминании чисел на слух можно прибегать к отсчитыванию звуковых явлений (ударов о стол указкой, постукиваний в дверь и т. п.). Работа на уроке с такими предметами, как сыпучие и текучие тела (песок, вода), содействует укреплению навыка в счёте по представлению.

Учащиеся, изучая числа первого десятка, должны уметь считать прямо и обратно в объёме от 1 до 10 и знать состав этих чисел. Усвоение состава чисел облегчается применением разнообразных числовых фигур (рис. 26). Связь чисел с реальными предметами, с изображением их точками, линиями и числовыми фигурами полезна для создания наглядных образов чисел и закрепления в

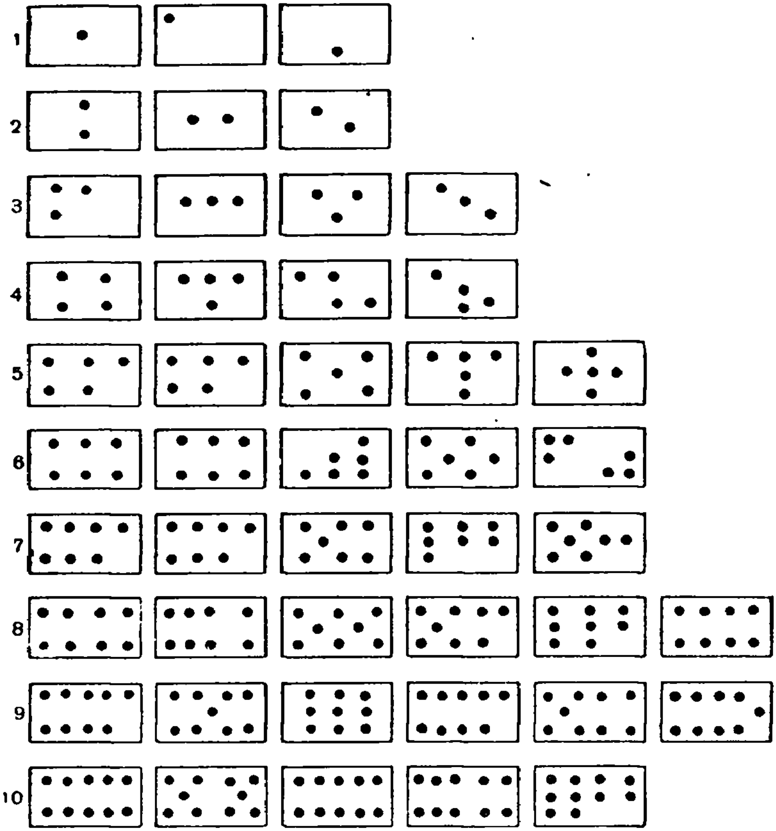


Рис. 26.

памяти состава их. Например: $7 = 5 + 2$, $7 = 2 + 2 + 2 + 1$; и т. д. (рис. 26).

Чтобы дети в процессе изучения чисел были более активны, необходимо как можно больше конкретизировать отвлечённые понятия, сообщаемые на этой ступени обучения (столько же, то же, поровну, больше, меньше и т. д.).

При изучении чисел первого десятка употребляются следующие наглядные пособия: русские счёты, арифметический ящик, числовые таблицы, палочки фабричного и собственного изготовления, соломинки, жёлуди, галька и тому подобный счётный материал, который находится в окружении ребёнка. Кроме того, каждый ученик, получая учебник арифметики для I класса, снабжается набором разнообразного дидактического материала (кружки, квадратики, бумажные монеты и т. п.).

Помимо наглядных пособий и счётного материала, большое значение имеют для возбуждения интереса к счёту разнообразные дидактические игры, загадки, считалки и т. п. [1].

Игр очень много: одни из них ставят своей целью содействовать изучению состава чисел; другие — усвоению последовательности чисел.

Назовём для примера несколько таких игр: «Кто знает, пусть обратно считает» или «Кто знает, пусть дальше считает» и др.

Ознакомление с числами от 1 до 10.

Знакомство с числами от 1 до 10 проводится по следующему плану.

а) Выявление имеющихся у ребят навыков счёта. Это знакомство со счётными навыками может проводиться фронтально на первых уроках обучения арифметике. Учитель привлекает учащихся к сосчитыванию тетрадей, карандашей и других предметов и попутно выявляет, в каком объёме тот или иной учащийся владеет счётом. Иногда детям раздают листочки клетчатой бумаги, где заранее написаны фамилии учащихся, и им предлагается закрасить одну или несколько клеточек, нарисовать несколько палочек, флажков, грибов, кружков, чтобы выявить, в каком объёме дети могут считать.

б) Ознакомление с числом. Образование каждого числа в пределе 10 производится путём присчитывания единицы к ранее изученному числу. Образовавшееся таким образом число, иллюстрируемое наглядными пособиями, воспроизводится детьми на палочках или другом счётном материале.

После образования числа учитель проводит с учащимися прямой и обратный счёт в объёме изучаемого числа, рассматривает счётные картинки в учебнике арифметики, составляет и решает с детьми задачи на присчитывание к изученному раньше числу одной единицы.

Учитель обращается также к классной обстановке и просит найти в классной обстановке число предметов, соответствующее изучаемому числу. Проводится также счёт по представлению: детям рекомендуется вспомнить, где вне класса встречается изучаемая совокупность предметов.

---

[1] Ф. Н. Блехер, Дидактические игры и занимательные упражнения в первом классе, Учпедгиз, 1953.

в) Изучение состава числа. Изучая состав числа, учащиеся пользуются дидактическим материалом, числовыми фи-

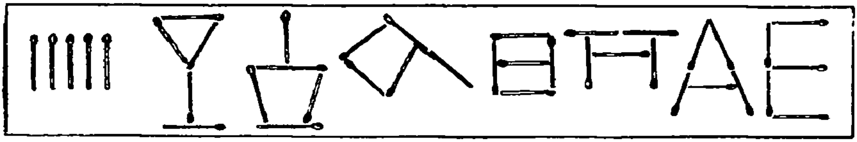


Рис. 27.

гурами и решают задачи или складывают из счётных палочек предметы домашнего обихода (рис. 27).

Состав чисел легко поддаётся изучению на числовых фигурах, палочках, квадратиках и т. п. Перед учащимися кладётся лист бумаги, разделённый пополам (рис. 28). Сверху пишется число, состав которого изучается (например, 7). Слева кладётся, например, кружок, справа — недостающие шесть, дальше два и недостающие пять по другую сторону и т. д. В результате учащийся, глядя на лист, может исчерпывающе воспроизвести состав изучаемого числа.

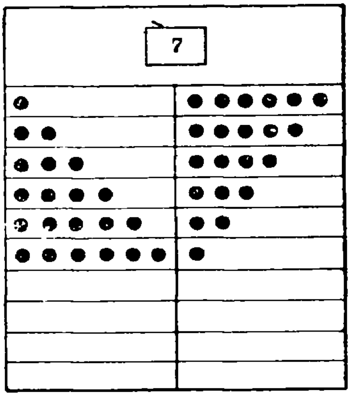


Рис. 28

г) Знакомство с цифрой. После ознакомления с числом учащимся показывают сначала печатную, а после рукописную цифру.

Письмо цифр.

При обучении записи цифр необходим чёткий и ясный показ изображения цифры и её отдельных элементов. Учитель показывает предварительно на доске или на таблице, как пишется данная

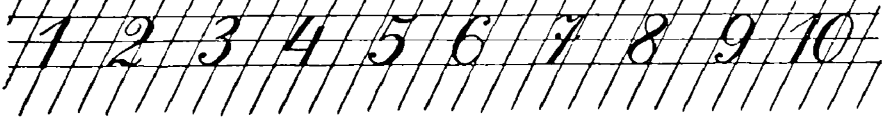


Рис. 29.

цифра, затем ученики открывают тетради, где эта цифра написана один-три раза учителем, и пишут две-три цифры. Учитель просматривает написанные учениками цифры и указывает на замеченные ошибки, затем ещё раз пишет цифру на доске, объясняя, как следует писать. После этого учащиеся пишут одну-две строчки этой цифры. Выше на рисунке 29 даны образцы рукописных цифр.

Для лучшего усвоения цифр как рукописных, так и печатных рекомендуется прибегать к играм. Из таких игр заслуживает внимания игра в «Наши соседи». Учитель показывает учащимся или пишет на доске одну из цифр, например 8, и просит назвать её соседей. Учащиеся или выкладывают из своих касс цифру 8 в окружении 7 и 9, или же по указанию учителя делают это на наборном полотне. Если цифра 8 написана на доске, учащиеся по вызову учителя пишут цифры 7 слева и 9 справа от написанной учителем цифры.

Сложение в пределе 10.

При сложении дети-дошкольники производят объединение слагаемых предметов в одну группу и их подсчёт. Например, если ребёнку нужно к 4 прибавить 3, он берёт 4 палочки и затем 3, смешивает их в одну кучу и пересчитывает число палочек: одна, две и т. д. до семи.

Школа должна обучить детей приёмам сложения, которые изучаются по следующим этапам.

На первом этапе обучения сложению учащийся, получив 4 палочки и 3 палочки, не пересчитывает 4 палочки, а присчитывает к 4 палочкам 3 палочки, называя промежуточные суммы:

$4+1=5$	Счёт может вестись	$4+2=6$
$5+1=6$	и группами.	$6+1=7$
$6+1=7$		

Так как на этом этапе сложение выполняется на наглядных пособиях, то не приходится держать в уме того числа, которое осталось ещё прибавить после того, как прибавлена одна или две единицы.

На втором этапе, выполняя сложение без наглядных пособий, учащийся, прибавив одну единицу к данной группе единиц, должен помнить, сколько единиц ему осталось прибавить, или, прибавив определённую группу единиц, говорить о том, сколько ещё осталось прибавить. Например, надо к 4 прибавить 3. Учащийся, прибавив 1 к 4, получает 5 и говорит, что ещё осталось прибавить 2. Затем, прибавив к 5 единицу, говорит, что осталось прибавить ещё единицу, и т. д.

Как при присчитывании по единице, так и при присчитывании группами необходимо требовать от учащихся, чтобы они называли промежуточные суммы. Предположим, к 3 прибавляется 6 по 3. $3+3=6$; $6+3=9$.

Первые сведения о прибавлении, знаке «прибавить» (+) и знаке «получится» (=) сообщаются учащимся после ознакомления с числами от 1 до 5. По окончании ознакомления с числами от 1 до

10 таблицы сложения изучаются в порядке натурального ряда чисел: прибавление по 1, по 2 и т. д. до 9.

При изучении таблицы сложения, т. е. прибавления по 1, по 2, по 3 и по 4, учащиеся пользуются присчитыванием единицами и группами. Наглядные пособия на этой ступени (кубики, квадратики, кружки и другой счётный материал) постепенно уступают место счёту в уме (рис. 30). При изучении прибавления по 5, по 6, по 7 и т. д. до 9, учащиеся знакомятся с перестановкой слагаемых. Например: $1 + 5 = 6$; $5 + 1 = 6$.

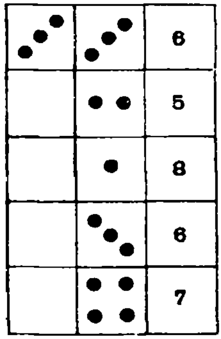


Рис. 30

Изучение таблицы сложения в пределе 10 должно привести к твёрдому усвоению табличных результатов.

Усвоению таблицы сложения содействуют:

1) решение примеров на сложение трёх чисел, как: $2 + 3 + 4$;

2) выделение сумм, получаемых в результате сложения равных чисел: $2 + 2$; $3 + 3$; $4 + 4$; $5 + 5$;

3) одновременные упражнения в сложении и вычитании: $3 + 4 = 7$, от $7 - 4 = 3$;

4) игры;

5) решение задач.

Вычитание в пределе 10.

Первые сведения о вычитании дети получают после изучения числа 6. Здесь они знакомятся со знаками «отнять» (—) и «получится» (=).

Чтобы овладеть навыком вычитания в пределе 10, учащиеся проходят через несколько этапов.

Дети-дошкольники заменяют вычитание пересчитыванием остатка. Так, если ребёнку нужно от 5 отнять 3, он отнимает или отодвигает 3 палочки и пересчитывает оставшиеся. Здесь нет вычитания как арифметического действия. Школа должна научить детей приёмам вычитания, которые изучаются по следующим этапам.

На первом этапе, пользуясь наглядными пособиями, учащиеся отнимают по единице или группами единиц, называя остатки:

$$\begin{array}{lcl} 5 - 1 = 4 & & 5 - 2 = 3 \\ 4 - 1 = 3 & \text{или} & 3 - 1 = 2 \\ 3 - 1 = 2 & & \end{array}$$

При таком вычитании учащиеся благодаря наглядным пособиям не держат в уме той части вычитаемого, которую остаётся ещё отнять. На втором этапе ученики, отняв одну или несколько единиц, должны знать, сколько ещё осталось отнять. Пример: нужно от 7 отнять 5; $5 = 3 + 2$ (состав числа); отнимаем группами единиц:

$$7 - 3 = 4 \qquad \text{(остаётся отнять 2)}$$
$$4 - 2 = 2$$

Уже при изучении состава чисел от 6 до 10 уделяется внимание отсчитыванию группами по 2, по 3 и т. д. Позже отсчитывание группами закрепляется при изучении таблицы вычитания по 1, по 2, по 3 и т. д. При отнимании чисел 5, 6, 7, 8 и 9 учащиеся наряду с отниманием группами пользуются присчитыванием к вычитаемому недостающего числа единиц до уменьшаемого (дополнение до 10, т. е. к замене действия вычитания действием сложения).

Так, если нужно от 8 отнять 6, учащиеся пользуются следующими вычислительными приёмами:

1) $8 - 3 - 3 = 2$ (отнимание группами);

2) $6 + ? = 8$; сколько нужно прибавить к 6, чтобы получить 8? (приём дополнения). Сколько получится, если от 8 отнять 6? При объяснении приёмов сложения и вычитания учитель пользуется демонстрационными наглядными пособиями, а учащиеся — дидактическим материалом.

ВТОРОЙ ДЕСЯТОК.

Нумерация чисел в пределе 20.

Причины выделения второго десятка в особый концентр заключаются в том, что здесь даётся первое знакомство с десятичной группировкой единиц и поместным значением цифр, усваивается название чисел второго десятка и письмо их, проходятся таблицы сложения и вычитания и формируются первые понятия об умножении и делении. Изучению нумерации чисел в пределе 20 предшествует ознакомление с понятиями «единица» и «десяток».

Пересчитывая числа от 1 до 10 на палочках, учитель связывает их в один пучок и предлагает учащимся сделать то же со своими счётными палочками.

Пересчитанные палочки учитель называет одним словом «десяток» и спрашивает детей, что считают десятками. Дети называют яйца, яблоки, пуговицы, огурцы и др.

Сначала дети усваивают устную нумерацию в пределе 20, т. е. названия чисел от 10 до 20. Для этой цели учитель предлагает учащимся взять в руки 10 счётных палочек (или один десяток) и 1 палочку (или единицу). На один десяток кладётся одна палочка, и учитель, держа десяток палочек и одну палочку сверху, спрашивает учеников, как можно назвать полученное число палочек. Ученики отвечают: одиннадцать.

Таким же образом последовательно учитель и учащиеся образуют совокупности из 12, 13 и т. д. предметов до 20, называют и анализируют их состав и названия. После проводится прямой и обратный счёт от 10 до 20 сначала на предметах, а потом отвлечённо.

Дальнейшая работа по усвоению устной нумерации проводится так. Учитель предлагает всем учащимся отложить один десяток и три единицы на счётных палочках или другом дидактическом материале, а одному ученику отложить на счётах один десяток косточек и три косточки, а затем назвать это число, и наоборот, учитель предлагает учащемуся отложить на счётах 15 косточек и выясняет с классом, сколько в этом числе десятков и сколько единиц.

Изучение письменной нумерации в пределе 20 проводится так. Учитель предлагает учащимся в тетрадях нарисовать иллюстрации к числам от 10 до 20 по клеточкам в виде столбиков: первый столбик — 10 клеточек, второй столбик — 10 клеточек и 1 клеточка, третий столбик — 10 и 2 клеточки и т. д. Под каждой парой столбиков учитель пишет соответствующие числа; учитель спрашивает, сколько здесь десятков клеточек, и показывает запись числа в 2 десятка, или 20.

Когда будут написаны числа от 10 до 20, учитель выясняет, что пишется на первом месте справа и что на втором, а также, какое значение имеют цифры 1 в числах 10 и 11 и цифра 2 в числах 20 и 12 и т. д.

Для лучшего усвоения письменной нумерации учитель прибегает к следующим упражнениям:

а) откладывание косточек на счётах в количестве до 20 и на дидактическом материале,

б) название числа отложенных косточек,

в) запись его,

г) анализ записи (что пишется на первом и что пишется на втором месте).

Сложение в пределе 20.

При изучении сложения в пределе второго десятка обращается внимание не только на усвоение результатов сложения, но и на ознакомление с приёмами выполнения этого действия.

Для успешного усвоения сложения рекомендуются такие наглядные пособия, как классные счёты, палочки, бруски арифметического ящика, кружки, квадратики, кубики и др.

Дети могут также самостоятельно приготовить себе под руководством учителя пособие, изображённое на рисунке 31.

При изучении сложения в пределе 20 различаются два основных случая: первый — без перехода через десяток (сложение двузначного числа с однозначным) и второй — сложение с переходом через десяток (сложение однозначных чисел, когда в сумме получается двузначное число).

Сложение без перехода через десяток.

Все случаи сложения объясняются на наглядных пособиях — на брусках, кубиках, палочках и др.

При сложении двузначного числа с однозначным различают следующие случаи:

1) $10 + 2$ и $2 + 10$.

Объяснение этого вычислительного приёма вытекает из нумерации двузначных чисел: 12 — один десяток и две единицы. Возьми один десяток палочек и ещё две палочки. Сколько палочек ты взял? 12.

2) $16 + 3$ и $3 + 16$. Объяснение ведётся так: $6 + 3 = 9$ и затем $10 + 9 = 19$.

3) $18 + 2$ и обратно: $2 + 18$. Объяснение ведётся так: $8 + 2 = 10$; $10 + 10 = 20$.

Параллельно объяснению делаются на доске такие записи:

$$18 + 2 = 20$$
$$8 + 2 = 10$$
$$10 + 10 = 20$$

Сложение с переходом через десяток.

Чтобы научить учащихся находить суммы таких чисел, как 8 и 3, 7 и 5, необходимо предварительно повторить сложение в пределе 10 по вопросам: сколько нужно прибавить к 7, чтобы полу-

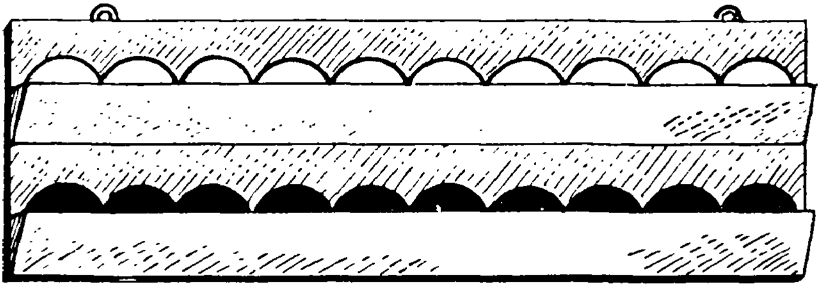


Рис. 31.

чить 10? к какому числу нужно прибавить 2, чтобы получить 10? — и т. д.

Подготовительным упражнением является сложение трёх чисел следующего вида: $9 + 1 + 1$; $8 + 2 + 1$, после чего учитель объясняет сложение чисел с переходом через десяток.

Пусть дано: к 9 прибавить 2. Учитель предлагает учащимся взять в руки 9 палочек и 2 палочки и спрашивает, сколько палочек нужно прибавить к 9, чтобы получить один десяток, сколько ещё осталось прибавить палочек, какое получится число, если к 9 прибавить 2. Вместо палочек можно пользоваться счётной доской (рис. 31) с двумя десятками кружков. Ученики откладывают на счётной доске, например, 7 кружков и, если нужно прибавить ещё 5 кружков, откладывают выше 3 кружка и там же ещё 2 недостающих кружка. Получают один десяток и две единицы, или 12.

Для закрепления таблицы сложения пользуются следующими упражнениями:

1) перестановка слагаемых: $6 + 8$ и $8 + 6$;

2) последовательное увеличение одного из однозначных слагаемых при постоянном втором слагаемом: $12 + 3$, $12 + 4$, $12 + 5$ и т. д.;

3) выделение равных слагаемых: $6 + 6$, $7 + 7$, $8 + 8$ и т. д.;

4) использование суммы равных слагаемых для последовательного сложения: $7 + 8 = 7 + 7 + 1 = 14 + 1 = 15$;

5) использование приёма дополнения чисел до 10 и 20 (параллельно): $7 + ? = 10$, $17 + ? = 20$.

Все случаи сложения однозначных чисел в пределе 20 целесообразно свести в таблицу сложения и познакомить учащихся с приёмами пользования этой таблицей.

Таблица сложения составляется учителем совместно с учениками. Дети готовят к определённому дню на странице клетчатой тетради сетку для записи таблицы сложения по следующей форме.

Таблица сложения.

+	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Первую клеточку слева оставляют пустой и ставят крест. В левом столбце сверху вниз пишут все числа первого десятка по порядку — от 1 до 10 включительно.

В верхнем ряду, начиная со второй клетки, дети пишут в ряд числа первого десятка от 1 до 10.

После этого дети заполняют пустые клетки сверху вниз, прибавляя к каждому числу по единице; во втором слева столбце будут получаться числа от 1 до 11; в следующем — от 2 до 12; далее от

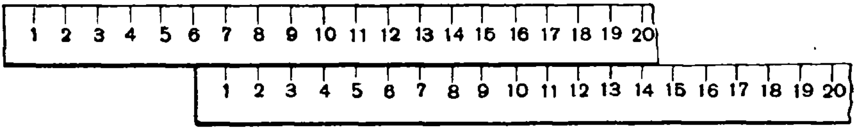


Рис. 32.

3 до 13; от 4 до 14; от 5 до 15; от 6 до 16; от 7 до 17; от 8 до 18; от 9 до 19; от 10 до 20.

Для автоматизации счёта можно использовать также счётные линейки (рис. 32), сделанные самими учащимися ($6 + 6 = 12$; $6 + 8 = 14$ и т. д.)[1].

Вычитание в пределе 20.

Объяснение каждого случая вычитания даётся на наглядных пособиях.

При вычитании в пределе 20 различаются два основных случая:

1) вычитание без перехода через десяток и
2) вычитание с переходом через десяток.

Вычитание без перехода через десяток.

При объяснении вычитания без перехода через десяток примеры располагаются в такой последовательности: а) вычитание однозначного числа из двузначного. Например: 18 — 2 или 17 — 6.

Объяснение ведётся так: $8 - 2 = 6$, а затем $10 + 6 = 16$.

б) Вычитание однозначных чисел из 20. Например: 20 — 2 или 20 — 8. Для объяснения берутся два пучка палочек, по одному десятку в каждом, и предлагают учащимся развязать один из пучков (или раздробить его в единицы) и из 10 единиц вычесть 2, оставшиеся единицы присоединить к десяткам.

Процесс вычитания можно записать так:

$$\begin{array}{l} 20 - 2 = 18 \\ \hline 10 \quad 2 = \ 8 \\ 10 + 8 = 18 \end{array}$$

Вычитание с переходом через десяток.

Решению примеров на вычитание с переходом через десяток предшествует упражнение в решении такого вида примеров: 13 — — 3 — 2; 14 — 4 — 1.

[1] При сложении ответы находятся на верхней линейке, при вычитании — на нижней.

Объяснение первого случая на вычитание с переходом через десяток, например 11 — 2, даётся так. Учащиеся берут в руки один десяток палочек и одну палочку. «Сколько нужно отнять палочек? (Две.) А сколько имеется палочек? (Одна.) Отнимем одну палочку. Остаётся 10 палочек. Сколько ещё осталось отнять палочек? (Одну.) Отнимаем от 10 одну палочку. Сколько останется? Останется 9 палочек». Запись: 11 — 1 = 10; 10 — 1 = = 9; 11 — 2 = 9.

Таким же образом разбираются и другие примеры. Чем больше вычитаемое, тем труднее производить вычитание. Для этого рекомендуется соблюдать строгую последовательность в подборе примеров, повторять состав вычитаемых чисел и пользоваться наглядными пособиями. В учебнике арифметики для I класса сложение и вычитание с переходом через десяток излагается в порядке натурального ряда чисел: прибавление к 9, 8, 7 и вычитание из 11, 12, 13, . . . и т. д.

Вычитание двузначного числа из двузначного.

Вычитание из двузначного числа двузначного изучается после вычитания с переходом через десяток. Объяснение производится так. Например: 16 — 12. Из наглядных пособий составляется 16, разбивается на десяток и единицы, а затем предлагается вычесть из этого числа 12.

Учащиеся вычитают сначала 10 из 16, а потом 2 из 6 и получают 4. Объяснение проводится на наглядных пособиях и дидактическом материале. Запись на доске: 16 — 12 = 4 (заключительная)

16 — 10 = 6
6 — 2 = 4

К числу более трудных случаев вычитания двузначного числа из двузначного относятся примеры вида: 20 — 16. Числа 20 и 16 разлагаются на десятки и единицы. Из двух десятков вычитается один десяток, остающийся десяток раздробляется в единицы, из 10 единиц вычитается 6.

Запись: 20 — 16 = 4 (заключительная)

20 — 10 = 10
10 — 6 = 4

Когда учащиеся овладеют этим приёмом вычитания, как основным, можно прибегнуть к нахождению остатков путём дополнения. Сколько нужно прибавить к 8, чтобы получить 10? А сколько нужно прибавить к 18, чтобы получить 20? (2).

Закрепление вычитания в пределе 20, как и сложения, производится на примерах, из которых один проверяется другим. Например: 14 — 6 = 8; 6 + 8 = 14. Для прочного усвоения вычитания с переходом через десяток нужно приучать учащихся чаще пользоваться приёмом дополнения.

Для закрепления таблицы вычитания можно составить с учащимися таблицу вычитания и сделать счётные линейки (рис. 32).

Таблица вычитания.

—	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
0	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1	9	10	1	2	3	4	5	6	7	8
2	8	9	10	1	2	3	4	5	6	7
3	7	8	9	10	1	2	3	4	5	6
4	6	7	8	9	10	1	2	3	4	5
5	5	6	7	8	9	10	1	2	3	4
6	4	5	6	7	8	9	10	1	2	3
7	3	4	5	6	7	8	9	10	1	2
8	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1
9	1	2	3	4	5	6	7	9	9	10

Ошибки учащихся на сложение и вычитание в пределе 20 объясняются часто неустойчивостью внимания, слабым развитием навыков действий в пределе 20 и непониманием этих приёмов.

Например: 1) $12 + 6 = 8$ (так как $2 + 6 = 8$); 2) $13 - 5 = 2$ и $12 - 5 = 3$ ($5 - 3$ и $5 - 2$) — вычитание с перестановкой цифры вычитаемого на место цифры уменьшаемого. В приведённых примерах учащиеся пользуются навыками действия в пределах первого десятка. Изжитие ошибок такого рода требует практики в вычислениях на дидактическом материале.

Умножение в пределе 20.

Подготовка учащихся к действию умножения начинается в I классе при изучении первого и второго десятков. Параллельно сложению и вычитанию дети учатся считать равными группами: двойками, тройками, четвёрками и пятёрками, сначала в пределе 10, а потом и 20 (рис. 33). Сначала эти упражнения проводятся на наглядных пособиях (рис. 33) и дидактическом материале, а потом на отвлечённых числах.

Чтобы ознакомить учащихся с понятием «умножить», необходимо предварительно научить учащихся брать сразу по нескольку предметов и вести счёт группами предметов. Обыкновенно учащиеся попутно овладевают термином «взять столько-то раз». Предварительно упражнения ведутся с учащимися в пределе 10. Ученику предлагают взять по 2 кубика 2 раза и записать резуль-

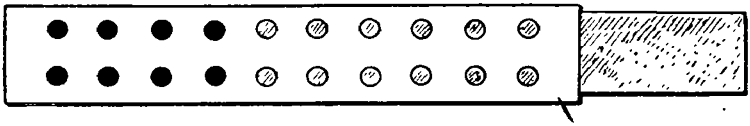


Рис 33.

тат: $2 + 2 = 4$; взять по 2 кубика 3 раза и записать: $2 + 2 + 2 = 6$; взять по 2 кубика 4 раза и записать: $2 + 2 + 2 + 2 = 8$; наконец, взять по 2 кубика 5 раз: $2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10$.

Учитель показывает ученикам, как заменить запись сложения более сокращённой записью, и говорит, что вместо того, чтобы писать: $2 + 2 + 2 + 2 + 2$, можно записать короче: $2 \times 5 = 10$. Учитель читает сделанную запись сначала сам («по 2 взять 5 раз, получится 10»), затем заставляет отдельных учащихся повторить её, а после читают все хором.

Дальше учитель предлагает самим учащимся записать вторую строчку: по 2 взять 4 раза, затем по 2 взять 3 раза и т. д.

Сделанные на доске записи, как и первая, читаются индивидуально и хором, а затем списываются в тетради. Попутно учитель говорит учащимся, что они перешли к изучению таблицы умножения 2 (двух). На следующих уроках составляются и изучаются таблицы умножения 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 в пределе 20.

Деление в пределе 20.

Деление принадлежит к числу наиболее трудных арифметических действий как при решении примеров, так и в особенности при решении задач. Оно применяется в различных случаях: при делении на равные части, по содержанию, при нахождении части числа для уменьшений числа в несколько раз и при сравнении чисел в кратном отношении. Каждое из приведённых выше приложений деления к решению практических вопросов в свою очередь объединяет разнообразные по своим ситуациям и формулировкам вопросы. Так, в задачах на деление на равные части говорится, как о делении, когда «расставили», «разложили», «разливали», «раздавали» и т. д. Поэтому для выяснения сущности деления нужно идти от задач (см. простые задачи).

Впервые с делением как арифметическим действием учащиеся знакомятся в I классе (второе полугодие). Обучение делению принято начинать с деления на равные части, как более доступного детям семилетнего возраста.

Чтобы познакомить детей с делением на равные части, необходимо иметь на руках наглядные пособия — кружки, квадратики и полоски, заготовленные специально для выяснения понятия «разделить». Прежде чем приступить к делению, нужно познакомить учащихся с понятием «равные части». Для этого учитель предлагает учащимся взять в руки круг и перегнуть его посередине, провести осторожно ноготком по сгибу и разорвать на две части. Наложив одну часть на другую (как показывает учитель), ученики увидят, что круг разорван на две части и что эти части по величине равны.

После этого учитель предлагает учащимся взять в руки полоску или квадрат и сделать то же. Можно прибегнуть также к делению на равные части предметов в натуре, например яблока, булки. Дальше учитель делает вывод о том, что мы умеем делить кружки, полоски, квадратики на равные части или пополам.

При изучении деления на три, четыре и больше равных частей учитель возвращается к делению тех или иных предметов на соответствующее число частей, чтобы учащиеся понимали, что такое одна из трёх равных частей или одна из четырёх равных частей и т. д.

Для деления чисел на равные части можно сделать наглядное пособие из картонного листа или фанеры с наклеенными или нашитыми на него мешочками. Число мешочков должно отвечать числу равных частей, на которое делится то или иное число.

Мешочки следует прикреплять постепенно по мере увеличения делителя от 2 до 10.

При делении 4 на 2 равные части учитель предлагает всем учащимся взять в руки 4 палочки, а сам пользуется описанным выше демонстрационным пособием или наборным полотном, куда могут вставляться кружки или палочки. Учитель предлагает учащимся разделить 4 палочки на 2 равные части, при этом знакомит их с техникой деления: «Сначала отложим на каждую часть (или в мешочек) по одной палочке, а затем, подсчитав число оставшихся палочек, откладываем ещё по одной палочке. По скольку палочек приходится на каждую часть?» Учащиеся отвечают: «По 2». — «Сколько мы палочек взяли?» Ответ: «4». «На сколько равных частей мы делили?» — «На две равные части». — «По скольку палочек мы положили на каждую часть?» Ученики отвечают: «По 2».

«Смотрите на доску. Как записать то, что мы сделали?» Учитель пишет на доске: $4 : 2 = 2$.

Далее то же повторяется с числами 6, 8, 10. Особое внимание нужно обратить на деление чисел в пределе первого десятка, так как число предметов, которое мы делим, доступно непосредственно детскому восприятию.

Деление на равные части в пределе 10 и выше может проводиться в соотношении с умножением путём постановки вопро

«Всё ли мы разделили? Проверим». Так как на каждую часть приходится по 2 или по 3 палочки, а таких частей 2, то учащиеся убеждаются, что по 2 взять 2 раза получится 4, следовательно, палочки разделены все. Установление связи между умножением

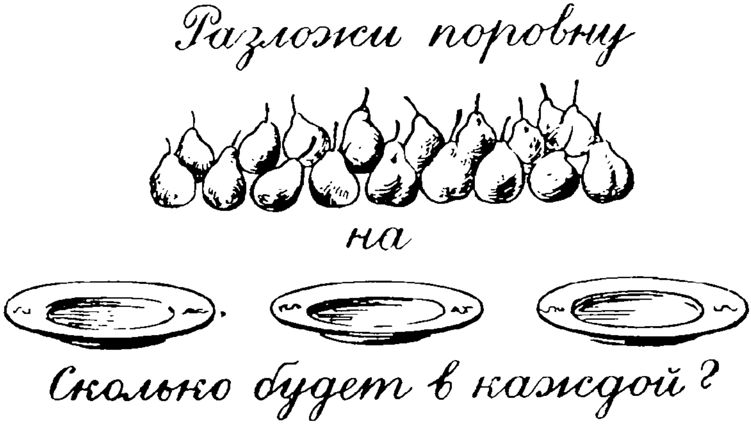


Рис. 34а.

и делением помогает учащимся легче находить табличные результаты деления.

Когда учащиеся составят таблицу деления до 10, учитель записывает её на доске, а учащиеся — в тетради. Когда учащиеся

Рис. 34б.

вполне усвоят деление в пределе 10, учитель переходит к делению на 2 в пределе 20. Так же объясняется учащимся деление на 3, 4, 5 и больше равных частей до 10. При этом наряду с вычислительными приёмами уделяется большое внимание наглядности (см. рис. 34а, 34б).

ПЕРВАЯ СОТНЯ.

Первая сотня выделяется в самостоятельный концентр потому, что здесь учащиеся овладевают десятком, как счётной единицей, знакомятся с новой счётной единицей — сотней, заканчивают таблицы умножения и деления и изучают в пределе ста внетабличные действия.

Нумерация чисел в пределе 100.

Обучение нумерации крупных десятков ставит своей целью познакомить учащихся с десятком, как счётной единицей. Учащиеся должны овладеть прямым и обратным счётом круглыми десятками, пользуясь двойной терминологией: один десяток, два десятка или десять, двадцать. В качестве наглядных пособий и дидактического материала используются пучки палочек, бруски арифметического ящика, счёты.

Устная нумерация полных двузначных чисел объясняется так. Учащиеся набирают два десятка счётных палочек, а один из учащихся откладывает на счётах два десятка косточек, затем два десятка и одну косточку (единицу), затем два десятка и две палочки и т. д. до трёх десятков. Двузначное число, состоящее из двух десятков и одной единицы, учащиеся называют числом 21, двух десятков и двух единиц — 22 и т. д. Ведётся работа сначала в пределе трёх, потом четырёх и большего числа десятков до 10 десятков, или 100.

Устная нумерация в пределе 100 изучается по следующему плану: 1) составление двузначного числа из десятков и единиц на палочках, брусках и кубиках арифметического ящика и т. п.; 2) название числа по разрядам или разложение его на десятки и единицы, затем даётся общепринятое название числа и проводится анализ его: «Сколько десятков в этом числе?» — «Два десятка». — «Сколько ещё единиц?». — «Три единицы».

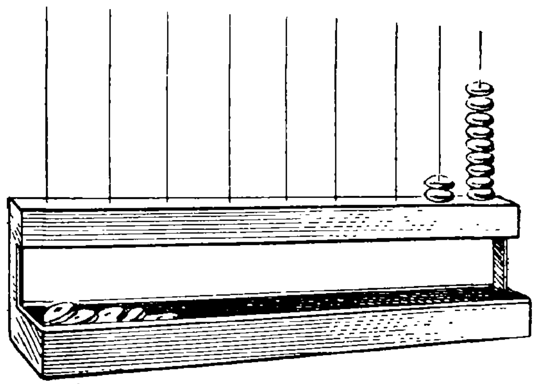


Рис. 35.

Кроме наглядного счёта, ведётся и отвлечённый счёт. При отвлечённом счёте, как и в процессе наглядного счёта, обращается внимание на переход через десяток, например: 37, дальше 38, 39, 40, 41.

При изучении письменной нумерации обращается внимание на то, как пишутся числа от 10 до 20. По сходству с ними ученики легко усваивают написание чисел до 100 включительно.

Письменная нумерация двузначных чисел изучается так же, как письменная нумерация в пределе 20: образование чисел при помощи дидактического материала, объяснение записи чисел, анализ записанных чисел. При объяснении используются кубики и бруски арифметического ящика, абак[1], вертикальные счёты (рис. 35).

Для лучшего усвоения устной и письменной нумерации можно прибегать к ручному труду и к математическим играм.

Учащиеся на уроках ручного труда могут сделать 100 палочек и по данному учителем трафарету 2 десятка цифр от 1 до 0.

Образчиком игры для закрепления нумерации может служить живая нумерация. Учитель заготовляет цифры от 1 до 10. Цифры снабжаются шнурками для того, чтобы их можно было надеть на шею. Цифры раздаются учащимся. Учитель называет число, например 57, а учащиеся, у которых цифры 5 и 7, должны быстро выйти на середину класса и построиться так, чтобы можно было прочесть число 57.

Круглые десятки.

Сложение круглых десятков (I класс).

Действия над круглыми десятками предшествуют изучению арифметических действий в пределе ста. Цель изучения круглых десятков: научить учащихся пользоваться десятками, как счётной единицей, и закрепить знание таблицы сложения, вычитания, умножения и деления.

Все действия над круглыми десятками, в том числе и сложение, изучаются по аналогии с числами первого десятка, причём можно использовать наглядные пособия. Так, если нужно к 60 прибавить 30, учитель даёт предварительно пример: «Сколько получится, если к 6 прибавить 3?» Затем дальше спрашивает: «Сколько десятков в числе 60? в числе 30? Сколько десятков получится, если: 6 дес. + 3 дес. = 9 дес.? Сколько единиц в 9 десятках?» И дальше записывает окончательный результат: 60 + + 30 = 90.

Пользуясь наглядными пособиями, учитель присчитывает к шести десяткам три десятка сначала по десяткам, а потом в целом.

Вычитание круглых десятков.

Круглые десятки вычитаются также по аналогии с однозначными числами. Если дано вычесть 50 из 70, учитель предлагает сначала из 7 вычесть 5, а затем, пользуясь образной записью, пишет: 7 дес. — 5 дес. = 2 дес., или 20. То же можно объяснить на наглядных пособиях, отсчитывая от 7 десятков по одному десятку или по нескольку десятков.

---

[1] См. стр. 128, рис. 39.

Умножение круглых десятков.

При умножении круглых десятков различаются два случая: 1) умножение 10 на числа от 1 до 10 и 2) умножение круглых десятков на числа первого десятка в пределе 100. При умножении 10 на 3, на 4 и т. д. результат находят сначала сложением и от длинной, неэкономной записи сложения переходят к записи вычисления умножением:

$$10 \times 3? \quad 10 + 10 + 10 = 30; \quad 10 \times 3 = 30.$$

Умножение сопровождается откладыванием на проволочных счётах соответствующего числа десятков косточек. Умножение круглых десятков на 2, на 3, 4 и 5 объясняется сначала сложением. Если нужно умножить 20 на 4, берём 4 раза по 2 десятка палочек и записываем:

$$20 + 20 + 20 + 20 = 80,$$

а после этого переходим к более сокращённой записи умножением: $20 \times 4 = 80$.

Замена умножения сложением содействует лучшему усвоению состава чисел. Применение этого приёма не исключает использования при умножении и других приёмов объяснения. Например: $20 \times 3 = 60$; 2 дес. $\times$ 3 = 6 дес., или 60 (образная запись).

Деление круглых десятков на однозначное число.

Деление круглых десятков на однозначное число изучается в такой последовательности. Сначала делят десятки первой сотни на числа 1, 2, 3 и т. д. до 10.

10 : 1 = 10	60 : 6 = 10
20 : 2 = 10	70 : 7 = 10
30 : 3 = 10	80 : 8 = 10
40 : 4 = 10	90 : 9 = 10
50 : 5 = 10	100 : 10 = 10

После этого делятся круглые десятки — 40, 60, 80, 90 и 100 — на 2, 3, 4 и 5, когда в частном получаются круглые десятки. Объяснение может проводиться на наглядных пособиях (пучки палочек, связанных по десятку, бруски, монеты) или по аналогии с числами первого десятка:

4 : 2 = 2		90 : 3 = ?
4 дес. : 2 = 2 дес.	или	9 дес. : 3 = 3 дес.
40 : 2 = 20		9 : 3 = 3

Деление круглых десятков на однозначное число по содержанию изучается во II классе параллельно таблице умножения и заканчивается при изучении внетабличного деления.

Деление круглых десятков на круглые десятки изучается во II классе при переходе к внетабличному делению на двузначное число.

Сложение в пределе 100.

В пределе 100 различаются два основных случая сложения: первый — сложение двузначного числа с однозначным и второй — сложение двузначного числа с двузначным.

Сложение двузначного числа с однозначным.

При изучении сложения двузначного числа с однозначным сначала повторяются приёмы сложения, усвоенные в пределе 20, а затем распространяются на числа в пределе 100, а именно:

а) прибавление к круглым десяткам единиц: $30 + 4$ — и сложение в случае перестановки слагаемых: $4 + 30$;

б) прибавление к двузначному числу однозначного и к однозначному числу двузначного без перехода через десяток, например: $33 + 2$; $2 + 33$; $26 + 4$ и $4 + 26$;

в) сложение с переходом через десяток: $29 + 2$.

Во всех случаях объяснение даётся так же, как и в пределе 20. Наглядные пособия те же.

Сложение двузначных чисел с двузначными.

а) Сложение двузначных чисел без перехода через десяток. При сложении двузначных чисел с двузначными различаются также два основных случая сложения: без перехода через десяток и с переходом через десяток. Сложение без перехода через десяток изучается в такой последовательности: $35 + 20$; $43 + 32$; $58 + 32$.

Сложение двузначных чисел можно производить несколькими способами, но более употребителен следующий приём.

Пусть дано: $43 + 32$. «Сколько десятков в числе 32? Сколько получится, если $43 + 30$?» — «73». — «Сколько ещё осталось прибавить единиц?» — «2». — «Сколько получится всего?» — «$73 + 2 = 75$».

Сложение двух чисел без перехода через десяток, когда единицы обоих слагаемых в сумме образуют 10, например $58 + 32$, можно объяснить так: «Откладываем на наглядных пособиях 5 десятков и 8 единиц, прибавляем к этому числу сначала три десятка, а потом две единицы и заменяем десять единиц десятком».

Запись:

$$\underline{58 + 32 = 90}$$
$$58 + 30 = 88$$
$$88 + 2 = 90$$

Возможно и раздельное сложение десятков с десятками, единиц с единицами с последующим превращением единиц в десятки. Например:

$$50 + 30 = 80;\ 8 + 2 = 10;\ 80 + 10 - 90.$$

С приёмом округления при сложении учащиеся знакомятся в III классе.

б) Сложение двузначных чисел с переходом через десяток. Пусть дано сложить 48 и 27. При сложении этих чисел можно пользоваться различными приёмами, но наиболее употребителен такой вычислительный приём: $48 + 20 = 68$; $68 + 7 = 75$. Объяснение ведётся или на палочках, или на брусках и кубиках арифметического ящика и т. п.

Применяя наглядные пособия для успешного овладения сложением в пределе 100, необходимо соблюдать последовательность в усложнении материала, идя от более лёгкого и прочно усвоенного к новому. Примеры нужно усложнять постепенно. Семилеткам трудно даётся сложение и вычитание в пределе 100, поэтому необходимо решение примеров на сложение и вычитание в пределе 100 сравнивать с известными им приёмами решения примеров на сложение в пределе 20 ($18 + 2$; $28 + 2$; $20 - 11$; $30 - 11$ и т. д.).

Для подготовки к умножению и делению большую помощь оказывает учащимся счёт парами, четвёрками, пятёрками, шестёрками и т. д. до 100, особенно, если этот счёт ведётся на наглядных пособиях (рис. 36).

Большую помощь оказывает, как сказано выше, использование при сложении рядов чисел: 4, 8, 12 и т. д. до 100; 6, 12, 18 и т. д. до 100; 5, 15, 20, 25 и т. д. до 100.

Во втором полугодии можно считать до 100 двузначными числами: 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18 и 19. Упражнения в вычислениях путём присчитывания двузначных чисел облегчают усвоение внетабличного умножения и деления.

Вычитание в пределе 100.

При вычитании в пределе 100 различают два основных случая: вычитание из двузначного числа однозначного и вычитание из двузначного числа двузначного.

Вычитание из двузначного числа однозначного.

При вычитании из двузначного числа однозначного соблюдается та же последовательность в подборе примеров, что и при вычитании из двузначного числа однозначного в пределе 20.

Здесь рассматриваются те же случаи вычитания без перехода через десяток и с переходом через десяток.

Вычитание из двузначного числа однозначного без перехода через десяток. При вычитании без перехода через десяток следует обратить внимание на следующую последовательность в подборе примеров: 1) $27 - 7$; 2) $25 - 3$; 3) $30 - 2$. Объяснения даются так же, как и в пределе 20. Например: $30 - 2$.

$$\frac{30 - 10 = 20}{\begin{array}{l} 10 - \ \ 2 = \ \ 8 \\ 20 + \ \ 8 = 28 \end{array}}$$

Приём вычитания из двузначного числа однозначного числа объясняется так: 27 — 8. Отнимаем от 27 его единицы, чтобы сделать это число круглым, а потом от 20 отнимем 1. Запись на доске:

$$\frac{27 - 8 = 19}{\begin{array}{l} 27 - 7 = 20 \\ 20 - 1 = 19 \end{array}}$$

Объяснению предшествует повторение вычитания с переходом через десяток в пределе 20 и состав чисел первого десятка.

Вычитание двузначного числа из двузначного.

а) Без перехода через десяток. При вычитании двузначного числа из двузначного углубляются и закрепляются приёмы вычитания двузначных чисел в пределе 20.

Пример 1. 38 — 20

1) $18 - 10 = 8$
   $38 - 20 = 18$ (по аналогии)
2) $30 - 20 = 10$ (последовательное вычитание)
   $10 + 8 = 18$

Пример 2. $17 - 14 = 3$ (пример для повторения); $37 - 24 = 13$ (результативная запись). Вычитание можно выполнить так: $37 - 20 = 17$; $17 - 4 = 13$. Этот приём более экономен, но он предполагает твёрдое знание вычитания однозначного числа из двузначного и вычитание из двузначного числа круглых десятков. Второй приём: $30 - 20 = 10$; $7 - 4 = 3$; $10 + 3 = 13$ (запись вычисления).

Из приведённой записи видно, что десятки вычитаются из десятков, единицы из единиц и остатки складываются. Весь процесс вычисления воспроизводится на наглядных пособиях и дидактическом материале (палочках и др.).

Учащиеся иногда прибегают при вычитании двузначных чисел к уравниванию единиц уменьшаемого и вычитаемого. Например:

$$\frac{37 - 24 = 13}{\begin{array}{l} 34 - 24 = 10 \\ 10 + \ \ 3 = 13 \end{array}}$$

Несколько труднее приобретают учащиеся навык вычитания из круглых десятков двузначного числа. Например, из 80 — 57. При объяснении на наглядных пособиях набирается 8 десятков палочек или восемь брусков арифметического ящика; отнимается 5 десятков палочек или от восьми брусков арифметического ящика отнимается 5 брусков-десятков. Один брусок-десяток раздробляется в кубики-единицы, и от него отнимается 7 кубиков-единиц. Остающиеся десятки и единицы складываются. Вычисление на палочках или брусках учитель сопровождает такой записью: $80-50=30$; $30-10=20$; $10-7=3$; $20+3=23$. Если учащиеся твёрдо владеют навыком вычитания из круглых десятков однозначных чисел, можно вычислительный приём упростить:

$$\frac{80-57=23}{\begin{array}{r}80-50=30\\30-\ \ 7=23\end{array}}$$

$80-57=23$ (результативная запись)

$80-50=30$

$30-7=23$ запись процесса вычисления

б) Вычитание из двузначного числа двузначного с переходом через десяток. Наиболее употребителен следующий способ объяснения вычитания двузначных чисел:

1) $84-29=55$		2) $84-29=55$	
$84-20=64$ $64-4=60$ $60-5=55$	развёрнутая запись объяснения	$84-24=60$ $60-5=55$	сокращённая запись объяснения

Каждый из приведённых способов вычисления остатка воспроизводится на палочках и закрепляется решением примеров и задач. Вычитание даётся учащимся трудно, а потому необходимо при закреплении придерживаться следующих указаний.

Вычитанию в пределе 100 должен предшествовать аналогичный случай вычитания в пределе 20.

Изучая вычитание в пределе 100, не следует забывать присчитывания и отсчитывания однозначных и двузначных чисел.

Табличное умножение.

При изучении таблицы умножения во II классе учащиеся знакомятся с разнообразными приёмами и способами получения табличных результатов, что говорит не только о большом практическом значении таблицы умножения, но и об её образовательной ценности.

Вычислительные приёмы, с которыми знакомятся учащиеся, изучая таблицу умножения, следующие.

Первый приём — счёт равными слагаемыми или замена сложения умножением и обратно.

Так, если нужно 4×4, то результат может быть найден путём сложения равных слагаемых (рис. 36), а именно:

$$4+4+4+4=16.$$

Разложение числа на равные слагаемые употребляется для контроля за пониманием операции умножения и записи её.

Второй приём, к которому прибегают при изучении таблицы умножения, — **перестановка сомножителей**. Подготовительные упражнения на наглядных пособиях и графически могут иметь место уже в первом классе.

Третий приём. При изучении таблицы умножения можно пользоваться **распределительным законом**. Знакомство с таблицей умножения во II классе по способу замены сложения умножением, когда множитель — большое число, требует длинных записей, между тем применение к нахождению табличных чисел распределительного закона сокращает записи и делает вычисления более разнообразными. На слагаемые могут разлагаться и множимое и множитель. Например: $8 \times 7 = 8 \times 3 + 8 \times 4$ или $4 \times 7 + 4 \times 7$.

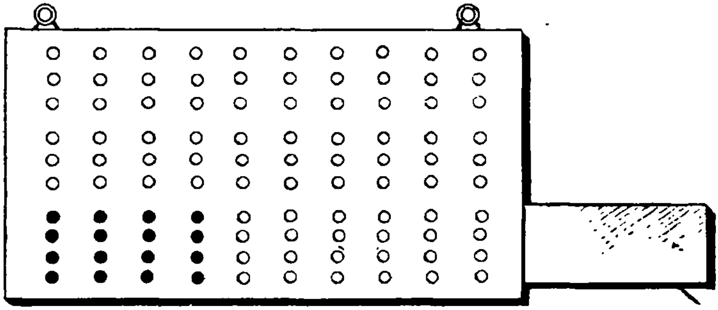


Рис. 36.

Четвёртый приём. Возможно применение **сочетательного свойства** произведения, как приёма, содействующего предварительному пониманию последовательного умножения.

Например, если нужно 4×8, то можно это произведение найти так: $(4 \times 2) \times 4$. Хотя применение этого приёма умножения на данной ступени обучения ограничивается пределами табличного умножения, применение его весьма целесообразно по соображениям образовательного характера.

Пятый приём. Округление множимого. Так, если дано 9×7, можно 9 принять за 10, 10×7 и от полученного произведения отнять 7:

$$9 \times 7 = 10 \times 7 - 7.$$

Учителя из перечисленных приёмов больше внимания уделяют замене умножения сложением, переместительному и распределительному свойствам произведения.

Таблица умножения изучается в порядке натурального ряда чисел, но при повторении таблицы умножения возможна и другая последовательность, а именно: умножение по 2 и по 4, по 5 и по 10, по 3 и по 6, по 4 и по 8, по 3 и по 9 и по 7.

Таблица умножения обычно даётся в двух вариантах: по постоянному множимому и по постоянному множителю. Но учащихся нужно ознакомить и с третьим вариантом записи таблицы — таблицей Пифагора.

Таблица по постоянному множимому наиболее доступна учащимся, так как нахождение каждого табличного результата может быть получено наглядно и притом одним и тем же способом, т. е. путём набирания двоек, троек, четвёрок и т. д.

При изучении таблицы умножения по постоянному множителю пришлось бы при составлении одной и той же таблицы набирать числа сначала по 2, затем по 3, по 4 и т. д., что затрудняет как организацию наглядного материала, так и процесс вычисления. Но так как учащимся необходимо знать таблицу по постоянному множимому и постоянному множителю, то учащиеся сначала усваивают таблицу по постоянному множимому, а затем упражняются в составлении и усвоении таблиц по постоянному множителю, пользуясь переместительным свойством произведения.

Как изучать каждую из таблиц умножения с учащимися II класса? При объяснении таблицы умножения учащимся II класса каждая таблица делится на три части. Прежде всего повторяется та часть таблицы, которая была усвоена в I классе. Затем повторяются из таблицы те её строки, которые могут быть получены путём переместительного свойства произведения и, следовательно, уже известны учащимся, а далее изучаются новые табличные произведения одним из указанных выше приёмов с привлечением наглядных пособий.

Например:	$6 \times 1 = 6$ $6 \times 2 = 12$ $6 \times 3 = 18$	Повторение пройденного в I классе.
	$6 \times 4 = 24$ $6 \times 5 = 30$ $6 \times 6 = 36$	Применение переместительного свойства произведения.
	$6 \times 7 = 42$ $6 \times 8 = 48$ $6 \times 9 = 54$ $6 \times 10 = 60$	Применение нахождения суммы равных слагаемых или распределительного закона.

В качестве наглядных пособий при прохождении таблицы умножения употребляются:

1) палочки, бруски, кубики, кружки и т. п.,
2) счёты,
3) наглядные таблицы умножения.

При прохождении таблицы умножения имеют широкое распространение разнообразные игры. Особенно получили большое употребление в школах игры «Лото», «Кто скорее?» и «Лучший счетчик».

Игра «Лото Архимеда».

На 5 карточках пишутся результаты таблицы умножения. Каждый играющий выбрасывает 2 кубика с числами на гранях от 4 до 9. Эти числа на верхних гранях перемножаются, и соответствующее число на карточке закрывается. Выигрывает тот, кто раньше всех закрыл все числа на своей карточке.

а) 16, 28, 32, 40, 45, 54, 72
б) 24, 25, 30, 35, 36, 42, 56
в) 20, 28, 36, 40, 48, 49, 63
г) 24, 30, 35, 45, 54, 64, 72
д) 20, 32, 42, 48, 56, 63, 81

Эту игру можно проводить в классе. Нужно дополнительно к карточкам написать таблицу умножения (строчками) без ответов. Один из учащихся, стоя у стола, читает или показывает строчку всему классу, а другие закрывают на своих таблицах ответы. Карточки повторяются. Выигрывает одновременно несколько человек. Для сокращения игры можно вместо 5 карточек с 7 произведениями сделать 7 карточек с 5 произведениями.

Закрепление таблицы умножения.

Для закрепления таблицы умножения рекомендуется обратить особое внимание на

1) произведения равных чисел: 2×2, 3×3 — и т. д.;
2) умножение чисел от 1 до 10 на 10;
3) произведение чисел, оканчивающихся нулями: 10, 20, 30, 40;
4) произведения, получаемые от умножения различных множителей при одинаковом результате, например: $2 \times 9 = 3 \times 6$ или $4 \times 6 = 3 \times 8$ и т. д.;
5) составление таблиц по постоянному множителю;
6) составление таблиц по распределительному закону;
7) составление с учащимися таблицы Пифагора;
8) решение задач.

Учащиеся должны знать наизусть таблицу умножения, но это знание приобретается не механическим заучиванием таблицы, а в результате многократных упражнений и составлением таблиц.

Табличное деление.

Во II классе после изучения сложения и вычитания в пределе 100 учащиеся знакомятся с делением по содержанию сначала на числах до 20, а потом и до 100.

Первые уроки обучения делению по содержанию должны опираться на небольшие числа, чтобы подлежащие делению числа и результаты деления легко воспринимались учащимися. Поэтому первые сведения о делении по содержанию (в пределе 20) даются перед изучением таблицы умножения и деления в пределе 100, на числах второго десятка. После этого тот и другой вид деления изучаются совместно, по отдельным таблицам (3, 4, 5 и т. д.), но последовательно.

Чтобы успешнее содействовать формированию основных понятий деления на части и деления по содержанию и тем самым повышать уровень математического развития детей, нужно чаще прибегать к использованию наглядных пособий (трафаретов монет, яблок, груш и др.).

Подбор задач на деление по содержанию должен восстановить в памяти учащихся картины естественного деления предметов на группы в процессе игр и детской трудовой деятельности.

Делению по содержанию предшествует повторение таблицы умножения по постоянному множимому.

Возьмём для примера задачу: «Для поливки огорода дети принесли из пруда 10 вёдер воды. Каждый раз они приносили по 2 ведра. Сколько раз они ходили по воду?»

10 вед. : 2 вед. = 5	2 вед. $\times$? = 10 вед.
10 : по 2 = 5	по 2 $\times$ 5 = 10

Из приведённой записи видно, что учащимся нужно поставить вопрос: «Сколько раз нужно взять по 2 ведра, чтобы получилось 10 вёдер?» Сравнивая решение этого примера с предложенным примером («Сколько получится, если мы 10 разделим по 2?»), учащиеся ответят: 5.

Найденный ответ подвергается проверке путём умножения.

Для уяснения соотношения между делением по содержанию и умножением по постоянному множимому следует записывать на доске и в тетрадях таблицы, соответствующие изучаемому случаю умножения и деления.

$2 \times 2 = 4$	$? \times 2 = 4$	$4 : 2 = 2$
$2 \times 3 = 6$	$? \times 3 = 6$	$6 : 2 = 3$
$2 \times 4 = 8$	$? \times 4 = 8$	$8 : 2 = 4$
. . . .	. . . .	. . . . и т. д.

Сравнивая с учащимися технику деления на равные части и деления по содержанию, учитель обращает внимание учащихся на то, что при делении на части на каждую из частей мы клали по одной палочке. При делении по содержанию мы сразу даём в руки учащихся такое количество палочек, по скольку мы делим. Так, если делим по 2, то даём в руки по 2 палочки, если по 3, то по 3 палочки и т. д.

В результате деления в ответе получаются числа, которые показывают, сколько раз по 2 содержится в 10, но при решении задач ответ 5 может означать 5 тетрадей и 5 литров и т. п.

Этот двойственный характер ответа, подчёркивающий его новое качество, чрезвычайно трудно воспринимается учащимися, а поэтому первоначально нужно подбирать такие задачи, в которых ответ записывается отвлечённым числом (в «разах»); позже следует предлагать такие задачи, где ответ на вопрос задачи имеет конкретное значение. Например: 10 тетр. : 2 тетр. = 5, 5 (учеников). В таких случаях ответ сначала пишется двойной, а позже заменяется сокращённой формой записи: 10 тетр. : 2 тетр. = 5 (учеников).

Сравнивая деление на равные части и деление по содержанию в арифметическом отношении, видим, что при делении на части мы по данному произведению и множителю находим множимое. При делении по содержанию мы по данному произведению и множимому находим множитель.

Так как множитель принято считать в арифметике числом отвлечённым, то делитель при делении числа на равные части — всегда число отвлечённое, а при делении по содержанию множимое, как часть произведения, является числом именованным (в задачах), частное же, как множитель, — всегда число отвлечённое. Этим руководствуются учителя в постановке наименований при делении на части и делении по содержанию.

На первых ступенях обучения, чтобы отличить деление по содержанию от деления на части, необходимо чаще прибегать к сопоставлению обоих видов деления путём обращения одной задачи в другую. Эти упражнения проводятся после того, как изучены деление на части и деление по содержанию раздельно по той или иной таблице, начиная с двух.

Табличное деление в пределе 100 объясняется различными способами. Обычно результаты находятся посредством умножения, т. е. путём подыскания такого числа, на которое нужно умножить делитель, чтобы получить делимое.

Нельзя сказать, что такое нахождение результатов деления обеспечивает понимание сущности деления. Нередко учащиеся, правильно называя результаты деления одного числа на другое, затрудняются в применении деления к решению задач. Чтобы углубить понимание деления, необходимо обратить внимание на раскрытие сущности деления на небольших числах (10—30), как вычитания равными группами или как набирания делимого из равных групп (т. е. сложения — умножения).

Легче всего это сделать на задачах. Пусть дана задача: «Из леса нужно вывезти 24 бревна. На каждую грузовую машину можно положить по 6 брёвен. Сколько понадобится грузовиков, чтобы вывезти брёвна?»

Решение этой задачи можно записать так:

$$24 - 6 - 6 - 6 - 6$$

Учитель ставит вопрос: «Сколько же понадобилось машин, чтобы вывезти эти брёвна?» Подсчитывая, сколько раз мы отнимали по 6, учащиеся говорят, что понадобится 4 машины.

А как это найти другим способом? Для этого достаточно 24 бр. : 6 бр. = 4. Здесь учащиеся узнают, как деление можно заменить вычитанием равных групп. При решении этой же задачи может быть показано, как делимое составляется из равных слагаемых:

$$6 + 6 + 6 + 6 = 24$$

Ставится вопрос учащимся: «Сколько же понадобилось машин, чтобы доставить бревна? Как это записать делением?»

24 бр. : 6 бр. = 4 (машины).

Сравнивая различные способы нахождения частного, мы видим, что задачи на деление могут уточняться и углубляться посредством сложения и вычитания, но при непременной проверке окончательного результата умножением.

При изучении деления в пределе 100 можно прибегать к разнообразным приёмам, вытекающим из того, что компоненты деления представляют собой: произведение, делимое, а делитель — множимое или множитель. Так, для лучшего усвоения отдельных случаев таблицы деления можно применить переместительное свойство произведения, например:

$$18 : 2 = 9 \qquad 54 : 6 = 9$$
$$18 : 9 = 2 \qquad 54 : 9 = 6$$

Для закрепления таблицы деления можно воспользоваться примерно теми же приёмами, которые были рекомендованы при закреплении таблицы умножения, а именно:

1) выделить такие строчки, когда делитель и частное будут равны:

16 : 4; 25 : 5; 36 : 6; 49 : 7;

2) выбрать строчки с круглыми десятками, так как деление их усвоено ещё в I классе;

3) обратить внимание на решение следующих столбиков:

$$6 \times 8 = 48; \qquad 48 : 6 = 8$$
$$8 \times 6 = 48; \qquad 48 : 8 = 6$$

4) чаще прибегать к проверке деления умножением;

5) решать задачи, так как понимание применения деления лучше усваивается на задачах.

Задачи нужны как для сопоставления обоих видов деления, так и для раскрытия других приложений деления к решению задач: нахождение одной части числа, уменьшение числа в несколько раз и кратное сравнение.

Арифметическая терминология деления отличается от терминологии методической. Деление по содержанию читаем так: 54 разделить по 9, получится 6, а деление на части так: 54 разделить на 9 равных частей, получится по 6. При делении чисел с наименованиями следует делать ударения на числах, а не на их наименованиях.

Таблица деления, как и таблица умножения, изучается в порядке натурального ряда чисел от 2 до 10 совместно, но последовательно. Например: сначала умножение трёх, потом деление по 3 и затем деление на 3 равные части.

Внетабличное умножение.

Внетабличным умножением принято называть умножение двузначного числа на однозначное и однозначного числа на двузначное в пределе 100.

Целесообразность выделения внетабличного умножения оправдывается следующими соображениями: 1) учащиеся, изучая внетабличное умножение, знакомятся с приёмом умножения по разрядам; 2) знание внетабличного умножения облегчает учащимся понимание механизма умножения многозначных чисел.

а) Внетабличное умножение двузначного числа на однозначное. Умножение двузначного числа на однозначное основывается на разложении числа на десятичные группы и применении распределительного закона. Так как двузначное число разлагается на десятки и единицы, то, прежде чем приступать к изучению внетабличного умножения, нужно повторить умножение круглых десятков на однозначное число и таблицу умножения.

К числу подготовительных упражнений нужно отнести также разложение чисел на десятки и единицы, например: $27 = 20 + 7$; $48 = 40 + 8$; $19 = 10 + 9$, и счёт равными группами: $11 + 11 + 11$ и т. д.

Подбирая примеры для объяснения, необходимо различать два случая: 1) когда от умножения единиц двузначного числа на однозначное не получаются десятки и 2) когда имеет место переход через десяток. Например: 12×2; 12×5 и 12×7; 19×2.

Объяснение даётся так. Пусть дано: 26×3. Сколько десятков и сколько единиц в числе? (2 дес. и 6 ед.). Что значит умножить 26 на 3? Взять 3 раза по 26, или $26 + 26 + 26$. Сколько получится от сложения десятков? единиц? Всего? 78.

Найдём тот же результат умножением. Что сначала умножим на 3? Что потом? Сколько всего получится? Запись на доске и в тетради примера с объяснением:

$$\begin{array}{r} \underline{26 \times 3 = 78} \\ 20 \times 3 = 60 \\ 6 \times 3 = 18 \\ 60 + 18 = 78 \end{array}$$

Пользуясь приведённой выше мотивировкой и записью, учащиеся решают примеры, рассуждая так: «Число 26 состоит из 2 десятков и 6 единиц. Умножаю 2 десятка на 3, получаю 6 десятков; умножаю 6 единиц на 3, получаю 18 единиц; складываю 6 десятков и 18 единиц и получаю 78». После решения с подробной записью двух-трёх примеров учащиеся дают объяснения примеров устно, производя вычисления в уме; решение примеров записывают в строку, например: $48 \times 2 = 96$.

б) Умножение однозначного числа на двузначное. Переходя к умножению двузначного числа на однозначное, нужно по таблице умножения повторить переместительное свойство произведения, а также рассмотреть умножение однозначного числа на круглые десятки.

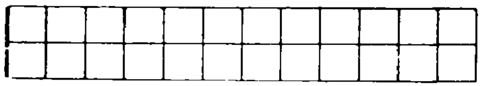
Учащиеся умеют умножать однозначное число на 10, а потому, переходя к умножению: 3×20, можно воспользоваться распределительным законом умножения:

$$3 \times 20 = 3 \times 10 + 3 \times 10 = 30 + 30 = 60$$

Решая этот пример способом перестановки, показываем учащимся распространение переместительного свойства произведения при умножении и на круглые десятки.

После этого можно показать распространение переместительного свойства произведения на двузначные числа наглядно (рис. 37): $12 \times 2 = 2 \times 12$; $13 \times 3 = 3 \times 13$ и т. д.

Так как при решении задач в начальных классах перестановка сомножителей вызывает изменение в наименовании результата действия, то наряду с применением перестановки сомножителей необходимо ознакомить учащихся также с умножением однозначного числа на двузначное, что имеет также большое образовательное значение для углублённого понятия о распределительном свойстве произведения. Потребность в этом объясняется ещё и тем, что в I классе при изучении действий с круглыми десятками не изучается умножение однозначного числа на двузначное. Опускается этот раздел и при повторении круглых десятков во II классе. Из таблицы умножения учащиеся знают только умножение однозначных чисел на 10, а потому при умножении однозначного числа на двузначное сначала рассматривается умножение однозначного числа на 10, потом на круглые десятки и после этого на полное двузначное число.



$2 \times 12 = 12 \times 2$

Рис. 37

При объяснении умножения однозначного числа на двузначное лучше идти от задач.

З а д а ч а. Сколько нужно уплатить за 12 перьев, если одно перо стоит 5 коп?

5 коп. $\times$ 10 = 50 коп. (Сколько стоят десять перьев?)

5 коп. $\times$ 2 = 10 коп. (Сколько стоят два пера?)

50 коп. + 10 коп. = 60 коп. (Сколько стоят 12 перьев?)

Отсюда делаем вывод, что для умножения числа 5 на 12 разложили множитель на десятки и единицы, умножали сначала на 10, а потом на 2 и полученные числа сложили.

После объяснения на задачах нужно перейти к решению примеров с проверкой их по способу перестановки сомножителей сначала с подробной записью, а потом сокращённо.

$$4 \times 18 = 4 \times 10 + 8 \times 4 = 72; \ 4 \times 18 = 72$$

Попутно с прохождением внетабличного умножения составляется таблица, которую можно использовать как для устных вычислений, так и для закрепления внетабличного умножения, а позже и деления:

	11	12	13	14	15	16	17	18	19
2	22	24	26	28	30	32	34	36	38
3	33	36	39	42	45	48	51	54	57
4	44	48	52	56	60	64	68	72	76
5	55	60	65	70	75	80	85	90	95
6	66	72	78	84	90	96			
7	77	84	91	98					
8	88	96							
9	99								

Внетабличное деление.

Внетабличное деление опирается на применение к делению распределительного закона, а потому необходимо, приступая к внетабличному делению, восстановить в памяти учащихся применение распределительного закона к табличному умножению и делению.

Чтобы подготовить учащихся к разложению числа на десятичные группы, повторяется нумерация в пределе 100, деление круглых десятков на однозначные числа и усваивается деление круглых десятков на круглые десятки.

а) Деление круглых десятков на круглые десятки. При делении круглых десятков на круглые десятки, например: 80 на 20, учащиеся иногда ошибаются и в частном пишут не 4, а 40.

Чтобы избежать этих ошибок, необходимо при изучении деления круглых десятков не только обращать внимание на сходство с делением чисел в пределе 10 (8 дес. : 2 дес.), но и проверять получаемый результат на наглядных пособиях или арифметическими действиями, заменяющими деление.

Пусть дано: 60 : 30. Образно это можно записать так: 6 дес. : : по 3 дес. = 2. Это подтверждается тем, что 6 : 3 = 2. Но это не всегда убедительно для детей, поэтому нужно предложить им взять в руки 6 пучков палочек по 10 в каждом или 6 десятков косточек на счётах и разложить их по 30 косточек или палочек в группы. Образовавшиеся при этом две группы будут наглядным подтверждением правильности деления. Результат можно проверить также вычитанием (60 — 30 — 30) или умножением («Сколько раз нужно взять по 30, чтобы получить 60?»).

Дальше необходимо проверить деление умножением и показать, что тот же результат можно было бы найти умножением, рассуждая так: «Возьмём по 30 один раз, получим 30. Мало. Возьмём два раза по 30, получим 60. Достаточно».

Пишем: $20 \times 3 = 60$; $? \times 20 = 60$; $60 : 20 = 3$.

Сколько раз нужно взять по 20, чтобы получить 60? Сколько получится, если мы 60 разделим по 20? Ответ: 3.

б) Деление двузначного числа на однозначное. После усвоения деления круглых десятков на круглые десятки переходим к делению полного двузначного числа на однозначное. При этом различают два основных случая. Первый случай — когда десятки и единицы числа делятся без остатка на делитель; второй случай — когда круглые десятки или десятки и единицы не делятся на данный делитель.

В первом случае делимое разлагается на десятки и единицы и каждое из этих чисел делится в отдельности.

Пусть дано: 24 : 2; 24 состоит из 2 десятков и 4 единиц.

$$\begin{array}{r|l} 20 : 2 = 10 & \\ 4 : 2 = 2 & \raisebox{1ex}{$10 + 2 = 12$} \end{array}$$

Этот случай деления усваивается легко. Детей больше затрудняет деление круглых десятков и двузначных чисел на однозначные числа, если десятки или десятки и единицы не делятся на это число нацело.

Например: 50 : 2.

Какое наибольшее число десятков в числе 50 делится без остатка на 2? Ответ: 4 десятка. Разлагаем число 50 на 2 слагаемых: $50 = 40 + 10$ — и делим число по частям: $40 : 2 + 10 : 2 = 25$.

Точно так же мы поступаем и в том случае, когда десятки этого числа и единицы не делятся нацело на данный делитель. Например: 72 : 6.

Какое наибольшее число десятков в числе 72 делится на 6? Получим ответ: 6 десятков. Разлагаем 72 на 6 десятков и 12 единиц и делим каждое число в отдельности. Получаем: $60 : 6 = 10$; $12 : 6 = 2$; $10 + 2 = 12$.

Каждый пример на деление следует проверять умножением, чтобы в конечном итоге научить учащихся находить ответы умножением.

Примеры на деление двузначного числа на однозначное подбираются в порядке постепенного увеличения делителя (2, 3, 4 и т. д.).

в) Деление двузначного числа на двузначное. При изучении деления двузначного числа на двузначное нужно научить учащихся находить частное умножением двузначного числа на однозначное.

При делении двузначного числа на двузначное необходимо познакомить учащихся с методом проб, т. е. научить «задаваться» вопросом: сколько получится, если делитель умножить на два? на три? и т. д. Достаточно или нет? Например, если дано: 33 : 11, учащийся должен поставить вопросы: «Сколько получится, если я возьму по 11 два раза? Достаточно или нет? Нет. А если возьму по 11 три раза? Да. Сколько же получится, если мы 33 разделим на 11?»

Запись первых двух-трёх примеров на доске и в ученических тетрадях ведётся так:

$33 : 11 = 3$	запись результата
$11 \times 1 = 11$	
$11 \times 2 = 22$	запись вспомогательных вычислений
$11 \times 3 = 33$	

Ошибки в вычислениях в пределе 100.

Ошибки в пределе 100 чаще всего возникают потому, что учащиеся не овладели сознательно и твёрдо вычислительными приёмами, которые сообщаются учащимся II класса. Самостоятельные поиски приёмов вычисления приводят к ошибкам, которые часто трудно объяснимы.

Например: 1) $73 + 27 = 64$(!) $(7 + 7 = 14;\ 2 + 3 + 1 = 6;\ 64)$.

2) $96 - 48 = 21$ $(6 - 4 = 2;\ 9 - 8 = 1;\ 21)$ — неправильно понятый приём письменных вычислений, сообщённых дома.

3) $74 - 47 = 3$(!) $(7 - 4 = 3)$ — вычисление не оканчивается.

4) $17 \times 5 = 57$ $(10 \times 5 + 7)$ — совмещено умножение со сложением.

5) $84 : 7 = 14$ — ошибка по сходству с $84 : 6 = 14$.
$65 : 5 = 15$ „ „ „ „ $75 : 5 = 15$.
$65 : 5 = 12$ „ „ „ „ $60 : 5 = 12$.

6) $48 : 24 = 24$ — замена деления вычитанием.

7) $68 : 34 = 22$ — перенесение приёмов деления двузначного числа на однозначное число на деление двузначных чисел на двузначные.

Понятия разностного и кратного сравнения чисел.

Попутно с изучением первой сотни во II классе у учащихся формируются понятия о разностном и кратном сравнении чисел. Эти понятия принадлежат к числу элементарных и вместе с тем важнейших математических понятий. Благодаря изучению их учащиеся усваивают смысл арифметических действий; понятие об арифметических действиях обогащается новыми признаками и свойствами. Так, если в I классе учащиеся узнали, что с помощью вычитания можно найти остаток и уменьшить число на несколько единиц, то во II классе они узнают, что посредством вычитания можно узнать также на сколько одно число больше или меньше другого. Если в I классе учащиеся узнали, что посредством умножения можно найти сумму двух или нескольких равных чисел, то во II классе они узнают, что посредством умножения можно увеличить число в несколько раз и т. д.

Овладение этими понятиями имеет решающее значение для успешного обучения детей решению задач. Поэтому их формирование должно проходить особенно тщательно, со строгим соблюдением постепенности в переходе от наглядного и конкретного к отвлечённому, от более простого к более сложному, от более лёгкого к более трудному.

Ознакомление с понятиями разностного и кратного сравнения проходит в следующем порядке: в связи с изучением вычитания в пределе 100 учащиеся знакомятся с разностным сравнением чисел; в связи с изучением таблицы умножения и деления учащимся даётся понятие сначала об увеличении числа в несколько раз, а потом — об уменьшении числа в несколько раз. И, наконец, учащиеся знакомятся с кратным сравнением чисел.

Каждое из этих понятий формируется в определённой последовательности, а именно: сначала изучаемое понятие выясняется с помощью наглядных пособий (палочек, кубиков, классных счётов, рисунка или чертежа); затем, на другом уроке это же понятие раскрывается с помощью решения соответствующих простых задач; далее, на следующем уроке изучаемое понятие углубляется и расширяется благодаря решению составных задач, наконец, усвоенное детьми понятие используется для решения близких детям практических вопросов, где оно находит своё практическое применение. Лучшему уяснению данного понятия способствует сопоставление его с другим, близким ему понятием. Например, при изучении кратного сравнения необходимо сопоставить его с разностным сравнением; при изучении увеличения числа в несколько раз полезно сравнить его с увеличением числа на несколько единиц и т. д.

Процесс формирования каждого понятия заканчивается о б о б щ е н и е м, в ы в о д о м п р а в и л а. Так, например, после рассмотрения нескольких примеров и конкретных задач, после выполнения нескольких заданий, в которых находится кратное отношение чисел или величин, формулируется правило: чтобы узнать, во сколько раз одно число больше или меньше другого, нужно большее число разделить на меньшее. Это правило читается по учебнику, усваивается учащимися и в дальнейшем служит основой для решения конкретных задач на кратное сравнение.

ВЫЧИСЛЕНИЕ НА СЧЁТАХ.

«Наряду с устными и письменными вычислениями необходимо учить детей вычислению на счётах, которые, как известно, находят широкое применение в жизненной практике»[1]. В начальной школе, в III классе, изучаются нумерация и простейшие случаи сложения и вычитания.

В начальной школе употребляются десятичные счёты, которые являются дальнейшим развитием и улучшением русских счётов. На десятичных счётах отсутствуют доли копейки и рубля. Каждый новый класс начинается с красной косточки. Каждая группа из трёх проволочек, начиная снизу, образует класс. На десятичных счётах бывает от 3 до 5 классов. Наиболее употребительны счёты с 4 классами. Настольные счёты кладутся перед учащимися примерно так, как тетради для письма, т. е. с поворотом влево на 60° и на некотором расстоянии от стола, чтобы правая рука имела опору на столе и локоть не висел в воздухе.

Перед началом работы на счётах и по окончании её все косточки должны быть сдвинуты вправо. Косточки передвигаются влево вплотную к раме указательным пальцем, при этом не по одной косточке, а по нескольку косточек в зависимости от задания. Пример: отложить на счётах 325. Данное число содержит в себе единицы трёх разрядов: сотни, десятки и единицы. Чтобы отложить его, передвигаются сначала 3 косточки сотен, потом 2 косточки десятков и после 5 косточек единиц. С помощью чёрных косточек без затруднений откладываются числа 6, 7, 8 и 9.

Нумерация на счётах. Нумерация на счётах изучается параллельно с письменной нумерацией, начиная с простых единиц и кончая сотнями тысяч в III классе и миллиардами в IV классе. Учитель обращает внимание учащихся, что простые счётные единицы, которые пишутся на первом месте, откладываются на первой проволоке, десятки — на второй, сотни — на третьей и т. д. При записи на доске неполных трёхзначных чисел и откладывании их на счётах условливаются, что нулю на счётах соответствует пустое место на левой стороне (280 и 208). Изучение новых счётных единиц: тысяч, десятков тысяч и сотен тысяч — проводится так, что каждому разряду числа указывается соответствующее место на проволоках счётов. «Напиши 3000, отложи на счётах 3000.

---

[1] Программа начальной школы на 1954/55 учебный год, Учпедгиз, 1954, стр. 54.

Сколько нужно отложить косточек и на какой проволоке? Почему снизу остаются три пустые проволоки?»

После этого можно перейти к откладыванию на счётах неполных чисел, имеющих две значащие цифры, три и более значащих цифр. Числа лучше располагать в такой последовательности: 380, 307; 1008, 2030, 3047, 4725; 10020, 20009, 30705, 32005, 37035, 38945; 100020, 140080, 140035, 146037, 146737. Во всех случаях переход от неполного числа к полному нужно делать в такой последовательности, чтобы число значащих цифр увеличивалось постепенно. Каждое число, отложенное на счётах, подвергается разбору.

Пример: отложить на счётах 2030. «Сколько тысяч в этом числе? На какой проволоке откладываются тысячи? Отложите. Сколько нужно отложить десятков? На какой проволоке они откладываются. Отложите. Прочтите отложенное число».

При изучении нумерации нужно учить детей не только откладывать на счётах числа, но и читать отложенные числа. Пример: на счётах отложено 20047. «Прочти отложенное число». Если учащийся затрудняется, учитель анализирует состав этого числа по вопросам: «Что откладывается на пятой проволоке (или: что пишется в целых числах на 5 месте)?» и т. д.

Если класс обеспечен настольными счётами, то один учащийся работает на классных счётах, другой — на классной доске, а третий, если есть абак, — на абаке. После этого сравниваются полученные результаты.

В III и IV классах задания по нумерации могут даваться и в таком виде: отложить 3 единицы третьего класса второго разряда и 7 единиц первого класса первого разряда и прочесть это число.

Сложение на счётах.

. При изучении сложения и вычитания устанавливается сходство между устными вычислениями и вычислениями на счётах. Прежде чем приступить к сложению двузначных, трёхзначных и многозначных чисел, нужно повторить на счётах таблицу сложения в пределе 20, обратив внимание на сложение с переходом через десяток. $7 + 8$. Откладываем на первой проволоке 7 косточек, потом прибавляем 3 косточки ($7 + 3 = 10$), заменяем 10 косточек одной косточкой на следующей проволоке и откладываем 5 косточек на новой проволоке. Читаем полученное число. После этого учитель знакомит учащихся с нахождением суммы посредством округления одного из слагаемых. «Сколько нужно прибавить к 7?» Ответ: «8». — «Прибавим 10 вместо 8. Сколько лишних единиц мы прибавили?» — «Две». — «Сколько нужно отнять от 7, чтобы получить точный ответ (2)?»

После упражнения в объёме 20 можно распространить этот приём на сложение круглых десятков ($80 + 60$). круглых сотен ($600 + 800$), круглых тысяч ($8000 + 5000$).

Затем переходят к простейшим случаям сложения трёхзначных и многозначных чисел.

К простейшим случаям следует отнести:

1) Сумма цифр во всех одноимённых разрядах слагаемых менее 10.

Например: 324 + 263.

2) Сумма цифр в одном или двух одноимённых разрядах слагаемых равна 10.

Например: 324 + 266; 4789 + 2301.

3) Сумма цифр в некоторых одноимённых разрядах слагаемых превышает 10 (не более двух разрядов в разных местах числа).

Например: 647 + 238;
27327 + 31735.

Решим первый пример. Отложим на счётах число 647. Как будем прибавлять 238? Прибавим к 6 сотням 2 сотни, получим 8 сотен; к 4 десяткам — 3 десятка, получим 7 десятков. А как к 7 единицам прибавить 8 единиц? Прибавим один десяток и отнимем две единицы, получим 885.

В IV классе следует показать учащимся простейшие случаи сложения именованных чисел: веса в объёме тонны и денег в объёме 1000 рублей.

Сложение на счётах следует проверять параллельно со сложением на доске.

Вычитание на счётах.

Вычитанию на счётах двузначных, трёхзначных и многозначных чисел должно предшествовать вычитание в пределе 20.

Как из 15 вычесть 8?

Первый приём. Снимаем 5 косточек с первой проволоки, раздробляем косточку — десяток в единицы. Кладём на первую проволочку 10 косточек и снимаем 3 косточки.

$$15 - 8 = 7 \quad \left| \begin{array}{l} 15 - 5 = 10 \\ 10 - 3 = 7 \end{array} \right.$$

Второй приём. На сколько 10 больше 8? На 2. Отнимем 10. Сколько лишних единиц мы отняли, если вместо 8 косточек сняли 10? Две. Прибавим эти 2 косточки к 5 косточкам.

$$15 - 8 = 7 \quad \left| \begin{array}{l} 15 - 10 = 5 \\ 5 + 2 = 7 \end{array} \right.$$

Второй приём вычислений закрепляется на десятках, сотнях, тысячах и т. д.

Вычитание многозначных чисел изучается в такой последовательности.

1)	354 — 232 4785 — 2354	Во всех разрядах уменьшаемого цифры больше, чем в соответствующих разрядах вычитаемого.
2)	723 — 382 8237 — 6518	В одном или двух разрядах вычитаемого цифра больше, чем в соответствующих разрядах уменьшаемого.
3)	780 — 345 7090 — 3437	Некоторые разряды уменьшаемого — нули.

Пример: 723 — 382.

При вычитании (723 — 382) сбрасывание косточек сотен не вызывает затруднений; из 2 десятков вычесть 8 десятков нельзя, сбрасывается одна сотня и, так как 100 больше 80 на 20, к десяткам прибавляется 2 косточки десятков; после этого сбрасываются две косточки единиц, получается 341.

Пример: 7090 — 3437. Сбрасываем 3 косточки тысяч. Нужно сбросить 4 сотни, но сотен нет, сбрасываем вместо 4 сотен тысячу, или 10 сотен, и 6 сотен оставляем на проволоке сотен. Почему? Потому что мы отняли 6 лишних сотен. Из 9 десятков сбрасываем 3 десятка, остаётся 6 десятков. Так как на проволоке единиц нет, то сбрасываем один десяток и оставляем на первой проволоке 3 единицы (так как 10 больше 7 на 3).

В IV классе следует познакомить учащихся с вычитанием на счётах именованных чисел: веса в объёме тонны и денежных расчётов в объёме 1000 рублей.

ПЕРВАЯ ТЫСЯЧА.

Первая тысяча выделяется в самостоятельный концентр потому, что здесь учащиеся учатся пользоваться сотней, как счётной единицей, знакомятся с новой счётной единицей — тысячей, усваивают соотношение между разрядами первого класса и впервые знакомятся с письменными вычислениями.

Нумерация чисел в пределе тысячи.

Устная нумерация.

Изучая нумерацию первой тысячи, нужно не только познакомить учащихся с названием чисел в пределе 1000 и записью их, но и овладеть сотней, как счётной единицей, и познакомить учащихся с новой счётной единицей — тысячей.

Устная и письменная нумерация в пределе тысячи изучается отдельно. Для объяснения устной нумерации необходимо привлечение разнообразных наглядных пособий (арифметический ящик, десятиметровая лента и др.).

При изучении устной нумерации в пределе тысячи повторяются счётные единицы 1, 10, 100, а дальше начинается счёт круглыми сотнями. Учитель записывает на доске: одна сотня, две сотни, три сотни и т. д. до десяти сотен. А учащийся у стола набирает соответствующее число палочек или другого счётного материала и считает вместе с учителем. Дальше учитель заменяет название чисел словами: одна сотня — сто, две сотни — двести, и т. д.

После этого ученики отсчитывают соответствующие числа сотен на десятиметровой ленте, отмечая каждую сотню каким-нибудь условным знаком (повязкой, красной полоской или флажком), чтобы каждая сотня выступала более отчётливо.

Далее ученики считают сотнями прямо и обратно, а также с любого числа сотен; называют число сотен, предшествующее данной группе сотен и следующее за ней непосредственно.

Следующие уроки устной нумерации посвящаются составлению чисел из круглых сотен и десятков. Учитель ведёт счёт от 100 до 200 десятками (110, 120, ..., 190) и далее с переходом через 200 (210, 220, ...). Так же ведётся счёт с переходом через 300, 400 и т. д.

После усвоения названий чисел, выраженных круглыми сотнями и десятками, учитель знакомит учащихся с образованием чисел из круглых сотен и единиц (207, 309 и др.).

Наряду с наглядным счётом в пределе тысячи учащиеся занимаются и отвлечённым счётом. Особенное внимание обращается на присчитывание и отсчитывание по единице, пяткам и десяткам. Например: какое число следует за 209? Какое число меньше 300 на одну единицу? Между какими числами находится число 500?

Затем учащиеся переходят к составлению полных трёхзначных чисел.

Изучение нумерации в пределе тысячи имеет важное значение, так как здесь можно наглядно показать количественное соотношение единиц, десятков и сотен и тем самым подготовить учащихся к пониманию соотношений между счётными единицами в классах тысяч, миллионов, миллиардов.

Письменная нумерация в пределе 1000.

Для успешного усвоения письменной нумерации необходимо иметь арифметический ящик (рис. 38), русские счёты, заменяющие их вертикальные счёты (рис. 35) и абак.

В тетрадях учащихся должны быть нарисованы нумерационные таблицы на четыре десятичных знака. Полезно сделать такой абак, к которому прикреплены ящики для палочек и планка для установки цифр (рис. 39), а также подставки для чтения чисел и действий над ними.

Запись чисел в пределе тысячи начинают с полных трехзначных чисел, после переходят к числам, оканчивающимся нулями (380), и затем уже к числам с нулями в середине (308).

При обучении записи трёхзначных чисел придерживаются того

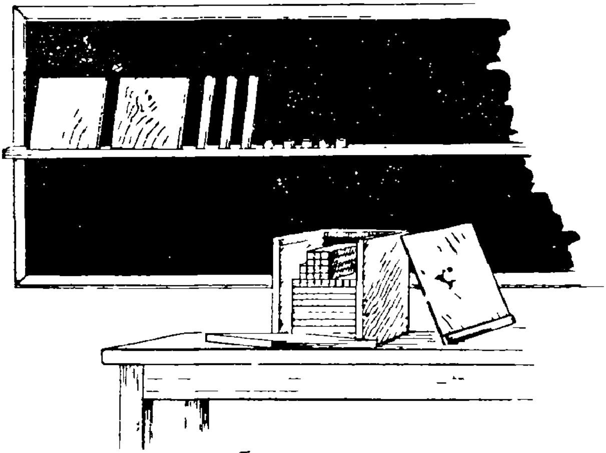


Рис 38

же плана, что и при изучении сотни: 1) составление числа, 2) разложение числа на сотни, десятки и единицы или на десятки и единицы, 3) отвлечённый счёт. Для сознательного усвоения письмен-

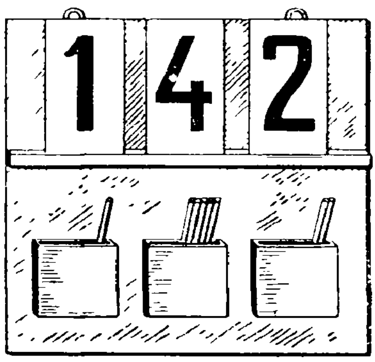


Рис 39

ной нумерации трёхзначные числа подвергаются разбору по вопросам: сколько сотен в этом числе? сколько всего десятков в этом числе? какое число предшествует непосредственно данному? какое число следует за ним? на каком месте пишутся те или иные разрядные единицы? При ответе на вопрос, сколько десятков и единиц в числе 384, ученики рассуждают так в одной сотне 10 десятков, в трёх сотнях 3 раза по 10 десятков, или 30 десятков, да ещё 8 десятков — получили 38 десятков и 4 единицы.

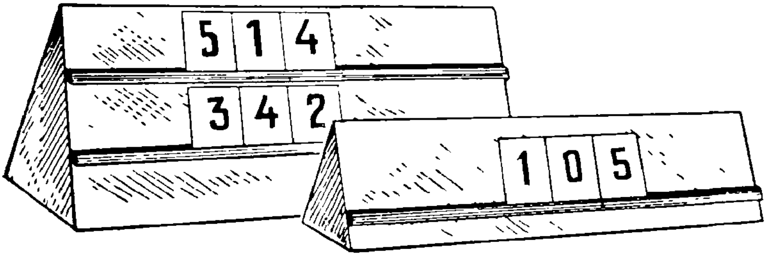


Рис 40

Разложение чисел на разрядные единицы и обратно, запись числа по его разрядным единицам содействуют лучшему усвоению состава трёхзначных чисел.

Сложение в пределе тысячи.

Устное сложение.

Устное сложение опирается на навыки табличного и внетабличного сложения в пределе 100 и знание нумерации первой тысячи.

Во II классе изучается сложение круглых сотен. (300 + 200), круглых сотен и круглых десятков (300 + 80), круглых сотен с двузначным числом (300 + 85) и круглых сотен и единиц (300 + 7).

В III классе повторяется пройденное во II классе и дальше изучается сложение в следующей последовательности:

1) сложение сотен и круглых десятков с десятками без перехода через сотню, например: 320 + 40; 360 + 40;

2) сложение сотен и круглых десятков, когда сумма двузначных чисел, образующих десятки каждого из чисел, не даёт перехода через сотни, например: 320 + 240 и 380 + 220;

3) сложение сотен и круглых десятков с переходом через сотню, например: 50 + 60; 180 + 40; 370 + 250.

Во всех перечисленных случаях сложение объясняется или по аналогии со сложением однозначных и двузначных чисел, или путём применения сочетательного свойства суммы, например: 3 + 4 = 7; 30 + 40 = 70; 300 + 400 = 700.

Возможен и другой способ объяснения: 3 + 4 = 7; 3 сот. + + 4 сот. = 7 сот. и 300 + 400 = 700.

Приведённые примеры устного сложения могут сопровождаться работой с дидактическим материалом или демонстрацией приёмов сложения на палочках (прутики, соломка), арифметическом ящике и других пособиях, заменяющих арифметический ящик.

Письменное сложение.

При изучении письменного сложения в пределе 1000 учащиеся впервые знакомятся с записью слагаемых столбиком по разрядам. Пусть дано: 235 + 324. Учитель спрашивает учащихся: «Как мы будем складывать эти числа?» Учащиеся отвечают: 200 + 300, 30 + 20, 5 + 4, 500 + 50 + 9 = 559.

Учитель показывает, как ту же сумму можно получить записью в столбик. Пишет на доске столбиком:

$$+\begin{array}{r}235\\324\\\hline\end{array}$$

и начинает сложение с единиц высшего разряда; получает 559.

После этого решаются ещё два-три таких примера, в которых безразлично, как складывать: начиная с единиц высшего разряда или с единиц низшего разряда. Затем переходят к сложению, когда в результате сложения получается переход через разряд, например:

$$+\begin{array}{r}637\\258\\\hline\end{array}$$

При сложении единиц высшего разряда необходимо заниматься исправлением полученной суммы; чтобы избежать этого, учитель предлагает начинать сложение с единиц низшего разряда. После этого учащиеся упражняются в сложении столбиком с переходом через десяток.

На следующих уроках даются упражнения в сложении без перехода через десяток, когда в слагаемых имеются нули, например: 720 + 243; 705 + 280. Чтобы учащимся яснее стало, что прибавление нуля и прибавление к нулю не вызывает изменения разрядного числа, учитель предлагает решение таких примеров:

$$7 + 0 = 7; \quad 0 + 8 = 8.$$

Следующие уроки посвящаются сложению чисел с переходом через сотню, например: 372 + 285. При сложении от учащихся требуется объяснение, как они складывают. Объяснение даётся по разрядам: к 5 единицам прибавить 2 единицы, получится 7 единиц; к 7 десяткам прибавить 8 десятков, получится 15 десятков или одна сотня и 5 десятков; 5 десятков пишутся под десятками, а одна сотня прибавляется к сотням; 3 сотни + 2 сотни = 5 сотен; да 1 сотня, всего 6 сотен, итого 657. Затем решаются более сложные примеры (377 + 289).

Из частных случаев сложения следует обратить внимание учащихся на сложение таких чисел, когда в результате сложения двух чисел получается число с 1, 2, 3 нулями на конце. Каждый из этих случаев нужно рассматривать отдельно, причём образование двух и трёх нулей следует изучать на наглядных пособиях и дидактическом материале, так как сознательное и прочное усвоение сложения с образованием нулей в сумме облегчит сложение многозначных чисел.

Примеры: $273 + 217 = 490$; $273 + 227 = 500$; $773 + 227 = 1000$.

Вычитание в пределе тысячи.

Устное вычитание.

Устное вычитание производится сначала над числами, имеющими по одной значащей цифре в уменьшаемом и вычитаемом (II класс), например: 700 — 200. В III классе рассматриваются такие случаи вычитания, когда уменьшаемое имеет две значащие цифры, а вычитаемое одну и когда уменьшаемое и вычитаемое имеют по две значащие цифры, но двузначные части числа вычитаются без перехода через десяток, например: 150 — 30; 260 — 130 и 300 — 160. Далее изучается вычитание с заниманием, например: 380 — 190.

Чтобы облегчить вычитание вида 700 — 200, учитель предлагает сначала такие примеры:

7 — 2 = 5	7 сот. — 2 сот. = 5 сот.
7 дес. — 2 дес. = 5 дес.	700 — 200 = 500

Вычитание может быть показано наглядно на плитках арифметического ящика или на пучках палочек. При вычитании вида 480 — 270 нужно вычитать так.

Пусть дано: от 480 отнять 270. Вычитаем: 480 — 200 = 280; 280 — 70 = 210.

Вычитание с раздроблением сотен объясняется так же, как и вычитание двузначных чисел. Например:

58 — 39 = 19	580 — 390 = 190
58 — 38 = 20	580 — 380 = 200
20 — 1 = 19	200 — 10 = 190

Письменное вычитание.

При обучении учащихся письменному вычитанию нужно показать учащимся преимущества вычитания столбиком. Учитель на примере показывает, как записывать вычитание трёхзначного числа из трёхзначного в строчку и столбиком. Пример берётся такой, в котором вычитание можно начинать с единиц высшего и низшего разряда.

$$\frac{375 - 243 = 132}{\begin{array}{l}300 - 200 = 100\\ \ \ 70 - 40 = 30\\ \ \ \ \ 5 - 3 = 2\\ 100 + 30 + 2 = 132.\end{array}}$$

$$\begin{array}{r} -\ 375\\ 243\\ \hline 132\end{array}$$

Из сравнения записей делается вывод, что запись столбиком более экономна и легка.

Первоначально для вычитания предлагаются такие примеры, когда разрядные единицы уменьшаемого больше соответствующих разрядных единиц вычитаемого, например: 387 — 253.

Вычитание объясняется так: из 7 единиц вычитаем 3 единицы, получаем 4 единицы; из 8 десятков вычитаем 5 десятков, получаем 3 десятка; из 3 сотен вычитаем две сотни, получаем 1 сотню. Три десятка и четыре единицы, или 134.

Дальше предлагаются примеры, когда имеются нули в вычитаемом, например: 377 — 205.

Здесь учащиеся при вычитании рассуждают так: из 7 единиц вычесть 5 единиц, получится 2 единицы. Из 7 десятков вычесть 0 десятков, получится 7 десятков. Из 3 сотен вычесть 2 сотни, получится 1 сотня.

Переходя к вычитанию с нулями в вычитаемом, целесообразно дать учащимся предварительно упражнения на вычитание нуля из однозначных чисел: 7 — 0 = 7, 6 — 0 = 6.

Дальше следует перейти к решению примеров, требующих занимания единицы высшего разряда и раздробления её в единицы низшего разряда.

Пример: 386 — 257.

Из 6 единиц вычесть 7 единиц нельзя, занимаем десяток, раздробляем его в единицы, прибавляем ещё 6 единиц, получаем 16. Из 16 единиц вычитаем 7 единиц, остаётся 9 единиц. Из 7 десятков вычитаем 5 десятков, остаётся 2 десятка; из 3 сотен вычитаем 2 сотни, остаётся 1 сотня. Ответ: 129.

457 — 269. Из 7 вычесть 9 нельзя, необходимо занять десяток и раздробить его в единицы. К 10 единицам прибавить 7 единиц, получим 17. Из 17 единиц вычтем 9 единиц, получим 8 единиц. Из 4 десятков вычесть 6 десятков нельзя. Занимаем одну сотню, раздробляем её в десятки, получаем 14 десятков. Из 14 десятков вычитаем 6 десятков, получается 8 десятков. Из 3 сотен вычитаем 2 сотни, получаем 1 сотню. Ответ: 1 сотня 8 десятков, 8 единиц, или 188.

Отдельно следует рассмотреть такие случаи вычитания, когда имеется один или несколько нулей в уменьшаемом. Например:

560 — 327   503 — 249
607 — 325   700 — 384

Остановимся на последнем примере: 700 — 384.

Из нуля вычесть 4 нельзя, нужно занять десяток. Десятков нет. Занимаем 1 сотню. Раздробляем сотню в десятки, получаем 10 десятков. Из 10 десятков берём 1 десяток, раздробляем его в единицы и из 10 единиц вычитаем 4 единицы, получаем 6 единиц. Из 9 десятков вычитаем 8 десятков, получаем 1 десяток. Из 6 сотен вычитаем 3 сотни, получаем 3 сотни. Всего 316.

Когда имеются нули в уменьшаемом и вычитаемом, такие случаи вычитания необходимо сопровождать показом на наглядных пособиях. После достаточного числа упражнений делается вывод, что если одна тысяча раздробляется в сотни, то остаётся 9 сотен, 1 сотня раздробляется в десятки — в десятках остаётся 9 десятков и 1 десяток раздробляется в единицы. Вычитание производится из 10 единиц, 9 десятков и 9 сотен. Соблюдение строгой последовательности вычитания с нулями в уменьшаемом может обеспечить успешное изучение вычитания без применения таких надстрочных знаков, как десятки с точкой и десятки с девятками наверху, которыми пользуются иногда при объяснении.

Умножение в пределе 1000.

Устное умножение.

Изучая приёмы умножения в пределе 1000 устно, учащиеся приобретают навык умножения разрядных единиц первого класса на однозначные числа и закрепляют приёмы табличного и внетабличного умножения в пределе 100.

Примеры для устного умножения подбираются в такой последовательности.

а) Умножение 100 на число от 1 до 10.

б) Умножение круглых сотен на однозначные числа.

Например: 200×5, 400×2, 300×3.

в) Умножение круглых десятков (двузначного числа) на однозначное число (по правилам табличного умножения).

70×5; 80×7; 40×3 и др.

г) Умножение круглых десятков трёхзначного числа на однозначное (по правилам внетабличного умножения — по разрядам умножения). Пример: 130×3.

Умножение круглых сотен изучается во II классе, а табличное и внетабличное умножение круглых десятков — в III классе.

Умножение ста и круглых сотен на однозначное число объясняется по аналогии с умножением однозначных и двузначных чисел, оканчивающихся нулём. Например:

$3 \times 3 = 9$; $30 \times 3 = 90$; 3 сот. $\times 3 = 9$ сот., или 900.

Умножение круглых десятков на однозначное число объясняется так же. Например: $7 \times 8 = 56$. $70 \times 8 = 7$ дес. $\times 8 = 56$ дес., или 560.

Умножение круглых десятков трёхзначного числа выполняется двояко. Например: 270×3

1) 27 дес., $\times 3 = 81$ дес., или 810. 2) $270 \times 3 = 810$;

$$\begin{aligned} 200 \times 3 &= 600; \\ 70 \times 3 &= 210; \\ 600 + 210 &= 810. \end{aligned}$$

В процессе подготовки к письменному умножению трёхзначного числа на однозначное следует отдавать предпочтение умножению по разрядам, знание умножения круглых десятков даёт более эффективный результат при устных вычислениях, а потому нужно объяснить учащимся тот и другой способы умножения.

Письменное умножение в пределе 1000.

Письменное умножение в пределе 1000 изучается в III классе. Здесь учащиеся впервые знакомятся с приёмами письменного умножения. Прежде всего учащимся необходимо показать целесообразность введения умножения столбиком.

Пусть требуется умножить 342 на 2. Умножение данных чисел может быть выполнено приёмами устного умножения и заменой умножения сложением. В первом случае будем иметь дело с умножением и сложением в такой последовательности:

$$\begin{aligned} &\underline{232 \times 3 = 696} \\ &200 \times 3 = 600 \\ &30 \times 3 = 90 \\ &2 \times 3 = 6 \\ &600 + 90 + 6 = 696, \end{aligned}$$

а во втором: $232 + 232 + 232 = 696$.

После этого учитель показывает умножение столбиком. Так как учащиеся при изучении сложения и вычитания видели неудобство выполнения действий начиная с единиц высшего разряда, то умножение начинается сразу с единиц низшего разряда.

$$\times\begin{array}{r} 232 \\ 3 \\ \hline 696 \end{array}$$

Учитель говорит: «Две единицы умножить на 3, получится 6 единиц; пишем под единицами 6 единиц; 3 десятка умножить на 3, получится 9 десятков; 9 десятков пишем под десятками; 2 сотни умножить на 3, получится 6 сотен; 6 сотен пишем под сотнями. Итого 6 сотен, 9 десятков и 6 единиц, или 696».

Сравнивая три способа решения этого примера, учащиеся отчётливо поймут преимущества умножения столбиком.

Для сознательного усвоения умножения трёхзначного числа на однозначное примеры нужно подобрать так, чтобы они постепенно вводили учащихся в круг тех закономерностей, которыми характеризуется умножение в пределе 1000, а именно:

а) умножение без перехода через десяток;

б) умножение с переходом через десяток или сотню (124×4; 142×4);

в) умножение с переходом через десяток и сотню (253×3);

г) умножение с образованием круглых сотен и тысячи (225×4; 125×8).

Умножение без перехода через десяток и умножение с образованием новой разрядной единицы можно объяснить на задачах и примерах.

Примеры: 232×3; 403×2; 135×2; 254×2.

Первый пример разобран выше. Для объяснения второго примера нужно предварительно показать учащимся, что от умножения 0 на 1, 2, 3 и т. д. до 9 получается в произведении 0:

$$0 \times 2 = 0;\ 0 \times 3 = 0 \text{ и т. д.}$$

Далее решаются примеры с переходом через десяток и с переходом через сотню. Примеры: 317×2 и 472×2. При решении второго примера записью в столбик рассуждаем так: 2 единицы умножаем на 2, получаем 4 единицы; 4 единицы подписываем под единицами; умножаем 7 десятков на 2, получаем 14 десятков, или 1 сотню и 4 десятка; десятки пишем под десятками, а сотню держим в уме; умножаем 4 сотни на 2, получаем 8 сотен; 8 сотен да 1 сотня, получаем 9 сотен; всего 9 сотен, 4 десятка и 8 единиц, или 948.

Деление с остатком.

Делению в пределе 1000 предшествует изучение деления с остатком.

В старой школе деление с остатком не проходилось. Между тем решение практических задач убеждает нас в том, что при делении приходится иметь дело не только с делением нацело, но и с делением с остатком. При делении с остатком учащиеся убеждаются, что все числа делятся на две группы по отношению к делителю: одни из них делятся на него без остатка, другие нет.

Далее, сравнивая остаток с делителем, учащиеся узнают, что остаток не может быть больше делителя или равен ему. Это имеет значение при изучении деления многозначных чисел.

Деление с остатком бывает двух видов: табличное деление и внетабличное деление на однозначное и на двузначное число.

Существует несколько приёмов ознакомления учащихся с делением с остатком. Объяснение деления с остатком можно провести на наглядных пособиях, пользуясь решением тех или иных практических задач.

Например, если нам нужно оклеить карточку квадратной формы со стороной в 8 *см*, а мы имеем 35 *см* бумажной ленты, напрашивается вопрос: сколько раз по 8 *см* содержится в 35 *см* и сколько ещё сантиметров ленты останется? Учащиеся, отрезая по 8 *см*, убеждаются в том, что по 8 *см* в 35 *см* содержится 4 раза и что останется ещё 3 *см*. Запись сначала делается так:

35 *см* : 8 *см* = 4 (в остатке 3 *см*), а позже: 35 *см* : 8 *см* = = 4 (3 *см*).

Решение таких задач показывает учащимся практическое применение деления с остатком, причём на задачу в 2 вопроса, ответ даётся одним действием.

Проверкой решения устанавливается, какое соотношение существует между делимым, делителем, частным и остатком. Так, в приведённом выше примере мы имеем $35 : 8 = 4\ (3)$; $35 = 8 \times 4 + 3$. Эта зависимость между компонентами используется для объяснения деления с остатком на отвлечённых числах. Предварительно решаются столбики из примеров вида: $6 \times 5 + 1 = 31$.

Затем ставится вопрос, как 31 разделить на 6? Из примера видно, что число 31 разлагается на 2 числа: 30, которое делится на 6, и 1 (остаток). Сопоставляя строчки, будем иметь:

$$6 \times 5 + 1 = 31; \qquad 31 : 6 = 5\ (1).$$
$$7 \times 8 + 4 = 60; \qquad 60 : 7 = 8\ (4).$$

Отсюда делается вывод, что из числа 31, которое нужно разделить, берётся наибольшее число единиц, которое делится на 6 без остатка, а единица остаётся в остатке.

Более рациональным приёмом деления с остатком нужно считать нахождение частного путём умножения. Так, если дано 58 разделить на 8, нужно поставить вопрос: какое ближайшее число нацело делится на 8? Если учащиеся затрудняются в ответе на этот вопрос, учитель прибегает к нахождению частного методом проб, найдя 7, учащиеся отвечают — 56. После этого проводится запись: $58 : 9 = 7$ (остаток 2).

Деление с остатком необходимо закреплять устными вычислениями.

Знание деления с остатком облегчает письменное деление трёхзначных и многозначных чисел на однозначное число.

Деление в пределе тысячи.

Устное деление.

Устное деление в III классе начинается с повторения пройденного во II классе. После этого переходят к делению круглых десятков на однозначное число, когда число десятков выражается табличным числом. Например, $540 : 6$. При объяснении 540 единиц превращаем в десятки и делим 54 десятка на 6. По таблице деления на каждую из частей придётся по 9 десятков, или 90.

Дальше рассматривается деление круглых десятков, когда число десятков делимого числа — число внетабличное, например: $840 : 3$. Здесь можно деление объяснить приёмом, указанным выше, т. е. 84 дес. : 3, но лучше произвести деление, пользуясь применением распределительного закона. Последний приём более желателен, как подготовка к письменному делению в пределе первой тысячи. Пусть требуется $840 : 3$.

840 разлагаем на 2 слагаемых: 600 и 240, т. е. выделяем из этого числа наибольшее число сотен, которое без остатка делится

на 3. А затем по приёму, изложенному выше, делим вторую часть делимого 240 на 3. В результате получаем 2 сотни и 8 десятков, или 280. Запись объяснения: $840 : 3 = 280$; $840 = 600 + 240$; $600 : 3 = 200$; $240 : 3 = 80$; $200 + 80 = 280$.

Письменное деление.

Письменное деление в пределе 1000 нужно начинать с деления чисел, допускающих применение к делению приёмов устных вычислений. Например, $484 : 4$.

Учитель знакомит учащихся с записью деления столбиком и со знаком деления в виде уголка:

$$
\begin{array}{r|l}
-484 & \underline{4} \\
\underline{400} & 1 \text{ сот. } 2 \text{ дес. } 1 \text{ ед.} = 121 \\
-84 & \\
\underline{80} & \\
-4 & \\
\underline{4} & \\
0 &
\end{array}
$$

Разбирая состав этого числа, учитель разбивает его на три числа, кратные 4 (400, 80 и 4). Деля 400 на 4, получаем в частном 1 сотню; при делении 8 десятков на 4 получаем 2 десятка, а при делении 4 единиц на 4 получаем 1 единицу; в итоге 121. (См. выше запись деления.) На такой записи деления долго не задерживаются и после решения двух-трёх примеров переходят к записи без наименования разрядов.

В пределе 1000 различают по степени сложности несколько случаев. Более легко решаются учащимися примеры, когда разряды делимого кратны делителю. Труднее довести до понимания учеников деление, когда приходится раздроблять единицы высшего разряда в единицы низшего разряда ($136 : 2$) или когда раздробляются сотни числа в десятки ($345 : 5$).

Особо необходимо рассмотреть примеры с одним или несколькими нулями в делимом, а также с нулём в частном ($690 : 5$; $800 : 5$; $749 : 7$ и др.). Письменному изучению деления предшествует повторение деления с остатком в пределе 100.

Производя деление в пределе 1000, нужно обращать внимание учащихся на число цифр частного. Более трудные случаи деления иллюстрируются решением их на наглядных пособиях (арифметический ящик или заменяющие его пособия) и дидактическом материале.

В I, II и частично в III классах учащиеся пользуются часто методической, а не арифметической терминологией: прибавить, отнять, взять и др. С переходом к изучению арифметических действий в пределе тысячи и миллиона нужно требовать от учащихся употребления терминов: сложить, вычесть, умножить и разделить на . . . , безразлично, будет ли деление на части или по содержанию. При делении следует избегать употребления предлога «по» («по 2, по 3»). Равным образом при делении на части не следует в ответе применять предлога «по».

Так как учащиеся в начальной школе не проходят склонения имён числительных, то, чтобы устранить возникающие при выполнении арифметических действий с многозначными числами затруднения в склонении числительных, нужно пользоваться такими оборотами речи, которые не требуют склонения числительных. Например:

1) число 3745 сложить с числами 2575 и 8940, или 3745 плюс 8940;
2) из числа 27 945 вычесть 19 859, или 27 945 минус 19 859;
3) 2745 умножить на 15;
4) 875 625 разделить на 125.

В отдельных случаях для закрепления названия компонентов вместо слова «число» можно ставить название компонента: из уменьшаемого 27 945 вычесть . . . и т. д.

МНОГОЗНАЧНЫЕ ЧИСЛА.

Многозначные числа выделяются в самостоятельный концентр, потому что здесь изучается нумерация и алгоритмы письменных действий сначала в объёме миллиона (III класс), а позже миллиарда (IV класс).

При выполнении действий с многозначными числами углубляются навыки устных и сокращённых вычислений. Учащиеся в пределе этого концентра знакомятся с округлением чисел, последовательным умножением и делением, а также с умножением чисел на 5, 25 и 50, на 9, 99 и на 11.

Нумерация многозначных чисел.

Нумерация в пределе 1000 является подготовительной ступенью к изучению нумерации многозначных чисел в III и IV классах; в отличие от предыдущих концентров устная и письменная нумерация изучаются параллельно. В результате изучения нумерации учащиеся должны научиться:

1) прочитать многозначное число в пределе первого—четвёртого классов;
2) самостоятельно отложить на счётах заданное многозначное число;
3) записать многозначное число;
4) уметь разбить его на разряды и классы;
5) называть числа по единицам того или иного разряда;
6) знать соотношение между десятичными разрядами;
7) уметь написать наименьшее и наибольшее числа: четырёхзначное, пятизначное, шестизначное и т. д.;

8) считать единицами, двойками и т. д. с переходом через разряды;

9) разложить числа на разрядные слагаемые;

10) составить число из нескольких разрядных слагаемых;

11) определить, сколько всего полных десятков, сотен, тысяч и т. д. в данном числе (округление чисел).

Округление чисел облегчает деление многозначных чисел.

При изучении нумерации многозначных чисел употребляются следующие наглядные пособия: классные и настольные счёты, разрядная сетка, абаки (рис. 41), наборное полотно и цифровая касса.

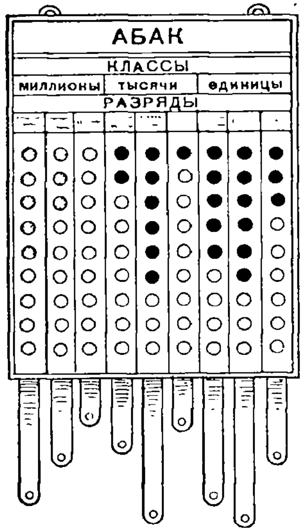


Рис. 41.

При изучении нумерации необходимо, вводя новые разрядные единицы, объяснить, где они употребляются или что считается единицами данного разряда (миллиарды пудов хлеба, миллионы тонн угля и т. п.).

Нумерация многозначных чисел изучается в III и IV классах. В III классе учащиеся знакомятся с числами первого и второго классов, а в IV классе изучают числа третьего и четвёртого классов. Такое распределение нумерации дано в программах и в учебниках арифметики для начальной школы.

Счётные единицы.

Изучение нумерации многозначных чисел начинается с повторения известных учащимся счётных единиц в пределе 1000.

Учащиеся считают единицами до 10, десятками до 100, сотнями до 1000 и т. д. и записывают на доске и у себя в тетрадях следующую таблицу счётных единиц или разрядов.

В III классе:

1 единица			1	разр.
10 единиц	составляют	1 десяток	2	„
10 десятков	„	1 сотню	3	„
10 сотен	„	1 тысячу	4	„
10 тысяч	„	1 десяток тысяч	5	„
10 десятков тысяч	„	1 сотню тысяч	6	„

В IV классе:

10 сотен тысяч	составляют	1 тысячу тысяч, или		
		1 миллион	7	разр.
10 миллионов	„	1 десяток миллионов	8	„

10 десятков миллионов	составляют	1	сотню миллионов	9	разр.
10 сотен миллионов	„	1	миллиард	10	„
10 миллиардов	„	1	десяток миллиардов	11	„
10 десятков миллиардов	„	1	сотню миллиардов	12	„
10 сотен миллиардов	„	1	тысячу миллиардов	13	„

Так учащиеся знакомятся со счётными единицами до 1 тысячи миллиардов. Единицу называют простой счётной единицей, а все последующие единицы — составными, или сложными единицами.

Дальнейшая работа по усвоению нумерации ведётся одновременно на классных счётах и нумерационных таблицах (на доске и в тетрадях учащихся).

Знакомство со счётными единицами начинается с первого урока изучения нумерации многозначных чисел в III классе. На счётах откладываются на первой проволоке единицы, на второй — десятки, на третьей — сотни, на четвёртой — тысячи, на пятой — десятки тысяч, на шестой — сотни тысяч; затем учащиеся упражняются в откладывании тысяч: «отложи 200 тысяч», «отложи 320 тысяч». Положенные на счётах числа подвергаются разбору: «На какой проволоке откладываются тысячи? десятки тысяч? сотни тысяч?»

Параллельно с этим ведётся запись отложенных чисел в нумерационные таблицы.

После повторения разрядных единиц второго класса проводится такая же работа над разрядными единицами третьего класса и четвёртого класса (в IV классе). Усвоив разрядные единицы второго класса, учащиеся III класса упражняются в составлении многозначных чисел второго класса и в разложении их на десятичные группы.

Например: «Какое число получится, если взять пять сотен тысяч, два десятка тысяч и пять единиц тысяч? Сколько сотен тысяч и единиц тысяч в числе 305 000?» — и т. п.

При изучении нумерации многозначных чисел обращается внимание на разложение чисел на разрядные слагаемые. Например: возьмём 375 тысяч и определим, сколько в этом числе сотен тысяч, десятков тысяч, единиц тысяч.

$$375\,000 = 300\,000 + 70\,000 + 5\,000.$$

Разряды.

С понятием о разрядах числа учащиеся встречаются дважды: при изучении счётных единиц и при изучении классов.

Чтобы облегчить усвоение состава числа по разрядам и классам, нужно больше внимания уделить письму чисел по разрядам до сообщения понятия о классах, упражняя учащихся в решении таких примеров: «На каком месте стоят простые единицы? десятки тысяч? сотни тысяч» — и т. д.

«Что пишется на 3-м месте, на 4-м, на 5-м и т. д.?»

«В числе 7 единиц пятого разряда. Назовите это число. Какое число обозначается восемью единицами 7-го разряда?» — и т. д.

Классы.

Чтобы дать понятие о классах, многозначное число 323323323 разлагается на слагаемые (по классам): 323 000 000 + 323 000 + + 323 = 323 млн. + 323 тыс. + 323 ед.

Из сравнения слагаемых видно, что числа написаны одинаковыми цифрами и в том же порядке, но к первому числу (323) прибавляем название миллионов, ко второму — тысяч и к третьему — единиц. Какие сотни, десятки и единицы стоят на 9-м, 8-м и 7-м месте? Миллионы. Какие сотни, десятки и единицы стоят на 6-м, 5-м и 4-м месте? Тысячи. Какие сотни, десятки и единицы стоят на 3-м, 2-м и 1-м месте? Как различаются эти слагаемые при произношении? Как они различаются при записи? Записываем их в нумерационную таблицу и делаем вывод.

Первые три разряда принято называть единицами первого класса, числа следующих трёх разрядов — единицами второго класса, числа следующих трёх разрядов — единицами третьего класса и т. д.

Наряду с делением на классы чисел, написанных на доске или в тетради, нужно учить учащихся узнавать на слух, сколько в числе классов. Для этого сначала дают для разбора числа, состоящие из полного числа разрядов в классе, а затем числа с классами, в которых отсутствуют те или иные разряды. Например, при чтении числа 237 145 делается ударение на словах тысяч и единиц, в числе 178 947 345 делаются ударения на словах миллионов, тысяч и единиц и т. д.

Сведения о классах закрепляются в процессе не только изучения нумерации многозначных чисел, но и действий над ними.

При обучении записи многозначных чисел можно придерживаться такого порядка. Первоначально нужно упражнять учащихся в записи чисел класса тысяч. Затем можно объединить запись чисел двух классов, причём второй класс и класс единиц могут быть и неполными, так как запись чисел первого класса учащимся знакома. Позже, в IV классе, рекомендуется сначала писать полные числа трёх классов, а позднее четырёх классов, затем пишутся неполные числа первого и второго классов при полных числах третьего класса и т. д.

Предлагаемый порядок записи чисел носит примерный характер. При изучении нумерации многозначных чисел учащиеся упражняются в разложении чисел на разряды и составлении чисел из разрядных слагаемых. Например:

$$8759 = 8 \text{ тыс.} + 7 \text{ сот.} + 5 \text{ дес.} + 9 \text{ ед.}$$
$$206\,075 = 200\,000 + 6\,000 + 70 + 5.$$

И обратно:

2 сот. тыс. + 5 дес. тыс. + 6 тыс. + 7 дес. + 3 ед. = 256 073, или:
1 000 000 + 100 000 + 10 000 + 1000 + 100 + 10 + 1 = 1 111 111.

Увеличение чисел в 10, 100, 1000 раз объясняется путём приписывания к числу нулей и сравнения полученного числа с числом без нулей.

Напиши число 27, припиши к нему два нуля. Сколько получится? (2700.) Сколько было единиц в данном числе? (7.) А сколько сотен в данном числе? (7 сотен.) Во сколько раз семь сотен больше 7? (В 100 раз.) Рассуждая так же в отношении десятков, можно сделать вывод, что число увеличилось в 100 раз.

Читая те же числа слева направо, можно сделать вывод, что, отбрасывая два нуля, мы уменьшаем число в 100 раз.

Упражнения в определении количества полных десятков, сотен, тысяч и т. д. в числе проводятся сначала на небольших числах, причём от учащихся требуют объяснения, как они нашли ответ. Например, на вопрос, сколько всего десятков в числе 680, учащийся отвечает: «В одной сотне 10 десятков, в числе 680 — 6 сотен. Значит, десятков в этом числе в 6 раз больше, или 60 десятков, и ещё 8 десятков, не образующих сотни, всего 68 десятков».

Чтение данного в учебнике арифметики правила рекомендуется после решения с объяснением нескольких примеров.

Сложение многозначных чисел.

Письменное сложение многозначных чисел изучается в III и IV классах начальной школы. В III классе обращается внимание на формирование навыков письменного сложения в объёме первых двух классов, а в IV классе — в пределе миллионов и миллиардов. Чтобы обеспечить успешное усвоение письменного сложения многозначных чисел, необходимо повторить с учащимися таблицу сложения, сложение в пределе тысячи и нумерацию многозначных чисел.

Приступая к сложению многозначных чисел в III классе, следует познакомить учащихся с названием членов арифметических действий, или компонентов. Для этого берутся примеры в объёме тысячи и на этих примерах выясняется, что числа, которые складываются, называются слагаемыми, а число, которое получается в результате сложения и которое содержит столько единиц, сколько их в обоих слагаемых, называется суммой. Определения усваиваются по учебнику арифметики.

Прежде чем приступить к сложению многозначных чисел, необходимо поупражнять учащихся в устном сложении разрядных чисел, а также восстановить в памяти учащихся превращение и раздробление разрядных единиц.

Например: 2 тыс. + 5 тыс. = 7 тыс.; 7 дес. тыс. + 2 дес. тыс. = = 9 дес. тыс., или 90 тыс., и т. д.

Последовательность изучения сложения многозначных чисел примерно та же, что и при сложении в пределе тысячи: сложение многозначных чисел без перехода из разряда в разряд; сложение чисел с нулями в слагаемых; сложение чисел с переходом через разряды, но не подряд, а в разных местах слагаемых чисел; сложение с переходом через разряды подряд, сложение с образованием нулей сначала в пределе первого класса, а позже второго—четвёртого классов.

При сложении нужно особо рассмотреть сложение чисел, когда в слагаемых различное число знаков.

Например: 4 238 + 57 296.

После изучения сложения двух слагаемых следует переходить к сложению трёх, четырёх и большего числа слагаемых.

Ознакомление со сложением лучше начинать с четырёхзначных чисел и постепенно переходить к увеличению числа разрядов.

При сложении многозначных чисел на первых уроках от учащихся требуется подробное объяснение сложения. Так, если дано:

$$\begin{array}{r} 7584 \\ +\,4379 \\ \hline \end{array}$$

ученик рассуждает так. К 4 единицам прибавить 9 единиц, получится 13 единиц, или 1 десяток и 3 единицы. 3 единицы пишем, 1 десяток в уме. К 8 десяткам прибавить 7 десятков, получится 15 десятков да 1 десяток в уме — 16 десятков, или 1 сотня и 6 десятков; 6 десятков пишем, 1 сотня в уме. К 5 сотням прибавить 3 сотни, получится 8 сотен, да 1 сотня в уме — 9 сотен; к 7 тысячам прибавить 4 тысячи, получится 11 тысяч.

Когда учащиеся научатся объяснять сложение и овладеют его техникой, можно перейти к упрощённому объяснению:

4 + 9 (13) 3 пишу, 1 в уме.
7 + 8 (15) да 1 в уме — 16; 6 пишу, 1 в уме и т. д.

Всё же нужно время от времени возвращаться к полному объяснению сложения. При сложении, когда число слагаемых больше, чем 2, учащихся затрудняет нахождение суммы большого числа однозначных чисел, а потому целесообразно ввести в устный счёт упражнения в сложении однозначных чисел без названия промежуточных сумм. Например, 7 + 8 + 9 + 6 + 3. При счёте называются последовательно суммы: 15, 24, 30, 33.

При сложении нескольких слагаемых целесообразно познакомить учащихся с приёмом сложения большего числа слагаемых по частям. Например, нужно сложить 7 слагаемых. Складываем первые 3, потом 3 следующие, а после этого полученные суммы и последнее слагаемое.

$$
\begin{array}{r}
1)\ 7489 \\
2394 \\
9789 \\
+\,6379 \\
7447 \\
9439 \\
8799 \\
\hline
51736
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
2)\ 7489 \\
+\,2394 \\
9789 \\
\hline
19672 \\
\\
6379 \\
+\,7447 \\
9439 \\
\hline
23265
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
19672 \\
+\,23265 \\
8799 \\
\hline
51736
\end{array}
$$

В III и IV классах учащиеся, помимо приобретения навыков вычисления результатов арифметических действий, знакомятся со свойствами суммы и зависимостью между членами арифметических действий, применяя полученные сведения к проверке арифметических действий, решению примеров с x и устным вычислениям.

При изучении сложения необходимо обращать внимание на приложение этого действия к решению задачи: на нахождение суммы двух чисел, на увеличение одного числа на несколько единиц, на нахождение уменьшаемого по данному вычитаемому и остатку и на сложение в косвенной форме (см. раздел «Задачи»).

К типичным ошибкам сложения многозначных чисел нужно отнести ошибки, вытекающие из слабого знания таблицы сложения. Число таких ошибок растёт с увеличением числа слагаемых. Для предупреждения ошибок этого рода следует повторять таблицу сложения и упражняться в сложении по палочкам Эккерта.

Другая группа ошибок является следствием неустойчивого внимания учащихся. Сюда нужно отнести ошибки в сложении чисел с переходом через разряд, с образованием нулей и в складывании чисел, где значащие цифры слагаемых чередуются с нулями. Учащиеся иногда не держат чисел в уме. Ошибки этого рода требуют специальных упражнений в устных вычислениях, сложении нулей, а также повторения таблицы сложения.

Вычитание многозначных чисел.

Прежде чем приступить к вычитанию многозначных чисел, необходимо повторить вычитание в пределе 1000 и на примерах, а также на задачах, познакомить учащихся с названием членов арифметических действий при вычитании и усвоить определения, данные в стабильном учебнике арифметики.

Приступая к вычитанию многозначных чисел, необходимо поупражнять учащихся в вычитании разрядных чисел: сколько получится, если от 9 тысяч отнять 7 тысяч? от 90 тысяч отнять 20 тысяч? от 13 тысяч отнять 5 тысяч? от 20 тысяч отнять 9 тысяч? После этого можно перейти к вычитанию многозначных чисел.

Сообщение нового материала следует начинать с четырёхзначных чисел, увеличивая постепенно число разрядов до пяти-шести в III классе и выше в IV классе. Для овладения механизмом вычитания целесообразно в подборе примеров придерживаться определённой последовательности. Первоначально берутся примеры, когда цифры уменьшаемого больше соответствующих цифр вычитаемого. Например: 8754—3543. Дальше подбираются такие числа, когда в вычитаемом отсутствуют некоторые разряды, имеющиеся в уменьшаемом, т. е. вычитание с нулями в вычитаемом: 29 783 — 10 708.

Следующую группу примеров составляют числа, вычитание которых производится с переходом через разряды, т. е. когда разрядные числа уменьшаемого меньше соответствующих разрядных чисел вычитаемого. Так, сначала берутся примеры, когда занимание делается в одном или в нескольких разрядах числа, но в разных местах этого числа, например: 38 725 — 13 482; 48 473 — — 29 258, 178 391 — 84 685. Дальше решаются примеры с заниманием, когда занимание идёт из разряда в разряд, например: 874 456 — 38 789.

Затем производится вычитание с нулями в уменьшаемом; при этом следует соблюдать такую последовательность в отношении числа нулей, которая облегчила бы усвоение вычитания с нулями в уменьшаемом без пометок в уменьшаемом занимаемых разрядных единиц девятками, десятками с точкой и т. п.

Первоначально следует брать числа с одним нулём в конце или в середине уменьшаемого, позже число нулей увеличивается до 2, 3 и больше. Например: 348 000 — 123 515; 1 270 000 — — 678 945; 2 400 000 — 137 945; 2 000 000 — 9; 6 000 085 — — 2 631 995 и др.

Объяснение во всех случаях ведётся так же, как об этом сказано при вычитании в пределе 1000. Когда учащиеся овладеют навыком вычитания с названием разрядных единиц, можно перейти к упрощённому названию результатов вычитания, например: 42 372 — 29 384. Из 12 четыре — 8, из 16 восемь — 8, из 12 три — 9, из 11 девять — 2, из 3 два — 1.

Ошибки, допускаемые учащимися при вычитании многозначных чисел, часто возникают вследствие слабого знания таблицы вычитания. Много ошибок допускают учащиеся и в примерах на вычитание с нулями в уменьшаемом, особенно если нули чередуются со значащими цифрами. Например: 200 700 — 98 945. Ученики вычитают из 10 там, где должно быть 9, и наоборот. Борьба за прочные навыки вычитания требует повторения таблицы вычитания и закрепления её в устных вычислениях, а также специальных упражнений для овладения навыком вычитания с нулями в уменьшаемом. При подборе примеров нужно число нулей уменьшаемого увеличивать постепенно. Например: 380 — 147, 308 — — 147, 300 — 147, 4180 — 397, 4108 — 496, 4100 — 385, 4001 — — 385, 4000 — 547 и т. д.

Умножение многозначных чисел.

Умножение многозначного числа на однозначное.

Приступая к умножению многозначных чисел, нужно первоначально ознакомить учащихся с умножением чисел по разрядам, так как прежде чем умножать 24 387 на 5, нужно, помимо умения умножать на 5 единицы, десятки и сотни числа, научиться умножению и других разрядных чисел: $24\,387 = 2 \cdot 10\,000 + 4 \cdot 1000 + 3 \cdot 100 + 8 \cdot 10 + 7 =$ 2 дес. тыс. + 4 тыс. + 3 сот. + 8 дес. + 7 ед. Из разложения числа видно, что для умножения 24 387 на 5 нужно уметь умножить на 5 десятки тысяч, тысячи, сотни и т. д. Поэтому, изучая умножение многозначных чисел, нужно упражнять учащихся в умножении разрядных чисел на однозначное число (без превращения и с превращением). Например: 7 сот. $\times$ 2; 7 тыс. $\times$ 2; 4 дес. тыс. $\times$ 2; 4 дес. тыс. $\times$ 6; 2 сот. тыс. $\times$ 4; 5 сот. тыс. $\times$ 6; 2 млн. $\times$ 3; 3 млн. $\times$ 7 и т. д.

Переходя к умножению многозначного числа на однозначное, сначала повторяют умножение трёхзначного числа на однозначное, выясняя попутно, что значит 164 умножить на 5. Решив этот пример сначала сложением $(164 + 164 + 164 + 164 + 164 = 820)$, а затем умножением (164×5), нужно показать учащимся, что умножить на 5 значит взять число 164 слагаемым 5 раз.

Пусть дано умножить 3458 на 9. Записываем умножение в столбик и знакомим учащихся с названием компонентов.

$\times$ 3458	множимое	сомножители
9	множитель	
31122	произведение	

При умножении (первые 2—3 урока) от учащихся требуют подробного объяснения умножения, а потом — в кратких условных выражениях: «Восемью девять — 72; 2 пишу, 7 в уме» и т. д.

Подбирая примеры для умножения, нужно сначала брать такие числа, когда при умножении образуются новые разрядные единицы в разных местах произведения, а позже — подряд. Например: 27 325 $\times$ 3; 327 845 $\times$ 5.

Особое внимание нужно обратить на умножение чисел с нулями во множимом (в середине, на конце) и с образованием нулей в произведении. Например: 3006 $\times$ 8; 24 700 $\times$ 4 и 16 125 $\times$ 8.

Умножая 3006 на 8, спрашиваем, сколько тысяч в этом числе и сколько единиц. Сколько тысяч получится от умножения 3 тысяч на 8? (24 тыс.) Сколько единиц получится от умножения 6 единиц на 8? (48 ед.) Сколько же всего единиц получится от умножения 3006 на 8? (24 048.) Записываем: 3006 $\times$ 8 = 24 048. После этого умножаем письменно:

$$\begin{array}{r} \times \begin{array}{r} 3006 \\ 8 \end{array} \\ \hline 24048 \end{array}$$

Рассуждаем так: восемью шесть — 48; 8 пишем, 4 в уме; восемью нуль — нуль да 4 в уме, будет 4, пишем 4; восемью нуль — 0, пишем 0 и восемью 3 будет 24; пишем 24.

Сравнивая оба произведения, делаем вывод, что нули умножаются так же, как и другие разрядные числа.

Пусть дано: умножить 24 700 на 4. Прежде чем умножить на 4, спрашиваем учащихся, сколько сотен в этом числе. 247 сотен. Умножаем 247 сотен на 4.

$$1)\ \begin{array}{r} \times \begin{array}{r} 247\ \text{сот.} \\ 4\quad\ \ \end{array} \\ \hline 988\ \text{сот.} \end{array} \qquad 2)\ \begin{array}{r} \times \begin{array}{r} 24700 \\ 4\ \ \end{array} \\ \hline 98800 \end{array}$$

Как можно записать это действие, заменив название сотен нулями? Из сравнения первой и второй записи делаем вывод, что множитель подписывается под значащей частью числа, а нули сносятся в произведение.

Умножению чисел с нулями должно предшествовать решение примеров на умножение на нуль и сложение с нулём. Например: 0×6; 0×8 и т. д., $17 + 0$; $15 + 0$ и т. д.

При умножении многозначного числа на однозначное учащиеся ещё раз убеждаются, что от перестановки сомножителей произведение не изменяется. Переместительное свойство произведения используется для устных вычислений и для проверки умножения перестановкой сомножителей, а также для умножения однозначного числа на многозначное. Например:

$$7 \times 1439 = 1439 \times 7.$$

В пределе 100 и 1000 учащиеся имели дело с перестановкой двух сомножителей: $8 \times 9 = 9 \times 8$. При изучении умножения многозначных чисел число сомножителей может быть увеличено от 3 до 5. Например: $4 \times 7 \times 5 = 4 \times 5 \times 7 = 140$; $2 \times 2 \times 3 \times \times 5 \times 5 = 2 \times 5 \times 2 \times 5 \times 3 = 300$ и т. д.

Прочное и сознательное усвоение умножения многозначного числа на однозначное имеет большое значение для формирования навыков умножения многозначных чисел на многозначные; только овладев сознательно умножением на однозначное число, можно успешно находить неполные произведения при умножении многозначных чисел.

Умножение многозначных чисел.

Последовательность изучения умножения многозначных чисел на многозначные видна из таблицы, помещённой на странице 148.

Умножение многозначных чисел изучается в начальных классах концентрически. В III классе учащиеся знакомятся с умножением двузначных, трёхзначных и многозначных чисел на дву-

Умножение на единицу с нулями	10	100	1000
Умножение на значащую цифру с нулями	20	200	2000
Умножение многозначных чисел	23×43	234×342	2342×4762
Умножение чисел с нулями в середине сомножителей	—	305×247 324×207 305×205	2007×3254 2007×3204 2007×3004
Умножение чисел, оканчивающихся нулями	20×30	200×300 230×200 230×340	2000×300 2300×320 2340×300 230×7500

значное число и умножением трёхзначных чисел на трёхзначные, когда число цифр произведения не превышает 6.

В IV классе повторяется пройденное в III классе и изучается умножение чисел в пределе классов миллионов и миллиардов. Там же изучается умножение чисел, оканчивающихся нулями во множимом и множителе, а также с нулями в середине, когда число нулей больше одного.

Как видно из таблицы, для умножения на двузначное число достаточно знать умножение чисел на 10, на значащую цифру с нулём (20, 30 и т. д.) и на однозначное число. Для умножения на трёхзначное число нужно усвоить умножение на 100, на значащую цифру с двумя нулями и т. д. Хотя такой способ расположения материала и облегчает формирование навыка умножения, тем не менее он замедляет темп работы и ослабляет способность учащихся к обобщениям, поэтому такое расположение материала не всегда соблюдается.

Умножение многозначных чисел на 10, 100, 1000 и т. д.

Умножение двузначного числа на 10 и однозначного на 100 не затрудняет учащихся, так как при изучении нумерации учащиеся уже познакомились с увеличением и уменьшением чисел в 10 и 100 раз. Тем не менее умножение на 10 и 100 нужно подкрепить решением задач, которые более углублённо раскрывают смысл умножения на 10 и 100.

Задача. В зале 10 скамеек, на каждой скамейке сидят по 23 ученика. Сколько учеников сидит на скамьях в зале?

Сколько раз по 2 десятка учеников сидят в зале на скамьях? Десять. Сколько всего десятков учеников? Двадцать десятков, или 200 учеников. Сколько раз по 3 ученика сидят на скамьях? Десять. Сколько их? 30 учеников. Сколько всего учеников? 200 уч. + 30 уч. = 230 уч.

Как можно записать решение этой задачи?

23 уч. $\times$ 10 = 230 уч.

Сравните числа 23 и 230. Сколько всего единиц во множимом? 23 единицы. А сколько десятков в произведении? 23 десятка. Во сколько раз мы увеличили число 23? В десять раз. Чем стали единицы множимого? Десятками. А десятки? Сотнями. Чего нет в произведении? Единиц. Что ставится в числе на месте отсутствующего разряда? 0. Как можно найти результат увеличения числа в 10 раз? К множимому следует приписать справа нуль. После этого читается правило умножения на 10 по учебнику арифметики. При этом нужно уточнить, что «приписывание нулей» неравносильно «прибавлению нулей». Пример: $23 \times 10 = 230$; $23 + 0 = 23$. Умножение на 10 производится устно и записывается в строчку: $23 \times 10 = 230$.

Умножение 23 на 100 объясняется так. 23 умножим сначала на 10, а потом 230 ещё раз на 10 или, заменив последнее умножение сложением, получим: $230 + 230 \ldots + 230 = 2300$; $23 \times 10 =$ во множимом? 23. Чем стали единицы множимого в произведении? $= 230$; $230 \times 10 = 2300$; $23 \times 100 = 2300$. Сколько единиц было Сотнями.

Когда учащиеся усвоят сущность увеличения числа в 10 и 100 раз, можно распространить приведённый выше способ рассуждения в IV классе на единицу с любым числом нулей в пределе первых четырёх классов, сделав общий вывод для умножения числа на 10, 100, 1000 и т. д. Умножение на единицу с нулями записывается в строчку. Например: $478 \times 100 = 47\,800$. Умножение на 10, 100 и 1000 является хорошей подготовкой к объяснению умножения многозначных чисел, а потому необходимо твёрдо усвоить произведения: 10×10; 100×10; 100×100; 1000×10; 1000×100; 1000×1000.

Умножение на круглые десятки, сотни и тысячи.

Умножение на круглые десятки является дальнейшим развитием умножения многозначного числа. Здесь на основе сочетательного закона множитель разбивается на два сомножителя: на 10 и на множитель, выраженный однозначным числом, и произведение находится последовательным умножением множимого сначала на один, а затем на другой множитель.

Требуется умножить 4 на 20. Множитель можно представить в виде произведения: 10×2, а умножение 4 на 20 — как произведение трёх сомножителей: $4 \times 10 \times 2$. Последнее произведение допускает перестановку сомножителей: $4 \times 2 \times 10 = 80$. По аналогии с разобранным примером разбирается умножение 17×30.

Сколько десятков во множителе? Сколько раз нужно взять по 17? Десять. Сколько получим? 170. Сколько раз нужно взять по 170? Три раза. Как это записать? $170 + 170 + 170 = 510$. Как короче? $170 \times 3 = 510$. Как же умножается 17×30? $(17 \times 10) \times 3$. Как ещё можно умножить? $(17 \times 3) \times 10$.

Решив ещё несколько примеров (14×40; 25×30 и 38×20), можно сделать вывод: чтобы умножить число на круглые десятки, нужно это число умножить сначала на 10, а потом на число десятков или сначала умножить на число десятков, а после на 10.

Когда учащиеся научатся умножать любое двузначное число на круглые десятки в пределе 1000 устно, легко распространить этот приём умножения на такие числа, когда произведение больше 1000.

При объяснении умножения круглых сотен решаются примеры: 32×20 и 32×200. Учащиеся умножают: $32 \times 2 = 64$; $64 \times 10 = 640$, т. е. к 64 приписывают нуль. При умножении 32 на 200 учащиеся 32 умножают на 2, полученное произведение умножают на 100, или приписывают к нему два нуля. После решения нескольких примеров можно перейти к общему выводу, как умножить число на 200, 300 и т. д. Для большей убедительности полученных выводов можно подкрепить их решением задач.

Задача. Школы в первомайскую демонстрацию построили учащихся в 400 рядов по 25 человек в каждом. Сколько учащихся участвовало в первомайской демонстрации?

Сколько учащихся в 4 рядах? 100 учащихся. Сколько раз было по 4 ряда? 100. Сколько учащихся вышло на демонстрацию в 400 рядах? 100 уч. $\times$ 100 = 10 000 уч., или $25 \times 4 \times 100 = 10\,000$ (уч.). Так же в IV классе объясняется умножение на круглые тысячи.

При повторении умножения на значащую цифру с нулями нужно показать учащимся, что умножение на круглые десятки, сотни и тысячи выполняется последовательным умножением. Умножение однозначных и двузначных чисел на круглые десятки, сотни, тысячи и т. д. и когда действия над числами, выраженными значащими цифрами чисел, сводятся к вычислениям в пределе 100, записывается в строчку. Умножение прочих чисел записывается в столбик. При записи нужно подписывать множитель под первой значащей цифрой множимого. Например, пусть дано: 343 умножить на 400; множитель — 4 сотни, или 4×100, а потому, чтобы умножить 343 на 400, нужно сначала:

$$\begin{array}{r} \times\, 343 \\ 4 \\ \hline 1372 \end{array}$$

а потом 1372×100, или приписать к 1372 два нуля. Вместо двух последовательных вычислений можно рекомендовать одно в такой записи:

$$\begin{array}{r} \times\, 343 \\ 400 \\ \hline 137200 \end{array}$$

подчеркнув, что нули множителя «сносятся» в произведение, что равносильно умножению неполного произведения 1372 на 100.

Умножение на двузначное число.

Умножению на двузначное число предшествует повторение умножения на 10, круглые десятки и однозначное число. Пусть дано: 32×24. Сколько десятков в числе 24 и сколько единиц? 2 десятка и 4 единицы. Значит, чтобы умножить число 32 на 24, нужно умножить его сначала на 20, а потом на 4 и полученные произведения сложить. Как 32 умножить на 20? $32 \times 10 \times 2 = 640$. Сколько получится от умножения 32 на 4? 128. Складываем полученные неполные произведения: $640 + 128 = 768$. То же действие записываем столбиком. Умножение начинаем с единиц. Обращаем внимание учащихся, что от умножения на круглые десятки в числе всегда получается на конце нуль. Запись на доске будет иметь такой вид:

$$
\begin{array}{r}
\times\begin{array}{r}32\\24\end{array}\\
\hline
+\begin{array}{r}128\\640\end{array}\\
\hline
768
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
\times\begin{array}{r}32\\24\end{array}\\
\hline
+\begin{array}{r}128\\64\end{array}\\
\hline
768
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\text{множимое}\\
\text{множитель}\\
\\
\\
\\
\text{полное произведение}
\end{array}
$$

При решении примера письменно рассуждаем так. Умножим 32 на 4; четырежды два — пишем 8, четырежды три — пишем 12. Умножаем 32 на 2 десятка и произведение подписываем под десятками.

Дважды два — 4 десятка; пишем 4 под десятками; от умножения десятков на десятки получаются сотни; дважды три — 6 сотен. Складываем поразрядно неполные произведения и получаем 768. Рассуждения с названием результатов умножения по разрядам производятся до тех пор, пока учащиеся не усвоят хорошо объяснения умножения. Позже учащиеся пользуются обычным условным названием результатов умножения.

Решив два-три примера устно и письменно, нужно сделать вывод, что при умножении на двузначное число *сначала умножаем множимое на единицы множителя*, а потом на *его десятки* и что от умножения на единицы и десятки получаются *неполные произведения*, а чтобы получить полное произведение, нужно *сложить два неполных произведения*.

Умножение на трёхзначные и многозначные числа.

Умножение трёхзначного числа на трёхзначное изучается в III классе.

Умножению трёхзначного числа на трёхзначное предшествует повторение умножения трёхзначного числа на 100, круглые сотни и на двузначные числа, а также упражнения в умножении чисел по разрядам устно (7 сотен $\times$ 7 и др.).

Пусть дано: умножить 324 на 432. Число 324 нужно взять слагаемым 300 раз, 20 раз и 4 раза и затем полученные произведения сложить. Умножение запишем так:

$$\begin{array}{rl}
\times\begin{array}{r}324\\432\end{array} & \\
\hline
648 & \text{неполное произведение от умножения на 2 ед.}\\
+\ 9720 & \text{,,}\quad\text{,,}\quad\text{,,}\quad\text{,,}\quad \text{на 3 дес.}\\
129600 & \text{,,}\quad\text{,,}\quad\text{,,}\quad\text{,,}\quad \text{на 4 сот.}\\
\hline
139968 &
\end{array}$$

Обращая внимание учащихся на то, что при умножении на двузначное число в неполном произведении десятков нули не писались, распространяем это правило и на неполные произведения десятков и сотен, полученных при умножении 324 на 432. Переписываем пример в тетрадь без нулей.

Примеры для упражнения нужно подбирать так, чтобы учащиеся научились умножать такие числа, когда в неполном и полном произведениях получаются нули.

Примеры: 246×275; 142×555; 448×225; 625×128
545×432; 111×375; 222×952 и др.

Умножение в пределе класса миллионов и миллиардов затрудняет учащихся тем, что в памяти приходится удерживать много чисел, из которых одни быстро сменяются другими. Чтобы облегчить умножение больших многозначных чисел, целесообразно познакомить учащихся с составлением вспомогательных таблиц (стр. 161—162).

Умножение чисел с нулями в середине.

Если учеников обучать обращению с нулями, как с числами, то умножение чисел с нулями во множимом, множителе и одновременно в том и другом не представит для них затруднений. Помимо навыка в умножении нуля и на нуль, нужно упражнять учащихся в определении разрядов, получаемых от умножения различных разрядных единиц. При умножении чисел с нулями во множимом и множителе не следует допускать нерациональных записей.

Нули во множимом (например, 2003×231) учащихся не затрудняют, так как с умножением нуля они встречались не один раз при умножении двузначных, трёхзначных и многозначных чисел. Но нуль во множителе требует объяснения.

Пусть дано: 347×205. Чтобы умножить 347 на 205, нужно сначала умножить 347 на 200, а потом на 5, или наоборот. Начнём умножение с единиц. От умножения 347 на 5 единиц получим

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}347\\205\end{array}\\ \hline +\begin{array}{r}1735\\694\end{array}\\ \hline 71135\end{array}$$

1735, а от умножения на 200, или 2 сотни, получим 694 сотни. Складываем неполные произведения и получаем окончательный результат. После этого обращаем внимание учащихся на то, как подписано второе неполное произведение.

Когда нули встречаются одновременно во множимом и множителе, придерживаемся сделанных выше указаний. Пусть требуется умножить 703 на 204. Записываем, как обычно, и рассуждаем так: $4 \times 3 = 12$; 2 пишем, 1 в уме; $0 \times 4 = 0$; $0 + 1 = 1$, $4 \times 7 = 28$; пишем 28. Умножаем далее 703 на 2, результат пишем под единицами сотен, тысяч и т. д.

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}703\\204\end{array}\\ \hline +\begin{array}{r}2812\\1406\end{array}\\ \hline 143412\end{array}$$

В IV классе могут встречаться примеры, когда во множимом и множителе не один, а два, три нуля. При умножении таких чисел следует рассуждать так.

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}2007\\3008\end{array}\\ \hline +\begin{array}{r}16\,056\\6\,021\end{array}\\ \hline 6\,037\,056\end{array}$$

Пусть дано 2007×3008, умножаем 2007 на 8 единиц, получаем 16 056. Так как десятков и сотен во множителе нет, то умножаем сразу на 3 тысячи и результат 6021 подписываем под единицами тысяч, десятками тысяч и т. д.

Учащиеся иногда допускают нерациональные записи действий с нулями в середине. Например:

Нежелательные записи:

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}2708\\2006\end{array}\\ \hline +\begin{array}{r}16248\\0000\\0000\\5416\end{array}\\ \hline 5432248\end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\begin{array}{r}2708\\2006\end{array}\\ \hline +\begin{array}{r}16248\\541600\end{array}\\ \hline 5432248\end{array}$$

Правильная запись:

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}2708\\2006\end{array}\\ \hline +\begin{array}{r}16248\\5416\end{array}\\ \hline 5432248\end{array}$$

Умножение чисел, оканчивающихся нулями.

Умножение чисел, оканчивающихся нулями, встречается уже в пределе 1000. Для самостоятельного рассмотрения этого случая умножения в методике не было бы основания, если бы при записи членов арифметических действий не нарушалась общепринятая запись чисел по разрядам. А потому при повторении и обобщении умножения следует (в III и особенно IV классе) рассмотреть возможные сочетания чисел, оканчивающихся нулями во множимом и множителе.

Приступая к решению таких примеров, сначала повторяют умножение круглых чисел на однозначное число и однозначного числа на круглые числа (десятки и сотни). После этого следует рассмотреть решение и запись следующих примеров, давая попутно приведённые выше объяснения.

Примеры для III класса:

$$\times\begin{array}{r}560\\3\\\hline\end{array}\qquad\times\begin{array}{r}230\\13\\\hline\end{array}\qquad\times\begin{array}{r}3200\\13\\\hline\end{array}\qquad\times\begin{array}{r}690\\106\\\hline\end{array}\qquad\times\begin{array}{r}433\\650\\\hline\end{array}\qquad\times\begin{array}{r}750\\400\\\hline\end{array}$$

Примеры для IV класса:

$$\times\begin{array}{r}230\\130\\\hline\end{array}\qquad\times\begin{array}{r}300\\18\\\hline\end{array}\qquad\times\begin{array}{r}300\\230\\\hline\end{array}\qquad\times\begin{array}{r}7900\\8400\\\hline\end{array}\qquad\times\begin{array}{r}198\,700\\8\\\hline\end{array}\qquad\times\begin{array}{l}127\\47300\\\hline\end{array}$$

$$\times\begin{array}{r}8000\\32\\\hline\end{array}\qquad\times\begin{array}{r}3720\\400\\\hline\end{array}\qquad\times\begin{array}{r}340\\8000\\\hline\end{array}$$

Разберём последний пример. Нужно 34 десятка умножить на 8000. Умножаем сначала 34 десятка на 8 и получаем:

$$\times\begin{array}{r}34\ \text{дес.}\\8\phantom{\ \text{дес.}}\\\hline 272\ \text{дес.}\end{array}$$

или 2720. А теперь умножаем 2720 на 1000, получаем 2 720 000. Обращаем внимание учащихся на то, что мы умножили только 34 на 8, т. е. перемножили значащие части этих чисел, и к произведению приписали (или снесли) столько нулей, сколько их было во множимом и множителе.

Запись: $\times\begin{array}{r}340\\8000\\\hline 2720000\end{array}$

Вывод. При умножении чисел, оканчивающихся нулями, значащие цифры одного из сомножителей пишутся под значащими цифрами другого, значащие части чисел перемножаются и к полученному произведению приписывается столько нулей, сколько нулей в обоих сомножителях.

Ошибки при умножении многозначных чисел объясняются слабым знанием таблицы умножения, особенно умножения на 6, 7, 8 и 9, и таблицы сложения. Больше всего ошибок делают учащиеся в общих случаях умножения (8769×79 и 796×879).

Ошибки на умножение с нулями на конце и в середине сомножителей встречаются реже. Значительная часть ошибок этого рода относится к записям. Для избежания ошибок в действиях с нулями нужно, помимо сознательного усвоения умножения, упражнять учащихся в решении таких примеров, как: 0×0, 0×6, 5×8, $0 + 0 \times 5 - 0 \times 4$ и др.

Деление многозначных чисел.

Деление многозначного числа на однозначное.

Деление многозначных чисел изучается в следующей последовательности:

а) деление многозначного числа на однозначное,

б) деление многозначного числа на многозначное.

С делением многозначного числа на однозначное учащиеся впервые знакомятся в III классе. Изучению деления многозначного числа на однозначное предшествует повторение деления в пределе 1000. Попутно учащимся сообщается название компонентов деления и определение их по учебнику арифметики. При делении многозначного числа на однозначное различаются два случая: 1) когда число цифр частного равно числу цифр делимого и 2) когда в частном на одну цифру меньше.

Письменному делению многозначных чисел предшествуют упражнения в делении двузначных чисел на однозначные (с остатком) и в делении разрядных чисел на однозначные числа устно, например: 6000 : 3; 3000 : 2; 2400 : 6; 42 000 : 7, и повторение письменного деления в пределе 1000. Деление многозначного числа на однозначное объясняется так же, как и деление трёхзначного числа на однозначное. Так, если нужно разделить 5784 на 6 равных частей, 5784 разбивается на слагаемые, кратные 6:

$$5400 + 360 + 24; \text{ деление записывается так:}$$

$$\begin{array}{r|l}
-\,5784 & 6 \\
\underline{5400} & \text{9 сот. 6 дес. 4 ед.} = 964 \\
-\,384 & \\
\underline{360} & \\
-\,24 & \\
\underline{24} & \\
0 &
\end{array}$$

5 тысяч разделить на 6 равных частей так, чтобы на каждую часть приходилось по одной тысяче, нельзя. Берём 57 сотен числа и делим на 6 равных частей; на каждую часть приходится по 9 сотен и ещё остаётся 3 сотни. Умножаем 9 сотен на 6 и вычитаем из 57 сотен. Остающиеся 3 сотни раздробляем в десятки и прибавляем (или сносим) 8 десятков; 38 десятков делим на 6 и т. д. Попутно нужно уточнить, зачем мы умножаем делитель на каждую цифру частного, затем вычитаем полученное число. Ученики должны понять, что это делается для того, чтобы узнать, сколько сотен, десятков и др. разделилось и сколько ещё осталось не разделённых.

Здесь, как и при делении в пределе 1000, после нескольких упражнений нужно отказаться от записи лишних нулей и перейти к обычной записи деления.

Примеры подбираются так, чтобы обеспечить постепенное овладение следующими случаями деления:

а) деление с нулями в частном, например: 321 : 3; 6184 : 2; 56 049 : 7 и др.;

б) деление с нулями на конце делимого, когда нули сносятся в частное, например: 762 750 : 9; 748 000 : 8 и др.;

в) деление с остатком и нулём в частном, например: 932 : 3; 1921 : 3; 63 125 : 8.

По мере овладения техникой деления запись постепенно упрощается, как это видно из решения приведённого ниже примера:

```
1)  _38526 | 6            2)  38526 | 6
     36      6421              25     6421
    _25                         12
     24                          6
     _12                         0
      12
       _6
        6
        0
```

В IV классе возможна **запись деления многозначного числа на** однозначное в строчку:

38 526 : 6 = 6421.

Деление многозначного числа на многозначное.

По программе в III и IV классах начальной школы делители не должны превышать полных трёхзначных и четырёхзначных чисел. Разложение делителя на разрядные единицы указывает путь, которого нужно придерживаться при изучении деления.

Из разложения чисел на разрядные единицы следует, что при делении многозначных чисел нужно соблюдать такую последовательность.

Основные случаи деления многозначных чисел	Деление на двузначное число	Деление на трёхзначное число	Деление на многозначное число
	В III классе		В IV классе
Деление на единицу с нулями	10	100	1000
Деление на значащую цифру с нулями	20	200	2000
Деление на полные числа	23	245	3167

Частные случаи деления (нули в частном): 467 : 23; 54 617 : 182; 5 483 449 : 2732.

а) Деление на единицу с нулями.

С делением на 10, 100, 1000 и т. д. учащиеся познакомились впервые при изучении нумерации и могут вполне сознательно ответить на вопрос, сколько в данном числе десятков, сотен, тысяч и т. д. Эти сведения помогают учащимся решать примеры и задачи на деление по содержанию.

Объяснение деления на 10 можно производить разными способами.

Первый способ. Пусть дано: 200 : 10. Сколько десятков в одной сотне? Сколько в двух? Сколько получится, если 200 : 10? Ответ: 20.

Второй способ основан на принципе деления по частям.

240 разлагается на два слагаемых — 200 и 40. Учащийся знает, что в двух сотнях 20 десятков, да ещё 4 десятка. Ответ: 24.

$$(200 + 40) : 10 = 200 : 10 + 40 : 10 = 20 + 4 = 24.$$

Третий способ. Возможно нахождение частного посредством умножения.

$$? \times 10 = 240;\ 240 : 24 = 10$$

Какое число нужно взять 10 раз, чтобы получить 240? Сколько получится, если мы 240 разделим на 10?

Для деления на двузначное число большое значение имеет подготовка учащихся к делению на 10 чисел с остатком, например: 365 : 10. Здесь тоже число разлагается на два слагаемых, из которых одно кратно 10 (360), а другое нет. В результате в частном получится 36, в остатке 5.

Задача. В фабричном посёлке в 10 кварталах 650 домов. В каждом квартале домов поровну. Сколько домов в каждом квартале? 650 дом. : 10 = (600 + 50) : 10 = (6 × 100 + 50) = 6 × × 10 + 5 = 65 дом. Здесь деление сведено к делению на части в пределе 100. Сравнивая делимое и частное, можно сделать вывод, что десятки делимого стали единицами, а сотни — десятками, т. е. значение каждой цифры делимого понизилось на один разряд. То же можно показать и на четырёхзначных числах; после этого можно сделать общий вывод, что деление на 10, 100, 1000 и т. д. равносильно понижению значения каждого разряда делимого в 10, 100 и 1000 раз. Деление на 10, 100, 1000 и т. д. записывается в строчку. Остаток пишется в скобках, например: 27 947 : 100 = = 279 (47).

б) Деление многозначных чисел на круглые десятки и сотни.

Деление многозначных чисел на круглые десятки может быть с остатком и без остатка.

Пусть дано: 240 : 30. Делимое 240 содержит 24 десятка, делитель 30 — 3 десятка.

Узна́ем, во сколько раз 24 десятка больше 3 десятков. Ответ: в 8 раз.

Можно применить принцип последовательного деления:

$$(240 : 10) : 3 = 8.$$

При нахождении частного в случае деления на круглые десятки (в пределе 1000) нужно различать два случая: когда делимое и делитель делятся как числа табличные и когда деление является делением внетабличным. Например, 350 : 50 (табличное деление), 240 : 20 (деление внетабличное).

Пусть дано разделить 17 520 на 20.

$$(1752 \cdot 10) : (2 \cdot 10) = 1752 : 2 = 876.$$

Из приведённого примера видно, что деление на двузначное число в случае деления без остатка производится так: делят данное число сначала на 10, а потом делят полученное число по правилам деления на однозначное число. Тот же пример можно решить и так:

$$\begin{array}{r|l} 17520 & 20 \\ \cline{2-2} -160 & 876 \\ \cline{1-1} 152 & \\ -140 & \\ \cline{1-1} 120 & \\ -120 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Деление на круглые десятки четырёхзначных, пятизначных и т. д. чисел можно рассматривать или как последовательное деление (деление числа на произведение), или как подготовительный этап в делении многозначного числа на двузначное.

При делении на круглые десятки деление на однозначное число производится или устно с записью частного в строчку, или столбиком. Когда деление на круглые десятки является подготовительным упражнением к делению на двузначное число, деление записывается столбиком. При записи деления столбиком нули в начальной школе не зачёркиваются, так как ученики не изучают изменения компонентов деления, например:

$$\begin{array}{r|l} 43470 & 70 \\ \cline{2-2} -420 & 621 \\ \cline{1-1} 147 & \\ -140 & \\ \cline{1-1} 70 & \\ -70 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Так же поступают при делении на круглые десятки с остатком, например:

$$\begin{array}{r|l} 17289 & 30 \\ \cline{2-2} -150 & 576 \\ \cline{1-1} 228 & \\ -210 & \\ \cline{1-1} 189 & \\ -180 & \\ \cline{1-1} \text{остаток}\quad 9 & \end{array}$$

Деление на круглые сотни объясняется так же, как и деление на круглые десятки. Пусть дано: 900 : 300. Сколько сотен в числе 900? в числе 300? сколько раз в 9 сотнях содержится по 3 сотни?

Запись. 900 : 300 = 3.
9 сот. : 3 сот. = 3.

При делении многозначных чисел на круглые сотни возможны два способа объяснения: путём последовательного деления и деления столбиком. Например:

1) 6300 : 700 = (6300 : 100) : 7 = 9 (пишем в строчку).

2)
$$\begin{array}{r|l} 37600 & \underline{400} \\ \underline{3600} & 94 \\ 1600 & \\ \underline{1600} & \\ 0 & \end{array}$$

3)
$$\begin{array}{r|l} 424975 & \underline{700} \\ \underline{4200} & 607 \\ 4975 & \\ \underline{4900} & \\ \text{остаток } 75 & \end{array}$$

Последний приём подготовляет учащихся к делению на трёхзначные числа.

в) Деление на двузначное число.

Делению на двузначное число предшествует повторение внетабличного деления на двузначное число без остатка, упражнения в делении с остатком (92 : 23; 96 : 26; 68 : 17; 68 : 19 и др.) и делении на круглые десятки. Примеры для объяснения деления на двузначное число подбираются в такой последовательности, чтобы идти от более лёгкого к трудному. Например: 120 : 40; 123 : 43; 450 : 90; 460 : 92; 38 : 12 и 384 : 12; 115 : 21 и 1155 : 21. Постепенный переход от деления двузначных чисел к трёхзначным и от трёхзначных чисел к четырёхзначным и т. д. облегчает формирование навыков деления.

При делении на двузначное число учащихся затрудняет нахождение цифр частного и определение числа их.

Обучать определению числа цифр частного нужно путём анализа той части числа, которая отделяется для деления. Так, если дано: 648 : 24, то, отделив десятки этого числа, учитель спрашивает: «Что мы делим на 24? 64 десятка. Что получится в частном? Единицы десятков. А сколько нужно цифр, чтобы написать число, выраженное в десятках? Две. Значит, в частном будет две цифры, или частное будет число двузначное». Рассуждая так же, легко определить число цифр частного и при делении на двузначное число многозначных чисел. Например: 63 888 : 12. Отделив в делимом два знака, учитель совместно с учениками делает вывод, что от деления 63 тысяч на 12 в частном получатся единицы тысяч, для написания которых требуется 4 знака, следовательно, частное будет число четырёхзначное.

Овладение алгоритмом деления на двузначное число лучше начинать с трёхзначных чисел при двузначном частном, так как, отделив десятки числа, мы получаем деление в пределе 100 (без округления). Пусть дано: 667 : 29. Рассуждаем так. 6 сотен разделить на 29 так, чтобы на каждую часть пришлось по одной сотне, нельзя. Раздробляем 6 сотен в десятки и прибавляем 6 десятков, получаем 66 десятков; то же число мы получили бы, отделив две цифры в делимом; делим 66 десятков на 29 и получаем в частном 2 десятка. Умножим 2 десятка на 29, получаем 58 десятков и 8 десятков в остатке. Раздробив 8 десятков в единицы и прибавив 7 единиц, получаем 87. Деля 87 на 29, пишем в частном 3 единицы; умножая 3 на 29, вычитаем из 87, получаем в остатке 0.

$$\begin{array}{r|l} -667 & 29 \\ \underline{58} & \overline{23} \\ -87 & \\ \underline{87} & \\ 0 & \end{array}$$

Для закрепления механизма деления следует сначала решать примеры на деление 3, 4, 5, 6-значных чисел, когда деление сводится к внетабличному делению в пределе 100 (в III классе). Например: 6118 : 14; 5129 : 23; 375 296 : 16 и др.

Деление трёхзначных и многозначных чисел на двузначные числа, когда первые две цифры делимого не делятся на двузначное число, требует от учащихся умения делить в уме трёхзначные числа на двузначные при однозначном частном путём округления делителя и той части делимого, которая делится на делителя.

Пусть дано: 456 : 47. Округлив 47 до 50, или 5 десятков, делим 45 десятков на 5, получим в частном 9. Найдя цифру частного, необходимо её проверить или испытать. Умножаем 47 на 9 и вычитаем произведение из 456, получаем 33 в остатке. Следовательно, цифра найдена верно.

$$\begin{array}{r|l} -456 & 47 \\ \underline{423} & \overline{9} \\ 33 & \text{остаток} \end{array}$$

При подборе примеров на деление следует выделить в отдельную группу примеры, когда в частном получаются нули между значащими цифрами (78 156 : 79), когда частное оканчивается нулями (254 800 : 26) и когда при делении с остатком в частное сносятся 1 или 2 нуля (6012 : 15; 481 629 : 69); более сложные примеры решаются в IV классе.

Чтобы облегчить нахождение цифр частного при делении многозначных чисел на двузначные, можно рекомендовать способ табличного нахождения цифр частного [1].

В учебнике арифметики на странице 139 дана таблица «Результаты умножения чисел 12—19 на однозначные числа» (таблица 2). Пользуясь этой таблицей, можно облегчить нахождение цифр частного при делении многозначного числа на 12—19. Пользование таблицей облегчает усвоение механизма действия деления.

П р и м е р. Пусть дано разделить 1666 на 17. Записываем деление:

$$\begin{array}{r|l} -1666 & 17 \\ \underline{153} & \overline{98} \\ -136 & \\ \underline{136} & \\ 0 & \end{array}$$

[1] Он с успехом применяется и при умножении.

Ближайшее число к 166 в таблице против делителя 17 будет 9; берём по таблице готовый результат умножения 17 на 9 и подписываем 153 под 166. Вычитаем, сносим 6 и делим 136 по таблице. Ответ: 8. Пишем в частном 8.

Для чисел, больших 19, учащиеся составляют таблицы самостоятельно.

Пусть дано: 416 808 : 72; запишем произведения 72 на числа от 1 до 9 (произведения находятся сложением или удвоением чисел).

1	72
2	144
3	216
4	288
5	360
6	432
7	504
8	576
9	648

```
_416808 | 72
 360    |----
 ---    | 5789
 _568
  504
  ---
  _640
   576
   ---
   _648
    648
    ---
      0
```

Отделив 3 знака, ищем в таблице ближайшее к 416 число; таким числом будет 360, или 72×5. Пишем в частном 5; дальше вычитаем 360 и к остатку сносим 8, получаем 568. Ближайшее число 504. Пишем в частном 7. Вычитаем 504 из 568 и к остатку 64 сносим 0, получаем 640. Ближайшее число 576. Пишем в частном 8, в остатке 64. Сносим 8. Делим 648 на 72. В частном 9, итого в частном 5789.

Из приведённого примера видно, что наиболее трудные вопросы деления — нахождение цифр частного и проверка их — выполнены при составлении таблицы, где слева стоят цифры частного, а справа — произведения их на делитель. Когда учащиеся научатся пользоваться таблицей до 9, можно составлять таблицу только до 5, складывая первые разряды для получения произведения чисел, больших 5, в уме.

г) Деление на трёхзначное число.

Переходя к делению на трёхзначное число, следует поупражняться в устном делении трёхзначного числа на трёхзначное в пределе 1000 (деление по содержанию) на таких примерах: 800 : 400; 360 : 120; 850 : 170; 540 : 108; 651 : 217 и т. д. После этого можно перейти к делению четырёхзначных и пятизначных чисел на трёхзначные, подбирая для деления числа с легко округляемым делителем, пользуясь в одних случаях округлением до круглых десятков, а в других — до круглых сотен. Например: 2490 : 415. Для нахождения цифры частного округляем 2490 до 24 сотен, делим 24 сотни на 4 сотни и испытываем полученную цифру частного. Другой пример: 1884 : 876. Округляем 1884 до 19 сотен, 876 до 9 сотен и делим 19 сотен на 9 сотен; получаем 2 и проверяем найденную цифру частного. После деления четырёхзначных чисел на трёхзначные переходят к делению чисел с большим числом знаков в делимом. Здесь так же, как и при делении на двузначное число, учащихся затрудняет нахождение цифр частного и числа их.

На практике иногда пользуются точечным приёмом определения числа цифр частного. Число цифр частного определяется, как и прежде, рассуждением с последующим обозначением числа цифр в частном лёгкими точками, которые затем закрываются цифрами частного. Например: 301 035 : 141. Так как от деления 341 тысяч на 141 в частном получатся тысячи, то деление записывается так:

```
301035 | 141
       |-----
       | ....
```

Такое наглядное обозначение числа цифр в частном имеет большое значение для предупреждения ошибок при делении чисел с нулями в середине и на конце. При нахождении численного значения цифр частного прибегают обычно к округлению делителя и той части делимого, которая делится.

При делении на трёхзначное число учащихся затрудняют примеры с нулями на конце делимого, с нулями в частном между значащими цифрами и с нулями на конце частного при делении с остатком. Для выработки навыка в решении таких примеров нужно обратить особенное внимание на определение числа цифр частного, а также прибегать к записи частного с наименованиями разрядов. Например, при делении 375 625 на 125 учащиеся пишут в ответе 35, 305 и 3005.

Запись с наименованиями даёт 3 тысячи 5 единиц, или 3005.

```
Второй пример:  _924127 | 154
                 924     ---------------
                -----    6 тысяч = 6000
остаток          127
```

Случаи деления, когда нули встречаются в делимом и делителе, изучаются в IV классе. Деление чисел, оканчивающихся нулями, следует производить, не обращая внимания на нули, т. е. деля числа так, как мы делим числа со значащими цифрами. Например:

```
_292300 | 370          _292300 | 370
 2590    ----           259     ----
 ----    79             ---     790
 _3330                  _333
  3330                   333
  ----                   ---
     0                     0
```

Зачёркивать нули в делимом и делителе не рекомендуется, так как учащиеся в начальной школе не изучают изменения компонентов.

Цифры частного при делении на трёхзначные, четырёхзначные и т д. числа могут находиться также приёмом табличного деления, особенно при многозначном частном Например (в IV классе):

```
1   782    _5940072 | 782
2  1564     5474     -----
3  2346     ----     7596
4  3128     _4660
5  3910      3910
6  4692      ----
7  5474      _7507
8  6256       7038
9  7038       ----
              _4692
               4692
               ----
                  0
```

При делении многозначного числа на трёхзначное число от учащихся сначала требуется полное объяснение (т. е. с указанием значения цифр делимого), а позднее сокращённое.

Пусть дано:

```
_643953 | 132
 528    |-----
 ----   | 4878
 _1159
  1056
  ----
  _1035
    924
   ----
   _1113
    1056
    ----
      57
```

Объяснение: для деления 643 953 на 132 отделяем в делимом 643 тысячи и делим 643 тысячи на 132, получаем в частном 4 тысячи. 4 тысячи умножаем на 132 и полученное произведение вычитаем из 643 тысяч. Остаток 115 тысяч раздробляем в сотни, получаем 1150 сотен, да ещё 9 сотен числа образуют 1159 сотен; 1159 сотен делим на 132, получаем в частном 8 сотен. И т. д.

Ошибки в делении часто объясняются спецификой этого действия, которое требует твёрдых навыков умножения и вычитания, навыков в округлении чисел и умения в уме находить цифры частного. Большой удельный вес ошибок падает на умножение и вычитание. Ошибки собственно деления относятся к неумению учащимися находить цифры частного и определять число их. Следствием этого является пропуск нулей в середине частного и на конце.

Для избежания ошибок деления следует усилить упражнения по округлению чисел, решать устно примеры на деление чисел, оканчивающихся нулями, в которых число значащих цифр не более двух (960 : 60; 9000 : 300; 9900 : 110 и др.), и, не производя деления, определять число цифр частного.

Зависимость между членами арифметических действий (IV класс).

Все арифметические действия основываются на определённой зависимости между тремя числами, из которых два даны, а третье отыскивается.

Для каждых двух чисел, связанных функциональной зависимостью с третьим числом, можно составить три взаимно обратные задачи, в которых искомое одной задачи будет являться данным в двух других задачах, а два данных числа — числами попеременно искомыми. Вследствие этой взаимно обратной зависимости между данными и искомыми числами различаются и взаимно обратные действия, причём одно из них рассматривается как прямое действие, а два других — как обратные. Поясним сказанное на задаче.

П е р в а я з а д а ч а. Учащиеся посадили на пришкольном участке 8 яблонь и 7 груш. Сколько всего плодовых деревьев посадили учащиеся?

Зависимость между числовыми данными выражается формулой: $8+7=15$, где 15 — целое (сумма плодовых деревьев), а 8 и 7 — части этого целого. Зная целое и одну из его частей, можно найти другую часть целого, поставив такие вопросы: на сколько единиц надо увеличить 8, чтобы получить 15, или на сколько единиц надо уменьшить 15, чтобы найти другую часть суммы? Таким образом, различные по цели арифметические действия объединяются в одном действии вычитания, обратном действию сложения.

Вторая задача. Ученики посадили 8 яблонь. Сколько нужно посадить ещё деревьев, чтобы на пришкольном участке было посажено всего 15 плодовых деревьев?

Третья задача. Ученики должны были посадить 15 плодовых деревьев, а посадили на 7 деревьев меньше. Сколько деревьев посадили ученики?

Из двух последних задач видно, что они между собой и по отношению к первой задаче (прямой) находятся во взаимно обратной зависимости:

$$8+7=15. \quad \begin{matrix} 8+x=15; & 7+x=15 & \text{(сложение)} \\ 15-8=7; & 15-7=8 & \text{(вычитание)} \end{matrix}$$

Изучение зависимости между членами арифметических действий содействует всестороннему выяснению употребления арифметических действий, решению примеров с x и решению простейших задач при помощи x. На этой зависимости между членами арифметических действий основывается также проверка арифметических действий. Установление зависимости между взаимно обратными действиями начинается с I класса ($3+2$; $5-2$; $3+?=5$; $?+2=5$). Там же решаются задачи на увеличение и уменьшение числа на несколько единиц.

Более углублённо зависимость между членами арифметических действий вскрывается во II классе при решении задач:

1) нахождение уменьшаемого,

2) нахождение неизвестных слагаемых по данной сумме и одному из слагаемых,

3) разностное сравнение,

4) деление на части и по содержанию,

5) увеличение и уменьшение числа в несколько раз,

6) кратное сравнение.

В I и II классах прибегают к проверке сложения вычитанием и деления умножением. Во II классе уделяется много внимания решению примеров с x ($8+x=15$; $x+8=15$ и др.). В III классе решаются задачи на нахождение вычитаемого, а также примеры с x и сообщаются на основе наблюдения над прямыми и обратными действиями правила проверки арифметических действий.

В IV классе наблюдения учащихся над зависимостью между членами арифметических действий уточняются как со стороны содержания, так и по формулировкам.

Зависимость между членами арифметических действий (сложения, вычитания, умножения и деления) изучается по следующему плану.

I. Наблюдение зависимости между членами арифметического действия на задачах (прямой и обратной).

II. Формулировка вывода.

III. Приложение сделанного вывода к решению задач, примеров и к проверке арифметических действий.

Пример. Зависимость между сомножителями и произведением.

Прямая задача. Ученик купил 3 карандаша по 15 коп. Сколько стоили все карандаши?

Запись решения: 15 коп. $\times$ 3 = 45 коп.

Анализ действия:	множимое	множитель	произведение
	15 коп.	$\times 3$	$= 45$ коп.

Первая обратная задача. Ученик уплатил за 3 карандаша 45 коп. Сколько стоил каждый карандаш?

Запись решения: 45 коп. : 3 = 15 коп.

Анализ действия:	произведение	множитель	множимое
	45 коп.	$: 3$	$= 15$ коп.

Как находится неизвестное множимое по данному произведению и одному из сомножителей?

Вторая обратная задача. Ученик купил на 45 коп. несколько карандашей по 15 коп. за 1 карандаш. Сколько карандашей купил ученик?

Запись решения: 45 коп. : 15 коп. = 3 (каран.).

Анализ действия:	произведение	множимое	множитель
	45 коп.	: 15 коп.	$= 3$.

Как находится неизвестный множитель? По данному произведению и множимому.

Обобщение и вывод. Как находится неизвестный сомножитель? (Вывод зачитывается по учебнику арифметики.)

После этого решаются примеры и задачи с x.

$$x \times 8 = 24; \ 9 \times x = 27.$$

Задача 1. На 18 руб. купили несколько книг и уплатили по 2 руб. за каждую. Сколько купили книг?

$$18 : x = 2.$$

Задача 2. На 18 руб. купили 9 одинаковых книг. Сколько рублей платили за каждую книгу?

$$18 : x = 9.$$

ИМЕНОВАННЫЕ ЧИСЛА.

Именованные числа, выраженные в метрической системе мер.

Методика изучения именованных чисел ставит своей целью научить учащихся измерять величины и производить действия над их значениями (числами).

В начальной школе изучаются простые и составные именованные числа, последние с двумя наименованиями (2 *м* 2 *дм*; 2 *кг* 325 *г* и др.). Измерение величины и производство действий над их числовыми характеристиками имеет образовательное и практическое значение и отвечает задачам политехнического обучения.

Метрическая система мер и меры времени изучаются в начальной школе параллельно. Чем раньше учащиеся путём измерения, взвешивания и т. п. ознакомятся с метрическими мерами, тем легче устанавливается соотношение между десятичной нумерацией целых чисел и единичными отношениями метрических мер (10, 100, 1000 и т. д.).

Метрическая система мер и меры времени в начальной школе изучаются в последовательности, показанной в таблице.

I класс	II класс	III класс	IV класс
Метр Килограмм Литр Сантиметр Неделя, число дней в неделе	Километр Килограмм и грамм Год, месяц, сутки, час, минута	Таблицы мер длины и мер веса Таблица мер времени Раздробление и превращение	Квадратные и кубические меры Таблица мер времени
Все действия над простыми именованными числами			Все действия над составными именованными числами

Наглядные пособия для изучения именованных чисел.

Хороший подбор наглядных пособий и практика в измерениях имеет важное значение для выработки отчётливых и ясных представлений об отдельных единицах измерения.

Меры длины. 1. Метр (деревянный, металлический, складной).

2. Рулетка.

Квадратные и кубические меры. 1. Квадратный метр с делением на квадратные дециметры. 2. Квадратный дециметр с делением на квадратные сантиметры. 3. Миллиметровая бумага. 4. Кубический дециметр с делением на кубические сантиметры. 5. Кубический метр (разборный из 3 или 12 планок, скрепляемых в вершинах).

Меры веса. 1. Торговые или аптекарские весы с набором гирь и разновесов (1 *кг*, $\frac{1}{2}$ *кг*, 200 *г*, 100 *г*, 50 *г*, 20 *г*, 10 *г*, 5 *г*, 2 *г* и 1 *г*).

Меры жидких тел. 1. Кубический дециметр, сделанный из жести с одной стеклянной стенкой. 2. Кружки металлические в 1 *л*, $\frac{1}{2}$ *л*, $\frac{1}{4}$ *л* и $\frac{1}{8}$ *л*. 3. Литровая, полулитровая бутылки, 4—5 стаканов.

Меры времени. 1. Часы. 2. Циферблат с подвижными стрелками. 3. Табель-календарь или месячный календарь. 4. Отрывной календарь.

Настенные таблицы. 1. Метрическая система мер, включая квадратные и кубические меры. 2. Меры времени.

Знакомство с метрическими мерами.

Изучая метрические меры, учащиеся должны усвоить не только названия мер и знать их единичные отношения, но иметь конкретное представление о каждой мере. В тех же случаях, когда та или иная мера недоступна непосредственному восприятию (например, километр, тонна и др.), прибегают к сравнению известной величины с неизвестной.

Так, для понятия о тонне можно воспользоваться представлением учащихся о нагрузке телеги или автомобиля (однотонки) и т. п. Понятие о километре в городской школе можно составить себе по количеству времени, затрачиваемому на передвижение пешком на расстояние 1 *км* (20 минут для учащегося II класса, 12—15 минут для взрослого человека и подростка).

Единицы измерения изучаются с I по IV класс примерно по такому плану.

1. Выявление в беседе имеющегося у детей представления о данной мере (метре, килограмме, литре и др.), её назначении и величине.

2. Показ стандартных образцов единиц измерения и ознакомление с их названиями и с сокращённой записью их.

3. Практика в измерении, взвешивании и т. п. стандартными образцами мер под руководством учителя.

4. Изготовление в одних случаях образцов (линейных, квадратных и кубических) единиц измерения, в других случаях — мешочков с песком для взвешивания, в третьих — набора бутылок и другой посуды для понятия о литре и т. д.

5. Решение задач, вычисление на счётах, черчение линий и планов по данным размерам, взвешивание, определение вместимости (измерением и на глаз) и др.

Понятие о простом и составном именованном числе.

Понятие о простом и составном именованном числе даётся в IV классе. Чтобы составить в IV классе понятие о простом и составном именованном числе, нужно произвести несколько измерений или взвешиваний и результаты их записать на доске и в тетради. Рассматривая именованные числа, полученные в результате измерения длины и ширины класса, классной доски, двери, стола и др., а также данные, полученные от взвешивания хлеба, картофеля и др., учитель пишет одни данные в колонку простых именованных чисел, а другие — составных. В тетради и на доске получается такая запись.

Именованные числа.

Простые именованные числа	Составные именованные числа
8 *м*, 6 *м*, 1 *м*, 2 *кг*	2 *м* 4 *дм*, 1 *м* 8 *см*, 10 *кг* 500 *г*

Производя измерения, учащиеся убеждаются, что простые именованные числа получаются при измерении величин одной мерой, а составные именованные числа получаются при измерении величин двумя мерами: метром и дециметром, килограммом ч граммом. Определение простых и составных именованных чисел усваивается по учебнику арифметики.

Раздробление и превращение.

После ознакомления с однородными мерами учащихся обучают раздроблению и превращению именованных чисел, сначала не прибегая к соответствующим терминам (I, II, III классы), а позже с употреблением и усвоением определения соответствующих терминов (IV класс) по учебнику арифметики.

Простейшие случаи раздробления и превращения проходятся после нумерации в пределе 100, 1000 и многозначных чисел (I—III классы), повторяются и закрепляются при изучении действий с составными именованными числами (в IV классе). Упражнения на раздробление даются в такой последовательности.

Единичное отношение 10. Раздробить: 4 *м* в дециметры; 5 *см* в миллиметры; 4 *дм* 5 *см* в сантиметры.

Единичное отношение 100. Раздробить: 4 *а* в квадратные метры; 4 *а* 25 *кв. м* в квадратные метры; 4 *ц* 5 *кг* в килограммы.

Решение примеров записывается без сопровождающих их вычислений, которые производятся устно. Например, раздробляя 4 *км* 5 *м* в метры, учащийся рассуждает так: в 1 *км* = 1000 *м*, в 4 *км* в 4 раза больше, или 4000 *м*, да ещё 5 *м*, всего 4005 *м*. При превращении соблюдается та же последовательность в отношении единичных отношений мер. Например: превратить 400 *дм* в метры; 402 *дм* в метры; 700 *см* в метры; 705 *см* в метры; 4000 *г* в килограммы; 4070 *кг* в тонны и т. п.

Решение примеров сопровождается такими рассуждениями: 1 *кг* = 1000 *г*; 4005 *г* содержат столько килограммов, сколько тысяч в этом числе, или 4 *кг*, и ещё 5 *г*. Запишем: 4005 *г* = 4 *кг* 5 *г*

Сложение именованных чисел изучается в следующей методической последовательности.

1. Устное сложение простых именованных чисел:	340 *м* + 455 *м*; 340 *м* + 660 *м*; 740 *г* + 570 *г*.
2. Сложение простых именованных чисел, когда в сумме получается составное именованное число:	3 *км* + 650 *м*; 2 *км* + 340 *м* + + 3 *км*.
3. Сложение составных именованных чисел с простыми (и обратно) без превращения:	3 *кг* 250 *г* + 650 *г*; 3 *кг* + 2 *кг* 350 *г*.
4. То же с превращением:	3 *кг* 250 *г* + 650 *г*.
5. Сложение составных именованных чисел с превращением:	7 *км* 377 *м* + 9 *км* 843 *м*.
6. Сложение трёх и более составных именованных чисел:	7 *кг* 875 *г* + 8 *кг* 943 *г* + 19 *кг* 822 *г*.

При сложении составных именованных чисел числа записываются в строчку, если слагаемые допускают сложение устно:

3 *м* 7 *дм* + 5 *м* 8 *дм* = 9 *м* 5 *дм*;
3 *кг* 480 *г* + 5 *кг* 370 *г* = 8 *кг* 850 *г*;
27 *км* 500 *м* + 38 *км* 300 *м* = 65 *км* 800 *м*.

Сложение с записью столбиком производится над такими именованными числами, в которых число значащих цифр в каждом слагаемом три и более трёх. Например:

$$1)\ \begin{array}{r} +\begin{array}{r} 21\ \textit{кг}\ 235\ \textit{г} \\ 9\ \textit{кг}\ 975\ \textit{г} \end{array} \\ \hline 31\ \textit{кг}\ 210\ \textit{г} \end{array} \qquad 2)\ \begin{array}{r} +\begin{array}{r} 7\ \textit{кг}\ \ \ \ 7\ \textit{г} \\ 2\ \textit{кг}\ 343\ \textit{г} \end{array} \\ \hline 9\ \textit{кг}\ 350\ \textit{г} \end{array}$$

$$\text{или } 3)\ \begin{array}{r} +\begin{array}{r} 7\ \textit{кг}\ 007\ \textit{г} \\ 2\ \textit{кг}\ 343\ \textit{г} \end{array} \\ \hline 9\ \textit{кг}\ 350\ \textit{г} \end{array}$$

Необходимо показать учащимся, что на сумму составных именованных чисел распространяется переместительное свойство сум-

При объяснении умножения составных именованных чисел нужно показать, что применение переместительного свойства произведения к проверке умножения возможно лишь в отвлечённых числах, получаемых в результате раздробления.

Деление составных именованных чисел.

При делении составных именованных чисел различают два случая: деление составного именованного числа на отвлечённое и деление составного именованного числа на составное именованное.

а) Деление составного именованного числа на отвлечённое выполняется устно и письменно. Устно решаются такие примеры, которые подготавливают учащихся к письменному делению. Сначала решаются примеры на деление простого именованного числа на отвлечённое, когда частное число — простое именованное. Например: 800 *г* : 5; 840 *г* : 14; 900 *м* : 25 и т. п. После этого переходят к делению простых именованных чисел на отвлечённое, когда в частном получается простое именованное число другого наименования.

Например: 2 *ц* : 4; 2 *м* : 8; 1 *км* : 8; 2 *км* : 4; 2 *кг* : 5 и т. п.

Устные вычисления производят также над составными именованными числами.

Например: 4 *кг* 800 *г* : 4; 1 *кг* 800 *г* : 6; 8 *кг* 400 *г* : 4; 9 *км* 600 *м* : 6 и т. п.

Письменное деление, как и умножение, производится или по правилам деления составного именованного числа на отвлечённое число, или способом замены деления составных именованных чисел делением простых именованных чисел на отвлечённое число.

Примеры.

1) 259 *м* 60 *см* | 8
32 *м* 45 *см*

$$\begin{array}{l} \underline{259\ \text{м}\ 60\ \text{см}}\ \big|\ 8 \\ \underline{19} \qquad\qquad 32\ \text{м}\ 45\ \text{см} \\ 3\ \text{м} = 300\ \text{см} \\ \underline{\qquad + \ 60\ \text{см}} \\ \qquad \underline{360\ \text{см}} \\ \qquad \underline{40} \\ \qquad 0 \end{array}$$

2) 232 *кг* 875 *г* : 23 = 10 *кг* 125 *г*

$$\begin{array}{l} \underline{232875\ \text{г}}\ \big|\ 23 \\ \underline{28} \qquad\quad 10125\ \text{г} \\ \underline{57} \\ \underline{115} \\ 0 \end{array}$$

Примеры для изучения деления составного именованного числа на отвлечённое число следует подбирать в такой последовательности.

1) Делимое — простое именованное число, частное — составное именованное число. Например: 25 *км* : 20.

2) Делимое — составное именованное число, частное — составное именованное число. Например: 50 *т* 4 *ц* : 6; 122 *кг* 500 *г* : 4.

Обобщая деление составного именованного числа на отвлечённое, нужно сравнить способ п о л н о г о и ч а с т и ч н о г о раздробления чисел при делении, подчеркнув целесообразность применения последнего, если делитель — однозначное или небольшое двузначное число.

б) Д е л е н и е с о с т а в н о г о и м е н о в а н н о г о ч и с л а н а с о с т а в н о е и м е н о в а н н о е ч и с л о. Смысл деления составного именованного числа на именованное число выясняется на задачах.

З а д а ч а. Сколько можно сшить фуражек из 2 *м* сукна, если на каждую фуражку идёт по 50 *см*?

Чтобы узнать, сколько фуражек можно сшить из 2 *м*, нужно знать, сколько раз по 50 *см* содержится в 2 *м*, или 200 *см*. Делим 200 *см* на 50 *см*, получаем 4.

Частное — число отвлечённое. Делимое и делитель для решения задачи пришлось выразить в единицах одного и того же наименования.

При делении составного именованного числа на составное именованное возможны два вида записи этого действия.

Приведём примеры той и другой записи.

П р и м е р ы. 1-я ф о р м а:

$$\underline{17\ \text{м}\ 50\ \text{см} : 3\ \text{м}\ 50\ \text{см} = 5} \qquad \begin{array}{l} 17\ \text{м}\ 50\ \text{см} = 1750\ \text{см} \\ 3\ \text{м}\ 50\ \text{см} = 350\ \text{см} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} -\,1750\ \text{см} & 350\ \text{см} \\ \cline{2-2} \underline{1750\ \text{см}} & 5 \\ 0 & \end{array}$$

2-я ф о р м а:

$$\underline{17\ \text{м}\ 50\ \text{см} : 3\ \text{м}\ 50\ \text{см} = 5}$$

$$\begin{array}{r|l} -\,1750\ \text{см} & 350\ \text{см} \\ \cline{2-2} \underline{1750\ \text{см}} & 5 \\ 0 & \end{array}$$

Из сравнения приведённых записей видно, что, если раздробление производить в уме, вторая запись более экономна. На первых уроках принято деление дополнять вспомогательными записями раздробления компонентов деления, а позже от этого следует отказаться, производя преобразования в уме.

Меры времени.

Развитием и уточнением представлений учащихся о времени нужно заниматься с первых дней пребывания детей в школе. Развивая представления учащихся о времени, нужно опираться на личный опыт детей.

Дети практически знакомятся с такими понятиями, как вчера, сегодня, завтра; с днями недели, с часами,

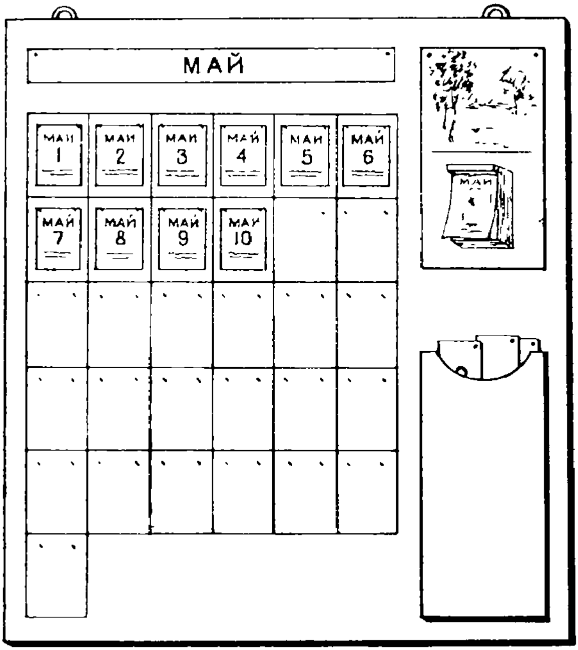


Рис. 42.

с сутками. Этому содействует наблюдение за температурой, ведение календарей погоды и работа с ними.

Сколько было солнечных дней? Пасмурных дней было на ... больше или на ... меньше. Сколько было пасмурных дней? Сколько дней мы уже работали в этом месяце? Сколько дней ещё осталось работать? Счёт ведётся по карточкам (рис. 42).

Учащиеся I и II классов на каждом уроке встречаются с календарными датами и знакомятся с календарём (рис. 43. времена года, месяц и число) раньше, чем приступают к изучению этого материала по программе. Развитие представлений учащихся о времени углубляется также в процессе той воспитательной работы, которая проводится с детьми в семье, школе и пионерском отряде на тему о режиме дня школьника.

Чрезвычайно важно показать детям значение таких отрезков времени, как минуты и секунды, на фактах школьной жизни. Спортсмены борются не только за минуты и секунды, но и за доли секунд. Полезно показать также в минутах количественный выпуск продукции картонажных, мучных и мясных изделий, конфет и т. п. Знакомство с мерами времени ведётся по плану, который дан на странице 167. Изучая таблицу мер времени в III классе и повторяя её в IV классе, можно сообщить учащимся краткие сведения по истории мер времени, познакомить их с солнечными, песочными и современными часами [1], а также с секундомером.

Учащиеся часто считают меры времени метрической системой

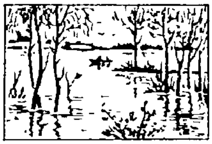
ВРЕМЕНА ГОДА							
ОСЕНЬ		ЗИМА		ВЕСНА		ЛЕТО	
							
Сентябрь	30 дней	Декабрь	31 день	Март	31 день	Июнь	30 дней
Октябрь	31 день	Январь	31 день	Апрель	30 дней	Июль	31 день
Ноябрь	30 дней	Февраль	28 дней	Май	31 день	Август	31 день

Рис. 43.

мер, а потому нужно сравнить единичные отношения тех и других мер. Знакомство с мерами времени в I—IV классах проводится на дидактическом материале и наглядных пособиях. Можно рекомендовать учащимся составление альбома загадок и стихотворений, посвящённых мерам времени, временам года, календарю и часам.

Во II классе нужно научить учащихся определять время по часам с точностью до получаса и четверти часа наглядно, путём деления круга на 2 и 4 части. Учащиеся должны различать стрелки (минутную и часовую) и знать их положение на часах, когда часы показывают 8, 9 и т. д. часов и когда они показывают половину 8-го и 9-го часа или четверть, а также 5 мин., 10 мин. и т. д.

В III классе нужно познакомить учащихся с обозначением времени, со словами пополудни и пополуночи, а также с

[1] «Юный часовщик» — игрушка, содержащая в разобранном виде часы-ходики

арифметическим обозначением времени (13 час., 14 час., 15 час. и т. д. до 24 час.).

Для III класса целесообразно сделать с учащимися циферблат с двойным обозначением времени (рис. 44) и календари: отрывной, ежедневный и табель-календарь.

Во II классе учащиеся решают по календарю задачи следующих видов.

1. Найти, сколько дней в любых 3 месяцах?
2. Сколько рабочих дней в каждой четверти учебного года?
3. Какова продолжительность летних каникул?
4. Какой сегодня день и число?

При пользовании часами (картонными) учащиеся II класса должны откладывать время на часах с указанием минут (9 час. 15 мин.; 10 час. 35 мин.) и уметь читать время по часам с указанием минут.

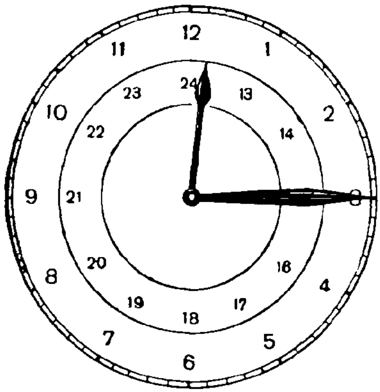


Рис 44

Во II классе для лучшего усвоения мер учащиеся занимаются раздроблением и превращением мер времени без употребления слов «раздробление» и «превращение». Например: сколько месяцев в 2, 3 и 4 годах? сколько недель в 35 днях? и т. п. Так же усваиваются меры времени и в III классе. В IV классе учащиеся знакомятся с двойным обозначением времени и занимаются преобразованием одного показания времени в другое.

Воспитательная и образовательная работа, связанная с изучением мер времени, не должна носить случайный характер. Учителя должны приобретаемую учащимися I—III классов ориентировку во времени делать предметом устного счёта и решения задач на протяжении всех лет обучения, так как ориентировка во времени имеет жизненно важное значение и является одним из существенных элементов политехнического обучения.

Действия с именованными числами, выраженными в мерах времени.

Действия с именованными числами, выраженными в мерах времени, изучаются в IV классе во втором полугодии (третья четверть). Изучению действий предшествует повторение мер времени, раздробление и превращение.

Сложение и вычитание выполняются по аналогии с именованными числами, выраженными в метрических мерах, а для умножения и отчасти деления существуют особые приёмы. Наибольшее различие имеется в преобразовании именованных чисел, так как единичные отношения мер времени более разнообразны и действия с ними не всегда доступны для устных вычислений.

При выполнении преобразований и действий с именованными числами в мерах времени учащихся часто затрудняет запись действий. Ниже приводятся образцы записей.

Раздробление. Раздробление изучается в следующей методической последовательности.

1) Раздробление простых именованных чисел.

Устно: 4 года = 48 мес.; 6 нед. = 42 дня.

Письменно:

16 сут. = 384 часа

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r} 24 \text{ часа} \\ 16 \end{array} \\ \hline +\begin{array}{r} 144 \\ 24 \end{array} \\ \hline 384 \text{ часа} \end{array}$$

183 часа = 10 980 мин.

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r} 60 \text{ мин.} \\ 183 \end{array} \\ \hline 10980 \text{ мин.} \end{array}$$

2) Раздробление составных именованных чисел.

Устно: 3 года 2 мес. = 38 мес.; 4 часа 20 мин. = 260 мин.

Письменно: 27 сут. 12 час. = 660 час.

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r} 24 \text{ часа} \\ 27 \end{array} \\ \hline +\begin{array}{r} 168 \\ 48 \end{array} \\ \hline 648 \text{ час.} \end{array}$$

648 час. + 12 час. = 660 час.

Превращение. Более лёгкие примеры решаются устно. Например: 72 часа = 3 сут.; 720 мин. = 6 час.; 88 дней = 12 нед. 4 дня.

Письменно превращение производится тогда, когда именованные числа содержат 3 и больше значащих цифр. Например:

1) 384 часа = 16 сут.

$$\begin{array}{l|l} 384 \text{ часа} & 24 \text{ часа} \\ \cline{2-2} 144 & 16 \text{ (сут.)} \\ \hline 0 & \end{array}$$

2) 975 сек. = 16 мин. 15 сек.

$$\begin{array}{l|l} 975 \text{ сек.} & 60 \text{ сек.} \\ \cline{2-2} 375 & 16 \text{ (мин.)} \\ \hline 15 \text{ сек.} & \end{array}$$

Сложение и вычитание именованных чисел, выраженных в мерах времени.

Сложение.

1) К простому именованному числу прибавляется простое именованное число другого наименования:

3 часа + 45 мин. =
= 3 часа 45 мин.

2) Сложение составных именованных чисел без превращения:

$$
\begin{array}{r}
+\begin{array}{rr} 8 \text{ сут.} & 12 \text{ час.} \\ 12 \text{ сут.} & 8 \text{ час.} \end{array} \\
\hline
20 \text{ сут.} \ \ 20 \text{ час.}
\end{array}
$$

3) Сложение составных именованных чисел с превращением:

$$
\begin{array}{r}
+\begin{array}{rr} 16 \text{ час.} & 48 \text{ мин.} \\ 4 \text{ часа} & 54 \text{ мин.} \end{array} \\
\hline
20 \text{ час.} \ \ 102 \text{ мин.} \\
\hline
21 \text{ час} \ \ 42 \text{ мин.}
\end{array}
$$

Вычитание.

Из составного именованного числа вычитается простое именованное число, и в остатке получается простое именованное число:

3 часа 45 мин. — 45 мин. =
= 3 часа.

Вычитание составных именованных чисел без раздробления:

$$
\begin{array}{r}
-\begin{array}{rr} 20 \text{ сут.} & 20 \text{ час.} \\ 12 \text{ сут.} & 8 \text{ час.} \end{array} \\
\hline
8 \text{ сут.} \ \ 12 \text{ час.}
\end{array}
$$

Вычитание составных именованных чисел с раздроблением:

$$
\begin{array}{r}
-\begin{array}{rr} 21 \text{ час} & 42 \text{ мин.} \\ 4 \text{ часа} & 54 \text{ мин.} \end{array} \\
\hline
16 \text{ час.} \ \ 48 \text{ мин.}
\end{array}
$$

Умножение составных именованных чисел, выраженных в мерах времени.

Умножение изучается в следующей последовательности.

1) Умножение простых именованных чисел устно и письменно:

а) 48 мин. $\times$ 5 = 240 мин. = 4 часа (устно).
б) 48 мин. $\times$ 72 = 57 час. 36 мин. (письменно).

Умножение:

$$
\begin{array}{rl}
\times\begin{array}{r} 48 \\ 72 \end{array} & \text{мин.} \\
\hline
96 & \\
+\,336 & \\
\hline
3456 & \text{мин.} \\
\hline
57 \text{ час. } 36 & \text{мин.}
\end{array}
$$

Превращение:

$$
\begin{array}{r|l}
3456 \text{ мин.} & 60 \text{ мин.} \\
\cline{2-2}
\underline{456} & 57 \text{ (час.)} \\
36 \text{ мин.} &
\end{array}
$$

2) Умножение составных именованных чисел устно и письменно:

а) 2 года 4 мес. $\times$ 3 = 6 лет 12 мес. = 7 лет (устно).
б) 12 час. 19 мин. $\times$ 23 = 283 часа 17 мин.

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r} 19 \text{ мин.} \\ 23 \end{array} \\ \hline +\begin{array}{r} 57 \\ 38 \end{array} \\ \hline 437 \text{ мин.} \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 437 \text{ мин.} & 60 \text{ мин.} \\ \hline 17 \text{ мин.} & 7 \text{ (час.)} \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\begin{array}{r} 12 \text{ час.} \\ 23 \end{array} \\ \hline +\begin{array}{r} 36 \\ 24 \end{array} \\ \hline 276 \text{ час.} \end{array} \qquad \begin{array}{r} +\begin{array}{r} 276 \text{ час.} \\ 7 \text{ час.} \end{array} \\ \hline 283 \text{ часа} \end{array}$$

Учитель обращает внимание учащихся на то, что умножение начинается с мер низшего наименования.

Нужно также показать учащимся, что раздробление множимого с последующим превращением не ускоряет умножения, а замедляет его и усложняет, так как приходится иметь дело с большими числами.

Деление составных именованных чисел, выраженных в мерах времени.

При обучении делению составных именованных чисел в мерах времени изучают раздельно деление именованного числа на отвлечённое и деление именованного числа на именованное. В первом случае упражнения даются в следующей последовательности.

1) Деление простых именованных чисел устно и письменно.

Например: а) 18 час. : 3 = 6 час.; 48 мин. : 6 = 8 мин.

б) 22 часа : 4 = 5 час. 30 мин.

$$\begin{array}{l|l} 22 \text{ часа} & 4 \\ \cline{2-2} \underline{2 \text{ часа}} & 5 \text{ час. } 30 \text{ мин.} \\ \underline{120 \text{ мин.}} & \\ 0 & \end{array}$$

2) Деление составного именованного числа на отвлечённое устно и письменно.

Примеры. а) 4 часа 30 мин. : 9 = 30 мин. (устно).

б) 23 часа 45 мин. : 15 = 1 час 35 мин.

$$\begin{array}{r|l} 23 \text{ часа } 45 \text{ мин.} & 15 \\ \cline{2-2} 8 \text{ час.} = \underline{480 \text{ мин.}} & 1 \text{ час } 35 \text{ мин.} \\ \underline{525 \text{ мин.}} & \\ \underline{75\phantom{ \text{ мин.}}} & \\ 0\phantom{5 \text{ мин.}} & \end{array}$$

При делении составных именованных чисел в мерах времени на составные именованные придерживаются следующей методической последовательности.

1) Деление простых именованных чисел одного и того же наименования устно и письменно. Например:

а) 56 мин. : 14 мин. = 4 (устно).
б) 288 дней : 12 дней = 24 (письменно).

2) Деление простых именованных чисел разных наименований устно и письменно. Например:

а) 2 часа : 15 мин. = 8 (устно).
б) 14 час. : 35 мин. = 24 (письменно).

14 час. = 840 мин.

$$\begin{array}{r|l} 840 \text{ мин.} & 35 \text{ мин.} \\ \underline{140} & 24 \\ 0 & \end{array}$$

3) Деление составного именованного числа на простое устно и письменно.

а) 3 часа 20 мин. : 20 мин. = 10 (устно).
б) 15 сут. 12 час. : 12 час. = 31 (письменно).
15 сут. 12 час. = 372 часа

$$\begin{array}{r|l} 372 \text{ часа} & 12 \text{ час.} \\ \underline{12} & 31 \\ 0 & \end{array}$$

4) Деление простого именованного числа на составное именованное устно и письменно.

Например:

а) 3 часа : 1 час 30 мин. = 2 (устно).
б) 24 мин. : 1 мин. 20 сек. = 18 (письменно).

24 мин. = 1440 сек.
1 мин. 20 сек. = 80 сек.

$$\begin{array}{r|l} 1440 \text{ сек.} & 80 \text{ сек.} \\ \underline{640} & 18 \\ 0 & \end{array}$$

5) Деление составного именованного числа на составное именованное устно и письменно.

Примеры:

а) 2 года 4 мес. : 1 год 2 мес. = 2 (устно).
б) 15 сут. 12 час. : 1 сут. 7 час. = 12 (письменно).

15 сут. 12 час. = 372 часа
1 сут. 7 час. = 31 час

$$\begin{array}{r|l} 372 \text{ часа} & 31 \text{ час} \\ \underline{62} & 12 \\ 0 & \end{array}$$

Задачи на вычисление времени.

В программе начальной школы точно указано, с какими мерами времени должны быть знакомы учащиеся, но нет сведений о том, какие задачи на время решаются в I—III классах начальной школы, так как тема «Лёгкие задачи на вычисление в пределе суток, месяца, года и столетия (последние в целых годах)» отнесена на третью четверть IV класса. Исходя из требований программы, рассмотрим основные виды задач на вычисление времени.

В задачах на вычисление времени учащиеся знакомятся со временем, как величиной, которая характеризуется тремя численными данными: продолжительностью того или иного явления, его началом и концом.

Возьмём для примера задачи.

1. Занятия в школе начинаются в 9 час. утра и оканчиваются в 2 часа 40 минут. Сколько времени продолжаются занятия?

В этой задаче дано время начала занятий и конца; нужно определить их продолжительность.

2. Занятия в школе начинаются в 9 час. утра и длятся 5 час. 40 мин. Когда занятия оканчиваются?

Здесь по продолжительности занятий и началу их отыскивается конец занятий.

3. Занятия в школе продолжаются 5 час. 40 мин. и оканчиваются в 2 часа 40 мин. Когда занятия начинаются?

В последней задаче по продолжительности занятий и концу их отыскивается время начала занятий.

Таким образом, задачи на вычисление времени по количеству численных данных, входящих в задачу, могут быть трёх видов.

Две из них решаются вычитанием и одна сложением.

В зависимости от того, какими данными определяются события или явления, о которых говорится в задаче, задачи на время делятся на такие группы: 1) задачи в пределе суток, 2) задачи в пределе месяца, 3) задачи в пределе года и 4) задачи в пределе столетий.

Рассмотрим каждую из этих групп задач в отдельности.

Задачи на вычисление времени в пределе суток.

Способ решения задач в пределе суток зависит от того, как выражено время. Приведённая выше задача 1 может быть решена так. С 9 час. утра до 12 час. дня занятия продолжаются 3 часа (вычисление устно) и от 12 час. дня до 2 час. 40 мин. ещё 2 часа 40 мин., а всего: 3 часа + 2 часа 40 мин. = 5 час. 40 мин.

В IV классе, где учащиеся знакомы с двойным обозначением времени в пределе суток, решение задачи упрощается. Так как 2 часа 40 мин. дня равны 14 час. 40 мин., то учащийся сразу записывает:

14 час. 40 мин. — 9 час. = 5 час. 40 мин.

В задачниках встречаются иногда задачи с переходом через сутки. Например:

Задача. Поезд вышел 16 декабря в 7 час. утра и прибыл к месту назначения через 30 час. Когда поезд прибыл к месту назначения?

От 7 час. утра до конца суток: 24 часа — 7 час. = 17 час.

На следующие сутки остаётся: 30 час. — 17 час. = 13 час., т. е. поезд прибыл к месту назначения 17 декабря в 13 час., или в 1 час дня.

Задачи на вычисление времени в пределе месяца.

Задача 1. Сев начался 6 мая и закончился 15 мая Сколько дней продолжался сев?

Задача решается прямым отсчётом дней с 6-го по 15 мая включительно по календарю или отсчётом времени от начала месяца. От начала месяца до окончания сева прошло 15 сут., а до начала сева 5, следовательно, сев продолжался 15 сут. — 5 сут. = 10 сут.

Задача 2. Пароход вышел из Горького 14 мая в 8 час. вечера, а прибыл в Астрахань через 6 сут. 5 час. Когда пароход прибыл в Астрахань?

От начала месяца до выхода парохода прошло 13 полных суток и 20 час. Следовательно, пароход прибыл в г. Астрахань спустя

13 сут. 20 час. + 6 сут. 5 час. = 19 сут. 25 час. = 20 сут. 1 час

Наступил 1 час пополуночи 21 мая.

Задача 3. Поезд, вышедший из Москвы в Иркутск, находился в пути 6 сут. 18 час. и прибыл в Иркутск 2 июня в 10 час. утра. Когда поезд вышел из Москвы?

Продолжительность события распространяется на конец мая и начало июня. Время отсчитывается от начала мая.

От начала мая по 2 июня прошли 31 сут. мая и 1 сут. 10 час. июня, а всего 32 сут. 10 час.

До выхода поезда из Москвы прошло

$$\begin{array}{r} 32 \text{ сут. } 10 \text{ час.} \\ - \quad 6 \text{ сут. } 18 \text{ час.} \\ \hline 25 \text{ сут. } 16 \text{ час.} \end{array}$$

Значит, поезд вышел из Москвы 26 мая в 4 часа дня.

Задача 4. Уборка хлеба закончилась 22 июля в 8 час. вечера и продолжалась 10 дней 4 часа. Когда началась уборка хлеба?

«Что сначала узнаем? Сколько времени прошло от начала месяца до окончания уборки хлеба? Скажи, Н., сколько прошло времени». — «Прошло от начала месяца до окончания уборки хлеба 21 день и 20 час.». Сколько времени продолжалась уборка хлеба?

«Что можно теперь узнать?» — «Теперь нужно узнать, сколько времени прошло от начала месяца до начала уборки хлеба». — «Что нужно для этого сделать?» — «Нужно от 21 дня 20 час отнять 10 дней 4 часа».

Решение:

$$\begin{array}{r} _{-}\begin{array}{r} 21 \text{ день } 20 \text{ час.} \\ 10 \text{ дней } \ 4 \text{ часа} \end{array} \\ \hline 11 \text{ дней } 16 \text{ час.} \end{array}$$

Когда же началась уборка хлеба?

Уборка хлеба началась 12 июля в 6 час. утра.

Задачи на вычисление времени в пределе года.

Задачи на вычисление времени в пределе месяца и года допускают два способа вычислений: отсчёт времени по календарю и замену календарного обозначения времени арифметическим. Во всех случаях, когда мы ставим вопрос, сколько часов прошло от начала суток, сколько дней прошло от начала месяца, сколько полных месяцев и дней прошло от начала года, — мы находим арифметическое количественное число для определения того или иного отрезка времени. Календарное обозначение времени обычно выражается порядковым числом. Отсчёт времени порядковыми числами возможен, но действия над ними невозможны. Так, нельзя к половине пятого часа пополудни прибавить 7 час. пополудни или от 7 октября отнять 11 мая и т. п. Поэтому конечной целью работы учителя с учениками должно быть овладение навыком решения задач на время в арифметическом численном выражении входящих в задачу данных.

Покажем на примерах замену календарного обозначения времени арифметическим и обратно.

1. «XIX съезд КПСС открылся 5 октября в 7 час. вечера. Сколько полных месяцев, дней и часов прошло от начала года?»

Прошло полных 9 мес. 4 дня и 19 час. Учащиеся часто вместо 19 час. называют 18 час., принимая количественное обозначение времени (19 час.) за порядковое.

2. Последнее заседание XIX съезда КПСС состоялось тогда, когда от начала 1952 года прошло 9 мес. 13 дней 19 час. Когда началось последнее заседание XIX съезда КПСС? Прошло 9 мес., наступил 10-й месяц — октябрь. Прошло 13 дней, значит, наступил 14-й день. Следовательно, заседание открылось 14 октября 1952 года в 19 час. (или 7 час. вечера).

Рассмотрим решение задач на основе замены календарного обозначения времени арифметическим.

З а д а ч а. Яровая пшеница посеяна 19 апреля, а скошена 3 августа. Через сколько дней после посева она скошена?

Выразим время последующего и предшествующего события в арифметических числах и решим задачу так:

$$\begin{array}{r} - \begin{array}{r} 7 \text{ мес. } \ 2 \text{ дня} \\ 3 \text{ мес. } 18 \text{ дней} \end{array} \\ \hline 3 \text{ мес. } 15 \text{ дней} \end{array}$$

Так как 7-й месяц, июль, содержит 31 день, то, занимая 1 мес., к 2 дням прибавляем 31 день.

Тот же результат получим при подсчёте дней по календарю

апрель май июнь июль
(11 дней + 31 день + 30 дней + 31 день + 2 дня = 105 дней).

Второй способ сложнее. Если одно из данных выражений в днях, а другое календарное, последнее выражается также в днях.

Задача. Картофель выкопали 29 сентября. Когда его посадили, если для созревания ему понадобилось 156 дней?

От начала года до уборки картофеля прошло 271 день.

янв. фев. март апр. май июнь июль август
(31 + 28 + 31 + 30 + 31 + 30 + 31 + 31 + 28 дней).

271 день — 156 дней = 115 дней.

Пользуясь приведённой выше записью, находим, что посадку картофеля произвели через 115 дней от начала года [115 дней — (31 день + 28 дней + 31 день)] = 25 дней, т. е. 26 апреля.

Задача. Детскую площадку при домоуправлении открыли 20 мая. Она работала 3 мес. 5 дней. Когда её закрыли?

От начала года до открытия площадки прошло 4 мес. 19 дней.

4 мес. 19 дней + 3 мес. 5 дней = 7 мес. 24 дня.

Площадку закрыли 25 августа, так как прошло 7 полных месяцев от начала года и 24 дня восьмого месяца, т. е. августа.

Задачи на вычисление времени в пределах столетий.

Приступая к решению задач на вычисление времени в пределах столетий, нужно познакомить учащихся с понятием «Начало летосчисления» и дальше научить учащихся заменять календарное обозначение времени арифметическим (и обратно) применительно к столетиям.

Задачи на время в пределах столетий в начальной школе даются в настоящее время только с одним наименованием, что упрощает их решение.

Задача. Канал имени Москвы открыт в 1941 году, а канал имени Ленина в 1952 году. Какой промежуток времени разделяет эти события?

От начала летосчисления до открытия канала имени Ленина прошло 1951 год, а канала имени Москвы — 1940 лет. Находим разность (1951 — 1940) и получаем ответ: 11 лет.

Тот же ответ можно было бы получить непосредственным вычитанием (1952 и 1941), но так как в двух других видах задач на вычисление времени приходится прибегать к замене календарного обозначения времени арифметическим, целесообразно распространить это и на данный вид задач.

Задача. М. В. Ломоносов умер в 1765 году, прожив 53 года. Когда он родился?

От начала летосчисления до дня смерти прошло 1764 года. Чтобы ответить на вопрос задачи нужно: 1764 года — 53 года = = 1711 лет. Так как прошло до даты рождения полных 1711 лет, значит, М. В. Ломоносов родился в 1712 году.

Задача. Баснописец И. А. Крылов родился в 1768 году и прожил 70 лет. Когда он умер?

До даты рождения от начала летосчисления прошло 1767 лет. Чтобы узнать, когда И. А. Крылов умер, нужно: 1767 лет + + 76 лет = 1843 года. Значит, от начала летосчисления прошло полных лет 1843 и наступил 1844 год, который и является годом смерти И. А. Крылова.

При изучении действий с числами, выраженными в мерах времени, полезно познакомить учащихся с вычислением времени по железнодорожному и речному путеводителям, как имеющим практическое применение.

ПРОСТЫЕ ДРОБИ.

Общие указания к преподаванию дробей.

Изучение элементарного наглядного курса дробей имеет большое общеобразовательное и практическое значение. Значение дробей расширяет представление учащихся о числе. Учащиеся, изучая дроби, убеждаются, что половинами, четвертями и др. можно считать, как целыми числами, что из двух половин, четырёх четвертей и т. д. получаются целые числа.

Раздробление и превращение долей, а также действия с дробными числами подтверждают распространение законов арифметических действий на дробные числа. Изучение дробей в начальных классах школы позволяет расширить число практических задач и упражнений (нахождение одной или нескольких частей целого числа). Изучение дробей не представляет для учащихся затруднений, если оно проводится наглядно, а задачи берутся из жизни.

Изучение дробей начинается в IV классе. Здесь изучаются только такие доли единицы, которые часто встречаются в практической деятельности человека: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{5}$ и $\frac{1}{10}$. Сведения об этих дробях сообщаются учащимся наглядным путём, а преобразование их и действия над ними (сложение и вычитание) производятся по соображению.

Наглядные пособия.

Приступая к изучению простых дробей, необходимо обеспечить каждого ученика пособиями для лабораторных работ: ученическим циркулем, линейкой, ножницами, цветными карандашами и бумагой для вырезывания кругов и полосок (желательно цветной). Учитель должен иметь классный циркуль, набор цветных мелков и бумаги. Для объяснения дробей рекомендуется изготовить следующие пособия: 1) пять кругов из легко гнущейся папки диаметром в 10—15 *см*, разделённых на 2, 4, 8, 5 и 10 равных частей, с раскраской отдельных долей и надписями $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{5}$ и $\frac{1}{10}$ на одной из долей; 2) три круга диаметрами 20 *см*, 16 *см* и 12 *см*, разрезанные пополам, и три таких же круга, разделённые на четверти. С этими пособиями учащиеся работают у доски (на наборном полотне). На партах у каждого учащегося должно быть не менее пяти кругов диаметром 5—8 *см*, по одному квадрату и прямоугольнику таких же размеров и шесть полосок бумаги шириной 2—4 *см* и длиной 10—20 *см*, из них пять с делением соответственно на 2, 4, 8, 5 и 10 равных частей.

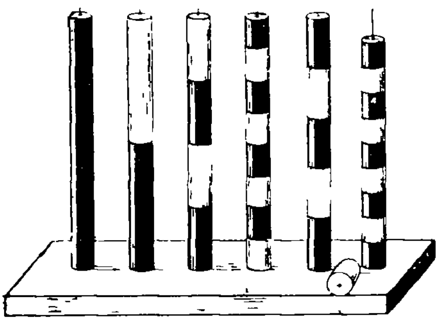


Рис 45

Для получения долей можно использовать такие предметы, как яблоко, морковь, картофель. При изучении дробей употребляются также дробные счёты (рис. 45) и коробка с набором кругов из фанеры, разделённых на части от $\frac{1}{2}$ до $\frac{1}{10}$.

Образование дробей.

Простые дроби изучаются так же, как числа первого десятка. С каждой дробью — с половиной, четвертью и т. д. — дети знакомятся отдельно. Изучение каждой дроби проходит по следующему плану:

а) выявление имеющихся у учащихся представлений о данной дроби (половине, четверти и др.);

б) образование одной или нескольких долей путём деления на равные части яблока, круга, полоски и т. д.;

в) счёт долями единицы: одна половина, две половины и т. д. — для иллюстрации того, что долями единицы можно считать, как числами, что из долей единицы (двух половин, четырёх, восьми и т. д. четвертей) получаются целые числа и что дробь есть то же число;

г) запись дробей;

д) решение задач на сложение и вычитание долей (устно), показывающих, что с дробными числами можно производить сложение и вычитание;

е) сравнение величины одноимённых и разноимённых долей по мере их изучения $\left(\frac{1}{2} \text{ и } \frac{1}{4};\ \frac{1}{4} \text{ и } \frac{1}{8};\ \frac{1}{5} \text{ и } \frac{1}{10}\right)$, при этом нужно усвоить, что $\frac{1}{4}$ вдвое меньше $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{8}$ вдвое меньше $\frac{1}{4}$ и т. д.

Изучение долей полезно закреплять плакатом:

Число, написанное под чертой, показывает, на сколько равных частей разделена единица.	$\frac{7}{8}$	Число, написанное над чертой, показывает, сколько равных частей взято.

После изучения $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$ и $\frac{1}{8}$ вместо слов «число, написанное над чертой и под чертой» пишут знаменатель и числитель.

Преобразование дробей.

В начальных классах школы смешанные числа не изучаются, а потому такие преобразования дробей, как исключение целого числа из неправильной дроби и обращение смешанного числа в неправильную дробь, не имеют места. Не изучается также приведение дробей к одному знаменателю и сокращение дробей. Эти преобразования дробей производятся по соображению. Приведение дробей к одному знаменателю заменяется раздроблением дро-

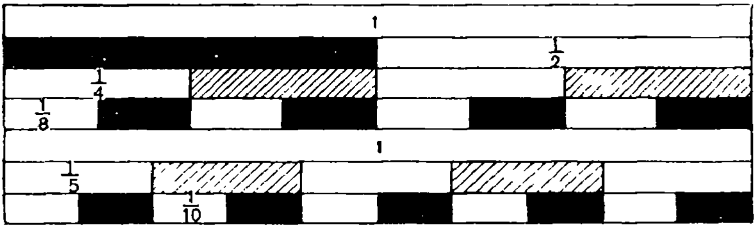


Рис. 46.

бей, а сокращение их — превращением. Раздробление дробей может быть показано на дробных счётах или на имеющихся у учащихся и учителя кружках и полосках. Если в школе нет дробных счётов, их можно заменить счётной таблицей следующего вида (рис. 46). Пользуясь этой таблицей, можно узнавать, сколько содержится в одной половине четвертей, в одной четверти — восьмых, в одной пятой — десятых. Зная, сколько восьмых содержится в одной половине, можно половину заменить восьмыми долями или раздробить её в восьмые доли. Чтобы сравнить по величине такие дроби, как $\frac{3}{4}$ и $\frac{7}{8}$, можно обратиться к чертежу или к полоскам бумаги с делением их на 4 и 8 равных частей, сравнить их и сказать, которая из дробей больше (зрительно); можно поступить и иначе — раздробить $\frac{3}{4}$ в восьмые доли, рассуждая так: в одной четверти две восьмых, а в трёх четвертях восьмых в три раза больше, или $\frac{6}{8}$. Если в результате измерения полоски получилась дробь $\frac{4}{8}$, то для большей наглядности её можно сократить. Находим на таблице $\frac{4}{8}$ и видим, что $\frac{4}{8}=\frac{2}{4}$, или $\frac{1}{2}$. Если нет счётной таблицы и сокращение производится по соображению, учащиеся рассуждают так: в одной четверти $\frac{2}{8}$, в другой четверти $\frac{2}{8}$, или в двух четвертях $\frac{4}{8}$, значит, $\frac{2}{4}=\frac{4}{8}$ Точно так же $\frac{2}{4}$ заменяется $\frac{1}{2}$.

Лабораторно раздробление и превращение долей производится на кружках или полосках путём наложения восьмых долей круга на четверти или на половинки круга при превращении и обратно при раздроблении. Раздробление и превращение пятых и десятых долей лучше показать на метре, если на нём нанесены деления на дециметры. При изучении раздробления и превращения долей учащиеся совместно с учителем составляют таблицу, из которой видно, во сколько раз одна доля больше другой:

1	$\frac{2}{2}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{8}{8}$	$\frac{5}{5}$	$\frac{10}{10}$
$\frac{1}{2}$	—	$\frac{2}{4}$	$\frac{4}{8}$	—	$\frac{5}{10}$
$\frac{1}{4}$	—	$\frac{2}{8}$	—	—	—
$\frac{1}{5}$	—	—	—	—	$\frac{2}{10}$

Сложение и вычитание дробей.

Сложение и вычитание дробей может изучаться одновременно и последовательно.

Сложение дробей с одинаковыми знаменателями производится сначала устно на половинах, четвертях и восьмых круга.

Сколько получится, если к $\frac{1}{4}$ прибавить ещё $\frac{1}{4}$ круга? $\frac{2}{4}$ круга.

После устных вычислений переходят к записи: $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}$; $\frac{1}{4}+\frac{2}{4}=\frac{3}{4}$. Чтобы учащиеся не прибегали к одновременному сложению числителей и знаменателей, можно рекомендовать запись дробей в виде именованных чисел. Так, если нужно к $\frac{1}{4}$ прибавить $\frac{2}{4}$, пишем: 1 четв. + 2 четв. = 3 четв.; обратив внимание учащихся, что знаменатели дробей заменяют наименованием долей, а при сложении наименования не складываются, пишем: $\frac{1}{4}+\frac{2}{4}=\frac{3}{4}$.

Вывод: складываются числители, знаменатель остаётся тот же.

При сложении дробей с одинаковыми знаменателями нужно особо рассмотреть тот случай, когда складываемые дроби в сумме дают единицу. Например: $\frac{3}{8}+\frac{5}{8}$.

Вычитание дробей с одинаковыми знаменателями объясняется так же, как и сложение: $\frac{7}{8}-\frac{5}{8}=\frac{2}{8}$, или 7 восьм. — 2 восьм. = = 5 восьм.

Вывод: из числителя уменьшаемого вычитается числитель вычитаемого, знаменатель остаётся тот же. При вычитании дроби

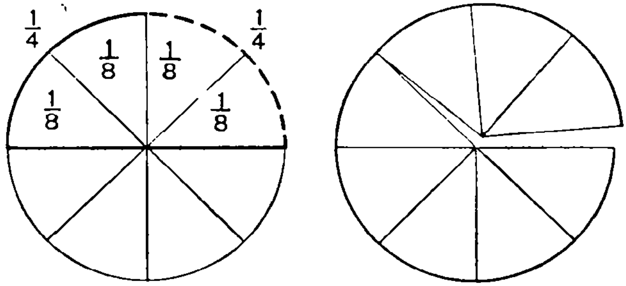


Рис. 47.

из 1, единицу предварительно раздробляют в доли вычитаемого. Так, если от 1 отнять $\frac{7}{10}$, спрашиваем ученика, сколько десятых в одной единице, сколько получится, если от $\frac{10}{10}$ отнять $\frac{7}{10}$.

Параллельно со сложением и вычитанием по соображению учащиеся решают эти же примеры у доски (на демонстрационных кругах) и у себя за партой на кружках или полосках (рис. 46).

Для закрепления сложения и вычитания следует решать задачи практического характера.

При сложении и вычитании дробей с кратными знаменателями учащихся затрудняет выражение дробей в одинаковых долях.

Возьмём задачу: «На лыжный костюм употребили $\frac{1}{2}$ *кг* шерсти, а на шарф и берет $\frac{1}{4}$ *кг*. Сколько всего шерсти употребили на лыжный костюм, шарф и берет?»

Если ученики затрудняются в решении задачи устно, необходимо спросить, сколько четвертей в половине? $\left(\frac{2}{4}\cdot\right)$. После этого пишем: $\frac{1}{2}$ *кг* $+ \frac{1}{4}$ *кг* $= \frac{2}{4}$ *кг* $+ \frac{1}{4}$ *кг* $= \frac{3}{4}$ *кг*; $\frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{1}{8} + \frac{2}{8} = \frac{3}{8}$.

Вывод: слагаемые раздробляем в одинаковые доли и складываем, как дроби с одинаковыми знаменателями.

Учащихся часто смущает обилие знаков равенства, а потому можно записывать решение задач и примеров так.

$\frac{1}{2}$ *кг* $+ \frac{1}{4}$ *кг* $= \frac{3}{4}$ *кг* (запись решения задачи).

$\frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ (вспомогательная вычислительная запись).

При обобщении понятия о дроби в IV классе нужно обратить внимание учащихся на то, что дроби могут быть числами отвлечёнными и именованными $\left(\frac{3}{4}\right.$ и $\frac{3}{4}$ *кг*$\left.\right)$ и что на дроби распространяются сочетательный и переместительный законы. Последнее свойство суммы можно использовать для упрощения сложения. Например:

$$\frac{3}{8} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{8}\right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1\,;$$

Преобразование долей, сравнивание их величины, действия над ними и решение задач с дробными числами дают богатый материал для устных упражнений.

Нахождение одной или нескольких частей числа.

Как найти половину числа, учащиеся знают из I класса. Нахождению четверти числа, одной трети его и т. д. до $\frac{1}{10}$ включительно учащиеся обучаются параллельно изучению таблицы деления. В I и II классах нахождение одной доли числа записывается в целых числах. В IV классе задание найти одну часть числа записывается дробью, результат же вычисления по-прежнему находится действиями с целыми числами. Например, если дано: найти $\frac{1}{5}$ от 45 мин., то решение записывается так:

45 мин. : 5 = 9 мин.

условие — решение

$\frac{1}{5}$ от 45 мин. = 45 мин. : 5 = 9 мин.

Раздельная запись условия и решения более доступна детям.

При объяснении, как найти одну или несколько частей числа, можно придерживаться следующей последовательности: сначала показать нахождение одной или нескольких частей на наглядных пособиях или на предметах (книги, тетради, кубики и др.), потом на задачах и в заключение на отвлечённых числах.

Объяснение нахождения одной части числа ведётся так.

«Возьмите шесть кубиков. Разложите их на 2 равные части. Покажите половину кубиков. Сколько кубиков в одной половине?

Откройте тетради. Начертите полоску в шесть квадратиков. Найдите половину этой полоски и запишите справа, чему равна $\frac{1}{2}$ от 6 квадратиков».

$$6 \text{ кв.} : 2 = 3 \text{ кв.}$$

После этого учащиеся находят $\frac{1}{4}$ от 12 карандашей, $\frac{1}{8}$ от 16 перьев и параллельно с этим делят полоски в 12 и 16 квадратиков на 4 и 8 равных частей и делают вывод: чтобы найти $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{8}$ числа, нужно его разделить на 2, 4 и 8 равных частей. Затем учащиеся решают задачи на нахождение одной части числа от величин, допускающих и проверку на наглядных пособиях. Например: «Найди, вычисли и покажи на метре, чему равна $\frac{1}{4}$ часть метра. Сколько дециметров в $\frac{1}{2}$ *м*? Сколько сантиметров в $\frac{1}{4}$ *м*? в $\frac{1}{5}$ *м*? в $\frac{1}{10}$ *м*? Сколько килограммов в $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{5}$ центнера? Сколько месяцев в $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ и $\frac{3}{4}$ года?» Дальше с учениками решаются примеры: «Найти $\frac{1}{4}$ от 40. Найти $\frac{1}{5}$ от 40. На сколько $\frac{1}{4}$ от 40 больше $\frac{1}{5}$ от 40?» — и др.

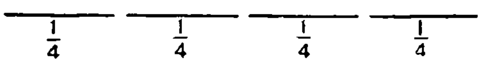
С нахождением нескольких частей от числа можно познакомить так.

Возьмите 16 кубиков. Найдите три четвёртые части всех кубиков. Как найти одну четвёртую часть 16 кубиков? 16 куб. : 4 = = 4 куб. Как найти 3 таких части? 4 куб. $\times$ 3 = 12 куб. Запишем (запись на доске и в тетрадях):

$\frac{3}{4}$ от 16 куб. = 12 куб. (условие и ответ).

1) 16 куб. : 4 = 4 куб.
2) 4 куб. $\times$ 3 = 12 куб. (решение)

Откройте тетради. Начертите линию длиной 8 *см* и найдите $\frac{3}{4}$ части её.



$\frac{3}{4}$ от 8 *см* = 6 *см*

1) 8 *см* : 4 = 2 *см*
2) 2 *см* $\times$ 3 = 6 *см*

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ В НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЕ.

Значение изучения геометрического материала.

«Математика есть наука о количественных соотношениях и пространственных формах действительного мира» (Энгельс). Это классическое определение даёт указание о двух основных направлениях математического образования. Уже с самых первых шагов обучения в начальной школе наряду с начальными понятиями о числе формируются и пространственные представления. В курсе арифметики в начальной школе элементы наглядной геометрии дают исключительно ценный материал для осуществления задач политехнического обучения, развивают логическое мышление учащихся, их пространственные представления и практические навыки, что способствует лучшему усвоению курса арифметики. Необходимость усиления роли геометрического материала нашло своё отражение в новых программах по арифметике. Особое внимание в них уделено выполнению практических работ. Изучение геометрического материала в начальной школе ставит перед собой следующие цели:

1. Развивать пространственные представления учащихся, более детально ознакомить их с часто встречающимися геометрическими образами и их свойствами.

2. Вооружить учащихся умением производить измерение линейных элементов фигур, тел, научить их измерять и вычислять площади и объёмы в простейших случаях.

3. Научить пользоваться простейшими измерительными инструментами и дать первичные навыки в области черчения и элементарных измерений на местности.

4. Развить умение определять на глаз расстояние, площадь, объём.

5. Дать навыки в решении жизненных практических задач, связанных с вычислением площадей и объёмов.

6. Подготовить к дальнейшему изучению геометрии, в котором будут постепенно усиливаться элементы логических доказательств.

Отсюда вытекают и основные методы изучения наглядной геометрии. Дети мыслят наглядно, образно. Представления и понятия у них вырабатываются на основе наблюдения и опыта. Всё обучение должно быть наглядным. Наблюдения учащихся должны идти параллельно с практическими работами (черчение, лепка, изготовление моделей фигур, вырезывание, наклеивание и склеивание фигур и тел, другие работы с бумагой, картоном, глиной, пластилином).

Объяснения учителя с использованием разнообразных наглядных пособий, опирающиеся на жизненный опыт учащихся и на выполняемые ими практические работы, приводят к накоплению фактов, обеспечивающих подведение учащихся к выводам, которые они должны усвоить. Вся эта работа имеет своей целью подвести учащихся к обобщениям, т. е. к осознанию свойств фигур и тел, независимых от их физической природы. Этому способствуют такие наглядные пособия, которые изготовлены из различных материалов (бумага, картон, стекло, дерево, металл, глина, картофель, свёкла и т. д.) и окрашены в различные цвета.

Как показывает опыт работы многих учителей, занятия в кружке «Умелые руки» способствуют изучению геометрического материала. Учащиеся четвёртых классов изготовляли из цветной бумаги модели геометрических фигур и тел: квадрата, прямоугольника, треугольника, куба, параллелепипеда — и передавали лучшие работы в подарок первоклассникам. Учителя первых классов использовали эти пособия как дидактический материал.

При решении задач очень важно включать и такие, данные для которых учащиеся получают путём измерения (например, размеры ящика при определении его объёма). Полезны и такие упражнения, когда учащиеся составляют задачи, а затем при помощи измерения сравнивают реальные размеры с теми, которые были им предложены. Решение некоторых задач следует сопровождать чертежами, выполненными либо в соответствии с условиями задачи, либо в масштабе. Аналогично с этим должны иметь место и задачи, в которых от размеров, данных на плане, надо перейти к определению размеров в натуре и затем вычислить расстояние, периметр или площадь. При изучении геометрического материала следует опираться на знания и навыки в области именованных чисел. Наконец, в изучение геометрического материала могут быть внесены элементы занимательной геометрии. Прежде чем перейти к методике изучения отдельных вопросов рассматриваемой темы, укажем, что геометрический материал выделяется в программе начальной школы с III класса. Однако уже в I и во II классах учащиеся при изучении чисел и мер получают первоначальные сведения из области начальной геометрии. В I классе, пользуясь квадратами, кружочками, треугольниками, прямоугольниками, кубиками в качестве дидактического материала, они научаются распознавать и называть эти фигуры и тела. Этому способствуют также такие виды работ, как зарисовка и обводка этих фигур.

Хотя во II классе нет ещё таких тем, в которых изучались бы свойства геометрических фигур, но есть ряд работ подготовительного характера. Во II классе при изучении задач на разностное сравнение ученики чертят полоски, измеряют и сравнивают их длину. Вслед за этим слово «полоска» заменяется термином «отрезок». В дальнейшем встречаем работы по измерению отрезков, увеличению или уменьшению их длины в несколько раз, кратному сравнению длин отрезков. В первой четверти ученикам даются задания по измерению и сравнению длин сторон прямоугольника. Прямоугольник, разбитый на равные квадраты, используется при изучении таблицы умножения и при ознакомлении с переместительным свойством умножения. Часто в качестве пособий выступают треугольники, квадраты, прямоугольники. Нахождение части числа проводится путём деления круга на равные части. Вместо слова «нарисовать» фигуру появляется термин «начертить». Во II классе проводятся в классной обстановке и на местности работы по развитию глазомера.

Таким образом, во II классе мы имеем ряд подготовительных работ геометрического характера.

Переходим к изучению геометрического материала в III и IV классах.

Прямая линия. Отрезок.

Первоначальное понятие о прямой линии и отрезках учащиеся уже получили в I и II классах. В III классе необходимо уточнить и расширить эти знания. Следует привести примеры, когда на практике приходится проводить прямые линии; некоторые примеры учащиеся приводят сами. В качестве иллюстрации прямой линии могут служить рёбра геометрических тел, натянутая нить, след, остающийся на листе бумаги, если его перегнуть, ребро линейки и т. д. На доске чертится отрезок прямой линии, и устанавливается возможность продолжения его в обе стороны на любое расстояние. Из прямой линии выделяется отрезок, концы которого обозначаются буквами русского алфавита. Учащихся следует познакомить с ломаными и кривыми линиями, используя рисунок в учебнике, чертежи на доске, контуры тел и фигур. Для уточнения понятия о прямой линии, их чертят в различных направлениях, показывая, что косые и наклонные линии также являются прямыми.

Упражнения. Важнейшим моментом при изучении прямой линии является выполнение возможно большего количества практических работ с целью привития навыков черчения и измерения и развития глазомера. К таким работам можно отнести черчение на доске и в тетрадях прямых линий в разных направлениях, соединение точек при помощи отрезков, черчение отрезков заданной длины, измерение начерченных отрезков, нахождение суммы и разности отрезков, увеличение (уменьшение) отрезка в несколько раз. Следует измерить длину многих предметов в классе и дать учащимся задания на дом по измерению расстояний. Решение некоторых задач можно иллюстрировать чертежом, выполненным в определённом масштабе.

Важное значение имеют работы по развитию глазомера. При этом следует избегать беспочвенного гадания. На первых порах перед учениками должны быть ориентиры — начерченные на доске или прикреплённые цветные полоски длиной в метр, дециметр, сантиметр. Некоторые работы по определению длины на глаз надо выполнить с предварительным обсуждением ожидаемых размеров. Все работы, выполняемые на глаз, должны затем проверяться, оцениваться ошибки, причём следует выявлять лучший результат. Можно иногда практиковать запись на доске ответов нескольких учащихся, а потом установить лучшее приближение. При этом следует брать те ответы учащихся, которые резко отличаются друг от друга.

Работы по определению на глаз длины могут быть весьма разнообразны. Так, например, можно определить на глаз длину отрезка, который отбивается шнуром на доске или на полу; длины отрезков, которые ученики или учитель чертят на доске в различных направлениях; длину края табуретки, тетради, книги, стенгазеты, классной доски, окна или отдельного оконного стекла, линейных размеров шкафа, ящика, рёбер геометрических тел и т. д. Учащиеся на нелинованной бумаге чертят отрезки произвольной длины и на глаз определяют их длину или же чертят на глаз отрезки заданной длины, либо же делят отрезки на равные части, увеличивают на глаз отрезок в несколько раз и т. д. Такие весьма полезные упражнения надо проводить не только тогда, когда изучается прямая линия, но и на ряде последующих уроков в течение всего учебного года.

При выполнении всех измерительных работ надо добиваться максимально возможной степени точности.

Провешивание прямых линий и измерение расстояний на местности.

Измерительные работы на местности являются существенным звеном в деле политехнического обучения, вооружая учащихся рядом ценных навыков практического характера, развивая пространственные представления детей, их умение ориентироваться на местности. От учителя требуется тщательно продуманная организация работ, обеспечивающая активное участие каждого ученика в выполнении всех видов намеченных работ. Обычно учащиеся разбиваются на небольшие звенья (от 3 до 5—6 человек). Каждое звено получает определённое задание. Эти задания могут быть одинаковыми или различными, звенья могут меняться заданиями. Каждое звено должно быть снабжено необходимым инвентарём и заранее инструктировано о ходе предстоящей работы. Контроль за работой учащихся, мобилизация их внимания, наблюдение за дисциплиной — всё это при работах на местности значительно сложнее, чем в классе, и требует от учителя тщательной подготовки. Должны быть продуманы все детали, в том числе и состав звеньев, и одежда учащихся, и место для выполнения работ и т. д. К проведению этой работы можно привлечь пионервожатого или родителей, свободных от работы. Изготовление необходимого оборудования частично выполняется самими учащимися в кружках «Умелые руки» или на уроках труда. Помощь в изготовлении оборудования могут оказать учащиеся старших классов, родители, шефы. Необходимо добиваться, чтобы оборудование было хорошего качества. Для провешивания прямых линий и измерения отрезков этих линий требуются вешки высотой в 1,5 *м* и толщиной в 3 *см*, колышки длиной в 3—4 *дм*, рулетка или мерная верёвка (или полевой циркуль), флажок. Мерная верёвка обыкновенно берётся длиной в 10 или 20 *м* с петлями на концах для одевания на колышки. Метры на этой верёвке отмечаются цветными нитками или ленточками. Всё же при возможности лучше пользоваться рулеткой, обычно имеющей подразделения на

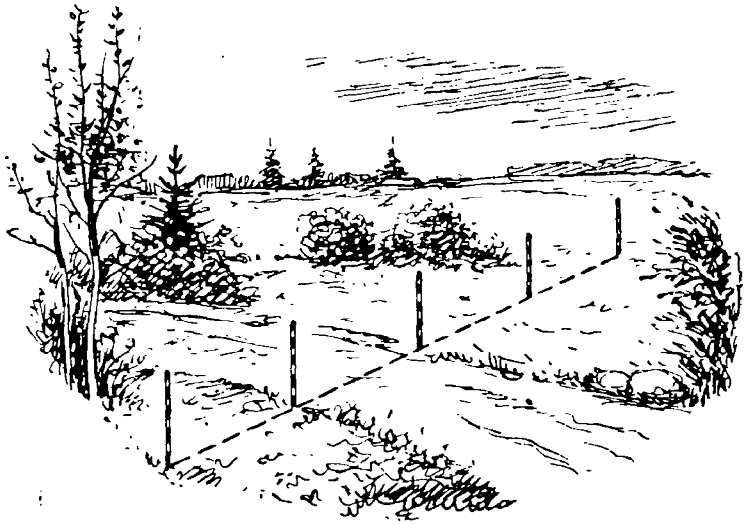


Рис. 48.

метры, дециметры и сантиметры. Полевой циркуль изготовляется из двух заострённых брусьев, скреплённых между собой. Расстояние между ножками циркуля равно одному или двум метрам.

До выхода на местность необходимо провести беседу, в которой чётко изложить организацию и содержание работ, обратив особое внимание детей на соблюдение дисциплины, на тщательное выполнение работ, на сохранность оборудования и сдачу его в школу. В беседе указать на то, что очень часто на практике приходится провешивать прямые линии при строительстве зданий, амбаров, скотных дворов, траншей для силоса, прокладке дорог, отведении или огораживании участков под усадьбы, огороды, сады, площадки, пруды и т. д. Полезно предварительно провести упражнения по провешиванию в классе прямых линий. Для этой цели можно изготовить вешки из карандашей, воткнув их в катушки от ниток, разрезанные на две части. В беседе с учениками следует разъяснить, что на местности линии обычно не проводят, а лишь обозначают с помощью вех (провешивают). Для понимания учащимися назначения промежуточных вех следует на доске наметить как можно дальше друг от друга две точки и показать, насколько легче будет их соединить прямой линией, если будут промежуточные точки. Далее надо показать ученикам всё оборудование и его применение.

Провешивание прямых линий на местности следует проводить в различных вариантах: между двумя произвольно выбранными точками, между какой-либо точкой и деревом или другим предметом, между данной точкой и каким-либо местом дороги, а также

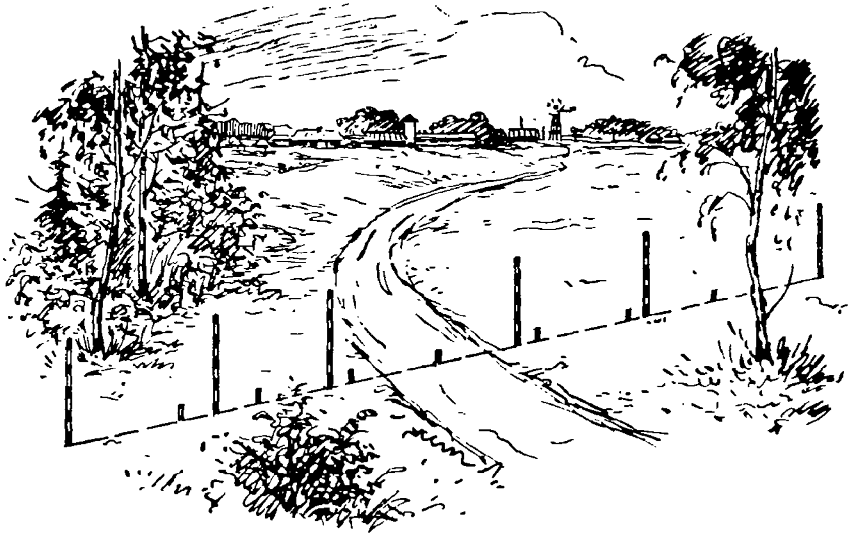


Рис. 49.

от данной точки в заданном направлении. При провешивании линии между двумя точками два ученика устанавливают строго вертикально две вешки в этих точках. Третий ученик двигается с вешкой в руках и устанавливает её на некотором расстоянии от начальной вешки. Один ученик регулирует при помощи флажка установку третьей вешки так, чтобы она закрывала от него конечную вешку. Ученик, установивший третью вешку, остаётся при ней и держит её на вытянутой руке, не заслоняя собой других вешек, либо же вешка втыкается заострённым концом в землю. Таким же образом устанавливаются и остальные вешки, у каждой из которых остаётся ученик. При установке вешек в данном случае нет необходимости, чтобы они были точно на равном расстоянии друг от друга. После того как линия провешена, все ученики из данного звена поочерёдно подходят к начальной или конечной вешке и убеждаются, что провешенная линия действительно прямая. Работу надо организовать так, чтобы каждый выполнил различные виды задания, либо же ученики меняются ролями так, чтобы каждый мог занять место, от которого регулируется флажком правильность установки очередной вешки.

Провешенные отрезки прямых линий измеряются. Два ученика двигаются с мерной верёвкой (или рулеткой) вдоль линии. Идущий впереди имеет запас колышков и вбивает их в землю, а идущий сзади постепенно вытаскивает колышки. Путём подсчёта количества всех собранных колышков и умножения на расстояние между ними определяется длина всего отрезка линии, причём последнее измерение может дать неполную длину рулетки или мерной верёвки. На дом даётся задание начертить провешенную линию в определённом масштабе и отметить на чертеже точки, в которых ставились колышки. Нами дано лишь примерное описание работы. Возможна разнообразная организация этих работ, различный выбор объектов, взаимный контроль, при котором звенья проверяют друг у друга правильность провешивания и измерения. Возможно измерение уже готовых линий (длина забора, дороги, тротуара и т. д.). На рисунках 48, 49 дано изображение некоторых видов из указанных выше работ.

Определение расстояний на глаз и шагами.

Умение определять расстояние на местности на глаз имеет большое практическое значение. Развитие глазомера возможно на основе достаточной тренировки. После выполнения работ по провешиванию и измерению расстояний на местности следует перейти к измерениям на глаз с последующей проверкой. Особое внимание на данном этапе следует обратить на глазомерное определение расстояний в пределах от 25 до 100 *м*. Для ориентировки следует на местности построить при помощи вешек линию длиной в 100 *м*, установив через каждые 10 *м* вешки или колышки. В дальнейшем можно ставить вешки через 25 *м*, потом через 50 *м* и, наконец, снять промежуточные вешки, а потом и весь ориентир. Упражнения на определение расстояний на глаз должны быть самыми разнообразными, и многие из них могут быть избраны самими учениками. Можно определить расстояние до дерева, здания, дороги, забора и т. д., расстояние между двумя пунктами; можно от данной точки наметить место, находящееся от неё на таком-то расстоянии. Можно определить длину (ширину) здания или другой постройки, участка дороги или улицы, расстояние до почты, сельсовета, библиотеки или других близко расположенных пунктов.

Вначале проводится беседа, помогающая определить искомое расстояние, наметить промежуточные ориентиры и примерное расстояние между ними. Следует, чтобы ученики записали у себя расстояние, определённое ими на глаз. После измерения выясняется лучший результат. При измерении на глаз на местности следует признать отличным результат, при котором погрешность составляет примерно 10%, и хорошим при погрешности в 20%.

Полезно периодически давать учащимся задания на дом для самостоятельной тренировки по определению на глаз различных расстояний.

Измерение расстояний шагами. Учитель разъясняет ученикам, что в жизни нередко бывают случаи, когда надо определить расстояние, но при этом не всегда имеется рулетка или мерная верёвка, не всегда можно организовать измерительные работы. В таких случаях, если не требуется особо точного результата, можно прибегнуть к измерению шагами. Для этого надо знать длину своего шага. После этого организуется работа по определению учащимися длины своего шага. На ровном месте отмечается расстояние в 10 *м*, или в 50 *м*, или в 100 *м*. Каждый ученик ритмичным шагом проходит это расстояние три раза и делает у себя записи о количестве сделанных каждый раз шагов. Количество шагов суммируется, делится на три, затем расстояние делится на среднее количество шагов и определяется средняя длина шага. В обоих случаях деления могут получиться остатки, которые следует отбросить, так как правило округления давать на этом этапе преждевременно. Найдя среднюю длину шага, ученики составляют таблицу.

Количество шагов	Расстояние	Количество шагов	Расстояние	Количество шагов	Расстояние
1	60 *см*	10	6 *м*	100	60 *м*
2	1 *м* 20 *см*	20	12 *м*	200	120 *м*
3	1 *м* 80 *см*	30	18 *м*	300	180 *м*
4	2 *м* 40 *см*	40	24 *м*	400	240 *м*
5	3 *м*	50	30 *м*	500	300 *м*
6	3 *м* 60 *см*	60	36 *м*	600	360 *м*
7	4 *м* 20 *см*	70	42 *м*	700	420 *м*
8	4 *м* 80 *см*	80	48 *м*	800	480 *м*
9	5 *м* 40 *см*	90	54 *м*	900	540 *м*

Пусть ученику дано задание определить при помощи шагов расстояние от школы до Дома пионеров. Ученик насчитал 765 шагов. Пользуясь таблицей, записывают:

700	шагов —	420 *м*
60	„	36 *м*
5	„	3 *м*
765	„	459 *м*

или приблизительно 460 *м*.

Следует провести несколько работ подобного вида и эти упражнения связать с развитием глазомера. Ученики на глаз определяют количество шагов до каких-либо пунктов, а затем сверяют полученный результат с предположенными. Точно так же можно определить на глаз как количество шагов, так и расстояние, а затем проверить ошибку как в количестве шагов, так и в расстоянии.

Углы.

Изучение углов начинают с показа́ углов на знакомых ученикам предметах и на известных им фигурах (прямоугольник, квадрат, треугольник). Можно показать также углы на моделях геометрических тел призматической формы. Знакомство с углами и их элементами удобно провести на шарнирной модели из двух

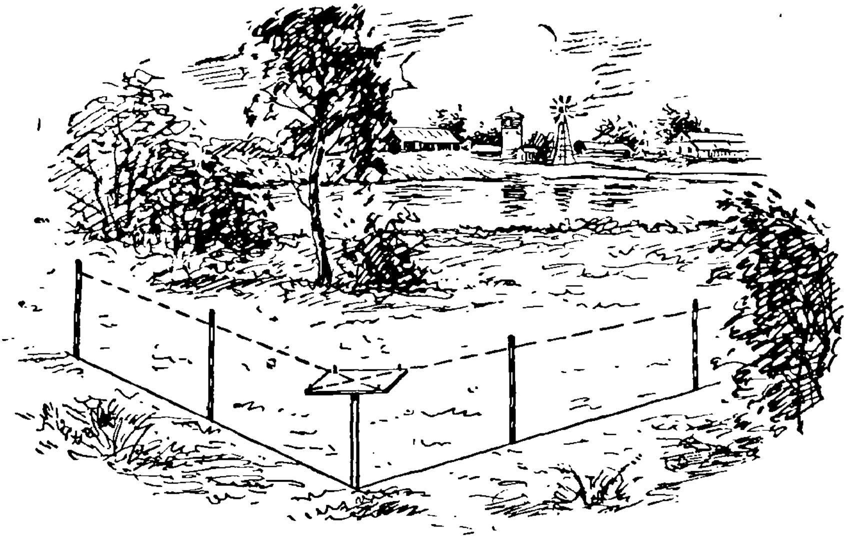


Рис 50

картонных полосок, скреплённых у вершины и свободно вращающихся вокруг неё. Линии, образующие у г о л, называются с т о р о н а м и, а точка, из которой исходят, называется в е р ш и н о й. Ученики также должны изготовить такие модели и пользоваться ими при объяснении учителя. Раздвигая стороны угла, учитель показывает п р я м о й, о с т р ы й и т у п о й у г л ы. Ученики отыскивают прямые углы среди различных предметов классной комнаты, включая стены, пол, потолок, двери, окна комнаты. Ученики изготавливают прямой угол путём двойного перегибания листка бумаги. Пользуясь этим углом, ученики измеряют углы страницы тетради, книги, углы оконных стёкол, граней прямых призм, спичечной или другой коробки и т. д., убеждаясь в *независимости величины углов от длины сторон.*

Упражнения. В связи с изучением углов учащиеся должны выполнить ряд практических работ: черчение прямых углов по клеткам в различных положениях, черчение прямых углов при помощи самодельного прямого угла или угольника на нелинованной бумаге, черчение острых и тупых углов, образование четырёх прямых углов путём пересечения двух прямых.

При изучении углов полезно познакомить учащихся с эккером и провести работы по построению прямых углов в классе и на местности (рис. 50).

Прямоугольник и квадрат.

С этими фигурами учащиеся неоднократно встречались как с дидактическим материалом. Задача состоит в том, чтобы изучить свойства этих фигур, установить их сходство и различие. Чтобы учащиеся смогли абстрагировать свойства фигуры независимо от её физических особенностей, учитель показывает ряд прямоугольников, изготовленных из различных материалов, окрашенных в различные цвета (листы бумаги, картона, тетради, переплёт журнала, кусок фанеры, стекла, жести, крышки коробок, грани геометрических тел), и указывает, что все эти фигуры имеют форму прямоугольника. Во всех показываемых фигурах длина должна резко отличаться от ширины, что отчётливо отделяет образ прямоугольника от квадрата. Затем учащиеся находят прямоугольники в окружающей обстановке, а также вне её. Для изучения свойств прямоугольника следует раздать эти фигуры, вырезанные из бумаги. Путём измерения учащиеся убеждаются в равенстве противоположных сторон. При помощи угольника или самодельного прямого угла учащиеся устанавливают, что все углы прямые. Другим способом выявления этих свойств является перегибание листочка бумаги два раза по осям симметрии. Аналогично с этим изучаются свойства квадрата. При перегибании квадрата (по диагоналям) можно совместить также смежные стороны. В результате этих упражнений совместно с учащимися устанавливается сходство и различие прямоугольника и квадрата.

Следует показать учащимся и другие виды четырёхугольников, установив, что и у них 4 стороны, 4 угла, но углы различной величины и стороны также различной величины. Рассматривать параллелограм или ромб на этом этапе обучения нецелесообразно, лучше противопоставить прямоугольнику и квадрату общий вид четырёхугольника. Полезно отделить от прямоугольника часть, представляющую собой квадрат. Для этого достаточно перегнуть короткую сторону прямоугольника так, чтобы она легла вдоль длинной, и отрезать часть прямоугольника. Точно так же, отрезав от квадрата параллельно стороне часть фигуры, мы получим два прямоугольника.

Упражнения. При изучении прямоугольника и квадрата следует провести большое количество измерительных работ и решить задачи практического характера. Укажем две из этих работ: вырезывание фигур из бумаги и картона, выпиливание их из фанеры. Большой круг упражнений следует провести по черчению этих фигур: черчение по клеткам в тетради с помощью линейки, прямоугольника и квадрата с заданными размерами сторон; черчение на нелинованной бумаге этих фигур, причём работы эти должны быть разнообразными (при помощи угольника строится прямой угол со сторонами различной или одинаковой длины и дополняется до прямоугольника или квадрата); на данном отрезке при помощи угольника строится прямоугольник или квадрат. Учитывая предстоящее изучение площадей, можно предложить учащимся изготовить квадрат со стороной в 1 *см* и в 1 *дм*, не сообщая пока учащимся, что это 1 *кв. см* и 1 *кв. дм*. Учитель должен иметь набор прямоугольников различных размеров, которые раздаются ученикам с заданием измерить стороны и найти сумму всех сторон. Этому вопросу следует уделить особое внимание, решив несколько задач практического характера, в которых требуется найти сумму всех сторон (нахождение длины ограды, границы участка, бордюра при оклейке комнаты и т. д.). Эти упражнения полезны для того, чтобы добиться отчётливого понимания суммы длин всех сторон и в дальнейшем не смешивать этого понятия с площадью фигуры. Решение некоторых задач надо сопровождать чертежом, выполненным в определённом масштабе, и, наоборот, решать задачи по чертежу, переводя данные на чертеже размеры в натуральные в соответствии с масштабом. Среди упражнений должны иметь место и такие, которые направлены на развитие глазомера, например ученики на глаз определяют длину и ширину различных предметов или на доске чертят на глаз прямоугольник с заданным периметром и определяют на глаз периметр прямоугольников, начерченных на доске. Все работы, выполненные на глаз, потом проверяются измерением, и устанавливаются лучшие результаты. На дом даются задания практического характера по черчению, измерению и изготовлению фигур, по определению длины, ширины и суммы сторон стола, полотенца, наволочки, окна, комнаты и т. д., с предварительным выполнением этих работ на глаз.

Измерения на местности.

Следует выполнить работы на местности, указанные в учебнике, состоящие в измерении сторон участков прямоугольной формы и в построении этих фигур на местности. Предварительно эти работы можно провести в классных условиях или в школьном зале. При выходе на местность задание состоит в том, чтобы построить участок в форме прямоугольника или квадрата, который надо, например, отвести для постройки здания или другого помещения производственного или культурно-бытового характера. Работа сводится к построению прямых углов и прямых линий. Обе эти работы в отдельности уже выполнялись учащимися. На местности намечается участок, на котором предполагается выполнить построение. Сначала строится прямая линия — одна из сторон будущего участка. Одну из вешек, стоящих в конце построен-

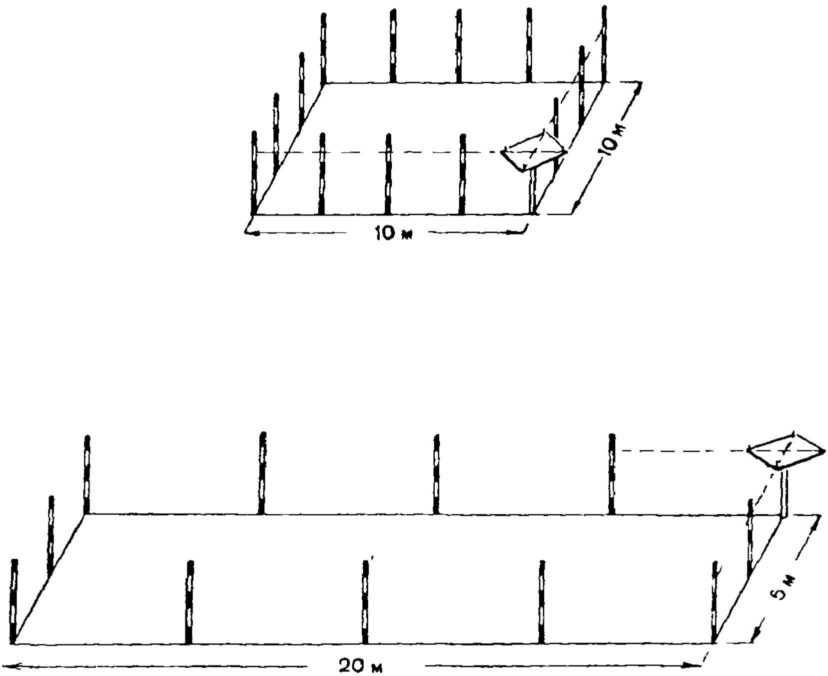


Рис 51

ной линии, временно снимают, заменяют её эккером и строят прямой угол, отмеряя вдоль его стороны линию заданной длины. После этого эккер переносится в конец построенной линии, а вешка устанавливается на прежнем месте. Таким же образом продолжается дальнейшее построение. Построение квадрата ничем не отличается от построения прямоугольника. На местности надо построить квадрат со стороной 10 *м* и прямоугольник со сторонами 20 *м* и 5 *м*, но пока не говорить учащимся, что ими построен ар (рис. 51).

Эти работы могут варьироваться: возможны задания без предварительно заданной длины сторон; должны и здесь иметь место работы по развитию глазомера.

Выполненные на местности построения учащиеся вносят в свои тетради, выполняя их в масштабе.

Переходим к методике изучения геометрического материала в IV классе (вычисление площадей и объёмов). Общеизвестны трудности, с которыми связано изучение этого материала в начальной школе. В практике преподавания нередко имеет место поспешный переход к выводу правил для вычисления площадей и объёмов, в результате чего учащиеся смешивают понятия длины, площади, объёма. Основная задача учителя состоит в том, чтобы довести до сознания учащихся сущность измерения площади и объёма, особенности этих операций. Это может быть достигнуто на основе ряда последовательных этапов, терпеливого проведения измерительных работ, чтобы обеспечить переход от непосредственного измерения площади и объёма к выводу правил для вычисления их. При правильной методике изучения этих тем можно будет добиться понимания учениками различия между длиной, площадью, объёмом и мерами для их измерения, и тогда сама постановка вопроса о сравнении по величине мер длины с мерами площадей и объёмов будет восприниматься учащимися, как нелепость. Подготовка учителя к проработке этих тем должна быть особо тщательной. В методической литературе, в частности в журнале «Начальная школа», в сборниках «Из опыта работы по арифметике», изданных Академией педагогических наук и Учпедгизом, учитель найдёт обширный материал, посвящённый методике изучения площадей и объёмов.

При изучении площадей нужно:

1) дать понятие о площади; 2) изучить квадратные меры и меры земельных площадей так, чтобы учащиеся имели конкретное представление о мерах; 3) научить учеников непосредственному измерению и вычислению площадей прямоугольника и квадрата; 4) выполнить ряд работ и решить задачи, связывающие изучаемый материал с его практическими приложениями.

Понятие о площади.

До перехода к изучению темы «Квадратные меры» следует повторить изученный в III классе геометрический материал (в особенности прямоугольник и квадрат). Наиболее важным в повторении является вопрос об измерении длин отрезков, сторон фигур и суммы длин сторон. Надо подчеркнуть, что длина измеряется при помощи наложения мер длины и что результат измерения длины всегда будет выражаться в линейных единицах.

Учащимся начальной школы даётся не определение площади, а только образное представление о ней.

Учитель проводит ладонью по поверхности листа бумаги, стола, обложки журнала и т. д., поясняя, что он показывает площадь этих фигур. Ученики затем сами показывают площадь доски, оконного стекла, обложки книги, тетради и т. д. Ученики вспоминают, что им приходилось слышать: «жилая площадь», «посевная площадь». Установив, что ученики имеют представление о площади, учитель при активном участии класса выясняет возможность сравнения площадей. Накладывая листочек бумаги на стол или книгу на парту, ученики видят, что площади могут быть равны и не равны между собой (по аналогии со сравнением длины двух отрезков). Не всегда, однако, наложением можно сравнить площади прямоугольников. Чтобы это стало для ученика ясным, осязаемым, следует раздать каждому по два листа нелинованной бумаги (учащиеся заранее, за несколько дней до этого урока, заготавливают эти листки и сдают их учителю) в форме прямоугольников, одинаковых по площади, но резко отличающихся размерами сторон, например: 8 *см* и 6 *см*; 16 *см* и 3 *см* (рис. 52).

Учащимся предлагается установить, какой листок имеет бо́льшую площадь, т. е. занимает больше места. Попытки решить вопрос наложением или сравнением длины и ширины ничего не дают. Начинаются «споры» (весьма полезные), попытки «доказать», что тот или иной листок больше. Вслед за этим учитель раздаёт учащимся ещё по паре таких же листков, но разбитых на клеточки (фактически на квадратные сантиметры, рис. 53). Ученики легко догадываются, что надо пересчитать число квадратов в той и другой фигуре. Учащимся предлагается начертить в тетра-

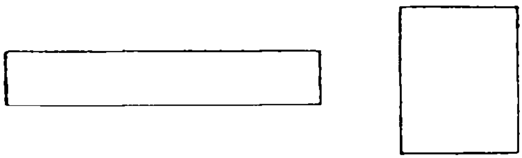


Рис. 52.

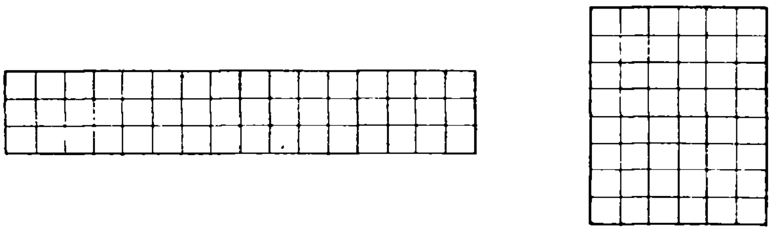


Рис. 53.

дях два прямоугольника, например, со сторонами 16 *см* и 4 *см*, 9 *см* и 7 *см* и путём подсчёта числа клеточек (квадратов) сравнить их площади.

Учитель объясняет, что как для измерения длины существуют меры длины, так и для измерения площади берут не произвольные квадраты, а установленные меры площадей, или квадратные меры. Учитель показывает квадратный метр, квадратный дециметр и квадратный сантиметр и даёт определение этих мер, которое учащиеся заучивают потом по учебнику. Образцы этих мер, изготовленные из картона, вывешиваются в классе. Квадратный миллиметр можно показать, используя миллиметровую бумагу. Учащиеся чертят в тетрадях квадратный дециметр и при помощи проведения параллельных прямых делят его на квадратные сантиметры; рядом с квадратным дециметром они чертят квадратный сантиметр. Эти два чертежа позволяют установить, сколько в квадратном дециметре квадратных сантиметров, и дают образное представление о величине этих мер. Аналогично с этим можно на доске или на листе картона показать разбивку квадратного метра на квадратные дециметры, а один из квадратных дециметров разбить на квадратные сантиметры. Наиболее существенным является доведение до сознания учащихся понимания различия мер длины и площадей, различного их назначения и невозможности их сравнения по величине. Желательно на листе плотной бумаги начертить квадратный метр или квадратный дециметр, а рядом с ним отрезок длиной в 1 *м* или 1 *дм* в виде тонкой линии. На доске такой чертёж не даёт эффекта, а может даже привести к нежелательным результатам, так как меловая линия создаёт образ прямоугольника небольшой ширины, а не линии.

Измерение площади прямоугольника и квадрата.

После ознакомления с мерами площадей учащиеся выполняют непосредственное измерение площадей при помощи наложения. Учащиеся вырезают прямоугольники с заданными размерами сторон, выраженными в целых сантиметрах, накладывают квадратные сантиметры, изготовленные из плотного картона, обводя их хорошо отточенным карандашом. Надо добиваться аккуратного. точного выполнения этой работы. Путём подсчёта количества квадратов определяется площадь прямоугольника. Аналогичная работа выполняется на доске или на листе картона — площадь измеряется путём наложения и обвода квадратных дециметров. Следует заранее проверить подбор фигуры так, чтобы уложилось целое число квадратных единиц. Для этого надо будет учесть то место, которое займут начерченные мелом линии. Непосредственное измерение площади является важнейшим этапом в этой работе, так как только непосредственное измерение даёт ясное представление о площади, о мерах площадей, об измерении площадей. В силу этого надо провести несколько таких работ в классе и в порядке домашнего задания. Эти работы, помимо того, что они помогают выработке более чёткого представления о площади и способе её измерения, должны показать учащимся, насколько этот способ утомителен. Этот способ измерения подвергается критике, как неудобный и требующий большой затраты времени. На ряде примеров выясняется, что во многих случаях этот способ был бы крайне затруднительным (например, для измерения площади пола класса придётся вынести всю мебель), а иногда и просто невозможным (измерение площади лесного участка или площади, занимаемой зданием, садом и т. д.). Существуют другие способы, к изучению которых и переходим. На доске чертится прямоугольник со сторонами 6 *дм* и 4 *дм*, и площадь его измеряется непосредственным наложением квадратных дециметров. Следующие чертежи иллюстрируют ход рассуждений и процесс объяснения, подводящий учащихся к выводу правила

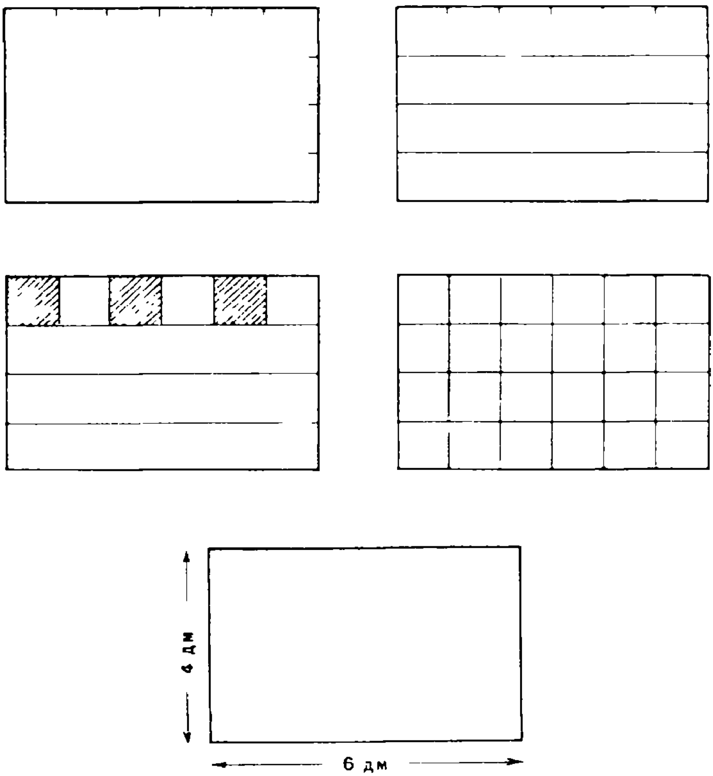


Рис 54

для вычисления площади. Вся эта работа проводится постепенно, в процессе беседы с учащимися, при активном их участии.

Стираем квадраты во всех полосках, кроме одной, и устанавливаем, что для определения площади достаточно пересчитать число квадратов в одной полосе и количество полос в прямоугольнике (рис. 54).

Следующий рисунок иллюстрирует тот момент рассуждения, который приводит к возможности обойтись и без разбивки одной полосы на квадраты. Достаточно только наметить количество квадратов, которое можно уложить на одной полосе. Для этого измеряем длину прямоугольника и отмечаем чёрточками количество квадратов, которое уложится в одной полосе. Далее рисунок показывает, что можно обойтись без разбивки на полосы. Достаточно измерить ширину прямоугольника и отметить места, через которые пройдут эти полосы. Наконец, последний рисунок показывает, что нет необходимости наносить эти чёрточки, так как количество квадратов в одной полосе соответствует количеству линейных единиц, выражающих длину прямоугольника, а количество полос соответствует количеству линейных единиц, выражающих ширину прямоугольника. Итак, площадь нашего прямоугольника содержит: 6 *кв. дм* $\times$ 4 = = 24 *кв. дм*. Остаётся проанализировать способ, при помощи которого получен результат (24 *кв. дм*), связать его с данными, выражающими длину и ширину прямоугольника, и сформулировать правило для вычисления площади. Сначала это правило может быть сформулировано учащимися недостаточно строго. Учитель уточняет правило, ученики читают его по учебнику и заучивают. Особое внимание следует обратить на слова: «В произведении всегда получаются квадратные меры». Почему? Потому, что мы узнаём площадь, а площадь измеряется мерами площадей, или квадратными мерами. Приведённая выше запись (6 *кв. дм* $\times$ $\times$ 4 = 24 *кв. дм*) является наиболее приемлемой для начальной школы, так как она отражает тот ход рассуждений, который имел место при выводе правила для определения площади. Данная форма записи может быть сознательно применяема учащимися. Вычисление площади квадрата не содержит ничего нового по сравнению с вычислением площади прямоугольника. Надо обратить внимание учащихся на то, что определение площади квадрата проще, чем прямоугольника, так как достаточно измерить одну только сторону. После изучения таблицы квадратных мер целесообразно, как это сделано в учебнике, выписать рядом таблицу линейных и квадратных мер и сравнить их. Здесь надо обратить внимание учащихся на то, что единичное соотношение двух соседних единиц длины равно десяти, для соседних единиц площадей это соотношение равно ста.

Практика показывает, что лучше начинать изучение квадратных мер с квадратного сантиметра, переходя затем к более крупным единицам. При таком изучении можно активизировать работу учащихся по определению количества квадратных сантиметров, содержащихся в 1 *кв. дм*, и количества квадратных дециметров, содержащихся в 1 *кв. м*. Это удобно сделать путём подсчёта количества квадратных единиц в одном ряду (полоске) и количества рядов в единице более крупной меры. Можно раздать учащимся квадратные дециметры, нарезанные из миллиметровой бумаги, и на этом пособии провести изучение соотношения между квадратным дециметром, сантиметром и миллиметром.

Изучение мер земельных площадей — ара и гектара — должно быть связано с построением этих мер на местности. В тетрадях учащиеся чертят ар и гектар в различных масштабах. Так, например, при масштабе: 1 *см* вместо 100 *м* — гектар изобразится в форме квадрата со стороной в 1 *см*, а при масштабе: 1 *см* вместо 20 *м* — в виде квадрата со стороной в 5 *см*. Полезны упражнения, в которых учащимся предлагается изобразить гектар в форме прямоугольника, самостоятельно подобрав стороны и масштаб.

Учитывая, что ученики нередко допускают ошибки, смешивая периметр и площадь, надо тщательно разобрать те задачи, решение которых связано с периметром (сумма всех сторон) и площадью. Можно практиковать устные задачи, в которых даётся сумма всех сторон квадрата и надо определить его площадь, и обратные задачи. Разрезая прямоугольник на два прямоугольника, можно предложить учащимся найти сумму всех сторон и площадь первоначального прямоугольника и двух прямоугольников, полученных из данного.

После нескольких занятий, когда учащиеся уже овладели способом вычисления площади прямоугольника и квадрата, можно им сообщить, что далеко не всегда так просто измеряются площади фигур, что существует такая наука — геометрия, которая изучает способы вычисления площадей и объёмов, и что геометрию они будут изучать в старших классах.

При изучении данной темы должна быть вывешена таблица квадратных мер.

Практические приложения.

Решения задач на площади представляют собой богатейшие возможности для связи изучаемого материала с практикой. Здесь можно решать самые разнообразные задачи, связанные с сельским хозяйством, с обработкой земли, с нормами выполнения сельскохозяйственных работ, с урожайностью и т. д.; ряд вопросов бытового характера: составление смет на побелку, окраску, остекление и т. д.; вопросы, связанные с работой учащихся на занятиях по труду, на пришкольном участке, в колхозе. Представляет интерес решение несложных задач, в которых надо разместить наиболее рациональный разрез прямоугольника на части той же формы, например: вырезка стёкол из листа стекла, разбивка спортплощадки на несколько частей, намётка грядок и дорожек между ними на пришкольном участке.

Мы привели отдельные примеры, которые ни в какой степени не исчерпывают имеющихся здесь возможностей.

При решении задач на площади следует привлекать местный материал из школьной жизни, из жизни предприятий, колхозов.

Ценным является решение задач, данные которых получаются непосредственным измерением. Для этой цели надо использовать в первую очередь предметы классной обстановки: доску, пол, плакаты, портреты, стенгазеты, стол, грани геометрических тел и т. д.

Можно организовать эти работы так, что одни ученики выполняют измерения, другие записывают данные, третьи выполняют вычисления. Можно раздать ученикам прямоугольники и квадраты для измерения сторон и вычисления площади. Следует практиковать задания на дом по измерению площадей, в которых ученики сами получают путём измерения необходимые данные. При решении готовых задач также полезно в отдельных случаях иллюстрировать с помощью мер данные или результаты решения.

Большое место должно быть уделено упражнениям на развитие глазомера в определении площади. В ряде случаев до измерения площадь определяется на глаз. После вычисления площади выясняется лучший результат. Удобны следующие упражнения Учитель чертит на доске прямоугольник или квадрат, ученики определяют площадь на глаз, а затем эта площадь измеряется Интересны задания начертить на доске прямоугольник или квадрат определённой площади. Несколько учеников выходят к доске и выполняют это задание, потом несколько других учеников вычисляют площади начерченных фигур, и выясняется лучшее приближение к установленному заданию.

Решение некоторых задач должно сопровождаться чертежом, выполненным в определённом масштабе, и надо практиковать решение задач, данные для которых взяты из чертежа. При этом необходимо указать, что сначала нужно найти действительные размеры в соответствии с масштабом и полученные числа перемножить. Если же сначала перемножить числа, данные на чертеже, а потом умножить на масштаб, то получим неверный результат, так как площади подобных фигур относятся, как квадраты сходственных сторон. К числу практических работ можно отнести составление учениками задач на площади с использованием добытых ими данных. Наиболее интересные задачи могут быть зачитаны в классе, а некоторые даже решены.

Измерения площадей на местности.

Выполнение работ на местности, связанное с вычислением площадей, сводится к построению прямоугольников и квадратов и измерению длины их сторон. Эти работы описаны выше. В частности, надо построить ар и гектар. При построении на местности ара и гектара можно расставить вдоль сторон учеников, чтобы они могли обозревать построенные площадки и получить конкретное представление об их размерах. После этого следует построить учеников и обойти с ними границы участков по линиям, обозначенным вешками, и вычислить пройденное расстояние. Это даёт материал для задач, где надо вычислить стоимость изгороди или количество затраченного материала.

При выполнении работ по измерению площадей на местности можно использовать в качестве объектов школьный зал, коридор, школьный двор и отдельные его части, спортплощадки, пришкольный участок и его части и т. д. Измерительные работы на местности должны включать и упражнения по развитию глазомера. Полезно отметить во дворе школы или поблизости от неё участок в 1 ар. Проходя мимо этого участка, ученики создадут для себя образ участка, равного одному ару (сотка) (рис. 51).

Вычисление объёмов.

Заключительным разделом в изучении геометрического материала является знакомство с простейшими геометрическими телами и вычисление объёмов. Этот материал в ещё большей степени содействует развитию логического мышления и пространственных представлений учащихся, поднимая их на новую ступень в сравнении с тем, что ими получено при изучении фигур и площадей. Ученики знакомятся с мерами объёма, учатся вычислять объёмы наиболее распространённых тел, решают вопросы большого практического значения. Вместе с тем следует иметь в виду, что изучение тел связано с бо́льшими трудностями для учеников, чем получение фигур. В силу этого значение наглядности и практических работ учащихся сохраняет полностью своё значение при проработке данного материала.

Куб и прямоугольный параллелепипед.

Ещё до поступления в школу дети имеют представление о формах многих тел. В течение первых трёх лет обучения в школе эти сведения расширяются. Со многими телами учащиеся знакомились на занятиях кружков «Умелые руки», выполняя работы по лепке из глины или пластилина, по вырезыванию и склеиванию игрушек, ёлочных украшений и т. д. Следовательно, ученики имеют представление о кубике, бруске (кирпичики, ящики, коробочки), шаре, а многие и об овале, цилиндре, пирамиде, конусе и т. д. Нередко им приходилось лепить предметы, близкие по форме к геометрическим телам: яблоко, помидор (шарообразной формы), груша (конической), яйцо (овальной), башенка (из прямоугольного параллелепипеда и пирамиды), домик (из параллелепипеда и треугольной призмы), грибочек (из цилиндрической ножки и головки в виде полушара и т. д.). Все эти представления способствуют изучению куба и прямоугольного параллелепипеда (последний термин в начальной школе сейчас не применяется). Задача учителя состоит в том, чтобы научить детей, отвлекаясь от других признаков, от физических свойств, внешнего вида, находить общность форм у различных предметов. Приступая к изучению куба и параллелепипеда, учитель приносит с собой набор геометрических тел. Учащиеся называют эти тела, вспоминают предметы, имеющие такую форму, как эти тела. Затем выделяется для изучения куб. Необходимо показать учащимся кубы, различные по величине и виду (из дерева, жести, железа, стекла, бумаги, картона, глины). Изучение свойств куба проводится на основе практических работ учеников на дидактическом материале. Ученики измеряют длину рёбер, считают их количество, отмечая равенство всех рёбер, обводят грань куба, прикладывая её к бумаге, и затем убеждаются в равенстве всех граней и в том, что они имеют форму квадрата. Пользуясь кубом с раскрашенными гранями, учитель, а вслед за ним и ученики показывают верхнюю, нижнюю, переднюю, заднюю, правую, левую грани. Ученики находят вершины куба, пересчитывают их количество. В итоге де

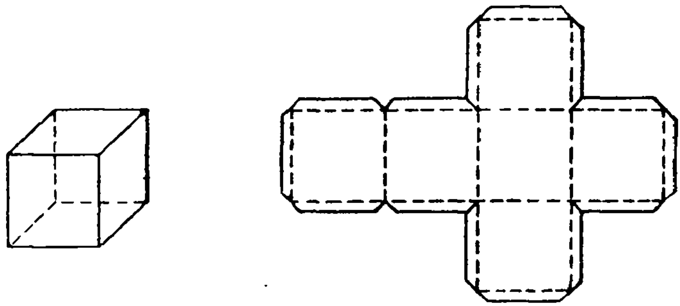


Рис. 55.

лаются выводы, которые закрепляются чтением и заучиванием материала по учебнику. Аналогично проводится изучение прямоугольного параллелепипеда. При изучении куба следует особенно остановиться на равенстве рёбер и на форме граней и их равенстве для установления сходства и различия куба и прямоугольного параллелепипеда. Полезным пособием является набор картонных прямоугольников и квадратов с завязками, из которых учащиеся могут связать куб или параллелепипед. Следует изучение тел проводить не только на моделях (как это обычно делают), но и параллельно с этим на окружающих предметах, одновременно показывая рёбра, грани, вершины в классной комнате, на коробках (спичечной, из-под карандашей, зубного порошка), ящиках, шкафах и т. д., побуждая учащихся привлекать и предметы вне класса.

При черчении куба и параллелепипеда надо линии, уходящие вглубь, чертить в масштабе 1 : 2 и под углом в 45°, т. е. из угла в угол клетки. Изучение тел связано с выполнением ряда работ и решением практических задач: изготовление тел из плотной бумаги или картона (в частности, изготовление кубических дециметров, которые понадобятся для проработки вопроса о вычислении объёма), нахождение размеров тел (длина, ширина, высота) при помощи измерения, причём эти работы выполняются в классе и дома.

При черчении развёрток лучше сначала выполнять эти работы на бумаге в клетку и затем на нелинованной бумаге, используя для разметки линейку с делениями и циркуль (рис. 55).

Для закрепления знаний о пройденных телах проводится опрос о свойствах этих тел, о сходстве и различии. Кроме того, предлагается учащимся называть тела, имеющие форму параллелепипеда, привлекая как можно больше объектов. Изучение свойств тел должно быть обеспечено необходимыми пособиями для учителя и учащихся, а выполнение практических работ — материалами и инструментом.

Понятие об объёме.

Определение объёма в начальной школе не даётся. Понятие об объёме как о величине, можно дать по аналогии с тем, как давалось понятие о площади. Можно начать со сравнения ёмкости сосудов различной формы (банка, графин, кувшин, кастрюля).

Чтобы разрешить вопрос, наполняется водой один из сосудов, затем воду переливают в другие сосуды и таким образом устанавливается, какой сосуд вмещает больше воды. Аналогичную работу можно проделать с открытыми коробками, насыпая в них определённое количество песку. В одной коробке останется свободное место, другая наполнится песком до краёв, а в третьей весь песок не поместится. Следует показать учащимся, что при одном и том же объёме тела могут принимать различную форму.

Переливая литр молока или воды в литровую бутылку, в две полулитровые бутылки, в литровую банку, в кастрюлю, в кувшин, в стаканы, можно наглядно показать учащимся, что объём, т. е. занимаемое место, не изменился (как был литр молока, так и остался), хотя форма, занимаемая молоком, была различной.

При одном и том же объёме может быть различный вес. Это можно показать, насыпав в коробку песок, соль, крупу, муку и взвесив их.

Кубические меры.

После того, как ученики получили представление об объёме и о возможности сравнения объёмов, можно перейти к знакомству с кубическими мерами. Следует восстановить в памяти процесс непосредственного изменения длины и площади и сделать вывод, что для измерения длины служат единицы длины, для измерения площади — единицы площади, которые нельзя сравнить с единицами длины, и что для измерения объёма существуют единицы объёма, или кубические меры. Учитель показывает ученикам единицы для измерения объёма: кубический сантиметр, кубический дециметр, кубический метр. Можно раздать учащимся кубические сантиметры из арифметического ящика и кубические дециметры, ранее ими изготовленные. Производя измерения рёбер, ученики могут сами сформулировать определения этих единиц мер. Каркас кубического метра можно изготовить из 12 палок длиной по 1 *м*. Концы их скрепляют деревянными кубиками, в которых высверлены три взаимно перпендикулярных отверстия для вставки этих палок. Для большей наглядности можно обтянуть каркас бумагой или тканью. Образцы кубических мер можно некоторое время держать в классе, а на стене следует вывесить таблицу кубических мер.

Примечание. Модель 1 *куб. м* может быть изготовлена проще: скрепляются три стержня, длиной по 1 *м* каждый, так, чтобы они представляли собой три ребра куба, сходящиеся в одной вершине, и полученный трёхгранный угол устанавливается в углу классной комнаты. Стены классной комнаты и пол дополняют построенный трёхгранный угол до куба.

Измерение объёмов.

Вывод правила для вычисления объёма прямоугольного параллелепипеда и куба является наиболее ответственным и трудным вопросом из данного раздела темы и должен быть тщательно разработан. Изучение вопроса значительно облегчается, если были соблюдены методические требования, изложенные при выводе правила для вычисления площади. С повторения приёма определения площади и следует начать подготовку к выводу правила для вычисления объёма. Учитель ставит на стол две открытые коробки, равновеликие по объёму, но резко отличающиеся линейными размерами рёбер, и ставит вопрос, какая коробка имеет бо́льшую вместимость. Возникают трудности, недоумения, догадки. Чтобы разрешить вопрос, учитель высыпает на стол кубики (кубические дециметры, которые должны быть изготовлены учениками при изучении куба и вообще накапливаться в школе в достаточном количестве) и предлагает наполнить коробки. Подсчёт кубиков убеждает учащихся в том, что обе коробки имеют одинаковый объём. Заметим, что желательно иметь коробки с прозрачными стенками, а кубические дециметры различной окраски. Таким образом, учащиеся убеждаются в том, что для определения объёма достаточно пересчитать количество кубических единиц. Затем следуют практические работы учеников по непосредственному измерению объёма коробок при помощи наполнения кубическими сантиметрами. Необходимое оборудование для выполнения этих работ должно быть заготовлено заранее. Непосредственное измерение объёма имеет большое значение, и эти работы должны быть обязательно проведены. Следует провести работы по непосредственному измерению объёма путём расчленения тела на кубические сантиметры. Ученики приносят с собой по большой картофелине и вырезают из них прямоугольные параллелепипеды так, чтобы длины рёбер выражались в целых сантиметрах. Затем параллелепипеды разрезаются на слои, один из слоёв — на полоски, одна из полосок — на кубические сантиметры. Проведение этой работы должно быть тщательно подготовлено и предварительно выполнено самим учителем.

Указание. Если трудно организовать выполнение этой работы всеми учащимися, то учитель должен сам проделать эту работу в классе. На рисунках показана возможность пересчитать количество слоёв, количество брусков в одном слое и количество кубиков в одном бруске.

Наконец, должны быть проведены работы по выкладыванию параллелепипедов. Из кубиков складывается полоска (брусок), из брусков — слой, из слоёв — параллелепипед. Если все указан-

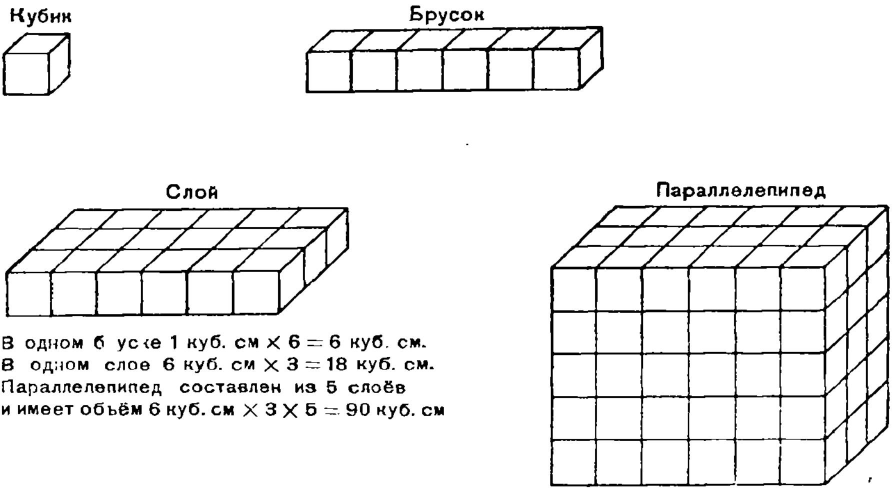


Рис. 56

ные виды работ будут хорошо организованы и проведены без спешки, то учащиеся, выполняя эти работы, сами научатся быстрее сосчитывать количество кубиков путём подсчёта их количества в одном бруске, слое и, наконец, во всех слоях.

Вся эта подготовительная работа обеспечивает сознательное усвоение учащимися вывода правила для определения объёма параллелепипеда и куба. Учитель наполняет открытую коробку с прозрачными стенками при помощи кубических дециметров, имеющих различную окраску. Учитель снимает все слои, кроме нижнего, оставляя в переднем углу столбик, содержащий столько кубических дециметров, сколько имеется слоёв. Затем устанавливается, что и эти кубики не нужны. Надо измерить высоту, и тогда будет известно количество слоёв. Далее в оставшемся слое оставляется один брусок и выясняется, что, измерив ширину, можно узнать количество брусков, и, наконец, измерив длину, узна́ем количество кубиков в одном бруске. Проведение предыдущих работ вполне подготовило учащихся к усвоению правила для вычисления объёма, которое они сначала излагают своими словами, а потом

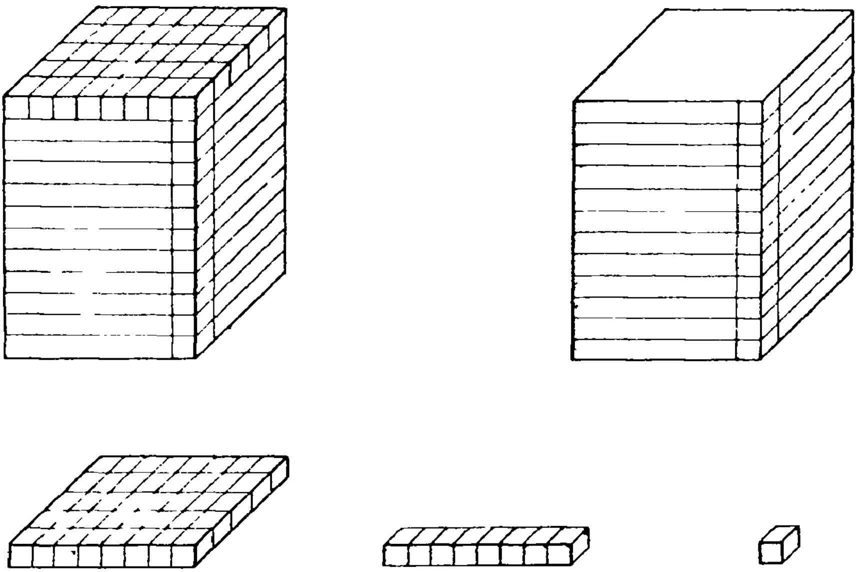


Рис 57

читают по учебнику и заучивают. Запись, рекомендуемая в учебнике (7 *куб. м* $\times$ 5 $\times$ 4 = 140 *куб. м*), вполне согласуется со всей проведённой работой по выводу правила для вычисления объёма и является наиболее приемлемой для начальной школы.

При изучении таблицы кубических мер следует на кубическом дециметре показать количество кубических сантиметров в одном слое и путём беседы установить число слоёв и, следовательно, количество кубических сантиметров в одном кубическом дециметре. Аналогичными рассуждениями устанавливается, что в 1 *куб. м* содержится 1000 *куб. дм*. Таблица кубических мер дана в учебнике. Полезно сопоставить меры длины, площадей и объёмов в следующем виде:

Метрические меры

линейные	квадратные	кубические
1 *м* = 10 *дм*	1 *кв. м* = 100 *кв. дм*	1 *куб. м* = 1000 *куб. дм* и т. д.

Интересно показать связь между кубическими единицами, мерами объёма жидких тел и мерами веса. Для этого ставят на весы открытую железную коробку в форме куба, объёмом в 1 *куб. дм*, и после её уравновешивания наливают водой. Вес воды — 1 *кг*. На весы ставится литровая кружка, уравновешивается, переливается в неё вода из кубического дециметра и опять ставится гиря в 1 *кг*.

Круг задач практического характера, связанный с вычислением объёмов, весьма велик. Они широко представлены в учебнике. Кроме того, следует привлечь материалы местного характера. Очень важное значение имеет вычисление объёмов тел, линейные размеры которых учащиеся находят непосредственным измерением. Для этой цели следует использовать предметы классной обстановки, а также набор тел, коробок и других раздаточных материалов. Задания на дом должны включать работы учащихся по измерению объёмов, данные для решения которых ученики должны получить непосредственным измерением. Решение задач на вычисление объёмов следует связать с развитием глазомера. Ученики на глаз определяют линейные размеры тел и на этой основе вычисляют объём, после чего производится измерение и сравнивается полученный объём с предположенным на глаз.

Занимательная геометрия.

Развитию пространственных представлений способствуют задачи и упражнения занимательного характера, проводимые во внеклассной и отчасти в классной работе. К ним следует отнести различного рода работы с палочками, в которых перекладывание или удаление нескольких палочек ведёт к преобразованиям фигуры. Из палочек учащиеся складывают различные фигуры, предметы. Из игр можно указать геометрическое домино, китайские головоломки.

Учащимся можно дать различные развёртки с предложением определить возможность сложить из них куб или параллелепипед. Интересны работы с бумагой (сгибание, разрезывание на части), в которых нужно составить из частей определённые фигуры.

З а д а н и я у ч а щ и м с я п е д а г о г и ч е с к и х у ч и л и щ п о т е м е «Г е о м е т р и ч е с к и й м а т е р и а л»:

1. Геометрический материал по годам обучения и отражение его в учебниках по арифметике.
2. Изготовить демонстрационный материал и образцы раздаточного материала при изучении разделов:

а) Углы. Прямоугольник. Квадрат.

б) Квадратные меры. (Площади.)

в) Кубические меры. (Объёмы.)

3. Использование масштаба при изучении геометрического материала.

4. Основные недочёты при изучении геометрического материала. (Дать указания на журнальные статьи по этому вопросу.)

5. Упражнения и работы, направленные на развитие глазомера учащихся, связанные с изучением геометрического материала.

6. Анализ задач практического характера, имеющихся в учебниках, связанных с изучением геометрического материала.

7. Практические работы на дом для учащихся начальной школы при изучении геометрического материала.

8. Работы в кружках «Умелые руки», способствующие изучению геометрического материала и развитию пространственных представлений.

9. Обзор журнальных статей в связи с изучением геометрического материала. (По определённому вопросу, или за определённый период, или отдельные статьи.)

ОСОБЕННОСТИ ПРЕПОДАВАНИЯ АРИФМЕТИКИ В УСЛОВИЯХ ОДНОВРЕМЕННЫХ ЗАНЯТИЙ С НЕСКОЛЬКИМИ КЛАССАМИ.

Для успешного преподавания арифметики в таких школах, где учителю приходится вести урок одновременно с несколькими классами, необходимо уметь составлять расписание, тщательно планировать изучение каждой темы и каждого урока, удачно подбирать виды самостоятельной работы, которая в этих условиях имеет исключительно важное значение.

На уроках арифметики может широко применяться самостоятельная работа учащихся. Поэтому при составлении расписания арифметику можно соединять с разными другими учебными предметами: чтением, письмом, грамматикой, рисованием и др.

Удобно также одновременно вести арифметику в нескольких классах.

Урок арифметики при занятиях с несколькими классами складывается в основном из тех этапов, из которых состоят уроки, на которых учитель занимается с одним классом, но последовательность этих этапов может быть иная, а именно: проверка домашнего задания может проводиться не в начале урока, а в середине. Домашнее задание может быть дано не в конце урока. Самостоятельная работа имеет место на каждом уроке, без исключения.

Объяснение нового материала проводится, как правило, в более сжатые сроки. Большое место отводится упражнениям. Упражнения в устном счёте часто сливаются с другими видами работы.

Подготовка к уроку имеет ту особенность, что план урока арифметики входит в состав общего плана, разрабатываемого для нескольких классов. В этом плане учитель точно определяет место и время своей непосредственной работы с каждым классом, а также место и время самостоятельной работы учащихся в каждом классе.

При подготовке к уроку должна быть тщательно продумана организация урока: а) его начало — в каком классе учитель начнёт непосредственные занятия с детьми и какие виды самостоятельной работы будут предложены остальным классам; б) ход урока — где, когда и в какой форме будут проверены домашние задания, переходы от одного класса к другому, содержание занятий учителя с классом и самостоятельных работ учащихся; в) конец урока — когда и где будут даваться домашние задания, какими самостоятельными упражнениями будет заканчиваться урок в некоторых классах.

В малокомплектной школе успех урока арифметики зависит в значительной мере от стройной и чёткой его организации, а также от подбора упражнений для самостоятельной работы учащихся.

Виды самостоятельных работ по арифметике.

Основным учебным материалом по арифметике для самостоятельной работы учащихся являются примеры и задачи.

Примеры могут предлагаться с разнообразным содержанием (в зависимости от класса и в соответствии с программой) и в различной форме. Так, для самостоятельного решения могут служить примеры простые и сложные, для устного счёта и письменных вычислений — примеры с отвлечёнными и именованными числами, примеры с целыми и дробными числами.

Особый интерес представляют для учащихся те виды работ, в которых обеспечен самоконтроль. Например:

1) Даётся учащимся для решения столбик примеров с заданием: «Решите каждый пример. Затем сложите полученные результаты. В сумме должно получиться такое-то число. Так ли у вас получилось?»

2) Даются учащимся для решения «круговые» примеры с заданием: «Решите первый пример. Затем решите пример, который начинается с числа, какое получилось в ответе первого примера. Так поступайте и дальше. Ответ в примере, решённом последним, должен быть равен первому числу в первом примере. Так ли у вас получилось?» (См. образцы таких упражнений в задачнике для II класса, № 700.)

3) Учащимся даются «ряды» чисел (например: 3, 7, 11, ... до 79 или 2, 4, 8, 16, ... до 1024) с заданием: «Продолжить каждый ряд чисел до заданного числа».

4) Учащимся даются занимательные квадраты с указанием суммы и с заданием: «Заполните числами пустые клетки квадрата». (Образцы таких заданий см. в учебнике для II класса. № 197.)

5) Даются примеры на то или иное действие с заданием: «Решите пример и проверьте результат таким-то (обратным) действием».

6) Даются примеры с готовыми решениями (одно из них может быть неверное) и предлагается проверить их решение и найти ошибку.

7) После решения некоторых однотипных примеров даётся задание: «Составить столько-то похожих (аналогичных) примеров и решить их».

Подобного рода задания хороши тем, что ученик, выполнив их, может проверить себя и в случае наличия ошибки снова решить пример и исправить ошибку. Всякий пример может сопровождаться самоконтролем, если учитель даст при этом ответ.

Хороший материал для самостоятельных вычислительных упражнений дают таблицы для устного счёта (образцы таблиц см. в конце учебников для II, III и IV классов). Результаты вычислений при этом записываются.

Большое место в заданиях для самостоятельной работы по арифметике занимают задачи. Степень самостоятельности при решении задач может быть различной. Задача может быть предложена для самостоятельного решения полностью, от начала до конца. Но чаще всего учитель предлагает учащимся выполнить самостоятельно тот или иной этап решения. Например: а) с учителем производится чтение и разбор задачи, а самостоятельно составляется план решения и выполняется решение; б) с учителем производится разбор и намечается план решения, а самостоятельно выполняется решение с письменным планом; в) с учителем производится разбор и решение задачи, а самостоятельно составляется письменный план к готовому решению.

Для самостоятельного выполнения может быть предложен, с одной стороны, начальный этап решения задачи — прочитать условие задачи и продумать план её решения, а с другой стороны, заключительный этап — проверить решение.

В школьной практике, кроме того, применяются следующие виды самостоятельной работы: а) составить задачу, аналогичную тем, которые решались по задачнику или по чертежу, по данному решению; б) решить задачу другим способом; в) записать решение числовой формулой; г) проиллюстрировать условие задачи с помощью рисунка или чертежа; д) заменить в задаче одно из числовых данных другим числом и решить задачу вторично или изменить вопрос в решенной задаче и решить её вторично.

Очень полезны такие задания, которые ведут учащихся к использованию числовых данных из окружающей действительности (из жизни своей семьи, своего класса, своей школы, своего пионерского звена, отряда).

Для самостоятельного выполнения могут даваться учащимся задания: измерить стороны фигуры и вычислить её периметр, площадь; вычислить площадь крышки стола, парты, переплёта книги, страницы тетради; вычислить объём коробки, ящика, комнаты; начертить отрезок заданной величины, прямоугольник или квадрат со сторонами данного размера.

Наконец, в качестве самостоятельной работы учащимся IV класса может быть предложено дать в письменной форме определение того или иного понятия, письменные ответы на вопросы (см. вопросы для повторения в учебнике для IV класса на стр. 27, 46 и др.).

Планы уроков при одновременном занятии с несколькими классами.

При планировании нужно 45 минут урока распределить так, чтобы можно было во всех классах проверить домашнюю работу, объяснить новый материал, закрепить полученные учащимися знания, объяснить задание на дом. Планируя занятия с несколькими классами согласно расписанию, нужно сначала составить план занятия по каждому предмету и в каждом классе в отдельности, отмечая в плане этапы урока, очень кратко содержание каждого этапа, часто путём указания номера задачи и примеров, предназначенных для решения; отметить, что́ должно делаться под непосредственным руководством учителя и что́ самостоятельно. Затем эти планы записываются на развёрнутом листе или в тетради и приводятся друг с другом в соответствие, выражающееся в том, что при непосредственном занятии учителя в одном из классов на протяжении определённого промежутка времени во всех других классах на протяжении того же времени должна проводиться самостоятельная работа учащихся. Чётко должны быть намечены переходы учителя из одного класса в другой. Приведём образцы планов, в которых по-разному сочетаются учебные предметы — арифметика с арифметикой и арифметика с другими учебными предметами.

II класс	IV класс
Арифметика	*Арифметика*
Тема: Таблица умножения 3.	Тема: Деление составных именованных чисел.
Цель урока. Познакомить учащихся с набором троек группами и закрепить знание таблицы умножения 3.	Цель урока. Провести упражнение в делении составного именованного числа на составное

1. Работа с учителем (15 мин.).	1 Самостоятельная работа (15 мин.).
Проверка домашнего задания. Объяснение с помощью классных счётов, как считать тройки группами. Решение соответствующих примеров с целью подготовить детей к самостоятельной работе.	Упражнение в решении примеров по задачнику — № 484 (решить первые 4 примера)
2. Самостоятельная работа (20 мин.).	2. Работа с учителем (20 мин.).
Упражнение в письменном решении примеров по учебнику — № 312, второе упражнение. Выполнить задание № 313, пользуясь данным в учебнике рисунком.	Проверка домашнего задания, а также предыдущей работы, выполненной самостоятельно. Решение задач по учебнику — № 485 и 486 — с разбором и устным планом. Сравнение, почему при одинаковой структуре обеих задач первая решается двумя действиями, а вторая тремя. Какой вид деления применён при решении данных задач? Задание на дом: решить примеры № 484 и 485 (по одному столбику из каждого упражнения) и задачу № 488. Задание для последующей самостоятельной работы.
3. Работа с учителем (10 мин.).	3. Самостоятельная работа (10 мин.).
Проверка самостоятельно выполненной работы. Решение задачи № 315. Задание на дом: решить примеры № 316 и задачу № 317.	Составить и записать план решения задачи № 486. Дать письменный ответ на вопрос. какое число называется простым именованным числом?

План урока при одновременном занятии учителя с четырьмя классами.

I класс	II класс	III класс	IV класс
Чистописание.	*Арифметика.*	*Арифметика.*	*Естествознание.*
Тема. Упражнение в письме строчных букв п, н, у.	Тема. Закрепить знание таблицы умножения на 9 путём решения примеров и задач.	Тема. Упражнение в делении многозначного числа на однозначное и решение задач	Тема. Торф. Познакомить учащихся со свойствами и образованием торфа.

I класс	II класс	III класс	IV класс
1. Работа с учителем — 5 мин.	1. Самостоятельная работа — 5 мин.	1. Самостоятельная работа — 35 мин.	1. Самостоятельная работа — 15 мин.
Письмо в тетрадях образцов букв **п, н, у**. Письмо в качестве образца слова **пишу**. Напоминание о том, как сидеть при письме.	Повторение таблицы умножения на 8 и на 9.	Решение примеров по учебнику № 692 (шесть примеров) и задачи № 696 с письменным планом.	Подготовка устных ответов на вопросы, данные в книге для чтения по естествознанию к статьям «Известняк» и «Соль».
2. Самостоятельная работа — 40 мин.	2. Работа с учителем — 10 мин.	2. Работа с учителем — 15 мин.	2. Работа с учителем — 20 мин.
Ученики пишут буквы **п, н, у**, по две строчки каждую. Через 10 мин. проводится физкультминутка, после которой дети пишут слово **пишу**. В конце урока проходит просмотр и оценка работ.	Проверка домашнего задания. Решение задачи № 674. Задание на дом: решить примеры № 677 (три столбика) и задачу 676. Показ, как выполнять задание № 673, с целью подготовить детей к самостоятельной работе.	Проверка выполненной работы. Объяснение допущенных ошибок и их исправление. Повторение названия чисел при умножении и делении.	Опрос учителем по пройденным темам и по заданным вопросам. Рассмотрение кусочков торфа, розданных учащимся. Чтение статьи о торфе. Рассмотрение рисунков, данных в книге для чтения. Задание на дом. Прочитать в книге статью «Торф» и подготовиться к пересказу прочитанного.
	3. Самостоятельная работа — 30 мин.		3. Самостоятельная работа — 10 мин.
	Запись задачи № 674, решённой с учителем устно. Решение задачи № 675 и четвёртого столбика примеров из № 677.		Чтение про себя по учебнику статьи «Как образуется торф».

ВНЕКЛАССНАЯ РАБОТА.

Внеклассная и внешкольная работа, являясь неразрывной частью учебно-воспитательной работы с детьми, содействует коммунистическому воспитанию учащихся. Эта работа расширяет кругозор детей, развивает у них любовь к знанию и прилежание к труду, содействует повышению успеваемости и дисциплинирует их поведение [1].

На внеклассных занятиях закрепляются знания и навыки, полученные в классе, и создаются стимулы для самостоятельной творческой работы в школе.

Особенно велика ценность внеклассных занятий по арифметике в воспитании воли, упорства в преодолении трудностей, настойчивости в доведении до конца начатой работы, наконец, в воспитании критического отношения к своей работе.

Внеклассная работа с учащимися младшего возраста (I—II классы) проводится эпизодически в форме так называемых дидактических игр или в виде комбинированных занятий, которые названы ниже «часами и минутами занимательной арифметики». Ценность этих игр заключается в том, что они развивают восприятие, внимание и мышление ребят на арифметическом и геометрическом материале, как наиболее доступном пониманию детей. Увлечённые игрой, дети незаметно для себя приобретают новые вычислительные и измерительные навыки или совершенствуются в применении полученных на уроке знаний к решению практических задач.

С учащимися старших классов (III и IV классы) возможна более углублённая и систематическая работа в форме математического кружка, выпуска газет, проведения экскурсий, устройства математических вечеров и уголков. Эта работа должна быть увязана учителем с работой пионерской организации.

Математические игры и методика проведения их.

Игра — важнейшая союзница не только в деле воспитания детей, но и в деле обучения их. Игрой с давних пор пользуются как одним из средств сообщения детям начальных сведений по математике.

Чтобы поднять на более высокий уровень качество классной и внеклассной работы по арифметике, можно использовать математические игры, содействующие упражнению мыслительных способностей, силы и быстроты воображения. При проведении классных и внеклассных занятий необходимо уделять внимание их занимательности. К. Д. Ушинский на основе своего богатейшего

[1] Об улучшении внеклассной и внешкольной работы с учащимися. Приказ Министерства просвещения РСФСР № 236 от 25 апреля 1947 г

опыта говорит, что «у хороших преподавателей дело выходит так, что арифметическая задача есть вместе с тем занимательный рассказ, урок сельского хозяйства или домашней экономики, или историческая, или статистическая тема и упражнение в языке».

Вопросам занимательности и наглядности в арифметике уделял большое внимание известный русский математик Леонтий Магницкий, оставивший нам ряд занимательных («утешных») задач в стихотворной форме.

С методической точки зрения математические игры, помимо разрешения указанных выше общих воспитательных и образовательных задач, помогают учителю в привитии учащимся некоторых специальных навыков. Есть игры, способствующие уточнению и обогащению математической речи учащихся I класса. Так, например, если учащиеся I класса снабжены знаками арифметических действий и цифрами, то обучение составлению строчек и столбиков, чтение и решение их могут идти в виде игр, сходных по содержанию: «У кого есть?», «Кто найдёт?», «Кто первый узнает?», «Слушай и делай!», «Кто скорее и вернее?»

Образец игры.

Вариант 1. Учитель пишет на доске 6—3, а ребята находят у себя цифру 3 и показывают ответ.

Вариант 2. Учитель показывает 2, а учащиеся складывают из цифр примеры на одно из арифметических действий с ответом 2.

Вариант 3. Учитель пишет или составляет на наборном полотне примеры, а учащиеся придумывают задачи и дают ответы. Игровой мотив выражен в самом названии игры. Ответ даётся в виде развёрнутого объяснения примера: от 6 отнять 3, получится 3.

Игры могут быть использованы также для координации зрительных и слуховых восприятий при изучении чисел первого десятка (игра «Стук-стук» и др.). Есть игры, которые укрепляют память на числа (игра «Феноменальная память»), развивают воображение («Спички-забавы», «Китайские головоломки») и др.

Многие игры содействуют развитию пространственных представлений детей («Геометрическое домино», строительный материал, лучинки, игры со спичками[1] и др.), комбинаторных способностей (мозаика, цветное домино, развёртки геометрических тел и др.) и конструктивных способностей (конструктор, секрет треугольника, лучинки и др.).

Имеется много игр, способствующих овладению быстрым счётом («Кто скорей?», «Лесенка», «Лучший счётчик», «Лабиринты» и др.). Эти игры, как игры на соревнование, проводятся во всех классах.

---

[1] Без серы.

Почти к каждому разделу программы по арифметике можно подобрать соответствующие игры. Особенно много игр составлено учителями для изучения первых ступеней счёта: 10, 20 и 100.

Учителя начальных школ часто пользуются разнообразными лото (предметное, цифровое, настольное, общеклассное и др.) и играми в «Школьно-ученический киоск», «Почту» и др. Много внимания уделено составителями детских игр таблице умножения и деления (II класс).

В форме стихов, загадок, скороговорок и др. описаны все числа от 1 до 10, а также составлен ряд занимательных задач и считалок.

Все математические игры для удобства обозрения могут быть разбиты на две группы: классные и внеклассные. Внеклассные игры могут быть настольные (индивидуальные и коллективные) и подвижные. Провести резкую грань между классными и внеклассными играми нельзя, так как при умелом подходе к учащимся и некоторой изобретательности удаётся настольные игры (лото и др.) проводить на уроке. То же можно сказать о некоторых подвижных играх («Живое лото» и др.).

Планируя урок или составляя план внеклассной работы, целесообразно отвести для математических игр специальное место и время. Игры не должны носить случайный характер. Они обычно подбираются в соответствии с изучаемым материалом.

Часы и минуты занимательной арифметики.

Часы и минуты занимательной арифметики — наиболее доступная форма внеклассной работы по арифметике. Как и все виды внеклассной работы, они прививают учащимся навыки организованного, разумного проведения досуга и отдыха в коллективе.

В основу организации таких занятий должны быть положены активность и творчество самих детей, устный счёт в форме игр: «Лучший счётчик», «Круговой счёт», «Кто последний?», а также решение занимательных задач. Такие занятия с детьми проводятся сначала эпизодически, а затем, по мере роста их интереса, регулярно один-два раза в месяц.

В часы занимательной арифметики большое место в I и II классах отводится числовым загадкам, задачам в стихах, задачам-шуткам, драматизации задач и др.

Длительность внеклассных занятий с учениками I и II классов определяется целевой установкой намеченной работы. Если встреча с учащимися проводится после уроков и имеет своей задачей ознакомить их с какой-нибудь игрой, то на такое занятие достаточно 10—15 минут. Когда учащиеся ознакомятся с игрой, они, как правило, занимаются ею самостоятельно.

Кружковая работа по арифметике.

Работа в математическом кружке небольшой группы ребят имеет большое воспитательное значение не только для участников кружка, но и для класса в целом. Члены кружка помогают учителю в изготовлении наглядных пособий, в проведении экскурсий, оформлении и выпуске математической газеты, в организации математического уголка и др.

К организации кружка нужно переходить тогда, когда у учителя имеется определённый план конкретных мероприятий, к выполнению которого можно привлечь учащихся.

Детей легко объединять для достижения следующих навыков: научиться решать задачи, пользоваться счётами [1], быстро считать и производить измерения на местности и др.

Для кружковой работы следует выбирать такие задачи, которые представляют собой или комбинацию из типов задач, предусмотренных программой, или дальнейшее развитие их (наращение действий). Много интересных и занимательных задач можно найти в сборнике Г. Б. Поляка «Занимательные задачи».

Математическая газета в начальной школе.

Математические газеты в том виде, как они выпускались в начальных школах г. Москвы, представляют собой яркие, богато иллюстрированные плакаты, являющиеся хорошим дополнением к задачникам.

Любовь к математическому плакату, загадочной картинке и газете нужно воспитывать у учащихся начиная с I класса. Сначала газеты-плакаты готовит учитель. Для облегчения его работы привлекаются учащиеся старших классов, а иногда и родители. По мере роста сознательности и грамотности ребят положение учителя облегчается, за работу берутся сами учащиеся.

Газета пишется чётким, разборчивым почерком и иллюстрируется рисунками учащихся. Название газеты и её заголовки должны содействовать общей привлекательности математической газеты. Названия наших газет немногословны: «Сосчитай-ка!», «Смекалка», «Читай, считай, решай!», «На досуге», «Юный математик».

Успех газеты зависит ещё и от того, какая ведётся работа с учащимися. Зная учащихся, справившихся с решением тех или иных задач и головоломок, следует дать им на уроке время для объяснения задачи или головоломки всему классу. Ещё лучше собрать

---

[1] Техника вычислений на счётах и использование их в школе дана в брошюре М. И. Иванова «Русские счёты и их использование в школе» и статье М. Н. Розанова «Нумерация, сложение и вычитание на счётах» («Начальная школа», 1956, № 2).

учащихся после уроков для решения помещённых в газете задач и головоломок.

В младших классах (I и II) можно рекомендовать выпуск «живых» математических газет. Перед классом во внеурочное время появляются от 5 до 10 учащихся, которые предлагают классу арифметические задачи, задачи в стихах, загадки, головоломки и др. и дают объяснения к тем задачам и загадкам, которые не решены или не разгаданы учащимися.

Математические уголки.

Ведение внеклассной работы предполагает наличие в классе уголка математики. Уголок отражает итоги учебной работы класса, его внеклассную, кружковую и индивидуальную работу. Через уголок ведётся пропаганда лучших приёмов устного счёта, решения задач, ведения тетради, записей и др.

Математический уголок создаётся при активном участии учеников. Содержанием ученической работы в уголке может быть ведение сборников самостоятельно составленных задач, альбома вырезок из газет с цифровыми данными для составления задач и диаграмм, таблиц справочных цен, норм посева, урожая, выработки и др. В уголке помещаются математическая газета, иллюстративный материал, отражающий в числах краеведческие особенности района, его развитие, пути сообщения, связь с областным и другими центрами, а также доступные детям вопросы пятилетки.

Математический уголок должен быть оборудован инструментом для черчения диаграмм, планов. Здесь же хранятся и выдаются настольные и подвижные игры и измерительные приборы. Выставки в уголке не должны носить стандартного характера. Настенный материал уголка периодически обновляется.

Математический уголок работает по определённому плану. План его работы находится в тесной связи с планом классной и внеклассной работы учителя по арифметике.

Чтобы не распылять внимания ребят, рекомендуется вести работу тематически. Например, в начале учебного года в IV классе можно организовать в уголке выставку образцов арифметических записей и ведения тетрадей. Для этого необходимо подобрать образцы хороших тетрадей, выставить таблицу с правильным начертанием цифр, таблицы Н. Н. Никитина о том, как нужно записывать действия с составными именованными числами, и т. д.

В работе уголка занимают наиболее видное место вопросы решения задач. Во внеклассное время решаются задачи как предлагаемые учителем, так и приносимые учащимися. Учёт этой работы ведут сами учащиеся. Для этой цели рисуют плакат, придумывают к нему заглавие, помещают в нём список учащихся, желающих решать задачи, и отмечают, кто решил предложенные задачи.

Не менее богатый материал для выставки даёт геометрия в объёме курса начальной школы. Для выставки можно использовать геометрические таблицы, развёртки геометрических тел, геометрические тела, измерительные приборы, геометрические игры и др.

Экскурсии.

Экскурсия как одна из форм внеклассной работы в школе освещена выше в разделе геометрии.

Математические вечера.

Из всех видов внеклассной работы с детьми самое широкое распространение имеют детские праздники — вечера и утренники.

При проведении математических вечеров нужно руководствоваться следующими организационными принципами. Математический вечер — одна из форм внеклассной работы, подводящая итоги разнообразной и интересной классной и внеклассной работы, а не самоцель. В течение полугодия или года достаточно провести один-два вечера (по одному в полугодие), демонстрируя лучшие образцы работы как всего ученического коллектива, так и отдельных учащихся. Главное внимание нужно обратить на показ достижений в области устного счёта, решения задач и измерительных навыков. На вечерах не исключена возможность постановки детьми докладов на темы: «Как люди научились считать», «Метрическая система мер», «Календарь и его устройство», «Часы сейчас и прежде» и др.

Классные вечера должны быть по возможности тематичными, например: сложение и вычитание в пределе 20 (I класс, первое полугодие), таблица умножения и деления (I класс, второе полугодие или II класс, второе полугодие), нумерация чисел любой величины (III и IV классы), метрическая система мер и «меры времени» (IV класс). Устройство вечеров для определённого класса нужно проводить с учётом возрастных особенностей детей, обеспечивая увлекательность затей и яркость выступлений.

КРАТКИЙ ИСТОРИЧЕСКИЙ ОБЗОР МЕТОДИКИ ПРЕПОДАВАНИЯ АРИФМЕТИКИ В ДОРЕВОЛЮЦИОННОЙ РОССИИ И В СОВЕТСКОЙ ШКОЛЕ.

Широкое применение при обучении арифметике десятичной системы и обозначения чисел цифрами вместо букв началось в XVI веке.

В XVI, XVII и даже XVIII веке учебники арифметики начинались с изложения правил нумерации. После нумерации проходились 4 арифметических действия. Каждое действие начиналось с определения. Затем сообщались правила и проверка.

Вычисления производились письменно. Задаваемый пример учитель проделывал сначала сам, а после заставлял учеников проделать снова то же самое.

В XVII веке в школах Запада арифметике отводили «послеобеденный урок или последний урок до обеда». Позже, с введением арифметики в учебные планы, ей отводилось 3 часа в неделю, по полчаса в день.

В России первый учебник арифметики появился в 1703 году. Автор его — бывший воспитанник Московской Славяно-Греко-Латинской академии Л. Ф. Магницкий. Его книга «Арифметика, сиречь наука числительная» для того времени являлась энциклопедией математических знаний. Проф. А. В. Ланков оценивает книгу Л. Ф. Магницкого так: «Арифметика» Магницкого — плод зрелой мысли, не лишённый своеобразных методических достоинств; примеры даются в порядке нарастания трудности, интересный подбор задач и т. п.» Автор наряду с применением букв славянского алфавита вводит арабские цифры на позиционной основе. Арифметика Л. Ф. Магницкого на протяжении 80 лет была единственным пособием как для взрослых, так и для юношества.

Обучение описанными выше приёмами продолжалось почти до конца XVIII века. Чтобы облегчить усвоение арифметики, правила, как производить действия, часто излагались стихами.

Реформа преподавания арифметики была произведена И. Г. Песталоцци (1746—1828). В предисловии к XIV тому собрания сочинений И. Г. Песталоцци говорит: «Ученика нужно выучить прежде всего верно наблюдать, затем от верного наблюдения перейти к верному мышлению и от верного мышления перейти к изучению вычислений». В другом предисловии (к V тому), написанном в 1803 году, эта мысль выражена так: «Наглядное обучение числовым отношениям есть часть метода, есть искусство обучать людей считать и вычислять сообразно с природой ума и сообразно с тем путём, как развивается сила мышления». Книга его об обучении арифметике была переведена на русский язык в 1806 году. Переводчик озаглавил её так: «Очевидное учение и содержание чисел». И. Г. Песталоцци отбросил при первоначальном обучении арифметике письменное изучение нумерации, изучение 4 действий и стал изучать числа и их соотношения устно — на наглядных пособиях и по таблицам (рис. 58)[1].

Процесс обучения слагался из следующих разделов:

1. Счёт и название чисел от 1 до 100.
2. Разложение чисел на двойки, тройки и т. д.
3. Разложение чисел на произвольное число слагаемых и сомножителей.
4. Нахождение частей данного числа.

[1] Аналогичные таблицы были составлены для изучения дробей.

5. Нахождение целого по его части.
6. Нахождение отношения чисел.
7. Косвенное сравнение чисел.
8. Кратное сравнение чисел попарно.

От вычисления по таблицам И. Г. Песталоцци переходил к письменным вычислениям и решению задач.

Хотя И. Г. Песталоцци лично достигал больших успехов в обучении арифметике, но последователи его обнаружили в методе

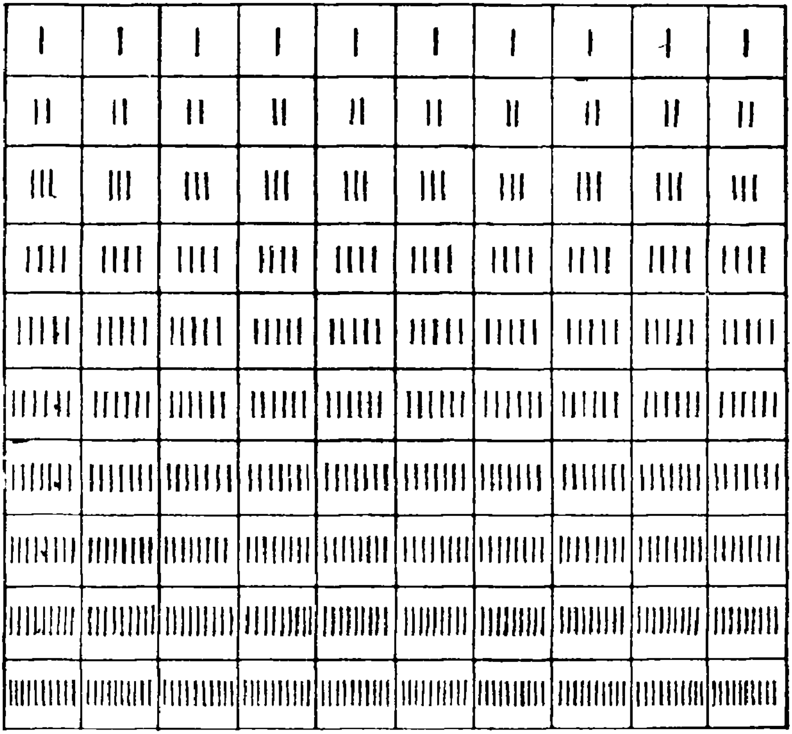


Рис 58.

И. Г. Песталоцци следующие недочёты: непосильность отдельных упражнений для детей, однообразие метода и недостаточность упражнений по некоторым вопросам арифметики, в частности по вопросу о разностном сравнении чисел.

И. Г. Песталоцци увлекался преподаванием арифметики в духе формального развития, упустив из виду материальную цель обучения арифметике — овладение нумерацией и техникой письменных вычислений. Он слишком поздно знакомил учащихся с цифрами, десятичной системой счисления и механизмом арифметических действий. Несмотря на отмеченные недостатки, И. Г. Песталоцци оказал большое влияние на развитие методики арифметики. Он положил начало концентрическому расположению материала, обратил большое внимание на устные вычисления, подробно разработав их систему, и показал на практике, как должно пользоваться наглядностью при обучении арифметике. К. Д. Ушинский высоко ценил взгляды И. Г. Песталоцци на развитие и укрепление душевных сил учащихся, но в предложенной им системе обучения усматривал «наивную, детскую непрактичность гения».

После смерти И. Г. Песталоцци возникла борьба между его последователями и его противниками, которая положила начало двум основным направлениям в обучении арифметике: методу изучения чисел и методу изучения действий.

Метод изучения чисел.

Метод изучения чисел был разработан ближайшими учениками и последователями И. Г. Песталоцци. Из них наиболее талантливым оказался А. В. Грубе, который в 1842 году издал «Руководство к счислению в элементарной школе, основанное на эвристическом методе». По мнению Грубе, предел чисел, вполне доступный наглядному представлению, составляют числа от 1—100. Только изучив числа первой сотни, ученик может успешно обучаться арифметике дальше. В отличие от И. Г. Песталоцци Грубе не разделяет резко устных и письменных вычислений и не советует разделять отвлечённых вычислений и вычислений практического прикладного характера. «Исходной точкой для обучения, — говорил Грубе, — должна быть сущность числа. Пусть ученик изучает число не врозь, не разбросанно по действиям; пусть, напротив, каждое число узнаёт он и подвергает этим действиям в их органическом единстве. Так как непосредственному созерцанию доступны все числа от единицы до сотни и все работы могут быть сведены к первой сотне, то каждое число в этом пределе должно предстать перед умом ученика со всеми своими составляющими частями; из всестороннего созерцания отдельных чисел должны сами собой произойти четыре действия. Каждое число должно быть сравниваемо и измеряемо предыдущими числами, что делается или посредством разностного отношения, или посредством кратного».

Изучение каждого числа, по Грубе, производится по следующему плану:

1. Измерение числа и сравнение его с каждым предшествующим, начиная с единицы.

2. Быстрый счёт.

3. Комбинация изучаемого числа с предшествующими вразбивку.

В А Евтушевский

4. Решение практических задач на данное число и на предшествовавшие.

Упражнения производятся: а) над предметами видимыми и осязаемыми (наглядные пособия), б) над предметами, известными ученикам, но не находящимися перед глазами (задачи), и в) над отвлечёнными числами.

Грубе применяет этот метод ко всем числам в пределе 100, а некоторыми из названных приёмов он пользуется и в пределе 1000. Его метод основывается на предположении, что все числа первой сотни доступны непосредственному созерцанию. Приёмы вычисления не сообщаются. Отдаётся предпочтение трудным обратным действиям перед прямыми. Изучение количественных отношений внешнего мира подменяется идеалистическим раскрытием сущности числа и его созерцанием.

Помимо этого, с точки зрения дидактики, главным недостатком метода Грубе было утомительное однообразие индивидуального изучения чисел в связи с разложением их на слагаемые и множители и др.

Введению метода Грубе в русскую школу и семейное воспитание содействовал И. Паульсон, выпустивший в 1859/60 учебном году «Арифметику по способу Грубе» — методическое руководство для родителей и элементарных учителей. Талантливый русский педагог В. А. Евтушевский видоизменил метод Грубе, составив специальную (несколько облегчённую сравнительно с Грубе) схему изучения чисел от 1 до 20 и составных чисел в пределе 90—100. Он уделял внимание и вычислительным приёмам применительно к десятичному составу чисел, но всё же в основном придерживался взглядов Грубе. Что касается чисел, больших 100, то здесь Евтушевский пользуется методикой изучения действий. Обучение по системе Грубе-Евтушевского имело широкое распространение благодаря составленной В. Евтушевским методике арифметики и сборникам задач, издававшимся около 80 раз в течение 40 лет. Система Грубе Евтушевского с её порочными, идеалистическими в своей основе взглядами, отражающая иноземные влияния в методике математики, подверглась резкому осуждению со стороны таких педагогов, как Л. Н. Толстой, С. А. Рачинский, А. И. Гольденберг, В. А. Ла́тышев и др.

Метод изучения действий.

Начала метода изучения действий в России были заложены в своё время П. С. Гурьевым, научно обоснованы В. А. Латышевым и блестяще решены А. И. Гольденбергом.

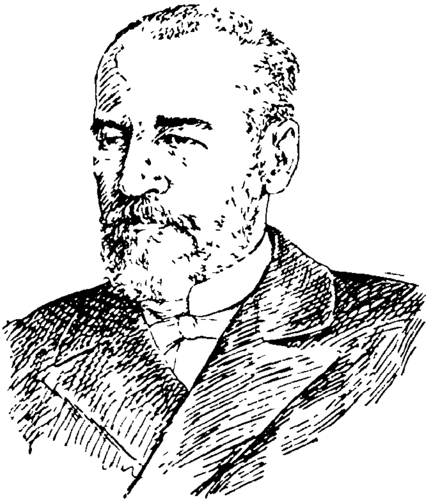
П. С. Гурьев составил «Руководство к преподаванию арифметики» (1839—1842 годы). Арифметический материал у Гурьева располагается по концентрам. Он рекомендует «сперва считать и изображать цифрами только числа от одного до десятка» (первый концентр)[1], затем первую сотню (второй концентр) и после этого многозначные числа (третья ступень, или концентр). Сложение и вычитание в пределе 10 изучалось после усвоения нумерации чисел первого десятка, а сложение и вычитание в пределе 20 обособлялось в самостоятельную ступень при изучении сложения и вычитания первой сотни. Большое внимание П. С. Гурьев уделял решению устных и письменных задач. «Важнее всего, — писал П. С. Гурьев, — возбудить самодеятельность в воспитаннике... Что же касается арифметических правил, то я старался избирать оные так, что ученик без помощи учителя мог идти один вперёд, и с тою же целью помещены в конце книги вопросы, которые должны руководствовать ученика при изучении объяснений» («Арифметические листки», стр. 2). Последняя работа П. С. Гурьева «Практическая арифметика» вышла в 1861 году. Его идеи жили в русской школе до 70-х годов минувшего столетия.

В 50—70-е годы минувшего столетия основоположник педагогической науки в России К. Д. Ушинский, разрабатывая целеустремлённую педагогическую систему, сделал ряд существенных замечаний к программе по арифметике и геометрии в средней школе и при первоначальном обучении счёту. К. Д. Ушинский предлагал конкретизировать отвлечённые математические понятия и сделать арифметику орудием познания окружающей действительности.

«Как только окажется возможным, следует дать детям аршин и складную (на ленте или верёвочке) сажень, весы и горсть мел-

---

[1] У П С Гурьева — «ступени».



А. И Гольденберг.

кой монеты. Пусть дети меряют, весят, считают. Это очень оживляет преподавание, нравится детям и укрепляет их в счислении». «Содержание для задач должно брать, сколько возможно, из мира, окружающего детей: пусть они вымеряют весь свой класс, все скамьи, двери, окна, пусть пересчитают страницы всех своих книг и тетрадей, пусть сочтут свои годы, сочтут недели, дни и часы до праздников и т. д.».

В 1878 году В. А. Латышев даёт отрицательную характеристику методике «изучения чисел». Позже, в 1880—1882 годах, когда вышло первым изданием «Руководство к преподаванию арифметики» В. А. Латышева, автор даёт такую же отрицательную характеристику и системе В. А. Евтушевского. Одновременно с этим автор ориентирует учителей на то, что «вся арифметическая теория заключается в теории действий». «Содержание всей арифметики приводится к 4 действиям». «Правильное понимание действий есть правильное понимание теорий арифметики».

Во второй главе «Плана курса арифметики» автор обращает внимание учителей на сознательность обучения. Знание учеников достигло сознательности, если они могут говорить не только об отдельном данном примере, но и о всех однородных случаях. «Понятие о каком-нибудь предмете можно считать выработанным, если ученики могут высказать его своими словами и привести свои собственные примеры».

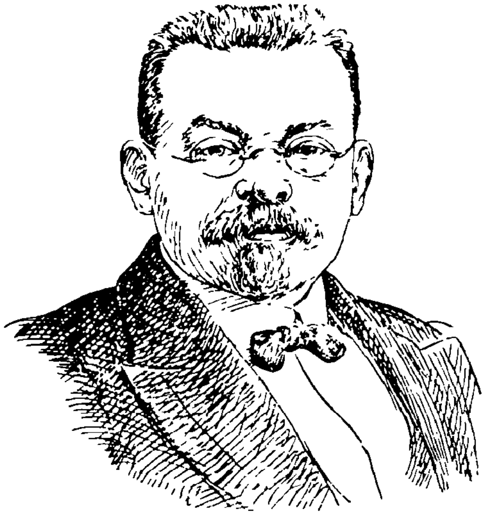
Но ещё раньше В. А. Латышева, в 1876 году, в первом томе «Учебно-воспитательной библиотеки» [1] А. И. Гольденберг подверг

[1] Издание Московского общества распространения технических знаний.

С И Шохор Троцкий

подробному и обстоятельному разбору «Методику» Грубе—Евтушевского. А. И. Гольденберг показал несостоятельность положения Грубе, что «все числа первой сотни подлежат непосредственному созерцанию и доступны ясному представлению». Позже, в 1880 году, в другой статье («Немецкие измышления в русской школе»), направленной против защитника Грубе — В. Воленса, А. И. Гольденберг решительно осуждает как учебник В. Воленса, так и методику В. А. Евтушевского. А. И. Гольденберг утверждает, что «понятие числа не подлежит, как всякое понятие, ни созерцанию, ни представлению». Возможность представления группы предметов в объёме 100 находится в полном противоречии с выводами современной психологии». . . «Если при обучении счислению могло бы найти себе место какое-либо изучение чисел, то оно исключительно свелось бы к ознакомлению с теми элементарными свойствами чисел, на которых основаны приёмы вычислений. Это ознакомление не может, впрочем, предшествовать обучению производству действий или быть, вообще, отделено от него . . .» Общеупотребительные сокращённые способы производства действий основаны, с одной стороны, на применении простейших свойств чисел, а с другой — на пользовании десятичным расчленением чисел («Методика»).

Составленные А. И. Гольденбергом «Методика начальной арифметики» и «Сборник задач и примеров для обучения начальной арифметике» заменили книги В. А. Евтушевского. Спустя несколько лет началось движение против метода Грубе и в Германии.



К. П. Арженников

Начатую А. И. Гольденбергом работу по созданию самобытной методики арифметики продолжали Ф. И. Егоров, С. И. Шохор-Троцкий, В. К. Беллюстин, К. П. Арженников и др.

С. И. Шохор-Троцкий, углубляя метод изучения действий, писал, что «прежде чем учить детей производству арифметических действий, должно уяснить самую необходимость действий и их право на существование, их цель и внутренний смысл». Рекомендуемая им система подбора и расположение материала для первоначального обучения арифметике названы им методом целесообразных задач. «Методика эта, — говорит С. И. Шохор-Троцкий, — названа методой целесообразных задач, потому что для каждой ступени, для преодоления каждой трудности надо предлагать не какие попало задачи, а задачи, сообразованные с исключительной целью предстоящего урока». Функциональная зависимость между числами, определяющая применение действий, лучше понимается детьми, если идти от задач к применению арифметического действия.

К. П. Арженников своей многолетней методической работой содействовал закреплению в нашей школьной практике шести концентров: первый десяток, второй десяток, круглые десятки, первая сотня, первая тысяча и числа любой величины, а также совместное изучение арифметических действий сложения и вычитания над числами от 10 до 1000. Таким образом, в борьбе с иностранными влияниями (Грубе, Паульсон, Воленс, Лай и др.) в России создалась передовая русская школа методики арифметики, заложенная трудами П. С. Гурьева, А. И. Гольденберга, В. Л. Латышева, С. И. Шохор-Троцкого, К. П. Арженникова и др.

Преподавание арифметики в советской школе.

В первые годы после победы Великой Октябрьской социалистической революции переход к единой трудовой школе вызвал необходимость составления новых программ. В 1918/19 учебном году был составлен «Проект примерного плана занятий по математике на первой ступени единой трудовой школы-коммуны» [1]. Он ставил своей целью д а т ь у ч а щ и м с я в о з м о ж н о б о л ь ш е п р а к т и ч е с к и х з н а н и й. Первые программы для школ первой ступени были чрезвычайно перегружены арифметическими, геометрическими, алгебраическими сведениями. Проект (1918/19 учебного года) программы по математике не получил широкого распространения и не дошёл до учительства. Многие отделы народного образования организовали составление собственных программ, значительно меньших по объёму и более доступных для учащихся.

В 1920 году Народным комиссариатом по просвещению были составлены новые программы. Авторы их обращали особенное внимание на «з н а ч е н и е м а т е м а т и к и в школе — в в о с п и т а т е л ь н о м х а р а к т е р е её м е т о д о в, в развитии в детях умения ими пользоваться, умения их применять и прибегать к ним, когда это нужно в практической жизни». По объёму, содержанию и расположению материала по годам обучения новые программы для первой ступени хотя и были несколько перегружены, но всё же стояли в целом на верном пути. В августе 1921 года в связи с организацией семилетней единой трудовой школы, которая разбивалась на два концентра (4 и 3 года), были утверждены новые программы. Программы были снабжены обстоятельными объяснительными записками.

В новых программах уделялось много внимания пробуждению у учащихся математического мышления, применения в обучении наглядности и приложению сообщаемых сведений в технике и т. п. В объяснительной записке обращено внимание также на устный счёт: «Надо поставить руководящим правилом — отводить от каждого урока на первых двух годах обучения 10—15 минут (никак не более) на вычисления в уме». «Меры должны быть усвоены учащимися не по описанию, а чувственными восприятиями в практической обстановке». С 1924 года по 1931 год школы работали по комплексным программам, составленным научно-педагогической секцией Государственного учёного совета. Программы по математике были подчинены изучению комплексных тем. В объяснительных записках к программам указывалось, что «математика сама по себе не имеет образовательной ценности в школе, математика важна лишь постольку, поскольку она помогает разрешать практические задачи. «Школа не готовит математиков, школа имеет целью выпустить практически подготовленных к жизни людей». Наруше-

---

[1] Первая ступень была пятилетней школой.

ние системы в изучении математики не могло не вызвать соответствующей критики программы со стороны учительства. На неудовлетворительную работу школы обратил внимание ЦК ВКП(б), который 5 сентября 1931 года вынес специальное постановление о начальной и средней школе. В нём отмечалось, что «обучение в школе не даёт достаточного объёма общеобразовательных знаний». Изданные в 1932 году программы по математике обеспечивают «точно очерченный круг систематизированных знаний» по арифметике. Они состоят из вводной записки, подробной программы по годам обучения, разбитой на четверти учебного года, и методической записки. Программа восстанавливала арифметику, как самостоятельный учебный предмет, так как «ни в одной учебной дисциплине система не играет такой большой роли, как в арифметике и геометрии».

В последующие годы в программы вносились незначительные изменения, вызываемые проверкой программ на опыте работы школ, а также в связи со снижением возраста поступающих в школу (с 8 до 7 лет) и введением всеобщего десятилетнего обучения.

Параллельно с составлением программ в центре и на местах велась большая работа по созданию новых задачников. Старые задачники, отражавшие помещичий, чиновничий и купеческий быт и жизнь зажиточных крестьян, пропитанные монархическими, религиозными и торгашескими идеями, заменялись новыми задачниками, показывающими преимущества советского строя: индустриализацию страны, коллективизацию сельского хозяйства, культурную революцию и др.

Новые задачники отражали также местные, краевые особенности. Работа по созданию краеведческих учебников усилилась с переходом на комплексные программы (1924—1931 годы).

Задачи с общественно-политическим и краеведческим содержанием носили описательный характер, изобиловали большим числом данных при незначительном числе действий с ними, причём систематичность и последовательность изложения теории была подчинена тематике комплекса. В результате объём математических знаний, сообщаемых учащимся, не обеспечивал подготовки учащихся для средней школы, а последняя — подготовленных контингентов для высшей школы.

В 1932 году школы перешли на стабильные учебники. За последние 25 лет стабильные учебники дважды менялись. Ныне действующие стабильные учебники арифметики содержат доступный для детей 7—11 лет материал. В них содержится много практических и политехнических знаний и задач воспитательного характера.

Новым в советской методике арифметики (по сравнению с дореволюционной методикой) является приложение принципов советской психологии к изучению проблем, которые возникают в практике обучения арифметике и геометрии в начальной школе.

Сотрудниками АПН РСФСР проведены работы по изучению системы обучения и формирования навыков устных и письменных вычислений в I и III классах.

В советский период выпущено много книг по методике арифметики, посвящённых решению задач, устным вычислениям на уроках арифметики, а также внеклассной работе по арифметике, дидактическим играм и занимательным упражнениям.

Большое внимание в нашей методической литературе уделено вопросам организации обучения арифметике в начальной школе. Разработана методика урока в советской однокомплектной и двухкомплектной школе, методика домашнего задания, методика повторения пройденного и методика планирования (инструктивно-методические письма Главного управления школ Министерства просвещения РСФСР). Составлены поурочные планы на все годы обучения. Помимо книг, посвящённых преподаванию арифметики, в журнале «Начальная школа» помещено много статей по наиболее актуальным вопросам текущей работы учителя: аналитический и синтетический методы разбора задач, решение типовых и простых задач, роль наглядности в свете учения И. П. Павлова и др.

В советский период не только переиздавались методики К. П. Арженникова, С. И. Шохор-Троцкого, но и издавались методики арифметики для учителей начальной школы советских авторов [1].

В 1940 году наша методическая литература пополнилась хрестоматией по методике начальной арифметики, в которой дан очерк истории развития в России методики начальной арифметики в XIX и начале XX века и выдержки из методик методистов XIX века.

Краткому очерку развития методики арифметики в связи с развитием методик по другим математическим дисциплинам посвящена также работа проф. А. В. Ланкова «К истории развития передовых идей в русской методике математики» (1954). А. В. Ланков показывает, как развивалась, росла и крепла русская методика математики в условиях острой борьбы с реакционными иностранными влияниями.

Приложение 1

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ.

1. В чём сходство и различие в изучении устной и письменной нумерации?

2. Сравнить изложение нумерации многозначных чисел по методикам А. С. Пчёлко, Я. Ф. Чекмарёва и др.

3. Нужно ли изучать случаи сложения с перестановкой слагаемых и почему? Какая методическая последовательность сложения и вычитания в пределе 20?

---

[1] М. О. Воронец, В. Л. Эменов, Л. А. Волковский, Н. Н. Кавун и Н. С. Попова, М. А. Знаменский, Н. М. Карасёв, Г. Л. Стальков, А. С. Пчёлко, Я. Ф. Чекмарёв и др.

4. Сравнить сложение и вычитание в пределе 20 и 100.

5. Какими приёмами можно изучить таблицу умножения и деления?

6. Какими арифметическими действиями можно заменять деление?

7. В какой зависимости находятся виды деления от компонентов умножения?

8. Какие действия в методике арифметики относятся к внетабличным?

9. Какая методическая последовательность соблюдается при изучении письменного сложения? вычитания? умножения и деления?

10. В каких классах и как изучается умножение чисел, оканчивающихся нулями?

11. В какой методической последовательности изучается умножение многозначных чисел на однозначные, двузначные и многозначные числа?

12. В какой методической последовательности изучается деление многозначных чисел на однозначные, двузначные и многозначные числа?

13. Как находится число цифр частного?

14. Какие меры изучаются в I, II, III и IV классах?

15. Какова методическая последовательность изучения каждого арифметического действия над числами, выраженными в метрических мерах? в мерах времени?

16. Виды задач на время.

17. Методы изучения чисел первого десятка.

18. Какими преобразованиями долей единицы заменяются приведение дробей к одному знаменателю и сокращение?

19. Показать на примерах из методики применение к устным и письменным вычислениям переместительного, сочетательного и распределительного законов.

Задания.

1. Составить конспект урока на одну из тем по указанию преподавателя методики.

2. Разбить одну из тем на уроки и составить планы конспектов каждого урока.

3. Сделать одно наглядное пособие.

4. Написать реферат на одну из методических тем по указанию преподавателя методики.

Приложение 2

ТЕМЫ ДЛЯ ДОКЛАДОВ.

1. Наглядность в преподавании арифметики в I и II классах начальной школы.

А. С. Пчёлко, Наглядные пособия по арифметике во II классе.

М. М. Топор, Практические работы по арифметике в I и II классах.

В. А. Игнатьев, Внеклассная работа по методике арифметики в педагогических училищах.

Ф. Н. Блехер, Пособия по арифметике для I класса, «Начальная школа», 1951, № 9.

М. И. Зарецкий, Наглядные пособия и дидактический материал по арифметике в I классе, «Начальная школа», 1951, № 12.

Н. А. Таланов, Счётное пособие для I и II классов, «Начальная школа», 1954, № 9.

А. И. Донец, Универсальные счёты, «Начальная школа», 1953, № 6.

Н. Н. Никитин (ред.), Наглядные пособия по арифметике в начальной школе, Учпедгиз, 1948.

2. Политехническое обучение на уроках арифметики.

И. А. Каиров, Общее и политехническое образование, «Начальная школа», 1955, № 4.

А. С. Пчёлко, Преподавание арифметики и политехническое обучение, «Начальная школа», 1953, № 1.

А. П. Муразова, Как мы изучали меры длины в I и II классах, «Начальная школа», 1953, № 4.

Н. Н. Смирнов, Практические занятия в связи с изучением элементов наглядной геометрии, «Начальная школа», 1953, № 11.

Р. Н. Абаляев, Арифметика на практике, «Начальная школа», 1953, № 8; Первые упражнения в измерении в I классе, «Начальная школа», 1956, № 10.

3. Как изучать таблицу умножения и деления.

Н. С. Попова, Как изучать в школе таблицу умножения и табличное деление, «Начальная школа», 1954, № 1.

Н. С. Попова, Как изучать табличное умножение и деление во II классе, «Начальная школа», 1951, № 1.

Е. Н. Чекурова, К вопросу о порядке изучения умножения и деления, «Начальная школа», 1954, № 9.

А. С. Ратнер, Возможно ли совместное изучение табличного умножения и двух видов деления, «Начальная школа», 1955, № 1.

М. Н. Бушкова, Как лучше изучать таблицы умножения и деления во II классе, «Начальная школа», 1955, № 1.

И. Ф. Зименков, Способы заучивания таблицы умножения, «Начальная школа», 1955, № 1.

4. Составление и решение задач на местном материале.

Е. П. Прохорова, Арифметические задачи, построенные на материале из окружающей жизни, «Начальная школа», 1951, № 5.

В. В. Соловьёв, Решение задач на местном материале, «Начальная школа», 1954, № 3.

П. М. Эрднев, Задачи по арифметике на сельскохозяйственные темы, «Начальная школа», 1954, № 2.

М. Я. Котов, Использование материалов Всесоюзной сельскохозяйственной выставки при обучении арифметике, «Начальная школа», 1955, № 6.

5. Сравнить методику изучения порядка арифметических действий по статьям.

Л. Н. Скаткин, Изучение порядка выполнения арифметических действий, «Начальная школа», 1950, № 3.

Г. Б. Поляк, Изучение темы «Порядок вычисления арифметических действий», «Начальная школа», 1952, № 3.

А. С. Пчёлко и Г. Б. Поляк, Арифметика для III класса, Учпедгиз, 1955.

Приложение 3

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ ПО ВОПРОСАМ НАЧАЛЬНОЙ АРИФМЕТИКИ.

С. И. Шохор-Троцкий, Методика арифметики для учителей начальных школ, 1916.

А. И. Гольденберг, Методика арифметики, 1927.

К. П. Арженников, Методика арифметики, 1935.

Д. Л. Волковский, Методика арифметики, 1935.

М. А. Знаменский, Н. М. Карасёв, Г. Л. Стальков, В. Л. Эменов. Методика арифметики, 1940.

А. С. Пчёлко, Методика преподавания арифметики в начальной школе, 1953.

В. Т. Снигирёв и Я. Ф. Чекмарёв, Методика арифметики, 1955.

Н. С. Попова, Методика преподавания арифметики, Учпедгиз, 1955.

О. Т. Бочковская и др. Решение арифметических задач в начальной школе, 1949.

Н. Н. Никитин, Решение арифметических задач в начальной школе, 1952.

Г. Б. Поляк, Обучение решению задач в начальной школе, 1950.

Л. Н. Скаткин, Обучение решению простых арифметических задач, 1951; Вопросы обучения решению составных арифметических задач, 1956.

Г. Б. Поляк, Устный счёт в начальной школе, 1948.

В. Л. Эменов и Я. Ф. Чекмарёв, Сборник арифметических задач и упражнений по устному счёту, 1952.

В. А. Игнатьев, Сборник задач по арифметике для устных упражнений, 1955.

В. А. Игнатьев, Внеклассная работа по арифметике в начальной школе, 1949.

Н. В. Архангельская и др., Планы уроков по арифметике в I классе, 1956.

Н. В. Архангельская и М. С. Нахимова, Планы уроков по арифметике во II классе, 1956.

В. А. Игнатьев, Н. И. Игнатьев, Я. А. Шор, Планы уроков по арифметике для III класса начальной школы, 1956.

Н. И. Иляхинская и др., Планы уроков по арифметике для IV класса, 1956.

Повышение успеваемости учащихся начальной школы (стр. 115—181), изд. АПН РСФСР, 1955.

СОДЕРЖАНИЕ.

Стр.

I. Общая часть

1. Методика арифметики и значение её изучения 3
   Анализ программы 4
   Арифметика как основа политехнического обучения 10
   Учебники арифметики 12
   Методы обучения арифметике 14
   Вопросы организации преподавания арифметики 20
   Проверка и оценка знаний учащихся 25
   Тетрадь по арифметике 29
2. Решение арифметических задач 34
3. Методика устных вычислений 77

II. Частные методики.

4. Методика изучения целых чисел по концентрам 88
   Первый десяток . . . . —
   Второй десяток 94
   Первая сотня 104
   Вычисление на счётах 123
   Первая тысяча 126
   Многозначные числа 138
5. Именованные числа 166
6. Простые дроби 185
7. Геометрический материал в начальной школе 192
8. Особенности преподавания арифметики в условиях одновременных занятий с несколькими классами 218
9. Внеклассная работа 224
10. Краткий исторический обзор методики преподавания арифметики в дореволюционной России и в советской школе 229

Приложение 240

Венедикт Антонович Игнатьев, Александр Спиридонович Пчёлко, Яков Александрович Шор

МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ АРИФМЕТИКИ В НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЕ

Редактор *Л. А Сидорова*

Технический редактор *Н. В. Рыбин*

Корректор *З. И. Почаева*

Сдано в набор 24 VII 1956 г. Подписано к печати 12./XII 1956 г. 60×92 1/16 15,25 п. л.
Уч.-изд. л. 14,87. Тираж 25000. экз. А 12292.

Учпедгиз. Москва, Чистые пруды, 6.

Типография имени Ханса Хейдеманна, ЭССР, г. Тарту, ул. Валликраави, 4. Заказ № 2266.

Цена без переплёта 3 р. Переплёт 60 к