Книгоиздательство Т-ва И. Д. Сытина.
ОТДѢЛЪ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ.

П. Карасевъ,
преподаватель математики въ Коммерческомъ училищѣ имени Цесаревича Алексѣя, Женскомъ Коммерческомъ Училищѣ и Торговыхъ Классахъ Моск. Общ. Распространенія Коммерч. Образованія

ГЕОМЕТРІЯ НА ПОДВИЖНЫХЪ МОДЕЛЯХЪ.

Изготовленіе и примѣненіе подвижныхъ моделей геометрическихъ формъ (планиметрія).

Пособіе для классной работы въ среднихъ и низшихъ учебныхъ заведеніяхъ при прохожденіи какъ систематическаго, такъ и пропедевтическаго курса геометріи, съ 94 рисунками и чертежами.

Типогр. Т-ва И. Д. Сытина Пятницкая ул., свой домъ.

МОСКВА.—1916.

ВВЕДЕНІЕ.

„Съѣздъ признаетъ необходимымъ усилить наглядность преподаванія математики на всѣхъ его ступеняхъ“ (І-й пунктъ резолюціи І-го Всероссійскаго Съѣзда преподавателей математики. СПБ. 26/XII—5/I 1910 г.).

I.

Въ послѣднее время и въ педагогической литературѣ, и на съѣздахъ преподавателей математики, и въ научно-педагогическихъ кружкахъ все чаще и чаще раздаются голоса, указывающіе на неправильность пути, по которому идетъ преподаваніе элементарной геометріи. Начиная преподаваніе ея съ систематическаго курса, преподаватель неминуемо сталкивается съ фактомъ несоотвѣтствія строго-научной системы, построенной на чистой логикѣ съ требованіями дѣтскаго ума, склоннаго къ конкретизаціи, къ образному способу усвоенія научныхъ истинъ. Если начинать геометрію съ систематическаго курса, то въ каждой теоремѣ приходится доказывать справедливость такой истины, сущность которой дѣтьми практически наглядно не усвоена, всеобщность ея не сознана и потребность въ доказательствѣ, которое дѣти учатъ, ничѣмъ не вызвана. Неудивительно, что забываются учениками не только доказательство, но и самыя свойства геометрическихъ формъ.

Въ установившейся практикѣ прохожденія систематическаго курса «доказательство» является чѣмъ-то исключительно главнымъ, чуть ли не единственнымъ критеріемъ знанія геометріи [1]), забывая, что теоремы доказываютъ не въ одной геометріи, а во всякой наукѣ, что главною цѣлью геометріи является изученіе образованія или «построенія» геометрическихъ формъ, выясненіе свойствъ каждой отдѣльной формы и, наконецъ, установленіе зависимости между формами. Раньше самаго доказательства надо обладать истиною, справедливость которой предстоитъ доказывать: обладаніе же этой истиной достигается при помощи всевозможныхъ пріемовъ нагляднаго характера, а укрѣпленіе ея въ умѣ ученика—при помощи задачъ. Доказательство здѣсь должно занимать среднее мѣсто: когда уже наиболѣе пытливые ученики начинаютъ обращать вниманіе на постоянство этого свойства, начинаютъ спрашивать: «Почему это всегда такъ бываетъ?», тогда лишь на вопросъ «почему» отвѣтомъ является доказательство.

Въ ряду методовъ нагляднаго характера, способствующихъ усвоенію на отдѣльныхъ примѣрахъ геометрическихъ истинъ, слѣдуетъ отмѣтить примѣненіе различнаго рода моделей, въ особенности моделей подвижныхъ.

II.

Въ началѣ изученія геометріи, когда геометрическое воображеніе дѣтей еще не развито, необходимо прійти ему на помощь при изученіи дѣйствій съ отрѣзками, углами и др. формами. Неопытный глазъ, несомнѣнно, испытаетъ большее удовлетвореніе, видя, какъ одинъ отрѣзокъ при сложеніи переносится къ другому и сливается съ нимъ, давая одинъ бо́льшій отрѣзокъ, какъ сливаются два угла въ одинъ, какъ накладывается одинъ уголъ на другой,—чѣмъ если бы это было выполнено при помощи чертежа. **Необходимо**

[1]) Какъ часто при бесѣдахъ о математикѣ, въ обществѣ, съ людьми вполнѣ интеллигентными приходится встрѣчаться съ представленіемъ о геометріи, какъ о такомъ (единственномъ въ своемъ родѣ) предметѣ, гдѣ только и дѣлаютъ, что „доказываютъ теоремы“!

прійти на помощь воображенію и въ такихъ случаяхъ, когда для доказательства приходится пользоваться вращеніемъ или перегибаніемъ фигуры.

Конечно, это необходимо лишь въ началѣ курса, въ маломъ сравнительно возрастѣ. Чтобы не избаловать воображенія подобными пріемами, полезно продѣланное на модели упражненіе сейчасъ же повторять на чертежѣ, который такимъ образомъ будетъ слѣдующей стадіей отвлеченія.

Если признать, что первою ступенью геометрическаго развитія должно быть образованіе формъ, то модели въ этомъ дѣлѣ будутъ имѣть вполнѣ опредѣленное значеніе, давая болѣе конкретныя формы, чѣмъ простой чертежъ.

III.

Далѣе, по мѣрѣ изученія геометріи, польза моделей какъ пособниковъ воображенію, блѣднѣетъ—и справедливо, потому что ученику уже пора привыкать къ отвлеченію, потому что ученику, проработавшему годъ по геометріи, можно предъявлять уже другія требованія, болѣе высокія, чѣмъ къ начинающему ученику.

Здѣсь на первый планъ выступаетъ новое значеніе, новая особенность медели—и именно подвижной модели.

Выяснимъ на самомъ простомъ примѣрѣ эту вторую особенность геометрической модели.

Пусть намъ нужно изучить свойство угловъ $\triangle$-ка. Предложимъ каждому ученику взять листъ бумаги и приготовить треугольникъ какой угодно формы (можно даже заказать это какъ домашнюю работу).

Пусть они отмѣтятъ цифрами углы $\triangle\triangle$-въ, оторвутъ эти углы и сложатъ. У всѣхъ учениковъ углы образуютъ въ суммѣ $2d$. Одинъ подобный опытъ, произведенный предъ учениками на доскѣ, не удивитъ ихъ: мало ли что бываетъ! Но вотъ когда 30—40 треугольниковъ, и косоугольныхъ, и прямоугольныхъ, и тупоугольныхъ, даютъ одинъ и тотъ же результатъ—это обстоятельство ихъ поражаетъ. Всегда слышишь вопросъ: «Да почему это такъ?» Одинъ опытъ есть случайное явленіе, но когда онъ оправдывается много разъ, то это уже указываетъ на существованіе опредѣленнаго **закона.**

Тогда только у учениковъ является потребность объясненія этого закона. Геометрическая теорема является, такимъ образомъ, выраженіемъ нѣкотораго общаго закона, а доказательство ея есть отвѣтъ на вопросъ учениковъ, «почему это всегда такъ бываетъ?» Доказательство—не только справедливости закона, но и его всеобщности для формъ даннаго вида.

Такимъ образомъ, **усвоеніе геометрическихъ истинъ,** наиболѣе естественнымъ для дѣтскаго ума путемъ, **должно начинаться съ отдѣльныхъ частныхъ случаевъ, и теорема является ихъ обобщеніемъ,—извѣстнымъ закономъ, обнимающимъ весь комплексъ однородныхъ явленій.**

Задача провести этотъ принципъ чрезъ всю геометрію всегда казалось мнѣ заманчивой, но и до сихъ поръ представляется трудно выполнимой.

Все дѣло въ томъ, какъ создать эти частные случаи, не загромождая урока? Конечно, наиболѣе естественный и во многихъ случаяхъ незамѣнимый пріемъ—это черченіе геометрическихъ формъ, многихъ однородныхъ формъ, изученіе ихъ и выясненіе общаго для нихъ закона. Во многихъ случаяхъ это даетъ удовлетворительные результаты. Но здѣсь можно встрѣтиться съ опасностью загромоздить урокъ созданіемъ этихъ частныхъ случаевъ. И это стремленіе избѣжать загроможденія урока вызвало мысль о подвижныхъ моделяхъ, т.-е. такихъ измѣняющихся формахъ, которыя могутъ отдѣляться отъ плоскости доски или бумаги, прикрѣпляющихъ простой геометрическій чертежъ.

Возьмемъ, напримѣръ, подвижной параллелограммъ. Разсматривая его форму, мы **видимъ,** что діагональ дѣлитъ параллелограммъ на 2 равныхъ $\triangle$-ка, и обѣ діагонали дѣлятъ другъ друга пополамъ. Измѣняя форму пар-мма, мы видимъ, что измѣняется величина $\triangle$-въ, величина діагоналей, **но $\triangle\triangle$-ки остаются равными между собою, и діагонали постоянно дѣлятъ другъ друга пополамъ.** Этимъ подчеркивается (и не словомъ, а дѣломъ) на опытѣ общность свойствъ параллелограмма, указанныхъ выше. Подвижность модели разрѣшаетъ вопросъ о созданіи многихъ частныхъ случаевъ такъ какъ одна модель, измѣняясь, создаетъ множество формъ

Далѣе:

При изложеніи геометріи формы ея обыкновенно остаются неизмѣняемыми, закостенѣвшими. Правда, мы съ ними производимъ разныя манипуляціи: накладываемъ одну форму на другую, перегибаемъ, перевертываемъ, вращаемъ ихъ,— но сами то формы не измѣняются.

Вводить понятіе о перемѣнныхъ величинахъ стало обязательнымъ лишь въ отдѣлѣ объ окружности и круглыхъ тѣлахъ. А между тѣмъ было бы очень поучительно провести принципъ измѣненія формъ чрезъ весь курсъ геометріи (конечно, насколько это позволяютъ возрастъ и знанія учениковъ). Достаточно указать, что при этомъ пропорціональную зависимость въ геометріи можно было бы изложить не какъ равенство отношеній 4-хъ постоянныхъ формъ, а въ видѣ равенства двухъ перемѣнныхъ величинъ, что формулу $K=\pi R^2$ можно было бы разсматривать какъ законъ измѣненія площади круга при измѣненіи радіуса. π—тогда являлось бы коэффиціентомъ пропорціональности и т. д.

При этомъ подвижныя модели могли бы сыграть значительную уясняющую служебную роль. Насколько рисунокъ на доскѣ закрѣпитъ форму, настолько подвижная модель подчеркнетъ измѣняемость формы и позволитъ прослѣдить процессъ измѣненія одной величины въ зависимости отъ другой и неизмѣняемость третьей, если таковая при этомъ окажется.

IV.

Хотя примѣненіе подвижныхъ геометрическихъ моделей возможно на протяженіи всего курса геометріи, но главное ихъ значеніе въ тѣхъ отдѣлахъ, гдѣ изучаются, главнымъ образомъ, числовыя соотношенія геометрическихъ формъ. Обычный методъ, которымъ излагаются отдѣлы, таковъ: дается извѣстное **общее** свойство геометрической формы, разъясняется его сущность, доказывается его справедливость и, наконецъ, оно закрѣпляется въ умѣ ученика примѣненіемъ къ рѣшенію ряда вопросовъ и задачъ. Если это свойство выражается извѣстнымъ числовымъ соотношеніемъ, то зависимость между геометрическими формами выражается въ видѣ алгебраической формулы. Ученики уже **послѣ** доказательства (въ задачахъ) подставляютъ въ эти формулы числовыя значенія. Выражаясь кратко, путь, проходимый при этомъ учениками, таковъ: геометрическое свойство, формула, число.

Этотъ путь не изъ лучшихъ, особенно въ началѣ курса алгебры и геометріи. Для сознательнаго отношенія къ геометрической формулѣ, особенно такой, гдѣ приходится оговариваться, что подъ буквами *a, p, r* мы подразумѣваемъ числа, измѣряющія извѣстныя линіи, — для сознательнаго отношенія къ такимъ формуламъ полезна, быть-можетъ, даже необходима предварительная **числовая подготовка**; иначе говоря, **необходимо дать рядъ однородныхъ частныхъ примѣровъ, изъ которыхъ учащійся самъ бы могъ вывести извѣстное свойство, и, обобщивъ его, могъ бы выразить это свойство формулой.**

Напримѣръ, измѣривъ діаметры и длину окружности нѣсколькихъ кружковъ и найдя отношеніе каждой окружности къ своему діаметру (при тщательномъ измѣреніи и длинѣ окружности не менѣе 15,20 см. точность достигаетъ 0,01), учащійся **замѣчаетъ**, что отношенія эти равны, и выражаетъ это подмѣченное свойство формулой. Этимъ подготовляется почва для доказательства теоремы: отношеніе окружности къ діаметру есть величина постоянная.

Или, построивъ нѣсколько треугольниковъ съ биссектрисами угловъ и измѣривъ отрѣзки, на которые биссектриса дѣлитъ сторону △-ка, взявъ отношеніе этихъ отрѣзковъ и отношеніе остальныхъ двухъ сторонъ, легко можно подмѣтить, что эти отношенія равны (при классной работѣ достаточно ограничиваться одной значущей цифрой). **Это повторяющееся** равенство отношеній даетъ основаніе **подмѣтить законъ, выраженный уже** въ общемъ видѣ, въ видѣ общей алгебраической формулы: отношеніе отрѣзковъ, на которые биссектриса дѣлитъ сторону $\triangle$-ка, равно отношенію двухъ другихъ сторонъ. Естественный путь здѣсь такой: 1) **рядъ частныхъ (числовыхъ примѣровъ)**, 2) **обобщеніе ихъ—формула**, 3) **доказательство ея всеобщности**, 4) **рѣшеніе задачъ** и вопросовъ для связи открытаго вновь свойства съ свойствами, прежде изученными.

Какимъ же способомъ дать ученикамъ эти частные случаи для вывода общаго свойства? Въ первомъ изъ приведенныхъ выше примѣровъ можно дать для измѣренія правильно сдѣланные кружки или правильно начерченные большіе круги на полу. Въ многихъ случаяхъ приходится ограничиваться черченіемъ на доскѣ и измѣреніемъ начерченныхъ формъ. Нечего говорить, какъ кропотлива и ненадежна такая работа. Отсюда вытекаетъ необходимость созданія геометрической формы, не застывшей, а могущей принимать множество видовъ, могущей дать множество частныхъ случаевъ, иначе говоря—формы подвижной,—формы, достаточно точно построенной для измѣренія при классной работѣ. Вотъ еще новыя соображенія, оправдывающія введеніе подвижныхъ моделей въ видѣ пособія при изученіи элементарной геометріи.

Такимъ образомъ, методическое значеніе подвижныхъ моделей заключается въ томъ, что онѣ даютъ классу необходимый числовой матеріалъ, послѣ обработки котораго какъ обобщеніе получается геометрическая формула.

Но при этомъ мы можемъ встрѣтиться съ возраженіемъ, что вообще вычисленія—вещь чуждая чистой геометріи, что вычислительной сторонѣ слѣдуетъ въ курсѣ элементарной геометріи отвести третье мѣсто, основывая убѣжденіе учениковъ или на чисто геометрической наглядности, или на строгой логикѣ. Это мнѣніе нельзя признать справедливымъ и послѣдовательнымъ.

Вводя въ геометрію алгебраическія формулы, дѣйствія надъ геометрическими величинами, какъ надъ количествами, мы уже нарушили древне-греческую чистоту геометрическаго ученія, и ужъ если мы рѣшились основывать чисто геометрическіе выводы на преобразованіяхъ алгебраическихъ формулъ, то необходимо, чтобы формулы эти имѣли для ученика вполнѣ осязательный смыслъ, чтобы онъ въ буквахъ, входящихъ въ составъ этихъ формулъ, научался видѣть реальныя величины, а не однѣ лишь буквы. Необходимой подготовкой къ этому является число.

Ученикъ долженъ изъ нѣсколькихъ однородныхъ примѣровъ путемъ непосредственнаго измѣренія получить извѣстныя числовыя соотношенія и затѣмъ убѣдиться, что эта зависимость не случайна, а постоянна, откуда получается идея о постоянствѣ извѣстнаго геометрическаго свойства; это дастъ ему право обобщить эти соотношенія. т.-е., замѣнивъ числа буквами, выразить соотношеніе въ общемъ видѣ.

Конечно, при измѣреніяхъ получатся ошибки, зависящія отъ несовершенства способовъ измѣренія, но ученикъ еще изъ ариѳметики долженъ знать, что всякое измѣреніе неточно и все дѣло при этомъ въ установленіи размѣровъ ошибки и степени точности. Упражненія геометрическаго характера дадутъ удобный поводъ учителю повторить и на новомъ матеріалѣ нѣсколько развить этотъ важный вопросъ о точности чиселъ, получающихся при измѣреніяхъ, и о степени точности операцій, производимыхъ надъ этими числами.

V.

Итакъ:

Особенностями подвижной модели, сравнительно съ обыкновенными рисунками на доскѣ, являются: во-первыхъ, большая **точность** ея, сравнительно съ рисункомъ, сдѣланнымъ въ классѣ въ теченіе ограниченнаго времени одного урока.

Во-вторыхъ, самая **подвижность** ея, дающая возможность а) получить множество частныхъ примѣровъ одного и того же свойства данной формы и б) прослѣдить эволюцію самой формы—напримѣръ, прослѣдить измѣненіе величины стороны △-ка при превращеніи его изъ косоугольнаго въ прямоугольный и въ тупоугольный. Эта подвижность облегчаетъ введенie въ элементарную геометрiю представленiя объ **измѣняющихся** формахъ, о перемѣнныхъ величинахъ геометрiи.

Въ-третьихъ, подвижность модели даетъ представленie о такъ называемыхъ **предѣльныхъ** случаяхъ, при которыхъ извѣстная форма достигаетъ предѣла своего измѣненiя, превращаясь частью въ новую форму—напр., $\triangle$-къ въ прямую, хорда въ точку, сѣкущая въ касательную и т. д.

Затѣмъ, подвижная модель болѣе приспособлена для вычислительныхъ упражненiй, такъ какъ на ней уже нанесены дѣленiя, что сильно сокращаетъ время. Затѣмъ, давая множество различныхъ положенiй извѣстной формы въ самое короткое время, модель можетъ въ это время дать громадный числовой матерiалъ, которымъ можно занять весь классъ.

Кромѣ этихъ общихъ особенностей, каждая модель имѣетъ свои особенности, отличающiя ее отъ соотвѣтствующихъ чертежей. Эти особенности могутъ быть выяснены, конечно, при знакомствѣ съ каждою моделью отдѣльно.

Не лишнимъ будетъ также отмѣтить, что подвижныя модели, относящiяся къ начальнымъ отдѣламъ геометрiи, могутъ быть полезны прежде всего, конечно, тамъ, гдѣ существенною частью доказательства является движенie, въ формѣ наложенiя, приложенiя, перегибанiя, вращенiя и т. п. движенiй.

Наконецъ, большую пользу можетъ оказать подвижная модель въ пропедевтическомъ курсѣ геометрiи, проходимомъ въ томъ возрастѣ, когда дѣтскiй умъ можетъ понять сущность извѣстной геометрической истины, но не въ состоянiи связать ее строго логическимъ путемъ,—путемъ доказательства, съ ранѣе извѣстными истинами. Здѣсь приходится прибѣгать къ убѣжденiю при помощи наглядности.

Геометрическая подвижная модель, давая не одинъ, а множество примѣровъ одной и той же геометрической истины, способна быть болѣе убѣдительной, чѣмъ простой чертежъ.

Предлагаемая ниже система подвижныхъ моделей даетъ понятіе объ идеѣ выполненія и примѣненія такихъ моделей, осуществленіе же ея можетъ выливаться въ разнообразныя формы. Важно, чтобы идея эта была проведена возможно полнѣе черезъ весь курсъ геометріи. Возможно, что личный опытъ каждаго педагога укажетъ тѣ поправки и дополненія, которыя слѣдуетъ внести въ приводимую ниже серію моделей, и поэтому было бы правильнымъ разграничивать критику самого принципа отъ критики его осуществленія.

VI.

Описываемыя ниже модели могутъ быть раздѣлены на три категоріи:

Въ первую войдутъ модели, не имѣющія большого методическаго значенія. Онѣ имѣютъ значеніе лишь какъ иллюстраціи объясненій учителя, который, напр., говоритъ: «перегибаемъ △-къ» и на самомъ дѣлѣ перегибаетъ модель.

Отличіе ихъ отъ моделей 2-й и 3-й категоріи въ томъ, что онѣ представляютъ единичный случай: одна единственная фигура превращается въ одну единственную же, напр., кругъ, при перегибаніи даетъ полукругъ, равнобедренный треугольникъ превращается въ прямоугольный △-къ, трапеція—въ параллелограммъ и т. д. Одна модель этой категоріи будетъ служить и л л ю с т р а ц і е й и не дастъ права вывести опредѣленный законъ изъ нѣсколькихъ случаевъ. Но если такія модели сдѣлаетъ каждый изъ учениковъ, то совокупность ихъ изслѣдованій дастъ уже представленіе объ опредѣленномъ з а к о н ѣ.

Конечно, многія изъ нихъ можно замѣнить чертежомъ, но преимущество моделей состоитъ лишь въ томъ, что онѣ уже готовы, на приготовленіе ихъ не надо тратить дорогого времени, онѣ точнѣе и, наконецъ, нагляднѣе.

Къ такимъ моделямъ относятся:

Дѣйствія надъ отрѣзками.
Дѣйствія надъ углами.
Свойства смежныхъ угловъ.
Вертикальные углы.
Образованіе △-ка.
Образованіе равнобедреннаго △-ка и свойство его биссектрисы.
Равенство △△-ковъ.
Параллельность прямыхъ.
Сумма угловъ △-ка.
Свойство трапеціи.
Дѣйствія надъ дугами.
Свойства діаметра и касательной въ кругѣ.
Равновеликость и равенство фигуръ.
Непосредственное измѣреніе площадей.
Площадь параллелограмма.
Площадь △-ка прямоугольнаго.
Площадь всякаго треугольника.
Площадь ромба.
Площадь трапеціи.
Теорема Пиѳагора.

Модели 2-й категоріи, въ силу самой своей подвижности имѣютъ большее методическое значеніе. Такая модель представляетъ собою опредѣленную геометрическую фигуру, могущую измѣняться, могущую принимать различныя формы, но въ то же время оставаться фигурой того же вида. Напр., треугольникъ можетъ переходить изъ косоугольнаго въ прямоугольный и затѣмъ въ тупоугольный и т. д.

Данная геометрическая фигура обладаетъ даннымъ свойствомъ; мы измѣняемъ видъ этой фигуры, она, такимъ образомъ, принимаетъ безчисленное множество формъ, но свойство фигуры остается постояннымъ. Это постоянное свойство есть з а к о н ъ, которому подчиняются всѣ фигуры одного вида.

Напр.: взявъ раздвижной ромбъ съ діагоналями, мы замѣчаемъ, что какую бы форму ему мы ни дали, всегда его діагонали останутся перпендикулярными другъ къ другу и будутъ дѣлить его углы пополамъ.

Значеніе модели и будетъ заключаться въ томъ, что она будетъ подчеркивать постоянство свойства какой-нибудь фигуры, независимо отъ ея формы.

Ко 2-й категоріи относятся слѣдующія модели:

Внѣшній уголъ $\triangle$-ка.

Зависимость между стороною и противоположнымъ угломъ въ одномъ треугольникѣ.

Измѣненіе проекціи отрѣзка съ измѣненіемъ наклона его къ оси.

Разстояніе точки A отъ B и C и положеніе ея по отношенію къ $\perp$ изъ средины BC.

Два перпендикуляра къ одной и той же прямой.

Биссектрисы двухъ смежныхъ угловъ.

Углы съ соотвѣтственно параллельными сторонами.

Свойства параллелограмма.

Свойства ромба.

Свойства средней линіи трапеціи.

Дѣйствія надъ дугами.

Относительное положеніе окружностей.

Центральные углы и соотвѣтственныя дуги.

Отношеніе площадей подобныхъ $\triangle\triangle$-ковъ.

Наконецъ, модели 3-й категоріи сходны съ моделями 2-й тѣмъ, что тамъ и здѣсь образуется множество видовъ одной и той же фигуры, но свойство данной фигуры представляетъ опредѣленное количественное соотношеніе, выражаемое алгебраической формулой. Въ этомъ случаѣ законъ выясняется, какъ обобщеніе отдѣльныхъ вычислительныхъ операцій. Напр., вращая хорду около одной внутренней точки, мы видимъ, что, какъ сама хорда, такъ и отрѣзки ея измѣняются. Но, измѣривъ, хотя бы въ сантиметрахъ, два ея отрѣзка и перемноживъ эти числа, мы находимъ нѣкоторое число, которое будетъ одинаково для всевозможныхъ хордъ, проходящихъ черезъ одну точку. Это постоянство числа и есть законъ, но уже носящій числовой характеръ, и эта особенность приводитъ къ измѣрительнымъ и вычислительнымъ упражненіямъ, которыя и составляютъ главное отличіе моделей 3-й категоріи. Для большаго удобства и точности измѣряемыя части моделей раздѣлены на сантиметры.

Такъ какъ измѣренія не могутъ быть абсолютно точны,— не точнѣе, чѣмъ до 1 мм., то и вычисленія съ полученными отъ измѣреній числами не могутъ дать обсолютно точныхъ результатовъ, приходится вычислять съ опредѣленнымъ приближеніемъ, округлять получаемые результаты. Эти упражненія могутъ быть полезны въ томъ отношеніи, что даютъ возможность судить о степени точности вычисленій, производимыхъ подъ приближенными числами. Модели, приготовленныя достаточно тщательно и указанныхъ ниже размѣровъ, даютъ 2—3 вѣрныхъ цифры.

Къ моделямъ этой категоріи относятся:

Универсальная модель круга.

Свойство сѣкущей △-ка, проходящей параллельно одной изъ сторонъ его.

Свойство прямой, вращающейся около точки и пересѣченной параллельными линіями.

Биссектриса угла △-ка.

Извлеченіе квадр. $\sqrt{}$ изъ чиселъ.

Теорема Пиѳагора (числовое выраженіе ея).

Зависимость между сторонами косоугольнаго и тупоугольнаго △-ка.

Пропорціональныя линіи въ кругѣ: а) хорды, b) сѣкущія, c) касательныя, d) перпендикуляръ къ діаметру.

Свойства прямоугольнаго △-ка, пересѣченнаго перпендикуляромъ, опущеннымъ на гипотенузу изъ вершины прямого угла.

Отношеніе площадей подобныхъ △△-въ.

Техническія указанія для изготовленія геометрическихъ моделей *).

Почти всѣ модели изготовляются изъ картона, кромѣ немногихъ, которыя требуютъ болѣе прочной основы и по этому устраиваются на доскѣ.

А. Матеріалъ.

1. Картонъ.

а) Для основы моделей можетъ служить какой угодно картонъ, лишь бы онъ былъ оклеенъ достаточно плотной бумагой. Но лучше всего, особенно тамъ, гдѣ на картонѣ приходится чертить, взять 1) англійскій нотный темно-желтаго цвѣта или 2) сѣрый очень плотный (№ 10) (необходимо оклеивать бумагой).

б) Для подвижныхъ частей—бристольскій (6 - листный) или карточный.

Миллиметровая бумага.

Продается въ чертежныхъ и писчебумажныхъ магазинахъ. Лучше выбирать бумагу съ рѣзкой отчетливой сѣткой. Въ нѣкоторыхъ моделяхъ (№№ 34, 35) бываетъ необходимо пользоваться двумя сортами бумаги: основу оклеивать мм. бумагой одного цвѣта, а полоски подвижныя или неподвижныя—другого цвѣта.

---

*) Составлены при содѣйствіи преподавателя ручного труда женской гимназіи Ботъ въ Москвѣ—В. Н. Сорокина. П. К.

3. Клей.

а) Крахмалъ (въ москательныхъ лавкахъ)—для клейки (не смѣшивать съ крахмаломъ для бѣлья) ц. 10 к. фунтъ. Способъ заварки обычный. Насыпавъ въ стаканъ столовую ложку крахмалу, добавить 2—3 ложки сырой воды, размѣшать, обративъ все въ массу вида сметаны или густыхъ сливокъ, и затѣмъ медленно лить въ стаканъ крутого кипятку, пока вся масса мгновенно не станетъ полупрозрачной и очень вязкой.

б) Столярный клей—худшіе сорта. Расколоть на куски величиной съ кусокъ сахара, залить водою—лучше холодной. Продержать сутки; за это время—клей расползется въ студень, затѣмъ поставить на огонь и все время помѣшивать; снять раза два пѣну. Прокипятить раза два.

При разогрѣваніи, если надо, доливать кипяченой водой. Чтобы клей не сохъ слишкомъ скоро, поставить жестянку съ нимъ въ другую, наполненную кипяткомъ.

в) Тонкія полосы можно приклеивать синдетикономъ, но при этомъ выдавивъ изъ трубочки валикъ клея, надо, проводя ребромъ картона, распредѣлить его по всей полоскѣ.

4. Для нѣкоторыхъ моделей требуется **ластикъ**—резинка. Лучше для этой цѣли взять круглый ластикъ—чернаго или бѣлаго цвѣта, смотря по фону, если фонъ свѣтлый, то чернаго, если темный, то бѣлаго цвѣта.

5. Блочки для скрѣпленія движущихся частей. (См. Инструменты).

В. Инструменты.

1. **Ножъ.** Бумагу и картонъ надо рѣзать ножомъ, а не ножницами, потому что только при этомъ условіи получаются строго прямолинейные обрѣзы, что для моделей очень важно.

Ножъ обычный переплетный, съ лезвеемъ закругленнымъ съ двухъ сторонъ. Ножъ съ прямолинейной спинкой деретъ бумагу. Хорошъ и обыкновенный перочинный ножъ, но онъ скоро разбалтывается въ скрѣпахъ и портится.

2. **Линейка.** Чертежныя линейки очень быстро изрѣзываются и дѣлаются негодными. Лучше для этой цѣли имѣть фальцовочную линейку.

3. **Щипцы** для блочковъ и для скрѣпленія подвижныхъ частей—въ писчебумажныхъ, канцелярскихъ принадлежностей и въ сапожныхъ магазинахъ. Ц. 2—3 рубля. Блочки выбирать подлиннѣе, а иногда и полезно вставлять одинъ блочекъ въ другой, другъ навстрѣчу другу.

4. **Кальку** (для шарнировъ болѣе точныхъ моделей)—коленкоровую—въ писчебумажныхъ и техническихъ магазинахъ.

Главною составною частью моделей должны быть **полоски** бристольскаго картона, играющія роль геометрическихъ отрѣзковъ и линій. Ихъ слѣдуетъ заготовить оптомъ для всѣхъ моделей сразу, взявъ картонъ (6-листку) и разрѣзавъ его въ длину на полоски шириною въ 1 см. На другой листъ наклеить синдетикономъ или столярнымъ клеемъ мм. бумагу, при чемъ валикъ синдетикона выдавленный на бумагу надо распластать по ней, проведя ребромъ хорошо обрѣзаннаго картона. Затѣмъ листъ съ наклеенной бумагой положить сохнуть подъ прессъ между двумя листами газеты на день или два и острымъ ножомъ разрѣзать строго по линіямъ на полоски въ 1 см. шириною; это разрѣзываніе довольно трудная вещь, требующая и напряженнаго вниманія и простой силы. Разрѣзанныя полоски всего лучше держать или приколотыми обоими концами къ стѣнѣ или зажатыми въ папкѣ, иначе онѣ могутъ покоробиться.

Важную роль въ нѣкоторыхъ моделяхъ играютъ **шарниры**, около которыхъ вращаются полоски (рис. 1). Практичнѣе всего осуществить ихъ такимъ образомъ: берется лучшая калька, оклеивается бумагой того же цвѣта, какъ и общій фонъ модели (рекомендую глянцовитую, плотную, темно-синюю оберточную бумагу), просушивается, и изъ нея вырѣзаются ножницами кружочки діаметромъ въ 1 см., которые и приклеиваются затѣмъ къ полоскамъ. Центръ кружка долженъ быть центромъ вращенія полоски и началомъ отсчета. Издали на 2—3 шага на фонѣ этотъ кружокъ совершенно незамѣтенъ. Затѣмъ прокалываются булавкой (тонкой, лучше всего для бабочекъ) до самой ея головки,

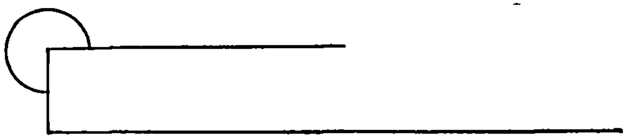


Рис 1. Полоска съ шарниромъ на концѣ.

кружокъ и картонъ и за картономъ наклеенный еще круглый кусочекъ картона для того, чтобы булавка не разбалтывалась, и конецъ булавки откусывается кусачками. Этотъ способъ разрѣшаетъ вращеніе около одной точки двухъ и даже 3-хъ полосокъ.

Подвижныя модели.

Приготовленіе и примѣненіе на урокѣ отдѣльныхъ моделей.

I. Отрѣзокъ.

Модель отрѣзка изготовляется изъ полоски картона бѣлаго плотнаго въ 1 см. ширины и въ 30—50 см. длины, прикрѣпленной къ доскѣ кнопками, которыя будутъ отмѣчать конечныя точки отрѣзка.

Задача 1-ая.

Даны два отрѣзка $\overline{a}$ и $\overline{в}$ (рис. 2). Для сложенія ихъ

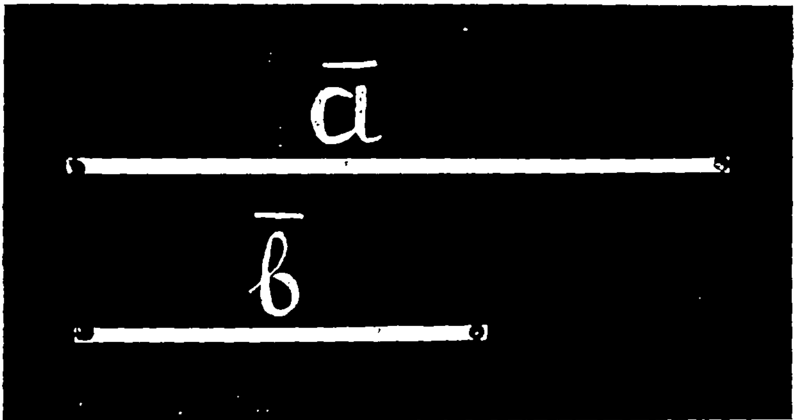


Рис. 2. Даны два отрѣзка: $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

проведемъ на доскѣ прямую линію, приколемъ на ней кнопками сначала отрѣзокъ $\overline{a}$, а потомъ къ его концу въ томъ же направленіи отрѣзокъ $\bar{в}$. Оба они сольются въ одинъ отрѣзокъ AC, который и будетъ ихъ суммой:

$$\bar{a}+\bar{в}=\overline{AC} \text{ (рис. 3).}$$

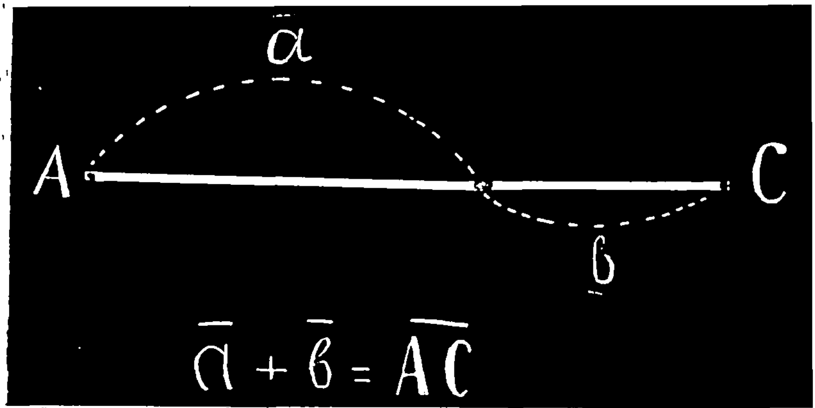


Рис. 3. Сложеніе отрѣзковъ a и b.

Повторивъ то же съ начерченными отрѣзками, перенося ихъ циркулемъ и линейкой на произвольную прямую, рѣшимъ ту же задачу черченіемъ.

Задача 2. **Изъ отрѣзка $\bar{a}$ вычесть отрѣзокъ $\bar{в}$.**

Вычитаніе отрѣзковъ дѣлается такимъ же перенесеніемъ на одну прямую, но вычитаемый отрѣзокъ накладывается на уменьшаемый, и при этомъ въ противоположную сторону (рис. 4).

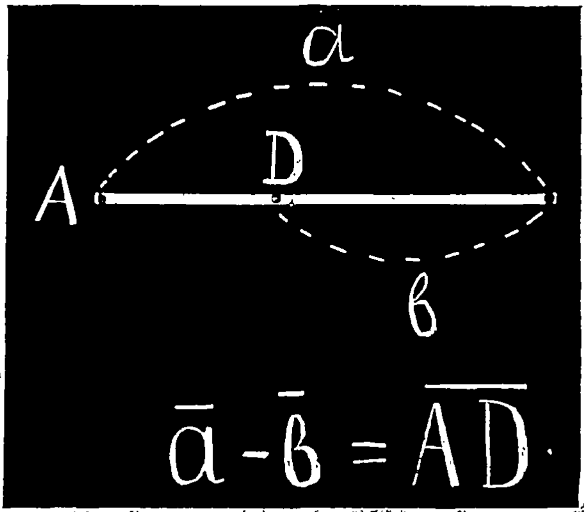


Рис. 4. Вычитаніе отрѣзковъ $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

$$\overline{a}-\overline{в}=\overline{AC}$$

Повторимъ эту задачу черченіемъ.

Подобнымъ же способомъ рѣшаемъ задачи:

Задачи:

3) Построить отрѣзокъ $=3a$ $(a+a+a)$ (рис. 5).

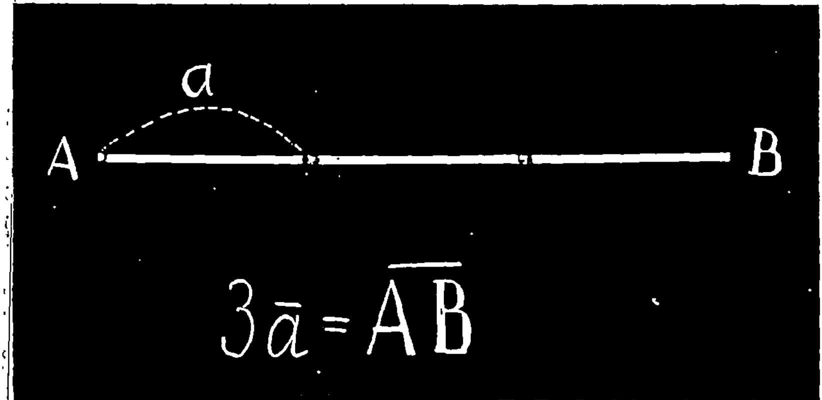


Рис. 5. Умноженіе отрѣзка $\overline{a}$ на 3.

4) Построить: $3a+2в$.

5) Построить: $5a-3в$.

Каждую изъ этихъ задачъ повторяемъ черченіемъ.

6) Раздѣлить отрѣзокъ пополамъ.

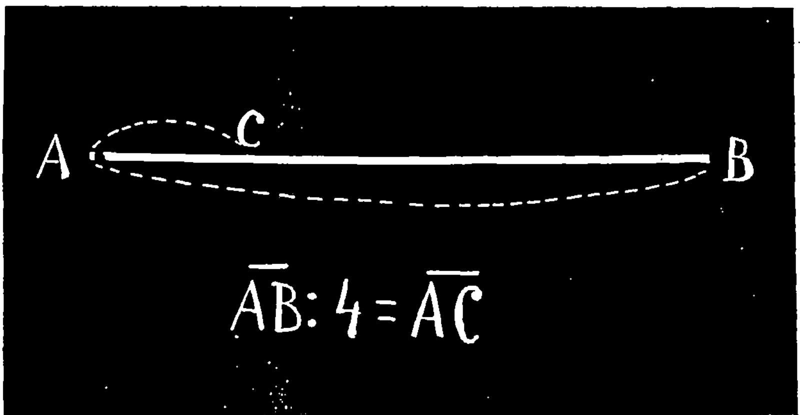


Рис. 6. Дѣленіе отрѣзковъ.

Для дѣленія модели пополамъ достаточно ее перегнуть и сложить вдвое. При черченіи, въ виду невозможности такого пріема, приходится примѣнять другой (обычный) способъ.

Задача 7. **Раздѣлить отрѣзокъ на 4, на 8 частей** (рис. 6).

Въ приготовительномъ курсѣ ученики убѣждаются въ правильности дѣленія отрѣзка при помощи циркуля. Въ систематическомъ курсѣ доказательство откладывается на позднее время, или же все дѣйствіе дѣленія отрѣзка переносится въ позднѣйшую часть курса.

II. Уголъ.

Образованіе угла двумя лучами, выходящими изъ одной точки, можно осуществить при помощи двухъ полосокъ картона (лучей), скрѣпленныхъ въ одномъ концѣ (рис. 7).

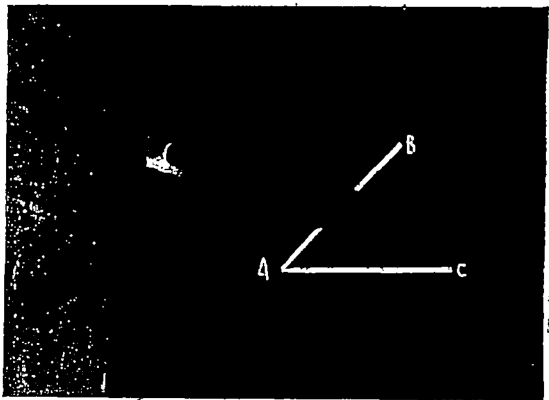


Рис. 7. Острый уголъ.

Будемъ вращать лучъ AB въ направленіи, указанномъ стрѣлкой. Тогда наклонъ луча AB къ лучу AC будетъ увеличиваться, будетъ увеличиваться уголъ BAC, образованный этими лучами.

При этомъ важно показать слѣдующія положенія:

a) Уголъ увеличивается.

b) Уменьшается.

c) Уголъ=0.

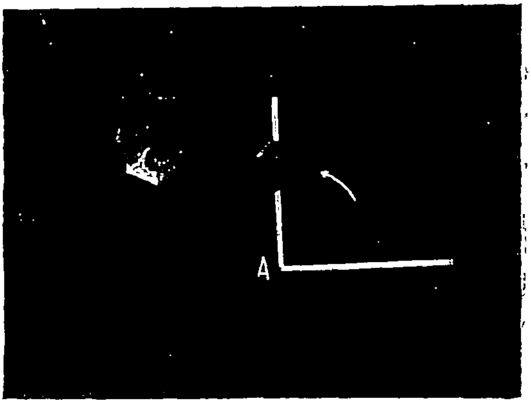


Рис. 8. Прямой уголъ.

d) Уголъ прямой (рис. 8).

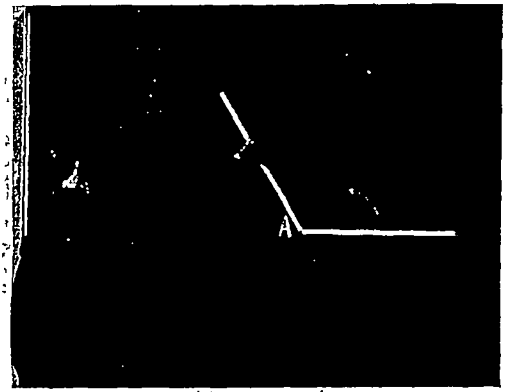


Рис. 9. Тупой уголъ.

e) Уголъ тупой (рис. 9).

f) Уголъ развернутый=2 прямымъ (рис. 10).

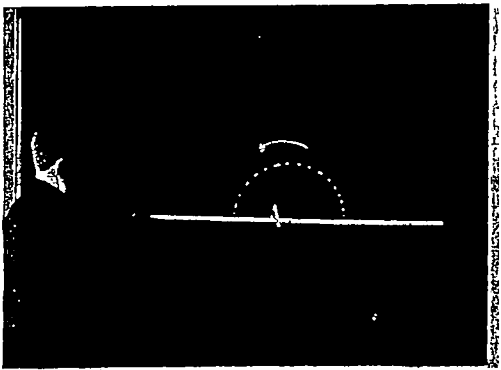


Рис. 10. Развернутый уголъ.

g) Уголъ больше 2-хъ прямыхъ.
h) Уголъ=3 прямымъ (рис. 11).

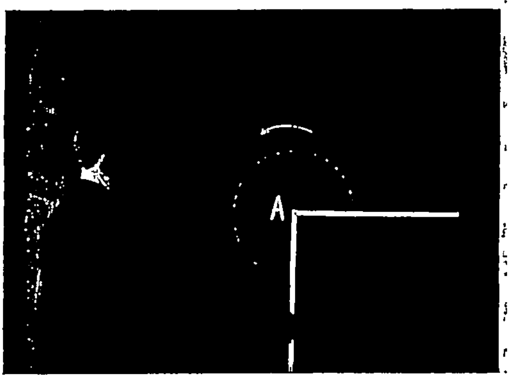


Рис. 11. Уголъ равный 3*d*.

i) Уголъ болѣе 3 прямыхъ.

Далѣе задачи на построеніе: построить ∠ равный анному.

III. Дѣйствія надъ углами.

Можно образовать уголъ проще: просто вырѣзать его изъ бумаги (рис. 12). При этомъ важно обратить вниманіе на то, что въ данной модели уголъ образуется только

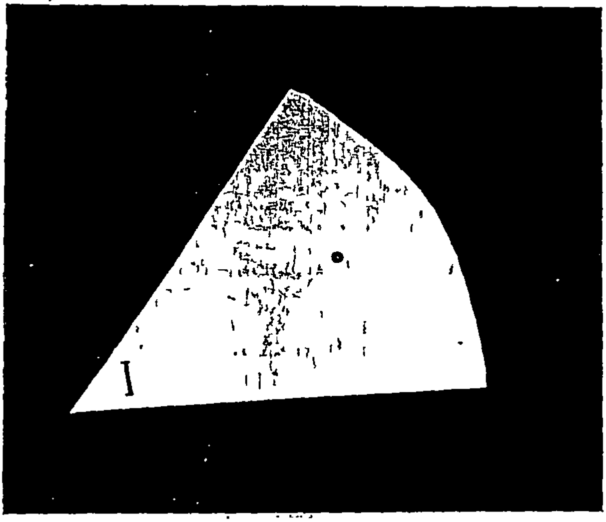


Рис. 12.

его ровно обрѣзанными краями, а на то, что содержится между ними, вниманія обращать не слѣдуетъ.

a) Сложеніе угловъ.

Чтобы сложить углы I и II (рис. 13), надо приложить I къ II, такъ чтобы стороны ихъ совпали. $\angle ABC$ бу-

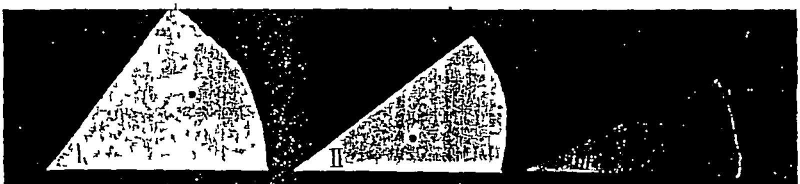


Рис. 13.

детъ ихъ суммой (рис. 14). Повторимъ эту задачу построеніемъ.

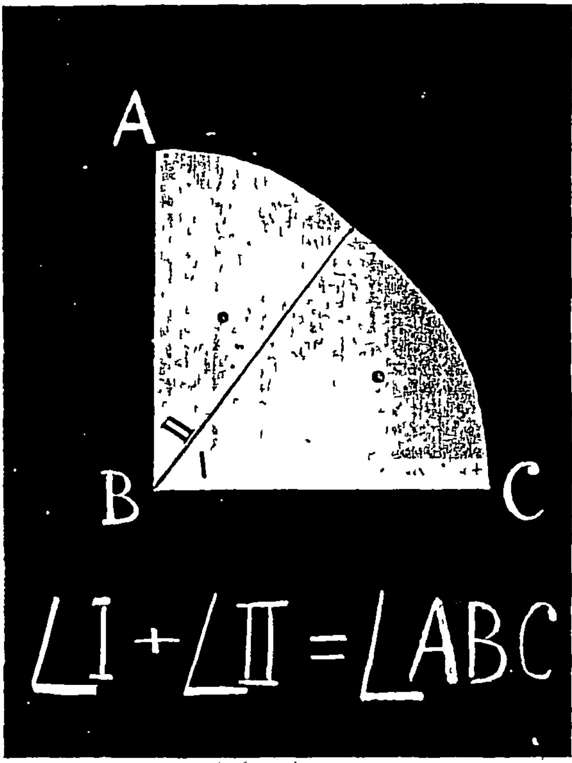


Рис. 14. Сложеніе угловъ.

б) Вычитаніе угловъ.

Для вычитанія угловъ (рис. 13) надо ихъ вырѣзать изъ бумаги различныхъ цвѣтовъ, тогда разность угловъ выяснится отчетливѣе.

Какъ и при вычитаніи отрѣзковъ, вычитаемый уголъ накладываемъ на уменьшаемый въ противоположномъ направленіи (рис. 15).

в) Умноженіе угловъ.

Для умноженія угловъ надо вырѣзать нѣсколько равныхъ угловъ изъ бумаги одного цвѣта и приложить ихъ другъ къ другу послѣдовательно, какъ при сложеніи.

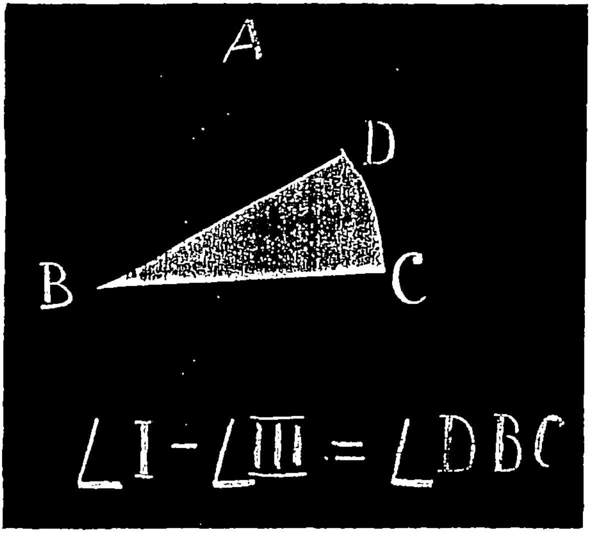


Рис. 15. Вычитаніе угловъ.

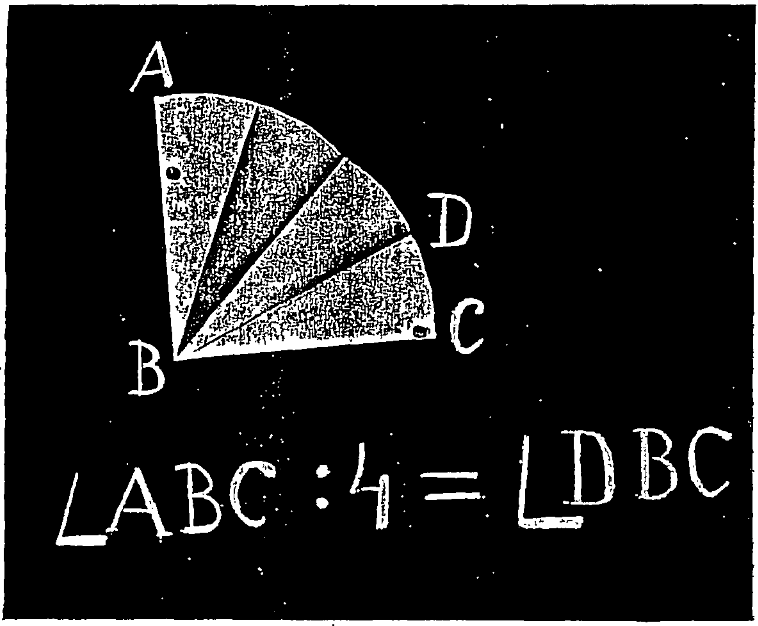


Рис. 16. Дѣленіе угла на 4 равныхъ части.

Черченіе: Построить уголъ=$3a$.

г) **Дѣленіе угла пополамъ.**

Перегибая и расправляя модель угла, осуществляемъ дѣленіе угла пополамъ. Граница, дѣлящая уголъ пополамъ— прямая линія—равнодѣлящая.

Повторимъ эту задачу черченіемъ.

д) **Дѣленіе угла на 4, 8 и т. д. равныхъ частей** перегибаніемъ и черченіемъ (рис. 16).

IV. Смежные углы.

Модель устроена изъ 3 полосокъ по 50 см., сколотыхъ въ концѣ одной кнопкой.

1) Сложимъ два угла и, оставивъ неподвижной стороны AC и AB, третью AD будемъ вращать (рис. 17) до тѣхъ

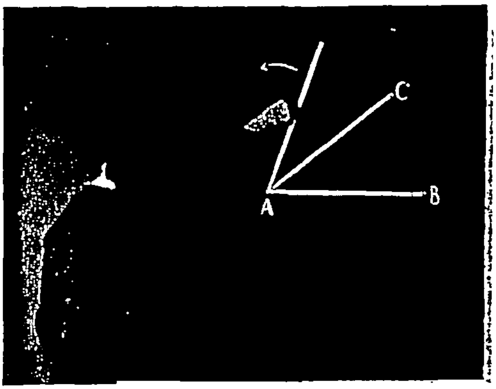


Рис. 17. Образованіе смежныхъ угловъ.

поръ, пока AB и AD не выпрямятся—не образуютъ одной прямой линіи. Тогда образуются два смежныхъ угла (рис. 18).

Отсюда опредѣленіе смежныхъ угловъ, какъ такихъ, которые имѣютъ общую вершину, общую сторону, и двѣ другія стороны ихъ расположены на одной прямой.

2) Оставимъ *Д А В* неизмѣняемой, будемъ вращать *АС* (рис. 19). При этомъ легко подмѣтить увеличеніе праваго

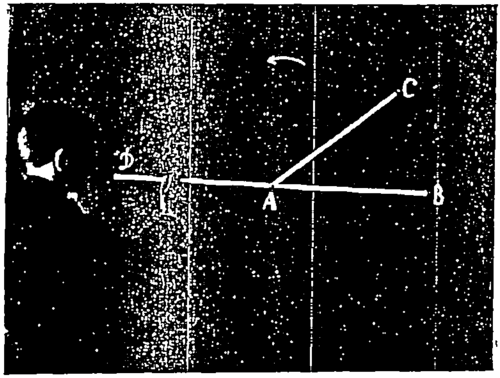


Рис. 18. Смежные углы.

и уменьшеніе лѣваго угла. Наступитъ положеніе, когда эти углы станутъ равными, тогда каждый изъ равныхъ смеж-

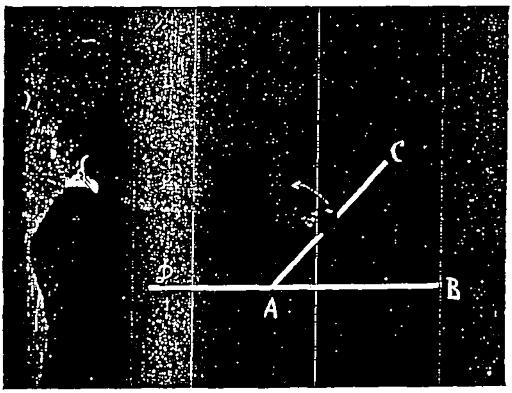


Рис. 19. Образованіе прямого угла.

ныхъ угловъ будетъ прямымъ (рис. 20). Отсюда—опредѣленіе прямого угла.

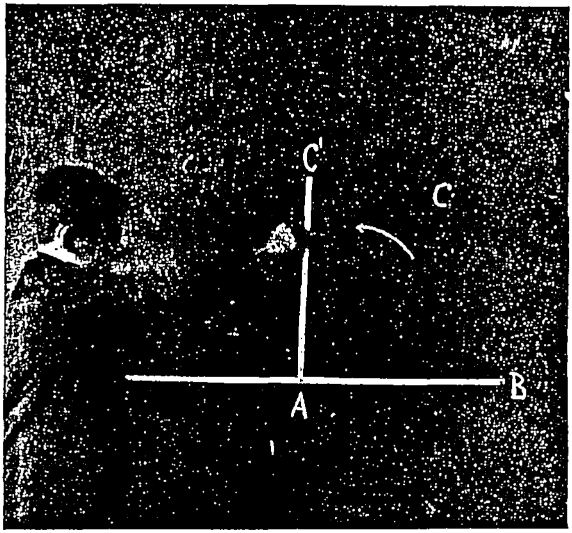


Рис. 20. Образованіе прямого угла.

V. Образованіе прямого угла.

Можно образовать прямой уголъ: а) посредствомъ перегибанія обрѣзанной бумаги пополамъ; б) посредствомъ складыванія какого угодно клочка бумаги пополамъ и еще разъ пополамъ.

VI. Вертикальные углы.

При пересѣченіи двухъ прямыхъ крестъ-накрестъ образуются вертикальные или противоположные углы.

При разсмотрѣніи модели (рис. 21) вырабатывается опредѣленіе противоположныхъ угловъ.

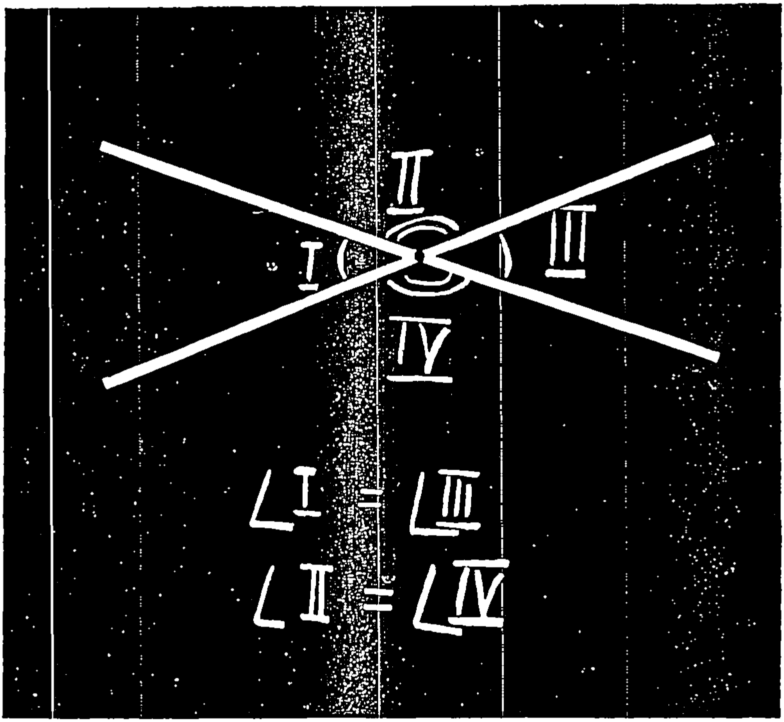


Рис. 21. Вертикальные углы.

Раздвигая стороны угловъ (рис. 22) убѣждаемся, что хотя вертикальные углы могутъ и увеличиваться и уменьшаться, но **равенство между ними сохраняется.** Это ихъ постоянное свойство.

VII. Треугольникъ.

Построеніе треугольника изъ 3-хъ данныхъ отрѣзковъ (рис. 23).

Для построенія надо укрѣпить неподвижно отрѣзокъ *c*, а *b* и *a* вращать до тѣхъ поръ, пока другіе концы ихъ не совпадутъ (рис. 24).

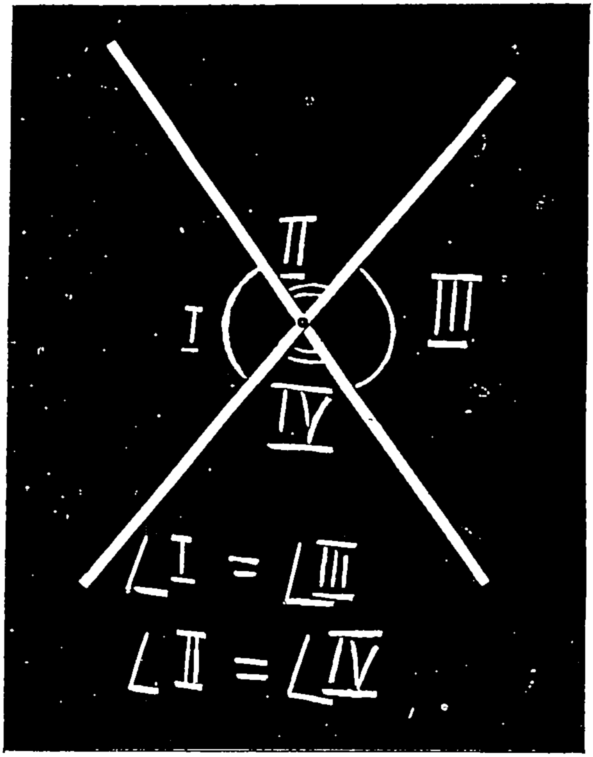


Рис. 22. Вертикальные углы всегда равны

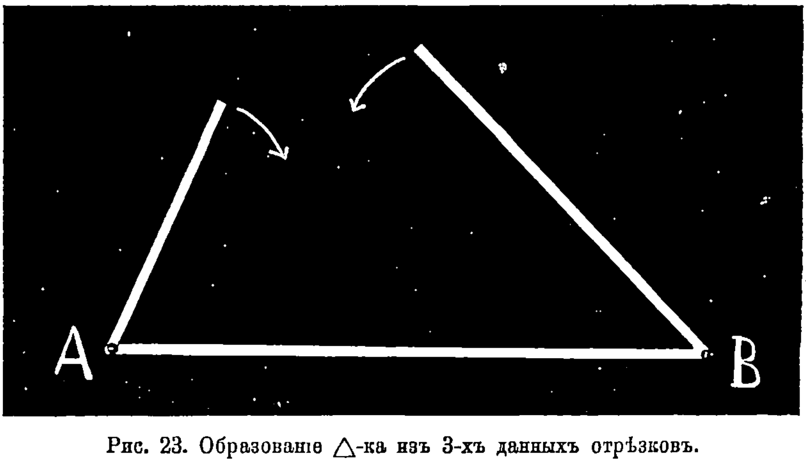


Рис. 23. Образование △-ка изъ 3-хъ данныхъ отрѣзковъ.

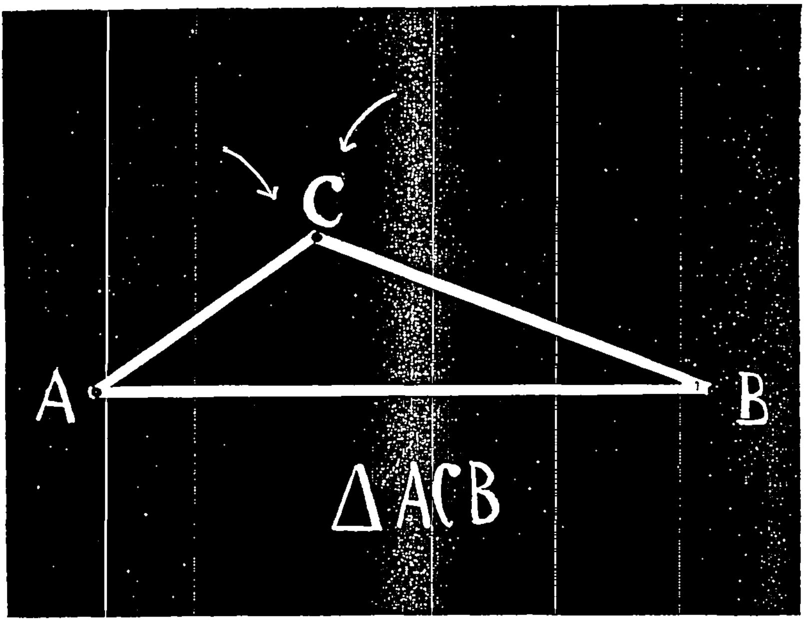


Рис. 24. Треугольникъ.

Это построеніе облегчитъ слѣдующую затѣмъ задачу на построеніе (черченіемъ): построить △ по тремъ даннымъ сторонамъ.

Случай невозможнаго построенія (рис. 25).

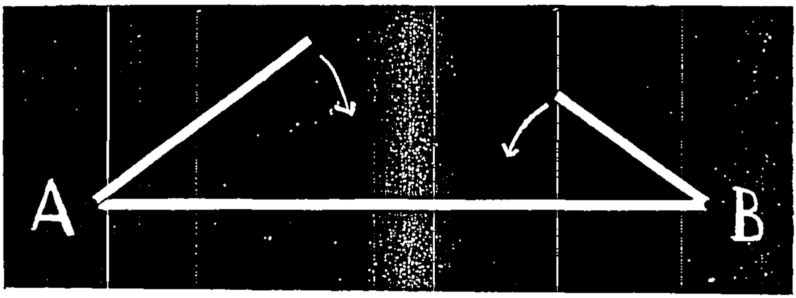


Рис. 25. Случай, когда невозможно построить △ по 3 даннымъ сторонамъ.

Теперь возможно познакомить дѣтей съ другой моделью △-ка, вырѣзанною изъ бумаги сначала съ обведенными краями, а затѣмъ безъ обводки краевъ, выяснивъ предварительно, что̀ считать за стороны и что̀ за углы.

VIII. Образованіе равнобедреннаго △-ка.

Образованіе равнобедреннаго △-ка двумя послѣдовательными перегибами листа бумаги видно изъ чертежа (рис. 26).

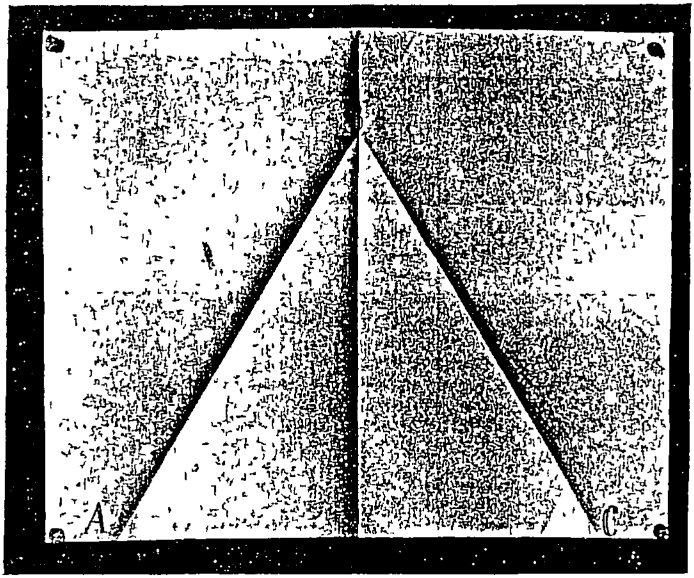


Рис. 26. Образованіе равнобедреннаго △-ка перегибаніемъ бумаги.

IX. Свойство равнобедреннаго △-ка.

Сдѣлавъ изъ бумаги нѣсколько треугольниковъ (рис. 27) и складывая ихъ такъ, чтобы ихъ боковыя стороны совпали, мы убѣждаемся, что лишь у равнобедреннаго △-ка равнодѣлящая угла при вершинѣ дѣлитъ основаніе пополамъ и образуетъ съ нимъ прямые углы (рис. 28).

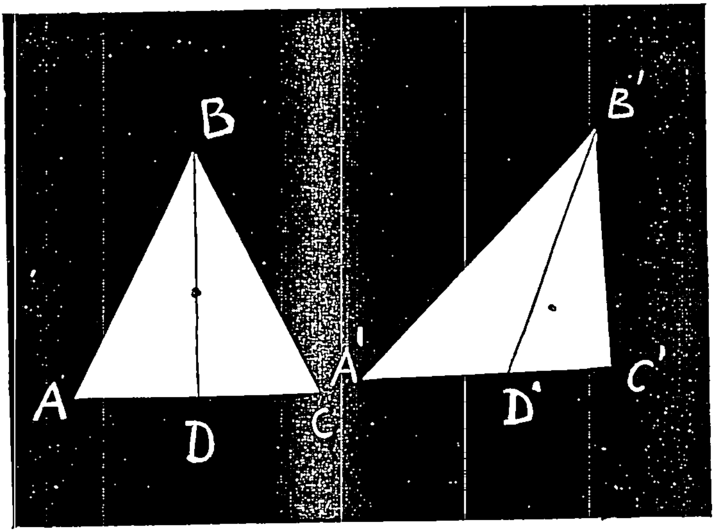


Рис. 27. Равнодѣлящія △-въ.

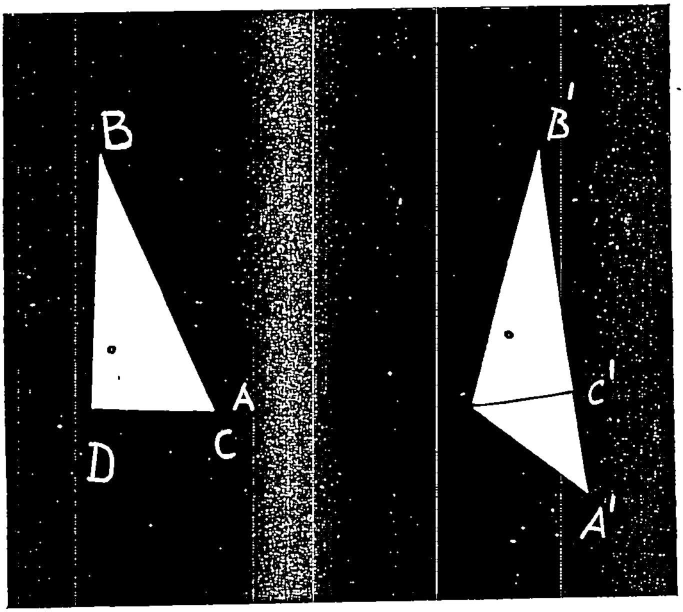


Рис. 28. Перегибаніе △△-въ по равнодѣлящимъ.

X. Равные △△-ки.

Сущность равенства △△-въ выясняемъ при наложеніи двухъ равныхъ моделей. При этомъ обращаемъ вниманіе, что всѣ элементы одного △-ка совпадаютъ съ соотвѣтственными элементами другого, и, слѣдовательно, въ равныхъ

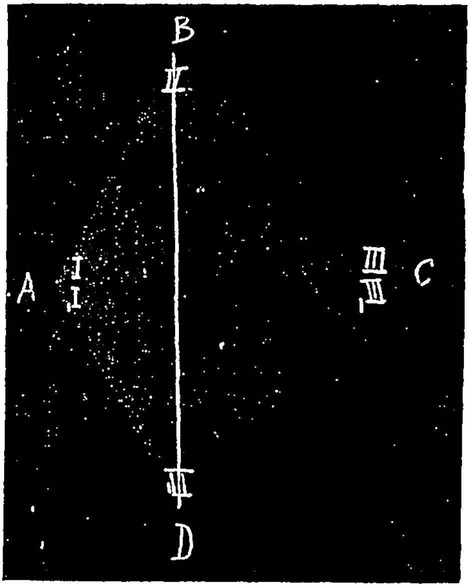


Рис. 29. Равенство △-въ по 3 соотвѣтственно равнымъ сторонамъ.

△△-хъ соотвѣтственные элементы равны. Равенство △△-въ по тремъ соотвѣтственно равнымъ сторонамъ доказывается посредствомъ приложенія. Рис. 29 поясняетъ этотъ способъ.

XI. Внѣшній уголъ △-ка (рис. 30).

Беремъ три полоски $AD = 100$ см., $AB = 40$ см., $BC = 60$ см., при чемъ для разнообразія случаевъ $AB < BC$.

BA прикрѣпляемъ 2 кнопками къ доскѣ, при чемъ кнопка A играетъ роль шарнира, около котораго можетъ вращаться

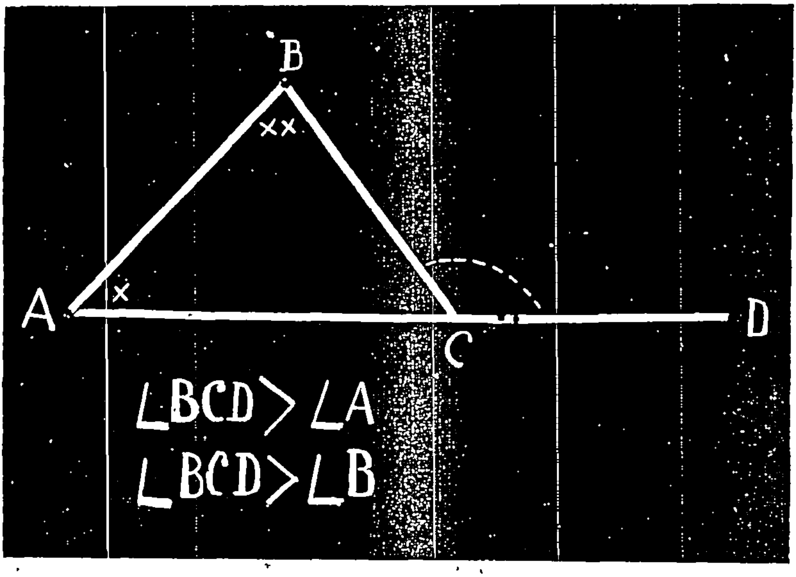


Рис. 30. Свойство внѣшняго угла △-ка.

полоска AB, влекущая за собою прикрѣпленную кнопкой B полоску BC[1]). Конецъ C скользитъ по полоскѣ AD. Такимъ образомъ создается △ ABC измѣняемой формы, въ которомъ $\angle C$ (правый) будетъ внѣшнимъ. Какъ бы ни измѣнялась форма △-ка, всегда $\angle C > \angle A$ и $\angle C > \angle B$, что можно еще отчетливѣе подтвердить раздвижнымъ угломъ (рис. 31), который приводимъ къ совпаденію съ внѣшнимъ угломъ, а затѣмъ, сохраняя его величину и прикладывая къ внутреннимъ, убѣждаемся, что всегда внѣшній уголъ △-ка болѣе каждаго изъ внутреннихъ съ нимъ несмежныхъ.

XII. Раздвижной уголъ.

Двѣ полоски 30 см. $\times$ 1 см. сжимаются въ одномъ концѣ блочкомъ (рис. 31), а еще лучше двумя, вставленными

---

[1]) Кнопки A и B могутъ быть замѣнены блочками, тогда сторона AD прикрѣпляется кнопками къ доскѣ въ какихъ-нибудь другихъ точкахъ.

одинъ противъ другого. Блочки должны быть туго сдавлены настолько, чтобы стороны угла раздвигались при нѣкоторомъ нажимѣ, и не могли раздвигаться сами собою при перенесенiи угла съ одного мѣста на другое. Такихъ угловъ слѣдуетъ заготовить сразу нѣсколько, потому что картонъ въ шарнирахъ скоро стирается.

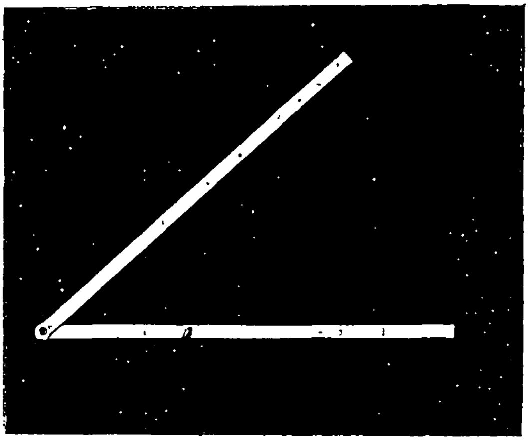


Рис. 31. Раздвижной уголъ.

Раздвижной уголъ хорошо примѣнять при сравненiи угловъ путемъ наложенiя. При накладыванiи его приводятъ къ совпаденiю съ однимъ изъ данныхъ угловъ, и затѣмъ, сохраняя его величину, накладываютъ на другой уголъ.

XIII. Зависимость между стороною и противоположнымъ угломъ въ одномъ треугольникѣ.

Двѣ полоски: *AB* — закрѣплена кнопками въ *A* и *B*, а *AC* — только въ *A* [1]). Кнопка *C* прикалываетъ также и конецъ бѣлой тесемки, а кнопка *B* только прижимаетъ ее, позволяя ей скользить между кнопкой и доской. Такимъ образомъ, раздвигая уголъ *A*, путемъ вращенiя *AC* около

[1]) Кнопки могутъ быть замѣнены блочками.

точки A, мы замѣчаемъ, что въ $\triangle$-кѣ ABC при увеличенiи A и противоположная сторона BC (изъ тесемки) увеличи-

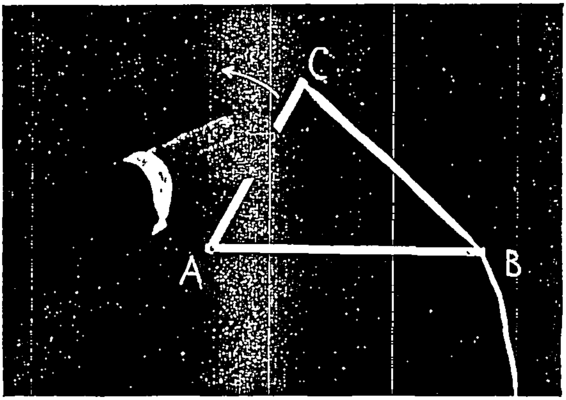


Рис. 32. Зависимость между угломъ и противоположной стороной.

вается (рис. 32 и 33), при уменьшенiи угла и сторона уменьшается.

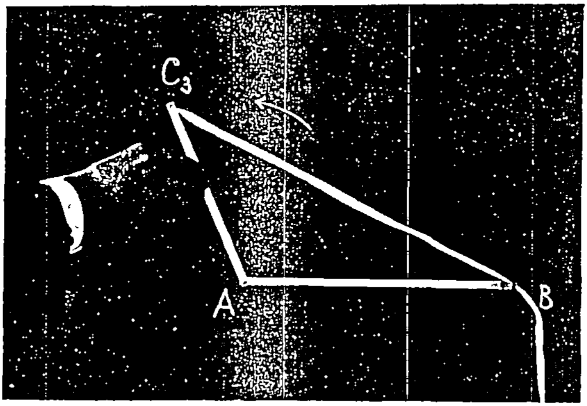


Рис. 33.

Интересны предѣльные случаи:

Когда $\angle B = O$, сторона $BC = AB - AC$ при $\angle B = 180^0$ сторона $\overline{BC} = \overline{AB} + \overline{AC}$.

XIV. Измѣненіе проекціи отрѣзка съ измѣненіемъ наклона его къ оси.

Полоска AB (=40 см.) прикалывается кнопкой въ срединѣ ея C къ доскѣ, на концахъ ея, на ниткахъ привѣшены грузики (пуговицы, комочки бумаги). Линія xx проводится

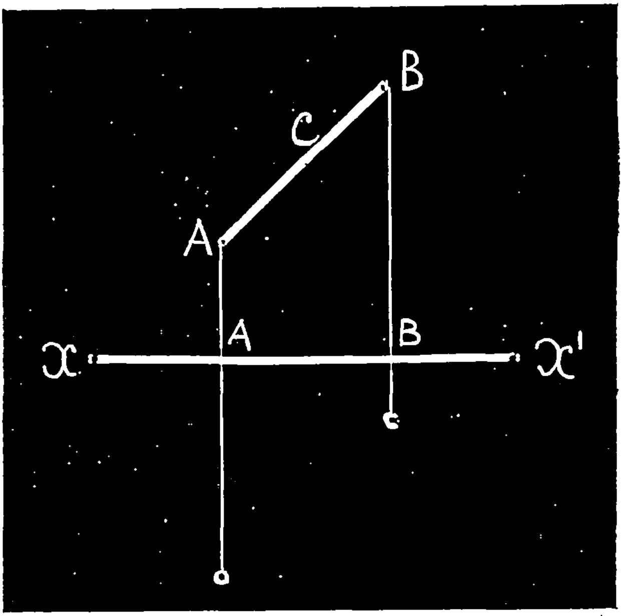


Рис. 34. Проекція отрѣзка.

строго горизонтально. Тогда отрѣзокъ ея $A'B'$—проекція AB (рис. 34). Ученикамъ должно объяснить, почему тогда xx можетъ быть осью проекцій.

При вращеніи отрѣзка AB около оси O проекція его $A'B'$ измѣняется въ предѣлахъ отъ O до AB. При $AB \parallel xx$ (рис. 35) $A_{,}B_{,,} = AB$. При $AB \perp xx$ (рис. 36) $A'B' = o$.

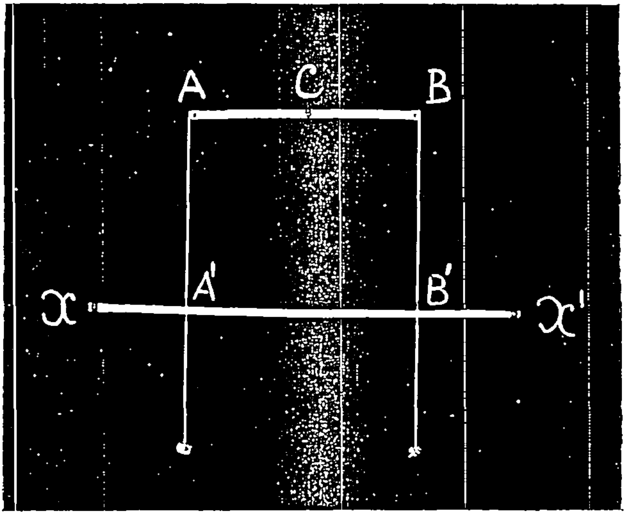


Рис. 35. Отрѣзокъ параллеленъ оси проекцій.

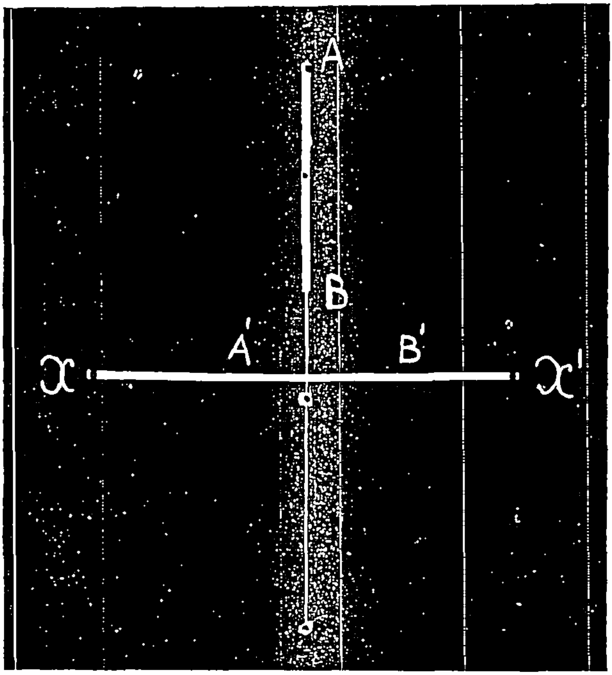


Рис. 36. Отрѣзокъ ⊥ оси проекцій.

XV.

Демонстрированіе свойствъ, объемлющихъ и объемлемыхъ ломаныхъ линій производится при помощи полосокъ, составлен-

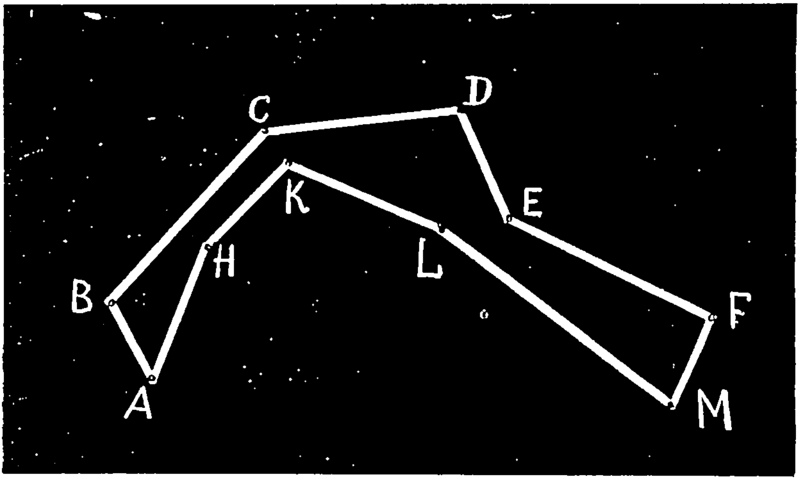


Рис. 37. Ломаныя объемлющая и объемлемая.

ныхъ изъ отдѣльныхъ звеньевъ, вращающихся около шарнировъ. (Шарниры дѣлаются изъ блочковъ щипцами.) Вы-

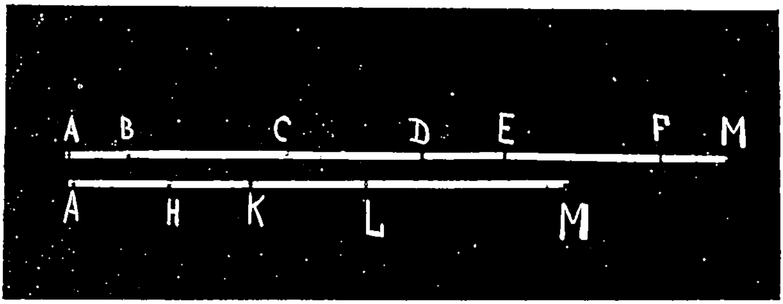


Рис. 38. Выпрямленіе ломаныхъ.

прямляя полоски, легко убѣдиться, что ломаная $ABCDEFM$ > ломаной $AHKLM$ (рис. 37 и 38).

Упражненія можно составить двояко: 1) дать составленныя изъ звеньевъ выпрямленныя линіи и предложить большую линію сдѣлать выпуклой объемлемой, а меньшую объемлющей; ученики убѣдятся, что это невозможно, 2) образовать чертежъ (рис. 37) и выпрямленіемъ убѣдиться, что $ABCDEFM > AHKLM$.

XVI. Разстояніе точки A отъ B и C и положеніе ея по отношенію къ $\perp$ изъ средины BC.

На доскѣ 2 перпендикулярныхъ линіи: AB и DC и нить BEA въ натянутомъ состояніи. Передвигая точку натяженія нити съ одного мѣста на другое, убѣждаемся въ равенствѣ отрѣзковъ AB и BC всякій разъ, когда A попадаетъ на $\perp$ DE и неравенствѣ ихъ, когда A — внѣ этого.

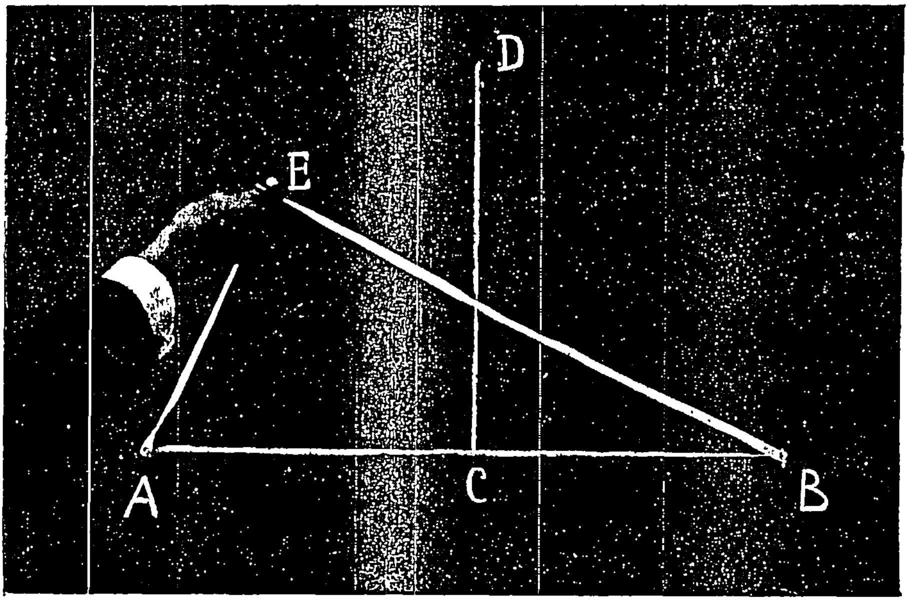


Рис. 39. $DC \perp AB$ и $AC = BC$.

XVII. Два перпендикуляра къ одной и той же прямой.

Поставивъ на закрѣпленную на доскѣ полоску 2 угольника, убѣждаемся наглядно въ параллельности ихъ сторонъ при скольженіи угольниковъ по закрѣпленной полоскѣ.

Отсюда проведеніе || линій.

XVIIa. Модель перпендикулярности биссектрисъ двухъ смежныхъ угловъ.

Возьмемъ $\frac{1}{2}$ листа бѣлой бумаги, проведемъ къ одной изъ сторонъ прямую линію. Затѣмъ перегибаніемъ и наложеніемъ стороны *AB* на *BC* раздѣлимъ пополамъ $\angle ABC$.

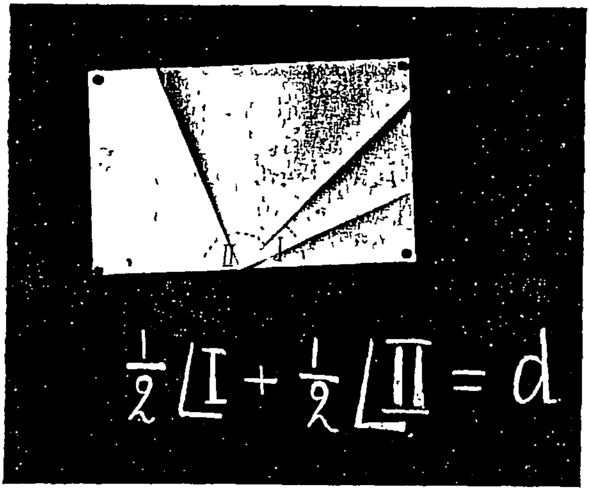


Рис. 40. Биссектрисы 2 смежныхъ угловъ перпендикулярны.

Подобнымъ же образомъ раздѣлимъ пополамъ $\angle CBD$. Расправивъ листъ, мы увидимъ, что биссектрисы угловъ перпендикулярны (рис. 40).

XVIII. Параллельность прямыхъ и внутренніе накрестъ лежащіе углы.

Склеиваемъ изъ 3-хъ полосокъ картона обычный чертежъ 2-хъ параллельныхъ линій, пересѣченныхъ сѣкущею (рис. 41), разрѣжемъ его по сѣкущей на 2 половины и

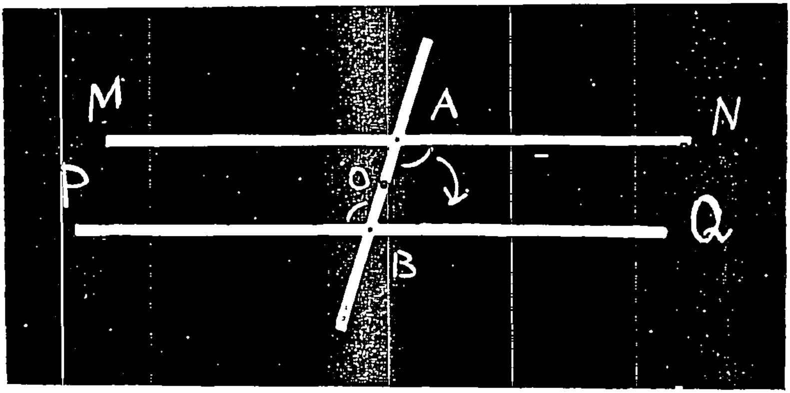


Рис. 41. Модель // линій.

сколемъ на срединѣ (въ точкѣ O) кнопкой. При вращеніи внутренніе накрестъ лежащіе углы OAN и PBC совпадаютъ (рис. 42).

Этою моделью подготовляется доказательство основной теоремы о // линіяхъ: предположивъ, что при равенствѣ внутреннихъ накрестъ лежащихъ угловъ прямыя пересѣкутся гдѣ-нибудь направо въ точкѣ M, повертываемъ, какъ это видно на модели, половину чертежа около точки O, до совпаденія правой половины его съ лѣвою, тогда точка пересѣченія перемѣстится влѣво, и лѣвыя вѣтви, совпадающія съ прежними правыми вѣтвями, должны будутъ пересѣчься въ этой точкѣ. Возвративши чертежъ въ прежнее положеніе, мы видимъ, что 2 прямыхъ пересѣкаются въ 2-хъ точкахъ, что вызвано, очевидно, неправильнымъ предположеніемъ (Глаголевъ, Эл. геом.).

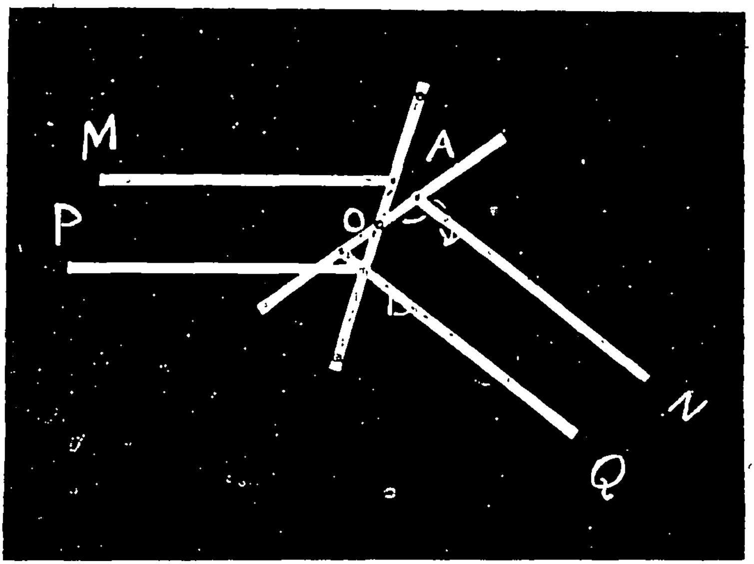


Рис. 42. Внутренние накрестъ лежащіе углы при наложеніи совпадаютъ.

XIX. Углы съ соотвѣтственно параллельными сторонами.

6 полосокъ картона располагаемъ попарно параллельно другъ другу и скрѣпляемъ ихъ **не туго** блочками или кнопками слѣдующимъ образомъ: кнопки верхняго ряда воткнуты въ доску, а нижняго ряда прокалываютъ полоски остреемъ наружу (рис. 43). Кнопки можно замѣнить блочками.

Углы: 1, 2 и 3 имѣютъ || стороны, и параллельность эта при сдвиганіи модели не нарушается.

Потягивая модель за конецъ вправо или влѣво, мы измѣняемъ величину угловъ, но 1, 2 и 3 углы все время остаются равными другъ другу (рис. 44).

Равенство угловъ хорошо подчеркнуть наложеніемъ раздвижного угла.

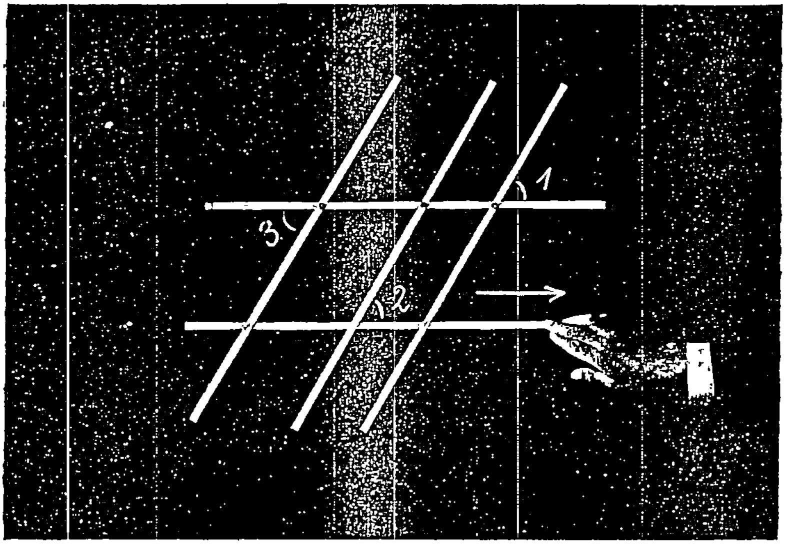


Рис. 43. Углы съ параллельными сторонами.

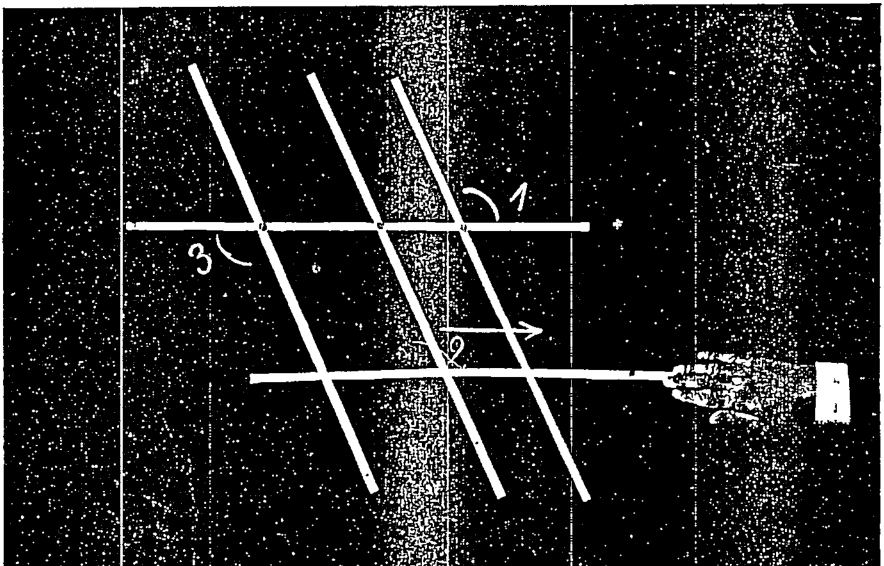


Рис. 44. Углы остаются равными между собою.

XX. Углы съ взаимно перпендикулярными сторонами.

Двѣ полоски (70 см. и 30 см.) склеиваемъ строго $\perp$-но; другія двѣ такія же полоски 30 см. и 70 см. тоже. Первая пара укрѣплена неподвижно (рис. 45), вторая вращается

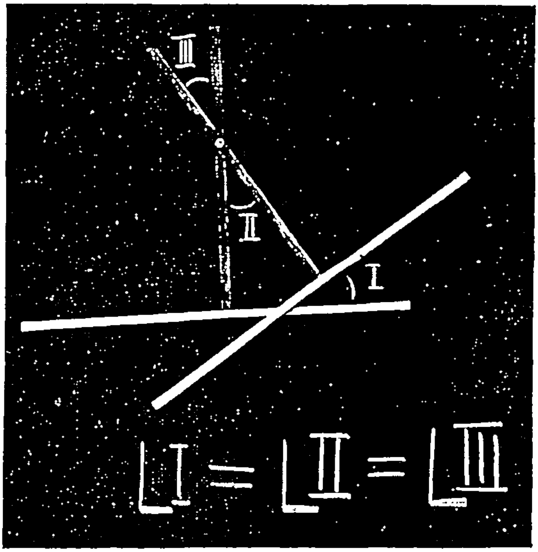


Рис. 45. Углы съ взаимно перпендикулярными сторонами.

около точки *C*. При этомъ углы I, II и III, имѣя взаимно перпендикулярныя стороны, при всѣхъ своихъ измѣненіяхъ остаются равными другъ другу, что можно провѣрить раздвижнымъ угломъ.

Стороны угла II для большей замѣтности должны быть окрашены какой-нибудь одной краской.

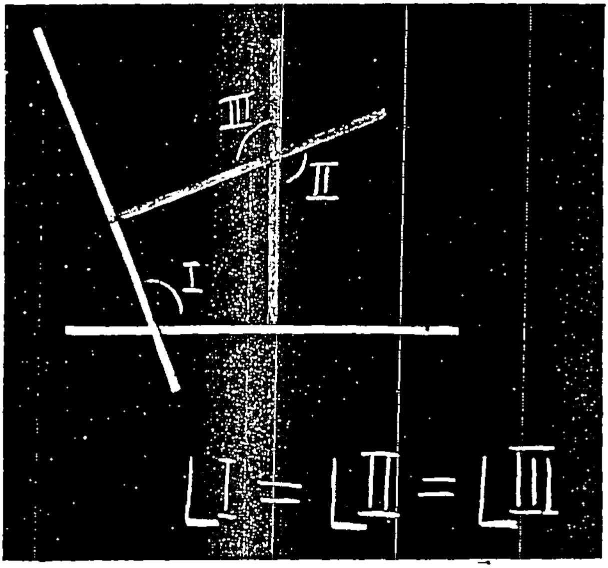


Рис. 46. При иномъ положенiи модели углы остаются равными.

XXI. Сумма угловъ △-ка.

Простѣйшiй (и лучшiй) способъ—предложить ученикамъ немедленно или заранѣе, дома, изготовить по треугольнику самыхъ разнообразныхъ формъ, выбрать нѣсколько △△-въ и разорвать на 3 части (по углу въ каждой), сложить эти куски па доскѣ вершинами угловъ вмѣстѣ и скрѣпить эти куски кнопками. **Сумма внутреннихъ угловъ △-ка будетъ всегда равна 2d** (рис. 47 и 48). То же каждый ученикъ долженъ сдѣлать со своимъ △-мъ. Многочисленность опытовъ явится очень убѣдительнымъ подтвержденiемъ справедливости закона.

XXII. Параллелограммъ.

4 полоски $AB = CD$ (30 см.) и $BC = AD$ (20 см.) проколемъ кнопками такъ, чтобы въ точкахъ A и D прикрѣпить модель къ доскѣ, а въ точкахъ B и C остреемъ на-

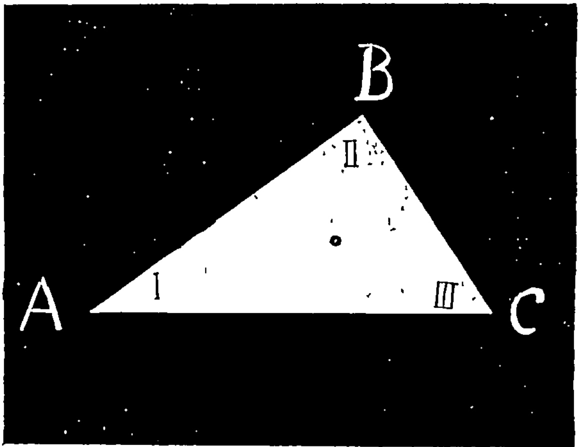


Рис. 47. Оторвемъ углы △-ка и сложимъ.

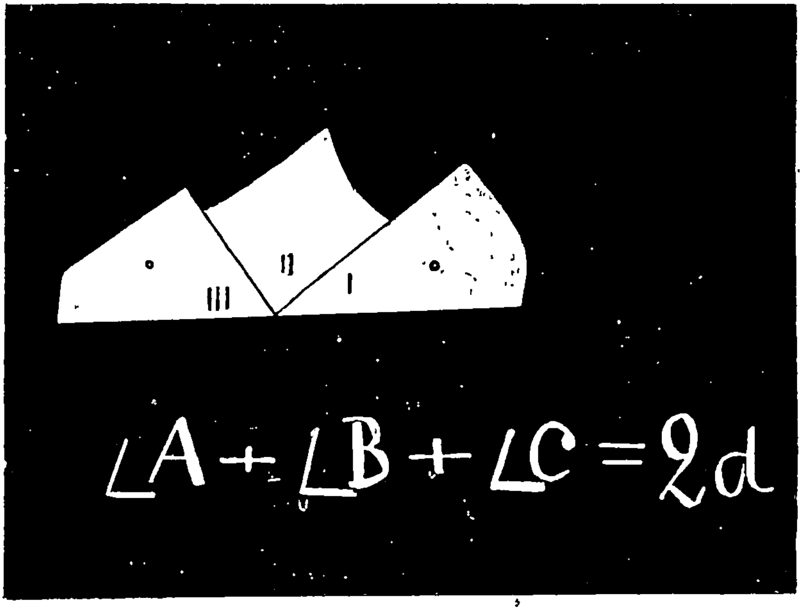


Рис. 48. Сумма угловъ △-ка будетъ всегда равна $2d$.

ружу. Кнопки B и C прикалываютъ концы двухъ тесемокъ AC и BD, тогда какъ кнопки A и D только прижимаютъ тесемки къ доскѣ. Или, проще, скрѣпимъ концы параллелограмма блочками, сквозь отверстія которыхъ продѣнемъ узкую тесемку, или толстую бѣлую нитку, к-рую будемъ держать всегда натянуто, а самый пар-ммъ приколемъ къ доскѣ.

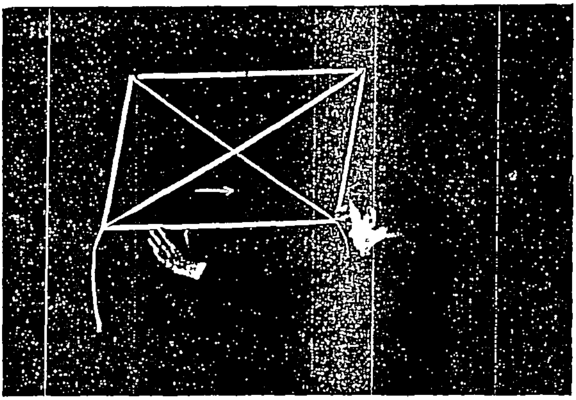


Рис. 49. Раздвижной параллелограммъ.

Будемъ раздвигать параллелограммъ и измѣнять его форму. Сначала возьмемъ одинъ параллелограммъ безъ діагоналей; измѣняя его форму, можно замѣтить, что въ четыреугольникѣ, имѣющемъ противоположныя стороны попарно равныя, эти стороны будутъ также и параллельны, а противоположные углы равны (рис. 49 и 50).

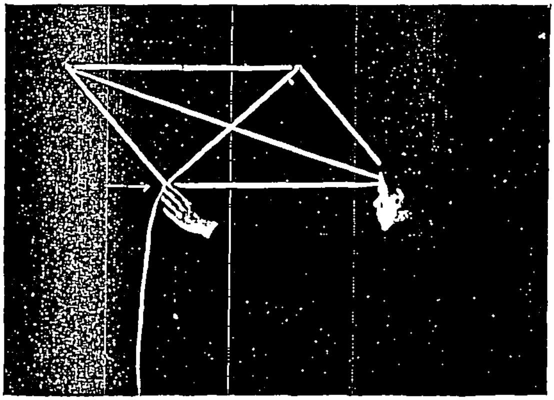


Рис. 50. Новое положеніе.

Затѣмъ, взявъ одну діагональ (тесемку) можно замѣтить, что одна діагональ дѣлитъ параллелограммъ на 2 равныхъ $\triangle\triangle$-ка. Наконецъ, взявъ обѣ діагонали, легко замѣтить ихъ взаимное дѣленіе пополамъ.

Превращая параллелограммъ въ прямоугольникъ, убѣждаемся, что при этомъ діагонали становятся равными другъ другу (рис. 49 и 50).

XXIII. Ромбъ и квадратъ.

Построеніе модели сходно съ параллелограммомъ.

Придавая модели всевозможныя формы, убѣждаемся, что діагонали его **всегда** остаются перпендикулярными другъ другу и **всегда** дѣлятъ его углы пополамъ.

Благодаря измѣняемости модели подчеркивается постоянство этого свойства ромба.

Превращая ромбъ въ квадратъ, наблюдаемъ на модели всѣ свойства квадрата.

XXIV. Средняя линія трапеціи.

Возьмемъ листъ толстаго картона (№ 10), обрѣжемъ его края и оклеимъ съ обѣихъ сторонъ темнаго цвѣта (темно-синей) бумагой. Это—станъ для модели. Вырѣжемъ изъ толстаго бристольскаго картона трапецію, раздѣлимъ непараллельныя стороны ея пополамъ и проведемъ среднюю линію, соединяющую точки дѣленія. Острымъ ножомъ по линейкѣ разрѣжемъ эту трапецію по средней линіи. Нижнюю (болѣе широкую) часть трапеціи наклеимъ на станъ, а къ верхней въ одномъ изъ концовъ подклеимъ съ задней стороны кружокъ кальки, оклеенный спереди бумагой, служащей «фономъ» стана; тогда этотъ кружокъ будетъ на станѣ незамѣтенъ (рис. 51).

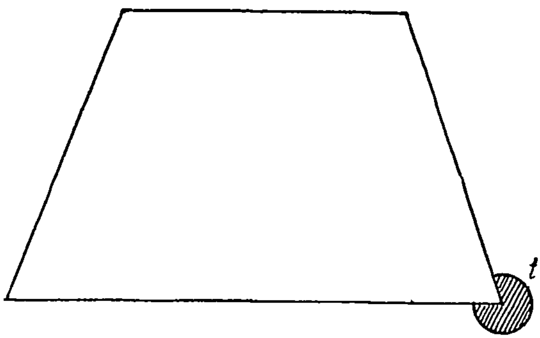


Рис. 51. Верхняя подвижная половина трапеціи.

Приставимъ верхнюю половину трапеціи къ нижней, такъ, чтобы онѣ слились, и проколемъ кружокъ какъ разъ

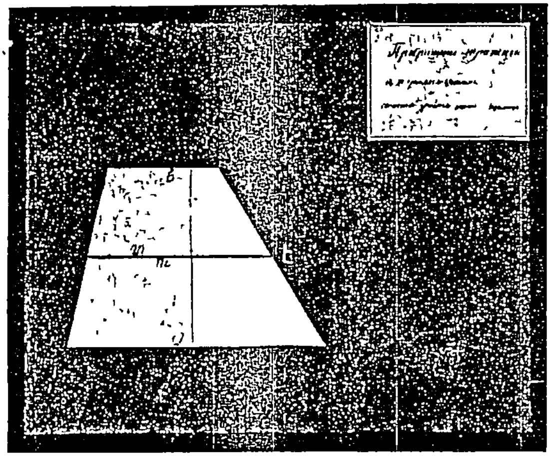


Рис. 52. Модель трапеціи.

въ концѣ средней линіи t булавкой. Тогда верхняя половина трапеціи можетъ вращаться около точки t какъ около шарнира.

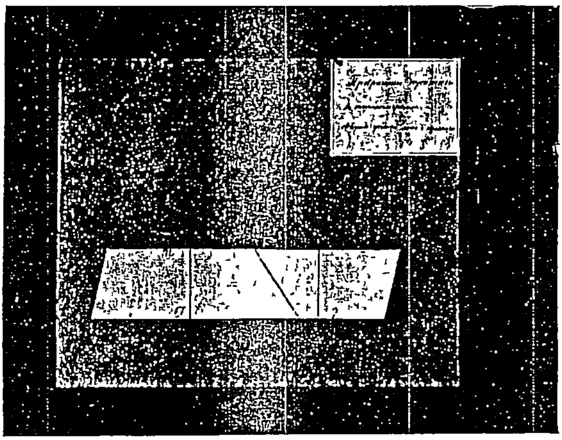


Рис. 53. Трапеція превращается въ параллелограммъ.

Два положенія на рис. 52 и 53 указываютъ ея употребленіе: при поворотѣ верхней части трапеціи около точки t на

180^0, трапеція превращается въ параллелограммъ, откуда видно, что $2m = a + в$; $m = \frac{a + в}{2}$.

Среднюю линію можно окрасить въ какой-нибудь цвѣтъ.

XXV. Свойство трехъ /// линій, проведенныхъ на одинаковомъ разстояніи другъ отъ друга.

Проводя на доскѣ 3 прямыя на равномъ разстояніи другъ отъ друга или прикрѣпивъ 3 полоски кнопками, укрѣпимъ на средней прямой полоску посредствомъ кноп-

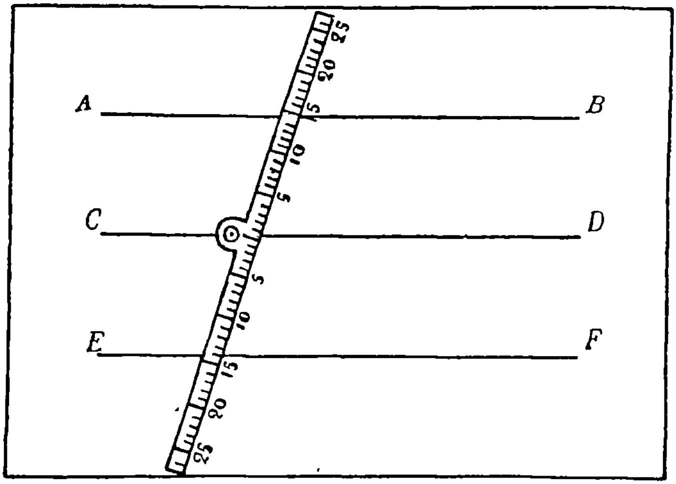


Рис. 54.

ки. При вращеніи этой прямой около точки O видимъ, что при измѣненіи ея отрѣзка между крайними параллельными точка O всегда будетъ дѣлить этотъ отрѣзокъ пополамъ.

Очевидно, свойство это принадлежитъ каждой точкѣ этой прямой.

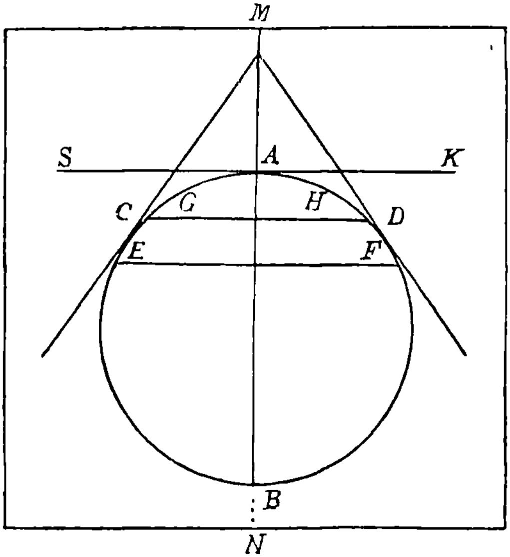


Рис. 55. Свойства діаметра $\perp$ къ хордѣ, касательныхъ, проведенныхъ изъ одной и той же точки, хордъ //-хъ другъ другу, и //-хъ касательной.

XXVI. Свойства діаметра $\perp$ къ хордѣ, свойство касательной // хордѣ.

Начертивъ на большомъ тонкомъ листѣ восковой бумаги толстыми линіями рисунокъ 55-й, перегнемъ чертежъ по прямой MN. Изъ совпаденія соотвѣтственныхъ линій замѣчаемъ, что:

a) Діаметръ дѣлитъ кругъ пополамъ.

b) Діаметръ дѣлитъ хорду и стягиваемую ею дугу пополамъ.

c) Касательная, || хордѣ, дѣлитъ соотвѣтственную дугу пополамъ.

d) Дуги, заключенныя между параллельными хордами, равны.

e) 2 касательныя, проведенныя изъ одной и той же точки къ окружности, равны и наклонены къ центральной линіи подъ равными углами.

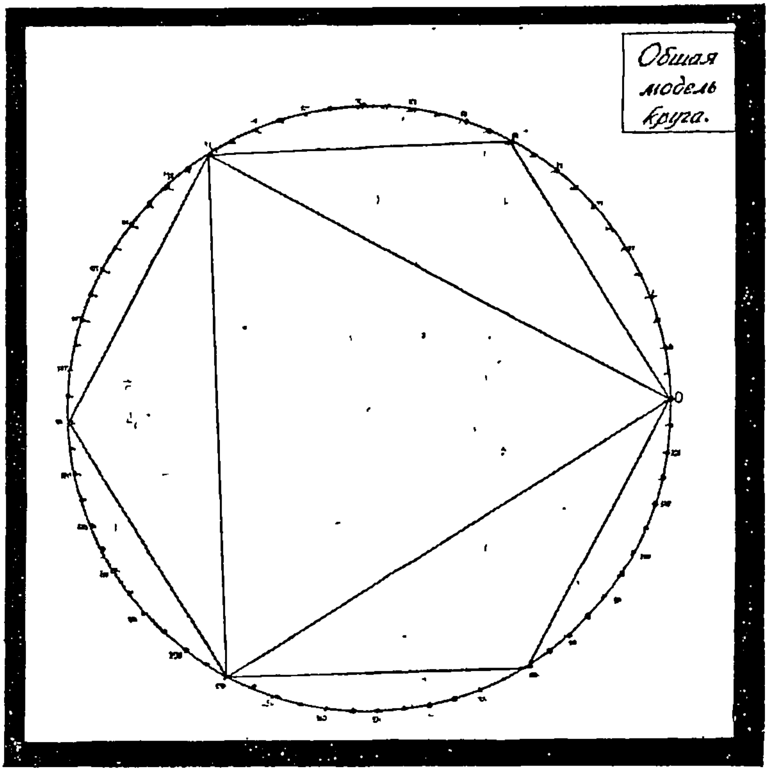


Рис. 56. Удвоеніе числа сторонъ многоугольниковъ: правильные △-къ и шестиугольникъ.

XXVII. Универсальная модель круга.

Бѣлый картонъ наклеенъ на доску. На немъ нарисована окружность ($r = 30 - 40$ см.). На ней чрезъ каждые 5^0 набиты небольшіе гвоздики, есть одинъ гвоздикъ въ центрѣ *O*, и въ 2—3 точкахъ на различномъ разстояніи внѣ круга. Для образованія хордъ, сѣкущихъ и различнаго рода многоугольниковъ внутри круга употребляется черный круглый ластикъ (резинка), связанный своими концами и надѣвающійся на эти гвоздики. Для измѣренія угловъ употребляется, конечно, транспортиръ.

Описанная модель круга пригодна для демонстраціи свойствъ: 1) центральныхъ угловъ, 2) вписанныхъ, 3) образованныхъ пересѣченіемъ хордъ внутри круга, 4) сѣкущихъ внѣ круга, 5) угловъ, образованныхъ хордой и касательной, 6) описанныхъ угловъ, 7) вписаннаго 4-угольника, 8) правильныхъ 3-, 4-, 5-, 6-, 8-, 9-, 12-, 18-, 24-, 36- и 72-угольниковъ, 9) для демонстраціи удвоенія числа сторонъ правильнаго многоугольника и приближенія его периметра и площади къ совпаденію съ окружностью и площадью круга. Ее можно примѣнить и къ демонстраціи 10) зависимости измѣненія хорды отъ измѣненія дуги, 11) измѣненія хорды отъ ея разстоянія отъ центра, 12) свойства радіуса, $\perp$ къ хордѣ, и свойства дугъ, заключающихся между $\|$ хордами, 13) свойства отрѣзковъ хордъ, пересѣкающихся внутри круга, 14) свойства сѣкущихъ и касательной, выходящихъ изъ одной точки.

Углы при этомъ измѣряются транспортиромъ, стороны— миллиметровой лентой или циркулемъ съ 2 острыми ножками.

1) Вписанные углы.

(Рис. 57). Натянемъ связанный ластикъ между центромъ и точками окружности такъ, чтобы получить вписанный и центральный углы, опирающіеся на одну и ту же дугу AB. Измѣримъ вписанный уголъ транспортиромъ, а центральный по соотвѣтствующей дугѣ, замѣтимъ, что вписанный уголъ $= 1/_2$ центральнаго, опирающагося на ту же дугу. Будемъ переносить вершину угла C въ различныя точки окружности: C', C'', C'''—измѣреніе даетъ прежнюю зависимость; углы C', C'', C''' и т. д. каждый будутъ равны $1/_2 \angle AOB$.

Повторяемъ предыдущія измѣренія съ различными дугами и углами, получаемъ одинаковый результатъ.

Надѣвши ластикъ на гвоздики C', C'', C''', получаемъ **прямой** вписанный уголъ, опирающійся на діаметръ. Перенося

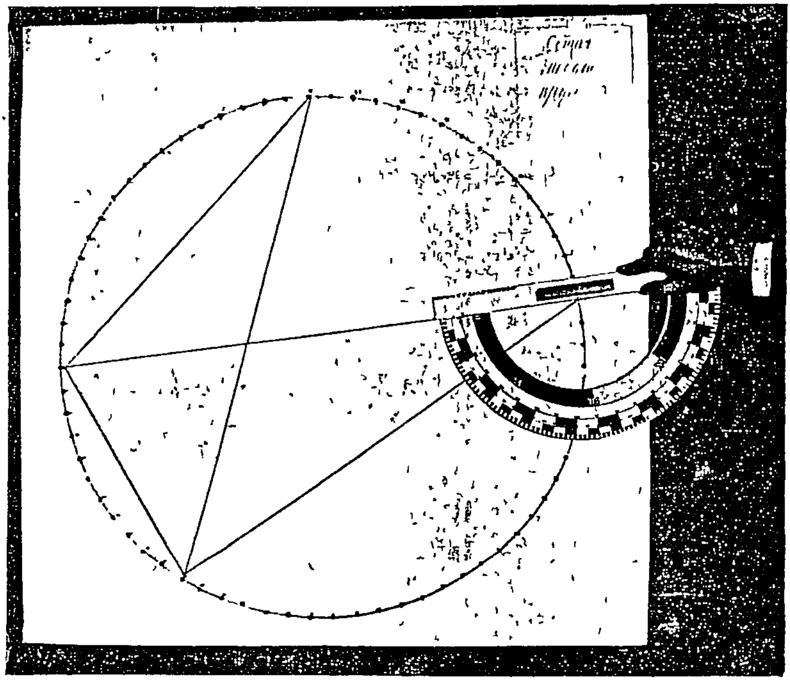


Рис. 57. Вписанные углы, опирающіеся на одну и ту же дугу, равны между собою.

вершину этого угла куда угодно по окружности, убѣждаемся въ постоянствѣ этого свойства.

2) Уголъ съ вершиною внутри круга.

Натянемъ связанный концами ластикъ, перекрещивая нити, между 4 точками окружности (рис. 58). Измѣримъ транспортиромъ уголъ, образованный хордами.

Взявъ полусумму дугъ, заключенныхъ между сторонами измѣреннаго угла (по размѣченной окружности), замѣчаемъ что число дуговыхъ °, содержащихся въ полусуммѣ дугъ, равно числу ° угла.

Повторяя эти измѣренія нѣсколько разъ, убѣждаемся, что эта зависимость не случайна, а является постоянной.

Невольно является потребность объяснить причину подобнаго явленія. Отвѣтомъ на это явится доказательство.

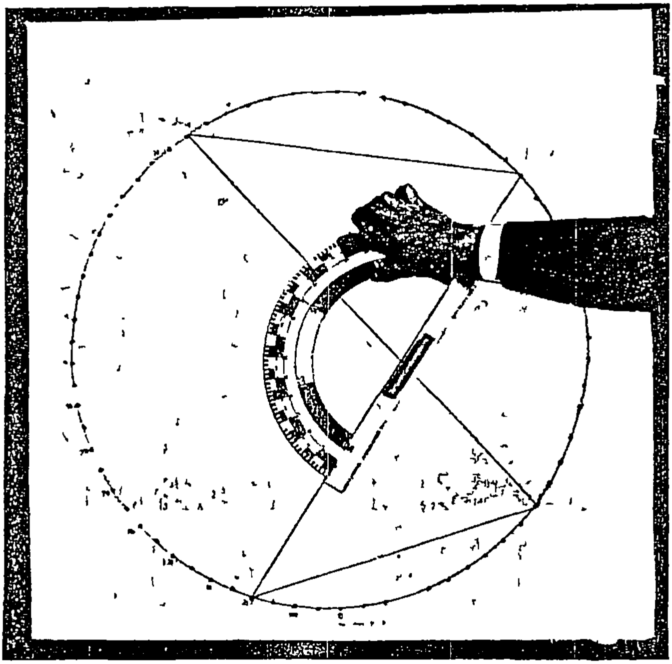


Рис. 58 Уголъ съ вершиною внутри круга измѣряется полусуммою дугъ, заключенныхъ между его сторонами.

3) Уголъ съ вершиною внѣ круга, образованный двумя сѣкущими.

Патянемъ круговой ластикъ между гвоздиками A, B и C. Измѣримъ транспортиромъ $\angle B$ и дуги AC и DE (рис. 59)

Замѣчаемъ, что $\angle B$ **измѣряется полуразностью дугъ** AC и $ДE$. Перенося точки A и C и даже B, мы убѣждаемся, что эта зависимость не случайна.

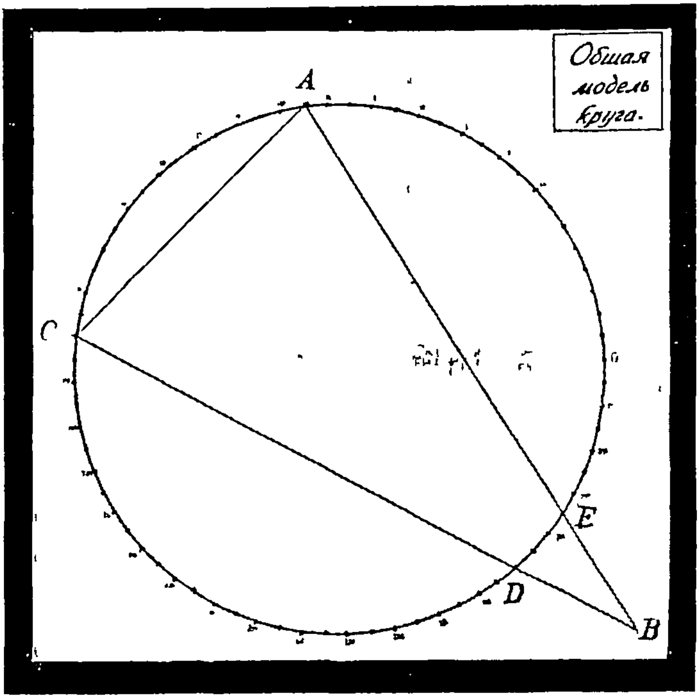


Рис. 59. Уголъ съ вершиною внѣ круга, образованный двумя сѣкущими.

4) Уголъ, образованный касательной и хордой.

Натягивая связанный концами ластикъ между точками A, B, C такъ, чтобы AC шла касательно O, получаемъ $\angle$ образованный хордои и касательной. Измѣряя $\angle A$ транспортиромъ, а дугу AC по раздѣленной окружности, замѣчаемъ, что $\angle A$ измѣряется половиной дуги AB. Передвигая точку B въ положенія B', B'', B''' и т. д., убѣждаемся, что указанное выше свойство угла образованнаго хордою и касательною—измѣряться половиной дуги, заключенной между его сторонами, составляетъ законъ для всѣхъ угловъ этого рода.

5) Уголъ описанный.

Натягиваемъ круговой ластикъ между точками A, B и C такъ, чтобы AB и BC были касательны къ окружности. Измѣримъ $\angle B$, образованный касательными, транспортиромъ и вычислимъ полуразность дугъ AC (большой) и AC (малой). При этомъ замѣчаемъ, что $\angle B$ измѣряется полуразностью дугъ, заключенныхъ между его сторонами.

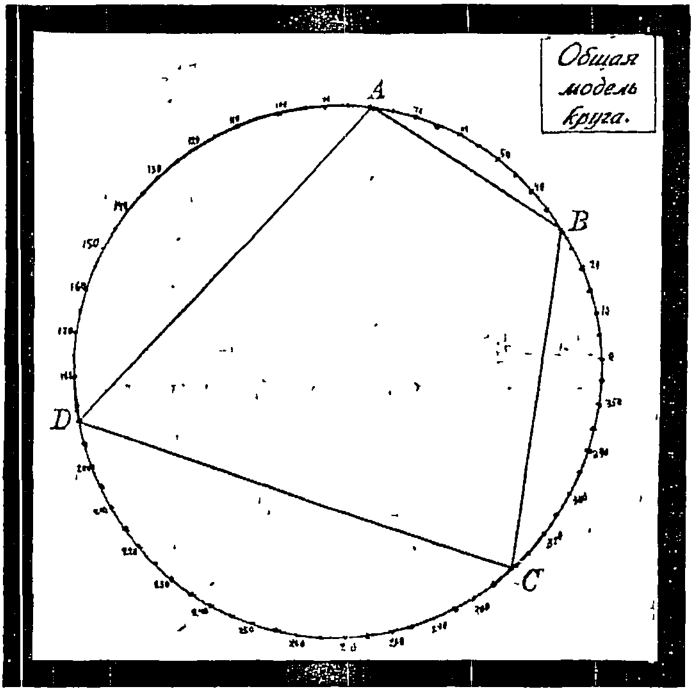


Рис. 60. Вписанный четыреугольникъ.

6) Вписанный четыреугольникъ.

Натянувъ связанный концами ластикъ между 4 какими-нибудь точками на окружности, образуемъ вписанный 4-угольникъ (рис. 59). Измѣримъ транспортиромъ его углы и сложимъ $\angle A$ и $\angle C$ и затѣмъ $\angle B$ и $\angle D$. Замѣчаемъ что:

$$\angle A + \angle C = 180^\circ$$
$$\angle B + \angle D = 180^\circ$$

Будемъ образовывать всевозможные вписанные 4-угольники и повторять надъ ними предыдущія измѣренія. Повторяя это сколько угодно разъ, убѣждаемся, что **сумма противоположныхъ угловъ вп. 4-угольника всегда равна 180°.**

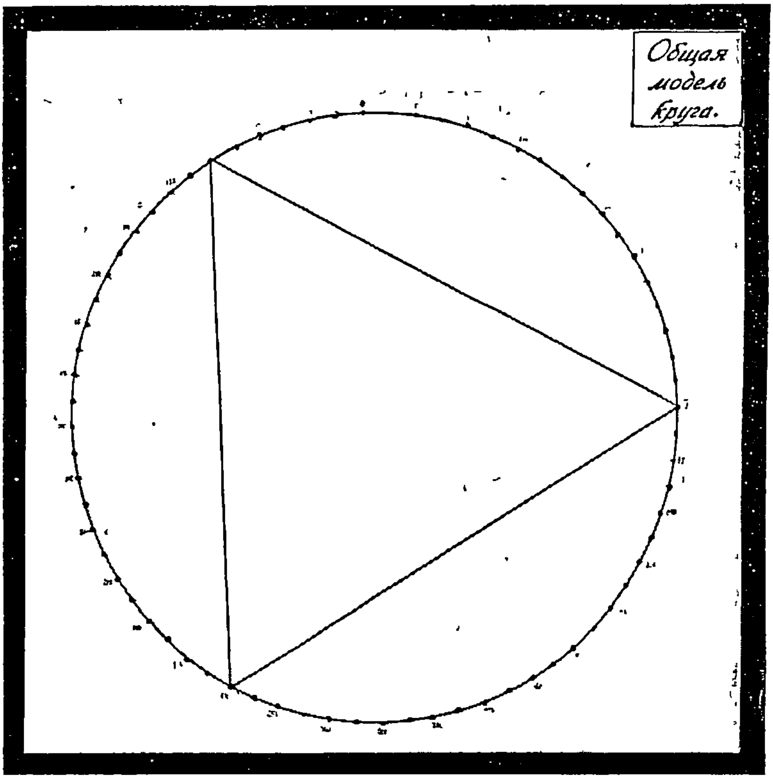


Рис. 61. Правильный $\triangle$-къ.

7) Правильные многоугольники.

Соединяя круговымъ ластикомъ на модели точки чрезъ каждые 120°, получаемъ правильный вписанный $\triangle$-къ.

чрезъ	90° — квадратъ.			
»	72°	правильн.	5-угольникъ.	
»	60°	»	6	»
»	45°	»	8	»
»	40°	»	9	»
»	30°	»	12	»
»	20°	»	18	»
»	15°	»	24	»
»	10°	»	36	»
»	5°	»	72	»

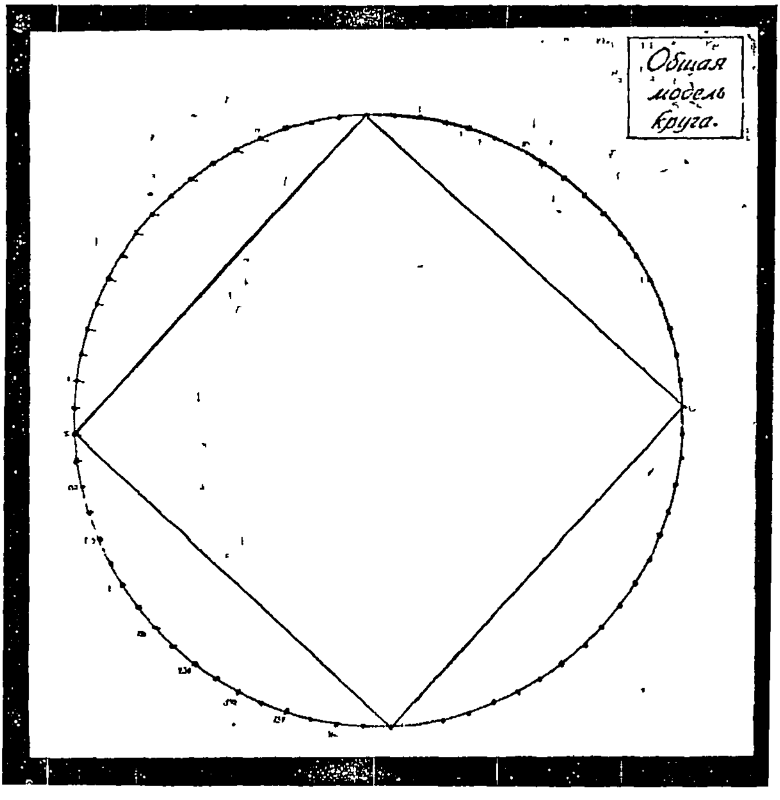


Рис. 62. Вписанный квадратъ.

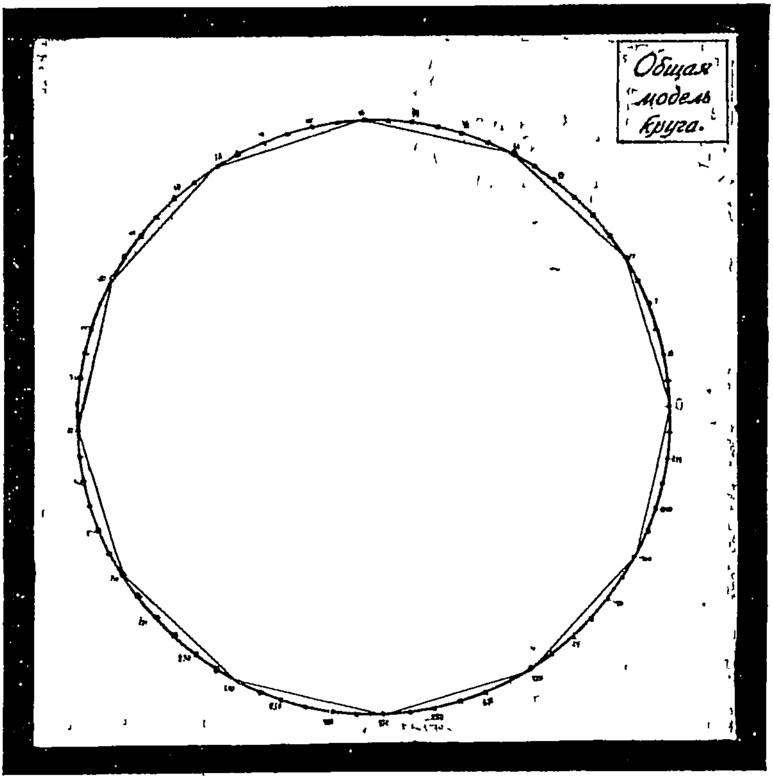


Рис. 63. Правильный 12-угольникъ.

Разсматривая образованныя фигуры, можно легко замѣтить, что у каждой фигуры всѣ стороны и всѣ углы между собою равны.

Измѣряя миллиметровой лентой сторону правильнаго вписаннаго $\triangle$-ка (a_3) и находя отношеніе ея къ радіусу, находимъ, что $a_3 = r\sqrt{3}$ (при $r = 30$ см. $a_3 = 30.\ 1{,}73$). Подобнымъ же образомъ

$$a_4 = r\sqrt{2}$$

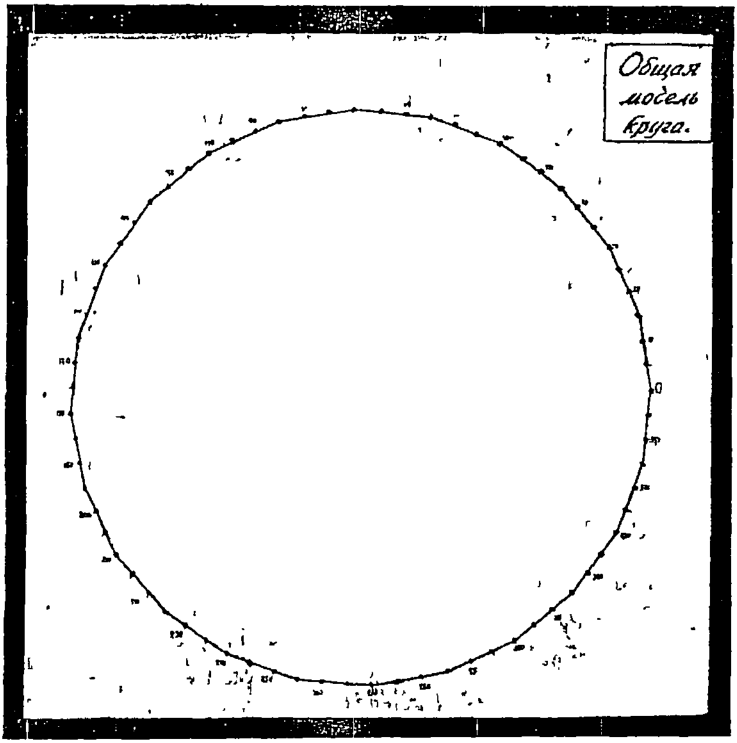


Рис. 64. Правильный 24-угольникъ.

8) Удвоеніе числа сторонъ правильнаго вписаннаго многоугольника.

Образуемъ на модели (рис. 59) правильный вписанный △-къ. Натянемъ другой ластикъ [1]) между тѣми же точками. Обѣ линіи совпадутъ. Намѣтивъ средины дугъ *AB*, *BC* и *AC*, натягиваемъ 2-й ластикъ въ точкахъ *D*, *E* и *F*. Получаемъ одновременно правильные вписанные △-къ и 6-къ

[1]) Для отличія можно взять бѣлый ластикъ и окрасить его въ красный (опустивъ въ красныя чернила) или какой-нибудь иной цвѣтъ.

(рис. 62). Далѣе можемъ образовать: 6-къ и 12-къ; затѣмъ 12-къ и 24-къ (рис. 66).

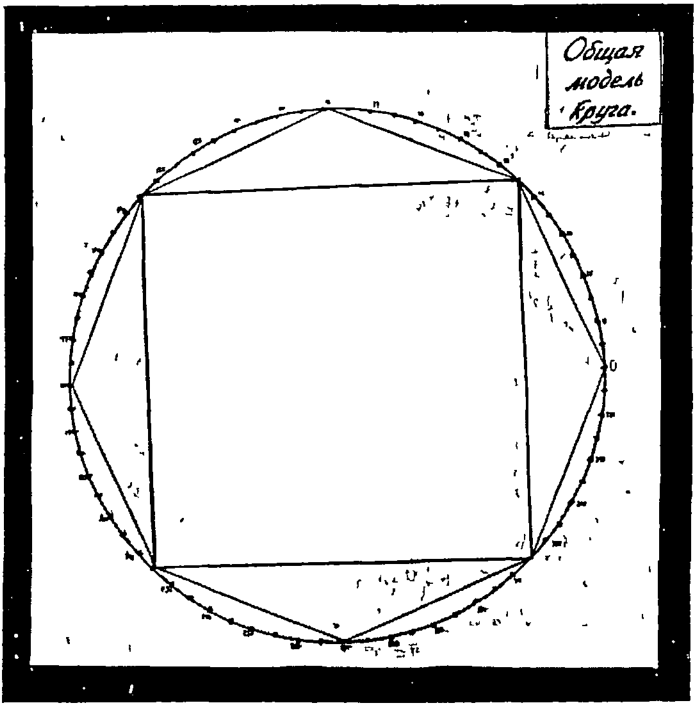


Рис. 65. Удвоеніе числа сторонъ правильныхъ многоугольниковъ: квадратъ и 8-угольникъ.

Вторая серія будетъ квадратъ и 8-къ.

Третья » » 9-къ и 18-къ (рис. 66), 18-къ и 36-къ и, наконецъ, 36-къ и 72-къ.

Мы видимъ, какъ по мѣрѣ удвоенія сторонъ многоугольника периметръ его увеличивается и приближается къ совпаденію съ кругомъ; 72-къ, напримѣръ, на небольшомъ разстояніи трудно отличить отъ круга.

При этомъ удвоеніи легко видѣть, какъ увеличивается и площадь правильнаго многоугольника, какъ при увеличеніи числа его сторонъ прибавляются къ ней все новые и новые △-ки, и какъ она вся приближается къ совпаденію съ площадью круга.

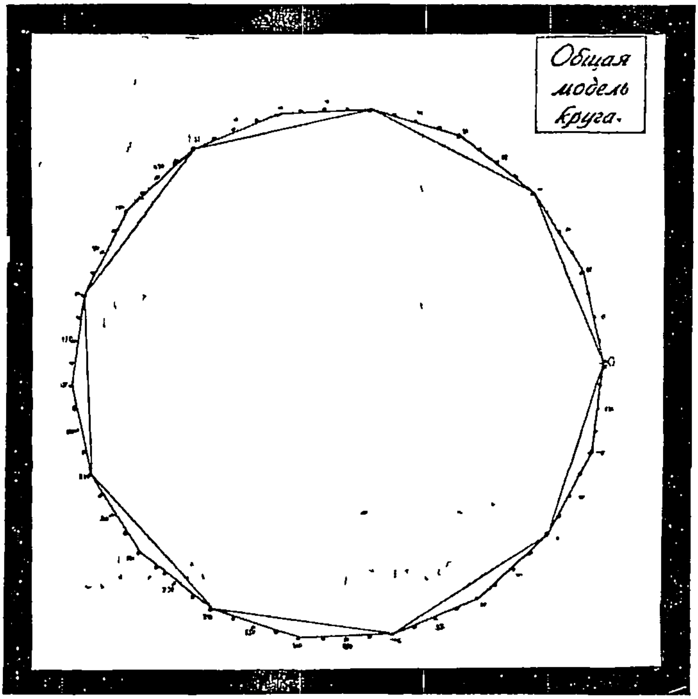


Рис. 66. Удвоеніе числа сторонъ многоугольниковъ. правильные 9-угольникъ и 18-угольникъ.

Измѣряя мм. лентой (приготовленной изъ миллиметр. бумаги) или простой см. лентой периметры △-ка, квадрата, 6, 8, 9 и др. многоугольниковъ, мы видимъ, что отношеніе периметровъ къ діаметру все болѣе приближается къ $=3,14$.

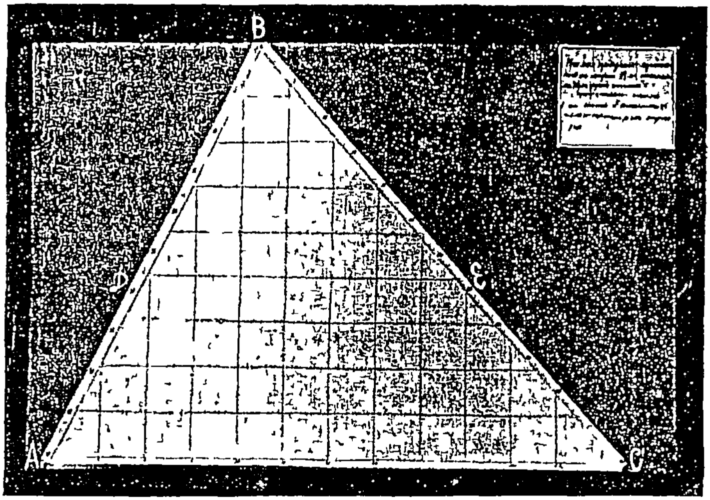


Рис. 67. Лемма подобія △△-въ.

XXVIII. Свойство сѣкущей въ △-кѣ, проходящей ∥ одной изъ его сторонъ.

На толстомъ и плотномъ картонѣ наклеимъ миллиметровую бумагу, вырѣзанную въ формѣ △-ка; по краямъ оклеимъ 2-мя полосками: $AB = 50$ и $BC = 60$, вырѣзанными аккуратно изъ миллиметровой бумаги иного цвѣта, чѣмъ внутренняя область △-ка.

Нижняя сторона AC должна принадлежать внутренней сѣти мм. клѣтокъ. Тогда роль сѣкущей ∥ AC будетъ играть каждая изъ множества горизонтальныхъ линіи этой сѣти; чтобы ее было видно классу, достаточно натянуть кольцо изъ ластика кругомъ всего картона и перемѣщать такъ, чтобы ластикъ совпадалъ съ горизонтальными линіями внутренней мм. системы. Отсчитывать можно по мм. линіи, совпадающей хотя бы съ верхнимъ краемъ ластика. Измѣряемъ съ точностью до 1 мм. AB, BC и AC, затѣмъ BD, BE и DE. Находимъ отношенія.

Тогда $\frac{AB}{BD}=\frac{BC}{BE}=\frac{AC}{DE}$.

Оказывается, эти отношенія равны другъ другу.

На рисункѣ 68 видны результаты измѣренія и вычисленія, дающія 3 вѣрныхъ цифры.

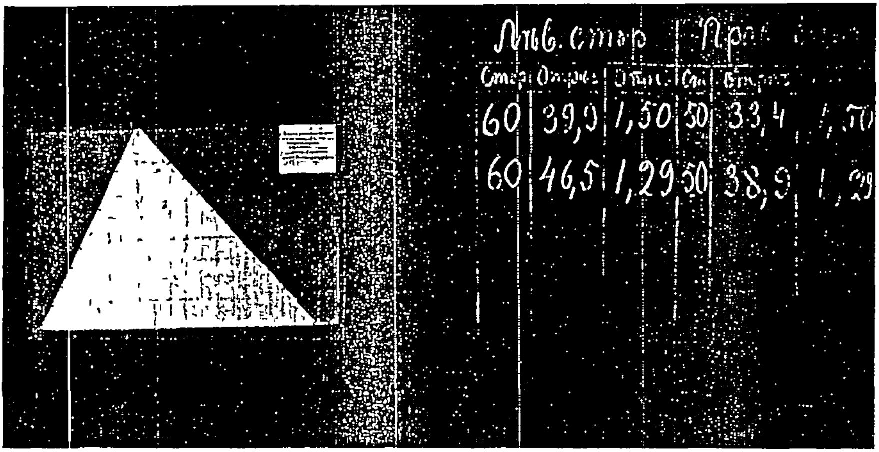


Рис. 68. Запись измѣреній и вычисленій на модели рис. 67.

Въ классѣ, въ цѣляхъ сбереженія времени, работа идетъ слѣдующимъ образомъ: учитель вызываетъ 2 учениковъ; одинъ производитъ измѣренія на модели и вслухъ называетъ величину отрѣзковъ, другой записываетъ эти числа на доскѣ. Затѣмъ классу по рядамъ предлагается найти отношенія соотвѣтствующихъ отрѣзковъ съ точн. до 0,1: 1-й рядъ, напримѣръ, вычисляетъ отношенія лѣваго отрѣзка къ лѣвой сторонѣ $\triangle$-ка, 2-й рядъ отношеніе праваго отрѣзка къ правой сторонѣ $\triangle$-ка. Не дожидаясь окончанія вычисленія, учитель предлагаетъ ученику у модели взять новую параллель и дать новыя числа; эти новыя данныя онъ даетъ второй группѣ учениковъ, третьи данныя — третьей группѣ и т. д. Такимъ образомъ, когда послѣдняя группа получитъ данныя для вычисленія, первая группа уже успѣетъ получить результаты вычисленія.

Эта же модель пригодна для иллюстраціи теоремы:

Двѣ параллельныя прямыя отсѣкають отъ сторонъ угла (или разсѣкають стороны угла на) пропорціональные отрѣзки.

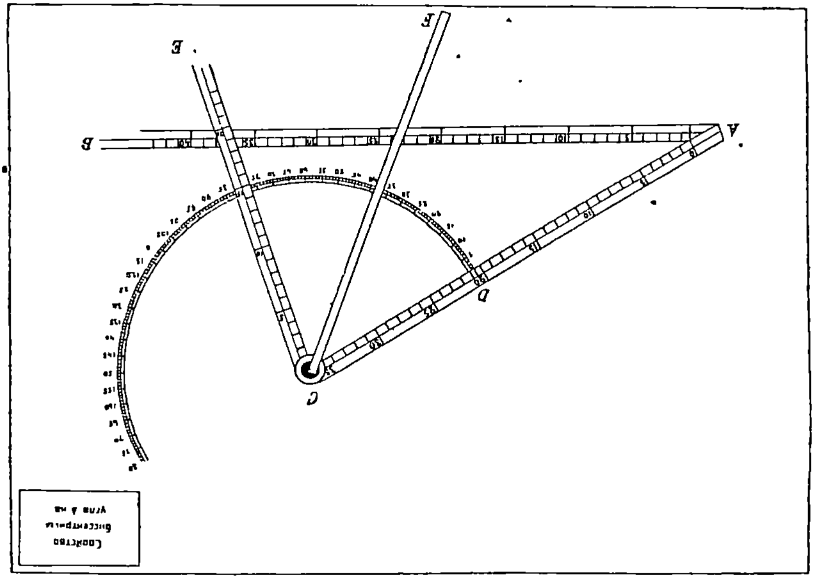


Рис. 69. Биссектриса угла △-ка.

XXIX. Свойство биссектрисы угла △-ка.

На листѣ картона, оклееннаго темной цвѣтной или черной бумагой (разм. 70 × 50 см.), наклеить полоски изъ мм. бумаги, размѣченныя на см.

AB — 60 см.

AC — 36 см. Стороны эти наклонены другъ къ другу подъ угломъ приблизительно въ 30° (рис. 69).

Изъ точки *C*, какъ изъ центра, описанъ полукругъ, который служитъ транспортиромъ для измѣренія и дѣленія пополамъ угла *C*. Начало счета градусовъ отъ точки *D*.

Около вершины *C* вращаются сторона *CE* — 60 см. и биссектриса *CF*, другого цвѣта.

Стороны $\triangle$-ка образуются внутренними краями полосокъ. Особенно тщательно слѣдуетъ опредѣлить вершину C, сквозь которую должны проходить ось (иголка, прокалывающая картонъ и укрѣпленная на пробкѣ, приклеенной столярнымъ клеемъ, сзади картона), около которой должны вращаться CF и CE, каждая съ подклеенным сзади кружочкомъ изъ кальки.

При точномъ построеніи и указанномъ выше масштабѣ

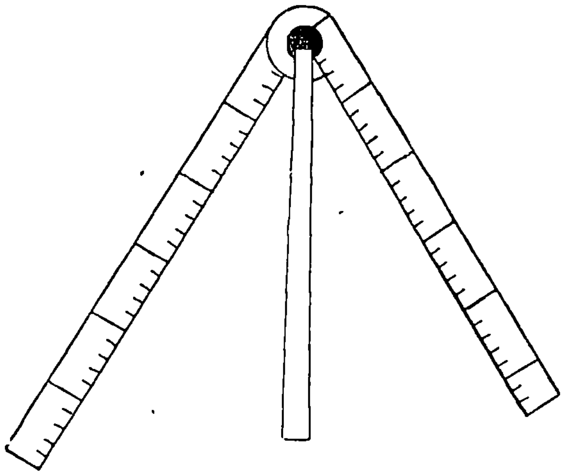


Рис. 70. Способъ скрѣпленія 2-хъ сторонъ $\triangle$-ка и биссектрисы.

точность отношенія достигаетъ 0,01, т.-е. вѣрны 3 цифры. Рис. 70 указываетъ расположеніе вращающихся частей.

Радіусъ транспортира долженъ быть возможно больше, чтобы уменьшить ошибку при отсчетѣ градусовъ. Въ висячемъ положеніи вся модель охватывается тонкой кольцевой резинкой для того, чтобы закрѣпить подвижныя части или же подвижныя части прикалываются къ картону кнопками.

Будемъ вращать сторону CK около точки C, — будетъ измѣняться и форма $\triangle$-ка AKC. Давъ $\triangle$-ку опредѣленную форму, закрѣпимъ ее и, измѣривъ стороны AC и CK, найдемъ ихъ отношеніе. Раздѣлимъ уголъ C пополамъ, пользуясь транспортиромъ.

Затѣмъ измѣряемъ и находимъ отношеніе отрѣзковъ A и K, съ точностью до 0,01. При тщательномъ измѣреніи отношенія будутъ равны (по крайней мѣрѣ, первыя три цифры). Измѣняя уголъ C треугольника (рис. 71) и повто-

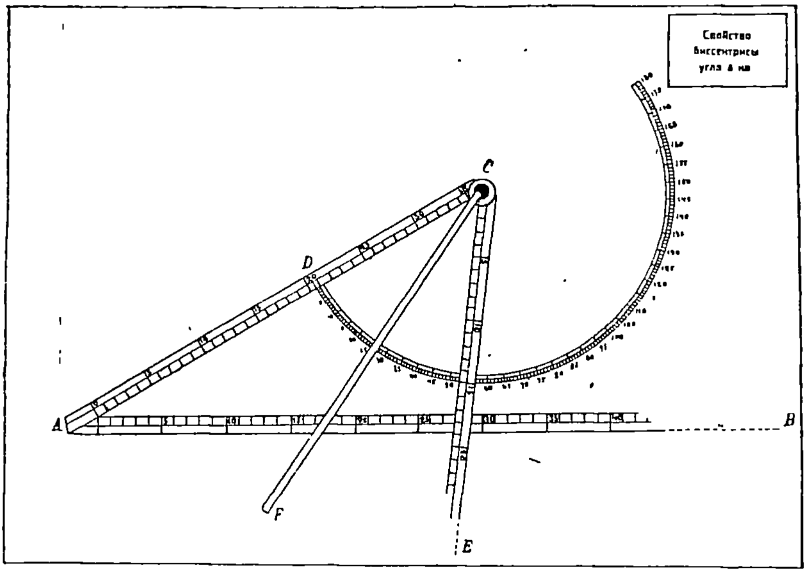


Рис. 71. Свойство биссектри съ угла △-ка.

ряя предыдущія вычисленія нѣсколько разъ, убѣждаемся, что связь между двумя боковыми сторонами △-ка и двумя отрѣзками, образуемыми биссектрисой на 3-й сторонѣ— постоянная, что **биссектриса угла △-ка дѣлитъ сторону △-ка на части, пропорціональныя двумъ другимъ сторонамъ** и это справедливо для всякаго △-ка.

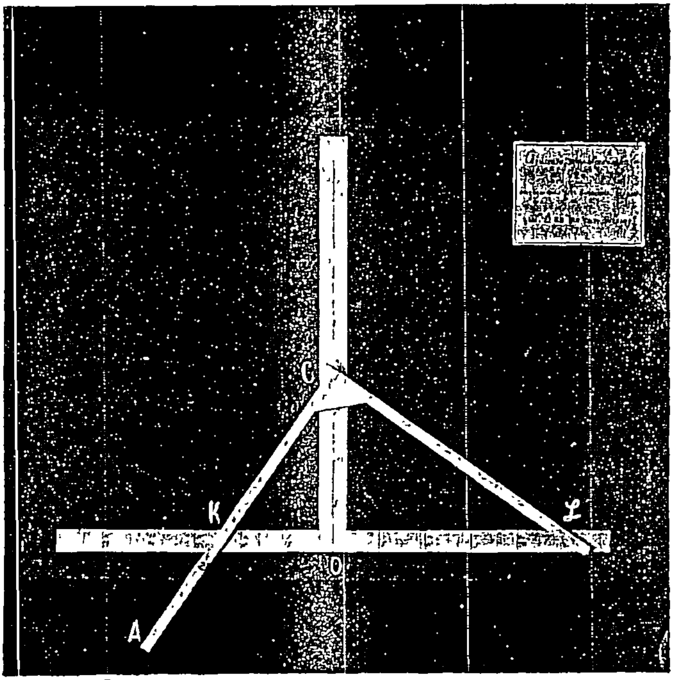


Рис. 72. Гипотенуза — нижняя граница горизонтальной полоски, катеты—внѣшнія границы прямого угла—KC и CL. Точка вращенія C — шарниръ изъ кальки, подклеенный сзади прямого угла, положеніе ея должно быть строго опредѣлено.

XXX. Свойство прямоугольнаго треугольника, пересѣченнаго перпендикуляромъ, опущеннымъ на гипотенузу изъ вершины прямого угла.

На темномъ фонѣ картона наклеиваются двѣ перпендикулярныя полоски, при чемъ перпендикулярность ихъ должна быть строго провѣрена. Отрѣзки эти должны быть размѣчены на см. и мм. или проще вырѣзаны изъ мм. бумаги, при чемъ начало отсчета для всѣхъ 3-хъ отрѣзковъ должно быть въ основаніи $\perp$-ра, O.

Около точки C вращается фигура $AKCL$, вырѣзанная изъ тонкаго бристольскаго картона. Подвижная часть ея двѣ стороны BC и CD, образующія (строго!) прямой уголъ и размѣченныя на см. и мм. Счетъ идетъ отъ вершины прямого угла—C. При измѣреніи подвижная часть прикрѣпляется къ нижней двумя кнопками или охватывается вмѣстѣ съ нижней круговымъ ластикомъ (рис. 72). Измѣряя отрѣзки гипотенузы, находимъ, что: KO и LO и перпендикуляръ CO изъ вершины прямого угла C на гипотенузу образуютъ пропорцію: $KO:CO=CO:LO$.

Измѣряя катетъ KC, гипотенузу KL и прилежащій къ катету отрѣзокъ KO, находимъ: $KL:KC=KC:KO$.

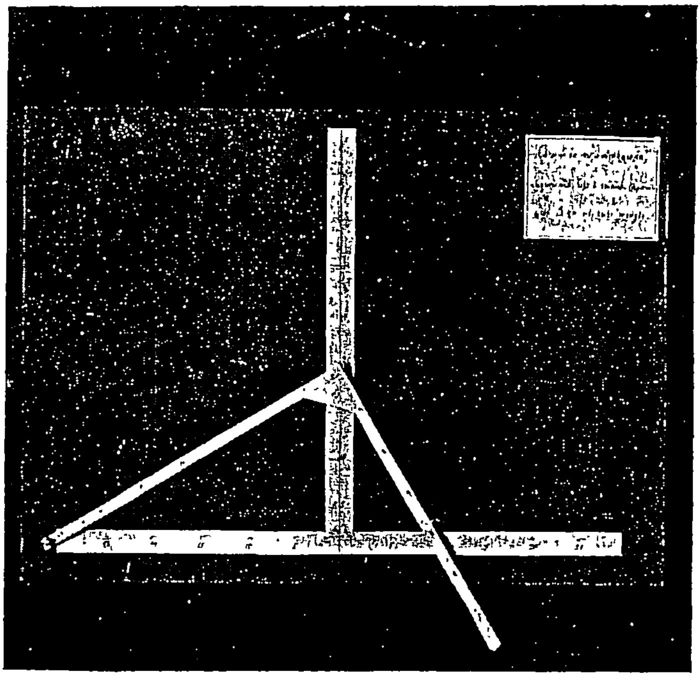


Рис. 73. Новое положеніе модели.

Повторяя эти измѣренія и вычисленія для различныхъ формъ $\triangle$-ка (рис. 73), убѣждаемся, что свойство это справедливо для всевозможныхъ положеній $\triangle$-ка.

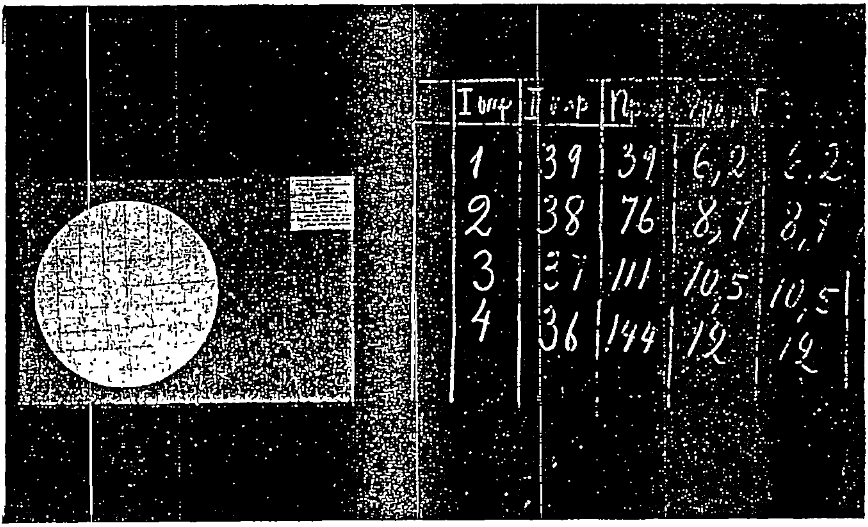


Рис. 74. Извлеченіе квадратнаго корня изъ чиселъ графическимъ путемъ. На таблицѣ результаты измѣренія и вычисленія $\sqrt{\ }$. 1-й столбецъ—величина 1 отрѣзка діаметра въ см., 2-й — величина 2 отрѣзка діаметра въ см., 3-й — произведеніе отрѣзковъ, 4-й $\sqrt{\ }$ изъ этого произведенія, найденный графически, 5-й $\sqrt{\ }$, взятый обычнымъ способомъ.

XXXI. Извлеченіе квадратнаго $\sqrt{\ }$ изъ чиселъ на основаніи свойства перпендикуляра, опущеннаго изъ какой-нибудь точки окружности на діаметръ.

На картонѣ наклеенъ квадр. листъ мм. бумаги 50 $\times$ 50. На немъ начерчена окружность ($r = 24$ см.) и горизонтальный діаметръ (рис. 74).

Извлеченіе $\sqrt{\ }$ изъ чиселъ графическимъ путемъ основано на свойствѣ $\perp$, опущеннаго изъ какой-нибудь точки окружности на діаметръ; численно онъ выражается квадратнымъ корнемъ изъ произведенія отрѣзковъ діаметра.

Намѣчаемъ на діаметрѣ какую-нибудь точку; она дѣлитъ его на 2 отрѣзка. Пусть 1-й отрѣзокъ равенъ 4 см., тогда 2-й $= 40 - 4 = 36$. Произведеніе ихъ $= 144$. Перпендикуляръ, возставленный изъ этой точки до окружности имѣетъ длину, равную $\sqrt{144} = 12$.

Приводимъ таблицу, полученную при измѣреніяхъ, произведенныхъ учениками на модели съ радіусомъ равнымъ 20 см.

1-й отр.	2-й отр.	Произв.	Граф. $\sqrt{\ }$	Вычисленіе даетъ.
1	39	39	6,2	6,2
2	38	76	8,7	8,7
3	37	111	10,5	10,5
4	36	144	12	12
5	35	175	13,3	13,2
6	34	204	14,3	14,3
7	33	231	15,2	15,2
8	32	256	16	16
9	31	279	16,7	16,7
10	30	300	17,3	17,3
11	29	319	17,9	17,9
12	28	336	18,3	18,3

XXXII. Теорема Пиѳагора

въ числовомъ выраженіи.

На картонѣ темнаго фона (рис. 75) наклеимъ подъ прямымъ угломъ **строго провѣреннымъ** двѣ полоски изъ миллиметровой бумаги по 50 см. съ размѣченными см. и мм. Внутреннія стороны ихъ образуютъ катеты прямоугольнаго $\triangle$-ка. Гипотенуза—подвижная полоска 50 см. изъ тонкаго бристольскаго картона съ наклеенной мм. бумагой. Концы ея A и B правильно обрѣзаны и проклеены столярнымъ клеемъ (иначе, при скольженіи по катетамъ, эти концы оботрутся и точность отсчетовъ уменьшится).

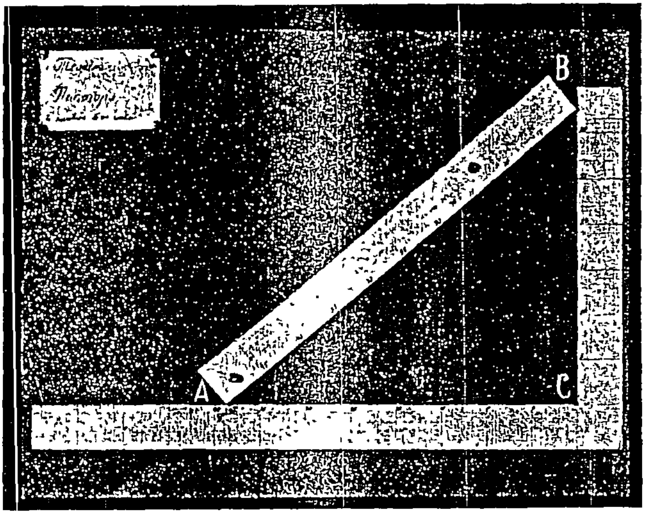


Рис. 75. Теорема Пиѳагора (въ числовомъ выраженіи).

Измѣримъ *AC*, *BC* и *AB*, сложимъ квадраты первыхъ двухъ чиселъ и тогда окажется, что сумма ихъ будетъ равна квадрату числа, выражающаго длину стороны *AB*.

Передвигая скользящимъ движеніемъ *AB* по сторонамъ прямого угла и повторяя предыдущія измѣренія и вычисленія нѣсколько разъ, убѣждаемся, что **квадратъ гипотенузы во всякомъ прямоугольномъ △-кѣ равенъ суммѣ крадратовъ катетовъ.**

Теорема Пиѳагора

(по даннымъ классной работы, гипотенуза = 30 см.).

I кат.	II кат.	Квадр. I кат.	Квадр. II кат.	S кат.^{2}
19,5	22,8	380,25	519,84	900,09
25	16,6	625	275,56	900,56
10	28,3	100	800,89	900,89

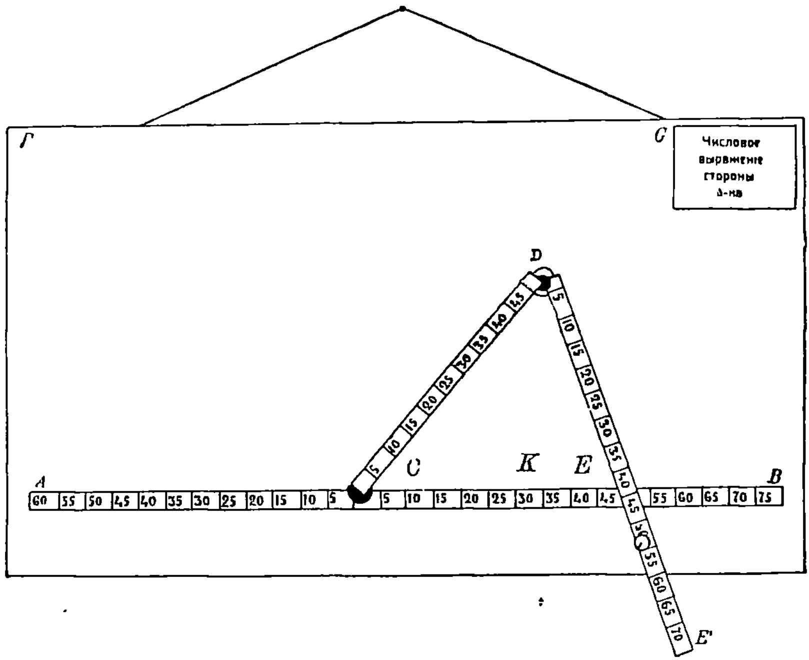


Рис. 76. Весь листъ оклеенъ миллиметровой бумагой. AB совпадаетъ съ сѣткой, C—неподвижный шарниръ, D—подвижной шарниръ.

XXXIII. Числовое выраженіе стороны $\triangle$-ка, лежащей противъ остраго, тупого или прямого угла.

На картонѣ размѣромъ прибл. 140×80 см. наклеимъ мм. бумагу ($AFGB$).

Полоску AB (135 см. $\times$ 1 см.) начертимъ прямо на миллиметровой бумагѣ (рис. 76).

Отсчетъ будемъ вести отъ точки C въ обѣ стороны.

$CD = 50$ см. $\times$ 1 см., $DE' = 70$ см. $\times$ 1 см. изъ тонкаго бристольскаго картона и оклеены миллиметровой бумагой другого цвѣта.

Отсчетъ по CD отъ C къ D и по DE отъ D къ E.

Полоски CD и DE могутъ вращаться около C (неподвижнаго) и D (подвижнаго) шарнировъ. Внутреннія стороны ихъ будутъ образовывать при этомъ треугольники самой разнообразной формы. Подвижныя части прикалываются къ стану ниже AB кнопкой.

E можетъ скользить вдоль линіи AB.

Линіи сѣтки, перпендикулярныя къ AB, будутъ играть роль высоты.

Для указанія этой высоты можно употребить кольцо изъ круглаго черного ластика, охватывающее картонъ и проходящее $\parallel$ мм. линіямъ чрезъ вершину $\triangle$-ка. Отсчетъ же надо дѣлать по мм. линіямъ.

а) Закрѣпляемъ $\triangle$ CDE въ какомъ-нибудь положеніи (косоугольный $\triangle$-къ), измѣряемъ стороны CD, DE и CE и проекцію CK. Подставивъ найденныя числа въ формулу

$$DE^2 = CD^2 + CE^2 - 2CE.\ CK,$$

увидимъ, что формула обратится въ тождество.

б) Будемъ измѣнять уголъ C, не измѣняя CE, увидимъ, что эта формула останется справедливой всегда при измѣненіяхъ угла отъ 0 до 90°. Уменьшивъ уголъ до 0, мы увидимъ, что CD и DE распластаются по линіи CB, и DE будетъ равна $CE - CD$ или, наоборотъ, $CD - CE$ (смотря по тому, какой отрѣзокъ больше). То же увидимъ изъ формулы, потому что она обратится въ

$$DE^2 = CD^2 + CE^2 - 2CE.\ CD, \text{ или}$$
$$DE^2 = (CD - CE)^2, \text{ откуда}$$
$$DE = CD - CE.$$

в) Увеличивъ острый уголъ C до 90°, увидимъ, что въ полученномъ прямоугольномъ $\triangle$-кѣ

$$DE^2 = CD^2 + CE^2.$$

То же даетъ намъ и формула, на сновапіи чисто алгебраическихъ преобразованій.

Наконецъ, доведя $\angle$ C до 180°, найдемъ изъ модели, что $DE = CD + CE$ и формула намъ дастъ то же самое:

$$DE^2 = CD^2 + CE^2 + 2CE.\ CD = (CD + CE)^2$$
$$DE = CD + CE.$$

XXXIV. Пропорціональныя линіи въ кругѣ.

А) Хорды.

На картонѣ, оклеенномъ цвѣтнымъ фономъ (рис. 77), начертимъ окружность ($r = 20$). Вырѣжемъ изъ бристольскаго тонкаго картона полоску (60×1 см.), оклеимъ ее мм. бумагой и посрединѣ въ точкѣ C подклеимъ кружочекъ изъ кальки, который у насъ будетъ играть роль шарнира.

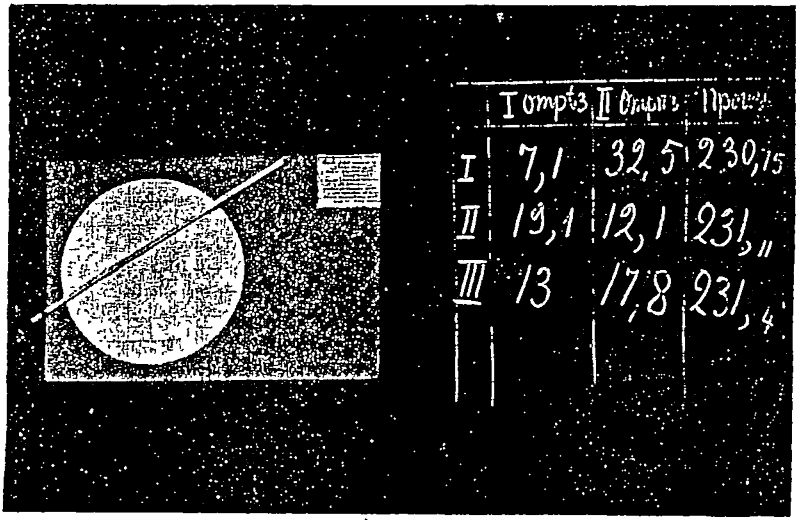


Рис. 77. Отрѣзки хорды, вращающейся около неподвижной точки внутри круга. Таблица даетъ результаты измѣренія и вычисленія.

Размѣтимъ эту линейку на сантиметры, дѣлая отсчетъ отъ C вправо и влѣво.

Проколемъ въ самомъ началѣ отсчета эту кальку у самой линейки иголкой и приколемъ ее въ какой-нибудь точкѣ нашего круга. (Приколемъ эту полоску еще въ одной точкѣ кнопкой). Часть ея AB внутри круга будетъ изображать хорду 70.

Измѣримъ отрѣзки AC и BC и перемножимъ полученныя числа. Повернемъ линію AB въ новое положеніе и снова перемножимъ числа, выражающія отрѣзки. Повторивъ это вычисленіе нѣсколько разъ, мы убѣждаемся, что **при вращеніи хорды около постоянной точки внутри круга** величина хорды мѣняется, отрѣзки ея, образуемые точкой вращенія, тоже измѣняются, **но произведеніе этихъ отрѣзковъ остается для данной точки постояннымъ.** Чему же равно это произведеніе? Проведя чрезъ эту точку окружности діаметръ и повернувъ хорду перпендикулярно къ этому діаметру, мы видимъ, что діаметръ раздѣлитъ эту хорду пополамъ, а поэтому произведеніе двухъ равныхъ отрѣзковъ этой хорды, равное всѣмъ предыдущимъ подобнымъ же произведеніямъ, будетъ равно квадрату перпендикуляра, возставленнаго къ діаметру въ точкѣ C до пересѣченія съ окружностью въ точкѣ F или перпендикуляръ, возставленный изъ какой-нибудь точки діаметра до пересѣченія съ окружностью, есть средняя пропорціональная между отрѣзками этого діаметра.

Работа въ классѣ.

Одинъ ученикъ на модели измѣряетъ величину отрѣзковъ, на которые дѣлится хорда въ точкѣ вращенія, другой—записываетъ эти данныя на доскѣ, ученики по группамъ находятъ произведенія отрѣзковъ хордъ, проходящихъ чрезъ одну точку.

Произведенія равны съ точностью до 1. Если бы вмѣсто произведеній отрѣзковъ взять отношенія ихъ, то они были бы равны до сотыхъ долей.

Группы.	I отрѣзокъ.	II отрѣзокъ.	Произведеніе.
I	7,1 см.	32,5 »	230,75
II	25,6 »	9 »	230,4
III	19,1 »	12,1 »	231,11
IV	13 »	17,8 »	231,4

B) Сѣкущія.

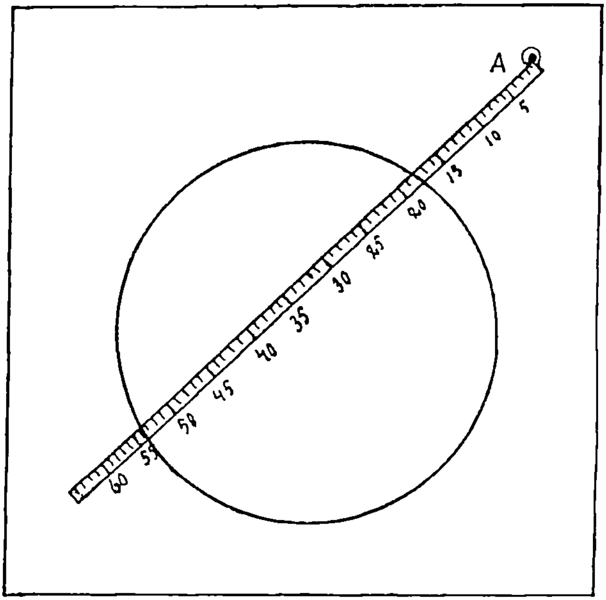


Рис. 78. Модель сѣкущей въ кругѣ.

Возьмемъ бумажную линейку, приготовленную способомъ, подобнымъ предыдущему, шарниръ изъ кружка кальки помѣстимъ на концѣ линейки, и отсчетъ отъ центра этого шарнира будетъ итти только въ одну сторону отъ точки вращенія A.

Установимъ линейку AC въ такомъ положеніи, чтобы точка A была внѣ окружности (рис. 78) и чтобы AC пересѣкала окружность въ точкахъ B и C. Измѣримъ отрѣзки AC и BC и перемножимъ полученныя числа; тогда

$$AC \cdot BA = \text{постоянному числу } K.$$

Будемъ вращать линейку AC, и при этомъ повторять предыдущія вычисленія, тогда убѣдимся, что длина сѣкущей и ея отрѣзковъ при вращеніи около точки A измѣняется, но **произведеніе сѣкущей на ея внѣшнюю часть остается постояннымъ;** это будетъ закономъ (какъ мы можемъ убѣдиться, повторяя наше вычисленіе много разъ) для сѣкущихъ различной длины, поэтому можемъ этотъ числовой законъ выразить въ общемъ видѣ—формулѣ:

$$a \, . \, b = k \text{ (постоянному числу),}$$

гдѣ a сѣкущая, а b—ея внѣшняя часть.

Чему же равно это k? Передвигая нашу сѣкущую все ближе къ краю окружности, мы видимъ, что при этомъ вся сѣкущая a уменьшается, а ея внѣшняя часть b — увеличивается, и онѣ стремятся стать равными другъ другу по мѣрѣ сближеніи точекъ C и B. Когда эти точки сольются въ одну точку D, тогда сѣкущая обратится въ касательную

$$b = a \text{ и}$$
$$a^2 = b^2 = k,$$

т - е. число k будетъ равно квадрату касательной, или касательная есть средняя пропорціональная между всею сѣкущею и внѣшнею ея частью.

Работа въ классѣ.

Одинъ ученикъ на модели измѣряетъ длину всей сѣкущей и внѣшней ея части, поворачивая сѣкущую около неподвижной точки, другой—записываетъ данныя измѣренія на доскѣ; остальные по группамъ находятъ произведеніе сѣкущей на внѣшнюю ея часть.

Группы.	Вся сѣкущая.	Внѣшняя часть ея.	Произведеніе.
I	54,3	14,7	798,21
	46,1	17,7	805
	42,6	19	803

Вѣрны двѣ цифры.

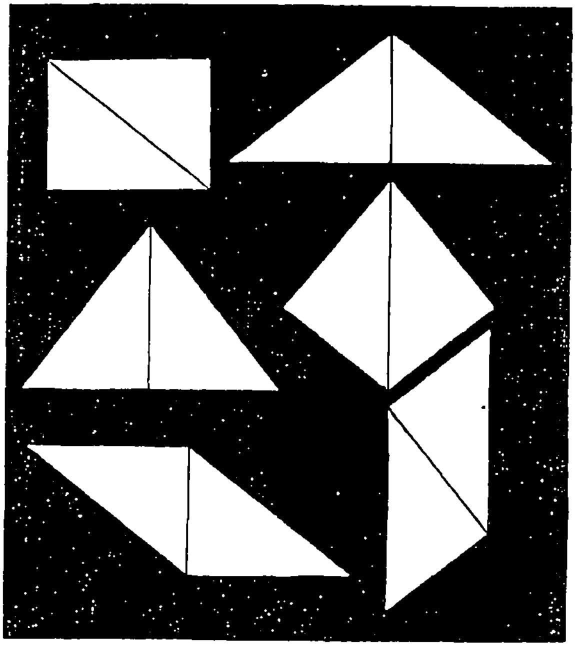


Рис. 79. Эти фигуры имѣютъ одну площадь, но, очевидно, не равны между собою.

XXXV. Равновеликость и равенство фигуръ не одно и то же.

Вырѣжемъ изъ картона прямоугольникъ и разрѣжемъ его діагональ на двѣ половинки. Составляя эти половинки такъ, какъ указано на рисункѣ 79, мы увидимъ, что всѣ эти шесть фигуръ имѣютъ одну и ту же площадь и, слѣд., равновелики, но, очевидно, не равны: ихъ нельзя наложить другъ на друга такъ, чтобы онѣ совпали.

XXXVI. Измѣреніе площади.

Для того, чтобы возможно реальнѣе представить измѣреніе площади, очень полезно измѣрить нѣсколько площадей непосредственно, т.-е. сосчитать, сколько квадратовъ (1 ед. [2])

содержится въ данной площади. Для этого всего проще начертить тонкими линіями фигуры на мм. бумагѣ и сосчитать число квадратныхъ см. и мм. въ каждой фигурѣ.

Общія замѣчанія къ моделямъ №№ 39—43.

Удобнѣе и изящнѣе эти модели укрѣплять клеемъ на картонѣ, оклеенномъ темной (напр., темно-синей) бумагой (такая бумага большого размѣра, альбомная имѣется вездѣ). Подвижныя части устраивать на шарнирахъ изъ кальки (см. рис. 1). Но можно для простоты и скорости вырѣзывать фигуры просто изъ бумаги передъ глазами учениковъ и прикалывать кнопками къ доскѣ.

XXXVII. Площадь квадрата.

Начертимъ нѣсколько квадратовъ на мм. бумагѣ, со сторонами 10—20 см. и сосчитаемъ, сколько кв. см. будетъ въ площади Легко замѣтить, что можно найти площадь квадрата и не считая число квадратныхъ см. въ площади: для этого достаточно **узнать лишь длину стороны квадрата и возвести эту длину въ квадратъ.**

Нетрудно и объяснить это правило.

XXXVIII. Площадь параллелограмма.

Вырѣжемъ изъ картона параллелограммъ (рис. 80) съ основаніемъ и высотой.

$$AD = 40 \text{ см.}$$
$$BE = 24 \text{ см.}$$

Разрѣжемъ пар-ммъ по высотѣ BE и $\triangle ECD$ приставимъ сбоку къ CD, тогда получимъ прямоугольникъ ADE (рис. 81), съ такими же основаніемъ и высотою, какъ и у параллелограмма. Площади обѣихъ фигуръ очевидно равны. Площадь прямоугольника $= 40 \times 24$ кв. см. $= 9600$ кв. см. и площадь пар-мма $= 9600$ кв. см. $= 40 \times 24$.

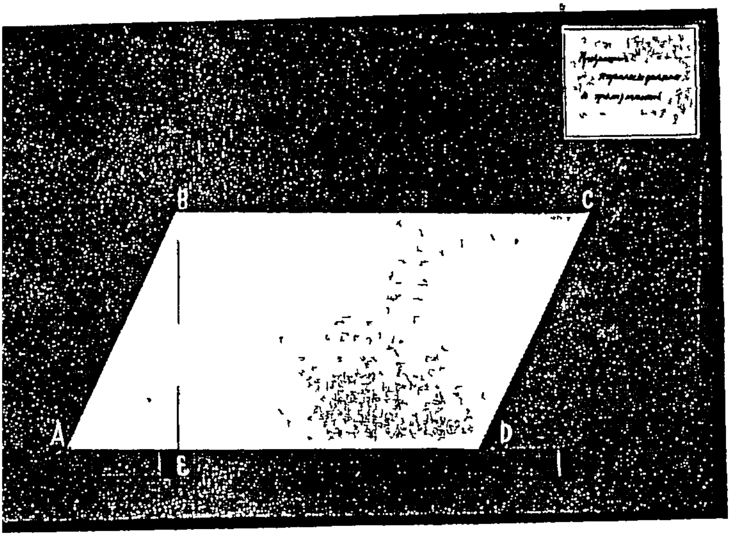


Рис. 80.

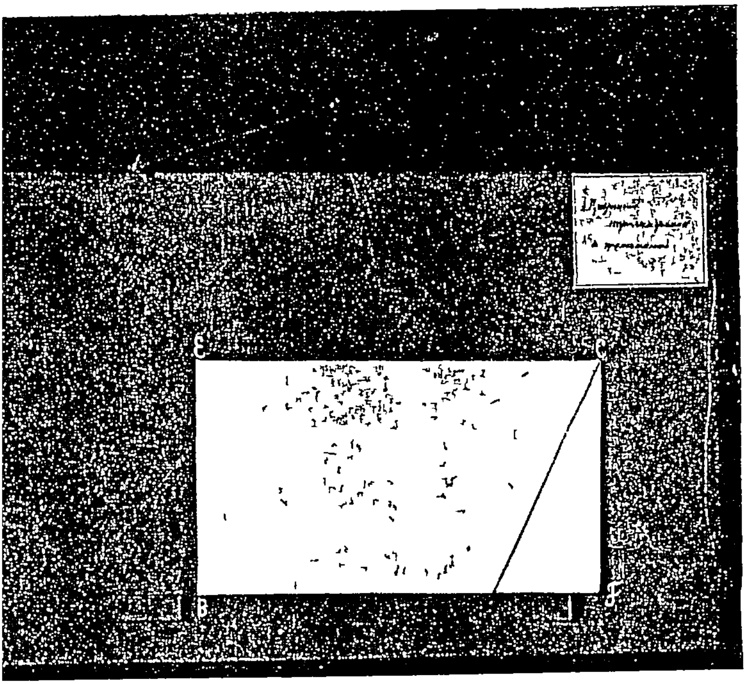


Рис. 81.

Это число можно найти прямо изъ параллелограмма, измѣривъ его основаніе и высоту и перемноживъ эти числа между собою. Слѣдовательно, чтобы измѣрить параллелограммъ, достаточно измѣрить его основаніе и высоту и оба полученныхъ числа перемножить.

XXXIX. Площадь прямоугольнаго $\triangle$-ка.

Вырѣжемъ изъ картона прямоугольный $\triangle$-къ и разрѣжемъ его по линіи, дѣлящей его гипотенузу и катетъ h пополамъ (рис. 82).

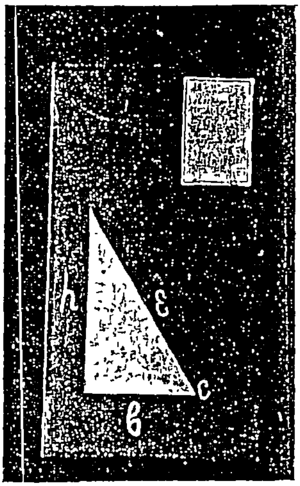


Рис. 82.

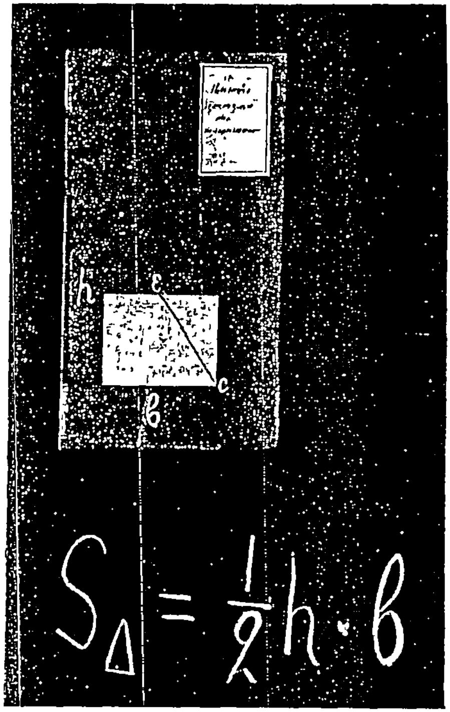


Рис. 83. Прямоугольный $\triangle$ превращается въ прямоугольникъ.

Повернемъ верхній $\triangle$-къ около точки E, пока BE не совмѣстятся съ EC; тогда прямоугольный $\triangle$-къ превратится въ прямоугольникъ съ основаніемъ b и высотою $\frac{h}{2}$ (рис. 83).

Отсюда видно, что для измѣренія площади прямоугольнаго △-ка надо измѣрить его катеты, и произведеніе этихъ чиселъ раздѣлить пополамъ: $S=\frac{b.h}{2}$.

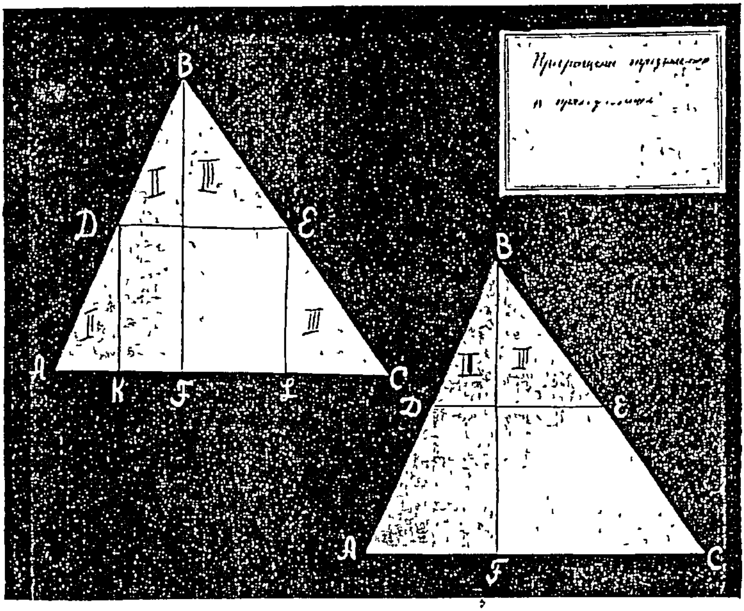


Рис. 84. Превращеніе △-ка въ прямоугольникъ.

XL. Площадь всякаго △-ка.

a) Вырѣжемъ изъ картона какой-нибудь △-къ (нижній) съ основаніемъ AC и высотою BF. Разрѣжемъ его по средней линіи DE, и верхній △-къ по высотѣ FB. Составимъ сначала прежній △-къ и повернемъ II и III части около точекъ E и D. △-къ превратится тогда въ прямоугольникъ (рис. 85) съ такимъ же основаніемъ и высотою, вдвое меньшею, чѣмъ высота нашего △-ка. Отсюда пл. $\triangle ABC = b.\frac{h}{2}$.

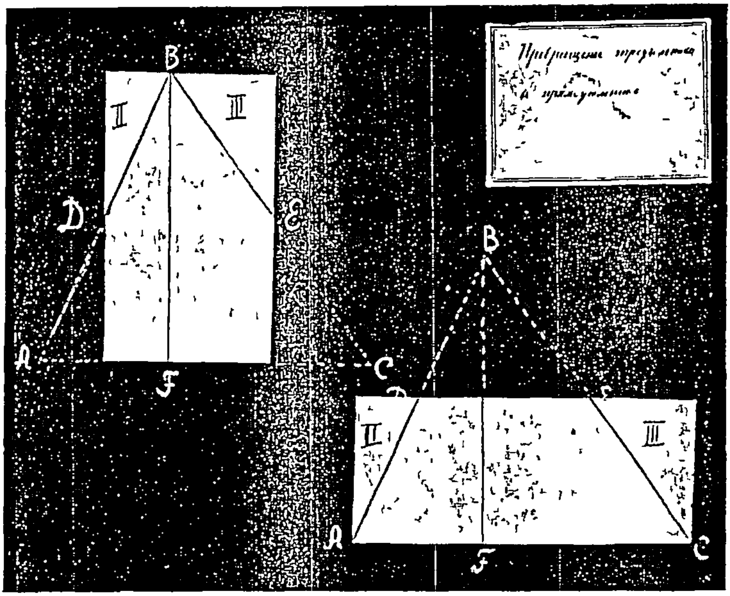


Рис. 85. Превращеніе △-ка въ прямоугольникъ.

b) Вырѣзавъ △-къ ABC (верхній), разрѣжемъ его по линіямъ DE, DL и EK и повернемъ куски ADK и ECL около точекъ D и E.

△-къ превратится тогда въ прямоугольникъ (рис. 85) съ такою же высотою, но основаніемъ, вдвое меньшимъ, чѣмъ у даннаго △-ка. Отсюда пл. $\triangle ABC = \frac{b}{2} . h$. Очевидно, обѣ формулы однозначущи.

XLI. Площадь ромба.

Вырѣжемъ изъ картона ромбъ $ABCD$ и разрѣжемъ его по діагоналямъ AC и OD.

I. Нижнюю половину ромба наклеимъ на картонъ (оклеенный темнымъ фономъ), а то и просто приколемъ кнопками, къ стѣнѣ, а верхнюю, состоящую изъ двухъ прямоугольныхъ △△-въ, составимъ такъ, чтобы возстановить ромбъ въ его основномъ видѣ (рис. 86).

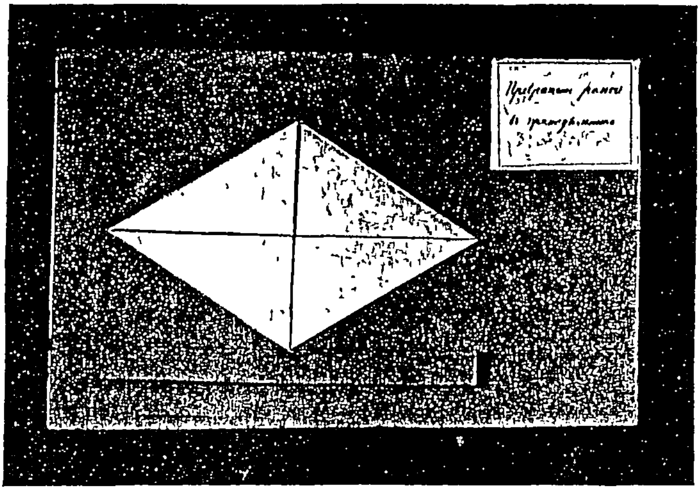


Рис. 86. Ромбъ разрѣзанъ по діагоналямъ; два нижнихъ △-ка приклеены, два верхнихъ приставлены.

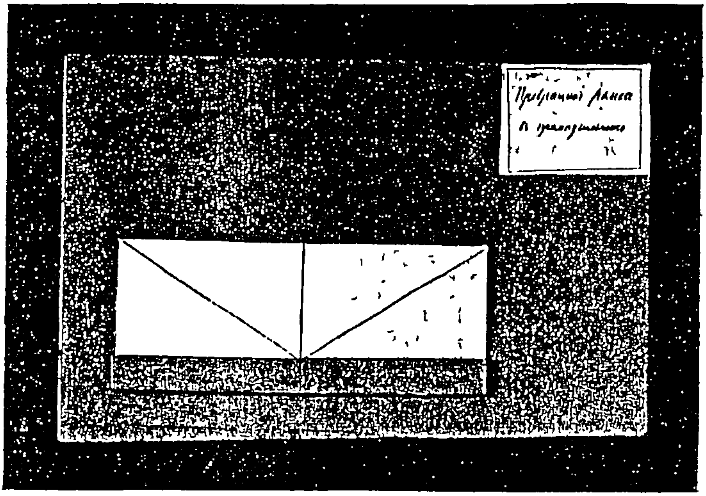


Рис. 87. Перестановкой 2-хъ верхнихъ △△-въ внизъ ромбъ превращается въ прямоугольникъ.

II. Снимаемъ оба верхнихъ △△-ка и приставляемъ ихъ снизу, мѣняя мѣстами: правый налѣво, лѣвый направо (рис. 87); тогда ромбъ превратится въ прямоугольникъ, у котораго основаніемъ будетъ служить діагональ ромба, а высотою — половина другой діагонали. Слѣд., **площадь ромба равна половинѣ произведенія діагоналей.**

XLII. Площадь трапеціи.

Вырѣжемъ изъ картона трапецію *ABCD* (рис. 52), разрѣжемъ ее по средней линіи *E* и повернемъ верхнюю часть *EBC* около точки. Тогда образуется параллелограммъ *AEK* съ высотою, равною половинѣ высоты трапеціи. Мы видимъ изъ рис. 53-го, что нижнее основаніе пар-мма равно $a+b$, площадь его очевидно равна площади трапеціи, если же взять за основаніе сторону *EK*, то $a+b=2\ m$.

Слѣдовательно, площадь трапеціи равна **суммѣ ея основаній, умноженной на половину высоты, или же средней линіи, умноженной на высоту.**

XLIII. Теорема Пиѳагора.

Вырѣжемъ изъ бумаги 2 равныхъ квадрата по 70 см. въ сторонѣ.

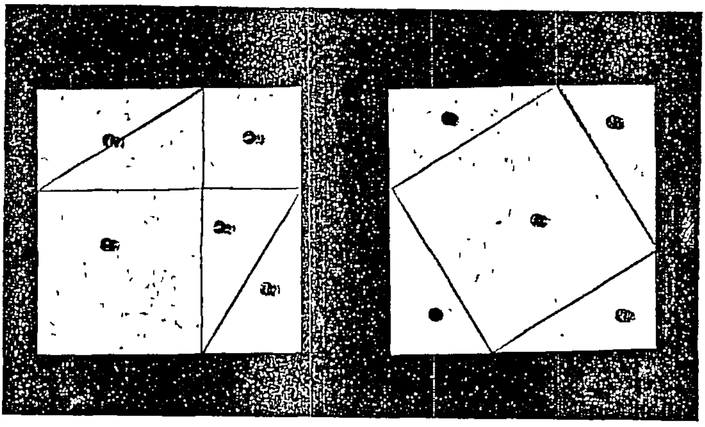


Рис. 88. Теорема Пиѳагора. Оба квадрата построены каждый на суммѣ катетовъ.

Раздѣлимъ каждую сторону на части, напр., 40 и 30 см. въ каждомъ квадратѣ, такъ, какъ указано на рис. 88. Соединимъ точки дѣленія между собою.

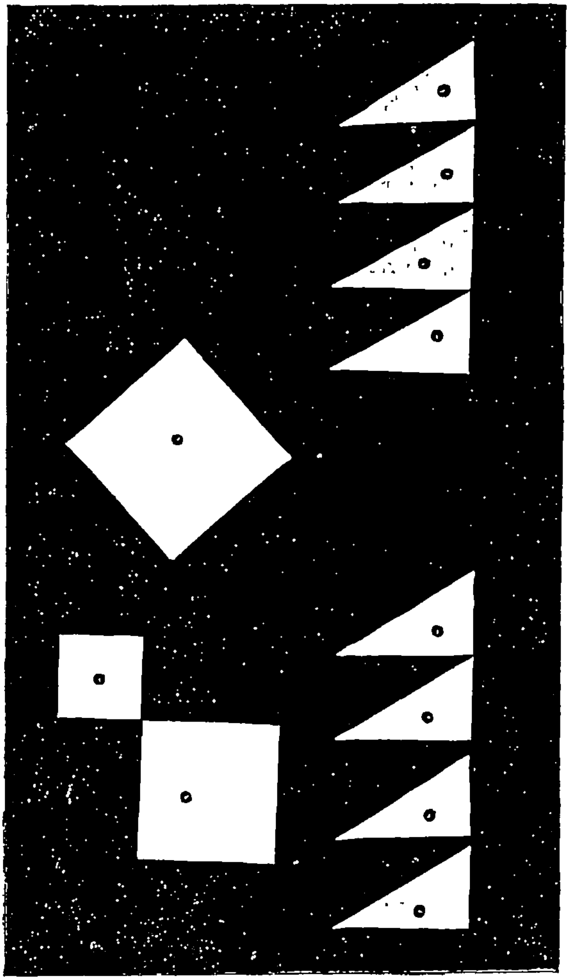


Рис. 89. (Теорема Пиѳагора (б)...) отнимаемъ отъ нихъ по 4 равныхъ △-ка. 1-й остатокъ (большой квадратъ) равновеликъ 2-му остатку (суммѣ двухъ малыхъ квадратовъ).

Тогда первый квадратъ раздѣлится на 4 прямоугольныхъ △-ка и одинъ внутренній квадратъ, стороной котораго будетъ гипотенуза каждаго изъ полученныхъ прямоугольныхъ △-въ. Второй квадратъ—на 4 прямоугольныхъ треугольника и 2 квадрата, у которыхъ сторонами будутъ соотвѣтственно катеты прямоугольныхъ △-въ.

Отрѣжемъ отъ обоихъ большихъ данныхъ квадратовъ по четыре полученныхъ треугольника. Наложивъ 8 отрѣзанныхъ △△-въ одинъ на другой, видимъ, что они равны. Отъ перваго останется квадратъ, построенный на гипотенузѣ прямо-

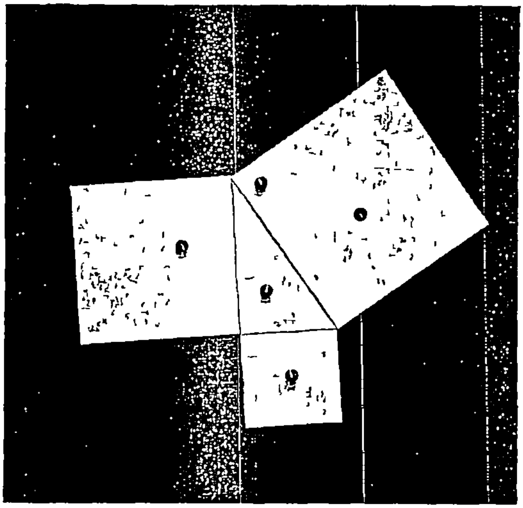


Рис. 90. Теорема Пиѳагора (в). Прикладываемъ оставшіеся квадраты къ сторонамъ △-ка.

угольнаго △-ка, а отъ второго—два квадрата, построенныхъ на катетахъ. Такъ какъ они получены путемъ вычитанія изъ равныхъ квадратовъ одинаковаго числа равныхъ треугольниковъ, то послѣ вычитанія останутся равныя площади, т.-е. квадратъ, построенный на гипотенузѣ прямоугольнаго треугольника равновеликъ суммѣ квадратовъ, построенныхъ на его катетахъ.

XLIV. Отношеніе площадей подобныхъ △-въ.

Начертимъ на большомъ листѣ бумаги (или картона) какой-нибудь треугольникъ. Раздѣлимъ каждую сторону его на 12 равныхъ частей и соединимъ точки дѣленія между собою. △ разобьется на 144 равныхъ △-ка. Въ равенствѣ ихъ можно убѣдиться, вырѣзавъ изъ бумаги △-къ, равный одному изъ полученныхъ, и накладывая его на любой изъ полученныхъ △△-ковъ.

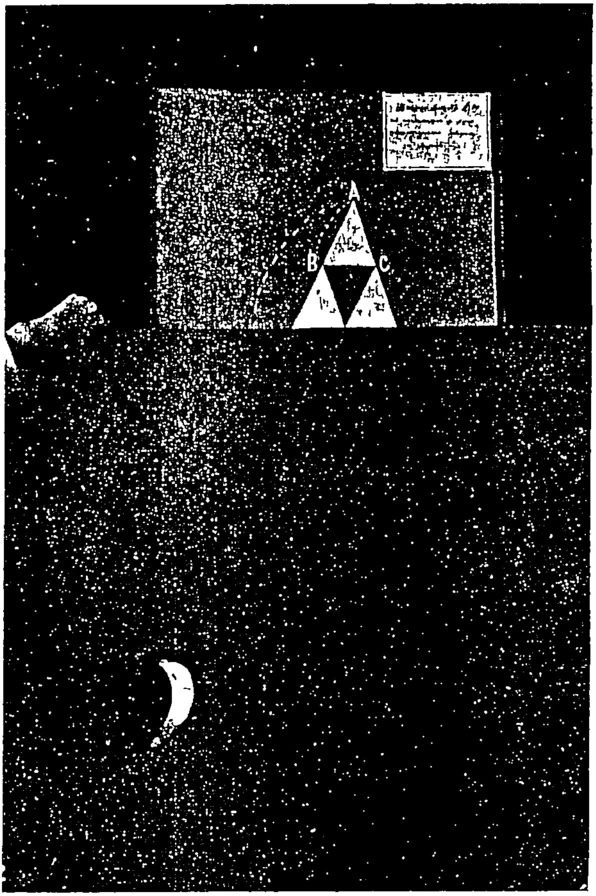


Рис. 91. При увеличеніи сторонъ △-ка вдвое и при сохраненіи его формы площадь △-ка увеличивается вчетверо.

I. Возьмемъ большой листъ бумаги и закроемъ имъ почти весь △-къ, оставляя лишь часть *ABC*, затѣмъ будемъ передвигать его внизъ верхней стороною параллельно основанію; при этомъ, будутъ постепенно открываться все большія и большія части $\triangle$-ка ABC. Мы видимъ, что получаемые такимъ образомъ $\triangle$-ки сохраняютъ одну и ту же

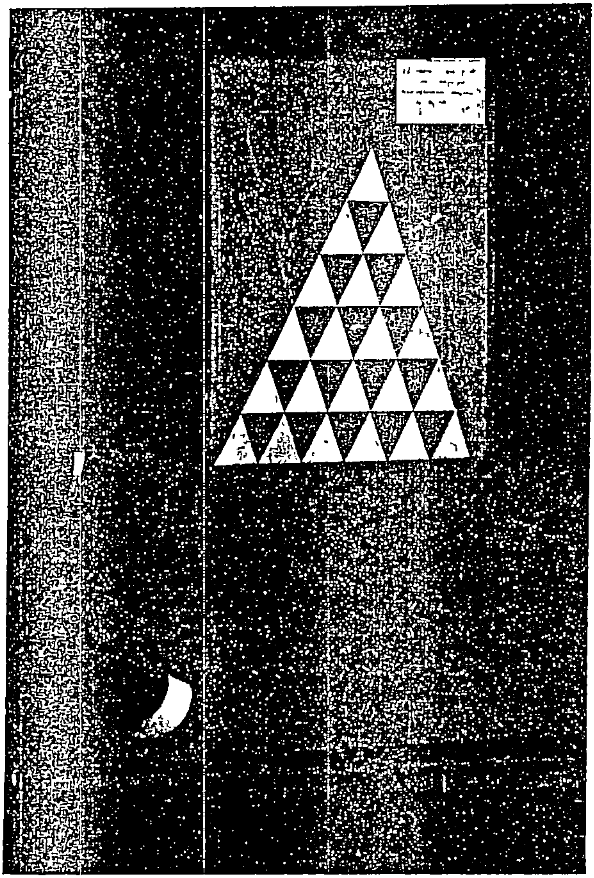
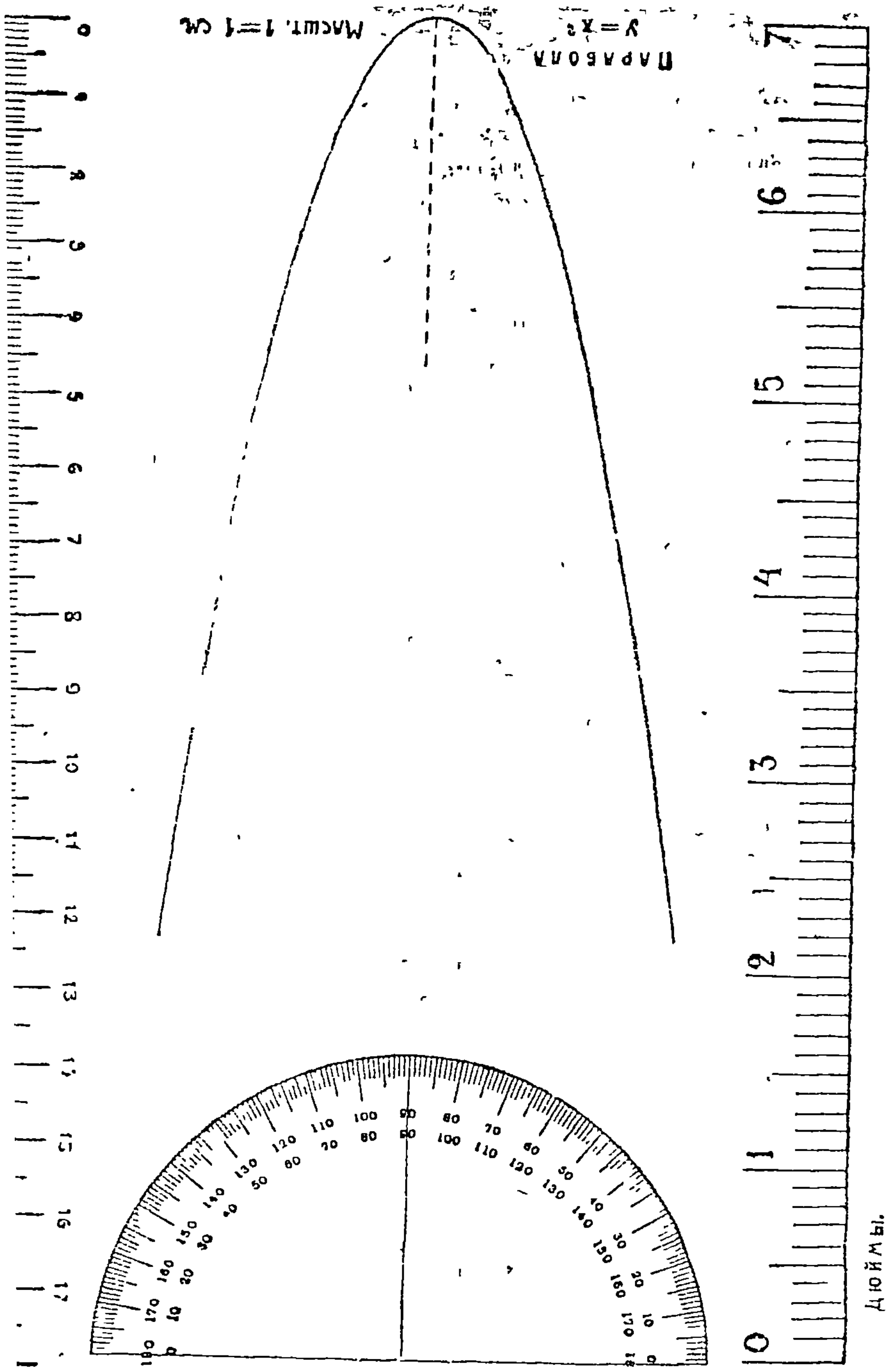


Рис. 92. При увеличеніи сторонъ $\triangle$-ка въ 6 разъ площадь его увеличивается въ 36 разъ.

форму, а стороны ихъ дѣлаются все больше и больше. При этомъ, если сторона $\triangle$-ка увеличивается въ 2, 3, 4 и т. д. разъ, то площадь его при этомъ увеличивается въ 4, 9, 16 и т. д. разъ. Если соотвѣтственныя стороны равны 5 и 7,



Парабола
y = x²
Масшт. 1 = 1 см.
Дюймы.
Транспортир.

то отношенie площадей будетъ равно 25 : 49 (такъ какъ эти площади будутъ содержать 25 и 49 маленькихъ △△-въ) и т. д. Отсюда можно вывести, что **площади подобныхъ треугольниковъ относятся, какъ квадраты сходственныхъ сторонъ.**

XLV. Площадь круга.

Вырҍжемъ изъ картона кружокъ дiаметромъ въ 30 см раздҍлимъ его 6-ю дiаметрами на 12 равныхъ секторовъ (Раздҍливъ окружность сначала на 6 частей, а потомъ каждую часть пополамъ), одинъ изъ этихъ секторовъ, въ свою очередь, раздҍлимъ пополамъ, это будетъ $^1/_{24}$ часть круга (рис. 93)

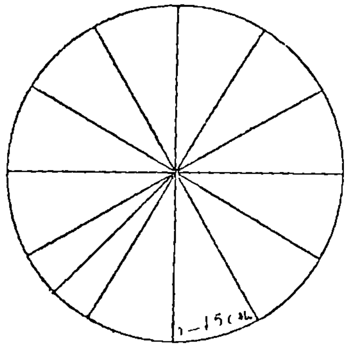


Рис 93 Кругъ раздҍленъ на 12 частей

Разрҍжемъ кругъ по дiаметрамъ на 12 равныхъ секторовъ и эти секторы приколемъ кнопками къ доскҍ, прикладывая ихъ другъ къ другу вершинами поочередно то вверхъ, то внизъ, а половины секторовъ помҍстимъ по краямъ (рис 94). Образуется фигура, очень близкая къ прямоугольнику Если искривленную линiю съ нҍкоторой ошибкой принять за прямую, то у этого прямо-

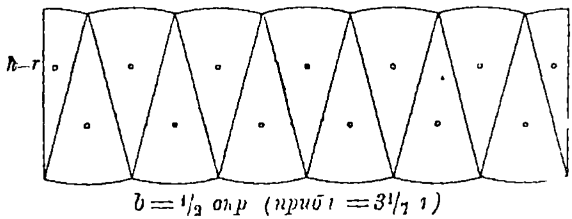


Рис 94. Составленные секторы образуютъ фигуру, близкую къ прямоугольнику.

угольника а) площадь будетъ равна площади круга, б) основанiе ровно половинҍ длины окружности, в) высота равна радiусу. Слҍдовательно, площадь этого прямоугольника равна произведенiю полуокружности на радiусъ

Если мы раздѣлимъ кругъ не на 12, а на 16 секторовъ (путемъ дѣленія прямого угла пополамъ), то волнистая линія будетъ меньше отличаться отъ прямой, чѣмъ раньше; если раздѣлимъ кругъ на 24 части, то еще меньше и т. д. Ошибка будетъ уменьшаться по мѣрѣ того, какъ мы будемъ увеличивать число частей, на которыя дѣлится кругъ. И наконецъ, при громадномъ числѣ частей, площадь круга станетъ равной площади указаннаго выше прямоугольника. Такимъ образомъ, **площадь круга равна длинѣ полуокружности, умноженной на радіусъ.**

Для удобства демонстрированія модели можно приготовить 2 коробочки, одну круглую, другую прямоугольную одинаковой площади (основаніе равно $^1/_2$ окружности, высота равна ея радіусу). Переложивъ секторы, заполняющіе площадь круглой коробочки, въ прямоугольную, мы увидимъ, что они будутъ заполнять и прямоугольную, откуда будетъ видно, что площади дна двухъ этихъ коробочекъ равны. Въ одной и той же круглой коробочкѣ можно помѣстить нѣсколько круговъ, разрѣзанныхъ 1) на 12, 2) на 16, 3) на 24 равныхъ частей, при чемъ на каждомъ секторѣ полезно отмѣтить: $^1/_{12}$, или $^1/_{16}$, или $^1/_{24}$.

ОГЛАВЛЕНІЕ.