МЕТОДИКА

АРИѲМЕТИКИ.

ПОСОБІЕ

ДЛЯ УЧИТЕЛЬСКИХЪ ИНСТИТУТОВЪ, УЧИТЕЛЬСКИХЪ СЕМИНАРІЙ, ПРЕПОДАВАТЕЛЕЙ МЛАДШИХЪ КЛАССОВЪ СРЕДНИХЪ УЧЕБНЫХЪ ЗАВЕДЕНІЙ И РОДИТЕЛЕЙ.

СОСТАВИЛЪ

В. ЕВТУШЕВСКІЙ.

17-е изданіе.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.

Изданіе Е. А. Полубояриновой.

1912.

Адресъ издательницы: С.-Петербургъ. Шпалерная, 26.

Отечественная типографія. Шпалерная, 26

ВВЕДЕНІЕ.

I.

Задача методики учебнаго предмета. Образованіе представленій. Наглядность при обученіи дѣтей. Вниманіе активное и пассивное. Развитіе самостоятельности ученика. Эвристическій методъ обученія. Ассоціаціи представленій. Образованіе понятій. Развитіе памяти. Систематичность обученія. Память активная и пассивная. Катихитическій пріемъ преподаванія. Значеніе и способъ повтореній при обученіи дѣтей. Развитіе припоминанія. Припоминаніе сознательное и механическое Способъ развитія способности припоминанія.

Полное выясненіе основаній методики какого-либо учебнаго предмета есть, во первыхъ, вопросъ спеціально психологическій, во-вторыхъ—вопросъ, обусловливающійся сущностью и содержаніемъ самаго учебнаго предмета. Этотъ вопросъ психологическій въ томъ отношеніи, что самая постановка какого-либо учебнаго предмета въ системѣ предметовъ общаго образованія зависитъ вполнѣ отъ выясненія той конечной цѣли, къ которой направлено воспитаніе и обученіе человѣка; кромѣ того, всякій учебный предметъ имѣетъ значеніе только въ примѣненіи его къ развитію обучающихся; слѣдовательно, передача учебнаго матеріала ученику обусловливается психологическимъ анализомъ человѣческой природы вообще и природы каждаго ученика въ частности. Постановка методики учебнаго предмета зависитъ отъ его сущности и содержанія, такъ какъ предметъ можетъ имѣть вліяніе на правильное развитіе ученика только по своей сущности и посредствомъ того матеріала, который онъ въ себѣ заключаетъ. Такимъ образомъ, географія и исторія, какъ учебные предметы, по своей сущности содержанію, преслѣдуютъ въ системѣ общаго образованія другія цѣли, нежели естествовѣдѣніе, лингвистика или математика. Всѣ же эти предметы стремятся къ одной общей цѣли—общему развитію молодого ума и подготовленію его къ самостоятельной умственной дѣятельности.

Не вдаваясь въ анализъ философскихъ воззрѣній относительно цѣлей воспитанія человѣка, я остановлюсь на нѣкоторыхъ болѣе значительныхъ положеніяхъ психологіи, имѣющихъ близкое, непосредственное отношеніе къ предмету моего трактата. Психологія со временъ Локка и Гербарта, поставившихъ ее на крѣпкомъ и единственно вѣрномъ основаніи опыта и наблюденій, уже въ настоящее время достигла такого развитія, что, не смотря на множество спорныхъ въ ея области вопросовъ, даетъ достаточно матеріала для основательныхъ выводовъ, касающихся различныхъ общихъ пріемовъ и частностей воспитанія и обученія. Возможность спора въ области вопросовъ психологіи дѣлаетъ и постановку методики учебнаго предмета по меньшей мѣрѣ трудною. Методика и частные пріемы преподаванія учебнаго предмета болѣе всего другого могутъ подвергаться критикѣ размышляющаго ума, такъ-какъ въ этой области скорѣе всего возможны чисто личныя воззрѣнія. Если многія положенія и выводы психологіи подвергались, подвергаются и всегда могутъ быть подвержены критикѣ и даже сомнѣнію, то тѣмъ болѣе подвержено критикѣ все то, что̀ на нихъ основывается, а методика предмета обученія есть, какъ я уже сказалъ, въ значительной степени выводъ психологіи. Общіе психологическіе законы, какъ обобщенные результаты многихъ наблюденій, въ большинствѣ случаевъ вѣрны, но они, какъ и всѣ выводы неточныхъ наукъ, допускаютъ исключенія; многіе практики-педагоги самыя эти исключенія принимаютъ часто за законы, и оттого взгляды на одно и то же психическое явленіе у различныхъ лицъ могутъ быть различны. Диттесъ въ своей Педагогикѣ *) говоритъ, что субстанція души такъ скрыта отъ насъ, какъ сущность свѣта, теплоты, электричества. Мы изучаемъ только проявленія душевной дѣятельности, но самаго источника этой дѣятельности не знаемъ. Но и самыя наблюденія результатовъ душевной дѣятельности человѣка, подготовленнаго такъ или иначе къ ней, могутъ приводить къ ошибочнымъ заключеніямъ касательно вліяній, обусловившихъ самую дѣятельность. Какъ наблюдать вліяніе извѣстнаго учебнаго предмета и метода его преподаванія на все умственное развитіе человѣка, когда въ ряду съ нимъ стоитъ такъ много другихъ предметовъ въ системѣ обученія, когда такъ много другихъ, стоящихъ внѣ обученія обстоятельствъ, могущихъ

*) Очеркъ Практической Педагогики. Диттесъ. Переводъ подъ редакціею Паульсона. С.-Петербургъ.

влiять на складъ развитiя человѣка? Нужно очень тщательное химическое изслѣдованiе, чтобы опредѣлить, какое видоизмѣненiе произошло оттого, что въ бочку воды влили стаканъ вина.

Итакъ, было бы очень смѣло думать о полномъ рѣшенiи вопроса касательно установленiя методики учебнаго предмета, а потому я ставлю себѣ гораздо болѣе скромную задачу—выяснить основанiя, на которыхъ строится методика, намѣтить тѣ пункты и вопросы, на которыхъ желательно остановить вниманiе учителя, видящаго въ своемъ ученикѣ разумное, развивающееся существо, а не вмѣстилище для архивнаго склада различнаго учебнаго матерiала, и, наконецъ, построить и, болѣе или менѣе, развить систему учебнаго матерiала Ариѳметики, съ точки зрѣнiя передачи его ученику. Изслѣдованiе вопроса объ основанiи методики важно въ томъ отношенiи, что оно покажетъ, по крайней мѣрѣ, что этотъ вопросъ немаловажный и заслуживающiй серьезнаго обсужденiя со стороны учителя, берущаго на себя рѣшенiе многотрудной задачи—правильнаго умственнаго и нравственнаго развитiя своего ученика. Построенiе системы учебнаго матерiала въ примѣненiи его къ этому развитiю важно потому, что, имѣя цѣльную, готовую, разработанную систему, какова бы она ни была, учитель легче можетъ составлять свою собственную систему; вообще легче дѣлать дополненiя, измѣненiя и исправленiя въ томъ, что̀ есть, нежели въ томъ, что̀ только предполагается.

Итакъ, перехожу къ обозрѣнiю процесса накопленiя познанiй въ умѣ развивающагося субъекта и тѣхъ средствъ, которыя могутъ дать этому процессу разумное направленiе, ведущее къ правильному развитiю учащихся.

Для человѣка, уже достаточно развитого и обладающаго хотя нѣкоторыми познанiями, прiобрѣтенiе новыхъ познанiй—дѣло не трудное. Всякое новое явленiе, всякiй новый фактъ, всякая новая мысль находятъ въ его сознанiи уже много готовыхъ представленiй, съ которыми легко могутъ связываться и въ свою очередь дѣлаться достоянiемъ сознанiя человѣка. Разъ составленное, напримѣръ, общее понятiе о растенiи помогаетъ ему изучать всякое новое растенiе въ отдѣльности. Наблюдающiй человѣкъ видитъ какое-либо растенiе въ первый разъ, но онъ знаетъ уже, къ какой области предметовъ нужно отнести предметъ наблюденiя, и даже въ этой области къ какой опредѣленной группѣ предметовъ; зная же существенные признаки предметовъ этой группы, онъ на нихъ-то и обратитъ въ наблюдаемомъ предметѣ свое преимущественное вниманiе: по ихъ различiю или сходству съ извѣстными ему общими признаками, онъ запечатлѣваетъ въ своемъ сознанiи цѣльное представленiе предмета наблюденiя. Затѣмъ, ему остается при помощи этого представленія и общихъ пріемовъ изслѣдованія и наблюденія обратиться къ частностямъ въ наблюдаемомъ предметѣ. Ребенокъ же или вообще начинающій обучаться какому-либо совершенно новому предмету, не составившій себѣ не только общихъ понятій, но не имѣющій и достаточнаго запаса представленій изъ области этого предмета, не можетъ сравнивать и различать, не имѣетъ точки отправленія въ изслѣдованіи и потому не въ состояніи привести въ свое сознаніе какой-либо новый фактъ или новое явленіе, такъ-какъ для него въ этой области все ново. Ребенокъ въ первые годы своего дѣтства живетъ преимущественно въ мірѣ конкретномъ—чувственномъ; ничто отвлеченное—общее ему не доступно. Всѣ свѣдѣнія, какъ необходимый матеріалъ для послѣдующаго обобщенія, пріобрѣтаются имъ при помощи внѣшнихъ чувствъ; для работы надъ отвлеченными предметами сознанія посредствомъ самаго сознанія у него недостаточно матеріала и нѣтъ выработанныхъ пріемовъ. Въ такомъ зачаточномъ состояніи находится умственное развитіе ребенка, въ такомъ же сравнительно состояніи находится и развитіе ученика по отношенію къ предмету, которому онъ только начинаетъ обучаться. Чтобы ребенокъ могъ получить *представленіе* о какомъ-либо новомъ для него предметѣ, нужно, чтобы этотъ предметъ при посредствѣ внѣшнихъ органовъ чувствъ произвелъ впечатлѣніе на нервы ребенка; и впечатлѣніе это должно быть многократное и достаточно сильное. Слѣдовательно, начало развитія познавательной способности ребенка лежитъ не въ сообщеніи ему общей отвлеченной мысли, а въ обстоятельномъ чувственномъ ознакомленіи его съ предметомъ изученія. Достаточное впечатлѣніе отъ предмета возбуждаетъ въ нервахъ *слѣды*, при посредствѣ которыхъ, по мѣрѣ накопленія ихъ, образуется *ощущеніе*, какъ-бы умственное органическое осязаніе предмета. Какимъ образомъ механическіе слѣды, образуемые внѣшнимъ предметомъ въ волокнахъ нервовъ, переходятъ въ нѣчто цѣльное, въ умственный очеркъ предмета, который сразу поступаетъ во владѣніе сознанія и существуетъ въ немъ и тогда, когда уже внѣшнее впечатлѣніе отъ предмета прекратилось, словомъ сказать, какъ образуется ощущеніе—это вопросъ въ психологіи нерѣшенный. Совершается ли это на основаніи предположенія Бенеке—вслѣдствіе насыщенія нервовъ впечатлѣніями и слѣдами отъ предмета, или на основаніи предположенія Фехнера—вслѣдствіе колебанія нервнаго эфира, достигающаго предѣльнаго напряженія, подобно тому, какъ звукъ производитъ ощущеніе въ нашемъ ухѣ только при достаточномъ числѣ колебаній струны, а слѣдовательно и достаточномъ колебаніи воздуха, и переходитъ въ неопредѣленный шумъ при числѣ колебаній, выходящемъ за предѣльное число, или на основаніи чего-либо другого—это открытый вопросъ въ психологіи. Для нашихъ цѣлей достаточно, что психологія вполнѣ подтверждаетъ тотъ фактъ, что ощущенія возможны только при посредствѣ слѣдовъ, образующихся вслѣдствіе воздѣйствія предмета на органы чувствъ; самый же переходъ есть внутренній душевный процессъ. Слѣды и ощущеніе находятся между собою въ такой связи, что душа какъ бы-идетъ на встрѣчу внѣшнему предмету, заявляющему о себѣ нервнымъ слѣдомъ. Ощущеніе отъ новаго предмета образуется въ сознаніи ребенка не такъ быстро, какъ въ сознаніи человѣка взрослаго, имѣющаго уже много даннаго матеріала. Значительное количество ощущеній, полученныхъ отъ одного и того же предмета, разсматриваемаго всесторонне, оставляетъ въ сознаніи слѣдъ отъ предмета; ассоціація такихъ слѣдовъ объективируется въ *представленіе* этого предмета, какъ-бы рельефное воплощеніе предмета въ сознаніи ребенка. Ассоціаціи представленій отъ предметовъ однородныхъ, связанныя въ сознаніи общими чертами сходства, составляютъ матеріалъ для образованія *понятій* и для всѣхъ актовъ разсудочнаго процесса. Здѣсь уже умъ развивающагося ребенка, отрѣшившись отъ внѣшнихъ предметовъ, чисто внутреннимъ процессомъ, работою надъ матеріаломъ, находящимся въ самомъ сознаніи, подбираетъ существенные признаки многихъ однородныхъ предметовъ, группируетъ ихъ въ цѣльный образъ одного общаго для всей группы предмета—составляетъ понятіе о предметѣ и закрѣпляетъ его въ своей памяти словомъ. Умъ развивающагося человѣка, занятый образованіемъ общаго понятія изъ отдѣльныхъ представленій, можно уподобить художнику, созидающему типъ изъ множества, иногда вовсе нетипичныхъ, единичныхъ предметовъ наблюденія. Возникающія въ душѣ ощущенія отъ воспринятыхъ изъ внѣшняго міра впечатлѣній удерживаются душою и составляютъ ея достояніе. Дѣйствіе внѣшняго предмета на органы чувствъ прекращается съ прекращеніемъ самаго впечатлѣнія, но душевные продукты, полученные отъ этого впечатлѣнія, остаются въ душѣ и могутъ быть по ея произволу воспроизводимы. При достаточномъ накопленіи такихъ продуктовъ и при способности души воспроизводить ихъ внутри себя, она комбинируетъ ихъ, сравниваетъ, различаетъ, группируетъ и вообще изъ этого матеріала, полученнаго въ необдѣланномъ видѣ, строитъ прекрасное зданіе человѣческаго мышленія. Но какъ построеніе всякаго зданія немыслимо безъ матеріала, такъ и душа не можетъ создать что-либо сама собою безъ названныхъ продуктовъ, полученныхъ отъ внѣшнихъ впечатлѣній. Присущая душѣ способность есть творчество изъ готоваго матеріала, а не созданіе самаго матеріала. Все сказанное о дѣятельности сознанія ребенка и ученика, приступающаго къ изученію новаго предмета, формулируется обыкновенно такъ: сначала воспринятіе, потомъ воспроизведеніе и, наконецъ, произведеніе. Всякое мышленіе, состоящее, въ логическихъ построеніяхъ, преобразованіи частныхъ представленій, и ихъ ассоціацій въ понятія, сужденія, умозаключенія, доказательства и цѣлыя научныя системы, состоитъ только въ отвлеченіи и комбинаціи, усложняющейся до безконечности, элементарныхъ конкретныхъ представленій, и это единственный путь умственной дѣятельности во всякой научной области, даже самой отвлеченной, какова чистая философія или математика.

Не вдаваясь въ широкую область спо рнаго вопроса о врожденныхъ способностяхъ человѣка, мы видимъ только, что ребенокъ не можетъ имѣть врожденныхъ представленій и понятій о предметахъ реальныхъ—ихъ нужно *образовать*, и отъ искусства образованія ихъ со стороны воспитателя и учителя зависитъ какъ ихъ правильность, такъ и прочность. Для образованія же общихъ понятій въ новой для маленькаго учащагося области, по указанному психическому процессу необходимо поставить на первомъ планѣ *наглядность*, такъ-сказать, *конкретность* изучаемаго, то-есть позаботиться прежде всего о правильности представленій, которыя составляютъ основной матеріалъ умственнаго развитія человѣка. Нужно исходить отъ предмета и доводить сознаніе ученика до мысли, а не исходить отъ мысли, не имѣющей въ сознаніи его точки прикрѣпленія. Какое впечатлѣніе могутъ произвести на сознаніе ученика сообщаемыя ему въ первый разъ готовыя понятія, каковы: число, сложеніе, дробь и т. п., если онъ не составилъ ихъ самъ изъ множества отдѣльныхъ представленій. О такомъ отвлеченномъ понятіи, какъ число, недостаточно сказать начинающему обучаться, что оно есть собраніе единицъ. Изъ такого пріема ознакомленія его съ новымъ понятіемъ у него или не явится даже и зародыша слѣда, безъ котораго невозможно образованіе представленія, а слѣдовательно и понятія, или явятся слѣды неясные, надъ которыми невозможна дальнѣйшая работа, состоящая въ сличеніи и различеніи слѣдовъ и ощущеній. Въ уходѣ за развитіемъ души ребенка нужно быть гораздо осторожнѣе, нежели въ уходѣ за его тѣломъ. Если пища для тѣла и различныя тѣлесныя упражненія подбираются какъ по количеству, такъ и по качеству, сообразно съ возрастаніемъ человѣка, тѣмъ болѣе нужно быть осторожнымъ въ выборѣ пищи и упражненій для ума. Разъ положенное дурно основаніе будетъ шатко поддерживать все на немъ укрѣпляющееся. Итакъ, *наглядность* есть необходимое начало всякаго правильнаго, развивающаго обученія.

Для того, чтобы совершился переходъ слѣдовъ въ ощущеніе, ощущеній въ представленіе и представленій въ понятіе, необходимо какъ достаточное напряженіе нервовъ, такъ и достаточно сильное впечатлѣніе отъ предмета изученія. Чтобы струна издала звукъ, необходимы извѣстная натянутость струны и достаточное число колебаній, производимыхъ смычкомъ или другимъ предметомъ. Необходимо, чтобы предметъ наблюденія явился передъ наблюдателемъ въ достаточно хорошихъ условіяхъ для наблюденія и чтобы душа наблюдающаго, какъ я сказалъ уже, пошла на встрѣчу впечатлѣніямъ, получаемымъ въ нервахъ отъ предмета. Итакъ, со стороны предмета необходимы условія, благопріятныя для его наблюденія, а со стороны души необходимъ внутренній актъ—*вниманіе*. Нельзя, напримѣръ, въ сознаніи ребенка образовать правильное понятіе о деревѣ вообще, показывая ему постоянно только деревья безъ листьевъ; понятіе при такомъ неблагопріятномъ условіи будетъ неполное. Далѣе,—ребенокъ, какъ и взрослый человѣкъ, видитъ и осязаетъ много внѣшнихъ, окружающихъ его или приходящихъ въ соприкосновеніе съ нимъ предметовъ; но для того, чтобы въ сознаніи его начало составляться представленіе предмета, необходимо, чтобы онъ самъ захотѣлъ того, чтобы онъ сосредоточилъ на предметѣ свое вниманіе. Наши органы чувствъ постоянно открыты для воспріятія впечатлѣній, но въ сознаніе наше переходятъ только тѣ впечатлѣнія, на которыя мы обратили достаточно вниманія; всѣ же другія проходятъ *безслѣдно*, производя моментальное и, при изобиліи впечатлѣній, разслабляющее движеніе въ нервахъ. Извѣстенъ на этотъ счетъ приводимый въ Антропологіи Ушинскаго *) прекрасный примѣръ, какъ мать во время пожара, выносящая изъ огня свое дитя, не чувствуетъ, вовсе не сознаетъ собственныхъ обжоговъ, потому что вниманіе ея отвлечено другимъ—мыслію о спасеніи дитяти. Казалось бы, здѣсь впечатлѣніе отъ предмета было достаточно сильное, но отсутствіе вниманія пересилило по крайней мѣрѣ на время и самое впечатлѣніе.

Итакъ, только при совокупности впечатлѣній отъ предмета и собственнаго вниманія учащагося можетъ въ его сознаніи образоваться ощущеніе. Что же можетъ скорѣе и естественнѣе обратить на себя вниманіе маленькаго ученика при обученіи Ариѳметикѣ—*отвлеченное число* и *правило*, или *конкретное число* и *задача*? Вниманіе учащагося въ раннемъ возрастѣ легче возбуждается предметомъ живымъ, дѣйствующимъ или способнымъ быть приведеннымъ въ дѣйствіе, нежели предметомъ мертвымъ, отвлеченнымъ. Слѣдовательно, практическое начало въ изученіи всякаго предмета при началѣ обученія нужно поставить на первомъ планѣ. Нужно учащагося ввести, такъ-сказать, сразу во внутреннюю область изучаемаго предмета и заставить его

---

*) Человѣкъ какъ предметъ воспитанія. Ушинскій, I часть.

дѣйствовать тамъ. Нужно начать съ конкретнаго числа и задачи, при обученіи Ариѳметикѣ, а не съ отвлеченнаго числа и правила.

Слѣдуетъ различать вниманіе *активное* и *пассивное*; первое—зависящее отъ самодѣятельности внимающаго субъекта, второе—невольное, отъ котораго трудно иногда отрѣшиться, даже употребляя нѣкоторую борьбу съ самимъ собою. Такъ, когда я мыслю самопроизвольно о какомъ-либо предметѣ моего изслѣдованія, во мнѣ преобладаетъ вниманіе активное, а когда въ то же время въ мысль мою врываются представленія другихъ предметовъ, и я, забывая о главномъ предметѣ моей мысли, останавливаюсь на умственномъ созерцаніи этихъ непрошенныхъ гостей, у меня является въ это время вниманіе пассивное. Такимъ образомъ, желая развлечь человѣка, пораженнаго какимъ-либо горемъ, стараются отвлечь его пассивное вниманіе отъ предмета горя. Если пассивное вниманіе способно иногда отвлекать человѣка взрослаго отъ предмета мысли, то тѣмъ болѣе это возможно у дитяти, у котораго представленія не такъ крѣпко и тѣсно связаны между собою, чтобы самые ряды представленія помогали волѣ направлять вниманіе активно. Умѣнье быть невнимательнымъ къ предметамъ постороннимъ Кантъ ставитъ выше умѣнья быть вообще внимательнымъ. Тѣмъ не менѣе и пассивное вниманіе дѣтей играетъ полезную роль при ихъ обученіи.

Задачею учителя и учебнаго предмета должно быть развитіе въ ученикѣ вниманія активнаго, сознательно обращаемаго на предметъ изученія; активное же вниманіе само собою будетъ переходить въ пассивное, когда ученикъ уже невольно обращается мыслію къ тому предмету, который интересовалъ его, который возбуждалъ въ немъ вниманіе активное и удовлетворялъ его. Вниманіе активное, то-есть направленіе познающаго духа на познаваемый предметъ, не можетъ быть возбуждено въ ученикѣ *принужденіемъ* или вообще какимъ-либо внѣшнимъ средствомъ; эти внѣшнія средства—посторонніе мотивы—только отвлекаютъ, а не возбуждаютъ вниманія. Оно зарождается вслѣдствіе возбужденія въ немъ чувства и сознанія *собственной силы*, вслѣдствіе зарожденія въ немъ *любознательности*. Само познаніе и процессъ его пріобрѣтенія должны служить для ученика побужденіемъ для постояннаго поддержанія въ себѣ активнаго вниманія. Слѣдовательно, прежде всего нужно возбудить въ ученикѣ внутренній интересъ къ предмету изученія, чтобы желаніе изученія исходило отъ самого ученика, обратилось бы, если возможно, въ потребность,—нужно возбудить въ немъ *самодѣятельность*. Правильное умственное развитіе возможно только активное; развитія нельзя получить, оставаясь въ умственномъ бездѣйствіи, а можно пріобрѣсти его только при дѣятельности самостоятельной. Возбужденіе же въ ученикѣ самодѣятельности возможно тогда, когда ему не навязываютъ готовыя понятія и умозаключенія, а онъ самъ изъ собственныхъ наблюденій частныхъ фактовъ составляетъ выводы и понятія. Нужно подводить ученика путемъ постепеннаго обобщенія къ понятію о необходимости ариѳметическаго правила въ данныхъ случаяхъ и къ выводу самаго правила. Словомъ сказать, необходимъ методъ обученія *эвристическій*, по которому ученикъ, идя по пути, указанному учителемъ, самостоятельно наблюдаетъ, комбинируетъ наблюдаемое и приходитъ къ открытію истины.

Пассивное вниманіе, какъ уже сказано, также помогаетъ при образованіи представленій; такъ, напримѣръ, ученикъ невольно обратитъ вниманіе на предметъ бѣлый на черномъ фонѣ или, обратно, скорѣе обратитъ вниманіе на предметъ, находящійся у него передъ глазами, нежели на предметъ отсутствующій;—для этой цѣли важны при изученіи предмета цѣлесообразно приспособленныя *наглядныя пособія*.

Вниманіе и слѣдовательно ясность ощущеній и представленій обусловливаются также приливами слѣдовъ однородныхъ, хотя также вниманіе утомляется и прекращается, если эти однородные слѣды прибываютъ въ одномъ неизмѣнномъ порядкѣ. Такимъ образомъ вниманіе ученика будетъ постоянно поддерживаться, если какой-либо математическій выводъ образуется въ умѣ его посредствомъ нѣсколькихъ практическихъ *задачъ*, въ которыхъ одно и то же входитъ въ различныхъ комбинаціяхъ и новыхъ обстановкахъ, нежели посредствомъ однообразныхъ отвлеченныхъ *примѣровъ*. Нужно, чтобы всякій новый слѣдъ связывался со старымъ, по своей однородности съ нимъ, и приносилъ бы съ собою нѣчто новое, возбуждающее эту связь. Итакъ, прохожденіе начальнаго курса Ариѳметики при помощи наглядныхъ пособій и практическихъ задачъ слѣдуетъ предпочесть прохожденію этого курса на отвлеченныхъ числахъ и примѣрахъ, которое не даетъ вначалѣ матеріала для образованія представленій и ихъ ассоціацій, а слѣдовательно и для образованія (а не усвоенія только) понятій, какъ матеріала для дальнѣйшихъ умственныхъ процессовъ.

При обученіи Ариѳметикѣ нужно отличить главнѣйшимъ образомъ слѣдующія *ассоціаціи представленій*: 1) Ассоціаціи, образующіяся *по противоположности*,—когда ученикъ образуетъ представленіе предмета, разсматривая параллельно съ нимъ предметъ съ признаками совершенно противоположными. Ушинскій приводитъ примѣръ, что, разсматривая одну картину мѣстности плодородной, мы не можемъ составить себѣ такого яснаго представленія разсматриваемой мѣстности, какъ если мы видимъ въ то же время картину и другой мѣстности —пустынной, безплодной. Ученикъ не можетъ составить яснаго представленія и понятія о сущности сложенія и вычитанія, если онъ изучаетъ каждое изъ этихъ дѣйствій отдѣльно, не комбинируя ихъ вмѣстѣ въ задачѣ, не наталкиваясь постоянно на рѣшеніе частныхъ вопросовъ, гдѣ рѣзко проявляется разница сущности одного и другого дѣйствія. На этомъ основаніи Генчель при работѣ съ числами перваго десятка *) четыре дѣйствія подвелъ подъ двѣ рубрики: а) сложеніе и вычитаніе и б) умноженіе и дѣленіе, и ведетъ ихъ изученіе, основываясь на противоположности дѣйствій, входящихъ въ одну рубрику. 2) Ассоціаціи *по сходству*—легко образуются, если въ новомъ представленіи есть нѣкоторыя черты, которыя были и въ прежнихъ, и въ то же время есть нѣсколько такихъ чертъ, которыхъ въ прежнихъ не было; тогда сходныя черты совпадаютъ, усиливая другъ друга, а новыя черты легко и незамѣтно связываются со старыми, какъ черты отличительныя. Представленіе о дѣйствіи и понятіе о правилѣ усвоиваются ученикомъ легко, если это дѣйствіе повторялось и правило прилагалось въ различныхъ случаяхъ при рѣшеніи задачъ. На этомъ способѣ образованія ассоціацій представленій основанъ методъ начальнаго обученія Ариѳметикѣ Грубе **), по которому одно и то же дѣйствіе, вытекая изъ сравненія и соотношенія между собою чиселъ, а также изъ рѣшенія практическихъ задачъ, повторяется множество разъ при изученіи чиселъ первой сотни, прежде нежели даже ученикъ доводится до обобщенія извѣстной комбинаціи чиселъ подъ рубрику отдѣльнаго дѣйствія. Повтореніе одного и того же подъ различными видами при различной постановкѣ вопросовъ, съ другихъ еще незатронутыхъ сторонъ, составляетъ важнѣйшее средство, ведущее, хотя медленно, но вѣрно къ развитію ученика и къ сознательному усвоенію имъ учебнаго матеріала. Только постоянно связывая какъ кольцо съ кольцомъ, представленія по сходству, можно образовать длинную, непрерывную и крѣпкую цѣпь ихъ, называемую въ психологіи ассоціаціей представленій, и только на цѣлыхъ пучкахъ такихъ цѣпей могутъ прочно висѣть понятія. 3) *Разсудочныя* ассоціаціи представленій—легко образуются, если ученикъ пріучается находить причину и слѣдствіе; тогда изслѣдованіе какого-либо явленія или изученіе факта будетъ или изслѣдованіемъ и изученіемъ причины порождающей извѣстное слѣдствіе, или изслѣдованіемъ и изученіемъ слѣдствія, происходящаго отъ какой-либо причины. При такомъ соотношеніи причины и слѣдствія связь, ихъ соединяющая, крѣпко залегаетъ въ сознаніи ученика. Такое же отношеніе къ изучаемому со стороны

*) Lehrbuch des Rechnenunterrichtes in Volksschulen. Leipzig. 1863.
**) Leitfaden für das Rechnen in der Elementarschule. Grube. Berlin. 1865.

ученика возможно только тогда, когда ему предоставлена значительная доля самодѣятельности при наблюденіи и выводѣ заключенія. На этомъ основаны всѣ новѣйшіе способы обученія дѣтей.

Обладая въ своемъ сознаніи достаточнымъ количествомъ однородныхъ представленій изъ области изучаемаго предмета, ученикъ уже внутреннимъ душевнымъ процессомъ, комбинируя и обобщая эти представленія, вырабатываетъ понятія о предметахъ вещественныхъ и отвлеченныхъ. Отъ повторенія внѣшнихъ воспріятій происходятъ опредѣленныя представленія, и только достаточный запасъ этихъ представленій даетъ матеріалъ для выработки понятія и выясненія его содержанія и объема. При недостаточности этого запаса и при спѣшности отвлеченія и комбинированія его внутреннею душевною дѣятельностію, вырабатываются понятія пустыя, неясныя, безсодержательныя и скоро забываемыя. Прежде въ умѣ развивающагося ребенка образуются понятія менѣе общія, каковы, напримѣръ, 20 орѣховъ, 20 человѣкъ, 20 арш., а потомъ уже и понятіе болѣе общее— 20 единицъ. Отъ понятій, каковы: *дубъ*, *береза*, *сосна*, ребенокъ переходитъ къ болѣе общему понятію—*дерево* и, наконецъ, къ еще болѣе общему—*растеніе*. Понятіе о *числѣ* вообще образуется, какъ и всякое другое отвлеченнное понятіе, путемъ обобщенія представленій частныхъ понятій, и притомъ обобщенія постепеннаго; только на основаніи дѣйствительнаго счета предметовъ и много разъ, ребенокъ можетъ дойти до сознанія, что число есть нѣчто присущее какимъ-либо предметамъ особеннаго рода, но что оно можетъ относиться ко всякимъ предметамъ и, наконецъ, можетъ существовать въ понятіи, независимо отъ предметовъ, въ абстрактномъ видѣ, можетъ имѣть свои свойства и подвергаться изслѣдованію и изученію. Но къ выработкѣ понятія о числѣ, какъ предметѣ изученія, нужно непремѣнно подвести ученика и быть можетъ путемъ гораздо болѣе медленнымъ, нежели къ выработкѣ какого-либо другого понятія изъ области реальныхъ знаній. Сообщить ученику готовое понятіе „*число*“ съ небольшими поясненіями, которыя обыкновенно даются въ курсахъ Ариѳметики, это значитъ не только ничего не сообщить полезнаго для ума, но даже загромоздить его матеріаломъ, путающимъ умственную дѣятельность. Слово безъ яснаго представленія предмета, къ которому оно относится, производитъ только представленіе самаго слова, а не понятія. Понятіе, напримѣръ, о цвѣткѣ ребенокъ можетъ составить и самъ, обобщая представленія всѣхъ видѣнныхъ имъ цвѣтковъ, но понятіе о числѣ врядъ ли онъ можетъ самъ составить. Итакъ, для выработки понятія о *числѣ отвлеченномъ и дѣйствіяхъ* съ нимъ, безъ чего невозможно сознательное прохожденіе никакого курса Ариѳметики, необходимо прежде ознакомить ученика съ числомъ *конкретнымъ* н *наглядныхъ пособіяхъ* и на дѣйствительномъ счетѣ предметовъ, хот отсутствующихъ, но хорошо извѣстныхъ ученику. Все умственное до стояніе, которымъ владѣетъ начинающій обучаться, пріобрѣтается какъ уже было сказано, при посредствѣ внѣшнихъ чувствъ. Ничт отвлеченное не можетъ сразу найти въ сознаніи ученика готовыхъ ас соціацій представленій, къ которымъ могло бы прикрѣпиться, а по тому и не можетъ надолго удержаться въ сознаніи. Отвлеченіе і обобщеніе—это уже внутренняя работа сознанія развивающагося ума Всѣ понятія, пріобрѣтенныя ученикомъ, тогда только укореняются со знательно въ его памяти и даютъ матеріалъ для мышленія, когда он пріобрѣтены *наглядно* въ связи съ конкретными представленіями і когда они находятъ въ сознаніи ученика другія, легко и естественн связующія съ ними, понятія. Кромѣ того, малое развитіе самодѣя тельности ума въ раннемъ возрастѣ ученика дозволяетъ ему воспри нимать впечатлѣнія и вырабатывать понятія только въ небольшом объемѣ, а потому всякій новый предметъ мысли долженъ быть сооб щаемъ ученику такъ, чтобы онъ могъ охватить его въ своемъ со знаніи вдругъ или по раздѣльнымъ частямъ разъяснялъ его до пол наго усвоенія. Ученикъ, разъ пріучившійся воспринимать слова і мысли, не относя ихъ къ чему-либо конкретному и легко представ ляемому, впослѣдствіи съ большимъ трудомъ привыкаетъ сосредото чивать вниманіе на мысли и легко и поверхностно, безъ внутренняг интереса, относится къ разсматриваемымъ предметамъ.

Выработанныя ученикомъ понятія даютъ пищу послѣдующей вну тренней сознательной дѣятельности его—они даютъ пищу *сужденіямъ*, а сужденія ведутъ къ *умозаключеніямъ*, общимъ выводамъ—зако намъ, къ построенію научныхъ системъ, то-есть тутъ уже начинается область разсудочнаго процесса. Въ эту область другой науки—ло гики, по ея обширности и достаточно полной разработкѣ, я вдаваться не считаю необходимымъ, находя болѣе важнымъ коснуться здѣсь из слѣдованія самыхъ элементарныхъ актовъ душевной дѣятельности раз вивающагося субъекта.

Итакъ, начать съ умозаключенія, а не съ представленія и по нятія, было бы ошибочно со стороны учителя и непроизводительн для ученика; естественнѣе начинать съ *частнаго*, конкретнаго и вос ходить до *общаго*, отвлеченнаго,—собрать прежде матеріалъ для от влеченной мысли, а потомъ уже мыслить надъ этимъ матеріаломъ. Нужно начинать съ *отдѣльнаго числа* и *задачи* и восходить д *числа вообще и правила*.

Образованіе понятій и пріобрѣтеніе свѣдѣній можетъ быть *бы-*

строе и медленное. Количество умственнаго усилія, необходимаго для выработки и усвоенія новаго понятія, одно и то же, совершается ли этотъ процессъ быстро или медленно; но вліяніе этихъ усилій на умственный организмъ—неодинаково. Понятіе, быстро усвоенное, не успѣваетъ связаться крѣпко съ соотвѣтствующими ассоціаціями сходственныхъ понятій и потому легко разлагается на свои составныя части и уничтожается. Да и къ чему спѣшить въ обученіи дѣтей, всегда имѣющемъ цѣну не въ количествѣ, а въ качествѣ? *Non multa sed multum, nicht vielerlei, sondern viel*—вотъ лозунгъ всѣхъ истинныхъ педагоговъ, дѣйствительно посвятившихъ себя великому дѣлу формированія интеллектуальнаго человѣка изъ безсознательнаго дитяти.

Недостаточно обставить предметъ обученія такъ, чтобы облегчить ученику образованіе представленій и выработку понятій изъ его области, но необходимо, чтобы эти представленія и понятія сдѣлались собственностью сознанія ученика, составили матеріалъ, которымъ ученикъ могъ бы пользоваться для выводовъ,—необходимо обратить вниманіе на развитіе *памяти* ученика. Многіе учителя, слѣдующіе новымъ методамъ и пріемамъ обученія, но не изучившіе ихъ основательно, увлекаются въ сторону, быть можетъ, болѣе опасную, нежели учителя стараго направленія, начинающіе прямо съ опредѣленія науки и ея задачи. Все обученіе они направляютъ только къ умственному *развитію* ученика, пренебрегая развитіемъ весьма важной способности сознанія—памяти. На чемъ же можетъ совершаться правильное умственное развитіе? Развѣ на познаніи отдѣльныхъ фактовъ и явленій? Человѣкъ живетъ памятью и можетъ мыслить и развиваться только на основаніи того матеріала, который даетъ ему память; безъ этого матеріала никакое мышленіе, а слѣдовательно и умственное развитіе, невозможны. Цѣль обученія можетъ быть двоякая: *матеріальная* и *формальная*, смотря по тому, желаютъ ли сообщить ученику извѣстный учебный матеріалъ, дать ему, сообразно съ его силами извѣстную сумму практическихъ знаній, или имѣютъ въ виду помощію самаго процесса обученія развить всѣ его душевныя способности. Въ первомъ случаѣ обученіе будетъ преимущественно основываться на развитіи силы памяти, во второмъ—на одновременномъ и согласномъ развитіи всѣхъ способностей. Обѣ цѣли эти такъ тѣсно связаны между собою, что не могутъ исключать другъ друга, и преслѣдованіе одной изъ нихъ непремѣнно влечетъ за собою, хотя въ нѣкоторой степени, достиженіе и другой. Отъ учителя и содержанія учебнаго предмета зависитъ дать преобладаніе той или другой цѣли—способомъ преподаванія и учебнымъ матеріаломъ. Изъ самаго поня тія о задачѣ общеобразовательнаго курса ясно, что преслѣдованію формальной цѣли должно быть отдано преимущество предъ матеріальною, особенно при начальномъ обученіи дѣтей. Только при самодѣятельности развитого мышленія ученикъ можетъ впослѣдствіи укоренять въ памяти сообщаемыя ему свѣдѣнія и извлекать изъ нихъ или матеріалъ для новыхъ умственныхъ построеній, или прилагать ихъ къ практикѣ въ данномъ случаѣ. Въ этомъ отношеніи учителя, преслѣдующіе формальную цѣль обученія, правы; но правильное развитіе душевныхъ способностей возможно тогда, когда обученіе ведется въ стройной системѣ и когда система эта всѣми своими частями укрѣплена въ сознаніи учащагося и сдѣлалась достояніемъ памяти; каждый разъ повторять процессъ выработки забытаго положенія или вывода невозможно; нужно имѣть въ запасѣ достаточное количество понятій и умозаключеній, какъ сырой матеріалъ для мышленія.

Математика даетъ богатый матеріалъ для развитія памяти по разсудочнымъ ассоціаціямъ. Самый процессъ мышленія, сдѣлавшись достояніемъ памяти, служитъ уже средствомъ для дальнѣйшаго развитія сознанія въ болѣе и болѣе расширяющейся области мысли.

При этомъ нужно замѣтить, что періодъ жизни дѣтей, въ который начинается ихъ обученіе, есть именно тотъ, когда память находится въ наибольшей свѣжести;—этимъ и объясняется легкость усвоенія, дѣтьми, напримѣръ, иностранныхъ языковъ; память дитяти еще не загромождена множествомъ матеріала и потому легко отворяетъ дверь всему стучащемуся въ нее.

Чтобы дать правильное развитіе памяти, нужно все обученіе вести въ строго обдуманной системѣ; каждый отдѣлъ учебнаго предмета, каждый урокъ должны проходиться въ строгой послѣдовательности и связности, направляясь къ одной опредѣленной цѣли и притомъ въ такомъ объемѣ и содержаніи, чтобы сообщаемое ученику было вполнѣ доступно его возрасту. Душа дитяти, по выраженію Аристотеля, представляетъ „чистую таблицу“ (tabula rasa); отъ учителя и воспитателя зависитъ написать на этой таблицѣ все необходимое для памяти дитяти. Этимъ я не хочу вовсе сказать, что память должна развиваться посредствомъ какихъ-либо особенныхъ упражненій, исключительно предназначенныхъ для этой цѣли. Всѣ отдѣльныя душевныя способности обладаютъ отъ природы свойствомъ удерживать полученныя изъ внѣшняго міра впечатлѣнія; это же свойство остается за ними и по отношенію къ результатамъ собственной внутренней работы. Значитъ, все дѣло состоитъ въ пріемахъ и постепенности выработки этихъ результатовъ, затѣмъ они сами собою сдѣлаются достояніемъ памяти безъ всякой технической мнемоники.

Если учебный матеріалъ накопляется въ памяти ученика сознательно, въ строгой послѣдовательности, вслѣдствіе внутренней переработки его самимъ ученикомъ, когда ученикъ, такъ сказать, самъ знаетъ, куда помѣстить вновь пріобрѣтаемое и съ чѣмъ, уже имѣющимся въ запасѣ, связать, тогда у него развивается память *активная*. Если же накопленіе учебнаго матеріала совершается преимущественно на основаніи того, что онъ часто представляется наблюденію ученика, хотя бы и безсознательному, когда ученикъ просто запоминаетъ, заучиваетъ готовое, тогда у него развивается память *пассивная*. Такою памятью иногда въ значительной степени обладаютъ и животныя; такъ опытная извозчичья лошадь, предоставленная сама себѣ, безошибочно, на основаніи пассивнаго запоминанія мѣстности, приходитъ изъ одного конца города въ другой ко двору, гдѣ стоитъ.

Развитіе въ ученикѣ памяти активной влечетъ за собою и развитіе въ немъ навыка къ пассивному запоминанію фактовъ и выводовъ. Если на основаніи развитія активной памяти учебный матеріалъ расположенъ въ сознаніи ученика въ опредѣленной систематической стройности, по собственной волѣ ученика, то ученикъ легко можетъ пассивно запоминать многое, только по однородности его съ тѣмъ, что уже находится въ сознаніи въ обработанномъ видѣ, и подвергать это новое пріобрѣтеніе внутреннему анализу. Такая помощь усвоенію въ памяти учебнаго матеріала весьма важна при обученіи, даже и вообще при всякой дѣятельной умственной работѣ человѣка, такъ какъ не всегда возможно сразу вполнѣ сознанное усвоеніе предмета мысли: нужно запомнить иногда много матеріала для того чтобы дѣлать изъ него выводы. Напримѣръ, чтобы при изученіи географіи или исторіи сдѣлать выводы относительно характера мѣстности или народа, нужно усвоить пассивно много фактовъ, безъ которыхъ никакой выводъ невозможенъ. Наоборотъ—преимущественное развитіе памяти пассивной не влечетъ за собою развитія активной, а напротивъ притупляетъ ее. Ученикъ, обладая, какъ уже сказано, въ раннемъ возрастѣ сильною способностью памяти, безъ особеннаго труда запоминаетъ, заучиваетъ многое несознанное и ему непонятное; но разъ получивши навыкъ къ такому исключительному процессу пріобрѣтенія свѣдѣній, онъ не легко переходитъ къ другому акту душевной дѣятельности—невольному запоминанію только того, что вполнѣ имъ сознано и вяжется со всѣмъ имѣющимся уже въ сознаніи; наконецъ, теряетъ и самое стремленіе къ сознательной умственной работѣ, находя болѣе легкимъ для себя быстрое усвоеніе предмета одною памятью.

Чѣмъ же можетъ руководствоваться учитель, чтобы постоянно быть увѣреннымъ въ томъ, что ученикъ его запоминаетъ проходимый учебный курсъ активно? Средство для того — такой способъ начальнаго обученія, при которомъ ученикъ, на основаніи только указанія учителя, самъ добываетъ свѣдѣнія, доискивается истины и изъ достаточнаго количества данныхъ выводитъ заключеніе. При такомъ способѣ учитель во всякій моментъ можетъ судить, понято ли его ученикомъ то, что должно перейти въ область его памяти, какъ матеріалы для построенія цѣлаго зданія умственнаго развитія ученика. А ученикъ легко удерживаетъ въ памяти какъ самое заключеніе — выводъ, такъ и процессъ его выработки, потому что то и другое шло въ системѣ, построенной имъ самимъ. Такой способъ обученія есть способъ *катихитическій*, наиболѣе примѣнимый при обученіи дѣтей ариѳметикѣ.

Но масса матеріала, удерживаемаго памятью ученика, легко можетъ перепутываться и мало-по-малу исчезать изъ памяти. Необходимы возможно частый пересмотръ и обновленіе этого матеріала, — необходимо частое повтореніе пройденнаго. Лучше, если повтореніе это производится не въ томъ же порядкѣ, какъ совершалось самое пріобрѣтеніе научнаго матеріала, а въ разнообразныхъ видахъ. Такимъ образомъ, будетъ производительнѣе, если повтореніе пройденнаго изъ ариѳметики совершается на рѣшеніи систематически подобранныхъ задачъ и вычисленіи примѣровъ, нежели на простомъ перечитываніи ариѳметическихъ правилъ. Правило крѣпко запоминается, если оно, во-первыхъ, составляетъ результатъ самостоятельнаго наблюденія и мышленія ученика, и во-вторыхъ, находитъ себѣ частое приложеніе въ разнообразныхъ случаяхъ. При такомъ процессѣ укрѣпленія сознанія достигается прочность усвоенія въ памяти предмета уже знакомаго, и незамѣтно и естественно къ старымъ понятіямъ прибавляется одно или нѣсколько новыхъ, легко связующихся съ прежними—будутъ ли они пріобрѣтены извнѣ отъ предметовъ, или выработаны внутреннимъ процессомъ сознанія, какъ комбинаціи повторяемыхъ понятій на новыхъ, болѣе прочныхъ основаніяхъ. Вотъ почему важно расположеніе учебнаго матеріала въ постепенно расширяющихся концентрическихъ кругахъ. Такое расположеніе не только облегчаетъ знакомство ученика съ учебнымъ предметомъ, но и укрѣпляетъ въ его памяти прежде пріобрѣтенное посредствомъ повторенія и частаго приложенія въ расширяющемся объемѣ.

Сдѣлать достаточное количество учебнаго матеріала достояніемъ памяти ученика не значитъ еще все сдѣлать для дальнѣйшей, чисто отвлеченной умственной его дѣятельности. Матеріалъ этотъ будетъ производителенъ, когда ученикъ можетъ пользоваться имъ въ случаѣ необходимости во всякій данный моментъ. Слѣдовательно, необходимо развить въ ученикѣ способность вызывать изъ памяти по своему произволу требуемыя для дальнѣйшихъ выводовъ представленія, понятія и умозаключенія — необходимо развить въ немъ способность *припоминанія.*

Развитіе этой способности идетъ параллельно съ развитіемъ самой памяти и обусловливается тѣмъ, въ какомъ направленіи развивалась память. Припоминаніе можетъ быть *сознательное* и *механическое.* Оно будетъ механическое, если ученикъ напряженно ищетъ въ своей памяти сразу готовый матеріалъ въ массѣ другого матеріала. Такъ онъ припоминаетъ механически какое-либо ариѳметическое правило, въ его законченной формѣ, безъ связи его со всѣмъ другимъ, находящимся въ памяти. Припоминаніе будетъ сознательное, если, подыскивая что-либо въ своей памяти, ученикъ сначала выдѣляетъ ту область, къ которой припоминаемое относится, и тѣ обстоятельства, при которыхъ оно сдѣлалось достояніемъ памяти. Ариѳметическое правило легко припоминается, если вмѣстѣ съ нимъ поднимается въ памяти ученика рядъ мыслей, выражающихъ процессъ вывода этого правила и смыслъ того дѣйствія, къ которому правило относится. Если, напримѣръ, правило дѣленія дроби на дробь припоминается въ зависимости отъ внѣшняго признака перемноженія членовъ дробей накрестъ,—припоминаніе будетъ механическое; если же припоминаніе этого правила начинается съ воспоминанія сущности самаго дѣйствія дѣленія дроби на дробь, то само правило, если и забыто, легко можетъ быть возстановлено воспроизведеніемъ въ памяти того же процесса разсужденій, посредствомъ котораго правило было выведено; а разъ только ученикъ такимъ путемъ возстановилъ забытое, можно быть увѣреннымъ, что онъ уже въ другой разъ его не забудетъ. Такъ мы легко вспоминаемъ забытую нами фамилію человѣка, если бываемъ въ состояніи вспомнить въ опредѣленномъ порядкѣ тѣ обстоятельства, при которыхъ эта фамилія стала намъ извѣстна. Припоминаніе будетъ сознательное, если ученикъ распоряжается тѣмъ матеріаломъ памяти, который самъ накопилъ въ извѣстной ему системѣ, а не тѣмъ, который вложенъ туда насильно учебникомъ. Припоминаніе будетъ механическое, если ученикъ, вспоминая что-либо выученнное изъ учебника, старается припомнить положеніе въ книгѣ страницы, на которой выученное находится, а также—обыкновеннымъ шрифтомъ или курсивомъ оно напечатано и, передавая выученное, какъ бы слѣдитъ мыслію по строкамъ страницы.

Развитіе способности сознательнаго припоминанія ведетъ опять-таки незамѣтно къ развитію и механическаго, необходимаго также для быстроты умственной дѣятельности,—но не наоборотъ. Какимъ же

2*

способомъ можно развивать сознательное припоминаніе? Во-первыхъ, правильнымъ развитіемъ самой активной памяти, во-вторыхъ, постояннымъ пріученіемъ ученика отыскивать въ своей памяти, по какой-либо системѣ, а не бросаясь отъ одного къ другому и не перескакивая черезъ связь, скрѣпляющую одно съ другимъ. Если ученикъ что-либо забылъ, то не важно то, что ему подскажутъ забытое, а важно навести его на путь сознательнаго припоминанія, указавъ ему на необходимость вспомнить связь припоминаемаго со всѣмъ ему предшествовавшимъ въ памяти и по кольцамъ этой связи, отъ хорошо выбранной исходной точки, доходить до искомаго кольца.

II.

Значеніе Ариѳметики какъ учебнаго предмета. Доступность Ариѳметики пониманію дѣтей. Математическія истины. Значеніе и пріемъ обобщеній при обученіи Ариѳметикѣ. Механизмъ математическій. Элементарный (приготовительный) и систематическій курсъ Ариѳметики. Пріемы вывода и доказательства математическихъ истинъ. Вообще объ обученіи дѣтей.

Ребенокъ, вступающій въ школу, несетъ съ собою много наблюденій и большое знакомство съ природой; казалось бы, что приведеніе результатовъ этихъ наблюденій въ порядокъ и выработка логическихъ пріемовъ при наблюденіи и построеніи системы можетъ составить наилучшее начало школьнаго обученія; ребенокъ, вступающій въ учебное заведеніе, имѣетъ большой запасъ словъ, а слѣдовательно и понятій, а потому выясненіе этихъ понятій и пріобрѣтеніе новыхъ на разборѣ содержанія мысли, и группировка этихъ понятій въ извѣстной грамматической системѣ, могли бы составить богатый матеріалъ для дальнѣйшаго развитія ученика. Но, не оспаривая того и другого и даже отдавая полную справедливость громадному значенію означенныхъ предметовъ при началѣ обученія, слѣдуетъ однако сказать, что запасъ свѣдѣній, который имѣетъ ребенокъ изъ области этихъ предметовъ, пріобрѣтенный имъ случайно, такъ громаденъ и неосмысленъ, что приведеніе его въ учебную систему и уясненіе составляетъ весьма трудную задачу. Всякая система имѣетъ въ основаніи логику, а чтобы сообщить ученику начало этой логики, необходимо съ перваго раза заставлять его дѣйствовать и мыслить въ совершенно опредѣленной и замкнутой сферѣ понятій, какова область начальнаго курса ариѳметики; необходимо, чтобы при всякомъ своемъ заблужденіи въ мысли ученикъ, совершенно точно, самъ, анализомъ результата мысли, отыскивалъ въ цѣломъ рядѣ своего разсужденія ту неправильность, которая послужила началомъ ошибки. Только при такой подготовкѣ можно безопасно предоставить мысли ученика дѣйствовать и въ области другихъ предметовъ. Слѣдовательно, участіе ариѳметики при самомъ началѣ обученія дѣтей можетъ оказать большую помощь всему обученію.

Изъ всѣхъ предметовъ общеобразовательнаго курса математика меньше всѣхъ другихъ подвергалась спору или сомнѣнію относительно плодотворности ея вліянія на умственное развитіе учащихся. Даже такія сильныя орудія общаго образованія, какъ родной и иностранные языки, подвергались сомнѣнію въ пользѣ введенія ихъ въ систему предметовъ общаго образованія, и до настоящаго времени остается не вполнѣ рѣшеннымъ вопросъ—какіе изъ языковъ и сколько ихъ именно слѣдуетъ ввести въ эту систему. Затѣмъ, нѣтъ ни одного учебнаго предмета—твердо стоящаго въ этой системѣ. Математика, по существу своему, предметъ, дѣйствующій исключительно на умъ; всѣ представленія изъ ея области суть представленія умственныя. Она изучаетъ только *численное* и *пространственное* отношеніе предметовъ, помимо всѣхъ другихъ качествъ и свойствъ ихъ. Такое упрощенное отношеніе къ предметамъ дѣлаетъ изученіе математики вполнѣ доступнымъ всякому правильно развивающемуся уму и способствуетъ легкому отвлеченію изъ области наглядности въ область абсолютнаго мышленія, чего трудно достигать на какомъ-либо другомъ учебномъ предметѣ, обнимающемъ сразу много въ разсматриваемомъ явленіи и вліяющемъ сразу на многія способности человѣка. Умственные предметы, при хорошей подготовкѣ ученика, постигаются и понимаются имъ точнѣе и лучше, нежели предметы вещественные. При опредѣленіи ихъ легко выставить самые существенные признаки, отличающіе ихъ отъ всѣхъ другихъ предметовъ. Легко представить себѣ и опредѣлить въ точныхъ словахъ, что такое *треугольникъ*, *первоначальное число*, *общій дѣлитель* и т. п., но не такъ легко опредѣлить, что такое *столъ*, а еще труднѣе—что такое *лошадь* и т. п. Въ этомъ и заключается, хотя односторонняя, но великая развивающая сила математики. Точная, по существу матеріала, она представляетъ рядъ непогрѣшимыхъ истинъ безъ всякаго исключенія, свойственнаго всѣмъ другимъ неточнымъ наукамъ, и притомъ истинъ такъ послѣдовательно, тѣсно, неразрывно и логично связанныхъ въ одну непрерывную цѣпь, что правильно развивающемуся уму возможно самостоятельно переходить отъ одного кольца этой цѣпи къ другому. Пойдетъ ли умъ отъ изслѣдованія немногихъ частныхъ фактовъ, онъ придетъ къ вѣрному и неопровержимому общему выводу, который можетъ быть подтвержденъ абсолютно въ независимости отъ этихъ частныхъ фактовъ. Начнетъ ли прямо съ знакомства съ выводомъ, онъ нигдѣ не встрѣтитъ какого-либо колебанія этого вывода въ приложеніи его къ частнымъ фактамъ. Математика, какъ учебный предметъ, имѣетъ еще и то важное значеніе, что даетъ съ первыхъ же дней обученія возможность упражнять учениковъ въ рѣшеніи задачъ, чего не можетъ дать никакой другой учебный предметъ. Ходъ же соображенія при рѣшеніи задачи математической до того простъ и логиченъ, что онъ совершенно одинаковъ какъ у маленькаго ученика, такъ и у великаго ученаго.

Задача учителя математики—дать возможно большую силу ея плодотворному вліянію въ обученіи, сдѣлать доступными и понятными учащемуся ея истины, а потому количество и сущность ихъ соразмѣрять со степенью развитія учащагося. Необходимо наблюсти, чтобы это развитіе совершалось правильно и послѣдовательно, чтобы умственный кругозоръ учащагося расширялся въ области математики понемногу, но постоянно, и чтобы онъ не заслонялся непроницаемыми туманными пятнами—непонятными мыслями. Ложное убѣжденіе многихъ въ томъ, что математика доступна только немногимъ избраннымъ, что для этого необходимъ особенный складъ ума,—произошло отъ неправильной постановки преподаванія этого въ высшей степени легкаго и производительнаго учебнаго предмета. Кто складываетъ умъ ученика, какъ не учитель? Вольно же ему громоздить въ этомъ умѣ учебный матеріалъ вмѣсто того, чтобы дѣйствительно правильно складывать.

Можно сказать, что ни одинъ изъ учебныхъ предметовъ, какъ въ низшихъ, такъ и въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ, не можетъ быть поставленъ, по выработкѣ метода преподаванія, въ такое выгодное положеніе, какъ Ариѳметика. Съ тѣхъ поръ, какъ изученіе числа, его свойствъ и отношеній къ другимъ числамъ не замѣнило при началѣ курса изученіе отвлеченныхъ правилъ, Ариѳметика перестала быть чѣмъ-то пугающимъ учениковъ, чѣмъ-то доступнымъ для немногихъ избранныхъ или, какъ выражаются, способныхъ къ математикѣ. Мысль о возможности отсутствія способности къ изученію и пониманію элементарнаго курса математики, при существованіи этой способности для другихъ, гораздо болѣе сложныхъ и трудныхъ по содержанію учебныхъ предметовъ, есть мысль ложная. Способность къ изученію какого-либо учебнаго предмета, требующаго умственнаго напряженія, предполагаетъ въ ученикѣ другую способность—къ развитію логической послѣдовательности въ мысляхъ, а математика есть естественная логика. Диттесъ въ своей Практической Педагогикѣ говоритъ: „Ни по какому предмету не встрѣчается такъ много слабыхъ учениковъ, какъ по математикѣ. Этотъ всѣмъ извѣстный фактъ преподаватели объясняютъ нерѣдко тѣмъ предположеніемъ, что большая часть молодыхъ людей не имѣютъ способности къ математикѣ. Разумѣется, способности этой и не можетъ быть, если ученикъ предварительно не пріобрѣлъ наглядныхъ представленій о числовыхъ и пространственныхъ отношеніяхъ. Нельзя же утверждать, что обыкновенныя человѣческія способности въ среднемъ выводѣ менѣе благопріятны математическому образованію, чѣмъ филологическому, историческому, естественнонаучному и т. д. Такое утвержденіе было бы лишено всякаго психологическаго основанія. Да и самый опытъ показываетъ, что вездѣ, гдѣ математика предается по разумному способу, то-есть соотвѣтствующему степени развитія учениковъ, преподаваніе этого предмета даетъ такіе же хорошіе результаты, какъ и преподаваніе другихъ предметовъ". Раціональный способъ преподаванія выдвигаетъ этотъ учебный предметъ изъ ряда другихъ, такъ что онъ становится интереснымъ для учениковъ, какъ по своему матеріалу, такъ и по процессу выработки общихъ выводовъ изъ частныхъ случаевъ. Умъ ученика довѣрчиво вдается въ область этихъ выводовъ, привыкши къ ихъ непогрѣшимости. Кромѣ того, возможность тотчасъ обнаружить ложность вывода, при ложности сужденія, заставляетъ ученика быть осторожнымъ въ пользованіи даннымъ матеріаломъ при составленіи вывода. Ученикъ самъ легко можетъ судить о томъ, что онъ постоянно подвигается въ своемъ развитіи впередъ и дѣлаетъ успѣхи. Но такое вліяніе математики на учениковъ возможно только при обдуманномъ усвоеніи учителемъ метода ея преподаванія, такъ какъ вліяніе это сообщается ученикамъ учителемъ, а не учебнымъ предметомъ, и такъ какъ вначалѣ ученикамъ труднѣе приступить къ изученію математики, чѣмъ къ какому-либо другому предмету.

Математическія аксіомы можно считать какъ бы врожденными человѣку; сознаніе наше въ здоровомъ состояніи не можетъ представить намъ части большей цѣлаго, или двухъ прямыхъ, пересѣкающихся въ двухъ точкахъ — оттого и доказательство аксіомъ немыслимо. Самому неразвитому ребенку не нужно объяснять, что двѣ величины, равныя порознь третьей, равны между собой, что если къ равнымъ величинамъ придать поровну, то и въ суммахъ получатся равныя величины, что прямая есть кратчайшее разстояніе между двумя точками и т. п. Если ребенокъ не понимаетъ аксіомы, то это означаетъ только одно, что онъ не понимаетъ особеннаго сжатаго языка, которымъ она выражена. Всѣ же остальныя математическія истины-теоремы приводятся къ очевиднымъ истинамъ-аксіомамъ и на основаніи ихъ доказываются. Исходя отъ очевидныхъ, не подверженныхъ сомнѣнію истинъ-аксіомъ, учащійся путемъ естественнаго и правильнаго мышленія доходитъ до самыхъ сложныхъ умозрѣній и выводовъ.

Особенно важную роль въ педагогическомъ отношеніи играютъ пріемы для вывода математическихъ истинъ. Строгій логическій процессъ, при помощи котораго создается величественное зданіе математики, служитъ самымъ лучшимъ средствомъ для воспитанія логической, разсудочной стороны мышленія. Араго называетъ математику логикой въ дѣйствіи. Въ самомъ дѣлѣ, нигдѣ послѣдовательность не доходитъ до такой строгости, нигдѣ софизмъ и невѣрность силлогизма не обнаруживаются съ такою очевидностью. Въ этомъ отношеніи математика имѣетъ громадное преимущество предъ другими науками. Въ нравственныхъ наукахъ строгость логическаго процесса значительно нарушается другими силами нашего духа. Понятія, входящія въ ихъ силлогизмы, чрезвычайно сложны и заключаютъ много субъективнаго. Человѣкъ, совершающій логическій процессъ на матеріалѣ нравственныхъ наукъ, вслѣдствіе своей индивидуальности, невольно вноситъ въ этотъ процессъ свое личное пониманіе. Отдѣлить въ нравственныхъ понятіяхъ субъективный элементъ не только невозможно, но часто и не должно; ибо только при такихъ условіяхъ они будутъ сохранать свой настоящій характеръ. Вотъ почему матеріалъ этихъ наукъ болѣе удобенъ для воспитанія художественной, убѣждающей, но не строгой, послѣдовательной, доказательной мысли. Убѣждать, еще не значитъ доказывать. Только матеріалъ математическихъ наукъ, по своей очевидности и простотѣ, способенъ во всей чистотѣ обнаруживать всѣ особенности строгой и послѣдовательной мысли. Особенное значеніе въ начальномъ преподаваніи имѣетъ та постепенность, съ которою передается научное содержаніе математики. Эта постепенность проявляется и въ послѣдовательномъ переходѣ мысли отъ простыхъ къ болѣе сложнымъ истинамъ и въ постепенномъ обобщеніи самыхъ идей. Эта постепенность даетъ разсудку возможность все болѣе и болѣе осваиваться съ пріемами точнаго мышленія, не ослабляя его требованіями, несоразмѣрными съ возрастомъ. Каждая истина въ математикѣ опирается на предшествующихъ и сама становится логическимъ основаніемъ для послѣдующихъ. Постоянная необходимость при каждомъ дальнѣйшемъ движеніи имѣть въ виду всѣ предшедствующія истины и понятія пріучаетъ разсудокъ ко вниманію, сосредоточенности, къ гибкости и способности сопоставлять идеи и истины. Для того, чтобы воспитывающая сила преподаванія математики обнаруживала свое полное дѣйствіе, необходимо постоянно имѣть въ виду теорію, механизмъ вычисленія и приложенія теоріи къ рѣшенію практическихъ задачъ. Только совмѣстное существованіе этихъ трехъ важныхъ моментовъ преподаванія можетъ имѣть дѣйствительное развивающее значеніе. Недостатокъ какой-нибудь стороны отразится какимъ-нибудь пробѣломъ въ общемъ ходѣ математическаго образованія. Теорія дѣйствуетъ развивающимъ образомъ на мысль, заставляя передумать въ систематической формѣ то самое, что человѣчество открыло послѣ длиннаго ряда усилій. Механизмъ вычисленія есть тотъ языкъ, при помощи котораго математика излагаетъ свои идеи, задаетъ и рѣшаетъ свои вопросы. Наконецъ, приложеніе теоретическихъ началъ и выработаннаго механизма къ рѣшенію практическихъ задачъ составляетъ третій, самый важный моментъ педагогическаго вліянія математики на развитіе умственныхъ способностей. Воспитывающая сила математическихъ упражненій при рѣшеніи различныхъ задачъ обнаруживается въ развитіи самостоятельности.

Развивающія средства при обученіи всякому предмету суть *обобщеніе*, анализъ и тѣ пріемы, по которымъ они совершаются. Такъ, при изученіи Географіи ученикъ можетъ растерять изъ своей памяти многіе факты, но онъ долженъ вынести солидное пріобрѣтеніе—обобщеніе этихъ фактовъ. Ученикъ хорошо прошелъ курсъ географіи, если знаетъ устройство поверхности земнаго шара и относительное расположеніе ея частей, составилъ опредѣленное понятіе о расположеніи и значеніи рѣкъ, морей и горъ, о центрахъ цивилизаціи или государствахъ, о зависимости дѣятельности народа отъ условій мѣстности и т. п. Обученіе Исторіи было плодотворно, если ученикъ вынесъ изъ него на основаніи изученія частныхъ фактовъ общіе выводы о группировкѣ народовъ, о ихъ взаимныхъ отношеніяхъ, о вліяніи одного народа на другой, о государственной и общественной жизни человѣка, объ общихъ задачахъ всѣхъ народовъ и т. п. Лучше, если всѣ подобные выводы ученикъ изъ фактовъ дѣлаетъ самъ, хуже, если они будутъ навязаны ему учителемъ и потомъ подтверждены фактами. Образовательная сила предмета во второмъ случаѣ отодвигается на второй планъ; ученику приходится упражнять болѣе память, а не мысль.

Изъ всѣхъ учебныхъ предметовъ математика представляетъ наиболѣе обширное поприще для *обобщенія*, и притомъ постепеннаго, легкаго, доступнаго ученическимъ силамъ, обобщенія изъ немногихъ фактовъ, такъ сказать, неизбѣжнаго и точнаго. Математическое условное знакоположеніе значительно облегчаетъ ученику запоминаніе большаго числа условій, комбинацій и соотношеній между данными величинами и вводитъ необходимый механизмъ, облегчающій мышленіе. Владѣть механизмомъ—значитъ владѣть языкомъ науки и умѣть многія частныя понятія обобщать въ одно общее и закрѣплять его въ памяти въ удобной, опредѣленной, законченной формѣ. Курсъ элементарной математики представляетъ, какъ уже сказано было, неразрывную цѣпь мыслей; нужно только, чтобы ученикъ шелъ шагъ за шагомъ, не дѣлая скачковъ и начиная сначала, а не съ произвольнаго звена этой цѣпи. Нужно прежде вооружить ученика пріемами открывать, изслѣдовать и доказывать истину. Изъ изученія отдѣльныхъ правилъ и теоремъ образуется цѣлая теорія, ведущая къ извѣстной опредѣленной цѣли,—нужно, чтобы ученикъ видѣлъ эту цѣль и стремился къ ея достиженію. Ученикъ, не обладая еще вполнѣ общими пріемами мышленія человѣка развитого, быстро охватывающаго и постигающаго абстрактную мысль, можетъ мыслить только обыкновеннымъ, естественнымъ, свойственнымъ развивающемуся уму путемъ. Изъ наблюденія частныхъ фактовъ онъ слагаетъ общее заключеніе—выводъ, а въ математикѣ выводъ, если только онъ сдѣланъ правильно, становится уже независимымъ отъ частныхъ фактовъ, переходитъ въ область теоретическую. Такое близкое соприкосновеніе частныхъ фактовъ съ общими положеніями и взаимное поясненіе одного другимъ и составляетъ силу математики, какъ учебнаго предмета.

Нельзя учить ребенка множить числа, пока онъ на рѣшеніи многихъ практическихъ вопросовъ въ задачахъ съ небольшими числами, не вникъ въ смыслъ умноженія, въ его необходимость и пользу для рѣшенія вопросовъ, въ его элементы и значеніе въ ряду другихъ комбинацій съ числами. Здѣсь каждый шагъ впередъ есть обобщеніе. Бѣглыя теоретическія поясненія, которыя предпосылаются обыкновенно сообщенію ученикамъ правила умноженія большихъ чиселъ, не могутъ удержаться въ сознаніи, хотя бы и были поняты, такъ какъ они восприняты пассивною памятью; и оказывается, что правило умноженія зацѣпится въ памяти за какое-нибудь неоднородное съ нимъ умозаключеніе, отъ котораго быстро оторвется при вторженіи въ сознаніе другого умозаключенія, болѣе доступнаго пониманію и воспріятію. Когда ученикъ самъ дошелъ до вывода изъ частныхъ примѣровъ, наглядно, что для уменьшенія величины дроби нужно уменьшить ея числителя или увеличить знаменателя, то онъ сдѣлалъ обобщеніе, а вмѣстѣ съ тѣмъ, пріобрѣлъ и способность обобщать и стоитъ теперь на пути къ открытіямъ въ своей маленькой умственной области. Такое умозаключеніе, какъ 12:4=3, можетъ ли сразу въ общемъ видѣ сдѣлаться достояніемъ сознанія ученика, если оно не составляетъ продукта его собственнаго мышленія изъ другихъ простѣйшихъ умозаключеній? Ученикъ долженъ одновременно сознавать: 1) что 12 и 4 суть извѣстныя собранія однородныхъ единицъ; 2) что 12 больше 4-хъ; 3) что слово *раздѣлить* имѣетъ именно значеніе извѣстнаго соотношенія между числами; 4) что 12 болѣе 4-хъ именно въ 3 раза; 5) что 3 есть число, выражающее извѣстное соотношеніе между 12 и 4-мя и т. д. Часто ученикъ, пройдя курсъ Геометріи по способу начала разсужденія отъ общаго положенія, не доходитъ до обобщенія вопросовъ: что такое теорема, что значитъ доказать теорему, къ чему доказываются теоремы и каковы могутъ быть пріемы ихъ доказательства. Также точно, пройдя курсъ Алгебры, онъ выноситъ изъ него массу формулъ и не выноситъ понятія объ общемъ числѣ, о формулѣ и о значеніи того и другого при изслѣдованіи и рѣшеніи математическихъ вопросовъ. Все это происходитъ оттого, что начало обученія было положено невѣрное, основныя понятія изъ области учебнаго предмета восприняты кое-какъ, на вѣру и память, не продуманы ученикомъ и не сдѣлались полною его собственностью; ученикъ не пріобрѣлъ привычки все изучаемое обдумывать до полнѣйшаго уясненія. Воспринимая многое непонятное, ученикъ, напротивъ, пріобрѣтаетъ привычку считать непонятнымъ и непосильнымъ ему все то, что не поддается пониманію съ перваго раза, и уже нисколько не старается углубиться мыслію для выясненія непонятнаго.

При обученіи дѣтей отъ семилѣтняго возраста до окончаніями общеобразовательнаго курса нужно различать два періода: 1) накопленіе понятій и вообще матеріала въ стройномъ порядкѣ для самостоятельной мысли и пріученіе ученика относиться ко всему изучаемому съ охотою, вниманіемъ и желаніемъ постигнуть изучаемое и 2) работу мысли въ болѣе широкихъ размѣрахъ, когда уже достаточно хорошо усвоены основные пріемы мышленія и есть достаточный запасъ ассоціацій представленій для воспріятія представленій и понятій въ отвлеченномъ видѣ. Этими періодами умственнаго роста ученика обусловливается раздѣленіе обученія его на приготовительное или элементарное и систематическое.

При элементарномъ обученіи ученикъ только знакомится съ предметомъ по собственнымъ наблюденіямъ подъ руководствомъ учителя, воспринимаетъ предметъ только въ томъ, еще незаконченномъ, неполномъ видѣ, какой доступенъ его незначительному развитію, пріобрѣтаетъ понятія и учится самостоятельно дѣлать вѣрныя умозаключенія, обобщенія и выводы, учится располагать ихъ въ порядкѣ и строить систему; при систематическомъ обученіи, вооруженный уже какъ матеріаломъ для умственной работы, такъ и пониманіемъ вывода и системы, ученикъ изучаетъ предметъ въ полномъ его объемѣ, по чужой системѣ, по учебнику, въ которомъ, послѣ подготовки элементарнымъ обученіемъ, все ему доступно и понятно, такъ какъ выраженное сжато въ учебникѣ онъ пополняетъ самъ на основаніи того матеріала, который пріобрѣтенъ прежде. Привычка же усвоивать только то, что окончательно понято и ясно представляется сознанію, заставляетъ ученика углубляться въ учебникъ и доходить, если и не всегда самостоятельно, то при помощи учителя, до раскрытія содержанія въ читаемомъ или изучаемомъ. При такихъ условіяхъ учебникъ пріобрѣтаетъ значительную роль; онъ вмѣстѣ съ учителемъ становится дѣйствительнымъ орудіемъ развитія ученика при посредствѣ только сообщаемыхъ знаній, какъ матеріала развитія. Ученикъ во всякомъ затруднительномъ случаѣ при дальнѣйшемъ изученіи предмета находитъ надежную поддержку въ хорошо укрѣпленныхъ въ сознаніи и вполнѣ ясныхъ представленіяхъ, выработанныхъ и усвоенныхъ при элементарномъ обученіи.

Методъ доказательства математическихъ истинъ есть *анализъ* то есть разложеніе сложнаго понятія на тѣ элементы, изъ которыхъ оно составилось, и выводъ изъ него понятій новыхъ, независимыхъ отъ опыта, но часто предваряющихъ опытъ и наталкивающихъ на него. Но владѣніе аналитическимъ способомъ доказательства истинъ возможно тогда, когда основныя понятія выработаны *синтезомъ* на основаніи частныхъ фактовъ, опыта и наблюденій. Невозможно правильно разлагать понятія, не научившись его складывать, иначе разложеніе было бы не разсудочное, а чисто произвольное, похожее на разрушеніе. Для большей наглядности пріема доказательства истинъ по тому и другому методу возьмемъ примѣръ. Истина: *Всякое число дѣлится безъ остатка на 9, ежли сумма его цифръ дѣлится на 9*. Аналитическій пріемъ доказательства: сумма цифръ даннаго числа получается отъ сложенія числа единицъ каждагор азряда, входящаго въ это число; такъ сумма цифръ числа 3546 будетъ $3+5+4+6=18$; числа единицъ каждаго разряда, составляющія слагаемыя въ этой суммѣ, суть остатки отъ дѣленія каждаго разряда на 9; такъ, напримѣръ, 3 есть остатокъ отъ дѣленія 3000 на 9, 5—остатокъ отъ дѣленія 500 на 9 и т. д. Что 3 есть остатокъ отъ дѣленія 3000 на 9, видно изъ того, что отъ дѣленія 1000 на 9 получается въ остаткѣ 1, слѣдовательно отъ дѣленія 3000 на 9 получается въ остаткѣ 3. Итакъ, отъ дѣленія каждаго разряда даннаго числа на 9 получаются остатки, сумма которыхъ тоже дѣлится на 9, слѣдовательно и все число дѣлится на 9 безъ остатка.

Синтетическій пріемъ: отъ дѣленія 10, 100, 1000 и т. д. на 9 въ остаткѣ получается 1, слѣдовательно отъ дѣленія 20, 300, 700 и т. п. на 9 въ остаткѣ получатся числа 2, 3, 7 и т. п. Отъ дѣленія 2500 на 9 въ остаткѣ получится $2+5=7$; отъ дѣленія 3280 на 9 въ остаткѣ получится $3+2+8=13$; а отъ дѣленія 13 на 9 въ остаткѣ получится $1+3=4$, слѣдовательно и отъ дѣленія 3280 на 9 получится въ остаткѣ 4. Отъ дѣленія 3546 на 9 въ остаткѣ получится $3+5+4+6=18$, а какъ само 18 дѣлится безъ остатка на 9, значитъ и заданное число раздѣлится безъ остатка на 9

Выводъ. Итакъ, чтобы узнать, дѣлится ли данное число безъ остатка на 9, нужно составить сумму изъ остатковъ, получающихся отъ дѣленія каждаго разряда его на 9; и если она дѣлится на 9, то и все число раздѣлится на 9; остатокъ же отъ дѣленія каждаго разряда числа на 9 опредѣляется цифрою разряда, слѣдовательно, всякое число раздѣлится на 9, если сумма его цифръ дѣлится на 9.

Первый пріемъ доказательства требуетъ отъ ученика постояннаго удержанія въ своемъ соображеніи всего разсужденія, такъ какъ разложеніе теоремы производится сразу; второй пріемъ изъ частныхъ случаевъ слагаетъ сначала частные выводы, а потомъ отъ частныхъ выводовъ приводитъ къ общему заключенію; въ немъ параллельно идетъ какъ раскрытіе самой истины, такъ и ея доказательство, и притомъ по раздѣльнымъ частямъ. Разсматривая вопросъ по частямъ, ученикъ постепенно связываетъ эти части и тѣмъ уменьшаетъ число данныхъ, соединяя ихъ въ болѣе крупныя, и, наконецъ, доводитъ вопросъ до разрѣшенія на основаніи немногихъ данныхъ и условій, и рѣшеніе это выходитъ какъ бы само собою неизбѣжно. Первый пріемъ доказательства свойственъ систематическому курсу Ариѳметики, когда ученикъ уже пріобрѣлъ способность обхватывать своимъ умомъ цѣлый рядъ разсужденій, и притомъ сразу, второй—элементарному, когда ученикъ только учится изъ частей складывать цѣлое.

Выводъ общихъ понятій, правилъ и теоремъ въ элементарномъ курсѣ Ариѳметики изъ частныхъ примѣровъ и задачъ имѣетъ то важное значеніе, что возбуждаетъ постоянно активное вниманіе ученика и дѣлаетъ для него самую работу занимательною. Участвуя постоянно самъ въ выработкѣ выводовъ, ученикъ получаетъ довѣріе къ себѣ и къ учителю, а также пріобрѣтаетъ бодрость и смѣлость въ рѣшеніи вопросовъ, а это—важные двигатели въ развитіи учащагося.

Наглядность и доступность преподаванія и самодѣятельное участіе учащихся въ элементарномъ курсѣ обученія кладутъ прочное основаніе всему дальнѣйшему обученію. Преподаваніе пойдетъ успѣшно, если учитель работаетъ съ ученикомъ, разумно воспринимающимъ сообщаемое, а потому нужно съ первыхъ дней обученія дать ученику возможность мыслить и дѣйствовать собственнымъ умомъ, подъ руководствомъ и наблюденіемъ учителя, а не поражать его догматическими выводами науки, въ разсчетѣ на то, это современемъ онъ пойметъ ихъ вполнѣ.

Недостатокъ у насъ правильно организованныхъ первоначальныхъ школъ для приготовленія дѣтей въ общеобразовательныя заведенія, а также недостатокъ правильныхъ педагогическихъ воззрѣній въ средѣ родителей и воспитателей дѣлаютъ задачу всякаго общеобразовательнаго заведенія трудно исполнимою. При началѣ обученія въ семействахъ дерко сразу поселить въ дѣтяхъ нелюбовь къ наукѣ и боязнь ея, если дѣлать рѣзкій переходъ отъ полнаго отсутствія всякихъ умственныхъ занятій къ работѣ, требующей значительнаго умственнаго напряженія и усидчивости. Обыкновенно до семи лѣтъ дѣти предоставляются самимъ себѣ, по большей части заботы о нихъ касаются только того, чтобы уберечь ихъ отъ дурныхъ вліяній и обезопасить ихъ существованіе, а едва исполнилось семь лѣтъ, дѣтей сажаютъ за ученическій столъ, требуютъ отъ нихъ полнаго вниманія и сразу хотятъ поселить въ нихъ всѣ привычки и пріемы учениковъ. Постепенность перехода отъ чисто физическихъ упражненій и игръ къ умственнымъ занятіямъ могла бы подготовить дѣтей мало-по-малу къ предстоящему имъ обученію, освоила бы ихъ хотя нѣсколько съ новыми понятіями и возбудила бы охоту къ серьезнымъ занятіямъ. Рѣзкая перемѣна направленія привычекъ и всего склада мыслей никогда не можетъ повести къ хорошимъ результатамъ. Разнохарактерная, подготовленная наскоро, къ сроку, и по разнообразнымъ пріемамъ, толпа дѣтей вступаетъ въ оффиціальное заведеніе и подчиняется въ немъ совершенно незнакомымъ порядкамъ и требованіямъ, о которыхъ въ семействахъ невозможно было прежде составить и понятія. Не зная вполнѣ обстоятельно требованій учебныхъ заведеній для вступленія въ нихъ, или превратно понимая эти требованія, такъ какъ краткая программа курса ничего не говоритъ о самой сущности дѣла, родители смотрятъ на вступительный въ заведеніе экзаменъ своихъ дѣтей съ безотчетнымъ страхомъ. Удачу или неудачу на экзаменѣ они приписываютъ только случаю.

Не смотря на довольно строгій выборъ вступающихъ въ учебное заведеніе дѣтей, они скоро въ первомъ же классѣ подраздѣляются на успѣвающихъ и неуспѣвающихъ и затѣмъ уже никогда не доходятъ въ полномъ составѣ даже до 3-го класса. Такое неправильное, признаваемое почти за неизбѣжное, явленіе объясняется какъ неправильною подготовкою дѣтей, какъ и излишнею отвлеченностью преподаванія въ низшихъ классахъ средняго учебнаго заведенія. Многія дѣти, поступающія въ заведеніе, приготовлены изъ Ариѳметики такъ, что не отличаютъ цифры отъ числа, ею изображаемаго; всѣ дѣйствія, производимыя чисто механически, по данному рецепту, они относятъ къ значку, а не къ числу. Неужели возможенъ при такой подготовкѣ дѣтей систематическій, строго-научный курсъ Ариѳметики на отвлеченныхъ числахъ? Выученныя читать механически по буквамъ, складамъ и отдѣльнымъ словамъ, а не мыслямъ, дѣти съ трудомъ привыкаютъ ставить на первомъ планѣ смыслъ читаемаго. Достаточно ли этого матеріала для начатія систематическаго курса грамматики, да еще по учебнику, котораго они и понять не могутъ? Способенъ ли умъ десятилѣтняго ученика на урокахъ Географіи безъ предварительной подготовки отвлечься до познанія формы, величины и пространственнаго положенія земли? Не ляжеть ли все это хаотически, неосмысленно, тяжелымъ грузомъ на мозгъ ребенка, неприготовленнаго къ пониманію самыхъ простыхъ явленій его жизни? Формальность, цифра, буква, безсознательная номенклатура, безжизненныя опредѣленія, непроизводительное напряженіе мозга, недовѣріе ко всему предлагаемому учителемъ, тяжелое сознаніе своей неспособности, желаніе схватить къ уроку кое-какъ, поверхностно, все изучаемое—вотъ элементы, которые часто несетъ съ собою вступающій въ общеобразовательное заведеніе, съ которыми весьма нерѣдко остается до выхода изъ него, пріобрѣтая въ заведеніи не любовь къ наукѣ, а нѣкоторую боязнь ея.

Гдѣ же причина всего этого, гдѣ средства къ болѣе раціональной постановкѣ обученія? Педагогическій застой, недостатокъ подготовительныхъ къ учительской практикѣ заведеній и рутинное слѣдованіе тому методу преподаванія, по которому обучался нѣкогда самъ преподаватель, хотя бы и осталось въ немъ тяжелое воспоминаніе объ этомъ методѣ, суть главныя причины неподвижности и малопроизводительности нашихъ школъ. Безъ сомнѣнія, слѣпое подражаніе иностраннымъ педагогамъ не можетъ быть для насъ обязательнымъ, но знакомство въ этомъ отношеніи съ опытомъ и дѣятельностію людей посвятившихъ весь трудъ свой великому дѣлу воспитанія и обученія дѣтей—вполнѣ обязательно. Нѣтъ спора, что всякій методъ преподаванія учебнаго предмета, при искреннемъ желаніи преподавателя быть полезнымъ дѣлу, можетъ довести до хорошихъ результатовъ. Нѣтъ сомнѣнія въ томъ, что изъ самыхъ плохихъ по организаціи учебныхъ заведеній выходили и выходятъ умные люди. Но дѣло въ томъ, чтобы хорошіе результаты были хотя сколько-нибудь обезпечены, независимо отъ слишкомъ многихъ частныхъ обстоятельствъ, чтобы умныхъ людей выходило побольше. Недостаточно работать въ теченіе многихъ лѣтъ, вырабатывая изъ себя автодидакта, чтобы съ убѣжденіемъ сказать: „моя работа вполнѣ производительна". Только сравненіе и теоретическое изученіе дѣла можетъ повести къ такому или обратному заключенію. Опытные наши преподаватели вообще недовѣрчиво относятся къ новымъ методамъ обученія, ссылаясь на собственную практику и на мелкіе частные факты, выставляющіе новые методы съ невыгодной стороны. Но большинство изъ нихъ, въ теченіе всей своей многолѣтней учительской дѣятельности, не имѣло даже случая видѣть и достаточно наблюдать дѣятельность другихъ, чтобы имѣть поводъ и положительныя данныя для оцѣнки своихъ собственныхъ воззрѣній на дѣло. Одного собственнаго опыта въ такомъ важномъ дѣлѣ, каково воспитаніе и обученіе дѣтей очень недостаточно.

Предлагаемая мною книга представляетъ только попытку приведенія, на основаніи указаній иностранныхъ и нашихъ педагогическихъ сочиненій, а также моего собственнаго опыта и наблюденій надъ дѣятельностію другихъ, въ систему расположенія матеріала, метода и частныхъ пріемовъ преподаванія курса Ариѳметики въ приготовительной и общеобразовательной школѣ. Только посредствомъ всесторонней разработки вопроса и достаточнаго обмѣна мыслей между спеціалистами можно достигнуть до осуществленія раціональности въ преподаваніи.

За неимѣніемъ еще въ нашей педагогической литературѣ полныхъ практическихъ сочиненій по методикѣ учебныхъ предметовъ, мнѣ пришлось и еще придется касаться многихъ общихъ вопросовъ, относящихся къ преподаванію вообще и многихъ частностей, которыя опытному преподавателю могутъ показаться азбукою педагогическаго дѣла. Но, желая затронуть вопросъ о преподаваніи Ариѳметики въ возможно большей подробности, я счелъ необходимымъ не избѣгать и совершенно частныхъ вопросовъ.

III.

Очеркъ развитія методики Ариѳметики. Три періода этого развитія. Періодъ односторонне-объективный. Періодъ односторонне-субъективный. Методическія положенія Песталоцци и его послѣдователей. Кранке. Недостатки методики въ этотъ періодъ. Третій періодъ—раціональное развитіе методики. Шольцъ. Методическія положенія и планъ курса Дистервега. Недостатки его методики. Подробное изложеніе курса Генчеля. Достоинства и недостатки ето сочиненія. Практическая Ариѳметика Гурьева. Подробное изложеніе содержанія сочиненія Грубе и сравненіе съ нимъ книги Паульсона: „Ариѳметика по способу нѣмецкаго педагога Грубе“. Достоинства и недостатки методики Грубе.

Прежде нежели перейти къ окончательнымъ выводамъ относительно расположенія учебнаго матеріала Ариѳметики и способа передачи ея учащимся, считаю не лишнимъ сдѣлать хотя краткій критическій обзоръ главнѣйшихъ направленій въ развитіи методики Ариѳметики.

Въ развитіи методики Ариѳметики въ нѣмецкой школѣ можно различить три послѣдовательные періода: а) состояніе ея до Песталоцци, б) реформа, произведенная въ методикѣ всѣхъ учебныхъ предметовъ педагогическими принципами Песталоцци и его послѣдователей и в) реформы новѣйшаго времени, произведенныя цѣлымъ рядомъ практиковъ-педагоговъ, изъ которыхъ главнѣйшими можно назвать: Кранке, Дистервега, Генчеля и Грубе.

Первый періодъ преподаванія Ариѳметики былъ, по выраженію Грубе, односторонне-объективный. На первомъ планѣ преподаванія ставилась наука и сообщеніе ученику наибольшаго количества знаній изъ его области. Личность ученика играла при этомъ незначительную роль; развитіе способностей его совершалось не по извѣстнымъ уже даже въ то время, если вспомнить Базедова, Комменія, Локка и другихъ, психологически-педагогическимъ принципамъ, а черезъ вліяніе на эти способности сообщаемыхъ ученикамъ чисто научныхъ свѣдѣній, въ ихъ законченномъ видѣ и въ абстрактной формѣ. Расположеніе учебнаго матеріала извѣстно всякому, кто учился въ какомъ-либо изъ учебныхъ нашихъ заведеній лѣтъ 20 тому назадъ. Понятіе о числѣ и единицѣ, счисленіе, доводимое до невыразимыхъ чиселъ; одно за другимъ четыре дѣйствія съ цѣлыми числами отвлеченными, съ опредѣленіемъ этихъ дѣйствій, правилами ихъ совершенія и повѣркою, приложеніе тѣхъ же правилъ къ дѣйствіямъ съ именованными числами, затѣмъ простыя, десятичныя, непрерывныя дроби и т. д. Способъ передачи учебнаго матеріала состоялъ въ томъ, что учитель объяснялъ ученикамъ какое-либо положеніе и доказывалъ его чисто-теоретически, подтверждая затѣмъ частными примѣрами. Изложенное учителемъ въ классѣ ученики воспроизводили въ своей памяти по учебнику. Предлагаемыя задачи и численные примѣры относились прямо къ извѣстному правилу и требовали со стороны ученика только умѣнья его приложить.

О несостоятельности такой системы обученія дѣтей Ариѳметикѣ я не считаю необходимымъ распространяться. Можно увѣренно сказать, что послѣдователей этой системы обученія въ нѣмецкой школѣ уже вовсе нѣтъ, и у насъ они мало-по-малу сходятъ со сцены и замѣняются послѣдователями новѣйшаго направленія методики. Не перечисляя учебниковъ Ариѳметики и сборниковъ задачъ, въ которыхъ осуществилась эта система въ нашей школѣ, замѣчу только, что всѣ эти учебники излагаютъ Ариѳметику въ стройной системѣ, какъ науку, не задаваясь никакими методическими цѣлями. Слѣдовательно, отнестись къ нимъ критически со стороны расположенія и изложенія матеріала было бы несправедливо. Дѣло не въ учебникѣ, а въ примѣненіи. Всякій учебникъ, не заключающій въ себѣ ошибокъ относительно науки, хорошъ, если онъ примѣняется къ извѣстному возрасту и къ извѣстному развитію ученика—когда ученикъ, на основаніи предварительной подготовки, можетъ вполнѣ осмысленно усвоивать то, что излагаютъ въ учебникѣ. Большое количество теоретическихъ учебниковъ Ариѳметики и объясняется тѣмъ, что составители ихъ, не измѣняя системы расположенія матеріала, желали сухую отвлеченную науку сдѣлать по языку изложенія доступною возрасту; въ этомъ и состоитъ ихъ существенная разница. Многіе изъ этихъ учебниковъ и въ настоящее время съ пользою могутъ быть употребляемы, но только не съ первыхъ дней обученія дѣтей Ариѳметикѣ, а послѣ нѣсколькихъ лѣтъ предварительной подготовки.

Второй періодъ, въ отличіе по его направленію, отъ перваго можно назвать односторонне-субъективнымъ. Песталоцци первый дѣйствительно примѣнилъ и осуществилъ на школьной практикѣ вырабатывавшіеся уже задолго до него психологическіе принципы въ обученіи и произвелъ положительную реформу какъ въ способѣ начальнаго обученія дѣтей, такъ и въ учебномъ матеріалѣ. Все вниманіе школы со времени Песталоцци устремилось на развивающійся субъектъ; предметъ преподаванія служитъ только средствомъ къ развитію ученика, сообразно съ психологическими принципами; словомъ, формальная цѣль обученія беретъ не только перевѣсъ надъ матеріальною, но и видимо старается вытѣснить послѣднюю. Какъ прежде орудіемъ Ариѳметики было отвлеченное число, выраженное цифрою, и письменное вычисленіе, такъ въ школѣ Песталоцци на первомъ планѣ ставилось число безъ цифры и умственный счетъ.

Главнѣйшія положенія Песталоцци, касающіяся обученія, могутъ быть сформулированы слѣдующимъ образомъ: а) вся сила обученія заключается не въ матеріалѣ, а въ методѣ, б) всякое истинное и образовательное обученіе должно быть возбуждаемо и извлекаемо изъ самихъ дѣтей, изъ ихъ собственной природы и в) наглядность есть необходимое основаніе всякаго познанія.

Положеніе и пріемы начальнаго обученія Ариѳметикѣ Песталоцци и его учениковъ-послѣдователей въ общихъ чертахъ таковы: Ариѳметика занимается простымъ соединеніемъ и отдѣленіемъ единицъ; ея основная существенная форма: одинъ да одинъ—два, одинъ изъ двухъ—одинъ. Всякое число есть ничто иное, какъ знакъ сокращенія этой существенной, коренной формы всякаго счисленія. Очень важно, чтобы сознаніе коренной формулы числовыхъ отношеній не было ослаблено въ человѣческомъ умѣ сократительными средствами Ариѳметики. Всякій успѣхъ долженъ быть созидаемъ на твердомъ основаніи реальныхъ отношеній, лежащихъ въ основѣ счисленія. Если мы выучимся наизусть считать *три да четыре—семь* и потомъ будемъ основываться на этомъ, то мы будемъ обманывать самихъ себя, ибо внутренняя правда этихъ семи не въ насъ, такъ какъ намъ неизвѣстенъ вещественный грунтъ, который одинъ только и можетъ пустое слово сдѣлать для насъ истиной.

На наглядныхъ предметахъ дѣти получаютъ понятіе одинъ, два, три до 10. На этихъ предметахъ они по требованію указываютъ 2, 3, 5 и т. д. предметовъ, потомъ названное число предметовъ выражаютъ пальцами, камешками или другими предметами. При всякомъ удобномъ случаѣ обращается вниманіе дѣтей на числовое отношеніе предметовъ. Къ одному предмету приставляется другой однородный, и дѣти выражаютъ, что одинъ да одинъ будетъ два, приставляется третій и выражается, что 2 да 1 будетъ 3, что 3 состоитъ изъ трехъ разъ по одному, что надо 1 повторить 3 раза, чтобы получить 3 и т. д. Какъ скоро дитя вполнѣ сознало сложеніе единицъ до 10 и выучилось ихъ выговаривать, тогда начинается разложеніе чиселъ вычитаніемъ; отъ 10 предметовъ отнимается 1 и спрашивается, сколько осталось, потомъ отнимается другой, третій предметъ и т. д. до десятаго. Сознаніе числовыхъ отношеній, пріобрѣтаемое созерцаніемъ дѣйствительныхъ предметовъ, можетъ быть усилено счетными таблицами, въ которыхъ ряды отношеній чиселъ изображаются точками или чертами. Такого рода счетъ есть дѣйствительное упражненіе ума, а не дѣло одной памяти; это результатъ самой ясной, опредѣленной наглядности. которая вѣрно доводитъ до ясныхъ понятій. Умноженіе и дѣленіе чиселъ связываются со сложеніемъ; когда дѣти уразумѣли, что 2 да 2 да 2 будетъ 6, то они въ то же время уразумѣли, что 2 повторенное 3 раза будетъ 6, что 2 въ 6-и заключается 3 раза, что третья часть 6-и будетъ 2 и т. д. Дальнѣйшія упражненія также состоятъ въ прикладываніи и отниманіи одного и того же числа до какого угодно предѣла. Для нагляднаго уясненія дробей Песталоцци предлагаетъ таблицу, имѣющую 11 рядовъ, изъ которыхъ каждый состоитъ изъ 10 квадратовъ. Квадраты перваго ряда не раздѣлены на части, каждый квадратъ второго ряда раздѣленъ пополамъ, третьяго на 3 части и т. д. до 10. Другая таблица заключаетъ въ себѣ болѣе сложныя дѣленія: квадраты, раздѣленные въ первой таблицѣ на равныя части, здѣсь послѣдовательно раздѣлены на 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20: квадраты слѣдующаго ряда дѣлятся на 3, 6, 9, и т. д. до 30, слѣдующаго на 4, 8, 12, и т. д. до 40. На этихъ таблицахъ дается понятіе о дроби, какъ части единицы, производится сравненіе дробей по величинѣ, выводятся основныя свойства дробей, производятся дѣйствія съ дробями безъ помощи цифръ.

Изложеніе курса Ариѳметики, соотвѣтственно требованіямъ этой системы, можно найти въ сочиненіи «Allgemeines Lehrbuch der Arithmetik, oder Anleitung zur Rechnenkunst für Jedermann, von Ernst Tillich, Leipzig. 1806».

Еще яснѣе преслѣдуетъ чисто формальную цѣль при начальномъ обученіи Кранке въ своей книгѣ «Leitfaden und Exempelbuch für den Elementarunterricht im Rechnen, Hannover. 1847», гдѣ онъ все вычисленіе въ предѣлѣ чиселъ отъ 1 до 1000 производить безъ всякаго употребленія цифръ, замѣняя единицы различныхъ разрядовъ для большей по его мнѣнію наглядности символическими знаками △, □ и т. п.

Сознавая неплодотворность чисто объективнаго направленія въ обученіи и стараясь идти съ нимъ постоянно въ разрѣзъ, Песталоцци и его послѣдователи впали въ другую, не менѣе важную крайность: они или вовсе устраняли всякое письменное упражненіе и формулированіе правилъ, или придавали имъ весьма мало значенія. Развитію умственныхъ способностей человѣка не только не препятствуютъ сознанные имъ элементы науки, но, напротивъ, даютъ ему новую и здоровую пищу. Одно умственное—устное счисленіе, хотя бы при начальномъ обученіи, не сопровождаемое выводами и обобщеніями, не возбуждаетъ въ умѣ ученика пытливости и стремленія къ дальнѣйшему, вполнѣ самостоятельному совершенствованію въ наукѣ. Избѣгать обобщающихъ ариѳметическихъ обозначеній и пріемовъ вычисленія, значитъ преслѣдовать въ обученіи дѣтей чисто практичеккую цѣль—развить навыкъ къ быстрому счету. Тѣмъ не менѣе, и эта крайность, неизбѣжная во всякомъ новомъ, не установившемся дѣлѣ, была плодотворна тѣмъ, что въ мертвый механизмъ вычисленія внесла живительный духъ и направила силы ученика отъ механической работы руки надъ цифрою къ сознательной работѣ головы надъ числомъ. Другой недостатокъ этой школы тотъ, что она по преимуществу преслѣдовала только счетъ и составъ чиселъ, вводила умственныя упражненія только для познанія отвлеченнаго отношенія чиселъ между собою и не вводила вовсе задачъ практическихъ съ числами конкретными, такъ что ученикъ, быстро вычислявшій сложнѣйшія комбинаціи между числами въ умѣ, не пріучался открывать тѣ же комбинаціи въ простенькой задачѣ, куда входили тѣ же числа. Наконецъ, третій и едва ли не важнѣйшій недостатокъ былъ тотъ, что матеріалъ Ариѳметики былъ разбитъ на отдѣльныя упражненія, не имѣвшія между собою внутренней связи, такъ что учениками пріобрѣтался навыкъ вычислять, но въ познаніяхъ ихъ не было системы. Письменное счисленіе, заканчивавшее курсъ Ариѳметики, вовсе не находилось въ связи съ умственнымъ и совершалось по особеннымъ правиламъ, по старой системѣ.

Дѣятели третьяго періода въ направленіи методики Ариѳметики являются примирителями двухъ направленій—объективнаго и субъективнаго. Придавая равное значеніе какъ формальной, такъ и матеріальной цѣли обученія, они самое развитіе ученика ставятъ въ зависимость отъ процесса познаваній имъ законовъ науки въ стройной системѣ. Все дѣло обученія Ариѳметикѣ обусловливается именно системою расположенія учебнаго матеріала и способомъ передачи его ученикамъ. Такимъ образомъ, изъ соотвѣтствія учебнаго матеріала съ возрастомъ и развитіемъ учащихся мало-по-малу возникаетъ раціональный методъ обученія Ариѳметикѣ. Прослѣдимъ, какимъ образомъ въ нѣмецкой школьной литературѣ, по крайней мѣрѣ, у школьныхъ представителей ея, вырабатывался этотъ важный методическій вопросъ; затѣмъ укажемъ и на тѣ немногія попытки, которыя появились у насъ подъ вліяніемъ метода Грубе.

Первый шагъ къ примиренію крайностей объективнаго и субъективнаго направленія въ методикѣ встрѣчается у *Шольца* въ его книгахъ: „Fassliche Anweisung zum gründlichen Kopf und Zifferrechnen“ и „Aufgaben für das Kopfrechnen u. Aufgaben für das Zifferrechnen“. Шульцъ признаетъ одинаковое право за умственнымъ и письменннымъ вычисленіемъ, хотя еще рѣзко раздѣляетъ ихъ одно отъ другого и поставляетъ для нихъ особенные пріемы. Его задачи представляютъ рядъ одиночныхъ упражненій, не имѣющихъ между собою внутренней систематической связи, основанной или на свойствахъ чиселъ, или на научной послѣдовательности предмета. Теоретическій курсъ Ариѳметики и практическія упражненія въ рѣшеніи задачъ идутъ отдѣльно.

Большую связь между формальною и матеріальною цѣлью преподаванія Ариѳметики установилъ Дистервегъ. Положенія Дистервега, касающіяся этого вопроса, слѣдующія: 1) при обученіи дѣтей Ариѳметикѣ преслѣдуется главнѣйшимъ образомъ развитіе разсудочнаго процесса; 2) кромѣ того, обученіе Ариѳметикѣ должно вести къ практическимъ результатамъ въ жизни человѣка. Достиженіе этихъ двухъ цѣлей основываетъ онъ на выполненіи слѣдующихъ болѣе частныхъ положеній: а) образовательная сила Ариѳметики заключается въ самой природѣ ея матеріала; б) цифра находится въ такомъ же отношеніи къ внѣшнему представленію числа, въ какомъ буква къ звукамъ, слово къ понятіямъ, ноты къ тонамъ, портретъ къ оригиналу, а потому всякое вычисленіе письменное и устное есть вычисленіе умственное, и правила для письменнаго вычисленія должны являться какъ выводы изъ отдѣльныхъ упражненій; в) на первомъ планѣ нужно ставить ясность представленія и вѣрность познанія, потомъ уже упражненія и вычисленія; г) на каждой новой ступени познанія нужно останавливаться до тѣхъ поръ, пока ученикъ не пріобрѣтетъ навыка, пока понятое имъ не перейдетъ въ область памяти; д) вычисленіе съ отвлеченными и именованными числами постоянно должно быть соединено съ практическими упражненіями: е) нужно требовать отъ учениковъ точнаго и яснаго словеснаго выраженія усвоеннаго ими; только то дѣйствительно понято, что точно выражено; ж) законъ десятичной системы, какъ основаніе всякаго вычисленія, долженъ быть выясненъ и повторяемъ при всякомъ удобномъ случаѣ; з) ученики на столько должны связывать теоретическіе выводы съ практическими упражненіями, что должны быть въ состояніи сами составлять задачи для приложенія усвоеннаго правила. Эти положенія, какъ общія, такъ и частныя, Дистервегъ, въ сотрудничествѣ съ Гейзеромъ, осуществилъ практически въ сочиненіи „Methodisches Handbuch für den Gesammtunterricht im Rechnen" 1853 г. (5-е изд.). Первая часть этого сочиненія, предназначенная какъ методическое руководство для учителей, содержитъ въ себѣ: 1) Упражненія надъ числами отъ 1 до 10; упражненія надъ отвлеченными и именованными числами; четыре дѣйствія въ извѣстномъ порядкѣ одно за другимъ надъ числами въ этомъ предѣлѣ. 2) Числа отъ 10 до 20—изученіе въ томъ же порядкѣ (упражненія съ числами этого предѣла важны, по мнѣнію Дистервега, въ томъ отношеніи, что здѣсь впервые выясняется способъ написанія числа, состоящаго изъ двухъ разрядовъ); чтеніе числа и комбинаціи однозначныхъ чиселъ, дающія въ результатѣ число двузначное. 3) Числа отъ 20 до 100; развитіе нумераціи, четыре дѣйствія и практическія упражненія. 4) Нумерація чиселъ высшихъ разрядовъ, четыре дѣйствія съ ними по правиламъ. 5) Именованныя числа; раздробленіе, превращеніе и 4 дѣйствія; задачи на каждое дѣйствіе въ отдѣльности и смѣшанныя задачи. 6) Первоначальныя упражненія съ дробями; вычисленіе съ дробями отвлеченными и именованными по правиламъ.

Вторая часть, составленная Гейзеромъ, заключаетъ: отношенія и пропорціи и задачи, относящіяся къ различнымъ спеціальнымъ правиламъ и рѣшаемыя посредствомъ пропорцій; десятичныя дроби, степени, корни, логариѳмы и проч.,—словомъ сказать, все то, что встрѣчается обыкновенно въ такъ называемыхъ общихъ Ариѳметикахъ. Итакъ, по самому расположенію учебнаго матеріала въ первой части сочиненія Дистервега видно, что при обученіи дѣтей Ариѳметикѣ онъ дѣйствительно осуществилъ основной принципъ методики всякаго учебнаго предмета: „переходить постепенно отъ легчайшаго къ труднѣйшему, отъ извѣстнаго къ неизвѣстному, отъ ближайшаго къ отдаленному, отъ конкретнаго къ абстрактному, отъ нагляднаго представленія къ образованію понятія". Курсъ идетъ концентрически, постоянно расширяясь и усложняясь; одни и тѣ же правила повторяются по нѣскольку разъ при постепенномъ возрастаніи числа и усложненіи упражненій. Вначалѣ проходится законченный курсъ надъ числами перваго десятка, потомъ такой же курсъ надъ числами до 20; затѣмъ надъ числами до 100, надъ числами любой величины, наконецъ, надъ числами именованными. Каждый курсъ сопровождается притомъ практическими упражненіями. Слѣдовательно, курсъ Дистервега дѣйствительно одновременно преслѣдуетъ обѣ цѣли обученія—формальную и матеріальную, то-есть, сообразно возрасту и развитію ученика онъ даетъ ему посильный матеріалъ и сопровождаетъ отдѣльныя упражненія научными выводами.

Недостатокъ этого сочиненія тотъ, что, не смотря на строгую постепенность распредѣленія матеріала, дѣйствія въ каждомъ отдѣлѣ распредѣлены по рубрикамъ. Такъ что число изучается не само по себѣ, по своимъ свойствамъ и отношеніямъ къ другимъ числамъ, а по дѣйствіямъ надъ нимъ, и дѣйствія эти вытекаютъ не сами собою изъ отношенія чиселъ, а отношенія и комбинаціи подбираются сообразно тому или другому дѣйствію. Соединяя вездѣ субъективную точку зрѣнія съ объективною и располагая матеріалъ въ порядкѣ слѣдованія одного изъ другого, сочиненіе это все-таки представляетъ абстрактную науку. Этотъ курсъ такъ сказать въ малыхъ дозахъ даетъ, тѣмъ не менѣе, Ариѳметику сразу въ ея научной формѣ, не подготовляя ученика къ познанію необходимости ариѳметическаго дѣйствія и его сущности всестороннимъ изученіемъ самаго числа. Упражненія надъ числами отвлеченными и именованными въ формѣ задачъ вытекаютъ изъ самыхъ дѣйствій и производятся по правиламъ, выведеннымъ a priori. Самодѣятельность и развитіе ученика не достигается при рѣшеніи массы задачъ по данному образцу: въ умѣ его правила составляютъ отвлеченную схему, приложенія которой онъ не найдетъ самостоятельно, по указанію же рѣшаетъ и трудный вопросъ, но чисто механичсеки, стоитъ только угадать правило, которое къ данному вопросу или задачѣ нужно приложить. Справедливо говоритъ Грубе, по поводу курса Дистервега, что нельзя познакомить ученика съ сущностью числа, если сначала ученикъ будетъ комбинировать между собою числа посредствомъ вычитанія, затѣмъ посредствомъ умноженія и, наконецъ, дѣленія. Это все равно, что при изученіи растенія отдѣльно изучить его корни, потомъ стебель, потомъ листья, а всего-то растенія въ цѣлости со всѣми этими аттрибутами и не видѣть. Дѣйствія съ числами должны вытекать сами собою, и правила этихъ дѣйствій являются въ умѣ ученика, какъ неизбѣжный выводъ изъ многихъ практическихъ упражненій; а такимъ образомъ составленное правило ведетъ умъ ученика по пути обобщенія и слѣдовательно развиваетъ. Что касается второй части разсматриваемаго сочиненія, составленнаго, какъ уже сказано, Гейзеромъ, то она съ методической стороны не представляетъ никакого интереса, такъ какъ заключаетъ въ себѣ хорошо изложенный матеріалъ Ариѳметики, который можетъ быть предложенъ для изученія ученику, хорошо подготовленному изученіемъ элементарнаго курса Ариѳметики.

Значительную также связь между чисто научными и психологическими цѣлями при обученіи дѣтей Ариѳметикѣ находимъ мы у Генчеля въ его методическомъ сочиненіи въ двухъ частяхъ „Lehrbuch des Rechnenunterrichtes in Volksschulen, Leipzig 1863 (шестое изданіе), гдѣ вмѣстѣ съ чрезвычайно подробною разработкой учебнаго матеріала онъ даетъ попутно и методическія указанія учителю.

Расположеніе матеріала слѣдующее: 1) Первая степень—числа отъ 1 до 10. Ведется счетъ различныхъ предметовъ въ порядкѣ и въ разбивку, мѣняя самые предметы; потомъ ученики называютъ число показываемыхъ имъ предметовъ; письменный счетъ въ томъ же порядкѣ; ученики пишутъ всѣ числа въ рядъ, или число, названное учителемъ, записываютъ число черточекъ, начерченныхъ учителемъ на доскѣ, сами чертятъ черточки соотвѣтственно числу, сказанному учителемъ и т. п. Когда ученики хорошо усвоили счетъ предметовъ и изображеніе чиселъ цифрами до 10, идутъ дѣйствія съ числами, причемъ Генчель соединяетъ разомъ по два противоположныя дѣйствія: сначала идетъ сложеніе и вычитаніе при каждомъ числѣ послѣдовательно и въ разбивку потомъ умноженіе и дѣленіе въ томъ же порядкѣ. Всѣ эти упражненія совершаются при посредствѣ черточекъ, точекъ, палочекъ и постоянно сопровождаются задачами. Такъ что порядокъ упражненій вообще таковъ: сначала упражненія производятся при помощи наглядныхъ пособій, потомъ письменное упражненіе посредствомъ цифръ съ употребленіемъ и знаковъ дѣйствій; наконецъ, практическія простенькія задачи, относящіяся прямо къ извѣстной комбинаціи чиселъ. При всѣхъ четырехъ дѣйствіяхъ съ числомъ оно сравнивается со всѣми предшествующими числами, такъ что, напримѣръ, отъ 7 отнимаются послѣдовательно всѣ числа ему предшествовавшія и т. д. Въ число упражненій съ числами перваго десятка входятъ и дроби, какъ аликвотныя части цѣлаго числа, причемъ обозначеніе производится такъ: $^1/_3$ отъ $6=2$.

2) Вторая степень—числа отъ 10 до 100. Счетъ ведется въ томъ же порядкѣ, какъ и въ первой степени; затѣмъ идетъ разложеніе сотни на десятки и сопоставленіе этого разложенія съ разложеніемъ десятка на единицы (двумъ единицамъ соотвѣтствуютъ два десятка и кратное отношеніе двухъ единицъ къ десяти то же, что и двухъ десятковъ къ сотнѣ); пріемъ написанія десятковъ; число, составленное изъ десятковъ и единицъ, пріемъ его написанія. Счетъ ведется устно и письменно. Затѣмъ идутъ дѣйствія съ числами въ этомъ предѣлѣ но уже каждое дѣйствіе выдѣляется подъ отдѣльную рубрику, потому

что, по мнѣнію Генчеля, слѣдуетъ избѣгать смѣшенія дѣйствій, чтобы не запутать учениковъ, такъ какъ вычисленія вслѣдствіе возрастанія числа становятся сложнѣе. Упражненія въ каждомъ дѣйствіи ведутся въ томъ же порядкѣ, какъ на первой степени, то-есть, сначала устно на предметахъ, потомъ устно на отвлеченныхъ числахъ, наконецъ, письменно посредствомъ цифръ. При всѣхъ трехъ пріемахъ ученики комбинируютъ числа, начиная съ десятковъ, а не съ единицъ, такимъ образомъ 23×4 вычисляется такъ: 4 раза 20 будетъ 80, 4 раза 3 будетъ 12, а 80 и 12 составляетъ 92. На этой степени даются уже и названія элементовъ и результатовъ дѣйствій, то-есть вслѣдствіе постояннаго повторенія, ученики навыкаютъ различать *уменьшаемое*, *вычитаемое*, *дѣлимое* и пр.

3) Третья степень заключаетъ нумерацію до высшихъ разрядовъ чиселъ (триліоны) и четыре дѣйствія съ ними. Нумерація идетъ въ такомъ порядкѣ: а) изъ сотенъ образуются тысячи; разложеніе числа, даннаго въ тысячахъ, на тысячи, сотни, десятки и единицы, такъ 3 тысячи$=$30 сот.$=$300 десят.$=$3000 единицамъ; чтеніе написаннаго числа; написаніе числа продиктованнаго; б) изъ тысячъ образуются десятки и сотни тысячъ—тѣ же упражненія съ ними; в) милліоны и высшіе разряды — упражненія преимущественно въ чтеніи и писаніи чиселъ. Тутъ же дается краткое объясненіе различныхъ системъ счисленія и написанія чиселъ по этимъ системамъ, а также приводится и римское счисленіе. Затѣмъ идутъ 4 дѣйствія въ обыкновенномъ порядкѣ; каждое дѣйствіе начинается съ устныхъ упражненій, по которымъ ученики, такъ сказать, знакомятся съ пріемами вычисленія, убѣждаются въ необходимости опредѣленнаго правила и предугадываютъ его; потомъ идетъ вычисленіе письменное. При дѣленіи подробно разсматривается случай, когда получается остатокъ и дается первое понятіе о дроби, какъ части единицы, причемъ частное выражается цѣлымъ числомъ съ дробью; понятіе о дроби выясняется на дѣленіи линіи, прямоугольника и круга на равныя части и выводится, что $^3/_4$ данной линіи все равно, что $^1/_4$ часть этой данной линіи, взятая 3 раза. Всѣ упражненія въ этомъ отдѣлѣ ведутся преимущественно на числахъ отвлеченныхъ; задачъ въ этомъ отдѣлѣ немного. Отдѣлъ заканчивается мало подходящими къ нему статьями, каковы: распредѣленіе чиселъ на простыя и сложныя, разложеніе чиселъ на простые множители и составленіе изъ этихъ множителей общаго наибольшаго дѣлителя и наименьшаго кратнаго для данныхъ чиселъ.

4) Четвертая степень заключаетъ въ себѣ дѣйствія съ составными именованными числами съ общепринятымъ расположеніемъ статей, именно таблица различныхъ нѣмецкихъ мѣръ, раздробленіе, превращеніе и 4

дѣйствія. Упражненія ведутся также въ началѣ устно, потомъ письменно по правиламъ; въ этомъ отдѣлѣ много задачъ при отдѣльныхъ статьяхъ. Заканчивается отдѣлъ множествомъ задачъ самыхъ разнообразныхъ на тройное правило съ постояннымъ ихъ усложненіемъ и выводомъ общаго пріема рѣшенія по способу приведенія къ единицѣ а не посредствомъ пропорціи, такъ что ученики доводятся по соображенію до составленія формулы рѣшенія и сокращеннаго его вычисленія

Вторая часть курса Генчеля содержитъ простыя дроби и практическія задачи, относящіяся къ различнымъ спеціальнымъ правиламъ и рѣшаемыя по способу приведенія къ единицѣ. Весь матеріалъ подраздѣленъ на 8 послѣдовательныхъ степеней.

5) Пятая степень—посредствомъ разнообразныхъ наглядныхъ пособій снова выводится происхожденіе дроби, дается понятіе о ея сущности и отношеніи къ единицѣ. Дробь правильная и неправильная; написаніе дроби; смѣшанная дробь; дробь, происходящая отъ дѣленія всякаго цѣлаго числа на равныя части; устное и письменное сложеніе и вычитаніе дробей съ одинаковыми знаменателями; и умноженіе дробей на число цѣлое; дѣленіе дробей съ одинаковыми знаменателями; дѣленіе дроби на число цѣлое и содержаніе дроби въ числѣ цѣломъ. Отдѣлъ заканчивается искусно подобранными задачами на простое тройное правило съ дробями.

6) Шестая степень—выраженіе данной дроби въ различныхъ доляхъ черезъ умноженіе числителя и знаменателя на одно и то же число; упражненіе это ведется сначала дѣленіемъ линій на различное число прогрессивно-уменьшающихся частей, а потомъ въ отвлеченномъ видѣ; преобразованіе дроби увеличеніемъ ея числителя и знаменателя въ 3, 9, 12 и т. д. разъ; сокращеніе дроби; увеличеніе и уменьшеніе дроби; приведеніе дробей къ общему знаменателю посредствомъ выраженія данныхъ дробей, наглядно на дѣленіи линіи, въ различныхъ доляхъ и подъисканіе сходящихся долей; приведеніе дробей къ общему наименьшему знаменателю посредствомъ разложенія данныхъ знаменателей на простые множители и составленія для нихъ наименьшаго кратнаго числа; сложеніе и вычитаніе дробей съ различными знаменателями; умноженіе дроби на число цѣлое и дробное, въ первомъ случаѣ въ смыслѣ увеличенія дроби въ нѣсколько разъ и во второмъ въ смыслѣ нахожденія одной или нѣсколькихъ частей данной дроби ($^3/_8 \times {}^4/_5$ значитъ взять $^4/_5$ части отъ $^3/_8$) и выводъ правилъ; дѣленіе цѣлаго числа и дроби на дробь въ смыслѣ содержанія и въ смыслѣ опредѣленія, какую часть дѣлитель состовляетъ отъ дѣлимаго ($11^8/_9 : {}^6/_7$, то-есть узнается, сколько разъ $^6/_7$ содержится въ $11^8/_9$; сначала опредѣляется что $^6/_7$ въ 12 содержится 14 разъ, но $12 - 11^8/_9 = {}^1/_9$, а $^1/_9$ со-

ставляетъ $^7/_{54}$ части отъ $^6/_7$, слѣдовательно $14-{}^7/_{54}=13^{47}/_{54}$); выводится правило дѣленія на дробь. Въ концѣ слѣдуютъ задачи на простое тройное правило, гдѣ встрѣчается умноженіе и дѣленіе на дробь, и задачи эти рѣшаются сначала безъ правила дѣйствій, а потомъ и по правилу—составленіемъ формулы и ея сокращеніемъ.

7) Седьмая степень—заключаетъ снова всѣ дѣйствія съ дробями и тройное правило въ связи съ составными именнованными числами причемъ наименованія вводятся послѣдовательно, напримѣръ, приводятся задачи на вычисленіе времени, гдѣ входятъ сутки и ихъ части, потомъ—недѣли, мѣсяцы и годы и ихъ части, затѣмъ уже задачи на вычисленіе времени какого-либо событія. При каждомъ отдѣльномъ дѣйствіи въ этомъ отдѣлѣ приводятся образцы рѣшенія одной и той же задачи по различнымъ пріемамъ, то-есть, обращая составное именованное число въ простое и не обращая, а также и различные упрощенные пріемы; такъ, напримѣръ, 9-я часть 5 талеровъ 23 зильбергрошей 6 пфенниговъ опредѣляется по 9 различнымъ пріемамъ (стр. 101).

Наконецъ, послѣднія *пять степеней* содержатъ въ себѣ изученіе на частныхъ примѣрахъ прямыхъ и обратныхъ отношеній между числами въ самыхъ разнообразныхъ случаяхъ, а также и пропорціональности чиселъ, не переходя къ обозначенію и изученію свойствъ пропорціи. Всѣ эти отдѣлы переполнены задачами, относящимися ко всевозможнымъ случаямъ вычисленія въ практической жизни. Главнѣйшіе отдѣлы этихъ задачъ слѣдующіе: цѣпное правило съ его подраздѣленіями: а) переводъ денегъ, б) размѣнъ денегъ, в) правило векселей, г) покупка, заработная плата, доходъ и расходъ, д) правило процентовъ, сложное тройное правило, правило цензовъ, правило срочныхъ уплатъ. Правило учета. Правило товарищества. Правила смѣшенія обоихъ родовъ. Задачи на вычисленіе пробы и градуснаго содержанія спирта. Вычисленіе площадей и объемовъ.

Въ курсѣ Генчеля нѣтъ статьи о десятичныхъ дробяхъ, вѣроятно, потому, что этотъ отдѣлъ не входитъ въ программу курса народной школы, хотя есть много статей, какъ видно изъ разсмотрѣнія содержанія книги, выходящихъ за предѣлы этой программы.

Двѣ части сочиненія Генчеля составляютъ солидный томъ въ 480 страницъ убористаго шрифта и представляютъ драгоцѣнную находку для учителя на случай разъясненія вопросовъ, касающихся самыхъ крайнихъ мелочей въ разработкѣ учебнаго матеріала при прохожденіи курса. Самъ Генчель, предвидя, что учителя будутъ его упрекать въ такой мелочности разработки курса, говоритъ, обращаясь къ учителю: „Можетъ быть, ты станешь смѣяться надъ такими мелочами? Какъ хочешь. Я же не буду смѣяться надъ тобою, видя, какъ ты безпомощно будешь стоять въ классѣ, не будучи въ состояніи, при всей твоей учености, заставить учениковъ понять тебя".

При обзорѣ всего курса Генчеля находимъ въ немъ слѣдующія особенности: а) всѣ упражненія начинаются съ нагляднаго и ведутся сначала устно, а потомъ и письменно, такъ что дѣти наглядно на рѣшеніи устныхъ задачъ знакомятся съ содержаніемъ предмета урока, а потомъ уже закрѣпляютъ частные пріемы выводомъ общаго правила и прилагаютъ это правило къ вычисленію болѣе и болѣе сложныхъ примѣровъ; б) слѣдовательно во всемъ курсѣ методъ изслѣдованія и усвоенія истинъ исключительно синтетическій; можно сказать, что всякая послѣдующая строка есть обобщеніе предшествовавшей. Усложненіе выводовъ и упражненій постепенно возрастаетъ, такъ что возрастаніе это почти незамѣтно учащимся. в) Начиная уже съ третьей степени (1-я часть) при каждомъ отдѣлѣ приведено много задачъ подъ названіемъ задачъ алгебраческихъ, рѣшаемыхъ безъ всякихъ правилъ при помощи одного соображенія и разсужденія; но пріемъ рѣшенія начинается отъ неизвѣстной и задача формулируется въ уравненіе. Приведу образецъ двухъ задачъ такого рода на числа цѣлыя и дробныя: „9 разъ взятое неизвѣстное число четырьмя меньше 40. Какое это число? $(9x+4=40)$" и „Сумма двухъ чиселъ $10^2/_3$; какъ велико каждое число, если одно на $4^1/_2$ больше другого? $(x+x+4^1/_2=10^2/_3)$". г) Генчель отдаетъ передъ другими задачами преимущество задачамъ на тройное правило и, начиная съ 4 отдѣла, то-есть съ конца первой части и во всей второй, эти задачи составляютъ половину содержимаго во всей книгѣ.

Другая также замѣчательная книга Генчеля—это сборникъ задачъ подъ заглавіемъ: „Hundert Aufgaben elementarisch gelöst", гдѣ собраны задачи подобныя тѣмъ, на которыя я указалъ въ послѣднихъ пяти отдѣлахъ его сочиненія. Это тѣ именно задачи, которыя въ ариѳметикахъ и сборникахъ помѣщаются въ концѣ курса подъ названіемъ задачъ на различныя правила и рѣшаются посредствомъ пропорціи и по способу приведенія къ единицѣ. Въ этомъ сборникѣ указанъ и подробный пріемъ рѣшенія такихъ задачъ безъ помощи пропорцій, что составляетъ едва ли не первую, извѣстную мнѣ, попытку изложенія въ системѣ способа рѣшенія подобныхъ задачъ посредствомъ приведенія къ единицѣ, хотя самый-то способъ былъ извѣстенъ задолго до Генчеля. Сборникъ Генчеля изданъ въ 1837 году. Генчель говоритъ, что на рѣшеніи задачъ онъ старается не о томъ, чтобы ученики прилагали къ нимъ какое-либо извѣстное имъ правило, а чтобы они отыскивали пріемъ рѣшенія задачи изъ ея анализа и познанія отношеній, въ которыхъ находятся другъ къ другу данныя въ задачѣ числа. Слѣдовательно въ задачахъ этихъ онъ бьетъ исключительно на развитіе соображенія.

Къ недостаткамъ разсматриваемаго сочиненія касательно метода можно отнести слѣдующее: 1) Дѣйствія надъ числами вытекаютъ не какъ результатъ всесторонняго изученія числа, а напротивъ числа прилаживаются къ дѣйствіямъ; хотя въ началѣ дѣйствія производятся надъ небольшими и постепенно возрастающими числами, и правила совершенія дѣйствій выводятся тогда уже, когда является въ нихъ необходимость при письменномъ вычисленіи съ большими числами. 2) Даже въ предѣлѣ чиселъ отъ 1 до 10 Генчель раздѣляетъ уже дѣйствія на двѣ рубрики: а) сложеніе и вычитаніе и б) умноженіе и дѣленіе, на основаніи ихъ противоположности при сложеніи и разложеніи чиселъ, и, начиная съ чиселъ большихъ 10, уже изучаетъ каждое дѣйствіе въ отдѣльности; такъ что, опять-таки, какъ и у Дистервега, ученикъ на первомъ планѣ видитъ дѣйствіе, а не число. То же самое можно сказать и о статьѣ, въ которой изучаются дроби. Вмѣсто того, чтобы изъ соотношеній чиселъ на рѣшеніи практическихъ задачъ вывести понятіе о дѣйствіи и правило его совершенія, ученикъ извѣстное дѣйствіе прилаживаетъ къ рѣшенію практическихъ вопросовъ и вычисленію примѣровъ. 3) Задачи, приведенныя во всемъ курсѣ, чрезвычайно просты и однообразны до того, что врядъ-ли могутъ поддержать вниманіе учащихся и возбудить въ нихъ охоту къ рѣшенію задачъ. Большинство задачъ касается опредѣленія цѣнности какого-либо количества матеріала, по данной цѣнѣ другого количества того же матеріала. 4) Вмѣстѣ съ необыкновенною полнотою чисто практической разработки матеріала курсъ чрезвычайно растянутъ, такъ что если продѣлывать съ учениками весь курсъ въ такой послѣдовательности и со всѣми упражненіями, то, во-первыхъ, потребуется весьма много времени, во-вторыхъ, можно утомить вниманіе учащихся и, пожалуй, задержать ихъ развитіе. Хотя въ то же время слѣдуетъ прибавить, что опытный учитель легко можетъ отличить, что̀ въ этомъ курсѣ можно обойти и въ чемъ слѣдуетъ держаться той подробности, какая существуетъ въ книгѣ Генчеля. 5) Въ концѣ-концовъ, курсъ Генчеля ведетъ преимущественно къ выработкѣ въ ученикахъ навыка къ быстрому устному и письменному вычисленію, а не къ систематическому усвоенію Ариѳметики въ ея научной формѣ. Безъ сомнѣнія, этого нельзя поставить въ упрекъ Генчелю, имѣвшему въ виду народную школу, гдѣ именно первая цѣль и должна быть преслѣдуема, но курсъ его мало примѣнимъ къ нашимъ среднимъ общеобразовательнымъ заведеніямъ.

На русскомъ языкѣ имѣется весьма хорошо составленное по плану Генчеля руководство „Практическая Ариѳметика Гурьева“. Только на первой степени сдѣлано видоизмѣненіе, именно: сложеніе и вычитаніе разсматриваются отдѣльно каждое, умноженіе и дѣленіе не разсматриваются отдѣльно, а приведены упражненія, какъ выводы изъ упражненій на сложеніе и вычитаніе. Кромѣ того, добавлены статьи, каковы: десятичныя дроби, непрерывныя дроби, нахожденіе общаго наибольшаго дѣлителя посредствомъ послѣдовательнаго дѣленія, пропорціи и рѣшеніе задачъ на различныя правила посредствомъ пропорцій. Представляя весьма полную методическую разработку всего курса Ариѳметики и заключая въ себѣ много практическихъ задачъ, руководство это отличается отъ руководства Генчеля однимъ достоинствомъ, что оно не такъ растянуто и болѣе примѣнимо при прохожденіи курса въ нашихъ среднихъ общеобразовательныхъ заведеніяхъ, хотя, безъ сомнѣнія, первыя четыре степени, особенно подробно и обстоятельно изложенныя, могутъ быть только руководствомъ для учителя, а не для ученика.

Минуя затѣмъ сочиненіе Кранке „Leitfaden und Exempelbuch für den Elementarunterricht im Rechnen“. Hannover. 1847 (пятое изданіе) и другія пояснительныя къ нему его же, такъ какъ въ нихъ есть много общаго какъ съ методомъ школы Песталоцци, такъ и съ методомъ Грубе, на что указываетъ и самъ Грубе, говоря, что начало своего курса онъ основалъ на тѣхъ же положеніяхъ, которыя принять Кранке,—я перехожу къ изложенію метода Грубе, по его сочиненію „Leitfaden für das Rechnen in der Elementarschule nach den Grundsätzen einer heuristischen Methode“. Berlin. 1873 (пятое изданіе). Я позволяю себѣ изложить содержаніе этой книги нѣсколько подробнѣе изложенія другихъ сочиненій, во-первыхъ, потому, что методъ Грубе у насъ во многихъ школахъ давно уже принятъ при начальномъ обученіи дѣтей Ариѳметикѣ,—во-вторыхъ, потому, что не всѣми у насъ этотъ методъ одинаково понимается, и иногда подъ именемъ метода Грубе разумѣютъ такое расположеніе и преподаваніе курса, о которомъ Грубе вовсе и не думалъ; и, наконецъ, въ-третьихъ, потому, что мой методъ основанъ на тѣхъ же общихъ положеніяхъ, какъ и методъ Грубе, и въ нѣкоторыхъ подробностяхъ сходенъ съ нимъ. Въ виду третьяго обстоятельства я также довольно подробно остановился на изложеніи метода Генчеля, такъ какъ и онъ далъ мнѣ много указаній при составленіи моего курса. По плану Грубе весьма близко составлено Паульсономъ на русскомъ языкѣ руководство „Ариѳметика по способу нѣмецкаго педагога Грубе“. Паульсонъ такъ близко держался сочиненія Грубе, что всѣ его упражненія на отвлеченныхъ числахъ оставилъ безъ всякаго измѣненія, добавилъ только многія указанія для русскихъ учителей, значительно добавилъ задачъ и вообще увеличилъ число практическихъ упражненій; а начиная съ отдѣла, гдѣ входятъ числа любой величины, книга Паульсона представляетъ подстрочный переводъ книги Грубе. Излагая содержаніе сочиненія Грубе, я въ то же время сдѣлаю немногія указанія, гдѣ именно Паульсонъ отступилъ отъ него и гдѣ добавилъ *).

Грубе исходитъ изъ метода Кранке, приближающагося наиболѣе къ сущности счета и требующаго эвристическихъ пріемовъ со стороны учителя и самостоятельной работы со стороны ученика. На изученіи чиселъ первой сотни онъ избѣгаетъ всякаго раздѣленія счета и дѣйствія; едва только ученикъ узналъ какое-либо новое число въ натуральномъ порядкѣ чиселъ, тотчасъ онъ и вводитъ его во всѣ комбинаціи съ предшествовавшими числами. Разница между пріемами Кранке и Грубе состоитъ въ томъ, что первый всякое новое число вводитъ въ сравненіе преимущественно съ однимъ предшествовавшимъ, а Грубе— со всѣми, начиная отъ единицы.

По мнѣнію Грубе, предѣлъ числа, вообще доступный и вполнѣ наглядный при вычисленіяхъ, есть отъ 1 до 100, и всякое вычисленіе съ числами, выходящими за этотъ предѣлъ, производится посредствомъ соотношенія ихъ съ числами первой сотни; слѣдовательно, въ этомъ предѣлѣ всякое число, со всѣми его разнообразными свойствами, должно быть такъ усвоено учениками, чтобы они дѣйствительно могли безъ затрудненія пользоваться имъ при всѣхъ дальнѣйшихъ вычисленіяхъ. Различныя дѣйствія съ числомъ вытекаютъ сами собою изъ всесторонняго сравненія отдѣльныхъ чиселъ и всѣ практическія задачи служатъ только для того, чтобы болѣе уяснить понятіе о числѣ отвлеченномъ, составляющемъ собственно предметъ изученія. Различныя упражненія надъ отдѣльнымъ числомъ должны располагаться такъ, чтобы одно вытекало отъ другого и взаимно съ нимъ связывалось. Только такимъ образомъ можно положить прочное основаніе, какъ для быстраго устнаго вычисленія, такъ и для развитія основательнаго математическаго соображенія. Изучивши числа первой сотни, ученикъ получаетъ необходимый матеріалъ и пріемъ для всѣхъ дальнѣйшихъ выводовъ, дѣйствій и упражненій.

Сравнивая свой методъ съ методомъ Шольца, Грубе говоритъ: «по методу Шольца, чтобы ученикъ узналъ четыре дѣйствія съ числами, онъ долженъ проработать 20 параграфовъ и съ каждымъ дѣйствіемъ онъ знакомится отрывочно, безъ связи съ другими, а въ концѣ ему

*) Въ 1873 году изданъ г. Эвальдомъ переводъ пятаго изданія книги Грубе подъ заглавіемъ: „Руководство къ начальной Ариѳметикѣ въ элементарной школѣ“. Въ переводѣ нѣмецкія единицы различныхъ мѣръ замѣнены русскими.

даются упражненія сразу на всѣ дѣйствія; всѣ эти 20 параграфовъ вмѣстѣ съ послѣдними практическими упражненіями я соединяю въ одинъ, и притомъ для одного числа». Затѣмъ, сравнивая свой пріемъ изученія дробей съ пріемомъ Дистервега, Грубе говоритъ: «Дистервегъ, для сообщенія ученикамъ понятій о дроби и ея свойствахъ, изучаетъ ее по различнымъ рубрикамъ, каковы: предварительныя упражненія относительно происхожденія дроби, обращенія дроби въ цѣлое число умноженіемъ ея на знаменателя, изображеніе цѣлаго числа въ видѣ дроби, увеличеніе и уменьшеніе дробей, изображеніе дроби въ различныхъ видахъ безъ измѣненія величины, сложеніе, вычитаніе дробей и т. д.; всѣ эти упражненія я продѣлываю съ одною дробью; такъ напр., на изученіи $^1/_6$ я вывожу всѣ свойства дробей и дѣйствія съ ними». Нѣтъ надобности, говоритъ Грубе, учить счету такимъ образомъ, какъ учитъ напримѣръ, Дистервегъ, что одна черта да еще одна черта будетъ двѣ черты; двѣ черты да одна будетъ три и т. д.; что за однимъ слѣдуетъ два, за двумя три и т. п.; что одинъ есть единожды 1, два есть дважды 1 и т. п. Всѣ эти упражненія выходятъ у Грубе сами собою и часто повторяются при упражненіи съ каждымъ новымъ числомъ. Упражненія въ одномъ счетѣ присчитываніемъ единицъ ведутъ не къ осязательному пониманію сущности числа, но къ весьма легкому механическому упражненію памяти въ языкѣ счета. Число изучается основательно не тогда, когда цѣлый рядъ сравнивается съ единицею, двумя, тремя и т. д., но когда каждое отдѣльное число сравнивается съ каждымъ числомъ предшествовавшимъ. Подобно тому, какъ въ начальной геометріи, при наглядномъ ея изученіи, мы разсматриваемъ каждое тѣло со всѣхъ сторонъ и со всѣми его признаками, относительно поверхности, линій, угловъ и т. д., также раціонально, естественно и цѣлесообразно держаться того же пріема и при изученіи отдѣльнаго числа. Упражненія въ какомъ-либо дѣйствіи надъ числами безъ связи ихъ между собою въ одно цѣлое непроизводительны, такъ какъ они составляютъ только часть цѣлаго.

Грубе не раздѣляетъ рѣзко устнаго и письменнаго упражненія съ числами, онъ говоритъ, что эти два способа вычислять должны быть тѣсно связаны между собою въ каждомъ урокѣ при начальномъ обученіи Ариѳметикѣ, должны быть зависимы одинъ отъ другого. Въ началѣ курса между этими двумя пріемами не должно быть никакого различія: оба вычисленія, устное и письменное, суть вычисленія умственныя. Какъ только у ученика установилось посредствомъ наглядныхъ пособій ясное представленіе разсматриваемаго числа и его соотношенія къ другимъ числамъ, нужно наглядно понятое число тотчасъ изобразить цифрою, какъ тоже соотвѣтствующимъ нагляднымъ знакомъ, чтобы такимъ образомъ число какъ-бы крѣпче амальгамировалось въ памяти наглядностью цифры. Затѣмъ всѣ упражненія, продѣланныя устно, производятся и письменно для большей отчетности, точности и закрѣпленія въ памяти. Въ послѣдующемъ курсѣ съ числами высшихъ разрядовъ письменному вычисленію нужно по необходимости отдать преимущество.

Грубе также не совѣтуетъ раздѣлять вычисленій съ числомъ отвлеченнымъ отъ прикладного практическаго вычисленія, а требуетъ вести ихъ въ органической связи. Онъ говоритъ, что недостаточно, если число только иногда будетъ имѣть приложеніе на практикѣ; всестороннее изученіе числа должно идти всегда вмѣстѣ съ практическимъ приложеніемъ; всякое число должно изучаться, такъ-сказать, въ его наготѣ и въ одеждѣ приложенія. Познаніе числа тогда будетъ происходить въ цѣльности, когда оно познается разомъ съ обѣихъ сдоронъ, то-есть со стороны его отвлеченнаго отношенія къ другимъ числамъ и со стороны его приложенія къ практическимъ вопросамъ жизни. Кто будетъ упражняться только въ первомъ, тотъ будетъ хорошо совокуплять числа во всѣхъ указанныхъ ему дѣйствіяхъ, но не будетъ умѣть *вычислять*. Напримѣръ, когда ученикъ познаетъ число 6 въ его отвлеченныхъ комбинаціяхъ, каковы 6×1 или 3×2 и т. п., то немедленно нужно ввести это число съ тѣми же комбинаціями и въ практическое приложеніе, имѣя въ виду, безъ сомнѣнія, чтобы содержаніе практическихъ вопросовъ не выходило изъ умственнаго кругозора ученика; напр., если одна булка стоитъ 2 коп., то сколько стоютъ 3 такихъ булки? и т. п. При этомъ слѣдуетъ замѣтить, что всякое прикладное элементарное вычисленіе есть вычисленіе съ такъ называемыми *именованными* числами, потому что число всегда разсматривается въ связи съ извѣстными предметами, будутъ ли то черточки, палочки, или лоты и футы. И чтобы дитя могло составить абстрактное понятіе о числѣ отвлеченномъ, должно мѣнять почаще наименованіе чиселъ, входящихъ въ упражненія. Если же давать ученику только примѣры, въ которыхъ обыкновенно употребляются выраженія: *прибавить, отнять, взять столько-то разъ, уменьшить во столько-то разъ* и т. п., то тутъ нѣтъ еще практическаго приложенія, такъ-какъ дѣйствіе, которое нужно произвести надъ числами, прямо указывается. Важно, чтобы ученикъ самъ открылъ прямую связь между содержаніемъ практическаго вопроса и извѣстнымъ ему соотношеніемъ чиселъ, а потому прикладное вычисленіе должно совершаться на рѣшеніи практическихъ задачъ. Такимъ образомъ, въ чисто практическомъ вопросѣ: «если одна булка стоитъ 2 коп., то сколько стоютъ 3 такихъ булки?» ученикъ самъ собою долженъ дойти до обобщенія: «если я булокъ возьму втрое болѣе, то долженъ и плату за нихъ увеличить втрое», тогда въ умѣ его и выступаетъ связь 2 коп.$\times$3 какъ средство рѣшенія задачи, а зная, что $2\times3=6$, онъ рѣшаетъ задачу. Если же ученикъ касательно 6 дошелъ до того, что узнаетъ его отвлеченное отношеніе въ приложеніи на практикѣ и пользуется имъ для рѣшенія частныхъ вопросовъ, то онъ это 6 изучилъ всесторонне и основательно. Такимъ образомъ, ученикъ самъ собою выводитъ понятіе объ изучаемомъ числѣ изъ комбинаціи его отвлеченныхъ отношеній къ другимъ числамъ и практическихъ его приложеній. Не слѣдуетъ думать, что если при изученіи, напримѣръ, числа 6 входятъ задачи на такъ называемое умноженіе и дѣленіе, то что это трудно для маленькихъ дѣтей. Непосредственная связь отвлеченнаго и прикладного вычисленія облегчаетъ ребенку самый процессъ вычисленія. Если находящіяся передъ ученикомъ 6 палочекъ разложить на 3 кучки, по 2 палочки въ каждой, то ученикъ легко можетъ въ этихъ палочкахъ подразумѣвать копѣйки, которыя покупатель долженъ заплатить за булки. А видя наглядно, какъ изъ двоекъ составляется шесть, онъ легко найдетъ сродство этого отношенія чиселъ съ цѣною всѣхъ купленныхъ булокъ и узнаетъ пріемъ вычисленія этой цѣны безъ всякаго правила умноженія. Грубе прибавляетъ, что тѣ, которые отдѣляютъ задачи практическія, по ихъ особенному характеру, отъ упражненій съ числомъ въ отвлеченномъ видѣ, не знаютъ сущности прикладного вычисленія. Число въ задачѣ всегда остается при своемъ существенномъ значеніи.

Таковы основныя мысли, слѣдующія за подробнымъ изложеніемъ главнѣйшихъ психологическихъ положеній, приведенныхъ въ предисловіи, которыя Грубе предпосылаетъ своему курсу, разработанному хотя въ меньшей подробности, нежели курсъ Генчеля, но понятному во всемъ своемъ содержаніи всякому, кто основательно познакомился съ этими положеніями. Теперь и разсмотримъ, на сколько возможно подробно, осуществленіе этихъ основныхъ положеній на практикѣ въ самомъ курсѣ.

Общее содержаніе всего курса Грубе состоитъ въ изученіи цѣлыхъ чиселъ отвлеченныхъ и именованныхъ и простыхъ дробей. Такъ-какъ курсъ свой онъ предназначаетъ для начальныхъ школъ, то въ немъ нѣтъ дробей десятичныхъ и непрерывныхъ, а также пропорцій и различныхъ спеціальныхъ ариѳметическихъ правилъ.

Время, необходимое для прохожденія такого курса, Грубе полагаетъ 4 года, по 3 часа еженедѣльно, причемъ, какъ извѣстно, въ нѣмецкихъ школахъ полагается до 40 учебныхъ недѣль въ году.

Возрастъ дѣтей, начинающихъ обучаться, 6 или 7 лѣтъ.

По годамъ курсъ распредѣляется такъ.

Первый годъ. Изученіе чиселъ отъ 1 до 10.

Второй годъ. Изученіе чиселъ отъ 10 до 100.

Третій годъ. Въ первое полугодіе числа отъ 100 до 1000 : числа любой величины. Нумерація, составъ чиселъ и ихъ разложені на составные элементы. Во второе полугодіе изученіе четырехъ дѣй ствій съ числами любой величины.

Четвертый годъ. Въ первое полугодіе наглядныя упражнені съ дробями и всестороннее изученіе первыхъ простѣйшихъ дробей. В второе полугодіе—дѣйствія съ дробями по правиламъ.

Грубе указываетъ вполнѣ справедливо, что при такомъ распре дѣленіи курса ученикъ въ каждый годъ, даже въ полугодіе, изучает нѣчто самостоятельное цѣлое, такъ что если бы ему пришлось оста вить школу и послѣ одного года обученія, онъ все-таки въ миніатюр узналъ всю Ариѳметику и при дальнѣйшемъ общемъ развитии может самъ это маленькое зерно развить далѣе.

Паульсонъ, примѣнимо къ русской школѣ, распредѣляетъ курс Грубе нѣсколько иначе, именно на изученіе чиселъ первой сотни он опредѣляетъ полтора года. Въ первое полугодіе изучаются числа от 1 до 10, а во второе и третье отъ 10 до 100.

Переходя къ изложенію самаго курса, Грубе даетъ учителю нѣ сколько полезныхъ практическихъ указаній, относительно классной ра боты и частныхъ пріемовъ преподаванія; эти указанія приведены и ещ съ добавленіями для русскихъ учителей въ книгѣ Паульсона.

Итакъ, въ *первый годъ* обученія Ариѳметикѣ дѣти изучаютъ по слѣдовательно всѣ числа одно за другимъ, начиная съ единицы и окан чивая десятью; новое число сравнивается съ каждымъ изъ предшество вавшихъ и имъ измѣряется при помощи разностнаго или краткаг отношенія между числами, и изъ этого сравненія и измѣренія чист объективнымъ способомъ вытекаютъ сами собою четыре дѣйствія с числомъ—во взаимной связи, такъ что одно дѣйствіе вытекаетъ изъ дру гого. Такимъ образомъ, если $8=2+2+2+2$, то $8=4$ раза $2=4\times2$ также $8-2-2-2=2$ и, наконецъ, 2 содержится въ 8 четыре раза $2:8=4$.

Это сравненіе и измѣреніе совершается при помощи имѣющихся подъ рукой наглядныхъ пособій, а при достаточномъ развитіи учени ковъ и безъ нихъ. Сравненіе и измѣреніе изучаемаго числа со всяким другимъ выражается четырьмя табличками, соотвѣтственно четырем дѣйствіямъ, и таблички эти составляются учениками устно или пись менно. За нагляднымъ сравненіемъ числа съ предшествовавшими слѣ дуютъ упражненія въ *быстромъ вычисленіи* и упражненія въ нѣкото рыхъ болѣе трудныхъ *комбинаціяхъ* изучаемаго числа въ отвлеченномъ видѣ и въ разбивку, какъ для испытанія того, перешло ли наглядно воспринятое численное отношеніе въ понятіе ученика, такъ и для укрѣпленія его въ памяти въ отвлеченномъ видѣ. Эти быстрыя вычисленія и комбинаціи производятся посредствомъ рѣшенія формулъ, составляемыхъ учителемъ на доскѣ, или диктуемыхъ ученикамъ для записыванія ихъ на доскахъ и посредствомъ разнообразныхъ вопросовъ, предлагаемыхъ ученикамъ не въ порядкѣ сравненія числа съ предшествовавшими, какъ прежде, а въ разбивку. При этомъ, форма вопросовъ, относящихся къ одному и тому же отношенію числа, мѣняется, и ученики изъ множества подобныхъ упражненій сами собою доходятъ до обобщенія различныхъ отношеній и комбинацій между числами. Параллельно съ изученіемъ отвлеченныхъ численныхъ отношеній идутъ *практическія* ихъ *приложенія* къ рѣшенію задачъ. Здѣсь уже самъ ученикъ долженъ на основаніи собственнаго соображенія найти, какое изъ извѣстныхъ ему соотношеній изучаемаго числа приложимо къ рѣшенію данной задачи и дѣйствительно воспользоваться этимъ соотношеніемъ, то-есть рѣшить задачу. Такимъ образомъ, при изученіи каждаго отдѣльнаго числа вычисленіе отвлеченное и прикладное, устное и письменное, соображеніе и навыкъ идутъ рука объ руку, помогая другъ другу, и въ результатѣ даютъ всестороннее знакомство съ числомъ и сознательное употребленіе его при вычисленіяхъ.

Итакъ, изученіе каждаго числа Грубе распредѣляетъ на четыре упражненія: 1) измѣреніе числа и сравненіе его съ каждымъ предшествовавшимъ (Messen und Vergleichen), начиная всегда съ сравненія съ единицею; 2) быстрый счетъ (Schnellrechnen); 3) комбинаціи изучаемаго числа съ предшествовавшими въ разбивку (Kombiniren) и 4) прикладное число, то-есть практическія задачи, въ которыя входятъ число изучаемое и всѣ предшествовавшія (angewandte Zahl).

Упражненія производятся: а) надъ предметами видимыми и осязаемыми (наглядныя пособія); б) надъ предметами извѣстными ученикамъ, но не находящимися передъ глазами (задачи) и в) надъ отвлеченными числами (формулы).

Покажу на примѣрѣ, какъ изучаетъ Грубе съ учениками число 6; изъ этого видно будетъ во всей подробности, какимъ образомъ основныя положенія методики, касающіяся этого вопроса, Грубе осуществилъ на практикѣ.

Посредствомъ наглядныхъ пособій, обыкновенно, пальцевъ или палочекъ, ученики образуютъ число 6 прибавленіемъ къ пяти одной единицы. При этомъ, они на доскахъ пишутъ 6 черточекъ или кружковъ, а затѣмъ имъ указывается и написаніе цифры 6.

1) Измѣреніе и сравненіе.

а) *Съ единицею*:

Если нагляднымъ пособіемъ служатъ черточки, проведенныя учениками на своихъ доскахъ или учителемъ на классной доскѣ, то упражненія идутъ такимъ образомъ: „Изъ сколькихъ черточекъ составилось наше число? Сосчитайте. Отсчитывайте по одной черточкѣ отъ 6. Сколько разъ нужно взять по одной черточкѣ, чтобы составить 6? Во сколько разъ 6 больше одного? Одна черточка какую часть 6 составляетъ? Сколько разъ одна черточка заключается въ 6?“ и т. п. Такія же упражненія въ случаѣ затрудненій учениковъ производятся на пальцахъ ученика, поднимаемыхъ вверхъ, по командѣ учителя, на камешкахъ, палочкахъ, раскладываемыхъ учениками, или учителемъ по ихъ указанію. Результатомъ этого разговора съ дѣтьми является письменная или устная табличка, составляемая учениками, по извѣстному имъ образцу, въ одномъ неизмѣнномъ порядкѣ. Учителю достаточно сказать ученикамъ: „сравните 6 съ единицей“, и они говорятъ или пишутъ слѣдующую табличку:

$$1+1+1+1+1+1=6$$
$$6\times1=6$$
$$6-1-1-1-1-1=1$$
$$1:6=6$$

Множителя и дѣлителя Грубе всегда ставитъ передъ множимымъ и дѣлимымъ, потому-что по смыслу того требуетъ самое чтеніе формулы умноженія и дѣленія (6 разъ 1 или 1 содержится въ 6). Знаки дѣйствій, при письменномъ составленіи табличекъ, являются какъ обобщеніе словъ для сокращенія письма, точно также какъ цифра есть сокращенный знакъ числа.

б) *Съ двумя*:

По указанію учителя дѣти раскладываютъ палочки или чертятъ кружки и черточки попарно, пока составится 6. Затѣмъ идетъ разговоръ: „Сколько двоекъ въ 6? Сколько разъ нужно взять по двѣ палочки, чтобы получить 6? Сосчитайте (2 да 2 четыре, четыре да 2 шесть). Отнимайте отъ 6 по 2. Сколько разъ можно отнять по 2 отъ 6? Сколько разъ 2 содержится въ 6?“ и т. п. Результатомъ разговора является табличка:

$$2+2+2=6$$
$$3\times2=6$$
$$6-2-2=2$$
$$2:6=3$$

Вторая строка есть очевидно сокращенная первая, третья прямо и непосредственно вытекаетъ изъ первой, четвертая есть обобщеніе всѣхъ первыхъ трехъ. Такъ что всѣ соотношенія числа 6 къ 2 находятся между собой въ неразрывной связи, поясняя другъ друга. Точно также составляются и слѣдующія таблички:

в) *Съ тремя:*

$3+3=6$
$2\times3=6$
$6-3=3$
$3:6=2$

г) *Съ четырьмя:*

$4+2=6$
$1\times4+2=6$
$6-4=2$
$4:6=1\ (2)$

д) *Съ пятью:*

$5+1=6$
$1\times5+1=6$
$6-5=1$
$5:6=1\ (1)$

Остатокъ отъ содержанія одного числа въ другомъ пишется при частномъ въ скобкахъ и строка, напримѣръ, $4:6=1$ (2) читается такъ: 4 содержится въ 6 одинъ разъ съ остаткомъ 2.

Затѣмъ идутъ упражненія въ сравненіи числа 6 съ предшествовавшими на предметахъ, извѣстныхъ дѣтямъ, но отсутствующихъ; напримѣръ, сравнивается число ногъ у различныхъ животныхъ, имѣющихъ по 6, по 4, по 2 ноги. Главная мысль этихъ упражненій та, чтобы дѣти могли отвлечься отъ чисто наглядныхъ предметовъ и перенести число непосредственно въ сознаніе, что составляетъ первую ступень обобщенія: дѣти представляютъ себѣ отсутствующіе предметы и считаютъ ихъ не руками и не глазами, а мысленно.

Изъ вышеприведенныхъ табличекъ дѣти сами извлекаютъ, для обобщенія сравненія изучаемаго числа въ одной и той же комбинаціи съ каждымъ изъ предшествовавшихъ и для повторенія прежде пройденнаго, слѣдующія таблички:

$6=5+1,\ 4+2,\ 3+3,\ 2+4,\ 1+5$
$5=6-1,\ 4+1,\ 3+2,\ 2+3,\ 1+4$
$4=6-2,\ 5-1,\ 3+1,\ 2+2,\ 1+3$
$3=6-3,\ 5-2,\ 4-1,\ 2+1,\ 1+2$
$2=6-4,\ 5-3,\ 4-2,\ 3-1,\ 1+1$
$1=6-5,\ 5-4,\ 4-3,\ 3-2,\ 2-1$
$6=6\times1,\ 3\times2,\ 2\times3,$
$3=\frac{1}{2}\times6,\ 2=\frac{1}{3}\times6,\ 1=\frac{1}{6}\times6.$

Такимъ образомъ частымъ повторенiемъ одного и того же въ различныхъ видахъ дѣти усваиваютъ таблички сложенiя, вычитанiя и умноженiя.

2) Быстрый счетъ.

Это упражненiе состоитъ въ томъ, что учитель или пишетъ на доскѣ формулу, и ученики, по окончанiи ея написанiя, тотчасъ говорятъ результатъ вычисленiя, или учитель ведетъ устно какой-либо счетъ, и ученики, когда учитель закончилъ, тотчасъ даютъ отвѣтъ.

Формула:

$$(1\times2)+(1\times3)-(2\times2)+(4-1)+2=?$$

$4+2-3$ во сколько разъ менѣе 6-ти? и т. п.

Устный счетъ:

Къ 2 прибавить 3, отнять 4, взять полученное число 3 раза и узнать, сколько разъ послѣднее число содержится въ 6. Отъ 6 отнять 4, къ полученному числу прибавить 1 и полученное число взять 2 раза. Сколько получится? Отъ 6 пфенниговъ я беру 1 и еще 2 и еще 3, сколько у меня останется? Я имѣю 1 талеръ и еще 3 и еще 2 и долженъ отдать 2 талера и еще 1, сколько у меня останется? и т. п.

3) Комбинацiи въ разбивку.

Упражненiе состоитъ въ томъ, что или вопросы предлагаются нѣсколько въ иной формѣ, нежели прежде, или въ томъ, что число сравнивается съ другими числами не послѣдовательно, а въ разбивку, и притомъ преимущественно берется кратное отношенiе числа къ числамъ предыдущимъ. Приведу рядъ вопросовъ для числа 6.

„Сколько будетъ трижды 2, дважды 3?

„Какое число можно отнять 3 раза отъ 6 и только 2 раза отъ 4?

„На сколько половина 6 больше половины 4 и на сколько она менѣе 5?

„Я отнялъ нѣкоторое число 2 раза отъ 6 и въ остаткѣ еще получилось 2. Какое число я отнялъ?

„Сколько разъ треть 6-ти содержится въ 4-хъ?

„Половина 4-хъ какой части 6-ти равняется?“

4) Прикладное число.

Грубе задачи на изучаемое число помѣщаетъ обыкновенно послѣ перечисленныхъ трехъ упражненiй съ числомъ; но изъ этого не слѣдуетъ заключать, что исключительно задачи рѣшаются какъ бы для завершенія знакомства учениковъ съ числомъ: онѣ приводятся въ концѣ потому, что иногда попадаются въ нихъ такія отношенія чиселъ, которыя легче познаются при наглядныхъ пособіяхъ; но легкія задачи и вопросы на конкретныя числа вводятся и при самомъ процессѣ изученія числа, какъ это видно изъ основныхъ положеній Грубе и изъ задачъ, приводимыхъ имъ часто при второмъ и третьемъ родѣ упражненія съ числомъ.

Привожу изъ книги Грубе задачи на число 6.

„6 пфенниговъ составляютъ 1 зексеръ (Sechser). Сколько разъ въ одномъ зексерѣ заключается по одному, по 2, по 3 пфеннига?

„Сколько лотовъ въ 6 квентенахъ?

„Для одного платья употреблено 5 квентеновъ шелку, а для другого только 1 лотъ. Во сколько разъ на второе платье пошло шелку менѣе, чѣмъ на первое?

„Если квентенъ шелку стоитъ 1 грошъ, то сколько нужно заплатить за шелкъ для второго платья?

„Вильгельмъ за 1 зексеръ купилъ 3 булки. Сколько заплатилъ онъ за каждую?

„Если три катушки нитокъ стоютъ 6 пфенниговъ, то сколько стоитъ одна?

„Сколько булокъ, цѣною каждая въ 3 пфеннига, можно купить на 1 зексеръ?

„Сколько стоитъ 3 листа писчей бумаги, если одинъ листъ стоитъ 2 пфеннига?

„Сколько листовъ бумаги можно купить на одинъ зексеръ, если листъ стоитъ 2 пфен., 1 пф.?

„Въ трехъ карманахъ я имѣю 6 яблокъ. Сколько въ каждомъ?“

Какъ видно, задачи эти не отличаются богатствомъ и разнообразіемъ содержанія и представляютъ собственно только варіацію прежнихъ упражненій. Въ этомъ отношеніи книга Паульсона значительно разнится отъ книги Грубе.

Главнѣйшимъ образомъ изученіе числа Паульсонъ ведетъ на наглядныхъ пособіяхъ и задачахъ. Изученіе числа въ отвлеченномъ видѣ и составленіе табличекъ у него является уже въ видѣ обобщенія. Чтобы удобнѣе прослѣдить эту разницу въ подробностяхъ и въ общемъ пріемѣ, привожу въ параллель изученіе числа 6 по указаніямъ, изложеннымъ въ книгѣ Паульсона.

Здѣсь упражненія не раздѣлены такъ строго по рубрикамъ, какъ у Грубе, а идутъ въ связи, вытекая одно изъ другого, и заканчиваются табличками. Прибавленіемъ одного къ пяти дѣти получаютъ 6, при помощи камешковъ или другихъ пособій. Идетъ разнообразная группировка 6 камешковъ на слагаемыя, и дѣти говорятъ, что 6 камешковъ состоятъ изъ 4 и 2, изъ 3 и 3, изъ 5 и 1 и т. д. Это упражненіе повторяется затѣмъ на черточкахъ, проводимыхъ учениками на доскахъ и потомъ уже, въ отвлеченномъ видѣ, дѣти говорятъ, что 6 равно 2+4, 3+2+1 и т. д.

Изъ 6 камешковъ, лежащихъ на столѣ, учитель нѣсколько накрываетъ рукою, и ученики по оставшимся угадываютъ, сколько закрыто. Со стола учитель беретъ въ руку нѣсколько камешковъ и спрашиваетъ, сколько не достаетъ до 6-ти.

Такимъ образомъ, дѣти посредствомъ предметовъ, находящихся у нихъ подъ руками при этихъ двухъ упражненіяхъ, составляютъ число 6 сложеніемъ предыдущихъ чиселъ и вычитаютъ изъ 6 всѣ предыдущія числа. По примѣрамъ, приведеннымъ въ книгѣ, видно, что это сложеніе и вычитаніе ведется не въ опредѣленномъ порядкѣ предшествовавшихъ чиселъ, а сразу въ разбивку.

Затѣмъ идутъ упражненія сразу на сложеніе и вычитаніе. Дѣти выбираютъ изъ мѣдныхъ монетъ 6 отдѣльныхъ копеекъ и рѣшаютъ такіе вопросы: На какія двѣ монеты можно промѣнять 6 коп.?. На какія 3 монеты? Какія 4 монеты можно получить за 6 отдѣльныхъ копеекъ? На какія 5 монетъ можно промѣнять 6 коп.?

Потомъ наглядныя пособія устраняются, и дѣти рѣшаютъ задачи въ томъ же порядкѣ, именно:

На сложеніе:

„Сколько ногъ у лошади съ ѣздокомъ? Въ моей квартирѣ на улицу выходитъ 4 окна, а на дворъ 2; сколько въ моей квартирѣ всего оконъ? У одного господина на конюшнѣ 3 гнѣдыя лошади и столько же вороныхъ; сколько у него всѣхъ лошадей? Ямщикъ впрягъ въ тяжелый возъ 2 лошади, онѣ однако не могли тронуть возъ съ мѣста; онъ впрягъ еще одну, потомъ еще 2 и, наконецъ, еще одну. Сколько онъ всего впрягъ лошадей?“

На вычитаніе:

„Изъ 6 молодыхъ деревъ вѣтеръ сломалъ 5, сколько осталось цѣлыхъ? Ученикъ позвалъ къ себѣ на именины шестеро товарищей, трое однако не пришли. Сколько же пришло къ нему? У родителей 6-еро дѣтей: 2 дочери и—сколько сыновей? Сережа съѣлъ 6 вишенъ, а братъ его пятью менѣе; сколько вишенъ съѣлъ послѣдній? Аннушка получила отъ папеньки копейку, отъ маменьки грошъ и отъ тетеньки алтынъ: изъ этихъ денегъ она отдала нищему двѣ копейки. Сколько у ней осталось?"

Для обобщенія и закрѣпленія въ памяти всего усвоеннаго учениками на этихъ упражненіяхъ имъ предлагаются вопросы въ отвлеченномъ видѣ: „Сколько 4 и 2? Шесть безъ трехъ? Три, два и одинъ? Четыре и 2 безъ одного?" и т. д.

Затѣмъ идутъ упражненія въ изученіи кратныхъ отношеній даннаго числа, въ раздѣленіи его на части и въ сравненіи этихъ частей между собою на различныхъ наглядныхъ пособіяхъ. „Вотъ тебѣ 6 отдѣльныхъ копеекъ. Сколько разъ ты можешь дать мнѣ изъ нихъ по 1 коп.? Сколько разъ по 2? Сколько разъ по 3, по 4—по 5—по 6?"

„Вотъ палочка; раздѣлимъ ее на 6 равныхъ частей. Какъ будетъ называться каждая изъ этихъ частей? Двѣ такія части составятъ сколько шестыхъ? А три—четыре—пять—шесть? Вотъ другая палочка такой же величины; разрѣжьте ее на три равныя части. Дайте мнѣ одну треть этой палочки и одну шестую другой. Которая часть больше? Сравните 2 шестыхъ съ одною третью,—три шестыхъ съ одною третью, съ двумя третями, 4 шестыхъ съ двумя третями. Вотъ третья палочка; разрѣжьте ее пополамъ и сравните 3 шестыхъ съ одною половиною" и т. д.

Подобныя же упражненія повторяются на сравненіи между собою монетъ въ 1 коп., гроша и алтына по отношенію ихъ къ 6 копейкамъ.

Потомъ рѣшаются задачи, относящіяся къ кратнымъ отношеніямъ изучаемаго числа, и, наконецъ, предлагаются ученикамъ вопросы въ общемъ видѣ: „Сколько будетъ шестью одинъ? Однажды шесть? Дважды 3? Два и 3? Три содержится въ 6 сколько разъ? Если 3 вычесть изъ 6, то сколько останется? Два въ четырехъ? Два въ шести? Половина шести? Треть шести? Сколько разъ одна треть шести содержится въ 4?" и т. д.

Какъ результатъ всѣхъ этихъ упражненій, являются пять приведенныхъ мною изъ книги Грубе табличекъ, въ которыхъ число 6 сравнивается съ 1, 2, 3, 4, 5, а также и тѣ таблички, которыя составляютъ выводъ изъ этихъ пяти.

Въ заключеніе при изученіи числа 6 Паульсонъ совѣтуетъ показать дѣтямъ сажень и аршинъ, а также лотъ и золотникъ и приводитъ много задачъ на эти мѣры.

Какъ видно, между пріемами Грубе и Паульсона есть существенная разница, которая выражается въ слѣдующемъ: 1) Грубе сравниваетъ изучаемое число послѣдовательно съ каждымъ изъ предшествовавшихъ, а Паульсонъ сравниваетъ сразу со всѣми предшествовавшими 2) Грубе сравниваетъ изучаемое число съ каждымъ изъ предшествовавшихъ по всѣмъ четыремъ дѣйствіямъ, а Паульсонъ какъ бы группируетъ упражненія по отдѣльнымъ дѣйствіямъ; сначала составляетъ сложеніемъ данное число изъ предшествовавшихъ, потомъ отъ изучаемаго числа отнимаетъ каждое изъ предшествовавшихъ; 3) Грубе болѣе обращаетъ вниманія на число отвлеченное, а Паульсонъ на конкретное; 4) Паульсонъ параллельно съ изученіемъ числа вводитъ изученіе соотвѣтственныхъ долей единицы, Грубе же разсматриваетъ только аликвотныя части числа и вводитъ эти упражненія только въ смыслѣ дѣленія числа на равныя части. При введеніи изученій долей единицы въ курсъ перваго года излишнимъ становится то кропотливое изученіе долей, которое приводится въ послѣднемъ курсѣ, и 5) задачи Паульсона отличаются отъ задачъ Грубе разнообразіемъ, интересомъ содержанія и часто замысловатостію.

Касательно второго пункта различія можно сказать, что Паульсонъ не вездѣ держится одного и того же порядка; я выбралъ намѣренно число 6, потому что при изученіи этого числа система расположенія упражненій нѣсколько яснѣе, нежели при изученіи другихъ чиселъ.

Можно сказать, что вообще у Паульсона нѣтъ той строгости въ системѣ расположенія упражненій, какая находится у Грубе; но это такое отступленіе отъ пріема Грубе, которое не устраняетъ вполнѣ основного положенія Грубе, касательно всесторонняго изученія числа. Тотъ учитель сдѣлаетъ хорошо, который въ методъ Грубе введетъ собственную живую струю, какъ это и сдѣлалъ Паульсонъ. Однообразіе упражненій можетъ имѣть тоже невыгодное вліяніе на учащихся, о чемъ я буду говорить при общей характеристикѣ метода Грубе.

Заканчивая на этомъ изложеніе матеріала этой самой важной части книги Грубе (первый годъ), укажу на нѣкоторыя частности:

1) Иногда приступая къ новому числу, Грубе совѣтуетъ учителю прямо обращаться къ ученикамъ съ вопросомъ: «что можете вы сказать о такомъ-то числѣ, сравните такое-то число съ такимъ-то» и тому подобное; или, едва только они познакомились съ цифрою числа, заставлять ихъ составлять письменно т блички и потомъ уже предлагать задачи. Безъ сомнѣнія, такой пріемъ возможенъ только при достаточномъ развитіи дѣтей и навыкѣ, пріобрѣтенныхъ ими при изученіи предшествовавшихъ чиселъ.

2) Цифру Грубе вводитъ съ перваго же урока при изученіи единицы и потомъ при каждомъ слѣдующемъ числѣ дѣти узнаютъ и соотвѣтствующую ему цифру. Паульсонъ совѣтуетъ для первыхъ двухъ чиселъ не вводить цифры, а при изученіи числа 3 ввести сразу обозначеніе цифрами единицы, двухъ и трехъ. При этомъ онъ подробно

приводитъ разговоръ съ дѣтьми по поводу выясненія имъ необходимости обозначать число цифрою.

3) Грубе и Паульсонъ вводятъ письменное обозначеніе дроби въ первый разъ при изученіи числа 9, говоря, что прямо слѣдуетъ указать ученикамъ на дробь, какъ на сокращеніе извѣстнаго выраженія.

Въ заключеніе этого отдѣла Грубе говоритъ, что въ этотъ годъ ученикъ сдѣлалъ первый и самый значительный шагъ ко всему дальнѣйшему курсу Ариѳметики; по тѣмъ пріемамъ, по которымъ изучались числа, видно, что такого матеріала достаточно для одного года. Собственно говоря, ученикъ узналъ здѣсь немного—онъ узналъ числа отъ 1 до 10, но онъ узналъ ихъ дѣйствительно и можетъ съ ними вычислять. Какая была бы польза, если бы ученикъ въ этотъ годъ научился считать до 100 и далѣе, а не умѣлъ бы разложить число 9 сознательно на его элементы?

Прежде нежели перейти къ слѣдующему курсу, Грубе совѣтуетъ остановиться на общемъ повтореніи всего пройденнаго посредствомъ рѣшенія задачъ и вычисленія формулъ.

Во *второй годъ* обученія идетъ всестороннее изученіе чиселъ отъ 10 до 100.

Разработкѣ матеріала этого года Грубе предпосылаетъ слѣдующія три замѣчанія: 1) на этой ступени обученія наглядность должна оставаться въ той же силѣ, какъ прежде; изъ наглядныхъ пособій лучшія—пальцы и черточки. Можно сказать, что сама природа дала человѣку въ руки десятичную систему счисленія. 2) Пріемы при изученіи отдѣльнаго числа остаются тѣ же. Только изученіе по мѣрѣ возрастанія чиселъ можно производить по преимуществу устно, и письменныя таблички составляютъ только для сравненія изучаемаго числа съ предшествовавшими посредствомъ умноженія и дѣленія, особенно при разложеніи чиселъ на составные элементы. Этимъ достигается по мѣрѣ упражненія большая механическая быстрота въ вычисленіи, связанная съ самостоятельною работою ученика. 3) Упражненія съ отвлеченнымъ и прикладнымъ числомъ должны отличаться теперь бòльшимъ разнообразіемъ и болѣе сложнымъ содержаніемъ, чтобы не пріучить ученика производить ихъ по извѣстной схемѣ. Притомъ, задачи по своему содержанію не должны и здѣсь выходить изъ сферы, доступной пониманію ученика, чтобы въ случаѣ надобности ученикъ и самъ могъ составлять задачи, подходящія къ соотвѣтствующему упражненію. Это самостоятельное составленіе учениками примѣровъ и задачъ будетъ тѣмъ легче, чѣмъ дальше они будутъ подвигаться впередъ.

При изученіи 11 дается ученикамъ понятіе о значеніи десятка, объ образованіи 11 прибавленіемъ единицы къ десятку и пріемѣ на-

писанія одиннадцати. Затѣмъ, въ томъ же порядкѣ возрастанія числа и по тѣмъ же четыремъ родамъ упражненій, какъ и въ первый годъ Грубе изучаетъ числа, начиная съ 11, только значительно сокраща изложеніе всѣхъ упражненій; такъ въ одномъ мѣстѣ онъ приводитъ только таблички, а для другого числа формулы для быстраго вычисленія и задачи. Таблички сложенія и вычитанія составляются устно а дѣленія и умноженія письменно. Такъ при разсмотрѣніи числа 15 устныя таблички будутъ такія:

$$1+1+1+1+1+1\ldots\ldots=15$$
$$15-1-1-1\ldots\ldots-1=1$$
$$2+2+2+2+2+2+2+1=15$$
$$15-2-2-2-2-2-2-2=1$$
$$3+3+3+3+3=15$$
$$15-3-3-3-3=3 \text{ и т. д.}$$

Письменныя:

$15=15\times1$	$1:15=15$
$7\times2+1$	$2:15=7$ (1)
5×3	$3:15=5$
$3\times4+3$	$4:15=3$ (3)
3×5	$5:15=3$
$2\times6+3$	$6:15=2$ (3)
$2\times7+1$	$7:15=2$ (1)
и т. д.	и т. д.

Прекращая подробную разработку учебнаго матеріала на числѣ 16 Грубе совѣтуетъ изучать такимъ же образомъ всѣ числа до 100, справедливо ссылаясь на то, что учитель можетъ вести курсъ дальше самъ, безъ помощи указаній. Жаль только, что того же нельзя сказать относительно задачъ, которыя вообще не легко составляются, если учитель желаетъ, чтобы онѣ представляли хотя нѣкоторый интересъ для учениковъ по своему содержанію. Числа такъ называемыя кратныя, каковы: 24, 30, 48, 60 и др., онъ совѣтуетъ изучать преимущественно на задачахъ, а числа простыя, какъ, напримѣръ, 23, 29, 41 и др., въ отвлеченномъ видѣ по табличкамъ и формуламъ. Послѣ того Грубе еще весьма подробно излагаетъ всѣ упражненія при изученіи чиселъ 30 и 100, чтобы показать расширеніе въ пріемѣ изученія большихъ чиселъ; но у Паульсона изученіе числа 100 приведено въ такой подробности и такъ близко къ изложенію того же предмета у Грубе, что я на этомъ считаю лишнимъ останавливаться, такъ какъ книга Паульсона достаточно распространена.

Тутъ же при изученіи числа 100 приводится и Пиѳагорова таблица умноженія, которую ученики должны знать наизусть, что легко достигается повтореніемъ въ цѣлости того, что учениками вполнѣ усвоено по частямъ.

Заканчивается матеріалъ этого рода разложеніемъ чиселъ на два, три и вообще на простые множители и выдѣленіемъ изъ чиселъ первой сотни чиселъ простыхъ и сложныхъ, что легко производится опять-таки въ видѣ повторенія и обобщенія пройденнаго.

У Паульсона при изученіи отдѣльныхъ чиселъ встрѣчаются весьма хорошія практическія прибавленія, относящіяся къ изученію различныхъ мѣръ, подходящихъ по единичному отношенію къ тому числу, которое разсматривается, а также разъясненія ученикамъ различныхъ понятій, какъ, напримѣръ, счетъ времени, ассигнаціи, банкъ и т. п.

Третій годъ. Матеріалъ этого рода, какъ уже было сказано, Грубе раздѣляетъ для двухъ полугодій, именно: въ первое полугодіе изучаются числа отъ 100 до 1000 и дальше, а во второе—четыре дѣйствія съ отвлеченными и прикладными числами любой величины.

Вкратцѣ самъ Грубе опредѣляетъ характеръ этого курса въ слѣдующихъ предварительныхъ замѣчаніяхъ: 1) Такъ какъ все дальнѣйшее есть только приложеніе къ извѣстному уже о числахъ первой сотни, то этотъ курсъ долженъ имѣть цѣлью приводить числа отъ 100 до 1000 къ числамъ первой сотни разложеніемъ ихъ на составные элементы. 2) Такимъ путемъ (разложенія) ученикъ пріучается къ быстрому и вѣрному вычисленію, такъ какъ онъ старается производить дѣйствіе надъ возможно малыми числами и не нуждается при этомъ ни въ какихъ искусственныхъ пріемахъ. 3) Въ началѣ этого курса, преслѣдующаго также всестороннее изученіе числа, не должно быть и рѣчи о какихъ-либо правилахъ дѣйствій; эти правила, небходимыя только для быстроты вычисленія, ученики узнаютъ во вторую половину курса. Устное и письменное вычисленіе въ первое полугодіе идутъ параллельно. 4) Теперь уже нѣтъ необходимости останавливаться на изученіи каждаго отдѣльнаго числа по тѣмъ же упражненіямъ, какъ и въ первые два года, и потому матеріалъ для перваго полугодія раздѣляется на два отдѣла: а) *отвлеченное число* (его составъ, разложеніе, сравненіе и комбинаціи съ другими числами) и б) *прикладное число.*

Затѣмъ первый отдѣлъ въ свою очередь подраздѣляется на 5 рубрикъ, разработка которыхъ приведена у Грубе въ сжатомъ видѣ.

I. Счетъ отъ 100 до 1000 въ прямомъ и обратномъ порядкѣ, устно и при помощи различныхъ наглядныхъ пособій. Написаніе чиселъ въ этомъ предѣлѣ, причемъ въ началѣ мѣста цифръ, выражающихъ единицы различныхъ разрядовъ, обозначаются квадратиками, а потомъ числа пишутся и обыкновеннымъ образомъ. Разложеніе заданнаго числа на сотни, десятки и единицы и обратно—составленіе числа изъ заданнаго числа сотенъ, десятковъ и единицъ.

$615=6\times100+1\times10+5\times1$ или
$615=600+10+5$

II. Измѣреніе сотенъ сотнями—производится по тѣмъ же рубрикамъ и съ тѣми же упражненіями, какъ и измѣреніе чиселъ перваго десятка; такимъ образомъ 300 сначала сравнивается съ 100 и потомъ съ 200, и въ результатѣ получаются таблички, составляемыя устно или письменно:

$100+100+100=300$	$200+100=300$
$3\times100=300$	$1\times200+100=300$
$300-100-100=100$	$300-200=100$
$100:300=3$	$200:300=1$ (100)

Потомъ идетъ бѣглый счетъ, но задачъ въ этомъ отдѣлѣ вовсе не приведено.

III. Разложеніе чиселъ особеннаго вида, каковы: 440, 660, 880, 888, 999 и т. п.

$$888=8\times111=4\times222=2\times444$$

Умноженіе чиселъ и дѣленіе кратныхъ относительно дѣлителя чиселъ на множителя и дѣлителя однозначнаго (844 вчетверо болѣе какого числа, 120 есть пятая часть какого числа). Сравненіе чиселъ по величинѣ, напр., 365 и 244, причемъ числа разлагаются по разрядамъ и одноименные разряды сравниваются отдѣльно въ ариѳметическомъ отношеніи (3 сот.—2 сот.=1 сот., 6 дес.—4 дес.=2 дес., 5 ед.—4 ед.=1 ед., слѣдовательно 365—244=1 сот.+2 дес. +1 ед.=121). Сложеніе чиселъ тоже посредствомъ разложенія на разряды. Примѣры сложенія и вычитанія подбираются такъ, чтобы при вычитаніи не приходилось занимать единицы высшаго разряда, а при сложеніи—выключать изъ низшаго разряда единицы высшаго.

IV. Измѣреніе чистыхъ сотенъ и сотенъ съ десятками посредствомъ десятковъ, напримѣръ, $240=20\times10+4\times10=24\times10$. Вопросы въ родѣ такихъ: „въ 53 десяткахъ сколько сотенъ и десятковъ; на сколько 55 десятковъ менѣе 600?“ и т. п.

V. Разложеніе чистыхъ сотенъ, сотенъ съ десятками и вообще трехзначныхъ чиселъ на составныя части посредствомъ слагаемыхъ и множителей, напримѣръ:

$$960=10\times96$$
$$=10\times3\times32=30\times32=32\times30$$
$$=10\times2\times48=20\times48=48\times20$$

и т. д.

$$489=10\times48+9$$
$$=2\times240+9$$
$$=5\times96+9$$
$$=10\times4\times12+9=40\times12+9 \text{ и т. д.}$$

На основаніи этихъ разложеній предлагаются ученикамъ вопросы, въ родѣ такого: „сколько разъ нужно взять 44, чтобы получить 220?“

$$220=10\times22=5\times2\times22=5\times44$$

Тутъ же идетъ сложеніе и вычитаніе чиселъ при помощи ихъ разложенія на десятки и единицы для тѣхъ случаевъ, когда приходится занимать или выключать единицы высшаго разряда.

VI. Въ этомъ отдѣлѣ ученики занимаются всестороннимъ разложеніемъ чиселъ отъ 100 до 1000, и онъ служитъ повтореніемъ всего пройденнаго въ первыхъ пяти отдѣлахъ. Пріемы разложенія числа предоставляются самимъ ученикамъ, учитель называетъ только число.

$$365=320+45$$
$$=2\times150+65$$
$$=2\times182+1$$
$$=7\times50+15 \text{ и т. д.}$$

Прикладное число.

Какъ изложенная часть представляетъ необходимый матеріалъ для всего дальнѣйшаго вычисленія, устнаго и письменнаго, съ отвлеченнымъ числомъ, такъ слѣдующій отдѣлъ содержитъ матеріалъ для всего дальнѣйшаго прикладного вычисленія. Матеріалъ этотъ состоитъ въ изученіи отношеній чиселъ отъ 1 до 1000 посредствомъ отношеній извѣстныхъ величинъ, каковы: талеры, гроши, фунты, лоты и др., черезъ что становятся яснѣе и отношенія отвлеченныхъ чиселъ. Здѣсь также всѣ четыре дѣйствія надъ числами пока еще не совершаются безъ правилъ, просто по соображенію.

Упражненія приведены у Грубе слѣдующія: сначала разсматриваются простыя именованныя числа, а потомъ и составныя, начиная съ прибавленія одного и того же числа, напримѣръ 30 зильбергрошей къ данному числу и переводомъ получаемаго числа зильбергрошей въ талеры; обратно идетъ отниманіе того же числа зильбергрошей; потомъ идетъ превращеніе и раздробленіе различныхъ именованныхъ чиселъ. Для четырехъ дѣйствій съ именованными числами Грубе предлагаетъ слѣдующія упражненія: классъ раздѣляется на два отдѣленія, учитель говоритъ какія-нибудь числа одного наименованія, одно отдѣленіе говоритъ за нимъ числа втрое большія, а другое отдѣленіе эти тройныя числа складываетъ послѣдовательно и, когда учитель кончитъ, то это отдѣленіе должно сразу сказать сумму всѣхъ тройныхъ чиселъ, напримѣръ:

Учитель:		1-ое отдѣленіе:		
25 зильбергр.		2 тал.	15 зильбергр.	
9 „			27 „	
17 „		1 „	21 „	
15 „		1 „	15 „	
	2-е отд.:	6 тал.	18 зильбергр.	

Обратно: учитель диктуетъ числа, одно отдѣленіе беретъ какую-нибудь опредѣленную часть диктуемаго числа (треть, четверть), а другое отдѣленіе узнаетъ сумму всѣхъ чиселъ, найденныхъ первымъ. Если диктуемыя числа большія, или ихъ много, то ученикамъ позволяется записывать частные результаты вычисленій.

Затѣмъ идутъ упражненія съ частями различныхъ именованныхъ чиселъ, напримѣръ:

1 талеръ	= 30 зильбергр.		$^1/_5$ тал.	= 6 зил.
$^1/_2$ „	= 15 „		$^1/_6$ „	= 5 зил.
$^1/_3$ „	= 10 „		$^1/_{12}$ „	= 2 зил. 6 пф.
$^1/_4$ „	= 7 зил. 6 пф.		$^1/_{30}$ „	= 1 зильбергр.

и обратно, выраженіе числа меньшаго наименованія въ частяхъ большаго.

Второе полугодіе третьяго года посвящается изученію четырехъ дѣйствій по правиламъ надъ отвлеченными и именованными числами. Здѣсь уже дѣйствія идутъ по рубрикамъ и письменному вычисленію дается преимущество надъ устнымъ; здѣсь разсматриваются числа любой величины, хотя въ упражненіяхъ Грубе дальше милліоновъ не идетъ. Сначала идетъ нумерація, потомъ одно за другимъ четыре дѣйствія въ обыкновенномъ порядкѣ. Вездѣ соблюдается постепенность и переходъ отъ вычисленія устнаго къ письменному; такъ, напримѣръ, ученики сначала вычитають устно числа однозначныя, потомъ одно значныя изъ двузначныхъ, потомъ двузначныя и т. д., доходятъ д необходимости записать числа; выясняется, какъ удобнѣе подписыват числа для совершенія дѣйствія, почему нужно начинать вычитаніе с единицъ перваго разряда, и наконецъ выводится правило механизм вычитанія. При дѣленіи чиселъ дѣлитель такъ же, какъ и прежде, пи шется слѣва, частное въ случаѣ остатка отъ дѣленія пишется съ дробью

Въ концѣ этого отдѣла идетъ рядъ задачъ на каждое дѣйствіе затѣмъ смѣшанныя задачи преимущественно на простое тройное пра вило, причемъ приведенъ подробный анализъ нѣкоторыхъ задачъ Приведу для образца одну изъ такихъ задачъ: „Для сюртука купил сукна на 12 талеровъ и за каждый аршинъ (Elle) заплатили $4^1/$ гульдена. Сколько аршинъ сукна купили?“ Рѣшеніе: „Что тебѣ извѣ стно изъ задачи? (Цѣна 1 арш.) Что еще дано? (Стоимость всег купленнаго сукна.) Что извѣстно? (Число купленныхъ аршинъ сукна. Сколько разъ можно было получить по одному аршину? Столько разъ сколько разъ заплатить по $4^1/_2$ гульдена.) Сколько же аршинъ ку пили? (Столько, сколько разъ во всѣхъ деньгахъ, заплаченныхъ з сукно, заключается по $4^1/_2$ гульдена.) Сколько денегъ заплачено з сукно? (12 талеровъ.) Какъ узнаешь ты число купленныхъ аршин по цѣнѣ одного аршина и по всей стоимости сукна? (Раздѣливш 12 талеровъ на $4^1/_2$ гульдена.) Сдѣлай это. ($4^1/_2$ гульд. $=4\times 2$(зильб. $+10$ зильб. $=90$ зильб. $=3$ тал., а 3 тал. въ 12 тал. содер жится 4 раза.) Что же изъ этого слѣдуетъ? (Купили 4 арш. сукна.)“ Потомъ идутъ варіаціи той же задачи: „Для сюртука купили 4 арш сукна и за каждый аршинъ заплатили $4^1/_2$ гульдена. Сколько тале ровъ истратили на эту покупку? За 4 арш. сукна заплатили 12 та леровъ. Сколько стоитъ одинъ аршинъ этого сукна?“ и т. п., и раз сматриваются различныя отношенія данныхъ чиселъ между собою і къ числу искомому.

При этомъ Грубе въ заключеніе замѣчаетъ, что если учител остановится достаточно на основательномъ разборѣ одной задачи, т онъ гораздо болѣе разовьетъ соображеніе ученика, нежели на цѣло массѣ задачъ, рѣшаемыхъ по извѣстному правилу. Навыкъ вычислят быстро и вѣрно достигается посредствомъ всесторонняго упражненія в изученіи отношеній чиселъ, а потому рѣшеніе задачъ по данном образцу не даетъ этого навыка. Нѣкоторыя школы, выставляющія н испытаніяхъ на показъ навыкъ учениковъ въ быстромъ вычисленіи показываютъ собственно только призракъ, облеченный въ механизм по извѣстной формѣ; призракъ тотчасъ исчезнетъ, какъ только уда лишь эту форму.

Желающіе со всею подробностію ознакомиться съ разработкою учебнаго матеріала третьяго года могутъ пользоваться для этого книгою Паульсона, въ которой нѣтъ вовсе отступленій отъ изложенія Грубе; кромѣ замѣны нѣмецкихъ наименованій чиселъ русскими, книга Паульсона въ этомъ отдѣлѣ представляетъ полный переводъ книги Грубе.

Четвертый годъ. Курсъ раздѣляется на два полугодія: въ первое полугодіе производится нагляднымъ образомъ всестороннее изученіе дроби, во второе—дѣйствія съ дробями по правиламъ. Курсу перваго полугодія Грубе предпосылаетъ слѣдующія характеризующія его замѣчанія: 1) Точно такъ, какъ ученикъ пріобрѣталъ наглядное представленіе о цѣломъ числѣ по отношенію его къ единицѣ, т.-е. что оно есть нѣсколько разъ взятая единица, и здѣсь онъ долженъ наглядно изучать дробь по происхожденію ея отъ единицы. 2) До сихъ поръ единица являлась какъ часть цѣлаго числа, теперь она сама представляетъ цѣлое, состоящее изъ частей, которыя по отношенію къ ней называются дробями. 3) Ученики уже хорошо знакомы съ дробью изъ курса цѣлыхъ чиселъ, гдѣ она разсматривалась, какъ часть цѣлаго числа вообще, слѣдовательно послѣдующее изученіе дроби, какъ части единицы, представитъ имъ мало затрудненій, тѣмъ болѣе, что процессъ этого изученія тотъ же самый, какъ и для цѣлыхъ чиселъ. 4) Такъ какъ разнообразіе дробей зависитъ отъ ихъ величины, а величина отъ числа долей, на которыя дѣлится единица, то на числа выражающія эти различныя дѣленія единицы, можно смотрѣть, какъ на низшіе порядки чиселъ, подобно тому, какъ десятки, сотни и проч составляютъ порядки высшіе. Эти низшіе разряды, подобно высшимъ имѣютъ и свои особенныя названія: половина, треть, четверть и т. д 5) Такое распредѣленіе дробей по разрядамъ даетъ возможность изучать ихъ въ томъ же порядкѣ, какъ и цѣлыя числа, т. е. сначала $^1/_2$, потомъ $^1/_3$ и т. д., причемъ для полнаго выясненія понятія о дроби можно ограничиться подробнымъ изученіемъ только первыхъ пяти дробей. 6) Изученіе каждой отдѣльной дроби нужно производить въ томъ же порядкѣ, въ какомъ изучались числа перваго десятка, устно и письменно, въ отвлеченномъ видѣ и въ практическомъ приложеніи, съ участіемъ всѣхъ четырехъ дѣйствій.

Затѣмъ идетъ подробная разработка пріема изученія дробей: $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_4$, $^1/_5$ и $^1/_6$, со всѣми упражненіями, что и составляетъ учебный матеріалъ перваго полугодія. Здѣсь для образца изложенія Грубе я приведу подробное изученіе только одной дроби, напримѣръ $^1/_3$.

Линія дѣлится на 3 равныя части ($1={}^3/_3$). $^1/_3$ есть одна изъ трехъ равныхъ частей, на которыя раздѣлена единица; $^2/_3$ двѣ такія части.

$3 : 1={}^1/_3$ или ${}^1/_3\times1={}^1/_3$
${}^1/_3+{}^1/_3={}^2/_3$, ${}^2/_3+{}^1/_3={}^3/_3=1$
$1\times{}^1/_3={}^1/_3$, $2\times{}^1/_3={}^2/_3$, $3\times{}^1/_3={}^3/_3=1$
$1-{}^1/_3={}^2/_3$, ${}^2/_3-{}^1/_3={}^1/_3$
${}^1/_3 : 1=3$, ${}^1/_3 : {}^2/_3=2$, ${}^1/_3 : {}^1/_3=1$
$3 : 1={}^1/_3$, $3 : 2={}^2/_3$, $3 : 10={}^{10}/_3$ и т. д.
$2+{}^1/_3=2{}^1/_3$, $8+4{}^1/_3=12{}^1/_3$, $5{}^1/_3+4{}^1/_3=9{}^2/_3$ и т. д.
$9\times{}^1/_3={}^9/_3=3$, $14\times{}^1/_3={}^{14}/_3=4{}^2/_3$ и проч.
$9\times{}^2/_3={}^{18}/_3=6$, $10\times{}^2/_3={}^{20}/_3=6{}^2/_3$ и проч.
$3\times1{}^1/_3=4$, $9\times1{}^1/_3=12$ и т. д.
$3\times1{}^2/_3=5$, $5\times1{}^2/_3=8{}^1/_3$ и т. д.
${}^1/_3\times1={}^1/_3$, ${}^1/_3\times2={}^2/_3$, ${}^1/_3\times6=2$, ${}^1/_3\times7=2{}^1/_3$ и пр.
${}^2/_3\times1={}^2/_3$, ${}^2/_3\times2=1{}^1/_3$, ${}^2/_3\times9=6$ и проч.
$1-{}^1/_3={}^2/_3$, $2-{}^1/_3=1{}^2/_3$, $2-{}^2/_3=1{}^1/_3$, $7{}^2/_3-4{}^1/_3=3{}^1/_3$ и т.
${}^1/_3 : 1=3$, ${}^1/_3 : 2=6$, ${}^1/_3 : 14=42$ и пр.
${}^2/_3 : 1={}^3/_2$, ${}^2/_3 : 6=9$, $2{}^1/_3 : 4{}^2/_3=2$, $6{}^2/_3 : 20=3$ и пр.

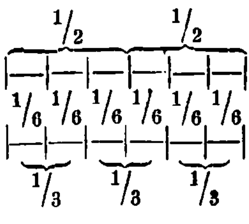
Сравненіе ${}^1/_3$ съ 1:

${}^1/_3=1-{}^2/_3$, $1={}^1/_3+{}^2/_3$,
${}^1/_3={}^1/_3\times1$, $1=3\times{}^1/_3$.

Сравненіе ${}^2/_3$ съ 1:

${}^2/_3=1-{}^1/_3$, $1={}^2/_3+{}^1/_3$,
${}^2/_3={}^2/_3\times1$, $1=1\times{}^2/_3+{}^1/_3$.

Сравненіе ${}^1/_3$ съ ${}^1/_3$:



${}^1/_3={}^2/_6$, ${}^1/_2={}^3/_6$,
${}^1/_3={}^1/_2-{}^1/_6$, ${}^1/_2={}^1/_3+{}^1/_6$,
${}^1/_3={}^2/_3\times{}^1/_2$, ${}^1/_2={}^3/_2\times{}^1/_3$, ${}^1/_3 : {}^1/_2={}^2/_6 : {}^3/_6={}^3/_2=1{}^1/_2$

Сравненіе ${}^1/_2$ съ ${}^2/_3$:

${}^1/_2={}^3/_6$, ${}^2/_3={}^4/_6$.
${}^1/_2={}^2/_3-{}^1/_6$, ${}^2/_3={}^1/_2+{}^1/_6$,
${}^1/_2={}^3/_4\times{}^2/_3$, ибо ${}^2/_3 : {}^1/_2=4 : 3={}^3/_4$,
${}^2/_3={}^4/_3\times{}^1/_2$, ибо ${}^1/_2 : {}^2/_3=3 : 4={}^4/_3$.

Далѣе идутъ вопросы въ разбивку:

„Какое число нужно взять $^2/_3$ раза, чтобы получить 9? Сколько разъ нужно повторить разность между $^1/_2$ и $^1/_3$, чтобы получить единицу? Разность $^1/_2$—$^1/_3$ будетъ шестая часть какого числа? Какую часть единицы составляетъ разность $^2/_3$—$^1/_2$?" и т. д.

Наконецъ, слѣдуютъ практическія положенія изученной дроби въ формѣ задачъ, каковы, напр.: «Сколько слѣдуетъ заплатить за $^2/_3$ шеффеля муки, если $^1/_6$ виспеля этой муки стоитъ 4 талера 6 зильбергр.? Купецъ разложилъ 1 центнеръ табаку въ пачки, по $^2/_3$ фун. въ каждой; весь этотъ табакъ онъ продалъ и за каждую пачку взялъ по 20 зильб. Сколько прибыли получилъ онъ отъ этой продажи, если ему самому табакъ стоилъ 91 тал. 10 зильб.?» и т. д.

Въ томъ же порядкѣ располагаются упражненія и при изученіи другихъ названныхъ выше долей; при сравненіи $^1/_4$ съ $^1/_3$ входятъ и 12-ыя доли, а при сравненіи $^1/_5$ съ $^1/_3$ и съ $^1/_4$ входятъ 15-ыя и 20-ыя доли и т. д.

Во второе полугодіе дроби и дѣйствія съ ними изучаются въ общепринятой системѣ. Вначалѣ идетъ дѣленіе единицы (линіи) на различныя равныя части, черченіе различныхъ частей единицы, выраженіе цѣлой единицы въ различныхъ доляхъ, увеличеніе, уменьшеніе, сокращеніе дроби и приведеніе дробей къ общему знаменателю, сначала безъ признаковъ дѣлимости чиселъ, а потомъ и при помощи ихъ. Умноженіе и дѣленіе дробей разсматривается въ видѣ численныхъ отношеній, выражаемыхъ дробью. Здѣсь такъ же, какъ и вездѣ, сначала упражненія ведутся устно, а потомъ, по мѣрѣ усложненія, и письменно.

Матеріалъ четвертаго года переданъ въ книгѣ Паульсона съ тою же близостью къ подлиннику, какъ и матеріалъ третьяго года.

Переходя къ общему обозрѣнію курса Грубе, нельзя не признать въ немъ слѣдующихъ достоинствъ: 1) ученику предоставлена полная самостоятельность и самодѣятельность въ наблюденіи и изученіи отдѣльныхъ фактовъ, ихъ обобщеніи и выводѣ заключеній. Учитель предлагаетъ только матеріалъ для изслѣдованія и изученія и незамѣтно указываетъ пріемъ, ученикъ же самъ ведетъ все изслѣдованіе и изученіе. При такомъ положеніи дѣла и слабому, и сильному ученику предлагается работа посильная, не убивающая въ нихъ энергіи и охоты къ занятіямъ, а, напротивъ, постоянно ихъ поддерживающая. 2) Весь курсъ ведется постепеннымъ переходомъ отъ нагляднаго къ отвлеченному; понятія и выводы вытекаютъ сами собою; ученикъ незамѣтно отъ изученія чиселъ доходитъ до постановки правила дѣйствій съ числами и затѣмъ пользуется этими правилами. 3) Работа устная чередуется постоянно съ письменною, притомъ такъ, что въ первый годъ отдается предпочтеніе работѣ чисто устной, во второй она идетъ наравнѣ съ письменной, а въ третій и четвертый годъ преобладаетъ работа письменная. 4) Грубе придаетъ большое значеніе практическимъ задачамъ, какъ при изученіи свойствъ чиселъ, такъ и при изученіи механизма дѣйствій, и притомъ требуетъ, чтобы задача рѣшалась посредствомъ анализа ея содержанія, на основаніи соображенія ученика, а не на основаніи непосредственнаго приложенія извѣстнаго ариѳметическаго правила. 5) Въ каждый годъ Грубе предлагаетъ матеріалъ дѣйствительно законченный, такъ что весь его курсъ расположенъ четырьмя концентрическими кругами: въ первый годъ проходится курсъ Ариѳметики надъ числами перваго десятка, причемъ производятся всѣ четыре дѣйствія съ числами и разсматриваются соотвѣтствующія дроби, выражающія аликвотныя части изучаемыхъ чиселъ; во второй годъ курсъ расширяется тѣмъ, что возрастаетъ матеріалъ изученія—все, что продѣлывалось съ числами перваго десятка, теперь производится надъ числами первой сотни; здѣсь входятъ и добавочныя статьи, каковы: выдѣленіе чиселъ простыхъ и сложныхъ, и разложеніе чиселъ на простые множители; въ третій годъ расширеніе курса опять-таки обусловливается только возрастаніемъ числа, но это возрастаніе числа требуетъ уже особенныхъ пріемовъ для вычисленій письменныхъ, а потому выводятся правила четырехъ дѣйствій; наконецъ, въ четвертый годъ, по тѣмъ же пріемамъ, какъ изучались цѣлыя числа въ теченіе трехъ предшествовавшихъ лѣтъ, изучаются дроби; изученіе дробей основано только на томъ, что ученики хорошо знакомы съ числомъ цѣлымъ и пріобрѣли навыкъ и пріемы въ изученіи чиселъ вообще.

Если принять во вниманіе, что обученіе дѣтей Ариѳметикѣ по курсу Грубе начинается съ 7 лѣтъ, то оказывается, что въ 11 лѣтъ дѣти знаютъ почти весь курсъ Ариѳметики, исключая десятичныхъ дробей, пропорцій и ихъ приложеній, что уже весьма легко пройти въ одинъ годъ, и притомъ Грубе требуетъ для своего курса только по три часа въ недѣлю. Дѣти 11 лѣтъ вступаютъ у насъ въ первый или во второй классъ гимназіи и далеко не имѣютъ тѣхъ знаній и того развитія, которыя достигаются курсомъ Грубе, проходимымъ въ 4 года. Если бы у насъ существовали приготовительныя школы, въ которыхъ можно было бы вести правильно обученіе дѣтей съ 7 до 10 лѣтъ, какъ это дѣлается въ Германіи, то, безъ сомнѣнія, такая подготовка отразилась бы благопріятно на успѣхахъ дѣтей въ гимназіяхъ, и въ три года подготовительныхъ занятій дѣти знали бы по Ариѳметикѣ и другимъ предметамъ гораздо болѣе того, что отъ нихъ требуется при поступленіи въ первый классъ гимназіи. Устройство, на основаніи новаго положенія о гимназіяхъ (1871 года), приготовительныхъ при нихъ классовъ, куда дѣти принимаются отъ 8 до 10 лѣтъ и обучаются одинъ или два года, только на половину улучшаетъ подготовку дѣтей, вступающихъ въ гимназіи, потому что и отъ дѣтей, отдаваемыхъ въ приготовительный классъ, требуется уже значительная подготовка, какъ, напримѣръ, изъ Ариѳметики счетъ до 1000 и умѣнье производить сложеніе и вычитаніе съ числами въ этомъ предѣлѣ. Если дома обученіе Ариѳметикѣ будетъ поведено такъ, что сразу научатъ ребенка нумераціи до 1000, а потомъ укажутъ ему механизмъ двухъ дѣйствій, заставятъ заучить различныя таблички и правила, то этого уже болѣе чѣмъ достаточно для того, чтобы значительно испортить дальнѣйшее занятіе Ариѳметикой. Гимназіи, безъ сомнѣнія, не могутъ взять на себя подготовку будущихъ своихъ учениковъ, у нихъ и безъ того весьма много своего собственнаго дѣла,—это должно быть поручено правильно организованнымъ приготовительнымъ школамъ.

Отдавая полную справедливость системѣ и методѣ Грубе за эти и многія другія достоинства, нельзя не указать и на нѣкоторые существенные недостатки этой системы, проявляющіеся при практическомъ ея примѣненіи и подмѣченные многими нашими педагогами-практиками, осуществлявшими систему Грубе въ обученіи дѣтей безъ всякихъ отступленій, отъ нея. Этимъ, вѣроятно, и объясняется то, что не вполнѣ усвоившіе эту систему учителя вскорѣ оставляли ее даже послѣ нѣсколькихъ уроковъ и переходили къ другой системѣ, чаще всего къ своей собственной, составленной à priori и подвергавшейся весьма частымъ измѣненіямъ.

Главнѣйшіе изъ недостатковъ методы Грубе слѣдующіе: 1) Съ перваго же дня обученія Грубе отдаетъ предпочтеніе числу отвлеченному передъ конкретнымъ. Хотя изученіе всякаго числа начинается съ конкретнаго, но вездѣ больше упражненій приведено на число отвлеченное (reine Zahl), и самое расположеніе упражненій при изученіи каждаго отдѣльнаго числа показываетъ, что практическія задачи служатъ какъ бы только для приложенія и повторенія пройденнаго, а не даютъ сами матеріала и средства для изученія числа. Въ этомъ отношеніи пріемамъ Паульсона нужно отдать предпочтеніе: у него задачи входятъ во всѣ упражненія. По нашему мнѣнію естественнѣе начать съ числа конкретнаго, съ изученія его на предметахъ, находящихся передъ глазами учениковъ (наглядныя пособія), переходить потомъ къ числу конкретному же, относящемуся къ предметамъ отсутствующимъ (задачи), и затѣмъ въ формѣ обобщенія отнести все изученное къ числу отвлеченному (формулы). Впослѣдствіи, при достаточномъ навыкѣ учениковъ къ обобщеніямъ, порядокъ въ расположеніи упражненій слѣдуетъ измѣнять, такъ какъ послѣ нѣсколькихъ уроковъ дѣти составятъ ясное и правильное понятіе о числѣ отвлеченномъ. Грубе же строго держится одного и того же порядка въ расположеніи упражненій.

2) Это однообразіе въ расположеніи упражненій и чрезвычайная кропотливость и мелочность при изученіи каждаго числа дѣлаютъ какъ курсъ перваго года, такъ особенно и курсъ второго года утомительнымъ для учащихся и не исключаютъ навыка учениковъ къ своего рода механизму при составленіи табличекъ и рѣшеніи задачъ. Для ученика представляетъ собственно нѣкоторый трудъ составленіе только такой, напримѣръ, строчки: $8=2+2+2+2$, а затѣмъ онъ уже машинально по навыку говоритъ или пишетъ: $4\times2=8$, $8-2-2-2=2$ и $2:8=4$, справляясь только съ первою строчкою; точно также задачи очень просты, требуютъ только одного дѣйствія для рѣшенія и въ значительной части случаевъ допускаютъ отвѣтъ наугадъ безъ всякаго соображенія. Опытъ показываетъ, что ученикъ, изучившій 8 по системѣ Грубе со всѣми упражненіями, не можетъ въ видѣ повторенія рѣшить такой задачи: „какъ можно раздать 8 орѣховъ двумъ мальчикамъ?“, требующей всесторонняго разложенія 8-ми на два слагаемыя, или составленія таблички:

$$\begin{aligned}8 &= 1 + 7\\ 8 &= 2 + 6\\ 8 &= 3 + 5\\ 8 &= 4 + 4\end{aligned}$$

хотя подобныя упражненія входятъ у Грубе при изученіи отдѣльныхъ чиселъ, но они являются какъ выводъ изъ табличекъ, а не какъ самостоятельныя разложенія при рѣшеніи задачъ. Еще менѣе способенъ ученикъ рѣшить задачу сколько-нибудь замысловатую по условіямъ и требующую самостоятельнаго соображенія.

3) Изъ изученія чиселъ первой сотни не сдѣлано никакихъ опредѣленныхъ выводовъ, относящихся къ группировкѣ дѣйствій, къ выдѣленію элементовъ и результатовъ дѣйствій, къ выясненію сущности каждаго дѣйствія и случаевъ его приложенія къ рѣшенію практическихъ вопросовъ; такъ что все это снова проходится въ третій годъ, причемъ упражненія въ каждомъ дѣйствіи отдѣльно не имѣютъ прямой связи съ изученіемъ чиселъ, производившимся въ теченіе двухъ лѣтъ. Выходитъ, что число является само по себѣ, а дѣйствія съ числами сами по себѣ; а между тѣмъ всѣ четыре дѣйствія такъ много разъ производились съ числами въ первые два года, что не составило бы никакого затрудненія для дѣтей выдѣлить ихъ, разгруппировать и назвать каждое дѣйствіе.

4) Вслѣдствіе того, что дѣйствія не были выдѣлены, и что нельзя было сдѣлать незамѣтнымъ скачка отъ чиселъ первой сотни къ числамъ любой величины для выясненія на нихъ механизма дѣйствій, понадобилось цѣлое полугодіе снова на изученіе чиселъ отъ 100 до 1000. Этотъ отдѣлъ книги Грубе вообще самый слабый: упражненія какія-то произвольныя, не поддающіяся системѣ и мало ведущія къ какой-либо опредѣленной цѣли. Неопытному учителю легче всего запутаться на прохожденіи съ учениками этого изученія чиселъ отъ 100 до 1000 и легко отучить ихъ обратно отъ той стройности и систематичности, навыкъ къ которой пріобрѣли они въ первые два года. Заучивъ ощупью производить дѣйствія съ трехзначными числами, на основаніи произвольнаго разложенія этихъ чиселъ, ученики потомъ будутъ путаться при выводѣ правилъ дѣйствій и совершеніи самихъ дѣйствій по этимъ правиламъ. Напр. рѣшается такой вопросъ: «на какое число должно раздѣлить 365, чтобы получить 5?» Дѣти разсуждаютъ такъ: «365 раздѣленное на неизвѣстное число, даетъ 5, слѣд. неизвѣстное число содержится въ 365-ти 5 разъ, или есть пятая часть 365; пятая часть 300 есть 60, а пятая часть 65 есть 13; слѣд. пятая часть 365 будетъ 60+13=73 и т. д.» Такой пріемъ при устномъ вычисленіи, преслѣдуя навыкъ дѣтей къ быстротѣ вычисленій, допустить весьма возможно, но при письменномъ онъ только затрудняетъ самое вычисленіе.

5) Послѣ обстоятельнаго изученія чиселъ первой сотни и изученія дѣйствій съ отвлеченными и именованными числами любой величины, вообще послѣ трехлѣтнихъ занятій дѣтей Ариѳметикой и достаточнаго развитія ихъ за это время, непонятными становятся тѣ мелочныя упражненія съ дробями, которыми Грубе наполняетъ цѣлое полугодіе четвертаго года. Ученики уже настолько знакомы съ числомъ вообще и съ пріемомъ его изученія, что изученіе дроби $^1/_2$ въ теченіе нѣсколькихъ уроковъ должно представить имъ работу чрезвычайно легкую и нисколько не интересную, не развивающую, а потому утомительную. Изучать каждую дробь отдѣльно, подобно тому, какъ изучались числа перваго десятка, нельзя уже и потому, что при сравненіи дробей между собою входятъ такія доли, которыя являются не въ очередь, какъ, напримѣръ, при сравненіи $^1/_5$ и $^1/_6$ получается $^1/_{30}$. Самое расположеніе упражненій при изученіи дробей показываетъ, что здѣсь трудно соблюсти ту систему, которая такъ стройно составлена для цѣлаго числа. Гораздо естественнѣе было бы пройти въ это полугодіе вообще элементарный курсъ дробей, основываясь на изученныхъ учениками свойствахъ цѣлыхъ чиселъ и при помощи наглядныхъ пособій. Подробное содержаніе такого курса приводится мною въ моемъ курсѣ.

Сравнивая достоинства системы Грубе съ ея недостатками, нужно прійти къ заключенію, что основныя положенія, на которыхъ построена эта система и практическое ея осуществленіе, въ видѣ курса, вообще вѣрны и цѣлесообразны, за исключеніемъ частностей, и что всякая другая, хотя бы и лучше практически приноровленная, система въ главныхъ чертахъ своихъ должна сходиться съ этою.

IV.

Поясненіе главнѣйшихъ основныхъ положеній преподаванія Ариѳметики. Характеристика и содержаніе элементарнаго и систематическаго курса. Концентричность расположенія учебнаго матеріала. Изученіе чиселъ первой сотни. Устное и письменное вычисленіе. Характеристика катихитическаго пріема преподаванія. Классная дисциплина. Значеніе практическихъ задачъ при обученіи Ариѳметикѣ. Пріемы предложенія и рѣшенія въ классѣ устныхъ и письменныхъ задачъ. Описаніе наглядныхъ пособій, употребительныхъ при прохожденіи элементарнаго курса Ариѳметики.

Изъ сказаннаго въ первыхъ трехъ главахъ относительно постановки курса Ариѳметики въ общеобразовательномъ заведеніи сдѣлаемъ теперь главнѣйшіе выводы и дополнимъ ихъ необходимыми практическими поясненіями.

1) *Курсъ Ариѳметики въ общеобразовательномъ заведеніи слѣдуетъ подраздѣлить на два курса: элементарный или приготовительный и систематическій.*

Элементарный курсъ Ариѳметики проходится безъ помощи учебника и состоитъ въ наглядномъ ознакомленіи ученика, при посредствѣ наглядныхъ пособій и практическихъ задачъ, съ числомъ и дѣйствіями съ числами. Ученикъ, проходя этотъ курсъ, знакомится съ языкомъ предмета, съ основными изъ области его понятіями, съ пріемами вычисленій, съ построеніемъ выводовъ и правилъ и, наконецъ, съ построеніемъ изучаемаго матеріала въ систему. Учебнымъ матеріаломъ этого курса должно быть: а) изученіе чиселъ первой сотни и выводъ понятія о дѣйствіяхъ съ числами въ этомъ предѣлѣ, б) нумерація и дѣйствія съ числами любой величины, какъ приложеніе выводовъ и правилъ, усвоенныхъ на изученіи чиселъ первой сотни, и в) элементарный курсъ дробей.

Этотъ курсъ, представляющій по своему содержанію законченное цѣлое и служащій только подготовкою къ дальнѣйшему систематическому курсу Ариѳметики въ общеобразовательномъ заведеніи, есть, по нашему мнѣнію, полный курсъ, которымъ должна ограничиться начальная школа, удѣляющая на обученіе дѣтей не болѣе трехъ-четырехъ, и то далеко не полныхъ лѣтъ.

Систематическій курсъ Ариѳметики, слѣдующій непосредственно за элементарнымъ, проходится при значительномъ участіи учебника, наивозможно кратчайшаго, приводящаго въ стройную, научную и сжатую систему то, что было пройдено, хотя тоже въ системѣ, но болѣе практически, нежели научно. При этомъ статьи, пройденныя уже въ элементарномъ курсѣ, по учебнику только повторяются и служатъ для пріученія учащихся къ пользованію учебникомъ и къ ознакомленію съ особенностями сжатаго языка книги.

Выраженное сжато въ книгѣ ученикъ дополняетъ самъ на основаніи прежде-пройденнаго курса и, такимъ образомъ, пріобрѣтаетъ навыкъ: во-первыхъ—понимать излагаемое въ книгѣ, во-вторыхъ—углубляться въ смыслъ излагаемаго и въ-третьихъ—передавать изученное въ стройной системѣ вполнѣ точнымъ, сжатымъ языкомъ. Все это пріобрѣтается ученикомъ, безъ заучиванія наизусть страницъ книги, при посредствѣ только одного умѣнія и желанія вникать въ книгу и не оставлять ничего непонятнымъ до конца,—къ чему достаточный навыкъ пріобрѣтается при прохожденіи курса элементарнаго.

Переходъ къ изученію при помощи учителя и учебника статей новыхъ совершается легко, такъ какъ статьи эти, начинающіяся обыкновенно съ основныхъ теоремъ относительно дѣлимости и разложенія чиселъ, располагаются довольно далеко отъ начала книги, къ которой учащійся уже успѣетъ привыкнуть и для дальнѣйшаго слѣдованія по которой обладаетъ достаточнымъ запасомъ развитія и знаній.

Такимъ образомъ, прохожденіе систематическаго курса Ариѳметики, при значительномъ участіи учебной книги, положитъ хорошее основаніе всякому дальнѣйшему спеціальному образованію оканчивающихъ курсъ въ гимназіяхъ. Ученикъ получаетъ навыкъ и пріемъ иногда и безъ помощи учителя, на основаніи личнаго, подъ-часъ кропотливаго труда, пріобрѣтать свѣдѣнія изъ учебной книги. Навыкъ же этотъ возможенъ только при условіи правильной подготовки ученика и достаточнаго развитія его посредствомъ элементарнаго курса.

На прохожденіе элементарнаго курса Ариѳметики слѣдуетъ положить 3—4 года, въ возрастѣ учащихся отъ 7 до 10—11 лѣтъ; на прохожденіе курса систематическаго достаточно двухъ лѣтъ, то-есть первый и второй классы гимназіи. Слѣдовательно ученикъ до 12—13 лѣтъ пройдетъ полный курсъ Ариѳметики, исполнивъ ту программу, которая поставлена для всѣхъ нашихъ учебныхъ заведеній, и я думаю, что преподаватели, обстоятельно ознакомившіеся съ предлагаемымъ мною элементарнымъ курсомъ и съ сейчасъ изложеннымъ распредѣленіемъ курса, вполнѣ согласятся съ тѣмъ, что программа теоретическаго курса Ариѳметики будетъ исполнена основательно.

Весьма полезно также повторить курсъ Ариѳметики въ послѣднемъ передъ выпускомъ классѣ гимназіи и повторить его уже по другому, болѣе пространному учебнику, нежели тотъ, по которому проходился курсъ въ низшихъ классахъ гимназіи. При этомъ учитель только указываетъ ученикамъ статьи изъ книги и вовсе не поясняетъ заданнаго для приготовленія. Такой пріемъ повторенія въ старшемъ классѣ курса, пройденнаго въ классахъ низшихъ, полезенъ въ слѣдующихъ трехъ отношеніяхъ: 1) ученики снова возстановляютъ въ памяти какъ учебный матеріалъ, такъ и систему его расположенія, а полное усвоеніе системы такого законченнаго въ гимназическомъ курсѣ предмета, какъ Ариѳметика, дастъ ученику правильное понятіе о стройной системѣ науки вообще; 2) приготовляя *отдѣлы* учебника самостоятельно, безъ помощи учителя, только исправляющаго невѣрности въ отвѣтахъ, ученики пріучаются къ послѣдовательному настойчивому труду, навыкъ къ которому составляетъ самое солидное пріобрѣтеніе оканчивающихъ курсъ въ гимназіи; 3) повторяя курсъ Ариѳметики по новой книгѣ, учащіеся знакомятся съ пріемомъ изложенія учебнаго матеріала по другой книгѣ и тѣмъ болѣе пріобрѣтаютъ пріемы и навыкъ пользоваться вообще всякою учебной книгой, что окажетъ свое благотворное вліяніе при прохожденіи ими высшаго университетскаго курса. Часто случается, что лица, проходящія университетскій курсъ и не пріученныя въ гимназіяхъ къ самостоятельному изученію предмета по книгамъ, всѣ свои занятія сосредоточиваютъ на запискахъ, составляемыхъ со словъ профессора, и относятся къ книгамъ изъ области факультета съ весьма понятною боязнію.

Программа элементарнаго и систематическаго курса Ариѳметики, расположеннаго по годамъ, приводится въ началѣ самаго курса.

2) *Расположеніе учебнаго матеріала Ариѳметики должно быть концентрическое.*

Предметъ учебный тогда имѣетъ дѣйствительное вліяніе на развитіе умственныхъ способностей учащихся, когда онъ основательно усвоивается учащимися, когда онъ переходитъ черезъ сознаніе въ область памяти и дѣлается окончательно достояніемъ учащагося. Для основательнаго же усвоенія учебнаго предмета во всѣхъ его подробностяхъ необходимо, какъ изложено въ первой главѣ нашего введенія, возможно частое повтореніе одного и того же подъ различными видами и въ комбинаціи съ новымъ; тогда старыя представленія и понятія становятся все прочнѣе и прочнѣе, а новое легко связывается со старымъ будучи предложено въ небольшомъ объемѣ и въ тѣсной связи со старымъ матеріаломъ. Слѣдовательно, прочному усвоенію учебнаго матеріала содѣйствуетъ концентрація его расположенія при прохожденіи курса. Исходя отъ самой сущности предмета, составляющей центръ учебнаго матеріала располагаютъ этотъ матеріалъ по постепенно расширяющимся кругамъ представляющимъ по содержанію цѣлые, законченные и однородные курсы и отличающіеся постепеннымъ возрастаніемъ объема и усложненіемъ матеріала. Каждый предшествующій курсъ служитъ такимъ образомъ подготовкой для курса послѣдующаго, а послѣдующій—повтореніемъ и распространеніемъ предшествовавшаго.

Центръ учебнаго матеріала Ариѳметики есть *изученіе состава и свойствъ числа и дѣйствій съ числомъ.* Изученіе цѣлаго числа въ элементарномъ курсѣ концентрируется такъ: 1) числа отъ 1 до 10 разсматриваемыя по ихъ составу, взаимнымъ отношеніямъ и дѣйствіямъ 2) числа до 20 — этотъ курсъ есть только расширеніе перваго 3) числа до 100—курсъ представляетъ пополненіе и расширеніе прежнихъ и сводитъ въ систему различныя соотношенія и комбинаціи чиселъ посредствомъ выдѣленія и группировки дѣйствій; 4) составныя именованныя числа въ предѣлѣ числа до 100—этотъ курсъ представляетъ матеріалъ для примѣненія и обобщенія первыхъ трехъ и вводитъ выдѣленіе самыхъ пріемовъ совершенія дѣйствій съ числомъ и 5) цѣлыя числа любой величины—курсъ, отличающійся отъ прежнихъ возрастаніемъ числа и требующій окончательнаго установленія механическихъ правилъ и пріемовъ для письменнаго вычисленія съ большими числами.

Послѣ такого обстоятельнаго знакомства ученика съ цѣлымъ числомъ курсъ обыкновенныхъ дробей концентрируется въ два курса: 1) элементарный курсъ дробей, въ которомъ на основаніи всего пройденнаго устанавливается понятіе о дроби и ея свойствахъ и производятся четыре дѣйствія съ дробями не по механическимъ правиламъ, а на основаніи знакомства съ числами первой сотни и со свойствами дроби; 2) систематическій курсъ простыхъ дробей.

Весь же курсъ Ариѳметики, какъ видно изъ перваго тезиса, располагается въ трехъ большихъ концентрахъ: 1) приготовительный или элементарный, 2) систематическій и 3) повторительный въ старшемъ классѣ.

Такимъ образомъ, постепенно расширяясь, усложняясь и повторяясь, курсъ Ариѳметики усвоивается окончательно ученикомъ какъ теоретически, такъ и практически, въ видѣ стройнаго, послѣдовательнаго и неразрывнаго ряда теоремъ и ихъ приложеній. При этомъ, спѣшу оговориться, что при такомъ расположеніи курса я имѣю въ виду не *легкость* усвоенія ученикомъ учебнаго матеріала, а *доступность* и черезъ то хорошее вліяніе обученія на умственное развитіе.

3) *Обученіе дѣтей Ариѳметикѣ должно начинаться съ подробнаго изученія ими чиселъ первой сотни.*

При начальномъ обученіи дѣтей Ариѳметикѣ важно: 1) дать имъ учебный матеріалъ, вполнѣ доступный ихъ пониманію; въ этомъ отношеніи Грубе справедливо говоритъ и доказываетъ, что предѣлъ числа, доступный осязательному пониманію семилѣтняго ученика, не выше 100; 2) пріучать ихъ на этомъ учебномъ матеріалѣ мыслить и выражаться правильно и послѣдовательно; 3) познакомить съ основными свойствами и составомъ числа; 4) дать начало для быстраго и правильнаго вычисленія и, наконецъ, 5) довести учениковъ до пониманія необходимости различныхъ дѣйствій съ числами и до выясненія сущности каждаго дѣйствія.

Всѣ эти цѣли хорошо достигаются на изученіи чиселъ первой сотни. Слово „*изучить число*", пріобрѣвшее въ педагогической литературѣ право гражданства, не должно быть понимаемо въ слишкомъ обширномъ смыслѣ, иначе это изученіе потребовало бы такихъ пріемовъ которые менѣе доступны пониманію дѣтей, нежели непосредственное знакомство съ нумераціей чиселъ до высшихъ предѣловъ и съ дѣйствіями надъ этими числами. Изучить число значитъ настолько овладѣть имъ, чтобы во всякомъ данномъ случаѣ, при всякомъ вычисленіи, можно было пользоваться этимъ числомъ свободно и сознательно. Нужно составить ясное понятіе о числѣ вообще и единицѣ. Нужно усвоить сознательно въ памяти составъ каждаго числа первой сотни изъ единицъ и отношеніе его къ предшествующимъ и послѣдующимъ числамъ. Нужно научиться быстро и безошибочно складывать и вычитать числа этого предѣла, а также усвоить составъ каждаго числа изъ множителей и дѣлимость числа на своихъ производителей. Всякое усвоенное отношеніе чиселъ ученикъ долженъ свободно прилагать къ рѣшенію практическихъ вопросовъ. Нужно познакомиться съ составомъ и пріемами вычисленія формулы, а также на рѣшеніи задачъ научиться составлять формулы рѣшенія, связывая между собою данныя числа знаками дѣйствій, соотвѣтственно условіямъ задачи.

На изученіи чиселъ перваго десятка дѣти знакомятся съ первыми пріемами вычисленій. Если ученикъ не усвоилъ разъ навсегда сознательно, что 8 безъ 5 будетъ 3, то, безъ сомнѣнія, онъ не будетъ въ состояніи вычесть 15 изъ 28, или же долженъ для пополненія этого пробѣла механически выучить наизусть табличку вычитанія однозначныхъ чиселъ. Здѣсь же ученикъ вполнѣ осязательно знакомится съ самыми необходимыми основными понятіями, безъ которыхъ невозможно изученіе дальнѣйшаго курса Ариѳметики, каковы: прибавить, отнять, уменьшить, увеличить, узнать содержаніе одной величины въ другой, раздѣлить на равныя части величину и т. п. Все это, пріобрѣтенное наглядно и въ предѣлѣ числа, доступномъ умственному кругозору ученика, дѣлается дѣйствительною его собственностью, которою онъ будетъ впослѣдствіи свободно пользоваться при всякомъ данномъ случаѣ.

На изученіи чиселъ второго десятка ученикъ, во-первыхъ, повторяетъ понятія и пріемы уже ему знакомые и, во-вторыхъ, знакомится съ новыми пріемами вычисленія, каковы, напримѣръ, пріемы, служащіе для опредѣленія связи между собою чиселъ однозначныхъ, дающихъ въ результатѣ число двузначное ($9+5$ или 3×6) и отношеній чиселъ двузначныхъ между собою и къ числамъ однозначнымъ ($17-13$ или $18 : 6$). Если ученикъ, напримѣръ, усвоилъ пріемъ вычитанія $19-16$ или $15-9$, то онъ весьма легко примѣнитъ его потомъ къ вычитанію всякихъ чиселъ. А на множествѣ упражненій съ числами этого предѣла ученикъ, усвоивая самый пріемъ вычисленія, попутно и незамѣтно усвоиваетъ таблицы сложенія, вычитанія, умноженія и дѣленія.

При изученіи слѣдующихъ чиселъ до 100 ученикъ встрѣчаетъ случаи приложенія усвоенныхъ понятій и пріемовъ въ болѣе широкихъ размѣрахъ, а также снова встрѣчаетъ необходимость въ новыхъ пріемахъ ($63-27$, 6×12, $84 : 12$ и т. п.). Научившись комбинировать числа и находить между ними отношенія въ этомъ предѣлѣ, ученикъ безъ всякаго затрудненія будетъ комбинировать числа любой величины. Переходъ отъ пріема умноженія 16 на 5 къ пріему умноженія 2568 на 7 представитъ для такого ученика только случай приложенія усвоеннаго. Зная составъ особенно замѣчательныхъ сложныхъ чиселъ, каковы: 24, 36, 40, 60, 72 и другія, ученикъ воспользуется этимъ знаніемъ и при разложеніи чиселъ на множителей, и при сложеніи дробей, и при вычисленіи вообще формулъ. Тяжело смотрѣть, когда ученикъ, прошедшій полный курсъ Ариѳметики, для сложенія $^7/_{12}$ $^4/_{15}$ разлагаетъ 12 и 15 на множителей, да еще при посредствѣ вертикальной черты, и механически составляетъ наименьшее кратное число, или сокращаетъ дробь $^{36}/_{72}$ сначала на 2, потомъ опять на 2, потомъ на 3 и т. д., или по признакамъ дѣлимости опредѣляетъ, на сколько можно сократить эту дробь. А откуда же ученикъ пріобрѣтетъ навыкъ владѣть числомъ, если онъ началъ знакомиться сразу съ большими числами?

Познакомившись наглядно и вполнѣ осязательно съ отношеніями и комбинаціями чиселъ въ предѣлѣ первой сотни, ученикъ самъ разгруппируетъ дѣйствія съ числами, сознательно опредѣлитъ каждое дѣйствіе и выдѣлитъ въ немъ числа данныя и искомое; а также, выяснивъ себѣ сущность каждаго дѣйствія, ученикъ при рѣшеніи задачи будетъ прилагать то или другое дѣйствіе не наугадъ, а по условіямъ задачи.

Съ такимъ запасомъ свѣдѣній и развитія, пріобрѣтенныхъ на изученіи курса Ариѳметики, такъ сказать, въ миніатюрѣ, ученикъ безбоязненно и вполнѣ сознательно можетъ перейти къ изученію дальнѣйшаго курса. Весь этотъ дальнѣйшій курсъ цѣлыхъ чиселъ будетъ только расширеніемъ тѣхъ понятій и пріемовъ вычисленія, которые уже основательно знакомы ученику. Все дѣло будетъ состоять только въ новомъ распредѣленіи и приведеніи въ новую систему этихъ понятій и пріемовъ.

Расширить предѣлъ числа для подробнаго изученія именно до 100 необходимо еще и потому, что въ этомъ предѣлѣ числа возможно знакомство учениковъ съ дѣйствіями съ составными именованными числами и съ простѣйшими дробями и ихъ комбинаціями и соотношеніями. При меньшемъ предѣлѣ числа подборъ упражненій для этихъ случаевъ представилъ бы большое затрудненіе.

Обыкновенное замѣчаніе людей, несвѣдущихъ въ дѣлѣ начальнаго обученія дѣтей, что дѣти въ семь лѣтъ встрѣчаются въ жизни съ числами, превышающими предѣлъ изучаемыхъ ими въ школѣ чиселъ, каковы, напримѣръ, числа, означающія годы событій и т. п., не имѣетъ никакого значенія въ педагогическомъ отношеніи. Счетъ практическій и изученіе числа—понятія различныя, и изъ того, что иной шестилѣтній ребенокъ умѣетъ считать до тысячи и далѣе, нельзя выводить никакихъ заключеній о его способности къ развитію и изученію Ариѳметики и о необходимости для него курса Ариѳметики, начинающаго сразу съ общаго понятія о числѣ. Было бы странно удержать ребенка отъ знакомства со счетомъ предметовъ, если его житейская обстановка даетъ къ тому поводъ, но было бы еще болѣе странно намѣренно заботиться о развитіи въ немъ наклонности къ механическому счету.

4) *Въ началѣ элементарнаго курса Ариѳметики слѣдуетъ давать предпочтеніе вычисленію устному, а въ концѣ письменному.*

Устное вычисленіе иногда называется въ нѣкоторыхъ учебникахъ Ариѳметики и методическихъ руководствахъ *умственнымъ* и противопоставляется вычисленію письменному посредствомъ цифръ и при помощи опредѣленныхъ правилъ. При правильномъ обученіи дѣтей, какъ вычисленіе устное, такъ и письменное должны быть вычисленіями умственными; правило, прилагаемое ученикомъ при письменномъ рѣшеніи задачи, и пріемы письменнаго вычисленія требуютъ такого же соображенія отъ ученика, какъ и пріемы вычисленія устнаго. Притомъ не всякое устное вычисленіе бываетъ непремѣнно умственное; весьма часто встрѣчаются дѣти, вычисляющія устно посредствомъ цифръ, такъ же точно, какъ и при вычисленіи письменномъ; умножая, напримѣръ, 15 на 6, они точно также думаютъ про себя: „пятью-шесть тридцать; нуль пишу, а 3 въ умѣ“ и т. д., какъ это они дѣлаютъ и при вычисленіяхъ на бумагѣ или на доскѣ. Начинающему обучать дѣтей Ариѳметикѣ нужно обратить самое серьезное вниманіе на то, чтобы они при вычисленіяхъ устныхъ имѣли въ виду дѣйствительныя числа, а не значки, ихъ изображающіе.

По мѣрѣ возрастанія числа становится труднымъ производить всѣ вычисленія устно, является необходимость въ нѣкоторыхъ пріемахъ, упрощающихъ вычисленія съ большими числами, и правила дѣйствій возникаютъ въ умѣ ученика сами собою по мѣрѣ надобности. Тогда уже и письменное вычисленіе, сознательно совершаемое, имѣетъ такое же вліяніе на развитіе умственныхъ способностей ученика, какъ и вычисленіе устное.

5) *Первоначальное обученіе дѣтей Ариѳметикѣ должно основываться на наглядности.*

Выясненіе основныхъ частныхъ понятій изъ Ариѳметики въ элементарномъ курсѣ производится при посредствѣ наглядныхъ пособій; отъ частныхъ понятій дѣти мало-по-малу переходятъ къ понятіямъ общимъ. Подробное описаніе главнѣйшихъ и наиболѣе употребительныхъ наглядныхъ пособій приводится въ концѣ этой главы, а ихъ употребленіе при прохожденіи элементарнаго курса Ариѳметики можно найти въ соотвѣтствующихъ мѣстахъ въ самомъ курсѣ.

6) *Способъ преподаванія элементарнаго курса Ариѳметики долженъ быть катихитическій.*

Маленькій ученикъ работаетъ усердно и съ пользою тогда, когда работа его интересуетъ. Интересъ работы для ученика, безъ сомнѣнія, долженъ заключаться не въ матеріалѣ, предлагаемомъ для изученія, а въ способѣ разработки и усвоенія этого матеріала. Предлагая ученикамъ работу, интересную только по своему содержанію, легко можно на нѣкоторое время увлечь классъ; но увлеченіе это, по мѣрѣ развитія учениковъ, проходитъ, и самое развитіе этимъ замедляется. Такимъ же образомъ и интересъ самаго процесса преподаванія долженъ состоять не въ излишней болтливости учителя и искусственныхъ ухищреніяхъ, когда преподаваніе обращается въ пустой разговоръ учителя съ учениками, безъ результатовъ для дѣла,—а въ доступности пониманія для учениковъ предмета преподаванія и въ дѣятельномъ ихъ участіи въ разработкѣ учебнаго матеріала. Слѣдуя одному изъ педагогическихъ принциповъ Песталоцци, что каждый человѣкъ долженъ развиваться извнутри, и что дѣло воспитанія и обученія—только помочь ему въ этомъ развитіи, должно согласиться, что преподаваніе начальнаго курса всякаго учебнаго предмета должно быть направлено по тому же синтетическому пути, по которому идетъ и все естественное начальное развитіе человѣческаго сознанія. Аналитическое направленіе преподаванія, исходящее отъ общихъ положеній и законовъ, предполагаетъ уже въ ученикахъ самостоятельность мышленія; напротивъ того, преподаватель, при синтетическомъ способѣ преподаванія, исходя отъ той точки, на которой остановилось развитіе учащагося, долженъ возбудить въ ученикѣ самодѣятельность и дать ей пищу въ раскрытіи новыхъ мыслей и въ накопленіи умственнаго матеріала для вывода общихъ положеній и законовъ.

За лучшій способъ преподаванія всѣхъ учебныхъ предметовъ элементарнаго курса въ этомъ направленіи—слѣдуетъ считать способъ *катихитическій*, посредствомъ котораго ученикъ самъ, мало-по-малу, по мѣрѣ своего развитія и своихъ знаній, при помощи учителя, подходитъ къ открытію и усвоенію истины. Все дѣло состоитъ въ томъ, что учитель, пользуясь всѣми предварительными свѣдѣніями учениковъ и зная степень развитія ихъ соображенія, не сообщаетъ самъ новыхъ истинъ, служащихъ основаніемъ умозаключеній, а идетъ путемъ обратнымъ—рядомъ опытовъ подводитъ учениковъ къ раскрытію и усвоенію новой для нихъ истины и затѣмъ уже пользуется ею для дальнѣйшихъ умозаключеній, такъ что истина не дается ученикамъ, какъ нѣчто требующее доказательства и имѣющее практическое приложеніе, а изъ частныхъ практическихъ примѣровъ ученики выводятъ заключеніе о самой необходимости существованія истины. Такой процессъ выработки свѣдѣній, удерживая въ постоянномъ напряженіи умственныя способности ученика, не только развиваетъ его любознательность, но и даетъ ей обильную пищу. Ученикъ не чувствуетъ себя подавленнымъ сообщаемыми ему догматическими умозаключеніями учителя или учебника, но самъ сознаетъ необходимость собственнаго личнаго участія для выработки понятія и умозаключенія; учитель для него есть сила возбуждающая и направляющая. Полная примѣнимость такого способа преподаванія возможна только въ математикѣ. Катихитическій способъ преподаванія, примѣняемый при начальномъ обученіи дѣтей, удовлетворяетъ тремъ главнѣйшимъ цѣлямъ: а) онъ даетъ возможность ученику собственными силами доходить до выработки понятій и умозаключеній, б) ограждаетъ сознаніе и память ученика отъ вторженія въ нихъ понятій и умозаключеній, непосильныхъ его соображенію, что часто бываетъ возможно при способѣ догматическомъ, и в) возбуждаетъ вниманіе ученика и любовь къ учебному предмету, вовлекая его ежеминутно въ работу мысли. При дальнѣйшемъ систематическомъ курсѣ преслѣдованіе этихъ цѣлей отодвигается на второй планъ: умъ ученика, прошедшаго элементарный курсъ, уже достаточно развитъ, чтобы воспринимать сознательно понятія и умозаключенія, сообщаемыя учителемъ, или почерпаемыя изъ хорошо приноровленной учебной книги. Вниманіе ученика возбуждается здѣсь уже не пріемами классной работы, а самимъ содержаніемъ учебнаго матеріала.

Помощью постановки вопросовъ ученику дается возможность самому переходить отъ одной математической истины къ другой, близко съ ней связанной. Для этого разработка учебнаго матеріала должна идти такъ, чтобы неизвѣстное ученику вытекало, какъ неизбѣжный результатъ, изъ прежде понятаго и усвоеннаго. Опираясь на понятіяхъ, укрѣпленныхъ въ сознаніи ученика, учитель ставитъ только вопросъ и даетъ ему такую форму, чтобы ученикъ съ возбужденною пытливостью и интересомъ къ дѣлу подходилъ ближе и ближе къ математическому выводу.

При такомъ процессѣ работы достигается какъ пріобрѣтеніе новаго умозаключенія, такъ и общее развитіе мышленія, выраженное самимъ процессомъ. А увѣренность въ доступности предмета и въ собственной способности изучать предметъ даютъ ученику силу и охоту идти дальше въ пріобрѣтеніи новыхъ свѣдѣній.

Постановкою послѣдовательныхъ вопросовъ, сообразуясь съ отвѣтами учениковъ, учитель вызываетъ отъ нихъ свѣдѣнія, необходимыя для извѣстнаго вывода, группируетъ эти свѣдѣнія около избраннаго центра разсужденія и снова вопросами даетъ направленіе разсужденію, подводящему къ выводу новаго умозаключенія.

Достоинство катихитическаго способа преподаванія состоитъ въ пріученіи учениковъ къ разнообразію вопросовъ, всестороннему обсужденію разсматриваемаго предмета, пользованію всѣми своими наличными свѣдѣніями во всякій моментъ и къ самостоятельному составленію отвѣтовъ.

Нужно различать катихизацію *повторительную*, когда учитель контролируетъ уже усвоенное учениками, и *наводящую*, когда производится выработка новаго вывода. Въ первомъ случаѣ вопросы должны быть болѣе обширные по содержанію и требующіе такихъ же отвѣтовъ; во второмъ — вопросы болѣе дробные, постепенно подводящіе къ выводу и направляющіе мышленіе ученика.

Самое полное теоретическое разъясненіе сущности катихитическаго способа преподаванія не можетъ дать такого отчетливаго о немъ понятія человѣку, несвѣдущему въ этомъ дѣлѣ, какъ приложеніе его на практикѣ при разработкѣ учебнаго матеріала, что я надѣюсь сдѣлать съ достаточною подробностію при изложеніи самаго курса. Теперь же приведу нѣкоторые частные пріемы, которые хотя тоже можно будетъ прослѣдить по курсу, но предварительное знаніе которыхъ значительно облегчитъ какъ пониманіе курса, такъ и пользованіе имъ при преподаваніи.

При веденіи преподаванія элементарнаго курса по катихитическому способу необходима одновременная работа всѣхъ учениковъ въ классѣ. Учитель можетъ вполнѣ разсчитывать только на тѣ свѣдѣнія учениковъ, которыя они пріобрѣли въ классѣ подъ его руководствомъ и наблюденіемъ. Внѣклассная работа ученика состоитъ въ повтореніи пріобрѣтеннаго въ классѣ на вычисленіи примѣровъ и рѣшеніи задачъ, къ которымъ прилагаются правила и пріемы, выработанные во время урока. Слѣдовательно, правильная организація классной работы, съ соблюденіемъ порядка всего класса и съ возможностью контролировать во всякій данный моментъ участіе въ работѣ каждаго ученика, составляетъ важную задачу учителя, безъ правильнаго рѣшенія которой немыслимо достиженіе хорошихъ результатовъ. Достаточно упустить изъ виду хотя нѣсколько эту чисто внѣшнюю сторону дѣла, чтобы стать въ совершенно ненормальное положеніе относительно класса и обратить все дѣло преподаванія въ пустую болтовню, развивающую изъ учениковъ фразеровъ и побуждающую ихъ относиться къ предмету преподаванія не только небрежно, но даже искать въ немъ средствъ для пустого развлеченія. Преподаватель, перешедшій эту границу, дѣлается человѣкомъ вреднымъ для обученія и еще болѣе для воспитанія дѣтей.

Катихизируя какой-либо предметъ въ классѣ, учитель долженъ убѣдиться во вниманіи учениковъ къ обсуждаемому предмету, въ пониманіи предлагаемыхъ вопросовъ и въ готовности отвѣчать на эти вопросы. Тутъ, слѣдовательно, важны: постановка учителемъ вопроса, процессъ составленія на него отвѣта учениками и сообщеніе этого отвѣта учителю.

Предлагаемый вопросъ, вытекающій изъ предмета обсужденія, долженъ быть поставленъ не только съ достаточною ясностію, но и безъ добавокъ и повтореній со стороны учителя, что могло бы запутать учениковъ. Двойные вопросы, требующіе за-разъ двухъ отвѣтовъ, затрудняютъ ученика, не позволяя ему сосредоточиться на чемъ-либо одномъ; вопросы, отвѣтъ на которые можетъ быть выраженъ только въ словахъ „да" или „нѣтъ", мало возбуждаютъ мышленіе ученика и весьма часто рѣшаются догадкою; вопросы неопредѣленные, неточные, даютъ ученикамъ возможность отвѣчать необдуманно и потому отнимаютъ напрасно время на выясненіе неправильности отвѣта или содержанія предложеннаго вопроса. Прежде полученія отвѣта на главный вопросъ, затруднившій учениковъ, можно посредствомъ побочныхъ наводящихъ вопросовъ предварительно устранять ложныя представленія и направлять мышленіе учениковъ къ правильному умозаключенію.

Давши классу вопросъ для рѣшенія, учитель предварительно освѣдомляется, всѣ ли ученики поняли его и усвоили. Въ противномъ случаѣ вопросъ долженъ быть повторенъ кѣмъ-либо изъ учениковъ. При контролированіи пониманія и усвоенія вопроса, а также при сужденіи о томъ, какіе ученики и сколько ихъ именно готовы дать отвѣтъ, нужно пріискать средство избѣгать въ классѣ лишняго разговора и безпорядка, который легко возбуждается и мѣшаетъ быстротѣ и правильности разработки учебнаго матеріала, если ученики заявляютъ свои желанія голосомъ или вставаніемъ съ мѣста. Лучше установить какой-либо условный знакъ, посредствомъ котораго ученики безмолвно могли бы отвѣчать учителю на необходимые и частые вопросы, въ родѣ: „кто повторитъ вопросъ, кто можетъ отвѣчать?" и т. п. Лучшимъ условнымъ знакомъ для этого въ нѣмецкихъ и во многихъ нашихъ не только низшихъ, но и среднихъ училищахъ, считаютъ поднятіе ученикомъ правой руки, причемъ наблюдается, чтобы при этомъ со стороны учениковъ соблюдалось полное приличіе въ классѣ, что легко достигается въ нѣсколько уроковъ. При установленіи такого внѣшняго условнаго знака, ученику нѣтъ надобности заявлять словесно о своемъ желаніи отвѣчать на предложенный вопросъ или о своемъ непониманіи чего-либо разбираемаго на урокѣ. Онъ поднятіемъ руки обращаетъ на себя вниманіе учителя.

Желая получить отвѣтъ на вопросъ, учитель называетъ ученика по фамиліи. Отвѣтъ долженъ отличаться полнотою, то-есть заключать въ себѣ какъ содержаніе вопроса, такъ и его разрѣшеніе. Такимъ образомъ на вопросъ учителя: „какъ увеличить дробь въ 3 раза?“ ученикъ долженъ отвѣчать примѣрно такъ: „чтобы увеличить дробь въ 3 раза, нужно или числителя дроби умножить на 3, или знаменателя раздѣлить на 3, если онъ дѣлится безъ остатка“. При каждой ошибкѣ отвѣчающаго ученика товарищи его тѣмъ же знакомъ заявляютъ о своемъ вниманіи къ отвѣту и готовности исправить ошибку. Исправленный и хорошо формулированный отвѣтъ повторяется слабѣйшими учениками, и тогда можно быть увѣреннымъ, что отвѣтъ, установленный такимъ образомъ, сдѣлается собственностью учениковъ. Частое повтореніе выработаннаго умозаключенія или правила служитъ сильнымъ орудіемъ обученія.

Во избѣжаніе непроизводительной траты времени нѣтъ надобности подводить учениковъ катихитически къ раскрытію самаго названія предмета разсужденія. Лучше названіе это сообщить прямо ученикамъ.

Въ началѣ работы съ новымъ классомъ дѣло будетъ подвигаться медленно; но, по мѣрѣ развитія учениковъ, пріобрѣтенія ими свѣдѣній и навыка къ процессу ихъ выработки и усвоенія, дѣло пойдетъ быстрѣе, нежели при излагающемъ способѣ преподаванія. Не слѣдуетъ однако упускать изъ виду, что, дѣйствуя такимъ путемъ, неопытный преподаватель легко можетъ увлечься въ крайность и пріучить учениковъ думать только при постановкѣ имъ вопросовъ и составлять въ умѣ только краткія мысли для отвѣтовъ на нихъ. Для избѣжанія этой крайности хорошимъ средствомъ можетъ служить систематическая группировка въ концѣ урока всего пройденнаго въ урокъ учениками и вызываніе, посредствомъ болѣе обширныхъ вопросовъ, полной и связной передачи пройденнаго однимъ или нѣсколькими учениками, а также частое вызываніе къ классной доскѣ отдѣльныхъ учениковъ для полнаго разсужденія и совершенія вычисленій при рѣшеніи задачи.

Спѣшность со стороны учителя также много вредитъ дѣлу и, про тивъ ожиданія его, замедляетъ прохожденіе курса; не давая ученик возможности высказать свою мысль до конца частымъ перебиваніем и поправками, учитель заставляетъ ученика спѣшить и оттого путатьс Вообще нужно сказать, что катихитическій способъ преподаванія, един ственно примѣнимый при начальномъ обученіи дѣтей, есть орудіе весьм опасное въ рукахъ преподавателя, не вполнѣ постигшаго его сущност Нужно быть очень осторожнымъ и хорошо подготовлять какъ матеріал такъ и главные вопросы каждаго урока, чтобы не обратить классну катихизацію въ безсодержательный разговоръ, изъ котораго ученик ничего не вынесутъ ни для своего развитія, ни для пріобрѣтенія не обходимыхъ свѣдѣній. Каждый новый главный вопросъ долженъ быт на столько оттѣненъ, чтобы ученикамъ былъ ясенъ переходъ отъ одног вопроса къ другому. Спокойное и обдуманное составленіе ученикам отвѣта на предлагаемый вопросъ обусловливается спокойствіемъ самог учителя при предложеніи вопроса; суетливость въ этомъ случаѣ болѣ всего вредитъ дѣлу.

Всякій преподаватель, безъ сомнѣнія, согласится съ тѣмъ, чт только при серьезномъ и сосредоточенномъ вниманіи ученики могут пріобрѣтать свѣдѣнія и подвигаться впередъ въ своемъ умственном развитіи. А потому дисциплина класса должна составлять одну из немаловажныхъ заботъ учителя. Нѣтъ однакоже возможности соста вить à priori теоретическихъ положеній, могущихъ установить у всѣх преподавателей заведенія однообразный взглядъ на дисциплинарну сторону преподаванія; хотя подобное согласіе весьма легко встрѣтит во многихъ нѣмецкихъ школахъ, но согласіе это выработано опытом и практикой, а не теоріей. Только достаточный опытъ въ обращені съ дѣтьми и психологическія наблюденія сообщаютъ учителю тотъ пе дагогическій *тактъ*, руководясь которымъ, онъ во всякій данный мо ментъ, при встрѣтившейся случайности, находитъ въ своемъ педагоги ческомъ лексиконѣ требуемое указаніе и поступаетъ въ большей част случаевъ правильно. Даже впослѣдствіи, анализируя свой мимолетны пріемъ, употребленный быстро, при комбинаціи многихъ неуловимых случайностей, учитель, обладающій педагогическимъ тактомъ, находитъ и вполнѣ безошибочно, свой пріемъ соотвѣтствующимъ встрѣтившемус случайному обстоятельству. Часто очень дисциплинарные пріемы, упот ребляемые съ пользою однимъ преподавателемъ, совершенно недѣй ствительны въ рукахъ другого, что зависитъ отъ множества особен ностей, свойственныхъ складу ума и характера каждаго человѣка Нигдѣ такъ рѣзко не разоблачаются нѣкоторые недостатки учителей какъ въ классѣ при катихитическомъ способѣ преподаванія. Здѣсь учител находится въ постоянномъ общеніи съ учениками. Легко усвоиваемыя учителями привычки—насмѣшливость, излишняя говорливость, покрикиваніе на учениковъ и т. п.—скорѣе могутъ вредить при этомъ способѣ преподаванія, нежели при догматическомъ, когда учителю легче услѣдить за собой самимъ. Не вдаваясь въ обсужденіе этого сложнаго вопроса, обусловливаемаго множествомъ частностей и чисто случайныхъ обстоятельствъ, я могу выразить только желаніе, чтобы начинающіе преподаватели придавали побольше значенія этой сторонѣ педагогическаго дѣла и заботились объ установленіи вполнѣ обдуманныхъ пріемовъ обращенія съ учениками и поддержанія постояннаго порядка во время урока. Подражаніе въ этомъ дѣлѣ мало можетъ быть полезно, если заимствованные у другого преподавателя пріемы не обратились въ полную собственность заимствующаго.

7) *Курсъ Ариѳметики долженъ проходиться при значительномъ участіи практическихъ задачъ.*

Задачи, предлагаемыя въ классѣ, заключаютъ въ себѣ живой матеріалъ для упражненія мышленія ученика, для вывода математическихъ правилъ и для упражненія въ приложеніи этихъ правилъ къ рѣшенію частныхъ практическихъ вопросовъ. А потому подборъ задачъ долженъ быть строго систематическій.

На первомъ планѣ въ задачѣ ставится ея содержаніе, потомъ число и его свойство, а не дѣйствія, необходимыя для рѣшенія задачи. Дѣйствіе вытекаетъ изъ самаго соотношенія данныхъ въ задачѣ чиселъ и указывается ученикамъ тогда, когда они по условіямъ задачи открыли связь между данными числами. Названіе дѣйствія только тогда получитъ для ученика значеніе, когда онъ увидитъ необходимость совершенія его для рѣшенія задачи. Выдѣленіе дѣйствій и подробное изученіе ихъ вмѣстѣ со свойствами элементовъ, въ нихъ входящихъ, можетъ послѣдовать уже послѣ пріобрѣтенія ученикомъ способности дѣлать отвлеченіе, не впадая въ механизмъ. Тогда, переходя отъ задачъ къ выводамъ и обобщеніямъ, можно упражнять учениковъ въ примѣненіи этихъ выводовъ на механическомъ вычисленіи и тѣмъ закрѣплять самые выводы въ памяти учениковъ. А потому, въ началѣ обученія, при изученіи чиселъ первой сотни, нѣтъ надобности дѣлать подборъ задачъ для выдѣленія дѣйствій по рубрикамъ.

На первыхъ порахъ прохожденія элементарнаго курса Ариѳметики рѣшеніе задачи естественнѣе и легче вести отъ *чиселъ данныхъ къ искомому*, что для ученика яснѣе и понятнѣе; впослѣдствіи полезно, исподволь, переходить къ рѣшенію обратному, то есть исходя отъ искомаго и опредѣляя его связь съ числами, данными въ задачѣ. Для уясненія этого вопроса привожу примѣръ рѣшенія одной и той же задачи по двумъ пріемамъ.

Задача. (Изъ Сборника № 267). У двухъ братьевъ было вмѣстѣ 39 коп.; когда они купили у разносчика по 8 груши, то у одного осталось 9 коп., а у другого 12 коп. Сколько денегъ было у каждаго брата до покупки грушъ?

Первый пріемъ рѣшенія. У одного брата послѣ покупки грушъ осталось 9 коп., а у другого 12 коп., значитъ у обоихъ вмѣстѣ $9 + 12 = 21$ коп. У нихъ было 39 коп., а осталось 21 коп., значитъ на груши они истратили $39 - 21 = 18$ коп. Изъ этихъ 18 коп. каждый истратилъ поровну, слѣдовательно, по $18 : 2 = 9$ коп. Итакъ, первый братъ на груши истратилъ 9 коп., и у него осталось еще 9 коп., значитъ до покупки грушъ у него было $9 + 9 = 18$ коп. У второго брата было $9 + 12 = 21$ коп.

Второй пріемъ. Требуется узнать, сколько было денегъ у каждаго брата до покупки грушъ. Для этого надо знать, сколько каждый изъ нихъ истратилъ на груши и сколько денегъ у него осталось.

Сколько денегъ осталось у каждаго извѣстно, а чтобы узнать, сколько каждый истратилъ на груши, нужно узнать, сколько они истратили изъ 39 коп. вмѣстѣ, такъ какъ въ задачѣ сказано, что они истратили поровну. А чтобы узнать, сколько они истратили вдвоемъ, нужно прежде высчитать, сколько у двоихъ осталось изъ 39 коп., послѣ покупки грушъ. Итакъ, надо прежде узнать, сколько у обоихъ осталось денегъ, потомъ сколько оба истратили на груши, потомъ сколько истратилъ каждый и, наконецъ, сколько каждый имѣлъ денегъ до покупки грушъ.

Замѣна одного пріема рѣшенія задачи другимъ служитъ однимъ изъ сильнѣйшихъ орудій развитія мышленія ученика и въ то же время подготовляетъ пріемъ, необходимый ученику впослѣдствіи при составленіи формулъ и уравненій изъ задачъ. Переходъ отъ перваго пріема рѣшенія ко второму производится постепенно и легко, если ученики, рѣшая задачи по первому пріему, получили навыкъ удерживать въ памяти все содержаніе задачи и составили отчетливое понятіе о значеніи чиселъ, данныхъ въ задачѣ, чиселъ искомыхъ, и о связи однихъ съ другими посредствомъ условій, выраженныхъ содержаніемъ задачи.

При рѣшеніи задачъ хорошимъ средствомъ для развитія учениковъ служитъ разнообразіе *способовъ* рѣшенія одной и той же задачи и подыскиваніе простѣйшаго изъ нихъ. Но учителю нужно быть очень осторожнымъ, чтобы не запутать слабыхъ учениковъ этимъ разнообразіемъ, и потому каждый новый способъ рѣшенія долженъ слѣдовать тогда, когда прежній былъ классу достаточно уясненъ. Само собою разумѣется, что приисканіе различныхъ способовъ рѣшенія должно исходить отъ самихъ учениковъ при помощи наводящихъ вопросовъ учителя. Навыкъ въ такомъ упражненіи развиваетъ быстроту соображенія; развитые хорошо ученики предлагаютъ часто такое разнообразіе пріемовъ разсужденія при рѣшеніи какой-либо задачи, которое при задаваніи иногда не приходитъ и на мысль учителю.

Только значительный опытъ и пониманіе цѣли и средствъ преподаванія Ариѳметики могутъ дать преподавателю средство удачно и сообразно съ цѣлью составлять быстро во время урока задачи, какъ необходимый матеріалъ при прохожденіи курса. Всего труднѣе подбирать содержаніе задачи: легко очень надоѣсть классу, предлагая задачи съ пустымъ содержаніемъ, вращающимся около понятій «купилъ», «продалъ» и т. п. Естественнѣе всего выбирать содержаніе задачи изъ сферы, окружающей ученика, примѣняясь къ его понятіямъ и видоизмѣняя это содержаніе, по мѣрѣ развитія ученика. Также важенъ подборъ въ задачахъ условій и данныхъ чиселъ, сообразно съ цѣлью преподаванія и съ постепенностью проходимаго курса. Здѣсь легко забѣжать впередъ и запутать ученика, вводя въ задачи данныя числа, превышающія предѣлъ, около котораго мысль ученика привыкла вращаться. Для избѣжанія этого учителю слѣдуетъ являться въ классъ съ готовымъ матеріаломъ. Такой готовый матеріалъ по всѣмъ отдѣламъ элементарнаго и систематическаго курса Ариѳметики учитель найдетъ въ моемъ Сборникѣ ариѳметическихъ задачъ.

Предложеніе и рѣшеніе задачи. Задачи, служащія для изученія свойствъ и состава чиселъ, для вывода правилъ открытія и усвоенія математическихъ истинъ, для послѣдовательнаго развитія мышленія учениковъ и для повторенія пройденнаго курса, бываютъ двухъ родовъ: *устныя* и *письменныя.* Здѣсь я приведу, на сколько возможно, только общіе пріемы предложенія учителемъ процесса рѣшенія учениками задачъ устныхъ и письменныхъ и образецъ катихизаціи при рѣшеніи одной задачи по двумъ приведеннымъ выше пріемамъ, частности же или видоизмѣненія пріема катихизаціи при рѣшеніи задачъ, относящихся къ различнымъ отдѣламъ курса, приведены въ самомъ курсѣ.

Задачи устныя. Въ началѣ обученія дѣти пріучаются держать въ памяти не только содержаніе предлагаемой задачи, но и данныя числа, которыя поэтому не слѣдуетъ записывать. Запоминаніе это облегчается тѣмъ, что содержаніе и числа задачи отличаются на этой ступени обученія простотою. Впослѣдствіи, съ усложненіемъ содержанія задачъ и съ возрастаніемъ числа, если учащіеся уже познакомились съ цифрами, можно не только записывать, для облегченія разсужденія при рѣшеніи задачи и вычисленій, числа на классную доску, но и пользоваться во время урока сборникомъ задачъ, изъ котораго ученики сначала читаютъ задачу вслухъ, а потомъ рѣшаютъ.

Предложенная задача повторяется однимъ или, если нужно, двумя и тремя учениками; послѣ чего предлагаются преимущественно слабымъ ученикамъ частные вопросы, касательно того, что ищется въ задачѣ, что извѣстно, что означаетъ какое-либо данное въ задачѣ число и т. п. Затѣмъ задача снова повторяется въ цѣлости, и ученики рѣшаютъ ее въ умѣ. Предлагая ученикамъ задачу, слѣдуетъ съ достаточною подробностію и наглядностію выяснить имъ всякое новое понятіе, входящее въ задачу, каковы, напримѣръ: бассейнъ, урожай, проба и т. п. Выждавъ нѣкоторое время, пока большинство класса какимъ-либо внѣшнимъ знакомъ (поднятіемъ руки, постукиваніемъ карандаша и т. п.) заявитъ о томъ, что задача рѣшена, учитель спрашиваетъ, кто какое получилъ число. Замѣтивъ по отвѣтамъ, что нѣкоторые ученики утеряли изъ памяти содержаніе задачи или переиначили числа, учитель снова воспроизводитъ то и другое по частямъ, обращаясь къ классу съ вопросами.

Не нужно увлекаться быстротою отвѣтовъ *нѣкоторыхъ* учениковъ, рѣшившихъ задачу, а по возможности наводящими вопросами доводить *весь классъ* до ея рѣшенія. Наиболѣе значительное вниманіе слѣдуетъ обратить вначалѣ знакомства съ новыми учениками на то, чтобы слабые ученики не повторяли отвѣтовъ своихъ болѣе способныхъ товарищей, когда сами еще не дошли до рѣшенія задачи.

Когда весь классъ или большинство учениковъ рѣшили задачу, то рѣшеніе это воспроизводится вначалѣ по частямъ посредствомъ вопросовъ, обращенныхъ къ классу, затѣмъ и въ цѣлости, причемъ ученикъ излагаетъ полное разсужденіе, ведущее къ отысканію искомаго числа. При рѣшеніи задачи, высказываемомъ ученикомъ, нужно предоставить ему полную свободу въ направленіи своихъ разсужденій. Часто преподаватель, рѣшивъ самъ задачу, предложенную ученикамъ, по своему легчайшему и скорѣйшему пріему, старается направить разсужденіе ученика на тотъ путь, по которому шло его собственное. Гораздо производительнѣе сдѣлать поправки въ разсужденіи, высказанномъ ученикомъ, нежели насиловать мысль его, которая, по особенности своего склада, весьма часто отличается оригинальностію.

Для образца привожу рѣшеніе въ классѣ одной устной задачи.

Задача. (Изъ Сборника № 276). Братъ и сестра купили у разнощика фрукты; братъ купилъ 5 апельсинъ за 40 коп., а сестра 10 яблокъ за 40 коп.; сестра дала брату 6 яблокъ и получила въ обмѣнъ нѣсколько апельсинъ. Сколько апельсинъ получила сестра?

Одинъ ученикъ повторяетъ содержаніе задачи.

Учитель. О чемъ говорится въ этой задачѣ?

Ученикъ. Въ этой задачѣ говорится о томъ, что братъ и сестра мѣнялись купленными фруктами.

Учитель. Какіе фрукты были у брата и какіе у сестры?

Ученикъ. У брата были апельсины, а у сестры яблоки.

Учитель. Сколько апельсинъ было у брата?

Ученикъ. У брата было 5 апельсинъ.

Учитель. За сколько братъ купилъ эти 5 апельсинъ?

Ученикъ. Братъ купилъ эти 5 апельсинъ за 40 коп.

Учитель. Сколько яблокъ было у сестры?

Ученикъ. У сестры было 10 яблокъ.

Учитель. За сколько купила сестра эти 10 яблокъ?

Ученикъ. Сестра купила эти 10 яблокъ за 40 коп.

Учитель. Сколько яблокъ дала сестра брату въ обмѣнъ на апельсины

Ученикъ. Сестра дала брату 6 яблокъ.

Учитель. Что ищется въ этой задачѣ?

Ученикъ. Въ этой задачѣ ищется, сколько апельсинъ получила сестра.

Затѣмъ задача снова повторяется въ цѣлости, ученики рѣшают ее въ умѣ и потомъ на вопросъ учителя: „кто рѣшилъ задачу?“ заявляютъ внѣшнимъ знакомъ, и даетъ отвѣтъ тотъ, кого учитель назвалъ по фамиліи. Послѣ полученія отвѣта отъ учениковъ, правильнаго или неправильнаго, учитель для словеснаго воспроизведенія всего разсужденія при рѣшеніи задачи ведетъ катихизацію такимъ образомъ

По первому пріему.

Учитель. Что прежде всего вы узнали для рѣшенія задачи?

Ученикъ. Я узналъ, сколько стоитъ 1 апельсинъ.

Учитель. Сколько онъ стоитъ?

Ученикъ. Одинъ апельсинъ стоитъ 8 коп.

Учитель. Какъ вы узнали, что одинъ апельсинъ стоитъ 8 коп

Ученикъ. Братъ заплатилъ за 5 апельсиновъ 40 коп., слѣдовательно, одинъ апельсинъ стоитъ въ 5 разъ менѣе 40 коп., а, уменьшивъ 40 коп. въ 5 разъ, или взявъ 5-ую часть 40 коп., получимъ 8 коп

Учитель. Что узнали потомъ?

Ученикъ. Потомъ я узналъ, сколько стоитъ одно яблоко.

Идетъ подобный же разговоръ относительно опредѣленія цѣны одного яблока.

Учитель. Что узнали потомъ?

Ученикъ. Потомъ я узналъ, сколько стоютъ 6 яблокъ.

Учитель. Сколько же они стоютъ?

Ученикъ. 6 яблокъ стоютъ 24 коп.

Учитель. Какъ вы это узнали?

Ученикъ. Одно яблоко стоитъ 4 коп., то 6 яблокъ стоютъ въ 6 разъ болѣе 4 коп., а 6 разъ 4 коп. составляетъ 24 коп.

Учитель. Затѣмъ что узнали?

Ученикъ. Затѣмъ я узналъ, сколько апельсинъ получила сестра на 24 коп.

Учитель. Сколько же апельсинъ получила сестра?

Ученикъ. 3 апельсина.

Учитель. Какъ вы это узнали?

Ученикъ. Одинъ апельсинъ стоитъ 8 коп., то на 24 коп. приходится столько апельсинъ, сколько разъ 8 содержится въ 24, а 8 въ 24 содержится 3 раза, значитъ, сестра получила 3 апельсина.

Послѣ этого идетъ катихизація съ болѣе пространными вопросами.

Учитель. Какъ узнали вы, сколько стоитъ одно яблоко?

Ученикъ. За 10 яблокъ заплачено 40 коп., то одно яблоко стоитъ въ 10 разъ менѣе 40 коп.. а 10-я часть 40 коп. будетъ 4 коп., значитъ, одно яблоко стоитъ 4 коп.

Учитель. Зная, сколько стоитъ одно яблоко и одинъ апельсинъ, какъ вы узнали, сколько апельсинъ получила сестра?

Ученикъ. Одно яблоко стоитъ 4 коп., то 6 яблокъ стоютъ 24 коп., потому что 6 разъ 4 составляетъ 24. Одинъ апельсинъ стоитъ 8 коп., то на 24 коп. придется 3 апельсина, потому что 8 содержится въ 24-хъ 3 раза. Слѣдовательно, сестра получила 3 апельсина.

Наконецъ, все рѣшеніе задачи высказывается однимъ ученикомъ.

Ученикъ. За 10 яблокъ заплачено 40 коп., то одно яблоко стоитъ 4 коп., потому что 10-я часть 40 коп. будетъ 4 коп. За 5 апельсинъ заплачено 40 коп., то одинъ апельсинъ стоитъ 8 коп., потому что 5-я часть 40 коп., будетъ 8 коп. Сестра дала брату 6 яблокъ, а какъ каждое яблоко стоитъ 4 коп., то она дала яблокъ на 24 коп., потому что 6 разъ 4 коп. будетъ 24 коп. Сестра получила апельсинъ на 24 коп., а такъ какъ каждый апельсинъ стоитъ 8 коп., то она получила 3 апельсина, потому что 8 содержится въ 24-хъ 3 раза.

Если ученики сами не заявляютъ о томъ, что они знаютъ другой простѣйшій способъ рѣшенія этой задачи, то слѣдуетъ подвести ихъ къ тому наводящими вопросами, каковы:

Учитель. Что дороже, какъ видно изъ задачи, апельсинъ или яблоко?

Ученикъ. Апельсинъ дороже яблока.

Учитель. Изъ чего это видно?

Ученикъ. Изъ того, что на 40 коп. куплено 10 яблокъ и только 5 апельсинъ.

Учитель. Во сколько разъ апельсинъ дороже яблока и почему?

Ученикъ Въ два раза, потому что 10 больше 5-ти въ 2 раза

Учитель. Слѣдовательно, сколько апельсинъ получила сестра за 6 яблокъ?

Ученикъ. 3 апельсина, потому что за каждыя 2 яблока она получила по одному апельсину, слѣд. за 6 яблокъ получила 3 апельсина, такъ какъ 2 въ 6 содержится 3 раза.

Послѣ этого одинъ ученикъ высказываетъ полное разсужденіе рѣшенія этой задачи по новому способу, а другіе поясняютъ, почему этотъ пріемъ рѣшенія слѣдуетъ предпочесть первому.

Приводя здѣсь въ подробности классную работу при рѣшеніи этой задачи, я вовсе не имѣю въ виду этимъ сказать, что всякую устную задачу слѣдуетъ рѣшать и разбирать такъ подробно. Для одной задачи учитель ограничится только отвѣтомъ, числа, выражающаго искомую величину; для другой предложитъ нѣсколько вопросовъ по поводу ея рѣшенія, для третьей предложитъ всѣ частные вопросы касательно опредѣленія всѣхъ вспомогательныхъ неизвѣстныхъ (въ нашей задачѣ: цѣна яблока, цѣна апельсина, цѣна 6 яблокъ), для четвертой потребуетъ высказать сразу полное рѣшеніе. Но и вся приведенная работа при рѣшеніи одной задачи не должна казаться слишкомъ кропотливою и утомительною, если принять во вниманіе, что работа ведется всѣмъ классомъ, что отвѣты даются различными учениками и такимъ образомъ работа распредѣляется между всѣми. А если учитель достигъ на подобной работѣ того, что ученикъ можетъ ясно и сжато высказать полное рѣшеніе задачи, то онъ достигъ многаго въ развитіи мышленія ученика, въ анализѣ вопроса и въ пріемѣ вычисленія.

По второму пріему.

Предполагая, что ученики не могутъ рѣшить предложенной имъ задачи, я привожу здѣсь образецъ наводящей катихизаціи въ сокращенной формѣ.

Учитель. Что ищется въ задачѣ?

Ученикъ. Сколько апельсинъ получила сестра.

Учитель. Что надо знать для того, чтобы это вычислить?

Ученикъ. Надо знать, сколько стоютъ 6 яблокъ и сколько стоитъ одинъ апельсинъ.

Учитель. Что надо прежде узнать для опредѣленія цѣны 6 яблокъ?

Ученикъ. Надо узнать, сколько стоитъ одно яблоко.

Учитель. Можно ли изъ задачи узнать, сколько стоитъ одно яблоко?

Ученикъ. Можно, потому что изъ задачи мы знаемъ, что за 10 яблокъ заплачено 40 коп.

Учитель. Итакъ, въ какомъ порядкѣ нужно вести вычисленія для рѣшенія этой задачи?

Ученикъ. Сначала надо узнать, сколько стоитъ одно яблоко, потомъ сколько стоютъ 6 яблокъ, затѣмъ сколько стоитъ одинъ апельсинъ и, наконецъ, сколько апельсинъ получила сестра за 6 яблокъ.

Или катихизація ведется, исходя отъ искомой величины:

Учитель. Что въ этой задачѣ требуется узнать?

Ученикъ. Сколько апельсинъ получила сестра за 6 яблокъ.

Учитель. Могла ли сестра получить отъ брата 6 апельсинъ?

Ученикъ. Нѣтъ, не могла, потому что яблоки дешевле апельсинъ.

Учитель. Во сколько разъ сестра получила апельсинъ меньше, чѣмъ дала яблокъ брату?

Ученикъ. Въ 2 раза, потому что одинъ апельсинъ дороже одного яблока въ 2 раза

и т. д.

Послѣ объясненія пріемовъ рѣшенія задачъ въ классѣ, считаю настоятельно необходимымъ обратить вниманіе учащихъ на то, что дѣти на первыхъ порахъ обученія обыкновенно выражаются съ большимъ трудомъ; передача мысли въ словахъ представляетъ для нихъ неодолимое затрудненіе, вслѣдствіе малаго запаса словъ, а еще болѣе вслѣдствіе непривычки связывать слова въ длинныя фразы. Такимъ образомъ, дѣти могутъ вполнѣ хорошо рѣшить задачу и дать вѣрный численный отвѣтъ, но не могутъ высказать плана рѣшенія и причины вычисленій, необходимыхъ для рѣшенія задачи.

Кромѣ того, дѣти, опять таки при началѣ обученія, рѣшившія задачу и получившія вѣрный отвѣтъ, рѣшительно не понимаютъ требованія учителя объяснить рѣшеніе задачи; задача и ея рѣшеніе до того ясны дѣтямъ, если только задача выбрана соотвѣтственно силамъ дѣтей, что имъ кажется совершенно лишнимъ давать какое-либо разъясненіе. А потому настойчивое требованіе учителя—объяснить рѣшеніе задачи—кажется дѣтямъ безполезною придирчивостью, утомляетъ ихъ и отбиваетъ иногда даже охоту заявлять учителю о рѣшеніи задачи, чтобы не подвергнуться непріятному разговору съ учителемъ по поводу рѣшенія задачи.

А потому: во-первыхъ, какъ сказано выше, въ началѣ обученія достаточно ограничиться отвѣтомъ числа, получаемаго отъ рѣшенія задачи, и, мало по-малу, требовать самыхъ краткихъ разъясненій рѣшенія и то не всей задачи, а сначала опредѣленія какой-либо одной вспомогательной неизвѣстной въ задачѣ, потомъ уже переходить къ объясненію всего рѣшенія и, наконецъ, къ предварительному построенію плана рѣшенія; во-вторыхъ, для пріученія дѣтей устанавливать предварительный планъ рѣшенія задачи и потомъ уже переходить къ вычисленіямъ, лучше предлагать задачи съ неопредѣленными данными числами; дѣти самою задачею будутъ поставлены въ необходимость думать не о вычисленіяхъ съ данными числами, а только о планѣ рѣшенія задачи. Для поясненія этого пріема привожу образецъ такой задачи и работы съ дѣтьми по поводу ея рѣшенія.

Задача. Мальчикъ купилъ нѣсколько яблокъ; за каждое яблоко онъ заплатилъ одинаковую цѣну и съ денегъ, данныхъ разносчику, получилъ сдачи. Сколько сдачи получилъ мальчикъ?

Какъ видно, задача представляетъ только собраніе условій и вопросъ; числа данныя въ ней не опредѣлены. Дѣти вначалѣ выражаютъ недоумѣніе и говорятъ, что такой задачи рѣшать нельзя. На вопросъ учителя, почему нельзя, дѣти поясняютъ, что не указано ни числа яблокъ, ни цѣны яблока, ни количества денегъ, данныхъ разносчику, слѣдовательно отвѣта на вопросъ дать невозможно.

Учитель. Какъ вы будете рѣшать эту задачу, когда я дамъ всѣ необходимыя вамъ числа?

Ученики. Тогда мы узнаемъ, сколько стоютъ купленныя яблоки и затѣмъ узнаемъ, сколько приходится сдачи.

Учитель. Какъ вы узнаете, сколько стоютъ яблоки?

Ученики. Цѣну одного яблока мы повторимъ столько разъ, сколько куплено яблокъ.

Учитель. А какъ потомъ узнаете сдачу?

Ученики. Для опредѣленія сдачи мы изъ денегъ, данныхъ разносчику, вычтемъ то, что ему слѣдуетъ получить за яблоки.

Учитель. Итакъ, скажите теперь весь ходъ рѣшенія задачи.

Ученики. Для рѣшенія этой задачи мы узнаемъ сперва, сколько слѣдуетъ заплатить за купленныя яблоки; для этого цѣну одного яблока повторимъ столько разъ, сколько куплено яблокъ; потомъ узнаемъ сдачу; для этого изъ денегъ, данныхъ разносчику, вычтемъ то, что ему слѣдуетъ получить за яблоки.

Такой разговоръ по поводу рѣшенія задачи, какъ видно, легко завести съ дѣтьми, потому что числа не отвлекаютъ ихъ вниманія и они по необходимости сосредоточиваютъ его на условіяхъ задачи.

Послѣ высказаннаго плана рѣшенія, учитель предлагаетъ дѣтямъ взять числа, какія имъ угодно, поставить эти числа въ данную задачу и рѣшать ее по установленному плану. Эта работа всегда нравитс дѣтямъ и возбуждаетъ ихъ вниманіе. При выборѣ чиселъ и вычис леній съ ними легко обнаруживается какъ степень навыка дѣтей обра щаться съ числами, такъ и предѣлъ, въ которомъ дѣти свободно обра щаются съ числомъ.

Послѣ двухъ, трехъ подобныхъ задачъ, обстоятельно разобранныхъ можно перейти къ установленію предварительнаго плана рѣшенія дл всякой опредѣленной задачи.

При изученіи чиселъ первой сотни вообще весьма важное значені имѣютъ *неопредѣленныя задачи*, заключающія въ себѣ неполно число данныхъ чиселъ и требующія разложенія изучаемаго числа н слагаемыя и множители; допуская много рѣшеній, онѣ особенно интере суютъ учащихся и служатъ для упражненія ихъ въ бѣгломъ вычис леніи. Образцы такой работы приведены въ самомъ курсѣ.

Задачи письменныя, рѣшаемыя въ классѣ.

Если ученики не имѣютъ въ рукахъ сборника задачъ, то, пред лагая письменную задачу для рѣшенія въ классѣ, учитель выписываетъ на доску только одни данныя числа съ ихъ наименованіями. Для пол наго усвоенія задачи содержаніе ея воспроизводится по частнымъ во просамъ, какъ это указано для задачи устной, и, наконецъ, повто ряется въ цѣлости. Если же ученики имѣютъ сборникъ задачъ, то чи таютъ прямо изъ сборника по указанному учителемъ нумеру и при ступаютъ прямо къ рѣшенію задачи. Такъ какъ на рѣшеніи письмен ныхъ задачъ, кромѣ развитія соображенія ученика на раскрытіи план рѣшенія, преслѣдуется пріученіе его къ аккуратному письменному рас положенію и исполненію дѣйствій и вообще къ приложенію на прак тикѣ усвоенныхъ имъ правилъ, то въ случаѣ предложенія классу за дачи, сложной по числу условій или замысловатой по содержанію, слѣ дуетъ разграничить двѣ эти работы, то-есть установленіе плана рѣ шенія и исполненіе дѣйствій. Безъ такого раздѣленія этихъ работ часто случается, что слабѣйшіе ученики не могутъ приступить къ вы численіямъ, и работа ведется въ классѣ такъ неравномѣрно, что учи телю бываетъ весьма трудно слѣдить за ходомъ работы всего класса Такимъ образомъ, послѣ усвоенія содержанія задачи учениками и прежд приступленія къ вычисленіямъ, учитель предлагаетъ классу высказат планъ рѣшенія задачи. Ученики говорятъ послѣдовательно, каki неизвѣстныя величины они будутъ опредѣлять для отысканія главно неизвѣстной, потомъ уже называютъ одно за другимъ дѣйствія, необ ходимыя для рѣшенія задачи. Установивъ планъ рѣшенія задачи намѣтивъ дѣйствія, ученики приступаютъ къ ихъ исполненію на своихъ доскахъ или тетрадяхъ. Задачи легкія по содержанію или повторительныя, то-есть сходныя по содержанію съ прежде рѣшенными, а также задачи, предлагаемыя для контроля развитія учениковъ, рѣшаются безъ предварительнаго установленія всѣмъ классомъ плана рѣшенія.

Къ классным доскамъ вызываются ученики преимущественно слабѣйшіе въ классѣ, для того, чтобы они работали подъ непосредственнымъ наблюденіемъ учителя и повнимательнѣе относились къ самой работѣ, исполняя ее въ виду всего класса. Отъ времени до времени слѣдуетъ вызывать къ классной доскѣ и способнѣйшихъ учениковъ чтобы пріучить ихъ къ писанію большихъ цифръ мѣломъ и къ исполненію работъ передъ цѣлымъ классомъ.

Послѣ нѣсколькихъ минутъ, употребленныхъ учителемъ для обхода класса съ цѣлію посмотрѣть,—всѣ ли ученики принялись за работу, онъ обращается къ слабѣйшимъ ученикамъ съ вопросами: что они узнаютъ, какое дѣйствіе дѣлаютъ, какой результатъ получили отъ исполненія такого-то дѣйстія и т. п. Вопросы эти необходимы для направленія работы всего класса и для указанія ошибокъ тѣмъ, которые съ перваго приступа повели рѣшеніе неправильно; а также и для тѣхъ, которые, несмотря на предшествовавшія указанія, вовсе не могутъ приступить къ работѣ. Вопросы обращаются къ слабѣйшимъ ученикамъ, чтобы, въ случаѣ надобности, воспроизвести съ ними по частямъ сдѣланное предварительно разсужденіе; иначе, послѣ отвѣта сильнѣйшихъ учениковъ, слабѣйшимъ оставалось бы только пассивно слѣдовать ихъ указаніямъ. Наблюдая за работающими у классныхъ досокъ, учитель исправляетъ ошибку тотчасъ, какъ замѣтитъ ее, чтобы не допустить ее пройти черезъ всѣ выкладки. Исправленіе это производится или просто указаніемъ на ошибку, или помощію вопроса, обращеннаго къ классу или къ отдѣльному ученику и относящагося къ результату или обозначенію, написанному невѣрно.

Нужно заботиться, чтобы всѣ ученики доводили рѣшеніе задачи до конца, имѣя въ виду, что не такъ опасно въ дѣлѣ класснаго обученія нѣкоторое задержаніе развитія учениковъ успѣвающихъ, какъ упущеніе изъ виду неуспѣвающихъ.

По окончаніи рѣшенія задачи, одинъ изъ учениковъ, по выбору учителя, но безъ наводящихъ вопросовъ, повторяетъ содержаніе задачи, высказываетъ полное разсужденіе, ведущее къ опредѣленію, какое дѣйствіе необходимо для отысканія вспомогательной и главной неизвѣстной, и указываетъ вычисленія, которыя сдѣланы для полученія отвѣта на вопросъ задачи. При этомъ ему и всему классу предлагаются вопросы, касающіеся исполненія дѣйствій и вообще механизма вычисленій.

Весьма полезно также пріучить учениковъ послѣ окончанія всѣхъ дѣйствій, ведущихъ къ рѣшенію задачи, письменно приводить въ порядкѣ всѣ вычисленія посредствомъ *строчекъ*. Каждая строчка состоитъ изъ трехъ частей: въ первой части записывается словами, что ищется, во второй — обозначается дѣйствіе, посредствомъ котораго находится искомое, и въ третьей—результатъ, полученный отъ совершенія дѣйствій. Такое приведеніе всѣхъ разсужденій и вычисленій въ порядокъ пріучаетъ ученика охватывать въ своемъ соображеніи всю задачу въ цѣлости и относиться внимательно, какъ къ условіямъ задачи, такъ и къ вычисленіямъ.

Изложенный въ общихъ чертахъ процессъ письменнаго рѣшенія задачи въ классѣ требуетъ вначалѣ, при работѣ съ непривычными учениками, много времени; но пріобрѣтаемыя учениками, по мѣрѣ упражненія, точность разсужденій и выраженій и быстрота вычисленій даютъ возможность не только сокращать время для рѣшенія задачи, но сокращать и самый процессъ. Для полноты выясненія важнаго вопроса относительно процесса письменнаго рѣшенія задачи въ классѣ привожу образецъ этой работы.

Возьмемъ задачу изъ Сборника № 1024. У мастера было 1443 арш. тонкой проволоки; изъ всей этой проволоки онъ сдѣлалъ клѣтки, сѣтки и спицы; на клѣтки онъ употребилъ 37-ю часть всей проволоки, а на сѣтки въ 17 разъ болѣе, чѣмъ на клѣтки. Сколько аршинъ проволоки пошло на приготовленіе спицъ?

Усвоеніе содержанія задачи. Задача, прочитанная учителемъ или учениками изъ Сборника, повторяется однимъ ученикомъ. Слабѣйшіе или менѣе внимательные ученики отвѣчаютъ на вопросы учителя: что означаетъ въ задачѣ 1443 арш., 37, 17? Что ищется въ задачѣ? Что извѣстно изъ задачи? и т. п. Послѣ усвоенія содержанія задачи по частямъ, она снова повторяется однимъ ученикомъ въ цѣлости.

Планъ рѣшенія, высказанный однимъ ученикомъ въ цѣлости или нѣсколькими учениками по частямъ. Сначала надо узнать, сколько проволоки употребилъ мастеръ на клѣтки, потомъ на сѣтки, затѣмъ на клѣтки и сѣтки вмѣстѣ и, наконецъ, сколько пошло проволоки на приготовленіе спицъ.

Другой пріемъ:

Требуется узнать, сколько проволоки пошло на приготовленіе спицъ; для этого нужно узнать, сколько проволоки употребилъ мастеръ на клѣтки и сѣтки вмѣстѣ, а такъ какъ изъ задачи видно, что на сѣтки пошло проволоки въ 17 разъ болѣе, чѣмъ на клѣтки, то мы прежде всего должны узнать, сколько проволоки употребилъ мастеръ на приготовленіе клѣтокъ. Итакъ, надо прежде вычислить, сколько проволоки пошло на приготовленіе клѣтокъ и т. д.

Выдѣленіе дѣйствій. На вопросы учителя, какія дѣйствія нужно совершить для рѣшенія этой задачи и почему именно такія дѣйствія, ученики отвѣчаютъ: „для рѣшенія этой задачи нужно, во 1) раздѣлить 1443 арш. на 37, потому что на клѣтки мастеръ употребилъ 37-ю часть всей проволоки, а для опредѣленія одной изъ равныхъ частей числа нужно его раздѣлить на число частей. 2) Умножить полученное число на 17, потому что на сѣтки пошло проволоки въ 17 разъ болѣе, чѣмъ на клѣтки, а чтобы число увеличить въ 17 разъ, нужно сдѣлать умноженіе. 3) Сложить числа, полученныя отъ дѣленія и умноженія, чтобы узнать, сколько проволоки пошло на клѣтки и сѣтки. 4) Полученную сумму вычесть изъ 1443 арш., такъ какъ на клѣтки, сѣтки и спицы пошло 1443 арш., а для того, чтобы узнать, сколько проволоки пошло на спицы, нужно отъ всего числа аршинъ проволоки отнять то число аршинъ проволоки, которое употребилъ мастеръ на клѣтки и сѣтки“.

Полезно предложить одному ученику, послѣ выдѣленія дѣйствій, перечислить въ порядкѣ всѣ дѣйствія, необходимыя для рѣшенія задачи, и отвѣтить на вопросы, для опредѣленія какой неизвѣстной служитъ то или другое дѣйствіе.

Вычисленіе.

$$\begin{array}{r|l} 1443 & 37 \\ -111 & \overline{39} \\ \hline 333 & \\ -333 & \\ \hline ,,, & \end{array} \qquad \begin{array}{r} 39 \\ \times 17 \\ \hline 273 \\ 39 \\ \hline 663 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 39 \\ +663 \\ \hline 702 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1443 \\ -702 \\ \hline 741 \end{array}$$

Строчки:

На клѣтки пошло проволоки	1443 арш. : 37		= 39 арш
На сѣтки „ „	39 арш. × 17		= 663 арш
На клѣтки и сѣтки вмѣстѣ	39 арш. + 663 арш.		= 702 арш
На спицы пошло проволоки	1443 арш. — 702 арш.		= 741 арш

Послѣ всѣхъ вычисленій, необходимыхъ для рѣшенія задачи, ученики пишутъ *строчки*, то-есть выписываютъ вкратцѣ планъ рѣшенія задачи, намѣчають дѣйствія, произведенныя для опредѣленія той или другой неизвѣстной, и пишутъ самый результатъ. Такимъ образомъ каждая строчка должна состоять изъ трехъ частей: а) какая неизвѣстная опредѣлялась—эта часть записывается словами, б) какое дѣйствіе совершено для опредѣленія неизвѣстной и в) какой получился результатъ отъ совершенія дѣйствія. Число строчекъ зависитъ отъ числа простыхъ задачъ, на которыя разбивается данная сложная задача, значитъ—отъ числа всѣхъ неизвѣстныхъ, главныхъ и вспомогательныхъ которыя нужно опредѣлить. Когда ученикъ правильно написалъ строчки послѣ рѣшенія задачи, то тѣмъ онъ показалъ полнѣйшее пониманіе всего хода вычисленій и обнаружилъ точность и послѣдовательность своего разсужденія при рѣшеніи задачи.

Письменныя задачи для рѣшенія внѣ класса. Задачи, предлагаемыя ученикамъ для рѣшенія внѣ класса, имѣютъ преимущественную цѣль повторенія пройденнаго въ классѣ, а потому не должны отличаться особенною замысловатостію, могущею сильно затруднить ученика, а должны походить содержаніемъ своимъ на задачи, рѣшенныя въ классѣ, и могутъ заключать данныя числа въ большихъ размѣрахъ, такъ какъ ученики могутъ располагать временемъ, достаточнымъ для вычисленій съ большими числами. Съ этою цѣлью въ моемъ «Сборникѣ» весьма часто встрѣчаются письменныя задачи, стоящія рядомъ по двѣ, однообразнаго содержанія и отличающіяся только данными числами и ихъ наименованіями. Задача, подобная продѣланной въ классѣ, даетъ возможность и слабѣйшимъ ученикамъ выполнить внѣклассную работу самостоятельно и предупреждаетъ распространеніе между учениками дурной привычки—непроизводительнаго списыванія чужой работы.

При нѣкоторой опытности учителя можно при задаваніи внѣклассной работы раздѣлять учениковъ по успѣхамъ и способностямъ на группы, предлагая каждой группѣ изъ «Сборника» особенную задачу.

8) *При прохожденіи элементарнаго курса Ариѳметики должно образовать у дѣтей навыкъ къ быстротѣ вычисленій.*

При изученіи чиселъ первой сотни дѣти производятъ много весьма разнообразныхъ упражненій съ числами. Результатомъ всѣхъ этихъ упражненій долженъ быть, какъ сказано уже выше, выводъ правилъ и пріемовъ для вычисленій съ числами отвлеченными, а также пріученіе дѣтей къ быстротѣ вычисленій. А потому изученіе каждаго отдѣльнаго числа отъ 1 до 20 и знакомство съ группами чиселъ отъ 21 до 100 должно сопровождаться и заканчиваться вычисленіями съ числами отвлеченными и упражненіями въ бѣгломъ вычисленіи.

Бѣглое вычисленіе можетъ состоять изъ слѣдующихъ упражненій 1) бѣглое вычисленіе на задачахъ; 2) бѣглое вычисленіе на отвлеченныхъ числахъ; 3) повторительные вопросы и 4) вычисленіе численныхъ примѣровъ (формулъ).

1) Бѣглое вычисленіе на задачахъ состоитъ въ томъ, что учитель предлагаетъ дѣтямъ задачу легкую по условіямъ, но сложную по числу данныхъ чиселъ. Вычисленія для рѣшенія такой задачи ясны и идутъ въ той же послѣдовательности одно за другимъ, какъ идутъ условія задачи. Дѣти вычисляютъ тотчасъ, какъ учитель произноситъ условія задачи и данныя числа, и даютъ отвѣтъ немедленно послѣ вопроса задачи. Напримѣръ, учитель медленно читаетъ задачу: „Я вынулъ изъ кармана 12 орѣховъ; 5 изъ нихъ съѣлъ, а 4 отдалъ своему брату; къ оставшимся я еще прибавилъ 7 орѣховъ и половину всѣхъ этихъ орѣховъ подарилъ еще брату, а 4 съѣлъ; къ оставшимся прибавилъ 5 орѣховъ и роздалъ всѣ орѣхи тремъ мальчикамъ поровну. Сколько орѣховъ досталось каждому мальчику?“ Тотчасъ послѣ постановки вопроса дѣти должны дать отвѣтъ.

2) Бѣглое вычисленіе на отвлеченныхъ числахъ сходно съ предъидущимъ и разнится отъ него только тѣмъ, что для вычисленія берутся отвлеченныя числа и прямо указываются дѣйствія. Учитель говоритъ: „Беру число 16, отнимаю отъ него 7; беру третью часть остатка и къ полученному числу прибавляю 12; полученное число дѣлю на 3 равныя части и къ одной изъ нихъ прибавляю 8. Сколько получится?“ По мѣрѣ того, какъ учитель произноситъ числа, дѣти вычисляютъ и даютъ отвѣтъ на поставленный вопросъ.

3) Повторительные вопросы предлагаются послѣ изученія отдѣльнаго числа или группы чиселъ и относятся къ наиболѣе важнымъ комбинаціямъ и соотношеніямъ чиселъ. Напр., послѣ разнообразныхъ упражненій съ числомъ 12 учитель даетъ вопросы: „Половина 12-ти во сколько разъ болѣе четвертой части 12? Сколько разъ третья часть 12-ти содержится въ 8-ми? Сколько разъ надо взять шестую часть 12-ти, чтобы получить 10? и т. п.

4) Численные примѣры (формулы) даются также обыкновенно въ концѣ изученія числа и служатъ для приложенія къ бѣглому вычисленію уже усвоенныхъ дѣтьми комбинацій и соотношеній чиселъ, хотя тѣ же численные примѣры, сами по себѣ, могутъ служить и для обстоятельнаго ознакомленія дѣтей съ изучаемымъ числомъ, такъ что иногда можно все изученіе числа вести на вычисленіи такихъ примѣровъ. Обѣ части моего Сборника ариѳметическихъ задачъ заключаютъ въ себѣ вполнѣ достаточное собраніе такихъ численныхъ примѣровъ, притомъ на числа до 50 на каждое число приведено по 18 и по 20 строкъ

для вычисленія, а послѣ 50-ти строки даны на каждую пару чиселъ Эти строки могутъ служить для трехъ цѣлей: а) ихъ можно вычислят устно: дѣти громко читаютъ число за числомъ и производятъ вычисленія; б) ихъ можно вычислять письменно; дѣти переписывают строки въ свои тетради или на доски, вычисляютъ и противъ строк послѣ знака равенства пишутъ полученное число и в) ихъ можн давать дѣтямъ для внѣклассной работы.

Перечисляя всѣ упражненія для образованія въ дѣтяхъ навык къ быстрому вычисленію, я вовсе не имѣю въ виду сказать, чт непремѣнно всѣ эти упраженія надо давать при изученіи каждаг числа и притомъ въ такомъ порядкѣ, въ какомъ они приведены. Разнообразіе упражненій при изученіи чиселъ придаетъ интересъ работ съ числомъ и возбуждаетъ устающее вниманіе дѣтей.

Подробности касательно всѣхъ вышеизложенныхъ упражнені учитель найдетъ въ самомъ курсѣ.

Наглядныя пособія.

1) *Ариѳметическій ящикъ въ 1000 кубиковъ* заключаетъ в себѣ 1000 кубиковъ въ такомъ составѣ: 1) 100 отдѣльныхъ кубиковъ для счета единицами; 2) 30 или 40 брусковъ, имѣющихъ длин равную длинѣ десяти кубиковъ, а ширину въ обѣ стороны равну ширинѣ одного кубика; каждый брусокъ по длинѣ раздѣленъ на 1(равныхъ частей черными черточками или надрѣзами, такъ что представляетъ собою десятокъ кубиковъ, сложенныхъ въ одинъ рядъ бруски эти служатъ для счета десятками; 3) пять или шесть квадратныхъ досокъ длина и ширина которыхъ равняется длинѣ бруска а толщина—толщинѣ кубика; доски эти по обѣимъ квадратным поверхностямъ раздѣлены черными чертами или надрѣзами на 10(квадратиковъ, а по ребрамъ—на 10 разныхъ частей, такъ что каждая доска представляетъ 100 кубиковъ, сложенныхъ въ одинъ сло въ видѣ квадрата; доски служатъ для счета сотнями.

Ребро основной единицы—кубика можетъ быть произвольно длины, но лучше, если оно имѣетъ длину опредѣленную, равную какой-либо единицѣ или части единицы русской мѣры. Для класснаг употребленія удобнѣе имѣть кубикъ съ ребромъ въ дюймъ или в полъ-вершка.

Кромѣ описаннаго состава ариѳметическаго ящика, нѣкоторые ящики заключаютъ въ себѣ приспособленія для изученія дробей, именно 1) нѣсколько брусковъ раздѣлены пополамъ и половины скрѣплен шипами; 2) нѣсколько брусковъ раздѣлены на пять разныхъ частей; 3) одна доска раздѣлена пополамъ и 4) одна доска раздѣлена на 4 равныя части. Если за основную единицу взять доску, то получаются такія части: половина, четверть, десятая часть единицы (брусокъ), двадцатая (половина бруска), пятидесятая (пятая часть бруска) и сотая (кубикъ). При неудобствѣ получить третьи, шестыя и другія доли, посредствомъ ариѳметическаго ящика нельзя произвести всѣхъ тѣхъ упражненій, которыя продѣлываются на дробныхъ счетахъ, гдѣ имѣются дѣленія единицы до 24-хъ долей. Тѣмъ не менѣе, при неимѣніи дробныхъ счетовъ, и на этомъ пособіи можно хорошо объяснить происхожденіе дроби и различныя ея свойства.

Въ нѣкоторыхъ ариѳметическихъ ящикахъ имѣется приспособленіе для объясненія и вывода закона образованія квадратовъ натуральныхъ чиселъ. Одна доска представляетъ діаграмму квадратовъ, образующихся постепенно прикладываніемъ къ одному квадрату двухъ брусковъ, скрѣпленныхъ подъ прямымъ угломъ и имѣющихъ неравную длину (одинъ брусокъ имѣетъ однимъ кубикомъ меньше, нежели другой); этими брусками прежній квадратъ дополняется до квадрата новаго числа, одною единицею большаго прежняго.

Ариѳметическій ящикъ можетъ служить также для нагляднаго выясненія понятія о квадратныхъ мѣрахъ и пріема вычисленія площади прямоугольника; но для большаго удобства въ этомъ отношеніи слѣдуетъ сдѣлать въ немъ нѣкоторое приспособленіе, нисколько не измѣняющее впрочемъ состава ящика. Доска, представляющая 100 кубиковъ и разграфленная по обѣимъ квадратнымъ поверхностямъ на 100 квадратиковъ, должна быть разграфлена только съ одной стороны, такъ что одна сторона (чистая) будетъ представлять измѣряемую поверхность, а другая (разграфленная)—ту же поверхность, выраженную въ квадратныхъ дюймахъ. Кромѣ того, эта же доска дѣлится пополамъ и на четверти, такъ чтобы можно было имѣть для измѣренія длинные прямоугольники, составляемые изъ половины доски и изъ трехъ и четырехъ четвертей, сложенныхъ въ рядъ.

Само собою понятно, что ариѳметическій ящикъ можетъ служить и для выясненія состава куба и пріема измѣренія объема прямоугольной четырегранной призмы. Для этого кубы и призмы составляются изъ отдѣльныхъ кубиковъ и измѣряются основною кубическою единицею—кубическимъ дюймомъ.

Обыкновенный ариѳметическій ящикъ употребляется преимущественно для слѣдующихъ цѣлей: 1) для изученія чиселъ первой сотни и 2) для нагляднаго объясненія нумераціи и состава большихъ чиселъ.

При классномъ употребленіи ариѳметическаго ящика нужно сдѣлать приспособленіе классной доски такъ, чтобы удобно было выставлять на ней кубики, бруски и доски; для этого приготовляются доски съ горизонтальными планками, имѣющими ширину, равную ребру кубика. Обыкновенная классная доска можетъ быть также удобно употреблена въ дѣло, если по краямъ ея вбить гвозди, на которые накладывать планки по мѣрѣ надобности.

2) *Ариѳметическіе счеты* бываютъ различнаго устройства.

а) *Шведскіе счеты.* Подъ этимъ названіемъ на всемірной парижской выставкѣ 1867 года и на всероссійской мануфактурной выставкѣ 1870 года были выставлены счеты такого устройства: въ четыреугольной рамкѣ, стоящей на высокихъ ножкахъ, продѣто 10 или болѣе горизонтальныхъ проволокъ, на каждой изъ которыхъ находится по десяти одинаковой величины деревянныхъ шаровъ, свободно двигающихся по этимъ проволокамъ; если 10 шаровъ сдвинуть на одинъ конецъ проволоки, то они занимаютъ менѣе половины ея и, слѣдовательно, удобно могутъ быть распредѣлены на всей проволокѣ по одному, попарно и т. д. На верхнемъ брускѣ рамки утверждено нѣсколько вертикальныхъ проволокъ такой длины, что на каждой изъ нихъ помѣщается ровно 10 шаровъ такихъ, какъ на горизонтальныхъ проволокахъ. Какъ горизонтальныя, такъ и вертикальныя проволоки вывинчиваются, и на первыя можно надѣвать, въ случаѣ надобности, и больше десяти шаровъ. Внизу рамки придѣланъ ящикъ, въ которомъ помѣщаются шары, снимаемые съ проволокъ, а также шары, служащіе для запаса.

Счеты эти служатъ для изученія чиселъ первой сотни, для выясненія ученикамъ нумераціи и пріема написанія большихъ чиселъ, а также для пріученія вообще пользоваться торговыми счетами при вычисленіяхъ. Въ виду послѣдней цѣли при классныхъ счетахъ имѣются и черные шары, которые надѣваются по два на каждую проволоку въ срединѣ между восемью желтыми — для нагляднаго раздѣленія пятковъ.

б) *Счеты Ниманскаго* для цѣлыхъ чиселъ. Устройство этихъ счетовъ основано на томъ же, какъ и устройство шведскихъ счетовъ съ вертикальными проволоками, то-есть, что проволоки расположены въ томъ же порядкѣ справа налѣво, въ какомъ обыкновенно располагаются разряды въ написанномъ числѣ; только они дозволяютъ быстрое передвиженіе шаровъ и имѣютъ приспособленіе для обозначенія цифрою взятаго на проволокѣ числа единицъ (шаровъ) всякаго разряда, а потому на этихъ счетахъ образованіе числа, его написаніе и чтеніе производятся одновременно.

Счеты состоятъ изъ ящика, устанавливаемаго на классномъ столѣ и имѣющаго около аршина въ длину и четверти аршина въ ширину съ лицевой стороны ящика находятся отверстія, чрезъ которыя видны валики, находящіеся внутри ящика и удобно поворачивающіеся посредствомъ гвоздиковъ, расположенныхъ надъ отверстіями. Каждый валикъ оклеенъ полосой бумаги, на которой въ порядкѣ написаны цифры; 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, такъ что, поворачивая гвоздикъ, можно къ отверстію, видимому ясно всему классу, подвести любую цифру. Надъ каждымъ отверстіемъ въ крышкѣ ящика укрѣплена проволока, которая идетъ сначала вертикально, потомъ постепенно изгибается и большимъ горизонтальнымъ концомъ своимъ прикрѣпляется къ штативу, находящемуся сзади ящика и служащему также опорой для счетовъ. На каждой такой проволокѣ находится по 10 шаровъ; если сдвинуть всѣ шары на верхнюю горизонтальную часть проволоки и поставить счеты лицомъ къ классу, то изъ всѣхъ десяти виденъ только одинъ первый, ближашій къ изгибу проволоки. Если же всѣ 10 шаровъ сбросить на нижнюю вертикальную часть проволоки, то они покрываютъ ее всю отъ ящика до изгиба. Такимъ образомъ, шары удобно передвигаются по проволокамъ и притомъ въ такомъ числѣ, которое необходимо въ данномъ случаѣ; остальные же шары, находящіеся на горизонтальныхъ проволокахъ, не будучи видны, не отвлекаютъ вниманія учениковъ. Передвигая какое-либо число шаровъ съ верхней части проволоки на нижнюю, учитель въ то же время поворачиваетъ соотвѣтствующій валикъ и подводитъ къ отверстію цифру, означающую число спущенныхъ внизъ шаровъ. Противъ тѣхъ проволокъ, на нижнихъ частяхъ которыхъ нѣтъ шаровъ, въ отверстіяхъ выставляется 0. Значеніе шаровъ по мѣсту проволоки опредѣляетъ и значеніе цифры, выставленной подъ проволокой.

в) *Дробные счеты.* Наиболѣе употребительные классные дробные счеты состоятъ изъ четыреугольной рамки, въ которой продѣто 15 или болѣе горизонтальныхъ проволокъ, удобно вынимающихся изъ рамки, если открутить винты, находящіеся на ихъ концахъ. На верхней проволокѣ надѣтъ тонкій цилиндръ, длиною обыкновенно въ 1 футъ, свободно двигающійся съ одного конца проволоки на другой и занимающій половину всей проволоки. На слѣдующихъ проволокахъ такіе же по длинѣ и діаметру цилиндры разрѣзаны на равныя части, именно: на 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24. Иногда даже не бываетъ и седьмыхъ долей; вообще, доли подбираются простѣйшія, чаще встрѣчающіяся и удобно выражающіяся однѣ посредствомъ другихъ. Такимъ образомъ, получаются слѣдующія доли цилиндра: $^1/_2$ $^1/_3$, $^1/_4$, $^1/_5$, $^1/_6$, $^1/_7$, $^1/_8$, $^1/_9$, $^1/_{10}$, $^1/_{12}$, $^1/_{15}$, $^1/_{16}$, $^1/_{18}$, $^1/_{20}$, $^1/_{24}$. На нѣкоторыхъ счетахъ внизу еще на послѣдней проволокѣ надѣтъ для удобства сравненія такой же цѣлый цилиндръ, какъ и на первой, безъ чего можно обойтись, потому что, если всѣ доли любого цилиндра сдвинуть на одинъ конецъ проволоки, то на каждой проволокѣ образуется цѣлый цилиндръ. Рамка счетовъ или утверждается на треножномъ высокомъ штативѣ, такъ что счеты видны всему классу, или къ верхнему бруску рамки прикрѣпляются два крючка, посредствомъ которыхъ счеты вѣшаются на классную доску. Первый способъ установки счетовъ неудобенъ потому, что весь приборъ скоро расшатывается, легко валится и затрудняется переноска прибора съ мѣста на мѣсто. Та же рамка съ проволоками можетъ служить и для шаровъ при прохожденіи цѣлыхъ чиселъ.

Для удобства нахожденія требуемыхъ частей цилиндра, сбоку на рамкѣ написана у каждой проволоки цифра, означающая на сколько равныхъ частей раздѣленъ цилиндръ на этой проволокѣ. Всѣ цилиндры и доли ихъ одноцвѣтные, приготовленные, обыкновенно, изъ сухого буковаго или дубоваго дерева; но на нѣкоторыхъ счетахъ части цилиндра бываютъ окрашены въ двѣ краски попеременно, такъ что однѣ доли желтыя, а другія черныя или красныя, для того, чтобы удобнѣе было ученикамъ съ мѣста различать дѣленія цилиндровъ на части (напримѣръ, на той проволокѣ, гдѣ цилиндръ раздѣленъ на четверти, первая четверть желтая, вторая — черная, третья — желтая, четвертая—черная). Но это окрашиваніе одноименныхъ долей цилиндра въ разные цвѣта можетъ дать ученикамъ ложное представленіе о частяхъ единицы вообще, которыя должны быть на одной проволокѣ всѣ равныя и совершенно однообразныя; притомъ гораздо лучше, если дѣленіе на части незамѣтно, когда всѣ части сдвинуты вмѣстѣ, и цилиндръ раздѣляется на требуемое число частей, такъ сказать, передъ глазами учениковъ по мѣрѣ надобности.

Наконецъ, еще для облегченія классной работы половина рамки закрывается доскою, которая удобно снимается и прикрѣпляется. Внутренняя сторона этой доски, то-есть обращенная къ цилиндрамъ, разграфлена линіями, идущими въ вертикальномъ направленіи, на 24 равныя части. Такъ какъ ширина доски равна длинѣ цилиндра, то ширина каждой полоски ея, заключенной между двумя линіями, равна длинѣ $^1/_{24}$ части цилиндра. Эти линіи служатъ для того, чтобы издали легко было сравнивать между собою по величинѣ различныя части цилиндровъ, иначе трудно было бы ученикамъ съ мѣста отличить $^1/_{15}$ отъ $^1/_{16}$, между тѣмъ какъ при вспомогательной доскѣ $^1/_{15}$ выходитъ за черту, а $^1/_{16}$ не доходитъ до той же черты. Доска эта, увеличивая цѣну счетовъ, не можетъ считаться необходимостью и безъ нея легко обходиться при сравненіи долей.

Дробные счеты представляютъ весьма полезное наглядное пособіе при прохожденіи учениками элементарнаго курса простыхъ дробей. Упражненія на нихъ подробно изложены въ самомъ курсѣ.

г) *Дробные счеты Наманскаго.* Для каждой доли устроена небольшая отдѣльная рамка съ горизонтальными проволоками, на которыхъ тонкій цилиндръ раздѣленъ на одно и то же число равныхъ долей. Такихъ рамокъ, 10, именно для 1, $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_4$, и т. д. до $^1/_{10}$. Счеты эти удобны для изученія каждой доли въ отдѣльности по способу Грубе. Въ книгѣ Паульсона: „Ариѳметика по способу нѣмецкаго педагога Грубе“ подробно изложены всѣ упражненія, которыя Грубе совѣтуетъ произвести при изученіи долей единицы; эти-то упражненія удобно производятся при помощи счетовъ Наманскаго.

д) *Ариѳметическіе счеты Коховскаго* представляютъ соединеніе шведскихъ счетовъ съ дробными. Въ ящикѣ, находящемся подъ рамкою шведскихъ счетовъ, имѣется наборъ шаровъ для упражненій съ цѣлыми числами и цилиндровъ для упражненій съ дробями. Смотря по надобности, на удобно вывинчивающіяся проволоки надѣваются или шары, или цилиндры; для упражненій съ дробями на этихъ счетахъ проволокъ горизонтальныхъ больше, нежели на обыкновенныхъ шведскихъ счетахъ, для того, чтобы можно было размѣстить всѣ доли цилиндра. Чтобы не перепутать различныхъ долей цилиндра, когда онѣ сняты съ проволокъ, ихъ или нанизываютъ въ порядкѣ на шнурокъ, или кладутъ въ отдѣленія, сдѣланныя въ ящикѣ для мелкихъ долей.

На верхнія вертикальныя проволоки этихъ счетовъ надѣваются шары разноцвѣтные; такъ, напримѣръ, шары, означающіе единицы— желтаго цвѣта, десятки — краснаго, сотни—бѣлаго, тысячи — чернаго и т. д.; окрашиваніе шаровъ въ различные цвѣта сдѣлано съ тою цѣлью, чтобы отмѣтить значеніе шаровъ, находящихся на разныхъ проволокахъ.

Вся рамка счетовъ закрывается удобно снимающеюся и складывающеюся пополамъ доскою, одна половина этой доски, обращенная къ проволокамъ, разграфлена для дробей полосами, а сзади къ полной доскѣ (когда закрываются всѣ счеты) привѣшиваются планки, на которыя можно выставлять кубики при упражненіяхъ съ ариѳметическимъ ящикомъ или буквы на картонахъ при обученіи дѣтей грамотѣ. Когда планки сняты, на доскѣ можно писать мѣломъ, и она замѣняетъ классную доску *).

*) На счетахъ, извѣстныхъ въ продажѣ подъ названіемъ счетовъ Коховскаго, въ настоящее время почти не встрѣчается раскрашенныхъ шаровъ, и складная доска обыкновенно замѣняется цѣлою и неразграфленною полосами.

е) *Ариѳметическіе счеты приготовленія Я. Фоссъ* отличаются отъ предъидущихъ только слѣдующимъ: 1) на каждой изъ вертикальныхъ проволокъ помѣщается только 9 шаровъ, и всѣ шары на проволокахъ одноцвѣтные—желтые. Насчитавъ 9 шаровъ на проволокѣ, ученикъ для дальнѣйшаго счета долженъ положить десятый шаръ на слѣдующую проволоку, и этотъ шаръ означаетъ десятокъ; причемъ 9 шаровъ, насчитанные на первой проволокѣ снимаются и т. д.; 2) доска закрываетъ только половину счетовъ, какъ на обыкновенныхъ дробныхъ счетахъ; 3) рамка счетовъ, при упражненіяхъ съ дробями, снимается и посредствомъ крючковъ можетъ быть повѣшена на классную доску.

Въ настоящее время въ продажѣ существуютъ только двухъ родовъ счеты, именно: 1) рамка съ проволоками, шарами и долями; счеты эти посредствомъ крючковъ вывѣшиваются на классную доску; 2) такіе же счеты, но на подставкѣ. Досокъ при счетахъ болѣе не дѣлаютъ, такъ какъ счеты не представляютъ достаточной устойчивости при писаніи на доскѣ.

ж) *Обыкновенные торговые русскіе счеты* съ бѣлыми или желтыми и черными костяшками.

з) *Счеты съ долями и шарами* для одиночнаго обученія въ семействахъ. Въ рамкѣ длиною въ 9 вершковъ и шириною въ 6 вершковъ продѣто 10 проволокъ, удобно вынимаемыхъ изъ рамки. На каждой проволокѣ надѣто по 10 маленькихъ шаровъ. Для изученія дробей на первой проволокѣ надѣтъ цилиндръ длиною въ $^1/_4$ аршина, а на другихъ проволокахъ такой же цилиндръ раздѣленъ на слѣдующія части: $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_4$, $^1/_5$, $^1/_6$, $^1/_8$, $^1/_9$, $^1/_{10}$, $^1/_{12}$.

3) *Палочки или спички,* отдѣльныя или связанныя въ пучки по десяткамъ, сотнямъ и тысячамъ. Пособіе это можетъ быть употребляемо при изученіи чиселъ первой сотни и при выясненіи нумераціи. Ученики, при первоначальномъ знакомствѣ съ долями единицы, по указанію учителя, разламываютъ спичку на требуемое число равныхъ частей. Вообще это, недорогое и легко приготовляемое въ самой школѣ, пособіе удобно потому, что его можно раздать на руки ученикамъ.

4) *Коробка съ жетонами или пуговицами,* число которыхъ произвольно, замѣняетъ, при разложеніи изучаемаго числа на слагаемыя, черченіе на доскахъ кружковъ, крестиковъ и т. п.

5) *Длинныя узкія дощечки,* деревянныя или чаще картонныя, съ *цифрами,* употребляемыя для сокращенія времени при упражненіи учениковъ въ вычисленіи формулъ, а также для бѣглаго вычисленія хоромъ всего класса. Такихъ дощечекъ выставляется на классную

доску обыкновенно по три: на двухъ изъ нихъ находятся числа въ вертикальномъ порядкѣ, а на третьей, которая ставится между ними, знаки дѣйствій примѣрно въ такомъ порядкѣ:

I	II	III
12	×	8
57	+	38
76	—	29
47	+	36
84	:	14
15	×	6
80	:	16

Ученики или записываютъ числа и знаки дѣйствій на своихъ доскахъ и противъ нихъ пишутъ результаты дѣйствій (12×8—96), или ведутъ вычисленіе устно (57 да 38 будетъ 95).

6) *Квадратная доска*, съ ребромъ въ одинъ футъ, съ одной стороны имѣющая чистую поверхность, а съ другой разграфленная на квадратные дюймы, служитъ для объясненія квадратныхъ мѣръ.

7) *Кубическая четверть аршина*, состоящая изъ 64 кубическихъ вершковъ, употребляется для объясненія кубическихъ мѣръ и пріема измѣренія объема прямоугольной четырегранной призмы.

8) *Образцы различныхъ русскихъ мѣръ*: а) сажень складная и цѣльная, аршинъ складной и цѣльный, футъ; б) пудъ, фунтовики, лоты, золотники и небольшіе вѣсы для взвѣшиванія во время урока; в) четверикъ и гарнецъ.

Полное собраніе вспомогательныхъ учебныхъ пособій по всѣмъ предметамъ обученія можно видѣть въ педагогическомъ музеѣ Главнаго Управленія Военно-Учебныхъ Заведеній въ Петербургѣ, въ бывшемъ Соляномъ городкѣ, у Лѣтняго сада. Пособія эти продаются также у коммиссіонера Военно-Учебныхъ Заведеній. Н. Фену и Комп.

Программа Сборника ариѳметическихъ задачъ и численныхъ примѣровъ для приготовительнаго и систематическаго курса.

Для удобства ссылокъ въ курсѣ Методики на различные отдѣлы Сборника задачъ привожу здѣсь подробную программу обѣихъ частей, составленнаго мною, сообразно предлагаемой въ Методикѣ системѣ курса, Сборника ариѳметическихъ задачъ и численныхъ примѣровъ для приготовительнаго и систематическаго курса. Сборникъ этотъ въ 12-мъ изданіи 1-ой части и въ 9-мъ изданіи 2 й части значительно измѣненъ и дополненъ. Эти измѣненія и дополненія подробно указаны въ предисловіяхъ къ обѣимъ частямъ сборника.

ПЕРВАЯ ЧАСТЬ.

Цѣлыя числа.

ОТДѢЛЪ I—ЗАДАЧИ.

А) Курсъ приготовительный.

1) Задачи на числа первой сотни.

а) Задачи на числа отъ 1 до 10.
б) Задачи на числа отъ 11 до 20.
в) Задачи на числа отъ 21 до 30.
г) Задачи на числа отъ 31 до 40.
д) Задачи на числа отъ 41 до 50.
е) Задачи на числа отъ 51 до 60.
ж) Задачи на числа отъ 61 до 70.
з) Задачи на числа отъ 71 до 80.
и) Задачи на числа отъ 81 до 90.
і) Задачи на числа отъ 91 до 100.

2) Задачи на составныя именованныя числа до 100.

а) Задачи на мѣры сыпучихъ тѣлъ.
б) Задачи на мѣры длины.
в) Задачи на мѣры вѣса.

Б) Курсъ систематическій.

1) Отвлеченныя числа.

а) Устныя задачи на числа до 1000.
б) Задачи на сложеніе.
в) Задачи на вычитаніе.
г) Задачи на умноженіе
д) Задачи на дѣленіе.
е) Задачи на всѣ четыре дѣйствія.

Составныя именованныя числа.

а) Задачи на сложеніе.
б) Задачи на вычитаніе.
в) Задачи на вычисленіе времени.
г) Задачи на умноженіе.
д) Задачи на дѣленіе.
е) Задачи на всѣ четыре дѣйствія.

ДОПОЛНЕНІЕ.

Задачи на вычисленіе поверхности и объема.

ОТДѢЛЪ II—ЧИСЛЕННЫЕ ПРИМѢРЫ.

А) Курсъ приготовительный.

Примѣры для вычисленій съ отвлеченными числами отъ 1 до 100.

а) Примѣры отъ 1 до 10.
б) Примѣры отъ 11 до 20.
в) Примѣры отъ 21 до 30.
г) Примѣры отъ 31 до 40.
д) Примѣры отъ 41 до 50.
е) Примѣры отъ 51 до 60.
ж) Примѣры отъ 61 до 70.
з) Примѣры отъ 71 до 80.
и) Примѣры отъ 81 до 90.
і) Примѣры отъ 91 до 100.

Пифагорова таблица умноженія.

2) Примѣры для вычисленій съ составными именованными числами до 100.

а) Раздробленіе.
б) Превращеніе.
в) Примѣры на сложеніе.
г) Примѣры на вычитаніе.
д) Примѣры на умноженіе.
е) Примѣры на дѣленіе.
ж) Примѣры на всѣ 4 дѣйствія.

Б) Курсъ систематическій.

Отвлеченныя числа.

а) Примѣры на словесное и письменное счисленіе.
б) Примѣры на сложеніе.
в) Примѣры на вычитаніе.
г) Примѣры на умноженіе.
д) Примѣры на дѣленіе.
е) Примѣры на всѣ четыре дѣйствія.
ж) Вопросы и примѣры для повѣрки дѣйствій и опредѣленія зависимости результатовъ отъ измѣненія всѣхъ элементовъ.

2) Составныя именованныя числа.

а) Раздробленіе.
б) Превращеніе.
в) Примѣры на сложеніе.
г) Примѣры на вычитаніе.
д) Примѣры на умноженіе.
е) Примѣры на дѣленіе.
ж) Примѣры на всѣ 4 дѣйствія.
Таблица русскихъ мѣръ.

ВТОРАЯ ЧАСТЬ.

Дроби.

А) Курсъ приготовительный.

1) Происхожденіе дроби.

а) Задачи.
б) Примѣры.

2) Сокращеніе дробей.

а) Устныя задачи.
б) Письменныя задачи.
в) Примѣры.

3) Увеличеніе и уменьшеніе дробей.

а) Устныя задачи.
б) Письменныя задачи.
в) Примѣры.

4) Сложеніе и вычитаніе дробей.

а) Устныя задачи.
б) Письменныя задачи.
в) Примѣры.

5) Нахожденіе частей даннаго числа.

а) Устныя задачи.
б) Письменныя задачи.
в) Примѣры.

6) Нахожденіе цѣлаго по даннымъ его частямъ.

а) Устныя задачи.
б) Письменныя задачи.
в) Примѣры.

7) Содержаніе дроби въ числѣ цѣломъ и дробномъ.

а) Устныя задачи.
б) Письменныя задачи.
в) Примѣры.

8) Смѣшанные задачи и примѣры.

а) Устныя задачи.
б) Письменныя задачи.
в) Примѣры.

9) Примѣры для вычисленій съ дробными именова ными числами.

Б) Курсъ систематическій.

ОТДѢЛЪ I — ЗАДАЧИ.

1) Простая дробь.

а) Сложеніе.
б) Вычитаніе.
в) Умноженіе.
г) Дѣленіе.
д) Задачи на всѣ 4 дѣйствія съ простыми дробями.

2) Десятичная дробь.

а) Устныя задачи.
б) Сложеніе.
в) Вычитаніе.
г) Умноженіе.
д) Дѣленіе.
е) Задачи на всѣ 4 дѣйствія съ десятичными дробями.

3) Дробь десятичная вмѣстѣ съ простою и опредѣленіе частнаго съ данною точностью.

4) Тройное правило.

а) Устныя задачи на простое тройное правило.
б) Письменныя задачи на простое тройное правило.
в) Письменныя задачи на сложное тройное правило.

5) Вычисленіе процентовъ.

а) Устныя задачи на простые проценты.
б) Письменныя задачи на простые проценты.
в) Письменныя задачи на сложные проценты.

6) Учетъ векселей.

а) Математическій учетъ.
б) Коммерческій учетъ.

7) Правило товарищества.

а) Устныя задачи.
б) Письменныя задачи.

8) **Цѣпное правило.**

9) **Правило смѣшенія и вычисленія пробы.**

10) **Повторительный отдѣлъ.**

ОТДѢЛЪ II — ЧИСЛЕННЫЕ ПРИМѢРЫ.

1) **Признаки дѣлимости чиселъ.**

2) **Нахожденіе наименьшаго кратнаго числа и общаго наибольшаго дѣлителя.**

3) Простая дробь.

а) Измѣненіе величины дроби.
б) Сокращеніе дробей.
в) Приведеніе дробей къ одному знаменателю.
г) Приведеніе дробей къ одному числителю.
д) Сложеніе дробей.
е) Вычитаніе дробей.
ж) Умноженіе дробей.
з) Дѣленіе дробей.
и) Примѣры на всѣ 4 дѣйствія съ простыми дробями.

4) Дробныя именованныя числа.

а) Раздробленіе.
б) Превращеніе.
в) Примѣры на всѣ четыре дѣйствія.

5) Десятичная дробь.

а) Примѣры на выговариваніе и изображеніе десятичныхъ дробей
б) Измѣненіе величины дроби.
в) Сложеніе дробей.
г) Вычитаніе дробей.
д) Умноженіе дробей.
е) Дѣленіе дробей.
ж) Примѣры на обращеніе простыхъ дробей въ десятичныя.
з) Примѣры на обращеніе десятичныхъ дробей въ простыя.
и) Примѣры на всѣ 4 дѣйствія съ десятичными дробями.
і) Примѣры на простыя и десятичныя дроби.

6) Непрерывныя дроби.

7) Отношенія и пропорціи.

а) Ариѳметическое отношеніе.
б) Геометрическое отношеніе.
в) Ариѳметическая пропорція.
г) Геометрическая пропорція.

ДОПОЛНЕНІЕ.

Метрическія мѣры.

а) Раздробленіе и превращеніе.
б) Обращеніе русскихъ мѣръ въ метрическія.
в) Обращеніе метрическихъ мѣръ въ русскія.

Таблица простыхъ чиселъ до 2741. Таблица приращенія 100 р по сложнымъ процентамъ. Таблицы мѣръ и вѣсовъ, употребляемыхъ во Франціи, Германіи, Австріи и Англіи.

Програма курса.

Возрастъ дѣтей, приступающихъ къ обученію Ариѳметикѣ, полагается отъ 7 лѣтъ.

Учебный годъ считается отъ 35 до 40 недѣль.

Элементарный курсъ.

Первый годъ (3 часа или 6 получасовъ въ недѣлю).

Изученіе чиселъ отъ 1 до 20. Полное усвоеніе табличекъ сложенія, вычитанія, умноженія и дѣленія въ этомъ предѣлѣ чиселъ. Изображеніе чиселъ цифрами. Рѣшеніе задачъ изъ Сборника, часть 1-ая, отдѣлы задачъ на числа отъ 1 до 10 и на числа отъ 11 до 20. Вычисленіе примѣровъ изъ Сборника, часть 1-ая, отдѣлы примѣровъ для вычисленій на числа отъ 1 до 10 и на числа отъ 11 до 20.

Второй годъ (4 часа въ недѣлю).

1) Изученіе чиселъ отъ 21 до 100. Таблица умноженія. Бѣглое вычисленіе съ числами этого предѣла. Разложеніе сложнаго числа на два множителя. Дѣлители сложныхъ чиселъ до 100 включительно. Рѣшеніе задачъ изъ Сборника, часть 1-ая, отдѣлы задачъ на числа:

отъ 11 до 20, отъ 21 до 30, отъ 31 до 40, отъ 41 до 50, отъ 51 до 60, отъ 61 до 70, отъ 71 до 80, отъ 81 до 90 и отъ 91 до 100. Вычисленіе примѣровъ изъ Сборника, часть 1-я, отдѣлы примѣровъ на числа: отъ 11 до 20, отъ 21 до 30 и т. д., отъ 91 до 100.

2) Группировка вычисленій въ четыре дѣйствія съ числами. Опредѣленіе каждаго дѣйствія и случаи приложенія его при рѣшеніи задачъ. Выдѣленіе и опредѣленіе элементовъ и результатовъ каждаго дѣйствія. Измѣненіе результатовъ дѣйствій, зависящее отъ измѣненія величины элементовъ. Повѣрка дѣйствій.

3) Дѣйствія съ составными именованными числами въ предѣлѣ чиселъ до 100. Рѣшеніе задачъ изъ Сборника, часть 1-ая, отдѣлы задачъ: 1) на мѣры сыпучихъ тѣлъ, 2) на мѣры длины и 3) на мѣры вѣса. Вычисленіе примѣровъ съ составными именованными числами изъ Сборника, часть 1-я, отдѣлъ примѣровъ для вычисленій съ составными именованными числами до 100.

Третій годъ (4 часа въ недѣлю).

1) Нумерація чиселъ отъ 1 до 1000. Ознакомленіе съ числами этого предѣла на рѣшеніи задачъ изъ Сборника, часть 1-ая, отдѣлъ устныхъ задачъ на числа до 1000.

2) Нумерація чиселъ любой величины. Изъ Сборника задачъ, часть 1-ая, примѣры на словесное и письменное счисленіе. Четыре дѣйствія съ отвлеченными числами. Изъ Сборника, часть 1-ая, отдѣлы: численные примѣры и задачи на сложеніе, вычитаніе, умноженіе и дѣленіе на всѣ четыре дѣйствія. Повѣрка четырехъ дѣйствій и опредѣленіе зависимости величины результатовъ дѣйствій отъ измѣненія величины элементовъ. Изъ Сборника, часть 1-я, отдѣлъ: вопросы и примѣры для повѣрки дѣйствій и опредѣленіе зависимости результатовъ дѣйствій отъ измѣненія величины элементовъ.

3) Четыре дѣйствія съ составными именованными числами. Изъ Сборника задачъ, часть 1-ая, отдѣлы: численные примѣры на раздробленіе и превращеніе, задачи на сложеніе, вычитаніе, вычисленіе времени, умноженіе, дѣленіе и на всѣ 4 дѣйствія съ составными именованными числами и примѣры на сложеніе, вычитаніе, умноженіе, дѣленіе и на всѣ 4 дѣйствія съ составными именованными числами.

4) Элементарный курсъ простыхъ дробей. Происхожденіе дроби. Увеличеніе и уменьшеніе дробей. Сокращеніе. Сложеніе и вычитаніе дробей. Нахожденіе одной или нѣсколькихъ частей даннаго числа. Нахожденіе неизвѣстнаго по даннымъ его частямъ. Содержаніе дроби въ

числѣ цѣломъ и дробномъ. Изъ Сборника задачъ, часть 2-ая, отдѣлы изъ курса приготовительнаго: задачи и численные примѣры на происхожденіе и сокращеніе дробей, увеличеніе и уменьшеніе, сложеніе и вычитаніе дробей, нахожденіе частей даннаго числа, нахожденіе цѣлаго по даннымъ его частямъ, содержаніе дроби въ числѣ цѣломъ и дробномъ, задачи и численные примѣры для повторенія всего курса дробей. Изъ Сборника задачъ, часть 1-ая, задачи на вычисленіе поверхности и объема.

Систематическій курсъ по учебнику.

Четвертый годъ (4 часа въ недѣлю).

1) Повтореніе нумераціи и четырехъ дѣйствій съ числами цѣлыми и составными именованными. Повѣрка дѣйствій.

2) Главнѣйшія теоремы о числахъ. Признаки дѣлимости. Нахожденіе наименьшаго кратнаго числа и общаго наибольшаго дѣлителя данныхъ чиселъ. Изъ Сборника задачъ, часть 2-ая, отдѣлъ II, примѣры на: признаки дѣлимости чиселъ, разложеніе чиселъ на простые множители, опредѣленіе числа всѣхъ точныхъ дѣлителей, нахожденіе наименьшаго кратнаго числа и общаго наибольшаго дѣлителя.

3) Систематическій курсъ простыхъ дробей. Изъ Сборника задачъ, часть 2-ая, отдѣлы: примѣры на измѣненіе величины дроби, сокращеніе дробей; приведеніе дробей къ одному знаменателю и одному числителю, сложеніе, вычитаніе, умноженіе, дѣленіе дробей и примѣры на всѣ 4 дѣйствія съ дробями; раздробленіе и превращеніе дробныхъ именованныхъ чиселъ и 4 дѣйствія съ дробными именованными числами. Изъ Сборника задачъ, часть 2-ая, отдѣлы: задачи на сложеніе и вычитаніе, умноженіе, дѣленіе и на всѣ 4 дѣйствія съ дробями.

Пятый годъ (4 часа въ недѣлю).

1) Десятичная дробь. Четыре дѣйствія съ десятичными дробями. Періодическая дробь. Изъ Сборника задачъ, часть 2-ая, отдѣлы: примѣры на выговариваніе и изображеніе десятичной дроби, измѣненіе величины, сложеніе, вычитаніе, умноженіе и дѣленіе десятичныхъ дробей; примѣры на обращеніе простыхъ дробей въ десятичныя и обратно; всѣ четыре дѣйствія съ десятичными дробями; примѣры на простыя и десятичныя дроби. Изъ Сборника задачъ, часть 2-ая, отдѣлы: устныя задачи, задачи на сложеніе, вычитаніе, умноженіе, дѣленіе и на всѣ 4 дѣйствія съ десятичными дробями; задачи на дробь десятичную вмѣстѣ съ простою и опредѣленіе частнаго съ данною точностію; примѣры на метрическія мѣры.

2) Дробь непрерывная. Составленіе приближеній данной простой и десятичной дроби посредствомъ дроби непрерывной. Изъ Сборника задачъ, часть 2-ая, отдѣлъ примѣровъ на непрерывную дробь.

3) Отношенія и пропорціи. Изъ Сборника задачъ, часть 2-ая, отдѣлы: ариѳметическое отношеніе, геометрическое отношеніе, ариѳметическая пропорція, геометрическая пропорція. Рѣшеніе по способу приведенія къ единицѣ и посредствомъ пропорцій задачъ на правила: тройное, процентовъ и учетовъ векселей, товарищества и смѣшенія. Изъ Сборника задачъ, часть 2-ая, отдѣлы: устныя задачи на простое тройное правило, письменныя задачи на простое тройное правило, письменныя задачи на сложное тройное правило, устныя задачи на простые проценты, письменныя задачи на простые проценты, задачи на сложные проценты, задачи на математическій и коммерческій учетъ векселя, устныя задачи на правило товарищества, письменныя задачи на правило товарищества, задачи на цѣпное правило, устныя задачи на правила смѣшенія и вычисленія пробы, письменныя задачи на смѣшеніе обоего рода, письменныя задачи на вычисленіе пробы сложныя задачи повторительнаго отдѣла.

4) Повтореніе всего систематическаго курса Ариѳметики, преимущественно на рѣшеніи практическихъ задачъ и вычисленіи сложныхъ примѣровъ.

Курсъ Ариѳметики, или по крайней мѣрѣ главнѣйшіе его отдѣлы, каковы: теоремы изъ теоріи чиселъ, признаки дѣлимости и общій наибольшій дѣлитель, четыре дѣйствія съ простыми дробями, десятичныя конечныя и періодическія дроби, повторяются снова въ послѣднемъ классѣ гимназіи, если возможно, по другому учебнику, болѣе пространному, нежели тотъ, по которому курсъ проходился въ младшихъ классахъ.

Элементарный курсъ.

Годъ первый.

1) Изученіе чиселъ отъ 1 до 10.

Почти всѣ составители курсовъ по методу Грубе дѣлаютъ ту важную ошибку, что на первомъ же урокѣ, то-есть при изученіи единицы, сразу вводятъ много выраженій, непонятныхъ дѣтямъ, каковы напримѣръ: „одинождыодинъ, одинъ въ одномъ содержится одинъ разъ, одинъ безъ одного“, или даже, какъ у Золотова, такія выраженія: „одинъ, умноженный на одинъ, одинъ минусъ одинъ, одинъ плюсъ нуль, одинождынуль“, причемъ эти выраженія сопровождаются обозначеніями и цифрами, каковы: $1\times1=1$, $1+0=1$ и т. д. Такой пріемъ въ самомъ началѣ обученія сильно затрудняетъ дѣтей и требуетъ со стороны ихъ непроизводительнаго напряженія мысли и запоминанія непонятныхъ выраженій. Дѣйствительно, при подобнаго рода упражненіяхъ, на изученіе одной единицы можно затратить урока три или четыре; но какая будетъ отъ того польза, а работа для дѣтей выйдетъ очень скучная и тяжелая. Необходимо давать дѣтямъ на первыхъ порахъ обученія упражненія самыя естественныя и выражаться при этомъ языкомъ вполнѣ для нихъ понятнымъ. Обобщеніе выраженій въ сжатую форму, составленіе выводовъ и письменное обозначеніе вычисленій должны входить мало-по-малу, исподоволь, по мѣрѣ надобности и по мѣрѣ накопленія достаточнаго количества данныхъ.

Упражненія на наглядныхъ пособіяхъ при изученіи первыхъ трехъ чиселъ: 1, 2 и 3 до того просты и всякому, даже никогда не учившему дѣтей, понятны, что, собственно говоря, излишне было бы ихъ и приводить здѣсь. Я излагаю однако главнѣйшія изъ нихъ, чтобы выдержать полную систему начальнаго обученія Ариѳметикѣ. При этомъ спѣшу оговориться, что такъ какъ курсъ мой предназначается для пособія учителямъ при преподаваніи, то самыя упражненія будутъ постоянно сопровождаться замѣчаніями и поясненіями, обращенными къ учителю, а не къ ученику.

При изученіи чиселъ первой сотни самыми лучшими пособіями считаются различныхъ видовъ счеты и ариѳметическій ящикъ. При изложеніи упражненій для изученія отдѣльныхъ чиселъ я буду примѣнять преимущественно эти пособія, чтобы хорошо ознакомить учителей съ ними, хотя также, имѣя въ виду, что не во всѣхъ школахъ имѣются именно эти пособія, буду примѣнять и другія. Укажу также различные пріемы при изученіи чиселъ, дабы дать учителю возможность избѣжать того однообразія упражненій, которое наскучиваетъ маленькимъ ученикамъ и утомляетъ ихъ, и за которое по справедливости многіе учителя упрекаютъ Грубе и его послѣдователей. Изъ этого, впрочемъ, вовсе не слѣдуетъ, что учитель долженъ примѣнять эти пріемы именно при изученіи тѣхъ чиселъ, при которыхъ они изложены; я даю только матеріалъ и указываю, какъ имъ пользоваться, а примѣнить его на практикѣ въ томъ видѣ, въ которомъ онъ предложенъ, или въ другомъ, болѣе подходящемъ къ данному случаю,—дѣло учителя.

Итакъ, при изученіи первыхъ трехъ чиселъ, какъ уже сказано, нѣтъ надобности какъ-либо группировать упражненія—всѣ они должны быть наглядны и не могутъ относиться къ числу отвлеченному. Начиная съ числа 4, я укажу опредѣленную систему упражненій при изученіи отдѣльнаго числа такъ какъ это число, по составу своему и величинѣ, даетъ уже къ тому поводъ и возможность.

Одинъ.

Показывая ученикамъ одинъ кубикъ, учитель спрашиваетъ: «сколько у меня кубиковъ?»—Одинъ.—А, взявши въ другую руку нѣсколько кубиковъ, спрашиваетъ: „а здѣсь сколько?" Много, нѣсколько.

Назовите здѣсь въ классѣ такой предметъ, которыхъ есть нѣсколько. Скамья, окно, стѣна, тетрадь, карандашъ, грифель, ученикъ и проч.

Назовите такой предметъ, который въ классѣ только и есть одинъ. Потолокъ, полъ, образъ, учитель и проч.

Если этотъ кубикъ я спрячу въ карманъ, то сколько кубиковъ у меня будетъ въ рукѣ? Ни одного.

А сколько я долженъ снова положить кубиковъ въ руку, чтобы ихъ было тамъ столько же, какъ и прежде? Одинъ.

Возьмите ваши доски (или тетради). Проведите одну черту такой величины (учитель чертитъ на классной доскѣ линію въ вершокъ или въ два вершка, или показываетъ на линейкѣ такую длину). Сотрите ее. Сколько черточекъ осталось? Ни одной.

Начертите нѣсколько такихъ черточекъ одну подъ другой. Начертите много такихъ черточекъ.

На послѣднемъ упражненіи дѣти по своему черченіемъ черточекъ выясняютъ себѣ понятіе *одинъ, нѣсколько* и *много* и въ то же время упражняются въ черченіи линій опредѣленной величины. При этомъ учителю удобно открыть, кто изъ дѣтей умѣетъ считать и до какого числа, потому что они обыкновенно заявляютъ сами: „я начертилъ столько-то черточекъ, я начертилъ столько, что и не сосчитать" и т. п.

Придумывать какія-либо еще другія упражненія для знакомства дѣтей съ числомъ *одинъ* было бы неестественно. Достаточно возбудить въ нихъ то представленіе о единицѣ, которое они, безъ сомнѣнія, имѣли и до начала обученія въ школѣ.

Два.

Вотъ у меня кубикъ, возьму еще одинъ, сколько теперь у меня кубиковъ въ рукѣ? Два.

А сколько у меня рукъ? Разложу эти кубики въ обѣ руки, по скольку будетъ въ каждой? По одному.

Сколькимъ дѣтямъ я могу дать эти кубики по одному? Двоимъ.

Сколько у человѣка глазъ? Какихъ еще частей у человѣка по двѣ? Назовите животныхъ, у которыхъ по двѣ ноги.

Сколько разъ я долженъ взять со стола по одному кубику, чтобы у меня получилось въ рукѣ два кубика? Два раза.

Если я дамъ каждому изъ васъ по одному кубику и потомъ еще по одному, то по скольку кубиковъ будетъ у каждаго изъ васъ? По два.

А если я всѣ ваши кубики соберу и положу на столъ, сколько ихъ будетъ? Нѣсколько, много.

Вотъ монеты въ одну копейку. Возьмите двѣ такихъ монеты. Не знаетъ ли кто одной монеты, за которую даютъ двѣ этихъ?

Задачи.

У мальчика было двѣ груши; одну онъ отдалъ своему товарищу. Сколько грушъ у него осталось?

Дѣвочка купила на одну копейку сухарей и дала лавочнику монету въ двѣ копейки. Сколько сдачи получила она?

Сколько сливъ дадутъ на двѣ копейки, если каждая слива стоитъ одну копейку?

Мальчикъ купилъ грифель и далъ лавочнику монету въ двѣ копейки. Сколько заплатилъ онъ за грифель, если сдачи получилъ одну копейку?

У брата было два яблока, а у сестры вдвое менѣе. Сколько яблокъ было у сестры?

У брата было двѣ копейки; половину всѣхъ этихъ денегъ онъ далъ сестрѣ. Сколько денегъ осталось у брата?

Задача, напримѣръ третья, рѣшается такъ: дѣти, повторивъ содержаніе задачи и подумавъ, отвѣчаютъ: «на двѣ копейки дадутъ двѣ сливы». На вопросъ, почему они такъ думаютъ, отвѣчаютъ: «каждая слива стоитъ одну копейку, значитъ, на двѣ копейки дадутъ двѣ сливы».

Три.

Учитель раздаетъ ученикамъ каждому по два кубика.

Сколько кубиковъ у каждаго изъ васъ? Два.

А сколько будетъ, если я еще дамъ каждому по одному кубику? Три.

Что больше: два или три: Чѣмъ три кубика больше двухъ? Разложите ваши кубики передъ собой по одному. Сколько разъ по одному кубику нужно взять, чтобы составить три?

Какъ еще можно разложить ваши кубики? Два и одинъ.

По скольку кубиковъ останется у васъ, если я возьму отъ каждаго по два кубика? По одному.

А если я вмѣсто двухъ возьму по одному? Останется по два.

Сколько разъ каждый изъ васъ можетъ дать мнѣ по одному кубику? Три раза.

Кто видѣлъ монету въ три копейки?

На какія монеты можно ее размѣнять?

Скажите теперь, сколько будетъ: одинъ да одинъ и еще одинъ? Сколько будетъ: два да одинъ? Одинъ да два? Три безъ одного? Три безъ двухъ? Сколько разъ отъ трехъ можно отнять по одному?

Задачи.

Въ комнатѣ три окна; одно изъ нихъ закрыто ставней. Сколько оконъ не закрыто ставнями?

Крестьянинъ запрегъ три лошади въ телѣги, въ каждую телѣгу по одной, и привезъ на этихъ лошадяхъ все скошенное сѣно. На скольких телѣгахъ привезъ онъ сѣно?

Мать купила нѣсколько пряниковъ; одинъ дала она дочери, а остальные два сыну. Сколько пряниковъ купила она?

У мальчика была монета въ три копейки; онъ купилъ два кренделя и за каждый заплатилъ по одной копейкѣ. Сколько денегъ осталось у мальчика отъ этой покупки?

Продавецъ за яблоко проситъ три копейки, а у дѣвочки есть только двѣ монеты по одной копейкѣ. Сколько ей не достаетъ, чтобы купить это яблоко?

Мать роздала три кренделя всѣмъ своимъ дочерямъ, каждой по одному. Сколько у нея дочерей?

Какъ можно раздѣлить три орѣха между мальчикомъ и дѣвочкой?

Какъ видно изъ приведенныхъ мною упражненій, для изученія первыхъ трехъ чиселъ по ихъ составу и взаимному отношенію, они двухъ родовъ: 1) упражненія на наглядныхъ пособіяхъ, когда дѣти прямо говорятъ о томъ, что у нихъ передъ глазами, и составляютъ ясное представленіе изучаемаго числа, и 2) рѣшеніе задачъ; это послѣднее упражненіе служитъ для того, чтобы отвлечь дѣтей отъ предметовъ, находящихся передъ глазами, и перенести число въ сознаніе, хотя еще и не вполнѣ въ отвлеченномъ видѣ. Дѣти при этомъ уже не глазами и руками, а мысленно считаютъ предметы, хорошо имъ извѣстные, но во время работы не могущіе быть въ соприкосновеніи съ органами чувствъ. На тѣхъ и другихъ упражненіяхъ имѣется въ виду также познакомить дѣтей съ особенностью языка и пріучить ихъ выражаться опредѣленно.

Начиная съ числа *четыре*, я уже привожу упражненія въ стройной системѣ, хотя вовсе не хочу этимъ сказать, что упражненія нужно систематизировать, начиная именно съ этого числа. Послѣднее зависитъ вполнѣ и отъ учениковъ, и отъ учителя. Многія дѣти изъ собственнаго житейскаго опыта выносятъ уже до 6 лѣтъ такое хорошее знаніе многихъ отношеній чиселъ перваго десятка, что достаточно, для приведенія въ порядокъ и окончательнаго закрѣпленія этихъ свѣдѣній, предложить имъ нѣсколько задачъ и вопросовъ на число, стоящее на очереди, чтобы убѣдиться въ томъ, что кропотливое изученіе числа по систематически расположеннымъ упражненіямъ совершенно излишне и можетъ наводить на учащихся скуку и отвращеніе къ работѣ. Слѣдовательно, вводя систему при изученіи числа *четыре*, я имѣю въ виду только начать знакомить самого учителя съ тѣмъ порядкомъ упражненій, котораго, по моему мнѣнію, слѣдуетъ держаться при изученіи чиселъ перваго десятка.

Весьма важно для расположенія упражненій при изученіи отдѣльнаго числа выбрать самое простое и вполнѣ естественное *исходное* начало, понятное всякому учащему дѣтей, и затѣмъ распредѣлить всѣ упражненія такъ, чтобы одно вытекало изъ другого и одно дополняло другое.

За такое начало, дающее направленіе всей работѣ, какъ при изученіи чиселъ перваго десятка, такъ и при изученіи чиселъ всей сотни, я принимаю *разложеніе изучаемаго числа на слагаемыя*. Сложеніе есть основное ариѳметическое дѣйствіе,—всѣ прочія дѣйствія происходятъ изъ него путемъ упрощенія вычисленія. Желая быть вполнѣ понятнымъ, я хотя вкратцѣ поясню эту простую мысль. Вычитаніе чиселъ производится легко и просто посредствомъ сложенія и есть не что иное, какъ упрощеніе этого послѣдняго посредствомъ запоминанія таблички сложенія: кто знаетъ хорошо, что 5 да 3 составитъ 8, тотъ также хорошо знаетъ, что 8 безъ 5 будетъ 3. Напримѣръ, изъ 25 вычесть 17 можно посредствомъ сложенія двумя способами: а) постепеннымъ прибавленіемъ къ вычитаемому по единицѣ до тѣхъ поръ, пока оно сравняется съ уменьшаемымъ; оказывается, что 17 разнится отъ 25 на 8 единицъ; б) прибавленіемъ къ вычитаемому чиселъ наугадъ, сначала 2, потомъ еще 3, потомъ еще 2, пока получится число, равное уменьшаемому. Значитъ, видоизмѣненіе въ нашемъ примѣрѣ сложенія въ противоположное ему дѣйствіе—вычитаніе въ томъ только и состоитъ, что мы, или на основаніи многихъ упражненій въ подобномъ сложеніи, или на основаніи простого заучиванія наизусть, навсегда закрѣпили въ памяти, что 15 безъ 7 будетъ 8 (такъ какъ 25 и 17 имѣютъ оба по общему десятку, слѣдовательно, приходится сравнивать только 15 и 7), и затѣмъ пользуемся этимъ знаніемъ при всѣхъ дальнѣйшихъ вычисленіяхъ.

Что умноженіе есть сложеніе, упрощенное посредствомъ извѣстной наизусть таблицы сложенія чиселъ, взятыхъ нѣсколько разъ слагаемымъ, это безъ сомнѣнія извѣстно всякому, знающему это дѣйствіе. Складывая по 6 пять разъ, мы запоминаемъ, наконецъ, что пятью шесть будетъ тридцать, или просто выучиваемъ на память эту комбинацію.

Дѣленіе чиселъ производится непосредственно черезъ сложеніе дѣлителя, который берется послѣдовательно слагаемымъ до тѣхъ поръ, пока въ окончательной суммѣ получится число, равное дѣлимому, или разнящееся отъ него на число меньшее дѣлителя. Такое продолжительное сложеніе дѣлителя замѣняется, для упрощенія вычисленія, умноженіемъ его на такое число, что въ произведеніи получается число, равное дѣлимому, или отличающееся отъ него на число меньшее дѣлителя, и эта разность полученнаго произведенія отъ дѣлимаго опредѣляется уже посредствомъ вычитанія.

Такимъ образомъ, незнающій никакого другого дѣйствія, кромѣ сложенія, можетъ всѣ четыре ариѳметическія дѣйствія производить посредствомъ одного этого дѣйствія. Это обыкновенно и осуществляется на практикѣ на торговыхъ счетахъ, для чего существуютъ и руководства.

Но мысль объ упрощеніи дѣйствія можетъ явиться у учащихся только тогда, когда они усвоили дѣйствіе основное, изъ котораго посредствомъ упрощенія и вытекаютъ всѣ другія; притомъ необходимо, чтобы эти упрощенія и обобщенія въ новыя дѣйствія возникали естественно, безъ натяжки и постепенно. Для естественности возникновенія изъ основного дѣйствія другихъ трехъ служитъ принятый мною порядокъ упражненій при изученіи отдѣльнаго числа, а для постепенности служитъ расположеніе всего курса изученія чиселъ первой сотни. Внимательно знакомящійся съ моимъ методомъ учитель удобно можетъ прослѣдить то и другое по самому курсу.

При изученіи отдѣльныхъ чиселъ перваго десятка упражненія располагаются въ такомъ порядкѣ:

1) Образованіе новаго числа прибавленіемъ единицы къ числу предшествовавшему.

2) Разложеніе числа на составляющія его слагаемыя самими учениками при посредствѣ наглядныхъ пособій.

3) Приведеніе въ порядокъ разложенія, сдѣланнаго учениками. Для закрѣпленія этого порядка въ сознаніи учениковъ служатъ пись-

менныя упражненія посредствомъ черченія на доскахъ или въ тетрадяхъ черточекъ, кружковъ, крестиковъ и т. п., а потомъ и посредствомъ цифръ и знака дѣйствія.

4) Вопросы по поводу сдѣланнаго и приведеннаго въ порядокъ разложенія для сравненія изучаемаего числа съ каждымъ изъ предшествовавшихъ и для вывода и закрѣпленія въ памяти всѣхъ отношеній его къ предшествовавшимъ числамъ и комбинацій съ ними, выраженныхъ четырьмя ариѳметическими дѣйствіями.

5) Рѣшеніе практическихъ задачъ для большаго закрѣпленія въ памяти изучаемыхъ на основаніи 3-го и 4-го упражненія отношеній чиселъ и приложеніе усвоеннаго въ отвлеченномъ видѣ знанія къ частнымъ практическимъ случаямъ. Ученикъ въ задачѣ долженъ открыть извѣстное соотношеніе между данными числами и приложить свое знаніе къ опредѣленію результата этого соотношенія.

6) Бѣглое устное вычисленіе, вычисленіе формулъ и вопросы въ разбивку, относящіеся прямо къ числу отвлеченному, для повторенія всего пройденнаго о числѣ и преимущественно для сравненія между собою чиселъ въ кратномъ ихъ отношеніи.

Упражненіе второе и третье послѣ изученія трехъ или четырехъ чиселъ могутъ быть соединены въ одно, потому что ученики навыкаютъ дѣлать разложеніе разсматриваемаго числа на слагаемыя сразу въ порядкѣ. Потомъ иногда знакомство съ новымъ числомъ можно производить и безъ наглядныхъ пособій, предлагая ученикамъ дѣлать разложеніе числа устно или письменно.

Такимъ образомъ, принимаемое мною основное начало изученія числа, именно *составъ его изъ слагаемыхъ*, совершенно разнится отъ основного начала Грубе—*сравненія изучаемаго числа со всѣми предшествующими*, и при моемъ пріемѣ изученія числа таблички сравненія чиселъ, предлагаемыя Грубе, становятся лишними, такъ какъ онѣ заключаются въ моемъ разложеніи числа на слагаемыя.

Всѣ упражненія при изученіи чиселъ перваго десятка сначала производятся безъ помощи цифръ и знаковъ дѣйствій, которые вводятся, когда уже весь десятокъ пройденъ, для повторенія всего пройденнаго, какъ это видно будетъ изъ самаго курса.

Не останавливаясь болѣе на подробномъ теоретическомъ выясненіи значенія и примѣненія всѣхъ перечисленныхъ упражненій съ видоизмѣненіями, я считаю за болѣе удобное выяснить все это на практикѣ при изложеніи курса, къ которому теперь и перехожу.

Четыре.

1) Образованіе числа.

На верхней планкѣ доски учитель ставитъ три кубика вмѣстѣ.

■■■

Сколько здѣсь кубиковъ? (Потомъ приставляетъ четвертый кубикъ). А теперь сколько?

■■■■

Какъ же составляются четыре кубика изъ трехъ и одного? Нужно къ тремъ кубикамъ прибавить, приставить одинъ кубикъ.

2) Разложеніе на слагаемыя.

Какъ можно составить четыре кубика? или: Какъ четыре кубика можно разложить?

Четыре кубика можно разложить на два и два.

■■ ■■

Четыре кубика можно составить изъ одного, одного, одного и еще одного, или взять четыре раза по одному кубику.

■ ■ ■ ■

Четыре кубика можно разложить на три и одинъ.

■■■ ■

Можно составить изъ одного, одного и двухъ.

■ ■ ■■

Можно ли еще какъ-нибудь иначе разложить четыре кубика? Ученики убѣждаются, что никакого другого, отличнаго отъ этихъ, разложенія быть не можетъ. Если ученики станутъ еще разлагать четыре кубика такимъ образомъ: одинъ, два и одинъ, или два, одинъ и одинъ, или одинъ и три, то учителю легко имъ показать, что эти разложенія составляютъ повтореніе уже имѣющихся разложеній, только въ другомъ порядкѣ.

Всякій разъ, по указанію новаго пріема разложенія, предложеннаго учениками, учитель на одной изъ планокъ доски выставляетъ кубики въ томъ видѣ, какъ они изображены здѣсь. Такимъ образомъ, въ нашемъ случаѣ на верхней планкѣ будутъ стоять четыре кубика вмѣстѣ, на второй два и два, на третьей четыре кубика раздѣльно на нѣкоторомъ разстояніи одинъ отъ другого, на четвертой три и одинъ и на пятой одинъ, одинъ и два.

3) Разложеніе въ порядкѣ.

Весьма можетъ случиться, что дѣти сразу укажутъ разложеніе числа на слагаемыя въ порядкѣ; но и тогда третье упражненіе нельзя считать лишнимъ. Для установленія порядка въ разложеніи предлагаются классу такіе вопросы:

Вотъ вы составили четыре кубика изъ двоекъ, изъ отдѣльныхъ кубиковъ и изъ троекъ; въ какомъ порядкѣ лучше поставить намъ кубики на доскѣ? Съ чего начать разложеніе четырехъ кубиковъ? Съ разложенія на отдѣльные кубики.

Какъ составить четыре кубика изъ отдѣльныхъ кубиковъ? Надо взять четыре раза по одному.

Какъ составить четыре кубика изъ двоекъ, изъ паръ?

Нужно взять двѣ двойки; два раза по два кубика; двѣ пары кубиковъ.

Какъ потомъ составить четыре кубика? Можно составить изъ троекъ; для этого взять три и одинъ и три.

Выясняется ученикамъ, что послѣднее разложеніе, то-есть 1+1+2, не подходитъ подъ принятый порядокъ и есть видоизмѣненіе одного изъ первыхъ трехъ. Такимъ образомъ, путемъ самаго разложенія числа на слагаемыя, ученики сравниваютъ его съ 1, съ 2 и 3. Учитель во время разговора съ учениками располагаетъ постепенно на классной доскѣ эти разложенія уже въ порядкѣ, то-есть:

На первой планкѣ ■ ■ ■ ■
На второй ■   ■   ■   ■
На третьей ■ ■   ■ ■
На четвертой ■ ■ ■   ■

Такъ какъ это упражненіе есть основное и самое важное при изученіи числа, то для закрѣпленія въ памяти учениковъ сдѣланныхъ разложеній имъ предлагаются упражненія письменныя на доскахъ или въ тетрадяхъ. Письменная работа учениковъ состоитъ въ разложеніи того же числа посредствомъ черточекъ, крестиковъ, кружковъ и проч. Кубики снимаются съ классной доски, и по требованію учителя: „возьмите ваши доски и разложите *четыре* посредствомъ крестиковъ такъ, какъ мы разлагали на классной доскѣ четыре кубика“, дѣти на память разлагаютъ четыре такимъ образомъ:

× × × ×
×   ×   ×   ×
× ×   × ×
× × ×   ×

Въ случаѣ ошибки, или безпорядка въ разложеніи, или, наконецъ, упущенія одного изъ разложеній, учитель поправляетъ учениковъ, провѣряя ихъ работу. Провѣрка эта производится такъ: обойдя класс и познакомившись бѣгло съ работою каждаго, учитель ведетъ разговоръ съ классомъ. Кто кончилъ? Скажите, такой-то, какое у вас первое разложеніе? У кого первое разложеніе не такое? Какое второ разложеніе, третье? Отчего прежде надо разложить четыре на единицы, потомъ на двойки, тройки? При этомъ разложеніи есть порядокъ и нельзя пропустить ни одного разложенія, а если писать в безпорядкѣ, то легко какое-либо разложеніе упустить.

Такой-то, сколькими способами разложили вы четыре? Тремя способами. Нѣтъ ли у кого еще четвертаго разложенія?

Затѣмъ одинъ ученикъ, по требованію учителя, читаетъ всѣ разложенія, примѣрно такъ: четыре состоитъ изъ одного, еще одного, ещ одного и еще одного; четыре состоитъ изъ двухъ и двухъ; четыре состоитъ изъ трехъ и одного.

Если учитель замѣчаетъ, что есть нѣкоторые ученики, которы еще не вполнѣ усвоили составъ четырехъ, то, велѣвъ спрятать доски онъ обращается ко всему классу и преимущественно къ этимъ ученикамъ съ вопросами: Изъ чего состоитъ четыре? Какъ составить четыре изъ кубиковъ, или крестиковъ, взятыхъ по два? Какъ составит четыре изъ единицъ? и. т. п.

4) Выводы изъ предъидущаго упражненія.

Третье упражненіе, хорошо исполненное, положило прочное основаніе для всей дальнѣйшей работы съ числомъ. Послѣдующія упражненія состоятъ только въ расширеніи пониманія учениками сущности сдѣланныхъ ими разложеній числа, въ обобщеніи этихъ разложеній и в упрощеніи самыхъ выраженій и пріемовъ вычисленій. Для выводов ученикамъ предлагаются слѣдующіе вопросы:

На сложеніе и вычитаніе. Сколько надо прибавить къ одному чтобы получить четыре? Сколько къ двумъ, тремъ? Сколько будетъ два да два? Одинъ да три? Три да одинъ?

Сколько разъ отъ четырехъ можно отнять по одному? Сколько раз по два, по три?

Сколько останется, если отъ четырехъ отнять одинъ, два, три

Сколько единицъ не достаетъ одному, двумъ, тремъ до четырехъ

Чѣмъ четыре больше одного, двухъ, трехъ?

Сколько останется, если отъ четырехъ отнять четыре раза по одному, два раза по два?

На умноженіе и дѣленіе. Сколько разъ нужно взять по одному по два, чтобы получить четыре? Сколько разъ нужно повторить два чтобы составить четыре? Сколько будетъ: дважды два? Четырежды одинъ?

Сколько разъ одинъ, два, четыре содержится въ четырехъ?

Во сколько разъ четыре больше одного, двухъ?

Какъ велика четвертая часть четырехъ, половина четырехъ?

Сколько получится, если взять въ два раза, въ четыре разъ меньше четырехъ?

Такимъ образомъ, всѣ отношенія числа четыре къ предшествовавшимъ числамъ вытекаютъ сами собою изъ разложенія числа на слагаемыя и, слѣдовательно, изъ знакомства черезъ то учениковъ съ составомъ числа. Въ случаѣ затрудненія ученика въ отвѣтѣ на предложенный вопросъ, учитель пользуется кубиками для нагляднаго представленія ученику того, что его затруднило.

5) З а д а ч и.

Задачи при изученіи чиселъ, какъ уже сказано, служатъ для приложенія узнаннаго учениками изъ предъидущихъ упражненій къ рѣшенію чисто практическихъ вопросовъ. Кромѣ того, рѣшеніемъ задачъ имѣется въ виду развитіе въ учащихся соображенія и выработка языка.

Совершенно достаточное собраніе задачъ, составленныхъ главнымъ образомъ для развитія соображенія учащихся и требующихъ приложенія самыхъ важныхъ отношеній изучаемаго числа къ другимъ, имѣется въ моемъ «Сборникѣ ариѳметическихъ задачъ и численныхъ примѣровъ для приготовительнаго и систематическаго курса», часть 1-ая. Задачи на числа первой сотни расположены въ «Сборникѣ» въ 10 отдѣлахъ по десяткамъ чиселъ, а въ каждомъ отдѣлѣ расположены по возрастанію чиселъ, такъ что имѣется на каждое число по нѣскольку задачъ, стоящихъ въ рядъ. Въ задачахъ этихъ условія и данныя числа подобраны такъ, что требуютъ приложенія всѣхъ важнѣйшихъ отношеній изучаемаго числа къ числамъ предъидущимъ. Задачи по преимуществу сложныя, то-есть требующія для своего рѣшенія двухъ и болѣе дѣйствій. Въ случаѣ надобности учитель самъ легко можетъ составлять во время урока простыя задачи, требующія для своего рѣшенія одного дѣйствія. Такихъ задачъ я не помѣщалъ въ «Сборникѣ», такъ какъ онѣ послѣ предшествовавшихъ трехъ упражненій вовсе не нужны; а если бы и понадобились, то именно только для закрѣпленія въ памяти учащихся какого-либо особенно труднаго отношенія изучаемаго числа къ другому числу. Но трудность эта является во время урока, и составителю Сборника практическихъ упражненій нельзя предугадать всевозможныхъ частныхъ случаевъ, являющихся во время работы съ тѣмъ

9*

или другимъ ученикомъ. Учитель же составитъ простенькую задач прямо примѣнимо къ данному случаю.

Задачи въ «Сборникѣ», относящіяся къ числу четыре, слѣдующія №№ 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.

Здѣсь мнѣ остается только изложить пріемъ рѣшенія задачи в классѣ.

Задача. (Изъ «Сборника» № 8). Хозяйка купила двѣ пары под свѣчниковъ и одинъ изъ нихъ сломала. Сколько цѣлыхъ подсвѣчни ковъ осталось у хозяйки?

Учитель громко и раздѣльно читаетъ задачу. Одинъ изъ учени ковъ повторяетъ ее. Если окажется, что нѣкоторые ученики не усво или вполнѣ содержанія задачи, то классу предлагаются вопросы: (чемъ говорится въ этой задачѣ? О томъ, что хозяйка купила подсвѣчники Сколько подсвѣчниковъ купила она? Двѣ пары. Что еще извѣстно подсвѣчникахъ? Одинъ она сломала. Что спрашивается въ задачѣ Сколько цѣлыхъ подсвѣчниковъ осталось у хозяйки?

Возстановивъ такимъ образомъ въ памяти учениковъ содержані задачи по частямъ, учитель опять требуетъ повторить ее всю въ цѣ лости, чтобы части эти были между собою связаны. Послѣ этого учи тель предоставляетъ ученикамъ рѣшать задачу и выжидаетъ, пока вс или многіе ученики поднятіемъ руки заявятъ о томъ, что они задач рѣшили. Называя одного ученика, учитель спрашиваетъ, что он получилъ.

Отвѣтъ ученика. У хозяйки осталось три цѣлыхъ подсвѣчника

Затѣмъ, не выражая своего одобренія или неодобренія по повод полученнаго отвѣта, учитель спрашиваетъ то же у другого, у третья и у прочихъ учениковъ, и только переспросивши всѣхъ или многихъ заявляетъ, что такой-то отвѣтъ вѣренъ. Для сокращенія времени пр этомъ выспрашиваніи можно получивши отвѣтъ одного ученика, спра шивать разомъ, кто еще получилъ такой же отвѣтъ; то же самое и п поводу другого отвѣта, отличающагося отъ перваго.

Обыкновенно не всѣ ученики могутъ рѣшить задачу и, притомъ рѣшить ее вѣрно, особенно, если учитель не можетъ удѣлить мног времени на выжиданіе ея рѣшенія. Да если бы и всѣ рѣшили вѣрно то иногда слѣдуетъ все-таки выспросить у учениковъ пріемъ рѣшені задачи. Отвѣтъ ученика по этому поводу можетъ быть въ окончатель номъ видѣ сформулированъ такъ: „Хозяйка купила двѣ пары подсвѣч никовъ, то-есть четыре подсвѣчника, потому что два раза по два бу детъ четыре; одинъ подсвѣчникъ она сломала, значитъ, цѣлыхъ оста лось три, потому что четыре безъ одного буетъ три“.

Безъ сомнѣнія, такую окончательную форму отвѣтъ можетъ принять только послѣ рѣшенія частныхъ вопросовъ, предлагаемыхъ классу учителемъ, каковы:

Что вы прежде всего высчитали? Сколько подсвѣчниковъ купила хозяйка?

Сколько же получилось? Четыре.

Какъ вы узнали, что ихъ было четыре? Было подсвѣчниковъ двѣ пары, что составляетъ четыре подсвѣчника.

Почему двѣ пары составляютъ четыре? Потому, что пара подсвѣчниковъ—все равно, что два, а два раза по два даетъ четыре.

Что вы узнали потомъ? Сколько цѣлыхъ подсвѣчниковъ осталось у хозяйки, когда она одинъ сломала?

Сколько же осталось? Три.

Какъ вы получили три? Хозяйка купила четыре подсвѣчника, одинъ сломала, а четыре безъ одного будетъ три.

Разскажите теперь все рѣшеніе задачи.

Излагая подробно пріемъ рѣшенія въ классѣ этой задачи, я вовсе не думаю сказать, что всѣ задачи должны быть разбираемы такъ подробно. Съ перваго раза достаточно бываетъ ограничиться однимъ отвѣтомъ числа со стороны учениковъ на вопросъ, поставленный въ задачѣ, не анализируя плана рѣшенія и вычисленій. Затѣмъ можно довольствоваться планомъ рѣшенія и числовыми отвѣтами на всѣ вспомогательныя неизвѣстныя, и только послѣ рѣшенія нѣсколькихъ задачъ можно начать требовать отъ учениковъ полнаго разсужденія при рѣшеніи задачи и высказыванія причины, на которой основано то или другое вычисленіе.

6) Бѣглое вычисленіе и вопросы, относящіеся къ числу отвлеченному.

а) *Вычисленіе въ формѣ задачъ.* Учитель предлагаетъ ученикамъ задачи сложныя по числу данныхъ чиселъ, но простыя по условіямъ, каковы:

Имѣя четыре яблока, я далъ двумъ мальчикамъ по одному яблоку потомъ купилъ еще одно яблоко и съѣлъ самъ два. Сколько яблокъ у меня осталось?

Въ саду на скамейкѣ сидѣли три мальчика; къ нимъ подошелъ и сѣлъ еще мальчикъ. Сколько мальчиковъ осталось на скамейкѣ, если двѣ пары пошли гулять по саду?

Ученики вычисляютъ по мѣрѣ того, какъ учитель медленно читаетъ задачу, и по окончаніи вопроса задачи тотчасъ даютъ отвѣтъ то-есть какимъ-либо условнымъ знакомъ заявляютъ, что число готово, а говоритъ его тотъ ученикъ, котораго назвалъ по имени учитель.

б) *Вычисленіе въ отвлеченномъ видѣ.* Учитель говоритъ:

Отъ четырехъ отнимаю три, потомъ прибавляю къ остатку два, отъ полученнаго числа отнимаю одинъ, къ полученному числу прибавляю еще два и все полученное дѣлю пополамъ. Сколько получилось у меня въ каждой половинѣ?

Или: беру два раза два, отнимаю три раза одинъ, къ полученному числу прибавляю два и отъ полученнаго числа отнимаю одинъ. Сколько разъ полученное число содержится въ четырехъ?

Опять-таки отвѣтъ учениковъ долженъ явиться тотчасъ по предложеніи вопроса учителемъ. Вѣрность и быстрота отвѣта учениковъ покажутъ въ этомъ случаѣ учителю, на сколько они овладѣли числомъ.

в) *Вопросы для повторенія.* Сколько будетъ: четыре раза одинъ? Одиножды четыре? Два раза два? Если взять трижды одинъ, то чего не достаетъ до четырехъ? Два сколько разъ содержится въ четырехъ? Половина четырехъ чѣмъ меньше трехъ? Сколько будетъ четыре безъ трехъ, безъ двухъ? Если отъ четырехъ отнять два, то полученное число во сколько разъ болѣе единицы? и т. п.

Пять.

Работа съ пуговками, жетонами, спичками или камешками.

Беру это пособіе для классной работы потому, что оно требуетъ особеннаго пріема со стороны учителя. Работаютъ сами ученики; учитель только направляетъ работу.

1) Образованіе числа. Выньте ваши коробки. Достаньте по четыре пуговки и положите ихъ въ рядъ, одну подлѣ другой. Приложите еще по одной пуговкѣ въ тотъ же рядъ. Сколько получилось пуговокъ? Значитъ, какъ получить пять, имѣя уже четыре? Нужно къ четыремъ приложить еще одинъ.

2) Разложеніе на слагаемыя. Оставьте эти пять пуговокъ, выньте еще по пяти и разложите ихъ въ другомъ ряду, какъ-нибудь иначе. Достаньте еще пять и разложите другимъ образомъ. Доставайте по пяти и разлагайте до тѣхъ поръ, пока можете разложить какимъ-нибудь новымъ способомъ, только чтобы не было у кого изъ васъ два раза одного и того же разложенія.

При этой работѣ учениковъ учитель постоянно обходитъ классъ и наблюдаетъ какъ за порядкомъ въ классѣ, такъ и за правильнымъ исполненіемъ его требованій.

Всѣ возможныя разложенія въ безпорядкѣ, не считая перестановокъ слагаемыхъ, могутъ быть, напримѣръ, слѣдующія: 2+2+1, 3+2, 4+1, 1+1+3, 1+1+1+1+1, 2+1+1+1,

Для того чтобы у всѣхъ были всѣ разложенія, учитель направляетъ работу такимъ образомъ: „Скажите, такой-то, какъ вы разложили пять пуговокъ?“ Ученикъ читаетъ одно разложеніе. „У кого есть такой же рядъ?“ Имѣющіе его заявляютъ условнымъ знакомъ, а неимѣющіе, по требованію учителя, вынимаютъ изъ коробки пять пуговокъ и выполняютъ указанное разложеніе. „Такой-то, какой у васъ есть другой рядъ?“ Слѣдуетъ та же работа. Такимъ образомъ продолжается до тѣхъ поръ, пока у всѣхъ дѣтей на столахъ будутъ сдѣланы всѣ приведенныя выше разложенія въ какомъ угодно порядкѣ. Въ заключеніе одинъ ученикъ, по назначенію учителя, говоритъ всѣ разложенія въ томъ порядкѣ, въ какомъ они у него расположены, а прочіе провѣряютъ, не пропустилъ ли кто какого-либо изъ разложеній *).

3) Разложеніе въ порядкѣ.

Теперь всѣ разложенія, сдѣланныя вами, приведемъ въ порядокъ. Какой же порядокъ выбрать? Изъ чего прежде составлять пять, изъ чего потомъ? Прежде составить изъ единицъ, потомъ изъ двоекъ, троекъ, четверокъ. Расположите ваши ряды въ этомъ порядкѣ, одинъ подъ другимъ.

Дѣти располагаютъ ряды такъ: въ первомъ ряду пять пуговокъ одна подлѣ другой; этотъ рядъ всегда представляетъ изучаемое число въ цѣлости, какъ сумму; во второмъ ряду 1+1+1+1+1, въ третьемъ 2+2+1, въ четвертомъ 3+2 и въ пятомъ 4+1. При этомъ прежде бывшіе ряды 2+1+1+1 и 3+1+1 уничтожаются сами собою, такъ какъ эти ряды смѣшанные и заключаются въ одномъ разложеніи 3+2, гдѣ пять сравнивается съ числомъ три.

Сколько теперь получилось рядовъ? Пять.

Что въ первомъ ряду? Само число пять.

Во второмъ? То же число, составленное изъ единицъ.

Въ третьемъ? То же число, составленное изъ двухъ, двухъ и одного.

---

*) *Примѣчаніе.* Не слѣдуетъ придавать значенія тому кажущемуся недоразумѣнію, что изучается число *пять*, а различныхъ разложеній является *шесть*, такъ что ученики какъ-бы невольно забѣгаютъ впередъ. Учитель не сдѣлаетъ вовсе ошибки, если, разсматривая съ дѣтьми число *пять*, спросить у нихъ, „сколько разложеній они получили“, и получитъ въ отвѣтъ: „*шесть*“. Одно другому нисколько не мѣшаетъ—счетъ самъ по себѣ, а всестороннее изученіе числа само по себѣ.

Въ четвертомъ? Пять, составленное изъ трехъ и двухъ.
Въ пятомъ? Пять, составленное изъ четырехъ и одного.

Почему у васъ получилось пять рядовъ а не больше и не меньше? ›чему при разложеніи нами *четырехъ* получилось четыре ряда?

Такіе вопросы предлагаются дѣтямъ для того, чтобы они замѣтили ›о число рядовъ всегда равно изучаемому числу, что въ первомъ ряд› ›егда должно заключаться само число въ цѣлости, а число прочихъ ›довъ прямо опредѣляется числомъ всѣхъ предшествующихъ чиселъ, › которыми изучаемое число сравнивается. Такъ при изученіи пяти ›ходитъ четыре ряда, потому что чиселъ, съ которыми пять сравни›ется, всего четыре: 1, 2, 3 и 4. Обдумывая свои отвѣты на эти ›просы и составляя ихъ на основаніи рядовъ, находящихся у нихъ ›едъ глазами, дѣти замѣчаютъ также самый порядокъ разложенія ›сла и мало-по-малу привыкаютъ разложенія слѣдующихъ чиселъ ›лать сразу въ порядкѣ.

Затѣмъ идётъ упражненіе на доскахъ или въ тетрадяхъ. Дѣти, ›бравъ всѣ пуговки въ коробки, по требованію учителя, берутъ доски › воспроизводятъ на нихъ тѣ же разложенія посредствомъ кружковъ ›кимъ образомъ:

○○○○○
○ ○ ○ ○ ○
○○ ○○ ○
○○○ ○○
○○○○ ○

Учитель осматриваетъ работу учениковъ, а одинъ изъ нихъ чи›аетъ всѣ сдѣланныя имъ разложенія. Наблюдается, чтобы всѣ ученики ›епремѣнно воспроизвели всѣ разложенія и въ порядкѣ.

Вопросы: „Изъ чего сначала составили пять? Изъ чего потомъ? ›ъ чемъ же тутъ замѣчается порядокъ?“ Сначала пять составляется ›зъ отдѣльныхъ кружковъ, изъ единицъ, потомъ изъ двоекъ, потомъ ›зъ троекъ, четверокъ. Въ какомъ порядкѣ идутъ числа, въ такомъ ›е порядкѣ идутъ и ряды.

4) Выводы.

Сложеніе и вычитаніе. Сколько нужно прибавить къ одному, ›вумъ, тремъ, четыремъ, чтобы получить пять?

Изъ какихъ чиселъ можно составить пять?

На какія мелкія монеты можно размѣнять пятачекъ?

Сколько получится, если отъ пяти отнять два, четыре, одинъ, три?

Чего не достаетъ одному, тремъ до пяти?

Какое число можно отнять два раза отъ пяти, чтобы остался одинъ? Какое число еще можно отнять два раза отъ пяти, и что останется?

Какое число нужно отнять отъ пяти, чтобы осталось два?

Пять чѣмъ больше двухъ, трехъ, одного?

Сколько получится, если пять уменьшить двумя, четырьмя единицами?

Умноженіе и дѣленіе. Сколько разъ нужно взять по одному, чтобы получить пять?

Во сколько разъ пять больше одного?

Сколько разъ одинъ содержится въ пяти?

Сколько разъ два, три, четыре содержится въ пяти и сколько еще остается?

Какъ велика пятая часть пяти?

Сколько дадутъ булокъ на пять копеекъ, если каждая булка стоитъ двѣ копейки, и сколько получится сдачи?

Какъ можно раздать пять грушъ тремъ мальчикамъ?

Отвѣтъ: одному мальчику одну грушу, другимъ двумъ по двѣ; одному мальчику три груши, другимъ двумъ по одной.

> *Примѣчаніе.* Нужно заботиться о томъ, чтобы изученіе новаго числа начиналось съ начала урока, такъ чтобы возможно было разложить число и сдѣлать выводы изъ этихъ разложеній. Тогда уже въ слѣдующій урокъ можно продолжать другія упражненія, основанныя на этихъ выводахъ. Иначе, не закрѣпивъ выводами работы учениковъ на наглядныхъ пособіяхъ, пришлось бы ту же работу начинать въ слѣдующій урокъ снова.

5) Задачи.

№№ 13, 14, 15, 16 и 17.

6) Бѣглое вычисленіе.

а) *На задачахъ.* Нищій собралъ утромъ пять копеекъ и купилъ на двѣ коп. хлѣба и на одну коп. квасу, потомъ вечеромъ еще получилъ двѣ копейки и снова издержалъ три. Сколько денегъ осталось у нищаго отъ собранныхъ въ этотъ день?

Въ комнатѣ у одной стѣны стояло два стула, а у другой три; изъ комнаты вынесли четыре стула для починки, а внесли три и поставили всѣ стулья у обѣихъ стѣнъ поровну. Сколько теперь стульевъ у каждой стѣны?

б) *На отвлеченныхъ числахъ.* Отъ пяти отнимаю три, потомъ придаю два раза по одному; полученное число дѣлю пополамъ и къ одной половинѣ прибавляю одинъ. Сколько получилось?

Беру два раза два; прибавляю одинъ; отъ полученнаго числа отнимаю четыре; полученное число увеличиваю въ три раза и отнимаю отъ него два. Сколько остается?

в) *Вопросы для повторенія.* Сколько будетъ: три да два? Четыре да одинъ? Пять безъ двухъ? Пять безъ трехъ? Пять безъ одного и трехъ? Сколько нужно прибавить къ половинѣ четырехъ, чтобы получить пять? Чѣмъ пять безъ двухъ меньше четырехъ? и т. д.

Шесть.

1) Образованіе числа.

Работа на шведскихъ счетахъ. На шесть проволокъ шведскихъ счетовъ надѣвается передъ урокомъ по шести шаровъ на каждую. Съ одного конца верхней проволоки учитель передвигаетъ на другой пять шаровъ и прибавленіемъ къ нимъ еще одного шара образуетъ шесть.

2) Разложеніе на слагаемыя.

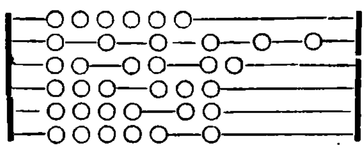
Послѣ изученія чиселъ *четыре* и *пять*, при которомъ дѣти, производя сначала разложеніе въ разбивку и приводя его потомъ въ систему, поняли основной пріемъ этихъ разложеній, можно уже миновать разложеніе числа въ разбивку и перейти прямо къ разложенію въ порядкѣ. Для этого служатъ слѣдующіе вспомогательные вопросы:

Если будемъ разлагать *шесть* въ извѣстномъ намъ порядкѣ, то сколькими способами можно его разложить? Пятью.

Почему пятью? Потому что шесть можно составить посредствомъ каждаго изъ пяти предъидущихъ чиселъ, то-есть: 1, 2, 3, 4, 5.

Въ какомъ же порядкѣ будете разлагать шесть шаровъ? Сначала на отдѣльные шары (единицы), потомъ на двойки, тройки и т. д.

Учитель вызываетъ къ счетамъ одного ученика для разложенія шести шаровъ, находящихся на второй проволокѣ, на отдѣльные шары, другого—на двойки, третьяго—на тройки и т. д. до тѣхъ поръ, пока всѣ пять разложеній будутъ сдѣланы. Получаются на счетахъ такія разложенія:



Такія же разложенія шести производятся учениками на доскахъ посредствомъ какихъ-либо значковъ, то-есть, кружковъ, черточекъ или крестиковъ. Работа на доскахъ повѣряется учителемъ или посред ствомъ осмотра ея, или посредствомъ разговора съ учениками по по воду сдѣланныхъ разложеній.

3) Выводы.

Сложеніе и вычитаніе. Какъ составить шесть изъ единицъ?

Нужно къ одной единицѣ прибавить еще одну, получится два къ двумъ прибавить еще одну единицу, получится три, и т. д. д шести.

Какъ составить число шесть изъ двоекъ, троекъ, четверокъ пятерокъ?

Изъ какихъ трехъ равныхъ чиселъ составляется число шесть? Из трехъ двоекъ.

Изъ какихъ двухъ равныхъ? Изъ двухъ троекъ.

Изъ какихъ еще равныхъ чиселъ можно составить шесть? Из шести единицъ.

Изъ какихъ двухъ неравныхъ чиселъ? Изъ четырехъ и двухъ, ил изъ пяти и одного.

Сколько надо прибавить къ двумъ, тремъ, четыремъ, чтобы полу шить шесть?

Сколько разъ отъ шести можно отнять по одному? Отнимайте от шести по одному, по два.

Сколько будетъ шесть безъ трехъ, четырехъ, пяти? Двумъ, тремъ четыремъ чего не достаетъ до шести?

Чѣмъ шесть больше трехъ, пяти?

На сколько единицъ шесть больше двухъ, четырехъ?

Сколько получится, если шесть уменьшить тремя, четырьмя, пятью единицами?

Умноженіе и дѣленіе. Сколько будетъ: два раза три, три раза два

Сколько разъ въ шести содержится одинъ, два, три, шесть Сколько разъ въ шести содержится четыре, пять? (Четыре содержитс одинъ разъ и еще остается отъ шести два, а пять содержится один разъ и еще остается отъ шести одинъ.)

Во сколько разъ шесть больше одного, двухъ, трехъ?

Сколько получится, если шесть уменьшить въ два раза, въ тр раза въ шесть разъ?

Какое число въ два, три, шесть разъ меньше шести?

Въ заключеніе можно предлагать вопросы неопредѣленные, въ родѣ „Сколькимъ мальчикамъ можно раздать шесть яблокъ?" *Отвѣтъ* Шести по одному яблоку, тремъ по два: двумъ по три; одному дв и; другому четыре; двумъ по одному и двумъ по два; одному пять и другому одно, и т. д. На рѣшеніи такихъ вопросовъ повторяется сразу всѣ разложенія числа на слагаемыя и множители.

4) Задачи.

№№ 18, 19, 20, 21, 22, 23 и 24.

Задача. (Изъ „Сборника“ № 22). Въ одномъ карманѣ у меня два орѣха, а въ другомъ въ два раза болѣе. Сколько орѣховъ нужно переложить изъ второго кармана въ первый, чтобы въ обоихъ карманахъ орѣховъ было поровну?

Усвоеніе содержанія задачи. О чемъ говорится въ задачѣ? Въ сколькихъ карманахъ у меня орѣхи? Что сказано о числѣ орѣховъ въ первомъ и второмъ карманѣ? Что требуется сдѣлать съ этими орѣхами? Что ищится въ задачѣ? Повторите всю задачу. Рѣшайте.

Когда многіе ученики рѣшили задачу и дали отвѣтъ, всему классу, а преимущественно нерѣшившимъ задачу, или рѣшившимъ ее невѣрно, предлагаются вопросы:

Что ищется въ задачѣ? Сколько орѣховъ нужно переложить изъ второго кармана въ первый, чтобы въ обоихъ было поровну.

Что для этого надо узнать? Сколько орѣховъ во второмъ карманѣ.

Что же мы знаемъ изъ задачи, чтобы высчитать, сколько орѣковъ во второмъ карманѣ? Мы знаемъ, что въ первомъ карманѣ два орѣха, а во второмъ въ два раза болѣе.

Итакъ, сколько орѣховъ во второмъ карманѣ? Четыре.

Почему четыре? Потому что два раза два будетъ четыре.

Что теперь надо узнать? По сколько орѣховъ надо положить въ каждый карманъ, чтобы было поровну.

Что надо для этого вычислить? Надо вычислить, сколько орѣховъ въ обоихъ карманахъ, и потомъ роспредѣлить ихъ пополамъ.

По скольку же орѣховъ приходится въ каждомъ карманѣ? По три, потому что въ обоихъ карманахъ четыре да два, что составитъ шесть орѣховъ, а половина шести равна тремъ.

Сколько орѣховъ надо переложить изъ второго кармана въ первый? Одинъ.

Какъ это высчитать? Во второмъ четыре орѣха, а должно быть три, чтобы въ обоихъ карманахъ было поровну, значитъ тамъ одинъ лишній орѣхъ, и его надо переложить въ первый карманъ.

По сколько тогда орѣховъ будетъ въ каждомъ карманѣ? По три, потому что во второмъ было четыре, а если взять оттуда одинъ орѣхъ, то тамъ останется три; придавъ этотъ орѣхъ къ тѣмъ двумъ, которые находятся въ первомъ карманѣ, получимъ и тамъ три орѣха.

Послѣ этого, если дѣти получили уже навыкъ хорошо и послѣдовательно выражаться на рѣшеніи предшествовавшихъ задачъ, можно потребовать отъ нихъ полнаго изложенія рѣшенія задачи, которое должно выразиться примѣрно въ такомъ видѣ: „Въ данномъ карманѣ два орѣха, а въ другомъ въ два раза болѣе, а два раза два даетъ четыре; значитъ, во второмъ карманѣ четыре орѣха. Четыре да два составляетъ шесть; значитъ, въ обоихъ карманахъ шесть орѣховъ. Половина шести будетъ три; слѣдовательно, въ каждомъ карманѣ должно быть по три орѣха, чтобы было поровну. Четыре безъ трехъ будетъ одинъ; значитъ, во второмъ карманѣ одинъ орѣхъ лишній, который надо переложить въ первый карманъ“.

Такое изложеніе высказывается не однимъ ученикомъ, а по частямъ двумя, тремя учениками; только впослѣдствіи, когда ученики привыкнутъ вести полное разсужденіе и вычисленіе при рѣшеніи задачи, можно отъ одного ученика требовать полнаго изложенія всего рѣшенія.

5) Бѣглое вычисленіе.

а) *На задачахъ.* Въ одномъ карманѣ у меня было шесть орѣховъ; я переложилъ отуда въ другой карманъ сначала два и потомъ еще три орѣха, а къ тѣмъ, которые остались, прибавилъ новыхъ четыре. Сколько теперь орѣховъ у меня въ каждомъ карманѣ?

У мальчика было три монеты по двѣ копейки; онъ купилъ три сухаря, заплативъ за каждый по одной копейкѣ; потомъ отъ матери получилъ еще одну монету въ двѣ коп. и одну въ одну копейку; половину всѣхъ своихъ денегъ онъ отдалъ бѣдному. Сколько копеекъ осталось у мальчика?

б) *На отвлеченныхъ числахъ.* Къ двумъ прибавляю одинъ и еще три; полученное число дѣлю пополамъ; къ одной половинѣ прибавляю еще одинъ и снова дѣлю пополамъ. Сколько теперь получилось въ каждой половинѣ?

Къ третьей части шести прибавляю половину шести и еще шестую часть шести; отъ полученнаго числа отниму четыре и оставшееся число увеличу въ два раза. Сколько получится?

в) *Вопросы для повторенія.* Сколько будетъ: дважды три, трижды два, шестью одинъ? Половина шести во сколько разъ больше шестой его части? Чѣмъ половина шести больше его трети? Что больше: треть шести или половина четырехъ? Какое число содержится два раза въ четырехъ и три раза въ шести? Какія числа содержатся въ шести безъ остатка? На какія равныя части можно раздѣлить шесть? и т. п.

Семь.

1) Образованіе числа.

Работа безъ нагляднаго пособія. Если на скамейкѣ сидятъ шесть мальчиковъ и къ нимъ посадить еще одного, то сколько тогда будетъ мальчиковъ на скамейкѣ?

Считайте отъ одного до семи. Считайте назадъ отъ семи до одного. Считайте отъ одного до семи черезъ одинъ. Считайте назадъ черезъ два.

2) Разложеніе.

Какъ я могу раздать семь орѣховъ семи мальчикамъ поровну? Каждому по одному орѣху.

А если ихъ будетъ шесть? Пяти по одному и шестому два.

А если пять? Четыремъ по одному и пятому три, или тремъ по одному и двумъ по два.

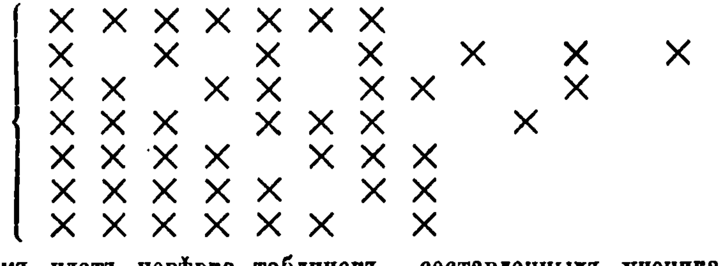
А если четыре? Тремъ по одному и четвертому четыре; или двумъ по одному, третьему два и четвертому три; или тремъ по два и четвертому одинъ.

А если три? и т. д.

Какъ составить число семь изъ предшествующихъ чиселъ въ порядкѣ? Нужно взять семь разъ по одному, три раза по два и одинъ, два раза по три и одинъ, четыре и три, пять и два, шесть и одинъ.

Возьмите ваши доски и разложите семь въ этомъ порядкѣ посредствомъ крестиковъ. (Такое письменное разложеніе вначалѣ необходимо, хотя бы ученики давали вполнѣ обстоятельные отвѣты на предшествовавшіе вопросы: нужно, чтобы *каждый* ученикъ усвоилъ разложеніе, а это учителю виднѣе, когда каждый исполнитъ разложеніе письменно.)

Ученики на доскахъ составляютъ такую табличку:



Затѣмъ идетъ повѣрка табличекъ, составленныхъ учениками, и приведеніе разложеній въ порядокъ у тѣхъ учениковъ, которые этого порядка не соблюли.

3) Выводы.

Сложеніе и вычитаніе. Какъ составляется число семь изъ единицъ, двоекъ, троекъ? и т. д.

Сколько надо прибавить къ двумъ, четыремъ, шести, чтобы получить семь?

На сколько надо увеличить три, пять, чтобы получить семь?

Какія числа надо сложить вмѣстѣ, чтобы составилось семь?

Изъ какихъ двухъ чиселъ составляется семь?

Сколько получится въ остаткѣ, если отъ семи отнять одинъ, три пять?

Сколько получится, если семь уменьшить на двѣ, четыре, шесть единицъ?

Чѣмъ семь больше трехъ, четырехъ, пяти?

На сколько единицъ семь больше двухъ, трехъ, четырехъ?

Сколько будетъ семь безъ двухъ, безъ трехъ, безъ, пяти?

Какое число меньше семи двумя, пятью, тремя единицами?

Умноженіе и дѣленіе. Сколько разъ надо взять по одному, чтобы получить семь?

На сколько семь больше двухъ, взятыхъ три раза, трехъ, взятыхъ два раза?

Какія числа содержатся въ семи безъ остатка? На сколько равныхъ частей можно раздѣлить семь?

Сколько разъ два, три, четыре содержится въ семи, и сколько еще остается?

Изъ какихъ монетъ можно составить семь копеекъ?

4) Задачи. №№ 25, 26, 27 и 28.

Задача. (Изъ «Сборника» № 27). У мальчика были двѣ монеты по три копейки и одна монета въ одну копейку; двѣ копейки онъ истратилъ на покупку карандаша, а на всѣ остальныя деньги купилъ нѣсколько грушъ и за каждую грушу заплатилъ по копейкѣ. Сколько грушъ купилъ мальчикъ?

Планъ рѣшенія. Нужно узнать сперва, сколько было у мальчика денегъ, потомъ сколько истратилъ онъ изъ нихъ на груши и, наконецъ, сколько купилъ грушъ.

Рѣшеніе. У мальчика было двѣ монеты по три копѣйки, или 6 коп., потому что два раза три будетъ шесть; да еще одна монета въ одну копейку; значитъ, у него было денегъ семь копеекъ, потому что шесть да одинъ будетъ семь. Онъ истратилъ на покупку карандаша двѣ коп.;

значитъ, у него оставалось пять коп., потому что семь безъ двухъ будетъ пять. На пять коп. онъ купилъ грушъ, платя по одной коп. за каждую: слѣдовательно, онъ купилъ пять грушъ, потому что одинъ содержится въ пяти пять разъ.

5) Бѣглое вычисленіе.

а) *На задачахъ.* У отца было четыре яблока, и онъ купилъ еще три; два яблока онъ самъ съѣлъ, одно отдалъ дочери, а остальныя раздѣлилъ поровну между двумя сыновьями. Сколько яблокъ получилъ каждый сынъ?

По улицѣ шли мальчики: впереди одинъ и еще три ряда по два; потомъ они размѣстились всѣ въ два ряда такъ, что въ первомъ было четыре мальчика, а во второмъ остальные. Сколько мальчиковъ было во второмъ ряду?

б) *На отвлеченныхъ числахъ.* Къ двумъ прибавить четыре; отнять отъ полученнаго числа три, прибавить еще одинъ; полученное число раздѣлить пополамъ, половину увеличить въ три раза и прибавить еще одинъ. Сколько получилось?

Отъ семи отнять четыре, полученное число увеличить въ два раза; взять третью часть полученнаго числа и прибавить къ ней два. На сколько полученное число меньше семи?

в) *Вопросы для повторенія.* Семью одинъ сколько будетъ? Какое число нужно повторить три раза, чтобы, прибавивши одинъ, получить семь? Какое число, повторенное два раза, единицею меньше семи? Сколько надо отнять отъ семи, чтобы половина оставшагося числа равнялась двумъ? Сколько надо отнять отъ семи, чтобы треть оставшагося числа была половиною четырехъ? и т. д.

Восемь.

Такъ какъ образованіе новаго числа всегда производится прибавленіемъ единицы къ числу предшествовавшему, то съ этого числа я не буду уже вводить отдѣльнаго описанія этого упражненія. Скажу только, что послѣ образованія числа прибавленіемъ единицы полезно упражнять учениковъ въ счетѣ прямомъ и обратномъ въ порядкѣ чиселъ, а также черезъ одну, двѣ, три единицы. Такимъ образомъ для чиселъ 8, 9 и 10 я вкратцѣ только намѣчу упражненія подъ четырьмя рубриками: 1) Разложеніе числа. 2) Выводы изъ разложенія. 3) Задачи: 4) Бѣглое вычисленіе.

1) Разложеніе числа.

Въ такомъ же порядкѣ, какъ и прежде, дѣти, разлагаютъ числ(8 на слагаемыя. Это разложеніе производится или при посредствѣ наглядныхъ пособій, каковы: кубики, шары на счетахъ, жетоны, пуговки, спички, камешки, или прямо безъ нагляднаго пособія, какъ это было показано въ числѣ семь. Потомъ это разложеніе воспроизводится письменно на доскахъ, причемъ слѣдуетъ вызвать одного изъ учениковъ къ классной доскѣ—дѣлать разложеніе восьми въ порядкѣ; по его работѣ всѣ другіе могутъ привести въ порядокъ свои разложенія, или пополнить пропущенныя. Такимъ образомъ, разложеніе, если его перевести на обыкновенное обозначеніе, выразится въ слѣдующихъ рядахъ:

$$8=1+1+1+1+1+1+1+1$$
$$8=2+2+2+2$$
$$8=3+3+2$$
$$8=4+4$$
$$8=5+3$$
$$8=6+2$$
$$8=7+1$$

На закрѣпленіи въ памяти этого разложенія нужно остановиться подольше при провѣркѣ работы учениковъ, потому что число 8 представляетъ въ этомъ случаѣ больше матеріала для выводовъ, нежели предшествовавшія числа.

2) Выводы.

Сложеніе и вычитаніе. Изъ какихъ чиселъ складывается восемь? (На этотъ вопросъ въ своихъ отвѣтахъ ученики повторяютъ всѣ разложенія восьми на слагаемыя).

Изъ какихъ равныхъ чиселъ составляется восемь?

Изъ какихъ двухъ неравныхъ чиселъ? Изъ какихъ трехъ чиселъ?

Сколько надо придать къ тремъ, пяти, шести, чтобы получить восемь?

Сколько получится, если отъ восьми отнять два? Сколько разъ можно отнять отъ восьми по два?

Сколько получится, если отъ восьми отнять три, и сколько разъ можно отнять по три?

Восемъ безъ одного, безъ четырехъ, безъ шести?

Уменьшить восемь тремя, пятью, семью единицами.

Какое число двумя, четырьмя единицами меньше восьми?

Восемь чѣмъ больше одного, трехъ, шести?

Умноженіе и дѣленіе. Какое число въ четыре раза больше двухъ?

Если четыре повторить два раза, то сколько получится?

Сказать число въ восемь разъ больше одного.

Сколько будетъ: дважды четыре, четырежды два, восемью одинъ?

Сколько разъ въ восьми содержится одинъ, два, четыре?

Сколько разъ въ восьми содержится три, пять и сколько получается въ остаткѣ?

Какое число получится, если восемь уменьшить въ два, въ четыре раза?

Во сколько разъ восемь больше одного, двухъ, четырехъ?

Какъ велика половина, четверть, восьмая часть восьми?

На какія равныя части можно раздѣлить восемь?

Какія числа содержатся въ восьми безъ остатка?

3) Задачи.

№№ 29, 30, ... 39.

Задача. (Изъ „Сборника" № 30). Одинъ мальчикъ получилъ отъ отца пять копеекъ, а другой двумя копейками менѣе, на всѣ эти деньги они купили четыре яблока по одинаковой цѣнѣ. Сколько заплатили они за каждое яблоко?

Вопросы для установленія плана рѣшенія, исходя отъ главной неизвѣстной въ задачѣ. Что ищется въ задачѣ? Сколько заплатили мальчики за каждое яблоко.

Что надо знать, чтобы высчитать цѣну одного яблока? Надо знать, сколько стоютъ четыре яблока.

Что надо опредѣлить, чтобы узнать, сколько стоютъ четыре яблока? Надо узнать, сколько денегъ получили два мальчика вмѣстѣ.

Что для этого остается вычислить? Надо вычислить, сколько денегъ получилъ второй, такъ какъ мы знаемъ, что первый получилъ пять копеекъ.

Итакъ, скажите въ порядкѣ, что надо вычислить прежде, что потомъ? Прежде надо вычислить, сколько денегъ получилъ второй мальчикъ, потомъ сколько денегъ составилось у обоихъ, и, наконецъ, сколько заплатили мальчики за каждое яблоко.

4) Бѣглое вычисленіе.

а) *На задачахъ.* Ученику было задано выучить восемь нѣмецкихъ словъ; онъ выучилъ пять, потомъ три изъ нихъ забылъ; еще выучилъ четыре, два забылъ; наконецъ, еще выучилъ три. Сколько словъ еще осталось ему выучить?

У мальчика было восемь копѣекъ; половину всѣхъ своихъ денегъ онъ издержалъ на покупку грифелей, четвертую часть—отдалъ бѣдному, восьмую часть издержалъ на покупку сухаря, а когда получилъ отъ отца еще три копейки и прибавилъ ихъ къ оставшимся деньгамъ, то купилъ за всѣ эти деньги карандашъ. Сколько заплатилъ онъ за карандашъ?

б) *На отвлеченныхъ числахъ.* Отъ восьми отнимаю пять, къ остатку прибавляю три и полученное число дѣлю пополамъ; къ половинѣ прибавляю четыре и еще одинъ. Сколько будетъ, если полученное число раздѣлить на четыре равныя части?

Беру половину восьми и четверть восьми, складываю ихъ вмѣстѣ; полученное число дѣлю пополамъ; къ полученному числу прибавляю пять и снова все число дѣлю пополамъ. Сколько получилось въ каждой половинѣ?

в) *Вопросы для повторенія.* Половина восьми на сколько больше половины шести? Какое число составляетъ половину четырехъ и только четверть восьми? Какое число надо взять четыре раза, чтобы получить восемь, и какое только два раза? Сколько надо отнять отъ восьми, чтобы три въ остаткѣ содержалось ровно два раза? Сколько надо прибавить къ третьей части шести, чтобы получилось число въ два раза меньшее восьми? Какая часть восьми равняется трети шести? и. т. п.

Девять.

1) Разложеніе.

Разложеніе производится посредствомъ наглядныхъ пособій или безъ нихъ, судя по развитію и навыку дѣтей, въ слѣдующемъ порядкѣ,

$$9=1+1+1+1+1+1+1+1+1$$
$$9=2+2+2+2+1$$
$$9=3+3+3$$
$$9=4+4+1$$
$$9=5+4$$
$$9=6+3$$
$$9=7+2$$
$$9=8+1$$

2) Выводы.

Сложеніе и вычитаніе. Сколько надо прибавить къ тремъ, пять, семи, чтобы получить девять?

Чего не достаетъ двумъ, четыремъ, шести, восьми до девяти?

Изъ какихъ трехъ равныхъ чиселъ составляется девять? Изъ какихъ двухъ неравныхъ?

Прибавляйте къ одному по два до девяти, прибавляйте къ одному по четыре до девяти.

Какое число надо увеличить двумя, пятью, семью единицами, чтобы получить девять?

Сколько получится, если отъ девяти отнять два, четыре, шесть, восемь?

Девять безъ одного, безъ трехъ, безъ пяти, безъ семи? Какое число менѣе девяти пятью, двумя, шестью единицами?

Девять чѣмъ болѣе трехъ, семи, четырехъ?

Какое число можно отнять отъ девяти четыре раза, какое два раза и какое только одинъ разъ?

Сколько получится, если девять уменьшить двумя, пятью, восемью единицами?

Найти число, къ которому, если прибавить четыре, то получится девять.

Умноженіе и дѣленіе. Какое число нужно взять три раза, чтобы получить девять?

Сколько не достаетъ до девяти, если взять четырежды два?

Сколько разъ нужно взять по четыре, чтобы получить число, единицею меньшее девяти?

Какія числа содержатся въ девяти безъ остатка?

Сколько разъ девять содержится въ девяти?

Какія числа содержатся въ девяти съ остаткомъ единица?

Сколько получится, если уменьшить девять въ три раза?

Какъ велика третья часть девяти?

Можно ли девять яблокъ раздать двумъ, четыремъ мальчикамъ поровну, не разрѣзывая ни одного яблока?

Почему нельзя?

3) Задачи.

№№ 40, 41. . . . . 46.

4) Бѣглое вычисленіе.

а) *На задачахъ.* У старшаго брата было четыре орѣха, у средняго пять; средній отдалъ старшему всѣ орѣхи; старшій же далъ младшему три орѣха, а всѣ остальные орѣхи раздѣлилъ поровну между тремя сестрами. Сколько орѣховъ получила каждая сестра?

У мальчика было девять копеекъ; третью часть всѣхъ своихъ денегъ онъ отдалъ сестрѣ, третью часть оставшихся денегъ истратилъ на покупку кренделя, половину того, что осталось отъ покупки кренделя, далъ бѣдному и, наконецъ, половину оставшихся затѣмъ денегъ потерялъ, взамѣнъ потерянныхъ денегъ онъ получилъ отъ отца столько копеекъ, что у него составилось восемь копеекъ. Сколько копеекъ получилъ сынъ отъ отца?

б) *На отвлеченныхъ числахъ.* Отъ девяти отнимаю семь, къ полученному остатку прибавляю четыре и составившееся число дѣлю пополамъ: къ одной половинѣ прибавлю пять и снова полученное число дѣлю пополамъ. Сколько послѣдней половинѣ не достаетъ до девяти?

Отъ девяти отнимаю треть его; отъ полученнаго остатка отнимаю треть его: отъ полученнаго остатка отнимаю четвертую часть его; остатокъ увеличиваю въ три раза. Какое число получилось?

в) *Вопросы для повторенія.* Сколько будетъ трижды три? Сколько будетъ три да три? Если отъ девяти отнять единицу, то какія числа будутъ содержаться безъ остатка въ полученномъ числѣ? На сколько девять безъ трехъ больше восьми безъ шести? Сколько надо отнять отъ девяти, чтобы въ остаткѣ получилось такое же число, какое получается, если отъ восьми отнять четыре? Треть девяти какую часть шести составляетъ? Сколько надо отнять отъ девяти, чтобы получить число, которое дѣлится ровно пополамъ? и т. п.

Десять.

1) Разложеніе.

Письменное разложеніе посредствомъ кружковъ составить такую таблицу:

○○○○○○○○○○
○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○
○○ ○○ ○○ ○○ ○○
○○○ ○○○ ○○○ ○
○○○○ ○○○○ ○○
○○○○○ ○○○○○
○○○○○○ ○○○○
○○○○○○○ ○○○
○○○○○○○○ ○○
○○○○○○○○○ ○

При составленіи и разложеніи десяти дается названіе *десятокъ*.

2) Выводы.

Сложеніе и вычитаніе. Отъ сложенія какихъ чиселъ получается десятокъ? Складывайте по два до десяти. Сколько разъ сложили по два? Прибавляйте къ одному по три до десяти. Сколько разъ прибавили по три?

Къ какому числу нужно прибавить два раза по четыре, чтобы получить десять?

Отъ сложенія какихъ равныхъ чиселъ получается десять? Какія два неравныя числа нужно сложить вмѣстѣ, чтобы получить десятокъ?

Сколько надо прибавить къ тремъ, пяти, восьми, чтобы получить десять?

Сколько не достаетъ двумъ, четыремъ, шести, девяти до десяти?

Отнимайте отъ десяти по единицѣ, по два, по три, по четыре. Сколько разъ отняли отъ десяти по одному, по два, по три, по четыре?

Какое число можно отнять отъ десяти пять разъ; какое два раза, три раза?

Сколько получится въ остаткѣ, если отъ десяти отнять два раза по четыре, три раза по три?

Сколько будетъ десять безъ трехъ, безъ четырехъ, безъ восьми?

На сколько десять болѣе двухъ, пяти, семи?

Сколько надо отнять отъ десяти, чтобы въ остаткѣ получилось три, шесть, восемь?

Умноженіе и дѣленіе. Сколько будетъ пять разъ два? Дважды пять?

Сколько будетъ десять разъ одинъ?

Сколько надо прибавить къ тремъ, взятымъ три раза, чтобы получить десять?

Десять копеекъ сколькимъ бѣднымъ можно раздать поровну, и сколько каждый получитъ?

Какія числа содержатся въ десяти цѣлое число разъ безъ остатка?

На сколько и какія равныя части можно раздѣлить десять?

Какія числа содержатся въ десяти съ остаткомъ одинъ, съ остаткомъ два, три?

Во сколько разъ десятокъ больше одного, двухъ, пяти?

Сколько получится, если десять уменьшить въ два раза, въ пять разъ?

Какъ велика половина, пятая, десятая часть десяти?

3) Задачи.

№№ 47. 48. . . . . 67.

Задача. (Изъ «Сборника» № 52). Два брата и сестра купили десятокъ сливъ; сестра дала на эту покупку одну копейку, а братья—по двѣ копейки. Сколько сливъ долженъ получить каждый?

Вопросы для установленія плана рѣшенія въ случаѣ затрудненія учениковъ. Что ищется въ задачѣ? Сколько сливъ долженъ получить каждый.

Придется ли сливъ каждому поровну? Нѣтъ, потому что они денегъ не всѣ дали поровну на покупку сливъ.

А который изъ братьевъ получилъ сливъ больше? Оба получатъ поровну, потому что оба дали по двѣ коп.

Во сколько разъ каждый изъ братьевъ получилъ сливъ болѣе, чѣмъ сестра? Въ два раза, потому что каждый изъ братьевъ далъ денегъ въ два раза болѣе, чѣмъ сестра.

Итакъ, что надо принять въ разсчетъ, чтобы раздѣлить сливы между сестрой и двумя братьями? Надо принять въ разсчетъ, кто сколько денегъ далъ на покупку сливъ.

Что надо знать, чтобы вычислить, сколько сливъ придется на долю сестры? Надо знать, сколько сливъ приходится на одну копейку, такъ какъ она дала всего одну копейку.

Какъ узнать, сколько сливъ приходится на одну коп.? Нужно вычислить, на сколько копеекъ куплено десять сливъ.

Высчитайте это и рѣшайте всю задачу.

Нѣкоторыя дѣти рѣшаютъ эту задачу другимъ способомъ, опредѣляя, что одна слива стоитъ полкопейки, и что слѣдовательно за одну коп. придется двѣ сливы и т. п. Нѣтъ никакого повода не одобрять такого способа рѣшенія этой задачи, если онъ предложенъ ученикамъ; я же здѣсь привелъ образецъ катихизаціи на тотъ случай, когда многіе ученики не мугутъ рѣшить предложенной задачи. Задачи, затрудняющія учениковъ такъ, что большинство класса не можетъ ихъ рѣшать, слѣдуетъ предлагать отъ времени до времени, чтобы подробнымъ разборомъ задачи, подобнымъ вышеприведенному, научить дѣтей пользоваться условіями задачи, ведя послѣдовательное правильное разсужденіе, и доходить до установленія способа рѣшенія.

4) Б ѣ г л о е в ы ч и с л е н і е.

а) *На задачахъ.* У меня было двѣ монеты по двѣ копейки и двѣ по три коп. Изъ этихъ денегъ я истратилъ сначала одну копейку, потомъ пять и, наконецъ, еще двѣ. Сколько нужно прибавить къ оставшимся у меня деньгамъ, чтобы я могъ купить тетрадь, за которую требуютъ восемь коп?

Въ классѣ пять скамеекъ; на каждой сидѣло по два мальчика; изъ класса вышли три мальчика, потомъ еще два; потомъ въ классъ вошли четырѣ мальчика и всѣ размѣстились по три на скамейкахъ. На сколькихъ скамейкахъ усѣлись мальчики?

б) *На отвлеченныхъ числахъ.* Отъ десяти отнимаю четыре; къ полученному числу прибавляю три; снова отъ полученнаго числа отнимаю пять; полученное число дѣлю пополамъ. Сколько получится въ остаткѣ, если одну изъ этихъ половинъ отнять отъ десяти?

Беру половину десяти; отнимаю отъ нея пятую часть десяти; къ полученному числу прибавляю десятую часть десяти; полученное число увеличиваю въ два раза. Сколько единицъ не достаетъ полученному числу до десяти?

в) *Вопросы для повторенія.* Изъ какихъ двухъ равныхъ чиселъ состоитъ десять? Изъ какихъ пяти, десяти равныхъ чиселъ? Половина десяти на сколько больше пятой его части? Пятая часть десяти сколько разъ содержится въ восьми? Сколько разъ треть шести содержится въ десяти? Какое число нужно взять два раза, чтобы получить десять безъ двухъ? Какое число нужно взять три раза, чтобы получить десять безъ одного? Половина четырехъ какую часть десяти составляетъ?

Повтореніе пройденнаго—на цифрахъ.

Упражненія при изученіи первыхъ десяти чиселъ такъ несложны, что можно обходиться при нихъ и безъ цифръ. Предполагая, что знакомство съ числами, подобное изложенному мною, можетъ быть начато дѣтьми даже раньше семилѣтняго возраста, если только выбирать изъ „Сборника“ задачи попроще, я считаю за лучшее не вводить при первоначальныхъ упражненіяхъ ни цифръ, ни законовъ дѣйствій, чтобы тѣмъ яснѣе показать дѣтямъ впослѣдствіи значеніе и удобство того и другого. Если дѣти, начинающія обучаться Ариѳметикѣ, уже умѣютъ писать буквы, то введеніе цифръ и знаковъ дѣйствій на первыхъ же урокахъ не представитъ для нихъ никакого затрудненія. Слѣдуетъ сказать, однакоже, что вообще съ этимъ спѣшить не нужно и лучше ввести цифру при повтореніи упражненій, когда уже нѣсколько чиселъ изучено; ученики снова передѣлаютъ то, что ими проходилось прежде, и притомъ передѣлаютъ въ нѣсколько другой формѣ, что еще болѣе закрѣпитъ въ ихъ памяти тѣ первоначальныя основныя понятія и выводы, прочное усвоеніе которыхъ послужитъ хорошимъ началомъ для прохожденія дальнѣйшаго курса Ариѳметики. Кромѣ того, введеніе цифръ при самомъ началѣ обученія, пока дѣти хотя сколько-нибудь не освоились съ числомъ, какъ числомъ, безъ всякаго внѣшняго знака его, упрощающаго вычисленія, можетъ легко повести къ тому, что дѣти, какъ это встрѣчается весьма часто будутъ мыслить не о числѣ, а о цифрѣ, его изображающей, и будутъ всѣ вычисленія относить не къ числу, а къ цифрѣ. Отъ этого навыка, сильно задерживающаго все дальнѣйшее правильное обученіе Ариѳметикѣ, впослѣдствіи трудно освободить учащихся.

Обозначеніе дѣйствій также хорошо ввести тогда, когда уже дѣти осязательно поняли, что числа могутъ быть между собою въ различныхъ комбинаціяхъ и отношеніяхъ, и что часто для опредѣленія различно выраженныхъ словами отношеній чиселъ приходится производить одно и то же вычисленіе:—это-то вычисленіе они и будутъ сознательно обозначать однимъ и тѣмъ же знакомъ дѣйствія.

1) Писаніе цифръ.

Выясненіе необходимости цифръ при вычисленіяхъ и обученіе написанію цифръ, когда уже дѣти изучили первыя десять чиселъ, ведется легко и быстро, хотя изложить пріемъ учителя, для исполненія классной работы въ этомъ случаѣ, довольно трудно. Я изложу здѣсь въ самыхъ общихъ чертахъ пріемъ, котораго мнѣ приходилось держаться при проведеніи этой работы въ классѣ и съ отдѣльными учениками. Дѣтямъ предлагаются вопросы:

„Когда мы насчитали нѣсколько предметовъ, то какъ намъ замѣтить, сколько ихъ насчитано, чтобы не забыть“? Дѣти выражаютъ по этому поводу различныя мнѣнія, каковы: отмѣтить на бумагѣ или на доскѣ столько черточекъ или другихъ значковъ, сколько было насчитано предметовъ; отложить на счетахъ число предметовъ шарами; положить въ карманъ или въ другое мѣсто число камешковъ по числу предметовъ; сдѣлать на палкѣ мѣтки (бирки) по числу предметовъ, и т. п. Всѣ эти пріемы слѣдуетъ одобрить, такъ какъ они, въ сущности, составляютъ хорошій переходъ къ обозначенію числа какимъ-либо знакомъ.

„Если мы посылаемъ кого-нибудь купить, напримѣръ, нѣсколько грифелей и желаемъ записать, чтобы лавочникъ зналъ, сколько нужно дать грифелей, то какой изъ сказанныхъ вами способовъ слѣдуетъ употребить“? Нужно сдѣлать въ запискѣ столько черточекъ или кружковъ, сколько требуется грифелей.

„Удобно ли такъ записывать, когда насчитано очень много предметовъ“? Неудобно, потому что придется, во-первыхъ, много писать

черточекъ, а во-вторыхъ, кромѣ предметовъ приходится считать ещ
и самыя черточки.

„Не знаетъ ли кто, какъ поступаютъ въ этомъ случаѣ тѣ люди которые умѣютъ читать и писать“? Они употребляютъ для этого особенные значки, которые называются *цифрами*.

„Нельзя ли придумать и намъ какіе-либо знаки, чтобы удобнѣ было отмѣчать на бумагѣ или на доскѣ, сколько именно предметовъ насчитано, такъ что, когда я напишу такой значекъ, то вы всѣ знали бы, какое число отмѣчено? Напримѣръ, мы отдали въ починку семь стульевъ, и чтобы не забыть, сколько ихъ отдано, мы можемъ на бумажкѣ поставить семь черточекъ; но если условимся вмѣсто семи черточекъ ставить одинъ крестикъ (×), то уже и будемъ помнить, что этотъ крестикъ означаетъ число семь. Придумайте какой-либо значекъ для числа восемь“. Дѣти условливаются, напримѣръ, означать это число кружкомъ. „Значитъ, если я сдѣлаю на доскѣ кружокъ и скажу, что у меня въ карманѣ столько копѣекъ, то что это будетъ означать“? Что у васъ въ карманѣ 8 коп. „А если кто войдетъ въ нашъ классъ, и мы, начертивъ на доскѣ кружокъ, спросимъ его, сколько копеекъ означаетъ этотъ кружокъ, пойметъ ли онъ“? Нѣтъ, не пойметъ, потому что не знаетъ, какое число мы условились отмѣчать такимъ значкомъ.

Значитъ, как видите, надо взять такіе значки, которые употребляются всѣми грамотными людьми и которые употребляются в всѣхъ книгахъ. Такіе значки слѣдующіе: если хотятъ отмѣтить одинъ предметъ, то пишутъ одну черточку (1); если хотятъ отмѣтить два предмета, то вмѣсто двухъ черточекъ пишутъ 2, для трехъ предметовъ употребляется значекъ 3, для четырехъ—4, для пяти—5. Замѣтьте пока эти значки, а потомъ я покажу вамъ значки и для другихъ чиселъ *).

Учитель пишетъ на доскѣ первыя пять цифръ, раздѣльно одну отъ другой, и обращается къ классу съ вопросомъ: „если бы я хотѣлъ написать крестиками, сколько единицъ каждая цифра означаетъ, то сколько крестиковъ долженъ я подписать подъ этой цифрой, а подъ этой“? и т. д.

Получается на доскѣ такая табличка:

1	2	3	4	5
×	××	×××	××××	×××××

*) Хорошимъ примѣромъ необходимости такихъ значковъ служатъ различныя мѣдныя монеты (1 коп., 2 коп., 3 коп., 5 коп.), показываемыя ученикамъ учителемъ. Съ разсмотрѣнія цифръ на монетахъ можно даже прямо начинать ознакомленіе учащихся съ понятіемъ о цифрѣ вообще и ея необходимости для изображенія чиселъ.

Затѣмъ идетъ съ дѣтьми разговоръ по поводу пріема написанія каждой цифры по составляющимъ ее линіямъ, совершенно подобный тому разговору, который ведется по поводу написанія буквъ. Не вдаваясь въ эти подробности, перехожу къ упражненіямъ, относящимся собственно къ нашему предмету. Когда дѣти по указанію учителя и по образцу цифръ, написанныхъ на доскѣ, научились отчетливо ихъ изображать, цифры стираются съ доски, и дѣти записываютъ на своихъ доскахъ число откинутыхъ учителемъ шаровъ на проволокѣ счетовъ, число кружковъ, начертанныхъ на доскѣ, число ногъ у лошади, число рукъ у человѣка, число пальцевъ на рукѣ и т. п.; откладываютъ на счетахъ число шаровъ, или отмѣчаютъ на доскахъ число крестиковъ по цифрамъ, которыя учитель пишетъ въ разбивку на доскѣ. Эта работа продолжается до тѣхъ поръ, пока дѣти безошибочно привыкнутъ относить цифру къ изображаемому ею числу. При этомъ постоянно на примѣрахъ объясняется классу значеніе цифры относительно числа, ею изображаемаго, и что одна и та же цифра служитъ для изображенія одного и того же числа какихъ угодно предметовъ.

Таковъ же пріемъ усвоенія учениками и прочихъ знаковъ для чиселъ 6, 7, 8, 9 и 10. При этомъ имъ говорится, что тѣхъ значковъ, которые они узнали, достаточно для изображенія какихъ-угодно большихъ и малыхъ чиселъ, какъ это будетъ показано впослѣдствіи, а также объясняется, почему десятокъ обозначается двумя знаками, отлично отъ другихъ чиселъ, меньшихъ десяти. Какъ можно считать предметы по одиночкѣ, такъ же точно можно считать ихъ и десятками. Предлагаются вопросы, какіе предметы считаются и продаются десятками, и какъ можно считать предметы десятками. По пріему обозначенія цифрами одного десятка дѣти записываютъ 2, 3 и т. д. десятковъ.

Хотя работа для усвоенія учениками цифръ чисто механическая, но она можетъ быть ведена въ классѣ съ разнообразными упражненіями, а потому и не можетъ представлять ученикамъ повода къ умственному утомленію. Разнообразіе это, какъ уже было сказано, состоитъ въ записываніи цифрами чиселъ, называемыхъ учителемъ, въ откидываніи на счетахъ чиселъ, записанныхъ цифрами на доскѣ, въ записываніи на доскахъ черточекъ или кружковъ соотвѣтственно цифрѣ, выставленной на доскѣ и обратно: написанныя учителемъ цифры читаются учениками. Кромѣ того, для разнообразія работы, можно предлагать ученикамъ устныя задачи изъ пройденнаго курса и требовать, чтобы они записывали цифрами на доскахъ результатъ рѣшенія задачи.

2) Таблички разложенія чиселъ на слагаемыя.

Когда ученики хорошо поняли и усвоили способъ изображенія чиселъ цифрами, можно перейти къ приложенію цифръ при составленіи табличекъ разложенія чиселъ перваго десятка на слагаемыя, что будетъ служить хорошимъ повтореніемъ упражненій, производившихся прежде безъ помощи цифръ.

Запишите цифрами два числа, изъ которыхъ можно составить 8.

Дѣти пишутъ:

4	4
5	3
6	2
7	1

Какъ прочесть вторую строчку? Пять да три, пять и три, къ пяти прибавить три, пять сложить съ тремя и т. д.

А какъ записать, если хотятъ обозначить, что отъ 5 нужно отнять 3?

Для того, чтобы отмѣтить, что одно число нужно прибавить къ другому, или одно число отнять отъ другого, употребляются также особенные значки; по этимъ значкамъ всякій, читающій написанное, понимаетъ, кто дѣлается съ числами.

Указываются дѣтямъ знаки сложенія и вычитанія *). Запишите теперь на вашихъ доскахъ цифрою число 8. Разложите его на единицы, двойки, тройки и т. д. посредствомъ крестиковъ.

Дѣти составляютъ табличку разложенія такую, какая приведена при изученіи этого числа.

Подъ этой табличкой напишите другую, въ которой число крестиковъ отмѣчайте цифрами.

Составится табличка:

1+1+1+1+1+1+1+1
2+2+2+2
3+3+2
4+4
5+3
6+2
7+1

---

*) Въ нѣкоторыхъ училищахъ въ Германіи мнѣ случилось видѣть на стѣнѣ въ классѣ большую таблицу съ цифрами и знаками дѣйствій и съ надписями значенія каждой цифры и знака такимъ образомъ:
+ и, да, придать, увеличить на, сложить.
— безъ, отнять, уменьшить на, вычесть.
и т. д.
Этими таблицами ученики пользуются при обозначеніи чиселъ и дѣйствій съ числами.

сначала безъ знаковъ сложенія, а потомъ, по указанію учителя, ставятся и знаки. Тутъ же вводится и знакъ равенства, который замѣняетъ слова: „будетъ, составитъ, равно, получится" и т. п. Въ окончательномъ видѣ дѣти пишутъ, напримѣръ, разложеніе:

$$8=3+3+2$$

и читаютъ его такъ: 8 состоитъ изъ трехъ, еще трехъ и двухъ или 8 получится, если къ тремъ прибавить три и еще два.

Затѣмъ идутъ упражненія въ письменномъ разложеніи на слагаемыя различныхъ чиселъ въ разбивку.

Эти разложенія повѣряются учителемъ такъ же, какъ и прежнія, производимыя учениками посредствомъ крестиковъ или кружковъ. Наблюдается, чтобы разложенія располагались въ порядкѣ, то-есть, чтобы сначала число составлялось изъ единицъ, потомъ изъ двоекъ, троекъ и т. д.

Дальнѣйшее упражненіе состоитъ въ томъ, что ученики, умѣя письменно разлагать изученныя числа на слагаемыя, упрощаютъ и обобщаютъ эти разложенія, а также изъ таблички сложенія обратно выводятъ табличку вычитанія, изъ чего вытекаетъ всестороннее сравненіе изучаемаго числа съ предшествовавшими ему числами.

Ученики разлагаютъ, напримѣръ, число 6 на его составныя части; получается табличка:

$$\begin{aligned}
&6=1+1+1+1+1+1\\
&6=2+2+2\\
&6=3+3\\
&6=4+2\\
&6=5+1
\end{aligned}$$

На основаніи этой таблички предлагаются вопросы:

Сколько разъ нужно взять по два, чтобы составить 6? Нужно взять три раза по 2.

Какъ проще записать, что 6 состоитъ изъ 2, взятыхъ 3 раза? Если дѣти умѣютъ писать слова, то они вторую строчку приведенной таблички пишутъ сначала въ такомъ видѣ:

6 = 2, взятымъ 3 раза.

Потомъ учитель сообщаетъ, что эту строчку, то-есть $6 = 2+2+2$, короче можно записать также при помощи условнаго знака, именно: $6=2\times3$. Выраженіе это ученики читаютъ такъ: «6 состоитъ изъ 2, взятыхъ 3 раза» или „6 равно 2, повтореннымъ 3 раза".

Для закрѣпленія въ памяти этого обозначенія ученикамъ предлагается также разложить, напримѣръ, число 8 на двойки и записать потомъ это разложеніе короче:

$$2+2+2+2=8$$
$$8=2\times4$$

Число 9 составить изъ троекъ, десять изъ пятерокъ, словомъ, до тѣхъ поръ, пока ученики будутъ вполнѣ безошибочно писать сокращенно составъ даннаго числа изъ другихъ равныхъ между собою чиселъ.

На основаніи одного изъ послѣднихъ разложеній, напримѣръ

$$2+2+2+2=8,$$

ученики говорятъ по вопросу учителя, что отъ 8 можно 2 отнять четыре раза, и тогда въ остаткѣ не получится ничего, что обозначается *нулемъ*, значеніе котораго извѣстно уже ученикамъ изъ написанія десятковъ, гдѣ нуль, поставленный на мѣстѣ единицъ, показывалъ ихъ отсутствіе. Будучи знакомы также со знакомъ *минусъ*, ученики, по указанію учителя, пишутъ:

$$8-2-2-2-2=0$$

и читаютъ такъ: 8 безъ 2 будетъ 6, 6 безъ 2 будетъ 4, 4 безъ 2 будетъ 2, 2 безъ 2 ничего (нуль).

Слѣдовательно, сколько разъ 2 содержится въ 8? Два содержится въ 8 четыре раза.

Это короче записывается такимъ образомъ:

$$8:2=4 \quad *)$$

Формула эта записывается на классной доскѣ, и затѣмъ идутъ упражненія учениковъ въ написаніи на своихъ доскахъ формулъ, показывающихъ, сколько разъ 3 содержится въ 6, 4 въ 8, 2 въ 10, для усвоенія способа обозначенія.

Всѣ усвоенныя учениками обозначенія отношеній изучаемаго числа къ другимъ числамъ слѣдуетъ свести вмѣстѣ при одномъ какомъ-

*) При изложеніи метода Грубе я указалъ, что онъ выраженія: „8 состоитъ изъ 2, взятыхъ 4 раза“ и „2 содержится въ 8 четыре раза“ пишетъ такъ: $8=4\times2$ и $2:8=4$, то-есть располагаетъ множимое и множителя и дѣлимое и дѣлителя въ томъ порядкѣ, какъ они читаются учениками (4 раза 2 будетъ 8 и 2 содержится въ 8 четыре раза). Я же буду держаться общепринятаго обозначенія, чтобы не затруднять учителей, привыкшихъ къ одному обозначенію; притомъ самый порядокъ обозначенія зависитъ отъ чтенія формулы; напримѣръ, выраженіе: „8 раздѣлить на двѣ равныя части“ понятнѣе по общепринятому обозначенію $8:2$, нежели по обозначенію Грубе $2:8$.

нибудь числѣ, чтобы ученики замѣтили отношеніе и связь одного числа съ другимъ. Это ведется такъ:

Составьте число 10 изъ двоекъ:

$$2+2+2+2+2=10$$

Прочтите это. Десять состоитъ изъ двухъ, двухъ и т. д., или два да два—четыре, четыре да два—шесть и т. д.

Запишите это короче.

$$10=2\times5$$

Читается: 10 состоитъ изъ двухъ, взятыхъ пять разъ.

Отнимайте отъ 10 по 2 до тѣхъ поръ, пока нельзя будетъ больше отнять.

$$10-2-2-2-2-2=0$$

Читается: 10 безъ двухъ будетъ 8, 8 безъ 2—6 и т. д.

Итакъ, сколько разъ можно отъ 10 отнять по 2? Слѣдовательно, сколько разъ 2 содержится въ 10? Запишите это.

$$10:2=5$$

Читается: въ 10 два содержится пять разъ.

Какъ видно, до сихъ поръ говорилось о письменномъ разложеніи только чиселъ кратныхъ для тѣхъ, на которыя они разлагаются, какъ, напримѣръ, разложеніе каждаго числа на единицы, 4 на 2, 6 на 2 и 3, 8 на 2 и 4, 9 на 3 и 10 на 2 и 5. Это потому, что, во-первыхъ, эти разложенія самыя важныя, ведущія къ усвоенію кратныхъ отношеній изучаемыхъ чиселъ, а во-вторыхъ, они и самыя легкія для написанія посредствомъ цифръ и знаковъ дѣйствій.

Теперь уже можно перейти и къ составленію чиселъ изъ такихъ, относительно которыхъ они не будутъ кратными, каковы: составленіе 3 изъ 2; 4 изъ 3; 7 изъ 2, 3, 4, 5, 6; 8 изъ 3; и т. д.

Напримѣръ, число семь составить изъ троекъ.

Пишется строчка:

$$7=3+3+1$$

Сколько разъ нужно взять по три и сколько еще прибавить, чтобы составилось семь? Запишите короче.

$$7=3\times2+1$$

Отнимайте отъ семи по три.

$$7-3-3=1$$

Сколько разъ отъ семи можно отнять по три? Сколько получится въ остаткѣ, если отъ семи отнять два раза по три? Слѣдовательно сколько разъ три содержится въ семи и какой еще будетъ остатокъ? Запишите короче.

$$7 : 3 = 2\ (1)$$

Ученикамъ указывается, какъ писать остатокъ при числѣ, показывающемъ содержанie.

Для закрѣпленія въ памяти дѣтей этого рода разложеній чиселъ и выводовъ изъ нихъ, дѣтямъ предлагается разложить еще другія числа и написать выводы изъ разложенія.

При достаточномъ числѣ подобнаго рода письменныхъ упражненій дѣти усвоиваютъ всѣ обозначенія, служащія для письменнаго выраженія различныхъ соотношеній и комбинацій чиселъ.

3) Устное и письменное вычисленіе формулы.

Для окончательнаго закрѣпленія въ памяти учениковъ пріемовъ обозначенія различныхъ соотношеній и комбинацій чиселъ и для развитія быстроты вычисленія, хорошимъ упражненіемъ, одновременно съ предъидущимъ, служитъ письменное и устное вычисленіе примѣровъ на отвлеченныя числа.

Съ этою цѣлью въ 1-й части „Сборника", въ отдѣлѣ II (Примѣры для вычисленій) приведены таблички съ численными примѣрами на числа отъ 1 до 10 (всего 53 таблички, въ каждой по 10 строкъ). Таблички эти расположены слѣдующимъ образомъ: 1) семь табличекъ на сложеніе двухъ слагаемыхъ, двѣ на сложеніе трехъ слагаемыхъ и одна на четыре слагаемыя; 2) десять табличекъ на вычитаніе одного числа, три на вычитаніе двухъ чиселъ изъ одного и одна на вычитаніе трехъ чиселъ; 3) шесть табличекъ на сложеніе и вычитаніе вмѣстѣ, начиная съ трехъ данныхъ чиселъ и кончая десятью; 4) шесть табличекъ на умноженіе и дѣленіе двухъ чиселъ; 5) одиннадцать табличекъ на всѣ четыре дѣйствія, начиная съ двухъ дѣйствій и кончая всѣми четырьмя дѣйствіями въ каждой строкѣ (въ этомъ отдѣлѣ введены скобки) и 6), шесть табличекъ съ неизвѣстнымъ числомъ не послѣ знака равенства, а въ началѣ или серединѣ строки.

Такимъ образомъ для вычисленій съ числами перваго десятка дано 530 строкъ, изъ которыхъ каждая представляетъ отдѣльный численный примѣръ.

Упражненія по этимъ табличкамъ могутъ быть слѣдующія:

1) Познакомившись съ цифрами и со знакомъ $+$, дѣти читаютъ вслухъ первыя 10 табличекъ и вычисляютъ каждую строку устно.

То же самое дѣлаютъ они съ табличками, относящимися къ знакамъ —, $\times$ и : . Читая строки и вычисляя ихъ, дѣти хорошо усвоиваютъ цифры и знаки дѣйствій и крѣпко запоминаютъ таблички всѣхъ дѣйствій съ двумя числами перваго десятка.

2) Производя вычисленія письменно, дѣти переписываютъ строки на свои грифельныя доски или въ тетради, вычисляютъ и послѣ знака равенства пишутъ полученное отъ вычисленія число. При этомъ они учатся правильно и четко писать цифры и знаки дѣйствія. Письменное вычисленіе табличекъ, какъ и письменное рѣшеніе практическихъ задачъ, представляетъ хорошее средство для самостоятельной работы дѣтей въ такихъ классахъ, гдѣ приходится учащихся распредѣлять на двѣ и на три группы и вести разнообразныя, но одновременныя занятія со всѣми группами.

Сдѣланныя письменныя вычисленія необходимо провѣрять, заставляя различныхъ учениковъ читать отдѣльныя строки и во время чтенія вести самое вычисленіе. Иногда провѣрку можно производить, передавая работу одного ученика для провѣрки другому.

Для пріученія дѣтей къ пониманію значенія скобокъ нужно начинать съ простѣйшихъ строкъ и постепенно переходить къ болѣе и болѣе сложнымъ, какъ это указано самымъ расположеніемъ строкъ въ табличкахъ.

Учитель пишетъ на классной доскѣ строку:

$$3+(2\times 3)=?$$

и объясняетъ, что знакъ ( ) называется скобками и поставленъ для показанія, что прежде надо вычислить то, что надо прибавить къ 3-мъ, то-есть 2×3, чтобы получить искомое число. Послѣ вычисленія того, что поставлено въ скобкахъ, строка эта пишется въ видѣ:

$$3+6=?$$

и наконецъ: $$3+6=9$$

Затѣмъ, предлагается дѣтямъ написать безъ скобокъ нѣсколько слѣдующихъ строкъ, вычисливъ предварительно то, что поставлено въ скобкахъ, а потомъ указывается, что можно вести вычисленія и безъ письменной замѣны скобокъ вычисленными числами, то-есть писать, напримѣръ, сразу:

$$9-(2\times 4)=1$$

3) Эти же таблички могутъ служить для задаванія учащимся внѣклассной работы.

Таблички съ ? въ серединѣ, или въ началѣ строки, могутъ быть предлагаемы только по окончаніи всѣхъ упражненій съ числами перваго десятка, такъ какъ опредѣленіе въ нихъ неизвѣстнаго числа требуетъ отъ вычисляющаго значительнаго соображенія и знакомства съ числами всего десятка. Лучше въ началѣ ввести вычисленіе этихъ табличекъ устно, а потомъ уже, когда дѣти пріобрѣтутъ навыкъ обращаться съ ними, давать ихъ и для письменнаго вычисленія.

Въ этомъ случаѣ письменная работа должна состоять въ томъ, что дѣти вмѣсто данной въ Сборникѣ строки, напримѣръ:

$$8-(3\times ?)+5=7$$

должны на своихъ доскахъ написать строку

$$8-(3\times 2)+5=7$$

то-есть на мѣсто знака ? поставить 2.

Такимъ образомъ, достаточнымъ упражненіемъ въ устномъ и письменномъ вычисленіи табличекъ, послѣ всѣхъ предшествовавшихъ упражненій, учащіеся пріобрѣтаютъ окончательный навыкъ свободно и быстро производить вычисленія съ числами перваго десятка. Многіе учителя, для развитія этого навыка, считаютъ полезнымъ задавать дѣтямъ въ классѣ вычисленія подобныхъ табличекъ *на перегонку*, то-есть, предлагая, напримѣръ, вычислить 10 строкъ, обращаютъ вниманіе на то, кто скорѣе кончилъ вычисленія. Это побуждаетъ дѣтей къ нѣкотораго рода соревнованію.

4) Рѣшеніе задачъ.

Приведенные два рода письменныхъ упражненій (2 и 3), служащихъ для ознакомленія учениковъ съ цифрами и знаками дѣйствій, для разнообразія классной работы должны чередоваться съ рѣшеніемъ задачъ, помѣщенныхъ въ концѣ отдѣла задачъ на числа отъ 1 до 10, начиная съ № 68 и до конца отдѣла. Задачи эти назначаются для повторенія всего отдѣла и, по содержанію своему, раздѣляются на два рода: однѣ требуютъ разложенія изученныхъ чиселъ на множители и слагаемыя, каковы неопредѣленныя задачи: №№ 68, 69, 70, 71, 72 и 74, другія заключаютъ въ себѣ простѣйшія дроби и требуютъ вычисленія частей изученныхъ чиселъ, каковы: №№ 73, 75, 76...........86.

Такимъ образомъ, на рѣшеніи этихъ задачъ повторяется самое важнѣйшее изъ пройденнаго курса, именно: составъ чиселъ и ихъ дѣлимость на своихъ производителей.

Для письменнаго рѣшенія, на этой ступени обученія дѣтей, могутъ быть пригодны преимущественно задачи неопредѣленныя. Привожу образецъ рѣшенія одной такой задачи.

Задача. (Изъ Сборника № 69). Какъ можно раздѣлить девять листовъ бумаги между тремя учениками?

Ученики, усвоивъ содержаніе задачи, рѣшаютъ ее прямо письменно слѣдующимъ образомъ:

$$
\begin{aligned}
9&=3\times3\\
9&=1\times2+7\\
9&=1+2+6\\
9&=2\times2+5\\
9&=1+3+5\\
9&=2+3+4\\
9&=4\times2+1
\end{aligned}
$$

По требованію учителя рѣшенія эти читаются такъ: девять листовъ бумаги можно роздать тремъ ученикамъ, каждому по три листа; двоимъ по одному; а третьему семь; одному—одинъ листъ, другому два и третьему шесть; и т. д.

Потомъ, переходя отъ задачи къ числамъ отвлеченнымъ, прямо читаютъ написанную табличку такъ: девять состоитъ изъ трехъ разъ по три; изъ двухъ разъ по одному и семи; изъ одного, двухъ и шести; и т. д.

На этой же ступени обученія легко пріучить дѣтей составлять предварительный планъ рѣшенія задачи и пояснять всѣ вычисленія необходимыя для рѣшенія задачи, посредствомъ упражненія, указаннаго въ 4-ой главѣ введенія Методики.

Такимъ образомъ, на изученіи чиселъ перваго десятка, кромѣ навыка мыслить и правильно и сжато выражать свою мысль, главнѣйшимъ образомъ, усвоивается слѣдующее:

1) Различныя отношенія и связь между собою чиселъ перваго десятка.

2) Пріемъ увеличенія и уменьшенія даннаго числа какимъ-нибудь другимъ числомъ.

3) Увеличеніе и уменьшеніе даннаго числа въ нѣсколько разъ.

4) Опредѣленіе содержанія одного числа въ другомъ.

5) Опредѣленіе какой-нибудь части даннаго числа.

6) Умѣнье запоминать содержаніе задачи, разбивать ее на части и вести вычисленіе для ея рѣшенія.

7) Употребленіе цифръ и знаковъ дѣйствій сообразно извѣстной связи между числами.

8) Быстрое письменное и устное вычисленіе табличекъ.

9) Таблички сложенія, вычитанія, умноженія и дѣленія чиселъ въ предѣлѣ перваго десятка.

2) Изученіе чиселъ отъ 11 до 20.

Когда учащіеся достаточно ознакомились съ *десяткомъ* и его отношеніями къ предшествующимъ числамъ, можно употребить одинъ или два урока для счета десятками и объясненія ученикамъ, что отношенія между десятками опредѣляются точно такъ же, какъ и для единицъ. При этомъ для наглядности можно употреблять изъ ариѳметическаго ящика бруски, состоящіе изъ десяти кубиковъ. Тутъ же ученики повторяютъ пріемъ написанія десятковъ и отличаютъ значеніе изображеній, напримѣръ: 3 и 30.

Затѣмъ, прежде перехода къ изученію слѣдующихъ чиселъ по тѣмъ же упражненіямъ, по которымъ производилось изученіе чиселъ перваго десятка, слѣдуетъ остановиться на выясненіи ученикамъ пріема написанія двузначныхъ чиселъ и ихъ названій въ предѣлѣ чиселъ отъ 11 до 20. Работа эта ведется такимъ образомъ:

Напишите число десять. Прибавьте къ этому числу единицу. Ученики пишутъ 10+1.

Что означаетъ нуль, стоящій у первой единицы? Онъ означаетъ, что здѣсь только одинъ десятокъ и при немъ нѣтъ единицъ.

Какъ записать 10+1 вмѣстѣ, однимъ числомъ? Ученики пишутъ 11.

А если я къ десяти прибавлю двѣ единицы, какъ записать все полученное число? Ученики пишутъ 12.

Запишите на вашихъ доскахъ всѣ числа, которыя получатся, если къ десяти набавлять начиная отъ единицы до десяти. Ученики пишутъ числа отъ 10 до 19 включительно и затѣмъ, прибавляя къ десяти десять, получаютъ число двадцать, изображеніе котораго имъ уже извѣстно.

Учитель самъ объясняетъ ученикамъ названіе новыхъ чиселъ: *одиннадцать*, *двѣнадцать* и т. д., и называетъ ихъ числами *двузначными* въ отличіе отъ прежнихъ—*однозначныхъ*.

Число 11.

1) Разложеніе на слагаемыя.

Зная хорошо составъ десяти изъ предшествующихъ ему чиселъ и то, что одиннадцать составляется прибавленіемъ къ десяти одной единицы, ученики легко сдѣлаютъ устное разложеніе одиннадцати, выражаясь такимъ образомъ: „11 состоитъ изъ 10 единицъ и еще одной, изъ пяти двоекъ и единицы, изъ трехъ троекъ и двухъ, изъ двухъ четверокъ и трехъ и т. д.". Затѣмъ, письменно составляется табличка разложенія числа въ порядкѣ:

$$
\begin{aligned}
11 &= 1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1 \\
11 &= 2+2+2+2+2+1 \\
11 &= 3+3+3+2 \\
11 &= 4+4+3 \\
11 &= 5+5+1 \\
11 &= 6+5 \\
11 &= 7+4 \\
11 &= 8+3 \\
11 &= 9+2 \\
11 &= 10+1
\end{aligned}
$$

На основаніи этой таблички учитель предлагаетъ ученикамъ первыя пять разложеній записать въ сокращенномъ видѣ:

$$
\begin{aligned}
11 &= 1\times 11 \\
11 &= 2\times 5+1 \\
11 &= 3\times 3+2 \\
11 &= 4\times 2+3 \\
11 &= 5\times 2+1
\end{aligned}
$$

и вопросами наводитъ ихъ на нахожденіе въ этихъ и слѣдующихъ строкахъ таблицы разложеній одинаковыхъ, такимъ образомъ:

Прочтите вторую строку. Одиннадцать состоитъ изъ 2, взятыхъ пять разъ и одного.

Гдѣ въ вашей таблицѣ есть разложеніе, похожее на это, но иначе написанное? Въ послѣдней строкѣ: вмѣсто 2, взятыхъ пять разъ, прямо написано 10 и въ пятой строкѣ вмѣсто 2, взятыхъ пять разъ, написано пять два раза.

Укажите разложеніе, одинаковое съ $11=3\times 3+2$. Въ девятой строкѣ: $11=9+2$, гдѣ вмѣсто трехъ разъ по три прямо взято 9 и т. д.

2) Выводы.

Сложеніе и вычитаніе. Сколько нужно прибавить къ одному двумъ, четыремъ, семи и т. д., чтобы получить 11?

Изъ какихъ двухъ чиселъ составляется 11? Изъ какихъ трехъ чиселъ составляется 11?

Изъ какихъ двухъ равныхъ чиселъ и третьяго имъ неравнаго можно составить 11?

Какъ можно раздать 11 сливъ четыремъ мальчикамъ?

Сколько получится, если отъ 11 отнять 1, 3, 5, 8, 9?

Примѣчаніе. При рѣшеніи такихъ вопросовъ, какъ, напримѣръ, сколько будетъ 8 да 3, или 11 безъ 5, необходимо съ перваго же раза пріучать дѣтей пользоваться десяткомъ, какъ единицею счета, и приводить вычисленіе къ этой единицѣ. Такъ, прибавляя 3 къ 8-ми, дѣти сначала прибавленіемъ 2-хъ дополняютъ 8 до 10-ти, а потомъ уже придаютъ 1, именно: $8+3=(8+2)+1=10+1=11$. Также вычисленіе $11-5$ приводится къ такому: $11-5=(11-1)-4=$ $=10-4=6$. Такой пріемъ вычисленія впослѣдствіи принесетъ большую пользу, научая дѣтей сводить всѣ вычисленія къ единицамъ десятичной системы нумераціи.

На сколько 11 болѣе 2, 4, 6, 7?

Чего не достаетъ, 2, 5, 7, 9, 10 до 11?

Какое число нужно отнять отъ 11-ти, чтобы въ остаткѣ получилось 3, 5, 8?

Умноженіе и дѣленіе. Сколько разъ нужно взять по одному, чтобы составить 11?

Сколько разъ 2, 3, 5, 7 содержится въ 11-ти, и какой остатокъ получается?

Изъ какихъ равныхъ чиселъ слагается 11?

3) Задачи.

№№ 87 . . . . 91.

Письменное рѣшеніе задачи. Ученики достаточно ознакомились уже съ цифрами и знаками, выражающими различныя отношенія и комбинаціи чиселъ между собою, а потому можно исподоволь приступать къ записыванію вычисленій при рѣшеніи задачъ. Привожу образецъ первоначальной классной работы этого рода.

Задача. (Изъ Сборника № 90). Кухарка получила отъ хозяйки три монеты по 2 коп. и еще одну монету большей цѣнности; на всѣ эти деньги она купила фунтъ керосину. Какую монету большей цѣнности получила она, если за фунтъ керосину заплатила 11 коп.?

Когда ученики рѣшили эту задачу и подробно высказали какъ пріемъ ея рѣшенія, такъ и вычисленія, имъ предлагаются вопросы:

Что узнали вы сначала для рѣшенія этой задачи? Сколько копеекъ содержатъ въ себѣ 3 монеты, въ двѣ копѣйки каждая.

Сколько копеекъ получили вы? 6 коп., потому что 3 раза 2 будетъ 6.

Запишите это вычисленіе на вашихъ доскахъ. Ученики пишутъ $2\times 3=6$.

Что потомъ узнавали? Какая была еще одна монета. Какая же эта была монета? 5 коп., потому что фунтъ керосину стоитъ 11 коп., значитъ кухаркѣ, дали для покупки его 11 коп., изъ которыхъ въ трехъ монетахъ заключалось 6 коп., а въ четвертой остальное, то-есть, 11 безъ шести, или 5 копеекъ.

Запишите это вычисленіе. Ученики пишутъ $11-6=5$.

Значитъ, сколько всѣхъ вычисленій сдѣлано для рѣшенія задачи? Сдѣлано 2 вычисленія.

Видно ли изъ того, что вы записали, въ какомъ порядкѣ сдѣланы вычисленія для рѣшенія этой задачи? Видно, что для рѣшенія задачи сначала взяли 3 раза 2, чтобы узнать, сколько было копеекъ въ трехъ монетахъ, и получили 6 коп.; потомъ эти 6 коп. отняли отъ 11 коп., чтобы узнать, сколько копеекъ было въ монетѣ большей цѣнности, и получили 5 коп.

Послѣ этого тотчасъ предлагается ученикамъ рѣшить другую задачу и записать въ порядкѣ вычисленія, уже безъ помощи наводящихъ вопросовъ учителя.

4) Бѣглое вычисленіе.

а) *На задачахъ.* Изъ бывшихъ у меня 11 копеекъ я истратилъ 3 коп., потомъ еще 4; а когда мнѣ дали еще 6 коп., то я на всѣ свои деньги купилъ 5 кренделей. Сколько заплатилъ я за каждый крендель?

На голубятнѣ сидѣло 4 пары голубей; къ нимъ прилетѣло еще 3 голубя; потомъ сначала улетѣло 5 голубей, а послѣ еще 4. Сколько голубей осталось на голубятнѣ?

б) *На отвлеченныхъ числахъ.* Отъ 11 отнимаю 2, потомъ еще 3; къ полученному числу прибавляю 1; отъ полученнаго числа отнимаю 4. Сколько надо прибавить къ остатку, чтобы составилось 10?

Беру 3 раза 3 и прибавляю сюда два раза по одному; отъ полученнаго числа отнимаю два раза по 4 и остатокъ увеличиваю въ 2 раза. Сколько получилось?

в) *Вопросы для повторенія.* 11 безъ 7 сколько будетъ? 8+3? Сколько получится, если отъ 11 отнять 2 раза 4, 3 раза 2, 4 раза 2? Сколько надо отнять отъ 11, чтобы 4 заключалось въ остаткѣ два раза, 3 раза, 2 пять разъ, и т. д. Сколько надо отнять отъ 11, чтобы остатокъ въ 10 содержался 2 раза?

г) *Примѣры для вычисленій.* Для числа 11, какъ и для всѣхъ слѣдующихъ до 30 включительно, въ Сборникѣ приведено двѣ таблички, въ каждой по 10 строкъ. Первая табличка требуетъ для вычисленія только сложенія и вычитанія, вторая—всѣхъ четырехъ дѣйствій.

Число 12.

Изученіе каждаго числа второго десятка, какъ и прежде, начинается съ образованія числа, только теперь число образуется не прибавленіемъ единицы къ числу предшествовавшему, а прибавленіемъ соотвѣтствующаго числа единицъ къ 10. Такимъ образомъ, 12 составляется изъ 10+2, 13 изъ 10+3, 17 изъ 10+7 и т. д. Такой составъ числа облегчаетъ послѣдующія вычисленія.

1) Разложеніе.

Для повторенія системы разложенія числа на слагаемыя ученикамъ предлагаются вопросы:

Сколько получится строчекъ въ таблицѣ разложенія числа 12 на составляющія его числа? 11 строчекъ.

Почему получится 11 строчекъ? Потому что числу 12 предшествуетъ 11 чиселъ, посредствомъ которыхъ его можно составлять.

Съ чего начать разложеніе? Съ разложенія 12 на единицы.

Изъ какихъ чиселъ 12 будетъ составляться въ четвертой строчкѣ? Изъ четверокъ.

Затѣмъ, производится разложеніе или прямо устно, безъ помощи наглядныхъ пособій, или на наглядномъ пособіи. Привожу еще одинъ образецъ этой работы на ариѳметическихъ счетахъ.

Передъ урокомъ на 12 проволокахъ счетовъ надѣвается по 12 шаровъ на каждой. На верхней проволокѣ всѣ шары остаются сдвинутыми вмѣстѣ, представляя число 12 въ цѣлости. Ученикъ, вызванный къ счетамъ, разлагаетъ 12 на единицы, такъ что каждый изъ 12 шаровъ отдѣляется отъ другого нѣкоторымъ промежуткомъ; другой ученикъ на третьей проволокѣ разлагаетъ 12 на двойки; третій— на четвертой проволокѣ—на тройки и т. д.; и послѣ всякаго разложенія, кто-либо съ мѣста, по указанію учителя, говоритъ, какъ разложено 12. Такъ, напримѣръ, одинъ ученикъ разложилъ на счетахъ 12 на 5+5+2, то другой съ мѣста говоритъ, что 12 состоитъ изъ двухъ пятерокъ и двойки.

Когда разложеніе на счетахъ кончено и еще разъ обращено вниманіе учениковъ на самый порядокъ разложенія, ученики воспроизводятъ то же самое на своихъ доскахъ, то-есть составляютъ таблицу разложенія.

$$
\begin{aligned}
12&=1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1\\
12&=2+2+2+2+2+2\\
12&=3+3+3+3\\
12&=4+4+4\\
12&=5+5+2\\
12&=6+6\\
12&=7+5\\
12&=8+4\\
12&=9+3\\
12&=10+2\\
12&=11+1
\end{aligned}
$$

Первые шесть рядовъ записываются и въ сокращенномъ видѣ:

$$
\begin{aligned}
12&=1\times12\\
12&=2\times\ 6\\
12&=3\times\ 4\\
12&=4\times\ 3\\
12&=5\times\ 2+2\\
12&=6\times\ 2
\end{aligned}
$$

Изъ сравненія второй строчки этой послѣдней таблицы съ шестою и третьей съ четвертою ученики убѣждаются, что изъ разложеній $12=2\times6$ или $12=3\times4$ сами собою вытекаютъ совершенно однозначущія съ ними разложенія $12=6\times2$ и $12=4\times3$. Обращая вниманіе на эту особенность состава чиселъ и при другихъ числахъ, ученики впослѣдствіи выведутъ теорему, что отъ перестановки множителей произведеніе не измѣняетъ своей величины.

Для закрѣпленія въ памяти этого важнѣйшаго свойства чиселъ, весьма облегчающаго запоминаніе таблицы умноженія чиселъ и пользованіе ею при вычисленіяхъ, ученики приводятъ примѣры подобныхъ же разложеній изъ пройденнаго курса и выписываютъ ихъ на доскахъ, каковы:

$$
\begin{aligned}
6&=3\times2=2\times3\\
8&=4\times2=2\times4\\
10&=5\times2=2\times5
\end{aligned}
$$

На основаніи сокращеннаго записыванія состава изучаемаго числа изъ другихъ ученики выводятъ кратныя отношенія этого числа къ другимъ. Такъ изъ того, что $10=5\times 2$ ученики выводятъ, что $10:2=5$ и т. д.

2) Выводы:

Сложеніе и вычитаніе. Изъ какихъ равныхъ чиселъ слагается 12?
Изъ какихъ двухъ неравныхъ чиселъ?
Сколько надо прибавить къ 4, 8, 10, чтобы получить 12?
На сколько надо увеличить 3, 5, 9, чтобы получить 12?
Какія равныя числа можно отнимать отъ 12 по нѣскольку разъ, чтобы не получалось остатка?
Отнимайте отъ 12 по 3, по 4, по 6.
Сколько будетъ: 12 безъ 3, 12 безъ 5, 12 безъ 8? и т. д.
Чѣмъ 12 больше единицы, 4, 5, 9?
Сколько надо отнять отъ 12, чтобы въ остаткѣ получилось 3, 7, 10?
Какимъ числомъ 12 больше 4, 6, 7?
Умноженіе и дѣленіе. Какое число нужно взять 2, 3, 4, 6 разъ, чтобы получились 12?
Сколько разъ надо взять по 4, по 6, чтобы составить 12?
Сколько будетъ 3-жды 4, 2-жды 6, 4-жды 3?
Какія числа содержатся въ 12 безъ остатка?
Какъ велика половина, треть, четверть, шестая, двѣнадцатая часть 12?
Сколько получится, если 12 уменьшить въ 3, 4 раза?
Во сколько разъ 12 больше 2, 6?
Какія числа содержатся въ 12 съ остаткомъ 2?
3) Задачи.
№№ 92, 93,... 100.

Письменное рѣшеніе задачи.

Задача. (Изъ Сборника № 100). 2 извощика на всѣхъ своихъ лошадяхъ взялись перевезти товаръ; у одного была тройка лошадей, а у другого втрое болѣе. На сколькихъ телѣгахъ повезли они товаръ, если въ каждую телѣгу запрягли по парѣ лошадей?

Послѣ рѣшенія задачи и пересказа пріема рѣшенія и вычисленій, ученики записываютъ:

$$3\times 3=9$$
$$3+9=12$$
$$12:2=6$$

Рѣшеніе задачи неопредѣленной. Весьма важное значеніе, какъ для изученія числа со стороны разложенія его на множители и слагаемыя, такъ и для разнообразія упражненій съ числомъ, имѣютъ задачи неопредѣленныя, допускающія нѣсколько рѣшеній, удовлетворяющихъ вопросу задачи. Задачи эти, особенно, пригодны для письменнаго рѣшенія. Онѣ помѣщены въ „Сборникѣ" отчасти въ ряду другихъ задачъ, относящихся къ извѣстному числу, а преимущественно въ концѣ каждаго отдѣла задачъ на числа первой сотни передъ задачами на вычисленія съ частями изучаемыхъ чиселъ и легко могутъ быть узнаны учителемъ по своей формѣ вопроса, въ которомъ выраженіе *«сколько можно»* указываетъ на возможность различныхъ отвѣтовъ, могущихъ получиться при рѣшеніи одной и той же задачи.

Задача. 12 орѣховъ желаютъ раздать нѣсколькимъ мальчикамъ поровну. Сколько можетъ быть мальчиковъ и по скольку орѣховъ получитъ каждый?

Устное рѣшеніе. На вопросъ учителя, какъ рѣшается эта задача, одинъ ученикъ отвѣчаетъ: „если мальчиковъ будетъ 12, то каждый получитъ по одному орѣху, потому что 12 разъ одинъ составитъ 12". Другой ученикъ—„если мальчиковъ будетъ 6, то каждый получитъ по 2 орѣха, потому что 6 разъ 2 составляетъ 12". Третій—„если мальчиковъ будетъ 4, то каждый получитъ по 3 орѣха, потому что 4 раза 3 составляетъ 12" и т. д.

Письменное рѣшеніе. Послѣ устнаго рѣшенія этой задачи ученики записываютъ въ порядкѣ всѣ разложенія 12 на два множителя въ такомъ видѣ:

$$
\begin{aligned}
12 &= 1 \times 12 \\
12 &= 2 \times 6 \\
12 &= 3 \times 4 \\
12 &= 4 \times 3 \\
12 &= 6 \times 2 \\
12 &= 12 \times 1
\end{aligned}
$$

и, такимъ образомъ, еще разъ останавливаютъ свое вниманіе на составѣ числа и тѣмъ крѣпче запечатлѣваютъ въ памяти этотъ составъ.

4) Бѣглое вычисленіе.

а) *На задачахъ.* У хозяйки было три фунта свѣчей, въ каждомъ по 4 свѣчи; въ одинъ вечеръ сгорѣло 3 свѣчи, въ другой двѣ и въ третій 3; потомъ она купила еще 6 свѣчей и всѣхъ свѣчей ей хватило на 5 вечеровъ, причемъ въ каждый вечеръ сгорало поровну. Сколько свѣчей сгорало въ каждый изъ послѣднихъ вечеровъ?

У мальчика было 12 сливъ; третью часть всѣхъ этихъ сливъ онъ отдалъ одному брату, четвертую часть—другому, шестую—сестрѣ, а остальныя сливы самъ съѣлъ. Сколько сливъ съѣлъ мальчикъ?

б) *На отвлеченныхъ числахъ.* Къ 7 придаю 4 и еще одинъ; отъ полученнаго числа отнимаю 3 и еще 6; къ полученному числу придаю два раза по 2. Сколько получилось?

Беру половину 12; отнимаю отъ нея 4; къ остатку придаю треть 12 и еще шестую часть того же числа; отъ полученнаго числа отнимаю 5 и къ остатку придаю четверть 12. Сколько получилось?

в) *Вопросы для повторенія.* Сколько будетъ дважды шесть? Трижды четыре? Шестью два? Четырежды три? Сколько разъ шестая часть 12 содержится въ 10? Четвертая часть 12 въ 9? Третья часть 12 въ какомъ числѣ содержится два раза безъ остатка? Во сколько разъ 12 больше половины шести? Треть девяти какую составляетъ часть 12? и т. д.

г) *Примѣры для вычисленій.* Двѣ таблички изъ Сборника на число 12.

Число 13.

1) Разложеніе.

$13=1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1$
$12=2+2+2+2+2+2+1$
$13=3+3+3+3+1$
$13=4+4+4+1$
$13=5+5+3$
$13=6+6+1$
$13=7+6$
$13=8+5$
$13=9+4$
$13=10+3$
$13=11+2$
$13=12+1$

Первыя шесть строчекъ пишутся въ сокращенномъ видѣ и сравниваются по составу между собою и съ слѣдующими строчками. По мѣрѣ навыка учениковъ можно требовать отъ нихъ написанія и сразу въ сокращенномъ видѣ тѣхъ разложеній, которыя допускаютъ сокращенное написаніе.

2) Выводы.

Сложеніе и вычитаніе. Изъ какихъ равныхъ чиселъ можетъ быть составлено 13? Изъ какихъ двухъ неравныхъ чиселъ?

Сколько надо прибавить къ 2, 5, 8, 11, чтобы получить 13?

Чѣмъ надо увеличить 3, 6, 9, чтобы получить 13?

Отнимайте отъ 13 по 3, по 4, по 5.

Какое число нужно отнять отъ 13 два, три, четыре, шесть разъ, чтобы въ остаткѣ получить единицу?

Сколько будетъ: 13—2, 13—7, 13—9?

Примѣч. 13—7 вычисляется такъ: 13—3—4=10—4=6.

Чѣмъ 13 больше 4, 6, 8, 10?

На какое число 2, 5, 7 меньше 13.

Умноженіе и дѣленіе. Сколько надо отнять отъ 13, чтобы въ остаткѣ получилось 6×2, 4×3, 5×2?

Сколько разъ 2, 3, 5, 7 содержится въ 13 и какой получается остатокъ?

На какія равныя части можно раздѣлить 13?

3) Задачи.

№№ 101, 102, 103, 104.

4) Бѣглое вычисленіе.

а) *На задачахъ.* У хозяйки было 13 птицъ: 5 гусей, 4 куры, а остальныя утки; она купила еще двѣ утки, а потомъ еще четыре утки. Сколько у нея теперь утокъ?

Имѣя 13 листовъ бумаги, ученикъ сшилъ двѣ тетради, по 2 листа въ каждой, потомъ еще двѣ, по три листа, а, получивъ отъ отца еще столько же листовъ, сколько у него осталось, сшилъ три тетради. Сколько листовъ пошло на каждую изъ послѣднихъ тетрадей?

б) *На отвлеченныхъ числахъ.* Отъ 13 отнимаю 5, потомъ еще 3; къ остатку прибавляю 4; отъ полученнаго числа отнимаю 6 и полученное число вычитаю изъ 13. Сколько получилось въ остаткѣ?

Беру 3 раза 4 и прибавляю 1; отъ полученнаго числа отнимаю 5 разъ 2; къ остатку прибавляю три раза 3 и полученное число дѣлю на 4 равныя части. Какъ велика четвертая часть?

в) *Вопросы.* Какое число нужно прибавить къ 3×3, 2×4, чтобы получить 13? Сколько надо отнять отъ 13, чтобы получить остатокъ, равный 9—5? Сколько надо отнять отъ 13, чтобы остатокъ содержался съ 12 два раза? 13—8 сколько разъ содержится въ 10? 13—7 чѣмъ меньше 8+3? Какія числа содержатся безъ остатка въ 13—1, 13—3?

г) *Примѣры для вычисленій.* Двѣ таблички изъ Сборника на числа 13.

Число 14.

1) Разложеніе.

Сначала ученики дѣлаютъ разложеніе числа устно или при помощи наглядныхъ пособій, къ которымъ вообще чѣмъ дальше, тѣмъ рѣже приходится прибѣгать, а потомъ записываютъ таблицу разложенія прямо въ сокращенномъ видѣ:

$14=1\times14$	$14=8+6$
$14=2\times7$	$14=9+5$
$14=3\times4+2$	$14=10+4$
$14=4\times3+2$	$14=11+3$
$14=5\times2+4$	$14=12+2$
$14=6\times2+2$	$14=13+1$
$14=7\times2$	

Изъ этой таблички выводятся отношенія чиселъ: 1) если, напримѣръ, $14=8+6$, то $14-8=6$ и $14-6=8$; 2) если $14=2\times7$, то $14:7=2$ и $14:2=7$. То же повторяется и на послѣдующихъ числахъ.

2) Выводы.

Сложеніе и вычитаніе. Изъ какихъ равныхъ чиселъ слагается 14? Изъ какихъ двухъ неравныхъ чиселъ? Изъ какихъ трехъ равныхъ и четвертаго имъ неравнаго числа?

Какое число нужно прибавить къ 3, 7, 9, чтобы получить 14?

Примѣч. Вопросъ, какое число надо придать къ 9, чтобы получить 14, рѣшается такъ: $9+1=10$, а $10+4=14$, слѣдов. $9+5=14$.

На сколько надо увеличить число 4, 8, 11, чтобы составить 14?
Сколько будетъ: 14—7, 14—9, 14—5, 14—12?
Сколько надо отнять отъ 14, чтобы получить 3, 5, 8?
Чѣмъ болѣе 6, 9, 13?
Отнимайте отъ 14 по 3, по 5.

Умноженіе и дѣленіе. Какое число нужно взять два раза, 7 разъ, 14 разъ, чтобы составить 14?

Сколько разъ нужно отнимать отъ 14 по 3, чтобы въ остаткѣ получилось 2?

Если отъ 14 отнять 5, то полученное число во сколько разъ будетъ больше 3?

Сколько будетъ: дважды 7, семью 2?

Какія числа содержатся въ 14 безъ остатка? Какія числа содержатся съ остаткомъ 2?

На какія равныя части можно раздѣлить 14?

3) Задачи.

№№ 105, 106, 107, 108.

Устное рѣшеніе задачи.

Задача. (Изъ Сборника № 108). Въ двухъ окнахъ 14 стеколъ но въ одномъ изъ нихъ двумя стеклами болѣе, нежели въ другомъ Сколько стеколъ въ каждомъ окнѣ?

Въ двухъ окнахъ 14 стеколъ, но въ одномъ изъ нихъ двумя стеклами болѣе, нежели въ другомъ. Если бы въ большомъ окнѣ было столько же стеколъ, какъ и въ маломъ, то въ обоихъ было бы 12, потому что 14 безъ 2 будетъ 12. Если въ двухъ окнахъ 12 стеколъ и въ каждомъ поровну, то въ одномъ окнѣ 6 стеколъ, потому что половина 12 будетъ 6. Итакъ, если бы окна были съ равнымъ числомъ стеколъ, то въ каждомъ было бы по шести стеколъ; но въ одномъ изъ нихъ двумя стеклами болѣе, нежели въ другомъ, значитъ въ большомъ окнѣ 8 стеколъ, потому 6 да 2 будетъ 8.

4) Бѣглое вычисленіе.

а) *На задачахъ.* У ученика было 14 стальныхъ перьевъ, изъ которыхъ онъ 3 исписалъ и бросилъ, 4 потерялъ и 2 отдалъ товарищу, потомъ онъ еще получилъ 5 перьевъ, снова исписалъ 6 и бросилъ. Сколько перьевъ у него осталось?

У мальчика было 14 коп.; половину всѣхъ этихъ денегъ онъ издержалъ на покупку тетради, седьмую часть на крендель; потомъ, получивъ отъ отца еще двѣ монеты по 2 коп., купилъ на всѣ деньги 3 карандаша. Сколько заплатилъ онъ за каждый карандашъ?

б) *На отвлеченныхъ числахъ.* Отъ 14 отнимаю 9; къ остатку прибавляю 6; отъ полученнаго числа отнимаю 7 и остатокъ отнимаю отъ 14. Сколько получилось?

Беру половину 14 и прибавляю къ ней пять; отъ полученнаго числа отнимаю седьмую часть 15 и еще 7. Сколько разъ полученное число содержится въ 12?

в) *Вопросы.* Сколько будетъ: дважды 7, семью 2? Сколько разъ можно отнять отъ 14 по 2, по 3, по 4, по 5, по 6? Седьмая часть 14 сколько разъ содержится въ 12? Половина 14 чѣмъ больше половины 10? Какая часть 8 содержится въ 14 безъ остатка? Во сколько разъ 14—2 больше 8—5? 11 безъ 4 какую составляетъ часть 14? и т. п.

г) *Примѣры для вычисленій.* Двѣ таблички изъ Сборника на число 14.

Число 15.

1) Разложеніе.

$15=1\times15$	$15=8+7$
$15=2\times7+1$	$15=9+6$
$15=3\times5$	$15=10+5$
$15=4\times3+3$	$15=11+4$
$15=5\times3$	$15=12+3$
$15=6\times2+3$	$15=13+2$
$15=7\times2+1$	$15=14+1$.

Сравниваются строчки: вторая съ седьмою ($2\times7+1$ и $7\times2+1$) и третья съ пятою (3×5 и 5×3).

2) Выводы.

Сложеніе и вычитаніе. Изъ какихъ равныхъ чиселъ слагается 15? Изъ какихъ двухъ неравныхъ чиселъ? Изъ какихъ двухъ равныхъ чиселъ и третьяго имъ неравнаго? Изъ какихъ трехъ равныхъ чиселъ и четвертаго имъ неравнаго?

Сколько надо придать къ 7, 10, 12, чтобы получить 15?

Солько будетъ: 15 безъ 6, 15 безъ 9, 15 безъ 11, 15 безъ 13?

Сколько надо отнять отъ 15, чтобы въ остаткѣ получить 2, 7, 9, 14?

Чѣмъ 15 больше 4, 6, 8, 12?

Сколько разъ можно отнять отъ 15 по 2, по 3, по 4, по 5, по 6?

Умноженіе и дѣленіе. Сколько разъ надо взять по 3, по 5, чтобы получить 15.

Сколько будетъ: пятью три, трижды пять?

Во сколько разъ 15 больше 1, 3, 5?

Какъ велика третья, пятая часть 15?

Какія числа содержатся въ 15 съ остаткомъ 1?

3) Задачи.

№№ 109, 110,..... 114.

Вопросы по поводу рѣшенія задачи.

Задача. (Изъ „Сборника" № 114). На какія монеты одинаковой цѣнности можно размѣнять пятиалтынный? На какія монеты неодинаковой цѣнности?

Какія вамъ извѣстны монеты меньшей цѣнности, чѣмъ пятиалтынный? Монеты въ четверть копейки (полушка), въ полкопейки (денежка), въ 1 коп., въ 2 коп., въ 3 коп., въ 5 коп. (пятачекъ) и въ 10 коп (гривенникъ).

На какія 3 монеты одинаковой цѣнности можно размѣнять пятиалтынный? На 3 пятачка.

На какія 5 монетъ одинаковой цѣнности? На 5 монетъ въ 3 коп.

На какія еще монеты одинаковой цѣнности? На 15 монетъ въ 1 коп.

На какія 3 монеты неодинаковой цѣнности? Одна монета въ 2 коп., другая въ 3 коп. и третья въ 10 коп.

На какія 4 монеты? Одна монета въ 1 коп., другая—въ 1 коп., третья—въ 3 коп и четвертая—въ 10 коп.; или одна монета въ 2 коп., другая—въ 3 коп., третья—въ 5 коп. и четвертая—въ 5 коп

4) Бѣглое вычисленіе.

а) *На задачахъ.* Одному мальчику дали одну монету въ 3 коп., а другую въ 10 коп.; онъ истратилъ сначала 4 коп., потомъ еще 2; затѣмъ снова ему дали одну монету въ 5 коп. и другую въ 3 коп., и онъ всѣ свои деньги промѣнялъ на одну монету. Какую монету получилъ онъ?

Получивъ отъ отца 15 орѣховъ, дѣвочка дала брату третью часть, сестрѣ пятую часть; изъ остальныхъ 2 орѣха потеряла, 2 орѣха оказалось пустыхъ, а остальные она съѣла. Сколько орѣховъ съѣла дѣвочка?

б) *На отвлеченныхъ числахъ.* Къ 9 прибавляю 6; отъ полученнаго числа отнимаю 8; къ полученному числу прибавляю 3 и все полученное число отнимаю отъ 15. Сколько получилось въ остаткѣ?

Беру пятую часть 15; придаю къ ней четвертую часть оставшагося числа и еще придаю третью часть оставшагося послѣ четвертой части; отъ полученнаго числа отнимаю третью часть 15. Сколько разъ полученное число содержится въ 12?

в) *Вопросы.* Сколько будетъ: 3-жды пять, пятью 3? Сколько надо отнять отъ 15, чтобы остатокъ содержался въ 12 четыре раза? Пятая часть 15 въ какихъ числахъ содержится безъ остатка? Третья часть 15 какую составляетъ часть 10? Сколько въ 15 десятковъ? На сколько и какія равныя части можно раздѣлить 15? Сколько надо отнять отъ 15, чтобы въ остаткѣ 4 и 6 содержались безъ остатка? и т. д.

г) *Примѣры для вычисленія.* Двѣ таблички изъ «Сборника» на число 15.

Число 16.

1) Разложеніе.

$16=1\times16$	$16=9+7$
$16=2\times8$	$16=10+6$
$16=3\times5+1$	$16=11+5$
$16=4\times4$	$16=12+4$
$16=5\times3+1$	$16=13+3$
$16=6\times2+4$	$16=14+2$
$16=7\times2+2$	$16=15+1$
$16=8\times2$	

Сравненіе строчекъ: второй съ восьмою и третьей съ пятою и выводы разностнаго и кратнаго отношенія числа 16 къ другимъ числамъ.

2) Выводы.

Сложеніе и вычитаніе. Изъ какихъ равныхъ чиселъ слагается 16? Изъ какихъ двухъ неравныхъ? Изъ какихъ двухъ равныхъ и одного имъ неравнаго числа?

Сколько надо придать къ 3, 5, 7, 11, чтобы получить 16?

Сколько единицъ недостаетъ 4, 6, 9 до 16?

Сколько будетъ: 16 безъ 7, 16 безъ 9, 16 безъ 12, 16 безъ 14?

Сколько надо отнять отъ 16, чтобы въ остаткѣ получилось 3, 6, 10, 13?

На какое число 16 больше 2, 4, 7, 11, 15?

Какимъ числомъ 5, 8, 9 меньше 16?

Умноженіе и дѣленіе. Какое число нужно повторить нѣсколько разъ, чтобы получить 16?

Сколько будетъ: дважды 8, 4-жды 4, 8-ью 2?
Какія числа содержатся въ 16 безъ остатка?
Какія числа содержатся въ 16 съ остаткомъ 2, съ остаткомъ 4?
Сколько разъ 5, 7 содержится въ 16 и какой получится остатокъ?
Какъ велика половина, четверть, восьмая часть 16?
Во сколько разъ 16 больше 2, 8?

3) Задачи.

№№ 115, 116,... 121.

Задача. (Изъ „Сборника" №120). Торговецъ продаетъ каждые 4 грифеля по 3 коп., а покупаетъ каждые 8 грифелей по 5 коп. Сколько прибыли получитъ онъ, продавъ 16 грифелей?

Устно.

Планъ рѣшенія. Надо узнать, за сколько торговецъ продаетъ 16 грифелей, потомъ за сколько онъ самъ ихъ покупаетъ и, наконецъ, сколько получаетъ прибыли.

Рѣшеніе. Каждые 4 грифеля торговецъ продаетъ по 3 коп., а 4 содержится въ 16-ти 4 раза, значитъ онъ получаетъ съ покупателя 4 раза по 3 коп., то-есть 12 коп. Самъ онъ платитъ за 8 грифелей 5 коп., а 8 содержится въ 16-ти 2 раза, значитъ онъ за 16 грифелей платитъ 10 копеекъ, потому что два раза 5 будетъ 10. Итакъ, самъ онъ покупаетъ грифеля за 10 коп., а продаетъ за 12 коп. слѣдовательно прибыли получаетъ 2 коп., потому что 12 безъ 10 будетъ 2.

Письменно.

$$16 : 4 = 4$$
$$3 \times 4 = 12$$
$$16 : 8 = 2$$
$$5 \times 2 = 10$$
$$12 - 10 = 2$$

4) Бѣглое вычисленіе.

а) *На задачахъ.* Имѣя 8 монетъ по 2 коп., мальчикъ истратилъ 7 коп. на покупку тетради и 4 коп. на сухари; потомъ онъ получилъ еще отъ отца 5 коп. и отъ матери 6 коп., и на всѣ свои деньги купилъ 4 яблока. Сколько платилъ онъ за яблоко?

Изъ 16, гостей, бывшихъ на вечерѣ, на половину были мужчины, четвертая часть—дамы, восьмая—дѣвочки, а остальные—мальчики. Сколько мальчиковъ было въ гостяхъ?

б) *На отвлеченныхъ числахъ*. Отъ 16 отнимаю 9, къ полученному числу прибавляю 7 и снова отнимаю 9; къ полученному числу прибавляю 10 и снова отнимаю 8. Какое число получилось?

Задумано нѣкоторое число, къ которому, если придамъ 5 и полученное число повторяю два раза, то получится 16. Какое число задумано?

Возьмите четвертую часть 16, увеличьте ее въ 3 раза; полученное число раздѣлите пополамъ; полученную половину отнимите отъ 16 и къ остатку придайте 4. Какое число получилось?

в) *Вопросы*. Сколько будетъ: 4-жды 4? 2-жды 8? 8-ю 2? На сколько и какія равныя части можно раздѣлить 16? Четверть 16 во сколько разъ меньше 12? Восьмая часть 16 какую составляетъ часть 10? Половина 8 какую составляетъ часть 16? Сколько надо отнять отъ 16, чтобы въ остаткѣ получилась половина 14? 11 безъ 3 сколько разъ содержится въ 16? и т. д.

Примѣры для вычисленій. Двѣ таблички изъ „Сборника" на число 16.

Число 17.

1) Разложеніе.

$17=1\times17$	$17=9+8$
$17=2\times 8+1$	$17=10+7$
$17=3\times 5+2$	$17=11+6$
$17=4\times 4+1$	$17=12+5$
$17=5\times 3+2$	$17=13+4$
$17=6\times 2+5$	$17=14+3$
$17=7\times 2+3$	$17=15+2$
$17=8\times 2+1$	$17=16+1$

Сравненіе строчекъ: второй съ восьмою и 16-ою; третьей съ пятою и 15-ою; шестой съ 12-ою.

2) Выводы.

Сложеніе и вычитаніе. Сложеніемъ какихъ двухъ чиселъ составляется число 17?

Примѣчаніе. Первый отвѣтъ долженъ быть такой: 17 составляется изъ 10 и 7.

Изъ какихъ равныхъ чиселъ складывается 17? Изъ какихъ трехъ, пяти равныхъ чиселъ и одного имъ неравнаго числа?

Чего не достаетъ 8, 13, 15 до 17?

Сколько получится, если отъ 17 отнять 9, 13, 15?

Отнимайте отъ 17 по 2, по 5.

На сколько 17 больше 6, 8, 11?

Чѣмъ 7, 10, 12 меньше 17?

Сколько разъ отъ 17 можно отнять по 3, по 4, по 6, по 7 и какой получится остатокъ?

Умноженіе и дѣленіе. Сколько надо отнять отъ 17, чтобы въ остаткѣ получить 2-жды 8, 3-жды 5, 4-жды 4, 2-жды 6? и т. д.

Какія числа содержатся въ 17 нѣсколько разъ съ остаткомъ 1?

Сколько разъ въ 17 содержится 3, 5, 7 и какой получается остатокъ?

На сколько равныхъ частей можно раздѣлить 17?

3) Задачи.

№№ 122, 123 и 124.

Рѣшеніе неопредѣленной задачи.

Задача. Какъ можно разсадить 17 учениковъ на 5 скамейкахъ?

Задача эта назначается для всесторонняго разложенія числа 17 на пять слагаемыхъ. Такія задачи полезно предлагать ученикамъ, особенно при изученіи первоначальныхъ (простыхъ) чиселъ, какъ для устнаго, такъ и для письменнаго рѣшенія. Сначала задача рѣшается устно различными учениками, предлагающими различные способы разложенія числа. Отвѣтъ ученикъ формулируетъ такимъ образомъ: „На одну скамейку можно посадить 2-хъ учениковъ, на другую 3-хъ, на третью 4-хъ, на четвертую 5 и на пятую остальныхъ 3-хъ учениковъ". Затѣмъ ученики записываютъ рѣшенія на доскахъ, располагая разложенія въ какой-либо системѣ или въ разбивку, и получаютъ таблицу въ родѣ слѣдующей:

$$1+2+3+4+7=17$$
$$1+3+4+5+4=17$$
$$1+4+5+6+1=17$$
$$1+5+6+2+3=17$$
$$2+3+4+5+3=17$$
$$2+4+5+1+5=17$$
$$4\times2+3\times3=17$$
$$3\times4+5=17$$
$$4\times4+1=17$$
$$3\times3+5+3=17$$
$$5\times3+1\times2=17$$

и т. д.

Какъ видно, на одномъ этомъ упражненіи, въ достаточной степени разработанномъ, ученики могутъ обстоятельно познать составъ числа 17 изъ другихъ чиселъ и его соотношенія со всѣми предшествовавшими числами. При письменномъ исполненіи этого упражненія учителю легко замѣтить, кто изъ учениковъ овладѣлъ числомъ и имѣетъ навыкъ въ вычисленіи и кто еще затрудняется, что видно какъ по числу сдѣланныхъ разложеній, такъ и по самымъ пріемамъ разложенія.

4) Бѣглое вычисленіе.

а) *На задачахъ.* На станціи было 17 лошадей; три лошади запрягли въ телѣгу, 4 въ коляску и 5 въ карету, а изъ оставшихся еще 2 лошади запрягли въ другую телѣгу. Сколько незапряженныхъ лошадей осталось на станціи?

У мальчика было въ одной рукѣ 9 орѣховъ, а въ другой 17; изъ второй руки онъ переложилъ въ первую сначала 5 орѣховъ, потомъ изъ каждой руки половину отдалъ своему товарищу, а оставшіеся всѣ положилъ въ карманъ. Сколько орѣховъ положилъ мальчикъ въ карманъ?

б) *На отвлеченныхъ числахъ.* Отъ 17 отнимаю 8, потомъ еще отнимаю 4; полученное число увеличиваю въ 3 раза и прибавлю 2; отъ полученнаго числа отнимаю 13 и остатокъ увеличиваю въ 4 раза. Какое число получилось?

Я задумалъ число, которое если увеличу въ два раза и придамъ къ полученному числу 5, то составится 17. Какое число я задумалъ?

Къ 9 придаю 5; къ полученному числу придаю пятую часть 15-ти; отъ полученнаго числа отнимаю 1 и остатокъ дѣлю на 4 равныя части. Какъ велика четвертая часть?

б) *Вопросы.* Какія числа мѣшаютъ 17-ти дѣлиться на 3, 4, 5, 6 равныхъ частей? Сколько надо отнять отъ 17, чтобы въ остаткѣ 2, 7, 8 содержалось безъ остатка? Какія числа содержатся въ 17 безъ остатка? 17 безъ 12 въ какихъ числахъ содержится безъ остатка? 17 безъ 9 во сколько разъ больше 2?

г) *Примѣры для вычисленій.* Двѣ таблички изъ „Сборника“ на число 17.

Число 18.

1) Разложеніе.

$18=1\times18$	$18=6\times3$
$18=2\times9$	$18=7\times2+4$
$18=3\times6$	$18=8\times2+2$
$18=4\times4+2$	$18=9\times2$
$18=5\times3+3$	

$18=10+8$	$18=14+4$
$18=11+7$	$18=15+3$
$18=12+6$	$18=16+2$
$18=13+5$	$18=17+1$

Сравненіе строчекъ: второй съ девятою, третьей съ шестою, четвертой съ 16-ою, и т. д.

2) Выводы.

Сложеніе и вычитаніе. Изъ какихъ равныхъ чиселъ слагается 18? Изъ какихъ двухъ неравныхъ чиселъ можно составить 18? Изъ какихъ двухъ, трехъ, четырехъ равныхъ чиселъ и одного имъ неравнаго?

На какія три, четыре слагаемыя можно разложить 18?

Сколько будетъ 18 безъ 3, 4, 8, 9, 13?

Сколько разъ можно отъ 18 отнять по 3, по 4, по 6, по 8?

На какое число 18 больше 5, 7, 10, 14?

Чѣмъ 2, 6, 11, 15 меньше 18-ти?

На сколько надо уменьшить 18, чтобы получить 5, 7, 9?

Умноженіе и дѣленіе. Сколько разъ нужно взять по 2, по 3, по 6, по 9, чтобы получить 18?

Какія числа содержатся въ 18 безъ остатка?

Какъ велика половина, треть, шестая, девятая часть 18?

Сколько разъ въ 18 содержится 4, 5, 7 и какой получается остатокъ?

Во сколько разъ 18 больше 3, 9?

Два, шесть, девять какую часть 18-ти составляютъ?

3) Задачи.

№№ 125, 126 . . . . 134.

Письменное рѣшеніе неопредѣленной задачи.

Задача. (Изъ „Сборника» № 152). На сколько равныхъ кусковъ можно разрѣзать 18 аршинъ сукна, и сколько аршинъ будетъ въ каждомъ кускѣ?

Рѣшеніе:
$$\begin{aligned} 18&=1\times 18\\ 18&=2\times 9\\ 18&=3\times 6\\ 18&=6\times 3\\ 18&=9\times 2 \end{aligned}$$

4) Бѣглое вычисленіе.

а) *На задачахъ.* Въ одномъ классѣ училища было 14 мальчиковъ, да къ нимъ еще поступило 4; всѣхъ мальчиковъ посадили на трехъ скамейкахъ, поровну на каждой. Когда нѣсколько мальчиковъ не явились въ классъ, то на первой скамейкѣ сидѣли только 4 мальчика, на второй 5, а на третьей 3. Сколько мальчиковъ не явились въ классъ въ этотъ день?

У дѣвочки было 18 коп.; девятую часть всѣхъ своихъ денегъ она отдала бѣдному, треть употребила на покупку яблокъ, шестую часть — на покупку булки. Сколько ей надо приложить къ оставшимся деньгамъ, чтобы купить 4 карандаша, по 3 коп. каждый?

б) *На отвлеченныхъ числахъ.* Отъ 18 отнимите три раза 5; остатокъ увеличьте въ 5 разъ; отъ полученнаго числа отнимите 12; остатокъ увеличьте въ 3 раза. Какое получилось число?

Возьмите треть 18-ти; прибавьте къ полученному числу 3 и увеличьте полученное число въ 2 раза; отъ полученнаго числа возьмите шестую часть и придайте къ ней девятую часть того же числа. Какое составилось число?

в) *Вопросы.* На сколько и какія равныя части можно раздѣлить 18? Сколько будетъ: 2-жды 9, 3-жды 6, 6-ю 3? Половина 12-ти какую часть 18-ти составляетъ? Во сколько разъ половина 18-ти больше 5-ой части 15-ти? Треть какого числа нужно взять 6 разъ, чтобы получить 18? Девятая часть 18-ти сколько разъ содержится въ 14?

г) *Примѣры для вычисленій.* Двѣ таблички изъ «Сборника» на число 18.

Число 19.

1) Разложеніе.

$19=1\times19$	$19=10+9$
$19=2\times 9+1$	$19=11+8$
$19=3\times 6+1$	$19=12+7$
$19=4\times 4+3$	$19=13+6$
$19=5\times 3+4$	$19=14+5$
$19=6\times 3+1$	$19=15+4$
$19=7\times 2+5$	$19=16+3$
$19=8\times 2+3$	$19=17+2$
$19=9\times 2+1$	$19=18+1$

2) Выводы.

Сложеніе и вычитаніе. Къ 1, 3, 4, 5 какія числа нужно придать по нѣсколько разъ, чтобы составить 19?

Изъ какихъ чиселъ слагается 19?

Сколько надо придать къ 7×2, 3×6, 5×3, чтобы получилось 19?

Чего не достаетъ 8, 13, 16 до 19?

Сколько останется, если отъ 19 отнять 6, 9, 12, 14, 17?

Какимъ числомъ 19 больше 5, 8, 11, 13, 16?

Сколько разъ надо отнимать отъ 19 по 2, по 3, по 6, по 9, чтобы въ остаткѣ получилась 1?

Какое число надо отнять отъ 19 два раза, четыре раза, чтобы въ остаткѣ получилось 3?

Сколько надо придать къ 2, 4, 10, 15, 18, чтобы получилось 19?

Умноженіе и дѣленіе. На какія равныя числа разлагается 19?

Какія числа мѣшаютъ составить 19 изъ нѣсколько разъ взятыхъ 3, 7, 9?

Сколько надо отнять отъ 19, чтобы въ остаткѣ 2, 3, 4, 5, 8, 9 содержалось безъ остатка?

Сколько надо отнять отъ 19, чтобы остатокъ дѣлился пополамъ, на 3, на 4, на 6 равныхъ частей?

Сколько разъ 6, 7, 10, 13 содержится въ 19-ти и какой получается остатокъ?

3) Задачи.

№№ 135, 136, 137 и 138.

4) Бѣглое вычисленіе.

а) *На задачахъ.* Крестьянину нужно было пройти 19 верстъ; въ первый часъ онъ прошелъ 4 версты, во второй 3, въ третій 5, въ четвертый 4, а остальное разстояніе прошелъ въ пятый часъ. Сколько верстъ прошелъ онъ въ послѣдній часъ?

Отецъ роздалъ 19 орѣховъ тремъ сыновьямъ; младшему далъ 3 орѣха, а всѣ остальные орѣхи раздѣлилъ поровну между двумя старшими братьями. Каждый изъ старшихъ братьевъ далъ младшему по 2 орѣха. Сколько орѣховъ оказалось у каждаго изъ сыновей?

б) *На отвлеченныхъ числахъ.* Отъ 19 отнимите 15; остатокъ увеличьте въ 2 раза и прибавьте еще 4. Какое число получилось?

19 раздѣлите на три части. Какъ велика будетъ каждая часть?

в) *Вопросы.* Какія числа содержатся въ 19 безъ остатка? Сколько надо отнять отъ 19, чтобы треть полученнаго числа содержалась въ 12 два раза? Чѣмъ 19 безъ 8 больше 15 безъ 9-ти? Какое число надо прибавить къ 3-жды 4, чтобы получить 19? 19 безъ трехъ во сколько разъ больше четырехъ? и т. п.

г) *Примѣры для вычисленій.* Двѣ таблички изъ „Сборника“ на число 19.

Число 20.

1) Разложеніе.

20= 1×20	20=11+9
20= 2×10	20=12+8
20= 3× 6+2	20=13+7
20= 4× 5	20=14+6
20= 5× 4	20=15+5
20= 6× 3+2	20=16+4
20= 7× 2+6	20=17+3
20= 8× 2+4	20=18+2
20= 9× 2+2	20=19+1
20=10× 2	

2) Выводы.

Сложеніе и вычитаніе. Изъ сколькихъ десятковъ составляется 20?

Изъ какихъ двухъ неравныхъ чиселъ слагается 20?

Изъ какихъ равныхъ чиселъ складывается 20?

Сколько надо придать къ 6×3, 7×2, 9×2, чтобы получить 20?

На сколько надо увеличить 9, 13, 16, чтобы составить 20?

Сколько будетъ 20 безъ 3, 5, 8, 12?

Чѣмъ 20 больше 4, 6, 9, 17?

Какимъ числомъ 7, 10, 15, 18 меньше 20?

Сколько разъ можно отнять отъ 20 по 2, по 3, по 4, по 7?

Отнимайте отъ 20 по 4, по 6.

Умноженіе и дѣленіе. Сколько разъ надо взять по 2, по 4, по 5, по 10, чтобы получить 20?

Какія числа содержатся въ 20 безъ остатка?

Сколько разъ въ 20 содержится 3, 6, 7, 8, и какой остатокъ получается?

Какъ велика половина, четверть, пятая, десятая часть 20-ти?

Во сколько разъ 4, 5, 10 меньше 20-ти?

3) Задачи.

№№ 139, 140, ... 150.

Задача. (Изъ «Сборника» № 145). Отецъ купилъ на 20 коп. яблокъ; всѣ эти яблоки онъ роздалъ четыремъ своимъ сыновьямъ такъ, что каждый младшій сынъ получилъ однимъ яблокомъ менѣе каждаго слѣдующаго за нимъ старшаго, а самый младшій сынъ получилъ только одно яблоко. Сколько яблокъ купилъ отецъ и почемъ платилъ онъ за каждое яблоко?

Устное рѣшеніе. Младшій сынъ получилъ одно яблоко, значитъ слѣдующій старшій $1+1=2$, слѣдующій $2+1=3$, наконецъ самый старшій $3+1=4$ яблока. Всѣ вмѣстѣ получили $1+2+3+4=10$ яблокъ. 10 яблокъ стоютъ 20 коп., а одно яблоко стоитъ 2 коп., потому что 10-ая часть 20 будетъ 2.

4) Бѣглое вычисленіе.

а) *На задачахъ.* Въ трехъ комнатахъ было 20 стульевъ; въ одной комнатѣ 4 стула, въ другой 7 и въ третьей остальные; изъ первой комнаты перенесли въ третью 2 стула, а изъ второй 3. Сколько теперь стульевъ въ третьей комнатѣ?

Изъ 20 листовъ бумаги ученикъ сшилъ тетради; на одну пошла четвертая часть бумаги, на другую пятая, на третью десятая часть, а изъ остальной бумаги онъ сшилъ еще три равныя тетради. Сколько листовъ пошло на каждую изъ послѣднихъ тетрадей?

б) *На отвлеченныхъ числахъ.* Отъ 20 отнимите 8; возьмите половину остатка и увеличьте его въ три раза; отъ полученнаго числа отнимите 2; полученное число раздѣлите на четыре равныя части. Сколько разъ четвертая часть содержится въ 20-ти?

Возьмите половину 20-ти; придайте сюда десятую часть того же числа, потомъ пятую; полученное число раздѣлите пополамъ и половину отнимите отъ 20-ти. Сколько получилось въ остаткѣ?

в) *Вопросы.* Сколько будетъ: 2-жды 10, 4-жды 5, 5-ью 4? Сколько разъ четвертая часть 20 содержится въ 15? Во сколько разъ третья часть 12 меньше 20? На какія равныя части можно раздѣлить 20? 12 безъ 7 какую часть 20-ти составляетъ? Половина 20 во сколько разъ больше пятой части 10-ти? и т. п.

г) *Примѣры для вычисленій.* Двѣ таблички изъ «Сборника» на число 20 и еще четыре послѣднія изъ этого отдѣла таблички съ ? въ серединѣ.

Такимъ образомъ, на изученіи чиселъ отъ 1 до 20, въ первый годъ обученія, дѣти знакомятся съ главнѣйшими основными пріемами вычисленій и разсужденій при рѣшеніи теоретическихъ и практическихъ вопросовъ. Умѣя складывать числа въ родѣ $8+3$, $6+7$, $9+8$ и т. п., а также вычитать $13-8$, $16-9$, $15-6$ и т. п., ученики при изученіи послѣдующихъ чиселъ не будутъ затрудняться въ сложеніи и вычитаніи чиселъ двузначныхъ. Пріобрѣтая вообще навыкъ и пріемъ разсмотрѣнія и изученія числа, они легко могутъ теперь по тому же пріему разсматривать и изучать и числа большія.

Для повторенія всего пройденнаго курса, которое не можетъ занять много времени, такъ какъ при изученіи каждаго числа ученики постоянно встрѣчались со всѣми предшествовавшими ему числами, могутъ служить: во-первыхъ,—вопросы на отвлеченныя числа, касающіеся преимущественно ихъ состава и взаимнаго ихъ отношенія, во-вторыхъ—вычисленіе формулъ и въ-третьихъ,—рѣшеніе практическихъ задачъ. Для послѣдней цѣли въ концѣ рубрики *б* I-го отдѣла «Сборника» помѣщены задачи на всѣ числа въ разбивку отъ 11 до 20, каковы: №№ 151,..... 164. Для повторенія курса на отвлеченныхъ числахъ выбираются главнѣйшіе вопросы, въ родѣ слѣдующихъ:

Какъ 9 увеличить 7-ю?

Какъ узнать, чѣмъ 16 больше 9-ти?

Сколько будетъ: 2-жды 6, 3-жды 5, 3-жды 6? и т. п.

Въ какихъ числахъ 2 содержится безъ остатка?

Какія числа можно раздѣлить на 3 равныя части?

Какія числа нельзя дѣлить пополамъ безъ остатка?

и т. п.

На этихъ двухъ ступеняхъ обученія (изученіе чиселъ отъ 1 до 10 и отъ 11 до 20) ученики, какъ видно изъ расположенія и состава упражненій, усвоиваютъ въ памяти таблички сложенія, вычитанія и умноженія посредствомъ самыхъ упражненій, а не вслѣдствіе заучиванія ихъ наизусть.

Въ этомъ курсѣ дѣйствія еще не выдѣляются подъ отдѣльныя рубрики, хотя ученики и теоретически, и практически достаточно хорошо усвоили различныя отношенія и комбинаціи чиселъ между собою, опредѣляемыя посредствомъ четырехъ дѣйствій. Обобщеніе этихъ отношеній и комбинацій въ дѣйствія было бы раннее и не вызывается необходимостью; достаточно, если дѣти хорошо постигнутъ самый смыслъ различныхъ отношеній и комбинацій между числами.

ГОДЪ ВТОРОЙ.

А. Изученіе чиселъ отъ 21 до 100.

Послѣ подробнаго изложенія, въ предѣлѣ чиселъ отъ 1 до 21, всякаго рода упражненій, ведущихъ ученика къ полному знакомству съ числомъ, нѣтъ надобности въ такой же подробности излагать эти упражненія и дальше для каждаго числа въ отдѣльности. Учитель достаточно внимательно прослѣдившій изложеніе курса перваго года легко можетъ примѣнить всѣ изложенныя упражненія для изученія дальнѣйшихъ чиселъ первой сотни. А потому я, при изложеніи первой половины курса этого года (изученіе чиселъ отъ 21 до 100), ограничусь только подробнымъ описаніемъ самыхъ упражненій и изложеніемъ тѣхъ теоретическихъ выводовъ, которые уже необходимо дѣлать на этой ступени обученія.

Но прежде, нежели перейти къ изложенію упражненій, необходимо предпослать нѣкоторыя замѣчанія:

1) Такъ какъ учащіеся изъ упражненій въ предшествовавшемъ курсѣ усвоили достаточно таблички сложенія однозначныхъ чиселъ и вычитанія однозначнаго числа изъ однозначнаго и двузначнаго (до 20), а также изъ рѣшенія многихъ задачъ и сравненія чиселъ ясно поняли различныя комбинаціи и отношенія между числами, то не представляется уже необходимости изучать каждое число въ отдѣльности съ тою подробностію, съ какою изучались числа отъ 1 до 20. Относительно сложенія и вычитанія чиселъ этотъ курсъ требуетъ только приложенія усвоенныхъ уже учениками пріемовъ къ числамъ возрастающимъ. Относительно же умноженія и дѣленія чиселъ въ этомъ курсѣ приходится еще пройти многое.

2) А потому, преимущественное вниманіе въ этомъ курсѣ учитель долженъ обратить на основательное изученіе учениками чиселъ сложныхъ, каковы: 24, 30, 32, 36, 40, 45, 48 и т. д., и именно на изученіе ихъ со стороны дѣлимости на другія числа и со стороны состава ихъ изъ различныхъ множителей.

3) Къ нагляднымъ пособіямъ въ этомъ курсѣ приходится прибѣгать въ классѣ рѣже, нежели въ курсѣ предшествовавшемъ; въ случаѣ затрудненія учениковъ въ какомъ-либо вычисленіи можно производить это вычисленіе на шведскихъ счетахъ или на кубикахъ, чтобы ученики отъ времени до времени могли возстановлять въ своемъ сознаніи представленіе числа конкретнаго. При этомъ считаю долгомъ заявить, что если послѣ изученія первыхъ 20 чиселъ встрѣчается необходимость прибѣгать къ помощи наглядныхъ пособій, для изученія чиселъ до 100, то это есть явный признакъ того, что первыя 20 чиселъ пройдены худо.

4) Устное и письменное вычисленіе въ этомъ курсѣ должно идти равномѣрно, то-есть по количеству времени и упражненій.

Работы при изученіи чиселъ отъ 21 до 100, я для цѣльности излагаю въ видѣ отдѣльныхъ упражненій надъ всѣми числами отъ 21 до 100. Учитель самъ долженъ примѣнить эти упражненія къ тому или другому числу, при изученіи его въ классѣ.

1) Знакомство съ цѣлымъ десяткомъ.

Переходя къ изученію новаго десятка чиселъ, ученики знакомятс прежде всего съ составомъ цѣлаго десятка и потомъ уже приступают къ болѣе подробному знакомству съ каждымъ числомъ этого десятка Упражненія для знакомства съ десяткомъ располагаются такъ:

а) Прямой счетъ постепеннымъ прибавленіемъ по единицѣ въ пре дѣлѣ десятка, напримѣръ: 40, 41, 42 и т. д. до 50.

б) Обратный счетъ постепеннымъ отниманіемъ по единицѣ, на примѣръ: 50, 49, 48 и т. д. до 40.

в) Постепенное увеличеніе даннаго числа прибавленіемъ къ нем другого даннаго до тѣхъ поръ, пока получится число, выходящее з предѣлъ изучаемаго десятка, напримѣръ, при изученіи чиселъ отъ 3(до 40, къ данному числу 5 и числамъ постепенно возрастающим прибавляется по 4:

$5+4=9$	$21+4=25$
$9+4=13$	$25+4=29$
$13+4=17$	$29+4=33$
$17+4=21$	$33+4=37$

г) Постепенное уменьшеніе какого-либо изъ чиселъ десятка от ниманіемъ даннаго числа, напримѣръ:

$40-8=32$	$16-8=8$
$32-8=24$	$8-8=0$
$24-8=16$	

д) Писаніе чиселъ десятка при прямомъ и обратномъ порядк счета и въ разбивку подъ диктовку учителя.

2) Разложеніе изучаемаго числа на слагаемыя и множители.

Послѣ предварительнаго бѣглаго знакомства съ десяткомъ, числ изучаются въ отдѣльности. При этомъ, надо раздѣлить числа на группы: а) числа первоначальныя, б) числа сложныя, отличающіяс обиліемъ дѣлителей, каковы: 24, 30, 32, 36, 40, 45, 48 и проч. и в) числа сложныя, не столь замѣчательныя по своему составу из множителей, каковы: 21, 22, 25, 26, 27, 33 и проч. Числа перво начальныя изучаются преимущественно по своему составу изъ слагае мыхъ; на нихъ ученики упражняются въ сложеніи и вычитаніи чисел и чаще на числахъ отвлеченныхъ въ видѣ примѣровъ, нежели на числахъ конкретныхъ посредствомъ задачъ. Вторая группа чиселъ изучается подробно посредствомъ всѣхъ упражненій, приведенныхъ въ первомъ курсѣ для каждаго числа. Преимущественное вниманіе при изученіи этихъ чиселъ обращается на ихъ дѣлимость и на составъ ихъ изъ множителей. При упражненіяхъ преобладаютъ числа конкретныя и задачи. Наконецъ, количество времени и упражненій, необходимое для знакомства учениковъ съ числами третьей группы, должно быть болѣе, нежели для чиселъ первой группы, и менѣе, нежели для чиселъ второй.

Упражненія въ разложеніи чиселъ на слагаемыя и множители могутъ быть *устныя и письменныя.*

а) *Устное разложеніе на слагаемыя* (число 23).

На вопросъ учителя, изъ какихъ двухъ чиселъ составляется 23 ученики отвѣчаютъ въ разбивку: „23 состоитъ изъ 20 и 3, изъ 5 и 18, изъ 8 и 15, изъ 11 и 12“ и т. д.

Примѣчаніе. Первый составъ числа изъ двухъ слагаемыхъ всегда долженъ быть изъ десятковъ и единицъ.

Изъ какихъ трехъ чиселъ составляется 23? 23 составляется изъ $10+10+3$, изъ $2+3+18$, изъ $7+8+8$, изъ $8+11+4$ и т. д.

Тутъ же рѣшается вопросъ: можно ли составить 23 изъ равныхъ слагаемыхъ? Потомъ идутъ вопросы на вычитаніе. Сколько будетъ: $23-7$, $23-9$, $23-8$? и т. д. Какое число нужно отнять отъ 23, чтобы въ остаткѣ получить 4, 7, 9, 15? и т. д.

б) *Письменное разложеніе на слагаемыя* (число 37).

Письменное разложеніе на два, на три и т. д. слагаемыя производится или по выше приведеннымъ вопросамъ, отвѣты на которые ученики выписываютъ на своихъ доскахъ, или посредствомъ рѣшенія неопредѣленныхъ задачъ, что придаетъ работѣ большій интересъ.

Задача. 37 копеекъ желаютъ раздать тремъ бѣднымъ непоровну. Сколько можетъ получить каждый бѣдный?

Рѣшеніе составляется учениками въ видѣ таблички:

$37=1+2+34$	$37=6+7+24$
$37=2+3+32$	$37=7+8+22$
$37=3+4+30$	$37=8+9+20$
$37=4+5+28$	$37=9+10+18$
$37=5+6+26$	$37=10+11+16$

и т. д.

Таблички эти составляются по произволу учениковъ, или въ порядкѣ, въ родѣ того, который указанъ здѣсь, или въ разбивку.

Образцы задачъ для разложенія на слагаемыя.

1) 47 орѣховъ желаютъ раздать четыремъ мальчикамъ такъ, чтобы двое получили орѣховъ поровну, а остальные — непоровну. Сколько орѣховъ можетъ получить каждый мальчикъ?

2) Разнощикъ желаетъ разложить 53 яблока въ 4 корзины такъ, чтобы въ двухъ корзинахъ яблокъ было поровну, а въ остальныхъ двухъ—непоровну. Сколько яблокъ можетъ положить онъ въ каждую корзину?

3) Какъ можно поставить 59 мальчиковъ въ 4 ряда?

Упражненія въ разложеніи чиселъ на слагаемыя имѣютъ въ виду не столько полное знакомство учениковъ съ числомъ съ этой стороны, котораго нельзя и достигнуть на однихъ вышеприведенныхъ упражненіяхъ, сколько пріобрѣтеніе ими общаго пріема въ сложеніи и вычитаніи чиселъ.

Такимъ образомъ, слѣдуетъ добиваться, чтобы ученикъ сложеніе, напр, 27 и 39, производилъ устно такъ: 20 да 30 будетъ 50, 7 да 9=16, 50 да 16 составитъ 66.

Вычитаніе 27 изъ 42 ведется такъ: 42 безъ 20 будетъ 22; 22 безъ 7 будетъ 15. (Потому что 12—7=5, да еще 10, составится 15).

При этомъ, необходимо установить въ классѣ одинъ пріемъ сложенія и вычитанія чиселъ, допуская упрощеніе этихъ пріемовъ только въ частныхъ случаяхъ по указанію самихъ учениковъ.

в) *Устное разложеніе чиселъ на множители* (число 24) производится посредствомъ рѣшенія учениками частныхъ вопросовъ и постепеннаго ихъ обобщенія.

Скажите половину 24-хъ. (12). Четвертую часть. (6). Восьмую часть. (3). Какъ велика третья часть 24? (8). Шестая? (4). Двѣнадцатая? (2).

Слѣдовательно, какія числа содержатся въ 24 безъ остатка? (1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24).

На какія равныя части можно раздѣлить 24? (На 24, 12, 8, 6, 4, 3, 2).

Изъ сложенія какихъ равныхъ чиселъ составляется 24?

24 составляется изъ единицы, взятой 24 раза.

Изъ	2,	взятыхъ 12	разъ
„	3	„ 8	„
„	4	„ 6	„
„	6	„ 4	раза
„	8	„ 3	„
„	12	„ 2	„

Примѣчаніе. Въ случаѣ затрудненія учениковъ при изученіи состава числа изъ множителей, можно пользоваться классными счетами, употребляя ихъ двоякимъ образомъ. Напримѣръ, для числа 36. 1) На трехъ горизонтальныхъ проволокахъ надѣвается по 12 шаровъ, и тогда всѣ разложенія на множители производятся легко, именно:

$$36=12\times3$$
$$36=4\times9$$
$$36=6\times6$$
$$36=18\times2$$

Для второго разложенія ученики на каждой проволокѣ разлагаютъ 12 шаровъ на 3 четверки; для третьяго—на каждой проволокѣ 12 шаровъ разлагаютъ на двѣ шестерки; для четвертаго—18 шаровъ сдвигаются въ одну сторону счетовъ, а другіе 18—въ другую.

2) На вертикальныхъ проволокахъ число 36 раскладывается по указанію учениковъ на мелкіе множители, такъ какъ тамъ на каждой проволокѣ нельзя помѣстить болѣе 10 шаровъ. Но вертикальныя проволоки представляютъ въ этомъ отношеніи то удобство, что съ нихъ скоро можно снимать шары во время самой работы и перекладывать съ одной проволоки на другую.

Вообще, при разложеніи такого числа, какъ, напримѣръ, 48, при помощи счетовъ, достаточно выставить его на четырехъ горизонтальныхъ проволокахъ, по 12 шаровъ на каждой. Затѣмъ всѣ прочія разложенія могутъ быть выведены учениками и безъ передвиженія шаровъ.

г) *Письменное разложеніе чиселъ на множители* производится или тоже въ видѣ письменнаго обобщенія частныхъ вопросовъ, или въ видѣ рѣшенія неопредѣленныхъ задачъ, требующихъ всесторонняго разложенія числа на два множителя.

Задача. Сколькимъ мальчикамъ можно раздать 48 орѣховъ поровну, и по скольку орѣховъ получитъ каждый?

Рѣшеніе.

$48=48\times1$	$48=6\times8$
$48=24\times2$	$48=4\times12$
$48=16\times3$	$48=3\times16$
$48=12\times4$	$48=2\times24$
$48=8\times6$	$48=1\times48$

Изъ такихъ табличекъ ученики выводятъ кратныя отношенія чиселъ, напримѣръ, если $48=16\times3$, то $48:3=16$ и $48:16=3$ и т. п.

Иногда слѣдуетъ начинать изученіе числа со стороны его состава изъ множителей, изъ сравненія его съ однимъ изъ множителей. Такимъ образомъ, послѣ устнаго или письменнаго сравненія 56 съ 14 предлагаются вопросы: Сколько разъ 14 содержится въ 56? Какъ велика 4-ая часть 56? Восьмая часть? Сколько разъ 7 содержится въ 56? Какія числа содержатся въ 56 безъ остатка? На какія равныя части можно раздѣлить 56?

Зная изъ сравненія 56 съ 14, что 4-ая часть 56 будетъ 14, ученики говорятъ, что половина вдвое болѣе четвертой части, слѣдовательно, будетъ 28, а восьмая часть вдвое менѣе четвертой, слѣдовательно, будетъ 7; и т. д.

Такимъ образомъ, на основаніи сравненія числа съ однимъ изъ множителей, можно подробно разсмотрѣть составъ этого числа изъ различныхъ множителей и его дѣлимость на каждаго изъ своихъ множителей.

При устномъ сравненіи большихъ чиселъ съ малыми, напр. 92 съ 4-мя, упражненіе можно вести такъ: ученики по одиночкѣ отнимаютъ отъ 92 и чиселъ, получающихся отъ вычитанія, по 4; именно одинъ ученикъ говоритъ $92-4=88$, слѣдующій $88-4=84$, слѣдующій $84-4=80$ и т. д.

Затѣмъ ученики говорятъ, изъ сколькихъ четверокъ состоитъ 92, сколько разъ 4 содержится въ 92 и проч. До послѣднихъ отвѣтовъ въ случаѣ затрудненія учениковъ, они доходятъ, сосчитывая число всѣхъ учениковъ, вычитавшихъ по 4 изъ 92.

3) Выводы.

Когда отдѣльныя числа или группа, состоящая изъ нѣсколькихъ чиселъ, разсмотрѣны со стороны состава ихъ изъ слагаемыхъ или множителей, предлагаются вопросы, служащіе для закрѣпленія въ памяти учащихся главнѣйшихъ комбинацій и соотношеній чиселъ. Безъ этого учащіеся будутъ затрудняться при рѣшеніи практическихъ задачъ, въ которыя входятъ эти комбинаціи и соотношенія. Вопросы эти, по содержанію, вполнѣ сходны съ тѣми, которые приведены на всѣ четыре дѣйствія при каждомъ изъ первыхъ 20 чиселъ.

При рѣшеніи учащимися такихъ вопросовъ, надо обращать вниманіе, чтобы они всѣ вычисленія производили на основаніи десятичной системы счисленія, приводя вычисленія къ дѣйствіямъ надъ десятками и единицами.

Привожу образцы вычисленій на всѣ дѣйствія.

Къ 35 придать 28. 30 и 20 будетъ 50; 5 и 8=13, а 50 да 13 составитъ 63; слѣдовательно, 35+28=63.

Отъ 73 отнять 37. 73 безъ 30 будетъ 43; 43 безъ 7 будетъ 36; слѣдовательно 73—37=36.

17 взять 4 раза. 4 раза 10 будетъ 40; 4 раза 7 будетъ 28; 40 и 28 равно 68; слѣдовательно 4 раза будетъ 68.

Найти 5-ую часть 65 ти. 5-я часть 10-ти есть 2; 5-ая часть 60-ти есть 2×6×12; пятая часть 5-ти есть 1; 12+1=13; слѣдовательно 5-ая часть 65 есть 13.

Найти седьмую часть 84-хъ. 7-ая часть 70-ти есть 10, а 7-ая часть 14 есть 2; слѣдовательно 7-ая часть 84-хъ есть 12.

Узнать, сколько разъ 8 содержится въ 56. 8 въ десяти содержится 1 разъ съ остаткомъ 2; 8 въ 50-ти содержится 5 разъ съ остаткомъ 2×6=10; 8 въ 16-ти содержится 2 раза; слѣдовательно 8 въ 56-ти содержится 5+2=7 разъ.

При рѣшеніи вопросовъ: сколько разъ одно число содержится въ другомъ, во сколько разъ одно число болѣе или менѣе другого, сколько получится, если данное число уменьшить во столько-то разъ, какъ велика такая-то часть даннаго числа, за лучшій пріемъ слѣдуетъ считать подъисканіе искомаго числа простымъ угадываніемъ и провѣркою. Такъ, напримѣръ вопросъ: сколько разъ 8 содержится въ 56, рѣшается такъ: положимъ, что 8 въ 56 содержится 5 разъ; 5 разъ 8 будетъ 40, остается еще 16 (56—40), а въ 16-ти 8 содержится 2 раза, слѣдовательно въ 56-ти 8 содержится 5+2=7 разъ. Такой пріемъ сразу требуетъ отъ учащагося пользованія таблицею умноженія.

Для сообщенія ученикамъ пріема изученія чиселъ со стороны состава ихъ изъ множителей и дѣлимости ихъ на своихъ производителей, полезно вводить такого рода упражненія: положимъ, дѣти изъ разложенія 28 узнали, что оно дѣлится на 7 равныхъ частей и что въ каждой части будетъ 4; предлагается вопросъ: „какъ составить слѣдующее послѣ 28 число, которое дѣлилось бы на 7 равныхъ частей, и сколько будетъ въ каждой 7-ой части?“ (Число составляется такъ: $28+7=35$). Затѣмъ учащіеся составляютъ слѣдующее послѣ 35 число, дѣлящееся на 7, и, наконецъ, перечисляютъ одно за другимъ всѣ числа въ предѣлѣ 100, дѣлящіяся на 7 равныхъ частей безъ остатка. Такія же упражненія ведутся и при составленіи чиселъ, дѣлящихся безъ остатка на 2, 3, 4, 11 и т. д. Изъ такихъ упражненій дѣти сами легко и незамѣтно выводятъ признаки дѣлимости чиселъ на 2, 4, 4, 10 и 11, а при нѣкоторой помощи учителя могутъ вывести признаки дѣлимости чиселъ на 3, 6, 8, 9. Если же нѣкоторые признаки подмѣчены учащимися, то дальнѣйшее изученіе чиселъ первой сотни идетъ быстрыми шагами.

4) Задачи.

Изученіе чиселъ на этой ступени обученія также сопровождается рѣшеніемъ соотвѣтствующихъ задачъ изъ „Сборника“, причемъ главнѣйшее вниманіе учитель обращаетъ не столько на число, сколько на раскрытіе учениками соотношеній между числами и условіями задачи, на правильное выраженіе ими плана рѣшенія задачи и на причину того или другого пріема вычисленія. Иногда, впрочемъ, можно все изученіе какого-либо числа основать на рѣшеніи всей группы задачъ, относящихся въ „Сборникѣ“ къ этому числу, и потомъ уже сдѣлать обобщеніе относительно состава числа въ отвлеченномъ видѣ.

Задачи «Сборника» составлены такъ, что въ группѣ задачъ, относящихся къ одному числу, охватываются всѣ его важнѣйшія отношенія къ предшествовавшимъ числамъ. Потомъ въ задачахъ другихъ отдѣловъ эти отношенія часто повторяются и прибавляются новыя; такъ, напримѣръ, въ отдѣлѣ *в* на число 24 имѣется 7 задачъ, но отношенія этого числа повторяются во всѣхъ слѣдующихъ отдѣлахъ въ задачахъ, относящихся къ другимъ числамъ.

При устномъ рѣшеніи задачи ученики, какъ и прежде, усвоивъ хорошо содержаніе задачи со словъ учителя, или прочитывая ее по „Сборнику“, производятъ вычисленія, даютъ отвѣты на вопросъ задачи и затѣмъ уже, по требованію учителя, высказываютъ планъ рѣшенія и всѣ вычисленія, сдѣланныя для рѣшенія задачи.

Письменное рѣшеніе можетъ быть въ двухъ видахъ: 1) послѣ устнаго рѣшенія задачи ученики записываютъ на своихъ доскахъ всѣ сдѣланныя вычисленія—въ видѣ повторенія продѣланнаго и для большаго закрѣпленія въ памяти пріема рѣшенія; 2) учителемъ указываются задачи изъ «Сборника», и ученики сразу рѣшаютъ письменно одну или нѣсколько задачъ въ рядъ и потомъ, по требованію учителя читаютъ написанныя рѣшенія и высказываютъ, для чего и почему то или другое вычисленіе сдѣлано.

Письменное рѣшеніе задачи ведется въ томъ видѣ, какъ это было показано въ первомъ курсѣ, а когда ученики пріобрѣтутъ уже значительный навыкъ вообще въ рѣшеніи задачъ и въ письменномъ выраженіи всѣхъ вычисленій, тогда при изученіи послѣднихъ десятковъ первой сотни можно перейти къ болѣе подробному письменному резюмированію рѣшенія задачъ въ видѣ полныхъ строчекъ. Причемъ ученикамъ обстоятельно выясняется составъ и значеніе каждой строчки

Привожу образецъ такой работы.

Задача. (Изъ «Сборника» № 482). Крестьянинъ отправился изъ своей деревни въ городъ; первыя 45 верстъ онъ проѣхалъ со своимъ знакомымъ на телѣгѣ и каждый часъ дѣлалъ по 9 верстъ, а все остальное разстояніе до города прошелъ пѣшкомъ и дѣлалъ каждый часъ 4 версты. Сколько всего времени былъ крестьянинъ въ дорогѣ, если отъ деревни до города 73 версты?

Послѣ устнаго рѣшенія задачи ученикамъ для написанія строчекъ предлагаются вопросы:

Какъ вы рѣшили задачу? Сначала узнали, во сколько часовъ крестьянинъ проѣхалъ 45 верстъ, потомъ сколько верстъ шелъ онъ пѣшкомъ, потомъ сколько часовъ шелъ онъ и, наконецъ, сколько всего времени былъ въ дорогѣ.

Значитъ, какія вычисленія сдѣлали вы? Сначала узнавали, сколько разъ 9 содержится въ 45, и получили 5, то-есть, что крестьянинъ проѣхалъ 45 верстъ въ 5 часовъ; потомъ отъ 73 отняли 45 и получили 28, то-есть число верстъ, которыя онъ прошелъ; затѣмъ узнали, сколько разъ 4 содержится въ 28, и получили 7, то-есть, что крестьянинъ шелъ 7 часовъ; наконецъ, сложили 5 часовъ и 7 часовъ и получили, сколько всего времени былъ крестьянинъ въ дорогѣ.

Запишите все вычисленіе.

$$\begin{array}{r} 45 : 9 = 5 \\ 73 - 45 = 28 \\ 28 : 4 = 7 \\ 4 + 7 = 12 \end{array}$$

Итакъ, что вы узнавали первымъ вычисленіемъ? Узнавали, во сколько часовъ крестьянинъ проѣхалъ 45 верстъ.

Какъ бы записать полнѣе, чтобы видно было, во-первыхъ, что вы узнавали, во сколько часовъ крестьянинъ проѣхалъ 45 верстъ во-вторыхъ, что для этого вычисляли, сколько разъ 9 содержится въ 45 и, въ-третьихъ, что получилось 5 часовъ?

Послѣ нѣкоторой помощи учителя ученики пишутъ:

Крестьянинъ проѣхалъ 45 *верстъ въ* 45 : 9=5 *часовъ.*

Потомъ такимъ же образомъ устанавливается и написаніе остальныхъ трехъ строчекъ, которыя пишутся въ такомъ видѣ:

Крестьянинъ прошелъ пѣшкомъ 73—45=28 *верстъ;*
28 *верстъ онъ прошелъ въ* 28 : 4=7 *часовъ;*
всего былъ въ дорогѣ 5+7=12 *часовъ.*

Послѣ написанія строчекъ предлагаются вопросы:

Изъ сколькихъ частей должна состоять каждая строчка? Изъ трехъ.

Что выражается въ первой части? Что узнается для рѣшенія задачи.

Во второй? Какое вычисленіе необходимо сдѣлать съ числами для опредѣленія искомаго.

Въ третьей? Какое число получается отъ вычисленія; оно-то и будетъ то число, которое нужно было найти.

Задача. (Изъ «Сборника» № 485). Одинъ покупатель купилъ у разносчика 5 яблокъ и 6 грушъ за 49 коп., а другой, по тѣмъ же цѣнамъ, купилъ 10 яблокъ и 6 грушъ за 74 коп. Почемъ продавалъ разносчикъ десятокъ грушъ и десятокъ яблокъ?

Письменное рѣшеніе.

Второй купилъ болѣе перваго на 10—5=5 яблокъ.
5 яблокъ стоютъ 74—49=25 коп.
10 яблокъ стоютъ 25×2=50 коп.
6 грушъ стоютъ 74—50=24 коп.
1 груша стоитъ 24 : 6=4 коп.
10 грушъ стоютъ 4×10=40 коп.

5) Бѣглое вычисленіе.

Бѣглое вычисленіе производится въ этомъ курсѣ преимущественно на числахъ отвлеченныхъ и служитъ для сообщенія ученикамъ навыка свободно обращаться съ числомъ. Состоитъ оно, какъ было объяснено уже въ первомъ курсѣ, въ томъ, что учитель медленно и раздѣльно говоритъ классу задачу, въ которой прямо указываются дѣйствія съ данными числами; ученики совершаютъ умственно названныя дѣйствія и даютъ отвѣтъ вслѣдъ за предложеніемъ учителемъ вопроса задачи. Если нѣкоторые ученики утеряли число, или не умѣли сдѣлать во-время вычисленія, то задача возстанавливается и вычисленія производятся ими по частямъ. Въ первомъ курсѣ приведено мною достаточно примѣровъ для подобныхъ упражненій; примѣры эти могутъ служить образцами для составленія учителемъ во время урока подобныхъ же примѣровъ при изученіи чиселъ отъ 21 до 100. Здѣсь я приведу только образецъ особеннаго рода задачъ для бѣглаго вычисленія.

Одному ученику предлагается задумать число между какими-нибудь предѣлами; напрмѣръ, если изучены числа до 40, что число можетъ быть задумано между 20 и 40. Отъ задуманнаго числа ученикъ отнимаетъ число, указанное учителемъ, напримѣръ, 17, полученное число увеличиваетъ въ два раза и говоритъ классу результатъ, который получилъ. Классъ обратнымъ вычисленіемъ долженъ узнать задуманное число. Работа эта очень интересуетъ учениковъ и весьма полезна, такъ какъ, во-первыхъ, основывается на обратныхъ повѣрочныхъ вычисленіяхъ и, во-вторыхъ, знакомитъ учениковъ, мало-помалу, съ составомъ и анализомъ сложныхъ формулъ.

Задача. N! Задумайте четное число не больше 60 и не меньше 40; раздѣлите ваше число пополамъ и отъ полученной половины отнимите 16. Сколько получили вы?

Ученикъ говоритъ, положимъ, 12.

Рѣшеніе. 12 получилось, когда отъ половины задуманнаго числа отняли 16; значитъ, половина задуманнаго числа была $12+16=28$; такъ какъ половина задуманнаго числа 28, то все число равно $28\times2=56$.

Задача. P! Задумайте число не больше 16 и не меньше 10; увеличьте ваше число въ 6 разъ; отъ полученнаго числа отнимите 39 и возьмите треть остатка. Какое число получилось?

Ученикъ говоритъ, положимъ, 15,

Рѣшеніе. 15 есть третья часть нѣкотораго числа, значитъ, само число равно $15\times3=45$; 45 получилось, когда отъ нѣкотораго числа отняли 39, значитъ, это число было $45+39=84$; 84 получилось, когда задуманное число увеличилось въ 6 разъ, значитъ, задуманное число въ 6 разъ менѣе 84, а 6-я часть 84=14; значитъ задумано было 14.

Само собою разумѣется, что первыя упражненія въ этомъ родѣ должны быть простѣйшія и усложняться мало-по-малу, чтобы ученики могли хорошо выработать пріемъ обратнаго вычисленія.

Привожу примѣры для показанія постепенности ихъ усложненія.

1) Задумайте число не больше 30 и не меньше 20; отнимите отъ него 13. Какое число получилось? Классу: какое число задумано?

2) Возьмите число не больше 10; придайте къ нему 18. Какое число получилось? Классу: какое число задумано?

3) Возьмите число не больше 10; увеличьте его въ 6 разъ. Скажите полученное число. Какое число задумано?

4) Задумайте число, дѣлящееся на 8 безъ остатка; возьмите 4-ую часть вашего числа. Скажите полученное число. Какое число задумано?

5) Возьмите четное число; раздѣлите пополамъ и къ половинѣ придайте 9. Какое число получилось? Какое число задумано?

6) Задумайте число не больше 20; увеличьте его въ 4 раза; отъ полученнаго числа отнимите 15. Скажите полученное число. Какое число было задумано?

7) Возьмите число не больше 17; увеличьте его въ 4 раза; отъ полученнаго числа отнимите 8; остатокъ раздѣлите пополамъ. Скажите полученное число. Какое число задумано?

8) Задумайте число не меньше 60, которое бы дѣлилось на 6 безъ остатка; возьмите третью часть вашего числа; придайте сюда 18; полученное число раздѣлите пополамъ; отъ полученнаго числа отнимите 13. Скажите, что получилось. Какое число задумано?

Такое усложненіе задачъ должно совершаться не въ одинъ и не въ два, три урока, а постепенно; такъ что упражненія эти предлагаются ученикамъ въ перемежку съ другими, исподволь. Ученики, задумывающіе числа, постоянно мѣняются, и для нихъ-то эти упражненія особенно важны, такъ какъ сами они вычисляютъ въ прямомъ порядкѣ, а товарищи ихъ, отыскивающіе задуманное число, въ обратномъ; слѣдовательно, тотъ и другой путь вычисленія и составъ формулы для этихъ учениковъ становятся совершенно ясными.

6) Вычисленіе примѣровъ.

Прежде перехода къ окончательнымъ выводамъ въ отвлеченномъ видѣ относительно выдѣленія дѣйствій и ихъ значенія, весьма важно упражненіе представляетъ чтеніе, писаніе подъ диктовку и вычисленіе примѣровъ съ отвлеченными числами. При этой работѣ ученики сжато намѣчаютъ отношенія и составъ отвлеченныхъ чиселъ и отъ этихъ отношеній впослѣдствіи легко переходятъ къ обобщенію ихъ въ дѣйствія и къ опредѣленію каждаго дѣйствія и его составныхъ элементовъ и результата. Опять-таки и эти упражненія чередуются съ другими и не должны составлять исключительнаго матеріала для одного урока.

а) *Чтеніе примѣра.*

Учитель пишетъ на доскѣ:

$$(65-48)+(13+4)-(56:8)=?$$

Ученики читаютъ: „отъ 65 отнять 48, къ полученному числу придать 13, взятое 4 раза, и отъ полученнаго числа отнять 8-ую часть 56-ти".

б) *Писаніе примѣра подъ диктовку.*

Учитель диктуетъ: „36 увеличьте 25-ью; отъ полученнаго числа отнимите 6-ую часть 42-хъ и къ полученному числу придайте 32 безъ 19".

Ученики пишутъ:

$$(36+25)-(42:6)+(32-19)=?$$

в) *Вычисленіе примѣра.*

Въ „Сборникѣ" задачъ и примѣровъ для вычисленій на каждое число отъ 21 до 50 приведено по двѣ таблички примѣровъ, въ каждой табличкѣ 10 или 8 строкъ, а на числа отъ 51 до 100 двѣ таблички приведены на каждую пару чиселъ, напримѣръ на 51 и 52, на 53 и 54 и т. д. Первая табличка требуетъ только сложенія и вычитанія чиселъ, вторая—всѣхъ четырехъ дѣйствій. Кромѣ того, въ концѣ каждаго десятка чиселъ приведено по три таблички примѣровъ, въ которыхъ неизвѣстное число входитъ въ формулу до знака равенства. Такимъ образомъ, учащіеся въ этихъ табличкахъ найдутъ весьма обильный матеріалъ для устныхъ и письменныхъ вычисленій съ отвлеченными числами.

Б. Выводъ и опредѣленіе четырехъ дѣйствій на основаніи изученія чиселъ первой сотни.

Понятія о необходимости дѣйствій, о значеніи каждаго дѣйствія и распредѣленіе дѣйствій выводятся прямо изъ всѣхъ упражненій съ числомъ во время изученія или послѣ изученія чиселъ первой сотни, когда ученики уже вполнѣ хорошо освоились со всѣми отношеніями и комбинаціями чиселъ между собою. Упражненіе въ выдѣленіи дѣйствій составляетъ хорошее повтореніе проходимаго курса. Сначала при разложеніи и сравненіи между собою чиселъ, а также при рѣшеніи задачъ и вычисленіи формулъ, ученики знакомятся съ простѣйшими понятіями: къ одному числу прибавить другое число, одно число да другое число, соединить два или нѣсколько чиселъ въ одно число, увеличить одно число другимъ числомъ, придать, отнять, уменьшить одно число другимъ числомъ, узнать, чѣмъ одно число больше другого, увеличить число въ нѣсколько разъ, повторить, взять нѣсколько разъ, уменьшить число въ нѣсколько разъ, раздѣлить число на равныя части, узнать, сколько разъ одно число содержится въ другомъ, во сколько разъ одно число болѣе или менѣе другого и т. п. Потомъ, по мѣрѣ упражненій, понятія эти они, незамѣтно для самихъ себя, группируютъ въ болѣе общія и безошибочно совершаютъ одно и то же дѣйствіе съ числомъ, когда, напримѣръ, его нужно повторять нѣсколько разъ, увеличить въ нѣсколько разъ, взять нѣсколько разъ, и обозначаютъ это дѣйствіе въ различныхъ его значеніяхъ однимъ и тѣмъ же знакомъ. Такимъ образомъ, составляется въ сознаніи ученика общее понятіе о дѣйствіи надъ числомъ. За образованіемъ и совершеннымъ укрѣпленіемъ въ сознаніи учениковъ этого понятія слѣдуетъ составленіе системы, то-есть выдѣленіе различныхъ дѣйствій въ принятомъ порядкѣ ихъ расположенія; послѣ чего становится совершенно естественнымъ дать ученику и обобщенныя названія цѣлыхъ группъ частныхъ понятій, т.-е. названія: сложеніе, вычитаніе, умноженіе, дѣленіе. Легко затѣмъ выдѣлить элементы и результаты дѣйствій (слагаемыя, сумма, вычитаемое, разность и проч.), установить между ними взаимную связь и вывести опредѣленія какъ самыхъ дѣйствій, такъ и ихъ элементовъ.

Перехожу къ болѣе подробному изложенію работы при выдѣленіи каждаго дѣйствія.

Сложеніе.

Учитель диктуетъ ученикамъ: напишите 15 да 18 я сколько получится? ($15+18=33$). Къ 29 прибавить 46. ($29+46=75$). 34 увеличить 27-ью ($34+27=61$).

Почему вы во всѣхъ случаяхъ поставили одинъ и тотъ же знакъ $+$? Потому что во всѣхъ этихъ случаяхъ нужно было къ одному числу прибавлять другое, что означается однимъ и тѣмъ же знакомъ $+$.

Въ какихъ числахъ между двумя числами ставятъ знакъ +?

Когда нужно къ одному числу прибавить другое, когда два числа нужно сложить въ одно число, когда одно число нужно увеличить другимъ числомъ.

Учитель пишетъ на доскѣ:

$$36+45=81.$$

Какъ прочесть это выраженіе?

36 да 45 будетъ 81; если къ 36 прибавить 45, то получится 81; если 36 увеличить 45-ью единицами, то получится 81; 36, сложенное съ 45-ью, даетъ 81 и проч.

Какъ вы будете вычислять, если нужно къ 27 прибавить 43? Мы два числа сложимъ въ одно число такъ: 20 да 40 будетъ 60, 7 да 3 будетъ 10, а 60 да 10 составляетъ 70; слѣдовательно 27 да 43 составляетъ 70.

А если нужно 27 увеличить 43-мя единицами?

Вычисленіе будетъ одно и то же.

Замѣтьте, что вычисленіе съ числами называютъ, обыкновенно, *дѣйствіемъ*. Какое же дѣйствіе вы сдѣлали съ числами 27 и 43?

Мы сдѣлали *сложеніе*; эти два числа сложили въ одно число и получили 70.

Можно ли производить сложеніе нѣсколькихъ чиселъ, болѣе двухъ? Напишите примѣръ, въ которомъ бы нѣсколько чиселъ складывались вмѣстѣ.

$$5+17+36+19=77.$$

Скажите, когда нужно надъ числами производить сложеніе? (Ученики повторяютъ различные случаи, говоря: съ числами производится сложеніе, когда нѣсколько чиселъ нужно соединить въ одно число, когда и т. д.). Составьте задачу, для рѣшенія которой нужно было бы сложить числа.

Ученики приводятъ задачи въ родѣ слѣдующихъ:

„Одному сыну отецъ далъ 12 орѣховъ, другому 15 и третьему 18. Сколько орѣховъ раздалъ отецъ тремъ сыновьямъ?“

„У одного мальчика было 25 коп., а у другого 8-ью копейками болѣе. Сколько было денегъ у второго и сколько у обоихъ?“

По поводу, напримѣръ, первой задачи учитель спрашиваетъ, почему для рѣшенія ея нужно числа складывать. Потому что здѣсь нужно узнать число орѣховъ, розданныхъ тремъ сыновьямъ, значитъ 12, 15 и 18 нужно соединить въ одно число, нужно вмѣстѣ сложить.

Какое же дѣйствіе съ числами мы будемъ называть сложеніемъ?

Сложеніемъ называется дѣйствіе, по которому два или нѣсколько чиселъ соединяется въ одно число.

Замѣтьте, что числа, которыя складываются, называются *слагаемыми*, а число, получающееся отъ сложенія слагаемыхъ, называется *суммою*.

Число 85 есть сумма какихъ двухъ чиселъ?

Число 97 есть сумма какихъ трехъ слагаемыхъ?

Составить сумму изъ слагаемыхъ: 34, 28 и 19.

Затѣмъ идетъ повтореніе пройденнаго на составленіи примѣровъ и задачъ на сложеніе чиселъ, и на рѣшеніи вопросовъ: какое дѣйствіе называется сложеніемъ, когда употребляется сложеніе, какія числа называются слагаемыми, какое число называется суммою?

Вычитаніе.

Напишите: отъ 43 отнять 27 (43—27=16); 65 уменьшить 48-ью (65—48=17); изъ 97 вычесть 39 (97—39=58); на сколько 56 болѣе 37? (56—37=19).

Почему вы во всѣхъ этихъ случаяхъ поставили между числами одинъ и тотъ же знакъ—? Потому что во всѣхъ этихъ случаяхъ приходится изъ одного числа вычитать, отнимать другое число, что означается знакомъ—.

Слѣдовательно, какъ вы прочтете такое выраженіе: 81—65=16?

81 безъ 65 даетъ 16; если отъ 81 отнять 65, то получится 16; если 81 уменьшить 65-ью единицами, то получится 16; 81 больше 65 на 16 единицъ.

Какъ вы будете вычислять, если я скажу: изъ 72 вычесть 46.

72 безъ 40 будетъ 32, 32 безъ 6 будетъ 26.

А если я скажу: 72 уменьшить 46-ью единицами.

Вычисленіе будетъ то же, такъ какъ все-таки изъ 72 придется вычесть 46.

Какое же дѣйствіе дѣлаемъ мы въ этихъ случаяхъ съ числами 72 и 46?

Вычитаніе,—изъ 72 вычитаемъ 46.

Чѣмъ, это дѣйствіе отличается отъ сложенія?

Тѣмъ, что въ сложеніи мы изъ нѣсколькихъ чиселъ составляемъ одно число, къ одному числу прибавляемъ другое, значитъ, его увеличиваемъ, а вычитаніемъ мы число уменьшаемъ.

Скажите, въ какихъ случаяхъ приходится изъ одного числа вычитать другое?

Изъ одного числа приходится вычитать другое, когда данное число нужно уменьшить на какое-нибудь другое число, когда отъ одного числа нужно отнять другое, когда нужно узнать, на сколько одно число больше или меньше другого?

Составьте задачу, для рѣшенія которой пришлось бы изъ одного числа вычесть другое.

Ученики приводятъ задачи:

„Мальчикъ, имѣя 28 сливъ, далъ своему товарищу 15 сливъ Сколько сливъ у него осталось?.

„У одного мальчика было 36 коп., а у другого 17-ью копейками менѣе. Сколько денегъ было у второго“.

«Въ двухъ классахъ училища 70 учениковъ; въ одномъ изъ нихъ 36. Сколько въ другомъ?“

Какое дѣйствіе съ числами мы будемъ называть *вычитаніемъ*?

Вычитаніемъ называется дѣйствіе, по которому отъ одного числа отнимается другое число, или узнается, чѣмъ одно число больше или меньше другого.

Что дѣлается съ числомъ, когда изъ него вычитаютъ другое число?

Число уменьшается.

Замѣтьте, что число, изъ котораго вычитаютъ другое число, называется *уменьшаемымъ*; число, которое вычитаютъ, называется *вычитаемымъ*. А какъ назвать число, полученное отъ вычитанія?

Остаткомъ.

Остатокъ называется также *разностью*. Почему?

Потому что, вычитая одно число изъ другого, мы узнаемъ также, на сколько одно число больше или меньше другого, на сколько одно число *разнится* отъ другого.

Число 17 можетъ быть разностью какихъ двухъ чиселъ?

Число 29 можетъ быть разностью какихъ двухъ чиселъ?

Уменьшаемое 74, разность 37, какъ велико вычитаемое?

Вычитаемое 45, разность 29, какъ велико уменьшаемое?

Затѣмъ слѣдуетъ повтореніе на упражненіяхъ и вопросахъ, въ родѣ тѣхъ, которые приведены въ отдѣлѣ „сложеніе“.

Для закрѣпленія въ памяти и сознаніи учениковъ значенія дѣйствій сложенія и вычитанія и для большей наглядности ихъ различія, ученикамъ предлагаютъ составлять задачи, для рѣшенія которыхъ пришлось бы совершать оба дѣйствія.

Образецъ задачъ.

«Крестьянинъ имѣлъ 8 четвертей овса и еще со своего поля собралъ 13 четвертей; изъ этого овса онъ продалъ 17 четвертей. Сколько овса у него осталось?»

„Имѣя 76 коп., разносчикъ купилъ десятокъ апельсинъ за 45 коп. и продалъ ихъ самъ за 60 коп. Сколько теперь у него денегъ?"

Умноженіе.

Учитель пишетъ на доскѣ:

$$12\times6=72$$

и спрашиваетъ, какъ прочесть это выраженіе?

6 разъ 12 будетъ 72; если 12 взять, повторить, сложить 6 разъ, то получится 72; если 12 увеличить въ 6 разъ, то получится 72.

Какъ вычисляете вы 7 разъ 14?

7 разъ 10 будетъ 70, да 7 разъ 4 будетъ 28, а 70 да 28 составитъ 98.

Какъ еще иначе можно вычислить 7 разъ 14?

Можно сложить 7 разъ по 14 такъ: 14 да 14 будетъ 28, 28 да 14 будетъ 42 и т. д.

Значитъ, какимъ дѣйствіемъ произвели вы это вычисленіе?

Сложеніемъ.

Что особеннаго замѣчаете вы въ этомъ сложеніи.

Всѣ слагаемыя равны, число складывается нѣсколько разъ само съ собою.

Вычислите 18×5 по двумъ пріемамъ.

5 разъ 10 будетъ 50 и 5 разъ 8 будетъ 40, 50 да 40 составляетъ 90.

18 да 18 будетъ 36, 36 да 18 будетъ 54, 54 да 18 будетъ 72, а 72 да 18 составятъ 90; слѣдовательно, 5 разъ 18 составитъ 90.

По какому изъ этихъ двухъ пріемовъ удобнѣе и скорѣе вычислять и почему?

По первому: тамъ мы сразу узнаемъ сумму, а здѣсь постепенно нужно набавлять число.

Перечислите, въ какихъ случаяхъ приходится дѣлать вычисленіе съ числами по первому пріему.

Когда нужно одно число сложить само съ собою нѣсколько разъ, когда нужно число увеличить въ нѣсколько разъ.

Замѣтьте, что дѣйствіе, посредствомъ котораго производится это вычисленіе, называется *умноженіемъ*.

Итакъ, скажите, какое дѣйствіе будемъ мы называть умноженіемъ?

Умноженіемъ называется дѣйствіе, посредствомъ котораго число увеличивается въ нѣсколько разъ.

Число, которое увеличиваютъ въ нѣсколько разъ, которое множатъ, называется *множимымъ*, число, на которое множатъ, называется *множителемъ*, а число, получающееся отъ умноженія, называется *произведеніемъ*.

Упражненія:

Множимое равно 15, произведеніе 60, какой былъ множитель? (4).
Множитель 8, произведеніе 96, какъ велико множимое? (12).
Множитель, 3, множимое 26, какъ велико произведеніе? (78).
Число 88 есть произведеніе какихъ двухъ чиселъ?
Число 96 есть произведеніе какихъ двухъ чиселъ?
Найти произведеніе чиселъ 17 и 5. Какое число здѣсь множимое и какое множитель?

Приведите задачу, которая рѣшалась бы умноженіемъ.

„Мальчикъ купилъ 5 грушъ, заплативши за каждую 6 коп. Сколько заплатилъ онъ за всѣ груши?"

„Въ вечеръ сгорѣло 6 фунтовъ керосину. Сколько стоило освѣщеніе въ этотъ вечеръ, если фунтъ керосину стоитъ 11 коп.?"

„Въ училищѣ 4 класса, и въ каждомъ классѣ по 25 учениковъ. Сколько учениковъ въ этомъ училищѣ?"

„Въ первомъ классѣ 18 учениковъ, а во всемъ училищѣ въ 5 разъ болѣе. Сколько учениковъ въ училищѣ?"

Составьте произведеніе для двухъ чиселъ: 15 и 6. (90).

Какое число вы берете множимымъ и какое множитемемъ? (15 множимое и 6 множитель).

А можно ли взять 6 множимымъ, а 15 множителемъ? (Все равно).

Приведите задачу, въ которой 15 было бы множимымъ, а 6 множителемъ.

„Куплено 6 аршинъ полотна по 15 коп. за аршинъ. Сколько стоитъ все полотно?"

Почему же тутъ будетъ множителемъ 6, а не 15?

Потому что 15 коп. нужно повторить 6 разъ, увеличить въ 6 разъ, чтобы получить цѣну полотна, а множитель есть то число, на которое множатъ.

Приведите теперь задачу, гдѣ бы 6 было множимымъ, а 15 множителемъ.

„Проѣзжая въ часъ по 6 верстъ, путешественникъ доѣхалъ отъ одного города до другого въ 15 часовъ. Какъ велико разстояніе между этими городами?"

Здѣсь надо 6 верстъ взять 15 разъ, а потому 15 будетъ множителемъ.

Мѣняется ли величина произведенія отъ перемѣны множимаго на множителя и обратно? (Нѣтъ, не мѣняется). Что же мѣняется при этой перестановкѣ? (Наименованіе произведенія).

А если числа не имѣютъ наименованія, какъ, напримѣръ, 14 и 7 и нужно составить ихъ произведеніе, то какое изъ нихъ взять множителемъ? (Все равно: произведеніе будетъ одно и то же, возьмемъ ли 7 множителемъ, а 13 множимымъ, или наоборотъ).

Замѣтьте, что часто множимое и множителя называютъ просто *множителями* того произведенія, которое изъ нихъ составлено, такъ какъ каждое можетъ быть взято множителемъ и отъ этого произведеніе не измѣняется.

Составьте произведеніе 66 изъ двухъ множителей. Разложите число 68 на два множителя.

Придумайте числа, которыя состоятъ изъ двухъ равныхъ множителей ($4=2\times 2$, $9=3\times 3$, $16=4\times 4$ и проч.). Затѣмъ идутъ упражненія учениковъ въ составленіи задачъ на два дѣйствія (напримѣръ сложеніе и умноженіе, или вычитаніе и умноженіе), а также и на всѣ три дѣйствія.

Хотя при изученіи чиселъ первой сотни ученики посредствомъ частныхъ упражненій хорошо усваиваютъ таблицу умноженія, но при повтореніи курса слѣдуетъ дать имъ эту таблицу въ извѣстной системѣ и потребовать заучить ее наизусть такъ, чтобы ученики могли вовсе не думая, быстро отвѣчать на вопросы учителя изъ этой таблицы. Такое заучиваніе нисколько не должно казаться вреднымъ, такъ какъ сущность этой таблицы дѣти знаютъ хорошо.

Дѣленіе.

Предлагается ученикамъ прочесть выраженіе:

$$72:8=9$$

8 содержится въ 72 девять разъ; 8-ая часть 72 есть 9; 8 меньше 72 въ 9 разъ; число въ 8 разъ меньше 72 есть 9.

Напишите: 15 содержится въ 60 четыре раза ($60:15=4$); 9-ая часть 73 есть 7 ($63:4=7$); 84 больше 12 въ 7 разъ ($84:12=7$); число, въ 5 разъ меньшее 80, есть 16 ($80:5=16$).

Какъ записать, что если 96 орѣховъ раздать 8-ми мальчикамъ поровну, то каждый получитъ по 12? ($96:8=12$).

Если взять 15-ую часть 75, то получится 5? ($75:15=5$).

Что число 84 больше 14 въ 6 разъ? ($84:14=6$).

Почему вы вездѣ поставили одинъ и тотъ же знакъ (:)?

Потому что во всѣхъ этихъ случаяхъ вычисленіе одно и то же.

Замѣтьте, что дѣйствіе, посредствомъ котораго производится вычисленіе въ этихъ случаяхъ, называется *дѣленіемъ*.

Итакъ, скажите, въ какихъ случаяхъ приходится одно число дѣлить на другое?

Когда требуется узнать, сколько разъ одно число содержится въ другомъ, или во сколько разъ одно число болѣе или менѣе другого; когда требуется число раздѣлить на равныя части; когда нужно число уменьшить въ нѣсколько разъ.

Какое же дѣйствіе называется дѣленіемъ?

Дѣленіемъ называется дѣйствіе, посредствомъ котораго узнается, во сколько разъ одно число болѣе или менѣе другого, или число уменьшается въ нѣсколько разъ.

Число, которое дѣлится, называется *дѣлимымъ*; число, на которое дѣлится дѣлимое, называется *дѣлителемъ*; число, которое получается отъ дѣленія, называется *частнымъ*.

Упражненія:

Частное 6, дѣлимое 54; какъ великъ дѣлитель? (9).
Дѣлитель 7, частное 12; какъ велико дѣлимое? (84).
Дѣлитель 8, дѣлимое 64; какъ велико частное? (8).
Дѣлимое 74, дѣлитель 9; какъ велико ѣастное? (8 съ остаткомъ 2)
Число 7 можетъ быть частнымъ отъ дѣленія какихъ чиселъ?
Число 13 можетъ быть частнымъ отъ дѣленія какихъ чиселъ?
На какихъ дѣлителей дѣлится 78 безъ остатка?

По поводу примѣра дѣленія съ остаткомъ дѣлается заключеніе, что многія числа въ другихъ не содержатся безъ остатка и тогда частное будетъ неполное. Для большаго закрѣпленія въ сознаніи учениковъ пониманія связи между элементами дѣленія, имъ предлагаются еще примѣры:

Дѣлимое 90, остатокъ 2, дѣлитель 11; какъ велико частное? (8).
Дѣлитель 7, частное 8, остатокъ 3; какъ велико дѣлимое?
Дѣлимое 94, остатокъ 3, частное 13; какъ великъ дѣлитель?

Составьте задачу, для рѣшенія которой пришлось бы произвести дѣленіе чиселъ.

„У одного мальчика 30 орѣховъ, а у другого въ разъ 5 менѣе. Сколько орѣховъ у второго мальчика?“

„Изъ 36 листовъ бумаги сшиты тетради, въ 4 листа каждая. Сколько вышло тетрадей?“

„Отецъ роздалъ 60 орѣховъ четыремъ сыновьямъ поровну. Сколько пришлось каждому?“

„Изъ 80 коп. четвертую часть мальчикъ издержалъ на покупку книги. Сколько заплатилъ онъ за книгу?"

Затѣмъ, идутъ упражненія учениковъ въ рѣшеніи теоретическихъ вопросовъ и въ составленіи задачъ на два и на три дѣйствія. Послѣднее упражненіе производится и письменно, такъ какъ задачи могутъ выходить очень сложныя.

Повѣрка четырехъ дѣйствій и измѣненіе результатовъ отъ измѣненія элементовъ дѣйствій.

Выводъ правилъ для повѣрки дѣйствій производится посредствомъ повѣрки задачъ, причемъ задачи берутся простыя, на одно дѣйствіе, и предлагаются учителемъ или составляются самими учениками.

Сложеніе. Придумайте задачу, для рѣшенія которой нужно было бы составить сумму изъ трехъ слагаемыхъ.

„Въ училищѣ 3 класса: въ одномъ 27 учениковъ, въ другомъ 20 и въ третьемъ 34. Сколько всѣхъ учениковъ въ этомъ училищѣ?"

Учитель выписываетъ данныя числа на классную доску такъ:

$$\begin{array}{r}27\\+\ 20\\34\\\hline\end{array}\qquad\begin{array}{r}20\\+\ 27\\34\\\hline\end{array}\qquad\begin{array}{r}34\\+\ 27\\20\\\hline\end{array}$$

и спрашиваетъ въ какомъ порядкѣ слѣдуетъ складывать эти числа и измѣнится ли отъ этого сумма. Если бы ученики затруднились отвѣчать на этотъ вопросъ, что почти немыслимо послѣ пройденнаго ими курса, то составляется сумма при всѣхъ трехъ расположеніяхъ слагаемыхъ, и ученики убѣждаются въ томъ, что величина суммы не зависитъ отъ порядка слагаемыхъ (81).

Какъ я долженъ измѣнить слагаемыя, чтобы получить сумму 6-ю единицами большую?

Нужно или къ одному изъ слагаемыхъ прибавить 6, или ко всѣмъ тремъ по 2, или къ одному 4, къ другому 2 и т. д.

Что сдѣлается съ суммою, когда я къ одному изъ слагаемыхъ прибавлю 8, а отъ другого отниму 8?

Что сдѣлается съ суммою, когда я отъ одного изъ слагаемыхъ отниму 9?

Скажите теперь, какъ надо измѣнять слагаемыя, чтобы сумма увеличилась, и какъ, чтобы сумма уменьшалась?

Если даны 2 слагаемыя и сумма трехъ слагаемыхъ, какъ найти третье слагаемое? Надо сложить данныя 2 слагаемыя и сумму эту вычесть изъ всей суммы, тогда получится третье слагаемое.

Сложите четыре числа: 18, 29, 26 и 15 (сумма=88). Какъ провѣрить, что полученная сумма вѣрна, что при сложенiи не сдѣлано ошибки?

Ученики предлагаютъ различные способы повѣрки: а) сложить числа въ другомъ порядкѣ, б) сложить первыя два слагаемыя вмѣстѣ и послѣднiя два вмѣстѣ и одну изъ этихъ суммъ вычесть изъ всей суммы, тогда должна получиться въ остаткѣ другая сумма, в) сложить три слагаемыхъ и сумму ихъ вычесть изъ всей суммы, въ остаткѣ должно получиться четвертое слагаемое и проч. Изъ этихъ способовъ учитель останавливается на одномъ, именно послѣднемъ, закрѣпляетъ его въ памяти учениковъ примѣрами и задачами.

Вычитанiе. Рѣшите задачу: „Въ кадкѣ было 83 фунта масла, и въ теченiи мѣсяца израсходовано 56 функовъ. Сколько масла осталось въ кадкѣ"? (83—56=27). Составьте свою задачу съ этими же числами, но такъ, чтобы, рѣшивъ ее, мы повѣрили эту задачу. „Въ кадкѣ было 83 фунта масла, а по истеченiи мѣсяца осталось только 27. Сколько масла израсходовано въ этомъ мѣсяцѣ"? (83—27=56).

„Въ теченiи мѣсяца изъ кадки израсходовано 56 фунтовъ масла, и осталось еще въ кадкѣ 27 фунтовъ. Сколько было всего масла въ кадкѣ"? (56+27=83).

Скажите теперь, какъ повѣряется вычитанiе?—Нужно сложить разность съ вычитаемымъ, тогда получится уменьшаемое, или отъ уменьшаемаго отнять разность, должно получиться вычитаемое.

Составьте задачу, для рѣшенiя которой пришлось бы изъ 65 вычесть 37.

„Имѣя 65 коп., хозяйка издержала на покупку говядины 37 коп., а на остальныя деньги купила зелени. На сколько она купила зелени?" (65—37=28).

Что надо сдѣлать съ уменьшаемымъ или вычитаемымъ, или съ обоими разомъ, чтобы разность получилась на 7 единицъ болѣе? Нужно прибавить 7 къ уменьшаемому, или отнять 7 отъ вычитаемаго, или прибавить 4 къ уменьшаемому и отнять 3 отъ вычитаемаго и т. д.

Что надо сдѣлать съ уменьшаемымъ или вычитаемымъ, или съ обоими разомъ, чтобы разность получилась на 8 единицъ менѣе? Нужно прибавить 8 къ вычитаемому, или отнять 8 отъ уменьшаемаго, и т. д.

Какъ можно измѣнять уменьшаемое и вычитаемое, не измѣняя разности? Можно къ уменьшаемому и къ вычитаемому придать поровну, или отнять отъ нихъ поровну.

Скажите теперь, когда разность увеличивается, когда уменьшается и когда остается безъ перемѣны?

Умноженіе. Составьте задачу, для рѣшенія которой пришлось бы 6 помножить на 4.

„Сколько слѣдуетъ заплатить за 4 яблока, если каждое стоитъ 6 копеекъ“? ($6 \times 4 = 24$).

Сколько бы стоили яблоки, если бы цѣна каждаго была вдвое болѣе? ($12 \times 4 = 48$).

Во сколько разъ пришлось бы заплатить болѣе, если бы при прежней цѣнѣ было куплено яблокъ втрое болѣе? ($6 \times 12 = 72$).

Во сколько разъ цѣна яблока должна быть менѣе 6 коп., чтобы за всѣ яблоки пришлось заплатить втрое менѣе? ($2 \times 4 = 8$).

Какъ можно измѣнять цѣну яблокъ и число ихъ, не измѣняя всей платы за яблоки? ($3 \times 8 = 24$, $2 \times 12 = 24$, $12 \times 2 = 24$, $1 \times 24 = 24$ и т. д.).

Скажите, отъ какого измѣненія множителей произведеніе увеличивается въ нѣсколько разъ, отъ какого уменьшается въ нѣсколько разъ и отъ какого не измѣняется. Рѣшите задачу: „Крестьянинъ отъ деревни до города дошелъ въ 8 часовъ, проходя въ часъ по 4 версты. Какъ велико разстояніе отъ деревни до города“? (32).

Составьте по тѣмъ же условіямъ и числамъ свою задачу для повѣрки этой.

„Отъ деревни до города 32 версты; крестьянинъ прошелъ это разстояніе въ 8 часовъ. По скольку верстъ шелъ онъ въ часъ“? (4).

„Во сколько часовъ крестьянинъ дошелъ отъ деревни до города, находящихся на разстояніи 32 верстъ, если въ часъ онъ проходилъ по 4 версты“? (8).

Слѣдовательно, какимъ образомъ повѣряется произведеніе, когда умноженіе сдѣлано?

Нужно произведеніе раздѣлить на множителя, тогда получится множимое, или раздѣлить его на множимое, тогда получится множитель.

Дѣленіе. Составьте задачу, для рѣшенія которой пришлось бы 24 раздѣлить на 6.

„24 коп. роздано поровну 6-ти бѣднымъ. По скольку копеекъ получилъ каждый“? (4).

По скольку копеекъ получилъ бы каждый, если бы денегъ было роздано втрое болѣе? (12).

Если бы бѣдныхъ было вдвое болѣе, а число денегъ то же? (2).

Если бы бѣдныхъ было втрое менѣе, а денегъ вчетверо болѣе? (48).

Если бы бѣдныхъ было вчертверо болѣе и денегъ вчетверо болѣе? (4).

Напишите частное отъ дѣленія 36 на 6 и измѣняйте дѣлимое и дѣлителя такъ, чтобы частное не измѣнилось.

36 : 6=6
18 : 3=6
12 : 2=6
6 : 1=6
72 : 12=6

и т. д.

Напишите частное отъ дѣленія 36 на 6 и измѣняйте дѣлимое или дѣлителя, или обоихъ разомъ, чтобы частное уменьшилось въ 3 раза.

36 : 6=6
72 : 6=2
16 : 18=2
72 : 36=2

и т. д.

Измѣняйте дѣлимое или дѣлителя, или обоихъ разомъ, чтобы частное увеличилось въ два раза.

36 : 6= 6
72 : 6=12
36 : 3=12
12 : 1=12

и т. д.

Итакъ, скажите, когда частное уменьшается, когда увеличивается и когда не измѣняется.

Рѣшите задачу: „Изъ 64 аршинъ сукна сшито солдатамъ столько шинелей сколько ихъ могло выйти, и на каждую шинель употреблено по 5 аршинъ, а изъ всего остального сукна сдѣланы жилеты. Сколько аршинъ пошло на жилеты?“ (4 аршина).

Назовите тутъ дѣлимое, дѣлителя, частное и остатокъ. Дѣлимое 64, дѣлитель 5, частное 12 и остатокъ 4.

Составьте свою задачу для повѣрки этой съ тѣми же числами и условіями.

Изъ куска сукна сдѣлано 12 шинелей, по 5 аршинъ на каждую, а изъ остальныхъ 4-хъ аршинъ — жилеты. Сколько было аршинъ въ кускѣ? ($12\times5+3=64$).

Отъ куска сукна въ 64 аршина отрѣзано 4 аршина на жилеты, а изъ остального сукна сдѣлано 12 шинелей и на каждую шинель употреблено сукна поровну. Сколько аршинъ сукна пошло на каждую шинель? [$(64-4) : 12=5$]

Отъ куска сукна въ 64 аршина отрѣзано 4 аршина на жилеты а изъ остальнаго сдѣланы шинели, по 5 аршинъ на каждую. Сколько вышло шинелей? [64—4) : 5=12]

Слѣдовательно, какимъ образомъ повѣрить дѣленіе?

Нужно дѣлителя умножить на частное и прибавить къ произведенію остатокъ, тогда получится дѣлимое; или отъ дѣлимаго отнять остатокъ и разность раздѣлить на частное, тогда получится дѣлитель; или, наконецъ, отъ дѣлимаго отнять остатокъ и полученную разность раздѣлить на дѣлителя, тогда получится частное.

А какъ поступить при повѣркѣ въ томъ случаѣ, когда остатка не получается?

Нужно дѣлимое раздѣлить на частное, тогда получится дѣлитель, или дѣлителя умножить на частное, тогда получится дѣлимое. Затѣмъ, идетъ упражненіе учениковъ въ составленіи своихъ задачъ на указанное дѣйствіе и въ составленіи задачъ повѣрочныхъ.

Повтореніе пройденнаго о дѣйствіяхъ на рѣшеніи задачъ.

Нѣтъ надобности при изученіи чиселъ отъ 1 до 100 перерѣшить съ учениками изъ „Сборника" всѣ задачи, относящіяся къ этому курсу. Задачи нерѣшенныя во время прохожденія курса, отмѣчаются учителемъ въ „Сборникѣ" и даются ученикамъ при повтореніи курса.

Для повторенія понятія о дѣйствіяхъ посредствомъ задачъ подбираются задачи сложныя, требующія для своего рѣшенія не менѣе двухъ дѣйствій, но не замысловатыя, чтобы ученики не затруднялись въ опредѣленіи связи и отношенія между собою данныхъ чиселъ, такъ какъ здѣсь имѣется въ виду обратить ихъ вниманіе преимущественно на эти отношенія.

Упражненіе производится посредствомъ анализа задачи относительно совокупности дѣйствій, которыя необходимо совершить для ея рѣшенія. Анализъ производится по двумъ пріемамъ. Для ясности привожу самый образецъ этихъ упражненій.

Учитель читаетъ изъ „Сборника" задачу № 566.

„Крестьянинъ посѣялъ на каждой изъ 5 десятинъ земли по 3 четверти овса и получилъ урожай самъ-шесть; 50 четвертей изъ всего собраннаго овса онъ оставилъ для себя, а весь остальной овесъ продалъ и за каждыя 4 четверти получилъ 9 руб. Сколько денегъ получилъ крестьянинъ за весь проданный овесъ?"

Первый пріемъ анализа.

Скажите планъ рѣшенія задачи.

Прежде надо узнать, сколько четвертей овса крестьянинъ посѣялъ, потомъ сколько собралъ, потомъ сколько четвертей овса онъ продалъ, потомъ сколько разъ продалъ онъ овса по 4 четверти и, наконецъ, сколько получилъ за проданный овесъ.

Обращаясь затѣмъ къ отдѣльнымъ ученикамъ съ вопросами: «что прежде надо узнать, что потомъ?» и т. д., учитель, по мѣрѣ того, какъ ученики даютъ отвѣты, выписываетъ на доскѣ табличку всѣхъ неизвѣстныхъ въ задачѣ подъ нумѣрами:

1) Сколько четвертей овса посѣялъ крестьянинъ.
2) „ „ собралъ.
3) „ „ продалъ.
4) „ разъ продалъ по 4 четверти.
5) „ получилъ за проданный овесъ.

Итакъ, сколько дѣйствій необходимо сдѣлать для рѣшенія задачи? Пять дѣйствій.

Какое первое дѣйствіе? Умноженіе; надо умножить 3 на 5.

Для чего вы умножаете 3 на 5? Для того, чтобы, узнать, сколько четвертей овса крестьянинъ посѣялъ.

Почему вы думаете, что здѣсь необходимо именно умноженіе, а не другое дѣйствіе? На каждой десятинѣ крестьянинъ засѣялъ 3 четверти овса, то на пяти десятинахъ онъ засѣялъ въ 5 разъ болѣе, а чтобы 3 увеличить въ 5 разъ, нужно 3 умножить на 5.

Учитель при первой неизвѣстной приписываетъ въ скобкахъ и самое вычисленіе такъ:

1) Сколько четвертей овса посѣялъ крестьянинъ. ($3 \times 5 = 15$).

Какое второе дѣйствіе? (Разговоръ подобный предъидущему). Записывается ($15 \times 6 = 90$).

Какое третье дѣйствіе? Вычитаніе; нужно изъ 90 вычесть 50.

Для чего вы дѣлаете вычитаніе? Для опредѣленія, сколько четвертей овса крестьянинъ продалъ.

Почему здѣсь необходимо вычитаніе? Зная, что было собрано 90 четвертей овса, и зная, что крестянинъ оствилъ для себя 50 четвертей, мы узнаемъ, сколько четвертей продано, а для этого необходимо отъ числа четвертей собраннаго овса отнять число четвертей, оставленныхъ крестьяниномъ, то-есть узнать остатокъ, который проданъ. ($90 - 50 = 40$).

Какое четвертое дѣйствіе? Дѣленіе; нужно 40 раздѣлить на 4.

Для чего вы 40 дѣлите на четыре? Для опредѣленія того, сколько разъ продано по 4 четверти.

Почему здѣсь необходимо дѣленіе? Всего продано 40 четвертей, а каждый разъ по 4 четверти, значитъ по 4 четверти продано столько разъ, сколько разъ 4 содержится въ 40, а чтобы узнать, сколько разъ одно число содержится въ другомъ, надо сдѣлать дѣленіе. (40 : 4 = 10)

Какое пятое дѣйствіе? и т. д.

Задача. (Изъ Сборника № 584). Крестьянинъ отправился изъ своей деревни въ городъ по желѣзной дорогѣ; каждый часъ онъ дѣлалъ по 23 версты и на этотъ переѣздъ употребилъ 4 часа. Не имѣя денегъ на обратный проѣздъ по желѣзной дорогѣ, крестьянинъ прошелъ пѣшкомъ сначала 15 верстъ, а все остальное разстояніе по деревнѣ проѣхалъ въ телѣгѣ со своимъ знакомымъ, дѣлая по 7 верстъ въ часъ. Сколько часовъ ѣхалъ крестьянинъ въ телѣгѣ?

Второй пріемъ анализа.

Послѣ обстоятельнаго усвоенія содержанія задачи, ученики отвѣчаютъ на вопросъ: «Сколько дѣйствій необходимо сдѣлать для рѣшенія этой задачи?»

Перечислите дѣйствія въ томъ порядкѣ, въ какомъ вы будете ихъ производить для рѣшенія задачи.

По мѣрѣ того, какъ ученики называютъ дѣйствія, учитель выписываетъ ихъ подъ нумѣрами на доску:

1) Умноженіе.
2) Вычитаніе.
3) Дѣленіе.

Для чего необходимо первое дѣйствіе? Для опредѣленія разстоянія деревни отъ города.

Какія числа будете вы перемножать? 23 на 4.

Почему вы думаете, что здѣсь необходимо умноженіе?—Въ часъ крестьянинъ проѣзжалъ по 23 версты, то въ 4 часа онъ проѣхалъ въ 4 раза болѣе, значитъ 23 нужно увеличить въ 4 раза, а чтобы число увеличить въ нѣсколько разъ, нужно сдѣлать умноженіе.

Противъ соотвѣтствующихъ нумеровъ учитель записываетъ въ скобкахъ вычисленіе такъ:

1) Умноженіе. (23 × 4 = 92).

Для опредѣленія чего нужно дѣлать вычитаніе? Для опредѣленія числа верстъ, которое крестьянинъ проѣхалъ со знакомымъ въ телегѣ

Съ какими числами вы будете дѣлать вычитаніе? Изъ 92 вычтемъ 15.

Почему здѣсь необходимо вычитаніе? Изъ 92 верстъ крестьянинъ 15 верстъ прошелъ пѣшкомъ, слѣдовательно, чтобы узнать, сколько верстъ онъ проѣхалъ, необходимо узнать, сколько осталось верстъ изъ 92, и для этого нужно 15 вычесть изъ 92. (92—15=77).

Для чего необходимо дѣленіе? Для опредѣленія того, сколько часовъ крестьянинъ ѣхалъ въ телѣгѣ.

Съ какими числами вы будете производить это дѣйствіе?—77 будемъ дѣлить на 7.

Почему здѣсь необходимо дѣленіе, а не другое дѣйствіе?—Всего крестьянинъ проѣхалъ въ телѣгѣ 77 верстъ, а въ часъ онъ проѣзжалъ по 7 верстъ, значитъ онъ ѣхалъ столько часовъ, сколько разъ 7 содержится въ 77; а для того, чтобы узнать, сколько разъ одно число содержится въ другомъ, нужно сдѣлать дѣленіе. (77 : 7=11).

Такимъ образомъ, ученики должны умѣть разбирать задачу по обоимъ пріемамъ, а это они могутъ сдѣлать только тогда, когда вполнѣ понимаютъ сущность каждаго изъ четырехъ дѣйствій.

Повтореніе пройденнаго о дѣйствіяхъ на вычисленіи формулъ.

1) Учитель выписываетъ на классной доскѣ примѣръ:

$$(28+65)-(17\times 4)+(60 : 12=?$$

и спрашиваетъ: „Сколько дѣйствій нужно сдѣлать для вычисленія этого выраженія?“ Пять дѣйствій.

Перечислите ихъ въ порядкѣ. Сложеніе, умноженіе, вычитаніе, дѣленіе и сложеніе.

Гдѣ тутъ есть слагаемыя числа? 28 и 65.

Что мы ищемъ, складывая 28 и 65? Сумму.

Гдѣ тутъ есть уменьшаемое и вычитаемое? — Уменьшаемое (28+65), а вычитаемое (17×4).

Что мы ищемъ въ этомъ вычитаніи? Разность чиселъ.

Вы назвали еще одно сложеніе; гдѣ же тутъ слагаемыя для второго сложенія? Одно слагаемое, которое получится отъ вычисленія первыхъ двухъ скобокъ, а другое отъ вычисленія послѣдней скобки.

Что ищется въ вычисленіи, означенномъ въ послѣдней скобкѣ? Частное.

Гдѣ тамъ дѣлитель? Дѣлитель 12.

Что мы узнаемъ, дѣля 60 на 12?—Узнаемъ, сколько разъ 12 содержится въ 60, или узнаемъ 12-ю часть 60, или узнаемъ, во сколько разъ 60 болѣе 12, или просто уменьшаемъ 60 въ 12 разъ.

2) Напишите выраженіе, для вычисленія котораго нужно было бы сдѣлать три дѣйствія, именно сначала умноженіе, потомъ дѣленіе и, наконецъ, вычитаніе.

$$(17 \times 5) - (54 : 6) = ?$$
$$89 - (7 \times 12) : 14 = ?$$

и проч.

3) Учитель диктуетъ примѣръ и ученики записываютъ его на доскахъ.

16 умножить на 6, отъ полученнаго числа отнять 82 безъ 49 и къ полученному числу придать 76, раздѣленное на 4.

$$(16 \times 6) - (82 - 49) + (76 : 4) = ?$$

В. Числа простыя и сложныя, числа кратныя.

Для большаго выясненія ученикамъ свойствъ и состава нѣкоторыхъ чиселъ и для составленія болѣе опредѣленнаго понятія о числѣ вообще, какъ предметѣ изученія, слѣдуетъ разгруппировать числа на простыя и сложныя, кратныя и некратныя. Такая группировка чиселъ производится на основаніи пройденнаго курса и служитъ также для его повторенія на особеннаго рода упражненіяхъ.

Скажите, какія мѣры, служащія для измѣренія различныхъ предметовъ, извѣстны вамъ.

Ученики перечисляютъ различныя мѣры.

Какія мѣры служатъ для измѣренія вѣса? Пудъ, фунтъ, лотъ, золотникъ, доля.

Почему для измѣренія вѣса предметовъ употребляется не одна, а нѣсколько мѣръ? Это зависитъ отъ предмета, вѣсъ котораго измѣряется: тяжелые предметы измѣряются пудами, фунтами, а легкіе—лотами, золотниками; кромѣ того, не всегда можно взвѣсить предметъ одними, напримѣръ, фунтами, а приходится подложить на вѣсы и части фунта—лоты и золотники.

Какія мѣры употребляются для измѣренія длины, для измѣренія времени, для измѣренія сыпучихъ тѣлъ, для измѣренія количества денегъ? и т. п.

Можно ли измѣрять числа? Можно ли, напримѣръ, измѣрить число 17?

Если ученики не отвѣтятъ на этотъ вопросъ удовлетворительно, слѣдуетъ потребовать отъ нихъ опредѣленія числа, изъ чего они поймутъ, что число составляется изъ единицъ, а слѣдовательно измѣряется единицею; или предложить вопросъ въ болѣе наглядной формѣ:

«Какое изъ двухъ чиселъ больше: 5 или 7, и изъ чего можно заключить, что 7 больше 5-ти? Можно ли узнать, какое число больше, не измѣривъ сравниваемыхъ чиселъ?»

Итакъ, что служитъ мѣрою для измѣренія числа? Единица.

Слѣдовательно, какъ измѣрить число 6? Оно состоитъ изъ шести единицъ, вмѣстѣ взятыхъ.

Нельзя ли число 6 измѣрить еще другими мѣрами, большими единицы? Можно измѣрить двойками, тройками. Число 6 состоитъ изъ двухъ троекъ, изъ трехъ двоекъ.

Чѣмъ можно измѣрить число 20? Число 20 можно измѣрить единицею, двойкою, четверкою, пятеркою, десяткомъ.

Изъ чего видно, что число 20 можно измѣрять четверкою, пятеркою? Число 20 на 4 и на 5 дѣлится безъ остатка.

Чѣмъ можно измѣрить число 13? Только единицею, потому что кромѣ единицы въ немъ никакое другое число безъ остатка не содержится.

Выпишите на доскахъ числа отъ 10 до 40 въ одномъ ряду такія, которыя можно измѣрять только единицею, а въ другомъ такія которыя измѣряются кромѣ единицы и другими числами.

Ученики составляютъ табличку:

Первый рядъ.	Второй рядъ.		
11	12	24	34
13	14	25	35
17	15	26	36
19	16	27	38
23	18	28	39
29	20	30	40
31	21	32	
37	22	33	

Скажите изъ чиселъ седьмого десятка одно число, измѣряющееся только единицею, и другое, которое можно измѣрять тремя. (67 и 63).

Слѣдовательно, всѣ числа можно относительно ихъ измѣренія раздѣлить на какія двѣ группы? На числа, которыя измѣряются только единицею, и на числа, которыя кромѣ единицы измѣряются и другими числами: то-есть на числа, дѣлящіяся только на единицу, и на числа дѣлящіяся кромѣ единицы и на другія числа.

Замѣтьте, что первыя числа называются *простыми*, а вторыя *сложными*.

Скажите по одному простому числу, по одному сложному.

Какія числа будемъ мы называть простыми, какія сложными?

Скажите по два или по нѣсколько чиселъ, которыя имѣли бы общую мѣру 2, 3, 6.

Какую общую мѣру имѣютъ числа: 60, 84, 96?

Общая мѣра двухъ или нѣсколькихъ чиселъ называется ихъ *общимъ дѣлителемъ*.

Скажите по три числа, которыя имѣли бы общаго дѣлителя 7, 11, 13.

Отъ этихъ упражненій можно перейти къ разложенію чиселъ на простые множители, что впрочемъ, не относится къ элементарному курсу и не будетъ имѣть примѣненія въ немъ. Здѣсь важно только, чтобы ученики ясно замѣтили особенность нѣкоторыхъ чиселъ и взаимныя ихъ свойства.

Скажите по одному числу, которое дѣлилось бы разомъ на 4 и 5. (20, 40, 60, 80, 100).

Скажите по одному числу, которое дѣлилось бы разомъ на 2 и на 3. (6, 12, 18, 24, 72 и т. д.).

Скажите по одному числу, которое дѣлилось бы разомъ на 2, 3 и 5. (30, 60, 90).

Замѣтьте, что такое число, которое дѣлится разомъ на нѣсколько данныхъ чиселъ, называется относительно ихъ числомъ *кратнымъ*.

Скажите число кратное для 3, 4 и 6. (12, 24, 36 и т. д.).

Для 3, 5 и 6. (30, 70, 90).

Скажите для 3, 5 и 6 число кратное меньшее 30-ти. Самое меньшее изъ всѣхъ кратныхъ чиселъ для нѣсколькихъ данныхъ чиселъ называется *наименьшимъ кратнымъ*.

Число 48, 64, 84 будетъ кратнымъ для какихъ чиселъ? А для какихъ чиселъ оно будетъ наименьшимъ кратнымъ?

Работы, которые могутъ быть даваемы учащимся для исполненія внѣ класса при прохожденіи и повтореніи курса изученія чиселъ до 100.

Принимая во вниманіе малый возрастъ учениковъ, которые изучаютъ числа первой сотни, вредъ долговременнаго сидѣнія въ классѣ и дома во время занятій, наконецъ, неудобства исполненія работъ, задаваемыхъ учащимся въ сельской школѣ на-домъ, слѣдуетъ сказать, что вообще задаваніе работы для исполненія учениками внѣ класса не должно имѣть мѣста. Но тѣмъ не менѣе работы эти при хорошемъ распредѣленіи времени занятій учениковъ, весьма полезны. Исполняя работы дома, ученикъ вполнѣ самостоятельно, безъ всякой помощи, воспроизводитъ то, что проходитъ въ классѣ, или дѣлаетъ что-либо новое, что можетъ сдѣлать на основаніи всего запаса развитія и знаній, пріобрѣтенныхъ за предшествовавшее время обученія. Кромѣ того, такія работы значительно ускоряютъ и прохожденіе самаго курса: чѣмъ больше ученикъ вычисляетъ, тѣмъ быстрѣе онъ подвигается впередъ, а во время урока не всегда бываетъ возможно дать значительное развитіе упражненіямъ учениковъ въ вычисленіяхъ.

Работы, которыя можно, при удобныхъ обстоятельствахъ, предлагать ученикамъ при прохожденіи и повтореніи этого курса, вытекаютъ изъ всѣхъ приведенныхъ мною въ подробности упражненій, такъ что мнѣ остается только ихъ перечислить.

1) Вычисленіе примѣровъ:

Требованіе:

а) Вычислить: (82—69)+(36+17)—(78 : 13).

Исполненіе: 82—69=13
36+17=53
13+53=66
78 : 13= 6
66— 6=60

б) Или учащіеся вычисляютъ строки, данныя изъ «Сборника», и противъ каждой строки пишутъ сразу, послѣ знака равенства, полученное отъ вычисленія число.

2) Разложеніе чиселъ на слагаемыя и множители.

Требованіе при прохожденіи курса:

а) Какъ можно раздать 73 орѣха тремъ мальчикамъ?

Исполненіе: 73=15+17+41
73=26+34+13
73=15+15+43
73=28+28+17
и т. д.

б) Сколькимъ бѣднымъ можно раздать поровну 84 коп. и по скольку копеекъ получитъ каждый?

Исполненіе:	$84=1\times84$	$84=84\times1$
	$84=2\times42$	$84=42\times2$
	$84=3\times28$	$84=28\times3$
	$84=4\times21$	$84=21\times4$
	$84=6\times14$	$84=14\times6$
	$84=7\times12$	$84=12\times7$

Требованіе при повтореніи курса, когда дѣйствія выдѣлены

а) Разложить 93 на 4 слагаемыя.

Исполненіе: $93=17+26+32+18$
$93=19+23+24+27$
$93=17\times2+25+34$
$93=18\times3+39$
и т. д.

б) Разложить 96 на 2 множителя.

Исполненіе:	$96=1\times96$	$96=96\times1$
	$96=2\times48$	$96=48\times2$
	$96=3\times32$	$96=32\times3$
	$96=4\times24$	$96=24\times4$
	$96=6\times16$	$96=16\times6$
	$96=8\times12$	$96=12\times8$

в) Выписать всѣ числа, содержащіяся въ 72 безъ остатка.

Исполненіе:	$72:1=72$	$72:72=1$
	$72:2=36$	$72:36=2$
	$72:3=24$	$72:24=3$
	$72:4=18$	$72:18=4$
	$72:6=12$	$72:12=6$
	$72:8=9$	$72:9=8$

г) Раздѣлить 78 на равныя части.

Исполненіе:	$78:2=39$	$78:78=1$
	$78:3=26$	$78:39=2$
	$78:6=13$	$78:26=3$
		$78:13=6$

д) Выписать числа, дѣлящіяся на 5 равныхъ частей.

Исполненіе: $5:5=1$
$10:5=2$
$15:5=3$
$20:5=4$ и т. д.

3) *Рѣшеніе задачъ.*

Требованіе: рѣшить задачу № 531. (Изъ „Сборника").

Исполненіе: $41 \times 2 = 82$
$8 \times 3 = 24$
$9 \times 4 = 36$
$24 + 36 = 60$
$82 - 60 = 22$
$22 : 2 = 11$

Или:

Орѣховъ было	$41 \times 2 = 82$
3 сына получили . . .	$8 \times 3 = 24$
4 „ „ . . .	$9 \times 4 = 36$
7 сыновей „ . . .	$24 + 36 = 60$
Орѣховъ осталось . . .	$82 - 60 = 22$

Каждая дочь получила $22 : 2 = 11$.

4) *Составленіе задачъ и формулъ.*

Требованіе:

а) Составить и рѣшить задачу, для рѣшенія которой потребовались бы три дѣйствія.

Исполненіе: Мальчикъ, имѣя 43 коп., купилъ 5 карандашей, по 5 коп. каждый, а на остальныя—грифелей, по 3 коп. каждый. Сколько грифелей купилъ онъ?

$5 \times 5 = 25$
$43 - 25 = 18$
$18 : 3 = 6$

Требованіе:

б) Составить численное выраженіе, для вычисленія котораго потребовалось бы совершить 5 дѣйствій.

Исполненіе: $(17 - 14) + (75 - 59) + (14 \times 3) + (64 : 16)$
$17 - 14 = 3$
$75 - 59 = 16$
$14 \times 3 = 42$
$64 : 16 = 4$
$3 + 16 + 42 + 4 = 65$

Г. Составныя именованныя числа въ предѣлѣ числа отъ 1 до 100.

Изученіе чиселъ 1-й сотни заканчивается приложеніемъ всего усвоеннаго учениками къ вычисленіямъ съ составными именованными числами. Слѣдовательно, на этотъ курсъ слѣдуетъ смотрѣть, какъ на курсъ повторительный, но расширяющій предшествовавшіе курсы. Имѣя основательныя понятія о дѣйствіяхъ съ числами и о значеніи этихъ дѣйствій, ученики производятъ эти дѣйствія надъ составными именованными числами, пріучаются къ аккуратности расположенія вычисленій и къ самому пріему вычисленій. Здѣсь уже нѣкоторымъ образомъ является необходимость въ письменномъ вычисленіи, а потому и необходимость установить извѣстный пріемъ вычисленія письменнаго. Пріемы, установленные для дѣйствій съ составными именованными числами, найдутъ себѣ впослѣдствіи приложеніе при дѣйствіяхъ съ числами большими, черезъ что достигается все болѣе и болѣе основательное знакомство учениковъ какъ съ числами, такъ и съ дѣйствіями.

Весь этотъ курсъ ведется на рѣшеніи устныхъ и письменныхъ задачъ. Устныя задачи служатъ для ознакомленія учениковъ съ мѣрами и единичными ихъ отношеніями, письменныя—для выводовъ относительно механизма четырехъ дѣйствій.

Чтобы не затруднять учениковъ въ запоминаніи различныхъ единицъ различныхъ мѣръ, лучше изучать мѣры по группамъ—по одной группѣ въ теченіи нѣсколькихъ уроковъ, такъ: сначала мѣры сыпучихъ тѣлъ, потомъ мѣры длины, мѣры вѣса. А въ концѣ предлагать задачи, относящіяся къ различнымъ мѣрамъ. Съ этою цѣлью и въ „Сборникѣ" задачи расположены въ трехъ отдѣлахъ. (См. А. Курсъ приготовительный. 2) Задачи на составныя именованныя числа).

Хотя уже и при рѣшеніи задачъ въ предшествовавшихъ курсахъ ученики часто встрѣчались съ различными единицами мѣръ, причемъ имъ показывались и самыя мѣры, но, приступая въ этомъ курсѣ къ рѣшенію задачъ на именованныя числа, относящіяся къ какой-либо группѣ мѣръ, слѣдуетъ изучить съ учениками эту группу въ системѣ и наглядно и потомъ уже переходить къ рѣшенію задачъ.

Такимъ образомъ, приступая, напримѣръ, къ рѣшенію задачъ на мѣры длины, ученики подъ руководствомъ учителя измѣряютъ дворъ, корридоръ, классъ. При измѣреніи они убѣждаются въ необходимости различныхъ мѣръ и ихъ подраздѣленій. Измѣряя, положимъ, корридоръ саженью, они видятъ, что сажень по длинѣ корридора укладывается, напримѣръ, 8 разъ и еще остается длина, меньшая сажени; ее можно измѣрить частью сажени, — аршиномъ или футомъ. Аршинъ составляетъ треть сажени, два аршина—двѣ трети, 3 аршина—три трети или цѣлую сажень. Такъ усваиваются наглядно отношенія между различными единицами одной мѣры. Во время самаго измѣренія ученикамъ предлагаются соотвѣтствующіе вопросы:

«Сколько аршинъ въ сажени?»

«Сколько футовъ въ сажени?»

«Сколько вершковъ въ аршинѣ, сажени?»

«Сколько дюймовъ въ футѣ, аршинѣ, сажени?»

«Какую часть сажени составляютъ: 1 арш., 2, 3 аршина, 1, 2, 3 и т. д. фута?»

«Какую часть аршина составляютъ: 1, 2, 4, 8 вершковъ, 1, 4, 7, 14 дюймовъ?»

«Сколько вершковъ въ половинѣ, четверти, восьмой части аршина?»

«Сколько дюймовъ въ половинѣ, четверти аршина?»

«Сколько вершковъ, дюймовъ въ половинѣ, трети, четверти и т. д. сажени?»

Въ классѣ ученики составляютъ таблицу мѣръ длины, или прямо пользуются тою таблицею, которая приложена въ концѣ 1-й части «Сборника».

Познакомившись наглядно съ единицами мѣры извѣстной группы, ученики рѣшаютъ устныя задачи, на которыхъ еще обстоятельнѣе усваиваютъ взаимныя отношенія этихъ единицъ и знакомятся съ раздробленіемъ и превращеніемъ составныхъ именованныхъ чиселъ?

Задача. (Изъ Сборника № 664). Для перехода черезъ дворъ, длиною въ 8 саж. 2 арш., положили 4 доски, каждая длиною въ 1 саж. 1 арш. На какомъ разстояніи нужно положить еще доски?

Скажите планъ рѣшенія. Надо сперва узнать, какъ велико разстояніе, занятое 4-мя досками, а потомъ уже на какомъ разстояніи еще нужно положить доски.

Скажите, какъ велико разстояніе, занятое 4-мя досками? 4 саж. и 4 арш или 5 саж. 1 арш.. потому что въ одной сажени 3 арш.

На какомъ разстояніи нужно еще положить доски? На разстояніи 3 саж. 1 арш., потому что 8 саж. безъ 5 саж. составляетъ 3 саж., а 2 арш. безъ одного аршина составляетъ 1 аршинъ.

Задача. (Изъ Сборника № 678). Мальчикъ измѣрилъ длину аллеи палкой. Сколько разъ уложилъ онъ эту палку, если длина аллеи была 12 саж. 6 фут., а длина палки—1 саж. 2 фута?

Какъ узнать, сколько разъ мальчикъ уложилъ палку? Надо узнать, сколько разъ по 1 саж. 2 фута содержится въ 12 саж. 6 фут., а для этого нужно 12 саж. 6 фут. и 1 саж. 2 фута раздробить въ футы. 12 саж.=84 фут., а 84 фута да 6 фут. составляетъ 90 фут.; 1 саж.=7 фут., а 7 фут. да 2 фута составляетъ 9 фут.; 9 фут. содержится въ 90 фут. 10 разъ; слѣдовательно, мальчикъ уложилъ свою палку по длинѣ аллеи 10 разъ.

Изъ рѣшенія письменныхъ задачъ ученики дѣлаютъ выводы слѣдующаго рода: а) для совершенія какого-либо дѣйствія съ данными числами нужно написать ихъ въ извѣстномъ порядкѣ, напримѣръ, при сложеніи написать слагаемыя такъ, чтобы числа одного наименованія находились въ одномъ ряду; б) сложеніе, вычитаніе и умноженіе слѣдуетъ начинать съ чиселъ самаго меньшаго наименованія, а дѣленіе— съ чиселъ высшаго наименованія; в) сумму, полученную отъ сложенія чиселъ одного наименованія, и произведеніе, полученное отъ умноженія числа какого-либо наименованія на множителя, слѣдуетъ упрощать, если въ нихъ заключаются единицы высшаго наименованія, выключая эти единицы (превращая); г) при дѣленіи именованныхъ чиселъ на именованныя нужно дѣлимое и дѣлителя приводить къ одному наименованію; д) отъ сложенія, вычитанія и умноженія именованныхъ чиселъ, по самому значенію этихъ дѣйствій, получается то же наименованіе, какое имѣли слагаемыя, уменьшаемое и вычитаемое, множимое; е) множитель есть всегда число отвлеченное, по смыслу дѣйствія; ж) при дѣленіи одного на другое чиселъ одного наименованія узнается содержаніе одного числа въ другомъ, и потому частное получается число отвлеченное, а при дѣленіи именованнаго числа на отвлеченное дѣлимое дѣлится на равныя части, или уменьшается въ нѣсколько разъ, а потому частное будетъ число именованное и одного наименованія съ дѣлимымъ.

Всѣ эти главнѣйшіе выводы и другіе болѣе частные дѣлаются не вдругъ, а исподволь, такъ, что одна, двѣ, а иногда и три задачи даютъ поводъ для составленія только одного вывода, и только послѣ рѣшенія нѣсколькихъ задачъ изъ отдѣла можно приводить эти выводы въ стройную систему и предлагать ученикамъ для установленія этой системы общіе отвлеченные вопросы.

Образцы работъ.

Задача. (Изъ сборника № 702). Партія каменьщиковъ взялась вымостить улицу, длиною въ 72 саж. 2 фута, въ 6 недѣль; въ первую недѣлю каменьщики вымостили 8 саж. 5 фут., во вторую—10 саж.

3 фута, а въ каждую изъ слѣдующихъ 3 недѣль мостили по 12 саж. 6 фут. Сколько осталось вымостить въ послѣднюю недѣлю?

Скажите планъ рѣшенія.

Надо узнать, сколько каменьщики вымостили въ первыя 5 недѣль, а потомъ уже сколько осталось имъ вымостить въ послѣднюю недѣлю; а для опредѣленія длины улицы, вымощенной въ первыя 5 недѣль, нужно еще прежде узнать, сколько они вымостили въ три недѣли послѣ первыхъ двухъ.

Сколько дѣйствій и какія именно придется совершить для рѣшенія этой задачи?

Три дѣйствія: умноженіе, сложеніе и вычитаніе.

Для опредѣленія чего и какія числа вы будете множить?

Нужно умножить 12 саж. 6 фут. на 3 для опредѣленія длины улицы, вымощенной въ 3 недѣли.

Учитель показываетъ ученикамъ на доскахъ, какъ пишется множимое и множитель при умноженіи чиселъ, и по ихъ указаніямъ производитъ самъ умноженіе.

12 саж. 6 фут.
× 3

Наводящими вопросами ученикъ доходитъ до вывода, что умноженіе слѣдуетъ начать съ футовъ, потому что если бы начать съ саженъ, то послѣ пришлось бы произведеніе 36 исправлять, такъ какъ отъ умноженія 6 фут. на 3 получается 18 футовъ, изъ которыхъ должно выключить 2 сажени и придать къ 36 саж. Такимъ образомъ, умножая 6 фут. на 3, ученики получаютъ 18 фут., изъ которыхъ выдѣляютъ 2 саж. и отмѣчаютъ ихъ на сторонѣ, а оставшіеся 4 фута подписываютъ въ произведеніи подъ футами; потомъ умножаютъ 12 саж. на 3, получаютъ 36 саж. и къ нимъ придаютъ 2 саж.; окончательно получается 38 саж. 4 фута. Какое нужно совершить слѣдующее дѣйствіе и для опредѣленія чего?

Сложеніе,—для опредѣленія длины улицы, вымощенной въ 5 недѣль.

Какія тутъ слагаемыя числа?

8 саж. 5 фут., 10 саж. 3 фута и 38 саж. 4 фута.

Учитель пишетъ на доскѣ;

	8	саж.	5 фут.
+	10	"	3 "
	38	"	4 "

Съ чиселъ какого наименованія слѣдуетъ начать сложеніе и почему?

Нужно начать съ футовъ, потому что можетъ получиться такая сумма, изъ которой придется выдѣлить сажени и придать къ суммѣ, которая получится отъ сложенія саженъ.

Сдѣлайте сложеніе.

Отъ сложенія футовъ ученики получаютъ 12 фут., изъ которыхъ выключаютъ 1 саж., а остальные 5 футовъ подписываютъ подъ футами, полученную 1 саж. придаютъ къ саженямъ и получаютъ въ суммѣ 57 саж. Такъ, отъ сложенія получается 57 саж. 5 фут.

Какое слѣдуетъ дѣйствіе и для опредѣленія чего?

Слѣдуетъ вычитаніе, чтобы узнать, сколько осталось каменщикамъ вымостить въ послѣднюю недѣлю.

Какое число будетъ уменьшаемымъ и какое вычитаемымъ?

Уменьшаемое 72 саж. 3 фута, а вычитаемое 57 саж. 5 фут.

Учитель пишетъ:

	72	саж.	2 фута
—	57	„	5 „

Съ какого наименованія начнете вы вычитать и почему?

Нужно начать съ футовъ, потому что для вычитанія 5 фут. нужно будетъ взять отъ 72 саж. одну сажень и раздробить ее въ футы, а если начать вычитаніе съ саженъ, то придется полученную разность исправлять, занимая отъ нея одну сажень.

Вычитайте.

Отъ 72 саж. возьмемъ 1 саж. и раздробимъ въ футы, получается 7 фут.; 7 фут. и 2 фута составляютъ 9 фут., а 9 фут. безъ 5 фут. даетъ 4 фута; затѣмъ, отъ 71 саж. отнимемъ 57 саж., получаемъ въ остаткѣ 14 саж. Итакъ, отъ вычитанія получается 14 саж. 4 фута.

Послѣ этого подбираются задачи, требующія для своего рѣшенія совершенія разсмотрѣнныхъ дѣйствій, и даются для разрѣшенія ученикамъ въ классѣ и внѣ класса.

Задача. (Изъ Сборника № 750). Къ мастеру принесли старый серебряный кофейникъ, вѣсомъ въ 1 фун. 29 лот. 1 зол., и изъ всего этого серебра велѣли сдѣлать 8 подстаканниковъ, вѣсомъ каждый въ 5 лот. 2 зол. и нѣсколько чайныхъ ложекъ, вѣсомъ каждая въ 2 лота 2 зол. Сколько ложекъ сдѣлалъ мастеръ?

Скажите планъ рѣшенія.

Надо сперва узнать, сколько серебра пошло на подстаканники, потомъ сколько серебра оставалось на ложки и, наконецъ, сколько вышло ложекъ.

Назовите дѣйствія въ порядкѣ и скажите, для опредѣленія какоі неизвѣстной служитъ каждое дѣйствіе.

Первое дѣйствіе—умноженіе—для опредѣленія количества серебра, которое пошло на 8 подстаканниковъ; второе дѣйствіе—вычитаніе—для опредѣленія количества серебра, изъ котораго сдѣлань ложки, и, наконецъ, дѣленіе,—для опредѣленія числа сдѣланныхъ ложекъ.

Почему необходимо для опредѣленія перваго неизвѣстнаго числа дѣйствіе умноженіе?

Если на одинъ подстаканникъ употреблено серебра 5 лот. 2 зол., то на 8 подстаканниковъ его пошло въ 8 разъ болѣе, значитъ, надо 5 лот. 2 зол. увеличить въ 8 разъ, а для этого необходимо сдѣлать умноженіе.

Сдѣлайте это умноженіе на вашихъ доскахъ.

		5 лот.	2 зол.		
		× 8			
1 фун.	13 лот.	1 зол.			

Узнайте теперь, сколько серебра пошло на ложки.

—	1 фун.	29 лот.	1 зол.
	1 „	13 „	1 „
	„	16 лот.	

Что надо дѣлать дальше?

Дѣлить 16 лот. на 2 лота 2 зол., чтобы узнать, сколько вышло ложекъ.

Почему здѣсь необходимо сдѣлать дѣленіе?

На всѣ ложки пошло 16 лот., а на каждую по 2 лота 2 зол., слѣдовательно ложекъ вышло столько, сколько разъ 2 лота 2 зол. содержится въ 16 лот., а чтобы узнать, сколько разъ одно число содержится въ другомъ, нужно сдѣлать дѣленіе.

Нельзя ли узнать число ложекъ не посредствомъ дѣленія, а посредствомъ другого дѣйствія?

Можно посредствомъ вычитанія, отнимая постепенно отъ 16 лотовъ по 2 лота 2 зол., и сколько разъ можно отнять по 2 лота 2 зол., столько и будетъ ложекъ.

А какъ лучше вычислять—посредствомъ дѣленія или посредствомъ вычитанія?

Посредствомъ дѣленія лучше, потому что мы сразу можемъ узнать, сколько разъ 2 лота 2 зол. содержится въ 16 лотахъ, то-есть сколько разъ по 2 лота 2 зол. можно отнять отъ 16 лот.

Нужно начать съ футовъ, потому что можетъ получиться такая сумма, изъ которой придется выдѣлить сажени и придать къ суммѣ, которая получится отъ сложенія саженъ.

Сдѣлайте сложеніе.

Отъ сложенія футовъ ученики получаютъ 12 фут., изъ которыхъ выключаютъ 1 саж., а остальные 5 футовъ подписываютъ подъ футами, полученную 1 саж. придаютъ къ саженямъ и получаютъ въ суммѣ 57 саж. Такъ, отъ сложенія получается 57 саж. 5 фут.

Какое слѣдуетъ дѣйствіе и для опредѣленія чего?

Слѣдуетъ вычитаніе, чтобы узнать, сколько осталось каменщикамъ вымостить въ послѣднюю недѣлю.

Какое число будетъ уменьшаемымъ и какое вычитаемымъ?

Уменьшаемое 72 саж. 3 фута, а вычитаемое 57 саж. 5 фут.

Учитель пишетъ:

	72	саж.	2	фута
—	57	„	5	„

Съ какого наименованія начнете вы вычитать и почему?

Нужно начать съ футовъ, потому что для вычитанія 5 фут. нужно будетъ взять отъ 72 саж. одну сажень и раздробить ее въ футы, а если начать вычитаніе съ саженъ, то придется полученную разность исправлять, занимая отъ нея одну сажень.

Вычитайте.

Отъ 72 саж. возьмемъ 1 саж. и раздробимъ въ футы, получается 7 фут.; 7 фут. и 2 фута составляютъ 9 фут., а 9 фут. безъ 5 фут. даетъ 4 фута; затѣмъ, отъ 71 саж. отнимемъ 57 саж., получаемъ въ остаткѣ 14 саж. Итакъ, отъ вычитанія получается 14 саж. 4 фута.

Послѣ этого подбираются задачи, требующія для своего рѣшенія совершенія разсмотрѣнныхъ дѣйствій, и даются для разрѣшенія ученикамъ въ классѣ и внѣ класса.

Задача. (Изъ Сборника № 750). Къ мастеру принесли старый серебряный кофейникъ, вѣсомъ въ 1 фун. 29 лот. 1 зол., и изъ всего этого серебра велѣли сдѣлать 8 подстаканниковъ, вѣсомъ каждый въ 5 лот. 2 зол. и нѣсколько чайныхъ ложекъ, вѣсомъ каждая въ 2 лота 2 зол. Сколько ложекъ сдѣлалъ мастеръ?

Скажите планъ рѣшенія.

Надо сперва узнать, сколько серебра пошло на подстаканники, потомъ сколько серебра оставалось на ложки и, наконецъ, сколько вышло ложекъ.

Назовите дѣйствія въ порядкѣ и скажите, для опредѣленія какой неизвѣстной служитъ каждое дѣйствіе.

Первое дѣйствіе—умноженіе—для опредѣленія количества серебра, которое пошло на 8 подстаканниковъ; второе дѣйствіе—вычитаніе—для опредѣленія количества серебра, изъ котораго сдѣланы ложки, и, наконецъ, дѣленіе,—для опредѣленія числа сдѣланныхъ ложекъ.

Почему необходимо для опредѣленія перваго неизвѣстнаго числа дѣйствіе умноженіе?

Если на одинъ подстаканникъ употреблено серебра 5 лот. 2 зол., то на 8 подстаканниковъ его пошло въ 8 разъ болѣе, значитъ, надо 5 лот. 2 зол. увеличить въ 8 разъ, а для этого необходимо сдѣлать умноженіе.

Сдѣлайте это умноженіе на вашихъ доскахъ.

	5	лот.	2	зол.	
		×	8		
1 фун.	13	лот.	1	зол.	

Узнайте теперь, сколько серебра пошло на ложки.

—	1 фун.	29	лот.	1	зол.	
	1 „	13	„	1	„	
	„	16	лот.			

Что надо дѣлать дальше?

Дѣлить 16 лот. на 2 лота 2 зол., чтобы узнать, сколько вышло ложекъ.

Почему здѣсь необходимо сдѣлать дѣленіе?

На всѣ ложки пошло 16 лот., а на каждую по 2 лота 2 зол., слѣдовательно ложекъ вышло столько, сколько разъ 2 лота 2 зол. содержится въ 16 лот., а чтобы узнать, сколько разъ одно число содержится въ другомъ, нужно сдѣлать дѣленіе.

Нельзя ли узнать число ложекъ не посредствомъ дѣленія, а посредствомъ другого дѣйствія?

Можно посредствомъ вычитанія, отнимая постепенно отъ 16 лотовъ по 2 лота 2 зол., и сколько разъ можно отнять по 2 лота 2 зол., столько и будетъ ложекъ.

А какъ лучше вычислять—посредствомъ дѣленія или посредствомъ вычитанія?

Посредствомъ дѣленія лучше, потому что мы сразу можемъ узнать, сколько разъ 2 лота 2 зол. содержится въ 16 лотахъ, то-есть сколько разъ по 2 лота 2 зол. можно отнять отъ 16 лот.

Сдѣлайте это дѣленіе.

16 лот. = 3 зол. × 16 = 48 зол.
2 лота 2 зол. = 3 зол. × 2 + 2 зол. = 8 зол.
48 зол. : 8 зол. = 6

Рѣшеніе задачи въ тетради ученика.

Задача. (Изъ Сборника № 746). У мѣдника было 4 пуда 10 фун. мѣди; изъ этой мѣди онъ сдѣлалъ 6 кастрюль и 8 тазовъ; на каждую кастрюлю онъ употребилъ 3 фун. 12 лот. 2 зол. мѣди, а на каждый тазъ 2 фун. 12 лот. Сколько еще мѣди осталось у мѣдника?

Вычисленіе.

3 фун. 12 лот. 2 зол. × 6	2 фун. 12 лот. × 8
18 фун. 72 лота 12 зол.	16 фун. 96 лот.
20 фун. 12 лот.	19 фун.
+ 20 фун. 12 лот. + 19 фун.	— 4 пуда 10 фун. — 39 фун. 12 лот.
39 фун. 12 лот.	3 пуда 10 фун. 20 лот.

Строчки.

На кастрюли пошло мѣди (3 фун. 12 лот. 2 зол.) × 6 = 20 фун. 12 лот.
На тазы „ „ (2 фун. 12 лот.) × 8 = 19. фун.
На всѣ вещи „ „ (20 фун. 12 лот.) + 19 фун. = 39 фун. 12 лот.
Осталось мѣди (4 пуда 10 фун.)—(39 фун. 12 лот.) = 3 пуда 10 фун. 20 лот.

Одновременно съ рѣшеніемъ задачъ, какъ только учащіеся познакомились съ письменнымъ пріемомъ совершенія какого-либо дѣйствія, они производятъ вычисленіе примѣровъ на это дѣйствіе съ составными именованными числами. Достаточное собраніе такихъ примѣровъ приведено въ Сборникѣ въ отдѣлѣ II, А) *Курсъ приготовительный*, подъ слѣдующими заглавіями: раздробленіе, превращеніе, сложеніе, вычитаніе, умноженіе, дѣленіе, всѣ дѣйствія съ составными именованными числами. Примѣры составлены на всѣ русскія мѣры и притомъ такъ, что результаты вычисленій не превышаютъ 100.

Такимъ образомъ, чисто практически, на рѣшеніи многихъ задачъ и вычисленіи примѣровъ, ученики доходятъ до вывода пріемовъ и правилъ относительно механизма четырехъ дѣйствій и могутъ въ концѣ курса этого года отвѣчать на общіе вопросы, каковы:

Какія дѣйствія производятся съ числами?

Какое дѣйствіе называется сложеніемъ, вычитаніемъ, умноженіемъ дѣленіемъ?

Въ какихъ случаяхъ производится съ числами сложеніе, вычитаніе, умноженіе, дѣленіе?

Какія числа нужно различать при сложеніи, вычитаніи, умноженіи, дѣленіи?

Какъ складываются числа, вычитаются, множатся, дѣлятся?

Въ какомъ случаѣ частное получается число отвлеченное и въ какомъ именованное?

Какъ повѣряется сложеніе, вычитаніе, умноженіе, дѣленіе?

Какъ, зная сумму и одно слагаемое, найти другое слагаемое?

Какъ, зная множимое и произведеніе, найти множителя; зная множителя и произведеніе, найти множимое?

Какъ, зная дѣлителя, частное и остатокъ, найти дѣлимое; зная дѣлимое, частное и остатокъ, найти дѣлителя?

Когда сумма увеличивается?

Отчего разность можетъ уменьшаться, отчего увеличиваться; при какомъ измѣненіи уменьшаемаго и вычитаемаго разность не измѣняется?

От какого измѣненія множимаго или множителя или обоихъ разомъ произведеніе увеличивается или уменьшается въ нѣсколько разъ? Отъ какого измѣненія множимаго и множителя произведеніе не измѣняется?

Отъ какого измѣненія дѣлимаго и дѣлителя или обоихъ разомъ частное увеличивается или уменьшается въ нѣсколько разъ? Отъ какого измѣненія дѣлимаго и дѣлителя частное не измѣняется?

Какъ эти, такъ и всѣ послѣдующіе выводы изъ элементарнаго курса учащіеся удерживаютъ и закрѣпляютъ въ памяти большимъ количествомъ упражненій, предшествующихъ выводу и слѣдующихъ за нимъ. Не слѣдуетъ требовать отъ учащихся, на этой ступени обученія записыванія ариѳметическихъ выводовъ (правилъ) въ тетради, какъ этого требуютъ иногда преподаватели, предлагая учащимся въ видѣ обобщенія вопросы для письменныхъ отвѣтовъ. Записанный выводъ укладывается въ памяти ученика въ законченной формѣ, отрѣшается, такъ сказать, отъ всего ему предшествовавшаго, и учащіеся, при встрѣтившейся необходимости воспользоваться тѣмъ или другимъ выводомъ, прибѣгаютъ къ простому механическому припоминанію записаннаго. Незаписанный выводъ требуетъ отъ ученика большаго усилія памяти и соображенія: припоминаніе вывода влечетъ за собою припоминаніе того ряда упражненій и разсужденій, которыя закончились этимъ выводомъ; слѣдовательно, мысль ученика находится въ постоянномъ напряженіи.

Многіе учителя предлагаемый курсъ составныхъ именованныхъ чиселъ проходятъ одновременно съ предшествующимъ курсомъ изученія чиселъ до 100. Другіе же, особенно учителя народныхъ школъ, послѣ изученія чиселъ до 100, считаютъ учениковъ достаточно подготовленными для изученія нумераціи и четырехъ дѣйствій съ большими числами и для сокращенія времени вовсе не проходятъ составныхъ именованныхъ чиселъ въ предѣлѣ числа до 100.

ГОДЪ ТРЕТІЙ.

Курсъ этого года представляетъ третій и послѣдній концентръ курса цѣлыхъ чиселъ и состоитъ въ расширеніи предѣла числа. Всѣ основныя понятія о числѣ и пріемы дѣйствій съ числами учениками вполнѣ сознательно усвоиваются въ предшествовавшихъ двухъ курсахъ. Теперь они эти понятія и пріемы прилагаютъ къ большимъ числамъ, слѣдовательно на новомъ матеріалѣ опять повторяютъ и расширяютъ прежде пройденное. Для постепенности расширенія предѣла числа курсъ цѣлыхъ чиселъ, выходящихъ за предѣлъ 100, разбивается на два отдѣла: А) Нумерація чиселъ отъ 1 до 1000 и Б) Нумерація чиселъ до высшихъ предѣловъ и дѣйствія съ числами отвлеченными и именованными любой величины.

А) Нумерація чиселъ до 1000.

При выясненіи ученикамъ нумераціи можно пользоваться различными наглядными пособіями. Наиболѣе употребительными, какъ уже сказано при описаніи наглядныхъ пособій, считаются: спички, связанныя пучками въ 10 и 100 штукъ, шведскіе счеты и ариѳметическій ящикъ. Мы будемъ пользоваться при изложеніи этого отдѣла ариѳметическимъ ящикомъ; учитель легко можетъ на основаніи пріемовъ, указанныхъ при употребленіи этого пособія, приложить ихъ при употребленіи всякаго другого пособія.

При прохожденіи нумераціи ученикамъ должно быть выяснено: а) существованіе единицъ различныхъ разрядовъ; б) взаимное кратное отношеніе единицъ различныхъ разрядовъ; в) представленіе о величинѣ (количествѣ) числа, состоящаго изъ единицъ различныхъ разрядовъ, и г) чтеніе и написаніе числа на основаніи зависимости значенія цифры отъ мѣста, ею занимаемаго.

Приступая къ выясненію нумераціи, учитель предлагаетъ ученикамъ предварительные вопросы:

Какъ сосчитать предметы, когда ихъ много? Прибавляя постепенно по одному.

Какъ еще иначе считаютъ предметы?

Какіе предметы считаютъ парами, тройками, десятками, дюжинами, сотнями?

Какъ считать предметы десятками, сотнями? Сначала насчитываютъ по одному десятокъ и откладываютъ, потомъ еще насчитываютъ десятокъ и т. д., потомъ сосчитываютъ по 10 десятковъ, что составляетъ *сотню*; потомъ сосчитываютъ число сотенъ, и т. д.

Какъ считаютъ деньги? Какими монетами можно считать деньги по десяткамъ, сотнямъ копеекъ?

Затѣмъ ученики считаютъ отдѣльные кубики до какого-угодно числа, напр., до 20, 40; имъ показывается брусокъ, замѣняющій десятокъ кубиковъ; этотъ брусокъ измѣряется однимъ кубикомъ, или изъ десяти отдѣльныхъ кубиковъ составляется рядъ, къ которому прикладывается брусокъ, и ученики убѣждаются въ томъ, что однимъ брускомъ можно въ счетѣ замѣнить десять кубиковъ; этотъ брусокъ заключаетъ, значитъ, въ себѣ *десятокъ* кубиковъ.

Предлагаются вопросы: «въ десяткѣ сколько единицъ, во сколько разъ десятокъ больше одного, сколько кубиковъ въ двухъ, трехъ, пяти десяткахъ?» и т. п. Для упражненія ученикамъ предлагается изъ кубиковъ и брусковъ составить числа: 56, 79, 88, 99. На доску выставляется: 6 брусковъ и 4 кубика, 7 брусковъ и 8 кубиковъ, и ученики читаютъ выставленныя числа; вмѣсто выставленныхъ 4 брусковъ и 16 кубиковъ ученики берутъ 5 брусковъ и 6 кубиковъ, замѣняя 10 кубиковъ однимъ брускомъ и поясняя при этомъ, почему такъ удобнѣе считать.

При сравненіи кубика съ брускомъ выясняется, что то и другое составляетъ одинъ предметъ, и что счетъ брусковъ ведется по тому же пріему, какъ и счетъ кубиковъ, но что предметы эти разнятся между собою по величинѣ и что, считая кубики десятками посредствомъ брусковъ, мы ведемъ счетъ въ 10 разъ скорѣе, нежели считая отдѣльными кубиками. Такимъ образомъ, и кубикъ, и брусокъ суть *единицы*, но кубикъ есть единица одного рода, а брусокъ единица другого рода; въ счетѣ кубикъ называется единицею *перваго* *разряда,* а брусокъ или десятокъ кубиковъ—единицею *второи разряда.*

Для закрѣпленія въ сознаніи и памяти учениковъ этихъ понятій имъ предлагаются повторительные вопросы: «Сколько составится кубиковъ, если я возьму 4 единицы второго разряда и 7 единицъ перваго сколько кубиковъ въ 6 единицахъ второго разряда и 25 единицахъ перваго; въ 74 сколько единицъ перваго разряда, сколько второго; изъ сколькихъ единицъ перваго разряда состоитъ все число?» и т. п. Послѣ этихъ упражненій ученикамъ вкратцѣ напоминается пріемъ написанія двузначныхъ чиселъ и выспрашивается у нихъ значеніе цифры по мѣсту, ею занимаемому, а также производится разложеніе двузначнаго числа на разряды (86=80+9); и обратно: число, выраженное въ отдѣльныхъ разрядахъ, читается и пишется при совокупности обоихъ разрядовъ (50+9=59).

При переходѣ къ счету сотнями, 100 отдѣльныхъ кубиковъ складываются въ одинъ квадратный слой; ученики насчитываютъ въ немъ 10 десятковъ и составляютъ такой же слой изъ 10 брусковъ. Такой слой брусковъ представляетъ въ свою очередь десятокъ, а по отношенію къ отдѣльному кубику—*сотню.* Сотня кубиковъ замѣняется одною *единицею*—доскою. Доска эта измѣряется сначала брускомъ, а потомъ отдѣльнымъ кубикомъ. Предлагаются вопросы: „въ доскѣ сколько помѣщается брусковъ, сколько отдѣльныхъ кубиковъ; сотня во сколько разъ больше десятка, больше единицы; какъ составить сотню изъ десятковъ; какъ составить ее изъ единицъ перваго разряда; въ двухъ, трехъ, пяти сотняхъ сколько десятковъ, сколько единицъ; какіе предметы считаются, продаются сотнями; чѣмъ замѣняется сотня копеекъ; въ рублѣ сколько гривенниковъ; на сколько копеекъ можно размѣнять 3, 6, 8 руб.?" и т. п.

Сотня кубиковъ (доска), какъ отдѣльный предметъ, есть также единица въ счетѣ кубиковъ, но она въ 10 разъ больше единицы второго разряда и въ 100 разъ больше единицы перваго разряда, а потому сотню называютъ единицею *третьяго разряда.*

Для упражненія учениковъ въ счетѣ единицъ трехъ разрядовъ имъ предлагается: сосчитать число кубиковъ, составленное учителемъ на классной доскѣ изъ досокъ, брусковъ и отдѣльныхъ кубиковъ: сказать, сколько въ этомъ числѣ единицъ каждаго разряда; продиктованное учителемъ число выставить изъ ящика на доскѣ и пояснить,—почему именно столько-то взято досокъ и столько-то брусковъ. Ученики рѣшаютъ вопросы: „какое составится число изъ двухъ единицъ второго разряда, 4 единицъ третьяго и 7 единицъ перваго; въ числѣ 806 сколько единицъ третьяго разряда, второго, перваго; изъ сколькихъ единицъ второго и перваго разряда составлено все число; какъ записать число, въ которомъ 5 единицъ третьяго разряда, 6 единицъ второго и 8 единицъ перваго; почему 5 нужно поставить на третьемъ мѣстѣ; какъ составить это число изъ кубиковъ, брусковъ и досокъ?» и т. п.

Затѣмъ, идутъ упражненія въ счетѣ и написаніи чиселъ. Переходъ къ написанію трехзначныхъ чиселъ ученики совершаютъ сами легко по аналогіи съ числами двузначными и безошибочно указываютъ мѣста, на которыхъ нужно ставить цифры, обозначающія различные разряды числа.

Учитель пишетъ на доскѣ:

	5	единицъ	1-го	разряда
	8	„	3-го	„
	6	„	2-го	„
или	4	единицы	2-го	„
	7	единицъ	3-го	„
или	6	„	1-го	„
	2	единицы	3-го	„

Эти числа, выраженныя въ разрядахъ, ученики читаютъ или записываютъ по усвоенной системѣ; обратно, число, написанное учителемъ на доскѣ, напр. 486, ученики разлагаютъ на разряды:

486=4 единицамъ 3-го раз.+8 един. 2-го раз.+6 един. 1-го разряда,

или 486=4 сот.+8 десят.+6 един.

или 486=400+80+6.

При переходѣ къ счету тысячами ученикамъ предлагается сосчитать число всѣхъ кубиковъ въ ящикѣ; счетъ этотъ они ведутъ по горизонтальнымъ слоямъ, то-есть сотнями, насчитываютъ въ ящикѣ 10 досокъ или сотенъ; каждая сотня заключаетъ въ себѣ 10 десятковъ, слѣдовательно въ ящикѣ 100 десятковъ (брусковъ); въ одномъ брускѣ 10 кубиковъ, слѣдовательно во всемъ ящикѣ 100 разъ по 10 кубиковъ; получается новое число—*тысяча*. Тысяча кубиковъ есть новая единица въ счетѣ; въ отличіе отъ другихъ единицъ она называется *единицею четвертаго разряда*.

Получивъ совершенно наглядное представленіе о количествѣ, о массѣ числа, выраженнаго тысячью, ученики безъ всякаго затрудненія могутъ образовать представленіе о числѣ, выраженномъ нѣсколькими тысячами; такъ вмѣстѣ съ выраженіемъ: «8 тысячъ кубиковъ» у нихъ въ сознаніи рельефно образуется представленіе о 8 ящикахъ, наполненныхъ кубиками. Можно быть послѣ этого увѣреннымъ, что ученикъ при расширеніи счета до какого-угодно предѣла будетъ имѣть дѣло не съ цифрою только, а съ дѣйствительнымъ числомъ, выраженнымъ цифрами. Имѣя раздѣльное представленіе о тысячѣ кубиковъ, ученикъ легко самъ образуетъ въ своемъ сознаніи представленіе о тысячѣ какихъ-угодно извѣстныхъ ему предметовъ, и, наконецъ, составляетъ понятіе о тысячѣ единицъ вообще, то-есть незамѣтно переходитъ къ числу абсолютному.

Не входя въ дальнѣйшія подробности по изученію нумераціи до 1000, къ вопросу весьма легкому при употребленіи нагляднаго пособія, я приведу только образцы вопросовъ и упражненій, служащихъ для повторенія и обращенія всего усвоеннаго учениками.

«Какъ можно считать предметы? Что называется единицею въ счетѣ предметовъ? Что называется вообще числомъ? Какія единицы счета извѣстны вамъ? Какъ называется единица 1-го, 2-го, 3-го, 4-го разряда? Какое число получится, если я возьму 7 единицъ второго разряда, 5 единицъ третьяго, 4 единицы четвертаго и 2 единицы перваго разряда?»

«Въ числѣ 2048 сколько единицъ каждаго разряда? Какое число кубиковъ составится изъ 4 полныхъ ящиковъ, 16 досокъ, 38 брусковъ и 46 отдѣльныхъ кубиковъ? Какъ записать число 506? На какомъ мѣстѣ нужно поставить 5? Почему на третьемъ мѣстѣ? Что нужно поставить на второмъ мѣстѣ и почему? Напишите число 1547. Что означаетъ цифра 4, цифра 1? Почему цифра 5 поставлена на третьемъ мѣстѣ? Отъ чего зависитъ значеніе цифры въ числѣ? На какомъ мѣстѣ ставится при написаніи числа цифра, означающая десятки, единицы, тысячи? Нужно ли писать наименованіе разрядовъ при каждой цифрѣ? Можно ли 2 пуда 3 фун. 5 лот. написать безъ наименованія каждой цифры? Почему тогда будетъ непонятно? Прочтите число 3004. Сколько надо имѣть кубиковъ, чтобы составить это число? Почему вы читаете: 3 тысячи, 4 единицы?»

Составить число изъ:

$$\left\{\begin{array}{llll} 4 & \text{единицъ} & \text{3-го} & \text{разряда} \\ 5 & \text{„} & \text{1-го} & \text{„} \\ 2 & \text{„} & \text{4-го} & \text{„} \end{array}\right\} \quad 2405$$

Составить число изъ:

$$\left\{\begin{array}{llll} 9 & \text{единицъ} & \text{2-го} & \text{разряда} \\ 9 & \text{„} & \text{3-го} & \text{„} \\ 9 & \text{„} & \text{1-го} & \text{„} \end{array}\right\} \quad 999$$

Чего послѣднему числу не достаетъ до 1000?

Разложить число 5672 по рязрядамъ.

$5672=5000+600+70+2$.

Какія числа можно написать посредствомъ цифры 4?

(4, 44, 444, 4444 и проч,)

Въ числѣ 444 вторая цифра во сколько разъ означаетъ больше, нежели первая справа; а третья цифра во сколько разъ означаетъ болѣе первой?

Занятіе одной нумераціей въ теченіе нѣсколькихъ уроковъ въ рядъ, хотя бы и при помощи наглядныхъ пособій, есть работа, вообще однообразная и потому утомительная; вначалѣ ученики интересуются ею въ высшей степени, но потомъ, при однообразіи упражненій и вопросовъ, начинаютъ уставать и перестаютъ быть внимательными.

Съ цѣлью дать нѣкоторое разнообразіе классной работѣ, а еще болѣе—съ цѣлью освоить учениковъ съ новыми числами, нужно параллельно съ упражненіями въ нумераціи предлагать ученикамъ для рѣшенія задачи, въ которыя входятъ числа въ различныхъ комбинаціяхъ рязрядовъ и которыя рѣшаются на основаніи усвоеннаго соотношенія единицъ различныхъ разрядовъ изъ упражненій при помощи ариѳметическаго ящика, а также на основаніи тѣхъ пріемовъ, которые они пріобрѣли, проходя предшествовавшіе курсы. Такого рода устныя задачи помѣщены въ „Сборникѣ“ въ отдѣлѣ I подъ заглавіемъ: Устныя задачи на числа до 1000.

Образцы рѣшенія задачъ.

Задача. (Изъ Сборника № 767). Крестьянка повезла на рынокъ 4 сотни яицъ; на дорогѣ она 3 десятка разбила, а всѣ остальныя яица продала. Сколько денегъ получила она отъ этой продажи, если 2 сотни 5 десятковъ яицъ продала по 20 коп. за десятокъ, а всѣ остальныя яица—по 1 рублю за сотню?

Изъ 4 сотенъ крестьянка разбила 3 десятка яицъ, значитъ, продала она 3 сот. и 7 десятковъ, потому что въ одной сотнѣ 10 десятковъ, а если отъ 10 десятковъ отнять 3 десят., то останется 7 десят., да еще было 3 сотни. Десятокъ первыхъ яицъ она продала по 20 коп., значитъ, 5 десят. продала за 1 руб., потому что 5 разъ 20 коп. будетъ 100 коп. или одинъ рубль; если десять яицъ стоитъ 20 коп., то сотня стоитъ въ 10 разъ болѣе, то-есть 200 коп. или 2 рубля, а 2 сотни еще въ 2 раза болѣе, то-есть 2 руб.$\times 2=4$ руб. Итакъ, первыя яица проданы за 4 руб.$+1$ руб., то-есть за 5 руб. Всѣхъ яицъ было три сотни и 7 десят., изъ нихъ первыхъ было 2 сот. 5 дес., значитъ, остальныхъ было 1 сотня 2 десят., сотня послѣднихъ яицъ продана за 1 руб., значитъ, десятокъ продавался за 10 коп. потому что десятокъ меньше сотни въ 10 разъ, а 10-я часть рубля, или 100 коп., равна 10 коп; значитъ, 2 десятка проданы за 2 раза 10 коп., то-есть за 20 коп. Итакъ, остальныя яица проданы за 1 руб.+20 коп., то-есть за 1 руб. 20 коп. Всего крестьянка получила 5 руб. да 1 руб. 20 коп., или 6 руб. 20 коп.

Задача. (Изъ Сборника № 795). Садовникъ сорвалъ въ своемъ саду 6 сотенъ яблокъ; 120 яблокъ онъ продалъ въ деревнѣ нѣсколькимъ покупателямъ, каждому по десятку, а всѣ остальныя яблоки разложилъ поровну въ 12 корзинокъ и повезъ въ городъ. Сколько яблокъ положилъ садовникъ въ каждую корзинку и сколькимъ покупателямъ продалъ онъ яблоки въ деревнѣ?

Садовникъ сорвалъ въ саду 6 сотенъ яблокъ, что составляетъ 60 десятковъ; изъ нихъ 120 яблокъ или 12 десятковъ яблокъ онъ продалъ нѣсколькимъ покупателямъ, по десятку каждому, значитъ, 12-ти покупателямъ; было 60 десятковъ яблокъ, а продано 12 десятковъ, слѣд. осталось 48 десятковъ; эти 48 десятковъ яблокъ садовникъ разложилъ поровну въ 12 корзинокъ, а 12-я часть 48 есть 4, слѣд. въ каждую корзинку онъ положилъ по 4 десятка яблокъ.

Задача. Для прокормленія лошадей купили сперва 2 чт. овса, потомъ еще 1 чт. 6 чк., и, наконецъ, еще 1 чт. 2 чк. На сколько дней хватило всего этого овса, если въ день расходовали по 1 чк. 2 гар.?

Во всѣ 3 раза куплено было овса 2 чт. да 1 чт. 6 чк. да еще 1 чт. 2 чк., что составляетъ 4 чт. 8 чк. или 5 чт.; въ 5 четвертяхъ заключается 5 разъ по 8 четвериковъ, то-есть 40 четвериковъ; а въ 40 четверикахъ заключается 40 разъ по 8 гарнцевъ, то-есть 320 гарнцевъ. Въ день расходовали по 1 чк. 2 гар. или по 10 гарнцевъ, то-есть по одному десятку гар., а въ 320 гарнцахъ заключается 32 десятка гар., слѣд. овса хватило на 32 дня.

Задача. (Изъ сборника № 771). Сколько получилъ купецъ за 426 карандашей, если продавалъ каждый карандашъ по 3 коп.?

Письменное рѣшеніе.

1	каранд.	стоитъ	3 коп.
10	„	„	3 коп. × 10 = 30 коп.
300	„	„	3 коп. × 100 = 3 руб.
6	„	„	3 коп. × 6 = 18 коп.
20	„	„	30 коп. × 2 = 60 коп.
400	„	„	2 руб. × 4 = 12 руб.
426	„	„	12 руб. + 60 коп. + 18 коп. = 12 руб. 78 коп.

На рѣшеніи задачъ, подобныхъ послѣдней, учащіеся основательно знакомятся съ отношеніями единицъ различныхъ разрядовъ десятичной системы нумераціи.

Б) Нумерація чиселъ до высшихъ предѣловъ.

Хорошимъ нагляднымъ пособіемъ при прохожденіи этого отдѣла могутъ служить классные ариѳметическіе счеты. Переходъ отъ ариѳметическаго ящика къ счетамъ важенъ въ томъ отношеніи, что прежде ученики различали единицы различныхъ разрядовъ вполнѣ наглядно, прямо по величинѣ, а теперь они отличаютъ ихъ по мѣсту, ими занимаемому въ числѣ, и потому совершаютъ послѣдовательный наглядный переходъ къ десятичному счисленію посредствомъ цифръ.

1) На горизонтальныхъ проволокахъ.

Всѣ шары, расположенные по десяти на каждой проволокѣ, сдвигаются въ одну сторону счетовъ и закрываются доскою, придѣланною къ рамкѣ, такъ что къ классу обращена эта доска и половина проволокъ безъ шаровъ. Ученики считаютъ по одному шару, передвигаемому учителемъ изъ за доски на другой конецъ первой верхней или нижней проволоки, до 10 и убѣждаются въ томъ, что больше шаровъ на этой проволокѣ нѣтъ.

Десять шаровъ составляютъ *десятокъ* и, подобно тому, какъ одна монета гривенникъ замѣняетъ 10 другихъ монетъ—копеекъ, можно и на проволокахъ, для дальнѣйшаго счета, десять шаровъ, взятыхъ на первой проволокѣ, замѣнить однимъ—на второй и помнить, что онъ означаетъ десятокъ. Затѣмъ, если откладывать шары на второй проволокѣ, то это будетъ счетъ десятками, а не единицами.

Для упражненія ученикамъ предлагаются вопросы: «Какъ откинуть на счетахъ 30? Почему надо взять 3 шара на второй проволокѣ, а не на первой? Какъ положить на счетахъ число шаровъ, соотвѣтствующее 9 копѣйкамъ, 10 копейкамъ, 7 гривенникамъ, 46 копейкамъ? Какое число составится, если на первой проволокѣ взять 4 шара, а на второй 7?» и т. д.

Подобно тому, какъ единицы перваго и второго разряда отсчитываются на различныхъ проволокахъ счетовъ, такъ и при написаніи числа цифры, выражающія число единицъ каждаго изъ разрядовъ, получаютъ свое значеніе отъ мѣста, ими занимаемаго.

По требованію учителя ученикъ откладываетъ на счетахъ число 99 взявъ на первой и на второй проволокѣ по 9 шаровъ; затѣмъ рѣшаетъ вопросъ, что получится, если прибавить еще единицу перваго разряда. Тогда 10 шаровъ, находящихся на первой проволокѣ, откидываются обратно и замѣняются однимъ шаромъ на второй, на которой такимъ образомъ получается 10 шаровъ, означающихъ 10 десятковъ. Для дальнѣйшаго счета десятками эти 10 шаровъ отодвигаются и замѣняются по прежнему пріему однимъ шаромъ на третьей проволокѣ. Такимъ образомъ, этотъ одинъ шаръ замѣняетъ собою 10 шаровъ, отсчитываемыхъ на второй проволокѣ, или 100 шаровъ на первой, и означаетъ *сотню*.

Для упражненія въ счетѣ единицами трехъ разрядовъ ученики читаютъ числа, откладываемыя учителемъ на счетахъ, или берутъ на счетахъ числа, диктуемыя учителемъ; пишутъ числа по шарамъ, откинутымъ на счетахъ; берутъ на счетахъ числа, записанныя учителемъ на доскѣ, а также устно рѣшаютъ вопросы: «какъ взять на счетахъ число 340; какое получится число, если на верхней проволокѣ счетовъ взять 6 шаровъ, а на третьей 7; почему это число читается 706, а не 76?» и т. п.

Взявъ на счетахъ 999, ученикъ прибавляетъ еще единицу, получаетъ 10 шаровъ на первой проволокѣ и замѣняетъ ихъ однимъ шаромъ на второй; полученные 10 шаровъ на второй проволокѣ замѣняетъ однимъ шаромъ на третьей и, наконецъ, 10 шаровъ на третьей проволокѣ замѣняетъ однимъ шаромъ на четвертой. Получается такимъ образомъ *тысяча—единица четвертаго разряда*.

Затѣмъ, идутъ тѣ же упражненія въ чтеніи, написаніи и откладываніи на счетахъ четырехзначныхъ чиселъ, какъ и при предъидущихъ разрядахъ.

Взявъ на счетахъ 9999 и прибавивъ еще единицу, ученики получившіеся 10 шаровъ на четвертой проволокѣ замѣняютъ однимъ шаромъ на пятой и получаютъ *десятокъ тысячъ—единицу пятаго разряда*. Точно такъ же получаютъ единицы разрядовъ высшихъ до какого-угодно предѣла.

При послѣдовательности образованія единицъ различныхъ разрядовъ, написаніе и откладываніе на счетахъ чиселъ не представляетъ для учениковъ ни малѣйшей трудности, и они весьма легко дѣлаютъ переходъ отъ счетовъ къ цифрамъ и обратно.

Не входя по этому вопросу въ дальнѣйшія подробности, я приведу здѣсь рядъ вопросовъ и упражненій, служащихъ для повторенія нумераціи. „Какіе разряды единицъ различаются въ числахъ? Какъ называются единицы 2-го, 5-го, 7-го разряда? Какое число составится изъ 4 единицъ 6 разряда и 7 единицъ третьяго? Какъ взять на счетахъ 9 десятковъ тысячъ, 72 сотни тысячъ, 12 милліоновъ? и т. п. Взять на счетахъ числа: 4096, 72040, 5060420» и. т. п.

Читаются числа, взятыя на счетахъ. Записываются числа, продиктованныя учителемъ. Откладываются на счетахъ числа, продиктованныя учителемъ. Разложить число 76040 по разрядамъ (70000+6000+40). Составить числа изъ единицъ слѣдующихъ разрядовъ:

5	единицъ	3-го	разряда	780509
7	„	6-го	„	
9	„	1-го	„	
8	„	5-го	„	
или 4	единицъ	4-го	разряда	8004002
2	„	1-го	„	
8	„	7-го	„	

и т. д.

Въ числѣ 547256 сколько всего десятковъ, сотенъ, тысячъ, десятковъ тысячъ, сотенъ тысячъ? Показать это на счетахъ.

Отъ чего зависитъ значеніе каждой цифры въ данномъ числѣ? Что сдѣлается съ числомъ единицъ каждаго разряда, если въ концѣ числа справа приписать нуль, если откинуть нуль? Что сдѣлается съ числомъ, если къ нему слѣва приписать нуль? Что сдѣлается съ числомъ, если вставить нуль между цифрами числа? Какія цифры получатъ бóльшее значеніе, какія останутся при прежнемъ значеніи? Какъ увеличить число въ 10, 100, 1000 разъ? Какъ число, оканчивающееся нулями, уменшить въ 10, 100 разъ? Какъ увеличить число въ 20, 30, 40 разъ? (Достаточное число упражненій въ чтеніи и писаніи большихъ чиселъ приведено въ „Сборникѣ“ въ отдѣлѣ II подъ заглавіемъ: Примѣры на словесное и письменное счисленіе).

При написаніи и чтеніи большихъ чиселъ учитель указываетъ ученикамъ на удобство распредѣленія единицъ разрядовъ по классамъ.

1-й классъ: единицы, десятки, сотни

2-й классъ: тысячи, десятки тыс., сотни тыс.

3-й классъ: милліоны, десятки милліон., сотни милліон.

4-й классъ: тысячи мил., десятки тыс. мил., сотни тыс. мил.

5-й классъ: билліоны, десятки билліоновъ, сотни билліоновъ.

Въ новѣйшихъ учебникахъ считается за болѣе удобную французская система распредѣленія разрядовъ по классамъ, причемъ каждый классъ имѣетъ свое специальное названіе:

1-й классъ { единицы, десятки, сотни
2-й классъ { тысячи, десятки тыс., сотни тыс.
3-й классъ { милліоны, десятки милліон., сотни милліон.
4-й классъ { билліоны, десятки бил., сотни бил.
5-й классъ { трилліоны, десятки трилліоновъ, сотни трилліоновъ.

Такимъ образомъ, по этой системѣ
1 билліонъ=1,000,000,000

а по нашей
1 билліонъ=1,000,000,000,000.

2) На вертикальныхъ проволокахъ.

Нѣкоторые учителя считаютъ болѣе удобнымъ наглядно выяснить нумерацію и пріемъ написанія чиселъ на вертикальныхъ проволокахъ счетовъ, потому что здѣсь на каждой проволокѣ помѣщается только по 10 шаровъ (на другихъ счетахъ, какъ сказано въ описаніи этого пособія, даже только 9), такъ что дальнѣйшаго счета шаровъ производить на этой проволокѣ уже нельзя, и само собою является необходимость переходить къ слѣдующей проволокѣ; кромѣ того, шары, выражающіе различные разряды чиселъ, располагаются на счетахъ въ томъ же порядкѣ справа налѣво, въ какомъ располагаются и цифры въ написанномъ числѣ. Удобство же счета на горизонтальныхъ проволокахъ состоитъ въ томъ, что здѣсь шары только передвигаются съ одного конца проволоки на другой, а на вертикальныхъ проволокахъ ихъ надо постоянно надѣвать или снимать.

Само собою понятно, послѣ описанія работъ на горизонтальныхъ проволокахъ счетовъ, какъ вести тѣ же упражненія на проволокахъ вертикальныхъ.

Для упражненій учениковъ въ сравненіи между собою разрядовъ по величинѣ, имъ предлагаются задачи изъ „Сборника“, помѣщенныя подъ заглавіемъ: „Устныя задачи на числа до 1000“.

Задача. На торговомъ суднѣ изъ-за границы привезено 10 кулей яблокъ, по 2 тыс. 4 десятка въ каждомъ. Яблоки эти пересыпаны въ мѣшки: 40 большихъ по 2 сот. 6 дес. и 100 меньшихъ. По скольку яблокъ высыпано въ каждый меньшій мѣшокъ?

Рѣшеніе. Въ одномъ кулѣ яблокъ 2 тыс. 4 дес., то въ 10 куляхъ 20 тыс. 40 дес. или 20 тыс. 4 сотни. Въ каждый большой мѣшокъ всыпано по 2 сотни 6 дес., то въ 40 мѣшковъ всыпано 80 сот. 240 дес. или 8 тыс. 24 сот. или 10 тыс. 4 сотни. Изъ 20 тыс. 4 сотенъ, если отнять 10 тыс. 4 сотни, остается 10 тыс. Эти 10 тысячъ яблокъ всыпаны въ 100 малыхъ мѣшковъ; значитъ, въ каждый пришлось по 100 яблокъ, потому что въ 10 тысячахъ 100 сотенъ.

Четыре дѣйствія съ числами любой величины.

Послѣ достаточнаго знакомства учениковъ съ составомъ чиселъ на основаніи изученія нумераціи и рѣшенія задачъ, относящихся къ этому отдѣлу, а также послѣ основательнаго усвоенія ими при изученіи чиселъ первой сотни сущности каждаго изъ четырехъ ариѳметическихъ дѣйствій, и пріемовъ совершенія этихъ дѣйствій на составныхъ именованыхъ числахъ, весьма хорошимъ приложеніемъ всего пройденнаго служитъ выясненіе ученикамъ механизма четырехъ дѣйствій съ числами любой величины. Употребленіе наглядныхъ пособій при прохожденіи этого отдѣла становится уже излишнимъ, такъ какъ этотъ отдѣлъ представляетъ только дальнѣйшее приложеніе къ новымъ числамъ всего извѣстнаго ученикамъ. Только въ виду пріученія учениковъ къ практическому пользованію торговыми счетами можно предлагать имъ производить вычисленіе на счетахъ; но такъ какъ эти упражненія преслѣдуютъ уже чисто практическую цѣль, и притомъ имѣются книги, въ которыхъ достаточно подробно приведены различнаго рода практическія упражненія на счетахъ, то я считаю излишнимъ излагать здѣсь эти упражненія.

Такъ какъ задачи и численные примѣры на всѣ 4 дѣйствія расположены въ моемъ „Сборникѣ" въ одной и той же послѣдовательности, то каждое дѣйствіе можетъ изучаться 1) или на однѣхъ задачахъ, или на однихъ примѣрахъ, 2) задачи могутъ служить для классной работы учениковъ, а численные примѣры для внѣклассной и 3) для разнообразія классной работы задачи на каждое изъ четырехъ дѣйствій могутъ чередоваться съ численными примѣрами.

Правила дѣйствій слѣдуетъ выводить въ общепринятомъ порядкѣ расположенія четырехъ дѣйствій

Задачи расположены въ первомъ отдѣлѣ „Сборника" подъ рубриками: задачи на сложеніе, вычитаніе, умноженіе, дѣленіе и на всѣ 4 дѣйствія, а численные примѣры во второмъ отдѣлѣ того же „Сборника" подъ рубриками: численные примѣры на сложеніе, вычитаніе, умноженіе, дѣленіе и на всѣ 4 дѣйствія съ отвлеченными числами.

Сложеніе.

Приступая къ выводу сложенія большихъ чиселъ, необходимо произвѣсти слѣдующія предварительныя устныя упражненія:

1) Повторить извѣстный уже учащимся пріемъ сложенія чиселъ двузначныхъ, прилагая его къ слагаемымъ, дающимъ въ суммѣ болѣе 100; напримѣръ, задачу (изъ „Сборника" № 813): „Въ городѣ 95 православныхъ церквей и 34 иновѣрческихъ. Сколько всего церквей въ этомъ городѣ?" ученики рѣшаютъ такъ: 90+30=120, 5+4=9, а 120+9=129.

2) Рядомъ упражненій показать учащимся, что сложеніе между собою сотенъ, а также сложеніе чиселъ, состоящихъ изъ сотенъ и десятковъ, производится по тѣмъ же пріемамъ, какъ и сложеніе чиселъ, состоящихъ изъ однихъ десятковъ или изъ десятковъ и единицъ. Напримѣръ, задача (изъ «Сборника» № 817): «Въ селѣ стояло 610 пѣхотныхъ солдатъ и 340 конныхъ. Сколько всего солдатъ было расположено въ этомъ селѣ?» рѣшается такъ: 600+300=900, 10+40=50, 900+50=950.

Для этихъ упражненій даны въ „Сборникѣ" задачи отъ № 811 до № 818 и численные примѣры отъ № 388 до 395.

Послѣ подобныхъ упражненій, требующихъ не болѣе одного, двухъ уроковъ, дѣлается переходъ къ сложенію двухъ слагаемыхъ, состоящихъ изъ трехъ разрядовъ, выбирая вначалѣ слагаемыя такъ, чтобы отъ сложенія отдѣльныхъ рязрядовъ въ суммѣ получалось не болѣе 9, то-есть, чтобы изъ этой суммы не приходилось выключать единицы высшаго разряда.

Задача. (Изъ „Сборника" № 819). При разведеніи рощи употребили 713 фун. березоваго сѣмени и 156 фун. сосноваго. Сколько всего сѣмени пошло на разведеніе этой рощи?

Ученики могутъ употребить для сложенія данныхъ чиселъ одинъ изъ трехъ пріемовъ:

1) Выписавъ слагаемыя въ рядъ, 713+156, будутъ производить сложеніе, начиная съ сотенъ, то-есть по тому пріему, которымъ

они пользовались при устныхъ вычисленіяхъ, и будутъ записывать результатъ сложенія по разрядамъ такъ: $700+100=800$, $10+50=60$, $3+6=9$, а $800+60+9=869$.

2) Прилагая пріемъ сложенія, выведенный для составныхъ именованныхъ чиселъ, ученики разложатъ данныя слагаемыя на разряды:

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{rlrlrl} 7 & \text{сот.} & 1 & \text{дес.} & 3 & \text{един.} \\ 1 & \text{сот.} & 5 & \text{дес.} & 6 & \text{един.} \end{array} \\ \hline \begin{array}{rlrlrl} 8 & \text{сот.} & 6 & \text{дес.} & 9 & \text{един.}=869 \end{array} \end{array}$$

3) Могутъ прямо, не разлагая чиселъ на отдѣльные разряды, написать ихъ одно подъ другимъ и произвести сложеніе, начиная его съ сотенъ или единицъ:

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{r} 713 \\ 156 \end{array} \\ \hline 869 \end{array}$$

По какому бы изъ этихъ пріемовъ ни было произведено сложеніе, работу учениковъ надо провѣрить, предлагая имъ вопросы: какая получилась сумма, откуда получилось 8 сотенъ, 6 десятковъ, 9 единицъ, съ какого разряда начали сложеніе? Затѣмъ, изъ трехъ пріемовъ указывается на третій, какъ на болѣе удобный при письменномъ вычисленіи.

Дальнѣйшая работа учениковъ должна состоять въ нахожденіи суммы двухъ трехзначныхъ слагаемыхъ, у которыхъ сначала сумма единицъ превышаетъ число 9, потомъ, какъ сумма единицъ, такъ и сумма десятковъ, больше 9, и, наконецъ, отъ сложенія каждаго изъ трехъ рязрядовъ получается число больше 9.

Задача. (Изъ «Сборника» № 822). При устройствѣ тротуара по одну сторону улицы употребили 869 плитъ, а по другую—798 плитъ. Сколько всего плитъ пошло для устройства этого тротуара?

Послѣ усвоенія учениками содержанія задачи имъ предлагаются вопросы: Что ищется въ задачѣ? Сколько всего плитъ пошло для устройства тротуара. Какъ это найти? Нужно сложить числа 869 и 798. Найдите же сумму этихъ двухъ чиселъ.

Ученики, подписавъ числа одно подъ другимъ, на основаніи вывода изъ предъидущаго упражненія,

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{r} 869 \\ 798 \end{array} \\ \hline \end{array}$$

могутъ начать сложеніе съ сотенъ или единицъ; но начавъ сложеніе съ сотенъ, тотчасъ же замѣтятъ неудобство написанія суммы и, вслѣдствіе этого, употребятъ опять одинъ изъ прежнихъ пріемовъ сложенія, получатъ сумму 1667 и подпишутъ ее подъ чертою.

$$\begin{array}{r} 869 \\ +\ 798 \\ \hline 1667 \end{array}$$

Если письменныя упражненія съ составными именованными числами до 100 пройдены основательно, то ученики не затруднятся сами приложить извѣстный имъ пріемъ сложенія къ данному случаю, когда слагаемыя не разбиты на отдѣльные разряды, то-есть начнутъ сложеніе съ единицъ низшаго разряда и, получивъ въ суммѣ семнадцать (8+9) единицъ, выключатъ одинъ десятокъ, придадутъ его къ десяткамъ слагаемыхъ чиселъ и т. д.

Тѣмъ не менѣе, для установленія и закрѣпленія простѣйшаго пріема сложенія, слѣдуетъ предложить ученикамъ рядъ вопросовъ:

Какъ получилось въ суммѣ 7 единицъ? Отъ сложенія 9 и 8 единицъ получилось 17 единицъ?,но 17=10+7, слѣдовательно, выключивъ изъ суммы единицъ одинъ десятокъ, получаемъ 7 единицъ.

Какъ получилось 6 десятковъ? Отъ сложенія 6 и 9 десятковъ получилось 15 десятковъ; 5 десятковъ да одинъ десятокъ, получившійся отъ сложенія единицъ, составятъ 16 десятковъ, а 16 десятковъ состоятъ изъ 10 десятковъ, то-есть одной сотни, и 6 десятковъ; слѣдовательно, выключивъ одну сотню изъ суммы десятковъ, получаемъ 6 десятковъ.

Какъ получилось въ суммѣ 16 сотенъ? Отъ сложенія 8 и 7 сотенъ получилось 15 сотенъ; 15 сотенъ да одна сотня получившаяся отъ сложенія десятковъ, составляютъ 16 сотенъ или одну тысячу и 5 сотенъ.

Результатомъ всей работы на сложеніе чиселъ должно быть формулированіе учениками правила, что для сложенія чиселъ нужно: 1) *слагаемыя подписать одно подъ другимъ такъ, чтобы единицы одного и того же разряда находились въ одномъ ряду*; 2) *сложеніе начинать съ единицъ и сумму единицъ, если она не болѣе 9, подписывать подъ единицами, потомъ складывать десятки и т. д.*; 3) *если отъ сложенія какихъ-либо разрядовъ получится въ суммѣ болѣе 9 единицъ этого разряда, то изъ этой суммы выключить единицы слѣдующаго высшаго* *разряда, къ которому ихъ и придать, а остальное число подписать подъ тѣмъ разрядомъ, который складывался.*

Задачи и численные примѣры на сложеніе расположены въ „Сборникѣ" слѣдующимъ образомъ:

1) Задачи отъ № 818 до № 823 и численные примѣры отъ № 395 до № 400 даны на сложеніе двухъ трехзначныхъ чиселъ.

2) Задачи отъ № 823 до № 830 и численные примѣры отъ № 400 до № 408—на сложеніе двухъ четырехзначныхъ чиселъ.

3) Задачи отъ № 830 до № 845 и численные примѣры отъ № 408 до № 417—на сложеніе различныхъ чиселъ.

Вычитаніе.

Послѣ вывода правила сложенія чиселъ, упражненія на вычитаніе идутъ быстрѣе, такъ какъ ученикамъ, на основаніи сейчасъ изложеннаго, извѣстно удобство совершенія дѣйствія, начиная его съ единицъ низшаго разряда, а на основаніи упражненій съ составными именованными числами, извѣстенъ пріемъ заниманія одной единицы высшаго наименованія, когда при вычитаніи числа какого-либо наименованія въ вычитаемомъ дано число большее, чѣмъ въ уменьшаемомъ. Такимъ образомъ, правило вычитанія большихъ чиселъ можно вывести въ одинъ урокъ, подбирая упражненія по степени трудности. Но, принявъ во вниманіе, что не столько важна быстрота вывода пріема механизма, сколько важенъ самый процессъ этого вывода, а также и то, что въ классѣ всегда есть ученики, для которыхъ быстрота работы затрудняетъ пониманіе дѣла, лучше упражненія, направляемыя къ выводу правила, расположить въ строгомъ послѣдовательномъ порядкѣ.

Планъ упражненій: 1) Устное вычитаніе двухзначныхъ чиселъ. 2) Устное вычитаніе сотенъ. 3) Устное вычитаніе двузначнаго числа изъ сотенъ. 4) Устное вычитаніе изъ сотенъ числа, состоящаго изъ сотенъ и десятковъ. 5) Устное вычитаніе изъ сотенъ числа, состоящаго изъ сотенъ, десятковъ и единицъ. 6) Письменное вычитаніе трехзначныхъ чиселъ, когда въ каждомъ разрядѣ уменьшаемаго единицъ достаточно для вычитанія изъ нихъ разрядовъ вычитаемаго. 7) Письменное вычитаніе трехзначныхъ чиселъ, когда приходится занимать единицы высшаго разряда. 8) Письменное вычитаніе трехзначныхъ чиселъ, когда въ уменьшаемомъ на мѣстѣ десятковъ поставленъ нуль, а для вычитанія единицъ приходится занимать 1 десятокъ. 9) Письменное вычитаніе четырехзначныхъ и многозначныхъ чиселъ. 10) Выводъ правила механизма вычитанія.

Изъ всѣхъ приведенныхъ въ планѣ упражненій я остановлюсь только на краткомъ разъясненіи письменныхъ упражненій.

Задача (Изъ „Сборника" № 845). Въ одномъ селѣ 589 дворовъ, а въ другомъ на 234 двора менѣе. Сколько дворовъ во второмъ селѣ?

Ученики пишутъ:

$$\begin{array}{r} 589 \\ -\ 234 \\ \hline \end{array}$$

и производятъ вычитаніе; причемъ могутъ начать вычитаніе съ сотенъ или единицъ. Послѣ полученія разности 355 даютъ отвѣты на вопросы, какъ получилась цифра каждаго разряда и съ какого разряда начато вычитаніе.

Задача (Изъ „Сборника" № 846). По одной и той же дорогѣ расположены три деревни. Отъ первой до третьей 683 версты, а отъ третьей до второй 359 верстъ. Какъ велико разстояніе отъ первой деревни до второй?

По даннымъ числамъ этой задачи ученики видятъ неудобство вычитанія, начиная съ сотенъ, и, примѣняя къ этому случаю пріемъ выведенный для сложенія чиселъ, начнутъ вычитаніе съ единицъ. Въ случаѣ затрудненія при вычитаніи 9 единицъ изъ трехъ единицъ, не слѣдуетъ указывать ученикамъ на необходимость занять одинъ десятокъ, а лучше предоставить имъ сдѣлать вычитаніе по какому-угодно пріему и получить разность, изъ разсмотрѣнія которой простѣйшій пріемъ получится въ видѣ вывода.

Ученики могутъ сдѣлать вычитаніе, необходимое для рѣшенія данной задачи, или устно, такъ: $683-300=383$, $383-50=333$, $333-9=324$, или письменно, разлагая данныя числа на разряды по образцу составныхъ именованныхъ чиселъ:

$$\begin{array}{l} \ 6 \text{ сот. } 8 \text{ дес. } 3 \text{ един.} \\ -\ 3 \text{ сот. } 5 \text{ дес. } 9 \text{ един.} \\ \hline \ 3 \text{ сот. } 2 \text{ дес. } 4 \text{ един.} = 324. \end{array}$$

Когда разность, по какому бы ни было пріему, получена, предлагаются вопросы:

Какимъ образомъ въ разности получилось 4 единицы? Изъ трехъ единицъ нельзя вычесть 9 единицъ, а потому отъ 8 десятковъ уменьшаемаго взяли одинъ десятокъ, раздробили его въ 10 единицъ и придали къ тремъ единицамъ; получилось 13 единицъ, а $13-9=4$.

Какъ получилось въ разности 2 десятка? Когда въ уменьшаемомъ отъ 8 десятковъ взяли 1 десятокъ для вычитанія единицъ, то осталось 7 десятковъ, а 7 десятковъ безъ 5 десятковъ $=2$ десяткамъ.

Почему это вычитаніе неудобно было начинать съ сотенъ? Потому что послѣ вычитанія сотенъ и десятковъ оказалось бы, что 9 единицъ нельзя вычесть изъ трехъ единицъ и пришлось бы занимать одинъ десятокъ у самой разности.

Такимъ же образомъ ведется вычитаніе трехзначныхъ чиселъ въ томъ случаѣ, когда въ уменьшаемомъ на мѣстѣ десятковъ стоитъ нуль, а для вычитанія единицъ приходится занимать 1 десятокъ. Важно то, что ученики, не зная еще простѣйшихъ пріемовъ механизма вычисленій, могутъ, на основаніи предшествовавшихъ работъ, хотя бы посредствомъ длиннаго пріема, найти искомый результатъ. А когда результатъ найденъ, то изъ разсмотрѣнія процесса вычисленія ученики доходятъ до вывода пріема простѣйшаго.

Послѣ усвоенія простѣйшаго пріема вычитанія трехзначныхъ чиселъ, можно давать задачи на вычитаніе чиселъ четырехзначныхъ и многозначныхъ.

Результатомъ всѣхъ упражненій на вычитаніе чиселъ должно быть окончательное формулированіе учениками правила, что для вычитанія чиселъ нужно: 1) *подписать вычитаемое подъ уменьшаемымъ такъ, чтобы единицы одного и того же разряда находились одна подъ другою;* 2) *начинать вычитаніе съ единицъ и число, получаемое отъ вычитанія какого-либо разряда, писать подъ тѣмъ же разрядомъ*; 3) *если число единицъ какого-либо разряда уменьшаемаго менѣе числа единицъ того же разряда вычитаемаго, то число этого разряда уменьшаемаго надо увеличить 10-ью, а слѣдующій высшій разрядъ уменьшаемаго одною единицею уменьшить*; 4) *если на мѣстѣ высшаго разряда, который приходится уменьшить единицею, стоитъ нуль, то считать этотъ разрядъ за 9, а слѣдующій высшій уменьшить единицею.*

Задачи и численные примѣры на вычитаніе расположены слѣдующимъ образомъ: 1) Задачи отъ № 845 до № 852 и численные примѣры отъ 417 до № 424 даны на вычитаніе трехзначнаго числа изъ трехзначнаго, когда а) въ каждомъ разрядѣ уменьшаемаго достаточно единицъ для вычитанія изъ нихъ разрядовъ вычитаемаго, б) въ первомъ или во второмъ разрядахъ уменьшаемаго или въ томъ и другомъ единицъ недостаточно для вычитанія изъ нихъ разрядовъ вычитаемаго, в) на мѣстѣ единицъ или десятковъ или на мѣстѣ единицъ и десятковъ уменьшаемаго находятся нули. 2) Задачи отъ № 852 до № 861 и примѣры отъ № 424 до № 435 даны на вычитаніе четырехзначныхъ чиселъ изъ четырехзначныхъ, расположенныхъ въ такой же послѣдовательности, какъ и числа трехзначныя. 3) Задачи отъ № 861 до № 870 и примѣры отъ № 435 до № 447—на вычитаніе различныхъ многозначныхъ чиселъ. 4) Задачи отъ № 870 до № 878, въ которыхъ для определенія искомаго дѣйствіе вычитаніе приходится употреблять нѣсколько разъ.

Умноженіе.

Планъ упражненій: 1) Умноженіе однозначнаго числа на 10. 2) Умноженіе однозначнаго числа на 100. 3) Умноженіе двузначнаго числа на однозначное, а также на 10 и на 100. 4) Умноженіе однозначнаго числа на двузначное. 5) Умноженіе трехзначнаго числа на однозначное. 6) Умноженіе трехзначнаго числа на двузначное, у котораго на мѣстѣ единицъ находится нуль. 7) Умноженіе трехзначнаго числа на двузначное. 8) Умноженіе четырехзначнаго и многозначнаго числа на двузначное. 9) Умноженіе многозначнаго числа на трехзначное. 10) Умноженіе многозначнаго числа на многозначное, причемъ въ серединѣ множителя, или въ концѣ, стоятъ нули.

Первые пять родовъ упражненій производятся устно или письменно, послѣдніе—письменно. Увеличеніе числа въ 10 и 100 разъ извѣстно ученикамъ изъ упражненій, приведенныхъ при изложеніи нумераціи, а потому не требуетъ съ моей стороны особыхъ поясненій.

Умноженіе двузначнаго числа на однозначное и обратно производится по пріему, усвоенному учащимися при изученіи чиселъ первой сотни.

Задача. (Изъ „Сборника" № 881). Овца (мериносъ) даетъ 21 фун. сала. Сколько сала получается съ 7 такихъ овецъ?

Для рѣшенія этой задачи 21 нужно умножить на 7. Умноженіе производится такъ: $20\times7+1\times7=140+7=147$.

Такой же пріемъ употребляется учащимися и при умноженіи трехзначнаго числа на однозначное.

Рѣшеніе задачи (изъ „Сборника" № 888): „Одна кубическая сажень свѣжихъ березовыхъ дровъ вѣситъ 375 пуд. Сколько вѣсу въ 5 куб. саж. такихъ дровъ?" производится такъ:

$$375\times5=300\times5+70\times5+5\times5=1500+350+25=1875.$$

Послѣ достаточнаго числа упражненій, указанныхъ въ первыхъ пяти рубрикахъ плана, можно перейти къ письменному умноженію трехзначнаго числа на однозначное и къ выводу простѣйшаго пріема такого умноженія.

Ученикамъ предлагается задача:

Локомотивъ проходитъ въ минуту 345 саж. Какое разстояніе пройдетъ онъ въ 9 минутъ?

Ученики, не получивъ отъ учителя указанія на простѣйшій пріемъ умноженія, будутъ находить произведеніе 345 на 9 или по вышеуказанному пріему, или разложатъ 345 на разряды и станутъ производить умноженіе по пріему умноженія составного именованнаго числа.

	3 сот.	4 дес.	5 един.
		×	9
	27 сот.	36 дес.	45 един.
3 тыс.	1 сот.		5 един.=3105.

Послѣ полученія произведенія, данныя числа и результатъ записываютъ въ сокращенномъ видѣ:

$$\begin{array}{r} 345 \\ \times\ 9 \\ \hline 3105 \end{array}$$

и учащіеся отвѣчаютъ на вопросы: „Какъ получилось въ произведеніи 5 единицъ, 0 десятковъ, 1 сотня, 3 тысячи? Откуда слѣдуетъ начинать умноженіе и почему?“ Отвѣты учениковъ сами собой очевидны.

Затѣмъ, идутъ уже упражненія въ умноженіи трехзначныхъ и четырехзначныхъ чиселъ на однозначное по выведенному простѣйшему пріему.

Для перехода къ умноженію на число двузначное, необходимо, какъ и указано въ планѣ, остановиться на умноженіи числа, на такое двузначное, въ которомъ на мѣстѣ единицъ находится нуль.

Задача. (Изъ „Сборника“ № 897). Изъ четверти конопляпаго сѣмени получается 56 фун. масла. Сколько масла добывается изъ 40 четвертей конопляпаго сѣмени?

Что ищется въ задачѣ? Сколько масла добывается изъ 40 четвертей конопляпаго сѣмени. Что для этого нужно сдѣлать? 56 фун. умножить на 40. Что значитъ 56 фун. умножить на 40? Это значитъ— взять 56 фун. сорокъ разъ, повторить слагаемымъ 56 фун. сорокъ разъ.

Какъ проще поступить, чтобы 56 фун. взять сорокъ разъ? Надо сперва 56 фун. взять 10 разъ и полученное число фунтовъ повторить 4 раза.

(При затрудненіи учащихся въ отвѣтѣ на этотъ вопросъ, можно дать имъ поясненіе, что если число 56 написать слагаемымъ 40 разъ, то всѣ эти слагаемыя можно распредѣлить на 4 группы, въ каждой группѣ по 10 слагаемыхъ; сначала находится сумма каждой изъ четырехъ группъ—она будетъ одна и та же для всѣхъ группъ—и потомъ складываются полученныя 4 суммы или, что одно и то же одна изъ нихъ умножается на 4).

Сдѣлайте это умноженіе.

$$\begin{array}{r}56\\ \times 10\\ \hline 560\end{array}\qquad\begin{array}{r}560\\ \times\ 4\\ \hline 2240\end{array}\qquad\begin{array}{r}56\\ \times 40\\ \hline 2240\end{array}$$

Откуда получился нуль на мѣстѣ единицъ въ произведеніи? Отъ умноженія 56 на 10 въ произведеніи получился нуль въ концѣ, а отъ умноженія 560 на 4 этотъ нуль снова остался въ концѣ произведенія. Откуда получилось въ произведеніи 224? Отъ умноженія 56 на 4.

Затѣмъ, ученикамъ предлагаются задачи на умноженіе трехзначнаго и четырехзначнаго числа на двузначное, въ которомъ на мѣстѣ единицъ находится нуль, и на трехзначное на, мѣстѣ единицъ и десятковъ котораго находятся нули.

Задача. (Изъ „Сборника“ № 899 и № 902). Кузнецъ каждый день выдѣлываетъ 238 гвоздей. Сколько гвоздей приготовитъ онъ въ 60 дней?

Сколько валоваго дохода получено въ годъ съ 500 вер. желѣзной дороги, если валовой сборъ съ какой версты составилъ въ этотъ годъ 9789 руб.?

По вышеуказанному пріему ученики рѣшаютъ предложенныя задачи:

$$\begin{array}{r}238\\ \times\ 60\\ \hline 14280\end{array}\qquad\begin{array}{r}9789\\ \times\ 500\\ \hline 4894500\end{array}$$

и по вопросамъ учителя убѣждаются въ томъ, что 1) въ первой задачѣ число десятковъ въ произведеніи получается отъ умноженія множимаго на цифру десятковъ множителя, а отъ умноженія на 10 получается только нуль въ концѣ произведенія и 2) во второй задачѣ число сотенъ въ произведеніи получается отъ умноженія множимаго на цифру сотенъ множителя, а отъ умноженія на 100 получается только два нуля въ концѣ произведенія.

Замѣтивъ это, учащіеся приходятъ къ выводу, что, при умноженіяхъ такого рода, надо сперва множимое умножить на цифру десятковъ или сотенъ множителя и въ концѣ полученнаго произведенія приписать одинъ или два нуля.

На основаніи этого вывода они приходятъ также къ частному выводу, что удобнѣе подписывать множителя, выступая однимъ или двумя нулями изъ-подъ множимаго, и лучше сразу написать въ произведеніи одинъ или два нуля, а потомъ, влѣво отъ нихъ, число, полученное отъ умноженія множимаго на цифру десятковъ или сотенъ множителя.

Теперь перейдемъ къ разсмотрѣнію умноженія двузначныхъ чиселъ на двузначныя.

Задача. (Изъ „Сборника“ № 907). Маятникъ дѣлаетъ каждую минуту 75 качаній. Сколько качаній производитъ онъ въ 37 минутъ?

Ученики требуемое въ задачѣ умноженіе производятъ такъ: берутъ 75 тридцать разъ и еще 7 разъ и полученныя произведенія складываютъ.

$$\begin{array}{r} 75 \\ \times\ \ 30 \\ \hline 2250 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 75 \\ \times\ 7 \\ \hline 525 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 75 \\ \times\ 37 \\ \hline 2250 \\ +\ \ 525 \\ \hline 2775 \end{array}$$

Затѣмъ, для повѣрки дѣйствія, учитель требуетъ сначала умножить 75 на 7, а потомъ 75 на 30.

$$\begin{array}{r} 75 \\ \times\ 7 \\ \hline 525 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 75 \\ \times\ \ 30 \\ \hline 2250 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 75 \\ \times\ 37 \\ \hline 525 \\ +\ 2250 \\ \hline 2775 \end{array}$$

Измѣненіе будетъ состоять только въ перемѣнѣ порядка двухъ слагаемыхъ произведеній. Наконецъ, послѣ указанія учителя, что нуль, получаемый всегда во второмъ произведеніи отъ умноженія множимаго на десятки множителя, для сокращенія письма, можно вовсе не писать, ученики производятъ умноженіе въ задачѣ: „Сколько вѣсу въ 29 ведрахъ молока, если каждое ведро вѣситъ 31 фун.?“ такимъ образомъ:

$$\begin{array}{r} 31 \\ \times\ 29 \\ \hline 279 \\ 62\ \\ \hline 899 \end{array}$$

Послѣ достаточнаго числа упражненій въ умноженіи, при множителѣ двузначномъ, учащіеся нисколько не затрудняется при выводѣ простѣйшаго пріема умноженія на число трехзначное и многозначное Придется только обратить вниманіе ихъ на упрощенные пріемы умноженія въ томъ случаѣ, когда въ срединѣ или въ концѣ множителя находятся нули, а также когда множимое или множимое и множители оканчиваются однимъ или нѣсколькими нулями.

Результатомъ вычисленій съ отвлеченными числами и рѣшеній практическихъ задачъ на умноженіе должно явиться формулированное учениками правило, что *для умноженія многозначнаго числа на многозначное слѣдуетъ множимое множить на каждую цифру множителя, начиная съ единицъ и подписывая первую цифру каждаго частнаго произведенія подъ тою цифрою, на которую множатъ; потомъ сложить всѣ частные произведенія. Если множитель оканчивается однимъ или нѣсколькими нулями, то слѣдуетъ умножить только на значущія цифры и къ полученному произведенію приписать съ правой стороны столько нулей, сколько ихъ было у множителя.*

Если же множимое и множитель оканчиваются нулями, то слѣдуетъ умножать числа, не обращая вниманія на нули, и къ полученному произведенію приписать съ правой стороны столько нулей, сколько ихъ было во множимомъ и множителѣ вмѣстѣ.

Задачи и численные примѣры на умноженіе расположены въ „Сборникѣ" слѣдующимъ образомъ:

1) Задачи отъ № 878 до № 885 и примѣры отъ № 447 до № 458. Умноженіе двухзначнаго числа (сперва полныхъ десятковъ, а потомъ десятковъ и единицъ) на однозначное.

2) Задачи отъ № 885 до № 890 и примѣры отъ № 458 до № 464. Умноженіе двухзначнаго числа (сперва полныхъ сотенъ, потомъ сотенъ и десятковъ и, наконецъ, сотенъ, десятковъ и единицъ) на однозначное.

3) Задачи отъ № 890 до 893 и примѣры отъ № 464 до № 473. Умноженіе четырезначнаго числа на однозначное.

4) Задачи отъ № 893 до № 896 и примѣры подъ № 473. Умноженіе двузначнаго, трехзначнаго четырезначнаго числа на 10, 100, 1000.

5) Задачи отъ № 896 до № 903 и примѣры подъ № 474. Умноженіе двузначнаго, трехзначнаго и четырезначнаго числа на нѣсколько полныхъ десятковъ и сотенъ.

6) Задачи отъ № 903 до № 908 и примѣры отъ № 475 до № 486. Умноженіе двузначнаго числа на двузначное.

7) Задачи отъ № 908 до № 911 и примѣры отъ № 486 до № 492. Умноженіе трехзначнаго числа на двузначное.

8) Задачи отъ № 911 до № 915 и примѣры отъ № 492 до № 500. Умноженіе четырезначнаго числа на двузначное.

9) Задачи отъ № 915 до № 918 и примѣры подъ № 500 Умноженіе трехзначнаго числа на трехзначное.

10) Задачи отъ № 918 до № 922 и примѣры отъ № 501 до № 503. Умноженіе четырезначнаго и пятизначнаго числа на трехзначное и четырезначное.

11) Задачи отъ № 922 до № 932 и примѣры отъ № 503 до № 509. Различные случаи умноженія. Задачи и примѣры, требующіе для своего рѣшенія употребленія дѣйствія умноженія нѣсколько разъ.

Дѣленіе.

Приступая къ выводу правила дѣленія отвлеченныхъ чиселъ, необходимо выяснить на небольшихъ частныхъ примѣрахъ, что дѣля одно число на другое, мы ищемъ такое число, которое, будучи умножено на дѣлителя, дастъ дѣлимое. Такимъ способомъ обобщается двойное значеніе дѣленія въ приложеніи его къ рѣшенію практическихъ вопросовъ; именно: 1) раздѣленіе числа на равныя части и 2) опредѣленіе содержанія одного числа въ другомъ. Такое обобщеніе достигается повѣркою полученнаго отъ дѣленія результата.

Задача. (Изъ „Сборника“ № 932). 300 саж. дровъ сложены па дворѣ въ 3 равныя клѣтки. Сколько саженъ дровъ въ каждой клѣткѣ?

Что мы должны сдѣлать для рѣшенія этой задачи? Должны 300 саж. раздѣлить на 3 равныя части. Сколько получимъ? 100 саж. Какъ это повѣрить? 100 саж., взятыя 3 раза, даютъ 300 саж.

Задача. (Изъ „Сборника“ № 935). На каждаго солдата полагается въ мѣсяцъ 2 гарнца крупы. На прокормленіе сколькихъ солдатъ употреблено въ продолженіи мѣсяца 4000 гар. крупы?

Что нужно сдѣлать для рѣшенія этой задачи? Нужно узнать, сколько разъ 2 гар. заключаются въ 4000 гар., то-есть 4000 раздѣлить на 2. Получимъ, что 4000 гар. крупы употребили на прокормленіе 2000 солдатъ? Какъ это повѣрить? Если на одного солдата полагается въ мѣсяцъ 2 гар.

крупы, то для 2000 солдатъ потребуется крупы въ 2000 разъ болѣе, а 2 гар., взятые 2000 разъ, даютъ 4000 гар.

Значитъ, какимъ свойствомъ отличается частное, получаемое отъ дѣленія одного числа на другое? Если частное умножить на дѣлителя, то должно получиться дѣлимое.

Итакъ, дѣля одно число на другое, какое число мы ищемъ? Такое число, которое, будучи умножено на дѣлителя, даетъ дѣлимое.

Дѣлимое 72, дѣлитель 8, какъ велико частное? (9).

Почему? Если 9 умножить на 8, то получимъ 72.

Послѣ такого разъясненія учащіеся приходятъ къ заключенію, что процессъ дѣленія числа на равныя части и опредѣленія содержанія одного числа въ другомъ одинъ и тотъ же, такъ какъ въ обоихъ случаяхъ рѣшеніе вопроса сводится на дѣленіе отвлеченныхъ чиселъ, то-есть на отысканіе такого числа, которое, будучи умножено на дѣлителя, даетъ дѣлимое.

Планъ упражненій: 1) дѣленіе трехзначнаго и многозначнаго числа на однозначное въ томъ случаѣ, когда каждый разрядъ дѣлимаго дѣлится безъ остатка на дѣлителя; 2) дѣленіе трехзначнаго и многозначнаго числа на однозначное въ томъ случаѣ, когда число, выражающее высшіе два разряда, дѣлится безъ остатка на дѣлителя; 3) дѣленіе на однозначнаго дѣлителя въ томъ случаѣ, когда отъ дѣленія высшихъ разрядовъ дѣлимаго получаются остатки; 4) дѣленіе на 10 и на 100 числа, оканчивающагося нулями; 5) дѣленіе на двузначнаго дѣлителя въ томъ случаѣ, когда число, выражающее высшіе два разряда дѣлимаго, дѣлится безъ остатка на дѣлителя; 6) дѣленіе на двузначнаго дѣлителя въ томъ случаѣ, когда отъ дѣленія высшихъ разрядовъ получаются остатки; 7) дѣленіе на трехзначнаго и многозначнаго дѣлителя.

1) *Задача.* (Изъ „Сборника“ № 943). 663 доски употребили поровну на постройку трехъ сараевъ. Сколько досокъ пошло на постройку каждаго сарая?

Дѣля 6 сотенъ на 3, получимъ въ частномъ 2 сотни; отъ дѣленія трехъ десятковъ на 3 получится 1 десятокъ и, наконецъ, отъ дѣленія 3 единицъ на 3 получимъ 1 единицу; слѣдовательно, 633 : 3=211.

2) *Задача.* (Изъ „Сборника“ № 949). Сколько нужно пудовъ бересты, чтобы получить 147 фун. дегтя, если 1 пудъ бересты даетъ 7 фун. дегтя?

Отъ дѣленія 1 сотни на 7 равныхъ частей въ частномъ не по лучится ни одной сотни, а потому раздробляемъ 1 сотню въ десятки получимъ 10 десятковъ, да еще 4 десятка, будетъ 14 десятковъ. От дѣленія 14 десятковъ на 7 въ частности получится 2 десятка; отъ дѣлені 7 единицъ на 7 получимъ 1 единицу; слѣдовательно, 147 : 7 = 21.

3) *Задача.* (Изъ Сборника № 951). На фабрикѣ выдается рабо чимъ 2046 руб. за каждые 6 дней работы. Какъ великъ ежедневны расходъ этой фабрики на рабочихъ?

Отъ дѣленія 20 сотенъ на 6 получится въ частномъ 3 сотн и въ остаткѣ 2 сотни, такъ какъ 3 сотни × 6 = 18 сотнямъ, 20 сот. — 18 сот. = 2 сотнямъ. Раздробивъ двѣ сотни въ десятки придавъ 4 десятка, получимъ 24 десятка; отъ дѣленія 24 десятков на 6 получимъ 4 десятка и, наконецъ, отъ дѣленія 6 единицъ на получается 1 единица; слѣдовательно, 2046 : 6 = 341.

4) *Задача.* (Изъ Сборника № 952). Подрядчикъ обязался поста вить сапоги съ условіемъ, чтобы за каждую пару ему заплатили 5 руб Сколько паръ сапогъ поставилъ подрядчикъ, если за всю эту поставк получилъ 3375 руб.?

Письменное вычисленіе этого дѣленія располагается сначала такъ

```
   33 сот. 7 дес. 5 един. | 5
 — 30 сот.                 ----------------------
 ----------                | 6 сот. 7 дес. 5 един.
    3 сот. = 30 дес.
           +  7 дес.
           ---------
              37 дес.
           —  35 дес.
           ---------
               2 дес. = 20 един.
                      +  5 един.
                      ---------
                         25 един.
                      —  25 един.
                      ---------
                         „ „
```

а потомъ и въ сокращенномъ видѣ:

```
   3375 | 5
 — 30   |----
 -----    675
    37
  — 35
  ----
     25
   — 25
   ----
     „ „
```

5) *Задача.* (Изъ Сборника № 955). Въ 10 весеннихъ дняхъ считается 120 рабочихъ часовъ. Сколько рабочихъ часовъ въ одномъ весеннемъ днѣ?

120—все равно, что 12 десятковъ. Отъ дѣленія одного десятка на 10 получается 1 единица, то отъ дѣленія 12 десятковъ на 10 получится 12 единицъ.

6) *Задача.* (Изъ Сборника № 963). Садовникъ разложилъ 3200 яблокъ поровну въ 16 корзинокъ. Сколько яблокъ положилъ онъ въ каждую корзинку?

3200=32 сотнямъ. Отъ дѣленія 32 сотенъ на 16 получится въ частномъ 2 сотни: слѣдовательно, 3200 : 16=200.

7) *Задача.* (Изъ Сборника № 971). Во сколько минутъ приготовитъ машина 9472 гвоздя, если каждую минуту дѣлаетъ 37 гвоздей?

```
 94 сот. 7 дес. 2 един. | 37
— 74 сот.               |----------------------
                          2 сот. 5 дес. 6 един.
 20 сот. = 220 дес.
          +  7 дес.
          207 дес.
        — 185 дес.
           22 дес. = 220 един.
                   +   2 един.
                     222 един.
                   — 222 един.
                       » » »
```

Сокращенно:

```
 9472 | 37
—74   |----
        256
  207
 —185
   222
  —222
  » » »
```

8) *Задача.* (Изъ Сборника № 976). Къ празднику Св. Пасхи раздѣлили 64125 руб. между 513 чиновниками поровну. Сколько рублей досталось каждому чиновнику?

```
  64125 | 513
— 513    -----
-----     125
  1282
— 1026
------
   2565
—  2565
-------
   „„„„
```

Когда учащіеся достаточно хорошо усвоятъ механизмъ дѣленія то есть пріемъ отысканія цифры частнаго, имъ предлагаютъ задачи и примѣры для разъясненія частныхъ случаевъ, именно: когда в частномъ приходится, при дѣленіи какого-либо разряда дѣлимаго поставить нуль, когда дѣлитель оканчивается нулями, когда дѣлимо и дѣлитель оканчиваются нулями.

Результатомъ всѣхъ упражненій долженъ быть выводъ правила что для дѣленія многозначнаго числа на многозначное должно: 1) *в дѣлимомъ отдѣлить слѣва такое число, чтобы въ немъ заключалс дѣлитель; узнать, сколько разъ дѣлитель заключается въ этомъ числѣ и найденную цифру написать въ частномъ*; 2) *умножить дѣлител на найденную цифру частнаго и полученное произведеніе вычесть из взятой части дѣлимаго*; 3) *къ остатку приписать слѣдующую цифр дѣлимаго; искать вторую цифру частнаго и т. д. до тѣхъ поръ пока не получится послѣдняя цифра частнаго.*

Задачи и численные примѣры на дѣленіе расположены въ „Сборникѣ“ въ слѣдующемъ порядкѣ: 1) Задачи отъ № 932 до № 946 и примѣры отъ № 509 до № 529—на дѣленіе трехзначнаго, четырехзначнаго и пятизначнаго числа на однозначное, когда каждый разрядъ дѣлимаго дѣлится на дѣлителя.

2) Задачи отъ № 946 до № 951 и примѣры отъ № 529 до № 534—на дѣленіе трехзначнаго, четырехзначнаго и пятизначнаго числа на однозначное, когда число, выражающее высшіе 2 разряда дѣлится безъ остатка на дѣлителя.

3) Задачи отъ № 951 до № 955 и примѣры отъ № 534 до № 547—на дѣленіе трехзначнаго, четырехзначнаго и пятизначнаго числа на однозначное, когда отъ дѣленія высшихъ разрядовъ дѣлимаго получаются остатки.

4) Задачи отъ № 955 до № 958 и примѣры отъ № 547 до № 549—на дѣленіе чиселъ, оканчивающихся нулями, на 10, 100

1000 и т. д. Въ указанныхъ примѣрахъ встрѣчается и дѣленіе съ остаткомъ.

5) Задачи отъ № 958 до 962 и примѣры отъ № 549 до № 551— на дѣленіе трехзначныхъ, четырехзначныхъ, пятизначныхъ и шестизначныхъ чиселъ, на мѣстѣ низшихъ разрядовъ которыхъ находятся нули, на двузначныя, трехъ и четырехзначныя числа, у которыхъ на мѣстѣ только одного высшаго разряда находится значущая цифра.

6) Задачи отъ № 96 до № 965 и примѣры отъ № 551 до № 555— на дѣленіе трехъ-четырехъ-пятизначныхъ чиселъ на двузначное, когда число, выражающее высшіе 2 разряда дѣлимаго, дѣлится безъ остатка на дѣлителя.

7) Задачи отъ № 965 до № 974 и примѣры отъ № 555 до № 568— на дѣленіе трехъ-четырехъ-пятизначныхъ чиселъ на двузначнаго дѣлителя въ томъ случаѣ, когда отъ дѣленія высшихъ разрядовъ получаются остатки.

8) Задачи отъ № 974 до № 988 и примѣры отъ № 568 до № 589—на дѣленіе многозначныхъ чиселъ на трехзначныя и многозначныя.

9) Задачи отъ № 988 до № 991, въ которыхъ, для опредѣленія искомаго, приходится употребить дѣйствіе дѣленія нѣсколько разъ.

Для укрѣпленія учащихся въ механизмѣ четырехъ дѣйствій и въ быстротѣ вычисленій съ большими числами, имъ предлагаются задачи и численные примѣры, требующіе для рѣшенія нѣсколькихъ дѣйствій.

Такія задачи помѣщены въ первомъ отдѣлѣ первой части „Сборника“ подъ заглавіемъ: „Задачи на всѣ 4 дѣйствія“, а примѣры во второмъ отдѣлѣ того же „Сборника“ подъ заглавіемъ: „Численные примѣры на всѣ 4 дѣйствія“.

Задачи расположены въ слѣдующемъ порядкѣ: 1) Задачи отъ № 991 до № 995, рѣшаемыя *только* посредствомъ сложенія и вычитанія. 2) Задачи отъ № 995 до № 998 на сложеніе и умноженіе 3) Задачи отъ № 998 до № 1000 на вычитаніе и умноженіе. 4) Задачи отъ № 1000 до № 1002 на сложеніе и дѣленіе. 5) Задачи отъ № 1002 до № 1006 на вычитаніе и дѣленіе. 6) Задачи отъ № 1006 до № 1012 на умноженіе и дѣленіе. 7) Задачи отъ № 1012 до № 1014 на сложеніе, вычитаніе и умноженіе. 8) Задачи отъ № 1014 до № 1016 на сложеніе, вычитаніе и дѣленіе. 9) Задачи отъ № 1016 до № 1019 на сложеніе, умноженіе и дѣленіе. 10) Задачи отъ № 1019 до № 1022 на вычитаніе, умноженіе и дѣленіе. 11) При рѣшеніи задачъ отъ № 1022 до № 1026 нужно употребить по одному разу каждое изъ четырехъ дѣйствій.

Въ каждомъ же изъ этихъ 11 отдѣловъ задачи расположены по степени трудности рѣшенія и по мѣрѣ увеличенія числовыхъ данныхъ. Въ остальныхъ же задачахъ на 4 дѣйствія, отъ № 1026 до № 1091, числовыя данныя такъ подобраны, что одна и та же задача можетъ рѣшаться въ цѣлыхъ числахъ двумя, тремя и болѣе различными способами.

Численные примѣры расположены въ такомъ же порядкѣ, какъ и задачи, а именно: 1) Примѣры отъ № 589 до № 595 на сложеніе и вычитаніе. 2) Примѣры отъ № 595 до № 601 на сложеніе и умноженіе. 3) Примѣры отъ № 601 до № 607 на вычитаніе и умноженіе. 4) Примѣры отъ № 607 до № 611 на сложеніе и дѣленіе. 5) Примѣры отъ № 611 до 616 на вычитаніе и дѣленіе. 6) Примѣры отъ № 616 до № 620 на умноженіе и дѣленіе. 7) Примѣры отъ № 620 до № 625 на сложеніе, вычитаніе и умноженіе. 8) Примѣры отъ № 625 до № 629 на сложеніе, вычитаніе и дѣленіе. 9) Примѣры отъ № 629 до № 633 на сложеніе, умноженіе и дѣленіе. 10) Примѣры отъ № 633 до № 637 на вычитаніе, умноженіе и дѣленіе. 11) Въ каждомъ примѣрѣ отъ № 637 до № 647 встрѣчаются всѣ 4 дѣйствія.

Въ каждомъ же изъ этихъ 11 отдѣловъ примѣры расположены по степени увеличенія числа дѣйствій и возрастанія числовыхъ данныхъ.

За примѣрами на всѣ 4 дѣйствія, во второмъ отдѣлѣ «Сборника», слѣдуютъ вопросы и примѣры для провѣрки четырехъ дѣйствій и опредѣленія зависимости результатовъ отъ измѣненія величины элементовъ дѣйствій. Самый порядокъ расположенія этихъ вопросовъ и примѣровъ служитъ достаточнымъ указаніемъ для учащихъ, какимъ образомъ довести учащихся до вывода относительно повѣрки каждаго изъ четырехъ дѣйствій и до опредѣленія зависимости величины результата каждаго дѣйствія отъ измѣненія величины элементовъ этого дѣйствія.

Дѣйствія съ составными именованными числами.

Такъ какъ на основаніи знакомства съ составными именованными числами при изученіи чиселъ первой сотни въ курсѣ второго года ученики вообще научились съ ними обращаться, а на основаніи усвоенія правилъ для дѣйствій съ большими числами могутъ примѣнить тѣ же правила къ числамъ именованнымъ, то, слѣдовательно, дѣйствія съ этими числами могутъ служить только для повторенія курса пройденнаго во вторую половину второго года и въ первую половину третьяго.

Повтореніе это производится на вычисленіи примѣровъ и рѣшеніи задачъ на составныя именованныя числа.

Задачи приведены въ первой части „Сборника" въ отдѣлѣ составныхъ именованныхъ чиселъ подъ заглавіемъ: 1) задачи на сложеніе, 2) на вычитаніе, 3) на вычисленіе времени, 4) на умноженіе, 5) на дѣленіе и 6) на всѣ 4 дѣйствія. Численные же примѣры помѣщены во второмъ отдѣлѣ того же „Сборника" подъ заглавіемъ: 1) численные примѣры на раздробленіе и превращеніе, 2) на сложеніе, 3) на вычитаніе, 4) на умноженіе, 5) на дѣленіе и 6) на всѣ 4 дѣйствія.

Привожу здѣсь только образцы рѣшенія задачъ, такъ какъ всѣ другія упражненія разъясненія вовсе не требуютъ.

Задача. (Изъ Сборника № 1267). Подрядчикъ взялся починить дорогу на разстояніи 10 верстъ въ 3 дня, въ первый день онъ поставилъ на работу 84 работника, и каждый работникъ починилъ участокъ длиною въ 12 саж. 2 арш., а во второй день работали только 76 человѣкъ, и каждый работникъ починилъ участокъ длиною въ 25 саж. 1 арш. На какомъ разстояніи осталось еще починить дорогу?

В ы ч и с л е н і е.

12 саж. 2 арш.
× 84
48 саж. 168 арш.
96
1064 саж. = 2 вер. 64 саж.

25 саж. 1 арш.
× 76
150 саж. 76 арш.
175
1925 саж. 1 арш. = 3 вер. 425 саж. 1 арш.

\+ 2 вер. 64 саж.
3 вер. 425 саж. 1 арш.
5 вер. 489 саж. 1 арш.

— 10 вер.
5 вер. 489 саж. 1 арш.
4 вер. 10 саж. 2 арш.

Строчки.

84 работника починили участокъ длиною въ (12 саж. 2 арш.)×84=2 вер. 64 саж.

76 работниковъ починили участокъ длиною въ (25 саж. 1 арш.)××76=3 вер. 425 саж. 1 арш.

Въ 2 дня работники починили участокъ длиною въ (2 вер. 64 саж.)+(3 вер. 425 саж. 1 арш.)=5 вер. 489 саж. 1 арш.

Осталось еще починить дорогу на разстояніи 10 вер—(5 вер. 489 саж. 1 арш.)=4 вер. 10 саж. 2 арш.

Задача. (Изъ Сборника № 1226). Мастеръ купилъ 3 фун. 10 лот. 2 зол. серебра и изъ всего этого серебра сдѣлалъ подсвѣчники; на каждый подсвѣчникъ онъ употребилъ 10 лот. 2 зол. серебра и продалъ каждый подсвѣчникъ по 14 руб. 50 коп. Сколько денегъ получилъ онъ за всѣ подсвѣчники?

Вычисленіе.

3 фун. 10 лот. 2 зол.=320 зол. 10 лот. 2 зол.=32 зол.

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 32 \\ \hline 96 \\ +10 \\ \hline 106 \\ \times 3 \\ \hline 318 \\ +2 \\ \hline 320 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 10 \\ \times 3 \\ \hline 30 \\ 2 \\ \hline 32 \end{array}$$

$$320 : 32 = 10$$

$$\begin{array}{r} 1450 \\ \times 10 \\ \hline 14500 \end{array}$$

Строчки.

Подсвѣчниковъ вышло 3 фун. 10 лот. 2 зол.):(10 лот. 2 зол.)=10.

Мастеръ получилъ за подсвѣчники (14 руб. 50 коп.)×10=145 руб.

Изъ задачъ, данныя которыхъ составныя именов. числа, нѣкоторую особенность представляютъ задачи, относящіяся къ вычисленію времени. Считаю не лишнимъ изложить вкратцѣ содержаніе и порядокъ классной работы при рѣшеніи задачъ этого рода.

Прежде предложенія ученикамъ самой задачи, учитель подготовляетъ учениковъ къ вычисленію времени посредствомъ частныхъ вопросовъ, которые я привожу изъ урока, происходившаго въ 1872 году 27-го сентября, въ 10-мъ часу утра.

„Скажите, который теперь часъ? Десятый.

„Откуда считается начало сутокъ? Съ полуночи, отъ 12 часовъ.

„Какъ понимать, что теперь десятый часъ сутокъ? Это означаетъ, что отъ начала сутокъ прошло полныхъ 9 часовъ и теперь идетъ десятый часъ.

„Какой теперь мѣсяцъ и которое сегодня число? Сегодня 27-ое число сентября мѣсяца.

„Какъ это понимать, что сегодня 27-е число сентября? Это означаетъ, что отъ начала мѣсяца сентября прошло уже 26 сутокъ и теперь наступили 27-ыя сутки.

„А который по счету въ году мѣсяцъ сентябрь? Девятый.

„Скажите теперь, сколько же времени прошло отъ начала нынѣшняго года до настоящаго часа? 8 мѣсяцевъ 26 сутокъ и 9 часовъ.

„Который теперь годъ? 1872-ой.

Откуда мы считаемъ 1872-ой годъ? Отъ Рождества Спасителя Іисуса Христа.

Сколько же времени прошло отъ Р. Хр. до настоящаго часа? 1871 годъ 8 мѣс. 26 сут. 9 часовъ.

„А если считать время только въ годахъ, суткахъ и часахъ, то сколько времени прошло отъ Р. Хр. до настоящаго часа? Теперь идетъ 1872-ой годъ, слѣдовательно отъ Р. Хр. прошло полныхъ 1871 годъ; изъ 1872-го года прошло 8 мѣсяцевъ и, такъ какъ это годъ високосный, то, значитъ, прошло: въ январѣ 31 сутки, въ февралѣ 29, въ мартѣ 31, въ апрѣлѣ 30, въ маѣ 31, въ іюнѣ 30, въ іюлѣ 31 и въ августѣ 31, а всего въ 8 мѣсяцевъ 244 сут., да еще изъ девятаго мѣсяца сентября прошло 26 сутокъ и 9 часовъ, значитъ всего отъ Р. Хр. до настоящаго часа прошло: 1871 годъ 270 сутокъ и 9 часовъ.

„Слѣдовательно, какъ вы понимаете, когда говорятъ, что Императоръ Петръ Великій родился 30-го мая 1672 года? Это означаетъ, что до того дня, когда родился Императоръ Петръ Великій, прошло отъ Р. Хр. (то-есть отъ начала лѣтосчисленія) 1671 годъ 4 мѣс. 29 сут., или 1671 годъ и 150 сутокъ (1672-й годъ былъ високосный, слѣдовательно въ февралѣ считалось 29 сутокъ).

„Скажите теперь, какого числа и въ которомъ году Петръ Великій разбилъ шведовъ подъ Полтавой, если извѣстно, что отъ Р. Хр. до того дня прошло 1708 лѣтъ 177 сутокъ? Такъ какъ отъ Р. Хр.

прошло полныхъ 1708 лѣтъ, значитъ тогда шелъ 1709 годъ; изъ этого года прошло 177 сутокъ, и такъ какъ это былъ годъ простой, то, выдѣляя изъ 177 сутокъ 31 сутки для января, 28 для февраля, 31 для марта, 30 для апрѣля и 31 для мая, получимъ, что изъ 1709 года прошло полныхъ 5 мѣсяцевъ и еще 26 сутокъ, значитъ шло 27-ое число шестого мѣсяца, то-есть іюня. Итакъ, побѣда совершилась 27-го іюня 1709 года".

Послѣ сознательнаго и безошибочнаго рѣшенія учащимися подобныхъ вопросовъ можно перейти къ рѣшенію задачъ. Большинство нумеровъ задачъ, помѣщенныхъ на вычисленіе времени въ 1-й части «Сборника» (12-е изданіе), въ отдѣлѣ задачъ на составныя именованныя числа, заключаетъ въ себѣ по нѣскольку задачъ, то-есть по нѣскольку данныхъ чиселъ въ самой задачѣ и въ вопросѣ. При рѣшеніи такихъ задачъ можно поступать двояко: 1) или учитель выбираетъ изъ задачи по одному данному числу изъ заданія и вопроса и даетъ учащимся рѣшать одну простую задачу; 2) или учащіеся рѣшаютъ всю сложную задачу, связывая каждое изъ чиселъ, данныхъ въ заданіи, съ каждымъ изъ чиселъ, данныхъ въ вопросѣ. Такимъ образомъ, при второмъ пріемѣ пользованія задачею, задача, напримѣръ, № 1135 разбивается на 9 простыхъ задачъ. Кромѣ того, всѣ задачи распредѣлены на 3 группы. Въ одной группѣ по данному времени, въ которое совершилось предшествовавшее событіе, и по количеству времени, прошедшаго до послѣдующаго событія, опредѣляется время, *когда* совершилось это послѣднее событіе. Такія задачи рѣшаются сложеніемъ и сумма вычисляется въ годахъ, мѣсяцахъ, суткахъ и т. д. Въ другой группѣ, наоборотъ, по данному времени, когда совершилось послѣдующее событіе, и по количеству времени, истекшаго до этого событія отъ событія предшествовавшаго, опредѣляется время совершенія предшествовавшаго событія. Такія задачи рѣшаются вычитаніемъ и разность вычисляется въ годахъ, мѣсяцахъ, суткахъ, часахъ и т. д.; здѣсь приходится принимать въ разсчетъ число сутокъ въ каждомъ мѣсяцѣ, иначе можетъ произойти ошибка въ результатѣ вычисленія въ нѣсколько сутокъ. Наконецъ, въ третьей группѣ или по данному времени, когда совершились предшествующее и послѣдующее событія, опредѣляется, сколько времени прошло отъ совершенія одного событія до совершенія другого; или, наконецъ, входятъ задачи сложныя, въ которыхъ требуется опредѣлять и время, когда событіе совершилось, и количество времени, протекшаго отъ одного событія до другого. Для рѣшенія послѣднихъ задачъ потребуется и сложеніе и вычитаніе.

Привожу рѣшеніе одной задачи изъ каждой группы.

Задача. Мальчикъ родился 1847 года 5-го апрѣля въ 5 часовъ утра. Когда умеръ этотъ мальчикъ, если онъ жилъ 7 лѣтъ 6 мѣсяцевъ 12 дней? (Изъ № 1137 подъ буквою *в*).

Отъ Р. Хр. до дня рожденія мальчика прошло: 1846 лѣтъ 3 мѣсяца 4 сутокъ 5 часовъ. Чтобы опредѣлить, сколько времени прошло отъ Р. Хр. до смерти мальчика, придадимъ къ этому числу 7 лѣтъ 6 мѣсяцевъ 12 дней.

+	1846 л.	3 мѣс.	4 сут.	5 час.
	7 „	6 „	12 „	— „
получимъ	1853 г.	9 мѣс.	16 сут.	5 час.

Значитъ мальчикъ умеръ въ 1854 году 17-го октября въ 5 часовъ утра.

Задача. Женщина умерла 9-го іюля 1870 года въ 3 часа 19 минутъ пополудни. Когда родилась эта женщина, если она прожила 56 лѣтъ 11 мѣс. 20 дней 10 часовъ 20 мин.? (Изъ № 1143 подъ буквою *в*).

Отъ Рождества Христова до дня смерти женщины прошло: 1869 лѣтъ 6 мѣсяцевъ 8 сутокъ 15 часовъ 19 минутъ. Чтобы опредѣлить, сколько времени прошло отъ Р. Хр. до рожденія этой женщины, нужно изъ 1869 лѣтъ 6 мѣс. 8 сут. 15 час, 19 мин. вычесть 56 лѣтъ 11 мѣс. 20 сут. 10 час. 20 мин.

−	1869 лѣтъ	6 мѣс.	8 сут.	15 час.	19 мин.
	56 „	11 „	20 „	10 „	20 „
	1812 лѣтъ	6 мѣс.	18 сут.	4 часа	59 мин.

Значитъ женщина родилась 19-го іюля 1813-го года въ 4 часа 59 мин. утра.

(*Примѣчаніе.* Изъ 8 сутокъ нельзя вычесть 20 сутокъ; занимаемъ шестой (іюнь) мѣсяцъ, обращаемъ его въ сутки; получаемъ 30 сутокъ, да еще 8 сутокъ, составится 38 сутокъ).

Задача. Постройку дома окончили 31-го іюля 1849 года въ 2 часа пополудни. Сколько времени простоялъ этотъ домъ, если онъ сгорѣлъ 30-го сентября 1868 года въ 1 часъ 17 минутъ пополудни? (Изъ № 1140).

Отъ Р. Хр. до пожара прошло: 1867 лѣтъ 273 сут. 13 часовъ 17 мин., а до окончанія постройки дома 1848 лѣтъ 211 сут. 14 часовъ. Для рѣшенія задачи изъ перваго числа надо вычесть второе:

−	1867 лѣтъ	273 сут.	13 час.	17 мин.
	1848 „	211 „	14 „	— „
и получимъ	19 лѣтъ	61 сут.	23 час.	17 мин.

Задачи и численные примѣры на составныя именованныя числа расположены въ „Сборникѣ" слѣдующимъ образомъ:

1) Раздробленіе и превращеніе.

а) Раздробленіе.

1) Примѣры отъ № 707 до № 713 на мѣры монетъ.
2) Примѣры отъ № 713 до № 718 на мѣры сыпучихъ тѣлъ.
3) Примѣры отъ № 718 до № 726 на мѣры жидкихъ тѣлъ.
4) Примѣры отъ № 726 до № 740 на мѣры длины.
5) Примѣры отъ № 740 до № 750 на мѣры вѣса.
6) Примѣры отъ № 750 до № 758 на мѣры времени.
7) Примѣры отъ № 758 до № 762 на мѣры бумаги.
8) Примѣры отъ № 762 до № 770 на мѣры аптекарскаго вѣса
9) Примѣры отъ № 770 до № 786 на мѣры квадратныя,
10) Примѣры отъ № 786 до № 796 на мѣры кубическія.

Примѣры, относящіеся къ каждой мѣрѣ, постоянно усложняются и содержатъ въ себѣ всѣ различныя единичныя отношенія самой мѣры.

б) Превращеніе.

1) Примѣры отъ № 796 до № 806 на мѣры монетъ.
2) Примѣры отъ № 806 до № 819 на мѣры длины.
3) Примѣры отъ № 819 до № 822 на мѣры сыпучихъ тѣлъ.
4) Примѣры отъ № 822 до № 831 на мѣры жидкихъ тѣлъ.
5) Примѣры отъ № 831 до № 842 на мѣры вѣса.
6) Примѣры отъ № 842 до № 850 на мѣры времени.
7) Примѣры отъ № 850 до № 853 на мѣры бумаги.
8) Примѣры отъ № 853 до № 860 на мѣры аптекарскаго вѣса.
9) Примѣры отъ № 860 до № 876 на мѣры квадратныя.
10) Примѣры отъ № 876 до № 885 на мѣры кубическія.

Примѣры, относящіеся къ каждой мѣрѣ, постоянно усложняются; такъ превращается сперва простое именованное число въ простое, потомъ простое въ составное и, наконецъ, составное именованное число въ составное.

2) Сложеніе.

1) Задачи отъ № 1091 до № 1102 и численные примѣры отъ № 885 до № 894 на сложеніе двухъ слагаемыхъ.

2) Задачи отъ № 1102 до № 1115 и примѣры отъ № 894 до № 903 на сложеніе трехъ и многихъ слагаемыхъ.

3) Вычитаніе.

1) Задачи отъ № 1115 до № 1130 и примѣры отъ № 903 до № 928, гдѣ дѣйствіе вычитаніе приходится употребить по одному разу.

2) Задачи отъ № 1130 до № 1135, для рѣшенія которыхъ дѣйствіе вычитаніе нужно употребить два и болѣе разъ.

4) Вычисленіе времени.

1) Задачи №№ 1135, 1136, 1137, 1144, въ которыхъ по извѣстному началу событія и по его продолжительности отыскивается конецъ.

2) Задачи №№ 1138, 1139, 1140, 1146, въ которыхъ по извѣстному началу и концу событія требуется опредѣлить его продолжительность.

3) Задачи №№ 1141, 1142, 1143, въ которыхъ по извѣстному концу и продолжительности событія нужно найти его начало.

4) Задачи №№ 1145, 1147, 1148, 1149, 1150, требующія для своего рѣшенія уже нѣсколькихъ дѣйствій вслѣдствіе сложности условій.

5) Умноженіе.

1) Задачи отъ № 1151 до № 1158 и примѣры отъ № 928 до № 938—умноженіе составного именованнаго числа, выраженнаго двумя наименованіями, на отвлеченное.

(2 Задачи отъ № 1158 до № 1161 и примѣры отъ № 938 до № 945 — умноженіе составного именованнаго числа, выраженнаго тремя наименованіями, на отвлеченное.

3) Задачи отъ № 1161 до № 1166 и примѣры отъ № 945 до № 949—умноженіе составного именованнаго числа, выраженнаго четырьмя или пятью наименованіями, на отвлеченное.

4) Задачи отъ № 1166 до № 1168 и примѣры отъ № 949 до № 955—умноженіе составного именованнаго числа, въ которомъ одно или два наименованія выпущены, на отвлеченное.

5) Задачи отъ № 1168 до № 1179, въ которыхъ дѣйствіе умноженіе нужно употребить два и болѣе разъ.

6) Дѣленіе.

1) Задачи отъ № 1179 до № 1191 и примѣры отъ № 955 до № 972, въ которыхъ дѣлителемъ дано число отвлеченное.

2) Задачи отъ № 1191 до № 1209 и примѣры отъ № 972 до № 998, въ которыхъ дѣлитель—число именованное.

3) Задачи отъ № 1209 до № 1212, для рѣшенія которыхъ дѣйствіе дѣленіе нужно употребить нѣсколько разъ.

7) Всѣ 4 дѣйствія.

а) Задачи.

1) Задачи отъ № 1212 до № 1214 рѣшаются *только* посредствомъ сложенія и вычитанія.

2) Задачи отъ № 1214 до № 1216 даны на сложеніе и умноженіе.

3) Задачи отъ № 1216 до № 1218—на вычитаніе и умноженіе.

4) Задачи отъ № 1218 до № 1220—на сложеніе и дѣленіе.

5) Задачи отъ № 1220 до № 1223—на вычитаніе и дѣленіе.

6) Задачи отъ № 1223 до № 1230—на умноженіе и дѣленіе.

7) Задачи отъ № 1230 до № 1232 на сложеніе, вычитаніе и умноженіе.

8) Задачи отъ № 1232 до № 1234—на сложеніе, вычитаніе и дѣленіе.

9) Задача подъ № 1234—на сложеніе, умноженіе и дѣленіе.

10) Задачи отъ № 1235 до № 1241—на вычитаніе, умноженіе и дѣленіе.

11) Задачи отъ № 1241 до № 1243, для рѣшенія которыхъ нужно употребить по одному разу каждое изъ четырехъ дѣйствій.

12) Задачи же отъ № 1243 до № 1313 расположены по степени трудности рѣшенія и притомъ числовыя данныя въ нихъ такъ подобраны, что одна и та же задача можетъ рѣшаться въ цѣлыхъ числахъ двумя, тремя и болѣе различными способами.

б) Численные примѣры отъ № 998.

Квадратныя мѣры.

При объясненіи ученикамъ квадратныхъ мѣръ и пріема измѣренія площади прямоугольника хорошимъ пособіемъ служитъ *квадратная доска* (см. Наглядныя пособія), а также тѣ приспособленія въ ариѳметическомъ ящикѣ, о которыхъ сказано мною при описаніи этого пособія.

Прежде нежели приступить къ употребленію нагляднаго пособія нужно познакомить учениковъ съ самою сущностью измѣренія; имъ предлагаются вопросы; «Чѣмъ измѣряется разстояніе одного предмета отъ другого? Какія извѣстны вамъ мѣры длины? Какъ саженью измѣрить длину комнаты, длину двора? Чѣмъ измѣряется тяжесть предметовъ, количество воды, песку, количество бумаги, время?» и т. п. Итакъ, длина измѣряется опредѣленною единицею длины, вѣсъ—опредѣленною единицею вѣса, время—опредѣленною единицей времени и т. д. „Отъ чего зависитъ величина поля, стѣны, пола, двери?“ и т. д. (отъ длины и ширины).

Чѣмъ можно измѣрить величину пола? Опредѣленною единицею площади.

Если бы у васъ была такая единица подъ руками, то такъ мы измѣрили бы полъ?

Укладывали бы ее на полу, чтобы узнать, сколько разъ она помѣстится въ площади пола.

Какимъ образомъ надо укладывать эту площадь на площади пола? По длинѣ и по ширинѣ пола; сначала уложить ее около стѣны по длинѣ пола столько разъ, сколько помѣстится, получится первый рядъ: потомъ измѣрить, сколько разъ помѣстится эта единица мѣры по ширинѣ пола, столько и будетъ рядовъ, а зная число рядовъ и сколько разъ заключается единица въ каждомъ ряду, можно узнать, сколько разъ она помѣщается во всей площади пола.

Замѣтьте, что такія единицы мѣры, которыя служатъ для измѣренія площадей, называются *квадратными мѣрами*. Вотъ одна изъ такихъ мѣръ. (Учитель показываетъ доску въ квадратный футъ).

Сколько доска эта имѣетъ въ длину и ширину? Одинъ футъ. (Въ случаѣ затрудненія учениковъ ребро доски измѣряется футомъ).

Такая мѣра называется *квадратнымъ футомъ*.

Какія еще могутъ быть квадратныя мѣры? Квадратный аршинъ, квадрат. сажень, квадр. вершокъ, квадр. дюймъ.

Учитель чертитъ на доскѣ квадратный футъ и ромбъ, имѣющій сторону въ одинъ футъ. Можно ли эту площадь (ромбъ) назвать квадратнымъ футомъ? Нельзя, потому что хотя его стороны и равны между собою, но углы не равны, а въ квадратномъ футѣ стороны равны между собою и углы равны.

Начертите квадратный вершокъ, квадратный дюймъ.

Сколько сторонъ имѣютъ начерченныя вами фигуры? Сколько угловъ? Что можно сказать о величинѣ всѣхъ четырехъ сторонъ нашихъ фигуръ? О величинѣ угловъ? Какъ эти фигуры можно назвать по числу угловъ? (Четыреугольники). Такіе четыреугольники называются *квадратами.* Начертите четыреугольники, которые нельзя назвать квадратами. Начертите такой четыреугольникъ, у котораго всѣ углы были бы равны между собою, а стороны не равны. (Прямоугольникъ). Начертите такой четыреугольникъ, у котораго стороны были бы равны между собою, а углы не равны.

Скажите теперь, что называется квадратомъ? Квадратомъ называется четыреугольникъ, у котораго всѣ стороны равны и всѣ углы равны между собою.

Что называется квадратнымъ футомъ? Такой квадратъ, у котораго каждая сторона равна одному футу.

Что называется квадратною саженью, квадратнымъ аршиномъ и т. д.

Вотъ доска въ квадратный футъ. Какъ узнать, сколько въ ней квадратныхъ дюймовъ? Нужно для этого имѣть квадратный дюймъ.

Учитель поворачиваетъ къ ученикамъ ту сторону доски, которая разграфлена на квадратные дюймы.

Какъ сосчитать, сколько въ площади этой доски квадратныхъ дюймовъ? По длинѣ доски помѣщается 12 квадратныхъ дюймовъ, а по ширинѣ такихъ рядовъ 12, значитъ, въ площади доски заключается 12 разъ по 12 квадр. дюймовъ, то-есть 144 квадр. дюйма.

Сколько квадратныхъ аршинъ въ квадратной сажени, квадратныхъ футовъ въ квадратной сажени?

Какъ теперь узнать, сколько квадратныхъ футовъ въ площади нашей классной доски? Нужно измѣрить длину и ширину доски футомъ и полученныя числа перемножить.

Сколько квадратныхъ саженъ заключаетъ поле, длина котораго 20 саж., а ширина 12 саженъ? 240 квадр. саженъ, потому что по длинѣ квадр. сажень укладывается 20 разъ, а по ширинѣ такихъ рядовъ, по 20 квадр. саженъ, будетъ 12; значитъ, чтобы узнать, сколько въ площади поля будетъ квадратныхъ саженъ, нужно 20 умножить на 12, и получится 240 квадр. саженъ.

Напишите на вашихъ доскахъ таблицу квадратныхъ мѣръ такъ какъ пишутся обыкновенно таблицы всякихъ мѣръ.

(Ученики сами составляютъ таблицу).

Для упражненія учениковъ въ обратномъ вычисленіи и въ разложеніи чиселъ на два множителя имъ предлагаются задачи, въ которыхъ по данной площади опредѣляется длина и ширина ея.

„Поверхность стола равна 320 квадратныхъ дюймовъ; какой длины и ширины можетъ быть этотъ столъ?“ Длина 20 и ширина 16 дюймовъ, или длина 32, а ширина 10 дюйм., или длина 40, а ширина 8 дюйм. и т. д.

Не знаетъ ли кто, какими мѣрами измѣряются площади полей?

Десятинами.

Учитель чертитъ прямоугольникъ, представляющій фигуру десятины.

Вотъ четыреугольникъ, изображающій фигуру десятины. Можно ли его назвать квадратомъ? Чѣмъ онъ отличается отъ квадрата? Стороны его не всѣ равны между собою. Въ чемъ онъ имѣетъ сходство съ квадратомъ? Всѣ четыре угла у него равны между собою, какъ и у квадрата.

Замѣтьте, что десятиною называется четыреугольное поле, имѣющее въ длину 60 саж. и въ ширину 40 саж. Сколько, значитъ, десятина заключаетъ въ себѣ квадратныхъ саженъ? $60 \times 40 = 2400$ квадр. саж.

Десятиною также называется четыреугольникъ такого же вида, то-есть съ равными углами, но имѣющій въ длину 80 саж., а въ ширину 30 саж. Сколько такая десятина заключаетъ въ себѣ квадр. саженъ? $80 \times 30 = 2400$ квадр. саженъ.

Затѣмъ идетъ рѣшеніе задачъ.

Задача. (Изъ Сборника № 1330). Мостъ имѣетъ въ длину 50 арш., а въ ширину 8 арш. Сколько нужно досокъ, длиною каждая въ 7 арш. и шириною въ 16 дюймовъ, для настилки этого моста?

Вычисленіе.

$$50 \times 8 = 400$$

$$\begin{array}{r} 28 \\ \times\ 7 \\ \hline 196 \\ \times\ 16 \\ \hline 1176 \\ 196 \\ \hline 3136 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 28 \\ \times\ 28 \\ \hline 224 \\ 56 \\ \hline 784 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 784 \\ \times\ 400 \\ \hline 313600 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 313600 & 3136 \\ \cline{2-2} -\ 3136 & 100 \\ \cline{1-1} „„„„ & \end{array}$$

Строчки.

Площадь моста = 50 × 8 = 400 □ арш.
1 □ аршинъ = 28 × 28 = 784 □ дюймамъ.
Площадь моста = 784 × 400 × 313600 □ дюймамъ
7 аршинъ = 28 × 7 = 196 дюймамъ.
Площадь доски = 196×16 = 3136 □ дюймамъ.
Досокъ потребуется 313600 : 3136 = 100

Вопросы для повторенія.

Что значитъ измѣрить какую-либо величину? Съ чѣмъ сравнивается всегда измѣряемая величина?

Чѣмъ размѣряются поверхности?

Какія извѣстны вамъ квадратныя мѣры?

Какая фигура называется четыреугольникомъ?

Какой четыреугольникъ называется квадратомъ?

Что называется квадратнымъ аршиномъ, квадр. футомъ?

Какъ измѣрить площадь, имѣющую фигуру четыреугольника съ равными углами?

Какія числа называются квадратными?

Кубическія мѣры.

При объясненіи кубическихъ мѣръ и пріема измѣреній объема прямоугольнаго параллелепипеда хорошимъ пособіемъ можетъ служить кубическая четверть аршина (см. Наглядныя пособія), а также ариѳметическій ящикъ съ дюймовыми кубиками.

Здѣсь такъ же, какъ и при объясненіи квадратныхъ мѣръ, вначалѣ выясняется необходимость измѣренія объема и необходимость особенной единицы мѣры—кубической, что можно сдѣлать, сравнивая, напримѣръ величину ариѳметическаго ящика съ величиной какого-либо другого ящика или съ величиной комнаты.

Изъ этого сравненія ученики выводятъ, что величина тѣла или объема зависитъ отъ его высоты, ширины и длины, что зная высоту какой-либо шкатулки и ея длину, еще нельзя вполнѣ судитъ объ объемѣ шкатулки что величина шкатулки будетъ опредѣлена, если сравнить ее съ величиною другого тѣла, вполнѣ извѣстною. Затѣмъ, для болѣе подробнаго выясненія зависимости объема тѣла отъ трехъ его протяженій, ученики сравниваютъ одинъ кубикъ съ брускомъ и выводятъ, что брусокъ въ 10 разъ болѣе кубика, потому что онъ въ

10 разъ длиннѣе его; изъ сравненія доски съ брускомъ выводится, что доска въ 10 разъ болѣе бруска, потому что длина и толщина ея равны длинѣ и толщинѣ бруска, а ширина въ 10 разъ больше.

Изъ кубическихъ вершковъ устраиваются различной величины призмы и сравниваются между собою по объему. Напримѣръ одна призма имѣетъ въ ширину 2 вершка, въ длину 3 вершка и въ вышину 4 вершка; предлагается устроить призму въ два раза большую. Для этого нужно увеличить ее въ два раза или по длинѣ, или по ширинѣ, или по вышинѣ. Что сдѣлается съ призмою отъ увеличенія въ два раза всѣхъ трехъ ея протяженій? Отъ увеличенія длины въ два раза объемъ призмы увеличится тоже въ два раза; отъ увеличенія ширины новой призмы въ два раза она увеличится въ два раза, а, значитъ, прежняя станетъ въ 4 раза больше; наконецъ, отъ увеличенія высоты третьей призмы въ два раза она увеличится въ два раза, а, значитъ, объемъ данной призмы увеличится въ 8 разъ.

Затѣмъ выводится, что объемы тѣлъ нужно сравнивать съ объемомъ куба, принятаго за единицу мѣры. Перечисляются кубическія мѣры и опредѣляется, что понимать подъ кубическимъ аршиномъ, кубическимъ дюймомъ и т. п.

При переходѣ къ выводу правила измѣренія объема тѣлъ, имѣющихъ форму прямоугольной призмы, учитель устраиваетъ изъ кубическихъ вершковъ такую призму и предлагаетъ ученикамъ сосчитать, сколько въ этой призмѣ кубическихъ вершковъ. Положимъ, что устроенная призма имѣетъ по длинѣ 4 вершка, по ширинѣ 3 и по вышинѣ 5 вершковъ. Ученики ведутъ вычисленіе такъ: по длинѣ этой призмы уложилось 4 кубическихъ вершка, по ширинѣ такихъ рядовъ по 4 кубика будетъ 3, значитъ, въ основаніи лежитъ слой въ $4 \times 3 = 12$ кубич. вершковъ; по вышинѣ призмы такихъ слоевъ укладывается 5, а 5 разъ по 12 кубич. вершковъ будетъ 60 кубич. вершковъ. Итакъ, призма эта содержитъ въ себѣ 60 кубическихъ вершковъ.

Потомъ рѣшаются вопросы безъ помощи построенія призмъ въ отвлеченномъ видѣ, и дѣлается переходъ къ тому, что, для измѣренія объема тикихъ призмъ, нѣтъ надобности мѣрить ихъ кубическими мѣрами по тремъ протяженіямъ, что достаточно употребить для этого линейную мѣру. Наконецъ, выводится правило измѣренія объема, составляется таблица кубическихъ мѣръ и рѣшаются вопросы обратные, въ родѣ такого: Объемъ призмы равенъ 480 куб. вершк. Какой длины, ширины и высоты можетъ быть эта призма? При рѣшеніи такихъ неопредѣленныхъ вопросовъ ученикамъ приходится разлагать данное число на три множителя.

Задача. (Изъ Сборника № 1359). Работники вырыли каналъ длиною въ 4 саж,, глубиною въ 3 фута 6 дм. и шириною тоже въ 3 фута 6 дм. Сколько получили они за эту работу, если за куб. футъ вынутой земли имъ платили 10 коп.?

Вычисленіе.

$$7\times4=28$$
$$\begin{array}{r} 28\\ \times12\\ \hline 56\\ 28\\ \hline 336 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 12\times3=36\\ +\ 6\\ \hline 42 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 336\\ \times\ 42\\ \hline 672\\ 1344\\ \hline 14112\\ \times\ 42\\ \hline 28224\\ 56448\\ \hline 592704 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 592704 & 1728\\ \cline{2-2} -5184 & 343\\ \cline{1-1} 7430 & \\ -6912 & \\ \hline 5184 & \\ -5184 & \\ \hline \text{„ „ „ „} & \end{array} \qquad 10\times343=3430$$

Строчки.

4 саж.$=12\times7\times4=336$ дюймамъ.
3 фута 6 дм.$=12\times3+6=42$ дюймамъ.
Объемъ канала$=336\times42\times42=592704$ куб. дюймамъ$=592704$ $:1728=343$ куб. фут
Работники получили 10 коп$\times343=34$ руб. 30 коп.

Вопросы для повторенія.

Послѣ задачъ можно перейти къ выдѣленію *кубическихъ чиселъ*
Скажите число, которое выражало бы объемъ какого-нибудь куба 8, 27, 64, 125, 1000 и т. д.

Какъ составлены эти числа изъ множителей? $8=2\times2\times2$ $27=3\times3\times3$, $64=4\times4\times4$, $125=5\times5\times5$, $1000=10\times10\times10$. Какое число состоитъ изъ равныхъ множителей.

Напишите на вашихъ доскахъ кубическія числа, заключающіяся между 1 и 1000

Чѣмъ измѣряются объемы тѣлъ?
Какія бываютъ кубическія мѣры?
Что называется кубическою саженью?

Какъ измѣрить объемъ прямоугольной призмы?

Какія числа называются кубическими?

Задачи на вычисленіе поверхности и объема расположены въ „Сборникѣ" слѣдующимъ образомъ:

1) Задачи отъ № 1313 до № 1319. Нахожденіе площади прямоугольника по даннымъ линейнымъ измѣреніямъ, выраженнымъ простыми именованными числами.

2) Задачи отъ № 1319 до № 1321 Нахожденіе площади квадрата по даннымъ линейнымъ измѣреніямъ, выраженнымъ простыми именованными числами.

3) Задачи отъ № 1321 до № 1323, въ которыхъ по данной площади прямоугольника и одному линейному измѣренію, выраженнымъ въ однородныхъ именованныхъ числахъ, требуется найти другое линейное измѣреніе.

4) Задачи отъ № 1323 до № 1327. Нахожденіе площади прямоугольника и квадрата по даннымъ линейнымъ измѣреніямъ, выраженнымъ простыми и сложными именованными числами.

5) Задача подъ № 1327, въ которой по данной площади прямоугольника и одному линейному измѣренію, выраженнымъ составными именованными числами, требуется найти другое линейное измѣреніе.

6) Задачи отъ № 1328 до № 1346—сложныя, расположенныя по степени трудности рѣшенія.

7) Задачи отъ № 1346 до № 1305—нахожденіе объема прямоугольной призмы по даннымъ линейнымъ измѣреніямъ, выраженнымъ сперва однородными, а потомъ разнородными простыми именованными числами.

8) Задачи отъ № 1350 до № 1352, въ которыхъ по данному объему и двумъ линейнымъ измѣреніямъ, выраженнымъ однородными простыми именованными числами, требуется найти третье линейное измѣреніе.

9) Задачи отъ № 1352 до № 1354 для нахожденіе объема по даннымъ тремъ линейнымъ измѣреніямъ, выраженнымъ составными именованными числами.

10) Задачи отъ № 1354 до 1356, въ которыхъ по данному объему и двумъ линейнымъ измѣреніямъ, выраженнымъ составными именованными числами, нужно найти третье линейное измѣреніе.

11) Задачи отъ № 1356 до № 1375—сложныя, расположенныя по степени трудности рѣшенія.

12) Задачи отъ № 1375 даны на вычисленіе поверхности и объема вмѣстѣ.

Элементарный курсъ простыхъ дробей.

При изученіи чиселъ первой сотни ученики познакомились съ дробью, какъ съ кратною частью цѣлаго числа, а при упражненіяхъ съ различными мѣрами и ихъ частями получили понятіе о дроби, какъ извѣстной части единицы, и о происхожденіи ея вслѣдствіе дѣленія единицы на равныя части. Теперь имъ предстоитъ изучить свойства дроби и всѣ дѣйствія съ дробями на основаніи наглядныхъ пособій и тѣхъ знаній, которыя пріобрѣтены ими при прохожденіи предшествовавшихъ курсовъ.

Элементарный курсъ дробей проходится тѣмъ же синтетическимъ путемъ, какъ и курсъ цѣлыхъ чиселъ. Ученики исходятъ постепенно отъ примѣра и задачи и доходятъ до обобщенія и правила; такъ что и здѣсь правило является, какъ собственный выводъ учениковъ, сдѣланный посредствомъ обобщенія частныхъ примѣровъ.

Прежде нежели перейти къ систематическому курсу Ариѳметики, ученикъ долженъ ознакомиться и освоиться достаточно съ цѣлыми числами и дробями, долженъ вполнѣ осязательно познать ихъ свойства и дѣйствія съ ними; тогда уже прохожденіе курса въ строгой научной системѣ по методу аналитическому будетъ для него вполнѣ производительно.

Первыя упражненія, необходимы для образованія понятія о сущности и составѣ дроби, а также для изученія свойствъ ея, производятся при посредствѣ наглядныхъ пособій, изъ которыхъ, какъ удобнѣйшее, я избираю *ариѳметическіе дробные счеты*; впрочемъ всѣ упражненія, излагаемыя мною и производимыя на этомъ пособіи, могутъ быть воспроизводимы и на другихъ пособіяхъ, имѣющихся въ школѣ и принаровленныхъ для дробей.

1) Происхожденіе и составъ дроби.

Учитель ставитъ счеты передъ классомъ, такъ что всѣ части валиковъ сдвинуты вмѣстѣ, и слѣдовательно, на каждой проволокѣ ученики видятъ цѣлый валикъ.

Какъ велика длина каждаго валика, надѣтаго на проволоку? *Одинъ футъ.*

Раздѣлимъ валикъ на второй проволокѣ на двѣ равныя части. Какъ великъ теперь каждый валикъ? Полфута.

Какъ называется каждый валикъ по отношенію къ цѣлому? Половина.

Сколько въ половинѣ фута дюймовъ? (6).

Вотъ листъ бумаги; какъ взять половину этого листа? Раздѣлить, разорвать на двѣ равныя части.

На сколько еще равныхъ частей можно раздѣлить футъ? На три, четыре, пять, десять, двадцать, сколько угодно.

Раздѣлите футъ на три равныя части на третьей проволокѣ. Какъ назвать теперь каждую часть? Треть фута.

Сколько въ трети фута дюймовъ? (4).

Какая часть фута больше: половина или треть, и почему? Половина больше, потому что половина въ футѣ заключается только два раза, а треть три раза.

Сколько вмѣсто цѣлаго фута надо взять половинъ, сколько третей? Двѣ половины, три трети.

Изъ какихъ еще частей можно составить футъ? Изъ четырехъ четвертей, пяти пятыхъ, шести шестыхъ, двадцати двадцатыхъ и т. д.

Разложите футъ на счетахъ на четыре четверти, на восемъ восьмыхъ, на десять десятыхъ.

Для закрѣпленія въ сознаніи учениковъ состава единицы изъ равныхъ частей имъ предлагаются примѣры и задачи въ родѣ слѣдующихъ «$^1/_{12}$ фунта чаю стоитъ 20 копеекъ. Сколько стоитъ цѣлый фунтъ?»

Назовите мѣры, изъ которыхъ одна составляетъ треть другой, седьмую, восьмую, шестнадцатую часть другой. (1 арш.$=^1/_3$ сажени, 1 футъ$=^1/_7$ сажени и т. п.)

Какая часть фута равняется дюйму? Двѣнадцатая. Сколько дюймовъ въ $^1/_6$ части фута? (2).

Какая часть фута больше: восьмая или четвертая, во сколько разъ и почему? Четвертая больше восьмой въ два раза, потому что четвертая часть содержится въ футѣ только четыре раза, а восьмая— восемь разъ; значитъ, въ каждой четверти по двѣ восьмыхъ.

Какъ удобнѣе футъ дѣлить на 8 равныхъ частей? Сначала пополамъ, потомъ каждую половину пополамъ и, наконецъ, каждую четверть пополамъ.

Нужно взвѣсить двѣ вещи: въ $^1/_2$ фунта и въ $^1/_2$ фунта, а имѣются гири только въ $^1/_8$ фунта. Сколько такихъ гирь надо положить на вѣсы?

$^1/_4$ пуда сахару нужно раздать тремъ, четыремъ, пяти человѣкамъ поровну. Какую часть пуда получитъ каждый?

Когда, такимъ образомъ, сообщено ученикамъ понятіе о частяхъ единицы, можно перейти къ составу дроби, заключающей въ себѣ нѣсколько частей единицы.

Раздѣлите футъ на три равныя части и возьмите двѣ такихъ части. Сколько получилось и сколько осталось? Получилось двѣ трети и осталась одна треть.

Возьмите на счетахъ три четверти фута.

Какъ взять на счетахъ $^5/_{12}$ фута? Нужно футъ раздѣлить на 12 равныхъ частей и взять такихъ частей 5.

Вотъ листъ бумаги; какъ мнѣ отрѣзать отъ него $^3/_8$ части? Нужно листъ согнуть на 8 равныхъ частей и отрѣзать три такихъ части.

Какъ понимать, когда говорятъ, что на жилетъ пошло $^5/_8$ аршина сукна? Это значитъ, что отъ цѣлаго аршина, раздѣленнаго на 8 равныхъ частей, на жилетъ взято только 5 частей.

Значитъ, сколько вершковъ сукна пошло на жилетъ? 10 вершковъ потому что въ $^1/_8$ аршина 2 вершка, а въ $^5/_8$ въ 5 разъ болѣе, то-есть, 10 вершковъ.

Въ $^7/_{10}$ пуда сколько фунтовъ? Въ $^9/_{16}$ фунта сколько лотовъ?

Аршинъ какую часть сажени составляетъ? А два аршина? 4 фута какой части сажени равняются? 7 вершковъ какая часть аршина? ($^7/_{16}$, потому что 1 вершокъ составляетъ $^1/_{16}$ часть аршина, а 7 вершковъ въ 7 разъ болѣе, значитъ составляютъ $^7/_{16}$ аршина).

Когда мы какую-либо единицу, напримѣръ, футъ, аршинъ, сажень, пудъ, листъ бумаги и т. п., дѣлимъ на равныя части, то мы *раздробляемъ* эти единицы и получаемъ ихъ части, которыя называются *дробями*.

Скажите какія-нибудь дроби. $^1/_2$ фунта, $^1/_3$ аршина, $^3/_5$ сажени $^7/_{20}$ пуда и т. п.

Въ каждой дроби сколько нужно различать чиселъ, необходимыхъ для ея выраженія, и какое значеніе имѣютъ эти числа? Нужно различать два числа: одно показываетъ, на сколько равныхъ частей единица раздѣлена, а другое—сколько такихъ частей въ составъ дроби взято.

Если единица раздѣлена на 12 равныхъ частей и взято такихъ частей 8, то какая получается дробь? Восемь двѣнадцатыхъ.

Замѣтьте, что число, которое показываетъ, на сколько равныхъ частей единица раздѣлена, называется для краткости *знаменателемъ* дроби; а число, показывающее, сколько такихъ частей взято въ составъ дроби, называется *числителемъ*.

Въ дроби $^5/_{18}$ какое число будетъ знаменателемъ и какое числителемъ?

Когда надо взять какую-нибудь дробь единицы, на какое изъ этихъ чиселъ нужно прежде обратить вниманіе? На знаменателя, потому что прежде всего надо знать, на сколько равныхъ частей нужно раздѣлять единицу.

Такъ какъ дробь выражается двумя числами, то и для изображенія ея необходимы два числа: одно—означающее знаменателя, а другое—числителя; напримѣръ, дробь $^5/_6$ изображается двумя числами, гдѣ 6 знаменатель, а 5 числитель.

Напишите дробь $^{11}/_{15}$ и скажите, что она означаетъ. Единица раздѣлена на 15 равныхъ частей и взято такихъ частей 11.

Затѣмъ идетъ упражненіе въ писаніи учениками дробей, диктуемыхъ учителемъ, въ откладываніи на счетахъ дробей, написанныхъ учителемъ на доскѣ, и въ писаніи и чтеніи дробей откинутыхъ на счетахъ.

Послѣ выясненія ученикамъ происхожденія дроби вслѣдствіе непосредственнаго раздѣленія единицы на равныя части, нужно выяснить имъ также происхожденіе дроби вслѣдствіе раздѣленія всякаго цѣлаго числа на равныя части. Это дѣлается посредствомъ примѣровъ и задачъ и поясняется чертежомъ или тѣми же дробными счетами.

Скажите половину четырехъ, пятую часть 15-ти, шестую часть 30-ти и т. д.

Если веревку длиною въ 3 арш. разрѣзать на 4 равныя части, то сколько аршинъ будетъ въ каждой части? Четвертая часть одного аршина будетъ $^1/_4$ арш., то четвертая часть трехъ аршинъ будетъ въ 3 раза болѣе, то есть $^3/_4$ аршина.

Какъ раздѣлить хлѣбъ вѣсомъ въ 5 фунтовъ между восемью рабочими поровну? Отъ каждаго фунта вѣса каждому изъ восьми рабочихъ придется восьмая часть, слѣдовательно отъ 5 фунтовъ каждому достанется 5 разъ по $^1/_8$ или $^5/_8$ фунта; значитъ, восьмая часть 5 фунтовъ равна $^5/_8$ одного фунта.

Чему равна 12-я часть 7, 15-я часть 9, шестая часть 3?

Въ случаѣ неяснаго пониманія учениками того, напримѣръ, что $^3/_4$ аршина произошло отъ дѣленія 3 арш. на 4 равныя части, разъясненіе дается имъ посредствомъ чертежа, на которомъ показывается, что $^3/_4$ аршина все равно, что четверть трехъ аршинъ, или посредствомъ складного аршина, раздѣленнаго на 4 равныя части, и складной сажени, раздѣленной на 12 равныхъ частей. Помощью этихъ пособій вполнѣ наглядно доказывается, что $^3/_4$ аршина $= {}^1/_4$ трехъ аршинъ. То же самое доказывается обращеніемъ $^3/_4$ аршина въ вершки (12) и опредѣленіемъ, какая это будетъ часть трехъ аршинъ или сажени (48 : 12 = 4).

Послѣ этихъ предварительныхъ упражненій предлагаются ученикамъ задачи на дѣленіе чиселъ, при которомъ получается остатокъ, и объясняется составъ полнаго частнаго и происхожденіе дроби отъ дѣленія одного числа на другое.

Параллельно съ упражненіемъ учениковъ на счетахъ и посредствомъ примѣровъ для выясненія происхожденія и состава дроби, они рѣшаютъ соотвѣтствующія этому отдѣлу задачи изъ „Сборника" [часть 2-я, задачи на происхожденіе дробей отъ № 1 до № 12 и численные примѣры отъ № 12 до 36].

Задача. (Изъ Сборника № 6). Купили голову сахару въ $^5/_8$ пуда и въ теченіи 10 дней тратили ежедневно по $^1/_2$ фунта, а потомъ расходовали по цѣлому фунту. На сколько дней хватило всего этого сахару?

Рѣшеніе. Если въ день выходило $^1/_2$ фунта, то въ 10 дней вышло въ 10 разъ болѣе, а 10 половинъ составляютъ 5 фунтовъ; итакъ, въ 10 дней вышло 5 фунтовъ сахару. Сахару было $^5/_8$ пуда, надо высчитать, сколько это составитъ фунтовъ; въ $^1/_8$ пуда 5 фунтовъ, потому что восьмая часть пуда или 40 фунтовъ будетъ 5 фунтовъ, а въ $^5/_8$ пуда будетъ въ 5 разъ болѣе, то-есть 25 фунтовъ. Изъ 25 фунтовъ израсходовано въ 10 дней 5 фунтовъ, значитъ осталось 20 фунтовъ; а расходуя въ день по одному фунту, можно эти 20 фунтовъ израсходовать въ 20 дней. Итакъ, всего сахару хватило на 10 + 20 = 30 дней.

2) Дробь правильная и неправильная, смѣшанное число.

Возьмите на счетахъ $^4/_{15}$; прибавьте къ этой дроби $^7/_{15}$. Сколько составилось? ($^{11}/_{15}$).

Сложите на счетахъ $^7/_9$ и $^5/_9$. Сколько получится? Должно получиться $^{12}/_9$, но $^{12}/_9$ на одной проволокѣ взять нельзя, потому что это больше единицы, а потому мы возьмемъ сперва $^9/_9$, то-есть цѣлую единицу, и еще на другой проволокѣ $^3/_9$ и составится 1 и $^3/_9$.

Ученикамъ напоминается, что когда отъ сложенія единицъ какого-либо разряда получаются единицы высшаго разряда, то онѣ выключаются изъ единицъ, получившихся въ суммѣ.

Затѣмъ ученики берутъ на счетахъ $^7/_5$ фута, $^{12}/_4$ фута, $1^1/_2$ фута, $^{15}/_4$ фута и т. д.; цѣлые футы съ долями, взятые на счетахъ, записываются учениками на доскахъ въ видѣ неправильной дроби и въ видѣ смѣшаннаго числа; неправильную дробь, продиктованную учителемъ, или записанную на классной доскѣ, берутъ на счетахъ въ видѣ смѣшаннаго числа и т. п. При этомъ смѣшанное число, напримѣръ $3^5/_8$, обращается въ дробь такимъ образомъ: „въ единицѣ $^8/_8$, то въ трехъ единицахъ въ три раза болѣе, то-есть $^{24}/_8$, а $^{24}/_8$ и $^5/_8$ составитъ $^{29}/_8$".

Изъ неправильной дроби, напримѣръ $^{11}/_3$, исключается цѣлое число такъ: „въ единицѣ $^3/_3$, то въ $^{11}/_3$ будетъ столько единицъ, сколько разъ 3 содержится въ 11, а 3 содержится въ 11 три раза и еще остается 2; значитъ, въ $^{11}/_3$ заключается 3 единицы и еще двѣ третьи доли единицы, то-есть $^{11}/_3 = 3^2/_3$".

Выясняется: а) понятіе о дроби правильной и неправильной; б) по какому внѣшнему признаку узнается дробь правильная и неправильная в) почему дроби $^{13}/_6$, $^{18}/_3$ и т. п. называются неправильными (онѣ больше единицы); г) обращеніе смѣшаннаго числа въ неправильную дробь; д) исключеніе цѣлаго числа изъ неправильной дроби; е) что больше: $4^2/_9$ фута или $^{40}/_9$ фута, и какъ это узнать?

3) Выраженіе данной дроби въ различныхъ видахъ и сокращеніе дробей.

По требованію учителя ученики берутъ на счетахъ на разныхъ проволокахъ $^1/_2$ фута; одинъ ученикъ беретъ на второй проволокѣ $^1/_2$ фута; другой на восьмой $^4/_8$ фута, третій на шестой $^3/_6$ фута, и т. д. Составляется табличка:

$$^1/_2 = {}^2/_4 = {}^3/_6 = {}^4/_8 = {}^5/_{10} = {}^6/_{12} = {}^8/_{16} = {}^{10}/_{20} = {}^{12}/_{24}.$$

Табличка эта записывается на доскахъ учениками, и рѣшаются вопросы: а) въ какихъ еще доляхъ можетъ быть выражена $^1/_2$; б) почему $^1/_2$ не можетъ быть выражена въ 9-хъ, въ 15-хъ и т. п. доляхъ; в) какъ узнаютъ, въ какихъ доляхъ данная дробь можетъ быть выражена и въ какихъ не можетъ? (Нужно, чтобы число долей дѣлилось на знаменателя данной дроби.

Письменно ученики составляютъ также табличку для выраженія $^1/_3$, $^1/_5$ въ различныхъ доляхъ:

$$^1/_3 = {}^2/_6 = {}^3/_9 = {}^4/_{12} = {}^5/_{15} = {}^6/_{18} = {}^7/_{21} = {}^8/_{24} \text{ и т. д.}$$
$$^1/_5 = {}^2/_{10} = {}^3/_{15} = {}^4/_{20} = {}^5/_{25} = {}^6/_{30} = {}^7/_{35} = {}^8/_{40} \text{ и т. д.}$$

На основаніи этихъ табличекъ ученики рѣшаютъ простенькія задачи въ родѣ слѣдующихъ: „$^1/_{15}$ фунта варенья стоитъ 10 коп., сколько стоитъ $^1/_3$ фунта, $^1/_5$ фун.“? и т. п.

Потомъ идутъ обратныя упражненія: дробь $^{12}/_{24}$ взять на различныхъ проволокахъ счетовъ:

$$^{12}/_{24}={}^{10}/_{20}={}^{8}/_{16}={}^{6}/_{12}={}^{5}/_{10}={}^{4}/_{8}={}^{3}/_{6}={}^{2}/_{4}={}^{1}/_{2}.$$

Какъ доказать безъ помощи счетовъ, что дробь $^{12}/_{24}$ равна $^4/_8$? (24-я доли единицы въ 3 раза мельче 8-хъ, потому что въ $^1/_8$ заключается $^3/_{24}$; слѣдовательно, вмѣсто $^{12}/_{24}$ нужно взять 8-хъ долей въ три раза менѣе, то-есть $^4/_8$).

Возьмите на счетахъ дробь $^{15}/_{20}$ и найдите, на каждой еще проволокѣ можно взять дробь, равную этой. (Доли вдвое крупнѣе 20-хъ будутъ 10-ыя, но въ $^1/_{10}$ заключаются $^2/_{20}$, то-есть только четное число 20-хъ долей можетъ быть выражено въ десятыхъ. Доли въ 5 разъ крупнѣе 20-хъ будутъ четвертыя: $^5/_{20}={}^1/_4$, то $^{15}/_{20}={}^3/_4$).

Какая дробь проще: $^{15}/_{20}$ или $^3/_4$, и почему? (Вторая дробь проще и понятнѣе, потому что доли крупнѣе; приходится единицу дѣлить на большія части, а не на мелкія).

Скажите вмѣсто $^{18}/_{24}$ дробь попроще ($^9/_{12}$, $^3/_4$).

Объясните, что дробь $^{18}/_{24}={}^3/_4$. (4-ыя доли въ 6 разъ крупнѣе 24-хъ, но ихъ взято въ 6 разъ менѣе, нежели 24-хъ; значитъ, $^3/_4$ все равно, что $^{18}/_{24}$).

Скажите дробь, которая была бы проще $^5/_{12}$. Почему эту дробь нельзя вырази ь въ болѣе крупныхъ доляхъ? Если взять доли въ два раза крупнѣе, то-есть 6-ыя, то нужно взять ихъ въ 2 раза менѣе 5-ти, а 5 на два на-цѣло не дѣлится, значитъ, дробь $^5/_{12}$ сократить на 2 нельзя; и т. д.).

Отчего же дробь становится проще, понятнѣе? (Отъ увеличенія самыхъ долей, то-есть отъ уменьшенія знаменателя).

Всякую ли дробь можно упростить, и отъ чего это зависитъ?

Скажите по одной дроби, которую можно упростить, сократить. ($^6/_8$, $^9/_{15}$, $^{10}/_{20}$ и т. д.).

Скажите по одной дроби, которую нельзя сократить ($^2/_5$, $^7/_8$, $^5/_{16}$ и т. д.).

На основаніи усвоеннаго учениками понятія объ упрощеніи дробей и самаго пріема сокращенія, они рѣшаютъ задачи. („Сборникъ“, часть 2-я, устныя и письменныя задачи на сокращеніе отъ № 36 до № 57 и численные примѣры отъ № 57 до № 67).

Устная задача. (Изъ Сборника № 40). Сколько заплатилъ кучеръ за $^{48}/_{60}$ пуда сѣна, если пудъ этого сѣна стоитъ 35 коп.?

Рѣшеніе: $^{48}/_{60} = {}^{4}/_{5}$

1 пудъ стоитъ 35 коп.

$^{1}/_{5}$ пуда „ $35 : 5 = 7$ коп.

$^{4}/_{5}$ „ „ $7 \times 4 = 28$ „

Письменная задача. (Изъ сборника № 49). Нужно было выкопать канаву на протяженіи 3 верстъ; въ первую недѣлю работники выкопали $^{15}/_{35}$ вер., во вторую $^{20}/_{28}$ вер., въ третью $^{36}/_{42}$ вер., въ четвертую $^{6}/_{21}$ вер., а всю остальную работу окончили въ пятую недѣлю. Сколько денегъ получили работники за пятую недѣлю, если съ версты имъ платили по 42 руб.?

Рѣшеніе: $^{15}/_{35} = {}^{3}/_{7}$

$^{20}/_{28} = {}^{5}/_{7}$

$^{36}/_{42} = {}^{6}/_{7}$

$^{6}/_{21} = {}^{2}/_{7}$

$$^{3}/_{7} + {}^{5}/_{7} + {}^{6}/_{7} + {}^{2}/_{7} = {}^{16}/_{7} = 2\,{}^{2}/_{7}$$

$$3 - 2\,{}^{2}/_{7} = {}^{5}/_{7}$$

За 1 версту платили 42 руб.

„ $^{1}/_{7}$ версты „ $42 : 7 = 6$ руб.

„ $^{5}/_{7}$ „ „ $6 \times 5 = 30$ „

Результатомъ упражненій при прохожденіи этого отдѣла должны быть отвѣты на вопросы:

Въ какихъ доляхъ могутъ быть выражены дроби: $^{1}/_{3}$, $^{2}/_{5}$, $^{3}/_{4}$, $^{3}/_{7}$ и т. д., не измѣняя своей величины?

Какимъ дѣйствіемъ съ числителемъ и знаменателемъ дроби можно представить ее въ болѣе мелкихъ доляхъ?

Почему величина дроби не измѣняется отъ умноженія числителя и знаменателя ея на одно и то же число?

Когда величина дроби становится яснѣе, понятнѣе?

Что значитъ *сократить* дробь?

Какое дѣйствіе нужно произвести надъ числителемъ и знаменателемъ, чтобы сократить дробь?

Почему величина дроби не измѣняется отъ дѣленія числителя и знаменателя ея на одно и то же число?

Сократить дроби: $^{24}/_{36}$, $^{72}/_{96}$, $^{150}/_{180}$ и т. д.

4). Увеличеніе и уменьшеніе дробей.

На счетахъ ученикъ беретъ $^1/_{12}$ и $^1/_3$, сравниваетъ ихъ по вели чинѣ и записываетъ на доскѣ эти дроби. Другой ученикъ сравниваег $^1/_2$ и $^1/_4$, третій $^3/_{20}$ и $^3/_5$, четвертый $^2/_9$ и $^8/_9$ и т. д. Потомъ дл перехода въ выводу предлагается работа обратная:

Возьмите на счетахъ дробь $^2/_{15}$ и дробь въ 3 раза бо̀льшую ($^6/_{15}$)

На какой еще проволокѣ можно взять дробь въ 3 раза бо̀льшую $^2/_{15}$? ($^2/_5$).

Сравните дроби $^2/_{15}$ и $^2/_5$ и докажите, что вторая въ три раз больше первой. (Сравненіе идетъ такъ: $^1/_5 = {}^3/_{15}$, а $^2/_5 = {}^6/_{15}$, зна читъ $^2/_5$ равно $^2/_{15}$, взятымъ три раза).

Скажите дробь въ 4 раза бо̀льшую $^2/_{17}$, въ 5 разъ бо̀льшую $^3/_2$ ($^8/_{17}$, $^3/_4$ и $^{15}/_{20}$).

Какъ увеличить данную дробь въ 3 раза? (Нужно или доли взят въ 3 раза крупнѣе, или самихъ долей взять въ три раза болѣе).

Что надо сдѣлать съ числителемъ или знаменателемъ дроби, чтобі увеличить ее въ 6 разъ? (Нужно или числителя умножить на 6, ил знаменателя раздѣлить на 6).

По какому изъ этихъ двухъ способовъ не всегда нужно увеличит дробь въ заданное число разъ, а по какому всегда можно? (По вто рому не всегда можно, потому что знаменатель не всегда дѣлится н то число, во сколько разъ надо увеличить дробь, а по первому всегд можно, потому что числителя всегда можно умножить на заданное число)

Скажите по одной дроби, которую можно было бы увеличить в 7 разъ по второму способу ($^3/_{14}$, $^5/_{21}$, $^{11}/_{42}$ и т. д.).

Скажите по одной дроби, которую можно было бы увеличить в 4 раза только по первому способу ($^2/_9$, $^3/_{11}$, $^4/_{25}$ и т. д.).

Скажите по одной дроби, которую можно было бы увеличить в 3 раза по обоимъ способамъ ($^2/_9$, $^5/_{12}$, $^1/_{24}$ и т. д.

Также точно ведется классная работа и относительно вывода пріемов уменьшенія данной дроби въ нѣсколько разъ. Параллельно съ упражне ніями на численныхъ примѣрахъ рѣшаются и задачи. („Сборникъ“, част 2-я, устныя и письменныя задачи на увеличеніе и уменьшеніе дробеі отъ № 67 до № 104 и численные примѣры отъ № 104 до № 119)

Устная задача. (Изъ Сборника № 75). Двѣ лошади бѣгутъ в ерегонку; одна въ 2 минуты пробѣгаетъ $^2/_9$ версты, а другая в 3 минуты $^1/_3$ версты. На сколько первая лошадь обгонитъ вторую в 5 минутъ?

Рѣшеніе: Первая лошадь въ 2 мин. пробѣгаетъ $^2/_9$ вер.
„ „ „ 1 „ „ $^1/_9$ „
Вторая лошадь „ 3 „ „ $^1/_3$ „
„ „ „ 1 „ „ $^1/_9$ „

Значитъ, лошади бѣгутъ наравнѣ, съ одинаковою скоростію.

Письменная задача. (Изъ Сборника № 97). 3 крестьянки привезли на рынокъ масло: одна 4 кадки, по $^5/_{12}$ пуда въ каждой, другая—двѣ, по $^2/_3$ пуда, а все масло: третьей крестьянки было разложено поровну въ 5 кадокъ и вѣсило $3^1/_3$ пуда. Первыя двѣ крестьянки продали все свое масло, а третья только одну кадку. Сколько денегъ получили всѣ три крестьянки вмѣстѣ, если каждый пудъ масла продавали по 12 руб.?

Рѣшеніе:

Въ одной кадкѣ у 1-й крестьянки было масла $^5/_{12}$ пуда,
„ 4 кадкахъ „ „ „ „ $^5/_{12}\times 4={}^5/_3=1^2/_3$ пуда.
„ одной кадкѣ у 2-й „ „ „ $^2/_3$ пуда,
„ 2 кадкахъ „ „ „ „ $^2/_3\times 2={}^4/_3=1^1/_3$ пуда
„ 5 кадкахъ у 3-й „ „ „ $3^1/_3$ пуда,
„ одной кадкѣ „ „ „ „ $3^1/_3 : 5={}^{10}/_3 : 5={}^2/_3$ пуда
Крестьянки масла продали: $1^1/_3+1^1/_3+{}^2/_3=3^2/_3$ пуда.
За $^1/_3$ пуда масла получили $12 : 3=4$ руб.
„ $3^2/_3$ „ или $^{11}/_3$ пуда получили $4\times 11=44$ руб.

Выводы изъ упражненій:

Что сдѣлается съ дробью, если числителя ея увеличить въ 5 разъ? Если знаменателя уменьшить въ 4 раза? Если числителя увеличить въ 6 разъ, а знаменателя въ 3 раза? и т. д.

Когда дробь увеличивается и когда уменьшается?

Какимъ образомъ увеличиваютъ дробь? Какимъ образомъ уменьшаютъ дробь?

На что прежде всего надо обратить вниманіе, когда желаютъ увеличить дробь въ данное число разъ? (Не дѣлится ли ея знаменатель на данное число)?

Какими двумя способами можно уменьшить дробь въ нѣсколько разъ и какой изъ нихъ удобнѣе?

5) Сложеніе и вычитаніе дробей съ разными знаменателями

Возьмите на одной и той же проволокѣ дроби $^1/_2$ и $^1/_3$ вмѣстѣ.

$$^1/_2={}^3/_6 \qquad ^1/_3={}^2/_6 \qquad ^3/_6+{}^2/_6={}^5/_6$$

На какой еще другой проволокѣ можно сложить вмѣстѣ $^1/_2$ и $^1/_3$?

$$^1/_2={}^6/_{12} \qquad ^1/_3={}^4/_{12} \qquad ^6/_{12}+{}^4/_{12}={}^{10}/_{12}$$
$$^1/_2={}^9/_{18} \qquad ^1/_3={}^6/_{18} \qquad ^9/_{18}+{}^6/_{18}={}^{15}/_{18}$$

Сложите на счетахъ $^1/_4$ и $^1/_6$

$$^1/_4={}^3/_{12} \qquad ^1/_6={}^2/_{12} \qquad ^3/_{12}+{}^2/_{12}={}^5/_{12}$$
или $$^1/_4={}^6/_{24} \qquad ^1/_6={}^4/_{24} \qquad ^6/_{24}+{}^4/_{24}={}^{10}/_{24}$$

Можно ли $^1/_3$ и $^1/_5$ сложить въ десятыхъ доляхъ? Въ какихъ доляхъ можно сложить эти дроби? (Въ 15-хъ, въ 30-хъ и т. д.)

Если двѣ дроби, выраженныя въ разныхъ доляхъ, берутся на одной проволокѣ счетовъ, то какъ выразятся эти дроби при ихъ написаніи? (Дроби выражаются въ одинаковыхъ доляхъ, пишутся съ равными знаменателями).

На 4-й, 6-й, 8-й и 16-й проволокахъ возьмите по одной долѣ фута; сосчитайте, сколько это составитъ вмѣстѣ.—На какой одной проволокѣ можно разомъ взять всѣ эти части?

$$(^1/_4+{}^1/_6+{}^1/_8+{}^1/_{24}=\frac{6+4+3+1}{24}={}^{14}/_{24}).$$

На второй и на шестой проволокѣ возьмите по одной части фута, на 11-й три части и на 16-й пять частей. Сколько это составитъ вмѣстѣ? Возьмите все разомъ на одной проволокѣ.

$$(^1/_2+{}^1/_6+{}^3/_{12}+{}^5/_{24}=\frac{12+4+6+5}{24}=1^3/_{24}).$$

Возьмите на 11-й проволокѣ 7 частей ($^7/_{12}$) и на 6-й пять ($^5/_6$). Что больше и на сколько?

Въ какихъ доляхъ надо выразить дроби $^3/_5$ и $^3/_8$, чтобы сложить ихъ вмѣстѣ?

$$\left.\begin{matrix} ^1/_5={}^8/_{40}, \text{ то } ^3/_5={}^{24}/_{40} \\ ^1/_8={}^5/_{40}, \text{ то } ^3/_8={}^{15}/_{40} \end{matrix}\right\} {}^{24}/_{40}+{}^{15}/_{40}={}^{39}/_{40}.$$

Почему эти дроби не могутъ быть приведены къ знаменателю 24, 30, 48?

Какое число надо искать для общаго знаменателя, когда мы желаемъ привести нѣсколько дробей къ общему знаменателю? (Число, дѣлящееся на всѣхъ знаменателей данныхъ дробей).

Какого общаго знаменателя имѣютъ дроби: $^2/_3$, $^4/_9$, $^5/_6$? (18).

А къ какому еще другому знаменателю, кромѣ 18, можно привести тѣ же дроби? (36, 54, 72, 90 и проч.).

Изъ всѣхъ чиселъ, дѣлящихся на знаменателей данныхъ дробей, какое слѣдуетъ выбирать и почему? (Наименьшее, потому что дроби выразятся тогда не въ слишкомъ мелкихъ доляхъ).

При приведеніи дробей къ общему знаменателю ученикамъ помогаетъ обстоятельное знакомство съ числами первой сотни; а какъ въ этомъ курсѣ дробей общій знаменатель или не превышаетъ 100, или представляетъ число, о составѣ котораго ученики легко могутъ судить, напримѣръ; 120, 150, 200 и т. п., то это знаніе чиселъ первой сотни ученикамъ вполнѣ достаточно для рѣшенія всѣхъ задачъ изъ элементарнаго курса дробей.

Въ случаѣ затрудненія учениковъ при приведеніи данныхъ дробей къ общему знаменателю, они пользуются табличкой, въ которой одна и та же дробь выражается въ различныхъ доляхъ. Положимъ, требуется сложить дроби $^5/_{12}$, $^3/_{10}$ и $^4/_{15}$.

Ученики составляютъ табличку:

$$^1/_{12}={^2/_{24}}={^3/_{36}}={^4/_{48}}=(^5/_{60})={^6/_{72}}={^7/_{84}}=\dots$$
$$^1/_{10}={^2/_{20}}={^3/_{30}}={^4/_{40}}={^5/_{50}}=(^6/_{60})$$
$$^1/_{15}={^2/_{30}}={^3/_{45}}=(^4/_{60})$$

Причемъ для второй дроби табличка пишется только до тѣхъ поръ, пока получатся доли, равныя тѣмъ, въ которыхъ выражается первая дробь, а для третьей до тѣхъ поръ, пока получатся доли, въ которыхъ выражаются разомъ первая и вторая дроби (въ нашемъ случаѣ 60-тыя); для этого иногда бываетъ необходимо продолжить табличку для первой и второй дроби.

Потомъ идетъ приведеніе данныхъ дробей къ найденному общему знаменателю и сложеніе:

$$\left.\begin{array}{l} ^1/_{12}={^5/_{60}},\ \text{то}\ {^5/_{12}}={^{25}/_{60}} \\ ^1/_{10}={^6/_{60}},\ \text{то}\ {^3/_{10}}={^{18}/_{60}} \\ ^1/_{15}={^4/_{60}},\ \text{то}\ {^4/_{15}}={^{16}/_{60}} \end{array}\right\}\ {^{25}/_{60}}+{^{18}/_{60}}+{^{16}/_{60}}={^{59}/_{60}}$$

Съ очень слабыми учениками можно повести работу еще иначе, именно: сначала они составляютъ таблички для нѣсколько данныхъ дробей, напримѣръ: $^1/_3$, $^1/_4$, $^1/_6$; а потомъ на основаніи этихъ табличекъ рѣшаютъ вопросы: „Сколько будетъ: $^1/_3+^1/_4$, $^1/_3+^1/_5$, $^3/_4+^2/_5$; $^2/_3+^1/_4+^3/_5$? Сколько будетъ: $^1/_3-^1/_5$, $^1/_3-^1/_4$?“ и др. Наконецъ, идетъ обобщеніе: что надо сдѣлать съ данными дробями для ихъ сложенія и вычитанія и какъ складывать и вычитать дроби, когда онѣ приведены къ общему знаменателю?

Способъ приведенія дробей къ общему знаменателю посредсвомъ табличекъ, хотя и не основанъ на механизмѣ, все-таки можетъ быть употребляемъ только при работѣ съ слабѣйшими учениками; вообще-же, на основаніи обстоятельнаго изученія чиселъ первой сотни, ученики должны сразу подыскивать общаго знаменателя данныхъ дробей.

(Устныя и письменныя задачи въ „Сборникѣ“ на сложеніе и вычитаніе дробей отъ № 119 до № 157 и численные примѣры отъ № 157 до № 197)

Задача устная. (Изъ Сборника № 127). Мастеръ сдѣлалъ по заказу серебрянныя ложки изъ трехъ кусковъ серебра: въ $^1/_4$ фун., въ $^1/_6$ фун. и въ $^1/_3$ фун. Сколько денегъ получилъ онъ за всѣ ложки, если фунтъ серебра цѣнилъ въ 24 руб, да за всю работу взялъ 8 руб?

Рѣшеніе: $^1/_4=^6/_{24}$, $^1/_6=^4/_{24}$, $^1/_8=^3/_{24}$,
значитъ въ трехъ кускахъ было серебра $^6/_{24}+^4/_{24}+^3/_{24}=^{13}/_{24}$ фун. Если фунтъ серебра стоитъ 24 руб., то $^1/_{24}$ фунта стоитъ 1 руб., а $^{13}/_{24}$ фун. стоютъ 13 руб. Итакъ, мастеръ за серебро получилъ 13 рублей, да за работу 8 руб.; всего 21 руб.

Задача письменная. (Изъ Сборника № 151). Крестьянинъ привезъ на рынокъ 5 чт $7^7/_9$ чк. овса и продалъ одному покупателю $6^7/_{18}$ четверика овса, другому $5^4/_{15}$ чк. и третьему $5^7/_{10}$ чк. Сколько еще овса осталось у него?

Вычитаніе

$^1/_{18}=^5/_{90}$, то $^7/_{18}=^{35}/_{90}$
$^1/_{15}=^6/_{90}$, то $^4/_{15}=^{24}/_{90}$
$^1/_{10}=^9/_{90}$, то $^7/_{10}=^{63}/_{90}$
$^{35}/_{90}+^{24}/_{90}+^{63}/_{90}=^{122}/_{90}=1^{32}/_{90}=1^{16}/_{45}$
$6+5+5+1^{16}/_{45}=17^{16}/_{45}$.
$17^{16}/_{45}$ четверика=2 чт. $1^{16}/_{45}$ чк.

$$\begin{array}{r} 5\text{ чт. } 7^7/_9\text{ чт. } (^{35}/_{45}) \\ -\ 2\text{ чт. } 1^{16}/_{45}\text{ чт.} \\ \hline 3\text{ чт. } 6^{19}/_{45}\text{ чк.} \end{array}$$

Строчки.

Продано овса $6^{7}/_{18}+5^{4}/_{15}+5^{7}/_{10}=2$ чт. $1^{16}/_{45}$ чк.

Осталось овса (5 чт. $7^{7}/_{9}$ чк.)$-$(2 чт. $1^{16}/_{45}$ чк.)$=3$ чт. $6^{19}/_{45}$ чк.

Выводы изъ этого отдѣла:

Какъ складываются и вычитаются дроби?

Какое число можетъ служить общимъ знаменателемъ для нѣсколькихъ данныхъ дробей?

Изъ всѣхъ чиселъ, дѣлящихся на знаменателей данныхъ дробей, какое нужно выбирать и почему?

Когда общій наименьшій знаменатель извѣстенъ, какъ приводить къ нему данныя дроби?

На какомъ свойствѣ дробей основано приведеніе ихъ къ общему знаменателю? (Отъ умноженія числителя и знаменателя дроби на одно и то же число величина ея не измѣняется).

6) Нахожденіе одной или нѣсколькихъ частей даннаго числа (умноженіе на дробь).

Послѣ достаточнаго ознакомленія учащихся при посредствѣ наглядныхъ пособій со свойствами дробей, дальнѣйшій курсъ ведется прямо на рѣшеніи устныхъ и письменныхъ задачъ и на вычисленіи примѣровъ.

Въ этомъ и слѣдующихъ отдѣлахъ приходится умноженіе и дѣленіе на дробь, но безъ вывода правилъ этихъ дѣйствій съ дробями отвлеченными, а въ формѣ вопросовъ, относящихся къ отысканію одной или нѣсколькихъ частей даннаго числа, нахожденію неизвѣстнаго числа по данной его части и опредѣленію содержанія дроби въ числѣ цѣломъ и дробномъ.

Планъ прохожденія всѣхъ трехъ слѣдующихъ отдѣловъ таковъ: для ознакомленія учениковъ съ задачами новаго рода, имъ предлагаются вначалѣ задачи устныя, изъ рѣшенія которыхъ выводится общій пріемъ рѣшенія, задачъ подобнаго рода. При этомъ, изъ нѣсколькихъ пріемовъ рѣшенія предлагаемыхъ учениками, ими самими выбирается пріемъ простѣйшій. Потомъ уже пріемъ, установленный для рѣшенія устныхъ задачъ, прилагается и къ задачамъ письменнымъ, и къ численнымъ примѣрамъ.

Для поясненія плана, я во всѣхъ трехъ отдѣлахъ привожу только образцы рѣшенія задачъ. (Въ „Сборникѣ“ устныя и письменныя задачи на нахожденіе частей даннаго числа отъ № 197 до № 232 и численные примѣры отъ № 252).

1) *Задача устная.* (Изъ Сборника № 200). Я купилъ комодъ за 36 руб.; черезъ нѣсколько времени долженъ былъ продать этотъ комодъ и получилъ за него только $^7/_{12}$ цѣны. Сколько рублей потерялъ я при этой продажѣ?

Рѣшеніе. Я купилъ комодъ за 36 рублей, а продалъ за $^7/_{12}$ цѣны; $^1/_{12}$ часть 36-ти руб. есть 3 руб., а $^7/_{12}$ въ 7 разъ болѣе или 21 руб. Итакъ, я комодъ продалъ за 21 руб.; слѣдовательно потерялъ 36 руб.—21 руб.=15 руб.

Или: Я продалъ комодъ за $^7/_{12}$ своей цѣны, значитъ при этой продажѣ потерялъ $^{12}/_{12}-^7/_{12}=^5/_{12}$ всей цѣны, то-есть 36-ти рублей; а $^1/_{12}$ часть 36-ти руб. есть 3 руб., то $^5/_{12}$ въ 5 разъ болѣе, или 15 руб.

2) *Задача устная.* (Изъ Сборника № 203). У меня было 4 руб. 80 коп.; $^1/_5$ часть всѣхъ этихъ денегъ я истратилъ на покупку географической карты, $^3/_{10}$ на книги и $^7/_{20}$ на письменныя принадлежности. Сколько денегъ у меня осталось?

Рѣшеніе. Всѣхъ денегъ у меня было 4 руб. 80 коп.; на покупку карты я истратилъ $^1/_5$ часть, то-есть 4 руб. 80 коп. : 5=96 коп. На покупку книгъ я истратилъ $^3/_{10}$ частей всѣхъ денегъ; $^1/_{10}$ части 4 руб. 80 коп. есть 48 коп., а $^3/_{10}$ въ 3 раза болѣе, или 48 коп.×3=1 руб. 44 коп. На письменныя принадлежности я истратилъ $^7/_{20}$ частей 4 руб. 80 коп.; $^1/_{20}$ часть 4 руб. 80 коп. есть 24 коп., а $^7/_{20}$ въ 7 разъ болѣе, то-есть 24 коп.×7=1 руб. 68 коп. Итакъ, всего я истратилъ: 96 коп.+1 руб. 44 коп.+1 руб. 68 коп.=4 руб. 8 коп. Значитъ, у меня осталось денегъ 4 руб. 80 коп.—4 руб. 8 коп.= 72 коп.

Или: Изъ 4 руб. 80 коп. я истратилъ: $^1/_5$ часть, $^3/_{10}$ частей и $^7/_{20}$ частей, что составляетъ $^4/_{20}+^6/_{20}+^7/_{20}=^{17}/_{20}$ частей всѣхъ денегъ; значитъ, изъ всѣхъ денегъ осталось $^{20}/_{20}-^{17}/_{20}=^3/_{20}$ части. $^1/_{20}$ часть 4 руб. 80 коп. есть 24 коп., а $^3/_{20}$ въ 3 раза болѣе, или 24 коп.×3=72 коп. Слѣдовательно, у меня осталось 72 коп.

Сличая два пріема рѣшенія послѣдней задачи, ученики убѣждаются въ томъ, что второй пріемъ—простѣйшій, и этотъ пріемъ примѣняютъ къ рѣшенію письменныхъ задачъ того же рода.

Письменная задача. (Изъ Сборника № 219). Землекопы выкопали канаву, длиною въ 3 вер. 240 саж.; въ 4 недѣли: въ перв недѣлю $^2/_5$ всей канавы, во вторую $^1/_6$, въ третью $^3/_{10}$, а въ четвертую недѣлю окончили всю работу. Сколько денегъ получили они за четвертую недѣлю, если съ сажени имъ платили по 15 коп.?

Вычисленіе.

$$^2/_5+^1/_6+^3/_{10}=^{12}/_{30}+^5/_{30}+^9/_{30}=^{26}/_{30}=^{13}/_{15}.$$

$$^{15}/_{15}-^{13}/_{15}=^2/_{15} \qquad 3 \text{ вер. } 240 \text{ саж.}=1740 \text{ саж.}$$

$$\begin{array}{r|l} 1740 & 15 \\ \hline -15 & 116 \\ \hline 24 & \times 2 \\ -15 & \overline{232} \\ \hline 90 & \\ -90 & \\ \hline ,, & \end{array} \qquad \begin{array}{r} 233 \\ \times 15 \\ \hline 1160 \\ 232 \\ \hline 3480 \end{array}$$

Строчки.

Въ первыя три недѣли выкопано $^2/_5+^1/_6+^3/_{10}=^{13}/_{15}$ всей канавы.
Въ четвертую недѣлю выкопано $^{15}/_{15}-^{13}/_{15}=^2/_{15}$ всей канавы.
$^1/_{15}$ часть всей канавы=(3 вер. 240 саж.) : 15=115 саж.
$^2/_{15}$ части „ „ =116 саж.×2=232 саж.
За четвертую недѣлю получено 15 коп.×232=34 руб. коп.

Примѣчаніе. Въ строчки ученики вносятъ данныя въ задачѣ числа, или числа, получившіяся вмѣсто искомыхъ, и результаты вычисленій, но не вносятъ подробностей вычисленій.

Выводы:

Найти $^3/_5$ части отъ 15.
Узнать $^7/_{12}$ отъ 38.
Узнать $^5/_{16}$ отъ $^{24}/_{25}$.
Найти $^4/_9$ отъ $7^5/_6$.
Узнать $^5/_{14}$ отъ 72 сут. 18 час. 40 мин.
Найти $^4/_7$ отъ 17 саж. 2 арш. $9^3/_8$ вершка.

7) Нахожденіе цѣлаго по даннымъ его частямъ (дѣленіе на дробь).

(Устныя и письменныя задачи на нахожденіе цѣлаго по даннымъ его частямъ отъ № 252 до № 300 и численные примѣры отъ № 30(до № 135).

1) *Задача устная.* (Изъ Сборника № 253). Изъ $^1/_4$ всего куп леннаго куска сукна портной сдѣлалъ 3 сюртука и на каждый сюр тукъ употребилъ 2 арш. 12 верш. сукна. Сколько аршинъ сукна был въ цѣломъ кускѣ сукна?

Рѣшеніе. На каждый сюртукъ пошло 2 арш. 12 верш., то н 3 сюртука пошло (2 арш. 12 верш.)$\times 3 = 8$ арш. 4 верш. Эт 8 арш. 4 верш. составляютъ четверть всего куска сукна; значитт во всемъ кускѣ было сукна (8 арш. 4 верш.)$\times 4=33$ арш.

2) *Задача устная.* (Изъ Сборника № 258). Въ одной библіотек русскія книги составляютъ $^3/_4$ всего числа книгъ, французскія $^1/_{10}$ нѣмецкія $^1/_{20}$, а всѣ остальныя 160 книгъ англійскія. Сколько всег книгъ въ этой библіотекѣ?

Рѣшеніе. Число всѣхъ книгъ, кромѣ англійскихъ, составляет $^3/_4+^1/_{10}+^1/_{20}=^{18}/_{20}$ или $^9/_{10}$ всего числа книгъ въ библіотекѣ; значитт 160 англійскихъ книгъ составляютъ только $^1/_{10}$ часть всего числа книгт слѣдовательно, всѣхъ книгъ въ этой библіотекѣ $160\times 10=1600$.

1) *Задача письменная.* (Изъ Сборника № 287). 4 крестьянин продали на рынкѣ рожь по 3 руб. 20 коп. за четверть; деньги по лученныя за всю эту рожь, они раздѣлили между собою такъ, чт одному досталось $^2/_{15}$ части всѣхъ этихъ денегъ, другому — $^7/_{20}$ третьему—$^5/_{12}$, а четвертому - остальные 6 руб. 40 коп. Скольк четвертей ржи продали крестьяне?

Вычисленіе.

$^2/_{15}+^7/_{20}+^5/_{12}=^8/_{60}+^{21}/_{60}+^{25}/_{60}=^{54}/_{60}=^9/_{10}$.

$^{10}/_{10}-^9/_{10}=^1/_{10}$ $\quad 640\times 10=6400 \quad 6400 : 320=20$.

Строчки.

Три крестьянина получили $^2/_{15}+^7/_{20}+^5/_{12}=^9/_{10}$ всѣхъ денегъ.

Четвертый получилъ $^{10}/_{10}=^9/_{10}=^1/_{10}=6$ руб. 40 коп.

Вся рожь продана за (6 руб. 40 коп.)$\times 10=64$ руб.

Четвертей ржи было продано 64 руб. : (3 руб. 20 коп.)$=20$.

2) *Задача письменная.* (Изъ Сборника № 295). Землекопы вы копали въ первый мѣсяцъ $^5/_{24}$ длины всего канала, во второй $^3/_{16}$ въ третій 126 саж. $2^3/_4$ арш. и въ четвертый остальныя $^5/_{12}$ части всего канала. Какъ велика длина всего канала?

Вычисленіе.

$5/24+3/16+5/12=10/48+9/48+20/48=39/48=13/16$

$16/16-13/16=3/16$

126 саж. $2^3/_4$ арш.	3
— 12	42 саж. $^{11}/_{12}$ арш.
„ „ 6	$\times$ 16
— 6	672 саж. $^{176}/_{12}$ арш.
„ $2^3/_4=1$	1 вер. 176 саж. $2^2/_3$ арш.

Строчки.

Въ 1-й, 2-й и 4-ый мѣсяцъ выкопано $5/24+3/16+5/12=13/16$ канала. Въ третій мѣсяцъ выкопано $16/16-13/16=3/16=126$ саж. $2^3/_4$ арш. $^1/_{16}$ часть канала=(126 саж. $2^3/_4$ арш.) : 3=42 саж. $^{11}/_{12}$ арш. Длина всего канала=(42 саж. $^{11}/_{12}$ арш.)$\times$16=1 вер. 176 саж. $2^2/_3$ арш.

Хорошимъ упражненіемъ въ концѣ этого отдѣла могутъ служить примѣры на отвлеченныя числа. По требованію учителя одинъ ученикъ задумываетъ какое-нибудь число, беретъ $^3/_5$ части этого числа и результатъ говоритъ классу; товарищи его должны узнать задуманное число. Положимъ, что $^3/_5$ задуманнаго числа будетъ $12^1/_2$, значитъ, $^1/_5=12^1/_2 : 3=4^1/_6$, а все число$=4^1/_6\times5=20^5/_6$.

Выводы:

$^3/_5$ неизвѣстнаго числа=18. Узнать число.
Найти неизвѣстное число, если $^7/_{12}$ его частей$=^4/_9$.
$^4/_7$ неизвѣстнаго числа$=3^8/_{15}$. Узнать все число.
$^8/_{13}$ искомаго числа=25 пуд. 16 фун. $14^2/_3$ лота. Найти число.

8) Содержаніе дроби въ числѣ цѣломъ и дробномъ (дѣленіе на дробь).

(Устныя и письменныя задачи изъ «Сборника» отъ № 315 до № 339 и численные примѣры отъ № 339 до № 359).

Задача устная. (Изъ Сборника № 315). На сколько дней станетъ 10 мѣшковъ муки, въ каждомъ по 3 четверика, если въ день расходовать по $^2/_3$ четверика?

Рѣшеніе. Въ каждомъ мѣшкѣ муки было 3 четверика, то въ 10 мѣшкахъ было 30 четвериковъ. Если бы въ день выходило по 1 чк.

то всей муки стало бы на 30 дней; если бы въ день выходило по $^1/_3$ чк., то муки стало бы на 90 дней, то-есть на число дней въ три раза большее 30-ти; а такъ какъ въ день выходитъ не по $^1/_3$, а по $^2/_3$ чк., то муки станетъ на $90:2=45$ дней.

Или: Муки было $3\times10=30$ чк.; чтобы узнать, на сколько дней станетъ этой муки, если въ день расходовать по $^2/_3$ чк., нужно узнать, сколько разъ $^2/_3$ содержится въ 30. Единица въ 30 содержится 30 разъ; $^1/_3$ будетъ содержаться въ три раза болѣе, то-есть $30\times3=$ $=90$ разъ, а $^2/_3$ въ два раза менѣе, нежели $^1/_3$, то-есть $90:2=45$ разъ. Значитъ, муки станетъ на 45 дней.

Или: Чтобы узнать, сколько $^2/_3$ содержится въ 30, нужно узнать, сколько въ 30 единицахъ заключается третей единицы; $1=^3/_3$ то $30=^{90}/_3$, а $^2/_3$ въ $^{90}/_3$ содержится столько разъ, сколько разъ 2 содержится въ 90, то-есть 45 разъ.

Изъ приведенныхъ трехъ пріемовъ рѣшенія ученики останавливаются на послѣднемъ, какъ простѣйшемъ, и примѣняютъ его къ рѣшенію письменныхъ задачъ и вычисленію примѣровъ.

Задача письменная. (Изъ Сборника № 332). Всѣ конфекты, приготовленныя въ кондитерской въ продолженіи трехъ дней, разложили въ коробки; въ каждую коробку положили $3^3/_4$ фун. и каждую коробку продали по 5 руб. 40 коп. Сколько денегъ получили за всѣ эти конфекты, если каждый день приготовляли $13^1/_8$ фун.?

Вычисленіе.

$$13^1/_8\times3=39^3/_8$$
$$39^3/_8:3^3/_4=^{315}/_8:^{15}/_4=^{315}/_8:^{30}/_8=315:30=10^{15}/_{30}=10^1/_2$$
$$540\times10=5400 \qquad 540:2=270$$
$$5400+270=5670.$$

Строчки

Въ 3 дня приготовили конфектъ $13^1/_8$ фун. $\times3=39^3/_8$ фун.
Коробокъ вышло $39^3/_8:3^3/_4=10^1/_2$.
10 коробокъ продали за 5 руб. 40 коп. $\times10=54$ руб.
$^1/_2$ коробки „ „ 5 руб. 40 коп. $:2=2$ руб. 70 коп.
За всѣ конфекты получили 54 руб. $+2$ руб. 70 коп. $=56$ руб 70 коп.

Выводы.

Узнать, сколько разъ $^1/_6$ содержится въ 9.

Узнать, во сколько разъ 12 больше $^3/_8$.

Сколько разъ $^5/_{12}$ содержится въ 18?

Сколько разъ $^1/_5$ содержится въ $^9/_{20}$?

Сколько разъ $^3/_8$ содержится въ $^{27}/_{40}$?

Во сколько разъ $16^7/_8$ больше $2^3/_5$?

Узнать, сколько разъ 2 фун. $4^5/_8$ лота содержится въ 3 пудахъ 10 фун. $12^1/_2$ лот.

Для повторенія всего элементарнаго курса дробей въ „Сборникѣ" имѣются смѣшанныя задачи и численные примѣры (отъ № 359 до № 476) на всѣ дѣйствія.

Задача устная. (Изъ Сборника № 364). Въ 5 мѣшкахъ равнаго вѣса было $8^3/_4$ пуда орѣховъ; изъ одного мѣшка продано $^4/_7$ части всѣхъ орѣховъ по 15 коп. за фунтъ. Сколько денегъ получено за проданные орѣхи?

Рѣшеніе. Въ мѣшкахъ было $8^3/_4$ пуда орѣховъ, то въ одномъ мѣшкѣ было $8^3/_4 : 5 = {}^{35}/_4 : 5 = {}^7/_4$ пуда. Изъ одного мѣшка продано $^4/_7$ части; $^1/_7$ часть $^7/_4$ пуда будетъ $^1/_4$ пуда, а $^4/_7$ части заключаютъ $^1/_4 \times 4 = 1$ пудъ. Фунтъ орѣховъ продавался по 15 коп., то 1 пудъ, значитъ, проданъ за 15 коп.$\times 40 = 6$ руб.

Задача письменная. (Изъ Сборника № 374). Курьеръ отправился изъ одного города въ другой и въ каждые $2^1/_2$ часа дѣлалъ по $28^1/_3$ вер.; черезъ 15 часовъ послѣ своего выѣзда онъ разсчиталъ, что ему осталось еще сдѣлать $^2/_5$ всего разстоянія. Сколько всего верстъ долженъ былъ курьеръ проѣхать?

Вычисленіе.

$28^1/_3 : 5 = 5^2/_3$ $\quad 5^2/_3 \times 2 = 10^4/_3 = 11^1/_3$

$11^1/_3 \times 15 = 165^{15}/_3 = 170$ $\quad ^5/_5 - {}^2/_5 = {}^3/_5$

$170 : 3 = 56^2/_3$ $\quad 56^2/_3 \times 5 = 280^{10}/_3 = 283^1/_3$.

Строчки.

Въ $^1/_2$ часа курьеръ проѣзжалъ $28^1/_3 : 5 = 5^2/_3$ вер.

Въ 1 часъ „ „ $5^2/_3 \times 2 = 11^1/_3$ „

Въ 15 часовъ курьеръ проѣхалъ $11^1/_3 \times 15 = 170$ вер.

Курьеръ проѣхалъ $^5/_5 - {}^2/_5 = {}^3/_5$ части всего разстоянія.

$^3/_5$ всего разстоянія $= 170$ вер.

$^1/_5$ „ „ $= 170 : 3 = 56^2/_3$ вер.

Все разстояніе $= 56^2/_3 \times 5 = 283^1/_3$ вер.

На этомъ, по моему мнѣнію, долженъ быть законченъ начальный курсъ Ариѳметики; проходимый въ три или четыре года. Пройдя такой курсъ, ученикъ можетъ производить всѣ, даже весьма сложныя, вычисленія съ числами цѣлыми и дробями и будетъ вполнѣ подготовленъ къ осмысленному прохожденію систематическаго курса Ариѳметики по учебнику.

Въ народной школѣ, полный курсъ, который долженъ состоять въ изложенномъ элементарномъ курсѣ, этотъ курсъ придется нѣсколько сократить, не по содержанію, а по количеству упражненій. Оканчивающій обученіе въ народной школѣ долженъ пріобрѣсть хорошій навыкъ и пріемъ въ вычисленіи съ числами цѣлыми любой величины и простѣйшими дробями; а потому, не имѣя въ виду на первомъ планѣ развитія учениковъ для прохожденія дальнѣйшаго гимнастическаго обученія, не слѣдуетъ въ народной школѣ долго останавливаться на такомъ подробномъ изученіи чиселъ первой сотни, какъ это необходимо въ виду извѣстной подготовки ученика. Въ школѣ, въ которой обученіе продолжается только три года, достаточно на изученіе чиселъ первой сотни употребить одинъ первый годъ обученія; во второй годъ нужно пройти нумерацію и дѣйствія съ цѣлыми числами любой величины; въ третій—въ первое полугодіе элементарный курсъ дробей и во второе полугодіе повторить дѣйствія съ цѣлыми числами отвлеченными и именованными, если возможно, по самому краткому учебнику. Такимъ образомъ, самое главное, необходимое оканчивающему курсъ народной школы, будетъ хорошо усвоено и приведено окончательно въ систему. Если учащійся въ школѣ и позабудетъ впослѣдствіи что-либо изъ пройденнаго курса, то онъ вспомнитъ книжку, и легко при ея посредствѣ можетъ возстановить въ своей памяти забытое, обладая достаточнымъ развитіемъ сознанія, пріобрѣтеннымъ въ школѣ посредствомъ толковаго обученія.

Въ школѣ, гдѣ обученіе продолжается не менѣе четырехъ лѣтъ, изложенный элементарный курсъ Ариѳметики можетъ быть пройденъ вполнѣ.

Систематическій курсъ Ариѳметики.

Систематическій курсъ Ариѳметики, какъ изложено уже (введеніе, глава IV, выводъ 1), долженъ проходиться при посредствѣ учебника, вначалѣ въ видѣ повторенія пройденнаго въ элементарномъ курсѣ (нумераціи и четыре дѣйствія съ числами цѣлыми, отвлеченными и именованными), а потомъ на изученіи новыхъ чисто теоретическихъ отдѣловъ (признаки дѣлимости, нахожденіе наименьшаго кратнаго числа и проч.). Хотя и можно было бы сдѣлать практическія указанія касательно различныхъ частныхъ пріемовъ учителя при прохожденіи систематическаго курса Ариѳметики учениками, уже прошедшими предварительно курсъ элементарный, но эти указанія не имѣютъ существеннаго значенія, потому что учитель будетъ имѣть дѣло съ учениками, понимающими сущность предмета, и не встрѣтитъ значительнаго затрудненія въ руководствѣ такихъ учениковъ при изученіи дальнѣйшаго курса. Одно можно пожелать для облегченія ученикамъ прохожденія систематическаго курса въ низшихъ классахъ Гимназіи, послѣ подготовки ихъ элементарнымъ курсомъ, это—появленіе возможно краткаго и понятнымъ языкомъ изложеннаго учебника.

Здѣсь же, въ видѣ *отдѣльныхъ* статей, я предлагаю самыя сжатыя указанія относительно разработки въ классѣ *главнѣйшихъ* отдѣловъ изъ систематическаго курса Ариѳметики; причемъ имѣю въ виду учениковъ, *не проходившихъ* полнаго элементарнаго курса, и ставлю цѣлью пріученіе такихъ учениковъ относиться сознательно къ проходимому курсу, и тѣмъ самымъ пріученіе къ толковому пользованію учебникомъ при приготовленіи уроковъ. Для учениковъ, правильно подготовленныхъ къ систематическому курсу, предлагаемый здѣсь синтетическій пріемъ вывода и доказательства ариѳметическихъ правилъ уже болѣе не нуженъ и можетъ быть замѣненъ пріемомъ аналитическимъ.

1) Признаки дѣлимости чиселъ и разложеніе чиселъ на простые множители.

Вопросы для вывода признака дѣлимости на 2.

Скажите нѣсколько чиселъ, дѣлящихся безъ остатка на 2. Записывается одно изъ нихъ.

Скажите нѣсколько чиселъ, не дѣлящихся на 2. Записывается одно число.

Что нужно исправить въ послѣднемъ числѣ, чтобы оно раздѣлилось на 2? Какую цифру нужно измѣнить въ первомъ числѣ, чтобы оно не дѣлилось на 2? Можно ли достигнуть того же, измѣняя цифру сотенъ, цифру десятковъ? Слѣдовательно, на что надо обратить вниманіе въ заданномъ числѣ, чтобы узнать, дѣлится ли оно безъ остатка на 2?

Какою цифрою должно оканчиваться число, дѣлящееся на 2? (2, 4, 6, 8, 0).

Какою цифрою должно оканчиваться число, не дѣлящееся на 2? (1, 3, 5, 7, 9).

Какъ называются числа, имѣющія въ концѣ одну изъ первых цифръ?

Какъ называются числа, оканчивающіяся одною изъ послѣдних цифръ?

Слѣдовательно, какія числа дѣлятся безъ остатка на 2? (Числ четныя).

Признакъ дѣлимости на 5.

Скажите нѣсколько чиселъ въ двѣ, три цифры, дѣлящихся без остатка на 5. Назовите числа, не дѣлящіяся на 5. Записывается п одному числу изъ каждой группы.

Какъ поправить это число (изъ второй группы), чтобы оно дѣ лилось на 5? Что нужно измѣнить въ первомъ числѣ, чтобы оно н дѣлилось на 5?

Отчего перемѣна цифры десятковъ, сотенъ и т. д. нисколько н измѣняетъ дѣла?

Слѣдовательно, какъ узнать, дѣлится ли данное число без остатка на 5?

Признакъ дѣлимости на 3.

Десятокъ, сотня, тысяча и т. д. дѣлятся безъ остатка на 2 и на 5; посмотримъ, раздѣлится ли тысяча, сотня, десятокъ без остатка на 3?

Сколько получается въ остаткѣ отъ дѣленія на 3 десяти, ста тысячи, сотни тысячъ?

А сколько получится въ остаткѣ единицъ, если раздѣлить на 3 двѣ тысячи, двѣ сотни, два десятка?

Сколько получится въ остаткѣ единицъ, если раздѣлить 5 десят ковъ на 3? (Принимается въ разсчетъ остатокъ отъ дѣленія каждаго десятка и затѣмъ, совокупность единицъ, получаемыхъ въ остаткѣ отъ дѣленія всѣхъ десятковъ на 3).

Сколько получится въ остаткѣ единицъ отъ дѣленія 740 на 3? ($7+4=11$). Отъ дѣленія 2561? ($2+5+6+1=14$).

Сколько единицъ получится отъ дѣленія на 3 числа 564? ($5+6+4=15$). А если эти 15 единицъ раздѣлить на 3, получится ли остатокъ? Дѣлится ли все число 564 на 3 безъ остатка? Почему?

Напишите одно число въ 4 цифры, дѣлящееся на 3, и другое не дѣлящееся на 3. Какъ измѣнить второе число, чтобы оно дѣли лось на 3? Какую цифру этого числа нужно для этого измѣнить?

На что же нужно обратить вниманіе, желая узнать, раздѣлится ли данное число безъ остатка на 3?

Такимъ же путемъ катихизаціи и синтетическаго пріема выводятся и признаки дѣлимости чиселъ на 4, 6, 8, 9.

Для повторенія статьи ученикамъ предлагаются упражненія: а) выписать всѣ однозначныя числа, на которыя данное число (напр. 1620) раздѣлится безъ остатка; б) составить такое число въ 5, въ 6 цифръ, которое бы дѣлилось на 2 и на 3, на 3 и на 4, на 5 и на 6, на 4 и на 9 и т. п.; в) составить число въ 4, въ 5, въ 6 цифръ, которое дѣлилось бы на 2 и на 4 и не дѣлилось бы на 8.

Разложеніе чиселъ на простые множители составляетъ продолженіе упражненія на распредѣленіе чиселъ *простыя* и *сложныя*, изложеннаго въ элементарномъ курсѣ второго года. Сложное число разлагается сперва на два множителя; каждый изъ этихъ множителей, если онъ число сложное, снова разлагается на два множителя; разложеніе идетъ до тѣхъ поръ, пока всѣ множители будутъ простые. Потомъ уже указывается и обыкновенный пріемъ разложенія послѣдовательнымъ дѣленіемъ числа на простого дѣлителя до окончательнаго выдѣленія его изъ числа множителей разлагаемаго числа.

2) Нахожденіе наименьшаго кратнаго числа.

Назовите какое-нибудь сложное число. (24). На какія числа оно дѣлится?

Число это по отношенію къ своимъ дѣлителямъ называется числомъ *кратнымъ*.

Для какихъ простыхъ чиселъ это число будетъ кратнымъ, для какихъ сложныхъ чиселъ?

Скажите нѣсколько чиселъ кратныхъ для 2, 3 и 5. (30, 60, 90, 120 и т. д.). Какъ составляете вы такія числа? (Перемноженіемъ и послѣдовательнымъ увеличеніемъ одного кратнаго числа въ 2, 3, 4 и т. д. раза).

Изъ всѣхъ придуманныхъ вами чиселъ какое самое меньшее? (30). Придумайте число меньшее 30 и кратное для 2,3 и 5. Почему числа 15, 18, 20 не будутъ кратными для 2, 3 и 5? Значитъ число 30 будетъ *наименьшее кратное* для 2, 3 и 5. Можно ли придумать число наибольшее кратное?

Скажите число наименьшее кратное для 2, 3 и 10, для 4, 5 и 8 и т. д. Итакъ, опредѣлите, какое число называется наименьшимъ кратнымъ для нѣсколькихъ чиселъ.

Какъ составить наименьшее кратное число для 12 и 15? Чтобы оно дѣлилось на 12, на какія простыя числа должно оно дѣлиться? Какіе простые множители должно оно въ себѣ заключать? А чтобы оно дѣлилось на 15, какіе простые множители должно въ себѣ заключать? Итакъ, чтобы искомое число было наименьшимъ кратнымъ для 12 и 15, изъ какихъ простыхъ множителей должно оно состоять? (2, 2, 3, 5). Составьте это число (2 . 2 . 3 . 5 = 60)

Слѣдовательно, что нужно сдѣлать съ данными числами для составленія наименьшаго кратнаго имъ числа?

Составьте наименьшее кратное число для 18 и 30.

$$18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$$
$$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$$
$$\text{Наим. крат.} = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 90.$$

Почему въ составъ наименьшаго кратнаго числа взято 2 множителемъ одинъ разъ? Почему 3 два раза? Изъ чего видно, что 90 дѣлится на 18? Сколько получится въ частномъ отъ дѣленія 90 на 18?

Составьте наименьшее кратное число для 42, 56, 84.

	Дополняющіе множители.
$42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$	$2 \cdot 2$
$56 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7$	3
$84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$	2

$$\text{Наим. крат.} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 168.$$

На какія простыя числа нужно умножить 42, 56, 84, чтобы получить 168? Выпишите эти числа противъ каждаго изъ данныхъ чиселъ. Слѣдовательно, какъ узнать множителей, дополняющихъ каждое изъ данныхъ чиселъ до числа наименьшаго кратнаго?

Послѣ усвоенія учениками пріема составленія наименьшаго кратнаго числа имъ предлагаются задачи и численные примѣры на сложеніе и вычитаніе дробей съ большими знаменателями, требующими усвоеннаго пріема для приведенія къ общему знаменателю.

3) Выводъ правилъ для умноженія цѣлаго числа и дроби на дробь.

Задача. Аршинъ матеріи стоитъ 20 коп.; сколько придется заплатить за 3, 4, 10, 15 аршинъ?

Какія числа даны въ задачѣ? Что ищется? Какимъ дѣйствіемъ надъ числами, данными въ задачѣ, опредѣляется искомое? (Нужно цѣну одного аршина умножить на число аршинъ).

Измѣнится ли вопросъ задачи, а слѣдовательно и дѣйствіе надъ числами данными, если мы будемъ измѣнять величину данныхъ въ задачѣ чиселъ?

Значитъ, такое дѣйствіе придется совершить съ числами, данными для рѣшенія такой задачи: „Аршинъ матеріи стоитъ 18 коп.: сколько слѣдуетъ заплатить за $5\frac{1}{2}$ арш., за $2\frac{3}{8}$ арш., за $\frac{3}{4}$ арш., за $\frac{5}{6}$ арш.?"

Обозначьте, что для рѣшенія задачи нужно 18 умножить на $\frac{3}{4}$ $(18\times\frac{3}{4})$. Какимъ образомъ 18 множить на $\frac{3}{4}$. Нельзя ли цѣну $\frac{3}{4}$ арш. опредѣлить не умѣя множить 18 на $\frac{3}{4}$?

1 арш. стоитъ 18 коп.
$\frac{1}{4}$ „ „ $18:4=\frac{18}{4}$ коп.
$\frac{3}{4}$ „ стоютъ $\frac{18}{4}\times3=\frac{18\times3}{4}$.

Итакъ $18\times\frac{3}{4}=\frac{18\times3}{4}$. Что сдѣлали съ числомъ 18 и съ числителемъ и съ знаменателемъ множителя для умноженія 18 на $\frac{3}{4}$? Слѣдовательно, какъ поступить при умноженіи цѣлаго числа на дробь? (Цѣлое число нужно умножить на числителя дроби и полученное произведеніе раздѣлить на знаменателя дроби).

Задача. Поѣздъ желѣзной дороги проѣхалъ станцію въ $\frac{7}{10}$ часа, дѣлая въ часъ по 30 верстъ. Какое разстояніе проѣхалъ поѣздъ?

Какое дѣйствіе необходимо совершить для рѣшенія задачи?

Какъ умножить 30 на $\frac{7}{10}$? $\left(\frac{30\times7}{10}\right)$. Нельзя ли это вычисленіе упростить? $(3\times7=21)$. Значитъ, какъ еще иногда можно умножить цѣлое число на дробь? (Цѣлое число нужно раздѣлить на знаменателя дроби, если оно дѣлится безъ остатка, и полученное частное умножить на числителя дроби).

Задача. Голова сахару вѣситъ $\frac{5}{8}$ пуда. Сколько вѣсятъ $\frac{3}{4}$ такой головы?

Какое дѣйствіе необходимо для рѣшенія задачи? Какъ умножить $\frac{5}{8}$ на $\frac{3}{4}$? Рѣшите задачу разсужденіемъ.

1 голова вѣситъ $\frac{5}{8}$ пуда
$\frac{1}{4}$ головы „ $\frac{5}{8}:4=\frac{5}{8\times4}$
$\frac{3}{4}$ „ вѣсятъ $\frac{5}{8\times4}\times3=\frac{5\times3}{8\times4}$.

Итакъ, $\frac{5}{8}\times\frac{3}{4}=\frac{5\times3}{8\times4}$. Какое же правило можно вывести для умноженія дроби на дробь?

Задача. На прокормленіе рабочихъ выходитъ въ мѣсяцъ 24 пуда муки. Сколько муки нужно заготовить на $^3/_8$ мѣсяца?

Рѣшите задачу, пользуясь извѣстнымъ вамъ правиломъ.

$$14\times{}^3/_8={}^{24}/_8\times 3=3\times 3=9.$$

Сравните полученное произведеніе съ множимымъ. Отчего произведеніе получилось меньше множимаго числа? Въ какомъ же случаѣ произведеніе одного числа на другое бываетъ больше множимаго и въ какомъ меньше? Какую часть 24-хъ пудовъ составляютъ 9 пудовъ? Значитъ, что мы опредѣляемъ, умножая какое-либо число на дробь?

4) Выводъ правилъ для дѣленія на дробь.

Задача. За десять аршинъ матеріи заплатили 5 руб. 20 коп. Сколько стоитъ одинъ аршинъ?

Обобщая эту задачу посредствомъ перемѣны данныхъ чиселъ, ученики дѣлаютъ выводъ, что по данной цѣнѣ опредѣленнаго числа аршинъ матеріи здѣсь ищется цѣна одного аршина, и что задача такого рода рѣшается дѣленіемъ данной цѣны на число аршинъ. Подъ то же обобщеніе подводятъ они и слѣдующую задачу: «За $^5/_8$ аршина матеріи заплатили 3 рубля. Сколько стоитъ одинъ аршинъ такой матеріи?» $(3 : {}^5/_8)$.

$^5/_8$ арш. стоютъ 3 руб.
$^1/_8$ „ стоитъ $3:5={}^3/_5$ руб.
1 „ „ $^3/_5\times 8=\frac{3\times 8}{5}$.

Итакъ, $3:{}^5/_8=\frac{3\times 8}{5}={}^{24}/_5=4^4/_5$.

Изъ сравненія результата $\frac{3\times 8}{5}$ съ обозначеніемъ $3:{}^5/_8$ выводится правило для дѣленія цѣлаго числа на дробь, а изъ сравненія частнаго $4^4/_5$ съ дѣлимымъ 3 выясняется, что дѣлимое въ этомъ случаѣ составляетъ часть частнаго, и что слѣдовательно при дѣленіи числа на правильную дробь ищется неизвѣстное число по данной его части.

Задача. $^7/_{15}$ четверика пшеницы вѣсятъ $^4/_9$ пуда. Сколько вѣситъ цѣлый четверикъ?

$$^4/_9 : {}^7/_{15} = ?$$

$^7/_{15}$ четверика вѣсятъ $^4/_9$ пуда

$^1/_{15}$ „ вѣситъ $^4/_9 : 7 = \frac{4}{9 \times 7}$ пуда

1 четверикъ „ $\frac{4}{9 \times 7} \times 15 = \frac{4 \times 15}{9 \times 7} = {}^{60}/_{63} = {}^{20}/_{21}$ пуда.

Итакъ, $^4/_9 : {}^7/_{15} = \frac{4 \times 15}{9 \times 7} = {}^4/_9 \times {}^{15}/_7$.

Отсюда выводится правило, что для дѣленія дроби на дробь нужно дробь дѣлимаго умножить на обращенную дробь дѣлителя.

Частныя правила умноженія и дѣленія смѣшаннаго числа на дробь и на число смѣшанное, упрощенія, производимыя при умноженіи и дѣленіи дробей, посредствомъ сокращенія множителей числителя съ множителями знаменателя при обозначеніи дѣйствій, а также болѣе полное заключеніе о томъ, какого рода вопросы рѣшаются умноженіемъ и дѣленіемъ числа на дробь, и какое имѣетъ значеніе дѣленіе именованнаго числа на именованную дробь и на отвлеченную дробь—выводятся также изъ рѣшенія задачъ и вычисленія примѣровъ.

5) Десятичныя дроби.

Прежде перехода къ выясненію понятія о десятичныхъ дробяхъ и ихъ свойствахъ повторяется вкратцѣ нумерація и четыре дѣйствія съ цѣлыми числами, причемъ въ вычисленіе вводятся большія числа.

Наблюденіе показываетъ, что ученики, при вычисленіяхъ, дроби простую предпочитаютъ дроби десятичной, стараясь первою замѣнить вторую. Это происходитъ оттого, что, во-первыхъ, дробь простая изучается прежде десятичной; во-вторыхъ, на изученіи простой дроби останавливаются гораздо долѣе, нежели на изученіи десятичной, и въ-третьихъ, выводы относительно дѣйствій съ дробями десятичными ученики дѣлаютъ изъ сравненія ихъ съ дробями простыми. Для избѣжанія этого предпочтенія дроби простой, понятіе о дроби десятичной, ея свойствахъ и дѣйствіяхъ съ нею слѣдуетъ выводить изъ свойствъ цѣлыхъ чиселъ и дѣйствій съ ними и постоянно указывать въ курсѣ на аналогію десятичныхъ дробей съ цѣлыми числами. А потому повтореніе еще разъ нумераціи и дѣйствій съ большими цѣлыми числами, произведенное въ теченіе трехъ-четырехъ уроковъ, отвлечетъ мысль учениковъ отъ только-что законченнаго курса простыхъ дробей и хорошо приготовитъ къ переходу къ дробямъ десятичнымъ.

При повтореніи нумераціи главнѣйшимъ образомъ нужно обратить вниманіе учениковъ на: а) значеніе цифры по мѣсту ею занимаемому въ числѣ; б) писаніе и чтеніе по классамъ большихъ чиселъ; в) разложеніе даннаго числа по разрядамъ; г) составленіе числа по даннымъ числамъ разрядовъ; д) увеличеніе числа въ 10, 100, 1000 разъ; е) уменьшеніе въ 10, 100, 1000 разъ числа, оканчивающагося нулями, ж) опредѣленіе остатка и частнаго при уменьшеніи въ 10, 100, 1000 разъ числа, не оканчивающагося нулями.

При повтореніи дѣйствій съ цѣлыми числами обращается вниманіе на точное изложеніе правилъ четырехъ дѣйствій. При этомъ повторяются упрощенія, которыя возможно дѣлать при умноженіи какого-либо числа на множителя, оканчивающагося однимъ или нѣсколькими нулями, и при дѣленіи чиселъ, оканчивающихся нулями.

Планъ работы при изученіи десятичныхъ дробей

Напишите число 476.

Почему нѣтъ надобности писать при каждой цифрѣ ея значеніе, чтобы узнать, какой разрядъ числа она изображаетъ?

Какъ измѣняется значеніе цифръ числа по мѣстамъ отъ правой руки къ лѣвой и обратно? Какой разрядъ занимаетъ всегда въ числѣ первое мѣсто?

Поставьте въ концѣ числа 476 запятую и, помня, что послѣдняя цифра 6, стоящая передъ запятой, означаетъ единицы, напишите послѣ запятой цифру 8, (476,8). Скажите, что будетъ означать эта цифра, если она также получаетъ значеніе свое отъ мѣста ею занимаемаго.

Какъ прочесть теперь написанное число? (476 единицъ и 8 десятыхъ).

Прочтите число 48,5.

Такъ какъ это число состоитъ изъ цѣлыхъ единицъ и десятыхъ частей единицы, то мы будемъ читать его такъ: 48 цѣлыхъ и 5 десятыхъ.

Припишите къ этому числу справа еще цифру 6. (48,56). Какое значеніе имѣетъ эта цифра по мѣсту ею занимаемому? (6 сотыхъ единицы).

Разложите полученное число по разрядамъ ($40+8+{}^{5}/_{10}+{}^{6}/_{100}$).

Нельзя ли дроби ${}^{5}/_{10}$ и ${}^{6}/_{100}$ писать такъ же, какъ числа цѣлыя, не подписывая знаменателя, а обозначая на какомъ мѣстѣ стоитъ цифра, сообразно ея значенію? ($40+8+0,5+0,06$).

Вотъ число: $500+4+0,6+0,08+0,002$.

Что означаютъ здѣсь цифры 2, 8, 6, 4, 5? Зачѣмъ передъ цифрою 2 поставлено два нуля послѣ запятой? Зачѣмъ поставленъ нуль передъ запятой?

Соедините всѣ разряды этого числа вмѣстѣ и прочтите полученное число. (504,682).

Числа 0,6—0,08 и 0,002 какъ назвать сравнительно съ числами цѣлыми? (Дробями).

Напишите ихъ съ знаменателями. ($^6/_{10}$, $^8/_{100}$, $^2/_{1000}$).

Чѣмъ эти дроби отличаются отъ простыхъ дробей, съ которыми вы уже знакомы? Почему для изображенія этихъ дробей нѣтъ надобности подписывать знаменателей? Какіе всегда бываютъ знаменатели у такихъ дробей?

Такія дроби, у которыхъ знаменателями будутъ 10 или 100 или 1000 и т. д., однимъ словомъ, единица съ нулями (степень десяти), называются дробями *десятичными.*

Напишите дроби: девять сотыхъ, 15 тысячныхъ, 8 цѣлыхъ и 408 десятитысячныхъ. (0,09—0,015—,80408).

Прочтите: 0,406—0,0078—46,07054.

Разложите послѣднее число по разрядамъ. (40+6+0,07+ +0,0005+0,00004).

Почему при изображеніи различныхъ разрядовъ цѣлаго числа нули пишутся съ правой стороны, а при изображеніи разрядовъ десятичной дроби нули, для опредѣленія мѣста цифры, пишутся съ лѣвой стороны?

Запишите 5,328. Прочтите это число въ видѣ неправильной дроби (5328 тысячныхъ). Прочтите его по разрядамъ.

Какимъ образомъ сдѣлать, чтобы всѣ цифры этого числа передвинуть на два мѣста влѣво? (532,8).

Какое теперь изъ двухъ чиселъ больше? Во сколько разъ второе число больше перваго? Почему?

Докажите это разложеніемъ числа по разрядамъ.

$$5{,}328=5+0{,}3+0{,}02+0{,}008.$$
$$532{,}8=500+30+2+0{,}8.$$

Сравните по значенію каждую цифру въ обѣихъ строчкахъ.

Итакъ, что сдѣлается съ значеніемъ цифръ числа, если мы запятую будемъ подвигать вправо черезъ одну, черезъ двѣ, черезъ три цифры? Что сдѣлается отъ этого съ самимъ числомъ?

Запишите 36,18. Увеличьте это число въ 10 разъ, увеличьте въ 100 разъ. У всякаго цѣлаго числа гдѣ нужно подразумѣвать запятую?

Увеличьте 5,2 въ 1000 разъ. (5200).

Возьмите число 28,35. Уменьшите его въ 10 разъ. Что нужно для этого сдѣлать со всѣми цифрами числа? (Переставить на одно мѣсто правѣе). Какимъ образомъ перемѣнить мѣста цифръ? (2,835)

Напишите число въ 100 разъ меньшее даннаго (0, 2835).

Докажите, что полученная дробь въ 100 разъ меньше даннаго смѣшаннаго числа. (Доказательство производится или разложеніемъ сравниваемыхъ чиселъ по разрядамъ, или просто сравниваніемъ значенія каждой цифры въ обоихъ числахъ).

Какая изъ написанныхъ дробей больше и во сколько разъ: 3,26—3,260—3,2600? Почему онѣ равны?

Скажите теперь: 1) какъ десятичную дробь увеличить въ 10, 100 и т. д. разъ; 2) какъ десятичную дробь увеличить въ 10, 100 и т. д. разъ; 3) что сдѣлается съ десятичною дробью, если въ концѣ ея приписать одинъ или нѣсколько нулей?

Гдѣ можно пользоваться тѣмъ, что величина десятичной дроби не измѣняется отъ приписыванія нулей справа? (При приведеніи дробей къ общему знаменателю).

Приведите къ общему знаменателю: 0,5 — 0,18 — 0,0514 (0,5000—0,1800—0,0514).

Напишите полученныя дроби съ знаменателями. $^{5000}/_{10000}$, $^{1800}/_{10000}$, $^{514}/_{10000}$.

Какъ изъ дроби $^{5}/_{10}$ получилась дробь $^{5000}/_{10000}$? Значитъ, отъ прибавленія нулей справа къ десятичной дроби что дѣлается съ ея знаменателемъ?

Сложеніе и вычитаніе десятичныхъ дробей, а также и умноженіе и дѣленіе ихъ на число цѣлое, производятся прямо по аналогіи съ тѣми же дѣйствіями надъ цѣлыми числами.

Умноженіе и дѣленіе на десятичную дробь.

Прежде выясненія правилъ умноженія и дѣленія цѣлаго числа и десятичной дроби на дробь еще разъ повторяется на численныхъ примѣрахъ зависимость величины произведенія отъ измѣненія величины множимаго и множителя и величины частнаго отъ измѣненія величины дѣлимаго и дѣлителя. Изученіе свойствъ произведенія и частнаго, составляя важный отдѣлъ курса Ариѳметики само по себѣ, служитъ въ то же время основаніемъ для чисто-теоретическаго вывода правилъ умноженія и дѣленія десятичныхъ дробей.

За лучшій способъ дѣленія десятичной дроби на десятичную дробь считается приведеніе дѣлителя въ число цѣлое и соотвѣтствующая измѣненію дѣлителя поправка въ дѣлимомъ для полученія искомаго частнаго. Уравниваніе числа десятичныхъ знаковъ въ дѣлимомъ и дѣлителѣ нерѣдко безъ нужды усложняетъ дѣлителя приписываніемъ нулей

Иногда послѣ приведенія дѣлителя въ число цѣлое поправка производится не въ дѣлимомъ, а въ полученномъ частномъ для большаго закрѣпленія въ памяти учениковъ свойствъ частнаго.

При прохожденіи этого отдѣла задачи и примѣры на дѣленіе десятичныхъ дробей подбираются такъ, чтобы въ частномъ получалось конечное число, а не безконечная дробь.

а) *Умноженіе.*

Возьмемъ произведеніе $8\times5=40$.

Какъ измѣнить множимое, чтобы произведеніе получилось въ 10 разъ болѣе 40? ($80\times5=400$).

Какъ нужно измѣнить множимое и множителя разомъ, чтобы получить то же произведеніе 400?

$$(8\times5)\times(5\times2)=40\times10=400$$
$$(8\times2)\times(5\times5)=16\times25=400$$

Какъ нужно измѣнить множимое или множителя, или и то и другое вмѣстѣ, чтобы получилось произведеніе въ 100 разъ большее, нежели $6\times9=54$?

$$600\times9=5400$$
или $$6\times900=5400$$
или $$60\times90=5400$$
и т. д.

Что сдѣлается съ произведеніемъ двухъ чиселъ, если множимое увеличить въ 100 разъ, а множителя въ 10 разъ?

Какимъ измѣненіемъ перемножаемыхъ чиселъ можно получить произведеніе въ 100 разъ меньше, нежели $60\times40=2400$?

$$6\times4=24$$
$$0{,}6\times40=24$$
$$60\times0{,}4=24$$
и т. д.

Какъ можно измѣнять числа 60 и 40, чтобы получить въ произведеніи число въ 100 разъ менѣе 24?

$$0{,}06\times4=0{,}24$$
$$6\times0{,}04=0{,}24$$
$$0{,}6\times0{,}4=0{,}24$$
и т. д.

Какъ поправить 0,24, чтобы обратно получить произведеніе $=6\times4$?

Слѣдовательно, какъ можно найти произведеніе $0,26 \times 0,9$ на основаніи перемноженія цѣлыхъ чиселъ?

$26 \times 9 = 234$ (въ 100 разъ болѣе искомаго)

Значитъ $0,26 \times 0,9 = 0,234$.

б) *Дѣленіе.*

Возьмемъ частное отъ дѣленія двухъ чиселъ:

$$3600 : 90 = 40.$$

Какъ можно измѣнить дѣлимое или дѣлителя, или то и другое разомъ, чтобы въ частномъ получить въ 10 разъ менѣе 40?

$$360 : 90 = 4$$
$$3600 : 900 = 4$$
$$36 : 9 = 4$$
$$0,36 : 0,09 = 4$$
$$3,6 : 0,9 = 4$$

и т. д.

Какъ можно измѣнить дѣлимое или дѣлителя, или обоихъ разомъ, увеличивая или уменьшая ихъ въ 10, 100 и т. д. разъ, чтобы не измѣнить величины частнаго въ дѣленіи $80 : 16 = 5$?

$$80 : 16 = 5$$
$$8 : 1,6 = 5$$
$$0,8 : 0,16 = 5$$
$$0,08 : 0,016 = 5$$
$$800 : 160 = 5$$

и т. д.

При какомъ измѣненіи дѣлимаго и дѣлителя не измѣняется величина частнаго? Что надо сдѣлать съ дѣлимымъ, чтобы частное не измѣнилось, если дѣлителя увеличимъ въ 100 разъ?

Какимъ образомъ, не измѣняя величины частнаго, привести дѣленіе 5,16 на 0,012 къ дѣленію на число цѣлое?

$$5160 : 12 = 430$$

Раздѣлите 8,0856 на 0,16. (808,56 : 16).

Обращеніе простой дроби въ десятичную и обратно.

Какихъ двухъ родовъ дроби извѣстны вамъ? Назовите нѣсколько дробей простыхъ и нѣсколько десятичныхъ. ($^3/_4$, $^5/_9$, $^7/_{15}$ и т. д.; 0,7— 0,15— и т. д).

Чѣмъ по виду десятичная дробь отличается отъ простой? (Для изображенія второй нужно подписывать знаменателя, первая же понятна и безъ знаменателя, потому что значеніе каждой цифры опредѣляется мѣстомъ, ею занимаемымъ).

Напишите десятичныя дроби подъ видомъ дробей простыхъ. ($^7/_{10}$, $^{15}/_{100}$, $^{358}/_{1000}$).

Чѣмъ эти дроби, кромѣ величины, отличаются отъ простыхъ дробей, напримѣръ, $^7/_{12}$, $^{15}/_{31}$? (Первыя имѣютъ знаменателемъ всегда и съ однимъ или нѣсколькими нулями, а у вторыхъ знаменателемъ можетъ быть какое угодно цѣлое число, смотря по тому, какія доли единицы желаютъ выразить).

Сократите дроби $^{15}/_{100}$, $^{358}/_{1000}$. ($^3/_{20}$, $^{179}/_{500}$). Значитъ, обратно дробь $^3/_{20}$ какой десятичной равна? (0,15).

Итакъ, что нужно сдѣлать для обращенія десятичной дроби въ простую? Обратите въ простыя слѣдующія дроби: 0,45—0,125—4,096.

Какой десятичной дроби равна $^1/_2$? (0,5). Выразите въ десятичныхъ дробяхъ простыя дроби: $^3/_5$, $^7/_{20}$, $^{13}/_{50}$.

$^3/_5={}^6/_{10}=0{,}6$ $\qquad$ $^7/_{20}={}^{35}/_{100}=0{,}36$ $\qquad$ $^{13}/_{50}={}^{26}/_{100}=0{,}26$.

Какимъ образомъ для дроби $^3/_5$ получили равную ей дробь 0,6? ($^1/_5={}^2/_{10}$, то $^3/_5={}^6/_{10}$).

Что сдѣлали съ числителемъ и знаменателемъ дроби $^7/_{20}$ для обращенія ея въ 0,35? (Умножили на 5, потому что $100:20=5$).

Изъ нѣсколькихъ примѣровъ такого рода выводится пріемъ обращенія простой дроби въ десятичную (конечную) посредствомъ дѣленія различныхъ степеней десяти на знаменателя данной дроби и отысканія, такимъ образомъ, множителя, обращающаго знаменателя простой дроби въ единицу съ нулями. Для облегченія отысканія такого множителя различныя степени десяти разлагаются на простые множители:

$$10=2\times5$$
$$100=10^2=2\times2\times5\times5=2^2\times5^2$$
$$1000=10^3=2\times2\times2\times5\times5\times5=2^3\times5^3$$

и т. д.

и выводится общее заключеніе, что;

$10^n=2\times2\times2\times2\times\ldots n$ разъ $\times5\times5\times5\ldots n$ разъ $=2^n\times5^n$

и обратно: $2^n\times5^n 10^n=10000\ldots n$ нулей.

Какъ дробь $^3/_4$ обратить въ десятичную.

$$^3/_4=\frac{3}{2\times 2}=\frac{2\times 5\times 5}{2\times 2\times 5\times 5}=\frac{3\times 25}{4\times 25}=\frac{75}{100}=0{,}75$$

Обратить $^{27}/_8$ въ десятичную дробь.

$$^{27}/_8={}^{27}/_{2^3}=\frac{27\times 5^3}{2^3\times 5^3}=\frac{27\times 125}{8\times 125}=\frac{3375}{1000}=3{,}375$$

Исключите изъ неправильной дроби $^{27}/_8$ цѣлое число и продолжите дѣленіе по правиламъ дѣленія десятичныхъ дробей: (27 : 8=3,375). Какая десятичная дробь замѣняетъ здѣсь $^3/_8$? Слѣдовательно, какъ еще можно простую дробь обратить въ десятичную? (Дѣля числителя на знаменателя).

Обратите $^{13}/_{40}$ въ десятичную дробь.

$$^{13}/_{40}=\frac{13}{2\times 2\times 2\times 5}=\frac{13}{10\times 2^2}=\frac{13\times 5^2}{10\times 2^2\times 5^2}=\frac{325}{1000}=0{,}325$$

или

$$\begin{array}{r|l} 13{,}0 & 40 \\ \cline{2-2} -\ 120 & 0{,}325 \\ \cline{1-1} 100 & \\ -\ 80 & \\ \cline{1-1} 200 & \\ -\ 200 & \\ \cline{1-1} ,,\ ,, & \end{array} \qquad ^{13}/_{40}=0{,}325$$

Такимъ образомъ, для дробей простыхъ, обращающихся въ конечныя десятичныя дроби, пріемъ обращенія, какъ видно, употребляется двоякій: а) разложеніе знаменателя данной дроби на простые множители и умноженіе числителя и знаменателя на добавочные множители. обращающіе знаменателя въ степень десяти; а) дѣленіе числителя на знаменателя по правиламъ дѣленія десятичныхъ дробей. Второй пріемъ есть общій для обращенія всякой простой дроби въ десятичную, а первый, пригодный только для дробей, знаменатели которыхъ состоятъ изъ степени множителей 2 и 5, даетъ весьма простое средство, по составу знаменателя данной дроби, узнавать, обращается ли она въ конечную десятичную дробь или безконечную.

При обращеніи въ десятичныя дроби $^2/_3$, $^5/_9$ и т. д., ученики сначала, судя по знаменателямъ, выводятъ заключеніе, что такія дроби въ десятичныя (конечныя) не могутъ быть обращены; а по общему пріему обращенія простой дроби въ десятичную, они получаютъ дроби безконечныя: напримѣръ, $^2/_3=0{,}66666\ .\ .\ .\ .$

Сравненіемъ дроби $^2/_3$ съ дробями:

$$\begin{array}{lll} 0{,}6 & 0{,}66 & 0{,}666 \\ \text{и } 0{,}7 & 0{,}67 & 0{,}667 \text{ и т. д.} \end{array}$$

выясняется, что дроби первой строчки меньше данной, а дроби второй строчки больше данной; что разность между дробью данной и дробями приближенными уменьшается по мѣрѣ того, какъ возрастаетъ число цифръ въ дробяхъ приближенныхъ, и что настоящая величина десятичной дроби, выражающей данную простую дробь, заключается.

$$\text{между } \begin{array}{l} 0{,}6 \\ 0{,}7 \end{array} \text{ или } \begin{array}{l} 0{,}66 \\ 0{,}67 \end{array}$$

и отличается отъ каждой дроби первой пары менѣе, чѣмъ на 0,1, а отъ каждой дроби второй пары менѣе чѣмъ на 0,01. Отсюда выводится правило обращенія простой дроби въ десятичную и нахожденія частнаго при дѣленіи съ приближеніемъ до $^1/_{10}{}^n$.

Послѣ этого излагается:

а) Почему десятичная безконечная дробь, въ которую обращается данная дробь простая, будетъ непремѣнно періодическая?

б) Какъ опредѣлить число десятичныхъ знаковъ конечной десятичной дроби, въ которую должна обратиться данная дробь простая?

в) Какъ узнать, по составу знаменателя данной простой дроби, обращается ли она въ конечную десятичную, въ періодическую чистую или въ періодическую смѣшанную дробь?

г) Какъ по знаменателю данной простой дроби, обращающейся въ смѣшанную періодическую, опредѣлить число періодическихъ десятичныхъ знаковъ?

д) Составъ періодическихъ дробей, въ которыя обращаются слѣдующія простыя:

$^1/_9$, $^1/_{99}$ и т. д. $^7/_9$, $^{53}/_{99}$, $^5/_{999}$ и т. д.

е) Обратное заключеніе о видѣ простыхъ дробей, въ которыя обращаются періодическія чистыя дроби.

ж) Обращеніе въ простыя періодическихъ смѣшанныхъ дробей.

6) Повтореніе дѣйствій съ простыми и десятичными дробями на сложныхъ примѣрахъ для вычисленій.

Когда статья о простыхъ или десятичныхъ дробяхъ пройдена учениками, полезно повторить все пройденное въ разбивку со всѣмъ классомъ на вычисленіи примѣровъ.

Примѣръ 1. (Изъ Сборника № 654).

$$\left\{\frac{(53^3/_4+9^1/_6)\times 1^1/_5}{(10^3/_{10}-8^1/_2)\times ^5/_9}-\frac{(6^4/_5-3^3/_7)\times 5^5/_6}{3^1/_3-^1/_6}\right\}-29^5/_6=?$$

Вычисленія.

$$59^3/_4+9^1/_6=53^9/_{12}+9^2/_{12}=62^{11}/_{12}$$
$$62^{11}/_{12}\times 1^1/_5={}^{755}/_{12}\times {}^6/_5=\frac{755\times 6}{12\times 5}=\frac{151\times 1}{2\times 1}=\frac{151}{2}=75^1/_2$$
$$10^3/_{10}-8^1/_2=10^3/_{10}-8^5/_{10}=1^8/_{10}-1^4/_5$$
$$1^4/_5\times {}^5/_9={}^9/_5={}^5/_9=\frac{9\times 5}{5\times 9}=1$$
$$75^1/_2 : 1=75^1/_2$$
$$6^4/_5-3^3/_7=6^{28}/_{34}-3^{15}/_{35}=3^{13}/_{35}$$
$$3^{13}/_{35}\times 5^5/_6={}^{118}/_{36}\times {}^{35}/_6=\frac{118\times 35}{35\times 6}=\frac{59=1}{1\times 3}={}^{59}/_3$$
$$3_2/^3-3^1/_6=3^4/_6-3^1/_6={}^3/_6={}^1/_2$$
$${}^{59}/_3 : {}^1/_2=\frac{59\times 2}{3\times 1}={}^{118}/_3=39^1/_3$$
$$75^1/_2-39^1/_3=75^3/_6-39^2/_6=36^1/_6$$
$$36^1/_6-29^5/_6=6^2/_6=6^1/_3$$

Вопросы.

Какія дѣйствія необходимо совершить для вычисленія примѣра?

Какъ сложить $53^3/_4$ и $9^1/_6$? Въ какомъ случаѣ для отысканія общаго знаменателя приходится перемножить между собой знаменателей данныхъ дробей? Укажите въ этомъ примѣрѣ дроби, которыя такимъ образомъ придется приводить къ общему знаменателю. ($^4/_5$ и $^3/_7$)

Какъ умножается смѣшанное число на смѣшанное?

Что значитъ умножить $1^1/_5$ на $^5/_9$? Что ищется посредствомъ этого умноженія?

Какъ умножить $3^{13}/_{35}$ на $5^5/_6$? $\left(\frac{118\times 35}{35\times 6}\right)$ Какъ можно упростить вычисленіе при этомъ умноженіи? Что значитъ сократить дробь? Какъ сокращаются дроби? Почему отъ дѣленія числителя и знаменателя на одного и того же дѣлителя величина дроби не измѣняется?

и т. д.

Примѣръ 2. (Изъ Сборника № 933).

$$\left\{\frac{(6-4,5\ :\ 0,003}{3,05-2,65\times20}-\frac{(0,3-0,15)\times1,5}{(1,88+2,12)\times0,125}\right\}\ :\ 62,05=?$$

Вычисленія.

$$\begin{array}{r} 6,0 \\ -4,5 \\ \hline 1,5 \end{array} \qquad 1,5\ :\ 0,003=1500\ :\ 3=500 \qquad \begin{array}{r} 3,05 \\ -2,65 \\ \hline 0,40 \end{array}$$

$$0,4\times20=8$$

$$\begin{array}{r|l} 500 & 8 \\ \cline{2-2} -48 & 62,5 \\ \cline{1-1} 20 & \\ -16 & \\ \cline{1-1} 40 & \\ -40 & \\ \cline{1-1} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0,30 \\ -0,15 \\ \hline 0,15 \\ \times1,5 \\ \hline 75 \\ 15 \\ \hline 0,225 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1,88 \\ +2,12 \\ \hline 4,00 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0,125 \\ \times4 \\ \hline 0,500 \end{array}$$

$$0,225\ :\ 0,5=2,25\ :\ 5=0,45$$

$$\begin{array}{r} 62,50 \\ -0,45 \\ \hline 62,05 \end{array} \qquad 62,05 : 62,05=6205 : 6205=1.$$

Вопросы.

Какъ вычитать одну десятичную дробь изъ другой?

Какъ раздѣлить 1,5 на 0,003? Почему нужно дѣлимое и дѣлителя увеличить въ тысячу разъ? Какъ увеличить 1,5 въ 100 разъ? Почему съ перенесеніемъ запятой на 3 знака вправо дробь увеличивается въ 1000 разъ?

Какъ умножить 0,15 на 1,5? Почему въ произведеніи надо отдѣлить три десятичныхъ знака?

Почему можно откинуть нули, находящіеся справа при десятичной дроби?

и т. д.

7) Задачи, относящіяся къ различнымъ правиламъ и рѣшаемыя по способу приведенія къ единицѣ.

Кромѣ процесса рѣшенія задачи я указываю здѣсь и постепенность подбора задачъ для сообщенія ученикамъ пріема ихъ рѣшенія.

а) *Сложное тройное правило.*

Вначалѣ предлагаются такія задачи, въ которыхъ всѣ условія, заключенныя въ вопросѣ, единичныя, потомъ всѣ условія единичныя кромѣ одного, кромѣ двухъ и т. д.

Задача. Четыре машины въ 8 часовъ вытянули телеграфную проволоку, длиною въ 128 саж. 2 арш. Какой длины проволоку вытягивала одна машина въ часъ?

4 маш. въ 8 час. вытянули 128 саж. 2 арш.
1 „ „ 1 часъ вытягивала x

1 машина въ 8 час. вытягивала (128 саж. 2 арш.) : 4=32 саж. 8 верш.
„ „ „ 1 часъ „ (32 „ 8 верш.) : 8= 4 „ 1 „

Задача. (Изъ Сборника № 962). Освѣщеніе 6 улицъ, съ 26 фонарями на каждой, въ теченіи 20 дней стоитъ 374 руб. 40 коп. Сколько будетъ стоить освѣщеніе 8 улицъ въ теченіи 18 дней, если на каждой улицѣ будетъ 15 фонарей?

6 улицъ—26 фон.—20 дн.—374 руб. 40 коп.
8 „ „ 15 „ „ 18 x

1 „ „ 26 „ „ 20 „ „ $\frac{37440}{6}$ коп.

1 „ „ 1 „ „ 20 „ „ $\frac{37440}{6\times26}$ коп.

1 „ „ 1 „ „ 1 „ „ $\frac{37440}{6\times26\times20}$ коп.

8 „ „ 1 „ „ 1 „ „ $\frac{37440\times8}{6\times26\times20}$ коп.

8 „ „ 15 „ „ 1 „ „ $\frac{37440\times8\times15}{6\times26\times20}$ коп.

8 „ „ 15 „ „ 18 „ „ $\frac{37440\times8\times15\times18}{6\times26\times20}$ коп.

$$x=\frac{37440\times8\times15\times18}{6\times26\times20}=25920 \qquad x=259 \text{ руб. } 20 \text{ коп.}$$

Задача. (Изъ Сборника № 958). 10 вѣтряныхъ мельницъ смололи 200 четвертей ржи въ 12 дней, работая въ день по 14 часовъ По скольку часовъ въ день должны работать 8 такихъ же мельницъ чтобы въ 21 день смолоть 300 четвертей ржи?

12 дн. 14 час. 10 мел. 200 чт.
21 „ x „ 8 „ 300 „

Въ 12 дн. 10 мел. смололи 200 чт., работая по 14 час. въ день,
„ 1 „ 10 „ „ 200 „ „ „ 14×12
„ 1 „ 1 „ смолола 200 „ „ „ $14 \times 12 \times 10$
„ 1 „ 1 „ „ 1 „ „ „ $\frac{14 \times 12 \times 10}{200}$
„ 21 „ 1 „ „ 1 „ „ „ $\frac{14 \times 12 \times 10}{200 \times 21}$
„ 21 „ 8 „ смололи 1 „ „ „ $\frac{14 \times 12 \times 10}{200 \times 21 \times 8}$
„ 21 „ 8 „ „ 300 „ „ „ $\frac{14 \times 12 \times 10 \times 300}{200 \times 21 \times 8}$

$$x = \frac{14 \times 12 \times 10 \times 300}{200 \times 21 \times 8} = 15$$

Послѣ достаточнаго навыка въ пріемѣ разсужденія при рѣшеніи подобныхъ задачъ, ученики могутъ и сразу всѣ условія (первой строки) задачи приводить къ единицѣ, такимъ образомъ:

Въ 12 дней 10 мел. смололи 200 чт., работая по 14 час. въ день,
„ 1 „ 1 „ смололи 1 „ „ „ $\frac{14 \times 12 \times 10}{200}$
„ 12 „ 8 „ смололи 300 „ „ „ $\frac{14 \times 12 \times 10 \times 300}{200 \times 21 \times 8}$

Для повѣрки рѣшенія ученики составляютъ по тѣмъ же даннымъ задачу повѣрочную, причемъ въ число данныхъ входитъ и найденная величина, прежде бывшая неизвѣстною. Такихъ задачъ можно составить столько, сколько всѣхъ данныхъ чиселъ въ рѣшенной задачѣ. (Напримѣръ, одна изъ такихъ повѣрочныхъ задачъ для послѣдней задачи будетъ: „Въ 12 дней, работая въ день по 14 часовъ, 10 вѣтряныхъ мельницъ смололи 200 четвертей ржи. Сколько четвертей ржи могутъ смолоть 8 такихъ же мельницъ въ 21 день, работая въ день по 15 часовъ?“ (300). Составленіе повѣрочныхъ задачъ хорошо выясняетъ ученикамъ содержаніе задачъ, относящихся къ тройному правилу, и соотношенія, прямыя и обратныя, данныхъ въ задачѣ чиселъ.

Образцы рѣшенія задачъ, относящихся къ вычисленію *процентовъ* и *учетовъ векселей*, я не привожу, потому что онѣ рѣшаются по тому же пріему, какъ и задачи, относящіяся къ сложному тройному правилу.

б) *Правило товарищества.*

Вначалѣ рѣшаются устныя задачи для выяснені ясущности задачъ и пріема ихъ рѣшенія. Потомъ уже даются задачи и для письменнагс рѣшенія

Задача. (Изъ Сборника № 1392). Три швеи заработали въ магазинѣ 21 руб. 15 коп.; одна работала 4 дня, ежедневно по 10 часовъ другая 5 дней по 9 часовъ и третья 7 дней по 8 часовъ. Сколькс получитъ каждая швея изъ всей заработанной суммы?

1-я	работала	$10 \times 4 = 40$	часовъ
2-я	"	$9 \times 5 = 45$	"
3-я	"	$8 \times 7 = 56$	"

Одна швея могла бы окончить всю работу въ

$$40 + 45 + 56 = 141 \text{ часъ.}$$

За часъ работы швея получаетъ 21 руб. 15 коп. : 141=15 коп

1-я	получитъ	$15 \times 40 = 600$ коп.	=6 руб.		
2-я	"	$15 \times 45 = 675$ "	=6 "	75 коп.	
3-я	"	$15 \times 55 = 840$ "	=8 "	40 "	

Задача. (Изъ Сборника № 1436). 4 купца начали торговать вмѣстѣ один дал 600 руб. на 5 мѣсяцевъ, другой—2400 руб. на 9 мѣсяцевъ, третій—700 руб. на 6 мѣсяцевъ и четвертый—1300 руб, на все время торговли. По прошествіи двухъ лѣтъ они раздѣлили между собою 1710 руб. чистой прибыли. Сколько досталось каждому купцу изъ этой прибыли?

Если бы прибыль 1710 руб. была получена не въ 2 года (24 мѣс.), а въ 1 мѣсяцъ, то капиталы купцовъ должны бы быть слѣдующіе:

1-го	купца	600 руб.	$\times 5 = 3000$ руб.
2-го	"	2400 "	$\times 9 = 21600$ "
3-го	"	700 "	$\times 6 = 4200$ "
4-го	"	1300 "	$\times 24 = 31200$ "

Значитъ, въ 1 мѣсяцъ прибыль 1710 руб. получилась бы съ капитала 3000 руб.+21600 руб.+4200 руб.+31200 руб.=60000 руб.

На 100 руб. приходится прибыли 1710 руб. : 600=2 руб 85 коп.

1-му купцу досталось	2 руб.	85 коп.	$\times$ 30 =	85 руб.	50 коп.
2-му „ „	2 „	85 „	$\times$ 216 =	615 „	60 „
3-му „ „	2 „	85 „	$\times$ 42 =	119 „	70 „
4-му „ „	2 „	85 „	$\times$ 312 =	889 „	20 „

Задача. (Изъ Сборника № 1404). 4 равныя артели косарей заработали у помѣщика 96 руб. 68 коп.; одна артель работала $7\frac{1}{3}$ дня, другая—$5\frac{5}{9}$ дня, третья—$7\frac{7}{15}$ дня и четвертая—$6\frac{1}{2}$ дня. Сколько денегъ придется получить каждой артели?

Одна артель за всѣхъ четырехъ должна бы работать $7\frac{1}{3}$ дня $+ 5\frac{5}{9}$ дня $+ 7\frac{7}{15}$ дня $+ 6\frac{1}{2}$ дня $= 7\frac{30}{90}$ дня $+ 5\frac{50}{90}$ дня $+ 7\frac{42}{90}$ дня $+ 6\frac{45}{90}$ дня $= 25\frac{167}{90}$ дня $= 26\frac{77}{90}$ дня.

За $\frac{1}{90}$ часть дня придется получить	96 руб. 68 коп. : 2417 =	4 коп.	
„ $7\frac{1}{3}$ дня или за $\frac{660}{90}$ дня „	4 коп. $\times$ 660 =	26 руб.	40 коп.
„ $5\frac{5}{9}$ „ „ „ $\frac{500}{90}$ „ „	4 „ $\times$ 500 =	20 „	— „
„ $7\frac{7}{15}$ „ „ „ $\frac{672}{90}$ „ „	4 „ $\times$ 672 =	26 „	88 „
„ $6\frac{1}{2}$ „ „ „ $\frac{585}{90}$ „ „	4 „ $\times$ 585 =	23 „	40 „

в) *Правило смѣшенія* (когда по даннымъ цѣнамъ опредѣляется количество смѣшиваемыхъ вещей).

Изъ задачъ на правило смѣшенія я разсматриваю здѣсь только задачи, относящіяся къ правилу смѣшенія второго рода, то-есть такія, когда по даннымъ цѣнамъ смѣшиваемыхъ вещей и цѣнѣ единицы смѣси опредѣляются количества смѣшиваемыхъ вещей; задачи на правило смѣшенія перваго рода, когда по даннымъ количествамъ и цѣнамъ смѣшиваемыхъ вещей опредѣляется цѣна единицы смѣси, весьма просты, и пріемъ ихъ рѣшенія безъ затрудненія указывается самими учениками.

Для ознакомленія учениковъ съ сущностью содержанія задачъ новаго рода имъ предлагаются вначалѣ простѣйшія устныя задачи, рѣшаемыя прямо по соображенію.

Устная задача. (Изъ Сборника № 1465). Въ чайномъ магазинѣ изъ двухъ сортовъ чаю составили 10 фун. смѣси, и каждый фунтъ смѣшаннаго чаю вышелъ безъ прибыли и убытка въ 4 руб., фунтъ одного сорта чаю стоилъ 5 руб., а другого—3 руб. Сколько фунтовъ того и другого сорта чаю вошло въ смѣсь?

Предварительно ученикамъ объясняется, что когда въ задачахъ говорится о смѣшеніи безъ прибыли и убытка, то это значитъ, что смѣсь должна стоить столько же, сколько стоютъ оба смѣшанные сорта вмѣстѣ.

Замѣчая, что цѣна одного фунта смѣшаннаго чаю средняя между цѣнами смѣшиваемыхъ сортовъ $\left(\frac{5+3}{2}=4\right)$, ученики заключаютъ, что каждаго сорта въ составъ смѣси нужно взять поровну, то-есть по 5 фунтовъ, и повѣркою убѣждаются въ справедливости своего заключенія.

5 фун. перваго сорта стоютъ 5 руб. $\times 5 = 25$ руб.
5 „ второго „ „ 3 „ $\times 5 = 15$ „
вся смѣсь стоитъ 25 руб. + 15 руб. $= 40$ „
4 руб. $\times 10 - 40$ руб.

Устная задача. (Изъ Сборника № 1464). Сколько нужно смѣшать бутылокъ молока по 8 коп. за бутылку и по 6 коп., чтобы получить 12 бутылокъ такого молока, которое стоило бы безъ прибыли и убытка по 9 коп. за бутылку.

Посредствомъ разбора этой задачи ученики убѣждаются, что требуемая смѣсь невозможна, такъ какъ цѣна бутылки смѣшаннаго молока, 9 коп., выше цѣны бутылки каждаго изъ смѣшиваемыхъ сортовъ, 8 коп. и 6 коп., а смѣсь должна быть составлена безъ прибыли и убытка. Затѣмъ выводится и общее заключеніе, что для возможности составленія смѣси безъ прибыли и убытка цѣна ея должна быть менѣе цѣны одного изъ смѣшиваемыхъ сортовъ и болѣе другого.

Устная задача. (Изъ Сборника № 1466). Покупатели спрашивали въ лавкѣ кофе по 35 коп. за фунтъ, но такъ какъ такого кофе не оказалось, то лавочникъ составилъ 30 фун. кофе въ эту цѣну изъ двухъ сортовъ: по 45 коп. за фунтъ и по 30 коп. Сколько фунтовъ каждаго сорта вошло въ смѣсь?

Такъ какъ цѣна смѣси 35 коп. не есть средняя (ариѳметическая) для цѣнъ 45 коп. и 30 коп., то смѣшивать оба сорта поровну нельзя, иначе прибыль на одномъ сортѣ не будетъ равна убытку на другомъ. Для опредѣленія, какого сорта нужно взять болѣе и какого менѣе въ составъ смѣси, цѣны ихъ сравниваются съ цѣною смѣси.

1-й сортъ 45 коп.	35 коп.	10 коп. убытку.
2-й сортъ 30 коп.		5 коп. прибыли.

Изъ этого сравненія видно, что для правильности смѣшенія второго сорта надо взять болѣе, а именно вдвое болѣе, нежели перваго, такъ какъ только при такомъ отношеніи прибыль отъ второго сорта можетъ крыть убытокъ, получаемый отъ перваго сорта. Слѣдовательно на 1 фунтъ перваго сорта должно брать 2 фунта второго.

Если на 3 фун. смѣси 1-го сорта идетъ 1 фун., а 2-го 2 фун., то на 30 фун. смѣси 1-го сорта идетъ 10 фун. и 2-го 20 фун.

После рѣшенія нѣсколькихъ устныхъ задачъ подобнаго рода, можно перейти къ выводу общаго пріема рѣшенія.

Устная задача. (Изъ Сборника № 1468). У виноторговца было вино двухъ сортовъ: по 65 коп. за бутылку и по 54 коп.; это вино онъ смѣшалъ, розлилъ въ 88 бутылокъ и каждую бутылку смѣшаннаго вина продалъ безъ прибыли и убытка по 60 коп. Сколько бутылокъ каждаго сорта взялъ онъ для составленія этой смѣси?

Для опредѣленія того, какого сорта нужно взять въ составъ смѣси болѣе, цѣны сравниваются:

65 коп.	60 коп.	5 коп. убытку на 1 бутылкѣ.
54 коп.		6 коп. прибыли на 1 бутылкѣ.

Первый способъ. Для уравненія прибыли съ убыткомъ цѣны приводятся къ единицѣ.

5 коп. убыт. получается на 1 бут.
1 „ „ „ „ $^1/_5$ „
6 „ приб. „ „ 1 „
1 „ „ „ „ $^1/_6$ „

Смѣсь выходитъ правильная, если на $^1/_5$ бутылки перваго сорта брать $^1/_6$ бутылки второго.

$^1/_5$ бут. $+ ^1/_6$ бут. $= ^{11}/_{30}$ бут. смѣси.

Затѣмъ опредѣляется число бутылокъ каждаго сорта вина, входящее въ составъ 88 бутылокъ смѣси.

На $^{11}/_{30}$ бут. смѣси идетъ 1-го сор. $^1/_5$ бут. и 2-го сор. $^1/_6$ бут.
„ $^1/_{30}$ „ „ „ 1-го „ $^1/_{55}$ „ „ 2-го „ $^1/_{66}$ „
„ 1 „ „ „ 1-го „ $^{30}/_{55} = ^6/_{11}$ „ 2-го „ $^{30}/_{66} = ^5/_{11}$ бут.
„ 88 „ „ „ 1 го „ 48 бут. „ 2-го „ 40

Второй способъ. Прибыль уравнивается съ убыткомъ, если на 6 бут. перваго сорта брать 5 бут. второго, потому что 5 коп. $\times 6 =$ $= 6$ коп. $= 5 = 30$ коп.

На 1 бут. 1-го сорта получается 5 коп. убытка.
„ 6 „ 1-го „ „ 5 коп.$\times$6=30 коп. убытка.
„ 1 „ 2-го „ „ 6 коп. прибыли.
„ 5 „ 2-го „ „ 6 коп.$\times$5=30 коп. прибыли.
6 бут.+5 бут.=11 бут. смѣси.
На 11 бут. смѣси 1-го сорта идетъ 6 бут. и 2-го 5 бут.
„ 88 „ „ 1-го „ „ 48 „ „ 2-го 40 „

Изъ рѣшенія нѣскольких задачъ по этому способу выводится общій пріемъ рѣшенія посредствомъ перестановки чиселъ, выражающихъ прибыль и убытокъ на единицѣ количества каждаго сорта, для полученія пропорціи правильной смѣси.

Письменная задача. (Изъ Сборника № 1499). Сколько нужно взять пудовъ муки, по $1^3/_5$ руб. за пудъ и по $1^3/_8$ руб., чтобы составить безъ прибыли и убытка $33^3/_4$ пуда смѣси, цѣною по $1^1/_2$ руб. за пудъ?

$1^3/_5$ руб.	$1^1/_2$ руб.	$^1/_{10}$ руб. убытка.
$1^3/_8$ руб.		$^1/_8$ руб. прибыли.

$^1/_{10}$ руб. убыт. получается на 1 пудъ 1-го сорта.
1 „ „ „ „ 10 „ „ „
$^1/_8$ „ „ „ „ 1 „ 2-го „
1 „ „ „ „ 8 „ „ „

18 пуд. смѣси составляются изъ 10 пуд. 1-го сор. и 8 пуд. 2-го сор.
1 „ „ „ „ $^5/_9$ „ 1-го „ „ $^4/_9$ „ 2-го „
$^1/_4$ „ „ „ „ $^5/_{36}$ „ 1-го „ „ $^1/_9$ „ 2-го „
$33^3/_4=\frac{135}{4}$ „ „ $\frac{5\times135}{36}=18^3/_4$ и $\frac{135}{9}=$ 15 „ „

Весьма полезнымъ упражненіемъ для учениковъ служитъ составленіе повѣрочныхъ задачъ на смѣшеніе. Напримѣръ, для повѣрки послѣдней задачи ученики составляютъ задачу на правило смѣшенія перваго рода: «Смѣшали $18^3/_4$ пуда муки, по $1^3/_5$ руб. за пудъ, съ 15 пуд. по $1^3/_8$ руб. Почемъ слѣдуетъ продавать безъ прибыли и убытка пудъ смѣшанной муки» ($1^1/_2$ руб.).

Обратно, послы рѣшенія задачи на правило смѣшенія перваго рода, составляется повѣрочная задача на правило смѣшенія второго рода.

Тотъ же пріемъ—приведенія прибыли и убытка на каждомъ сортѣ смѣшиваемыхъ матеріаловъ къ единицѣ—примѣняется и при рѣшеніи такихъ задачъ, когда смѣшиваемыхъ сортовъ дано болѣе двухъ и когда задача допускаетъ нѣсколько рѣшеній.

Задача. (Изъ Сборника № 1514). Изъ четырехъ сортовъ сахарнаго песку, цѣною по 5 руб. 80 коп. за пудъ, по 5 руб. 60 коп., по 5 руб. 70 коп. и по 6 руб. 5 коп., составили безъ прибыли и убытка 9 пуд. 8 фун. смѣси, цѣною по 5 руб. 90 коп. за пудъ. Сколько сахарнаго песку каждаго сорта взято въ эту смѣсь?

Сравниваемъ цѣны смѣшиваемыхъ сортовъ съ цѣною пуда смѣси.

1) 5 руб. 80 коп.	5 руб. 90 коп.	10 коп. приб.	1 коп. приб. на $^1/_{10}$ пуда 1-го сорта
2) 5 „ 60 „		30 „ „	1 „ „ „ $^1/_{30}$ „ 2-го „
3) 5 „ 70 „		20 „ „	1 „ „ „ $^1/_{20}$ „ 3-го „
4) 6 „ 5 „		15 „ убыт.	1 „ убыт. „ $^1/_{15}$ „ 4-го „

Слѣдовательно, если смѣшивать сахарный песокъ такъ, что для составленія $^1/_{10}+^1/_{30}+^1/_{20}+^1/_{15}$ пуда смѣси брать: перваго сорта $^1/_{10}$ пуда, второго $^1/_{30}$ пуда, третьяго $^1/_{20}$ пуда и четвертаго $^1/_{15}$ пуда, то на всей смѣси получится 2 коп. прибыли, такъ какъ на первыхъ трехъ сортахъ получается 3 коп. прибыли, а на четвертомъ только 1 коп. убытка. Итакъ, чтобы смѣсь была правильная, надо или четвертаго сорта взять въ 3 раза болѣе, или каждаго изъ первыхъ трехъ сортовъ, дающихъ прибыль, взять въ 3 раза менѣе или одного изъ первыхъ трехъ сортовъ взять въ 2 раза болѣе, а четвертаго въ 4 раза болѣе и т. д.

Одно изъ рѣшеній будетъ:

На $^1/_{10}$ пуда сахарнаго песку 1-го сорта нужно взять $^1/_{30}$ пуда 2-го сорта, $^1/_{20}$ пуда 3-го и $^1/_5$ пуда $(^1/_{15}\times 3)$ четвертаго сорта.

Составится: $^1/_{10}+^1/_{30}+^1/_{20}+^1/_5=^{23}/_{60}$ пуда смѣси.

Для опредѣленія числа пудовъ 1-го сорта сахарнаго песку, необходимыхъ для составленія 9 пуд. 8 фун. ($9^1/_5$ пуда смѣси, разсуждаемъ такъ:

на $^{23}/_{60}$ пуда смѣси 1-го сорта идетъ $^1/_{10}$ пуда

на $^1/_{60}$ „ „ „ „ „ $\frac{1}{10\times 23}$ пуда

на 1 „ „ „ „ „ $\frac{60}{10\times 23}$ пуда

на $^1/_5$ „ „ „ „ „ $\frac{60}{10\times 23\times 5}$ пуда

на $9^1/_5=^{46}/_5$ „ „ „ „ $\frac{60\times 46}{10\times 23\times 5}=^{12}/_5$ пуда $=2^2/_5$ пуда

Такъ же опредѣляется и число пудовъ всѣхъ прочихъ сортов
($^4/_5$ пуда, $1^1/_5$ пуда, $4^4/_5$ пуда).

г) *Вычисленіе пробы.*

Задачи, относящіяся къ вычисленію пробы, выдѣляются въ групп отдѣльную отъ группы задачъ на правило смѣшенія вообще, потом что рѣшеніе ихъ требуетъ нѣкоторыхъ особенныхъ пріемовъ, и п содержанію своему онѣ отличаются большимъ разнообразіемъ.

Прежде, нежели приступить къ задачамъ, учитель выясняет самое понятіе «проба».

Какъ отличить вещь, сдѣланную изъ золота или серебра, от вещи, сдѣланной изъ другого металла?

Какъ понимать выраженіе: „серебрянная ложка 84-й пробы?» Сдѣлана ли она изъ чистаго серебра? Какой пробы вышла бы ложка, сдѣланная изъ чистаго серебра? Съ какимъ металломъ сплавлено серебро? Какъ называется весь сплавъ (лигатурнымъ). Какъ называется мѣдь вошедшая въ сплавъ съ серебромъ? (лигатура). Сколько чистаго серебра и лигатуры въ серебрѣ 84-й пробы?

Если на одинъ фунтъ сплава идетъ 84 золотника чистаго серебра то на одинъ золотникъ сплава сколько его пойдетъ? Значитъ, как еще иначе можно опредѣлять пробу сплава?

Какой пробы будетъ лигатурное золото, если на каждый фунт его приходится 24 золотника лигатуры, если на каждый золотник приходится 56 долей чистаго золота?

Что значитъ опредѣлить пробу лигатурнаго золота, лигатурнаго серебра? Что называется пробою? (Пробою называется число золотниковъ чистаго золота или серебра, находящихся въ одномъ фунтѣ сплава, или число долей въ одномъ золотникѣ).

Устныя задачи.

Задача. (Изъ Сборника № 1471). «Мастеръ долженъ былъ сдѣлать по заказу дюжину серебряныхъ тарелокъ 56-й пробы, вѣсомъ въ 6 фунтовъ. Сколько чистаго серебра и сколько мѣди долженъ онъ сплавить для исполненія этого заказа?»

На одинъ фунтъ серебра 56-й пробы мѣди идетъ $96-56=40$ зол., то на 6 фунт. пойдетъ $40\times6=240$ зол.$=2$ фун. 48 зол.$=2^1/_2$ фун.; значитъ, чистаго серебра пойдетъ $6-2^1/_2=3^1/_2$ фун.

Задача. (Изъ Сборника № 1482). «Сплавили 2 сорта серебра, и сплавъ вышелъ 78-й пробы; одного сорта серебра взяли $2^1/_2$ фун. 72-й пробы, а другого $1^1/_2$ фун. Какой пробы было серебро втораго сорта?»

Всего сплава было $2^1/_2+1^1/_2=4$ фун.

Въ 1 фунтѣ сплава лигатуры	$96-78=18$	зол.
„ 4 фунтахъ „ „	$18\times 4=72$	„
„ 1 фунтѣ 1-го сорта „	$96-72=24$	„
„ $^1/_2$ фунта „ „	$24:2=12$	„
„ $2^1/_2={}^5/_2$ фун. „ „	$12\times 5=60$	„
„ $1^1/_2$ фун. 2-го „ „	$72-60=12$	„
„ $^1/_2$ „ „ „	$12:3=4$	„
„ 1 „ „ „	$4\times 2=8$	„
„ 1 „ чистаго серебра	$96-8=88$	„

Значитъ, серебро втораго сорта было 88-й пробы.

Письменныя задачи.

Задача. (Изъ Сборника № 1530). „Золотыхъ дѣлъ мастеръ купилъ на вѣсъ старыя золотыя вещи: 6 цѣпочекъ 92-й пробы, 10 солонокъ 72-й пробы и 4 браслета 56-й пробы; каждая цѣпочка вѣсила 0,375 фун., солонка—5,2 лота, а браслетъ—3 лота 1 зол. За сколько купилъ онъ всѣ эти вещи, если за золотникъ чистаго золота заплатилъ 3 руб. 90 коп.?

$0{,}375={}^3/_8$

Цѣпочки вѣсятъ $^3/_8\times 6=2^1/_4$ фун.

Въ $2^1/_4$ фун. сплава находится чистаго золота $92\times 2^1/_4=\frac{92\times 9}{4}=$
$=23\times 9=207$ зол.

Солонки вѣсятъ $5{,}2\times 10=52$ лот.$=1^5/_8$ фун.

Въ $1^5/_8$ фун. сплава находится чистаго золота $72\times 1^5/_8=\frac{72\times 13}{8}=$
$=9\times 13=117$ зол.

Браслеты вѣсятъ (3 лота 1 зол.)$\times 4=13$ лот. 1 зол.$=13^1/_3$ лот.$=$
$={}^{40}/_{96}$ фун.$={}^5/_{12}$ фун.

Въ $^5/_{12}$ фун. сплава находится чистаго золота $56\times {}^5/_{12}=\frac{56\times 5}{12}=$
$\frac{14\times 5}{3}={}^{70}/_3=23^1/_3$ зол.

Всего чистаго золота мастеръ купилъ $207+117+23^1/_3=347^1/_3$ зол.
Мастеръ купилъ всѣ вещи за 3 руб. 90 коп.$\times 347^1/_3=$
$=1$ руб. 30 коп.$\times 1042=1354$ руб. 60 коп.

Задача. (Изъ Сборника № 1538). „Мастеръ сплавилъ $1^1/_2$ фун. серебра 84-й пробы, 2,(3) фун. 72-й пробы и 0,25 фун. мѣди, и изъ всего этого сплава сдѣлалъ полдюжины подсвѣчниковъ. Какой пробы вышли подсвѣчники?“

Въ 1 фун. перваго куска серебра мѣди находится $96-84=12$ зол.
Въ $1^1/_2$ фунт. перваго куска серебра мѣди находится $12\times 1^1/_2=$
$=12\times {}^3/_2=18$ зол.
Въ 1 фун. второго куска серебра мѣди находится $96-72=$
$=24$ зол.

Въ $2,(3)=2^1/_3={}^7/_3$ фун. второго куска серебра мѣди находится
$24\times {}^7/_3=56$ зол.
Третій кусокъ$=0,25$ фун.$={}^1/_4$ фун.$=24$ зол. мѣди.
Во всемъ сплавѣ мѣди $18+56+24=98$ зол.
Сплавъ вѣситъ $1^1/_2+2^1/_3+{}^1/_4=4^1/_{12}$ фун.
Въ 1 фун. сплава лигатуры $98:4^1/_{12}=\frac{98\times 12}{49}=24$ зол.
Подсвѣчники вышли $96-24=72$ пробы.

Анализъ сложной задачи.

Анализъ сложной задачи представляетъ хорошее средство для обращенія вниманія учениковъ на разсмотрѣніе состава задачи, для выясненія того, что матеріаломъ для рѣшенія задачи служатъ числа, данныя въ ней, что связь между числами, данными въ задачѣ, выражающаяся дѣйствіями при составленіи рѣшенія, опредѣляется условіями задачи, что вопросъ задачи находится въ прямой зависимости отъ ея условій и, наконецъ, что всякая сложная задача разбивается на нѣсколько простыхъ. На основаніи анализа задачи ученики знакомятся также съ пріемомъ составленія формулы ея рѣшенія.

Задача. Купецъ купилъ въ Москвѣ 8 бочекъ сахару, по 20 пудовъ въ каждой, и 6 боченковъ кофе; за каждую бочку сахару онъ заплатилъ 410 руб., а за боченокъ кофе 108 р. Весь этотъ товаръ онъ отправилъ изъ Москвы въ Полтаву и за доставку на мѣсто заплатилъ 428 руб. Въ Полтавѣ же купецъ продалъ весь кофе оптомъ за 704 р., а весь сахаръ въ розницу. Почемъ продавалъ онъ фунтъ сахару, если на всей покупкѣ получилъ 300 руб. прибыли?

Повторите содержаніе задачи.

Что ищется въ задачѣ?

Скажите, что извѣстно изъ задачи для опредѣленія цѣны фунта сахару, по которой онъ былъ проданъ? Все ли вамъ извѣстно для опредѣленія этой цѣны? Что еще должны вы узнать, прежде нежели приступите къ опредѣленію искомой величины? Нужно узнать цѣну 8-ми бочекъ сахару, цѣну 6 боченковъ кофе, цѣну всего товара и т. д.).

Значитъ, кромѣ той неизвѣстной, для отысканія которой составлена вся задача, какія тутъ есть еще неизвѣстныя величины? Перечислите ихъ въ томъ порядкѣ, въ какомъ придется вести вычисленіе:

Учитель записываетъ на классной доскѣ со словъ учениковъ:

1) Цѣна всего сахару.
2) Цѣна всего кофе.
3) Цѣна всего товара.
4) Стоимость всего товара вмѣстѣ съ доставкою.
5) Продажная цѣна всего товара вмѣстѣ съ прибылью.
6) Продажная цѣна всего сахару.
7) Вѣсъ всего сахару.

Можно ли найти искомую величину, не опредѣливши предварительно этихъ второстепенныхъ неизвѣстныхъ? Искомая неизвѣстная величина называется *главной*, а неизвѣстныя величины, помогающія опредѣленію главной, называются *вспомогательными* неизвѣстными.

Значитъ, принимая во вниманіе число всѣхъ неизвѣстныхъ величинъ, которыя придется опредѣлить, можно сказать, что наша *сложная* задача состоитъ изъ нѣсколькихъ *простыхъ*. Изъ сколькихъ же простыхъ задачъ состоитъ она? (Изъ 8-ми: семь вспомогательныхъ и одна главная).

Скажите какую-нибудь простую задачу, которая входитъ въ составъ этой сложной.

„Купецъ купилъ 8 бочекъ сахару, по 20 пудовъ въ каждой. Сколько вѣситъ весь купленный сахаръ?"

«Купецъ купилъ 8 бочекъ сахару и за каждую бочку заплатилъ 140 руб. Сколько денегъ истратилъ онъ на эту покупку?»

и т. д.

Сколько дѣйствій необходимо сдѣлать для рѣшенія простой задачи? (Одно дѣйствіе). А для рѣшенія сложной? (Столько, сколько простыхъ задачъ заключается въ ней).

Чѣмъ опредѣляется число вспомогательныхъ и главныхъ неизвѣстныхъ въ сложной задачѣ? (Числомъ простыхъ задачъ, на которыя разбивается сложная).

Какія числа служатъ для опредѣленія нашей первой вспомогательной неизвѣстной? (8 и 140).

Какъ назвать эти числа въ задачѣ въ отличіе отъ чиселъ неизвѣстныхъ? (Числами извѣстными, *данными* въ задачѣ).

Какъ помощію этихъ данныхъ чиселъ опредѣлить первую неизвѣстную величину? (Умножить 140 на 8).

Изъ чего вы заключаете, что нужно 140 умножить на 8? (Цѣна 8 бочекъ въ 8 разъ больше цѣны одной бочки или 140-ка рублей; слѣдовательно, для опредѣленія цѣны 8-ми бочекъ, нужно 140 увеличить въ 8 разъ, то-есть умножить на 8).

Изъ какихъ словъ задачи выводите вы такое разсужденіе? (Купецъ купилъ 8 бочекъ сахару и за каждую бочку заплатилъ 140 рублей).

Какъ называется выраженіе въ задачѣ, которое служитъ для связи данныхъ чиселъ между собою и опредѣляетъ, какое нужно сдѣлать дѣйствіе надъ этими числами для опредѣленія неизвѣстной? (Условіемъ).

Укажите въ задачѣ числа данныя и условія, ихъ связывающія, служащія для опредѣленія третьей вспомогательной неизвѣстной. (Данныя: 8, 140, 6 и 108; условія: купецъ купилъ 8 бочекъ сахару и 6 боченковъ кофе; за кждую бочку сахару онъ заплатилъ 140 руб., а за боченокъ кофе 108 руб.).

Обозначьте на основаніи этихъ условій дѣйствія надъ числами данными, необходимыя для опредѣленія этой неизвѣстной. ($140\times8+$ $+108\times6$).

Примѣчаніе. При затрудненіи учениковъ подобные вопросы предлагаются относительно нѣсколькихъ вспомогательныхъ неизвѣстныхъ, словомъ сказать, до тѣхъ поръ, пока ученики будутъ совершенно ясно отличать въ задачѣ числа искомыя, данныя и условія задачи и сознательно обозначать дѣйствія для опредѣленія неизвѣстной. Для учениковъ же, проходившихъ элементарный курсъ Ариѳметики, анализъ задачи служитъ, вообще, только повтореніемъ и приведеніемъ въ систему прежде усвоеннаго ими.

Выпишите на вашихъ доскахъ по порядку всѣ вспомогательныя неизвѣстныя, при нихъ числа данныя въ задачѣ и условія, ихъ связывающія, а также обозначьте и дѣйствія, которыя нужно произвести надъ числами данными для опредѣленія искомой.

Въ окончательномъ видѣ учениками составляется, примѣрно, такая таблица:

1) Цѣна всего сахару.

Данныя: 8 и 140.
Условія: куплено было 8 бочекъ сахару; за каждую бочку заплачено 140 руб.
Дѣйствіе: 140×8.

2) Цѣна всего кофе.

Данныя: 6 и 108.
Условія: куплено было 6 боченковъ кофе; за каждый боченокъ заплачено 108 руб.
Дѣйствіе: 108×6.

3) Цѣна всего товара.

Данныя: 140×8 и 108×6 *).
Условія: за весь сахаръ заплачено (140×8) руб.; за весь кофе заплочено (108×6) руб.
Дѣйствіе: $140 \times 8 + 108 \times 6$.

4) Стоимость всего товара вмѣстѣ съ доставкою.

Данныя: $(140 \times 8 + 108 \times 6)$ и 428.
Условія: за товаръ заплачено $(140 \times 8 + 108 \times 6)$ руб.; за доставку товара заплачено 428 руб.
Дѣйствіе: $140 \times 8 + 108 \times 6 + 428$.

*) Ученики выписываютъ это сложеніе, повторяя всѣ данныя (8, 140, 6 и 108) и всѣ условія, служащія для опредѣленія этой неизвѣстной, но потомъ доводятся до пониманія того, что, для опредѣленія каждой слѣдующей неизвѣстной, числа, опредѣляющія предшествовавшія неизвѣстныя, могутъ служить данными точно такъ-же, какъ, при опредѣленіи главной неизвѣстной, числа, полученныя вмѣсто всѣхъ вспомогательныхъ неизвѣстныхъ, служатъ данными.

5) Продажная цѣна всего товара вмѣстѣ съ прибылью.

Данныя: $(140\times8+108\times6+428)$ и 300.
Условія: за весь товаръ съ доставкою заплачено $(140\times8+$ $+108\times6+428)$ руб.; при продажѣ получено 300 руб. прибыли.
Дѣйствіе: $140\times8+108\times6+428+300$.

6) Продажная цѣна всего сахара.

Данныя: $(140\times8+108\times6+428+300)$ и 704.
Условія: весь товаръ проданъ за $(140\times8+108\times6+428+$ $+300)$ руб.; кофе проданъ за 704 руб.
Дѣйствіе: $140\times8+108\times6+428+300-704$.

7) Вѣсъ всего сахару.

Данныя: 8 и 20.
Условія: сахару было куплено 8 бочекъ; въ каждой бочкѣ было 20 пуд. сахару.
Дѣйствіе: 20×8.

8) Главная искомая (x).
(Цѣна одного фунта сахару).

Данныя: $(140\times8+108\times6+428+300-704)$ и 20×8.
Условія: сахаръ проданъ за $(140\times8+108\times6+428+300-$ $-704)$ руб.; сахару продано (20×8) пуд.$=$ $=(40\times20\times8)$ фун.
Дѣйствіе: $(140\times8+108\times6+428+300-704$: $: 40\times20\times8$.

$$x=\frac{140\times8+108\times6+428+300-704}{40\times20\times8}\text{ руб.}={}^{28}/_{100}\text{ руб.}=28\text{ коп.}$$

Прочтите еще содержаніе задачи и скажите, всѣ ли числа, данныя въ ней, вошли въ рѣшеніе?

Чѣмъ связаны въ рѣшеніи эти числа между собою?

Что показываютъ эти знаки ($+$, $\times$ и проч.)?

Отчего зависитъ постановка того или другого знака между данными числами? (Отъ условій и вопроса задачи).

Что означаетъ 140×8, 20×8? и т. д. (Цѣну сахару, вѣсъ сахару и т. д.).

Такое выраженіе, въ которомъ обозначены всѣ дѣйствія надъ числами данными, необходимыя для рѣшенія задачи, называется *формулою рѣшенія.*

Что остается теперь сдѣлать съ этою формулою, чтобы найти искомую величину? (Произвести указанныя въ формулѣ вычисленія).

Въ какомъ порядкѣ должно производить вычисленія? (Сначала надо 140 умножить на 8, потомъ 108 умножить на 6, къ суммѣ полученныхъ произведеній прибавить 428 и 300 и т. д.).

Всѣ ли условія задачи приняты нами въ разсчетъ при рѣшеніи задачи? Посмотрите, нѣтъ ли въ задачѣ условій лишнихъ, на которыя мы вовсе не обратили вниманія? (Купецъ купилъ товаръ въ Москвѣ, а продалъ въ Полтавѣ).

Скажите теперь, на что слѣдуетъ обращать вниманіе при рѣшеніи каждой задачи? (На главную и вспомогательныя неизвѣстныя; на простыя задачи, изъ которыхъ составлена сложная; на числа данныя и условія; на вопросъ задачи).

Къ чему служатъ числа данныя въ задачѣ? Къ чему служатъ условія задачи?

Какія неизвѣстныя называются вспомогательными, второстепенными? Какая неизвѣстная называется главною въ задачѣ?

Какая задача называется сложною и какая простою?

Что называется формулою рѣшенія задачи? Какъ составляется формула рѣшенія?

Составьте какую-нибудь простую задачу и напишите формулу ея рѣшенія.

Составьте сложную задачу и напишите формулу ея рѣшенія. Вычислите эту формулу.

Затѣмъ ученики составляютъ и вычисляютъ формулу рѣшенія для задачъ, предлагаемыхъ учителемъ, и по даннымъ формуламъ составляютъ свои задачи; а также составляютъ формулы, показывающія связь между элементами и результатами четырехъ ариѳметическихъ дѣйствій. Дѣлимое 150, дѣлитель 16, частное 9, остатокъ 6; формула, выражающая остатокъ, будетъ: $6 = 150 - (16 \times 9)$.

Здѣсь для анализа выбрана задача, весьма сложная по числу данныхъ и условій для того, чтобы затронуть сразу всѣ вопросы, относящіяся къ анализу задачи, и показать пріемъ составленія сложной формулы рѣшенія; на практикѣ, при работѣ въ классѣ, лучше выбирать задачи менѣе сложныя (напримѣръ на правило смѣшенія перваго рода), имѣя въ виду окончить анализъ одной задачи въ одинъ урокъ и не утомить вниманіе учениковъ; хотя и при разборѣ этой сложной задачи чередованіе работы письменной и устной служитъ къ поддержанію вниманія класса. Для пріученія учениковъ къ внимательному углубленію въ содержаніе задачи и къ опредѣленію связи между вопросомъ и условіями задачи, имъ предлагаются задачи съ недостающими или излишними данными и условіями, задачи неопредѣленныя и такія, въ которыхъ вопросъ не вытекаетъ изъ условій. Для показанія ученикамъ удобства формулы для упрощенія рѣшенія задачи, можно предлагать имъ задачи на вычисленіе поверхностей и объемовъ; такія задачи рѣшаются быстро при помощи сокращеній въ формулѣ рѣшенія. Сложныя задачи, требующія для своего рѣшенія примѣненія всего пройденнаго курса Ариѳметики, помѣщены во 2-й части «Сборника» въ послѣднемъ отдѣлѣ.

ПРИЛОЖЕНІЕ.

Для лучшаго ознакомленія съ задачами и численными примѣрами для систематическаго курса, помѣщенными въ девятомъ изданіи второй части моего «Сборника», привожу подробное ихъ расположеніе.

1. Признаки дѣлимости чиселъ.

1) Примѣры отъ № 1 до № 4. Написаніе всѣхъ первоначальныхъ и составныхъ чиселъ отъ 1 до 150 включительно и, наоборотъ, опредѣленіе, будутъ ли данныя числа первоначальными или составными.

2) Примѣръ подъ № 4. Написаніе отъ двухъ до пяти включительно составныхъ чиселъ, которыя между собою были бы первыми.

3) Примѣры отъ № 5 до № 10. Опредѣленіе дѣлимости данныхъ чиселъ сперва на 2, 4, 8, 16, потомъ на 3 и на 9, затѣмъ на 5, 25, 10, 100 и, наконецъ, на числа, въ которыя 2, 3 и 5 входятъ множителями въ различныхъ степеняхъ.

4) Примѣры отъ № 10 до № 19. Составленіе изъ цифръ чиселъ, которыя дѣлились бы безъ остатка на данныя числа, и написаніе съ различными ограниченіями чиселъ, дѣлящихся на данныя числа.

5) Примѣръ подъ № 19. Разложеніе на простые множители двадцати чиселъ, начиная отъ трехзначныхъ и кончая шестизначными, въ которыя множителями входятъ только числа 2, 3 и 5.

6) Примѣръ подъ № 20. Опредѣленіе числа всѣхъ точныхъ дѣлителей и составленіе таблицы ихъ для двадцати сложныхъ чиселъ, дѣлящихся только на 2, 3 и 5, за исключеніемъ втораго, шестаго, девятаго чиселъ, дѣлящихся на единицу и на самого себя.

II. Нахожденіе наименьшаго кратнаго числа и общаго наибольшаго дѣлителя.

1) Примѣры отъ № 21 до № 41. Составленіе наименьшаго кратнаго числа разложеніемъ на множители сперва для двухъ, потомъ для трехъ и, наконецъ, для четырехъ чиселъ. Самыя числа даны сперва двузначными, потомъ трехзначными, затѣмъ четырезначными и, наконецъ, пятизначными, и въ нихъ входятъ множителями только числа 2, 3 и 5.

2) Примѣры отъ № 81 до № 101. Нахожденіе наименьшаго кратнаго числа посредствомъ общаго наибольшаго дѣлителя для двухъ, трехъ и четырехъ чиселъ.

3) Примѣры отъ № 41 до № 61. Составленіе общаго наибольшаго дѣлителя разложеніемъ на множители для двухъ, трехъ и четырехъ чиселъ сперва двузначныхъ, потомъ трехзначныхъ, затѣмъ четырезначныхъ и, наконецъ, пятизначныхъ, имѣющихъ множителями числа 2, 3 и 5.

4) Примѣры отъ № 61 до № 81. Нахожденіе общаго наибольшаго дѣлителя послѣдовательнымъ дѣленіемъ для двухъ, трехъ и четырехъ чиселъ.

Простая дробь.

III. Измѣненіе величины дроби.

1) Примѣры отъ № 101 до № 103. Измѣненіе величины дробей отъ умноженія числителей ихъ на цѣлое число.

2) Примѣры отъ № 103 до № 105. Измѣненіе величины дробей отъ умноженія знаменателъй ихъ на данное цѣлое число.

3) Примѣры отъ № 105 до № 107. Измѣненіе величины дробей отъ раздѣленія числителей или знаменателей ихъ на данныя цѣлыя числа.

4) Примѣры отъ № 107 до № 113. Измѣненіе величины дробей: а) отъ умноженія или дѣленія числителя и знаменателя на одно и то же число или на различныя числа, б) отъ умноженія или дѣленія числителя и знаменателя на кратныя между собою числа, в) отъ умноженія числителя и дѣленія знаменателя или обратно на одно и то же число или на кратныя между собою числа.

5) Примѣры отъ № 113 до № 115. Измѣненіе величины дробей отъ прибавленія или отнятія отъ числителей и знаменателей одного и того же числа.

6) Примѣры отъ № 115 до № 121. Различные случаи увеличенія и уменьшенія данныхъ дробей въ цѣлое число разъ.

IV. Сокращеніе дробей.

Примѣры отъ № 121 до № 151, въ которыхъ члены дробей сперва числа двузначныя, потомъ трехзначныя, затѣмъ четырезначныя и пятизначныя и, наконецъ, шестизначныя, имѣющія множителями числа 2, 3 и 5, кромѣ дробей подъ №№ 722, 136, 138, 141, какъ дробей несократимыхъ.

V. Исключеніе цѣлыхъ чиселъ изъ дробей.

Примѣръ № 151 содержитъ 20 неправильныхъ простыхъ дробей для исключенія изъ нихъ цѣлыхъ чиселъ, причемъ результатъ исключенія изъ первыхъ десяти дробей выражается цѣлыми числами, а послѣднихъ 10-ти — смѣшанными числами.

VI. Обращеніе смѣшанныхъ чиселъ въ неправильныя дроби.

Въ примѣрѣ № 152 дано 10 смѣшанныхъ чиселъ для обращенія ихъ въ неправильныя дроби, причемъ какъ цѣлыя числа, такъ и знаменатели дробей постепенно увеличиваются.

VII. Приведеніе дробей къ одному знаменателю.

1) Примѣры отъ № 153 до № 173. Приведеніе сперва двухъ, потомъ трехъ и, наконецъ, четырехъ дробей къ одному знаменателю, когда знаменатель одной изъ дробей есть число кратное для значенателей другихъ.

2) Примѣры отъ № 173 до 183. Приведеніе двухъ, трехъ и четырехъ дробей къ одному знаменателю, когда знаменители данныхъ дробей суть числа первыя между собою.

3) Примѣры отъ № 183 до 203. Приведеніе къ одному знаменателю двухъ, трехъ и четырехъ дробей, когда знаменатели данныхъ дробей числа сложныя, имѣющія общихъ множителей.

VIII. Приведеніе дробей къ одному числителю.

1) Примѣры отъ № 203 до № 210. Приведеніе двухъ, трехъ и четырехъ дробей къ одному числителю, когда числитель одной изъ дробей есть число кратное для числителей другихъ.

2) Примѣры отъ № 210 до № 213. Приведеніе двухъ и трехъ дробей къ общему числителю, когда числители данныхъ дробей числа первыя между собой.

3) Примѣры отъ № 213 до № 217. Приведеніе двухъ, трехъ и четырехъ дробей къ одному числителю, когда числители дробей числа сложныя, имѣющія общихъ множителей.

IX. Сложеніе дробей.

1) Задачи отъ № 467 до № 478. Сложеніе двухъ дробей, причемъ знаменатель одной изъ дробей есть число наименьшее кратное для знаменателя другой.

2) Задачи отъ № 478 до № 480. Сложеніе двухъ дробей со знаменателями—числами сложными, имѣющими общихъ множителей.

3) Задача подъ № 480. Сложеніе двухъ дробей со знаменателями—числами взаимно простыми.

4) Задача подъ № 481. Сложеніе трехъ дробей, когда знаменатель одной изъ нихъ есть число наименьшее кратное для знаменателей остальныхъ.

5) Задача подъ № 482. Сложеніе трехъ дробей со знаменателями—числами сложными, имѣющими общихъ множителей.

6) Задача подъ № 483. Сложеніе трехъ дробей со знаменателями—числами взаимно простыми.

7) Задача подъ № 484. Сложеніе четырехъ дробей, причемъ знаменатель одной изъ нихъ есть число наименьшее кратное для знаменателей остальныхъ.

8) Задачи отъ № 485 до № 487. Сложеніе четырехъ дробей со знаменателями—числами сложными, имѣющими общихъ множителей.

9) Задачи отъ № 487 до № 496, требующія для своего рѣшенія употребленія дѣйствія сложенія нѣсколько разъ.

10) Примѣры отъ № 217 до № 247. Сложеніе двухъ, трехъ, четырехъ дробей или смѣшанныхъ чиселъ, когда знаменатель одной изъ дробей есть число наименьшее кратное для знаменателей остальныхъ.

11) Примѣры отъ № 247 до № 262. Сложеніе двухъ, трехъ, четырехъ дробей или смѣшанныхъ чиселъ, когда знаменатели дробей числа взаимно простыя.

12) Примѣры отъ № 262 до № 287. Сложеніе двухъ, трехъ, четырехъ дробей или смѣшанныхъ чиселъ, когда знаменатели числа сложныя, имѣющія общихъ множителей.

X. Вычитаніе дробей.

1) Задачи отъ № 496 до № 498 и примѣры отъ № 287 до № 293. Вычитаніе дроби изъ цѣлаго числа.

2) Задачи отъ № 498 до № 500 и примѣры отъ № 293 до № 302. Вычитаніе смѣшаннаго числа изъ цѣлаго.

3) Задачи отъ № 500 до № 502 и примѣры отъ № 302 до № 312. Вычитаніе дроби изъ дроби, причемъ одинъ изъ знаменателей есть кратное число для другого.

4) Задача № 502 и примѣры отъ № 312 до № 327. Вычитаніе дроби изъ дроби, когда знаменатели данныхъ дробей числа сложныя, имѣющія общихъ множителей.

5) Задача № 503 и примѣры отъ № 327 до № 332. Вычитаніе дроби изъ дроби, когда знаменатели—числа взаимно простыя.

6) Примѣры отъ № 332 до № 336. Вычитаніе дроби изъ смѣшаннаго числа, причемъ одинъ изъ знаменателей есть число кратное другому.

7) Задача № 504 и примѣры отъ № 336 до № 340. Вычитаніе дроби изъ смѣшаннаго числа, когда знаменатели числа сложныя, имѣющія общихъ множителей.

8) Примѣры отъ № 340 до № 344. Вычитаніе дроби изъ смѣшаннаго числа, когда знаменатели дробей—числа взаимно простыя.

9) Примѣры отъ № 344 до № 347. Вычитаніе смѣшаннаго числа изъ смѣшаннаго, причемъ одинъ изъ знаменателей—число кратное для другого.

10) Задачи отъ № 505 до № 508 и примѣры отъ № 347 до № 353. Вычитаніе смѣшаннаго числа изъ смѣшаннаго, когда знаменатели дробей числа сложныя, имѣющія общихъ множителей.

11) Примѣры отъ 353 до № 357. Вычитаніе смѣшаннаго числа изъ смѣшаннаго, когда знаменатели дробей числа взаимно простыя.

12) Задачи отъ № 508 до № 516, требующія для своего рѣшенія употребленія дѣйствія вычитаніе нѣсколько разъ.

XI Умноженіе дробей.

1) Задачи отъ № 516 до № 518 и примѣры отъ № 357 до № 377. Умноженіе дроби на цѣлое число.

2) Задачи отъ № 518 до № 520 и примѣры отъ № 377 до № 397. Умноженіе цѣлаго числа на дробь.

3) Задачи отъ № 520 до № 522 и примѣры отъ № 397 до № 417. Умноженіе дроби на дробь.

4) Задача № 522 и примѣры отъ № 417 до № 424. Умноженіе смѣшаннаго числа на цѣлое.

5) Задача № 523 и примѣры отъ № 424 до № 431. Умноженіе цѣлаго числа на смѣшанное.

6) Задача № 525 и примѣры отъ № 431 до № 444. Умноженіе дроби на смѣшанное число.

7) Задача № 524 и примѣры отъ № 444 до № 456. Умноженіе смѣшаннаго числа на дробь.

8) Задача № 526 и примѣры отъ № 456 до № 472. Умноженіе смѣшаннаго числа на смѣшанное.

9) Задачи отъ № 527 до № 536, требующія для своего рѣшенія употребленія дѣйствія умноженія нѣсколько разъ.

Въ каждомъ же изъ первыхъ восьми отдѣловъ даны примѣры сначала для вывода правила умноженія, а потомъ для вывода правила сокращенія при умноженіи.

XII. Дѣленіе дробей.

Задачи отъ № 536 до № 538 и примѣры отъ № 472 до № 492. Дѣленіе дроби на цѣлое число. Два случая: 1) когда числитель дроби дѣлится на цѣлое число и 2) когда не дѣлится.

2) Задачи отъ № 538 до № 540 и примѣры отъ № 492 до № 512. Дѣленіе цѣлаго числа на дробь.

3) Задачи отъ № 540 до № 542 и примѣры отъ № 512 до № 532. Дѣленіе дроби на дробь.

4) Задача № 542 и примѣры отъ № 532 до № 545. Дѣленіе смѣшаннаго числа на цѣлое.

5) Задача № 543 и примѣры отъ № 545 до № 556. Дѣленіе цѣлаго числа на смѣшанное.

6) Примѣры отъ № 556 до 571. Дѣленіе дроби на смѣшанное число.

7) Задача № 544 и примѣры осъ № 571 до № 583. Дѣленіе смѣшаннаго числа на дробь.

8) Задача № 545 и примѣры отъ № 583 до № 597. Дѣленіе смѣшаннаго числа на смѣшанное.

9) Задачи отъ № 546 до № 556, требующія для своего рѣшенія употребленія дѣйствія дѣленія нѣсколько разъ.

Въ каждомъ же изъ первыхъ восьми отдѣловъ примѣры даны сначала для вывода правила дѣленія, а потомъ правила сокращенія при дѣленіи.

XIII. Всѣ 4 дѣйствія съ простыми дробями.

Задачи отъ № 556 до № 653 и примѣры отъ № 597 до № 667, расположенные по степени увеличенія числовыхъ данныхъ и трудности рѣшенія.

XIV. Раздробленіе дробныхъ именованныхъ чиселъ.

Примѣры отъ № 667 до № 682. 1) Обращеніе дробнаго простого именованнаго числа сперва въ простое, а потомъ въ сложное. 2) Обращеніе дробнаго сложнаго именованнаго числа сперва въ простое, а потомъ въ сложное.

XV. Превращеніе дробныхъ именованныхъ чиселъ.

1) Примѣры отъ № 682 до № 685. Превращеніе простого именованнаго числа въ простое.

2) Примѣры отъ № 685 до № 687. Превращеніе простаго именованнаго числа въ сложное.

3) Примѣры отъ № 687 до № 692. Превращеніе сложнаго именованнаго числа въ простое.

XVI. 4 дѣйствія съ дробными именованными числами.

1) Примѣры отъ № 692 до № 697 даны на сложеніе дробныхъ именованныхъ чиселъ.

2) Примѣры отъ № 697 до № 702—на вычитаніе дробныхъ именованныхъ чиселъ.

3) Примѣры отъ № 702 до № 707—на умноженіе дробныхъ именованныхъ чиселъ.

4) Примѣры отъ № 707 до № 715—на дѣленіе именованнаго числа на отвлеченное и именованнаго на именованное.

5) Примѣры отъ № 715 до № 723—на всѣ четыре дѣйствія, расположенные по степени трудности рѣшенія.

Десятичная дробь.

XVII. Выговариваніе и изображеніе десятичныхъ дробей.

1) Примѣръ № 723 на чтеніе написанныхъ десятичныхъ дробей.

2) Примѣръ № 724 на написаніе безъ знаменателя простыхъ дробей, у которыхъ знаменатель единица съ однимъ или нѣсколькими нулями.

3) Примѣръ № 725 на написаніи безъ знаменаталя требуемыхъ дробей.

XVIII. Измѣненіе величины десятичныхъ дробей.

1) Примѣры отъ № 726 до № 731. Увеличеніе данныхъ десятичныхъ дробей въ 10, 100, 1000 разъ.

2) Примѣрѣ отъ № 731 до № 736. Уменьшеніе данныхъ десятичныхъ дробей въ 10, 100, 1000 разъ.

3) Примѣры отъ № 836 до № 740. Сперва увеличеніе, а потомъ уменьшеніе, или обратно, данныхъ десятичныхъ дробей въ 10, 100 1000, 10000 разъ.

XIX. Устныя задачи отъ № 653 до № 678.

XX. Сложеніе десятичныхъ дробей.

1) Задачи отъ № 678 до № 685 и численные примѣры отъ № 740 до № 749. Различные случаи сложенія сперва двухъ, потомъ трехъ и, наконецъ, четырехъ десятичныхъ дробей.

2) Примѣры отъ № 749 до 755. Сложеніе пяти десятичныхъ дробей.

3) Задачи отъ № 685 до 688, для рѣшенія которыхъ дѣйствіе сложеніе нужно употребить нѣсколько разъ.

XXI. Вычитаніе десятичныхъ дробей.

1) Задачи отъ № 688 до № 693 и примѣры отъ № 755 до № 764. Различные случаи вычитанія десятичной дроби изъ десятичной.

2) Задачи отъ № 663 до № 695 и примѣры отъ № 764 до № 767. Вычитаніе десятичной дроби изъ цѣлаго числа.

3) Задачи отъ № 695 до № 698 и примѣры отъ № 767 до № 775, требующіе для своего рѣшенія употребленія дѣйствія вычитанія нѣсколько разъ.

XXII. Умноженіе десятичныхъ дробей.

1) Задачи отъ № 698 до № 704 и примѣры отъ № 775 до № 781. Умноженіе десятичной дроби сперва на единицу съ однимъ или нѣсколькими нулями на концѣ, а потомъ на другія разныя цѣлыя числа.

2) Задачи отъ № 704 до № 707 и примѣры отъ № 781 до № 784. Умноженіе цѣлаго числа на десятичную дробь.

3) Задачи отъ № 706 до № 708 и примѣры отъ № 784 до № 789. Умноженіе десятичной дроби на десятичную.

4) Задачи отъ № 708 до № 714 и примѣры отъ № 789 до № 794, требующіе для своего рѣшенія употребленія дѣйствія умноженія нѣсколько разъ и расположенные по степени увеличенія числа дѣйствій или множителей.

XXIII. Дѣленіе десятичныхъ дробей.

1) Задачи отъ № 714 до № 724 и примѣры отъ № 794 до № 806. Точное дѣленіе десятичной дроби сперва на единицу съ однимъ и нѣсколькими нулями на концѣ, а потомъ на другія различныя цѣлыя числа.

2) Задачи отъ № 724 № 730 и примѣры отъ № 806 до № 814. Точное дѣленіе цѣлаго числа на десятичную дробь.

3). Задачи отъ № 730 до № 740 и примѣры отъ № 814 до № 823. Точное дѣленіе десятичной дроби на десятичную.

4) Задачи отъ № 740 до № 742 и примѣры отъ № 823 до № 843. Различные случаи дѣленія десятичныхъ дробей, когда частныя выражаются чистыми періодическими дробями, у которыхъ въ періодѣ число цифръ постепенно возрастаетъ.

5) Задачи отъ № 742 до № 746 и примѣры отъ № 843 до № 860. Различные случаи дѣленія десятичныхъ дробей, дающіе въ частномъ смѣшанныя періодическія дроби, у которыхъ какъ число цифръ до періода, такъ и число, цифръ въ періодѣ, постепенно увеличивается.

6) Примѣры отъ № 860 до № 866. Различные случаи дѣленія десятичныхъ дробей съ данною точностью.

XXIV. Обращеніе простыхъ дробей въ десятичныя.

1) Примѣръ № 866. Обращеніе двадцати пяти простыхъ дробей въ десятичныя (точныя), причемъ въ знаменатель первыхъ девяти

дробей входитъ только одно число 2 въ различныхъ степеняхъ, слѣдующихъ пяти дробей—число 5 въ различныхъ степеняхъ и, наконецъ, послѣднихъ одиннадцати дробей—числа 2 и 5 вмѣстѣ въ различныхъ степеняхъ.

2) Примѣръ № 867. Обращеніе пятнадцати простыхъ дробей въ десятичныя, причомъ результатомъ обращенія являются чистыя періодическія дроби, у которыхъ число цифръ въ періодѣ постепенно возрастаетъ, начиная съ одной цифры и кончая шестью.

3) Примѣръ № 868. Обращеніе двадцати простыхъ дробей въ десятичныя, дающее въ результатѣ смѣшанныя періодическія дроби въ такомъ порядкѣ: а) въ первыхъ пяти дробяхъ одна цифра до періода и одна въ періодѣ, б) въ слѣдующихъ трехъ дробяхъ—одна цифра до періода и двѣ въ періодѣ, в) въ слѣдующихъ трехъ—двѣ цифры до періода и одна въ періодѣ, г) потомъ въ двухъ дробяхъ — двѣ цифры до періода и двѣ въ періодѣ, д) затѣмъ, въ трехъ дробяхъ — три цифры до періода и одна въ періодѣ, е) въ семнадцатой дроби— три цифры до періода и двѣ въ періодѣ, ж) въ восемнадцатой дроби —двѣ цифры до періода и три въ періодѣ, з) въ девятнадцатой дроби— три цифры до періода и три въ періодѣ, и) наконецъ, въ послѣдней дроби—три цифры до періода и шесть въ періодѣ.

4) Примѣръ № 869. Обращеніе въ десятичныя дроби пяти простыхъ дробей, у которыхъ числитель единица, а знаменатель числа: 9, 99, 999, 9999, 99999.

5) Примѣръ № 870. Требуется указать: 1) какія изъ данныхъ тридцати дробей обратятся въ точныя десятичныя и какія въ періодическія чистыя и смѣшанныя; 2) въ точной десятичной дроби сказать число цифръ, а въ смѣшанной періодической дроби—число цифръ до періода.

XXV. Обращеніе десятичной дроби въ простыя.

1) Примѣръ № 871. Обращеніе въ простыя двадцати точныхъ десятичныхъ дробей, расположенныхъ по степени увеличенія числа десятичныхъ цифръ.

2) Примѣръ № 872. Обращеніе въ простыя періодическихъ дробей, у которыхъ въ періодѣ или просто единица, или передъ единицей стоитъ одинъ или нѣсколько нулей.

3) Примѣръ № 873. Обращеніе въ простыя двадцати чистыхъ періодическихъ дробей, у которыхъ число цифръ въ періодѣ постепенно возрастаетъ, начиная съ одной и кончая шестью.

4) Примѣръ № 874. Обращеніе въ простыя двадцати смѣшанныхъ періодическихъ дробей, у которыхъ какъ число цифръ до періода, такъ и число цифръ въ періодѣ, постепенно увеличивается.

XXVI. Четыре дѣйствія съ десятичными дробями.

Задачи отъ № 746 до № 822 и численные примѣры отъ № 875 до № 946, расположенные по степени трудности рѣшенія.

XXVII. Дробь десятичная вмѣстѣ съ простою и опредѣленіе частнаго съ данною точностью.

1) Задачи отъ № 822 до № 832, въ которыхъ данныя выражены простыми и десятичными дробями.

2) Задачи отъ № 832 до № 844 на опредѣленіе частного съ данною точностью.

3) Примѣры отъ № 946 до № 966 съ дробями простыми и десятичными, какъ точными, такъ и неточными, расположенные по степени трудности рѣшенія.

XXVIII. Непрерывная дробь.

1) Примѣръ № 966. Обращеніе въ непрерывныя дроби десяти простыхъ дробей, пяти десятичныхъ точныхъ и пяти періодическихъ, какъ чистыхъ, такъ и смѣшанныхъ.

2) Примѣръ № 966. Обращеніе пятнадцати непрерывныхъ дробей въ простыя.

3) Примѣры отъ № 968 до № 973. Нахожденіе суммы, слагаемыми которой даны дроби непрерывныя, простыя и десятичныя, какъ точныя, такъ и періодическія, и выраженіе этой суммы посредствомъ простой или непрерывной дроби.

4) Примѣры отъ № 973 до № 981. Составленіе подходящихъ дробей и производство надъ ними различныхъ ариѳметическихъ дѣйствій.

XXIX. Ариѳметическое отношеніе.

1) Примѣръ № 981. Нахожденіе ариѳметическаго отношенія между данными цѣлыми числами, между цѣлыми числами и простыми дробями, между простыми дробями, между десятичными и простыми

дробями, между десятичными дробями и, наконецъ, между непрерывными дробями.

2) Примѣры отъ № 982 до № 984. Написаніе ариѳметическихъ отношеній съ данною разностью, выраженною посредствомъ цѣлыхъ чиселъ и дробей, какъ простыхъ и десятичныхъ, такъ и непрерывныхъ.

3) Примѣры отъ № 984 до № 996. Измѣненіе ариѳметическаго отношенія отъ увеличенія или уменьшенія членовъ его прибавленіемъ или отниманіемъ различныхъ дробей.

4) Примѣры отъ № 996 до № 1016. Нахожденіе неизвѣстныхъ членовъ въ ариѳметическихъ отношеніяхъ, выраженныхъ цѣлыми числами и дробями, какъ простыми и десятичными, такъ и непрерывными, причемъ неизвѣстные члены занимаютъ въ отношеніяхъ различныя мѣста и являются сперва безъ предстоящихъ, а потомъ и съ предстоящими—цѣлыми и дробными числами.

XXX. Геометрическое отношеніе.

1) Примѣръ № 1016. Нахожденіе двадцати геометрическихъ отношеній между цѣлыми числами, простыми, десятичными и непрерывными дробями, выраженными въ различныхъ между собою комбинаціяхъ.

2) Примѣръ № 1017. Написаніе геометрическихъ отношеній съ даннымъ знаменателемъ отношенія, выраженнымъ сперва посредствомъ цѣлыхъ чиселъ, а потомъ и дробей—простыхъ, десятичныхъ и непрерывныхъ.

3) Примѣръ № 1018. Написаніе обратныхъ отношеній.

4) Примѣры отъ № 1019 до № 1030. Измѣненіе знаменателя отношенія отъ умноженія и дѣленія членовъ отношенія на цѣлыя и дробныя числа.

5) Примѣръ № 1030. Замѣненіе отношенія между простыми дробями и смѣшанными числами отношеніемъ между цѣлыми числами, причемъ знаменатели дробей въ каждомъ отношеніи одинаковы.

6) Примѣръ № 1031. Замѣненіе отношенія между дробями отношеніемъ между цѣлыми числами, когда числители дробей одинаковы.

7) Примѣръ № 1032. Замѣненіе отношенія между дробями отношеніемъ между цѣлыми числами, когда числители и знаменатели въ каждомъ отношеніи выражены различными числами.

8) Примѣры отъ № 1033 до 1053. Опредѣленіе неизвѣстныхъ членовъ въ геометрическихъ отношеніяхъ, выраженныхъ цѣлыми числами и различными дробями, причемъ неизвѣстные члены, занимая

въ отношеніяхъ различныя мѣста, даны сперва безъ предстоящихъ, потомъ и съ предстоящими—цѣлыми и дробными числами.

XXXI. Ариѳметическая пропорція.

1) Примѣры отъ № 1053 до № 1056. Написаніе пропорцій съ данною разностью, выраженною сперва цѣлыми числами, а потомъ простыми и десятичными дробями.

2) Примѣры отъ № 1056 до № 1058. Написаніе непрерывныхъ пропорцій по данной суммѣ или произведенію среднихъ членовъ.

3) Примѣръ № 1058. Составленіе пропорцій изъ данныхъ чиселъ.

4) Примѣры отъ № 1059 до № 1066. Повѣрка данныхъ пропорцій.

5) Примѣры отъ № 1066 до № 1092. Рѣшеніе пропорцій, выраженныхъ сперва въ цѣлыхъ числахъ, а потомъ въ различныхъ дробяхъ.

6) Примѣры отъ 1092 до № 1102. Нахожденіе средняго ариѳметическаго числа даннымъ цѣлымъ числамъ и различнымъ дробямъ.

XXXII. Геометрическая пропорція.

1) Примѣры отъ № 1102 до № 1105. Написаніе пропорцій изъ цѣлыхъ и дробныхъ чиселъ съ даннымъ знаменателемъ отношенія, выраженнымъ сперва цѣлыми числами, а потомъ простыми и десятичными дробями.

2) Примѣръ № 1105. Написаніе непрерывныхъ пропорцій.

3) Примѣръ № 1106. Составленіе пропорцій изъ данныхъ чиселъ.

4) Примѣры отъ № 1107 до № 1123. Составленіе пропорцій изъ данныхъ равныхъ произведеній и указаніе ихъ знаменателя отношенія.

5) Примѣры отъ № 1123 до № 1126. Написаніе въ восьми различныхъ видахъ данныхъ пропорцій.

6) Примѣры отъ № 1126 до № 1136. Сокращеніе данныхъ пропорцій.

7) Примѣры отъ № 1136 до № 1142. Повѣрка пропорцій.

8) Примѣры отъ № 1142 до № 1149. Освобожденіе пропорцій отъ дробей.

9) Примѣры отъ № 1149 до № 1175. Рѣшеніе различнаго вида пропорцій съ цѣлыми и дробными числами.

10) Примѣры отъ № 1175 до № 1181. Составленіе сложныхъ пропорцій изъ данныхъ.

11) Примѣры отъ № 1181 до № 1186. Составленіе производныхъ пропорцій изъ данныхъ.

XXXIII. Тройное правило.

а) *Устныя задачи *) на простое тройное правило отъ № 844 до № 864.*

б) *Письменныя задачи на простое тройное правило.*

1) Задачи отъ № 864 до № 883 съ данными цѣлыми сперва простыми, а потомъ сложными именованными числами и съ отношеніями прямыми и обратными.

3) Задачи отъ № 883 до № 897 съ данными простыми дробями

2) Задачи отъ № 897 до № 909 съ данными десятичными дробями.

4) Задачи отъ № 909 до № 914, данныя которыхъ выражены дробями простыми, непрерывными и десятичными—точными и неточными.

в) *Письменныя задачи на сложное тройное правило.*

1) Задачи отъ 912 до № 934 съ тремя условіями и съ данными цѣлыми числами сперва простыми, а потомъ сложно-именованными.

2) Задачи отъ № 934 до № 946 съ тремя условіями и съ данными простыми дробями.

3) Задачи отъ № 946 до № 950 съ тремя условіями и съ данными точными десятичными дробями.

4) Задачи отъ № 950 до № 973 съ четырьмя и пятью условіями и съ данными цѣлыми числами.

5) Задачи отъ № 973 до № 977 съ четырьмя и пятью условіями и съ данными простыми дробями.

6) Задачи отъ № 977 до № 984 съ отношеніями, члены которыхъ цѣлыя числа.

---

*) Цѣль устныхъ задачъ на всѣ спеціальныя правила—ознакомить учащихся съ содержаніемъ задачъ этого рода и вывести пріемы ихъ рѣшенія, по способу приведенія къ единицѣ, изъ анализа задачи, прежде нежели сообщить учащимся способы рѣшенія такихъ задачъ посредствомъ пропорцій. Данныя въ этихъ задачахъ сначала выражены небольшими цѣлыми простыми именованными числами, затѣмъ сложно-именованными и, наконецъ, дробными.

7) Задачи онъ № 984 до № 994 сложныя, расположенныя по степени трудности рѣшенія, съ данными простыми, десятичными, какъ точными, такъ и неточными, и непрерывными дробями.

XXXIV. Вычисленіе процентовъ.

а) Устныя задачи на простые проценты отъ № 994 до № 1027

а) Письменныя задачи на простые проценты.

1) Задачи отъ № 1027 до 1080. Нахожденіе процентныхъ денегъ по данному капиталу, нормѣ процентовъ и времени, причемъ капиталъ сперва выраженъ въ рубляхъ, а потомъ въ рубляхъ и копейкахъ; норма процентовъ—сперва въ цѣлыхъ числахъ, а потомъ дробныхъ; время—сперва въ годахъ цѣлыхъ и дробныхъ, потомъ въ мѣсяцахъ цѣлыхъ и дробныхъ, затѣмъ въ дняхъ, потомъ въ мѣсяцахъ и дняхъ, затѣмъ въ годахъ и мѣсяцахъ и, наконецъ, въ годахъ, мѣсяцахъ и дняхъ.

2) Задачи отъ № 1080 до № 1128. Нахожденіе капитала по данной нормѣ процентовъ, времени и процентнымъ деньгамъ, причемъ норма процентовъ дана сперва въ цѣлыхъ, а потомъ дробныхъ числахъ; время—а) сперва въ годахъ, потомъ въ мѣсяцахъ и, затѣмъ, въ дняхъ, выраженныхъ цѣлыми числами; б) сперва въ годахъ, а потомъ въ мѣсяцахъ, выраженныхъ дробными числами; в) въ мѣсяцахъ и дняхъ; г) въ годахъ и мѣсяцахъ, и, наконецъ, д) въ годахъ, мѣсяцахъ и дняхъ; процентныя деньги—сперва въ рубляхъ, а потомъ въ рубляхъ и копейкахъ, выраженныхъ въ цѣлыхъ и дробныхъ числахъ.

3) Задачи отъ № 1128 до № 1176. Опредѣленіе нормы процентовъ по данному капиталу, времени оборота и процентнымъ деньгамъ, причемъ какъ капиталъ, такъ и процентныя деньги выражены сперва въ рубляхъ, а потомъ въ рубляхъ и копейкахъ; время—а) сперва въ цѣлыхъ годахъ, потомъ мѣсяцахъ и затѣмъ дняхъ; б) въ дробныхъ сперва годахъ, а потомъ мѣсяцахъ; в) въ мѣсяцахъ и дняхъ; г) въ годахъ и мѣсяцахъ, и, наконецъ, д) въ годахъ, мѣсяцахъ и дняхъ.

4) Задачи отъ № 1176 до № 1212. Нахожденіе времени оборота капитала по даному капиталу, процентнымъ деньгамъ и нормѣ процентовъ, причемъ какъ капиталъ, такъ и процентныя деньги выражены сперва въ рубляхъ, а потомъ въ рубляхъ и копейкахъ, норма процентовъ сперва въ цѣлыхъ, а потомъ дробныхъ числахъ.

5) Смѣшанныя задачи, № 1212 до № 1261, расположенныя по степени трудности рѣшенія, съ данными числами цѣлыми и дробными, какъ простыми, такъ и десятичными.

в) *Сложные проценты отъ № 1261 до № 1274.*

XXXV. Учетъ векселя.

а) *Математическій учетъ.*

1) Задачи отъ № 1274 до № 1288. Нахожденіе цѣны векселя уплачиваемаго до срока, по данной валютѣ, процентамъ учета и времени до срока уплаты.

2) Задачи отъ № 1288 до № 1299. Опредѣленіе валюты векселя по данной цѣнѣ векселя, уплачиваемаго до срока, процентамъ учета и времени до срока уплаты.

3) Задачи отъ № 1299 до № 1311. Нахожденіе нормы процентовъ учета по данной валютѣ векселя, по цѣнѣ векселя, уплачиваемаго до срока, и по времени до срока уплаты.

4) Задачи отъ № 1311 до № 1322. Опредѣленіе, за сколько времени дисконтированъ вексель по данной валютѣ, по нормѣ процентовъ учета и по цѣнѣ векселя, уплачиваемаго до срока.

5) Задачи отъ № 1322 до № 1325—смѣшанныя.

Во всѣхъ пяти рубрикахъ данныя выражены сперва цѣлыми числами, а потомъ дробями—простыми и десятичными.

б) *Коммерческій учетъ.*

1) Задачи отъ № 1325 до № 1335. Опредѣленіе учета по данной валютѣ векселя, нормѣ процентовъ учета и времени до срока уплаты.

2) Задачи отъ № 1335 до № 1345. Нахожденіе валюты векселя по данному учету, нормѣ процентовъ учета и времени до срока уплаты.

3) Задачи отъ № 1345 до 1355. Опредѣленіе нормы процентовъ учета по данной валютѣ векселя, учету и времени до срока уплаты.

4) Задачи отъ № 1355 до № 1365. Опредѣленіе, за сколько времени до срока уплаченъ вексель по данной валютѣ, учету и нормѣ процентовъ учета.

5) Задачи отъ № 1365 до № 1368—смѣшанныя.

Данныя въ этихъ пяти рубрикахъ выражены сперва цѣлыми, а потомъ дробными числами.

XXXVI. Правило товарищества.

а) *Устныя задачи отъ № 1368 до № 1391.*

б) *Письменныя задачи.*

1) Задачи отъ № 1391 до № 1400 съ данными цѣлыми числами.

2) Задачи отъ № 1400 до № 1406 съ данными простыми дробями.

3) Задачи отъ № 1406 до № 1409 съ данными точными десятичными дробями.

4) Задачи отъ № 1409 до № 1448—сложныя, расположенныя по степени трудности рѣшенія и увеличенія числовыхъ данныхъ, выраженныхъ въ числахъ бѣлыхъ, дробяхъ простыхъ, непрерывныхъ и десятичныхъ, какъ точныхъ, такъ и неточныхъ.

XXXVII. Цѣпное правило.

Задачи этого отдѣла, отъ № 1448 до № 1458, расположены по степени увеличенія числа условій съ данными цѣлыми числами и дробями, какъ простыми, такъ и десятичными, и содержатъ въ себѣ сравненіе курсовой цѣнности монетъ, сравненіе мѣръ длины, вѣса, квадратныхъ, кубическихъ, жидкихъ и сыпучихъ тѣлъ, употребляемыхъ въ Россіи, во Франціи, въ Германіи, въ Австро-Венгріи и въ Англіи.

XXXVIII. Правила смѣшенія и вычисленія пробы.

а) *Устныя задачи отъ № 1458 до № 1486.*

б) *Письменныя задачи на смѣшеніе обоего рода.*

1) Задачи отъ № 1486 до № 1492. Смѣшеніе перваго рода съ данными цѣлыми числами.

2) Задачи отъ № 1492 до № 1494. Смѣшеніе второго рода съ данными цѣлыми числами.

3) Задачи отъ № 1494 до № 1498. Смѣшеніе перваго рода съ данными простыми дробями.

4) Задачи отъ № 1498 до № 1500. Смѣшеніе второго рода съ данными простыми дробями.

5) Задачи отъ № 1500 до № 1504. Смѣшеніе обоего рода съ данными десятичными дробями.

6) Задачи отъ № 1504 до № 1512. Смѣшеніе обоего рода, причемъ данныя выражены въ цѣлыхъ числахъ, въ дробяхъ простыхъ и десятичныхъ, какъ точныхъ, такъ и неточныхъ.

7) Задачи отъ № 1512 до № 1515. Смѣшеніе втораго рода для трехъ и четырехъ сортовъ. (Задачи неопредѣленныя).

в) *Письменныя задачи на вычисленіе пробы.*

1) Задачи отъ № 1515 до № 1524. Вычисленіе пробы съ данными цѣлыми числами.

2) Задачи отъ № 1524 до № 1530. Вычисленіе пробы съ данными простыми дробями.

3) Задачи отъ № 1530 до 1536. Вычисленіе пробы съ данными точными десятичными дробями.

4) Задачи отъ № 1536 до № 1543. Различные случаи вычисленія пробы, причемъ данныя выражены въ цѣлыхъ числахъ, въ дробяхъ простыхъ и десятичныхъ, какъ точныхъ, такъ и не точныхъ.

5) Задачи отъ № 1543 до № 1546. Нахожденіе вѣса каждаго изъ трехъ или четырехъ элементовъ даннаго сплава по пробѣ сплава и пробѣ элементовъ. (Задачи неопредѣленныя).

XXXIX. Повторительный отдѣлъ.

Этотъ отдѣлъ заключаетъ въ себѣ 30 весьма сложныхъ задачъ отъ № 1546 до № 1576 включительно, расположенныхъ по степени увеличенія числовыхъ данныхъ и трудности рѣшенія и составленныхъ по образцу тѣхъ задачъ, которыя даются для письменнаго рѣшенія ученикамъ, держащимъ экзаменъ на аттестатъ зрѣлости въ гимназіяхъ и реальныхъ училищахъ. Для рѣшенія каждой изъ этихъ задачъ нужно примѣнять пріемы, необходимые для рѣшенія задачъ, относящихся къ различнымъ спеціальнымъ правиламъ. Данныя числа въ задачахъ выражены цѣлыми числами, дробями простыми, непрерывными и десятичными, какъ точными, такъ и неточными.

XL. Метрическія мѣры.

1) Примѣры отъ № 1186 до № 1192. Раздробленіе метрическихъ мѣръ.

2) Примѣры отъ № 1192 до № 1199 Превращеніе метрическихъ мѣръ.

3) Примѣры отъ № 1199 до № 1211. Обращеніе русскихъ линейныхъ мѣръ въ метрическія.

4) Примѣры отъ № 1211 до № 1224. Обращеніе русскихъ мѣръ поверхности въ метрическія.

5) Примѣры отъ № 1224 до № 1229. Обращеніе русскихъ мѣръ объема въ метрическія.

6) Примѣры отъ № 1229 до № 1232. Обращеніе русскихъ мѣръ жидкихъ и сыпучихъ тѣлъ въ метрическія.

7) Примѣры отъ № 1232 до № 1236. Обращеніе русскихъ мѣръ вѣса въ метрическія.

8) Примѣры отъ № 1236 до № 1244. Обращеніе метрическихъ линейныхъ мѣръ въ русскія.

9) Примѣры отъ № 1244 до № 1248. Обращеніе метрическихъ мѣръ поверхности въ русскія.

10) Примѣры отъ № 1248 до № 1251. Обращеніе метрическихъ мѣръ объема въ русскія.

11) Примѣры отъ № 1251 до № 1254. Обращеніе метрическихъ мѣръ жидкостей и сыпучихъ тѣлъ въ русскія.

12) Примѣры отъ № 1254 до № 1257 включительно. Обращеніе метрическихъ мѣръ вѣса въ русскія.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

Введеніе.

Стра

Глава I

Глава II

Глава III

Глава IV

Наглядныя пособія 1

Программа Сборника ариѳметическихъ задачъ и численныхъ примѣровъ для приготовительнаго и систематическаго курса 1

Программа курса 1

Элементарный курсъ цѣлыхъ чиселъ.

Годъ первый. Изученіе числа отъ 1 до 10 1

Повтореніе пройденнаго—на цифрахъ 1

Изученіе чиселъ отъ 11 до 20 1

Годъ второй. Изученіе чиселъ отъ 21 до 100 1

Выводъ и опредѣленіе четырехъ дѣйствій 2

Повѣрка четырехъ дѣйствій 2

Повтореніе пройденнаго о дѣйствіяхъ на рѣшеніи задачъ 2

Повтореніе пройденнаго о дѣйствіяхъ на вычисленіи формулъ 2

Числа простыя и сложныя, числа кратныя 2

Работы для исполненія учениками внѣ класса 2

Составныя именованныя числа въ предѣлѣ числа отъ 1 до 100 2

Годъ третій. Нумерація чиселъ до 1000 2

Нумерація чиселъ до высшихъ предѣловъ 2

Четыре дѣйствія съ числами любой величины 2

Дѣйствія съ составными именованными числами 26

Квадратныя мѣры 26

Кубическія мѣры 2

Элементарный курсъ простыхъ дробей.

Происхожденіе и составъ дроби 2

Дробь правильная и неправильная, смѣшанное число 28

Выраженіе данной дроби въ различныхъ видахъ и сокращеніе дробей 28

Стран.

Увеличеніе и уменьшеніе дробей 285
Сложеніе и вычитаніе дробей съ разными знаменателями 287
Нахожденіе одной или нѣсколькихъ частей даннаго числа 290
Нахожденіе цѣлаго по даннымъ его частямъ 292
Содержаніе дроби въ числѣ цѣломъ и дробномъ 294

Систематическій курсъ Ариѳметики.

Признаки дѣлимости чиселъ и разложеніе чиселъ на множители 298
Нахожденіе наименьшаго кратнаго числа 300
Выводъ правилъ для умноженія цѣлаго числа и дроби на дробь 301
Выводъ правилъ для дѣленія на дробь 303
Десятичныя дроби 304
Повтореніе дѣйствій съ простыми и десятичными дробями на сложныхъ примѣрахъ для вычисленій 312
Задачи, относящіяся къ различнымъ правиламъ и рѣшаемыя по способу приведенія къ единицѣ 314
Анализъ сложной задачи 325
Приложеніе 332