А. Киселевъ.

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ

ГЕОМЕТРІЯ

ДЛЯ СРЕДНИХЪ УЧЕБНЫХЪ ЗАВЕДЕНІЙ.

Съ приложеніемъ большого количества упражненій и статьи: Главнѣйшіе методы рѣшенія геометрическихъ задачъ на построеніе.

Изданіе двадцать третье.

Допущена Уч. Ком. М. Н. Пр. въ качествѣ **руководства** для среднихъ учебныхъ заведеній, мужскихъ и женскихъ („Журн. М. Н. П." 1913, апрѣль), **рекомендована** Учебн. Ком. при Св. Синодѣ для употребленія въ духовныхъ семинаріяхъ въ качествѣ учебнаго пособія („Церк. Вѣд.", 1893, № 32); **одобрена** Деп. Торг. и Мануф. для коммерческихъ училищъ въ качествѣ пособія (извѣщеніе отъ 30 мая 1898 г., № 14128). **Рекомендована**, какъ **руководство** для кадетскихъ корпусовъ.

Изданіе Т-ва

подъ фирмой

„В. В. Думновъ—насл. Бр. Салаевыхъ".

МОСКВА.

Типографія П. П. Рябушинскаго, Страстной бульваръ, собственный домъ.

1914.

Изъ предисловія къ первому изданію.

(1892 г.).

Главнѣйшія особенности предлагаемаго руководства геометріи состоятъ въ слѣдующемъ.

1. Въ большинствѣ нашихъ учебниковъ геометріи понятіе о длинѣ окружности и вообще о кривой линіи принимается за элементарное, не требующее никакихъ оговорокъ и разъясненій, и выводъ, что длина окружности есть предѣлъ периметровъ правильныхъ вписанныхъ и описанныхъ многоугольниковъ, основывается на скрытомъ допущеніи или на не строго доказываемой теоремѣ, что объемлющая линія длиннѣе объемлемой. Въ предлагаемомъ руководствѣ, въ согласіи со многими авторитетами учебно-математической литературы, проведено иное воззрѣніе, которымъ признается, что понятіе о длинѣ элементарно только въ примѣненіи къ прямой; но когда рѣчь идетъ о сравненіи конечной кривой съ прямолинейнымъ отрѣзкомъ, тогда (вслѣдствіе несовмѣстимости элементовъ кривой съ элементами прямой) понятіе о длинѣ становится сложнымъ и требуетъ опредѣленія *). Сообразно этому взгляду мы не доказываемъ, а принимаемъ за опредѣленіе, что длиною конечной кривой называется предѣлъ периметра вписанной ломаной линіи, когда стороны ея стремятся къ нулю. Конечно, въ среднихъ классахъ учебныхъ заведеній было бы затруднительно вполнѣ обосновать это опредѣленіе, т.-е. доказать, что такой предѣлъ существуетъ и что онъ не зависитъ отъ закона вписыванія ломаной линіи; но въ педагогическомъ отношеніи, какъ намъ кажется, нѣкоторые пробѣлы въ доказательствѣ не скрываемые, впрочемъ, отъ учащихся) не имѣютъ такого вреднаго значенія, какъ неопредѣленность, неясность и сбивчивость въ понятіяхъ, а тѣмъ болѣе въ основныхъ. При повтореніи геометріи въ старшемъ классѣ (особенно въ реальныхъ училищахъ, гдѣ въ седьмомъ классѣ пола-

---

*) Отсылаемъ интересующихся этимъ вопросомъ къ статьѣ М. Попруженко «О длинѣ», помѣщенной въ «Вѣстникѣ опытной физики и элементарной математикѣ» (1891 г. №№ 122 и 123).

гается обстоятельно пройти статью о предѣлахъ) ученики не затруднятся усвоить и необходимое обоснованіе указаннаго опредѣленія (оно помѣщено нами въ мелкомъ шрифтѣ).

Замѣтимъ еще по тому же вопросу о длинѣ, что, придерживаясь «Началъ Эвклида» и лучшихъ современныхъ иностранныхъ учебниковъ, мы не приписываемъ прямой линіи, как ъ аксіому, свойства быть короче всякой другой линіи, проведенной между концами прямой, а доказываемъ эту истину въ тѣхъ мѣстахъ курса, гдѣ въ этомъ является надобность и возможность, сначала въ примѣненіи къ ломаной, а потомъ и къ кривой. И дѣйствительно, разъ мы стали на ту точку зрѣнія, что длина кривой есть понятіе сложное, разрѣшающееся только при посредствѣ другого сложнаго понятія— о предѣлѣ, становится совершенно невозможнымъ принимать за очевидную истину такое предложеніе, однимъ изъ терминовъ котораго служитъ это вдвойнѣ сложное понятіе. Съ другой стороны, и нѣтъ логической необходимости въ предварительномъ признаніи принципа Архимеда, такъ какъ онъ вполнѣ строго доказывается на ряду съ другими теоремами.

2. Въ согласіи съ изложеннымъ взглядомъ на длину кривой линіи, мы полагаемъ также, что кривыя поверхности, вслѣдствіе несовмѣстимости ихъ элементовъ съ элементами плоскости, не могутъ быть непосредственно сравниваемы съ плоскими поверхностями; поэтому мы не доказываемъ, что поверхность круглаго тѣла есть предѣлъ нѣкоторой плоской поверхности, а принимаемъ это предложеніе за опредѣленіе.

Замѣтимъ, что аналогичный вопросъ по отношенію къ площадямъ криволинейныхъ фигуръ или по отношенію къ объемамъ, ограниченнымъ кривыми поверхностями, разрѣшается совсѣмъ иначе. Въ самомъ дѣлѣ, мы совершенно ясно представляемъ себѣ, что площадь круга больше площади вписаннаго многоугольника, какъ цѣлое больше своей части, и меньше площади описаннаго многоугольника, какъ часть меньше цѣлаго; и далѣе, что при неограниченномъ удвоеніи числа сторонъ вписаннаго и описаннаго многоугольниковъ разность между ихъ площадями стремится къ нулю; поэтому предложеніе: «площадь круга есть общій предѣлъ площадей правильныхъ вписанныхъ и описанныхъ многоугольниковъ» должно быть разсматриваемо не какъ опредѣленіе, а какъ теорема, подлежащая доказательству. То же самое можно сказать объ объемѣ цилиндра, конуса и шара.

ПЛАНИМЕТРІЯ.

КНИГА I.

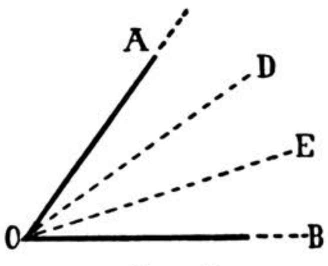
ПРЯМАЯ ЛИНІЯ.

ГЛАВА I.

Углы.

Предварительныя понятія.

15. Опредѣленія. Фигура, образованная двумя полупрямыми (*OA* и *OB*, черт. 5), исходящими изъ одной точки, вмѣстѣ съ частью плоскости, ограниченной ими, наз. у г л о м ъ. Полупрямыя, образующія уголъ, наз. с т о р о н а м и, а точка, изъ которой онѣ исходятъ,—в е р ш и н о ю угла. Стороны должно представлять себѣ продолженными отъ вершины безконечно.



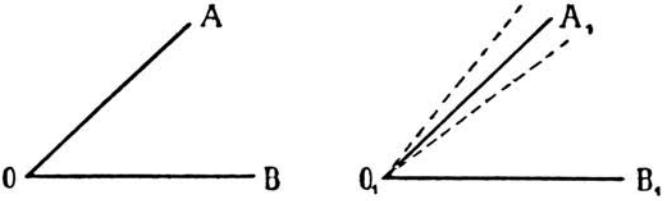
Черт. 5.

Уголъ обыкновенно обозначается тремя буквами, изъ которыхъ средняя ставится у вершины, а крайнія у какихъ-нибудь точекъ сторонъ; напр., говорятъ: «уголъ *AOB* или уголъ *BOA*» (черт. 5). Но можно обозначать уголъ и одною буквою, поставленною у вершины, если при этой вершинѣ нѣтъ другихъ угловъ. Мы иногда будемъ обозначать уголъ цыфрою, поставленною внутри угла, около вершины.

Слово «уголъ» на письмѣ замѣняется часто знакомъ $\angle$.

Если изъ вершины угла (черт. 5) проведемъ в н у т р и е г о (т.-е. въ той части плоскости, которая принадлежитъ углу) какія-нибудь прямыя *OD*, *OE*..., то образовавшіеся при этомъ углы *AOD*, *DOE*, *EOB*... разсматриваются, какъ ч а с т и угла *AOB*.

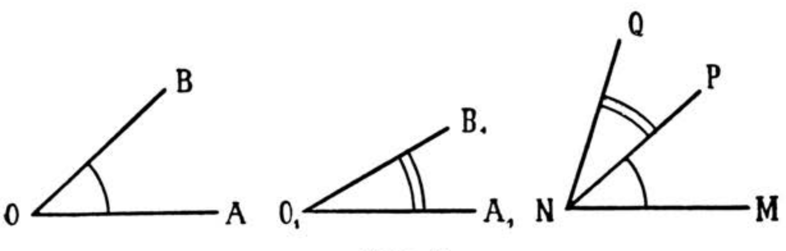
16. Равенство и неравенство угловъ. Два угла считаются равными, если при наложенiи они могутъ совмѣститься. Положимъ, напр., что мы накладываемъ уголъ AOB на уголъ $A_1O_1B_1$ (черт. 6) такъ, чтобы вершина O упала въ O_1, сторона OB пошла по O_1B_1 и чтобы углы покрыли другъ друга.



Черт. 6.

Если при этомъ сторона OA совмѣстится съ O_1A_1, то углы равны; если же OA пойдетъ внутри угла $A_1O_1B_1$, или внѣ его, то углы не равны, при чемъ тотъ изъ нихъ будетъ меньше, который составитъ часть другого угла.

17. Сумма угловъ. Суммою данныхъ угловъ наз. уголъ, составленный изъ частей, соотвѣтственно равныхъ даннымъ угламъ. Такъ, чтобы получить сумму угловъ AOB и $A_1O_1B_1$ (черт. 7), строятъ уголъ MNP, равный одному изъ данныхъ угловъ, напр., AOB, и къ нему пристраиваютъ уголъ PNQ, равный другому данному углу $A_1O_1B_1$, такъ, чтобы у обоихъ угловъ оказалась общая вершина N и общая сторона NP и чтобы углы были расположены по разныя стороны отъ общей стороны NP. Полученный такимъ образомъ уголъ MNQ есть сумма угловъ AOB и $A_1O_1B_1$. Подобнымъ образомъ можетъ быть составлена сумма трехъ и болѣе угловъ.



Черт. 7.

Сумма угловъ, какъ и сумма отрѣзковъ прямой (**12**), обладаетъ свойствами перемѣстительнымъ и сочетательнымъ.

Изъ понятія о суммѣ угловъ выводятся понятія объ ихъ разности, произведеніи и частномъ.

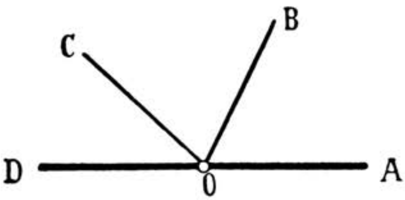
Мы принимаемъ за очевидную истину, что каждый уголъ можетъ быть раздѣленъ (хотя бы только мысленно) на 2, на 3, на 4 и т. д. равныя части.

Черт. 8.

Замѣтимъ, что полупрямая, дѣлящая уголъ пополамъ (черт. 8), наз. биссектриссою этого угла (или равнодѣлящею) *).

18. Замѣчаніе 1-е. При нахожденіи суммы угловъ могутъ представиться нѣкоторые особенные случаи, которые полезно разсмотрѣть особо.

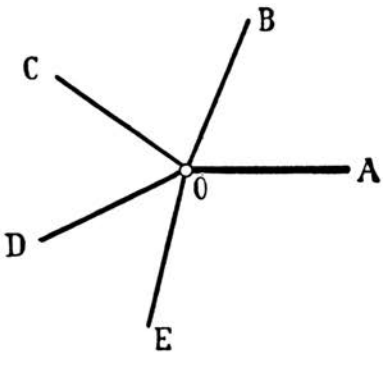
1°. Можетъ случиться, что послѣ сложенія нѣсколькихъ угловъ, напр., трехъ: AOB, BOC и COD (черт. 9), сторона OD угла COD составитъ продолженіе стороны OA угла AOB. Мы получимъ тогда фигуру, образованную двумя полупрямыми (OA и OD), исходящими изъ одной точки (O) и составляющими продолженіе одна другой. Такую фигуру (вмѣстѣ съ частью плоскости, расположенную по одну сторону прямой AD) принято тоже называть угломъ (развернутымъ, или выпрямленнымъ).



Черт. 9.

2°. Можетъ случиться, что послѣ сложенія нѣсколькихъ угловъ, напр., пяти угловъ: AOB, BOC, COD, DOE и EOA (черт. 10), сторона OA угла EOA совмѣстится со стороной OA угла AOB.

Фигура, образованная таками совпавшими полупрямыми (вмѣстѣ со всею плоскостью, расположенною кругомъ общей вершины O) также называется угломъ (полнымъ).



Черт. 10.

*) Въ нѣкоторыхъ руководствахъ линія эта наз. также *биссекторомъ*.