А. Киселевъ.

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ГЕОМЕТРІЯ

ДЛЯ СРЕДНИХЪ УЧЕБНЫХЪ ЗАВЕДЕНІЙ.

Съ приложеніемъ большого количества упражненій и статьи: Главнѣйшіе методы рѣшенія геометрическихъ задачъ на построеніе.

Изданіе двадцать пятое.

Допущена Уч. Ком. Мин. Нар. Пр. въ качествѣ **руководства** для среднихъ учебныхъ заведеній, мужскихъ и женскихъ („Журн. М. Н. П." 1915, май); **рекомендована** Учебн. Ком. при Св. Синодѣ для употребленія въ духовныхъ семинаріяхъ въ качествѣ учебнаго пособія („Церк. Вѣд.", 1893, № 32); **одобрена** Деп. Торг. и Мануф. для коммерческихъ училищъ въ качествѣ пособія (извѣщеніе отъ 30 мая 1898 г., № 14128). **Рекомендована**, какъ **руководство** для кадетскихъ корпусовъ.

[illegible]

ИЗДАНІЕ
Т-ва „В. В. ДУМНОВЪ, наслѣдн. бр. САЛАЕВЫХЪ".
МОСКВА, Мясницкая улица, д. № 5. || ПЕТРОГРАДЪ, Большая Конюшенная, № 1.
1916.

[illegible] обстоятельно пройти статьи о предѣлахъ) ученики не затруд[illegible] [illegible] необходимо обоснованіе указаннаго опредѣлені[illegible] [illegible].

[illegible] что, придерживаяс[illegible] [illegible] иностранныхъ учебни[illegible] [illegible] проведенной между кон[illegible] [illegible] прямой [illegible] мѣстахъ курса, гдѣ [illegible] является [illegible] сначала въ примѣнені[illegible] [illegible] ломаной, а потомъ [illegible] кривой. И дѣйствительно разъ мы стали на ту точку зрѣнія, [illegible] кривой есть понятіе сложное, раз[illegible]рѣшающееся только при посредствѣ другого сложнаго понятія — о предѣлѣ, становится совершенно невозможнымъ принимать за очевидную истину такое предложеніе, однимъ изъ терминовъ котораго служитъ это вдвойнѣ сложное понятіе. Съ другой стороны, и нѣтъ логической необходимости въ **предварительномъ** признаніи принципа Архимеда, такъ какъ онъ вполнѣ строго доказывается на ряду съ другими теоремами.

Въ согласіи съ изложеннымъ взглядомъ на длину кривой линіи, мы полагаемъ также, что кривыя поверхности, вслѣдствіе несовмѣстимости ихъ элементовъ съ элементами плоскости, не могутъ быть непосредственно сравниваемы съ плоскими поверхностями; поэтому мы не доказываемъ, что поверхность круглаго тѣла есть предѣлъ нѣкоторой плоской поверхности, а принимаемъ это предложеніе за **опредѣленіе**.

Какъ извѣстно, въ алгебрѣ существуютъ статьи, которыя не могутъ быть строго обоснованы въ элементарномъ курсѣ, но безъ которыхъ этотъ курсъ не обходится (напр., дѣйствія надъ несоизмѣримыми числами). Въ элементарной геометріи къ такого рода статьямъ относится **способъ предѣловъ**. Для строгаго доказательства этого способа потребовалось бы ввести въ курсъ геометріи теорію предѣловъ почти въ такомъ размѣрѣ, въ какомъ эта статья проходится въ седьмомъ классѣ реальныхъ училищъ. Чтобы научно обосновать, напримѣръ, нахожденіе предѣла формулы объема усѣченной пирамиды $[V = \frac{1}{3}H(B+b+\sqrt{Bb})]$, слѣдовало бы предварительно установить теоремы о предѣлѣ суммы, произведенія и корня, а для этого, въ свою очередь, пришлось бы ввести нѣкоторыя теоремы о безконечно-малыхъ величинахъ. Само собою разумѣется, что въ такомъ видѣ

[illegible] о предѣлахъ не можетъ быть пройдена въ [illegible] [illegible] учебныхъ заведеній. Съ другой стороны, [illegible] [illegible] способа предѣловъ въ элементарной геометріи [illegible] [illegible] здѣсь приходится поступиться строгостью [illegible] [illegible] въ пользу его краткости и доступности. Поэтому [illegible] [illegible] извѣстныя теоремы о предѣлах[illegible] [illegible] доказательства основной принципъ способа предѣло[illegible] [illegible] что равенство, вѣрное при всевозможных[illegible] [illegible] перемѣнныхъ, остается вѣрнымъ и тогда, когда вмѣсто пере[illegible] [illegible] подставимъ ихъ предѣлы.

Книга снабжена значительнымъ количествомъ упражненій, состоящихъ частью изъ нѣкоторыхъ, не вошедшихъ въ текстъ, но представляющихъ интересъ теоремъ, а главнымъ образомъ изъ задачъ на построеніе и вычисленіе. Въ концѣ планиметріи мы помѣстили*) нѣкоторыя задачи на вычисленіе изъ «**Сборника геометрическихъ задачъ для повторительнаго курса планиметріи**» г. М. Попруженко. Эти задачи обладаютъ прежде всего тѣмъ достоинствомъ, что онѣ содержатъ много чисто **геометрическаго** матеріала, а не представляютъ собою только ариѳметическихъ или алгебраическихъ упражненій съ геометрическими данными. Въ концѣ курса, въ видѣ дополненія, мы сочли не лишнимъ приложить небольшую статью **о методахъ рѣшенія геометрическихъ задачъ на построеніе** съ примѣрами задачъ, рѣшаемыхъ этими методами. Существующіе у насъ сборники подобнаго рода, устрашая учащихся своимъ объемомъ, употребляются ими лишь въ рѣдкихъ случаяхъ. Мы изложили въ самомъ сжатомъ видѣ только главнѣйшіе методы и помѣстили наиболѣе типичныя задачи.

Книга напечатана двумя шрифтами: въ обыкновенномъ изложено все то, что должно быть пройдено въ среднихъ классахъ, въ мелкомъ — то, что желательно дополнить при повтореніи геометріи въ старшемъ классѣ.

---

*) Съ согласія составителя.

Изъ предисловія къ 21-му изданію

(1912 г.)

Въ началѣ главы «Параллельныя прямыя», раньше опредѣленія такихъ прямыхъ, поставлена вспомогательная лемма (§ 73) о взаимной связи извѣстныхъ 5-и соотношеній между углами, образующимися при пересѣченіи двухъ прямыхъ третьею. Предварительное установленіе этой связи, не представляя собою большой трудности для учащагося, значительно облегчаетъ усвоеніе дальнѣйшей теоріи параллельныхъ прямыхъ. Изложеніе самой этой теоріи тоже отличается теперь отъ прежняго. Такъ, раньше опредѣленія параллелизма мы показываемъ (§ 74) возможность существованія такихъ прямыхъ, которыя не пересѣкаются, сколько бы мы ихъ ни продолжали; затѣмъ мы сначала указываемъ п р и з н а к и параллельности прямыхъ (§ 76), а уже потомъ излагаемъ, въ видѣ обратной теоремы (§ 81), с в о й с т в а параллельныхъ прямыхъ, а не наоборотъ, какъ это дѣлалось въ предыдущихъ изданіяхъ. Иначе, чѣмъ прежде (болѣе общимъ способомъ) доказывается теорема (§ 77), что «черезъ всякую точку, лежащую внѣ прямой, можно провести параллельную этой прямой»; излагаемый теперь пріемъ доказательства даетъ больше возможности выяснить (§ 78) логическую потребность въ извѣстномъ постулатѣ параллельныхъ прямыхъ (§ 79). Признаки непараллельности прямыхъ (§ 83) изложены теперь нѣсколько подробнѣе, чѣмъ прежде.

Въ концѣ главы о параллельныхъ прямыхъ мы помѣстили теперь (мелкимъ шрифтомъ) добавленіе, могущее, какъ намъ кажется, заинтересовать многихъ любознательныхъ учениковъ: «О постулатѣ параллельныхъ линій»; въ этомъ добавленіи мы даемъ понятіе о важной роли этого постулата, а также и о «не-Эвклидовыхъ» геометріяхъ.

Существенному измѣненію подверглось доказательство теоремы Птоломея. Въ прежнихъ изданіяхъ эта теорема (§ 215 прежнихъ изданій) излагалась мелкимъ шрифтомъ, какъ слѣдствіе изъ формулъ, найденныхъ раньше, путемъ довольно сложныхъ вычисленій, для діагоналей вписаннаго четыреугольника; теперь мы даемъ классическое доказательство (§ 242) этой весьма важной теоремы и излагаемъ

обыкновеннымъ шрифтомъ. Вычисленіе же діагоналей вписаннаго четыреугольника (оставляя его въ мелкомъ шрифтѣ) мы основываемъ на теоремѣ Птоломея и на другой, добавленной теперь (§ 244), объ отношеніи діагоналей такого четыреугольника [illegible].

Существенно переработано изложеніе теоремы: «площадь прямоугольника равна произведенію его основанія на высоту» (§ 305). Въ предыдущихъ изданіяхъ доказательство этой теоремы основывалось на двухъ предварительныхъ леммахъ: о б ъ о т н о ш е н і и п л о щ а д е й прямоугольниковъ, при чемъ приходилось перемножать между собою двѣ пропорціи, сокращая послѣдующій членъ одной пропорціи съ предыдущимъ членомъ другой, т.-е. приходилось скрытымъ образомъ предполагать, что площади, представляющія собою эти члены, у ж е в ы р а ж е н ы ч и с л а м и. Теперь мы даемъ прямое, болѣе строгое и вмѣстѣ съ тѣмъ болѣе ясное, доказательство этой теоремы и только, какъ слѣдствіе изъ нея, выводимъ (§ 306) заключеніе объ отношеніи площадей двухъ прямоугольниковъ.

Въ началѣ главы «Площади многоугольниковъ» мы помѣстили замѣчаніе (мелкимъ шрифтомъ, § 301), указывающее на важный вопросъ, возникающій относительно основныхъ допущеній о площадяхъ, а также дали наглядное понятіе о томъ (§ 303), что слѣдуетъ разумѣть подъ ч и с л о м ъ, и з м ѣ р я ю щ и м ъ к а к у ю - н и б у д ь д а н н у ю п л о щ а д ь в ъ к в а д р а т н ы х ъ е д и н и ц а х ъ.

Въ нѣкоторыхъ случаяхъ, не ограничиваясь обычнымъ доказательствомъ равновеликости фигуръ, мы дали дополнительное замѣчаніе о возможности р а з л о ж е н і я этихъ фигуръ на соотвѣтственно к о н г р у е н т н ы я части (въ § 309—о превращеніи параллелограммовъ, въ § 312—о превращеніи треугольника въ прямоугольникъ и въ § 315—о превращеніи трапеціи въ прямоугольникъ).

Для большей наглядности мы привели третье доказательство теоремы Пиѳагора (§ 321), показывающее, какъ разложить сумму квадратовъ, построенныхъ на катетахъ, на такія части, изъ которыхъ, перемѣщеніемъ ихъ, можно образовать квадратъ, построенный на гипотенузѣ.

Изложеніе главы «Объемъ призмы и пирамиды» измѣнено въ соотвѣтствіи съ измѣненіемъ главы о площадяхъ; такъ, объемъ прямоугольнаго параллелепипеда находится непосредственно, а не

[illegible] основанія леммъ объ отношеніи объемовъ [illegible]
[illegible]
[illegible] выполнить всѣ требованія офиціальныхъ [illegible] главнымъ образомъ съ цѣлью удовлетворить [illegible] учениковъ, мы ввели и нѣкоторые новые [illegible] главы, напр.: о симметріи фигуръ (§§ 33, 102 [illegible]) [illegible] параллельныхъ линій (§§ 91—95), о признакахъ [illegible] необходимыхъ и достаточныхъ (§ 187), о фигурахъ подобно расположенныхъ (гомотетія, §§ 211—218), объ однородности уравненій, получаемыхъ при рѣшеніи геометрическихъ задачъ (§ 342), о построеніи корней квадратнаго уравненія (§ 343), опредѣленіе проекціи прямой на плоскость (§ 394) и нѣкоторые другіе.

Предисловіе къ 24-му изданію

(1915 г.).

Въ этомъ изданіи введены слѣдующія небольшія дополненія и измѣненія (перечисляемъ ихъ въ порядкѣ слѣдованія параграфовъ):

Къ § 45 (теорема о внѣшнемъ углѣ треугольника) добавлена выноска (могущая заинтересовать способнаго ученика), въ которой излагается одно дополненіе къ доказательству, приведенному въ текстѣ, съ цѣлью сдѣлать его болѣе строгимъ.

Къ § 87 добавлено замѣчаніе 2-е о различеніи *правой* и *лѣвой* сторонъ угла и о возможности помощью этихъ терминовъ весьма просто выразить словесно, въ какомъ случаѣ углы съ соотвѣтственно параллельными или перпендикулярными сторонами равны, и въ какомъ составляютъ дополненіе другъ къ другу до $2d$.

Добавленъ новый § 154a, содержащій доказательство предложенія, которое въ прежнихъ изданіяхъ не только не доказывалось, но даже ясно не формулировалось, а именно: если два отрѣзка прямой имѣютъ общую мѣру, то примѣненный къ нимъ процессъ послѣдовательнаго отложенія, при достаточномъ продолженіи его, долженъ закончиться. Теорема эта необходима, между прочимъ, для доказательства того, что діагональ квадрата несоизмѣрима съ его стороною.

Въ § 313 для площади треугольника сверхъ формулы $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ дана еще болѣе подробная (полезная иногда при рѣшеніи задачъ): $S=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}$.

Въ § 338 дано болѣе простое, чѣмъ прежде, рѣшеніе задачи о вычисленіи площади сегмента по радіусу круга и числу градусовъ, заключающихся въ дугѣ сегмента; это упрощеніе сдѣлало лишнимъ чертежъ 294-й, который теперь выпущенъ.

Въ выноскѣ къ § 499 добавлено указаніе на свойство шара (поверхность и объемъ шара составляютъ $^2/_3$ поверхности и объема описаннаго конуса, у котораго образующая равна діаметру основанія), аналогичное тому, которое изложено въ текстѣ (поверхность и объемъ шара составляютъ $^2/_3$ поверхности и объема описаннаго цилиндра).

Просмотрѣны и исправлены всѣ упражненія, изъ которыхъ нѣкоторыя добавлены вновь (напр., №№ 43, 45, 124 и др.).

Нѣкоторыя клише замѣнены новыми (напр., подъ №№ 8, 43, 53 и др.).

ВВЕДЕНІЕ.

Математическія предложенія.

1. Во всякой математической наукѣ могутъ встрѣтиться слѣдующія предложенія:

Опредѣленія. Такъ называютъ предложенія, въ которыхъ разъясняется, какой смыслъ придаютъ тому или другому выраженію или названію. Наприм., въ ариѳметикѣ мы встрѣчаемъ опредѣленія наименьшаго кратнаго, общаго наибольшаго дѣлителя и т. п.

Аксіомы. Такъ называютъ истины, которыя, вслѣдствіе своей очевидности, принимаются безъ доказательства. Таковы, напр., предложенія:

Если двѣ величины равны порознь одной и той же третьей величинѣ, то онѣ равны и между собою.

Если къ равнымъ величинамъ придадимъ поровну, или отъ равныхъ величинъ отнимемъ поровну, то равенство не нарушится.

Если къ неравнымъ величинамъ придадимъ поровну, или отъ неравныхъ величинъ отнимемъ поровну, то смыслъ неравенства не измѣнится, т.-е. бо́льшая величина останется бо́льшей.

Теоремы. Такъ называются предложенія, которыхъ истинность обнаруживается только послѣ нѣкотораго разсужденія (доказательства). Примѣромъ можетъ служить ариѳметическая истина: «если сумма цыфръ дѣлится на 9, то число дѣлится на 9».

Слѣдствія. Такъ называются предложенія, которыя составляютъ непосредственный выводъ изъ аксіомы или теоремы. Напр., изъ теоремы: «въ пропорціи произведеніе крайнихъ членовъ равно произведенію среднихъ», выводится слѣдствіе: «крайній членъ пропорціи равенъ произведенію среднихъ членовъ, дѣленному на другой крайній».

2. Составъ теоремы. Во всякой теоремѣ можно различить двѣ части: условіе и заключеніе. У с л о в і е выражаетъ то, что предполагается даннымъ; з а к л ю ч е н і е — то, что требуется доказать. Напр., въ теоремѣ: «если сумма цыфръ дѣлится на 9, то число дѣлится на 9», условіемъ служитъ первая часть теоремы: «если сумма цыфръ дѣлится на 9», а заключеніемъ — вторая часть: «то число дѣлится на 9»; другими словами, намъ дано, что сумма цыфръ нѣкотораго числа дѣлится на 9, а требуется доказать, что въ такомъ случаѣ и само число дѣлится на 9.

Условіе и заключеніе теоремы могутъ иногда состоять изъ нѣсколькихъ отдѣльныхъ условій и заключеній; напр., въ теоремѣ: «если число дѣлится на 2 и на 3, то оно раздѣлится на 6», условіе состоитъ изъ двухъ частей: если число дѣлится на 2 и если число дѣлится на 3.

Полезно замѣтить, что всякую теорему можно подробно выразить словами такъ, что ея условіе будетъ начинаться словомъ «е с л и», а заключеніе — словомъ «т о».

3. Обратная теорема. Теоремою, обратною данной теоремѣ, наз. такая, въ которой условіемъ поставлено заключеніе или часть заключенія данной теоремы, а заключеніемъ— условіе или часть условія данной теоремы. Напр., слѣдующія двѣ теоремы обратны другъ другу:

Если сумма цыфръ дѣлится на 9, то число дѣлится на 9.	Если число дѣлится на 9, то сумма цыфръ дѣлится на 9.

Если одну изъ этихъ теоремъ назовемъ п р я м о ю, то другую слѣдуетъ назвать о б р а т н о ю.

Въ этомъ примѣрѣ обѣ теоремы, и прямая, и обратная, оказываются вѣрными. Но такъ бываетъ не всегда. Напр., теорема: «если каждое слагаемое дѣлится на одно и то же число, то и сумма раздѣлится на то же число» — вѣрна, но невѣрно обратное предложеніе: «если сумма дѣлится на какое-нибудь число, то каждое слагаемое раздѣлится на него».

4. Противоположная теорема. Теоремою, противоположною данной теоремѣ, наз. такая, которой условіе и заключеніе представляютъ о т р и ц а н і е условія и заключенія

данной теоремы. Напр., теоремѣ: «если сумма цыфръ дѣлится на 9, то число дѣлится на 9» соотвѣтствуетъ такая противоположная: «если сумма цыфръ не дѣлится на 9, то число не дѣлится на 9».

И здѣсь должно замѣтить, что вѣрность прямой теоремы еще не служитъ признакомъ вѣрности противоположной; напр., противоположное предложеніе: «если каждое слагаемое н е дѣлится на одно и то же число, то и сумма н е раздѣлится на это число», — не вѣрно, тогда какъ прямое предложеніе вѣрно.

5. Зависимость между теоремами: прямой, обратной и противоположной. Для лучшаго уясненія этой зависимости выразимъ теоремы сокращенно такъ:

1°. П р я м а я т е о р е м а: если есть A, то есть и B.

2°. О б р а т н а я т е о р е м а: если есть B, то есть и A.

3°. П р о т и в о п о л о ж н а я п р я м о й: если нѣтъ A, то нѣтъ и B.

4°. П р о т и в о п о л о ж н а я о б р а т н о й: если нѣтъ B, то нѣтъ и A.

Легко обнаружить, что предложенія первое и четвертое о б р а т н ы одно въ другое, равно какъ второе и третье. Дѣйствительно, изъ предложенія: «если есть A, то есть и B», непосредственно слѣдуетъ: «если нѣтъ B, то нѣтъ и A» (такъ какъ если бы A было, то, согласно первому предложенію, было бы и B); обратно, изъ предложенія: «если нѣтъ B, то нѣтъ и A», выводимъ: «если есть A, то есть и B» (такъ какъ если бы B не было, то не было бы и A). Совершенно такъ же убѣдимся, что изъ второго предложенія слѣдуетъ третье, и наоборотъ.

Поэтому, чтобы быть увѣреннымъ въ вѣрности всѣхъ четырехъ теоремъ, нѣтъ надобности доказывать каждую изъ нихъ отдѣльно, а достаточно ограничиться доказательствомъ только двухъ: прямой и обратной или прямой и противоположной.

Прямая линія, плоскость. Понятіе о геометріи.

6. Геометрическія фигуры. Всякая ограниченная часть пространства называется г е о м е т р и ч е с к и м ъ т ѣ л о м ъ.

Геометрическое тѣло можно подраздѣлять н а ч а с т и; каждая часть геометрическаго тѣла есть также геометрическое тѣло.

Граница геометрическаго тѣла, т.-е. то, чѣмъ оно отдѣляется отъ остального пространства, наз. п о в е р х н о с т ь ю.

Поверхность можно подраздѣлять на части; всякая часть поверхности есть также поверхность.

Граница поверхности или части поверхности называется **линіей**.

Линію можно также подраздѣлять на части; каждая часть линіи есть также линія.

Граница линіи или части линіи называется точкой.

Геометрическое тѣло, поверхность, линія и точка не существуютъ раздѣльно. Однако при помощи отвлеченія мы можемъ разсматривать поверхность независимо отъ геометрическаго тѣла, линію — независимо отъ поверхности и точку — независимо отъ линіи. При этомъ поверхность мы должны представлять себѣ не имѣющею толщины, линію — не имѣющею ни толщины, ни ширины, и точку — не имѣющею ни длины, ни ширины, ни толщины.

Всякая линія содержитъ въ себѣ безчисленное множество точекъ. Принято говорить, что эти точки лежатъ на линіи, или что эта линія проходитъ черезъ эти точки. Ихъ можно разсматривать, какъ послѣдовательныя положенія одной и той же точки, движущейся вдоль этой линіи. Поэтому можно сказать, что линія есть слѣдъ движенія точки. Если, напр., мы острее карандаша двигаемъ по бумагѣ, то слѣдъ этого движенія на бумагѣ есть приблизительно линія; приблизительно потому, что острее карандаша не представляетъ собою геометрической точки, вслѣдствіе чего проведенная на бумагѣ линія имѣетъ нѣкоторую ширину (и даже толщину). Чѣмъ острѣе очиненъ карандашъ, тѣмъ болѣе острее его приближается къ геометрической точкѣ и тѣмъ болѣе линія, проведенная этимъ карандашомъ, приближается къ геометрической линіи.

Подобно этому поверхность можно разсматривать, какъ слѣдъ движенія линіи, двигающейся въ пространствѣ нѣкоторымъ образомъ.

Совокупность какихъ бы то ни было точекъ, линій, поверхностей или тѣлъ, расположенныхъ извѣстнымъ образомъ въ пространствѣ, называется вообще геометрической фигурой.

7. Геометрія. Наука, разсматривающая свойства геометрическихъ фигуръ, наз. геометріей, что въ переводѣ съ

греческаго языка означаетъ землемѣріе. Такое названіе этой наукѣ дано было потому, что въ древнее время главною цѣлью геометріи было измѣреніе разстояній и площадей на земной поверхности.

8. Въ самомъ началѣ геометріи должно быть указано слѣдующее общее свойство фигуръ:

Аксіома пространства. Всякую геометрическую фигуру можно перенести изъ одного мѣста пространства въ другое, не нарушая ни величины составляющихъ фигуру частей, ни ихъ взаимнаго расположенія.

9. Прямая линія. Всякій знаетъ, что такое прямая линія, или просто прямая, представленіе о которой намъ даетъ туго натянутая нить. Понятіе о прямой элементарно, т.-е. оно не можетъ быть опредѣлено посредствомъ другихъ болѣе простыхъ понятій.

На чертежѣ прямую изображаютъ въ видѣ тонкой черты, проведенной отъ руки или помощью чертежной линейки.

Прямая линія обладаетъ слѣдующими очевидными свойствами:

Аксіомы прямой. 1°. **Черезъ всякія двѣ точки пространства можно провести прямую и притомъ только одну.**

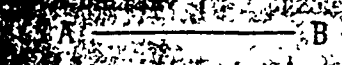
2°. **Прямую можно продолжать безъ конца въ обѣ стороны отъ каждой ея точки.**

Изъ первой аксіомы слѣдуетъ:

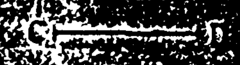
Если двѣ прямыя наложены одна на другую такъ, что какія-нибудь двѣ точки одной прямой совпадаютъ съ двумя точками другой прямой, то эти прямыя сливаются и во всѣхъ остальныхъ точкахъ (потому что въ противномъ случаѣ черезъ двѣ точки можно было бы провести двѣ различныя прямыя, что противорѣчитъ аксіомѣ первой).

По той же причинѣ двѣ прямыя могутъ пересѣчься только въ одной точкѣ.

10. Прямая конечная и безконечная. Если прямую представляютъ продолженною въ обѣ стороны безконечно, то ее называютъ безконечною или неограниченною прямой. Конечно, такую прямую изобразить на чертежѣ невозможно. Изображаютъ только какую-нибудь часть ея и мысленно воображають, что эта часть продолжена въ обѣ стороны безконечно. Прямую обозначають обыкновенно двумя буквами, поставленными у двухъ какихъ-либо ея точекъ, такъ говорятъ «прямая AB или BA» (черт. 1).



Черт. 1.



Черт. 2.

Часть прямой, ограниченная съ обѣихъ сторонъ, наз. отрѣзкомъ прямой или конечною прямой; такая прямая обозначается двумя буквами, поставленными у концовъ ея (отрѣзокъ CD, черт. 2). Для краткости вмѣсто «отрѣзокъ прямой» мы будемъ часто говорить просто «отрѣзокъ». Отрѣзокъ, соединяющій двѣ точки, наз. иногда разстояніемъ между ними.

Иногда разсматриваютъ прямую, ограниченную только съ одной стороны, напр., въ точкѣ A (черт. 3). О такой прямой

Черт. 3.

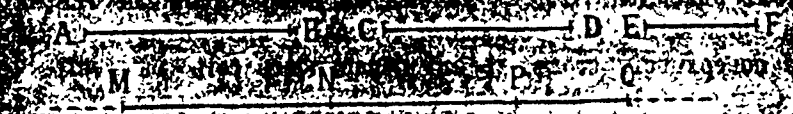
говорятъ, что она исходитъ изъ точки A; ее называютъ полупрямою (или лучемъ).

11. Равенство и неравенство отрѣзковъ. Два отрѣзка считаются равными, если они могутъ быть наложены другъ на друга такъ, что совмѣщаются. Положимъ, напр., что мы накладываемъ отрѣзокъ AB на отрѣзокъ CD (черт. 4) такъ, чтобы точка A упала на C и чтобы прямая AB пошла по CD; если при этомъ концы B и D совпадутъ, то отрѣзки AB и CD считаются равными; въ противномъ случаѣ отрѣзки будутъ неравны, при чемъ меньшимъ считается тотъ, который составляетъ часть другого.

Чтобы на какой-нибудь прямой отложить отрѣзокъ, равный данному отрѣзку, употребляютъ циркуль—приборъ, извѣстный учащимся изъ опыта.

12. Сумма отрѣзковъ. Суммою нѣсколькихъ данныхъ отрѣзковъ наз. такой новый отрѣзокъ, который составленъ изъ частей, соотвѣтственно равныхъ даннымъ отрѣзкамъ.

Положимъ, напр., требуется найти сумму трехъ отрѣзковъ AB, CD и EF (черт. 4). Для этого на какой-нибудь прямой беремъ произвольную точку M и откладываемъ отъ нея часть MN, равную AB, затѣмъ отъ точки N въ томъ же направленіи откладываемъ часть NP, равную CD, и часть PQ, равную EF. Отрѣзокъ MQ будетъ сумма данныхъ отрѣзковъ AB, CD и EF, которые по отношенію къ этой суммѣ называются слагаемыми. Подобнымъ образомъ можно получить сумму какого угодно числа отрѣзковъ.



Черт. 4.

Сумма отрѣзковъ обладаетъ свойствами всякой суммы; такъ, она не зависитъ отъ порядка слагаемыхъ (перемѣстительное свойство) и не измѣняется, если нѣкоторыя слагаемыя будутъ замѣнены ихъ суммою (сочетательное свойство). Напр., легко убѣдиться (черт. 4), что

$$AB+CD+EF=CD+EF+AB=EF+AB+CD=\dots$$
$$\text{и } AB+CD+EF=AB+(CD+EF).$$

Изъ понятія о суммѣ выводятся понятія о разности, произведеніи и частномъ отрѣзковъ. Такъ, разность отрѣзковъ AB и CD (если $AB>CD$) есть такой третій отрѣзокъ, котораго сумма съ CD образуетъ AB; произведеніе отрѣзка AB на число 3 есть сумма трехъ отрѣзковъ, изъ которыхъ каждый равенъ AB; частное отъ дѣленія отрѣзка AB на число 3 есть третья часть AB и т. п.

Мы принимаемъ за очевидную истину, что каждый отрѣзокъ прямой можетъ быть подраздѣленъ (хотя бы только мысленно) на 2, на 3, на 4 и вообще на какое угодно число равныхъ частей.

13. Плоскость. Плоскостью наз. поверхность, обладающая тѣмъ свойствомъ, что прямая, проходящая черезъ какія-нибудь двѣ точки этой поверхности, лежитъ на ней всѣми остальными своими точками. Положимъ, напр., мы желаемъ убѣдиться, бу-

[illegible] плоскостью поверхности стола. Для этого берем хорошо выверенную линейку и прикладываемъ ее краемъ въ различныхъ направленіяхъ къ поверхности стола такъ, чтобы какія-нибудь двѣ точки линейки лежали на этой поверхности. Если при этомъ окажется, что, въ какомъ бы направленіи мы линейку ни приложили, всѣ остальныя точки ея края будутъ лежать на поверхности стола, то эта поверхность есть плоскость.

Существованіе плоскости въ пространствѣ принимается за аксіому.

Укажемъ слѣдующее свойство плоскости, которое мы примемъ безъ доказательства:

Всякую часть плоскости можно наложить всѣми ея точками на другое мѣсто этой или другой плоскости, при чемъ накладываемую часть можно предварительно перевернуть другою стороною.

14. Раздѣленіе геометріи. Геометрія раздѣляется на двѣ части: планиметрія и стереометрія. Первая разсматриваетъ свойства такихъ фигуръ, которыхъ всѣ части помѣщаются на одной плоскости; вторая—свойства такихъ фигуръ, которыхъ не всѣ части помѣщаются на одной плоскости.

ПЛАНИМЕТРІЯ.

КНИГА I.

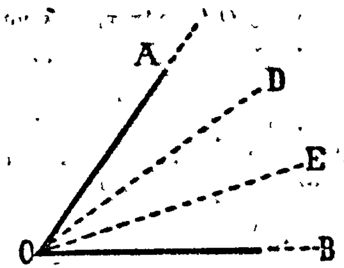
ПРЯМАЯ ЛИНІЯ.

ГЛАВА I.

Углы.

Предварительныя понятія.

15. Опредѣленія Фигура, образованная двумя полупрямыми (OA и OB, черт. 5), исходящими изъ одной точки, наз. угломъ. Полупрямыя, образующія уголъ, наз. сторонами, а точка, изъ которой онѣ исходятъ,—вершиною угла. Стороны должно представлять себѣ продолженными отъ вершины безконечно.



Черт. 5.

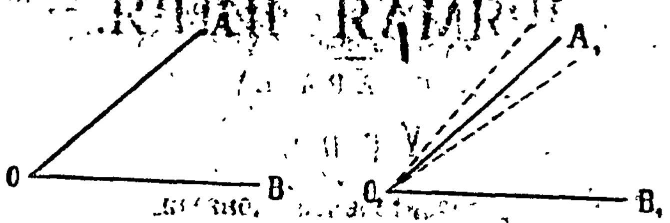
Уголъ обыкновенно обозначается тремя буквами, изъ которыхъ средняя ставится у вершины, а крайнія у какихъ-нибудь точекъ сторонъ; напр., говорятъ: «уголъ AOB или уголъ BOA» (черт. 5). Но можно обозначать уголъ и одною буквою, поставленною у вершины, если при этой вершинѣ нѣтъ другихъ угловъ. Мы иногда будемъ обозначать уголъ цыфрою, поставленною внутри угла, около вершины.

Часть плоскости, ограниченная сторонами угла, разсматривается, какъ лежащая внутри угла; остальная часть плоскости лежитъ внѣ угла.

Если изъ вершины угла (черт. 5) проведемъ в н у т р и е г о какія-нибудь прямыя OD, OE..., то образовавшіеся при этомъ углы AOD, DOE, EOB... разсматриваются, какъ ч а с т и угла AOB.

Слово «уголъ» на письмѣ замѣняется часто знакомъ $\angle$.

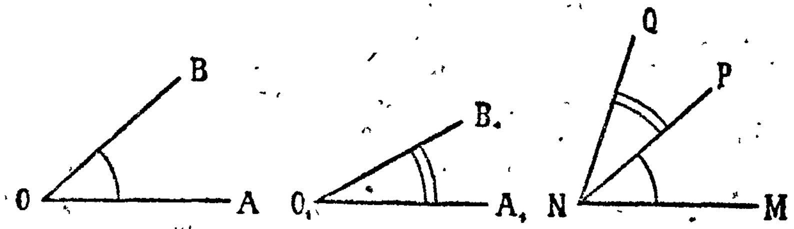
16. Равенство и неравенство угловъ. **Два угла считаются равными, если при наложеніи они могутъ совмѣститься.** Положимъ, напр., что мы накладываемъ уголъ AOB на уголъ $A_1O_1B_1$ (черт. 6) такъ, чтобы вершина O упала въ O_1, сторона OB пошла по O_1B_1 и чтобы углы покрыли другъ друга.



Черт. 6.

Если при этомъ сторона OA совмѣстится съ O_1A_1, то углы равны; если же OA пойдетъ внутри угла $A_1O_1B_1$, или внѣ его, то углы не равны, при чемъ тотъ изъ нихъ будетъ меньше, который составитъ часть другого угла.

17. Сумма угловъ. **Суммою нѣсколькихъ данныхъ угловъ наз. уголъ, составленный изъ частей, соотвѣтственно равныхъ даннымъ угламъ.** Такъ, чтобы получить сумму угловъ AOB и $A_1O_1B_1$ (черт. 7), строятъ уголъ MNP, равный одному изъ данныхъ



Черт. 7.

угловъ, напр., AOB, и къ нему пристраиваютъ уголъ PNQ, равный другому данному углу $A_1O_1B_1$, такъ, чтобы у обоихъ угловъ оказалась общая вершина N и общая сторона NP и

чтобы углы были расположены по разныя стороны отъ общей стороны NP. Полученный такимъ образомъ уголъ MNQ есть с у м м а угловъ AOB и $A_1O_1B_1$. Подобнымъ образомъ можетъ быть составлена сумма трехъ и болѣе угловъ.

Сумма угловъ, какъ и сумма отрѣзковъ прямой (12), обладаетъ с в о й с т в а м и п е р е м ѣ с т и т е л ь н ы м ъ и с о ч е т а т е л ь н ы м ъ.

Изъ понятія о суммѣ угловъ выводятся понятія объ ихъ разности, произведеніи и частномъ.

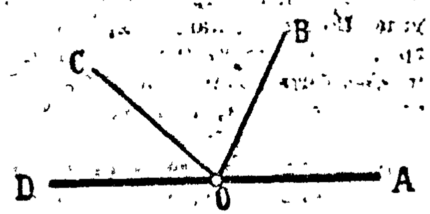
Мы принимаемъ за очевидную истину, что каждый уголъ можетъ быть раздѣленъ (хотя бы только мысленно) на 2, на 3, на 4 и вообще на какое угодно число равныхъ частей.

Черт. 8.

Часто приходится говорить о такой полупрямой, которая дѣлитъ данный уголъ пополамъ; такой полупрямой дали особое названіе: б и с с е к т р и с а (черт. 8) (или р а в н о д ѣ л я щ а я)*).

18. Замѣчаніе 1-е. При нахожденіи суммы угловъ могутъ представиться нѣкоторые особенные случаи, которые полезно разсмотрѣть особо.

1°. Можетъ случиться, что послѣ сложенія нѣсколькихъ угловъ, напр., трехъ: AOB, BOC и COD (черт. 9), сторона OD угла COD составитъ продолженіе стороны OA угла AOB. Мы получимъ тогда фигуру, образованную двумя полупрямыми (OA и OD), исходящими изъ одной точки (O) и составляющими продолженіе одна другой. Такую фигуру принято тоже называть угломъ (р а з в е р н у т ы м ъ, или в ы п р я м л е н н ы м ъ).



Черт. 9.

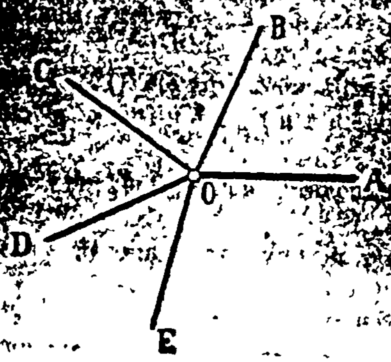
2°. Можетъ случиться, что послѣ сложенія нѣсколькихъ угловъ, напр., пяти угловъ: AOB, BOC, COD, DOE и EOA (черт. 10), сторона OA угла EOA совмѣстится со стороной OA угла AOB.

Фигура, образованная такими совпавшими полупрямыми (раз-

---

*) Въ нѣкоторыхъ руководствахъ линія эта наз. *биссекторомъ*.

...сматриваемая вмѣстѣ со всею плоскостью, расположенною кругомъ общей вершины O), также называется угломъ (полнымъ).



Черт. 10.

3°. Наконецъ, можетъ случиться, что, строя сумму угловъ, мы не только заполнимъ всю плоскость кругомъ ихъ общей вершины, но даже будемъ вынуждены налагать углы одинъ на другой, покрывая плоскость вокругъ общей вершины во второй разъ, въ третій разъ и т. д.

Въ этомъ случаѣ понятіе о суммѣ угловъ должно быть расширено на основаніи слѣдующихъ опредѣленій:

1°. Двѣ суммы угловъ: $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$ и $b_1+b_2+b_3+\ldots+b_m$ считаются равными, если, строя ихъ указаннымъ путемъ, начиная отъ одной и той же полупрямой OA въ одномъ направленіи вокругъ общей вершины O, мы для каждой суммы, во-первыхъ, обойдемъ по плоскости все пространство вокругъ точки O одинаковое число разъ и, во-вторыхъ, послѣдняя сторона угла a_n совпадетъ съ послѣднею стороною угла b_m.

2°. Если же эти условія не выполнены, суммы считаются неравными, при чемъ та будетъ меньше, къ которой надо приложить еще нѣкоторый уголъ или нѣсколько угловъ, чтобы получить вторую сумму.

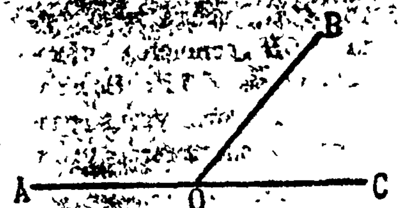
19. Замѣчаніе 2-е. Когда двѣ полупрямыя исходятъ изъ одной точки, то, строго говоря, онѣ образуютъ не одинъ уголъ, а два угла. Возьмемъ, напр., черт. 5-й и вообразимъ, что полупрямая OA вращается вокругъ O до совпаденія съ полупрямой OB. Это вращеніе можетъ быть двоякое: или OA вращается по направленію движенія часовой стрѣлки, или же, наоборотъ, противъ движенія часовой стрѣлки. Если обратимъ вниманіе на часть плоскости, которую A проходитъ до совпаденія съ OB при первомъ вращеніи, то будемъ имѣть одинъ уголъ, образованный полупрямыми OA и OB и содержащій эту часть плоскости; если же обратимъ вниманіе на часть плоскости, проходимую OA до совпаденія съ OB при другомъ вращеніи, то получимъ другой уголъ, образованный тѣми же сторонами OA и OB, но содержащій эту другую часть плоскости. Эти два угла равны другъ другу лишь въ томъ случаѣ, когда полупрямыя AO и OB составляютъ одну прямую, т.-е когда оба угла развернутые; въ остальныхъ случаяхъ углы эти не равны, но всегда въ суммѣ составляютъ полный уголъ. Обыкновенно, говоря объ углѣ AOB, разумѣютъ только тотъ изъ двухъ угловъ, образованныхъ полупрямыми OA и OB, который меньше развернутаго угла.

Свойство прямого угла.

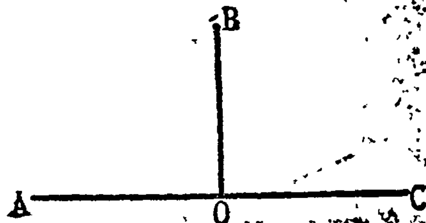
20. Опредѣленія. Два угла (AOB и BOC, черт. 11 и черт. 12) наз. **смежными**, если одна сторона у нихъ общая, а двѣ другія стороны составляютъ продолженіе одна другой.

Изъ этого опредѣленія видно, что если возьмемъ произвольный уголъ (напр. AOB, черт. 11) и продолжимъ одну его сторону (напр. AO) за вершину, то получимъ другой уголъ (BOC), смежный со взятымъ угломъ.

Общая сторона (OB) двухъ смежныхъ угловъ наз. **наклонною** къ прямой (AC), на которой лежатъ другія стороны, въ томъ случаѣ, когда смежные углы не равны (черт. 11).



Черт. 11.



Черт. 12.

Общая сторона (OB) двухъ смежныхъ угловъ наз. **перпендикуляромъ** къ прямой, на которой лежатъ другія стороны въ томъ случаѣ, когда смежные углы равны (черт. 12).

Общая вершина (O) въ первомъ случаѣ наз. **основаніемъ** наклонной, во второмъ случаѣ — **основаніемъ** перпендикуляра.

Говорятъ «**возставить** къ прямой перпендикуляръ», если этотъ перпендикуляръ приходится проводить черезъ точку, взятую на прямой, и «**опустить** на прямую перпендикуляръ», если онъ проводится черезъ точку, взятую внѣ прямой.

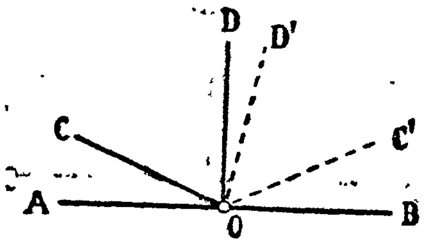
Каждый изъ равныхъ смежныхъ угловъ наз. **прямымъ** (черт. 12).

Что смежные углы могутъ быть равны, видно изъ слѣдующей теоремы.

21. Теорема. Изъ всякой точки прямой можно, по ту и другую сторону отъ этой прямой, возставить къ ней перпендикуляръ и притомъ только одинъ.

Пусть дана какая-нибудь прямая AB (черт. 13) и на ней произвольная точка O. Требуется доказать, что во 1) изъ этой точки можно, по каждую сторону отъ прямой AB, возставить къ AB перпендикуляръ и во 2) этотъ перпендикуляръ можетъ быть только одинъ (по каждую сторону отъ прямой).

1°. Проведемъ изъ точки O какую-нибудь полупрямую OC. Тогда образуются 2 смежныхъ угла: AOC и COB. Если случится, что углы эти равны другъ другу, то тогда ихъ общая сторона OC будетъ перпендикуляромъ къ AB; если же углы AOC и COB окажутся неравными, то одинъ изъ нихъ долженъ быть меньше другого. Пусть AOC меньше COB. Тогда отъ большаго угла COB мы можемъ отдѣлить часть $C'OB$, равную углу AOC; послѣ чего отъ угла COB останется нѣкоторый уголъ COC'. Вообразимъ, что этотъ уголъ раздѣленъ пополамъ; пусть биссектриса будетъ нѣкоторая полупрямая OD (мы принимаемъ за очевидное, что биссектриса угла можетъ быть только одна). Эта полупрямая и будетъ перпендикуляромъ къ AB, такъ какъ смежные углы AOD и DOB, состоящіе изъ соотвѣтственно равныхъ частей ($AOC=C'OB$ и $COD=DOC'$), равны между собою.



Черт. 13.

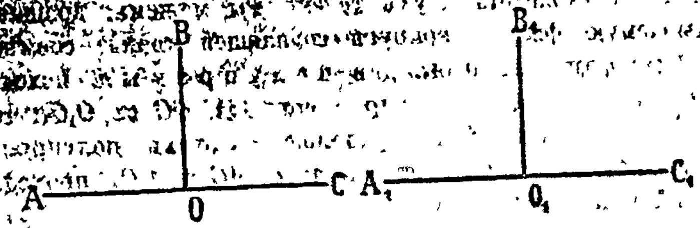
2°. Всякая другая полупрямая OD', исходящая изъ точки O и расположенная по ту же сторону отъ AB, по которой лежитъ OD, не можетъ образовать съ AB равныхъ смежныхъ угловъ, такъ какъ $AOD'>AOD$, а $D'OB<DOB$ и, слѣд., углы AOD' и $D'OB$ не могутъ быть равны. Такимъ образомъ, нельзя возставить другого перпендикуляра къ AB изъ точки O по ту сторону отъ AB, по какой лежитъ перпендикуляръ OD.

Точно такъ же убѣдимся, что по другую сторону отъ AB можно возставить изъ точки O перпендикуляръ къ AB и при томъ только одинъ.

22. Теорема. Всѣ прямые углы равны между собою.

Пусть смежные углы при вершинахъ O и O_1 (черт. 14) и равны, т.-е. $\angle AOB=\angle BOC$ и $\angle A_1O_1B_1=\angle B_1O_1C_1$. Требуется доказать, что прямые углы первой пары равны прямымъ угламъ второй пары.

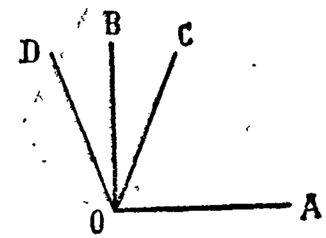
Наложимъ фигуру $AOBC$ на фигуру $A_1O_1B_1C_1$ такъ, чтобы точка O упала на O_1, полупрямая OC пошла по O_1C_1 и чтобы полупрямая OB упала по ту же сторону отъ A_1C_1, по которой расположена O_1B_1. Тогда полупрямыя OA и O_1A_1 совмѣстятся,



Черт. 14.

такъ какъ онѣ составляютъ продолженія совпавшихъ полупрямыхъ OC и O_1C_1; полупрямая OB совпадетъ съ O_1B_1, потому что, въ противномъ случаѣ, изъ одной точки O_1 прямой A_1C_1 можно было бы возставить къ ней, по одну и ту же сторону, два перпендикуляра, что, по доказанному, невозможно. Если же полупрямыя OB и O_1B_1 совпадутъ, то это значитъ, что $\angle AOB=\angle A_1O_1B_1$ и $\angle COB=\angle C_1O_1B_1$, что и требовалось доказать.

Замѣчаніе. Изъ доказанной теоремы слѣдуетъ, что прямой уголъ представляетъ собою постоянную величину (ее обыкновенно обозначаютъ знакомъ d, т.-е. начальною буквою французскаго слова droit, прямой). Вслѣдствіе этого обыкновенно углы сравниваютъ по величинѣ съ прямымъ угломъ. Если уголъ меньше прямого (какъ уголъ AOC, черт. 15), то его называютъ острымъ, если же уголъ больше прямого (какъ уголъ AOD, черт. 15), то его называютъ тупымъ.



Черт. 15.

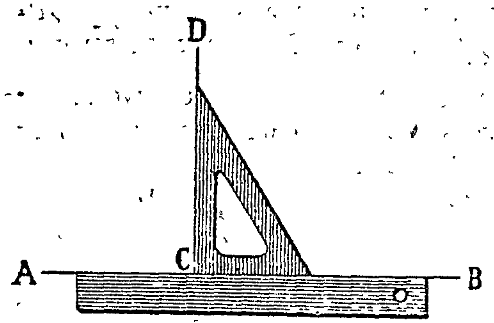
23. Доказательство наложеніемъ. Пріемъ, которымъ мы доказывали предыдущую теорему, наз. доказательствомъ посредствомъ наложенія.

Мы принимаемъ за очевидное, что наложеніе одной плоской фигуры на другую всегда можно выполнять въ такой последовательности:

1°. Мы можемъ любую точку одной фигуры совмѣстить съ любою точкою другой фигуры; напр. (черт. 14), точку O съ O_1.

2°. По совмѣщеніи двухъ точекъ мы можемъ, вращая накладываемую фигуру вокругъ совпавшей точки, совмѣстить въ обѣихъ фигурахъ любыя двѣ полупрямыя, исходящія изъ совпавшихъ точекъ, напр. (черт. 14), OC съ O_1C_1; тогда, конечно, совмѣстятся и продолженія этихъ полупрямыхъ, OA съ O_1A_1, т.-е. совмѣстятся прямыя AC и A_1C_1, проходящія черезъ точки O и O_1.

3°. По совмѣщеніи двухъ точекъ и двухъ прямыхъ мы можемъ, вращая накладываемую фигуру вокругъ совпавшей прямой, какъ около оси, расположить эту фигуру или по ту, или по другую сторону отъ совпавшей прямой. Напр. (черт. 14), по совмѣщеніи точекъ O и O_1 и прямыхъ AC и A_1C_1, мы можемъ расположить фигуру $AOBC$ или такъ, что полупрямая OB пойдетъ кверху отъ O_1C_1, или же такъ, что она пойдетъ книзу отъ нея (въ послѣднемъ случаѣ будетъ такъ называемое приложеніе фигуры).



Черт. 16.

Послѣ этого нашъ произволъ заканчивается; совпадутъ ли другія части фигуръ,—зависитъ отъ свойствъ самихъ фигуръ.

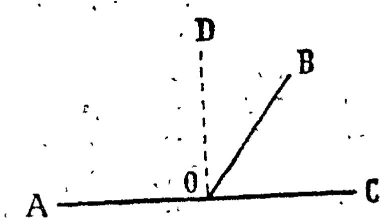
24. Черченіе прямого угла. Прямой уголъ легко начертить помощью прибора, называемаго наугольникомъ,

у котораго одинъ изъ трехъ угловъ дѣлается прямымъ. Чтобы начертить прямой уголъ при точкѣ C прямой AB (черт. 16), можно поступить такъ: приставимъ къ этой прямой линейку, къ линейкѣ наугольникъ, какъ указано на чертежѣ, и будемъ двигать наугольникъ вдоль линейки до тѣхъ поръ, пока вершина прямого угла не совпадетъ съ точкой C. Остается тогда провести по сторонѣ прямого угла прямую CD.

Свойства смежныхъ и вертикальныхъ угловъ.

25. Теорема. Сумма двухъ смежныхъ угловъ равна двумъ прямымъ (точнѣе сказать: равна суммѣ двухъ прямыхъ угловъ).

Даны два смежныхъ угла: AOB и BOC (черт. 17); требуется доказать, что $AOB + BOC = d + d = 2d$.

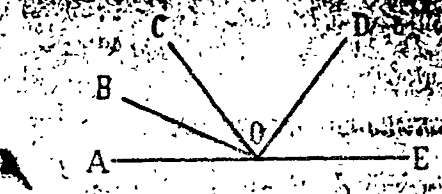


Черт. 17.

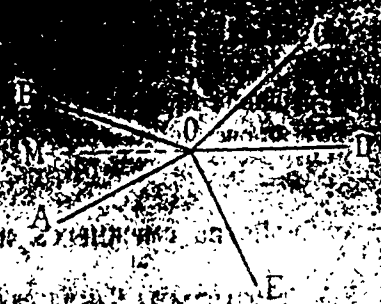
Возставивъ изъ точки O къ прямой AC перпендикуляръ OD, мы получимъ 2 прямыхъ угла: AOD и DOC, которыхъ сумма составляетъ уголъ, образуемый полупрямыми OA и OC. Но и сумма данныхъ смежныхъ угловъ также составляетъ тотъ же самый уголъ AOC. Значитъ: $AOB+BOC=AOD+DOC=d+d=2d$.

26. Слѣдствія. 1°. **Сумма угловъ** (AOB, BOC, COD, DOE, черт. 18), **расположенныхъ вокругъ общей вершины** (O) **по одну сторону прямой** (AE), **равна** $2d$, потому что эту сумму можно (согласно сочетательному свойству), какъ сумму двухъ смежныхъ угловъ, напр., угловъ AOB и BOE, или угловъ AOC и COE, и т. п.

2°. **Сумма угловъ** (AOB, BOC, COD, DOE, EOA, черт. 19), **расположенныхъ вокругъ общей вершины** (O) **по обѣ стороны отъ какой-нибудь прямой** (DM), **равна** $4d$, потому что, сложивъ углы DOC, COB и BOM, расположенные по одну сторону отъ прямой MD, мы получимъ [illegible] углы MOA, AOE и EOD, расположенные [illegible] отъ MD; мы [illegible]



Черт. 18.

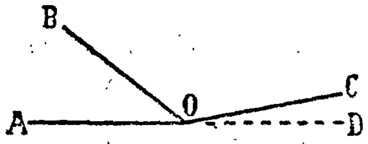


Черт. 19.

въ суммѣ еще получимъ $2d$; значитъ, сумма всѣхъ этихъ угловъ равна $2d+2d$, т.-е. $4d$.

27. Обратная теорема. **Если сумма двухъ угловъ, имѣющихъ общую вершину и общую сторону и не покрывающихъ другъ друга, равна двумъ прямымъ, то такіе углы—смежные, т.-е. двѣ другія стороны ихъ составляютъ продолженіе одна другой.**

Пусть даны (черт. 20) два угла: AOB и BOC, имѣющіе общую вершину O и общую сторону OB и не покрывающіе другъ друга; пусть, кромѣ того, извѣстно, что сумма ихъ равна $2d$ (т.-е. уголъ AOC равенъ $2d$); требуется доказать, что при этихъ условіяхъ OC есть продолженіе AO.



Черт. 20.

Допустимъ противное (противоположное) тому, что требуется доказать, а именно допустимъ, что OC не есть продолженіе AO. Посмотримъ, къ чему приведетъ насъ это предположеніе. Такъ какъ всякая прямая можетъ быть продолжена въ обѣ стороны, то и прямая AO можетъ быть продолжена за точку O. Пусть это продолженіе будетъ нѣкоторая полупрямая OD, которая, согласно нашему допущенію, не сливается съ OC. Тогда углы AOB и BOD будутъ смежные и потому, по доказанному прежде (25):

$$AOB+BOD=2d.$$

Съ другой стороны, согласно условію нашей теоремы [illegible]

$$AOB+BOC=2d.$$

Правыя части этихъ двухъ равенствъ равны, слѣд., равны и лѣвыя (двѣ величины, равныя порознь одной и той же третьей величинѣ, равны между собою):

$$AOB+BOD=AOB+BOC.$$

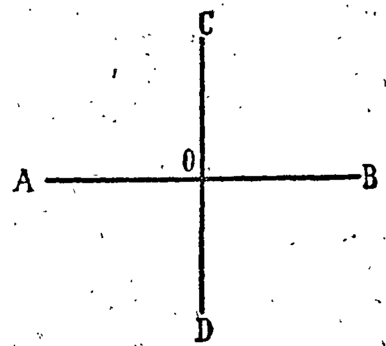
Отнявъ отъ равныхъ суммъ по одному и тому же углу AOB, мы должны получить равные остатки:

$$BOD=BOC.$$

Но это равенство невозможно, такъ какъ уголъ BOC составляетъ часть угла BOD, а часть не можетъ равняться цѣлому.

Если въ результатѣ разсужденія мы получаемъ невозможный (нелѣпый) выводъ, то это можетъ произойти или отъ того, что мы невѣрно разсуждали, или отъ того, что наше разсужденіе было основано на невозможномъ допущеніи. Разсужденіе наше было правильно; значитъ, причина нелѣпаго вывода заключается въ невозможности допущенія, что OC не есть продолженіе AO. Но если это предположеніе невозможно, то остается только одно: OC есть продолженіе AO *); что и требовалось доказать.

Слѣдствіе. Если изъ какой-нибудь точки O прямой AB (черт. 21) возставимъ къ ней, по каждую ея сторону, перпендикуляры OC и OD, то эти перпендикуляры образуютъ одну прямую CD, потому что сумма угловъ COB и BOD равна $2d$.



Черт. 21.

28. Опредѣленіе. Прямая CD (черт. 21), которой части OC и OD служатъ перпендикулярами къ другой прямой AB, наз. **прямой, перпендикулярной къ AB.**

Если прямая CD перпенди-

*) Слѣд., нашъ чертежъ сдѣланъ неправильно.

кулярна къ прямой AB, то и обратно: CD перпендикулярна къ AB, потому что части OA и OB служатъ также перпендикулярами къ CD. Поэтому прямыя AB и CD наз. взаимно перпендикулярными.

Что двѣ прямыя AB и CD взаимно перпендикулярны, мы выражаютъ письменно такъ: $AB \perp CD$.

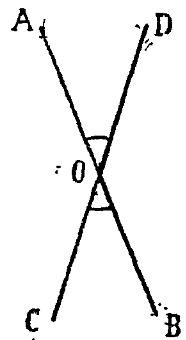
29. Доказательство отъ противнаго. Способъ, которымъ мы доказали обратную теорему о смежныхъ углахъ (27), наз. доказательствомъ отъ противнаго или приведеніемъ къ нелѣпости (reductio ad absurdum). Первое названіе этотъ способъ получилъ потому, что въ началѣ разсужденія дѣлается предположеніе противное (противоположное) тому, что требуется доказать. Приведеніемъ къ нелѣпости онъ наз. вслѣдствіе того, что, разсуждая на основаніи сдѣланнаго предположенія, мы приходимъ къ нелѣпому выводу (къ абсурду). Полученіе такого вывода заставляетъ насъ отвергнуть сдѣланное въ началѣ допущеніе и принять то, которое требовалось доказать.

30. Опредѣленіе. Два угла наз. вертикальными, если стороны одного составляютъ продолженія сторонъ другого.

Такъ, при пересѣченіи двухъ прямыхъ AB и CD (черт. 22) образуются двѣ пары вертикальныхъ угловъ: AOD и COB, AOC и DOB (и 4 пары смежныхъ угловъ).

31. Теорема. Два вертикальныхъ угла равны.

Пусть даны (черт. 22) два вертикальныхъ угла: AOD и COB; другими словами, намъ дано, что OB есть продолженіе OA и OC есть продолженіе OD. Требуется доказать, что $AOD=COB$.



Черт. 22.

Согласно свойству смежныхъ угловъ:

$$AOD+DOB=2d$$

и

$$COB+DOB=2d;$$

значитъ:

$$AOD+DOB=COB+DOB.$$

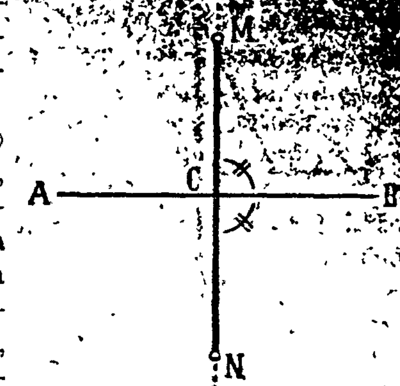
Отнявъ отъ этихъ равныхъ суммъ по одному и тому же углу DOB, мы должны получить равные остатки:

$$AOD=COB.$$

Подобнымъ же образомъ докажемъ, что и $AOC=DOB$.

32. Теорема. Изъ всякой точки, взятой внѣ прямой, можно опустить на эту прямую перпендикуляръ и притомъ только одинъ.

Пусть дана какая-нибудь прямая AB (черт. 23) и внѣ ея точка M; требуется доказать, что во 1) изъ этой точки можно опустить на прямую AB перпендикуляръ и во 2) этотъ перпендикуляръ можетъ быть только одинъ.



Черт. 23.

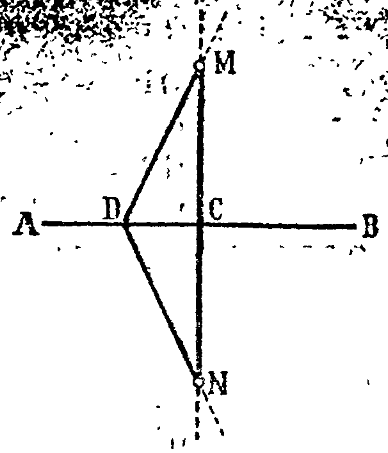
1) Перегнемъ чертежъ по прямой AB такимъ образомъ, чтобы верхняя его часть (содержащая точку M) упала на нижнюю часть *). Тогда точка M займетъ нѣкоторое положеніе N. Отмѣтивъ это положеніе, приведемъ чертежъ въ прежній видъ и затѣмъ черезъ точки M и N проведемъ прямую. Докажемъ, что эта прямая перпендикулярна къ AB. Для этого перегнемъ чертежъ вторично по прямой AB. Тогда точка M снова совмѣстится съ N, а точка C, въ которой пересѣкаются прямыя MN и AB, останется на мѣстѣ; слѣд., полупрямая CM пойдетъ по полупрямой CN, уголъ MCB совмѣстится съ угломъ BCN, а уголъ MCA совмѣстится съ угломъ ACN; значитъ, смежные углы MCB и BCN равны, а также равны и смежные углы MCA и ACN. Такъ какъ каждый изъ равныхъ смежныхъ угловъ наз. прямымъ, то всѣ 4 угла, образовавшіеся при точкѣ C, будутъ прямые; значитъ, $MN \perp AB$.

2) Докажемъ теперь, что другого перпендикуляра черезъ точку M къ прямой AB провести нельзя. Предположимъ противное, т.-е. что черезъ M къ AB можно провести, кромѣ MN, еще какой-нибудь другой перпендикуляръ, напр., MD (черт. 24).

---

*) Выражаясь болѣе точно, вообразимъ, что верхняя часть плоскости чертежа, вращаясь вокругъ прямой AB, пришла въ совмѣщеніе съ нижней частью этой плоскости.

Чтобы опровергнуть это допущеніе, перегнемъ чертежъ снова по прямой AB. Тогда точка M, по прежнему, совмѣстится съ N, а точки D и C останутся на своихъ мѣстахъ. Слѣд., уголъ MDB займетъ положеніе BDN. Разогнувъ чертежъ, разсмотримъ линію MDN. Такъ какъ, по предположенію, $MD \perp AB$, то уголъ MDB долженъ быть прямымъ, а потому и равный ему уголъ BDN также долженъ быть прямымъ. Но тогда мы будемъ имѣть два угла, MDB и BDN, которые, имѣя общую вершину и общую сторону, составляютъ въ суммѣ $2d$; слѣд., по доказанному раньше (27), двѣ ихъ стороны DM и DN должны составлять продолженіе одна другой, и, значитъ, линія MDN должна оказаться прямою. Но тогда черезъ точки M и N будутъ проходить 2 различныя прямыя линіи: одна MN, которую мы раньше провели, и другая MDN, которую мы получили теперь. Такъ какъ это невозможно (9), то нельзя допустить, чтобы черезъ точку M къ прямой AB можно было провести еще какой-нибудь иной перпендикуляръ, кромѣ MN.



Черт. 24.

Замѣчаніе. Чтобы опустить перпендикуляръ на прямую изъ данной точки, можно пользоваться линейкой и наугольникомъ (см. черт. 16).

33. Симметричныя точки. Если точки M и N (черт. 24) расположены по разныя стороны отъ прямой AB, на одномъ къ ней перпендикулярѣ и на одинаковомъ разстояніи отъ основанія этого перпендикуляра, то такія двѣ точки принято называть *симметричными относительно оси* AB. Здѣсь слово «ось» примѣнено потому, что если мы часть плоскости, расположенную по одну сторону отъ прямой AB, станемъ вращать вокругъ этой прямой, *какъ вокругъ оси*, до совмѣщенія ея съ частью плоскости, расположенною по другую сторону отъ AB, то симметричныя точки M и N совмѣстятся.

Упражненія. Доказать, что:

1. Биссектрисы двухъ смежныхъ угловъ взаимно перпендикулярны.
2. Биссектрисы двухъ вертикальныхъ угловъ составляютъ продолженіе одна другой.
3. Если при точкѣ O прямой AB (черт. 22) построимъ по разныя стороны отъ AB равные углы AOD и BOC, то стороны ихъ OD и OC составляютъ одну прямую (теорема, обратная теоремѣ § 31-го).
4. Если изъ точки O (черт. 22) проведемъ полупрямыя OA, OD, OB, OC такъ, что $\angle AOC = \angle DOB$ и $\angle AOD = \angle COB$, то OB есть продолженіе OA и OD продолженіе OC.

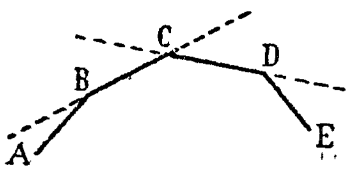
Указаніе. Надо примѣнить § 26, 2° и § 27.

ГЛАВА II.

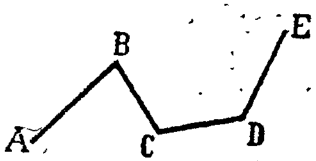
Треугольники и многоугольники.

Понятіе о многоугольникѣ и треугольникѣ.

34. Ломаная линія. Линія наз. ломаною, когда она состоитъ изъ отрѣзковъ прямой, не расположенныхъ на одной прямой (черт. 25 или 26). Эти отрѣзки наз. с т о р о н а м и ломаной, а вершины угловъ, образуемыхъ сосѣдними отрѣзками,—в е р ш и н а м и ея. Ломаная линія обозначается рядомъ буквъ, поставленныхъ у ея вершинъ и концовъ; напр., говорятъ: ломаная $ABCDE$ (черт. 25 и 26).



Черт. 25.



Черт. 26.

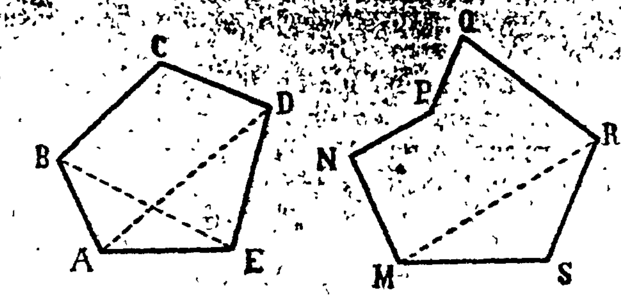
Ломаная линія наз. в ы п у к л о ю, если она вся расположена по одну сторону отъ к а ж д а г о составляющаго ее отрѣзка, продолженнаго неопредѣленно въ обѣ стороны. Такова, напр., линія, изображенная на черт. 25-мъ, тогда какъ ломаная чертежа 26-го не будетъ выпуклой (она не расположена по одну сторону отрѣзка BC).

Когда концы ломаной сходятся въ одну точку, то она наз. з а м к н у т о й.

35. Многоугольникъ. Фигура, образованная замкнутою ломаной линіей, наз. м н о г о у г о л ь н и к о м ъ (черт.27). Стороны этой ломаной наз. с т о р о н а м и многоугольника, углы, составленные каждыми двумя сосѣдними сторонами,—у г л а м и многоугольника, а ихъ вершины—в е р ш и н а м и

его. Сама ломаная линія, ограничивающая многоугольникъ, наз. к о н т у р о м ъ его, а сумма всѣхъ сторонъ—п е р и м е т р о м ъ.

Многоугольникъ наз. в ы п у к л ы м ъ, если онъ ограниченъ выпуклою ломаною линіей; таковъ (напр.) многоуг. $ABCDE$, изображенный на черт. 27 (многоуг. $MNPQRS$ нельзя назвать выпуклымъ).



Черт. 27.

Если контуръ многоугольника ограничиваетъ собою нѣкоторую часть плоскости (какъ на черт. 27), то эту часть разсматриваютъ, какъ лежащую в н у т р и многоугольника, а остальную часть плоскости—какъ лежащую в н ѣ его.

Всякая прямая (какъ AD, BE, MR...), которая соединяетъ вершины двухъ угловъ многоугольника, не прилежащихъ къ одной сторонѣ, наз. д і а г о н а л ь ю многоугольника.

Два многоугольника, какъ вообще двѣ какія-нибудь геометрическія фигуры, считаются р а в н ы м и, если они при наложеніи могутъ быть совмѣщены *).

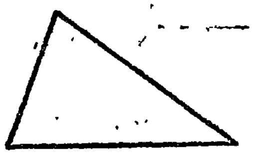
Наименьшее число сторонъ въ многоугольникѣ—т р и. По числу сторонъ многоугольникъ наз. т р е у г о л ь н и к о м ъ,

*) Фигуры, могущія совмѣститься при наложеніи, наз. к о н г р у е н т н ы м и, а самое совмѣщеніе—к о н г р у е н ц і е й. Различаютъ конгруенцію п р я м у ю и н е п р я м у ю. Прямою конгруенція наз. тогда, когда совмѣщеніе можетъ быть выполнено посредствомъ передвиженія одной изъ конгруентныхъ фигуръ по плоскости, въ которой фигуры лежатъ; если же для совмѣщенія фигуръ такого передвиженія недостаточно, но надо еще п е р е в е р н у т ь одну изъ фигуръ другою стороною, то конгруенція наз. непрямою. Напр., тр-ки, изображенные на черт. 37-мъ, прямо конгруентны, а тр-ки ABC и $A_1B_{11}C_1$ черт. 39-го непрямо конгруентны.

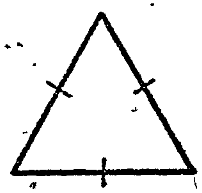
четыреугольникомъ, пятиугольникомъ и т. д. [illegible]

Для краткости слова «многоугольникъ», «треугольникъ», «четыреугольникъ» и т. д. мы часто будемъ писать такъ: мн-къ, тр-къ, четыре-къ и т. д. Слово «треугольникъ» на письмѣ иногда замѣняется также знакомъ $\triangle$.

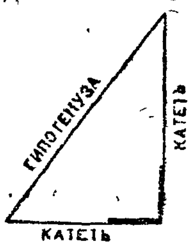
36. Раздѣленіе треугольниковъ. Треугольники раздѣляются или по сравнительной длинѣ ихъ сторонъ, или по характеру ихъ угловъ. Относительно длины сторонъ они бываютъ: разностороннiе (черт. 28), когда всѣ стороны различной длины, равнобедренные (черт. 29), когда двѣ стороны одинаковы, и равностороннiе (черт. 30), когда всѣ стороны равны.


Черт. 28.

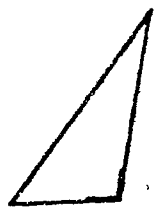

Черт. 29.


Черт. 30.

Относительно характера угловъ треугольники бываютъ: остроугольные (черт. 28), когда всѣ углы острые, прямоугольные (черт. 31), когда въ числѣ угловъ есть



Черт. 31.


Черт. 32.

прямой, и тупоугольные (черт. 32), когда въ числѣ угловъ есть тупой *).

Въ прямоугольномъ треугольникѣ стороны, образующія пря-

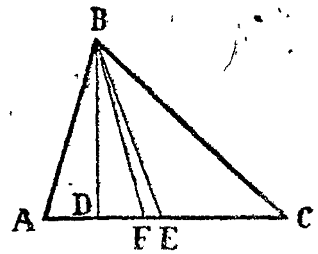
*) Возможность существованія всѣхъ этихъ видовъ треугольника легко показать теперь же, за исключеніемъ треугольника равносторонняго, существованіе котораго можно обнаружить только впослѣдствіи.

мой уголъ, наз. катетами, а сторона, лежащая противъ прямого угла — гипотенузою.

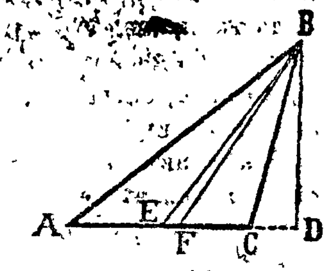
37. Главнѣйшія линіи въ треугольникѣ. Одну изъ сторонъ треугольника обыкновенно называютъ основаніемъ, вершину противоположнаго угла — вершиною тр-ка, а перпендикуляръ, опущенный изъ вершины на основаніе или на его продолженіе, — высотою его. Такъ, если въ тр-кѣ ABC (черт. 33 или 34) за основаніе взята сторона AC, то B будетъ вершина, BD — высота тр-ка.

Въ равнобедренномъ тр-кѣ основаніемъ называютъ обыкновенно ту сторону, которая не принадлежитъ къ равнымъ; тогда вершина равнобедреннаго тр-ка будетъ вершина того угла его, который образованъ равными сторонами.

Конечная прямая BE (черт. 33 и 34), соединяющая вершину какого-нибудь угла тр-ка съ серединою противоположной стороны, наз. среднею линiей или медiаною. Конечная прямая BF (черт. 33 и 34), дѣлящая какой-нибудь уголъ тр-ка пополамъ, наз. равнодѣлящею угла тр-ка или его биссектрисою (биссектриса вообще не совпадаетъ



Черт. 33.



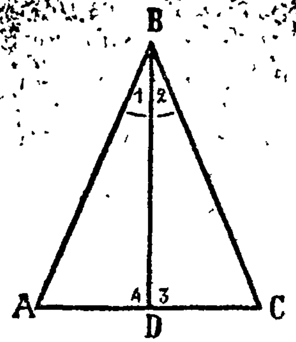
Черт. 34.

ни съ медiаною, ни съ высотою). Во всякомъ тр-кѣ есть три медiаны, три биссектрисы и три высоты (опущенныя на каждую изъ трехъ сторонъ).

Свойства равнобедреннаго треугольника.

38. Теорема. **Въ равнобедренномъ треугольникѣ биссектриса угла при вершинѣ служитъ одновременно и медiаной, и высотой.**

Пусть тр-къ ABC (черт. 35) равнобедренный и прямая BD дѣлитъ пополамъ уголъ B при вершинѣ его. Требуется доказать, что эта биссектриса BD есть также и медіана и высота. Вообразимъ, что $\triangle ABD$ повернуть вокругъ стороны BD, какъ около оси, такъ, чтобы онъ упалъ на $\triangle BDC$. Тогда вслѣдствіе равенства угловъ 1 и 2 сторона AB упадетъ на BC, а вслѣдствіе равенства этихъ сторонъ точка A совпадетъ съ C. Поэтому DA совмѣстится съ DC и уголъ 4 съ угломъ 3; значитъ, $DA=DC$ и $\angle 4=\angle 3$. Изъ того, что $DA=DC$, слѣдуетъ, что BD есть медіана; изъ того, что углы 3 и 4 равны, выходитъ, что эти углы прямые и, слѣд., BD есть высота тр-ка.



Черт. 35.

39. Слѣдствіе 1-е. Такъ какъ, по доказанному, биссектриса BD представляетъ собою и медіану, и высоту, то можно сказать, что она есть также и перпендикуляръ къ основанію AC, возстановленный изъ его середины D.

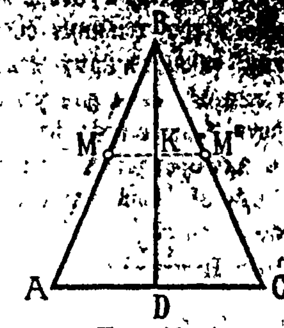
Такимъ образомъ, въ равнобедренномъ тр-кѣ ABC (черт. 35) одна и та же прямая BD служитъ одновременно: 1) биссектрисою угла при вершинѣ, 2) медіаною, проведенною къ основанію, 3) высотою, опущенною на основаніе, и, наконецъ, 4) перпендикуляромъ къ основанію, возстановленнымъ изъ его середины. Такъ какъ каждое изъ этихъ 4-хъ свойствъ вполнѣ опредѣляетъ положеніе прямой BD, то существованіе одного изъ нихъ влечетъ за собой всѣ остальныя. Напр., высота равнобедреннаго треугольника служитъ одновременно биссектрисою, медіаною и перпендикуляромъ къ основанію въ его серединѣ. Дѣйствительно, во-1-хъ, эта высота должна служить биссектрисою, потому что въ противномъ случаѣ, проведя такую биссектрису, мы имѣли бы двѣ различныя высоты на одну и ту же сторону тр-ка, что невозможно. Во-2-хъ, эта высота, будучи биссектрисою, должна быть, по доказанному, медіаной и, слѣд., перпендикуляромъ къ основанію въ его серединѣ.

40. Слѣдствіе 2-е. Изъ того, что тр-ки ABD и BDC (черт. 35) совмѣщаются всѣми своими частями, слѣдуетъ, что $\angle A=\angle C$, т.-е.

въ равнобедренномъ треугольникѣ углы при основаніи равны.

41. Понятіе объ оси симметріи. Мы видѣли, что равнобедренный $\triangle ABC$ (черт. 36) дѣлится биссектрисою BD на такіе 2 тр-ка (лѣвый и правый), которые вращеніемъ вокругъ биссектрисы, какъ около оси, могутъ быть совмѣщены другъ съ другомъ. Изъ этого можно заключить, что, какую бы точку на лѣвой половинѣ равнобедреннаго тр-ка мы ни взяли, всегда можно на правой его половинѣ найти другую точку, симметричную первой относительно оси BD (30).

Возьмемъ, напр., на сторонѣ AB какую-нибудь точку M. Опустимъ изъ нея на BD перпендикуляръ MK и продолжимъ его до пересѣченія со стороною BC. Мы получимъ тогда на этой сторонѣ точку M', симметричную точкѣ M относительно оси BD. Дѣйствительно, если, вращая $\triangle ABD$ вокругъ BD, мы его совмѣстимъ съ $\triangle BCD$, то при этомъ KM пойдетъ по KM' (по равенству прямыхъ угловъ), а сторона BA упадетъ на сторону BC (по равенству угловъ при точкѣ B); значитъ, точка M, которая лежитъ и на KM, и на BA, упадетъ въ точку M', которая лежитъ и на KM', и на BC. Отсюда видно, что $KM=KM'$. Такимъ образомъ, точки M и M' лежатъ по разныя стороны отъ биссектрисы BD, на одномъ къ ней перпендикулярѣ и на равныхъ разстояніяхъ отъ основанія этого перпендикуляра; значитъ, эти точки симметричны относительно оси BD.



Черт. 36.

Если въ какой-нибудь геометрической фигурѣ существуетъ прямая, которая раздѣляетъ эту фигуру на такія 2 части, что любой точкѣ на одной части соотвѣтствуетъ на другой точка, симметричная относительно этой прямой, то такая прямая наз. *осью симметріи* этой фигуры.

Въ равнобедренномъ треугольникѣ биссектриса угла при вершинѣ есть его ось симметріи.

Въ геометріи мы будемъ иногда встрѣчаться съ фигурами, имѣющими одну или нѣсколько осей симметріи.

Симметрія относительно оси наз. часто «осевая симметрія» (въ отличіе отъ «центральной» симметріи, о которой говорится ниже, въ § 102).

Признаки равенства треугольниковъ.

42. Предварительныя понятія. Такъ какъ *равными* треугольниками наз. такіе, которые при наложеніи могутъ быть совмѣщены, то въ такихъ тр-кахъ равны всѣ *соотвѣтствующіе элементы* ихъ, т.-е. стороны, углы, высоты, медіаны и биссектрисы.

Однако для того, чтобы утверждать равенство двухъ треугольниковъ, не необходимо знать равенство всѣхъ элементовъ ихъ; достаточно убѣдиться въ равенствѣ только нѣкоторыхъ изъ нихъ. Слѣдующія теоремы излагаютъ три главнѣйшихъ признака равенства тр-ковъ.

§ 43. Теоремы. Два треугольника равны:

1°, **если двѣ стороны и уголъ, заключенный между ними, одного треугольника соотвѣтственно равны двумъ сторонамъ и углу, заключенному между ними, другого треугольника;**

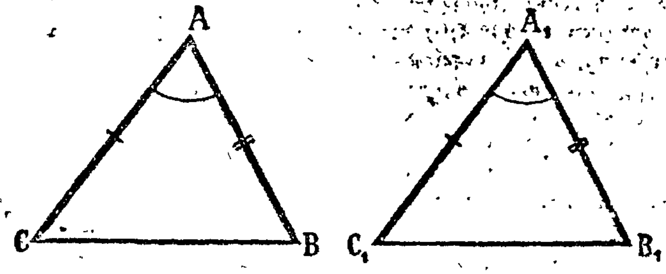
или 2°, **если два угла и прилежащая къ нимъ сторона одного треугольника соотвѣтственно равны двумъ угламъ и прилежащей къ нимъ сторонѣ другого треугольника;**

или 3°, **если три стороны одного треугольника соотвѣтственно равны тремъ сторонамъ другого треугольника.**

1°. Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ два тр-ка (черт. 37), у которыхъ:

$$A=A_1,\quad AC=A_1C_1,\quad AB=A_1B_1.$$

Требуется доказать, что эти тр-ки равны.



Черт. 37.

Наложимъ $\triangle ABC$ на $\triangle A_1B_1C_1$ такъ, чтобы точка A совпала съ A_1 и сторона AC пошла по A_1C_1 *). Тогда вслѣдствіе равенства этихъ сторонъ, точка C совмѣстится съ C_1; вслѣдствіе равенства угловъ A и A_1 сторона AB пойдетъ по A_1B_1, а вслѣдствіе равенства этихъ сторонъ точка B упадетъ въ B_1; поэтому сторона CB совмѣстится съ C_1B_1 (между двумя точками можно провести только одну прямую), и треугольники совпадутъ; значитъ, они равны.

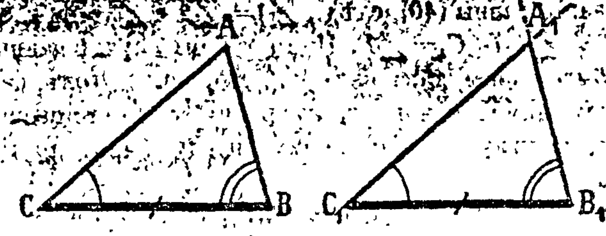
*) Для выполненія указанныхъ въ этомъ параграфѣ наложеній иногда приходится треугольникъ ABC перевернуть другою стороною.

2°. Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ (черт. 38) два тр-ка, у которыхъ:

$$CB=C_1B_1,\quad C=C_1 \text{ и } B=B_1.$$

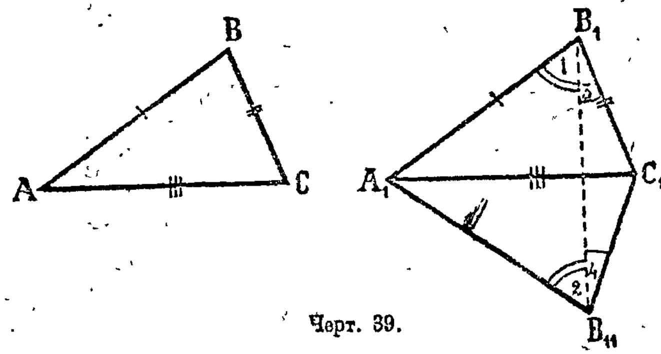
Требуется доказать, что эти тр-ки равны.

Наложимъ $\triangle ABC$ на $\triangle A_1B_1C_1$ такъ, чтобы точка C совпала съ C_1, и сторона CB пошла по C_1B_1. Тогда вслѣдствіе равенства этихъ сторонъ точка B упадетъ въ B_1, а вслѣдствіе ра-



Черт. 38.

венства угловъ B и B_1, C и C_1 сторона BA пойдетъ по B_1A_1, и сторона CA по C_1A_1. Такъ какъ двѣ прямыя могутъ пересѣчься только въ одной точкѣ, то вершина A должна совпасть съ A_1. Такимъ образомъ, тр-ки совмѣстятся; значитъ, они равны.



Черт. 39.

3°. Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ (черт. 39) два тр-ка, у которыхъ:

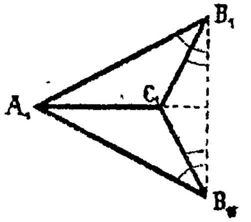
$$AB=A_1B_1,\quad BC=B_1C_1 \text{ и } CA=C_1A_1.$$

Требуется доказать, что эти тр-ки равны.

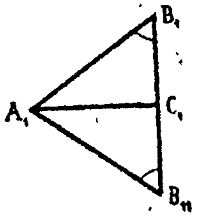
Доказывать этотъ признакъ равенства *наложеніемъ*, какъ мы это дѣлали для первыхъ двухъ признаковъ, было бы неудобно, такъ какъ, не зная ничего о величинѣ угловъ, мы не можемъ утверждать, что при совпаденіи двухъ равныхъ

сторонъ совпадутъ и остальныя стороны. Вмѣсто [illegible] н[illegible]я примѣнимъ здѣсь приложенiе [illegible]
Приложимъ $\triangle ABC$ къ $\triangle A_1B_1C_1$ такъ, чтобы у нихъ совмѣстились равныя стороны AC и A_1C_1. Тогда $\triangle ABC$ займетъ положенiе $A_1C_1B_{11}$. Соединивъ прямою точки B_1 и B_{11}, мы получимъ два равнобедренные тр-ка $A_1B_1B_{11}$ и $B_1C_1B_{11}$ съ общимъ основанiемъ B_1B_{11}. Но въ равнобедренномъ треугольникѣ углы при основанiи равны (40); слѣд., $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$, а потому $\angle A_1B_1C_1 = \angle A_1B_{11}C_1 = \angle B$. Но въ такомъ случаѣ данные тр-ки должны быть равны, такъ какъ двѣ стороны и уголъ, заключенный между ними, одного тр-ка равны соотвѣтственно двумъ сторонамъ и углу, заключенному между ними, другого треугольника.

Можетъ случиться, что прямая B_1B_{11} не пересѣчется съ A_1C_1, а пойдетъ внѣ треугольниковъ (если сумма угловъ C и C_1 больше $2d$), или сольется съ линiей $B_1\ C_1\ B_{11}$ (если $C + C_1 = 2d$). Доказательство остается то же самое, съ тою только разницей, что углы B_1 и B_{11} будутъ равны другъ другу, не какъ суммы равныхъ угловъ, а какъ ихъ разности (черт. 40), или какъ углы при основанiи равнобедреннаго тр-ка (черт. 41).



Черт. 40.



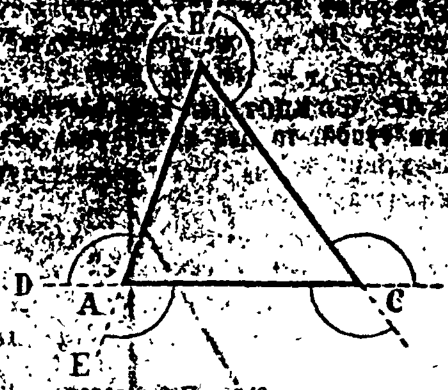
Черт. 41.

Замѣчанiе. Въ равныхъ тр-кахъ противъ равныхъ сторонъ лежатъ равные углы и противъ равныхъ угловъ лежатъ равныя стороны.

Соотношенiя между углами и сторонами треугольника.

44. Опредѣленiе. Уголъ, смежный съ какимъ-нибудь угломъ треугольника (или многоугольника), наз. внѣшнимъ угломъ этого треугольника (или многоугольника).

При каждомъ углѣ тр-ка (и мн-ка) можно построить по 2 равныхъ смежныхъ угла. [illegible] примѣръ, продолживъ сто[illegible] роны угла A (черт. 42) [illegible] тр-ка ABC за вершину [illegible] мы получимъ два внѣш[illegible] нихъ угла BAD и CAE, которые равны между собою, какъ углы вертикальные.

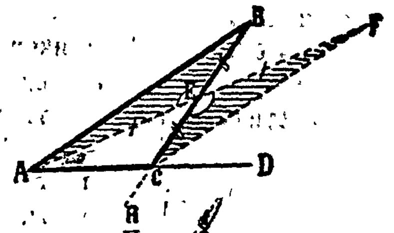


Черт. 42.

Въ отличiе отъ внѣшнихъ углы самого тр-ка (или мн-ка) наз. внутренними.

45. Теорема. Въ треугольникѣ всякiй внѣшнiй уголъ больше каждаго внутренняго угла, не смежнаго съ нимъ.

Напр., докажемъ, что внѣшнiй уголъ BCD тр-ка ABC (черт. 43) больше каждаго изъ внутреннихъ угловъ A и B, не смежныхъ съ этимъ внѣшнимъ. Для этого черезъ средину E стороны BC проведемъ медiану AE и продолжимъ ее на длину EF, равную AE. Соединимъ F съ C прямою. Тр-ники ABE и EFC (покрытые штрихами) равны, такъ какъ при точкѣ E они имѣютъ по равному углу, заключенному между двумя соотвѣтственно равными сторонами. Изъ равенства ихъ заключаемъ, что углы B и ECF, лежащiе противъ равныхъ сторонъ AE и EF, равны. Но уголъ ECF составляетъ часть внѣшняго угла BCD и потому меньше его *); слѣд., и уголъ B меньше BCD.



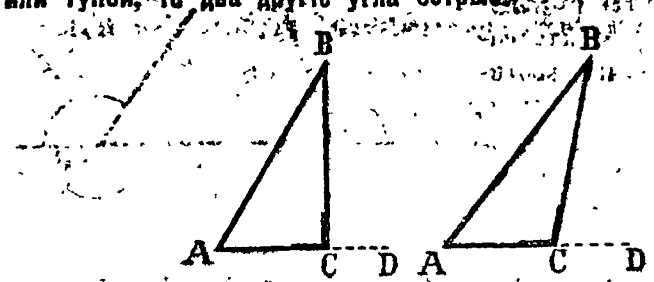
Черт. 43.

*) Что $\angle ECF$ долженъ составлять часть $\angle BCD$, какова бы ни была форма треугольника, можно считать очевиднымъ. Впрочемъ, нетрудно это и разъяснить, напр., такъ:

Продолжая AE за точку E, мы не можемъ перейти на другую сторону отъ прямой AD (внизъ отъ нея на нашемъ чертежѣ). Дѣйствительно, если бы это случилось, то тогда прямая AE (вслѣдствiе непрерывности прямой) при продолженiи за точку E пересѣклась бы съ AD еще въ какой-нибудь точкѣ, кромѣ A, что невоз-

Продолживъ сторону BC за точку C, мы получимъ внѣшній уголъ ACH, равный углу BCD. Если изъ вершины B проведемъ къ сторонѣ AC медіану и продолжимъ ее на такую же длину за сторону AC, то совершенно такъ же докажемъ, что уголъ A меньше ACH, т.-е. меньше BCD.

46. Слѣдствіе. Если въ треугольникѣ одинъ уголъ прямой или тупой, то два другіе угла острые.



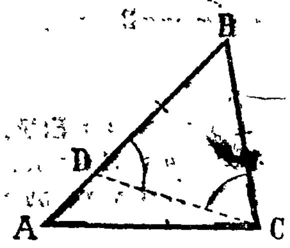
Черт. 44.

Дѣйствительно, допустимъ, что какой-нибудь уголъ C тр-ка ABC (черт. 44) будетъ прямой или тупой; тогда смежный съ нимъ внѣшній уголъ BCD долженъ быть прямой или острый; вслѣдствіе этого углы A и B, которые, по доказанному, меньше внѣшняго угла, должны быть оба острые.

47. Теорема. Во всякомъ треугольникѣ:

1°, противъ равныхъ сторонъ лежатъ равные углы;

2°, противъ большей стороны лежитъ большій уголъ.



Черт. 45.

1°. Если двѣ стороны треугольника равны, то онъ равнобедренный; тогда углы, лежащіе противъ этихъ сторонъ, должны быть равны, какъ углы при основаніи равнобедреннаго треугольника (40).

2°. Пусть въ $\triangle ABC$ (черт. 45) сторона AB больше BC; требуется доказать, что $\angle C$ больше $\angle A$.

Отложимъ на большей сторонѣ BA отъ вершины B часть BD, равную меньшей сторонѣ BC, и соединимъ D съ C пря-

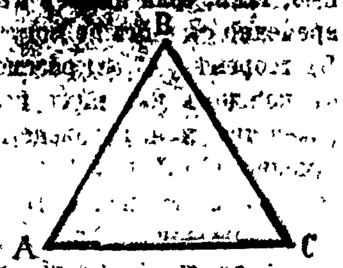
можно (двѣ прямыя пересѣкаются только въ одной точкѣ). Изъ этого слѣдуетъ, что точка F, а потому и сторона CF, лежатъ всегда внутри угла BCD и, слѣд., $\angle ECF$, долженъ всегда составлять часть $\angle BCD$.

мой. Тогда получимъ равнобедренный $\triangle DBC$, у котораго углы при основаніи равны, т.-е. $\angle BDC = \angle BCD$. Но уголъ BDC, какъ внѣшній по отношенію къ $\triangle ADC$, больше угла A; слѣдовательно, и уголъ BCD больше A, а потому и подавно уголъ BCA больше угла A, что и требовалось доказать.

48. Слѣдствія. 1°. Въ равностороннемъ треугольникѣ всѣ углы равны;

2°, въ разностороннемъ треугольникѣ нѣтъ равныхъ угловъ.

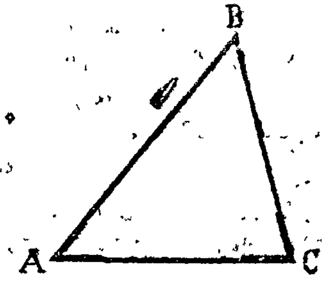
49. Обратныя теоремы. Во всякомъ треугольникѣ: 1°, противъ равныхъ угловъ лежатъ равныя стороны; 2°, противъ большаго угла лежитъ большая сторона.



Черт. 46.

1°. Пусть въ $\triangle ABC$ углы A и C равны (черт. 46); требуется доказать, что $AB=BC$.—Предположимъ противное, т.-е., что стороны AB и BC не равны. Тогда одна изъ этихъ сторонъ должна быть больше другой, и, слѣд., согласно прямой теоремѣ, одинъ изъ угловъ A и C долженъ быть больше другого. Но это противорѣчитъ условію, что $A=C$; значитъ, нельзя допустить, что стороны AB и BC не равны; остается принять, что $AB=BC$.

2°. Пусть въ тр-кѣ ABC (черт. 47) уголъ C больше угла A; требуется доказать, что $AB>BC$.—Предположимъ противное, т.-е. что AB не больше BC. Тогда могутъ представиться два случая: или $AB=BC$, или $AB<BC$. Въ первомъ случаѣ, согласно прямой теоремѣ, уголъ C былъ бы равенъ углу A, во второмъ случаѣ уголъ C былъ бы меньше A; и то, и другое противорѣчитъ условію; значитъ, оба эти случая исключаются. Остается одинъ возможный случай, что $AB>BC$.



Черт. 47.

50. Слѣдствія. 1°. Равноугольный треугольникъ есть и равносторонній.

2°. Въ треугольникѣ сторона, лежащая противъ тупого или прямого угла, больше другихъ сторонъ (46).

51. Замѣчаніе объ обратныхъ теоремахъ. Относительно равенства или неравенства двухъ сторонъ треугольника, напр. сторонъ AB и BC, могутъ представиться только слѣдующіе три возможные случая:

$$AB=BC,\ AB>BC,\ AB<BC.$$

Каждый изъ этихъ случаевъ исключаетъ собою всѣ остальные; такъ, если имѣетъ мѣсто 1-й случай, что $AB=BC$, то одновременно съ нимъ не могутъ существовать ни 2-й случай, ни 3-й. Въ теоремѣ § 47 мы разсмотрѣли всѣ эти случаи; оказалось, что въ каждомъ изъ нихъ получаются такіе выводы относительно равенства или неравенства противолежащихъ угловъ C и A (именно: $C=A$, $C>A$, $C<A$), изъ которыхъ каждый исключаетъ собою всѣ остальные. И мы видѣли (49), что обратныя предложенія оказались вѣрными, въ чемъ было легко убѣдиться доказательствомъ отъ противнаго.

Вообще, если въ теоремѣ, или въ рядѣ теоремъ, мы разсмотрѣли всевозможные взаимно исключающіе случаи, которые могутъ представиться относительно величины или расположенія нѣкоторыхъ частей фигуры, при чемъ оказалось, что въ этихъ случаяхъ получаются различные взаимно исключающіе выводы относительно величины или расположенія нѣкоторыхъ другихъ частей фигуры, то мы можемъ заранѣе (a priori) утверждать, что обратныя предложенія вѣрны.

Впослѣдствіи мы неоднократно будемъ встрѣчаться съ этимъ **закономъ обратимости.**

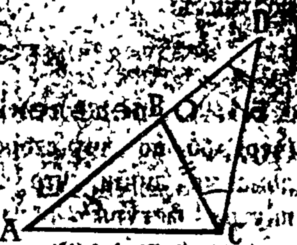
Сравнительная длина объемлющихъ и объемлемыхъ ломаныхъ линій.

52. Теорема. Въ треугольникѣ каждая сторона меньше суммы двухъ другихъ сторонъ, но больше ихъ разности.

Сначала докажемъ первое изъ этихъ предложеній, а потомъ изъ перваго выведемъ, какъ слѣдствіе, и второе.

1°. Если въ тр-кѣ возьмемъ сторону не самую большую, то, конечно, она окажется менѣе суммы двухъ другихъ сторонъ.

Значитъ, намъ надо доказать только, что наибольшая сторона тр-ка меньше суммы двухъ другихъ сторонъ. Пусть въ тр-кѣ ABC (черт. 48) наибольшая сторона есть AC. Продолживъ сторону AB, отложимъ $BD=BC$ и проведемъ DC. Такъ какъ $\triangle BDC$ равнобедренный, то $\angle D=\angle DCB$; поэтому уголъ D меньше угла DCA, и слѣд., въ $\triangle ADC$ сторона AC меньше AD (49), т.-е. $AC<AB+BD$. Замѣнивъ BD на BC, получимъ:



Черт. 48.

$$AC<AB+BC.$$

Теперь можемъ сказать, что каждая сторона тр-ка меньше суммы двухъ другихъ сторонъ.

2°. Пусть по прежнему AC есть наибольшая сторона. Примѣнимъ къ ней доказанное свойство: $AC>AB+BC$. Отъ обѣихъ частей этого неравенства отнимемъ по AB или по BC:

$$AC-AB<BC \text{ и } AC-BC<AB.$$

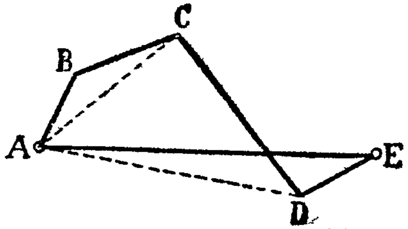
Читая эти неравенства справа налѣво, видимъ, что каждая изъ сторонъ BC и AB больше разности двухъ другихъ сторонъ; такъ какъ это же можно, очевидно, сказать и о третьей, наибольшей сторонѣ AC, то, значитъ, каждая сторона больше разности двухъ другихъ сторонъ.

53. Теорема. Отрѣзокъ прямой, соединяющій двѣ какія-нибудь точки, короче всякой ломаной, проведенной между этими точками.

Пусть (черт. 49) AE есть отрѣзокъ прямой, соединяющій точки A и E, а $ABCDE$ какая-нибудь ломаная, проведенная между тѣми же точками. Требуется доказать, что AE короче суммы $AB+BC+CD+DE$.

Соединивъ A съ C и D, находимъ, согласно предыдущей теоремѣ:

$$AE<AD+DE;$$
$$AD<AC+CD;$$
$$AC<AB+BC.$$



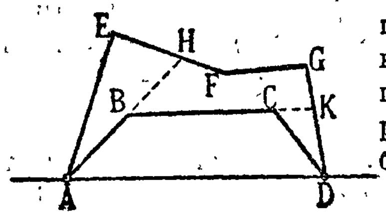
Черт. 49.

я. Сложимъ почленно эти неравенства и затѣмъ отъ обѣихъ частей полученнаго неравенства отнимемъ по AD и AC; тогда получимъ:

$$AE < AB + BC + CD + DE.$$

54. Опредѣленіе. Если между двумя точками A и D (черт. 50) по одну сторону отъ прямой AD проведены такія двѣ ломаныя линіи, что одна изъ нихъ — $ABCD$ — вся заключена внутри фигуры, образованной другою линіей — $AEFGD$ — съ отрѣзкомъ прямой AD, то первая ломаная наз. объемлемой, а вторая объемлющей.

55. Теорема. Выпуклая ломаная короче всякой другой ломаной, объемлющей ее.



Черт. 50.

Пусть (черт. 50) $ABCD$ есть выпуклая (34) ломаная, а $AEFGD$ какая-нибудь другая ломаная (выпуклая или невыпуклая — все равно), объемлющая первую; требуется доказать, что:

$$AB + BC + CD < AE + EF + FG + GD.$$

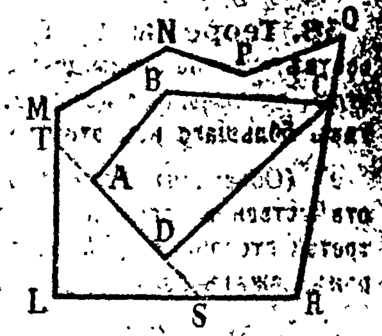
Продолживъ стороны выпуклой линіи, какъ указано на чертежѣ, можемъ написать слѣдующія неравенства (53):

$$AB + BH < AE + EH$$
$$BC + CK < BH + HF + FG + GK$$
$$CD < CK + KD.$$

Сложимъ почленно всѣ эти неравенства и затѣмъ отъ обѣихъ частей полученнаго неравенства отнимемъ вспомогательные отрѣзки BH и CK; далѣе замѣнимъ сумму $EH+HF$ отрѣзкомъ EF и сумму $GK+KD$ отрѣзкомъ GD; тогда получимъ то неравенство, которое требовалось доказать.

56. Теорема. Если выпуклый многоугольникъ заключенъ весь внутри какого-нибудь другого многоугольника, то периметръ перваго меньше периметра второго.

Пусть $ABCD$ (черт. 51) есть выпуклый многоугольникъ, а $LMNPQR$ какой-нибудь другой многоугольникъ (выпуклый или невыпуклый), внутри котораго заключенъ первый. Требуется доказать, что $AB + BC + CD + DA$ меньше $LM+MN+NP+PQ+QR+RL$.



Черт. 51.

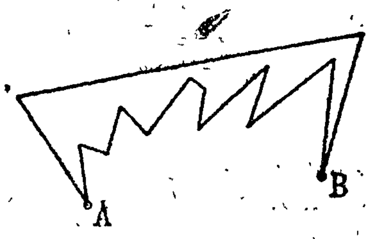
Продолживъ въ обоихъ направленіяхъ одну какую-нибудь сторону AD выпуклаго мн-ка, примѣнимъ къ ломанымъ линіямъ $ABCD$ и $ATMNPQRSD$, проведеннымъ между точками A и D, теорему предыдущаго параграфа:

$$AB + BC + CD < AT + TM + MN + NP + PQ + QR + RS + SD.$$

Съ другой стороны, такъ какъ отрѣзокъ ST короче ломаной SLT, то можемъ написать:

$$AT + AD + DS < TL + LS.$$

Сложимъ почленно эти два неравенства и отнимемъ отъ обѣихъ частей вспомогательные отрѣзки AT и DS; затѣмъ замѣнимъ сумму $TL+TM$ отрѣзкомъ LM и сумму $LS+RS$ отрѣзкомъ LR; тогда получимъ то, что требовалось доказать.



Черт. 52.

57. Замѣчаніе. Двѣ предъидущія теоремы перестаютъ быть вѣрными, если объемлемая ломаная или объемлемый многоугольникъ не выпуклые. Такъ, на черт. 52-мъ объемлемая ломаная, проведенная между точками A и B, можетъ оказаться длиннѣе объемлющей, проведенной между тѣми же точками.

Треугольники съ двумя соотвѣтственно равными сторонами.

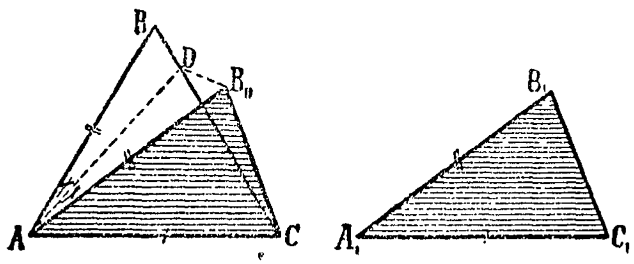
58. Теоремы. 1°. **Если двѣ стороны одного треугольника соотвѣтственно равны двумъ сторонамъ другого треугольника, а углы, заключенные между этими сторонами, не равны, то противъ бóльшаго изъ этихъ угловъ лежитъ бóльшая сторона.**

2°. (Обратная). **Если двѣ стороны одного треугольника соотвѣтственно равны двумъ сторонамъ другого треугольника, а третьи стороны не равны, то противъ бóльшей изъ этихъ сторонъ лежитъ бóльшій уголъ.**

1°. Пусть въ тр-кахъ ABC и $A_1B_1C_1$ (черт. 53) дано:

$$AC=A_1C_1,\quad AB=A_1B_1;\ \text{но}\ A\neq A_1.$$

Требуется доказать, что если $A>A_1$, то и $BC>B_1C_1$, а если $A<A_1$, то и $BC<B_1C_1$.—Предположимъ, что $A>A_1$. Нало-



Черт. 53.

жимъ $\triangle A_1B_1C_1$ на $\triangle ABC$ такъ, чтобы сторона A_1C_1 совпала съ AC. Такъ какъ, согласно предположенію, $A>A_1$, то сторона A_1B_1 пойдетъ внутри угла A, и $\triangle A_1B_1C_1$ займетъ нѣкоторое положеніе $AB_{11}C$ (при чемъ вершина B_{11} можетъ лежать или внѣ $\triangle ABC$, какъ изображено на нашемъ чертежѣ, или внутри его, или же на сторонѣ BC; доказательство остается одно и то же во всѣхъ этихъ случаяхъ). Проведемъ биссектрису угла BAB_{11} до пересѣченія со стороною BC въ точкѣ D и эту точку соединимъ прямою съ B_{11}; тогда получимъ два тр-ка ABD и DAB_{11}, которые равны, потому что у нихъ: AD общая сторона, $AB=AB_{11}$ по условію и $\angle BAD=\angle DAB_{11}$, такъ какъ прямая AD

дѣлитъ пополамъ уголъ BAB_{11}. Изъ равенства тр-ковъ слѣдуетъ: $BD=DB_{11}$. Теперь изъ $\triangle DCB_{11}$ выводимъ: $B_{11}D+DC>B_{11}C$ (52), или (замѣнивъ $B_{11}D$ на BD):

$$BD+DC>B_{11}C,\ \text{т.-е.}\ BC>B_1C_1.$$

Если допустимъ, что $A<A_1$, то такъ же докажемъ, что тогда $BC<B_1C_1$.

2°. Пусть въ тѣхъ же треугольникахъ дано:

$$AB=A_1B_1,\quad AC=A_1C_1,\ \text{но}\ BC\neq B_1C_1.$$

Требуется доказать, что если $BC>B_1C_1$, то и $A>A_1$, если же $BC<B_1C_1$, то и $A<A_1$.—Предположимъ, что $BC>B_1C_1$; докажемъ, что $A>A_1$. Допустимъ противное, что A не больше A_1; тогда могутъ представиться два случая: или $A=A_1$, или $A<A_1$. Въ первомъ случаѣ тр-ки были бы равны и, слѣд., сторона BC равнялась бы B_1C_1, что противорѣчитъ условію; во второмъ случаѣ сторона BC, согласно теоремѣ 1°, была бы меньше B_1C_1 что также противорѣчитъ условію. Значитъ, оба эти случая исключаются; остается одинъ возможный случай, что $A>A_1$.

Если допустимъ, что $BC<B_1C_1$, то такъ же докажемъ, что тогда и $A<A_1$.

ГЛАВА III.

Перпендикуляры и наклонныя.

59, 1. Теорема. Перпендикуляръ, опущенный изъ точки на прямую, короче всякой наклонной, проведенной изъ той же точки на эту прямую.

Пусть AB (черт. 54) есть перпендикуляръ, опущенный изъ точки A на прямую MN, и AC какая-нибудь наклонная, проведенная изъ той же точки A къ прямой MN. Требуется доказать, что $AB<AC$.—Въ $\triangle ABC$ уголъ B прямой, а противъ прямого угла лежитъ бóльшая сторона (**50, 2°**); слѣд., $AC>AB$.

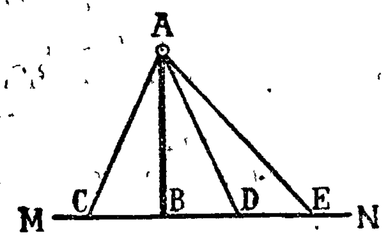
Замѣчаніе. Когда говорятъ «разстояніе точки отъ прямой», то разумѣютъ кратчайшее разстояніе, измѣряемое по перпендикуляру, опущенному изъ этой точки на прямую.

59, 2. Теорема. Если изъ одной и той же точки, взятой внѣ прямой, проведены къ этой прямой перпендикуляръ и какія-нибудь наклонныя, то:

1°, если основанія двухъ наклонныхъ одинаково удалены отъ основанія перпендикуляра, то такія наклонныя равны;

2°, если основанія двухъ наклонныхъ не одинаково удалены отъ основанія перпендикуляра, то та изъ наклонныхъ больше, которой основаніе дальше отстоитъ отъ основанія перпендикуляра.

1°. Пусть AC и AD (черт. 54) будутъ двѣ такія наклонныя, проведенныя изъ точки A къ прямой MN, которыхъ основанія C и D одинаково удалены отъ основанія перпендикуляра AB, т.-е. $CB=BD$; требуется доказать, что $AC=AD$. Въ тр-кахъ ABC и ABD есть общая сторона AB и сверхъ того $BC=BD$ (по условію) и $\angle ABC=\angle ABD$ (какъ углы прямые); значитъ, эти тр-ки равны, и потому $AC=AD$.



Черт. 54.

2°. Пусть AC и AE (черт. 54) будутъ двѣ такія наклонныя, проведенныя изъ точки A къ прямой MN, которыхъ основанія неодинаково удалены отъ основанія перпендикуляра; напр., пусть $BE>BC$; требуется доказать, что $AE>AC$.—Отложимъ $BD=BC$ и проведемъ AD. По доказанному выше, $AD=AC$. Сравнимъ AE съ AD. Уголъ ADE есть внѣшній по отношенію $\triangle ADB$ и потому онъ больше прямого угла ABD; слѣд., $\angle ADE$ тупой; но въ $\triangle$ противъ тупого угла должна лежать бо́льшая сторона (50, 2°); значитъ, $AE>AD$ и, слѣд., $AE>AC$.

60. Обратныя предложенія. Въ предыдущихъ теоремахъ разсмотрѣны всевозможные взаимно исключающіе случаи относительно равенства или неравенства разстояній основаній наклонныхъ отъ основанія перпендикуляра; при этомъ получились взаимно исключающіе выводы относительно равенства или

неравенства наклонныхъ; вслѣдствіе этого обратныя предложенія должны быть вѣрны (51), а именно:

Если изъ одной и той же точки, взятой внѣ прямой (черт. 54), проведены къ этой прямой перпендикуляръ и какія-нибудь наклонныя, то:

1°, если двѣ наклонныя равны, то ихъ основанія одинаково удалены отъ основанія перпендикуляра;

2°, если двѣ наклонныя не равны, то основаніе большей изъ нихъ дальше отстоитъ отъ основанія перпендикуляра.

Предоставляемъ учащимся самимъ доказать эти предложенія (способомъ отъ противнаго).

Равенство прямоугольныхъ треугольниковъ.

61. Такъ какъ въ прямоугольныхъ тр-кахъ углы, содержащіеся между катетами, всегда равны, какъ прямые, то:

прямоугольные треугольники равны:

1°, если катеты одного треугольника соотвѣтственно равны катетамъ другого;

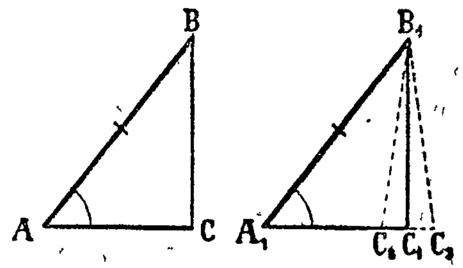
или 2°, если катетъ и прилежащій къ нему острый уголъ одного треугольника равны соотвѣтственно катету и прилежащему къ нему острому углу другого треугольника.

Эти два признака не требуютъ особаго доказательства, такъ какъ они представляютъ лишь частные случаи общихъ признаковъ (43, 1° и 2°). Докажемъ еще два слѣдующіе признака, относящіеся только къ прямоугольнымъ треугольникамъ.

62. Теоремы. Прямоугольные треугольники равны:

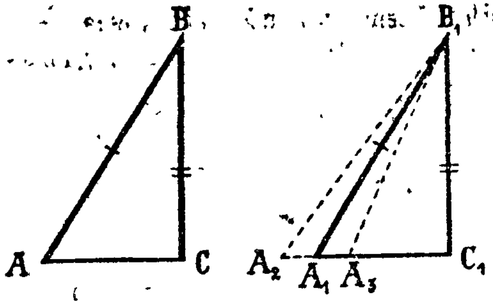
1°, если гипотенуза и острый уголъ одного треугольника соотвѣтственно равны гипотенузѣ и острому углу другого;

или 2°, если гипотенуза и катетъ одного треугольника соотвѣтственно равны гипотенузѣ и катету другого.



Черт. 55.

1°. Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ (черт. 55) два прямоугольные тр-ка, у которыхъ: $AB=A_1B_1$ и $A=A_1$; требуется доказать, что эти тр-ки равны. — Наложимъ $\triangle ABC$ на $\triangle A_1B_1C_1$ такъ, чтобы у нихъ совмѣстились равныя гипотенузы. Тогда, по равенству угловъ A и A_1, катетъ AC пойдетъ по A_1C_1. При этомъ точка C должна совмѣститься съ точкой C_1, потому что, если предположимъ, что она упадетъ въ точку C_2 или точку C_3, то тогда катетъ BC занялъ бы положеніе B_1C_2 или B_1C_3, что невозможно, такъ какъ изъ одной точки B_1 нельзя на прямую A_1C_1 опустить два перпендикуляра (B_1C_1 и B_1C_2, или B_1C_1 и B_1C_3).



Черт. 56.

2°. Пусть (черт. 56) въ прямоуг. тр-кахъ дано: $AB = A_1B_1$ и $BC = B_1C_1$; требуется доказать, что тр-ки равны. — Наложимъ $\triangle ABC$ на $\triangle A_1B_1C_1$ такъ, чтобы у нихъ совмѣстились равные катеты BC и B_1C_1. Тогда, по равенству прямыхъ угловъ, CA пойдетъ по C_1A_1. При этомъ гипотенуза AB не можетъ не совмѣститься съ гипотенузой A_1B_1, потому что если бы она заняла положеніе A_2B_1 или A_3B_1, то тогда мы имѣли бы двѣ равныя наклонныя (A_1B_1 и A_2B_1, или A_1B_1 и A_3B_1), которыя не одинаково удалены отъ основанія перпендикуляра, что невозможно (59, 2).

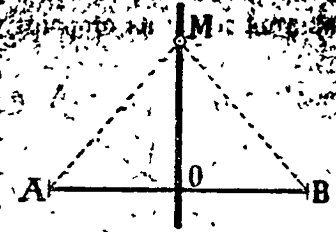
ГЛАВА IV.

Свойство перпендикуляра, проведеннаго къ прямой черезъ ея середину, и свойство биссектрисы угла.

63. Теоремы. 1°. **Если какая-нибудь точка одинаково удалена отъ концовъ отрѣзка прямой, то она лежитъ на перпендикулярѣ къ этому отрѣзку, проходящемъ черезъ его середину.**

2°. Обратно: **если какая-нибудь точка лежитъ на перпендикулярѣ къ отрѣзку прямой, проходящемъ черезъ его середину, то она одинаково удалена отъ концовъ этого отрѣзка.**

1°. Пусть точка M (черт. 57) одинаково удалена отъ концовъ отрѣзка AB, т.-е. пусть $MA = MB$; требуется доказать, что точка M лежитъ на перпендикулярѣ, проведенномъ къ прямой AB черезъ ея середину. — Проведемъ биссектрису MO угла AMB. Такъ какъ тр-къ AMB равнобедренный, то эта биссектриса служитъ въ ней высотой и медіаною (38); значитъ, точка M лежитъ на перпендикулярѣ къ прямой AB, дѣлящемъ ее пополамъ.



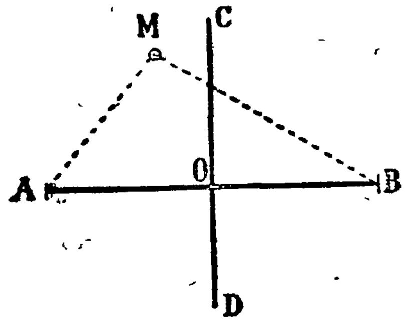
Черт. 57.

2°. Пусть OM (черт. 57) есть перпендикуляръ, проведенный къ отрѣзку AB черезъ его середину, и M какая-нибудь точка на немъ; требуется доказать, что эта точка одинаково удалена отъ концовъ AB, т.-е. что $MA = MB$. — Прямыя MA и MB суть наклонныя къ AB, одинаково удаленныя отъ основанія перпендикуляра MO; а такія наклонныя равны; слѣд., $MA = MB$.

64. Слѣдствіе. Изъ двухъ доказанныхъ теоремъ, прямой и обратной, можно вывести слѣдствіе, что теоремы, противоположныя имъ, также вѣрны (4), т.-е. что (черт. 58):

если какая-нибудь точка (M) не одинаково удалена отъ концовъ отрѣзка (AB), то она не лежитъ на перпендикулярѣ (CD) къ этому отрѣзку, проведенномъ черезъ его середину (O);

если какая-нибудь точка не лежитъ на перпендикулярѣ, проведенномъ къ отрѣзку прямой черезъ его середину, то она не одинаково удалена отъ концовъ этого отрѣзка.



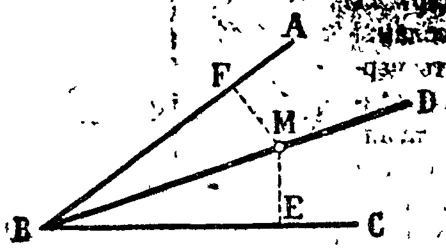
Черт. 58.

Предлагаемъ учащимся самимъ доказать эти противоположныя предложенія (разсужденіемъ отъ противнаго).

65. Теоремы. 1°. **Если какая-нибудь точка одинаково удалена отъ сторонъ угла, то она лежитъ на его биссектрисѣ.**

2°. **Обратно: если какая-нибудь точка лежитъ на биссектрисѣ угла, то она одинаково удалена отъ его сторонъ.**

1°. Пусть точка M (черт. 59) одинаково удалена отъ сторонъ угла ABC, т.-е. пусть перпендикуляры MF и ME, опущенные изъ этой точки на стороны угла, равны; требуется доказать, что точка M лежитъ на биссектрисѣ угла ABC. — Проведемъ прямую черезъ B и M. Прямоугольные треугольники MBE и MBF равны, такъ какъ у нихъ общая гипотенуза и катеты ME, MF равны по условію. Изъ равенства тр-ковъ слѣдуетъ, что

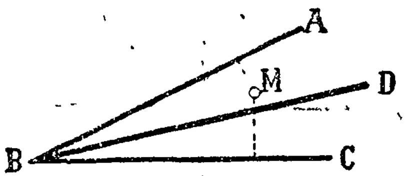


Черт. 59.

$\angle MBE = \angle MBF$, т.-е. прямая MB есть биссектриса угла ABC.

2°. Пусть BD (черт. 59) есть биссектриса угла ABC, и M какая-нибудь точка на ней; требуется доказать, что перпендикуляры ME и MF, опущенные изъ этой точки на стороны угла, равны. — Прямоугольные тр-ки MBE и MBF равны, такъ какъ у нихъ общая гипотенуза, и углы MBE, MBF равны по условію. Изъ равенства тр-ковъ слѣдуетъ, что $ME = MF$ *).

66 Слѣдствіе. Изъ двухъ доказанныхъ теоремъ, прямой и обратной, можно вывести слѣдствіе, что теоремы, п р о т и в о п о л о ж н ы я имъ, также вѣрны, т.-е., что (черт. 60):



Черт. 60.

если какая-нибудь точка (M) н е одинаково удалена отъ сторонъ угла (ABC), то она н е лежитъ на его биссектрисѣ (BD);

*) Предлагаемъ самимъ учащимся разсмотрѣть свойства точекъ, одинаково удаленныхъ отъ **п р о д о л ж е н і й** сторонъ угла (за вершину).

если какая-нибудь точка н е лежитъ на биссектрисѣ угла, то она н е одинаково удалена отъ сторонъ его.

67. Геометрическое мѣсто. Геометрическимъ мѣстомъ точекъ, обладающихъ нѣкоторымъ свойствомъ, наз. такая линія, или поверхность, или совокупность линій и поверхностей (вообще такая фигура), которая содержитъ въ себѣ всѣ точки, обладающія этимъ свойствомъ, и не содержитъ ни одной точки, не обладающей имъ.

Изъ теоремъ предыдущихъ параграфовъ слѣдуетъ:

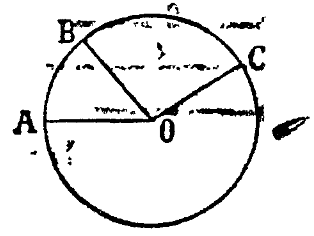
Геометрическое мѣсто точекъ, одинаково удаленныхъ отъ двухъ данныхъ точекъ, есть перпендикуляръ, проведенный къ отрѣзку прямой, соединяющему эти точки, чрезъ его середину.

Геометрическое мѣсто точекъ, одинаково удаленныхъ отъ сторонъ угла, есть биссектриса этого угла *).

ГЛАВА V.

Основныя задачи на построеніе.

68. Понятіе объ окружности. Теоремы, доказанныя нами въ предыдущихъ главахъ, позволяютъ рѣшать нѣкоторыя задачи н а п о с т р о е н і е. Замѣтимъ, что въ элементарной геометріи разсматриваются только такія построенія, которыя могутъ быть выполнены помощью л и н е й к и и ц и р к у л я (употребленіе наугольника и нѣкоторыхъ другихъ приборовъ хотя и допускается ради сокращенія времени, но не составляетъ необходимости). Посредствомъ линейки проводятся прямыя линіи, посредствомъ циркуля чертится о к р у ж н о с т ь. Свойства этой линіи мы



Черт. 61.

*) Предлагаемъ самимъ учащимся убѣдиться, что геометрическое мѣсто точекъ, равноотстоящихъ отъ двухъ пересѣкающихся прямыхъ, состоитъ изъ двухъ прямыхъ, дѣлящихъ пополамъ углы, образованные пересѣкающимися прямыми.

разсмотримъ впослѣдствіи, теперь же ограничимся только краткимъ понятіемъ о ней.

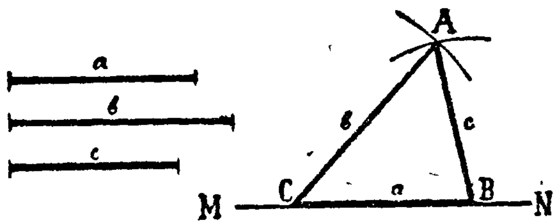
Если дадимъ циркулю произвольное раствореніе и, поставивъ его ножку съ остреемъ въ какую-нибудь точку O (черт. 61), станемъ вращать циркуль вокругъ этой точки, то другая его ножка, снабженная карандашемъ или перомъ, опишетъ непрерывную линію, которой всѣ точки одинаково удалены отъ точки O. Эта линія наз. **окружностью**, а точка O — центромъ ея. Прямыя OA, OB, OC..., соединяющія центръ съ какими-нибудь точками окружности, наз. **радіусами**. Всѣ радіусы одной окружности равны между собою. Часть окружности, напр., AB (черт. 61), наз. **дугою**.

69. Основныя задачи на построеніе.

Укажемъ рѣшеніе слѣдующихъ задачъ на построеніе.

Задача 1. Построить треугольникъ по даннымъ его сторонамъ a, b и c (черт. 62).

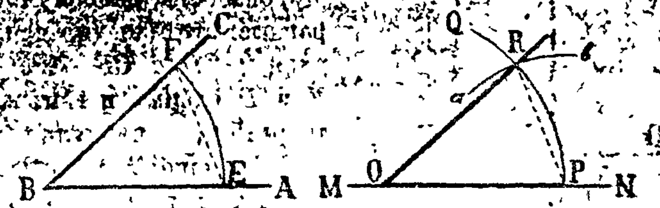
На какой-нибудь прямой MN откладываемъ часть CB, равную одной изъ данныхъ сторонъ, напр. a. Изъ точекъ C и B, какъ центровъ, описываемъ двѣ небольшія дуги, одну радіусомъ, равнымъ b, другую радіусомъ, равнымъ c. Точку A, въ которой эти дуги пересѣкаются, соединяемъ съ B и C. Треугольникъ ABC будетъ искомый.



Черт. 62.

Замѣчаніе. Не всякіе три отрѣзка прямой могутъ служить сторонами треугольника; для этого необходимо, чтобы бо́льшій изъ нихъ былъ меньше суммы двухъ остальныхъ (52).

Задача 2. На данной прямой MN при данной на ней точкѣ O построить уголъ, равный данному углу ABC (черт. 63).

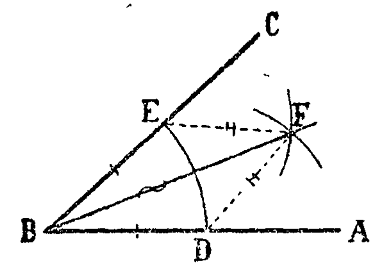


Черт. 63.

Изъ вершины B, какъ центра, описываемъ произвольнымъ радіусомъ между сторонами даннаго угла дугу EF; затѣмъ, не измѣняя растворенія циркуля, переносимъ его острее въ точку O и описываемъ дугу PQ. Далѣе, изъ точки P, какъ центра, описываемъ дугу ab радіусомъ, равнымъ разстоянію между точками E и F. Наконецъ, черезъ точки O и R (пересѣченіе двухъ дугъ) проводимъ прямую. Уголъ ROP равенъ углу ABC, потому что тр-ки ROP и FBE, имѣющіе соотвѣтственно равныя стороны, равны.

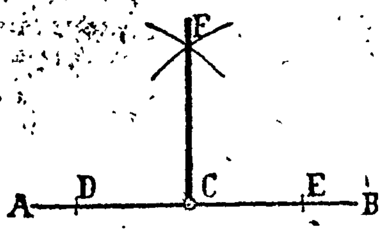
Задача. Раздѣлить данный уголъ ABC пополамъ (черт. 64).

Изъ вершины B, какъ центра, произвольнымъ радіусомъ опишемъ между сторонами угла дугу DE. Затѣмъ, взявъ произвольное раствореніе циркуля, бо́льшее однако половины разстоянія между точками E и D (см. замѣчаніе къ задачѣ 1-й), описываемъ этимъ раствореніемъ изъ точекъ D и E небольшія дуги, которыя пересѣкались бы въ какой-нибудь точкѣ F. Проведя прямую BF, мы получимъ биссектрису угла ABC.—Для доказательства соединимъ прямыми точку F съ D и E; тогда получимъ два тр-ка BEF и BDF, которые равны, такъ какъ у нихъ BF общая сторона, $BD=BE$ и $DF=EF$ по построенію. Изъ равенства тр-ковъ слѣдуетъ: $\angle ABF=\angle CFB$.



Черт. 64.

Задача 4. Изъ данной точки C прямой AB возставить къ этой прямой перпендикуляръ (черт. 65).

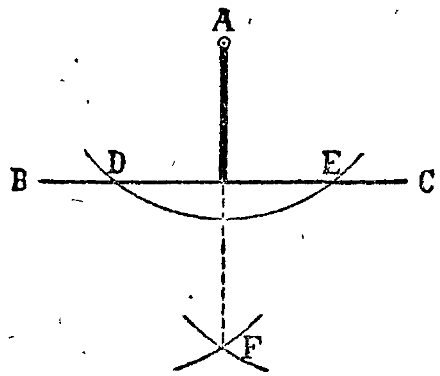


Черт. 65.

Отложимъ на AB по обѣ стороны отъ данной точки C равные отрѣзки (произвольной длины) CD и CE. Изъ точекъ E и D однимъ и тѣмъ же раствореніемъ циркуля (бóльшимъ однако CD) опишемъ двѣ небольшія дуги, которыя пересѣкались бы въ нѣкоторой точкѣ F. Прямая, проведенная черезъ точки C и F, будетъ искомымъ перпендикуляромъ. Дѣйствительно, какъ видно изъ построенія, точка F одинаково удалена отъ D и E; слѣд., она должна лежать на перпендикулярѣ, проведенномъ къ отрѣзку DE черезъ его середину (63); но середина этого отрѣзка есть C, а черезъ C и F можно провести только одну прямую; значитъ, $FC \perp DE$.

Задача 5. Изъ данной точки A опустить перпендикуляръ на данную прямую BC (черт. 66).

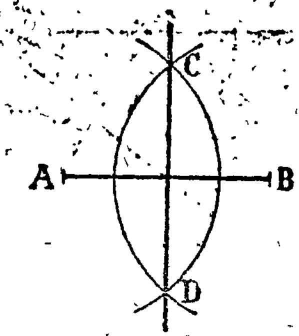
Изъ точки A, какъ центра, произвольнымъ раствореніемъ циркуля (бóльшимъ однако разстоянія отъ A до BC) опишемъ такую дугу, которая пересѣкалась бы съ BC въ какихъ-нибудь двухъ точкахъ D и E. Затѣмъ изъ этихъ точекъ произвольнымъ, но однимъ и тѣмъ же, раствореніемъ циркуля (бóльшимъ однако $^1/_2$ DE) проводимъ двѣ небольшія дуги, которыя пересѣкались бы между собою въ нѣкоторой точкѣ F. Прямая AF будетъ искомымъ перпендикуляромъ.— Дѣйствительно, какъ видно изъ построенія, каждая изъ точекъ A и F одинаково удалена отъ D и E; а такія точки лежатъ на перпендикулярѣ, проведенномъ къ отрѣзку DE черезъ его середину (63).



Черт. 66.

Задача 6. Провести перпендикуляръ къ данному отрѣзку прямой (AB) черезъ его середину (черт. 67).

Изъ точекъ A и B произвольнымъ, но одинаковымъ, раствореніемъ циркуля (бóльшимъ $^1/_2$ AB) описываемъ двѣ дуги, которыя пересѣкались бы между собою въ нѣкоторыхъ точкахъ C и D. Прямая CD будетъ искомымъ перпендикуляромъ.— Дѣйствительно, какъ видно изъ построенія, каждая изъ точекъ C и D одинаково удалена отъ A и B; слѣд., эти точки должны лежать на перпендикулярѣ, проведенномъ къ отрѣзку AB черезъ его середину (63).



Черт 67.

Задача 7. Раздѣлить пополамъ данный отрѣзокъ прямой (черт. 67).

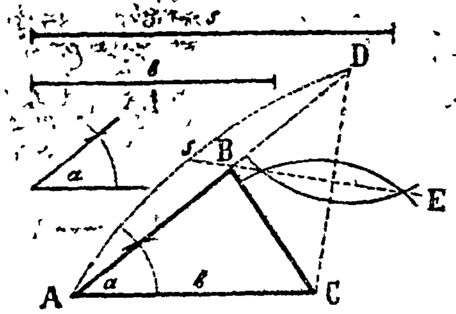
Рѣшается такъ же, какъ предыдущая задача.

70. Примѣръ болѣе сложной задачи. При помощи этихъ основныхъ задачъ можно рѣшать задачи болѣе сложныя. Для примѣра рѣшимъ слѣдующую задачу.

Задача. Построить треугольникъ, зная его основаніе b, уголъ a, прилежащій къ основанію, и сумму s двухъ боковыхъ сторонъ (черт. 68).

Чтобы составить планъ рѣшенія, предположимъ, что задача рѣшена, т. е. что найденъ такой тр-никъ ABC, у котораго основаніе $AC=b$, уголъ $A=a$ и $AB+BC=s$. Разсмотримъ теперь полученный чертежъ. Сторону AC, равную b, и уголъ A, равный a, мы построить умѣемъ. Значитъ, остается найти на сторонѣ AD угла A такую точку B, чтобы сумма $AB+BC$ равнялась s. Продолживъ AB, отложимъ отрѣзокъ AD, равный s. Теперь вопросъ приводится къ тому, чтобы на прямой AD отыскать такую точку B, которая была бы одинаково удалена отъ C и D. Такая точка, какъ мы знаемъ (63), должна лежать на перпендикулярѣ, проведенномъ къ отрѣзку прямой CD черезъ его середину.

Этотъ перпендикуляръ мы построить умѣемъ. Точка B найдется въ пересѣченіи перпендикуляра съ AD.



Черт. 68.

Итакъ, вотъ рѣшеніе задачи: строимъ (черт. 68) уголъ A, равный данному углу α; на сторонахъ его откладываемъ $AC=b$ и $AD=s$. Черезъ середину отрѣзка прямой DC проводимъ перпендикуляръ BE; пересѣченіе его съ AD, т.-е. точку B, соединимъ съ C. Тр-никъ ABC будетъ искомый, такъ какъ онъ удовлетворяетъ всѣмъ требованіямъ задачи: у него $AC=b$, $\angle A=\alpha$ и $AB+BC=s$ (потому что $BD=BC$).

Разсматривая построеніе, мы замѣчаемъ, что задача возможна не при всякихъ данныхъ. Дѣйствительно, если сумма s задана слишкомъ малою сравнительно съ b, то перпендикуляръ EB можетъ и не пересѣчь отрѣзка AD (или пересѣчетъ его продолженіе за точку A или за точку D); въ этомъ случаѣ задача окажется невозможной. И независимо отъ построенія можно видѣть, что задача невозможна, если $s<b$, или $s=b$, потому что не можетъ быть такого треугольника, у котораго сумма двухъ сторонъ была бы меньше или равна третьей сторонѣ.

Въ томъ случаѣ, когда задача возможна, она имѣетъ только одно рѣшеніе, т.-е. существуетъ только одинъ тр-никъ, удовлетворяющій требованіямъ задачи, такъ какъ пересѣченіе перпендикуляра BE съ прямой AD можетъ быть только въ одной точкѣ.

71. Замѣчаніе. Изъ приведеннаго примѣра видно, что рѣшеніе сложной задачи на построеніе состоитъ изъ слѣдующихъ четырехъ частей:

1°. Предположивъ, что задача рѣшена, дѣлаютъ отъ руки приблизительный чертежъ искомой фигуры и затѣмъ, внимательно разсматривая начерченную фигуру, стремятся найти такія зависимости между данными задачи и искомыми, кото-

рыя позволили бы свести задачу на другія, извѣстныя ранѣе. Эта самая важная часть рѣшенія задачи, имѣющая цѣлью составить планъ рѣшенія, носитъ названіе **анализа**.

2°. Когда такимъ образомъ планъ рѣшенія найденъ, выполняютъ сообразно ему **построеніе**.

3°. Для провѣрки правильности плана доказываютъ затѣмъ, на основаніи извѣстныхъ теоремъ, что полученная фигура удовлетворяетъ всѣмъ требованіямъ задачи. Эта часть рѣшенія называется **синтезомъ**.

4°. Затѣмъ задаются вопросомъ, при всякихъ ли данныхъ задача возможна, допускаетъ ли она одно рѣшеніе, или нѣсколько, и нѣтъ ли въ задачѣ какихъ-либо особенныхъ случаевъ, когда построеніе упрощается, или, наоборотъ, усложняется. Эта часть рѣшенія наз. **изслѣдованіемъ** задачи.

Когда задача весьма проста и не можетъ быть сомнѣнія относительно ея возможности, то обыкновенно анализъ и изслѣдованіе опускаютъ, а указываютъ прямо построеніе и приводятъ доказательство. Такъ мы дѣлали, излагая рѣшеніе первыхъ 7-ми задачъ этой главы; такъ же будемъ дѣлать и впослѣдствіи, когда намъ придется излагать рѣшеніе несложныхъ задачъ.

УПРАЖНЕНІЯ.

Доказать теоремы.

5. Въ равнобедренномъ треугольникѣ двѣ медіаны равны, двѣ биссектрисы равны, двѣ высоты равны.

6. Если изъ середины каждой изъ равныхъ сторонъ равнобедреннаго тр-ка возставимъ перпендикуляры до пересѣченія съ другою изъ равныхъ сторонъ, то эти перпендикуляры равны.

7. Перпендикуляры, возставленные къ двумъ сторонамъ угла на равныхъ разстояніяхъ отъ вершины, пересѣкаются на биссектрисѣ.

8. Прямая, перпендикулярная къ биссектрисѣ угла, отсѣкаетъ отъ его сторонъ равные отрѣзки.

9. Медіана тр-ка меньше его полупериметра.

10. Медіана тр-ка меньше полусуммы сторонъ, между которыми она заключается. Указаніе: продолжить медіану на разстояніе, равное ей, полученную точку соединить съ однимъ концомъ стороны, къ которой проведена медіана, и разсмотрѣть образовавшуюся фигуру.

10,*a*. Сумма медіанъ тр-ка меньше периметра, но больше полупериметра.

11. Сумма разстояній какой-нибудь точки, взятой внутри тр-ка, отъ трехъ его вершинъ меньше периметра (§ 55), но больше полупериметра (§ 52).

11,а. Сумма діагоналей четыреугольника меньше его периметра, но больше полупериметра.

12. Доказать прямо, что всякая точка, не лежащая на перпендикулярѣ, проведенномъ къ отрѣзку прямой черезъ его середину, не одинаково удалена отъ концовъ этого отрѣзка, а именно, она ближе къ тому концу, съ которымъ она расположена по одну сторону отъ перпендикуляра.

13. Доказать прямо, что всякая точка, не лежащая на биссектрисѣ угла, не одинаково отстоитъ отъ сторонъ его.

13,а. Если на сторонахъ угла A отложимъ равныя длины AB и AB_1, затѣмъ равныя длины AC и AC_1, то прямыя BC_1 и B_1C пересѣкаются на биссектрисѣ угла A.

Задачи на построеніе.

14. Построить сумму двухъ, трехъ и болѣе данныхъ угловъ.
15. Построить разность двухъ угловъ.
16. По данной суммѣ и разности двухъ угловъ найти эти углы.
17. Раздѣлить уголъ на 4, 8, 16 равныхъ частей.
18. Черезъ вершину даннаго угла провести внѣ его такую прямую, которая со сторонами угла образовала бы равные углы.
19. Построить △: a) по двумъ сторонамъ и углу между ними; b) по сторонѣ и двумъ прилежащимъ угламъ; c) по двумъ сторонамъ и углу лежащ[illegible] противъ большей изъ нихъ, d) по двумъ сторонамъ и углу, лежащему противъ меньшей изъ нихъ (въ этомъ случаѣ получаются два рѣшенія, или одно, или ни одного).
20. Построить равнобедренный △: a) по основанію и боковой сторонѣ; b) по основанію и прилежащему углу; c) по боковой сторонѣ и углу при вершинѣ; d) по боковой сторонѣ и углу при основаніи.
21. Построить прямоугольный △: a) по двумъ катетамъ; b) по катету и гипотенузѣ; c) по катету и прилежащему острому углу.
22. Построить равнобедренный △: a) по высотѣ и боковой сторонѣ, b) по высотѣ и углу при вершинѣ; c) по основанію и перпендикуляру, опущенному изъ конца основанія на боковую сторону.
23. Построить прямоугольный △ по гипотенузѣ и острому углу.
24. Черезъ точку, данную внутри или внѣ угла, провести такую прямую, которая отсѣкла бы отъ сторонъ угла равныя части.
25. По данной суммѣ и разности двухъ прямыхъ найти эти прямыя.
26. Раздѣлить данную конечную прямую на 4, 8, 16 равныхъ частей.
27. На данной прямой найти точку, одинаково удаленную отъ двухъ данныхъ точекъ (внѣ прямой).
28. Найти точку, равноотстоящую отъ трехъ вершинъ △.
29. На прямой, пересѣкающей стороны угла, найти точку, одинаково удаленную отъ сторонъ этого угла.

30. Найти точку, одинаково удаленную отъ трехъ сторонъ △.
31. На безконечной прямой AB найти такую точку C, чтобы полупрямыя CM и CN, проведенныя изъ C черезъ данныя точки M и N, расположенныя по одну сторону отъ AB, составляли съ полупрямыми CA и CB равные углы.
32. Построить прямоугольный △ по катету и суммѣ гипотенузы съ другимъ катетомъ.
33. Построить △ по основанію, углу, прилежащему къ основанію, и разности двухъ другихъ сторонъ (разсмотрѣть два случая: 1) когда данъ меньшій изъ двухъ угловъ, прилежащихъ къ основанію, 2) когда данъ большій изъ нихъ).
34. Построить прямоугольный △ по катету и разности двухъ другихъ сторонъ.

ГЛАВА VI.

Параллельныя прямыя.

Основныя теоремы.

72. Опредѣленіе. Когда какія-нибудь двѣ прямыя AB и CD (черт. 69) пересѣчены третьей прямой MN, то образуются 8 угловъ, которые попарно получаютъ слѣдующія названія:

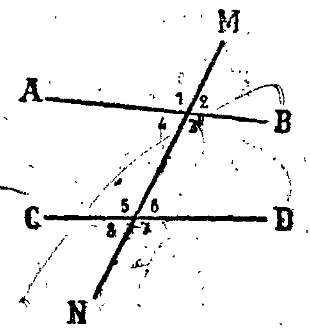
соотвѣтственные углы: 1 и 5, 4 и 8, 2 и 6, 3 и 7;

внутренніе накрестъ лежащіе углы: 3 и 5, 4 и 6;

внѣшніе накрестъ лежащіе углы: 1 и 7, 2 и 8;

внутренніе односторонніе углы: 3 и 6, 4 и 5;

внѣшніе односторонніе углы: 1 и 8, 2 и 7.



Черт. 69.

73. Лемма. *) **Если между углами, образовавшимися при пересѣченіи двухъ прямыхъ третьею (черт. 69), существуетъ какое-нибудь одно изъ слѣдующихъ 5-и соотношеній:**

1°, соотвѣтственные углы равны,

2°, внутренніе накрестъ лежащіе углы равны,

3°, внѣшніе накрестъ лежащіе углы равны,

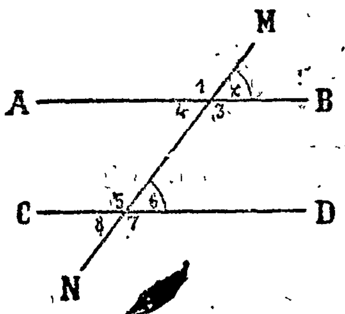
---

*) Леммою наз. вспомогательная теорема, излагаемая только для того, чтобы при ея помощи доказать послѣдующія теоремы.

4°, сумма внутреннихъ одностороннихъ угловъ равна 2d,
5°, сумма внѣшнихъ одностороннихъ угловъ равна 2d,
то существуютъ и всѣ остальныя изъ этихъ соотношенiй.

Сначала докажемъ, что п е р в о е изъ указанныхъ соотношенiй влечетъ за собою, какъ слѣдствiе, всѣ остальныя; послѣ этого докажемъ, что, обратно, каждое изъ этихъ остальныхъ соотношенiй (т.-е. 2-е, 3-е, 4-е и 5-е) влечетъ за собою, какъ слѣдствiе, первое; отсюда мы заключимъ, что к а ж д о е изъ указанныхъ соотношенiй влечетъ за собою в с ѣ о с т а л ь н ы я.

1) Пусть дано, что соотвѣтственные углы 2 и 6 равны между собою (черт. 70); требуется доказать, что въ такомъ случаѣ будутъ имѣть мѣсто и всѣ остальныя указанныя соотношенiя.



Черт. 70.

Прежде всего покажемъ, что равенство одной пары соотвѣтственныхъ угловъ, напр. угловъ 2 и 6, влечетъ за собою равенство и всѣхъ остальныхъ паръ соотвѣтственныхъ угловъ. Дѣйствительно, $\angle 4 = \angle 8$, такъ какъ первый изъ этихъ угловъ равенъ углу 2, а второй—углу 6, какъ вертикальные; $\angle 1 = \angle 5$, такъ какъ эти углы составляютъ дополненiя до $2d$ къ равнымъ угламъ 2 и 6; по той же причинѣ $\angle 3 = \angle 7$.

Обращая теперь вниманiе на внутреннiе накрестъ лежащiе углы, находимъ: $\angle 4 = \angle 2$, какъ углы вертикальные; $\angle 2 = \angle 6$ по заданiю; слѣд., $\angle 4 = \angle 6$.

Если же $\angle 4 = \angle 6$, то равны и внутреннiе накрестъ лежащiе углы 3 и 5, какъ дополненiя до $2d$ къ равнымъ угламъ 4 и 6.

Обращая вниманiе на внѣшнiе накрестъ лежащiе углы, находимъ: $\angle 8 = \angle 6$, какъ углы вертикальные; $\angle 6 = \angle 2$ по заданiю; слѣд. $\angle 8 = \angle 2$.

Если же $\angle 2 = \angle 8$, то равны и другiе внѣшнiе накрестъ лежащiе углы 1 и 7, какъ дополненiя до $2d$ къ равнымъ угламъ 2 и 8.

Обращая вниманiе на внутреннiе одностороннiе углы, находимъ: $\angle 3 + \angle 2 = 2d$, такъ какъ эти углы смежные. Замѣнивъ въ этой суммѣ уголъ 2-й равнымъ ему угломъ 6-мъ, получимъ:

$\angle 3 + \angle 6 = 2d$. Точно такъ же: $\angle 4 + \angle 1 = 2d$, $\angle 1 = \angle 5$; слѣд. $\angle 4 + \angle 5 = 2d$.

Обращая, наконецъ, вниманiе на внѣшнiе одностороннiе углы, совершенно такъ же, какъ это было сдѣлано для внутреннихъ одностороннихъ угловъ, докажемъ, что $\angle 7 + \angle 2 = 2d$ и $\angle 8 + \angle 1 = 2d$.

2) Докажемъ теперь, что каждое изъ соотношенiй: 2-е, 3-е, 4-е и 5-е влечетъ за собою, какъ слѣдствiе, соотношенiе 1-е.

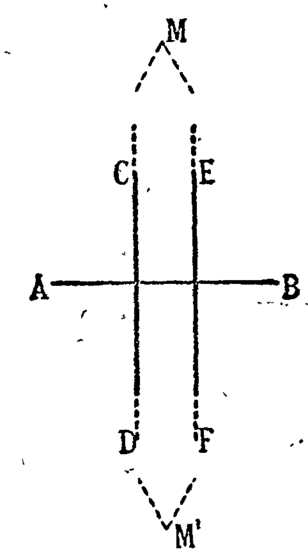
Пусть, напр., дано (черт. 70), что $\angle 2 + \angle 7 = 2d$; требуется доказать, что соотвѣтственные углы 2 и 6 равны. Дѣйствительно, $\angle 7 + \angle 6 = 2d$, такъ какъ углы эти смежные; но $\angle 2 + \angle 7 = 2d$ по заданiю; слѣд., $\angle 7 + \angle 6 = \angle 2 + \angle 7$. Отнявъ отъ этихъ равныхъ суммъ по одному и тому же углу 7, получимъ $\angle 6 = \angle 2$.

Подобно этому докажемъ, что и любое иное изъ соотношенiй: 2-е, 3-е, 4-е и 5-е влечетъ за собою, какъ слѣдствiе, соотношенiе 1-е.

3) Теперь заключаемъ, что каждое изъ 5-ти указанныхъ соотношенiй влечетъ за собою, какъ слѣдствiе, всѣ остальныя, такъ какъ каждое влечетъ 1-е, а это влечетъ всѣ остальныя.

74. Теорема. Два перпендикуляра къ одной и той же прямой не могутъ пересѣчься, сколько бы мы ихъ ни продолжали.

Пусть къ одной и той же прямой AB (черт. 71) проведены два перпендикуляра CD и EF; требуется доказать, что эти перпендикуляры не пересѣкаются, сколько бы мы ихъ ни продолжали.



Черт. 71.

Предположимъ противное, т.-е. что прямыя CD и EF, будучи продолжены достаточно далеко, пересѣкаются въ нѣкоторой точкѣ M (или M'). Тогда изъ этой точки на прямую AB были бы опущены 2 различные перпендикуляра. Такъ какъ это невозможно (32), то нельзя допустить, чтобы перпендикуляры CD и EF гдѣ-нибудь пересѣкались.

75. Опредѣленіе. Двѣ прямыя наз. **параллельными**, если, находясь въ одной плоскости, онѣ **не пересѣкаются**, сколько бы мы ихъ ни продолжали.

Возможность существованія параллельныхъ прямыхъ обнаруживается предыдущей теоремой, которую теперь можно высказать такъ:

два перпендикуляра къ одной и той же прямой параллельны.

Параллельность прямыхъ обозначается письменно знакомъ $\parallel$, поставленнымъ между обозначеніями прямыхъ; такъ, если прямыя CD и EF параллельны, то пишутъ: $CD \parallel EF$.

Предыдущая теорема, показывая возможность существованія параллельныхъ прямыхъ, выражаетъ одинъ изъ **признаковъ параллельности** (перпендикулярность къ одной и той же прямой). Слѣдующая теорема выражаетъ еще другіе признаки параллельности.

76. Теорема. Если при пересѣченіи двухъ прямыхъ какою-нибудь третьею прямой окажется, что:

1°, соотвѣтственные углы равны;

или 2°, внутренніе накрестъ лежащіе углы равны,

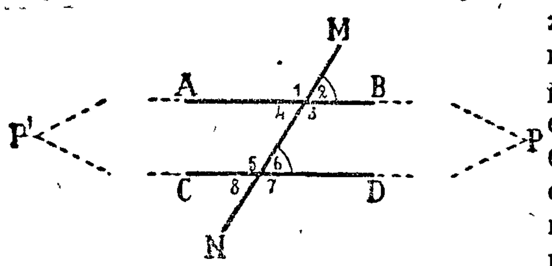
или 3°, внѣшніе накрестъ лежащіе углы равны,

или 4°, сумма внутреннихъ одностороннихъ угловъ равна 2d,

или 5°, сумма внѣшнихъ одностороннихъ угловъ равна 2d,

то первыя двѣ прямыя параллельны.

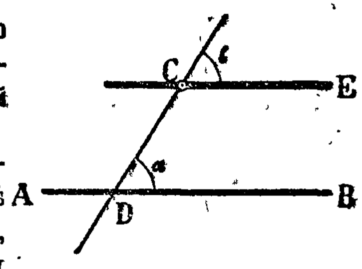
Мы видѣли (73), что если существуетъ какое-нибудь одно изъ 5-ти соотношеній, перечисленныхъ въ теоремѣ, то существуютъ и всѣ остальныя. Поэтому намъ достаточно обнаружить, что прямыя AB и CD (черт. 72) параллельны при существованіи какого-нибудь одного изъ этихъ соотношеній. Пусть, напр., дано, что соотвѣтственные углы 2 и 6 равны; требуется доказать, что въ такомъ случаѣ $AB \parallel CD$.—Предположимъ противное, т.-е. что прямыя AB и CD не параллельны; тогда эти



Черт. 72.

прямыя пересѣкутся въ какой-нибудь точкѣ P, лежащей направо отъ MN, или въ какой-нибудь точкѣ P', лежащей налѣво отъ MN. Если пересѣченіе будетъ въ P, то образуется тр-къ, въ которомъ $\angle 2$ будетъ внѣшнимъ, а $\angle 6$ внутреннимъ, не смежнымъ съ внѣшнимъ угломъ 2, и, значитъ, тогда $\angle 2$ долженъ быть больше $\angle 6$ (45), что противорѣчитъ заданію; значитъ, пересѣчься въ какой-нибудь точкѣ P, лежащей направо отъ MN, прямая AB и CD не могутъ. Если предположимъ, что пересѣченіе будетъ въ точкѣ P', то тогда образуется тр-къ, у котораго $\angle 4$, равный $\angle 2$, будетъ внутреннимъ, а $\angle 6$ внѣшнимъ, не смежнымъ съ внутреннимъ $\angle 4$; тогда $\angle 6$ долженъ быть больше $\angle 4$ и, слѣд., больше $\angle 2$, что противорѣчитъ заданію. Значитъ, прямыя AB и CD не могутъ пересѣчься и въ точкѣ, лежащей налѣво отъ MN; слѣд., эти прямыя нигдѣ не пересѣкаются, т.-е. онѣ параллельны.

77. Теорема. Черезъ всякую точку, лежащую внѣ прямой, можно провести параллельную этой прямой.



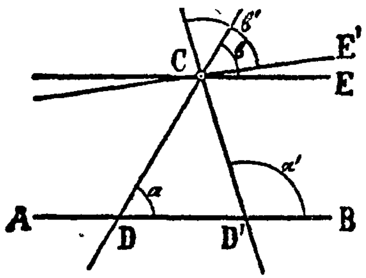
Черт. 73.

Дана прямая AB (черт. 73) и какая-нибудь точка C, лежащая внѣ этой прямой; требуется доказать, что черезъ точку C можно провести прямую, параллельную AB.—Черезъ какую-нибудь точку D прямой AB и черезъ точку C проведемъ прямую CD. Эта прямая образуетъ съ AB нѣкоторый уголъ a. Построимъ при точкѣ C уголъ b, равный углу a, расположивъ его такъ, чтобы онъ оказался соотвѣтственнымъ углу a. Тогда прямая CE будетъ параллельна AB, такъ какъ соотвѣтственные углы a и b равны (76).

78. Замѣчаніе. Такъ какъ точку D на прямой AB (черт. 73) мы можемъ брать произвольно, то построеній, подобныхъ указанному, можетъ быть выполнено сколько угодно. При этомъ возникаетъ вопросъ, будетъ ли при разныхъ построеніяхъ всегда получаться одна и та же прямая CE, параллельная AB, или могутъ получаться и другія прямыя, параллельныя AB?

Если, напр., вмѣсто точки D мы возьмемъ точку D' (черт. 74) и сдѣлаемъ для сѣкущей CD' такое же построеніе, какое раньше было сдѣлано для сѣкущей CD (т.-е. построимъ $\angle b = \angle a$), то получится ли при этомъ та же прямая CE или окажется нѣкоторая новая прямая CE'? Вопросъ этотъ другими словами можетъ быть высказанъ такъ: черезъ точку C, взятую внѣ прямой AB, можно ли провести только одну прямую, параллельную AB, или нѣсколько? Отвѣтомъ на этотъ вопросъ служитъ слѣдующая аксіома параллельныхъ линій.

79. Аксіома параллельныхъ линій. Черезъ одну и ту же точку нельзя провести двухъ различныхъ прямыхъ, параллельныхъ одной и той же прямой.



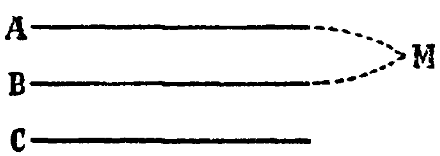
Черт. 74.

Такъ, если (черт. 74), $CE \parallel AB$, то никакая другая прямая CE', проведенная черезъ точку C, не можетъ быть параллельной AB, т.-е. она при продолженіи пересѣчется съ AB.

Доказательство этой не вполнѣ очевидной истины оказывается невозможнымъ; ее принимаютъ безъ доказательства, какъ необходимое допущеніе или требованіе (постулатъ — postulatum).

80. Слѣдствія. 1°. Если прямая (CE', черт. 74) пересѣкается съ одной изъ параллельныхъ (CE), то она пересѣкается и съ другой (AB),

потому что въ противномъ случаѣ черезъ одну и ту же точку C проходили бы двѣ различныя прямыя, параллельныя AB, что невозможно.



Черт. 75.

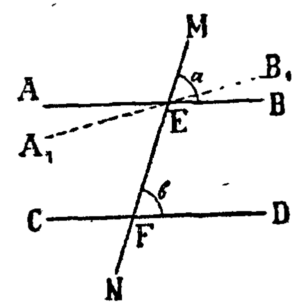
2°. Если каждая изъ двухъ прямыхъ A и B (черт. 75) параллельна одной и той же третьей прямой (C), то онѣ параллельны между собою.

Дѣйствительно, если предположимъ, что прямыя A и B пересѣкаются въ нѣкоторой точкѣ M, то тогда черезъ эту точку проходили бы двѣ различныя прямыя, параллельныя C, что невозможно.

81. Теорема (обратная теоремѣ § 76). Если двѣ параллельныя прямыя (AB и CD, черт. 76) пересѣчены третьей прямой (MN), то:

1°, соотвѣтственные углы равны;
2°, внутренніе накрестъ лежащіе углы равны;
3°, внѣшніе накрестъ лежащіе углы равны;
4°, сумма внутреннихъ одностороннихъ угловъ равна 2d;
5°, сумма внѣшнихъ одностороннихъ угловъ равна 2d.

Достаточно доказать, что параллельность прямыхъ AB и CD влечетъ за собою, какъ слѣдствіе, какое-нибудь одно изъ 5-ти указанныхъ соотношеній, потому что, какъ мы видѣли (73), если существуетъ одно изъ нихъ, то должны существовать и всѣ остальныя.



Черт. 76.

Докажемъ, напр., что если $AB \parallel CD$, то соотвѣтственные углы a и b равны.

Предположимъ противное, т.-е. что эти углы не равны (напр., пусть $a > b$). Построивъ $\angle MEB_1 = \angle b$, мы получимъ тогда прямую A_1B_1, не сливающуюся съ AB, и, слѣд., будемъ имѣть 2 различныя прямыя, проходящія черезъ точку E и параллельныя одной и той же прямой CD (именно: $AB \parallel CD$ согласно условію теоремы и $A_1B_1 \parallel CD$ вслѣдствіе равенства соотвѣтственныхъ угловъ MEB_1 и b).

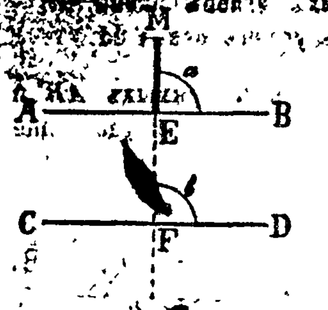
Такъ какъ это противорѣчитъ аксіомѣ параллельныхъ линій, то наше предположеніе, что углы a и b не равны, должно быть отброшено; остается принять, что $a = b$.

82. Слѣдствіе. Перпендикуляръ къ одной изъ двухъ параллельныхъ прямыхъ есть также перпендикуляръ и къ другой.

Дѣйствительно, если $AB \parallel CD$ (черт. 77) и $ME \perp AB$, то, во 1, ME, пересѣкаясь съ AB, пересѣкается и съ CD въ нѣкоторой точкѣ F (80, 1°); во 2, соотвѣтственные углы a и b равны. Но уголъ a прямой, значитъ и уголъ b прямой, т.-е. $MF \perp CD$.

83. Признаки непараллельности прямыхъ.

Изъ двухъ теоремъ: прямой, выражающей признаки параллельности (76), и ей обратной (81), можно вывести заключеніе, что противоположныя теоремы также вѣрны, т.-е. что если при пересѣченіи двухъ прямыхъ третьею окажется, что: 1°, соотвѣтственные углы не равны, или 2°, внутренніе накрестъ лежащіе углы не равны, и т. д., то прямыя не параллельны.

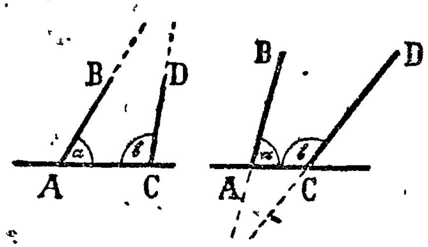


Черт. 77.

если двѣ прямыя не параллельны, то при пересѣченіи ихъ третьею прямой: 1°, соотвѣтственные углы не равны, 2°, внутренніе накрестъ лежащіе углы не равны, и т. д.

Изъ этихъ признаковъ непараллельности (легко доказываемыхъ способомъ отъ противнаго) полезно обратить особое вниманіе на слѣдующій:

если сумма внутреннихъ одностороннихъ угловъ (a и b, черт. 78) не равна $2d$, то прямыя (AB и CD) при достаточномъ продолженіи пересѣкаются, такъ какъ если бы эти прямыя не пересѣкались, то онѣ были бы параллельны, и тогда сумма внутреннихъ одностороннихъ угловъ равнялась бы $2d$ (81), что противорѣчитъ условію.



Черт. 78.

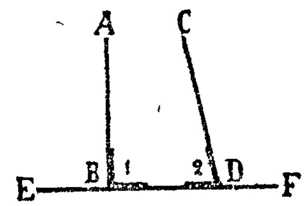
Это предложеніе (дополненное утвержденіемъ, что прямыя пересѣкутся по ту сторону отъ сѣкущей линіи, по которой сумма внутреннихъ одностороннихъ угловъ меньше $2d$) было принято знаменитымъ греческимъ геометромъ Эвклидомъ (жившимъ въ

III вѣкѣ до Р. Х.) въ его «Началахъ» геометріи безъ доказательства, какъ аксіома параллельныхъ линій, и потому оно извѣстно подъ именемъ постулата Эвклида. Въ настоящее время предпочитаютъ принимать за такую аксіому болѣе простую истину, а именно ту, которую мы изложили раньше (79).

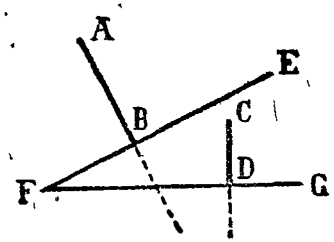
Укажемъ еще 2 слѣдующіе признака непараллельности, которые понадобятся намъ впослѣдствіи:

1°. Перпендикуляръ (AB, черт. 79) и наклонная (CD) къ одной и той же прямой (EF) пересѣкаются,

потому что сумма внутреннихъ одностороннихъ угловъ 1 и 2 не равна $2d$.



Черт. 79.



Черт. 80.

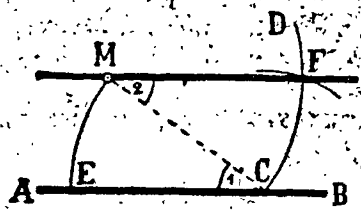
2°. Двѣ прямыя (AB и CD, черт. 80), **перпендикулярныя къ двумъ пересѣкающимся прямымъ** (FE и FG), **пересѣкаются.**

Дѣйствительно, если предположимъ противное, т.-е. что $AB \parallel CD$, то прямая FD, будучи перпендикулярна къ одной изъ параллельныхъ (къ CD), была бы перпендикулярна и къ другой параллельной (къ AB), и тогда изъ одной точки F къ прямой AB были бы проведены два перпендикуляра: FB и FD, что невозможно.

84. Задача. Черезъ данную точку M провести прямую, параллельную данной прямой AB (черт. 81).

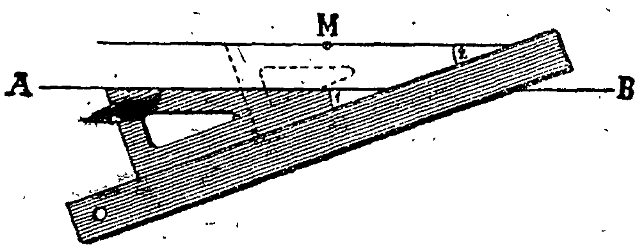
Наиболѣе простое рѣшеніе этой задачи состоитъ въ слѣдующемъ: изъ точки M, какъ центра, описываемъ произвольнымъ радіусомъ дугу CD и изъ точки C тѣмъ же радіусомъ дугу ME.

Затѣмъ, давъ циркулю раствореніе, равное разстоянію отъ E до M, описываемъ изъ точки C небольшую дугу, которая пересѣкалась бы съ CD въ нѣкоторой точкѣ F. Прямая MF будетъ параллельна AB.—Для доказательства проведемъ вспомогательную прямую MC; образовавшіеся при этомъ углы 1 и 2 равны по построенію (**69**, зад. 2); а если внутренніе накрестъ лежащіе углы равны, то линіи параллельны.



Черт. 81.

Параллельныя прямыя весьма удобно проводятся также помощью наугольника и линейки. Приставивъ наугольникъ одною стороною (напр., гипотенузой) къ данной прямой AB, прикладываютъ къ другой его сторонѣ (напр., къ длинному катету) линейку; затѣмъ, придерживая рукой линейку въ этомъ



Черт. 82

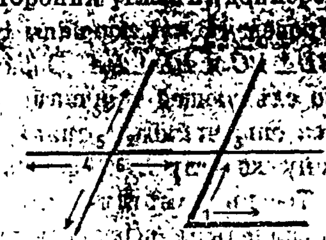
положеніи, двигаютъ наугольникъ вдоль нея до тѣхъ поръ, пока сторона его, совпадавшая съ AB, не пройдетъ черезъ точку M; послѣ чего проводятъ вдоль этой стороны прямую. Эта прямая будетъ параллельна AB, такъ какъ соотвѣтственные углы 1 и 2 равны.

Углы съ соотвѣтственно параллельными или перпендикулярными сторонами.

85. Теорема. Если стороны одного угла соотвѣтственно параллельны сторонамъ другого угла, то такіе углы или равны, или въ суммѣ составляютъ два прямыхъ.

Разсмотримъ особо слѣдующіе три случая (черт. 83):

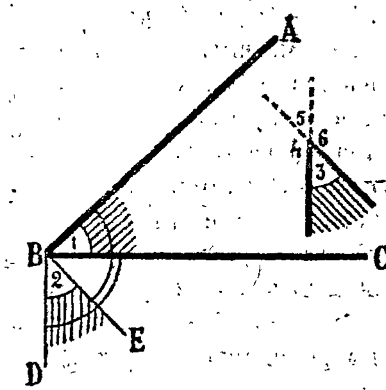
1°. Пусть стороны угла 1 соотвѣтственно параллельны сторонамъ угла 2 и, сверхъ того, имѣютъ одинаковое направленіе отъ вершины (на чертежѣ направленія указаны стрѣлками).—Продолживъ одну изъ сторонъ угла 2 до пересѣченія съ непараллельной ей стороной угла 1, мы получимъ уголъ 3, равный и углу 1, и углу 2 (какъ соотвѣтственные при параллельныхъ); слѣд., $\angle 1 = \angle 2$.



Черт. 83.

2°. Пусть стороны угла 1 соотвѣтственно параллельны сторонамъ угла 4, но имѣютъ противоположное направленіе отъ вершины.—Продолживъ обѣ стороны угла 4, мы получимъ уг. 2, который равенъ углу 1 (по доказанному выше) и углу 4 (какъ вертикальные); слѣд., $\angle 4 = \angle 1$.

3°. Пусть, наконецъ, стороны угла 1 соотвѣтственно параллельны сторонамъ угла 5 или угла 6, при чемъ двѣ изъ этихъ сторонъ имѣютъ одинаковое направленіе, а двѣ другія противоположное. Продолживъ одну сторону угла 5 или угла 6, мы получимъ уг. 2, который равенъ, по доказанному, углу 1; но $\angle 5$ (или $\angle 6$) $+ \angle 2 = 2d$ (по свойству смежныхъ угловъ); слѣд., и $\angle 5$ (или $\angle 6$) $+ \angle 1 = 2d$.



Черт. 84.

Такимъ образомъ, углы съ параллельными сторонами оказываются равными, когда ихъ стороны имѣютъ и л и о д и н а к о в о е, и л и п р о т и в о п о л о ж н о е н а п р а в л е н і е отъ вершины; если же это условіе не выполнено, то углы составляютъ въ суммѣ $2d$.

86. Теорема. Если стороны одного угла соотвѣтственно перпендикулярны къ сторонамъ другого угла, то такіе углы или равны, или въ суммѣ составляютъ два прямыхъ.

Пусть уголъ ABC, обозначенный цифрою 1 (черт. 84), есть одинъ изъ данныхъ угловъ; за другой данный уголъ возьмемъ какой-нибудь изъ 4-хъ угловъ: 3-й, 4-й, 5-й или 6-й, образованныхъ двумя пересѣкающимися прямыми, изъ которыхъ одна перпендикулярна къ сторонѣ AB, а другая—къ сторонѣ BC. Проведемъ изъ вершины угла 1 двѣ вспомогательныя прямыя: $BD \perp BC$ и $BE \perp BA$. Образованный ими уголъ 2 равенъ углу 1 по слѣдующей причинѣ: углы DBC и EBA равны, такъ какъ оба они прямые; отнявъ отъ каждаго изъ нихъ по одному и тому же углу EBC, получимъ: $\angle 2 = \angle 1$.

Теперь замѣтимъ, что стороны вспомогательнаго угла 2 параллельны пересѣкающимся прямымъ, образующимъ углы 3, 4, 5 и 6 (потому что два перпендикуляра къ одной прямой параллельны); слѣд., эти углы или равны углу 2, или составляютъ съ нимъ въ суммѣ $2d$. Замѣнивъ уголъ 2 равнымъ ему угломъ 1, получимъ то, что требовалось доказать.

87. Замѣчанія. 1°. Если намъ заранѣе извѣстно, что два угла съ соотвѣтственно параллельными или перпендикулярными сторонами оба острые, или оба тупые, то можемъ утверждать, что такіе углы равны, такъ какъ два острыхъ или два тупыхъ угла не могутъ въ суммѣ составить $2d$.

2°. Вообразимъ, что мы стоимъ у вершины угла и смотримъ по направленію его равнодѣлящей; тогда одна сторона угла окажется у насъ направо, а другая налѣво. Условимся первую называть «правою» стороною, а вторую—«лѣвою». Тогда, просмотрѣвъ всѣ указанные нами случаи расположенія угловъ съ соотвѣтственно параллельными или перпендикулярными сторонами, мы придемъ къ слѣдующему простому выводу: такіе углы равны въ томъ случаѣ, когда у нихъ параллельныя или перпендикулярныя стороны одноименны (т. е. правыя или лѣвыя въ обоихъ углахъ); въ противномъ случаѣ углы дополняютъ другъ друга до $2d$.

Сумма угловъ треугольника и многоугольника.

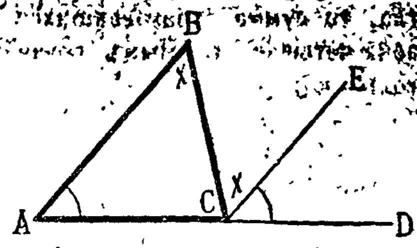
88. Теорема. Сумма угловъ всякаго треугольника равна двумъ прямымъ.

Пусть ABC (черт. 85) какой-нибудь треугольникъ; требуется доказать, что сумма угловъ A, B и C равна $2d$.

Продолживъ сторону AC и проведя $CE \parallel AB$, найдемъ: $\angle A = \angle ECD$ (какъ углы соотвѣтственные при параллельныхъ), $\angle B = \angle BCE$ (какъ углы накрестъ лежащіе при параллельныхъ); слѣд. [illegible]

$$\angle A + \angle B + \angle C = \angle ECD + \angle BCE + \angle C = 2d \ (26,\ 1^\circ).$$

Слѣдствія. 1°. Всякій внѣшній уголъ треугольника равенъ суммѣ двухъ внутреннихъ угловъ, не смежныхъ съ нимъ (такъ, $\angle BCD = \angle A + \angle B$).



Черт. 85.

2°. Если два угла одного треугольника соотвѣтственно равны двумъ угламъ другого, то и третьи углы равны.

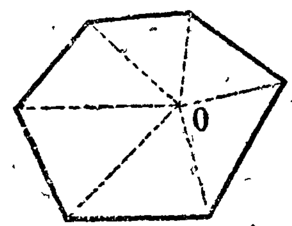
3°. Сумма двухъ острыхъ угловъ прямоугольнаго треугольника равна одному прямому углу.

4°. Въ равнобедренномъ прямоугольномъ тр-кѣ каждый острый уголъ равенъ $^1/_2\ d$.

5°. Въ равностороннемъ тр-кѣ каждый уголъ равенъ $^2/_3\ d$.

89. Теорема. Сумма угловъ всякаго выпуклаго многоугольника равна двумъ прямымъ, повторенным столько разъ, сколько въ многоугольникѣ сторонъ безъ двухъ.

Взявъ внутри многоугольника (черт. 86) произвольную точку O, соединимъ ее со всѣми вершинами. Тогда выпуклый многоугольникъ разобьется на столько тр-ковъ, сколько въ немъ сторонъ. Сумма угловъ каждаго тр-ка равна $2d$; слѣд., сумма угловъ всѣхъ тр-ковъ равна $2dn$, если n означаетъ число сторонъ многоугольника. Эта величина,



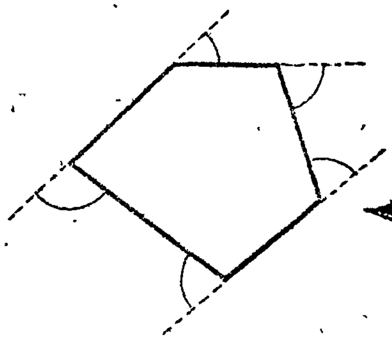
Черт. 86.

очевидно, превышаетъ сумму угловъ многоугольника на сумму всѣхъ тѣхъ угловъ, которые расположены вокругъ точки O; но эта сумма равна $4d$ (26, 2°); слѣд., сумма угловъ многоугольника равна

$$2dn - 4d = 2d\ (n - 2).$$

Слѣдствіе. **При данномъ числѣ сторонъ сумма угловъ выпуклаго многоугольника есть величина постоянная.** Такъ, сумма угловъ во всякомъ выпукломъ 4-угольникѣ равна $2d(4-2)=4d$; въ 5-угольникѣ $=2d(5-2)=6d$; въ 6-угольникѣ $=$ $=2d(6-2)=8d$; и т. д.

90. Теорема. Если изъ вершины каждаго угла выпуклаго многоугольника проведемъ продолженіе одной изъ сторонъ этого угла, то сумма образовавшихся при этомъ внѣшнихъ угловъ равна четыремъ прямымъ (независимо отъ числа сторонъ многоугольника).



Черт. 87.

Каждый изъ такихъ внѣшнихъ угловъ (черт. 87) составляетъ дополненіе до $2d$ къ смежному съ нимъ внутреннему углу многоугольника; слѣд., если къ суммѣ всѣхъ внутреннихъ угловъ приложимъ сумму всѣхъ внѣшнихъ угловъ, то получимъ $2dn$ (гдѣ n число сторонъ); но сумма внутреннихъ угловъ, какъ мы видѣли, равна $2dn-4d$; слѣд., сумма внѣшнихъ угловъ равна:

$$2dn-(2dn-4d)=2dn-2dn+4d=4d.$$

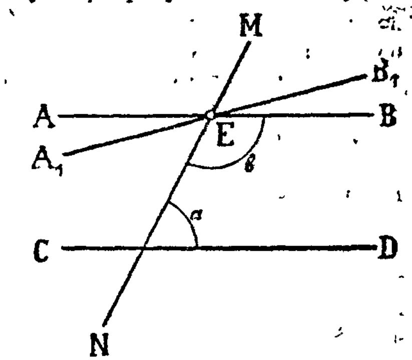
Слѣдствіе. Въ выпукломъ многоугольникѣ не можетъ быть болѣе 3-хъ внутреннихъ острыхъ угловъ. Дѣйствительно, если бы существовало 4 (или болѣе) внутреннихъ острыхъ угла, то тогда бы было 4 (или болѣе) тупыхъ внѣшнихъ угла, и потому сумма всѣхъ внѣшнихъ угловъ мн-ка была бы болѣе $4d$, что невозможно.

О постулатѣ параллельныхъ линій.

91. Легко показать, что такъ называемый 5-й постулатъ Эвклида (указанный въ § 83 этой книги) и постулатъ, принятый нами (§ 79) въ основаніе теоріи параллельныхъ линій (введенный впервые англійскимъ математикомъ Джономъ Плейферомъ въ 1795 г.) обратимы одинъ въ другой, т.-е. изъ постулата Плейфера можно вывести, какъ логическое слѣдствіе, постулатъ Эвклида (что и сдѣлано въ этой книгѣ, § 83) и, обратно, изъ этого постулата можно логически получить постулатъ Плейфера. Послѣднее можно выполнить, напр., такъ:

Пусть черезъ точку E (черт. 88), взятую внѣ прямой CD, проведены какія-нибудь 2 прямыя AB и A_1B_1; докажемъ, исходя изъ постулата Эвклида, что эти прямыя не могутъ быть обѣ параллельны одной и той же прямой CD.

Для этого проведемъ черезъ E какую-нибудь сѣкущую прямую MN; обозначимъ внутренніе односторонніе углы, образуемые этою сѣкущею съ прямыми CD и AB, буквами a и b. Тогда одно изъ двухъ: или сумма $a+b$ не равна $2d$, или она равна $2d$. Въ первомъ случаѣ, согласно постулату Эвклида, прямая AB должна пересѣчься съ CD и, слѣд., она не можетъ быть параллельной CD; во второмъ случаѣ сумма $a+B_1EN$ окажется не равной $2d$ (такъ какъ уголъ B_1EN не равенъ углу BEN); значитъ, тогда, согласно тому же постулату, прямая A_1B_1 должна пересѣчься съ CD и, слѣд., эта прямая не можетъ быть параллельной CD. Такимъ образомъ, одна изъ прямыхъ AB и A_1B_1 непремѣнно окажется непараллельной прямой CD; слѣд., черезъ одну точку нельзя провести двухъ различныхъ прямыхъ, параллельныхъ одной и той же прямой.



Черт. 88.

92. Существуетъ очень много и другихъ предложеній, также логически обратимыхъ съ постулатомъ Эвклида (и, слѣд., ему логически равносильныхъ). Укажемъ, напр., слѣдующія предложенія, которыя нѣкоторыми извѣстными геометрами ставились въ основаніе теоріи параллельныхъ линій:

Существуетъ по крайней мѣрѣ одинъ треугольникъ, у котораго сумма угловъ равна $2d$ (французскій математикъ Лежандръ, въ началѣ XIX столѣтія).

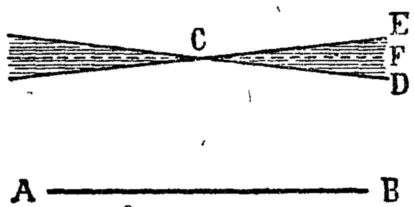
Существуетъ выпуклый четыреугольникъ (прямоугольникъ), у котораго всѣ четыре угла прямые (французскій математикъ Клодъ Клеро, XVIII столѣтіе).

Существуетъ треугольникъ, подобный, но не равный, другому треугольнику (итальянскій математикъ Саккери, начало XVIII столѣтія).

Черезъ всякую точку, взятую внутри угла, меньшаго $2d$, можно провести прямую, пересѣкающую обѣ стороны этого угла (нѣмецкій математикъ Лоренцъ, конецъ XVIII стол.); и другія.

Такъ какъ постулатъ Эвклида и всѣ другіе, равносильные ему, не обладаютъ качествомъ очевидности, то весьма многіе математики, начиная съ древнихъ временъ и до конца первой четверти XIX столѣтія, дѣлали неоднократныя попытки *доказать* постулатъ Эвклида (или какой-нибудь другой, ему равносильный), т.-е. вывести его, какъ логическое слѣдствіе, изъ другихъ аксіомъ геометріи. Всѣ эти попытки оказались однако неудачными: въ каждомъ изъ такихъ «доказательствъ», послѣ подробнаго разбора его, можно было всегда найти какую-нибудь логическую ошибку.

93. Постоянныя неудачи въ поискахъ доказательствъ Эвклидова постулата привели нѣкоторыхъ математиковъ къ мысли, что этотъ постулатъ (или ему равносильный) и не можетъ быть выведенъ изъ другихъ аксіомъ геометріи, а представляетъ собою независимое отъ нихъ самостоятельное допущеніе о свойствахъ пространства. Впервые эту мысль обстоятельно развилъ русскій математикъ, профессоръ Казанскаго университета, Н. И. *Лобачевскій* (1793—1856). Въ своемъ сочиненіи «Новыя начала геометріи», появившемся въ 1836—1838 годахъ, онъ обнародовалъ особую геометрію (названную потомъ *геометріей Лобачевскаго*), въ основаніе которой положены тѣ же геометрическія аксіомы, на которыхъ основана геометрія Эвклида, за исключеніемъ только его постулата параллельныхъ линій, вмѣсто котораго Лобачевскій взялъ слѣдующее допущеніе: *черезъ точку, лежащую внѣ данной прямой, можно провести безчисленное множество прямыхъ, не пересѣкающихся съ данной*; именно, онъ допустилъ, что если AB (черт. 89) есть прямая и C какая-нибудь точка внѣ ея, то при этой точкѣ существуетъ нѣкоторый уголъ DCE, обладающій тѣмъ свойствомъ, что всякая прямая, проведенная черезъ C внутри этого угла (напр., прямая CF), а также и обѣ стороны его не пересѣкаются съ AB, сколько бы ихъ ни продолжали, тогда какъ всякая прямая, проведенная черезъ C внѣ этого угла, пересѣкается съ AB. Понятно, что такое допущеніе отрицаетъ постулатъ Эвклида, такъ какъ при существованіи этого угла нельзя утверждать, что всякія 2 прямыя пересѣкаются, коль скоро онѣ съ сѣкущей образуютъ внутренніе односторонніе углы, которыхъ сумма не равна двумъ прямымъ угламъ. Несмотря однако на это отрицаніе, геометрія Лобачевскаго представляетъ собою такую же стройную систему геометрическихъ теоремъ, какъ и геометрія Эвклида (хотя, конечно, теоремы геометріи Лобачевскаго существенно отличаются отъ теоремъ геометріи Эвклида); въ ней, какъ и въ геометріи Эвклида не встрѣчается никакихъ логическихъ противорѣчій, ни теоремъ съ аксіомами, положенными въ основаніе этой геометріи, ни однѣхъ теоремъ съ другими теоремами. Между тѣмъ, если бы постулатъ Эвклида могъ быть доказанъ, т.-е. онъ если бы представлялъ собою нѣкоторое, хотя бы и очень отдаленное логическое слѣдствіе изъ другихъ геометрическихъ аксіомъ, то тогда *отрицаніе* этого постулата, положенное въ основу геометріи вмѣстѣ съ *принятіемъ* всѣхъ другихъ аксіомъ, непремѣнно привело бы къ логически противорѣчивымъ слѣдствіямъ. Отсутствіе такихъ противорѣчій въ геометріи Лобачевскаго служитъ указаніемъ на независимость 5-го постулата Эвклида отъ прочихъ геометрическихъ аксіомъ и, слѣд., на невозможность доказать его *).



Черт. 89.

94. Почти одновременно съ Лобачевскимъ, независимо отъ него, Венгерскій математикъ *Гоаннъ Больэ* (1802—1860) также построилъ новую геометрію, исходя изъ того же допущенія, какъ и Лобачевскій, что черезъ точку, взятую внѣ прямой, можно провести безчисленное множество параллельныхъ этой прямой.

Позже ихъ нѣмецкій математикъ *Риманъ* (1826—1866) показалъ возможность построенія еще особой, также лишенной противорѣчій, геометріи (названной потомъ *геометріей Римана*), въ которой вмѣсто постулата Эвклида принимается допущеніе, что *черезъ точку, взятую внѣ прямой, нельзя провести ни одной параллельной этой прямой* (другими словами, всѣ прямыя плоскости пересѣкаются).

Всѣ тѣ геометріи (какъ Лобачевскаго и Римана), въ которыхъ

---

*) Замѣтимъ, однако, что одно только отсутствіе противорѣчій въ геометріи Лобачевскаго еще не служитъ доказательствомъ независимости Эвклидова постулата отъ другихъ аксіомъ геометріи; вѣдь всегда можно возразить, что это отсутствіе противорѣчій есть только случайное явленіе, происходящее, быть можетъ, отъ того, что въ геометріи Лобачевскаго не сдѣлано еще достаточнаго количества выводовъ, что со временемъ, быть можетъ, и удастся кому-нибудь получить такой логическій выводъ въ этой геометріи, который окажется въ противорѣчіи съ какимъ-нибудь другимъ выводомъ той же геометріи. Подробная теорія этого вопроса (см. *Энциклопедія элем. математики Вебера и Вельштейна*, т. II, кн. 1, стр. 74 и др.) устанавливаетъ: 1) что если бы въ геометріи Лобачевскаго или въ какой-нибудь другой не-Эвклидовой геометріи оказалось противорѣчіе, то и въ Эвклидовой геометріи было бы соотвѣтствующее противорѣчіе; но 2) въ Эвклидовой геометріи противорѣчій быть не можетъ. Отсюда, конечно, необходимо слѣдуетъ, что постулатъ Эвклида не представляетъ собою слѣдствія другихъ аксіомъ и потому онъ недоказуемъ.

въ основаніе положено какое-нибудь допущеніе о параллельныхъ линіяхъ, не согласное съ постулатомъ Эвклида, носятъ общее названіе не-Эвклидовыхъ геометрій.

95. Приведемъ нѣкоторыя теоремы геометріи Лобачевскаго, рѣзко различающіяся отъ соотвѣтствующихъ теоремъ геометріи Эвклида.

Два перпендикуляра къ одной и той же прямой, по мѣрѣ удаленія отъ этой прямой, расходятся неограниченно.

Сумма угловъ треугольника меньше $2d$ (въ геометріи Римана она больше $2d$), при чемъ эта сумма не есть величина постоянная для разныхъ треугольниковъ.

Чѣмъ больше площадь треугольника, тѣмъ больше сумма его угловъ разнится отъ $2d$.

Если въ выпукломъ четыреугольникѣ 3 угла прямые, то 4-й уголъ острый (значитъ, въ этой геометріи прямоугольники невозможны).

Если углы одного тр-ка соотвѣтственно равны угламъ другого тр-ка, то такіе тр-ки равны (слѣд., въ геометріи Лобачевскаго не существуетъ подобія).

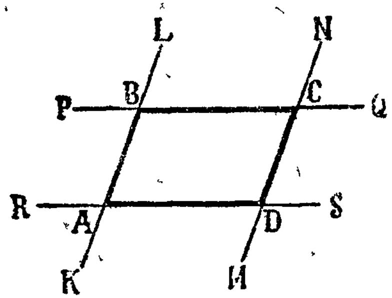
Геометрическое мѣсто точекъ плоскости, равностоящихъ отъ какой-нибудь прямой этой плоскости, есть нѣкоторая кривая линія.

ГЛАВА VII.

Параллелограммы и трапеціи.

I. Главнѣйшія свойства параллелограммовъ.

96. Опредѣленіе. Четыреугольникъ, у котораго противоположныя стороны попарно параллельны, наз. **параллелограммомъ**.



Черт. 90.

Такой четыреугольникъ ($ABCD$, черт. 90) получится, напр., если какія-нибудь двѣ параллельныя прямыя KL и MN пересѣчемъ двумя другими параллельными прямыми RS и PQ.

Замѣчаніе. Слово «параллелограммъ» мы часто для краткости будемъ писать такъ: пар-мъ.

97. Теоремы. Во всякомъ параллелограммѣ:

1°, противоположные углы равны;

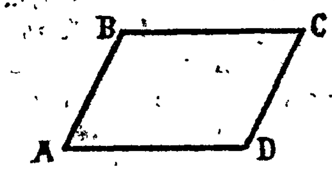
2°, сумма угловъ, прилежащихъ къ одной сторонѣ, равна двумъ прямымъ.

Пусть $ABCD$ (черт. 91) есть параллелограммъ, т.-е. $AB \parallel CD$ и $BC \parallel AD$; требуется доказать, что

1°, $\angle A = \angle C$ и $\angle B = \angle D$;

2°, $\angle A + \angle B = 2d$, $\angle B + \angle C = 2d$ и т. д.

1°. Углы A и C равны, потому что стороны этихъ угловъ соотвѣтственно параллельны и имѣютъ противоположное направленіе отъ вершины (85). То же самое можно сказать объ углахъ B и D.

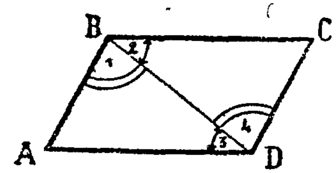


Черт. 91.

2°. Каждая изъ суммъ: $A+B$, $B+C$, $C+D$ и $D+A$ равна $2d$, потому что это суммы внутреннихъ одностороннихъ угловъ при параллельныхъ прямыхъ.

98. Теорема. Во всякомъ параллелограммѣ противоположныя стороны равны.

Пусть фигура $ABCD$ (черт. 92) есть параллелограммъ, т.-е. $AB \parallel CD$ и $BC \parallel AD$; требуется доказать, что $AB = CD$ и $BC = AD$.



Черт. 92.

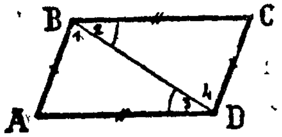
Проведя діагональ BD, мы получимъ два тр-ника ABD и BCD, которые равны, потому что у нихъ: BD общая сторона, $\angle 1 = \angle 4$ и $\angle 2 = \angle 3$ (какъ внутреннія накрестъ лежащія при параллельныхъ прямыхъ). Изъ равенства тр-ковъ слѣдуетъ: $AB = CD$ и $AD = BC$ (въ равныхъ тр-кахъ противъ равныхъ угловъ лежатъ равныя стороны).

Замѣчаніе. Теорему эту можно выразить еще и такъ: **отрѣзки параллельныхъ, заключенные между параллельными, равны.**

99. Обратныя теоремы. Если въ выпукломъ*) четыреугольникѣ:

1°, противоположныя стороны попарно равны,

или 2°, двѣ противоположныя стороны равны и параллельны, то такой четыреугольникъ есть параллелограммъ.

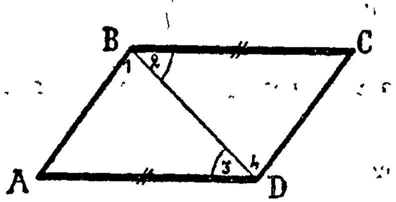


Черт. 93.

1°. Пусть фигура $ABCD$ (черт. 93) есть выпуклый четыреугольникъ, у котораго:

$$AB=CD \text{ и } BC=AD.$$

Требуется доказать, что эта фигура—параллелограммъ, т.-е. $AB \parallel CD$ и $BC \parallel AD$.—Проведя діагональ BD, мы получимъ два тр-ка, которые равны, такъ какъ у нихъ: BD общая сторона, $AB=CD$ и $BC=AD$ (по условію). Изъ равенства ихъ слѣдуетъ: $\angle 1=\angle 4$ и $\angle 2=\angle 3$ (въ равныхъ тр-кахъ противъ равныхъ сторонъ лежатъ равные углы); вслѣдствіе этого $AB \parallel CD$ и $BC \parallel AD$ (если внутренніе накрестъ лежащіе углы равны, то прямыя параллельны).

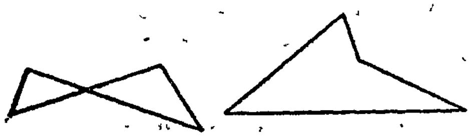


Черт. 94.

2°. Пусть въ четыреугольникѣ ($ABCD$, черт. 94) дано условіе: $BC=AD$ и $BC \parallel AD$. Требуется доказать, что $ABCD$ есть параллелограммъ, т.-е. что $AB \parallel CD$.—Треугольники ABD и BCD равны, потому что у нихъ: BD общая сторона, $BC=AD$ (по условію) и $\angle 2=\angle 3$ (какъ внутренніе накрестъ лежащіе углы при параллельныхъ BC и AD и сѣкущей BD). Изъ равенства тр-ковъ слѣдуетъ: $\angle 1=\angle 4$; поэтому $AB \parallel CD$.

---

*) Четыреугольникъ, какъ и всякій многоугольникъ (35), наз. **выпуклымъ**, если онъ ограниченъ такою ломаною линіей,

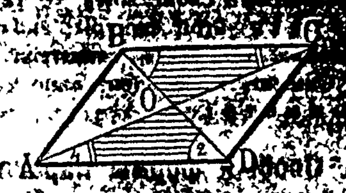


Черт. 96.

которая вся расположена по одну сторону отъ каждаго изъ составляющихъ ее отрѣзковъ. Четыреугольники могутъ быть и невыпуклые, какъ, напр., тѣ, которые изображены на черт. 96-мъ.

100. Теорема. Во всякомъ параллелограммѣ діагонали дѣлятся пополамъ.

Пусть $ABCD$ (черт. 95) есть параллелограммъ, а AC и BD его діагонали; требуется доказать, что $BO=OD$ и $AO=OC$.



Черт. 95.

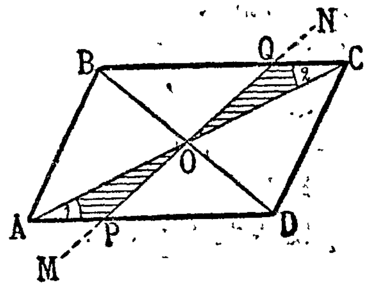
Тр-ки BOC и AOD (покрытые на чертежѣ штрихами) равны, потому что у нихъ: $BC=AD$ (какъ противоположныя стороны параллелограмма), $\angle 1=\angle 2$ и $\angle 3=\angle 4$ (какъ внутренніе накрестъ лежащіе углы при параллельныхъ прямыхъ). Изъ равенства тр-ковъ слѣдуетъ: $OC=OA$ и $OB=OD$.

101. Обратная теорема. Всякій четыреугольникъ, діагонали котораго дѣлятся пополамъ, есть параллелограммъ.

Пусть фигура $ABCD$ (черт. 95) есть четыреугольникъ, у котораго: $AO=OC$ и $BO=OD$; требуется доказать, что эта фигура—параллелограммъ.

$\triangle AOD=\triangle BOC$, такъ какъ эти тр-ки имѣютъ по равному углу (при вершинѣ O), заключенному между соотвѣтственно равными сторонами. Изъ ихъ равенства слѣдуетъ: $\angle 1=\angle 2$ и $\angle 3=\angle 4$ (въ равныхъ тр-кахъ противъ равныхъ сторонъ лежатъ равные углы); но если внутренніе накрестъ лежащіе углы равны, то прямыя параллельны (76); поэтому $AD \parallel BC$. Такъ какъ изъ равенства тѣхъ же тр-ковъ слѣдуетъ еще, что $AD=BC$, то фигура $ABCD$ есть параллелограммъ (99, 2°).

102. Центръ симметріи. Полезно замѣтить еще слѣдующее свойство параллелограмма: **если черезъ точку пересѣченія діагоналей параллелограмма** (черезъ точку O, черт. 97) **проведемъ какую-нибудь прямую** (MN), **то эта прямая пересѣчетъ контуръ параллелограмма въ двухъ точкахъ** (P и Q), **симметричныхъ относительно точки пересѣченія діагоналей**, т.-е. въ 2-хъ такихъ точкахъ, которыя, во 1, лежатъ по разныя стороны отъ точки O и, во 2, на



Черт. 97.

равныхъ разстояніяхъ отъ этой точки. Дѣйствительно, тр-ки OAP и OCQ равны, такъ какъ у нихъ: $AO=OC$ (по свойству діагоналей параллелограмма), углы при общей вершинѣ O равны (какъ вертикальные) и $\angle 1 = \angle 2$ (какъ углы внутренніе накрестъ лежащіе при параллельныхъ). Изъ равенства этихъ тр-ковъ слѣдуетъ: $OP = OQ$.

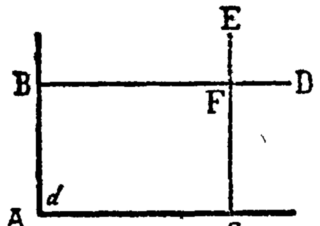
Если въ какой-нибудь фигурѣ существуетъ точка, обладающая указаннымъ свойствомъ, то такая точка наз. **ц е н т р о м ъ с и м м е т р і и** этой фигуры; **значитъ, въ параллелограммѣ пересѣченіе его діагоналей есть центръ симметріи.**

Симметрія относительно центра наз. **ц е н т р а л ь н о й с и м м е т р і е й.**

2. Особыя формы параллелограммовъ: прямоугольникъ, ромбъ и квадратъ.

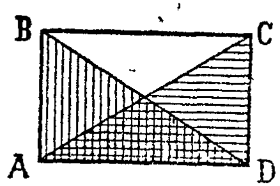
103. Опредѣленіе. Параллелограммъ, у котораго всѣ углы прямые, наз. **п р я м о у г о л ь н и к о м ъ.**

Такой параллелограммъ можно, напр., получить, если на сторонахъ прямого угла A (черт. 98) отъ его вершины отложимъ произвольной длины отрѣзки AB и AC и черезъ точки B и C проведемъ прямыя BD и CE, параллельныя сторонамъ прямого угла. Прямая BD, пересѣкаясь въ точкѣ B съ прямой AB, должна пересѣчься и съ прямой CE, параллельной AB (80, 1°) въ нѣкоторой точкѣ F. Мы получимъ такимъ образомъ параллелограммъ $ABFC$, у котораго одинъ уголъ, именно A, есть прямой по построенію; но въ такомъ случаѣ, по свойству угловъ параллелограмма (97), и всѣ остальные углы его должны быть прямые, такъ какъ уголъ при вершинѣ F равенъ A, а углы при B и C дополняютъ A до $2d$.



Черт. 98.

104. Теорема. Во всякомъ прямоугольникѣ діагонали равны.



Черт. 99.

Пусть фигура $ABCD$ (черт. 99) есть прямоугольникъ; требуется доказать, что $AC = BD$.

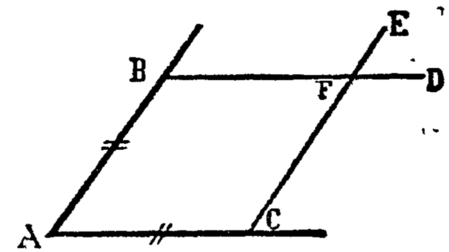
Прямоугольные тр-ки ACD и ABD равны, потому что у нихъ: AD общій катетъ и $AB = CD$ (какъ противоположныя стороны параллелограмма). Изъ равенства тр-ковъ слѣдуетъ: $AC = BD$

105. Обратная теорема. Всякій параллелограммъ, у котораго діагонали равны, есть прямоугольникъ.

Пусть фигура $ABCD$ (черт. 99) есть параллелограммъ, у котораго $AC = BD$; требуется доказать, что эта фигура—прямоугольникъ. Тр-ки ABD и ACD равны, такъ какъ у нихъ AD общая сторона, $AC = BD$ (по условію) и $AB = CD$ (по свойству противоположныхъ сторонъ параллелограмма). Изъ ихъ равенства слѣдуетъ: $\angle BAD = \angle ADC$. Но сумма этихъ 2-хъ угловъ равна $2d$ (по свойству угловъ параллелограмма); слѣд. каждый изъ нихъ есть d. Но тогда и углы B и C должны быть прямые, и потому фигура $ABCD$ есть прямоугольникъ.

106. Опредѣленіе. Параллелограммъ, у котораго всѣ стороны равны, наз. **р о м б о м ъ.**

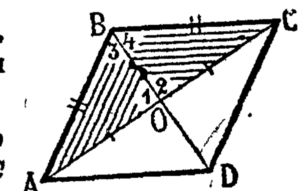
Такой пар-мъ можно получить, если на сторонахъ произвольнаго угла A (черт. 100) отъ его вершины отложимъ равные отрѣзки AB и AC и черезъ точки B и C проведемъ прямыя BD и CE, параллельныя сторонамъ угла A. Эти прямыя должны пересѣчься между собою (80,1°) въ нѣкоторой точкѣ F. Мы получимъ такимъ образомъ пар—мъ, у котораго двѣ



Черт. 100.

смежныя стороны AB и AC равны по построенію. Но тогда, по свойству сторонъ пар—ма (98), у него всѣ 4 стороны окажутся равными, такъ какъ $BF = AC$ и $CF = AB$.

107. Теорема. Во всякомъ ромбѣ діагонали взаимно перпендикулярны.



Черт. 101.

Пусть $ABCD$ (черт. 101) есть ромбъ, а AC и BD его діагонали; требуется доказать, что $AC \perp BD$.

Тр-ки ABO и BOC равны, потому что у нихъ: BO общая сторона, $AB = BC$ (такъ какъ у ромба всѣ стороны равны) и $AO = OC$ (такъ какъ діагонали всякаго параллелограмма дѣлятся пополамъ). Изъ равенства тр-ковъ слѣдуетъ:

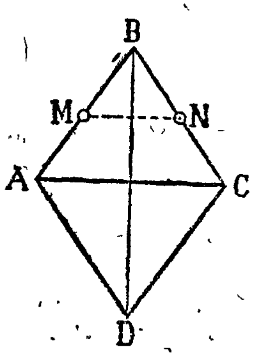
$$\angle 1 = \angle 2, \text{ т.-е. } BD \perp AC.$$

Замѣчаніе. Изъ равенства тѣхъ же тр-ковъ слѣдуетъ, что $\angle 3 = \angle 4$, т.-е., что уголъ B дѣлится діагональю пополамъ. Изъ равенства тр-ковъ BOC и COD (которое доказывается такъ же, какъ и равенство тр-ковъ ABO и BOC) слѣдуетъ, что уголъ C дѣлится діагональю пополамъ и т. д. Значитъ, **діагонали ромба дѣлятъ его углы пополамъ.**

108. Обратная теорема. Всякій параллелограммъ, у котораго діагонали взаимно перпендикулярны, есть ромбъ.

Пусть фигура $ABCD$ (черт. 101) есть параллелограммъ, у котораго діагонали AC и BD перпендикулярны; требуется доказать, что эта фигура есть ромбъ, т.-е. что $AB=BC=CD=DA$. Тр-ки AOB и BOC прямоугольные (по условію); у нихъ катетъ OB общій и катеты AO и OC равны (такъ какъ діагонали всякаго параллелограмма дѣлятся пополамъ). Значитъ, эти тр-ки равны, и потому равны ихъ гипотенузы AB и BC. Но $AB=CD$ и $BC=AD$ (по свойству противоположныхъ сторонъ пар-ма); слѣд., $AB=BC=CD=DA$, т.-е. фигура $ABCD$ есть ромбъ.

109. Оси симметріи ромба. Полезно замѣтить еще слѣдующее свойство: **каждая діагональ ромба есть его ось симметріи.**



Черт. 102.

Такъ, діагональ BD (черт. 102) есть ось симметріи ромба $ABCD$, потому что, вращая $\triangle ABD$ вокругъ BD, мы можемъ совмѣстить его съ $\triangle BCD$; вслѣдствіе этого любой точкѣ M, взятой на одной половинѣ контура ромба, соотвѣтствуетъ точка N на другой половинѣ контура, симметричная относительно діагонали BD (33). То же самое можно сказать о діагонали AC.

110. Опредѣленіе. Параллелограммъ, у котораго всѣ стороны равны и всѣ углы прямые, наз. **квадратомъ**.

Такой пар—мъ можно получить, если при построеніи прямоугольника (103) мы возьмемъ отрѣзки AB и AC равными, или если при построеніи ромба (106) возьмемъ уголъ A прямой.

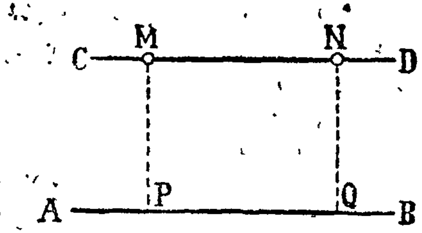
Такъ какъ **квадратъ есть параллелограммъ, прямоугольникъ и ромбъ**, то онъ соединяетъ въ

себѣ всѣ свойства этихъ фигуръ; напр., относительно діагоналей квадрата можно сказать, что онѣ: 1) дѣлятся пополамъ, 2) равны между собою, 3) взаимно перпендикулярны и 4) дѣлятъ углы квадрата пополамъ.

3. Нѣкоторыя теоремы, основанныя на свойствахъ параллелограмма.

111. Теорема. Параллельныя прямыя (AB и CD, черт. 103) вездѣ одинаково удалены одна отъ другой; точнѣе сказать: всѣ точки одной параллельной одинаково удалены отъ другой параллельной.

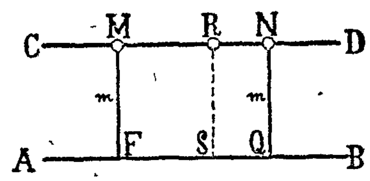
Дѣйствительно, если изъ какихъ-нибудь двухъ точекъ M и N прямой CD опустимъ на AB перпендикуляры MP и NQ, то эти перпендикуляры параллельны (74), и потому фигура $MNQP$ параллелограммъ; отсюда слѣдуетъ (98), что $MP=NQ$, т.-е. точки M и N одинаково удалены отъ прямой AB.



Черт. 103.

112. Теорема. Геометрическое мѣсто точекъ, удаленныхъ отъ данной прямой на одно и то же разстояніе и находящихся по одну сторону отъ нея, есть прямая, параллельная данной.

Пусть M и N (черт. 104) будутъ какія-нибудь двѣ точки, находящіяся по одну сторону отъ прямой AB и удаленныя отъ нея на одно и то же разстояніе m; тогда перпендикуляры MF и NQ, опущенные изъ этихъ точекъ на AB, равны m. Проведемъ черезъ M и N прямую CD. Такъ какъ $MF=NQ$ и сверхъ того $MF \parallel NQ$ (74), то фигура $MNQF$ есть параллелограммъ (99, 2°); слѣд., $CD \parallel AB$. Мы видимъ такимъ образомъ, что всякія 2 точки (какъ M и N), которыя удалены отъ прямой AB



Черт. 104.

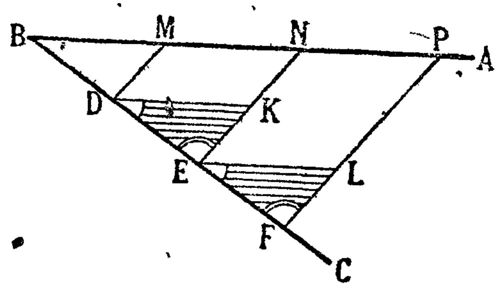
на разстояніе m и расположены по одну сторону отъ этой прямой, лежатъ на прямой, параллельной AB и удаленной отъ AB на разстояніе m. Такъ какъ такая прямая можетъ быть только одна (по одну сторону отъ AB), именно CD, то мы должны заключить, что в с ѣ т о ч к и, удаленныя отъ AB на одно и то же разстояніе m и расположенныя по одну сторону отъ нея, лежатъ на прямой CD, параллельной AB. Обратно, всякая точка R, взятая на этой прямой, отстоитъ отъ AB на столько же, какъ и точки M и N, т.-е. на данное разстояніе m (111).

113. Теорема. **Если на одной сторонѣ угла отложимъ какіе-нибудь равные между собою отрѣзки и черезъ ихъ концы проведемъ параллельныя прямыя до пересѣченія съ другой стороной угла, то и на этой сторонѣ отложатся равные между собою отрѣзки.**

Пусть ABC (черт. 105) какой-нибудь уголъ и на его сторонѣ BC отложены равные отрѣзки $BD=DE=EF$... Проведемъ черезъ точки D, E, F... параллельныя прямыя DM, EN, FP... до пересѣченія съ AB; требуется доказать, что

$$BM=MN=NP...$$

Возьмемъ какіе-нибудь два изъ этихъ отрѣзковъ, напр., MN и NP, и докажемъ, что они равны.

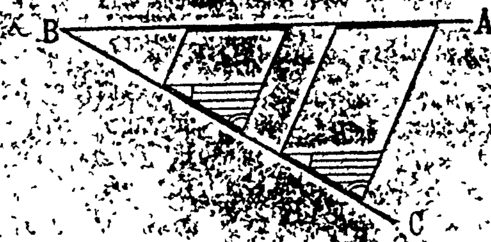


Черт. 105.

Для этого проведемъ прямыя DK и EL, параллельныя AB. Полученные при этомъ тр-ки DKE и ELF равны, такъ какъ у нихъ: $DE=EF$ (по условію), $\angle KDE = \angle LEF$ и $\angle KED = \angle LFE$ (какъ углы соотвѣтственные при параллельныхъ прямыхъ). Изъ равенства этихъ тр-ковъ слѣдуетъ: $DK=EL$. Но $DK=MN$ и $EL=NP$ (какъ противоположныя стороны параллелограммовъ); значитъ, $MN=NP$.

Такъ же докажемъ равенство и другихъ отрѣзковъ стороны AB (для отрѣзка BM мы должны взять тр-къ BMD).

Замѣчаніе. Теорема не требуетъ, чтобы равные отрѣзки откладывались на сторонѣ угла непремѣнно отъ его вершины; они могутъ быть отложены отъ произвольной точки стороны и даже могутъ раздѣляться какими-нибудь промежутками (черт. 106).

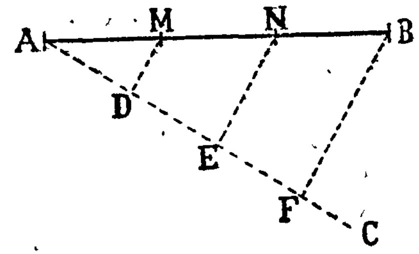


Черт. 106.

114. Задача. Д а н н ы й о т р ѣ з о к ъ п р я м о й р а з д ѣ л и т ь н а m р а в н ы х ъ ч а с т е й.

Эта задача рѣшается на основаніи предыдущей теоремы.

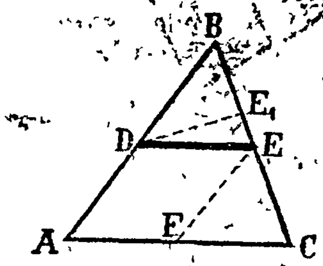
Пусть AB (черт. 107) данный отрѣзокъ прямой, который требуется раздѣлить, положимъ, на 3 равныя части. Изъ конца его A проводимъ прямую AC, образующую съ AB какой-нибудь уголъ; откладываемъ на AC отъ точки A три произвольной длины, но равные между собою, отрѣзка: AD, DE и EF; точку F соединяемъ съ B; наконецъ, изъ E и D проводимъ прямыя EN и DM, параллельныя FB. Тогда отрѣзокъ AB, по доказанному, раздѣлится въ точкахъ M и N на три равныя части.



Черт. 107.

115. Теорема. **Прямая, соединяющая середины двухъ сторонъ треугольника, параллельна третьей его сторонѣ и равна ея половинѣ.**

Пусть DE (черт. 108) есть прямая, соединяющая середины двухъ сторонъ треугольника ABC. Докажемъ сначала, что $DE \parallel AC$. Предположимъ противное, т.-е. что прямая DE не параллельна AC. Проведемъ черезъ точку D прямую параллельную AC (77). Эта прямая, при нашемъ предположеніи, не можетъ быть DE; пусть это будетъ нѣкоторая прямая DE_1. Такъ какъ на сторонѣ BA угла B отложены равные отрѣзки BD и DA, и изъ ихъ концовъ проведены къ другой сторонѣ угла B параллельныя прямыя DE_1 и AC, то на сторонѣ BC должны получиться равные отрѣзки (113); значитъ, $BE_1=E_1C$, и потому точка E_1 должна быть серединой стороны BC. Мы приходимъ, такимъ образомъ, къ нелѣпому заключенію, что сторона BC имѣетъ 2 середины: точку E по условію и, то [illegible] E_1 согласно нашему выводу. Нелѣпость этого заключенія заставляетъ насъ отбросить сдѣланное допущеніе, что DE не параллельна AC; значитъ, $DE \parallel AC$.



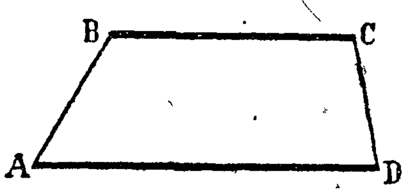
Черт. 108.

Остается доказать, что $DE={}^1/_2AC$. Для этого изъ E проведемъ $EF \parallel DA$; тогда фигура $EDAF$ будетъ параллелограммъ и, слѣд., $DE=AF$. Такъ какъ на сторонѣ CB угла C отложены равные отрѣзки ($CE=EB$) и изъ точекъ, разграничивающихъ эти отрѣзки, проведены къ другой сторонѣ параллельныя прямыя EF и BA, то $CF=FA$; слѣд., $DE={}^1/_2AC$.

4. Опредѣленіе и свойство трапеціи.

116. Опредѣленіе. Выпуклый четыреугольникъ, у котораго какія-нибудь двѣ противоположныя стороны параллельны, наз. **трапеціей.**

Такой четыреугольникъ можно получить, если между двумя параллельными прямыми BC и AD (черт. 109) проведемъ двѣ какія-нибудь сѣкущія прямыя AB и CD.



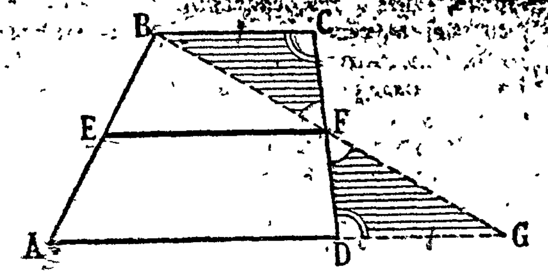
Черт. 109.

Параллельныя стороны трапеціи наз. ея основаніями, непараллельныя—боками.

117. Теорема. Прямая, соединяющая середины боковъ трапеціи, параллельна основаніямъ трапеціи и равна полусуммѣ ихъ.

Пусть прямая EF (черт. 110) соединяетъ середины боковыхъ сторонъ трапеціи $ABCD$; требуется доказать, что

$EF \parallel AD$ (и, слѣд., $EF \parallel BC$) и, кромѣ того, что $EF={}^1/_2(AD+BC)$.—Черезъ точки B и F проведемъ прямую до пересѣченія съ продолженіемъ стороны AD въ нѣкоторой точкѣ G. Тогда получимъ два тр-ка BCF и DFG, которые равны, такъ какъ у нихъ: $CF=FD$ (по условію), $\angle BFC=\angle DFG$ (какъ углы вертикальные) и $\angle BCF=\angle FDG$ (какъ углы внутренніе накрестъ лежащіе при параллельныхъ прямыхъ). Изъ равенства тр-ковъ слѣдуетъ: $BF=FG$ и $BC=DG$. Теперь видимъ, что въ $\triangle ABG$ прямая EF соединяетъ середины двухъ сторонъ; значитъ (115), $EF \parallel AG$ и $EF={}^1/_2(AD+DG)$; другими словами, $EF \parallel AD$ и $EF={}^1/_2(AD+BC)$.



Черт. 110.

Замѣчаніе. Прямая, соединяющая середины боковъ трапеціи, наз. ея **среднею линіей**.

УПРАЖНЕНІЯ.

Доказать теоремы:

37. Соединивъ послѣдовательно середины сторонъ какого-нибудь четыреугольника, получимъ параллелограммъ (рѣшается на основаніи § 115).

38. Въ прямоугольномъ $\triangle$ медіана, проведенная къ гипотенузѣ, равна ея половинѣ. (Указаніе: слѣдуетъ продолжить медіану на равное разстояніе).

39. Обратно: если медіана равна половинѣ стороны, къ которой она проведена, то тр-никъ прямоугольный.

40. Въ прямоугольномъ $\triangle$ медіана и высота, проведенныя къ гипотенузѣ, образуютъ уголъ, равный разности острыхъ угловъ $\triangle$.

41. Если въ прямоугольномъ $\triangle$ одинъ острый уголъ равенъ $^1/_3\ d$, то противолежащій ему катетъ составляетъ половину гипотенузы.

42. Обратно: если катетъ вдвое меньше гипотенузы, то противолежащій ему острый уголъ равенъ $^1/_3\ d$.

43. Внутри даннаго угла построенъ другой уголъ, стороны котораго параллельны сторонамъ даннаго и равноотстоятъ отъ нихъ.

Доказать что биссектриса внутренняго угла лежитъ на биссектрисѣ внѣшняго...

44. Всякая прямая, проведенная внутри трапеціи между ея основаніями, дѣлится среднею линіей пополамъ.

45. Въ тр-кѣ черезъ точку пересѣченія биссектрисъ угловъ, прилежащихъ къ основанію, проведена прямая параллельно основанію. Доказать, что эта прямая равна суммѣ отрѣзковъ боковыхъ сторонъ, считая отъ основанія.

46. Черезъ вершины угловъ △ проведены прямыя, параллельныя противоположнымъ сторонамъ. Образованный ими △ въ 4 раза болѣе даннаго; каждая сторона его въ 2 раза болѣе соотвѣтствующей стороны даннаго △.

47. Въ равнобедренномъ △ сумма разстояній каждой точки основанія отъ боковыхъ сторонъ есть величина постоянная, а именно она равна высотѣ, опущенной на боковую сторону.

48. Какъ измѣнится эта теорема, если взять точку на продолженіи основанія?

48,*a*. Въ равностороннемъ △ сумма разстояній всякой точки взятой внутри этого △, до сторонъ его есть величина постоянная, равная высотѣ △.

49. Данъ квадратъ $ABCD$. На сторонахъ его отложены **р а в н ы я** части: AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1. Точки A_1, B_1, C_1, D_1 соединены послѣдовательно прямыми. Доказать, что $A_1B_1C_1D_1$ есть квадратъ.

49,*a*. Если середины сторонъ какого угодно четыреугольника взять за вершины новаго четыреугольника, то (упр. 37) послѣдній есть параллелограммъ. Опредѣлить, при какихъ условіяхъ этотъ пар-мъ будетъ: 1) прямоугольникомъ, 2) ромбомъ, 3) квадратомъ (рѣшается на основаніи § 115).

Найти геометрическія мѣста:

50.—серединъ всѣхъ прямыхъ, проведенныхъ изъ данной точки къ различнымъ точкамъ данной прямой.

51.—точекъ, равноотстоящихъ отъ двухъ параллельныхъ прямыхъ.

52.—вершинъ тр-ковъ, имѣющихъ общее основаніе и равныя высоты

Задачи на построеніе.

53. Даны два угла △; построить третій.

54. Данъ острый уголъ прямоугольнаго △; построить другой острый уголъ.

55. Провести прямую, параллельную данной прямой и находящуюся отъ нея на данномъ разстояніи.

56. Раздѣлить пополамъ уголъ, вершина котораго не помѣщается на чертежѣ (см. упражн. 43).

57. Черезъ данную точку провести прямую подъ даннымъ угломъ къ данной прямой.

58. Черезъ данную точку провести прямую такъ, чтобы отрѣзокъ ея, заключенный между двумя данными параллельными прямыми, равнялся данной длинѣ.

59. Между сторонами даннаго остраго угла помѣстить прямую данной длины такъ, чтобы она была перпендикулярна къ одной сторонѣ угла.

60. Между сторонами даннаго угла помѣстить прямую данной длины такъ, чтобы она отсѣкала отъ сторонъ угла равныя части.

61. Построить прямоугольный △ по даннымъ острому углу и противолежащему катету.

62. Построить △ по двумъ угламъ и сторонѣ, лежащей противъ одного изъ нихъ.

63. **П о с т р о и т ь р а в н о б е д р е н н ы й** △ по углу при вершинѣ и основанію.

64. То же—по углу при основаніи и высотѣ, опущенной на боковую сторону.

65. То же—по боковой сторонѣ и высотѣ, опущенной на нее.

66. Построить равносторонній △ по его высотѣ.

67. Раздѣлить прямой уголъ на 3 равныя части (другими словами: построить уголъ, равный $^1/_3 d$).

68. **П о с т р о и т ь** △ по основанію, высотѣ и боковой сторонѣ.

69. То же—по основанію, высотѣ и углу при основаніи.

70. То же—по углу и двумъ высотамъ, опущеннымъ на стороны этого угла.

71. То же—по сторонѣ, суммѣ двухъ другихъ сторонъ и высотѣ, опущенной на одну изъ этихъ сторонъ.

72. То же—по двумъ угламъ и периметру.

73. То же—по высотѣ, периметру и углу при основаніи.

74. Провести въ △ прямую, параллельную основанію, такъ, чтобы она была равна суммѣ отрѣзковъ боковыхъ сторонъ, считая отъ основанія.

75. Провести въ △ прямую, параллельную основанію, такъ, чтобы верхній отрѣзокъ одной боковой стороны равнялся нижнему отрѣзку другой боковой стороны.

76. Построить многоугольникъ, равный данному (**у к а з а н і е**: діагоналями разбиваютъ данный мн-къ на тр-ки).

77. **П о с т р о и т ь ч е т ы р е у г о л ь н и к ъ** по тремъ его угламъ и двумъ сторонамъ, образующимъ четвертый уголъ (**у к а з а н і е**: надо найти 4-й уголъ).

78. То же—по тремъ сторонамъ и двумъ діагоналямъ.

79. **П о с т р о и т ь п а р а л л е л о г р а м м ъ** по двумъ неравнымъ сторонамъ и одной діагонали.

80. То же—по сторонѣ и двумъ діагоналямъ.

81. То же—по двумъ діагоналямъ и углу между ними.

82. То же—по основанію, высотѣ и діагонали.

83. Построить прямоугольникъ по діагонали и углу между діагоналями.

84. Построить ромбъ по сторонѣ и діагонали.

85. То же—по двумъ діагоналямъ.

86. То же—по высотѣ и діагонали.

87. То же—по углу и діагонали, проходящей черезъ этотъ уголъ.

88. То же—по діагонали и противолежащему углу.

89. То же—по суммѣ діагоналей и углу, образованному діагональю со стороною.

90. Построить квадратъ по данной діагонали.

91. Построить трапецію по основанію, прилежащему къ нему углу и двумъ непараллельнымъ сторонамъ (могутъ быть два рѣшенія, одно и ни одного).

92. То же—по разности основаній, двумъ боковымъ сторонамъ и одной діагонали.

92,*a*. То же—по четыремъ сторонамъ (всегда ли задача возможна?).

93. То же—по основанію, высотѣ и двумъ діагоналямъ (условіе возможности).

94. То же—по двумъ основаніямъ и двумъ діагоналямъ (условіе возможности).

95. Построить квадратъ по суммѣ стороны съ діагональю.

96. То же—по разности діагонали и стороны.

97. Построить параллелограммъ по двумъ діагоналямъ и высотѣ.

98. То же—по сторонѣ, суммѣ діагоналей и углу между ними.

99. Построить $\triangle$ по двумъ сторонамъ и медіанѣ, проведенной къ третьей сторонѣ.

100. То же—по основанію, высотѣ и медіанѣ, проведенной къ боковой сторонѣ.

100,*a*. Построить прямоугольный $\triangle$ по гипотенузѣ и суммѣ катетовъ (изслѣдовать).

100,*b*. То же — по гипотенузѣ и разности катетовъ.

КНИГА II.

ОКРУЖНОСТЬ.

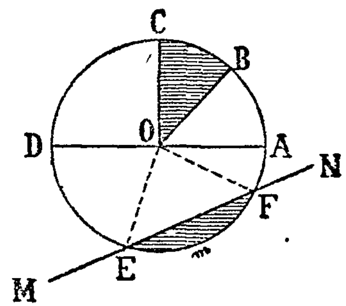
ГЛАВА I.

Форма и положеніе окружности.

118. Опредѣленія. 1°. Замкнутая плоская линія (черт. 111), всѣ точки которой одинаково удалены отъ одной и той же точки (O), наз. окружностью.

Эта точка (O) наз. центромъ окружности.

Прямыя (OA, OB, OC...), соединяющія центръ съ точками окружности, называются радіусами.



Черт. 111.

Безконечная прямая (MN), проходящая черезъ какія-нибудь двѣ точки окружности, называется сѣкущею.

Отрѣзокъ прямой (EF), соединяющій двѣ какія-нибудь точки окружности, наз. хордою.

Всякая хорда (AD), проходящая черезъ центръ, наз. діаметромъ.

Какая-нибудь часть окружности (напр., EmF) наз. дугою.

О хордѣ (EF), соединяющей концы какой-нибудь дуги, говорятъ, что она стягиваетъ эту дугу.

Дуга обозначается иногда знакомъ $\smile$; напр., пишутъ такъ: $\smile EmF$.

Изъ этихъ опредѣленій слѣдуетъ:

всѣ радіусы одной окружности равны между собою;

всякій діаметръ равенъ суммѣ двухъ радіусовъ, и потому всѣ діаметры одной окружности равны между собою.

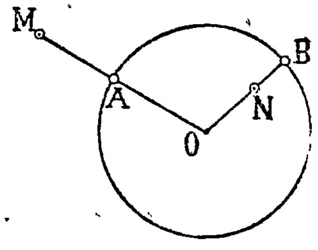
2°. Часть плоскости, ограниченная окружностью, наз. кругомъ[1]).

Часть круга (напр., часть COB, покрытая на чертежѣ штрихами), ограниченная дугою и двумя радіусами, проведенными къ концамъ дуги, наз. секторомъ.

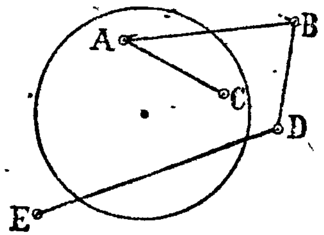
Часть круга (напр., часть EmF), ограниченная дугою и стягивающею ее хордою, наз. сегментомъ.

119. Точки внутри круга и точки внѣ его. Окружность раздѣляетъ всѣ точки плоскости, на которой она проведена, на 3 слѣдующія области:

1) точки, которыхъ разстоянія отъ центра больше радіуса; такова, напр., точка M (черт. 112), для которой разстояніе OM болѣе радіуса OA;



Черт. 112.



Черт. 113.

2) точки, которыхъ разстоянія отъ центра равны радіусу (точки $A, B, \ldots$, черт. 112);

3) точки, которыхъ разстоянія отъ центра меньше радіуса: такова, напр., точка N (черт. 112), для которой разстояніе ON меньше радіуса OB.

Точки первой области лежатъ внѣ круга, точки второй области лежатъ на окружности и точки третьей области расположены внутри круга.

[1]) Впрочемъ, слово «кругъ» не имѣетъ у насъ прочно установившагося смысла: этимъ словомъ часто называютъ и то, что мы назвали выше «окружностью».

Слѣдующія предложенія мы принимаемъ безъ доказательства, какъ очевидныя:

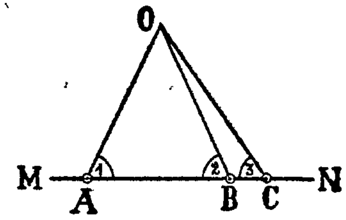
1) отрѣзокъ прямой, соединяющій (черт. 113) какую-нибудь внутреннюю точку A съ какою-нибудь внѣшнею точкою B, пересѣкается съ окружностью, и притомъ въ одной точкѣ;

2) отрѣзокъ прямой, соединяющій любыя 2 внутреннія точки A и C (черт. 113), не пересѣкается съ окружностью;

3) отрѣзокъ прямой, соединяющій 2 внѣшнія точки, иногда не пересѣкается (BD), иногда пересѣкается (DE) съ окружностью.

120. Теорема. Прямая и окружность не могутъ имѣть болѣе двухъ общихъ точекъ.

Для доказательства предположимъ, что прямая MN (черт. 114) имѣетъ съ окружностью, которой центръ находится въ точкѣ O, три общія точки A, B и C. Тогда прямыя OA, OB, OC должны быть равны между собою, какъ радіусы, вслѣдствіе чего тр-ки OAB и OAC будутъ равнобедренные, и,



Черт. 114.

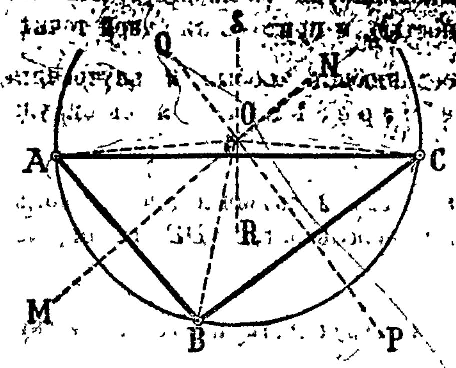
слѣд., $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 1 = \angle 3$; откуда: $\angle 2 = \angle 3$; но это невозможно, такъ какъ $\angle 2$, будучи внѣшнимъ по отношенію къ тр-нику OBC, больше внутренняго, не смежнаго съ нимъ, угла 3 (45).

121. Слѣдствіе. Никакая часть окружности не можетъ совмѣститься съ прямой, потому что въ противномъ случаѣ окружность съ прямою имѣла бы болѣе двухъ общихъ точекъ.

Линія, которой никакая часть не можетъ совмѣститься съ прямой, наз. кривою линіей. Значитъ, окружность есть кривая линія.

122. Теорема. Черезъ три точки, не лежащія на одной прямой, можно провести окружность и притомъ только одну.

Черезъ три точки A, B и C (черт. 115), не лежащія на одной прямой, только тогда можно провести окружность, если существуетъ такая четвертая точка O, которая одинаково удалена отъ точекъ A, B и C. Докажемъ, что такая точка существуетъ [illegible] и притомъ только одна. [illegible] Для этого примемъ во вниманіе, что всякая точка, одинаково удаленная отъ точекъ A и B, должна лежать на перпендикулярѣ MN, проведенномъ къ сторонѣ AB черезъ ея середину (63); точно также всякая точка, одинаково удаленная отъ точекъ B и C, должна лежать на перпендикулярѣ PQ, проведенномъ къ сторонѣ BC черезъ ея середину. Значитъ, если существуетъ точка, одинаково удаленная отъ трехъ точекъ A, B, и C, то она должна лежать заразъ и на MN, и на PQ, что возможно только тогда, когда она совпадаетъ съ точкой пересѣченія этихъ двухъ прямыхъ. Прямыя MN и PQ всегда пересѣкаются (83, 2°), такъ какъ онѣ перпендикулярны къ пересѣкающимся прямымъ AB и BC. Точка O ихъ пересѣченія и будетъ точкой, одинаково удаленной отъ A, отъ B и отъ C; значитъ, если примемъ эту точку за центръ, а за радіусъ возьмемъ разстояніе OA (или OB, или OC), то окружность пройдетъ черезъ точки A, B и C. Такъ какъ прямыя MN и PQ могутъ пересѣчься только въ одной точкѣ, то центръ этой окружности можетъ быть только одинъ, и длина ея радіуса можетъ быть только одна; значитъ, искомая окружность — единственная.



Черт. 115.

123. Слѣдствіе. Точка O (черт. 115), находясь на одинаковомъ разстояніи отъ A и отъ C, должна также лежать на перпендикулярѣ RS, проведенномъ къ сторонѣ AC черезъ ея середину. Такимъ образомъ:

три перпендикуляра къ сторонамъ треугольника, проведенные черезъ ихъ середины, пересѣкаются въ одной точкѣ.

124. Задача. Найти центръ данной окружности (черт. 116).

Взявъ на данной окружности какія-нибудь три точки A, B и C, проводятъ черезъ нихъ двѣ хорды, напр., AB и CB, и черезъ середины этихъ хордъ проводятъ къ нимъ перпендикуляры MN и PQ. Искомый центръ, будучи одинаково удаленъ отъ A, B и C, долженъ лежать и на MN, и на PQ; слѣд., онъ находится въ пересѣченіи этихъ перпендикуляровъ, т. е. въ точкѣ O.

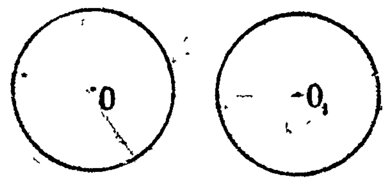
Черт. 116.

ГЛАВА II.

Равенство и неравенство дугъ.

125. Теорема. Два круга одинаковаго радіуса равны (черт. 117).

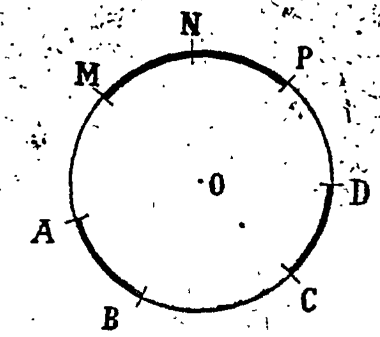
Пусть O и O_1 суть центры двухъ круговъ, которыхъ радіусы равны. Наложимъ кругъ O на кругъ O_1 такъ, чтобы ихъ центры совпали. Тогда обѣ окружности совмѣстятся, такъ какъ въ противномъ случаѣ ихъ точки не одинаково отстояли бы отъ центра и, слѣд., радіусы были бы не равны.



Черт. 117.

126. Замѣчаніе. Вращая одинъ изъ совпавшихъ круговъ вокругъ общаго центра, мы не нарушимъ ихъ совмѣщенія. Изъ этого слѣдуетъ, что двѣ части одной окружности или двѣ части равныхъ окружностей могутъ быть наложены, одна на другую такъ, что всѣ точки одной части окажутся лежащими на другой.

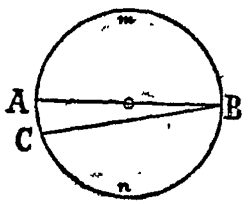
127. Опредѣленіе. Двѣ дуги одинаковаго радіуса считаются равными, если онѣ при наложеніи могутъ быть совмѣщены. Положимъ, напр., что мы накладываемъ дугу AB (черт. 118) на дугу CD такъ, чтобы точка A упала въ точку C и дуга AB пошла по дугѣ CD (что возможно, какъ мы видѣли въ предыдущемъ замѣчаніи); если при этомъ концы B и D совпадутъ, то $\smile AB = \smile CD$; въ противномъ случаѣ дуги не равны, при чемъ та будетъ меньше, которая составитъ только часть другой.



Черт. 118.

Суммою нѣсколькихъ данныхъ дугъ одинаковаго радіуса наз. такая дуга того же радіуса, которая составлена изъ частей, соотвѣтственно равныхъ даннымъ дугамъ. Такъ, если отъ произвольной точки M (черт. 118) окружности отложимъ часть MN, равную AB, и затѣмъ отъ точки N въ томъ же направленіи отложимъ часть NP, равную CD, то дуга MP будетъ суммой дугъ AB и CD. Подобно этому можно составить сумму трехъ и болѣе дугъ.

Изъ понятія о суммѣ дугъ выводятся понятія объ ихъ разности, произведеніи и частномъ въ томъ же смыслѣ, какъ и для отрѣзковъ прямыхъ (конецъ § 12).



Черт. 119.

128. Теорема. Всякій діаметръ дѣлитъ окружность и кругъ пополамъ (черт. 119).

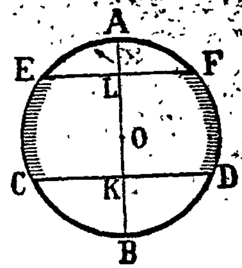
Вообразимъ, что кругъ перегнутъ по какому-нибудь діаметру AB такъ, чтобы часть его AmB упала на часть AnB. Тогда всѣ точки дуги m совмѣстятся съ точками дуги n, потому что въ противномъ случаѣ точки одной дуги лежали бы ближе къ центру, чѣмъ точки другой дуги, что невозможно.

Такимъ образомъ, всякій діаметръ раздѣляетъ окружность на двѣ полуокружности, а кругъ—на два полукруга.

129. Замѣчаніе. Всякая хорда CB (черт. 119), не проходящая черезъ центръ, стягиваетъ двѣ неравныя дуги: одну, бо́льшую полуокружности, другую—меньшую ея. Когда говорятъ: «дуга, стягиваемая хордой», то обыкновенно разумѣютъ ту изъ двухъ дугъ, которая меньше полуокружности.

130. Теоремы. 1°. Діаметръ, перпендикулярный къ хордѣ, дѣлитъ эту хорду и обѣ, стягиваемыя ею дуги, пополамъ.

2°. Дуги, заключенныя между параллельными хордами, равны.



Черт. 120.

Пусть діаметръ AB (черт. 120) перпендикуляренъ къ хордѣ CD и $EF \parallel CD$; требуется доказать, что:

$$1^\circ.\ CK=KD,\ \smile CB=\smile BD,\ \smile CA=\smile DA.$$
$$2^\circ.\ \smile CE=\smile DF.$$

Перегнемъ чертежъ по діаметру AB такъ, чтобы его лѣвая часть упала на правую. Тогда лѣвая полуокружность совмѣстится съ правою полуокружностью, перпендикуляръ KC пойдетъ по KD и перпендикуляръ LE пойдетъ по LF. Изъ этого слѣдуетъ, что точка C, представляющая собою пересѣченіе полуокружности съ KC, упадетъ на D, а точка E, представляющая собою пересѣченіе полуокружности съ LE, упадетъ на F; поэтому:

$$1^\circ.\ CK=KD;\quad \smile BC=\smile BD;\quad \smile AC=\smile AD.$$
$$2^\circ.\ \smile CE=\smile DF.$$

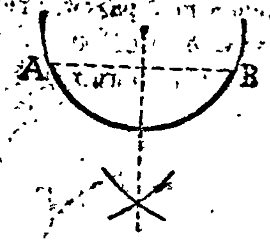
Слѣдствія. 1°. **Діаметръ (AB), проведенный черезъ середину хорды (CD), перпендикуляренъ къ этой хордѣ и дѣлитъ дугу, стягиваемую ею, пополамъ.**

2°. **Діаметръ (AB), проведенный черезъ середину дуги (CBD) перпендикуляренъ къ хордѣ, стягивающей эту дугу, и дѣлитъ ее пополамъ.**

Оба эти предложенія (обратныя теоремѣ 1°) легко доказываются отъ противнаго.

Замѣчаніе. Изложенное доказательство убѣждаетъ насъ, что каждый діаметръ круга есть его ось симметріи.

131. Задача. Раздѣлить данную дугу (AB, черт. 121) пополамъ.



Черт. 121.

Соединивъ концы дуги хордой AB, опускаемъ на нее перпендикуляръ изъ центра и продолжаемъ его до пересѣченія съ дугою. По доказанному въ предыдущей теоремѣ, дуга AB раздѣлится этимъ перпендикуляромъ пополамъ. Если же центръ неизвѣстенъ, тогда къ хордѣ AB слѣдуетъ провести перпендикуляръ черезъ ея середину (§ 69, задача 6).

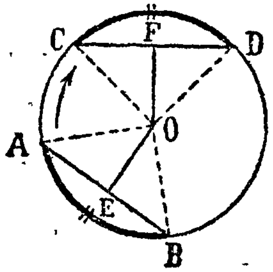
ГЛАВА III.

Зависимость между дугами, хордами и разстояніями хордъ отъ центра.

132. Теоремы. Въ одномъ кругѣ или въ равныхъ кругахъ:

1°, если дуги равны, то стягивающія ихъ хорды равны и одинаково удалены отъ центра;

2°, если дуги не равны и притомъ каждая меньше полуокружности, то бо́льшая изъ нихъ стягивается бо́льшею хордою, и эта бо́льшая хорда ближе къ центру.

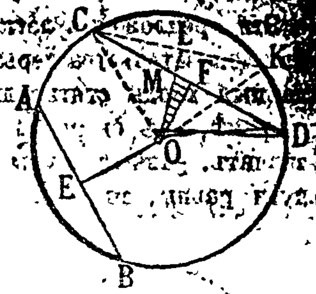


Черт. 122.

1°. Пусть дуга AB (черт. 122) равна дугѣ CD; требуется доказать, что хорды AB и CD равны, а также равны перпендикуляры OE и OF, опущенные изъ центра на хорды. Повернемъ секторъ OAB вокругъ центра O въ направленіи, указанномъ стрѣлкою, на столько, чтобы радіусъ OB совпалъ съ OC. Тогда дуга BA пойдетъ по дугѣ CD, и, вслѣдствіе ихъ равенства, эти дуги совмѣстятся. Значитъ, хорда AB совмѣстится съ хордою CD (между двумя точками можно провести только одну прямую) и перпендикуляръ

OE совпадетъ съ OF (изъ одной точки можно опустить на прямую только одинъ перпендикуляръ), т.-е. $AB=CD$ и $OE=OF$.

2°. Пусть дуга AB (черт. 123) меньше дуги CD, и притомъ обѣ дуги меньше полуокружности; требуется доказать, что хорда AB меньше хорды CD, а перпендикуляръ OE больше перпендикуляра OF. Отдѣлимъ на дугѣ CD часть CK, равную AB, и проведемъ вспомогательную хорду CK, которая, по доказанному, равна хордѣ AB и одинаково съ ней удалена отъ центра. У тр-ковъ *) COD и COK двѣ стороны одного равны двумъ сторонамъ другого (какъ радіусы), а углы, заключенные между этими сторонами, не равны; въ этомъ случаѣ, какъ мы знаемъ (58, 1°), противъ бо́льшаго изъ угловъ, т.-е. COD, должна лежать бо́льшая сторона; значитъ, $CD>CK$, и потому $CD>AB$.



Черт. 123.

Для доказательства того, что $OE>OF$, проведемъ $OL\perp CK$ и примемъ во вниманіе, что, по доказанному, $OE=OL$; слѣд., намъ достаточно сравнить OF съ OL. Въ прямоугольномъ тр-кѣ OFM (покрытомъ на чертежѣ штрихами) гипотенуза OM больше катета OF; но $OL>OM$; значитъ, и подавно, $OL>OF$ и потому $OE>OF$.

Теорема, доказанная нами для одного круга, остается вѣрною и для равныхъ круговъ, потому что такіе круги ничѣмъ, кромѣ своего положенія, другъ отъ друга не отличаются.

133. Обратныя теоремы. Такъ какъ въ предыдущемъ параграфѣ разсмотрѣны всевозможные взаимно исключающіе случаи относительно сравнительной величины двухъ дугъ, при чемъ получились взаимно исключающіе выводы относительно сравнительной величины хордъ и разстояній ихъ отъ центра, то обратныя предложенія должны быть вѣрны (51), а именно:

Въ одномъ кругѣ или въ равныхъ кругахъ:

1°, равныя хорды стягиваютъ равныя дуги и одинаково удалены отъ центра;

---

*) На чертежѣ 123-мъ надо провести радіусъ OD.

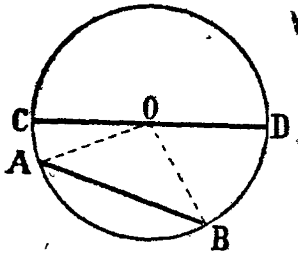
2°, хорды, одинаково удаленныя отъ центра, равны и стягиваютъ равныя дуги;

3°, изъ двухъ неравныхъ хордъ бóльшая стягиваетъ бóльшую дугу, и ближе къ центру;

4°, изъ двухъ хордъ, неодинаково удаленныхъ отъ центра, та, которая ближе къ центру, болѣе и стягиваетъ бóльшую дугу.

Эти предложенія легко доказываются отъ противнаго. Напр., для доказательства перваго изъ нихъ разсуждаемъ такъ: если бы данныя хорды стягивали неравныя дуги, то, согласно прямой теоремѣ, онѣ были бы не равны, что противорѣчитъ условію; значитъ, равныя хорды должны стягивать равныя дуги, а если дуги равны, то, согласно прямой теоремѣ, стягивающія ихъ хорды одинаково удалены отъ центра.

134. Теорема. Діаметръ есть наибольшая изъ хордъ.



Черт. 124.

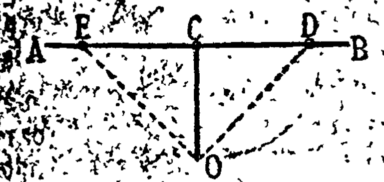
Если соединимъ съ центромъ O концы какой-нибудь хорды, не проходящей черезъ центръ, напр., хорды AB (чертежъ 124), то получимъ тр-къ AOB, въ которомъ одна сторона есть эта хорда, а двѣ другія—радіусы. Но въ тр-кѣ каждая сторона менѣе суммы двухъ другихъ сторонъ; слѣд., хорда AB менѣе суммы двухъ радіусовъ; тогда какъ всякій діаметръ CD равенъ суммѣ двухъ радіусовъ. Значитъ, діаметръ больше всякой хорды, не проходящей черезъ центръ. Но такъ какъ діаметръ есть тоже хорда, то можно сказать, что діаметръ есть наибольшая изъ хордъ.

ГЛАВА IV.

Свойства касательной.

135. Относительное положеніе прямой и окружности. Мы видѣли (120), что прямая и окружность не могутъ имѣть болѣе 2-хъ общихъ точекъ. Посмотримъ теперь, при какихъ условіяхъ прямая съ окружностью можетъ имѣть двѣ общія точки, одну общую точку и ни одной общей точки. Разсмотримъ слѣдующіе 3 случая:

1°. Разстояніе (OC, черт. 125) центра (O) окружности отъ прямой (AB) больше радіуса этой окружности. Тогда точка C прямой AB удалена отъ центра O больше, чѣмъ на радіусъ, и потому лежитъ внѣ круга. Всѣ остальныя точки прямой AB удалены отъ O еще болѣе, чѣмъ точка C (59); значитъ, всѣ точки прямой AB лежатъ внѣ круга, и потому эта прямая не имѣетъ общихъ точекъ съ окружностью.



Черт. 125.

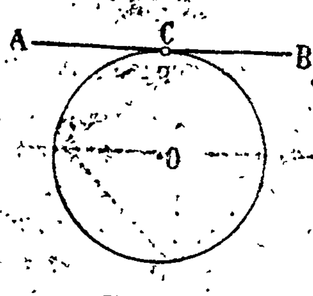
2°. Разстояніе (OC, черт. 125) центра (O) окружности отъ прямой (AB) меньше радіуса этой окружности. Въ этомъ случаѣ точка C лежитъ внутри круга. Но на прямой AB, по обѣ стороны отъ точки C, можно найти такія точки D и E, которыя удалены отъ O болѣе, чѣмъ на радіусъ *), и которыя, слѣд., лежатъ внѣ круга. Но тогда каждый изъ двухъ отрѣзковъ: CD и CE, соединяя внутреннюю точку съ внѣшней, долженъ пересѣчься съ окружностью и притомъ въ одной точкѣ. Слѣд., въ этомъ случаѣ прямая имѣетъ съ окружностью 2 общія точки, и, слѣд., она есть сѣкущая.

3°. Разстояніе (OC, черт. 125) центра (O) отъ прямой (AB) равно радіусу. Тогда точка C принадлежитъ и прямой, и окружности; всѣ же остальныя точки прямой удалены отъ O болѣе, чѣмъ точка C (59), и потому лежатъ внѣ круга. Значитъ, въ этомъ случаѣ прямая и окружность имѣютъ только одну общую точку, именно, точку C (основаніе перпендикуляра OC).

136. Опредѣленіе. Прямая (AB, черт. 126), имѣющая съ окружностью только одну общую точку (C), наз. ка-

*) Если, напр., на прямой AB отложимъ отъ точки C, по обѣ стороны отъ нея, отрѣзки, равные радіусу, то разстоянія ихъ концовъ до центра будутъ больше радіуса, такъ какъ гипотенуза больше катета.

сательною къ окружности; общая точка наз. въ этомъ случаѣ **точкою касанія.**

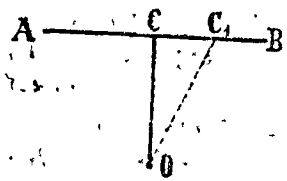


Черт. 126.

137. Теоремы. 1°. Если прямая перпендикулярна къ радіусу въ концѣ его, лежащемъ на окружности, то она есть касательная.

2° (обратная). Если прямая есть касательная къ окружности, то радіусъ, проведенный въ точку касанія, перпендикуляренъ къ ней.

1°. Пусть O (черт. 127) есть центръ окружности, OC какой-нибудь ея радіусъ и AB прямая, перпендикулярная къ OC и проходящая черезъ C; требуется доказать, что эта прямая есть касательная.—Разстояніе прямой AB отъ центра O равно перпендикуляру OC; но, по условію, OC есть радіусъ; значитъ, разстояніе прямой AB отъ центра O равно радіусу; а въ этомъ случаѣ, какъ мы видѣли (135, 3°), прямая имѣетъ съ окружностью только одну общую точку C; слѣд., AB есть касательная.

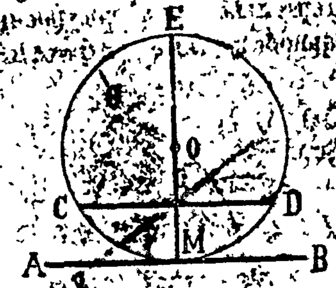


Черт. 127.

2°. Пусть AB (черт. 127) есть касательная и OC радіусъ, проведенный въ точку касанія; требуется доказать, что $OC \perp AB$. Предположимъ противное, т.-е. что радіусъ OC не перпендикуляренъ къ AB, а представляетъ собою наклонную къ этой прямой. Въ такомъ случаѣ какая-нибудь другая прямая, напр., OC_1, будетъ перпендикуляромъ, опущеннымъ изъ центра O на касательную AB (32). Такъ какъ перпендикуляръ короче наклонной (59), то $OC_1 < OC$; значитъ, тогда разстояніе прямой AB отъ центра O, равное перпендикуляру OC_1, будетъ меньше радіуса; а въ этомъ случаѣ, какъ мы видѣли (135, 2°), прямая должна имѣть съ окружностью двѣ общія точки, а не одну, какъ данная касательная AB. Слѣд., нельзя допустить, что радіусъ OC не перпендикуляренъ къ AB; значитъ, $OC \perp AB$.

138. Теоремы. 1°. Если касательная параллельна хордѣ, то она дѣлитъ въ точкѣ касанія дугу, стягиваемую хордой, пополамъ.

Пусть прямая AB (черт. 128) касается окружности въ точкѣ M и параллельна хордѣ CD; требуется доказать, что $\smile CM = \smile MD$.



Черт. 128.

Проведя черезъ точку касанія діаметръ EM, будемъ имѣть: $EM \perp AB$ (137, 2°) и, слѣд., $EM \perp CD$ (82); поэтому $\smile CM = \smile MD$ (130, 1°).

2° (обратная). Если касательная (AB) проходитъ черезъ середину дуги (CD), то она параллельна хордѣ, стягивающей эту дугу.

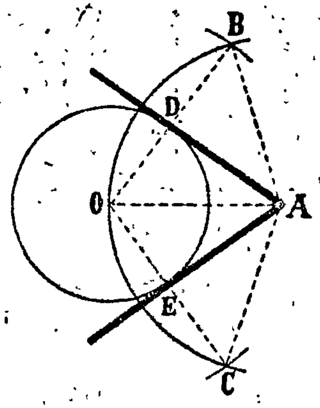
Дѣйствительно, эта касательная перпендикулярна къ діаметру (EM), проведенному черезъ середину дуги, а такой діаметръ перпендикуляренъ къ хордѣ (130, сл. 2°); но два перпендикуляра къ одной и той же прямой должны быть параллельны.

139. Задача. Черезъ данную точку провести касательную къ данной окружности.

Если данная точка (напр., точка M, черт. 128) находится на окружности, то проводятъ черезъ нее радіусъ и черезъ конецъ радіуса перпендикулярную прямую. Эта прямая и будетъ искомой касательной (137, 1°). Другой касательной черезъ ту же точку окружности провести нельзя, такъ какъ касательная должна быть перпендикулярна къ радіусу въ концѣ его, лежащемъ на окружности, а двухъ различныхъ перпендикуляровъ къ одному и тому же радіусу черезъ одну и ту же точку провести нельзя.

Разсмотримъ теперь случай, когда точка дана внѣ круга.

Пусть требуется (черт. 129) провести къ окружности центра O касательную черезъ точку A. Для этого изъ точки A, какъ центра, описываемъ дугу радіусомъ AO, а изъ точки O, какъ центра, пересѣкаемъ эту дугу въ точкахъ B и C раствореніемъ циркуля, равнымъ діаметру даннаго круга. Проведя затѣмъ хорды OB и OC, соединимъ точку A съ точками D и E, въ которыхъ эти хорды пересѣкаются съ данною окружностью. Прямыя AD и AE и будутъ касательными къ окружности O. Дѣйствительно, изъ построенія видно, что тр-ки AOB и AOC равнобедренные ($AO=AB=AC$) съ основаніями OB и OC, равными діаметру круга O. Такъ какъ OD и OE суть радіусы, а радіусъ равенъ половинѣ діаметра, то D есть середина OB, а E середина OC; значитъ, прямыя AD и AE суть **медіаны**, проведенныя къ основаніямъ равнобедренныхъ тр-ковъ, и потому перпендикулярны къ этимъ основаніямъ (39). Если же прямыя AD и AE, перпендикулярны къ радіусамъ OD и OE въ ихъ концахъ, лежащихъ на окружности, то онѣ касательныя.

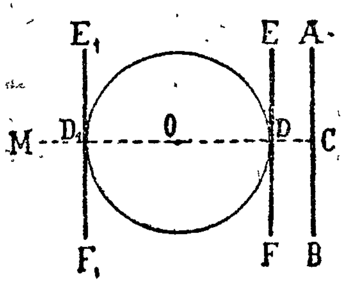


Черт. 129.

Замѣчаніе. Очевидно, что если данная точка лежитъ **внутри круга**, то черезъ нее нельзя провести касательной.

140. Слѣдствіе. Двѣ касательныя, проведенныя изъ одной точки къ окружности, равны и образуютъ равные углы съ прямою, соединяющею эту точку съ центромъ.

Такъ, $AD=AE$ и $\angle OAD=\angle OAE$ (черт. 129), потому что прямоугольные тр-ки AOD и AOE, имѣющіе общую гипотенузу AO и равные катеты OD и OE (какъ радіусы), равны.



Черт. 130.

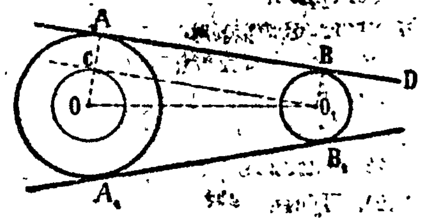
Само собою разумѣется, что здѣсь подъ словомъ «касательная» разумѣется собственно «отрѣзокъ касательной» отъ данной точки до точки касанія.

141. Задача. Провести касательную къ данной окружности параллельно данной прямой AB (черт. 130).

Черезъ центръ O проведемъ $MC \perp AB$ и черезъ точки D и D_1, въ которыхъ этотъ перпендикуляръ пересѣкается съ окружностью, проведемъ $EF \parallel AB$ и $E_1F_1 \parallel AB$. Искомыя касательныя будутъ EF и E_1F_1. Дѣйствительно, такъ какъ $MC \perp AB$ и $EF \parallel AB$, а также и $E_1F_1 \parallel AB$, то $EF \perp OD$ и $E_1F_1 \perp OD_1$, а прямая, перпендикулярная къ радіусу въ концѣ его, лежащемъ на окружности, есть касательная.

142. Задача. Къ двумъ окружностямъ провести общую касательную (черт. 131).

1°. **Анализъ.** Предположимъ, что задача рѣшена. Пусть AB будетъ общая касательная, A и B точки касанія. Очевидно, что если мы найдемъ одну изъ этихъ точекъ, напр., A, то затѣмъ легко найдемъ и другую. Проведемъ радіусы OA и O_1B. Эти радіусы, будучи перпендикулярны къ общей касательной, параллельны между собою; поэтому если изъ O_1 проведемъ $O_1C \parallel BA$, то тр-къ OCO_1 будетъ прямоугольный при вершинѣ C; вслѣдствіе этого, если опишемъ изъ O, какъ центра, радіусомъ OC окружность, то она будетъ касаться прямой O_1C въ точкѣ C. Радіусъ этой вспомогательной окружности извѣстенъ: онъ равенъ $OA-CA=OA-O_1B$, т.-е. онъ равенъ разности радіусовъ данныхъ окружностей.



Черт. 131.

Построеніе. Обозначимъ радіусъ бóльшаго круга черезъ R и радіусъ меньшаго черезъ r. Опишемъ изъ центра O окружность радіусомъ, равнымъ $R-r$; изъ O_1 проводимъ*) къ этой окружности касательную O_1C (способомъ, указаннымъ въ задачѣ § 139); черезъ точку касанія C проводимъ радіусъ OC и продолжаемъ его до встрѣчи съ данною окружностью въ точкѣ A. Наконецъ, изъ A проводимъ AD параллельно CO_1.

Доказательство (синтезъ). Такъ какъ O_1C, по построенію, есть касательная въ точкѣ C къ окружности радіуса OC, то $O_1C \perp OC$, и, значитъ, $O_1C \perp OA$. Такъ какъ $AD \parallel CO_1$, то

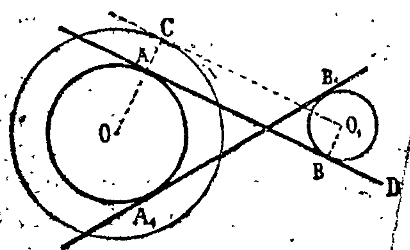
*) Если это возможно, т.-е. если центръ O_1 окажется лежащимъ не внутри круга, описаннаго радіусомъ $OC=R-r$.

и $AD \perp OA$ и потому AD есть касательная къ данной окружности центра O (137). Остается доказать, что прямая AD касается также и другой данной окружности. Для этого изъ центра O_1 проведемъ $O_1B \perp AD$. Прямыя O_1B и CA, будучи перпендикулярны къ AD, должны быть параллельны; съ другой стороны, $AD \parallel O_1C$; слѣд., фигура O_1CAB есть параллелограммъ; поэтому $O_1B=CA=OA-OC$; но $OC=R-r$; слѣд., $O_1B=R-(R-r)=r$. Значитъ, точка B принадлежитъ данной окружности центра O_1, и прямая O_1B есть радіусъ этой окружности. Такимъ образомъ, прямая AD перпендикулярна къ радіусу O_1B въ его концѣ, лежащемъ на окружности, а такая прямая есть касательная.

Совершенно такимъ же способомъ мы можемъ построить другую общую касательную A_1B_1 (черт. 131). Прямыя AB и A_1B_1 наз. **внѣшними** общими касательными.

Можно еще провести двѣ **внутреннія** касательныя слѣдующимъ образомъ.

2°. **Анализъ.** Предположимъ, что задача рѣшена (чертежъ 132). Пусть AB будетъ искомая касательная. Проведемъ радіусы OA и O_1B въ точки касанія A и B. Эти радіусы, будучи оба перпендикулярны къ общей касательной, параллельны между собою. Поэтому если изъ O_1 проведемъ $O_1C \parallel BA$ и продолжимъ OA до точки C, то OC будетъ перпендикуляренъ къ O_1C; вслѣдствіе этого окружность, описанная радіусомъ OC изъ точки O, какъ центра, будетъ касаться прямой O_1C въ точкѣ C. Радіусъ этой вспомогательной окружности извѣстенъ: онъ равенъ $OA+AC=OA+O_1B=R+r$, т.-е. онъ равенъ суммѣ радіусовъ данныхъ окружностей.



Черт. 132.

Построеніе. Изъ O, какъ центра, описываемъ окружность радіусомъ, равнымъ суммѣ $R+r$; изъ O_1 проводимъ къ этой окружности касательную O_1C*); точку касанія C соединяемъ съ

*) Если это возможно, т.-е., если центръ O_1 окажется лежащимъ не внутри круга, описаннаго радіусомъ $OC=R+r$.

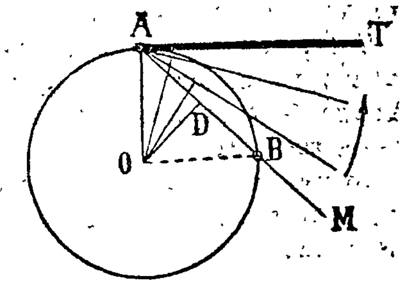
O; наконецъ, черезъ точку A, въ которой OC пересѣкается съ данной окружностью, проводимъ $AD \parallel O_1C$.

Доказательство (синтезъ) остается то же самое, какъ и въ случаѣ 1°.

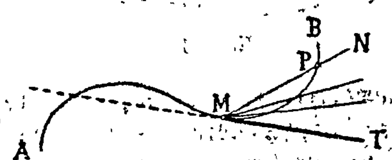
Подобнымъ же образомъ можно построить другую внутреннюю касательную A_1B_1.

Замѣчаніе. Не ко всякимъ двумъ окружностямъ можно провести общія касательныя; напр., если одна окружность лежитъ внутри другой, не имѣя съ ней ни одной общей точки, то къ такимъ окружностямъ нельзя провести ни внѣшнихъ, ни внутреннихъ общихъ касательныхъ; или, если окружности пересѣкаются, то къ нимъ нельзя провести внутреннихъ общихъ касательныхъ.

143. Общее опредѣленіе касательной. Пусть къ окружности центра O (черт. 133) проведены черезъ точку A касательная AT и какая-нибудь сѣкущая AM. Станемъ вращать эту сѣкущую вокругъ точки A такъ, чтобы другая точка пересѣченія B все ближе и ближе придвигалась къ A. Тогда перпендикуляръ OD, опущенный изъ центра на сѣкущую, будетъ все болѣе и болѣе приближаться къ радіусу OA, при чемъ уголъ AOD, равный половинѣ угла AOB, можетъ сдѣлаться меньше всякаго малаго угла. Уголъ MAT, образованный сѣкущею и касательною, равенъ углу AOD (вслѣдствіе перпендикулярности ихъ сторонъ); поэтому при неограниченномъ приближеніи точки B къ A уголъ MAT также можетъ быть сдѣланъ какъ угодно малъ. Это выражаютъ иными словами такъ: касательная есть **предѣльное положеніе**, къ которому стремится сѣкущая, проведенная черезъ точку касанія, когда вторая точка пересѣченія неограниченно приближается къ точкѣ касанія.



Черт. 133.



Черт. 134.

Это свойство принимаютъ за **опредѣленіе касательной**, когда рѣчь идетъ о какой угодно кривой. Такимъ образомъ, касательною къ кривой AB (черт. 134) въ точкѣ M наз. *предѣльное положеніе* MT, къ которому стремится сѣкущая MN, когда точка пересѣченія P неограниченно приближается къ M.

Опредѣляемая такимъ образомъ касательная можетъ имѣть съ кривою болѣе одной общей точки (какъ это видно на черт. 134).

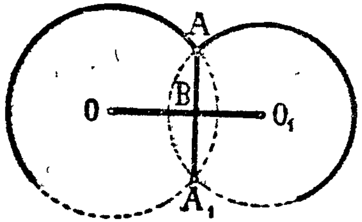
ГЛАВА V.

Относительное положеніе окружностей.

144. Опредѣленіе. Если двѣ окружности имѣютъ только одну общую точку, то говорятъ, что онѣ *касаются*; если же двѣ окружности имѣютъ двѣ общія точки, то говорятъ, что онѣ *пересѣкаются*.

Трехъ общихъ точекъ двѣ несливающіяся окружности имѣть не могутъ, потому что въ противномъ случаѣ черезъ три точки можно было бы провести двѣ различныя окружности, что невозможно (122).

Будемъ называть *линіей центровъ* прямую, проходящую черезъ центры двухъ окружностей (напр., прямую OO_1, черт. 135).



Черт. 135.

145. Теорема. Если двѣ окружности имѣютъ общую точку по одну сторону отъ линіи центровъ, то онѣ имѣютъ общую точку и по другую сторону отъ этой линіи, т.-е. такія окружности пересѣкаются.

Пусть (черт. 135) двѣ окружности имѣютъ общую точку A, лежащую внѣ линіи центровъ OO_1; требуется доказать, что эти окружности имѣютъ еще общую точку по другую сторону отъ прямой OO_1.

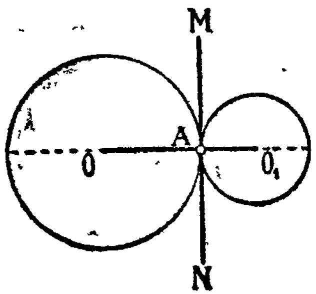
Опустимъ изъ A на прямую OO_1 перпендикуляръ AB и продолжимъ его на разстояніе BA_1, равное AB. Докажемъ теперь, что точка A_1 принадлежитъ обѣимъ окружностямъ.

Изъ построенія видно, что точки O и O_1 лежатъ на перпендикулярѣ, проведенномъ къ отрѣзку AA_1 черезъ его середину. Изъ этого слѣдуетъ, что точка O одинаково удалена отъ A и A_1 (63, 2°); то же можно сказать и о точкѣ O_1. Значитъ, обѣ окружности, при продолженіи ихъ, пройдутъ черезъ A_1. Такимъ образомъ, окружности имѣютъ двѣ общія точки: точку A (по условію) и точку A_1 (по доказанному); слѣд., онѣ пересѣкаются.

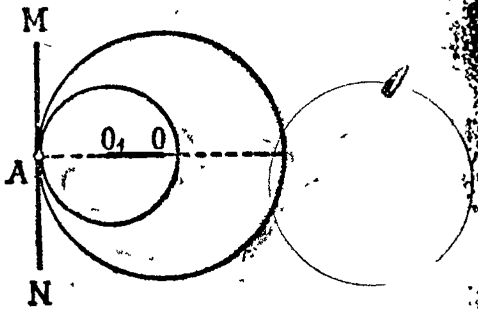
146. Слѣдствіе. Общая хорда (AA_1, черт. 135) двухъ пересѣкающихся окружностей перпендикулярна къ линіи центровъ и дѣлится ею пополамъ.

147. Теорема. Если двѣ окружности имѣютъ общую точку на линіи ихъ центровъ, то онѣ касаются.

Пусть общая точка A двухъ окружностей лежитъ на линіи центровъ OO_1 (черт. 136 и 137). Требуется доказать, что такія окружности касаются, т.-е. что онѣ не имѣютъ никакой другой общей точки.—Окружности не могутъ имѣть другой общей точки внѣ линіи центровъ, потому что въ противномъ случаѣ онѣ имѣли бы еще третью общую точку по другую сторону отъ линіи центровъ (145) и, слѣд., должны были бы слиться (122). Онѣ не могутъ имѣть другой общей точки и на линіи центровъ, такъ какъ на этой прямой, очевидно, нѣтъ другой точки, которая отъ обоихъ центровъ была бы удалена настолько же, какъ и точка A. Слѣд., окружности имѣютъ только одну общую точку, т.-е. онѣ касаются.



Черт. 136.



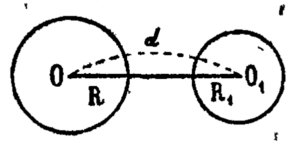
Черт. 137.

148. Замѣчаніе. Касаніе двухъ окружностей наз. *внѣшнимъ*, если онѣ расположены одна внѣ другой (черт. 136), и *внутреннимъ*, если одна изъ окружностей лежитъ внутри другой (черт. 137).

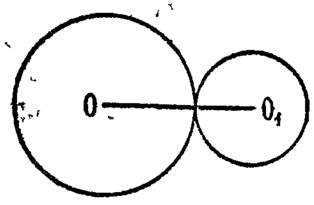
149. Теорема (обратная предыдущей). **Если двѣ окружности касаются, то точка касанія лежитъ на линіи центровъ.**

Пусть двѣ окружности (черт. 136 и 137) касаются въ точкѣ A, т. е. имѣютъ только одну общую точку A; требуется доказать, что эта точка лежитъ на линіи центровъ.—Точка A не можетъ лежать внѣ линіи центровъ, потому что въ противномъ случаѣ окружности имѣли бы еще другую общую точку, что противорѣчитъ условію теоремы.

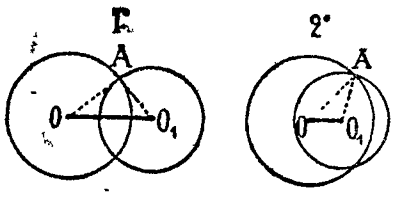
150. Слѣдствіе. **Двѣ касательныя окружности имѣютъ общую касательную въ точкѣ касанія,** потому что если проведемъ черезъ точку касанія прямую MN (черт. 136 и 137), перпендикулярную къ радіусу OA, то эта прямая будетъ также перпендикулярна и къ радіусу O_1A*).



Черт. 138.



Черт. 139.



Черт. 140.

151. Различные случаи относительнаго положенія двухъ окружностей. Обозначимъ радіусы двухъ окружностей буквами R и R_1 и разстояніе между ихъ центрами буквою d. Разсмотримъ, какова зависимость между этими величинами въ различныхъ случаяхъ относительнаго положенія двухъ окружностей. Этихъ случаевъ можно указать 5 слѣдующихъ:

1°. Окружности лежатъ одна внѣ другой, не касаясь (черт. 138); въ этомъ случаѣ, очевидно, $d>R+R_1$.

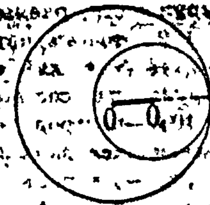
2°. Окружности имѣютъ внѣшнее касаніе (черт. 139); тогда $d=R+R_1$, такъ какъ точка касанія лежитъ на линіи центровъ.

3°. Окружности пересѣкаются (черт. 140, 1° и 2°); тогда $d<R+R_1$ и въ то же время $d>R-R_1$, потому

*) Окружности, касающіяся извнѣ имѣютъ еще 2 общія внѣшнія касательныя.

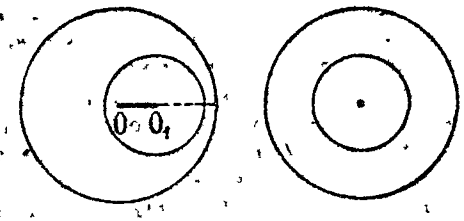
что въ тр-кѣ OAO_1 сторона OO_1, равная d, меньше суммы, но больше разности двухъ другихъ сторонъ, равныхъ радіусамъ R и R_1.

4°. Окружности имѣютъ внутреннее касаніе (черт. 141); въ этомъ случаѣ $d=R-R_1$, потому что точка касанія лежитъ на линіи центровъ.



Черт. 141.

Наконецъ, 5°, одна окружность лежитъ внутри другой, не касаясь (черт. 142); тогда, очевидно, $d<R-R_1$ и въ частномъ случаѣ $d=O$, когда центры обѣихъ окружностей сливаются (такія окружности наз. концентрическими).



Черт 142.

152. Обратныя предложенія. Такъ какъ разсмотрѣнные нами случаи расположенія двухъ окружностей таковы, что каждый изъ нихъ исключаетъ собою всѣ остальные, и случаи эти сопровождаются такими соотношеніями между разстояніемъ центровъ и величиною радіусовъ, которые тоже взаимно другъ друга исключаютъ, то обратныя предложенія должны быть вѣрны (51), а именно:

1°. Если $d>R+R_1$, то окружности расположены одна внѣ другой, не касаясь.

2°. Если $d=R+R_1$, то окружности касаются извнѣ.

3°. Если $d<R+R_1$ и въ то же время $d>R-R_1$, то окружности пересѣкаются.

4°. Если $d=R-R_1$, то окружности касаются извнутри.

5°. Если $d<R-R_1$, то одна окружность лежитъ внутри другой, не касаясь.

Всѣ эти предложенія легко доказываются отъ противнаго.

УПРАЖНЕНІЯ.

Найти геометрическія мѣста:

101.—точекъ, изъ которыхъ касательныя, проведенныя къ данной окружности, равны данной длинѣ.

102.—точекъ, изъ которыхъ данная окружность видна подъ даннымъ угломъ (т.-е. двѣ касательныя, проведенныя изъ каждой точки къ окружности, составляютъ между собою данный уголъ).

103.—центровъ окружностей, описанныхъ даннымъ радіусомъ и касающихся данной прямой.

104.—центровъ окружностей, касающихся данной окружности въ данной точкѣ.

105.—центровъ окружностей, описанныхъ даннымъ радіусомъ и касающихся данной окружности (два случая: касаніе внѣшнее и касаніе внутреннее).

106. Прямая данной длины движется параллельно самой себѣ такъ, что одинъ ея конецъ скользитъ по окружности. Найти геометрическое мѣсто, описанное другимъ концомъ.

Указаніе. Возьмемъ 2 положенія движущейся прямой и черезъ концы ихъ, лежащіе на окружности, проведемъ радіусы, а черезъ другіе концы проведемъ прямыя, параллельныя этимъ радіусамъ, до пересѣченія съ прямой, проходящей черезъ центръ и параллельной движущейся линіи. Разсмотримъ образовавшіеся параллелограммы...

107. Прямая данной длины движется такъ, что концы ея скользятъ по сторонамъ прямого угла. Найти геометрическое мѣсто, описываемое серединою этой прямой.

Доказать теоремы:

107,a. Въ кругѣ центра O проведена хорда AB и продолжена на разстояніе BC, равное радіусу. Черезъ точку C и центръ O проведена сѣкущая CD (D вторая точка пересѣченія съ окружностью). Доказать, что уголъ AOD равенъ утроенному углу ACD.

108. Если черезъ центръ окружности и данную точку внѣ ея проведемъ сѣкущую, то часть ея, заключенная между данною точкою и ближайшею точкою пересѣченія, есть наименьшее разстояніе, а часть, заключенная между данною точкою и другою точкою пересѣченія, есть наибольшее разстояніе этой точки отъ окружности.

109. Кратчайшее разстояніе между двумя окружностями, лежащими одна внѣ другой, есть отрѣзокъ линіи центровъ, заключенный между окружностями.

110. Изъ всѣхъ хордъ, проведенныхъ въ окружности черезъ одну точку, наименьшая есть та, которая перпендикулярна къ радіусу, проходящему черезъ эту точку.

111. Если черезъ точку пересѣченія двухъ окружностей будемъ проводить сѣкущія, не продолжая ихъ за окружности, то наибольшая изъ нихъ окажется та, которая параллельна линіи центровъ.

112. Если къ двумъ окружностямъ, касающимся извнѣ, провести три общія касательныя, то внутренняя изъ нихъ дѣлитъ пополамъ тотъ отрѣзокъ каждой внѣшней, который ограниченъ точками касанія.

113. Всѣ хорды данной длины, проведенныя въ данной окружности, касаются нѣкоторой другой окружности.

114. Если черезъ одну изъ точекъ пересѣченія двухъ окружностей проведемъ діаметры въ каждой окружности, то прямая, соединяющая концы ихъ, пройдетъ черезъ другую точку пересѣченія.

114,a. Черезъ точку A окружности проведена хорда AB и затѣмъ касательная въ точкѣ B; діаметръ, перпендикулярный радіусу OA, встрѣчаетъ касательную и хорду соотвѣтственно въ точкахъ C и D. Доказать, что $BC=CD$.

114,b. Къ двумъ окружностямъ центровъ O и O_1, касающимся извнѣ въ точкѣ A, проведена общая внѣшняя касательная BC (B и C точки касанія); доказать, что уголъ BAC есть прямой.

Задачи на построеніе.

115. Раздѣлить данную дугу на 4, 8, 16... равныхъ частей.

116. По суммѣ и разности дугъ одного и того же радіуса найти эти дуги.

117. Изъ данной точки, какъ центра, описать такую окружность, которая раздѣлила бы данную окружность пополамъ.

118. На данной прямой найти точку, наименѣе удаленную отъ данной окружности.

119. Въ кругѣ дана хорда. Провести другую хорду, которая дѣлилась бы первою пополамъ и составляла бы съ нею данный уголъ.

120. Черезъ данную въ кругѣ точку провести хорду, которая дѣлилась бы этою точкою пополамъ.

121. Изъ точки, данной на сторонѣ угла, описать окружность, которая отъ другой стороны угла отсѣкала бы хорду данной длины.

122. Даннымъ радіусомъ описать окружность, которой центръ лежалъ бы на сторонѣ даннаго угла и которая отъ другой стороны его отсѣкала бы хорду данной длины.

123. Даннымъ радіусомъ описать окружность, которая касалась бы данной прямой въ данной точкѣ.

124. Описать окружность, которая проходила бы черезъ данную точку A и касалась бы данной прямой въ данной на ней точкѣ B.

125. Описать окружность, касательную къ сторонамъ даннаго угла, при чемъ одной изъ нихъ въ данной точкѣ.

126. Между двумя параллельными прямыми дана точка; провести

окружность, проходящую черезъ эту точку и касающуюся данныхъ прямыхъ.

127. Провести къ данной окружности касательную подъ даннымъ угломъ къ данной прямой (сколько рѣшеній)?

128. Изъ точки, данной внѣ круга, провести къ нему сѣкущую такъ, чтобы ея внутренняя часть равнялась данной длинѣ (изслѣдовать задачу).

129. Даннымъ радіусомъ описать окружность, проходящую черезъ данную точку и касательную къ данной прямой.

130. На данной прямой найти такую точку, чтобы касательныя, проведенныя изъ нея къ данной окружности, были данной длины.

131. Построить $\triangle$, зная одинъ уголъ и двѣ высоты, изъ которыхъ одна проведена изъ вершины даннаго угла.

132. Даны двѣ окружности; провести къ нимъ сѣкущую такъ, чтобы внутреннія части ея равнялись даннымъ прямымъ.

133. Даны двѣ точки; провести прямую такъ, чтобы перпендикуляры, опущенные на нее изъ этихъ точекъ, имѣли данныя длины.

134. Описать окружность, которая проходила бы черезъ данную точку и касалась бы данной окружности въ данной точкѣ.

135. Описать окружность, которая касалась бы двухъ данныхъ параллельныхъ прямыхъ и къ кругу, находящемуся между ними.

136. Даннымъ радіусомъ описать окружность, которая касалась бы даннаго круга и проходила бы черезъ данную точку (разсмотрѣть 3 случая: данная точка лежитъ: 1, внѣ круга, 2, на окружности и 3, внутри круга).

137. Даннымъ радіусомъ описать окружность, которая касалась бы данной прямой и даннаго круга.

138. Даннымъ радіусомъ описать окружность, которая отъ сторонъ даннаго угла отсѣкала бы хорды данной длины.

139. Описать окружность, касающуюся даннаго круга въ данной точкѣ и данной прямой (2 рѣшенія).

140. Описать окружность, касающуюся данной прямой въ данной точкѣ и даннаго круга (2 рѣшенія).

141. Описать окружность, касающуюся двухъ данныхъ круговъ, при чемъ одного изъ нихъ въ данной точкѣ (разсмотрѣвъ три случая: 1, искомый кругъ лежитъ внѣ данныхъ; 2, одинъ изъ данныхъ круговъ лежитъ внѣ искомаго, другой внутри; 3, оба данныхъ круга лежатъ внутри искомаго).

142. Описать окружность, касающуюся трехъ равныхъ круговъ извнѣ или внутри.

143. Въ данный секторъ вписать окружность, касающуюся къ радіусамъ, ограничивающимъ секторъ, и къ дугѣ сектора.

144. Вписать въ данный кругъ три равные круга, которые касались бы попарно между собою и даннаго круга.

145. Черезъ точку внутри круга провести хорду такъ, чтобы разность ея отрѣзковъ равнялась данной длинѣ.

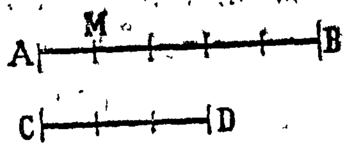
146. Черезъ точку пересѣченія двухъ окружностей провести сѣкущую такъ, чтобы часть ея, заключенная внутри окружностей, равнялась данной длинѣ.

147. Изъ точки, данной внѣ круга, провести сѣкущую такъ, чтобы внѣшняя ея часть равнялась внутренней.

ГЛАВА VI.

Измѣреніе величинъ.

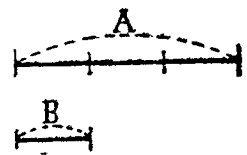
153. Опредѣленіе. Общею мѣрою двухъ отрѣзковъ прямой называется такой третій отрѣзокъ, который въ каждомъ изъ первыхъ содержится цѣлое число разъ (безъ остатка). Такъ, если (черт. 143) отрѣзокъ AM содержится въ AB и въ CD цѣлое число разъ (напр., 5 разъ въ AB и 3 раза въ CD), то AM есть общая мѣра AB и CD.



Черт. 143.

Подобно этому, можетъ быть общая мѣра двухъ дугъ одинаковаго радіуса, двухъ угловъ и вообще двухъ значеній одной и той же величины.

154. Нахожденіе наибольшей общей мѣры. Чтобы найти наибольшую общую мѣру двухъ отрѣзковъ, употребляютъ способъ послѣдовательнаго отложенія, подобный тому послѣдовательному дѣленію, какимъ въ ариѳметикѣ находятъ общаго наибольшаго дѣлителя двухъ цѣлыхъ чиселъ. Этотъ способъ основывается на слѣдующихъ предложеніяхъ:

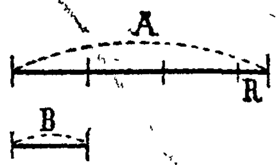


Черт. 144.

1°. Если меньшій изъ двухъ отрѣзковъ (A и B, черт. 144) содержится въ бóльшемъ цѣлое число разъ безъ остатка, то наибольшая общая мѣра этихъ отрѣзковъ есть меньшій изъ нихъ.

Пусть, напр., B содержится въ A ровно 3 раза; такъ какъ при этомъ, конечно, B содержится въ B ровно 1 разъ, то B есть общая мѣра отрѣзковъ A и B; съ другой стороны, эта мѣра есть и наибольшая, такъ какъ никакой отрѣзокъ, большій B, не можетъ содержаться въ B цѣлое число разъ.

2°. Если меньшій изъ двухъ отрѣзковъ (B, черт. 145) содержится въ бóльшемъ (въ A) цѣлое число разъ съ остаткомъ (R), то наибольшая общая мѣра этихъ отрѣзковъ должна быть и наибольшей общей мѣрой меньшаго отрѣзка (B) и остатка (R).



Черт. 145.

Пусть, напр., $A=B+B+B+R$.

Изъ этого равенства мы можемъ вывести слѣдующія два заключенія:

Всякій отрѣзокъ, содержащійся безъ остатка въ B и въ R, содержится также безъ остатка и въ A; если, напр., какой-нибудь отрѣзокъ содержится въ B ровно 5 разъ и въ R содержится ровно 2 раза, то въ A онъ содержится $5+5+5+2$, т.-е. 17 разъ безъ остатка.

Обратно: всякій отрѣзокъ, содержащійся безъ остатка въ A и въ B, содержится также безъ остатка и въ R; если, напр., какой-нибудь отрѣзокъ содержится въ A ровно 17 разъ и въ B ровно 5 разъ, то въ той части отрѣзка A, которая равна $3B$, онъ содержится 15 разъ; слѣд., въ оставшейся части отрѣзка A, т.-е. въ R, онъ содержится 17—15, т.-е. 2 раза.

Такимъ образомъ у двухъ паръ отрѣзковъ:

$$\overbrace{A \text{ и } B} \qquad \overbrace{B \text{ и } R}$$

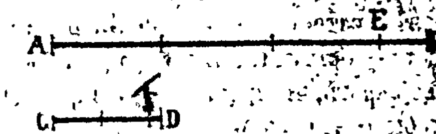
должны быть однѣ и тѣ же общія мѣры; поэтому и наибольшая общая мѣра у нихъ должна быть одна и та же.

Къ этимъ двумъ предложеніямъ надо еще добавить слѣдующій постулатъ Архимеда (аксіому измѣренія):

3°. Какъ бы великъ ни былъ бóльшій отрѣзокъ (A) и какъ бы малъ ни былъ меньшій отрѣзокъ (B), всегда, откладывая меньшій на бóльшемъ послѣдовательно 1, 2, 3 и т. д. раза, мы дойдемъ до того, что послѣ нѣкотораго m-аго отложенія или не получится никакого остатка, или получится остатокъ, меньшій меньшаго отрѣзка (B); другими словами, всегда можно найти столь большое цѣлое положительное число m, что $B.m>A$.

Примѣнимъ эти предложенія къ нахожденію наиб. общей мѣры данныхъ отрѣзковъ AB и CD (черт. 146). Для этого на

бóльшемъ отрѣзкѣ откладываемъ (помощью циркуля) меньшій столько разъ, сколько можно. Если CD уложится въ AB безъ остатка, то искомая мѣра, согласно предложенію 1-му, и есть CD; если же этого не произойдетъ (какъ у насъ на чертежѣ), то, согласно предложенію 2-му, вопросъ приведется къ нахожденію наиб. общей мѣры двухъ меньшихъ отрѣзковъ, именно CD и перваго остатка EB. Чтобы найти ее, поступаемъ



Черт. 146.

по предыдущему, т.-е. откладываемъ EB на CD столько разъ, сколько можно. Если EB уложится въ CD безъ остатка, то искомая мѣра и будетъ EB; если же этого не произойдетъ (какъ у насъ на чертежѣ), то вопросъ приведется къ нахожденію наиб. общей мѣры двухъ меньшихъ отрѣзковъ, именно EB и второго остатка FD. Если, продолжая этотъ пріемъ далѣе, мы дойдемъ до конца, т.-е. дойдемъ до того, что послѣ нѣкотораго отложенія уже не получится никакого остатка, то отрѣзокъ, который при этомъ откладывали (послѣдній изъ остатковъ), и будетъ искомая мѣра.

Чтобы удобнѣе вычислить, сколько разъ найденная общая наибольшая мѣра содержится въ данныхъ прямыхъ, выписываемъ рядъ равенствъ, получаемыхъ послѣ каждаго отложенія. Такъ, при нашемъ чертежѣ мы будемъ имѣть:

Послѣ 1-го отложенія . . . $AB=3\ CD+EB$
» 2-го » . . . $CD=2\ EB+FD$
» 3-го » . . . $EB=4\ FD$.

Переходя въ этихъ равенствахъ отъ нижняго къ верхнему, послѣдовательно находимъ:

$$EB=4\ FD;\ CD=(4\ FD).2+FD=9\ FD;$$
$$AB=(9\ FD).3+4\ FD=31\ FD.$$

Подобно этому можно находить наиб. общую мѣру двухъ дугъ одинаковаго радіуса, двухъ угловъ и т. п.

Замѣчаніе. Найдя наибольшую общую мѣру, мы можемъ затѣмъ получить сколько угодно другихъ меньшихъ общихъ мѣръ; стоитъ только брать $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_4$ и т. д. наибольшей мѣры.

154a. Въ предыдущемъ параграфѣ мы видѣли, что **если въ процессѣ послѣдовательнаго отложенія мы доходимъ до конца, то данные отрѣзки имѣютъ общую мѣру** (именно послѣдній изъ остатковъ). Но иногда случается (мы увидимъ сейчасъ этому примѣръ), что процессъ послѣдовательнаго отложенія не можетъ имѣть конца (все получаются остатки, хотя и уменьшающіеся); можемъ ли мы тогда утверждать, что данные отрѣзки не имѣютъ никакой общей мѣры? Чтобы отвѣтить на этотъ вопросъ, докажемъ слѣдующее

обратное предложеніе: **если данные отрѣзки** (AB и CD, черт. 146) **имѣютъ общую мѣру, то процессъ послѣдовательнаго отложенія, при достаточномъ его продолженіи, долженъ закончиться.**

Пусть AB и CD имѣютъ какую-нибудь общую мѣру. Мѣра эта, какъ мы видѣли, должна содержаться цѣлое число разъ не только въ AB и въ CD, но и въ остаткѣ EB, слѣдов., и во второмъ остаткѣ FD, и въ третьемъ, и въ четвертомъ, и т. д. Такъ какъ остатки эти идутъ, послѣдовательно уменьшаясь, то въ каждомъ изъ нихъ общая мѣра должна содержаться меньшее число разъ, чѣмъ въ предыдущемъ остаткѣ. Если, напр., въ EB общая мѣра содержится 100 разъ (вообще m разъ), то въ FD она содержится менѣе 100 разъ (значитъ, не болѣе 99 разъ); въ слѣдующемъ остаткѣ она должна содержаться менѣе 99 разъ (значитъ, не болѣе 98 разъ) и т. д. Такъ какъ рядъ цѣлыхъ положительныхъ чиселъ: 100, 99, 98... (и вообще: m, $m-1$, $m-2$...) долженъ имѣть конецъ (какъ бы велико ни было число m), то и процессъ послѣдовательнаго отложенія, при достаточномъ его продолженіи, долженъ дойти до конца (т. е. мы дойдемъ до того, что уже не получится никакого остатка).

Отсюда слѣдуетъ, что если когда либо мы убѣдимся, что послѣдовательное отложеніе, указанное нами, конца имѣть не можетъ, то имѣемъ право утверждать, что данные отрѣзки никакой общей мѣры не имѣютъ.

155. Соизмѣримыя и несоизмѣримыя длины.

Два отрѣзка прямой наз. **соизмѣримыми**, если

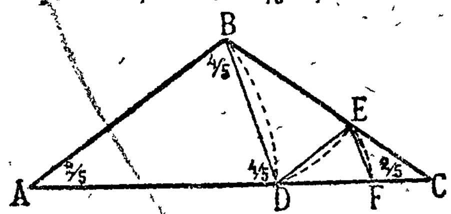
они имѣютъ общую мѣру, и **несоизмѣримыми**, когда такой мѣры не существуетъ.

На практикѣ нѣтъ возможности убѣдиться въ существованіи несоизмѣримыхъ отрѣзковъ, потому что, продолжая послѣдовательное отложеніе, мы всегда дойдемъ до столь малаго остатка, который въ предшествующемъ остаткѣ, **повидимому**, укладывается цѣлое число разъ. Быть можетъ, при этомъ и долженъ былъ бы получиться нѣкоторый остатокъ, но *по* причинѣ неточности инструментовъ (циркуля) и несовершенства нашихъ органовъ чувствъ (зрѣнія) мы не въ состояніи его замѣтить. Однако, можно доказать, что несоизмѣримые отрѣзки существуютъ. Приведемъ наиболѣе простой примѣръ такихъ отрѣзковъ.

156. Теорема. Если въ равнобедренномъ треугольникѣ уголъ при основаніи равенъ $^2/_5 d$, то боковая сторона его несоизмѣрима съ основаніемъ.

Пусть ABC равнобедренный тр-къ (черт. 147), у котораго каждый изъ угловъ A и C равенъ $^2/_5\, d$; требуется доказать, что боковая сторона AB несоизмѣрима съ основаніемъ AC.

Прежде всего опредѣлимъ, которая изъ этихъ сторонъ больше. Для этого достаточно сравнить углы, противъ которыхъ лежатъ эти стороны. Такъ какъ, по условію, $A=C={}^2/_5\, d$, то $B=2d-{}^2/_5 d-{}^2/_5 d={}^6/_5 d$; слѣд., $B>C$; поэтому $AC>AB$. Теперь найдемъ, сколько разъ въ AC можетъ уложиться AB. Такъ какъ $AC<AB+BC$ и $AB=BC$, то $AC<2AB$; значитъ, AB въ AC можетъ уложиться только **одинъ** разъ съ нѣкоторымъ остаткомъ.

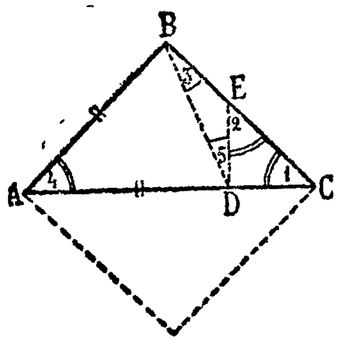


Черт. 147.

Такимъ образомъ, мы прежде всего замѣчаемъ слѣдующее свойство: если въ равнобедренномъ треугольникѣ уголъ при основаніи равенъ $^2/_5 d$, то боковая его сторона содержится въ основаніи только одинъ разъ и притомъ **съ нѣкоторымъ остаткомъ**.

Замѣтивъ это, приступимъ къ послѣдовательному отложенію. Отложимъ на AC часть AD, равную AB; тогда получимъ остатокъ DC, который надо накладывать на AB, или, что все равно, на BC. Чтобы узнать, сколько разъ DC уложится на BC, соединимъ B съ D и разсмотримъ $\triangle DBC$. Найдемъ его углы. Такъ какъ $\triangle ABD$ равнобедренный, то его углы ABD и ADB равны; слѣд., каждый изъ нихъ равенъ $\frac{1}{2}(2d—A)=\frac{1}{2}(2d—\frac{2}{5}d)=\frac{4}{5}d$. Но уголъ ABC, какъ мы прежде нашли, равенъ $\frac{6}{5}d$; слѣд., $\angle DBC=\frac{6}{5}d—\frac{4}{5}d=\frac{2}{5}d$. Такимъ образомъ, въ тр-кѣ DBC есть два равныхъ угла при BC; слѣд., онъ равнобедренный, причемъ каждый уголъ при его основаніи BC равенъ $\frac{2}{5}d$. Вслѣдствіе этого, по доказанному выше, боковая сторона его DC (или BD) уложится въ основаніи BC одинъ разъ съ нѣкоторымъ остаткомъ. Пусть этотъ остатокъ будетъ EC. Соединивъ E съ D, мы снова получимъ равнобедренный тр-къ CDE, въ которомъ каждый уголъ при основаніи CD равенъ $\frac{2}{5}d$. Отложивъ EC (или DE) на DC (отъ точки D), мы снова получимъ равнобедренный тр-къ CEF, у котораго каждый уголъ при основаніи CE равенъ $\frac{2}{5}d$.

Такимъ образомъ, мы постоянно будемъ приходить къ равнобедренному тр-ку (все меньшему и меньшему) съ углами при основаніи, равными $\frac{2}{5}d$; слѣд., мы никогда въ этомъ процессѣ не дойдемъ до конца. Значитъ, стороны AC и AB не могутъ имѣть общей мѣры (154, a).



Черт. 148.

157. Приведемъ еще слѣдующій примѣръ несоизмѣримыхъ отрѣзковъ прямой.

Теорема. Діагональ квадрата несоизмѣрима съ его стороною.

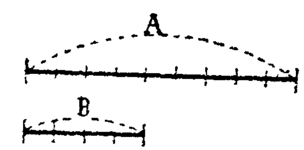
Такъ какъ діагональ квадрата раздѣляетъ его на два равнобедренныхъ прямоугольныхъ тр-ка, то теорему эту можно высказать иными словами такъ: **гипотенуза равнобедреннаго прямоугольнаго треугольника несоизмѣрима съ его катетомъ.**

Предварительно докажемъ слѣдующее свойство такого тр-ка: если на гипотенузѣ (черт. 148) отложимъ часть AD, равную катету и проведемъ $DE \perp AC$, то образовавшійся при этомъ прямоугольный тр-къ DEC будетъ равнобедренный, а отрѣзокъ BE катета BC окажется равнымъ отрѣзку DC гипотенузы. Чтобы убѣдиться въ этомъ, проведемъ прямую BD и разсмотримъ углы тр-ковъ DEC и BED. Такъ какъ тр-къ ABC равнобедренный и прямоугольный, то $\angle 1=\frac{1}{2}d$; вслѣдствіе этого $\angle 2$ также равенъ $\frac{1}{2}d$; значитъ, $\angle 1=\angle 2$ и потому $CD=DE$. Въ тр-кѣ BED уголъ 3 равенъ разности $ABC—\angle ABD$; но $\angle ABC=d$ и $\angle ABD=\frac{1}{2}(2d—\angle 4)=\frac{1}{2}(2d—\frac{1}{2}d)=\frac{3}{4}d$; слѣд. $\angle 3=d—\frac{3}{4}d=\frac{1}{4}d$. Равнымъ образомъ: $\angle 5=\angle ADE—\angle ADB=d—\frac{3}{4}d=\frac{1}{4}d$. Слѣд. $\angle 3=\angle 5$ и потому $BE=DE$; но $DE=CD$; значитъ, $BE=CD$.

Замѣтивъ это свойство, станемъ отыскивать наибольшую общую мѣру сторонъ AC и AB. Такъ какъ $AC<AB+BC$ т.-е. $AC<2AB$, то AB отложится на AC только 1 разъ, при чемъ получится нѣкоторый остатокъ $DC<AB$. Теперь надо этотъ остатокъ откладывать на AB или—что все равно—на BC. Для этого проведемъ $DE \perp AC$. Тогда, по доказанному, $BE=DC$ и слѣд., мы будемъ имѣть одно отложеніе остатка DC на катетѣ BC. Остается теперь откладывать DC отъ точки E къ C столько разъ, сколько можно. Но прямоугольный тр-къ DEC, какъ мы видѣли, есть равнобедренный; значитъ, процессъ нахожденія общей мѣры гипотенузы AC и катета AB даннаго равнобедреннаго тр-ка переходитъ теперь въ процессъ нахожденія общей мѣры гипотенузы EC и катета DC другого (меньшаго) равнобедреннаго тр-ка. Въ свою очередь, этотъ процессъ также сведется къ нахожденію общей мѣры гипотенузы и катета третьяго (еще меньшаго) равнобедреннаго тр-ка и т. д., безъ конца. Значитъ (154, a), діагональ квадрата и сторона его не могутъ имѣть общей мѣры.

158. Понятіе объ измѣреніи. Чтобы составить ясное представленіе о данной длинѣ, мы ее измѣряемъ при помощи другой, извѣстной намъ, длины, напр., посредствомъ метра. Эта извѣстная длина, съ которой мы сравниваемъ другія длины, наз. единицей длины.

При измѣреніи могутъ представиться два различныхъ случая: или измѣряемая длина соизмѣрима съ единицей, или несоизмѣрима съ ней.



Черт. 149.

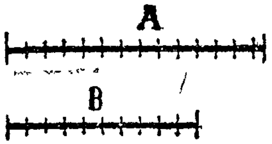
1°. Измѣрить длину, соизмѣримую съ единицей, значитъ узнать, сколько разъ въ ней содержится единица или какая-нибудь доля единицы.

Пусть, напр., надо измѣрить (черт. 149) длину отрѣзка прямой A при помощи единицы B, соизмѣримой съ A. Тогда находятъ ихъ общую мѣру и узнаютъ, сколько разъ она содержится въ B и A. Если общей мѣрой окажется сама единица B, то результатъ измѣренія выразится цѣлымъ числомъ; такъ, когда B содержится въ A три раза, то длина A равна 3 един. Если же общей мѣрой будетъ нѣкоторая доля B, то результатъ измѣренія выразится дробнымъ числомъ; такъ, если общая мѣра есть $^1/_4$ доля B и она содержится въ A девять разъ (какъ изображено на черт. 149), то длина A равна $^9/_4$ единицы.

Число, получившееся послѣ измѣренія длины A, наз. мѣрою этой длины; о немъ принято говорить, что оно измѣряетъ длину A въ единицѣ B. Числа цѣлыя и дробныя наз. раціональными (или соизмѣримыми) числами.

2°. Когда измѣряемая длина A несоизмѣрима съ единицею длины B, тогда при помощи раціональныхъ чиселъ мы не можетъ получить точнаго результата измѣренія. Дѣйствительно, если предположимъ, что мы нашли точную мѣру длины A, напр., нашли, что $A=B.^m/_n$, то это значило бы, что $^1/_n$ доля B содержится въ A ровно m разъ; тогда, значитъ, эта доля была бы общею мѣрою A и B, тогда какъ мы разсматриваемъ случай, когда эти длины несоизмѣримы.

Въ этомъ случаѣ при помощи раціональныхъ чиселъ мы можемъ находить только приближенные результаты измѣренія, но съ какою угодно степенью точности. Пусть, напр., мы желаемъ найти приближенную мѣру длины A съ точностью до $^1/_{10}$. Это значитъ, что мы желаемъ найти число, которое измѣряло бы нѣкоторую соизмѣримую длину, различающуюся отъ данной несоизмѣримой длины A менѣе, чѣмъ на $^1/_{10}$ долю единицы B. Для этого дѣлимъ единицу B на 10 равныхъ частей и одну такую долю укладываемъ на A столько разъ, сколько можно. Пусть окажется, что $^1/_{10}$ B содержится въ A 13 разъ (черт. 150), при чемъ получается остатокъ, меньшій $^1/_{10}$ B. Тогда каждое изъ чиселъ: $^{13}/_{10}$ и $^{14}/_{10}$



Черт. 150.

можно принять, какъ приближенную мѣру длины A, при чемъ первое число будетъ съ недостаткомъ (такъ, какъ $^{13}/_{10}$ $B<A$), а второе—съ избыткомъ (такъ какъ $^{14}/_{10}$ $B>A$).

Вообще, чтобы найти приближенныя мѣры длины A съ точностью до $^1/_n$ единицы, дѣлятъ единицу B на n равныхъ частей и узнаютъ, сколько разъ $^1/_n$ доля единицы содержится въ A; если она содержится болѣе m разъ, но менѣе $m+1$ разъ *), то числа $^m/_n$ и $^{m+1}/_n$ будутъ приближенныя мѣры A съ точностью до $^1/_n$, первое—съ недостаткомъ, второе—съ избыткомъ.

Замѣтимъ, что этимъ путемъ мы можемъ находить приближенные результаты измѣренія и тогда, когда измѣряемая длина A соизмѣрима съ единицей B; только въ этомъ случаѣ мы, если пожелаемъ, можемъ найти также и точный результатъ, тогда какъ въ случаѣ несоизмѣримости такого результата при помощи однихъ раціональныхъ чиселъ мы получить не можемъ.

За точную мѣру несоизмѣримой длины A принимаютъ нѣкоторое ирраціональное (несоизмѣримое) число, которое считается бо́льшимъ всякаго раціональнаго числа, выражающаго приближенныя мѣры длины A съ недостаткомъ, и меньшимъ всякаго раціональнаго числа, выражающаго приближенныя мѣры длины A съ избыткомъ.

Сказанное объ измѣреніи длины прямой примѣнимо къ измѣренію всякой иной величины, напр., дуги, угла и пр.

159. Отношеніе. Отношеніемъ одного отрѣзка прямой (A) къ другому отрѣзку прямой (B) наз. число, измѣряющее первый отрѣзокъ (A), когда второй (B) принятъ за единицу.

Такъ, если отношеніе A къ B есть число $2^3/_4$, то это значитъ, что число $2^3/_4$ измѣряетъ отрѣзокъ A, когда отрѣзокъ B принятъ за единицу (другими словами — это значитъ, что B содержится въ A 2 раза, при чемъ получается остатокъ, равный $^3/_4$ B).

Можно также сказать, что отношеніемъ одного отрѣзка прямой къ другому наз. число, на которое надо умножить второй отрѣзокъ, чтобы получить первый.

---

*) Что всегда возможно, согласно постулату Архимеда (§ 154, 3°).

Такъ, если отношеніе A къ B есть число $2^3/_4$, то это значитъ, что $A=B\,.\,2^3/_4$, т.-е. что A получится, если B повторимъ слагаемымъ 2 раза и къ суммѣ еще добавимъ $^3/_4\,B$.

Если разсматривается отношеніе отрѣзка A къ отрѣзку B, то A наз. *предыдущимъ* членомъ, а B *послѣдующимъ* членомъ.

Изъ опредѣленія слѣдуетъ, что нахожденіе отношенія отрѣзковъ A и B сводится къ измѣренію A, когда отрѣзокъ B принятъ за единицу. Поэтому мы можемъ здѣсь повторить все то, что раньше (158) говорили объ измѣреніи, а именно:

Если отрѣзки A и B соизмѣримы, то отношеніе ихъ есть раціональное число, цѣлое или дробное; если же эти отрѣзки несоизмѣримы, то ихъ отношеніе выражается ирраціональнымъ числомъ, которое при помощи раціональныхъ чиселъ может быть выражено только приближенно, но съ какою угодно степенью точности. Такъ, если хотятъ найти отношеніе A къ B съ точностью до $^1/_{10}$, то дѣлятъ B на 10 равныхъ частей (черт. 150) и узнаютъ наибольшее содержаніе $^1/_{10}\,B$ въ A; если окажется, напр., что $^1/_{10}\,B$ содержится въ A болѣе 13, но менѣе 14 разъ, то числа $^{13}/_{10}$ и $^{14}/_{10}$ будутъ *приближенныя значенія* отношенія A къ B съ точностью до $^1/_{10}$, первое—съ недостаткомъ, а второе—съ избыткомъ.

Два отношенія считаются *равными*, если они представляютъ собою одно и то же число; такъ, если отношеніе A къ B равно $^9/_4$ и отношеніе A_1 къ B_1 также равно $^9/_4$, то эти отношенія равны между собою.

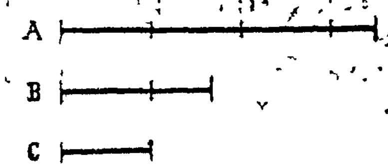
Въ случаѣ ирраціональныхъ отношеній равенство между ними узнается по слѣдующему признаку:

два ирраціональныя отношенія равны, если ихъ приближенныя раціональныя значенія, взятыя оба съ недостаткомъ, или оба съ избыткомъ, и вычисленныя съ одинаковою точностью, равны между собой при всякой степени точности *).

*) Какъ извѣстно изъ алгебры (см. напр., § 200 *Элем. алгебры* А. Киселева), этотъ признакъ есть признакъ равенства ирраціональныхъ чиселъ.

Сказанное объ отношеніи двухъ отрѣзковъ прямой можно повторить объ отношеніи двухъ угловъ, двухъ дугъ одинаковаго радіуса и вообще объ отношеніи двухъ значеній любой величины, доступной измѣренію.

160₁. Свойство отношеній. Если отрѣзки A и B (черт. 151) измѣрены при помощи одной и той же единицы C, то *отношеніе A къ B равно частному отъ дѣленія числа, измѣряющаго A, на число, измѣряющее B*. Пусть, напр., отъ измѣренія отрѣзка A единицею C получилось число $^7/_2$, а отъ измѣренія B тою же единицею C получилось число $^5/_3$. Тогда по опредѣленію отношенія мы можемъ написать:



Черт. 151.

$$A=C\cdot\frac{7}{2}=\frac{7}{2}C;\qquad B=C\cdot\frac{5}{3}=\frac{5}{3}C.$$

Чтобы найти теперь отношеніе A къ B, достаточно узнать, на какое число слѣдуетъ умножить $^5/_3\,C$, чтобы получить $^7/_2\,C$, или—что все равно—на какое число надо умножить $^5/_3$ (какой-нибудь единицы), чтобы получить $^7/_2$ (той же единицы). Такое число находится дѣленіемъ (согласно опредѣленію этого дѣйствія); значитъ:

$$\text{отношеніе } A \text{ къ } B=\frac{7}{2}:\frac{5}{3}=\frac{21}{10}=2\,\frac{1}{10}.$$

Вообще, если, измѣривъ отрѣзки A и B при помощи одной и той же единицы C, мы получимъ для A число m, а для B число n, то, повторивъ предыдущія разсужденія, найдемъ (каковы бы ни были числа m и n):

$$\text{отношеніе } A \text{ къ } B=m:n.$$

Вслѣдствіе этого отношеніе A къ B принято обозначать помощью знаковъ дѣленія, а именно такъ:

$$A : B \text{ или } \frac{A}{B}.$$

Здѣсь подъ буквами A и B, согласно указанному сейчасъ свойству отношенія, можно разумѣть и ч и с л а, измѣряющія отрѣзки A и B въ какой-нибудь одной и той же единицѣ C.

160_2. Пропорція. Какъ извѣстно изъ ариѳметики, пропорціей наз. равенство, выражающее, что одно отношеніе равно другому отношенію. Если, напр., извѣстно, что отношеніе двухъ отрѣзковъ A и B равно отношенію двухъ другихъ отрѣзковъ A_1 и B_1, то можно написать пропорцію:

$$A : B = A_1 : B_1,$$

$$\text{или } \frac{A}{B} = \frac{A_1}{B_1}.$$

Когда отрѣзки A, B, A_1 и B_1 измѣрены при помощи одной и той же единицы, то каждое изъ двухъ отношеній, составляющихъ пропорцію, можно замѣнить отношеніемъ чиселъ, измѣряющихъ отрѣзки. Послѣ замѣны получится ч и с л о в а я п р о п о р ц і я, обладающая всѣми тѣми свойствами числовыхъ пропорцій, которыя были указаны въ ариѳметикѣ и алгебрѣ; напр.:

въ пропорціи произведеніе крайнихъ членовъ равно произведенію среднихъ;

въ пропорціи можно переставить средніе члены, крайніе члены и средніе съ крайними;

если въ пропорціи предыдущіе члены равны, то равны и послѣдующіе члены;

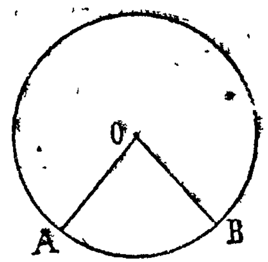
если въ пропорціи послѣдующіе члены равны, то равны и предыдущіе; и т. п.

ГЛАВА VII.

Измѣреніе угловъ помощью дугъ.

Центральный уголъ.

161. Опредѣленіе. Уголъ (AOB, черт. 152), образованный двумя радіусами, наз. ц е н т р а л ь н ы м ъ угломъ; о такомъ углѣ и дугѣ, заключенной между его сторонами, говорятъ, что они с о о т в ѣ т с т в у ю т ъ другъ другу.



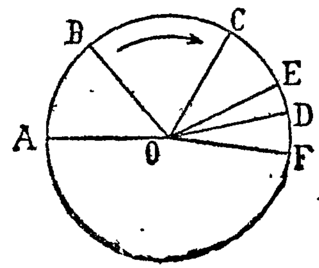
Черт. 152.

162. Теорема. Въ одномъ кругѣ или въ равныхъ кругахъ:

1°, если центральные углы равны, то и соотвѣтствующія имъ дуги равны;

2°, если центральные углы не равны, то бо́льшему изъ нихъ соотвѣтствуетъ бо́льшая дуга.

Пусть (черт. 153) AOB и COD два центральные угла, равные или неравные. Повернемъ секторъ AOB вокругъ центра въ направленіи, указанномъ стрѣлкою, настолько, чтобы радіусъ OA совмѣстился съ OC. Тогда: 1°, если центральные углы равны, то радіусъ OB совпадаетъ съ OD и, слѣд., дуга AB совмѣстится съ дугою CD; значитъ, эти дуги будутъ равны; 2°, если же центральные углы неравны, то радіусъ OB пойдетъ не по OD, а по какому-нибудь иному направленію, напр., по OE или по OF; въ томъ и въ другомъ случаяхъ бо́льшему углу, очевидно, соотвѣтствуетъ бо́льшая дуга.



Черт. 153.

Теорема, доказанная нами для одного круга, остается вѣрною для равныхъ круговъ, потому что такіе круги ничѣмъ, кромѣ своего положенія, другъ отъ друга не отличаются.

163. Обратныя теоремы: Такъ какъ различные взаимно исключающіе случаи относительно равенства и неравенства двухъ центральныхъ угловъ сопровождаются взаимно исключающими выводами относительно равенства и неравенства соотвѣтствующихъ дугъ, то обратныя предложенія должны быть вѣрны (51), а именно:

Въ одномъ кругѣ или въ равныхъ кругахъ:

1°, если дуги равны, то и соотвѣтствующіе имъ центральные углы равны;

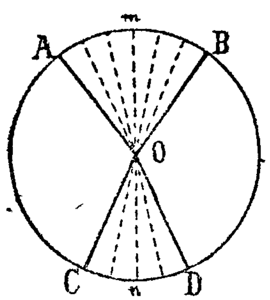
2°, если дуги не равны, то бо́льшей изъ нихъ соотвѣтствуетъ бо́льшій центральный уголъ.

Доказательство отъ противнаго (или наложеніемъ) предоставляемъ самимъ учащимся.

164. Теорема. Въ одномъ кругѣ или въ равныхъ кругахъ центральные углы относятся, какъ соотвѣтствующія имъ дуги.

Пусть (черт. 154) AOB и COD два центральные угла; требуется доказать, что

$$\angle AOB : \angle COD = \smile AB : \smile CD.$$



Черт. 154.

1°. Допустимъ сначала, что дуги AB и CD соизмѣримы, т.-е. что онѣ имѣютъ общую мѣру. Положимъ, что эта общая мѣра содержится m разъ въ дугѣ AB и n разъ въ CD; тогда

$$\smile AB : \smile CD = m : n \qquad [1].$$

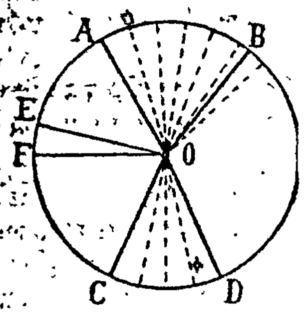
Соединивъ точки дѣленія дугъ съ центромъ, мы раздѣлимъ центральные углы на равныя части (потому что равнымъ дугамъ соотвѣтствуютъ равные центральные углы). Такъ какъ этихъ частей будетъ m въ углѣ AOB и n въ углѣ COD, то

$$\angle AOB : \angle COD = m : n \qquad [2].$$

Сравнивая пропорціи [1] и [2], замѣчаемъ, что вторыя отношенія у нихъ равны; слѣд., равны и первыя отношенія, т.-е.

$$\angle AOB : \angle COD = \smile AB : \smile CD.$$

2°. Предположимъ теперь, что (черт. 155) дуги AB и CD несоизмѣримы. Тогда и соотвѣтствующіе имъ центральные углы будутъ также несоизмѣримы. Дѣйствительно, если бы эти углы имѣли какую-нибудь общую мѣру, напр., уголъ EOF, то это значило бы, что этотъ уголъ содержится цѣлое число разъ какъ въ углѣ AOB, такъ и въ углѣ COD; но тогда дуга EF содержалась бы цѣлое число разъ какъ въ дугѣ AB, такъ и въ дугѣ CD, и, значитъ, дуги эти имѣли бы общую мѣру, именно дугу EF, что противорѣчитъ предположенію. Такимъ образомъ, въ разсматриваемомъ случаѣ и отношеніе угловъ, и отношеніе дугъ оба числа ирраціональныя. Чтобы доказать равенство двухъ ирраціональныхъ отношеній, достаточно доказать равенство ихъ приближенныхъ раціональныхъ значеній, вычисленныхъ съ произвольною, но одинаковою точностью (159). Найдемъ приближенное значеніе отношенія дугъ AB и CD съ точностью до $1/_n$. Для этого раздѣлимъ CD на n равныхъ частей и одну часть отложимъ на AB столько разъ, сколько можно. Пусть $1/_n$ доля CD содержится въ AB болѣе m разъ, но менѣе $m+1$ разъ; тогда



Черт. 155.

$$\text{прибл. отношеніе } \frac{\smile AB}{\smile CD} = \frac{m}{n} \text{ (съ нед.).}$$

Соединивъ точки дѣленія дугъ съ центромъ, мы раздѣлимъ уголъ COD на n такихъ равныхъ частей, какихъ въ углѣ AOB содержится болѣе m, но менѣе $m+1$; слѣд.:

$$\text{прибл. отношеніе } \frac{\angle AOB}{\angle COD} = \frac{m}{n} \text{ (съ нед.).}$$

Сравнивая приближенныя отношенія угловъ и дугъ, видимъ, что они равны при всякомъ n; а такія ирраціональныя отношенія равны другъ другу.

165. Пропорціональныя величины. Двѣ зависящія другъ отъ друга величины наз. **пропорціональными**, если зависимость между ними состоитъ въ слѣдующемъ:

1°, каждому значенію одной величины соотвѣтствуетъ нѣкоторое значеніе другой величины и притомъ только одно;

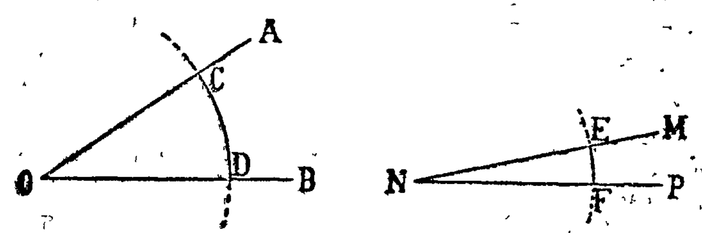
2°, отношеніе двухъ какихъ бы то ни было значеній одной величины равно отношенію соотвѣтствующихъ значеній другой величины.

Изъ предыдущихъ теоремъ слѣдуетъ, что **центральный уголъ пропорціоналенъ соотвѣтствующей ему дугѣ.**

166. Измѣреніе угловъ. Измѣреніе угловъ сводится на измѣреніе соотвѣтствующихъ имъ дугъ слѣдующимъ образомъ.

За единицу угловъ берутъ уголъ, составляющій $^1/_{90}$ часть прямого угла; эту единицу называютъ **угловымъ градусомъ.**

За единицу дугъ одинаковаго радіуса берутъ такую дугу того же радіуса, которая соотвѣтствуетъ центральному углу,



Черт. 156.

равному угловому градусу. Такая дуга наз. **дуговымъ градусомъ.** Такъ какъ прямому центральному углу соотвѣтствуетъ $^1/_4$ окружности, то угловому градусу соотвѣтствуетъ $^1/_{90}$ четверти окружности; значитъ, дуговой градусъ есть $^1/_{360}$ цѣлой окружности.

Пусть требуется (черт. 156) измѣрить какой-нибудь уголъ AOB, т.-е. найти отношеніе этого угла къ угловому градусу. Пусть этотъ градусъ будетъ уголъ MNP. Опишемъ изъ вершинъ угловъ произвольнымъ, но одинаковымъ, радіусомъ дуги CD и EF. Тогда углы AOB и MNP можно разсматривать, какъ углы центральные по отношенію къ тѣмъ равнымъ окружностямъ, которымъ принадлежатъ дуги CD и EF. Вслѣдствіе этого (164):

$$\frac{\angle AOB}{\angle MNP}=\frac{\smile CD}{\smile EF}.$$

Лѣвое отношеніе этой пропорціи есть число, измѣряющее уголъ AOB въ угловыхъ градусахъ (153); правое отношеніе есть число, измѣряющее дугу CD въ дуговыхъ градусахъ. Слѣд., эту пропорцію можно высказать такъ:

число, измѣряющее центральный уголъ въ угловыхъ градусахъ, равно числу, измѣряющему соотвѣтствующую дугу въ дуговыхъ градусахъ.

Для краткости эту фразу выражаютъ обыкновенно такъ:

уголъ измѣряется соотвѣтствующей ему дугой.

При этомъ безразлично, какъ великъ взятый радіусъ дугъ EF и CD, лишь бы только онѣ были одинаковы для обѣихъ этихъ дугъ (только при этомъ условіи углы пропорціональны дугамъ).

167. Подраздѣленіе градусовъ. Градусы угла или дуги подраздѣляются на 60 равныхъ частей, называемыхъ **минутами** (угловыми или дуговыми); минуту раздѣляютъ на 60 равныхъ частей, называемыхъ **секундами** (угловыми или дуговыми).

Изъ сказаннаго въ предыдущемъ параграфѣ слѣдуетъ, что въ углѣ содержится столько угловыхъ градусовъ, минутъ и секундъ, сколько въ соотвѣтствующей ему дугѣ заключается дуговыхъ градусовъ, минутъ и секундъ. Если, напр., въ дугѣ CD (черт. 156) содержится 40 град. 25 мин. 13 секундъ (дуговыхъ); то и въ углѣ AOB заключается 40 град. 25 мин. 13 сек. (угловыхъ), это выражаютъ сокращенно такъ:

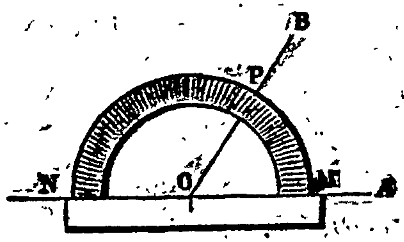
$$AOB=40°25'13'',$$

обозначая значками (°), (′) и (″) соотвѣтственно градусы, минуты и секунды *).

168. Транспортиръ. Этотъ приборъ (черт. 157), употребляемый для измѣренія угловъ, представляетъ собою полукругъ, котораго дуга раздѣлена на 180 градусовъ. Чтобы измѣрить уголъ AOB, накладываютъ на него приборъ такъ,

*) Употребительна также **сотенная** система мѣръ угловъ и дугъ; по этой системѣ за градусъ дуги принимаютъ $^1/_{100}$ четверти окружности (и, слѣд., за градусъ угла берутъ $^1/_{100}$ прямого угла); минуту принимаютъ равной $^1/_{100}$ градуса; секунду — $^1/_{100}$ минуты.

чтобы центръ полукруга совпадалъ съ вершиною угла, а радіусъ OM совпадалъ со стороною AO. Тогда число градусовъ, содержащееся въ дугѣ, заключенной между сторонами угла AOB, покажетъ величину его. При помощи транспортира можно также начертить уголъ, содержащій данное число градусовъ.



Черт. 157.

Конечно, на такомъ приборѣ нѣтъ возможности отсчитывать не только секунды, но и минуты; измѣреніе и построеніе можно выполнять только приблизительно.

169. Выраженіе нѣкоторыхъ угловъ въ градусахъ. Такъ какъ прямой уголъ содержитъ 90°, то:

1°, сумма угловъ всякаго тр-ка равна 180°;

2°, сумма острыхъ угловъ прямоугольнаго тр-ка равна 90°;

3°, каждый уголъ равносторонняго тр-ка равенъ 60°;

4°, сумма угловъ выпуклаго мн-ка (89), имѣющаго n сторонъ, равна 180° $(n-2)$;

5°, сумма внѣшнихъ угловъ выпуклаго мн-ка (90) равна 360°.

Вписанный уголъ.

170. Опредѣленіе. Уголъ, образованный двумя хордами, исходящими изъ одной точки окружности, наз. в п и с а н н ы м ъ угломъ. Таковъ, напр., уголъ ABC (черт. 159). О вписанномъ углѣ принято говорить, что онъ о п и р а е т с я на дугу, заключенную между его сторонами. Такъ, уголъ ABC (черт. 159) опирается на дугу ADC.

171. Теорема. Вписанный уголъ измѣряется половиною дуги, на которую онъ опирается.

Эту теорему надо понимать такъ: вписанный уголъ содержитъ въ себѣ столько угловыхъ градусовъ, минутъ и секундъ, сколько дуговыхъ градусовъ, минутъ и секундъ заключается въ половинѣ дуги, на которую онъ опирается.

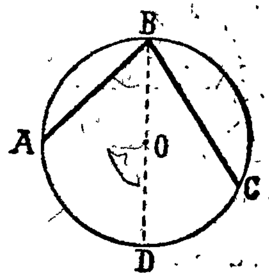
При доказательствѣ теоремы разсмотримъ особо три случая:

1°. Центръ O (черт. 158) лежитъ н а с т о р о н ѣ вписаннаго угла ABC. Проведя радіусъ AO, мы получимъ $\triangle ABO$, въ которомъ $OA=OB$ (какъ радіусы) и, слѣд., $\angle ABO=\angle BAO$. По отношенію къ этому тр-ку уголъ AOC есть внѣшній, поэтому онъ равенъ суммѣ угловъ ABO и BAO, или равенъ двойному углу ABO; значитъ, уголъ ABO равенъ п о л о в и н ѣ центральнаго угла AOC. Но уголъ AOC измѣряется дугою AC, т.-е. онъ содержитъ въ себѣ столько угловыхъ градусовъ, минутъ и секундъ, сколько дуговыхъ градусовъ, минутъ и секундъ содержится въ дугѣ AC; слѣд., вписанный уголъ ABC измѣряется половиною дуги AC.

Черт. 158.

2°. Центръ O лежитъ м е ж д у с т о р о н а м и вписаннаго угла ABC (черт. 159).

Проведя діаметръ BD, мы раздѣлимъ уголъ ABC на два угла, изъ которыхъ, по доказанному въ первомъ случаѣ, одинъ измѣряется половиною дуги AD, а другой—половиною дуги CD; слѣд., уголъ ABC измѣряется суммою $^1/_2AD+{}^1/_2DC$; а эта сумма равна $^1/_2(AD+DC)$, т.-е. $^1/_2AC$.



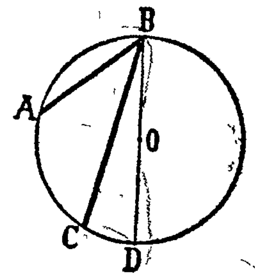
Черт. 159.

3°. Центръ O лежитъ в н ѣ в п и с а н н а г о у г л а ABC (черт. 160).

Проведя діаметръ BD, мы будемъ имѣть:

$$\angle ABC=\angle ABD-\angle CBD.$$

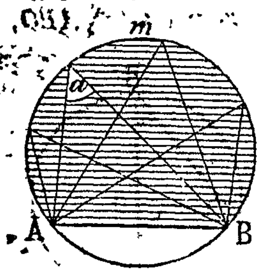
Но углы ABD и CBD измѣряются, по доказанному, половинами дугъ AD и CD; слѣд., уголъ ABC измѣряется разностью $^1/_2AD-{}^1/_2CD$, а эта разность равна $^1/_2(AD-CD)$, т.-е. $^1/_2AC$.



Черт. 160.

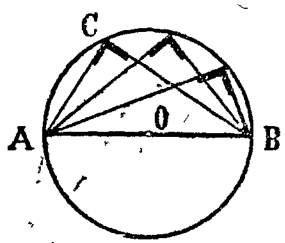
ABC = ½ CA+

172. Слѣдствіе 1-е. Всѣ вписанные углы, опирающіеся на одну и ту же дугу, равны между собою (черт. 161), потому что каждый изъ нихъ измѣряется половиною одной и той же дуги. Если величину одного изъ такихъ угловъ обозначимъ a, то можно сказать, что сегментъ AmB (покрытый на чертежѣ штрихами) в м ѣ щ а е т ъ в ъ с е б ѣ у г о л ъ, р а в н ы й a.

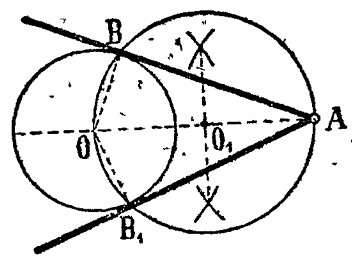


Черт. 161.

173. Слѣдствіе 2-е. Всякій вписанный уголъ, опирающійся на діаметръ, есть прямой (черт. 162), потому что каждый такой уголъ измѣряется половиною полуокружности и, слѣд., содержитъ 90°.



Черт. 162.



Черт. 163.

174. Задача. П о с т р о и т ь п р я м о у г о л ь н ы й т р е у г о л ь н и к ъ п о г и п о т е н у з ѣ AB и к а т е т у AC (черт. 162).

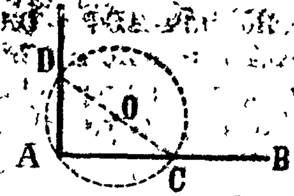
На гипотенузѣ AB, какъ на діаметрѣ, описываемъ полуокружность и изъ конца A проводимъ хорду AC, равную данному катету. Тр-никъ ACB будетъ искомый (173).

Это построеніе можно, между прочимъ, примѣнить въ томъ случаѣ, когда (черт. 163) черезъ данную точку A требуется п р о в е с т и к а с а т е л ь н у ю к ъ д а н н о й о к р у ж н о с т и O (см. § 139). Соединивъ A съ центромъ O, дѣлимъ отрѣзокъ AO пополамъ и изъ полученной середины O_1 описываемъ окружность радіусомъ O_1O; черезъ A и точки B и B_1, въ которыхъ эта окружность пересѣкается съ данною окружностью, проводимъ прямыя AB и AB_1. Эти прямыя и будутъ касательными (137, 1°),

такъ какъ углы OBA и OB_1A (вписанные во вспомогательную окружность и опирающіеся на ея діаметръ) — прямые и, значитъ, $AB \perp OB$ и $AB_1 \perp OB_1$.

175. Задача. И з ъ к о н ц а A (черт. 164) д а н н о й п р я м о й AB, н е п р о д о л ж а я е я, в о с с т а в и т ь к ъ н е й п е р п е н д и к у л я р ъ.

Взявъ внѣ прямой произвольную точку O, опишемъ изъ нея окружность радіусомъ, равнымъ разстоянію между точками O и A; черезъ точку C, въ которой эта окружность пересѣкается съ прямой AB, проведемъ діаметръ CD и черезъ конецъ его D и точку A проведемъ прямую. Эта прямая и есть искомый перпендикуляръ, потому что уголъ A прямой, такъ какъ онъ вписанный и опирается на діаметръ.

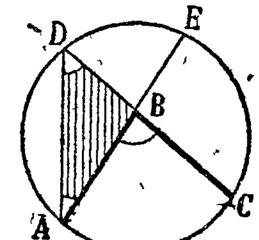


Черт. 164.

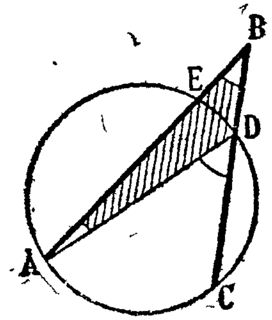
Уголъ, котораго вершина лежитъ внутри или внѣ круга.

176. Теоремы. 1°. **Уголъ** (ABC, черт. 165), **вершина котораго лежитъ внутри круга, измѣряется полусуммою двухъ дугъ** (AC и DE), **изъ которыхъ одна заключена между его сторонами, а другая—между продолженіями сторонъ.**

2°. **Уголъ** (ABC, черт. 166), **вершина котораго лежитъ внѣ круга и стороны пересѣкаются съ окружностью, измѣряется полуразностью двухъ дугъ** (AC и ED), **заключенныхъ между его сторонами.**



Черт. 165.



Черт. 166.

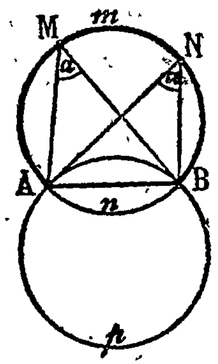
Проведя хорду AD (на томъ и на другомъ чертежахъ), мы получимъ тр-къ ABD (покрытый штрихами), относительно которого рассматриваемый уголъ ABC служитъ внѣшнимъ, когда его вершина лежитъ внутри круга (черт. 165), и внутреннимъ, когда его вершина лежитъ внѣ круга (черт. 166). Поэтому

въ первомъ случаѣ: $\angle ABC = \angle ADC + \angle DAE$;

во второмъ случаѣ: $\angle ABC = \angle ADC - \angle DAE$.

Но углы ADC и DAE, какъ вписанные, измѣряются половинами дугъ AC и DE; поэтому уголъ ABC измѣряется: въ первомъ случаѣ суммою ${}^1/_2 AC + {}^1/_2 DE$, которая равна ${}^1/_2(AC+DE)$, а во второмъ случаѣ разностью ${}^1/_2 AC - {}^1/_2 DE$, которая равна ${}^1/_2(AC-DE)$.

177. Слѣдствіе. Геометрическое мѣсто точекъ, изъ которыхъ данный отрѣзокъ прямой виденъ подъ даннымъ угломъ a, и которыя расположены по одну сторону отъ этого отрѣзка, есть дуга сегмента, вмѣщающаго уголъ a и построеннаго на данномъ отрѣзкѣ.



Черт. 167.

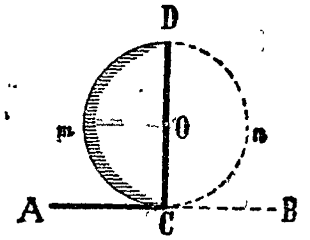
Пусть M (черт. 167), будетъ одна изъ точекъ, изъ которыхъ данный отрѣзокъ AB виденъ подъ угломъ a, т.-е. допустимъ, что прямыя MA и MB образуютъ уголъ a. Проведемъ черезъ три точки A, M и B окружность. Тогда часть этой окружности, именно дуга AmB, будетъ искомымъ геометрическимъ мѣстомъ. Дѣйствительно, изъ каждой точки этой дуги прямая AB видна подъ угломъ a, потому что всѣ вписанные углы, опирающіеся на AB, равны углу AMB, который есть a. Обратно: всякая точка, напр., N, изъ которой прямая AB видна подъ угломъ a и которая расположена по ту же сторону отъ AB, какъ и точка M, должна находиться на дугѣ сегмента AmB, потому что, если бы такая точка лежала внутри или внѣ этого сегмента, то уголъ ANB не измѣрялся бы половиною дуги AnB (176, 1° и 2°) и, слѣд., не былъ бы равенъ a.

По другую сторону отъ AB существуютъ также точки, изъ которыхъ эта прямая видна подъ угломъ a; онѣ расположены

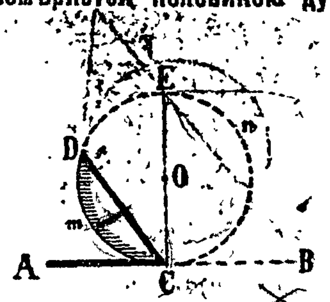
на дугѣ сегмента ApB, равнаго сегменту AmB, но расположеннаго по противоположную сторону отъ AB, [illegible]

Уголъ, котораго одна или обѣ стороны касаются окружности.

178. Теорема. Уголъ (ACD, чертежи 168 и 169), составленный касательной и хордой, измѣряется половиною дуги, заключенной внутри его.



Черт. 168.



Черт. 169.

Предположимъ сначала, что хорда CD проходитъ черезъ центръ O, т.-е. что эта хорда есть діаметръ (черт. 168). Тогда уголъ ACD—прямой (137, 2°) и, слѣд., равенъ 90°. Но и половина дуги CmD также равна 90°, такъ какъ цѣлая дуга CmD, составляя полуокружность, содержитъ 180°. Значитъ, теорема оправдывается въ этомъ частномъ случаѣ.

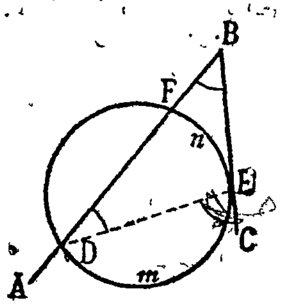
Теперь возьмемъ общій случай (черт. 169), когда хорда CD не проходитъ черезъ центръ. Проведя тогда діаметръ CE, мы будемъ имѣть:

$$\angle ACD = \angle ACE - \angle DCE.$$

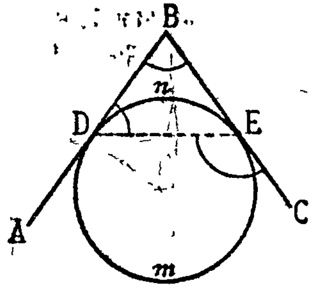
Уголъ ACE, какъ составленный касательною и діаметромъ, измѣряется, по доказанному, половиною дуги CmE; уголъ DCE, какъ вписанный, измѣряется половиною дуги DE; слѣд., уголъ ACD измѣряется разностью ${}^1/_2 CmE - {}^1/_2 DE$, т.-е. половиною дуги CmD.

Подобнымъ же образомъ можно доказать, что тупой уголъ BCD (черт. 169), также составленный касательною и хордой, измѣряется половиною дуги $CnED$; разница въ доказательствѣ только та, что этотъ уголъ надо разсматривать не какъ разность, а какъ сумму прямого угла BCE и остраго ECD.

179. Теорема. Уголъ (ABC, черт. 170), составленный касательной и сѣкущей, а также и уголъ (ABC, черт. 171), составленный двумя касательными, измѣряется полуразностью двухъ дугъ, заключенныхъ между его сторонами.



Черт. 170.



Черт. 171.

Проведя (на томъ и на другомъ чертежахъ) хорду DE, мы получимъ $\triangle BDE$, относительно котораго уголъ CED есть внѣшній; слѣд.,

$$\angle B = \angle CED - \angle BDE.$$

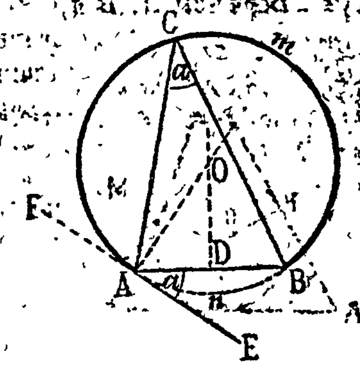
Но углы CED и BDE, по доказанному раньше, измѣряются половинами дугъ EmD и EnF на первомъ чертежѣ и половинами дугъ EmD и EnD на второмъ чертежѣ; поэтому уголъ B измѣряется полуразностью этихъ дугъ.

180. Задача. На данномъ отрѣзкѣ прямой AB построить сегментъ, вмѣщающій данный уголъ a (черт. 172).

Анализъ. Предположимъ, что задача рѣшена; пусть сегментъ AmB будетъ такой, который вмѣщаетъ въ себѣ уголъ a, т.-е. такой, что всякій вписанный въ немъ уголъ ACB равенъ a. Проведемъ вспомогательную прямую EF, касательную къ окружности въ точкѣ A. Тогда уголъ BAE, составленный касательною и хордою, долженъ равняться вписанному углу ACB, такъ какъ и тотъ, и другой уголъ измѣряются половиною дуги AnB. Примемъ теперь во вниманіе, что центръ O окружности

долженъ лежать на перпендикулярѣ DO, проведенномъ къ отрѣзку AB черезъ его середину, и въ то же время онъ долженъ лежать и на перпендикулярѣ AO, возставленномъ къ касательной AE изъ точки касанія. Отсюда выводимъ слѣдующее построеніе.

Построеніе. При концѣ отрѣзка AB строимъ уголъ BAE, равный углу a; черезъ середину AB проводимъ перпендикуляръ DO и изъ точки A возставляемъ перпендикуляръ къ AE. Пересѣченіе O этихъ двухъ перпендикуляровъ принимаемъ за центръ и радіусомъ OA описываемъ окружность.



Черт. 172.

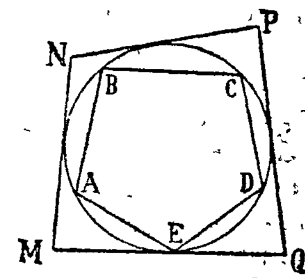
Доказательство. Сегментъ AmB будетъ искомый, потому что всякій вписанный въ немъ уголъ измѣряется половиною дуги AnB, а половина этой дуги измѣряетъ также и уголъ $BAE = a$.

ГЛАВА VIII.

Вписанные и описанные многоугольники.

181. Опредѣленія. Если всѣ вершины многоугольника ($ABCDE$, черт. 173) лежатъ на окружности, то говорятъ, что этотъ мн-къ вписанъ въ окружность, или что окружность описана около него.

Если всѣ стороны какого-нибудь многоугольника ($MNPQ$) касаются окружности, то говорятъ, что этотъ мн-къ описанъ около окружности, или что окружность вписана въ него.

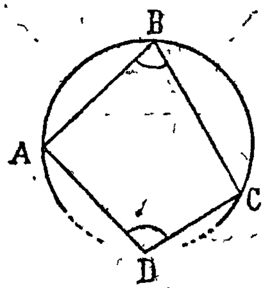


Черт. 173.

182. Теоремы. 1°. **Около всякаго треугольника можно описать окружность и притомъ только одну.**

2°. Пусть $ABDC$ (черт. 177) есть такой выпуклый четыреугольникъ, у котораго $B+D=2d$ и, слѣд., $A+C=2d$.

Требуется доказать, что около такого четыреугольника можно описать окружность.—Черезъ какія-нибудь три его вершины, напр., черезъ A, B и C, проведемъ окружность (что всегда можно сдѣлать). Четвертая вершина D должна находиться на этой окружности, потому что въ противномъ случаѣ вершина угла D лежала бы или внутри круга, или внѣ его, и тогда этотъ уголъ не измѣрялся бы половиною дуги ABC (176, 1° и 2°); поэтому сумма $B+D$ не измѣрялась бы полусуммою дугъ ADC и ABC, т.-е. сумма $B+D$ не равнялась бы $2d$, что противорѣчитъ условію.



Черт. 177.

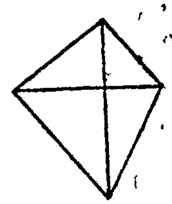
186. Слѣдствія. 1°. **Изъ всѣхъ параллелограммовъ только около прямоугольника (и, слѣд., около квадрата) можно описать окружность.**

2°. **Около трапеціи можно описать окружность только тогда, когда она равнобочная.**

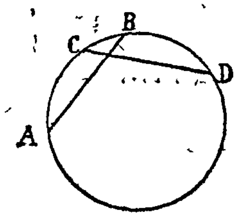
187. Замѣчанія. 1°. Двѣ изложенныя теоремы о вписанномъ четыреугольникѣ (прямая и обратная) приводятъ насъ къ слѣдующему заключенію: *для того, чтобы около выпуклаго четыреугольника можно было описать окружность*, **необходимо и достаточно**, *чтобы сумма его противоположныхъ угловъ равнялась двумъ прямымъ*. Дѣйствительно, это условіе необходимо, такъ какъ, согласно теоремѣ 1°, во всякомъ вписанномъ выпукломъ четыреугольникѣ сумма противоположныхъ угловъ равна $2d$, и, слѣд., безъ этого условія не можетъ существовать вписанный выпуклый четыреугольникъ; въ то же время это условіе и достаточно, такъ какъ, согласно теоремѣ 2°, если въ выпукломъ четыреугольникѣ сумма противоположныхъ угловъ равна $2d$, то около такого четыреугольника можно описать окружность.

2°. Необходимость какого-нибудь признака еще не означаетъ его достаточности, равно какъ достаточность какого-нибудь

признака еще не влечетъ за собою его необходимости. Напр., для того, чтобы выпуклый четыреугольникъ былъ ромбомъ, необходимо, чтобы его діагонали были взаимно перпендикулярны (если есть ромбъ, то діагонали его взаимно перпендикулярны; значитъ, безъ перпендикулярности діагоналей ромбъ не существуетъ); однако этотъ признакъ не достаточенъ: нельзя утверждать, что если діагонали выпуклаго четыреугольника взаимно перпендикулярны, то такой четыреугольникъ непремѣнно ромбъ (при перпендикулярности діагоналей выпуклый четыреугольникъ можетъ и не быть ромбомъ, черт. 178). Другой примѣръ: для того, чтобы двѣ дуги одной и той же окружности были равны, достаточно, чтобы онѣ заключались между параллельными хордами; однако это не необходимо, такъ какъ и безъ параллельности хордъ дуги могутъ оказаться равными (дуги AB и CD, черт. 179).

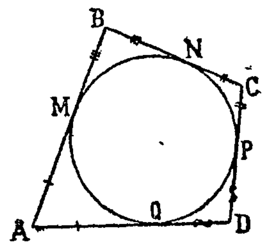


Черт. 178.



Черт. 179.

Для того, чтобы быть увѣреннымъ, что нѣкоторый признакъ A необходимъ и достаточенъ для существованія нѣкотораго свойства B, надо отдѣльно доказать его необходимость (если есть B, то есть и A) и его достаточность (если есть A, то есть и B).



Черт. 180.

188. Теорема. Въ описанномъ выпукломъ четыреугольникѣ суммы противоположныхъ сторонъ равны.

Пусть $ABCD$ (черт. 180) будетъ описанный выпуклый четыреугольникъ, т.-е. стороны его касаются окружности; требуется доказать, что $AB+CD=BC+AD$.—Обозначимъ точки касанія черезъ M, N, P и Q. Такъ какъ двѣ касательныя, проведенныя изъ одной точки къ окружности, равны (140), то $AM=AQ$, $BM=BN$, $CN=CP$ и $DP=DQ$. Слѣд.,

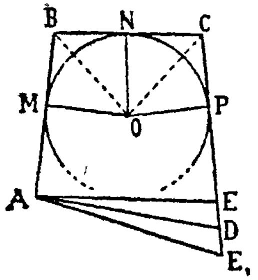
$$AM+MB+CP+PD=AQ+BN+NC+QD,$$
т.-е. $$AB+CD=AD+BC.$$

189. Обратная теорема. Если въ выпукломъ четыреугольникѣ равны суммы противоположныхъ сторонъ, то въ него можно вписать окружность.

Пусть $ABCD$ такой выпуклый четыреугольникъ (черт. 181), въ которомъ:

$$AB+CD=AD+BC.$$

Требуется доказать, что въ него можно вписать окружность.—Проведемъ биссектрисы BO и CO двухъ угловъ B и C. Эти прямыя должны пересѣчься, потому что сумма угловъ NBO и NCO меньше $2d$ (такъ какъ $B+C<4d$). Точка пересѣченія биссектрисъ должна быть одинаково удалена отъ сторонъ AB, BC и CD; поэтому если эту точку возьмемъ за центръ, а за радіусъ одинъ изъ трехъ равныхъ перпендикуляровъ OM, ON, OP, опущенныхъ изъ O на стороны угловъ B и C, то окружность коснется сторонъ AB, BC и CD. Докажемъ, что она коснется и четвертой стороны AD. Предположимъ противное, т.-е. что 4-я сторона AD не касается проведенной окружности. Тогда проведя изъ точки A касательную къ этой окружности, мы должны получить нѣкоторую прямую, не сливающуюся съ AD. Пусть это будетъ прямая AE, расположенная ближе къ центру O, чѣмъ AD. Тогда получится описанный выпуклый четыреугольникъ $ABCE$, въ которомъ, по доказанному выше, будемъ имѣть:



Черт. 181.

$$BC+AE=AB+CE.$$

Но по условію:

$$BC+AD=AB+CD.$$

Вычтя почленно первое равенство изъ второго, найдемъ:

$$AD-AE=CD-CE=DE,$$

т.-е. разность двухъ сторонъ $\triangle ADE$ равна третьей сторонѣ DE, что невозможно (52); значитъ, нельзя допустить, чтобы касательною къ нашей окружности была какая-нибудь прямая AE, лежащая ближе къ центру O, чѣмъ AD. Такъ же можно доказать, что касательною не можетъ быть никакая прямая AE_1, лежащая дальше отъ центра, чѣмъ AD; значитъ, AD должна касаться окружности, т.-е. въ четыреугольникъ $ABCD$ можно вписать окружность.

190. Слѣдствіе. Изъ всѣхъ параллелограммовъ только въ ромбъ (и, слѣд., въ квадратъ) можно вписать окружность.

191. Замѣчаніе. Двѣ изложенныя теоремы объ описанномъ четыреугольникѣ (прямая и обратная) приводятъ насъ къ слѣдующему заключенію: для того, чтобы въ выпуклый четыреугольникъ можно было вписать окружность, **необходимо и достаточно, чтобы у него** были равны суммы противоположныхъ сторонъ.

ГЛАВА IX.

Четыре замѣчательныя точки въ треугольникѣ.

192. Центръ описанной и центръ вписанной окружности. Мы видѣли (123 и 183), что:

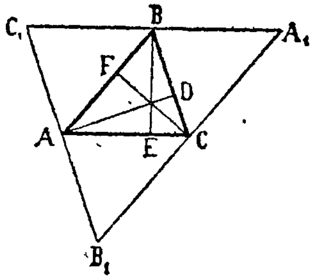
1°, **три перпендикуляра къ сторонамъ треугольника, проведенные черезъ ихъ середины, сходятся въ одной точкѣ,** которая есть центръ описанной окружности;

2°, **три биссектрисы угловъ треугольника сходятся въ одной точкѣ,** которая есть центръ вписанной окружности.

Слѣдующія 2 теоремы указываютъ еще 2 замѣчательныя точки тр-ка: 3°, пересѣченіе высотъ и 4°, пересѣченіе медіанъ.

193. Теорема. Три высоты треугольника пересѣкаются въ одной точкѣ.

Черезъ каждую вершину тр-ка ABC (черт. 182) проведемъ прямую, параллельную противоположной сторонѣ его. Тогда получимъ вспомогательный $\triangle A_1B_1C_1$, къ сторонамъ котораго высоты даннаго тр-ка перпендикулярны. Такъ какъ $C_1B=AC=BA_1$ (какъ противоположныя стороны параллелограммовъ), то точка B есть середина стороны A_1C_1. Подобно этому, убѣдимся, что C есть середина A_1B_1 и A—середина B_1C_1. Такимъ образомъ, высоты AD, BE и CF перпендикулярны къ сторонамъ тр-ка $A_1B_1C_1$ и проходятъ черезъ ихъ середины; а такіе перпендикуляры, какъ мы знаемъ, пересѣкаются въ одной точкѣ.



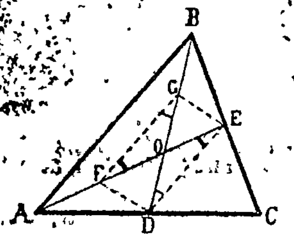
Черт. 182.

Точка, въ которой пересѣкаются высоты треугольника, наз. **ортоцентромъ**, или **точкою высотъ**. Эта точка въ остроугольномъ тр-кѣ лежитъ внутри, въ тупоугольномъ—внѣ его, а въ прямоугольномъ—въ вершинѣ прямого угла.

194. Теорема. Три медіаны треугольника пересѣкаются въ одной точкѣ; эта точка отсѣкаетъ отъ каждой медіаны третью часть, считая отъ соотвѣтствующей стороны.

Возьмемъ въ тр-кѣ ABC (черт. 183) какія-нибудь двѣ медіаны, напр. AE и BD, пересѣкающіяся въ точкѣ O, и докажемъ, что [illegible] $OD={}^1/_3 BD$ и $OE={}^1/_3 AE$. [illegible]

Для этого, раздѣливъ OA и OB пополамъ въ точкахъ F и G, построимъ четыреугольникъ $DEGF$. Такъ какъ прямая FG соединяетъ середины двухъ сторонъ тр-ка ABO, то (115) $FG \parallel AB$ и $FG={}^1/_2 AB$. Прямая DE также соединяетъ середины двухъ сторонъ тр-ка ABC; поэтому $DE \parallel AB$ и $DE={}^1/_2 AB$. Отсюда выводимъ, что $DE \parallel FG$ и $DE=FG$; слѣд. четыреугольникъ $DEGF$ есть параллелограммъ (99, 2°), и потому $OF=OE$ и $OG=OD$. Отсюда слѣдуетъ, что $OE={}^1/_3 AE$ и $OD={}^1/_3 BD$. Если теперь возьмемъ третью медіану съ одной изъ медіанъ AE или BD, то также убѣдимся, что точка ихъ пересѣченія отсѣкаетъ отъ каждой изъ нихъ ${}^1/_3$ часть, считая отъ соотвѣтствующей стороны; значитъ, третья медіана должна пересѣчься съ медіанами AE и BD въ одной и той же точкѣ O.



Черт. 183.

Изъ физики извѣстно, что пересѣченіе медіанъ тр-ка есть его **центръ тяжести**; онъ всегда лежитъ внутри тр-ка.

УПРАЖНЕНІЯ.

Доказать теоремы:

148. Если двѣ окружности касаются, то всякая сѣкущая, проведенная черезъ точку касанія, отсѣкаетъ отъ окружностей двѣ противолежащія дуги одинаковаго числа градусовъ.

148,a. Отрѣзки двухъ равныхъ хордъ, пересѣкающихся въ одной окружности, соотвѣтственно равны.

148,b. Двѣ окружности пересѣкаются въ точкахъ A и B; черезъ A проведена сѣкущая, пересѣкающая окружности въ точкахъ C и D; доказать, что уголъ CBD есть величина постоянная для всякой сѣкущей.

149. Если черезъ точку касанія двухъ окружностей проведемъ двѣ сѣкущія и концы ихъ соединимъ хордами, то эти хорды параллельны.

150. Если черезъ точку касанія двухъ окружностей проведемъ внутри ихъ какую-либо сѣкущую, то касательныя, проведенныя черезъ концы этой сѣкущей, параллельны.

151. Если основанія высотъ тр-ка соединимъ прямыми, то получимъ новый тр-къ, для котораго высоты перваго тр-ка служатъ биссектрисами.

151,a. На окружности, описанной около равносторонняго тр-ка ABC, взята произвольная точка M; доказать, что одна изъ прямыхъ: MA, MB, MC равна суммѣ остальныхъ двухъ.

152. Если около тр-ка опишемъ окружность и изъ произвольной точки ея опустимъ перпендикуляры на стороны тр-ка, то ихъ основанія лежатъ на одной прямой (прямая Симпсона). [illegible]

Задачи на построеніе.

153. На данной безконечной прямой найти точку, изъ которой другая данная конечная прямая была бы видна подъ даннымъ угломъ.

154. Построить △ по основанію, углу при вершинѣ и высотѣ.

155. Къ дугѣ даннаго сектора провести такую касательную, чтобы часть ея, заключенная между продолженными радіусами (ограничивающими секторъ), равнялась данной длинѣ (свести эту задачу на предыдущую).

156. Построить △ по основанію, углу при вершинѣ и медіанѣ, проведенной къ основанію.

157. Даны по величинѣ и положенію двѣ конечныя прямыя a и b. Найти такую точку, изъ которой прямая a была бы видна подъ даннымъ угломъ α, и прямая b подъ даннымъ угломъ β.

158. Въ тр-кѣ найти точку, изъ которой его стороны были бы видны подъ равными углами (у к а з а н і е: обратить вниманіе на то, что каждый изъ этихъ угловъ долженъ равняться ${}^4/_3 d$).

159. Построить △ по углу при вершинѣ, высотѣ и медіанѣ, проведенной къ основанію (у к а з а н і е: продолживъ медіану на равное разстояніе и соединивъ полученную точку съ концами основанія, разсмотрѣть образовавшійся параллелограммъ).

160. Построить △, въ которомъ даны: основаніе, прилежащій къ нему уголъ и уголъ, составленный медіаною, проведенною изъ вершины даннаго угла, со стороною, къ которой эта медіана проведена.

161. Построить параллелограммъ по двумъ его діагоналямъ и одному углу.

162. Построить △ по основанію, углу при вершинѣ и суммѣ или разности двухъ другихъ сторонъ.

163. Построить четыреугольникъ по двумъ діагоналямъ, двумъ сосѣднимъ сторонамъ и углу, образованному остальными двумя сторонами.

164. Даны три точки A, B и C. Провести черезъ A такую прямую, чтобы разстояніе между перпендикулярами, опущенными на эту прямую изъ точекъ B и C, равнялось данной длинѣ.

165. Въ данный кругъ вписать △, у котораго два угла даны.

166. Около даннаго круга описать △, у котораго два угла даны.

167. Построить △ по радіусу описаннаго круга, углу при вершинѣ и высотѣ.

168. Вписать въ данный кругъ △, у котораго извѣстны: сумма двухъ сторонъ и уголъ, противолежащій одной изъ этихъ сторонъ.

169. Вписать въ данный кругъ четыреугольникъ, котораго сторона и два угла, не прилежащіе къ этой сторонѣ, даны.

170. Въ данный ромбъ вписать кругъ.

171. Въ равносторонній △ вписать три круга, которые попарно касаются другъ друга и изъ которыхъ каждый касается двухъ сторонъ тр-ка.

172. Построить четыреугольникъ, который можно было бы вписать въ окружность, по тремъ его сторонамъ и одной діагонали.

173. Построить ромбъ по даннымъ сторонѣ и радіусу вписаннаго круга.

174. Около даннаго круга описать равнобедренный прямоугольный $\triangle$.

175. Построить равнобедренный $\triangle$ по основанію и радіусу вписаннаго круга.

176. Построить $\triangle$ по основанію и двумъ медіанамъ, исходящимъ изъ концовъ основанія.

177. То же—по тремъ медіанамъ.

178. Дана окружность и на ней три точки A, B и C. Вписать въ эту окружность такой $\triangle$, чтобы его биссектрисы при продолженіи встрѣчали окружность въ точкахъ A, B и C.

179. Та же задача, съ замѣною биссектрисъ тр-ка его высотами.

180. Дана окружность и на ней три точки M, N и P, въ которыхъ пересѣкаются съ окружностью (при продолженіи) высота, биссектриса и медіана, исходящія изъ одной вершины вписаннаго тр-ка. Построить этотъ $\triangle$.

181. На окружности даны двѣ точки A и B. Изъ этихъ точекъ провести двѣ параллельныя хорды, которыхъ сумма дана.

Задачи на вычисленіе.

182. Вычислить вписанный уголъ, опирающійся на дугу, равную $^1/_{12}$ части окружности.

183. Кругъ раздѣленъ на два сегмента хордою, дѣлящею окружность на части въ отношеніи 5 : 7. Вычислить углы, которые вмѣщаются этими сегментами.

184. Двѣ хорды пересѣкаются подъ угломъ въ 36°15′32″. Вычислить въ градусахъ, минутахъ и секундахъ двѣ дуги, заключенныя между сторонами этого угла и ихъ продолженіями, если одна изъ этихъ дугъ относится къ другой, какъ 3 : 2.

185. Уголъ, составленный двумя касательными, проведенными изъ одной точки къ окружности, равенъ 25°15′. Вычислить дуги, заключенныя между точками касанія.

186. Вычислить уголъ, составленный касательною и хордою, если хорда дѣлитъ окружность на двѣ части, относящіяся какъ 3 : 7.

187. Двѣ окружности одинаковаго радіуса пересѣкаются подъ угломъ въ $^2/_3 d$; опредѣлить въ градусахъ меньшую изъ дугъ, заключающихся между точками пересѣченія.

Примѣчаніе. Угломъ двухъ пересѣкающихся дугъ наз. уголъ, составленный двумя касательными, проведенными къ этимъ дугамъ изъ точки пересѣченія.

188. Изъ одного конца діаметра проведена касательная, а изъ другого сѣкущая, которая съ касательною составляетъ уголъ въ 20°30′. Какъ велика меньшая изъ дугъ, заключенныхъ между касательною и сѣкущею?

КНИГА III.

ПОДОБНЫЯ ФИГУРЫ.

ГЛАВА I.

Подобіе треугольниковъ.

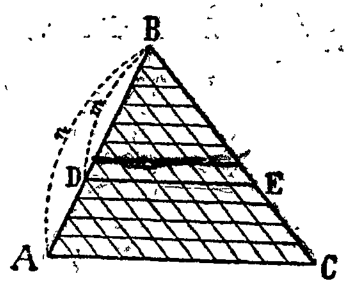
195. Сходственныя стороны. Въ этой главѣ намъ придется разсматривать такіе тр-ки или мн-ки, у которыхъ углы одного соотвѣтственно равны угламъ другого. Условимся въ такихъ случаяхъ называть «сходственными» тѣ стороны этихъ тр-ковъ или мн-ковъ, которыя прилежатъ къ равнымъ угламъ (въ тр-кахъ такія стороны и противолежатъ равнымъ угламъ).

196. Лемма. Прямая (DE, черт. 184), проведенная внутри треугольника (ABC) параллельно его сторонѣ (AC), отсѣкаетъ отъ него другой треугольникъ (DBE), у котораго: 1°, углы равны соотвѣтственно угламъ перваго треугольника и 2°, стороны пропорціональны сходственнымъ сторонамъ этого треугольника.

1°. Углы тр-ковъ соотвѣтственно равны, такъ какъ уголъ B у нихъ общій, а $D=A$ и $E=C$, какъ углы соотвѣтственные при параллельныхъ DE и AC и сѣкущихъ AB и CB.

2°. Докажемъ теперь, что стороны тр-ка DBE пропорціональны сходственнымъ сторонамъ тр-ка ABC, т.-е. что

$$\frac{BD}{AB}=\frac{BE}{BC}=\frac{DE}{AC}.$$



Черт. 184.

Для этого разсмотримъ отдѣльно слѣдующіе два случая.

1°. Стороны AB и DB имѣютъ общую мѣру. Раздѣлимъ AB на части, равныя этой общей мѣрѣ. Тогда BD

...лится на цѣлое число такихъ частей. Пусть этихъ ... содержится m въ BD и n въ AB. Проведемъ изъ точекъ ...ла рядъ прямыхъ, параллельныхъ AC, и другой рядъ прямыхъ, параллельныхъ BC. Тогда BE и BC раздѣлятся на равныя части (113), которыхъ будетъ m въ BE и n въ BC. Точно такъ же DE раздѣлится на m равныхъ частей, а AC на n равныхъ частей, при чемъ части DE равны частямъ AC (какъ противоположныя стороны параллелограммовъ). Теперь очевидно, что

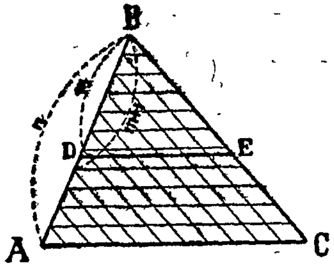
$$\frac{BD}{AB}=\frac{m}{n};\quad \frac{BE}{BC}=\frac{m}{n};\quad \frac{DE}{AC}=\frac{m}{n}.$$

Слѣд.,

$$\frac{BD}{AB}=\frac{BE}{BC}=\frac{DE}{AC}.$$

2°. Стороны AB и BD не имѣютъ общей мѣры (черт. 185).

Тогда стороны BC и BE, а также и стороны AC и DE, также не имѣютъ общей мѣры. Дѣйствительно, если допустимъ, что стороны BC и BE (или AC и DE) имѣютъ какую-нибудь общую мѣру, то, раздѣливъ BC (или AC) на части, равныя этой общей мѣрѣ, и проведя чрезъ точки раздѣла рядъ параллельныхъ прямыхъ, какъ это мы дѣлали въ случаѣ 1-мъ, мы этими прямыми раздѣлимъ стороны AB и BD также на равныя части; слѣд., тогда эти прямыя будутъ имѣть общую мѣру, что противорѣчитъ предположенію. Значитъ, если стороны AB и BD несоизмѣримы, то каждое изъ трехъ отношеній:



Черт. 185.

$$\frac{BD}{BA},\quad \frac{BE}{BC} \text{ и } \frac{DE}{AC}$$

будетъ число ирраціональное.

Найдемъ приближенное значеніе каждаго изъ нихъ съ точностью до $^1/_n$. Для этого раздѣлимъ AB на n равныхъ частей и чрезъ точки раздѣла проведемъ рядъ прямыхъ, параллельныхъ AC, и другой рядъ прямыхъ, параллельныхъ BC. Тогда каждая изъ сторонъ BC и AC раздѣлится также на n равныхъ частей (113). Предположимъ, что $^1/_n$ доля AB содержится въ BD болѣе m разъ, но менѣе $m+1$ разъ; тогда, какъ видно изъ чертежа, $^1/_n$ доля BC содержится въ BE также болѣе m, но менѣе $m+1$ разъ, и $^1/_n$ доля AC содержится въ DE болѣе m, но менѣе $m+1$ разъ. Слѣд.:

прибл. отн. $\frac{BD}{BA}=\frac{m}{n}$; прибл. отн. $\frac{BE}{BC}=\frac{m}{n}$; прибл. отн. $\frac{DE}{AC}=\frac{m}{n}$.

Отсюда слѣдуетъ, что приближенныя отношенія, вычисленныя съ произвольною, но одинаковою точностью, всегда равны другъ другу; а такія ирраціональныя отношенія должны быть равны (159); слѣд., и въ этомъ случаѣ можемъ написать:

$$\frac{BD}{BA}=\frac{BE}{BC}=\frac{DE}{AC}.$$

197. Замѣчаніе. Доказанный рядъ равныхъ отношеній представляетъ собою три слѣдующія пропорціи:

$$\frac{BD}{BA}=\frac{BE}{BC};\quad \frac{BD}{BA}=\frac{DE}{AC};\quad \frac{BE}{BC}=\frac{DE}{AC}.$$

Примѣняя къ этимъ пропорціямъ свойства числовыхъ пропорцій, мы можемъ переставить въ нихъ средніе члены:

$$\frac{BD}{BE}=\frac{BA}{BC};\quad \frac{BD}{DE}=\frac{BA}{AC};\quad \frac{BE}{DE}=\frac{BC}{AC}.$$

Мы видимъ такимъ образомъ, что если въ треугольникахъ стороны пропорціональны, то отношеніе любыхъ двухъ сторонъ одного треугольника равно отношенію сходственныхъ сторонъ другого треугольника.

198. Опредѣленіе. Два треугольника наз. подобными, если углы одного соотвѣтственно равны угламъ другого и стороны одного пропорціональны сходственнымъ сторонамъ другого.

Что такіе тр-ки возможны, показываетъ лемма предыдущаго параграфа, которую теперь можно высказать такъ: прямая,

...нная внутри треугольника параллельно какой-нибудь ...оронѣ, отсѣкаетъ отъ него подобный треугольникъ.

...9. Теоремы (выражающія три признака подобія треугольниковъ). **Два треугольника подобны:**

1°, если два угла одного соотвѣтственно равны двумъ угламъ другого;

или 2°, если двѣ стороны одного пропорціональны двумъ сторонамъ другого, и углы, лежащіе между этими сторонами, равны;

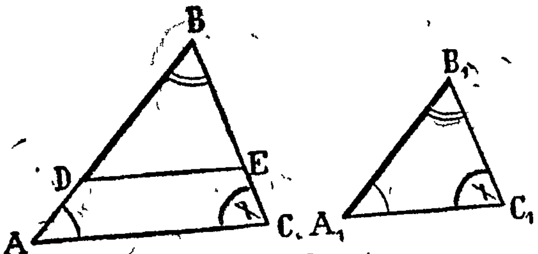
или 3°, если три стороны одного пропорціональны тремъ сторонамъ другого.

1°. Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ (черт. 186) будутъ два тр-ка, у которыхъ:

$$A=A_1,\quad B=B_1 \quad \text{и, слѣд.,} \quad C=C_1.$$

Требуется доказать, что такіе тр-ки подобны.—Отложимъ на AB часть BD, равную A_1B_1, и проведемъ $DE \parallel AC$.

Тогда получимъ вспомогательный тр-къ DBE, который, согласно предыдущей леммѣ, подобенъ тр-ку ABC. Съ другой стороны $\triangle DBE=\triangle A_1B_1C_1$, потому что у нихъ: $BD=A_1B_1$ (по построенію), $B=B_1$ (по условію) и $D=A_1$ (потому что $D=A$ и $A=A_1$). Но если изъ двухъ равныхъ тр-ковъ одинъ подобенъ третьему, то и другой ему подобенъ; слѣд., $\triangle A_1B_1C_1$ подобенъ $\triangle ABC$.



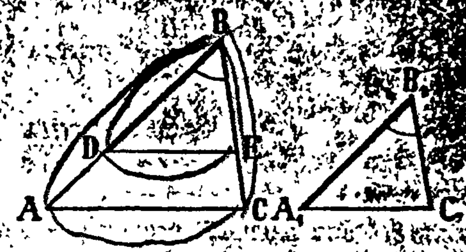
Черт. 186.

2°. Пусть въ тр-кахъ ABC и $A_1B_1C_1$ дано (черт. 187):

$$B=B_1 \text{ и } \frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1} \qquad [1]$$

Требуется доказать, что такіе тр-ки подобны.—Отложимъ снова часть BD, равную A_1B_1, и проведемъ $DE \parallel AC$. Тогда получимъ вспомогательный $\triangle BDE$, подобный $\triangle ABC$. Докажемъ, что онъ равенъ $\triangle A_1B_1C_1$. Изъ подобія тр-ковъ ABC и DBE слѣдуетъ:

$$\frac{AB}{DB}=\frac{BC}{BE}=\frac{AC}{DE} \quad [2]$$



Черт. 187.

Сравнивая этотъ рядъ равныхъ отношеній съ даннымъ рядомъ [1], замѣчаемъ, что первыя отношенія обоихъ рядовъ одинаковы ($DB=A_1B_1$ по построенію); слѣдовательно, остальныя отношенія этихъ рядовъ также равны, т. е.

$$\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{BC}{BE}.$$

Но если въ пропорціи предыдущіе члены равны, то должны быть равны и послѣдующіе члены; значитъ:

$$B_1C_1=BE.$$

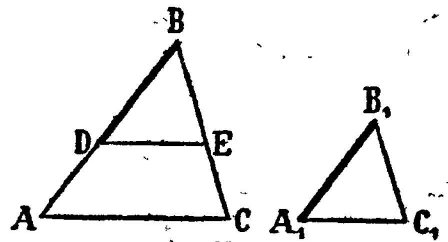
Теперь видимъ, что тр-ки DBE и $A_1B_1C_1$ имѣютъ по равному углу ($B=B_1$), заключенному между равными сторонами; значитъ, эти тр-ки равны. Но $\triangle DBE$ подобенъ $\triangle ABC$; поэтому и $\triangle A_1B_1C_1$ подобенъ $\triangle ABC$.

3. Пусть въ тр-кахъ ABC и $A_1B_1C_1$ (черт. 188) дано:

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{AC}{A_1C_1} \qquad [1]$$

Требуется доказать, что такіе тр-ки подобны.—Сдѣлавъ построеніе такое же, какъ и прежде, докажемъ, что $\triangle DBE=\triangle A_1B_1C_1$. Изъ подобія тр-ковъ ABC и DBE слѣдуетъ:

$$\frac{AB}{BD}=\frac{BC}{BE}=\frac{AC}{DE} \quad [2]$$



Черт. 188.

Сравнивая этотъ рядъ съ даннымъ рядомъ [1], замѣчаемъ что первыя отношенія у нихъ равны; слѣд., и остальныя отношенія равны, и потому

$$\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{BC}{BE};\ \text{откуда: } B_1C_1=BE,$$

$$\text{и } \frac{AC}{A_1C_1}=\frac{AC}{DE};\ \text{откуда: } A_1C_1=DE.$$

Теперь видимъ, что тр-ки DBE и $A_1B_1C_1$ имѣютъ по три соотвѣтственно равныхъ стороны; значитъ, они равны. Но одинъ изъ нихъ, именно DBE, подобенъ $\triangle ABC$; слѣд., и другой, т. е. $A_1B_1C_1$, подобенъ $\triangle ABC$.

200. Замѣчаніе о пріемѣ доказательства. Полезно обратить вниманіе на то, что пріемъ доказательства, употребленный нами въ трехъ предыдущихъ теоремахъ, одинъ и тотъ же, а именно: отложивъ на сторонѣ бóльшаго треугольника часть, равную сходственной сторонѣ меньшаго, и проведя прямую, параллельную другой сторонѣ, мы образуемъ вспомогательный тр-къ, подобный бóльшему данному. Послѣ этого, беря во вниманіе условія доказываемой теоремы и свойства подобныхъ тр-ковъ, мы обнаруживаемъ равенство вспомогательнаго тр-ка меньшему данному и, наконецъ, заключаемъ о подобіи данныхъ тр-ковъ.

201. Теоремы (выражающія еще 2 признака подобія треугольниковъ). **Два треугольника подобны:**

1°, **если стороны одного соотвѣтственно параллельны сторонамъ другого;**

или 2°, **если стороны одного соотвѣтственно перпендикулярны къ сторонамъ другого.**

Будемъ вести разсужденіе независимо отъ чертежа, при чемъ это разсужденіе отнесемъ одновременно къ обѣимъ теоремамъ.

Пусть стороны угловъ A, B, C нѣкотораго треугольника соотвѣтственно параллельны или перпендикулярны сторонамъ угловъ A_1, B_1, C_1 другого треугольника. Тогда углы A и A_1 или равны другъ другу, или составляютъ въ суммѣ два прямыхъ (85 и 86); то же самое можно сказать объ углахъ B и B_1, C и C_1. Чтобы доказать подобіе данныхъ тр-ковъ, достаточно убѣдиться, что какіе-нибудь два угла одного изъ нихъ равны со-

отвѣтственно двумъ угламъ другого. Предположимъ, что этого нѣтъ. Тогда могутъ представиться слѣдующіе два случая:

1°. У треугольниковъ нѣтъ вовсе попарно равныхъ угловъ.

Тогда: $A+A_1=2d$, $B+B_1=2d$, $C+C_1=2d$,

и, слѣд., сумма угловъ обоихъ треугольниковъ равна $6d$. Такъ какъ это невозможно, то этотъ случай исключается.

2°. У треугольниковъ только одна пара равныхъ угловъ; напр., пусть $A=A_1$. Тогда:

$B+B_1=2d$; $C+C_1=2d$ и, слѣд., $B+B_1+C+C_1=4d$,

и потому сумма всѣхъ угловъ обоихъ тр-ковъ больше $4d$. Такъ какъ это невозможно, то и этотъ случай исключается.

Остается одно возможное допущеніе, что тр-ки имѣютъ двѣ пары равныхъ угловъ; но тогда они подобны.

202. Теоремы (выражающія признаки подобія прямоугольныхъ треугольниковъ). Такъ какъ прямые углы всегда равны другъ другу, то на основаніи доказанныхъ признаковъ подобія треугольниковъ вообще мы можемъ утверждать, что **прямоугольные тр-ки подобны:**

1°, **если острый уголъ одного треугольника равенъ острому углу другого треугольника,**

или 2°, **если катеты одного треугольника пропорціональны катетамъ другого.**

Укажемъ еще слѣдующій признакъ подобія прямоугольныхъ тр-ковъ, требующій особаго доказательства.

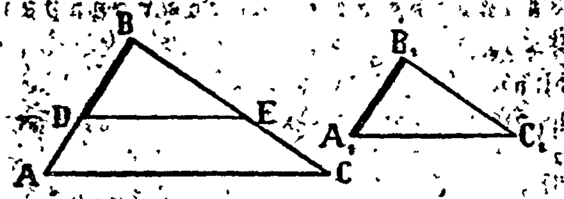
Теорема. Прямоугольные треугольники подобны, если гипотенуза и катетъ одного пропорціональны гипотенузѣ и катету другого.

Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ два тр-ка (черт. 189), у которыхъ углы B и B_1 прямые и

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AC}{A_1C_1} \qquad [1]$$

Требуется доказать, что такіе тр-ки подобны.—Для доказательства употребимъ тотъ же пріемъ, которымъ мы пользовались ранѣе (200). Отложимъ $BD=A_1B_1$ и проведемъ $DE \parallel AC$.

Тогда получимъ вспомогательный $\triangle DBE$, подобный $\triangle ABC$ (196). Докажемъ, что онъ равенъ $\triangle A_1B_1C_1$. Изъ подобія тр-ковъ ABC и DBE слѣдуетъ:



Черт. 189.

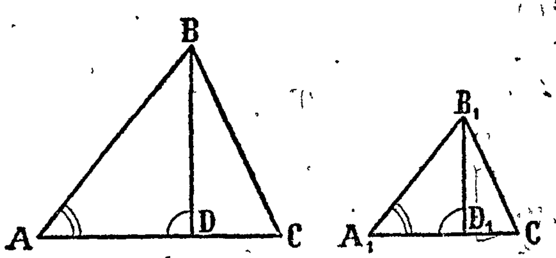
$$\frac{AB}{DB}=\frac{AC}{DE}\quad[2]$$

Сравнивая эту пропорцію съ данной [1], находимъ, что первыя отношенія ихъ одинаковы; слѣд., равны и вторыя отношенія, т.-е.

$$\frac{AC}{DE}=\frac{AC}{A_1C_1};\quad \text{откуда: } DE=A_1C_1.$$

Теперь видимъ, что тр-ки DBE и $A_1B_1C_1$ имѣютъ по равной гипотенузѣ и равному катету; слѣд., они равны; а такъ какъ одинъ изъ нихъ подобенъ $\triangle ABC$, то и другой ему подобенъ.

203. Теорема (выражающая свойство подобныхъ треугольниковъ). **Въ подобныхъ треугольникахъ сходственныя стороны пропорціональны сходственнымъ высотамъ, т.-е. тѣмъ, которыя опущены на сходственныя стороны.**



Черт. 190.

Дѣйствительно, если тр-ки ABC и $A_1B_1C_1$ (черт. 190) подобны, то прямоугольные тр-ки BAD и $B_1A_1D_1$ также подобны ($A=A_1$ и $D=D_1$); поэтому:

$$\frac{BD}{B_1D_1}=\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{AC}{A_1C_1}.$$

Замѣчаніе. Можно также доказать, что въ подобныхъ тр-кахъ **сходственныя стороны пропорціональны сходственнымъ медіанамъ, сходственнымъ биссектрисамъ, радіусамъ круговъ вписанныхъ и радіусамъ круговъ описанныхъ.**

204. Задача. На данной сторонѣ (A_1C_1, черт. 191) построить треугольникъ, подобный данному (ABC).

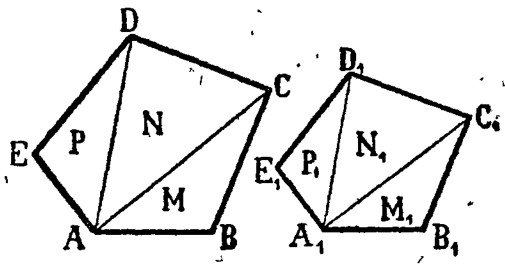
Черт. 191.

На данной сторонѣ строимъ тр-къ, у котораго уголъ A_1 равенъ A и уголъ C_1 равенъ C. Этотъ тр-къ подобенъ данному (199, 1°).

ГЛАВА II.

Подобіе многоугольниковъ.

205. Лемма. Если, разбивъ многоугольникъ $ABCDE$... (черт. 192) на треугольники M, N, P,..., на какой-нибудь конечной прямой A_1B_1 мы построимъ $\triangle M_1$, подобный $\triangle M$, затѣмъ на сторонѣ его A_1C_1 построимъ $\triangle N_1$, подобный $\triangle N$, далѣе на сторонѣ A_1D_1 построимъ $\triangle P_1$, подобный $\triangle P$, и т. д., наблюдая при этомъ, чтобы подобные треугольники были одинаково расположены, то мы получимъ такой многоугольникъ $A_1B_1C_1D_1E_1$.., у котораго: 1°, углы соотвѣтственно равны угламъ многоугольника $ABCDE$... и 2°, стороны пропорціональны сходственнымъ сторонамъ этого многоугольника.



Черт. 192.

1°. Равенство угловъ мн-ковъ слѣдуетъ изъ равенства угловъ тр-ковъ; такъ, $B=B_1$ и $E=E_1$, какъ равные углы подобныхъ тр-ковъ (M и M_1, P и P_1), $A=A_1$, $C=C_1$, $D=D_1$..., какъ суммы угловъ, соотвѣтственно равныхъ другъ другу.

2°. Пропорціональность сторонъ мн-ковъ слѣдуетъ изъ пропорціональности сторонъ подобныхъ тр-ковъ. Дѣйствительно, мы можемъ написать слѣдующіе ряды равныхъ отношеній:

изъ подобія M и M_1..... $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{AC}{A_1C_1}$;

изъ подобія N и N_1...... $\frac{AC}{A_1C_1}=\frac{CD}{C_1D_1}=\frac{AD}{A_1D_1}$;

изъ подобія P и P_1...... $\frac{AD}{A_1D_1}=\frac{DE}{D_1E_1}=\frac{EA}{E_1A_1}$.

Разсматривая эти отношенія, замѣчаемъ, что послѣднее отношеніе 1-го ряда есть вмѣстѣ съ тѣмъ первое отношеніе 2-го ряда, а послѣднее отношеніе 2-го ряда есть вмѣстѣ съ тѣмъ первое отношеніе 3-го ряда; отсюда заключаемъ, что всѣ отношенія этихъ трехъ рядовъ равны между собою. Возьмемъ изъ нихъ только тѣ, въ которыя входятъ стороны данныхъ многоугольниковъ; тогда и получимъ пропорціональность сторонъ:

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{CD}{C_1D_1}=\frac{DE}{D_1E_1}=\frac{EA}{E_1A_1}.$$

Замѣчаніе. Изъ пропорціональности сторонъ двухъ мн-ковъ совершенно такъ же, какъ это было сдѣлано нами раньше для тр-ковъ (197), можно вывести, что если въ мн-кахъ стороны пропорціональны, то отношеніе любыхъ двухъ сторонъ одного мн-ка равно отношенію сходственныхъ сторонъ другого мн-ка.

206. Опредѣленіе. Два одноименныхъ *) многоугольника наз. *подобными*, если углы одного равны соотвѣтственно угламъ другого и стороны одного пропорціональны сходственнымъ сторонамъ другого.

Что такіе многоугольники возможны, показываетъ лемма предыдущаго параграфа, которую можно теперь высказать такъ: **два многоугольника подобны, если они состоятъ изъ одинаковаго числа подобныхъ и одинаково расположенныхъ треугольниковъ.**

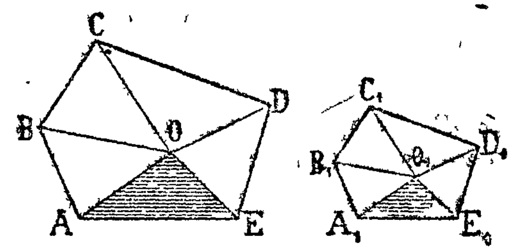
*) Напр., два пятиугольника, два шестиугольника и т. д., вообще два многоугольника, имѣющіе одинаковое число угловъ.

207. Замѣчаніе. Для тр-ковъ, какъ мы видѣли (199), равенство угловъ влечетъ за собою пропорціональность сторонъ и, обратно, пропорціональность сторонъ влечетъ за собою равенство угловъ; вслѣдствіе этого для тр-ковъ одно равенство угловъ или одна пропорціональность сторонъ служитъ достаточнымъ признакомъ ихъ подобія. Для мн-ковъ же одного равенства угловъ или одной пропорціональности сторонъ еще не достаточно для ихъ подобія; напр., у квадрата и прямоугольника углы равны, но стороны не пропорціональны, у квадрата же и ромба стороны пропорціональны, а углы не равны.

Слѣдующія 2 теоремы выражаютъ главнѣйшія свойства подобныхъ многоугольниковъ.

208. Теорема. **Подобные многоугольники** ($ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$, черт. 193) **можно разложить на одинаковое число подобныхъ и одинаково расположенныхъ треугольниковъ.**

Подобные многоугольники можно разложить на подобные тр-ки различными способами. Укажемъ одинъ изъ нихъ.— Возьмемъ внутри мн-ника $ABCDE$ произвольную точку O и соединимъ ее со всѣми вершинами. Тогда мн-къ $ABCDE$ разобьется на столько треугольниковъ, сколько въ немъ сторонъ. Возьмемъ одинъ изъ нихъ, напр., AOE (покрытый на чертежѣ штрихами), и на сходственной сторонѣ A_1E_1 другого многоугольника построимъ углы $O_1A_1E_1$ и $O_1E_1A_1$, соотвѣтственно равные угламъ OAE и OEA; точку пересѣченія O_1 соединимъ съ прочими вершинами мн-ка $A_1B_1C_1D_1E_1$. Тогда и этотъ мн-къ разобьется на то же число тр-ковъ. Докажемъ, что тр-ки перваго многоугольника соотвѣтственно подобны тр-камъ второго многоугольника. $\triangle AOE$ подобенъ $\triangle A_1O_1E_1$ по построенію. Чтобы



Черт. 193.

доказать подобіе сосѣднихъ тр-ковъ ABO и $A_1B_1O_1$, примемъ во вниманіе, что изъ подобія мн-ковъ, между прочимъ, слѣдуетъ:

$$A=A_1 \text{ и } \frac{BA}{B_1A_1}=\frac{AE}{A_1E_1} \qquad [1]$$

и изъ подобія тр-ковъ AOE и $A_1O_1E_1$ выводимъ:

$$\angle OAE=\angle O_1A_1E_1 \text{ и } \frac{AO}{A_1O_1}=\frac{AE}{A_1E_1}. \qquad [2]$$

Изъ равенствъ [1] и [2] слѣдуетъ:

$$\angle BAO=\angle B_1A_1O_1 \text{ и } \frac{BA}{B_1A_1}=\frac{AO}{A_1O_1}.$$

Теперь видимъ, что тр-ки ABO и $A_1B_1O_1$ имѣютъ по равному углу, заключенному между пропорціональными сторонами; значитъ, они подобны.

Совершенно такъ же докажемъ подобіе слѣдующихъ тр-ковъ BCO и $B_1C_1O_1$, затѣмъ тр-ковъ COD и $C_1O_1D_1$ и т. п. При этомъ очевидно, что подобные тр-ки въ обоихъ мн-кахъ одинаково расположены.

Замѣчаніе. Точку O (черт. 193) мы можемъ взять и на какой-нибудь сторонѣ мн-ка, и въ вершинѣ любого угла его и даже внѣ мн-ка (въ послѣднемъ случаѣ получатся тр-ки, частью выступающіе за контуръ мн-ка).

209. Теорема. Периметры подобныхъ многоугольниковъ относятся, какъ сходственныя стороны.

Пусть мн-ки $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ (черт. 193) подобны; тогда по опредѣленію:

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{CD}{C_1D_1}=\frac{DE}{D_1E_1}=\frac{EA}{E_1A_1}.$$

Изъ алгебры извѣстно, что если имѣемъ рядъ равныхъ отношеній, то сумма всѣхъ предыдущихъ членовъ относится къ суммѣ всѣхъ послѣдующихъ, какъ какой-нибудь изъ предыдущихъ членовъ относится къ своему послѣдующему; поэтому:

$$\frac{AB+BC+CD+DE+EA}{A_1B_1+B_1C_1+C_1D_1+D_1E_1+E_1A_1}=\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}\ldots$$

Примѣръ. Если сторона одного многоугольника болѣе сходственной стороны другого многоугольника, подобнаго ему, въ 2 раза, 3 раза, 4 раза и т. д., то и периметръ перваго многоугольника болѣе периметра второго въ 2 раза, 3 раза, 4 раза и т. д.

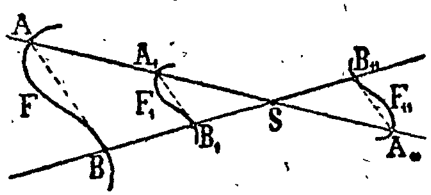
210. Задача. На данной сторонѣ A_1B_1 (черт. 192) построить многоугольникъ, подобный данному многоугольнику $ABCDE$.

Разбивъ данный многоугольникъ на тр-ки M, N, P, строятъ, согласно леммѣ § 205, на данной сторонѣ A_1B_1 тр-къ M_1, подобный тр-ку M, затѣмъ на сторонѣ A_1C_1 — тр-къ N_1, подобный тр-ку N, и т. д., наблюдая при этомъ, чтобы тр-ки были одинаково расположены въ обѣихъ фигурахъ. Полученный такимъ образомъ мн-къ $A_1\, B_1\, C_1\, D_1\, E_1$ подобенъ данному.

ГЛАВА III.

Фигуры, подобно расположенныя.

211. Опредѣленіе. Пусть намъ дано: какая-нибудь фигура F (черт. 194), точка S, которую мы назовемъ *центромъ подобія*, и отвлеченное число κ, которое мы назовемъ *отношеніемъ подобія*. Возьмемъ въ фигурѣ F произвольную точку A и черезъ нее изъ центра подобія S проведемъ полупрямую SA. Найдемъ на этой полупрямой такую точку A_1, чтобы отношеніе $SA_1 : SA$ было равно числу κ (если $\kappa<1$, то точка A_1 расположится между S и A, какъ у насъ на чертежѣ, если же $\kappa>1$, то точка A_1 будетъ лежать за точкой A). Возьмемъ какую-нибудь другую точку B фигуры F и сдѣлаемъ для нея



Черт. 194.

то же построеніе, какое мы указали для A_1, т.-е. черезъ B проведемъ изъ S полупрямую и на ней найдемъ такую точку B_1, чтобы отношеніе $SB_1 : SB$ равнялось тому же числу κ. Вообразимъ теперь, что, не измѣняя положенія точки S и величины числа κ, мы для каждой точки фигуры F находимъ указаннымъ путемъ соотвѣтствующую точку; тогда геометрическое мѣсто всѣхъ этихъ точекъ составитъ нѣкоторую новую фигуру F_1. Фигура F_1, полученная такимъ образомъ, наз. фигурой, *подобно расположенной* съ фигурой F относительно центра подобія S при данномъ отношеніи подобія κ.

Полупрямыя SA_1, SB_1..., проводимыя изъ центра подобія черезъ различныя точки фигуры F, наз. **лучами подобія**; точки A и A_1, B и B_1 и т. д. наз. **сходственными** точками фигуръ F и F_1.

Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что если F_1 есть фигура, подобно расположенная съ фигурой F относительно центра подобія S при отношеніи подобія κ, то, обратно, F есть фигура, подобно расположенная съ фигурой F_1 относительно того же центра подобія S, но при отношеніи подобія равномъ не κ, а обратному числу $1/\kappa$.

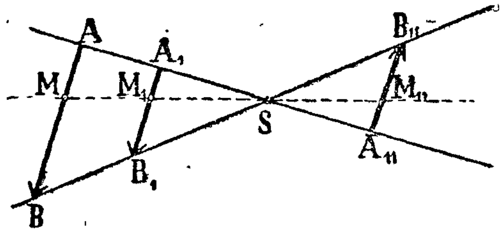
Подобно расположенную фигуру можно получить еще иначе. Вмѣсто того, чтобы точки A_1, B_1,..., сходственныя съ точками A, B... фигуры F, находить на лучахъ подобія (т.-е. по ту же сторону отъ центра подобія S, по которую отъ него расположены точки A, B...), можно брать ихъ на продолженіяхъ лучей подобія, по другую сторону отъ S. Тогда мы получимъ фигуру F_{11} (черт. 194), которая тоже подобно расположена съ фигурой F относительно центра подобія S при томъ же отношеніи подобія κ. Для отличія первое изъ указанныхъ нами подобій въ расположеніи наз. **прямымъ**, а второе—**обратнымъ***).

212. **Замѣчаніе.** **Фигуры F_1 и F_{11} (черт. 194) равны между собою.** Дѣйствительно, изъ равенствъ:

$$SA_{11} : SA = \kappa \quad \text{и} \quad SA_1 : SA = \kappa$$

слѣдуетъ: $SA_{11} = SA_1$; подобно этому $SB_{11} = SB_1$ и т. д. Поэтому если секторъ SAB..., содержащій фигуру F, повернемъ въ плоскости вокругъ точки F на 180°, то точка A_1 совмѣстится съ A_{11}, точка B_1 совмѣстится съ B_{11}... и т. д.; значитъ, фигура F_1 совмѣстится съ фигурой F_{11}.

213. **Теорема.** **Фигура, подобно расположенная съ отрѣзкомъ прямой (AB, черт. 195), есть также отрѣзокъ прямой (A_1B_1 или $A_{11}B_{11}$); этотъ отрѣзокъ параллеленъ первому и имѣетъ съ нимъ одинаковое направленіе при прямомъ подобіи и противоположное при обратномъ; отношеніе этого отрѣзка къ первому равно отношенію подобія.**



Черт. 195.

Будемъ говорить сначала только о прямомъ подобіи.

Найдемъ точки A_1 и B_1, сходственныя съ концами A и B даннаго отрѣзка; эти точки должны лежать на лучахъ SA и SB и удовлетворять равенствамъ $SA_1 : SA = SB_1 : SB = \kappa$, гдѣ κ есть отношеніе подобія. Соединивъ

*) Подобіе въ расположеніи (прямое и обратное) наз. въ нѣкоторыхъ нашихъ руководствахъ (по образцу французскихъ) словомъ «**гомотетія**», и фигуры, подобно расположенныя, наз. тогда «гомотетичными».

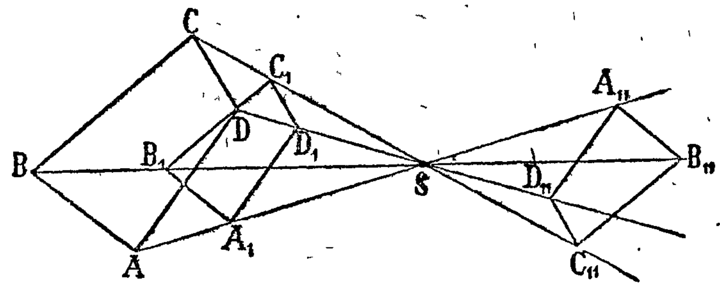
A_1 съ B_1 прямой, докажемъ, что $A_1B_1 \parallel AB$ и что $A_1B_1 : AB = \kappa$. Тр-ки SA_1B_1 и SAB подобны, такъ какъ они имѣютъ по равному углу (при общей вершинѣ S), заключенному между пропорціональными сторонами. Изъ ихъ подобія слѣдуетъ, во 1, равенство угловъ и, слѣд., параллельность сторонъ A_1B_1 и AB; во 2, пропорціональность сторонъ: $A_1B_1 : AB = SA_1 : SA = \kappa$, [illegible]

Теперь докажемъ, что полученный нами отрѣзокъ A_1B_1 есть фигура, подобно расположенная съ отрѣзкомъ AB. Для этого возьмемъ какую-нибудь точку M на AB и проведемъ лучъ SM; пусть M_1 будетъ точка, въ которой этотъ лучъ пересѣкается съ A_1B_1. Тр-ки SA_1M_1 и SAM подобны, такъ какъ углы одного равны соотвѣтственно угламъ другого (вслѣдствіе параллельности сторонъ A_1B_1 и AB). Изъ ихъ подобія слѣдуетъ: $SM_1 : SM = SA_1 : SA = \kappa$; значитъ, точка M_1 есть точка, сходственная съ M. Такимъ образомъ, какую бы точку M на AB мы ни взяли, сходственная ей точка M_1 лежитъ на A_1B_1. Вообразимъ теперь, что точка M перемѣщается по AB отъ A къ B; тогда сходственная ей точка M_1 будетъ перемѣщаться отъ A_1 къ B_1, оставаясь постоянно на отрѣзкѣ A_1B_1. Значитъ, этотъ отрѣзокъ и будетъ фигурой, подобно расположенной съ AB.

То же самое можно повторить и для обратнаго подобія. При этомъ изъ чертежа непосредственно усматриваемъ, что направленіе отрѣзка A_1B_1, получающагося при прямомъ подобіи, одинаково съ направленіемъ AB, а направленіе отрѣзка $A_{11}B_{11}$, получающагося при обратномъ подобіи, противоположно направленію AB.

214. **Теорема.** **Фигура, подобно расположенная съ многоугольникомъ ($ABCD$, черт. 196), есть также многоугольникъ ($A_1B_1C_1D_1$ или $A_{11}B_{11}C_{11}D_{11}$); этотъ многоугольникъ подобенъ первому, при чемъ отношеніе сторонъ его къ сходственнымъ сторонамъ перваго многоугольника равно отношенію подобія.**

Согласно доказанному выше (213), фигура, подобно расположенная съ мн-комъ $ABCD$, должна быть образована такими отрѣзками пря-



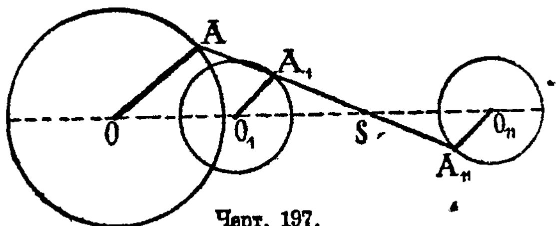
Черт. 196.

мыхъ, которые параллельны сторонамъ даннаго мн-ка и находятся къ нимъ въ отношеніи, равномъ отношенію подобія; слѣд., фигура $A_1B_1C_1D_1$ (и $A_{11}B_{11}C_{11}D_{11}$) есть мн-къ, у котораго стороны пропорціональны сторонамъ даннаго мн-ка. Съ другой стороны, такъ какъ отрѣзки A_1B_1, B_1C_1... имѣютъ одинаковое направленіе съ отрѣзками AB, BC,...; а отрѣзки $A_{11}B_{11}$, $B_{11}C_{11}$,.... имѣютъ противоположное направленіе съ отрѣзками AB, BC,..., то (85) углы мн-ковъ $A_1B_1C_1D_1$ и $A_{11}B_{11}C_{11}D_{11}$ равны соотвѣтственно угламъ мн-ка $ABCD$; значитъ, эти мн-ки подобны.

215. Замѣчаніе. Мы видимъ такимъ образомъ, что прямолинейныя фигуры, подобно расположенныя, оказываются вмѣстѣ съ тѣмъ и подобными (206). Поэтому фигуры эти наз. фигурами подобными и подобно расположенными.

216. Теорема. **Фигура, подобно расположенная съ окружностью** (центра O, черт. 197), **есть также окружность; центръ** (O_1 или O_{11}) **этой окружности лежитъ въ точкѣ, сходственной съ центромъ первой окружности; отношеніе радіуса этой окружности къ радіусу первой равно отношенію подобія.**

Пусть S есть центръ подобія и k отношеніе подобія (на нашемъ чертежѣ мы взяли $k=1/_2$). Возьмемъ въ данной окружности произвольный радіусъ OA и построимъ отрѣзокъ O_1A_1, подобно расположенный съ отрѣзкомъ OA.

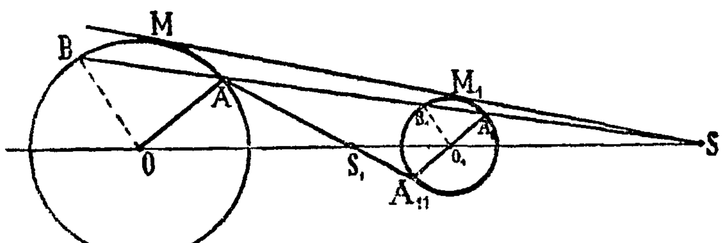


Черт. 197.

По доказанному раньше (213) $O_1A_1 \parallel OA$ и $O_1A_1 : OA = k$, т. е. $O_1A_1 = OA.k = Rk$, если буквою R обозначимъ радіусъ даннаго круга. Изъ послѣдняго равенства видно, что длина O_1A_1 не измѣняется при измѣненіи положенія радіуса OA. Поэтому если станемъ вращать этотъ радіусъ вокругъ центра O, то подобно расположенный отрѣзокъ O_1A_1 будетъ вращаться вокругъ точки O_1, при чемъ длина его не будетъ измѣняться; значитъ, точка A_1 опишетъ при этомъ окружность, которой центръ есть O_1 и радіусъ R_1, удовлетворяющій равенству: $R_1 = O_1A_1 = OA.k = Rk$.

Такъ же докажемъ, что теорема остается вѣрной и при обратномъ подобіи (получается окружность центра O_{11} съ радіусомъ $O_{11}A_{11}$).

217. Теорема. **Всякія двѣ окружности можно разсматривать, какъ подобно расположенныя относительно нѣкоторыхъ центровъ подобія.**



Черт. 198.

Пусть (черт. 198) O и O_1 будутъ центры двухъ окружностей и R и R_1 ихъ радіусы. Возьмемъ какіе-нибудь радіусы OA и O_1A_1, параллельные между собою, и черезъ концы ихъ A и A_1 проведемъ неограниченную прямую. Пусть точка пересѣченія этой прямой съ линіей центровъ будетъ S. Докажемъ, что эту точку можно разсматривать какъ центръ прямого подобія данныхъ окружностей. Изъ построенія видно, что

$$\frac{SO_1}{SO} = \frac{O_1A_1}{OA} = \frac{R_1}{R}$$

Поэтому, если, взявъ за центръ прямого подобія точку S и за отношеніе подобія число $k = R_1 : R$, мы построимъ фигуру, подобно расположенную съ окружностью O, то, согласно предыдущей теоремѣ, эта фигура и будетъ окружность O_1. Значитъ, двѣ данныя окружности суть фигуры, подобно расположенныя относительно центра прямого подобія S.

Такъ же убѣдимся, что если возьмемъ параллельные радіусы OA и O_1A_{11}, которыхъ направленія противоположны, и черезъ концы ихъ A и A_{11} проведемъ прямую, то эта прямая пересѣчетъ линію центровъ въ точкѣ S_1, которую можно принять за центръ обратнаго подобія данныхъ окружностей.

Если радіусы R и R_1 данныхъ окружностей будутъ равны, то прямая AA_1 не пересѣчетъ линіи центровъ; въ этомъ случаѣ не существуетъ прямого подобія, а есть только обратное.

218. Замѣчаніе. Вообразимъ, что лучъ подобія SA (черт. 198) все болѣе и болѣе отклоняется отъ линіи центровъ. Тогда точки A и B, въ которыхъ этотъ лучъ пересѣкается съ окружностью O, будутъ все болѣе и болѣе сближаться между собою; при этомъ и сходственныя имъ точки A_1 и B_1 будутъ также сближаться между собою, и въ тотъ моментъ, когда точки A и B сольются въ одну точку M, точки A_1 и B_1 также сольются въ одну точку M_1, и тогда лучъ подобія сдѣлается общею внѣшнею касательною къ даннымъ окружностямъ. Такимъ образомъ, общая внѣшняя касательная къ 2-мъ окружностямъ (если она существуетъ) проходитъ черезъ центръ S ихъ прямого подобія. Такъ же можно разъяснить, что общая внутренняя касательная къ 2-мъ окружностямъ (если она существуетъ) проходитъ черезъ центръ S_1 ихъ обратнаго подобія. Добавленіе: «если она существуетъ» мы должны сдѣлать потому, что центры подобія 2-хъ окружностей существуютъ всегда (по крайней мѣрѣ обратнаго подобія), тогда какъ общія касательныя существуютъ не всегда (см. замѣчаніе къ задачѣ § 142).

Указанное свойство общихъ касательныхъ даетъ простой способъ ихъ построенія. Найдя центры S и S_1 прямого и обратнаго подобія двухъ окружностей (посредствомъ проведенія параллельныхъ радіусовъ OA, O_1A_1 и O_1A_{11}, черт. 198), черезъ каждый изъ нихъ проводятъ касательныя къ одной изъ двухъ окружностей: эти касательныя должны касаться и другой окружности.

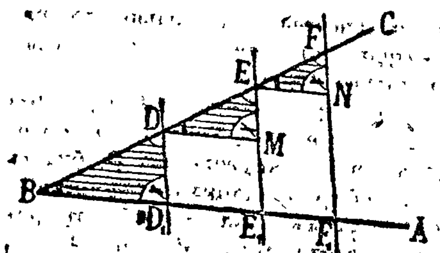
ГЛАВА IV.

Нѣкоторыя теоремы о пропорціональныхъ линіяхъ.

219. Теорема. Стороны угла, пересѣкаемыя рядомъ параллельныхъ прямыхъ, разсѣкаются ими на пропорціональныя части.

Пусть стороны угла ABC (черт. 199) разсѣкаются рядомъ параллельныхъ прямыхъ: DD_1, EE_1, FF_1... на части:

BD, DE, EF..... (сторона BC);
BD_1, D_1E_1, E_1F_1..... (сторона BA).



Черт. 199.

Требуется доказать, что части одной стороны пропорціональны соотвѣтствующимъ частямъ другой стороны, т.-е. что:

$$\frac{BD}{BD_1}=\frac{DE}{D_1E_1}=\frac{EF}{E_1F_1}.....$$

(или: $BD:DE=BD_1:D_1E_1$; $DE:EF=D_1E_1:E_1F_1$; и т. д.).

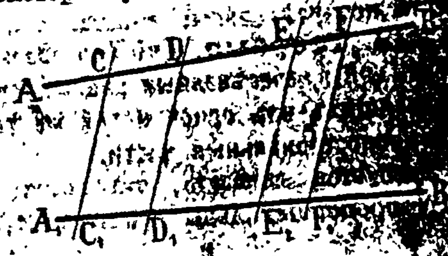
Проводя вспомогательныя прямыя DM, EN..., параллельныя BA, мы получимъ тр-ки BDD_1, DEM, EFN..., которые всѣ подобны между собою, такъ какъ углы у нихъ соотвѣтственно равны (вслѣдствіе параллельности прямыхъ). Изъ ихъ подобія слѣдуетъ (197, замѣчаніе):

$$\frac{BD}{BD_1}=\frac{DE}{DM}=\frac{EF}{EN}...$$

Замѣнивъ въ этомъ ряду равныхъ отношеній отрѣзокъ DM на D_1E_1, отрѣзокъ EN на E_1F_1,... (противоположныя стороны параллелограммовъ равны), мы получимъ то, что требовалось доказать.

220. Слѣдствіе. Двѣ прямыя (AB и A_1B_1, черт. 200), пересѣкаемыя рядомъ параллельныхъ прямыхъ (CC_1, DD_1, EE_1...), разсѣкаются ими на пропорціональныя части.

Предположимъ сначала, что прямыя AB и A_1B_1 не параллельны. Тогда онѣ образуютъ нѣкоторый уголъ. Примѣняя къ этому углу предыдущую теорему, можемъ написать:



Черт. 200.

$$\frac{CD}{C_1D_1}=\frac{DE}{D_1E_1}=\frac{EF}{E_1F_1}=.....$$

(части сторонъ угла, примыкающія къ его вершинѣ, мы отбрасываемъ).

Если теперь допустимъ, что $AB \parallel A_1B_1$, то пропорціональность частей этихъ прямыхъ не нарушается и въ этомъ случаѣ, такъ какъ тогда соотвѣтственныя части не только пропорціональны, но и равны ($CD=C_1D_1$, $DE=D_1E_1$ и т. д.).

221. Обратная теорема. Если на сторонахъ угла отложимъ отъ вершины пропорціональныя части, то прямыя, соединяющія соотвѣтственные концы ихъ, параллельны.

Пусть на сторонахъ угла ABC (черт. 201) отложены отъ вершины

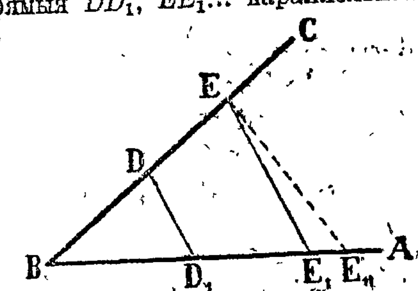
на сторонѣ BC части: BD, DE.....
на сторонѣ BA части: BD_1, D_1E_1...

и пусть части одной стороны пропорціональны частямъ другой стороны, т.-е.:

$$\frac{BD}{BD_1}=\frac{DE}{D_1E_1}=.....$$

Требуется доказать, что прямыя DD_1, EE_1... параллельны.

Предположимъ, что эти прямыя непараллельны. Тогда, проведя черезъ точку E прямую, параллельную DD_1 (77), мы получимъ нѣкоторую линію, не сливающуюся съ EE_1; пусть это будетъ прямая EE_{11}. Согласно предыдущей теоремѣ, мы будемъ имѣть:



Черт. 201.

$$\frac{BD}{BD_1}=\frac{DE}{D_1E_{11}}\text{; но по условію: }\frac{BD}{BD_1}=\frac{DE}{D_1E_1}$$

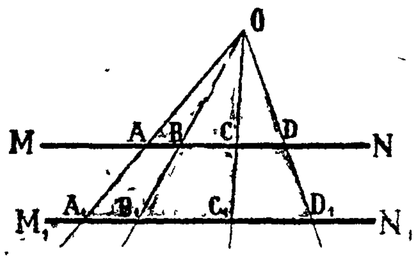
слѣд., $D_1E_{11}=D_1E_1$, что при нашемъ предположеніи невозможно; значитъ, нельзя допустить, чтобы прямыя DD_1 и EE_1 были непараллельны; остается принять, что $DD_1 \parallel EE_1$.

222. Теорема. Двѣ параллельныя прямыя (MN и M_1N_1, черт. 202), **пересѣкаемыя рядомъ прямыхъ** (OA, OB, OC, ...), **исходящихъ изъ одной и той же точки** (O), **разсѣкаются ими на пропорціональныя части.**

Требуется доказать, что части: AB, BC, CD,... прямой MN пропорціональны частямъ A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1... прямой M_1N_1.—Изъ подобія тр-ковъ OAB и OA_1B_1 (136), затѣмъ тр-ковъ OBC и OB_1C_1 выводимъ:

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BO}{B_1O} \text{ и } \frac{BO}{B_1O}=\frac{BC}{B_1C_1}.$$

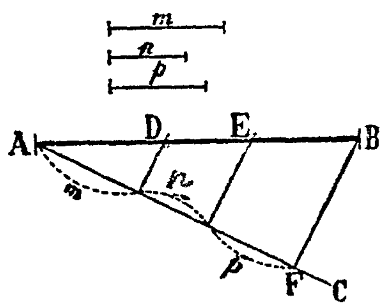
Откуда: $\dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{BC}{B_1C_1}$.



Черт. 202.

Подобнымъ же образомъ доказывается пропорціональность и прочихъ частей.

223. Задача. Раздѣлить отрѣзокъ прямой AB (черт. 203) на три части пропорціонально ряду $m:n:p$, гдѣ m, n и p суть данные отрѣзки, или данныя числа.



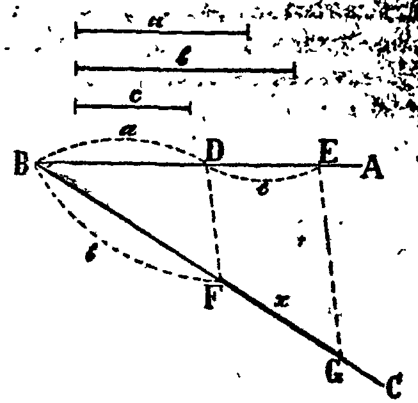
Черт. 203.

Проведя неограниченную прямую AC подъ произвольнымъ угломъ къ AB, отложимъ на ней отъ точки A части, равныя прямымъ m, n и p. Точку F, составляющую конецъ p, соединяемъ съ B и черезъ точки отложенія проводимъ прямыя, параллельныя BF. Тогда AB раздѣлится въ точкахъ D и E на части пропорціональныя $m:n:p$ (219).

Если m, n и p означаютъ какія-нибудь числа, напр., 2, 5, 3, то построеніе выполняется такъ же, съ тою разницей, что на AC откладываются отрѣзки, равные 2, 5 и 3 произвольнымъ единицамъ длины

Конечно, указанное построеніе примѣнимо къ дѣленію не только на 3 части, но и на какое угодно иное число частей.

224. Задача. Къ тремъ даннымъ отрѣзкамъ прямой a, b и c найти четвертый пропорціональный (черт. 204), т.-е. найти такой отрѣзокъ x, который удовлетворялъ бы пропорціи: $a:b=c:x$.

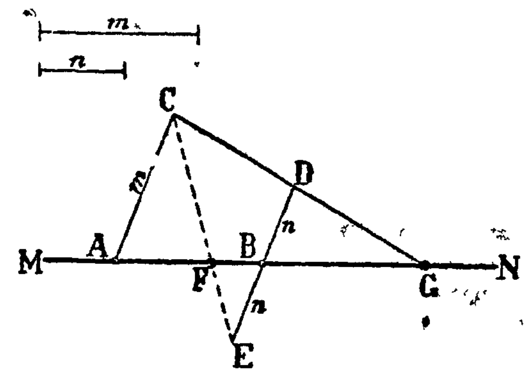


Черт. 204.

— На сторонахъ произвольнаго угла ABC откладываемъ части: $BD=a$, $BF=b$, $DE=c$. Проведя затѣмъ черезъ D и F прямую, построимъ $EG \parallel DF$. Отрѣзокъ FG будетъ искомый (219) *).

225. Задача. На безконечной прямой MN (черт. 205) найти точки, которыхъ разстоянія отъ двухъ данныхъ точекъ A и B этой прямой относились бы, какъ $m:n$ (m и n или данные отрѣзки прямой, или данныя числа).

Черезъ A и B проводимъ какія-нибудь двѣ параллельныя прямыя и на нихъ откладываемъ: $AC=m$ и $BD=BE=n$ (если m и n числа, напр., $m=3$, $n=2$, то мы возьмемъ отрѣзокъ AC, равный 3 какимъ-нибудь единицамъ длины, а отрѣзки BD и BE, равные 2 такимъ же единицамъ). Затѣмъ проведемъ прямыя черезъ точку C и каждую изъ точекъ E и D. Очевидно, ка-



Черт. 205.

*) Отрѣзокъ c можно откладывать, такъ же какъ и a, отъ вершины угла B; тогда и отрѣзокъ x отложится тоже отъ этой вершины. При такомъ построеніи пропорція $a:b=c:x$ выводится изъ подобія тр-ковъ.

ковы бы ни были m и n, прямая CE всегда пересѣчется съ MN въ нѣкоторой точкѣ F; прямая же CD пересѣчется съ MN только въ томъ случаѣ, если $m \neq n$, при чемъ точка пересѣченія G будетъ лежать направо отъ B, если $m>n$ (какъ у насъ на чертежѣ), или налѣво отъ A, если $m<n$. Докажемъ, что точки F и G удовлетворяютъ требованію задачи. Дѣйствительно, изъ подобія треугольниковъ ACF и FBE, а затѣмъ изъ подобія тр-ковъ ACG и BDG находимъ:

$$FA : FB = AC : BE = m : n;$$
$$GA : GB = AC : BD = m : n.$$

Кромѣ этихъ двухъ точекъ на прямой MN нѣтъ ни одной точки, удовлетворяющей требованію задачи. Дѣйствительно, если точку F, (черт. 206) передвинемъ ближе къ A, то FA уменьшится, а FB увеличится, потому отношеніе $FA : FB$ уменьшится; если же точку F

Черт. 206.

перемѣстимъ ближе къ B, то FA увеличится, а FB уменьшится, и потому отношеніе $FA : FB$ увеличится. Значитъ, между A и B, кромѣ точки F, не можетъ существоватв никакой другой точки, разстоянія которой отъ A и B относились бы между собою, какъ $m : n$.

Возьмемъ теперь какую-нибудь точку G_1, лежащую между B и G, и допустимъ, что

$$G_1A : G_1B = GA : GB = m : n.$$

Чтобы доказать невозможность этой пропорціи, составимъ изъ нея слѣдующую производную пропорцію:

$$(G_1A - G_1B) : G_1B = (GA - GB) : GB,$$

т.-е.

$$AB : G_1B = AB : GB;$$

откуда получимъ:

$$G_1B = GB.$$

Такъ какъ это равенство невозможно, то, значитъ, невозможна и допущенная нами пропорція, и потому нельзя допустить, чтобы между A и G существовала какая-нибудь точка, удовлетворяющая требованіямъ задачи. Такъ же можно доказать, что никакая точка G_2, лежащая направо отъ G, не можетъ удовлетворить этимъ требованіямъ.

Наконецъ, если возьмемъ какую-нибудь точку K, лежащую налѣво отъ A, то для нея, очевидно, $KA<KB$, и потому отношеніе $KA : KB$ меньше 1 и, слѣд., оно не можетъ равняться отношенію $m : n$, которое больше 1 при $m>n$ (если $m<n$, то точка G будетъ находиться налѣво отъ A, а направо отъ B не будетъ ни одной точки, удовлетворяющей задачѣ).

Замѣчанія. 1°. Когда $m = n$, существуетъ только одна точка (лежащая на серединѣ между A и B), которая удовлетворяетъ требованію задачи, такъ какъ разстоянія какой-нибудь другой точки прямой MN отъ точекъ A и B не могутъ быть равными.

2°. О точкахъ F и G, удовлетворяющихъ пропорціи $FA : FB = GA : GB = m : n$, говорятъ, что онѣ дѣлятъ въ данномъ отношеніи $m : n$ отрѣзокъ AB (черт. 205) внутреннимъ и внѣшнимъ образомъ (точка F внутреннимъ, а точка G внѣшнимъ); говорятъ также, что точки F и G дѣлятъ отрѣзокъ AB гармонически.

226. Теорема. Биссектриса любого угла треугольника, какъ внутренняго, ~~такъ и внѣшняго~~, пересѣкаетъ противоположную сторону ~~или ея продолженіе~~ въ такой точкѣ, которой разстоянія отъ концовъ этой стороны пропорціональны соотвѣтственно другимъ сторонамъ треугольника.

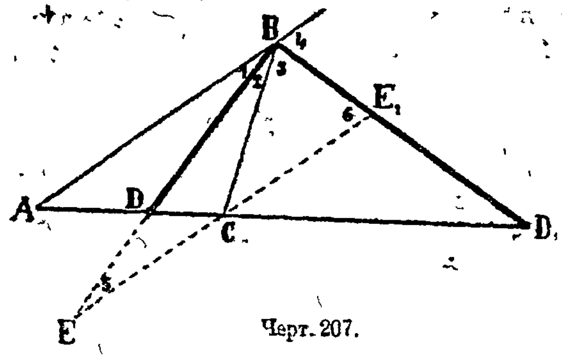
Пусть (черт. 207) BD есть биссектриса внутренняго, а BD_1 — биссектриса внѣшняго угла тр-ка ABC. Требуется доказать, что точки D и D_1 дѣлятъ сторону AC внутреннимъ и внѣшнимъ образомъ на части, пропорціональныя сторонамъ BA и BC, т.-е., что:

$$1^\circ.\ \frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BC}; \qquad 2^\circ.\ \frac{D_1A}{D_1C} = \frac{BA}{BC}.$$

Черезъ вершину C проведемъ $EE_1 \parallel AB$ до пересѣченія съ обѣими биссектрисами (80, 1°). Тр-ки ABD и DEC подобны (углы при D равны, какъ вертикальные, уг. 1=уг. 5, какъ углы внутр. накрестъ лежащіе при параллельныхъ); точно такъ же подобны тр-ки ABD_1 и CE_1D_1. Изъ подобія ихъ находимъ:

$$\frac{DA}{DC} = \frac{BA}{EC}\ [1]; \qquad \frac{D_1A}{D_1C} = \frac{BA}{CE_1}\ [2].$$

Чтобы перейти отъ этихъ пропорцій къ тѣмъ, которыя требуется доказать, достаточно убѣдиться, что $EC = BC$ и $CE_1 = BC$. Такъ какъ уг. 2=уг. 1 (по условію) и уг. 5=уг. 1 (какъ внутренніе накрестъ лежащіе при параллельныхъ), то уг. 2=уг. 5, и потому въ $\triangle EBC$ стороны EC и BC равны; съ другой стороны, уг. 3=уг. 4 (по условію) и уг. 6=уг. 4 (какъ углы внутр. накр. лежащіе при параллельныхъ); значитъ, уг. 3=уг. 6, и потому въ $\triangle BCE_1$ стороны CE_1 и BC равны. Замѣнивъ теперь въ пропорціяхъ [1] и [2] отрѣзка EC и CE_1 на BC, получимъ тѣ пропорціи, которыя требовалось доказать.



Черт. 207.

Численный примѣръ. Пусть $AB=10$, $BC=7$ и $AC=6$. Тогда биссектрисы BD и BD_1 опредѣляютъ точки D и D_1, которыхъ разстоянія отъ A и C можно найти изъ пропорціи:

$$\frac{DA}{DC}=\frac{10}{7} \text{ и } \frac{D_1A}{D_1C}=\frac{10}{7},$$

откуда: $$\frac{DA+DC}{DA}=\frac{17}{10} \text{ и } \frac{D_1A-D_1C}{D_1A}=\frac{3}{10},$$

т.-е. $$\frac{6}{DA}=\frac{17}{10} \text{ и } \frac{6}{D_1A}=\frac{3}{10};$$

значитъ: $$DA=\frac{60}{17}=3\tfrac{9}{17} \text{ и } D_1A=\frac{60}{3}=20.$$

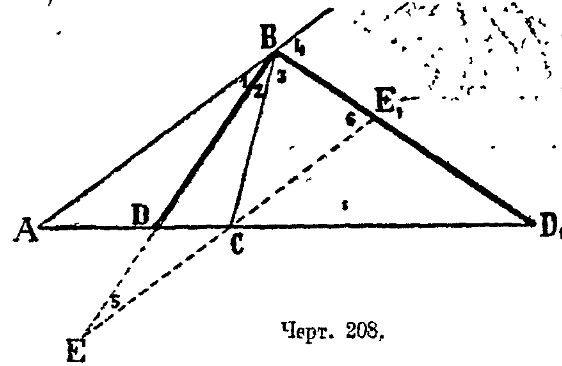
Замѣчаніе. Для биссектрисы внѣшняго угла тр-ка теорема не примѣнима въ томъ случаѣ, когда этотъ внѣшній уголъ лежитъ при вершинѣ равнобедреннаго тр-ка. Дѣйствительно, въ этомъ случаѣ биссектриса BD_1 должна быть параллельна AC, такъ какъ (если $AB=BC$, черт. 207) $BD \perp AC$, а сумма угловъ 2 и 3, составляя половину суммы угловъ 1, 2, 3 и 4, равна прямому углу.

227. Обратная теорема. Если прямая, исходящая изъ вершины треугольника, пересѣкаетъ противоположную сторону (или ея продолженіе) въ такой точкѣ, которой разстоянія до концовъ этой стороны пропорціональны соотвѣтственно двумъ другимъ сторонамъ, то она есть биссектриса угла треугольника (внутренняго или внѣшняго).

Пусть D и D_1 (черт. 208) двѣ точки, удовлетворяющія пропорціямъ:

$$\frac{DA}{DC}=\frac{BA}{BC}\ [1]; \qquad \frac{D_1A}{D_1C}=\frac{BA}{BC}\ [2].$$

Требуется доказать, что прямыя BD и BD_1 дѣлятъ пополамъ: первая внутренній, а вторая внѣшній уголъ тр-ка ABC.



Черт. 208.

Проведя черезъ точку C прямую $EE_1 \parallel AB$, найдемъ изъ подобія треугольниковъ:

$$\frac{DA}{DC}=\frac{BA}{EC}\ [3]; \qquad \frac{D_1A}{D_1C}=\frac{BA}{CE_1}\ [4].$$

Сравнивая пропорціи [3] съ [1] и [4] съ [2], находимъ:

$$EC=BC \text{ и } CE_1=BC.$$

Поэтому въ тр-кѣ BEC равны углы 2 и 5, а въ треугольникѣ BE_1C равны углы 3 и 6; но уг. 5=уг. 1 (какъ внутренніе накр. лежащіе при пар.) и уг. 6=уг. 4 (по той же причинѣ); слѣд., уг. 2=уг. 1 и уг. 3=уг. 4, т.-е. BD и BD_1 суть биссектрисы.

228. Теорема. Геометрическое мѣсто точекъ, которыхъ разстоянія отъ двухъ данныхъ точекъ A и B находятся въ постоянномъ отношеніи $m:n$, есть окружность, когда m не равно n, и прямая, когда $m=n$.

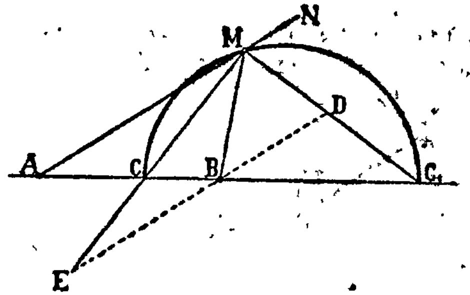
Предположимъ сначала, что m не равно n. Тогда на безконечной прямой, проходящей черезъ A и B (черт. 209), можно найти двѣ точки, принадлежащія искомому геометрическому мѣсту (225). Пусть это будутъ точки C и C_1, т.-е.

$$CA : CB = m : n \text{ и } C_1A : C_1B = m : n.$$

Предположимъ теперь, что существуетъ еще какая-нибудь точка M, не лежащая на прямой AB и удовлетворяющая пропорціи:

$$MA : MB = m : n.$$

Проведя CM и MC_1, мы должны заключить (227), что первая изъ этихъ прямыхъ есть биссектриса угла AMB, а вторая—биссектриса угла BMN; вслѣдствіе этого уголъ CMC_1, составленный изъ двухъ половинъ смежныхъ угловъ, долженъ быть прямой, а потому вершина его M лежитъ на окружности, описанной на CC_1, какъ на діаметрѣ. Такимъ образомъ, мы доказали, что всякая точка M, принадлежащая искомому геометрическому мѣсту, лежитъ на окружности CC_1. Теперь докажемъ обратное предложеніе, т.-е., что всякая точка этой окружности принадлежитъ геометрическому мѣсту.



Черт. 209.

Пусть M есть произвольная точка этой окружности. Требуется доказать, что $MA : MB = m : n$. Проведя черезъ B прямую $DE \parallel AM$, будемъ имѣть слѣдующія пропорціи:

$$MA : BD = C_1A : C_1B = m : n; \qquad (1)$$

$$MA : BE = CA : CB = m : n. \qquad (2)$$

Откуда:

$$BD = BE,$$

т.-е. точка B есть середина прямой DE. Такъ какъ уголъ CMC_1 вписанный и опирается на діаметръ, то онъ прямой; поэтому $\triangle DME$ прямоугольный. Вслѣдствіе этого, если середину B гипотенузы DE примемъ за центръ и опишемъ окружность, то эта окружность пройдетъ черезъ M; значитъ, $BD = MB$. Подставивъ теперь въ пропорцію (1) на мѣсто BD равную ей прямую MB, будемъ имѣть:

$$MA : MB = m : n.$$

Когда $m = n$, разсматриваемое геометрическое мѣсто, очевидно, обращается въ прямую, перпендикулярную къ отрѣзку AB въ его серединѣ.

Замѣчаніе. Окружность, о которой говорится въ этой теоремѣ, извѣстна подъ названіемъ **Аполлоніевой окружности** (Аполлоній—греческій геометръ, жившій за 2 вѣка до Р. Хр.).

ГЛАВА V.

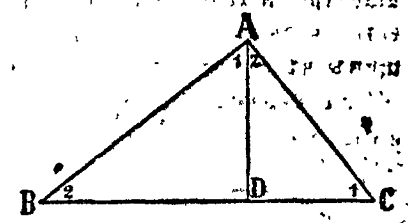
Числовыя зависимости между элементами треугольника и нѣкоторыхъ другихъ фигуръ.

229. Теорема. Въ прямоугольномъ треугольникѣ перпендикуляръ, опущенный изъ вершины прямого угла на гипотенузу, есть средняя пропорціональная между отрѣзками гипотенузы, а каждый катетъ есть средняя пропорціональная между гипотенузой и прилежащимъ къ этому катету отрѣзкомъ.

Пусть AD (черт. 210) есть перпендикуляръ, опущенный изъ вершины прямого угла A на гипотенузу BC. Требуется доказать слѣдующія три пропорціи:

$$1^\circ.\ \frac{BD}{AD} = \frac{AD}{DC};\quad 2^\circ.\ \frac{BC}{AB} = \frac{AB}{DB};\quad 3^\circ.\ \frac{BC}{AC} = \frac{AC}{DC}.$$

Первую пропорцію мы докажемъ изъ подобія тр-ковъ ABC и ADC, у которыхъ AD общая сторона. Эти тр-ки подобны, потому что острые углы, обозначенные на чертежѣ одними и тѣми же цыфрами, равны вслѣдствіе перпендикулярности ихъ сторонъ (86, 87). Возьмемъ въ $\triangle ABD$ тѣ стороны BD и AD, которыя составляютъ первое отношеніе доказываемой пропорціи; сходственными сторонами въ $\triangle ADC$ будутъ AD и DC; поэтому:



Черт. 210.

$$BD : AD = AD : DC.$$

Вторую пропорцію докажемъ изъ подобія тр-ковъ ABC и ABD, у которыхъ AB общая сторона. Эти тр-ки подобны, потому что они прямоугольные, и острый уголъ B у нихъ общій. Въ $\triangle ABC$ возьмемъ тѣ стороны BC и AB, которыя составляютъ первое отношеніе доказываемой пропорціи; сходственными сторонами въ $\triangle ABD$ будутъ AB и BD; поэтому:

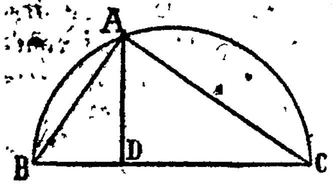
$$BC : AB = AB : BD,$$

Третью пропорцію докажемъ изъ подобія тр-ковъ ABC и ADC, у которыхъ AC общая сторона. Эти тр-ки подобны, потому что они оба прямоугольные и имѣютъ общій острый уголъ C. Въ

$\triangle ABC$ возьмемъ стороны BC и AC; сходственными сторонами въ $\triangle ADC$ будутъ AC и DC; поэтому:

$$BC : AC = AC : DC.$$

230. Слѣдствіе. Пусть A (черт. 211) есть произвольная точка окружности, описанной на діаметрѣ BC. Соединивъ концы діаметра съ этою точкою, мы получимъ прямоугольный тр-къ ABC, у котораго гипотенуза есть діаметръ, а катеты суть хорды. Примѣняя доказанную выше теорему къ этому треугольнику, приходимъ къ слѣдующему заключенію:



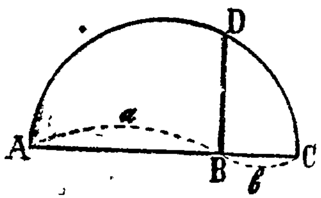
Черт. 211.

перпендикуляръ, опущенный изъ какой-либо точки окружности на діаметръ, есть средняя пропорціональная между отрѣзками діаметра, а хорда, соединяющая эту точку съ концомъ діаметра, есть средняя пропорціональная между діаметромъ и прилежащимъ къ хордѣ отрѣзкомъ его.

231. Задача. Построить среднюю пропорціональную между двумя конечными прямыми a и b.

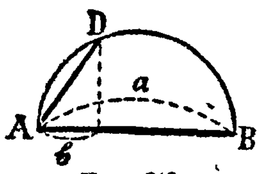
Предыдущее слѣдствіе позволяетъ рѣшить эту задачу двоякимъ путемъ.

1°. На произвольной прямой (черт. 212) откладываемъ части $AB=a$ и $BC=b$; на AC, какъ на діаметрѣ, описываемъ полуокружность; изъ B возставляемъ до пересѣченія съ окружностью перпендикуляръ BD. Этотъ перпендикуляръ и есть искомая средняя пропорціональная между AB и BC.



Черт. 212.

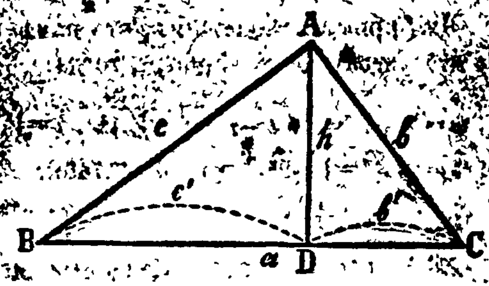
2°. На произвольной прямой (черт. 213) откладываемъ отъ точки A части a и b. На большей изъ этихъ частей описываемъ полуокружность. Проведя изъ конца меньшей части перпендикуляръ къ AB до пересѣченія его съ окружностью въ точкѣ D, соединяемъ A съ D. Хорда AD есть средняя пропорціональная между a и b.



Черт. 213.

232. Теорема. Если стороны прямоугольнаго треугольника измѣрены одною единицею, то квадратъ числа, выражающаго гипотенузу, равенъ суммѣ квадратовъ чиселъ, выражающихъ катеты.

Пусть ABC (черт. 214) есть прямоугольный треугольникъ и AD перпендикуляръ, опущенный на гипотенузу изъ вершины прямого угла. Тогда, какъ было доказано (229),



Черт. 214.

$$BC : AB = AB : BD$$
и $$BC : AC = AC : DC.$$

Когда стороны даннаго треугольника и отрѣзки гипотенузы выражены числами, то мы можемъ примѣнить къ этимъ пропорціямъ свойство числовыхъ пропорцій, по которому произведеніе среднихъ членовъ равно произведенію крайнихъ:

$$AB^2 = BC \cdot BD \text{ и } AC^2 = BC \cdot DC.$$

Сложивъ эти два равенства, получимъ то, что требовалось доказать:

$$AB^2 + AC^2 = BC(BD+BC) = BC \cdot BC = BC^2.$$

Эту теорему обыкновенно выражаютъ сокращенно такъ:

квадратъ гипотенузы равенъ суммѣ квадратовъ катетовъ.

Примѣръ. Положимъ, что катеты, измѣренные какою-нибудь линейною единицею, выражаются числами 3 и 4; тогда гипотенуза въ той же единицѣ выразится числомъ x, удовлетворяющимъ уравненію: $x^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$; откуда: $x = \sqrt{25} = 5$ *).

233. Численныя примѣненія. Пусть a, b, c, h, b' и c' (черт. 214) будутъ числа, выражающія въ одной и той же единицѣ стороны, высоту и отрѣзки гипотенузы прямоугольнаго тр-ка ABC. На основаніи предыдущихъ теоремъ мы можемъ вывести слѣдующія 5 уравненій, связывающія эти 6 чиселъ:

$$c^2 = ac';\ b^2 = ab';\ h^2 = b'c';\ b' + c' = a;\ b^2 + c^2 = a^2.$$

*) См. ниже § 323 о «Пиѳагоровыхъ» треугольникахъ.

Изъ этихъ уравненій только первыя четыре самостоятельны, а послѣднее составляетъ слѣдствіе двухъ первыхъ; вслѣдствіе этого уравненія позволяютъ по даннымъ двумъ изъ шести чиселъ находить остальныя четыре.

Для примѣра положимъ, что намъ даны отрѣзки гипотенузы: $b'=5$ метрамъ и $c'=7$ метр.; тогда:

$$a=b'+c'=12;\quad c=\sqrt{ac'}=\sqrt{12\;.\;7}=\sqrt{84}=9,165...$$
$$b=\sqrt{ab'}=\sqrt{12\;.\;5}=\sqrt{60}=7,745...$$
$$h=\sqrt{b'c'}=\sqrt{5\;.\;7}=\sqrt{35}=5,916...$$

234. Слѣдствіе. **Квадраты катетовъ относятся между собою, какъ прилежащіе отрѣзки гипотенузы.** Дѣйствительно, изъ уравненій предыдущаго параграфа находимъ:

$$c^2 : b^2 = ac' : ab' = c' : b'.$$

235. Замѣчаніе. Въ послѣдующихъ теоремахъ мы будемъ сокращенно говорить: «квадратъ стороны» вмѣсто: «квадратъ числа, выражающаго сторону», или «произведеніе прямыхъ» вмѣсто: «произведеніе чиселъ, выражающихъ прямыя». При этомъ будемъ подразумѣвать, что прямыя измѣрены одною и тою же единицею.

236. Теорема. **Во всякомъ треугольникѣ квадратъ стороны, лежащей противъ остраго угла, равенъ суммѣ квадратовъ двухъ другихъ сторонъ безъ удвоеннаго произведенія какой-нибудь изъ этихъ сторонъ на отрѣзокъ ея отъ вершины остраго угла до высоты.**

Пусть BC есть сторона тр-ка ABC (черт. 215 или 216), лежащая противъ остраго угла A, и BD высота, опущенная на какую-либо изъ остальныхъ сторонъ, напр., на AC (или на продолженіе AC). Требуется доказать, что

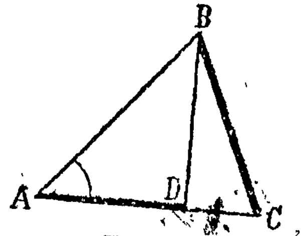
$$BC^2=AB^2+AC^2-2AC\;.\;AD.$$

Изъ прямоугольнаго тр-ка BDC выводимъ:

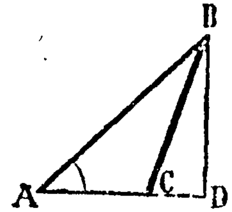
$$BC^2=BD^2+DC^2 \qquad [1]$$

Опредѣлимъ каждый изъ квадратовъ BD^2 и DC^2. Изъ прямоугольнаго тр-ка BAD находимъ величину BD^2, а именно:

$$BD^2=AB^2-AD^2. \qquad [2]$$



Черт. 215.



Черт. 216.

Съ другой стороны: $DC=AC-AD$ (черт. 215) или $DC=AD-AC$ (черт. 216). Въ обоихъ случаяхъ для DC^2 получимъ одно и то же выраженіе:

$$\left.\begin{array}{l} DC^2=(AC-AD)^2=AC^2-2AC\;.\;AD+AD^2 \\ DC^2=(AD-AC)^2=AD^2-2AD\;.\;AC+AC^2 \end{array}\right\} [3].$$

Теперь равенство [1] можно переписать такъ:

$$BC^2=AB^2\underline{-AD^2}+AC^2-2AC\;.\;AD\underline{+AD^2}.$$

Это равенство, послѣ уничтоженія подчеркнутыхъ членовъ $-AD^2$ и $+AD^2$, и есть то самое, которое требовалось доказать.

Замѣчаніе. Теорема эта остается вѣрною и тогда, когда уголъ C прямой; тогда отрѣзокъ CD обратится въ нуль, т.-е. AC сдѣлается равною AD, и мы будемъ имѣть:

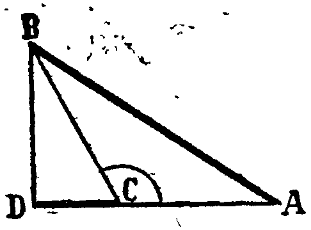
$$BC^2=AB^2+AC^2-2AC^2=AB^2-AC^2,$$

что согласуется съ теоремою о квадратѣ гипотенузы (232).

237. Теорема. **Въ тупоугольномъ треугольникѣ квадратъ стороны, лежащей противъ тупого угла, равенъ суммѣ квадратовъ двухъ другихъ сторонъ, сложенной съ удвоеннымъ произведеніемъ какой-нибудь изъ этихъ сторонъ на отрѣзокъ ея продолженія отъ вершины тупого угла до высоты.**

Пусть AB есть сторона тр-ка ABC (черт. 217), лежащая противъ тупого угла C, и BD—высота, опущенная на какую-либо изъ остальныхъ сторонъ; требуется доказать, что

$$AB^2=AC^2+BC^2+2AC\,.\,CD.$$



Черт. 217.

Изъ прямоугольныхъ тр-ковъ ABD и CBD выводимъ:

$$AB^2=BD^2+AD^2; \quad [1]$$
$$BD^2=BC^2-CD^2. \quad [2]$$

Но $AD^2=(AC+CD)^2=$
$$=AC^2+2AC\,.\,CD+CD^2. \quad [3]$$

Замѣнивъ въ равенствѣ [1] BD^2 и AD^2 ихъ выраженіями изъ равенствъ [2] и [3], найдемъ:

$$AB^2=BC^2-\underline{CD^2}+AC^2+2AC\,.\,CD+\underline{CD^2}.$$

Такъ какъ подчеркнутые члены $-CD^2$ и $+CD^2$ взаимно уничтожаются, то это равенство и есть то, которое требовалось доказать.

238. Слѣдствіе. Изъ трехъ послѣднихъ теоремъ выводимъ, что квадратъ стороны треугольника равенъ, меньше или больше суммы квадратовъ другихъ сторонъ, смотря по тому, будетъ ли противолежащій уголъ прямой, острый или тупой; отсюда слѣдуетъ обратное предложеніе (51):

уголъ треугольника окажется прямымъ, острымъ или тупымъ, смотря по тому, будетъ ли квадратъ противолежащей стороны равенъ, меньше или больше суммы квадратовъ другихъ сторонъ.

Примѣръ. Стороны тр-ка равны:

1) 5, 3, 4. Такъ какъ $5^2=3^2+4^2$, то уголъ, лежащій противъ стороны 5, прямой.

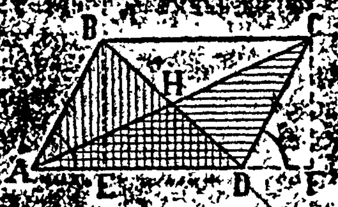
2) 8, 4, 7. Такъ какъ $8^2<4^2+7^2$, то уголъ, лежащій противъ стороны 8, острый.

3) 8, 4, 5. Такъ какъ $8^2>4^2+5^2$, то уголъ, лежащій противъ стороны 8, тупой.

239. Теорема. Сумма квадратовъ діагоналей параллелограмма равна суммѣ квадратовъ его сторонъ.

Изъ вершинъ B и C (черт. 218) параллелограмма $ABCD$ опустимъ на основаніе AD перпендикуляры BE и CF. Тогда изъ тр-ковъ ABD и ACD находимъ:

$$BD^2=AB^2+AD^2-\underline{2AD\,.\,AE};$$
$$AC^2=AD^2+CD^2+\underline{2AD\,.\,DE}.$$

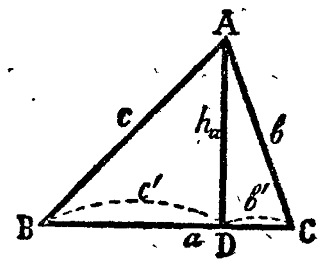


Черт. 218.

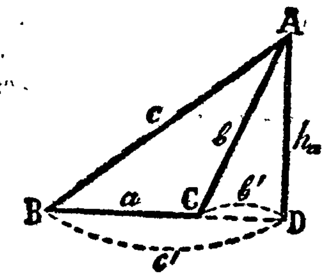
Прямоугольные тр-ки ABE и DCF равны, такъ какъ они имѣютъ по равной гипотенузѣ и равному острому углу; поэтому $AE=DF$. Замѣтивъ это, сложимъ два выведенныя выше равенства; тогда подчеркнутые члены взаимно уничтожатся, и мы получимъ:

$$BD^2+AC^2=AB^2+AD^2+AD^2+CD^2=AB^2+AD^2+$$
$$+BC^2+CD^2.$$

240. Вычисленіе высотъ треугольника по его сторонамъ. Предварительно замѣтимъ слѣдующій общепринятый способъ обозначенія сторонъ и высотъ тр-ка. Если вершины тр-ка обозначены большими буквами A, B и C, то численныя величины сторонъ этого тр-ка обозначаютъ соотвѣтственными малыми буквами a, b и c, при чемъ буквою a обозначаютъ ту сторону, которая лежитъ противъ угла A, буквою



Черт. 219.



Черт. 220.

b—ту сторону, которая лежитъ противъ угла B, и т. д. Численную величину высоты тр-ка обозначаютъ буквою h (первая буква французскаго слова h a u t e u r—высота), сопровождаемою (внизу) одною изъ малыхъ буквъ: a, b и c. Такъ, высота, опущенная на сторону a, обозначается h_a, высота, опущенная на сторону b, обозначается h_b, и т. д.

Опредѣлимъ h_a (черт. 219 и 220) въ зависимости отъ сторонъ тр-ка. Обозначимъ отрѣзки стороны a (продолженной въ случаѣ тупого угла C, черт. 220) такимъ образомъ: отрѣзокъ BD, прилежащій къ сторонѣ c, буквою c', а отрѣзокъ DC, прилежащій къ сторонѣ b, буквою b'. Пользуясь теоремою о квадратѣ стороны тр-ка, лежащей противъ остраго угла (236), можемъ написать:

$$b^2=a^2+c^2-2ac'.$$

Изъ этого уравненія находимъ отрѣзокъ c':

$$c'=\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}.$$

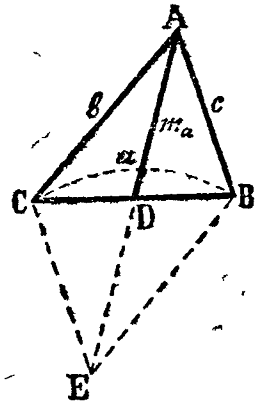
Послѣ этого изъ тр-ка ABD опредѣляемъ высоту, какъ катетъ:

$$h_a=\sqrt{c^2-\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right)^2}\ ^{*)}$$

Такимъ же путемъ можно опредѣлить въ зависимости отъ сторонъ тр-ка численныя величины h_b и h_c высотъ, опущенныхъ на стороны b и c.

241. Вычисленіе медіанъ треугольника по его сторонамъ.

Замѣтимъ, что численная величина медіаны тр-ка обыкновенно обозначается буквою m (начальной буквой слова m e d i a n e—средняя), сопровождаемою (внизу) одною изъ маленькихъ буквъ a, b и c въ зависимости отъ стороны тр-ка, къ которой проведена обозначаемая медіана.



Черт. 221.

Опредѣлимъ величину m_a медіаны, проведенной къ сторонѣ a (черт. 221). Для этого продолжимъ медіану на разстояніе $DE=AD$ и соединимъ точку E прямыми съ B и C. Тогда мы получимъ параллелограммъ $ABEC$ (101). Примѣнивъ къ нему теорему о суммѣ квадратовъ діагоналей (239), получимъ:

$$a^2+(2m_a)^2=2b^2+2c^2; \quad \text{откуда:} \quad 4m_a^2=2b^2+2c^2-a^2$$

*) Ниже, въ § 318, будетъ дана болѣе простая формула для высоты.

и, слѣд.:

$$m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}.$$

Подобнымъ же образомъ можемъ найти величины m_b и m_c медіанъ, проведенныхъ къ сторонамъ b и c.

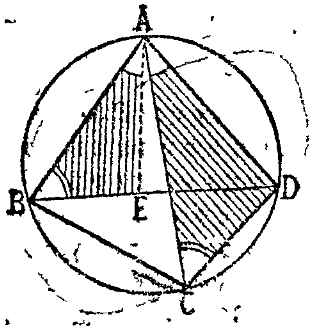
242. Теорема Птоломея *).

Произведеніе діагоналей вписаннаго выпуклаго четыреугольника равно суммѣ произведеній противоположныхъ сторонъ его.

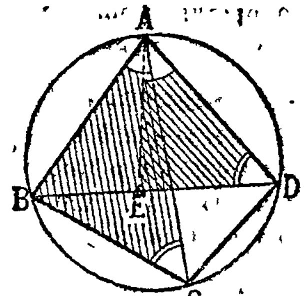
Пусть AC и BD суть діагонали вписаннаго выпуклаго четыреугольника (черт. 222); требуется доказать, что:

$$AC\,.\,BD=AB\,.\,CD+BC\,.\,AD,$$

гдѣ подъ обозначеніями AC, BD и пр. разумѣются ч и с л а, измѣряющія діагонали и стороны въ одной и той же линейной единицѣ.



Черт. 222.



Черт. 222а.

Построимъ уголъ BAE, равный углу DAC (меньшему изъ двухъ угловъ, на которые уголъ A дѣлится діагональю AC); пусть E будетъ точка пересѣченія стороны этого угла съ діагональю BD. Тр-ки ABE и ADC (покрытые на чертежѣ штрихами) подобны, такъ какъ у нихъ углы B и C равны, какъ вписанные, опирающіеся на одну и ту же дугу AD, а углы при общей вершинѣ A равны по построенію. Изъ подобія этихъ тр-ковъ выводимъ:

$$AB : AC=BE : CD; \qquad \text{откуда:} \quad AC\,.\,BE=AB\,.\,CD.$$

Разсмотримъ теперь другую пару тр-ковъ, а именно: ABC и AED (тр-ки эти на черт. 222а, покрыты штрихами). Они подобны,

*) К л а в д і й П т о л о м е й—извѣстный астрономъ и математикъ, жившій въ Александріи во 2-мъ вѣкѣ по Р. Хр.

такъ какъ у нихъ углы BAC и DAE равны, какъ суммы соотвѣтственно равныхъ угловъ, а углы ACB и ADB равны, какъ вписанные, опирающіеся на одну и ту же дугу AB. Изъ ихъ подобія слѣдуетъ:

$$BC : ED = AC : AD, \quad \text{откуда:} \quad AC \,.\, ED = BC \,.\, AD.$$

Сложивъ полученныя два равенства, находимъ:

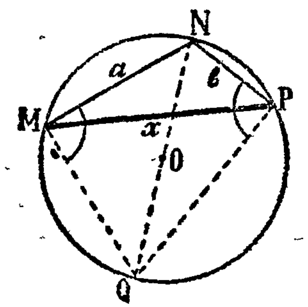
$$AC(BE+ED) = AB \,.\, CD + BC \,.\, AD,$$

т.-е.

$$AC \,.\, BD = AB \,.\, CD + BC \,.\, AD.$$

Замѣчаніе. Подобнымъ же образомъ можно было бы доказать, что если выпуклый четыреугольникъ не вписанный, то въ немъ произведеніе діагоналей меньше суммы произведеній противоположныхъ сторонъ; поэтому теорема, обратная Птоломеевой, вѣрна.

243. Задача. По даннымъ радіусу R и двумъ хордамъ a и b окружности вычислить длину третьей хорды, которая стягиваетъ дугу равную: 1°, суммѣ дугъ, стягиваемыхъ хордами a и b, 2°, разности этихъ дугъ.



Черт. 223.

1°. Пусть хорда a (черт. 223) стягиваетъ дугу MN, а хорда b—дугу NP; требуется вычислить хорду $MP = x$, которая стягиваетъ дугу MNP, равную суммѣ дугъ MN и NP.—Проведя черезъ точку N, въ которой сходятся данныя хорды a и b, діаметръ NQ, соединимъ Q прямыми съ точками M и P. Тогда мы получимъ вписанный четыреугольникъ, у котораго діагоналями служатъ: $MP=x$ и $NQ=2R$. Тр-ки QMN и QNP прямоугольные, первый при вершинѣ M, второй—при вершинѣ P (173); поэтому:

$$MQ = \sqrt{NQ^2 - MN^2} = \sqrt{4R^2 - a^2},$$

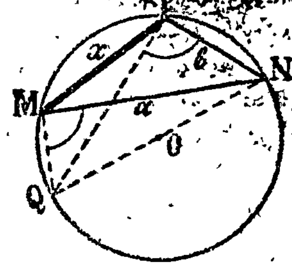
$$PQ = \sqrt{NQ^2 - NP^2} = \sqrt{4R^2 - b^2}.$$

Примѣнивъ теперь теорему Птоломея, получимъ уравненіе:

$$2R \,.\, x = a\sqrt{4R^2 - b^2} + b\sqrt{4R^2 - a^2},$$

изъ котораго найдемъ x (раздѣливъ обѣ части уравненія на $2R$).

2°. Пусть хорда a (черт. 224) стягиваетъ дугу MN, а хорда b—дугу NP; требуется вычислить хорду $MP = x$, которая стягиваетъ дугу, равную разности дугъ MN и NP.



Черт. 224.

Проведя снова черезъ точку N, въ которой сходятся 2 данныя хорды, діаметръ NQ и соединивъ Q съ M и P, получимъ вписанный четыреугольникъ. Изъ прямоугольныхъ тр-ковъ QMN и QPN находимъ:

$$MQ = \sqrt{NQ^2 - MN^2} = \sqrt{4R^2 - a^2}$$

и

$$PQ = \sqrt{NQ^2 - PN^2} = \sqrt{4R^2 - b^2}.$$

Примѣнивъ теорему Птоломея, получимъ уравненіе:

$$a\sqrt{4R^2 - b^2} = 2Rx + b\sqrt{4R^2 - a^2},$$

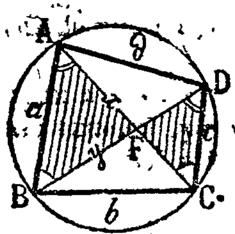
изъ котораго опредѣлимъ x.

Замѣчаніе. Задачу эту можно высказать и такъ: по двумъ сторонамъ a и b треугольника и радіусу R описанной около него окружности вычислить третью сторону треугольника. Задача эта вообще имѣетъ 2 рѣшенія, потому что прямыя a и b могутъ быть отложены или по разныя стороны отъ діаметра NQ (черт. 223), или по одну и ту же сторону отъ него (черт. 224). Если бо́льшая изъ двухъ данныхъ сторонъ равна $2R$, то получается одно рѣшеніе, а если эта сторона превосходитъ $2R$, то задача невозможна.

244. Теорема. **Отношеніе діагоналей вписаннаго выпуклаго четыреугольника равно отношенію суммы произведеній сторонъ, сходящихся въ концахъ первой діагонали, къ суммѣ произведеній сторонъ, сходящихся въ концахъ второй діагонали.**

Обозначимъ численныя величины сторонъ вписаннаго выпуклаго четыреугольника $ABCD$ (черт. 225) буквами a, b, c и d и его діагоналей буквами x и y. Докажемъ, что

$$\frac{x}{y}=\frac{ad+bc}{ab+cd}.$$


Черт. 225.

Тр-ки AFB и FDC (покрытые штрихами) подобны, такъ какъ углы одного соотвѣтственно равны угламъ другого; по той же причинѣ подобны и тр-ки ADF и FBC. Изъ ихъ подобія выводимъ:

$$\frac{a}{c}=\frac{AF}{DF}=\frac{BF}{CF}; \qquad [1]$$

$$\frac{d}{b}=\frac{DF}{CF}=\frac{AF}{BF}; \qquad [2]$$

Изъ этихъ пропорцій находимъ:

$$AF=\frac{a}{c}\cdot DF;\ DF=\frac{d}{b}\cdot CF.$$

Откуда: $$AF=\frac{a}{c}\cdot\left(\frac{d}{b}\cdot CF\right)=\frac{ad}{bc}\cdot CF$$

и, слѣд.: $$x=AC=AF+CF=\frac{ad}{bc}\cdot CF+CF=\left(\frac{ad}{bc}+1\right)CF,$$

т.-е. $$x=\frac{ad+bc}{bc}\cdot CF. \qquad [3]$$

Пользуясь тѣми же равенствами [1] и [2], получимъ:

$$y=BD=BF+DF=\frac{a}{c}\cdot CF+\frac{d}{b}\cdot CF=\left(\frac{a}{c}+\frac{d}{b}\right)\cdot CF,$$

т.-е. $$y=\frac{ab+cd}{bc}\cdot CF. \qquad [4]$$

Раздѣливъ равенство [3] на [4], получимъ ту пропорцію, которую требовалось доказать (bc и CF сократятся).

245. Вычисленіе діагоналей вписаннаго четыреугольника по его сторонамъ. Пользуясь теоремой Птоломея и теоремой объ отношеніи діагоналей вписаннаго четыреугольника, мы легко можемъ вычислить отдѣльно каждую его діагональ, если извѣстны всѣ стороны. Такъ, для чертежа 225-го мы будемъ имѣть:

$$xy=ac+bd; \qquad \frac{x}{y}=\frac{ad+bc}{ab+cd}.$$

Если эти 2 равенства почленно перемножимъ и затѣмъ почленно раздѣлимъ, то получимъ (по извлеченіи квадратнаго корня):

$$x=\sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}}; \qquad y=\sqrt{\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}}.$$

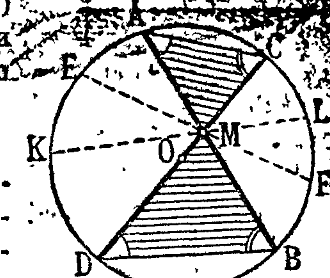
Замѣтимъ для памяти, что въ числителѣ подкоренной величины первый множитель есть сумма произведеній противоположныхъ сто-

ронъ, а второй—сумма произведеній сторонъ, сходящихся въ концахъ опредѣляемой діагонали, знаменатель же представляетъ сумму произведеній сторонъ, сходящихся въ концахъ другой діагонали.

246. Теорема. Если черезъ точку, взятую внутри круга, проведены какая-нибудь хорда и діаметръ, то произведеніе отрѣзковъ хорды равно произведенію отрѣзковъ діаметра.

Пусть черезъ точку M (черт. 226) проведена какая-нибудь хорда AB и діаметръ CD; требуется доказать, что

$$MA\ .\ MB=MC\ .\ MD.$$


Черт. 226.

Проведя 2 вспомогательныя хорды AC и BD, мы получимъ два тр-ка AMC и MBD (покрытые на чертежѣ штрихами), которые подобны, такъ какъ у нихъ углы A и D равны, какъ вписанные, опирающіеся на одну и ту же дугу BC, и углы C и B равны, какъ вписанные, опирающіеся на одну и ту же дугу AD. Изъ подобія ихъ выводимъ:

$$MA : MD=MC : MB;\ \text{откуда:}\ MA\ .\ MB=MC\ .\ MD.$$

247 Слѣдствія. 1°. **Если черезъ точку (M, черт. 226), взятую внутри круга, проведены нѣсколько хордъ (AB, EF, KL...), то произведеніе отрѣзковъ каждой хорды есть число постоянное для всѣхъ хордъ,** такъ какъ для каждой хорды это произведеніе равно произведенію отрѣзковъ діаметра CD, проходящаго черезъ взятую точку M.

2°. **Это постоянное число равно квадрату радіуса, уменьшенному на квадратъ разстоянія взятой точки отъ центра.**

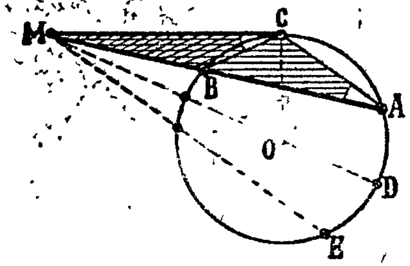
Дѣйствительно, обозначивъ радіусъ круга черезъ R и разстояніе MO (черт. 226) черезъ d, будемъ имѣть:

$$MC=R-d,\quad MD=R+d;$$

слѣд.: $$MA\ .\ MB=MC\ .\ MD=(R-d)(R+d)=R^2-d^2.$$

248. Теорема. **Если изъ точки, взятой внѣ круга, проведены къ нему какая-нибудь сѣкущая и касательная, то произведеніе сѣкущей на ея внѣшнюю часть равно квадрату касательной** (предполагается, что сѣкущая ограничена второю точкою пересѣченія, а касательная—точкою касанія).

Пусть изъ точки M (черт. 227), проведены какая-нибудь сѣкущая MA и касательная MC; требуется доказать, что



Черт. 227.

$$MA\ .\ MB=MC^2.$$

Проведемъ вспомогательныя хорды AC и BC; тогда получимъ два тр-ка MAC и MBC (покрытые на чертежѣ штрихами), которые подобны, потому что у нихъ уголъ M общій, и углы MCB и CAB равны, такъ какъ каждый изъ нихъ измѣряется половиною дуги BC (178, 171). Возьмемъ въ $\triangle MAC$ стороны MA и MC; сходственными сторонами въ $\triangle MBC$ будутъ MC и MB; поэтому

$$MA \quad MC=MC$$

Откуда: $$MA\ .\ MB=MC^2.$$

249. Слѣдствія. 1°. **Если изъ точки** (M, черт. 227), **взятой внѣ круга, проведены къ нему нѣсколько сѣкущихъ** (MA, MD, ME...), **то произведеніе каждой сѣкущей на ея внѣшнюю часть есть число постоянное для всѣхъ этихъ сѣкущихъ,** такъ какъ для каждой сѣкущей это произведеніе равно квадрату касательной (MC^2), проведенной черезъ точку M.

2°. Это постоянное число равно квадрату разстоянія взятой точки отъ центра, уменьшенному на квадратъ радіуса.

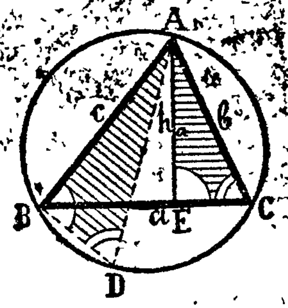
Дѣйствительно, проведя радіусъ OC, получимъ прямоугольный треугольникъ MCO, изъ котораго находимъ:

$$MC^2=MO^2-CO^2=d^2-R^2.$$

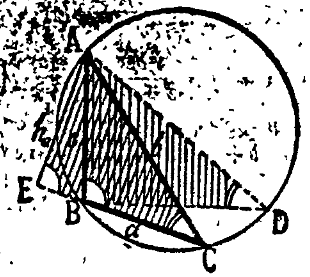
250. Теорема. **Произведеніе двухъ сторонъ треугольника равно произведенію діаметра круга, описаннаго около этого треугольника, на высоту его, опущенную на третью сторону.**

Обозначивъ буквою R радіусъ круга, описаннаго около тр-ка ABC (черт. 228 и 229), докажемъ, что

$$bc=2R\ .\ h_a.$$



Черт. 228.



Черт. 229.

Проведемъ діаметръ AD и соединимъ D съ B. Тр-ки ABD и AEC подобны, потому что углы B и E прямые и $D=C$, какъ углы вписанные, опирающіеся на одну и ту же дугу. Изъ подобія выводимъ:

$$c : h_a=2R : b;\ \text{откуда:}\ bc=2R\ .\ h_a.$$

251. Теорема. **Произведеніе двухъ сторонъ треугольника равно квадрату биссектрисы угла, заключеннаго между этими сторонами, сложенному съ произведеніемъ отрѣзковъ третьей стороны.**

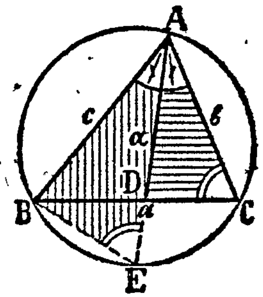
Обозначивъ биссектрису AD угла A (черт. 230) греческою буквою α, докажемъ, что $bc=\alpha^2+BD\ .\ DC$. Продолжимъ AD до пересѣченія съ окружностью въ точкѣ E (эта точка лежитъ въ серединѣ дуги BC, такъ какъ углы BAE и EAC равны). Тр-ки ABE и ADC подобны, потому что углы при точкѣ A равны по условію и $C=E$, какъ углы вписанные, опирающіеся на одну и ту же дугу. Изъ подобія ихъ слѣдуетъ:

$$c : \alpha=AE : b,\ \text{откуда:}\ bc=\alpha\ .\ AE,$$

или $$bc=\alpha(\alpha+DE)=\alpha^2+\alpha\ .\ DE.$$

Но $\alpha\ .\ DE=BD\ .\ DC$ (247, 1°).

Поэтому $bc=\alpha^2+BD\ .\ DC.$ [2]



Черт. 230.

252. Вычисленіе биссектрисъ треугольника по его сторонамъ. Изъ равенства [2] предыдущаго параграфа выводимъ:

$$\alpha^2=bc-BD\ .\ DC.$$

Отрѣзки BD и DC можно найти изъ пропорціи $BD : DC = c : b$ (226); откуда:

$$\frac{BD+DC}{BD} = \frac{b+c}{c} \text{ и } \frac{BD+DC}{DC} = \frac{b+c}{b}.$$

Замѣтивъ, что $BD+DC=a$, получимъ:

$$BD = \frac{ac}{b+c} \qquad DC = \frac{ab}{b+c}.$$

Слѣд., $a^2 = bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} = \frac{bc}{(b+c)^2}\left[(b+c)^2 - a^2\right] = \frac{bc}{(b+c)^2}\left[(b+c+a)(b+c-a)\right]$.

Это выраженіе можно упростить, если обозначимъ периметръ тр-ка, т.-е. $a+b+c$, черезъ $2p$; тогда $b+c-a=2p-2a=2(p-a)$ и

$$a = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}.$$

ГЛАВА VI.

Понятіе о приложеніи алгебры къ геометріи.

253. Задача. Д а н н ы й о т р ѣ з о к ъ п р я м о й р а з д ѣ л и т ь в ъ с р е д н е м ъ и к р а й н е м ъ о т н о ш е н і и.

Эту задачу надо понимать такъ: раздѣлить данный отрѣзокъ прямой на такія двѣ части, чтобы бо́льшая изъ нихъ была среднею пропорціональною между всѣмъ отрѣзкомъ и меньшей ея частью. Задача будетъ рѣшена, если мы найдемъ одну изъ двухъ частей, на которыя требуется раздѣлить данный отрѣзокъ. Будемъ находить бо́льшую часть, т.-е. ту, которая должна быть среднею пропорціональною между всей линіей и меньшею ея частью. Предположимъ сначала, что рѣчь идетъ не о построеніи этой части, а только объ ея вычисленіи. Тогда задача рѣшается алгебраически такъ: если число, измѣряющее въ какой-нибудь единицѣ длину даннаго отрѣзка, обозначимъ a, а число, измѣряющее въ той же единицѣ длину бо́льшей его части, x, то число, измѣряющее длину другой части, выразится $a-x$, и, согласно требованію задачи, мы будемъ имѣть пропорцію:

$$a : x = x : (a-x);$$

откуда:

$$x^2 = a(a-x)$$

или

$$x^2 + ax - a^2 = 0.$$

Рѣшивъ это квадратное уравненіе, находимъ:

$$x_1 = -\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2}; \qquad x_2 = -\frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2}.$$

Отбросивъ второе рѣшеніе, какъ отрицательное *), возьмемъ только первое положительное рѣшеніе, которое удобнѣе представить такъ:

$$x_1 = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} - \frac{a}{2}.$$

Покажемъ прежде всего, что величина x_1 меньше a.

Такъ какъ $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 < \left(\frac{a}{2} + a\right)^2$, то $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} < \frac{a}{2} + a$;

отнявъ отъ обѣихъ частей этого неравенства по $a/_2$, найдемъ, что $x_1 < a$.

Отсюда заключаемъ, что задача в с е г д а возможна и имѣетъ только о д н о р ѣ ш е н і е.

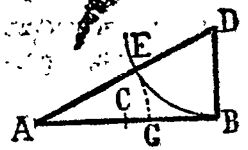
Если бы намъ удалось построить такую прямую, которой длина численно выражается найденной выше формулой, то, нанеся эту длину на данную прямую, мы раздѣлили бы ее въ среднемъ и крайнемъ отношеніи. Итакъ, вопросъ сводится къ построенію найденной формулы.

Разсматривая отдѣльно выраженіе $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2}$, мы замѣчаемъ, что оно представляетъ собою длину гипотенузы такого прямоугольнаго тр-ка, у котораго одинъ катетъ равенъ a, а другой $a/_2$. Построивъ такой тр-къ, мы найдемъ прямую, выражаемую формулой $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2}$. Чтобы получить затѣмъ

---

*) Не трудно было бы показать, что абсолютная величина этого отрицательнаго рѣшенія даетъ отвѣтъ на измѣненную задачу: д а н н у ю п р я м у ю a п р о д о л ж и т ь н а с т о л ь к о (н а x), ч т о б ы п р о д о л ж е н і е б ы л о с р е д н е й п р о п о р ц і о н а л ь н о й м е ж д у a и $a+x$. Это будетъ тоже дѣленіе даннаго отрѣзка въ среднемъ и крайнемъ отношеніи; оно наз. в н ѣ ш н и м ъ въ отличіе отъ в н у т р е н н я г о, разсматриваемаго въ текстѣ.

длину x_1, достаточно изъ гипотенузы построеннаго треугольника вычесть $a/_2$. Такимъ образомъ, построеніе можно выполнить такъ:



Черт. 231.

дѣлимъ (черт. 231) данный отрѣзокъ AB пополамъ въ точкѣ C. Изъ конца B возставляемъ перпендикуляръ BD и откладываемъ на немъ $BD=BC$. Соединивъ A съ D прямою, получимъ прямоугольный тр-къ ABD, у котораго катетъ $AB=a$, а другой катетъ $BD=a/_2$. Слѣд., его гипотенуза

AD равна $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+a^2}$. Чтобы вычесть изъ гипотенузы длину $a/_2$,

опишемъ изъ D, какъ центра, дугу радіусомъ $DB=a/_2$. Тогда

отрѣзокъ AE будетъ равенъ $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+a^2}-\frac{a}{2}$, т.-е. будетъ равенъ x_1. Отложивъ AE на AB (отъ A до G), получимъ точку G, въ которой отрѣзокъ AB дѣлится въ среднемъ и крайнемъ отношеніи.

Замѣчаніе. Дѣленіе даннаго отрѣзка прямой въ среднемъ и крайнемъ отношеніи наз. также *золотымъ дѣленіемъ*.

254. Алгебраическій способъ рѣшенія геометрическихъ задачъ. Мы рѣшили предложенную задач путемъ *приложенія алгебры къ геометріи* Этотъ пріемъ состоитъ въ слѣдующемъ: сперва опредѣляютъ, какую прямую должно отыскать, чтобы можно было рѣшить задачу. Затѣмъ, обозначивъ численныя величины данныхъ прямыхъ буквами a, b, c..., а искомой прямой—буквою x, составляютъ изъ условій задачи и извѣстныхъ теоремъ уравненіе, связывающее искомую прямую съ данными; полученное уравненіе рѣшаютъ по правиламъ алгебры. Найденную формулу изслѣдуютъ, т.-е. опредѣляютъ, при всякихъ ли заданіяхъ эта формула даетъ возможныя рѣшенія, или только при нѣкоторыхъ, и получается ли одно рѣшеніе, или нѣсколько. Затѣмъ строятъ формулу, т.-е. находятъ построеніемъ такую прямую, которой численная величина выражается этой формулой.

Такимъ образомъ, алгебраическій пріемъ рѣшенія геометрическихъ задачъ состоитъ въ общемъ изъ слѣдующихъ 4-хъ частей: 1°, составленіе уравненія, 2°, рѣшеніе его, 3°, изслѣдованіе полученной формулы и 4°, построеніе ея.

Иногда задача приводится къ отысканію нѣсколькихъ прямыхъ линій. Тогда, обозначивъ численныя величины ихъ буквами x, y..., стремятся составить столько уравненій, сколько неизвѣстныхъ. (165, [illegible])

255. Построеніе простѣйшихъ формулъ. Укажемъ простѣйшія формулы, которыя можно построить посредствомъ циркуля и линейки; при этомъ будемъ предполагать, что буквы a, b, c... означаютъ величины данныхъ конечныхъ прямыхъ, а x величину искомой. Не останавливаясь на такихъ формулахъ:

$$x=a+b+c,\quad x=a-b,\quad x=2a,\quad 3a\ldots,$$

построеніе которыхъ выполняется весьма просто, перейдемъ къ болѣе сложнымъ:

1°. Формулы $x=\frac{a}{2},\frac{a}{3},\ldots x=\frac{2}{3}a,\ldots$ и т. п. строятся посредствомъ дѣленія прямой a на равныя части (69,7; 114) и затѣмъ, если нужно, повтореніемъ одной части слагаемыхъ 2, 3... и т. д. раза.

2°. Формула $x=\frac{ab}{c}$ представляетъ собою **четвертую пропорціональную** къ прямымъ c, a и b. Дѣйствительно, изъ этого равенства выводимъ:

$$cx=ab,\quad \text{откуда}\quad c:a=b:x.$$

Слѣд., x найдется способомъ, указаннымъ нами (224) для построенія 4-й пропорціональной.

3°. Формула $x=\frac{a^2}{b}$ выражаетъ четвертую пропорціональную къ прямымъ b, a и a, или, какъ говорятъ, **третью пропорціональную** къ прямымъ b и a. Дѣйствительно, изъ даннаго равенства выводимъ:

$$bx=a^2;\quad \text{откуда}\quad b:a=a:x.$$

Слѣд., x найдется тѣмъ же способомъ, какимъ отыскивается 4-я пропорціональная (только прямую a придется откладывать два раза) *).

4°. Формула $x=\sqrt{ab}$ выражаетъ среднюю пропорціональную между a и b. Дѣйствительно, изъ нея выводимъ:

$$x^2=ab; \text{ откуда: } a:x=x:b.$$

Слѣд., x найдется способомъ, указаннымъ раньше для построенія средней пропорціональной (231).

5°. Формула $x=\sqrt{a^2+b^2}$ выражаетъ гипотенузу прямоугольнаго тр-ка, у котораго катеты суть a и b.

6°. Формула $x=\sqrt{a^2-b^2}$ представляетъ катетъ прямоугольнаго тр-ка, у котораго гипотенуза есть a, а другой катетъ b.

Построеніе всего удобнѣе выполнить такъ, какъ указано въ § 174.

Указанныя формулы можно считать основными. При помощи ихъ строятся болѣе сложныя формулы. Напр.:

7°. $x=\frac{abcd}{efg}$. Разобьемъ дробь на множителей такъ:

$x=\frac{ab}{e}\cdot\frac{c}{f}\cdot\frac{d}{g}$ и положимъ, что $\frac{ab}{e}=k$. Тогда k найдемъ, какъ 4-ю пропорціональную къ e, a и b. Найдя k, будемъ имѣть: $x=\frac{kc}{f}\cdot\frac{d}{g}$. Положимъ, что $\frac{kc}{f}=l$. Тогда l найдемъ, какъ 4-ю пропорціональную къ линіямъ f, k и c. Найдя l, будемъ имѣть $x=\frac{ld}{g}$; слѣд., x есть 4-я пропорціональная къ g, l и d.

Подобнымъ образомъ строятся также и формулы вида:

$$x=\frac{abc...kl}{a'b'c'...k'} \text{ или } x=\frac{a^m}{b^{m-1}},$$

*) Можно также построить x, основываясь на теоремѣ § 229: отложимъ $BD=a$ (см. черт. 210); проведемъ $DA\perp BD$; отложимъ $DA=b$; соединимъ B съ A прямой; проведемъ $AC\perp AB$. Тогда отрѣзокъ DC и будетъ искомая линія, такъ какъ $BD:DA=DA:DC$. Если $a<b$, то построеніе можно выполнить еще иначе, при помощи полуокружности (см. черт. 211), принявъ за діаметръ BC отрѣзокъ b, а за хорду BA отрѣзокъ a; тогда искомая линія будетъ BD.

т.-е. такія формулы, въ которыхъ числитель и знаменатель представляютъ произведеніе линейныхъ множителей (буквъ, означающихъ линіи), при чемъ числитель содержитъ этихъ множителей на одинъ больше, чѣмъ знаменатель.

8°. $x=a\sqrt{\frac{2}{3}}$. Подведя a подъ знакъ радикала, получимъ:

$$x=\sqrt{\frac{2}{3}a^2}=\sqrt{a.\frac{2}{3}a}.$$

Отсюда видимъ, что x есть средняя пропорціональная между прямыми a и $^2/_3a$.

9°. $x=\sqrt{a^2+b^2-c^2+d^2}$. Положимъ, что $a^2+b^2=k^2$. Тогда k найдется, какъ гипотенуза прямоугольнаго тр-ка, у котораго катеты суть a и b. Построивъ k, положимъ, что $k^2+d^2=l^2$. Тогда l найдется, какъ гипотенуза прямоугольнаго тр-ка, у котораго катеты суть k и d. Построивъ l, будемъ имѣть: $x=\sqrt{l^2-c^2}$. Слѣд., x есть катетъ такого тр-ка, у котораго гипотенуза l, а другой катетъ c.

10°. $x=a^2\sqrt{a^2\pm bc}$. Если положимъ, что $bc=k^2$, то найдемъ k, какъ среднюю пропорціональную между b и c. Тогда $x=\sqrt{a^2\pm k^2}$ найдется, какъ было выше указано въ случаяхъ 5-мъ и 6-мъ.

11°. $x=\sqrt[4]{a^4\mp b^4}$. Положимъ, что

$$a^4=b^3y; \text{ отсюда: } y=\frac{a^4}{b^3}=\frac{a^2}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}.$$

Изъ этого выраженія видно, что y найдется посредствомъ троекратнаго построенія 4-й пропорціональной. Построивъ y, будемъ имѣть:

$$x=\sqrt[4]{b^3y\mp b^4}=\sqrt{\sqrt{b^3(y\mp b)}}=\sqrt{b\sqrt{b(y\mp b)}}.$$

Выраженіе $\sqrt{b(y\mp b)}$ представляетъ прямую, которая есть средняя пропорціональная между b и $y\mp b$. Пусть эта прямая будетъ k. Тогда $x=\sqrt{bk}$; значитъ, x найдется, какъ средняя пропорціональная между b и k.

Ограничимся этими примѣрами. Замѣтимъ, что подробное разсмотрѣніе способовъ построенія алгебраическихъ формулъ приводитъ къ слѣдующему важному выводу:

помощью линейки и циркуля возможно строить только такія алгебраическія выраженія, которыя или вовсе не содержатъ радикаловъ, или же содержатъ только радикалы съ показателями 2, 4, 8..., т.-е. съ показателями, равными степени 2-хъ *).

УПРАЖНЕНІЯ.

Доказать теоремы:

189. Прямая, проведенная черезъ середины основаній трапеціи, проходитъ черезъ точку пересѣченія непараллельныхъ сторонъ и черезъ точку пересѣченія діагоналей.

189*a*. Если въ тр-кѣ изъ вершины угла, лежащаго между неравными сторонами, проведены биссектриса и медіана, то первая меньше второй.

189*b*. Прямая, проходящая черезъ середину основанія равнобедреннаго тр-ка и ограниченная одною боковою стороною и продолженіемъ другой боковой стороны, больше основанія этого тр-ка.

190. Если два круга касаются извнѣ, то часть внѣшней общей касательной, ограниченная точками касанія, есть средняя пропорціональная между діаметрами круговъ.

190*a*. Доказать, что если A, B и C суть три послѣдовательныя точки прямой и M какая-нибудь точка внѣ прямой, то существуетъ соотношеніе (теоремы Стюарта):

$$MA^2 \,.\, BC + MC^2 \,.\, AB - MB^2 \,.\, AC = BC \,.\, AB \,.\, AC$$

(рѣшается при помощи теоремъ §§ 236 и 237).

190*b*. При помощи этого соотношенія найти выраженіе для биссектрисъ тр-ка въ зависимости отъ его сторонъ (на основаніи § 226).

191. Сумма квадратовъ сторонъ треугольника равна утроенной суммѣ квадратовъ разстояній отъ точки пересѣченія медіанъ до вершинъ треугольника (§ 241).

---

*) Напр., нельзя построить выраженіе $x=\sqrt[3]{2a^3}$, получаемое изъ уравненія: $x^3=2a^3$; другими словами, нельзя помощью циркуля и линейки рѣшить знаменитую съ древнихъ временъ задачу *объ удвоеніи даннаго куба* (со стороною a).

Объ однородности уравненій, получаемыхъ при рѣшеніи геометрическихъ задачъ, а также о построеніи корней квадратнаго уравненія см. ниже, §§ 342, 343.

192. Если въ прямоугольный тр-къ ABC вписать квадратъ $DEFG$ такъ, чтобы сторона CE лежала на гипотенузѣ BC, то эта сторона есть средняя пропорціональная между отрѣзками гипотенузы BD и EC.

193. Если двѣ конечныя прямыя AB и CD пересѣкаются (хотя бы и при продолженіи) въ точкѣ E такъ, что

$$EB \,.\, EA = EC \,.\, ED,$$

то точки A, B, C и D лежатъ на одной окружности (эта теорема обратна изложеннымъ въ §§ 247 и 249).

194. Дана окружность O и двѣ точки A и B внѣ круга. Черезъ эти точки проведены нѣсколько окружностей, пересѣкающихъ окружность O, или касающихся ея. Доказать, что всѣ хорды, соединяющія точки пересѣченія каждой изъ этихъ окружностей съ окружностью O, а также и общія касательныя, сходятся (при продолженіи) въ одной точкѣ, лежащей на продолженіи прямой AB.

195. Основываясь на этомъ, вывести способъ построенія такой окружности, которая проходитъ черезъ 2 данныя точки A и B и касается данной окружности O.

196. Даны два какіе-нибудь круга на плоскости. Если два радіуса этихъ круговъ движутся, оставаясь постоянно параллельными, то прямая, проходящая черезъ концы ихъ, пересѣкаетъ линію центровъ всегда въ одной и той же точкѣ (эта точка наз. *центромъ подобія* двухъ круговъ).

197. Медіана тр-ка дѣлитъ пополамъ всѣ прямыя, проведенныя внутри тр-ка параллельно той сторонѣ, относительно которой взята медіана.

198. Даны три прямыя, исходящія изъ одной точки. Если по одной изъ нихъ движется какая-нибудь точка, то разстоянія ея отъ двухъ другихъ прямыхъ сохраняютъ всегда одно и то же отношеніе.

199. Если двѣ окружности концентрическія, то сумма квадратовъ разстояній всякой точки одной изъ нихъ отъ концовъ какого угодно діаметра другой есть величина постоянная (§ 239).

200. Если изъ трехъ вершинъ тр-ка и изъ точки пересѣченія его медіанъ опустимъ перпендикуляры на какую-нибудь внѣшнюю прямую, то послѣдній изъ 4-хъ перпендикуляровъ равенъ третьей части суммы первыхъ трехъ.

201. Если соединимъ прямыми основанія трехъ высотъ какого-нибудь тр-ка, то образовавшіеся при этомъ 3 тр-ка у вершинъ даннаго подобны ему. Вывести отсюда, что для тр-ка, имѣющаго сторонами прямыя, соединяющія основанія высотъ даннаго тр-ка, эти высоты служатъ биссектрисами.

202. Діаметръ AB данной окружности продолженъ за точку B. Черезъ какую-нибудь точку C этого продолженія проведена неопредѣленная прямая $CD \perp AB$. Если произвольную точку M этого перпендикуляра соединимъ съ A, то (обозначивъ черезъ A_1 вторую точку пересѣченія съ окружностью этой прямой) произведеніе $AM \,.\, AA_1$ есть величина постоянная.

Найти геометрическія мѣста:

203.—серединъ всѣхъ хордъ, проходящихъ черезъ данную точку окружности.

204.—точекъ, дѣлящихъ въ одномъ и томъ же отношеніи $m : n$ всѣ хорды, проходящія черезъ данную точку окружности.

205.—точекъ, которыхъ разстоянія отъ сторонъ даннаго угла имѣютъ одно и то же отношеніе $m : n$.

206.—точекъ, для которыхъ сумма квадратовъ разстояній отъ двухъ данныхъ точекъ есть величина постоянная (§ 239 или § 241).

207.—точекъ, для которыхъ разность квадратовъ разстояній отъ двухъ данныхъ точекъ есть величина постоянная.

208.—точекъ, изъ которыхъ касательныя, проведенныя къ двумъ даннымъ окружностямъ, равны (это геометрическое мѣсто есть прямая, перпендикулярная къ линіи центровъ; она назыв. радикальною осью двухъ круговъ).

209.—точекъ, дѣлящихъ въ данномъ отношеніи $m : n$ всѣ прямыя, соединяющія точки окружности съ данною точкою O (лежащею внѣ или внутри круга).

210. Даны двѣ извнѣ касающіяся окружности. Черезъ точку касанія A проводятъ въ окружностяхъ двѣ перпендикулярныя хорды AB и AC. Концы ихъ B и C соединяютъ прямой. Найти геометрическое мѣсто точекъ, дѣлящихъ BC въ данномъ отношеніи $m : n$.

211. Данный уголъ вращается вокругъ своей вершины. На сторонахъ его, отъ вершины, откладываютъ перемѣнныя длины, но которыхъ отношеніе постоянно. Если конецъ одной стороны описываетъ данную по положенію прямую, то какую линію опишетъ другой конецъ?

Задачи на построеніе.

212. Черезъ точку, данную внутри или внѣ угла, провести прямую такъ, чтобы части ея, заключенныя между этой точкой и сторонами угла, имѣли данное отношеніе $m : n$.

213. Найти въ треугольникѣ такую точку, чтобы перпендикуляры, опущенные изъ нея на стороны, находились въ данномъ отношеніи $m : n : p$ (см. упражненіе 205).

214. Построить тр-къ по углу, одной изъ сторонъ, прилежащихъ къ нему, и по отношенію этой стороны къ третьей сторонѣ (сколько рѣшеній?).

215. То же—по углу при вершинѣ, основанію и отношенію его къ одной изъ боковыхъ сторонъ.

216. То же—по высотѣ, углу при вершинѣ и отношенію отрѣзковъ основанія.

217. То же—по углу при вершинѣ, основанію и данной на основаніи точкѣ, черезъ которую проходитъ биссектриса угла при вершинѣ.

218. То же—по двумъ угламъ и суммѣ или разности основанія съ высотою.

219. Построить равнобедренный тр-къ по углу при вершинѣ и суммѣ основанія съ высотою.

220. Вписать въ данный кругъ тр-къ, у котораго даны: основаніе и отношеніе двухъ другихъ сторонъ.

221. Вписать въ данный кругъ тр-къ, у котораго даны: основаніе и медіана относительно одной изъ неизвѣстныхъ сторонъ (см. упражненіе 203).

222. Вписать квадратъ въ данный сегментъ такъ, чтобы одна его сторона лежала на хордѣ, а вершины противолежащихъ угловъ—на дугѣ.

223. Вписать квадратъ въ данный тр-къ такъ, чтобы одна сторона его лежала на основаніи тр-ка, а вершины противолежащихъ угловъ на боковыхъ сторонахъ тр-ка.

224. Въ данный треугольникъ вписать прямоугольникъ (см. пред. задачу), у котораго стороны относились бы, какъ $m : n$.

225. Около даннаго квадрата описать тр-къ, подобный данному.

226. Дана окружность и на ней двѣ точки A и B. Найти на этой окружности третью точку C, чтобы разстоянія ея отъ A и B находились въ данномъ отношеніи.

227. На данной прямой найти точку, которая одинаково была бы удалена отъ другой данной прямой и данной точки.

228. Построить тр-къ по двумъ сторонамъ и биссектрисѣ угла между ними (см. черт. 207; сначала находимъ прямую DE изъ пропорціи $AB : EC$ (т.-е. BC) $= BD : DE$; затѣмъ строимъ $\triangle BCE$).

229. Построить прямую x, которая относилась бы къ данной прямой m, какъ $a^2 : b^2$ (a и b данныя прямыя).

230. Найти внѣ даннаго круга такую точку, чтобы касательная, проведенная изъ нея къ этой окружности, была вдвое менѣе сѣкущей, проведенной изъ той же точки черезъ центръ (приложеніемъ алгебры къ геометріи).

231. Черезъ данную внѣ круга точку провести такую сѣкущую, которая раздѣлилась бы этою окружностью въ данномъ отношеніи (приложеніемъ алг. къ геом.).

232. Построить тр-къ по тремъ его высотамъ h_1, h_2 и h_3. Предварительно изъ подобія прямоуг. тр-ковъ надо доказать, что высоты обратно пропорціональны соотвѣтствующимъ сторонамъ. Если стороны, на которыя опущены высоты h_1, h_2 и h_3, обозначимъ соотвѣтственно черезъ x_1, x_2 и x_3, то

$$x_1 : x_2 = h_2 : h_1;$$

$$x_2 : x_3 = h_3 : h_2 = 1 : \frac{h_2}{h_3} = h_1 : \frac{h_1 h_2}{h_3},$$

откуда:

$$x_1 : x_2 : x_3 = h_2 : h_1 : \frac{h_1 h_2}{h_3}.$$

Выраженіе $\frac{h_1 h_2}{h_3}$ есть четвертая пропорціональная къ h_3, h_2 и h_1. Построивъ ее (пусть это будетъ k), мы будемъ имѣть три прямыя: h_3, h_1 и k, которымъ искомыя стороны пропорціональны; значитъ, тр-къ, имѣющій эти прямыя сторонами, подобенъ искомому, и потому вопросъ приводится къ построенію такого тр-ка, который, будучи подобенъ данному, имѣлъ бы данную высоту. Задача окажется невозможной, если по тремъ прямымъ h_1, h_2 и k нельзя построить треугольникъ (52).

Задачи на вычисленіе.

233. По данному основанію a и высотѣ h остроугольнаго тр-ка вычислить сторону x квадрата, вписаннаго въ этотъ тр-къ такъ, чтобы одна сторона квадрата лежала на основаніи тр-ка, а двѣ вершины квадрата—на боковыхъ сторонахъ тр-ка.

234. Стороны тр-ка суть 10 ф., 12 ф. и 17 ф. Вычислить отрѣзки стороны, равной 17 ф., на которые она дѣлится биссектрисою противолежащаго угла.

235. Перпендикуляръ, опущенный изъ вершины прямого угла на гипотенузу, дѣлитъ ее на два отрѣзка m и n. Вычислить катеты.

236. Вычислить высоту тр-ка, опущенную на сторону, равную 20, если двѣ другія стороны равны 12 и 15.

237. Вычислить медіаны тр-ка, котораго стороны равны: $a=5$, $b=7$ и $c=9$.

238. Въ тр-кѣ ABC стороны равны: $AB=7$, $BC=15$ и $AC=10$. Опредѣлить, какого вида уголъ A, и вычислить высоту, опущенную изъ вершины B.

239. Изъ точки внѣ круга проведены касательная a и сѣкущая. Вычислить длину сѣкущей, зная, что отношеніе внѣшней ея части къ внутренней равно $m : n$.

240. Къ двумъ кругамъ, которыхъ радіусы суть R и r, а разстояніе между центрами d, проведена общая касательная. Опредѣлить вычисленіемъ положеніе точки пересѣченія этой касательной съ линіей центровъ, во 1-хъ, когда эта точка лежитъ по одну сторону отъ центровъ, во 2-хъ, когда она расположена между ними.

ГЛАВА VII.

Правильные многоугольники.

256. Опредѣленія. Ломаная линія наз. правильной, если она удовлетворяетъ слѣдующимъ тремъ условіямъ: 1°, отрѣзки прямыхъ, составляющіе ее, равны; 2°, углы, составленные каждыми двумя сосѣдними отрѣзками, равны, и

3°, изъ каждыхъ трехъ послѣдовательныхъ отрѣзковъ первый и третій расположены по одну сторону отъ второго.

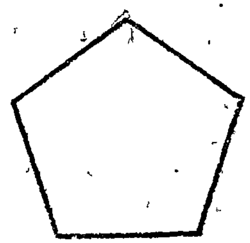
Таковы, напр., линіи $ABCDE$ и $FGHKL$ (черт. 232); но ломаную $MNPQR$ нельзя назвать правильною, потому что она не удовлетворяетъ третьему условію.

Черт. 232.

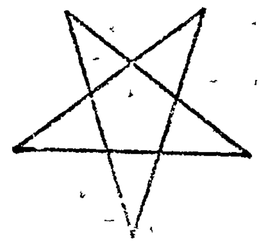
Правильная ломаная можетъ быть выпуклой (34), какъ, напр., линія $ABCDE$ (ломаную $FGHKL$ нельзя назвать выпуклой).

Многоугольникъ наз. правильнымъ, если онъ ограниченъ правильною ломаною линіей, т.-е. если онъ имѣетъ равныя стороны и равные углы. Таковы, напр., квадратъ, равносторонній треугольникъ и многіе другіе.

Многоугольникъ, изображенный на чертежѣ 233-мъ, есть выпуклый правильный пятиугольникъ; многоугольникъ чер-



Черт. 233.



Черт. 234.

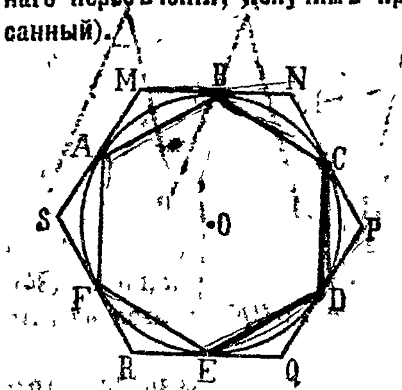
тежа 234-го также правильный пятиугольникъ, но не выпуклый (такъ называемый звѣздчатый). Мы будемъ разсматривать только выпуклые правильные мн-ки.

Послѣдующія теоремы показываютъ, что построеніе правильныхъ многоугольниковъ тѣсно связано съ раздѣленіемъ окружности на равныя части.

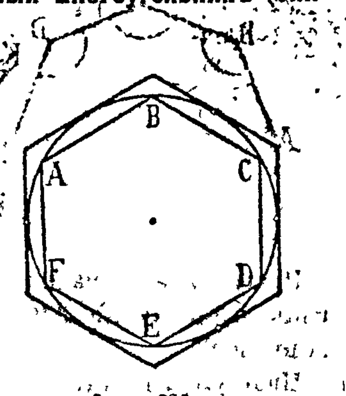
257. Теорема. **Если окружность раздѣлена на нѣкоторое число равныхъ частей (большее двухъ), то:**

1°, соединивъ хордами каждыя двѣ сосѣднія точки дѣленія получимъ правильный многоугольникъ (вписанный);

2°, проведя черезъ всѣ точки дѣленія касательныя до взаимнаго пересѣченія, получимъ правильный многоугольникъ (описанный).



Черт. 235.



Черт. 236.

Пусть окружность (черт. 235) раздѣлена на нѣсколько равныхъ частей въ точкахъ A, B, C..., и черезъ эти точки проведены хорды AB, BC... и касательныя MN, NP... Тогда:

1°. Вписанный многоугольникъ $ABCDEF$ правильный, потому что всѣ его стороны равны (какъ хорды, стягивающія равныя дуги) и всѣ углы равны (какъ вписанные, опирающіеся на равныя дуги).

2°. Чтобы доказать правильность описаннаго многоугольника $MNPQRS$, разсмотримъ тр-ки AMB, BNC и т. д. У нихъ основанія AB, BC и т. д. равны; углы, прилежащіе къ этимъ основаніямъ, также равны, потому что каждый изъ нихъ имѣетъ одинаковую мѣру (уголъ, составленный касательною и хордой, измѣряется половиною дуги, заключенной внутри его). Значитъ, всѣ эти тр-ки равнобедренные и равны между собою, а потому $MN=NP$... и $M=N=$..., т. е. мн-къ $MNPQRS$ правильный.

258. Замѣчаніе. Если возьмемъ середины дугъ AB, BC, CD... (черт. 236), то получимъ точки, которыя дѣлятъ окружность на столько же равныхъ частей, на сколько она раздѣлена въ точкахъ A, B, C... Поэтому, если черезъ эти середины

проведемъ касательныя до взаимнаго пересѣченія, то получимъ также правильный описанный многоугольникъ, стороны этого многоугольника параллельны сторонамъ вписаннаго мн-ка $ABCDEF$ (138, обратная теорема).

259. Теорема. **Если многоугольникъ правильный, то 1°, около него можно описать окружность;**
2°, въ него можно вписать окружность.

1°. Проведемъ окружность черезъ какія-нибудь три сосѣднія вершины A, B и C (черт. 237) правильнаго мн-ка $ABCDE$ и докажемъ, что она пройдетъ черезъ слѣдующую четвертую вершину D. Опустимъ изъ центра O перпендикуляръ OK на хорду BC и соединимъ O съ A и D. Повернемъ четыреугольникъ $ABKO$ вокругъ стороны OK такъ, чтобы онъ упалъ на четыреугольникъ $ODCK$. Тогда KB пойдетъ по KC (вслѣдствіе равенства прямыхъ угловъ при точкѣ K), точка

Черт. 237.

B упадетъ въ C (такъ какъ хорда BC дѣлится въ точкѣ K пополамъ), сторона BA пойдетъ по CD (вслѣдствіе равенства угловъ B и C) и, наконецъ, точка A упадетъ въ D (вслѣдствіе равенства сторонъ BA и CD). Изъ этого слѣдуетъ, что OA совмѣстится съ OD, и, значитъ, точки A и D одинаково удалены отъ центра; поэтому вершина D должна лежать на окружности, проходящей черезъ A, B и C. Точно такъ же докажемъ, что эта окружность, проходя черезъ три сосѣднія вершины B, C и D, пройдетъ черезъ слѣдующую вершину E и т. д.; значитъ, она пройдетъ черезъ всѣ вершины мн-ка.

2°. Изъ доказаннаго слѣдуетъ, что стороны правильнаго мн-ка всегда можно разсматривать, какъ равныя хорды одной окружности; но такія хорды одинаково удалены отъ центра; значитъ, всѣ перпендикуляры OM, ON..., опущенные изъ O на стороны многоугольника, равны между собою, и потому окружность, описанная радіусомъ OM изъ центра O, будетъ вписанной въ мн-къ $ABCDE$.

260. Слѣдствіе. Изъ предыдущаго видно, что двѣ окружности: описанная около правильнаго мн-ка и вписанная въ него, имѣютъ одинъ и тотъ же центръ. Такъ какъ этотъ общій центръ одинаково удаленъ отъ всѣхъ вершинъ мн-ка, то онъ долженъ лежать на перпендикулярѣ, возставленномъ къ любой сторонѣ изъ ея середины, а будучи одинаково удаленъ отъ сторонъ каждаго угла, онъ долженъ находиться на его биссектрисѣ. Поэтому: чтобы найти центръ окружности, описанной около правильнаго мн-ка, или вписанной въ него, достаточно опредѣлить точку пересѣченія двухъ перпендикуляровъ, возставленныхъ къ сторонамъ мн-ка изъ ихъ серединъ, или двухъ биссектрисъ угловъ, или одного такого перпендикуляра съ биссектрисой.

261. Опредѣленія. Общій центръ окружностей, описанной около правильнаго мн-ка и вписанной въ него, наз. ц е н т р о м ъ этого мн-ка, радіусъ описанной окружности наз. р а д і у с о м ъ мн-ка, а радіусъ вписанной окружности—а п о е е м о ю его.

Уголъ, составленный двумя радіусами, проведенными къ концамъ какой-нибудь стороны правильнаго мн-ка, наз. ц е н т р а л ь н ы м ъ у г л о м ъ. Такихъ угловъ въ мн-кѣ столько, сколько сторонъ; всѣ они равны, какъ измѣряющіеся равными дугами.

Такъ какъ сумма всѣхъ центральныхъ угловъ равна $4d$ или $360°$, то каждый изъ нихъ равенъ $4d : n$ или $360° : n$, если n означаетъ число сторонъ мн-ка; такъ, центральный уголъ правильнаго 6-тиугольника равенъ $360 : 6 = 60°$,—правильнаго 8-миугольника равенъ $360 : 8 = 45°$ и т. п.

262. Теорема. Правильные одноименные многоугольники подобны, и стороны ихъ относятся, какъ радіусы или апоеемы.

1°. Чтобы доказать подобіе (черт. 238) правильныхъ одноименныхъ мн-ковъ $ABCDEF$ и $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, достаточно обнаружить, что у нихъ углы равны и стороны пропорціональны.

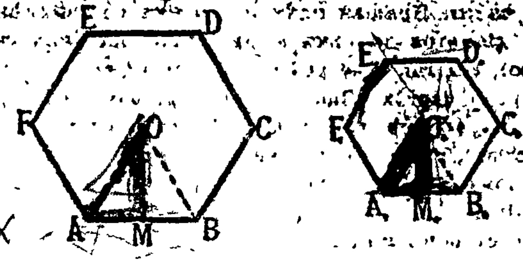
Углы мн-ковъ равны, такъ какъ каждый изъ нихъ содержитъ одно и то же число градусовъ, и именно $\frac{180(n-2)}{n}$ (89), если n означаетъ число сторонъ каждаго мн-ка. Такъ какъ $AB = BC = CD = \ldots$ и $A_1B_1 = B_1C_1 = C_1D_1 = \ldots$, то очевидно, что:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} \ldots,$$

т. е. у такихъ мн-ковъ стороны пропорціональны.

2°. Пусть O и O_1 (черт. 238) будутъ центры данныхъ мн-ковъ, OA и O_1A_1 ихъ радіусы, OM и O_1M_1—апоеемы. Тр-ки OAB и $O_1A_1B_1$ подобны, такъ какъ углы одного соотвѣтственно равны угламъ другого. Изъ подобія ихъ слѣдуетъ (203):

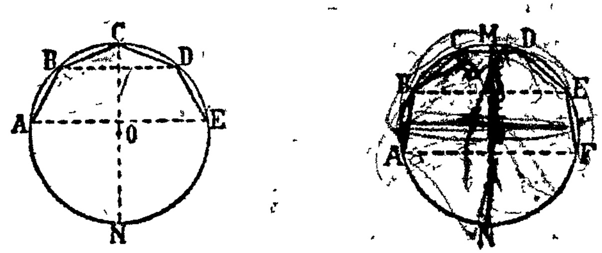
$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{OA}{O_1A_1} = \frac{OM}{O_1M_1}$$



Черт. 238.

263. Слѣдствіе. Такъ какъ периметры подобныхъ мн-ковъ относятся, какъ сходственныя стороны (209), то **периметры правильныхъ одноименныхъ многоугольниковъ относятся, какъ радіусы или апоеемы.**

264. Симметрія правильныхъ многоугольниковъ. Проведёмъ въ описанной окружности черезъ какую-нибудь вершину C правильнаго мн-ка (черт. 239, лѣвый), діаметръ CN, который раздѣлитъ окружность и многоугольникъ на двѣ части. Вообразимъ, что одна



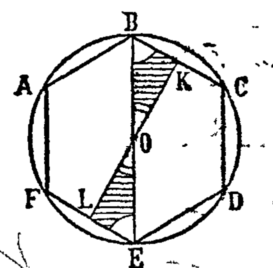
Черт. 239.

изъ этихъ частей (напр., лѣвая)... повернута вокругъ діаметра CN, какъ около оси, настолько, чтобы она упала на другую часть (на правую). Тогда одна полуокружность совмѣстится съ другою полуокружностью, дуга CB совмѣстится съ дугою CD (по равенству этихъ дугъ), дуга BA совмѣстится съ дугою DE (по той же причинѣ) и т. д.; слѣд., хорда BC совпадетъ съ хордой CD, хорда AB съ хордой DE и т. д.

Такимъ образомъ, діаметръ описанной окружности, проведенный черезъ какую-нибудь вершину правильнаго многоугольника, служитъ осью симметріи этого многоугольника (вслѣдствіе чего каждая пара вершинъ, какъ B и D, A и E и т. д., лежитъ на одномъ перпендикулярѣ къ діаметру CN на равномъ отъ него разстояніи).

Проведемъ еще въ описанной окружности діаметръ MN (черт. 239, правый), перпендикулярный къ какой-нибудь сторонѣ CD правильнаго мн-ка; этотъ діаметръ тоже раздѣлитъ окружность и многоугольникъ на двѣ части. Вращая одну изъ этихъ частей (лѣвую) вокругъ проведеннаго діаметра до тѣхъ поръ, пока она упадетъ на другую часть (правую), мы такъ же убѣдимся, что одна часть мн-ка совмѣстится съ другой частью. Значитъ, **діаметръ описанной окружности, перпендикулярный къ сторонѣ правильнаго многоугольника, служитъ его осью симметріи** (и, слѣд., каждая пара вершинъ, какъ B и E, A и F и т. д., лежитъ на одномъ перпендикулярѣ къ діаметру MN на равномъ отъ него разстояніи).

Если число сторонъ мн-ка ч е т н о е, то діаметръ, проведенный черезъ любую вершину мн-ка проходитъ также и черезъ противоположную вершину, и діаметръ, перпендикулярный къ любой сторонѣ мн-ка, перпендикуляренъ также и къ противоположной сторонѣ его; если же число сторонъ н е ч е т н о е, то діаметръ, проходящій черезъ любую вершину, перпендикуляренъ къ противоположной сторонѣ, и обратно, діаметръ, перпендикулярный къ любой сторонѣ, проходитъ черезъ противоположную вершину. Отсюда слѣдуетъ, что во всякомъ правильномъ мн-кѣ есть столько осей симметріи, сколько въ немъ сторонъ. Напр., въ правильномъ 6-угольникѣ есть 6 осей симметріи, именно: 3 оси, проходящія черезъ вершины, и 3 оси, перпендикулярныя къ сторонамъ; въ правильномъ 5-угольникѣ есть 5 осей симметріи; всѣ онѣ проходятъ черезъ вершины угловъ и въ то же время перпендикулярны къ сторонамъ.



Черт. 240.

Всякій правильный мн-къ ч е т н а г о числа сторонъ имѣетъ еще **центръ симметріи** (102), совпадающій съ центромъ мн-ка (черт. 240). Дѣйствительно, всякая прямая KL, соединяющая 2 точки контура такого мн-ка и проходящая черезъ центръ O, дѣлится этою точкою пополамъ, какъ это видно изъ равенства тр-ковъ OBK и OEL (покрытыхъ на чертежѣ штрихами).

265. Задача. **В п и с а т ь въ д а н н ы й к р у г ъ к в а д р а т ъ и о п р е д ѣ л и т ь е г о с т о р о н у въ з а в и с и м о с т и о т ъ р а д і у с а.**

1°. Предположимъ, что AB (черт. 241) есть сторона квадрата, вписаннаго въ данный кругъ O. Тогда дуга AB должна равняться ¼ окружности и уголъ AOB долженъ быть п р я м о й. Поэтому для построенія вписаннаго квадрата (и, слѣд., для раздѣленія окружности на 4 равныя части) достаточно провести два перпендикулярныхъ діаметра AC и BD и концы ихъ соединить хордами. Вписанный четыреугольникъ $ABCD$ правильный, потому что дуги AB, BC, CD и DA равны, какъ соотвѣтствующія равнымъ центральнымъ угламъ.

Черт. 241.

2°. Изъ прямоугольнаго тр-ка AOB находимъ:

$$AB^2=AO^2+BO^2, \text{ т.-е. } AB^2=2AO^2;$$

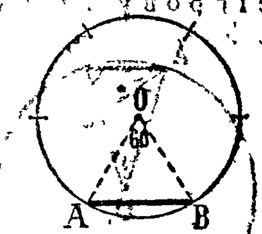
откуда:
$$AB=AO\sqrt{2}.$$

Условимся всегда обозначать буквою a_n численную величину стороны правильнаго вписаннаго мн-ка, имѣющаго n сторонъ, а буквою R радіусъ описаннаго круга; тогда выведенное равенство изобразится такъ:

$$a_4=R\sqrt{2}=R\ .\ 1{,}41421\ldots$$

266. Задача. **В п и с а т ь въ д а н н ы й к р у г ъ п р а в и л ь н ы й ш е с т и у г о л ь н и к ъ и о п р е д ѣ л и т ь е г о с т о р о н у въ з а в и с и м о с т и о т ъ р а д і у с а.**

Предположимъ, что AB (черт. 242) есть сторона правильнаго вписан. шестиугольника. Тогда дуга AB должна быть $1/_6$ часть окружности и, слѣд., уголъ AOB долженъ содержать 60°. Такъ какъ тр-къ AOB равнобедренный ($AO=OB$), то углы A и B равны и каждый изъ нихъ содержитъ по $1/_2$ (180°—60°), т.-е. тоже по 60°. Такимъ образомъ, тр-къ AOB оказывается равноугольнымъ и, слѣд. равностороннимъ, т.-е. $AB=AO=OB$. Итакъ, **сторона правильнаго вписаннаго шестиугольника равна радіусу**, что, по принятому нами обозначенію, можно выразить такъ:

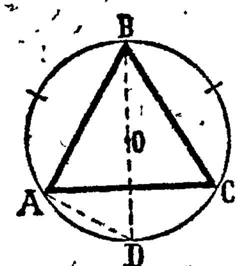


Черт. 242.

$$a_6=R.$$

Отсюда возникаетъ весьма простой способъ построенія правильнаго впис. шестиугольника (и, слѣд., дѣленія окружности на 6 равныхъ частей): давъ циркулю раствореніе, равное радіусу, откладываютъ этимъ раствореніемъ по окружности, одна за другою, равныя дуги, и точки дѣленія соединяютъ хордами.

267. Задача. Вписать въ данный кругъ правильный **треугольникъ** и опредѣлить его сторону въ зависимости отъ радіуса.

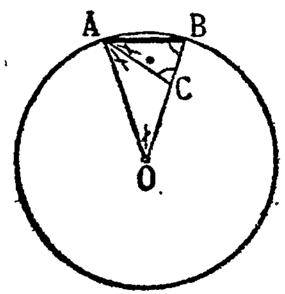

Черт. 243.

1°. Чтобы раздѣлить окружность на 3 равныя части (черт. 243), дѣлятъ ее сначала на 6 равныхъ частей (какъ указано въ предыдущей задачѣ) и затѣмъ соединяютъ по двѣ части въ одну.

2°. Для опредѣленія стороны AB проведемъ діаметръ BD и хорду AD. Тр-къ ABD прямоугольный при вершинѣ A; поэтому $AB=\sqrt{BD^2-AD^2}$. Но $BD=2R$ и $AD=R$ (потому что дуга AD есть $1/6$ часть окружности и, слѣд., хорда AD есть сторона правильнаго вписаннаго шестиугольника); значитъ:

$$a_3=\sqrt{(2R)^2-R^2}=\sqrt{3R^2}=R\sqrt{3}=R\,.\,1{,}73205\ldots$$

268. Задача. Вписать въ данный кругъ правильный **десятиугольникъ** и опредѣлить его сторону въ зависимости отъ радіуса.


Черт. 244.

Предварительно докажемъ слѣдующее свойство правильнаго десятиугольника.

Пусть хорда AB (черт. 244) есть сторона такого многоугольника. Тогда уголъ AOB равенъ 36°, а каждый изъ угловъ A и B содержитъ по $1/2$ (180°—36°), т.-е. по 72°. Раздѣлимъ уголъ A пополамъ прямою AC. Каждый изъ угловъ, образовавшихся при точкѣ A, равенъ 36°; слѣд., тр-къ ACO, имѣя два равные угла, есть равнобедренный, т.-е. $AC=CO$. Тр-къ ABC также равнобедренный, потому что $B=72°$ и $C=180°-72°-36°=72°$;

слѣд., $AB=AC=CO$. По свойству биссектрисы угла тр-ка (226) можемъ написать:

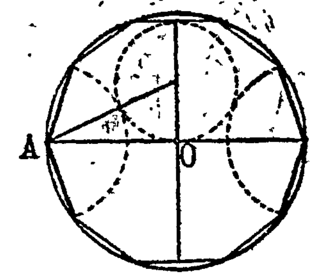
$$AO:AB=OC:CB \qquad [1]$$

Замѣнивъ AO и AB равными имъ прямыми OB и OC, получимъ:

$$OB:OC=OC:CB \qquad [2]$$

т.-е. радіусъ OB раздѣленъ въ точкѣ C въ среднемъ и крайнемъ отношеніи (253), при чемъ OC есть его бо́льшая часть. Но OC равна сторонѣ прав. впис. десятиугольника; значитъ:

сторона правильнаго вписаннаго десятиугольника равна бо́льшей части радіуса, раздѣленнаго въ среднемъ и крайнемъ отношеніи.


Черт. 245.

Теперь задача рѣшается легко:

1°. Дѣлятъ радіусъ круга (напр., OA, черт. 245) въ среднемъ и крайнемъ отношеніи (253); затѣмъ, давъ циркулю раствореніе, равное бо́льшей части радіуса, откладываютъ имъ по окружности дуги, одна за другою, и точки дѣленія соединяютъ хордами.

2°. Обозначивъ численную величину стороны правильнаго вписаннаго 10-тиугольника буквою x, мы можемъ пропорцію [2] переписать такъ:

$$R:x=x:(R-x),$$

откуда:

$$x^2+Rx-R^2=o.$$

Рѣшивъ это квадратное уравненіе, найдемъ:

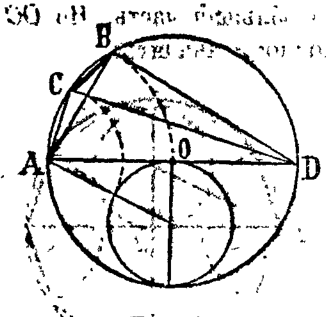
$$x=a_{10}=R\frac{\sqrt{5}-1}{2}=R.0{,}61803\ldots$$

269. Замѣчанія. 1°. Формулы, выведенныя нами въ предыдущихъ задачахъ для a_4, a_6, a_3, a_{10}, позволяютъ вычислить радіусъ описаннаго круга по данной сторонѣ правильнаго многоугольника. Такъ, изъ выраженія, опредѣляющаго a_{10}, находимъ:

$$R=\frac{2a_{10}}{\sqrt{5}-1}=\frac{2a_{10}(\sqrt{5}+1)}{5-1}=\frac{1}{2}a_{10}\left(\sqrt{5}+1\right)=a_{10}.1{,}61802\ldots$$

2°. Чтобы вписать въ данный кругъ правильный пятиугольникъ, дѣлятъ окружность на 10 равныхъ частей (какъ указано выше) и точки дѣленія соединяютъ черезъ одну хордами.

270. Задача. Вписать въ данный кругъ правильный пятнадцатиугольникъ.



Черт. 246.

Чтобы найти $^1/_{15}$ окружности, достаточно изъ $^1/_6$ ея части вычесть $^1/_{10}$, какъ это видно изъ слѣдующаго равенства:

$$\frac{1}{6}-\frac{1}{10}=\frac{5}{30}-\frac{3}{30}=\frac{2}{30}=\frac{1}{15}.$$

Поэтому если хорда AB (черт. 246) равна радіусу, а хорда AC—большей части радіуса, раздѣленнаго въ среднемъ и крайнемъ отношеніи, то дуга CB должна быть $^1/_{15}$ окружности, а хорда CB—сторона прав. впис. 15-угольника.

Вычисленіе стороны CB можно выполнить, примѣняя теорему Птоломея (242) къ четыреугольнику $ACBD$, въ которомъ $AC=a_{10}$, $CB=a_{15}$, $AD=2R$, $AB=a_6=R$, $CD=\sqrt{4R^2-a_{10}^2}$, $BD=a_3$ (такъ какъ дуга BD равна $^1/_3$ окружности).

Теорема Птоломея даетъ:

$$AB\,.\,CD=AD\,.\,CB+AC\,.\,BD,$$

т.-е.

$$R\sqrt{4R^2-a_{10}^2}=2R\,.\,a_{15}+a_{10}a_3.$$

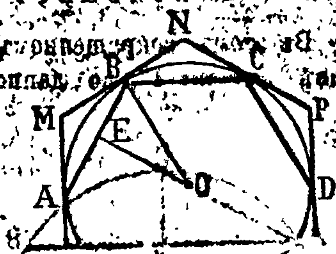
Подставивъ на мѣсто a_{10} и a_3 ихъ выраженія, получимъ послѣ упрощеній:

$$a_{15}=\frac{1}{4}R\left[\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{3}\left(\sqrt{5}-1\right)\right].$$

271. Задача. По данному радіусу круга и сторонѣ правильнаго вписаннаго многоугольника вычислить сторону правильнаго одноименнаго описаннаго многоугольника.

Пусть $ABCD\ldots$ есть прав. вписанный мн-къ, а $MNP\ldots$ одноименный прав. описанный (257). Такъ какъ стороны правильныхъ одноименныхъ мн-ковъ относятся, какъ ихъ радіусы или апоѳемы (262), то:

$$MN:AB=OB:OE,$$



Черт. 247.

Откуда: $MN=\dfrac{OB\,.\,AB}{OE}=\dfrac{OB\,.\,AB}{\sqrt{OB^2-BE^2}}.$

Обозначивъ численныя величины MN, AB и OB соотвѣтственно буквами b_n, a_n и R и замѣтивъ, что $BE={}^1/_2\,AB$, будемъ имѣть:

$$b_n=\frac{Ra_n}{\sqrt{R^2-\frac{a_n^2}{4}}}.$$

Примѣръ. Вычислимъ сторону правильнаго описаннаго 10-угольника:

$$b_{10}=\frac{Ra_{10}}{\sqrt{R^2-\frac{a_{10}^2}{4}}}=2R\sqrt{\frac{a_{10}^2}{4R^2-a_{10}^2}}=2R\sqrt{\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{16-(\sqrt{5}-1)^2}}=$$

$$=2R\sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}}{10+2\sqrt{5}}}=2R\sqrt{\frac{(3-\sqrt{5})(5-\sqrt{5})}{(5+\sqrt{5})(5-\sqrt{5})}}=$$

$$=2R\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}=R\,.\,0{,}65\ldots$$

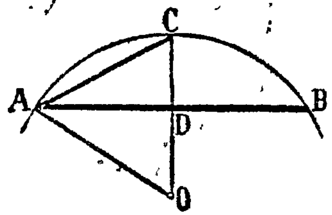
272. Замѣчаніе. Формула, опредѣляющая b_n, позволяетъ вычислить a_n по даннымъ b_n и R. Для этого стоитъ только рѣшить уравненіе, принимая a_n за неизвѣстное:

$$b_n^2\left(R^2-\frac{a_n^2}{4}\right)=R^2a_n^2;\quad b_n^2R^2=a_n^2\left(R^2+\frac{b_n^2}{4}\right);$$

$$a_n=\frac{b_nR}{\sqrt{R^2+\frac{b_n^2}{4}}}.$$

273. Задача. Удвоить число сторонъ правильнаго вписаннаго многоугольника.

Въ этомъ сокращенномъ выраженіи разумѣется собственно двѣ задачи: 1°, по данному правильному впис. мн-ку построить другой правильный мн-къ, вписанный въ ту же окружность и имѣющій вдвое болѣе сторонъ; 2°, вычислить сторону этого мн-ка по данной сторонѣ перваго мн-ка и данному радіусу круга.


Черт. 248.

1°. Пусть AB (черт. 248) есть сторона прав. впис. мн-ка, имѣющаго n сторонъ и O центръ круга. Проведемъ $OC \perp AB$ и соединимъ A съ C. Дуга AB дѣлится въ точкѣ C пополамъ; слѣд., хорда AC есть сторона прав. впис. мн-ка, имѣющаго $2n$ сторонъ.

2°. Въ тр-кѣ ACO уголъ O всегда острый (такъ какъ дуга ACB всегда меньше полуокружности и, слѣд., половина ея, дуга AC, меньше четверти окружности); поэтому (236):

$$AC^2 = OA^2 + OC^2 - 2OC \, . \, OD.$$

т.-е. $$a_{2n}^2 = R^2 + R^2 - 2R \, . \, OD = 2R^2 - 2R \, . \, OD.$$

Изъ прямоугольнаго тр-ка AOD опредѣлимъ катетъ OD:

$$OD = \sqrt{AO^2 - AD^2} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{a_n}{2}\right)^2} = \sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}.$$

Слѣд.: $$a_{2n} = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}}.$$

Такова **формула удвоенія** числа сторонъ правильнаго вписаннаго многоугольника *).

*) Сложные радикалы, получаемые изъ формулы удвоенія, могутъ быть преобразованы въ сумму или разность двухъ простыхъ радикаловъ (см. алгебра А. Киселева, § 238); напр., для a_{12} можно получить такое выраженіе: $a_{12} = \frac{1}{2}R(\sqrt{6} - \sqrt{2})$.

Примѣръ. Вычислимъ сторону прав. впис. 12-угольника:

$$a_{12} = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{a_6^2}{4}}} = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{\frac{3R^2}{4}}} =$$
$$= \sqrt{2R^2 - 2R^2\sqrt{\frac{3}{4}}} = \sqrt{2R^2 - R^2\sqrt{3}} =$$
$$= R\sqrt{2 - \sqrt{3}} = R.0,5176...$$

274. На сколько равныхъ частей можно дѣлить окружность помощью циркуля и линейки? Примѣняя указанные въ предыдущихъ задачахъ способы, мы можемъ помощью циркуля и линейки дѣлить окружность на такое число равныхъ частей (и, слѣд., вписывать въ окружность правильные многоугольники съ такимъ числомъ сторонъ), которое заключается въ слѣдующихъ рядахъ:

3,	3.2,	3.2.2...	вообще 3.2^n
4,	4.2,	4.2.2...	вообще 2^n
5,	5.2,	5.2.2...	вообще 5.2^n
15,	15.2,	15.2.2...	вообще $3.5.2^n$

Германскій математикъ Гауссъ (умершій въ 1855 г.) доказалъ, что посредствомъ циркуля и линейки можно дѣлить окружность на такое число равныхъ частей, которое, будучи простымъ, выражается формулою 2^n+1. Напр., можно раздѣлить окружность на 17 равныхъ частей и на 257 равныхъ частей, такъ какъ 17 и 257 суть простыя числа вида 2^n+1 ($17=2^4+1$, $257=2^8+1$). Доказательство Гаусса выходитъ изъ предѣловъ элементарной математики.

Доказано также, что помощью линейки и циркуля окружность можно дѣлить на такое составное число равныхъ частей, которое, разложенное на простыхъ множителей, не содержитъ никакихъ иныхъ множителей, кромѣ множителей вида 2^n+1 при условіи, что эти множители всѣ различны, и множителя 2 въ какой угодно степени. Напр., въ окружность помощью циркуля и линейки можно вписать правильный 170-угольникъ ($170=2.5.17$), но нельзя вписать правильнаго 9-угольника (хотя множитель 3 имѣетъ видъ 2^n+1, но въ составѣ 9-и онъ повторяется).

На всякое иное число равныхъ частей окружность можетъ быть раздѣлена только приближенно.

275. Построеніе правильнаго многоугольника по данной сторонѣ. Для различныхъ правильныхъ многоугольниковъ существуютъ различные способы. Но можно указать слѣдующій общій способъ. Чертятъ окружность произвольнаго радіуса и вписываютъ въ нее правильный мн-къ съ такимъ числомъ сторонъ, которое должно быть у искомаго мн-ка; затѣмъ на данной сторонѣ строятъ мн-къ, подобный этому вписанному (210).

УПРАЖНЕНІЯ.

241. Составить формулу для стороны правильнаго вписаннаго 24-угольника.

242. Составить формулы для сторонъ правильныхъ вписанныхъ 8-угольника и 16-угольника.

243. Исходя изъ формулы удвоенія, опредѣлить сторону правильнаго вписаннаго 5-угольника.

244. Составить формулы для сторонъ правильныхъ описанныхъ треугольника и шестиугольника.

245. *Доказать*, что если въ прав. 5-угольникѣ проведемъ всѣ діагонали, то онѣ своими пересѣченіями образуютъ внутренній прав. 5-угольникъ.

246. Пусть AB, BC и CD будутъ три послѣдовательныя стороны правильнаго мн-ка, имѣющаго центръ въ O. Если продолжимъ стороны AB и CD до взаимнаго пересѣченія въ точкѣ E, то четыреугольникъ $OAEC$ можетъ быть вписанъ въ окружность.

247. *Доказать*, что: 1°, всякій вписанный равносторонній многоугольникъ есть правильный; 2°, равноугольный вписанный мн-къ есть правильный, когда число сторонъ его нечетное; 3°, всякій описанный равноугольный мн-къ есть правильный; 4°, описанный равносторонній мн-къ есть правильный, когда число сторонъ его нечетное.

248. *Доказать*, что двѣ діагонали правильнаго 5-угольника, не исходящія изъ одной вершины, пересѣкаются въ среднемъ и крайнемъ отношеніи.

249. На данной сторонѣ построить правильный 8-угольникъ.

250. На данной сторонѣ построить правильный 10-угольникъ.

251. Срѣзать отъ даннаго квадрата углы такъ, чтобы образовался правильный 8-угольникъ.

252. Въ д[illegible] квадратъ вписать равносторонній тр-къ, помѣщая одну изъ его вершинъ или въ вершинѣ квадрата, или въ серединѣ какой-либо стороны.

253. Вписать въ равносторонній тр-къ другой равносторонній треугольникъ, котораго стороны были бы перпендикулярны къ сторонамъ даннаго.

254. Построить углы въ 18, въ 30, въ 75, въ 72 градуса.

КНИГА IV.

ВЫЧИСЛЕНІЕ ДЛИНЫ ОКРУЖНОСТИ И ЕЯ ЧАСТЕЙ.

ГЛАВА I.

Основныя свойства предѣловъ.

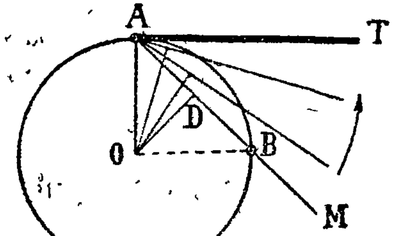
276. Величины постоянныя и перемѣнныя. Рѣшая какой-либо вопросъ, въ который входятъ нѣсколько величинъ, мы иногда предполагаемъ, что нѣкоторыя изъ этихъ величинъ сохраняютъ одно и то же неизмѣнное значеніе, тогда какъ другія способны принимать безчисленное множество различныхъ значеній. Первыя величины наз. постоянными, вторыя перемѣнными. Такъ, разсматривая зависимость между длиною хорды и ея разстояніемъ отъ центра, мы считаемъ радіусъ круга величиною постоянною, а длину хорды и ея разстояніе отъ центра—величинами перемѣнными.

Впрочемъ, нѣкоторыя величины являются постоянными не потому, что мы ихъ такими предполагаемъ, а вслѣдствіе своего основного свойства; такова, напр., сумма угловъ тр-ка, которая всегда равна $2d$.

Если величины выражены числами, то постоянной величинѣ соотвѣтствуетъ постоянное число, а перемѣнной величинѣ—перемѣнное число.

277. Перемѣнныя величины, стремящіяся къ нулю. Если перемѣнная величина (и перемѣнное число, измѣряющее ее), измѣняясь, дѣлается меньше любого даннаго значенія, какъ бы мало это значеніе ни было, и при дальнѣйшемъ измѣненіи постоянно остается меньше этого значенія, то говорятъ, что эта перемѣнная величина стремится къ нулю.

Напр., если черезъ какую-нибудь точку A окружности (черт. 249) проведемъ касательную AT и сѣкущую AM и затѣмъ станемъ вращать сѣкущую вокругъ точки касанія такъ, чтобы вторая точка пересѣченія B все ближе и ближе придвигалась къ точкѣ A, то при этомъ уголъ TAM, составленный касательною и сѣкущею, стремится къ нулю, потому что, какъ мы это говорили прежде (143), равный ему уголъ AOD, составленный радіусомъ AO и перпендикуляромъ OD на хорду AB, можетъ сдѣлаться меньше любого даннаго угла, напр. меньше угла въ $1'$, и, при дальнѣйшемъ сближеніи точекъ пересѣченія, постоянно остается меньше этого угла.



Черт. 249.

Точно такъ же центральный уголъ правильнаго многоугольника, котораго величина равна $4d/n$, стремится къ нулю, если n, т.-е. число сторонъ этого мн-ка, неограниченно возрастаетъ; напр., при $n=100$ этотъ уголъ равенъ $0{,}04d$, при $n=1000$ онъ дѣлается $0{,}004d$ и т. д.

278. Перемѣнныя величины, увеличивающіяся безпредѣльно. Если перемѣнная величина (и перемѣнное число, измѣряющее ее), измѣняясь, дѣлается и остается больше любого даннаго значенія, какъ бы велико это значеніе ни было, то говорятъ, что она увеличивается б е з п р е д ѣ л ь н о (или неограниченно) *).

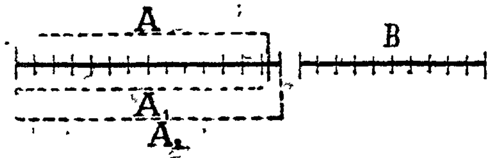
Напр., сумма угловъ выпуклаго многоугольника, равная $2d(n-2)=2dn-4d$, при неограниченномъ возрастаніи числа сторонъ увеличивается безпредѣльно; такъ, при $n=100$ она равна $196d$, при $n=1000$ она дѣлается $1996d$ и т. д.

*) Величины, увеличивающіяся безпредѣльно, принято въ математикѣ называть б е з к о н е ч н о б о л ь ш и м и, а величины, стремящіяся къ нулю, — б е з к о н е ч н о м а л ы м и. Въ этой книгѣ мы не будемъ однако употреблять этихъ терминовъ для избѣжанія нѣкоторой неясности представленія въ умѣ учащагося.

279. Примѣрныя величины, стремящіяся къ предѣлу. Иногда случается, что перемѣнная величина, измѣняясь, стремится къ нѣкоторому предѣлу.

Предѣломъ перемѣнной величины наз. такая постоянная величина, къ которой перемѣнная приближается такъ, что разность между ними стремится къ нулю, т.-е. эта разность дѣлается и остается меньше любого даннаго значенія, какъ бы мало это значеніе ни было.

Приведемъ два примѣра перемѣнныхъ величинъ, стремящихся къ предѣламъ.



Черт. 250.

1°. Разсмотримъ (черт. 250) процессъ измѣренія какой-нибудь длины A, несоизмѣримой съ единицею B. Чтобъ измѣрить такую длину съ точностью до $1/n$ (158, 2°), мы дѣлимъ B на n равныхъ частей и одну изъ нихъ откладываемъ на A столько разъ, сколько можно. Тогда мы получаемъ соизмѣримую длину A_1, которая меньше A; если же отложимъ $1/n$ долю B еще одинъ разъ, то получимъ другую соизмѣримую длину A_2, которая больше A; при этомъ каждая изъ разностей $A-A_1$ и A_2-A меньше $1/n$ доли B. Предположимъ теперь, что число n равныхъ частей, на которое мы дѣлимъ B, увеличивается неограниченно. Тогда длины A_1 и A_2 становятся перемѣнными, а длина A остается постоянной; такъ какъ $1/n$ доля B при достаточномъ увеличеніи числа n можетъ быть сдѣлана меньше любой данной длины (напр., меньше миллиметра) и при дальнѣйшемъ увеличеніи n она постоянно остается меньше этой малой длины, то можно сказать, что перемѣнныя величины A_1 и A_2 стремятся при этомъ къ общему предѣлу A.

Изъ этого примѣра мы видимъ, что перемѣнная величина, приближаясь къ своему предѣлу, можетъ быть или меньше его, или больше; такъ, длина A_1 постоянно меньше, чѣмъ A, а длина A_2, наоборотъ, всегда больше A.

2°. Сумма всѣхъ внутреннихъ угловъ выпуклаго многоугольника, имѣющаго n сторонъ, выражается, какъ извѣстно (89), формулой $2d(n-2)$; поэтому величина одного угла правильнаго n-угольника равна:

$$\frac{2d(n-2)}{n}=\frac{2dn-4d}{n}=2d-\frac{4d}{n}.$$

Предположимъ, что число сторонъ многоугольника, т.-е. число n, неограниченно увеличивается; тогда, какъ видно изъ приведенной формулы, величина угла мн-ка, оставаясь всегда меньше $2d$, все болѣе и болѣе приближается къ $2d$ такъ, что разность между ними, равная $\frac{4d}{n}$, дѣлается и остается меньше какого угодно угла. Поэтому можно сказать, что уголъ правильнаго мн-ка, при неограниченномъ увеличенiи числа его сторонъ, имѣетъ предѣлъ $2d$.

280. Замѣчанiе. Если перемѣнная величина a, измѣняясь, остается постоянно бо́льшей своего предѣла A, то ее можно разсматривать, какъ сумму $A+x$; если же перемѣнная величина a, измѣняясь, остается постоянно меньшей своего предѣла A, то ее можно разсматривать, какъ разность $A-x$; и въ томъ, и въ другомъ случаяхъ x означаетъ нѣкоторую п о л о ж и т е л ь н у ю величину, которая, согласно опредѣленiю предѣла, стремится къ нулю, когда перемѣнная величина a стремится къ своему предѣлу A.

281. Теорема. **Если двѣ перемѣнныя величины, стремящiяся къ предѣламъ, при всѣхъ своихъ послѣдовательныхъ измѣненiяхъ остаются равными между собою, то равны и ихъ предѣлы.**

Пусть a и b двѣ перемѣнныя величины, а A и B ихъ предѣлы; положимъ, что при всѣхъ послѣдовательныхъ измѣненiяхъ перемѣнныя величины a и b всегда равны между собою; требуется доказать, что въ такомъ случаѣ и $A=B$.

Предположимъ, что обѣ перемѣнныя величины a и b, измѣняясь, остаются постоянно меньшими своихъ предѣловъ. Тогда можно принять, что $a=A-x$ и $b=B-y$, гдѣ x и y нѣкоторыя

положительныя величины, стремящiяся къ нулю. Такъ какъ, по условiю, $a=b$, то можно написать:

$$A-x=B-y.$$

Докажемъ, что это равенство возможно только тогда, когда $A=B$ (и, слѣд., $x=y$). Перенеся въ этомъ равенствѣ постоянные члены въ одну часть, а перемѣнные въ другую, получимъ:

$$A-B=x-y.$$

Лѣвая часть послѣдняго равенства, представляя собою разность между п о с т о я н н ы м и величинами, должна равняться или нулю (если $A=B$), или нѣкоторой постоянной величинѣ. Правая часть того же равенства, представляя собой разность между такими перемѣнными величинами, которыя обѣ с т р е м я т с я к ъ н у л ю, должна равняться или нулю (если $x=y$), или нѣкоторой п е р е м ѣ н н о й величинѣ, стремящейся къ нулю. Такъ какъ постоянная величина не можетъ равняться перемѣнной величинѣ, то, значитъ, написанное равенство возможно только тогда, когда обѣ его части равны нулю, т.-е. только тогда, когда $A=B$ (и $x=y$).

Подобнымъ же образомъ можно доказать, что $A=B$ и въ томъ случаѣ, когда перемѣнныя a и b остаются бо́льшими своихъ предѣловъ *).

282. Теорема. **Если двѣ перемѣнныя величины, стремящiяся къ предѣламъ, при всѣхъ своихъ измѣненiяхъ сохраняютъ одно и то же отношенiе, то въ томъ же отношенiи находятся и ихъ предѣлы.**

Пусть a и b двѣ перемѣнныя величины, а A и B ихъ предѣлы, и положимъ, что при всѣхъ измѣненiяхъ величины a и b постоянно удовлетворяютъ пропорцiи:

$$a:b=m:n,$$

въ которой m и n какiя-нибудь постоянныя данныя числа. Требуется доказать, что въ такомъ случаѣ и

$$A:B=m:n.$$

Предположимъ снова, что обѣ перемѣнныя, измѣняясь, остаются меньшими своихъ предѣловъ; тогда можно принять, что

*) и даже въ томъ случаѣ, когда онѣ, измѣняясь, дѣлаются то меньшими, то бо́льшими своихъ предѣловъ.

$a=A-x$ и $b=B-y$, гдѣ вычитаемыя x и y суть нѣкоторыя положительныя величины, стремящіяся къ нулю. Подставивъ въ данную пропорцію на мѣсто a и b равныя имъ разности $A-x$ и $B-y$, получимъ:

$$(A-x):(B-y)=m:n.$$

Откуда: $$(A-x)\,n=(B-y)\,m,$$

т.-е. $$An-nx=Bm-my.$$

Такъ какъ величины x и y стремятся къ нулю, то и произведенія nx и my стремятся къ нулю *); вслѣдствіе этого разности $An-nx$ и $Bm-my$ представляютъ собою перемѣнныя величины, стремящіяся къ предѣламъ: первая разность—къ постоянной величинѣ An, а вторая разность—къ постоянной величинѣ Bm. Но если равны перемѣнныя, стремящіяся къ предѣламъ, то равны и ихъ предѣлы (281); значитъ:

$$An=Bm;\ \text{откуда:}\ A:B=m:n.$$

283. Основное начало способа предѣловъ. Двѣ предыдущія теоремы составляютъ частные случаи слѣдующаго важнаго предложенія, которое мы примемъ безъ доказательства:

если какое-либо равенство, содержащее перемѣнныя величины, стремящіяся къ предѣламъ, остается вѣрнымъ при всѣхъ измѣненіяхъ перемѣнныхъ, то оно остается вѣрнымъ и тогда, когда на мѣсто перемѣнныхъ подставимъ ихъ предѣлы.

Это предложеніе служитъ основаніемъ такъ называемому *способу предѣловъ*, которымъ иногда пользуются для доказательства нѣкоторыхъ геометрическихъ истинъ.

284. Понятіе о способѣ предѣловъ. Этотъ способъ состоитъ въ слѣдующемъ. Положимъ, что мы желаемъ найти зависимость между нѣкоторыми постоянными величинами A и B, и допустимъ, что эту зависимость трудно (или

---

*) т.-е. каждое изъ этихъ произведеній дѣлается (и остается) меньше любого даннаго положительнаго числа, какъ бы мало это число ни было; напр., произведеніе nx дѣлается (и остается) меньше дроби 1-й милліонной, такъ какъ число x, измѣняясь, дѣлается (и остается) меньше $^1/_n$ милліонной.

даже невозможно) найти непосредственно. Тогда задаемся вопросомъ: нельзя ли величины A и B разсматривать, какъ *предѣлы* нѣкоторыхъ перемѣнныхъ величинъ a и b, и если возможно, то какова зависимость между a и b? Положимъ, оказалось, что эта зависимость выражается равенствомъ:

$$a=3b^2,$$

которое остается вѣрнымъ при всѣхъ измѣненіяхъ a и b; въ такомъ случаѣ можемъ принять, что это равенство остается вѣрнымъ и тогда, когда на мѣсто a и b подставимъ ихъ предѣлы, т.-е., что и

$$A=3B^2.$$

Такимъ образомъ, зависимость между A и B мы найдемъ косвеннымъ путемъ, отыскавъ предварительно зависимость между перемѣнными.

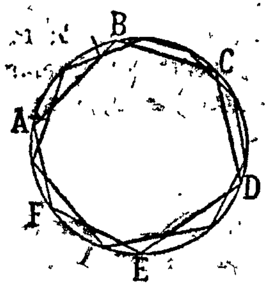
Примѣненіе этого способа мы вскорѣ увидимъ.

ГЛАВА II.

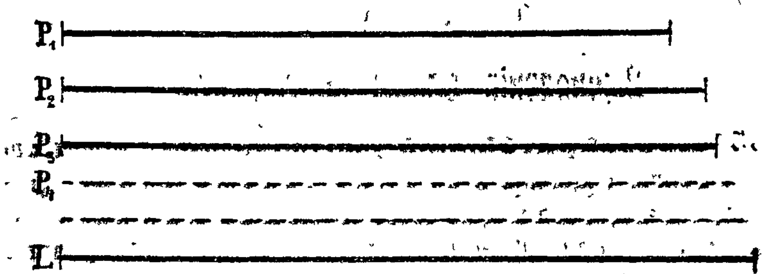
Вычисленіе длины окружности.

285. Предварительное разъясненіе. Конечную прямую можно сравнивать съ другою конечною прямою, принятою за единицу, вслѣдствіе того, что прямыя линіи при наложеніи совмѣщаются. Дѣйствительно, только по этой причинѣ мы можемъ совершенно точно установить, какіе отрѣзки прямыхъ считать равными и неравными, что такое сумма отрѣзковъ прямой, какой отрѣзокъ болѣе другого въ 2, 3, 4... раза и т. п. Точно такъ же дуги окружностей одинаковаго радіуса можно сравнивать между собою вслѣдствіе того, что такія дуги при наложеніи совмѣщаются. Но извѣстно, что никакая часть окружности (или другой кривой) не можетъ совмѣститься съ прямой (121); поэтому нельзя установить путемъ наложенія, какой криволинейный отрѣзокъ должно считать равнымъ данному прямолинейному отрѣзку, а слѣд., и то, какой криволинейный отрѣзокъ больше даннаго прямолинейнаго въ 2, 3, 4... раза. Такимъ образомъ, является необходимость опредѣлить, что мы разумѣемъ подъ длиною окружности (или части ея) когда сравниваемъ ее съ прямолинейнымъ отрѣзкомъ.

286. Опредѣленіе длины окружности и ея дуги. Впишемъ въ данную окружность (черт. 251) какой-нибудь выпуклый многоугольникъ $ABCDEF$ и найдемъ его периметръ. Пусть это будетъ конечная прямая P_1 (черт. 252). Впишемъ въ ту же окружность какой-нибудь другой выпуклый мн-къ, у котораго стороны были бы меньше (и, слѣд., число сторонъ больше), чѣмъ у перваго мн-ка; найдемъ его периметръ; пусть это будетъ прямая P_2 (черт. 252). Впишемъ далѣе въ нашу окружность третій мн-къ (онъ не указанъ на чертежѣ), у котораго стороны были бы еще меньше (и, слѣд., число сторонъ еще больше) и найдемъ его периметръ; пусть это будетъ прямая P_3. Вообразимъ теперь, что мы вписываемъ въ данную окружность все



Черт. 251.



Черт. 252.

новые и новые мн-ки, у которыхъ стороны неограниченно уменьшаются, и каждый разъ находимъ ихъ периметры. Тогда мы получимъ безконечный рядъ периметровъ: P_1, P_2, P_3, P_4.... Можно доказать *), что **этотъ рядъ стремится къ опредѣленному предѣлу** (напр., къ нѣкоторой длинѣ L, черт. 252), **не зависящему отъ того, по какому закону мы уменьшаемъ стороны вписываемыхъ многоугольниковъ**

*) Доказательство помѣщено ниже, въ § 298.

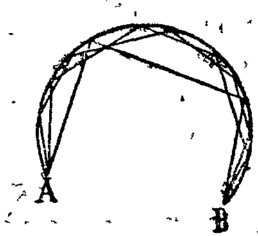
сываемыхъ многоугольниковъ (и, слѣд., увеличиваемъ число ихъ сторонъ). Мы можемъ, напр., вписывать въ данную окружность мн-ки по такому закону: сначала впишемъ квадратъ (черт. 253), затѣмъ впишемъ правильный 8-угольникъ, далѣе правильный 16-угольникъ, потомъ 32-угольникъ и т. д., и т. д., все удваивая число сторонъ правильныхъ мн-ковъ. Можемъ

Черт. 253.

Черт. 254.

поступить и такъ: сначала впишемъ правильный 6-угольникъ (черт. 254), затѣмъ правильный 12-угольникъ, далѣе 24-угольникъ и т. д., и т. д., все удваивая число сторонъ мн-ковъ. Можемъ вписывать мн-ки и по какому угодно иному закону, при чемъ вписываемые мн-ки могутъ быть и неправильные. Всегда окажется, что если только стороны вписаннаго выпуклаго мн-ка неограниченно уменьшаются, то периметръ его стремится къ одному и тому же предѣлу, опредѣленному для данной окружности. Этотъ предѣлъ принимается за длину окружности.

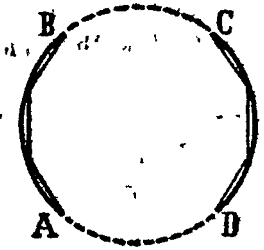
Такимъ образомъ, за длину окружности принимаютъ предѣлъ, къ которому стремится периметръ вписаннаго въ эту окружность выпуклаго многоугольника, когда стороны его неограниченно уменьшаются. Подобно этому **за длину дуги** (AB, черт. 255) **окружности** (и вообще за длину какой-нибудь конечной кривой) **принимаютъ предѣлъ, къ которому стремится периметръ ломаной линіи, вписанной въ эту дугу и имѣющей съ нею одни и тѣ же концы, когда стороны этой ломаной неограниченно уменьшаются.**



Черт. 255.

287. Слѣдствія. 1°. Равныя дуги и равныя окружности имѣютъ одинаковыя длины.

Дѣйствительно, если дуги AB и CD (черт. 256) равны, то это значитъ, что онѣ при наложеніи совмѣщаются. Вслѣдствіе этого ломаныя линіи, вписываемыя въ нихъ, можно брать совершенно одинаковыми. Но тогда периметры этихъ ломаныхъ будутъ, конечно, стремиться къ одному и тому же предѣлу; а этотъ предѣлъ, согласно опредѣленію, и есть длина дуги какъ AB, такъ и CD.

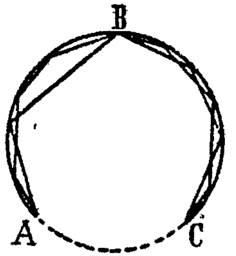


Черт. 256.

То же самое можно повторить о равныхъ окружностяхъ.

2°. Длина суммы дугъ равна суммѣ длинъ этихъ дугъ.

Если дуга ABC (черт. 257) есть сумма двухъ дугъ AB и BC, то мы можемъ вписывать ломаную линію въ дугу ABC такимъ образомъ, чтобы она всегда была составлена изъ двухъ ломаныхъ, сходящихся въ точкѣ B; тогда одна изъ нихъ будетъ вписана въ дугу AB, а другая въ дугу BC. При такомъ способѣ вписыванія, очевидно, предѣлъ периметра ломаной, вписаной въ дугу ABC, равенъ суммѣ предѣловъ периметровъ ломаныхъ, вписанныхъ въ дуги AB и BC; а это значитъ, что длина дуги ABC равна суммѣ длинъ дугъ AB и BC.

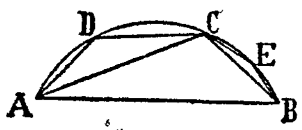


Черт. 257.

Въ частности, напр., длина цѣлой окружности, разложенной на нѣсколько дугъ, равна суммѣ длинъ всѣхъ этихъ дугъ.

288. Теорема. Длина дуги больше стягивающей ее хорды, но меньше всякой ломаной линіи, описанной около этой дуги и имѣющей съ нею одни и тѣ же концы.

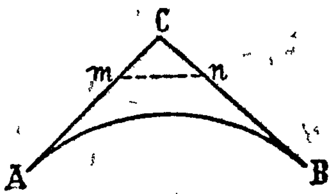
1°. Пусть ACB (черт. 258) есть дуга окружности, а AB стягивающая ее хорда; требуется доказать, что длина дуги больше этой хорды.—Предположимъ, что въ дугу ACB мы вписываемъ ломаныя линіи по такому закону: первая ломаная пусть будетъ какая угодно, напр., ломаная, составленная изъ 2-хъ хордъ AC и CB; вторая ломаная пусть будетъ $ADCEB$, составленная изъ 4-хъ хордъ, при чемъ вершины первой ломаной, т.-е. точки A, C и B пусть входятъ также въ число вершинъ и второй ломаной. Третья ломаная (не указана на чертежѣ) пусть будетъ такая, которая составлена изъ 8-ми хордъ, при чемъ вершины второй ломаной, т.-е. точки A, D, C, E и B, пусть входятъ также и въ число вершинъ третьей ломаной. Такимъ же образомъ вписывается четвертая ломаная, затѣмъ пятая и т. д. безъ конца.



Черт. 258.

При такомъ законѣ вписыванія периметръ ломаной, съ каждымъ удвоеніемъ числа ея сторонъ, будетъ в с е в о з р а с т а т ь (напр., $AD+DC+CE+EB>AC+CB$, такъ какъ $AD+DC>AC$ и $CE+EB>CB$); вслѣдствіе этого предѣлъ, къ которому стремится этотъ периметръ, долженъ быть больше периметра первой ломаной, т.-е. суммы $AC+CB$, и, значитъ, долженъ быть, и подавно, больше хорды AB (53). Но предѣлъ, къ которому стремится периметръ вписанной ломанной линіи, принимается за длину дуги AB; значитъ, эта длина больше хорды AB.

2°. Пусть ломаная линія ACB (черт. 259) описана около дуги AB и имѣетъ съ этою дугою одни и тѣ же концы A и B; требуется доказать, что длина дуги меньше длины этой ломаной; другими словами, требуется доказать, что предѣлъ L, къ которому стремится периметръ выпуклой ломаной линіи, вписанной въ дугу AB, при неограниченномъ уменьшеніи ея сторонъ, меньше суммы $AC+CB$, которую мы для краткости обозначимъ одною буквою S. Для доказательства возьмемъ вспомогательную ломаную $AmnB$, которая получится, если мы срѣжемъ уголъ C какимъ-нибудь отрѣзкомъ прямой mn, н е п е р е с ѣ к а ю щ и м с я с ъ д у г о ю AB (что всегда возможно, если ломаная ACB о п и с а н а, т.-е. составлена изъ касательныхъ). Обозначимъ длину этой вспомогательной ломаной буквою S_1. Такъ какъ $mn<mC+Cn$, то $S_1<S$. Докажемъ теперь, что п р е д ѣ л ъ L н е м о ж е т ъ б ы т ь б о л ь ш е S_1. Предположимъ противное, т.-е. что $L>S_1$. Такъ какъ перемѣнная величина приближается къ своему предѣлу какъ угодно близко, то периметръ вписанной въ дугу AB ломаной линіи, при достаточномъ уменьшеніи ея сторонъ, можетъ приблизиться къ своему предѣлу L настолько близко, что разность между L

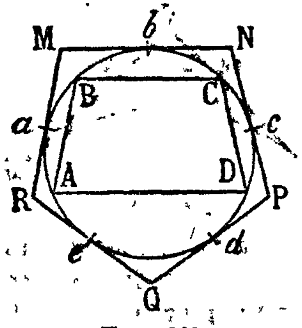


Черт. 259.

и этихъ периметровъ сдѣлается меньше постоянной разности $L - S_1$; тогда, значитъ, периметръ вписанной ломаной сдѣлается больше S_1. Но это невозможно, такъ какъ всякая выпуклая ломаная линія, вписанная въ дугу AB, есть **объемлемая** по отношенію къ **объемлющей** ломаной $AmnB$, и потому первая должна быть меньше второй (55). Слѣд., нельзя допустить, что $L > S_1$; значитъ, $L \leq S_1$, и такъ какъ $S_1 < S$, то $L < S$.

289. Замѣчаніе. Доказательство обѣихъ частей этой теоремы остается въ полной силѣ и тогда, когда дуга, о которой говорится въ теоремѣ, будетъ не дуга окружности, а часть какой-нибудь иной кривой, лишь бы только эта часть кривой была **выпуклая**, т.-е. такая, которая расположена по одну сторону отъ каждой своей касательной.

290. Слѣдствіе. Пусть въ данную окружность (черт. 260) вписанъ какой-нибудь выпуклый многоугольникъ $ABCD$ и описанъ какой-нибудь многоугольникъ $MNPQR$. Такъ какъ дуга AB больше хорды AB, дуга BC больше хорды BC и т. д., то **длина окружности больше периметра вписаннаго выпуклаго многоугольника**. Съ другой стороны, такъ какъ дуга ab меньше описанной ломаной линіи $aM + Mb$, дуга bc меньше описанной ломаной линіи $bN + Nc$ и т. д., то **длина окружности меньше периметра описаннаго многоугольника**.



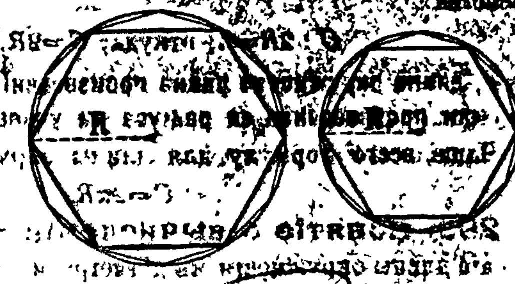
Черт. 260.

Напр., длина окружности больше периметра правильнаго вписаннаго шестиугольника и меньше периметра описаннаго квадрата; значитъ, длина окружности больше 6-ти радіусовъ и меньше 8-ми радіусовъ (такъ какъ сторона правильнаго вписаннаго шестиугольника равна радіусу, а сторона описаннаго квадрата равна діаметру).

Для болѣе точнаго вычисленія длины окружности въ зависимости отъ радіуса докажемъ слѣдующую теорему.

291. Теорема. **Длины окружностей относятся, какъ ихъ радіусы или діаметры.**

Пусть R и R_1 (черт. 261) будутъ радіусы двухъ окружностей, а C и C_1 ихъ длины; требуется доказать, что [illegible] $C : C_1 = R : R_1 = 2R : 2R_1$.


Черт. 261.

Впишемъ въ данныя окружности какіе-нибудь правильные одноименные многоугольники (напримѣръ, шестиугольники) и затѣмъ вообразимъ, что число ихъ сторонъ одновременно неограниченно удваивается (т.-е. вмѣсто шестиугольниковъ берутся правильные вписанные 12-угольники, затѣмъ 24-угольники, 48-угольники и т. д. безъ конца). Обозначимъ перемѣнные периметры этихъ многоугольниковъ черезъ p и p_1. Тогда будемъ имѣть пропорцію (263):

$$p : p_1 = R : R_1.$$

Но если перемѣнныя величины сохраняютъ одно и то же отношеніе, то предѣлы ихъ находятся въ томъ же отношеніи (282); предѣлы же периметровъ p и p_1 суть длины окружностей C и C_1; значитъ:

$$C : C_1 = R : R_1.$$

Умноживъ оба члена второго отношенія на 2 (отчего отношеніе не измѣнится), получимъ:

$$C : C_1 = 2R : 2R_1.$$

292. Слѣдствія. 1°. Переставивъ въ послѣдней пропорціи средніе члены, получимъ:

$$C : 2R = C_1 : 2R_1,$$

т.-е. **отношеніе длины одной окружности къ ея діаметру равно отношенію длины другой окружности къ ея діаметру; другими словами: отношеніе длины окружности къ ея діаметру есть число постоянное для всѣхъ окружностей.**

Это постоянное число принято обозначать греческою буквою π *).

2°. Зная радіусъ и отношеніе длины окружности къ ея діаметру, т.-е. число π, мы можемъ вычислить эту длину изъ равенства:

$$C : 2R = \pi; \text{ откуда: } C = 2R.\pi = R.2\pi,$$

т.-е. длина окружности равна произведенію ея діаметра на число π, или произведенію ея радіуса на удвоенное число π.

Чаще всего формулу для длины окружности пишутъ такъ:

$$C = 2\pi R.$$

293. Понятіе о вычисленіи π. Доказано, что отношеніе длины окружности къ діаметру не можетъ быть выражено точно ни цѣлымъ, ни дробнымъ числомъ **). Но можно найти приближенное значеніе π съ какою угодно точностью. Укажемъ одинъ изъ способовъ этого вычисленія.

Если радіусъ примемъ за единицу длины, то длина окружности выразится числомъ 2π. Поэтому можно сказать, что π есть длина полуокружности единичнаго радіуса. Чтобы вычислить полуокружность съ нѣкоторымъ приближеніемъ, находятъ полупериметры правильныхъ вписанныхъ мн-ковъ, которые получаютъ черезъ удвоеніе числа сторонъ какого-нибудь одного изъ нихъ, напр., шестиугольника. Для этого предварительно находятъ длины сторонъ этихъ мн-ковъ, а затѣмъ полупериметры. Обозначая, по принятому, черезъ a сторону правильнаго вписаннаго мн-ка, имѣющаго n сторонъ, будемъ имѣть:

$$a_6 = R = 1.$$

*) Обозначеніе это введено, по всей вѣроятности, въ XVII столѣтіи. Буква π (пи) есть начальная буква греческаго слова περιφέρεια (окружность).

**) Отношеніе окружности къ діаметру есть число не только ирраціональное, но и трансцендентное, т.-е. такое, которое не можетъ служить корнемъ никакого алгебраическаго уравненія съ раціональными коэффиціентами (впервые это было доказано въ 1882 г. нѣмецкимъ математикомъ Ф. Линдеманомъ). Отсюда можно вывести заключеніе, что помощью циркуля и линейки нельзя рѣшить построеніемъ задачу о выпрямленіи окружности, т.-е. нельзя построить такой отрѣзокъ прямой, длина котораго въ точности равнялась бы длинѣ данной окружности.

Примѣняя формулу удвоенія, выведенную нами ранѣе (273):

$$a^2_{2n} = 2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{a^2_n}{4}},$$

находимъ: $a_{12} = 2 - 2\sqrt{1 - \frac{1}{4}} = 2 - \sqrt{3} = 0,26795...$

Послѣ этого, пользуясь тою же формулою, послѣдовательно вычисляемъ:

$$a^2_{24} = 2 - 2\sqrt{1 - \frac{a^2_{12}}{4}};\ a^2_{48} = 2 - 2\sqrt{1 - \frac{a^2_{24}}{4}};\ \text{и т. д.}$$

Положимъ, что мы прекратили удвоеніе на 96-угольникѣ. Чтобы получить его полупериметръ, надо сторону умножить на 48. Сдѣлавъ всѣ упрощенія и вычисленія, найдемъ (обозначая периметръ буквою p съ соотвѣтствующимъ знакомъ):

$$\frac{1}{2}p_{96} = 3,1410319...$$

Если полупериметръ 96-угольника примемъ за длину полуокружности, то, конечно, сдѣлаемъ нѣкоторую погрѣшность. Чтобы судить о величинѣ ея, вычислимъ еще полупериметръ правильнаго описаннаго 96-угольника. Для этого воспользуемся формулою, дающею выраженіе для стороны описаннаго мн-ка по радіусу и сторонѣ вписаннаго (271):

$$b_{96} = \frac{Ra_{96}}{\sqrt{R^2 - \frac{a^2_{96}}{4}}} = \frac{a_{96}}{\sqrt{1 - \frac{a^2_{96}}{4}}};$$

отсюда: $$\frac{1}{2}P_{96} = \frac{48a_{96}}{\sqrt{1 - \frac{a^2_{96}}{4}}} = \frac{\frac{1}{2}p_{96}}{\sqrt{1 - \frac{a^2_{96}}{4}}},$$

гдѣ P означаетъ периметръ описаннаго 96-угольника. Подставивъ на мѣсто $^1/_2\, p_{96}$ и a_{96} найденныя прежде числа и сдѣлавъ вычисленія, найдемъ:

$$\frac{1}{2}P_{96} = 3,1427146...$$

Полуокружность болѣе полупериметра вписаннаго, но меньше полупериметра описаннаго 96-угольника (290); поэтому она отличается отъ каждаго изъ этихъ полупериметровъ меньше, чѣмъ они разнятся между собою. Сравнивая два числа, найденныя для $\frac{1}{2}p_{96}$ и $\frac{1}{2}P_{96}$, замѣчаемъ, что у нихъ одинаковы цѣлыя, десятыя и сотыя доли; слѣд., разность между этими полупериметрами меньше $\frac{1}{100}$. Поэтому, если положимъ, что $\pi=3{,}14$, то получимъ приближенное значенiе π съ точностью до 0,01, при чемъ это значенiе будетъ с ъ н е д о с т а т к о м ъ, такъ какъ оно меньше $\frac{1}{2}p_{96}$ и, слѣд., подавно меньше полуокружности.

Если подобнымъ образомъ продолжимъ вычисленiе до полученiя полупериметра мн-ка о 6144 ($=6.2^{10}$) сторонахъ, то получимъ слѣдующее приближенное число (съ недостаткомъ):

$$\pi=3{,}141\ 592.$$

Для практическихъ цѣлей достаточно запомнить три или четыре цыфры этого числа, а въ случаѣ особенной точности можно довольствоваться такимъ приближеннымъ значенiемъ (съ избыткомъ) числа π, выраженнымъ 5-ю цыфрами:

$$\pi=3{,}1416.$$

Полезно также запомнить нѣсколько цыфръ числа

$$\frac{1}{\pi}=0{,}318\ 309\ 8\ldots,$$

часто встрѣчающагося при вычисленiяхъ.

294. Архимедово и Мецiево отношенiя. А р х и м е д ъ, знаменитый сиракузскiй геометръ, жившiй въ III вѣкѣ до Р. Хр., нашелъ для π весьма простое число $^{22}/_{7}$, т.-е. $3\frac{1}{7}$. Это число нѣсколько болѣе π и разнится отъ него менѣе, чѣмъ на 2 тысячныхъ *).

А д р i а н ъ М е ц i й, голландскiй геометръ XVI столѣтiя, далъ для отношенiя окружности къ дiаметру число $^{355}/_{113}$, которое превосходитъ точное значенiе π менѣе, чѣмъ на п о л у м и л л i о н н у ю; его легко запомнить по слѣдующему правилу: написавъ по 2 раза первыя три нечетныя цыфры:

113 | 355,

слѣдуетъ послѣднiя три взять числителемъ, а первыя знаменателемъ.

*) Архимедъ доказалъ, что число π заключается между суммами $3+\frac{10}{71}$ и $3+\frac{10}{70}$.

Ученые позднѣйшаго времени, пользуясь упрощенными способами (которые указываются высшей математикой), вычислили π съ точностью, далеко превосходящею всякiя практическiя требованiя (такъ, Ш е н к с ъ въ 1873 году нашелъ 707 десятичныхъ знаковъ числа π *).

295. Длина дуги въ n°. Такъ какъ длина всей окружности есть $2\pi R$, то длина дуги въ 1° равна $\frac{2\pi R}{360}=\frac{\pi R}{180}$ **); слѣд., длина s дуги, содержащей n°, выразится такъ:

$$s=\frac{\pi Rn}{180}.$$

Если дуга выражена въ минутахъ (n') или въ секундахъ (n''), то длина ея опредѣлится формулами:

$$s_1=\frac{\pi Rn}{180.60}, \qquad s_{11}=\frac{\pi Rn}{180.60.60}.$$

296. Задача 1-я. В ы ч и с л и т ь с ъ т о ч н о с т ь ю д о 1 м и л л и м е т р а р а д i у с ъ т а к о й о к р у ж н о с т и, к о т о р о й д у г а, с о д е р ж а щ а я 81° 21′ 36″, р а в н а 0,452 м е т р а.

*) Для запоминанiя довольно длиннаго ряда цыфръ, выражающихъ число π, можно пользоваться слѣдующимъ французскимъ двустишiемъ:

Que j'aime à faire apprendre
Un nombre utile aux hommes!

или слѣдующимъ русскимъ (придуманнымъ покойнымъ преподавателемъ Нижегородской гимназiи Ш е н р о к о м ъ):

Кто и шутя, и скоро пожелаетъ
Пи узнать число, ужъ знаетъ!

Если выписать въ рядъ числа буквъ, заключающихся въ каждомъ словѣ этихъ фразъ, то получимъ для π приближенное число (съ избыткомъ) 3,1415926536, вѣрное до одной половины десятибиллiонной.

**) Цѣлую окружность можно разсматривать, какъ сумму 360 дугъ, равныхъ одному градусу; и такъ какъ длина суммы дугъ равна суммѣ длинъ этихъ дугъ (287, 2°), то дуга въ 1° должна имѣть длину, въ 360 разъ меньшую длины цѣлой окружности. Длина дуги въ n° есть сумма n дугъ въ 1°; поэтому она должна быть въ n разъ больше длины дуги въ 1°.

Обративъ $81^\circ\ 21'\ 36''$ въ секунды, получимъ число 292896.

Изъ уравненія: $$0{,}452 = \frac{\pi R\ .\ 292896}{180\ .\ 60\ .\ 60}$$

находимъ: $$R = \frac{0{,}452\ .\ 180\ .\ 60\ .\ 60}{292896\pi} = \frac{1}{\pi} = 0{,}318 \text{ (метра).}$$

Задача 2-я. Опредѣлить число градусовъ дуги, которой длина равна радіусу.

Замѣнивъ въ формулѣ, опредѣляющей длину дуги въ величину s на R, получимъ уравненіе:

$$R = \frac{\pi R n}{180},\ \text{или}\ 1 = \frac{\pi n}{180};$$

откуда: $$n = \frac{180}{\pi} = 180\ .\ \frac{1}{\pi} = 180\ .\ 0{,}3183098$$

$$= 57^\circ{,}295764 = 57^\circ 17' 44''{,}8.$$

Теорема, служащая основаніемъ для опредѣленія длины окружности

(См. § 286).

297. При доказательствѣ этой теоремы, мы будемъ основываться на слѣдующихъ почти очевидныхъ истинахъ:

1°. Если перемѣнная величина, измѣняясь, все увеличивается, но при этомъ остается меньше *нѣкоторой постоянной* величины, то она имѣетъ предѣлъ.

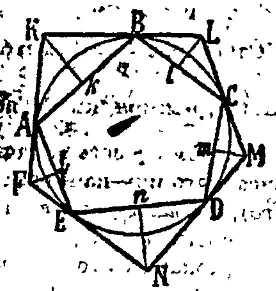
2°. Если перемѣнная величина, измѣняясь, все уменьшается, но при этомъ остается больше нѣкоторой постоянной величины, то она имѣетъ предѣлъ.

3°. Если разность двухъ перемѣнныхъ величинъ стремится къ нулю, и одна изъ этихъ величинъ имѣетъ предѣлъ, то другая имѣетъ тотъ же предѣлъ.

298. Теорема. Периметръ выпуклаго многоугольника, вписаннаго въ окружность, стремится къ предѣлу, когда стороны этого многоугольника неограниченно уменьшаются (и, слѣд., число сторонъ неограниченно увеличивается); **предѣлъ этотъ не зависитъ отъ закона, по которому стороны многоугольника уменьшаются.**

Пусть $ABCDE$ (черт. 262) есть какой-нибудь выпуклый многоугольникъ, вписанный въ данную окружность.

Проведемъ черезъ всѣ его вершины касательныя къ окружности до взаимнаго пересѣченія. Тогда получимъ описанный мн-къ $FKLMN$. Условимся называть такой описанный мн-къ соотвѣтственнымъ для вписаннаго мн-ка $ABCDE$.



Черт. 262.

Доказательство наше будетъ состоять изъ слѣдующихъ трехъ частей:

1°. Пусть p есть периметръ какого угодно вписаннаго, а P периметръ соотвѣтственнаго описаннаго мн-ка. Докажемъ, что разность $P-p$ стремится къ 0, когда стороны вписаннаго мн-ка стремятся къ 0 по какому угодно закону. Для этого предварительно найдемъ предѣлъ отношенія $P:p$. Изъ вершинъ $F, K, L, M, N\ldots$ опустимъ перпендикуляры на стороны вписаннаго многоугольника. Тогда:

$$P = AK + KB + BL + LC + CM + MD + DN + \ldots$$
$$p = Ak + kB + Bl + lC + Cm + mD + Dn + \ldots \qquad (1)$$

Изъ алгебры извѣстно, *) что величина дроби:

$$\frac{P}{p} = \frac{AK + KB + BL + \ldots\ldots}{Ak + kB + Bl + \ldots\ldots}$$

заключается между меньшею и большею изъ дробей:

$$\frac{AK}{Ak},\ \frac{KB}{kB},\ \frac{BL}{Bl},\ldots\ldots \qquad (2)$$

Докажемъ, что при неограниченномъ уменьшеніи сторонъ вписаннаго многоугольника каждая изъ этихъ дробей стремится къ предѣлу 1. Возьмемъ какую-нибудь одну изъ нихъ, напр. $\frac{AK}{Ak}$. Изъ прямоугольнаго тр—ка AKk (черт. 262) мы усматриваемъ, что

$$Ak = AK\ \cos\ A;\ \text{откуда:}\ \frac{AK}{Ak} = \frac{1}{\cos A}.$$

Когда стороны вписаннаго многоугольника стремятся къ 0, уголъ A, составленный касательною AK и хордою AB, также стремится къ 0 (277); слѣд., $\cos A$ стремится при этомъ къ 1, и потому отношеніе $\frac{AK}{Ak}$ также имѣетъ предѣломъ 1. Такъ какъ это разсужденіе можно примѣнить ко всякому тр-ку чертежа 262-го, то, значитъ, каждая дробь изъ ряда (2) имѣетъ предѣломъ 1.

Отсюда слѣдуетъ, что и предѣлъ отношенія $\frac{P}{p}$ также равенъ 1.

---

*) См., напр., «Элементарная алгебра» А. Киселева, § 264.

Доказавъ это, возьмемъ разность $P-p$ и представимъ ее такъ:

$$P-p=p\left(\frac{P}{p}-1\right).$$

Отношеніе $\frac{P}{p}$ стремится, по доказанному, къ 1; слѣд., разность $\frac{P}{p}-1$ стремится къ 0; вслѣдствіе этого и произведеніе $p\left(\frac{P}{p}-1\right)$, въ которомъ p есть величина конечная (такъ какъ периметръ любого вписаннаго мн—ка всегда остается меньше периметра всякаго описаннаго), также стремится къ 0; значитъ, то же самое можно сказать о разности $P-p$.

2°. Докажемъ теперь, что периметръ вписаннаго мн-ка стремится къ предѣлу при слѣдующемъ частномъ законѣ вписыванія. Впишемъ въ кругъ правильный тр-къ; затѣмъ удвоимъ число сторонъ, т.-е. возьмемъ правильный вписанный 6-угольникъ; далѣе удвоимъ опять число сторонъ, т.-е. возьмемъ правильный 12-угольникъ; вообразимъ, что этотъ процессъ удвоенія идетъ безъ конца. Тогда периметры такихъ вписанныхъ многоугольниковъ, увеличиваясь съ каждымъ удвоеніемъ, все будутъ возрастать, оставаясь однако меньше периметра любого описаннаго мн-ка (напр., квадрата); вслѣдствіе этого периметръ вписаннаго мн-ка, стороны котораго стремятся къ 0 по этому частному закону, имѣетъ предѣлъ. Обозначимъ его черезъ T. Тотъ же предѣлъ имѣетъ и периметръ соотвѣтственнаго описаннаго мн-ка, такъ какъ, по доказанному, разность между этими периметрами стремится къ 0.

3°. Докажемъ, наконецъ, что къ тому же предѣлу T стремится периметръ вписаннаго мн-ка, стороны котораго уменьшаются по какому угодно закону.

Пусть p_1 есть перемѣнный периметръ вписаннаго мн-ка, котораго стороны уменьшаются по произвольному закону, а p периметръ вписаннаго мн-ка, стороны котораго уменьшаются по указанному выше частному закону; положимъ еще, что P_1 и P будутъ периметры соотвѣтственныхъ описанныхъ многоугольниковъ. По доказанному въ части 1° этого изложенія, разности:

$$P_1-p_1 \text{ и } P-p$$

стремятся къ 0. Поэтому и сумма ихъ должна стремиться къ 0. Но эту сумму можно представить такъ:

$$(P_1-p)+(P-p_1).$$

Такъ какъ периметръ выпуклаго многоугольника меньше периметра всякаго другого многоугольника, объемлющаго его, то $p<P_1$ и $p_1<P$; слѣд., обѣ разности P_1-p и $P-p_1$ положительны; сумма же положительныхъ слагаемыхъ стремится къ 0 только тогда, когда каждое слагаемое стремится къ 0; слѣд., разности P_1-p и $P-p_1$ стремятся къ 0. Но величины p и P имѣютъ общій предѣлъ T; слѣд. (297, 3°), величины p_1 и P_1 имѣютъ тотъ же предѣлъ T.

Такимъ образомъ, предѣлъ периметра существуетъ и не зависитъ отъ закона, по которому стороны вписаннаго мн-ка уменьшаются.

Замѣчаніе. Примѣняя изложенное доказательство не къ цѣлой окружности, а къ какой-нибудь ея части, или вообще къ какой-нибудь конечной выпуклой кривой (кривую не выпуклую можно разбить на выпуклыя части), мы можемъ доказать эту теорему по отношенію къ периметру ломаной линіи, вписанной въ эту конечную кривую.

УПРАЖНЕНІЯ.

255. Доказать, что въ двухъ кругахъ отношеніе центральныхъ угловъ, соотвѣтствующихъ дугамъ, имѣющимъ одинаковую длину, равно обратному отношенію радіусовъ.

256. Какъ велика будетъ ошибка, если вмѣсто полуокружности возьмемъ сумму стороны правильнаго вписаннаго треугольника и стороны вписаннаго квадрата?

257. На окружности взята точка A и черезъ нее проведены: діаметръ AB, сторона правильнаго вписаннаго 6-угольника AC и касательная MN. Изъ центра O опущенъ на AC перпендикуляръ и продолженъ до пересѣченія съ касательною въ точкѣ D. Отъ этой точки отложена по касательной (черезъ точку A) прямая DE, равная 3 радіусамъ. Точка E соединена съ концомъ діаметра B. Опредѣлить, какъ велика погрѣшность, если прямую BE возьмемъ за длину полуокружности *).

258. На діаметрѣ данной полуокружности построены двѣ равныя полуокружности и въ ту часть плоскости, которая заключена между тремя полуокружностями, вписанъ кругъ. Доказать, что діаметръ этого круга относится къ діаметру равныхъ полуокружностей, какъ 2 : 3.

259. Вычислить въ градусахъ, минутахъ и секундахъ дугу, равную сторонѣ квадрата вписаннаго въ эту окружность.

260. Вычислить длину одного градуса земного экватора, принимая радіусъ земли въ 859 геогр. миль.

---

*) Доказано, что посредствомъ циркуля и линейки нѣтъ возможности построить такой отрѣзокъ прямой, который въ точности равнялся бы длинѣ окружности. Однако есть нѣсколько способовъ для приближеннаго спрямленія. Въ задачахъ 256 и 257 указаны два изъ этихъ способовъ. Послѣдній изъ нихъ, принадлежащій польскому іезуиту Коханскому (1683 г.), замѣчателенъ тѣмъ, что можетъ быть выполненъ однимъ раствореніемъ циркуля.

КНИГА V.

ИЗМѢРЕНІЕ ПЛОЩАДЕЙ.

ГЛАВА I.

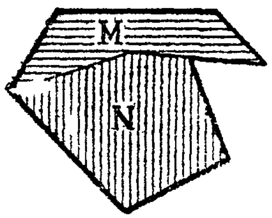
Площади многоугольниковъ.

299. Основныя допущенія о площадяхъ. Величина части плоскости, заключенной внутри многоугольника (или другой какой-нибудь плоской фигуры), наз. площадью этой фигуры.

Относительно этой величины мы примемъ слѣдующія допущенія:

1°. Равныя фигуры (т.-е. такія, которыя могутъ быть совмѣщены при наложеніи, имѣютъ равныя площади независимо отъ ихъ положенія въ пространствѣ.

2°. Площадь какой-нибудь фигуры (напр., изображенной на черт. 263), состоящей изъ нѣсколькихъ частей (M, N...), принимается за сумму площадей этихъ частей.



Черт. 263.

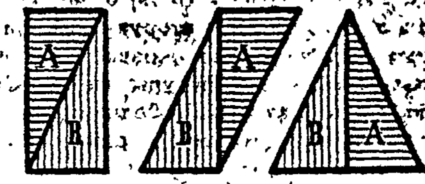
300. Слѣдствія. 1°. Площадь фигуры больше площади каждой ея части, такъ какъ сумма положительныхъ величинъ больше каждаго слагаемаго.

2°. Если фигура состоитъ изъ 2-хъ частей (черт. 263), то площадь каждой части разсматривается, какъ разность между площадью цѣлой фигуры и площадью другой ея части.

3°. Если фигуры (напр., изображенныя на черт. 264) состоятъ изъ одинаковаго числа частей (A, B...), соотвѣтственно другъ другу равныхъ, то площади такихъ фигуръ, представляя собою суммы соотвѣтственно равныхъ слагаемыхъ, считаются равными независимо отъ того, какъ расположены эти части относительно другъ друга.

4°. Фигуры, площади которыхъ можно разсматривать, какъ разности площадей равныхъ фигуръ, имѣютъ одинаковыя площади. Мы вскорѣ встрѣтимъ такой случай (308).

Мы видимъ такимъ образомъ, что могутъ быть фигуры, которыя нельзя назвать равными (такъ какъ онѣ не могутъ быть совмѣщены), но которыя однако имѣютъ равныя площади; таковы, напр., прямоугольникъ, параллелограммъ и треугольникъ, изображенные на черт. 264.



Черт. 264.

Фигуры, имѣющія равныя площади, называются **равновеликими.**

Равныя фигуры всегда равновелики, но равновеликія фигуры не всегда равны.

301. Замѣчанія. 1°. Относительно указанныхъ допущеній о площадяхъ возникаетъ слѣдующій важный вопросъ. Положимъ, что, разбивъ данную фигуру на нѣкоторое число частей произвольной формы, мы перемѣщаемъ эти части разнообразными способами (подобно тому, какъ на черт. 264-мъ перемѣщены части A и B); мы будемъ тогда получать различныя новыя фигуры. Не можетъ ли при этомъ получиться *и* такая фигура, которая, помѣщенная на начальную фигуру или на какую-нибудь изъ образовавшихся изъ нея новыхъ фигуръ, *вся умѣстится внутри* этой фигуры? Если бы это случилось, то мы имѣли бы тогда двѣ фигуры, которыя, съ одной стороны, состоя изъ одинаковаго числа попарно совмѣщающихся частей, должны считаться равновеликими; а съ другой стороны, та изъ нихъ, которая способна помѣститься внутри другой и, такимъ образомъ, можетъ составить часть этой другой, должна считаться меньшей изъ двухъ. Тогда указанныя допущенія о равенствѣ и неравенствѣ площадей теряли бы всякій смыслъ, такъ какъ, согласно этимъ допущеніямъ, двѣ *площади* могли бы одновременно считаться и равными, и неравными.

Впервые обратилъ вниманіе на этотъ вопросъ италіанскій математикъ Де-Цольтъ, который (въ 1881 г.) пытался доказать (но неудачно), что многоугольникъ никогда не можетъ оказаться равновеликимъ своей части (и, значитъ, предположенный нами случай невозможенъ). Это предложеніе Де-Цольта принималось сначала, какъ недоказуемый постулатъ равновеликости, но затѣмъ (въ концѣ XIX столѣтія) оно было строго доказано

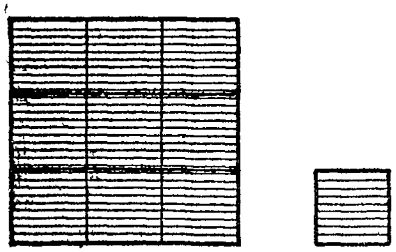
(С. Шатуновскимъ, Гильбертомъ и др.). Мы опускаемъ эти доказательства по причинѣ ихъ сложности.

2°. Различаютъ равновеликость двухъ родовъ; одна изъ нихъ указана въ отдѣленіи 3° параграфа 300-го, другая—въ отдѣленіи 4° того же параграфа. Первую можно назвать равновеликостью «по разложенію», вторую—равновеликостью «по дополненію». Дѣйствительно, равновеликость 1-го рода можетъ быть высказана такъ: двѣ фигуры считаются равновеликими, если онѣ могутъ быть **разложены** на одинаковое число частей, соотвѣтственно другъ другу равныхъ; а равновеликость 2-го рода можетъ быть выражена такъ: двѣ фигуры считаются равновеликими, если ихъ можно **дополнить** равными другъ другу фигурами такимъ образомъ, что образовавшіяся суммы представляютъ собою тоже равныя фигуры. Примѣромъ равновеликости по разложенію служатъ фигуры, указанныя на черт. 264; какъ примѣръ равновеликости по дополненію можно указать пар-мъ $ABCD$ и прям-къ $AEFD$, черт. 270-го. Дѣйствительно, обѣ эти фигуры даютъ одну и ту же трапецію $AECD$, если пар-мъ дополнимъ тр-комъ AEB, а прям-къ дополнимъ тр-комъ DEC, равнымъ $\triangle AEB$.

Для прямолинейныхъ фигуръ доказано, что равновеликость по дополненію есть вмѣстѣ съ тѣмъ и равновеликость по разложенію. Частный случай этой истины доказанъ нами въ § 309 помощью чертежа 273-го.

3°. Можно также доказать, что двѣ фигуры, равновеликія одной и той же третьей фигурѣ, равновелики и между собою. Мы принимаемъ эту истину безъ доказательства.

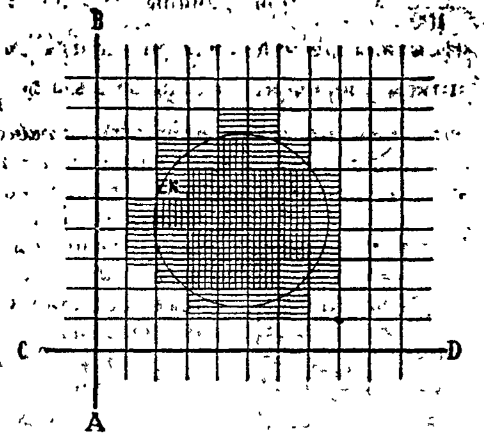
302. Единица площади. За единицу площадей при измѣреніи ихъ обыкновенно берутъ площадь такого квадрата, у котораго сторона равна линейной единицѣ; таковы, напр., квадратный метръ, квадратный аршинъ и т. п. Какъ извѣстно изъ ариѳметики, отношеніе двухъ квадратныхъ единицъ разныхъ названій равно второй степени отношенія тѣхъ линейныхъ единицъ, которыя служатъ сторонами для этихъ квадратныхъ единицъ. Такъ, отношеніе квадратной сажени къ квадр. аршину равно 3^2, т.-е. 9, что ясно видно изъ чертежа 265-го, на которомъ меньшій изъ двухъ квадратовъ изображаетъ квадратный аршинъ, а большій—квадратную сажень.



Черт. 265.

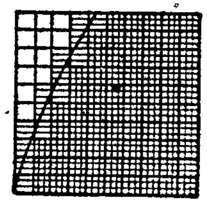
303. Понятіе о числѣ, измѣряющемъ площадь. Поясним наглядно, что слѣдуетъ разумѣть подъ числомъ, измѣряющимъ данную площадь.

Проведемъ двѣ взаимно-перпендикулярныя прямыя AB и CD (черт. 266) и затѣмъ построимъ рядъ прямыхъ, параллельныхъ AB, и другой рядъ прямыхъ, параллельныхъ CD, при чемъ разстоянія между тѣми и другими прямыми возьмемъ одинаковыми, а именно равными какой-нибудь линейной единицѣ. Мы получимъ тогда сѣть квадратовъ, изъ которыхъ каждый представляетъ собою квадратную единицу. Вообразимъ, что на такую сѣть наложена та фигура, которой площадь мы желаемъ измѣрить (напр., данный кругъ, какъ изображено на чертежѣ 266). Тогда по отношенію къ этой фигурѣ всѣ квадраты сѣти можно раздѣлить на три рода: 1) внѣшніе квадраты, которые расположены внѣ данной фигуры; 2) внутренніе квадраты, которые лежатъ внутри фигуры (они покрыты на чертежѣ двойными штрихами) и 3) тѣ квадраты, черезъ которые проходитъ контуръ фигуры и которые, слѣд., лежатъ частью внутри, частью внѣ данной фигуры (эти квадраты на чертежѣ покрыты простыми штрихами). Оставивъ безъ вниманія внѣшніе квадраты, сосчитаемъ отдѣльно квадраты 2-го и квадраты 3-го рода. Пусть первыхъ окажется m, а вторыхъ n. Тогда, очевидно, измѣряемая площадь больше m, но меньше $m+n$ квадр. единицъ. Числа m и $m+n$ будутъ въ этомъ случаѣ приближенныя мѣры данной площади, первое число съ недостаткомъ, а второе съ избыткомъ, при чемъ погрѣшность меньше n квадр. ед. (меньше суммы тѣхъ квадратовъ, которые покрыты на нашемъ чертежѣ простыми штрихами).



Черт. 266.

Чтобы получить болѣе точные результаты измѣренія, уплотнимъ нашу сѣть квадратовъ, подраздѣливъ каждый изъ нихъ на болѣе мелкіе квадраты. Напр., раздѣлимъ стороны квадратовъ на 10 равныхъ частей и черезъ точки раздѣла проведемъ рядъ прямыхъ, параллельныхъ AB, и другой рядъ прямыхъ, параллельныхъ CD. Мы разложимъ тогда каждый квадратъ сѣти на 100 мелкихъ квадратовъ, изъ которыхъ каждый составляетъ $^1/_{100}$ часть квадратной единицы. Положимъ, что теперь всѣхъ внутреннихъ малыхъ квадратовъ будетъ m', а тѣхъ, которые пересѣкаются контуромъ фигуры, пусть окажется n'. Тогда измѣряемая площадь будетъ болѣе $\frac{m'}{100}$, но менѣе $\frac{m'+n'}{100}$ квадратной единицы. Эти числа будутъ новыя приближенныя мѣры измѣряемой площади, первое съ недостаткомъ, второе съ избыткомъ, при чемъ погрѣшность менѣе $\frac{n'}{100}$ квадр. един. Не трудно убѣдиться, что эта погрѣшность окажется менѣе прежней погрѣшности. Дѣйствительно, отъ каждаго изъ тѣхъ квадратовъ чертежа 266-го, которые покрыты простыми штрихами, отойдутъ теперь, во 1, тѣ части, которыя составлены малыми квадратами, лежащими внѣ фигуры, и во 2, тѣ части, которыя составлены малыми квадратами, лежащими внутри фигуры. Для ясности мы изобразили на черт. 267-мъ въ увеличенномъ видѣ одинъ изъ квадратовъ, покрытыхъ на предыдущемъ чертежѣ простыми штрихами (именно, квадратъ, обозначенный буквою k), раздѣливъ его на 100 мелкихъ квадратовъ. Мы теперь ясно видимъ, что полоса, составленная изъ малыхъ квадратовъ, черезъ которые проходитъ контуръ фигуры (покрытая на черт. 267 простыми штрихами), значительно менѣе всего большого квадрата. Такъ какъ это справедливо для каждаго квадрата чертежа 266-го, покрытаго простыми штрихами, то ясно, что погрѣшность, равная $\frac{n'}{100}$ квадр. ед., менѣе погрѣшности, равной n квадр. ед.



Черт. 267.

Если подраздѣлимъ квадратную единицу на части еще болѣе мелкія, то, произведя указаннымъ путемъ измѣреніе, мы получимъ приближенныя мѣры площади еще съ меньшей погрѣшностью.

Иногда (напр., при измѣреніи площади прямоугольника, см. чертежъ 268), поступая описаннымъ способомъ, мы можемъ получить точную мѣру площади. Это будетъ тогда, когда контуръ данной фигуры представляетъ собою ломаную линію, которой стороны совпадаютъ съ частями прямыхъ линій, образующихъ сѣть квадратовъ; въ этомъ случаѣ, слѣд., не будетъ совсѣмъ квадратовъ, прорѣзываемыхъ контуромъ фигуры. Тогда число квадратовъ, лежащихъ внутри фигуры, составитъ точную мѣру измѣряемой площади. Во всѣхъ остальныхъ случаяхъ указанный пріемъ измѣренія даетъ только приближенные результаты, при чемъ погрѣшность можетъ быть сдѣлана какъ угодно малой.

Представимъ себѣ, что какими-нибудь соображеніями мы нашли такое число Q (цѣлое, дробное или ирраціональное), которое оказывается бо́льшимъ всякаго приближеннаго результата измѣренія, взятаго съ недостаткомъ, и меньшимъ всякаго приближеннаго ре-

зультата измѣренія, взятаго съ избыткомъ; тогда такое число можетъ быть принято за точную мѣру измѣряемой площади.

Доказано, что такое число существуетъ для всякой площади и что оно не зависитъ отъ положенія тѣхъ прямыхъ AB и CD (черт. 266), параллельно которымъ проводятся линіи сѣти. *) Число это обладаетъ слѣдующими двумя свойствами: при одной и той же квадратной единицѣ 1) площадямъ равныхъ фигуръ (совмѣщающихся) соотвѣтствуютъ равныя числа, и 2) суммѣ площадей (299) соотвѣтствуетъ сумма чиселъ. Отсюда слѣдуетъ, что бо́льшей площади соотвѣтствуетъ бо́льшее число, равновеликимъ фигурамъ соотвѣтствуютъ равныя числа, и т. п.

304. Основаніе и высота. Измѣреніе площади только въ рѣдкихъ случаяхъ могло бы быть выполнено непосредственнымъ наложеніемъ квадратной единицы. Большею частью площади приходится измѣрять косвенно, посредствомъ измѣренія нѣкоторыхъ линій фигуры.

Условимся одну изъ сторонъ треугольника или параллелограмма называть основаніемъ этихъ фигуръ, а перпендикуляръ, опущенный на эту сторону изъ вершины тр-ка или изъ какой-нибудь точки противоположной стороны параллелограмма, будемъ называть высотою.

Въ прямоугольникѣ за высоту можно взять сторону, перпендикулярную къ той, которая принята за основаніе.

Въ трапеціи основаніями называютъ обѣ параллельныя стороны, а высотою—общій перпендикуляръ между ними.

Основаніе и высота прямоугольника наз. его измѣреніями.

305. Теорема. Площадь прямоугольника равна произведенію его основанія на высоту.

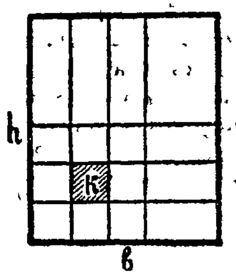
Это краткое предложеніе надо понимать такъ: число, выражающее площадь прямоугольника въ квадратныхъ единицахъ, равно произведенію чиселъ, выражающихъ основаніе и высоту его въ соотвѣтствующихъ линейныхъ единицахъ.

При доказательствѣ разсмотримъ особо слѣдующіе три случая:

1°. Основаніе и высота, измѣренныя одной и той же единицей, выражаются цѣлыми числами.

*) См. напр., W. Killing und Hovestadt—Handbuch des mathematischen Unterrichts, I Band. 1910; или статью Н. Шестерикова — „Къ ученію о площадяхъ"—въ Вѣстникѣ Опытной физики, 1915 г., № 637.

Пусть у даннаго прямоугольника (черт. 268) основаніе равно цѣлому числу b линейныхъ единицъ, а высота—цѣлому числу h тѣхъ же единицъ. Раздѣливъ основаніе на b и высоту на h равныхъ частей, проведемъ черезъ точки раздѣла рядъ прямыхъ, параллельныхъ высотѣ, и другой рядъ прямыхъ, параллельныхъ основанію. Отъ взаимнаго пересѣченія этихъ прямыхъ образуются нѣкоторые четыреугольники. Возьмемъ какой-нибудь одинъ изъ нихъ, напр., четыреугольникъ k (покрытый на чертежѣ штрихами). Такъ какъ стороны этого четыреугольника, по построенію, параллельны соотвѣтствующимъ сторонамъ даннаго прямоугольника, то всѣ углы его прямые; значитъ, четыреугольникъ k есть прямоугольникъ. Съ другой стороны каждая сторона этого прямоугольника равна разстоянію между сосѣдними параллельными прямыми, т.-е. равна одной и той же линейной единицѣ. Значитъ, прямоугольникъ k представляетъ собою квадратъ, а именно ту квадратную единицу, которая соотвѣтствуетъ взятой линейной единицѣ (если, напр., основаніе и высота были измѣрены линейными сантиметрами, то квадратъ k есть квадратный сантиметръ). Такъ какъ сказанное объ одномъ четыреугольникѣ можетъ быть повторено о всякомъ другомъ, то, значитъ, проведеніемъ указанныхъ параллельныхъ прямыхъ мы разбиваемъ всю площадь даннаго прямоугольника на квадратныя единицы. Найдемъ ихъ число. Очевидно, что рядъ прямыхъ, параллельныхъ основанію, раздѣляетъ прямоугольникъ на столько равныхъ горизонтальныхъ полосъ, сколько въ высотѣ содержится линейныхъ единицъ, т.-е. на h равныхъ полосъ. Съ другой стороны рядъ прямыхъ, параллельныхъ высотѣ, разбиваетъ каждую горизонтальную полосу на столько квадратныхъ единицъ, сколько въ основаніи содержится линейныхъ единицъ, т.-е. на b квадратныхъ единицъ. Значитъ, всѣхъ квадратныхъ единицъ окажется $b \cdot h$. Такимъ образомъ:



Черт. 268.

$$\text{площадь прямоугольника} = bh,$$

т.-е. она равна произведенію основанія на высоту.

2°. Основаніе и высота, измѣренныя одною и тою же единицею, выражаются **дробными числами**.

Пусть у даннаго прямоугольника:

$$\text{основаніе} = \frac{m}{n}\ \text{лин. ед.; высота} = \frac{p}{q}\ \text{той же ед.},$$

при чемъ мы не исключаемъ и тотъ случай, когда какая-нибудь изъ этихъ дробей равна цѣлому числу.

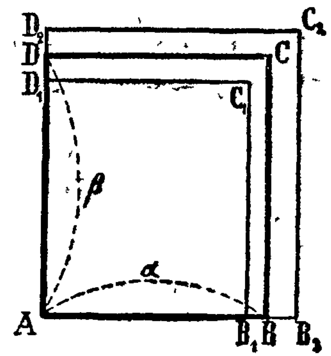
Приведя дроби къ одинаковому знаменателю, получимъ:

$$\text{основаніе} = \frac{mq}{nq};\ \text{высота} = \frac{pn}{nq}.$$

Примемъ $^1/_{nq}$ долю линейной единицы за новую единицу длины. Тогда мы можемъ сказать, что основаніе содержитъ mq этихъ новыхъ единицъ, а высота pn тѣхъ же единицъ. Значитъ, по доказанному въ случаѣ 1°, площадь прямоугольника равна $(mq)\,(pn)$ такихъ квадратныхъ единицъ, которыя соотвѣтствуютъ новой единицѣ длины. Но эта квадр. единица составляетъ $^1/_{(nq)^2}$ часть квадр. единицы, соотвѣтствующей прежней линейной единицѣ (**302**); значитъ, площадь прямоугольника равна:

$$\frac{1}{(nq)^2}\cdot(mq)\,(pn) = \frac{mqpn}{n^2q^2} = \frac{mp}{nq} = \frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}$$

3°. Основаніе и высота (или только одно изъ этихъ измѣреній) несоизмѣримы съ единицей длины и, слѣд., выражаются **ирраціональными числами**.



Черт. 269.

Пусть основаніе AB прямоугольника $ABCD$ (черт. 269) выражается ирраціональнымъ числомъ α и высота BD — ирраціональнымъ числомъ β. Найдемъ приближенныя значенія этихъ чиселъ съ точностью до $1/n$. Для этого на основаніи AB, начиная отъ точки A, отложимъ $1/n$ долю линейной единицы столько разъ, сколько можно. Пусть окажется, что, отложивъ n такихъ долей, мы получимъ отрѣзокъ $AB_1 < AB$, а отложивъ $m+1$ долей, найдемъ отрѣзокъ $AB_2>AB$. Тогда дроби $\frac{m}{n}$ и $\frac{m+1}{n}$ будутъ приближенныя значенія числа α, первая съ недостаткомъ, вторая съ избыткомъ. Положимъ далѣе, что отложивъ $1/n$ долю линейной единицы на высотѣ AD (отъ точки A) p разъ, мы получимъ $AD_1<AD$, а отложивъ $p+1$ разъ, найдемъ $AD_2>AD$; тогда дроби $\frac{p}{n}$ и $\frac{p+1}{n}$ будутъ приближенныя значенія числа β, первая съ недостаткомъ, вторая съ избыткомъ. Построимъ 2 вспомогательные прямоугольника $AB_1C_1D_1$ и $AB_2C_2D_2$. У каждаго изъ нихъ основаніе и высота выражается дробными числами:

$$AB_1=\frac{m}{n},\quad AB_2=\frac{m+1}{n};\quad AD_1=\frac{p}{n},\quad AD_2=\frac{p+1}{n}.$$

Поэтому, согласно доказанному въ случаѣ 2°:

$$\text{площ. } AB_1C_1D_1=\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{n};$$

$$\text{площ. } AB_2C_2D_2=\frac{m+1}{n}\cdot\frac{p+1}{n}.$$

Такъ какъ площадь $AB_1C_1D_1$ есть ч а с т ь площади $ABCD$, а эта послѣдняя есть ч а с т ь площади $AB_2C_2D_2$, то

$$\text{пл. } AB_1C_1D_1<\text{пл. } ABCD<\text{пл. } AB_2C_2D_2,$$

и потому: $\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}<$ число, измѣр. пл. $ABCD<\frac{m+1}{n}\cdot\frac{p+1}{q}$.

Это двойное неравенство остается вѣрнымъ при всякомъ значеніи n, т.-е. оно остается вѣрнымъ, съ какою бы точностью мы ни находили приближенныя значенія чиселъ α и β. Значитъ, мы можемъ сказать, что площадь $ABCD$ должна выражаться такимъ числомъ, которое больше произведенія любыхъ приближенныхъ значеній чиселъ α и β, если эти значенія взяты съ недостаткомъ, но меньше произведенія любыхъ ихъ приближенныхъ значеній, если эти значенія взяты съ избыткомъ. Такое число, какъ извѣстно изъ алгебры, наз. п р о и з в е д е н і е м ъ ирраціональныхъ чиселъ α и β. Слѣд.:

$$\text{площ. } ABCD=\alpha\beta,$$

т.-е. она и въ этомъ случаѣ равна произведенію основанія на высоту.

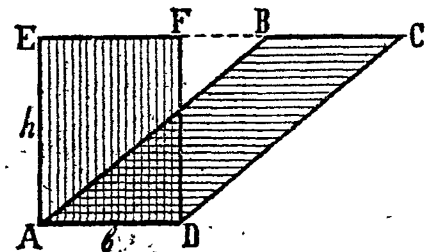
Это разсужденіе вполнѣ примѣнимо и къ тому случаю, когда только одно изъ измѣреній прямоугольника несоизмѣримо съ единицей длины.

306. Слѣдствіе. Площади двухъ прямоугольниковъ, имѣющихъ равныя основанія, относятся, какъ ихъ высоты, а площади двухъ прямоугольниковъ, имѣющихъ равныя высоты, относятся какъ ихъ основанія.

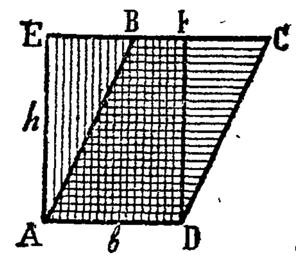
Дѣйствительно, если b, h и P будутъ основаніе, высота и площадь одного прямоугольника, а b_1, h_1 и P_1—основаніе, высота и площадь другого прямоугольника, то, по доказанному: $P=bh$ и $P_1=b_1h_1$; слѣд., $P:P_1=bh:b_1h_1$. Отсюда находимъ, что если $b=b_1$, то $P:P_1=h:h_1$, а если $h=h_1$, то $P:P_1=b:b_1$.

307. Замѣчаніе. Въ послѣдующихъ теоремахъ мы будемъ сокращенно говорить: «площадь равна произведенію такихъ-то линій», разумѣя подъ этимъ, что ч и с л о, выражающее площадь въ квадратныхъ единицахъ, равно произведенію ч и с е л ъ, выражающихъ такія-то линіи въ соотвѣтствующихъ линейныхъ единицахъ

308. Теорема. Площадь параллелограмма ($ABCD$, черт. 270 и 271) **равна произведенію основанія на высоту.**



Черт. 270.



Черт. 271.

На основаніи AD построимъ прямоугольникъ $AEFD$, у котораго сторона EF составляетъ продолженіе стороны BC. Докажемъ, что площ. $ABCD$=площ. $AEFD$.—Изъ чертежей усматриваемъ, что

$$\text{площ. } ABCD=\text{площ. } AECD-\text{площ. } AEB$$
$$\text{и площ. } AEFD=\text{площ. } AECD-\text{площ. } DFC.$$

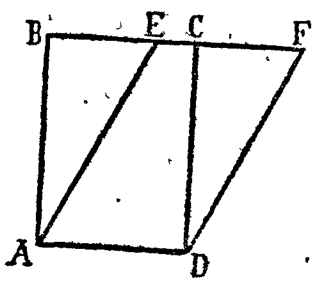
Но прямоугольные тр-ки AEB и DFC равны, потому что у нихъ: $AE=DF$ и $AB=DC$ (какъ противоположныя стороны параллелограммовъ). Значитъ, равны и площади этихъ тр-ковъ. Поэтому площади $ABCD$ и $AEFD$ представляютъ собою разности соотвѣтственно равныхъ площадей; вслѣдствіе этого (300, 4°):

$$\text{площ. } ABCD = \text{площ. } AEFD.$$

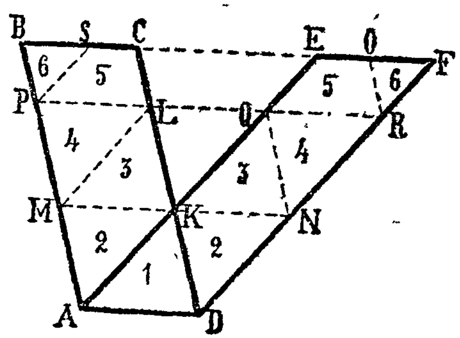
Но пл. $AEFD=bh$; слѣд., и пл. $ABCD=bh$, при чемъ b можно разсматривать, какъ основаніе параллелограмма, и h, какъ его высоту.

Слѣдствіе. Параллелограммы съ равными основаніями и равными высотами равновелики.

309. Замѣчаніе. Параллелограммы, имѣющіе равныя основанія и равныя высоты, могутъ быть разложены на одинаковое число частей, попарно другъ другу равныхъ (конгруэнтныхъ). Для доказательства размѣстимъ параллелограммы такимъ образомъ, чтобы ихъ равныя основанія совпали. Тогда могутъ представиться два случая: 1) когда верхнія стороны пар-мовъ имѣютъ какую-нибудь общую часть (черт. 272), и 2) когда такой общей части нѣтъ (черт. 273). Разсмотримъ эти случаи отдѣльно.



Черт. 272.



Черт. 273.

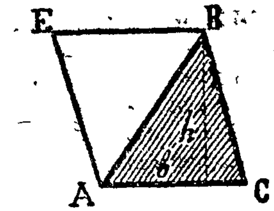
1) Парал-мъ $ABCD$ прямою AE раздѣляется на 2 части: $\triangle ABE$ и трапеція $AECD$; другой парал-мъ прямою CD разлагается на $\triangle DCF$ и ту же трапецію $AECD$. Такъ какъ $\triangle ABE = \triangle DCF$, то оба парал-ма составлены изъ попарно равныхъ частей.

2) Пусть K будетъ точка пересѣченія сторонъ AE и DC. Отложимъ на KO, начиная отъ K, части, равныя DK, столько разъ, сколько можно (на нашемъ чертежѣ отрѣзокъ KD уложился на KC одинъ разъ до точки L, при чемъ получился остатокъ $LC < DK$). Черезъ точки K и L проведемъ прямыя, параллельныя AD. Тогда пар-мъ $ABCD$ разложится на 3 пар-ма, изъ которыхъ два равны между собою; пар-мъ $AEFD$ также разложится на 3 пар-ма, изъ которыхъ два равны между собою. Проведя діагонали ML и NQ, затѣмъ $PS \parallel AE$ и $QR \parallel AB$, мы раздѣлимъ каждый изъ данныхъ пар-мовъ на 6 частей; не трудно видѣть, что части, обозначенныя на чертежѣ одними и тѣми же цыфрами, другъ другу равны.

310. Теорема. Площадь треугольника (ABC, черт. 274) **равна половинѣ произведенія основанія на высоту.**

Проведемъ $BE \parallel AC$ и $AE \parallel BC$. Тогда получимъ параллелограммъ $AEBC$, котораго площадь, по доказанному, равна bh. Но площадь $\triangle ABC$ составляетъ половину площади $AEBC$; слѣд.:

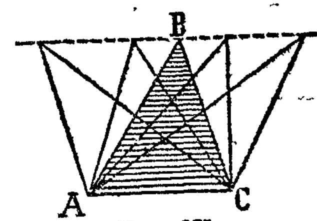
$$\text{площ. } ABC = \frac{1}{2}bh.$$



Черт. 274.

311. Слѣдствія. 1°. Треугольники съ равными основаніями и равными высотами равновелики.

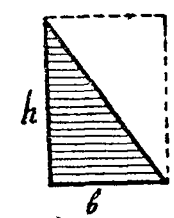
Если, напр., вершину B тр-ка ABC (черт. 275) будемъ перемѣщать по прямой, параллельной основанію AC, а основаніе оставимъ то же самое, то площадь тр-ка не будетъ измѣняться.



Черт. 275.

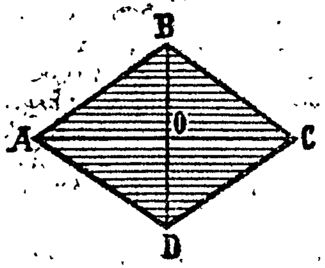
2°. Площадь прямоугольнаго треугольника равна половинѣ произведенія его катетовъ, потому что одинъ катетъ можно взять за основаніе, а другой за высоту.

Изъ черт. 276 непосредственно видно, что площадь такого тр-ка составляетъ половину площади прямоугольника, имѣющаго то же основаніе и ту же высоту.



Черт. 276.

3°. Площадь ромба равна половинѣ произведенія его діагоналей. Дѣйствительно, если $ABCD$ (черт. 277) есть ромбъ, то его діагонали взаимно перпендикулярны. Поэтому:

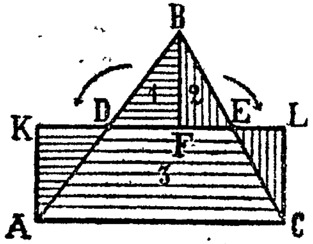


Черт. 277.

$$\text{пл. } \triangle ABC = \tfrac{1}{2}\, AC \,.\, OB.$$
$$\text{пл. } \triangle ACD = \tfrac{1}{2}\, AC \,.\, OD.$$
$$\text{пл. } ABCD = \tfrac{1}{2}\, AC \,.\, (OB+OD) = \tfrac{1}{2}\, AC \,.\, BD.$$

4°. Площади треугольниковъ относятся, какъ произведенія основаній на высоты (множитель $\frac{1}{2}$ сокращается).

312. Замѣчаніе. Всякій треугольникъ разлагается на части, перемѣщеніемъ которыхъ можно образовать прямоугольникъ, имѣющій одинаковое съ треугольникомъ основаніе и высоту, вдвое меньшую высоты треугольника. Дѣйствительно, если въ тр-кѣ ABC (черт. 278) черезъ середины D и E двухъ сторонъ (образующихъ съ третьей стороной острые углы) проведемъ прямую и на нее опустимъ перпендикуляръ BF, то тр-къ ABC разобьется этими прямыми на 3 части, обозначенныя на чертежѣ цыфрами 1, 2 и 3. Повернувъ часть 1-ую вокругъ точки D на 180° (въ направленіи, указанномъ стрѣлкой), мы приведемъ ее въ положеніе AKD; подобнымъ же образомъ часть 2-ю мы приведемъ въ положеніе CLE. Тогда тр-къ ABC превратится въ прямоугольникъ $AKLC$, у котораго основаніе то же самое, что и у тр-ка, а высота вдвое меньше высоты тр-ка.



Черт. 278.

313. Теорема. Площадь S треугольника въ зависимости отъ его сторонъ a, b и c выражается формулой:

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)},$$

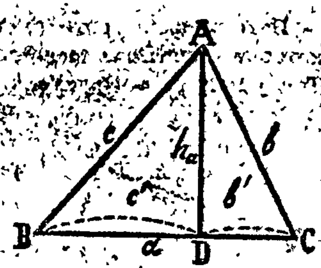
или болѣе сокращенной:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

гдѣ p есть полупериметръ треугольника, т.-е. $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$.

Пусть высота тр-ка ABC (черт. 279), опущенная на сторону a, есть h_a. Тогда:

$$S = \frac{1}{2}\, a h_a.$$



Черт. 279.

Чтобы найти высоту h_a, возьмемъ уравненіе (236):

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac'$$

опредѣлимъ изъ него отрѣзокъ c':

$$c' = \frac{a^2+c^2-b^2}{2a}.$$

Изъ треугольника ABD находимъ:

$$h_a = \sqrt{c^2 - \left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right)^2} = \frac{1}{2a}\sqrt{4a^2c^2-(a^2+c^2-b^2)^2}.$$

Преобразуемъ подкоренную величину такъ:

$$\begin{aligned}(2ac)^2-(a^2+c^2-b^2)^2 &= (2ac+a^2+c^2-b^2)(2ac-a^2-c^2+b^2) = \\ &= [(a^2+c^2+2ac)-b^2][b^2-(a^2+c^2-2ac)] = \\ &= [(a+c)^2-b^2][b^2-(a-c)^2] = \\ &= (a+c+b)(a+c-b)(b+a-c)(b-a+c).\end{aligned}$$

Слѣд., $S = \frac{1}{2} a h_a = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}.$

Если положимъ, что $a+b+c=2p$, то

$$a+c-b = (a+b+c)-2b = 2p-2b = 2(p-b).$$

Подобно этому: $\quad b+a-c = 2(p-c);$

$$b+c-a = 2(p-a).$$

Тогда: $\quad S = \frac{1}{4}\sqrt{2p \,.\, 2(p-a) \,.\, 2(p-b) \,.\, 2(p-c)},$

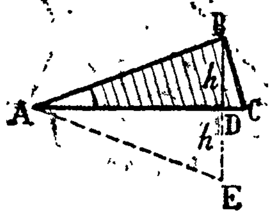
т.-е. $\quad S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$

Частный случай. Площадь равносторонняго треугольника со стороною a выражается слѣдующей формулой:

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{3a \,.\, a \,.\, a \,.\, a} = \frac{1}{4}a^2\sqrt{3}.$$

314. Задача. Вычислить площадь треугольника ABC (черт. 280) по двумъ сторонамъ AB и AC и углу A между ними.

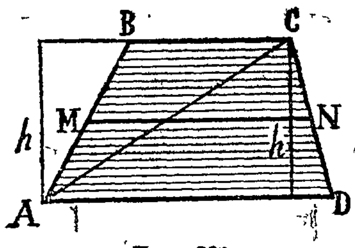
Безъ помощи тригонометріи эта задача рѣшается только для нѣкоторыхъ частныхъ значеній угла A. Положимъ, напр., что $A=18°$. Тогда можно вычислить h въ зависимости отъ стороны AB такимъ образомъ: продолживъ BD на разстояніе $DE=BD$, соединимъ E съ A. Тогда въ равнобедренномъ тр-кѣ ABE уголъ BAE равенъ 36°. Изъ этого заключаемъ, что BE, т.-е. двойная высота, есть сторона правильнаго 10-угольника, вписаннаго въ кругъ, котораго радіусъ есть AB. Поэтому BE найдется по формулѣ, опредѣляющей сторону прав. вписан. 10-угольника (268). Опредѣливъ высоту, легко найдемъ затѣмъ площадь.



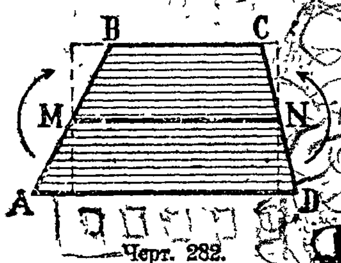
Черт. 280.

Подобно этому задача рѣшается для $A=30°$, 45°, 60°.

315. Теорема. Площадь трапеціи равна произведенію полусуммы основаній на высоту.



Черт. 281.



Черт. 282.

Проведя въ трапеціи (черт. 281) $ABCD$ діагональ AC, мы можемъ разсматривать ея площадь, какъ сумму площадей двухъ тр-ковъ CAD и ABC. Поэтому

$$\text{площ. } ABCD=\frac{1}{2}AD\,.\,h+\frac{1}{2}BC\,.\,h=\frac{1}{2}(AD+BC)h.$$

316. Слѣдствіе. Если MN (черт. 281) есть средняя линія трапеціи, то, какъ извѣстно (117):

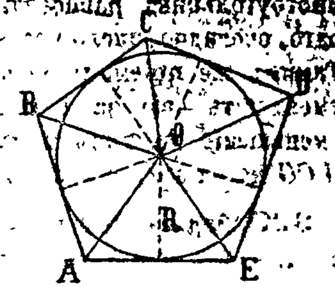
$$MN=\frac{1}{2}(AD+BC).$$

Поэтому площ. $ABCD=MN\,.\,h$, т.-е. **площадь трапеціи равна произведенію средней линіи на высоту.**

Это же можно видѣть и непосредственно изъ чертежа 282-го.

317. Теорема. Площадь всякаго описаннаго многоугольника равна произведенію периметра на половину радіуса.

Соединивъ центръ O (черт. 283) со всѣми вершинами описаннаго многоугольника, мы раздѣлимъ его на треугольники, въ которыхъ за основанія можно взять стороны многоугольника, а за высоту—радіусъ круга. Обозначивъ этотъ радіусъ черезъ R, будемъ имѣть:



Черт. 283.

$$\text{площ. } AOB=AB\,.\,\frac{1}{2}R;$$

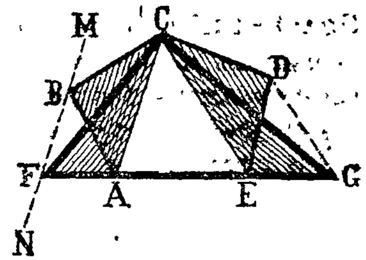
$$\text{площ. } AOE=AE\,.\,\frac{1}{2}R;\ \text{и т. д.}$$

Слѣд., площ. $ABCDE=(AB+BC+CD+DE+EA)\,.\,\frac{1}{2}R=P\,.\,\frac{1}{2}R$,

гдѣ буквою P обозначенъ периметръ мн-ка.

318. Слѣдствіе. Площадь правильнаго многоугольника равна произведенію периметра на половину апоѳемы, потому что всякій прав. многоугольникъ можно разсматривать, какъ описанный около круга, у котораго радіусъ есть апоѳема.

319. Задача. Превратить многоугольникъ ($ABCDE$, черт. 284) въ равновеликій треугольникъ.



Черт. 284.

Какою-нибудь діагональю AC отсѣкаемъ отъ даннаго мн-ка $\triangle ABC$. Черезъ ту вершину B этого тр-ка, которая лежитъ противъ взятой діагонали, проводимъ прямую $MN \parallel AC$. Затѣмъ продолжимъ одну изъ сторонъ EA или DC, прилежащихъ къ отсѣченному тр-ку, до пересѣченія съ прямою MN (на чертежѣ продолжена сторона EA). Точку пересѣченія F соединимъ съ C. Тр-ки CBA и CFA равновелики (311, 1°), такъ какъ у нихъ общее основаніе AC, а вершины B и F лежатъ на прямой, параллельной основанію. Если отъ даннаго многоугольника отдѣлимъ тр-къ CBA и вмѣсто него приложимъ равновеликій ему тр-къ CFA, то величина площади не измѣнится; слѣд., данный многоугольникъ равновеликъ многоугольнику $FCDE$, у котораго, очевидно, число угловъ на 1 меньше, чѣмъ у даннаго мн-ка. Такимъ же пріемомъ можно число угловъ полученнаго мн-ка уменьшить еще на 1 и продолжать такое послѣдовательное уменьшеніе до тѣхъ поръ, пока не получится треугольникъ (FCG на нашемъ чертежѣ).

320. Задача. Превратить данный многоугольникъ въ равновеликій квадратъ.

Сначала превращаютъ многоугольникъ въ равновеликій треугольникъ, а затѣмъ этотъ тр-къ въ квадратъ. Пусть основаніе и высота тр-ка будутъ b и h, а сторона искомаго квадрата x. Тогда площадь перваго равна $^1/_2bh$, а второго x^2; слѣд.:

$$\frac{1}{2}bh=x^2,\ \text{откуда:}\ \frac{1}{2}b : x = x : h,$$

т. е. x есть средняя пропорціональная между $^1/_2\,b$ и h. Значитъ, сторону квадрата можно построить способомъ, указаннымъ раньше (231) для нахожденія средней пропорціональной.

Замѣчаніе. Превращеніе даннаго многоугольника въ треугольникъ не всегда необходимо. Напр., если рѣчь идетъ о превращеніи къ квадратъ данной трапеціи, то достаточно найти среднюю пропорціональную между высотою трапеціи и ея среднею линіею и на полученной прямой построить квадратъ.

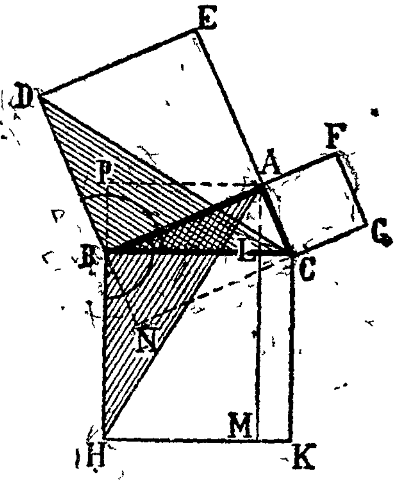
ГЛАВА II.

Теорема Пиѳагора и основанныя на ней задачи.

321. Теорема. Сумма площадей квадратовъ, построенныхъ на катетахъ прямоугольнаго треугольника, равна площади квадрата, построеннаго на гипотенузѣ.

Это предложеніе, извѣстное подъ названіемъ **теоремы Пиѳагора** (греческаго философа, жившаго въ VI вѣкѣ до Р. Х.), имѣетъ многочисленныя доказательства. Приведемъ простѣйшія изъ нихъ.

Первое доказательство (Эвклида). Пусть ABC (черт. 285) прямоугольный треугольникъ, а $BDEA$, $AFGC$ и $BCKH$ квадраты, построенные на его катетахъ и гипотенузѣ; требуется доказать, что сумма площадей двухъ первыхъ квадратовъ равна площади третьяго квадрата.



Черт 285.

Проведемъ $AM \perp BC$. Тогда квадратъ $BCKH$ раздѣлится на два прямоугольника. Докажемъ, что пр-къ $BLMH$ равновеликъ квадрату $BDEA$, а пр-къ $LCKM$ равновеликъ квадрату $AFGC$. Проведемъ вспомогательныя прямыя DC и AH. Обратимъ вниманіе на два тр-ка, покрытые на чертежѣ штрихами. Тр-къ DCB, имѣющій основаніе BD, общее съ квадратомъ $BDEA$, а высоту CN, равную высотѣ AB этого квадрата, равновеликъ половинѣ его. Тр-къ ABH, имѣющій основаніе BH, общее съ прямоугольникомъ $BLMH$, и высоту AP, равную высотѣ BL этого прямоугольника, равновеликъ половинѣ его. Сравнивая эти два треугольника между собою, находимъ, что у нихъ $BD=BA$ и $BC=BH$ (какъ стороны квадрата); сверхъ того $\angle DBC=\angle ABH$, такъ какъ каждый изъ этихъ угловъ состоитъ изъ общей части ABC

и прямого угла. Значитъ, тр-ки ABH и BDC равны. Отсюда слѣдуетъ, что прямоугольникъ $BLMH$ равновеликъ квадрату $BDEA$.

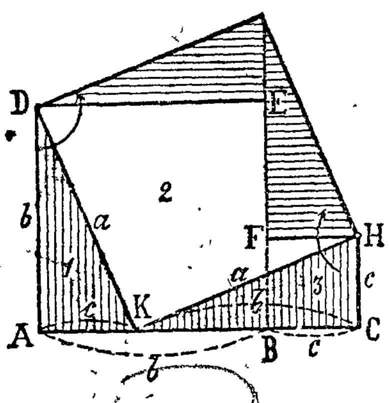
Соединивъ G съ B и A съ K, мы совершенно такъ же докажемъ, что прямоугольникъ $LCKM$ равновеликъ квадрату $AFGC$. Отсюда слѣдуетъ, что квадратъ $BCKH$ равновеликъ суммѣ квадратовъ $BDEA$ и $AFGC$.

Второе доказательство. Пусть a, b и c будутъ числа, выражающія гипотенузу и катеты прямоугольнаго треугольника въ одной и той же линейной единицѣ. Какъ мы видѣли раньше (232), между этими числами существуетъ зависимость:

$$a^2=b^2+c^2.$$

Но a^2, b^2 и c^2 суть числа, измѣряющія площади квадратовъ, которыхъ стороны a, b и c; значитъ написанное равенство выражаетъ, что площадь квадрата, построеннаго на гипотенузѣ, равна суммѣ площадей квадратовъ, построенныхъ на катетахъ.

Третье доказательство. Существуетъ много и такихъ доказательствъ, которыя показываютъ, на какія части надо разбить квадраты, построенные на катетахъ, чтобы перемѣщеніемъ этихъ частей образовать квадратъ, построенный на гипотенузѣ. Вотъ одно изъ такихъ доказательствъ.



Черт. 286.

Обозначимъ гипотенузу и катеты даннаго тр-ка буквами a, b и c. Отложивъ на какой-нибудь прямой (черт. 286) $AB=b$ и $BC=c$, построимъ квадраты $ADEB$ и $BFHC$. Площадь образовавшагося 6-угольника $ADEFHC$ есть сумма площадей квадратовъ, построенныхъ на катетахъ. Отложивъ еще $AK=c$ (и, слѣд., $KC=b$), проводимъ прямыя DK и KH, которыя разложатъ шестиугольникъ на три части, обозначенныя на чертежѣ цифрами 1, 2 и 3. Части 1-я и 3-я суть прямоугольные тр-ки, равные данному. Повернемъ на 90° тр-къ 1-й вокругъ вершины D и тр-къ 3-й вокругъ вершины H, какъ указано стрѣлками. Тогда эти части займутъ такія положенія, при которыхъ онѣ, вмѣстѣ съ оставшейся частью 2-й, образуютъ квадратъ, построенный на гипотенузѣ (предоставляемъ самимъ учащимся доказать это).

322. Задачи. 1°. Построить квадратъ, равновеликій суммѣ двухъ данныхъ квадратовъ.

Строимъ прямоугольный тр-къ, у котораго катетами были бы стороны данныхъ квадратовъ. Квадратъ, построенный на гипотенузѣ этого тр-ка, равновеликъ суммѣ данныхъ квадратовъ.

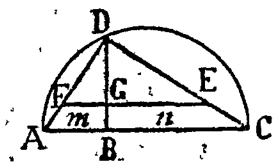
2°. Построить квадратъ, равновеликій разности двухъ данныхъ квадратовъ.

Строимъ прямоугольный тр-къ, у котораго гипотенузой была бы сторона бо́льшаго изъ данныхъ квадратовъ, а катетомъ сторона меньшаго квадрата. Квадратъ, построенный на другомъ катетѣ этого тр-ка, равновеликъ разности данныхъ квадратовъ.

3°. Построить квадратъ, котораго площадь относится къ площади даннаго квадрата, какъ $m:n$.

На произвольной прямой (черт. 287) откладываемъ $AB=m$ и $BC=n$ и на AC, какъ на діаметрѣ, описываемъ полуокружность. Изъ точки B возставляемъ перпендикуляръ BD до пересѣченія съ окружностью. Проведя хорды AD и DC, получимъ прямоугольный тр-къ, у котораго (234):

$$AD^2:DC^2=AB:BC=m:n.$$



Черт. 287.

На катетѣ DC этого треугольника отложимъ отрѣзокъ DE, равный сторонѣ даннаго квадрата, и проведемъ $EF \parallel CA$. Прямая DF есть сторона искомаго квадрата, потому что

$$\frac{DF}{DE}=\frac{AD}{DC};\quad \text{откуда:}\ \left(\frac{DF}{DE}\right)^2=\left(\frac{AD}{DC}\right)^2$$

слѣд.: $$DF^2:DE^2=AD^2:DC^2=m:n.$$

323. Пиѳагоровы треугольники. Такъ наз. прямоугольные тр-ки, у которыхъ стороны, измѣренныя одною и тою же единицей, могутъ быть выражены цѣлыми числами. Такихъ тр-ковъ существуетъ безчисленное множество. Простѣйшій изъ нихъ есть тотъ (извѣстный еще съ глубокой древности), у котораго стороны выражаются числами: 3, 4 и 5 ($3^2+4^2=5^2$). Доказано, что катеты x и y и гипотенуза z пиѳагоровыхъ тр-ковъ могутъ быть выражены слѣдующими формулами:

$$x=2ab,\quad y=a^2-b^2,\quad z=a^2+b^2,$$

гдѣ a и b суть произвольныя цѣлыя числа, при условіи $a>b$.

Но изъ подобія многоугольниковъ слѣдуетъ:

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{CD}{C_1D_1}=\ldots$$

и потому: $$\left(\frac{AB}{A_1B_1}\right)^2=\left(\frac{BC}{B_1C_1}\right)^2=\left(\frac{CD}{C_1D_1}\right)^2=\ldots$$

Значитъ: $$\frac{\text{площ. } AOB}{\text{площ. } A_1O_1B_1}=\frac{\text{площ. } BOC}{\text{площ. } B_1O_1C_1}=\frac{\text{площ. } COD}{\text{площ. } C_1O_1D_1}=\ldots$$

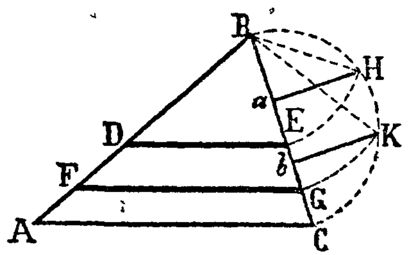
Откуда (по свойству равныхъ отношеній):

$$\frac{\text{пл. } AOB+\text{пл. } BOC+\text{пл. } COD+\ldots}{\text{пл. } A_1O_1B_1+\text{пл. } B_1O_1C_1+\text{пл. } C_1O_1D_1+\ldots}=\frac{\text{пл. } ABCDE}{\text{пл. } A_1B_1C_1D_1E_1}=\frac{AB^2}{A_1B_1^2}.$$

327. Слѣдствіе. Площади правильныхъ одноименныхъ многоугольниковъ относятся, какъ квадраты сторонъ, или квадраты радіусовъ, или квадраты апоѳемъ (262).

328. Задача. Раздѣлить данный треугольникъ на m равновеликихъ частей прямыми, параллельными его сторонѣ.

Пусть, напр., требуется раздѣлить тр-никъ ABC (черт. 290) на 3 равновеликія части прямыми, параллельными основанію AC. Предположимъ, что искомыя прямыя будутъ DE и FG. Очевидно, что если мы найдемъ отрѣзки BE и BG, то затѣмъ опредѣлятся и прямыя DE и FG. Тр-ки BDE, BFG и BAC подобны; поэтому:



Черт. 290.

$$\frac{\text{площ. } BDE}{\text{площ. } BAC}=\frac{BE^2}{BC^2} \text{ и } \frac{\text{площ. } BFG}{\text{площ. } BAC}=\frac{BG^2}{BC^2}.$$

Но $$\frac{\text{площ. } BDE}{\text{площ. } BAC}=\frac{1}{3} \text{ и } \frac{\text{площ. } BFG}{\text{площ. } BAC}=\frac{2}{3}.$$

Слѣд.: $$\frac{BE^2}{BC^2}=\frac{1}{3} \text{ и } \frac{BG^2}{BC^2}=\frac{2}{3}.$$

Откуда: $$BE=\sqrt{\frac{1}{3}BC^2}=\sqrt{\frac{1}{3}BC\cdot BC}$$

$$\text{и } BG=\sqrt{\frac{2}{3}BC^2}=\sqrt{\frac{2}{3}BC\cdot BC}.$$

Изъ этихъ выраженій видимъ, что BE есть средняя пропорціональная между BC и $^1/_3$ BC, а BG есть средняя пропорціональная между BC и $^2/_3$ BC (255, 4). Поэтому построеніе можно выполнить такъ: раздѣлимъ BC на три равныя части въ точкахъ a и b; опишемъ на BC полуокружность; изъ a и b возставимъ къ BC перпендикуляры aH и bK. Хорды HB и BK будутъ искомыми средними пропорціональными: первая—между всѣмъ діаметромъ BC и его третьею частью Ba, вторая—между BC и Bb, т.-е. между BC и $^2/_3$ BC (230). Остается отложить эти хорды на BC отъ точки B; тогда получимъ искомыя точки E и G.

Подобнымъ образомъ можно раздѣлить тр-къ на какое угодно ное число равновеликихъ частей.

ГЛАВА IV.

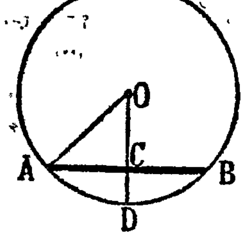
Площадь круга и его частей.

329. Лемма 1-я. При неограниченномъ удвоеніи числа сторонъ правильнаго многоугольника, вписаннаго въ окружность:

1°, сторона этого многоугольника стремится къ нулю;

2°, разность между радіусомъ окружности и апоѳемой многоугольника стремится къ нулю.

1°. Пусть p будетъ периметръ правильнаго вписаннаго многоугольника, и n—число его сторонъ; тогда длина одной стороны этого мн-ка выразится дробью $^p/_n$. При неограниченномъ удвоеніи числа сторонъ мн-ка знаменатель дроби $^p/_n$ будетъ возрастать безпредѣльно, а числитель хотя и будетъ возрастать, но не безпредѣльно (периметръ всякаго вписаннаго выпуклаго многоугольника всегда меньше периметра любого описаннаго многоугольника). Если же въ дроби знаменатель увеличивается безпредѣльно, а числитель остается меньше нѣкоторой постоянной величины, то, какъ извѣстно изъ алгебры, дробь можетъ быть сдѣлана менѣе любой данной положительной величины; значитъ, при неограниченномъ удвоеніи числа сторонъ вписаннаго правильнаго мн-ка, сторона его стремится къ 0.



Черт. 291.

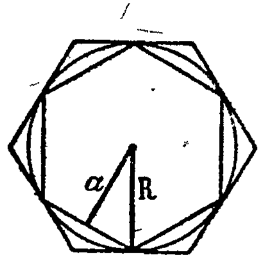
2°. Пусть AB (черт. 291) есть сторона какого-нибудь правильнаго вписаннаго мн-ка, OA радіусъ и OC апоөема. Изъ тр-ка OAC находимъ (52):

$$OA—OC<AC,$$

т.-е. $$OA—OC<\frac{1}{2}AB.$$

Но при неограниченномъ удвоеніи числа сторонъ правильнаго вписаннаго мн-ка сторона его, какъ мы видѣли, стремится къ нулю; поэтому разность $OA—OC$ и подавно стремится къ нулю.

330. Лемма 2-я. Разность между площадью правильнаго многоугольника, описаннаго около круга, и площадью правильнаго одноименнаго многоугольника, вписаннаго въ тотъ же кругъ, при неограниченномъ удвоеніи числа сторонъ этихъ многоугольниковъ, стремится къ нулю.



Черт. 292.

Впишемъ въ кругъ (черт. 292) и опишемъ около него по какому-нибудь правильному мн-ку (на чертежѣ изображены 6-угольники).

Пусть R будетъ радіусъ круга, a—апоөема вписаннаго мн-ка, q—его площадь и Q—площадь описаннаго мн-ка. Тогда (327): $Q:q=R^2:a^2$. Составимъ изъ этой пропорціи производную (разность членовъ перваго отношенія относится такъ къ предыдущему члену этого отношенія, какъ...):

$$\frac{Q—q}{Q}=\frac{R^2—a^2}{R^2}.$$

Откуда: $$(Q—q)R^2=Q(R^2—a^2),$$
или $$(Q—q)R^2=Q(R+a)(R—a).$$

При неограниченномъ удвоеніи числа сторонъ мн-ковъ разность $R—a$, по доказанному, стремится къ нулю, сомножитель Q уменьшается*), а сомножитель $R+a$ всегда остается меньше $R+R$; вслѣдствіе этого правая часть послѣдняго равенства (слѣд., и лѣвая его часть), при неограниченномъ удвоеніи числа сторонъ мн-ковъ, стремится къ нулю. Но лѣвая часть равенства, представляя собою произведеніе, въ которомъ множитель R^2—число постоянное, можетъ стремиться къ нулю только тогда, когда его множимое стремится къ нулю; множимое же $Q—q$ и есть разность площадей правильныхъ мн-ковъ, описаннаго и вписаннаго.

331. Замѣчаніе. Такимъ же путемъ легко доказать, что **разность между периметромъ описаннаго и периметромъ одноименнаго вписаннаго правильнаго мн-ка, при неограниченномъ удвоеніи числа ихъ сторонъ, стремится къ нулю.** Дѣйствительно, если P и p будутъ периметры одноименныхъ правильныхъ мн-ковъ, описаннаго и вписаннаго, то (268):

$$P:p=R:a.$$

Откуда: $$(P—p):P=(R—a):R,$$
и, слѣд., $$(P—p)R=(R—a)P.$$

При неограниченномъ удвоеніи числа сторонъ мн-ковъ правая часть послѣдняго равенства (слѣд., и его лѣвая часть) стремится къ нулю, такъ какъ множимое $R—a$, по доказанному, стремится къ нулю, а множитель P уменьшается. Но лѣвая часть равенства, представляя собою произведеніе, въ которомъ множитель R—число постоянное, можетъ стремиться къ нулю только тогда, когда его множимое стремится къ нулю; а множимое и есть разность периметровъ P и p.

332. Теорема. Площадь круга есть общій предѣлъ площадей правильныхъ вписанныхъ въ этотъ кругъ и описанныхъ около него многоугольниковъ при неограниченномъ удвоеніи числа ихъ сторонъ.

Пусть около круга, площадь котораго мы обозначимъ K, описанъ какой-нибудь правильный мн-къ и въ него вписанъ одноименной правильный мн-къ (черт. 292). Обозначимъ площадь перваго Q, а площадь второго q. Если станемъ удваивать число сторонъ этихъ мн-ковъ, то величины Q и q сдѣлаются пере-

*) такъ какъ при каждомъ удвоеніи числа сторонъ правильнаго описаннаго мн-ка отъ его угловъ срѣзываются небольшіе тр-ки, отчего, конечно, площадь мн-ка уменьшается.

мѣнными, тогда какъ величина K останется неизмѣнной. Требуется доказать, что при неограниченномъ удвоеніи числа сторонъ мн-ковъ перемѣнныя величины Q и q стремятся къ одному и тому же предѣлу, именно къ площади K.

Очевидно, что, каково бы ни было число сторонъ мн-ковъ, всегда $Q > K > q$, и потому каждая изъ двухъ разностей: $Q - K$ или $K - q$ меньше разности $Q - q$. Но при неограниченномъ удвоеніи числа сторонъ мн-ковъ разность $Q - q$, согласно леммѣ 2-й, стремится къ нулю; слѣд., при этомъ каждая изъ меньшихъ разностей: $Q - K$ и $K - q$ и подавно стремится къ нулю; а это согласно опредѣленію предѣла, означаетъ, что

$$пред.\ Q = K \text{ и } пред.\ q = K.$$

333. Замѣчаніе. Можно также доказать, что **длина окружности есть общій предѣлъ периметровъ правильныхъ вписанныхъ въ эту окружность и описанныхъ около нея многоугольниковъ при неограниченномъ удвоеніи числа ихъ сторонъ.** Дѣйствительно, изъ того обстоятельства, что разность $P - p$ стремится къ нулю (331), надо заключить, что перемѣнные периметры P и p могутъ стремиться только къ одному и тому же предѣлу; но предѣлъ p есть то, что принимается за длину окружности; значитъ, и предѣлъ P есть тоже длина окружности.

334. Теорема. Площадь круга равна произведенію длины окружности на половину радіуса.

Пусть R, K и C будутъ радіусъ, площадь и длина окружности, а q, p и a — площадь, периметръ и апоѳема какого-нибудь правильнаго вписаннаго мн-ка. Тогда (318):

$$q = p \cdot \frac{1}{2} a. \qquad [1]$$

Вообразимъ теперь, что число сторонъ вписаннаго мн-ка неограниченно удваивается. Тогда величины q, p и a дѣлаются перемѣнными, при чемъ первая имѣетъ предѣломъ площадь круга K, вторая — длину окружности C, а третья — радіусъ ея R. Такъ какъ при этомъ равенство [1] остается постоянно вѣрнымъ, то, согласно основному началу способа предѣловъ (283), оно останется вѣрнымъ и тогда, когда вмѣсто перемѣнныхъ подставимъ ихъ предѣлы:

$$K = C \cdot \frac{1}{2} R. \qquad [2]$$

335. Слѣдствія. 1°. Площадь круга равна произведенію квадрата радіуса на число π (отношеніе окружности къ діаметру).

Дѣйствительно, подставивъ въ равенство [2] предыдущаго параграфа на мѣсто C произведеніе $2\pi R$ (292, 2°), получимъ:

$$K = \pi R^2.$$

2°. Площади круговъ относятся, какъ квадраты радіусовъ или діаметровъ.

Дѣйствительно, если K и K_1 будутъ площади двухъ круговъ, а R и R_1 ихъ радіусы, то

$$K = \pi R^2 \text{ и } K_1 = \pi R_1^2.$$

Откуда:
$$\frac{K}{K_1} = \frac{\pi R^2}{\pi R_1^2} = \frac{R^2}{R_1^2} = \frac{4R^2}{4R_1^2} = \frac{(2R)^2}{(2R_1)^2}.$$

336. Задача 1. Вычислить площадь круга, окружность котораго равна 2 метрамъ.

Для этого предварительно находимъ радіусъ R изъ уравненія:

$$2\pi R = 2; \qquad \text{откуда: } R = \frac{1}{\pi} = 0{,}3183\ldots$$

Затѣмъ опредѣлимъ площадь круга:

$$K = \pi R^2 = \pi \left(\frac{1}{\pi}\right)^2 = \frac{1}{\pi} = 0{,}3183\ldots \text{ квадр. метра.}$$

Задача 2. Превратить данный кругъ въ квадратъ (т.-е. построить квадратъ, равновеликій данному кругу).

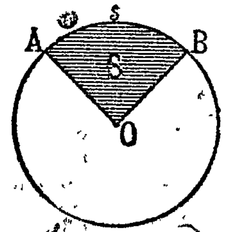
Эта задача, извѣстная подъ названіемъ **квадратуры круга**, не можетъ быть рѣшена при помощи циркуля и линейки. Дѣйствительно, если обозначимъ буквою x сторону искомаго квадрата, а буквою R радіусъ круга, то получимъ уравненіе:

$$x^2 = \pi R^2; \qquad \text{откуда: } \pi R : x = x : R,$$

т.-е. x есть средняя пропорціональная между полуокружностью и радіусомъ. Слѣд., если извѣстна прямая, которая равна длинѣ полуокружности, то легко построить квадратъ, равновеликій данному кругу, и обратно: если извѣстна сторона квадрата, равновеликаго кругу, то можно построить прямую, равную по длинѣ полуокружности. Но помощью циркуля и линейки нельзя построить прямую, которая въ точности равнялась бы длинѣ полуокружности (см. выноску въ задачѣ № 257, стр. 231-я); слѣд., нельзя въ точности рѣшить задачу о превращеніи круга въ квадратъ. Приближенное же рѣшеніе можно выполнить, если предварительно найти приближенную длину полуокружности и затѣмъ построить среднюю пропорціональную между этою длиною и радіусомъ.

337. Теорема. Площадь сектора равна произведенію его дуги на половину радіуса.

Пусть дуга AB (черт. 293) сектора AOB содержитъ $n°$. Очевидно, что площадь сектора, котораго дуга содержитъ 1°, составляетъ $^1/_{360}$ часть площади круга, т.-е. она равна $^{\pi R^2}/_{360}$. Слѣд., площадь S сектора, котораго дуга содержитъ $n°$, равна



Черт. 293.

$$S=\frac{\pi R^2 n}{360}=\frac{\pi Rn}{180}\cdot\frac{R}{2}.$$

Такъ какъ дробь $\frac{\pi Rn}{180}$ выражаетъ длину дуги AB, то, обозначивъ ее черезъ s, получимъ:

$$S=s\cdot\frac{R}{2}.$$

338. Задача. Вычислить площадь сегмента, зная радіусъ R круга и число градусовъ, заключающееся въ дугѣ сегмента.

Геометрически (т.-е. безъ помощи тригонометріи) эту задачу можно рѣшить только въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ, а именно тогда, когда хорда, стягивающая дугу сегмента, есть сторона такого правильнаго n-угольника, которую мы можемъ вычислить по данному R. Тогда мы можемъ предварительно найти площадь такого мн-ка, а затѣмъ и площадь сегмента по формулѣ:

$$\text{площ. сегмента} = \frac{1}{n}(\text{пл. круга}-\text{пл. прав. } n\text{-угольника}).$$

Пусть, напр., дуга сегмента содержитъ 60°; тогда хорда, стягивающая эту дугу, есть сторона правильнаго вписаннаго 6-угольника и, слѣд., она равна R. Съ другой стороны, площадь правильн. вписан. 6-угольника равна 6 площадямъ равностороннихъ тр-ковъ, каждый со стороною R; значитъ (313):

$$\text{площ. сегм.} = \frac{1}{6}\left(\pi R^2-6\cdot\frac{1}{4}R^2\sqrt{3}\right)=\frac{1}{12}R^2\left(2\pi-3\sqrt{3}\right).$$

339. Теорема. Сумма площадей подобныхъ многоугольниковъ (или круговъ), построенныхъ на катетахъ прямоугольнаго треугольника, равна площади подобнаго многоугольника (или круга), построеннаго на гипотенузѣ, если катеты и гипотенуза служатъ сходственными сторонами этихъ многоугольниковъ (или діаметрами круговъ).

Пусть Q, R и S будутъ площади подобныхъ фигуръ (или круговъ), построенныхъ на катетахъ и гипотенузѣ прямоугольнаго тр-ка ABC (черт. 295). Тогда (326, 335, 2°)

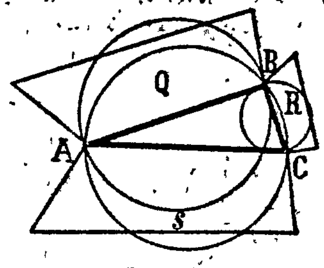
$$\frac{Q}{S}=\frac{AB^2}{AC^2};\quad \frac{R}{S}=\frac{BC^2}{AC^2}.$$

Сложивъ эти равенства, найдемъ:

$$\frac{Q+R}{S}=\frac{AB^2+BC^2}{AC^2}.$$

Но $AB^2+BC^2=AC^2$ (232); поэтому:

$$Q+R=S.$$

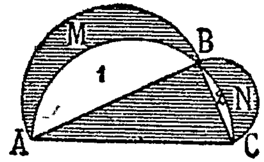


Черт. 295.

340. Слѣдствіе. Если на сторонахъ прямоугольнаго треугольника ABC (черт. 296) построимъ полукруги, расположивъ ихъ такъ, какъ указано на чертежѣ, то сумма площадей образовавшихся при этомъ фигуръ (луночекъ) M и N равна площади треугольника.

Дѣйствительно, сумма полукруговъ, построенныхъ на катетахъ, равна полукругу, построенному на гипотенузѣ; если же отъ обѣихъ частей этого равенства отнимемъ сумму сегментовъ 1-го и 2-го, то получимъ:

$$M+N=\text{площ. } ABC.$$



Черт. 296.

Фигуры M и N извѣстны подъ названіемъ Гиппократовыхъ луночекъ. *)

Когда треугольникъ равнобедренный, то обѣ луночки одинаковы и каждая изъ нихъ равновелика половинѣ треугольника.

*) По имени греческаго геометра Гиппократа Хіосскаго, жившаго въ V вѣкѣ до Р. Хр.

ГЛАВА V.

Соотношеніе между сторонами треугольника и радіусами вписаннаго и описаннаго круговъ.

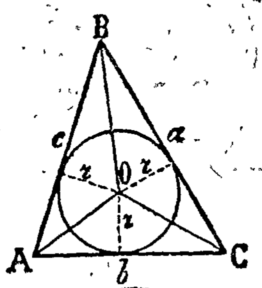
341. По теоремѣ § 250 $bc = 2Rh_a$, гдѣ b и c — двѣ стороны тр-ка, h_a — высота, опущенная на третью сторону, и R — радіусъ описаннаго круга. Это равенство даетъ:

$$R = \frac{bc}{2h_a}$$

Исключимъ высоту h_a; для этого умножимъ числителя и знаменателя дроби на a; тогда, замѣнивъ произведеніе $h_a a$ удвоенною площадью треугольника (которую обозначимъ S), получимъ:

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}},$$

гдѣ $p = {}^1/_2(a+b+c)$.



Черт. 297.

Чтобы найти радіусъ r внутренняго вписаннаго круга (черт. 297), примемъ во вниманіе, что прямыя OA, OB и OC раздѣляютъ данный тр-къ на три тр-ка, у которыхъ основаніями служатъ стороны даннаго тр-ка, а высотою — радіусъ r. Поэтому:

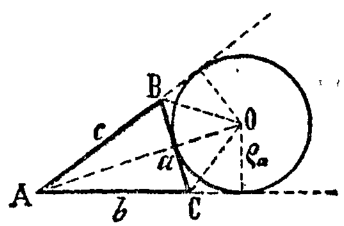
$$S = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr = r\cdot\frac{1}{2}(a+b+c) = rp.$$

Отсюда: $r = \dfrac{S}{p} = \sqrt{\dfrac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$.

Радіусъ ρ_a внѣвписаннаго круга (черт. 298), касающагося стороны a, можно опредѣлить изъ равенства:

$$\text{пл. } ABC = \text{пл. } ACO + \text{пл. } ABO - \text{пл. } BOC,$$

т.-е. $S = \frac{1}{2}b\rho_a + \frac{1}{2}c\rho_a - \frac{1}{2}a\rho_a$.



Черт. 298.

Откуда:

$$\rho_a = \frac{2S}{b+c-a} = \frac{2S}{2(p-a)} = \frac{S}{p-a}.$$

Подобно этому найдемъ:

$$\rho_b = \frac{S}{p-b} \text{ и } \rho_c = \frac{S}{p-c}.$$

Между четырьмя радіусами r, ρ_a, ρ_b и ρ_c существуютъ нѣкоторыя зависимости. Укажемъ простѣйшую изъ нихъ:

$$\frac{1}{\rho_a} + \frac{1}{\rho_b} + \frac{1}{\rho_c} = \frac{3p-a-b-c}{S} = \frac{3p-2p}{S} = \frac{p}{S}.$$

Но $\dfrac{p}{S} = \dfrac{1}{r}$; слѣд., $\dfrac{1}{\rho_a} + \dfrac{1}{\rho_b} + \dfrac{1}{\rho_c} = \dfrac{1}{r}$.

ДОБАВЛЕНІЕ.

Построеніе корней квадратнаго уравненія.

342. Объ однородности уравненій, получаемыхъ при рѣшеніи геометрическихъ задачъ. Просматривая всѣ цѣлыя алгебраическія выраженія, найденныя въ геометріи для вычисленія различныхъ линій, мы замѣчаемъ, что всѣ они п е р в а г о измѣренія, т.-е. всѣ содержатъ только одного буквеннаго множителя, выражающаго длину нѣкоторой линіи. Таковы, напр., выраженія:

$R\sqrt{2}$... для стороны вписаннаго квадрата;

$R\sqrt{3}$... для стороны прав. впис. треугольника;

$2\pi R$... для длины окружности круга; и т. п.

(въ послѣдней формулѣ буква π означаетъ не линію, а отвлеченное число 3,14...; поэтому она не вліяетъ на измѣреніе выраженія).

Просматривая далѣе всѣ цѣлыя выраженія, найденныя въ геометріи для вычисленія площадей различныхъ фигуръ, мы замѣчаемъ, что всѣ они в т о р о г о измѣренія, т.-е. всѣ содержатъ по 2 буквенныхъ множителя, выражающихъ длины нѣкоторыхъ линій. Таковы, напр., выраженія:

bh... для площади прямоугольника;

$\frac{1}{2}bh$... для площади треугольника;

$\frac{1}{2}a^2\sqrt{3}$... для площади равност. треугольника;

πr^2... для площади круга, и т. п.

(Подобно этому, какъ мы впослѣдствіи узнаемъ изъ стереометріи, цѣлыя алгебраическія выраженія, служащія для вычисленія объемовъ, оказываются всѣ т р е т ь я г о измѣренія, т.-е. содержать въ себѣ по 3 буквенныхъ множителя, выражающихъ длины нѣкоторыхъ линій).

Замѣтивъ это, примемъ во вниманіе, что всякое уравненіе есть равенство двухъ выраженій. Слѣд., въ геометрическомъ смыслѣ оно представляетъ собою или равенство линій, или равенство площадей (или равенство объемовъ), или же, наконецъ, равенство отношеній. Когда уравненіе, составленное при рѣшеніи геометрической задачи, выражаетъ равенство линій, обѣ его части должны быть перваго измѣренія; когда оно выражаетъ равенство площадей, его части должны быть второго измѣренія, и т. д. Слѣд., во всѣхъ случаяхъ полученное уравненіе должно быть о д н о р о д н ы м ъ. Однородность не нарушится и послѣ преобразованія уравненія, какъ не трудно видѣть, принявъ во вниманіе все то, что извѣстно намъ изъ алгебры о преобразованіи уравненій.

Сказанное, впрочемъ, вѣрно только при томъ условіи, если ни одна изъ линій, входящихъ въ уравненіе н е п р и н я т а з а е д и н и ц у. Въ противномъ случаѣ однородность нарушается. Напр., уравненіе $x^2=\pi r^2$, выражающее равенство площадей искомаго квадрата и даннаго круга, обращается въ неоднородное ($x^2=\pi$), когда радіусъ круга принятъ за 1.

343. Построеніе корней квадратнаго уравненія. Изъ предыдущаго слѣдуетъ, что если при рѣшеніи геометрической задачи помощью алгебры мы получили уравненіе (при чемъ ни одна изъ линій, входящихъ въ уравненіе, не была принята за 1), то всѣ члены этого уравненія должны быть одинаковаго измѣренія. Поэтому, упростивъ квадратное уравненіе, мы всегда приведемъ его къ такому виду: $x^2 \pm px \pm ab = o$, въ которомъ всѣ члены второго измѣренія (при чемъ буквы p, a и b выражаютъ данныя положительныя длины, а буква x — искомую длину, положительную или отрицательную). Если предварительно построимъ (231) прямую q, представляющую собою среднюю геометрическую прямыхъ a и b (т.-е. построимъ выраженіе $q=+\sqrt{ab}$), то, замѣнивъ въ уравненіи произведеніе ab на q^2, мы приведемъ его къ такому виду:

$$x^2 \pm px \pm q^2 = o,$$

т.-е., говоря подробнѣе, приведемъ его къ одному изъ слѣдующихъ 4 видовъ:

$$1^\circ.\ x^2-px+q^2=o; \qquad 3^\circ.\ x^2+px+q^2=o;$$
$$2^\circ.\ x^2-px-q^2=o; \qquad 4^\circ.\ x^2+px-q^2=o.$$

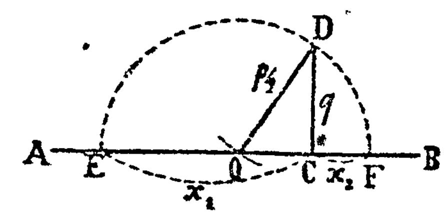
Не трудно видѣть, что уравненія 3° и 4° получаются соотвѣтственно изъ уравненій 1° и 2° посредствомъ замѣны въ нихъ x на $-x$; значитъ, корни уравненій 3° и 4° суть корни соотвѣтственно уравненій 1° и 2°, только взятые съ противоположными знаками. Поэтому намъ достаточно указать построеніе корней только уравненій 1° и 2°.

$$1^\circ.\ x^2-px+q^2=o; \qquad x=\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q^2};$$

т.-е. $$x_1=\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q^2}, \qquad x_2=\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q^2}.$$

Если $p/2 > q$, то радикалъ, входящій въ эти формулы, представляетъ собою катетъ такого прямоугольнаго тр-ка, у котораго гипотенуза есть $p/2$, а другой катетъ равенъ q; вслѣдствіе этого построеніе всего проще можно выполнить такъ:

На какой-нибудь прямой AB (черт. 299) беремъ произвольную точку C и возставляемъ изъ нея къ AB перпендикуляръ, на которомъ откладываемъ $CD=q$. Изъ точки D, какъ центра, радіусомъ, равнымъ $p/2$, пересѣкаемъ прямую AB въ нѣкоторой точкѣ O; тогда, проведя прямую OD, мы получимъ прямоугольный тр-къ ODC, у котораго



Черт. 299.

$$OC=\sqrt{OD^2-CD^2}=\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q^2}.$$

Остается теперь къ $p/2$ приложить OC (тогда получимъ x_1) и отъ $p/2$ отнять OC (тогда получимъ x_2). Для этого раствореніемъ циркуля, равнымъ $OD=p/2$, откладываемъ на прямой AB, въ обѣ стороны отъ точки O отрѣзки OE и OF; тогда $EC=x_1$ и $CF=x_2$.

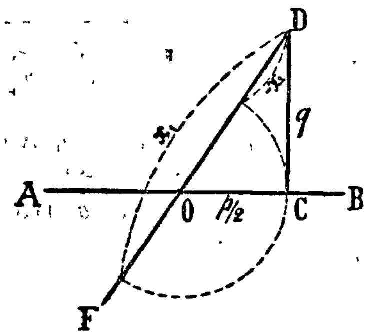
Если $p/2=q$, то $x_1=x_2=p/2$; если же $p/2<q$, то корни x_1 и x_2 мнимые.

$$2.\ x^2-px-q^2=0;\quad x=\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2+q^2};$$

т.-е. $$x_1=\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2+q^2},\quad x_2=\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2+q^2}=$$

$$=-\left(\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2+q^2}-\frac{p}{2}\right).$$

Въ этомъ случаѣ корни всегда вещественные, при чемъ корень x_1 положительный, а x_2 отрицательный. Такъ какъ радикалъ представляетъ собою гипотенузу прямоугольнаго тр-ка, у котораго катеты равны $p/_2$ и q, то построеніе можно выполнить такъ:



Черт. 300.

Возставивъ изъ точки C перпендикуляръ къ AB (черт. 300), отложимъ на немъ $CD=q$; на AB отложимъ $CO=p/_2$. Проведя прямую OD, мы получимъ прямоугольный тр-къ OCD. Приложивъ къ его гипотенузѣ катетъ OC, мы получимъ x_1, а отнявъ отъ гипотенузы тотъ же катетъ, найдемъ абс. величину x_2.

УПРАЖНЕНІЯ.

Доказать теоремы:

261. Въ пар-мѣ разстоянія любой точки діагонали отъ двухъ прилежащихъ сторонъ обратно пропорціональны этимъ сторонамъ.

262. Площадь трапеціи равна произведенію одной изъ непараллельныхъ сторонъ на перпендикуляръ, опущенный изъ средины другой непараллельной стороны на первую.

263. Два четыреугольника равновелики, если у нихъ равны соотвѣтственно діагонали и уголъ между ними.

264. Если площади двухъ треугольниковъ, прилежащихъ къ основаніямъ трапеціи и образуемыхъ пересѣченіемъ ея діагоналей, равны соотвѣтственно p^2 и q^2, то площадь всей трапеціи равна $(p+q)^2$.

265. Площадь правильнаго вписаннаго шестиугольника равна $^3/_4$ площади правильнаго описаннаго шестиугольника.

266. Въ четыреугольникѣ $ABCD$ черезъ середину діагонали BD проведена прямая, параллельная другой діагонали AC; эта прямая пересѣкаетъ сторону AD въ точкѣ E. Доказать, что прямая CE дѣлитъ четыреугольникъ пополамъ.

267. Если медіаны треугольника взять за стороны другого треугольника, то площадь послѣдняго равна $^3/_4$ площади перваго.

268. Въ кругѣ съ центромъ O проведена хорда AB. На радіусѣ OA, какъ на діаметрѣ, описана окружность. Доказать, что площади двухъ сегментовъ, отсѣкаемыхъ хордою AB отъ обоихъ круговъ, относятся, какъ 4 : 1.

Задачи на вычисленіе.

269. Вычислить площадь прямоугольной трапеціи, у которой одинъ изъ угловъ равенъ 60°, зная или оба основанія, или одно основаніе и высоту, или одно основаніе и боковую сторону, наклонную къ основанію.

270. Вычислить площадь равносторонняго тр-ка по высотѣ h.

271. Даны основанія трапеціи B и b и ея высота H. Вычислить высоту треугольника, образованнаго продолженіемъ непараллельныхъ сторонъ трапеціи до взаимнаго пересѣченія.

272. Составить формулу для площади правильнаго вписаннаго 12-угольника въ зависимости отъ радіуса круга.

273. Въ тр-кѣ вписанъ другой тр-къ, котораго вершины дѣлятъ пополамъ стороны перваго тр-ка; въ другой тр-къ вписанъ подобнымъ же образомъ третій; въ третій—четвертый и т. д. безъ конца. Найти предѣлъ суммы площадей этихъ тр-въ.

274. Въ данномъ тр-кѣ извѣстны стороны a, b и c. Изъ срединъ сторонъ возставлены перпендикуляры x, y и z до пересѣченія въ центрѣ описаннаго круга. Найти въ зависимости отъ a, b и c величины x, y и z и радіусъ R описаннаго круга. (Указаніе: пользуясь теоремою Птоломея (242), можно вывести уравненія: $bz+cy=aR$, $cx+az=bR$, $ay+bx=cR$ и $ax+by+cz=2S$, гдѣ S есть площадь тр-ка).

Задачи на построеніе.

275. Раздѣлить тр-къ прямыми, проходящими черезъ вершину на три части, которыхъ площади относились бы, какъ $m:n:p$.

276. Раздѣлить пополамъ тр-къ прямою, проходящею черезъ данную точку его стороны.

277. Найти внутри тр-ка такую точку, чтобы прямыя, соединяющія ее съ вершинами тр-ка, дѣлили его на три равновеликія части.

278.—то же—на три части въ отношеніи 2 : 3 : 4 (или вообще $m:n:p$).

279. Раздѣлить параллелограммъ на три равновеликія части прямыми, исходящими изъ вершины его.

280. Раздѣлить параллелограммъ на двѣ части въ отношенiи $m : n$ прямою, проходящею черезъ данную точку.

281. Раздѣлить параллелограммъ на три равновеликія части прямыми, параллельными дiагонали.

282. Раздѣлить площадь тр-ка въ среднемъ и крайнемъ отношенiи прямою, параллельною основанiю.

283. Раздѣлить тр-къ на три равновеликія части прямыми, перпендикулярными къ основанiю.

284. Раздѣлить кругъ на 2, на 3... равновеликія части концентрическими окружностями.

285. Раздѣлить пополамъ трапецiю прямою, параллельною основанiямъ. (Указанiе: продолживъ непараллельныя стороны до взаимнаго пересѣченiя, взять за неизвѣстную величину разстоянiе конца искомой линiи до вершины тр-ка; составить пропорцiи, исходя изъ площадей подобныхъ тр-ковъ...).

286. Данный прямоугольникъ превратить въ другой равновеликiй прямоугольникъ съ даннымъ основанiемъ.

287. Построить квадратъ, равновеликiй $^2/_3$ даннаго квадрата.

288. Превратить квадратъ въ равновеликiй прямоугольникъ, у котораго сумма s или разность d двухъ смежныхъ сторонъ дана.

289. Построить кругъ, равновеликiй кольцу, заключенному между двумя данными концентрическими окружностями.

290. Построить тр-къ, подобный одному и равновеликiй другому изъ двухъ данныхъ тр-ковъ.

291. Данный тр-къ превратить въ равновеликiй равностороннiй (посредствомъ приложенiя алгебры къ геометрiи).

292. Въ данный кругъ вписать прямоугольникъ съ данною площадью m^2 (посредствомъ приложенiя алгебры къ геометрiи).

293. Въ данный тр-къ вписать прямоугольникъ съ данною площадью m^2 (приложенiемъ алгебры къ геометрiи; изслѣдовать).

Числовыя задачи на разные отдѣлы планиметрiи *).

294. Катеты прямоугольнаго тр-ка суть 3 ф. и 4 ф. Найти площадь круга, котораго окружность проходитъ черезъ середину меньшаго катета и касается гипотенузы въ ея серединѣ.

295. Точка касанiя окружности, вписанной въ прямоугольный тр-къ, дѣлитъ гипотенузу на отрѣзки a и b. Найти площадь тр-ка.

*) Взяты изъ «Сборника геометрическихъ задачъ для повторительнаго курса планиметрiи», составилъ М. Попруженко, изданiе 4-е, исправленное и дополненное, Москва, 1915 г.

296. Катеты прямоугольнаго тр-ка суть b и c. Найти биссектрису прямого угла.

297. Радiусы двухъ концентрическихъ окружностей суть 15 см. и 8 см. На продолженномъ дiаметрѣ взята точка на разстоянiи 17 см. отъ общаго центра, и изъ нея проведены касательныя къ этимъ окружностямъ. Найти разстоянiе точекъ касанiя. (Указанiе: примѣнить теорему Птоломея).

298. Часть площади круга, заключенная между стороною вписаннаго квадрата и параллельною ей стороною правильнаго вписаннаго 6-угольника, равна $^1/_{12}$ $(\pi+3\sqrt{3}-6)$. Найти сторону квадрата, равновеликаго данному кругу.

299. Въ ромбъ, который раздѣляется дiагональю на два равностороннiе тр-ка, вписанъ кругъ. Найти сторону ромба въ зависимости отъ радiуса этого круга.

300. Въ тр-кѣ, котораго стороны суть 4 см., 5 см. и 6 см., проведены биссектрисы меньшаго угла и смежнаго съ нимъ внѣшняго угла. Найти отрѣзокъ противолежащей стороны, заключенный между этими биссектрисами.

301. Въ равностороннемъ тр-кѣ со стороною a вписана окружность, а изъ вершины тр-ка радiусомъ, равнымъ половинѣ его стороны, описана другая окружность. Найти площадь, общую обоимъ кругамъ.

302. Въ треугольникѣ двѣ стороны суть a и b. Найти третью сторону и площадь, если уголъ между сторонами a и b равенъ: 45°; 60°; 150°; 120°; 75°; 135°.

303. Длины двухъ параллельныхъ хордъ круга суть 30 д. и 16 д., а разстоянiе между ними 7 д. Найти площадь круга.

304. Черезъ точку, удаленную отъ центра круга на длину дiаметра, проведена такая сѣкущая, которая дѣлится окружностью пополамъ. Найти длину сѣкущей, если радiусъ круга равенъ $\sqrt{6}$.

305. Въ кругѣ радiуса R проведена хорда, стягивающая дугу въ 108°. Найти ея длину.

306. На дiаметрѣ полукруга радiуса R построенъ равностороннiй тр-къ. Найти площадь той его части, которая лежитъ внѣ круга.

307. Найти радiусъ окружности, касательной къ сторонамъ a и b треугольника, и центръ которой лежитъ на третьей его сторонѣ c.

308. Къ двумъ извнѣ касающимся въ точкѣ A окружностямъ, радiусы которыхъ суть 3 см. и 1 см., проведена внѣшняя касательная BC. Найти площадь фигуры ABC, ограниченной двумя дугами и касательной.

309. Полуокружность радiуса R раздѣлена на три равныя части и точки дѣленiя соединены съ концомъ дiаметра. Найти площадь, ограниченную двумя хордами и заключенную между ними дугою.

310. Стороны тр-ка ABC продолжены въ одномъ направленiи сторона AB за точку B, сторона BC за точку C и сторона CA за

точку A) до точекъ A_1, B_1 и C_1, такъ что $AA_1=3AB$, $BB_1=3BC$ и $CC_1=3CA$. Найти отношеніе площадей тр-ковъ ABC и $A_1B_1C_1$.

311. Изъ вершины тр-ка проведена къ его основанію прямая, дѣлящая основаніе на два отрѣзка m и n. Найти длину этой прямой, если стороны тр-ка, прилежащія къ отрѣзкамъ m и n, суть a и b.

312. Кругъ радіуса R обложенъ тремя равными кругами, касающимися даннаго и взаимно. Найти радіусъ одного изъ этихъ круговъ.

313. Опредѣлить высоту башни, если извѣстно, что нужно отойти на a метровъ отъ ея основанія, чтобы башня была видна подъ угломъ въ 30°.

314. По даннымъ хордамъ a и b, стягивающимъ двѣ дуги въ кругѣ единичнаго радіуса, найти хорду, стягивающую разность этихъ дугъ. (Указаніе: примѣнить теорему Птоломея).

315. Прямая, параллельная основаніямъ трапеціи, раздѣляетъ ее на двѣ части въ отношеніи 7 : 2 (считая отъ большаго основанія). Найти длину этой прямой, если основанія трапеціи суть 5 м. и 3 м.

316. Изъ точки, дѣлящей основаніе тр-ка въ отношеніи $m : n$, проведены прямыя, параллельныя двумъ другимъ сторонамъ. Найти отношеніе площади каждой изъ частей, на которыя раздѣлится тр-къ, къ площади всего тр-ка.

317. Изъ нѣкоторой точки внутри тр-ка на стороны его a, b и c опущены перпендикуляры p_1, p_2, p_3. Найти отношеніе площади тр-ка, который образуется отъ соединенія основаній этихъ перпендикуляровъ, къ площади даннаго тр-ка. (Указаніе: см. § 325).

318. Вычислить діагонали трапеціи по четыремъ ея сторонамъ a, b, c и d. (Указаніе: надо примѣнить къ діагонали теорему о квадратѣ стороны тр-ка).

319. Найти площадь трапеціи по четыремъ ея сторонамъ a, b, c и d.

320. На противоположныхъ сторонахъ квадрата построены внутри его два равностороннія тр-ка. Пересѣченіе сторонъ этихъ тр-ковъ опредѣляетъ нѣкоторый четыреугольникъ. Найти его видъ, стороны, углы и площадь, если сторона квадрата равна a.

321. Проведена окружность, касающаяся одной стороны прямого угла и пересѣкающая другую сторону въ точкахъ, отстоящихъ отъ вершины угла на 6 см. и 24 см. Вычислить радіусъ этой окружности и разстояніе точки касанія отъ вершины угла.

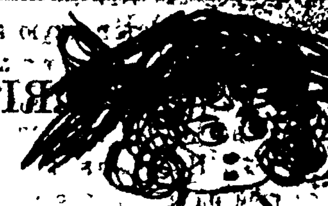
322. Вычислить площадь тр-ка по двумъ сторонамъ a и b и медіанѣ m относительно третьей стороны.

323. На общей хордѣ AB построены (по одну сторону отъ AB) два сегмента, изъ которыхъ одинъ вмѣщаетъ уголъ 135°, а другой 120°. Найти площадь луночки, заключенной между дугами сегментовъ.

324. На радіусахъ квадранта (четверти круга) внутри его построены два полукруга. Найти площадь той части квадранта, которая лежитъ внѣ полукруговъ, если радіусъ квадранта есть R.

325. Въ прямоугольномъ тр-кѣ ABC опущенъ перпендикуляръ AD на гипотенузу BC. Зная радіусы r_1 и r_2 окружностей, вписанныхъ въ тр-ки ABD и ACD, найти радіусъ r окружности, вписанной въ треугольникъ ABC.

326. На окружности радіуса R отложены отъ точки A (по обѣ ея стороны) двѣ дуги: $AC=30°$ и $AB=60°$. Найти площадь тр-ка ABC.



СТЕРЕОМЕТРІЯ.

КНИГА I.

ПРЯМЫЯ и ПЛОСКОСТИ.

ГЛАВА I.

Опредѣленіе положенія плоскости.

344. Опредѣленіе. Плоскостью, какъ мы уже говорили въ началѣ геометріи (13), наз. поверхность, обладающая тѣмъ свойствомъ, что прямая, проходящая черезъ двѣ какія-нибудь точки этой поверхности, лежитъ на ней и всѣми остальными своими точками. Возможность существованія такой поверхности принимается за аксіому.

Тотъ отдѣлъ геометріи, въ которомъ разсматриваются свойства фигуръ, не помѣщающихся всѣми своими частями въ одной плоскости, наз. стереометріей.

345. Аксіомы плоскости. Укажемъ слѣдующія свойства плоскости, которыя мы принимаемъ за очевидныя:

1°. Плоскость есть поверхность незамкнутая.

2°. Всякая плоскость дѣлитъ пространство на 2 части, изъ которыхъ одна расположена по одну сторону отъ плоскости, а другая по другую сторону отъ нея.

3°. Прямая, имѣющая съ плоскостью только одну общую точку, пересѣкаетъ плоскость, т.-е. изъ части пространства, лежащей по одну сторону отъ плоскости, переходитъ въ часть пространства, лежащую по другую ея сторону; слѣд., двѣ полупрямыя, на которыя раздѣляется эта прямая плоскостью, расположены по разныя стороны отъ плоскости.

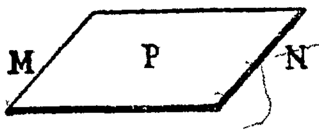
4°. Отрѣзокъ прямой, соединяющій двѣ точки пространства, расположенныя по разныя стороны отъ плоскости, **п е р е с ѣ к а е т ъ** эту плоскость, тогда какъ отрѣзокъ прямой, соединяющій двѣ точки, расположенныя по одну сторону плоскости, не пересѣкаетъ ее.

5°. Черезъ всякую прямую можно провести **б е з ч и с л е н н о е м н о ж е с т в о** плоскостей.

6°. Всякая прямая, проведенная на плоскости, раздѣляетъ ее на двѣ части (называемыя **п о л у п л о с к о с т я м и**).

7°. Плоскость можно вращать вокругъ любой прямой, лежащей на ней, при чемъ каждую изъ частей, на которыя плоскость дѣлится этою прямою, можно заставить пройти черезъ всякую точку пространства.

346. Изображеніе и обозначеніе плоскости.

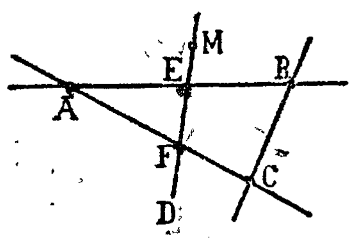


Черт. 301.

Плоскость изображается на чертежѣ въ видѣ нѣкоторой ея части, обыкновенно въ формѣ параллелограмма или прямоугольника (черт. 301). Обозначается плоскость бо́льшею частью одною или двумя буквами; такъ, говорятъ: плоскость P, плоскость MN.

347. Теорема.

Черезъ всякія три точки (A, B и C, черт. 302), не лежащія на одной прямой, можно провести плоскость и притомъ только одну.



Черт. 302.

1°. Черезъ какія-нибудь двѣ изъ трехъ данныхъ точекъ, напр., черезъ A и B, проведемъ прямую и черезъ нее произвольную плоскость. Станемъ вращать эту плоскость вокругъ прямой AB; вращая, мы можемъ заставить ее пройти черезъ точку C. Тогда будемъ имѣть плоскость, которая проходитъ черезъ три точки A, B и C.

Докажемъ, что такая плоскость только одна.

2°. Предположимъ, что черезъ тѣ же три точки проведены двѣ плоскости (не указаны на черт. 302). Обозначимъ одну P, а другую P_1. Докажемъ, что эти плоскости сливаются въ одну. — Предварительно замѣтимъ, что прямыя AB, BC и AC, проходящія черезъ каждую пару данныхъ точекъ, принадлежатъ обѣимъ плоскостямъ, такъ какъ эти прямыя имѣютъ по двѣ общихъ точки и съ плоскостью P и съ плоскостью P_1. Возьмемъ теперь на плоскости P произвольную точку M и докажемъ, что эта точка принадлежитъ и другой плоскости P_1. Для этого на плоскости P черезъ точку M проведемъ какую-нибудь прямую MD, пересѣкающую AB и AC въ нѣкоторыхъ точкахъ E и F. Такъ какъ прямыя AB и AC принадлежатъ и другой плоскости P_1, то точки ихъ E и F также принадлежатъ этой плоскости. Вслѣдствіе этого прямая MD, проходящая черезъ E и F, лежитъ вся въ плоскости P_1 (по опредѣленію плоскости), а потому и ея точка M лежитъ въ этой плоскости. Такимъ образомъ, всякая точка M плоскости P принадлежитъ и плоскости P_1; значитъ, эти плоскости сливаются.

348. Слѣдствія.

1°. **Черезъ прямую и точку внѣ ея можно провести плоскость и только одну,** потому что точка внѣ прямой вмѣстѣ съ какими-нибудь двумя точками этой прямой составляютъ три точки, черезъ которыя, по доказанному, можно провести плоскость и притомъ одну.

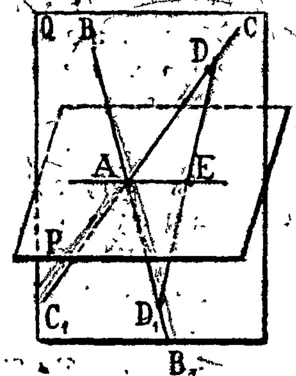
2°. **Черезъ двѣ пересѣкающіяся прямыя можно провести плоскость и только одну,** потому что, взявъ точку пересѣченія и еще по одной точкѣ на каждой прямой, мы будемъ имѣть три точки, черезъ которыя и т. д.

3°. **Черезъ двѣ параллельныя прямыя можно провести плоскость и только одну,** потому что паралелльныя прямыя, по опредѣленію, лежатъ въ одной плоскости; эта плоскость единственная, такъ какъ черезъ одну изъ параллельныхъ и какую-нибудь точку другой можно провести не болѣе одной плоскости.

4°. **Всякую часть плоскости можно наложить всѣми ея точками на другое мѣсто этой или другой плоскости, при чемъ накладываемую часть можно предварительно перевернуть другою стороною,** потому что всегда возможно наложить одну плоскость на другую такъ, чтобы у нихъ совпали какія-нибудь три точки, не лежащія на одной прямой, а тогда совпадутъ и остальныя точки.

349. Теорема. Если двѣ плоскости имѣютъ общую точку, то онѣ имѣютъ и общую прямую, которая проходитъ черезъ эту точку и по которой плоскости пересѣкаются.

Пусть плоскости P и Q (черт. 303) имѣютъ общую точку A. Проведемъ на плоскости Q черезъ точку A какія-нибудь двѣ прямыя BB_1 и CC_1. Если бы случилось, что одна изъ этихъ прямыхъ лежитъ и на плоскости P, то плоскости имѣли бы общую прямую. Предположимъ, что этого нѣтъ; тогда обѣ эти прямыя пересѣкаютъ плоскость P (345, 3°), слѣд., каждая изъ нихъ подраздѣлится плоскостью P на двѣ полупрямыя, расположенныя по разныя стороны отъ этой плоскости. Возьмемъ на полупрямыхъ AC и AB_1 какія-нибудь точки D и D_1 и проведемъ прямую DD_1. Эта прямая, переходя изъ части пространства, лежащаго надъ плоскостью P, въ часть пространства, лежащаго подъ плоскостью P, пересѣчется съ плоскостью P въ нѣкоторой точкѣ E (345, 4°) *). Такъ какъ прямая DD_1 имѣетъ съ плоскостью Q двѣ общихъ точки (D и D_1), то она принадлежитъ ей вся. Поэтому точка E прямой DD_1 также принадлежитъ плоскости Q. Итакъ, плоскости P и Q имѣютъ двѣ общія точки A и E; значитъ, онѣ имѣютъ и общую прямую AE, проходящую черезъ эти точки.



Черт. 303.

Что плоскости P и Q пересѣкаются по прямой AE (а не касаются), слѣдуетъ изъ того, что прямыя BB_1 и CC_1, содержащіяся въ плоскости Q, пересѣкаются съ P.

350. Слѣдствіе. Пересѣченіе двухъ плоскостей всегда есть прямая линія.

Дѣйствительно, если плоскости пересѣкаются, то онѣ имѣютъ общую точку, но въ такомъ случаѣ онѣ имѣютъ и общую прямую.

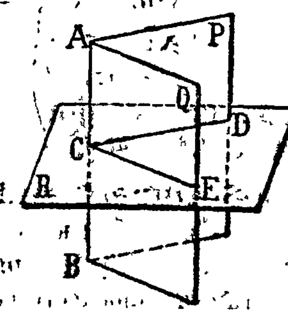
*) При чемъ точка E не можетъ совпасть съ A, такъ какъ въ противномъ случаѣ прямыя BB_1 и CC_1 составляли бы одну прямую, сливающуюся съ DD_1.

Какой-нибудь еще общей точки, сверхъ точекъ этой прямой, плоскости имѣть не могутъ, такъ какъ въ противномъ случаѣ онѣ должны были бы слиться въ одну (348, 1°).

ГЛАВА II.

Перпендикуляръ къ плоскости и наклонныя къ ней.

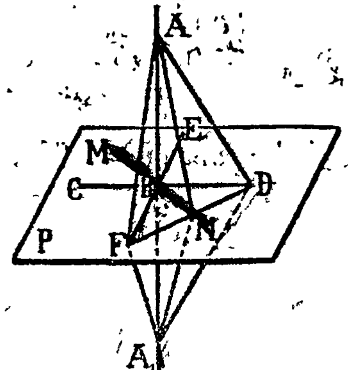
351. Предварительное замѣчаніе. Возьмемъ какую-нибудь прямую AB (черт. 304) и проведемъ черезъ нее двѣ произвольныя плоскости P и Q; затѣмъ, взявъ на AB какую-нибудь точку C, проведемъ на плоскостяхъ P и Q черезъ эту точку прямыя: $CD \perp AB$ и $CE \perp AB$. Черезъ двѣ пересѣкающіяся прямыя CD и CE проведемъ плоскость R. Мы получимъ тогда такое расположеніе прямой (AB) и плоскости (R), при которомъ эта прямая, пересѣкаясь съ плоскостью, оказывается перпендикулярной къ двумъ прямымъ (къ CD и къ CE), проведеннымъ на этой плоскости черезъ точку пересѣченія. Докажемъ теперь, что такое расположеніе прямой и плоскости обладаетъ слѣдующимъ важнымъ свойствомъ.



Черт. 304.

352. Теорема. Если прямая (AA_1, черт. 305), пересѣкающаяся съ плоскостью (P), перпендикулярна къ двумъ прямымъ (CD и EF), проведеннымъ на этой плоскости черезъ точку пересѣченія (B), то она перпендикулярна и ко всякой третьей прямой (MN), проведенной на плоскости черезъ ту же точку пересѣченія.

Отложимъ произвольной длины, но равные, отрѣзки BA и BA_1 и проведемъ на плоскости какую-нибудь прямую DF, которая пересѣкала бы прямыя CD, MN и EF. Точки пересѣченія D, N и F соединимъ съ точками A и A_1. Мы получимъ тогда нѣсколько тр-ковъ. Разсмотримъ ихъ въ такой послѣдовательности. Сначала возьмемъ тр-ки AFD и A_1FD; они равны, такъ какъ у нихъ: FD общая сторона, $AD=A_1D$, какъ наклонныя къ прямой AA_1 одинаково удаленныя отъ основанія



Черт. 305.

перпендикуляра BD; по той же причинѣ $AF=A_1F$. Изъ равенства этихъ тр-ковъ слѣдуетъ, что $\angle ADF=\angle A_1DF$. Послѣ [redacted] перейдемъ къ тр-камъ ADN и A_1DN; они равны, такъ какъ у нихъ DN общая сторона, $AD=A_1D$ и $\angle ADN = \angle A_1DN$. Изъ равенства этихъ тр-ковъ выводимъ, что $AN=A_1N$. Теперь возьмемъ тр-ки ABN и A_1BN; они равны, такъ какъ имѣютъ соотвѣтственно равныя стороны. Изъ ихъ равенства выводимъ, что $\angle ABN=\angle A_1BN$; слѣд., $AA_1 \perp MN$.

353. Опредѣленіе. Прямая наз. п е р п е н д и к у л я р н о ю к ъ п л о с к о с т и, если она, пересѣкаясь съ этою плоскостью, образуетъ прямые углы со всѣми прямыми, проведенными на плоскости черезъ точку пересѣченія. Въ этомъ случаѣ говорятъ также, что плоскость перпендикулярна къ прямой.

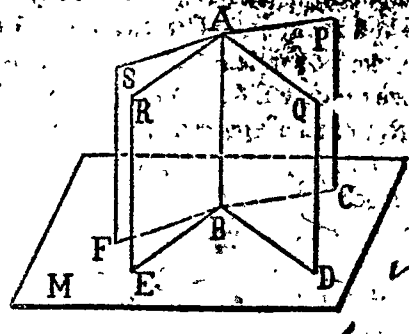
Предыдущая теорема выражаетъ п р и з н а к ъ перпендикулярности прямой и плоскости.

Прямая, пересѣкающаяся съ плоскостью, но не перпендикулярная къ ней, наз. н а к л о н н о ю. Точка пересѣченія прямой съ плоскостью наз. о с н о в а н і е м ъ перпендикуляра или наклонной.

354. Теорема. Если черезъ одну и ту же точку прямой проведемъ въ пространствѣ сколько угодно перпендикуляровъ къ этой прямой, то всѣ они лежатъ въ одной и той же плоскости.

Дана прямая AB (черт. 306) и на ней точка B. Изъ этой точки возставимъ въ пространствѣ нѣсколько перпендикуляровъ къ прямой AB. Для этого черезъ AB проведемъ какія нибудь плоскости P, Q, R, S... и на каждой изъ нихъ черезъ точку B про-

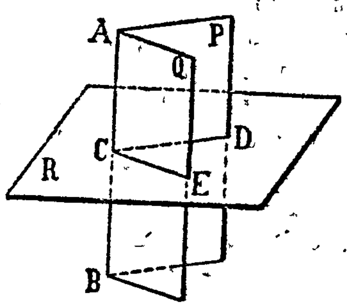
ведемъ прямую, перпендикулярную къ AB. Пусть это будутъ прямыя BC, BD, BE, BF... Требуется доказать, что всѣ эти перпендикуляры лежатъ въ одной и той же плоскости, перпендикулярной къ AB. Для доказательства черезъ какія-нибудь два изъ нихъ, напр., черезъ BC и BD, проведемъ плоскость M, которая, согласно предыдущей теоремѣ, будетъ перпендикулярна къ AB. Вообразимъ теперь, что какой-нибудь изъ прочихъ перпендикуляровъ, напр., BE, проведенный въ пл. R, не лежитъ въ пл. M. Тогда пересѣченіе плоскостей R и M должна быть нѣкоторая прямая, не сливающаяся съ BE, и, слѣд., въ пл. R должны существовать 2 перпендикуляра къ AB,



Черт. 306.

проходящіе черезъ точку B: одинъ BE, а другой—пересѣченіе плоскостей M и R (352); такъ какъ это невозможно, то нельзя допустить, чтобы какой-нибудь изъ проведенныхъ нами перпендикуляровъ не лежалъ въ пл. M; значитъ, всѣ они лежатъ въ этой плоскости, которая, какъ мы говорили, перпендикулярна къ AB.

355. Теорема. Черезъ всякую точку пространства можно провести плоскость, перпендикулярную къ данной прямой, и притомъ только одну.



Черт. 307.

1°. Пусть C будетъ точка, взятая н а д а н н о й п р я м о й AB (черт. 307). Проведемъ черезъ эту прямую какія-нибудь двѣ плоскости P и Q и на нихъ возьмемъ прямыя CD и CE, перпендикулярныя къ AB. Черезъ эти двѣ пересѣкающіяся прямыя проведемъ плоскость R. Эта плоскость перпендикулярна къ AB въ точкѣ C, потому что двѣ ея прямыя перпендикулярны къ AB.

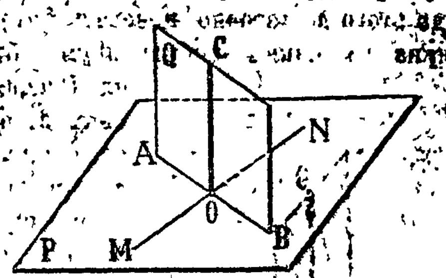
Допустимъ теперь, что черезъ точку C можно провести еще другую плоскость, перпендикулярную къ AB. Обозначимъ ее R_1. Эта плоскость должна пересѣчься съ плоскостью P по такой прямой, которая, во 1, проходитъ черезъ C и, во 2, перпендикулярна къ AB. Но на плоскости P существуетъ только одна такая прямая, именно прямая CD, которую мы раньше провели; значитъ, плоскость R_1 должна пересѣчься съ P по той же прямой CD, по которой съ ней пересѣкается и пл. R. Такъ же убѣдимся, что пл. R_1 должна пересѣчься съ пл. Q по той же прямой CE, по которой съ ней пересѣкается пл. R. Слѣд., пл. R_1 должна проходить черезъ тѣ же пересѣкающіяся прямыя CD и CE, черезъ которыя проведена нами ранѣе плоскость R. Но черезъ 2 пересѣкающіяся прямыя можно провести только одну плоскость; значитъ, плоскости R и R_1 должны слиться въ одну.

2°. Пусть D будетъ точка, взятая вн ѣ данной прямой AB (черт. 307). Проведемъ черезъ D и AB плоскость P и черезъ AB еще какую-нибудь плоскость Q; на первой опустимъ на AB изъ точки D перпендикуляръ DC, а на второй возставимъ къ AB изъ точки C перпендикуляръ CE. Плоскость R, проходящая черезъ DC и CE, и будетъ плоскостью, перпендикулярною къ AB и проведенною черезъ точку D (352).

Предположимъ теперь, что черезъ точку D можно провести еще другую плоскость R_1, перпендикулярную къ AB. Эта плоскость должна пересѣчься съ пл. P по такой прямой, которая, во 1, проходитъ черезъ D и, во 2, перпендикулярна къ AB. Но на пл. P существуетъ только одна такая прямая, именно перпендикуляръ DC, который мы провели раньше; значитъ, пл. R_1 должна пересѣчься съ пл. P по той же прямой DC, по которой съ ней пересѣкается и пл. R. Но тогда съ пл. Q пл. R_1 можетъ пересѣчься только по прямой CE, такъ какъ это—единственная прямая плоскости Q, проходящая черезъ C и перпендикулярная къ AB. Такимъ образомъ, пл. R_1, проходя черезъ тѣ же двѣ пересѣкающіяся прямыя DC и CE, черезъ которыя проведена пл. R, должна слиться съ этою плоскостью.

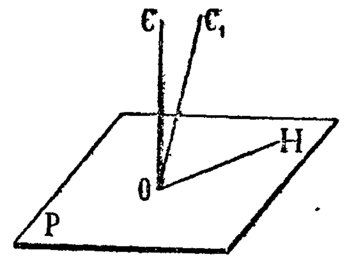
356. Теорема. Черезъ всякую точку пространства можно провести перпендикуляръ къ данной плоскости и притомъ только одинъ.

1°. Пусть точка O лежитъ на плоскости P (черт. 308). Проведемъ черезъ нее на этой плоскости какую-нибудь прямую MN и затѣмъ черезъ ту же точку O проведемъ плоскость Q, перпендикулярную къ прямой MN, что, какъ мы видѣли (355, 1°), всегда возможно. Пусть плоскости P и Q пересѣкаются по прямой AB. Въ плоскости Q проведемъ $OC \perp AB$. Докажемъ, что полученная такимъ образомъ прямая OC есть перпендикуляръ къ плоскости P.—Такъ какъ прямая MN перпендикулярна къ пл. Q, то она перпендикулярна ко всякой прямой, проведенной на этой плоскости черезъ точку O; значитъ, $OC \perp MN$. Съ другой стороны, $OC \perp AB$ по построенію. Значитъ, прямая OC перпендикулярна къ двумъ прямымъ, проведеннымъ на пл. P черезъ точку O; слѣд., она перпендикулярна къ пл. P.



Черт. 308.

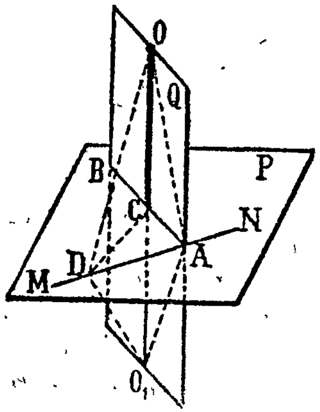
Предположимъ теперь, что кромѣ найденнаго нами перпендикуляра OC существуетъ еще другой перпендикуляръ OC_1 (черт. 309), проведенный къ пл. P черезъ ту же точку O. Проведемъ черезъ прямыя OC и OC_1 плоскость (она не указана на чертежѣ); пусть эта плоскость пересѣчется съ пл. P по прямой OH. Тогда углы COH и C_1OH должны оказаться оба прямые. Но это невозможно, такъ какъ одинъ изъ этихъ угловъ составляетъ часть другого. Значитъ, другого перпендикуляра черезъ точку O къ пл. P провести нельзя.



Черт. 309.

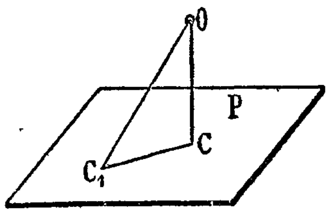
2°. Пусть точка O лежитъ вн ѣ плоскости P (черт. 310). Проведемъ на этой плоскости произвольную прямую MN и затѣмъ черезъ точку O проведемъ плоскость Q, перпендикулярную къ прямой MN, что всегда возможно (355, 2°). Пусть плоскости P и Q пересѣкаются по прямой

AB. На пл. Q проведемъ $OC\perp AB$. Докажемъ, что полученная такимъ образомъ прямая OC есть перпендикуляръ къ пл. P. Для этого достаточно показать, что эта прямая перпендикулярна къ какимъ-нибудь двумъ прямымъ, проведеннымъ на пл. P черезъ точку C. Къ одной такой прямой, именно къ AB, прямая OC перпендикулярна по построенію. За другую прямую возьмемъ CD, соединяющую точку C съ какою-нибудь точкою D прямой MN. Для доказательства, что $OC\perp CD$, продолжимъ OC на длину $CO_1=OC$ и точки O и O_1 соединимъ прямыми съ A и D. Такъ какъ $MN\perp Q$, то $MN\perp AO$ и $MN\perp AO_1$; значитъ, тр-ки OAD и O_1AD прямоугольные при вершинѣ A. У нихъ катетъ AD общій и катеты AO и AO_1 равны, какъ наклонныя, проведенныя на пл. Q изъ точки A къ прямой OO_1, при чемъ разстоянія ихъ основаній отъ основанія перпендикуляра AC (отрѣзки OC и O_1C) равны. Изъ равенства этихъ тр-ковъ слѣдуетъ, что $OD=O_1D$. Теперь мы видимъ, что тр-къ ODO_1 равнобедренный и потому его медіана DC перпендикулярна къ основанію OO_1 (39). Такимъ образомъ, оказывается, что $OC\perp CA$ и $OC\perp CD$; значитъ, $OC\perp P$.



Черт 310.

Допустимъ теперь, что кромѣ найденнаго нами перпендикуляра OC можно опустить изъ точки O на пл. P еще другой перпендикуляръ OC_1 (черт. 311). Тогда, соединивъ точки C и C_1 прямой, мы получимъ тр-къ OCC_1, у котораго два угла (при вершинахъ C и C_1) прямые. Такъ какъ это невозможно, то другого перпендикуляра изъ точки O на пл. P опустить нельзя.



Черт. 311.

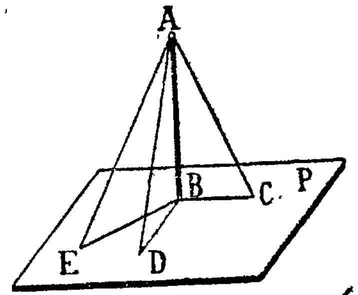
357. Сравнительная длина перпендикуляра и наклонныхъ. Когда изъ одной точки A (черт. 312) проведены къ плоскости (и только до нея) перпендикуляръ AB и наклонная AC, условимся называть п р о е к ц і е й наклонной на плоскость прямую BC, проведенную между основаніями перпендикуляра и наклонной.

Теоремы. Если изъ одной и той же точки (A, черт. 312), взятой внѣ плоскости (P), проведены къ этой плоскости (и только до нея) перпендикуляръ (AB) и какія-нибудь наклонныя (AC, AD, AE...), то:

1^0, перпендикуляръ короче всякой наклонной;

2^0, двѣ наклонныя, имѣющія равныя проекціи, равны;

3^0, изъ двухъ наклонныхъ та больше, которой проекція больше.



Черт. 312.

Вращая прямоугольные тр-ки ABC и ABD вокругъ катета AB, мы можемъ совмѣстить ихъ плоскости съ плоскостью тр-ка ABE. Тогда всѣ наклонныя будутъ лежать въ одной плоскости съ перпендикуляромъ, и всѣ проекціи расположатся на одной прямой. Такимъ образомъ, доказываемыя теоремы приводятся къ аналогичнымъ теоремамъ планиметріи (59, 1 и 2).

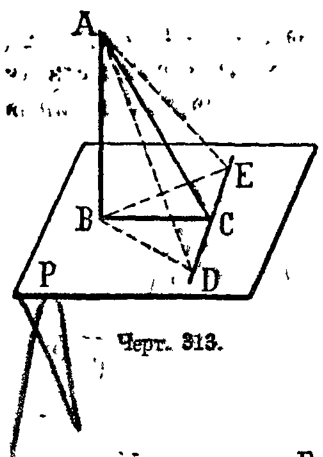
Замѣчаніе. Длина перпендикуляра, опущеннаго изъ точки A на пл. P (черт. 312), принимается за мѣру р а з с т о я н і я точки A отъ пл. P.

358. Обратныя теоремы. Если изъ одной и той же точки, взятой внѣ плоскости, проведены къ этой плоскости (и только до нея) перпендикуляръ и какія-нибудь наклонныя, то равныя наклонныя имѣютъ равныя проекціи, и изъ двухъ проекцій та больше, которая соотвѣтствуетъ бо́льшей наклонной.

Доказательство (отъ противнаго) предоставляемъ самимъ учащимся.

359. **Приведемъ еще слѣдующую теорему о перпендикулярахъ, которая понадобится намъ впослѣдствіи *).**

Теорема. **Прямая (DE, черт. 313), проведенная на плоскости (P) черезъ основаніе наклонной (AC) перпендикулярно къ ея проекціи (BC), перпендикулярна и къ самой наклонной.**



Черт. 313.

Отложимъ произвольные, но равные, отрѣзки CD и CE и соединимъ точки A и B съ D и E. Тогда будемъ имѣть: $BD=BE$, какъ наклонныя къ прямой DE, одинаково удаленныя отъ основанія перпендикуляра BC; $AD=AE$, какъ наклонныя къ плоскости P, имѣющія равныя проекціи BD и BE. Вслѣдствіе этого $\triangle ADE$ есть равнобедренный, и потому его медіана AC перпендикулярна къ основанію DE (39).

ГЛАВА III.

Параллельныя прямыя и плоскости.

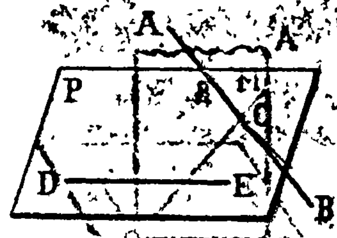
Параллельныя прямыя.

360. Предварительное замѣчаніе. Двѣ прямыя могутъ быть расположены въ пространствѣ такъ, что черезъ нихъ нельзя провести плоскости. Возьмемъ, напр. (черт. 314), двѣ такія прямыя AB и DE, изъ которыхъ одна пересѣкаетъ нѣкоторую плоскость P, а другая лежитъ на ней, но не проходитъ черезъ точку пересѣченія C. Черезъ такія двѣ прямыя нельзя провести плоскости, потому что въ противномъ случаѣ черезъ прямую DE и точку C проходили бы двѣ различныя плоскости: одна P, пересѣкающая прямую AB, и другая, содержащая ее; а это невозможно (348, 1°).

*) Въ нѣкоторыхъ курсахъ геометріи теорема эта (или нѣсколько измѣненная) носитъ названіе **теоремы трехъ перпендикуляровъ.** Дѣйствительно, въ ней говорится о связи, соединяющей слѣдующіе 3 перпендикуляра: 1) AB къ пл. P, 2) BC къ прямой DE и 3) AC къ той же прямой DE.

Двѣ прямыя, не лежащія въ одной плоскости, конечно, не пересѣкаются, сколько бы ихъ ни продолжали; однако ихъ не называютъ параллельными, оставляя это названіе только для такихъ прямыхъ, которыя, находясь въ одной плоскости, не пересѣкаются, сколько бы ихъ ни продолжали.

Двѣ прямыя, не лежащія въ одной плоскости, наз. скрещивающимися.

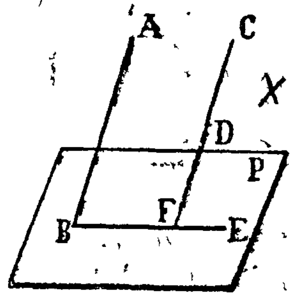


Черт. 314.

Въ планиметріи мы видѣли (77 и 79), что черезъ всякую точку п л о с к о с т и можно провести прямую, параллельную данной прямой, и притомъ только одну. То же самое можно сказать о всякой точкѣ п р о с т р а н с т в а, потому что черезъ точку и данную прямую можно провести плоскость и только одну.

361. Теорема. **Если плоскость (P, черт. 315) пересѣкаетъ одну изъ параллельныхъ прямыхъ (AB), то она пересѣкаетъ и другую (CD).**

Проведемъ черезъ AB и CD плоскость. Эта плоскость содержитъ въ себѣ ту точку B, въ которой прямая AB пересѣкается съ P; значитъ, эта плоскость пересѣкается съ P по нѣкоторой прямой BE (349). Эта прямая, находясь въ одной плоскости съ AB и CD и пересѣкая одну изъ этихъ параллельныхъ, должна пересѣчь и другую (80) въ нѣкоторой точкѣ F. Точка F, находясь заразъ на прямой BE и на прямой CD, должна быть точкою пересѣченія плоскости P съ прямой CD.

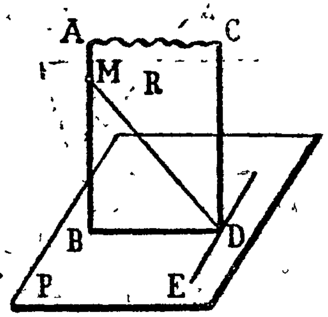


Черт. 315.

362. Теорема. **Если плоскость (P, черт. 316) перпендикулярна къ одной изъ параллельныхъ прямыхъ (AB), то она перпендикулярна и къ другой (CD).**

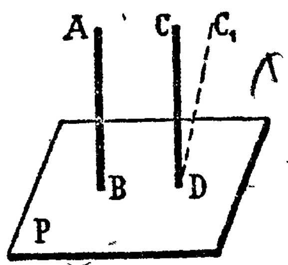
Предстоитъ доказать, что, во 1°, пл. P пересѣкаетъ прямую CD, а во 2°, эта прямая перпендикулярна къ какимъ-нибудь двумъ прямымъ, проведеннымъ на плоскости P черезъ основаніе CD.

1°. Плоскость P должна пересѣчь CD, потому что она, по условію, пересѣкаетъ прямую AB, параллельную CD.

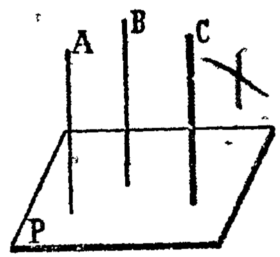


Черт. 316.

2°. Проведемъ черезъ AB и CD плоскость R и возьмемъ ея пересѣченіе BD съ плоскостью P. Такъ какъ, по условію, AB перпендикулярна къ P, то $AB \perp BD$; поэтому и $CD \perp BD$ (82). Проведемъ на плоскости P прямую DE, перпендикулярную къ BD, и возьмемъ какую-нибудь наклонную MD, для которой проекціей служитъ BD. Прямая ED, будучи перпендикулярна къ проекціи BD, должна быть перпендикулярной и къ наклонной MD (359) и, слѣд., перпендикулярна къ плоскости R (352), значитъ, и къ прямой CD. Такимъ образомъ, прямая CD оказывается перпендикулярною къ двумъ прямымъ плоскости P, именно къ DB и къ DE; слѣд., она перпендикулярна къ этой плоскости.



Черт. 317.



Черт. 318.

363. Обратная теорема. Если двѣ прямыя (AB и CD, черт. 317) перпендикулярны къ одной и той же плоскости (P), то онѣ параллельны.

Предположимъ противное, т.-е. что прямыя AB и CD не параллельны. Проведемъ тогда черезъ точку D прямую, параллельную AB. При нашемъ предположеніи это будетъ какая-нибудь прямая DC_1, не сливающаяся съ DC. Согласно прямой теоремѣ, линія DC_1 будетъ перпендикулярна къ пл. P. Тогда, слѣд., мы будемъ имѣть два перпендикуляра къ пл. P, проходящіе

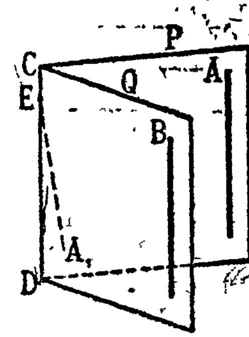
черезъ одну и ту же точку: DC и DC_1. Такъ какъ это невозможно, то нельзя допустить, чтобы прямыя AB и CD были непараллельны.

364. Теорема. Если двѣ прямыя (A и B, черт. 318) параллельны третьей прямой (C), то онѣ параллельны между собой.

Проведемъ плоскость P, перпендикулярную къ C. Тогда A и B будутъ перпендикулярами къ этой плоскости (362), и, слѣд., $A \parallel B$ (363).

365. Теорема. Если двѣ прямыя (A и B, черт. 319) параллельны и черезъ каждую изъ нихъ проходитъ плоскость (P и Q), то линія (CD) пересѣченія этихъ плоскостей (если она существуетъ) параллельна первымъ прямымъ.

Черезъ какую-нибудь точку E линіи пересѣченія вообразимъ прямую A_1, параллельную A; тогда эта прямая должна быть также параллельна и B. Такъ какъ прямая A_1 параллельна A и проходитъ черезъ точку E, то A_1 должна лежать въ плоскости, содержащей прямую A и точку E, т.-е. въ пл. P. Съ другой стороны, такъ какъ прямая A_1 параллельна B и проходитъ черезъ точку E, то A_1 должна лежать въ пл. Q. Если же прямая A_1 лежитъ заразъ и въ пл. P, и въ пл. Q, то она должна совпадать съ линіей пересѣченія CD; значитъ, $CD \parallel A$ и $CD \parallel B$.

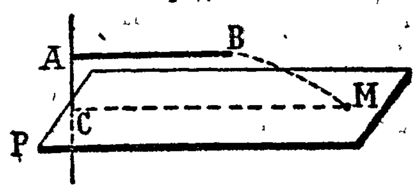


Черт. 319.

Прямая и плоскость, параллельныя между собою.

366. Опредѣленіе. Плоскость и прямая, не лежащая въ этой плоскости, наз. **параллельными**, если онѣ не пересѣкаются, сколько бы ихъ ни продолжали.

Слѣдующія двѣ теоремы выражаютъ **признаки** параллельности прямой съ плоскостью.

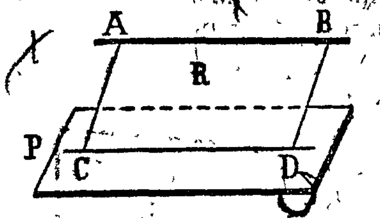


Черт. 320.

367. Теорема I. Если прямая (AB, черт. 320) и плоскость (P) перпендикулярны къ одной и той же прямой (AC), то онѣ параллельны.

Предположимъ, что прямая AB пересѣкается съ пл. P въ нѣкоторой точкѣ M; тогда, соединивъ прямой эту точку съ точкой C, въ которой пл. P пересѣкается съ данной прямой, мы будемъ имѣть два перпендикуляра MC и MA на прямую AC изъ одной точки M, что невозможно; значитъ, AB не пересѣкается съ P, т.-е. AB параллельна P.

Теорема 2. Если прямая (AB, черт. 321), параллельна какой-нибудь прямой (CD), проведенной на плоскости (P), то она параллельна самой плоскости.



Черт. 321.

Проведемъ черезъ AB и CD плоскость R, и предположимъ, что прямая AB гдѣ-нибудь пересѣкается съ пл. P. Тогда точка пересѣченія, находясь на прямой AB, должна принадлежать также и пл. R, на которой лежитъ AB; въ то же время точка пересѣченія, конечно, должна принадлежать и пл. P. Значитъ, точка пересѣченія, находясь заразъ и на пл. R, и на пл. P, должна лежать на прямой CD, по которой пересѣкаются эти плоскости; слѣд., прямая AB пересѣкается съ прямой CD. Но это невозможно, такъ какъ, по условію, $AB \parallel CD$. Значитъ, нельзя допустить, чтобы прямая AB пересѣкалась съ пл. P, и потому $AB \parallel P$.

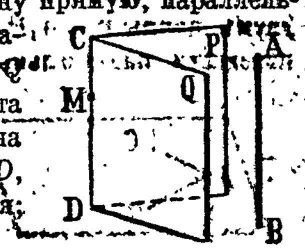
368. Теорема. Если плоскость (R, черт. 321) проходитъ черезъ прямую (AB), параллельную другой плоскости (P), и пересѣкаетъ эту плоскость, то линія пересѣченія (CD) параллельна первой прямой (AB).

Дѣйствительно, во-1-хъ, прямая CD лежитъ въ одной плоскости съ AB, во 2-хъ, эта прямая не можетъ пересѣчься съ AB, потому что въ противномъ случаѣ прямая AB пересѣкалась бы съ плоскостью P, что невозможно.

369. Слѣдствіе. Если прямая (AB, черт. 322), параллельна двумъ пересѣкающимся плоскостямъ (P и Q), то она параллельна линіи ихъ пересѣченія (CD).

Вообразимъ плоскость черезъ AB и какую-нибудь точку M прямой CD. Эта плоскость должна пересѣчься съ P и Q

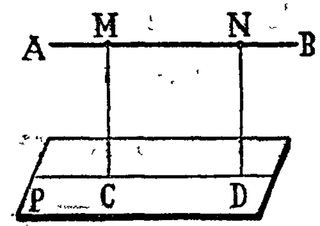
по прямымъ, параллельнымъ AB и проходящимъ черезъ M. Но черезъ M можно провести только одну прямую, параллельную AB; значитъ, два пересѣченія воображаемой плоскости съ плоскостями P и Q должны слиться въ одну прямую. Эта прямая, находясь заразъ на пл. P и на пл. Q, должна совпадать съ прямой CD, по которой плоскости P и Q пересѣкаются; значитъ, $CD \parallel AB$.



Черт. 322.

370. Теорема. Всѣ точки прямой (AB, черт. 323), параллельной плоскости (P), одинаково удалены отъ этой плоскости.

Изъ какихъ-нибудь точекъ M и N прямой AB опустимъ на P перпендикуляры MC и ND. Такъ какъ эти перпендикуляры параллельны (363), то черезъ нихъ можно провести плоскость. Эта плоскость пересѣкается съ P по прямой CD, параллельной AB (368); поэтому фигура $MNDC$ есть параллелограммъ, и слѣд., $MC=ND$. Но длина перпендикуляра, опущеннаго изъ точки на плоскость, принимается за мѣру р а з с т о я н і я этой точки отъ плоскости; значитъ, любыя точки M и N прямой AB одинаково удалены отъ пл. P.



Черт. 323.

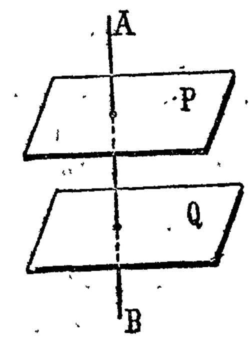
Параллельныя плоскости.

371. Опредѣленіе. Двѣ плоскости наз. параллельными, если онѣ не пересѣкаются, сколько бы ихъ ни продолжали.

Слѣдующія двѣ теоремы выражаютъ признаки параллельности двухъ плоскостей.

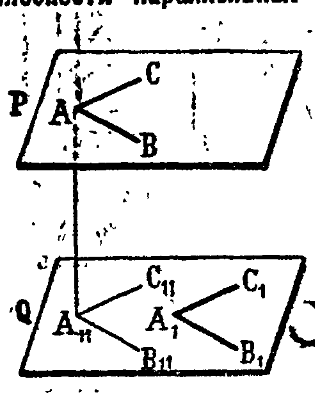
372. Теорема 1. Если двѣ плоскости (P и Q, черт. 324) перпендикулярны къ одной и той же прямой (AB), то онѣ параллельны.

Дѣйствительно, если бы плоскости P и Q пересѣкались, то черезъ всякую точку ихъ пересѣченія проходили бы двѣ плоскости P и Q, перпендикулярныя къ прямой AB, что невозможно.



Черт. 324.

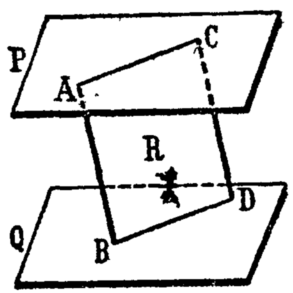
Теорема 2. **Если двѣ пересѣкающіяся прямыя (AB и AC, черт. 325) одной плоскости (P) соотвѣтственно параллельны двумъ прямымъ (A_1B_1 и A_1C_1) другой плоскости (Q), то эти плоскости параллельны.**



Черт. 325.

Изъ точки A опустимъ на плоскость Q перпендикуляръ AA_{11} и проведемъ прямыя $A_{11}B_{11}$ и $A_{11}C_{11}$, параллельныя прямымъ A_1B_1 и A_1C_1; эти прямыя также параллельны и линіямъ AB и AC (364). Такъ какъ $AA_{11} \perp A_{11}B_{11}$ и $AB \parallel A_{11}B_{11}$, то $AA_{11} \perp AB$; такъ же доказывается, что $AA_{11} \perp AC$. Слѣд., $AA_{11} \perp P$ (352). Такимъ образомъ, плоскости P и Q перпендикулярны къ одной и той же прямой AA_{11} и потому параллельны.

373. Теорема. **Если двѣ параллельныя плоскости (P и Q черт. 326) пересѣкаются третьею плоскостью (R), то линіи пересѣченія (AC и BD) параллельны.**



Черт. 326.

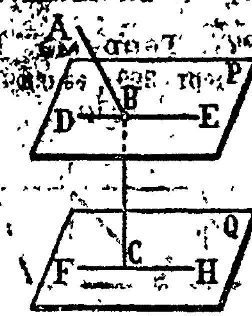
Дѣйствительно, во 1-хъ, прямыя AC и BD находятся въ одной плоскости (R); во 2-хъ, онѣ не могутъ пересѣчься, такъ какъ въ противномъ случаѣ пересѣкались бы плоскости P и Q, что противорѣчитъ условію.

374. Теоремы. **1°. Если прямая пересѣкаетъ одну изъ параллельныхъ плоскостей, то она пересѣкаетъ и другую.**

2°. Если плоскость пересѣкаетъ одну изъ параллельныхъ плоскостей, то она пересѣкаетъ и другую.

1°. Пусть прямая AB (черт. 327) пересѣкаетъ въ точкѣ B плоскость P, параллельную Q. Соединимъ прямою точку B съ какою-нибудь точкою C плоскости Q и черезъ AB и BC проведемъ плоскость (не указана на чертежѣ). Эта плоскость, содержа

въ себѣ точки B и C, пересѣкается съ P и Q по нѣкоторымъ прямымъ DE и FH, которыя параллельны (373). Прямая AB лежитъ въ одной плоскости съ DE и FH и пересѣкаетъ одну изъ этихъ параллельныхъ; слѣд., какъ мы знаемъ изъ планиметріи (80, 1°), она пересѣчетъ и другую; значитъ, пересѣчетъ и плоскость Q.

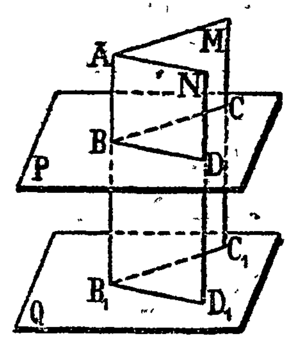


Черт. 327.

2°. Пусть какая-нибудь плоскость пересѣкаетъ плоскость P (черт. 327), параллельную Q. Тогда на ней можно взять прямую AB, которая тоже пересѣкаетъ плоскость P; по доказанному эта прямая пересѣкаетъ и плоскость Q; значитъ, съ этою плоскостью пересѣчется и та плоскость, въ которой взята AB.

375. Теорема. **Если прямая (AB черт. 328) перпендикулярна къ одной изъ параллельныхъ плоскостей (къ P), то она перпендикулярна и къ другой (къ Q).**

Прямая AB, пересѣкая одну изъ параллельныхъ плоскостей, пересѣчетъ и другую въ нѣкоторой точкѣ B_1. Проведемъ черезъ AB какія-нибудь двѣ плоскости M и N, которыя пересѣкутся съ P и Q по параллельнымъ прямымъ (373): одна по BC и B_1C_1, другая по BD и B_1D_1. Согласно условію, прямая AB перпендикулярна къ BC и BD, слѣд., она также перпендикулярна къ B_1C_1 и B_1D_1, а потому перпендикулярна и къ плоскости Q.

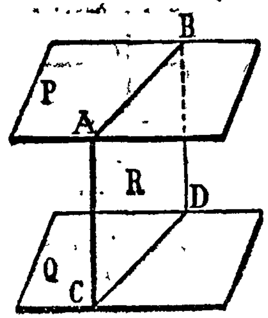


Черт. 328.

376. Теорема. **Черезъ всякую точку (B, черт. 328) пространства можно провести плоскость (P), параллельную данной плоскости (Q) и притомъ только одну.**

Всегда возможно изъ точки B опустить на пл. Q перпендикуляръ BB_1 и затѣмъ черезъ точку B провести пл. P, перпендикулярную къ BB_1. Эта плоскость будетъ параллельна Q (372, 1°). Другой плоскости, параллельной Q, черезъ точку B провести нельзя, такъ какъ, если бы это было возможно, то тогда черезъ точку B проходили бы двѣ плоскости, перпендикулярныя къ BB_1 (375), что невозможно.

377. Теорема. Отрѣзки параллельныхъ прямыхъ (AC и BD, черт. 329), заключенные между параллельными плоскостями (P и Q), равны.

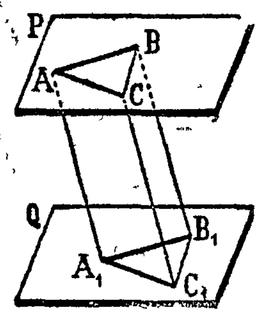


Черт. 329.

Черезъ параллельныя прямыя AC и BD проведемъ плоскость R; она пересѣчетъ P и Q по параллельнымъ прямымъ AB и CD; слѣд., фигура $ABCD$ будетъ параллелограммъ, и потому $AC=BD$.

378. Слѣдствіе. Параллельныя плоскости вездѣ одинаково удалены одна отъ другой, потому что если параллельныя прямыя AC и BD (черт. 329) будутъ перпендикулярны къ P, то онѣ также будутъ перпендикулярны къ Q и въ то же время равны.

379. Теорема. Два угла (BAC и $B_1A_1C_1$, черт. 330) съ соотвѣтственно параллельными и одинаково направленными сторонами равны и лежатъ въ параллельныхъ плоскостяхъ P и Q.



Черт. 330.

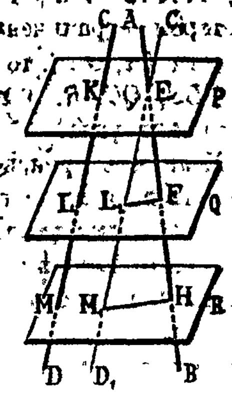
Что плоскости P и Q параллельны, было доказано прежде (372, 2°); остается доказать, что углы A и A_1 равны.—

Отложимъ $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$ и проведемъ AA_1, BB_1, CC_1, BC и B_1C_1. Такъ какъ отрѣзки AB и A_1B_1 равны и параллельны, то фигура ABB_1A_1 есть параллелограммъ (99, 2°); поэтому отрѣзки AA_1 и BB_1 равны и параллельны. По той же причинѣ равны и параллельны отрѣзки AA_1 и CC_1; слѣд., $BB_1 \parallel CC_1$ и $BB_1=CC_1$. Поэтому $BC=B_1C_1$ и $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ (по тремъ сторонамъ) значитъ, $\angle A=\angle A_1$.

380. Теорема. Двѣ прямыя (AB и CD, черт. 331) пересѣкаются рядомъ параллельныхъ плоскостей (P, Q, R...) на пропорціональныя части.

Пусть E, F, H... будутъ точки пересѣченія прямой AB съ данными плоскостями и K, L, M...—точки пересѣченія другой прямой CD съ тѣми же плоскостями. Проведемъ черезъ точку E прямую C_1D_1, параллельную CD, и черезъ двѣ пересѣкающіяся прямыя AB и C_1D_1 вообразимъ плоскость. Прямыя L_1F, M_1H..., по которымъ эта плоскость пересѣкается съ данными плоскостями, должны быть параллельны между собою (373); поэтому (219):

$$\frac{EF}{EL_1}=\frac{FH}{L_1M_1}=\ldots$$



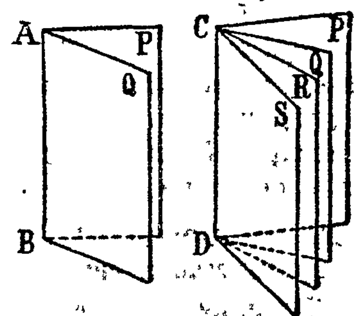
Черт. 331.

Но $EL_1=KL$, $L_1M_1=LM$,... (377); подставивъ въ полученный рядъ равныхъ отношеній отрѣзки KL, LM... вмѣсто EL_1, L_1M_1..., получимъ то, что требовалось доказать.

ГЛАВА IV.

Двугранные углы.

381. Опредѣленія. Фигура, образованная двумя полуплоскостями (P и Q, черт. 332), исходящими изъ одной прямой (AB), наз. двуграннымъ угломъ. Прямая AB наз. ребромъ, а полуплоскости P и Q—сторонами или гранями двуграннаго угла.

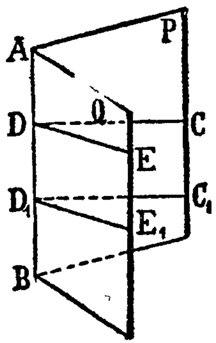


Черт. 332.

Такой уголъ обозначается обыкновенно двумя буквами, поставленными у его ребра (двугр. уголъ AB). Но если при одномъ ребрѣ лежатъ нѣсколько двугранныхъ угловъ, то каждый изъ нихъ обозначаютъ 4-мя буквами, изъ которыхъ двѣ среднія стоятъ при ребрѣ, а двѣ крайнія у граней (напр., двугр. уголъ $SCDR$).

Если черезъ ребро (CD, черт. 332) двуграннаго угла ($PCDS$) проведемъ внутри его (т.-е. въ той части пространства которая ограничена гранями угла) какія-нибудь полуплоскости (R, Q...), то образовавшіеся при этомъ двугранные углы ($RCDS$, $QCDR$...) разсматриваются, какъ части перваго двуграннаго угла.

Если изъ произвольной точки D ребра AB (черт. 333) проведемъ на каждой грани по перпендикуляру къ ребру, то образованный ими уголъ CDE наз. **линейнымъ** угломъ двуграннаго. Величина линейнаго угла не зависитъ отъ положенія точки D на ребрѣ. Такъ, линейные углы CDE и $C_1D_1E_1$ равны, потому что ихъ стороны соотвѣтственно параллельны и одинаково направлены.



Черт. 333.

Плоскость линейнаго угла перпендикулярна къ ребру, такъ какъ она содержитъ двѣ прямыя, перпендикулярныя къ нему (352).

382. Равенство и неравенство двугранныхъ угловъ. Два двугранные угла считаются **равными**, если они при вложеніи могутъ совмѣститься; въ противномъ случаѣ тотъ изъ угловъ считается меньшимъ, который составитъ часть другого угла.

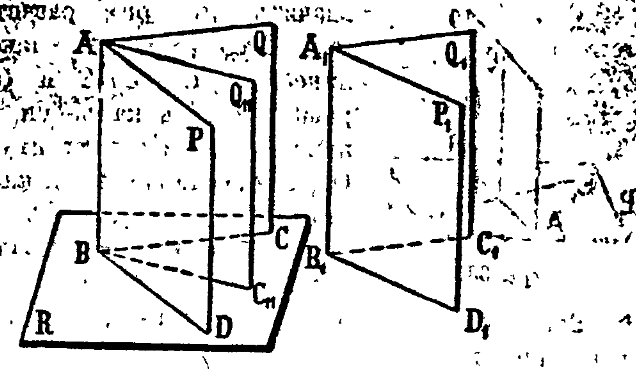
Можно разсматривать сумму, разность, произведеніе и частное двугранныхъ угловъ въ томъ же смыслѣ, какъ и для угловъ планиметріи. Подобно этимъ угламъ двугранные углы могутъ быть **смежные**, **прямые**, **вертикальные**...

383. Теоремы. 1°. **Равнымъ двуграннымъ угламъ соотвѣтствуютъ равные линейные углы.**

2°. **Большему двугранному углу соотвѣтствуетъ большій линейный уголъ.**

Пусть $PABQ$ и $P_1A_1B_1Q_1$ (черт. 334) будутъ два двугранные угла. Вложимъ уголъ A_1B_1 въ уголъ AB такъ, чтобы ребро A_1B_1 совпало съ ребромъ AB и грань P_1 съ гранью P. Тогда, если эти двугранные углы равны, то грань Q_1 совпадетъ съ Q; если же

двугранные углы не равны, то грань Q_1 не совпадетъ съ Q; напр., она займетъ нѣкоторое положеніе Q_{11}, если уголъ A_1B_1 будетъ меньше угла AB.



Черт. 334.

Замѣтивъ это, возьмемъ на общемъ ребрѣ какую-нибудь точку B и проведемъ черезъ нее плоскость R, перпендикулярную къ ребру. Отъ пересѣченія этой плоскости съ гранями двугранныхъ угловъ получатся линейные углы. Ясно, что если двугранные углы совпадутъ, то у нихъ окажется одинъ и тотъ же линейный уголъ, именно CBD; если же двугранные углы не совпадутъ, если, напр., грань Q_1 займетъ положеніе Q_{11}, то у большаго двуграннаго угла окажется большій линейный уголъ (именно: $CBD > C_{11}BD$).

384. Обратныя теоремы. 1°. **Равнымъ линейнымъ угламъ соотвѣтствуютъ равные двугранные углы.**

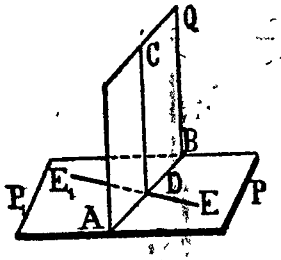
2°. **Большему линейному углу соотвѣтствуетъ большій двугранный уголъ.**

Эти теоремы легко доказываются отъ противнаго (51).

385. Замѣчаніе. Мы принимаемъ за очевидное, что **вложеніе** одной фигуры въ другую, часто употребляемое въ стереометріи, всегда можетъ быть выполнено въ такой послѣдовательности: во 1°, совмѣщаемъ какія-нибудь двѣ точки фигуръ; во 2°, какія-нибудь двѣ полупрямыя, исходящія изъ совпавшихъ точекъ, и, въ 3°, какія-нибудь двѣ полуплоскости, исходящія изъ совпавшихъ прямыхъ. Совмѣстятся ли при этомъ другіе элементы фигуръ, зависитъ отъ свойствъ ихъ.

386. Слѣдствія. **1°. Прямому двугранному углу соотвѣтствуетъ прямой линейный уголъ и обратно.**

Пусть (черт. 335) двугранный уголъ $PABQ$ прямой. Это значитъ, что онъ равенъ смежному углу $QABP_1$. Но въ такомъ случаѣ линейные углы CDE и CDE_1 также равны; а такъ какъ они смежные, то каждый изъ нихъ долженъ быть прямой. Обратно, если равны смежные линейные углы CDE и CDE_1, то равны и смежные двугранные углы, т.-е. каждый изъ нихъ долженъ быть прямой.



Черт. 335.

2°. Всѣ прямые двугранные углы равны, потому что у нихъ равны линейные углы. По той же причинѣ:

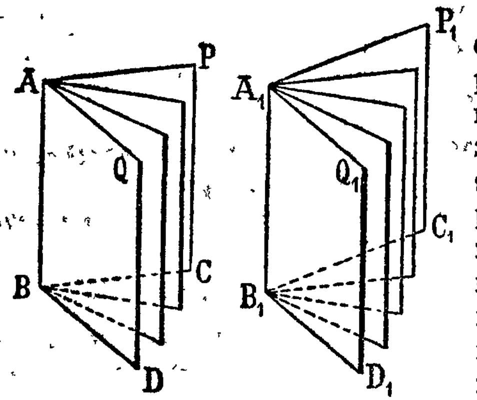
3°. Вертикальные двугранные углы равны.

4°. Двугранные углы съ соотвѣтственно параллельными и одинаково направленными гранями равны.

387. Теорема. **Двугранные углы относятся, какъ ихъ линейные углы.**

При доказательствѣ разсмотримъ особо два случая:

1°. Линейные углы CBD и $C_1B_1D_1$ соизмѣримы (черт. 336). Пусть ихъ общая мѣра содержится въ первомъ углѣ m разъ, а во второмъ n разъ. Проведемъ рядъ плоскостей черезъ ребра и прямыя, дѣлящія линейные углы на части, равныя общей мѣрѣ; тогда мы раздѣлимъ уголъ AB на m, а уголъ A_1B_1 на n частей, которыя всѣ равны между собою (вслѣдствіе равенства линейныхъ угловъ). Поэтому:



Черт. 336.

$$\frac{\angle CBD}{\angle C_1B_1D_1}=\frac{m}{n} \quad \text{и} \quad \frac{\text{дв. уг. } AB}{\text{дв. уг. } A_1B_1}=\frac{m}{n}.$$

Откуда:
$$\frac{\text{дв. уг. } AB}{\text{дв. уг. } A_1B_1}=\frac{\angle CBD}{\angle C_1B_1D_1}.$$

2°. Линейные углы несоизмѣримы. Раздѣлимъ (черт. 336) уголъ $C_1B_1D_1$ на n равныхъ частей. Пусть $^1/_n$ этого угла содержится въ углѣ CBD болѣе m, но менѣе $m+1$ разъ. Тогда приближенное отношеніе угловъ CBD и $C_1B_1D_1$ съ точностью до $^1/_n$ (съ недост.), равно $^m/_n$. Проведя плоскости такъ же, какъ и въ первомъ случаѣ, найдемъ, что приближенное отношеніе двугранныхъ угловъ AB и A_1B_1, съ точностью до $^1/_n$ (съ недост.), также равно $^m/_n$. Такимъ образомъ, приближенныя отношенія оказываются равными при всякомъ n; а это служитъ, какъ мы знаемъ (159), признакомъ равенства ирраціональныхъ отношеній.

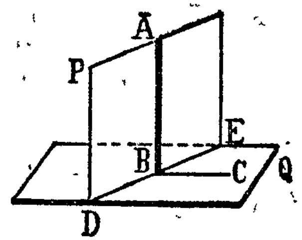
388. Слѣдствіе. Если за единицу двугранныхъ угловъ возьмемъ такой уголъ, который соотвѣтствуетъ единицѣ линейныхъ угловъ, то можно сказать, что **двугранный уголъ измѣряется его линейнымъ угломъ.**

Перпендикулярныя плоскости.

389. Опредѣленіе. Двѣ плоскости наз. **взаимно перпендикулярными**, если, пересѣкаясь, онѣ образуютъ прямые двугранные углы.

Возможность существованія такихъ плоскостей обнаруживается слѣдующей теоремой, указывающей признакъ перпендикулярности двухъ плоскостей.

390. Теорема. **Если плоскость (P, черт. 337) проходитъ черезъ перпендикуляръ (AB) къ другой плоскости (Q), то она перпендикулярна къ этой плоскости.**

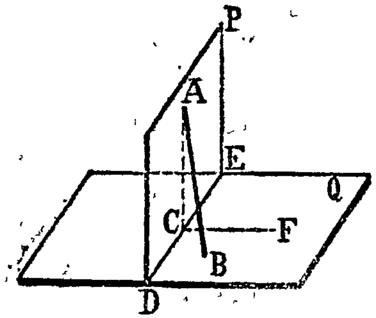


Черт. 337.

Пусть DE будетъ линія пересѣченія P и Q. На плоскости Q проведемъ $BC \perp DE$. Тогда уг. ABC будетъ линейнымъ угломъ двуграннаго угла $PDEQ$. Такъ какъ прямая AB, по условію, перпендикулярна къ Q, то $AB \perp BC$; значитъ, уг. ABC прямой, а потому и двугранный уголъ прямой (386), т.-е. пл. P перпендикулярна къ Q.

391. Теорема. Если двѣ плоскости (P и Q, черт. 338) взаимно перпендикулярны и къ одной изъ нихъ (къ Q) проведенъ перпендикуляръ (AB), имѣющій общую точку (A) съ другою плоскостью (съ P), то онъ весь лежитъ въ этой плоскости.

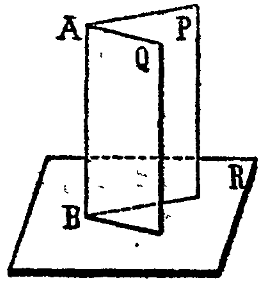
Предположимъ, что AB не лежитъ въ плоскости P (какъ изображено у насъ на чертежѣ). Пусть DE будетъ линія пересѣченія P и Q. На плоскости P проведемъ $AC \perp DE$, а на пл. Q $CF \perp DE$. Тогда уголъ ACF, какъ линейный уголъ прямого двуграннаго угла, будетъ прямой. Поэтому линія AC, образуя прямые углы съ DE и CF, будетъ перпендикуляромъ къ пл. Q. Мы будемъ имѣть тогда 2 перпендикуляра, опущенные изъ одной и той же точки A на пл. Q, именно AB и AC. Такъ какъ это невозможно, то нельзя допустить, чтобы перпендикуляръ AB не лежалъ въ пл. P.



Черт. 338.

392. Слѣдствіе. Пересѣченіе (AB, черт. 339) **двухъ плоскостей (P и Q), перпендикулярныхъ къ третьей плоскости (R), есть перпендикуляръ къ этой плоскости.**

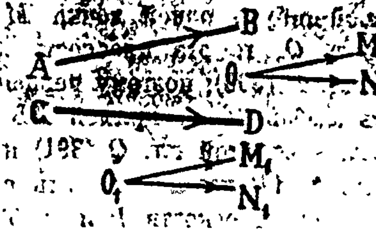
Дѣйствительно, если черезъ какую-нибудь точку A линіи пересѣченія вообразимъ перпендикуляръ къ пл. R, то этотъ перпендикуляръ, согласно предыдущей теоремѣ, долженъ лежать и въ пл. Q, и въ пл. P; значитъ, онъ сольется съ AB.



Черт. 339.

Уголъ двухъ скрещивающихся прямыхъ.

393. Опредѣленіе. Угломъ двухъ скрещивающихся прямыхъ (AB и CD, черт. 340) *), которыхъ дано положеніе и направленіе, наз. уголъ (MON), который получится, если изъ произвольной точки пространства (O) проведемъ полупрямыя (OM и ON), соотвѣтственно параллельныя даннымъ прямымъ (AB и CD) и одинаково съ ними направленныя.



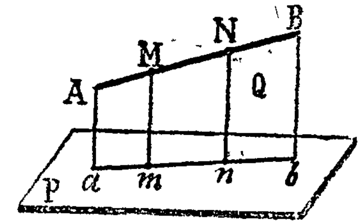
Черт. 340.

Величина этого угла не зависитъ отъ положенія точки O, такъ какъ если построимъ указаннымъ путемъ уголъ $M_1O_1N_1$ при какой-нибудь другой точкѣ O_1, то $MON = M_1O_1N_1$, такъ какъ эти углы имѣютъ соотвѣтственно параллельныя и одинаково направленныя стороны (364 и 379).

Уголъ, образуемый прямой съ плоскостью.

394. Проекція прямой на плоскость. Мы говорили ранѣе (357), что когда изъ одной точки проведены къ плоскости перпендикуляръ и наклонная, то проекціей этой наклонной на плоскость наз. прямая, соединяющая основаніе перпендикуляра съ основаніемъ наклонной. Дадимъ теперь болѣе **общее опредѣленіе проекціи.**

1°. Проекціей какой-нибудь точки на плоскость (напр., точки M на плоскость P, черт. 341) наз. основаніе (m) перпендикуляра, опущеннаго на эту плоскость изъ взятой точки.



Черт. 341.

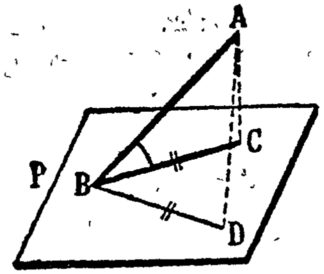
2°. Проекціей какой-нибудь линіи на плоскость наз. геометрическое мѣсто проекцій всѣхъ точекъ этой линіи.

*) Надо мысленно представить, что на черт. 340 прямая CD лежитъ въ плоскости чертежа, а прямая AB пересѣкаетъ эту плоскость.

Въ частности, если проектируемая линія есть прямая (напр., AB, черт. 341), то проекція ея на плоскость (P) есть также прямая. Въ самомъ дѣлѣ, если мы черезъ прямую AB и перпендикуляръ Mm, опущенный на плоскость проекцій изъ какой-нибудь одной точки M этой прямой, проведемъ плоскость Q, то эта плоскость должна быть перпендикулярной къ пл. P (390); поэтому перпендикуляръ, опущенный на пл. P изъ любой точки прямой AB (напр. изъ точки N), долженъ лежать въ этой пл. Q (391) и, слѣд., проекціи всѣхъ точекъ прямой AB должны лежать на прямой ab, по которой пересѣкаются плоскости P и Q. Такимъ образомъ, эта прямая ab представляетъ собою геометрическое мѣсто проекцій всѣхъ точекъ данной прямой AB, и, слѣд., есть ея проекція.

Существуетъ, впрочемъ, одинъ частный случай, когда проекція прямой обращается въ точку; это бываетъ тогда, когда прямая перпендикулярна къ плоскости проекцій.

395. Уголъ прямой съ плоскостью. Угломъ прямой (AB, черт. 342) съ плоскостью (P) въ томъ случаѣ, когда прямая наклонна къ плоскости, наз. уголъ (ABC), составленный этою прямою съ ея проекціей на плоскость.



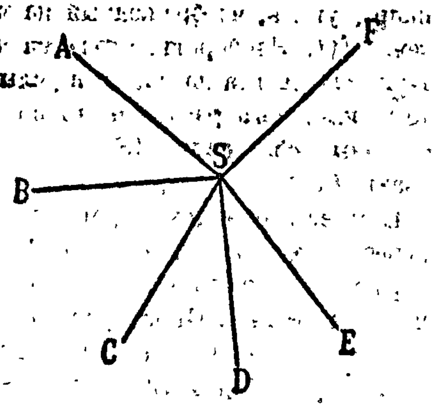
Черт. 342.

Уголъ этотъ обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что онъ есть наименьшій изъ всѣхъ угловъ, которые наклонная образуетъ съ прямыми, проведенными на плоскости P черезъ основаніе наклонной. Докажемъ, напр., что $\angle ABC$ меньше $\angle ABD$. Для этого отложимъ $BD=BC$ и соединимъ D съ A. У тр-ковъ ABC и ABD двѣ стороны одного равны соотвѣтственно двумъ сторонамъ другого, но третьи стороны не равны, а именно $AD>AC$ (357). Вслѣдствіе этого $\angle ABD$ больше $\angle ABC$ (58, 2°).

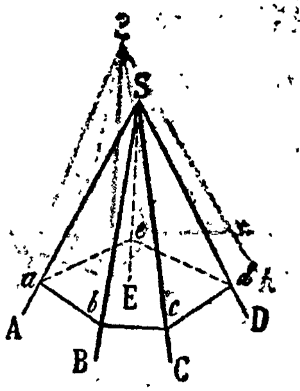
ГЛАВА V.

Многогранные углы.

396. Опредѣленія. Возьмемъ нѣсколько угловъ (черт. 343): ASB, BSC, CSD..., которые, примыкая послѣдовательно одинъ къ другому, расположены въ одной плоскости вокругъ общей вершины S. Повернемъ плоскость угла ASB вокругъ общей стороны SB такъ, чтобы эта плоскость составила нѣкоторый двугранный уголъ съ пл. BSC. Затѣмъ, не измѣняя получившагося двуграннаго угла, повернемъ его вокругъ прямой SC такъ, чтобы пл. BSC составила нѣкоторый двугранный уголъ съ пл. CSD. Продолжаемъ такое послѣдовательное вращеніе вокругъ каждой общей стороны. Если при этомъ послѣдняя сторона SF совмѣстится съ первою стороною SA, то образуется фигура (черт. 344), которая называется многограннымъ угломъ. Углы ASB, BSC... наз. плоскими углами или гранями, стороны ихъ SA, SB... наз. ребрами, а общая вершина S—вершиною многограннаго угла. Каждому ребру соотвѣтствуетъ свой двугранный уголъ; поэтому въ многогранномъ углѣ столько двугранныхъ угловъ и столько плоскихъ, сколько въ немъ всѣхъ реберъ. Наименьшее число граней въ многогранномъ углѣ три; такой уголъ наз. треграннымъ. Могутъ быть углы четырегранные, пятигранные и т. д.



Черт. 343.

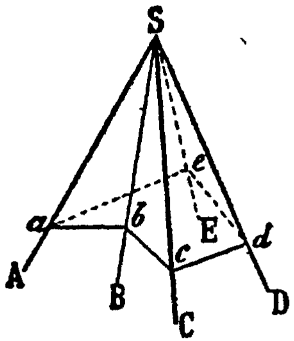


Черт. 344.

Часть пространства, ограниченная гранями многограннаго угла, разсматривается, какъ лежащая внутри этого угла.

Многогранный уголъ (черт. 344) обозначается или одною буквою S, поставленною у вершины, или же рядомъ буквъ $SABCDE$, изъ которыхъ первая обозначаетъ вершину, а прочія—ребра по порядку ихъ расположенія.

Многогранный уголъ наз. выпуклымъ, если онъ весь расположенъ по одну сторону отъ каждой своей грани. Таковъ, напр., уголъ, изображенный на чертежѣ 344. Наоборотъ, уголъ на чертежѣ 345 нельзя назвать выпуклымъ, такъ какъ онъ расположенъ по обѣ стороны отъ грани ASB, или отъ грани BSC.



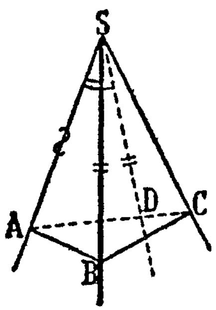
Черт. 345.

Если всѣ грани многограннаго угла пересѣчемъ плоскостью, то въ сѣченіи образуется многоугольникъ ($abcde$, черт. 344 и 345). Въ выпукломъ углѣ этотъ многоугольникъ тоже выпуклый.

Мы будемъ разсматривать только выпуклые многогранные углы.

397. Теорема. Во всякомъ трегранномъ углѣ каждый плоскій уголъ меньше суммы двухъ другихъ плоскихъ угловъ.

Очевидно, теорема эта нуждается въ доказательствѣ только въ томъ случаѣ, когда она примѣняется къ плоскому углу, наибольшему изъ трехъ. Пусть въ углѣ $SABC$ (черт. 346) наибольшій изъ плоскихъ угловъ есть ASC. Отложимъ на этомъ углѣ часть ASD, равную ASB, и проведемъ какую-нибудь прямую AC, пересѣкающую SD въ нѣкоторой точкѣ D. Отложимъ $SB=SD$. Соединивъ B съ A и C, получимъ $\triangle ACB$, въ которомъ:



Черт. 346.

$$AD+DC<AB+BC.$$

Тр-ки ASD и ASB равны, такъ какъ они содержатъ по равному углу, заключенному между равными сторонами;

слѣд., $AD=AB$. Поэтому въ выведенномъ неравенствѣ можно отбросить части AD и AB:

$$DC<BC.$$

Теперь замѣчаемъ, что у тр-ковъ SCD и SCB двѣ стороны одного равны двумъ сторонамъ другого, а третьи стороны неравны; въ такомъ случаѣ противъ бо́льшей изъ этихъ сторонъ лежитъ бо́льшій уголъ (58, 2°); значитъ:

$$\text{уголъ } CSD<\text{угла } CSB.$$

Приложивъ къ лѣвой части этого неравенства уголъ ASD, а къ правой равный ему уголъ ASB, получимъ неравенство, которое требовалось доказать:

$$\text{уголъ } ASC<\text{угл. } CSB+\text{уг. } ASB.$$

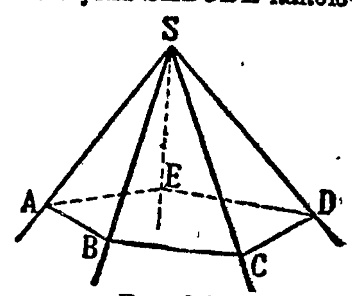
Слѣдствіе. Отнявъ отъ обѣихъ частей послѣдняго неравенства по углу ASB или по углу CSB, получимъ:

$$\text{уголъ } ASC-\text{уг. } ASB<\text{уг. } CSB;$$
$$\text{уголъ } ASB-\text{уг. } CSB<\text{уг. } ASB.$$

Разсматривая эти неравенства справа налѣво и принявъ во вниманіе, что уголъ ASC, наибольшій изъ трехъ угловъ, конечно, больше разности двухъ другихъ угловъ, мы можемъ сказать: **въ трегранномъ углѣ каждый плоскій уголъ больше разности двухъ другихъ угловъ.**

398. Теорема. Во всякомъ выпукломъ многогранномъ углѣ сумма всѣхъ плоскихъ угловъ меньше $4d$.

Пересѣчемъ грани (черт. 347) выпуклаго угла $SABCDE$ какою-нибудь плоскостью *); отъ этого въ сѣченіи получимъ выпуклый n-угольникъ $ABCDE$. Примѣняя теорему предыдущаго параграфа къ каждому изъ трегранныхъ угловъ, образовавшихся при точкахъ A, B, C, D и E, находимъ: $ABC<ABS+SBC$; $BCD<BCS+$ $+SCD$... Сложимъ почленно всѣ



Черт. 347.

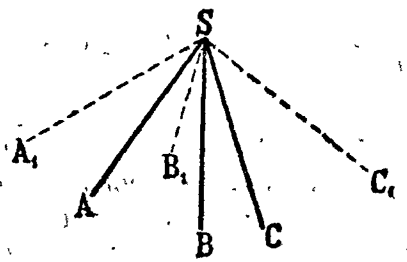
*) Мы принимаемъ безъ доказательства (хотя оно и существуетъ), какъ очевидную истину, что всегда возможно провести такую сѣкущую плоскость, которая пересѣкаетъ всѣ ребра многограннаго угла, если только этотъ уголъ выпуклый.

эти неравенства. Тогда въ лѣвой части получимъ сумму всѣхъ угловъ многоугольника $ABCDE$, которая равна $2dn-4d$ (89), а въ правой—сумму угловъ тр-ковъ ASB, BSC... кромѣ тѣхъ угловъ, которые лежатъ при вершинѣ S. Обозначивъ сумму этихъ послѣднихъ угловъ буквою x, мы получимъ послѣ сложенія:

$$2dn-4d<2dn-x; \quad \text{откуда: } x<4d.$$

Равенство трехгранныхъ угловъ.

399. Дополнительный уголъ. Изъ вершины S (черт. 348) треграннаго угла $SABC$ возставимъ къ грани ASB перпендикуляръ SC_1, направляя его въ ту сторону отъ этой грани, въ которой расположено противоположное ребро SC. Подобно этому проведемъ перпендикуляръ SA_1 къ грани BSC и SB_1 къ грани ASC. Трегранный уголъ, у котораго ребрами служатъ полупрямыя SA_1, SB_1 и SC_1, наз. *дополнительнымъ* для угла $SABC$.



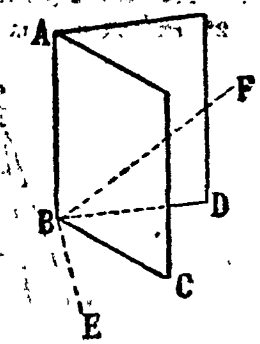
Черт. 348.

Замѣтимъ, что если для угла $SABC$ дополнительнымъ угломъ служитъ уголъ $SA_1B_1C_1$, то и наоборотъ: для уг. $SA_1B_1C_1$ дополнительнымъ угломъ будетъ $SABC$. Дѣйствительно, плоскость SA_1B_1, проходя черезъ перпендикуляры къ плоскостямъ BSC и ASC, перпендикулярна къ нимъ обѣимъ, а слѣд., и къ линіи ихъ пересѣченія SC; значитъ, прямая SC есть перпендикуляръ къ грани SA_1B_1 и, кромѣ того, она расположена по ту же сторону отъ этой грани, по которую лежитъ ребро SC_1. Подобно этому убѣдимся, что прямыя SB и SA соотвѣтственно перпендикулярны къ гранямъ SA_1C_1 и SB_1C_1 и расположены по ту сторону отъ нихъ, по которую лежатъ ребра SB_1 и SA_1. Значитъ, углы $SABC$ и $SA_1B_1C_1$ *взаимно дополнительны*.

400. Лемма 1. Если два трегранные угла взаимно дополнительны, то плоскіе углы одного служатъ дополненіемъ до $2d$ къ противоположнымъ двуграннымъ угламъ другого.

Каждый плоскій уголъ одного изъ взаимно дополнительныхъ трегранныхъ угловъ образованъ двумя *перпендикулярами*, возставленными къ гранямъ противоположнаго двуграннаго угла другого трегранннаго, изъ одной точки его ребра. Замѣтивъ это и принявъ во вниманіе направленіе перпендикуляровъ, возьмемъ какой-нибудь

двугранный уголъ AB (черт. 349) и изъ произвольной точки B его ребра возставимъ перпендикуляры: BE къ грани AD и BF къ грани AC, и затѣмъ черезъ BE и BF вообразимъ плоскость, которая должна быть перпендикулярна къ ребру AB (390, 392). Пусть пересѣченія этой плоскости съ гранями угла AB будутъ прямыя BC и BD. Тогда уголъ CBD долженъ быть линейнымъ угломъ двуграннаго AB. Такъ какъ стороны угла EBF соотвѣтственно перпендикулярны къ сторонамъ угла CBD, и эти углы неравны, то сумма ихъ равна $2d$ (86); что и требовалось доказать.



Черт. 349.

401. Лемма 2. Равнымъ треграннымъ угламъ соотвѣтствуютъ равные дополнительные углы и обратно.

Равные трегранные углы при вложеніи совмѣщаются; поэтому совмѣщаются и тѣ перпендикуляры, которые образуютъ ребра дополнительныхъ угловъ; значитъ, дополнительные углы также совмѣщаются.

Обратно: если совмѣщаются дополнительные углы, то совмѣщаются и данные углы.

402 Теоремы. Трегранные углы равны, если они имѣютъ:

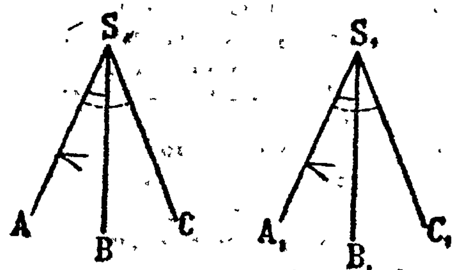
1°, по равному двугранному углу, заключенному между двумя соотвѣтственно равными и одинаково расположенными, плоскими углами;

или 2°, по равному плоскому углу, заключенному между двумя соотвѣтственно равными и одинаково расположенными двугранными углами;

или 3°, по три соотвѣтственно равныхъ и одинаково расположенныхъ плоскихъ угла;

или 4°, по три соотвѣтственно равныхъ и одинаково расположенныхъ двугранныхъ угла.

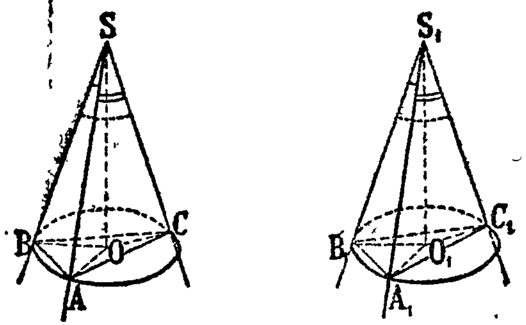
1°. Пусть S и S_1 два трегранные угла (черт. 350), у которыхъ: $\angle ASB=\angle A_1S_1B_1$, $\angle ASC=\angle A_1S_1C_1$ и двугр. уг. $AS=$ двугр. уг. A_1S_1. Вложимъ уголъ S_1 въ уголъ S такъ, чтобы у нихъ совпали: точка S_1 съ S, прямая S_1A_1 съ SA и плоскость $A_1S_1B_1$ съ ASB. Тогда



Черт. 350.

ребро S_1B_1 пойдетъ по SB (по равенству угловъ $A_1S_1B_1$ и ASB), плоскость $A_1S_1C_1$ пойдетъ по ASC (по равенству двугранныхъ угловъ), и ребро S_1C_1—по SC (по равенству угловъ $A_1S_1C_1$ и ASC). Такимъ образомъ, трегранные углы совмѣстятся всѣми своими ребрами, т.-е. они будутъ равны.

2°. Второй признакъ доказывается вложенiемъ подобно первому.



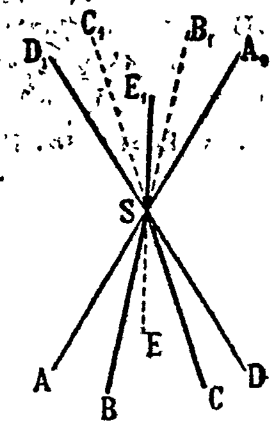
Черт. 351.

3°. Пусть S и S_1 (черт. 351) два трегранные угла, у которыхъ плоскiе углы одного равны соотвѣтственно плоскимъ угламъ другого, и, кромѣ того, равные углы одинаково расположены. Отложимъ на всѣхъ ребрахъ произвольные, но равные, отрѣзки $SA=SB=SC=S_1A_1=\ldots$ и построимъ тр-ки ABC и $A_1B_1C_1$. Изъ равенства тр-ковъ ABS и $A_1B_1S_1$ находимъ: $AB=A_1B_1$. Подобно этому изъ равенства другихъ боковыхъ тр-ковъ выводимъ: $AC=A_1C_1$ и $BC=B_1C_1$. Слѣд., $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$. Опустимъ на плоскости этихъ тр-ковъ перпендикуляры SO и S_1O_1. Такъ какъ наклонныя SA, SB и SC равны, то должны быть равны ихъ проекцiи OA, OB и OC; значитъ, точка O есть центръ круга, описаннаго около тр-ка ABC. Точно такъ же точка O_1 есть центръ круга, описаннаго около тр-ка $A_1B_1C_1$. У равныхъ тр-ковъ радiусы описанныхъ круговъ равны; значитъ, $OB=O_1B_1$. Поэтому $\triangle SBO=\triangle S_1B_1O_1$ (по гипотенузѣ и катету), и, слѣд., $OS=O_1S_1$. Вложимъ теперь фигуру $S_1A_1B_1C_1$ въ фигуру $SABC$ такъ, чтобы равные тр-ки $A_1B_1C_1$ и ABC совмѣстились; тогда совмѣстятся описанныя окружности, и, слѣд., ихъ центры O_1 и O; вслѣдствiе этого перпендикуляръ O_1S_1 пойдетъ по OS и точка S_1 упадетъ въ S. Такимъ образомъ, трегранные углы совмѣстятся всѣми своими ребрами.

4°. Четвертый признакъ легко доказывается при помощи дополнительныхъ угловъ. Если у двухъ трегранныхъ угловъ соотвѣтственно равны и одинаково расположены д в у г р а н н ы е углы, то у дополнительныхъ угловъ соотвѣтственно равны и одинаково расположены п л о с к i е углы (400); слѣд., дополнительные углы равны; если равны дополнительные, то равны и данные углы (401).

403. Симметричные многогранные углы. Какъ извѣстно, вертикальные углы равны, если рѣчь идетъ объ углахъ, образованныхъ прямыми или плоскостями. Посмотримъ, примѣнима ли эта истина къ угламъ многограннымъ.

Продолжимъ (черт. 352) всѣ ребра угла $SABCDE$ за вершину; тогда образуемъ другой многогранный уголъ $SA_1B_1C_1D_1E_1$, который можно назвать в е р т и к а л ь н ы м ъ по отношенiю къ первому углу. Не трудно видѣть, что у обоихъ угловъ равны соотвѣтственно и плоскiе углы, и двугранные; но тѣ и другiе расположены в ъ о б р а т н о м ъ п о р я д к ѣ. Дѣйствительно, если мы вообразимъ наблюдателя, который смотритъ извнѣ многограннаго угла на его вершину, то ребра SA, SB, SC, SD, SE будутъ казаться ему расположенными противъ движенiя часовой стрѣлки, тогда какъ, смотря на уголъ $SA_1B_1C_1D_1E_1$, онъ увидитъ ребра SA_1, SB_1,... расположенными по движенiю часовой стрѣлки.



Черт. 352.

Многогранные углы съ соотвѣтственно равными плоскими и двугранными углами, но расположенными въ обратномъ порядкѣ, вообще не могутъ совмѣститься при вложенiи; значитъ, они не равны. Такiе углы называются с и м м е т р и ч н ы м и (относительно вершины S).

КНИГА II.

МНОГОГРАННИКИ.

ГЛАВА I.

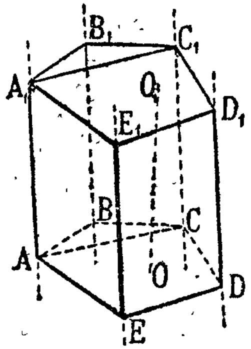
Свойства параллелепипеда и пирамиды.

404. Многогранникъ. М н о г о г р а н н и к о м ъ наз. тѣло, ограниченное со всѣхъ сторонъ плоскостями. Многоугольники, образованные пересѣченiемъ этихъ плоскостей, наз. г р а н я м и, ихъ стороны—р е б р а м и, а вершины—в е р ш и н а м и многогранника. Прямыя, соединяющiя двѣ какiя-нибудь вершины, не лежащiя на одной грани, наз. д i а г о н а л я м и многогранника.

Мы будемъ разсматривать только *выпуклые* многогранники, т.-е. такіе, которые расположены по одну сторону отъ каждой своей грани.

Наименьшее число граней въ многогранникѣ четыре; такой многогранникъ получается отъ пересѣченія треграннаго угла какою-нибудь плоскостью.

405. Призма. *Призмою* наз. многогранникъ, у котораго двѣ грани—равные многоугольники съ соотвѣтственно параллельными сторонами, а всѣ остальныя грани—*параллелограммы*.



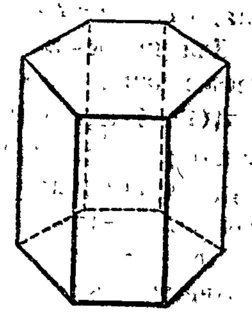
Черт. 353.

Чтобы показать возможность существованія такого многогранника, возьмемъ (черт. 353) какой-нибудь многоугольникъ $ABCDE$ и черезъ его вершины проведемъ рядъ параллельныхъ прямыхъ, не лежащихъ въ его плоскости. Взявъ затѣмъ на одной изъ этихъ прямыхъ произвольную точку A_1, проведемъ черезъ нее плоскость, параллельную плоскости $ABCDE$; черезъ каждыя двѣ послѣдовательныя параллельныя прямыя также проведемъ плоскости. Пересѣченіе всѣхъ этихъ плоскостей опредѣлитъ многогранникъ $ABCDE\ A_1B_1C_1D_1E_1$, удовлетворяющій опредѣленію призмы. Дѣйствительно, параллельныя плоскости $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ пересѣкаются боковыми плоскостями по параллельнымъ прямымъ (373); поэтому фигуры AA_1E_1E, EE_1D_1D и т. д.—параллелограммы. Съ другой стороны, у многоугольниковъ $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ равны соотвѣтственно стороны (какъ противоположныя стороны параллелограммовъ) и углы (какъ углы съ параллельными и одинаково направленными сторонами); слѣд., эти многоугольники равны.

Многоугольники $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$, лежащіе въ параллельныхъ плоскостяхъ, наз. *основаніями* призмы; перпендикуляръ OO_1, опущенный изъ какой-нибудь точки одного основанія на другое, наз. *высотою* призмы. Параллелограммы наз. *боковыми гранями* призмы, а ихъ стороны, соединяющія соотвѣтственныя вершины основаній,—*боковыми ребрами*. У призмы всѣ боковыя ребра равны, какъ отрѣзки параллельныхъ прямыхъ, заключенные между параллельными плоскостями.

Плоскость, проведенная черезъ какія-нибудь два боковыя ребра, не прилежащія къ одной боковой грани призмы (напр. черезъ ребра AA_1 и CC_1, черт. 353), наз. *діагональною плоскостью*.

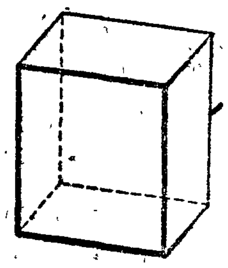
Призма наз. *прямою* или *наклонною*, смотря по тому, будутъ ли ея боковыя ребра перпендикулярны или наклонны къ основаніямъ. У прямой призмы боковыя грани суть прямоугольники. За высоту такой призмы можно принять боковое ребро.

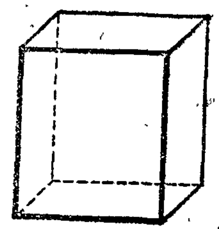

Черт. 354.

Прямая призма наз. *правильною*, если ея основанія правильные многоугольники. У такой призмы всѣ боковыя грани суть равные прямоугольники (черт. 354).

Призмы бываютъ: треугольныя, четыреугольныя и т. д., смотря по тому, лежитъ ли въ основаніи треугольникъ, четыреугольникъ и т. д.

406. Параллелепипедъ. Такъ называютъ призму, у которой основаніями служатъ параллелограммы (черт. 355).


Черт. 355.


Черт. 356.

Параллелепипеды могутъ быть прямые и наклонные. Прямой параллелепипедъ наз. *прямоугольнымъ*, если его основанія прямоугольники (черт. 356).

Изъ этихъ опредѣленій слѣдуетъ:

1°, у параллелепипеда всѣ шесть граней параллелограммы;

2°, у прямого параллелепипеда четыре боковыя грани прямоугольники, а два основанія—параллелограммы;

3°, у прямоугольнаго параллелепипеда всѣ шесть граней прямоугольники.

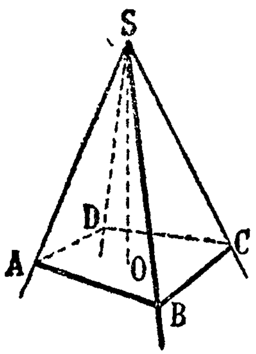
Три ребра прямоугольнаго параллелепипеда, сходящіяся въ одной вершинѣ, наз. его и з м ѣ р е н і я м и; одно изъ нихъ можно разсматривать, какъ длину, другое, какъ ширину, а третье, какъ высоту.

Прямоугольный параллелепипедъ, имѣющій равныя измѣренія, наз. к у б о м ъ. У куба всѣ грани—квадраты.

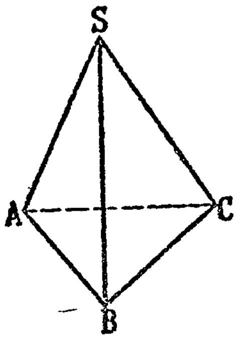
Для краткости слово «параллелепипедъ» мы часто будемъ писать такъ: пар—дъ.

407. Пирамида. П и р а м и д о ю наз. многогранникъ, у котораго одна грань, называемая основаніемъ, есть какой-нибудь многоугольникъ, а всѣ остальныя грани, называемыя боковыми,—треугольники, имѣющіе общую вершину.

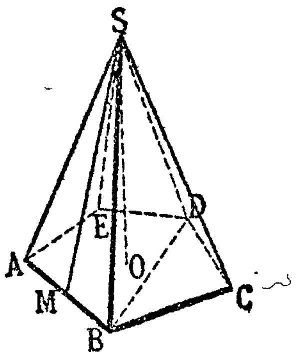
Чтобы получить пирамиду, достаточно какой-нибудь многогранный уголъ S (черт. 357) пересѣчь произвольною плоскостью $ABCD$ и взять отсѣченную часть $SABCD$.



Черт. 357.



Черт. 358.



Черт. 359.

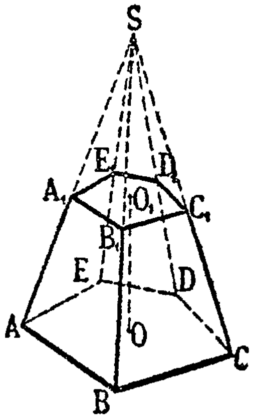
Общая вершина S боковыхъ треугольниковъ наз. в е р ш и н о ю пирамиды, а перпендикуляръ SO, опущенный изъ вершины на основаніе,—высотою ея.

Обыкновенно, обозначая пирамиду буквами, пишутъ сначала ту, которая поставлена у вершины, напр.: $SABCD$ (черт. 357).

Плоскость, проведенная черезъ вершину пирамиды и черезъ какую-нибудь діагональ основанія (напр., черезъ діагональ BD, черт. 359), наз. д і а г о н а л ь н о ю п л о с к о с т ь ю.

Пирамиды бываютъ: треугольныя, четыреугольныя и т. д., смотря по тому, лежитъ ли въ основаніи треугольникъ, четыреугольникъ, и т. д. Треугольная пирамида (черт. 358) наз. иначе т е т р а э д р о м ъ; у такой пирамиды всѣ четыре грани треугольники.

Пирамида наз. п р а в и л ь н о ю (черт. 359) если, во 1°, ея основаніе есть правильный многоугольникъ, и, во 2°, высота проходитъ черезъ центръ этого многоугольника. Въ правильной пирамидѣ всѣ боковыя ребра равны между собою (какъ наклонныя съ равными проекціями). Поэтому всѣ боковыя грани правильной пирамиды суть равные равнобедренные тр-ки. Высота SM (черт. 359) какого-либо одного изъ этихъ тр-ковъ наз. а п о ѳ е м о ю. Всѣ апоѳемы въ одной пирамидѣ равны.



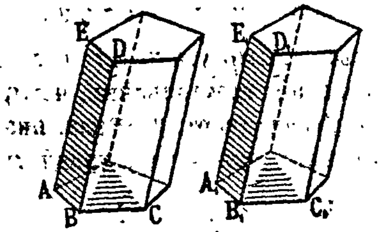
Черт. 360.

408. Усѣченная пирамида. Отрѣзокъ пирамиды (черт. 360), заключенный между основаніемъ ($ABCDE$) и сѣкущею плоскостью ($A_1B_1C_1D_1E_1$), параллельною основанію, наз. у с ѣ ч е н н о ю п и р а м и д о ю. Параллельные многоугольники наз. о с н о в а н і я м и, а разстояніе между ними OO_1 — в ы с о т о ю. Усѣченная пирамида наз. п р а в и л ь н о ю, если она составляетъ отрѣзокъ правильной пирамиды.

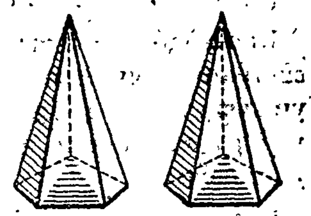
Равенство призмъ и пирамидъ.

409. Теорема. **Двѣ призмы или двѣ пирамиды равны, если основаніе и боковая грань одной и основаніе и боковая грань другой соотвѣтственно равны, одинаково наклонены и одинаково расположены.**

Пусть въ двухъ призмахъ (черт. 361) соотвѣтственно равны и одинаково расположены основанія и боковыя грани AD и A_1D_1 и, сверхъ того, равны двугранные углы AB и A_1B_1. Вложимъ одну призму въ другую такъ, чтобы у нихъ совпали равныя основанія. Тогда, по ра-



Черт. 361.



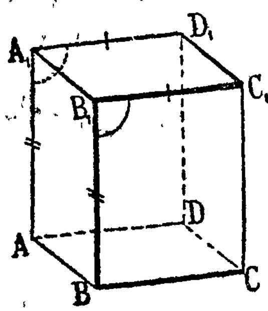
Черт. 362.

венству двугранныхъ угловъ, грань A_1D_1 пойдетъ по AD, а такъ какъ эти грани равны и одинаково расположены, то онѣ совпадутъ; но тогда совпадутъ и верхнія основанія (какъ параллельныя и равныя нижнимъ основаніямъ), т.-е. призмы совмѣстятся.

То же доказательство примѣняется и къ пирамидамъ (черт. 362).

Свойства граней и діагоналей параллелепипеда.

410. Теорема. Во всякомъ параллелепипедѣ противоположныя грани равны и параллельны.



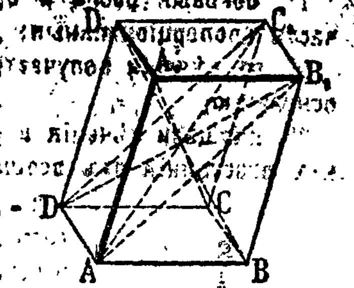
Черт. 363.

Такъ, грани (черт. 363) BB_1C_1C и AA_1D_1D параллельны, потому что двѣ пересѣкающіяся прямыя BB_1 и B_1C_1 одной грани параллельны двумъ пересѣкающимся прямымъ AA_1 и A_1D_1 другой (372,2°); эти грани и равны, такъ какъ $B_1C_1 = A_1D_1$, $B_1B = A_1A$ (какъ противоположныя стороны параллелограммовъ) и $\angle BB_1C_1 = \angle AA_1D_1$ (379).

411. Теорема. Во всякомъ параллелепипедѣ всѣ четыре діагонали пересѣкаются въ одной точкѣ и дѣлятся въ ней пополамъ.

Возьмемъ (черт. 364) какія-нибудь двѣ діагонали, напр., AC_1 и DB_1, и проведемъ вспомогательныя прямыя AB_1 и DC_1. Такъ какъ ребра AD и B_1C_1 соотвѣтственно равны и параллельны ребру BC, то они равны и параллельны между собою;

вслѣдствіе этого фигура ADC_1B_1 есть параллелограммъ (99,2°), въ которомъ прямыя C_1A и DB_1—діагонали; а въ параллелограммѣ діагонали дѣлятся въ точкѣ пересѣченія пополамъ. Возьмемъ теперь одну изъ этихъ діагоналей, напр., AC_1, съ третьею діагональю, положимъ съ BD_1. Совершенно такъ же мы можемъ доказать, что онѣ дѣлятся въ точкѣ пересѣченія пополамъ. Слѣд., діагонали BD_1 и AC_1 и діагонали AC_1 и DB_1 (которыя мы раньше брали) пересѣкаются въ одной и той же точкѣ, именно въ серединѣ діагонали AC_1. Наконецъ, взявъ эту же діагональ AC_1 съ четвертою діагональю A_1C, мы такъ же докажемъ, что и онѣ

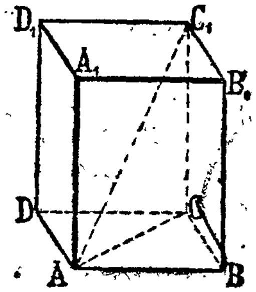


Черт. 364.

дѣлятся пополамъ. Значитъ, точка пересѣченія и этой пары діагоналей лежитъ въ срединѣ діагонали AC_1. Такимъ образомъ, всѣ 4 діагонали пересѣкаются въ одной и той же точкѣ и дѣлятся этою точкою пополамъ.

412. Теорема. Въ прямоугольномъ параллелепипедѣ квадратъ любой діагонали (AC_1, черт. 365) равенъ суммѣ квадратовъ трехъ его измѣреній.

Проведя діагональ основанія AC, получимъ два тр-ка: AC_1C и ACB. Оба они прямоугольные; первый потому, что параллелепипедъ прямой, и, слѣд., ребро CC_1 перпендикулярно къ основанію; второй потому, что параллелепипедъ прямоугольный, и, значитъ, въ основаніи его лежитъ прямоугольникъ. Изъ этихъ тр-ковъ находимъ:



Черт. 365.

$$AC_1^2 = AC^2 + CC_1^2 \text{ и } AC^2 = AB^2 + BC^2.$$

Слѣд., $$AC_1^2 = AB^2 + BC^2 + CC_1^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2.$$

413. Слѣдствіе. Въ прямоугольномъ параллелепипедѣ всѣ діагонали равны.

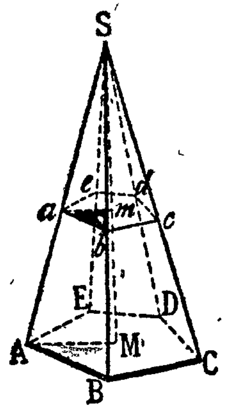
Свойства параллельныхъ сѣченій въ пирамидѣ.

414. Теоремы. Если пирамида (черт. 366) пересѣчена плоскостью, параллельною основанію, то:

1°, боковыя ребра и высота дѣлятся этою плоскостью на части пропорціональныя;

2°, въ сѣченіи получается многоугольникъ (*abcde*), подобный основанію;

3°, площади сѣченія и основанія относятся, какъ квадраты ихъ разстояній отъ вершины.



Черт. 366.

1°. Прямыя ab и AB можно разсматривать, какъ пересѣченія двухъ параллельныхъ плоскостей (основанія и сѣкущей) третьею плоскостью ASB; поэтому $ab \parallel AB$ (373). По той же причинѣ $bc \parallel BC$, $cd \parallel CD$... и $am \parallel AM$; вслѣдствіе этого (219):

$$\frac{Sa}{aA}=\frac{Sb}{bB}=\frac{Sc}{cC}\ldots=\frac{Sm}{mM}.$$

2°. Изъ подобія тр-ковъ ASB и aSb, затѣмъ BSC и bSc и т. д. выводимъ:

$$\frac{AB}{ab}=\frac{BS}{bS};\ \frac{BS}{bS}=\frac{BC}{bc};\quad \text{откуда: } \frac{AB}{ab}=\frac{BC}{bc}.$$

$$\frac{BC}{bc}=\frac{CS}{cS};\ \frac{CS}{cS}=\frac{CD}{cd};\quad \text{откуда: } \frac{BC}{bc}=\frac{CD}{cd}.$$

Такъ же докажемъ пропорціональность остальныхъ сторонъ мн-ковъ $ABCDE$ и $abcde$. Такъ какъ, сверхъ того, у этихъ мн-ковъ равны соотвѣтственные углы (какъ образованные параллельными и одинаково направленными сторонами), то они подобны.

3°. Площади подобныхъ многоугольниковъ относятся, какъ квадраты сходственныхъ сторонъ; поэтому:

$$\frac{\text{площ. } ABCDE}{\text{площ. } abcde}=\frac{AB^2}{ab^2}=\left(\frac{AB}{ab}\right)^2.$$

Но
$$\frac{AB}{ab}=\frac{AS}{aS}=\frac{MS}{mS}.$$

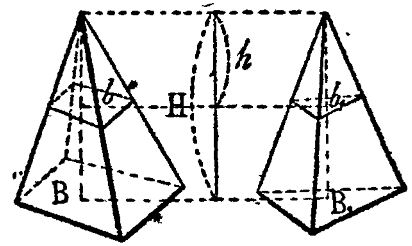
Значитъ:
$$\frac{\text{площ. } ABCDE}{\text{площ. } abcde}=\left(\frac{MS}{mS}\right)^2=\frac{MS^2}{mS^2}.$$

415. Слѣдствіе. У правильной усѣченной пирамиды верхнее основаніе есть правильный многоугольникъ, а боковыя грани суть равныя и равнобочныя трапеціи (см. черт. 360).

Высота какой-нибудь изъ этихъ трапецій наз. **апоѳемой** правильной усѣченной пирамиды.

416. Теорема. Если двѣ пирамиды съ равными высотами разсѣчены на одинаковомъ разстояніи отъ вершины плоскостями, параллельными основаніямъ, то площади сѣченій пропорціональны площадямъ основаній.

Пусть (черт. 367) B и B_1—площади основаній двухъ пирамидъ, H—высота каждой изъ нихъ, b и b_1—площади сѣченій плоскостями, параллельными основаніямъ и удаленными отъ вершинъ на одно и то же разстояніе h. Согласно предыдущей теоремѣ мы будемъ имѣть:



Черт. 367.

$$\frac{b}{B}=\frac{h^2}{H^2}\ \text{и}\ \frac{b_1}{B_1}=\frac{h^2}{H^2}.$$

Откуда:
$$\frac{b}{B}=\frac{b_1}{B_1}\ \text{или}\ \frac{b}{b_1}=\frac{B}{B_1}.$$

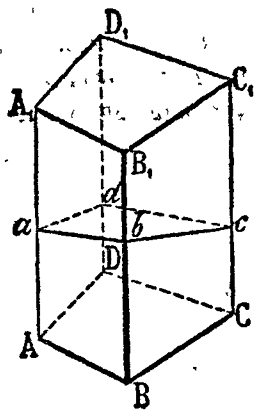
417. Слѣдствіе. Если $B=B_1$, то и $b=b_1$, т.-е. **если у двухъ пирамидъ съ равными высотами основанія равновелики, то равновелики и сѣченія, равноотстоящія отъ вершины.**

ГЛАВА II.

Боковая поверхность призмы и пирамиды.

418. Теорема. Боковая поверхность призмы равна произведенію периметра перпендикулярнаго сѣченія на боковое ребро.

П е р п е н д и к у л я р н ы м ъ с ѣ ч е н і е м ъ (черт. 368) наз. многоугольникъ $abcd$, получаемый отъ пересѣченія призмы плоскостью, перпендикулярною къ боковымъ ребрамъ. Стороны этого многоугольника перпендикулярны къ ребрамъ (353).



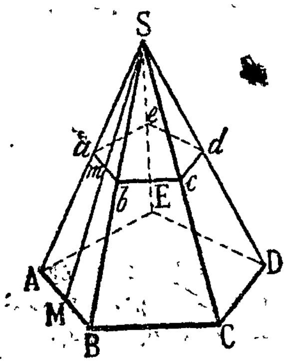
Черт. 368.

Боковая поверхность призмы представляетъ собою сумму площадей параллелограммовъ; въ каждомъ изъ нихъ за основаніе можно взять боковое ребро, а за высоту сторону перпендикулярнаго сѣченія. Поэтому:

$$\text{Бок. пов.} = AA_1 \,.\, ab + BB_1 \,.\, bc + CC_1 \,.\, cd + DD_1 \,.\, da = (ab + bc + cd + da) \,.\, AA_1.$$

419. Слѣдствіе. Боковая поверхность прямой призмы равна произведенію периметра основанія на высоту, потому что въ такой призмѣ за перпендикулярное сѣченіе можно взять само основаніе, а боковое ребро ея равно высотѣ.

420. Теорема. Боковая поверхность правильной пирамиды равна произведенію периметра основанія на половину апоѳемы.



Черт. 369.

Пусть (черт. 369) $SABCDE$ есть правильная пирамида и SM ея апоѳема. Боковая поверхность этой пирамиды есть сумма площадей равныхъ равнобедренныхъ тр-ковъ. Площадь одного изъ нихъ, напр. ASB, равна $AB \,.\, {}^1/_2\, SM$. Если всѣхъ тр-ковъ n, то боковая поверхность выразится $AB \,.\, {}^1/_2\, SM \,.\, n = (AB \,.\, n) \,.\, {}^1/_2\, SM$, гдѣ $AB \,.\, n$ есть периметръ основанія, а SM апоѳема.

421. Теорема. Боковая поверхность правильной усѣченной пирамиды равна произведенію полусуммы периметровъ обоихъ основаній на апоѳему.

Эта поверхность есть сумма площадей равныхъ трапецій. Площадь одной изъ нихъ, напр. $AabB$ (черт. 369), равна ${}^1/_2\,(AB + ab) \,.\, Mm$ (315). Если число всѣхъ трапецій есть n, то

$$\text{бок. пов.} = \frac{AB + ab}{2} \,.\, Mm \,.\, n = \frac{AB \,.\, n + ab \,.\, n}{2} \,.\, Mm,$$

гдѣ $AB.n$ и $ab.n$ суть периметры нижняго и верхняго основаній.

З А Д А Ч И.

327. Высота прямой призмы, которой основаніе есть правильный треугольникъ, равна 12 метрамъ, сторона основанія 3 метр. Вычислить полную поверхность призмы.

328. Полная поверхность прямоугольнаго параллелепипеда равна 1714 кв. футовъ, а неравныя стороны основанія равны 25 ф. и 14 ф. Вычислить боковую поверхность и боковое ребро.

329. Въ прямоугольномъ параллелепипедѣ съ квадратнымъ основаніемъ и высотою h проведена сѣкущая плоскость черезъ два противоположныя боковыя ребра. Вычислить полную поверхность параллелепипеда, зная, что площадь сѣченія равна S.

330. Правильная шестиугольная пирамида имѣетъ сторону основанія a и высоту h. Вычислить боковое ребро, апоѳему, боковую поверхность и полную поверхность.

331. Вычислить полную поверхность и высоту треугольной пирамиды, у которой каждое ребро равно a.

332. Правильная шестиугольная пирамида, у которой высота 25 сантим., а сторона основанія 5 сант., разсѣчена плоскостью, параллельною основанію. Вычислить разстояніе этой плоскости отъ вершины пирамиды, зная, что площадь сѣченія $= {}^2/_3\sqrt{3}$ квадр. сант.

333. Высота усѣченной пирамиды съ квадратнымъ основаніемъ равна h, сторона нижняго основанія a, а верхняго b. Найти полную поверхность усѣченной пирамиды.

334. Высота усѣченной пирамиды равна 6, а площади основаній 18 и 8. Пирамида разсѣчена плоскостью, параллельною основаніямъ и дѣлящею высоту пополамъ. Вычислить площадь сѣченія.

ГЛАВА III.

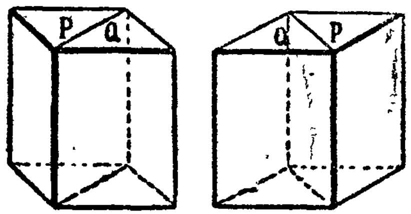
Объемъ призмы и пирамиды.

422. Основныя допущенія объ объемахъ. Величина части пространства, занимаемаго геометрическимъ тѣломъ, наз. *объемомъ* этого тѣла.

Относительно этой величины мы примемъ слѣдующія *допущенія* (аналогичныя допущеніямъ о площадяхъ, указаннымъ нами въ § 299):

1°. Равныя тѣла, т.-е. совмѣщающіяся при вложеніи, имѣютъ *равные объемы*, независимо отъ ихъ положенія въ пространствѣ.

2°. Объемъ какого-нибудь тѣла (напр., каждаго параллелепипеда, изображеннаго на черт. 370), состоящаго изъ частей (*P* и *Q*), принимается за *сумму объемовъ* этихъ частей.



Черт. 370.

423. Слѣдствія. 1°. Объемъ тѣла больше объема каждой его части (сумма положительныхъ величинъ больше каждаго слагаемаго).

2°. Если какое-нибудь тѣло состоитъ изъ двухъ частей (черт. 370), то объемъ каждой части разсматривается, какъ *разность* между объемомъ всего тѣла и объемомъ другой части.

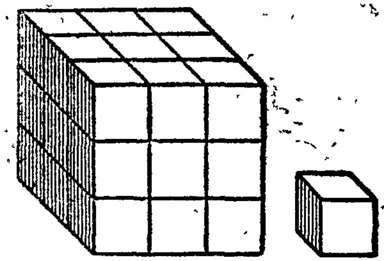
3°. Если тѣла состоятъ изъ одинаковаго числа частей, соотвѣтственно другъ другу равныхъ (напр., два параллелепипеда, изображенные на черт. 370), то объемы этихъ тѣлъ, представляя собою суммы соотвѣтственно равныхъ слагаемыхъ, считаются *равными*, независимо отъ того, какъ расположены эти части въ пространствѣ.

4°. Тѣла, объемы которыхъ можно разсматривать, какъ разности объемовъ равныхъ тѣлъ, имѣютъ одинаковые объемы; мы вскорѣ встрѣтимъ такой случай (428).

Мы видимъ такимъ образомъ, что могутъ быть тѣла, которыя нельзя назвать равными (такъ какъ они не могутъ быть совмѣщены), но которыя однако имѣютъ *равные объемы*. Тѣла, имѣющія равные объемы, мы будемъ называть **равновеликими**. Таковы, напр., 2 параллелепипеда, изображенные на черт. 370-мъ.

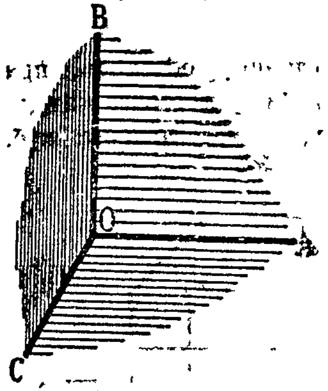
424. Единица объема. За единицу объемовъ, при измѣреніи ихъ, берутъ объемъ такого куба, у котораго каждое ребро равно линейной единицѣ. Такъ, употребительны: куб. аршинъ, куб. метръ и т. д.

Какъ извѣстно изъ ариѳметики, отношеніе двухъ кубическихъ единицъ разныхъ названій равно 3-ей степени отношенія тѣхъ линейныхъ единицъ, которыя служатъ ребрами для этихъ кубическихъ единицъ. Такъ, отношеніе куб. сажени къ куб. аршину равно 3^3, т.-е. 27-и, что ясно видно изъ черт. 371, на которомъ меньшій изъ двухъ кубовъ изображаетъ куб. аршинъ, а бо́льшій—куб. сажень.


Черт. 371.

425. Замѣчаніе. Относительно числа, измѣряющаго данный объемъ въ кубическихъ единицахъ, также можно сдѣлать разъясненіе, аналогичное тому, какое было нами приведено въ § 303 относительно числа, измѣряющаго данную площадь въ квадратныхъ единицахъ. Повторимъ вкратцѣ это разъясненіе въ примѣненіи къ объемамъ.

Возьмемъ три взаимно перпендикулярныя прямыя (черт. 372): OA, OB и OC и черезъ каждыя двѣ изъ нихъ проведемъ плоскость. Мы получимъ тогда 3 взаимно перпендикулярныя плоскости: AOC, COB и BOA. Вообразимъ теперь 3 ряда параллельныхъ плоскостей: рядъ плоскостей, параллельныхъ пл. AOC, другой рядъ плоскостей, параллельныхъ пл. BOA, и третій рядъ плоскостей, параллельныхъ плоскости BOC; допустимъ, кромѣ того, что сосѣднія плоскости каждаго ряда отстоятъ одна отъ другой на одно и то же разстояніе, равное какой-нибудь $^1/_k$ долѣ линейной единицы. Тогда отъ взаимнаго пересѣченія этихъ трехъ рядовъ плоскостей образуется *пространственная сѣть* кубовъ, изъ которыхъ каждый представляетъ собою $(^1/_k)^3$ часть куб. единицы. Вообразимъ, что въ эту сѣть мы помѣстили то тѣло, объемъ котораго желаемъ измѣрить. Тогда всѣ кубы сѣти мы можемъ подраздѣлить на 3 рода: 1) кубы, которые расположены вполнѣ внутри тѣла, 2) кубы, которые нѣкоторою частью выступаютъ внѣ тѣла (которые, другими словами, пересѣкаются поверхностью тѣла), и 3) кубы, расположенные вполнѣ внѣ тѣла. Если кубовъ 1-го рода будетъ m, а 2-го рода n, то объемъ даннаго тѣла болѣе m/k^3, но менѣе $m+n/k^3$ куб. един. Значитъ, эти 2 числа будутъ приближенныя мѣры даннаго объема съ точностью до n/k^3 куб. ед., первое число съ недостаткомъ, второе—съ избыткомъ. Уменьшая все болѣе и болѣе разстояніе между параллельными плоскостями, мы будемъ заполнять пространство все меньшими и меньшими кубами; и такъ же, какъ это мы раньше дѣлали для площадей, можно и здѣсь разъяснить, что по мѣрѣ уменьшенія кубовъ мы будемъ получать приближенные результаты измѣренія все съ бо́льшею и бо́льшею степенью точности; и если будетъ найдено такое число V (раціональное или ирраціональное), которое окажется больше любого приближеннаго результата измѣренія, взятаго съ недостаткомъ, и меньше любого приближеннаго результата измѣренія, взятаго съ избыткомъ, то это число принимается за **точную мѣру** даннаго объема.



Черт. 372.

Доказано, что такое число существуетъ вообще для всякаго объема и что оно не зависитъ отъ выбора тѣхъ трехъ прямыхъ OA, OB и OC (черт. 372), которыя были взяты для построенія пространственной сѣти кубовъ *). Число это обладаетъ слѣдующими двумя основными свойствами: при одной и той же кубической единицѣ 1) равнымъ тѣламъ (совмѣщающимся) соотвѣтствуютъ равныя числа, 2) суммѣ объемовъ (422, 2°) соотвѣтствуетъ сумма чиселъ. Отсюда уже слѣдуетъ, что бо́льшему объему соотвѣтствуетъ бо́льшее число, равновеликимъ тѣламъ соотвѣтствуютъ равныя числа, и т. п.

Объемъ прямоугольнаго параллелепипеда.

426. Теорема. Объемъ прямоугольнаго параллелепипеда равенъ произведенію трехъ его измѣреній.

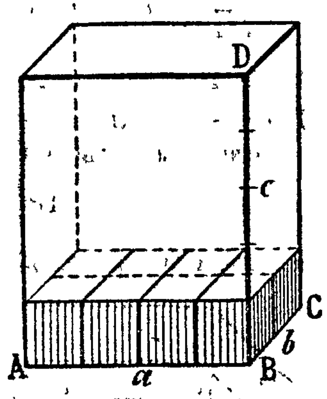
Въ такомъ краткомъ выраженіи теорему эту надо понимать такъ: число, выражающее объемъ прямоугольнаго параллелепипеда въ кубической единицѣ, равно произведенію чиселъ, выражающихъ три его измѣренія въ соотвѣтствующей линейной единицѣ, т. е. въ той единицѣ, которая служитъ ребромъ куба, объемъ котораго принятъ за кубическую единицу. Такъ, если x есть число, выражающее объемъ прямоугольнаго параллелепипеда въ кубическихъ сантиметрахъ, и a, b и c числа, выражающія три его измѣренія въ линейныхъ сантиметрахъ, то теорема утверждаетъ, что $x=abc$.

*) См., напр., H. Killing und Hovestadt—Handbuch des Mathematischen Unterrichts, I, 1910.

При доказательствѣ разсмотримъ особо слѣдующіе три случая.

1°. Измѣренія выражаются **цѣлыми числами**.

Пусть, напр., измѣренія будутъ (черт. 373): $AB=a$, $BC=b$ и $BD=c$, гдѣ a, b и c какія-нибудь цѣлыя числа (напр., какъ изображено у насъ на чертежѣ: $a=4$, $b=2$ и $c=5$). Тогда основаніе параллелепипеда содержитъ ab такихъ квадратовъ, изъ которыхъ каждый представляетъ собою соотвѣтствующую квадратную единицу. На каждомъ изъ этихъ квадратовъ, очевидно, можно помѣстить по одной кубической единицѣ. Тогда получится слой (изображенный на чертежѣ), состоящій изъ ab куб. единицъ. Такъ какъ высота этого слоя равна 1 линейной единицѣ, а высота всего параллелепипеда содержитъ c такихъ единицъ, то внутри параллелепипеда можно помѣстить c такихъ слоевъ. Слѣд., объемъ его равенъ abc куб. ед.



Черт. 373.

2°. Измѣренія выражаются **дробными числами**.

Пусть измѣренія параллелепипеда будутъ:

$$\frac{m}{n},\ \frac{p}{q},\ \frac{r}{s},$$

(нѣкоторыя изъ этихъ дробей могутъ равняться цѣлому числу).

Приведя дроби къ одинаковому знаменателю, будемъ имѣть:

$$\frac{mqs}{nqs},\ \frac{pns}{nqs},\ \frac{rnq}{nqs}.$$

Примемъ $1/_{nqs}$ долю линейной единицы за новую (вспомогательную) единицу длины. Тогда въ этой новой единицѣ данныя измѣренія выразятся цѣлыми числами, а именно: mqs, pns и rnq, и потому, по доказанному въ случаѣ 1°, объемъ параллелепипеда равенъ произведенію

$$(mqs)\ (pns)\ (rnq),$$

если измѣрять этотъ объемъ новой кубической единицей, соотвѣтствующей новой линейной единицѣ. Такихъ кубическихъ единицъ въ одной кубической единицѣ, соотвѣтствующей прежней линейной единицѣ, содержится $(nqs)^3$; значитъ, новая кубическая единица составляетъ $1/_{(nqs)^3}$ прежней. Поэтому объемъ пар-да равенъ:

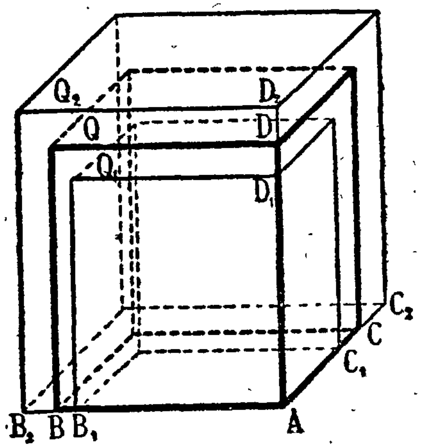
$$\frac{1}{(nqs)^3}\cdot(mqs)\ (pns)\ (rnq)=\frac{mqs}{nqs}\cdot\frac{pns}{nqs}\cdot\frac{rnq}{nqs}=\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}\cdot\frac{r}{s}.$$

3°. Измѣренія выражаются ирраціональными числами.

Пусть у даннаго пар-да (черт. 374), который для краткости мы обозначимъ одною буквою Q, измѣренія будутъ:

$$AB=\alpha;\ AC=\beta;\ AD=\gamma,$$

гдѣ всѣ числа α, β и γ, или только нѣкоторыя изъ нихъ, ирраціональныя. Найдемъ приближенныя значенія этихъ чиселъ съ точностью до $1/_n$. Для этого отложимъ $1/_n$ долю линейной единицы на измѣреніяхъ AB, AC и AD, начиная отъ точки A, столько разъ, сколько можно. Пусть окажется, что, отложивъ эту долю на AB m разъ, мы получимъ отрѣзокъ $AB_1<AB$, а отложивъ эту же долю $m+1$ разъ, получимъ отрѣзокъ $AB_2>AB$. Тогда приближенныя значенія числа α съ точностью до $1/_n$ будутъ дроби $^m/_n$ и $^{m+1}/_n$, первая съ недостат-



Черт. 374.

комъ, вторая съ избыткомъ. Пусть такимъ же образомъ окажется, что $AC_1={}^p/_n$ и $AC_2={}^{p+1}/_n$, при чемъ $AC_1<AC<AC_2$, и $AD_1={}^q/_n$, $AD_2={}^{q+1}/_n$, при чемъ $AD_1<AD<AD_2$.

Тогда приближенныя значенія будутъ:

для числа α.... $\frac{m}{n}$, $\frac{m+1}{n}$;

для числа β.... $\frac{p}{n}$, $\frac{p+1}{n}$;

для числа γ.... $\frac{q}{n}$, $\frac{q+1}{n}$.

Построимъ теперь 2 вспомогательные параллелепипеда: одинъ (обозначимъ его Q_1) съ измѣреніями AB_1, AC_1 и AD_1 и другой (обозначимъ его Q_2) съ измѣреніями AB_2, AC_2 и AD_2. Тогда, по доказанному въ случаѣ 2°, будемъ имѣть:

объемъ $Q_1=\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{n}\cdot\frac{q}{n}$; объемъ $Q_2=\frac{m+1}{n}\cdot\frac{p+1}{n}\cdot\frac{q+1}{n}$.

Пусть число, выражающее искомый объемъ Q, будетъ x.

Такъ какъ, очевидно, Q_1 составляетъ часть Q, а Q составляетъ часть Q_2, то:

$$\text{об. } Q_1<\text{об. } Q<\text{об. } Q_2;$$

слѣд., и $$\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{n}\cdot\frac{q}{n}<x<\frac{m+1}{n}\cdot\frac{p+1}{n}\cdot\frac{q+1}{n}.$$

Это двойное неравенство остается вѣрнымъ при всякой степени точности, съ которою мы находимъ приближенныя значенія чиселъ α, β и γ. Значитъ, неравенство это мы можемъ высказать такъ: число, измѣряющее объемъ даннаго параллелепипеда, должно быть больше произведенія любыхъ приближенныхъ значеній чиселъ α, β и γ, если эти значенія взяты съ недостаткомъ, но меньше произведенія любыхъ приближенныхъ значеній тѣхъ же чиселъ, если эти значенія взяты съ избыткомъ. Такое число, какъ извѣстно изъ алгебры, наз. произведеніемъ ирраціональныхъ чиселъ $\alpha\beta\gamma$. Значитъ, и въ этомъ случаѣ объемъ $Q=\alpha\beta\gamma$.

427. Слѣдствія. 1°. Пусть измѣренія прямоугольнаго параллелепипеда, служащія сторонами его основанія, выражаются числами a и b, а третье измѣреніе (высота)—числомъ c. Тогда, обозначая объемъ его въ соотвѣтствующихъ куб. единицахъ буквою V, можемъ написать:

$$V=abc.$$

Такъ какъ произведеніе ab выражаетъ площадь основанія, то можно сказать, что **объемъ прямоугольнаго параллелепипеда равенъ произведенію площади основанія на высоту**

2°. Пусть a,b,c будутъ измѣренія одного прямоугольнаго парал-да, имѣющаго объемъ V, и $a_1b_1c_1$ — измѣренія другого парал-да, котораго объемъ есть V_1. Тогда:

$$V=abc;\quad V_1=a_1b_1c_1;$$

$$\text{слѣд.:}\quad V:V_1=(abc):(a_1b_1c_1).$$

Отсюда видно, что если $c=c_1$, то $V:V_1=(ab):(a_1b_1)$, а если $ab=a_1b_1$, то $V:V_1=c:c_1$; т. е.:

объемы прямоугольныхъ параллелепипедовъ, имѣющихъ равныя высоты, относятся, какъ площади ихъ основаній;

объемы прямоугольныхъ параллелепипедовъ, имѣющихъ равныя площади основаній, относятся, какъ ихъ высоты.

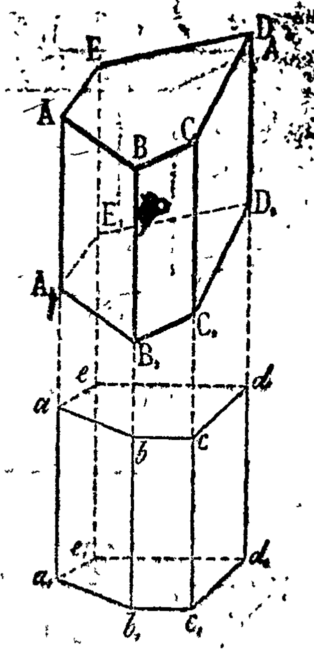
3°. Объемъ куба равенъ 3-ей степени его ребра, такъ какъ при $a=b=c$ произведеніе abc обращается въ a^3.

Объемъ всякаго параллелепипеда.

428. Лемма. Наклонная призма равновелика такой прямой призмѣ, у которой основаніе равно перпендикулярному сѣченію наклонной призмы, а высота—ея боковому ребру.

Пусть дана наклонная призма $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ (черт. 375). Продолжимъ всѣ ея боковыя ребра и боковыя грани въ одномъ направленіи, напр., внизъ. Возьмемъ на продолженіи одного какого-нибудь ребра произвольную точку a и проведемъ черезъ нее перпендикулярное сѣченіе $abcde$. Затѣмъ, отложивъ $aa_1=AA_1$, проведемъ черезъ a_1 перпендикулярное сѣченіе $a_1b_1c_1d_1e_1$. Такъ какъ плоскости обоихъ сѣченій параллельны, то $bb_1=cc_1=dd_1=ee_1=aa_1=AA_1$ (377). Вслѣдствіе этого многогранникъ a_1d, у котораго за основанія приняты проведенныя нами сѣченія, есть прямая призма, о которой говорится въ теоремѣ. Докажемъ, что данная наклонная призма равновелика

этой прямой. Для этого предварительно убѣдимся, что многогранники aD и a_1D_1 равны. Основанія ихъ $abcde$ и $a_1b_1c_1d_1e_1$ равны, какъ основанія призмы a_1d; съ другой стороны, приложивъ къ обѣимъ частямъ равенства $A_1A=a_1a$ по одной и той же прямой A_1a, получимъ: $aA=a_1A_1$; подобно этому: $bB=b_1B_1$, $cC=c_1C_1$ и т. д. Вообразимъ теперь, что многогранникъ aD вложенъ въ a_1D_1 такъ, чтобы основанія ихъ совпали; тогда боковыя ребра, будучи перпендикулярны къ основаніямъ и соотвѣтственно равны, также совпадутъ; поэтому многогранникъ aD совмѣстится съ a_1D_1; значитъ, эти тѣла равны. Теперь замѣтимъ, что если отъ цѣлаго многогранника a_1D отнимемъ часть aD, то получимъ прямую призму; а если отъ того же многогранника отнимемъ часть a_1D_1, то получимъ наклонную призму. Изъ этого слѣдуетъ, что эти двѣ призмы равновелики.

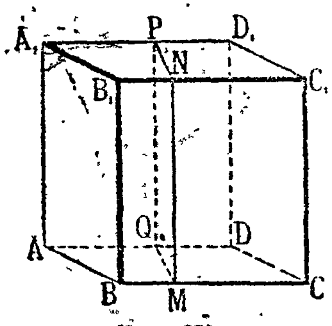


Черт. 375.

429. Теорема. Объемъ всякаго параллелепипеда равенъ произведенію площади основанія на высоту.

Ранѣе мы доказали эту теорему для параллелепипеда прямоугольнаго, теперь докажемъ ее для параллелепипеда прямого, а потомъ и наклоннаго.

1°. Пусть (черт. 376) AC_1 прямой пар-дъ, т. е. такой, у котораго основаніе $ABCD$ какой-нибудь параллелограммъ, а всѣ боковыя грани — прямоугольники. Возьмемъ въ немъ за основаніе боковую грань AA_1B_1B; тогда параллелепипедъ будетъ наклонный. Разсматривая его, какъ частный случай наклонной призмы, мы, на основаніи леммы предыдущаго параграфа, можемъ утверждать, что этотъ пар-дъ равновеликъ такому прямому, у котораго основаніе есть перпендикулярное сѣченіе $MNPQ$, а высота BC. Четыреугольникъ $MNPQ$ есть прямоугольникъ, потому что его углы служатъ линейными углами прямыхъ двугранныхъ угловъ; поэтому прямой пар-дъ, имѣющій это основаніе, долженъ быть прямоугольнымъ, и, слѣд., его объемъ равенъ произведенію трехъ его измѣреній, за которыя можно принять отрѣзки MN, MQ и BC. Такимъ образомъ:



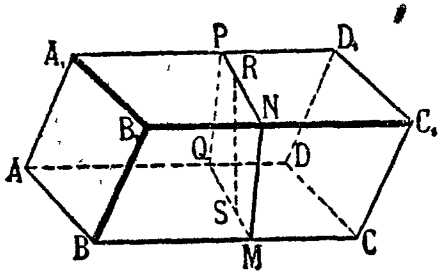
Черт. 376.

$$\text{Объемъ } AC_1=MN\,.\,MQ\,.\,BC=MN\,.\,(MQ\,.\,BC).$$

Произведеніе $MQ\,.\,BC$ выражаетъ площадь параллелограмма $ABCD$; поэтому:

$$\text{Объемъ } AC_1=(\text{площ. } ABCD)\,.\,MN=(\text{площ. } ABCD)\,.\,BB_1.$$

2. Пусть (черт. 377) AC_1 есть пар-дъ наклонный. Онъ равновеликъ такому прямому, у котораго основаніемъ служитъ перпендикулярное сѣченіе $MNPQ$ (т.-е. перпендикулярное къ ребрамъ AD, BC...), а высотою ребро BC. Но, по доказанному, объемъ прямого параллелепипеда равенъ произведенію площади основанія на высоту; значитъ:



Черт. 377.

$$\text{Объемъ } AC_1=(\text{площ. } MNPQ)\,.\,BC.$$

Если RS есть высота сѣченія $MNPQ$, то площадь $MNPQ=MQ\,.\,RS$; поэтому:

$$\text{Объемъ } AC_1=MQ\,.\,RS\,.\,BC=(BC\,.\,MQ)\,.\,RS.$$

Произведеніе $BC\,.\,MQ$ выражаетъ площадь параллелограмма $ABCD$; слѣд.:

$$\text{Объемъ } AC_1=(\text{площ. } ABCD)\,.\,RS.$$

Остается теперь доказать, что отрѣзокъ RS представляетъ собою высоту пар-да. Дѣйствительно, сѣченіе $MNPQ$, будучи перпендикулярно къ ребрамъ BC, B_1C_1..., должно быть перпендикулярно къ гранямъ $ABCD$, BB_1C_1D..., проходящимъ черезъ эти ребра (390). Поэтому, если мы изъ точки S возставимъ пер-

пендикуляръ къ пл. $ABCD$, то онъ долженъ лежать весь въ пл. $MNPQ$ (391) и, слѣд., долженъ слиться съ прямой SR, лежащей въ этой плоскости и перпендикулярной къ MQ. Значитъ, отрѣзокъ SR есть высота пар-да. Такимъ образомъ, объемъ и наклоннаго параллелепипеда равенъ произведенію площади основанія на высоту.

430. Слѣдствіе. Если V, B и H суть числа, выражающія въ соотвѣтствующихъ единицахъ объемъ, площадь основанія и высоту параллелепипеда, то можемъ писать:

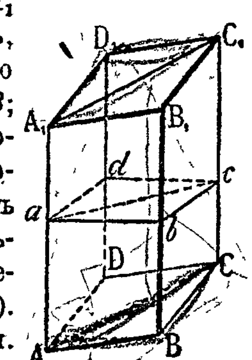
$$V=BH.$$

Объемъ призмы.

431. Теорема. Объемъ всякой призмы равенъ произведенію площади основанія на высоту.

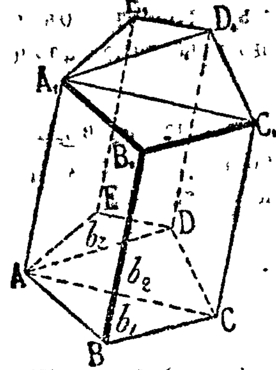
Сначала докажемъ эту теорему для треугольной призмы, а потомъ и для многоугольной.

1°. Проведемъ (черт. 378) черезъ ребро AA_1 треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскость, параллельную грани BB_1C_1C, а черезъ ребро CC_1—плоскость, параллельную грани AA_1B_1B; затѣмъ продолжимъ плоскости обоихъ основаній призмы до пересѣченія съ ранѣе проведенными плоскостями. Тогда мы получимъ параллелепипедъ BD_1, который діагональною плоскостью AA_1C_1C дѣлится на двѣ треугольныя призмы (изъ нихъ одна есть данная). Докажемъ, что эти призмы равновелики. Для этого проведемъ перпендикулярное сѣченіе $abcd$. Въ сѣченіи получится параллелограммъ, который діагональю ac дѣлится на два равные тр-ка. Данная призма равновелика такой прямой призмѣ, у которой основаніе есть $\triangle\, abc$, а высота—ребро AA_1 (428). Другая треугольная призма равновелика такой прямой, у которой основаніе есть $\triangle\, adc$, а высота—ребро AA_1. Но двѣ прямыя призмы съ равными основаніями и равными высотами равны (потому что при вложеніи онѣ совмѣщаются); значитъ, призмы $ABCA_1B_1C_1$



Черт. 378.

и $ADCA_1D_1C_1$ равновелики. Изъ этого слѣдуетъ, что объемъ данной призмы составляетъ половину объема параллелепипеда BD_1; поэтому, обозначивъ высоту черезъ H, получимъ (429):



Черт. 379.

$$\text{Об. тр. призмы} = \frac{(\text{площ. } ABCD)H}{2} = \frac{\text{площ. } ABCD}{2}\,H = (\text{площ. } ABC)H.$$

2° Проведемъ черезъ ребро AA_1 многоугольной призмы (черт. 379) діагональныя плоскости AA_1C_1C и AA_1D_1D. Тогда данная призма разсѣчется на нѣсколько треугольныхъ призмъ. Сумма объемовъ этихъ призмъ составляетъ искомый объемъ. Если обозначимъ площади ихъ основаній черезъ b_1, b_2, b_3, а общую высоту черезъ H, то получимъ:

$$\text{Объемъ мн. призмы} = b_1H + b_2H + b_3H = (b_1+b_2+b_3)H = (\text{площ. } ABCDE)H.$$

432. Слѣдствіе. Если V, B и H будутъ числа, выражающія въ соотвѣтственныхъ единицахъ объемъ, площадь основанія и высоту призмы, то, по доказанному, можемъ писать:

$$V = B.H.$$

1/2 ah

Объемъ пирамиды.

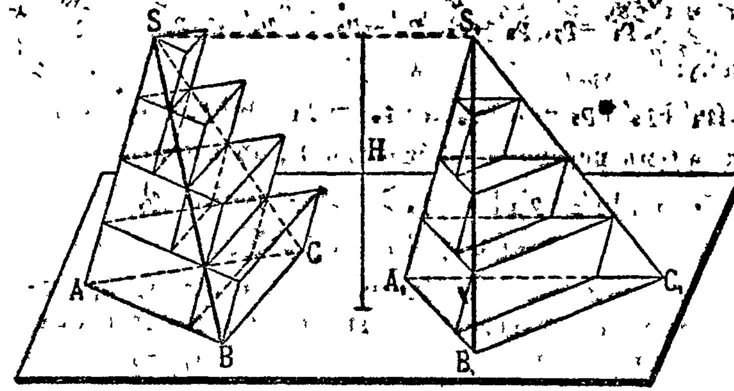
433. Лемма. Треугольныя пирамиды съ равновеликими основаніями и равными высотами равновелики.

Пусть $SABC$ и $S_1A_1B_1C_1$ (черт. 380) будутъ треугольныя пирамиды, у которыхъ высоты одинаковы и основанія—равновеликіе тр-ки ABC и $A_1B_1C_1$.

Раздѣлимъ (черт. 380) высоту каждой изъ этихъ пирамидъ на произвольное число n равныхъ частей и черезъ точки дѣленія проведемъ рядъ плоскостей, параллельныхъ основанію (на чертежѣ высота, а слѣд., и боковыя ребра, раздѣлены на 4 равныя части). Такъ какъ, по условію, основанія ABC и $A_1B_1C_1$ равновелики, то тр-ки, получившіеся въ сѣченіяхъ одной пира-

М. Попова

миды, соотвѣтственно равновелики тр-камъ, получившимся въ сѣченіи другой пирамиды (417). Построимъ въ каждой пирамидѣ рядъ внутреннихъ призмъ такихъ, чтобы верхними основаніями у нихъ были треугольники сѣченій, боковыя ребра были параллельными ребру SA въ одной пирамидѣ и ребру S_1A_1 въ другой, а высота каждой призмы равнялась бы $^1/_n$ высоты пирамиды. Такихъ призмъ въ каждой пирамидѣ будетъ $n-1$.



Черт. 380.

Объемы призмъ пирамиды S обозначимъ по порядку, начиная отъ вершины, буквами $p_1, p_2, p_3 \ldots p_{n-1}$, а объемы призмъ пирамиды S_1, также по порядку отъ вершины, буквами $q_1, q_2, q_3, \ldots q_{n-1}$. Тогда:

$$p_1 = q_1,\ p_2 = q_2,\ p_3 = q_3 \ldots p_{n-1} = q_{n-1},$$

потому что у каждой пары соотвѣтственныхъ призмъ основанія равновелики и высоты равны. Поэтому:

$$p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_{n-1} = q_1 + q_2 + q_3 + \ldots q_{n-1}.$$

Предположимъ теперь, что число n равныхъ частей, на которыя мы дѣлимъ высоту пирамидъ, неограниченно возрастаетъ. Тогда обѣ части послѣдняго равенства сдѣлаются величинами перемѣнными. Докажемъ, что каждая изъ нихъ стремится въ предѣлѣ къ объему той пирамиды, въ которую призмы вписаны. Это достаточно доказать для какой-нибудь одной пирамиды, напр., для S. Для этого построимъ въ ней еще рядъ призмъ, выходящихъ частью изъ пирамиды, такихъ, чтобы нижними основаніями ихъ служили треугольники сѣченій (и основаніе пирамиды), высоты были бы равны попрежнему $^1/_n$ высоты пирамиды, а боковыя ребра параллельны тому же ребру SA. Такихъ призмъ будетъ n. Обозначимъ ихъ объемы, начиная отъ вершины пирамиды, по порядку, буквами $p_1', p_2', p_3', \ldots p'_{n-1}, p_n'$. Не трудно видѣть, что

$$p_1'=p_1,\ p_2'=p_2,\ p_3'=p_3 \ldots;\ p'_{n-1}=p_{n-1}.$$

Поэтому:

$$(p_1'+p_2'+p_3'+\ldots+p'_{n-1}+p_n')-(p_1+p_2+p_3+\ldots+p_{n-1})=p_n'.$$

Если объемъ пирамиды обозначимъ V, то очевидно:

$$p'_1+p'_2+p'_3+\ldots+p_n'>V>p_1+p_2+\ldots+p_{n-1}.$$

Откуда: $$V-(p_1+p_2+\ldots+p_{n-1})<p_n'.$$

При неограниченномъ увеличеніи числа n объемъ призмы p_n' стремится къ нулю (потому что высота ея стремится къ нулю, а основаніе не измѣняется); слѣд., разность $V-(p_1+p_2+\ldots+p_{n-1})$ и подавно стремится къ нулю; а это, по опредѣленію предѣла, означаетъ, что

$$V=\text{пред.}\ (p_1+p_2+\ldots+p_{n-1}).$$

Такъ какъ это доказательство можно примѣнить ко всякой треугольной пирамидѣ, то можно утверждать, что V_1, т.-е. объемъ пирамиды S_1, есть предѣлъ перемѣнной суммы $q_1+q_2+\ldots+q_{n-1}$.

Но если двѣ перемѣнныя величины, имѣющія предѣлы, всегда остаются равными, то равны и ихъ предѣлы (281); поэтому:

$$V=V_1\ ^{*)}.$$

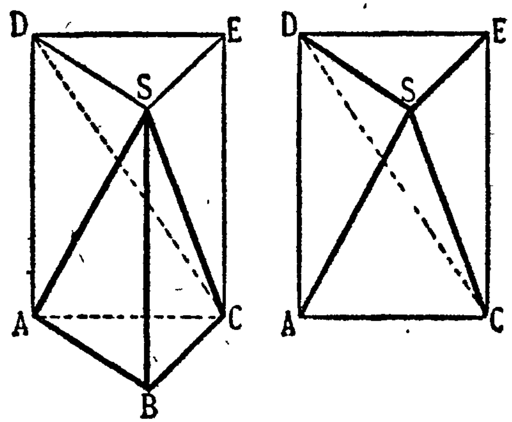
---

*) Проводя аналогію между площадями и объемами, можно было бы подумать, что равновеликость двухъ пирамидъ, о которыхъ говорится въ теоремѣ, можетъ быть сведена на равновеликость «по разложенію», т.-е. что можно такія пирамиды разложить на одинаковое число частей, соотвѣтственно другъ другу равныхъ (конгруентныхъ). Однако это не такъ. Въ 1900 году нѣмецкій математикъ Д е н ъ (Dehn) впервые строго доказалъ (его очень сложное доказательство было затѣмъ упрощено русскимъ математикомъ В. К а г а н о м ъ), что двѣ пирамиды съ равновеликими основаніями и равными высотами вообще не могутъ быть разложены на конечное число соотвѣтственно конгруентныхъ частей. Болѣе того, доказано, что равновеликость такихъ пирамидъ не можетъ быть сведена даже и на равновеликость «по дополненію» (опредѣляемую въ § 423, 4°).

434. Теорема. Объемъ всякой пирамиды равенъ произведенію площади основанія на треть высоты.

Сначала докажемъ эту теорему для пирамиды т р е у г о л ь н о й, а затѣмъ и м н о г о у г о л ь н о й.

1°. На основаніи треугольной пирамиды $SABC$ (черт. 381) построимъ такую призму $ABCDES$, у которой высота равна высотѣ пирамиды, а одно боковое ребро совпадаетъ съ ребромъ SB. Докажемъ, что объемъ пирамиды составляетъ третью часть объема этой призмы. Отдѣлимъ отъ призмы данную пирамиду. Тогда останется четыреугольная пирамида $SADEC$ (которая для ясности изображена отдѣльно). Проведемъ въ ней сѣкущую пло-



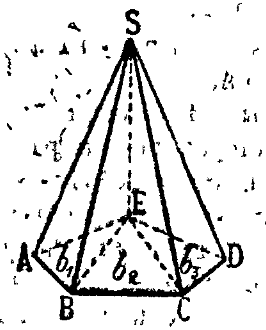
Черт. 381.

скость черезъ вершину S и діагональ основанія DC. Получившіяся отъ этого двѣ треугольныя пирамиды имѣютъ общую вершину S и равныя основанія DEC и DAC, лежащія въ одной плоскости; значитъ, согласно доказанной выше леммѣ, пирамиды $SDEC$ и $SDAC$ равновелики. Сравнимъ одну изъ нихъ, именно $SDEC$, съ данной пирамидой. За основаніе пирамиды $SDEC$ можно взять $\triangle\ SDE$; тогда вершина ея будетъ въ точкѣ C, и высота равна высотѣ данной пирамиды. Такъ какъ $\triangle\ SDE = \triangle\ ABC$ то, согласно той же леммѣ, пирамиды $CSDE$ и $SABC$ равновелики. Такимъ образомъ, сумма объемовъ трехъ пирамидъ, равновеликихъ данной, составляетъ объемъ призмы; слѣд.:

$$\text{Об. } SABC=\frac{1}{3}\text{об. } SDEABC=\frac{(\text{площ. } ABC)\cdot H}{3}=(\text{площ. } ABC)\cdot\frac{H}{3},$$

гдѣ H означаетъ высоту пирамиды.

2°. Черезъ какую-нибудь вершину E (черт. 382) основанія многоугольной пирамиды $SABCDE$ проведемъ діагонали EB и EC. Затѣмъ черезъ ребро SE и каждую изъ этихъ діагоналей проведемъ сѣкущія плоскости. Тогда многоугольная пирамида разобьется на нѣсколько треугольныхъ, имѣющихъ высоту, общую съ данной пирамидой. Обозначивъ площади основаній треугольныхъ пирамидъ черезъ b_1, b_2, b_3 и высоту черезъ H, будемъ имѣть:



Черт. 382.

$$\text{Объемъ } SABCDE = \frac{1}{3}b_1H + \frac{1}{3}b_2H + \frac{1}{3}b_3H =$$

$$= (b_1 + b_2 + b_3)\frac{H}{3} = (\text{площ. } ABCDE)\frac{H}{3}.$$

435. Слѣдствіе. Если V, B и H означаютъ числа, выражающія въ соотвѣтственныхъ единицахъ объемъ, площадь основанія и высоту какой угодно пирамиды, то

$$V = \frac{1}{3}BH.$$

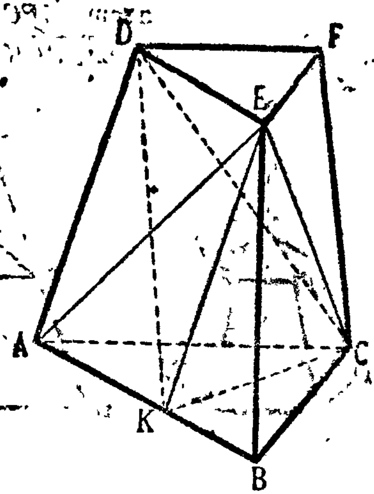
Объемъ усѣченной пирамиды и усѣченной призмы.

436. Теорема. Объемъ усѣченной пирамиды равенъ суммѣ объемовъ трехъ пирамидъ, имѣющихъ высоту, одинаковую съ высотою усѣченной пирамиды, а основаніями: одна—нижнее основаніе усѣченной пирамиды; другая—верхнее основаніе этой пирамиды, а третья—среднее пропорціональное между ними.

Сначала докажемъ эту теорему для т р е у г о л ь н о й пирамиды, а потомъ и м н о г о у г о л ь н о й.

1°. Пусть (черт. 383) $ABCDEF$ есть усѣченная треугольная пирамида. Отдѣлимъ отъ нея сѣкущею плоскостью AEC треугольную пирамиду $EABC$. Эта пирамида, имѣя основаніе ABC и вершину въ E, удовлетворяетъ требованію теоремы. Оставшаяся часть есть четырехугольная пирамида $EADFC$. Проведя въ ней сѣкущую плоскость черезъ точки E, D и C, мы раздѣлимъ ее на двѣ треугольныя пирамиды $EDFC$ и $EADC$. Въ первой

можно принять за основаніе $\triangle DEF$, т.-е. верхнее основаніе усѣченной пирамиды, а за вершину точку C; слѣд., эта пирамида удовлетворяетъ требованію теоремы. Остается разсмотрѣть третью пирамиду $EADC$. Превратимъ ее въ другую равновеликую пирамиду слѣдующимъ образомъ. Проведемъ $EK \parallel DA$ и точку K примемъ за вершину новой пирамиды, которой основаніемъ оставимъ тотъ же треугольникъ ADC. Пирамиды $EADC$ и $KADC$ равновелики, потому что у нихъ общее основаніе ADC и высоты равны (такъ какъ вершины лежатъ на прямой EK, параллельной AD и, слѣд., параллельной плоскости основанія). Примемъ за вершину новой пирамиды точку D, а за основаніе $\triangle ACK$. Тогда высота ея равна высотѣ усѣченной пирамиды. Остается доказать, что основаніе ACK есть средняя пропорціональная между ABC и DEF, т.-е. что



Черт. 383.

$$\frac{\text{площ. } ABC}{\text{площ. } ACK} = \frac{\text{площ. } ACK}{\text{площ. } DEF}$$

У тр-ковъ ABC и ACK за основанія можно взять стороны AB и AK; тогда вершина у нихъ будетъ общая C, и слѣд., высоты окажутся одинаковы; поэтому:

$$\frac{\text{площ. } ABC}{\text{площ. } ACK} = \frac{AB}{AK} = \frac{AB}{DE} \qquad [1]$$

(вмѣсто AK можно взять равный отрѣзокъ DE).

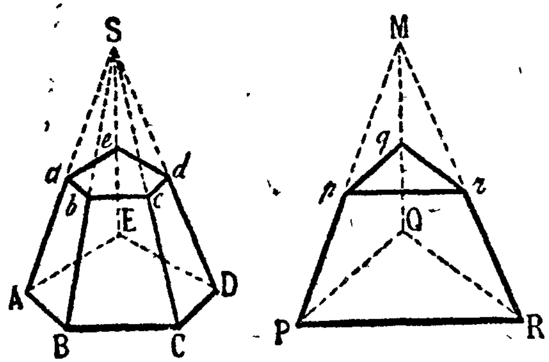
Треугольники ACK и DEF имѣютъ по равному углу при вершинахъ A и D; поэтому (324):

$$\frac{\text{площ. } ACK}{\text{площ. } DEF} = \frac{AC \cdot AK}{DF \cdot DE} = \frac{AC}{DF} \qquad [2]$$

(отрѣзки AK и DE, какъ равные, сокращаются).

Изъ подобія тр-ковъ ABC и DEF слѣдуетъ, что правыя части равенствъ [1] и [2] равны; слѣд., равны и ихъ лѣвыя части, т.-е.

$$\frac{\text{площ. } ABC}{\text{площ. } ACK}=\frac{\text{площ. } ACK}{\text{площ. } DEF}.$$



Черт. 384.

2°. Пусть (черт. 384) Ad есть усѣченная пирамида, составляющая часть многоугольной пирамиды $SABCDE$. Превратимъ мн-къ $ABCDE$ въ равновеликій тр-къ PQR и, принявъ этотъ тр-къ за основаніе, построимъ вспомогательную пирамиду $MPQR$ съ такой же высотою, какъ у пирамиды S. Пересѣчемъ пирамиду M плоскостью, параллельною основанію, на такомъ разстояніи отъ вершины, на какомъ въ пирамидѣ S проведена плоскость $abcde$. Въ сѣченіи получится $\triangle\, pqr$, равновеликій мн-ку $abcde$ (417). Пирамиды $SABCDE$ и $MPQR$ равновелики, такъ какъ у нихъ равновелики основанія и высоты равны; по той же причинѣ пирамиды $Sabcde$ и $Mpqr$ тоже равновелики; отсюда слѣдуетъ, что усѣч. многоугольная пирамида Ad равновелика усѣч. треугольной пирамидѣ Pr; такъ какъ у этихъ двухъ усѣченныхъ пирамидъ основанія, и нижнее и верхнее, соотвѣтственно равновелики, а высоты равны, то теорема, доказанная для усѣченной треугольной пирамиды, остается примѣнимой и къ многоугольной.

437. Слѣдствіе. Пусть V, B, b и H будутъ числа, выражающія въ соотвѣтствующихъ единицахъ объемъ, площадь нижняго основанія, площадь верхняго основанія и высоту усѣченной пирамиды; тогда можемъ писать:

$$V=\frac{1}{3}BH+\frac{1}{3}bH+\frac{1}{3}H\sqrt{Bb}=\frac{1}{3}H\left(B+b+\sqrt{Bb}\right),$$

гдѣ $\sqrt{Bb}$ есть средняя пропорціональная величина между B и b.

437а. Замѣчаніе. Объемъ усѣченной пирамиды можно вывести алгебраически слѣдующимъ образомъ. На меньшемъ основаніи усѣченной пирамиды помѣстимъ такую малую пирамиду (черт. 384), чтобы усѣченная превратилась въ полную. Пусть h будетъ высота этой дополнительной пирамиды. Тогда можемъ, очевидно, написать:

$$V=\frac{1}{3}B(H+h)-\frac{1}{3}bh=\frac{1}{3}[BH+(B-b\,h].$$

Для опредѣленія h воспользуемся теоремой § 414:

$$\frac{B}{b}=\frac{(H+h)^2}{h^2};\quad \text{откуда: } \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{b}}=\frac{H+h}{h}.$$

Изъ послѣдней пропорціи составимъ слѣдующую производную:

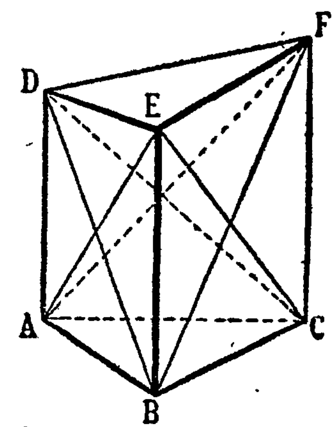
$$\frac{\sqrt{B}-\sqrt{b}}{\sqrt{b}}=\frac{H}{h};\quad \text{откуда: } h=\frac{H\sqrt{b}}{\sqrt{B}-\sqrt{b}}.$$

Теперь подставимъ это выраженіе вмѣсто h въ формулу объема:

$$V=\frac{1}{3}\left[BH+\frac{(B-b)H\sqrt{b}}{\sqrt{B}-\sqrt{b}}\right]=\frac{1}{3}[BH+(\sqrt{B}+\sqrt{b})H\sqrt{b}\,]=\frac{1}{3}[BH+H\sqrt{Bb}+bH]=$$
$$=\frac{1}{3}H(B+\sqrt{Bb}+b),$$

т.-е. объемъ ус. пирамиды равенъ суммѣ объемовъ трехъ пирамидъ, имѣющихъ и т. д. (теорема § 436).

438. Теорема. Объемъ треугольной призмы, усѣченной непараллельно основанію, равенъ суммѣ объемовъ трехъ пирамидъ, имѣющихъ общее основаніе съ усѣченной призмой, а вершины въ трехъ вершинахъ непараллельнаго сѣченія.



Черт. 385.

Пусть (черт. 385) $ABCDEF$ есть усѣченная треугольная призма, т.-е. такая, у которой плоскость DEF не параллельна основанію ABC. Проведя сѣкущую плоскость черезъ точки E, A и C, мы отдѣлимъ одну изъ трехъ пирамидъ, указанныхъ въ теоремѣ, именно пирамиду $EABC$, имѣющую основаніе ABC, общее съ усѣченной призмой, и вершину въ точкѣ E. Проведемъ еще сѣкущую плоскость черезъ точки E, D и C; тогда получимъ пирамиды $EDAC$ и $EDFC$. Теорема будетъ доказана, если мы обнаружимъ, что эти пирамиды равновелики, такимъ, у которыхъ основаніемъ служитъ $\triangle ABC$, а вершины лежатъ: одной въ D, другой въ F. Пирамиды $EDAC$ и $DABC$ равновелики, потому что за основаніе ихъ можно взять общій тр-къ DAC, и тогда вершины E и B будутъ лежать на прямой BE, параллельной плоскости основаній; пирамиды $EDFC$ и $FABC$ равновелики, потому что за основанія ихъ можно принять равновеликіе тр-ки: для первой CFD, для второй AFC (311,1°), и тогда ихъ вершины E и B будутъ лежать на прямой BE, параллельной плоскости основаній.

439. Слѣдствіе. Пусть V, B, h_1, h_2, h_3 будутъ числа, выражающія въ соотвѣтствующихъ единицахъ объемъ, площадь основанія и высоты, опущенныя на основаніе изъ трехъ вершинъ непараллельнаго сѣченія; тогда можемъ писать:

$$V=\frac{1}{3}Bh_1+\frac{1}{3}Bh_2+\frac{1}{3}Bh_3=B\frac{h_1+h_2+h_3}{3}.$$

Когда призма прямая, высоты h_1, h_2 и h_3 равны боковымъ ребрамъ ея.

ГЛАВА IV.

Подобіе многогранниковъ.

440. Опредѣленіе. Два многогранника наз. подобными, если они имѣютъ соотвѣтственно равные многогранные углы и соотвѣтственно подобныя грани. Соотвѣтственные элементы подобныхъ многогранниковъ наз. сходственными.

Изъ этого опредѣленія слѣдуетъ, что въ подобныхъ многогранникахъ:

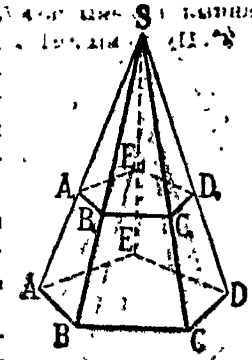
1°. Двугранные углы соотвѣтственно равны и одинаково расположены, потому что многогранные углы равны.

2°. Сходственныя ребра пропорціональны, потому что въ каждыхъ двухъ подобныхъ граняхъ отношеніе сходственныхъ реберъ одно и то же, и въ каждомъ многогранникѣ сосѣднія грани имѣютъ по общему ребру.

Возможность существованія подобныхъ многогранниковъ доказывается слѣдующей теоремой.

441. Теорема. **Если въ пирамидѣ (черт. 386) проведемъ сѣкущую плоскость ($A_1B_1C_1D_1E_1$) параллельно основанію, то отсѣчемъ отъ нея другую пирамиду ($SA_1B_1C_1D_1E_1$), подобную данной.**

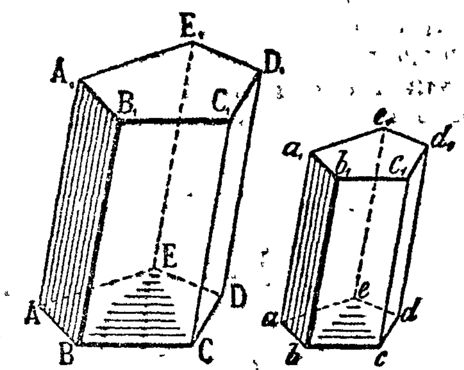
Такъ какъ $A_1B_1 \parallel AB$, $B_1C_1 \parallel BC$ и т. д. (373), то боковыя грани двухъ пирамидъ подобны; основанія ихъ также подобны (414). Остается доказать равенство многогранныхъ угловъ. Уголъ S у обѣихъ пирамидъ общій; трегранные углы A_1, B_1, C_1... равны соотвѣтственно угламъ A, B, C..., потому что у каждой пары этихъ угловъ плоскіе углы соотвѣтственно равны и одинаково расположены (402, 3°).



Черт. 386.

442. Теорема. **Двѣ призмы или двѣ пирамиды подобны, если основаніе и боковая грань одной и основаніе и боковая грань другой соотвѣтственно подобны, одинаково наклонены и одинаково расположены.**

1°. Пусть у двухъ призмъ (черт. 387) соотвѣтственно подобны и одинаково расположены основанія $ABCDE$, $abcde$ и грани AA_1B_1B, aa_1b_1b (на чертежѣ онѣ покрыты штрихами) и, кромѣ того, равны двугранные углы AB и ab. Для доказательства подобія этихъ призмъ, разсуждаемъ въ такой послѣдовательности. Трехгранные углы B и b равны, потому что они имѣютъ по равному двугранному углу (AB и ab), заключенному между двумя соотвѣтственно равными и одинаково расположенными плоскими углами ($ABC=abc$ и $ABB_1=abb_1$); отсюда слѣдуетъ, что равны плоскіе углы B_1BC и b_1bc, а также и двугранные BC и bc. Если же у двухъ параллелограммовъ BB_1C_1C и bb_1c_1c имѣется по одному равному углу, то и остальные углы ихъ соотвѣтственно равны; такъ какъ, сверхъ того,



Черт. 387.

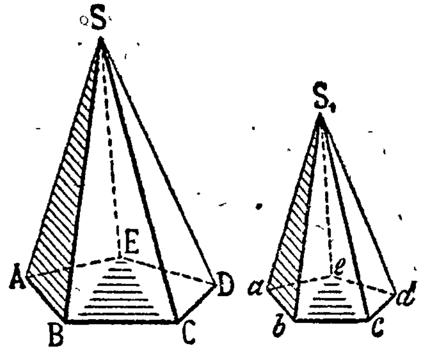
$$\frac{BC}{bc}=\frac{AB}{ab} \text{ (изъ подобія осн.) и } \frac{BB_1}{bb_1}=\frac{AB}{ab} \text{ (изъ под. бок. граней),}$$

то

$$\frac{BC}{bc}=\frac{BB_1}{bb_1}.$$

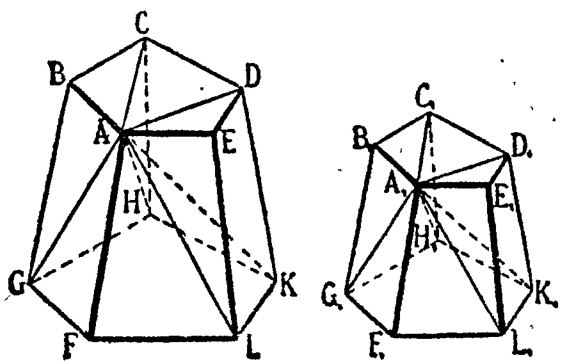
Значитъ, грани BB_1C_1C и bb_1c_1c подобны. Переходя теперь къ трегранньгмъ угламъ C и c, совершенно такъ же убѣдимся, что они равны и что грани CC_1D_1D и cc_1d_1d подобны. Такимъ образомъ, мы переберемъ всѣ трегранные углы при основаніи и всѣ боковыя грани. Верхнія основанія подобны, потому что они равны нижнимъ основаніямъ; трегранные углы при верхнихъ основаніяхъ соотвѣтственно равны, потому что у нихъ равны и одинаково расположены плоскіе углы. Значитъ, данныя призмы подобны.

2°. Пусть мы имѣемъ (черт. 388) двѣ пирамиды, у которыхъ соотвѣтственно подобны и одинаково расположены основанія и боковыя грани SAB, sab (на чертежѣ онѣ покрыты штрихами) и, кромѣ того, равны двугранные углы AB и ab. Совершенно такъ, какъ это было сдѣлано для призмъ, мы докажемъ, что всѣ трегранные углы, прилежащіе къ основаніямъ, соотвѣтственно равны, и что всѣ боковыя грани соотвѣтственно подобны. Тогда многогранные углы S и S_1 также будутъ равны, потому что, имѣя всѣ плоскіе и двугранные углы соотвѣтственно равные и одинаково расположенные, они при вложеніи одного въ другой совмѣщаются.



Черт. 388.

443. Теорема. Подобные многогранники могутъ быть разложены на одинаковое число соотвѣтственно подобныхъ и одинаково расположенныхъ пирамидъ.



Черт. 389.

Указанное въ теоремѣ разложеніе можетъ быть выполнено различными способами. Мы поступимъ слѣдующимъ образомъ (черт. 389):

Возьмемъ въ одномъ изъ данныхъ подобныхъ многогранниковъ вершину A какого-нибудь многограннаго угла. Возьмемъ далѣе всѣ тѣ грани многогранника, которыя не прилежатъ къ углу A. Въ нашемъ многогранникѣ такихъ граней четыре: $EDKL$, $DCHK$, $CBGH$ и $FGHKL$. Каждую изъ этихъ граней примемъ за основаніе такой пира-

миды, которой вершина лежала бы въ A. Тогда многогранникъ разобьется на пирамиды, сходящіяся вершинами въ точкѣ A. Въ другомъ многогранникѣ возьмемъ сходственную вершину A_1 и тѣмъ же путемъ разложимъ его на одинаковое число пирамидъ. Докажемъ, что эти пирамиды соотвѣтственно подобны. И дѣйствительно, какую бы пару соотвѣтственныхъ пирамидъ мы ни взяли, легко найдемъ, что основаніе и грань одной пирамиды и основаніе и грань другой пирамиды соотвѣтственно подобны, одинаково наклонены и одинаково расположены. Напр., у пирамидъ $ADELK$, $A_1D_1E_1L_1K_1$ основанія $DELK$ и $D_1E_1L_1K_1$ подобны, какъ сходственныя грани подобныхъ многогранниковъ, грани ADE и $A_1D_1E_1$ подобны, потому что подобные многоугольники $ABCDE$, $A_1B_1C_1D_1E_1$ разбиваются на соотвѣтственно подобные тр-ки; двугранные углы DE, D_1E_1 равны, какъ сходственные углы подобныхъ многогранниковъ. Изъ этого слѣдуетъ, что взятыя нами пирамиды подобны. То же самое можно сказать о другихъ пирамидахъ.

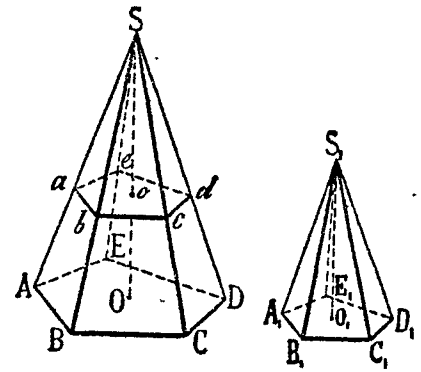
444. Теорема. Поверхности подобныхъ многогранниковъ относятся, какъ квадраты сходственныхъ реберъ.

Пусть $P_1, P_2, P_3 \ldots P_n$ означаютъ площади отдѣльныхъ граней одного изъ подобныхъ многогранниковъ, а $p_1, p_2, p_3 \ldots, p_n$ площади сходственныхъ граней другого; положимъ еще, что L и l будутъ длины двухъ какихъ-нибудь сходственныхъ реберъ. Тогда, вслѣдствіе подобія сходственныхъ граней и пропорціональности всѣхъ сходственныхъ реберъ, будемъ имѣть (326):

$$\frac{P_1}{p_1}=\frac{L^2}{l^2};\ \frac{P_2}{p_2}=\frac{L^2}{l^2};\ \frac{P_3}{p_3}=\frac{L^2}{l^2};\ldots\ \frac{P_n}{p_n}=\frac{L^2}{l^2}.$$

Откуда:
$$\frac{P_1+P_2+P_3+\ldots+P_n}{p_1+p_2+p_3+\ldots+p_n}=\frac{L^2}{l^2}.$$

445. Теорема. Объемы подобныхъ многогранниковъ относятся, какъ кубы сходственныхъ реберъ.



Черт. 390.

1°. Сначала докажемъ теорему для подобныхъ пирамидъ. Пусть (черт. 390) пирамиды $SABCDE$ и $S_1A_1B_1C_1D_1E_1$ подобны. Вложимъ вторую пирамиду въ первую такъ, чтобы у нихъ совпали равные многогранные углы S и S_1. Тогда основаніе $A_1B_1C_1D_1E_1$ займетъ нѣкоторое положеніе $abcde$, при чемъ стороны ab, bc,... соотвѣтственно параллельны сторонамъ AB, BC,... (вслѣдствіе равенства плоскихъ угловъ трегранныхъ A и A_1, B и B_1 и т. д.); вслѣдствіе этого плоскость *abcde* параллельна $ABCDE$ (372,2°). Пусть SO и So—высоты двухъ пирамидъ. Тогда:

$$\text{Об. } SABCDE = (\text{площ. } ABCDE) \cdot {}^1/_3\, SO.$$

$$\text{Об. } Sabcde = (\text{площ. } abcde) \cdot {}^1/_3\, So.$$

Слѣд.
$$\frac{\text{Об. } SABCDE}{\text{Об. } Sabcde} = \frac{\text{площ. } ABCDE}{\text{площ. } abcde} \cdot \frac{SO}{So}.$$

Но
$$\frac{\text{площ. } ABCDE}{\text{площ. } abcde} = \frac{SO^2}{So^2}. \qquad (414,3°)$$

Поэтому
$$\frac{\text{об. } SABCDE}{\text{об. } Sabcde} = \frac{SO^3}{So^3} = \frac{SA^3}{Sa^3} = \ldots \qquad (414,1°)$$

2°. Теперь докажемъ теорему для двухъ какихъ угодно подобныхъ многогранниковъ, объемы которыхъ назовемъ V и v. Разобьемъ ихъ на подобныя пирамиды (443). Пусть $V_1, V_2, V_3 \ldots V_n$ и $v_1, v_2, v_3 \ldots v_n$ будутъ объемы сходственныхъ пирамидъ, L и l длины какихъ-нибудь сходственныхъ реберъ. Тогда, согласно доказанному, будемъ имѣть:

$$\frac{V_1}{v_1} = \frac{L^3}{l^3};\ \frac{V_2}{v_2} = \frac{L^3}{l^3}; \ldots \frac{V_n}{v_n} = \frac{L^3}{l^3}.$$

Откуда:
$$\frac{V_1 + V_2 + \ldots + V_n}{v_1 + v_2 + \ldots + v_n} = \frac{L^3}{l^3},$$

т.-е.
$$\frac{V}{v} = \frac{L^3}{l^3}.$$

446. Замѣчаніе. Въ стереометріи можно разсматривать ф и г у р ы, п о д о б н о р а с п о л о ж е н н ы я, въ томъ же смыслѣ, какой былъ нами указанъ въ планиметріи (211 и слѣд.), при чемъ и здѣсь, какъ и тамъ, подобіе въ расположеніи можетъ быть двоякое: п р я м о е и о б р а т н о е.

Не входя въ подробности этого разсмотрѣнія, замѣтимъ только слѣдующее важное различіе между подобіемъ въ расположеніи на плоскости и подобіемъ въ расположеніи въ пространствѣ 3-хъ измѣреній. На плоскости, какъ мы видѣли (215), **многоугольники, подобно расположенные, прямо или обратно, оказываются всегда подобными** между собою; въ стереометріи же только *при прямомъ* **подобіи въ расположеніи многогранники подобны между собою, при обратномъ** же подобіи въ расположеніи многогранники вообще не подобны (примѣромъ могутъ служить с и м м е т р и ч н ы е многогранные углы, о которыхъ говорилось въ § 403).

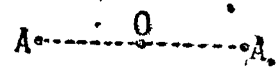
ГЛАВА V.

Симметричныя фигуры.

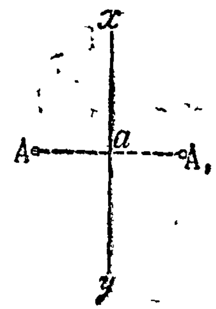
447. Опредѣленія. Различаютъ три рода с и м м е т р і и: относительно точки, относительно прямой и относительно плоскости.

Двѣ точки A и A_1 (черт. 391) наз. симметричными относительно точки O (ц е н т р а с и м м е т р і и), если прямая AA_1 проходитъ

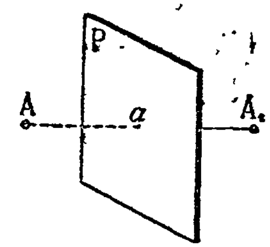
черезъ точку O и дѣлится ею пополамъ. Двѣ точки A и A_1 (черт. 392) наз. симметричными относительно прямой xy (о с и с и м м е т р і и) или (черт. 393) относительно плоскости P (п л о с к о с т и с и м м е т р і и), если прямая AA_1, перпендикулярна къ xy или къ плоскости P и дѣлится ими пополамъ.



Черт. 391.

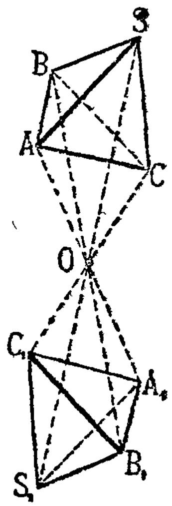


Черт. 392.

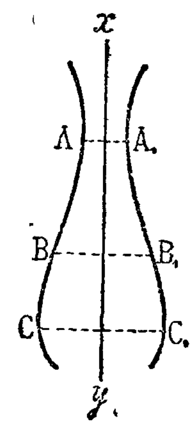


Черт. 393.

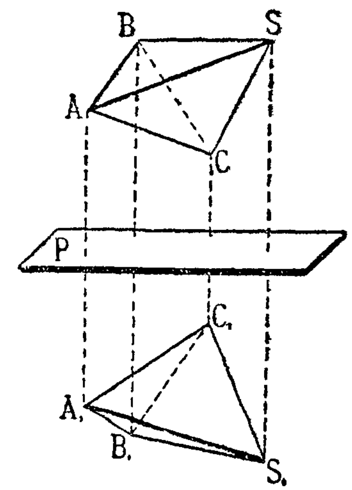
Двѣ фигуры наз. симметричными относительно центра (черт. 394), оси (черт. 395), или плоскости (черт. 396), если каждой точкѣ одной фигуры соотвѣтствуетъ симметричная точка другой. Симметричныя точки двухъ такихъ фигуръ наз. с х о д с т в е н н ы м и.



Черт. 394.



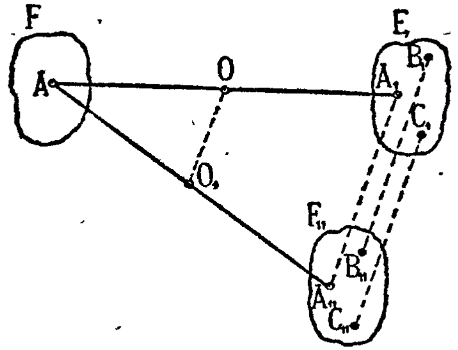
Черт. 395.



Черт. 396.

Легко видѣть, что **двѣ фигуры, симметричныя относительно оси, равны.** Въ этомъ убѣдимся, если повернемъ одну изъ фигуръ (черт. 395) вокругъ оси на 180°. Тогда каждая точка A одной фигуры совпадетъ съ сходственной точкой A_1 другой фигуры, и, слѣд., обѣ фигуры совмѣстятся.

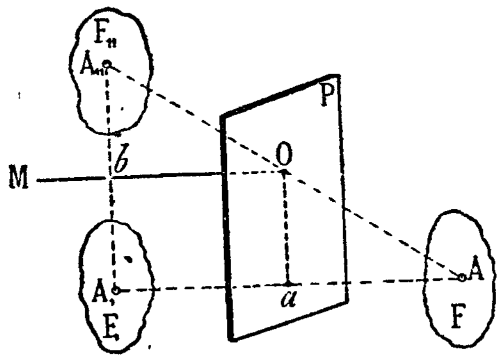
448. Теорема. Фигуры, симметричныя съ одной и той же фигурой относительно различныхъ центровъ, равны между собою.



Черт. 397.

Д о к. Пусть фигуры F_1 и F_{11} симметричны съ одной фигурой F относительно центровъ O и O_1 (черт. 397). Возьмемъ въ фигурѣ F произвольную точку A и въ фигурахъ F_1 и F_1 точки A_1 и A_{11}, симметричныя съ A; затѣмъ проведемъ прямыя OO_1 и A_1A_{11}. Такъ какъ $AO=A_1O$ и $AO_1=A_{11}O_1$, то $A_1A_{11} \parallel OO_1$ и $A_1A_{11}=2OO_1$. Такимъ образомъ, всѣ соотвѣтственныя точки фигуръ F_1 и F_{11} (напр., A_1 и A_{11}, B_1 и B_{11}, C_1 и C_{11} и т. д.) лежатъ на разстояніяхъ, параллельныхъ прямой OO_1 и равныхъ $2OO_1$. Поэтому, если перемѣстимъ фигуру F_1 такъ, чтобы каждая ея точка описала прямую, параллельную OO_1 и равную удвоенной этой линіи, то обѣ фигуры F_1 и F_{11} совмѣстятся; значитъ, онѣ равны.

449. Теорема. Если фигуры F и F_1 (черт. 398) симметричны относительно плоскости P, то ихъ можно помѣстить такъ, что онѣ будутъ симметричны относительно любой точки O, взятой на этой плоскости; обратно, если фигуры F и F_{11} симметричны относительно точки O, то ихъ можно помѣстить такъ, что онѣ будутъ симметричны относительно любой плоскости P, проходящей чрезъ эту точку O.



Черт. 398.

Д о к. Если фигуры F и F_1 симметричны относительно плоскости P, то прямая AA_1, соединяющая какія-нибудь двѣ сходственныя точки, перпендикулярна къ плоскости P и дѣлится ею пополамъ; значитъ: $Aa=A_1a$. Если фигуры F и F_{11} симметричны относительно точки O, то прямая AA_{11}, соединяющая двѣ сходственныя точки, про-

ходитъ черезъ O и дѣлится этою точкою пополамъ; значитъ: $AO=A_{11}O$. Замѣтивъ это, соединимъ A_1 съ A_{11} и проведемъ OM перпендикулярно къ P. Такъ какъ $OA=A_{11}O$ и $Aa=A_1a$, то $A_1A_{11} \parallel aO$; слѣд., $\angle A_{11}A_1A=\angle OaA=d$. Такъ какъ $OM \perp P$ и $AA_1 \perp P$, то $OM \parallel AA_1$; изъ этого слѣдуетъ, что, во 1°, OM пересѣкается съ A_1A_{11} въ нѣкоторой точкѣ b, во 2°, $\angle A_{11}bO=\angle A_{11}A_1A=d$, въ 3°, $A_1b=A_{11}b$ (такъ какъ $A_{11}O=OA$). Если мы теперь повернемъ фигуры F_1 и F_{11} вокругъ оси OM на 180°, то точки A_1 и A_{11}, а слѣд., и всѣ другія сходственныя точки, помѣняются мѣстами; значитъ, фигура F_1 можетъ быть сдѣлана симметричною съ F относительно точки O, а фигура F_{11} можетъ быть сдѣлана симметричною съ F относительно плоскости P, что и требовалось доказать.

450. Слѣдствія. 1°. **Фигуры, симметричныя съ одной и той же фигурой относительно различныхъ плоскостей, равны между собою,** потому что эти фигуры всегда можно сдѣлать симметричными съ одной и той же фигурой относительно различныхъ центровъ, а такія фигуры, какъ мы видѣли (448), равны между собою.

2°. Если будемъ обращать вниманіе только на ф о р м у фигуры, а не на ея положеніе въ пространствѣ, то можемъ сказать, что **данная фигура F имѣетъ только единственную симметричную съ нею фигуру** (относительно точки, или относительно плоскости, все равно), такъ какъ всѣ фигуры, симметричныя съ F, равны между собою. Вслѣдствіе этого, при изслѣдованіи свойствъ симметричныхъ фигуръ, зависящихъ только отъ ихъ формы, мы можемъ по произволу разсматривать эти фигуры или какъ симметричныя относительно центра, или какъ симметричныя относительно плоскости.

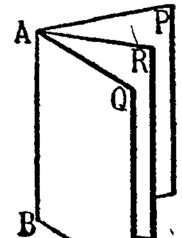
451. Теоремы, выражающія свойства симметричныхъ фигуръ.

1°. **Фигура, симметричная съ плоской фигурой, есть также плоская фигура, равная первой.**

Это свойство сдѣлается очевиднымъ, если возьмемъ за плоскость симметріи плоскость данной фигуры; тогда симметричная фигура сливается съ данной.

Въ частности, фигура, симметричная съ отрѣзкомъ прямой, есть равный отрѣзокъ прямой; фигура, симметричная съ угломъ, есть равный уголъ; фигура, симметричная съ плоскимъ многоугольникомъ, есть равный плоскій многоугольникъ; фигура, симметричная съ кругомъ, есть равный кругъ, и т. п.

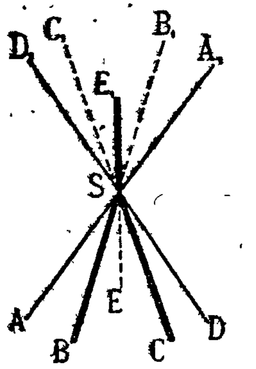
2°. **Фигура, симметричная съ двуграннымъ угломъ** ($PABQ$, черт. 399), **есть равный двугранный уголъ.**



Черт. 399.

Это свойство сдѣлается очевиднымъ, если за плоскость симметріи возьмемъ б и с с е к т р и с н у ю плоскость R. Тогда фигура, симметричная съ гранью P, будетъ другая грань Q, и наоборотъ; слѣд., фигура, симметричная съ угломъ $PABQ$, будетъ уголъ $QABP$.

5°. Фигура, симметричная съ многограннымъ угломъ ($SABCDE$, черт. 400), есть многогранный уголъ, у котораго двугранные и плоскіе углы соотвѣтственно равны двуграннымъ и плоскимъ угламъ перваго многограннаго угла, но расположены въ обратномъ порядкѣ.

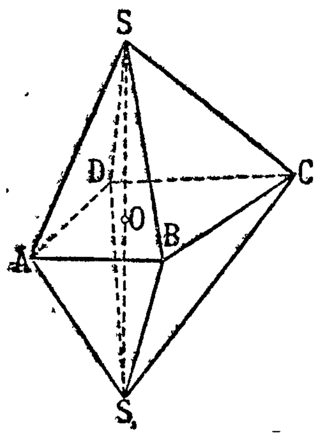


Черт. 400.

Это свойство сдѣлается очевиднымъ, если возьмемъ за центръ симметріи вершину S. Тогда получимъ два симметричные угла $SABCDE$ и $SA_1B_1C_1D_1E_1$, у которыхъ двугранные и плоскіе углы соотвѣтственно равны, но расположены въ обратномъ порядкѣ (403).

Слѣдствіе. Симметричные многогранные углы вообще не равны, такъ какъ, вслѣдствіе обратнаго расположенія равныхъ двугранныхъ угловъ, они не могутъ совмѣститься. По той же причинѣ симметричные многогранники вообще не равны.

6°. Два симметричные многогранника равновелики.



Черт. 401.

Докажемъ сначала эту теорему для симметричныхъ пирамидъ (черт. 401) $SABCD$ и S_1ABCD, которыя мы размѣстимъ такъ, чтобы плоскостью симметріи служило основаніе $ABCD$. Такъ какъ точки S и S_1 симметричны относительно плоскости основанія, то высоты SO и S_1O равны; вслѣдствіе этого пирамиды, имѣя общее основаніе и равныя высоты, равновелики.

Два какихъ угодно симметричныхъ многогранника всегда могутъ быть разложены на одинаковое число симметричныхъ пирамидъ; поэтому теорема вѣрна и для многогранниковъ произвольной формы.

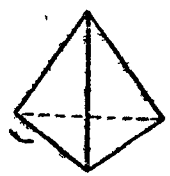
ГЛАВА VI.

Понятіе о правильныхъ многогранникахъ.

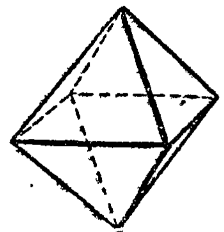
452. Опредѣленіе. Многогранникъ наз. **правильнымъ**, если всѣ его грани суть равные правильные многоугольники и всѣ многогранные углы равны (таковъ, напр., кубъ). Изъ этого опредѣленія слѣдуетъ, что въ правильныхъ многогранникахъ равны всѣ плоскіе углы, всѣ двугранные углы и всѣ ребра.

453. Какіе правильные многоугольники могутъ служить гранями правильныхъ многогранниковъ? Чтобы рѣшить этотъ вопросъ, примемъ во вниманіе, что въ многогранномъ углѣ наименьшее число граней три и что сумма плоскихъ угловъ выпуклаго мн. угла меньше $4d$ (398). Каждый уголъ правильнаго треугольника равенъ $^2/_3d$. Если повторимъ $^2/_3d$ слагаемымъ 3 раза, 4 раза и 5 разъ, то получимъ суммы, меньшія $4d$; а если повторимъ $^2/_3d$ слагаемымъ 6 разъ или болѣе, то получимъ въ суммѣ $4d$ или болѣе. Поэтому изъ плоскихъ угловъ, равныхъ угламъ правильнаго тр-ка, можно образовать выпуклые многогранные углы только трехъ видовъ: трегранные, четырегранные и пятигранные. Уголъ квадрата равенъ d, а уголъ правильнаго пятиугольника равенъ $^6/_5d$; повторяя эти углы слагаемымъ 3 раза, получаемъ суммы, меньшія $4d$, а повторяя ихъ 4 раза или болѣе, получаемъ $4d$ или болѣе. Поэтому изъ плоскихъ угловъ, равныхъ угламъ квадрата или правильнаго пятиугольника, можно образовать только трегранные углы. Уголъ правильнаго шестиугольника равенъ $^4/_3d$; поэтому изъ такихъ угловъ нельзя образовать даже трегранного угла. Изъ угловъ правильныхъ многоугольниковъ, имѣющихъ болѣе 6-ти сторонъ, подавно, нельзя образовать никакого многограннаго угла.

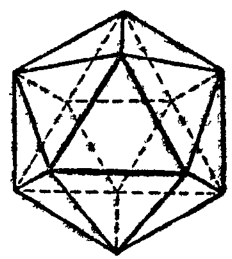
454. Перечисленіе правильныхъ многогранниковъ. Изъ сказаннаго въ предыдущемъ параграфѣ слѣдуетъ, что выпуклыхъ правильныхъ многогранниковъ не можетъ быть болѣе слѣдующихъ пяти *):



Черт. 402.



Черт. 403.

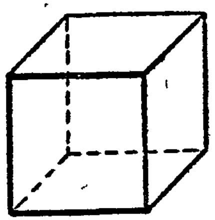


Черт. 404.

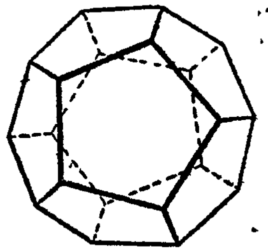
*) Ихъ не можетъ быть **болѣе пяти**, но существуютъ ли эти пять, это предыдущими разсужденіями, конечно, не доказывается; мы опускаемъ это доказательство по причинѣ его сложности.

1°. Правильный четырегранникъ, или **тетраэдръ**, котораго поверхность составлена изъ 4-хъ правильныхъ тр-ковъ (черт. 402).

2°. Правильный восьмигранникъ, или **октаэдръ**, котораго поверхность составлена изъ 8-ми правильныхъ тр-ковъ (черт. 403).



Черт. 405.



Черт. 406.

3°. Правильный двадцатигранникъ, или **икосаэдръ**, образованный 20-ю правильными тр-ками (черт. 404).

4°. Правильный шестигранникъ, или **эксаэдръ**, образованный 6-ю квадратами (черт. 405). Онъ наз. иначе к у б о м ъ.

5°. Правильный двѣнадцатигранникъ, или **додекаэдръ**, образованный 12-ю правильными пятиугольниками (черт. 406).

З А Д А Ч И.

335, *a*. Ребро даннаго куба равно *a*. Найти ребро другого куба, котораго объемъ вдвое болѣе объема даннаго куба.

З а м ѣ ч а н і е. Эта з а д а ч а о б ъ у д в о е н і и к у б а, извѣстная съ древнихъ временъ, легко рѣшается вычисленіемъ (именно: $x=\sqrt[3]{2a^3}=a\sqrt[3]{2}=a.1,25992..$), но построеніемъ (помощью циркуля и линейки) она рѣшена быть не можетъ, такъ какъ формула для неизвѣстнаго содержитъ радикалъ 3-й степени (см. конецъ § 255).

335. Вычислить поверхность и объемъ прямой призмы, у которой основаніе правильный тр-къ, вписанный въ кругъ радіуса $r=2$ метрамъ, а высота равна сторонѣ правильнаго 6-угольника, описаннаго около того же круга.

336. Опредѣлить поверхность и объемъ правильной 8-угольной призмы, у которой высота $h=6$ арш., а сторона основанія $a=8$ вершкамъ.

337. Опредѣлить боковую поверхность и объемъ правильной шестиугольной пирамиды, у которой высота равна 1 метру, а апоѳема составляетъ съ высотою уголъ въ 30°.

338. Вычислить объемъ треугольной пирамиды, у которой каждое боковое ребро равно *l*, а стороны основанія суть *a*, *b* и *c*.

339. Данъ трегранный уголъ *SABC*, у котораго всѣ три плоскіе угла прямые. На его ребрахъ отложены длины: $SA=a$, $SB=b$ и $SC=c$. Черезъ точки *A*, *B* и *C* проведена плоскость. Опредѣлить объемъ пирамиды *SABC*.

340. Высота пирамиды равна *h*, а основаніе—правильный шестиугольникъ со стороною *a*. На какомъ разстояніи *x* отъ вершины пирамиды слѣдуетъ провести плоскость, параллельную основанію, чтобы объемъ образовавшейся усѣченной пирамиды равнялся *V*?

341. Опредѣлить объемъ правильнаго тетраэдра съ ребромъ *a*.

342. Опредѣлить объемъ правильнаго октаэдра съ ребромъ *a*.

343. Усѣченная пирамида, которой объемъ $V=1465$ куб. сантим., имѣетъ основаніями правильные шестиугольники со сторонами: $a=23$ сант. и $b=17$ сант. Вычислить высоту этой пирамиды.

344. Объемъ *V* усѣченной пирамиды равенъ 10,5 куб. метра, высота $h=\sqrt{3}$ метр. и сторона *a* правильнаго шестиугольника, служащаго нижнимъ основаніемъ, равна 2 метр. Вычислить сторону правильнаго шестугольника, служащаго верхнимъ основаніемъ.

345. Вычислить объемъ треугольной усѣченной призмы, у которой стороны основанія суть: $a=7,5$, $b=7$ и $c=6,5$ и ребра, перпендикулярныя къ основанію, суть: $k=2$, $l=3$ и $m=4$.

346. На какомъ разстояніи отъ вершины *S* пирамиды *SABC* надо провести плоскость, параллельную основанію, чтобы отношеніе объемовъ частей, на которыя разсѣкается этою плоскостью пирамида, равнялось *m*?

347. Вычислить объемъ усѣченнаго параллелепипеда, у котораго основаніе есть *B*, а h_1 и h_2 суть длины перпендикуляровъ, опущенныхъ на плоскость нижняго основанія изъ двухъ вершинъ, лежащихъ на концахъ какой-нибудь діагонали верхняго основанія*).

348. Пирамида съ высотою *h* раздѣлена плоскостями, параллельными основанію, на три части въ отношеніи $m:n:p$. Опредѣлить разстоянія этихъ плоскостей до вершины пирамиды.

349. Сумма объемовъ двухъ подобныхъ многогранниковъ равна *V*, а отношеніе сходственныхъ реберъ равно $m:n$. Опредѣлить объемы ихъ.

350. Раздѣлить объемъ усѣченной пирамиды плоскостью, параллельною основаніямъ *B* и *b*, на двѣ части въ отношеніи $m:n$.

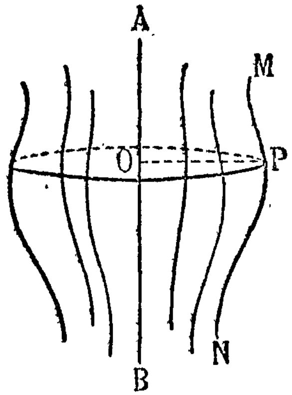
---

*) Легко установить, что сумма h_1+h_2 равна суммѣ двухъ другихъ перпендикуляровъ, опущенныхъ на плоскость нижняго основанія изъ вершинъ, лежащихъ на концахъ другой діагонали верхняго основанія.

КНИГА III.
КРУГЛЫЯ ТѢЛА.

ГЛАВА I.
Цилиндръ и конусъ.

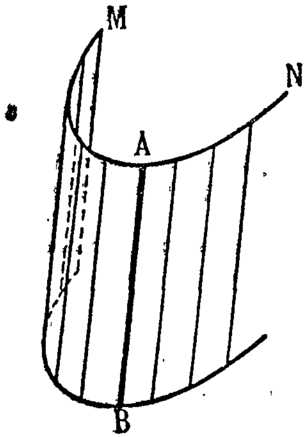
455. Поверхность вращенія. Такъ наз. поверхность, которая получается отъ вращенія какой-нибудь неизмѣняющейся линіи (MN, черт. 407), называемой *образующей*, вокругъ неподвижной прямой (AB), называемой *осью*; при этомъ предполагается, что образующая (MN), при своемъ вращеніи, неизмѣнно связана съ осью (AB).



Черт. 407.

Возьмемъ на образующей какую-нибудь точку P и опустимъ изъ нея на ось перпендикуляръ PO. Очевидно, что при вращеніи не измѣняется ни длина этого перпендикуляра, ни величина угла AOP, ни положеніе точки O. Поэтому каждая точка образующей описываетъ окружность, которой плоскость перпендикулярна къ оси и центръ лежитъ на пересѣченіи этой плоскости съ осью. Отсюда слѣдуетъ:

плоскость, перпендикулярная къ оси, пересѣкаясь съ поверхностью вращенія, даетъ въ сѣченіи окружность.

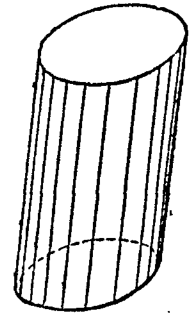


Черт. 408.

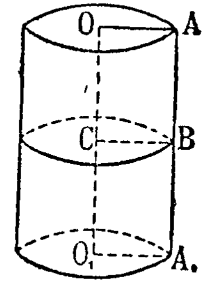
Всякая сѣкущая плоскость, проходящая черезъ ось, наз. *меридіанальною* плоскостью, а пересѣченіе ея съ поверхностью вращенія—*меридіаномъ*. Всѣ меридіаны равны между собою, потому что при вращеніи каждый изъ нихъ проходитъ черезъ то положеніе, въ которомъ ранѣе былъ всякій другой меридіанъ.

456. Цилиндрическая поверхность. Такъ наз. поверхность, производимая движеніемъ прямой (AB, черт. 408), перемѣщающейся въ пространствѣ параллельно данному направленію и пересѣкающей при этомъ данную линію (MN). Прямая AB наз. *образующею*, а линія MN *направляющею*.

457. Цилиндръ. Такъ наз. тѣло, ограниченное цилиндрическою поверхностью и двумя параллельными плоскостями, (черт. 409). Часть цилиндрической поверхности, заключенная между плоскостями, наз. *боковою поверхностью*, а части плоскостей, отсѣкаемыя этою поверхностью,—*основаніями* цилиндра. Разстояніе между основаніями есть *высота* цилиндра. Цилиндръ наз. *прямымъ* или *наклоннымъ*, смотря по тому, перпендикулярны или наклонны къ основаніямъ его образующія.


Черт. 409.

Прямой цилиндръ (черт. 410) наз. *круговымъ*, если его основанія круги. Такой цилиндръ можно разсматривать, какъ тѣло, происходящее отъ вращенія прямоугольника OAA_1O_1 вокругъ стороны OO_1, какъ оси; при этомъ сторона AA_1 описываетъ боковую поверхность, а стороны OA и O_1A_1—круги основаній. Всякая прямая BC, параллельная OA, описываетъ также кругъ, перпендикулярный къ оси. Отсюда слѣдуетъ:



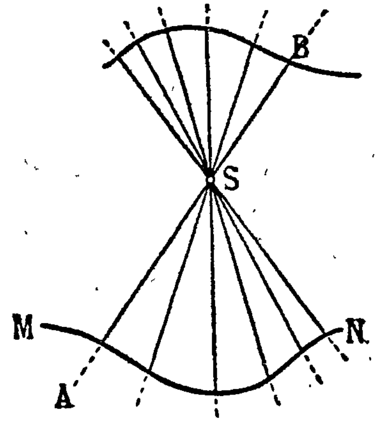
Черт. 410.

сѣченіе прямого кругового цилиндра плоскостью, параллельною основаніямъ, есть кругъ.

Въ элементарной геометріи разсматривается только прямой круговой цилиндръ; для краткости его называютъ просто *цилиндромъ*.

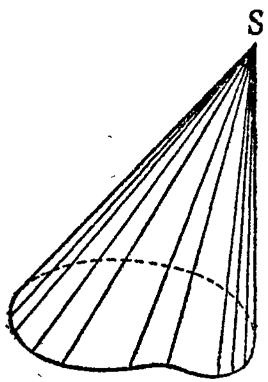
Иногда приходится разсматривать такія призмы, которыхъ основанія суть многоугольники, вписанные въ основанія цилиндра или описанные около нихъ; такія призмы наз. вписанными въ цилиндръ или описанными около него.

458. Коническая поверхность. Такъ наз. поверхность, производимая движеніемъ прямой (AB, черт. 411), перемѣщающейся въ пространствѣ такъ, что она при этомъ постоянно проходитъ черезъ неподвижную точку (S) и пересѣкаетъ данную линію (MN). Прямая AB наз. образующею, линія MN—направляющею, а точка S—вершиною конической поверхности.



Черт. 411.

459. Конусъ. Такъ наз. тѣло, ограниченное конической поверхностью и плоскостью, пересѣкающею всѣ образующія по одну сторону отъ вершины, (черт. 412). Часть конической поверхности, ограниченная этою плоскостью, наз. боковою поверхностью, а часть плоскости, отсѣкаемая боковою поверхностью,—основаніемъ конуса. Перпендикуляръ, опущенный изъ вершины на основаніе, есть высота конуса.



Черт. 412.

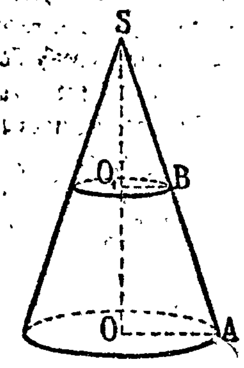
Конусъ наз. прямымъ круговымъ, если его основаніе есть кругъ, а высота проходитъ черезъ центръ основанія (черт. 413). Такой конусъ можно разсматривать, какъ тѣло, происходящее отъ вращенія прямоугольнаго тр-ка SOA вокругъ катета SO, какъ оси. При этомъ гипотенуза SA производитъ боковую поверхность, а катетъ OA—основаніе конуса. Всякая прямая BO_1, параллель-

ная AO, описываетъ при вращеніи кругъ, перпендикулярный къ оси. Отсюда слѣдуетъ:

сѣченіе прямого кругового конуса плоскостью, параллельною основанію, есть кругъ.

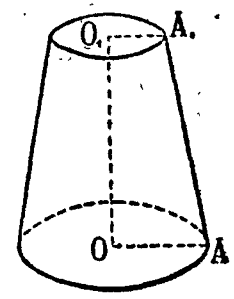
Въ элементарной геометріи разсматривается только прямой круговой конусъ, который для краткости наз. просто конусомъ.

Иногда приходится разсматривать такія пирамиды, которыхъ основанія суть многоугольники, вписанные въ основаніе конуса или описанные около него, а вершина совпадаетъ съ вершиною конуса. Такія пирамиды наз. вписанными въ конусъ или описанными около него.



Черт. 413.

460. Усѣченный конусъ. Такъ наз. часть полнаго конуса, заключенная между основаніемъ и сѣкущею плоскостью, параллельною основанію. Параллельные круги, ограничивающіе усѣченный конусъ, наз. основаніями его. Усѣченный конусъ (черт. 414) можно разсматривать, какъ тѣло, происходящее отъ вращенія прямоугольной трапеціи OAA_1O_1 вокругъ стороны OO_1, перпендикулярной къ основаніямъ трапеціи.



Черт. 414.

Поверхность цилиндра и конуса.

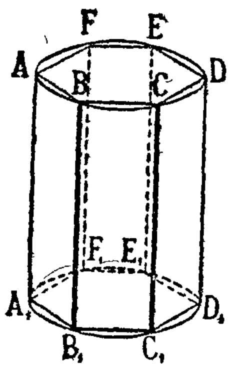
461. Опредѣленія. Боковыя поверхности цилиндра и конуса принадлежатъ къ поверхностямъ кривымъ, т.-е. къ такимъ, которыхъ никакая часть не можетъ совмѣститься съ плоскостью. Поэтому мы должны особо опредѣлить, что разумѣютъ подъ величиною боковой поверхности цилиндра или конуса, когда сравниваютъ эти поверхности съ плоскою единицею площади. Мы будемъ держаться слѣдующихъ опредѣленій.

1°. За величину боковой поверхности цилиндра принимають предѣлъ, къ которому стремится величина боковой поверхности вписанной въ этотъ цилиндръ призмы, когда ея боковыя грани неограниченно уменьшаются (и, слѣд., число граней неограниченно увеличивается).

2°. За величину боковой поверхности конуса (полнаго или усѣченнаго) **принимается предѣлъ, къ которому стремится величина боковой поверхности вписанной въ этотъ конусъ пирамиды** (полной или усѣченной), **когда ея боковыя грани неограниченно уменьшаются** (и, слѣд., число граней неограниченно увеличивается) *).

462. Теорема. Боковая поверхность цилиндра равна произведенію окружности основанія на высоту.

Впишемъ въ цилиндръ (черт. 415) какую-нибудь призму. Обозначимъ буквами p и H числа, выражающія въ одинаковыхъ линейныхъ единицахъ периметръ основанія и высоту этой призмы. Тогда боковая поверхность ея выразится произведеніемъ pH. Предположимъ теперь, что боковыя грани вписанной призмы (слѣд., и стороны вписаннаго многоугольника, служащаго основаніемъ этой призмы) неограниченно уменьшаются. Тогда периметръ p будетъ стремиться къ нѣкоторому предѣлу, принимаемому за длину C окружности основанія, а высота H останется безъ измѣненія; слѣд., величина боковой поверхности призмы, равная всегда произведенію pH, будетъ стремиться къ предѣлу CH. Этотъ предѣлъ и принимается за величину боковой поверхности цилиндра. Обозначивъ ее буквой S, можемъ написать:



Черт. 415.

$$S=CH.$$

463. Слѣдствія. 1°. Если R означаетъ радіусъ основанія цилиндра, то $C=2\pi R$; поэтому:

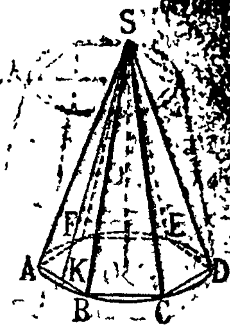
$$\text{бок. поверхн. цил. } S=2\pi RH.$$

*) Въ теоріи предѣловъ доказывается, что эти предѣлы существуютъ и что они не зависятъ отъ закона, по которому боковыя грани уменьшаются.

2°. **Чтобы получить полную поверхность цилиндра, достаточно приложить къ боковой поверхности сумму площадей** двухъ основаній; поэтому, обозначая полную поверхность черезъ T, будемъ имѣть:

$$T=2\pi RH+\pi R^2+\pi R^2=2\pi R(H+R).$$

464. Теорема. Боковая поверхность конуса равна произведенію окружности основанія на половину образующей.



Черт. 416.

Для простоты доказательства впишемъ въ конусъ (черт. 416) не какую-нибудь пирамиду, а правильную, и обозначимъ буквами p и l числа, выражающія въ одинаковыхъ линейныхъ единицахъ периметръ основанія и апоѳему этой пирамиды. Тогда величина боковой поверхности ея выразится произведеніемъ $^1/_2\, pl$. Предположимъ теперь, что боковыя грани вписанной пирамиды (слѣд., и стороны вписаннаго многоугольника, служащаго основаніемъ этой пирамиды) неограниченно уменьшаются. Тогда периметръ p будетъ стремиться къ предѣлу, принимаемому за длину C окружности основанія, а апоѳема l будетъ имѣть предѣломъ образующую конуса (такъ какъ изъ тр-ка SAK слѣдуетъ, что $SA-SK<AK$); значитъ, если образующую конуса обозначимъ буквою L, то величина боковой поверхности вписанной пирамиды, постоянно равная $^1/_2pl$, будетъ стремиться къ предѣлу $^1/_2CL$. Этотъ предѣлъ и принимается за величину боковой поверхности конуса. Обозначивъ ее буквою S, можемъ написать:

$$S=\frac{1}{2}CL=C\cdot\frac{1}{2}L.$$

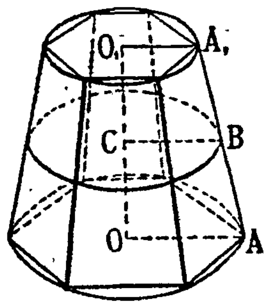
465. Слѣдствія. 1°. Такъ какъ $C=2\pi R$, то:

$$\text{бок. поверхн. конуса } S=\frac{1}{2}\cdot 2\pi RL=\pi RL.$$

2°. Полную поверхность T конуса получимъ, если къ боковой поверхности приложимъ площадь основанія; поэтому:

$$T=\pi RL+\pi R^2=\pi R(L+R).$$

466. Теорема. Боковая поверхность усѣченнаго конуса равна произведенію полусуммы окружностей основаній на образующую.



Черт. 417.

Для простоты доказательства впишемъ въ усѣченный конусъ (черт. 417) не какую-нибудь усѣченную пирамиду, а правильную, и обозначимъ буквами p, p_1 и l числа, выражающія въ одинаковыхъ линейныхъ единицахъ периметръ нижняго, периметръ верхняго основаній и апоѳему этой пирамиды. Тогда:

$$\text{бок. поверхн. впис. пир.} = \frac{1}{2}(p+p_1)l.$$

При неограниченномъ уменьшеніи боковыхъ граней вписанной пирамиды периметры p и p_1 стремятся къ предѣламъ, принимаемыхъ за длины C и C_1 окружностей основаній, а апоѳема l, какъ не трудно видѣть, имѣетъ предѣломъ образующую L усѣченнаго конуса. Слѣд., величина боковой поверхности вписанной пирамиды стремится при этомъ къ предѣлу, равному $^1/_2(C+C_1)L$. Этотъ предѣлъ и принимается за величину боковой поверхности усѣченнаго конуса. Обозначивъ ее буквой S, будемъ имѣть:

$$S=\frac{1}{2}(C+C_1)L.$$

467. Слѣдствія. 1°. Если R и R_1 означаютъ радіусы окружностей нижняго и верхняго основаній, то:

$$\text{бок. поверхн. усѣч. конуса } S=\frac{1}{2}(2\pi R+2\pi R_1)L=\pi(R+R_1)L.$$

2°. Проведемъ въ трапеціи OO_1A_1A (черт. 417), отъ вращенія которой получается усѣченный конусъ, среднюю линію BC (117).

Тогда: $$BC=\frac{1}{2}(OA+O_1A_1)=\frac{1}{2}(R+R_1).$$

Откуда: $$R+R_1=2BC.$$

Слѣд., $$S=2\pi BC\,.\,L,$$

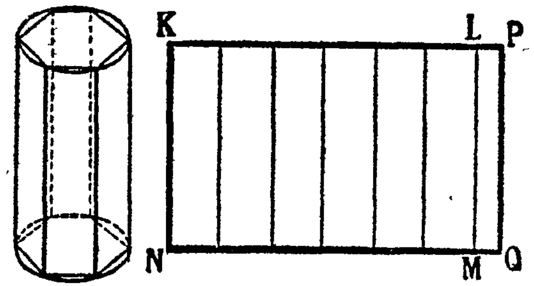
т. е. боковая поверхность усѣченнаго конуса равна произведенію окружности средняго сѣченія на образующую.

3°. Полная поверхность T усѣченнаго конуса выразится такъ:

$$T=\pi(R^2+R_1{}^2+RL+R_1L).$$

468. Замѣчаніе. Въ предыдущихъ теоремахъ боковыя поверхности цилиндра и конуса разсматривались, какъ предѣлы боковыхъ поверхностей вписанныхъ призмъ или пирамидъ. Если бы, подобно тому, какъ мы это дѣлали при доказательствѣ этихъ теоремъ, мы стали находить предѣлы боковыхъ поверхностей описанныхъ призмъ или пирамидъ, то нашли бы, что эти предѣлы тѣ же самые, какъ и для вписанныхъ призмъ или пирамидъ. Вслѣдствіе этого боковыя поверхности цилиндра и конуса можно разсматривать, какъ общій предѣлъ боковыхъ поверхностей призмъ или пирамидъ, какъ вписанныхъ, такъ и описанныхъ.

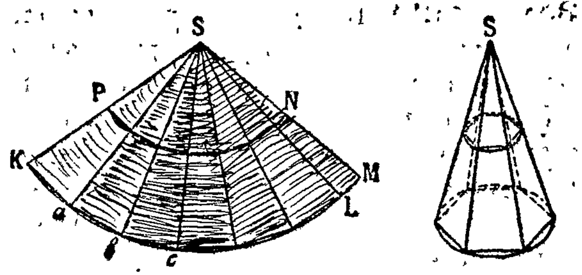
469. Развертка цилиндра и конуса. Впишемъ въ цилиндръ (черт. 418) какую-нибудь призму и затѣмъ вообразимъ, что боковая ея поверхность разрѣзана вдоль какого-нибудь боковою ребра. Очевидно, что, вращая ея грани вокругъ реберъ, мы можемъ развернуть эту поверхность въ плоскую фигуру, безъ разрыва и безъ складокъ. Тогда получится то, что наз. разверткою боковой поверхности призмы. Она представляетъ собою прямоугольникъ $KLMN$, составленный изъ столькихъ отдѣльныхъ прямоугольниковъ, сколько въ призмѣ боковыхъ граней. Основаніе его MN равно периметру основанія призмы, а высота KN есть высота призмы.



Черт. 418.

Вообразимъ теперь, что боковыя грани вписанной призмы неограниченно уменьшаются; тогда ея развертка будетъ все удлиняться, приближаясь къ предѣльному прямоугольнику $KPQN$, у котораго основаніе равно окружности основанія цилиндра, а высота есть высота цилиндра. Этотъ прямоугольникъ наз. **р а з в е р т к о ю** боковой поверхности цилиндра.

Подобно этому вообразимъ, что въ конусъ вписана какая-нибудь пирамида (черт. 419). Мы можемъ разрѣзать ея боковую поверхность по одному изъ реберъ, и затѣмъ, повертывая грани вокругъ реберъ, получить ея плоскую развертку въ видѣ многоугольнаго сектора



Черт. 419.

SKL, составленнаго изъ столькихъ равнобедренныхъ тр-ковъ, сколько въ пирамидѣ боковыхъ граней. Прямыя SK, Sa, Sb... равны боковому ребру пирамиды (или образующей конуса), а длина ломаной $Kab...L$ равна периметру основанія пирамиды. При неограниченномъ уменьшеніи боковыхъ граней вписанной пирамиды развертка ея увеличивается, приближаясь къ предѣльному сектору SKM, у котораго дуга KM равна окружности основанія, а радіусъ SK—образующей конуса. Этотъ секторъ наз. р а з в е р т к о ю боковой поверхности конуса.

Подобно этому можно получить развертку боковой поверхности усѣченнаго конуса (черт. 419) въ видѣ части круговаго кольца $KMNP$.

Легко видѣть, что боковая поверхность цилиндра или конуса равна площади соотвѣтствующей развертки.

Объемы цилиндра и конуса.

470. Лемма 1. Объемъ цилиндра есть общій предѣлъ объемовъ правильныхъ вписанныхъ и описанныхъ призмъ при неограниченномъ удвоеніи числа ихъ боковыхъ граней.

Впишемъ въ цилиндръ и опишемъ около него по какой-нибудь правильной о д н о и м е н н о й призмѣ. Обозначимъ объемъ, площадь основанія и высоту соотвѣтственно: для цилиндра—V, B, H, для вписанной призмы—V_1, B_1, H и для описанной призмы—V_2, B_2, H. Тогда будемъ имѣть (431):

$$V_2=B_2H;\quad V_1=B_1H.$$

Откуда: $$V_2-V_1=(B_2-B_1)H.$$

При неограниченномъ удвоеніи числа боковыхъ граней призмы разность B_2-B_1 стремится къ нулю (330), а множитель H—величина постоянная; поэтому правая часть послѣдняго равенства, а слѣд., и его лѣвая часть, стремится къ нулю. Объемъ цилиндра, очевидно, больше объема вписанной призмы, но меньше объема описанной; поэтому каждая изъ разностей $V-V_1$ и V_2-V меньше разности V_2-V_1, но послѣдняя, по доказанному, стремится къ нулю; слѣд., и первыя стремятся къ нулю; а это, по опредѣленію предѣла, означаетъ, что

$$V=\text{пред. } V_1=\text{пред. } V_2.$$

471. Лемма 2. Объемъ конуса, полнаго и усѣченнаго, есть общій предѣлъ объемовъ правильныхъ вписанныхъ и описанныхъ пирамидъ при неограниченномъ удвоеніи числа ихъ боковыхъ граней.

1°. Впишемъ въ полный конусъ и опишемъ около него по какой-нибудь правильной о д н о и м е н н о й пирамидѣ. Употребляя тѣ же обозначенія, какъ и въ предыдущемъ параграфѣ, будемъ имѣть (434):

$$V_2=\frac{1}{3}B_2H;\quad V_1=\frac{1}{3}B_1H.$$

Откуда: $$V_2-V_1=\frac{1}{3}H(B_2-B_1).$$

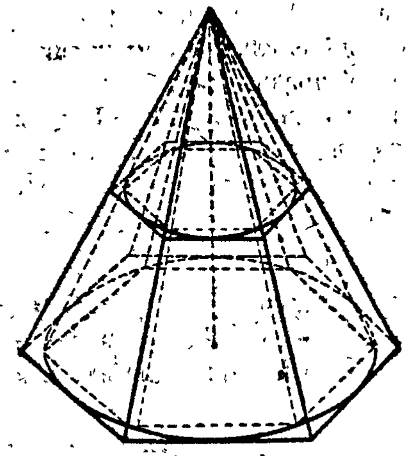
Изъ этого равенства такъ же, какъ и въ предыдущей леммѣ, заключаемъ, что разность V_2-V_1 стремится къ нулю, когда число боковыхъ граней вписанной и описанной пирамиды неограниченно удваивается; а такъ какъ каждая изъ разностей: V_2-V и $V-V_1$ меньше V_2-V_1, то эти разности и подавно стремятся къ нулю; а это значитъ, что

$$V=\text{пред. } V_1=\text{пред. } V_2.$$

2°. Вообразимъ, что усѣченный конусъ дополненъ до полнаго конуса (черт. 420). Впишемъ въ этотъ полный конусъ и опишемъ около него по какой-нибудь правильной одноименной пирамидѣ. Части этихъ пирамидъ, заключенныя между плоскостями нижняго и верхняго основаній, будутъ усѣченныя пирамиды, одна—вписанная въ усѣченный конусъ и другая—

описанная около него. Обозначимъ объемы конуса, пирамиды вписанной и пирамиды описанной соотвѣтственно буквами:

для полныхъ . . . . V, V_1, V_2;
для усѣченныхъ . . . v, v_1, v_2.


Черт. 420.

Изъ чертежа непосредственно усматриваемъ, что разности объемовъ:

$$v_2-v \text{ и } v-v_1$$

составляютъ нѣкоторыя части разностей объемовъ:

$$V_2-V \text{ и } V-V_1;$$

поэтому первыя разности меньше вторыхъ. Но при неограниченномъ удвоеніи числа боковыхъ граней пирамидъ каждая изъ разностей: V_2-V и $V-V_1$ стремится, какъ мы видѣли, къ нулю; слѣд., каждая изъ меньшихъ разностей v_2-v и $v-v_1$ стремится при этомъ и подавно къ нулю. Изъ этого слѣдуетъ, что

$$\text{пред. } v_1 = \text{пред. } v_2 = v.$$

Замѣчаніе. Въ доказанныхъ двухъ леммахъ вписанныя и описанныя призмы и пирамиды предполагаются правильными только ради простоты доказательства; содержаніе этихъ леммъ остается въ полной силѣ и тогда, когда призмы и пирамиды будутъ неправильныя, лишь бы боковыя грани ихъ неограниченно уменьшались.

472. Теоремы. 1°. **Объемъ цилиндра равенъ произведенію площади основанія на высоту.**

2°. **Объемъ конуса равенъ произведенію площади основанія на треть высоты.**

Впишемъ въ цилиндръ какую-нибудь правильную призму, а въ конусъ какую-нибудь правильную пирамиду; тогда, употребляя прежнія обозначенія, будемъ имѣть:

для призмы . . . $V_1 = B_1H$; для пирамиды . . . $V_1 = \frac{1}{3}B_1H$.

Эти равенства остаются вѣрными, сколько бы мы ни удваивали числа боковыхъ граней призмы и пирамиды; поэтому они останутся вѣрными и тогда, когда на мѣсто перемѣнныхъ подставимъ ихъ предѣлы (283); слѣд.:

для цилиндра . . $V = BH$; для конуса . . $V = \frac{1}{3}BH$.

473. Слѣдствіе. Если радіусъ основанія цилиндра или конуса обозначимъ черезъ R, то $B = \pi R^2$; поэтому:

$$\text{Об. цил. } V = \pi R^2H; \quad \text{об. кон. } V = \frac{1}{3}\pi R^2H.$$

474. Теорема. Объемъ усѣченнаго конуса равенъ суммѣ объемовъ трехъ конусовъ, имѣющихъ одинаковую высоту съ усѣченнымъ конусомъ, а основаніями: одинъ—нижнее основаніе этого конуса, другой—верхнее, третій—среднее пропорціональное между ними.

По доказанному раньше, объемъ усѣченнаго конуса есть общій предѣлъ объемовъ правильныхъ вписанныхъ и описанныхъ усѣченныхъ пирамидъ. Но объемъ V_1 правильной вписанной усѣченной пирамиды, которой высота есть H, а площади основаній B_1 и b_1, выражается равенствомъ (437):

$$V_1 = \frac{1}{3}H(B_1 + b_1 + \sqrt{B_1b_1}).$$

Въ предѣлѣ, при неограниченномъ удвоеніи числа боковыхъ граней вписанной пирамиды, это равенство даетъ:

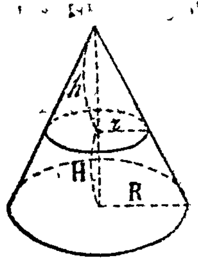
$$V = \frac{1}{3}H(B + b + \sqrt{Bb}),$$

гдѣ V есть объемъ, B и b площади основаній и H высота усѣченнаго конуса.

475. Слѣдствіе. Если R и r означаютъ радіусы нижняго и верхняго основаній усѣченнаго конуса, то $B = \pi R^2$, $b = \pi r^2$ и $\sqrt{Bb} = \sqrt{\pi^2R^2r^2} = \pi Rr$; поэтому:

$$\text{Об. ус. конуса } V = \frac{1}{3}\pi H(R^2 + r^2 + Rr).$$

476 Замѣчаніе. Объемъ усѣченнаго конуса можно найти независимо отъ свойствъ предѣловъ слѣдующимъ образомъ. На верхнемъ основаніи усѣченнаго конуса (черт. 421) помѣстимъ такой малый конусъ (съ высотою h), чтобы усѣченный конусъ превратился въ полный. Тогда объемъ V усѣченнаго конуса можно разсматривать, какъ разность объемовъ полнаго конуса и дополнительнаго. Поэтому:



Черт. 421.

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2\left(H+h\right)-\frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{1}{3}\pi\left[R^2H+(R^2-r^2)h\right]$$

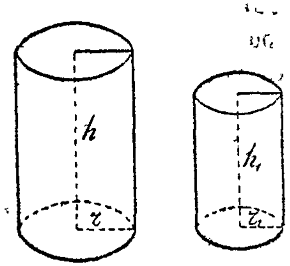
Изъ подобія тр-ковъ находимъ:

$$\frac{R}{r}=\frac{H+h}{h};\quad \text{откуда:}\quad \frac{R-r}{r}=\frac{H}{h};\quad \text{слѣд.,}\quad h=\frac{rH}{R-r}.$$

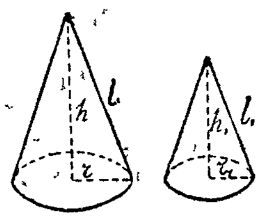
Поэтому: $V=\frac{1}{3}\pi\left[R^2H+(R+r)rH\right]=\frac{1}{3}\pi H\left(R^2+Rr+r^2\right)$.

Подобные цилиндры и конусы.

477. Два цилиндра или конуса наз. подобными, если они произошли отъ вращенія подобныхъ прямоугольниковъ или треугольниковъ вокругъ сходственныхъ сторонъ.



Черт. 422.



Черт. 423.

Пусть (черт. 422 и 423) h и h_1 будутъ высоты двухъ подобныхъ цилиндровъ или конусовъ, r и r_1—радіусы ихъ основаній и l и l_1 — образующія; тогда, согласно опредѣленію:

$$\frac{r}{r_1}=\frac{h}{h_1}=\frac{l}{l_1}.$$

Откуда:

$$\frac{r+h}{r_1+h_1}=\frac{r}{r_1}\quad\text{и}\quad\frac{r+l}{r_1+l_1}=\frac{r}{r_1}.$$

478. Теорема. Боковыя и полныя поверхности подобныхъ цилиндровъ или конусовъ относятся, какъ квадраты радіусовъ или высотъ, а объемы—какъ кубы радіусовъ или высотъ.

Пусть S, T и V будутъ соотвѣтственно боковая поверхность, полная поверхность и объемъ одного цилиндра или конуса, а S_1, T_1 и V_1 — тѣ же величины для другого цилиндра или конуса, подобнаго первому. Тогда будемъ имѣть:

Для цилиндровъ.

$$\frac{S}{S_1}=\frac{2\pi rh}{2\pi r_1h_1}=\frac{rh}{r_1h_1}=\frac{r}{r_1}\cdot\frac{h}{h_1}=\frac{r^2}{r_1^2}=\frac{h^2}{h_1^2};$$

$$\frac{T}{T_1}=\frac{2\pi r(r+h)}{2\pi r_1(r_1+h_1)}=\frac{r}{r_1}\cdot\frac{r+h}{r_1+h_1}=\frac{r^2}{r_1^2}=\frac{h^2}{h_1^2};$$

$$\frac{V}{V_1}=\frac{\pi r^2h}{\pi r_1^2h_1}=\frac{r^2}{r_1^2}\cdot\frac{h}{h_1}=\frac{r^3}{r_1^3}=\frac{h^3}{h_1^3}.$$

Для конусовъ.

$$\frac{S}{S_1}=\frac{\pi rl}{\pi r_1l_1}=\frac{r}{r_1}\cdot\frac{l}{l_1}=\frac{r^2}{r_1^2}=\frac{h^2}{h_1^2};$$

$$\frac{T}{T_1}=\frac{\pi r(r+l)}{\pi r_1(r_1+l_1)}=\frac{r}{r_1}\cdot\frac{r+l}{r_1+l_1}=\frac{r^2}{r_1^2}=\frac{h^2}{h_1^2};$$

$$\frac{V}{V_1}=\frac{{}^1/_3\pi r^2h}{{}^1/_3\pi r_1^2h_1}=\frac{r^2}{r_1^2}\cdot\frac{h}{h_1}=\frac{r^3}{r_1^3}=\frac{h^3}{h_1^3}.$$

ГЛАВА II.

Шаръ.

Сѣченіе шара плоскостью.

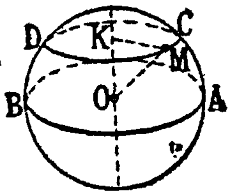
479. Опредѣленіе. Тѣло, происходящее отъ вращенія полукруга вокругъ діаметра, ограничивающаго его, наз. шаромъ, а поверхность, образуемая при этомъ полуокружностью, наз. шаровою или сферическою поверхностью. Можно также сказать, что эта поверхность есть геометрическое мѣсто точекъ, одинаково удаленныхъ отъ одной и той же точки (называемой центромъ шара).

Прямая, соединяющая центръ съ какою-нибудь точкою поверхности, наз. радіусомъ, а прямая, соединяющая двѣ точки поверхности и проходящая черезъ центръ, наз. діаметромъ шара. Всѣ радіусы одного шара равны между собою; всякій діаметръ равенъ двумъ радіусамъ.

Два шара одинаковаго радіуса равны, потому что при вложеніи они совмѣщаются.

480. Теорема. Всякое сѣченіе шара плоскостью есть кругъ.

1°. Предположимъ сначала, что (черт. 424) сѣкущая плоскость AB проходитъ черезъ центръ O шара. Всѣ точки линіи пересѣченія, принадлежа шаровой поверхности, одинаково удалены отъ точки O, лежащей въ сѣкущей плоскости; слѣд., сѣченіе есть кругъ.



Черт. 424.

2°. Положимъ теперь, что сѣкущая плоскость CD не проходитъ черезъ центръ. Опустимъ на нее изъ центра перпендикуляръ OK и возьмемъ на линіи пересѣченія какую-нибудь точку M. Соединивъ ее съ O и K, получимъ прямоугольный тр-къ MOK, изъ котораго находимъ:

$$MK=\sqrt{OM^2-OK^2}. \qquad [1].$$

Такъ какъ длины OM и OK не измѣняются при измѣненіи положенія точки M на линіи пересѣченія, то разстояніе MK есть величина постоянная; значитъ, *линія пересѣченія есть окружность*, которой центръ есть точка K.

481. Слѣдствіе. Пусть R, r и d будутъ числа, выражающія: радіусъ шара, радіусъ круга сѣченія и разстояніе сѣкущей плоскости отъ центра; тогда равенство [1] приметъ видъ:

$$r=\sqrt{R^2-d^2}.$$

Изъ этой формулы выводимъ:

1°. Наибольшій радіусъ сѣченія получается при $d=0$, т.-е. когда сѣкущая плоскость проходитъ черезъ центръ шара. Въ этомъ случаѣ $r=R$. Кругъ, получаемый въ этомъ случаѣ, наз. **большимъ кругомъ**.

2°. Наименьшій радіусъ сѣченія получается при $d=R$. Въ этомъ случаѣ $r=0$, т.-е. кругъ сѣченія обращается въ точку.

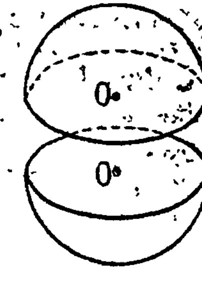
3°. Сѣченія, равноотстоящія отъ центра шара, равны.

4°. Изъ двухъ сѣченій, не одинаково удаленныхъ отъ центра шара, то больше, которое ближе къ центру.

Свойства большихъ круговъ.

482. Теорема. Всякій большой кругъ дѣлитъ шаръ и его поверхность пополамъ.

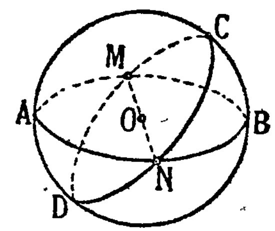
Вообразимъ, что мы разрѣзали шаръ (черт. 425) по какому-нибудь большому кругу и, перевернувъ верхнюю часть шара, вложили ее въ нижнюю такъ, чтобы у нихъ совпали круглыя основанія. Тогда всѣ точки одной части шаровой поверхности совмѣстятся съ точками другой части, потому что тѣ и другія одинаково удалены отъ общаго центра. Изъ этого слѣдуетъ, что большой кругъ дѣлитъ шаръ и его поверхность пополамъ.



Черт. 425.

483. Теорема. Черезъ всякія двѣ точки шаровой поверхности, не лежащія на концахъ одного діаметра, можно провести только одну окружность большого круга.

Пусть на шаровой поверхности (черт. 426), имѣющей центръ O, взяты какія-нибудь двѣ точки, напр., C и N, не лежащія на одной прямой съ точкой O. Тогда черезъ точки C, O и N можно провести плоскость (347). Эта плоскость, проходя черезъ центръ O, дастъ въ пересѣченіи съ шаровою поверхностью окружность большого круга.



Черт. 426.

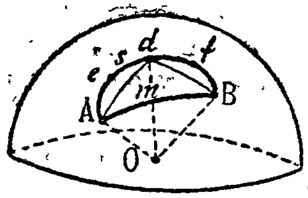
Другой окружности большого круга черезъ тѣ же двѣ точки C и N провести нельзя. Дѣйствительно, всякая окружность большого круга должна, по опредѣленію, лежать въ плоскости, проходящей черезъ центръ O шара; слѣд., если бы черезъ C и N можно было провести еще другую окружность большого круга, то тогда выходило бы, что черезъ 3 точки C, N и O, не лежащія на одной прямой, можно провести 2 различныя плоскости, что невозможно (347).

Замѣчаніе. Всякія двѣ точки шаровой поверхности могутъ быть соединены **двумя** дугами большого круга, составляющими въ суммѣ полную окружность большого круга (такъ, точки C и N, черт. 426, соединяются дугою CN и дугою $CMDN$, и сумма этихъ дугъ составляетъ окружность большого круга). Если взятыя двѣ точки не лежатъ на концахъ одного діаметра, то одна изъ этихъ дугъ меньше полуокружности, а другая больше.

484. Теорема. Окружности двухъ большихъ круговъ пересѣкаются пополамъ.

Центръ O (черт. 426), находясь на плоскостяхъ обоихъ большихъ круговъ, лежитъ на прямой, по которой эти круги пересѣкаются; значитъ, эта прямая есть діаметръ того и другого круга, а діаметръ дѣлитъ окружность пополамъ.

485. Теорема. Кратчайшее разстояніе на шаровой поверхности между двумя ея точками есть дуга большого круга, проведенная между ними.



Черт. 427.

Пусть m (черт. 427) есть дуга большого круга (меньшая полуокружности), проведенная на шаровой поверхности между двумя ея точками A и B, а s какая-нибудь линія, проведенная на шаровой поверхности между тѣми же точками. Докажемъ, что s длиннѣе m. Возьмемъ на кривой s произвольную точку d и соединимъ ее съ A и B дугами большого круга. Проведя радіусы OA, Od и OB, примемъ ихъ за ребра трегранного угла. Въ этомъ углѣ сумма плоскихъ угловъ AOd и dOB больше третьяго плоскаго угла AOB (397). Но эти углы измѣряются дугами Ad, dB и AB, проведенными изъ вершины угловъ однимъ и тѣмъ же радіусомъ; слѣд., сумма дугъ Ad и dB больше дуги AB. Возьмемъ теперь на кривой s промежуточныя точки e и f и проведемъ дуги большого круга черезъ каждыя двѣ сосѣднія точки: A, e, d, f и B (дуги эти на чертежѣ не указаны). Такъ же, какъ и прежде, убѣдимся, что $Ae+ed>Ad$ и $df+fB>dB$; значитъ, сумма $Ae+ed+df+fB$ больше $Ad+dB$, а потому подавно больше дуги m. Вообразимъ теперь, что число промежуточныхъ точекъ, взятыхъ на кривой s, неограниченно увеличивается, и между каждыми двумя сосѣдними точками постоянно проводятся дуги большихъ круговъ; тогда линія, составленная изъ этихъ дугъ, все увеличивается, и постоянно остается больше дуги m; значитъ, и предѣлъ*), къ которому она стремится, долженъ быть больше m; а этотъ предѣлъ принимается за длину дуги s.

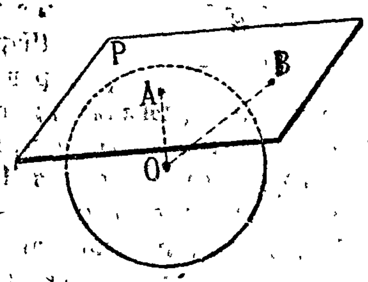
*) Мы принимаемъ безъ доказательства, что предѣлъ длины кривой $AedfB$, составленной изъ дугъ большихъ круговъ, существуетъ, и что онъ не зависитъ отъ закона, по которому увеличивается число точекъ на кривой s.

Плоскость, касательная къ шару.

486. Определеніе. Плоскость, имѣющая съ шаровою поверхностью только одну общую точку, наз. **касательною плоскостью**.

Возможность существованія такой плоскости доказывается слѣдующей теоремой.

Теорема. Плоскость (P, черт. 428), перпендикулярная къ радіусу (OA) въ концѣ его, лежащемъ на поверхности шара, есть касательная.



Черт. 428.

Возьмемъ на плоскости P произвольную точку B и проведемъ прямую OB. Такъ какъ OB наклонная, а OA перпендикуляръ къ P, то $OB>OA$. Поэтому точка B лежитъ внѣ шаровой поверхности; слѣд., у плоскости P есть только одна общая точка A съ шаровою поверхностью; значитъ, эта плоскость касательная.

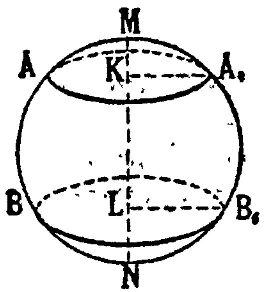
487. Обратная теорема. Касательная плоскость (P, черт. 428) перпендикулярна къ радіусу (OA), проведенному въ точку касанія.

Такъ какъ, по опредѣленію, точка A есть единственная общая у плоскости съ шаровою поверхностью, то всякая другая точка плоскости лежитъ внѣ шаровой поверхности и, слѣд., отстоитъ отъ центра болѣе, чѣмъ A; такимъ образомъ, прямая OA есть кратчайшее разстояніе точки O отъ плоскости P, т.-е. OA есть перпендикуляръ къ P.

Поверхность шара и его частей.

488. Опредѣленія. 1°. Часть шаровой поверхности (черт. 429), отсѣкаемая отъ нея какою-нибудь плоскостью (AA_1), наз. **сегментною поверхностью**.

Окружность AA_1 наз. основаніемъ, а отрѣзокъ KM радіуса, перпендикулярнаго къ плоскости сѣченія, высотою сегментной поверхности.



Черт. 429.

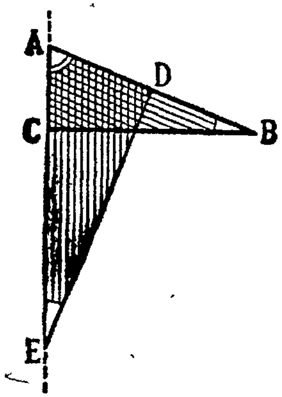
2°. Часть шаровой поверхности, заключенная между двумя параллельными сѣкущими плоскостями (AA_1 и BB_1, черт. 429), наз. шаровымъ поясомъ или зоною.

Окружности сѣченій AA_1 и BB_1 наз. основаніями, а разстояніе KL между параллельными плоскостями — высотою пояса.

Шаровой поясъ и сегментную поверхность можно разсматривать, какъ поверхности вращенія: въ то время, какъ полуокружность $MABN$, вращаясь вокругъ діаметра MN, описываетъ шаровую поверхность, часть ея AB опишетъ поясъ, а часть MA — сегментную поверхность.

Для нахожденія величины шаровой поверхности и ея частей мы докажемъ слѣдующую вспомогательную истину.

489. Лемма. Боковая поверхность каждаго изъ трехъ тѣлъ: конуса, усѣченнаго конуса и цилиндра равна произведенію высоты тѣла на длину окружности, у которой радіусъ есть перпендикуляръ, возставленный къ образующей изъ ея середины до пересѣченія съ осью.



Черт. 430.

1°. Пусть конусъ образуется (черт. 430) вращеніемъ тр-ка ABC вокругъ катета AC. Если D есть середина образующей AB, то (464):

$$\text{Бок. пов. конуса} = 2\pi BC . AD \qquad [1]$$

Проведя $DE \perp AB$, получимъ два подобныхъ тр-ка ABC и ADE (они прямоугольные и имѣютъ общій уголъ A); изъ ихъ подобія выводимъ:

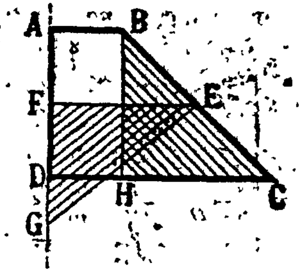
$$BC : ED = AC : AD;$$

откуда: $BC . AD = ED . AC$,

и равенство [1] даетъ:

Боков. пов. конуса $= 2\pi ED . AC$. Что и требовалось доказать.

2°. Пусть усѣченный конусъ (черт. 431) производится вращеніемъ трапеціи $ABCD$ вокругъ стороны AD. Проведя среднюю линію EF, будемъ имѣть (467, 2°):



Черт. 431.

$$\text{Боков. пов. ус. конуса} = 2\pi EF . BC \qquad [2]$$

Проведемъ $EG \perp BC$ и $BH \parallel AD$; тогда получимъ два подобныхъ тр-ка EFG и BCH (стороны одного перпендикулярны къ сторонамъ другого); изъ ихъ подобія выводимъ:

$$EF : BH = EG : BC.$$

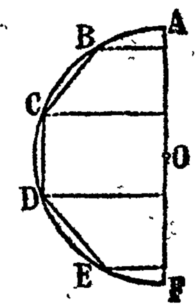
Откуда: $EF . BC = BH . EG = AD . EG$.

Поэтому равенство [2] можно написать такъ:

Бок. пов. усѣч. конуса $= 2\pi EG . AD$. Что и треб. доказать.

3°. Теорема остается вѣрной и въ примѣненіи къ цилиндру, такъ какъ окружность, о которой говорится въ теоремѣ, равна окружности основанія цилиндра.

490. Опредѣленіе. За величину поверхности шарового пояса, образуемаго вращеніемъ (черт. 432) какой-нибудь части (BE) полуокружности (ACF) вокругъ діаметра (AF), принимаютъ предѣлъ, къ которому стремится поверхность, образуемая вращеніемъ вокругъ того же діаметра вписанной ломаной линіи ($BCDE$), когда ея стороны неограниченно уменьшаются *).



Черт. 432.

Это опредѣленіе распространяется и на сегментную поверхность, и на шаровую поверхность; въ послѣднемъ случаѣ ломаная линія вписывается въ цѣлую полуокружность.

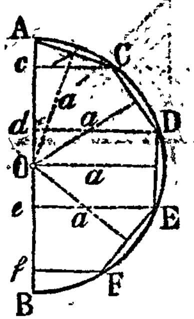
491. Теоремы. 1°. **Сегментная поверхность равна произведенію ея высоты на окружность большого круга.**

2°. **Поверхность шарового пояса равна произведенію его высоты на окружность большого круга.**

---

*) Въ теоріи предѣловъ доказывается, что этотъ предѣлъ существуетъ и что онъ не зависитъ отъ закона, по которому стороны ломаной неограниченно уменьшаются.

1°. Для большей простоты разсужденія мы впишемъ въ дугу AF (черт. 433), производящую при вращеніи сегментную поверхность, не какую-нибудь ломаную линію, а правильную $ACDEF$ съ произвольнымъ числомъ сторонъ.



Чер. 433.

Поверхность, получающаяся отъ вращенія этой ломаной, состоитъ изъ частей, образуемыхъ сторонами AC, CD, DE.... Эти части представляютъ собою боковыя поверхности или полнаго конуса (отъ вращенія AC), или усѣченнаго конуса (отъ вращенія CD, FE...), или цилиндра (отъ вращенія DE, если $DE \parallel AB$). Поэтому мы можемъ примѣнить къ нимъ лемму § 489-го. При этомъ замѣтимъ, что каждый изъ перпендикуляровъ, возставленныхъ изъ серединъ образующихъ до пересѣченія съ осью, равенъ апоѳемѣ ломаной линіи. Обозначивъ эту апоѳему буквой a, получимъ:

поверхн. $AC = Ac.2\pi a$;
поверхн. $CD = cd.2\pi a$;
поверхн. $DE = de.2\pi a$;
. . . .

Сложивъ эти равенства почленно, найдемъ:

$$\text{поверхн. } ACDEF = Af.2\pi a.$$

При неограниченномъ удвоеніи числа сторонъ вписанной ломаной апоѳема a стремится къ предѣлу, равному радіусу шара R, а прямая Af остается безъ измѣненія; слѣд.:

$$\text{предѣлъ поверхности } ACDEF = Af.2\pi R.$$

Но предѣлъ поверхности $ACDEF$ принимаютъ за величину сегментной поверхности, а прямая Af есть высота H поверхности; поэтому:

$$\text{сегментная поверхность} = H.2\pi R = 2\pi RH.$$

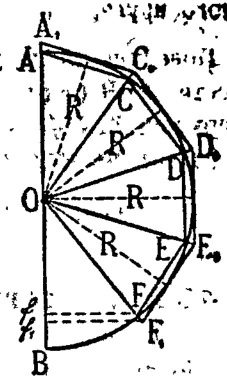
2°. Предположимъ, что правильная ломаная линія, вписана не въ дугу AF, образующую сегментную поверхность, а въ какую-нибудь дугу CF, образующую шаровой поясъ. Это измѣненіе, какъ легко видѣть, нисколько не вліяетъ на

ходъ предыдущихъ разсужденій, поэтому и выводъ остается тотъ же, т.-е. что

$$\text{поверхность шарового пояса} = H.2\pi R = 2\pi RH,$$

гдѣ буквою H обозначена высота cf шарового пояса.

492. Замѣчаніе. Пусть около дуги AF (черт. 434) описана правильная ломаная линія $A_1C_1D_1E_1F_1$, стороны которой параллельны сторонамъ правильной вписанной ломаной линіи $ACDEF$. Поверхность, получаемая вращеніемъ вокругъ діаметра AB этой описанной ломаной, также состоитъ изъ частей, къ которымъ мы можемъ примѣнить лемму § 489. Тогда, замѣтивъ, что перпендикуляры, возставленные изъ серединъ образующихъ до пересѣченія съ осью, всѣ равны радіусу R, мы получимъ:



Черт. 434.

$$\text{поверхность } A_1C_1D_1E_1F_1 = A_1f_1 \,.\, 2\pi R.$$

При неограниченномъ удвоеніи числа сторонъ вписанной и описанной ломаныхъ линій отрѣзокъ діаметра A_1f_1 стремится, какъ не трудно видѣть, *) къ предѣлу Af, т.-е. къ высотѣ H сегментной поверхности; поэтому:

пред. поверхн. $A_1C_1D_1E_1F_1 = H \,.\, 2\pi R =$ пред. поверхн. $ACDEF$.

Такимъ образомъ, сегментную поверхность можно разсматривать, какъ общій предѣлъ поверхностей, образуемыхъ вращеніемъ правильныхъ ломаныхъ линій, какъ вписанныхъ, такъ и описанныхъ.

То же самое можно повторить о поверхности шарового пояса.

---

*) Для этого достаточно показать, что отрѣзки AA_1 и FF_1 (а слѣд., и отрѣзокъ $ff_1 < FF_1$) стремятся къ O. Изъ чертежа усматриваемъ (219):

$$\frac{AA_1}{OA} = \frac{R-a}{a} \text{ и } \frac{FF_1}{OF} = \frac{R-a}{a}.$$

Отсюда (принимая во вниманіе, что $OA = OF = R$) находимъ:

$$AA_1 = \frac{R(R-a)}{a} = FF_1.$$

Такъ какъ разность $R-a$ стремится къ O, величина R постоянна, а апоѳема a увеличивается, то изъ послѣдней формулы видно, что отрѣзки AA_1 и FF_1 стремятся къ O.

493. Теорема. Поверхность шара равна произведенію окружности большого круга на діаметръ.

или: **поверхность шара равна учетверенной площади большого круга.**

Поверхность шара, производимую вращеніемъ полуокружности ADB (черт. 433), можно разсматривать, какъ сумму поверхностей, образуемыхъ вращеніемъ дугъ AD и DB. Поэтому, согласно предыдущей теоремѣ, можемъ написать:

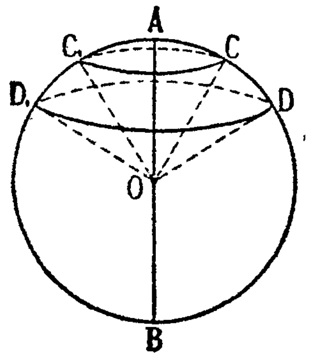
$$\text{пов. шара}=2\pi R Ad+2\pi R.dB=2\pi R(Ad+dB)=$$
$$=2\pi R.2R=4\pi R^2.$$

494. Слѣдствіе. Поверхности шаровъ относятся, какъ квадраты радіусовъ или діаметровъ, потому что, обозначая черезъ R и R_1 радіусы, а черезъ S и S_1 поверхности двухъ шаровъ, будемъ имѣть:

$$S : S_1=4\pi R^2 : 4\pi R_1^2=R^2 : R_1^2=4R^2 : 4R_1^2=(2R)^2 : (2R_1)^2.$$

Объемъ шара и его частей.

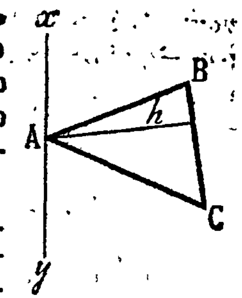
495. Опредѣленія. Тѣло, получаемое отъ вращенія (черт. 435) кругового сектора (COD) вокругъ діаметра (AB), не пересѣкающаго его поверхности, наз. шаровымъ секторомъ. Это тѣло ограничено боковыми поверхностями двухъ конусовъ и поверхностью шарового пояса; послѣдняя наз. основаніемъ шарового сектора. Одинъ изъ радіусовъ кругового сектора можетъ совпадать съ осью вращенія; напр., секторъ AOC, вращаясь вокругъ AO, производитъ шаровой секторъ $OCAC_1$, ограниченный боковою поверхностью конуса и сегментною поверхностью.



Черт. 435.

Для нахожденія объема шарового сектора и цѣлаго шара мы предварительно докажемъ слѣдующую лемму.

496. Лемма. Если тр-къ ABC (черт. 436) вращается вокругъ оси xy, которая лежитъ въ плоскости тр-ка, проходитъ черезъ его вершину A, но не пересѣкаетъ его площади, то объемъ тѣла, получаемаго при этомъ вращеніи, равенъ произведенію поверхности, образуемой противоположною стороною BC, на одну треть высоты h, опущенной на эту сторону.



Черт. 436.

При доказательствѣ разсмотримъ три случая.

1°. Ось совпадаетъ со стороною AB (черт. 437). Въ этомъ случаѣ искомый объемъ равенъ суммѣ объемовъ двухъ конусовъ, получаемыхъ вращеніемъ прямоугольныхъ тр-ковъ BCD и DCA. Первый объемъ равенъ $\frac{1}{3}\pi CD^2 . DB$, а второй—$\frac{1}{3}\pi CD^2 . DA$; поэтому:

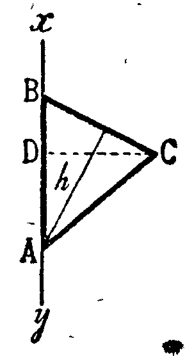
$$\text{об. } ABC=\frac{1}{3}\pi CD^2(DB+DA)=\frac{1}{3}\pi CD.CD.BA.$$

Произведеніе $CD . BA$ равно $BC . h$, такъ какъ каждое изъ этихъ произведеній выражаетъ двойную площадь тр-ка ABC; поэтому:

$$\text{об. } ABC=\frac{1}{3}\pi CD.BC.h.$$

Но произведеніе $\pi CD . BC$ равно боковой поверхности конуса BDC; значитъ:

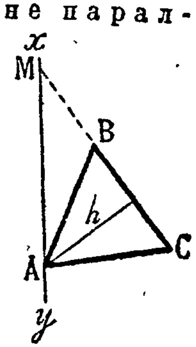
$$\text{об. } ABC=(\text{пов. } BC) . \frac{1}{3}h.$$



Черт. 437.

2°. Ось не совпадаетъ съ AB и не параллельна BC (черт. 438). Въ этомъ случаѣ искомый объемъ равенъ разности объемовъ, производимыхъ вращеніемъ тр-ковъ AMC и AMB. По доказанному въ первомъ случаѣ, объемъ $AMC=\frac{1}{3}h$ (пов. MC), а объемъ $AMB=\frac{1}{3}h$ (пов. MB); слѣд.:

$$\text{об. } ABC=\frac{1}{3}h\,(\text{пов. } MC\text{—пов. } MB)$$
$$=\frac{1}{3}h\,(\text{пов. } BC).$$



Черт. 438.

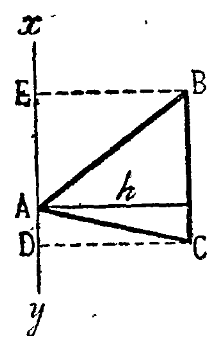
3°. **Ось параллельна сторонѣ** BC (черт. 439). Тогда искомый объемъ равенъ объему $DEBC$ безъ суммы объемовъ AEB и ACD; первый изъ нихъ равенъ $\pi DC^2 . ED$, второй—$^1/_3 \pi EB^2 . EA$ и третій—$^1/_3 \pi DC^2 . AD$. Принявъ теперь во вниманіе, что $EB = DC$, получимъ:

$$\text{объемъ } ABC = \pi DC^2\left[ED - \frac{1}{3}(EA + AD)\right] =$$

$$= \pi DC^2\left(ED - \frac{1}{3}ED\right) = \frac{2}{3}\pi DC^2 . ED.$$

Произведеніе $2\pi DC . ED$ выражаетъ боковую поверхность цилиндра, производимаго стороною BC; поэтому:

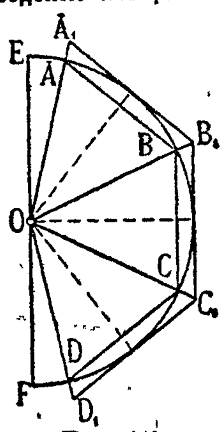
$$\text{Об. } ABC = (\text{пов. } BC)\frac{1}{3}DC = (\text{пов. } BC)\frac{1}{3}h.$$



Черт. 439.

Замѣчаніе. На нашихъ чертежахъ мы брали тр-къ остроугольный. Доказательство нѣсколько измѣнится (въ случаяхъ 1° и 3°), если тр-къ будетъ тупоугольный. Разница въ доказательствѣ будетъ та, что вмѣсто суммы объемовъ придется брать иногда ихъ разность. Предлагаемъ учащимся самимъ разобрать эти случаи.

497. Теорема. Объемъ шарового сектора равенъ произведенію поверхности его основанія на треть радіуса.



Черт. 440.

Пусть шаровой секторъ производится вращеніемъ вокругъ діаметра EF (черт. 440) сектора AOD. Доказательство расположимъ въ слѣдующей послѣдовательности:

1°. Впишемъ въ дугу AD правильную ломаную линію $ABCD$ съ произвольнымъ числомъ сторонъ и затѣмъ, продолживъ конечные радіусы OA и OD, опишемъ около дуги AD правильную ломаную $A_1B_1C_1D_1$, стороны которой параллельны сторонамъ вписанной ломаной. Многоугольные секторы $OABCD$ и $OA_1B_1C_1D_1$ произведутъ при вращеніи нѣкоторыя тѣла, объемы которыхъ обозначимъ: перваго черезъ V_1, а второго черезъ V_2. Докажемъ прежде всего, что при неограниченномъ удвоеніи числа сторонъ обѣихъ ломаныхъ линій **разность** $V_2 - V_1$ **стремится къ** O.

Объемъ V_1 есть сумма объемовъ, получаемыхъ вращеніемъ тр-ковъ OAB, OBC, OCD вокругъ оси EF; объемъ V_2 есть сумма объемовъ, получаемыхъ вращеніемъ вокругъ той же оси тр-ковъ OA_1B_1, OB_1C_1, OC_1D_1. Примѣнимъ къ этимъ объемамъ лемму предыдущаго §, при чемъ замѣтимъ, что высоты первыхъ тр-ковъ равны апоѳемѣ a вписанной ломаной, а высоты вторыхъ тр-ковъ равны радіусу R шара. Согласно этой леммѣ будемъ имѣть:

$$V_1 = \text{пов. } (AB)\frac{a}{3} + \text{пов. } (BC)\frac{a}{3} + \ldots = (\text{пов. } ABCD)\frac{a}{3};$$

$$V_2 = \text{пов. } (A_1B_1)\frac{R}{3} + \text{пов. } (B_1C_1)\frac{R}{3} + \ldots = (\text{пов. } A_1B_1C_1D_1)\frac{R}{3}.$$

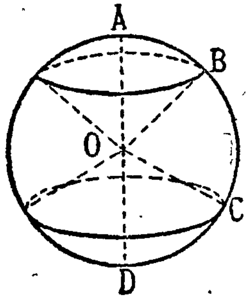
Вообразимъ теперь, что число сторонъ обѣихъ ломаныхъ линій неограниченно удваивается. При этомъ условіи поверхности $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ стремятся къ общему предѣлу, именно къ поверхности шарового пояса AD (492), а апоѳема a имѣетъ предѣломъ радіусъ R; слѣд., объемы V_1 и V_2 стремятся при этомъ къ общему предѣлу, именно къ произведенію $(\text{пов. } AD) . \frac{R}{3}$. Но тогда, значитъ, каждый изъ перемѣнныхъ объемовъ V_1 и V_2 приближается къ одной и той же постоянной величинѣ какъ угодно близко; это возможно только тогда, когда разность между этими перемѣнными стремится къ O.

2°. Обозначимъ буквою V объемъ шарового сектора OAD. Очевидно, что $V > V_1$ и $V < V_2$; значитъ, каждая изъ разностей $V_2 - V$ и $V - V_1$ меньше разности $V_2 - V_1$. Но эта разность, какъ мы видѣли, при неограниченномъ удвоеніи числа сторонъ ломаныхъ стремится къ O; слѣд., разности $V_2 - V$ и $V - V_1$ при этомъ и подавно стремятся къ O. Отсюда заключаемъ, что постоянная величина V есть общій предѣлъ перемѣнныхъ объемовъ V_2 и V_1. Но этотъ общій предѣлъ, какъ мы нашли, есть произведеніе (пов. AD)$\frac{R}{3}$; значитъ:

$$V=(\text{пов. } AD)\cdot\frac{R}{3}.$$

Замѣчаніе. Теорема и ея доказательство не зависятъ отъ того, будетъ ли одинъ изъ радіусовъ кругового сектора совпадать съ осью вращенія или нѣтъ.

498. Теорема. Объемъ шара равняется произведенію его поверхности на треть радіуса.



Черт. 441.

Разбивъ полукругъ $ABCD$ (черт. 441), производящій шаръ, на какіе-нибудь круговые секторы AOB, BOC, COD, мы замѣтимъ, что объемъ шара можно разсматривать, какъ сумму объемовъ шаровыхъ секторовъ, производимыхъ вращеніемъ этихъ круговыхъ. Такъ какъ, согласно предыдущей теоремѣ:

$$\text{объемъ } AOB=(\text{пов. } AB)\,{}^1\!/_3R,$$
$$\text{объемъ } BOC=(\text{пов. } BC)\,{}^1\!/_3R,$$
$$\text{объемъ } COD=(\text{пов. } CD)\,{}^1\!/_3R,$$

то объемъ шара$=(\text{пов. } AB+\text{пов. } BC+\text{пов. } CD)\,{}^1\!/_3R=$
$=(\text{пов. } ABCD)\,{}^1\!/_3R.$

499. Слѣдствіе 1-е. Обозначимъ высоту шарового пояса или сегментной поверхности черезъ H, радіусъ шара черезъ R, а діаметръ черезъ D; тогда поверхность пояса или сегментной поверхности выразится, какъ мы видѣли (491), формулой $2\pi RH$, а поверхность шара (493) формулой $4\pi R^2$; поэтому:

$$\text{об. шарового сектора}=2\pi RH\cdot{}^1\!/_3R={}^2\!/_3\pi R^2H;$$

$$\text{об. шара}=4\pi R^2\cdot{}^1\!/_3R={}^4\!/_3\pi R^3={}^4\!/_3\pi\left(\frac{D}{2}\right)^3={}^1\!/_6\pi D^3.$$

Отсюда видно, что объемы шаровъ относятся, какъ кубы ихъ радіусовъ или діаметровъ.

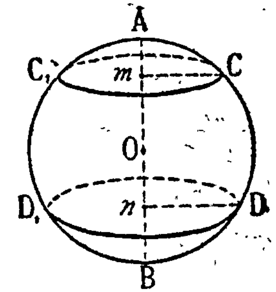
Слѣдствіе 2-е. Поверхность и объемъ шара составляютъ $^2/_3$ соотвѣтственно полной поверхности и объема цилиндра, описаннаго около шара.

Дѣйствительно, у цилиндра, описаннаго около шара, радіусъ основанія равенъ радіусу шара, а высота равна діаметру шара; поэтому для такого цилиндра:

$$\text{полная поверхность}=2\pi R\cdot 2R+2\pi R^2=6\pi R^2;$$
$$\text{объемъ}=\pi R^2 2R=2\pi R^3.$$

Отсюда видно, что $^2/_3$ полной поверхности этого цилиндра равны $4\pi R^2$, т.-е. равны поверхности шара, а $^2/_3$ объема цилиндра составляютъ $^4/_3\pi R^3$, т.-е. объемъ шара *).

500. Опредѣленія. 1°. Часть шара (ACC_1, черт. 442), отсѣкаемая отъ него какою-нибудь плоскостью (CC_1), наз. шаровымъ сегментомъ. Кругъ сѣченія наз. основаніемъ сегмента, а отрѣзокъ Am радіуса, перпендикулярнаго къ основанію,—высотою сегмента.



Черт. 442.

2°. Часть шара, заключенная между двумя параллельными сѣкущими плоскостями (CC_1 и DD_1), наз. шаровымъ слоемъ. Круги параллельныхъ сѣченій наз. основаніями слоя, а разстояніе mn между ними—его высотою.

Оба эти тѣла можно разсматривать, какъ происходящія отъ вращенія вокругъ діаметра AB части круга AmC, или части $CmnD$.

501. Теорема. Объемъ шарового сегмента равенъ объему цилиндра, у котораго радіусъ основанія есть высота сегмента,

---

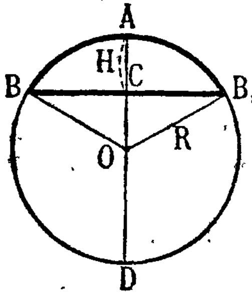
*) Это предложеніе было доказано **Архимедомъ** (въ III вѣкѣ до Р. Хр.). Архимедъ выразилъ желаніе, чтобы чертежъ этой теоремы былъ изображенъ на его гробницѣ, что и было исполнено римскимъ военачальникомъ Марцелломъ. (Ф. Кэджори — Исторія элементарной математики).

Предлагаемъ учащимся, какъ полезное упражненіе, доказать, что поверхность и объемъ шара составляютъ 4/9 соотвѣтственно полной поверхности и объема описаннаго конуса, у котораго производящая равна діаметру основанія. Соединяя это предложеніе съ указаннымъ въ слѣдствіи 2-мъ, мы можемъ написать такое равенство (вѣрное и для поверхностей, и для объемовъ):

$$\frac{\text{шаръ}}{4}=\frac{\text{цилиндръ}}{6}=\frac{\text{конусъ}}{9}.$$

а высота равна радіусу шара, уменьшенному на треть высоты сегмента,

т.-е. $V=\pi H^2(R-{}^1/_3H)$,



Черт. 443.

гдѣ H есть высота сегмента, а R радіусъ шара.

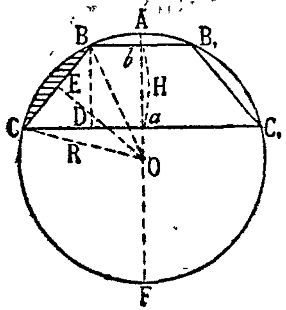
Объемъ шарового сегмента, получаемаго вращеніемъ вокругъ діаметра AD (черт. 443) части круга ACB, найдется, если изъ объема шарового сектора, получаемаго вращеніемъ кругового сектора AOB, вычтемъ объемъ конуса, получаемаго вращеніемъ тр-ка COB. Первый изъ нихъ равенъ ${}^2/_3\pi R^2H$, а второй ${}^1/_3\,\pi CB^2\,.\,CO$. Такъ какъ CB есть средняя пропорціональная между AC и CD, то $CB^2=H(2R-H)$; поэтому $CB^2\,.\,CO=H(2R-H)\,(R-H)=2R^2H-RH^2-2RH^2+H^3=2R^2H-3H^2R+H^3$; слѣд., об. ABB_1=об. $OBAB_1$—об. $OBB_1=\frac{2}{3}\pi R^2H-\frac{1}{3}\pi CB^2.CO=$

$$=\frac{2}{3}\pi R^2H-\frac{2}{3}\pi R^2H+\pi RH^2-\frac{1}{3}\pi H^3=\pi H^2(R-\frac{1}{3}H).$$

502. Теорема. Объемъ шарового слоя равенъ объему шара, имѣющаго діаметромъ высоту слоя, сложенному съ полусуммою объемовъ двухъ цилиндровъ, у которыхъ высота равна высотѣ слоя, а основанія: у одного нижнее, у другого верхнее основаніе слоя,

т.-е. $V=\frac{1}{6}\pi H^3+\frac{1}{2}\pi(r_1^2+r_2^2)H$,

гдѣ H есть высота слоя, а r_1 и r_2 радіусы основаній слоя.



Черт. 444.

Предварительно найдемъ объемъ, получаемый вращеніемъ вокругъ діаметра AF (черт. 444) кругового сегмента BC (покрытаго на чертежѣ штрихами). Этотъ объемъ есть разность между объемомъ шарового сектора OBC и объемомъ тѣла, получаемаго вращеніемъ тр-ка OBC. Первый равенъ ${}^2/_3\pi R^2H$, а второй=(пов. $BC)\frac{1}{3}OE=(2\pi OE.H)\frac{1}{3}OE=$ $=\frac{2}{3}\pi OE^2.H$. Слѣд., объемъ отъ вращенія сегмента выразится такъ:

$$\frac{2}{3}\pi H(R^2-OE^2)=\frac{2}{3}\pi H\,.\,CE^2=\frac{2}{3}\pi H\,.\,\frac{1}{4}BC^2=\frac{1}{6}\pi BC^2\,.\,H.$$

Чтобы получить объемъ слоя, достаточно къ найденному объему приложить объемъ усѣченнаго конуса BB_1C_1C; поэтому объемъ слоя выразится такъ:

$$\frac{1}{6}\pi BC^2\,.\,H+\frac{1}{3}\pi(Ca^2+Bb^2+Ca\,.\,Bb)\,H=\frac{1}{6}\pi H(BC^2+2Ca^2+2Bb^2+2Ca.\,Bb).$$

Проведя $BD\perp Ca$, будемъ имѣть:

$$BC^2=BD^2+CD^2=H^2+(Ca-Bb)^2=H^2+Ca^2+Bb^2-2Ca\,.\,Bb.$$

Подставивъ это выраженіе въ предыдущую формулу, найдемъ:

$$\text{об. слоя}=\frac{1}{6}\pi H(H^2+3Ca^2+3Bb)^2=\frac{1}{6}\pi H^3+\frac{1}{2}\pi(Ca^2+Bb^2)H$$

или, обозначая Ca черезъ r_1, а Bb черезъ r_2:

$$\text{об. сегм.}=\frac{1}{6}\pi H^3+\frac{1}{2}\pi(r_1^2+r_2^2)H.$$

Положивъ въ этой формулѣ $r_2=0$, получимъ **другое выраженіе для объема шарового сегмента:**

$$\text{об. сегм.}=\frac{1}{6}\pi H^3+\frac{1}{2}\pi r_1^2H,$$

т.-е. объемъ шарового сегмента равенъ объему шара, имѣющаго діаметромъ высоту сегмента, сложенному съ половиною объема цилиндра, у котораго радіусъ основанія есть радіусъ основанія сегмента и высота равна высотѣ сегмента.

ЗАДАЧИ.

353. Объемъ цилиндра, у котораго высота вдвое болѣе діаметра, равенъ 1 куб. метру. Вычислить его высоту.

354. Діаметръ основанія цилиндра =16 сант., а полная поверхность его содержитъ 1546 квадр. сант. Вычислить высоту этого цилиндра.

355. Найти вѣсъ желѣзной цилиндрической трубки, которой внутренній діаметръ =17 сант., внѣшній діаметръ =18 сант., а длина= =74 сант.; удѣльный вѣсъ желѣза 7,7.

356. Въ сосудъ, имѣющій форму конуса, обращеннаго вершиною внизъ, вливаютъ 345 граммовъ ртути. Зная, что уголъ при вершинѣ конуса равенъ 60°, а уд. вѣсъ ртути 13,596, вычислить высоту, до которой налита въ сосудѣ ртуть.

357. Вычислить боковую поверхность и объемъ усѣченнаго конуса, у котораго радіусы основаній суть 27 и 18 сант., а образующая 21 сант.

358. На какомъ разстояніи отъ центра шара, котораго радіусъ равенъ 2,425 метра, слѣдуетъ провести сѣкущую плоскость, чтобы отношеніе поверхности меньшаго сегмента къ боковой поверхности конуса, имѣющаго общее съ сегментомъ основаніе, а вершину въ центрѣ шара, равнялось 7 : 4.

359. Найти объемъ тѣла, происходящаго отъ вращенія правильнаго 6-угольника со стороною a вокругъ одной изъ своихъ сторонъ.

360. Вычислить радіусъ шара, описаннаго около куба, котораго ребро равно 1 метру.

361. Желѣзный пустой шаръ, котораго внѣшній радіусъ равенъ 0, 154 метра, плаваетъ въ водѣ, погружаясь въ нее на половину. Вычислить толщину оболочки этого шара, зная, что уд. вѣсъ желѣза равенъ 7,7.

362. Вычислить объемъ тѣла, происходящаго отъ вращенія правильнаго треугольника со стороной a вокругъ оси, проходящей черезъ его вершину и параллельной противоположной сторонѣ.

363. Данъ равносторонній $\triangle ABC$ со стороною a; на BC строятъ квадратъ $BCDE$, располагая его въ противоположную сторону отъ треугольника. Вычислить объемъ тѣла, происходящаго отъ вращенія 5-угольника $ABEDC$ вокругъ стороны AB.

364. Данъ квадратъ $ABCD$ со стороною a. Черезъ вершину A проводятъ прямую AR, перпендикулярную къ діагонали AC, и вращаютъ квадратъ вокругъ AR. Вычислить поверхность, образуемую контуромъ квадрата, и объемъ, образуемый площадью квадрата.

365. Данъ правильный 6-угольникъ $ABCDEF$ со стороною a. Черезъ вершину A проводятъ прямую AR, перпендикулярную къ радіусу OA, и вращаютъ 6-угольникъ вокругъ AR. Вычислить поверхность, образуемую контуромъ, и объемъ, образуемый площадью прав. 6-угольника.

366. Въ шарѣ, котораго радіусъ равенъ 2, просверлено цилиндрическое отверстіе вдоль его діаметра. Вычислить объемъ оставшейся части, если радіусъ цилиндрическаго отверстія равенъ 1.

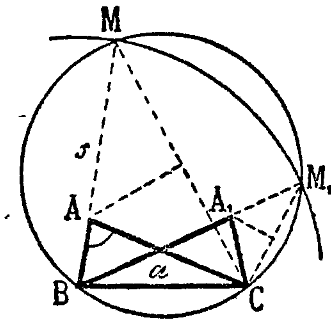
ПРИЛОЖЕНІЕ.

Главнѣйшіе методы рѣшенія геометрическихъ задачъ на построеніе.

I. Методъ геометрическихъ мѣстъ, извѣстный еще со временъ Платона (IV вѣка до Р. Хр.), состоитъ въ слѣдующемъ. Положимъ, что рѣшеніе предложенной задачи сводится къ нахожденію нѣкоторой точки, которая должна удовлетворять извѣстнымъ условіямъ. Отбросимъ изъ этихъ условій какое-нибудь одно; тогда задача сдѣлается неопредѣленною, т.-е. ей можетъ удовлетворять безчисленное множество точекъ. Эти точки составятъ нѣкоторое геометрическое мѣсто. Построимъ его, если это окажется возможнымъ. Затѣмъ примемъ во вниманіе отброшенное нами условіе и откинемъ какое-нибудь другое; тогда задача будетъ снова удовлетворяться безчисленнымъ множествомъ точекъ, которыя составятъ новое геометрическое мѣсто. Построимъ его, если это возможно. Искомая точка, удовлетворяя всѣмъ условіямъ, должна лежать на обоихъ геометрическихъ мѣстахъ, т.-е. она должна находиться въ ихъ пересѣченіи. Задача окажется возможной или невозможной, смотря по тому, пересѣкаются или нѣтъ найденныя геометрическія мѣста; и задача будетъ имѣть столько рѣшеній, сколько окажется точекъ пересѣченія.

Приведемъ на этотъ методъ одинъ примѣръ, который вмѣстѣ съ тѣмъ покажетъ намъ, какъ иногда приходится вводить въ чертежъ вспомогательныя линіи съ цѣлью принять во вниманіе всѣ данныя условія задачи.

Задача. Построить треугольникъ по основанію a, углу при вершинѣ A и суммѣ s боковыхъ сторонъ.



Черт. 445.

Пусть ABC будетъ искомый $\triangle$. Чтобы принять во вниманіе данную сумму боковыхъ сторонъ, продолжимъ BA и отложимъ $BM=s$. Проведя MC, получимъ вспомогательный тр-къ BMC. Если мы построимъ этотъ тр-къ, то затѣмъ легко построимъ и тр-къ ABC. Построеніе тр-ка BMC сводится къ нахожденію точки M. Замѣтивъ, что тр-къ AMC равнобедренный ($AM=AC$) и, слѣд., $\angle M = {}^1/_2 A$ (такъ какъ $\angle M + \angle C = \angle A$), мы видимъ, что точка M должна удовлетворять двумъ условіямъ: 1) она удалена отъ B на разстояніе s, 2) изъ нея данная конечная прямая BC видна подъ угломъ, равнымъ ${}^1/_2 A$. Отбросивъ второе условіе, мы получимъ безчисленное множество точекъ M, лежащихъ на окружности, описанной изъ B радіусомъ, равнымъ s. Отбросивъ первое условіе, мы получимъ также безчисленное множество точекъ M, лежащихъ на дугѣ сегмента, построеннаго на BC и вмѣщающаго уголъ, равный $^1/_2 A$. Такимъ образомъ, нахожденіе точки M сводится къ построенію двухъ геометрическихъ мѣстъ, изъ которыхъ каждое мы построить умѣемъ. Задача окажется невозможною, если эти геометрическія мѣста не будутъ имѣть общихъ точекъ; задача будетъ имѣть одно или два рѣшенія, смотря по тому, касаются ли, или же пересѣкаются эти мѣста (на нашемъ чертежѣ дуга сегмента пересѣкается съ окружностью; вслѣдствіе этого получаются два тр-ка ABC и A_1BC, удовлетворяющіе условіямъ задачи).

Иногда задача сводится не къ опредѣленію точки, а къ нахожденію прямой, удовлетворяющей нѣсколькимъ условіямъ. Если отбросимъ одно изъ нихъ, то получимъ безчисленное множество прямыхъ; при этомъ можетъ случиться, что эти прямыя опредѣляютъ нѣкоторую линію (напр., всѣ онѣ будутъ касательными къ нѣкоторой окружности). Отбросивъ другое условіе и принявъ во вниманіе то, которое было откинуто ранѣе, мы получимъ снова безчисленное множество прямыхъ, которыя, быть-можетъ, опредѣлятъ нѣкоторую другую линію. Построивъ, если возможно, эти двѣ линіи, мы затѣмъ легко найдемъ и искомую прямую. Пусть, напр., намъ предложена

Задача. Провести сѣкущую къ двумъ даннымъ окружностямъ O и O_1 такъ, чтобы части сѣкущей, заключенныя внутри окружностей, равнялись соотвѣтственно даннымъ длинамъ a и a_1.

Если возьмемъ только одно условіе, напр., чтобы часть сѣкущей, лежащая внутри круга O, равнялась a, то получимъ безчисленное множество сѣкущихъ, которыя всѣ должны быть одинаково удалены отъ центра этого круга (такъ какъ равныя хорды одинаково удалены отъ центра). Поэтому если въ кругѣ O гдѣ-нибудь построимъ хорду, равную a, и затѣмъ радіусомъ, равнымъ разстоянію этой хорды отъ центра, опишемъ окружность, концентрическую съ O, то всѣ сѣкущія, о которыхъ идетъ рѣчь, должны касаться этой вспомогательной окружности; подобнымъ образомъ, принявъ во вниманіе только второе условіе, мы увидимъ, что искомая сѣкущая должна касаться второй вспомогательной окружности, концентрической съ O_1. Значитъ, вопросъ приводится къ построенію общей касательной къ двумъ окружностямъ.

Кромѣ тѣхъ геометрическихъ мѣстъ, которыя указаны въ текстѣ этой книги (§§ 67, 112, 177, 228), полезно замѣтить еще слѣдующія (доказательство предоставляемъ самимъ учащимся):

1°. Геометрическое мѣсто точекъ, дѣлящихъ въ данномъ отношеніи отрѣзки параллельныхъ прямыхъ, заключенные между сторонами даннаго угла, есть прямая, проходящая черезъ вершину угла и какую-нибудь одну изъ этихъ точекъ.

2°. Геом. м. точекъ, которыхъ разстоянія отъ сторонъ даннаго угла находятся въ данномъ отношеніи, состоятъ изъ двухъ прямыхъ, проходящихъ черезъ вершину угла, и изъ которыхъ одна лежитъ внутри угла, а другая внѣ его.

3°. Г. м. точекъ, дѣлящихъ въ данномъ отношеніи всѣ равныя хорды данной окружности, есть окружность, концентрическая съ данною.

4°. Г. м. точекъ, изъ которыхъ касательныя, проведенныя къ данной окружности, имѣютъ данную длину, есть окружность, концентрическая съ данной.

5°. Г. м. точекъ, квадраты разстояній которыхъ отъ двухъ данныхъ точекъ A и B имѣютъ постоянную сумму, есть окружность, которой центръ лежитъ въ серединѣ прямой AB (доказательство основывается на теоремѣ § 239).

6°. Г. м. точекъ, квадраты разстояній которыхъ отъ двухъ данныхъ точекъ A и B имѣютъ постоянную разность, есть прямая, перпендикулярная къ прямой AB.

7°. Г. м. точекъ, сумма разстояній которыхъ отъ сторонъ даннаго угла постоянна, есть лежащій внутри угла отрѣзокъ прямой, отсѣкающей отъ угла равнобедренный тр-къ. Продолженія этого отрѣзка (въ обѣ стороны) представляютъ геометрическое мѣсто точекъ, которыхъ разность разстояній отъ сторонъ угла постоянна.

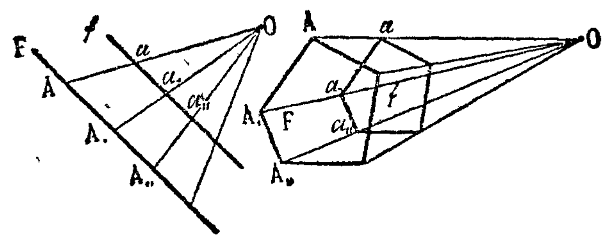
8°. Г. м. точекъ, дѣлящихъ въ данномъ отношеніи хорды, проведенныя изъ одной точки A данной окружности, есть окружность, касательная къ данной въ точкѣ A.

Послѣднее геометрическое мѣсто составляетъ частный случай слѣдующаго болѣе общаго (см. §§ 211—218):

9°. Если изъ данной точки O (черт. 446) къ различнымъ точкамъ A, A_1, A_{11}... какой-нибудь фигуры F проведемъ прямыя OA, OA_1, OA_{11}... и на каждой изъ нихъ отложимъ части Oa, Oa_1, Oa_{11}... такія, что

$$Oa : OA = Oa_1 : OA_1 = Oa_{11} : OA_{11} = \ldots,$$

то геометрическое мѣсто точекъ a, a_1, a_{11}... есть фигура f, подобная фигурѣ F и одинаково съ ней расположенная относительно точки O.



Черт. 446.

Такимъ образомъ, если фигура F есть прямая, то и f есть прямая, параллельная F; если F есть многоугольникъ, то и f есть многоугольникникъ, подобный F и одинаково съ нимъ расположенный; если F есть окружность, то и f есть окружность.

Когда пропорціональныя части Oa, Oa_1, Oa_{11}... откладываются на продолженіяхъ линій OA, OA_1... (за точку O), то получается тоже подобная фигура, но расположенная обратно относительно точки O.

Точка O въ этихъ случаяхъ наз. центромъ подобія фигуръ F и f, точки A и a, A_1 и a_1 и т. д. наз. сходственными точками, а прямыя OA, OA_1...—лучами подобія.

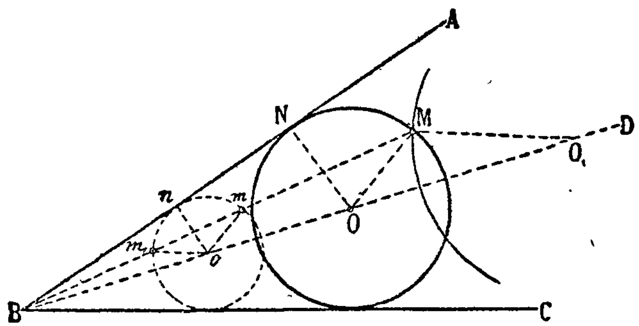
2. Методъ подобія. Онъ состоитъ въ томъ, что, пользуясь нѣкоторыми данными задачи, строятъ сначала фигуру, подобную искомой, а затѣмъ переходятъ къ послѣдней. Этотъ методъ особенно удобенъ тогда, когда только одна данная величина есть длина, а всѣ прочія суть или углы, или отношенія линій; таковы, напр., **задачи:**

Построить треугольникъ по данному углу, сторонѣ и отношенію двухъ другихъ сторонъ, или по двумъ угламъ и длинѣ нѣкоторой прямой (высотѣ, медіанѣ, биссектрисѣ и т. п.).

Построить квадратъ по данной суммѣ или разности между діагональю и стороною и т. п.

Въ этихъ задачахъ положеніе искомой фигуры остается произвольнымъ; но во многихъ вопросахъ требуется построить фигуру, которой положеніе относительно данныхъ точекъ или линій вполнѣ опредѣлено. При этомъ можетъ случиться, что, отрѣшившись отъ какого-нибудь одного изъ условій положенія и оставивъ всѣ остальныя; мы получимъ безчисленное множество фигуръ, подобныхъ искомой. Въ такомъ случаѣ методъ подобія можетъ быть употребленъ съ пользою. Приведемъ примѣръ.

Задача. Въ данный уголъ ABC вписать окружность, которая проходила бы черезъ данную точку M (черт. 447).



Черт. 447.

Отбросимъ на время требованіе, чтобы окружность проходила черезъ точку M. Тогда вопросу удовлетворяетъ безчисленное множе-

ство окружностей, которыхъ центры лежатъ на биссектрисѣ BD. Построимъ одну изъ такихъ окружностей, напр., ту, которой центръ есть o. Возьмемъ на ней точку m, сходственную точкѣ M, т.-е. лежащую на лучѣ подобія MB, и проведемъ радіусъ mo. Если теперь построимъ $MO \parallel mo$, то точка O будетъ центромъ искомаго круга. Дѣйствительно, проведя къ сторонѣ AB перпендикуляры ON и on, мы получимъ подобные тр-ки MBO и mBo, NBO и nBo, изъ которыхъ будемъ имѣть:

$$MO : mo = BO : Bo; \quad NO : no = BO : Bo.$$

Откуда: $$MO : mo = NO : no.$$

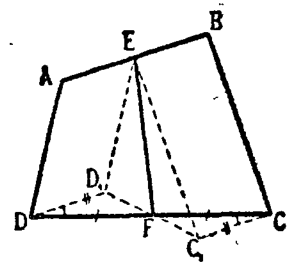
Но $mo = no$; слѣд., и $MO = NO$, т.-е. окружность, описанная изъ центра O радіусомъ OM, касается стороны AB; а такъ какъ ея центръ лежитъ на биссектрисѣ угла, то она касается и стороны BC.

Если за сходственную точку возьмемъ другую точку m_1 пересѣченія луча MB съ окружностью o, то найдемъ другой центръ O_1 искомаго круга. Слѣд., задача допускаетъ два рѣшенія.

3. Методъ параллельнаго перенесенія. Весьма часто бываетъ полезно перемѣстить нѣкоторыя части данной или искомой фигуры въ другое положеніе, при которомъ легче обнаружить зависимость между данными элементами и искомыми. Существуютъ различные пріемы такого перемѣщенія. Разсмотримъ сначала **параллельное перенесеніе.**

Задача. Построить четыреугольникъ $ABCD$ (чертежъ 448), зная всѣ его стороны и прямую EF, соединяющую середины противоположныхъ сторонъ.

Чтобы сблизить между собою данныя линіи, перенесемъ параллельно самимъ себѣ стороны AD и BC въ положенія ED_1 и EC_1. Тогда прямая DD_1 будетъ равна и параллельна AE, а прямая CC_1 равна и параллельна EB; но такъ какъ $AE = EB$, то $DD_1 = C_1C$ и $DD_1 \parallel CC_1$. Вслѣдствіе этого тр-ки DD_1F и CC_1F будутъ равны (такъ какъ у нихъ: $DD_1 = CC_1$, $DF = CF$ и $\angle D_1DF = \angle FCC_1$); значитъ, $\angle D_1FD = \angle CFC_1$, и потому линія D_1FC_1 должна быть прямая, т.-е. фигура ED_1FC_1 окажется треугольникомъ. Въ этомъ тр-кѣ извѣстны двѣ стороны ($ED_1 = AD$ и $EC_1 = BC$) и медіана EF, проведенная къ третьей сторонѣ. По этимъ даннымъ легко построить треугольникъ (если продолжимъ медіану EF за точку F на длину, равную ей, и полученную точку соединимъ съ D_1 и C_1, то получимъ параллелограммъ, у котораго извѣстны стороны и одна діагональ).

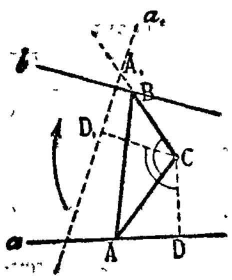


Черт. 448.

Найдя $\triangle ED_1C_1$, строимъ затѣмъ тр-ки D_1DF и C_1CF, а затѣмъ и весь четыреугольникъ $ABCD$.

Замѣтимъ, что иногда бываетъ полезно перенести параллельно данному направленію цѣлую фигуру, напр., окружность. Въ этомъ случаѣ всѣ точки перемѣщаемой фигуры описываютъ параллельныя и равныя прямыя (см., напр., задачу 383, стр. 384).

4. Методъ вращенія вокругъ точки. Для уясненія этого особеннаго вида перенесенія приведемъ слѣдующій примѣръ:



Черт. 449.

Задача. Даны по положенію точка C (черт. 449) и двѣ безконечныя прямыя a и b. Построить треугольникъ ABC, котораго одна вершина была бы въ C, а двѣ другія лежали бы на прямыхъ a и b, и который, кромѣ того, былъ бы подобенъ данному треугольнику (не помѣщенному на чертежѣ).

Пусть задача рѣшена. Замѣтивъ, что углы искомаго тр-ка даны, обозначимъ одинъ изъ нихъ, который находится при точкѣ C, буквою ω. Повернемъ всю фигуру вокругъ точки C въ направленіи, указанномъ стрѣлкою, на уголъ ω и найдемъ положеніе, которое займетъ послѣ вращенія прямая a. Для этого достаточно опустить на a перпендикуляръ CD, затѣмъ повернуть его на уголъ ω въ положеніе CD_1 и провести черезъ D_1 прямую a_1, перпендикулярную къ CD_1. Прямая a_1 и будетъ то положеніе, которое займетъ послѣ вращенія прямая a. Такъ какъ при вращеніи всѣ части фигуры повертываются на одинъ и тотъ же уголъ, то CA, послѣ вращенія пойдетъ по CB, вслѣдствіе этого точка A упадетъ въ A_1, т.-е. въ точку пересѣченія CB съ a_1. Такъ какъ отношеніе CA къ CB или, все равно, отношеніе CA_1 къ CB дано (пусть это будетъ $m:n$), то теперь вопросъ сведенъ къ тому, чтобы черезъ точку C провести такую прямую CA_1, которая пересѣкалась бы съ прямыми b и a_1 въ точкахъ B и A, удовлетворяющихъ пропорціи:

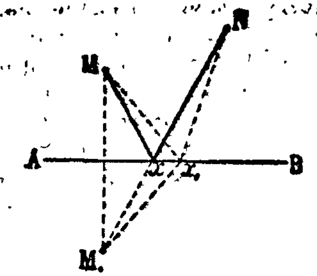
$$CA_1 : CB = m : n.$$

Чтобы провести такую прямую, достаточно раздѣлить CD_1 въ нѣкоторой точкѣ x такъ, чтобы $CD_1 : Cx = m : n$, и черезъ точку дѣленія провести прямую, параллельную a_1; пересѣченіе этой прямой съ b опредѣлитъ точку B.

5. Методъ вращенія вокругъ прямой (или методъ **симметріи**). Иногда пріемъ построенія легко обнаруживается, если перегнемъ часть чертежа вокругъ нѣкоторой прямой такъ, чтобы эта часть заняла симметричное положеніе по другую сторону отъ этой прямой. Приведемъ примѣръ.

Задача. На безконечной прямой AB (черт. 450) найти точку x, чтобы сумма ея разстояній отъ данныхъ точекъ M и N была наименьшая.

Если, перегнувъ чертежъ вокругъ AB, приведемъ точку M въ симметричное относительно AB положеніе M_1, то разстояніе точки M отъ какой угодно точки прямой AB сдѣлается равнымъ разстоянію точки M_1 отъ той же точки прямой AB. Поэтому суммы $Mx+xN$, Mx_1+x_1N... равны соотвѣтственно суммамъ M_1x+xN, $M_1x_1+x_1N$...; но изъ послѣднихъ суммъ наименьшая будетъ та, при которой линія M_1xN прямая. Отсюда становится яснымъ пріемъ построенія.



Черт. 450.

То же самое построеніе рѣшаетъ и другую **задачу**: на прямой AB найти такую точку x, чтобы прямыя xM и xN, проведенныя отъ нея къ даннымъ точкамъ M и N, составляли съ AB равные углы.

6. Методъ обратности. Иногда бываетъ полезно перевернуть, такъ сказать, задачу, т.-е. данныя условія задачи взять за искомыя и наоборотъ. Приведемъ примѣръ.

Задача. Въ данный треугольникъ ABC вписать другой треугольникъ, у котораго стороны были бы параллельны сторонамъ другого даннаго треугольника MNP.

Перевернемъ вопросъ: опишемъ около тр-ка MNP другой тр-къ $A_1B_1C_1$, у котораго стороны были бы параллельны сторонамъ тр-ка ABC (что, конечно, легко выполнить). Тогда мы получимъ фигуру, подобную искомой; раздѣливъ затѣмъ какую-нибудь сторону тр-ка ABC на двѣ части, пропорціональныя отрѣзкамъ сходственной стороны тр-ка $A_1B_1C_1$, мы получимъ одну изъ вершинъ искомаго тр-ка.

7. Алгебраическій методъ. Сущность этого метода, а также примѣры задачъ, рѣшаемыхъ имъ, были указаны ранѣе (§§ 254, 255, 342, 343 и задачи №№ 230, 231, 285, 288, 289, 290, 291, 292, 293).

Примѣры задачъ, рѣшаемыхъ этими методами.

1°. Методъ геометрическихъ мѣстъ.

367. Построить четыреугольникъ $ABCD$, около котораго можно было бы описать окружность, зная его стороны AB и BC, діагональ AC и уголъ между діагоналями.

368. Построить тр-къ по основанію, углу при вершинѣ и суммѣ или разности квадратовъ двухъ другихъ сторонъ (напр., основаніе, a, уголъ при вершинѣ A и сумма квадратовъ бок. сторонъ k^2).

369. Около равносторонняго треугольника описать квадратъ такъ, чтобы обѣ фигуры имѣли общую вершину.

370. Найти точку, изъ которой три отрѣзка данной прямой AB, BC и CD были бы видны подъ равными углами.

371. Внутри тр-ка найти такую точку, которой разстоянія до сторонъ тр-ка относились бы между собою, какъ 6 : 3 : 2.

372. Найти точку, изъ которой три данные круга видны подъ равными углами (указаніе: надо сначала найти геометр. мѣсто точекъ, изъ которыхъ два данные круга видны подъ равными углами).

373. Найти на данной окружности такую точку, чтобы сумма ея разстояній отъ двухъ данныхъ прямыхъ была наименьшая.

374. Превратить данный тр-къ въ другой равновеликій тр-къ съ даннымъ основаніемъ и съ даннымъ угломъ при вершинѣ.

375. Въ данной окружности провести двѣ хорды данной длины такъ, чтобы онѣ пересѣкались подъ даннымъ угломъ и одна изъ нихъ проходила черезъ данную точку.

2°. Методъ подобія.

376. Построить тр-къ по углу при вершинѣ, высотѣ и отношенію отрѣзковъ, на которые основаніе дѣлится высотою.

377. Вписать квадратъ: 1, въ данный тр-къ; 2, въ данный секторъ; 3, въ данный сегментъ.

378. Черезъ данную точку провести прямую такимъ образомъ, чтобы три данныя прямыя, исходящія изъ одной точки, отсѣкали отъ искомой прямой отрѣзки, находящіеся въ данномъ отношеніи.

379. Черезъ данную точку A окружности провести хорду AD, которая пересѣкалась бы съ данною хордою BC въ такой точкѣ E, чтобы прямыя DE и DC находились въ данномъ отношеніи.

380. Провести внутри тр-ка прямую, параллельную основанію, такъ, чтобы эта прямая была средней пропорціональной между отрѣзками одной боковой стороны.

381. Построить равнобедренный тр-къ, зная его боковую сторону и сумму высоты съ основаніемъ.

382. На данной прямой найти такую точку, чтобы ея разстоянія отъ данной точки и другой данной прямой находились въ данномъ отношеніи.

3°. Методъ параллельнаго перенесенія.

383. Между двумя данными окружностями провести прямую данной длины a параллельно данной прямой MN.

(Указаніе: надо одинъ кругъ приблизить къ другому, перенеся его параллельно прямой MN на разстояніе a).

384. Въ кругѣ даны двѣ хорды AB и CD. Найти на окружности такую точку x, чтобы прямыя xA и xB отсѣкали отъ хорды CD отрѣзокъ, равный данной длинѣ (методъ парал. перенесенія и геом. мѣстъ).

385. Въ данномъ тр-кѣ ABC найти такія точки: x на сторонѣ AB и y на сторонѣ BC, чтобы прямая xy была данной длины и отношеніе $Ax : Cy$ было бы данное (парал. перенесеніе и методъ подобія).

386. Построить трапецію по одному ея углу, двумъ діагоналямъ и средней линіи.

387. Построить четыреугольникъ по тремъ сторонамъ a, b, c и двумъ угламъ α и β, прилежащимъ къ неизвѣстной сторонѣ.

388. Къ двумъ даннымъ кругамъ провести общую сѣкущую, параллельную данной прямой, такъ, чтобы сумма или разность хордъ, опредѣляемыхъ точками пересѣченій, была равна данной длинѣ.

389. Съ корабля видны два маяка, положенія которыхъ на картѣ извѣстны, подъ даннымъ угломъ. Когда корабль прошелъ извѣстную длину въ данномъ направленіи, тѣ же самые маяки видны подъ другимъ даннымъ угломъ. Опредѣлить на картѣ мѣсто корабля (геом. мѣсто и параллельное перенесеніе).

4°. Методъ вращенія вокругъ точки.

390. Построить тр-къ, подобный данному тр-ку, такъ, чтобы одна его вершина лежала въ данной точкѣ A, а двѣ другія вершины находились бы на данныхъ окружностяхъ O и O_1 (одна на O, другая на O_1).

391. Данъ кругъ и внѣ его двѣ точки A и B; провести къ кругу касательную такъ, чтобы разстоянія точки A до этой касательной и до перпендикуляра, опущеннаго изъ B на касательную, были въ данномъ отношеніи.

(Указаніе: надо повернуть вокругъ точки A на 90° прямоугольный тр-къ, у котораго гипотенуза есть AB, а одинъ катетъ—разстояніе точки A до перпендикуляра, опущеннаго на касательную изъ точки B. Эту же задачу можно рѣшить при помощи одновременнаго пользованія методомъ подобія и методомъ геометр. мѣстъ).

392. Построить тр-къ, котораго стороны были бы пропорціональны числамъ 3, 4 и 5, и котораго вершины лежали бы на трехъ данныхъ параллельныхъ прямыхъ.

5°. Методъ вращенія вокругъ прямой.

393. Построить по четыремъ сторонамъ четыреугольникъ $ABCD$, зная, что его діагональ AC дѣлитъ уголъ A пополамъ.

394. Конечная прямая AB пересѣчена въ точкѣ C прямой MN; найти на MN такую точку, изъ которой отрѣзки AC и BC видны подъ равными углами (эту задачу можно также рѣшить методомъ геометр. мѣстъ).

395. Построить квадратъ, двѣ противоположныя вершины которого находились бы на двухъ данныхъ окружностяхъ, а двѣ другія на данной прямой, расположенной между окружностями.

396. На прямоугольномъ бильярдѣ дано положеніе двухъ шаровъ A и B. Въ какомъ направленіи надо толкнуть шаръ A, чтобы

юнъ, отразившись последовательно отъ всѣхъ четырехъ бортовъ, ударилъ затѣмъ шаръ *B*?

397. Данъ уголъ и внутри его точка. Построить тр-къ наименьшаго периметра такой, чтобы одна его вершина лежала въ данной точкѣ, а двѣ другія на сторонахъ угла.

398. Рѣшить методомъ симметріи задачу, которая въ текстѣ (стр. 380) была рѣшена методомъ подобія: въ данный уголъ вписать окружность, которая проходила бы черезъ точку, данную внутри угла.

6°. Методъ обратности.

399. Въ данный секторъ вписать тр-къ, равный данному тр-ку.

400. Построить тр-къ, равный данному тр-ку, такъ, чтобы его вершины лежали на трехъ данныхъ прямыхъ, исходящихъ изъ одной точки.

401. Построить тр-къ, подобный данному тр-ку, такъ, чтобы его вершины лежали на трехъ данныхъ концентрическихъ окружностяхъ.

402. Въ данный тр-къ вписать тр-къ, подобный другому данному тр-ку, такъ, чтобы одна изъ его вершинъ лежала въ точкѣ, данной на основаніи.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

(Цыфры означаютъ номера страницъ.)

ПЛАНИМЕТРІЯ.

КНИГА I. ПРЯМАЯ ЛИНІЯ.

КНИГА II. ОКРУЖНОСТЬ.

КНИГА III. ПОДОБНЫЯ ФИГУРЫ.

КНИГА IV. ВЫЧИСЛЕНІЕ ДЛИНЫ ОКРУЖНОСТИ И ЕЯ ЧАСТЕЙ.

КНИГА V. ИЗМѢРЕНІЕ ПЛОЩАДЕЙ.

СТЕРЕОМЕТРІЯ.

КНИГА I. ПРЯМЫЯ И ПЛОСКОСТИ.

КНИГА II. МНОГОГРАННИКИ.

КНИГА III. КРУГЛЫЯ ТѢЛА.
