П. А. КАРАСЕВ

ЭЛЕМЕНТЫ НАГЛЯДНОЙ ГЕОМЕТРИИ В ШКОЛЕ

ПОСОБИЕ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
Москва. 1955

ВВЕДЕНИЕ

Правильная геометрическая подготовка учащихся имеет большое значение для повышения качества их общего и политехнического образования. Положение этой подготовки в настоящее время нельзя считать нормальным при фактическом начале изучения геометрии в VI классе десятилетней школы, т. е. при потере целых пяти лет для нормального развития ребёнка.

Дети проходят первые классы школы в возрасте, когда развивается острота зрительных впечатлений и обостряется интерес к наблюдениям над предметами и явлениями окружающей жизни. Детские впечатления особенно долго остаются в памяти. К сожалению, первые годы развития ребёнка в школе проходят без помощи геометрии, предмета, как раз наиболее тесно связанного со зрительными впечатлениями.

Цель настоящей книги:

1. Показать необходимость и возможность введения подготовительного курса наглядной геометрии в младших классах школы, начиная с I (главы I и II).
2. Дать характеристику наглядного метода преподавания начал геометрии (главы III и IV).
3. Дать необходимые советы и указания относительно реализации этого метода, главным образом в форме изготовления различных наглядных пособий и геометрических моделей и применения их на уроках в начальной школе и младших классах средней школы (главы V—IX).

Переходя к обоснованию необходимости введения элементов наглядной геометрии в начальную школу, напомним, что наглядная геометрия, в отличие от систематического курса геометрии, изучает свойства геометрических форм путём „живого созерцания", т. е. непосредственных восприятий и представлений конкретных предметов и их изображений. Изучение свойств геометрических фигур обосновывается индуктивным методом — обобщением частных однородных случаев.

Следует отметить, что сама идея введения элементов наглядной геометрии в целях помощи при изучении смежных предметов: рисования, географии и др., и особенно в целях подготовки к систематическому курсу геометрии, теперь не встречает особых возражений.

В объяснительных записках к программам начальной и средней школы имеются указания о необходимости изучения геометрического материала. Записки рекомендуют вводить знакомство с геометрическими фигурами с I класса.

В методическом письме „О преподавании математики в V—X классах" (изд. АПН, М., 1949) находим следующее указание: „...воспитание пространственного воображения нужно начинать с возможно более раннего возраста и систематически проводить путём целесообразно подобранных упражнений и задач с геометрическим содержанием".

Проф. Н. М. Бескин в своей „Методике геометрии" (Учпедгиз, 1947, стр. 25—26) мотивирует необходимость введения пропедевтики геометрии следующим образом: „Если ученик только с VI класса впервые знакомится с геометрией, то перед ним возникают сразу две трудности: 1) он впервые узнаёт геометрические факты и 2) он должен усвоить геометрическую методологию (определения, логические доказательства). Если же простейшие факты ему уже знакомы и геометрическое воображение у него уже несколько развито, то в начале систематического курса он может сосредоточить больше внимания на методологической стороне. Здесь мы имеем вполне обоснованный концентризм... Весьма желательно расширить преподавание геометрии в младших классах и выделить эти элементы в отдельный предмет".

В „Методике преподавания математики" для учительских институтов под редакцией С. Е. Ляпина (Учпедгиз, М., 1952, стр. 309) мы читаем: „Одним из условий для лучшего усвоения систематического курса геометрии является хорошая постановка преподавания наглядной геометрии в младших классах. Поэтому следовало бы придать курсу наглядной геометрии большую систематичность и несколько расширить его материал.. Время, отводимое на курс арифметики, вполне позволяет углубить изучение геометрических вопросов, что и делается в ряде школ".

Советская психология говорит вполне определённо: способности и интересы детей, поступающих в начальную школу, достаточно подготовлены для наглядного изучения предметов со стороны формы и величины. **Необходимо прямое участие школы в дальнейшем развитии пространственных представлений детей.**

„Богатство, точность и полнота представлений достигаются только в процессе воспитания и обучения, причём результаты в сильнейшей степени зависят от педагога"[1].

Процесс воспитания и обучения в области пространственных представлений, естественно, должен принять в начальной школе форму наглядной геометрии. При правильной постановке наглядная геометрия образует систему многочисленных и разнообразных демонстраций подвижных наглядных моделей отрезков, углов, треугольников и разных других фигур, систему упражнений в черчении и упражнений в конструировании геометрических моделей из разных материалов. Все эти упражнения сопровождаются вычислениями, связанными с изучением свойств геометрических величин: сторон, периметров, углов и площадей различных геометрических фигур.

Кроме необходимости устранить односторонность в деле воспитания детей, введение наглядной геометрии поможет начальной школе ещё и в чисто учебной работе: геометрические сведения, необходимые при изучении других предметов—географии, рисования, природоведения,— лучше дать в систематическом виде, чем от случая к случаю.

Наконец, геометрия введёт в преподавание арифметики пространственные образы, оживит её работу,

---

[1] „Психология", под редакцией проф. К. Н. Корнилова и др., Учпедгиз, 1948, стр. 154.

дав детям для вычислений новый пространственный материал в виде длин отрезков и площадей фигур, новые задачи, связанные с зрительными впечатлениями, которые дети так любят. Арифметические законы и правила получат зрительные геометрические „доказательства“ и т. п.

В методической литературе можно найти немало авторитетных высказываний о роли наглядной геометрии в указанном выше смысле. Но вся беда в том, что мы встречаемся с этим только в виде рекомендаций, методических советов в объяснительных записках и в методических и научных трудах. Когда же дело доходит до практического осуществления приведённых выше пожеланий и рекомендаций, то картина резко меняется.

Наглядной геометрии как самостоятельного предмета в начальной школе не существует. Материал её включён в арифметику, но и там его недостаточно. В первых двух классах учащиеся занимаются только измерением отрезков, в III — только черчением и измерением тех же отрезков, и лишь в IV классе за 28 часов в течение II четверти бегло проходится обычная программа измерения площадей прямоугольных фигур и объёмов прямоугольных параллелепипедов и таблицы квадратных и кубических мер.

Можно ли сказать, что цель—приобретение элементарных знаний из области наглядной геометрии, поставленная в объяснительной записке, достигнута?

Ответ мы найдём в методическом письме „О преподавании математики в V—X классах“ (изд. АПН, 1949, стр. 43): „... Наши учащиеся очень поздно начинают знакомиться с пространственными формами: в течение первых пяти лет они не получают почти никаких сведений о геометрических образах...“ И это вполне логично: отсутствие сведений у учащихся соответствует отсутствию соответствующих требований самой программы.

Обратимся теперь ко второму вопросу—о возможности преподавания наглядной геометрии, об условиях его проведения, о формах, которые может принять методика его преподавания.

История пропедевтики геометрии показывает, что большинство авторов считает возможным ввести обучение наглядной геометрии, начиная с третьего года обучения (проф. Кавун, проф. Извольский, Аржеников, Шохер-Троцкий и другие) или ещё позднее. В частности, наша советская школа вводит в очень ограниченных размерах пропедевтику геометрии, начиная с четвёртого года обучения.

Введение элементов наглядной геометрии в I классе начальной школы сначала кажется невозможным, так как трудно заставить себя смотреть на геометрию иначе, как на систематический курс с аксиомами, теоремами, доказательствами, построениями циркулем, линейкой и т. д.

Учителям, приступающим к преподаванию наглядной геометрии в I классе, надо отрешиться от обычных приёмов преподавания систематического курса геометрии, а также от обычных общих приёмов преподавания, соответствующих VI классу, с обязательным заучиванием определений, с задаванием на дом и „спрашиванием" уроков, с выставлением отметок и т. п Все эти педагогические операции придут в своё время, но в н а ч а л е дело должно идти иначе: демонстрации построений фигур, их свойств и объяснения учителя сменяются общей беседой о том, чтб было показано и чтб дети сумели (и верно ли) подметить Беседы сменяются самостоятельными упражнениями учеников по изготовлению геометрических моделей из разных материалов и т. п. Задача учителя—дать детям большее количество систематизированных зрительных впечатлений, в которых дети должны разобраться и сделать свои выводы при помощи объяснений и наводящих вопросов учителя. Учащиеся не должны думать об отметках и не стесняться задавать вопросы и делать замечания по поводу того чтб они видят и делают. В такой непринуждённой форме, а иногда игре, должна входить наглядная геометрия в I класс.

Теперь, естественно, появляются вопросы: что же надо демонстрировать? Как строить, как показывать модели? Как проводить упражнения, на каких пособиях и материалах?

Остановлюсь на особенностях преподавания, методических приёмах, на важнейших типах наглядных пособий, определяющих всё своеобразие работы и самую возможность введения наглядной геометрии в школу.

1. Ввиду того что начинать сразу два предмета — арифметику и геометрию — было бы непосильно для семилетних детей, ведущим из двух предметов в течение первых двух лет обучения должна быть арифметика.

2. Геометрия входит в неё постепенно, не только не отягощая детей, но, наоборот, оживляя и облегчая арифметическую работу. С этой целью, во-первых, некоторые начальные геометрические моменты входят в форме игр.

3. Геометрические наглядные пособия по большей части разноцветные. Это оживляет зрение, утомлённое однообразием двух цветов (белого и чёрного), господствующих обычно при классной работе по арифметике.

4. Первая тема арифметики — изучение чисел первого десятка — наряду с другим счётным материалом проводится на пособии „цветные квадраты", применяемом как демонстрационное на доске и как дидактический материал. Одновременно с арифметическими сведениями у детей создаются геометрические представления об образовании из квадратов различных прямоугольных фигур со сторонами, углами и площадями. Обход составленной фигуры по краю даёт представление о периметре, а число квадратиков, образующих фигуру, даёт представление о её площади.

Упражнения по геометрии вовсе не обязательно выделять в особые уроки, особенно в начале обучения: нередко два получаса дают больше, чем целый час. Когда дети устанут от счётных упражнений, учитель вводит набор цветных квадратов. и ту же счётную работу продолжает на цветных квадратах как на дидактическом материале.

5. Действия в пределах чисел второго десятка проводятся с новым пособием — цветными резиновыми шнурами. Фигуры образуются шнурами, натянутыми на гвоздики, втыкаемые в отверстия доски, разлинованной на квадраты. Работа с такими фигурами является первым шагом к отвлечению, так как в них цветные квадраты как изолированные предметы заме

няются квадратами самой сетки. Здесь возможно большее разнообразие в действиях, во внешнем виде фигур, возможна и большая активизация класса, так как параллельно работе на доске вводится черчение цветными карандашами в тетрадях в клетку.

6. Для того чтобы возможно теснее объединить наглядную геометрию с арифметикой и максимально облегчить задачу построения фигур, сделав её доступной детям в I и во II классах, придётся отказаться от классических способов построения и поискать новые, доступные детям способы. Можно остановиться на использовании квадратной сетки для построений — методе более простом и дающем достаточно широкие возможности построений.

7. В младших классах дети, кроме того, работают с деревянными полосками как моделями отрезков. Простота конструирования из них всевозможных подвижных моделей на демонстрационной доске-стенде обеспечивает применение их с I класса (образование и изменение углов) по IV (свойства параллелограма и ромба) Из деревянных полосок можно изготовить десятки геометрических моделей.

8. Комбинация раздвигающихся деревянных полосок с растягивающимися шнурами даёт возможность построения подвижных моделей углов, треугольников, четырёхугольников всех видов. Подвижные модели пользуются большим успехом у детей, усиливают их внимание и увеличивают убедительность демонстраций.

9. Начиная со II класса и по IV применяется новое пособие „Части квадрата", состоящее из четырёх деталей: квадрат, его половинки — прямоугольник и прямоугольный равнобедренный треугольник и половина указанного выше прямоугольника — узкий неравнобедренный треугольник. Набор из 32 таких деталей, по 8 штук каждого вида, вводит любимое детьми занятие — пространственно-комбинационные упражнения на выкладывание из частей квадрата разнообразных фигур. Пособие применяется и далее — в V классе при изучении площадей. Оно даёт множество деталей на образование равносоставленных фигур, на превращение треугольников, параллелограмов, ромбов, трапеций в равносоставленные прямоугольники. Части квадрата следует иметь в двух видах: для демонстра-

ций на доске и для индивидуальных упражнений на партах.

10. С первого урока в I классе до IV класса (и далее, вплоть до уроков стереометрии в IX классе) следует применять метод перегибания листка бумаги, дающий свыше ста моделей геометрических форм, начиная с прямой линии и кончая моделью теоремы многогранного угла и моделью усечённой пирамиды.

Простой блокнот из нелинованной бумаги—пособие, вполне доступное любой школе, в любых условиях; разорванный на отдельные листки, он даёт материал для построения модели каждым учеником класса.

11. Почти все указанные выше пособия очень просты для изготовления, не требуют ни особых материалов, ни особых инструментов. Единственное пособие, необходимое для школы и требующее приличной столярной работы,— это демонстрационная доска, на которой монтируются и демонстрируются почти все модели указанных выше типов (2—8), измеряются стороны, периметры и площади фигур, наблюдается неизменяемость свойств фигур при их деформации, задаются и решаются задачи. Демонстрационная доска столь же необходима для работы по наглядной геометрии, как географическая карта для географии

Могут спросить, почему уделяется так много места и внимания геометрическим моделям при прохождении наглядной геометрии? Надо помнить, что главнейшая мощная творческая сила—логика, создающая в старших классах школы геометрические понятия,— в сознании ученика начальной школы ещё не развита, она существует ещё в форме слабых ростков. Но у детей есть другая сила, тоже творческая. Это—в о о б р а ж е н и е. В наглядной геометрии логику заменяет интуиция, помогающая создавать представления. Ясно, что на пособия, создающие зрительные впечатления, превращающиеся потом в пространственные представления—геометрические образы,—должно быть обращено особое внимание. Очень многое зависит здесь от умения учителя, от самой техники конструирования моделей, умения их показать и умения подвести учащихся к необходимым геометрическим выводам.

Изложенная выше схема методических приёмов подробно развёртывается в III—IX главах настоящей книги.

Теперь несколько слов о соотношении наглядной геометрии (пропедевтики геометрии) и систематического курса геометрии.

Вопрос о методике начальной геометрии далеко не нов. Споры по поводу преподавания геометрии имеют давность, измеряемую сотнями лет. Из всего разнообразия течений в этой области можно выделить два основных течения. Первое кладёт в основу „Начала" Евклида, строя методику геометрии в подчинении основным целям „Начал"—дать логически стройную систему геометрических положений, исходящих из строго определённой группы аксиом, принимаемых без доказательства,— и большого числа положений—теорем, выводимых из аксиом логическим путём. Согласно этой цели, ученики идут по линии отвлечённого дедуктивного мышления, обращая особое внимание на точность определений и установление логической связи между теоремами. Такая система построения учебных курсов геометрии была господствующей в течение многих веков и дошла до нашего времени в форме модернизованных учебников Лежандра, Адамара (в Англии даже самого Евклида), у нас—курсов геометрии Давидова, Киселёва, Глаголева и др.

В первоначальном своём виде „Начала" были созданы не педагогами и специально для взрослых людей с достаточно развитым логическим аппаратом.

Применяя в более или менее чистом виде дедуктивный метод для построения ш к о л ь н о г о курса геометрии д л я д е т е й, сторонники его не учитывали психических особенностей „потребителя"—ребёнка и, далее, подростка. В этом главная причина трудности преподавания детям геометрии обычного курса и причина мнения о недоступности геометрии вообще для детей начальной школы и т. п. С течением времени более глубокие исследования начал геометрии показали, что сами „Начала" Евклида не вполне достигают поставленной цели—быть логически стройной системой геометрических истин, выводимых из группы аксиом. Позднее ряд учёных с Гильбертом во главе ввели существенные изменения в „Начала". Но в новом переработанном виде логически выдержанная геометрическая система ввиду своей сложности уже выходит из рамок школьного курса.

Поэтому современный **школьный систематический курс геометрии** строится как своеобразный компромисс между строго логической системой и интуицией.

Не следует, однако, преуменьшать значения систематического курса геометрии в деле общего образования человека. Принцип логической связи между научными истинами, создавая прочный фундамент для построения науки, представляя возможности проверки правильности решения научных вопросов и открытия новых законов, является чрезвычайно важным и ценным, и образовательное значение его колоссально. Поэтому систематический курс геометрии, построенный на дедукции, и служит одной из основ образовательной и воспитательной школьной работы учащихся старшего возраста.

Но ещё задолго до Евклида геометрические сведения, являющиеся началами учения о законах пространства, основывались на непосредственном опыте и наблюдении, и выводы делались на основании простой наглядности. Этот метод интуитивного и непосредственного опытного усвоения геометрических законов, тесно связанный с практикой построения и измерения геометрических форм, более отвечает особенностям детской психики с её остротой восприятий, с активным воображением, с памятью главным образом моторного и зрительного типа, но ещё со слабо развитым логическим мышлением. Такой путь ознакомления с началами геометрии, дающий возможность накопления и использования геометрических сведений при помощи интуиции и опыта, называется **интуитивной** или **наглядной** геометрией. Его иногда называют **пропедевтикой геометрии**. Он оказывает большую помощь при преподавании естествознания, географии, рисования в младших классах школы, где геометрия как систематический курс ещё не проходится.

При рациональной постановке математического образования оба метода могут в школе найти своё место, *ГЛАВА I*

ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДЕТЕЙ В ДОШКОЛЬНОМ ВОЗРАСТЕ

§ 1. Первые пространственные впечатления

Значение геометрии в деле общего образования и воспитания человека становится понятным, если учесть данные психологии об образовании у ребёнка первых представлений о внешнем мире и, следовательно, первых представлений о пространстве.

Как известно, первичные проблески сознания выражаются у ребёнка в форме ощущений, образующихся в результате воздействия факторов внешнего мира на органы чувств. Таковы ощущения света, темноты, тепла или холода, вкуса, запаха, звука и т. п. Если эти ощушения, воспринимаемые различными органами чувств, получаются от одного внешнего источника, то при частых повторениях они объединяются в один комплекс и создают в сознании ребёнка восприятие единого предмета. Так ощущения жидкого, белого, тёплого, сладкого, соединяемые с чувством насыщения, объединяются около одного предмета, который ребёнок потом называет „молоком". Восприятия повторяются и закрепляются в сознании при достаточной отчётливости, яркости и интенсивности ощущений.

Наряду с другими восприятиями совокупность осязательных зрительных и моторных ощущений создаёт у ребёнка восприятие пространства, сначала двухмерного, а потом, при помощи движений, при развитии осязания и аккомодации глаза, — трёхмерного. Каждого, кто внимательно наблюдал здорового ребёнка, поражает множество движений, которые ребёнок бесцельно, а потом и вполне целесообразно проделывает в первые годы своей жизни. Здесь он берёт первые уроки геометрии — изучает пространственные свойства предметов, т. е. пространство и его законы, двигаясь и корректируя свои движения осязанием и зрением.

Различные функции органов чувств вызывают в сознании ребёнка различные виды пространственных восприятий. Так, движение глаз вызывает вращение оптической оси и в сознании появляется зрительное впечатление — „сигнал" об изменении направления, в котором видны предметы. Последовательное движение глаз в одну сторону создаёт в сознании ряд предметов, расположенных в одном и том же порядке. Движение глаз в разные стороны даёт сигнал — впечатление об изменении порядка, в котором располагаются фиксируемые предметы. Взаимное согласование впечатлений, получаемых от органов зрения, слуха и осязания, в соединении с моторными рефлексами, после долгих и упорных повторений даёт ребёнку представление о *расстоянии* между точками и о *глубине пространства*.

Восприятия, относя совокупность ощущений к определённому предмету, создают уже более полную и устойчивую картину жизни, и в сознании ребёнка появляются *представления о свойствах предмета*. Так как всякий предмет имеет *определённую форму и размеры*, т. е. занимает определённое место в пространстве, так как всякое явление связано с движением в пространстве, то представления о свойствах предмета приобретают неизбежно пространственный характер — становятся пространственными представлениями.

„В психической жизни ребёнка-дошкольника представления играют очень важную роль. Большинство исследователей говорит, что дошкольник мыслит наглядно, образами"[1].

„Психологические эксперименты показывают, что

---

[1] „Психология", под ред. проф. К. Н. Корнилова и др., Учпедгиз, 1948.

как яркость, так и точность представлений сильно возрастают под влиянием упражнения.

... Живые, точные и конкретные представления не возникают сами собой,—они развиваются только в процессе некоторой деятельности и притом такой, которая с необходимостью требует этих качеств от представлений. Богатство, точность и полнота представлений достигаются только в процессе воспитания и обучения, причём результаты в сильнейшей степени зависят от педагога.

... Наличие достаточно богатого материала восприятий является важным условием развития представлений"[1].

Развитие речи тесно связано с пространственными представлениями ребёнка. Очень рано в его речи появляются слова пространственных категорий: „пришла", „ушла", „большой", „маленький"; наречия: „близко", „далеко," „высоко", „низко"; предлоги: „на", „в", „над", „под" — всё это слова, характеризующие пространственную связь между предметами.

Способность сохранять и воспроизводить представления мы называем памятью.

Сила памяти ребёнка в области сохранения пространственных представлений, т. е. сила „зрительной памяти", прямо изумительна. Каждый из нас, припоминая свои первые детские впечатления, может найти целый ряд примеров, подобных следующему. Ребёнок, родившийся и проживавший в данной квартире до 4-летнего возраста, уезжает из неё вместе с семьёй, больше в неё не возвращается и не видит её ни разу. Но тем не менее, спустя 60 лет, человек, ставший уже стариком, отчётливо помнит подробное расположение комнат настолько, что может начертить план квартиры с точным расположением комнат, дверей, число и расположение окон, расстановку мебели и её внешний вид и форму.

Или ещё пример. На групповых занятиях детям дошкольного возраста (6 — 7 лет) показывается элементарный геометрический рисунок в течение 1 секунды. После удаления его дети по

---

[1] „Психология", под ред. проф. К. Н. Корнилова и др., Учпедгиз, 1948.

памяти могут почти безошибочно нарисовать показанный рисунок.

Эти примеры и множество других показывают, что **ребёнок ещё в дошкольном возрасте способен различать и запоминать пространственные формы, не только в виде трёхмерных объектов, но и двухмерные объекты и их пространственные особенности: величину, форму и расположение.**

§ 2. Игры

Ребёнок растёт и вступает в полосу игр. Здесь он входит в целый мир, несущий ему множество приятных, а иногда и неприятных ощущений, связанных с пространством.

Можно указать множество общеизвестных „глазомерных" детских игр, развивающих и обогащающих пространственные и механические представления детей,— игры тесно связаны с элементами геометрии и механики. В большинстве случаев в такие игры дети играют ещё в дошкольном возрасте, но многие из игр остаются любимыми у детей-школьников.

Возьмём несколько общеизвестных примеров.

1. Кирпичики. С 2-летнего возраста ребёнок уже начинает играть в „кирпичики". Сначала он устанавливает один кирпичик на разные грани, затем составляет вместе 2—3 и более кирпичиков. Какое множество положений кирпичиков при этом образуется и какое разнообразие пространственных представлений получается при этом! Какие разнообразные по виду предметы можно построить из 2—3 кирпичиков! Через несколько месяцев ребёнок уже приучается различать равные и неравные грани кирпичиков и, укладывая их друг на друга равными гранями (первые уроки равенства фигур при наложении), строит из них „столбики".

В следующей стадии ребёнок с трудом устанавливает горизонтальный кирпичик на два стоящих кирпичика; ребёнку стоит больших усилий создать представление о расстоянии между кирпичиками и, в зависимости от расстояния, о возможности построения. Когда расстояние между двумя поставленными кирпичиками меньше длины кирпича, то кирпичик можно положить на два поставленных кирпичика, а если оно больше, то нельзя. Здесь впервые появляется представление о сравнении длин — о „больше" и „меньше".

При дальнейших занятиях с кирпичиками у ребёнка развивается чувство порядка (повторяемости) и симметрии, которые руководят им при его построениях. Ему нравится превращать хаотичную кучку кирпичиков в стройную симметричную постройку, и к четырём годам он уже с увлечением строит целые дома и башни, не только одноэтажные, но и многоэтажные, состоящие из повторяющихся частей и имеющие симметричную форму.

2. Мячик. Ребёнок подрастает и любимой игрой его становится мячик. Здесь новая область геометрических впечатлений, вызываемых движением. Симметричная форма мяча, изящная параболическая траектория, отражение мяча по определённому закону—всё это даёт ребёнку новые осязательные, моторные и зрительные впечатления. В результате игры у ребёнка создаётся новый комплекс представлений о порядке и симметрии.

3. Чижик. Кто из сельских, а нередко и городских, детей не знает игру в „чижик"? Цилиндрический кусок дерева заостряется с двух сторон, образуя сложную круглую коническую поверхность. Если мальчик захочет сам сделать „чижик", то он открывает ряд чисто механических (а следовательно, и геометрических) законов. Если остриё „чижика" будет лежать не на его оси, то „чижик" при одном положении будет хорошо взлетать, а при другом—плохо (это не годится), необходимо, чтобы заострение имело круглую симметрично коническую форму. Затем, чем больше угол конуса, тем „чижик" будет выше взлетать и, следовательно, его легче ударить на лету палкой. Таким образом, пытливый ребёнок, изготовляя „чижик", наталкивается на ряд закономерностей геометрически-механического порядка и, что важно, использует их. Сама игра в „чижик" имеет ярко выраженный механически-глазомерный характер.

4. Городки. Для игры надо напилить 10 цилиндрических городков, непременно равной длины. Форма их — прямой круглый цилиндр; несоблюдение этих условий делает городок не годным к игре. „Коны“, в которых ставятся городки, обычно квадраты, расстояние между ними измеряется шагами и делится чертой пополам — „полукон“. Фигуры, которые строятся из городков, обычно имеют симметричную форму. Самая техника бросания бит построена на правильном применении поступательного и вращательного движений, и наиболее мощный удар, от которого городки разлетаются во все стороны, получается при сложении скоростей поступательного и вращательного движений.

В других любимых детских играх: лапта, футбол, крокет, кегли, игра в свайку, в ножичек—везде мы имеем механические процессы, вызывающие обогащение и развитие пространственных представлений и развитие глазомера.

5. Змей. Позднее дети мастерят змей. Здесь целый ряд чисто геометрических построений: змей обычно делают в форме прямоугольника (иногда ромбоида или дельтоида). Необходимо точно наклеить „дранки“ по *диагоналям змея, точно рассчитать „путаницы“: систе*му ниток, соединяющих змей с нитью (тросом). „Путаницы“ должны образовать треугольную пирамиду с равнобедренными треугольниками в основании и у двух граней. При малейшей ошибке в „путаницах“ змей будет „козырять“. Хвост должен быть прикреплён к змею при помощи двух бечёвок одинаковой длины. Словом, здесь целый комплекс серьёзных „задач на построение“.

6. „Классы“. Наступает весна, и девочки 6—8 лет начинают играть в „классы“. Они чертят на земле прямоугольник, разбивают его на равные „классы“ и завершают полукругом. Прыгая на одной ноге, они перегоняют ногой камешек из одного „класса“ в другой по различным направлениям на строго определённом расстоянии. А другие девочки, постарше, закрыв глаза, на одной ноге перепрыгивают из одного „класса“ в другой. Разве здесь мало работы для развития глазомера в области направления и длины?!

7. Вырезывание. Вот девочка сложив в 4 и 8 раз квадратный листок бумаги, вырезает и выкалывает на нём узоры. Развёртывая его, она с восторгом рассматривает чудесные узоры и симметричные фигуры, сделавшие совершенно неузнаваемым простой квадратный листок бумаги.

8. **Складывание бумаги.** 7—8-летние дети легко научаются самостоятельно изготовлять перегибанием листка бумаги квадрат, а складывая квадрат по линиям симметрии, они образуют из квадратного листка бумаги целый ряд симметричных игрушек: лодочку, солонку, галчонка, портрет, петушка, кораблик и многое другое. Мальчики 7—8 лет из листка бумаги уже умеют мастерить планер, который, ловко пущенный, взмывает вверх и плавно опускается вниз; планер имеет довольно сложную симметричную форму.

9. **Нить.** Из нити со связанными концами можно сделать на пальцах сложные симметричные пространственные фигуры.

Думается, что отсюда вывод ясен! В своих играх дети ещё до школы усваивают,— научаются чертить, различать и отчасти даже (пусть своеобразно) выражать словами немало геометрических образов. Прямая линия, угол, прямой угол, угол в 45°, кривая линия, окружность, диаметр, диагонали, треугольники правильные и равнобедренные, прямоугольники, квадрат, куб, прямоугольный параллелепипед, шар, цилиндр, конус, точка, расстояние между двумя точками, расстояние между параллельными линиями, призмы и параллелепипеды разного рода, сделанные из палочек, конусы и цилиндры, изготовляемые из бумаги,—всё это создаётся самими детьми, входит в обиход игр, особенно коллективных, у громадного большинства детей. Это всё уроки настоящей наглядной геометрии, которыми дети обязаны большей частью своему собственному творчеству, а иногда и умным взрослым руководителям.

Вообще, если сравнить степень развития ребёнка дошкольного возраста в области понятий о числе и величине и в области пространственных представлений (особенно детей колхозов, рабочих посёлков и небольших городов), то следует признать, что в области геометрии ребёнок, благодаря играм и разнообразным зрительным впечатлениям, более развит, чем в области счёта, а к наглядной геометрии он подготовлен даже более, чем к арифметике.

ГЛАВА II

ПОЛОЖЕНИЕ ГЕОМЕТРИИ В НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЕ В НАСТОЯЩЕЕ ВРЕМЯ

§ 3. Замечания о программах и учебниках

Семи лет ребёнок поступает в школу. Её задача, прежде всего воспитательная,—гармонически развивать все важнейшие стороны детской личности. И действительно: школа с I класса даёт детям детально разработанную систему развития речи, письма, счёта, первых шагов изучения природы, физического и эстетического развития. Используя всю совокупность представлений и понятий, выработанных ребёнком ещё до школы, она ведёт его дальше, обогащая запас его представлений и понятий, развивая его речь, обучая его письму и счёту.

Школа создаёт грандиозный план изучения арифметики, уложенный в $5\frac{1}{2}$ лет и занимающий свыше 1000 часов, создаёт до мельчайших деталей разработанную методику преподавания арифметики, наглядные пособия, счётные приборы и таблицы, задачники и учебники. Все силы мобилизуются для того, чтобы поставить арифметику на необходимую высоту.

Переходя теперь ко второй, не менее важной ветви математики—геометрии, мы вправе ожидать, что, следуя принципу гармонического развития личности ребёнка, начальная школа отнесётся к делу развития пространственного мышления ребёнка с такой же серьёзностью, ответственностью и вниманием, с каким она относилась ко всем остальным своим предметам.

Здесь, однако, мы видим совсем другую картину. Наглядной геометрии в программах начальной школы 1950—1954 гг. не существует; существует только „геометрический материал“ в предмете „арифметика“. Сама геометрия, узко понятая как логическая дисциплина, отнесена на пять лет позднее—на VI класс. Посмотрим теперь, как проходится в начальной школе геометрический материал (1954 г.)

В I классе из 198 часов, отведённых на арифметику, на так называемый „геометрический материал“ специальных часов не выделено, во II классе — такая же картина, в III выделено 8 часов и лишь в IV классе геометрический материал от прямой линии до объёма параллелепипедов включительно проходится галопом за 28 часов.

В соответствии с таким положением в педагогических училищах будущие учителя посвящают сотни часов работы методике арифметики и не более двух десятков часов методике преподавания „геометрического материала“.

Ясно, что если на предмет, как бы его не называть, часов специально не отводится или отводится 8 часов, то этого предмета в школе фактически не существует, несмотря ни на какие прекрасные призывы и советы в объяснительных записках к программам.

На уроках арифметики школа развитием пространственного воображения детей не занимается. Цель и содержание геометрии суживается до вопросов измерения трёх объектов: длины отрезка, площади прямоугольника и объёма прямоугольного параллелепипеда.

Форма и величина множества остальных геометрических фигур и тел в начальной школе не рассматриваются. Ознакомление со свойствами самых элементарных образов—прямой линии, окружности, угла, треугольника, четырёхугольников и пр.—считается недоступным для учеников до VI класса (хотя в то же время по программе рисования считается возможным рисовать геометрические тела в перспективном сокращении). Пространственное воображение детей, если и развивается, то лишь попрежнему самотёком: в играх и впечатлениях обыдённой жизни. Речь детей, во всех других областях тщательно культивируемая и исправляемая, в области пространственного мышления без конкретных упражнений, без развития пространственных представлений обедняется. Слова: „параллельные линии“, „радиус“, „диагональ“, „периметр“, „площадь“, боятся дать ребятам, которые мастерят самодельные машины. О том, чтобы каждому ученику начальной школы дать в руки линейку, угольник, циркульную ножку и завести особую тетрадь по геометрии, не слышно.

Кроме того, бо́льшая часть времени, отводимого на геометрический материал, уходит вовсе не на геометрические упражнения, не на конкретные операции, а опять-таки на решение тех же арифметических задач с готовыми числовыми данными и лишь с новыми наименованиями: метр, сантиметр, километр и т. п. Это не геометрия, а та же арифметика!

Рассмотрение стабильных задачников подтверждает выводы, получаемые от рассмотрения программ: из многих сотен арифметических задач на упражнения по прямому измерению отведены 10—15, а то и 1—2 задачи в год.

Если проследить эволюцию программ начальной школы по математике, то невольно бросается в глаза следующее явление: из программ, начиная с 1938 г., последовательно устранялись даже те скромные следы наглядной геометрии, какие были в 1935 г. Достаточно сравнить программы 1935, 1938, 1947, 1951 и 1954 гг. Таким образом, ученики, поступающие в начальную школу, в продолжение 4 лет своего обучения (и каких важных 4 лет!) остаются „беспризорными“ в столь важной области психического развития, как область развития пространственного мышления.

При просмотре программ рисования и чистописания невольно возникает мысль о том, что тренировка глаза и руки в обоих этих предметах могла бы быть использована и для наглядной геометрии и что в программах рисования имеется такой материал, который может быть усвоен учащимися только при условии наличия сведений по геометрии, например понятие о перспективе, о точке схода, рисование не только фигур, но и тел с учётом передачи перспективы и т. п.

В программах географии мы встречаем то же самое. Как можно дать понятие об ориентировке, нахождении направлений на местности и на чертеже, читать учебный топографический план детям, не знающим углов и их измерения? Как можно изучать шарообразность земли, меридианы и параллели, не зная окружности?!

Таким образом, слабое геометрическое развитие учащихся начальной школы является тормозом для всей школьной работы в целом.

Из всего сказанного выше следует, что программа геометрического материала начальной школы не соответствует ни подготовке, ни уровню развития учащихся, ни важности задач, стоящих перед школой.

§ 4. Высказывания советских педагогов о работе по геометрии в семилетней школе (V—VII классы)

Отсутствие наглядной геометрии в начальной школе болезненно отзывается в VI и VII классах при начале изучения систематического курса геометрии. Как общее правило, это начало даётся учащимся с трудом. В педагогической литературе можно найти немало материалов, свидетельствующих об этом. В журнале „Математика в школе“ за 18 лет (1935—1953 гг.) напечатан ряд отзывов советских педагогов о качестве подготовки по геометрии лиц, окончивших семь классов средней школы и поступающих в техникумы.

Приведём некоторые из этих отзывов.

1. Техникум механизации и электрификации сельского хозяйства (г. Сороки). Преподаватель Николайчук (журн. „Математика в школе“, 1949 г.): „Многие экзаменующиеся не могли дать точных определений геометрических фигур, не могли доказать теорем о сумме углов треугольника и многоугольника, об углах с параллельными и перпендикулярными сторонами, не знали, что могут быть задачи по геометрии“.

2. Тов. Бочин (Витебск) (журн. „Математика в школе“, 1949 г.): „Геометрия остаётся узким местом в семилетней школе“. „При доказательстве теорем не могли выделить условие теоремы и заключение“.

„...Заучивают доказательство по книжке, как стихотворение... Построить высоту из вершины острого угла в тупоугольном треугольнике для многих оказалось непосильной задачей“.

3. Учительница Шидловская (материалы совещания преподавателей математики средней школы, 1935 г., г. Москва) констатирует тяжёлое положение с геометрией в VI классе. Ученики не усваивают смысл доказательства. При гладкой формулировке теоремы не понимают смысла произносимых слов.

4. Тов. Войтов (журн. „Математика в школе, № 3 за 1938 г.): „Десятилетний систематический учёт и анализ знаний поступавших из семилетней школы в Транспортный техникум даёт следующее: „Почти 100% учащихся либо не знали доказательства, либо не давали его обоснованно и полностью... не знали, что такое вписанный или описанный угол...“

„3 высоты тупоугольного треугольника проводили или как 3 вертикальные линии или как 3 медианы... путали прямоугольник с прямоугольным треугольником и т. п.“.

5. Товарищи Нестеренко и Горбатый. „В погоне за развитием логического мышления мы предлагаем учащимся материал, недоступный их возрасту, и в результате не достигаем никаких успехов ни в области логического мышления, ни в области накопления геометрических представлений“.

„...Из тел лишь куб выделяют правильно“.

„...Отрезки наклонных прямых называют кривыми“.

„...Механически запоминая правила вычисления площади прямоугольника, не могут (в V классе) вычислить стоимость побелки стен класса.

Вместе с тем учащиеся пишут прекрасные сочинения и решают трудные задачи по арифметике. Дело не в общем развитии учащихся, а в слабом развитии пространственных представлений и в накоплении сведений геометрического характера“.

6. Рабочие на совещании, созванном „Учительской газетой“ (№ 55, 23/IV 1939 г.), высказываются:

„Школьная математика не даёт практических навыков, не знакомит с приёмами измерений, которые на производстве приходится делать каждому рабочему“.

Мы можем найти в журнале „Математика в школе“ аналогичные отзывы преподавателей: Ендеевского, Петрова, Чуканцева (1940 г., № 10), Савчука (1952 г., № 2), Мацко (1953 г., № 2) и др.

Читая ряд отзывов лиц, проводивших приёмные испытания в техникумы и, следовательно, имевших дело с учащимися не одной школы, а десятков школ, нельзя не отметить совпадения мнений экзаменаторов при характеристике знаний учащихся по геометрии как формальных и поверхностных.

§ 5. О трудностях при изучении начала систематического курса геометрии в VI классе

Причин трудности изучения начала курса геометрии в VI классе много, но главная из них—это несоответствие дедуктивного метода возрасту и умственному развитию учащегося.

Поставим себя на место 13-летнего ребёнка, пытающегося понять содержание учебника А. Киселёва, ч. 1 (ещё, сравнительно с другими, простого по изложению). Введение в геометрию начинается с определения:

„Часть пространства, ограниченная со всех сторон, называется геометрическим телом". Далее идут предложения: „Часть поверхности отделяется от смежной части—линией... Часть линии отделяется от смежной части точкой". „Геометрическое тело, поверхность, линия, точка не существуют раздельно. Однако при помощи отвлечения мы можем рассматривать поверхность независимо от геометрического тела"... „Совокупность каких бы то ни было точек, линий, поверхностей или тел, расположенных известным образом в пространстве, называется фигурой" и т. д.

Все эти выражения, понятные взрослому человеку, вызывают у ученика недоумение. Что значат слова: „пространство", „ограниченная", „смежные", „раздельно", „отвлечения", „независимо", „совокупность", „известным образом", „равными", „совместить" и т. д.? Каждое из этих слов у нас, взрослых, вызывает ряд образов, понятий, аналогий, дающих жизнь и содержание слову. А что может сделать ребёнок, чтобы понять приведённые выше предложения? Он бессилен! Ему остаётся только запомнить и повторить наизусть заученные слова.

В силу особенностей детского мышления понятия ребёнка обычно опираются на ощущения, т. е. на чувственный опыт, или на представление. Так, слово „ограниченный“ требует для своего понимания определённых представлений, выражаемых словом „ограничить“, например ограничение линии, начерченной на доске, или нити, имеющей два конца, или поверхности в виде участка двора, ограниченного забором, или пространства, ограниченного стенами, полом и потолком, т. е. в виде ряда конкретных образов. Точно также слово „совместить“, попадающееся ученику в первый раз в жизни, становится ему понятным, имеющим определённое содержание, лишь после нескольких опытов ф а к т и ч е с к о г о н а л о ж е н и я и с о в м е щ е н и я отрезков, дуг, площадей.

Также слова „равный“, „больше“, „меньше“, „совокупность“ и множество других слов становятся понятными лишь на основе группы определённых пространственных представлений, которые возникают и закрепляются прочнее и лучше всего после систематически проведённых демонстраций и объяснений учителя и собственных опытов и упражнений. Чтобы понять, как важны оба указанные вида школьной работы, достаточно привести пример наглядного выяснения смысла слова „равные“. Одно и то же слово „равные“, прилагаемое к отрезкам, требует для своего усвоения одних демонстраций и опытов, к углам—других, к дугам окружностей одного радиуса—третьих, к площадям—четвёртых, к фигурам—пятых и т. д.

Далее, составление правильного определения, столь важного в геометрии, непосильно ученику VI класса, так как указать на некоторые признаки геометрической фигуры он ещё может, но указание ближайшего рода и видового отличия объекта ему не по силам.

Затем, в установившейся практике преподавания систематического курса геометрии д о к а з а т е л ь с т в о является исключительно главным, чуть ли не единственным её содержанием. Но ведь само доказательство есть уже вторичная стадия усвоения. Раньше, чем думать о доказательстве, ученик должен отчётливо осознать, ч т о и м е н н о он должен доказать. Отчётливое представление геометрической истины, т. е. свойства геометрической фигуры, совсем не адэкватно доказательству. Нормальный путь усвоения теоремы такой: ученик сам или с помощью учителя узнаёт, в чём именно заключается новое геометрическое с в о йство, выражает его словами (т. е. сам составляет формулировку теоремы). Он ставит себе вопрос о всеобщности свойства, т. е. о применимости этого свойства ко всем фигурам данного вида; решение этого вопроса приводит к геометрическому закону. Тем самым вызывается потребность доказательства, обусловливающая интерес к самому доказательству. Позднее можно сократить этот путь.

Одна из главных причин трудности для учащихся усвоения курса геометрии, особенно в его начале, заключается в том, что при построении курса геометрии забывается закон: от конкретного к отвлечённому. А как часто на практике при изучении систематического курса учащимся приходится доказывать справедливость такой истины, сущность которой ими ещё не усвоена, всеобщность её не осознана и потребность в доказательстве ничем не вызвана! Без такой предварительной подготовки основная работа над систематическим курсом геометрии (особенно в его начале) будет идти не под влиянием активного интереса учащихся, а под воздействием педагогического насилия. Вполне понятно, что такая атмосфера снижает продуктивность работы школы.

Из предыдущих соображений вытекает следующий вывод: систематический курс становится интересным и доступным учащимся и может быть усвоен ими тогда, когда пространственное воображение уже достаточно развито. Для этого систематическому курсу геометрии старших классов средней школы должен предшествовать особый курс „наглядной геометрии“, в котором дети с младших классов без перерыва развивают своё пространственное воображение, усваивают доступное им многообразие геометрических форм, учатся строить их самыми разнообразными способами и усваивают их свойства опытным и индуктивным путём.

ГЛАВА III

ОТЛИЧИТЕЛЬНЫЕ ЧЕРТЫ КУРСА НАГЛЯДНОЙ ГЕОМЕТРИИ В НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЕ

§ 6. Особенности начальной школы, благоприятствующие введению наглядной геометрии

Развитие пространственных представлений учащихся входит в число прямых задач школы. Для решения этой задачи начальная школа располагает особенно благоприятными условиями: быстро развивающаяся у детей способность зрительных восприятий, острая зрительная память, повышенные интересы детей ко всякого рода зрительным впечатлениям, потребность растущего детского организма в движениях и осязательных впечатлениях—всё это особенно благоприятно для начальной работы по геометрии. Давая детям большой и разнообразный геометрический материал и не отпугивая их словесной учёбой, начальная школа может достичь очень многого, не только не обременяя детей новым „предметом", а наоборот, оживляя и стимулируя школьную работу, особенно работу по арифметике, природоведению и рисованию, новыми, стройными и интересными зрительными впечатлениями и геометрическими представлениями и обогащая детскую речь новыми сознательно усвоенными словами.

§ 7. Введение наглядной геометрии в начальную школу — первый шаг осуществления политехнизации школы

Если школа, не теряя времени, с I же класса использует благоприятные условия младшего возраста и направит свои усилия в сторону максимального развития пространственных представлений детей, то математические способности учащихся будут развиваться не односторонне и отвлечённо в направлении только вычислительных операций.

Регулярная 4-летняя работа над развитием геометрических представлений, над усвоением чертёжных приёмов и измерительных операций, над решением разнообразных вопросов, относящихся к сравнению линейных размеров, направлений и площадей, применение геометрических знаний и представлений при изложении других предметов школы—природоведения, географии, рисования,—всё это оставит глубокий след в сознании детей, и они подойдут к работе в средней школе с лучшей и менее формальной подготовкой, чем теперь.

Решение задачи политехнизации школы надо начинать с начальных классов. Решающим и очень важным шагом в этом деле явится введение первого концентра геометрии: „наглядной геометрии".

В целях равномерного и гармонического развития способностей ребёнка, в целях подготовки квалифицированных кадров для промышленности и сельского хозяйства преподавание геометрии следует проводить на всех ступенях школы, изменяя его методику соответственно условиям возраста учащихся и общим задачам данной ступени школы.

Первый концентр („наглядная геометрия") должен проходиться в течение первых 5 лет, с I класса по V, и переходить в систематический курс элементарной геометрии (соответственным образом изменённый).

§ 8. Цели концентра наглядной геометрии

Целью „наглядной геометрии" является:

1. Развитие геометрических представлений учащихся посредством рисования геометрических фигур и тел и изготовления их моделей.

2. Усвоение начальных приёмов черчения посредством линейки, угольника и циркуля.

3. Ознакомление со способами прямого и косвенного измерения длин, углов, площадей и объёмов.

4. Усвоение некоторых элементарных сведений по геометрии, полезных в практической жизни и необхо-

димых при изучении других предметов школы: естествознания, географии, рисования.

5. Активизация мышления путём постановки и решения геометрических задач.

6. Введение начал логического мышления в изучение наглядной геометрии (в степени и форме, доступных возрасту учащихся).

7. Развитие речи—устной и письменной—в области, относящейся к пространственным представлениям детей.

§ 9. Содержание курса наглядной геометрии

В отличие от „геометрического материала" в современной начальной школе „наглядная геометрия" не должна быть придатком к арифметике, вырождаясь в изучение мер длины, площади и объёма и способов измерения прямолинейных отрезков, площадей прямоугольников и объёмов прямоугольных параллелепипедов.

Содержанием её является первоначальное изучение наглядным способом прямых линий, углов, параллельности и перпендикулярности прямых, ознакомление с важнейшими свойствами прямолинейных фигур: треугольников, четырёхугольников различных видов, окружности; измерение длин, площадей; представление о масштабе и подобии фигур—знакомство с формой важнейших геометрических тел и измерение их поверхностей и объёмов.

Наглядная геометрия в начальной школе ограничивается измерением площадей прямолинейных фигур. Измерение же углов, длина окружности и площадь круга, понятие о масштабе и подобии фигур, поверхности и объёмы простейших тел—изучаются в V классе.

§ 10. Связь наглядной геометрии с арифметикой

В отличие от систематического курса геометрии пропедевтика геометрии получит твёрдую опору в тесной связи с арифметикой. В самом начале изучения арифметики, с I и II класса, геометрия может дать арифметике материал для счёта, изучения состава чисел первого десятка, действий в пределах до 20 в форме упражнений на измерение отрезков, ломаных линий, периметров прямоугольников и площадей прямоугольных фигур.

Обратно, сама геометрия строит свои фигуры— отрезки, прямоугольники и квадраты, составляя их подобно числам из единичных отрезков и квадратов.

Представления о равенстве и неравенстве отрезков, о действиях над отрезками, о периметрах фигур образуются не только наглядным путём, но и с помощью измерения.

Представления о равносоставленности фигур вырабатываются у детей очень рано, начиная с I класса, на базе комбинаций квадратных единиц и построения из них прямоугольных фигур. Площади прямоугольников с равными основаниями, образуемые на доске сначала из отдельных квадратов, а затем из квадратов сетки доски, служат прекрасным наглядным пособием при изучении таблицы умножения во II классе.

В дальнейшем геометрия даёт арифметике богатый конкретный материал в виде упражнений и задач на измерение площадей и периметров простых и сложных фигур, составленных сначала из прямоугольников, а затем треугольников, трапеций, параллелограмов и фигур более сложного вида (III и IV классы), в пределах вычислений с целыми числами.

Изучение десятичных дробей идёт обычно на основе таблиц метрических мер длины и площади. Измерение площадей фигур приводит естественно и неизбежно к приближённым вычислениям и к операциям с приближёнными числами (в V—VI классах).

Изучение отношений также естественно связывается с идеей пространственного преобразования, сжатия и расширения пространства, с идеей о масштабе и с первыми представлениями о подобных фигурах. В дальнейшем измерения длины окружности и площади круга, площадей и объёмов круглых тел будут также связаны с приближёнными вычислениями.

В настоящее время все задачи в арифметических задачниках на меры длины, площади и объёма обычно носят сухой формальный характер: проделав 2—3 измерения площадей фигур или объёмов конкретных предметов, учащиеся дальше решают задачи геометрического содержания по определённому арифметическому трафарету, ставя, даже не везде сознательно, в конце решения наименования метрических мер.

Геометрия даёт арифметике неистощимый запас конкретных и разнообразных задач, близких к жизни и не допускающих формализма при их решении.

§ 11. Методика и дидактика

1. План и программы преподавания наглядной геометрии в начальной школе строятся не только в зависимости от содержания самого геометрического материала, но и в зависимости:

а) от психологических особенностей детского возраста и

б) от общей целевой установки всей учебной работы школы.

2. Как известно, дети создают понятия, исходя из наблюдений конкретных предметов и явлений. Воспринимающие способности и интересы детей 7—10-летнего возраста раскрыты в сторону зрительных впечатлений; у детей наиболее развита зрительная и моторная память и менее—слуховая. Дети по своей активной природе склонны к занятиям, сопровождаемым движением и затратой мускульной энергии.

Эти причины определяют основные методические принципы построения курса наглядной геометрии в начальной школе: наглядность и конкретность его преподавания и максимальное количество практических упражнений конструктивного и чертёжного характера.

3. Приблизить ученье к жизни—одна из главных задач коммунистического воспитания. Конкретность и наглядность пропедевтического курса геометрии отвечают этой задаче и вместе с тем наиболее соответствуют активной природе и интересам детей.

4. По указанным выше причинам, при преподавании „наглядной геометрии“ в начальной школе следует отказаться от дедуктивно-логического метода доказательства геометрических положений. В основу преподавания должен быть положен только индук-

тивный метод, основанный на наглядном и практическом изучении частных конкретных фактов и последующем их обобщении.

5. Движение, понимаемое в чисто механическом смысле, наиболее отвечающее активной природе ребёнка, является важнейшим фактором как создания геометрических форм, так и уяснения их свойств.

6. Как план построения курса, так и метод преподавания „наглядной геометрии" должны отвечать требованиям советской методики: идти в развитии геометрического мышления от простого к сложному, от лёгкого к трудному, от конкретного к отвлечённому.

7. В учебной работе детей по наглядной геометрии должны, по возможности, принимать участие все виды памяти: зрительная, моторно-осязательная, слуховая.

8. В целях избежания зазубривания и формализма при преподавании наглядной геометрии надо в младших (I и II) классах отказаться от обязательного заучивания всяких определений, точных формулировок, формальных правил и т. п. Вместо этого лучше вводить в учебную практику живое описание детьми своих наблюдений и подмеченных геометрических свойств. При этом учитель заботится как о достаточной полноте наблюдений, так и о правильности речи.

9. Кроме обычных „словесных" критериев усвоения геометрии, необходимо ввести новые: дети „мыслят образами", поэтому главным критерием в младших классах должно быть умение. Умение построить фигуру или верно описать построение, умение найти и показать ту или другую часть фигуры, точку, отрезок или угол,—является на данном уровне развития учащихся критерием достаточного усвоения. Например в I и II классах было бы неправильным требовать точно формулированного определения периметра и площади фигуры; достаточно, если на вопрос „покажи периметр или площадь", ученик обведёт пальцем периметр фигуры, построенной на доске, или ладонью проведёт по всей площади её.

§ 12. Условия успешной постановки наглядной геометрии в начальной школе

Связующим цементом при построении систематического курса геометрии является доказательство. Так как школа в первых двух классах полностью, а в III и IV классах частично не применяет логического дедуктивного метода доказательства, то единственным методом убеждения детей является наглядный метод. Поэтому особое и исключительное внимание школы должно быть обращено на его реализацию.

Наглядный индуктивный метод преподавания геометрии обычно заключается в том, что учитель проводит перед классом, в связи с объяснениями, демонстрации наглядных пособий, а затем и сами ученики проделывают ряд специально подобранных упражнений, в результате обобщения которых выводится геометрический закон.

Усвоенный учениками закон иллюстрируется и закрепляется новыми упражнениями и задачами вычислительного и конструктивного характера. Формулировка закона, сводящаяся в младших классах к свободным описаниям, в старших классах уточняется. Таким образом, работа с геометрическими моделями и черчением фигур входит главной составной частью в содержание уроков „наглядной геометрии". Дети делают свои геометрические выводы, строя их не столько на „понятности", сколько на „ясности", т. е. не столько на умозаключениях, сколько на воображении, работающем при наблюдениях над построениями на доске моделей и чертежей, и на личном опыте их построения.

Для правильной постановки преподавания „наглядной геометрии" школа должна быть обеспечена необходимыми наглядными пособиями.

§ 13. Учебно-наглядные пособия по геометрии: классные и индивидуальные

Классные учебно-наглядные пособия и принадлежности для черчения: а) наборы геометрических деталей для составления из них путём комбинирования различных геометрических фигур, для разложения фигур на части и для превращения одних фигур в другие равносоставленные; б) набор моделей отрезков постоянной длины (полосок), отрезков переменной длины (растягивающихся цветных резиновых обмотанных шёлком шнурков) для построения из них на демонстрационной доске подвижных моделей геометрических фигур; в) демонстрационная доска-стэнд, с начерченной на ней квадратной сеткой для монтирования и показа моделей; г) обычные классные доски чистые и размеченные на квадраты: к ним—белые и цветные мелки; д) классные чертёжные пособия: линейка, угольник, циркуль; е) измерительные приборы для работы на местности: метры, двухметровые рейки, эккер, эклиметр, астролябия, мерный шнур (или рулетка); ж) блокноты для построения моделей путём перегибания листка бумаги; з) инструментарий, необходимый для изготовления самодельных пособий.

Ученические индивидуальные пособия: а) тетради для геометрии в квадратную клетку размером 10×10 *мм*; б) тетради (в III и IV классах) нелинованные, в) карандаши обыкновенные и цветные (двух цветов), г) линейки градуированные, д) угольники, е) циркульные ножки или циркули для карандаша, ж) для V и следующих классов—листы из блокнотов с миллиметровой бумагой.

Построение геометрических фигур как при классных демонстрациях на доске, так и при индивидуальных упражнениях производится различными, доступными пониманию детей приёмами, с применением различных инструментов и материалов. Это различие имеет целью освободить воображение учащихся от случайных материальных признаков модели.

§ 14. Сборник упражнений по наглядной геометрии

Необходимым дополнением к классной работе с моделями и черчением в тетрадях является сборник упражнений по наглядной геометрии, содержащий:

1. Образцы геометрических форм, их необходимые наименования и правила.

2. Объекты для измерений, начиная с отрезков и кончая геометрическими фигурами, для самостоятельных упражнений в классе и дома.

3. Чертежи, рисунки, копии с фотоснимков, карты, имеющие как иллюстративную цель: связь геометрии с окружающей жизнью, так и технико-образовательную, служа объектами для измерений в натуральную величину и в масштабе.

4. Задачи, в которых данные получаются учеником путём измерения и, следовательно, приводят к вычислениям с приближёнными числами и к приближённому ответу.

5. Схемы образования геометрических фигур и развёрток геометрических тел посредством перегибания листка бумаги и черчения.

6. Приложенные в конце сборников упражнений по наглядной геометрии наборы индивидуальных наглядных пособий, напечатанные на плотной глянцевой бумаге:

а) для I класса—измерительная линейка в сантиметрах, цветные квадраты;

б) для II класса—части квадратов, измерительная линейка в миллиметрах;

в) для III класса—двойной масштаб, для измерения площадей листок миллиметровой бумаги;

г) для IV класса то же, что и для III класса.

Примеры подобных сборников мы можем встретить в учебной литературе, например „Сборник упражнений по геометрии“ Арженикова, изд. 1912 г.; „Геометрия на задачах“ Шохор-Троцкого; „Упражнения к начальному курсу геометрии“ проф. Н. А. Извольского, М., 1914; рабочие тетради „Сам измеряй и вычисляй“, ч. 1, 2 и 3. П. А. Карасёва и П. И. Попова, Госиздат, 1928—1931 и др.

Наличие сборника геометрических упражнений вместе с тетрадью в сантиметровую клетку даст прочную основу для самостоятельной работы учеников и повысит интерес к работе у каждого ученика в отдельности.

Так как успешность проведения курса наглядной геометрии зависит от того, насколько легко, скоро и наглядно создаётся модель геометрической фигуры на доске при объяснениях учителя, насколько доходчива для детей демонстрация той или иной фигуры на модели, то мы должны признать, что полное обеспечение начальной школы классными пособиями по наглядной геометрии—не роскошь, а необходимость. Точно также снабжение учеников (особенно младших классов) наглядными индивидуальными пособиями и сборниками упражнений делает их не просто наблюдателями, а самостоятельными конструкторами, разрешающими геометрические задачи.

§ 15. Подготовка учащихся к систематическому курсу геометрии

Начиная с IV класса и главным образом в V классе, учитель в связи с переходом учебной работы от моделей к построениям при помощи угольника и линейки, а затем циркуля и линейки постепенно вводит логический элемент в преподавание „наглядной геометрии". Проще всего начать с составления по возможности правильных определений, точной формулировки правил косвенного измерения площадей и объёмов. Затем переходить от конкретных операций с моделями фигур к воображаемым операциям с чертежами, а также частично вводить рассуждения, делающие излишними непосредственный опыт и эксперименты с моделями.

Примерно в VI классе учитель путём бесед и специальных упражнений должен привести своих учеников к сознанию, что наглядно-интуитивный метод не обеспечивает развития геометрических понятий, он излишне трудоёмок; вовсе нет необходимости каждое новое геометрическое свойство обнаруживать и проверять с помощью модели. Например, зная, что сумма углов треугольника равна двум прямым углам, можно сделать на простых чертежах заключения о сумме острых углов прямоугольного треугольника, сумме углов четырёхугольника, пятиугольника, не пользуясь моделями.

Убеждения, основанные на одних зрительных впечатлениях, недостаточны для правильного и строгого доказательства геометрических истин. Для примера учитель знакомит своих учеников с целым рядом общеизвестных парадоксов, где вводит в заблуждение именно чертёж, бывший до сих пор почти единственным руководителем (см. Е. И. Игнатьев, В царстве смекалки, ч. 3 „Геометрические софизмы", задачи № 63—66 и др., изд. Сытина, 1909, и Госиздата). Таковы, например, общеизвестные доказательства 64=65; отрезки, кажущиеся ра личными, на самом деле равные, отрезки, кажущиеся расходящимися, а на деле—параллельные и т. д.

Учителю следует остановиться на подборе и анализе таких парадоксов, чтобы привести учащегося к сознанию, что наглядный метод следует заменить более совершенным методом, не зависящим от зрительных впечатлений, дающим строгое логическое обоснование геометрических законов и, мало того, позволяющим открывать новые геометрические законы, переходить от одних геометрических положений к другим без всякой помощи моделей и даже чертежей. На этих примерах учащиеся должны убедиться в преимуществе логического метода. Цель такой работы— вызвать интерес учащихся к более глубокому, точному изучению геометрии и к предстоящей в VI классе перестройке геометрического курса.

На базе дедуктивного метода (не везде строго выдержанного) строится систематический курс геометрии VI—X классов.

Для наглядной геометрии необходимо выработать детальную программу с методическими объяснениями, в которую внести геометрический материал, содержащийся в программе арифметики.

На наглядную геометрию должно быть отведено достаточное число часов (2 часа в неделю: 1 час— работе учащихся с учителем в классе и 1 час для самостоятельных конструктивных и чертёжных упражнений учащихся дома).

С целью подготовки учителей программы педагогических училищ и учительских институтов следует расширить введением методики наглядной геометрии (пропедевтики геометрии) и практических упражнений с наглядными пособиями.

Вопрос о введении наглядной геометрии в младшие (I—V) классы школы настолько сложен, и вместе с тем решение его настолько назрело, что практика введения его должна сначала пройти экспериментальную стадию.

Необходимо провести под руководством авторитетного педагогического учреждения, например Академии педагогических наук, достаточно большую и широкую экспериментальную работу по преподаванию элементов наглядной геометрии в начальных школах и V классе средней школы, учитывая, конечно, всё ценное, созданное ранее.

К этой работе надо привлечь широкий круг учительства, способного увлечься задачей воспитать поколение молодёжи, получающей непрерывную геометрическую подготовку в течение всего времени своего пребывания в школе и обладающей развитым пространственным геометрическим мышлением.

На материалах этого эксперимента уже можно будет строить планы, программы, методические и учебные пособия для введения наглядной геометрии в начальную школу.

План политехнического преобразования школы лишь тогда получит необходимую ширину и глубину, когда охватит все классы школы, начиная с I. В частности, в области математики в план политехнизации школы следует включить введение наглядной геометрии в начальную школу.

ГЛАВА IV

НАГЛЯДНЫЙ МЕТОД ИЗУЧЕНИЯ ГЕОМЕТРИИ В НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЕ

„От живого созерцания к абстрактному мышлению *и от него к практике*".

ЛЕНИН.

§ 16. Живое созерцание

Формула Владимира Ильича Ленина, характеризующая путь развития научного мышления, определяет вместе с тем и основные черты наглядного метода обучения.

„Дети мыслят образами". Их мышление отправляется от представлений, образующихся из непосредственных восприятий предметов окружающего мира. Внимательно рассматривая предметы, их форму и размеры, находя их сходство и различие, рассматривая их грани, рёбра и углы, дети получают первоначальное представление о поверхностях, линиях и точках.

Одновременно с наблюдениями — „живым созерцанием"—дети проводят практические упражнения, имеющие целью изготовление из различных материалов моделей геометрических форм и ознакомление на опыте с их свойствами. Так постепенно накапливаются у них первоначальные сведения, и притом в наиболее конкретной форме, о кривых и прямых линиях, углах, параллельности и перпендикулярности прямых, о треугольниках, четырёхугольниках, окружностях и их простейших свойствах. Геометрические формы дети образуют из разнообразных материалов—палочек, соломинок, шнурков и нитей, изготовляют перегибанием листка бумаги, комбинированием простейших фигур, черчением и рисованием.

Такая работа, всегда интересная и отвечающая активной природе ребёнка, должна проводиться, начиная с I класса. Она развивает его пространственное воображение, глазомер, точность руки и глаза, мускулатуру рук и пальцев. Результаты этой работы находят себе немедленное приложение при изучении других предметов — рисования, естествознания, географии.

Раннее введение элементов геометрии важно также в целях развития детской речи, так как всякий новый пространственный образ и новое понятие, связанное с ним, неизбежно сопровождаются соответствующим словесным выражением их. Речь детей обогащается геометрическими терминами, усвоенными не формально, а сознательно, в результате построения и рассмотрения конкретных моделей и рисунков.

Развитие детской речи в области пространственных представлений идёт не только по линии обогащения новыми наименованиями геометрических форм: точка, прямая, отрезок, угол, квадрат, треугольник, прямоугольник, круг, радиус и т. д., но и по линии выражения связей между формами. Слова: „равные", „неравные", „бо́льшие", „меньшие", „пересекающиеся", „параллельные", „наложить", „приложить", „вращать", „пересечь" и т. д. вводятся постепенно на основе специально поставленных пространственно-комбинационных упражнений с моделями, геометрических игр и демонстраций.

Было бы преждевременно заниматься в начальной школе составлением и заучиванием формулировок и формально правильных определений или истолкований слов или терминов. Дети должны простым и грамотным языком описывать свои наблюдения и делать, если возможно, простейшие выводы (обобщения). Благодаря таким упражнениям много слов, известных детям раньше, уточняется и получает более широкое содержание и более точный смысл.

17. Элементарные наглядные пособия по геометрии. Движение как средство расширения и обогащения зрительных впечатлений

Не следует думать, что наглядность при обучении геометрии требует каких-то особых, специальных наглядных пособий.

Нить или шнурок, прямолинейная деревянная полоска, листок гладкой бумаги—дадут учителю возможность образовать целый ряд наглядных пособий по геометрии. Правда, неподвижная натянутая нить как модель прямой линии или неподвижный плоский листок бумаги как модель плоскости имеют ещё довольно скудное геометрическое содержание.

Движение—вот та могучая сила, которая делает созерцание „живым"! „Движения, действия с предметами в исключительно большой степени расширяют познавательные способности ребёнка, его познавательный опыт"[1]. Пусть геометрические модели будут двигаться, и при этом будут накладываться друг на друга, прикладываться, совпадать, перегибаться пополам, удлиняться, укорачиваться, расширяться, сжиматься, вращаться,—тогда скучные и мёртвые предметы на глазах учеников оживут, дадут начало многим новым формам и перед учителем раскроются широкие возможности для новых методических приёмов и демонстраций.

Остановимся на элементарных наглядных геометрических пособиях: нити, листке бумаги и палочке, и посмотрим, как расширяются их возможности при введении движения.

§ 18. Нить (шнурок, верёвка)

1. Двое детей держат за концы туго натянутую нить—она изображает прямую линию. После того как будет показано на нити всё относящееся к началам ознакомления с прямой линией: узел—„точка", делящая прямую на два луча; два узелка на нити—„отрезок на прямой" и два луча; положение третьей точки по отношению к двум данным, понятия: „между", „слева", „справа", „посередине" и т. д., когда всё это рас-

[1] „Психология", под ред. проф. К. Н. Корнилова и др., Учпедгиз, 1948, стр. 136.

смотрено и зачерчено на доске и в тетрадях, роль нити, повидимому, исчерпана.

2. Введём движение. Ученик в точке C придерживает нить рукой, а учитель поднимает конец B (рис. 1).

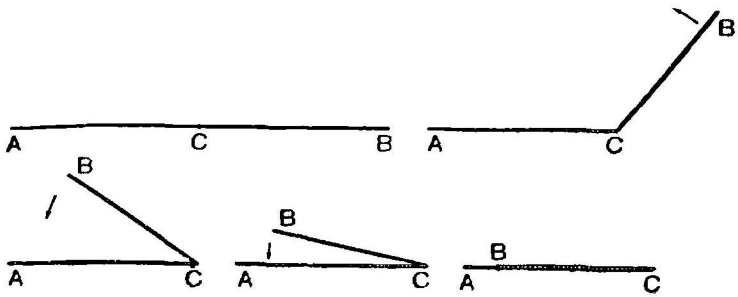


Рис. 1.

— Смотрите! Прямая линия переломилась! Образовался угол!

Становится возможным изучение нового геометрического образа—угла, его вершины, сторон, числа сторон и его изменения.

3. Учитель вращает половину нити CB около средней точки C, а ученики наблюдают, как угол изменяется: становится всё уже (меньше), делается острым как иголка, и, наконец, совсем исчезает, когда CB совпадает с AC.

Наблюдая вращение половины нити около средней точки её, ученики получают представление об образовании угла: об остром, тупом, прямом и развёрнутом углах, об увеличении и уменьшении угла—могут сравнивать углы по своей величине (не смешивая понятия величины угла с понятием длины его сторон).

4. Далее, увеличивая число переломов прямой, учащиеся образуют ломаную линию, определяют число её звеньев, число углов и вершин.

Сводя вместе концы нити, представляющей ломаную линию, дети образуют многоугольник. Это новый, более сложный геометрический образ. Последовательно из нити образуют треугольник, четырёхугольник, пятиугольник и т. д.

5. Учитель чертит на доске мелом, привязанным к

концу нити, **окружность**. Новое движение—вращение, новая геометрическая фигура, новый отдел геометрии. Дети знакомятся с центром, радиусом, хордой, диаметром и свойствами круга.

6. Разрезав шнур на части длиной в 1 *м*, ученики получают меру длины. Метром они производят ряд измерений—длину и ширину класса, коридора, школы и т. д.

Таким образом, мёртвое и скудное пособие—нить—при введении движения даёт множество геометрических форм и способов их изучения. Эти формы создаются из нити перед глазами учеников в процессе урока. Не требуется никаких сложных и дорогих приборов для образования геометрических моделей. Единственно, что потребуется в будущем,—это прикрепить концы нити или несколько её точек к доске, чтобы освободить руки учителя или учеников, держащих нить.

§ 19. Листок бумаги

В I классе легко может случиться, что дети будут отождествлять прямую линию с нитью. Надо показать им, что прямую линию можно образовать и иными способами:

1. Приложим гладкий листок нелинованной бумаги к доске и на глазах учеников перегнём его, сложим пополам, и, туго прижимая, проведём пальцем или ручкой ножа по сгибу (рис. 2). Расправив листок, мы получим на нём хороший образ прямой линии *АБ*. Прямую линию можно образовать перегибанием листка бумаги. Этот пример взят из другой группы пособий, столь же простых и также создаваемых перед глазами учащихся, в процессе урока.

2. Листок плотной, гладкой бумаги или папки, лежащий на столе или приколотый к доске, даёт учащимся представление о плоскости. Поставим линейку ребром на листок; легко заметить, что ребро линейки всеми точками своими лежит на листке. Укладывая линейку ребром на листок по любому направлению, мы увидим то же самое. Прямая линия совпадает с плоскостью во всех направлениях, если только совпадают с ней две точки прямой.

Рис. 2.

Плоский кусок папки скользит по плоскости и совпадает с ней всеми точками. Он совпадает с плоскостью также, будучи перевёрнут, и обратной стороной.

3. Ученик ставит на стол карандаш остриём вверх (рис. 3). Положив листок плотной бумаги или папки на карандаш, учитель показывает, что листок можно поворачивать около острия как угодно, следовательно, одна точка не закрепляет положения плоскости.

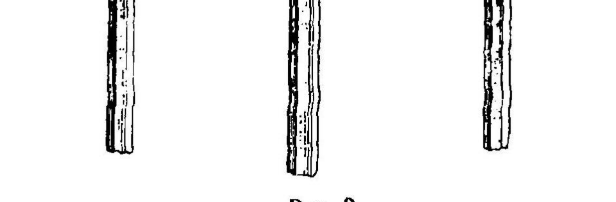


Рис. 3.

Второй ученик ставит свой карандаш рядом с первым, также остриём вверх. Листок папки, положенный на два острия, всё ещё неустойчив. Наконец, третий ученик ставит рядом с двумя карандашами ещё и свой карандаш, но не на одной прямой с прежними. Учитель вращает, поддерживая снизу, листок около первых двух острий, опуская его, и когда листок, опускаясь, достигает третьего острия, учитель отпускает руку, и листок твёрдо лежит на трёх остриях, занимая в пространстве вполне определённое место. Таким образом, благодаря движению ученики наглядно убеждаются, что *положение плоскости вполне определяется тремя её точками, не лежащими на одной прямой.*

4. Сложив листок бумаги пополам и ещё раз так, чтобы одна часть первого сгиба легла на другую, мы получим *четыре прямых угла* вокруг одной точки (рис. 44). Развернув листок и вторично сложив его по сгибам и положив прямые углы друг на друга, мы можем показать равенство прямых углов. Перегнув тот же листок по третьей прямой, пересекающей первые два перегиба листка, мы получим, расправив листок, ромб с двумя диагоналями (рис. 4).

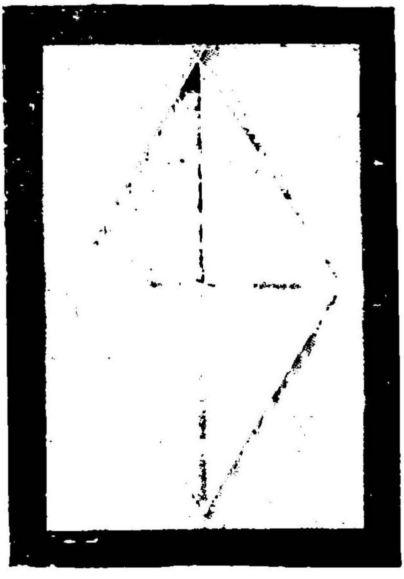


Рис. 4.

Снова складывая листок, можно показать следующие свойства ромба.

При перегибе по 1-й линии обнаруживается, что:

а) ромб делится диагональю на два равных тупоугольных треугольника;

б) острые углы ромба диагональю делятся пополам;

в) ромб симметричен относительно большей диагонали.

При перегибе по 2-й линии легко обнаружить наложением:

а) Деление ромба на 2 равных остроугольных треугольника.

б) Деление тупых углов ромба диагональю пополам.

в) Симметрию ромба относительно меньшей диагонали.

При обоих перегибах обнаруживается непосредственным наложением:

а) Равенство сторон ромба.

б) Деление ромба диагоналями на 4 равных треугольника.

в) Перпендикулярность диагоналей.

г) Взаимное деление их пополам.

д) Центральная симметрия ромба (прокалыванием стороны ромба в сложенном виде булавкой).

Перегибание листка бумаги—очень ценный и богатый геометрическими возможностями наглядный метод. При помощи его можно изготовить много моделей, применимых в пропедевтике геометрии. Он также может дать интересные и полезные модели и при изучении систематического курса геометрии, ставя перед учениками определённый геометрический случай, который ученики должны описать, формулировать как теорему и доказать.

§ 20. Палочки (полоски, лучинки)

Палочки употребляются обычно при обучении арифметике как счётный материал. В наглядной геометрии палочки наряду с нитью служат моделями отрезков при их сложении, вычитании и умножении. Введём и здесь движение: скрепив палочки друг с другом в одном конце или в середине гвоздиком и образовав, таким образом, простые шарнирные соединения, мы можем изготовить различные подвижные модели для первых уроков наглядной геометрии или для систематического курса геометрии. Например:

Две палочки, соединённые в одном конце, образуют р а з-

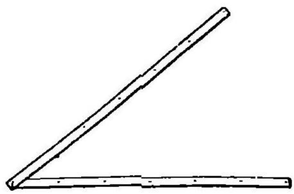
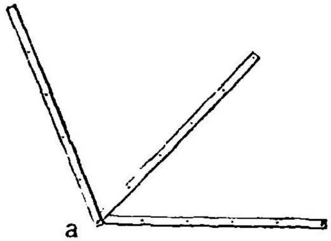
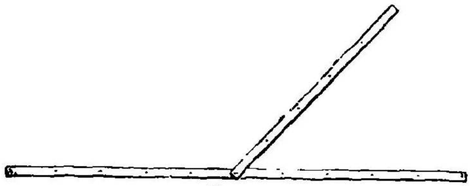


Рис. 5.

движной угол (рис. 5). Прикладывая его к данным углам, мы можем установить их равенство или неравенство, можем, пользуясь ими как малкой, построить угол на данной прямой. сложить или вычесть углы и т. п.


а


б

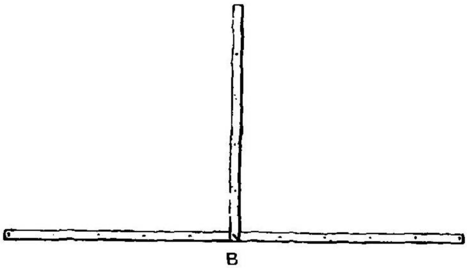

в

Рис. 6.

Три палочки, соединённые в одной точке (рис. 6), образуют модель суммы двух углов (*а*), превращающуюся в два смежных угла (*б*), а эти в свою очередь — в пару прямых углов (*в*). Три палочки, соединённые в двух концах гвоздиками дают подвижную модель треугольника с изменяющимися углами и одной изменяющейся стороной, модель внешнего угла треугольника и т. д.

§ 21. Комбинации и уточнение элементарных наглядных пособий

Конструктивные возможности особенно расширяются, если соединим в одном пособии палочки как модели постоянных отрезков и цветные резиновые шнуры—модели переменных отрезков. Такие, более сложные модели позволяют демонстрировать прямые и обратные теоремы, функциональную зависимость в геометрии, предельные случаи и т. п.

Для сохранения времени при конструировании моделей и для получения точных и изящных моделей форма деталей должна быть уточнена и сами палочки должны превратиться в геометрически правильные линеечки—„полоски" из плотного букового или берёзового дерева, прямоугольного сечения 10×3 *мм*, различной длины—от 110 до 410 *мм*. В „полосках" просверливаются отверстия диаметром в 2 *мм* через каждые 50 *мм*, расположенные по прямой линии, строго посередине полоски (рис. 7). Крайние

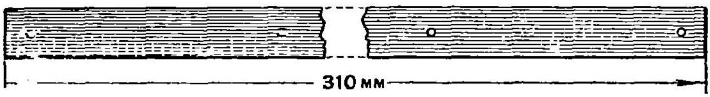


Рис. 7.

отверстия отстоят от концов полоски на 5 *мм*. Полоски окрашиваются в один цвет (тёмный) клеевой краской.

Нить заменяется резиновым шнурком квадратного сечения, обмотанным цветным шёлком[1]. Пригодны для модели и плоские шнурки из белой „авиационной" резины, применяемой при изготовлении моделей самолётов, или плоские резиновые шнурки—„ластик",—обмотанные простыми белыми нитками (их можно достать в галантерейных магазинах). Белые шнурки следует окрасить в разные цвета цветными чернилами. Резиновые шнуры различной длины—от 20 до 60 *см*—связываются своими концами, образуя кольцо (рис. 8), и надеваются на гвоздики или штифтики (рис. 9), втыкаемые в демонстрационную доску (см.

[1] Такие шнуры можно достать в галантерейных магазинах.

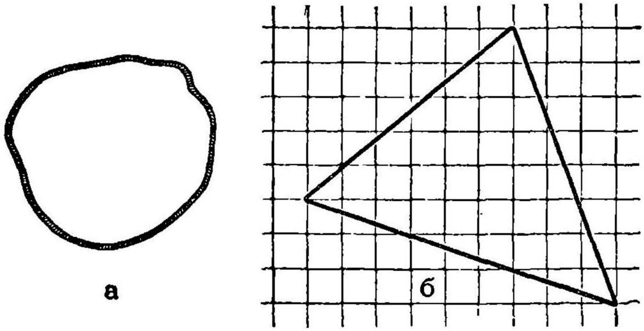


Рис. 8.

Рис. 9.

стр. 52). В натянутом виде (*б*) они дают модели отрезков переменной длины.

Полоски, скреплённые гвоздиками с широкими шляпками или штифтами (рис. 9) круглого сечения диаметром 2 *мм*, образуют шарнирные соединения — подвижные модели плоских геометрических фигур. Модель можно демонстрировать в классе, просто держа её в руках, но удобнее иметь специальную классную доску, на которой можно смонтировать, закрепить и показать модель (см. § 22 „Демонстрационная доска"). Модели прикрепляются к доске гвоздиками того же диаметра, что и отверстия в штабиках, т. е. 2 *мм*, длиной не менее 5 *см*.

Читатель найдёт в этой книге много разнообразных примеров применения в классной работе подвижных моделей по наглядной геометрии, образуемых на демонстрационной доске из деревянных полосок — § 42, цветных шнуров — § 35—38, 60, 64—69, комбинаций полосок со шнурами § 42 и т. д.

Приведённые выше примеры, как и множество других, достаточно убедительно и ясно говорят о том, что движение есть мощное орудие не только для создания геометрических образов, но и для наглядного выяснения их взаимосвязей, т. е. геометрических законов. Благодаря ему учащиеся получают возможность „живого созерцания", соответствующего их активной природе, их живому воображению, жадно реагирующему на движение, их острой наблюдательности и хорошей зрительной памяти.

Для ученика открытие и проверка свойств геометрических фигур при помощи подвижных моделей будут представлять тем больший интерес, что новые фигуры он не увидит готовыми в учебнике, но проследит их образование и затем создаст сам. Новые свойства фигур ученики узнают не от учителя и не прочтут о них в книге в виде готовых правил или определений, — они сами их откроют (правда, иногда с помощью учителя) на собственном опыте, они проверят их правильность доступным им наглядным способом и подумают, как лучше выразить словами обнаруженные ими геометрические свойства. Тем прочнее будут усвоены ими полученные сведения.

§ 22. Демонстрационная доска (стенд). Её устройство и изготовление

Учителю на уроке наглядной геометрии постоянно приходится строить различные модели геометрических фигур. Объясняя их свойства, он должен показывать различные точки модели, делать на классной доске вычисления и другие записи. Ясно, что строить модели и вести объяснения и записи, держа модель в руках, для учителя невозможно,— у учителя всё время будут „связаны руки".

Всего удобнее для экономии времени и сил учителя и учеников, для повышения точности, правильности и наглядности моделей иметь в классе как постоянное пособие специальную классную доску-стенд— демонстрационную доску. На ней учитель и учащиеся могут строить из указанных выше цветных шнуров, полосок и других деталей геометрические модели и показывать их в действии, если модели подвижные, демонстрировать и проверять свойства геометрических фигур, задавать и решать геометрические задачи и т. д.

Описание демонстрационной доски (рис. 10). Доска изготовляется из сухой фанеры толщиной не менее 5 *мм.* Обвязка доски и планки — из сухого соснового тёса. Размеры доски 900×700 *мм.* По краям сзади доска скреплена обвязкой шириной 50 *мм,* толщиной 10 *мм.* Передняя сторона доски свободна от всяких рамок.

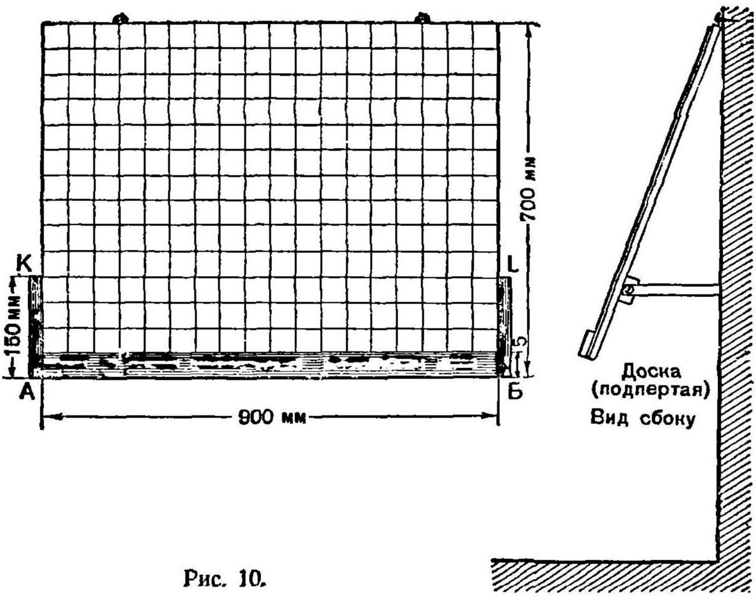


Рис. 10.

Спереди, заподлицо с нижним краем, к доске приклеена и привинчена планка размерами 900×50×10 *мм.*

Сзади, на расстоянии 260 *мм* от нижнего края доски, с правой и с левой стороны привинчены к обвязке доски две берёзовые подкладки размером 100×50×40 *мм.* К ним привинчены в точках *К* и *Л* винтами с ушками (баранчиками) две пл гночки *АК* и *ВЛ* длиной 200 *мм,* вращающиеся в плоскости, перпендикулярной к плоскости доски, около винтов *К* и *Л.* Сверху к обвязке доски привинчены два ушка для подвешивания доски на классную доску.

Доска выкрашена белой эмалевой краской и разлинована квадратной сеткой на квадраты со стороной 50 *мм* масляной светлоголубой или светлозелёной краской. Когда краска высохнет, в доске, в вершинах квадратов, надо точно просверлить круглые отверстия диаметром 2 *мм* перпендикулярно к плоскости доски.

Демонстрационная доска подвешивается за ушки на два гвоздя, вбитые в рамку классной доски или же прямо в стену рядом с классной доской. Обычно доска висит отвесно.

При монтировании и демонстрациях моделей боковые планки доски *АК* и *БЛ* поворачивают так, чтобы они упирались под прямым углом в стену или классную доску. Тогда демонстрационная доска, опираясь на планки *АК* и *БЛ*, примет наклонное положение (рис. 10 справа), допускающее построение моделей.

§ 23. Назначение и применение демонстрационной доски в начальной школе

Главное значение демонстрационной доски заключается в том, что она служит **общим основанием для построения и демонстрирования моделей прямолинейных геометрических фигур, отрезков, углов, треугольников и четырёхугольников всех видов и т. д.** Модели эти могут быть образованы из постоянных деталей и быть неподвижными, но могут иметь изменяющиеся стороны и углы и, таким образом, образуют множество вариантов одной и той же формы. В этом случае они удобны для обнаружения и демонстрации свойств геометрических фигур. Кроме того, на демонстрационной доске можно задавать и решать неограниченное число задач из разных отделов геометрии, особенно—на вычисление площадей.

В начальной школе, в младших классах, где наглядная геометрия ещё тесно связана с арифметикой, на демонстрационной доске производятся пространственно-комбинационные упражнения, сопровождающие изучение чисел и действий с ними.

В I классе при изучении чисел 1-го и 2-го десятков на ней идут наглядные упражнения с цветными квадратами, используемыми как счётный материал и, вместе с тем, как материал для построения геометрических фигур. Одновременно с этим на доске строятся отрезки из цветных шнурков, измеряемые делениями доски, и прямоугольные ломаные линии, приводящие при их замыкании к образованию прямоугольника и квадрата.

Образование чисел 2-го десятка, действия над числами в пределах 20 проводятся с цветными квадратами и цветными шнурами, образующими новые прямоугольники, квадраты и ломаные линии более сложного вида.

Действия в пределах 20 связываются: 1) с вычислением и сравнением длин ломаных линий и задачами на построение ломаных линий заданной длины; 2) с определением числа цветных квадратов, содержащихся в построенных прямоугольниках, квадратах и других прямоугольных фигурах, и 3) с вычислением и сравнением их периметров.

Счёт круглыми десятками проводится при построениях прямоугольников высотой в 10 единиц, сложение и вычитание в пределах 100 проводится с помощью моделей, образованных цветными шнурами и черчением прямоугольных фигур в тетрадях и вычислением.

Рисунок 11 изображает демонстрационную доску, на которой построены типы моделей, применяемых при изучении наглядной геометрии (и арифметики) в I классе. (Рис. 11 и 12 см. цветные вклейки).

Две модели, показывающие состав числа 6, образованы квадратной мозаикой:

$$6 = 1 + 2 + 3 = 3 + 3 = 3 \times 2 = 2 + 2 + 2 = 2 \times 3;$$
$$6 : 2 = 3;\ 6 : 3 = 2.$$

Геометрическая игра: „Сколькими квадратами можно закрыть эту фигуру?“

$$4 + 4 + 2 = 4 \times 3 - 2 = 10.$$

Отрезки, изображающие натуральный ряд чисел.

Ломаная длиной $3 + 1 + 2 = 6$.

Ломаная, состоящая из равных частей:

$$4 + 4 + 4 = 4 \times 3 = 12.$$

„У какого прямоугольника периметр больше: у синего или у красного, и на сколько?“

Образование круглых десятков. Одна картонная полоска из 10 квадратов и 4 отдельных квадрата.

Счёт в пределе 100: 2 десятка и 7 единиц, модель образована из 27 квадратов сетки доски, охваченных синим шнурком—шаг к отвлечению (сравнительно с предыдущей фигурой), позволяющий перейти к черчению в тетрадях в клетку.

Во II классе дети на раздвижном угле (рис. 12) знакомятся с изменением угла, его увеличением и уменьшением, с различными видами углов.

При изучении таблицы умножения на демонстрационной доске главным пособием является образованный цветным шнурком прямоугольник с основанием, изменяющимся от 2 до 10 (например, 3), и с высотой, возрастающей от 1 до 10.

Далее дети знакомятся с „частями квадрата", образованными делением квадрата пополам и на 4 равные части. Из полученных частей на доске дети смонтируют множество фигур: треугольников, параллелограмов, трапеций, ромбов разных видов. Дети знакомятся с формой фигур на пространственно-комбинационных упражнениях постепенно возрастающей сложности. Фигуры составляются последовательно из 2, 3, 4, 5 деталей. Во II классе в связи с изучением таблицы умножения систематически проводятся многочисленные упражнения, проводившиеся и ранее, начиная с I класса, по подсчёту квадратов, содержащихся в данном прямоугольнике и квадрате, и вводится косвенный способ измерения площади прямоугольника на простейших примерах.

Площадь прямоугольника (рис. 65), образованного шнурком-периметром, допускает непосредственное измерение путём подсчёта квадратов; она же, сплошь заполненная „частями квадратов" или прикрытая на середине листком бумаги, не допускает этого. Тогда мысль детей, на основе только что изученной таблицы умножения, находит новый, более ценный и важный путь, путь косвенного измерения, т. е. вычисления длины основания и высоты прямоугольника.

На доске и в тетрадях проводятся упражнения на вычисление площадей прямоугольников, заданных „в натуре", без всяких данных чисел, а также более сложных прямоугольных фигур. На рисунках 68—70 дан пример вычисления площади такой фигуры тремя разными способами.

В III классе при изучении нумерации демонстрационная доска легко превращается в классный абак. Цветные шнуры разбивают доску на вертикальные колонки, над которыми укрепляются сделанные из бумаги карточки с наименованием рязрядов: единицы, десятки, сотни, тысячи (рис. 13).

Внутри колонок гвоздиками, входящими в отверстия доски, прикрепляются цветные кружки, обозначающие единицы разрядов. Внизу, на подставке, устанавливаются подвижные цифры, образующие многозначное число: 7429.

В IV классе учитель строит модели треугольников и четырёхугольников различных видов, знакомит уча-

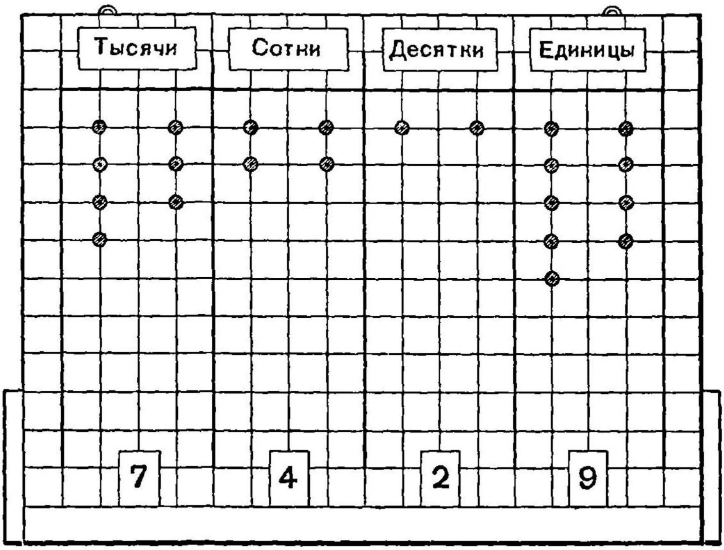


Рис. 13.

щихся с их простейшими свойствами и с измерением их площадей непосредственным в отдельных возможных случаях и косвенным способом, используя метод перегибания листка бумаги и превращая фигуры в равновеликие прямоугольники (рис. 14 и 15).

Рисунок 14 даёт случай построений на демонстрационной доске моделей измерения площадей треугольников. На нём изображён частный случай измерения площади треугольника, образованного цветным шнуром, путём непосредственного подсчёта квадратных единиц:

$(2+4+2+1)+(2+1)=12$ кв. ед. Треугольник составлен из частей, площади которых известны. Затем дано вычисление площади прямоугольного треугольника как половины площади прямоугольника.

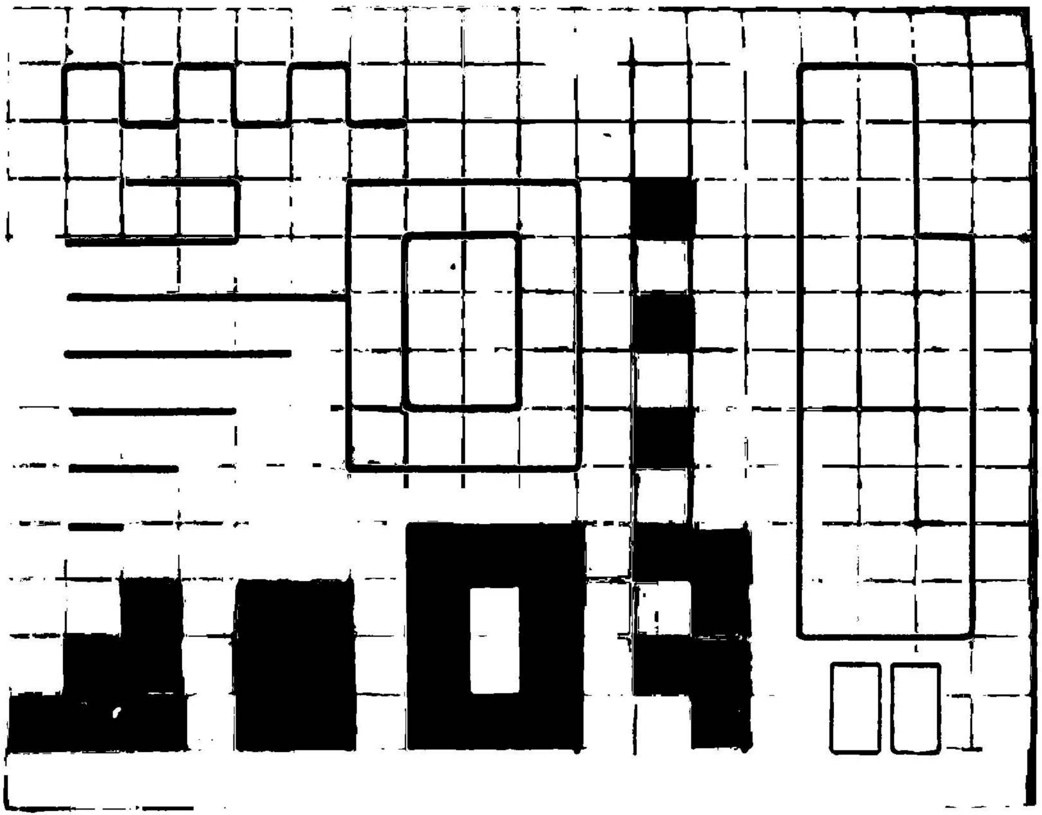


Рис. 11.

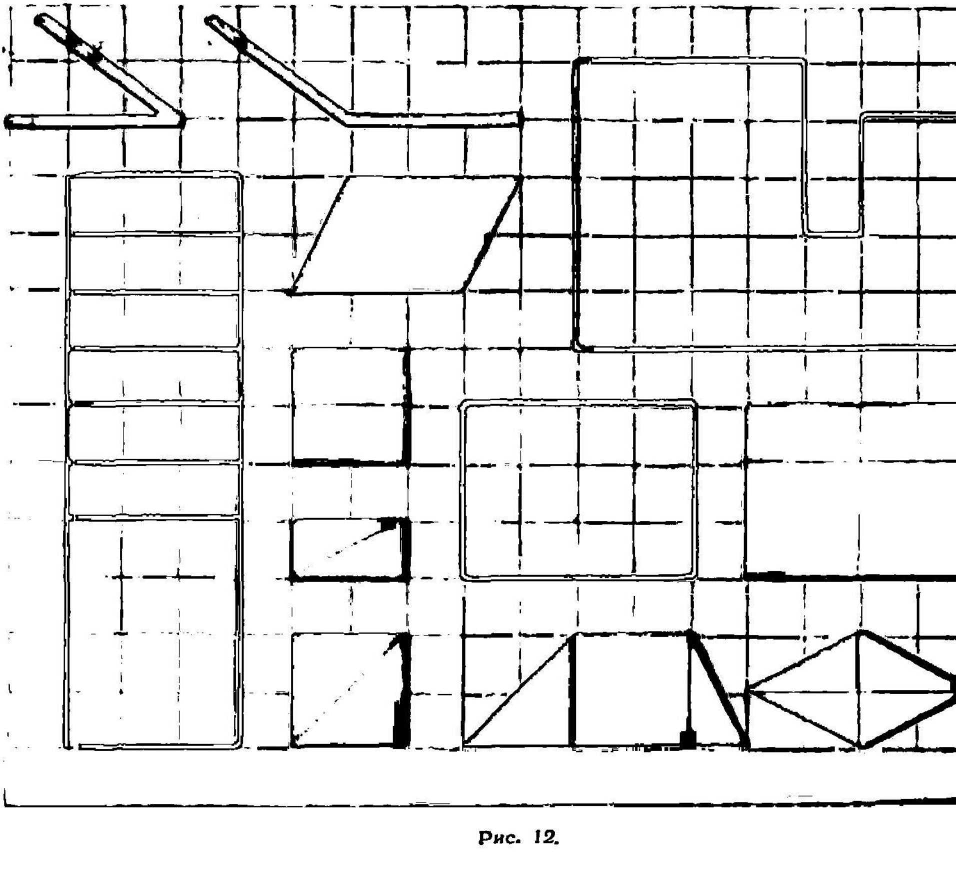
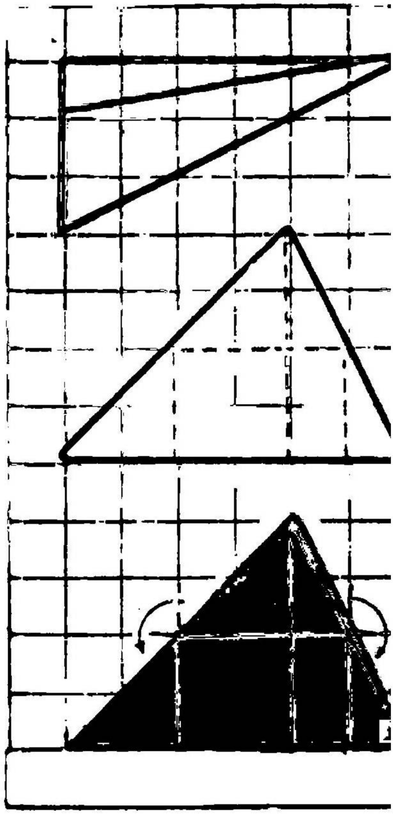


Рис. 12.



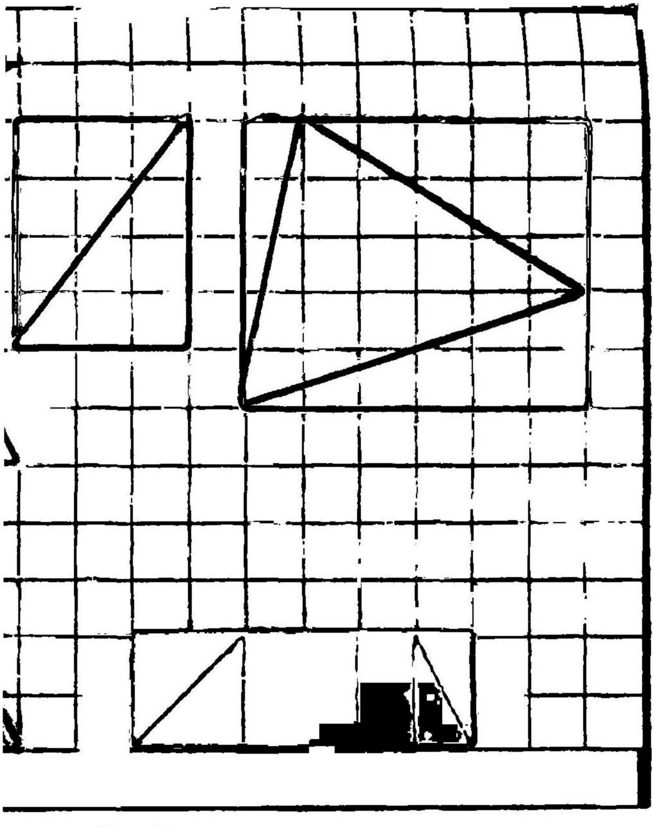


Рис. 14.

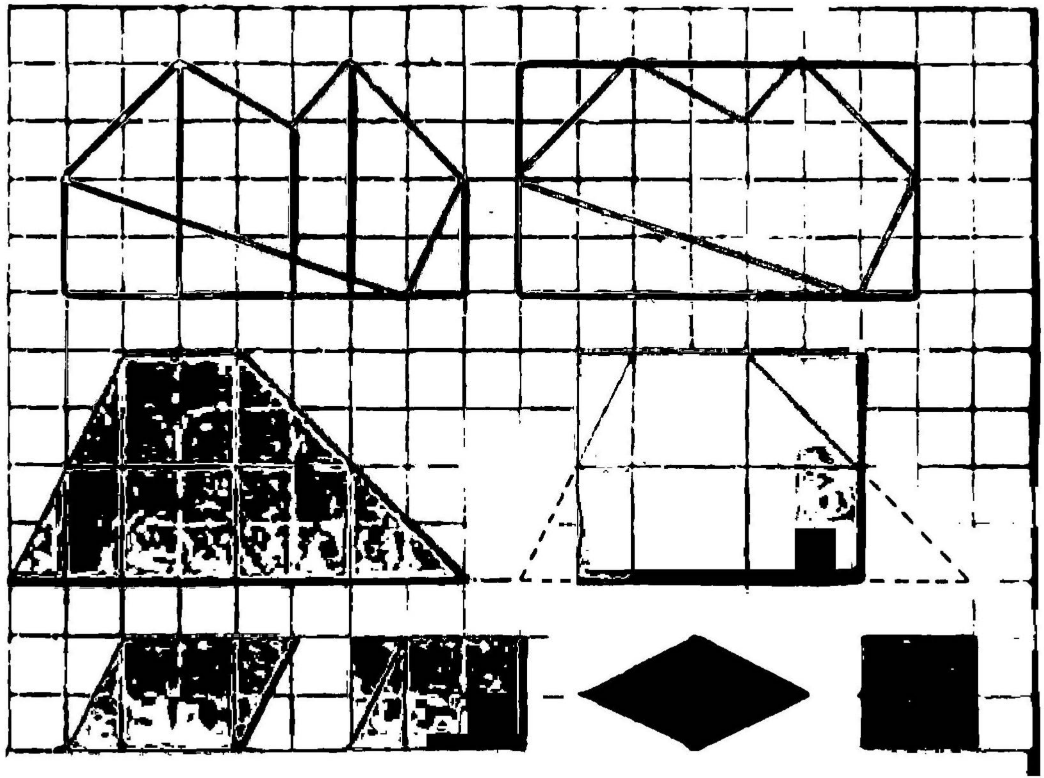


Рис. 15

Далее– вычисление площади треугольника, составленного из „частей квадрата". Треугольник превращается в равносоставленный прямоугольник с тем же основанием, но с высотой вдвое меньшей, чем у треугольника.

На рисунке дано вычисление площади треугольника способом „охватывающего" прямоугольника, на сторонах которого лежат вершины треугольника:

$$S_{\triangle}=6\times 5-(6\times 2+5\times 3+5\times 1):2=$$
$$=30-16=14 \text{ кв. ед.}$$

Этот способ можно расширить до вычисления площади любого многоугольника неправильной формы, построенного на демонстрационной доске. На рисунке 15 представлено измерение площадей параллелограмов, трапеций, ромбов и многоугольников произвольной формы.

Вычисление площадей основано главным образом на демонстрациях равносоставленных фигур и превращения их в равновеликие прямоугольники, что осуществляется комбинационными упражнениями с „частями квадратов" и с фигурами, построенными на доске при помощи цветных шнуров. Доска даёт широкие возможности для вычисления площадей различных фигур вплоть до многоугольников произвольной формы, построения которых производятся на доске посредством цветных шнуров. При этом чисел не даётся. Ученики сами измеряют отрезки, необходимые для вычисления площадей, которые при этом получаются обычно в целочисленном виде.

§ 24. Поддержание активности учащихся на уроках наглядной геометрии

Но опыты, демонстрации и объяснения учителя— лишь половина дела, правда, необходимая и важная, но недостаточная. „Живость созерцания" обусловливается двумя факторами: живостью самой демонстрации и активностью класса. Если дети будут только пассивно „созерцать" сложа руки и если их не привлекать к активному участию в работе, то внимание их скоро упадёт, План урока надо строить так, чтобы весь класс принял участие в работе. Например:

1. Учитель может привлечь к активному участию сразу нескольких учеников, задавая им различные построения на доске. Так, образовав новую фигуру, например угол, и разобрав её строение (вершина, стороны), учитель вызывает учеников к классной доске и предлагает: одному нарисовать острый угол, другому—тупой, третьему—прямой, четвёртому, пятому и шестому — начертить разные углы по линейке при поставленной учителем вершине угла, седьмому— пристроить острый, тупой или прямой угол сверху или снизу к данной учителем горизонтальной стороне угла, восьмому — сделать то же справа или слева к данной вертикальной стороне, девятому— то же к наклонной прямой и т. д. Так учитель привлечёт к активному участию в работе весь класс, и в то же время ученики ознакомятся с углом в самых разнообразных положениях.

Вместо рисования и черчения на доске, учитель может провести те же упражнения с помощью подвижной модели из трёх полосок, образующих на демонстрационной доске различные подвижные углы (рис. 16). Эта демонстрация сбережёт время и оживит работу.

2. Для поддержания активности класса следует широко применять эвристический метод. Учитель расчленяет намеченный материал урока на небольшие части и даёт каждой части форму задачи или вопроса, связанных построением или комбинационным упражнением. Задача и вопрос обращены ко всему классу и одновременно к вызванному ученику. Вопросы должны быть хорошо обдуманы, последовательны, ясно заданы и в целом должны привести учеников к выработке нового геометрического понятия, к выяснению свойств изучаемой фигуры или усвоению нового правила.

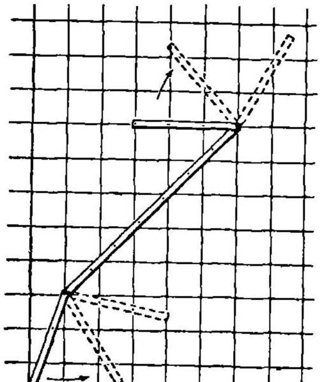


Рис. 16.

§ 25. Индивидуальные пособия по геометрии и методика их применения

1. Важнейшим пособием для учащихся должны быть сборник задач и упражнений по наглядной геометрии или, в крайнем случае, специально выделенные в арифметическом задачнике главы, заменяющие подобный сборник (см. § 14).

2. Учитель должен вести дело так, чтобы все сведения, сообщаемые на уроке, были закрепляемы учениками. Учащиеся должны завести для геометрии особые тетради, иметь хорошо очинённые карандаши — чёрный и двухцветный (синий и красный), линейку в 20 *см*, размеченную на сантиметры и миллиметры, а также, начиная со II класса, угольник и циркульную ножку.

Запись и чертежи в тетрадях по геометрии должны делаться исключительно карандашом (мягким, № 2), но не пером. Черчение тушью по линейке можно делать только рейсфедером. Черчение пером и чернилами по линейке (особенно в младших классах) приводит к мазне и кляксам и должно быть исключено. Учителю с первых уроков следует позаботиться, чтобы карандаши были хорошо очинены, и добиваться, чтобы прямые линии проводились по линейке, строго через точки. При терпении и мягкой настойчивости этого можно добиться даже в I классе.

3. Для продуктивности учебной работы по геометрии в I и II классах важно, чтобы тетради в клетку имели стандартную сетку, а именно 10×10 *мм*. Тогда измерения, построения и задачи на вычисление длины и площади значительно облегчаются и упрощаются, так как непосредственные измерения длины в целых сантиметрах производятся без линейки, путём простого счёта делений квадратной сетки; измерения площадей приводятся к простому подсчёту квадратов (квадратных сантиметров), что обеспечивает в дальнейшем сознательное изучение площадей. Обычные тетради в клетку (5×5 *мм*) приводят к затруднениям в работе, особенно во II классе.

В III и IV классах могут быть обычные тетради двух видов: в квадратную сетку (5×5 *мм*) и нелинованные.

Кроме того, для этих классов нужны блокноты из миллиметровой бумаги.

В младших классах (I и II) учитель точно указывает ученикам, что именно они должны начертить и записать. Чертежи сопровождаются геометрическими наименованиями. Точки обозначаются прописными русскими буквами. Все новые названия и обозначения учитель сам пишет на доске, ученики усваивают их, записывая в тетради. Критерием усвоения (в младших классах) является умение начертить или показать заданную фигуру или определённую часть её, произвести необходимые вычисления и объяснить их.

4. После примерного решения задачи учитель задаёт ученикам самостоятельно решить аналогичные задачи, делая в случае необходимости вводные объяснения. Наконец, ученики получают задания по геометрии на дом соответственно своим силам. Домашние работы проверяются учителем с оценкой точности черчения.

5. Для упражнений с перегибанием листка бумаги учитель раздаёт ученикам листки из отрывных блокнотов (15×10 *см*). Эти листки, с построенными на них путём перегибания фигурами, их обозначениями и названиями, вклеиваются затем в тетради в соответственном месте.

6. Нередко, если нужно по ходу урока, учитель задаёт на дом задачи: начертить и вырезать тщательно ножницами треугольник, кружок и т. п. и принести в школу для совместного выяснения свойства геометрической фигуры.

§ 26. Геометрические игры

Для поднятия активности класса следует проводить с детьми геометрические игры: 1) перегибание и складывание листка бумаги; 2) вырезывание из бумаги симметричных фигур; 3) пространственно-комбинационные упражнения с цветными квадратами; 4) то же с частями квадрата; 5) игры на состязания в глазомере: начертить на глаз отрезок заданной длины, определить длину данного отрезка или расстояние, разделить на глаз отрезок пополам, Занятия по геометрии в I классе можно проводить вначале в виде геометрических игр. Геометрической игрой можно занять целый урок (в I классе) или последние 15—20 минут урока арифметики: смена впечатлений послужит детям отдыхом. В последнем случае содержание игры должно быть близким к арифметическому материалу урока. Оно не должно быть узким и монотонным, например, при изучении чисел первого десятка его следует относить не к одному какому-нибудь числу, а к целой группе чисел, например 5, 6, 7, или 7, 8, 9. При изучении первого десятка можно проделать построения на доске и в тетрадях под видом игр со спичками („соломкой"), отрезками, „цветными квадратами", частями квадратов—треугольниками, прямоугольниками, перегибанием листка бумаги и т. п. Во II классе примеры на вычисление можно заменить упражнениями на вычисление сложных площадей, например $(7\times 8)+(5\times 6)+(3\times 8)$ геометрически выражает площадь восьмиугольника.

Материал для геометрических игр следует менять, чтобы он не наскучил детям. Кроме того, смена материала для моделей одной и той же геометрической фигуры не позволит детям отождествить геометрическую фигуру, например треугольник, с каким-нибудь определённым одним предметом: они будут одинаково называть треугольником фигуру, сложенную из трёх спичек, согнутую из куска проволоки, образованную растянутым шнуром, вырезанную из бумаги, начерченную на доске мелом или образованную на листке бумаги посредством перегибания его по трём направлениям. Это разнообразие предметов, называемых „треугольниками", положит начало ещё в раннем возрасте первому геометрическому отвлечению.

Но вместе с тем следует избегать и калейдоскопичности, мешающей детям сосредоточиться.

Примеры подробно разработанных геометрических игр приводятся в следующих параграфах: игра в галчонка (§ 77), цветные квадраты (§ 31), построения с цветными шнурами на доске (§ 37), пространственно-комбинационные игры с частями квадрата (§ 40), симметрия при перегибании листка бумаги.

ГЛАВА V

ПОСТРОЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУР И ИХ МОДЕЛЕЙ В МЛАДШИХ КЛАССАХ НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЫ

„Прежде чем изучать какой-нибудь геометрический образ, следует этот образ осуществить".

Н. А. Извольский
(Начальный курс геометрии)

§ 27. Различные способы построения геометрических фигур и их моделей

Приведённые выше слова известного геометра проф. Н. А. Извольского выражают основное методическое положение наглядной геометрии.

Геометрические образы и их свойства лучше всего познаются детьми именно в процессе своего образования, а построение образов вполне отвечает активной природе детей.

Известно несколько способов построения и параллельного изучения планиметрических фигур. Классический и наиболее известный способ построения циркулем и линейкой при всех своих достоинствах непосилен для детей младших классов начальной школы. При построении фигур этим методом искомые точки получаются в результате пересечения окружностей и прямых. Построение прямолинейных фигур сводится, таким образом, к определённой последовательности черчения прямых линий и окружностей и соединения отрезками точек их пересечения.

Правильность построения доказывается и результаты исследуются на основании теорем систематического курса геометрии. Такая работа в большей и наиболее важной своей части непосильна учащимся начальной школы. Для наглядной геометрии, особенно в младших классах, необходимо избрать хотя бы менее совершенные и мощные, но более доступные способы образования геометрических фигур.

В настоящей главе описываются различные способы построения моделей и чертежей геометрических фигур, причём главным мерилом их пригодности в пропедевтике геометрии является простота построения фигур и возможность наглядного усвоения их формы и свойств. Эти способы указывают пути, по которым можно вести пропедевтику геометрии, основывая её на построении моделей фигур и на примитивном черчении. К ним относятся построения на квадратной сетке, построения моделей из деревянных полосок, построения с помощью цветных растяжимых шнуров, построения всевозможных фигур из частей квадрата, построения посредством перегибания листка бумаги, наконец черчение—построения посредством угольника и линейки и построения циркулем и линейкой.

Из них, однако, мы выдвигаем для двух младших классов метод широкого использования квадратной сетки как наиболее простой, обеспечивающий широкое проведение практических упражнений, допускающий тесное слияние с арифметикой, что является наиболее важным и целесообразным как с методической, так и с дидактической точек зрения.

§ 28. Квадратная сетка. Её дидактическая роль при изучении начальной геометрии и арифметики

Одним из наиболее доступных в младших классах способов построения геометрических фигур является применение квадратной сетки, покрывающей поверхность классной доски или страницу тетради.

Квадратная сетка образуется двумя взаимно перпендикулярными системами равноотстоящих прямых линий. Отрезки этих линий образуют прямоугольные ломаные линии. Замыкание их образует прямоугольные фигуры, простейшие из которых—прямоугольники и квадраты.

Пересечение линий сетки даёт множество отдельных точек; соединяя их наклонными отрезками, мы получаем новые геометрические фигуры: треугольники всевозможных видов, параллелограмы, трапеции, ромбы и т. п. В результате получается вполне достаточное для изучения в начальной школе количество геометрических фигур со сторонами и высотами, выражаемыми целыми числами, если сторону квадрата сетки принять за единицу.

Правильные многоугольники, кроме квадрата, пока не входят в эту ограниченную геометрию. Но позднее их можно ввести при изучении окружности, применяя для неё тот же метод выбора точек и вводя градусное деление и транспортир.

Черчение в тетради в квадратную клетку упрощается и сводится к простому выбору на сетке двух точек и соединению их отрезками.

Таким образом, при изучении чисел в пределе 20 дети могут чертить по линейке в своих тетрадях в клетку горизонтальные и вертикальные отрезки данной длины, складывать и вычитать их, строить прямоугольные ломаные линии и выпрямлять их, строить прямоугольники, квадраты с заданными сторонами, измерять их периметры и, обратно, строить квадраты и прямоугольники заданного периметра, сосчитывать число квадратов, содержащихся в данной фигуре, и т. п.

Во II классе те же задачи повторяются и осложняются на новом расширенном числовом материале, к ним присоединяются при изучении таблицы умножения упражнения на вычисление площадей прямоугольников и квадратов.

Применение квадратной сетки не ограничивается первыми двумя классами школы. Хотя в старших классах вводятся другие способы образования фигур: построения посредством угольника и линейки и линейки и циркуля, но и тут дидактическая роль сетки сохраняет своё значение. Здесь сетка применяется к измерению площадей различных прямолинейных фигур, кончая многоугольниками произвольной формы

Квадратная сетка наносится на обыкновенную классную доску или на специально приспособленную для геометрических построений и задач демонстрационную доску.

Настоятельно необходимо для наглядной геометрии в младших классах ввести тетради в клетку размером 10×10 *мм*. Ученические тетради в клетку 5×5 *мм* также пригодны для геометрической работы. Измерения и вычисления в I и II классах в таких тетрадях ведутся в „единицах" и „квадратиках", т. е. в единицах, равных сторонам и площадям квадратов сетки. В старших классах работу следует вести в сантиметрах линейных и квадратных.

Начиная с IV класса, и в особенности в V классе при изучении десятичных дробей, очень полезно для введения технических навыков в школу ввести в качестве обязательного пособия новый вид квадратной сетки—миллиметровую бумагу (в форме небольших блокнотов, размера обычных удлинённых тетрадей). Геометрические задачи на измерение площадей, проработанные на целых числах в начальной школе, можно в пятых классах дать на миллиметровой сетке, а также дать содержательный и интересный материал для вычислений с данными, выраженными в десятичных дробях. Поскольку числа при этом получатся от конкретных измерений, операции с ними должны быть по необходимости приближёнными, а это даст задачам новый, технический характер.

Наконец, в старших классах десятилетней школы квадратная сетка, особенно в виде миллиметровой бумаги, приобретает новое теоретически и практически важное значение как при введении системы координат, необходимой для графической алгебры, так и для практических работ по техническому черчению.

§ 29. Изготовление цветных квадратов

Изучение наглядной геометрии в I и II классах начальной школы проводится главным образом при помощи двух видов наглядных пособий, тесно связанных между собой. Это цветные квадраты и цветные резиновые шнуры. Модели, образованные из них, монтируются на демонстрационной доске.

Для цветных квадратов надо выпилить из фанеры толщиной в 5 *мм* 30 штук квадратов со сторонами в 5 *см*. Если есть миллиметровая бумага, то надо просто приколоть её кнопками к листу фанеры и острым шилом проколоть лист через каждые 52 *мм* (2 *мм* уйдут на линию распила) по вертикальному и горизонтальному направлениям. Сняв миллиметровку, надо фанеру расчертить по линиям прокола карандашом на квадраты 52×52 *мм*. Тонкой пилой (лобзиком) распилить фанеру на квадраты размером 5×5 *см*.

Передняя и задняя стороны квадратов окрашиваются эмалевой краской: передняя—в разные цвета, задняя—в какой-нибудь один цвет. Торцы квадратов не зачищать и не окрашивать. Они должны быть плоскими с острыми рёбрами. Плоскость распила должна быть перпендикулярна к лицевой плоскости. Квадраты устанавливаются на демонстрационной доске, расположенной наклонно; в этом случае их можно устанавливать друг на друга, прислонив к доске.

Цветные квадраты надо хранить отдельно в коробке.

§ 30. Цветные квадраты как счётный материал

При изучении чисел первого десятка наряду с конкретным счётным материалом в виде палочек, картинок с изображением ягод, орехов, грибов и т. п. учитель проводит счётную работу с цветными квадратами. Они являются очень ценным счётным материалом при изучении чисел 1-го десятка и действий над числами в пределе 20 (и далее).

Работу удобнее начинать с цветных квадратов потому, что каждый квадрат—отдельный предмет; его удобно взять в руки, показать классу, повернуть, показать его форму, его вершины, равные стороны и углы.

Классная работа состоит в том, что на демонстрационной доске образуются всевозможные комбинации квадратов, выясняющие состав изучаемого числа.

Комбинации эти записываются в виде действий, а попутно дети наблюдают образование геометрических фигур, их сторон и углов.

При изучении состава числа квадраты благодаря равенству их сторон образуют новые фигуры, освежающие зрительное восприятие детей своей разнообразной формой. Разнообразие окраски активизирует восприятие детей; они поэтому не утомляются монотонностью счётного материала. Состав **каждого** отдельного числа первого десятка изучается по обычному арифметическому плану, на изложении которого нет нужды останавливаться. В виде примера ниже приводим изучение состава числа 6 (рис. 17).

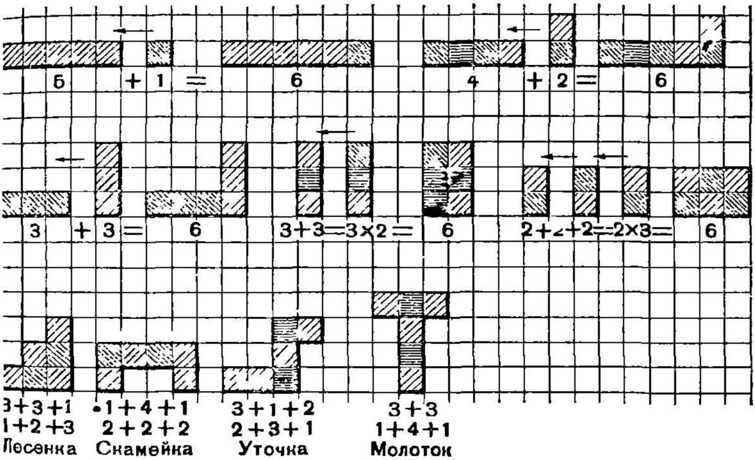


Рис. 17.

При изучении **действий** в пределе первого десятка цветные квадраты подчёркивают слова: „прибавить“, „сложить“ — **движением**, в результате которого две фигуры сливаются в одну: $3+3=6$ (рис. 17). Слова: „отнять“ „вычесть“, „отсчитать“ — подчёркивают новым движением, в результате которого из одного прямоугольника образуется два: $6-4=2$.

§ 31. Глазомерная игра с цветными квадратами

Цель игры—развитие представлений о площади, занимаемой фигурой, об измерении площади путём укладывания в ней квадратов, принимаемых за единицу, о равновеликих фигурах, покрываемых одним и тем же числом квадратов. Развивая специфический глазомер на площади, такие упражнения являются подготовкой к измерению площадей.

Для игры учитель заготовляет в масштабе 1=5 *см* различные сплошные фигуры из папки (например, из старых тетрадей для рисования), оклеенной цветной бумагой площадью в 2, 3, 4,...10 квадратов, принимаемых за единицу. Ниже даются примеры фигур площадью в 8 кв. ед. (рис. 18). Следует изобрести фигуры для каждого из чисел первого десятка.

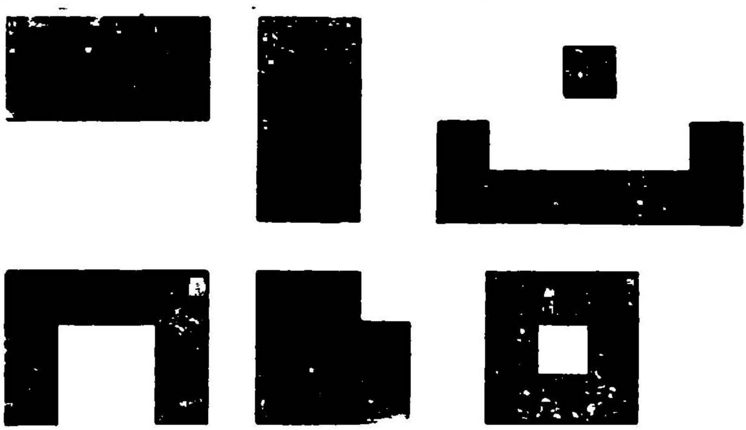


Рис. 18.

Игра состоит в том, что ученики, глядя на фигуру и положив рядом один квадрат, соображают, сколько квадратов надо взять, чтобы закрыть всю фигуру. Решение проверяется прямым закрыванием фигуры квадратами.

Геометрическую игру на закрывание фигур квадратами надо проводить при изучении состава чисел первого десятка, пройдя 3 или 4 каких-нибудь числа, например, 2, 3, 4, или 3, 4, 5, или 6, 7, 8. Перемешав фигуры с разными площадями, учитель вызывает к доске ученика и, ставя какую-нибудь фигуру, а рядом с ней квадрат, спрашивает: „Сколькими квадратами можно закрыть эту фигуру?" Ученик отвечает на основании глазомера, а потом проверяет свой ответ фактическим закрыванием фигуры квадратами (рис. 19). Такие же вопросы учитель задаёт и всему классу.

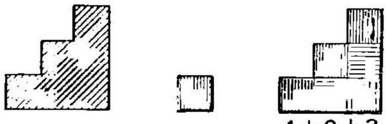


Рис. 19.

Можно, далее, выставить на доску несколько фигур (размещая их по всей доске на гвоздиках), имеющих различные площади, и задать всем: „Укажите фигуры, закрываемые пятью квадратами, или фигуры с наибольшей площадью, с самой малой площадью", с равной площадью—равновеликие.

§ 32. Цветные квадраты при изучении чисел второго десятка

При изучении чисел второго десятка и действий в пределе 20 квадратная мозаика позволяет расширить область комбинаций и построений новых фигур.

На рисунке 20 показано несколько типичных упражнений при изучении числа 12: а) образование числа 12: прибавление двух единиц к первому десятку; новые квадраты образуют начало второго десятка „на втором этаже"; б) умножение: счёт слева направо парами, тройками и четвёрками; в), г) переместительное свойство произведения: четыре тройки равны трём четвёркам; д), е), ж), к), з) сложение в пределе 12. Новые фигуры: рамка, лесенка, сумма $1+2+3$. Двойная лесенка, превращающаяся в прямоугольник. Сколько больших квадратов можно построить из 12 квадратиков? Две разные рамки из 12 квадратов, подсчитываемые путём умножения и вычитания.

В дальнейшем изучении чисел в пределе второго десятка учитель переводит работу в более отвлечённый план: на квадратную сетку доски и тетради. Переходя от построений из цветных квадратов к

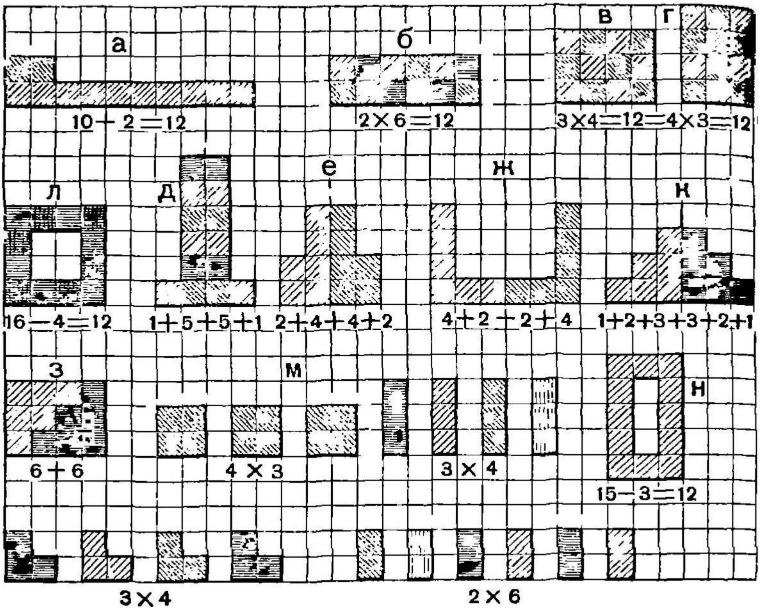


Рис. 20.

построениям посредством цветных шнуров, образующих различные фигуры из квадратов сетки в пределе 20, дети переходят от комбинаций с квадратами к черчению прямоугольных фигур в своих тетрадях в клетку, а затем и сами комбинируют квадраты сетки, рисуя в тетрадях цветными линиями различные фигуры, а иногда раскрашивая отдельные квадраты цветными карандашами.

§ 33. Упражнения на построение прямоугольников и квадратов, проводимые после изучения действий в пределе 20

В конце прохождения раздела „Действия в пределе 2-го десятка“ полезно отвести два-три урока построениям на доске цветными шнурами и черчению в тетрадях цветными карандашами прямоугольников и квадратов в связи с действиями в пределе до 20. Эти упражнения, имея пространственно-комбинационный характер, сосредоточивают внимание учеников на различии форм прямоугольников и квадратов, по величине площади их, на связи между площадью и сторонами фигур, а также на равновеликости фигур. Например:

1. Построить из квадратов числом не более 20 все прямоугольники с основаниями 2. То же начертить.

2. То же с основаниями 3. Начертить.

3. То же с основаниями 4. Начертить.

4. Надо ли строить прямоугольники с основаниями 5, 6, 7, 8 или они уже построены?

5. Сколько квадратов содержится в каждом прямоугольнике?

6. Построить на демонстрационной доске и в тетради большие квадраты и подписать под ними: сколько содержится в каждом квадратных единиц.

7. Построить лесенки, содержащие не более 20 квадратов сетки.

8. Начертить прямоугольные рамки, содержащие не более 20 квадратов сетки.

9. Разделить каждую рамку на 4 равных прямоугольника.

10. Раскрасьте карандашами рамки: в уголках 4 маленьких квадрата — одним цветом, а остальные прямоугольники—другими цветами.

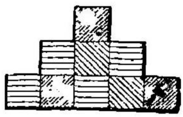


Рис. 21.

11. Начертите двойную лесенку, как на рисунке 21. Сосчитайте, сколько квадратов в ней содержится. Составьте из неё квадрат, передвинув 3 квадрата.

12. Нарисуйте такую же лесенку, только побольше, на отдельном листке, разрежьте её на две части и составьте из них квадрат.

§ 34. Модели целых десятков

Изготовьте из белой папки или фанеры 10 прямоугольников размером 50×5 *см*. Вырежьте из цветной бумаги 50 квадратов размером 5×5 *см* и наклейте квадраты на прямоугольники так, чтобы оставляемые промежутки были тоже квадраты 5×5 *см*. Полученные полоски могут служить моделями десятков.

Этими моделями можно пользоваться при изуче-

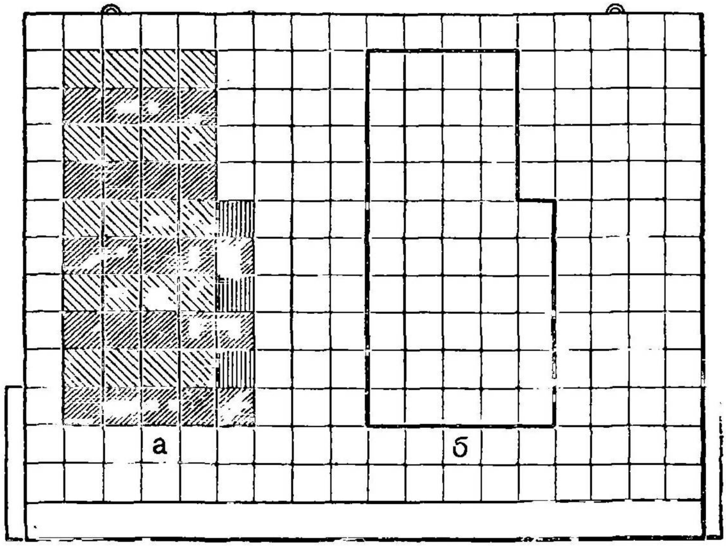


Рис 22

нии действий с „круглыми" десятками, а также для действий в пределе 100. При „переходе через десяток" ученики могут „разменивать" полоску на 10 отдельных квадратов и, наоборот, из 10 квадратов составлять полоску. Когда ученики вполне освоятся с операциями при помощи моделей круглых десятков, учитель может перейти к образованию модели двузначного числа путём охвата десятков и единиц квадратов цветным кольцевым шнуром или изображением его на чёрной демонстрационной доске цветным мелом. На рисунке 22*а* дано изображение числа 46 посредством моделей десятков и отдельных цветных квадратов. Рядом дано то же число посредством 46 квадратов, охваченных цветным шнуром (рис. 22*б*).

Модель сотни получается образованием посредством шнура или черчением на клетчатой доске квадрата размером 10×10 единиц.

Малые цветные квадраты—дидактический материал

При изучении чисел 1-го десятка и действий в пределе 20 демонстрации на доске должны сменяться аналогичными индивидуальными упражнениями с малыми квадратиками на партах. Для таких упражнений учитель (если возможно, с помощью любителей-учеников) изготовляет из папки, оклеенной цветной (глянцевой) бумагой, большое число (400—500) квадратов 3—4 цветов, размером 2×2 *см*. Их довольно легко и скоро можно изготовить следующим образом.

На тонкую папку (например, из старых тетрадей для рисования) наклеить цветную бумагу с обеих сторон и высушить под прессом. Оклейка с обеих сторон необходима во избежание коробления. Положить поверх приготовленной цветной папки лист миллиметровки или просто бумаги в стандартную клетку (1×1 *см*) и скрепить листы скрепками; проколами через каждые 2 *см* наметить квадратную двухсантиметровую сетку на папке. Сняв миллиметровку, провести карандашом по линейке через проколы прямые линии. Наконец, высушенный лист папки разрезать ножницами на квадраты размером 2×2 *см*.

На классный комплект достаточно одной старой тетради для рисования.

§ 35. Линии в окружающей обстановке

Необходимые сведения о цветных резиновых шнурах и построениях с ними на демонстрационной доске указаны в предыдущей, V главе (см. § 27). Далее даны методические указания относительно применения нового пособия при первоначальном обучении наглядной геометрии в I классе начальной школы.

Изучив числа 1-го десятка с помощью „цветных квадратов“, учитель в несколько более скором темпе повторяет тот же арифметический материал на новых геометрических образах—о т р е з к а х и их комбинациях—прямоугольных л о м а н ы х л и н и я х. Но предварительно он знакомит учащихся с образованием кривой и прямой линий, отрезков и углов и нахождением их в окружающей обстановке.

Эту работу он проводит по следующему плану:

1. Линии—кривая и прямая, изображаемые шнурком или бичёвкой, которую два ученика держат за концы. При натягивании шнурка кривая линия превращается в прямую.

2. Отбивание прямой на доске посредством туго натянутого намелённого шнурка. Свойство: *через две точки можно провести много кривых, но только одну прямую.*

3. Перелом прямой. Угол. Изменение угла. Увеличение и уменьшение его. Острые углы, прямой угол, тупые углы.

4. Образование прямого угла двойным складыванием листка бумаги (§ 19).

5. Горизонтальные и вертикальные (отвесные) прямые, образованные шнурком.

6. Горизонтальные и вертикальные прямые в окружающей обстановке.

§ 36. Отрезки на демонстрационной доске

Непосредственно от рассмотрения прямых линий в окружающей обстановке—в классе—ученики переходят к рассмотрению демонстрационной доски и сетки на ней.

Отрезки. Сетка доски состоит из многих горизонтальных и вертикальных линий, которые, пересекаясь, образуют множество квадратов. Части этих линий называются отрезками. Есть среди них отрезки большие и маленькие, отрезки разной длины. На доске мы будем образовывать отрезки так: воткнём два гвоздика в доску и наденем на них цветной резиновый шнурок, растянув его. Учитель вызывает учеников и задаёт им построить на доске разные горизонтальные и вертикальные отрезки, увеличивать и уменьшать их, растягивая резиновые кольцевые шнурки. При этом ученики наблюдают изменение длины отрезка, его увеличение и уменьшение и одновременно увеличение и уменьшение выражающего его числа.

Построив на доске два отрезка (рис. 23): один (красный) постоянной длины, а под ним другой— синий, меньший отрезок, учитель постепенно растягивает синий шнурок, пока он не станет равным красному, на что обращается внимание учащихся и подчёркивается ра-

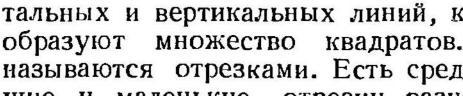


Рис. 23.

венство чисел; при дальнейшем растягивании синий шнурок становится больше красного.

На ряде примеров учитель даёт ученикам понятие о необходимости измерения длины отрезков. На нашей доске линии делят друг друга на небольшие части, и все эти части одинаковы. Поэтому ими удобно измерять длину отрезков. Каждую такую часть будем считать за единицу длины. Сколько таких единиц содержится в отрезке, такова будет его длина.

Далее идут упражнения двух видов, производимые вызванными учениками: 1. От заданной на доске точки отложить шнурком отрезок заданной длины.

2. Найти длину построенного заранее отрезка.

После этого учитель проводит аналогичные объяснения относительно квадратной сетки тетради, единицы длины (сторона клетки в тетради) и измерения отрезков в тетради посредством новой единицы. Одновременно он делает указание относительно очинки карандаша, отметки концов отрезка точками и соединения их прямой по линейке.

Упражнения, проведённые на доске (см. выше), повторяются в тетрадях, лучше—цветными карандашами.

Затем учитель проводит несколько упражнений из арифметического задачника на сложение и вычитание чисел, переводя их на действия с отрезками: а) сложить отрезки 3 и 2; б) удлинить на 2 отрезок, равный 4; в) сравнить два отрезка: который больше и на сколько? г) построить ряд горизонтальных отрезков длиной 1, 2, 3, 4, 5 ед., один над другим, начиная от одной вертикальной линии; д) построить ряд вертикальных отрезков длиной 1, 2, 3, 4, 5, стоящих на одной горизонтальной прямой, и т. д. (рис. 24).

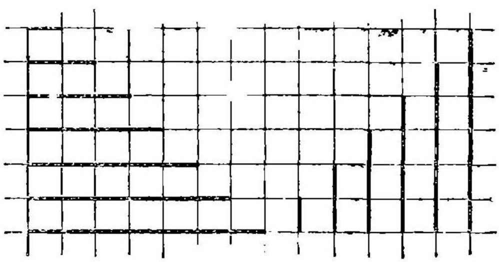


Рис. 24.

Ломаные линии. Учитель образует шнурами ломаные прямоугольные линии, составленные из горизонтальных и вертикальных отрезков различной длины Затем „выпрямляет“ ломаную (чертит отрезками). Ученики строят на демонстрационной доске ломаные линии, составленные из отрезков заданной длины в числовой форме, например $1+3+2+1$ (рис. 25), и выпрямляют такую ломаную. Задачи повторяются всем классом в тетрадях, а также решаются другие аналогичные задачи.

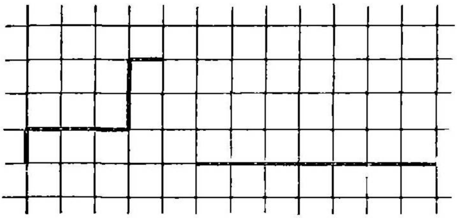


Рис. 25.

§ 37. Квадраты и прямоугольники на демонстрационной доске (план работы)

Учитель, образуя ломаную, замыкает её и получает квадрат. Стороны квадрата, их число и их равенство Углы квадрата—прямые. Обмер квадрата кругом даёт периметр квадрата. Упражнения на черчение квадратов разных размеров по клеткам и вычисление их периметров (в пределе пройденного по арифметике) Вычисление периметра квадрата по данной стороне (в пределе 20). Начертить квадрат по данному периметру. Черчение квадрата по сетке в тетради и на доске.

Прямоугольник, получаемый замыканием ломаной изучается по тому же плану, что и квадрат. Стороны прямоугольника. Равенство противоположных сторон Углы прямоугольника. Прямоугольники в окружающей обстановке.

Геометрическая игра. (Действия в пределе 20.) Построить шнурком на доске и начертить цветным карандашом в тетради следующие фигуры:

а) **Змейка** (рис. 26, *а*). Из каких равных частей она составлена? Её длина. (Понятие о длине ломаной даётся выпрямлением ломаной, образованной обыкновенной бичёвкой.) Построить змейки в разных направле ниях: вправо, влево, вверх, вниз. Измерить длину змейки, зная одну её часть.

б) **Пружинка** (рис. 26, *б*). Продолжить образование пружинки. Её длина. Начав с 8-го звена, свернуть пружинку до конца. Длина пружинки $= 1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 + 4 \ldots$

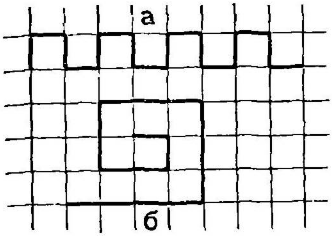


Рис. 26.

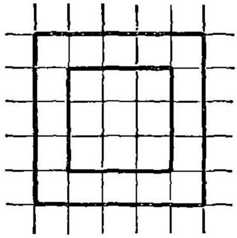


Рис. 27.

в) **Рамка** (рис. 27). Квадрат внутри квадрата. Прямоугольник внутри прямоугольника. Сравнить периметры наружного и внутреннего квадратов. Построить несколько разных рамок, квадратных и прямоугольных, на доске и в тетрадях.

§ 38. Упражнения в черчении

Учитель показывает образование фигур и их свойства посредством демонстраций с цветными шнурками на демонстрационной доске или посредством черчения их цветными и белыми мелками на классной доске.

В связи с демонстрациями учителя учащиеся сначала чертят по линейке в своих тетрадях по геометрии фигуры, построенные учителем на доске, а затем уже проводят чертёжные работы самостоятельно по заданиям учителя. Учитель должен, обходя класс, проверять как правильность, так и точность построений (вершины фигур должны совпадать с вершинами квадратов сетки, а стороны—с линиями сетки).

Перед уроком надо проверить, хорошо ли очинены карандаши, и помочь детям очинить их (в младших классах).

Начиная с I класса, следует задавать детям домашние задачи, аналогичные сделанным в классе.

§ 39. Изготовление пособия „части квадрата"

Части квадрата (рис. 28) выпиливаются из фанеры 3—4 *мм* толщиной. Фигуры с обеих сторон окрашиваются масляной краской одного цвета. Со стороны торцов фигуры не закрашиваются и должны иметь острые края. При установке на демонстрационной доске, приведённой в наклонное положение, части квадрата ставятся друг на друга и образуют всевозможные фигуры.

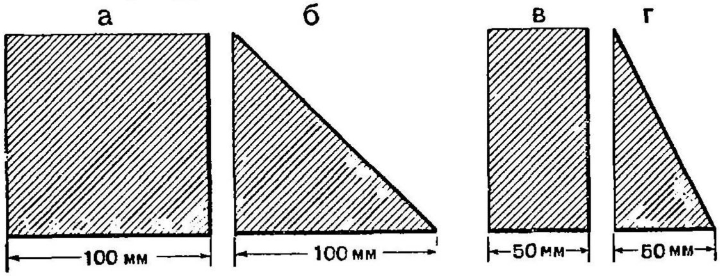


Рис. 28.

Размеры и число деталей: а) основной квадрат 100×100 *мм*—8 шт., б) равнобедренный прямоугольный треугольник с катетами 100 и 100 *мм*—8 шт.; в) прямоугольник 100×50 *мм* — 8 шт.; г) прямоугольный треугольник с катетами 100 *мм* и 50 *мм*— 8 шт. Детали окрашиваются с обеих сторон эмалевой краской одного цвета. Поставленные рядом части квадрата должны сливаться в одно целое.

К деталям б) и г) следует сделать дополнительно по 2 штуки таких же точно треугольников, но окрашенных белой краской под цвет демонстрационной доски.

Для работы с частями квадрата демонстрационная доска устанавливается наклонно, опираясь двумя опорами в стену или классную доску. Части квадрата устанавливаются на подставку внизу доски; при наклонном положении доски их можно ставить друг на друга, и они не будут соскальзывать. При установке основных треугольников вершиной вниз они поддерживаются белыми треугольниками, сливающимися с фоном доски.

§ 40. Комбинационные упражнения с „частями квадрата"

„Части квадрата" применяются в младших классах, начиная со II, сначала для простых комбинационных упражнений. Их цель—дать детям доступный и интересный материал для построения различных геометрических фигур и попутного усвоения их названий и простейших свойств. Работа проводится на демонстрационной доске в форме комбинаций, вызываемых и направляемых вопросами учителя. Необходимая простейшая терминология усваивается в порядке упражнений.

Комбинируя части квадрата, учащиеся составляют из них сначала простейшие геометрические фигуры, учатся различать их и называть их элементы. Для комбинирования и составления фигур дети должны научиться находить равные стороны, составлять из острых углов прямые, находить отличительные черты фигур. В результате дети строят плоские геометрические фигуры и дают построенным фигурам наименования.

Во II классе построения ограничиваются прямоугольниками, квадратами и треугольниками различных видов.

Далее приводятся примеры комбинационных упражнений, начиная с простейших: из двух элементов, трёх, четырёх, шести и т. д.

Первое упражнение

Упражнение проводится в порядке возрастания сложности построений. Первую задачу учитель решает сам, чтобы показать приём комбинаций. Он ставит на подставку демонстрационной доски, расположенной наклонно, несколько фигурок: например, квадрат, прямоугольник, два „больших" (равнобедренных) треугольника и два „узеньких" треугольника, устанавливает с учениками названия этих фигур, число их сторон и углов и говорит: „Из всех этих фигур надо составить один треугольник. Кто сумеет сделать такой треугольник?" Вызываются желающие сделать построение; если ученики (что вполне возможно) не смогут этого сделать, то учитель показывает сам, как это делается (рис. 29), и предлагает начать построения попроще и с меньшего числа фигур.

Затем к демонстрационной доске вызываются ученики по одному и каждому задаётся по одному построению (рис. 30).

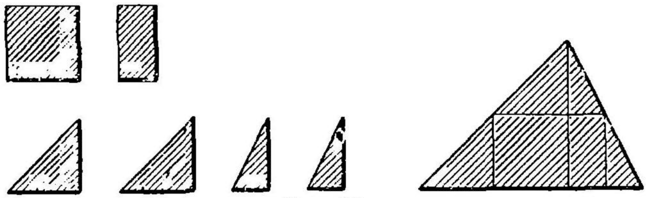


Рис. 29.

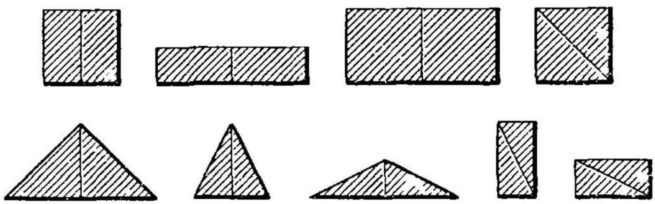


Рис 30.

Из данных:	построить:
1) двух прямоугольников	квадрат
2) двух прямоугольников	прямоугольник
3) двух квадратов	прямоугольник
4) двух широких треугольников	квадрат
5) двух широких треугольников	треугольник
6) двух узких треугольников	высокий треугольник
7) двух узких треугольников	низкий треугольник
8) двух узких треугольников.	прямоугольник

Ученик должен из данных ему деталей построить заданную фигуру и показать самую большую сторону, самую малую сторону, острый угол, тупой угол, прямой угол, развёрнутый угол.

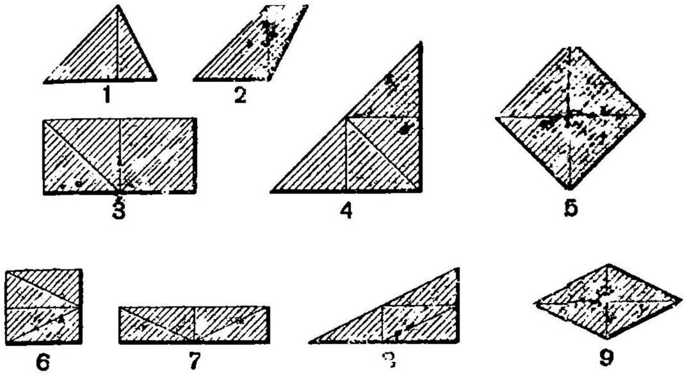


Рис. 31.

Второе упражнение (рис. 31)

Из данных:	составить:
1) одного широкого и одного узкого треугольника	треугольник
2) одного широкого и одного узкого треугольника	четырёхугольник
3) четырёх широких треугольников	прямоугольник
4) четырёх широких треугольников	треугольник
5) четырёх широких треугольников	квадрат
6) четырёх узких треугольников	квадрат
7) четырёх узких треугольников	прямоугольник
8) четырёх узких треугольников	треугольник
9) четырёх узких треугольников	ромб

Третье упражнение (рис. 32)

Одни индивидуальные построения без демонстрационной доски (с последующей их проверкой на демонстрационной доске).

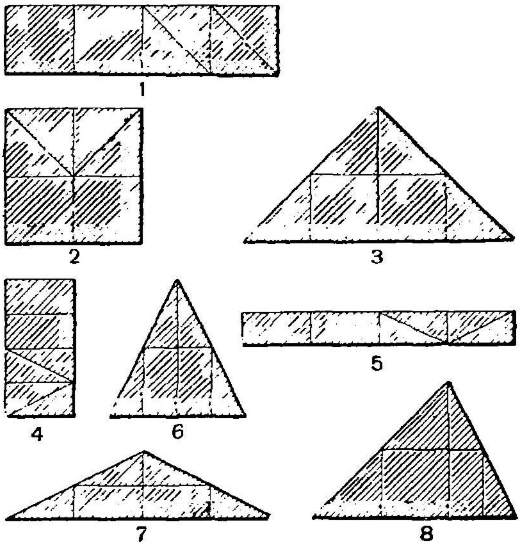


Рис. 32.

Из данных:	построить:
1) двух квадратов и четырёх широких треугольников	низкий прямоугольник
2) двух квадратов и четырёх широких треугольников	квадрат
3) двух квадратов и четырёх широких треугольников	треугольник
4) двух прямоугольников и четырёх узких треугольников	прямоугольник
5) двух прямоугольников и четырёх узких треугольников	длинный прямоугольник

6) двух прямоугольников и четырёх узких треугольников	высокий треугольник
7) двух прямоугольников и четырёх узких треугольников	низкий и длинный треугольник
8) квадрата, прямоугольника, двух узких и двух широких треугольников	треугольник с острыми углами

Четвёртое упражнение

Ученикам предлагается составить у себя на партах одну фигуру. Кто решит—поднимает руку.

Из данных:	составить:
1) трёх квадратов	прямоугольник
2) трёх прямоугольников	2 разных прямоугольника
3) квадрата и двух широких треугольников	треугольник
4) квадрата и двух широких треугольников	прямоугольник
5) двух квадратов и прямоугольника	прямоугольник
6) двух прямоугольников и квадрата	прямоугольник
7) прямоугольника и двух узких треугольников	квадрат
8) прямоугольника и двух узких треугольников	низкий прямоугольник
9) прямоугольника и двух узких треугольников	высокий прямоугольник
10) прямоугольника и двух узких треугольников	широкий и низкий треугольники
11) прямоугольника и двух узких треугольников	узкий и высокий треугольники

При индивидуальных построениях учитель обходит класс, проверяет правильность решений, делает исправления и показывает решение тем, кто не сделал, вызывает решивших верно к демонстрационной доске и предлагает всем проверить свои решения на доске.

Пятое упражнение („свободное“)

Наконец, учитель даёт ученикам полную свободу комбинаций. Он предлагает составлять сначала у себя на столе, а потом на демонстрационной доске какие-нибудь новые фигуры, причём может дать некоторым новым фигурам названия: трапеция, ромб и др. Вдаваться в разбор их свойств во II классе было бы преждевременно.

В отделе измерения площадей проводятся в соответствующих местах построения трапеций, параллелограмов и других фигур из пособия „Части квадрата“.

ГЛАВА VI

ПОСТРОЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУР В СТАРШИХ КЛАССАХ НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЫ

§ 41. Общие замечания

Работа по наглядной геометрии в I и II классах идёт, следуя плану арифметики. Арифметические упражнения, кроме обычного счётного материала, проводятся с счётными единицами двух видов: отрезками и квадратами. Построения фигур, ломаных линий, вычисление периметров квадратов и прямоугольников и измерения площадей квадратов и прямоугольников тесно связаны с вычислениями и нумерацией. Но одновременно учащиеся приобретают значительный запас геометрических сведений и чертёжных навыков, тем более важных, что они относятся к прямоугольным фигурам, часто встречающимся на практике.

В III классе дети достаточно развились, и учитель уже может начать работу над расширением и углублением их представлений об основных геометрических образах. В младших классах воображение детей, основанное на наблюдениях реальных предметов, было ограничено представлениями о прямой линии как об отрезке и об угле как фигуре, образованной двумя отрезками. В IV классе уже можно расширить понятие о прямой, как о линии, способной сколь угодно продолжаться в обе стороны, о луче как о прямой, выходящей из данной точки и неограниченно продолжаемой в одну сторону, и об угле, образованном двумя лучами, выходящими из одной точки. Затем уже вполне возможно дать детям представление о телах и их поверхностях; о кривой поверхности и плоскости, о линиях и точках как граничащих элементах геометрии.

В связи с расширением и уточнением представлений можно дать детям бо́льшую свободу в геометрических построениях.

1. Кроме горизонтальных и вертикальных прямых вводятся наклонные прямые; дети более подробно знакомятся с острыми и тупыми углами путём построения моделей углов и действий над ними.

2. Далее дети подробнее знакомятся на моделях с треугольниками и четырёхугольниками различных видов и их важнейшими свойствами.

3. К прежним конструктивным приёмам добавляются новые способы построения моделей: а) из деревянных полосок, б) перегибанием листка бумаги. В индивидуальной работе детей центр тяжести постепенно переносится на черчение с помощью угольника и линейки на нелинованной бумаге. Этот метод расширяет область геометрических построений: прежние целочисленные отрезки на клетчатой бумаге, где используется для построений ограниченное число отдельных (целых) точек, превращаются в непрерывные отрезки произвольной длины, содержащие неограниченное количество точек, используемых для построений. Тем самым работа по наглядной геометрии в III классе приближается к обычному систематическому курсу геометрии.

§ 42. Построение моделей из полосок

(Об изготовлении, размерах и числе полосок см. § 21)

Полоски служат моделями прямых линий, лучей и отрезков (рис. 33). В младших классах говорить о бесконечной прямой, о луче преждевременно. Вполне достаточно полагать, что все прямолинейные фигуры образуются из отрезков, в том числе и углы. В III классе можно расширить представление о прямой, о луче и угле, образованном лучами.

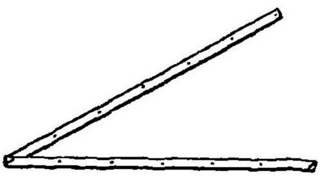


Рис. 33.

1. Подвижная модель угла

образована двумя полосками достаточной длины (26 *см*) и приколота в крайней точке к демонстрационной доске. Изменение угла изучается на модели (рис. 34). Когда стороны угла сдвигаются, угол уменьшается; когда стороны угла раздвигаются, угол увеличивается. На модели можно последовательно показать острые углы, прямой угол, тупые углы.

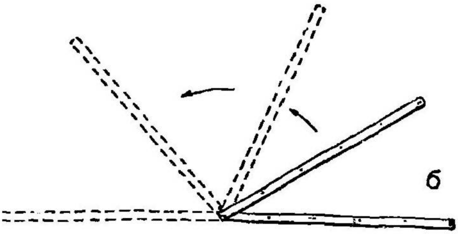


Рис. 34.

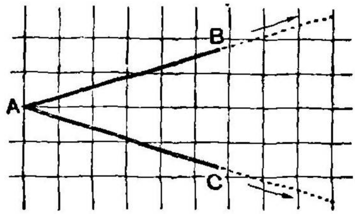


Рис. 35.

2. Построив угол на демонстрационной доске из растягивающегося резинового шнура, можно показать учащимся, что при удлинении сторон угла они сохраняют свой наклон друг к другу, т. е. величина угла не изменяется (рис. 35). При вращении же стороны угла, составленного из полосок, угол изменяется, хотя сами стороны сохраняют свою длину (рис. 34).

3. Скрепив угол, образованный двумя полосками (длиной 160 *мм*), болтиком с винтовой нарезкой и *гайкой с ушками, получим малку, или раздвижной* угол. В крайнем случае болтик можно заменить проволочным гвоздиком, на который насаживается кусок резинки, прижимающей полоски друг к другу и позволяющей сохранить постоянство взятого угла.

Модель раздвижного угла можно использовать для черчения угла, равного данному, для сравнения углов, для проверки свойств углов в различных фигурах.

4. Взяв две полоски 260 *мм* длиной и скрепив их посередине болтиком с гайкой или гвоздиком, получаем подвижную модель двух в е р т и к а л ь н ы х углов (рис. 36). Равенство *углов демонстрируется прикладыва*нием раздвижного угла.

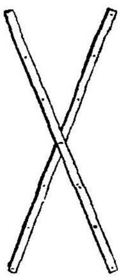


Рис. 36.

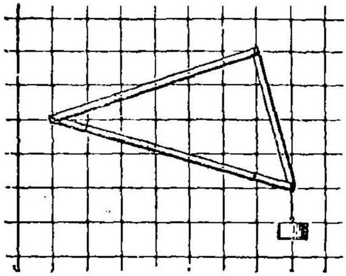


Рис. 37.

5. Раньше (рис. 6) была указана модель из трёх полосок, скреплённых в одном конце, на которой можно демонстрировать сумму и разность двух углов, смежные углы, развёрнутый угол, прямые углы как равные смежные.

6. Из трёх полосок, скрепляя их в концах гвоздиками или штифтами, можно построить один единственный треугольник. Стороны его нельзя ни сдвинуть, ни раздвинуть. Укрепив его двумя длинными гвоздиками на доске и оставив третий гвоздик свободным, на нём можно подвесить небольшую гирьку; треугольник выдержит груз, не изменяя своей формы. Его форма жёсткая (рис. 37). Остальные многоугольники этим свойством не обладают.

7. Из всяких ли трёх полосок можно построить треугольник? Попробуйте постройте треугольник из полосок, данных на рисунке 38. Как ни верти правую и левую полоски, они друг до друга не достанут. Треугольник из них не построишь. Треугольник можно построить только тогда, когда сумма двух любых сторон его больше третьей стороны.

8. Из трёх равных полосок строится треугольник с равными сторонами—равносторонний. Проверьте раздвижным углом, что и все его углы равны друг другу.

Из трёх полосок, среди которых лишь две равные, строится равнобедренный треугольник. Третья неравная сторона называется основанием равнобедренного треугольника. Проверьте раздвижным углом, что углы равнобедренного треугольника при его основании равны друг другу.

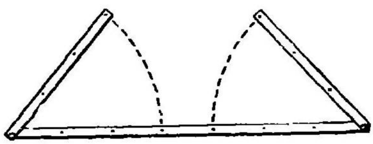


Рис. 38.

9. Построим подвижную модель треугольника ABC (рис. 39) из двух полосок AB и AC и красного растягивающегося

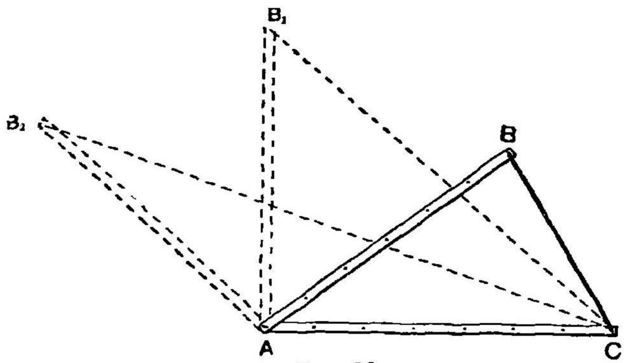


Рис. 39.

шнурка BC. Треугольник двумя гвоздиками в точках A и C прикрепляется к доске, третий гвоздик B свободно скользит по доске. Резиновый шнурок наденем на гвоздики B и C. Поворачивая сторону AB около вершины A, мы образуем остроугольный треугольник ABC, превращающийся в прямоугольный AB_1C и, наконец, в тупоугольный AB_2C.

Обратите внимание, как при увеличении угла увеличивается и противолежащая сторона, и что против большего угла в треугольнике лежит и бóльшая сторона.

10. Подвижная модель ромба. Четыре одинаковые полоски по 210 *мм* каждая скрепляются в концах гвоздиками так, что получается четырёхугольник. Гвоздики должны быть направлены: два соседних—остриём к доске и два других—остриём от доски. Первые два гвоздика втыкаются в доску, вторые свободно перемещаются. Образуется подвижная модель ромба. Противоположные стороны его всегда остаются параллельными. Особые положения ромба—квадрат и прямолинейный отрезок (рис. 40).

Надев на два противоположных гвоздика резиновый шнурок, мы получаем диагональ, которая делит ромб на два равных треугольника, а два угла ромба делит пополам. При раздвигании модели это свойство диагонали сохраняется.

Надев на другую пару гвоздиков второй цветной резиновый шнур, получаем вторую диагональ. Диаго-

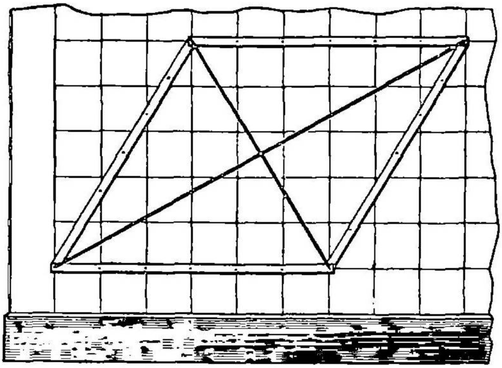


Рис. 40.

нали при всех положениях ромба взаимно перпендикулярны, делят друг друга пополам и делят углы ромба пополам. Ромб делится ими на 4 равных треугольника. Все эти свойства сохраняются при всевозможных формах ромба.

11. Построение подвижной модели параллелограма (рис. 41) подобно построению модели ромба.

12. Модель четырёхугольника любой формы, построенная из четырёх полосок, является примером нежёсткой конструкции, не имеющей определённой формы Конструкция становится жёсткой, будучи скреплена пятой (диагональной) полоской, превращающей четырёх-

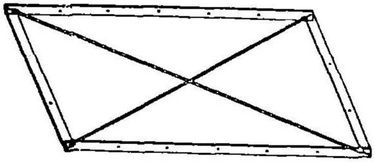


Рис. 41.

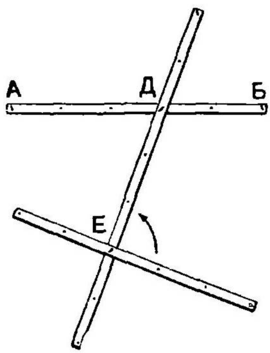


Рис. 42.

угольник в два треугольника, имеющих общую сторону.

13. Подвижная модель двух прямых, пересечённых третьей прямой. Верхняя прямая и секущая прикреплены к доске, каждая в двух точках *А* и *Б*, *Д* и *Е* (рис. 42). Нижняя прямая вращается около точки *Е*. При равенстве соответственных или накрест лежащих углов (проверяется раздвижным углом) прямая становится параллельной *АБ*.

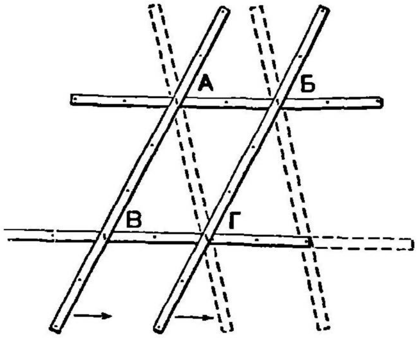


Рис. 43.

14. Две параллельные полоски (рис. 43), пересекаемые двумя параллельными же полосками, образуют модель углов с параллельными сторонами. Гвоздики (штифты) *А* и *Б* прикрепляют модель к демонстрационной доске, *В* и *Г* свободно движутся.

§ 43. Перегибание листка бумаги

Заслуживающим серьёзного внимания методом построения моделей геометрических фигур, доступным по своей наглядности и учащимся начальной школы является м е т о д п е р е г и б а н и я (складывания) л и с т к а б у м а г и, разработанный индийским математиком Роу Сундара[1].

Геометрические построения циркулем и линейкой основаны на свойстве окружности как геометрического места точек. Геометрические построения посредством перегибания листка бумаги основаны на принципе осевой симметрии.

Листок бумаги, сложенный вдвое и образующий прямую линию перегиба, является моделью двойной полуплоскости, каждая точка которой есть д в о й н а я точка, отстоящая от оси перегиба на единственном определённом расстоянии.

[1] Его книга „Геометрия на перегибании листка бумаги" переведена на русский язык, изд. Матезис, 1910.

Раскроем листок: две полуплоскости превращаются в одну плоскость, а двойная точка превращается в две точки, лежащие на общем перпендикуляре *АБ* к линии перегиба на равных от неё расстояниях, т. е. образует две точки, *А* и *Б*, симметричные относительно оси перегиба (рис. 44).

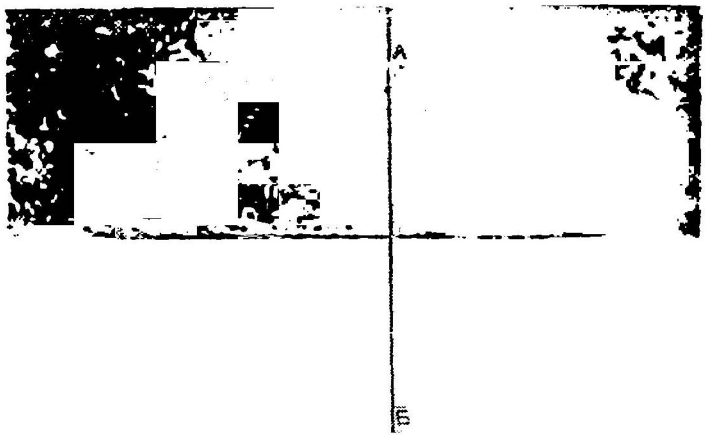


Рис. 44.

Перегибая такой сложенный вдвое листок бумаги по различным направлениям и образовав из рёбер перегибания фигуру, мы, расправив листок, получаем на нём две симметричные фигуры.

Складывая листок вчетверо, мы образуем на нём простейшим способом четыре прямых угла. Перегибание листка бумаги даёт простые и наглядные способы деления угла пополам, деления отрезка пополам, восставления и опускания перпендикуляров и, следовательно, проведения параллельных прямых, биссектрис, медиан и высот треугольников, построения ромба, параллелограма и других фигур.

Приём перегибания листка бумаги удобен при демонстрации всему классу свойств геометрических фигур, а особенно углов.

Излагая свой метод, Роу Сундара ограничивает себя, допуская исключительно перегибание листка квадратной формы, чтб загромождает его построения вспомогательными линиями. Для начальной школы удобнее допустить вырезывание фигур, полученных перегибанием, и тогда можно дальше перегибать уже вырезанные квадраты, прямоугольники, треугольники и даже круги, последние предварительно начерченные на бумаге. При этом условии демонстрации упрощаются и становятся доступными в начальной школе, и, что важно, область применения метода перегибания расширяется.

Очень полезны коллективные опыты с треугольниками, окружностями и другими фигурами, приготовленными учениками дома и принесёнными в класс. Перегибание моделей каждым учеником по способу, указанному учителем на своей модели, даёт коллективный опыт, выводы из которого очень показательны и более убедительны, чем единичная демонстрация, сделанная учителем на его модели.

Таковы, например, демонстрации: суммы углов треугольника, свойства сторон и углов прямоугольного треугольника, свойства сторон, углов и диагоналей ромба и т. д.

Для работы в классе с перегибанием листка бумаги, в целях облегчения работы и экономии времени в школе надо иметь несколько блокнотов размером 15×20 *см* из нелинованной, глянцевитой белой бумаги.

Для упражнений учитель раздаёт ученикам по листку из блокнота, не разрешая им вырывать листки из своих тетрадей. Эти листки после построений нумеруются, подписываются и вклеиваются в тетрадь по геометрии.

Перегибание следует делать, положив лист на гладкую поверхность парты (или прижав к классной доске). Надо остерегаться мять листок. Держа листок над столом, при перегибании обеими руками вы его неизбежно изомнёте.

Раньше чем проводить прямую линию, следует, сначала нажимом пальца, а потом краем ногтя, наметить точки, через которые должна проходить прямая. Линии сгиба следует проводить сначала слегка мякотью (подушечкой) пальца, а потом делать их более резкими краем ногтя, или ножа, или ребром карандаша.

Учитель показывает всем ученикам способ образования фигуры на большом листе бумаги, прижимая его к классной доске при боковом освещении, и объясняет, как перегибать и складывать бумагу. Приколов кнопками лист с образованной фигурой, учитель ставит цветным карандашом буквы, обозначающие вершины и стороны фигуры, и затем уже разрешает ученикам делать построения на своих листках.

Вырезая фигуры (треугольники, параллелограмы и др.), полученные перегибанием листка бумаги или черчением на клетчатой бумаге (или гладкой), учитель может, делая дальнейшие перегибания, показать некоторые свойства геометрических фигур. Так как основные построения: деление отрезка и угла пополам, восставление и опускание перпендикуляра, посредством перегибания листка бумаги проще, чем циркулем и линейкой, то демонстрации учителя сильно упрощаются и становятся более наглядными.

§ 44. Первые геометрические упражнения на перегибание листка бумаги

Несколько построений и геометрических игр с перегибанием листка бумаги можно провести в I и II классах, например первое знакомство с квадратом на „игре в галчонка“ (§ 77), на изготовлении украшений для ёлки, демонстрации наложения и совпадения равных фигур, образования прямых углов и т. д.

Но главное применение этого метода—в III и IV классах при изучении свойств геометрических фигур, начиная с прямой линии.

1. Возьмём два тонких листка бумаги, наложим один на другой. В сложенном виде перегнём их и проведём линейкой, туго прижимая её, по линии сгиба. Разнимем листки. На двух листках образовались две прямые. Снова наложим листки друг на друга так, чтобы прямые совпали.

Одну прямую можно передвигать вдоль другой. Можно прямую перевернуть и приложить её к другой прямой, и тогда они при передвигании будут лежать друг на друге и совпадать. Таково свойство прямой линии.

2. Сложим вместе два тонких листка и в сложенном виде перегнём их по трём пересекающимся пря-

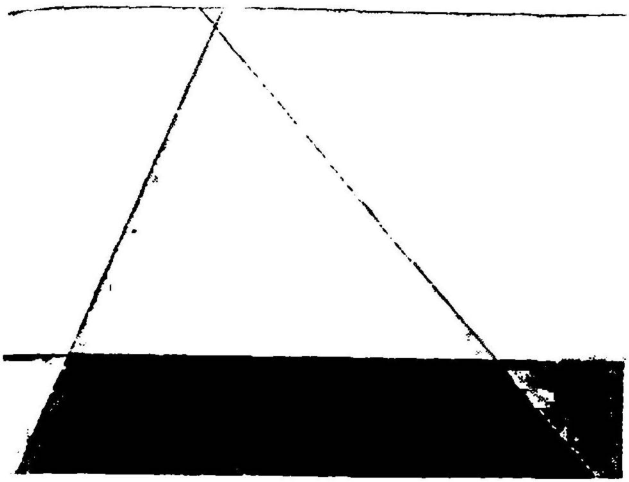


Рис. 45.

мым,—получится треугольник. Разняв листки, образуем два равных треугольника. Наложив их попрежнему друг на друга, мы восстановим прежнее положение, когда оба треугольника сливались. Таким образом, получается представление о равенстве фигур (рис. 45).

Две фигуры, которые при наложении сливаются в одну—„совмещаются“, мы называем *равными фигурами*. Следует обратить внимание учеников на тот важный факт, что при совпадении фигур совмещаются их (соответственные) стороны и углы.

3. Перегнём листок по прямой. Поставим на прямой две точки *А* и *Б*. Часть прямой между двумя точками называется отрезком. Точки *А* и *Б*—концы отрезка. Сам отрезок обозначается *АБ*.

4. Сложив вдвое листок бумаги, мы образуем бумажную полоску с прямолинейным краем. Отмечая на ней острым карандашом начало и конец какого-нибудь отрезка, мы можем переносить этот отрезок, откладывать его на любой прямой или в любом месте листа бумаги, сравнивать его длину с длиной другого отрезка и т. д.

5. Сложив таким же способом листок вдоль вчетверо, можно изготовить линейку для черчения с

прямоугольным краем, которая при случае сможет заменить настоящую линейку для черчения карандашом прямых линий.

6. Отрезки, образованные перегибанием листка бумаги, можно выделить и усилить, проведя по вогнутой стороне сгиба по линейке остро очинённым цветным карандашом.

7. Отрезки можно сложить, откладывая от конца первого отрезка в ту же сторону второй отрезок, от конца второго—третий и т. д. Сложение отрезков изображается так: $АБ + БВ + ВГ = АГ$.

8. Как узнать, на сколько один отрезок больше другого? Как назвать такое построение? Как записать такое действие?

9. Как выпрямить ломаную *АБВГ*? Как записать действие?

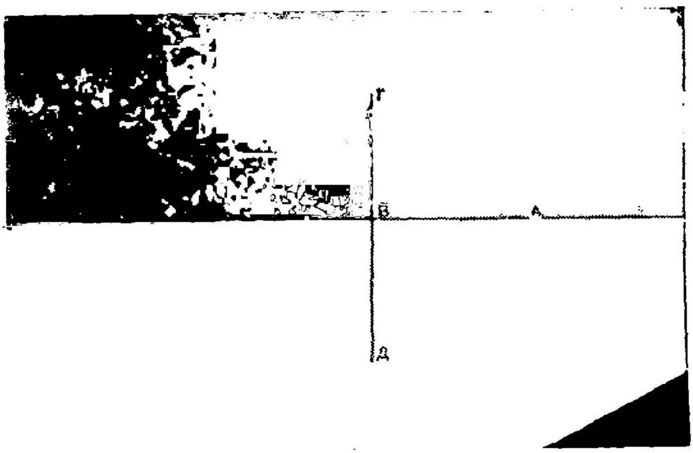


Рис. 46.

10. Деление отрезка *АБ* (рис. 46) пополам делается перегибанием сложенного по отрезку листка бумаги так, чтобы точка *А* совпала с точкой *Б*, и туго прижать точку *В* сгиба листка на отрезке. Точка *В* разделит отрезок *АБ* пополам.

11. Разделить перегибанием отрезок *АБ*, лежащий на краю бумажной ленточки, пополам, на 4 равных части, на 8 равных частей.

§ 45. Углы, образуемые перегибанием листка бумаги

12. Наметим на краю листка точку *А* (рис. 47). Перегнём листок так, чтобы линия перегиба прошла через точку *А*. Проведя по сгибу краем ногтя или краем линейки, образуем прямую *АБ*. Проведя через *А* другую прямую *АВ* в другую сторону, мы образуем угол *БАВ*. Обозначим его $\angle$*БАВ*. Точка *А*—вершина угла. Прямые *АБ* и *АВ*—стороны угла. Заштрихуем часть поверхности листка, лежащую между сторонами угла. Это—внутренняя часть угла.

13. Сложим листок вдвое и проведём линию сгиба (рис. 46). Не расправляя листок, сложим его так, чтобы одна половинка линии сгиба точно совпала с другой. Линии сгиба образовали прямой угол. Расправим листок и увидим, что две линии сгиба, пересекаясь, образовали четыре прямых угла, выходящих из одной и той же вершины. Снова сложим листок. Все четыре угла слились в один. Такие углы называются прямыми. Все прямые углы равны между собой (соберите все модели прямых углов в одну стопку).

14. Две прямые, пересекающиеся под прямым углом, называются перпендикулярными друг к другу.

15. Как из точки *А* на прямой *СД* восставить к ней перпендикуляр? Для этого надо сложить листок

Рис. 47.

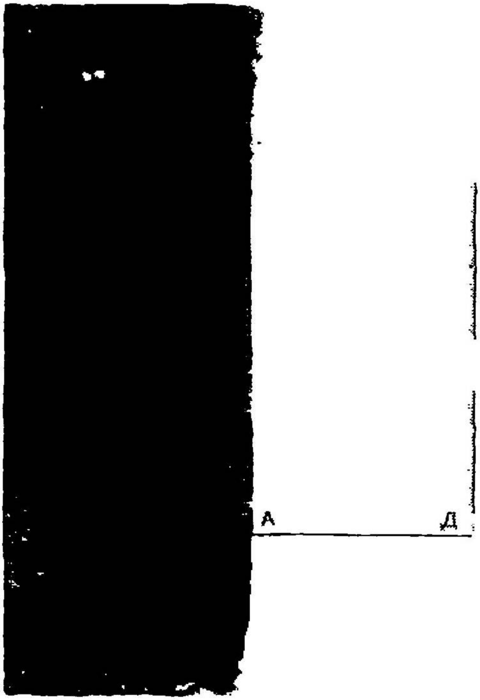


Рис. 48.

так, чтобы линия перегиба прошла через точку *А* и чтобы одна часть отрезка *СА* совпала с другой его частью— *АД* (рис. 48).

16. Как из точки *В* опустить перпендикуляр на прямую *АБ*? Для этого надо перегнуть листок поперёк линии *АБ* так, чтобы одна часть *АБ* совпала с другой её частью, а линия перегиба *ВГ* прошла через точку *В*. *ВГ*—искомый перпендикуляр (рис. 49).

17. Сложим листок сначала по *АБ*, а потом по *ВГ* (рис. 50). У нас образовалось 4 угла с общей вершиной *О*. Равны ли соседние углы, например I и II или II и III, или нет? Два соседних угла имеют общую вершину, общую сторону (межу), а другие их стороны *АО* и *ОБ* вытянуты в одну прямую. Такие углы называются смежными углами.

На рисунке 50 изображены четыре пары смежных углов. Если смежные углы равны, то они прямые.

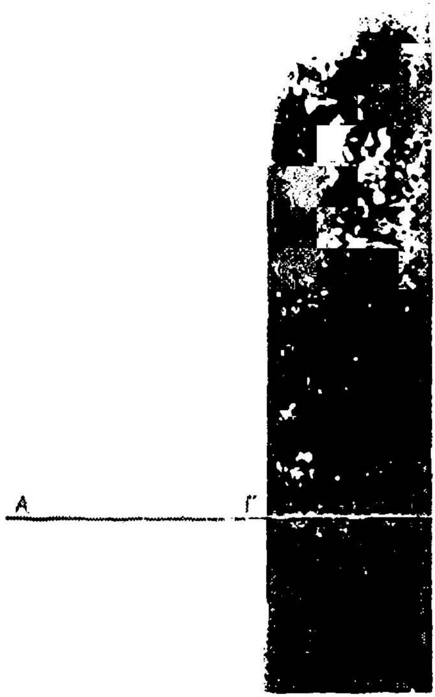


Рис. 49.

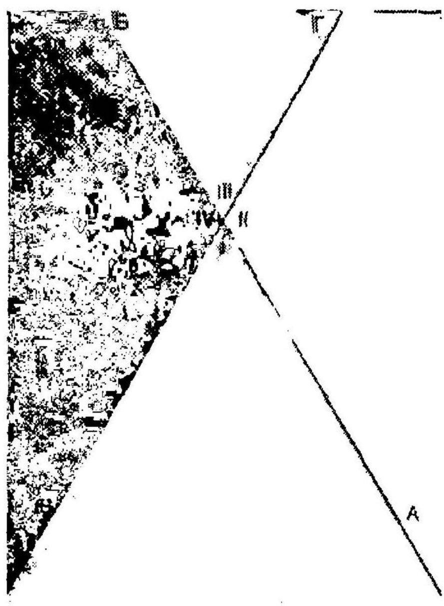


Рис. 50.

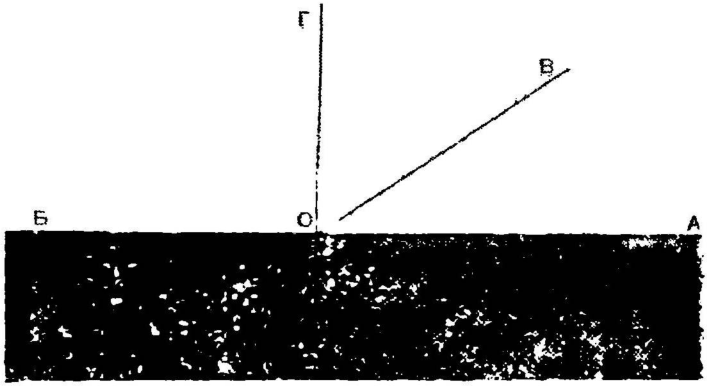


Рис. 51.

18. Вырежьте из бумаги два угла. Чтобы их сложить, надо поставить их рядом так, чтобы у них совпали вершины и по одной стороне, а другие стороны легли по разные стороны от совпавших. Так, например, углы *АОВ* и *ВОБ* (рис. 51)—это углы смежные. Как перегнуть листок со смежными углами, чтобы показать, что сумма смежных углов всегда равна двум прямым углам? (рис. 51).

19. Сумма смежных углов образует замечательный угол *АОБ* (рис. 51). Его вершина—*О*, а стороны вытянуты по одной прямой. Это развёрнутый угол.

20. Как перегибанием показать, что развёрнутый угол равен сумме двух прямых?

21. Чтобы сравнить два угла, наложим их друг на друга так, чтобы совпали их вершины и по одной стороне. Тот угол, вторая сторона которого пойдёт внутри другого угла, будет меньшим.

22. Все углы по величине сравнивают с прямым углом. Угол меньше прямого называют острым, больше прямого — тупым. Так, из двух смежных углов *АОВ* и *ВОБ* первый—острый, а второй—тупой.

23. Рассмотрим углы, образованные двумя пересе-

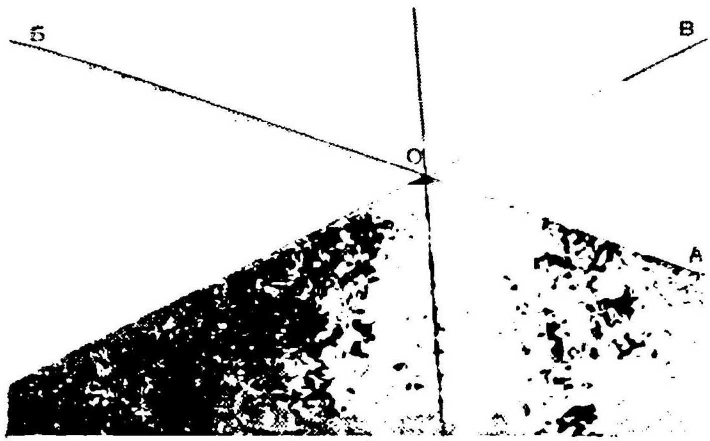


Рис. 52.

кающимися прямыми (рис. 50 и 52). Эти углы имеют общую вершину, и стороны одного угла составляют продолжение сторон другого. Такие углы называются противоположными (вертикальными). Складывая листок так, чтобы сторона *АО* совпала с *ОГ*, мы увидим, что угол *АОВ* совпал с противоположным углом *БОГ*. Это положение можно повторить с любой парой противоположных углов. Противоположные углы равны друг другу.

24. Перегнём листок бумаги так, чтобы линия перегиба *ОБ* отделила с краю небольшой острый угол *АОБ*. Отгибая листок по прямым *ОВ*, *ОГ*, *ОД* и т. д. „к себе" и „от себя" так, чтобы образовались равные углы *АОБ*, *БОВ*, *ВОГ*, *ГОД* и т. д., мы будем последовательно умножать первый острый угол *АОБ* на 2, 3, 4, 5 и т. д. (рис. 53).

25. Образуем двумя перегибами угол *АОБ* (рис. 54). Складываем листок так, чтобы линия перегиба *ОВ* прошла через вершину угла *О* и сторона *АО* совпала со стороной *ОВ*. Тогда угол *АОБ* разделится пополам. Прямая *ОВ* называется равноделящей, или биссектрисой. Деля половины угла пополам, мы образуем четверти угла и т. д.

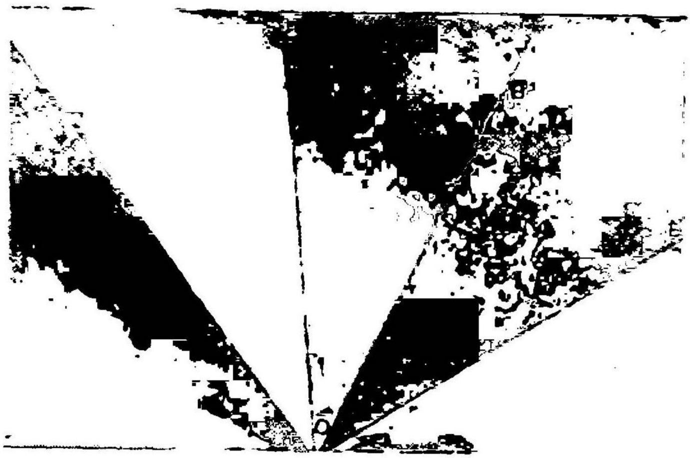


Рис. 53.

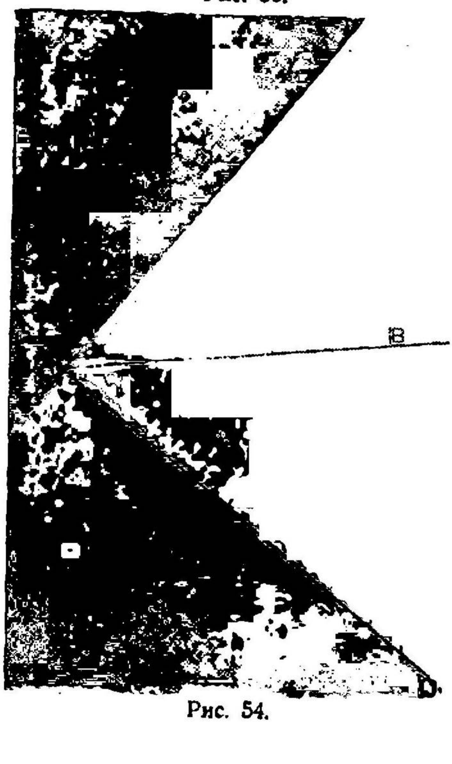


Рис. 54.

§ 46. Треугольники, образуемые перегибанием листка бумаги. Их свойства

26. Перегнём листок бумаги три раза так, чтобы вторая и третья линии перегиба пересекались между собой и в двух других точках пересекали первую линию перегиба. Образовался треугольник. У него три вершины, три стороны и три угла.

27. Виды треугольников в зависимости от углов: построить прямоугольный треугольник, остроугольный и тупоугольный треугольники перегибанием листка бумаги.

28. Взяв прямоугольный листок бумаги, сложим его пополам (рис. 55). Линия перегиба *1* будет перпендикулярна к краю листка. Перегнём сложенный листок так, чтобы линия перегиба *2* пересекала стороны получившегося прямого угла. Расправив листок, мы получим равнобедренный треугольник *АБВ* с биссектрисой угла при вершине (рис. 55). Снова складывая его, легко показать его свойства. Прямая *БГ*, которая делит пополам угол *Б* при вершине равнобедренного треугольника, есть, вместе с тем и высота треугольника; она делит противоположную сторону пополам. Углы *А* и *В* при основании треугольника совпадают и, следовательно, равны между собой.

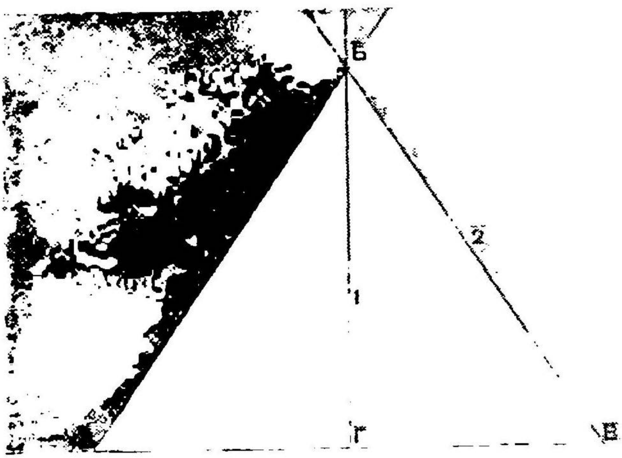


Рис. 55.

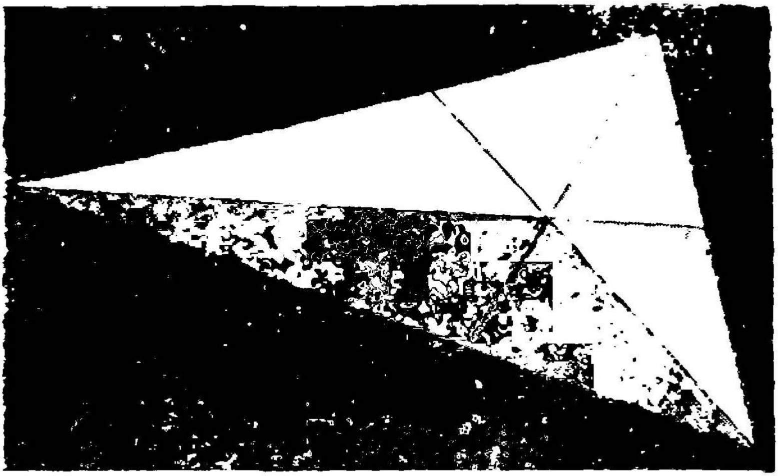


Рис. 56.

29. Прямоугольный треугольник (рис. 56) Прямоугольный листок бумаги перегнём так, чтобы линия перегиба пересекала две смежные стороны. Вырежем образовавшийся прямоугольный треугольник. Сравним его стороны. Разделив острый его угол пополам, мы наложим катет на гипотенузу и сразу заметим, что гипотенуза больше катета. То же можно показать и на другом катете.

30. Деля перегибанием оба катета пополам, увидим, что острые углы треугольника прилегли вплотную друг к другу. Сумма их вплотную покрывает прямой угол треугольника. Покажите справедливость этого свойства для разных прямоугольных треугольников.

Сумма острых углов прямоугольного треугольника равна прямому углу. Нельзя ли догадаться об этом без опыта, зная свойство углов любого треугольника (см. упр. 31, 32).

31. Сумма углов треугольника. Принимая прямолинейный край листка бумаги за прямую, дающую одну сторону треугольника, двумя перегибами, пересекающими этот край, образуем треугольник. Вырежем его. Пометим углы его цифрами 1, 2, 3, разре-

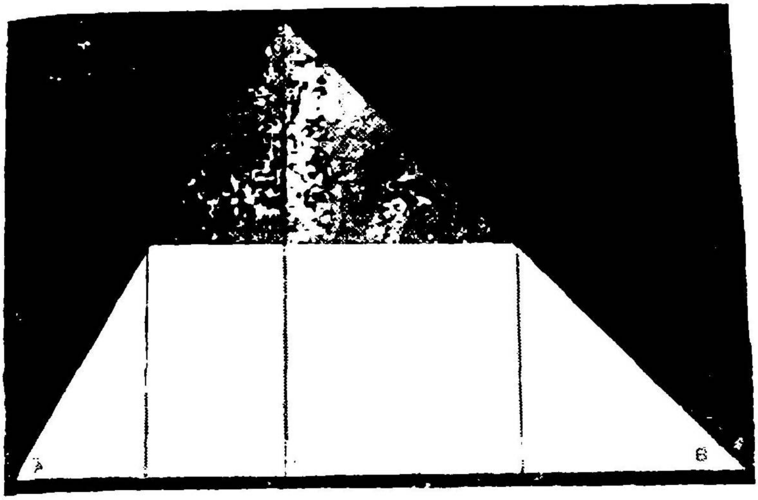


Рис. 57.

жем треугольник на три части, содержащие по одному углу, и сложим углы треугольника. Образуется развёрнутый угол, равный двум прямым углам.

32. Сумма углов треугольника (2-й способ, без разрезывания). Вырежем из бумаги треугольник *АБВ* (рис. 57). Из вершины *Б* проводим высоту *БГ* (упр. 16). Сводим все три вершины треугольника *А*, *Б* и *В* в точку *Г* и перегибаем треугольник, оставляя все его вершины в точке *Г*. Тогда все три угла треугольника заполнят без промежутков развёрнутый угол *Г* и сумма их будет, следовательно, равна развёрнутому углу с вершиной в точке *Г*, т. е. двум прямым.

§ 47. Применение „частей квадрата" в старших классах

В старших классах область применения частей квадрата расширяется. Из них составляются десятки четырёхугольников всевозможных видов: параллелограмов, ромбов, трапеций, дельтоидов.

Способ построения даёт возможность наглядно показать их важнейшие отличительные черты (§ 23).

Из одних и тех же деталей можно построить *равносоставленные* фигуры, что имеет большое методическое значение, как подготовка к измерению площадей. Фигуры, составленные из частей квадрата, легко поддаются квадратуре, почему их легко превратить в равновеликие прямоугольники и тем показать способ косвенного измерения их площадей.

Приводимые ниже рисунки (58 и 59) являются единичными иллюстрациями выше указанных применений пособия.

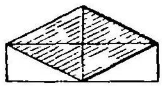


Рис. 58.

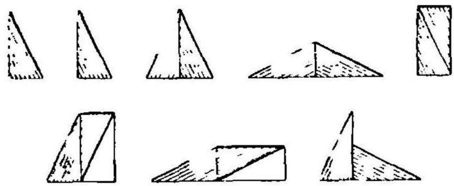


Рис. 59.

1. Из способа образования ромба путём составления его из четырёх равных прямоугольных треугольников видно, что: а) стороны его равны; б) противоположные углы равны; в) углы, образованные одной стороной, в сумме равны двум прямым; г) диагонали делят друг друга пополам, взаимно перпендикулярны и т. д.

2. Из двух частей квадрата—двух равных прямоугольных треугольников—можно составить 7 равносоставленных фигур: два равнобедренных треугольника, два параллелограма, два пятиугольника, не считая более сложных фигур (рис. 59). О применении „частей квадрата“ см. главу VIII „Измерение площадей“, § 64—67.

ГЛАВА VII

ЛИНЕЙНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ

§ 48. Множество и сплошная величина

Числа, с которыми имеет дело арифметика, получаются в результате счёта и измерения.

Счёт мы можем производить тогда, когда налицо несколько отдельных предметов, причём на различие между ними не обращаем внимания. Каждый из таких предметов мы называем единицей. Так, в классе каждый ученик—единица, в посёлке каждый дом—единица.

Совокупность таких единиц называется множеством. В результате подсчёта членов множества—единиц—получается целое число.

Второй операцией, в результате которой получается число, служит измерение. Предметом измерения служит сплошная величина. Примерами сплошных величин являются длина, вес, время, температура и т. п.

Как множество, так и сплошная величина одинаково изображаются числами, но между ними нетрудно подметить различие: множество для своего численного выражения должно состоять из отдельных членов—единиц, величина же, наоборот, сама по себе является нераздёленной, сплошной. Множество изменяется, увеличивается или уменьшается скачками, т. е. только на целые единицы. Так, например, в школе перед началом занятий было 12 человек, потом пришёл ещё один, стало 13; потом подошли ещё 3, стало 16 и т. д.— число учеников в школе есть множество.

Сплошная же величина изменяется непрерывно, как говорят, течёт. Так изменяется время.

Линия, которую чертит перо на бумаге, увеличивается непрерывно.

Если единицу множества разделить на части, она перестаёт существовать как индивидуум, например ученик—единица класса, дом—единица посёлка. Наоборот, любая часть сплошной величины должна делиться на ещё более мелкие части, это её существенное свойство, без которого невозможно даже само измерение.

§ 49. Измерение длины

Как множество, так и сплошные величины мы встречаем в жизни на каждом шагу, и изучение всякого явления обычно начинается или со счёта, или с измерения.

Измерение с незапамятных времён было необходимой частью человеческого труда; древнейшие памятники человеческой культуры говорят о том, что измерение в глубокой древности уже было известно людям.

Операция измерения состоит в том, что для каждой величины устанавливается однородная ей величина, принимаемая условно за единицу меры. Измеряемая величина разбивается на части, равные единице меры или её частям. Так, отрезок прямой линии разбивается на части, каждая из которых равна 1 *м*, затем остаток, полученный после разделения, делится на части, равные долям выбранной единицы (обычно десятым, сотым или тысячным). После такого разделения подсчитываются единицы и доли единиц, содержащиеся в измеряемой величине. Результат подсчёта даёт число, показывающее отношение измеряемой величины к выбранной единице.

Измерить величину—значит найти отношение её к другой величине, однородной, условно принятой за единицу меры. Слово „однородный“ означает, что длина измеряется только длиной, вес—весом и т. д.

Сначала единицами для измерения длины были длины частей тела: „локоть“, фут—длина ступни взрослого мужчины, дюйм—длина сустава пальца, или такие отрезки, длина которых приблизительно постоянна: „на полёт стрелы“, „на верженне камня“, „дневной переход“, „тысяча шагов“—миля.

В настоящее время почти на всём земном шаре принята метрическая система мер, благодаря своей изумительной простоте. Единицей длины в метрической системе мер служит метр.

§ 50. Приборы для измерения длины

1. Метр—основной прибор для измерения длины. Общеупотребительным образцом метра служит деревянная линейка, размеченная на сантиметры и половины сантиметра.

2. Металлическая метровая линейка, разделённая на сантиметры и миллиметры—для точных измерений.

3. Складной деревянный метр.

4. Демонстрационный метр в три или две краски: чёрная, красная и белая, или белая и чёрная. На нём резко выделяются дециметры и сантиметры. Он особенно полезен в классе для демонстрационных измерений, т. е. таких, которые должны наблюдаться всем классом.

Демонстрационный метр нетрудно сделать самому. Для этого достаточно взять деревянную метровую линейку, на обратной стороне разметить дециметры и раскрасить часть линейки между дециметрами делениями через один: т. е. один дециметр должен быть чёрный, другой—цвета линейки.

При измерениях по толстой деревянной линейке надо смотреть на деления по направлению, перпендикулярному к плоскости линейки, а не сбоку, иначе могут получиться ошибки до нескольких миллиметров.

5. Школьные деревянные линейки различной длины—от 20 до 50 *см*—разделены на сантиметры и миллиметры. По разделённому ребру линейки производят измерения, по неразделённому чистому ребру можно чертить.

6. Измерительная сантиметровая лента. Изготовляется из клеёнки длиной в 150 *см*, разделена на сантиметры. Употребляется в швейном деле („сантиметр"). Незаменимое пособие при всякого рода небольших обмерах, на экскурсиях и пр. благодаря своей портативности и дешевизне.

7. Измерительная трёхцветная бумажная

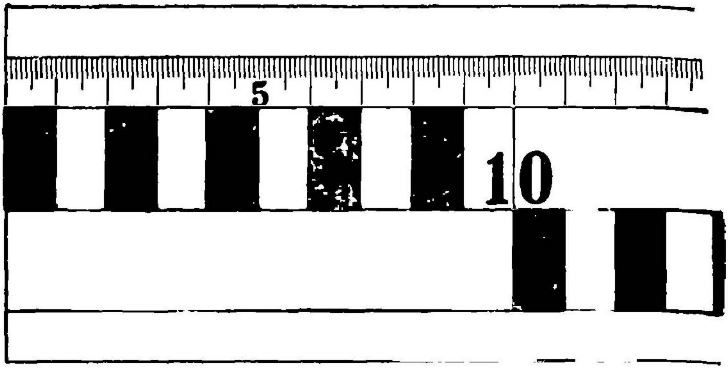


Рис. 60.

лента (рис. 60). Наклеив такую ленту на хорошо отделанную деревянную метровую планку, получим демонстрационный метр. Наклеив ленту на двухметровые планки, получим рейки для школьных землемерных работ. На такую ленту, наклеенную на рамку классной доски, удобно ориентироваться при решении разных задач.

Точность измерений такой лентой не менее 0,2%.

§ 51. Измерение отрезков в I классе

Измерение отрезков—это непосредственное, прямое измерение, отсчёт делений на линейке заменяет укладывание единицы меры на измеряемом отрезке. В результате подсчёта получится число, выражающее длину отрезка в выбранных единицах меры.

В I классе вводятся две, пока ещё независимые, единицы длины: метр и сантиметр. Метр—основная единица длины; показать его ученикам надо с первых шагов обучения. По своим размерам и по размерам предметов, измеряемых им, он, естественно, применим не столько для индивидуального измерения, сколько для демонстрационных упражнений. Учитель или отдельные ученики по его указаниям измеряют метром длину и ширину класса, коридора или здания. Для индивидуального измерения малых предметов применяется сантиметр. Как сантиметр, так и объекты, измеряемые им, легче охватываются глазом и сама операция измерения проще: утомительное откладывание единицы меры несколько раз заменяется простым отсчётом делений по линейке.

Измерения метром и сантиметром должны чередоваться. Учитель должен добиться от своих учеников умения измерять крупные отрезки целыми метрами, а небольшие—целыми сантиметрами.

§ 52. Метр

1. Первый урок по измерению метром можно проводить в закрытом помещении, измеряя длину, ширину и высоту класса метровой линейкой, а также размеры коридоров и других классов. Измерение производят вызванные ученики, остальные наблюдают и записывают результаты измерения. При наличии нескольких метров измерения производятся по-бригадно.

2. Заготовив с детьми и раздав им палочки длиной в 1 *м*, учитель даёт им (в качестве самостоятельной работы) задачу измерить у себя дома длину и ширину комнаты, высоту двери, длину коридора и др. и всё это записать в тетради.

3. Следующие работы выносятся на школьный двор или сад. Измерительные работы могут быть двух типов:

а) Измерить данный заранее отрезок.

б) Отложить отрезок заданной длины.

Учитель даёт ученикам мерный метр, мерный шнур или рулетку и показывает, как надо обращаться с ними. Измеряют отрезки в пределах 100 *м* (лучше 50 *м*), например длину и ширину школьного здания, длину забора и т. п.

Учитель не должен забывать и о втором типе задач — откладывании отрезков: он предлагает выбранной группе учеников отмерить по забору или тротуару 5 *м*, 10 *м*, 8 *м* и т. д.

4. Упражнения на глазомер первого типа: определить на глаз расстояние от двери школы до ворот, длину сарая, расстояние между вбитыми в землю двумя колами, длину в метрах расстояния в 20 шагов; на какое расстояние был брошен камень? и т. д.

5. Упражнения на глазомер второго типа: воткнуть

два колышка так, чтобы расстояние между ними равнялось 2, 8, 3, 5, 10 *м*. Последующая проверка измерения указывает, у кого лучше глазомер.

§ 53. Сантиметр

Сантиметровую ленточку легко изготовить, вырезав её из клетчатой бумаги ученической тетради. Размеры сетки стандартны: сторона клеточки равна 0,5 *см*.

Разрезав листок клетчатой бумаги на ленточки шириной в 2 *см* и длиной в 20 *см* и раздав их учащимся, учитель показывает им, как надо разметить ленточку на сантиметры, отсчитывая чёрточки квадратной сетки через одну.

Такая самодельная линейка сначала будет даже удобнее деревянной, так как на ней не будет отвлекающих внимание миллиметровых делений. Позднее, через 2—3 урока по измерению, можно перейти и к деревянной линейке.

Упражнения в измерениях, как было указано выше, могут быть двух видов: а) измерить заданный отрезок и б) отложить отрезок заданной длины.

В первом случае учитель задаёт измерить в сантиметрах длину небольших предметов, встречающихся в обиходе: спички, пера, карандаша, колоса, листка; длину и ширину тетради, набора страницы в книге, размеры разных коробок и т. п. Полезно ребятам измерить длину своих пальцев, расстояние между концами большого и указательного пальцев. Нередко в задачнике встречаются рисунки для измерения.

Во втором случае учитель задаёт начертить в тетради прямолинейные отрезки определённых размеров в целых сантиметрах.

Установление связи между единицами длины и знакомство с системой мер, связанных друг с другом, непосильно для I класса. С системой мер следует познакомить учеников позднее—в III классе. Здесь ученики познакомятся с дециметром и миллиметром, проведут измерения с ними, а также с километром, и все эти меры объединят в одну систему мер длины. Полное же изучение системы мер длины с основной единицей метром возможно лишь в IV или V классах, при изучении десятичных дробей.

§ 54. Дециметр

В I классе зависимость между метром и сантиметром можно установить лишь в конце года при изучении числа 100. Да в ней и не было особой необходимости. Просто дети измеряли маленькие отрезки и расстояния сантиметрами, а большие расстояния метрами.

В III классе новые меры получаются как производные ранее известных мер. Так, дециметр даётся как десятая часть метра. С этой целью учитель приготовляет из миллиметровой или из клетчатой склеенной бумаги бумажную ленту длиной в 1 *м*, резко разделённую поперечными линиями на дециметры. В классе он проводит беседу о том, что при некоторых измерениях сантиметр оказывается слишком мал, а метр слишком велик, и поэтому было бы полезно ввести ещё одну меру побольше сантиметра и поменьше метра.

Затем он укрепляет на классной доске метр, прикладывает к нему приготовленную и размеченную бумажную ленту и, на глазах учеников, разрезает её по делениям метра на 10 равных частей, которые затем и раздаёт ученикам для снятия копий с них в своих тетрадях. Ученики открывают сами, что дециметр равен 10 сантиметрам. Таким образом, устанавливается первая связь между метрическими единицами длины:

1 метр = 10 дециметрам
1 дециметр = 10 сантиметрам и отсюда—
1 метр = 100 сантиметрам.

§ 55. Измерения дециметром. Раздробление и превращение

Для измерительных работ с дециметром учитель может взять обыкновенную метровую линейку и, разметив обратную сторону её на дециметры, зачернить дециметры через один; такая **дециметровая линейка** очень показательна. Ею можно измерять длину и высоту доски, окна, двери и т. п.

Измерение отрезков целыми дециметрами не должно занимать много времени. После этого учитель переходит к более точному измерению отрезков дециметрами и сантиметрами: весь отрезок измеряется дециметрами, а остаток — сантиметрами. Отрезок чертится или отбивается намелённым шнурком на доске, остаток отчёркивается острым кусочком мела.

Чтобы познакомить детей с раздроблением и превращением составных именованных чисел, учитель проводит измерения одного и того же отрезка на доске, например 43 *см* сначала дециметрами и сантиметрами, а потом одними сантиметрами.

Так устанавливается равенство чисел 4 *дм* 3 *см* и 43 *см*: подсчитывается, сколько сантиметров содержится в 4 *дм* 3 *см* и, обратно, сколько целых дециметров получится из 43 *см* и сколько сантиметров останется.

Затем учитель даёт обратную задачу: подсчитать, сколько дециметров содержится в отрезке длиной в 75 *см*. Расчёт делается чисто арифметически, а ответ иллюстрируется отрезком на доске (рис. 61), к которому снизу приложена дециметровая линейка.

Рис. 61.

Превращение: отрезок 75 *см* равен 7 *дм* 5 *см*. Интересным материалом для измерительных упражнений здесь могут служить измерения частей тела самих учащихся.

Примечание. Измерение роста учеников удобно делать так: приколоть кнопками на плинтус двери трёхцветную сантиметровую ленту, поставить ученика спиной к этой ленте, приложить деревянный угольник вершиной прямого угла к ленте и передвигать его, пока горизонтальный катет не коснётся головы стоящего ученика. Вершина прямого угла укажет высоту роста.

а) Сравнить рост тела с расстоянием между концами пальцев у горизонтально раздвинутых рук.

б) Сравнить длину ступни с обхватом кулака.

в) Измерить окружность головы, туловища на уровне плеч, шеи, груди, длину рук и т. п.

Второй тип задач — это задачи на развитие глазомера.

а) Учитель чертит на доске отрезок (40—80 *см*) и спрашивает, сколько в этом отрезке сантиметров; ученики один за другим называют, по их мнению, наиболее подходящее число сантиметров. Учитель записывает эти числа. Затем отрезок измеряется и выясняется, кто из учеников имеет лучший глазомер. Отрезки должны быть вертикальные, горизонтальные и наклонные.

В начале таких упражнений учитель кладёт на доску для сравнения демонстрационный метр, а затем дело должно обходиться без него.

б) Учитель вызывает учеников одного за другим и даёт им задачу начертить на глаз заданный отрезок, например 40 *см*. Каждый ученик чертит свой отрезок и затем измерением выясняют, кто дал отрезок точнее всего.

§ 56. Миллиметр. Таблица метрических мер длины

Хотя ученические деревянные линейки содержат миллиметровые деления, но линейки эти быстро грязнятся, деления стираются и, кроме того, параллакс (ошибка при рассматривании сбоку) при толщине линейки в 2—3 *мм* превышает 1 *мм*. Применяя линейку, учитель будет постоянно сталкиваться с противоречивыми результатами измерения у различных учеников.

Поэтому лучше всего для измерения малых предметов использовать или трёхгранную масштабную линейку, или, при её отсутствии, просто ленточку миллиметровки, напечатанной тёмной краской. Размеры ленточек 20×2 *см*; разрезывать надо по линиям сетки (рис. 62).

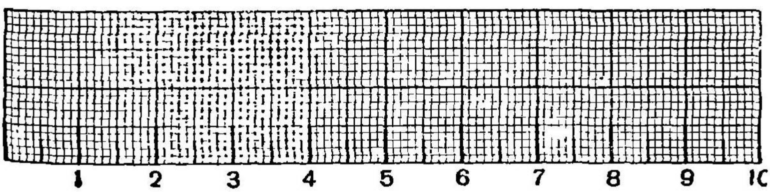


Рис. 62.

Учитель, раздав полоски, обращает внимание детей на то, что на полоске толстыми линиями размечены уже знакомые им единицы меры — сантиметры. Для измерения совсем маленьких предметов берут ещё меньшую меру—десятую часть сантиметра. Сантиметр делится на 10 маленьких частей и каждая часть называется миллиметром.

Сантиметр содержит 10 миллиметров

Ленточки миллиметровой бумаги наклеиваются учениками на тетради и размечаются так (рис. 62): пятые миллиметры выделяются чёрточкой покороче. Прикладывая линейку к малым предметам или, наоборот, накладывая их на линейку, дети проводят измерительные упражнения в миллиметрах.

1. Измерить длину клеточки тетради.
2. Расстояние между линейками тетради.
3. Высоту шрифта (малой и заглавной буквы) книги.
4. Длину и ширину ногтей на руках.
5. Размеры — длину и толщину — зерна пшеницы, ржи, овса.
6. Длину пера, спички, поперечник монеты и т. п.

Этих измерений достаточно, чтобы дети могли познакомиться с миллиметром как самостоятельной единицей измерения.

Затем преподаватель даёт комбинированные упражнения на измерения отрезков в сантиметрах и миллиметрах и выражение их длины в одних миллиметрах и, наконец, задачи на составные именованные числа, содержащие не более двух наименований.

Таблица метрических мер длины:

Основная единица длины—**метр**.

1 метр равен 10 дециметрам, или 100 сантиметрам, или 1000 миллиметрам.

1000 метров составляет 1 километр.

Или короче:

$$\begin{aligned}1\ \textit{м} = 10\ \textit{дм} = 100\ \textit{см} &= 1000\ \textit{мм}\\ 1\ \textit{дм} = 10\ \textit{см} &= 100\ \textit{мм}\\ 1\ \textit{см} &= 10\ \textit{мм}\end{aligned}$$

$$1000\ \textit{м} = 1\ \textit{км}$$

На трёхцветном демонстрационном метре даны все единицы длины, указанные в таблице, кроме километра.

ГЛАВА VIII

ИЗМЕРЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ

§ 57. Измерения прямые и косвенные

Существует два вида измерений: прямые, или непосредственные, и косвенные. При измерении прямой линии, например границы земельного участка, мы прямо укладываем мерную ленту на этой границе и сосчитываем число метров, содержащихся в ней. Это — прямое измерение. Таким же непосредственным способом производится взвешивание на равноплечих весах, измерение промежутков времени по часам и т. п.

При косвенном измерении измеряется не та величина, которую надо измерить, и не теми единицами, в которых её надо выразить. Искомая величина уже после измерения *вычисляется* (а не измеряется) на основании данных, полученных от измерения.

Так, например, желая измерить площадь треугольного участка в квадратных метрах, землемер измеряет вовсе не площадь и не квадратными метрами, а он измеряет нечто совсем другое: два отрезка — *основание и высоту* треугольника в линейных метрах. Площадь же треугольника он затем *вычисляет* по определённому правилу: длины основания и высоты перемножает и произведение делит пополам. Порядок действий указывается „формулой“ площади треугольника:

$$S_{\triangle}=\frac{1}{2}bh.$$

Такое вычисление называется „косвенным измерением“. Вывод правил-формул для косвенных измерений различных величин является одной из важных задач математики и различных технических дисциплин.

В начальной школе дети знакомятся с простейшими и основными приёмами как прямых измерений, так и косвенных измерений линейных фигур. Измерение площадей прямоугольников и других фигур производится косвенным способом.

§ 58. Измерение площадей прямоугольников

Если учитель мало обращал внимания на методику изучения площади, то в классе не замедлят проявиться характерные недостатки: ученики неясно представляют себе, **чем** измеряется площадь: они воображают, что площадь измеряется **линейным метром**, но только в двух направлениях; отсюда получается непонимание правила вычисления площади прямоугольника, непонимание соотношений квадратных единиц, смешивание периметра с площадью и т. д. Для избежания этих недостатков важно, чтобы:

1. Ученик постоянно имел перед собой, а если можно, то даже сам приготовил, единицы для измерения площадей: квадратный метр, квадратный дециметр, квадратный сантиметр.

2. Отчётливо сознавал во всех подробностях процесс сравнения измеряемой площади с квадратной единицей.

Поэтому учитель должен построить свой план уроков, посвящённых изучению площадей, таким образом, чтобы ученик, начав измерять площадь прямоугольника прямым способом, почувствовал его сложность и неудобство и, желая упростить свою работу, перешёл бы к косвенному способу измерения.

Сначала ученики измеряют площадь **непосредственно**, укладывая цветные квадраты внутри периметров прямоугольников или подсчитывая число квадратов квадратной сетки, содержащихся внутри периметров, образованных цветными шнурами (§ 59, рис. 63—67).

Затем, когда выясняется неудобство или даже полная непригодность (рис. 67) этого приёма, переходят к косвенному способу измерения.

Зная, сколько квадратных единиц уложится в ряд на основании прямоугольника, и подсчитав, сколько таких рядов нужно взять для заполнения всего прямоугольника, можно далее вычислить, сколько квадратов закроет всю площадь прямоугольника. Для этого достаточно измерить основание и высоту прямоугольника и перемножить полученные от измерения числа. Здесь измеряются уже не сами площади, а два отрезка: основание и высота прямоугольника, а площадь его вычисляется посредством умножения. Этот способ, менее утомительный и сложный, более удобный, и есть косвенное измерение площадей.

§ 59. Площади прямоугольников и квадратов

(Типы задач и упражнений)

1. Площадь прямоугольника (рис. 63), моделью которой служит прямоугольный листок бумаги с целочисленными сторонами (т. е. выраженными целыми числами) 6×4 ед., измеряется непосредственно. Прямоугольный листок ставят наклонно на доску и покрывают сплошь цветными квадратами, служащими единицей площади.

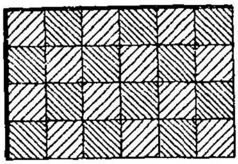


Рис. 63.

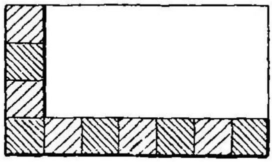


Рис. 64.

Если квадратов для заполнения площади листка окажется недостаточно, то придётся перейти к воображаемому укладыванию (рис. 64). В ряду уложилось 7 квадратов; таких рядов в прямоугольнике 4, откуда легко вычисляется площадь: $7 \times 4 = 28$ кв. ед.

2. Прямоугольник образован кольцевым цветным шнуром (рис. 65). Прямой подсчёт квадратов сетки даёт площадь прямоугольника. Нет никакой нужды пересчитывать все квадраты, гораздо удобнее вести счёт семёрками, т. е. посредством умножения: $7 \times 6 = 42$ кв. ед.

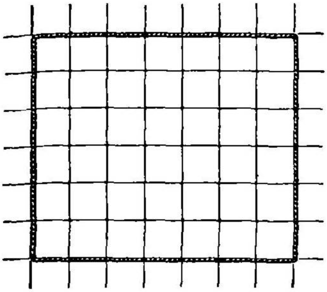


Рис. 65.

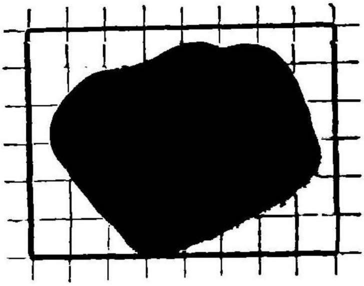


Рис. 66.

3. Если закрыть часть площади прямоугольника листком бумаги (рис. 66), то прямой подсчёт квадратов невозможен, и тогда остаётся считать по рядам: 6 рядов по 8 квадратов в каждом: $8 \times 6 = 48$ кв. ед.

4. Прямоугольник, составленный из пособия „Части квадрата“ (рис. 67), не допускает прямого измерения подсчетом числа квадратов. Измеряя его основание (6) и высоту (5), узнаем число квадратов в горизонтальном ряду и число рядов. Произведение основания на высоту ($6 \times 5 = 30$ кв. ед.) даст площадь прямоугольника.

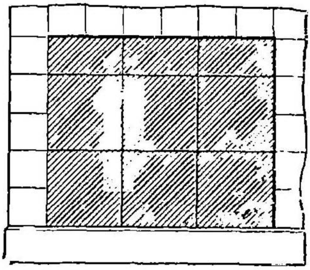


Рис. 67.

Упражнений приведённых выше типов надо проделать по нескольку каждого типа.

§ 60. Вычисление сложных прямоугольных площадей

Очень интересны и полезны для учащихся упражнения в вычислении площадей сложных прямоугольных фигур, приводящих к вычислениям со скобками. Например, измерить площадь фигуры рисунка 68, образовав её кольцевым шнуром (или начертив цветным мелом) на демонстрационной доске. Измерение приводит к вычислению выражения: $(6 \times 4) + (3 \times 3) + (5 \times 5) = 58$ кв. ед. При этом фигура разбивается вертикаль-

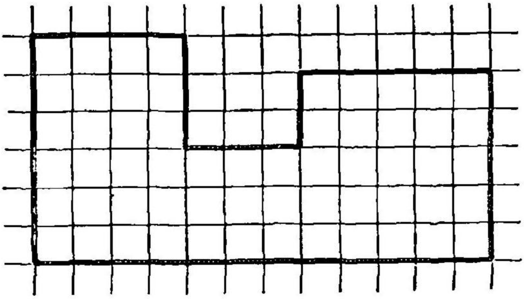


Рис. 68.

ными линиями на прямоугольник и 2 квадрата. Но можно вычисление провести и по другому плану, разбив фигуру горизонтальными линиями на 3 прямо угольника, что приведёт к вычислению выражения:

$$(12 \times 3) + (4 \times 3) + (5 \times 2) = 58 \text{ кв. ед. (рис. 69).}$$

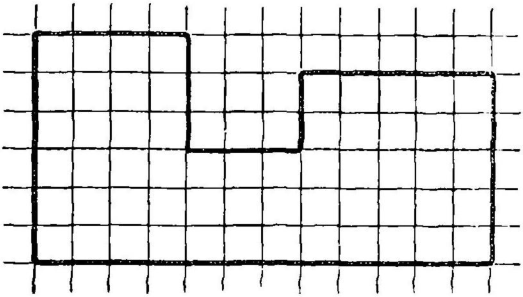


Рис. 69.

Можно, наконец, задать дополнить фигуру до прямоугольника (рис. 70), что приводит к вычислению:

$$(12 \times 6) - (3 \times 3) - (5 \times 1) = 58 \text{ кв. ед.}$$

Многие арифметические упражнения на вычисление, данные в задачнике, можно перевести на геометрический язык и задать ученикам не только вычислить выражение, но и изобразить его в виде площади. Например:

$$(7 \times 3) + (5 \times 8) - (4 \times 4) \text{ или}$$

$$(5+3) \cdot 4 + 3 \cdot (2+7) \text{ и т. д.}$$

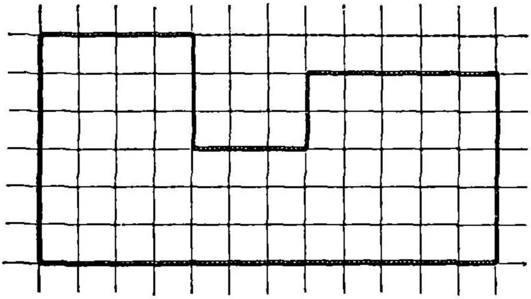


Рис. 70.

Нетрудно, варьируя приёмы, подобные указанным выше, оживить однообразные арифметические упражнения на закрепление знания таблицы умножения сознательным усвоением вычисления площадей прямоугольников.

Упражнения типа 1—4 на измерение площадей прямоугольников и квадратов проводятся в квадратных единицах демонстрационной доски или тетради. Если тетрадь имеет сантиметровую сетку, то результат получится прямо в квадратных сантиметрах. Если же у учеников имеются тетради с полусантиметровой клеткой, то следует познакомить детей с новой квадратной единицей — квадратным сантиметром (III класс).

Дети чертят в тетради сантиметр, как им известно, отрезок, равный двум делениям сетки. На этом отрезке по сетке чертится квадрат. Нетрудно подметить и запомнить, что квадратный сантиметр имеет площадь, равную четырём квадратам сетки тетради. Поэтому, чтобы узнать, сколько квадратных сантиметров содержат площади, вычисленные ранее в прежних квадратных единицах, равных одному квадратику тетради, надо полученные числа разделить на 4.

Полезно начертить прямоугольник 8×6 и вычислить его площадь: 48 кв. ед., а потом, разделив её на 4, получить ту же площадь в квадратных сантиметрах, равную 12 кв. ед. Для проверки следует начерченный прямоугольник расчертить на квадратные сантиметры и подсчитать их число.

После упражнений на построение прямоугольников и квадратов посредством угольника и линейки, причём длина сторон бралась в сантиметрах, следует провести работу на измерение площадей для построенных фигур в квадратных сантиметрах. Например:

1. Построить на нелинованном листе бумаги прямоугольник размером 23×19 *см* и вычислить его площадь.

2. То же — квадрат со стороной 13 *см*.

§ 61. Соотношение между квадратным дециметром и квадратным сантиметром

Учитель задаёт задачу: начертить на тетради квадрат со стороной, равной 10 *см*. Такой квадрат называется квадратным дециметром; рядом с ним начертить квадратный сантиметр; подсчитать, сколько квадратных сантиметров содержится в квадратном дециметре.

Учитель предлагает написать под квадратным дециметром: „1 кв. дециметр равен 100 кв. сантиметрам", и твёрдо запомнить это. При этом он обращает внимание учеников на ранее известное им соотношение: 1 линейный дециметр равен 10 линейным сантиметрам, указывает на различие природы квадратных и линейных мер и предостерегает, чтобы не смешивать эти меры, объясняя на конкретных примерах, когда и где какие меры применяются. Учитель даёт упражнения на измерение площадей прямоугольников, построенных на демонстрационной доске, причём стороны этих прямоугольников выражаются в сантиметрах, а площади — в квадратных сантиметрах. В случае, если ответ превышает 100 *кв. см*, он может быть дан составным именованным числом: в квадратных дециметрах и квадратных сантиметрах.

Далее идёт измерение поверхностей окружающих предметов, имеющих прямоугольные грани, — площади крышки стола, поверхности доски, световой поверхности окна, дна ящика. Здесь следует связать измерение с другими задачами, например со стоимостью окраски стола, побелки стены, вставки стекол в окна класса, с количеством саженцев капусты, которую надо распикировать на гряде данных размеров, и т. п. В заключение решаются задачи по задачнику на соответствующие составные именованные числа (квадратные дециметры и квадратные сантиметры).

§ 62. Квадратный метр

При достаточных размерах классной доски квадратный метр можно начертить прямо на ней. При малых размерах доски модель квадратного метра образуется тёмным шнурком на стене класса. Ещё лучше склеить её из газетной бумаги или обоев с обратной стороны. Показывая новую единицу площади, учитель предлагает ученикам назвать её. По аналогии с предыдущими мерами ученики дают новому большому квадрату название: квадратный метр.

Далее ученики устанавливают зависимость между квадратным метром и квадратным дециметром: 1 квадратный метр содержит 100 квадратных дециметров, что записывают так: 1 *кв. м* = 100 *кв. дм.*

Разрезая бумажную модель квадратного метра и склеивая из неё прямоугольники размером 2 *м* $\times$ 50 *см* и т. п., следует показать, что участок площадью в квадратный метр может иметь разную форму.

С учениками проводятся измерения длины, ширины и высоты классной комнаты, коридоров и вычисление площадей пола, стен в квадратных метрах и квадратных дециметрах.

Весной ученики измеряют площади более крупных прямоугольных участков в квадратных метрах.

§ 63. Таблица метрических мер площади

Познакомив учеников с квадратным метром, учитель вместе с ними изготовляет наглядную таблицу квадратных мер. Для этой цели он склеивает из куска обоев (если нет лучшей бумаги) квадрат со стороной, равной одному метру, и обводит его границы тушью. Квадратный метр надо разлиновать на квадратные дециметры и написать крупными буквами внутри него: 1 квадратный метр = 100 квадратным дециметрам. В нижнем правом углу на квадрат наклеивается вырезанный из миллиметровки квадрат со стороной, равной 1 *дм* — модель квадратного дециметра. Границы его тоже обведены, но лишь более тонко, тушью. На нём мелким шрифтом написано: 1 квадратный дециметр = =100 квадратным сантиметрам. На этом квадрате в нижнем правом углу наклеить вырезанный из миллиметровки квадратик—сантиметр, разделённый на квадратные миллиметры, и обвести его тушью.

Вся эта комбинация моделей квадратных мер с надписью на ней „Единицы площади" вывешивается на стену класса и висит там всё время, пока изучается отдел площадей, чтобы в памяти детей запечатлелись образы этих мер.

Сбоку вывешивается таблица соотношений единиц измерения площадей:

Меры площадей

1 *кв. м* = 100 *кв. дм*	1 *кв. км* = 100 *га*
1 *кв. дм* = 100 *кв. см*	1 *га* = 100 *а*
1 *кв. см* = 100 *кв. мм*	1 *а* = 100 *кв. м.*

С мерами, более крупными, чем 1 *кв. м*, например ар, гектар, ученики знакомятся в конце III класса, или в начале IV, работая на открытой местности.

Существует изданная Учпедгизом таблица „Измерение площадей". Таблицу эту следует повесить на стену класса на то время, когда проходится отдел измерения площадей. Полное объединение мер площадей в общую таблицу с единой мерой—квадратным метром и остальными мерами, производимыми от него, может быть сделано лишь в V классе при изучении десятичных дробей.

Тогда получится такая стройная таблица:

Основная единица меры площади — 1 квадратный метр

Мелкие производные единицы	Крупные производные единицы:
1 *кв. дм* = 0,01 *кв. м*	1 *а* = 100 *кв. м*
1 *кв. см* = 0,0001 *кв. м.*	1 *га* = 10 000 *кв. м*
1 *кв. мм* = 0,000001 *кв. м*	1 *кв. км* = 1 000 000 *кв. м*

Позднее, при изучении степеней с положительными и отрицательными показателями, таблица эта появится ещё раз в более сжатом виде:

$1\ дм^2 = 100^{-1} м^2$	$1\ а = 100\ м^2$
$1\ см^2 = 100^{-2} м^2$	$1\ га = 100^2 м^2$
$1\ мм^2 = 100^{-3} м^2$	$1\ км^2 = 100^3 м^2$

§ 64. Площади треугольников

В § 64—74 приводится целый ряд разнообразных приёмов вычисления площадей. Нет никакой необходимости пользоваться всеми приёмами. Автор приводит их все, учитывая различную степень оборудования кабинетов математики в школах. Поэтому учитель может из нескольких приёмов выбрать лишь один, тот, который осуществим при наличных наглядных пособиях, или тот, который кажется ему наиболее удачным.

Но было бы целесообразно с точки зрения развития сознательности в измерении площадей применить два-три способа измерения, начав с непосредственного подсчёта квадратов в данной площади, выяснить его неудобство, а часто и невозможность, и перейти постепенно к косвенному измерению.

Площади фигур, которые строятся из „частей квадрата", можно вычислить непосредственно прямым подсчётом. В самом деле, площадь основного квадрата набора со стороной, равной 2 ед., равна 4 кв. ед. Площади прямоугольника или равнобедренного прямоугольного треугольника, составляющие половину площади квадрата, равны 2 кв. ед. Наконец, площадь узкого прямоугольного треугольника, составляющая половину площади прямоугольника, равна 1 кв. ед. Так как треугольник (рис. 71) составлен из одного квадрата, одного прямоугольника, двух прямоугольных равнобедренных треугольников, двух „узких" прямоугольных треугольников, то его площадь равна: $4+2+(2\times2)+(1\times2)=12$ кв. ед.

Но легко показать учащимся, строя фигуры шнурком на демонстрационной доске и закрыв часть пло-

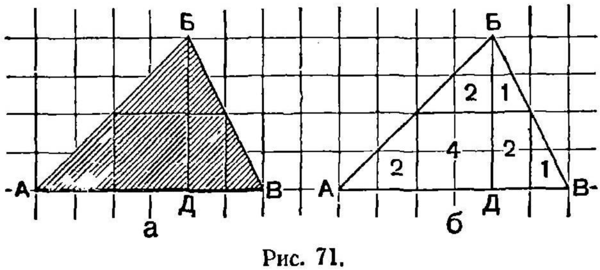


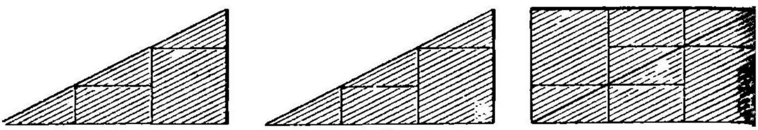
Рис. 71.

щади листком бумаги или начертив их мелом на классной доске, что непосредственный подсчёт возможен лишь в редчайших случаях. Поэтому необходимо знание косвенного способа вычисления площади треугольника.

I. Площадь прямоугольного треугольника

Приводим далее примеры, указывающие способы косвенного вычисления площадей треугольников. Модель строим из частей квадрата.

1. Способ сложения. Два прямоугольных треугольника (*а*) и (*б*) (рис. 72) равны. (Проверяем наложением). Перевернув один из них, прикладываем их друг к другу гипотенузами (рис. 72): образуется пря-



а б в

Рис. 72.

моугольник. Вычисляем его площадь, перемножая основание и высоту (т. е. катеты одного из данных треугольников). Получаем $6 \times 3 = 18$. Так как площадь прямоугольника составлена из площадей двух равных треугольников, то для вычисления площади одного треугольника делим полученное произведение пополам. Площадь треугольника равна: $18 : 2 = 9$ кв. ед. Результат в данном случае можно проверить непосредственным подсчётом квадратных единиц, так как площадь каждого малого треугольника равна единице. Подсчёт целых квадратов внутри треугольника и площадей малых треугольников даёт:

$4 + 2 + 3 = 9$ кв. ед., т. е. то же число, какое получилось раньше.

2. Способ дополнения (рис. 73). Образуем цветным шнуром на демонстрационной доске прямоугольный треугольник с катетами 8 и 6. Дополним его до прямоугольника с такими же сторонами (охватывая чёрным шнуром весь прямоугольник). Площадь пря-

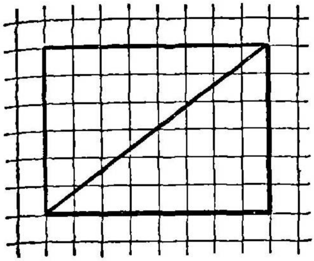


Рис. 73.

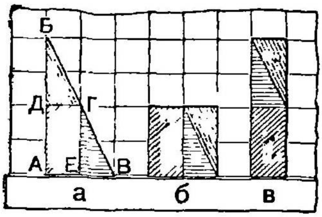


Рис. 74.

моугольника равна $8 \times 6 = 48$ кв. ед., а так как диагональ делит прямоугольник на равные треугольники, то площадь одного треугольника получим, деля 48 на 2. Следовательно, площадь прямоугольного треугольника получим, перемножая его катеты и деля произведение их пополам: $(8 \times 6) : 2 = 24$ кв. ед.

3. Превращение прямоугольного треугольника в равновеликий прямоугольник. Построим из частей квадрата прямоугольный треугольник *АБВ* с катетами 2 и 4 (рис. 74а). Разделив пополам стороны *АБ* и *БВ*, повернём $\triangle$ *ГБД* около точки *Д* на развёрнутый угол (180°). Тогда наш треугольник превратится в равносоставленный равновеликий ему квадрат с площадью $2 \times 2 = 4$ кв. ед. (рис. 74,*б*). Следовательно, и площадь треугольника *АБВ* тоже получим, перемножая катет на половину другого катета, иначе, перемножая катеты и деля их произведение пополам.

Можно превращение выполнить иначе: повернуть треугольник *ГВЕ* вверх около точки *Г* на развёрнутый угол (180°). Образуется прямоугольник со сторонами 4 и 1, площадь которого тоже равна 4 (рис. 74,*в*).

Проделав достаточное число упражнений, подобных указанным выше (не менее 8—10), можно, наконец, установить вместе с учениками общее правило и вычислять площади прямоугольных треугольников (уже не производя преобразований), измеряя их катеты, перемножая их длину и деля произведение пополам.

II. Площадь остроугольного треугольника

Следует проработать по нескольку задач с различными числовыми данными на каждый вид упражнений, приведённых ниже.

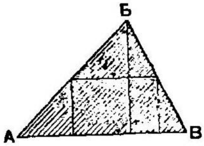


Рис. 75.

1. На классной доске из „частей квадрата“ монтируется модель (рис. 75).

Площадь треугольника вычисляется как сумма площадей двух прямоугольных треугольников:

$$\text{пл. } \triangle\, АБВ = \frac{4 \cdot 4}{2} + \frac{2 \cdot 4}{2} = 8 + 4 = 12 \text{ кв. ед.}$$

2. Та же площадь вычисляется прямым подсчётом, если известна площадь, занимаемая каждой деталью:

$$\text{пл. } \triangle\, АБВ = 2 + 2 + 4 + 1 + 2 + 1 = 12 \text{ кв. ед.}$$

3. Она же вычисляется как половина площади прямоугольника (рис. 76). Составив два равных треугольника *АБВ* и *ДЕЖ*, мы делим △ *ДЕЖ* на два прямоугольных треугольника: *ДЕЗ* и *ЕЗЖ*, и прикладываем их, перевернув, сверху к треугольнику *АБВ*. Сумма их площадей, очевидно, равна площади прямоугольника, т. е. равна $6 \times 4 = 24$ кв. ед. Откуда площадь о д н о г о треугольника *АБВ* равна 12 кв. ед.

Тот же треугольник можно превратить в равносоставленный и, следовательно, равновеликий прямоугольник двумя способами:

4. Повернём △ *ГБЕ* (рис. 77,*а*) около точки *Г* вниз на 180° и наложим его гипотенузой *ГБ* на сторону *АГ*, а △ *БЕД* повернём около точки *Д* до совпадения гипотенузы *БД* со стороной *ДВ*. Тогда △ *АБВ* превратится в равносоставленный, а следовательно, равновеликий, прямоугольник *АКЛВ*, площадь которого полу-

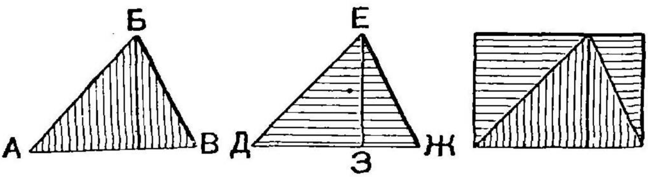


Рис. 76.

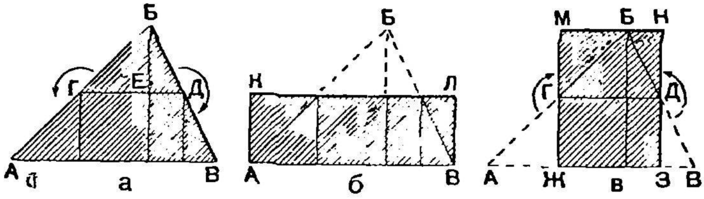


Рис. 77.

чим, умножая основание *АВ* на половину высоты треугольника (рис. 77,*б*). Следовательно, площадь $\triangle$ *АБВ* = = пл. *АКЛБ* $= 6 \times 2 = 12$ кв. ед.

5. Повернув $\triangle$ *АГЖ* (рис. 77,*в*) около точки *Г* вверх на 180°, а $\triangle$ *ЗДВ* вверх на 180°, мы превращаем $\triangle$ *АБВ* в прямоугольник *ЖМНЗ*, ему равновеликий. Площадь его получаем, умножая половину основания треугольника *АБВ* на его высоту: $3 \times 4 = 12$ кв. ед.

6. Образуем $\triangle$ *АБВ* (рис. 78) цветным резиновым шнуром на демонстрационной доске. Разбивая площадь его на части, составленные из частей квадрата, вычисляем её непосредственным подсчётом:

$$(1 + 1 + 1) + (4 + 4 + 4) + (2 + 4) + (2 + 2 + 2) = 3 + 12 + 6 + 6 = 27 \text{ кв. ед.}$$

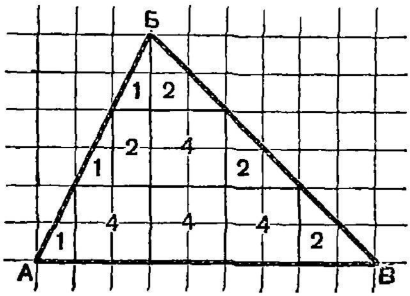


Рис. 78.

Способ возможен лишь в исключительных случаях.

7. Натянув чёрный шнур, образующий прямоугольник *А Г Д В* (рис. 79), легко показать, что площадь треугольника *АБВ*, составленная из двух прямоугольных треугольников (I и II), вдвое

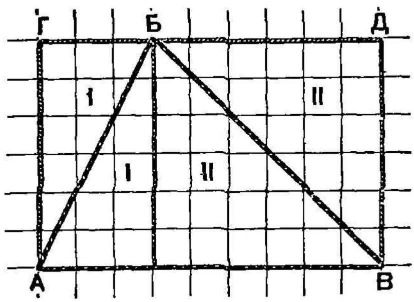


Рис. 79.

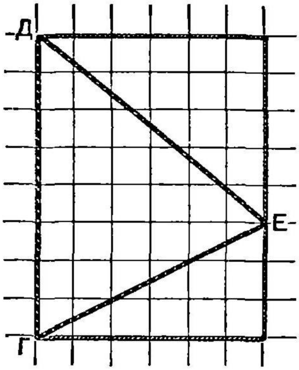


Рис. 80.

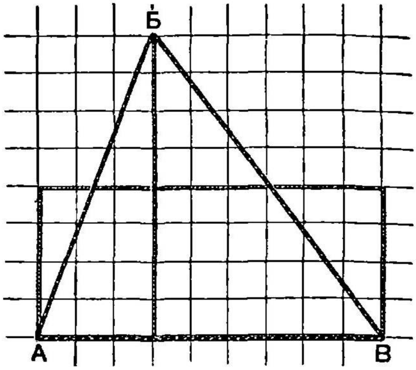


Рис. 81.

меньше площади прямоугольника *АГДВ*, содержащего по два таких же треугольника. Вычисляя площадь прямоугольника, получаем $9 \times 6 = 54$, следовательно, площадь треугольника *АБВ* равна 27 кв. ед.

8. Соединив шнуром любые три точки, из которых две лежат на одной линии сетки, легко вычислить косвенным способом площадь треугольника (рис. 80):

$$\text{пл. } \triangle\, ГДЕ = \frac{1}{2} 8 \cdot 6 = 24 \text{ кв. ед.}$$

9. Рисунок 81 показывает превращение остроугольного треугольника в равновеликий ему прямоугольник способом, указанным в п. 4. Фигуры построены цветными шнурами.

$\text{Пл. } \triangle\, АБВ = 9 \times 4 = 36.$

III. Площадь тупоугольного треугольника

Вычисление площадей тупоугольных треугольников производится посредством построения их на демонстрационной доске или в тетради разными способами.

Если стороны тупого угла не совпадают с какой-нибудь из линий сетки, но противолежащая сторона совпадает с одной из них, то площадь треугольника находится одним из предыдущих способов: или как сумма площадей прямоугольных треугольников, или как половина площади прямоугольника, или превращается в равновеликий прямоугольник. Например:

$$\text{пл. } АБВ = \frac{1}{2}5 \cdot 4 + \frac{1}{2}7 \cdot 4 = 24 \text{ кв. ед. (рис. 82)}$$

$$\text{пл. } АБВ = \frac{1}{2}12 \cdot 4 = 24 \text{ кв. ед.} \qquad \text{(рис. 83)}$$

$$\text{пл. } АБВ = 12 \cdot 2 = 24 \text{ кв. ед.} \qquad \text{(рис. 84).}$$

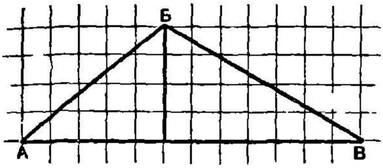


Рис. 82.

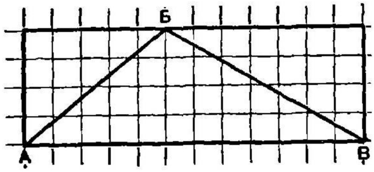


Рис. 83.

Во всех случаях учителю следует подчеркнуть, что все разнообразные приёмы вычисления сводятся к одному, основному правилу вычисления площади треугольника умножением основания на высоту и делением произведения пополам.

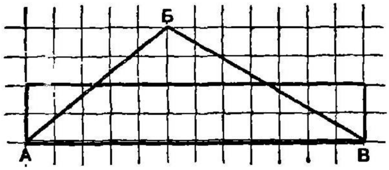


Рис. 84.

В дальнейшем, при решении задач на вычисление площадей, следует применять с учащимися общий и основной приём вычисления площади треугольника.

§ 65. Способы задания фигур на доске или в тетради с квадратной сеткой Координаты точек

1. Задачи на демонстрационной доске или на странице тетради в клетку даются непосредственно самой фигурой, которую учитель строит на демонстрационной или классной доске, а ученики копируют в тетрадях с помощью координат вершин фигуры, задаваемых в порядке обхода по периметру.

Координаты точек строятся следующим образом. Каждая точка на квадратной сетке нумеруется двумя номерами. Для этого в левом нижнем углу страницы выберем „начало“—точку O. Через неё проходят две линии сетки—две оси: горизонтальная OX и вертикальная OY. Тогда все точки пересечения линий сетки на странице можно перенумеровать, каждую двумя номерами. Первый номер точки—число делений оси OX до вертикальной линии, на которой находится точка A, а второй номер—число делений этой вертикальной линии до выбранной точки. Нумерованные точки записываются так: впереди пишут большую прописную букву—название точки, а за ней в круглых скобках первый номер—запятая—второй номер[1].

Так, чтобы поставить точку $Д$ (3,5), надо по оси OX отсчитать 3 деления и от третьего деления по вертикальной прямой отсчитать вверх 5 делений; на последнем (пятом) делении поставить точку $Д$ (рис. 85).

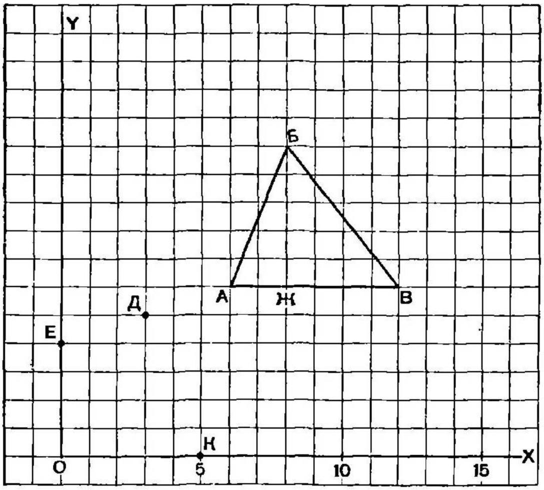


Рис. 85.

2. Построить треугольник $АБВ$ по вершинам $А$(6,6), $Б$ (8,11), $В$ (12,6). Соединять точки прямыми надо по указанному на рисунке 85 порядку: $АБ$, $БВ$, $ВА$.

Если точка лежит на оси OX, то её второй номер

[1] Применение способа координат сравнительно с обычным более ограниченное. Координаты (только положительные) применяются исключительно для постановки точек. Никаких операций с ними не производится.

равен нулю, а если точка лежит на оси *ОУ*, то её первый номер равен нулю.

Примеры. Точки *К* (5,0), *Е* (0,4). Сама точка *О* обозначается так: *0* (*0, 0*), так как она лежит на обеих осях (рис. 85).

Построив фигуру, ученики должны рассмотреть её и разобрать, что является искомым, какие отрезки для решения задачи надо измерить и какие действия с полученными числами следует произвести,—словом, составить план решения задачи. Если способов решений несколько, то надо выбрать самый простой. Решив задачу, следует сверить ответ с чертежом. Например, для вычисления площади треугольника *АБВ*, очевидно, проще всего принять за основание *АВ* и измерить его—сосчитать деления от *А* до *Б*: *АБ*=6, опустить из *Б* высоту *БЖ* и измерить её: *БЖ*=5 и, наконец, вычислить площадь треугольника *АБВ*:

$$\text{пл. } \triangle\ АБВ=(6\times5):2=15 \text{ кв. ед.}$$

Такой способ задания геометрических задач лучше обычно задаваемого числами, так как он менее формален, чем при задавании готовых данных, и развивает самодеятельность ученика. Ученик должен сам, в зависимости от своего плана выбрать необходимые для измерения отрезки, измерить их в единицах сетки и с полученными от измерения числами провести вычисление по определённому плану.

При решении задач на вычисление площади треугольника с целочисленными данными—на демонстрационной доске или в тетрадях в клетку—следует остановиться на случае, когда ни одна из сторон треугольника не совпадает с линиями сетки. Тогда этот треугольник „вписывается“ в прямоугольник, на периметре которого лежат вершины треугольника.

Следующий пример даёт способ вычисления площади такого треугольника (этот приём пригоден вообще в случаях вычисления площадей многоугольников неправильной формы).

Построим на демонстрационной доске или в тетради в клетку $\triangle$ *АБВ* (рис. 86): *А* (2,3), *Б* (7,9), *В* (14,1), стороны которого не совпадают с линиями сетки. Опишем около него прямоугольник *ВДГЕ*, на пери-

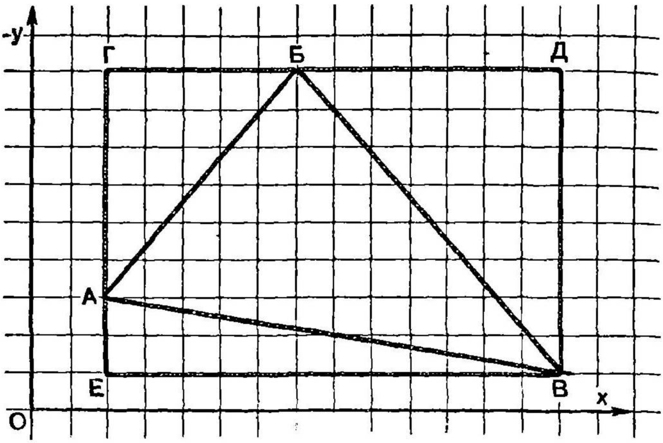


Рис. 86.

метре которого лежит $\triangle$ *АБВ* своими вершинами. Тогда площадь треугольника *АБВ* получится как разность между площадью прямоугольника и трёх прямоугольных треугольников: *АЕВ, БВД, АБГ.*

Пл. *АБВ*$=12\times 8-(12\cdot 2):2-(8\cdot 7):2-(5\ 6):2=96-$ $-12-28-15=41$ кв. ед.

§ 66. Площади параллелограма и ромба

1. Из двух прямоугольных равных треугольников, квадрата и прямоугольника, взятых из „частей квадрата“, строим на демонстрационной доске параллелограм. Превратим его в равновеликий прямоугольник. Для этого достаточно снять правый прямоугольный треугольник и приставить его с левой стороны (рис. 87).

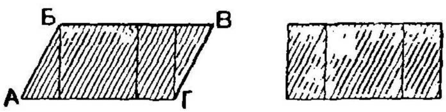


Рис. 87.

Площадь прямоугольника равна $4\times 2=8$ кв. ед. Площадь параллелограма равна тому же числу, т. е. 8 кв. ед.

Результат можно проверить прямым подсчётом: пл. *АБВГ*$=1+4+2+1=8$ кв. ед.

Образуем на демонстрационной доске цветным

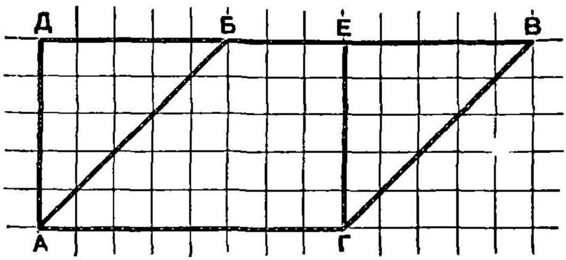


Рис. 88.

шнуром параллелограм *АБВГ* (рис. 88). Для вычисления его площади построим чёрным шнуром прямоугольник *АДЕГ* на том же основании и с той же высотой, что и параллелограм. Высота *ЕГ* есть высота параллелограма. Обе фигуры равновелики, так как они составлены из двух одинаковых частей каждая ($\triangle$ *АДБ*$=\triangle$*ГЕВ*, так как их катеты равны). Находим площадь прямоугольника: $8 \times 5 = 40$ кв. ед., следовательно, и площадь параллелограма равна 40 кв. ед.

2. Вычислите площадь параллелограма *АБВГ* (рис. 89), не образуя прямоугольника. Какие отрезки придётся для этого измерить? Покажите на сетке основания и несколько высот параллелограма.

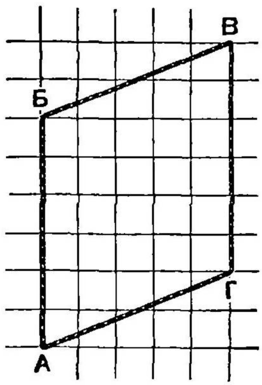


Рис. 89.

3. Ромб (рис. 90), образованный из четырёх равных прямоугольных треугольников, взятых из набора частей квадрата, превращается двойной перестановкой частей в равносоставленный прямоугольник двумя способами:

а) Прямоугольник построен на бо́льшей диагонали. Его высота равна половине малой диагонали ромба. Его площадь получим, умножая бо́льшую

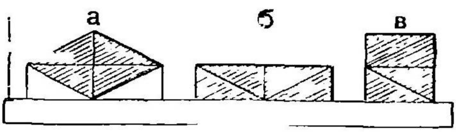


Рис. 90.

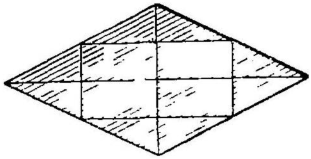


Рис. 91.

диагональ ромба на половину малой (рис. 90,*б*).

б) Прямоугольник построен на малой диагонали ромба (рис. 90,*в*). Его площадь получим, умножая меньшую диагональ ромба на половину бо́льшей. Следовательно,

$$\text{пл. ромба} = 4 \times 1 = 4 \text{ кв. ед.},$$

иначе:

$$\text{пл. ромба} = 2 \times 2 = 4 \text{ кв. ед.}$$

4. Построить из четырёх прямоугольников и 8 малых треугольников (из набора частей квадрата) ромб и вычислить его площадь (рис. 91).

5. Постройте на демонстрационной доске цветным шнуром ромб с диагоналями 14 и 8. Вычислите его площадь.

6. Покажите чертежом в тетради и построением из двух резиновых шнурков на доске, что ромб равновелик половине прямоугольника, построенного на его диагоналях (рис. 92).

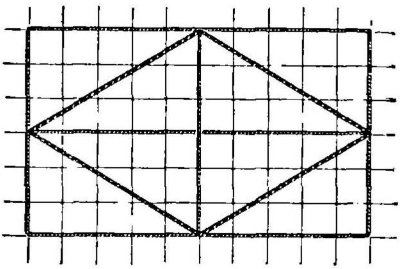


Рис. 92.

§ 67. Площадь трапеции

Модель трапеции построена из частей квадрата: трёх квадратов, трёх прямоугольников, двух равнобедренных прямоугольных и двух прямоугольных треугольников (рис. 93,*а*).

Прямой подсчёт суммы их площадей, составляющих площадь трапеции, даёт:

$$4 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 24 \text{ кв. ед.}$$

Трапеция превращается в равновеликий прямоугольник двумя способами:

1-й способ (рис. 93,*б*)—посредством поворота

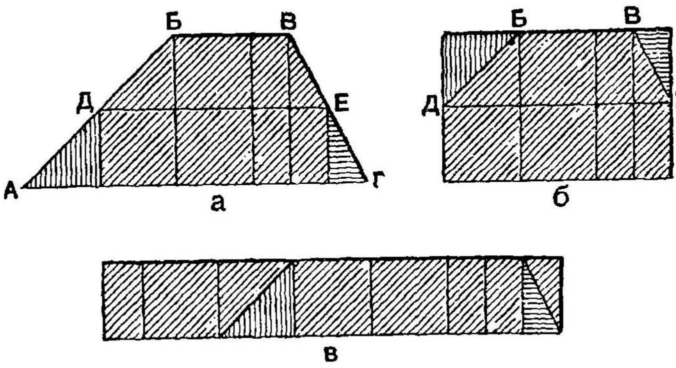


Рис. 93.

двух нижних прямоугольных треугольников около точек *Д* и *Е* на развёрнутый угол вверх. Получается прямоугольник с основанием, равным средней линии трапеции 6, и с высотой, равной высоте трапеции 4, откуда площадь прямоугольника равна 24 кв. ед. Частный случай общего правила: площадь трапеции измеряется произведением её средней линии на высоту.

2-й способ (рис. 93,*в*). Верхняя часть трапеции делится на две неравные части: левая, состоящая из равнобедренного треугольника, квадрата и прямоугольника, поворачивается около точки *Д* на 180° (вниз); правая, состоящая из одного меньшего прямоугольного треугольника, поворачивается около точки *Е* на 180° (вниз). В образованном прямоугольнике (*в*) высота 2 равна половине высоты трапеции (4 : 2); верхнее основание 12 равно двум средним линиям (6 · 2), а нижнее 12, ему равное, равно сумме оснований трапеции (9 + 3). На данном примере мы видим, во-первых, что средняя линия трапеции равна полусумме оснований, т. е. $2 \cdot 6 = 9 + 3 = 12$, а во-вторых, находим, что площадь трапеции измеряется произведением суммы оснований на половину высоты: $(9 + 3) \cdot 2 = 24$ кв. ед.

Проверьте правило вычисления площади трапеции на других примерах.

Метод сложения. Возьмём из частей квадрата по два равнобедренных, два „узких“ треугольника и

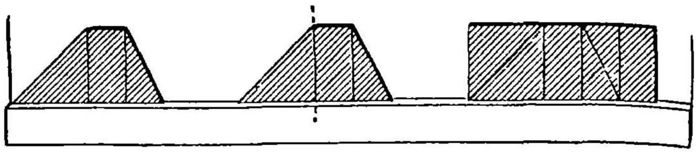


Рис. 94.

два прямоугольника и составим из них две равные трапеции (рис. 94).

К первой трапеции приставим вторую, перевернув её и разбив на две части: слева приставим равнобедренный треугольник, а справа—остальную часть второй трапеции. Образовался прямоугольник с основанием, равным сумме двух оснований одной из трапеций, и с высотой, равной высоте трапеции. Его площадь равна, следовательно, произведению суммы оснований одной трапеции на её высоту. А так как площадь одной трапеции составляет половину площади прямоугольника, то площадь нашей трапеции измеряется полусуммой её оснований, умноженной на высоту.

Вычисление: пл. трапеции $= \frac{(4+1)\cdot 2}{2} = 5$ кв. ед.

Непосредственный подсчёт даёт: $2+2+1=5$.

Повернув верхнюю часть трапеции (рис. 95,*а*) полностью около точки *Д* на полуоборот, мы превращаем трапецию в равновеликий параллелограм (рис. 95,*б*).

Повернув ту же часть около точки *E* на 180°, мы образуем другой, равновеликий трапеции, параллелограм (рис. 95,*в*). У обоих верхние основания равны двойной средней линии, а нижние—сумме оснований трапеции, откуда средняя линия трапеции равна полусумме оснований. Площади их равны:

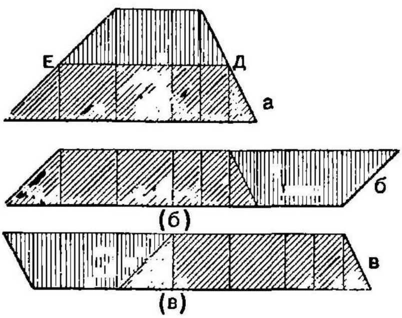


Рис. 95.

$(9+3)\cdot 2=(6\cdot 2)\cdot 2=$
$=24$ кв. ед.

Построения трапеции с помощью упругого цветного шнура дают учителю возможность в короткое время задать самые разнообразные задачи на вычисление площадей трапеции в целых числах, выбирая высоту равной любому чётному числу. Для вычисления следует давать трапеции в разнообразных положениях, чтобы отучить учащихся от шаблонных представлений (рис. 96).

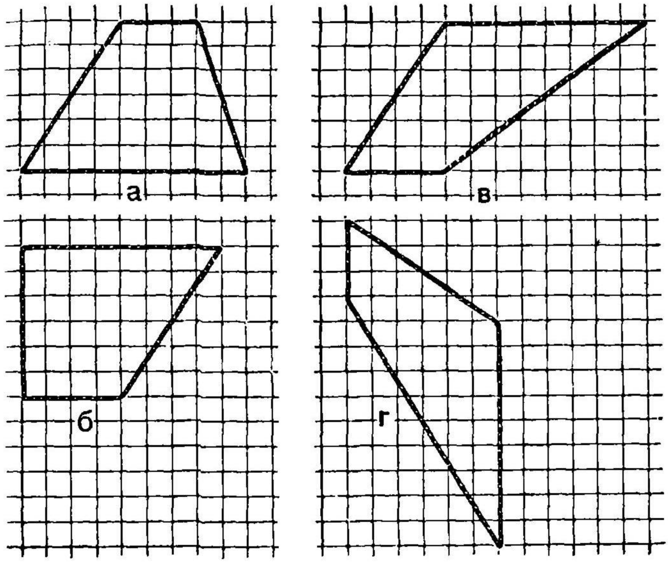


Рис. 96.

После достаточного числа упражнений на вычисление площадей трапеций разной величины и формы, даваемых на демонстрационной доске или на доске, разлинованной в клетку, или в тетрадях в клетку (индивидуально), можно дать следующую задачу (на демонстрационной доске—шнурами, а в тетради—цветным карандашом). Показать, что четыре трапеции (рис. 96 *а, б, в, г*) равновелики.

§ 68. Деление прямолинейных фигур на равновеликие части

Интересными и практически полезными задачами являются задачи на деление прямоугольников, треугольников, параллелограмов и трапеций на равновеликие части, т. е. части, имеющие равные площади. Укажем несколько примеров:

1. Деление прямоугольника пополам. На бумажной модели легко показать, что прямоугольник делится любой прямой, проходящей через центр симметрии (точку пересечения диагоналей), пополам. Могут быть случаи деления прямоугольника на два равных прямоугольника, два равных треугольника, две равные трапеции; при этом очевидно, что все половинки, полученные от разрезывания прямоугольника, равновелики, но не равны.

Если фигура построена на клетчатой бумаге, то равновеликость легко проверить вычислением. Измеряемые элементы удобнее выбирать, выражая их в чётных числах.

2. Чтобы разделить пополам площадь треугольника, достаточно провести из его вершины медиану, т. е. соединить вершину с серединой противоположной стороны. Для деления площади треугольника на 2, 3, 4 части достаточно разделить на столько же частей его основание.

3. Для деления площади трапеции пополам или на 2, 3, 4 равные части достаточно разделить её среднюю линию иа 2, 3, 4 равные части прямыми, соединяющими точки обоих оснований и не пересекающимися друг с другом (в каждом отдельном случае).

4. Разделить площадь трапеции (рис. 97) пополам; отделить от неё $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{3}{4}$ части разными способами.

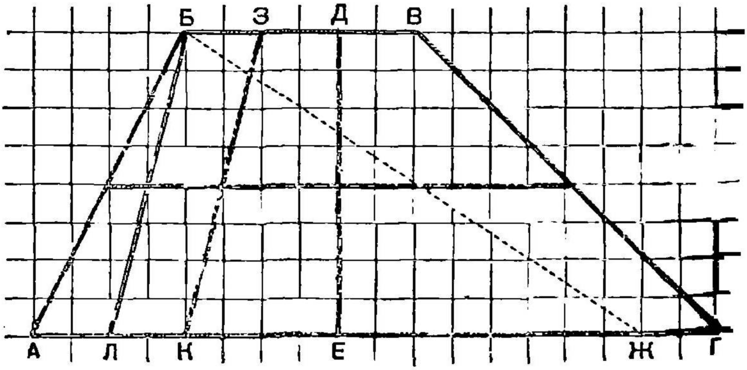


Рис. 97.

5. Увеличить площадь данной трапеции вдвое, втрое—разными способами.

6. Показать разрезыванием и наложением, что любая прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей прямоугольника, делит его на равновеликие части; что любая прямая, делящая среднюю линию прямоугольника в отношении $1:2$ и пересекающая его основания, делит его площадь в том же отношении, и т. д.

Эти упражнения полезно проводить также на фигурах, построенных на демонстрационной доске, выбирая элементы фигур, подлежащие разделению, соответственно удобных размеров, например основание треугольника или среднюю линию удобно взять 12 или 24.

§ 69. Площади многоугольников произвольной формы

Модели строятся цветными шнурами на демонстрационной доске.

1. Площадь четырёхугольника произвольной формы вычисляется или как сумма площадей двух треугольников, образованных диагональю (рис. 98), или как часть площади прямоугольника *ДЕЖЗ*, на сторонах которого лежат вершины данного неправильного четырёхугольника:

$$S=56-\frac{1}{2}(3\times 2)-\frac{1}{2}(4\times 3)-\frac{1}{2}(5\times 2)-\frac{1}{2}(5\times 6).$$

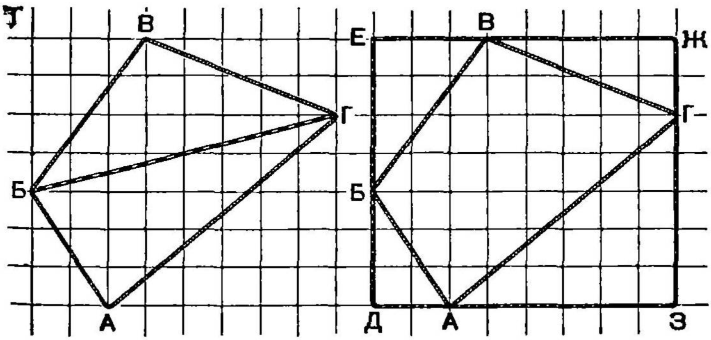


Рис. 98.

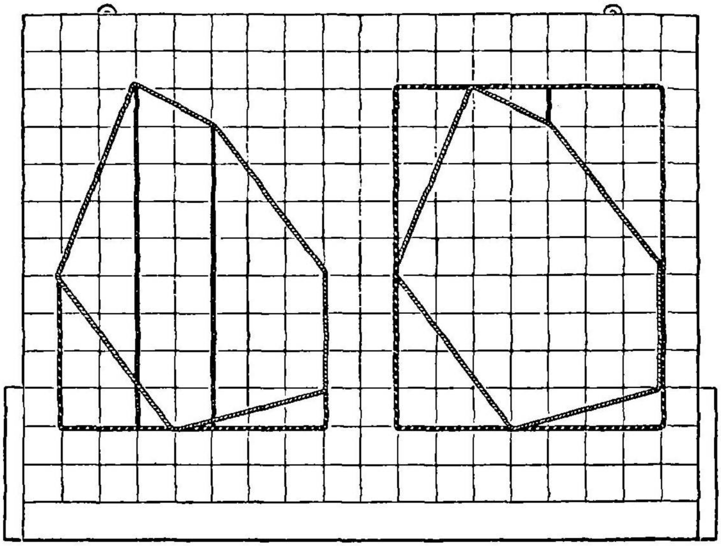


Рис. 99.

2. Многоугольник произвольной формы, например шестиугольник, образованный упругим кольцевым шнуром (рис. 99).

Площадь многоугольника вычисляется как сумма площадей трёх трапеций, из которой вычитается сумма площадей двух треугольников:

$S = (4+9)+(8+9)+(8+4) \cdot 3:2-3 \cdot 2-2=$
$=40$ кв. ед.

или как разность площади прямоугольника и четырёх прямоугольных треугольников и трапеций:

$S = 7 \cdot 9-(3 \cdot 4:2+2+5+1+9)=63-23=40$ кв. ед.

§ 70. Правила измерения площадей, показываемые на перегибании листка бумаги

В случае, если в школе не будет демонстрационной доски или доски, разлинованной в клетку, учитель может провести демонстрацию способов вычисления площадей прямоугольного, остроугольного и тупоугольного треугольников, параллелограма, ромба и трапеции на моделях, образованных перегибанием листка бумаги. Особенно ценным при этом будут самостоятельные упражнения учащихся на своих листках. Коллективный опыт всегда более активен и более убедителен, чем простое наблюдение.

Площадь прямоугольного треугольника

Из двойного листа бумаги образуем перегибанием прямоугольный треугольник. Разнимая лист, получим два равных прямоугольных треугольника *АБГ* и *ГБВ*. Вырезаем их. Прикладывая их друг к другу гипотенузами и прикалывая модели к доске, мы образуем прямоугольник *АДБГ*, стороны которого были катетами треугольника. Площадь прямоугольника измеряют произведением его сторон, следовательно, площадь прямоугольного треугольника, составляющего половину площади прямоугольника, измеряется половиной произведения катетов (рис. 100).

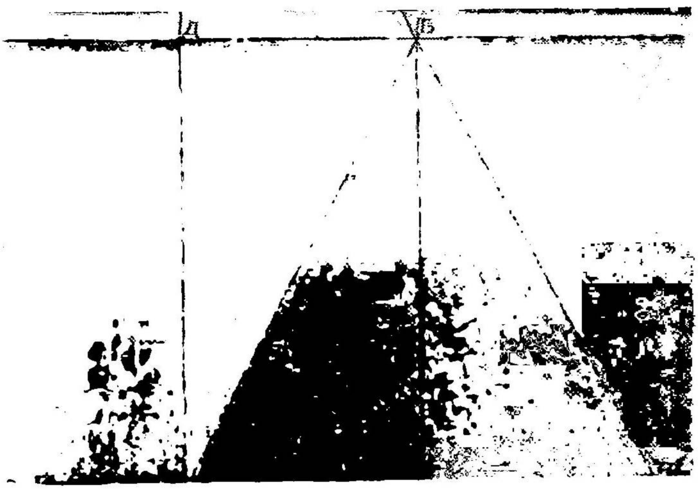


Рис. 100.

Площадь остроугольного треугольника

Из двойного листа бумаги перегибанием образуем косоугольный треугольник любой формы. Разнимая

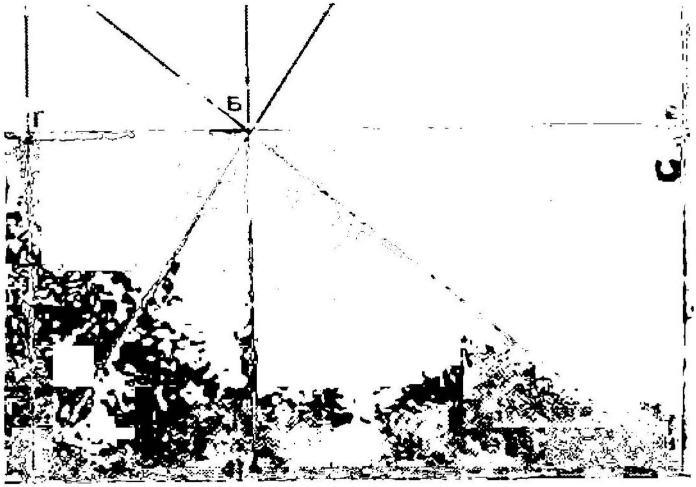


Рис. 101.

листки, получаем два равных треугольника (рис. 101). Соединяя симметричные вершины, образуем высоты обоих треугольников *БД* и *БД'*. Треугольники вырезываем. Один из них, не указанный на рисунке, разрезаем по высоте. Прикладывая полученные прямоугольные треугольники *АГБ* и *ВЕБ* к неразрезанному треугольнику *АБВ*, мы образуем прямоугольник *АГЕВ*, основанием и высотой которого служат основание и высота построенного косоугольного треугольника. Так как прямоугольник составлен из двух равных треугольников, то площадь каждого из них измеряется половиной произведения основания на высоту.

Превращение косоугольного треугольника в равносоставленный прямоугольник

В вырезанном из бумаги треугольнике проводим перегибанием высоту *БД* из вершины *Б* (рис. 102). Делим перегибанием в точке *Е* высоту *БД* пополам. При этом стороны *АБ* и *БС* разделятся прямой *КЛ* в точках *Ж* и *З* пополам. Отрезав треугольник *ЖБЗ*, разрежем его по линии *БЕ* на два прямоугольных треугольника *ЕБЖ* и *БЗЕ*. Оба треугольника, повернув

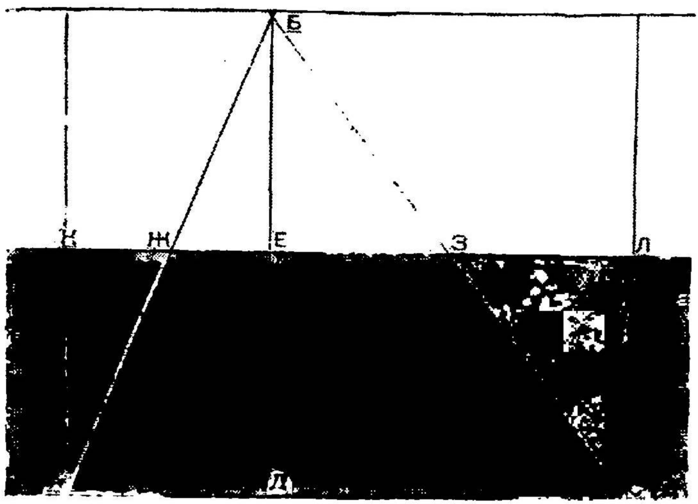


Рис. 102.

вершинами *Б* вниз, приложим левый слева, а правый справа своими гипотенузами к трапеции *АЖЗС*. Тогда образуется прямоугольник *АКЛС* с основанием *АС* и высотой *АК* = *БЕ*, равной половине высоты треугольника. Площадь прямоугольника, равносоставленного треугольнику *АСБ*, получим, перемножая длину *АС* на *ДЕ*, т. е. основание треугольника *АБС* на половину его высоты. В дальнейшем, делая все эти перегибания и разрезывания в воображении, можем просто вычислить площадь треугольника, не разрезывая, а умножая его основание на половину высоты.

Площадь трапеции

Сложим прямоугольный лист бумаги строго пополам и в сложенном виде пересечём двумя наклонными и пересекающимися перегибами. В результате получим, расправив лист, две равные трапеции. Одну из них оставим целой, а другую перегнём по любой прямой, перпендикулярной к основаниям, и разрежем по перегибу. Перевернув обе разрезанные части второй трапеции вѐрхом вниз, приставим их к первой трапеции, левую часть (I) слева, а правую часть (II) справа.

Тогда составленные части образуют прямоугольник, основания которого будут равны сумме оснований трапеции, а высота равна высоте трапеции. Отсюда легко вывести правило измерения площади трапеции.

ГЛАВА IX

ПОСТРОЕНИЯ УГОЛЬНИКОМ И ЛИНЕЙКОЙ

§ 71. Общие замечания

При переходе к новому и важному способу построений геометрических фигур угольником и линейкой перед учениками раскрывается новая область геометрических построений и вычислений. Вместо изолированных точек квадратной сетки и целочисленных отрезков, учащиеся строят отрезки произвольной длины непрерывным движением.

Измерения ведутся не в единицах квадратной сетки, а в квадратных дециметрах, сантиметрах и миллиметрах, вводятся составные именованные числа и метрические меры площади.

Поскольку методика работы с угольником и линейкой хорошо разработана в литературе, автор в более простых случаях считает возможным ограничиться лишь перечнем упражнений, содержащим построения геометрических фигур, и ознакомлением с их простейшими свойствами.

Учитель проводит свои объяснения, сопровождая их примерными построениями на классной доске посредством угольника и линейки, размеченной на сантиметры. Учащиеся выполняют свои построения в тетрадях без линеек (в крайнем случае—в одну линейку) посредством угольников и линеек с миллиметровыми делениями.

Необходимо следить за тем, чтобы по градуированному ребру ученической линейки производились только измерения, а черчение выполнялось по свободному от делений ребру.

Задавать отрезки надо в миллиметрах, откладывая их по градуированной линейке или ленточкой миллиметровой бумаги с точностью до $^1/_2$ *мм*, обходясь пока без циркуля.

Чертить надо только остро очинённым мягким карандашом, но не чернилами. Упражнения должны быть смешанного характера и содержать как построения, так и вычисления. Не следует забывать, что при переходе к построениям посредством угольника и линейки начинается новая и важная вычислительная работа—измерения в сантиметрах и миллиметрах, составные именованные числа и вычисления с мерами площади.

§ 72. Отрезки. Углы. Треугольники

Примерные упражнения. Каждого вида упражнения следует делать 3—4 раза: одно—на доске, другое—учащиеся самостоятельно в тетрадях, третье—дома.

1. На выбранной прямой отложите отрезки, равные: 18 *мм*; 37 *мм*; 5 *см* 9 *мм*; 113 *мм*.

2. Начертите 3 любых отрезка и измерьте их длину: а) в сантиметрах и миллиметрах; б) в одних миллиметрах.

3. Из точки *А*, данной на прямой *МН*, восставить к ней перпендикуляр. Это можно делать так: приставим снизу к прямой *МН* линейку, поставим на неё угольник катетом и будем передвигать его по линейке до тех пор, пока вершина прямого угла не совпадёт с точкой *А*. Тогда по другому катету, перпендикулярному к прямой *МН*, можно провести прямую *АБ* ⊥ *МН* (рис. 103). Сколько таких перпендикуляров (из данной точки) можно провести? Почему?

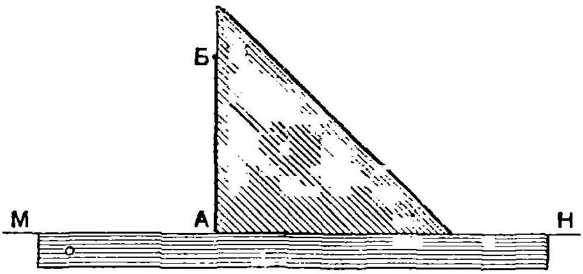


Рис. 103.

4. Из точки A на прямой провести к ней, в одну сторону, перпендикулярный отрезок длиной в 83 *мм.*

5. На данной прямой построить прямоугольный треугольник с катетами 73 *мм* и 61 *мм.*

6. На данной прямой построить равнобедренный треугольник с основанием 96 *мм* и высотой 53 *мм.*

7. Из точки A, взятой вне прямой MH, опустить на прямую перпендикуляр (рис. 104). Приставим ли-

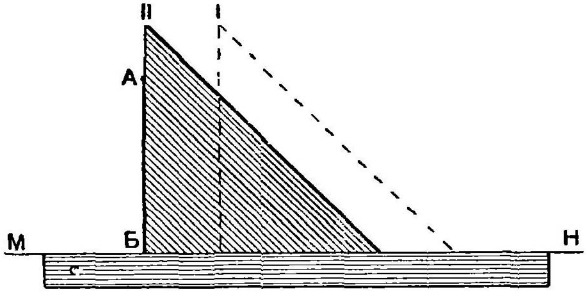


Рис. 104.

нейку к прямой MH со стороны, противоположной точке A, поставим на неё угольник и будем передвигать его по линейке, пока точка A не совпадёт с краем угольника, перпендикулярного к прямой MH. Тогда по этому краю угольника и проведём через точку A прямую $AБ$, перпендикулярную к MH. Измерим перпендикуляр $AБ$ в миллиметрах. Он покажет нам расстояние точки A до прямой MH.

Запомните: из внешней точки на прямую можно опустить только один перпендикуляр.

Расстояние от точки до прямой измеряется длиной перпендикуляра, опущенного из точки на прямую.

8. Построить прямоугольный треугольник с разными катетами. Постройте другой с такими же катетами. Можно ли их совместить так, чтобы они слились в один?

Прямоугольные треугольники, у которых катеты одного равны катетам другого, равны друг другу.

9. Построить угол, равный данному углу. На стороне данного угла откладываем отрезок $AБ$ и восстав-

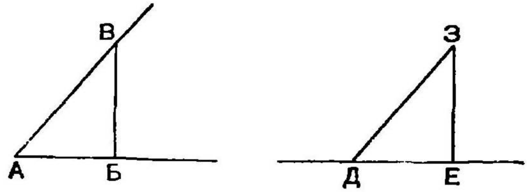


Рис. 105.

ляем к ней перпендикуляр *БВ* (рис. 105). Он пересечёт другую сторону в точке *В*, образовав треугольник *АБВ*. Построим (упр. № 8) треугольник, равный треугольнику *АБВ*. Пусть это будет треугольник *ЕДЗ*. Тогда углы *БАВ* и *ЗДЕ* будут равными.

Объяснение: треугольники *БАВ* и *ЗДЕ* равны, так как они прямоугольные и их катеты равны. Такие треугольники при наложении совпадают, а тогда совпадут и их углы *БАВ* и *ЗДЕ*.

10. Разделить отрезок *АБ* пополам (рис. 106). В точках *А* и *Б*, в разные стороны от прямой *АБ* восставляем перпендикуляры и откладываем на них равные отрезки *АВ* = *БД*. Соединяем точки *В* и *Д* прямой. Она пересечёт наш отрезок *АБ* точно посередине, в точке *Г*. Проверьте измерением или ленточкой бумаги, что *АГ* = *ГБ*.

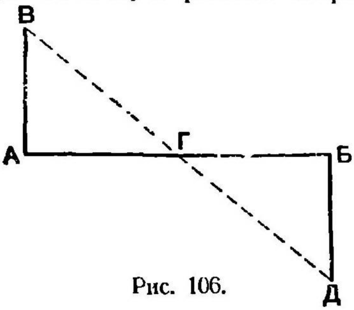


Рис. 106.

11. Разделить угол пополам. Отложим на сторонах угла от его вершины *А* равные отрезки *АБ* и *АВ* (рис. 107). Восставим из точек *Б* и *В* к сторонам угла перпендикуляры. Точку их пересечения *Г* соединим с *А*. Прямая *АГ* разделит угол пополам.

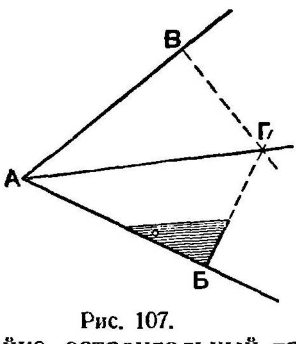


Рис. 107.

12. Построить высоты остроугольного треугольника.

Начертим на глаз по линейке остроугольный треугольник *АБВ*.

1) Опустим из вершины *А* на сторону *БВ* перпендикуляр *АД*.

2) Опустим из вершины *Б* на *АВ* перпендикуляр *БЕ*.

3) Опустим из вершины *В* на *АБ* перпендикуляр *ВЖ*. Эти три перпендикуляра *АД*, *БЕ* и *ВЖ* называются **высотами** треугольника. Сколько у треугольника высот? Все три высоты должны пересекаться в одной точке. Проверьте правильность вашего построения. Измерьте высоту и стороны треугольника в миллиметрах.

13. Площадь треугольника. Вычислите площадь вашего треугольника (упр. 12). Что для этого надо измерить? В каких единицах площади получится ответ? Переведите его в квадратные сантиметры и квадратные миллиметры. Дайте ответ в одних квадратных сантиметрах, отбросив квадратные миллиметры.

§ 73. Параллельные прямые

Луч. Представление о луче учащимся можно дать следующим объяснением. Фонарь от автомобиля бросает тёмной ночью луч света. Начало такого светового луча находится на лампочке внутри фонаря, сам световой луч направлен вперёд. Если на пути ему встретится стена дома, то луч упрётся в неё и тогда образуется световой отрезок с началом и концом, а если на пути луча ничего не встретится, то он уйдёт вдаль и конца у него не будет.

Такая прямая, которая имеет начало в определённой точке, а определённого конца не имеет, называется **лучом**.

Так как при удлинении сторон угла величина угла не изменяется, то считают, что **угол образован двумя лучами, выходящими из его вершины.**

Бесконечная прямая. Два ученика берут по катушке ниток, связывают нити концами и расходятся, держа катушки в руках и натягивая нить. Нитка будет разматываться, удлиняясь в обе стороны. Такая нить не будет иметь определённой длины, если вообразить, что катушки будут всё время разматываться. Она представляет прямую линию без концов, уходящую в обе стороны. Такую прямую называют бесконечной прямой.

На такой бесконечной прямой строят обыкновенно разные геометрические фигуры. Если на ней поставить одну точку, то последняя разделит бесконечную прямую на два луча, имеющие одно и то же начало и направленные в противоположные стороны. Эти лучи образуют развёрнутый угол.

Параллельные прямые. Поставим на линейку угольник и проведём по его катету $АБ$ перпендикуляр к прямой $МН$ (рис. 108). Передвинем угольник

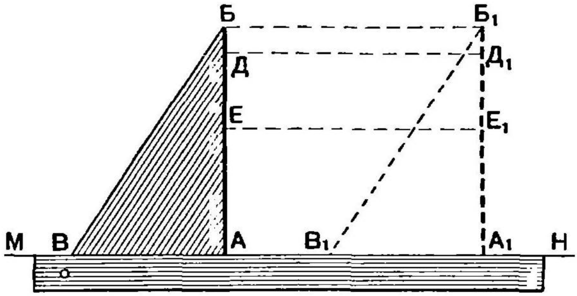


Рис. 108.

по линейке на новое место вершиной в точку $А_1$ и проведём по вертикальному катету новый перпендикуляр. Тогда все точки катета $АБ$ передвинутся на новые места $А_1$, $Б_1$, $Д_1$, $Е_1$, ни одна не останется на прежнем месте. Это, очевидно, верно, какой бы огромный угольник мы ни брали и какой бы длины прямые $АБ$ и $А_1Б_1$ ни чертили. Значит, прямые $АБ$ и $А_1Б_1$ будут отделены друг от друга и общих точек иметь не будут, т. е. не будут пересекаться, сколько бы мы их ни продолжали. Прямые, не пересекающиеся при своём продолжении, называются параллельными, что по-гречески значит „идущие одна вдоль другой".

Так как прямые $АБ$ и $А_1Б_1$ обе перпендикулярны к прямой $МН$, то два перпендикуляра к одной прямой параллельны между собой.

§ 74. Параллелограмы, ромбы, трапеции, многоугольники произвольной формы

1. Через данную точку провести прямую параллельно данной прямой $БВ$.

Решение. Из точки $А$ опускаем перпендикуляр

АГ на прямую *БВ*. Через ту же точку *А* восставляем перпендикуляр *АД* к прямой *АГ*. Тогда *АД*||*БВ* (рис. 109).

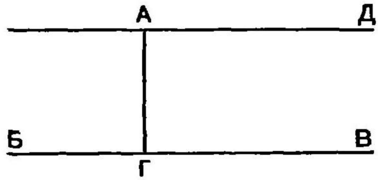


Рис. 109.

2. Провести прямые, параллельные прямой *МН* на расстоянии 38 *мм* от неё.

Решение. Из произвольной точки *А* на прямой *МН* восставляем в обе стороны перпендикуляр и откладываем на нём в обе стороны отрезки *АВ* и *АГ*, равные 38 *мм*. Из точек *В* и *Г* к прямой *ВГ* проведём два перпендикуляра *ГД* и *ГЕ*. Они и будут искомыми параллельными.

3. Построим параллелограм по двум сторонам и углу между ними. Для двух сторон выберем любые два отрезка *а* и *б*, а острый угол *А* начертим любой величины (рис. 110).

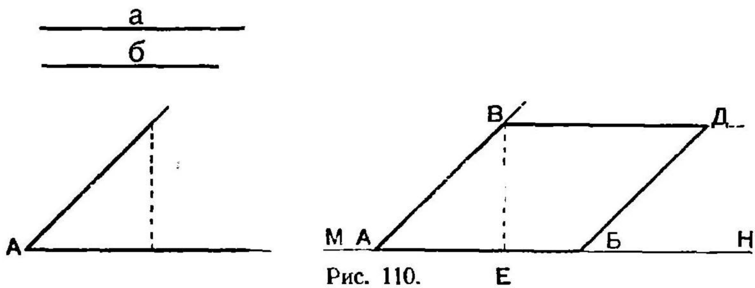


Рис. 110.

Решение. На прямой *МН* построим угол *А*, равный данному (см. § 72, упр. 9). На одной стороне построенного угла отложим отрезок *АБ*, равный *а*, а на другой стороне—отрезок *АВ*, равный *б*. Так мы нашли три вершины параллелограма *А*, *Б*, *В*. Через вершину *В* проводим по угольнику прямую параллельно стороне *АБ*, а через вершину *Б* проведём прямую параллельно стороне *АВ*. Пусть эти прямые пересекут друг друга в точке *Д*. Тогда четырёхугольник *АБВД* будет искомым параллелограмом. Построение можно сделать проще, отложив на первой построенной параллели отрезок *ВД*, равный *а*, линейкой соединив потом точки *Д* и *В*. Проверьте угольником и линейкой параллельность сторон *АБ* и *ДВ*.

4. Измерив высоту *ВЕ* и основание *АБ* параллелограма в миллиметрах, вычислить его площадь, умножая основание на высоту. В ответе оставьте первые 3 цифры, заменив остальные нулями. Ответ дайте в квадратных сантиметрах и квадратных миллиметрах.

5. Постройте ромб, сторона которого равна 5 *см* 5 *мм*, а острый угол равен половине прямого.

6. Построить ромб по двум данным диагоналям. Первая равна 64 *мм*, вторая 48 *мм*. Вычислите его площадь в квадратных миллиметрах. Ответ переведите в квадратные сантиметры и квадратные миллиметры. Проверьте угольником и линейкой параллельность сторон построенного ромба, а циркулем или полоской бумаги—их равенство.

Трапеция. Вспомните свойства трапеции: а) две стороны трапеции параллельны, а две другие непараллельны; б) средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме; в) площадь трапеции измеряется произведением её средней линии на высоту.

7. Построить трапецию по двум основаниям: $а = 58$ *мм* и $б = 42$ *мм* и высоте $в = 20$ *мм*. Ответ дайте в квадратных сантиметрах. Постройте три трапеции разного вида, но с теми же сторонами и высотой. Будут ли они иметь одинаковую площадь?

8. Показать построением резиновыми шнурами на демонстрационной доске, что трапеций с двумя данными сторонами (например, 8 и 5) и данной высотой (например, 6) можно построить сколько угодно.

9. Постройте треугольник *АБВ* и, разделив две его стороны пополам в точках *Г* и *Д*, проведите среднюю линию *ГД*. Какую часть площади треугольника отрежет средняя линия? Покажите на чертеже.

10. Начертите любой треугольник. Увеличьте его площадь вдвое разными способами. Проверьте вычислением.

11. Начертите любую трапецию. Постройте на большем основании новую трапецию с такими же основаниями, что и первая, но с вдвое большей площадью.

12. Начертите любую трапецию. Не изменяя её оснований, превратите её в прямоугольную трапецию (т. е. трапецию с двумя прямыми углами), равновеликую первой трапеции, и т. д.

Площадь четырёхугольника неправильной формы

13. Начертите (выпуклый) четырёхугольник с неравными сторонами (рис. 111), измерим его площадь. Возьмём самую длинную сторону $АГ = 7$ *см* за основание и опустим на неё перпендикуляры $БД = 2$ *см* и $ВЕ = 3$ *см* из остальных двух вершин. Тогда наш четырёхугольник разобьётся на два прямоугольных треугольника и одну прямоугольную трапецию. Измерим в миллиметрах отрезки:

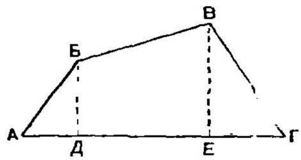


Рис. 111.

$АГ = 70$ *мм*, $БД = 20$ *мм*, $ВЕ = 30$ *мм*, $АД = 15$ *мм*, $ДЕ = 35$ *м*.

Пл. $АБВГ = (15 \cdot 20) : 2 + (20 + 30) \cdot 35 : 2 + (30 \cdot 20) : 2 = 150 + 875 + 300 = 1325$ *кв. мм* $= 13$ *кв. см* (приблизительно).

§ 75. Образование параллельных линий перегибанием листка бумаги

1. Первую прямую $МН$ (1) (рис. 112) образуем, перегибая листок по любому направлению. В одной из её точек $А$ восставляем перпендикуляр $АБ$ (2-й перегиб). Откладывая на нём от точки $А$ расстояние $АВ$ между двумя параллельными, например 38 *мм*, получаем точку $В$. Через $В$ проводим перегибанием листка прямую $ВГ$, перпендикулярную к $МН$. Прямые $АБ$ и $ВГ$ параллельны между собой.

2. Укажите параллельные линии в окружающей обстановке: в тетради, на странице текста книги, на столе, на доске, на окне, на двери, на стене, на потолке.

3. Постройте, перегибая листок бумаги, одну из трапеций с основаниями 10 *см* и 5 *см* и высотой 6 *см*.

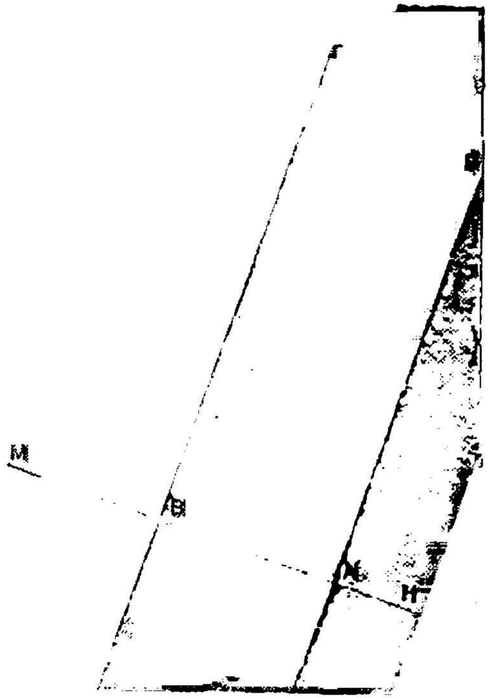


Рис. 112.

4. Образуйте тремя перегибами (см. § 19, рис. 5) ромб. Докажите, сделав 4-й перегиб, что противоположные стороны ромба параллельны.

ГЛАВА X

ПРИМЕРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МАТЕРИАЛА НАГЛЯДНОЙ ГЕОМЕТРИИ ПО ГОДАМ ОБУЧЕНИЯ В НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЕ

В главах V—IX автор дал методический материал по наглядной геометрии в начальной школе, причём принимался во внимание как высокий, так и низкий уровень оборудования начальных школ наглядными пособиями. В данной книге автор обычно давал несколько видов наглядных пособий для одного и того же геометрического образа и, соответственно, несколько методических указаний для демонстрации одного и того же геометрического свойства.

Преподаватель может выбрать те приёмы, которые наиболее доступны классу или кажутся самому преподавателю методически более удачными или удобными.

Сам план изучения наглядной геометрии может быть различен. Лишь опыт многих школ укажет наилучшие планы и наилучшие методические приёмы. Автор далёк от мысли дать то и другое. Но чтобы помочь практически преподавателю в его работе по наглядной геометрии, автор считает необходимым закончить своё изложение примерным распределением геометрического материала по годам обучения. Он просит считать это распределение лишь первым приближённым решением задачи.

§ 76. Учебный материал по наглядной геометрии в I классе

I. Величина и форма предметов

1. Сравнение предметов по форме и по величине. Коробки; их стенки. Число стенок и названия их: верхняя, нижняя и т. д.

2. Доска и тетрадь. Их края (стороны), число их и названия.

3. Нить. Её концы. Форма нити—кривая линия, прямая линия. Сколько кривых и прямых можно провести через одну точку? Через две точки?

II. Прямая линия

Способы образования прямой:

1. Натягивание нити.

2. Отбивание прямой мелом на классной доске и на земле.

3. Перегибание листка бумаги.

4. Черчение прямых линий по линейке.

Горизонтальные и отвесные прямые. Показ их на демонстрационной доске и в окружающей обстановке. Наклонные прямые. Упражнения в черчении прямых линий: горизонтальных, отвесных и наклонных.

III. Угол

1. Угол между горизонтальной и отвесной линиями.

2. Образование прямых углов двойным складыванием листка бумаги. Прямой угол, его вершина и стороны. Равенство прямых углов.

3. Прямоугольный листок бумаги. Его края (стороны) и углы. Равенство противоположных сторон и углов прямоугольного листка (проверка складыванием листка).

4. Геометрическая игра в галчонка. Образование и свойства квадрата. Стороны и углы квадрата. Их свойства. Диагонали и середина квадрата.

IV. Квадрат как счётная единица

Изучение чисел 1-го десятка, счёт до 10; сложение и вычитание[1]

Пособие „Цветные квадраты“. Счёт на квадратах. Состав изучаемого числа и построение из квадратов различных фигур в связи с составом числа. (Упражнения включаются в уроки арифметики и развиваются по мере изучения чисел.)

Геометрическая игра на глазомер: закрывание квадратами сплошных фигур различной площади.

V. Отрезки

Упражнения с цветными шнурами на демонстрационной доске.

1. Квадратная сетка на доске и в тетради.
2. Отрезки прямых. Равные и неравные отрезки. Единица длины—сторона квадрата сетки. Сантиметр (при наличии тетрадей с сантиметровой сеткой).
3. Измерение отрезка между двумя точками, отмеченными на горизонтальной или отвесной линии сетки.
4. Откладывание на демонстрационной доске и черчение в тетради горизонтальных и вертикальных отрезков заданной длины.
5. Упражнения и задачи на сложение и вычитание отрезков, заданных в натуре и числом.
6. Сравнение отрезков по длине в пределе 10.

VI. Квадрат как счётная единица и ломаная прямоугольная линия

Нумерация

Упражнения на образование чисел в пределе 20 и действия с ними.

VII. Прямоугольник и квадрат на квадратной сетке. Их периметры

Упражнения на образование чисел в пределе 20 и действия с ними

Замыкание прямоугольной ломаной и образование прямоугольника и квадрата цветным шнурком на демонстрационной доске. Черчение в тетрадях квадрата и прямоугольника на сетке по задан-

[1] Заголовки в форточках соответствуют программе по арифметике.

ным сторонам. Измерение и сравнение периметров квадрата и прямоугольников.

VIII. Новогодняя ёлка (геометрические работы, общие для I и II классов)

1. Круг. Черчение круга на бумаге циркулем или циркульной ножкой и вырезывание бумажного круга. Центр круга. Радиусы и диаметры.

2. Деление бумажного кружка (складыванием) пополам, на 4, на 8 равных частей.

3. Изготовление украшений для ёлки из цветных кружков и вписанных в них квадратов и восьмиугольников. Звёзды четырёхконечные и восьмиконечные.

4. Вырезывание симметричных узоров из сложенных вчетверо и в восьмеро кружков и квадратов. Разрезывание цветных кружков, раскрашивание цветными карандашами и аппликация секторов и сегментов.

IX. Сантиметр

Сантиметр—единица длины для измерения малых предметов. Черчение в тетради сантиметровой шкалы и вырезывание её. Измерение ею длины небольших предметов. Откладывание в тетрадях отрезков в сантиметрах.

X. Прямоугольники и квадраты (продолжение)

Действия в пределе 20

XI. 1. Построение из цветных квадратов прямоугольников, составленных из рядов, содержащих по 2, 3, 4, 5, 6 квадратов в каждом, и подсчёт квадратов, заключённых в прямоугольнике.

2. Построение цветными шнурами или черчение цветными мелками на доске с квадратной сеткой прямоугольников, с периметрами до 20 единиц. Вычисление их периметров и числа квадратов, содержащихся в них (площадей).

3. Геометрические игры: змейка, лесенка, пружинка, рамка.

4. Самостоятельные упражнения учащихся в пределе 20.

XII. Деление отрезков и прямоугольников

Деление на равные части

1. Деление отрезков длиной до 20 единиц, данных на демонстрационной доске или в тетради, на равные части.

2. Деление площадей прямоугольников, составленных из цветных квадратов, на равные части. Подобные же задачи на деление прямоугольников, начерченных в тетрадях.

XIII. Модели круглых десятков

Счёт круглыми десятками

Изображение чисел, выражаемых круглыми десятками на демонстрационной доске и в тетрадях, в виде прямоугольников высотой в 10 единиц. Упражнения на сложение и вычитание их площадей, на умножение и деление их площадей на однозначное число.

XIV. Весенние работы на местности

Метр. Изготовление самодельного метра. Измерение длины и ширины классов, школы, двора. Мерный шнур. Измерение мерным шнуром. Откладывание на поверхности земли заданных отрезков, в пределе до 20 *м.* Измерение и откладывание отрезков, содержащих круглые десятки метров.

§ 77. Методические указания к учебному материалу по наглядной геометрии в I классе

Уроки наглядной геометрии в I классе имеют своей целью связать изучение состава чисел, первые представления об арифметических действиях и счётные упражнения с пространственными представлениями, с образованием отрезков, ломаных линий, квадратов и прямоугольников.

Цветные квадраты, разноцветные шнуры, построения из них разноцветных фигур имеют целью дать отдых зрению, утомляемому в течение целых часов сменой белого и чёрного цветов на уроках чтения и письма. Наконец, геометрические игры, черчение цветными карандашами вносят занимательность и оживление в ход уроков, делая менее утомительным усвоение геометрических сведений.

II[1]. **1.** Два ученика берут белый шнурок за концы и показывают его классу. Когда шнурок висит, его форма — кривая линия, когда он натянут, его форма — прямая линия.

2. Шнурок натирают мелом; два ученика прикладывают его в натянутом виде к классной доске и один из них на доске отбивает шнурком прямую линию.

3. Перегибание листка бумаги (см. § 44).

Горизонтальную линию можно показать линией пересечения потолка и стены, на переплётах окон и т. п.; отвесную на пересечении двух стен, отвесом, образованным ниткой с грузом, черчением на классной доске и в тетрадях по линейке. При черчении наклонных надо обращать внимание на то, куда они наклонены: вправо или влево.

III. Упражнения **2** и **3** проводятся на перегибании листка бумаги. См § 43, 44, 45.

4. Игра в галчонка. Цель—ознакомление в процессе игры с образованием и с простейшими свойствами квадрата. Складывание листка указывается пунктиром (рис. 113). *АБ* накладывается на *БВ*—линия сгиба *БД*. *ГД* накладывается на *ДА*—линия сгиба *ДЕ*. Прямо-

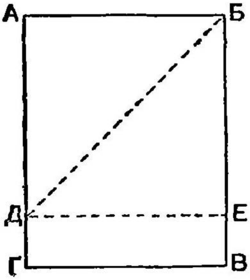


Рис. 113.

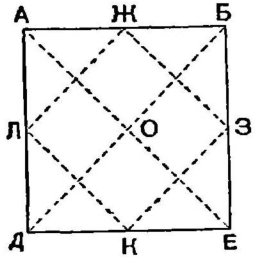


Рис. 114.

[1] Нумерация пунктов соответствует § 76.

угольник *ВГДЕ* отрезается—получается квадрат *АБЕД* (рис. 114). *АБ* накладывается на *АД*. Линия сгиба—диагональ *АЕ*. *АБ* накладывается на *БЕ*. Линия сгиба—диагональ *БД*. Диагонали *АЕ* и *БД* делят друг друга в середине квадрата *О* пополам.

Расправив квадрат, сгибаем его так, чтобы все 4 вершины его попали в его середину. Сложенный листок образует новый квадрат *ЖЗКЛ*, у которого прежняя середина *О*

Перевёртываем новый квадрат *ЖЗКЛ* обратной гладкой стороной к себе (рис. 115) и снова сводим все вершины его в центр *О*; проводим четыре линии сгиба: *МН*, *НП*, *ПР* и *РМ*. Перевернём квадрат *МНПР*. Галчонок готов: вершины *Ж* и *К* образуют клюв: *Ж*—верх, *К*—низ клюва. Вершины *З* и *Л* крылья.

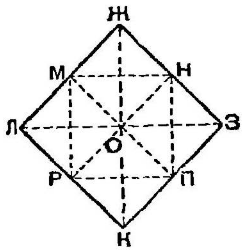


Рис. 115.

Согнём только один верхний листок *МО* по прямой *МО* вверху, а всю нижнюю часть клюва выгнем по линии *ОП* вниз.

Взяв галчонка тремя пальцами каждой руки за крылья *Н* и *Р*, большим и средним снизу, а указательным пальцем надавив сверху, сведём всю фигуру, сближая концы *Н* и *Р*. Тогда верхний квадрат с диагональю *МО* горбом поднимется вверх, а нижний квадрат с диагональю *ПО* желобком уйдёт вниз и галчонок раскроет рот. Сводя и разводя крылья, вы увидите, как галчонок раскрывает и сжимает рот.

Развернув листок, или делая галчонка снова, подметим следующие свойства квадрата:

Все четыре стороны квадрата равны между собой.

Все четыре угла квадрата прямые.

Квадрат имеет две равные диагонали.

Точка пересечения диагоналей называется **серединой квадрата**. Она делит обе диагонали пополам.

Проверить свойства квадрата, воткнув три булавки: одну приколов к доске через середину квадрата, а две других воткнув в доску у самых концов одной из сторон квадрата и поворачивая квадрат около первой булавки.

Игру в галчонка можно заменить простым изготовлением квадрата из бумаги и складыванием его по диагоналям для демонстрации его свойств.

IV. Изготовление цветных квадратов (см. § 29). Цветные квадраты как счётный материал при счёте и изучении состава числа—§ 29, 30, 31, 32.

Игра на закрывание квадратами фигур (гл. VI, § 31).

V. 1. Квадратная сетка (см. § 28).

2—3. Учитель строит шнуром (или чертит мелом) на доске различные горизонтальные и отвесные отрезки длиной меньше 10 единиц. Ученики называют длину отрезка.

4. Обратно: учитель задаёт на демонстрационной доске образовать шнуром или начертить горизонтальные или отвесные отрезки длиной 3, 5, 8, 2, 4, 7 единиц. Та же задача выполняется в тетрадях.

5—6. Часть упражнений на сложение и вычитание чисел в пределе 10, данных в арифметическом задачнике, переводится на линейный геометрический материал путём построения отрезков.

VI. Квадрат как счётная единица (см. п. IV). Ломаная прямоугольная линия (см. § 36). Вычисление длины ломаной, данной в натуре учителем, на демонстрационной доске, и обратно—черчение в тетрадях ломаной, численно заданной звеньями,—новая форма упражнений на сложение и вычитание, например: 1) „Начерти ломаную: 4 вправо, 3 вверх, 2 влево. Вычисли её длину". 2) „Какая ломаная длиннее и на сколько?" (Учитель образует две ломаные.) Или 3) „Начерти две ломаные: первая ломаная—3—вверх и 6—вправо, а вторая ломаная из двух одинаковых отрезков, каждый длиной по 4 единицы. Какая ломаная длиннее" и т. п. (рис. 116).. 4) Задачи на дом—свободное черчение ломаных, состоящих из отрезков данной длины: $2+5$; $3+4$; $2+1+4$; $5+2+7$ и т. д.

VII. Периметры прямоугольников и квадратов см. гл. V, § 37—38.

1. Замыкание прямоугольной ломаной. Учитель задаёт вызванному ученику построить шнуром или начертить на демонстрационной доске такую ломаную: вправо 2, вверх 3, влево 2 и вниз 3. Тогда ломаная вернётся в ту точку, откуда вышла, как говорят, „замкнётся". Какая фигура образовалась? Каковы у неё стороны и углы?

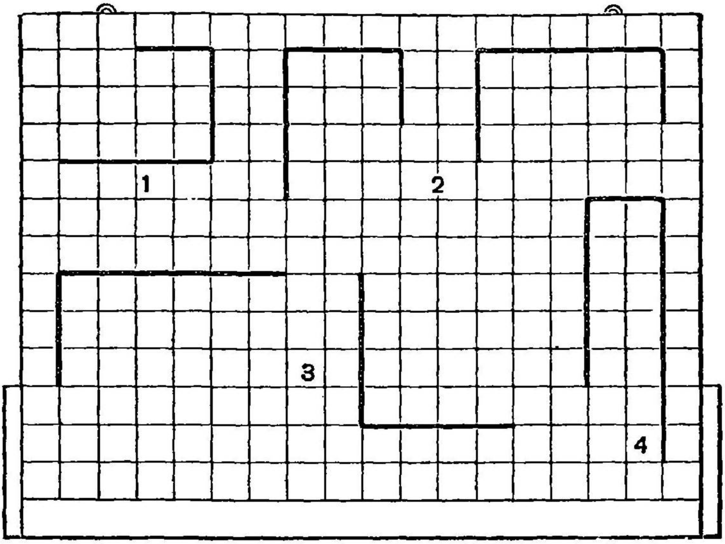


Рис. 116.

2. Кто сумеет образовать шнурком и гвоздиками прямоугольник со сторонами 4 и 1? Кто сумеет начертить на клетчатой доске квадрат со стороной 2?

3. Ученик строит по заданию учителя прямоугольник со сторонами 2 и 3. Обмерим кругом наш прямоугольник. Для этого измерим по порядку все его стороны и полученные числа сложим. Ученик считает: $2+3+2+3=10$. Длина всей ломаной линии, образующей прямоугольник, называется **периметром.** У нашего прямоугольника периметр равен 10 единицам.

4. Обмерьте кругом прямоугольники со сторонами 1 и 3, 1 и 4 и три квадрата со сторонами 1, 2 и 3 и найдите их периметры.

5. Решение подобных же задач на воображение (без построений).

6. Второй десяток. Образование чисел второго десятка при помощи цветных квадратов, используемых как счётный материал. На подставку доски выкладывается в ряд 10 квадратов, образуя длинный прямоугольник. Поверх его устанавливаются по одному слева направо квадраты—единицы второго десятка и со-

ответственно даются названия и обозначения чисел второго десятка до 20.

7. На тех же моделях проделываются и записываются действия сложения и вычитания в пределе до 20 без перехода через десяток (§ 32, 33).

VIII. Подготовку к новогодней ёлке и школьным праздникам удобно связать в младших классах с усвоением нового геометрического материала—круга и орнаментов, связанных с ним.

1—3. Круг вычерчивается на листке бумаги (в крайнем случае по обводу чашки или стакана).

Для изготовления ёлочных украшений лучше всего пользоваться аппликацией—наклеиванием цветных деталей на лист бумаги. Для этого надо взять белую папку или бумагу из тетради для рисования и листы разноцветной глянцевой бумаги. На гладкой белой бумаге начертить разметочный круг радиусом, равным 5 *см*. Тем же радиусом начертить круги на белой папке и листке цветной бумаги. Все круги вырезать. Разметочный круг перегибанием надо тщательно разделить пополам; складывая ещё раз по сгибу, разделить круг на 4 части. Новым перегибанием пополам разметочный круг делится на 8 равных частей. Расправив разметочный круг, поставим булавкой на его окружности точки, делящие окружность на 8 частей. Наложив разметочный круг на остальные (равные) круги, ставим на их окружностях точки, делящие их также на 8 равных частей. Соединяя каждую точку хордами, получаем правильный восьмиугольник (рис. 117).

Вырезаем сегменты по 90° и по 45°. Соединяя точки деления с центром, вырезаем цветные секторы по 45°.

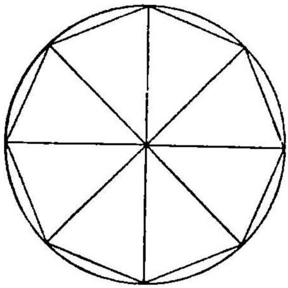


Рис. 117.

Накладывая их на круги из белой папки, получим круги с разноцветными секторами. Срезая из секторов сегменты и наклеивая их на треугольники других цветов, получим новые орнаменты.

Для получения звёзд учитель проводит в разметочном круге концентрический круг вдвое или втрое меньшего радиуса, разметив малый круг в точках пересечения его с начерченными ранее 8 радиусами. Проколами булавки эти точки переносятся на цветные круги. Соединив прямыми полученные точки с двумя ближайшими точками большого круга, получим четырёхугольную звезду. Разрезая звёзды, полученные из цветных кругов, на тупоугольные треугольники и наклеивая их на белый круг из папки, получим звезду с разноцветными лучами (рис. 118).

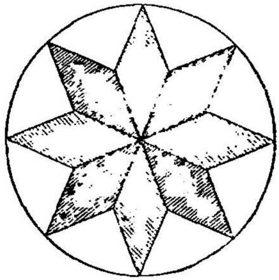


Рис. 118.

Разделив дуги малых кругов пополам и соединив точки деления с ближайшими точками больших кругов, получим восьмиугольную звезду.

4. Сложив квадрат вчетверо по диагоналям или в восьмеро, вырезаем разные узоры по линиям сгиба. Расправив квадрат, получим красивые симметричные узоры. Цветной лист с узорами наклеиваем на квадрат или круг из белой бумаги и обратно: квадрат белой бумаги с узорами наклеиваем на круг из цветной бумаги. Также поступаем с кругами из цветной или белой бумаги.

На этой работе дети научатся чертить окружность, получат представление о центре, радиусе, диаметре, хорде и частях круга.

IX. Сантиметр (см. § 48—53). Если школа имеет возможность проводить уроки геометрии на тетрадях в сантиметровую квадратную клетку, то все измерительные и счётные упражнения, проводимые учениками, будут как раз проводиться в сантиметрах. В случае (менее удобном), когда ученики работают с обычными, стандартной формы тетрадями в клетку 5×5 *мм*, приходится за единицу длины принимать сторону квадрата сетки и измерения проводить в таких единицах. При изучении сантиметра следует изготовлять самодельные сантиметровые линейки из клетчатой бумаги и измерять ими различные предметы, а затем измерить посредством школьной линейки. Заниматься же переводом с линейных единиц в сантиметры в I классе не следует.

X. Пример. Сложить $7+6$. Ученик выкладывает в ряд на доске 7 квадратов и рядом 6 квадратов. Прикладывает к первому ряду квадраты второго по одному, пока не наберёт до 10. Остальные три квадрата ставит вверху первого десятка, начиная второй десяток (рис. 119). Говорит „Три единицы и 1 десяток" и записывает 13.

Пример. Вычесть: 15 — 8 (рис. 119). Ставит в два ряда 15 (первый десяток внизу). Отнимает от второго десятка все пять квадратов, остаётся целый десяток. Не отняты ещё 3 квадрата. Их отнимает от первого десятка, остаётся 7. Ученики проделывают те же действия со своими малыми счётными квадратами на столах.

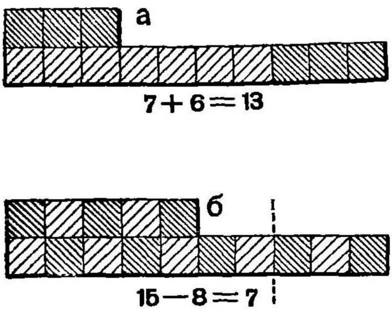


Рис. 119.

После трёх-четырёх упражнений с квадратами можно перейти к действиям *над* отрезками в пределе 20.

Виды задач: выпрямление ломаных линий, превращение отрезка, бо́льшего 10, в ломаную. Вычисление периметров прямоугольников и квадратов. Сравнение периметров (§ 37).

Учитель не должен злоупотреблять наглядностью: после достаточного выяснения приёма следует переходить к устному счёту.

XI. 1. Умножение в пределе 20 проводится, как сложение равных слагаемых с сокращённой записью сложения. Геометрически это равносильно построению прямоугольника из равных рядов квадратов. Например, умножить 6 × × 3 — значит построить прямоугольник, содержащий три ряда по 6 квадратов в каждом. Осторожно поворачивая построенный пря-

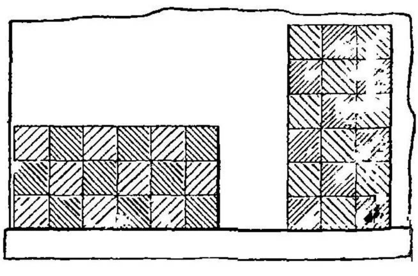


Рис. 120.

моугольник на бок, учитель показывает, что из тех же 18 квадратов образовался прямоугольник 3×6 (рис. 120). Повторив на разных примерах этот опыт, ученики догадаются, что перемножаемые числа можно переставлять и ответ от этого не изменится.

2. После трёх-четырёх упражнений с цветными квадратами можно перейти к технически более простому построению прямоугольников на демонстрационной доске с помощью кольцевых цветных шнуров или к черчению мелом и, наконец, к устному вычислению их площадей и периметров. Учащимся в классе и на дом следует задавать часть примеров на умножение из арифметического задачника, иллюстрируя их построением разных прямоугольников цветными карандашами (по линейке и с достаточной точностью (рис. 121).

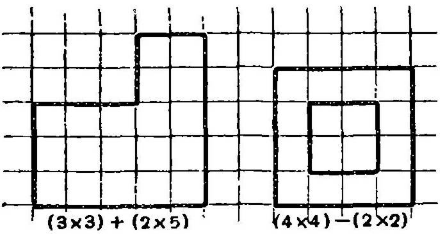


Рис. 121.

3. Геометрические игры при прохождении второго десятка заключаются в образовании шнуром ломаных линий, построенных по определённым законам (повторяемость, натуральный ряд, прогрессия, симметрия). Учитель чертит или образует шнуром на доске одно первое звено орнамента и предлагает продолжить его.

Так, например, проводится и г р а в з м е й к у (рис. 122).

а) Построить змейку, состоящую из 5 таких звеньев.

б) Построить змейку из тех же звеньев, но так, чтобы она поползла назад (влево).

в) Придумать звено, чтобы змейка, построенная из него, поползла вверх.

г) То же—вниз.

д) Придумать змейку, чтобы она поползла наклонно вверх или вниз.

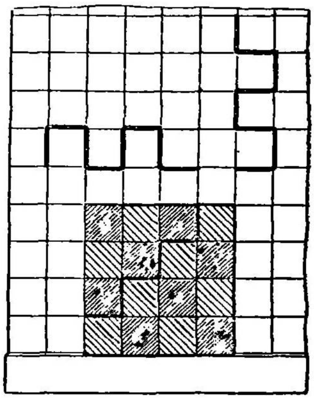


Рис. 122.

Лесенка. а) Построить из цветных квадратов лесенку в 5 ступеней так, чтобы каждая следующая ступенька поднималась на 1. Сосчитать, сколько всего квадратов в лесенке.

б) Придумать лесенку, идущую в обратную сторону.

в) Сделать из двух лесенок в 3 и 4 ступени один квадрат (рис. 122).

Пружинка. а) Учитель даёт первое звено: „Добавьте новые звенья, чтобы пружинка раскручивалась всё больше и больше".

б) „Кто сумеет сделать такую пружинку, чтобы она раскручивалась в обратную сторону?"

Квадрат в квадрате (рамка). „Кто сумеет построить из цветных шнурков 3 квадрата один внутри другого? Сравните их периметры".

4. Счисление в пределе до 20 позволяет давать более разнообразные задачи на построение прямоугольных фигур и измерения их периметров и площадей. Вопросы лучше сначала задавать в активизирующей форме: не „найди периметр квадрата", а „обмерь кругом квадрат"; не „найди площадь прямоугольника", а „узнай, сколько квадратов уложится в прямоугольнике."

Упражнения. а) Постройте шнурком на доске и начертите в тетради прямоугольники со сторонами: 2 и 4, 2 и 5, 2 и 6, 2 и 7, 2 и 8, 3 и 4, 3 и 5, 3 и 6, 4 и 5. Обмерим их кругом и сосчитаем, сколько внутри них можно уложить квадратиков. Часть задач учащиеся решают на доске, часть—самостоятельно в классе с последующей проверкой на доске и часть задаётся на дом.

б) Придумать и начертить разные прямоугольники, у которых обвод был бы равен 12, 14, 16, 18, 20 ед.

в) Постройте квадраты со стороной, равной 3 ед., 4 ед., 5 ед., вычислите их обвод (одним действием) и найдите их площадь (кроме последнего).

г) Задачи в 2 действия: проведите прямую линию внутри фигуры так, чтобы получилось два прямоугольника. Подсчитайте, на сколько единиц периметр одного прямоугольника будет больше периметра другого. Учитель строит фигуру (рис. 123) „молоток". Сколько квадратов уложится в первой части и сколько во второй? На сколько квадратов будет больше в одной части, чем в другой?

д) Из проволоки длиной в 20 единиц сделать прямоугольник со сторонами 3 и 4 и квадрат со стороной, равной 2. Начертить прямоугольник, квадрат и остаток.

е) Сложные задачи в 2—3 действия на вычисление можно взять из примеров арифметического задачника и перевести в геометрическую форму.

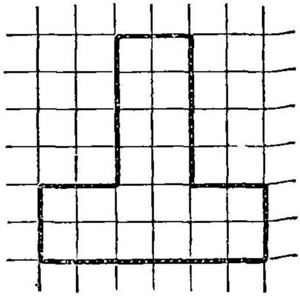


Рис. 123.

XII. 1. Деление отрезков на доске и в тетради производится вычислением: а) разделить отрезок в 12 ед. пополам, б) другой такой же отрезок на 3 равных части, в) третий такой же—на 4 равных части.

2. Деление площадей прямоугольников, составленных из цветных квадратов, а позднее образованных цветным кольцевым шнуром, на равные прямоугольные части. После упражнений на доске учитель задаёт аналогичные задачи для решения в классе (с последующей проверкой) и на дом.

1. Пример. 12 : 2; 12 : 3; 15 : 3; 15 : 5; 16 : 2 и т. д. Ответ давать в квадратах: „4 квадрата".

2. Задача. „Под ягоды отвели участок длиной 5 *м*, шириной 4 *м*. Я разделил его на квадраты со сторонами в 1 *м* и посадил в нём 12 кустов малины, по одному кусту на квадрат. Сколько пустых квадратов осталось? Начерти в тетради сад, квадраты, нарисуй кусты, оставь пустые квадраты и дай ответ".

XIII. Счёт круглыми десятками (см. § 34). Счёт до 100.

Модели (см. § 34).

§ 78. Учебный материал по наглядной геометрии во II классе

I. Периметры прямоугольников и квадратов

Сложение и вычитание в пределах 100. Разностное сравнение.

1. Вычисление периметра прямоугольника, если известны две его разные стороны; вычисление периметров квадратов, если известна одна сторона квадрата.

2. Начертить по сетке прямоугольники и квадраты по данным их периметрам (различные решения).

II. Площади прямоугольников (непосредственное вычисление)

Таблица умножения

Построение из цветных квадратов на доске и цветным карандашом в тетрадях прямоугольников с основанием, равным 2, и высотами, возрастающими от 1 до 10. Подсчёт числа квадратов, содержащихся в прямоугольниках, запись результатов и запоминание их. То же с основаниями, равными 3, 4 и 5.

III. Увеличение отрезков и площадей

Увеличение и уменьшение данных чисел в несколько раз. Части числа

1. Увеличение отрезков, данных в единицах сетки (или в сантиметрах) в 2, 3, 4 и т. д. раз.
2. Черчение отрезков на классной доске и в тетрадях.
3. Увеличение площадей прямоугольников в 2, 3, 4 и т. д. раз. Два способа: увеличение высоты и увеличение основания.

IV. Деление отрезков и площадей

1. Деление на 2, 3, 4 равные части отрезков, данных в единицах сетки (или в сантиметрах) путём подсчёта единиц. Часть отрезка.
2. Деление площади прямоугольника посредством деления основания или высоты на 2, 3, 4 и т. д. равные части и проведения разделяющих линий, или подсчётом квадратов и проведением разделяющих линий.
3. Механическое деление отрезка и площади прямоугольника на 2, 4, 8 равные части перегибанием и складыванием листка бумаги.

V. Кратное сравнение отрезков и площадей прямоугольных фигур

Кратное сравнение

1. Кратное сравнение длины двух отрезков: 13 и 39; 8 и 24; 17 и 34 и т. д. посредством вычисления и путём непосредственного наложения.

2. Кратное сравнение периметров прямоугольников и квадратов.

3. Кратное сравнение площадей прямоугольников и квадратов, начерченных на доске и в тетрадях, подсчётом квадратных единиц, содержащихся в прямоугольниках и квадратах.

VI. Подготовка к ёлке (см. I класс)

VII. Непосредственное и косвенное вычисление площадей прямоугольников

Таблица умножения (продолжение)

Построение прямоугольников с основаниями 6, 7, 8, 9 и с высотами, возрастающими от 1 до 10; подсчёт квадратов сетки, содержащихся внутри их периметров (см. п. IV).

VIII. Построение прямоугольников со сторонами, бо́льшими 10, и вычисление их площадей в квадратах сетки

IX. Косвенное измерение площадей прямоугольников и квадратов в квадратных единицах сетки

Внетабличное умножение и деление

1. Вычисление площадей путём подсчёта квадратов по рядам.

2. Вычисление площадей без подсчёта квадратов.

X. Задачи в 1, 2 и 3 действия

Круглые сотни

Построение на квадратной сетке и измерение площадей прямоугольников, квадратов и прямоугольных сложных фигур в пределах 100 квадратных единиц. Измерение периметров прямоугольников со сторонами, выраженными целыми метрами, и выражение их в сантиметрах.

XI. Весенние работы на местности

1. Провешивание прямых линий и измерение мерным шнуром (рулеткой) расстояний в пределе 200—300 *м*.

2. Измерение мерным шнуром периметров прямоугольных участков размером 200—300 *м*.

§ 79. Методические указания к учебному материалу по наглядной геометрии во II классе

I. 1. В качестве упражнений на сложение и вычитание (и умножения на 2 и 4) следует провести упражнения на построение прямоугольников по данным двум сторонам, а квадратов — по данной одной стороне и вычисление их периметров в пределах 100.

Примеры. а) Построить прямоугольник со сторонами 17 и 25 ед. и вычислить его периметр.

б) Построить квадрат со стороной, равной 13 единицам.

2. а) Начертить 4 разных прямоугольника, имеющих одинаковые периметры, равные 30 ед.

б) Начертить 3 квадрата с периметрами 32, 24 и 28.

в) Начертить прямоугольник с периметром 58 и стороной, равной 19.

г) Начертить квадратную рамку шириной в 2 ед., наружный периметр которой равен 40.

II. Работа по арифметике во II классе состоит главным образом в изучении умножения, составления таблицы умножения, решения задач на умножение и табличное деление и усвоении понятий: кратное увеличение и кратное уменьшение.

Соответственно этому, учащиеся получают понятие о площади прямоугольника, построенного на квадратной сетке, сосчитывая число квадратов, содержащихся внутри периметра прямоугольника.

Учащиеся чертят у себя в тетрадях в ряд все прямоугольники, подписывая под ними соответствующее умножение (рис. 124), и т. д.

III. 1. а) Упражнения на классной доске: откладывание данного отрезка ленточкой бумаги или циркулем 2, 3, 4 и т. д. раз.

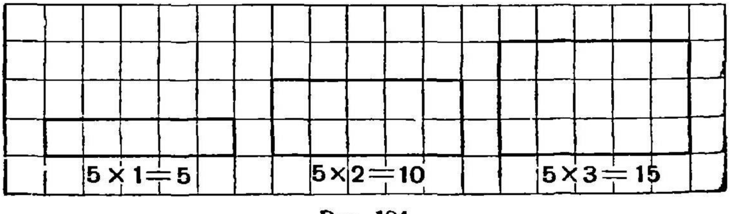


Рис. 124.

б) Упражнения на демонстрационной доске. Построение отрезка, заданного числом (например, 6).

в) Вычисление отрезков, бо́льших первого в 2, 3, 4 раза, и построение их рядом с первым. Результаты сравниваются на глазомер.

2. а) То же повторяется в тетрадях (2—3 варианта).

б) Упражнения: построить на глазомер на доске отрезок, в 2, 3 раза больший данного, и проверить вычислением.

3. а) Дан прямоугольник со сторонами 3 ед. и 4 ед. сетки. Начертить прямоугольники с площадью, в 2, 3, 4 раза большей, изменяя только основание.

б) То же, изменяя только высоту.

в) Начертить прямоугольник, в 6 раз, в 8 раз больший данного, изменяя и основание и высоту.

IV. 1. а) Отрезок в 24 единицы сетки разделить чёрточками на 2 равные части, на 3, 4, 6 равных частей.

б) Отрезок в 18 *см* разделить на 3 равные части, на 6, на 9 равных частей.

2. Прямоугольник со сторонами 9 ед. и 4 ед. сетки разделить пополам, на 3 равные части, на 6 равных частей.

V. 1. а) Не называя чисел, учитель образует на доске шнурами два отрезка: один длиной 28 ед. сетки, другой 7 ед. Во сколько раз один отрезок больше другого?

б) Учитель чертит два отрезка на классной доске, откладывая по сантиметровой линейке, но не называя чисел. Один отрезок в 68 *см*, другой в 17 *см*. Укладывая циркулем или полоской бумаги, узнать, сколько раз один отрезок уложится в другом. Результат проверить вычислением.

в) Подобным же образом: во сколько раз одна ломаная линия: $2+3$, меньше другой: $8+12+10$.

2. Сравнение периметров прямоугольников и квадратов.

3. Во сколько раз площадь квадрата со стороной 6 ед. больше площади прямоугольника со сторонами 3 и 2 ед., 3 и 4 ед., 6 и 3 ед. То же со стороной, равной 8 ед.

VI. Подготовка к ёлке (см. программу I класса). Учитель, при подготовке к праздникам, разделяет работу по трудности. Полегче и менее ответственную работу он даёт первоклассникам (например, деление круга на 4 части).

Большей трудности работу — второклассникам (например, все работы, связанные с делением круга на 8 частей, звёзды и секторы в $^1/_2$ прямого угла, а также симметричные узоры).

Для вычерчивачия пятиконечной звезды учитель приготовляет шаблон в виде кружка, разделённого пятью радиусами, составляющими друг с другом равные углы по 72°. Учащиеся накладывают шаблон на папку или картон, прокалывают шаблон и папку в центре и отмечают на папке пятью точками концы радиусов шаблона.

Шаблон с папки снимают и из центральной точки О на папке проводят через пять поставленных ранее точек равные отрезки: ОА, ОБ, ОВ, ОГ и ОД. При соединении концов отрезков прямыми через одну: в порядке А, В, Д, Б, Г, получится пятиконечная звезда.

Учащиеся V класса могут начертить ту же звезду, пользуясь циркулем и транспортиром без всякого шаблона.

VII. Учащиеся строят на доске и в тетрадях прямоугольники с основаниями 6, 7, 8, 9 и высотами от 1 до 10, подсчитывают число квадратов, содержащихся внутри периметра прямоугольника, причём подсчёт должен вестись прибавлением целого множимого, и записывают результаты в виде таблицы умножения. Ответ даётся уже как площадь прямоугольника в „квадратных единицах“, т. е. квадратиках сетки.

VIII. см. п. VII.

IX. Типы задач по наглядной геометрии, решаемых во II классе (2-е полугодие). Объём арифметических знаний во 2-й половине второго года обучения позволяет решать задачи на все 4 действия с целыми числами в пределах первой сотни. За это же время—геометрические знания учащихся позволяют измерять ломаные линии, периметры и площади прямоугольников и квадратов, делать построения на квадратной сетке и решать различные вопросы и задачи, связанные с вычислениями указанных выше линий и площадей.

Приведём несколько типичных задач:

а) Начертить квадрат с периметром 28 ед.

б) Начертить прямоугольник с периметром 24 ед. Сколько разных прямоугольников можно построить из проволоки длиной в 24 ед? (стороны брать в целых единицах).

в) Из этой же проволоки сделали квадрат. Чему равна его сторона?

г) Вычислить периметр квадрата со стороной, равной 19 ед.

д) Вычислить периметр прямоугольника со сторонами 18 и 34 ед.

е) Из проволоки длиной в 100 *см* сделали два квадрата со сторонами: 1-й—13 *см*, 2-й—7 *см*. Начертить оба квадрата и остаток проволоки.

ж) Начертить прямоугольник со сторонами 12 и 8. Вычислить его периметр и площадь.

з) Начертить прямоугольник, стороны которого на 1 больше сторон данного (п. *д*). Вычислить его периметр и площадь.

и) Вычислить периметр и площадь прямоугольника, если уменьшить каждую сторону прямоугольника на 2 ед., на 3 ед.

X. а) Начертить по клеточкам фигуру по следующему плану: поставить слева точку *А*. Отложить, одну за другой, отсчитывая клеточки, от *А*—5 клеточек (единиц) вверх, поставить точку *Б*; от *Б* — 4 ед. вправо — точка *В*; от *В* — 3 ед. вниз — *Г*; от *Г* — вправо 3 ед.— точка *Д*; от *Д* — 6 ед. вверх — точка *Е*; от *Е* — вправо 7 ед.— точка *Ж*; от точки *Ж* — вниз 8 ед.— точка *З*; от точки *З* — 14 ед. влево — точка *А*. Вычислить периметр полученной фигуры.

б) У какой фигуры больше периметр: у квадрата со стороной 17 или у прямоугольника со сторонами 14 и 19? Начертить обе фигуры на одной странице карандашами разных цветов.

в) Учитель образует на доске двумя цветными шнурами (рис. 125) по два прямоугольника сразу. Скажите сначала на глазомер, какой из двух прямоугольников—1а и 1б—имеет бо́льшую площадь? Проверьте вычислением и найдите разность между площадями. Так же—примеры II, III, IV и V.

г) Начертить прямоугольник размером 7×6. На сколько увеличится его площадь, если каждую сторо-

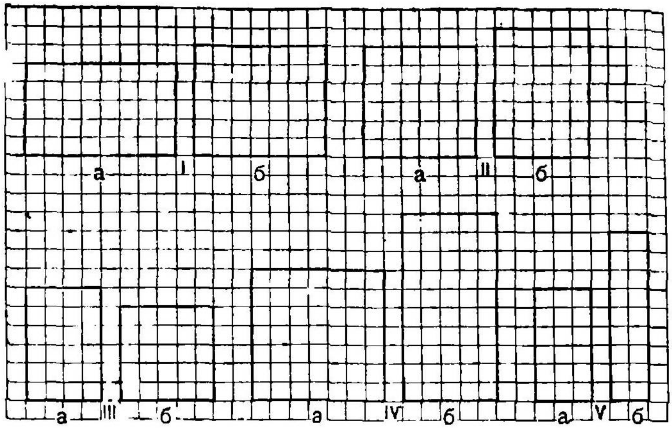


Рис. 125.

ну увеличить на 1? На сколько уменьшится площадь, если каждую сторону уменьшить на 1? Начертить все 3 прямоугольника.

д) Из цветных квадратов сделать 2 больших квадрата; в первом цветных квадратов 9 штук, во втором — 16 штук. Смешать все цветные квадраты и сделать из них один, ещё больший квадрат. Чему равна его сторона? *Повторить ту же задачу для квадрата со сторонами* 6 ед. и 8 ед., начертив их в тетради.

е) Найти периметр и площадь прямоугольника со сторонами 7 и 9 единиц.

ж) Из периметра прямоугольника (упр. е) сделать периметр квадрата (показать ниткой на доске). Изменится ли его площадь, если превратить его в квадрат с тем же периметром. Проверить ответ вычислением.

з) Найти площадь многоугольника, заданного в упр. а), тремя способами: 1-й способ — деля площадь вертикальными линиями и складывая; 2-й способ—деля площадь горизонтальными прямыми и складывая; 3-й — применяя вычитание.

и) Составить таблицу квадратных чисел, составляя квадрат их по способу буквы „г" до 100, складывая по порядку нечётные числа: $1+3+5$ (рис. 126).

к) Начертить два разных прямоугольника с площадью 36 кв. ед. Разделить прямыми каждую площадь

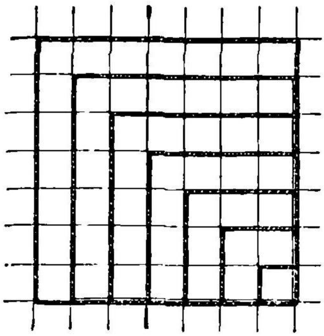


Рис. 126.

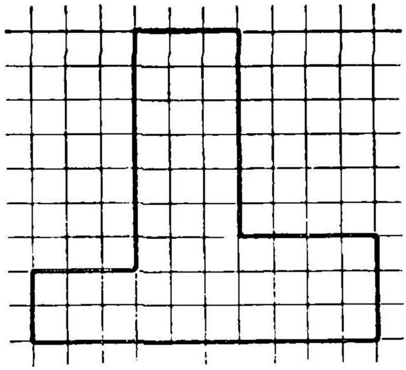


Рис. 127.

пополам. То же на 3 равных, на 4 равных прямоугольника.

л) Отделить от прямоугольника площадью 72 кв. ед. квадраты со сторонами в 7 ед., 5 ед., 4 ед., 3 ед. Начертить и проверить подсчётом.

м) Множество отвлечённых примеров на вычисление можно геометризировать, т. е. истолковать геометрически. Например, начертить: $(9\times8)-(6\times3)$; $(4\times3)+(12\times4)+(3\times5)$ и вычислить площадь фигуры.

н) Вычислить площадь прямоугольной фигуры сложного вида разными способами (рис. 127).

§ 80. Учебный материал по наглядной геометрии в III классе

I. Углы.

Угол как ломаная, составленная из двух отрезков. Вершина и стороны угла. Изменение угла, увеличение угла (раздвигание сторон) и уменьшение (сдвигание). Острые углы. Прямой угол. Тупые углы. Развёрнутый угол.

II. Форма геометрических фигур.

Форма квадратов, прямоугольников и треугольников.

6 пространственно-комбинационных упражнений с

наглядным пособием: „Части квадрата“ (геометрическая игра).

1. Квадрат, его стороны и углы. Половина квадрата—прямоугольник.

а) Составить из квадратов прямоугольники и квадраты.

б) Из прямоугольников — квадраты и прямоугольники.

2. Диагональ квадрата. Деление квадрата диагональю пополам. Равнобедренный прямоугольный треугольник. Его стороны — равные катеты и гипотенуза. Гипотенуза больше катета. Его углы—прямой и 2 равных острых угла.

3. Составление из равнобедренных прямоугольных треугольников — квадратов, прямоугольников и новых равнобедренных прямоугольных треугольников. Составление квадратов, прямоугольников и равнобедренных треугольников разных размеров из различных частей квадрата.

4. Деление половины квадрата (прямоугольника) диагональю пополам—четверть квадрата. „Узкий“ прямоугольный треугольник. Составление из нескольких „узких“ прямоугольных треугольников квадратов, прямоугольников, прямоугольных треугольников и других фигур разных размеров и форм.

5. Комбинации из 2, 4, 6, 8 „узких“ прямоугольных треугольников.

6. Соединение прямоугольных треугольников обоих видов. Образование из них остроугольных треугольников, прямоугольников, квадратов.

III. Треугольники и их периметры.

1. Три точки на доске и в тетради. Соединение их отрезками. Треугольник. Его вершины, стороны и углы. Их число.

2. Построение по квадратной сетке на демонстрационной доске и в тетрадях прямоугольных треугольников по двум данным катетам.

3. Измерение сторон и периметров некоторых прямоугольных треугольников (3, 4 и 5), (6, 8 и 10), (9, 12 и 15), (12, 16 и 20), (5, 12 и 13), (8, 15 и 17) и т. д. в пределах до 100. Измерение возможно в целых числах.

IV. Измерительные работы.

1. Миллиметр и измерения в миллиметрах.

2. Масштабная линейка.

3. Измерение в миллиметрах длины небольших предметов.

4. Измерение сторон и вычисление периметров остроугольного и тупоугольного треугольника в одних миллиметрах и перевод ответа в сантиметры и миллиметры.

5. Сравнение неравных сторон треугольника и их разность в миллиметрах.

6. Свойства сторон треугольника.

7. Миллиметровая бумага и измерительные упражнения с нею.

V. Дальнейшее знакомство с углами (на перегибании листка бумаги).

1. Образование угла перегибанием листка бумаги и вырезывание бумажной модели угла. Его стороны и вершина.

2. Образование двух прямых углов делением пополам развёрнутого угла. Сумма двух углов.

3. Сравнение двух неравных углов наложением. Больший и меньший углы.

4. Образование равных углов. Совпадение равных углов при наложении.

5. Умножение углов.

6. Деление углов перегибанием пополам, на 4 и 8 равных частей.

VI. Треугольники и их простейшие свойства.

1. Образование треугольника из полосок. Треугольники с разными сторонами. Всегда ли можно построить треугольник из трёх полосок? Случай невозможности.

2. Свойство сторон треугольника.

3. Жёсткость треугольника (из данных трёх полосок можно построить только один треугольник).

4. Образование треугольника перегибанием листка бумаги. Виды треугольников.

5. Сумма углов треугольника.

6. Прямоугольный треугольник. Его углы и стороны. Гипотенуза больше катета.

7. Сумма острых углов прямоугольного треугольника.

8. Равнобедренный треугольник. Его образование двумя перегибаниями листка бумаги. Равенство двух углов равнобедренного треугольника.

9. Высота из вершины равнобедренного треугольника делит его основание и угол при вершине пополам.

VII. Параллельные прямые.

1. Расстояние от точки до прямой.

2. Параллельные линии на клетчатой бумаге, демонстрационной доске и в окружающей обстановке.

VIII. Квадрат.

1. Построение четырёхугольника из 4 равных полосок и ниткой, сложенной вчетверо.

2. Ромб и квадрат. Чем отличается квадрат от ромба?

3. Жёсткий ли построенный четырёхугольник? Как сделать его жёстким? (На модели из полосок.)

4. Построение квадрата по данной стороне перегибанием листка бумаги с разорванными краями.

5. Свойства сторон и углов квадрата.

6. Диагонали квадрата. Их равенство. Взаимное деление диагоналей пополам.

7. Треугольники, получаемые при перегибании квадрата.

IX. Прямоугольники.

1. Построение четырёхугольника из 4 полосок. Какие полоски надо взять, чтобы получился прямоугольник? Образование прямоугольника из 4 полосок.

2. Чем отличается прямоугольник от квадрата?

3. Жёсткий ли прямоугольник? Как сделать его жёстким?

4. Построение прямоугольника по данным 2 сторонам перегибанием листка бумаги с разорванными краями.

5. Свойства сторон и углов прямоугольника.

6. Свойства его диагоналей.

7. Треугольники, образуемые диагоналями прямоугольника.

X. Чертёжный угольник и построения с помощью угольника и линейки.

1. Самодельный прямой угол из бумаги. Чертёжный угольник. Сравнение обоих пособий.

2. Из данной точки на прямой восставить к ней перпендикуляр.

3. Из точки, данной вне прямой, опустить на прямую перпендикуляр.

4. Построить и вычислить в сантиметрах и миллиметрах и в одних миллиметрах расстояние от точки до прямой.

5. Построить три высоты любого остроугольного треугольника.

6. Их свойство. Проверка правильности построения.

7. Измерение их в миллиметрах.

8. Построения угольником и линейкой прямоугольных треугольников (по катетам), квадратов и прямоугольников по сторонам, данным в натуре (меньше 150 *мм*).

9. Построение тех же фигур (п. 8) по сторонам, данным численно, в одних миллиметрах и в сантиметрах и миллиметрах.

XI. Измерение площадей прямоугольников и квадратов

1. Изготовление моделей квадратного метра и квадратного сантиметра.

2. Прямые и косвенные измерения на демонстрационной доске и в тетрадях в клетку площадей прямоугольников и квадратов в квадратных сантиметрах.

3. Правила измерения площадей прямоугольников и квадратов. Решение задач на вычисление площадей прямоугольных фигур сложной формы на демонстрационной доске в пределе до 200 кв. ед., в тетрадях в клетку—до 300 *кв. см.*

4. Измерение площадей прямоугольников и квадратов, построенных угольником и линейкой по сторонам, данным в одних сантиметрах.

5. Измерение поверхностей предметов, имеющих прямоугольную форму, в квадратных сантиметрах или в квадратных метрах.

XII. Весенние занятия на открытой местности

1. Изготовление мерного шнура.
2. Провешивание прямолинейных отрезков и измерение их длины в метрах и сантиметрах.
3. Представление о километре.
4. Измерение периметров земельных участков мерным шнуром или рулеткой.
5. Построение на земле прямого угла верёвкой длиной в 12 *м* (треугольник со сторонами 3, 5, 4).
6. Измерение площадей небольших прямоугольных участков (до 1000 $м^2$).
7. Построение небольших прямоугольных участков по их сторонам и вычисление площадей построенных участков в квадратных метрах (до 1000 $м^2$).

§ 81. Методические указания к учебному материалу по наглядной геометрии в III классе

В III классе дети постепенно освобождаются от занятий с квадратной сеткой и, пользуясь сначала методом перегибания листка бумаги, образуют отрезки, углы, квадраты, прямоугольники и прямоугольные треугольники и опытно-наглядным путем знакомятся с их свойствами.

Принципиальное отличие от младших классов здесь заключается в том, что дети *сами* строят фигуры и в процессе построения сознательнее и прочнее усваивают их свойства. Второе, важное отличие заключается в том, что дети строят перегибанием листка бумаги геометрические фигуры одной категории, например равнобедренный треугольник, но разного вида. Обнаруживая справедливость одного и того же свойства у всех построенных ими фигур, они впервые знакомятся *с геометрическим законом*.

Далее, изготовив самодельный чертёжный угольник из бумаги и перейдя затем к деревянному чертёжному угольнику, они учатся проводить перпендикулярные и параллельные линии.

Занимаясь черчением с помощью угольника и линейки на нелинованной бумаге, ученики делают новый шаг: они переходят от *построений целочислен-*

ных отрезков к обычным геометрическим построениям отрезков произвольной длины на непрерывной прямой.

Введя в круг своих вычислений миллиметр, они строят на нелинованной бумаге фигуры по их сторонам, заданным в натуре или численно, и, обратно, измеряют стороны заданных фигур.

Выяснив несколько подробнее, чем во II классе, понятие площади, учащиеся, образовав метрические единицы площади (на миллиметровой бумаге), измеряют площади прямоугольника и квадрата, сначала приёмом непосредственного, а затем косвенного подсчёта квадратных единиц, содержащихся в данной площади. Подметив закон, они составляют правило вычисления площадей прямоугольника и квадрата и пользуются им для решения задач.

Необходимость вычислять площади, резко отличающиеся друг от друга по своей величине, приводит к различным единицам площади: квадратному метру и квадратному сантиметру, пока не связанных друг с другом (это будет позднее—в IV классе).

Весенние работы на открытой местности дадут новый материал и новую форму для применения геометрических сведений, полученных детьми за 3-й учебный год.

Указания к отдельным пунктам программы

I. Образование угла демонстрируется на двух полосках, имеющих общий конец, сначала совпадающих, а затем раздвигающихся и образующих угол (§ 42).

Учитель укрепляет на доске две деревянные полоски: одну—26 *см* укрепляет неподвижно (горизонтально, вертикально или наклонно), другую скрепляет с первой в одной вершине общим штифтом, прикрепляющим их к доске. Вызывая учеников, учитель задаёт им:

а) повернуть подвижную полоску так, чтобы образовался острый угол;

б) увеличить острый угол, доведя его до прямого;

в) образовать тупой угол;

г) уменьшить его, доведя его до прямого;

д) увеличить тупой угол, доведя его до развёрнутого.

Давая неподвижной полоске новое положение, учитель повторяет упражнения с углом, проводит те же упражнения со вторым учеником, располагая модель наклонно в разных направлениях. Эти же упражнения повторяются с третьим, четвёртым и т. д. учениками. Цель упражнения—научить детей узнавать и строить углы не только на горизонтальных линиях, но и на прямых всевозможных направлений.

II. Упражнения по ознакомлению с формами геометрических фигур и некоторыми их свойствами проводятся с наглядным пособием „Части квадрата". Методические цели пособия см. § 40, 47.

1. Сначала учитель показывает, перегибая и разрезая бумажный квадрат пополам, что он делится на два равных прямоугольника (равенство демонстрируется наложением). Затем демонстрируются квадраты и прямоугольники из пособия „Части квадрата". Их равенство также проверяется учителем перед классом.

2. Учащимся показывается бумажный квадрат, который затем перегибается по диагонали и разрезается. Равенство полученных равнобедренных прямоугольных треугольников показывается наложением (§ 80, II).

Равенство катетов показывается складыванием одного из равнобедренных треугольников пополам, так, что катеты совпадают. (Нельзя ли догадаться, без перегибания, о равенстве катетов?)

3. Деля сгибанием пополам острый угол равнобедренного прямоугольного треугольника, учитель тем самым накладывает катет на гипотенузу. Учащиеся отмечают, что гипотенуза более катета.

Так же поступает учитель и перед упражнением 4-м (§ 80), образуя перегибанием прямоугольника неравнобедренный („узкий") прямоугольный треугольник. Комбинационные упражнения с частями квадрата подробно описаны в § 40.

III. Треугольники. 1. Ученик, вызванный к классной доске, отмечает на ней три точки, не лежащие на одной прямой, и по линейке соединяет их отрезками. Образовался треугольник. Ученик показывает его вершины, стороны, углы. То же повторяется на демонстрационной доске шнуром. Ученики в тетрадях повторяют построение.

2. На демонстрационной доске кольцевым шнуром откладывается горизонтальный катет *АБ*, например 6. От конца его *Б*, растягивая тот же шнур, откладывается вертикальный катет *БВ* = 8. Так как шнур двойной, то другая его половина между *А* и *В* образует гипотенузу *АВ*. Таким образом, один шнур, охватывая 3 точки, *А*, *Б* и *В*, образует прямоугольный треугольник *АБВ* с катетами 6 *см* и 8 *см*. Учитель обращает внимание учеников на различие величины и сходство формы обоих треугольников на доске и в тетрадях. Измеряя длину гипотенузы на доске и в тетрадях, мы получаем одно и то же число 10. На доске 10 ед. сетки, в тетрадях—10 *см*.

3. Теперь можно вычислить периметр треугольника: $6+8+10=24$ (*см*).

Таким же образом строится учениками прямоугольный треугольник с катетами 3 *см* и 4 *см* и гипотенузой 5 *см*. Обмеряя треугольник кругом, получаем периметр: $3+4+5=12$ (*см*) и т. д.

Примечание. Для измерения на демонстрационной доске наклонных отрезков учитель изготовляет из папки линейку, каждое деление которой равно 5 *см*.

IV. Измерительные работы; миллиметр см. § 56. Прямую учащиеся чертят карандашом по линейке в тетради в клетку. Отрезки откладываются циркулем; в случае нужды его можно заменить полоской чистой бумаги, сложенной вдоль вдвое, делая отметки на ней острым карандашом. Задавание всем ученикам одинаковых фигур на квадратной сетке учитель проводит посредством нумерации точек (см. § 65 „Координаты точек“).

2. Общие указания о линейных измерениях (см. гл. VII, § 48—56).

V. Образование угла перегибанием листка бумаги, сравнение углов и действия над ними проводятся на бумажных моделях на доске и индивидуально учащимися на столах (см. § 45).

Прямой угол—единица меры для углов. На демонстрационной доске ставится модель прямого угла из цветной бумаги. Учитель вызывает учеников и, давая им модели углов (острых и тупых) из белой бумаги, приучает правильно накладывать углы, сравнивать их с прямым углом наложением и давать углам названия: острый, тупой, прямой. Угол следует брать со сторонами различной длины, чтобы подчеркнуть независимость величины угла от длины сторон. Выводы сравнения углов: острый угол меньше прямого угла, а тупой угол больше прямого.

VI. 1. Образование треугольника из трёх полосок. Свойство сторон (см. § 42, пп. 6–9).

2. Образование треугольника перегибанием листка бумаги. Свойства углов треугольника (см. § 46, № 26—32). *Виды треугольников* (§ 47).

VII. 1. а) Преподаватель втыкает штифт в точку *А* на демонстрационной доске и натягивает шнурок *МН*, совпадающий с линией сетки. Ставит вопрос, как самым коротким путём добраться от точки *А* до прямой *МН* (рис. 128). По прямой *АВ* (так как гипогенуза длиннее катета)—расстояние от точки до прямой.

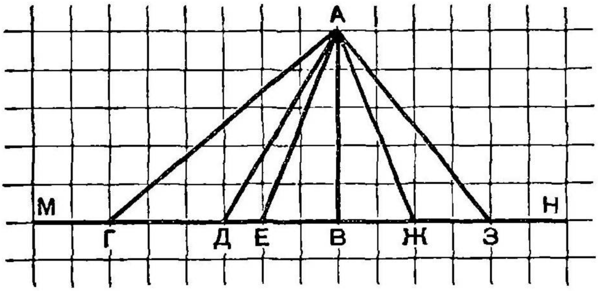


Рис. 128.

б) Упражнения по определению расстояний от точки до разных прямых, проведённых сверху, снизу, сбоку, но по линиям сетки.

2. а) Поставить на доске точки, удалённые от *МН* на 3 единицы: *А*, *Б*, *В*, *Г* (рис. 129). Все ли они лежат на одной прямой? Проведите её. Назовём её *КЛ*. А остальные точки этой прямой?—Они тоже удалены на 3 ед. (проверьте). Все точки этой прямой удалены на расстояние 3 ед. от *МН*. Прямая *КЛ* называется параллельной к прямой *МН*, что значит „идущая вдоль прямой *МН*“.

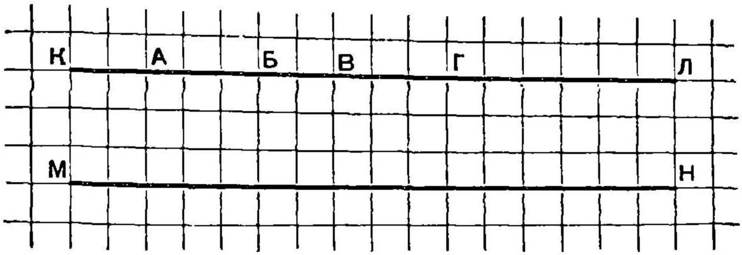


Рис. 129.

б) Начертить прямую, параллельную *МН*, на расстоянии 2 ед., 5 ед.

в) Проведите с другой стороны от прямой *МН* параллельную ей прямую на расстоянии 3 ед.

Проведение на демонстрационной доске и в тетрадях цветными карандашами параллельных прямых к горизонтальным и вертикальным линиям сетки.

г) Перпендикулярность двух параллельных прямых к одной и той же прямой.

VIII. К в а д р а т. В I и II классах ученики знали свойства квадрата по демонстрациям учителя и своим построениям на квадратной сетке доски и в тетради. В III классе они сами построят квадрат и его части перегибанием любого листка бумаги с разорванными краями.

Построение квадрата перегибанием листка бумаги

Проводим перегибанием прямую *1* на листке бумаги с разорванными краями (рис. 130). Ставим на ней две точки *А* и *Б* на расстоянии друг от друга, равном стороне квадрата. Через *А* и *Б* проводим перпендикуляры *АВ* и *БГ* к прямой *АБ*. Откладываем на *АВ* от точки *А* отрезок *АД*, равный стороне квадрата. В точке *Д* проводим перпендикуляр к прямой *АВ* до пересечения с *БГ* в точке *Е*. Фигура *АБЕД* квадрат.

Вырезав квадрат *АБЕД* и перегнув его по диагоналям, мы накладываем сторону *АБ* на *АД* и на *ВЕ*. Накладываем далее *АБ* на *ДЕ*. Перегибания показывают равенство сторон.

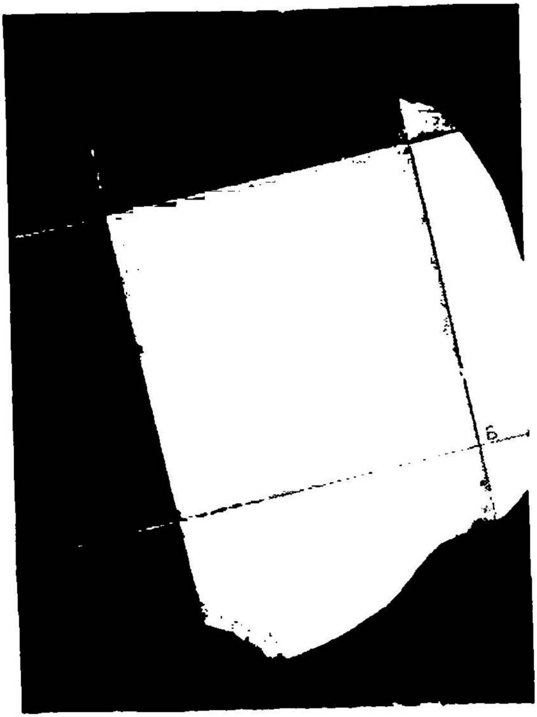


Рис. 130.

Сложив квадрат пополам и в сложенном виде ещё раз пополам, расправим его. Увидим, что линии перегиба образовали четыре прямых угла. Сводя все вершины квадрата в его середину O, мы увидим, что углы квадрата совпадают с прямыми углами при точке O своими сторонами.

Сложив вырезанный квадрат по диагонали AE и в полученном треугольнике сложив гипотенузу вдвое, мы видим, что две половины каждой диагонали совпали и образовали один отрезок. Отсюда замечаем свойства диагоналей квадрата: они равны друг другу и делят друг друга пополам. Квадрат—фигура не жёсткая: четырёхугольник из равных полосок может быть моделью квадрата, но при изменении углов превращается в ромб.

Жёсткость квадрата (и прямоугольника), сделанного из полосок, достигается тем, что его подпирают твёрдой пятой полоской, соединяющей две точки смежных сторон, например две противоположные вершины квадрата.

IX. Прямоугольник (см. VIII), квадрат.

X. Чертёжный угольник (см. § 71, 72). Упражнения с чертёжным угольником и линейкой (см. § 72). Расстояние от точки до прямой.

Построение прямоугольных треугольников по данным катетам (см. § 72, № 8).

XI. Построение квадратов и прямоугольников. На произвольной прямой построить сторону *АВ* квадрата или прямоугольника. Из точек *А* и *В* восставить при помощи угольника перпендикуляры; на них отложить равные высоты *АД* и *ВС*. Точки *Д* и *С* соединить прямой.

При повторении построений квадратов и прямоугольников следует дать более сложные примеры, выходящие за пределы 100 кв. ед., задачи на устное вычисление площадей, на их глазомерное сравнение, на вычисление прямоугольных площадей более сложного вида.

В качестве материала для построений угольником и линейкой можно указать типовые задачи из курса II класса (пп. IX и X) более сложного вида, требующие большей сообразительности и глазомера. Для задач на вычисление площадей и т. д. следует взять числовые данные, при которых действия производятся в пределах 1000.

XII. Весенние занятия на открытой местности (см. замечание на стр. 195). Для приготовления мерного шнура надо взять хороший, лучше плетёный, шнур толщиной 3—5 *мм*, длиной немного более 10 *м*, и проварить его в растительном масле, что предохранит его от гниения и разбухания от сырости. На конце шнура завязать петлю с поперечником 3—5 *см*. Приготовить два багра — заострённых кола длиной 1,5 *м*, на которые будет надеваться петля шнура. Чтобы петля не спадала с багра, в него вблизи заострённого конца вбивается гвоздь.

Для нанесения делений на шнур наденем его петлёй на багор, воткнутый в землю до гвоздя, слегка натянем его и привяжем к другому багру. Точной метровой линейкой отложим на нём от центра первого багра, один за другим, 9 *м*, пришивая или завязывая в конце каждого метра кусочек белой тряпочки. Конец 5-го метра выделим тряпочкой другого цвета. На свободном конце шнура завязываем вторую петлю, чтобы расстояние от 9-го метра до 2-го багра равнялось в точности 1 *м*. Для отсчёта остатка пользуемся деревянным метром. Шнур навёртывается на деревянную дощечку с выемками.

§ 82. Учебный материал по наглядной геометрии в IV классе

I. Работы на местности

Повторение. Квадратные меры: квадратный метр, дециметр и сантиметр. Ар и гектар. Работы на местности. Построение прямого угла посредством верёвочного прямоугольного треугольника. Построение ара. Провешивание прямой линии. Построение гектара. Построение прямоугольных земельных участков и измерение их площадей в гектарах.

II. Измерение площадей прямоугольных треугольников.

III. Измерение площадей остроугольных треугольников. Высоты треугольника.

IV. Общий способ измерения площадей треугольников. Упражнения на построение треугольников, их высот и вычисление площадей: а) на квадратной сетке, б) посредством угольника и линейки.

V. Параллельные прямые

Луч. Прямая. Пересечение прямых. Параллельные прямые. Два перпендикуляра к одной прямой. Параллельность линий прямой сетки. Расстояние между параллельными прямыми. Параллельность сторон прямоугольника и квадрата. Параллельные прямые в окружающей обстановке. Параллельность при движении.

VI. Параллелограм и ромб

Свойства сторон и диагоналей. Площади параллелограма и ромба.

VII. Трапеция

Свойства средней линии. Площадь трапеции.

VIII. Площадь многоугольников произвольной формы.

IX. Работы на местности.

Самодельный эккер. Измерение площадей треугольных участков.

§ 83. Методические указания к учебному материалу по наглядной геометрии в IV классе

В IV классе учащиеся изучают геометрические плоские формы путём построений угольником и линейкой, на чистой (нелинованной) бумаге. Квадратная сетка на доске и в тетради применяется для решения различных задач на вычисление площадей. Здесь учитель имеет возможность, учитывая возраст учащихся, переходить от простой наглядности и эмпиризма к некоторым обобщениям (например, в случае вывода общего правила измерения площади треугольника и других фигур) и к более точным выражениям.

Задачи на вычисление площадей фигур, построенных на квадратной сетке, приводящие к действиям над отрезками, длина которых очевидна и выражается целыми числами, служат подготовкой к новым задачам на измерение площадей фигур, построенных на чистой нелинованной бумаге, а также для задач на местности, где фигуры, в силу своей величины и перспективного искажения, труднее охватываются глазом.

Ввиду того что в советской учебной литературе существует немало хороших пособий, а также глав в методиках арифметики, относящихся к постановке и проведению в начальных и средних школах работ на местности, автор не нашёл нужным загромождать своё изложение повторением хорошо известных приёмов, а ограничился в этой важной области лишь минимальными указаниями.

Замечания по отдельным пунктам программы

I. Повторение квадратных мер. Единицы квадратных мер на одной наглядной таблице (см. § 61—63).

1. На поверхности земли строится шнурком, натянутым на 4 колышка, и классным угольником квадратный метр.

2. Провешивается прямая линия.

3. Строится посредством шнура в 12 *м* длины прямоугольный треугольник со сторонами 3, 4 и 5 *м* для построения прямого угла следующим способом: от конца шнура отмеряют 3 *м*, завязывают узелок; от узелка отмеряют дальше 4 *м*, завязывают второй узелок и концы верёвки связывают третьим узелком. Растянув связанную верёвку за узелки, получаем прямоугольный треугольник со сторонами 3, 4 и 5 *м*, причём катеты 3 *м* и 4 *м* образуют прямой угол.

4. При помощи мерного шнура в 10 *м* и верёвочного треугольника строится квадрат со стороной 10 *м*, площадь которого равна 1 *а*.

5. Построить прямоугольник площадью, равной: 1 ару $= 10 \times 10,\ 20 \times 5,\ 25 \times 4,\ 50 \times 2$ ($м^2$).

6. Построение квадрата со сторонами в 100 *м* площадью в 1 гектар производится провешиванием сторон с помощью мерного шнура, вех и построения прямых углов посредством верёвочного прямоугольного треугольника. На сторонах построенного гектара выстраиваются все учащиеся класса и обходят его кругом, чтобы получше запомнить его площадь.

II. Площади прямоугольных треугольников измеряются разными приёмами: способом дополнения до прямоугольника, деления прямоугольника пополам, превращения в равносоставленный прямоугольник и т. д. (см. § 64, 65).

Эти разнообразные приёмы приводят к обобщающему правилу: чтобы найти площадь прямоугольного треугольника, надо перемножить длины катетов и произведение разделить пополам. Правило применяется при решении задач, сначала на сетке, а потом на чистой бумаге (см. § 74).

Важно с самого начала избегать „стандартных“ положений треугольников, а давать треугольники в разных положениях (рис. 131, стр. 198).

III. Измерение площадей треугольников, трапеций и других фигур следует проводить по плану постепенного перехода от прямого подсчёта квадратов на модели к конкретному преобразованию модели данной фигуры в модель равновеликого ей прямоугольника, отсюда к воображаемому преобразованию и, наконец, к косвенному измерению площади фигуры, т. е. измерению её оснований и высоты и вычислению её площади по определённому правилу. Отдел усваивается и закрепляется в сознании учащихся разнообразными задачами. Задачи задаются в конкретной форме на измерение площади фигуры, данной на доске или в тетради, но без данных чисел. Ученики должны сами найти линейные объекты для измерения, измерить их и вычислить площадь по полученным результатам измерения. Лишь после этого возможно перейти к задачам обычного типа на вычисление.

В данном пособии для вычисления площади остроугольного треугольника даются планы: § 64, II, пп. 1, 2, 3, 4а, 4б и 5, 6, 7, 8, 9.

Площадь остроугольного треугольника: а) рассматривается и вычисляется как сумма площадей двух прямоугольных треугольников; б) вычисляется в результате превращения треугольника в равновеликий прямоугольник; в) как половина площади прямоугольника, построенного на основании и высоте треугольника (см. § 64, 72).

IV. Измерение площадей тупоугольных треугольников достаточно ограничить случаем треугольника с высотой, проведённой из вершины тупого угла (см. § 64, 74).

При задавании задач конкретными фигурами следует приучить учеников оперировать с фигурами в их самых необычных положениях. В IV классе можно давать задачи на любые целые данные числа, приводящие к простейшим дробям.

Примерные задачи (рис. 131): 5 задач на доске и бумаге с квадратной сеткой: вычислить площади фигур: *а, б, в, г, д*. В задаче *г* площадь треугольника вычислять как разность, причём контур объемлющего прямоугольника ученик должен догадаться начертить сам.

Задачу *д*, заданную только контуром четырёхугольника, решают сразу 2 ученика на доске или 2 группы класса: одна находит площадь неправильного четырёхугольника как сумму, вторая—как разность. Ответы должны совпасть в 3-х первых цифрах.

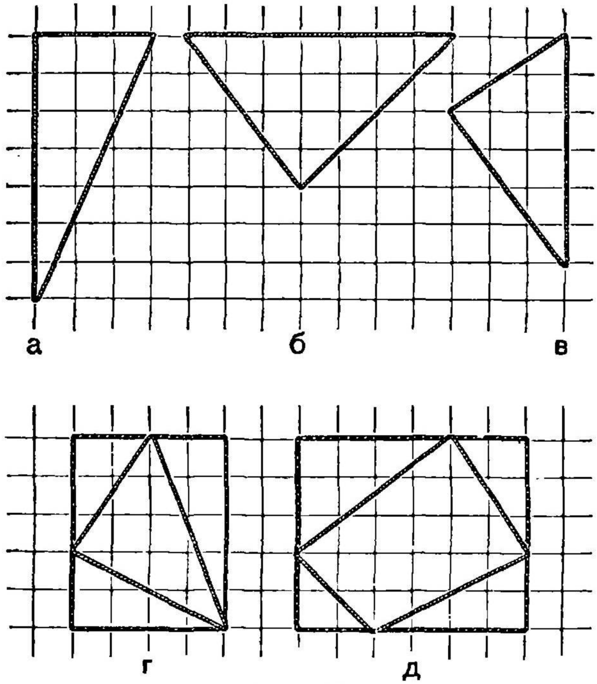


Рис. 131.

V. Параллельные линии (см. § 73).

VI. Площади параллелограма и ромба. Вначале учащиеся на моделях, построенных из частей квадрата и шнурами на доске, изучают свойства сторон, диагоналей и углов параллелограма и ромба, превращают их в равновеликие прямоугольники и устанавливают правила измерения их площадей (§ 66). Правила закрепляются задачами на измерение площадей в единицах квадратной сетки и переводом их в квадратные сантиметры.

Затем переходят к построениям параллелограмов и ромбов на чистой бумаге угольником и линейкой по элементам, заданным в целых сантиметрах (§ 74, 75).

Площади построенных фигур измеряются в квадратных сантиметрах.

VII. Трапеции. а) Трапеции изучаются по следующему плану (§ 67). Сначала трапеции строят из частей квадрата и шнурами на демонстрационной доске. Выясняются на моделях главные свойства трапеции: параллельность их оснований и непараллельность боковых сторон. Перегибанием бумажной модели и разрезыванием *по средней линии выясняется* и формулируется свойство средней линии трапеции. То же свойство средней линии обнаруживается непосредственным измерением её длины на моделях, построенных шнурами на демонстрационной доске.

б) Правило измерения площади трапеции показывается одним из следующих способов: способом сложения, превращения в равновеликий прямоугольник или параллелограм, перегибанием, разрезыванием и складыванием бумажных моделей трапеции: § 67, 74.

в) Все эти приёмы приводят к одному и тому же общему правилу измерения площади трапеции, которое формулируется и закрепляется многими задачами на демонстрационной доске и в тетрадях иа бумаге в клетку. Результаты измерения площадей переводятся в квадратные сантиметры (§ 67, пп. 1—6).

г) Для развития пространственных представлений учащихся, а также для оживления урока следует давать для измерения трапеции в разнообразных положениях и видах (§ 67, п. 7).

д) Научившись измерять трапеции на квадратной сетке, учащиеся переходят к построениям трапеций посредством угольника и линейки и к измерениям площадей построенных трапеций в квадратных сантиметрах и миллиметрах. В последнем случае следует оставлять лишь две первые цифры полученных ответов, заменяя остальные нулями (§ 74, пп. 7—12).

Объяснения, связанные с приближёнными вычислениями, лучше отложить до V класса. В целях развития пространственного представления учащихся полезно провести с ними упражнения на деление площадей фигур на равные части (§ 68).

VIII. Многоугольники произвольной формы сначала строятся шнуром на демонстрационной доске и карандашом в тетради в клетку.

Чтобы вести измерения по линиям сетки, удобно вычислять площадь многоугольника не обычным способом, т. е. не как сумму площадей треугольников, образованных диагоналями, а как разность. С этой целью многоугольник или треугольник обводят прямоугольной рамкой так, чтобы их вершины лежали на сторонах рамы (§ 69). Тогда площадь многоугольника получится как разность площади прямоугольника, образованного рамкой и площадями нескольких прямоугольных треугольников и прямоугольных трапеций.

Если в школе нет демонстрационной доски и частей квадрата, то отделы II—VIII можно проработать на обычной классной доске, разлинованной на квадраты (лучше эмалевой краской). При этом чертить фигуры следует цветными мелками по линейке. Учащиеся чертят в тетрадях в клетку, как обычно.

Правило измерения площадей фигур и свойства их можно выяснить, образуя их модели перегибанием листка бумаги и затем разрезыванием и комбинированием их частей (§ 70). Работу с перегибанием листа бумаги ведёт учитель, демонстрируя это на классной доске, а учащиеся затем делают то же на маленьких листках за партой.

IX. а) Самодельный эккер легко изготовить так: надо взять прямоугольный кусок фанеры, прибить его перпендикулярно к тупому концу острого кола (рис. 132). Взять белый немятый листок бумаги, тщательно сложить его пополам и в таком виде сложить поперёк пополам так, чтобы одна половина первого сгиба линии легла на другую половину. Раскрыв листок, получим две взаимно перпендикулярные прямые. Этот листок четырьмя кнопками приколем к фанерной дощечке и в четырёх концах линий сгибов вобьём на равных расстояниях от точки пересечения прямых перпендикулярно к дощечке 4 булавки *А, Б, В, Г*. Смотря через булавки *АВ* и *БГ*, вы получите два взаимно перпендикулярных направления. Во время работы эккер должен быть расположен горизонтально, что проверяется уровнем.

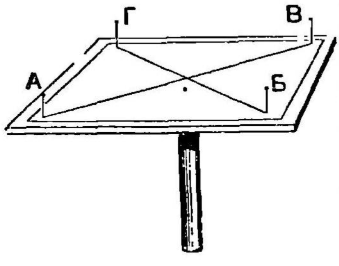


Рис. 132.

б) Проведение высоты треугольника на местности (рис. 133).

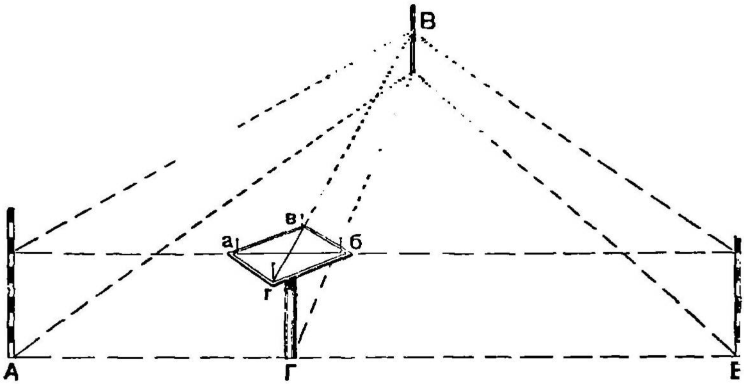


Рис. 133.

Отметим вершины треугольника *А*, *Б*, *В* вехами. Ставим эккер на сторону *АБ* так, чтобы, визируя через булавки *а* и *б* веху *А*, можно было, не сдвигая эккера, визировать через те же булавки и веху *Б*. Это значит, что эккер стоит на стороне *АБ*. Будем теперь переходить с эккером по прямой *АБ* до такой её точки *Г*, чтобы, визируя попрежнему через булавки *а* и *б* вехи *А* и *Б*, можно было визировать через другие две булавки *в* и *г* веху *В*. Это покажет нам, что эккер стоит в основании *Г* высоты треугольника *ВГ*, опущенной из вершины *В* на сторону *АБ*. Остаётся вбить в эту точку *Г*, над которой стоял эккер, веху и провешить прямую *ВГ*, а затем её измерить. Получим высоту *ВГ*.

в) Измерение площадн треугольного участка. Раньше, чем измерить площадь треугольного участка, надо:

1) Проверить, прямолинейны ли его стороны. 2) Выбрать одну из сторон за основание. Если стороны одинаково удобны для измерения, то лучше выбрать наибольшую (например, *АБ* на рис. 133); провешить и измерить её. 3) Провести при помощи эккера высоту из точки *В* на *АВ*, провешить её и измерить в метрах и сантиметрах. 4) Перемножить найденные основание и высоту и результат разделить пополам. 5) В полученном ответе оставить лишь 2 первые цифры, заменив остальные нулями, так как замененные цифры неверны.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава IV. Наглядный метод изучения геометрии в начальной школе

Глава V. Построение геометрических фигур и их моделей в младших классах начальной школы

Глава VI. Построение геометрических фигур в старших классах начальной школы

Стр.

Глава VII. Линейные измерения.

Глава VIII. Измерение площадей

Павел Алексеевич Карасёв
Элементы наглядной геометрии в школе

Редактор *Капустина В. С.*
Художник *Бородкин М. И.*
Художественный редактор *Володина Н. А.*
Технический редактор *Джатиев С. Г.*

* * *

Сдано в набор 15/III 1955 г. Подписано к печати 22/VI 1955 г. $84\times108^1/_{32}$. Печ. л. 13 (10,66)+вклейки 0,5 (0,42). Уч.-изд. л. 10,07+ вклейки 0,19. Тираж 50000 экз. А 02096. Заказ № 4353. Цена без переплёта 3 руб. Переплёт 80 коп.

* * *

Учпедгиз Москва. Чистые пруды, 6.

11-я типография треста Росполиграфпром, г. Горький, ул. Фигнер, 32.