АКАДЕМИЯ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК РСФСР
Институт методов обучения

ПЕДАГОГИЧЕСКАЯ БИБЛИОТЕКА УЧИТЕЛЯ

П. Я. ДОРФ и А. О. РУМЕР

ИЗМЕРЕНИЯ НА МЕСТНОСТИ

Издание второе, переработанное и дополненное

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК РСФСР
Москва 1957

*Печатается по решению
Редакционно-издательского совета
Академии педагогических наук
РСФСР*

В пособии освещается опыт проведения измерительных работ на местности в связи с изучением курса элементарной математики (в V—X классах), главным образом геометрии.

В книге читатель найдет также конкретный материал для подготовки и проведения геодезических работ в условиях школы.

Пособие предназначено для учителей и студентов физико-математических факультетов педагогических вузов.

ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемое пособие обобщает некоторый опыт проведения измерительных работ на местности в V—X классах в связи с изучением курса элементарной математики, главным образом геометрии *.

Организация и проведение математического практикума предусмотрены учебными программами 1956/57 уч. г., где среди практических работ названы и измерительные работы на местности.

Данное пособие должно дать учителю конкретный материал для подготовки и проведения геодезических работ в школьных условиях.

В связи с тем, что пособие частично может быть использовано и учащимися, расположение материала книги имеет определенную специфику.

Объяснительная записка к действующей программе по курсу математики, выработанной в 1955 г. Институтом методов обучения Академии педагогических наук РСФСР и утвержденной Министерством просвещения РСФСР, намечает пути связи теории и практики в процессе преподавания математических дисциплин, в частности геометрии, и рекомендует для V—X классов ряд практических работ.

В настоящее время, в связи с указанием XX съезда КПСС о развитии политехнического обучения в общеобразовательных школах, эти рекомендации имеют особое значение.

Путь к политехническому обучению на уроках математики лежит, прежде всего, через сознательное и прочное усвоение теоретических основ науки (в рамках школьной программы). Но кроме элементов теории, политехническое обучение на уроках математики требует овладения техникой математических вычислений, преобразований, построений, а также знания усо-

* Работы проводились в 110-й и 204-й школах Москвы, в Малаховской средней школе (ныне № 5) Московской области, в Московском институте усовершенствования учителей, а также студентами Московского городского педагогического института им. В. П. Потемкина в период практики.

вершенствованных приемов выполнения математических операций при помощи счетов, логарифмической линейки, арифмометра и различного рода таблиц. Наконец, школьник должен уметь применять математические знания на практике.

В этом направлении многое могут дать измерительные работы на местности, которые осуществляют возможность (правда, весьма ограниченную) связи обучения с производительным трудом. Эти работы не требуют сложного технического оформления и в то же время богаты математическим содержанием. Учебные геодезические приборы и приемы измерительных работ отличаются от употребляемых на производственных геодезических работах только бо́льшей простотой и меньшими требованиями точности.

В переходной программе по математике на 1956/57 уч. г. содержится ряд рекомендаций по проведению практических занятий.

V класс

Практические работы (6 часов)

Обозначение точек и проведение прямых на местности. Измерение расстояний на местности мерным шнуром (лентой, рулеткой), полевым циркулем, шагами. Глазомерная оценка расстояний. Применение эккера. Построение прямоугольного участка и вычисление его площади. Вычисление площади земельного участка, имеющего форму четырехугольника.

В проекте новой программы средней школы указано:

VI класс

Практические занятия (7 часов)

Измерение углов на местности. Глазомерная оценка величины угла. Проведение параллельных прямых на местности. Определение недоступных расстояний на основании свойств осевой симметрии и при помощи построения треугольника. Съемка плана несложного участка (четырехугольного или пятиугольного) методом разложения на треугольники и обходом по периметру.

Изготовление простейших планиметрических моделей, иллюстрирующих свойства изученных фигур, некоторые теоремы и задачи.

VII класс

Практические занятия (8 часов)

Определение недоступных расстояний на основании равенства треугольников и симметрии. Провешивание прямой между точками, разделенными препятствием.

Проведение прямой через данную точку и точку пересечения двух данных прямых.

Определение высоты предметов при помощи эклиметра.

Изготовление планиметрических моделей, иллюстрирующих свойства изученных фигур.

VIII класс

Практические занятия (8 часов)

Применение тригонометрических функций к определению недоступных высот и расстояний. Мензульная съемка. Съемка плана участка более сложного вида (шестиугольника или семиугольника). Пользование поперечным масштабом. Определение площади земельного участка. Деление участка на заданные по величине части.

IX и X классы

Практические занятия на местности (12 часов)

Определение расстояния от данной точки до недоступной и между двумя недоступными точками. Определение высоты предметов.

Как видно, в программе по математике на 1956/57 уч. г. большое место отводится геодезическим работам. И это не случайно, ибо измерительные работы на местности — одна из наиболее совершенных форм проведения основ политехнизма на уроках математики:

а) математика находит частое применение в геодезических работах, а это повышает интерес учащихся к занятиям по математике, способствует укреплению знаний по теории, делая их более прочными;

б) измерительные работы на местности прививают ученикам практические навыки: умение обращаться с приборами и инструментами; способствуют развитию глазомера, волевых качеств; прививают навыки коллективного труда.

Таким образом, в школе учащихся знакомят с основами измерительных работ, с предметами труда и с самим процессом труда. Поэтому, если вначале (в V—VII классах) можно ограничиться учебными формами геодезических работ, своего рода моделями съемок, то в старших классах (VIII—X) необходимо поставить цель: в связи с изучением математики приобщить учащихся к производству геодезических работ.

Вопрос об измерительных работах на местности как одном из элементов политехнического обучения не нов для советской школы. Уже в двадцатых и тридцатых годах был издан ряд популярных книг и брошюр о геодезических работах, многие из которых не утратили своего значения до сих пор; эти книги могут оказать помощь учителю (см. литературу в конце книги).

Как показал опыт, измерительные работы можно проводить в течение всего учебного года, но удобнее — ранней осенью и весной, т. е. в начале или конце учебного года.

Схематически всю организацию дела можно представить так:

1. Сущность работы и план ее проведения рассматриваются на уроке перед всем классом, который разбивается на группы по три-пять человек в каждой, с бригадиром во главе.

2. Во внеурочное время учитель особенно тщательно проводит работу на местности только с бригадирами.

3. В один из следующих дней, также во внеурочное время, группы работают «в поле» (настоящем или условном) под руководством своих бригадиров. Учитель с «командного» пункта наблюдает за ходом всей работы. Число работ (различных или однородных) соответствует числу рабочих групп. При не-

достатке приборов группы учащихся класса работают поочередно.

4. В день практикума школьники освобождаются от домашних уроков по математике.

5. В результате работы у каждого ученика должны быть записи в «полевом журнале» и оформление итогов схемами, чертежами. Один из чертежей в увеличенном масштабе передается педагогическому кабинету школы для годичной выставки.

6. Время проведения работы на местности (не условной) может быть различным, для Москвы, например, проведение их приурочивается к осени и весне. В остальное время работы с успехом можно проводить в зале, большом коридоре или в классе, в зависимости от их характера и масштаба.

В одной из школ нам удалось наблюдать измерительные работы на пионерском сборе. Работы проводились «на макетах» — на большом столе. Это была «съемка участка» при помощи миниатюрных самодельных приборов. Данный опыт весьма поучителен для школ, которым придется вести измерительные работы в условиях большого города.

7. Отдельным видам простейших работ (вешению, измерению расстояний и других) следует предпосылать вводную беседу с демонстрацией эскизов съемочных работ, например, съемки по ходовой линии («с магистрали»).

При рассмотрении порядка работ выясняется необходимость начинать с тех или иных первичных операций: вешения, построения прямого угла, измерения расстояний и др.

Если вводная беседа хорошо продумана, то второстепенные детали не будут заслонять перед учащимися сущность работы, ее смысл и связь с теоретическим курсом геометрии.

8. О летней производственной практике можно сказать следующее.

Учащиеся VIII и IX классов по новому учебному плану заканчивают экзамены к 1 июня. Если отвести на летний отдых 2 месяца, то остающийся третий месяц ученики VIII и IX классов должны работать на производстве, как это и проводится в жизнь большинством средних сельских школ. Опыт показывает, что некоторые учащиеся средних школ работают коллекторами в геологических партиях, рабочими в геодезических съемках, в биологических экспедициях, в результате чего они овладевают многими полезными навыками.

Не входя в подробности организации такого рода летней производственной практики, скажем, что учебные формы съемочных работ, рекомендованных и описанных в руководстве, послужат необходимой подготовкой к такого рода летней практике и к дальнейшей жизненной деятельности.

ПРИМЕРНЫЙ ПЕРЕЧЕНЬ РАБОТ

V—VII классы

1. Вешение:

а) разметка прямолинейных направлений;

б) нахождение точки пересечения двух направлений;

в) продолжение отрезка, данного на местности.

2. Измерение расстояний:

а) мерной лентой (рулеткой, веревкой);

б) шагами или парами шагов;

в) циркулем («метровкой»);

г) временем, затраченным на передвижение;

д) на глаз, при помощи таблицы видимости;

е) косвенное определение расстояния между двумя точками («ориентирами»), разделенными недоступным пространством.

3. Построение и измерение углов:

а) эккером;

б) угломерами («астролябия», эклиметр);

в) применение компаса для измерения азимутов и румбов.

4. Съемка плана участка:

а) эккером и рулеткой по ходовой линии; например, съемка плана пруда;

б) шагомерная, по ходовой линии;

в) угломером и рулеткой — обходом;

г) маршрутная, с компасом;

д) мензульная из одного полюса и из двух полюсов.

5. Нивелирование:

а) горизонтальным лучом (нивелир);

б) наклонным лучом (эклиметр).

6. Измерение площадей.

7. Изучение форм рельефа.

8. Дополнительные работы разного рода в кружках, во время каникул.

VIII—X классы

1. Определение расстояний дальномером.

2. Съемка плана участка:

а) зеркальным эккером по ходовой линии;

б) буссолью, обходом с определением азимутов сторон;

в) гониометром, по ходовой линии и обходом;

г) накладка плана по координатам при съемке обходом с помощью гониометра;

д) теодолитом, обходом с накладкой плана по координатам;

е) мензульная;

ж) теодолитом (буссолью, гониометром, угломером) — триангуляция.

3. Нивелирование:

а) эклиметром (например, геологическим) — определение высоты предмета, горизонтального проложения, недоступных расстояний;

б) нивелиром — определение превышений;

в) теодолитом, кипрегелем — определение превышений;

г) решение задач на топографическом плане.

4. Дополнительные работы (фотосъемка и др.).

> Примечание. Работы рассчитаны на учащихся общеобразовательной школы; некоторые неточности и отклонения от строгих приемов технической съемки неизбежны в учебном школьном практикуме.

Практика показывает, что виды работ в большинстве своем повторяются, постепенно усложняясь, в зависимости от характера работы и возраста учащихся от V до X класса.

Разумеется, что в школах, впервые приступающих к работам на местности, иногда придется начинать простые и элементарные работы не только в V классе, но и в старших. В этом случае будет необходима известная перепланировка работ при сохранении общего строя и системы занятий. На стр. 9 приводится таблица, в которой освещается характер работ, проводимых в V—X классах.

Ввиду того, что в отведенное программой время невозможно провести все указанные здесь работы, при организации практических занятий следует использовать различные формы проведения этих работ: часть из них делается в урочное время; другие—изучаются факультативно, в кружках; третьи—планируются в виде месячного практикума в летний период. Наконец, следует учесть, что в данном пособии имеются работы, из которых учитель может выбрать наиболее подходящие для местных условий, для данного класса.

В руководство введены разделы, посвященные учету ошибок при измерениях и вычислениях (часть II).

Известно, что до сих пор в школах не выработана подлинная культура вычислений, не развит твердый навык в разумном учитывании точности, размерности анализируемых величин при числовой обработке изучаемых процессов.

Во второй части дается система сведений по этому вопросу, необходимая для выработки определенных знаний. В ней читатель найдет минимум приемов, обоснований, выводов, которыми должен владеть каждый учащийся.

Во II и III частях имеются трудности, касающиеся математического обоснования. Но, с одной стороны, эти сложности доступны учащимся VIII—X классов, а с другой — указанные выводы можно перенести на математический кружок. При всех условиях приведенные в книге трудности значительно легче

Примерное распределение работ по классам

Виды работ	Классы		
	V	VI	VII
Вешение	+	+	+
Измерение расстояний	+	+	+
Построение углов 45° и 90° при помощи эккера	+	+	+
Измерение углов		+	+
Работы с компасом	+	+	+
Масштаб и план	+	+	+
Съемка по ходовой линии	+	+	+
Съемка обходом		+	+
Мензульная съемка			+
Нивелирование			+
Рельеф			+
Измерение площадей	+	+	+
Разметка гряд, клумб и т. п.	+	+	+

	VIII	IX	X
Определение расстояний дальномером	+	+	+
Съемка по ходовой линии с зеркальным эккером	+		
Съемка обходом буссолью по азимутам сторон	+		
Съемка по ходовой и обходом гониометром	+	+	
Накладка плана по координатам		+	+
Съемка обходом теодолитом		+	+
Мензульная съемка	+	+	
Триангуляция		+	+
Определение высоты предмета, горизонтального проложения, недоступных расстояний	+	+	+
Нивелирование горизонтальным лучом	+	+	
Нивелирование наклонным лучом		+	+
Решение задач на топографическом плане	+	+	+
Фотосъемка			+

Примечание. Крестиком (+) обозначены работы, проводившиеся в данном классе.

многих задач, решаемых в школе. Например назовем вопрос о негоризонтальности лимба теодолита. По существу это интересная практическая задача на сечение двугранного угла, которая доступнее многих задач из школьного обихода. Кроме того, учителю нетрудно эти отдельные сложности просто опустить, сообщив учащимся лишь выводы.

Авторы стремились выдержать основную идею книги как пособия по прикладным вопросам математики, в данном случае в области геодезии. Однако многие вопросы геодезии, имеющие большое практическое значение (например, барометрическое определение высоты), нами опущены, так как они должны войти в курс физики.

Авторы выражают благодарность научным работникам сектора математики Института методов обучения АПН РСФСР, принимавшим участие в обсуждении данной работы, а также В. М. Брадису, В. Т. Кайрис и Е. Г. Ларченко, чьи полезные советы были использованы. Глубокую благодарность авторы приносят А. И. Фетисову, оказавшему помощь в подготовке пособия.

Часть I

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ПО ГЕОДЕЗИИ

ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ РАБОТЫ В КУРСЕ V—VII КЛАССОВ

Основные сведения по геодезии

Измерительные работы в курсе V—VII классов

КРАТКАЯ ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА

Геодезия является наукой, в задачу которой входит изучение формы Земли в целом, а также составление планов и карт путем измерений как на земной поверхности, так и под землею.

Геодезия по-гречески значит землеразделение *. Она возникла еще в древние времена. Известно, что в Египте ежегодно производились работы по разделению прибрежной полосы после разливов Нила. Устройство водопровода с подземной галереей в Ниппуре также требовало землемерных работ. В связи с мореплаванием и астрономией большое внимание в древности уделялось определению формы и размеров Земли, составлению карт.

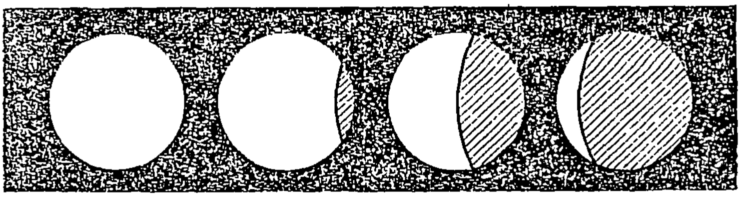


Рис. 1. Фазы луны

Так, в VI в. до н. э. халдейские жрецы на основании наблюдений лунных затмений пришли к выводу, что Земля — шар (рис. 1). Они обратили внимание на то обстоятельство, что

* Geo — земля, daisia — делю.

границы падающей от Земли на Луну тени всегда идут по окружности, а это может быть только в том случае, если Земля шарообразна. Гипотезу о шарообразности Земли поддерживали и греческие ученые. Аристотель, наблюдая звездное небо, пришел не только к выводу, что Земля — шар, но указал, что

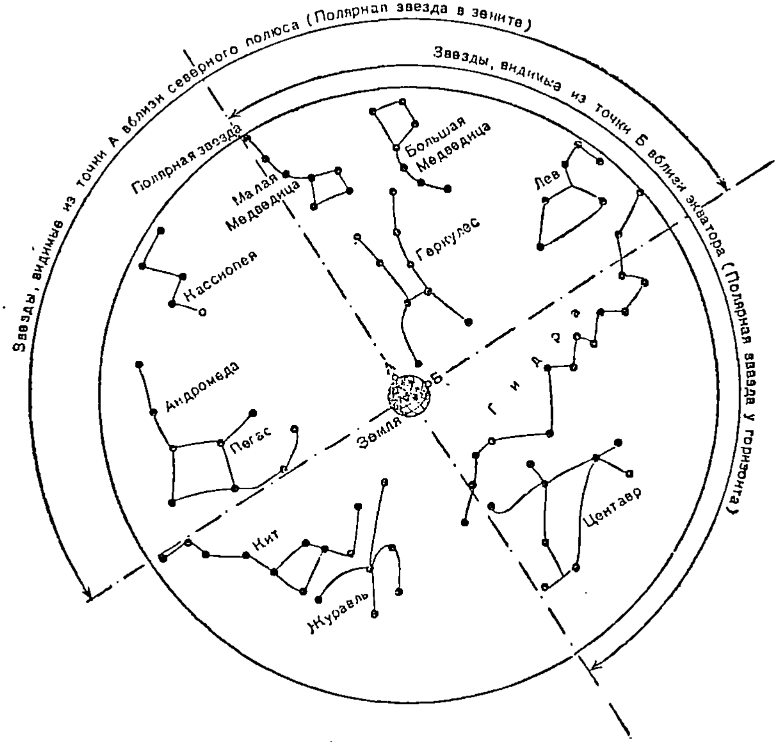


Рис. 2. Видимость неба

размеры Земли не особенно велики, так как достаточно незначительно передвинуться на север или юг, и звездное небо становится другим (рис. 2). Правда, доказательство Аристотеля не подтвердило положения о кривизне Земли при перемещении с запада на восток, поэтому для утверждения, что Земля — не цилиндр, Аристотель привел следующее рассуждение. В самой восточной для того времени стране — Индии — и в самой западной — у Гибралтарского пролива — водятся слоны, а в промежуточных странах их нет. Следовательно, запад сходится с востоком, а иначе слоны не могли бы попасть в эти страны.

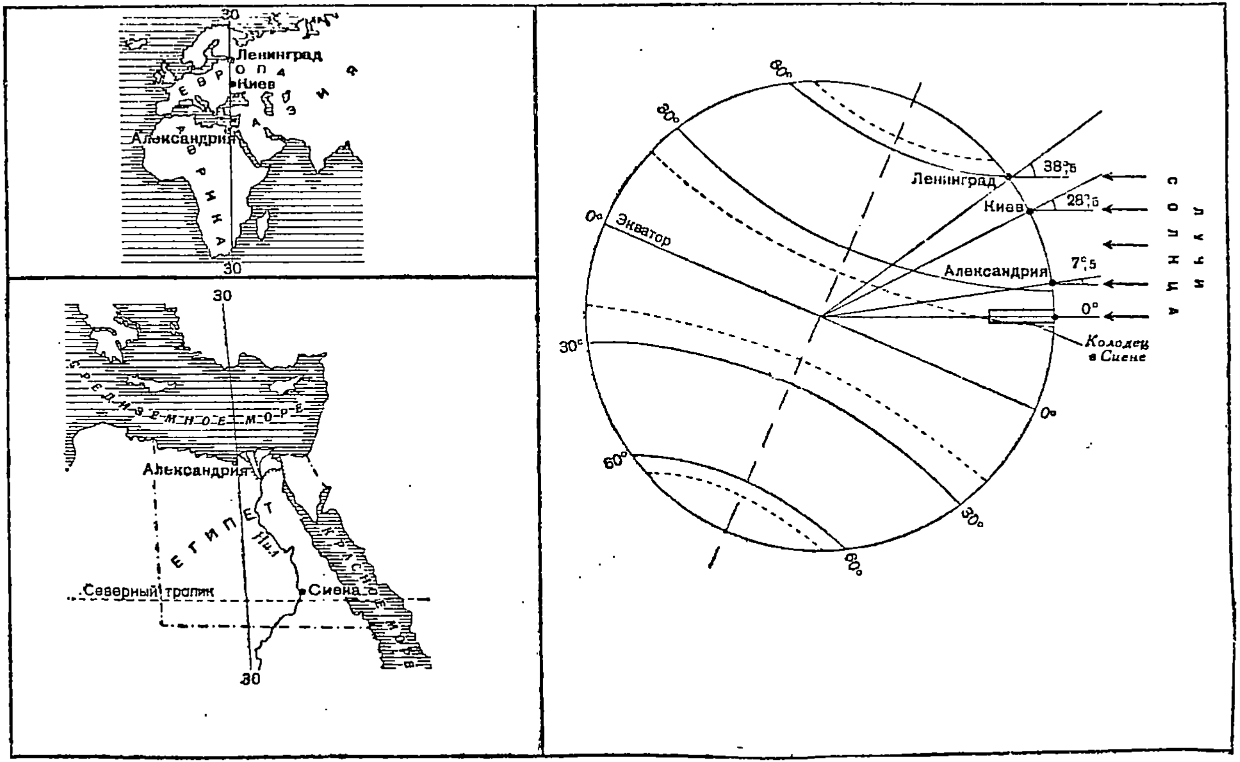


Рис. 3. Измерение Эратосфена

Наивное доказательство случайно привело к правильному выводу, а авторитет Аристотеля был так велик, что его выступление в пользу шарообразности Земли прекратило споры о ее форме.

Несколько позже другой греческий ученый — Эратосфен — произвел первое так называемое градусное измерение Земли.

Он измерил дугу меридиана между городами Сиена и Александрия (рис. 3). Эратосфену было известно, что в городе Сиене имеется глубокий колодец, дно которого раз в год в 12 часов дня освещается Солнцем. Следовательно, Солнце в этот момент находится в зените *, т. е. зенитное расстояние равно 0°. В это же время зенитное расстояние Солнца в Александрии, измеренное специальным прибором — скафисом, составило 7°,2 (рис. 4).

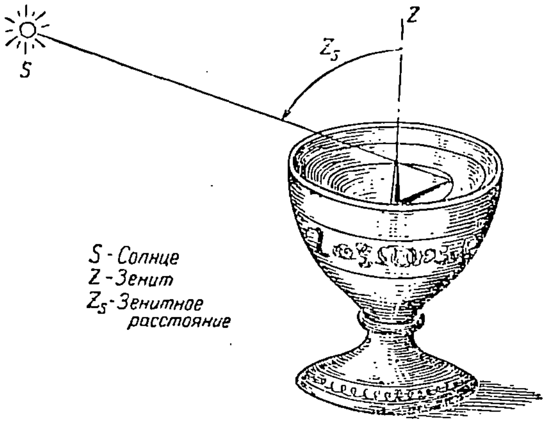


Рис. 4. Скафис

Очевидно, что в полной окружности Земли дуга Сиена — Александрия уложится 50 раз, ибо

$$\frac{360^\circ}{7^\circ{,}2} = 50.$$

Расстояние между городами Сиена и Александрия составляло, по словам купцов, постоянно ездивших по этому пути, 5000 стадий, откуда окружность Земли оказывалась равной $5000 \times 50 = 250\,000$ стадий.

Греческая стадия равна 189,7 *м*, а египетская — 158 *м*.

* Зенит — наивысшая точка небесной сферы, находящаяся над головой наблюдателя. Слово «зенит» произошло от арабского samt — направление; возникло путем ошибочного прочтения буквы «m» за «ni»

В первом случае окружность Земли составит 47 425 *км;* во втором — 39 500 *км.*

Второй результат очень близок к истине, но даже и первый, дающий ошибку примерно на 7,5 *тыс. км,* можно считать для того времени вполне удовлетворительным.

После Эратосфена еще многие ученые древности определяли размеры Земли. Полученные ими результаты даны ниже, в табл. на стр. 23.

Следует отметить, что во всех этих, а также и позднейших работах, самым слабым местом было измерение расстояния на земной поверхности между пунктами, в которых велись астрономические наблюдения. И только в 1615—1618 гг. голландский математик Снеллиус, используя способ греческого ученого Фалеса Милетского, с большей точностью измерил расстояние между городами Алькмааром и Берген-оп-Зоомом. Дуга, измеренная Снеллиусом, составила 1°11'30". Его работа явилась первой в мире триангуляцией * — способом, которым инженеры-геодезисты успешно пользуются до настоящего времени.

По измерениям Снеллиуса, дуга в 1° оказалась равна 55 021 туазу **, а окружность Земли — 38 605 *км.* Следует отметить, что, применяя весьма совершенный метод, Снеллиус не имел точных угломерных инструментов, и это сказалось на результатах измерений.

Такую же работу проделал в 1670 г. французский академик Жан Пикар. Он использовал прибор с оптической трубой и, кроме того, для точного наведения трубы пристроил к инструменту микрометрический винт ***.

Базис длиною около 10 *км* был тщательно провешен и дважды измерен деревянными брусками. Расстояние между городами Амьеном и Мальваузеном было разбито на 35 треугольников. В результате этой работы 1° оказался равным 57 060 туазам, а окружность — 40 036 *км.*

Несколько позже большие градусные измерения были проведены французскими учеными Кондамином и Мопертюи, измерившими участки дуги в Перу и Лапландии. Эти измерения проводились для выяснения более точной формы Земли. Дело в том, что великий английский ученый Ньютон высказал предположение, что Земля не сфера, а эллипсоид вращения, сплюснутый у полюсов (рис. 5, 6, 7). При этом он подсчитал, что сжатие **** Земли равно 1/230 ($\approx$0,4 %).

---

* От латинского triangulus — треугольник.

** Туаз — старая французская мера длины около двух метров, точнее, 1 туаз = 1,949 *м.*

*** Винт с мелкой нарезкой, которая обеспечивает равномерное небольшое перемещение.

**** См. табл. на стр. 23.

Форма Земли

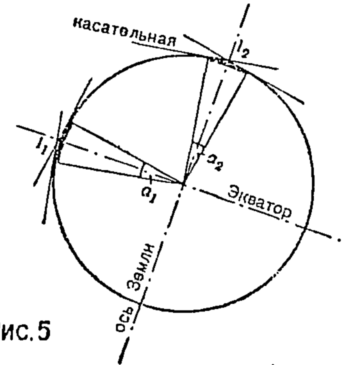


Рис. 5

Если Земля шар, то дуга, равная, например, 1°, имеет одну и ту же длину в любом месте меридиана. При $a_1 = a_2$; $l_1 = l_2$.

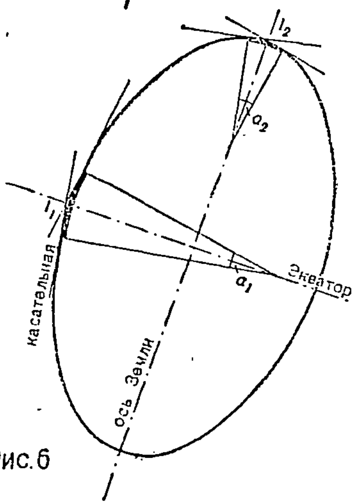


Рис. 6

Если Земля эллипсоид, сплюснутый по экватору, то дуга, равная 1°, имеет разную длину в различных частях меридиана. При $a_1 = a_2$; $l_1 > l_2$.

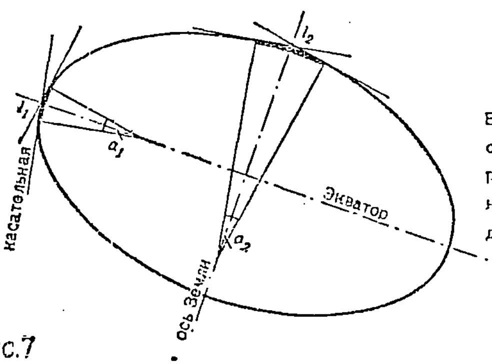


Рис. 7

Если Земля эллипсоид, сплюснутый у полюсов, то дуга, равная 1°, имеет разную длину в различных частях меридиана. При $a_1 = a_2$; $l_1 < l_2$.

Голландский физик Гюйгенс был на стороне Ньютона, но, по его расчетам, сжатие равнялось 1/518, т. е.≈0,2% (рис. 8).

Их противники утверждали обратное: Земля вытянута к полюсам.

Решить этот спор можно было только проведением градусных измерений.

Эти измерения показали, что длина дуги в 1° зависит от широты:

Лапландия — 57 438 туазов (Мопертюи).

Франция —57 060 туазов (Пикар).

Перу — 56 753 туаза (Кондамин).

Предположения Ньютона полностью подтвердились.

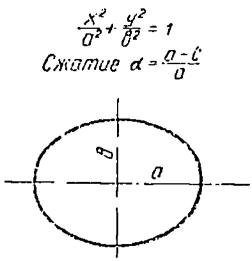


Рис. 8. Сжатие

В 1792—1797 гг. французский академик Деламбр по распоряжению законодательного собрания Франции провел большие градусные измерения (рис. 9) от Дюнкерка до Родеза. Эти измерения послужили основанием для введения метрической системы мер. Деламбр установил новую линейную меру—

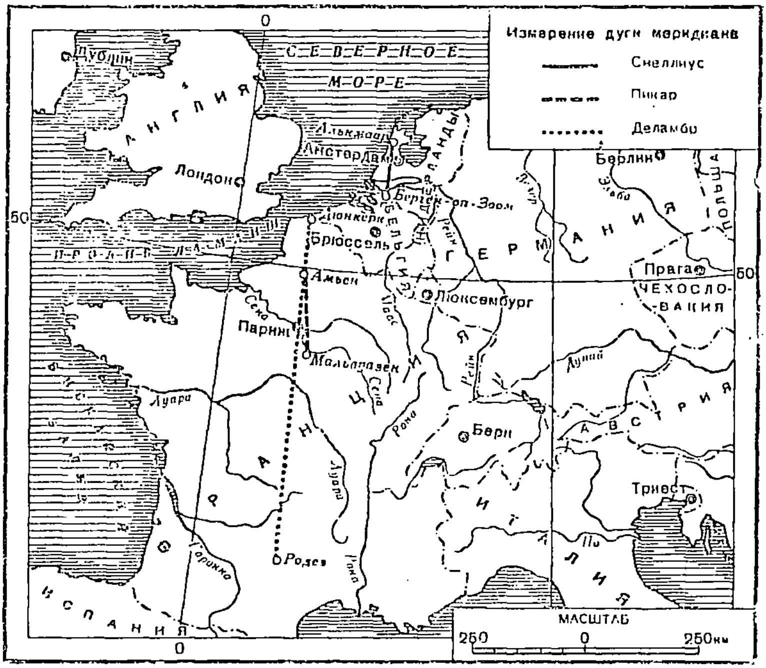


Рис. 9. Измерение дуги меридиана

метр, равную одной десятимиллионной части четверти меридиана *.

Работы Деламбра показали, что принимать Землю за эллипсоид нельзя. Знаменитый ученый Лаплас, анализируя данные Деламбра, пришел к выводу, что форма Земли очень своеобразна и сложна. Геометрическое тело, представляющее Землю, назвали геоидом.

ВАСИЛИЙ ЯКОВЛЕВИЧ СТРУВЕ
(1793—1864)

В XIX в. (1816—1855) большую работу по градусным измерениям провели русские геодезисты. Под руководством акад. В. Я. Струве они измерили дугу (так называемая «Дуга Струве») от устья Дуная до северного берега Скандинавии, равную 25°20′. По точности эти измерения превосходили все предыдущие. Ошибки в измерении углов были не более 0″,5, а относительная ошибка измерения базисов — 1 : 1 000 000.

* В действительности метр несколько короче 0,0000001 четверти меридиана, так как измерения Деламбра не были достаточно точны. Поэтому за метр примят эталон, изготовленный в 1800 г. и представляющий собой платиновую линейку шириной 25 *мм* и толщиной 3,5 *мм*. Торцевые плоскости линейки (жезла), тщательно отполированные, перпендикулярны продольной оси. В 1889 г. Международным бюро мер и весов был изготовлен 31 жезл длиной 1,02 *м* из сплава платины (90%) и иридия (10%). Сплав этот отличается большой устойчивостью и неизменяемостью. На жезлах нанесены два штриха, расстояние между которыми принято за метр. В СССР находятся жезлы № 11 и № 28.

Итак, в результате градусных измерений, проведенных в различных странах в XVIII, XIX и начале XX вв., было установлено, что Земля — геоид и только приближенно может рассматриваться как эллипсоид. Размеры эллипсоида, наиболее близко подходящие к геоиду, были определены в 1940 г. советскими геодезистами под руководством чл.-корр. Академии наук СССР Ф. Н. Красовского.

ФЕОДОСИЙ НИКОЛАЕВИЧ КРАСОВСКИЙ
(1878—1948)

Постановлением Совета Министров СССР от 7 апреля 1946 г. новый эллипсоид («эллипсоид Красовского») принят в СССР для всех геодезических работ. Шар, равный по объему эллипсоиду Красовского, имеет радиус 6 371,11 *км*.

Советскими геодезистами были проведены градусные измерения дуги, намного превышающей знаменитую дугу Струве. Так, по 52-й параллели выполнено градусное измерение от границы Польши до Владивостока (см. карту триангуляции СССР, рис. 10).

Параллельно с работами по определению формы и размеров Земли во всех странах велись работы по составлению планов и карт.

Первые сведения о применении геодезии в России для составления карт относятся к 1068 г., когда по приказу князя Глеба было измерено расстояние между городами Тамань и Керчь по льду Керченского залива.

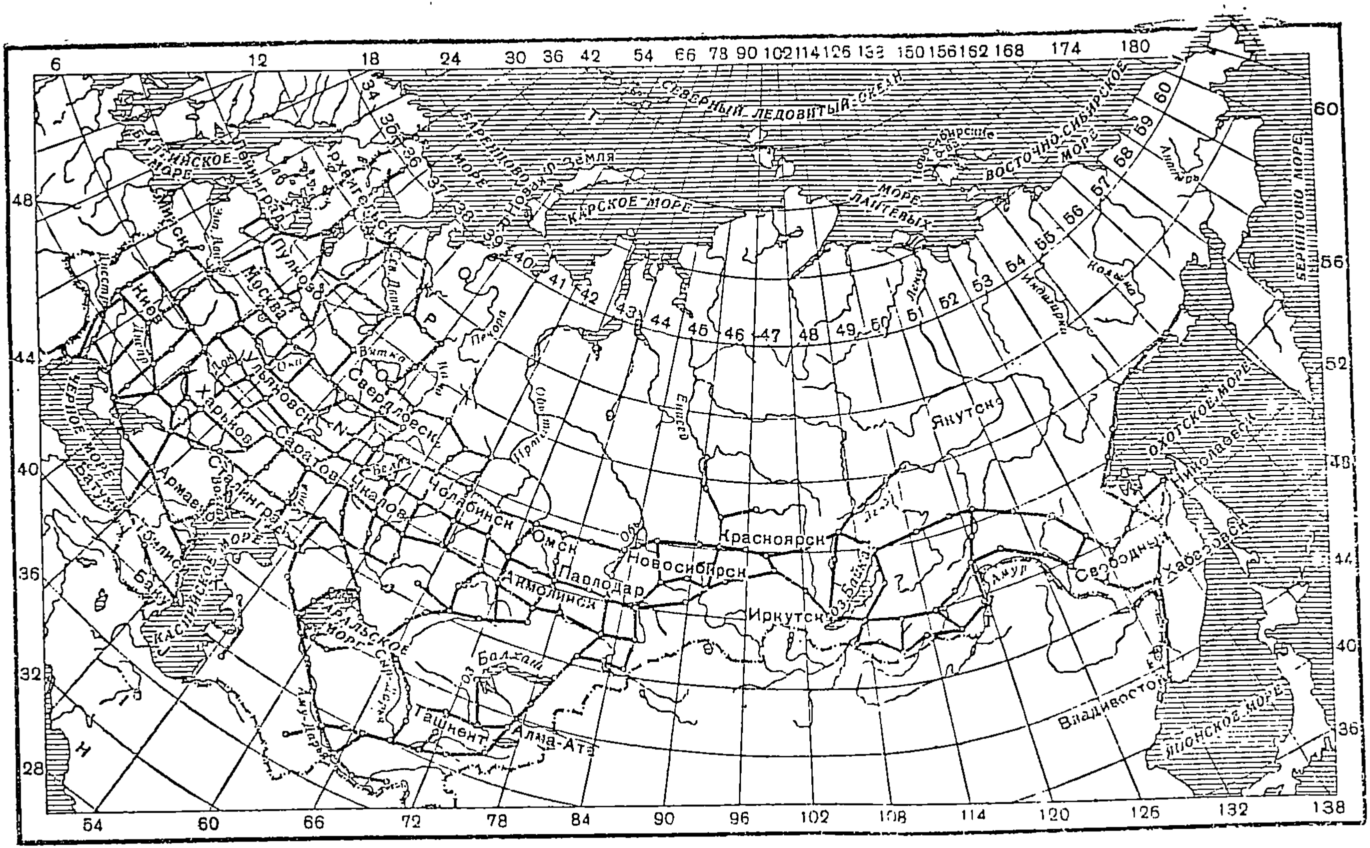


Рис. 10. Триангуляция СССР

(по книге Б. Н. Рабиновича „Основы построения опорных геодезических сетей", М., Геодезиздат, 1948)

Результаты основных измерений земли

Фамилия ученого	Век или год	Большая полуось a ($м$)	Малая полуось $в$ ($м$)	Сжатие $\frac{a-в}{a}$	Длина меридиана ($м$)
Эратосфен	III до н. э.				39 500 000 или 47 425 000
Клеомед	III „ „				59 910 000
Посидоний	I „ „				34 146 000
Халиб-ибн-Абдулмалик и Али-ибн-Иса	IX н. э				41 779 000
Снеллиус	1618				38 605 000
Пикар	1670				40 036 000
Деламбр	1800	6 375 653	6 356 564	1 : 334,0	40 000 000
Бессель	1841	6 377 397	6 356 079	1 : 299,2	40 003 424
Кларк	1880	6 378 249	6 356 515	1 : 293,5	40 007 472
Хейфорд	1909	6 378 388	6 356 912	1 : 297,0	40 009 152
Красовский	1940	6 378 245	6 356 863	1 : 298,3	40 008 552

Около 1570 г. была составлена одна из первых карт Московского государства, так называемый «Большой чертеж» *. Карта эта составлялась по маршрутным съемкам.

В 1667 г. П. Годунов, а в 1698 г. С. Ремезов составили карту Сибири, и в 1701 г. С. Ремезов закончил «Чертежную книгу Сибири» — первый русский атлас. В том же, 1701 г., Петр I

* Оригинал и копия 1627 г. не сохранились.

основал в Москве школу «Математических и «навигацких» наук», готовившую астрономов, гидрографов и геодезистов. Преподавателем в младших классах этой школы был Л. Ф. Магницкий, издавший в 1703 г. книгу под названием «Арифметика, сиречь наука числительная, с разных диалектов на словенский язык переведенная учителем математики Леонтием Магницким».

В 1720 г. ряд геодезистов был направлен в шесть губерний для проведения топографических съемок и составления планов или, как их тогда называли, ландкарт. В это же время геодезисты И. М. Евреинов и Ф. Ф. Лужин произвели съемки на Камчатке и Курильских островах.

С 1758 г. Географическим департаментом Академии наук начал руководить великий русский ученый Михаил Васильевич Ломоносов.

В 1765 г. был издан манифест о генеральном межевании, по которому проводились геодезические работы в 36 губерниях вплоть до середины XIX в. В 1797 г. при Генеральном штабе создается Депо карт, преобразованное позже в Корпус военных топографов, который и вел основные работы в XIX и начале XX в.

После Великой Октябрьской революции всеми геодезическими работами стало руководить Высшее геодезическое управление, а затем Главное управление геодезии и картографии (ГУГК) при Совете Министров СССР.

ХРОНОЛОГИЧЕСКАЯ ТАБЛИЦА

Киевская Русь

1068 г.— измерено расстояние Тамань — Керчь.

Московское государство

1570 г.— составлен «Большой чертеж» (карта Московского государства).

Россия

1667 г.— составлена карта Сибири Тобольским воеводой П. Годуновым.

1698—1701 гг.— составлена «Чертёжная книга Сибири» (первый русский атлас) С. Ремезовым.

1720 г.— 1) составлены «Ландкарты» (планы) 6 губерний; 2) съемка на Камчатке и Курильских островах.

1734 г.— составлены карты всей России.

1765 г.— издан манифест о генеральном межевании 36 губерний.

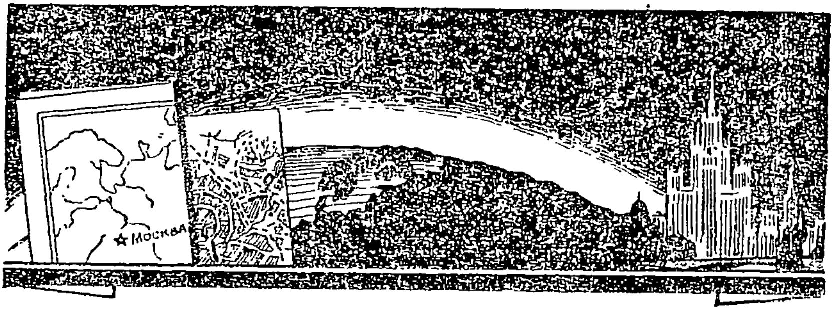
1797 г.— создано Депо карт при Генеральном штабе.

1816—1855 гг.— под руководством В. Я. Струве измерена дуга меридиана — «Дуга Струве» ($l = 25° \ 20'$).

СССР

1919 г.— создано Геодезическое управление.

1946 г.— в СССР принят «эллипсоид Красовского» для всех геодезических работ.



ПЛАН И КАРТА

Если съемка производится на сравнительно небольшой площади (протяженность примерно не более 20 *км*), то чертеж, дающий в уменьшенном масштабе подобное изображение ортогональной проекции местности, называется планом. Таким образом, план получается проектированием объектов местности на плоскость, и кривизна Земли при этом не учитывается (рис. 11). При съемке больших пространств производить проектирование на плоскость уже нельзя, нужно учитывать кривизну Земли, т. е. в первом приближении проектировать на

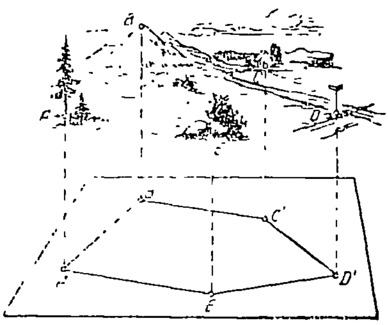


Рис. 11. Ортогональная проекция

сферу (рис. 12). Кроме того, необходимо найти способы развертывания сферической поверхности на плоскость для изображения местности на бумаге.

Составленное с учетом этих условий изображение местности называется картой.

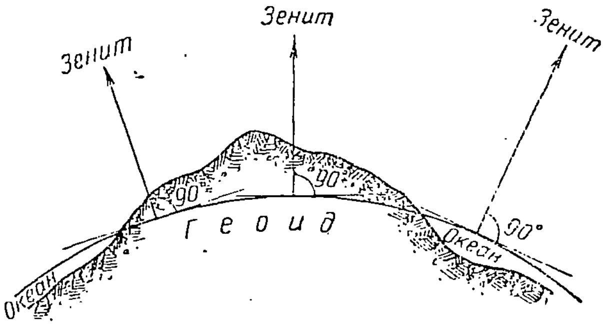


Рис. 12. Проекция на геоид

Подкрепим эти положения необходимыми математическими данными.

Легко представить себе, что небольшой участок местности можно без ущерба для точности проектировать на плоскость. Так, например, при стороне участка 1000 *м* угол между линиями, проведенными из концов участка к центру Земли (рис. 13), будет равен:

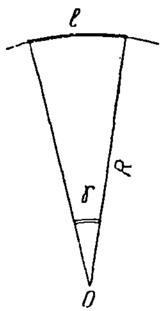


Рис. 13. Длина дуги

$$\gamma = \rho \frac{l}{R},$$

где

ρ — 1 радиан $\approx 57°,3' \approx 3438' \approx 206265''$;

l — расстояние на поверхности земли в *км* (дуга);

R — радиус земли в *км* (приближенно 6 400 *км*).

$$\gamma'' = 206\,265 \frac{1}{6\,400} \approx 32'' \approx 0',5.$$

При расстоянии, равном 100 *км*, этот угол будет уже около 1° (точнее, 53′) и создаст значительную ошибку.

Действительно, разность между касательной $BC = S$ и дугой $BC' = s$ в зависимости от величины дуги может быть выведена из следующих соображений (рис. 14).

$$S = R \operatorname{tg} \alpha;$$

$$s = R\alpha;$$

$$S - s = R (\operatorname{tg} \alpha - \alpha).$$

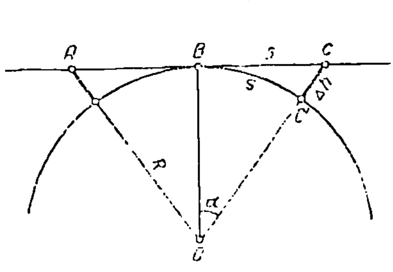


Рис. 14. Связь дуги с касательной

Известно*), что $\operatorname{tg} \alpha = \alpha + \frac{1}{3}\alpha^3 + \frac{2}{15}\alpha^5 + \ldots$

Ограничиваясь в силу выбранной точности двумя членами ряда, напишем:

$$S - s = R\left(\alpha + \frac{1}{3}\alpha^3 - \alpha\right) = \frac{R\alpha^3}{3}\ .\ \text{Но}\ \alpha = \frac{s}{R},$$

откуда $S - s = \frac{Rs^3}{3R^3} = \frac{s^3}{3R^2}$. Обозначим $S - s$ через Δs и, задаваясь предельно допустимым значением $\Delta s_{\text{пред.}}$, подсчитаем допустимую величину s.

Величину $\Delta s_{\text{пред.}}$ следует брать, исходя из графической точности плана. Из опыта установлено, что 0,1 *мм* является наименьшим расстоянием, различимым простым глазом. Для разных масштабов 0,1 *мм* на плане изображает различную величину местности, т. е. $\Delta s_{\text{пред.}}$ для М 1 : 1 000 будет равна 10 *см*, а для М 1 : 25 000 $\Delta s_{\text{пред.}} = 2{,}5$ *м*.

Ниже в таблице даны значения s для разных масштабов, подсчитанные по формуле

$$s = \sqrt[3]{\Delta s_{\text{пред.}} \cdot 3R^2}.$$

Масштаб 1 : m	Δs пред.= 0,1 · m (*км*)	s (*км*)
1 : 1 000	0,0001	23
1 : 10 000	0,0010	49
1 : 25 000	0,0025	67

Величина ошибки в положении точки по высоте, при отсутствии учета кривизны Земли, может быть получена из чертежа на рис. 14.

Действительно, $(R + \Delta h)^2 = R^2 + S^2$; откуда

$$\Delta h = \frac{S^2}{2R + \Delta h}\ .$$

* См. В. М. Брадис, Четырехзначные математические таблицы, М., Учпедгиз, 1955.

Из предыдущего известно, что S мало отличается от s. Например, при $s = 20$ *км*:

$$\Delta s = \frac{s^3}{3R^2} = \frac{20\,000^3}{3{,}6371^2 \cdot 10^6} = 0{,}07 \text{ м, откуда}$$

$$S = s + \Delta s = 20\,000{,}00 + 0{,}07 = 20\,000{,}07 \text{ м}.$$

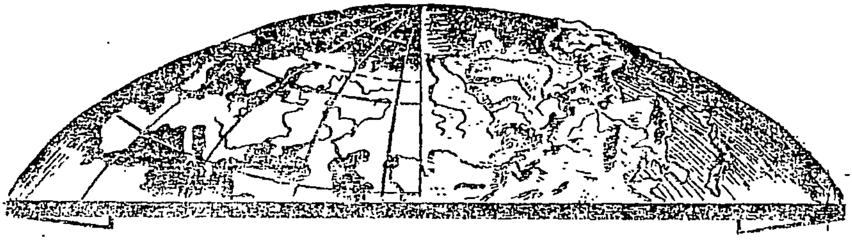
Поэтому, заменяя S величиной s и отбрасывая по малости Δh в знаменателе (Δh мало по сравнению с $2R$), получим окончательно

$$\Delta h = \frac{s^2}{2R}.$$

Ниже в таблице даны величины Δs и Δh для s от 1 до 100 *км*.

Расстояние на местности s (*км*)	Ошибка в горизонтальном расстоянии Δs (*м*)	Ошибка по высоте Δh (*м*)
1	0,00	0,08
5	0,00	1,96
10	0,01	7,85
20	0,07	31,39
50	1,02	196,20
100	8,21	784,81

Из этой таблицы следует, что влияние кривизны Земли на ошибку в положении точки по высоте весьма значительно, поэтому в работах по нивелированию это обстоятельство строго учитывается.



МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ И НУМЕРАЦИЯ (НОМЕНКЛАТУРА) ТОПОГРАФИЧЕСКИХ КАРТ СССР

Каждому школьнику известно, что на многих географических картах масштаб можно применять только по некоторым направлениям *.

Это получается вследствие того, что изображение сферической поверхности на плоскости получается искаженным. Легко понять, что искажения будут тем больше, чем большую часть земной поверхности нужно изобразить на данной карте. На всех картах всегда изображается их математическая основа — сетка меридианов и параллелей. Наука, изучающая математические методы изображения на плоскости шара или эллипсоида — математическая картография — дает, в зависимости от требований, предъявляемых к карте, способы построения этой сетки. Топографические карты, которыми пользуются для измерительных целей, должны иметь единый масштаб по всем направлениям, поэтому для уменьшения искажений до практически пренебрегаемой величины они строятся по особому принципу. Вся поверхность земного шара разбивается на зоны шириной 6° по долготе **, идущие от северного полюса до южного.

Наибольшая ширина зоны на экваторе равна:

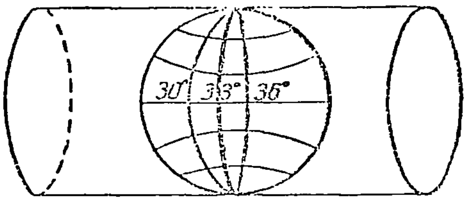
$$\frac{40\,000\ \textit{км}}{360^\circ}\cdot 6^\circ \approx 668\ \textit{км};$$

У полюсов она равна нулю.

* См. Географический атлас для V и VI классов средней школы, стр. 1. ГУГК, 1956.

** Там же, ширина зоны 15°.

Топографические карты СССР строятся в проекции Гаусса, которая получается следующим образом (рис. 15). Выделим на сфере, изображающей Землю, одну шестиградусную зону, например от 30 до 36°, и впишем эту сферу в цилиндр так, чтобы средний (осевой) меридиан (33°) был касателен



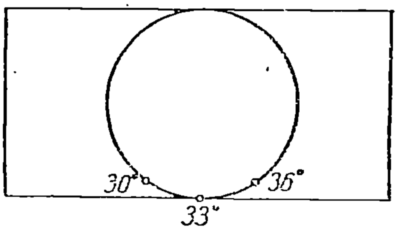


Рис. 15. Проекция части сферы на цилиндр

цилиндру. После этого каждую точку зоны спроектируем на цилиндр, а затем боковую поверхность цилиндра развернем в плоскость *.

Изображение зоны показано на рисунке 16, причем, естественно, что осевой меридиан будет перпендикулярен экватору.

Условие конформности при переходе со сферы на плоскость приводит к искажениям масштаба. Однако при шестиградусных зонах эти искажения практического значения не имеют. Искажение масштаба растет по мере удаления от осевого меридиана.

В курсах геодезии доказывается, что максимальная относительная ошибка в длине линии на краю зоны самой южной

---

* Проекция Гаусса равноугольная, т. е. в ней сохраняется равенство соответствующих углов на карте и на местности. Иначе говоря, эта проекция конформная. В ней сохраняется подобие изображения всякой бесконечно малой фигуры.

части СССР (на широте 36°) будет $\frac{1}{1100}$, а к северу, естественно, еще меньше *.

Рассмотрим теперь масштабы и номенклатуру топографических карт СССР.

Топографические карты выпускаются у нас в масштабах 1:25 000, 1:50 000, 1:100 000, 1:200 000, 1:500 000 и 1:1 000 000.

Они составляются по материалам аэрофотосъемки. Крупномасштабные карты в масштабах от 1 : 200 до 1 : 10 000 составляются различными организациями для своих специальных целей.

Как указано выше, вся территория земного шара разбита на шестиградусные зоны (так называемые фюзо) **, начиная с меридиана 180°.

1 зона — 180°—174° зап. долготы;
2 » — 174°—168° » »
. . . .
30 » — 6°— 0° » »
31 » — 0°— 6° вост. долготы
и т. д.

Всего 60 зон. Поэтому номер зоны определяется долготой места (рис. 17). Например, долгота Москвы равна около 37° восточной долготы; следовательно, Москва находится в зоне 36°—42° (так как начальный и конечный меридиан зоны кратны шести). От Гринвичского меридиана это будет седьмая зона, а так как начало принято у 180°, то Москва находится в 37 зоне.

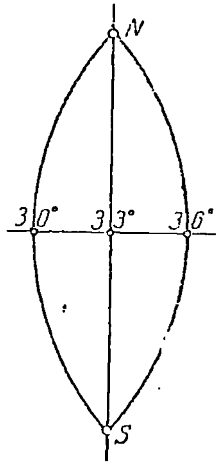


Рис. 16.
Шестиградусная зона

Каждая зона, кроме того, разбита параллелями через 4°, начиная от экватора, причем каждой полосе присвоена буква латинского алфавита.

Получившиеся в результате такой разбивки трапеции, равные по долготе 6° и по широте 4°, соответствуют одному листу карты в масштабе 1 : 1 000 000.

---

* Действительно, удлинение (Δl) отрезка на цилиндре по сравнению с отрезком (l) на шаре выражается формулой $\Delta l = l\,\frac{y^2}{2R^2}$, где y удаление точки от осевого меридиана, R радиус шара. На широте $\varphi = 36°$ дуга параллели, равная 1° имеет длину ≈ 90 *км*. Следовательно, при шестиградусной зоне $y_{max} = 3° \approx 270$ *км*.

Откуда

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{y^2}{2R^2} = \frac{270^2}{2\cdot 6400^2} \approx \frac{1}{1100}.$$

** Сферический двуугольник.

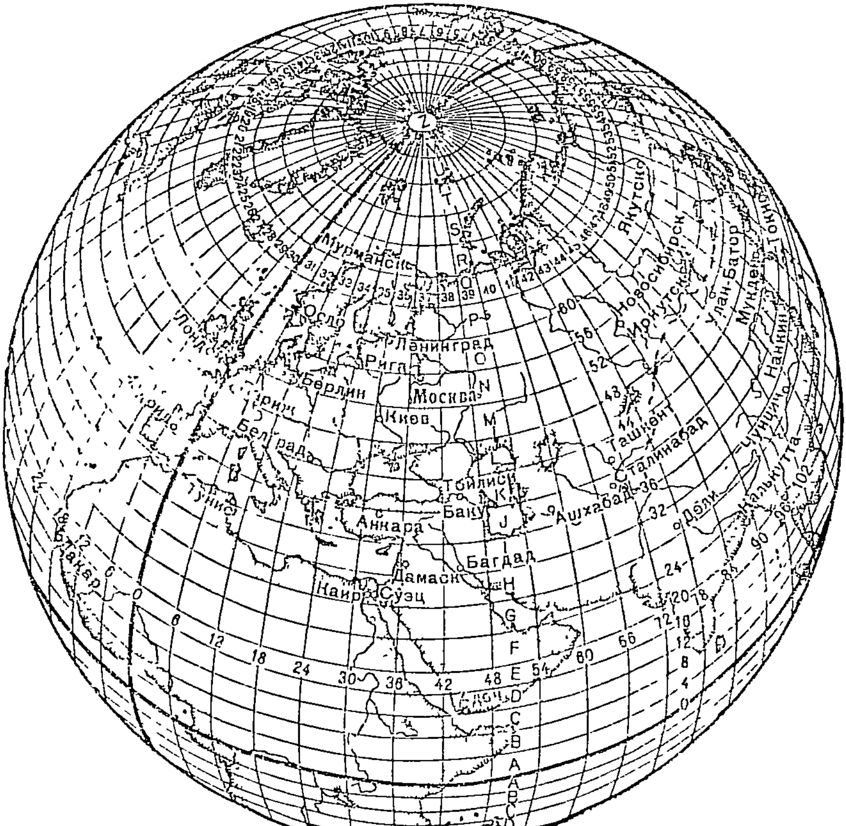


Рис. 17.
Международная разграфка
листов карты масштаба
1 : 1 000 000

Обозначение такой трапеции, например той, в которой находится Москва, будет N—37 (рис. 18). Эти трапеции являются исходными для карт всех последующих масштабов.

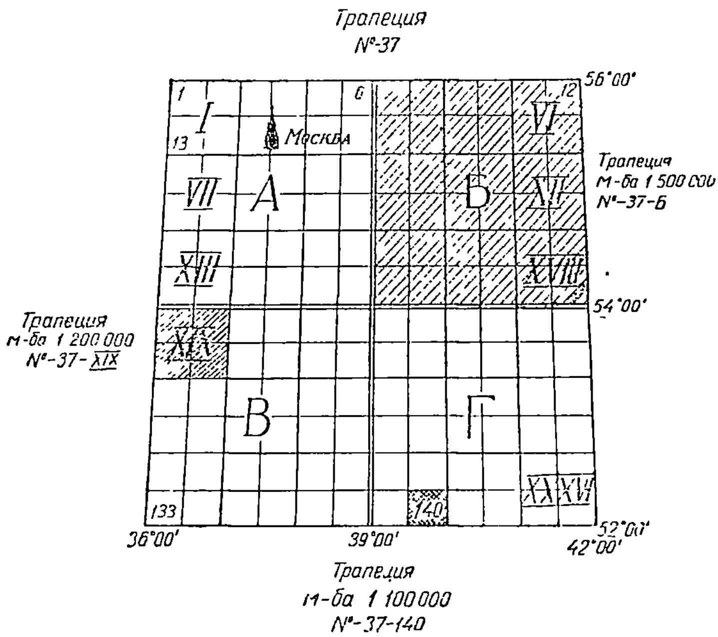


Рис. 18. Лист карты масштаба 1 : 1 000 000

Так, например, четыре листа карты 1 : 500 000, или 36 карт 1 : 200 000, или, наконец, 144 карты 1 : 100 000 содержатся в трапеции карты 1 : 1 000 000.

Карты 1 : 500 000 обозначаются заглавными буквами русского алфавита А,Б,В,Г, например N—37—$Б$ карты 1: 200 000 —римскими цифрами от I до XXXVI (N—37—XIX), а карты 1 : 100 000—арабскими цифрами от 1 до 144 (N—37—140).

В таблице на стр. 35 приведены данные и номенклатура карт масштабов 1 : 500 000, 1 : 200 000 и 1 : 100 000.

При дальнейшем делении листов за основу принимается лист 1 : 100 000, содержащий в себе 4 листа 1 : 50 000. Последующее деление ясно из рисунка 19 на стр. 34 и таблицы на стр. 36.

Следует обратить внимание на то обстоятельство, что на все топографические карты для удобства пользования наносится прямоугольная координатная сетка, общая для всей дан-

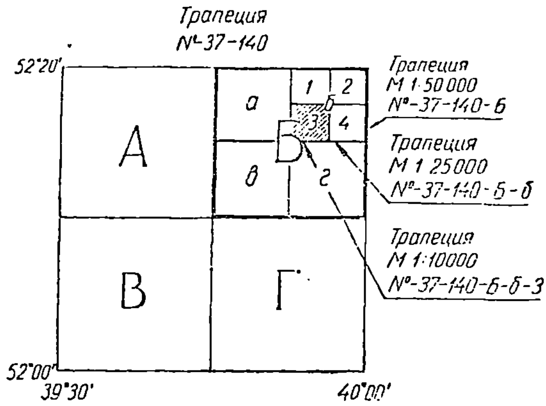


Рис. 19. Лист карты масштаба 1 : 100 000

ной зоны (рис. 20). За ось абсцисс принимается осевой меридиан зоны, за ось ординат — экватор. Во избежание отрица-

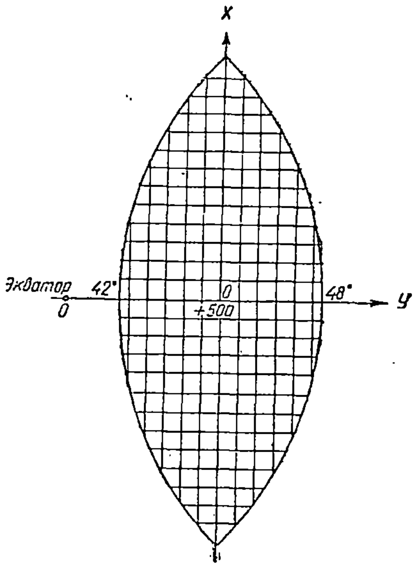


Рис. 20. Координатная сетка

тельных ординат начало координат условно переносится на 500 *км* влево, т. е. точке *O* присваивается ордината + 500 *км* *.

* Ордината геодезическая (см. стр. 316).

Номенклатура карт

Масштаб карты	Число листов в одном листе карты М 1:1 000 000	Пример номенклатуры*	Размер рамки трапеции в градусной мере		Примерный размер рамки на широте Москвы			
					на карте, в *мм*		на местности, в *км*	
			по широте	по долготе	по широте	по долготе	по широте	по долготе
1 : 500 000	4	*N*—37—*Г*	2°	3°	435	360	220	180
1 : 200 000	36	*N*—37—XIX	40′	1°	360	300	72	60
1 : 100 000	144	*N*—37—140	20′	30′	360	300	36	30

* Для указания полушария перед номенклатурой листа помещают еще букву *N* (Nord – север) или *S* (*S*üd—юг).

Номенклатура карт

Масштаб карты	Число листов в одном листе предыдущего масштаба	Пример номенклатуры	Размер рамки трапеции в градусной мере		Примерный размер рамки на широте Москвы			
					на карте, в *мм*		на местности, в *км*	
			по широте	по долготе	по широте	по долготе	по широте	по долготе
1 : 100 000	—	*N*—37—140	20′	30′	360	300	36	30
1 : 50 000	4	*N*—37—140—Б	10′	15′	360	300	18	15
1 : 25 000	4	*N*—37—140—Б—б	5′	7′,5	360	300	9	8
1 : 10 000	4	*N*—37—140— —Б—б—3	2′,5	3′,75	450	375	4,5	4

Для определения положения точки на земной поверхности перед ординатой точки ставят номер зоны, причем в этом случае счет зон идет от Гринвичского меридиана к востоку. Например, ордината $y = 8\,350$ *км*. Следовательно, точка расположена в 8-й зоне от Гринвича, т. е. между 42 и 48° восточной долготы, на 150 *км* к западу от осевого меридиана (45°).

Специальное рамочное оформление дает возможность определить по карте координаты точек местности как в прямоугольной системе координат, так и в географической.

Заметим в заключение, что теоретически все меридианы и параллели, кроме осевого меридиана и экватора, изображаются на картах в проекции Гаусса кривыми линиями.

Однако практически эти искривления в пределах одного листа так малы, что трапеции ограничены прямыми линиями.

Топографические карты составляются в крупных масштабах, и поэтому они с большой полнотой отражают основные черты данной местности: реки, озера, леса, болота, луга и другие угодья, населенные пункты, искусственные сооружения, железные шоссейные и грунтовые дороги, тригонометрические пункты, колодцы, отдельно стоящие деревья и т. д. Помимо этого, на картах приводятся данные о породе и высоте леса, судоходности реки, скорости течения, бродах и т. д.

Следует особо сказать об изображении на картах рельефа при помощи горизонталей. Благодаря этому карта как бы приобретает объемность и дает возможность решать различные задачи в трех измерениях.

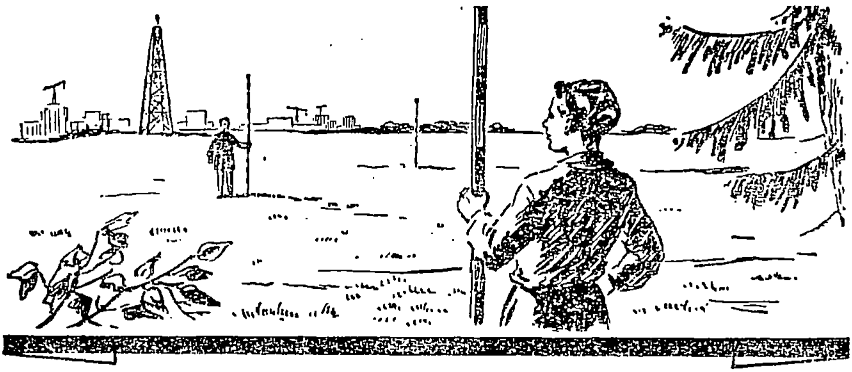
Свободное чтение и пользование топографической картой требует хорошей математической подготовки и отличного знания условных знаков.

Итак, главной задачей науки геодезии является изучение формы и размеров Земли.

Этим занимается раздел геодезии, называемый высшей геодезией. Высшая геодезия тесно связана с другой математической наукой, от которой она получает многие исходные данные — астрономией. Без учета кривизны земной поверхности, т. е. без участия высшей геодезии, нельзя было бы производить съемки больших территорий и составлять точные карты.

Составлением же планов, т. е. изображением на бумаге сравнительно небольших площадей, занимается другой раздел геодезии — топография или, как ее часто называют, низшая геодезия.

В связи с развитием фотографии и авиации, все большее значение приобретает способ составления планов и карт путем фотографирования земной поверхности с самолета, а также с помощью наземного фотографирования. Наука, занимающаяся этими вопросами, называется аэрофототопографией, или аэрофотогеодезией.



ВЕШЕНИЕ

Вешением, или провешиванием (от «веха», «вешить»), называется обозначение на местности прямых линий при помощи вех длиной около 2 *м*, а также колышков (см. приложение 1). Начальная и конечная вехи определяют положение прямой; кроме того, на отрезке ставят еще промежуточные вехи или колышки. Чем длиннее провешиваемый отрезок и чем большая требуется точность проводимой работы, тем больше выставляется промежуточных вех и колышков. При длине отрезка в 100 *м* выставляется примерно около 5—6 вех (колышков).

Вехи следует устанавливать вертикально. Если грунт мягок, то веху следует несколько раз втыкать в землю, поворачивать, вынимать и снова с силой втыкать в то же гнездо, повторяя это до тех пор, пока веха не будет твердо держаться в грунте. После этого нужно проверить веху на вертикальность и заправить гнездо, притаптывая землю ногой. В твердом грунте нужно сделать сначала лунку при помощи колышка и колотушки.

При учебных работах на полу или асфальте используются вехи с подставками в виде креста или доски (см. приложение 1).

Работа 1

Вешение линии

Рабочая группа: 5 человек.

Оборудование: 1) 8—10 вех;

2) 2 колышка;

3) колотушка (киянка, мушкель).

Выполнение

1. Выбрать открытое место и поставить по концам выбранного отрезка (около 100 *м*) две вехи.

2. Наблюдателю так расположиться за вехой метрах в двух-трех, чтобы видеть совпадение концевых вех (передняя веха покрывает заднюю).

3. Помощникам наблюдателя взять по вехе и встать вдоль линии (вблизи, но не на самой линии!) примерно на равных расстояниях друг от друга.

4. Самому дальнему от наблюдателя помощнику первым поставить промежуточную веху.

5. Наблюдатель показывает рукой помощнику, если нужно передвинуть веху вправо или влево.

Два взмаха обеими руками означают, что веха выставлена правильно, а помощник должен уйти с линии (см. рис. 21).

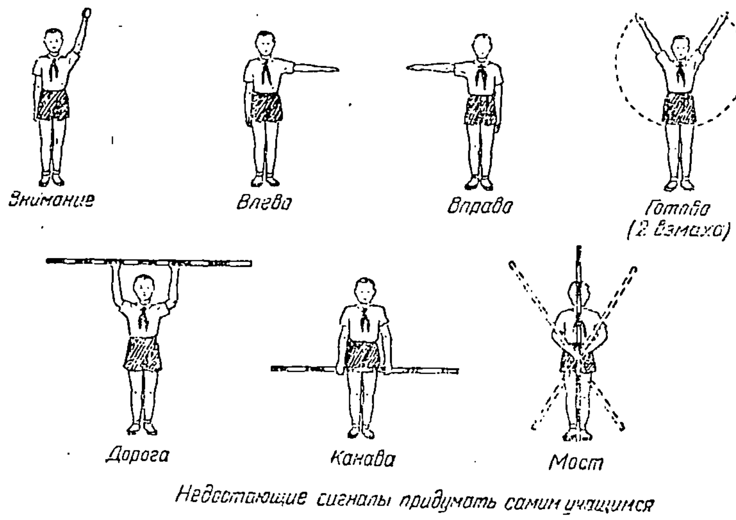


Рис. 21. Таблица сигнализации

Продолжая работу, установить остальные вехи. Наблюдателю на другом конце прямой проверить, верно ли провешена линия и вертикально ли стоят вехи (рис. 22).

6. Двум-трем помощникам поочередно занять место наблюдателя и проверить по одной линии.

Указания: 1) полезно предварительно провешить прямую линию в классе при помощи поднятых рук с карандашами или во дворе, построившись на линейку;

2) угол подъема руки показывает на бо́льшую или меньшую величину перемещения вехи;

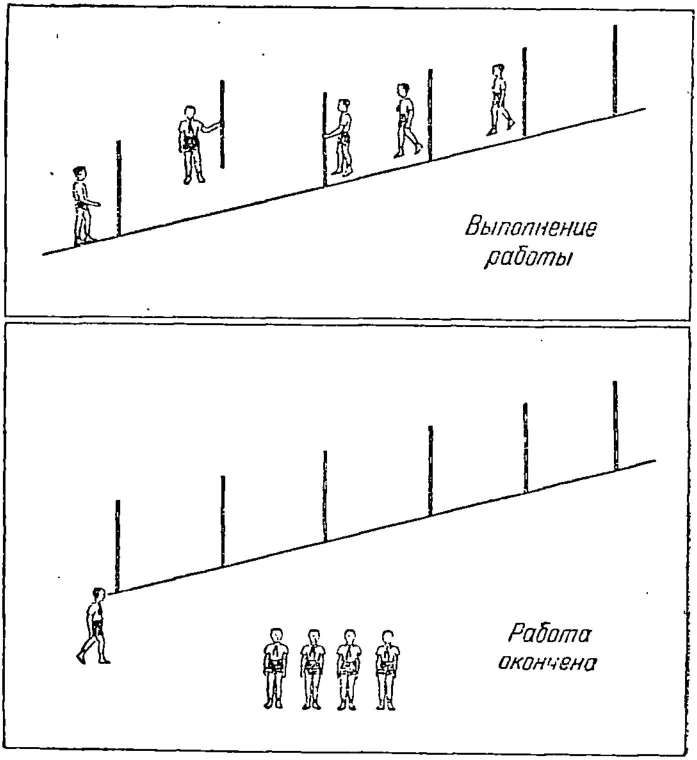


Рис. 22. Вешение

3) вешение целесообразнее (при разметке вехами) производить, начиная с дальней вехи, на себя. Иной порядок снизит точность работы, так как передняя веха загораживает исходную конечную веху. При разметке линии колышками порядок вешения не влияет на точность.

Работа 2

Вешение линии при помощи двух вех и набора колышков

Рабочая группа: 2 человека (наблюдатель и помощник).

Оборудование: 1) 2 вехи; 2) 8—10 колышков; 3) колотушка.

Выполнение

1. Вбить колотушкой два колышка на концах выбранного отрезка.
2. Разложить остальные колышки вдоль линии примерно на равных расстояниях друг от друга.

3. Наблюдателю встать над первым колышком, а помощнику установить веху на месте последнего колышка. Прямая определяется двумя точками: глаз наблюдателя — конечная веха.

4. Установить точно места промежуточных колышков, начиная с самого дальнего от наблюдателя; на этих местах помощник сначала выставляет свободную веху, чтобы она закрывала первую.

5. Заменить второй вехой первый колышек, над которым стоял наблюдатель.

Работа 3

Отыскание на местности точки пересечения двух направлений

Рабочая группа: 5—6 человек.

Оборудование: 1) 5 вех; 2) колышки; 3) колотушка.

Задача. На местности даны 4 пункта (A, B, C, D), из которых никакие три не лежат на одной прямой.

Отметить точку пересечения прямых AB и CD.

Выполнение

Вариант I.

1. Выставить 4 вехи в указанных точках A, B, C, D.

2. Расположить за каждой из четырех вех по наблюдателю для установки вех и проверки правильности их положения.

3. Направить пятого работающего вдоль одной линии, например AB, взмахами рук поправляя его движение.

4. Наблюдателям, стоящим в точках C и D, остановить идущего по линии AB, когда он окажется на прямой CD, или, как говорят, «в створе CD» (рис. 23).

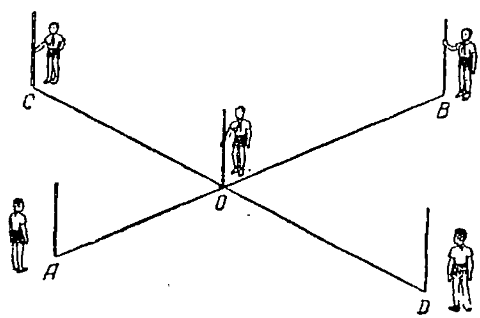


Рис 23. Пересечение двух направлений (вариант I)

5. Тщательно выправить положение найденной точки O и отметить ее колышком.

6. Повторить всю работу, переменив места работающих и направив пятого по линии CD.

Вариант II.

1. Выставить 4 вехи в указанных точках A, B, C, D.

2. Расположить за каждой из четырех вех по наблюдателю для вешения и проверки правильности положения вех.

3. Пятый участник группы выставляет одну дополнительную веху на направлении AB; пусть это будет веха M (рис. 24).

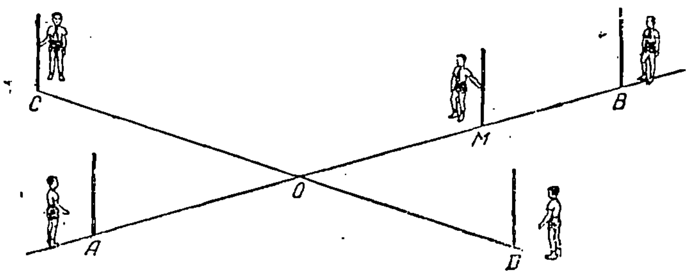


Рис. 24. Пересечение двух направлений (вариант II)

4. Выставив веху M, пятый участник направляется из пункта M в пункт A, а оттуда идет к пункту B, ориентируясь по вехам M и B. Наблюдатели, стоящие в точках A и B, проверяют его движение.

В точке O его останавливают взмахом руки наблюдатели C и D.

После проверки выставляется веха O.

Работа 4

Продолжение заданного на местности отрезка

Вариант I.

Продолжить на местности отрезок AB при условии, что движение начинается от пункта B (рис. 25).

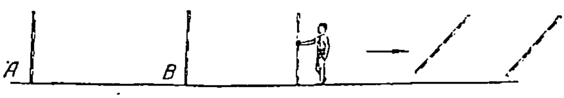


Рис. 25. Вешение на продолжение («от себя»)

Вариант II.

Та же задача при условии, что работа начинается с пункта C и движение идет по направлению к B (рис. 26).

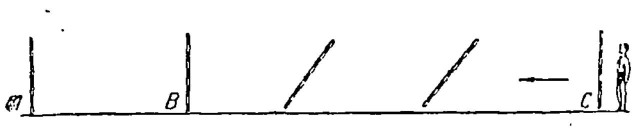


Рис. 26. Вешение на продолжение («на себя»)

Указания к выполнению работы («инструкционную карту») поручить составить учащимся по приведенным выше образцам.

Работа 5

Вешение отрезка, концы которого недоступны

Если конечные точки A и B взаимно видимы, но доступа к ним нет, то для провешивания линии пользуются последовательным приближением (рис. 27).

Рабочая группа: 2 человека.

Оборудование: 2 вехи.

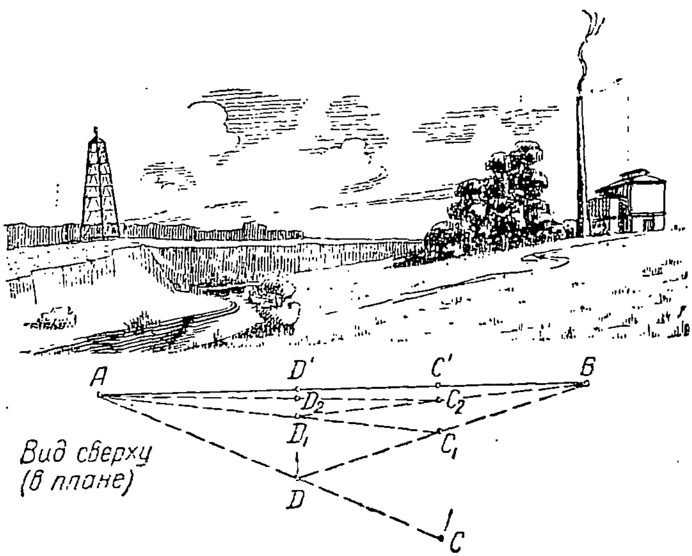


Рис. 27 Вешение между недоступными точками

Выполнение

1. Один ученик встает (как ему кажется) на прямой AB, например в точке C (на чертеже возможное отклонение точки C преувеличено для наглядности), другому дается указание выставить веху в створе прямой CA, в какой-нибудь точке D.

2. Второй дает указание, чтобы первый передвинулся в створ прямой DB в точку C_1.

3. Продолжать то же до положения C' и D', когда обе вехи будут на линии AB (рис. 27).

Работа 6

Вешение линии через холм

Рабочая группа: 3 человека.
Оборудование: 5 вех.

Выполнение

1. Первому наблюдателю встать приблизительно на линии AB, например в точке C (рис. 28), и дать указания второму

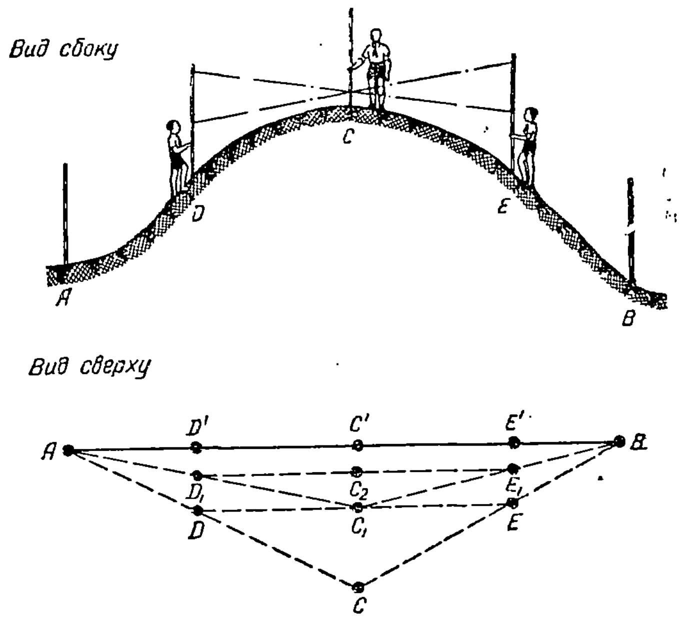
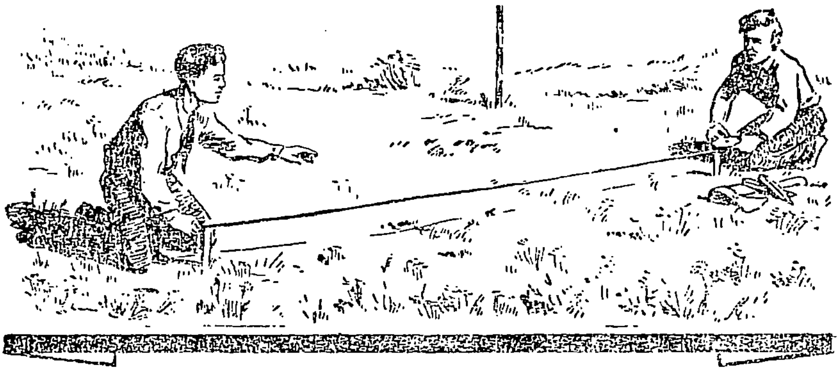


Рис. 28. Вешение через холм

и третьему наблюдателям выставить вехи в створе линий AC и BC (в точках D и E). Точки эти должны быть расположены так, чтобы второй и третий наблюдатели видели по крайней мере верхушки вех (второй — веху E, а третий — веху D). Вехи в этом случае надо ставить особо тщательно в вертикальное положение.

2. Далее работа продолжается последовательным приближением (см. предыдущую работу). Второй наблюдатель дает указание первому передвинуться в створ линии DE, т. е. в точку C_1. Дальнейшая работа ясна из чертежей, и учащиеся должны сами доработать инструкцию.



ИЗМЕРЕНИЕ РАССТОЯНИЙ

Большинство работ по съемке местности связано с измерением расстояний. Различные работы этого рода требуют различной степени точности, которая определяет как выбор инструментов, так и способ измерения.

Работа 1

Измерение расстояния мерной лентой (рулеткой, веревкой)

Рабочая группа: 3 чел. (2 мерщика, 1 ведущий журнал).

Оборудование: 1) мерная лента (рулетка, веревка с узлами); 2) 2 кольца и 11 шпилек; 3) вехи и колышки для вешения; 4) колотушка; 5) полевой журнал (образец см. ниже); 6) карандаш, резинка, нож, угольник.

Выполнение

1. Разграфить полевой журнал по нижеследующему образцу (на образце пример заполнения граф при десятиметровой рулетке).

Точки	Число		Число		Число метров в неполном ходе	Общая длина в метрах
	передач	метров	ходов в неполной передаче	метров		
A	2	200	4	40	6,3	246,3
B	4	400	7	70	3,7	473,7
C						

2. Выставить вехи на концах отрезка и провешить линию.

3. Заднему мерщику заменить веху шпилькой и надеть на нее начальный конец ленты. На руку повесить кольцо для шпилек.

4. Переднему мерщику, взяв другое кольцо с остальными десятью шпильками и другой конец ленты, направиться вдоль измеряемой линии.

5. Когда лента натянется, закрепить ее конец шпилькой.

Указания: 1) заднему мерщику выправлять положение переднего в створе измеряемой линии;

2) шпилька, выставленная первым мерщиком, обозначает первый отсчет длины ленты («первый ход»).

6. Заднему мерщику снова поставить веху на место шпильки, а шпильку повесить на кольцо и взять с собой.

7. Обоим двигаться вперед вдоль линии, пока задний достигнет шпильки, выставленной передним.

8. Заднему мерщику надеть начало ленты на шпильку и дать указание выправить направление ленты вдоль провешенной линии; переднему слегка натянуть ленту и воткнуть в ее конец следующую шпильку («второй ход»).

9. Заднему вынуть шпильку и повесить ее на кольцо. Обоим продвигаться вперед.

10. Продолжать измерение тем же порядком (рис. 29).

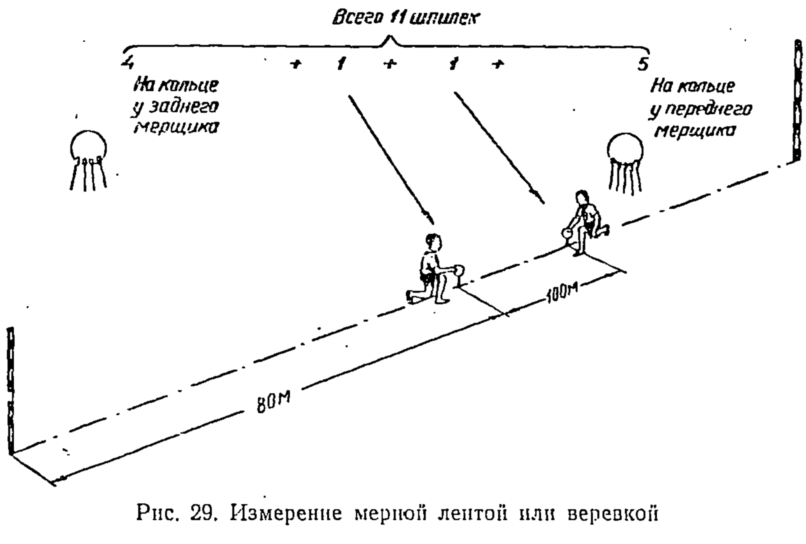


Рис. 29. Измерение мерной лентой или веревкой

11. После 10 ходов, когда второй (передний) израсходует все 10 шпилек, а первый (задний) их соберет, сделать в жур-

нале отметку об одной «передаче» (10 ходов — одна переда-
ча) и передать 10 шпилек переднему.

Указание. Одиннадцатая шпилька остается у заднего мерщика для закрепления начала ленты и в подсчет не входит.

12. При последнем неполном ходе отсчитать число метров этого хода; записать отсчет в журнал.

Записи в журнал делаются простым карандашом средней твердости, но не химическим, так как сделанные им надписи при попадании влаги (капель дождя) на бумагу расплываются, и большая работа может быть испорчена.

Рис. 30. Образец записи

Запись должна быть четкой. Если записаны неверные данные, то их нужно аккуратно перечеркнуть и произвести запись снова (рис. 30).

Работа 2

Измерение расстояний шагами

Прежде всего необходимо установить длину пары шагов в метрах. Для этого берется на местности выверенное расстояние, например расстояние между километровыми столбами, и проходится ровным шагом. Счет пар шагов ведется под левую или правую ногу. Каждая сотня пар шагов отмечается загибанием пальца на руке. При счете рекомендуется произносить лишь десятки и единицы пар шагов. Общий результат, составленный из сотен, десятков и единиц, записать в таблицу, по которой устанавливается размер пары шагов (см. табл. на стр. 49).

Если выверенного расстояния в данной местности нет, нужно выставить при помощи рулетки две вехи на расстоянии 200—400 *м* друг от друга.

Подсчет пар шагов на одном расстоянии выполнить каждому не менее трех раз, вывести среднюю длину двойного шага и составить таблицу перевода в метры.

Определение средней длины одной пары шагов

Фамилия, имя	Номер наблюдения	Число метров	Число пар шагов	Всего метров	Всего пар шагов	Средняя длина пары шагов и одного шага в метрах	Средняя величина одного метра в шагах
Иванов Лева							
	1	1000	835				
	2	1000	858				
	3	500	425	2500	2118	1,18; 0,59;0,6*	1,7

* Округление до дециметра допустимо

Перевод шагов в метры

Шагов	Метров	Шагов	Метров	Шагов	Метров
1	0,6	10	6,0	100	60,0
2	1,2	20	12,0	200	120,0
3	1,8	30	18,0	300	180,0
4	2,4	40	24,0	400	240,0
5	3,0	50	30,0	500	300,0
6	3,6	60	36,0	600	360,0
7	4,2	70	42,0	700	420,0
8	4,8	80	48,0	800	480,0
9	5,4	90	54,0	900	540,0

Работа 3, *А*

Определение скорости движения

Рабочая группа: 2 человека.

Оборудование: 1) часы; 2) мерная лента; 3) полевой журнал; 4) карандаш, резинка, угольник.

Выполнение

1. Разграфить полевой журнал по образцу:

Образец журнала и пример заполнения

Пункты		Время		Промежуток времени в минутах	Расстояние в метрах	Средняя скорость хода в метрах в минуту	Движение
начальный	конечный	выхода	прихода				
А	*В*	13 ч. 15 м	13 ч. 32 м.	17	1000	59	Пешком по ровной дороге
В	*С*	11 ч. 57 м.	12 ч. 06 м.	9	2000	222	На велосипеде по ровной дороге
С	*D*	3 ч. 21 м.	3 ч. 43 м.	22	1000	45	Пешком по пересеченной местности

Выбрать на местности два пункта, расстояние между которыми известно (например, километровые столбы); провести по ним определение средней скорости движения по времени, затраченному на покрытие известного расстояния.

2. Пользуясь полученными данными, составить график, показывающий связь времени движения пешехода, всадника, велосипедиста и пройденного ими расстояния (рис. 31).

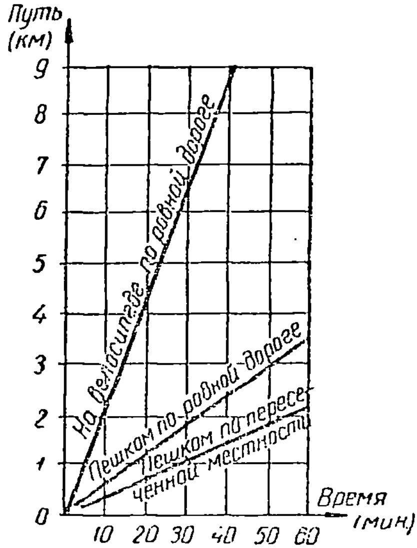


Рис. 31. График зависимости пути от времени

Работа 3, *Б*

Определение расстояния по затраченному времени

1. Пройти (проехать) намеченный путь, отметив время начала и конца движения.

2. Заполнить полевой журнал.

3. Провести проверку измерения: 1) измерением в обратном направлении; 2) измерением выбранного расстояния другим лицом.

4. Определить расстояние по графику.

Работа 4

Определение расстояния на глаз

При глазомерном определении расстояний принято сравнивать их с расстояниями, которые наблюдателю хорошо известны, привычны. Предлагаемое сравнение проводится с учетом видимости местных предметов, в зависимости от дальности расстояния, от освещения, окраски предмета и т. п.

Лучшим приемом при глазомерных определениях расстояний является последовательное откладывание на глаз хорошо изученного на местности расстояния в измеряемом отрезке. Эти работы следует продолжать при изучении углов и площадей.

Полезно взять за правило — при всех практических работах на местности предварительно определять размеры на глаз; в частности, пристально следить за правильностью отображения фигуры при составлении абриса.

Работа 5

Измерение расстояния *AD*

Способ параллельного перенесения

На пути провешиваемой прямой *AD* может оказаться препятствие (пруд, болото). Задача состоит в том, чтобы обходным движением (*BE, EF, FC*) получить необходимое продолжение *CD* (рис. 32).

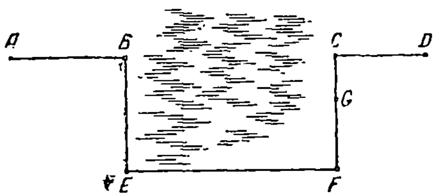


Рис. 32. Параллельное перенесение

Рабочая группа: 3 человека.

Оборудование: 1) веревка с отмеченными сторонами египетского треугольника (3, 4, 5); 2) мерная лента; 3) 5—7 вех; 4) колышки, колотушка.

Выполнение

1. Отрезок *AB* прямой провешить и измерить.
2. Наметить в точке *B* направление *BE*, перпендикулярное *AB*.
3. Измерить расстояние *BE*.
4. Наметить в точке *E* направление *EF*, перпендикулярное *BE*, и измерить его.
5. Наметить в точке *F* направление *FG*, перпендикулярное *EF*.
6. Найти точку *C*, лежащую одновременно в створе *A—B—D* и *GF*. Для контроля отрезок *FC* измерить; он должен быть равен *BE*. Допустимое расхождение $\frac{1}{50}$.

7. Измерить расстояние CD.

8. Все рабочие точки отмечать вехами, а по миновании надобности заменять колышками.

9. Найти сумму отрезков $AB + EF + CD$.

Указание. Для построения прямых углов на местности можно пользоваться египетским треугольником: берется веревка, на которой через метр закрепляются металлические метки или завязываются узлы. Концы веревки связываются между собой. Общая длина должна быть равна 12 *м*. Построение угла производится так: 1) любой узел прикладывается к колышку, забитому в землю в точке на прямой, к которой желают провести перпендикуляр; 2) второй колышек на линии забивается на расстоянии 4 *м*, и веревка закидывается за него; 3) третьим колышком веревку натягивают у узла, находящегося в 3 *м* от первого и 5 *м* от второго; затем колышек забивается в землю. Направление с 1-го на 3-й колышек будет перпендикулярно направлению с 1-го на 2-й.

Работа 6

Измерение расстояния BC

Способ равных треугольников или симметрии относительно точки

Если между пунктами B и C находится препятствие, а самые пункты B и C доступны, то можно использовать свойство равенства треугольников (рис. 33).

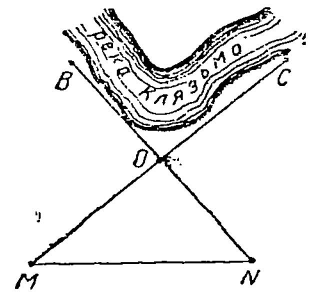


Рис. 33. Симметрия относительно точки

Для этого выбирается точка O, из которой видны и доступны точки B и C. Затем провешиваются прямые BON и COM, где измерением отложены $ON = OB$ и $OM = OC$. В силу равенства углов при точке O равны и треугольники MON и BOC.

Осталось измерить доступный отрезок $MN = BC$.

Рабочая группа: 5 человек.

Оборудование: 1) 7 вех; 2) колышки; 3) колотушка; 4) мерная лента (рулетка).

Выполнение

1. Выбрать точку O по возможности близко к искомому расстоянию, но так, чтобы из нее были видимы B и C.
2. Провешить направления BON и COM.
3. Измерить расстояние BO и отложить $ON = OB$.
4. Измерить расстояние CO и отложить $OM = OC$.
5. Измерить расстояние $MN = BC$.

Способ симметрии относительно оси

Необходимо измерить расстояние между пунктами A и B, которые разделены озером. Ориентиры A и B видимы, но озеро мешает применить определение расстояния при помощи симметрии относительно точки. В подобных случаях употребляют другой прием:

1. Провешить прямую MN, расстояния от которой до точек A и B можно измерить (рис. 34).

При этом нужно учесть возможность последующего измерения до точек A_1 и B_1, симметричных точкам A и B относительно провешенной прямой MN.

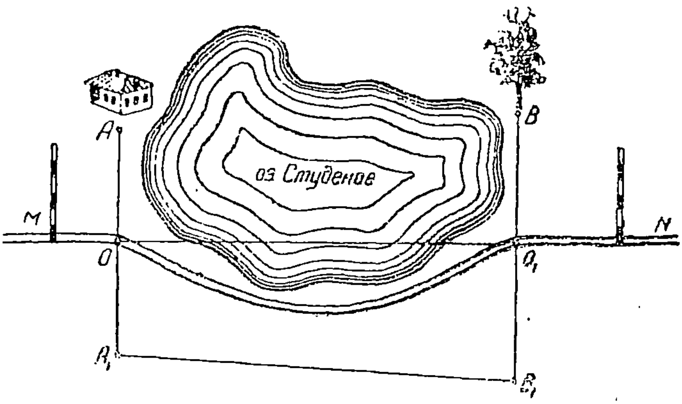


Рис. 34. Симметрия относительно оси

2. Перемещаясь по дороге MN, определить следы (основания) перпендикуляров AO и BO_1.
3. Измерить расстояния AO и BO_1.
4. Построить точки A_1 и B_1, симметричные A и B относительно прямой MN, т. е. отложить расстояния $OA_1 = OA$ и $O_1B_1 = O_1B$.
5. Измерить расстояние A_1B_1, которое в силу симметрии отрезков AB и A_1B_1 относительно прямой MN будет искомым расстоянием.

Работа 7

Измерить расстояние MN, используя свойство средней линии треугольника

1. Выбрать точку O так, чтобы из нее можно было измерить расстояния OM и ON (рис. 35).

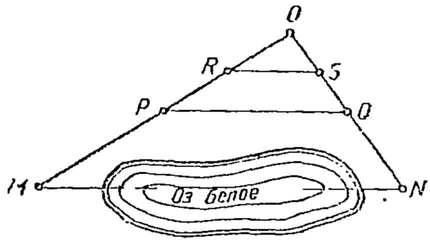


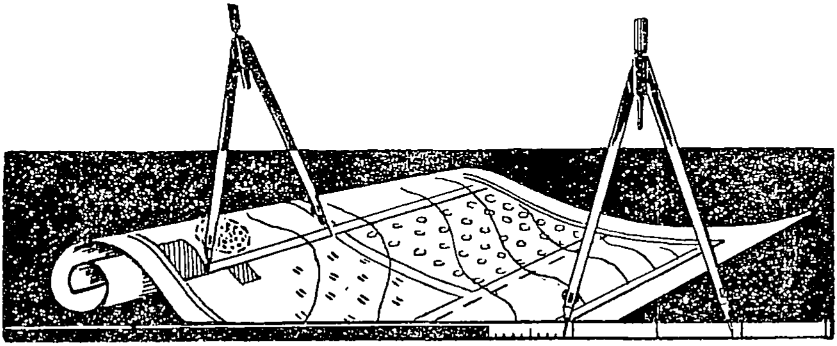
Рис. 35. Свойство средней линии треугольника

2. Измерить стороны OM и ON и наметить колышками точки P и Q, исходя из условия, что $MP = PO$ и $NQ = OQ$.

3. Измерить расстояние PQ на местности и тем получить расстояние MN, так как $MN=2\ PQ$.

Примечание. Если PQ также измерить нельзя, то построить точки R и S.

$PR = RO$ и $QS = SO$. Измерить RS и получить MN ($MN = 4\ RS$).



МАСШТАБ И ПЛАН

Масштаб при составлении планов показывает, во сколько раз уменьшены на бумаге размеры местности, т. е. каково отношение отрезка на плане к соответствующему отрезку на местности, точнее к его проекции на горизонтальную плоскость. Принято брать это отношение («числовой масштаб») именно в таком порядке: отношение длины отрезка на бумаге, который принимается за единицу, к длине отрезка в натуре, на местности.

На планах и картах пользуются двумя видами масштабов: числовым и линейным.

Числовой масштаб определяется так.

Пусть, например, поперечник Окружной жел. дор. (рис. 36) вокруг Москвы равен в среднем 16 *км;* размер бумаги, предназначенной для составления плана, равен 13×20 *см.* Тогда для изображения поперечника Окружной жел. дор. может быть выделен отрезок длиной примерно 10—11 *см.*

Следовательно, числовой масштаб будет равен

$$11 : (16 \cdot 10^5).$$

Частное не изменится, если делимое и делитель уменьшить так, чтобы в делимом оказалась единица, т. е. в 11 раз.

$$1 : (16 \cdot 10^5 : 11) = 1 : 145\,454.$$

На 11 *см* плана бумаги приходится 16 *км* или $16 \cdot 10^5$ *см* натуры, т. е. один сантиметр на плане изображает расстояние 145 454 *см* в натуре.

Пользоваться таким числовым масштабом очень неудобно, и его всегда сильно округляют.

На практике приняты стандартные масштабы 1 : 1, т. е. изображение в натуральную величину; 1 : 2; 1 : 5; 1 : 10 и т. д. Для планов и карт применяются масштабы:

1 : 500; 1 : 1 000; 1 : 5 000; 1 : 10 000;

1 : 25 000; 1 : 50 000; 1 : 100 000 и т. д.

В нашем примере лучше всего округлить делитель до 150 000, и тогда числовой масштаб будет 1 : 150 000.

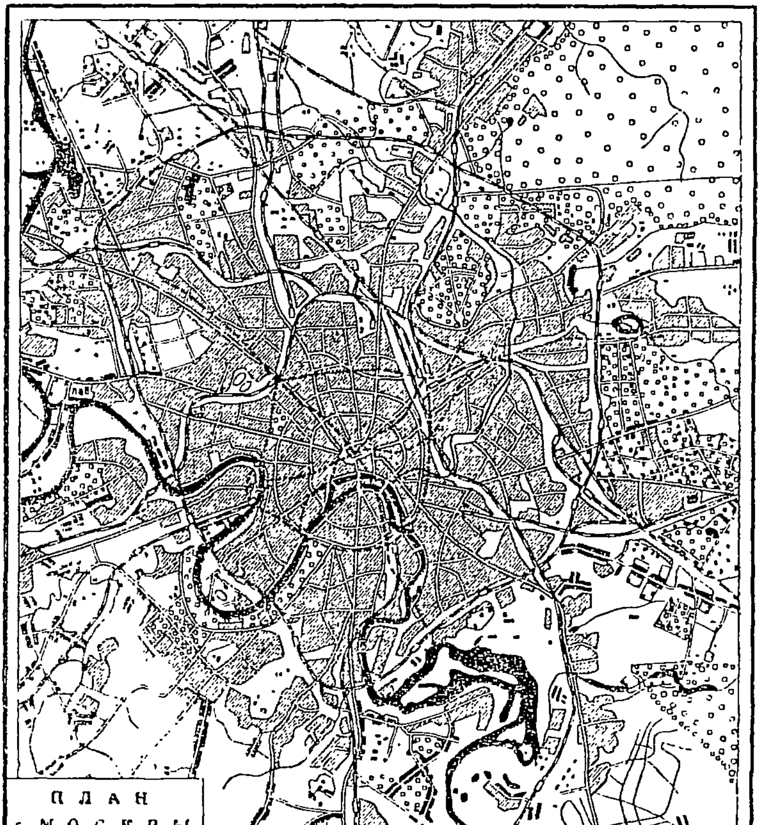


Рис. 36. План Москвы

Кроме числового масштаба, в топографической практике употребляется линейный масштаб (рис. 37).

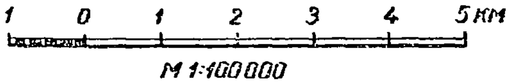


Рис. 37. Линейный масштаб

1. На прямолинейном отрезке откладываются сантиметровые деления: вправо от нуля 5—6 *см* и влево от нуля 1 *см*, разделенный на миллиметры.

Таким образом, целые единицы намечаются вправо от нуля, а десятые доли единицы — влево от него. В силу этого ножка циркуля сначала устанавливается в точке вправо от нуля.

2. На делениях надписывается в цифровом обозначении не отложенное число сантиметров, а число метров или километров, соответствующее им в натуре.

Линейный масштаб представляет собой простейший вид номограммы (функциональной шкалы).

Расстояния, кратные 0,5 *км*, берутся от нуля вправо; при расстояниях, не кратных 0,5 *км*, используется отрезок, разделенный на более мелкие деления и расположенный влево от нуля (рис. 38).

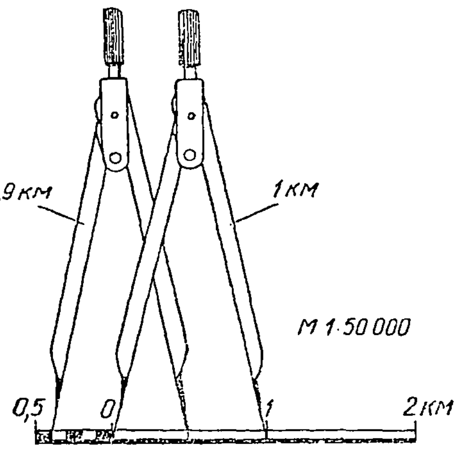


Рис. 38. Работа по линейному масштабу

В отношении отдельных частей линейного масштаба приняты следующие наименования (рис. 39).

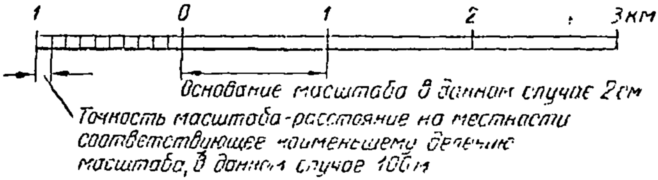


Рис. 39. Элементы линейного масштаба

Примеры для упражнений

1. Определить точность линейного масштаба, соответствующего числовому масштабу 1 : 200, если основание масштаба, равное 1 *см*, разделено на пять частей.

Ответ: 40 *см*.

2. Построить линейный масштаб с точностью масштаба 10 *м* по числовому масштабу 1 : 10 000.

3. Построить примерную схему расположения городов Москвы, Ленинграда, Тулы, Горького; точность 10 *км* (рис. 40).

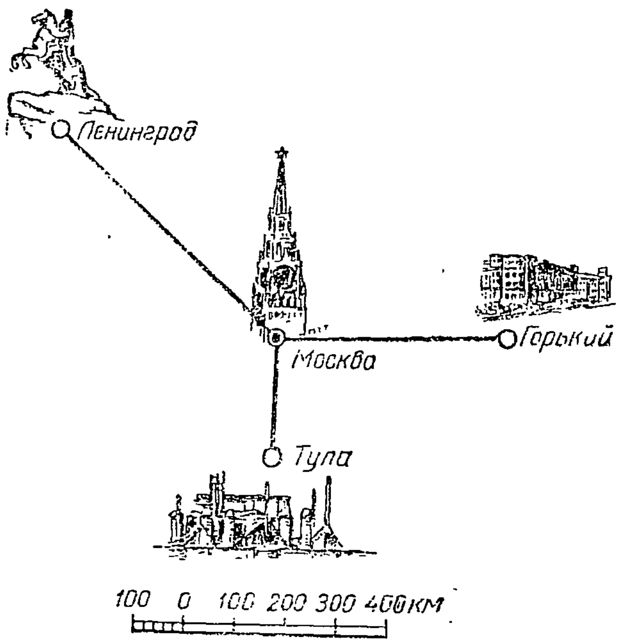


Рис. 40. Схема расположения городов

Города	Приблизительное	
	направление	расстояние
Москва—Ленинград	*на северо-запад*	650 *км*
Москва—Горький	„ восток	390 „
Москва—Тула	„ юг	180 „

4. Составление плана класса с размещением окон, дверей, парт и пр. (рис. 41).

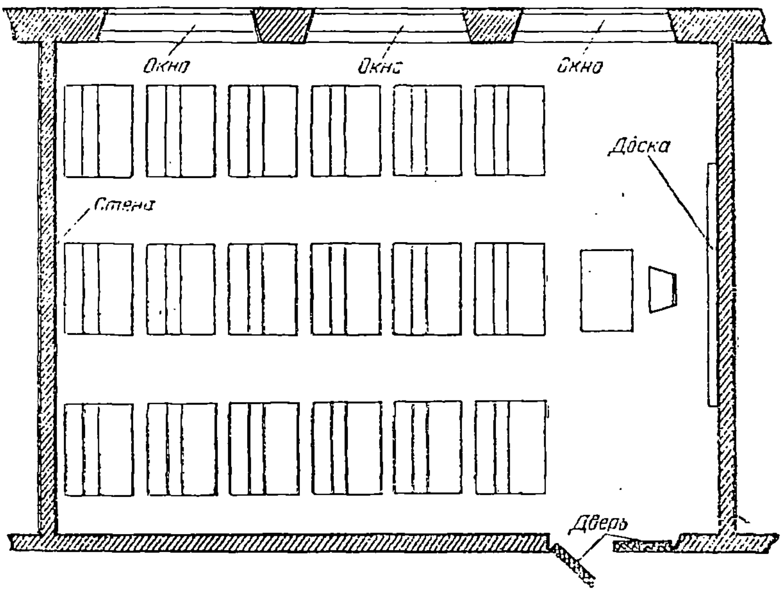


Рис. 41. План класса

Практические работы

1. Составьте план своей комнаты.
2. Составьте план своего двора.
3. Составьте план зала школы.
4. Увеличьте один из этих планов вдвое.
5. Уменьшите один из этих планов вдвое.
6. Сделайте набросок плана стены класса с доской и др.; затем вычертите его в размерах.

5. Определить по плану расстояния между заданными точками (рис. 42) с помощью линейного масштаба и измерителя.

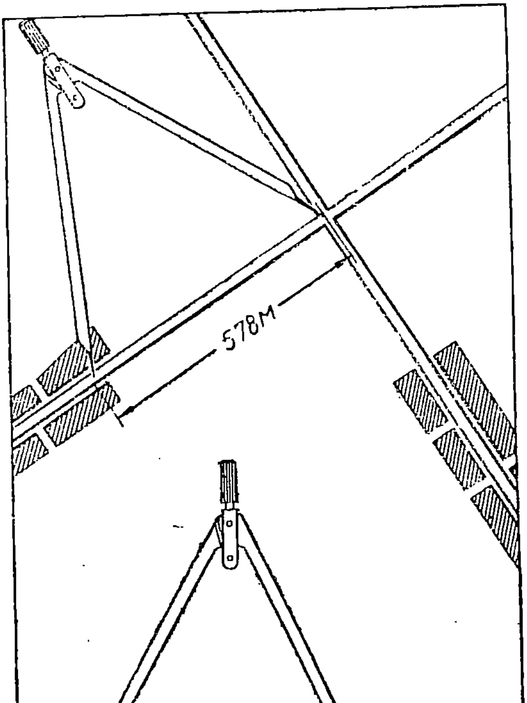
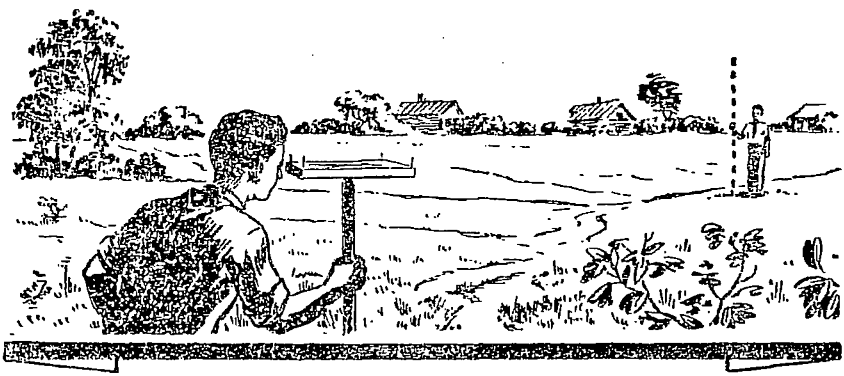


Рис. 42. Определение расстояния по плану



ПОСТРОЕНИЕ УГЛОВ ЭККЕРОМ

Отклонение друг от друга двух прямолинейных направлений (угол между ними) играет важную роль при съемочных работах.

Об измерении углов на местности и о приборах для их измерения будет рассказано дальше.

Грубо наметить направление, перпендикулярное к данному, можно поднятой до уровня плеча рукой, как продолжение линии плеча.

Действительно, если человек обращен лицом по ходу движения, то его поднятая рука как продолжение плеча укажет перпендикуляр к направлению AB (рис. 43). Правильность намеченного перпендикуляра проверяется физкультурным поворотом. Однако гораздо большую точность дает эккер. Он применяется при построении на местности углов не только в 90°, но и кратных 45°, т. е. $n \cdot 45°$ ($n = 1, 2, 3...$). Например, 45°; 135° и т. д.

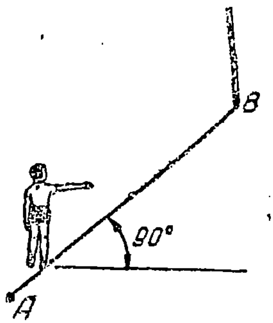


Рис. 43. Построение прямого угла

Как известно, угол между двумя смежными сторонами квадрата эккера — прямой, между диагоналями — также прямой, между диагональю и стороной 45° или 135° (рис. 44).

Иными словами, эккером можно восставить или опустить перпендикуляры, строить биссектрисы прямых углов.

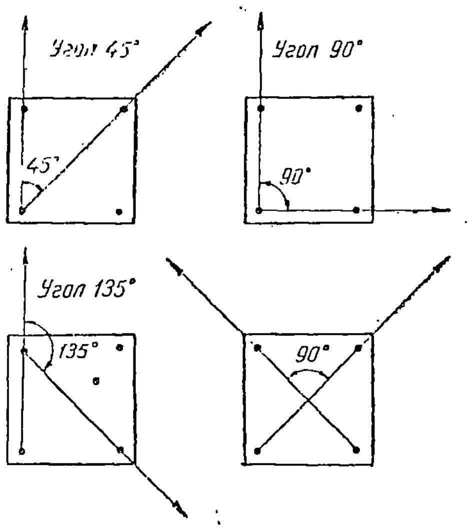


Рис. 44. Схемы построения углов эккером

Работа 1

Построить прямой угол

Рабочая группа: 2—3 человека.

Оборудование: 1) 5 вех; 2) 5 колышков; 3) колотушка; 4) эккер; 5) бумага, карандаш, нож, резинка, треугольник.

Выполнение

1. Выбрать и провешить некоторое направление.
2. Встать с эккером в указанной точке.
3. Направить по заданной линии одну диагональ квадрата эккера; тогда другая диагональ укажет перпендикулярное направление (рис. 45). Вместо диагоналей можно брать смежные стороны квадрата.

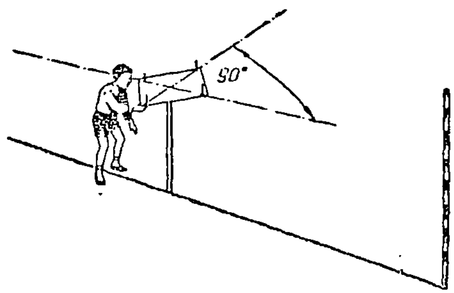


Рис. 45. Работа с эккером

Работа 2

Разметить при помощи эккера футбольное поле

Инструкции к проведению работы составить учащимся самостоятельно с учетом количества участников работы, оборудования, порядка действий. Только при этих условиях можно избежать толкотни, криков, задержек в работе. Составители инструкции должны учесть, что разметка поля складывается из определения сторон света, вешения сторон прямоугольного поля, разметки прямых углов при вершинах, измерения расстояний. Для контроля правильности построения поля можно использовать свойство диагоналей прямоугольника.

При проведении работы на площадке во всех поворотных точках забить колышки («закрепить проект в натуре»).

Работа 3

Построение углов в 30, 60 и 90° веревкой с размерами правильного треугольника

Построение ясно из рисунка (рис. 46).

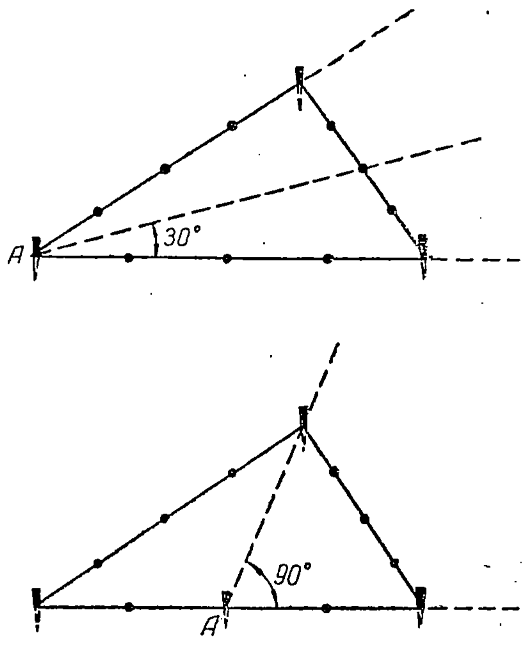


Рис. 46. Построение углов веревкой

ИЗМЕРЕНИЕ УГЛОВ

Если из некоторой точки на местности C видны два предмета A и B, то образуется угол ACB, который принято называть углом зрения.

Для измерения углов употребляются угломеры различного устройства и различной степени точности. Главная часть любого угломера — круг («лимб»), разделенный на 360°, иногда с долями градуса. Кроме того, на лимбе устанавливается приспособление, позволяющее точно наметить направление прямой на местности *. В простейшем виде это — планка с двумя булавками на концах, направление между которыми принимается за искомое, в других случаях это линейка с диоптрами или деталь, несущая зрительную трубу (см. стр. 415). Называется это приспособление «алидада».

Длина сторон угла не влияет на величину угла; это позволяет измерять углы на местности, не принимая во внимание расстояния между точками.

Пусть требуется, например, измерить угол зрения ACB (рис. 47); для этого устанавливают угломер так, чтобы центр круга прибора проектировался в точку стояния, т. е. был на одной вертикали с вершиной угла («центрирование»). Затем, оставляя нуль лимба там, где он оказался, наводят алидаду на точку A и производят отсчет. Пусть алидада указывает, например, 56°. Не сдвигая прибора, переводят алидаду на направление CB и снова делают отсчет; скажем, оказалось 127°. Из чертежа ясно, что разность 127°—56°, т. е. 71°, и есть иско-

* Этот процесс носит название «визирования».

мый угол зрения. Кроме того, нетрудно заметить, что смещение начальной точки шкалы (нуля) вызовет изменение каждого из отсчетов, но не изменит их разности, которая нас только и интересует.

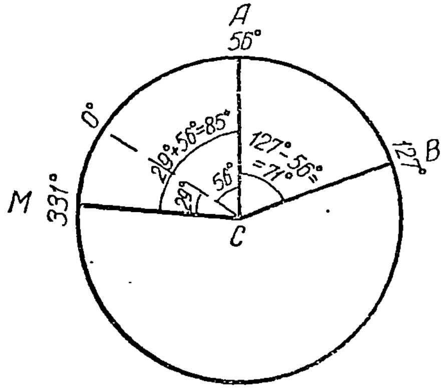


Рис. 47. Отсчеты по лимбу

В том случае, когда стороны угла расположены по разные стороны от начального радиуса CO, поступают двояко:

1. К дополнению отсчета M до 360° (т. е. 29°) прибавляют второй угол OCA (т. е. 56°) и получают $29° + 56° = 85°$.

2. Считают положение точки A полученным при повороте, большем 360°, т. е. угол OCA получен так: $360° + 56° = 416°$. Тогда искомый угол $MCA = 416° - 331° = 85°$.

Работа 1

Съемка и нанесение участка на план при помощи измерения углов

Оборудование: угломер, вехи, рулетка, полевой журнал, карандаш, резинка.

1. Выбрать участок, одна сторона которого прямолинейна и промерена. Если этого не сделано, то сначала провешить и измерить эту сторону AB (рис. 48).
2. Угломером, стоящим в точке A, измерить углы на все объекты и записать в журнал.
3. Измерить углы из точки B.
4. Нанести на план в выбранном масштабе отрезок AB (рис. 49).
5. Построить транспортиром углы 1, 2, 3, 4 и 5 при точке A (см. журнал стр. 68).
6. Построить углы 1′, 2′, 3′, 4′ и 5′ при точке B.
7. Точки пересечения дадут искомый объект.
8. Обозначить условными знаками найденные точки.

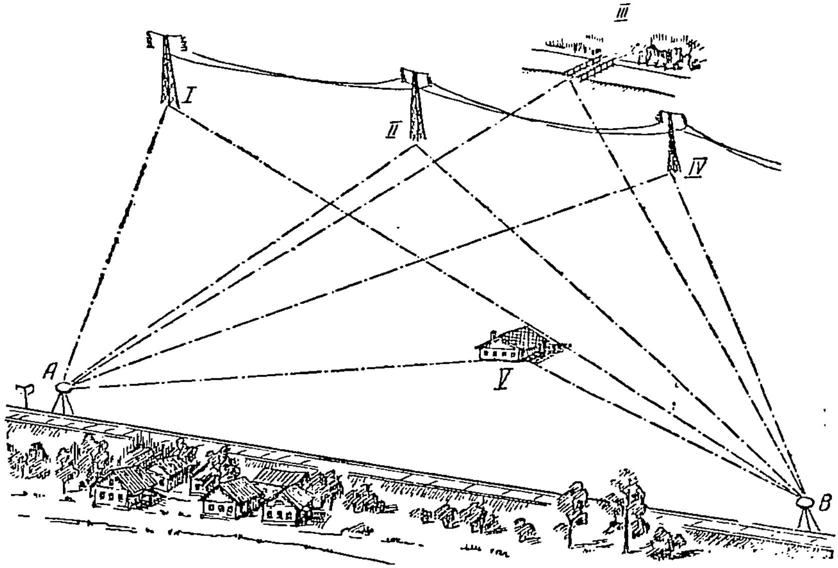


Рис. 48. Засечки на местности

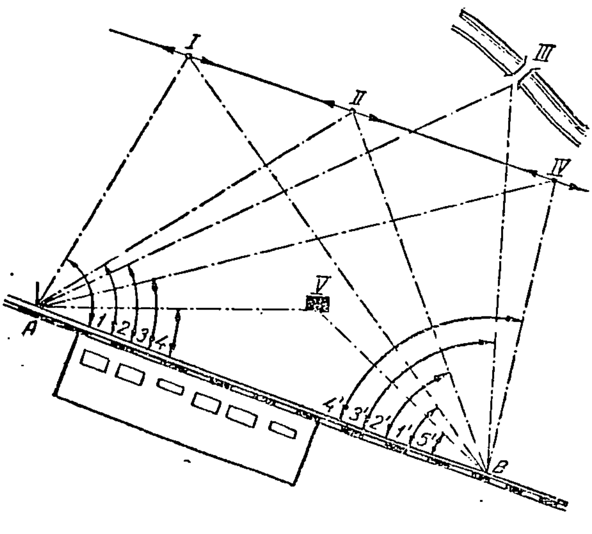


Рис. 49. Засечки на плане

Образец журнала и пример заполнения

Точка стояния	Точка наблюдения	Отсчет по угломеру	Угол (градусы)	Примечание
A	I	75	122	Мачты электропередачи
„	II	92	105	„ „
„	III	98	99	Мост
„	IV	121	76	Мачта
„	V	153	44	Дом
„	*B*	197	—	

Пример вычисления угла:

$$\angle 1 = \angle BA1 = 197^\circ - 75^\circ = 122^\circ.$$

Измерение и построение углов транспортиром может производиться двумя способами.

Допустим, нужно измерить несколько углов при одной вершине.

Первый способ состоит в измерении каждого угла обычным приемом (рис. 50).

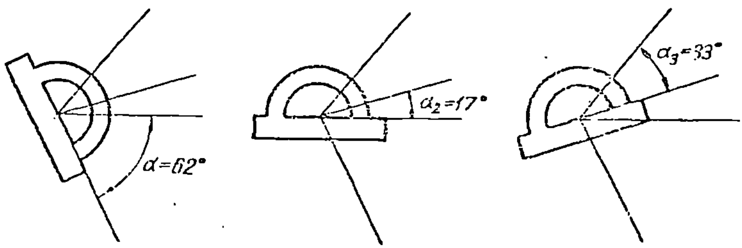


Рис. 50. Измерение углов транспортиром (способ I)

Второй способ, более общий, подводит учащихся к сознательной работе на лимбе угломера.

В первом способе величины углов определяются непосредственным отсчетом; при втором способе, обыкновенно применяемом на лимбе, искомый угол определяется как разность двух отсчетов (см. рис. 51).

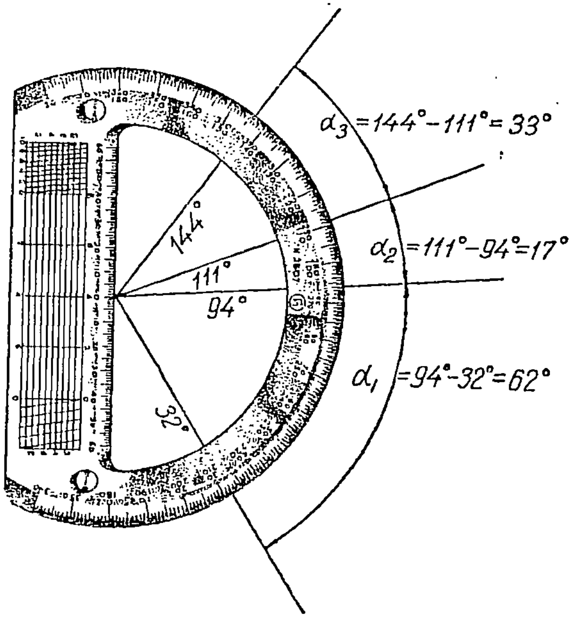


Рис. 51. Измерение углов транспортиром (способ II)

В результате работ по измерению углов на местности учащиеся глубже осознают теоретические сведения из курса геометрии: угол как фигуру, характеризующую отклонение двух лучей; независимость величины угла от длины сторон; сложение, вычитание углов и многое другое.

РАБОТЫ С КОМПАСОМ

ОРИЕНТИРОВАНИЕ НА МЕСТНОСТИ И СЪЕМКА ПРИ ПОМОЩИ КОМПАСА

Определение на местности своего положения по отношению к сторонам горизонта («странам света») и местным предметам называется ориентированием.

Стороны горизонта определяются обычно по компасу (рис. 52). При помощи компаса можно также произвести прокладку маршрута на местности и нанесение пройденного пути на карту.

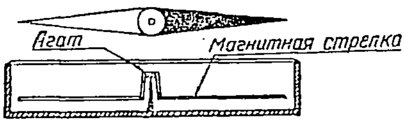


Рис. 52. Схема компаса

Компас состоит из медной или пластмассовой коробки, внутри которой, под стеклом, вращается на стальном шпеньке магнитная стрелка.

Конец магнитной стрелки, направленный на север, обычно окрашен в темно-синий цвет, иногда же на него наносят флюоресцирующее вещество. На дне компаса имеются по окружности градусные деления от 0° до 360°, расположенные по ходу часовой стрелки. В школьных компасах окружность разбивается на 72 деления; одно деление содержит 5°.

Кроме того, буквы *С,В,Ю,З* отмечают названия сторон горизонта, соответственно градусам — 0°, 90°, 180° и 270°. Хорошие компасы снабжены визиром (то же, что алидада).

ПРИЕМЫ ПРИБЛИЖЕННЫХ СПОСОБОВ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СТОРОН ГОРИЗОНТА

Наиболее совершенный способ определения сторон горизонта, как было указано, это — применение компаса. Но существуют и другие приемы, практически удобные и имеющие определенный познавательный интерес для учащихся.

Определение сторон горизонта по местным предметам

На стенах сараев и других построек снег прилипает больше с северной стороны; с южной он скорее тает. Указанная примета, разумеется, дает лишь некоторую приблизительную ориентацию, ибо в распределении снега большую роль играет ветер.

Наметив направление на север, уже легко определить остальные стороны: юг, восток, запад.

Если дерево расположено достаточно изолированно, то с южной стороны оно богаче ветвями, на север направлено меньшее количество их. Этого наблюдения достаточно, чтобы в первом приближении определить стороны горизонта (рис. 53).

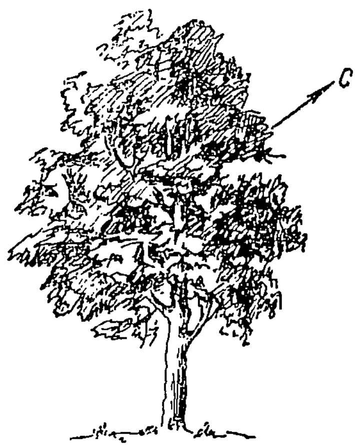


Рис. 53. Определение севера по кроне дерева

На спиленных пнях деревьев хорошо видны концентрически расположенные слои ежегодных приростов; с северной стороны эти слои идут гуще, теснее, чем с южной (рис. 54). Это наблюдение также может помочь приблизительному определению сторон горизонта.

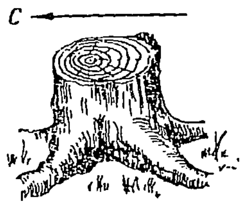


Рис. 54.
Определение севера по срезу дерева

Определение сторон горизонта по солнцу

Известно, что в полдень солнце находится на юге и что тень от вертикальных предметов (столб, дерево) в этот момент самая короткая и направлена на север. По длине тени можно наблюдать, как солнце поднимается над горизонтом и в полдень занимает самое высокое положение, отчего тень становится самой короткой (рис. 55).

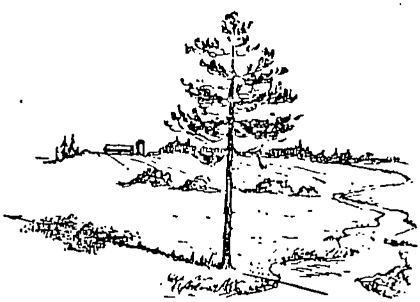


Рис. 55. Определение севера по тени

Примечание. Гражданское время отличается от солнечного, но это расхождение для наших работ не имеет большого значения.

Если у наблюдателя имеются часы и день солнечный, можно считать (довольно приблизительно), что:

около 6 час. утра солнце на востоке;

около 12 час.— на юге;

около 6 час. вечера — на западе.

Часовая стрелка проходит за сутки два полных круга. Солнце же за сутки описывает по небесному своду один круг. Это позволяет приблизительно определять стороны горизонта по солнцу и часам.

Порядок наблюдений

1. Часы поворачивают в горизонтальной плоскости так, чтобы часовая стрелка была направлена на солнце.

2. Угол между направлением часовой стрелки и направле-

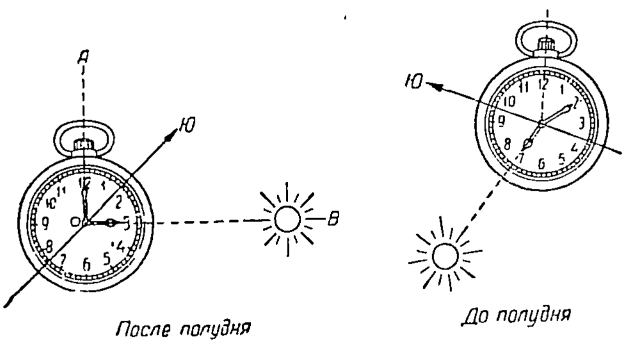


Рис. 56. Определение юга с помощью часов.

нием на 12 час. циферблата делят пополам. Биссектриса этого угла укажет направление на юг (рис. 56).

Определение сторон горизонта по Полярной звезде

В ночное время при звездном небе достаточно точно определяется направление на север по Полярной звезде.

Все знают созвездие Большой Медведицы. Если мысленно соединить две крайние звезды «ковша» Большой Медведицы и затем продолжить линию на пять таких же отрезков, то увидим довольно яркую звезду на конце хвоста другого созвездия — Малой Медведицы. Это и есть Полярная звезда. Она настолько близко расположена от северного полюса мира, что при суточном движении небесного свода почти неподвижна, точнее может быть принята за неподвижную, поэтому направление на Полярную звезду принято считать направлением на северный полюс. Таким образом, направление от наблюдателя на Полярную звезду и есть направление на север (рис. 57).

Рис. 57. Полярная звезда

АЗИМУТЫ И РУМБЫ

Азимутом (магнитным) данной прямой называется угол между направлением северного конца магнитной стрелки и данной прямой, точнее, проекция угла на горизонтальную плоскость. Азимуты отсчитываются от меридиана по ходу часовой стрелки. Величина азимута может изменяться от 0° до 360° (рис. 58).

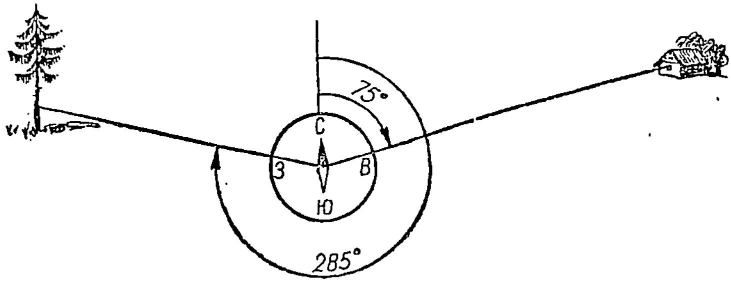


Рис. 58. Азимут

Румбом называется угол, отсчитываемый от ближайшего конца магнитной стрелки до данного направления. Величина румба может изменяться от 0° до 90°.

Чтобы знать, от какого конца стрелки и в каком направлении произведен отсчет румбов, требуется особо обозначать буквами стороны горизонта (рис. 59).

Например, *ЮВ:* 65° — означает, что направление отсчитано от южного конца магнитной стрелки в направлении к востоку, причем угол равен 65°.

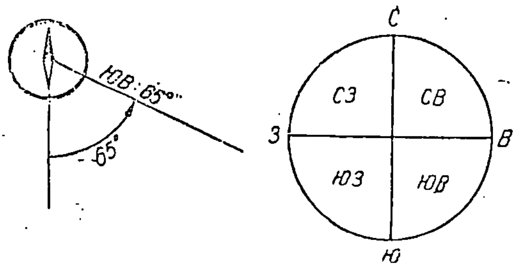


Рис. 59. Румб

Легко перейти от азимутов к румбам и обратно. Например, румб *ЮВ:* 65° равен азимуту 115°; азимут 305° равен румбу *СЗ:* 55° (рис. 60).

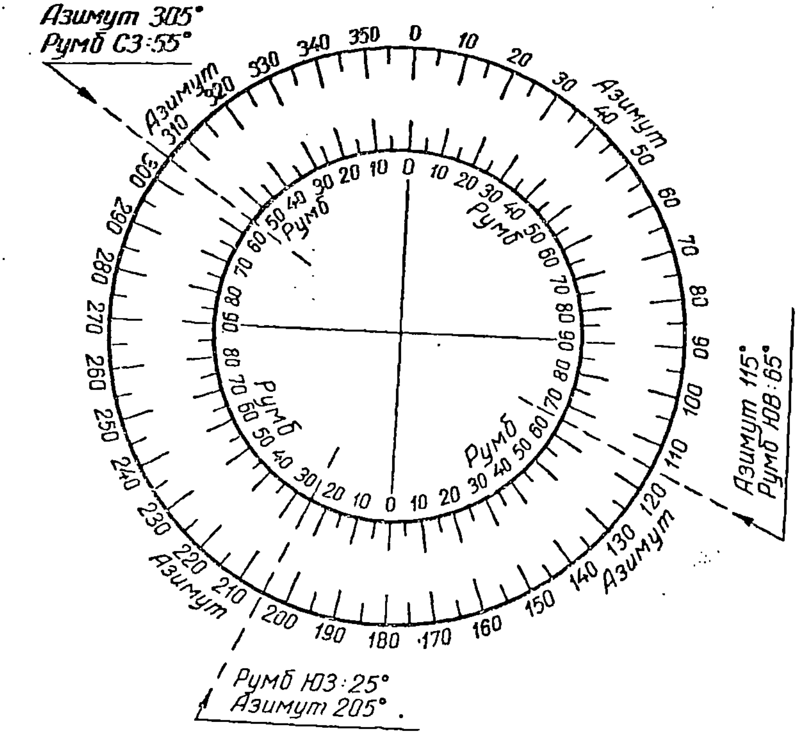


Рис. 60. Переход от азимутов к румбам

Определение азимута на местности

1. Стать лицом по направлению к предмету, азимут которого нужно определить.

2. Положив компас на планшет, поворачивать его до совмещения северного конца стрелки с нулевым делением.

3. Вращая крышку компаса, направить визир на предмет. Если компас — без визира, то на стекло положить в направлении на предмет спичку и прочесть отсчет.

Определение на местности направления по заданному азимуту

1. Установить визир на деление, соответствующее заданному направлению (азимуту).

2. Установить компас на планшете.

3. Поворачиваться вместе с планшетом до тех пор, пока северный конец стрелки не совпадет с делением 0°. При этом визир будет направлен по заданному азимуту (рис. 61).

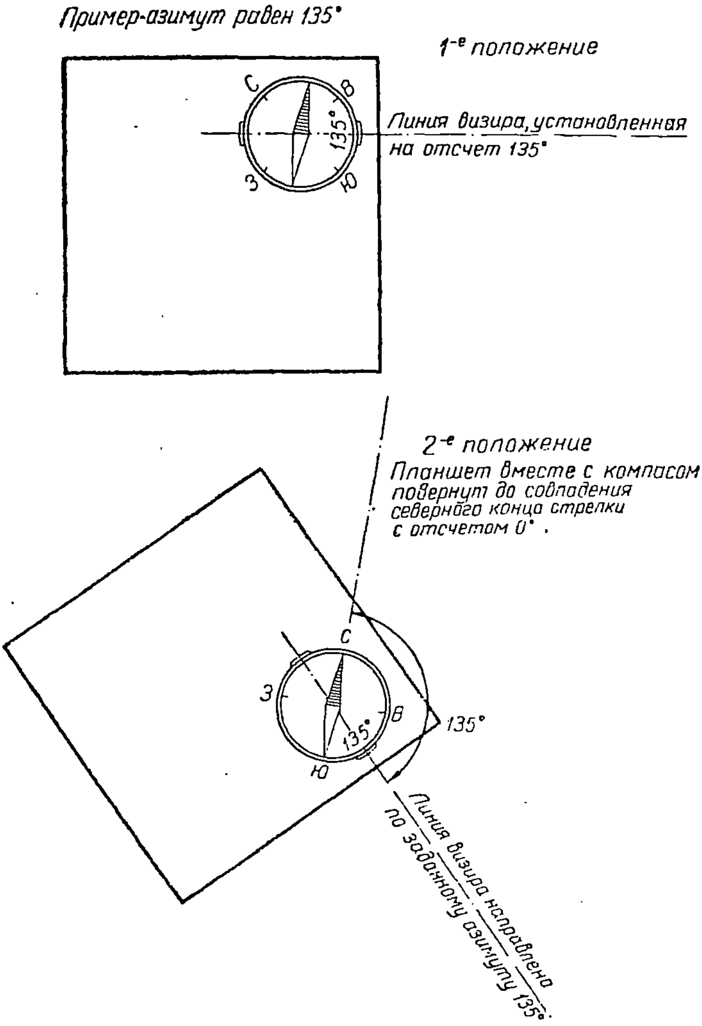


Рис. 61. Определение направления по азимуту

Работа 1

Полярный способ съемки участка

Пусть требуется снять участок *ABCDE*. Из произвольной точки *O* внутри участка нетрудно измерить азимуты направлений на все вершины многоугольника — участка, а также измерить расстояния от точки *O* до пунктов: *C, D, E, A, B*, например, парами шагов. Этих данных достаточно, чтобы в выбранном масштабе нанести участок на план (рис. 62).

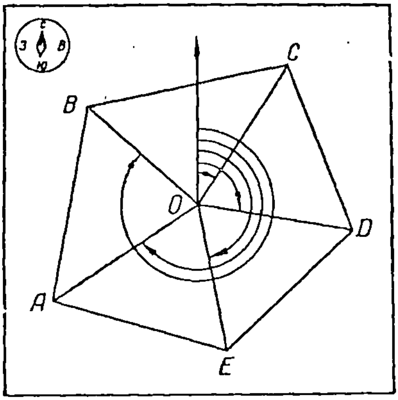


Рис. 62. Полярный способ

Рабочая группа: 5 человек.

Оборудование: вешки, компас, рулетка, полевой журнал, карандаш, резинка, нож.

Выполнение

1. Выбрать и разметить участок.
2. Выбрать точку стояния *O*.
3. Измерить азимуты прямых *OC, OD, OE, OA, OB*.
4. Измерить парами шагов расстояния *OC, OD, OE, OA, OB*.
5. В полевом журнале сделать абрис участка и на нем записать азимуты и расстояния.
6. Дома составить план участка в выбранном масштабе.

Работа 2

Маршрутная съемка

Пусть в походе пройден путь *ABCDE*.

Требуется нанести его на карту местности или составить план маршрута.

Рабочая группа: произвольное число школьников.

Оборудование каждого: 1) компас; 2) полевой журнал, где записаны длины средней пары шагов.

Выполнение

1. Разметить полевой журнал.

Точка стояния	Точка наблюдения	Азимут	Число пар шагов	Число метров	Примечание
A	*B*	48°	102	120	Точка *B* у километрового столба
B	*C*	113°	137	161	Точка *C* у большой ели

2. Наметить прямолинейный отрезок пути *AB* (рис. 63), выбрать некоторую точку на линии *AB*, например *M* (говорят, «*M* в створе *AB*»), для ориентировки при движении. В случае, если путь лежит по дороге, следует использовать ее направление до первого поворота.

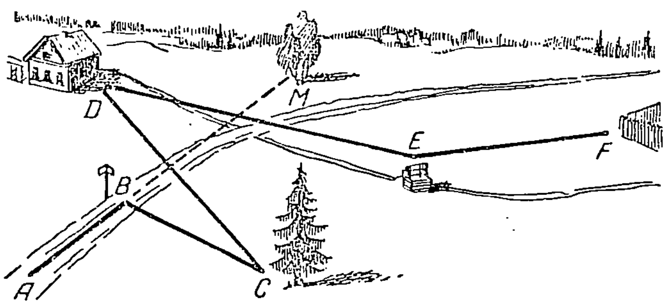


Рис. 63. Маршрутная съемка

3. Определять азимут каждого направления пути.

4. Измерять парами шагов каждый отрезок пути.

5. В полевом журнале вести в некотором масштабе абрис маршрута (на глаз), отмечая азимуты и расстояния. Точки поворота, по возможности, описывать, выделяя характерные признаки.

6. По возвращении, дома, вычертить план более тщательно и в более крупном масштабе, применяя условные знаки.

Работа 3

Поход по намеченному маршруту

Рабочая группа: произвольное число учащихся.

Оборудование каждого: 1) карта местности или схема маршрута с указанием расстояний и азимутов; 2) компас; 3) транспортир; 4) измерительный циркуль; 5) масштабная линейка.

Выполнение

1. Проложить (начертить) на карте намеченный маршрут или составить схему маршрута с указанием расстояний и азимутов.

2. Если есть карта, то измерить транспортиром азимуты, а измерительным циркулем и масштабной линейкой — расстояния.

3. Отправиться в поход, придерживаясь намеченных расстояний и азимутов.

4. В полевом журнале вести описание обстановки (предметов, расположения).

5. Стремиться запомнить маршрут и обстановку. Дома попытаться восстановить план маршрута по памяти.

Работа 4

Нанесение дополнений на план прямой засечкой

Рабочая группа: произвольное число учащихся.

Оборудование каждого: 1) планшет с планом местности; 2) компас; 3) визирная линейка; 4) карандаш, резинка, нож.

Пусть требуется нанести на план дополнительные объекты, которые не были ранее нанесены на план, например, отдельно стоящее дерево, мельницу и т. д.

Выполнение

1. Стать в любой точке на местности, нанесенной на плане (рис. 64).

2. Ориентировать планшет по местным предметам или компасу.

3. Приложить визирную линейку на планшете к точке стояния и, вращая ее вокруг этой точки, навести верхнее ребро на предмет, который требуется нанести на план. Прочертить визирную линию.

Если наносится несколько предметов, то таким же образом прочертить на них визирные линии, надписав каждую.

4. Перейти на другую точку на местности и проделать работу, указанную в пунктах 2 и 3 (рис. 65).

Пересечение одноименных визирных линий на плане даст положение предмета на плане.

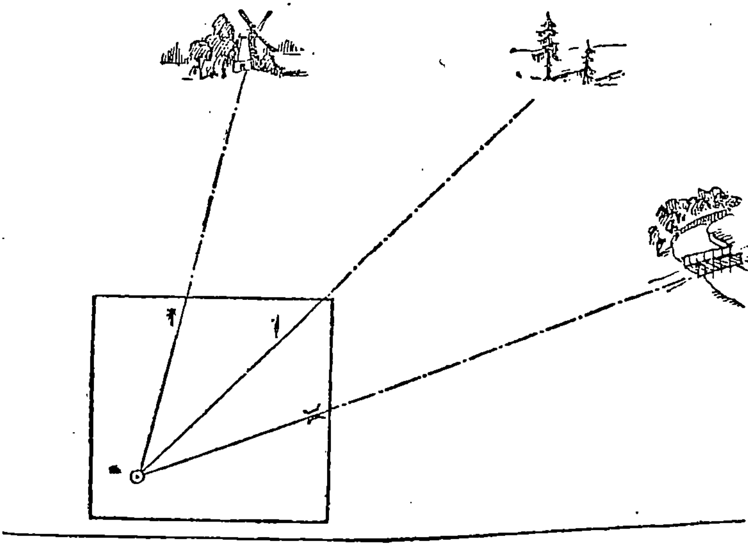


Рис. 64. Прямая засечка (положение 1)

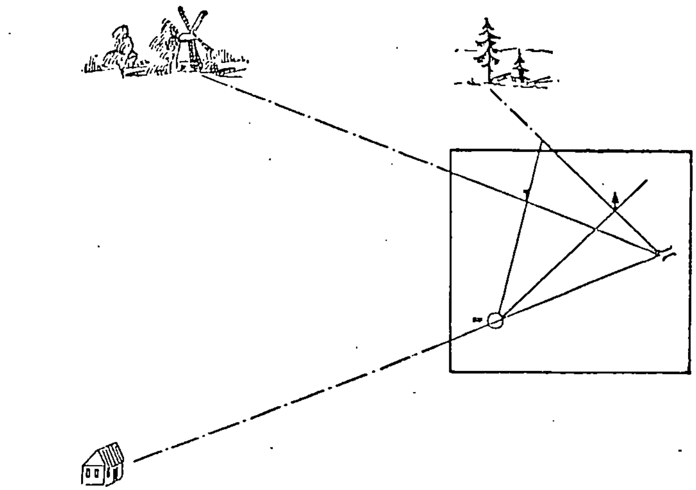


Рис. 65. Прямая засечка (положение 2)

Работа 5

Нанесение дополнений на план обратной засечкой (определение на плане точки своего стояния)

Рабочая группа: произвольная.

Оборудование: см. предыдущую работу.

Выполнение

1. Стать в любой точке на местности в границах изображенного на плане участка и ориентировать планшет по компасу.

2. Выбрать на местности два ориентира, хорошо видимые на местности и нанесенные на план.

3. Приложить визирную линейку к точке *a* на плане и вращать линейку (не изменяя ориентировки планшета) до наведения верхнего ребра на точку *A* на местности. Прочертить визирную линию (рис. 66).

Указание. Перед прочерчиванием проверить ориентировку планшета; при необходимости — внести исправления в ориентировку и визирование.

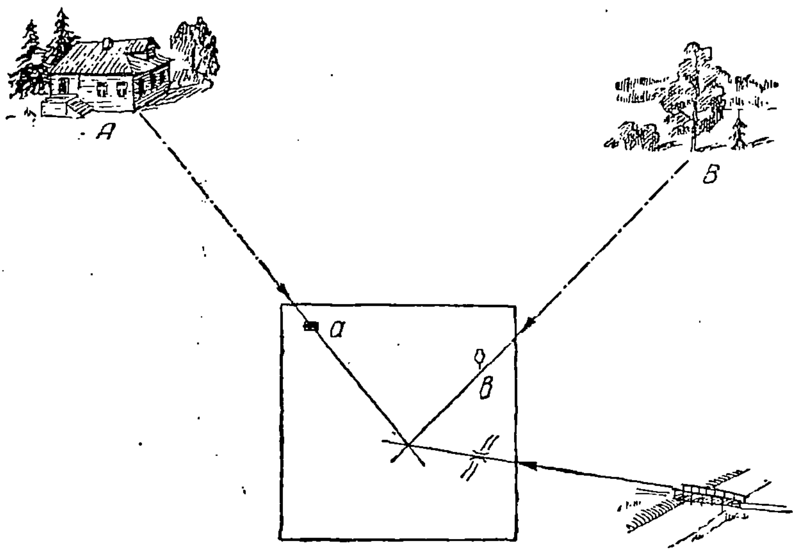
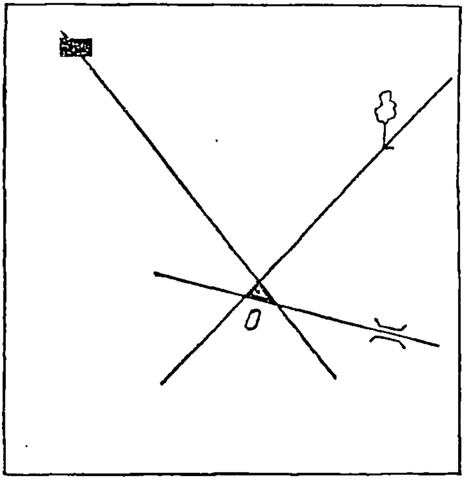


Рис. 66. Обратная засечка

4. Проделать ту же работу, приложив линейку к точке *b* Пересечение прямых укажет на плане точку стояния.

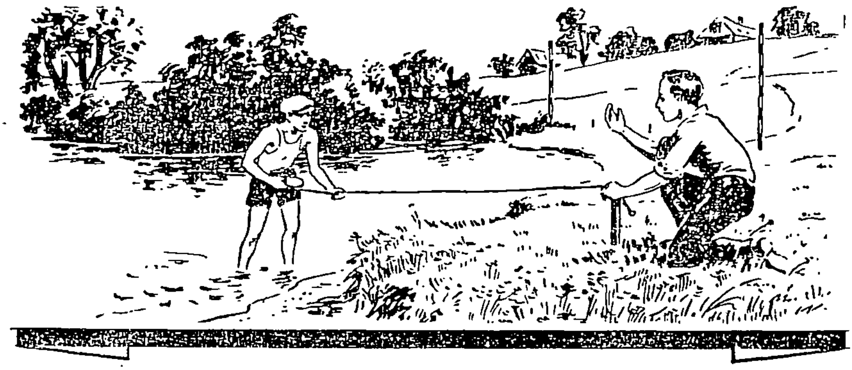
Для контроля можно провести направление по третьему ориентиру. Теоретически третье направление должно пройти через точку пересечения первого и второго, но в результате ошибок плана, ориентировки, визирования, прочерчивания и других неточностей, третье направление не пройдет через нее,



О - Точка стояния

Рис. 67. Треугольник погрешностей

а получится треугольник, который будет тем меньше, чем точнее выполнена работа. За точку стояния можно принять точку, одинаково удаленную от всех вершин треугольника, центр описанного круга (рис. 67).



СЪЕМКА ПО ХОДОВОЙ ЛИНИИ

В V классе учащиеся должны быть знакомы с геометрическим изображением чисел в виде диаграммы, где высота столбика в определенном масштабе наглядно иллюстрирует некоторую величину.

Кроме того, к VI классу они уже имеют первое представление о координатах как числах, определяющих положение точки (в географии — широта и долгота). Полезны специальные упражнения, например: определить на плане классной стены положение уже имеющегося выключателя или по указанному на плане месту определить на стенке точку, где следует поставить штепсель, и т. п.

Этих представлений совершенно достаточно, чтобы выяснить основы съемки плана по ходовой линии («с магистрали», рис. 68).

Съемка складывается из следующих операций: каждая вершина снимаемого многоугольника определяется измерениями двух расстояний AB_1 и B_1B, где $B_1B \perp AC$; AF_1 и F_1F, где $F_1F \perp AC$; AE_1 и E_1E, где $E_1E \perp AC$; AD_1 и D_1D, где $D_1D \perp AC$.

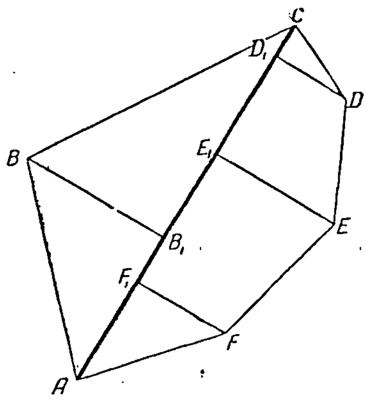


Рис. 68. Элементы геометрии при съемке по ходовой линии

Работа 1

Инструментальная съемка участка

Рабочая группа: 5 человек.

Оборудование: эккер, мерная лента, вехи, колышки, колотушка; каждому — карандаш, резинка, полевой журнал, бумага (лучше на планшете), компас.

Выполнение

1. Выбрать участок с ходовой линией не менее 100 *м*; наметить вершины многоугольного участка.

2. Составить на глаз абрис (набросок) участка (рис. 69), ориентировать абрис по азимуту ходовой линии; по возможности точно (на глаз) провести отрезок AC, придерживаясь

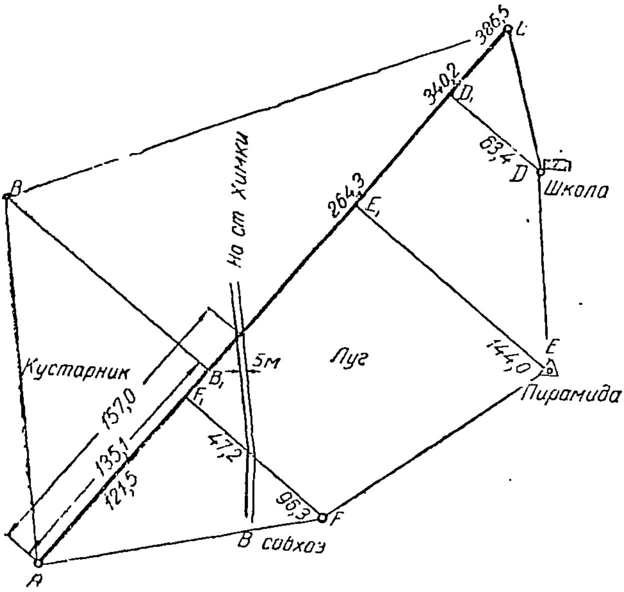


Рис. 69. Абрис

примерного масштаба, наметить точку F_1; на перпендикуляре, восстановленном из точки F_1, отложить на глаз отрезок F_1F; наметить B_1; отложить B_1B; наметить E_1; отложить E_1E; наметить D_1; отложить D_1D.

Построить контур участка, соединив точки A, B, C, D, E, F, A.

3. Провешить ходовую линию AC вехами или колышками (рис. 70).

4. Измерить ее мерной лентой от C к A.

5. Направиться по ходовой линии: в точке F_1 поднять правую руку и в тот момент, когда точка F окажется в направлении поднятой руки, остановиться.

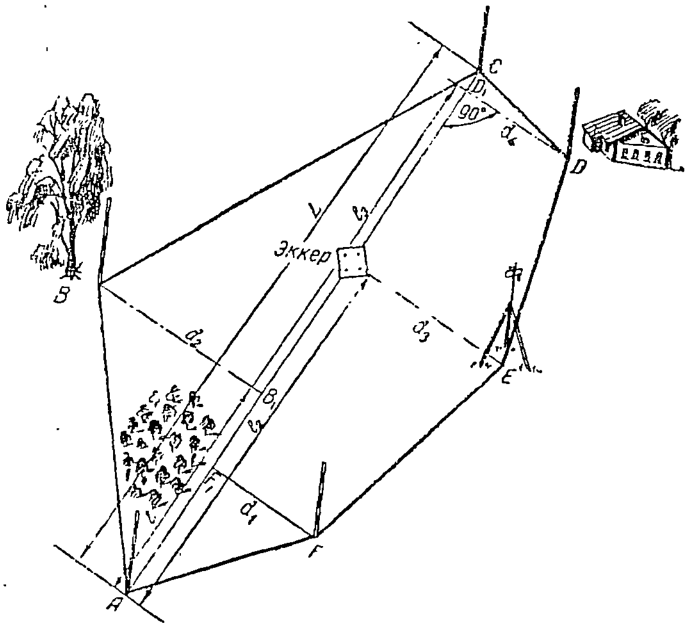


Рис. 70. Съемка участка по ходовой линии

6. В найденной точке стояния установить эккер так, чтобы две его булавки оказались на ходовой линии, а две другие, расположенные на перпендикуляре к линии первых, дали направление в точку F.

При несовпадении направления линии булавок на F передвигать эккер до тех пор, пока это совпадение наступит.

Все остальные проекции вершин B_1; E_1; D_1 устанавливаются по этому же способу.

7. При помощи мерной ленты (рулетки) снова измерить длину ходовой линии от A к C, отмечая на абрисе расстояния точек F_1; B_1; E_1; D_1 от A.

Контролем измерения будет служить совпадение результатов второго измерения с первым (1-е измерение от C к A; 2-е измерение от A к C).

8. Далее необходимо определить длину перпендикуляров F_1F; B_1B; E_1E и D_1D.

Если расстояние F_1F превышает 100 *м*, следует направление предварительно провешить, а затем измерить с точностью до 0,1 *м*. При отрезке, меньшем 100 *м*, передний мерщик направляется из F_1, держа курс на F и какой-нибудь ориентир, расположенный далее F, но в створе F_1F.

Если такого ориентира нет, то необходимо выставить дополнительную веху.

Наблюдатель в пункте F_1 проверяет направление мерной ленты и при грубых ошибках исправляет положение мерщиков. Расстояния AF_1 и F_1F измеряются, отмечаются на абрисе.

Дома, при обработке полученных данных, следует держаться такого порядка:

1. Укрепить лист бумаги, на котором будет вычерчиваться план участка (чертить сначала карандашом, а затем уже тушью).

2. С помощью транспортира построить направление ходовой линии определенное в поле по компасу.

> Примечание. На планах, как и на географических картах, принято считать направление, перпендикулярное нижнему краю бумаги, за направление юг — север.

3. Установить масштаб можно так: пусть размер бумаги в направлении ходовой линии после отделения слева и справа места для полей будет 30 *см*; размер ходовой линии на местности 120 *м*. Тогда 30 *см* плана соответствуют 120 *м* в натуре; отсюда 1 *см* плана изображает 40 *м*, или 4000 *см* в натуре. Числовой масштаб, таким образом, будет 1 : 4000. Вычертить линейный масштаб.

4. Отложить в выбранном масштабе размер ходовой линии, расположив ее на листе удобно и красиво, нанести в том же масштабе расстояния AF_1, AB_1, AE_1 и AD_1. При этих условиях гарантируется большая графическая точность.

Провести при помощи чертежного треугольника и линейки перпендикуляры в точках F_1, B_1, E_1, D_1 и наметить точки F, B, E и D, пользуясь установленным масштабом. Изобразить условными знаками видимые предметы.

Если эти предметы стоят в вершинах многоугольника, поставить знак в соответствующую точку; если интересующий съемщика предмет находится внутри или вне многоугольника, необходимо произвести дополнительные работы, найти след перпендикуляра от предмета на ходовую линию и измерить необходимые расстояния так, как это производилось с вершинами.

Указание. Следует помнить, что положение предмета определяется двумя расстояниями (координатами): по ходовой линии от выбранного начала и по перпендикуляру на ходовую линию от предмета до нее.

Если требуется нанести на план не отдельный предмет, а сложный объект (рис. 71) — пруд, ферму, группу деревьев и т. п., то на местности намечают объект вехами или выбирают

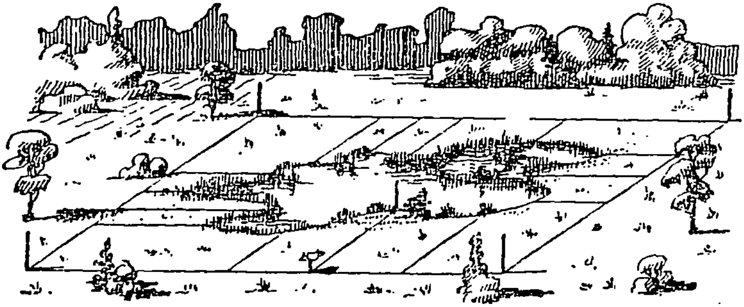


Рис. 71. Съемка пруда

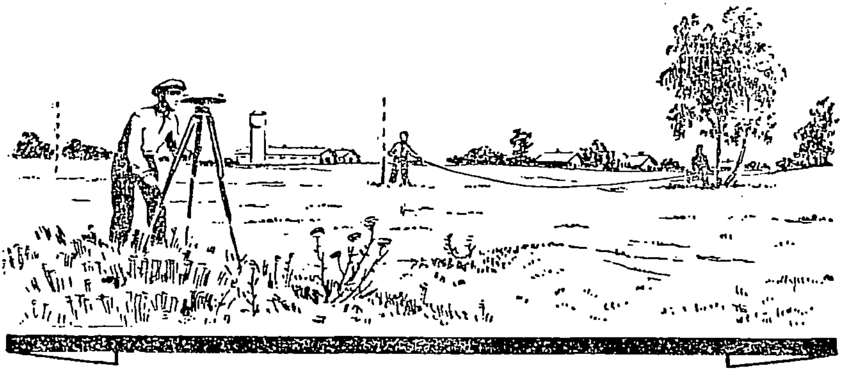
заметные издали точки объекта так, чтобы можно было приблизительно установить его контур. Затем снимают на местности необходимые для нанесения на план расстояния до выбранных точек и наносят их на план.

Работа 2

Шагомерная съемка участка

Если измерение расстояний вести парами шагов, то достаточно определять перпендикулярные направления только подъемом руки вправо или влево на уровне плеча и проверкой этого направления физкультурным поворотом.

Указание. Работу проводить по инструкции, составленной самими учащимися (план работы; оборудование и пр.).



СЪЕМКА ОБХОДОМ

Если обойти участок по его границе и измерить длины его сторон и углы между сторонами, то этих данных вполне достаточно, чтобы построить многоугольник $ABCDEF$, т. е. план участка. Отсюда название способа съемки «обходом» (рис. 72).

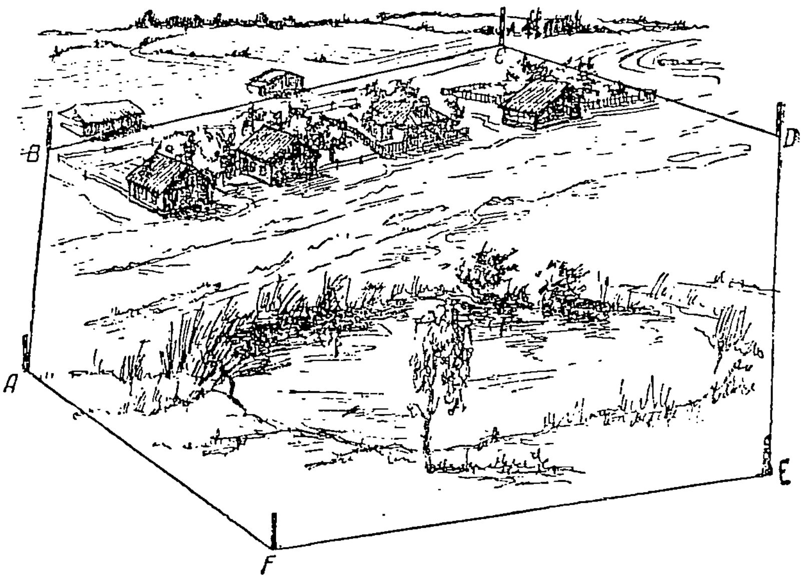


Рис. 72. Съемка участка обходом

Из геометрии известно, что если n — число сторон или вершин многоугольника, то сумма **всех** его внутренних углов $S = 180° \cdot (n - 2)$, даже если многоугольник не выпуклый. Эта формула является основой этого вида съемки.

Рабочая группа: 5 человек.

Оборудование: угломер, компас, мерная лента, вехи, колышки, колотушка; каждому — карандаш, резинка, полевой журнал, бумага на планшете.

Выполнение

1. Выбрать и разметить участок.
2. Составить абрис.
3. Измерить азимут одного из направлений, например AB. Этот угол даст возможность ориентировать план участка по меридиану места.
4. Провешить первое направление, например AB.
5. Измерить мерной лентой расстояние между пунктами A и B; записать в журнал, пометить на абрисе.
6. Измерить угол при вершине B.
7. Продолжать работу, обходя участок по контуру до тех пор, пока съемщик вернется в исходную точку A и измерит угол A.
8. Дома обработать полученные данные и составить план.

Образец журнала угломерной съемки и пример заполнения

Азимут стороны AB 342°

Точка стояния	Точки наблюдения	Отсчет по угломеру	Угол измеренный	Поправка	Угол исправленный	Длина стороны ($м$)
A	F B	172° 37°	135°	—1°	134°	230,2
B	A C	207° 105°	102°	— 1°	101°	472,0
C	B D	45° 275°	130°	— 1°	129°	285,5
D	C E	327° 201°	126°	— 1°	125°	275,6
E	D F	9° 265°	104°	— 1°	103°	440,1
F	E A	174° 45°	129°	— 1°	128°	300,6
			$S_{изм} = 726°$		720°	$p = 2004,0$

Поправка углов вычисляется следующим образом: сумма *углов замкнутого многоугольника равна* $180° \cdot (n-2)$. Обозначим ее $S_{теор.}$, а сумму, полученную путем измерения, $S_{изм}$. Разность этих величин назовем невязкой $f = S_{теор.} - S_{изм}$.

Разделив невязку на число углов, получим для каждого угла поправку $d = \frac{f}{n}$, которую всегда нужно прибавлять к измеренной величине, учитывая знак числа f, т. е. алгебраически ($n = 3, 4, 5\ldots$).

В данном случае:

$$S_{теор.} = 180° \cdot 4 = 720°; \text{ невязка } f = S_{теор.} - S_{изм.} = \\ = 720° - 726° = -6°.$$

Поправка на каждый угол:

$$d = \frac{f}{n} = -\frac{6°}{6} = -1°.$$

Пример:

$$S_{теор.} = 720°; \ S_{изм.} = 713°,$$

тогда

$$d = \frac{f}{n} = \frac{720° - 713°}{6} = \frac{7°}{6} = \left(1\frac{1}{6}\right)° \approx 1°, \ 2.$$

В этом случае поправки округляют до ближайшего целого, т. е. на пять углов берут поправку по 1°, а на шестой 2°.

Исправлять величины углов до десятых долей градуса не рационально, ибо точность графических построений 0,5°.

Большую поправку (в данном примере 2°) отнести к углу с наиболее короткими сторонами, ибо на коротких расстояниях ошибки от визирования и центрирования сказываются сильнее.

Накладку, т. е. перенос на план удобно производить следующим образом:

1. На листе восковки (бумажной кальки) в выбранном масштабе отложить длину первой стороны, например AB.

2. В точке B построить транспортиром, с точностью до 0,5°, угол, равный исправленному, и на полученном луче BC построить точку C'.

3. Продолжать тем же порядком накладку сторон участка.

4. Так как вследствие неточности линейных измерений и ошибок при накладке начальная точка A и конечная вершина многоугольника, т. е. та же точка A, полученная при откладывании последней линии $F'A'$, не совпадут, то прежде всего нужно проверить, нет ли грубых ошибок в расчетах и построениях. Если наложение произведено правильно, а точка A (на-

чальная) все же не совпадает с точкой A' (конечной), то полученную невязку исправляют следующим образом:

а) соединяют прямой несовпавшие точки A' и A и через все вершины участка проводят прямые, параллельные прямой $A'A$ (рис. 73);

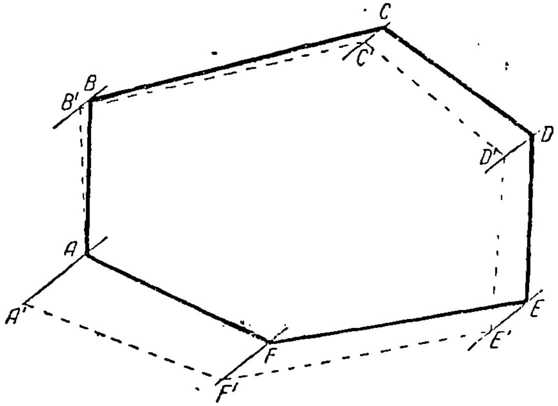


Рис. 73. Увязка полигона

б) взятую по масштабу численную величину отрезка $A'A$ делят на периметр участка p и тем получают поправку на единицу длины $\Delta = \frac{A'A}{p}$;

в) в каждой вершине откладывают на проведенных параллельных прямых величину $\Delta \cdot ln$, где ln — расстояние данной вершины от начальной точки A по контуру, причем направление откладываемых отрезков соответствует направлению $A'A$.

Для начальной точки $l_0 = 0$ и $\Delta \cdot l_0 = 0$, так что точка A останется на месте.

Точка B должна быть смещена в направлении $B'B$ на отрезок, равный $\Delta \cdot l_1 = \Delta \cdot AB$.

Точка C также сместится на отрезок $C'C$, равный произведению Δ на l_2, т. е. $\Delta \cdot l_2 = \Delta \cdot (AB + BC)$ и т. д.

В точке A' длина $l_n = p$, так что $\Delta \cdot l_n = A'A$, т. е. точка A' переместится в точку A, и многоугольник будет замкнут.

5. Увязав таким образом контур, следует ориентировать участок по азимуту выбранного направления, например AB, т. е. прочертить линию меридиана для точки A.

6. Восковку наложить на лист белой бумаги так, чтобы север был сверху, а меридиан параллелен боковой стороне листа

(рамке чертежа); исправленные вершины углов участка переколоть на белый лист и обвести карандашом (рис. 74).

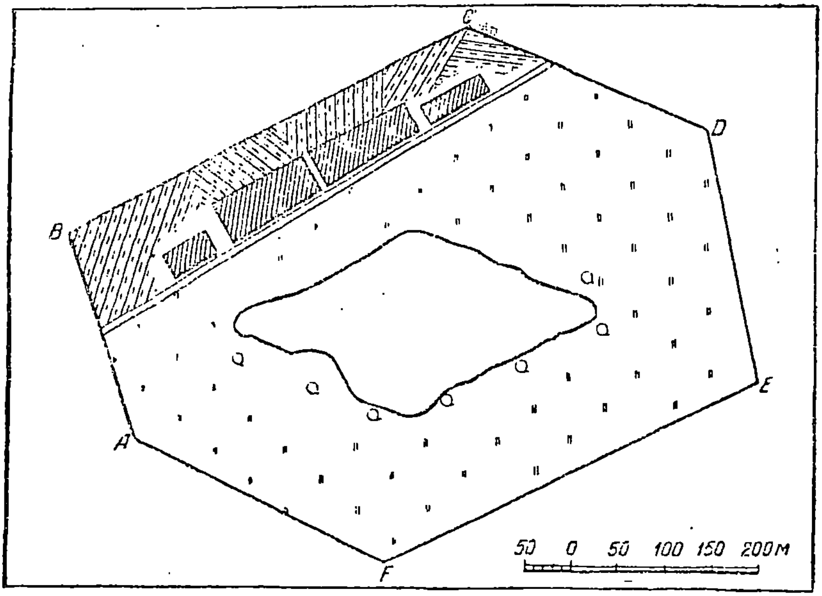
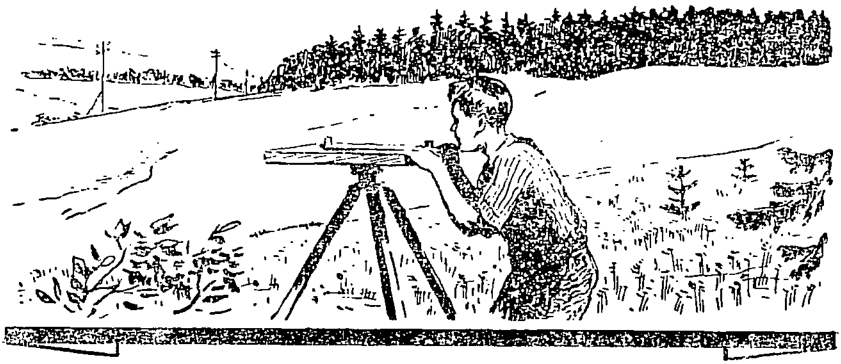


Рис. 74. План участка

Указание. Описанное построение можно произвести и непосредственно на листе белой бумаги. Однако такое построение затруднительно из-за невозможности красиво и симметрично расположить фигуру на листе бумаги. При помощи вспомогательного построения на кальке компоновка (размещение) плана значительно упрощается.



МЕНЗУЛЬНАЯ СЪЕМКА

При мензульной съемке, в отличие от других приемов съемки, план участка получается сразу при работе в поле; кроме того, мензульный способ больше использует геометрические построения.

СЪЕМКА ИЗ ОДНОГО ПОЛЮСА

Основные положения съемки состоят в следующем: на планшете намечают на глаз точку *О*, изображающую точку стояния на местности (рис. 75). Из точки *О* проводят лучи, направленные ко всем точкам участка, принятым за вершины многоугольника.

Измеренные расстояния от точки стояния до каждой вершины в выбранном масштабе откладываются на плане.

Соединение вершин замкнутой ломаной образует контур плана (план границы участка).

Работа 1

Рабочая группа: 5 человек.

Оборудование: мензула (планшет с бумагой), штатив, компас, визирная линейка (или трехгранная масштабная линейка, или чертежная линейка с делениями и двумя воткнутыми булавками), мерная лента, карандаш, резинка, полевой журнал.

Выполнение

1. Выбрать и разметить участок.
2. Ориентировать планшет мензулы на север.
3. Выбрать точку стояния инструмента (лучше внутри

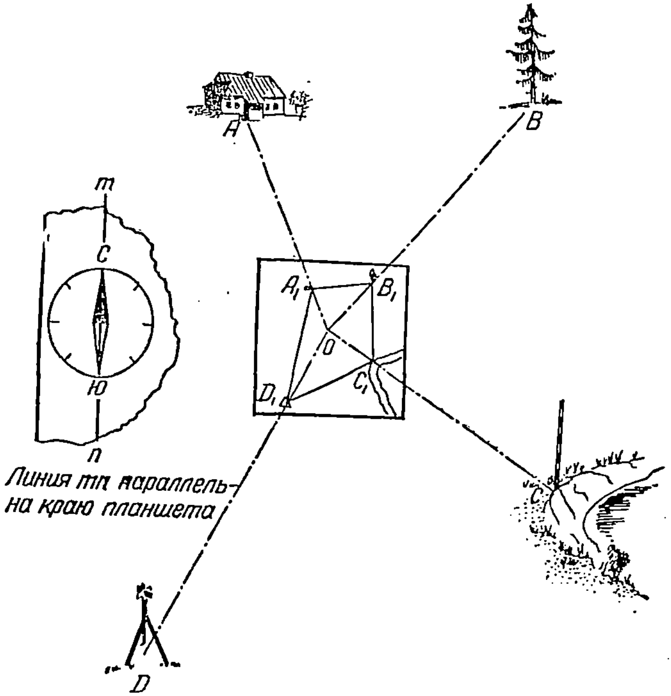


Рис. 75. Съемка из одного полюса

участка, по возможности, в центре) так, чтобы все вершины его были хорошо видимы. Наметить соответствующую точку плана на глаз на бумаге.

4. Приложить визирную линейку к изображению точки стояния и направить ее на одну из вершин (желательно на самую удаленную от точки стояния, ибо по этому расстоянию устанавливается масштаб плана) и провести на бумаге луч по выбранному направлению.

5. Измерить мерной лентой расстояние OD; если оно больше 50 *м*, предварительно провешить его.

6. По расстоянию OD на местности и размеру бумаги в этом направлении установить масштаб.

7. Отложить на луче OD отрезок OD_1, соответствующий отрезку OD на местности.

8. Не сдвигая планшета, направить визирную линейку на следующую вершину A, измерить на местности расстояние OA и отложить его в установленном ранее масштабе на луче, проведенном из точки O в точку A.

9. Повторить эту работу по всем вершинам участка.

10. Соединив вершины, получить весь контур участка.

СЪЕМКА ИЗ ДВУХ ПОЛЮСОВ

Мензульная съемка из двух полюсов замечательна тем, что в работе выполняется **единственное** измерение расстояния между точками стояния (O_1 и O_2); все остальное производится построением лучей: каждая из вершин получится от пересечения пары лучей — одного из полюса O_1 и ему соответствующего из полюса O_2 (рис. 76).

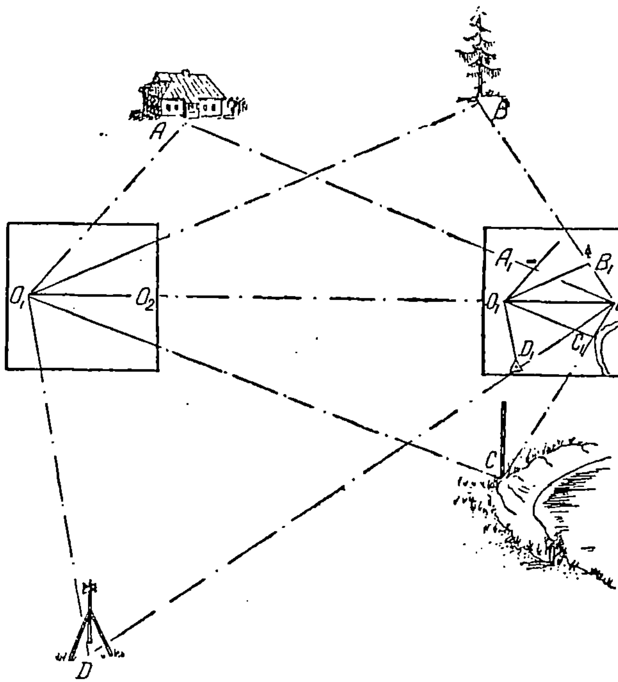


Рис. 76. Съемка из двух полюсов

Лучи эти непараллельны, а поэтому пересекутся, и притом в одной точке (аксиома!).

Работа 2

Рабочая группа: 5 человек.

Оборудование: мензула (планшет с бумагой), штатив, компас, визирная линейка (или трехгранная масштабная линейка, или чертежная линейка с делениями и с двумя воткнутыми булавками), мерная лента, карандаш, резинка, полевой журнал.

Выполнение

1. Выбрать и разметить участок.

2. Выбрать и отметить две точки стояния так, как это показано на чертеже, где точки стояния приблизительно расположены около середин обеих половин участка.

Точки следует выбирать так, чтобы лучи зрения на каждую вершину из точек стояния O_1 и O_2 не пересекались под малыми, острыми углами, а по возможности под углами от 30° до 150°.

Указание. Точки O_1 и O_2 местности отметить вехами. На то время, когда в точках стояний O_1 или O_2 расположена мензула, веха заменяется колышком; при снятии мензулы колышек снова заменяется вехой.

3. Расположиться с мензулой в одной из точек стояния, например O_1, и ориентировать планшет на север.

4. Провести по визирной линейке лучи из точки стояния O_1 во все вершины участка и в точку O_2.

5. Точнее провешить расстояние между точками стояния O_1 и O_2; тщательно его измерить не менее трех раз и взять среднее арифметическое; в мензульной съемке из двух полюсов это единственное измерение, которое определяет все линейные размеры участка.

6. Отложить на плане в выбранном масштабе расстояние O_1O_2.

7. Перейти с мензулой во вторую точку стояния и как можно точнее установить точку плана O_2 над колышком, соответствующим этой точке на местности.

8. Установив мензулу в точке O_2, ориентировать планшет так, чтобы визирная линейка, приложенная к линии O_2O_1 на плане, оказалась направленной на веху O_1 на местности.

9. Из второй точки стояния O_2 снова провести по визирной линейке лучи в вершины участка; тогда пересечения соответственных лучей из точек стояния O_1 и O_2 укажут искомые вершины.

10. Замкнутая ломаная, соединяющая все вершины участка, даст его контур.

РЕЛЬЕФ

План местности, на котором нанесено расположение различных сельскохозяйственных угодий (луг, лес, пашня, болото и т. д.), построек, дорог и пр., не дает полного представления о местности и не позволяет решить некоторые практические задачи, если на нем не отражен рельеф, т. е. форма земной поверхности: горы, холмы, впадины, овраги и т. д. (рис. 77).

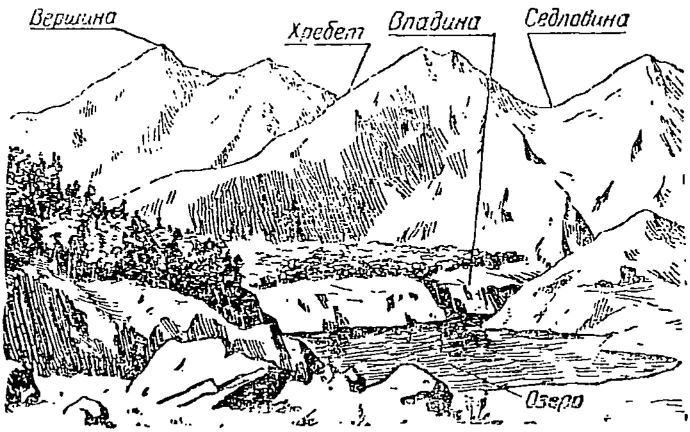


Рис. 77. Характерные формы рельефа

Способы изображения рельефа хорошо показаны в географическом атласе для V и VI классов. Здесь главное внимание будет обращено на геометрическую сущность вопроса и изображение рельефа на топографической карте.

Для изображения рельефа на топографических картах и планах проводят линии, соединяющие точки местности, расположенные на одинаковой высоте над уровнем моря. Эти воображаемые линии называются горизонталями (получаются как линии пересечения поверхности земли горизонтальными плоскостями, проведенными через равные по высоте промежутки).

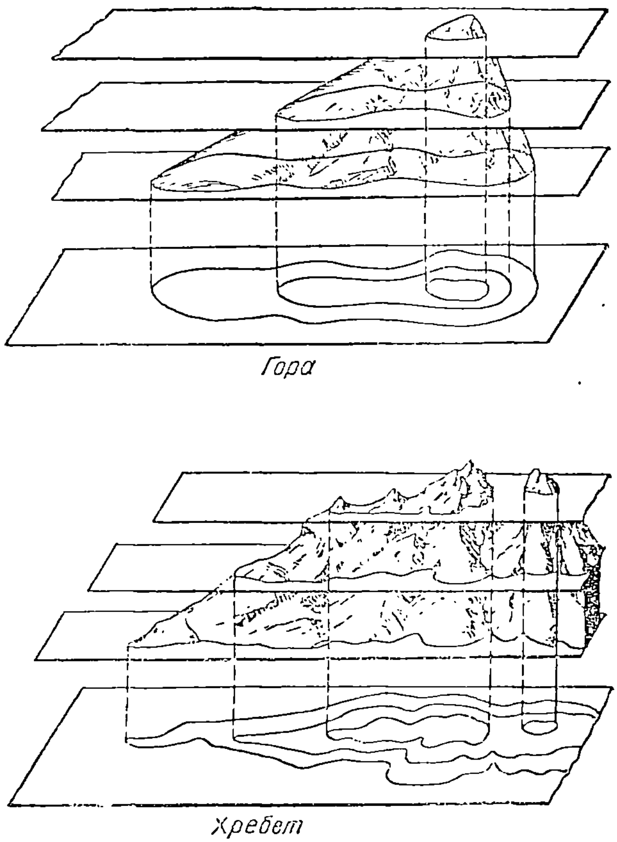


Рис. 78. Изображение рельефа на плане

Соответствующие линии на карте или плане также носят название горизонталей (рис. 78).

Простейшей геометрической моделью, демонстрирующей способ горизонталей, может служить детская пирамида (рис. 79).

Расстояние между секущими плоскостями называется высотой сечения и обычно указывается на картах. Высота горизонталей над уровнем моря обозначается числом метров в разрыве самой линии или на полях карты в конце горизонтали; это число называется отметкой горизонтали. Цифры пишут так, чтобы их верх был направлен в сторону повышения местности.

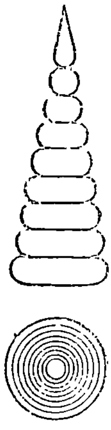
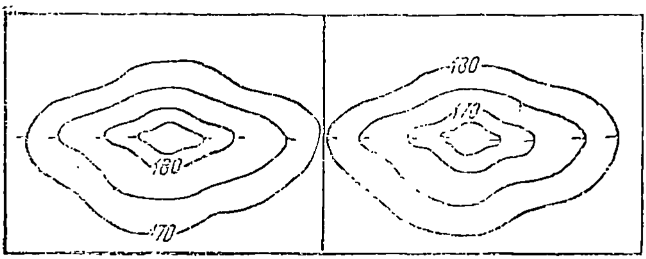


Рис. 79. Пирамида

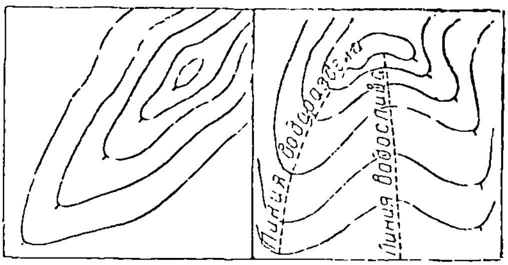
Следует обратить внимание на короткие штрихи, бергштрихи, указывающие направление ската. Благодаря им даже без отметок горизонталей можно отличить гору от впадины (рис. 80).

Как показано на рисунках, гора или холм изображается замкнутыми горизонталями с бергштрихами, идущими наружу от горизонтали. Впадина или котловина также изображается замкнутыми горизонталями, но бергштрихи направлены внутрь. Обращая внимание на бергштрихи, можно отличить хребет от лощины, хотя их изображения в горизонталях одинаковы (рис. 81).



Гора Котловина

Рис. 80. Бергштрихи



Хребет Лощина

Рис. 81. Водораздел и водослив

Сравнительно небольшие искусственные холмики-курганы и впадины-ямы изображаются особым условным знаком (см. приложение 2) и рядом с ними подписывается высота (+) или глубина (—) в метрах относительно окружающей местности.

На картах с горизонталями можно решать различные практические задачи, например построение профиля по заданному направлению. Профилем называется вертикальный разрез местности.

Построение профиля

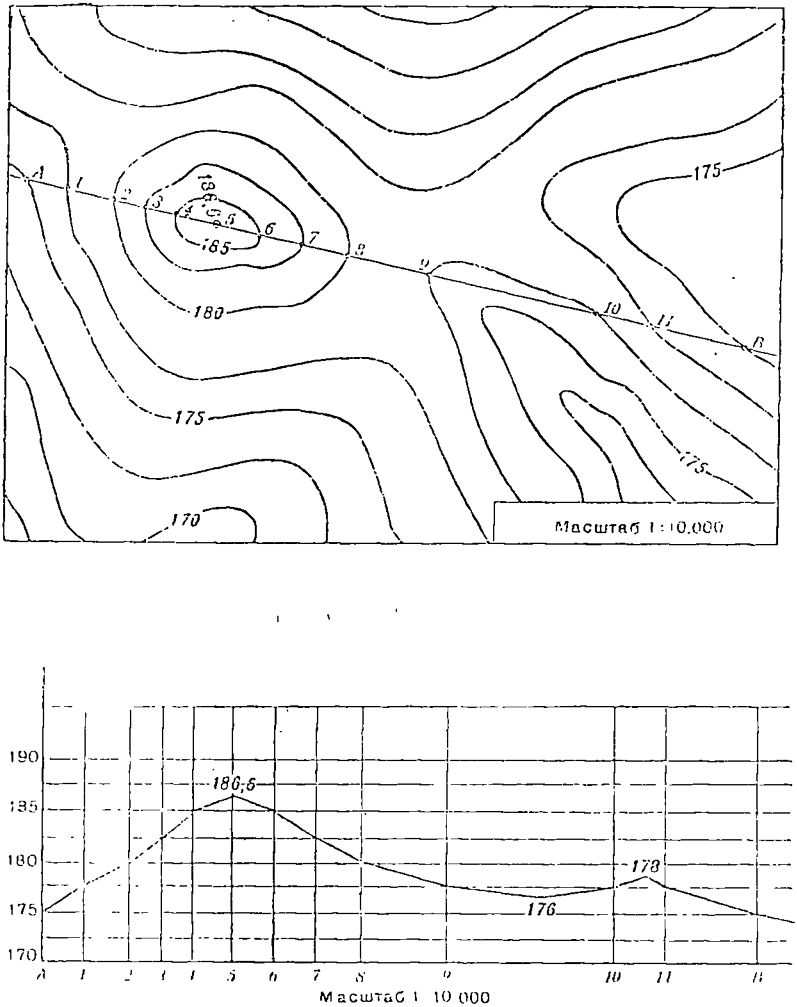


Рис. 82. План и профиль

1. На плане с горизонталями наметить две точки A и B (рис. 82), между которыми требуется построить профиль, и соединить их прямой. Пронумеровать точки пересечения прямой с горизонталями.

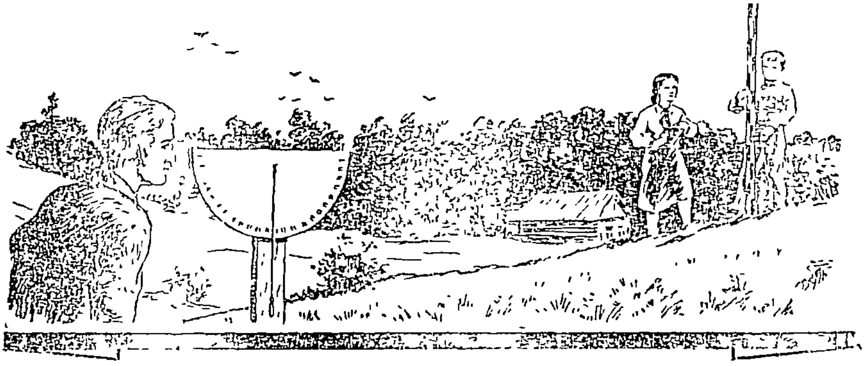
2. На отдельном листе бумаги прочертить горизонтальную прямую линию и отложить на ней последовательно отрезки между горизонталями от точки A до точки B.

3. Во всех точках провести перпендикуляры к прямой AB.

4. Построить вертикальный масштаб на перпендикуляре, проведенном из точки A. Обычно вертикальный масштаб берется в 10 раз крупнее горизонтального.

5. Пользуясь вертикальным масштабом, нанести на каждом перпендикуляре точку, согласно отметке данной горизонтали.

6. Соединив последовательно точки, получить профиль.



НИВЕЛИРОВАНИЕ

Горизонтальное расстояние на местности между двумя точками можно получить непосредственным измерением. Непосредственное измерение в вертикальной плоскости, например высоты здания или холма, в большинстве случаев невозможно. Тогда непосредственное измерение заменяется измерением других величин, посредством которых определяется искомая величина. Нивелирование, т. е. определение превышения одной точки над другой, может быть произведено:

1) горизонтальным лучом при небольших уклонах (посредством нивелира) — геометрическое нивелирование;

2) наклонным лучом при значительных уклонах (при помощи эклиметра) — геодезическое (тригонометрическое) нивелирование,

3) разностью давлений — барометрическое нивелирование (в данной работе не рассматривается).

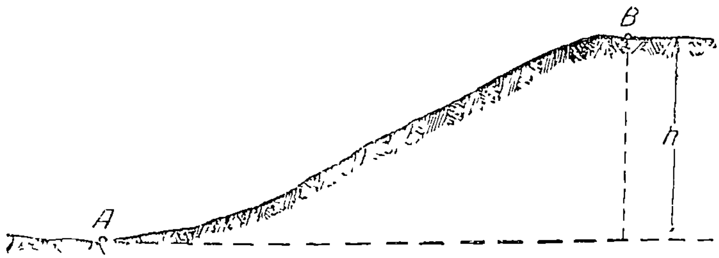


Рис 83 Превышение

Пусть требуется измерить превышение точки B над точкой A (рис. 83).

Выполнить эту задачу можно различными способами.

Первый способ

Нивелирование из середины горизонтальным лучом

Устанавливают нивелир примерно на середине между точками A и B (рис. 84), на которых держат вертикально рейки, и наводят верхний край нивелира (основание транспортира) на рейку A.

Для горизонтальности луча зрения достаточно, чтобы нить отвеса проходила через отсчет 0°

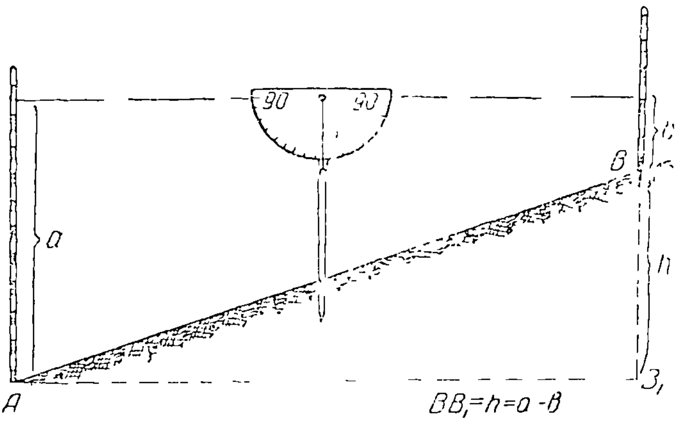


Рис. 84. Нивелирование из середины

Наблюдатель смотрит через диоптры на рейку, по которой реечник медленно ведет карандаш, прикладывая его к плоскости рейки (рис. 85). Когда карандаш окажется на уровне луча зрения, наблюдатель дает сигнал остановиться. Чтобы уточнить положение карандаша, наблюдатель в случае надобности дает указания реечнику. После этого реечник делает отсчет, а журналист записывает отсчет в журнал. Таким же образом производится отсчет по рейке B. На рис. 84 показано, что превышение точки B над точкой A будет равно разности отсчетов по рейкам A и B, т. е.

$$a - b.$$

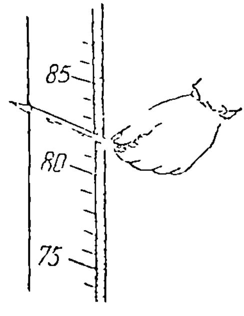


Рис. 85 Рейка

Если расстояние между точками A и B больше 15 *м*, то нужно разбить его на отдельные отрезки (пикеты) по 10 *м*. Превышение B над A будет равно алгебраической сумме превышений по пикетам.

Журнал нивелирования горизонтальным лучом из середины

Номер пикета	Точки установки реек	Отсчеты по рейкам в *см*	Превышение в *см*
1	A	145,3	+ 92,2
	C	53,1	
2	C	57,1	— 41,3
	D	98,4	
3	D	114,5	+ 98,7
	B	15,8	

Превышение B над A:

$$h = h_1 + h_2 + h_3 = 149{,}6 \text{ см (рис. 86)}.$$

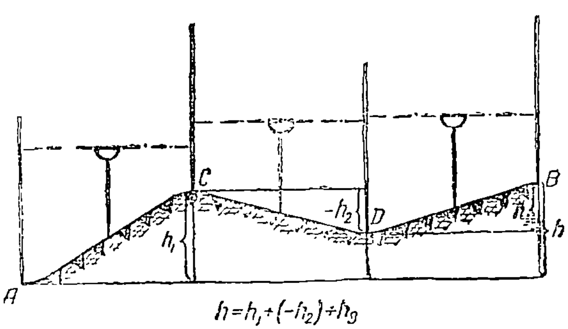


Рис. 86. Нивелирование по пикетам

Второй способ

Нивелирование вперед горизонтальным лучом

При этом способе нивелир устанавливается в точке A, а единственная рейка — в точке B (рис. 87). Отсчет делается только один, но для определения превышения нужно измерить

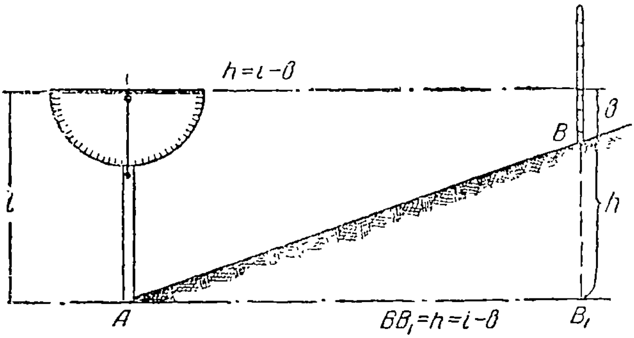


Рис. 87. Нивелирование вперед

высоту линии диоптров над точкой A и вычесть из нее отсчет по рейке.

Указание. Учащимся следует сообразить, почему в первом случае высоту инструмента i знать не нужно, а во втором — нужно.

Третий способ

Нивелирование наклонным лучом посредством эклиметра

Нивелирование горизонтальным лучом удобно применять при больших горизонтальных расстояниях и небольших превышениях. Наоборот, при небольших расстояниях и значительных превышениях следует применять нивелирование наклонным лучом.

Например, при определении высоты здания это — единственно возможный способ. Сущность способа основана на следующем (рис. 88).

Угол превышения определяется отклонением луча зрения на точку B от горизонта.

Начало шкалы эклиметра (O) находится на перпендикуляре, проведенном из центра M полукруга к линии диоптров. При наклоне эклиметра образуется угол между отвесом и направлением MO, который равен искомому углу (одноименные углы с соответственно перпендикулярными сторонами).

Найденный угол входит в прямоугольный треугольник, один из катетов которого можно измерить ($AB_1 = MD$), а другой $BD = h_0$ составляет превышение точки B над M. Катет находится геометрическим построением.

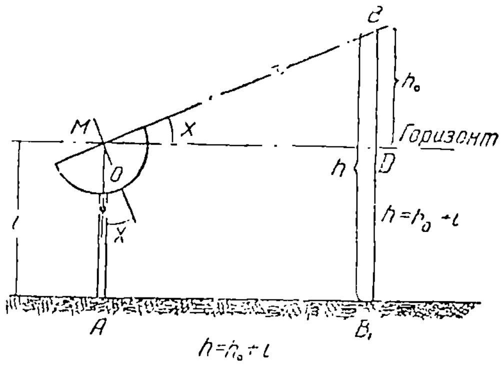


Рис. 88. Схема работы эклиметром

Пример. Определение высоты дома (рис. 89). Графическое решение задачи (рис. 90).

1. На плане в заданном масштабе откладывается расстояние $MD = AB_1$.

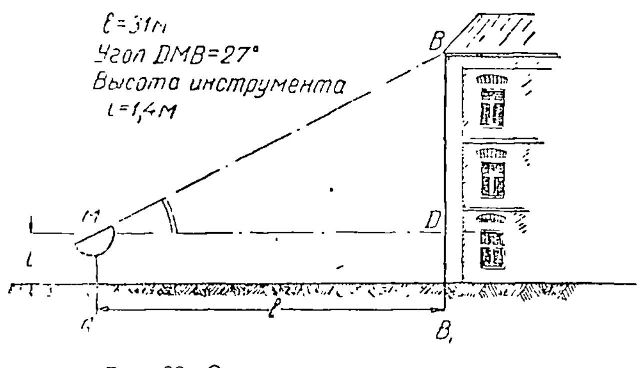


Рис. 89. Определение высоты дома

2. При точке M строится по транспортиру измеренный угол превышения.

3. В точке D проводится перпендикуляр, который образует треугольник MBD, уменьшенный по сравнению с натурой в выбранном масштабе.

4. Если катет BD увеличим в принятом масштабе, то получим превышение точки B над M.

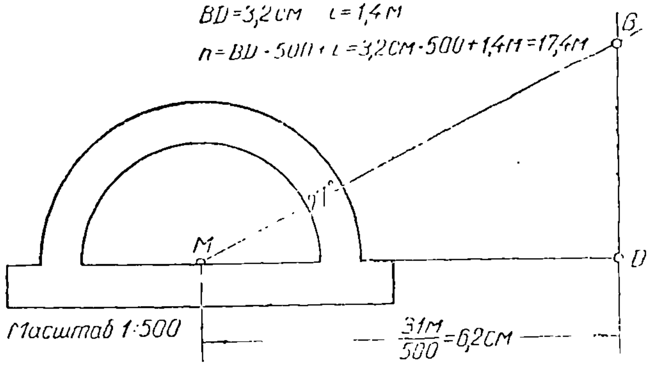


Рис. 90. Графическое построение

5. При получении превышения точки B над A не нужно забывать прибавить к полученной величине высоту инструмента.

Обратить внимание на то, что при невозможности измерения катета $AB = MD$ (например, если точка B — на крутом склоне горы) следует измерить гипотенузу $ME = AB$ и несколько изменить работу при измерении и геометрическом построении (рис. 91).

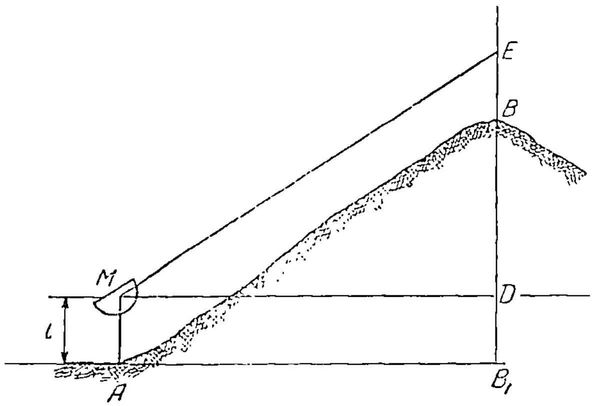
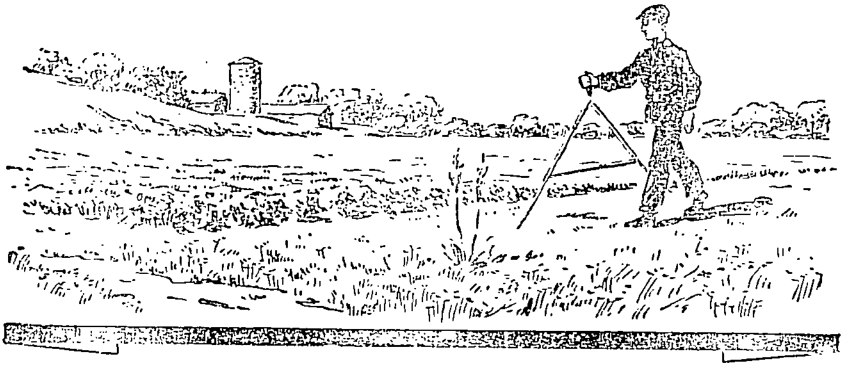


Рис. 91. Определение высоты холма

Луч зрения должен в этом случае идти параллельно склону, т. е. наблюдать нужно не точку B, а карандаш, который держат на рейке на высоте, равной высоте инструмента ($BE = AM = i$). Тогда по гипотенузе и углу мы сразу получим превышение B над A, так как $\triangle MED = \triangle ABB_1$; отсюда $h = BB_1 = ED$.



ИЗМЕРЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ

При измерительных работах на местности бывает необходимо измерить площади отдельных земельных участков или выделить на местности участок определенной площади.

Выполнение этих работ может быть проведено различными способами.

I. Измерение площадей участков в виде простейших геометрических фигур (рис. 92).

Допустим, нужно проверить соответствие размеров приусадебных участков колхозников уставу сельскохозяйственной артели. Пусть участки представляют собой прямоугольники, обнесенные изгородью. Их площадь определяется умножением длины на ширину. Если площадь окажется больше или меньше, чем полагается по уставу, то легко подсчитать, как и на сколько нужно ее изменить. Площадь как произведение будет зависеть от сомножителей — длины и ширины.

Пример. Длина участка равна 120 *м*, ширина — 32 *м*.

Площадь участка: $120 \cdot 32 = 3840$ $м^2$.

Если площадь участка должна быть 0,4 *га*, т. е. 4000 $м^2$, то, очевидно, ее следует увеличить на 160 $м^2$.

Если условия местности (дорога, соседние участки) не допускают увеличения ширины участка, то можно изменить длину участка, т. е. увеличить ее на 5 *м* (160 : 32), или, наоборот, если неудобно увеличивать длину, то приходится изменить ширину. Она будет $160 : 120 = 1\frac{1}{3} \approx 1{,}3$ (*м*).

II. Измерение площадей участков в виде фигур неправильной формы (например, школьного участка).

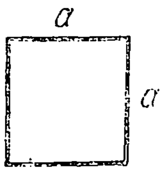
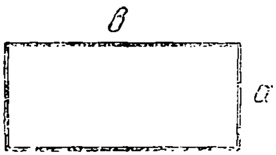
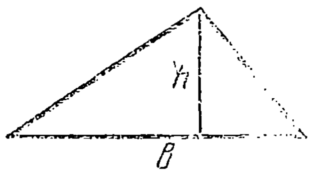
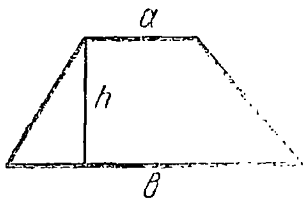
Вычисление площадей	
Фигура	**Площадь S**
Квадрат 	$S = a^2$
Прямоугольник 	$S = ab$
Треугольник 	$S = \frac{bh}{2}$
Трапеция 	$S = \frac{(a+b)h}{2}$

Рис. 92. Таблица формул площадей

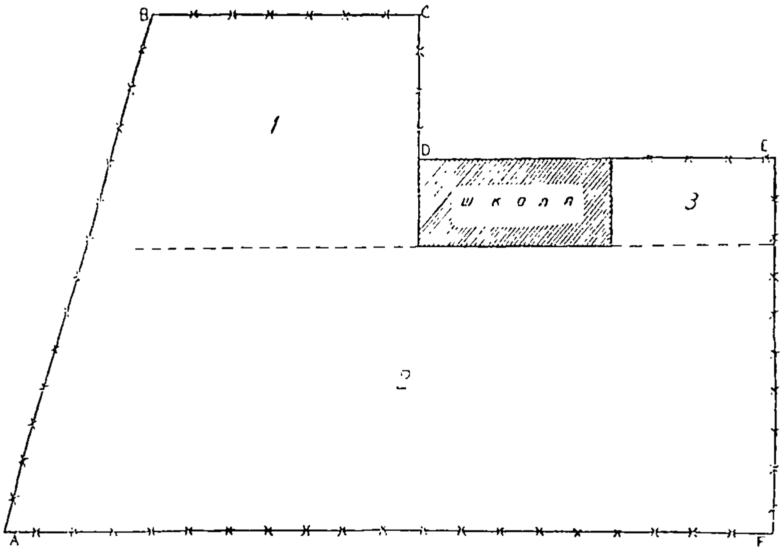


Рис. 93. Разбивка участка (вариант I)

Подсчет площади такого участка можно произвести и прямо на местности, но удобнее составить план участка и уже по плану произвести подсчет. Для этого площадь на плане разбивается на простейшие фигуры (треугольники, прямоугольники, трапеции); площади каждой фигуры вычисляются в единицах плана и складываются (рис. 93).

Пусть масштаб плана 1 : 20. Тогда произведение общей площади на 400 даст площадь в натуре, но в квадратных миллиметрах, которые легко перевести в квадратные метры.

Итак, для определения площади участков следует:

1. Составить план участка.

2. Разбить площадь на плане на простейшие фигуры.

Для выявления грубых ошибок разным группам учащихся следует разбивать площадь разными способами (рис. 94).

3. Измерить основания и высоты фигур и внести в журнал по форме (занесены результаты измерения одной площади двумя разными способами).

4. В случае грубых расхождений найти ошибку и исправить ее.

5. Если расхождения невелики, то вычислить среднее арифметическое n результатов по формуле:

$$S_{cp} = \frac{S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_n}{n}.$$

Результаты, резко расходящиеся с остальными, не принимать во внимание.

Подсчет площади

(варианты I и II)

№ фигуры	Основание (*мм*)	Основание (*мм*)	Высота (*мм*)	Площадь (*мм*^{2})
1	42,5	34,5	30	1155
2	99	88,5	37	3469
3	21	—	11	231
				$S_1 = 4855$
1	52,5	31,5	67	2815
2	25,5	—	37	943
3	20,5	—	48,5	994
				$S_2 = 4752$

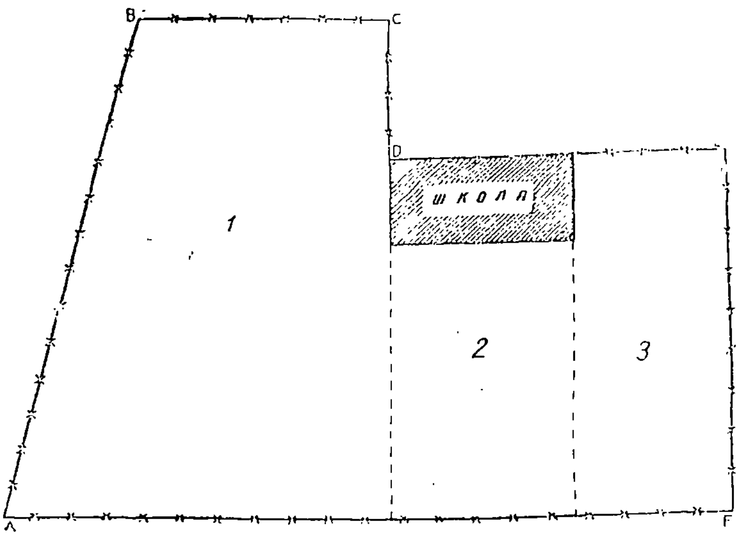


Рис. 94. Разбивка участка (вариант II)

6. Подсчитать площадь натуры в квадратных миллиметрах и перевести ее в квадратные метры или гектары.

Другой способ вычисления площади.

а) Дополнить участок до трапеции $ABGF$ (рис. 95).

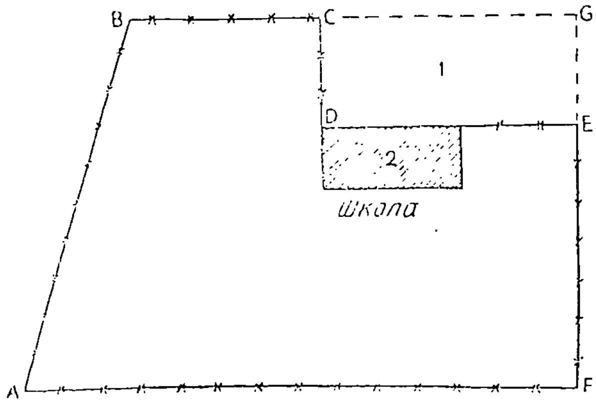


Рис. 95. Дополнение участка до трапеции

б) Вычислить площади (1) и (2) и вычесть из площади $ABGF$ сумму площадей (1) и (2).

III. Деление участков на равновеликие части, например, на поля севооборотов (рис. 96).

Если участок нужно разделить на два равных поля, проложив между ними дорогу, то прежде всего на глаз наносят линию, делящую участок пополам и проходящую в нужном направлении (например, линию AB). Затем определяют площадь каждой из частей (1) и (2), а их разность делят пополам. Половина разности указывает, на сколько нужно увеличить меньший и уменьшить больший участок. Для уравнивания площадей, определяемых на глаз, можно либо смещать линию раздела параллельно самой себе, либо поворачивать ее вокруг точек A или B. В первом случае отрезаемая полоса будет иметь форму, близкую к прямоугольнику, во втором — к треугольнику (рис. 97).

Сдвинутая линия AB будет осевой линией дороги; при любой ширине дороги площади обеих частей будут равны.

IV. Измерение площадей с извилистым контуром (например, площади пруда, болота, леса).

Указанные приемы мало пригодны для определения площадей с извилистым контуром; такой участок пришлось бы разбивать на большое число фигур. В этом случае рекомендуется применять палетку (см. приложение 14). Палетка — это прозрачная пластинка (из целлулоида, кальки, восковки) с на-

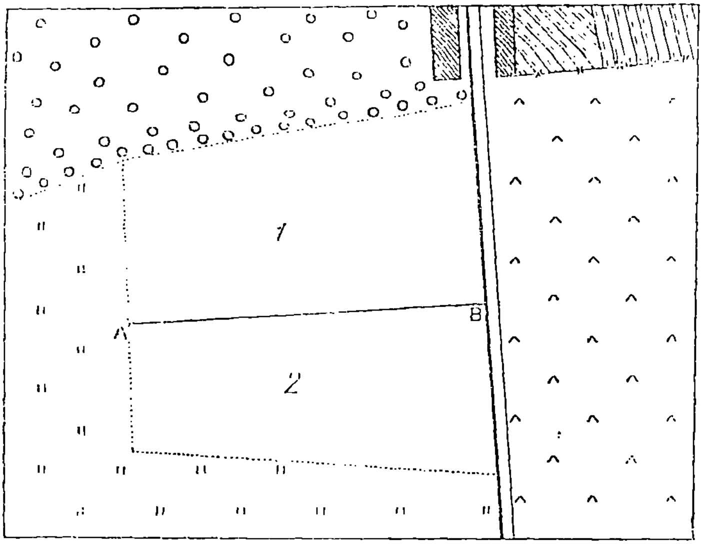


Рис. 96. Деление участка

несенной на ней сеткой квадратов. Палетка накладывается на измеряемую фигуру, и по ней подсчитывается, сколько клеток помещается внутри контура. Клетки, пересеченные контуром, подсчитываются отдельно; принимают приближенно, что половина таких пересеченных клеток выходит за контур фигуры,

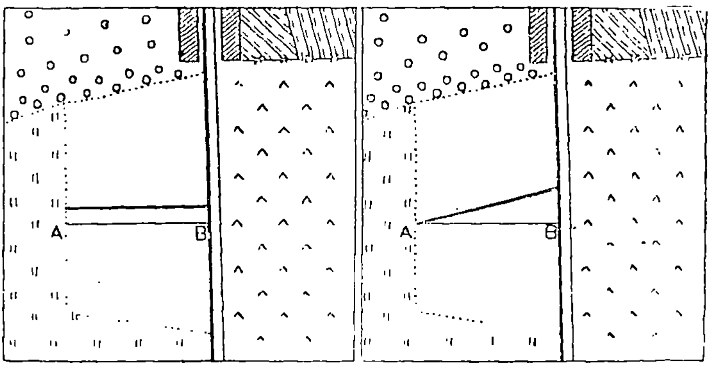


Рис. 97. Способы смещения границы

поэтому к ранее подсчитанному числу целых клеток прибавляют половину пересеченных. После этого переводят число клеток в квадратные миллиметры. Пользуясь палеткой, данной в приложении, нужно число клеток умножить на 4 (сторона клетки равна 2 *мм*). Далее подсчитывается натуральная площадь в соответствующих квадратных единицах.

Пример. Подсчет площади озера Иссык-Куль и Аральского моря.

Площадь озера Иссык-Куль (рис. 98).

Целых клеток 26.

Клеток, пересеченных контуром, 37.

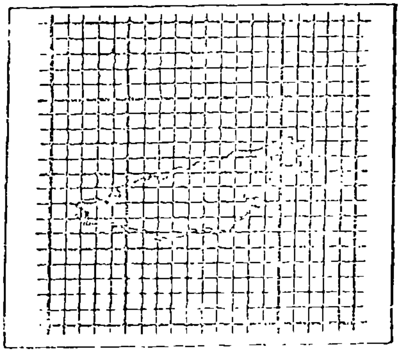


Рис. 98. Озеро Иссык-Куль

Всего клеток 44,5 $(=26+18{,}5)$.

Площадь на карте 178 *мм*² $(=44{,}5\cdot 4)$.

Масштаб $1:(6\cdot 10^6)$.

Площадь в натуре 6,4 тыс. *км*² $\approx 178\cdot(6\cdot 10^6)^2$.

Площадь Аральского моря (рис. 99).

Целых клеток 388.

Клеток, пересеченных контуром, 124.

Клеток под островами 8.

Всего клеток 442 $(=388+62-8)$.

Площадь на карте 1768 *мм*² $(=442\cdot 4)$.

Масштаб $1:(6\cdot 10^6)$.

Площадь в натуре 63 тыс. *км*² $\approx 1768\cdot(6:10^6)^2$.

В географическом атласе СССР для VII и VIII классов средней школы на стр. 59 и 60 даны:

Площадь Иссык-Куля — 6,2 тыс. *км*².

Площадь Аральского моря — 63,8 тыс. *км*².

Как видно, точность измерения была достаточно хорошая.

Практические работы по измерению площадей можно проводить по планам, составленным ранее, по учебному планшету, по географическим картам и т. д.

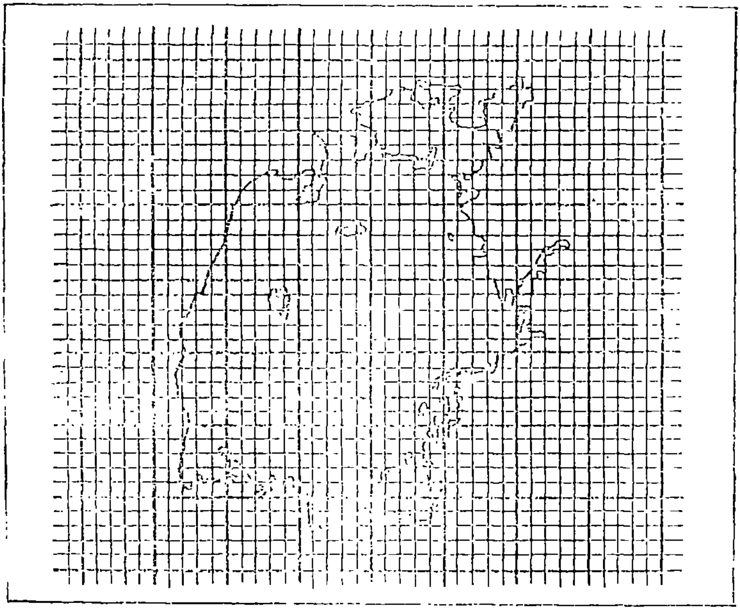
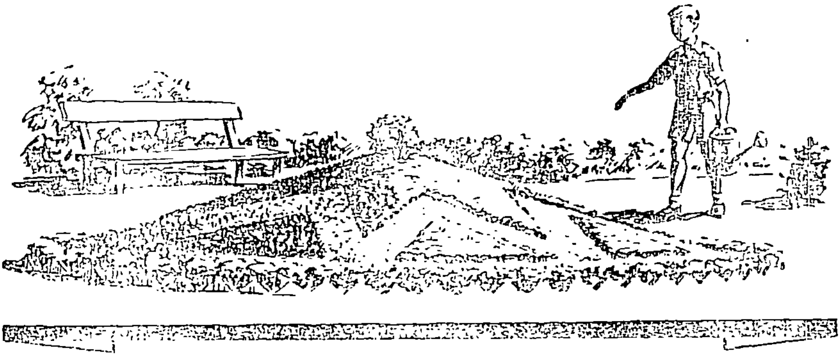


Рис. 99. Аральское море

Следует учесть, однако, что на географических картах, в силу свойств некоторых картографических проекций, искажения площадей могут быть значительными, и площадь будет определена только приблизительно.



РАЗМЕТКА ГРЯД И КЛУМБ

Украшать свое жилище, двор, школьный участок, пионерский лагерь стало общей традицией, обычаем. В этом украшении большое место отводится клумбам цветов. Форма клумбы играет большую роль в создании приятного зрительного впечатления, поэтому естественно стремление разнообразить эту форму. Кроме клумб в виде многоугольников, можно делать клумбы с кривыми границами (окружность, эллипс, коробовая кривая и др.).

Общую планировку участка нужно предварительно произвести на плане, предоставив инициативу самим учащимся. После обсуждения и одобрения проекта планировки (рис. 100) следует наметить проект переноса в натуру (рис. 101), т. е. набросать схему с указанием натуральных размеров и составить краткую инструкцию по проведению работы.

Краткая инструкция (образец)

1. Провести окружность радиусами r_1, r_2, r_3 (рис. 101).
2. На окружности радиуса r_1 способом, указанным на рисунке 102, найти вершины пятиугольника и забить колышки 1, 2, 3, 4, 5.
3. На расстоянии a от каждой вершины по большой окружности забить колышки n.
4. Натягивая поочередно шпагат между соответствующими колышками, построить требуемые линии.

Практическая работа

1. Разметить клумбу в форме круга.
2. Разметить клумбу в форме эллипса.
3. Разметить клумбу в форме коробовой линии.

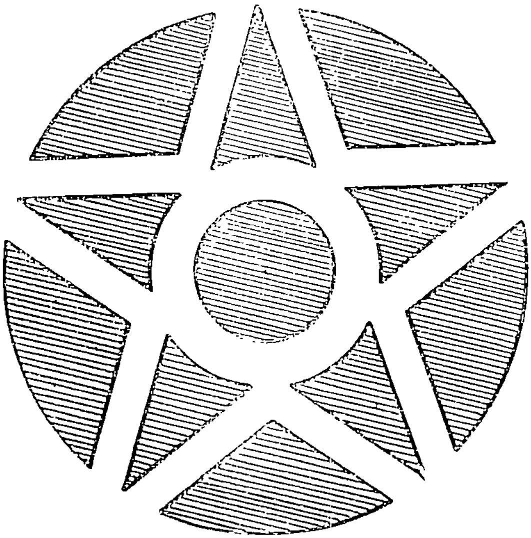


Рис. 100. Проект планировки

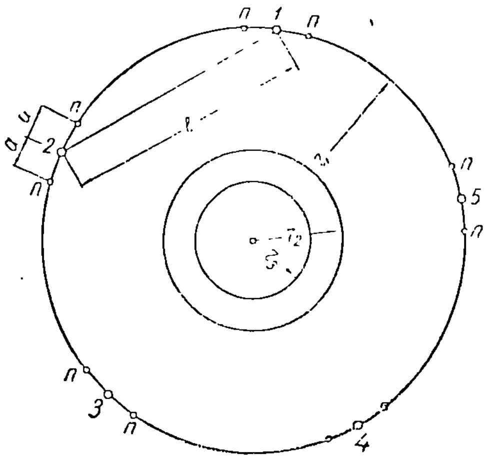


Рис. 101. Проект переноса в натуру

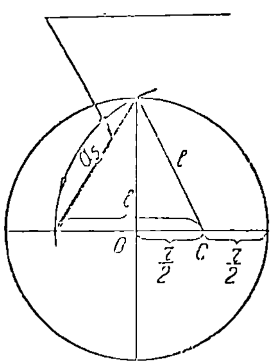


Рис. 102. Построение правильного пятиугольника

Построение коробовой кривой на плане (рис. 103).

1. $MN \perp PL$.
2. $OA = OB = b$.
3. $OO_1 = OO_2 = a$.
4. Лучи из B через O_1 и O_2 — 1 и 2.

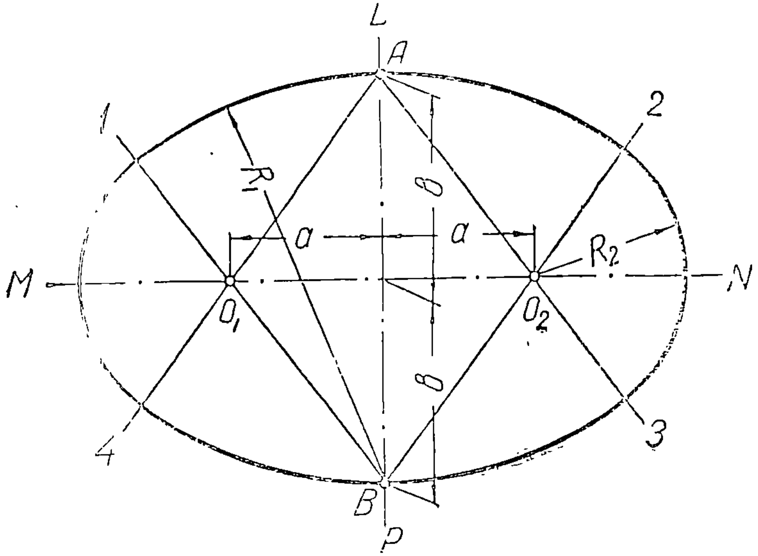


Рис. 103. Построение коробовой кривой на плане

5. Лучи из A через O_1 и O_2 — 3 и 4.

6. Дуги из точек A и B радиусом $R_1 = 2b$.

7. Дуги из точек O_1 и O_2 радиусом R_2.

Радиус R_2 берется от точки O_1 или O_2 до пересечения луча 1, 2 дугой радиуса R_1.

Построение коробовой кривой на местности (рис. 104)

1. Построить оси $MN \perp PL$.

2. Наметить точки A, B, O_1, O_2 и забить колышки.

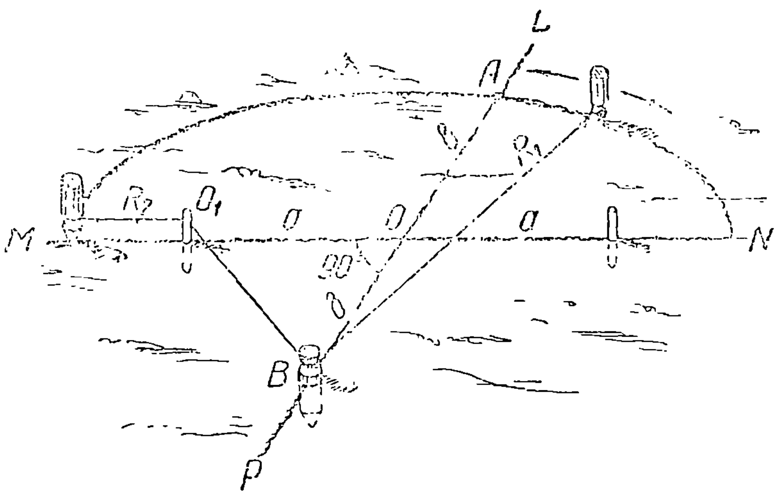


Рис. 104. Построение коробовой кривой на местности

3. Из точки B радиусом R_1 прочертить дугу.

4. Тем же радиусом провести дугу из точки A.

Примечания.

1. Переход кривой радиуса R_1 в кривую радиуса R_2 получается тогда, когда шпагат упирается в колышки O_1 или O_2.

2. Если $OO_1 \neq OO_2$, то фигура будет несимметрична относительно оси PL.

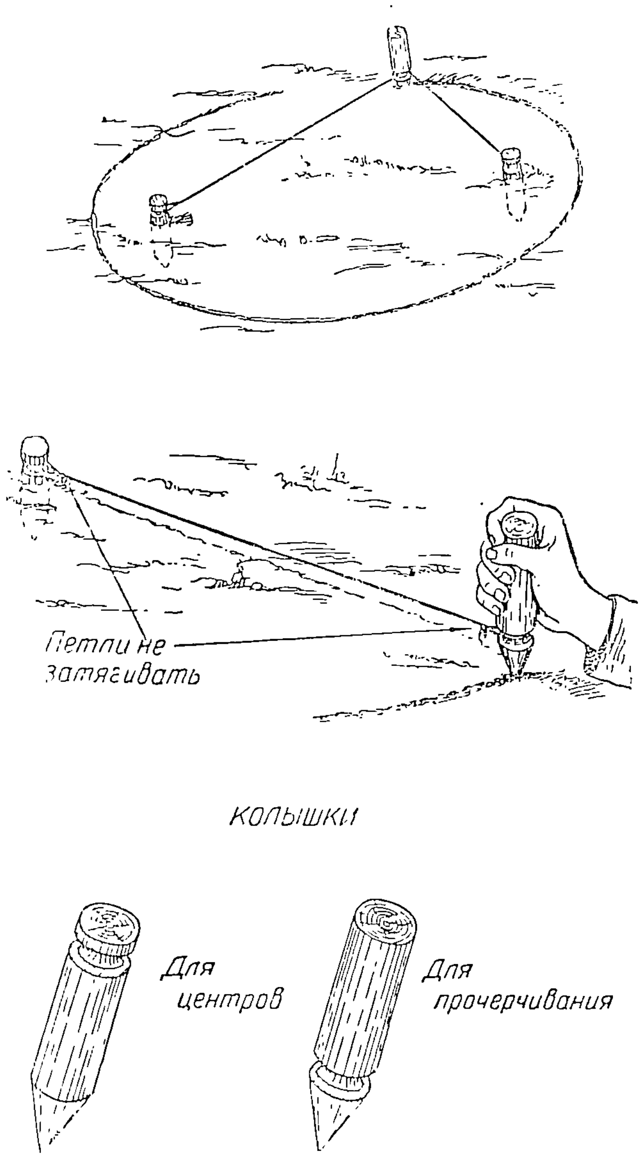


Рис. 105. Разметка эллипса

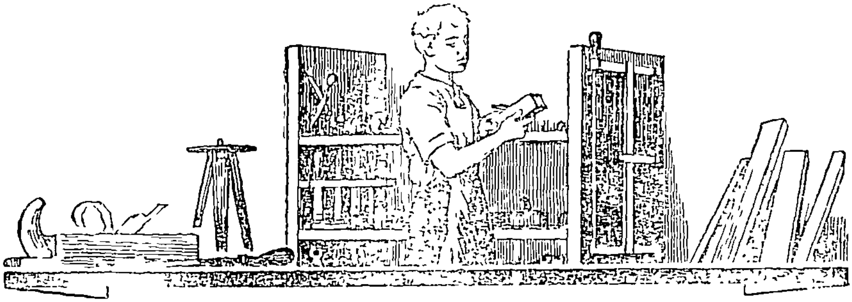
Разметка эллипса ясна из рис. 105.

В землю вбивают два колышка, на которые надеваются петли шнура. Затем берут колышек для прочерчивания и при натянутом положении шнура вычерчивают эллипс.

Если большая (a) и малая (b) полуоси эллипса заданы, то расстояние между колышками ($2c$) можно получить по формуле:

$$2c = 2\sqrt{a^2 - b^2};$$

длина веревки всегда равна $2a$.



ОРГАНИЗАЦИЯ ИЗГОТОВЛЕНИЯ ПРИБОРОВ

Измерительные работы на местности, которые входят как обязательные практические занятия в курс математики, нуждаются в изготовлении простейших приборов, в их восстановлении и ремонте. Изготовить прибор — значит составить эскиз его конструкции (или даже чертеж), обсудить этот проект, внести исправления, сделать прибор и проверить его в действии. Развивающее значение такого рода конструктивных занятий бесспорно. Также, безусловно, полезно упражнять волю, инициативу, настойчивость ученика в стремлении изготовить нужное пособие и притом отличного качества.

Как организовать математический кабинет? (Такие кабинеты в некоторых школах уже существуют). Здесь возможны два варианта: либо школа выделяет для этой цели небольшую комнату, где хранятся наглядные пособия по математике, где имеются приспособления для их изготовления. Там же можно собирать математические кружки, вести консультации по математике и проводить другие виды занятий. Другой вариант состоит в том, что в одном из классов сосредоточивается все оборудование по математическому кабинету. Занятия в этом классе идут в одну смену, а вторая выделяется для изготовления приборов и другой внеклассной работы.

В данный момент почти все школы в той или иной форме проводят практические занятия в мастерских, а иногда даже на производстве. Поэтому ученики, оканчивающие общеобразовательную школу, уже будут иметь определенные трудовые навыки.

Указанные занятия ведутся по своей программе, в особой последовательности, которая не всегда совпадает с запросами математического практикума. Поэтому чрезвычайно желательно в математическом кабинете наладить особую работу по конструированию и изготовлению наглядных пособий и простейших приборов. Эти занятия укрепят практические навыки учащихся, позволят им использовать свои производственные умения. Мало того, для самого обучения математике такие практические занятия принесут большую пользу, ибо они оживят математические предложения, сделают их более прикладными, жизненными. Вначале, очевидно, придется привлекать к работам по изготовлению приборов желающих, интересующихся этими работами с тем, чтобы постепенно состав работающих увеличивался.

Как быть, если учитель математики не обладает необходимыми навыками? Очевидно, придется обратиться к родителям, среди которых всегда найдутся любители или специалисты по столярному, слесарному делу.

Для работ необходим небольшой запас материалов (хотя бы из отходов) и минимальный набор инструментов. Хранить все это в образцовом порядке следует не только из хозяйственных, но и воспитательных соображений (рис. 106, 107, 108).

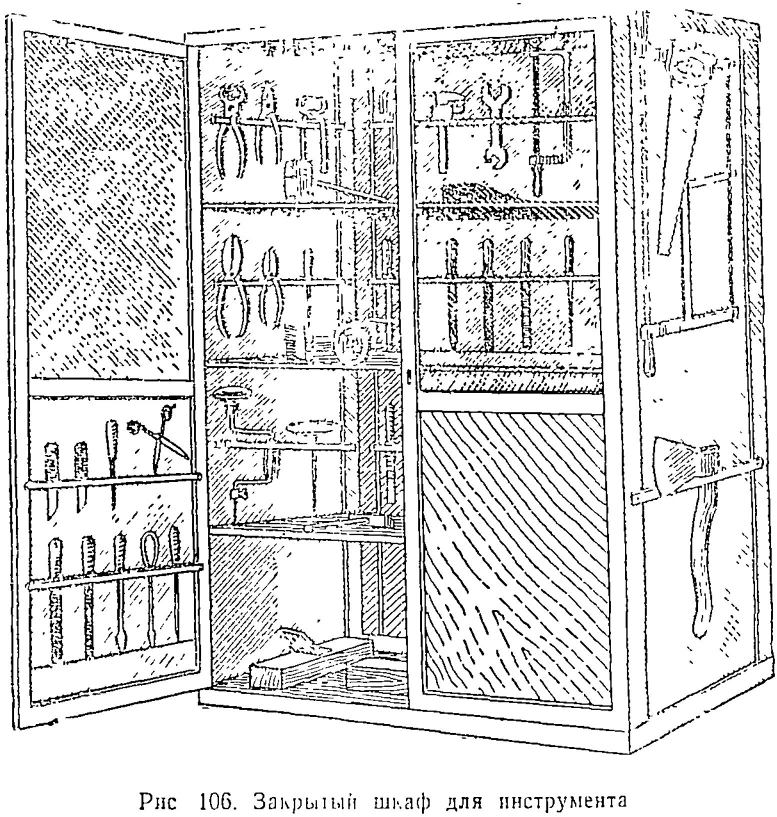


Рис 106. Закрытый шкаф для инструмента

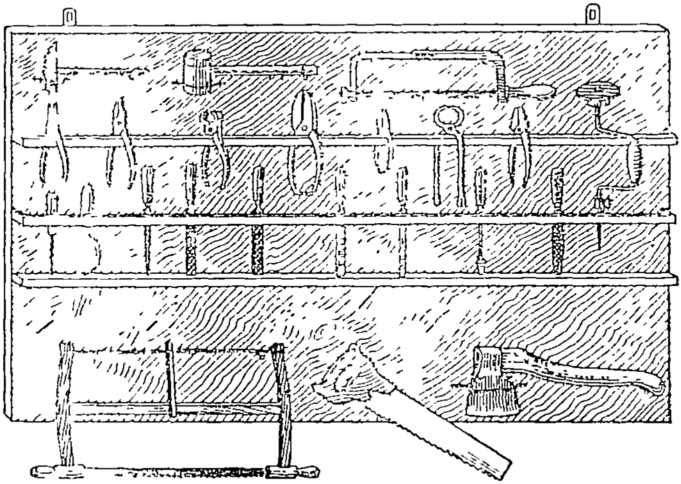


Рис. 107. Настенная доска для инструмента

Оборудование: 1) верстак, 2) устойчивый стол, 3) шкаф (или стойки и полки) для хранения инструментов и материалов. Каждый инструмент лежит на своем постоянном месте или вставлен между планками, прибитыми к стенке, или в гнезда, врезанные в доске.

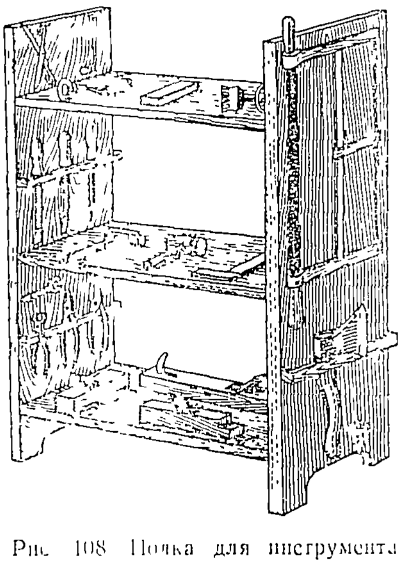


Рис. 108. Полка для инструмента

Инструменты: 1) ножницы для резки картона и жести, 2) ножницы обыкновенные, 3) ножи переплетные, 4) пилы разные, 5) ножовка, 6) рубанки различные, 7) коловорот, 8) клещи, 9) отвертки, 10) стамески разные, 11) молотки разные, 12) плоскогубцы разные, 13) круглогубцы, 14) напильники разные, 15) шилья разные, 16) тиски для металла с наковальней, 17) набор для выпиливания, 18) дрель с набором сверл, 19) алмаз, 20) паяльники — обыкновенный и электрический, 21) измерительные инструменты. метры складные — деревянные и металлические, метровая матерчатая лента («сантиметр»), рулетки длиной 10 и 20 м, масштабные линейки, кронциркуль, нутромер, измерительный циркуль, штангенциркуль, микрометр, весы с разновесами (рис. 109, 110, 111).

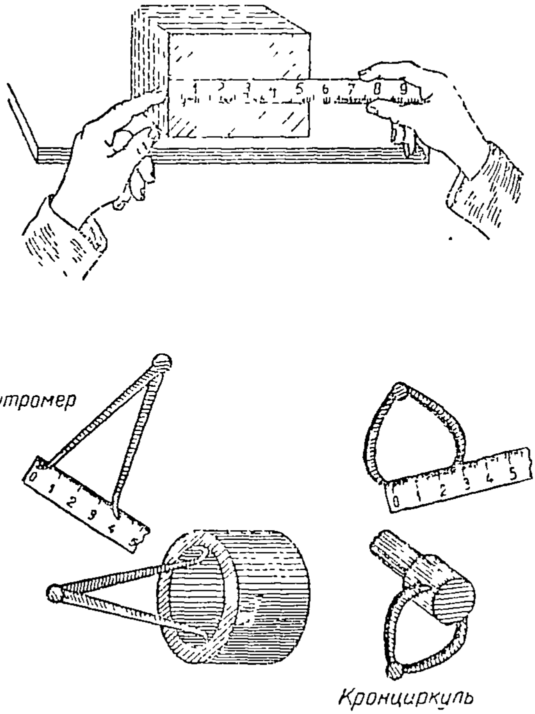


Рис. 109 Измерительные инструменты

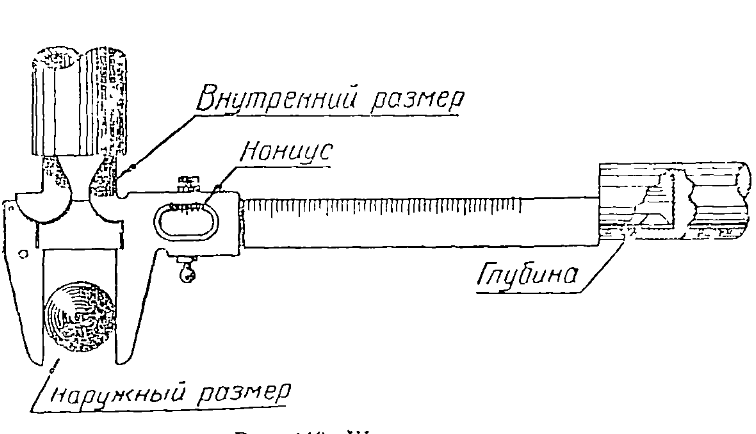


Рис. 110 Штангенциркуль

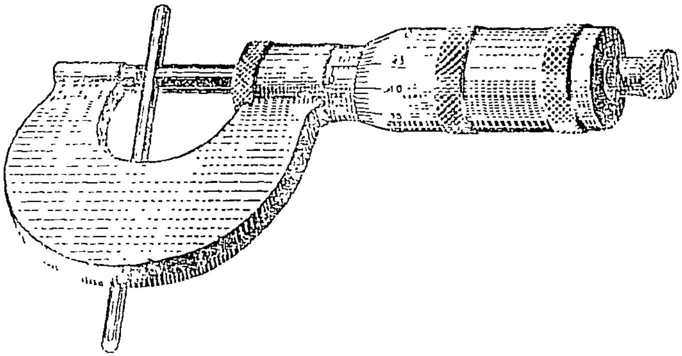


Рис. 111. Микрометр

Материалы: жесть, картон разный, железо разное, проволока разная, фанера толщиной от 1 до 10 *мм*, доски разной толщины, стекло, органическое стекло, лак, политура, морилка, краски разные (масляная, эмалевая, акварельная), резиновые шнуры разного сечения, гвозди, шурупы, болты, гайки, заклепки, пистоны, бумага разная (писчая, цветная, плотная), калька, карандаши, кисти, тушь, нитки, иголки, булавки, шпагат, тесьма, кнопки, клей универсальный, клей столярный, пластилин.

Разумеется, этот перечень не претендует на исчерпывающую полноту, а равно на необходимость единовременного приобретения. Речь идет о постепенном приобретении оборудования примерно по этому перечню, который взят из математического кабинета школы № 204 Москвы.

Ценные сведения о материалах, инструментах и способах их изготовления можно найти в сборнике «Умелые руки» («Молодая гвардия», 1953).

Часть II

ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ИНСТРУМЕНТЫ

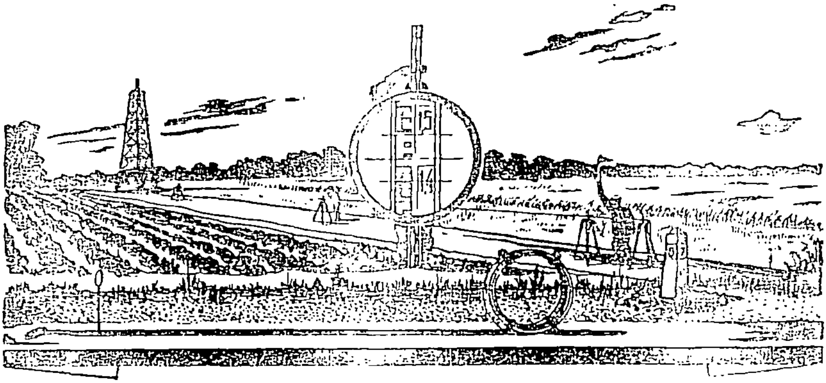
ОШИБКИ ИЗМЕРЕНИЙ И ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ

ВЫЧИСЛЕНИЯ

Геодезические инструменты

Ошибки измерений и оценки точности

Вычисления



ПРИБОРЫ ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ РАССТОЯНИЙ

Стальная мерная лента

Измерение расстояний — основная операция при всякого рода топографических (геодезических) работах.

Длина прямолинейных отрезков чаще всего определяется с помощью мерной ленты. Математическая сущность этого способа школьникам хорошо известна: измерить — это значит найти отношение длины искомого отрезка к единичному отрезку (его называют: мера, модуль, масштаб), в данном случае к длине в 1 *м*. Отсюда процесс измерения мерной лентой (рулеткой) складывается из тщательного и последовательного прикладывания ленты, строгого учета «ходов» и «передач» (см. стр. 46—48).

«Ходом» называется длина, которая получается при одном откладывании мерной ленты (рулетки); ход отмечается «шпилькой».

«Передача» состоит из 10 ходов; она связана с моментом передачи 10 шпилек задним мерщиком переднему.

О значении одиннадцати шпилек, о системе записи и так далее подробнее сказано в работе 1, стр. 48.

Измерения расстояний в обычных геодезических работах производятся стальной двадцатиметровой лентой (рис. 112). Лента изготовлена из полосы шириной 15—25 *мм* и толщиной 1—2 *мм*. В нерабочем состоянии ее хранят намотанной на специальный круг, а при длительном хранении, во избежание коррозии, смазывают жиром.

Оба конца ленты заделаны в толстые металлические пластинки, имеющие форму крючка. К пластинкам крепятся рукоятки, за которые при работе мерщики держат ленту. В прорези крючков, против штриха, которым отмечается начало или конец двадцатиметрового отрезка, втыкаются в землю шпильки.

Каждый метр отмечен на ленте медной бляшкой, а дециметры — пробитыми отверстиями. Нумерация метров с разных сторон ленты идет от противоположных концов ее, т. е., например метке «2» соответствует с другой стороны метка «18», метке «3» — «17» и т. д. Это позволяет принимать любой конец ленты за начало ее. При измерении отрезков меньше двадцати метров это обстоятельство необходимо учитывать, особенно, когда отрезок равен примерно половине длины ленты, т. е. 9—11 *м*. В этом случае, беря отсчет, нужно обязательно проверить соседнюю бляшку, чтобы установить, по какой стороне следует брать отсчет, ибо на глаз это различие не очевидно.

В геологических работах все ответственные измерения должны быть обязательно проконтролированы.

Для этого линейные измерения производят двумя лентами, обычной — длиной 20 *м* и контрольной — длиной 24 *м*. Контрольная лента разбита как и обычная на 20 частей, каждая из которых в свою очередь на 10. Подписи сделаны как на 20-метровой ленте, т. е. от 0 до 20. Отсчет по ленте производят как по обычной. Так как 1/20 от 24 *м* составляет 1,2 *м*, то полученный по 24-метровой ленте отсчет нужно умножить на 1,2 *м*

П р и м е р. Результат измерения 20-метровой лентой 197,6 *м*

Результат измерения 24-метровой лентой 164,6. Следовательно, длина по измерению 24-метровой лентой равна 164,6 × 1,2 *м* = 197,5 *м*.

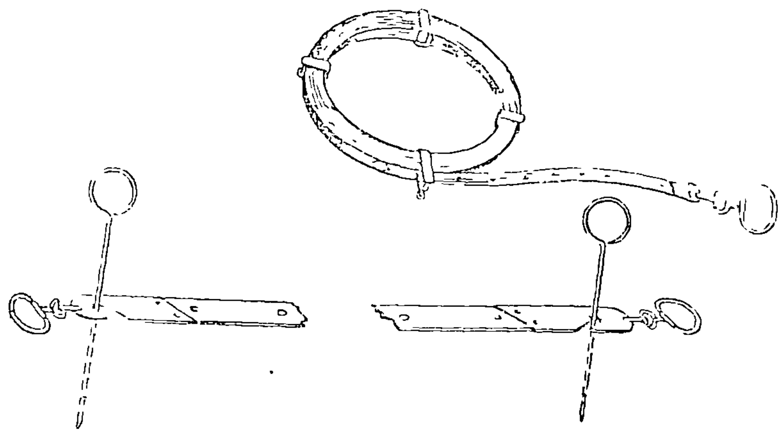


Рис. 112. Мерная лента

Прибор Едерина

При высокоточных базисных измерениях в триангуляции (см. стр. 344), где требуется, чтобы относительная ошибка была порядка 1 : 500 000, применяется специальный базисный прибор. Конструкция этого прибора была предложена в прошлом столетии шведским геодезистом Е. Едериным, но признания не получила.

Усовершенствования, внесенные русскими геодезистами (Д. Д. Гедеоновым, Ф. Ф. Витрамом, Ф. Н. Красовским и др.), привели к международному признанию этого прибора.

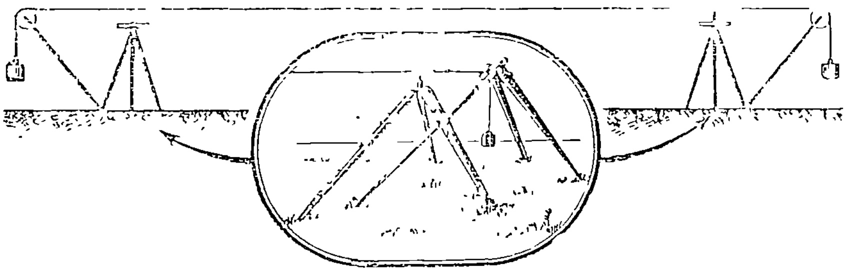


Рис. 113. Схема установки прибора Едерина

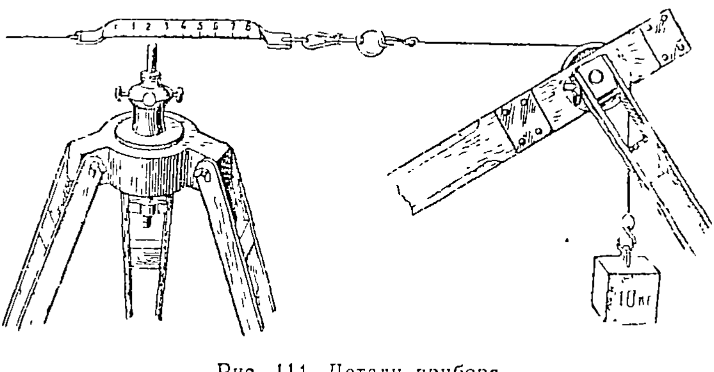


Рис. 114. Детали прибора

Комплект прибора состоит из следующего:

1) инварных[1] проволок длиной 24, 48, 72 и 96 м,

[1] Инвар — сплав железа (65%) с никелем (35%), обладающий при температурах до 100° очень малым коэффициентом расширения ($0{,}9 \cdot 10^{-6}$), в 12 раз меньшим, чем у стали.

2) блочных станков с гирями для натяжения проволок — системы астронома Пулковской обсерватории Ф. Ф. Витрама;

3) штативов со специальной головкой — системы чл.-корр. Академии наук СССР Ф. Н. Красовского.

Кроме основной аппаратуры, в комплект входят: термометры, нивелир высокой точности и т. д.

Схема и отдельные детали прибора показаны на рис. 113 и 114. Измерения базиса производятся по пролетам между штативами с учетом изменений температуры воздуха, разности высот головок штативов с точностью отсчета по линейкам до $\pm$ 0,1 *мм*.

Все проволоки (пролет измеряется поочередно несколькими проволоками) до и после измерения базиса подвергаются тщательному сравнению (компарированию) с эталонной мерой.

Дальномеры

В ряде случаев, например, когда магистраль недоступна и применить непосредственное измерение невозможно, приходится пользоваться другим способом, который основан на подобии треугольников или их решении с применением тригонометрии. Измерения при этом производят с помощью дальномера.

Дальномером называется прибор для определения расстояний, основанный на принципе подобия треугольников. О схеме дальномера теодолита и кипрегеля см. стр. 162.

Способы определения расстояний дальномером

Способ 1-й. Пусть требуется определить расстояние от точки стояния O' до дерева AB (рис. 115).

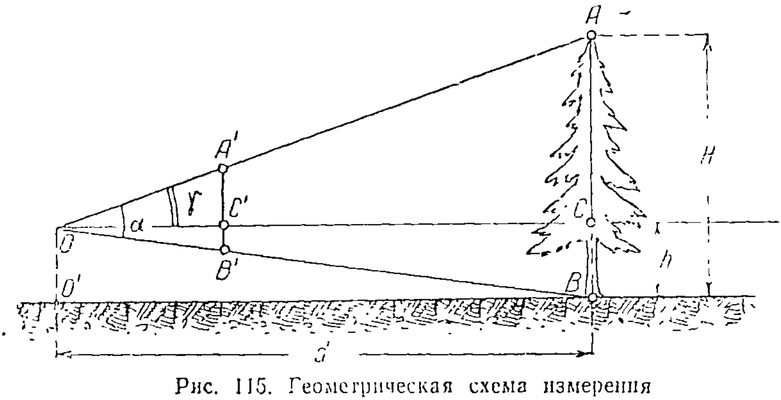


Рис. 115. Геометрическая схема измерения

O' — точка стояния; O — вершина угла зрения;

AB — предмет (дерево) — базис, размер его должен быть известен, пусть будет H;

OC — искомое расстояние, скажем d;

α — угол зрения на предмет AB из точки O;

$A'B'$ — дополнительно установленный предмет размера H';

OC' — известное расстояние до предмета $A'B'$, назовем его d'.

h — высота точки O над горизонтальной плоскостью.

Тогда, в силу параллельности $A'B'$ и AB, треугольники OAB и $OA'B'$ подобны. Следовательно, можно записать пропорцию:

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{OC}{OC'}, \text{ или } \frac{d}{d'}=\frac{H}{H'}$$

и искомое расстояние

$$d=\frac{H}{H'}\cdot d'.$$

Способ 2-й. Измеряется угол (эклиметром, теодолитом, кипрегелем) между горизонтальным направлением OC и направлением на вершину дерева OA.

Тогда из прямоугольного треугольника OAC находим.

$$OC=AC\cdot \operatorname{ctg}\gamma, \text{ или } d=(H-h)\cdot \operatorname{ctg}\gamma, \text{ или } d=\frac{H-h}{\operatorname{tg}\gamma}.$$

Разумеется, дальномером можно решать и обратную задачу.

Пусть известно расстояние OC (d), а требуется определить высоту предмета H.

Из тех же треугольников находится величина H:

$$H=\frac{d}{d'}\cdot H'.$$

Приложение принципа дальномера

В школьной практике, в кружковой работе проводится ряд интересных упражнений по определению расстояния до некоторого предмета заданной высоты или определению высоты предмета, если известно расстояние до него.

Задача 1. Расстояние до предмета известно. Определить высоту предмета.

На вытянутой руке держат масштабную линейку и отсчитывают на ней отрезок $A'B'$, отсекаемый лучами зрения на вершину и основание предмета (рис. 116).

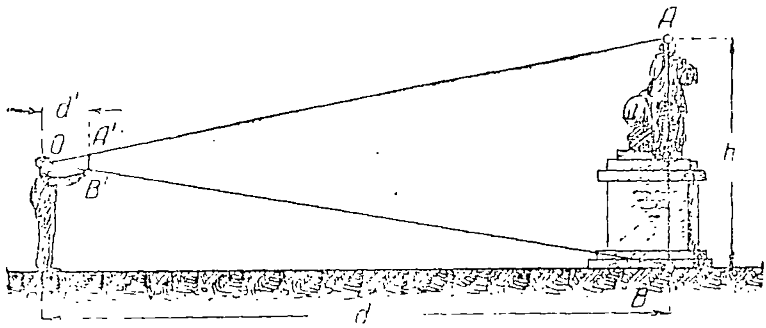


Рис. 116. Определение высоты

Пусть при расстоянии $d' = 0{,}6$ *м* на масштабной линейке отмечается отрезок 0,03 *м*; $d = 50$ *м*.

Тогда: $\frac{x}{0{,}03} = \frac{50}{0{,}6}$; $x = \frac{0{,}03 \cdot 50}{0{,}6} = 2{,}5$ *м*,

ибо

$$\triangle OBA \sim \triangle OB'A'; \ \frac{x}{A'B'} = \frac{d}{d'}.$$

Задача 2 (обратная). Высота железнодорожного вагона H известна (4 *м*); масштабная линейка на вытянутой руке ($d = 0{,}6$ *м*) дает отрезок h (0,03 *м*) между крайними лучами на крайние точки вагона. Определить расстояние до вагона (рис. 117).

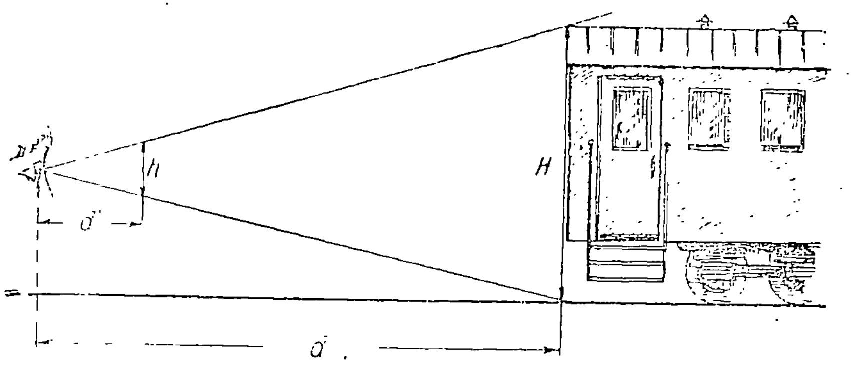


Рис. 117. Определение расстояния

Из подобия рассмотренных выше треугольников находим:

$$\frac{d}{d'} = \frac{H}{h};$$

откуда

$$d = \frac{H}{h} \cdot d'.$$

Задача 3. Известно расстояние между двумя электромачтами. Найти (приближенно) с помощью масштабной линейки расстояние до электролинии (рис. 118).

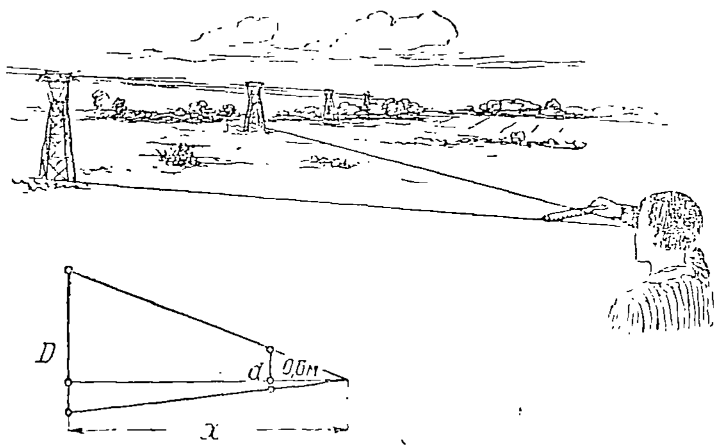


Рис. 118. Определение расстояния

Указание. Вместо масштабной линейки иногда пользуются спичкой, коробком от спичек, карандашом, а то и просто большим пальцем,— вообще предметом, размер которого либо известен, либо на котором можно отметить отрезок между двумя крайними лучами на измеряемый предмет. Затем этот отрезок измеряется (рис. 119).

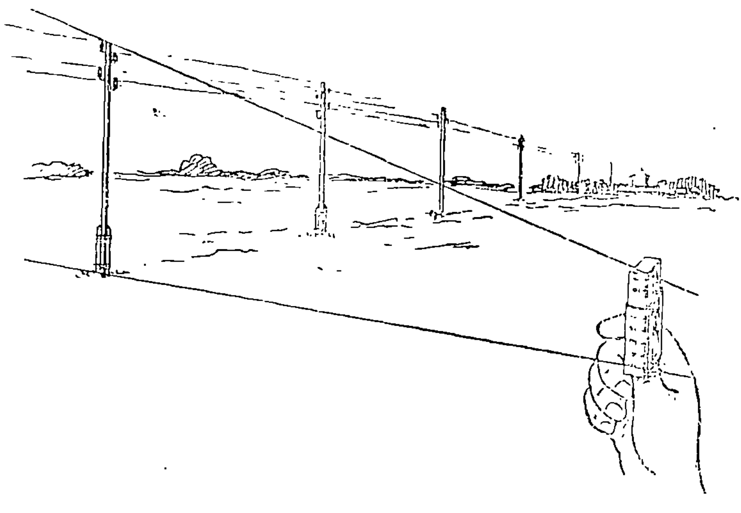


Рис. 119. Дальномер из спичечной коробки

В случаях применения спички или пальца приходится отодвигаться от предмета или приближаться к нему до тех пор, пока спичка или палец полностью не поместятся между крайними лучами. Длина спички, длина и ширина коробки, длина пальца должны быть известны.

Школьный упрощенный дальномер

Рассмотренные выше приемы измерения расстояний очень неточны. Лучшие результаты школьники получают с помощью простого приспособления «школьного дальномера» (рис. 120)

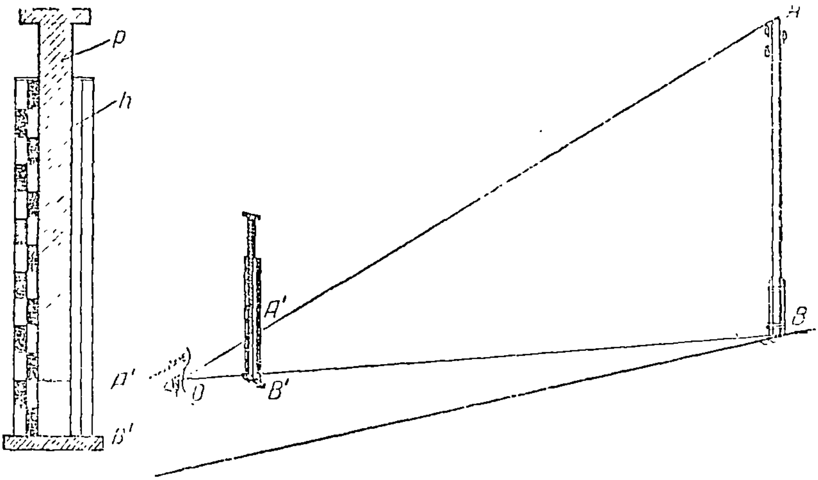


Рис. 120. Школьный дальномер

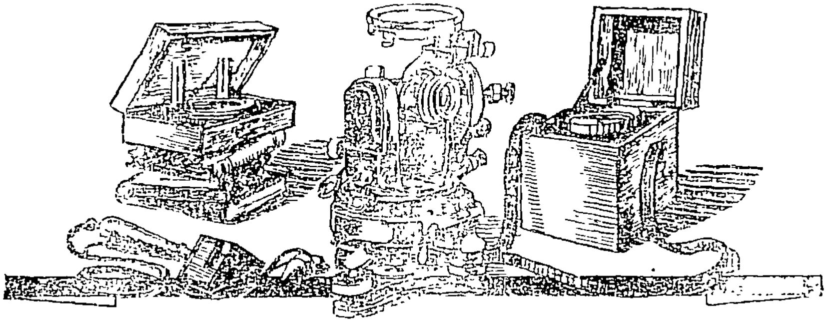
Пусть требуется определить расстояние до телеграфного столба AB. По-прежнему расстояние прибора от глаза равно длине руки, в которой держат прибор. Принято (в среднем) считать эту длину равной 0,6 *м*.

В пазах корпуса прибора h ходит пластина p, которая своим нижним концом устанавливается так, что высота зазора $A'B'$ на приборе соответствует отрезку $A'B'$ на чертеже.

На грани (или гранях) корпуса нанесена реечная шкала, по которой легко определить высоту $A'B'$.

Итак, работа складывается из таких моментов: на вытянутой руке установить подвижную пластину так, чтобы зазор $A'B'$ соответствовал (перекрывал) величине предмета AB. Далее, если высота телеграфного столба известна, например 5 *м*, то при $A'B' = 1{,}8$ *см* искомое расстояние

$$d = \frac{AB}{A'B'} \cdot 0{,}6, \text{ т. е. } d = \frac{5 \cdot 0{,}6}{0{,}018} \approx 167 \text{ м}.$$



УГЛОМЕРНЫЕ ИНСТРУМЕНТЫ

Зеркальный эккер

Вместо обычного эккера (см. стр. 62 и 411) часто употребляется зеркальный эккер [1] (рис. 121). Он очень прост в работе и не уступает названным выше приборам по точности.

Эккер состоит из двух плоских зеркал, поставленных в оправе под некоторым углом друг к другу.

Над зеркалами в оправе имеются вырезы — «окошки», для визирования. Глядя внутрь двугранного угла, образованного стенками оправы, можно видеть предмет непосредственно через «окно» и луч, от другого предмета отраженный от зеркал. К оправе прикреплена рукоятка, за которую держат эккер.

Определим теперь угол, под которым надо поставить плоскости зеркал, чтобы лучи, падающие на одно зеркало и отраженные от другого зеркала, были взаимно перпендикулярны, т. е. $NS \perp AM$ (рис. 122).

Луч NS получен непосредственно от ориентира N; лучи $MA - AB - BS$ получены глазом после двукратного отражения (угол падения равен углу отражения; лучи и перпендикуляр к плоскости зеркала лежат в одной плоскости).

Из чертежа (рис. 122) следует:

$$2\alpha + 2\beta = 90^\circ;\ \alpha + \beta = 45^\circ;$$

$$90^\circ + \alpha = x + 90^\circ - \beta \quad \text{(внешний угол треугольника } AOB\text{)};$$

$$x = \alpha + \beta;\ x = 45^\circ.$$

[1] Под маркой «ЭГ-1» изготовляется заводами (МВ).

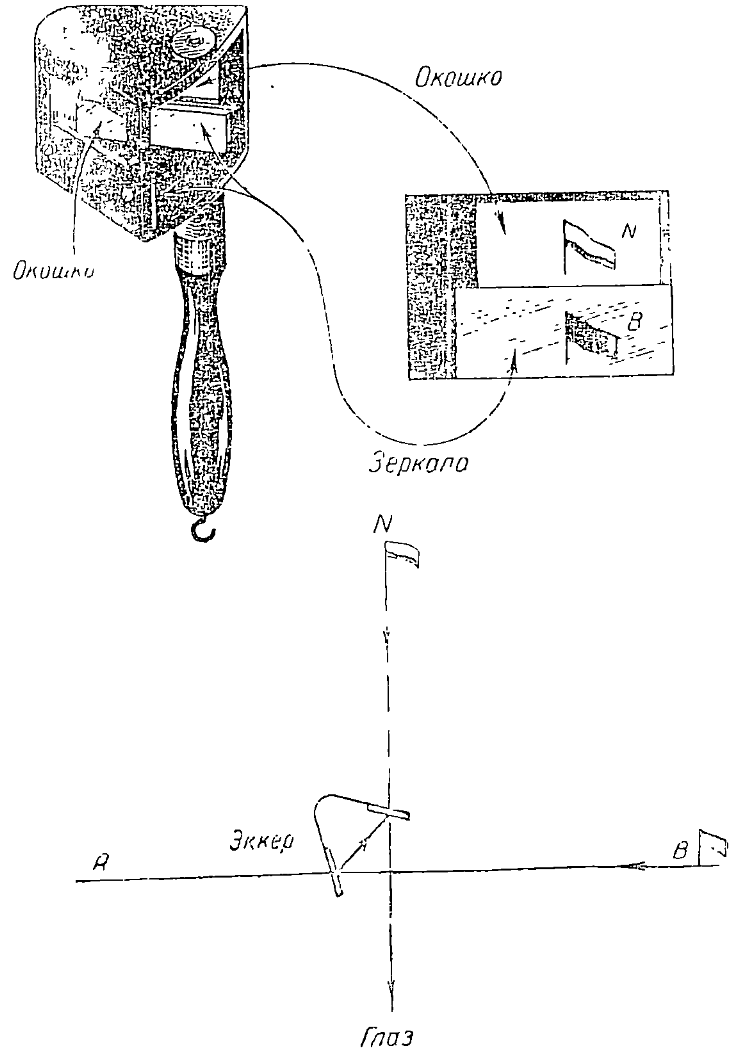


Рис. 121. Зеркальный эккер

Таким образом, чтобы получить прямой угол между лучами, плоскости зеркал располагаются под углом в 45°.

Так как угол γ всегда вдвое больше угла x, то ошибка установки зеркал будет удваиваться при работе на местности.

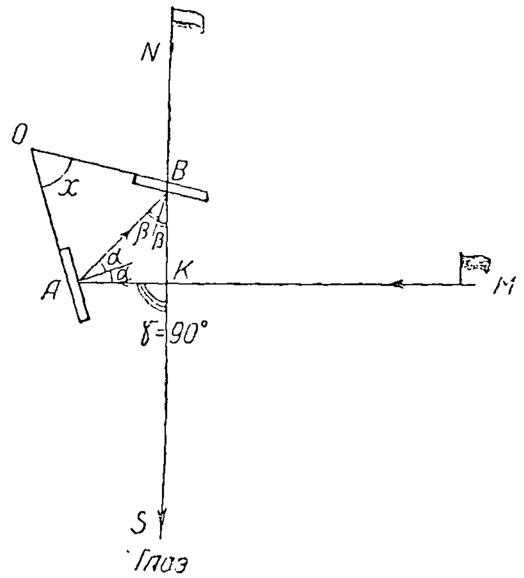


Рис. 122. Схема действия зеркального эккера

Задачи, решаемые с помощью эккера

Задача 1. Пусть требуется выставить веху в точке B в направлении, перпендикулярном данному DC, например $DC \perp AB$ (рис. 123).

Для этого достаточно наблюдателю расположиться с эккером в точке A так, чтобы в зеркале эккера видеть ориентир C, а затем поручить помощнику выставить веху B так, чтобы она была видна в соответствующем окошке. Тем самым перпендикулярное направление будет отмечено (через точку стояния A и веху B).

Задача 2. С помощью эккера можно решать и обратную задачу — отметить на магистрали AB (рис. 124) ортогональную проекцию вехи N.

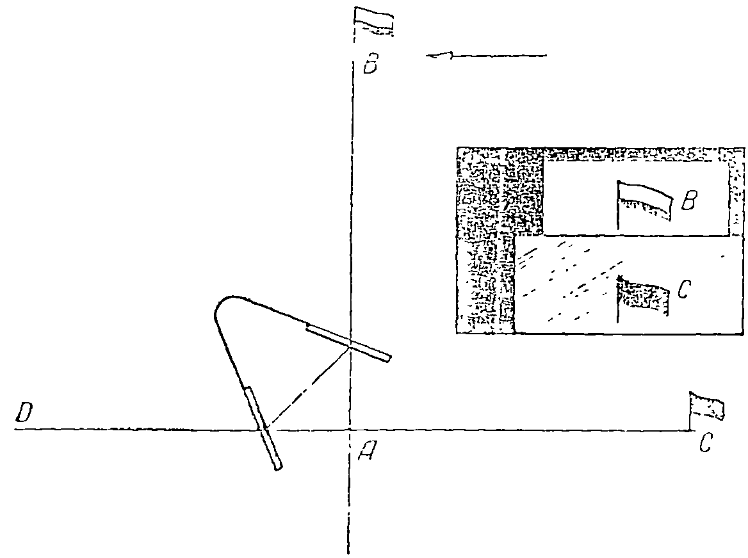


Рис. 123. Восстановление перпендикуляра

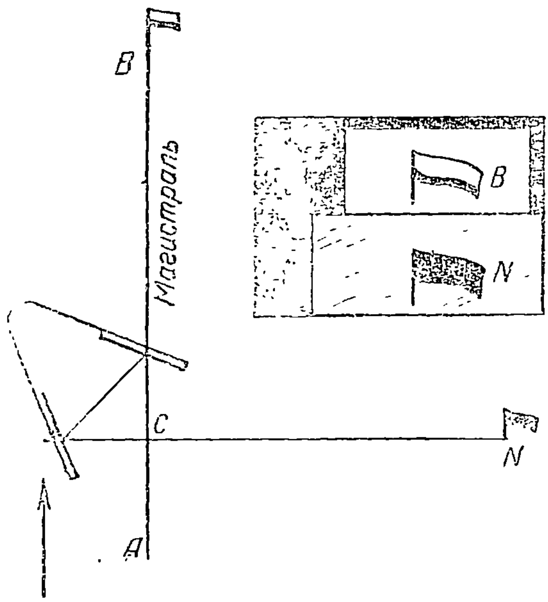


Рис. 124. Определение основания перпендикуляра

Перемещаясь с эккером по прямой AB, наблюдать в окошко ориентир B', и в тот момент, когда в зеркале появится изображение вехи A, надо отметить точку C; она и будет являться искомой точкой.

Указание. Для ускорения и рационализации работы рекомендуется первоначально выставить веху на глаз по перпендикулярному направлению к заданной магистрали (AB), а затем с помощью эккера уточнить ее местоположение.

Существуют и другие системы эккеров. Приведем в качестве примера рисунок восьмигранного эккера (рис 125); с его помощью можно размечать углы, кратные 45°.

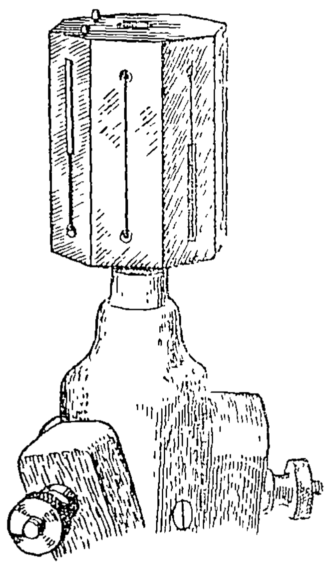
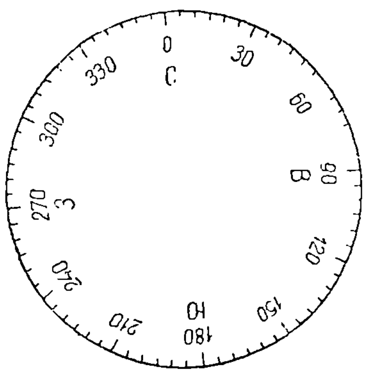


Рис. 125. Восьмигранный эккер

Буссоли

На стр. 70 описаны работы с компасом. Там данное направление определялось углом по отношению к постоянному направлению свободно вращающейся магнитной стрелки ($Ю—С$). Точность показаний школьного компаса 5°, ибо между двумя штрихами с цифровыми отметками дана разность в 30°, а делений между ними 6; следовательно, цена деления школьного компаса следующая: $T = \frac{30°}{6} = 5°$ (рис. 126).



· Рис. 126. Шкала школьного компаса

Теперь часто встречается компас системы Адрианова (рис. 127). Точность показаний по этому компасу 3° Разность штрихов с цифровыми отметками равна 15°; промежуточных делений 5; следовательно, цена деления равна 3°; $T = \frac{15°}{5} = 3°$.

Крышка компаса Адрианова вращается независимо относительно лимба и стрелки. Она несет на себе приспособление для визирования - диоптры (прорези).

Буквой K обозначены глазной диоптр и зубец; K' — предметный диоптр. Благодаря существованию диоптров значительно повышается точность наведения на предмет (точность визирования).

В последнее время можно встретить зеркальный компас следующей конструкции: в пластмассовый круглый футляр помещена темная магнитная стрелка, северный конец которой белого цвета (рис. 128).

Около стрелки помещен вращающийся лимб с делениями от 0° до 360°; цена деления 5°; точки 0°, 90°; 180°; 270° помечены буквами: *С; В; Ю; З.*

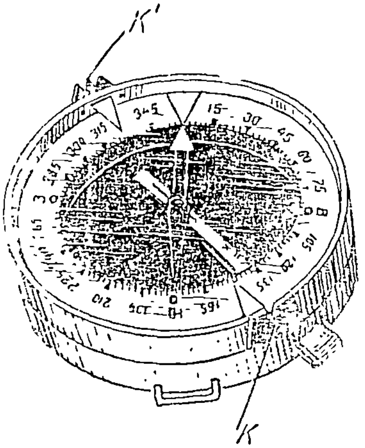


Рис. 127. Компас Адрианова

В крышке прибора имеется зеркало со щелью, которая служит для наводки, для визирования на выбранный ориентир.

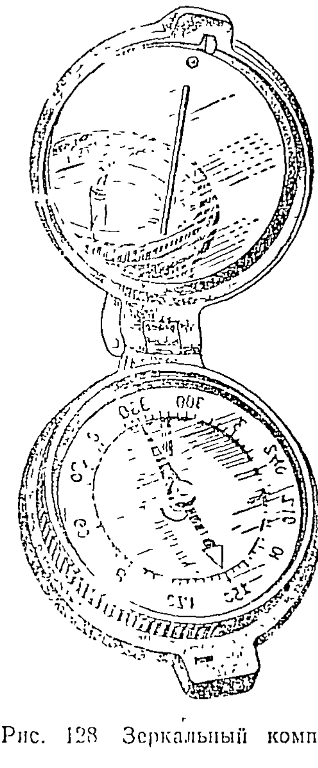


Рис. 128 Зеркальный компас

Порядок работы

1. Открыть крышку, которая автоматически освобождает арретир стрелки; последняя начинает свободно двигаться, указывая белым концом север.

2. Навести визирную щель в крышке на выбранный предмет.

3. Повернуть шкалу лимба с помощью «зубчатого» кольца до положения, когда северный конец стрелки совпадет с точкой «С» на лимбе.

4. В зеркале крышки прочесть искомый азимут.

Компасом приходится пользоваться не только для определения направления на север—юг; восток—запад, но и для ориентирования при различных видах съемок плана местности. При съемке по ходовой линии эккером и мерной лентой компасом берут азимут какой-нибудь стороны полигона или магистрали (ходовой линии). То же приходится делать при съемке обходом с помощью угломера, при глазомерных и мензуальных съемках.

Поэтому вполне естественным было появление конструкции прибора, который одновременно служит и компасом, и угломером. Такой прибор получил название «буссоль»[1].

Существует два вида буссолей: ручная и штативная.

Р у ч н а я б у с с о л ь типа «БШ»[2] (с призмой; рис. 129).

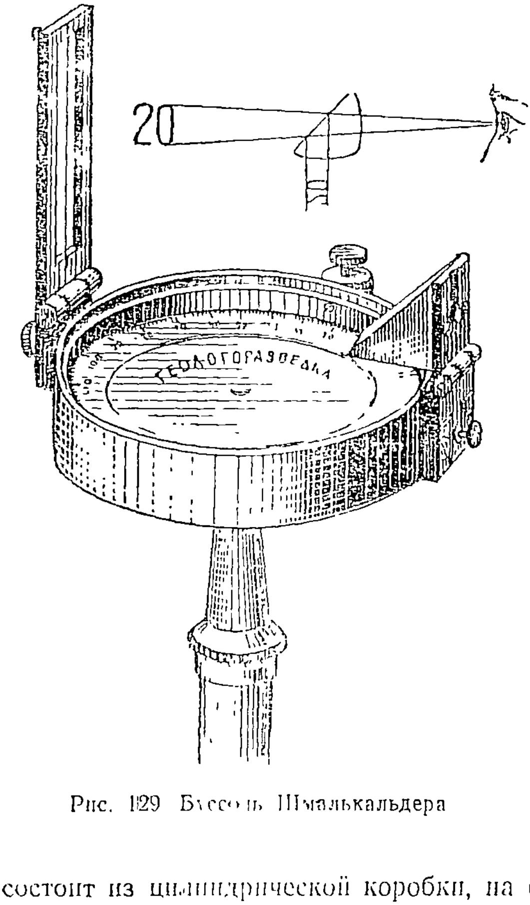


Рис. 129 Буссоль Шмалькальдера

Прибор состоит из цилиндрической коробки, на острие (на шпиль) иглы из закаленной стали помещена магнитная стрелка, опирающаяся на иглу шляпкой («топкой»), в дно которой

---

[1] Буссоль — с итальянского — bussola — коробочка.

[2] Буссоль Шмалькальдера (Шмалькальдер — английский механик).

запрессован (заделан) сферический отшлифованный твердый камень, агат.

На стрелку наклеивается легкий кружок из алюминия (иногда картона), на котором нанесена (по ходу часовой стрелки) азимутальная шкала. Деления 0° и 180° точно совпадают с концами магнитной стрелки *С* и *Ю*, благодаря чему ось магнитной стрелки совпадает с диаметром круга 0°—180°, т. е. *С*—*Ю*.

Острие иглы из твердой закаленной стали, шляпка из агата — необходимые детали конструкции приборов, имеющих магнитную стрелку. Сила земного магнетизма, которая направляет магнитную стрелку, настолько незначительна, что всякое излишнее трение на острие иглы резко снижает точность показаний прибора. Для предохранения иглы от затупления в периоды, когда прибор не работает, стрелку особым рычажком снимают с иглы и прижимают к стеклянной крышке прибора. Рычаг этот называют а р р е т и р о м (тормозом).

Следует остановиться на конструктивной особенности буссоли типа «БШ».

К коробке ее прикреплены два диоптра: предметный, обычного типа, и глазной диоптр — особенный. В нем верхняя часть состоит из короткой щели, через которую визируют на предмет; к диоптру прикреплена призма полного внутреннего отражения, с помощью которой глаз получает изображение шкалы лимба.

В силу о б р а т н о с т и изображения в призме шкала на лимбе буссоли «БШ» размечена следующим образом: «*С*» и «0» поставлены в стороне южного конца стрелки; соответственно, «*Ю*» и «180» помечены в направлении северного конца стрелки и лимба.

В результате, показание буссоли читается под глазным диоптром, т. е. на 180° отличное от наблюдаемого.

Шкала лимба размечена так, что начало отсчета и вся система цифровых и буквенных обозначений сдвинуты на 180°. Благодаря этому наблюдаемый в зеркало призмы отсчет является подлинным показанием искомого азимута.

З а д а н и е. Читателю предлагается разобрать описанную конструкцию, имея прибор на руках.

Ручная буссоль рассчитана на ограниченную точность работ, в частности, буссоль «БШ» дает точность отсчета азимута в 1°.

При проектных съемках, беглых обследованиях, при рекогносцировочных работах эта точность вполне достаточна, а использование буссоли с руки, особенно призматической (типа «БШ») целесообразно и рационально.

Буссолью можно пользоваться в качестве угломера. Пусть требуется определить угол зрения x° на пункты A и B (рис. 130).

Если взять азимут направления OA α°_1; затем—азимут OB α°_2, то $\alpha^\circ_2 - \alpha^\circ_1$ дает как раз угол x°: итак, $x^\circ = \alpha^\circ_2 - \alpha^\circ_1$.

Задача 1. Определить на местности с помощью буссоли азимуты 3—5 направлений. За ориентиры принять какие-нибудь заметные предметы, азимуты которых представляют практический интерес. Указать в тетради румбы этих направлений (использовать таблицу или номограмму для перевода).

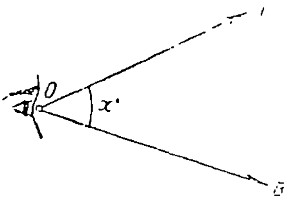


Рис. 130. Угол зрения

Задача 2. Разбить на местности 3—5 направлений по заданным азимутам или румбам (задача, обратная первой).

Задача 3. Определить азимут направления по карте и перенести его на местность.

Примечания. 1. Азимут на карте можно определить транспортиром.

2. Компас, которым пользуются при геологических работах, имеет цену деления в 1° и помещен в футляр прямоугольной формы. Этим компасом можно снимать азимуты направлений по карте, для чего достаточно ориентировать карту, приложив большую сторону футляра к искомому направлению, а затем прочесть показание компаса по лимбу.

Задача 4. Нанести на план, на карту направления по азимутам, взятым из второго упражнения.

Штативная буссоль типа «БС»[1] (рис. 131).

К основным деталям буссоли относятся:

1. Чувствительная магнитная стрелка с арретиром в виде кольца и шкалой, размеченной на круге (0°—90°) для отсчета румбов.

2. Шкала лимба, жестко связанная с кругом. Диаметр 0°—180° лимба в точности совпадает с осью 0°—0° на круге с магнитной стрелкой.

3. Алидада с двумя обычными диоптрами — глазным (узкая щель) и предметным (щель с натянутой нитью), вращающаяся между коробкой с магнитной стрелкой и лимбом на оси.

Все три детали: магнитная стрелка и шкала при ней, алидада и лимб строго центрированы по одной вертикальной оси. Цена деления лимба 1°. Прибор устанавливается на штативе

---

[1] Буссоль Стефана.

Г. Ф. Стефан (1796—1873) — изобретатель буссоли, начальник русского генерального штаба.

с помощью баксы — приспособления, состоящего из вращающегося стержня, на который привертывается буссоль, втулки для насадки на штырь штатива и стопорного винта для закрепления буссоли в определенном положении. Такая установка позволяет считать надежными показания долей градуса.

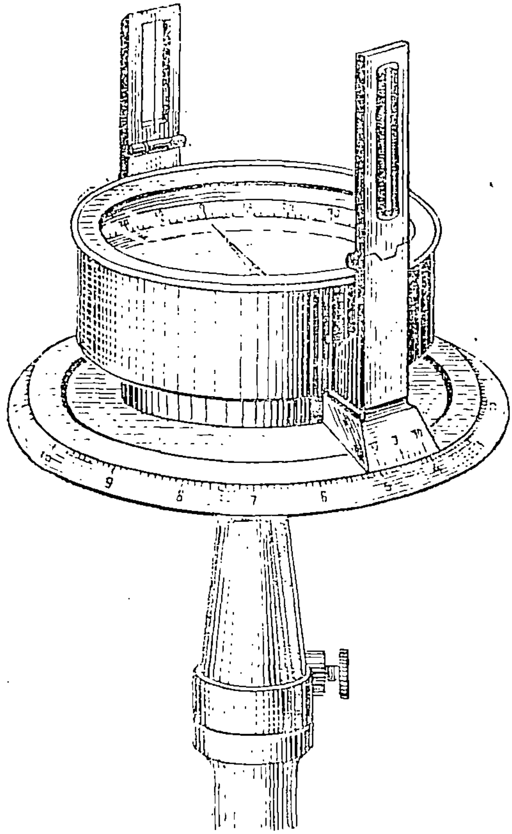


Рис. 131. Буссоль Стефана

Наносить эти доли на лимбе, во-первых, нерационально, так как получится слабая различимость штрихов из-за тесноты и, во-вторых, толщина всех штрихов (в сумме) на малой дуге градуса станет заметной и будет влиять на точность отсчета.

В 1542 г. португальцем Нуньесом было предложено оригинальное приспособление в виде дополнительной подвижной линейки, получившей название «нониус». В 1631 г. во Франции П. Верньe применил этот принцип к дуговым шкалам; он сконструировал дополнительную подвижную круговую шкалу, которую называют верньером.

Отсчетные приспособления

Верньер. Это специальное приспособление при круговой шкале, например лимбе, в виде дополнительной дуги, особым образом размеченной.

Для прямолинейных шкал это приспособление называется **нониусом**.

В основе устройства верньера лежат два принципа: 1) к главной шкале присоединяется дополнительная подвижная шкала; 2) главная шкала имеет на одно деление меньше, чем такой же отрезок дополнительной (рис. 132).

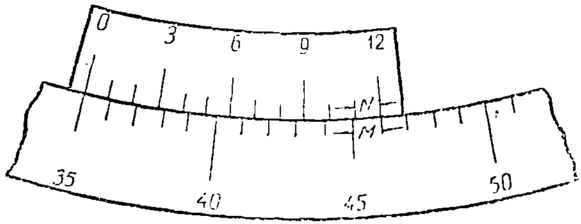


Рис. 132. Шкала Верньера

При таком соотношении шкал лимба и верньера получается, например, что дуга в 11 делений лимба, каждое из которых обозначим M, равна 12 делениям верньера, где N — цена деления верньера.

Тогда: $12\ N = 11 \cdot M$, иначе: $12\ N = (12-1)\ M$, или: $12\ (M - N) = M$.

Разность $M - N$ обозначим T; разность, как будет видно далее, определяет точность показаний верньера.

Подставляя T в предыдущую формулу, получим:

$$T = \frac{M}{12}\ ;\ M = 1^\circ = 60',\ \text{т. е.}\ T = \frac{1^\circ}{12}\ ;$$

$$T = \frac{60'}{12} = 5'.$$

Рассмотрим какое-нибудь показание верньера (рис. 133).

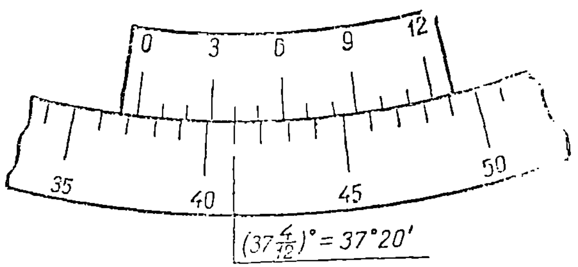


Рис. 133. Пятиминутный верньер

Роль указателя при отсчитывании по шкале лимба играет «*0*» верньера, ибо ось верньера «*0—0*» совпадает с направлением луча визирования. Отсюда следует, что отсчет содержит прежде всего 37°. Остается установить, сколько частей градуса содержится в промежутке между 37° и *0* верньера. Проследим положение каждого штриха верньера.

Нулевой штрих верньера отошел от деления лимба (37-го) на $\frac{x}{12}$ частей градуса, если эту часть выразить в двенадцатых долях.

Первое деление верньера отстоит от 38-го штриха лимба на $\frac{1}{12}$ меньше, чем нулевое от 37-го, ибо шаг в одно деление по верньеру на $\frac{1}{12}$ меньше, чем шаг в одно деление лимба (такова конструкция прибора).

Второй штрих верньера отошел от соответствующего штриха лимба (39-го, хотя номер его не играет роли) на $\frac{2}{12}$; третий — на $\frac{3}{12}$; четвертый — на $\frac{4}{12}$; в данном примере он совпал со штрихом лимба

Таким образом, $\frac{x}{12}$, отделявшее начало верньера от 37° лимба, за четыре шага сократилось до нуля, штрихи совпали, а так как за каждый шаг сокращение равно $\frac{1^\circ}{12}$, то искомое число двенадцатых как раз равно 4. Итак, весь отсчет равен $37^\circ + \frac{4^\circ}{12}$ или $37^\circ + 4', 5$, т. е. $37^\circ\ 20'$ $\left(\frac{1^\circ}{12} = 5'\right)$.

Таким образом, можно отметить следующий порядок отсчета по верньеру:

1) прочесть по лимбу ближайшее число градусов, за которым следует «0» верньера (в данном случае 37°);

2) определить, какой штрих верньера совпадает со штрихом лимба (каким — безразлично).

Номер совпадающего штриха верньера указывает искомое число долей деления лимба, в данном случае двенадцатых долей градуса, каждая из которых равна $5'$ $\left(\frac{1^\circ}{12} = \frac{60'}{12} = 5'\right)$.

Примечание. Отыскание совпадающих штрихов шкал верньера и лимба представляет некоторую трудность. Для облегчения полезно сперва на глаз прикинуть, сколько дополнительных частей градуса указывает начальный штрих верньера, а затем искать совпадение штрихов в намеченной области.

Пятиминутный верньер, разумеется, не является единственным, поэтому выведем формулу точности верньера в общем виде, а именно, докажем теорему.

Условие:

M — цена деления лимба;

N — цена деления верньера;

n — число делений верньера;

$T = M - N$ — точность показаний верньера.

Заключение: $T = \dfrac{M}{n}$.

Возьмем $(n-1)$ деление лимба; оно, в силу конструкции прибора, равно n делениям верньера, т. е. $M(n-1) = Nn$, откуда $Mn - M = Nn$, $Mn - Nn = M$, $n(M - N) = M$, $nT = M$, следовательно, $T = \dfrac{M}{n}$.

Такова общая формула точности верньера.

Пример 1. Рассмотрим шкалу распространенного одноминутного теодолита (рис. 134). На 29 полуградусных делений лимба верньер имеет 30 делений, т. е.

$$T = \frac{0^\circ{,}5}{30} = \frac{1^\circ}{60}; \quad \text{иначе:} \quad T = \frac{30'}{30} = 1'$$

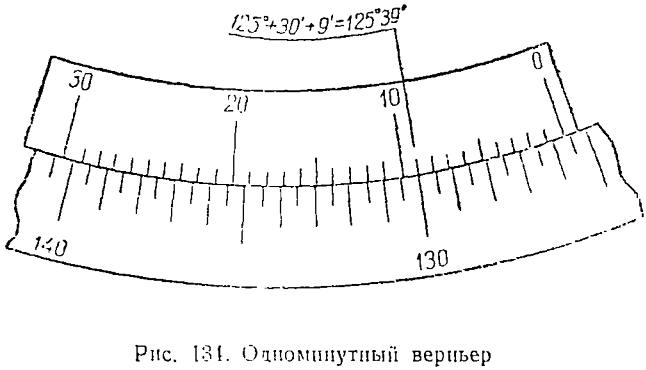


Рис. 134. Одноминутный верньер

Пример 2. На тех же принципах (движущаяся дополнительная шкала имеет на одно деление больше, чем равный отрезок главной линейки) основан измерительный инструмент — штангенциркуль.

На нем отрезок в 9 *мм* главной линейки равен 10 делениям нониуса (рис. 135). Точность показаний такого штангенциркуля определится в 0,1 *мм*.

Действительно,

$$T = \frac{M}{n}, \text{ т. е. } T = \frac{1\ мм}{10} = 0{,}1\ мм.$$

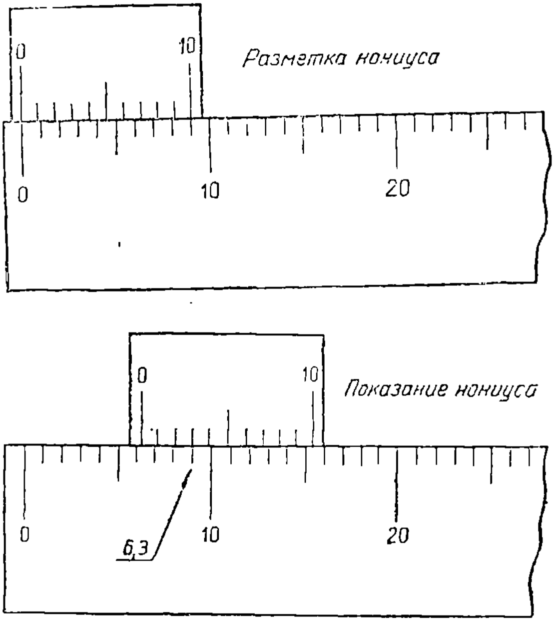


Рис. 135. Нониус

Пример 3. На буссоли «БС» находится пятиминутный верньер $\left(T = \frac{1^\circ}{12} = \frac{60'}{12} = 5'\right)$; на лимбе нанесена шкала от 0° до 360° с направлением по движению стрелки часов. В целях экономии места цифрами обозначены десятки градусов, т. е. «1» означает «10»; «17» следует читать «170»; «32» как «320» и т. п.

Кроме того, на верньере этой буссоли есть особенность в расположении «нульпункта», т. е. точки, принятой за начало отсчета, за нуль (рис. 136).

Здесь «0» помещен в середине верньера. Вообще возрастание отсчета верньера идет в том же направлении, что и на лимбе.

От «0» влево счет идет до 30; а следующие 30 делений помечены от правого конца к середине, т. е. участок 60—30 перенесен правее «0».

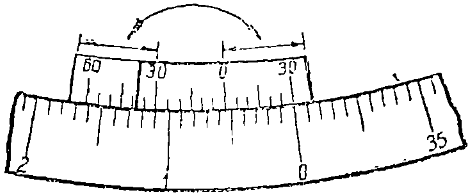


Рис. 136. Верньер буссоли «БС»

Этот вариант не вносит никаких изменений ни в анализ разметки верньера, ни в отсчет. Следует только помнить, что счет от «30» правого конца верньера читается, возрастая к середине.

Упражнение. Установить точность показаний верньера, данного на рис. 137, и взять отсчет.

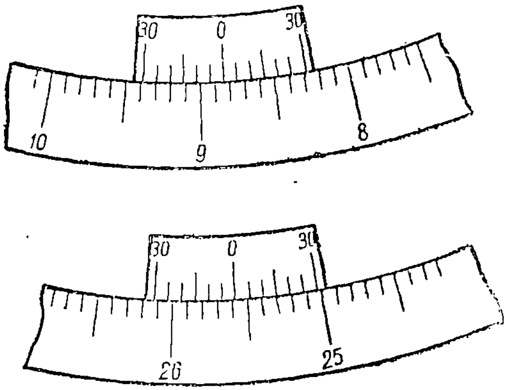


Рис. 137. Верньер буссоли «БС»

Виды работ с буссолью «БС»

1. Определение сторон света. Буссоль вполне заменяет компас. Однако для решения поставленной задачи буссоль громоздка и излишне точна. В этих целях ею можно пользоваться, если под руками нет компаса.

2. Определение румба (рис. 138).

Шаг 1. Поворачивают буссоль до тех пор, пока северный (синий) конец магнитной стрелки не совпадет со штрихом «0» (около надписи «Геологоразведка»). Именно этот «0» (из двух нулей шкалы) соответствует началу отсчета азимутов на лимбе. Про такую установку говорят «ориентировать буссоль».

Шаг 2. Алидаду с двумя диоптрами визируют на заданный объект и читают показания румбической шкалы (с учетом направлений сторон света). На рис. 138 отсчет равен С-З : 57°.

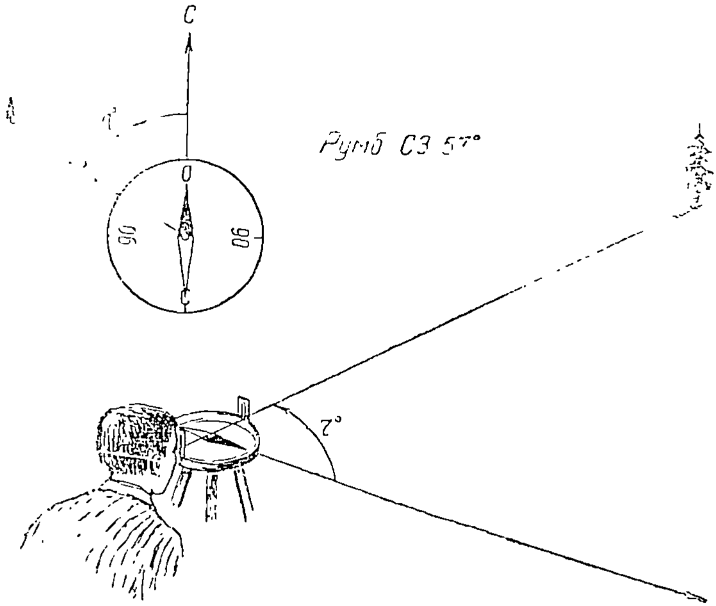


Рис. 138. Определение румба

3. Определение азимута некоторого направления.

Порядок работы тот же, что и при отыскании румба направления, а именно:

а) ориентирование буссоли по магнитному меридиану (стрелке);

б) визирование с помощью диоптров;

в) отсчет по лимбу и верньеру (с точностью до 5');

г) контрольный отсчет на противоположной стороне лимба, который должен отличаться от первоначального на 180°.

4. Измерение угла зрения на два предмета:

а) установить штатив буссоли по отвесу на заданной точке стояния;

б) взять два отсчета по лимбу на предметы A и B и контрольные отсчеты с разницей в 180°;

в) найти разность двух отсчетов на B и A.

Указания. 1. Если отсчеты на A и на B оказались по разные стороны нуля, то угол зрения определится как сумма двух отсчетов от нуля влево и вправо (рис. 47).

Иногда и в этом случае берут разность двух отсчетов, но тогда отсчет правее нуля считают как сумму $360° + \alpha_2$, т. е. рассматривают α как угол, полученный после полного оборота на 360°.

Пример. Даны отсчеты: 277° и 23°.

Способ 1: $x° = \alpha°_1 + \alpha°_2$; $x° = 83° + 23° = 106°$.

Способ 2: точка 23° определится $360° + 23° = 383°$; тогда $x = 383° - 277° = 106°$.

2. При измерении угла зрения буссолью не приходится пользоваться магнитной стрелкой, не нужно приводить прибор к нулевому делению. Действительно, при измерении угла дело сводится к двум отсчетам и отысканию разности двух показаний. Привести к нулю сложнее, чем взять отсчет. Экономия в работе особенно сказывается в том случае, когда приходится из одного полюса брать несколько углов зрения. Например, при пяти углах получается такое сравнение: а) пять приведений к нулю и пять отсчетов, т. е. десять операций (наблюдений); б) при методе отсчетов дело сводится к пяти операциям.

Специальная буссоль для мензульной съемки — «ориентир-буссоль»

Для ориентирования планшета мензулы вместо обычной буссоли или компаса употребляется «ориентир-буссоль» — тщательно изготовленная и хорошо намагниченная стрелка, поме-

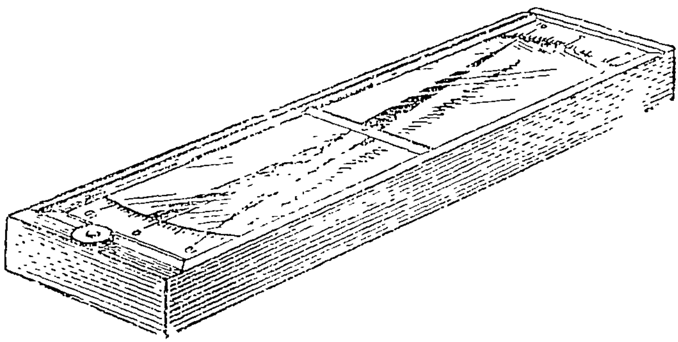


Рис. 139. Ориентир-буссоль

щенная (как и в компасе) на закаленный стальной шпиль (рис. 139). Стрелка опирается агатовым основанием на шпиль. Она снабжена арретиром, который приподнимает ее, когда прибор не действует. Благодаря этому сохраняется острие шпиля, а тем самым и точность действия прибора.

Стрелка помещена в прямоугольную коробку, длинная сторона которой строго параллельна линии Север — Юг (*С — Ю*) или (0°—180°) на шкале.

На дне коробки у концов стрелки намечена градусная шкала в пределах от 0° до ± 20°.

Ограниченность шкал вызывается специальным назначением ориентир-буссоли: после установки планшета на глаз так, чтобы одно его ребро было направлено на север, необходимо поворотом планшета внести поправки, а для этого достаточно небольшой дуги полной градусной шкалы, ибо погрешность установки на глаз не превосходит ± 20°.

Параллельность длинного ребра футляра оси стрелки (*С — Ю*) позволяет прикладыванием ребра футляра к ребру планшета более точно ориентировать планшет.

Гониометр

Для большинства учебных измерительных работ на местности достаточно иметь компас, эккер, буссоль (последняя может заменить компас), угломер, мерную ленту (рулетку).

Действительно, с их помощью можно ориентировать план или планшет относительно меридиана, измерять углы и расстояния.

В глазомерной съемке ограничиваются компасом, а расстояния измеряют парами шагов.

При съемке с ходовой линии пользуются эккером (можно буссолью) и мерной лентой, наконец, при съемке обходом буссоль может служить или для определения азимутов сторон многоугольника, или в качестве угломера [1].

Существует прибор — г о н и о м е т р [2], который вполне заменяет компас, эккер, буссоль, т. е. все нужные угломерные инструменты (рис. 140). Он достаточно точен (до 5′), портативен, может быть укреплен на школьном штативе, доступен по цене.

Гониометр состоит из двух цилиндров, которые вращаются на одной оси, но независимо друг от друга.

С помощью особого приспособления прибор крепится на штативе. Стопорный винт позволяет фиксировать нижний цилиндр в определенном положении. Кроме того, к прибору прилагается отвес.

В верхней части первого цилиндра помещена чувствительная магнитная стрелка с арретиром и шкала, размеченная или

---

[1] Разумеется, для мензульных съемок и съемок в вертикальной плоскости нужны еще другие специальные приборы.

[2] Гониометр — от греческого gonia — угол, metron — мера.

через градус от 0° до 360° (азимутальная шкала), или от 0° до 90° (румбическая).

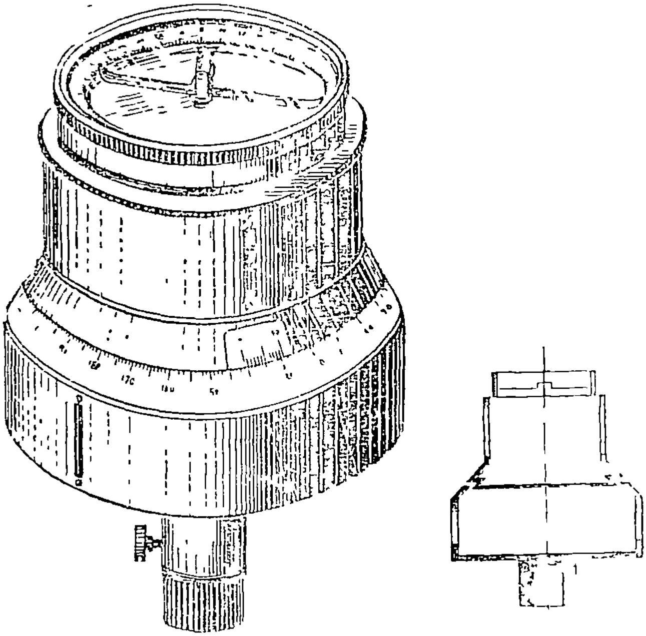


Рис 110 Гониометр

Для визирования в обоих цилиндрах имеются щели в верхнем — одна пара, в нижнем — две пары, направления последних образуют прямой угол и служат (в качестве эккера) для построения перпендикуляров.

На нижнем цилиндре нанесена шкала лимба с точностью до 1°, а на верхнем — даны два верньера: один для отсчета, а другой для контроля, точность его 5′.

Таким образом, работа с гониометром складывается из следующих операций:

1. Установить штатив по отвесу в выбранной точке стояния

2. Гониометр укрепить на штативе.

3. Верхнюю его плоскость установить горизонтально сначала на глаз, а затем отрегулировать данное положение поднятием одних ножек штатива или углублением других

а) по магнитной стрелке взять азимуты;

б) через диоптры (щели) нижнего цилиндра установить перпендикулярные направления;

в) с помощью диоптров верхнего цилиндра провизировать нужное направление, а показанием верньера установить искомые угловые размеры.

Задача. 1. Провести с помощью гониометра:

а) съемку участка по ходовой линии;

б) съемку маршрута.

Расстояния измерять мерной лентой. Попутно следует нанести ситуацию по обе стороны маршрута.

Указание. Для данной работы в гониометре понадобятся магнитная стрелка и эккер.

Задача 2. Провести съемку участка, проектируя все вершины на ось, лежащую вне полигона.

Указание. Будет необходим гониометр-эккер.

Задача 3. Составить план участка, ведя съемку обходом.

Указание. Следует использовать гониометр-угломер.

Задача 4. То же через азимуты сторон полигона.

Указание. Использовать гониометр-буссоль.

Эклиметры

Эклиметр (уклономер) системы «Геологоразведка»

Прибор представляет собой цилиндрический футляр, к которому прикреплена зрительная трубка прямоугольного сечения (рис. 141). На одном конце ее имеется узкая щель, на

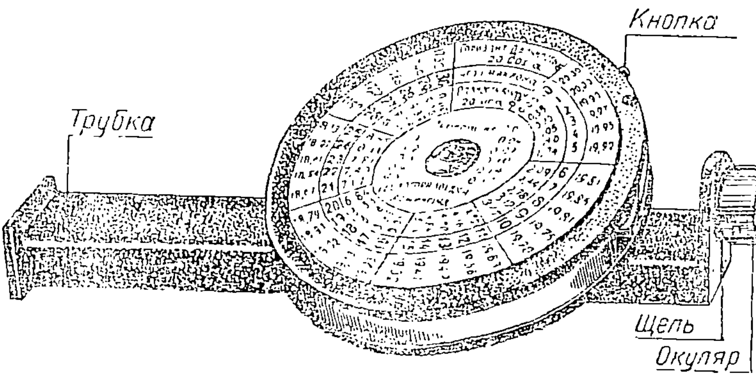


Рис. 141. Производственный эклиметр

другом — визирная нить. Они служат для визирования на выбранную точку. Слева от щели прикреплен обычный окуляр (лупа) для чтения шкалы, нанесенной на вращающийся внутри футляра барабан. Барабан имеет в некоторой точке грузик, поэтому, вращаясь на оси независимо от движения футляра, груз всегда устанавливается в наинизшем положении. Барабан играет роль отвеса. В нерабочем положении он арретирован. При помощи кнопки, находящейся на поверхности цилиндра, барабан освобождается и приходит в свободное вращение.

При наведении зрительной трубки на выбранную точку, т. е. поднимая или опуская ее, луч зрения перемещается по шкале барабана и указывает искомый угол.

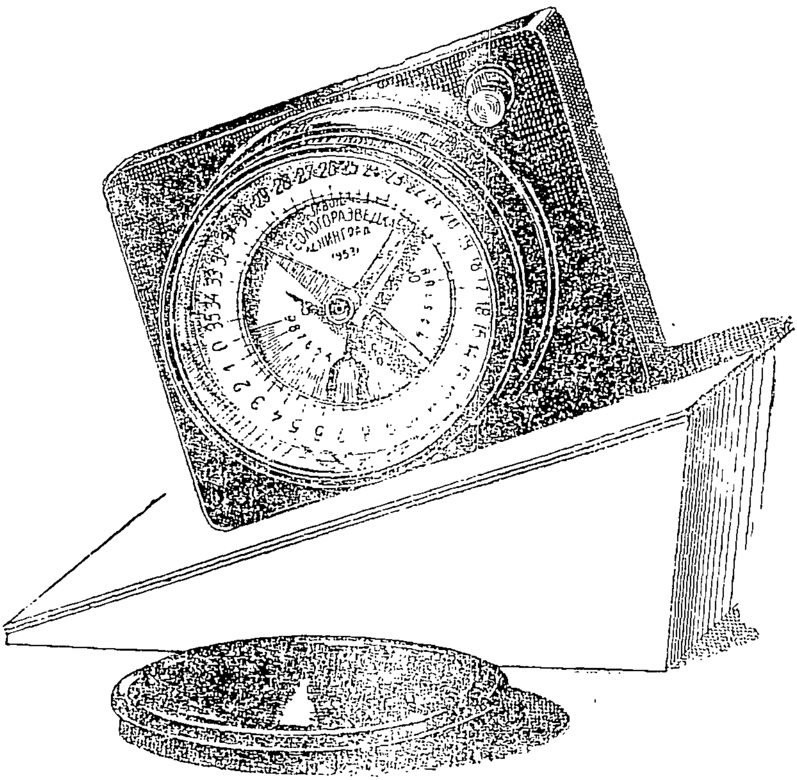


Рис. 142. Компас-эклиметр

На внешней стороне футляра дана таблица натуральных значений тригонометрических функций ($\sin\alpha$ и $\cos\alpha$). Таким образом, на месте работы можно не только сделать нужные измерения, но и вычислить искомый размер, воспользовавшись таблицей на приборе. Точность измерения угла наклона порядка одного градуса.

Примеры:

Пусть угол $\alpha = 15°$; $d = 20$ *м*; $\sin 15° = 0{,}26$; $\cos 15° = 0{,}97$,

$$x = d \cdot \sin\alpha;\ y = d \cdot \cos\alpha;\ x = 20 \cdot \sin 15°;\ y = 20 \cdot \cos 15°;$$
$$x = 20 \cdot 0{,}26 = 5{,}2;\ y = 20 \cdot 0{,}97 = 19{,}4\ м.$$

На табличке эклиметра $x = 5{,}18$ *м*; $y = 19{,}32$ *м*.

Эклиметр на геологическом компасе

На компасе геологов имеется дополнительное приспособление — отвес и шкала при нем, размеченная на градусы (рис. 142). Нуль шкалы поставлен по середине полуокружной шкалы, металлический отвес указывает точку нуля в тот момент, когда диаметр шкалы, концы которой несут точки 90°—90°, расположен горизонтально.

Для визирования используется длинная сторона футляра компаса. При горизонтальном положении луча зрения отвес указывает точку нуля, наклон луча отмечается отсчетом по шкале. В геологии таким же образом поступают при определении угла падения пластов — длинная сторона футляра прикладывается непосредственно к пласту.

Теодолит

В настоящее время основным производственным инструментом для измерения углов является теодолит. Принцип измерения угла теодолитом не отличается от принципа измерения простейшим угломером, гониометром и другими угломерными инструментами. Как известно из первой части, угломер состоит из двух основных деталей: лимба и алидады с диоптрами.

В теодолите также имеется лимб и алидада, но вместо диоптров, которые дают малую точность визирования, теодолит снабжен зрительной трубой с довольно сложной оптической системой. Зрительные трубы теодолитов имеют увеличение порядка 12—20 раз, это дает возможность вести наблюдения на большие расстояния, исчисляющиеся десятками километров.

Точность современных теодолитов весьма высока. Обычные теодолиты для топографических работ дают возможность измерить угол с точностью порядка 1′, а высокоточные теодолиты, применяющиеся на триангуляции, дают точность до 1—2″.

Схема, общий вид и наименование частей теодолита даны на рис. 143.

Трегер с тремя подъемными винтами крепится специальным винтом, имеющимся на штативе (становым винтом), к

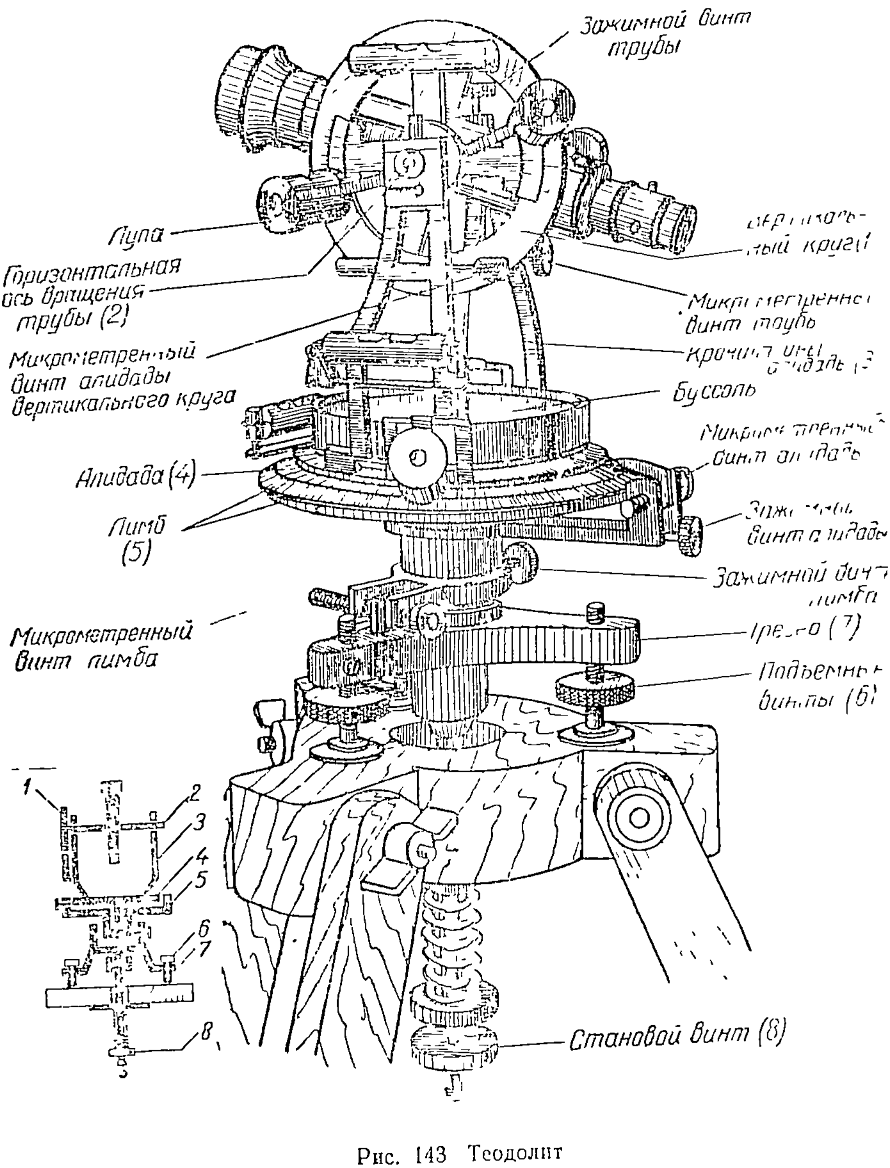


Рис. 143 Теодолит

штативу. В трегере вращается пустотелая ось лимба, в отверстии которой находится ось алидады. На лимбе нанесены деления через 0°,5, причем 29 делениям лимба равны 30 делений верньера.

Отсюда точность верньера $T = \frac{M}{n} = \frac{0°,5}{30} = \frac{30'}{30} = 1'$.

Зажимным винтом лимб можно скрепить с трегером, а алидаду таким же винтом с лимбом. Благодаря этому алидада при закрепленном лимбе может свободно вращаться относительно лимба, а при закрепленной алидаде и открепленном лимбе они совместно вращаются относительно трегера. Подобная конструкция называется повторительной в отличие от простой, в которой лимб постоянно жестко скреплен с трегером *. Небольшие перемещения закрепленных частей для точного наведения на веху или другой ориентир производятся микрометренными винтами.

В вертикальных кронштейнах алидады вращается горизонтальная ось трубы, с которой труба жестко связана. Одновременно с трубой вращается вертикальный круг, по которому можно определять углы отклонения трубы от горизонта. Верньеры вертикального круга могут посредством уровня устанавливаться так, что линия, проходящая через нули, будет горизонтальна. Поворот верньеров производится микрометренным винтом. Точность верньеров вертикального и горизонтального кругов обычно одинакова. Помимо уровня у верньеров вертикального круга, теодолит имеет еще два уровня для приведения лимба в горизонтальное положение.

Таковы основные части теодолита. Рассмотрим несколько подробнее конструкцию его отдельных частей.

Зрительная труба (рис. 144) состоит из двух металлических трубок (1) и (2), причем на трубке (2) имеется

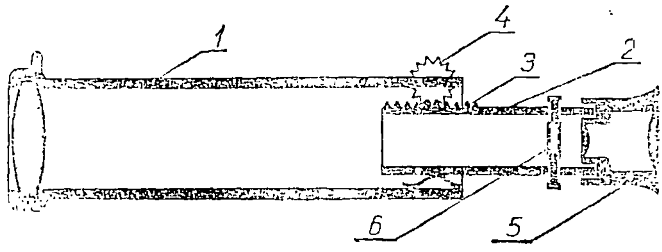


Рис. 144. Схема зрительной трубы

зубчатая рейка (3), входящая в зацепление с шестерней (4), укрепленной на трубе (1). При вращении шестерни (4), на-

* Применение повторительного теодолита будет описано ниже.

зываемой кремальерой, труба (2) может перемещаться в трубе (1). Это перемещение необходимо для фокусировки изображения (см. ниже схему построения изображения).

В передней части трубы (1) укреплен объектив — оптическая система, представляющая собой двояковыпуклую лин-

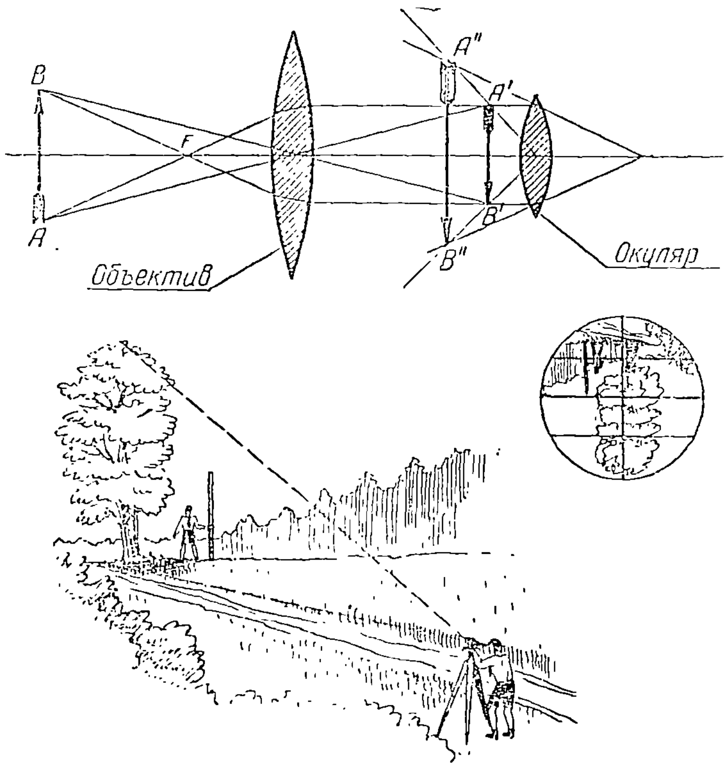


Рис. 145. Построение изображения

зу. Поэтому трубка (1) называется объективным коленом. В трубке (2) установлена окулярная трубочка (5) с окуляром, являющимся также двояковыпуклой линзой, и сетка нитей (6).

Окулярная трубочка (5) и сетка нитей (6) * могут несколько перемещаться относительно трубки (2).

Полученное изображение предмета *AB*, как видно из рис. 145, будет обратным и действительным. С помощью окуляра, который действует как лупа, глаз видит увеличенное

---

* Тонкая стеклянная пластинка в металлической оправе с нанесенной (нарезанной) сеткой.

мнимое изображение. Одновременно с изображением предмета видна сетка нитей, четкая видимость которой достигается небольшим перемещением окулярной трубочки (5).

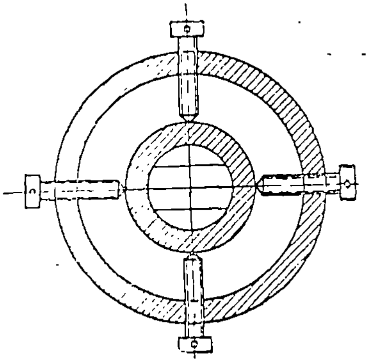


Рис. 146. Сетка нитей

Установка окулярной трубочки (5) на хорошую видимость сетки (для данного глаза) производится один раз, а установка окулярного колена на хорошую видимость предмета требует при каждом новом наведении передвижения трубки (2). Установка на хорошую видимость называется фокусировкой.

Следует обратить особое внимание на конструкцию и назначение сетки нитей. В инструментах современной конструкции сетка имеет вид показанный на рис. 146 *.

Как видно, сетка состоит из четырех нитей; одной вертикальной и трех горизонтальных. Вертикальная нить сетки, так же как нить в диоптрах угломера, служит для наведения трубы на веху или какой-либо другой ориентир, поэтому необходимо установить ее строго вертикально.

Точка пересечения вертикальной нити со средней горизонтальной определяет визирную ось трубы. Под визирной осью понимается оптическая ось, проходящая через эту точку и оптический центр объектива. Нижняя и верхняя горизонтальные нити служат для определения расстояния по дальномеру.

На рис. 147 дана принципиальная схема нитяного дальномера. По схеме легко установить геометрическую зависимость между расстоянием d от рейки до объектива и отрезком рейки l, который виден между верхней и нижней нитью сетки.

Действительно, из подобия треугольников ABO и MNO можно написать:

$$\frac{F}{d-F} = \frac{a}{l},$$

откуда:

$$d - F = l\frac{F}{a} \quad \text{и} \quad d = l\frac{F}{a} + F.$$

Для получения расстояния D от рейки до центра инструмента, к величине d следует прибавить еще расстояние от объектива до вертикальной оси инструмента, равное δ.

---

* Это относится как к зрительным трубам теодолитов, так и нивелиров и кипрегелей.

Тогда: $D = d + \delta = l\frac{F}{a} + F + \delta.$

Величины F, a и δ для данного инструмента постоянны. Обозначим $\frac{F}{a} = k$ и $F + \delta = C$ и запишем величину D так:

$$D = kl + C.$$

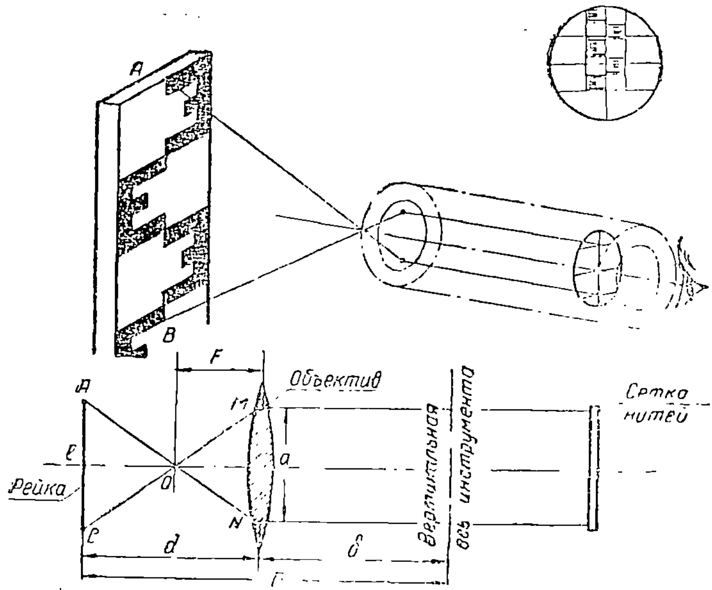


Рис. 147. Схема нитяного дальномера

Практически величиной C можно пренебречь, так как она мала по сравнению с kl ($C \approx 0{,}3$ *м*; $kl = 25 - 150$ *м*), и пользоваться формулой: $D = kl$.

Для простоты в работе коэффициент k делают равным 100, а рейку разбивают на сантиметровые деления. Очевидно, что число сантиметров между крайними нитями даст расстояние D в метрах. Например, по рейке отсчитано 32 *см* (рис. 147), т. е. $D = kl = 100 \cdot 32$ *см* $= 3200$ *см* $= 32$ *м*.

Опытом установлено, что относительная ошибка измерения расстояния до 200 *м* нитяным дальномером будет порядка $\frac{1}{200}$. При увеличении расстояний точность значительно падает. Следовательно, для расстояния, например, 150 *м* ошибка выразится числом $\pm \frac{150 \text{ м}}{200} = \pm 0{,}75$ *м*.

Уровень применяется для приведения инструмента (точнее плоскости лимба) в горизонтальное положение. Он состоит из стеклянной трубки, тщательно отшлифованной внутри и заключенной в медную оправу (рис. 148).

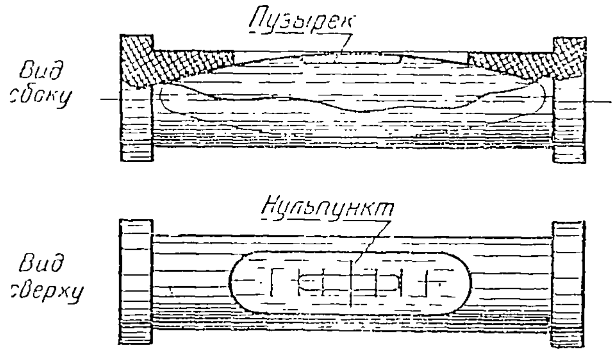


Рис. 148. Уровень

Внутренняя поверхность имеет форму веретена, кривизна которого в продольном направлении очень мала, так как радиус кривизны достигает 200 *м*.

Уровень почти полностью заполняется жидкостью (серным эфиром), а оставшееся пространство — пара́ми ее. Как более легкие частицы, пары стремятся всегда занять самое верхнее положение и образуют так называемый пузырек уровня.

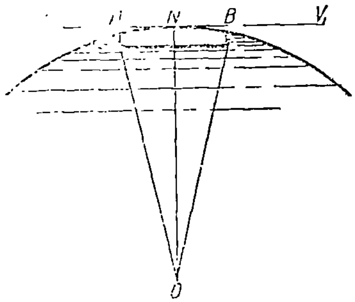


Рис. 149. Геометрия уровня

На верхней открытой части трубки нанесены штрихи, из которых один (средний) называется нульпунктом. Его положение определяет так называемую ось уровня, т. е. линию, касательную дуге в точке нульпункта. Когда пузырек расположен симметрично относительно нульпункта, то ось уровня горизонтальна (рис. 149).

Действительно, по условию $AN = BN$, $ON \perp VV_1$, линия AB — горизонтальна (поверхность спокойно установившейся жидкости). AB есть хорда дуги ANB, перпендикулярная радиусу ON и параллельная оси уровня VV_1.

Следовательно, при параллельности оси уровня плоскости лимба* и расположении пузырька симметрично относительно нульпункта, лимб по линии MM_1 будет горизонтален. Установка второго уровня, перпендикулярного первому, таким же образом создаст горизонтальность лимба по линии LL_1, т. е. вся плоскость лимба будет горизонтальна (рис. 150).

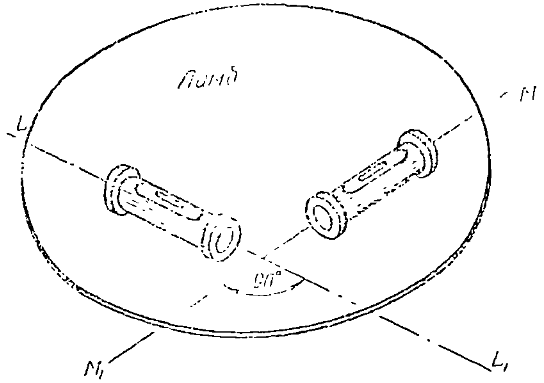


Рис. 150. Установка лимба

Таким образом, для установки лимба в горизонтальное положение необходимо выполнить два условия:

1) оси VV_1 уровней должны быть параллельны плоскости лимба и 2) пузырьки должны располагаться симметрично относительно нульпунктов.

Первое условие требует поверки уровня и юстировки (регулировки). Для этого уровень имеет специальный винт, показанный на рис. 151. Второе условие выполняется при каждой установке инструмента подъемными винтами.

Юстировка производится в следующем порядке: уровень (поворотом алидады) устанавливается параллельно линии, проходящей через два подъемных винта; одновременным вращением этих винтов в противоположных направлениях пузырек проводится на средину (1-е положение).

Допустим, что ось уровня VV_1 не параллельна плоскости лимба и составляет с ним угол φ. Тогда лимб расположится под углом φ к горизонту. При повороте алидады на 180° вокруг оси ZZ_1, (2-е положение) прямая ON, как образующая конуса, отклонится от оси ZZ_1 опять на угол φ, но в другую сторону, оставаясь перпендикулярной оси VV_1. При этом ось VV_1 будет отклонена от горизонта на угол $\psi = 2\varphi$ (рис. 151), а пузырек уровня сместится вверх на n делений.

Очевидно, если теперь повернуть уровень вокруг точки K

* Плоскости лимба и алидады параллельны между собой.

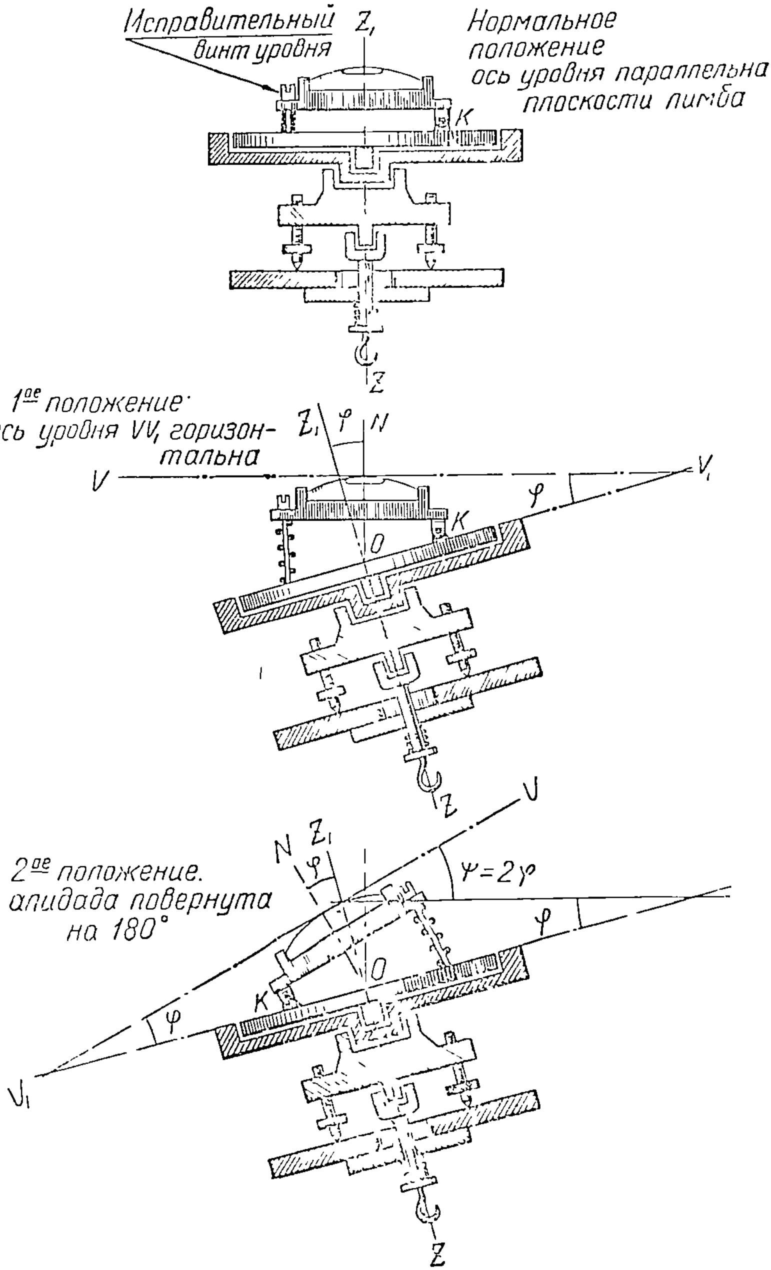


Рис. 151 Поверка уровня

так, чтобы пузырек возвратился назад на $\frac{n}{2}$ делений, то ось уровня станет параллельной плоскости лимба [1].

После этого плоскости лимба и алидады поворачиваются подъемными винтами до установки пузырька посередине и поверка повторяется вновь.

Естественно, что при параллельности оси уровня и плоскости лимба поворот на 180° не будет вызывать смещения пузырька от середины (нормальное положение). Так как поверка производится методом последовательного приближения, то поворот на 180° следует производить на глаз.

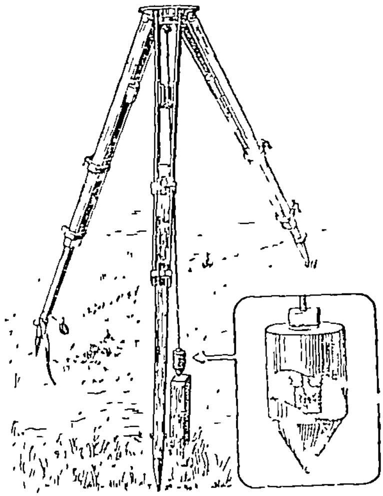


Рис 152 Отвес

Отвес служит для центрирования инструмента, т. е. для установки центра лимба над требуемой точкой. На рис. 152 показан отвес и его подвеска на теодолите. Как видно из рисунка, отвес — это металлический грузик, подвешенный на тонкой бечевке к становому винту. Под действием силы тяжести бечевка принимает отвесное положение, и если острие грузика находится над точкой, являющейся вершиной полигона, то, следовательно, и центр лимба совпадает с вершиной. Для установки инструмента по отвесу штатив перемещают до совпадения острия грузика с колышком, которым обычно отмечают точку.

Поверки осей теодолита

Кроме поверки уровня, которую выполняют в поле перед началом работы, к основным поверкам теодолита относятся поверки визирной и горизонтальной осей трубы.

Требование к визирной оси сводится к следующему. **Визирная ось трубы должна быть перпендикулярна горизонтальной оси вращения трубы** (рис. 153). Невыполнение этого требования приводит к тому, что при вращении трубы вокруг горизонтальной оси визирная ось не будет находиться в одной плоскости, а опишет поверхность конуса, вследствие чего вместо верного отсчета l_3

---

[1] Смещение пузырька принимается пропорциональным углу отклонения

будет получен отсчет t_4 (рис. 154). Разность этих отсчетов дает ошибку, называемую коллимационной ошибкой:

$$k = t_3 - t_1.$$

Исправление коллимационной ошибки производят перемещением сетки нитей. Величина перемещения находится следующим образом: визируют трубу на отдаленную точку T и получают по верньеру отсчет t_1; затем, повернув трубу через зенит, т. е. на 180° вокруг горизонтальной оси вращения hh_1, поворачивают алидаду на 180° и опять визируют на точку T. При этом получают отсчет t_2. Разность отсчетов даст удвоенную коллимационную ошибку: $t_2 - t_1 = 2\ k$.

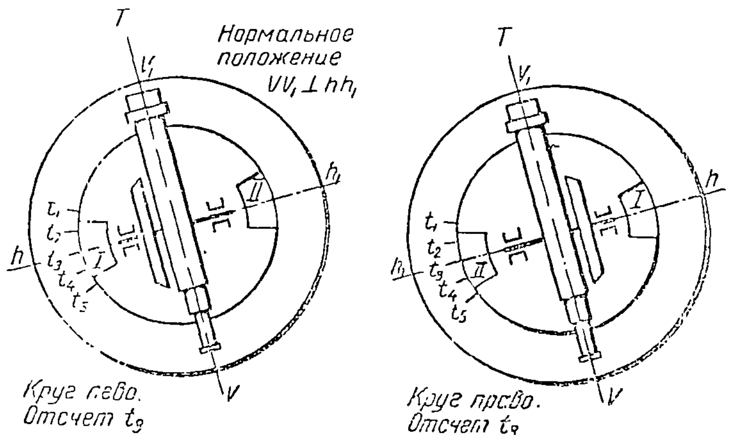


Рис. 153. Взаимное положение горизонтальной и визирной осей

После этого по верньеру устанавливают алидаду на средний отсчет,

$$t_{\text{ср.}} = \frac{t_1 + t_2}{2} = t_3.$$

Визирование на точку T при этом нарушается, и совмещения перекрестия нитей с точкой T добиваются перемещением сетки нитей боковыми винтами (рис. 146).

После установления перпендикулярности визирной оси трубы и горизонтальной оси вращения hh_1 производится последняя полевая поверка: горизонтальная ось вращения трубы hh_1 должна быть перпендикулярна вертикальной оси инструмента (рис. 155).

Невыполнение этого требования приводит к нарушению принципа измерения угла, так как коллимационная плоскость[1]

---

[1] Плоскость, описываемая визирной осью.

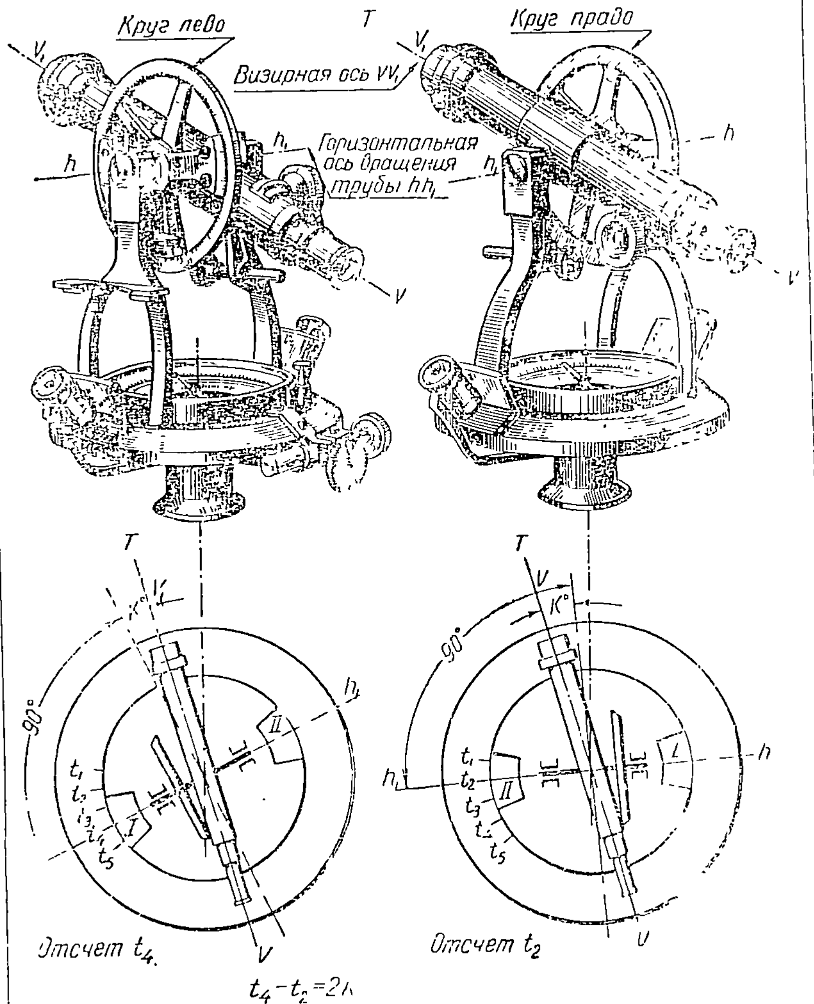


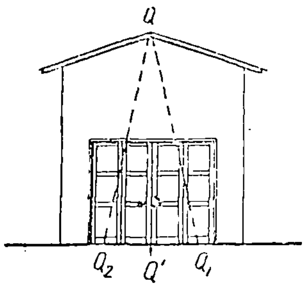
Рис 151 Отклонение от перпендикулярности горизонтальной и визирной осей

не будет вертикальна. Действительно, при неравенстве вертикальных кронштейнов алидады ось hh_1 не будет горизонтальна, а так как визирная ось перпендикулярна к ней, то вертикальность коллимационной плоскости нарушится.

Выявление и исправление этой ошибки производят следующим образом*:

1) инструмент приводят в горизонтальное положение;

2) перекрестие нитей наводят на высокорасположенную точку Q (например, на стене высокого дома), проектируют ее по



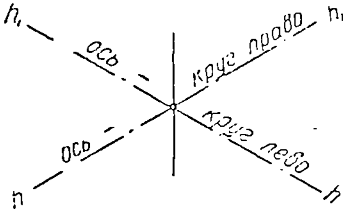


Рис. 155. Отклонение от перпендикулярности горизонтальной и вертикальной осей

стене до основания дома и отмечают колышком Q_1 (работу нужно производить с помощником, который по указанию наблюдателя выставляет колышек);

3) переводят трубу через зенит, вторично проектируют точку Q и отмечают точку Q_2;

4) при расхождении проекций (рис. 155) делят расстояние Q_1 Q_2 пополам, намечают точку Q' и исправительными винтами при одном из кронштейнов изменяют положение оси hh_1.

Если проекции совпадут, то, очевидно, коллимационная плоскость вертикальна, так как из точки, лежащей вне плоскости, можно опустить на эту плоскость только один перпендикуляр.

---

* Поверки уровней и визирной оси должны быть проведены заранее.

Конструкция исправительных винтов на кронштейне показана на рис. 156.

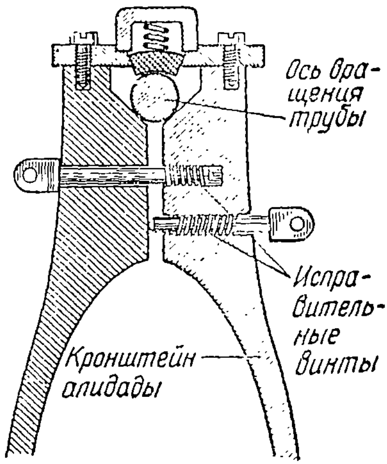


Рис. 156. Исправительные винты кронштейна

Измерение угла теодолитом

Установка инструмента.

1. Открыть ящик и, открепив зажимной винт, вынуть теодолит. Теодолит является высокоточным инструментом, поэтому поднимать его можно только за трегер. Воспрещается поднимать теодолит за зрительную трубу, кронштейны алидады и другие детали, так как это может привести к полному нарушению взаимного расположения и взаимодействия частей.

2. Раздвинуть и закрепить ножки штатива становым винтом, прикрепить теодолит к нему и подвесить отвес.

3. Перемещением штатива центрировать инструмент над точкой, являющейся вершиной, с отклонением отвеса от точки не более 1—2 *см*. При этом следить, чтобы плоскость лимба была на глаз горизонтальна.

4. Произвести в начале работы поверки, а на последующих точках приведение инструмента в горизонтальное положение.

При наличии двух уровней работают по схеме рис. 157, а при одном — по схеме рис. 158.

Способ приемов

1. Закрепить лимб, если теодолит повторительный, и навести зрительную трубу движением алидады на веху *5* так, чтобы веха была в поле зрения трубы (рис. 159).

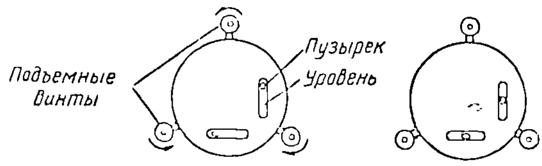


Рис. 157. Два уровня на лимбе

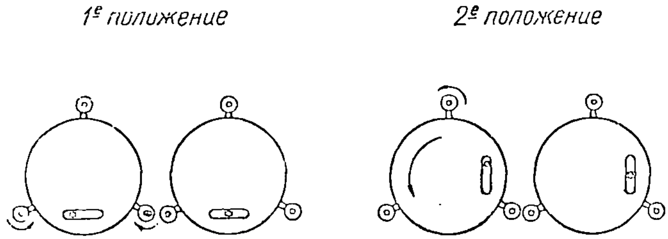


Рис. 158. Лимб с одним уровнем

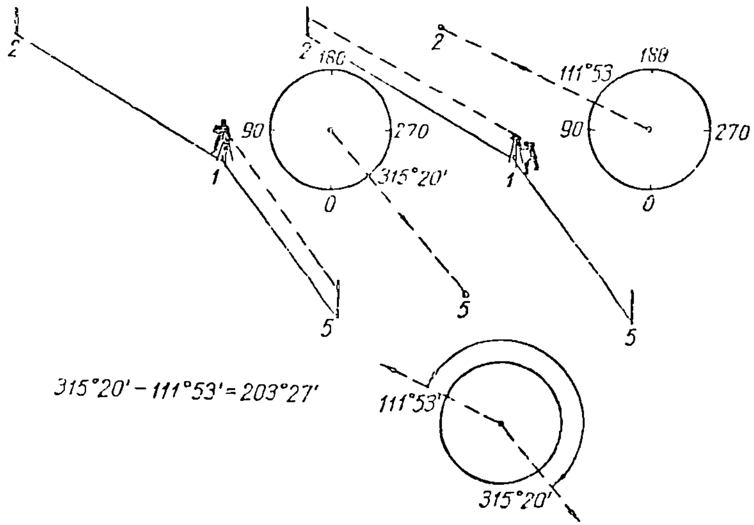


Рис. 159. Измерение угла способом приемов

2. Закрепить алидаду и трубу, навести микрометренными винтами перекрестие нитей на основание вехи * и прочесть отсчеты по верньерам. По первому верньеру (I) берутся градусы и минуты; по второму (II) — только минуты - для получения среднего отсчета, свободного от влияния эксцентриситета алидады **.

3. Открепить алидаду и трубу, произвести визирование на точку *2* и записать отсчеты.

Разность отсчетов на точки *5* и *2* даст величину измеряемого угла.

На этом заканчивается полуприем, который обычно производят в положении, когда вертикальный круг находится справа от наблюдателя. В журнале это записывается так: «КП», что означает «круг право».

Затем трубу переводят через зенит и производят вторичное наблюдение в том же порядке. При этом вертикальный круг будет слева от наблюдателя, что в журнале обозначают: «КЛ», т. е. «круг лево».

При таком способе измерения исключаются остаточные ошибки (коллимационная, а также ошибка, обусловленная неперпендикулярностью горизонтальной оси трубы и вертикальной оси инструмента). Для устранения грубой ошибки в повторительном теодолите рекомендуется второй полуприем производить на другой части лимба, т. е. передвинуть лимб перед наведением на веху *5* на некоторый угол. Запись отсчетов делается в журнале (см. стр. 175).

Способ повторений ***

1. Совместить нулевой штрих первого верньера с отсчетом по лимбу, близким к нулю (несколько больше), и закрепить алидаду (рис. 160).

2. Движением лимба (сперва рукой, а затем микрометренными винтами лимба и трубы) навести перекрестие нитей на точку *2*. Записать в журнал отсчеты.

3. Открепить алидаду (лимб не трогать!) и произвести визирование на точку *5*. Записать отсчеты. Так как отсчет на точку *2* был близок к нулю, то отсчет на точку *5* дает приближенное значение угла.

4. Открепить лимб (алидаду не трогать!) и произвести визирование на точку *2*. При этом, естественно, отсчет по лимбу не изменится — алидада скреплена с лимбом.

---

* Визирование на основание вехи даст *большую* точность, так как веха может стоять не отвесно.

** См. стр. 204.

*** Измерение этим способом возможно только повторительным теодолитом, откуда и произошло название «повторительный».

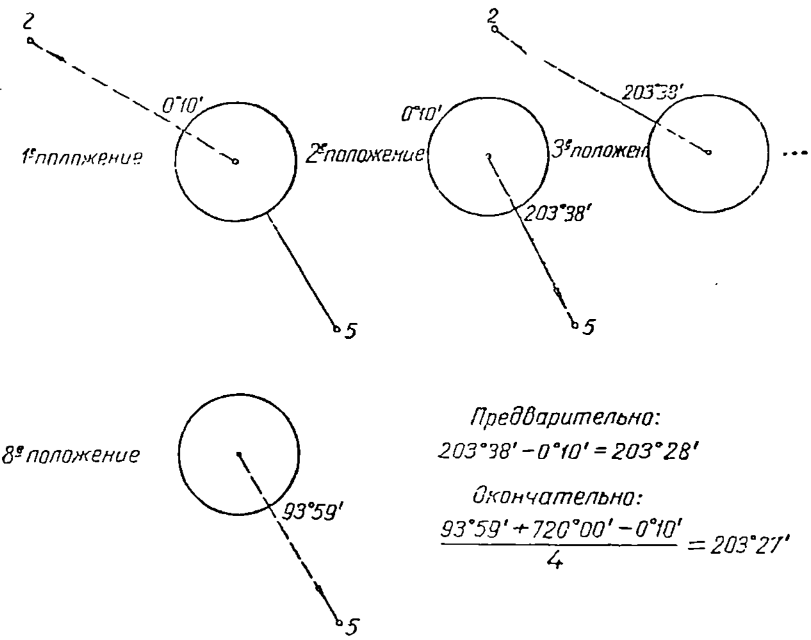


Рис. 160. Измерение угла способом повторений

5. Вновь открепить алидаду и навести перекрестие нитей на точку 5.

6. Продолжать эти движения n раз*, т. е. при скрепленных лимбе и алидаде движением лимба визировать на точку 2, а при закрепленном лимбе движением алидады визировать на точку 5.

7. При последнем наведении на точку 5 (8-е положение) записать отсчет в журнал. Разность между этим отсчетом и начальным (близким к нулю) даст величину угла, умноженную на n, т. е. на число повторений. Следует учесть, что к последнему отсчету необходимо прибавить $360° \cdot k$, где k — целое число, показывающее, сколько раз алидада пересекала нуль лимба. Приближенное значение угла помогает легко установить это число. Переведя трубу через зенит, производят измерение вторым полуприемом, повторяя все действия в обратном порядке. Система записи и обработки показана в журнале (см. стр. 176).

Пусть n — кратный угол при круге «право» — 813° 49',5 получен следующим образом: в графе 4 приближенное значение

---

* «n» практически берется 3—6.

Способ приемов

Журнал измерений
15 июля 1957 г.

№ точек		Отсчеты по верньерам				Углы				Прямые обратные магнитные азимуты или румбы	Мера линии 1-е изм., 2-е изм.	Углы наклона и расстояние до начала и конца наклона на линии
стояния	наблюдения	I		II	среднее	КП и КЛ		среднее				
		град.	мин.	мин.	мин.	град.	мин.	град.	мин.			
1	2	3			4	5		6		7	8	9
	5	315	20	21,5	20	203	27,5					
	2	111	53	53	53							
1	5	146	29	29	29	203	27	203	27,2	197°		
	2	303	02	02	02							

Примечание. Средние значения углов (графа 6) и меры линий (графа 8) заполняются дома чернилами или тушью; все записи в поле ведутся карандашом.

Способ повторений

Журнал измерений

15 июня 1954 г.

№ точек: стояния	№ точек: наблюдения	Число повторений	Отсчеты по верньерам: I, град.	Отсчеты по верньерам: I, мин.	Отсчеты по верньерам: II, мин.	Среднее, мин.	n-кратный угол: град.	n-кратный угол: мин.	Углы: КП и КЛ, град.	Углы: КП и КЛ, мин.	Углы: среднее, град.	Углы: среднее, мин.	Прямые обратные магнитные азимуты или румбы	Мера линии 1-е изм., 2-е изм.	Углы наклона и расстояние до начала и конца наклона линии
1	2	3	4			5	6		7		8		9	10	11
	1		0	10	10	10	813	49,5	203	27,4					
	5	1	203	38	38	38									
	5	4	93	59	60	59,5									
1	5		93	51	52	51,5	813	50,5	203	27,6	203	27,5			
	2		0	01	01	01									

Примечание. Средние значения углов (графа 8) и меры линий (графа 10) заполняются дома чернилами или тушью.

угла из первого повторения равно 203° 28′ (203° 38′—0°10′= = 203°28′). Отсчет после четырех повторений равен 93°59′, а он должен быть близким к 203°28′ × 4 = 813°52′, т. е. к 93°59′ следует прибавить 360° × 2 = 720°. Тогда 4-й отсчет на точку 2 составит 93°59′ + 720°00′ = 813°59′, а 4-кратный угол будет равен 813°59′ — 0°10′ = 813°49′,5. Следовательно, угол при первой точке стояния равен 813°49′,5 : 4 = 203°27′,4.

Так как ошибка измерения угла складывается из ошибок отсчета и визирования, то способ измерения следует выбирать в зависимости от назначения работы и точности инструмента.

Например, при съемке планов точность верньеров, равная 1′ или 30″, вполне достаточна, и угол измеряют способом приемов (для полуприема «КП» и «КЛ»). Если же эти теодолиты применяют на работах повышенной точности (триангуляция), то пользуются способом повторений, так как точность визирования в теодолитах выше точности отсчета.

Известно, что точность визирования в одноминутном теодолите равна примерно 3—5″, а точность отсчета - 20—30″, т. е. ниже.

Следовательно, при измерении угла способом повторений и при числе повторений, равном 6, влияние ошибки отсчета на величину угла уменьшится в шесть раз.

Нивелир *

Идея геометрического нивелирования, т. е. получение превышения одной точки над другой, чрезвычайно проста (см. стр. 102). Она заключается в получении отсчетов по рейкам, установленным в точках, разность высот которых определяется методом визирования горизонтальным лучом. В соответствии с этим нивелиры являются приборами, снабженными зрительной трубой и чувствительным уровнем **.

Конструкция зрительных труб аналогична конструкции труб теодолитов и кипрегелей ***. Труба крепится на подставке с тремя подъемными винтами и свободно вращается только в горизонтальной плоскости. Во время работы нивелир устанавливается на штативе.

В настоящее время применяют различные нивелиры, из которых укажем два:

1) нивелир с перекладной трубой (рис. 161) и

2) нивелир с трубой, скрепленной с вертикальной осью вращения, так называемый «глухой нивелир» (рис. 162).

---

* Нивелир не является угломерным инструментом и в данный раздел помещен условно.

** См. стр. 233—235.

*** См. стр. 160.

Не приводя описания и поверок различных типов нивелиров, отметим только, что во всех них требуется, чтобы

1) ось уровня была перпендикулярна вертикальной оси вращения инструмента;

2) визирная ось трубы была параллельна оси уровня

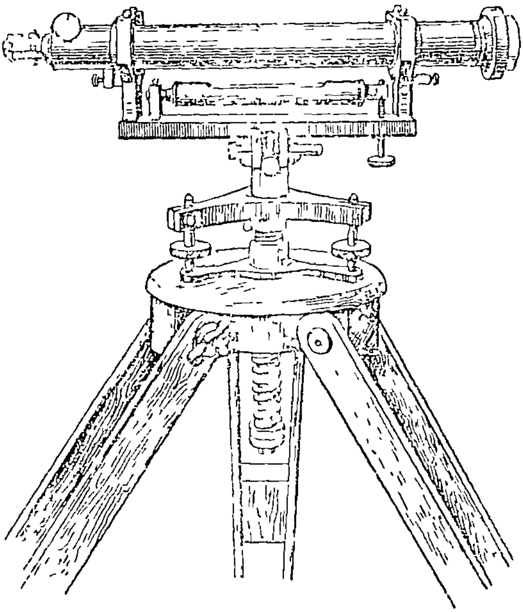


Рис. 161. Нивелир с перекладной трубой

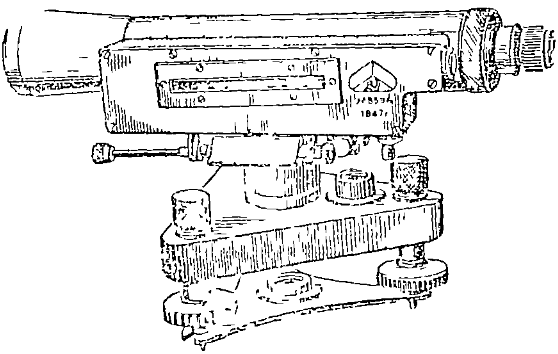
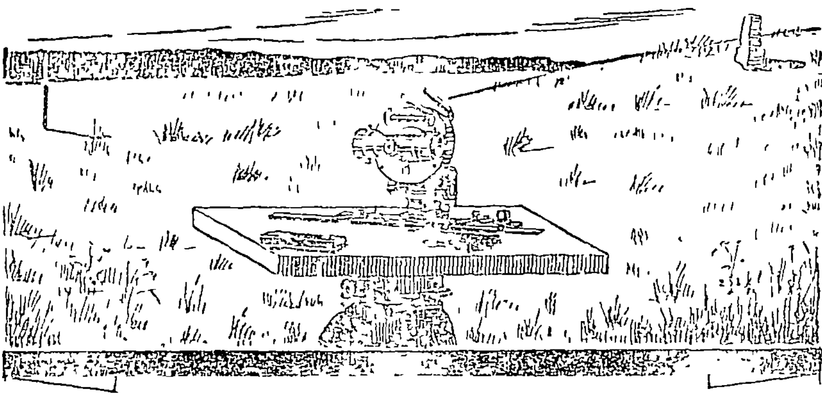


Рис. 162. Нивелир глухой



МЕНЗУЛА С ПРИНАДЛЕЖНОСТЯМИ

Мензула[*] состоит из трех частей: планшета, подставки и штатива (рис. 163).

Доски для планшета берутся квадратной формы (сторона 350—700 *мм*), толщиной 20—40 *мм*. Изготавливаются они из выдержанного дерева, причем особое внимание уделяется созданию плоскости на верхней стороне.

Штатив и подставка по конструкции похожи на аналогичные детали, применяемые в теодолите. Подставка мензулы снабжена закрепительным и микрометренным винтами.

Работа на мензуле требует наличия ряда принадлежностей, которые входят в комплект. К числу их относятся: кипрегель, алидада, ориентир-буссоль, вилка и др.

Кипрегель (рис 164) состоит из металлической линейки со скошенным краем, на которой установлен цилиндрический уровень. На середине линейки укреплена металлическая колонка. В верхней части ее имеется отверстие, в которое входит горизонтальная ось вращения зрительной трубы[**]. Одновременно с вращением трубы вокруг горизонтальной оси вращается и вертикальный круг с делениями, нанесенными через 0°,5, скрепленный с осью наглухо.

Алидада вертикального круга свободно насажена на ось, имеет микрометренный винт и уровень для установки линии нулей противоположных верньеров в горизонтальное положение.

[*] От латинского mensula — столик.
[**] Конструкция трубы аналогична конструкции трубы теодолита.

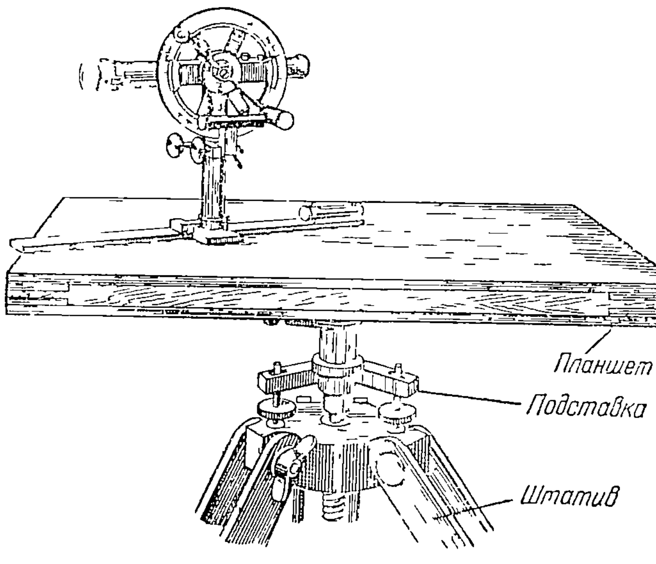


Рис 163 Мензула

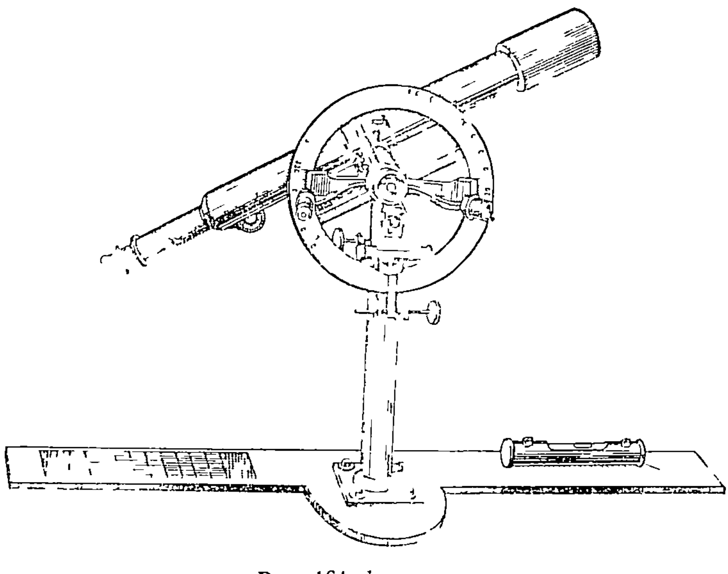


Рис 164 Кипрегель

Данные обычных кипрегелей: точность верньеров вертикального круга равна одной минуте, увеличение трубы 25—35, коэффициент дальномера 100.

Алидада. Если работа ведется на небольшой территории, т. е. если нет необходимости использовать увеличение, создаваемое зрительной трубой, а кроме того, не используется вертикальный круг и дальномер, то кипрегель можно заменить алидадой. Конструкция алидады показана на рис. 165.

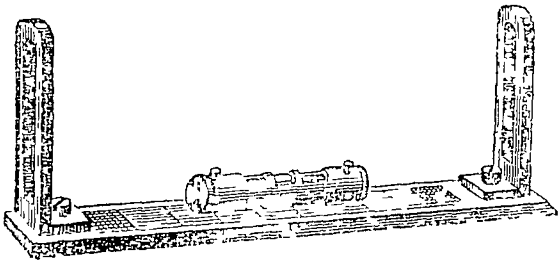


Рис. 165. Алидада

Ориентир-буссоль (см. стр. 153).

Вилка. Мензульная вилка применяется для центрирования, т. е. для установки намеченной на планшете точки над соответствующей точкой местности, а также для ортогонального проектирования точки местности на планшет.

Конструкция вилки и способ центрирования ясны из рис. 166. В исправной вилке отвес должен находиться (при установленной на горизонтальный планшет вилке) на одной

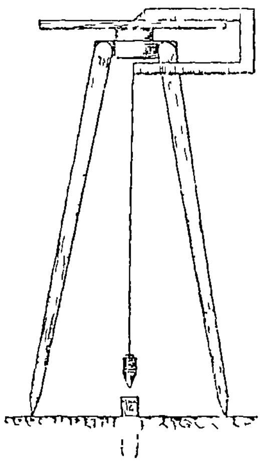


Рис. 166. Вилка

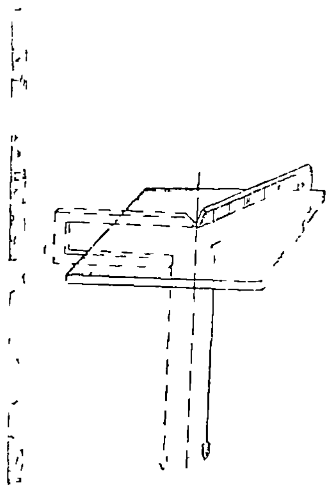


Рис. 167. Поверка вилки

отвесной линии с острием, совмещенным с точкой планшета.

Несоблюдение этого требования приведет к тому, что одна и та же точка на плане будет, при повороте вилки, проектироваться в различные точки на местности, расположенные на окружности радиуса r (рис. 167).

Поверки мензулы и кипрегеля

Дадим краткое описание лишь тех поверок, которые необходимы для получения достаточно удовлетворительной точности работы.

Требования к мензуле и ее поверки

1. Мензула должна быть устойчива.

Установить мензулу и привести планшет в горизонтальное положение. Провизировать кипрегелем на какой-либо ориентир и прочертить на планшете направление. После легкого нажима на края планшета проверить, не сдвинулся ли кипрегель с прочерченной линии, и, убедившись, что нет, проверить визирование.

Если нити сетки сместились против первоначального визирования, то инструмент не исправен.

2. Верхняя сторона планшета должна быть плоскостью.

Прикладывать выверенную линейку к поверхности планшета по различным направлениям. Линейка должна плотно (без зазоров) прилегать к планшету.

Требования к кипрегелю и его поверки

1. Скошенное ребро линейки должно быть прямым.

Установить кипрегель на планшет и острым карандашом

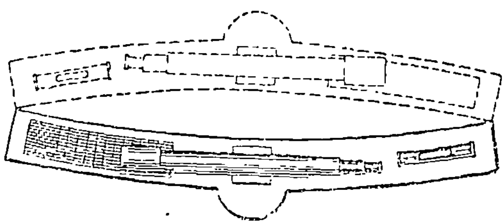


Рис. 168. Поверка линейки кипрегеля

прочертить по скошенному краю линейки. Повернуть кипрегель на 180°, приложить к прочерченной линии и прочертить вновь (рис. 168)*.

* Для наглядности стороны линейки умышленно сильно искривлены.

2. Ось уровня на линейке должна быть параллельна нижней плоскости линейки.

Поверка и исправления производятся так же, как в теодолите, только вместо поворота алидады на 180° (см. стр. 165) поворачивают кипрегель на 180°.

3. Визирная ось трубы должна быть перпендикулярна горизонтальной оси вращения.

Навести пересечение нитей на отдаленный предмет и прочертить линию по скошенному краю линейки. Перевести трубу через зенит, приложить скошенный край к прочерченной линии и проверить отклонение пересечения нитей от предмета, на который визировали вначале. Боковыми исправительными винтами при сетке нитей сдвинуть сетку на половину отклонения и повторить поверку.

4. Горизонтальная ось вращения трубы должна быть параллельна верхней поверхности планшета.

Проверку производят, как в теодолите, исправление производят прокладкой листков фольги между колонкой и линейкой.

Ориентирование планшета мензулы

1. По буссоли. Ориентирование по буссоли можно производить как по магнитному, так и по географическому меридиану. Для школьной практики достаточно применять ориентирование по магнитному меридиану. Для этого нужно приложить длинную сторону ориентир-буссоли к прочерченной около края планшета линии, параллельной какой-либо стороне планшета. Затем, открепив арретир буссоли, поворачивать планшет до тех пор, пока магнитная стрелка не установится на отсчет, близкий к нулю. При этом следует зажать закрепительный винт подставки, а точную установку на 0° произвести микрометренным винтом.

2. По линии. Если на планшете имеются две точки — a и b, соответствующие двум точкам местности A и B, то, став в одной из точек, например A, можно, приложив линейку по линии ab, направить кипрегель поворотом планшета на веху B (рис. 169). Грубое наведение производят рукой, точное — микрометренным винтом.

Такой способ ориентирования будет точнее, чем по буссоли, так как при тщательной работе ошибка ориентирования будет не больше $\pm 3'$—$5'$. Ошибка буссоли равна $\pm 10'$—$15'$.

Точность графических построений и ориентирования планшета

Точность графических построений в большой степени зависит от аккуратности в работе, но ограничена физиологическими свойствами глаза.

Из опыта установлено, что человеческий глаз не может различить точку, диаметр которой меньше 0,1 *мм*.

Острой иголкой можно наколоть такую точку, но уже повторная установка, например иголки циркуля, увеличит эту точку до 0,2—0,3 *мм*.

Примем для расчета диаметр накола равным 0,2 *мм*, и посмотрим, на какой угол может отклониться линия (при прочерчивании) от истинного направления. За истинное направление принимается линия, проходящая через центры наколов (рис. 170).

При прочерчивании линии через две точки она может быть касательна к этим точкам даже с противоположных сторон, но будет казаться проведенной верно. Угол отклонения $\varkappa$ прочерченной линии от истинной будет равен

$$\sin \varkappa = \frac{0,1}{L},$$

или, с учетом малости угла в радианной мере:

$$\varkappa = \rho \frac{0,1}{L}, \text{ где}$$

ρ — радианная мера угла.

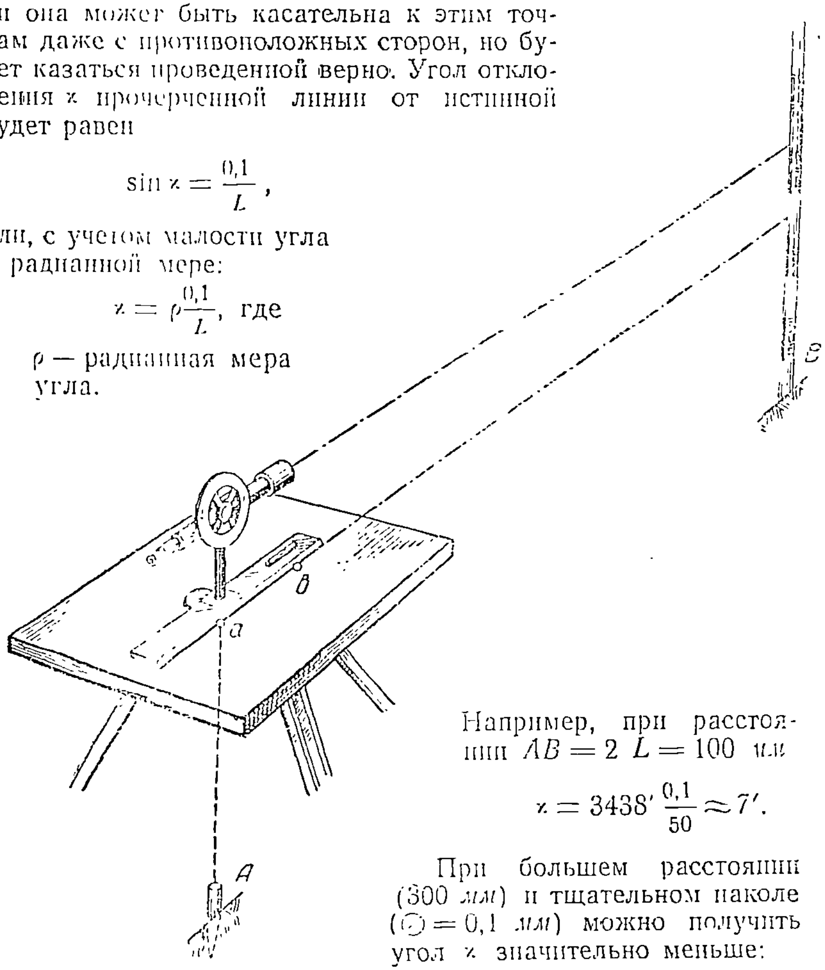


Рис. 169.
Ориентирование по линии

Например, при расстоянии $AB = 2\ L = 100$ *мм*

$$\varkappa = 3438' \frac{0,1}{50} \approx 7'.$$

При большем расстоянии (300 *мм*) и тщательном наколе ($\odot = 0,1$ *мм*) можно получить угол $\varkappa$ значительно меньше:

$$\varkappa = 3438' \frac{0.05}{0} \approx 1'.$$

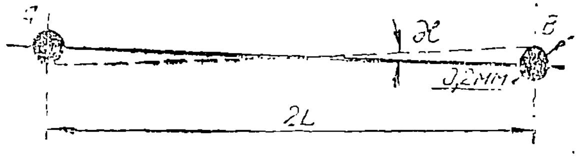


Рис. 170. Точность графических построений

Следует учесть, что накол точки пересечения двух прямых может быть сделан достаточно надежно только при пересечении линий под углом, близким к прямому (рис. 171).

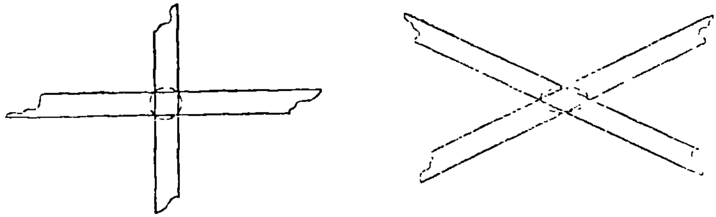


Рис. 171. Пересечение двух прямых

Действительно, при пересечении под прямым углом точка пересечения находится в пределах круга, диаметр которого зависит от толщины линий. При пересечении линий под острым углом точка может быть выбрана в пределах эллипса.

Проведение параллельных линий на планшете

Обычно проведение на чертеже параллельных линий производится, как известно, перемещением треугольника по неподвижной линейке. В поле, на планшете мензулы, эта работа выполняется линейкой алидады или кипрегеля.

Допустим, через точку k нужно провести линию, параллельную прямой ab (рис. 172). Работа производится следующим образом:

1) прикладывают линейку кипрегеля к линии ab и визируют на удаленную точку Q поворотом планшета. Закрепляют планшет;

2) прикладывают линейку к точке k и визируют вновь на точку Q поворотом кипрегеля;

3) прочерчивают по линейке направление на Q, которое **практически** будет параллельно ab.

Действительно, прямые ab и kQ пересекутся в удаленной точке Q.

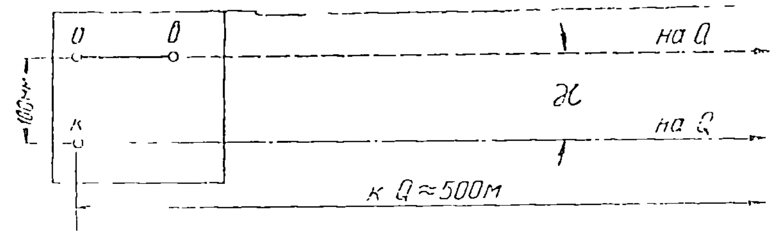


Рис. 172. Проведение параллельных прямых

Следовательно, угол пересечения $\varkappa$ будет равен

$$\operatorname{tg} \varkappa = \frac{ka}{kQ} \text{ или } \varkappa = \rho \frac{ka}{kQ} \text{ (в силу малости угла } \varkappa).$$

$$\text{При } ak = 10 \text{ см}, \ kQ = 500 \text{ м};$$

$$\varkappa = 3438' \frac{10}{500 \cdot 10^2} \approx 0',6,$$

т. е. меньше точности графических построений.

Необходимость применения вилки

Как было указано выше, диаметр минимальной точки, видимой невооруженным глазом, равен 0,1 *мм*. Поэтому, казалось бы, что точное центрирование мензулы над точкой необходимо лишь при составлении планов в таких масштабах, когда точка диаметром 0,1 *мм* на плане соответствует на местности окружности небольшого диаметра, скажем, в пределах 10 *см*; при большем же диаметре можно центрировать на глаз.

Например, при масштабе 1 : 10 000, когда точке 0,1 *мм* соответствует окружность диаметром 1 *м*, планшет можно ставить без тщательного центрирования, в пределах этой окружности.

С точки зрения положения на плане данной точки это справедливо. Но если посмотреть, как это отражается на ориентировании, то окажется, что требование к точному центрированию значительно жестче.

Действительно, при ориентировании мензулы по линии $AB = L$ на местности и смещении точки a на плане относительно точки A местности на величину x (рис. 173), планшет будет ориентирован с ошибкой, которая равна:

$$\sin \theta = \frac{x}{L},$$

или, по малости угла θ: $\theta = \rho \dfrac{x}{L}$.

Отсюда $x = L \dfrac{\theta}{\rho}$.

Приняв угол Θ равным не более максимальной точности графики (см. стр. 184), т. е. $1'$, получим:

$$x = L\,\frac{1}{3438}\,.$$

При ориентировании линии длиной 350 *м*, x может быть не более 0,1 *м*:

$$x = 350\,\frac{1}{3438} \approx 0{,}1\ м.$$

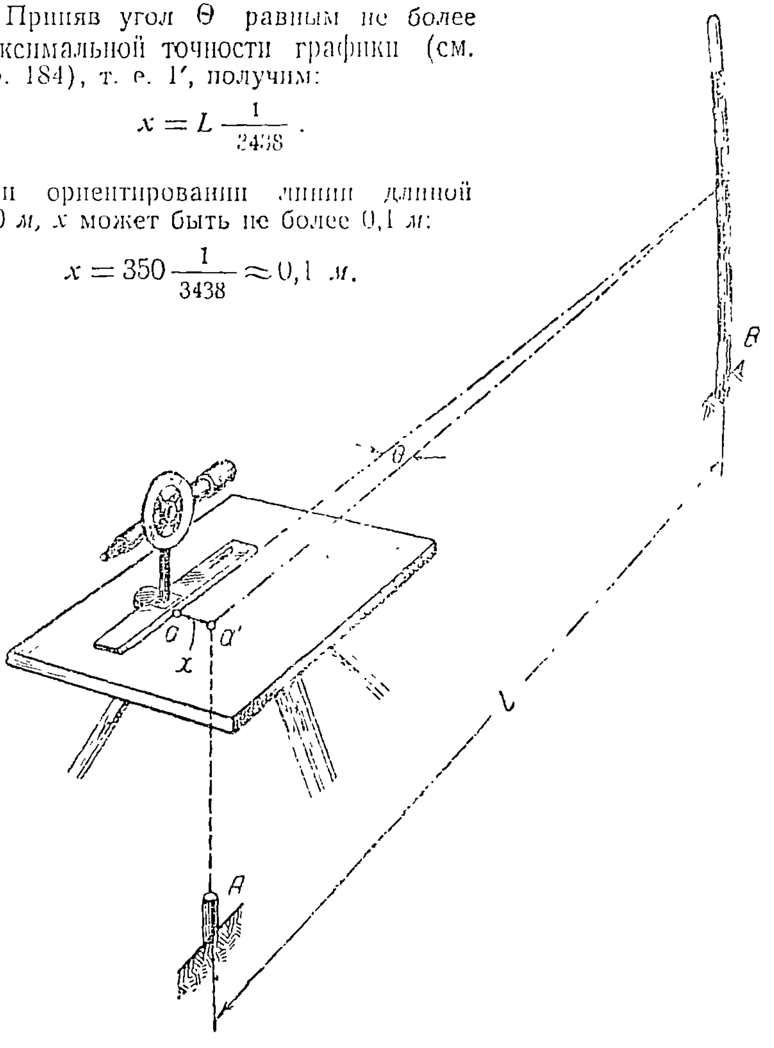
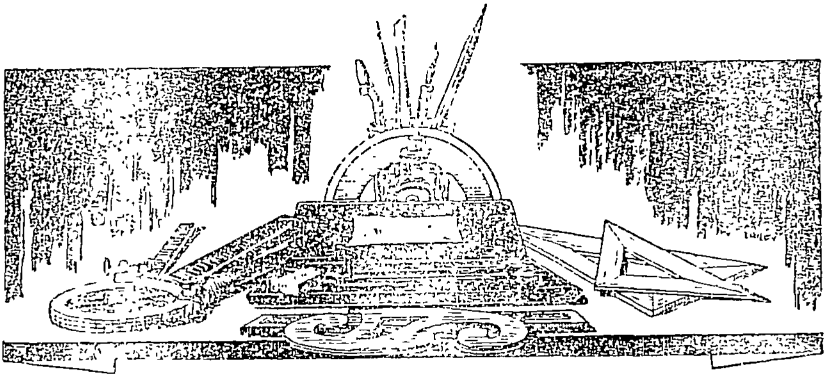


Рис. 173. Ошибка за центрировку

Следовательно, даже при масштабе 1 : 10 000 центрирование из-за ориентирования планшета требует применения вилки.

В школьной практике вилку можно не применять, но следует объяснить ее назначение и связанные с ней вопросы точности.



ПРИБОРЫ КАМЕРАЛЬНОЙ ОБРАБОТКИ

Поперечный масштаб

В работе «Масштаб и план» стр. 56 выяснена сущность числового и линейного масштаба. Значительная требовательность к точности разметки предъявляется при изготовлении линейного масштаба, ибо его шкала непосредственно используется при измерении. Основание масштаба (рис. 174) обычно равно 1 *см*, а доли его (влево от нуля), например для масштаба 1 : 10 000, по 0,1 *см*, т. е. по 1 *мм*.

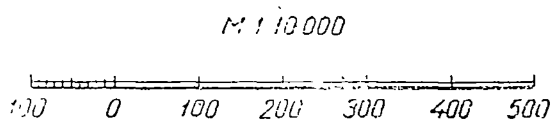


Рис. 174. Линейный масштаб

Пусть требуется взять по линейному масштабу 325 *м*, тогда 300 *м*=3 · 100 *м*, т. е. на шкале берутся три основных деления, а 20 *м* = 2 · 10 *м*, т. е. два малых деления влево от нуля. Пять же метров приходится брать на глаз; 5 *м* — это половина деления, которую на глаз еще можно взять достаточно точно; другие же количества: 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9 *м*, придется брать со значительным произволом.

Точность нанесения точки на бумагу может быть 0,1—0,2 *мм*, т. е. при масштабе 1 : 10 000 получим:

1 *см* — 100 *м*; 1 *мм* — 10 *м*; 0,1 *мм* — 1 *м*.

Линейный масштаб не обеспечивает такой точности, ибо на нем деление в 2 *см* содержит 20 *м*; если на глаз взять $^1/_5$ часть, то это дает 4 *м*, а так как на глаз можно поручиться за $^1/_2$ деления, то это дает точность только 10 *м*.

Для более точных работ употребляется особый вид линейного масштаба — п о п е р е ч н ы й масштаб. Его разметка основана на подобии треугольников, или пропорциональности отрезков (курс VIII класса); отметка в нем дает 0,1—0,2 *мм*, что при М 1 : 10 000 равняется 1—2 *м*.

На рис. 175 показан поперечный масштаб. На концах линейки с двух сторон размечены 4 поперечных масштаба[1]: 1 : 25 000; 1 : 50 000; 1 : 100 000; 1 : 200 000.

Рассмотрим один из концов линейки с пометкой 1 : 25 000, что означает «в 1 *см* — 25 000 *см*», или «в 1 *см* — 250 *м*».

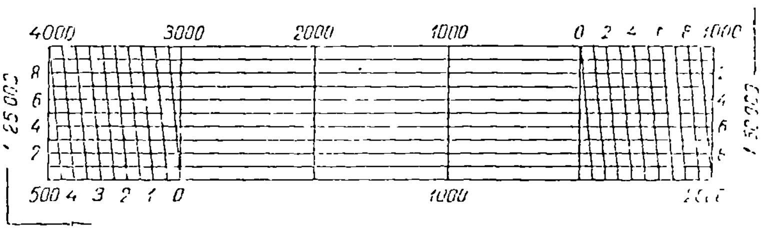


Рис. 175. Поперечный масштаб

Снизу линейки помещен отрезок обычного линейного масштаба, а именно: от 0 вправо даны штрихи через каждые 2 *см*, а надписи сделаны через одно деление, т. е. на каждом втором штрихе, отстоящем от 0 на 4 *см*, поставлена цифровая отметка 1000 (1 *см* — 250 *м*; 4 *см* — 1000 *м*; средний неотмеченный штрих обозначает 500 *м*).

От 0 влево на расстоянии 2 *см* дана надпись «500 *м*», но это расстояние разделено на 10 частей, благодаря чему каждая часть равна 2 *см* : 10=0,2 *см*/часть, или 20 *мм* : 10= =2 *мм*/часть; теперь 1 *см* соответствует 250 *м*; 0,1 *см* — 25 *м*, а 0,2 — 50 *м*.

Таким образом, одно малое деление обозначает 50 *м* (рис. 176). Следует обратить внимание на то, что во избежание густоты цифровых обозначений надписи даны через одно деление, т. е. 100, 200 и т. д. до 500.

К таким выводам приводит анализ линейного масштаба на нижней шкале; ее правый конец обозначает 2000 *м*.

Далее, на линейке проведены 10 параллелей нижнему от-

[1] Два других наносятся на оборотной стороне линейки

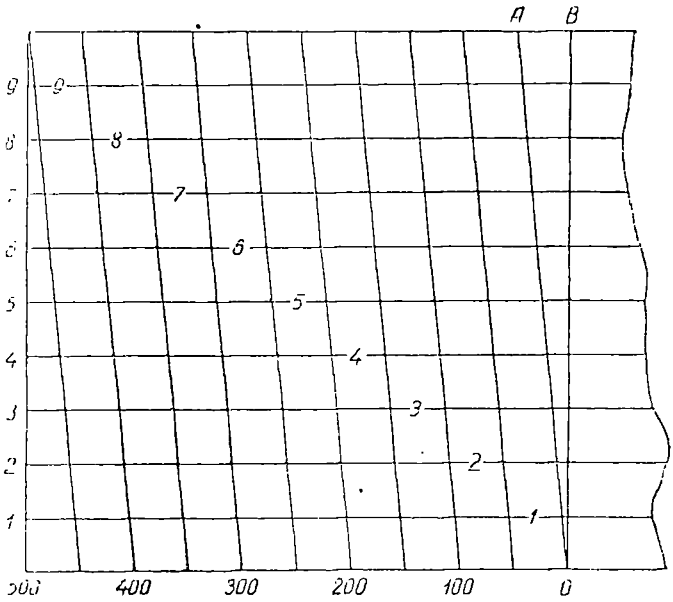


Рис. 176. Геометрия поперечного масштаба

резку на одинаковых (произвольных, зависящих от ширины сконструированной линейки) расстояниях.

В концах крупных делений (справа от нуля) проведены перпендикуляры между нижним и верхним отрезками, а концы мелких делений (влево от нуля) соединены наклонными так, что нулевое деление нижнего отрезка соединено с первым делением верхнего; первое деление нижнего со вторым верхнего и т. д., наконец, девятое нижнего с последним, десятым верхнего. Все параллели и наклонные занумерованы по порядку.

Рассмотрим теперь 10 треугольников, полученных из треугольника OAB десятью параллельными основанию сечениями. Параллель при точке *1* даст 0,1 AB; так как коэффициент пропорциональности для этих подобных треугольников равен 0,1. При точке *2* — 0,2 AB; при точке *3* — 0,3 AB и т. д., при точке *9* — 0,9 AB. А так как AB соответствует 50 *м*, то эти отрезки соответствуют: 5 *м*, 10 *м*, 15 *м*, 20 *м* и т. д.

Следует учесть, что отрезки, проведенные от перпендикуляра до первой наклонной через нуль, дают: 5 *м*, 10 *м*, 15 *м* и т. д., а отрезки до второй наклонной (после 50 *м*) будут читаться 55 *м*, 60 *м*, 65 *м* и т. д.

Порядок работы ясен из схем, показанных на рис. 177. Положение циркуля № 1 — 330 *м*; № 2 — 624 *м*; № 3 — 635 *м*; № 4 — 1075 *м*; № 5 — 23,4 *м*.

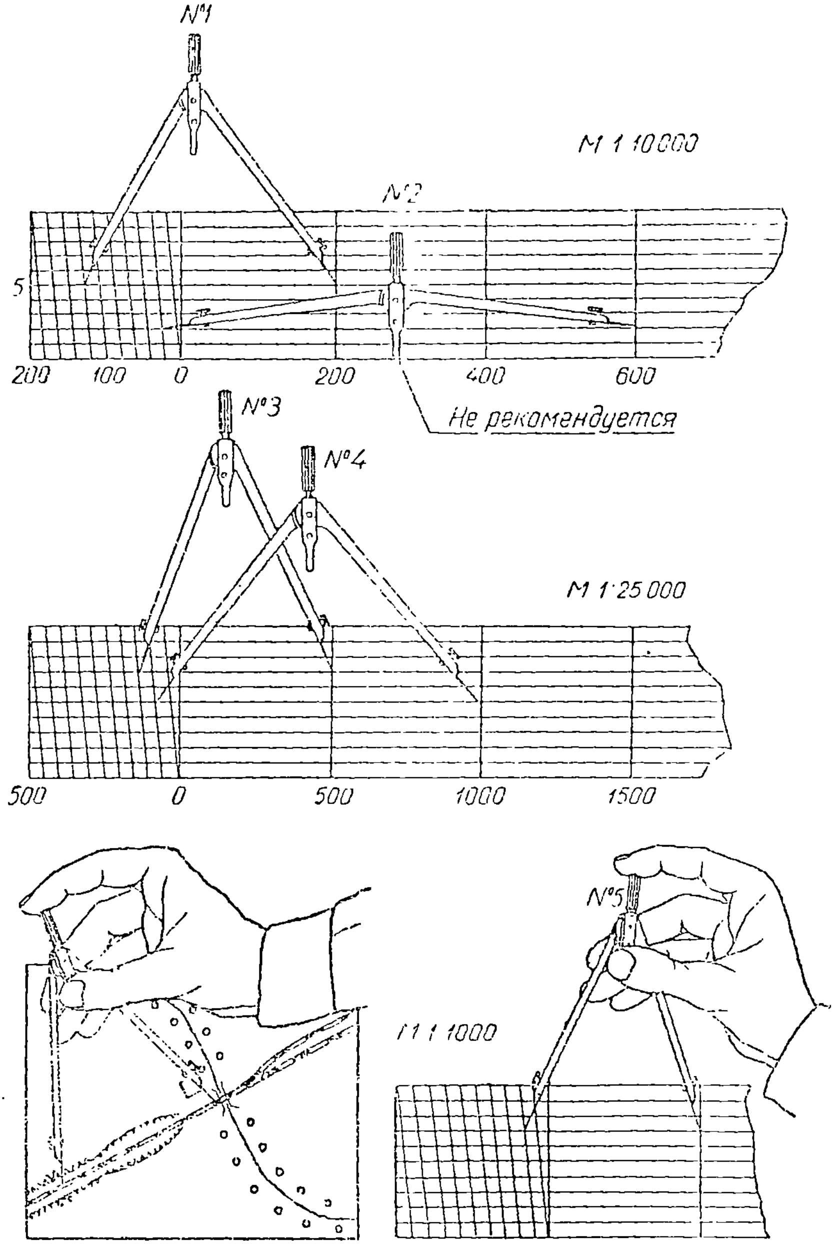


Рис. 177. Работа с поперечным масштабом

Указания. 1. При измерении отрезка, взятого циркулем, начало отсчета устанавливается правой ножкой циркуля на нижней шкале.

2. Сохраняя раствор циркуля, перемещают его по параллелям, причем правая ножка передвигается по перпендикуляру до тех пор, пока и левая ножка не окажется в точке пересечения наклонной и параллели. После этого остается прочесть показания шкал поперечного масштаба, а именно: деление вправо от нуля — по 500 *м*, влево — по 50 *м*; движение по наклонной дает по 5 *м* при подъеме на каждую следующую параллель (при масштабе 1 : 25 000).

Так измеряется с помощью поперечного масштаба отрезок, снятый с плана (карты).

Этим же поперечным масштабом можно решать и обратную задачу: отметить на карте (плане) заданное расстояние.

Пантограф

Пантограф — прибор для уменьшения или увеличения размеров некоторого чертежа (рисунка) в заданное число раз (рис. 178).

Школьный пантограф состоит из четырех планок, на которых на равных расстояниях друг от друга просверлено оди-

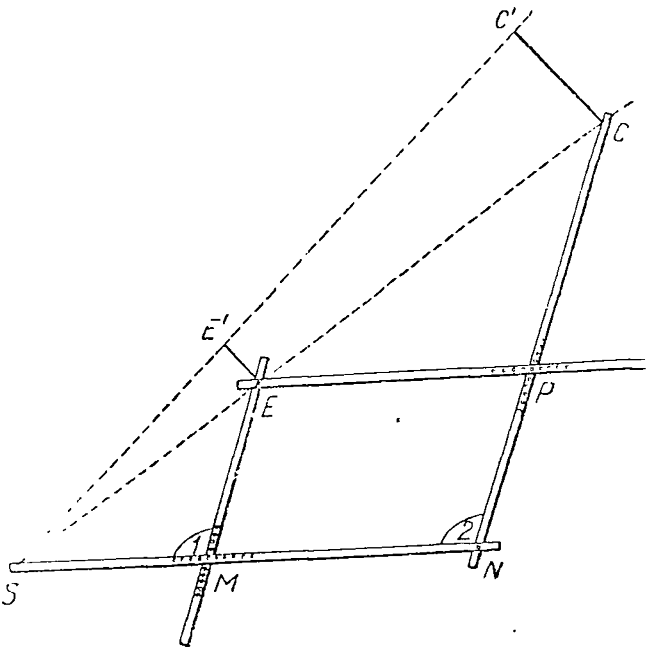


Рис. 178. Пантограф школьный

наковое число отверстий. Планки шарнирно соединены в точках M, N, E, P, причем M и P можно перемещать и закреплять, пользуясь отверстиями на планках.

К конструкции пантографа предусмотрено, что

$$1)\ MN = EP; \quad MP = NP; \qquad 2)\ \frac{NS}{MS} = \frac{NC}{NP} = \frac{NC}{ME};$$

фигура $MNPE$ — подвижный параллелограмм.

Из этих данных следует, что точки S, E, и C лежат на одной прямой.

Действительно, $\frac{SN}{SM} = \frac{NC}{NP}$,

или

$$\frac{SN}{SM} = \frac{NC}{ME}\ (NP = ME);\ \angle 1 = \angle 2,$$

откуда, $\triangle SME \backsim \triangle SNC$.

Следовательно, $\angle NSE = \angle NSC$ и точки S, E и C лежат на прямой.

С помощью острия точка S фиксируется в плоскости чертежа, в точке E помещается деревянный штифт, в точке C — карандаш. В этих условиях получается увеличение контура; при уменьшении контура карандаш вставляется в точку E, а штифт — в точку C. Из рассмотрения двух положений пантографа SEC и $SE'C'$, видно, что преобразуемые отрезки $E'E$ и $C'C$ находятся в отношении, установленном на планках прибора $\triangle SEE' \sim \triangle SCC'$.

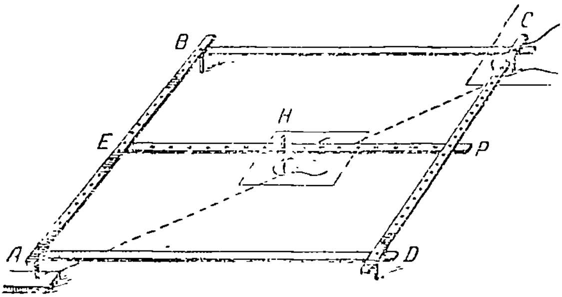


Рис. 179. Пантограф школьный

Работа с пантографом второго типа (рис. 179) построена на тех же принципах, что и в случае первом. Криволинейные контуры можно ставить в связь с ломаными линиями, как угодно близкими к кривым и имеющими с ними одно направление. На отдельные звенья ломаной можно распространить свойства пропорциональности, вытекающие из показанных подобных треугольников. Демонстрация прибора и применение его — полезная практическая работа на приложение свойств подобных треугольников.

На уроке учителю следует провести одну работу с пантографом с чертежом на доске, во внеурочное время учащиеся, разбившись на группы по 4—5 человек, должны сделать с пантографом ряд увеличений (или уменьшений) фигур. Устройство прибора и принципы его применения учащимся необходимо усвоить так же, как теоремы.

В геодезических работах применяют пантограф, изображенный на рис. 180.

Он работает по тому же принципу, что и школьный. Следует учесть, что при работе на значительное увеличение (примерно в три раза) погрешности, неизбежно возникающие во время работы на пантографе, могут быть очень велики.

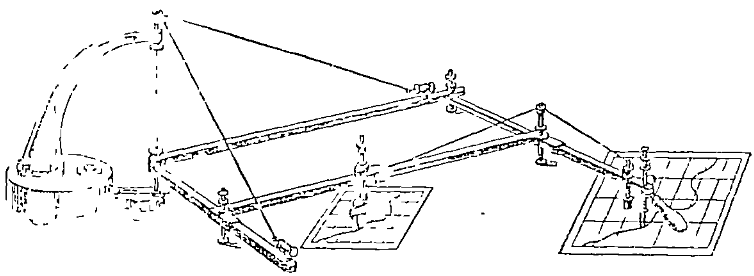


Рис. 180. Пантограф производственный

Следствием этого будет потеря точности плана, т. е. превращение его в схему.

Поэтому обычно, при составлении планов и карт, пантографом работают на уменьшение.

Курвиметр *

Курвиметр, или длиномер, является прибором для измерения на картах и планах длины кривых линий, например расстояния от одного пункта до другого пункта, или пути пробега, похода и т. п. (рис. 181).

---

* От латинского слова curvus — кривая и греческого слова metron — мера. Один из первых образцов курвиметра был сконструирован в 1851 г. П. А. Зворыкиным.

Основная деталь прибора — измерительное колесико. Путь, пройденный им по кривой карты (плана), и определяет искомое расстояние. Движение колесика передается системой зубчаток к стрелке-указателю, которая движется, в свою очередь, по круговой шкале. Существует несколько систем курвиметров: на одних — полученный результат выражен в сантиметрах, и его затем приходится переводить по числовому масштабу в нужные единицы; на других — притом более совершенных — стрелка движется по циферблату, на котором концентрически даны шкалы для карт различных масштабов: 1 : 25 000; 1 : 50 000, 1 : 75 000; 1 : 200 000. На другой стороне циферблата находим шкалы: 1 : 20 000, 1:40 000; 1:80 000; 1:100 000.

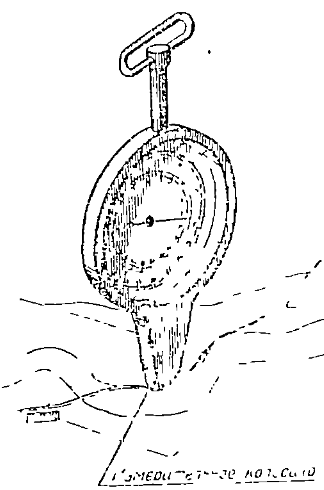


Рис. 181. Курвиметр

Таким образом, для определения по карте необходимого расстояния стрелку устанавливают в начальное (нулевое) положение. Для этого поворачивают колесико или прокатывают его по карте (по бумаге). Затем устанавливают колесико в исходную точку пути и, держа плоскость прибора перпендикулярно бумаге, медленно (без скольжения) катят колесико по намеченному маршруту. Направление движения является касательной к окружности колесика.

При нормальных условиях работа курвиметра дает погрешность всего в 2%, т. е. на 100 *м* дает максимальную ошибку в 2 *м*.

Планиметр

В части I на стр. 112 рекомендован приближенный способ определения площадей произвольных фигур с помощью палетки. В школьной практике полезно применить другой способ — измерение планиметром-«топориком» (рис. 182).

Теоретическая сущность этого прибора изложена, например, в работе «Лекции по приближенным вычислениям» А. Н. Крылова или «Топография» В. Витковского; однако сложность теоретического обоснования прибора выходит за рамки школьного курса, а потому мы можем рекомендовать лишь опытную проверку его применения.

Для знакомства с действием планиметра-«топорика» следует определить площади нескольких геометрических фигур, которые можно вычислить по формулам. Здесь будет установ-

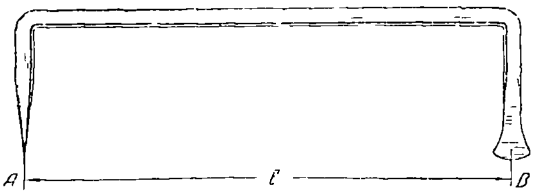


Рис. 182. Планиметр-«топорик»

лена примерная точность работы «топориком», а именно, около 1 : 50, или 2%.

Планиметр-«топорик» представляет собой металлическую скобу с размерами (примерными): длина $l=200—300$ *мм*; диаметр прутка — $d=5—7$ *мм*.

Острие обозначено буквой A, «топорик» — B. Последний настолько заострен, что при нажиме на бумагу дает заметный след, а при движении по бумаге не допускает боковых скольжений. Дуга топорика B и острие A лежат в одной плоскости.

Порядок работы легко усвоить по описанию к рис. 183.

1. Острие A помещают более или менее центрально (точка O) внутри контура измеряемой фигуры, которая укрепляется на чертежной доске.

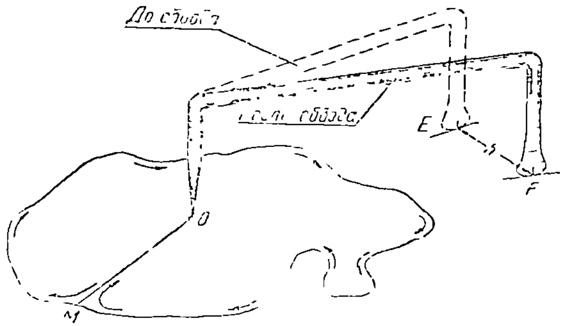


Рис. 183. Работа с планиметром

2. Нажимом топорика отмечают начальную точку E, из предосторожности помечают эту точку карандашом [1].

---

[1] Если «топорик» не помещается на плане, то под него укрепляется лист белой бумаги.

3. Соединяют точку O с произвольной точкой контура (M) карандашной линией и по ней ведут острие прибора; в это время «топорик» опишет некоторую дугу.

4. Обводят острием контур измеряемой фигуры; «топорик» описывает ломаную кривую линию.

5. Когда острие придет в первоначальную точку контура M, его возвращают в центр O и снова нажимом «топорика» и карандашом отмечают конечную точку движения «топорика» F.

6. Тщательно измеряют расстояние между начальной и конечной точками движения «топорика», пусть оно будет h.

Опыт показывает справедливость формулы:

искомая площадь: $S = l \cdot h$, где:

l — длина скобы планиметра, а

h — расстояние между конечной и начальной точками движения «топорика».

Для большей точности результата работу производят повторно, повернув «топорик» на 180°. Окончательным результатом является среднее из двух измерений.

Полярный планиметр

В производственных геодезических работах наибольшее распространение получил полярный планиметр, изображенный на рис. 184. Он состоит из двух рычагов: полюсного P и об-

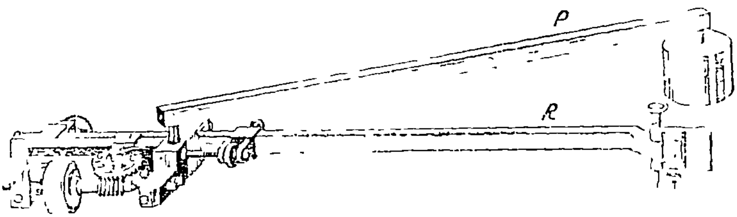


Рис. 181 Планиметр технический

водного R, соединенных между собой шариком в сферическом углублении рычага R. На рычаге R имеется счетный механизм.

Определение площади производится следующим образом.

1) чертеж укрепляется на горизонтальной доске,

2) планиметр устанавливается так, чтобы игла внизу груза рычага P воткнулась в доску и рычаг P мог вращаться вокруг нее;

3) обводная игла рычага R устанавливается на какой-либо точке внешней границы определяемой площади, по счетному механизму производится отсчет;

4) иглой обводят контур фигуры до начальной точки и вновь берут отсчет.

Разность отсчетов дает площадь фигуры в делениях планиметра, для определения площади в квадратных миллиметрах нужно определить цену деления шкалы планиметра. Для этого специально обводят фигуру с известной площадью, например квадрат со стороной 50 *мм*. Площадь его равна 2500 *кв. мм*.

Пусть этот квадрат обведен планиметром два раза и получены отсчеты: 2137, 4636 и 7138, т. е. в одном случае разность отсчетов 2499 (4636—2137), в другом — 2502 (7138 — 4636). Среднее из отсчетов — 2500. Цена деления планиметра равна 1 *мм*², так как:

$$\text{цена деления} = \frac{\text{площади в } мм^2}{\text{число делений}}.$$

Протрактор

Данный прибор (рис. 185) служит для графического решения задачи Потенота [1]. Точность отсчета по верньеру прибора (1′) превышает точность графических построений.

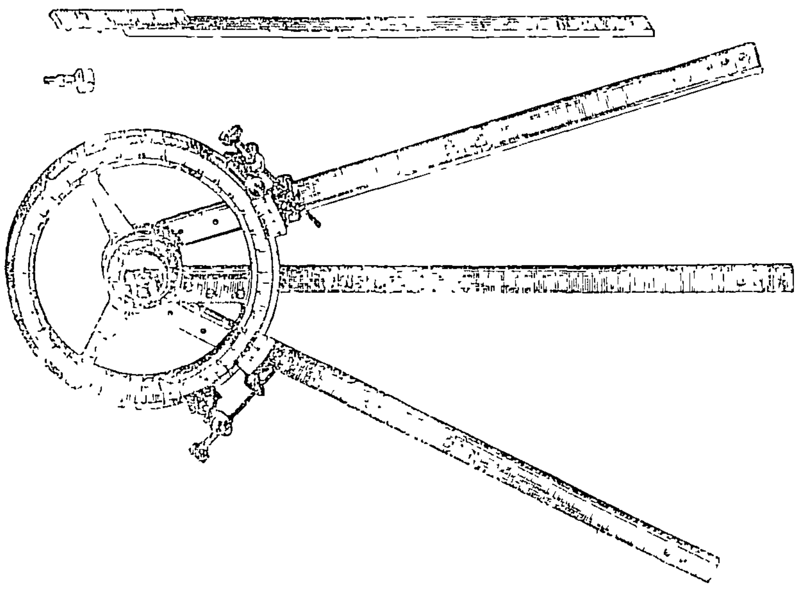
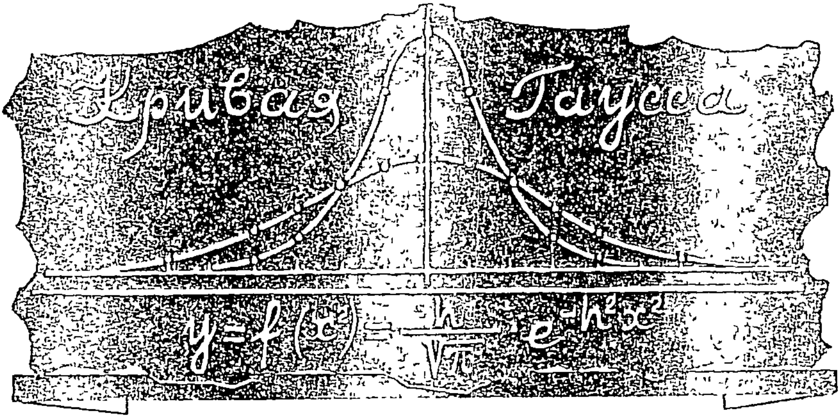


Рис. 185. Протрактор

[1] На стр. 302—305 дано описание задачи Потенота



СВЕДЕНИЯ ОБ ОШИБКАХ

Ошибки измерений

Во всех областях науки и техники человек имеет дело с различного рода измерениями. В машиностроении любая деталь, начиная с обычной гайки, делается по заранее установленному **размеру** и с **определенной точностью** или, как принято выражаться в технике, с определенным **допуском**, т. е. наибольшим допустимым отклонением размеров. Величина допуска численно определяется как разность между предельными размерами детали и устанавливается по классам точности в зависимости от эксплуатационных требований. Например, если при изготовлении вала (рис. 186) номинального размера 60 *мм* установлены предельные отклонения минус 0,040 *мм* и минус 0,120 *мм*, то предельные размеры вала будут

60—0,040=59,960 *мм* — наибольший предельный размер,

60—0,120=59,880 *мм* — наименьший предельный размер.

Откуда величина допуска составляет: 59,960—59,880=0,080 *мм*.

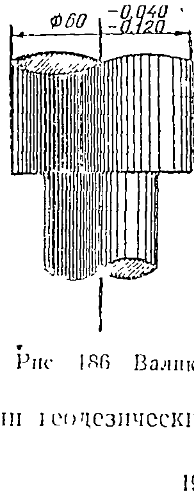
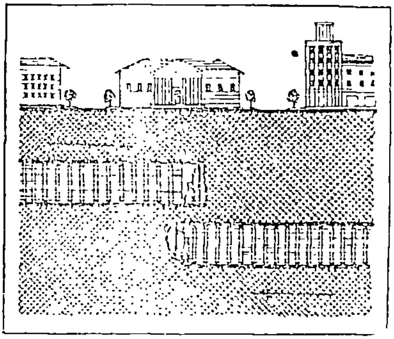


Рис. 186. Валик

В геодезических работах также имеются определенные допуски, выработанные на основании математического анализа факторов, влияющих на точность измерений, и большого опыта, накопленного при проведении геодезических работ.

Рассмотрим пример, который поможет доказать необходимость знания этих допусков, важность оценки точности измерений и установления или, как говорят, предвычисления ожидаемых ошибок.

При завершении строительства большого кольца метро в Москве, работы велись под землей одновременно с двух сторон — от станции «Парк культуры» и от станции «Белорусская». На рис. 187 схематично указано положение станций и стрелками — направление работ.



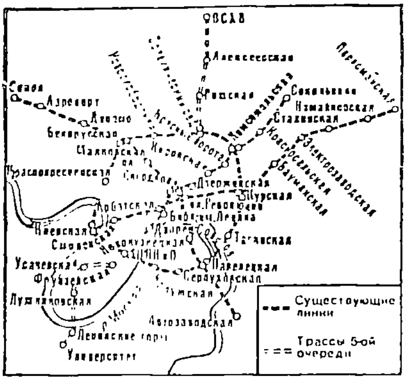


Рис. 187. Схема метро

Трасса туннелей была заранее спроектирована на плане и были вычислены необходимые для работы данные: углы поворотов, расстояния, подъемы и т. д.

Очевидно, что при неверных расчетах или при отклонении от расчетных данных туннели могли не сомкнуться — пройти мимо друг друга.

При современных технических средствах эти расхождения могут быть сведены к очень небольшим величинам, исчисляющимся несколькими сантиметрами. Однако это требует учета ошибок, допускаемых при измерениях и проектировании, и установления определенной точности работ.

Классификация ошибок*

Любое измерение неизбежно сопровождается различного рода ошибками. По своему характеру эти ошибки разделяются на три типа: грубые, систематические и случайные.

* В геодезии (Е. Г. Ларченко «Техника вычислений»), в физике (К. П. Яковлев «Математическая обработка результатов измерений») термины «ошибка» и «погрешность» употребляются как синонимы. В пособии В. М. Брадиса «Теория и практика вычислений» эти два понятия различаются. За грубыми оставлен термин «ошибки», систематические и случайные ошибки именуются «погрешностями».

Разберем эти ошибки более подробно, так как знание законов, которым эти ошибки подчиняются, даст возможность выявить их, частично исключить из результатов измерений и тем самым повысить точность.

Грубые ошибки

Пусть на местности необходимо измерить расстояние между вехами, установленными в точках A и B. Еще до проведения измерений можно с уверенностью утверждать, что абсолютно точного или, как говорят, истинного значения данной величины получить нельзя. Причиной этого являются: недостатки измерительных инструментов, изменение внешних условий в течение процесса измерения (солнце, дождь), несовершенство нашего глаза и т. д.

Проводя даже тщательные измерения одной и той же величины несколько раз, можно убедиться, что различные значения измерений лишь в редких случаях совпадут и будут только близки между собой. Это укажет на то, что грубых промахов или просчетов в работе нет.

Например, пусть расстояние AB измерено пять раз и получены следующие результаты:

1-е	измерение	$l_1 = 127{,}52$ *м*
2-е	»	$l_2 = 127{,}64$ »
3-е	»	$l_3 = 127{,}59$ »
4-е	»	$l_4 = 127{,}49$ »
5-е	»	$l_5 = 127{,}41$ »
		$\Sigma l = 637{,}65$ *м*

Из пяти результатов берем среднее

$$l_{\text{ср.}} = \frac{\Sigma l}{n} = \frac{637{,}65}{5} = 127{,}53 \text{ м}.$$

Указание. Среднее арифметическое можно находить двумя способами:

$$\text{1-й способ: } l_{\text{ср.}} = \frac{l_1 + l_2 + \ldots + l_n}{n}$$

в данном случае

$$l_{\text{ср.}} = \frac{127{,}52 + 127{,}64 + 127{,}59 + 127{,}49 + 127{,}41}{5} = 127{,}53 \text{ м}.$$

$$\text{2-й способ: } l_{\text{ср.}} = l_0 + \frac{\Delta l_1 + \Delta l_2 + \ldots + \Delta l_n}{n},$$

где число l_0 близко к среднему арифметическому и берется „на глаз", а Δl_1, Δl_2 и т. д. есть разности $l_1 - l_0$, $l_2 - l_0$ и т. д.; в данном случае из рассмотрения пяти значений возьмем число $l_0 = 127{,}50$ *м*, как приближенное среднее.

Тогда:

$$l_{ср.} = 127,50 + \frac{0,02 + 0,14 + 0,09 - 0,01 - 0,09}{5} = 127,50 + \frac{0,15}{5} =$$

$$= 127,53 \text{ м},$$

$$\begin{aligned} \text{где } \Delta l_1 &= 127,52 - 127,50 = 0,02 \text{ мм} \\ \Delta l_2 &= 127,64 - 127,50 = 0,14 \quad " \\ \Delta l_3 &= 127,59 - 127,50 = 0,09 \quad " \\ \Delta l_4 &= 127,49 - 127,50 = -0,01 \quad " \\ \Delta l_5 &= 127,41 - 127,50 = -0,09 \quad " \end{aligned}$$

Если же при измерении двадцатиметровой стальной лентой среди полученных значений имелся результат 107,60 м или 147,45 м, то это означало, что существует грубая ошибка, т. е. при подсчете числа лент одна лента не была принята во внимание (107,60 м) или, наоборот, число лент ошибочно увеличено на единицу (147,45 м).

Рассмотрим другой пример.

Расстояние измерено два раза. $l_1=152,67$ м, $l_2=148,46$ м.

Расхождение между двумя измерениями настолько велико, что следует со всей тщательностью произвести еще одно, контрольное измерение, для выявления неверного, содержащего грубую ошибку. Пусть контрольное измерение дало результат 152,45 м. Следовательно, второе измерение (148,46 м) содержит грубую ошибку. Такого рода просчеты встречаются при малом опыте работы с лентой. На ленте каждый метр отмечен медной бляшкой, с указанием числа метров от одного конца ленты. На другой стороне ленты обычно также имеются бляшки, но на них указано расстояние от другого конца ленты. Таким образом, против бляшки «10» будет тоже «10», против 11 — «9», против «12» — «8» (в сумме—20 м) и т. д.

Когда измерялось данное расстояние (152,5 м), то лента полностью укладывалась 7 раз, что составило 140 м (20 м×7), и к этому размеру прибавлялась еще длина остатка от последней шпильки до вехи. Остаток был меньше целой ленты и отсчет был произведен по ленте, закрепленной на последней шпильке и протянутой за веху (рис. 188). Пусть при втором измерении брался отсчет 8,46 м ($l_2=140+8,46=148,46$ м), а

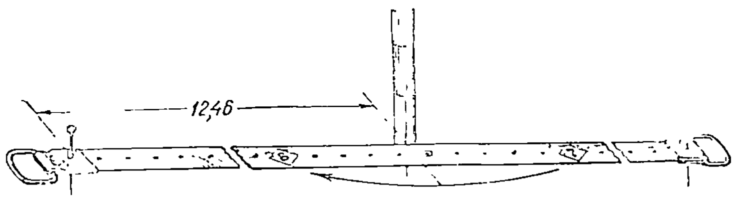


Рис. 188. Отсчет по ленте

следовало отсчитать 12,46 *м*, так как бляшки, находящиеся наверху, показывали расстояние от правого (на рисунке) конца ленты.

Из этих примеров видно, что грубые ошибки являются результатом невнимательности и просчета. Выявление таких ошибок не представляет большого труда и требует только повторного измерения.

Систематические ошибки

Близкие по значению результаты измерений, показывающие отсутствие грубой ошибки, могут все же значительно отличаться от истинного значения измеряемой величины вследствие влияния так называемой систематической ошибки.

Систематические ошибки вызваны в большинстве случаев неверными показаниями измерительных инструментов или односторонним внешним воздействием.

Выясним на примерах природу и свойства систематических ошибок.

Представим себе, что расстояние AB, измеренное ранее стальной лентой ($l_{ср.} = 127,53$ *м*), вновь измерено самодельной десятиметровой мерной веревкой. Получены результаты:

$$
\begin{aligned}
l_1 &= 125,4 \text{ м} \\
l_2 &= 125,8 \text{ „} \\
l_3 &= 125,6 \text{ „} \qquad l_{ср.} = 125,8 \text{ м} \\
l_4 &= 126,2 \text{ „} \\
l_5 &= 126,0 \text{ „}
\end{aligned}
$$

Результаты измерений близки между собой и, очевидно, грубой ошибки нет.

Однако 125,8 *м* разнится приблизительно на 2 *м* от результата измерений стальной лентой (127,53 *м*), что заставляет предполагать наличие какой-то постоянной ошибки.

Будем считать, что стальная лента, изготовленная из материала, мало подверженного влиянию внешних условий (нагрев, растяжение и т. п.), имеет длину точно[1] 20 *м*; примем ее за эталон и сравним с ней мерную веревку.

При этом окажется, как и следовало ожидать, что веревка от натяжения, влияния влаги и так далее вытянулась и длина ее составляет не 10 *м*, а, например, 10,15 *м*.

---

[1] Термин точно не следует понимать в том смысле, что лента дает истинную величину 20 *м*. Сравнивая с лентой веревку, которая очень легко деформируется (вытягивается и т. д.), можно пренебречь относительно небольшими ошибками ленты (несколько миллиметров) и при компарировании (сравнении) считать ее длину за неизменную и равную 20 *м*.

Следовательно, при каждой укладке веревки ошибка равнялась 0,15 *м*, а на всей длине AB (125,8 *м*): 0,15 *м* · 13 = = 1,95 *м* ≈ 1,9 *м*[1].

Здесь имеется **систематическая ошибка, постоянная по величине и знаку** независимо от измеряемого расстояния и направления.

Действительно, при каждом укладывании веревки расстояние, равное 10,15 *м* (действительная длина веревки), принимается за 10,00 *м* (номинальная длина веревки), т. е. ошибка равна +0,15 *м*.

В приведенном примере измерения веревкой $l_{ср.}$ получилось равным 125,8 *м*; суммарная систематическая ошибка составила 1,9 *м*. Следовательно, для уточнения результата в измеренный результат следует ввести поправку.

Тогда получим: 125,8+1,9=127,7 *м*.

Очевидно, что при работе этой веревкой длину линии следует подсчитывать по формуле

$$l = l_{изм.} + 0{,}15 \cdot \frac{l_{изм}}{10},$$

где 0,15 *м* — поправка на один «ход», а $\frac{l_{изм}}{10}$ — количество «ходов» в данной линии при длине веревки 10 *м*.

Покажем (на несколько утрированном для наглядности примере) **систематическую ошибку, переменную по величине и знаку**, являющуюся следствием эксцентриситета алидады — несовмещения оси вращения алидады с осью лимба (рис. 189).

На рисунке даны пять положений алидады при неизменном положении лимба.

Сплошная линия обозначает действительное положение алидады, а пунктирная — положение алидады при отсутствии эксцентриситета; это положение принимается за истинное. Соответствующие отсчеты написаны на рисунке.

Из рассмотрения схем 3 и 5 ясно, что при совпадении алидады с линией, соединяющей центры лимба и алидады, получаются неискаженные отсчеты: 130° и 310°.

Когда алидада перпендикулярна линии, соединяющей центры (схемы 2 и 4), то искажение будет максимальным (3°), причем при 43° ошибка будет — 3° (40°—43°), а при 217° равна +3° (220°—217°). Если взять промежуточные значения и построить график, то получится синусоидальная кривая, сдвинутая по фазе (рис. 190).

---

[1] Если считать, что веревка вытянулась равномерно, то, строго говоря, множить надо на 12,58, но практически это не повысит точности вследствие большего влияния других ошибок.

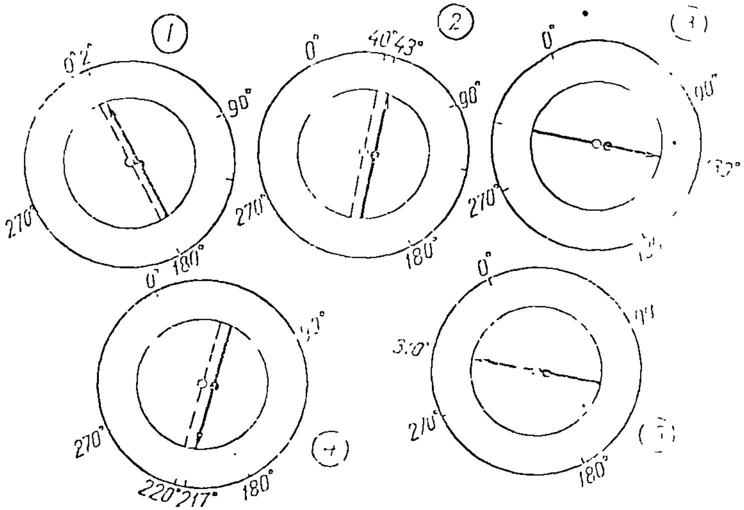


Рис. 189. Эксцентриситет алидады

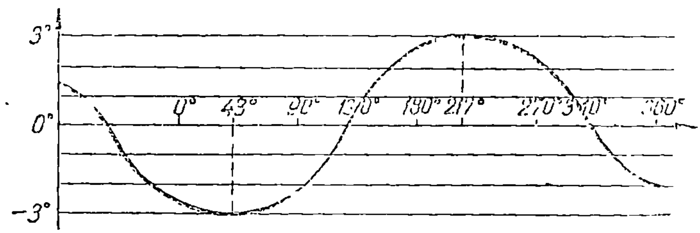


Рис. 190 График поправок

Имея такой график, в измеренные углы можно ввести необходимые поправки. Например, пусть необходимо измерить острый угол AOB (рис. 191). Отсчет на точку A равен 75°, отсчет на точку B равен 142°.

Угол AO_1B равен разности отсчетов, т. е.

$$\angle AO_1B = 142^\circ - 75^\circ = 67^\circ.$$

Введем по графику поправки: в отсчет на A: $-2^\circ,5$; в отсчет на B: $+0^\circ,5$.

Тогда исправленный отсчет на A (приведенный к вершине O) будет $75^\circ - 2^\circ,5 = 72^\circ,5$; отсчет на B: $142^\circ + 0^\circ,5 = 142^\circ,5$.

Откуда: $\angle AOB = 142^\circ,5 - 72^\circ,5 = 70^\circ$.

Примечание. По малости отношения $\frac{OO_1}{OA}$ и, следовательно, малости угла OAO_1 можно OA принять параллельным O_1A.

Например,

$OO_1 = 2$ *мм*; $OA = 100$ *м*;

тогда:

$$\frac{OO_1}{OA} = \frac{2}{100\,000} = \frac{1}{50\,000}$$

и угол

$$OAO_1 = \frac{\rho''}{50\,000} \approx$$

$$\approx \frac{200\,000}{50\,000} \approx 4''.$$

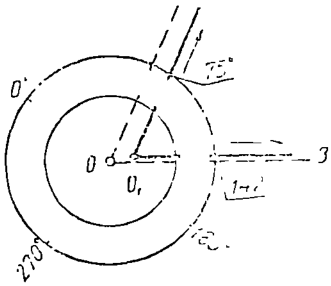


Рис. 191. Ошибки измерения угла

На практике поступают иначе. Отсчеты берут одновременно по двум противоположным концам алидады. Теоретически отсчеты должны отличаться на 180°, но вследствие эксцентриситета разность будет больше или меньше.

В нашем примере отсчету 75° по одному концу будет соответствовать отсчет 250° — по другому, а отсчету 142° — отсчет 323°.

Взяв среднее из отсчетов, получим:

$$A \quad \frac{75° + 250°}{2} = 162°,5, \text{ а на точку } B \quad \frac{142° + 323°}{2} = 232°,5,$$

откуда: $\angle AOB = 232°,5 - 162°,5 = 70°$.

Следовательно, среднее из отсчетов по двум концам алидады не содержит систематической ошибки, так как сумма ошибок по противоположным концам равна нулю [1].

Из приведенных примеров видно, что систематическая ошибка может быть как постоянной, так и переменной по величине и знаку. Она может быть исключена из результатов измерений, если найден закон, которому она подчиняется.

В первом примере (измерение веревкой) нужно пользоваться формулой:

$$l = l_{\text{изм.}} + 0{,}15 \cdot \frac{l_{\text{изм.}}}{10}.$$

Во втором $\angle AOB = (n_B + \delta_{nB}) - (n_A + \delta_{nA})$, где n_A и n_B отсчеты соответственно на точки A и B, а δ_{nA} и δ_{nB} — поправки в эти отсчеты, взятые с графика.

[1] При работе с инструментами, имеющими два верньера, среднее берут только из отсчетов минут, а отсчет градусов ведут по первому верньеру.

Случайные ошибки

После того как из результатов измерений исключены грубые и систематические ошибки, эти результаты все же содержат в себе третий тип ошибок — **случайные ошибки**.

Под случайной ошибкой понимается разность между истинным значением измеряемой величины и измеренным (разумеется, после исключения грубой и систематической ошибок), т. е., если x — истинное значение; l_1, $l_2 \ldots l_n$ — результаты измерений, а Δ_1, $\Delta_2 \ldots \Delta_n$ — случайные ошибки, то

$$x - l_1 = \Delta_1;$$
$$x - l_2 = \Delta_2;$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$x - l_n = \Delta_n.$$

Случайные ошибки являются следствием случайных явлений, т. е. таких явлений, закономерность которых, в

КАРЛ ФРИДРИХ ГАУСС (1777—1855)

силу очень сложной причинной связи, человек проследить не может. Однако случайные ошибки могут быть учтены, так как при большом количестве измерений они сами подчиняются определенной закономерности.

Изучением свойств случайных ошибок занимается теория ошибок измерений, которая основывается на ряде положений теории вероятности.

Теорию случайных ошибок детально разработал Гаусс, по имени которого кривая распределения случайных ошибок называется кривой Гаусса. Кривую также называют кривой ошибок, или нормальной кривой вероятностей.

Опытным путем кривую Гаусса можно получить, пользуясь рядом простых приборов.

Одним из простейших приборов является наклонная доска, в нижней части которой находятся перегородки. При высыпании дроби через воронку в верхней части доски столбики из дробинок распределяются по кривой Гаусса (рис. 192).

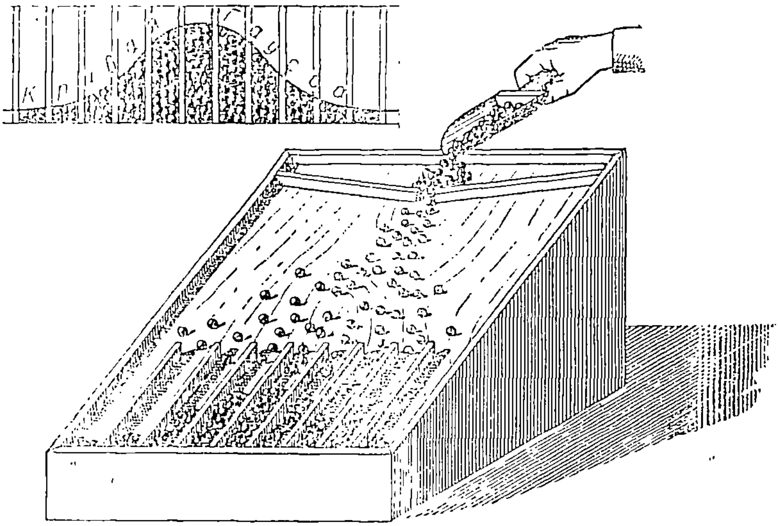


Рис. 192. Доска Гальтона

В основе теории ошибок лежат следующие три положения:

1) ошибки измерений, равные по величине, но обратные по знаку, встречаются одинаково часто;

2) чем меньше абсолютная величина ошибки, тем чаще ошибка встречается;

3) вероятность появления ошибки по абсолютной величине больше определенного предела ничтожно мала.

Из положения первого следует, что среднее из ошибок при неограниченном возрастании числа измерений стремится к нулю, т. е., если

$$
\begin{aligned}
x - l_1 &= \Delta_1, \qquad (1)\\
x - l_2 &= \Delta_2,\\
&\ldots\ldots\\
x - l_n &= \Delta_n,
\end{aligned}
$$

$$\text{то } \Sigma\Delta \to 0,$$

$$\text{при } n \to \infty.$$

Однако в большинстве случаев величина x бывает неизвестна и тогда вместо x берут его наиболее вероятное значение, т. е. среднее арифметическое.

Действительно, суммируя почленно выражение (1), получим:

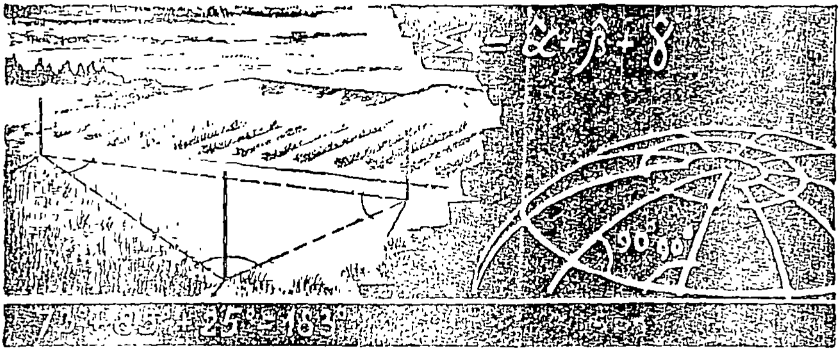
$$\Sigma x - \Sigma l = \Sigma \Delta, \text{ но } \Sigma x = nx,$$

откуда

$$x = \frac{\Sigma l}{n} + \frac{\Sigma \Delta}{n}.$$

На основании первого положения установлено, что $\Sigma \Delta \to 0$ и, следовательно, наиболее вероятное значение x будет: $x_a = \frac{\Sigma l}{n}$, а это есть не что иное, как среднее арифметическое.

Таким образом, *влияние случайных ошибок может быть уменьшено путем многократных измерений одной и той же величины и принятия за наилучшее, наиболее вероятное значение среднего арифметического.*



УРАВНИВАНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ И ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ

Уравнивание

Допустим, что для определения недоступного расстояния* $AB=c$ измерены полевым циркулем сторона $AC=b$ (базис) и школьным угломером углы при вершинах: A, B и C (рис. 193). Как известно, сумма углов в треугольнике равна 180°, но вследствие неизбежных ошибок измерений, сумма углов в данном случае получилась 177° (случайная ошибка суммы равна 180°—177°=3°).

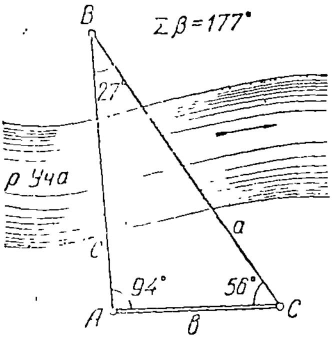


Рис. 193. Результаты измерения углов

Расстояние $AB=c$ может быть вычислено по формуле (теорема синусов):

$$c = \frac{b}{\sin B} \sin C,$$

но значения углов B и C (27° и 56°) содержат в себе случайные ошибки.

Для расчета расстояния c нужно сперва уравнять величины углов, т. е. устранить несогласие (невязку) между теоретической и практической суммами, (ввести поправки углов). Это несогласие может быть устранено различными спо-

* Недоступно для непосредственного измерения, хотя угловые измерения в точках A, B и C возможны.

собами. Худшим из них является, например, увеличение одного из углов на 3°, ибо в простейшем виде распределение поправок в целых градусах выразится следующими комбинациями: 1) 3°; 0°; 0°; 2) 2°; 1°; 0°; 3) 1°; 1°; 1°. Тогда, если всю поправку (3) ввести в один угол, то сумма квадратов поправок будет: $3^2+0^2+0^2=9$; если поправку распределить на два угла (2 и 1), то получим:

$2^2+1^2+0^2=5$ и, наконец, при распределении поправки на три угла (1, 1, 1) будем иметь $1^2+1^2+1^2=3$.

В геодезии принято проводить уравнивание, соблюдая следующее условие: сумма квадратов поправок должна быть минимальна, ибо доказано, что поправки, полученные при выполнении этого условия, будут иметь наиболее вероятное значение и, следовательно, исправленные результаты будут наилучшими. В приведенном примере поправки на каждый угол составят $+1°$.

Уравнивание при таком условии называется уравниванием по способу наименьших квадратов.

Способ наименьших квадратов создан Гауссом и Лежандром. Гаусс обосновал его в 1794 г., но опубликовал только в 1809 г., а Лежандр, разработавший способ независимо от Гаусса, опубликовал свою работу в 1805 г.

По способу наименьших квадратов за наиболее вероятное значение x_0 многократно измеренной величины принимается то ее значение, сумма квадратов уклонений от которой будет наименьшей, т. е. x_0 находится из условия:

$$(x_0-l_1)^2+(x_0-l_2)^2+(x_0-l_3)^2+\ldots+(x_0-l_n)^2=\min.$$

В предыдущем параграфе установлено, что за наиболее вероятное значение целесообразно принимать среднее арифметическое. Покажем, что это полностью соответствует способу наименьших квадратов.

Обозначим через l_i некоторое значение измеренной величины l, отличное от $l_{ср}$, и возьмем разности:

$$\begin{array}{ll} l_i-l_1=d_1; & l_{ср.}-l_1=\delta_1; \\ l_i-l_2=d_2; & l_{ср.}-l_2=\delta_2; \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ l_i-l_n=d_n; & l_{ср.}-l_n=\delta_n. \end{array}$$

Возведя каждое равенство в квадрат и суммируя почленно по столбцам, будем иметь:

$$nl_i^2-2l_i\Sigma l+\Sigma l^2=\Sigma d^2;\quad nl^2_{ср.}-2l_{ср.}\Sigma l+\Sigma l^2=\Sigma\delta^2.$$

Для сравнения Σd^2 с $\Sigma\delta^2$ вычтем из левого выражения правое и получим:

$$nl_i^2-nl_{ср.}^2-2l_i\Sigma l+2l_{ср.}\Sigma l=\Sigma d^2-\Sigma\delta^2.$$

Заменяя $l_{ср.}$ его значением $\frac{\Sigma l}{n}$ и проведя несложные преобразования, получим: $n\left(l_i - \frac{\Sigma l}{n}\right)^2 = \Sigma d^2 - \Sigma \delta^2$.

При любом значении l_i выражение $\left(l_i - \frac{\Sigma l}{n}\right)^2$ будет положительным, откуда $n\left(l_i - \frac{\Sigma l}{n}\right)^2 > 0$. Из этого неравенства вытекает, что $\Sigma \delta^2 < \Sigma d^2$, т. е. сумма квадратов уклонений от среднего всегда меньше суммы квадратов уклонений от любой другой величины. Следовательно, наиболее вероятным значением ($x_в$) измеренной величины, согласно способу наименьших квадратов, является среднее арифметическое $x_в = l_{ср.}$ Пользуясь дифференцированием, этот вывод можно получить значительно проще.

Действительно, найдем минимум функции:

$$f(x) = (x - l_1)^2 + (x - l_2)^2 + \ldots + (x - l_n)^2.$$

Для этого возьмем первую производную и приравняем ее нулю: $f'(x) = 2(x - l_1) + 2(x - l_2) + \ldots + 2(x - l_n) = 0$.

Отсюда, $nx = \Sigma l$ и $x = \frac{\Sigma l}{n} = l_{ср.}$.

Вторая производная: $f''(x) = 2n$, а так как $2n > 0$, то при $x = \frac{\Sigma l}{n}$; $f(x) = \min$.

Приложим полученный вывод к примеру на стр. 201 для значений l_i больших и меньших среднего:

№ измерения	l	$\delta = l_{ср.} - l$	δ^2	$d = l_i - l$	d^2	$d = l_i - l$	d^2
		$l_{ср.} = 127{,}53$		$l_i = 127{,}55$		$l_i = 127{,}50$	
1	127,52	+0,01	0,0001	+0,03	0,0009	−0,02	0,0004
2	127,64	−0,11	0,0121	−0,09	0,0081	−0,14	0,0189
3	127,59	−0,06	0,0036	−0,04	0,0016	−0,09	0,0081
4	127,49	+0,04	0,0016	+0,06	0,0036	+0,01	0,0001
5	127,41	+0,12	0,0144	+0,14	0,0189	+0,09	0,0081

$\Sigma l = 637{,}65$ $\quad \Sigma \delta^2 = 0{,}0318$ $\quad \Sigma d^2 = 0{,}0331$ $\quad \Sigma d^2 = 0{,}0356$

Действительно, сумма d^2 в обоих случаях больше суммы δ^2,

$0{,}0331 > 0{,}0318$ и $0{,}0354 > 0{,}0318$

Оценка точности

Геодезические измерения производятся в конечном счете для составления планов и карт. По этим планам в дальнейшем проводятся различные работы, например проектирование дорог, планировка городов, строительство плотин, электростанций и т. д. Все эти работы требуют планов различных масштабов и точности, но во всех случаях необходимо, чтобы измерения, на основании которых составлен план, были надежными.

Надежность плана определяется степенью точности произведенных измерений, вычислений и графических построений при составлении плана *. Для оценки точности применяются различные способы, из которых будут рассмотрены основные, применяющиеся в геодезии.

Абсолютная и относительная ошибки

Под **абсолютной ошибкой** (d) принято понимать разность между истинным (x) и измеренным значением (l) данной величины.

Абсолютная ошибка $d = x - l$.

Если же истинное значение не известно, то вместо него берут наиболее вероятное значение ($x_в$) **, т. е. $d = x_в - l$.

Относительная ошибка (ε) — это отношение абсолютной ошибки (d) к истинному (x), или наиболее вероятному ($x_в$) значению измеренной величины, т. е.

$$\varepsilon = \frac{d}{x}, \text{ или } \varepsilon = \frac{d}{x_в}.$$

В геодезии она обычно выражается аликвотной *** дробью, а в технике в процентах:

$$\varepsilon = \frac{d}{x} = 1 : \frac{x}{d}$$

Как видно, абсолютная ошибка при измерении является числом именованным, тогда как относительная ошибка — отвлеченным. Ниже показано, что оценка линейных измерений производится с помощью относительной ошибки, а угловые измерения оцениваются абсолютной ошибкой.

Действительно, пусть измерены два расстояния, 100 *м* и 1000 *м*, и соответственно получены результаты: 98 *м* и 998 *м*. Абсолютные ошибки в обоих случаях будут равны:

$$d_1 = 100 - 98 = +2 \text{ м}; \quad d_2 = 1000 - 998 = +2 \text{ м}.$$

---

* Вопросы точности графических построений и вычислений рассмотрены на стр. 183 и 243.

** Как показано на стр. 209, наиболее вероятным значением ($x_в$) является среднее значение.

*** Простая дробь с единицей в числителе.

Однако, очевидно, что во втором случае измерение произведено с большей точностью, так как ошибка 2 *м* получена при расстоянии в 10 раз большем. Поэтому абсолютная ошибка не дает представления о точности измерения и в этом случае пользуются относительной ошибкой. В приведенном примере

$$\varepsilon_1 = \frac{2}{100} = \frac{1}{50}\,; \quad \varepsilon_2 = \frac{2}{1000} = \frac{1}{500}\,.$$

При оценке угловых измерений положение иное. Пусть сумма измеренных углов треугольника равна 177°.

Так как каждый угол (независимо от величины) получен в результате разности двух отсчетов по лимбу, то при равных условиях (равные ошибки наведения и отсчета) можно полагать, что все углы измерены с одинаковой точностью. Суммарная ошибка равна $\Sigma\beta_{теор.} - \Sigma\beta_{изм.} = /\beta = 180° - 177° + 3°$ и, следовательно, при измерении каждого угла допущена ошибка 1°.

Величина 1° есть абсолютная ошибка измерения каждого угла и вполне характеризует точность угловых измерений.

Средняя квадратическая ошибка

Величина абсолютной и относительной ошибки каждого измерения не дает еще возможности произвести общую оценку точности ряда измерений. Поэтому для оценки точности ряда* пользуются другими критериями, в том числе средней ошибкой и средней квадратической.

В геодезии принято пользоваться средней квадратической или, как ее иногда называют, средней квадратичной ошибкой.

Средняя квадратическая ошибка отдельного измерения (m) равна корню квадратному из суммы квадратов истинных ошибок, деленной на число измерений, т. е.

$$m = \pm\sqrt{\frac{\Sigma\Delta^2}{n}}.$$

В теории ошибок доказывается, что при использовании вместо истинного значения (x) наиболее вероятного ($x_в$), формула принимает вид

$$m = \pm\sqrt{\frac{\Sigma\delta^2}{n-1}}\;^{**}.$$

Из двух рядов более точным является тот, средняя квадратическая ошибка которого меньше.

---

* Под рядом измерений понимается несколько значений измерений одной и той же величины.

** См. подробнее В. М. Брадис «Теория и практика вычислений», 1937; Г. Г. Ларченко «Техника вычислений», 1952.

Приведем пример подсчета средней квадратической ошибки двух углов.

№ измерения	Угол β	$\delta=\beta_{ср.}-\beta$	δ^2
1	37° 26′	− 2′	4
2	37° 23′	+ 1′	1
3	37° 24′	0′	0
4	37° 23′	+ 1′	1
5	37° 24′	0′	0
	$\Sigma\beta$ = 187° 00′		$\Sigma\delta^2=6$

$$\beta_{ср.}=\frac{\Sigma\beta}{n}=\frac{187}{5}=37^\circ\ 24'$$

$$m=\pm\sqrt{\frac{\Sigma\delta^2}{n-1}}=\pm\sqrt{\frac{6}{4}}\approx\pm 1',5$$

№ измерения	Угол β	$\delta=\beta_{ср.}-\beta$	δ^2
1	215° 59′	+ 1′	1
2	216° 01′	− 1′	1
3	216° 00′	0′	0
4	215° 59′	+ 1′	1
5	216° 01′	− 1′	1
	$\Sigma\beta$ = 1080° 00′		$\Sigma\delta^2=4$

$$\beta_{ср.}=\frac{1080^\circ 00'}{5}=216^\circ 00'$$

$$m=\pm\sqrt{\frac{4}{4}}=\pm 1'$$

Следовательно, средняя квадратическая отдельного измерения первого угла равна $\pm$ 1′, 5, а второго 1′, т. е. точность второго выше.

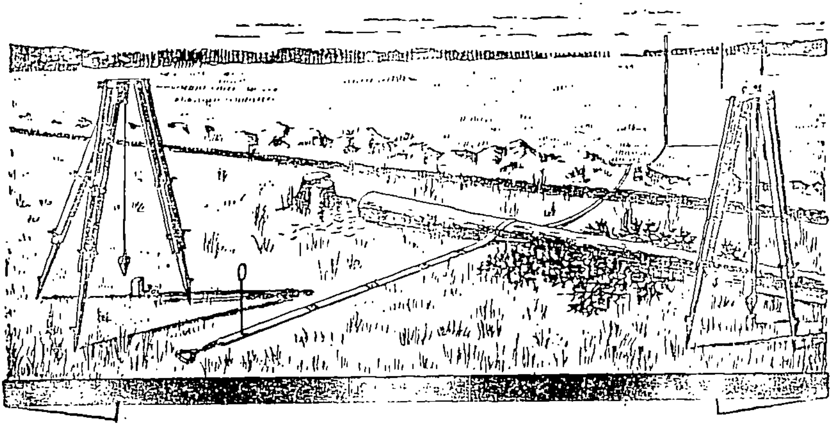
Проф. П. И. Шилов в своем курсе «Способ наименьших квадратов» указывает относительно средней квадратической ошибки отдельного измерения, что «в буквальном понимании такое выражение не имеет смысла. Но, если условиться считать каждое из входящих в ряд измерений как бы представителем всего ряда, тогда среднюю квадратическую ошибку данного ряда можно отнести к отдельному измерению. Определенным условиям измерений соответствует определенная средняя квадратическая ошибка».

Следует обратить внимание на знак средней квадратической ошибки.

Действительно, истинная ошибка $\Delta = x - l$ может быть как положительной, так и отрицательной. При $x > l$, $\Delta > 0$, но при $x < l$, $\Delta < 0$.

Средняя квадратическая не может быть только положительной или, наоборот, только отрицательной.

По самому определению, знак средней квадратической должен быть только «$\pm$» (двойным).



ПРИМЕНЕНИЕ СВЕДЕНИЙ ОБ ОШИБКАХ К ПРАКТИКЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

Линейные измерения

Основные ошибки измерения линий* лентой

Опытом установлено, что относительная ошибка измерения линий при работе стальной лентой лежит в диапазоне от 1/1000 (неблагоприятные условия работы и местности) до 1/3000.

Рассмотрим основные факторы, влияющие на точность измерений: 1) ошибка в длине ленты, 2) ошибка от неточного укладывания ленты в створе линии и 3) ошибка, обусловленная провисанием или прогибом ленты.

Ошибка в длине ленты. После длительной работы, возможных повреждений, ремонта, длина ленты может не соответствовать обозначенному на ней расстоянию.

Следствием этого появится односторонняя систематическая ошибка, для учета которой ленту следует сравнить с эталонной мерой.

Сравнение всякого прибора с эталоном называется компарированием (от латинского comparo — сравниваю). В качестве эталона можно использовать такую же, новую ленту,

* В геодезии под измерением линии подразумевается определение длины отрезка, иначе — расстояния между двумя точками.

имеющую паспорт. В паспорте указаны технические данные ленты, в том числе отклонение ее размера от номинального при определенных условиях.

При компарировании определяется поправка, которую по соответствующей формуле вводят в результат измерений.

Ошибка от неточного укладывания ленты в створе линии. Практически лента укладывается не по прямой линии (рис. 194). При измерении расстояния AB лента многократно укладывается в створе линии AB, но вслед-

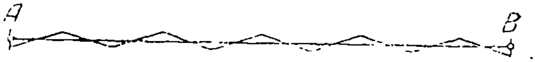


Рис. 194. Укладка ленты по линии

ствие отклонений от прямой измеряется ломаная, которая, как известно, всегда больше прямой. Для уменьшения влияния этой, также односторонней ошибки, следует более тщательно вешить линию и выставлять дополнительные колышки (см. стр. 38).

Ошибка от провисания или прогиба ленты. При наличии на пути небольших ям (впадин) и бугров величина измеряемого расстояния будет несколько завышена.

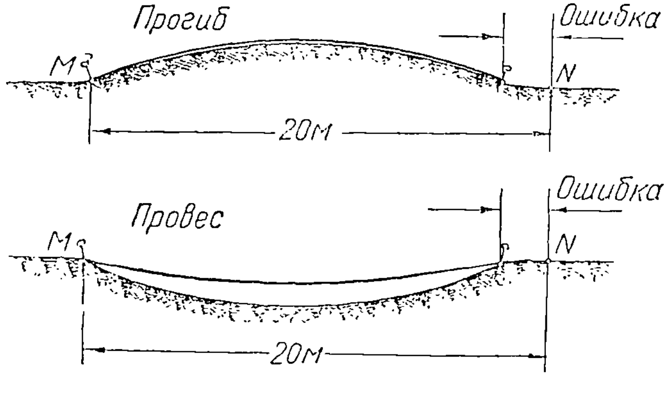


Рис. 195. Прогиб и провисание ленты

Действительно, если расстояние между точками M и N равно длине ленты по прямой, то вследствие бугра или ямы измерения дадут результат, несколько превышающий длину ленты. Это ясно из рис. 195.

Для уменьшения этой ошибки следует сильнее натягивать ленту и, если возможно, подпирать ленту в нескольких местах.

Учитывая различные ошибки в геодезии, приняты следующие допустимые разности между двумя измерениями линии лентой, показанные на графике (рис. 196).

Например: длина линии равна $l_1 = 346{,}21$ *м*; $l_2 = 345{,}97$ *м*; условия измерений средние. Допустимая разность по графику равна 0,28 *м*. Практически разность $l_1 - l_2 = 346{,}21 - 345{,}97 = 0{,}24$ *м*; 0,24 *м* < 0,28 *м*, следовательно, допуск выдержан.

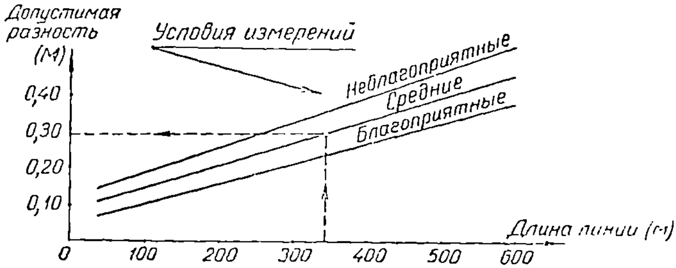


Рис. 196. График допустимых разностей между двумя измерениями лентой

Влияние наклона местности

Как известно, на плане воспроизводится в уменьшенном масштабе ортогональная проекция местности на горизонтальную плоскость. Поэтому, измерив на местности расстояние AB по наклонной, на плане откладывают ее горизонтальную проекцию AB_1 или, как говорят геодезисты, «приводят линию к горизонту».

Посмотрим, с точки зрения точности результатов, в каких случаях следует учитывать наклон и вводить поправки и в каких случаях практически можно пренебречь влиянием наклона.

Пусть $AB = D$ — расстояние на местности, наклоненное к горизонту на угол φ, $AB_1 = d$ — горизонтальная проекция AB (рис. 197).

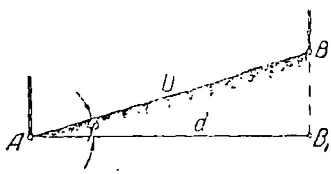


Рис. 197. Приведение линии к горизонту

Из треугольника ABB_1 находим:

$$d = D\cos\varphi.$$

Разность D и d есть поправка линии за наклон (Δd):

$$\Delta d = D - d = D - D\cos\varphi = D(1 - \cos\varphi) = 2D\sin^2\frac{\varphi}{2}.$$

В таблице на стр. 220 даны поправки за наклон для расстояния, равного 100 *м*, при углах наклона φ от 0°,5 до 15°.

Таблица поправок

φ°	Δd *мм*	φ°	Δd *мм*
0,5	4	7,0	745
1	15	8,0	973
1,5	34	9,0	1231
2,0	61	10,0	1519
2,5	95	11,0	1837
3,0	137	12,0	2185
4,0	244	13,0	2563
5,0	381	14,0	2970
6,0	548	15,0	3467

Поправка Δd всегда будет иметь положительный знак (так как наклонная больше проекции) и ее нужно вычитать из измеренного расстояния. Из таблицы видно, что если при угле $0^\circ,5$ поправка равна всего 4 *мм*, то при угле 15° ее величина превышает 3 *м*.

Необходимость введения поправки диктуется требуемой точностью измерений.

Если необходимо производить измерение с относительной ошибкой, например 1/1000, то это составит на 100 *м* 100 *мм*.

Очевидно, вводить в этом случае поправки меньше 100 *мм*, т. е. соответствующие углам до $2^\circ,5$, нет смысла, ибо они меньше принятой точности измерений; при углах $\varphi > 2^\circ.5$ поправки превышают 100 *мм* и их нужно учитывать.

П р и м е р. На местности измерено расстояние $D = 273{,}51$ *м*; угол $\varphi = 2^\circ{,}0$. Допустимая относительная ошибка $\varepsilon \leqslant \frac{1}{2\,000}$.

Найти величину поправки Δd, а также величину d в случае введения поправки.

По таблице берем поправку на 100 *м* и умножаем ее на отношение длины данной линии к длине 100 *м*, т. е.

$$\frac{273{,}51}{100} \approx 2{,}74; \quad \Delta d = 2{,}74 \cdot 61 = 167 \text{ мм} = 0{,}167 \text{ м}.$$

Находим относительную ошибку:

$$\varepsilon = \frac{0{,}167}{273{,}51} \approx \frac{1}{1635}.$$

$$\text{Так как } \frac{1}{1635} > \frac{1}{2000},$$

то поправку необходимо учитывать.

Тогда

$$d = D - \Delta d = 273{,}51 - 0{,}17 = 273{,}34 \text{ м}.$$

Выведем общую формулу для учета необходимости введения поправки.

Для этого преобразуем формулу $\Delta\ d = 2\ D \sin^2 \frac{\varphi}{2}$ для малых углов φ, когда значение функции можно приравнять к значению аргумента.

Формула примет вид:

$$\Delta\ d = 2\ D \frac{\varphi^2}{4\rho^2} = \frac{1}{2} D \frac{\varphi^2}{\rho^2}*$$

или, решая относительно φ,

$$\varphi = \pm \rho \sqrt{2 \frac{\Delta d}{D}} \qquad (1),$$

где $\frac{\Delta d}{D} = \varepsilon$ есть относительная ошибка в расстоянии ввиду влияния угла наклона. Положительное значение φ обозначает подъем по отношению к горизонту, а отрицательное — понижение.

Если необходимо производить измерения с относительной ошибкой не более, например, $\frac{1}{2000}$, то $\varepsilon = \frac{\Delta d}{D}$ не должно быть больше $\frac{1}{2000}$.

Подставляя $\frac{1}{2000}$ в формулу (1) вместо $\frac{\Delta d}{D}$ и принимая округленно $\rho \approx 60°$, получим:

$$\varphi < 60 \cdot \sqrt{2 \cdot \frac{1}{2000}} \leqslant 2°.$$

Следовательно, при линейных измерениях с относительной точностью не менее $\frac{1}{2\,000}$ поправки на длину линии нужно вводить при углах, больших 2°.

---

* Величина ρ введена в формулу для перехода к радианной мере при подстановке значения φ в градусной мере.

Величина ρ численно равна числу градусов, минут или секунд в радиане,

т. е. 57°,3;
3438′ или 206 265″.

Действительно, при радиусе, равном единице, длина окружности равна 2π. В то же время окружность составляет $360° = 21\,600' = 1\,296\,000''$. Следовательно, угол, измеряемый дугой, равной единице, равен:

$$\frac{360°}{2\pi} \approx 57°,3;\quad \frac{21\,600'}{2\pi} \approx 3438';$$

$$\frac{1\,296\,000''}{2\pi} \approx 206\,265''.$$

В приближенных вычислениях эти значения можно округлять, принимая $\rho = 60° \approx 3500' = 200\,000''$.

Угловые измерения

Принцип угловых измерений

Пусть для составления плана местности требуется измерить угол B при вершине участка ABC. Как известно, план представляет собой ортогональную проекцию местности на горизонтальную плоскость и, следовательно, нужно измерить угол $A_1B_1C_1$, а не $\angle ABC$ (рис. 198).

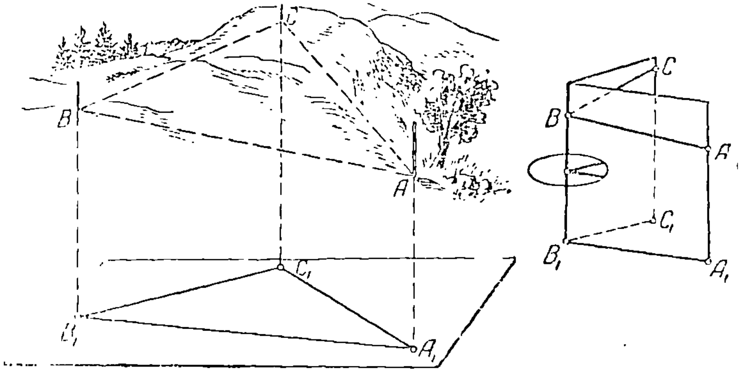


Рис. 198. Принцип измерения угла

Угол $A_1B_1C_1$ равен линейному углу, соответствующему двугранному углу, образованному вертикальными плоскостями, проведенными через точки B, C и B, A. Для измерения угла инструмент (угломер, буссоль, теодолит) должен быть установлен следующим образом:

1) центр лимба должен совпадать с вершиной угла или проектироваться в нее;

2) плоскости лимба и линейного угла должны быть параллельны, т. е. лимб должен быть установлен горизонтально.

Для выполнения первого условия служит отвес; для выполнения второго применяется специальный прибор, который называется «уровень».

Ниже рассматриваются ошибки, возникающие при несоблюдении указанных условий.

Искажение величины измеряемого угла вследствие несовмещения центра лимба с вершиной угла

Рассмотрим влияние первого условия. Допустим, что при центрировании инструмента над точкой B отвес проектировался не в точку B, а в точку B_1. Тогда вместо угла ABC, очевидно, был измерен угол AB_1C (рис. 199).

Обозначим угол ABC через β, угол AB_1C — через β_1, углы при точках A и C — через x и y и угол AB_1B — через ε.

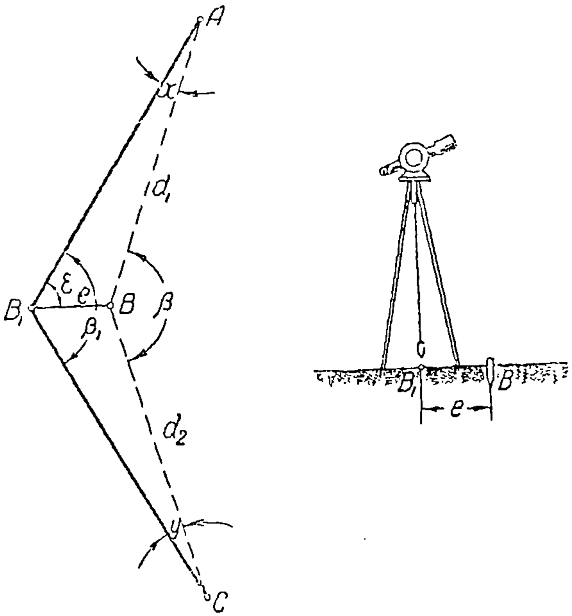


Рис. 199. Ошибка центрирования лимба

Из четырехугольника $ABCB_1$ следует, что $(x+y)+\beta_1+$ $+360^\circ-\beta=360^\circ$, или $\beta=\beta_1+(x+y)$.

Из треугольников ABB_1 и CBB_1 следует:

$$\frac{e}{\sin x}=\frac{d_1}{\sin\varepsilon} \text{ и } \frac{e}{\sin y}=\frac{d_2}{\sin(\beta_1-\varepsilon)}.$$

По малости x и y заменим $\sin x$ и $\sin y$ величиной угла в радианной мере и получим:

$$x=e\rho\,\frac{\sin\varepsilon}{d_1};\quad y=e\,\rho\,\frac{\sin(\beta_1-\varepsilon)}{d_2}$$

откуда:

$$\beta=\beta_1+e\,\rho\left[\frac{\sin\varepsilon}{d_1}+\frac{\sin(\beta_1-\varepsilon)}{d_2}\right].$$

Выражение

$$e\,\rho\left[\frac{\sin\varepsilon}{d_1}+\frac{\sin(\beta_1-\varepsilon)}{d_2}\right]=\tau$$

есть искажение угла β, причем τ есть функция нескольких переменных, а именно:

$$\tau = f(e, \varepsilon, d_1, d_2, \beta).$$

Найдем максимум значения функции $\tau = f(\varepsilon)$, считая величины e, d_1, d_2 и β постоянными.

Дифференцируя, получим:

$$\tau' = \frac{e\rho}{d_1}\cos\varepsilon - \frac{e\rho}{d_2}\cos(\beta_1 - \varepsilon).$$

Полагая, что на практике $d_1 \approx d_2$, примем $AB = BC = d$. Приравнивая выражение к нулю, будем иметь:

$$\frac{e\rho}{d}[\cos\varepsilon - \cos(\beta_1 - \varepsilon)] = 0;$$

$$\varepsilon = \beta_1 - \varepsilon \text{ откуда } \varepsilon = \frac{\beta_1}{2}\text{*},$$

т. е., когда точка B_1 смещена относительно B по биссектрисе угла β_1.

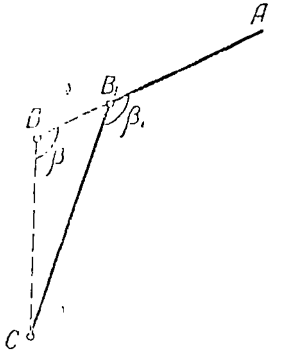


Рис. 200. Частный случай центрирования I

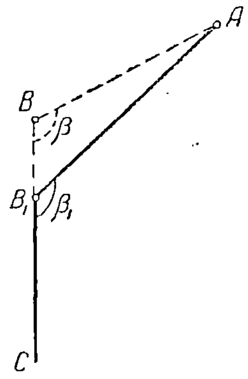


Рис. 201. Частный случай центрирования II

Легко получить частные значения τ в случае, если точка B_1 находится в створе линии AB или BC.

В первом случае угол ε равен нулю (рис. 200) и

$$\tau = e\rho\frac{\sin\beta}{d_2}.$$

Во втором $\varepsilon = \beta_1$, откуда $\tau = e\rho\dfrac{\sin\varepsilon}{d_1}$ (рис. 201).

---

* $\cos\varepsilon - \cos(\beta_1 - \varepsilon) = 0$, следовательно:
$\varepsilon = 2k\pi \pm (\beta_1 - \varepsilon)$. При $k = 0$;
$\varepsilon = \pm(\beta_1 - \varepsilon)$; $\varepsilon = \beta_1 - \varepsilon$; $2\varepsilon = \beta_1$; $\varepsilon = \dfrac{\beta_1}{2}$;
$\varepsilon = \varepsilon - \beta_1$; $\beta_1 = 0$;
случай, который в данном примере не имеет места.

Обе формулы показывают, что величина τ обратно пропорциональна расстояниям d_1 и d_2, т. е. **чем короче измеряемые стороны, тем тщательнее нужно центрировать инструмент.**

Формула $\beta = \beta_1 + \tau$ может быть использована не только для анализа.

Ее можно применить в тех случаях, когда инструмент не может быть установлен в вершине измеряемого угла.

Например, вершиной многоугольника является мачта во дворе школы, хорошо видимая со всех сторон (рис. 202, 199).

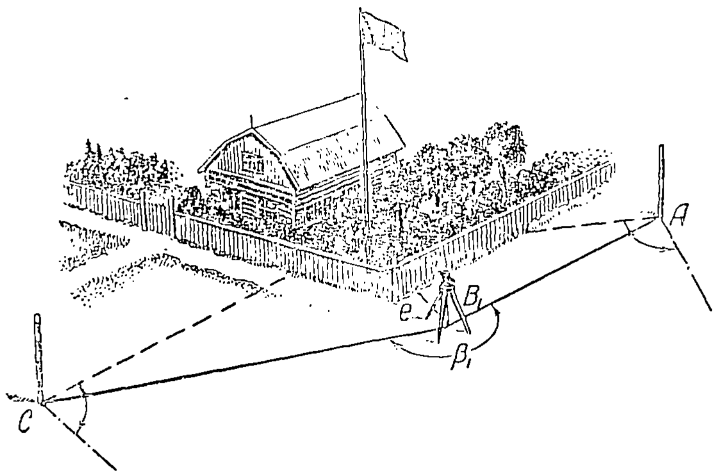


Рис. 202. Пример измерения вне центра

При измерении углов в точках A и C визируют на мачту B, измеряют углы при точках A и C. Но стать в точке B нельзя и, кроме того, кустарник вдоль забора мешает видеть вехи A и C. Поэтому инструмент устанавливают в произвольной точке B_1, из которой хорошо видны вехи A и C, и при измерении угла B_1 одновременно измеряется угол ε, а затем расстояние $BB_1 = e$. Величину угла B получают как алгебраическую сумму $\beta_1 + \tau$.

Влияние негоризонтальности лимба теодолита на точность измерения угла

Рассмотрим, какие ошибки могут возникнуть в результатах измерения углов вследствие негоризонтальности лимба.

Предположим сначала, что поворот трубы вокруг горизонтальной оси, а следовательно, и поворот визирной оси происходят в вертикальной плоскости, при этом плоскость лимба не горизонтальна.

На рис. 203 P_1 и P_2 — вертикальные плоскости, образующие двугранный угол, который нужно измерить. Линейный угол A_1BC_1, соответствующий двугранному углу, лежит в горизонтальной плоскости и равен α.

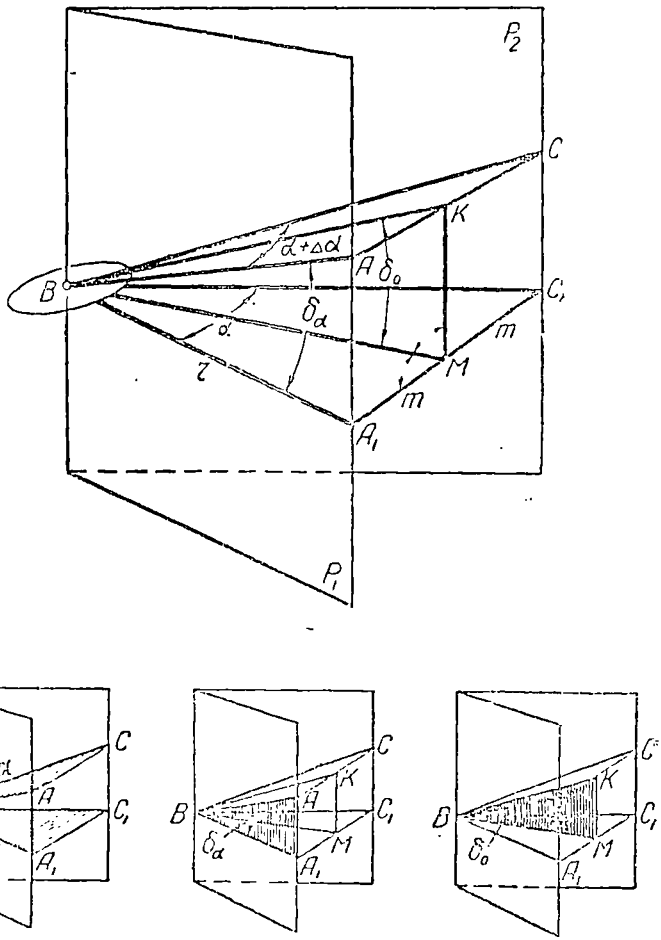


Рис. 203. Геометрическое построение для анализа наклона лимба

Вследствие негоризонтальности лимба вместо угла A_1BC_1 измерен угол ABC, равный $\alpha + \Delta\alpha$. Рассмотрим случай, когда наклон лимба таков, что $AA_1 = CC_1$. Угол наклона лимба в плоскости, делящей двугранный угол пополам, обозначим через δ_0, $BA_1 = BC_1 = r$, $AC = A_1C_1 = 2m$, $AK = KC = A_1M = MC_1 = m$ и угол $ABA_1 = \delta_\alpha$.

Разность углов ABC и A_1BC_1 есть искажение угла, вызванное углом наклона лимба на угол δ_0.

$$\angle A_1BC_1 - \angle ABC = \alpha - (\alpha + \Delta\alpha) = -\Delta\alpha.$$

Проследим функциональную зависимость:

$$\Delta\alpha = f(\delta_0).$$

Из чертежа следует, что:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{m}{r}; \quad BA = \frac{r}{\cos\delta_\alpha}; \quad \sin\frac{\alpha+\Delta\alpha}{2} = \frac{m}{r}\cos\delta_\alpha.$$

Беря разность синусов, получим:

$$\sin\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha+\Delta\alpha}{2} = \frac{m}{r}(1-\cos\delta_\alpha)$$

и после несложных преобразований *:

$$\sin\frac{\alpha}{2}\left(1-\cos\frac{\Delta\alpha}{2} - \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\Delta\alpha}{2}\right) = \frac{m}{r}(1-\cos\delta_\alpha);$$

так как $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{m}{r}$,

то равенство можно написать в виде:

$$1-\cos\frac{\Delta\alpha}{2} - \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\Delta\alpha}{2} = 1-\cos\delta_\alpha.$$

Это справедливо во всех случаях, когда $\sin\frac{\alpha}{2} \neq 0$, т. е. для всех значений α, кроме 0 и 2π.

После дальнейших преобразований получим **:

$$2\sin^2\frac{\Delta\alpha}{4} - \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\Delta\alpha}{2} - 2\sin^2\frac{\delta_\alpha}{2} = 0.$$

По малости углов $\Delta\alpha$ и δ_α заменим синусы этих углов величиной углов в радианной мере;

$$\text{тогда } 2\frac{(\Delta\alpha)^2}{16\rho^2} - \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\Delta\alpha}{2\rho} - 2\frac{\delta_\alpha^2}{4\rho^2} = 0,$$

$$* \sin\frac{\alpha}{2} - \sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\Delta\alpha}{2}\right) = \sin\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\Delta\alpha}{2} -$$

$$-\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\Delta\alpha}{2} = \sin\frac{\alpha}{2}\left(1-\cos\frac{\Delta\alpha}{2} - \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\cdot\sin\frac{\Delta\alpha}{2}\right) =$$

$$= \sin\frac{\alpha}{2}\left(1-\cos\frac{\Delta\alpha}{2} - \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\Delta\alpha}{2}\right).$$

$$** \; 1-\cos\frac{\Delta\alpha}{2} = 2\sin^2\frac{\Delta\alpha}{4}; \quad 1-\cos\delta_\alpha = 2\sin^2\frac{\delta_\alpha}{2}.$$

или $\quad (\Delta\alpha)^2 - 4\rho\cdot\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}\Delta\alpha - 4\delta^2_\alpha = 0.$

Выразим теперь δ_α через δ_0.

Для этого разделим $\mathrm{tg}\,\delta_0$ на $\mathrm{tg}\,\delta_\alpha$; $\mathrm{tg}\,\delta_0 = \frac{KM}{BM}$; $\mathrm{tg}\,\delta_\alpha = \frac{AA_1}{BA_1}$.

Следовательно, $\frac{\mathrm{tg}\,\delta_0}{\mathrm{tg}\,\delta_\alpha} = \frac{KM}{BM}\cdot\frac{BA_1}{AA_1}$, и так как $KM = AA_1$, то:

$$\frac{\mathrm{tg}\,\delta_0}{\mathrm{tg}\,\delta_\alpha} = \frac{BA_1}{BM} = \frac{r}{r\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Заменяя тангенсы малых углов величиной углов в радианной мере, получим: $\delta_\alpha = \delta_0\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$.

Откуда окончательно будем иметь:

$$(\Delta\alpha)^2 - 4\rho\cdot\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}\cdot\Delta\alpha - 4\delta_0^2\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2} = 0. \qquad (1)$$

Квадратное уравнение показывает, что $\Delta\alpha$ есть функция двух переменных α и δ_0, которые являются параметрами этого уравнения.

Полученное квадратное уравнение (1) преобразуем, отбросив квадратный член $(\Delta\alpha)^2$ как величину второго порядка малости. Тогда выражение примет вид:

$$4\rho\cdot\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}\cdot\Delta\alpha + 4\delta_0^2\cos^2\frac{\alpha}{2} = 0,$$

или, решая относительно $\Delta\alpha$, получим:

$$\Delta\alpha = -\frac{\delta_0^2}{\rho}\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2} = -\frac{\delta_0^2}{2\rho}\sin\alpha. \qquad (2)$$

Построим семейство кривых, функций $\Delta\alpha = f(\alpha)$, принимая для каждой кривой (рис. 204) постоянное значение δ_0 (30′, 1°, 2°).

На графике видно, что максимума и минимума функции достигают при 270° и 90°, причем по абсолютной величине они равны. Так как нас интересует максимум значения $\Delta\alpha$ (по абсолютной величине), то построим теперь график $\Delta\alpha = f(\delta_0)$ при максимальном и минимальном значении $\sin\alpha$ т. е. при $\alpha = 90°$ и $\alpha = 270°$.

Функция в этом случае будет иметь вид: $\Delta\alpha_{max} = \pm\frac{1}{2\rho}\delta_0^2$, (3), а это есть уравнение параболы (рис. 205).

Таким образом, исследование функции (рис. 204) показывает что влияние негоризонтальности лимба на точность из-

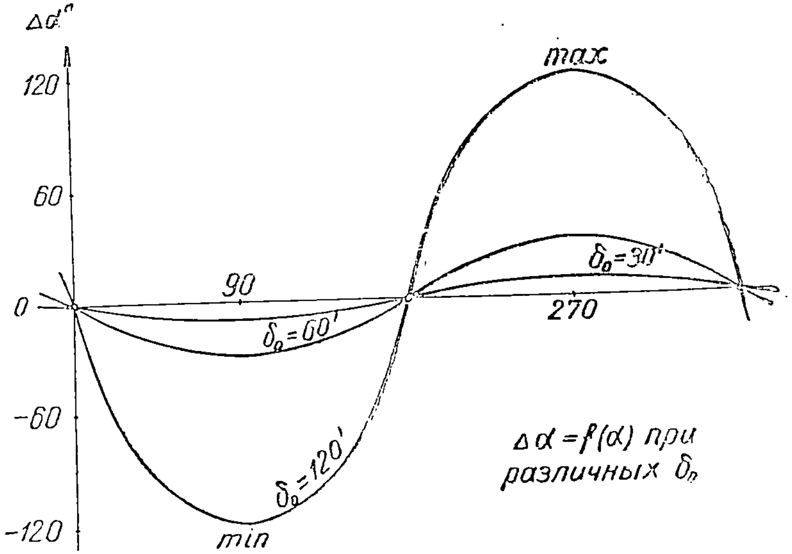


Рис. 204. График зависимости $\Delta\alpha$ от α

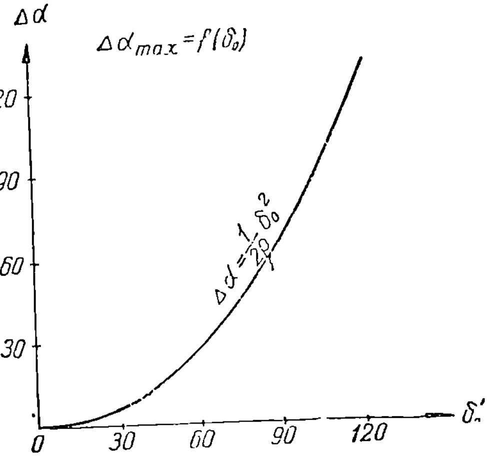


Рис. 205. График зависимости $\Delta\alpha_{max}$ от δ_0

мерения углов — очень мало. Например, при наклоне лимба на 1° максимальное искажение угла (при $\alpha = 90°$, $\sigma = 270°$) равно $\pm 30''$, при наклоне $30'$ всего $\pm 7''$.

Если принять точность измерения угла по угломеру порядка 1°, то можно допустить, чтобы искажение угла за счет негоризонтальности лимба было около 0°,5, т. е. $(\Delta\alpha)_{max}=0°,5$.

Преобразуя формулу (3) относительно δ_0, получим:

$$\delta_0 = \sqrt{(\Delta\alpha)_{max}2\rho}, \quad \delta_0 = \sqrt{0°,5\cdot 2\cdot 57°}\approx 7°,5.$$

Из этих соображений на школьном угломере (астролябии) не имеет смысла помещать уровни, так как при его точности достаточно производить установку на глаз.

Посмотрим какова относительная ошибка результата $(\Delta\alpha)_{max}$, вызванная отбрасыванием члена $(\Delta\alpha)^2$. Из графика следует, что максимальное значение $\Delta\alpha$ принимает при угле $\sigma = 270°$. Тогда формула (1) примет вид:

$$(\Delta\alpha)^2_{max} - 4\rho\,\mathrm{ctg}\frac{270°}{2}\cdot\Delta\alpha_{max} - 4\delta_0^2\cos^2\frac{270°}{2} = 0,$$

или

$$(\Delta\alpha)^2_{max} + 4\rho\Delta\alpha_{max} - 2\delta_0^2 = 0.$$

Решая уравнение, получим $\Delta\alpha_{max} = -2\rho \pm \sqrt{4\rho^2 + 2\delta_0^2} =$

$$= -2\rho \pm 2\rho\sqrt{1 + \frac{\delta_0^2}{2\rho^2}}$$

Вычисляя $\Delta\alpha_{max}$, разложив корень по приближенной формуле $\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{1}{2}x$, получим $\Delta\alpha_{max} = -2\rho \pm 2\rho\left(1+\frac{\delta_0^2}{4\rho^2}\right) = -2\rho \pm \left(2\rho + \frac{\delta_0^2}{2\rho}\right)$.

Берем пригодный корень $\Delta\alpha_{max} = \frac{\delta_0^2}{2\rho}$.

По упрощенной формуле $\Delta\alpha = -\frac{\delta_0^2}{2\rho}\sin\sigma$ при $\alpha = 270°$ имеем $\Delta\alpha = -\frac{\delta_0^2}{2\rho}\sin 270° = \frac{\delta_0^2}{2\rho}$, т. е. тот же результат. Следовательно, относительные ошибки результата при том и другом решении равны.

Пользуясь формулой разложения Бинома Ньютона в ряд, можно написать, что

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \dots$$

Полученный ряд следует отнести к знакопеременным и монотонно убывающим по абсолютной величине, причем $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

В высшей математике доказывается (Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 2), что при отбрасывании всех членов такого ряда, начиная с некоторого номера, абсолютная ошибка суммы ряда не превосходит по величине первого из отброшенных членов и совпадает с ним по знаку.

Так как мы ограничились двумя членами ряда и приняли $(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1+\frac{1}{2}x$, то абсолютная ошибка определяется третьим членом разложения, т. е. $-\frac{1}{8}x^2$, умноженным на 2ρ (множитель перед корнем). Отсюда абсолютная ошибка $(\Delta l)_{max}$ за счет отбрасывания 3-го члена равна

$$-2\rho\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{\delta_0^4}{4\rho^4} = -\frac{\delta_0^4}{16\rho^3}.$$

Относительная ошибка $= \frac{\text{абсолютная ошибка}}{\Delta l_{max}}$, т. е. равна

$$\frac{\delta_0^4}{16\rho^3} : \frac{\delta_0^2}{2\rho} = \frac{\delta_0^2}{8\rho^2}, \text{ при } \delta_0 = 60' = 1^\circ$$

относительная ошибка $\Delta\alpha_{max} = \frac{60^2}{8 \cdot 3438^2} \approx \frac{1}{25\,000}$.

Следовательно, результаты вычислений дают более, чем достаточную точность, но работать с упрощенной формулой значительно удобнее.

При выводе формулы (2) предполагалось, что поворот трубы вокруг ее горизонтальной оси, а следовательно, и поворот визирной оси происходит в вертикальной плоскости. Однако при равенстве подставок (или, другими словами, при параллельности плоскости лимба и горизонтальной оси трубы) плоскость, описываемая визирной осью (коллимационная), будет не вертикальна, а наклонна.

Вследствие этого будут измерены углы, образованные не вертикальными, а наклонными плоскостями и, следовательно, не равные углам в ортогональной проекции.

На рис. 206 изображены различные положения коллимационной плоскости и плоскости лимба теодолита, установленного (как частный случай) в вершине прямого угла B. Если линия пересечения лимба плоскостью P_1 наклонена к горизонту под углом γ, то линия пересечения лимба плоскостью P_2 — горизонтальна (рис. 206 *г*).

При наведении трубы на точку A мы получим отсчет P. Этот отсчет не изменится, если трубу перевести на ортогональную проекцию точки A, т. е. на точку A_1, так как визирная ось будет в этом случае перемещаться в вертикальной плоскости. Действительно, ось вращения трубы параллельна плоскости лимба и перпендикулярна визирной оси. Так как угол в данном случае прямой, то горизонтальная ось лежит в плоскости P_2, а линия пересечения лимба плоскостью P_2 — горизонтальна.

Однако если для точки C отсчет будет q, то тот же отсчет q будет соответствовать не ортогональной проекции точки C, т. е. точке C_1, а точке C_2. Точка C_2 лежит в плоскости, описываемой визирной осью, наклоненной к горизонту, как и лимб, на угол γ.

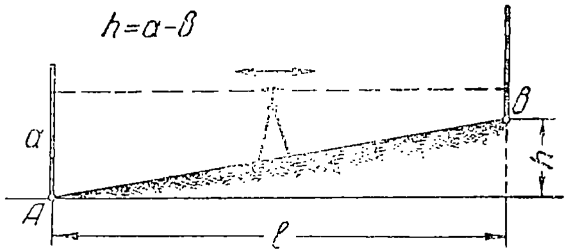


Рис. 209. Принцип нивелирования

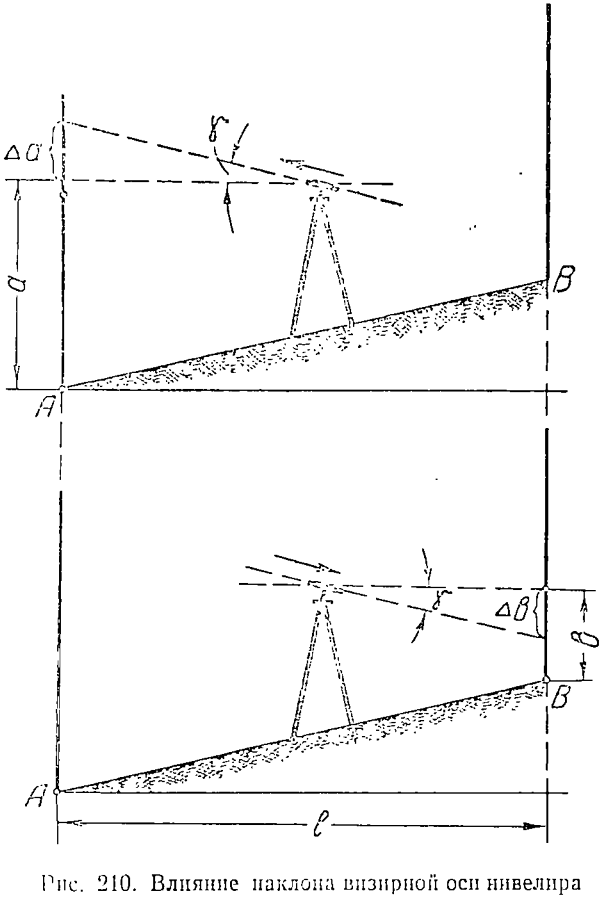


Рис. 210. Влияние наклона визирной оси нивелира

Представим себе, что при наведении на рейку A визирная ось будет отклонена от горизонта на угол γ при сохранении перпендикулярности вертикальной и визирной осей. Тогда вместо отсчета a получится отсчет $a + \Delta a$, где $\Delta a = \frac{l}{2}\operatorname{tg}\gamma$, а при наведении на точку B вместо отсчета b получим $b - \Delta b$, где $\Delta b = \frac{l}{2}\operatorname{tg}\gamma$ (рис. 210).

Вычисляя превышение h, получим:

$$h = (a + \Delta a) - (b - \Delta b),$$

а так как $\Delta a = \Delta b = \frac{l}{2} \operatorname{tg}\gamma$,

то $h = a - b + l \operatorname{tg}\gamma$.

Перейдя к радианной мере $\operatorname{tg}\gamma \approx \frac{\gamma}{\rho}$, будем иметь: $h = a - b + l\frac{\gamma}{\rho}$. Выражение $l\frac{\gamma}{\rho}$ есть ошибка (Δh) в превышении, образовавшаяся в результате наклона визирной оси на угол γ:

$$\Delta h = l\frac{\gamma}{\rho}.$$

Например, при $\gamma = 0',5$ и $l = 100$ *м*.

$$\Delta h = 100 \cdot \frac{0',5}{3500} \approx 0{,}014 \text{ м} = 14 \text{ мм}.$$

При техническом нивелировании превышение определяется обычно с точностью ± 3 *мм* и, следовательно, чувствительность уровня $0',5$ мала. Для выполнения условия точности определим допустимое отклонение визирной оси.

Для этого преобразуем формулу $\Delta h = l\frac{\gamma}{\rho}$ относительно γ, подставив вместо $\Delta h \pm 3$ *мм*.

Очевидно,

$$\gamma' = \frac{\pm 3\rho}{l} = \pm \frac{3 \cdot 3438}{100 \cdot 10^3} = \pm 0',1 = \pm 6''.$$

Из этого следует, что требования к горизонтальности визирной оси нивелиров значительно выше, чем требования горизонтальности лимба у теодолитов, поэтому на нивелирах установлены более чувствительные уровни.

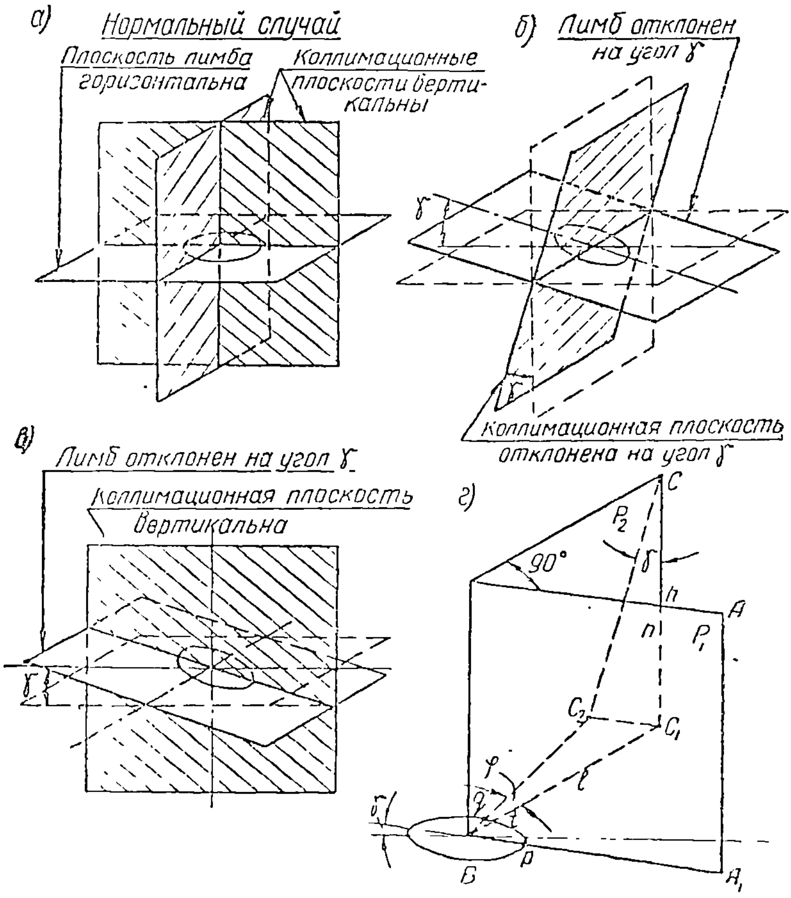


Рис. 206. Геометрические схемы для анализа наклона оси вращения трубы

Отсчет на точку C_1 пусть будет равен t. Разность отсчетов q и t $q-t=\varphi$ и есть ошибка вследствие негоризонтальности лимба.

Обозначим $BC_1=l$ и $CC_1=h$.

Из $\triangle\, CC_1C_2$ имеем $C_1C_2=h\operatorname{tg}\gamma$,

из $\triangle\, C_1BC_2$ получим $C_1C_2=2\,l\sin\frac{\varphi}{2}$,

откуда $h\operatorname{tg}\gamma=2l\sin\frac{\varphi}{2}$ или по малости γ и φ

$$h\gamma=l\varphi \text{ и } \varphi=\frac{h}{l}\gamma.$$

Например, при $h = 30$ м, $l = 150$ м, $\gamma = 30'$.

$$\varphi = \frac{30}{150} \cdot 30 = 6'.$$

Легко представить, что при повороте плоскости P_2 против часовой стрелки угол φ будет уменьшаться и при развернутом угле φ будет равен нулю (рис. 207).

Наоборот, при вращении плоскости P_1 по часовой стрелке угол B при $180°$ будет искажен на величину 2φ (рис. 208).

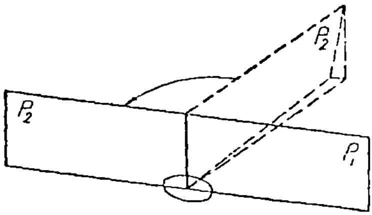


Рис. 207. Частный случай наклона I

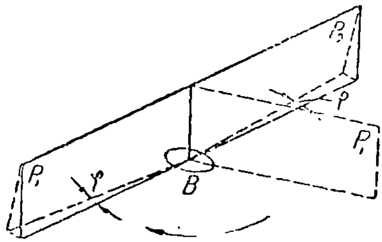


Рис. 208. Частный случай наклона II

Следовательно, максимальное искажение измеряемого угла будет равно $2\varphi = 2\frac{h}{l}\gamma$, т. е. прямо пропорционально разности высот смежных вершин многоугольника и обратно пропорционально расстоянию между ними. Как видно, наклон горизонтальной оси дает бо́льшую ошибку.

При чувствительности уровня $0',5$ можно добиться, чтобы угол наклона лимба γ был того же порядка. Тогда искажение угла (2φ) при $h = 30$ м и $l = 150$ м будет равно $2\varphi = 2\cdot\frac{30}{150}\times$ $\times 0',5 = 0',2$.

Таким образом, для теодолитов с $1'$ верньерами чувствительность уровня $0',5$ достаточная. Обратимся теперь к нивелиру.

Влияние негоризонтальности визирной оси нивелира на величину ошибки при определении превышений

Как известно из части I, при нивелировании необходимо иметь горизонтальный визирный луч. Тогда, проводя нивелирование из середины, превышение точки A над B получается как разность отсчетов a и b, $h = a - b$ (рис. 209).

Напомним здесь только, что в выверенном (юстированном) нивелире визирная ось перпендикулярна вертикальной оси инструмента. Горизонтальность визирной оси устанавливается уровнем.

СООТВЕТСТВИЕ ТОЧНОСТЕЙ РАЗЛИЧНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

До сих пор ошибки измерений рассматривались применительно к одному данному измерению или к ряду измерений одной величины.

Посмотрим теперь, какое соотношение должно существовать между точностью, например, нескольких линейных измерений или линейного и углового измерений и как это отражается на последующих результатах.

Линейные измерения

Допустим, нужно определить площадь прямоугольника: $S = ab$.

Пусть для этой цели стороны прямоугольника измерены дважды и получены результаты $a_1=99$ *м*; $b_1=9$ *м*; $a_2=101$ *м*; $b_2=11$ *м*. (Для лучшего уяснения сущности вопроса результаты измерений утрированы и округлены).

По этим размерам можно получить четыре результата для площади S:

$$S_1 = a_1b_1;\quad S_2 = a_1b_2;\quad S_3 = a_2b_1;\quad S_4 = a_2b_2.$$

Так как истинные значения сторон, а значит и площади неизвестны, то следует найти вероятнейшее значение сторон a и b, а также площади S.

Как было доказано выше, наиболее вероятным будет среднее значение, т. е.:

$$a_{ср.} = \frac{a_1 + a_2}{2} \quad и \quad b_{ср.} = \frac{b_1 + b_2}{2};$$

$$S_{ср.} = \frac{S_1 + S_2 + S_3 + S_4}{4} = a_{ср.} \cdot b_{ср.}\,.$$

В нашем примере $a_{ср.} = 100$ *м*, $b_{ср.} = 10$ *м*, $S_{ср.} = 1000$ *м*^{2} и, следовательно, абсолютные ошибки измерений a и b равны ± 1 *м*.

Ниже в таблице приведены все данные измерений, подсчитаны площади, а также абсолютные и относительные ошибки площадей:

	a (*м*)	$\frac{a_{ср.} - a}{a_{ср.}}$	b (*м*)	$\frac{b_{ср.} - b}{b_{ср.}}$	$S = ab$ (*м*^{2})	$S_{ср.} - S$ (*м*^{2})	$\frac{S_{ср.} - S}{S_{ср.}}$
S_1	99	$\frac{1}{100}$	9	$\frac{1}{10}$	891	+109	$\sim \frac{1}{10}$
S_2	99	$\frac{1}{100}$	11	$\frac{1}{10}$	1089	−89	$\sim \frac{1}{10}$
S_3	101	$\frac{1}{100}$	9	$\frac{1}{10}$	909	+91	$\sim \frac{1}{10}$
S_4	101	$\frac{1}{100}$	11	$\frac{1}{10}$	1111	−111	$\sim \frac{1}{10}$

$$\Sigma S = 4000 \text{ м}^2.$$

$$S_{ср.} = \frac{4000}{4} = 1000 \text{ м}^2.$$

Из таблицы следует, что абсолютная (~ 100 *м*^{2}) и относительная $\left(\sim \frac{1}{10}\right)$ ошибки площади весьма значительны и вызваны они главным образом влиянием относительной ошибки измерения величины b $\left(\frac{1}{10}\right)$, хотя сторона a измерялась с повышенной точностью $\left(\frac{1}{100}\right)$.

Если бы величина b была измерена так же, как и a с относительной ошибкой $\frac{1}{100}$, то точность каждого результата была бы значительно выше.

Пример: $a_1 = 99,0$ *м*; $b_1 = 9,9$ *м*;
$a_2 = 101,0$ *м*; $b_2 = 10,1$ *м*,

т. е. относительные ошибки для a и b равны $\frac{1}{100}$. Тогда:

	a	b	S	$S_{ср.} - S$	$\frac{S_{ср.} - S}{S_{ср.}}$
S_1	99,0	9,9	980,1	+ 19,9	$\frac{1}{50}$
S_2	99,0	10,1	999,9	+ 0,1	$\frac{1}{10\,000}$
S_3	101,0	9,9	999,9	+ 0,1	$\frac{1}{10\,000}$
S_4	101,0	10,1	1020,1	− 20,1	$\frac{1}{50}$

$\Sigma S = 4000,0$ *м*²

Когда относительные ошибки величин a и b равны между собой по величине и знаку $\left(\frac{1}{100}\right.$ или $\left.-\frac{1}{100}\right)$, то относительная ошибка площади только в два раза больше и равна $\left(\frac{1}{50}\right)$. Когда же знаки относительных ошибок различны (S_2 и S_3), то относительная ошибка площади равна всего лишь $\frac{1}{10\,000}$.

Отсюда можно сделать вывод: относительная точность линейных измерений различных отрезков при проведении данной работы должна быть одного порядка.

Линейные и угловые измерения

Представим себе, что истинное положение точки B относительно направления AS показано на рис. 211 и определяется углом α и расстоянием d. Под влиянием ошибок линейных измерений точка B может сместиться в створе линии AB в ту или другую сторону и занять положение B_1 и B_2. Относительная ошибка при измерении отрезка AB равна:

$$\frac{BB_1}{AB} = \frac{\Delta d}{d}.$$

От угловых измерений следует требовать, чтобы смещение точки B, перпендикулярно линии AB, было бы не более B_1B, т. е. $B_3B = BB_4 = B_1B = \Delta d$.

Из чертежа следует:

$$\operatorname{tg} \Delta \alpha = \frac{B_3B}{AB} = \frac{\Delta d}{d}.$$

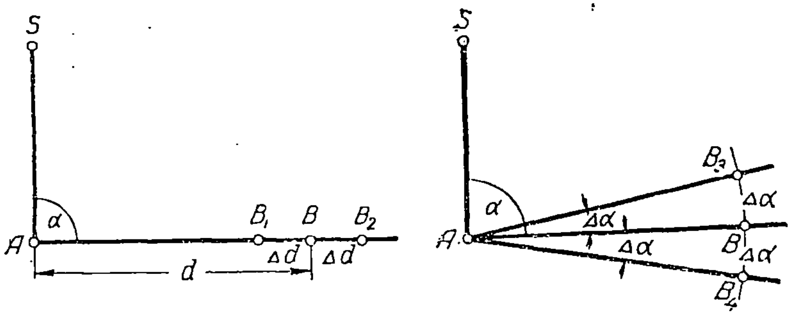


Рис. 211. Линейные и угловые измерения

Но отношение $\frac{\Delta d}{d}$ есть относительная ошибка отрезка AB. Заменяя $\operatorname{tg} \Delta\alpha$ величиной угла в радианной мере, получим $\Delta\alpha = \rho \frac{\Delta d}{d}$.

Задаваясь относительной ошибкой линейных измерений, можно получить необходимую точность измерения направления.

Например, длины линий измеряются с относительной ошибкой $\frac{1}{100}$.

Тогда $\Delta \alpha' = \rho' \frac{\Delta d}{d} = 3438' \cdot \frac{1}{100} = 34' \approx 0^\circ{,}5$,

т. е. можно применить школьный угломер.

Наоборот, если теодолит дает возможность измерить направление с точностью порядка $1'$, то

$\frac{\Delta d}{d}$ должно равняться $\frac{\Delta a'}{\rho'} = \frac{1}{3438} = \frac{1}{3000}$,

т. е. следует применять мерную ленту.

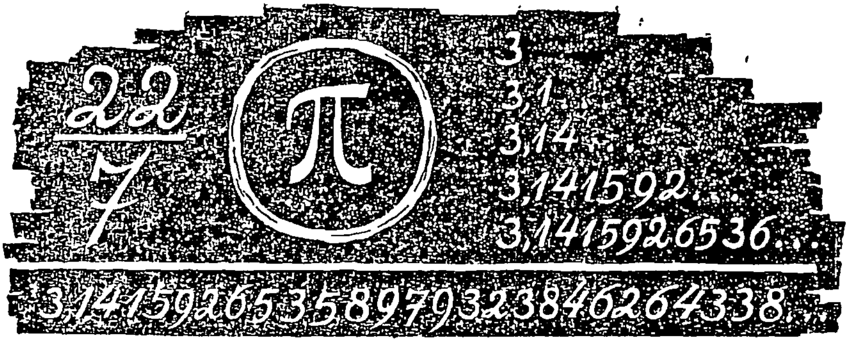
Таблица примерных точностей различных геодезических инструментов

а) линейные измерения

Способы, инструменты	Относительная ошибка	Примечания
На глаз	от 1 : 2 до 1 : 10	При больших расстояниях в однообразной открытой местности ошибка может доходить до половины определяемого расстояния
Шаг человека	от 1 : 25 до 1 : 50	
Полевой циркуль	от 1 : 100 до 1 : 150	
Мерная веревка	от 1 : 150 до 1 : 250	
Дальномер (теодолит или кипрегель)	от 1 : 200 до 1 : 400	При расстоянии свыше 150 *м* ошибка резко возрастает
Стальная рулетка	от 1 : 500 до 1 : 750	
Мерная лента	от 1 : 1000 до 1 : 2000	Применяется при геодезических работах с теодолитом точностью в 1′
Прибор Едерина	от 1 : 500 000 1 : 1 000 000	Употребляется при высоко точных триангуляционных работах

б) угловые измерения

Наименование инструмента	абсолютная ошибка		Примечания
	в градусах	в радианах	
Эккер крестообразный	1°	1/60	
Эккер зеркальный	30′	1/100	
Эккер в гониометре	10′	1/300	
Компас школьный	5°	1/10	
Компас Адрианова	3°	1/20	
Буссоль (магнитная стрелка)	30′	1/100	
Буссоль (угломер)	10′	1/300	
Гониометр	5′	1/600	
Теодолит	1′	1/3500	
Теодолит высокоточный	5″	1/40000	Используется в триангуляции



ЭЛЕМЕНТЫ ПРИБЛИЖЕННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ *

Вычисления занимают большое место в школьном образовании и практической деятельности человека. Всякое явление с момента изучения его связывается с некоторым количеством, с числами, над которыми производятся различные действия.

В технике, в частности, в геодезии расчеты характеризуются приближенными вычислениями, рациональностью приемов и употреблением счетных приборов; в школе же на уроках математики (даже физики и химии) пользуются почти исключительно точными числами, не применяют быстрых, сокращенных способов счета, удобных схем расположения действий. Поэтому учащиеся выходят неподготовленными к работе на производстве, к обучению в высшей школе.

Очевидно, что в школе, наряду с работой над точными числами, необходимо в совершенстве овладевать простейшими приемами приближенных вычислений. Это требование можно подкрепить значительными педагогическими доводами, ибо обращение к приближенному значению числа вызывает ряд размышлений, чрезвычайно полезных (и доступных) для ученика.

В своих лекциях акад. А. Н. Крылов совершенно правильно отмечает, что самое написание и рассмотрение приближен-

---

* В основу положены книги: В. М. Брадис «Теория и практика вычислений», Учпедгиз, 1935; «Средства и способы элементарных вычислений», Учпедгиз, 1953 и Е. Г. Ларченко «Техника вычислений», Геодезиздат, 1952.

ных значений чисел связано с рядом соображений математического порядка.

«Результаты всякого измерения и вычисления выражаются числом. Условимся писать это число так, чтобы по самому начертанию можно было судить о степени точности. В приближенном числе сомнительной может быть лишь последняя цифра и притом (в среднем) не более чем на 1» *.

Пусть дано приближенное число 3,8. В нем могли быть при округлении опущены: 0,01; 0,02; 0,03; 0,04; 0,05. Это же число 3,8 могло получиться из: 3,76; 3,77; 3,78; 3,79. И в том и в другом случае мы имеем дело с погрешностью, которая не превосходит 0,05. Таким образом, число имеет точность — границу погрешности — 0,5 единицы его последнего разряда. Грубо определяют точность числа в единицу последнего разряда, оставленного в числе. В данном случае можно сказать, что число 3,8 имеет точность 0,05 или, грубо, 0,1. В отдельном случае может не оказаться единиц данного разряда, например сотых. Число примет вид 3,80. Точность его 0,005 или 0,01. Вообще же приближенное значение числа, например 3,80, значит, что $3{,}79 < 3{,}80 < 3{,}81$ (с точностью до 0,01).

В курсе арифметики А. П. Киселева (§ 162) имеется следующее положение:

«Приписывание нулей справа десятичной дроби не изменяет ее величины». Это правило не может быть распространено на приближенное значение числа, ибо тогда нарушается суждение о точности.

В этом же смысле нельзя говорить о сокращении десятичной дроби ($3{,}80 = 3{,}8$) или о приведении ее к некоторому знаменателю ($3{,}8 = 3{,}800$) и о том, что 5,7 и 5,70 одно и то же число.

Следовательно, обращение в школе к приближенным вычислениям, помимо подготовки учащихся к практической деятельности, существенно рядом соображений о строении числа. Эта дополнительная логическая работа является составной частью образования и не выходит за рамки программы средней школы.

В том же направлении полезно вызвать критическое отношение учащихся к таким примерам, где к 2,4 прибавляется 0,00035, т. е. объединяются числа с точностью до 0,1 и до 10^{-5}. На самом деле подобное сложение не имеет практического смысла.

Умножение и деление приближенных значений чисел разумно вести сокращенными примерами. Это экономит время и упрощает работу.

---

* А. Н. Крылов, Лекции о приближенных вычислениях, изд-во АН СССР, М.—Л., 1933.

Применение счетных приборов, таблиц и графиков необходимо на уроках математики для систематического приложения в расчетах с приближенными числами. При действиях над точными числами следует употреблять счетные приспособления для проверки правильности найденных результатов. Помимо практического значения, эти приборы представляют ценность как пособия на уроках математики. Принципы их устройства и приемы использования основаны на несложных математических выводах.

Таким образом, три основные черты вычислительной техники — приближенные числа, упрощенность приемов, применение счетных приборов — естественно увязываются с задачами общеобразовательной средней школы.

Привитие навыков приближенных вычислений требует длительных и настойчивых упражнений в продолжение всех лет обучения в средней школе (по X класс включительно). Еще в начальной школе учащиеся будут получать представление о значении округленных чисел и действиях с ними, например урожай в «миллиардах» пудов, бюджет в «тысячах», размер огорода в метрах и т. п. Упражнения в счете — устном и письменном и практические измерения должны включать знакомство с приближенными числами.

Более серьезно эти вопросы следует ставить в V классе при изучении десятичных дробей и пользоваться приближенными вычислениями при решении задач, особенно по геометрии, физике, химии. Подобная работа должна вестись во всех классах, дополняя новый теоретический материал и углубляя изученное. Далее приближенные числа найдут себе место при подстановках в алгебре, при подсчетах в геометрических задачах и смежных дисциплинах; они вводятся на уроках, в заданиях на дом и в специальных практических занятиях («практикумах»).

Основные понятия

Связь точного числа с его приближенными значениями устанавливается значениями числа «с недостатком» и «с избытком». Так, 8,2 по отношению к точному числу 8,24 является приближенным значением с недостатком, а 8,3 — с избытком.

Разность между точным числом и его приближенным значением называют **погрешностью** этого приближенного значения *.

Различают **абсолютную** погрешность и **относительную**.

Если через x обозначить число и через a его приближенные

* Иногда употребляется в этом смысле термин **ошибка**; мы будем пользоваться словом **погрешность**.

значения, то **абсолютной погрешностью** называют абсолютное значение разности x и a, т. е. $\Delta = |x - a|$. Пусть $x = 8{,}24$; $a = 8{,}2$, тогда $\Delta = |8{,}24 - 8{,}2| = 0{,}04$.

Если 8,3 приближенное значение x с избытком, то абсолютная погрешность в этом случае определится:

$$\Delta = |x - a| = |8{,}24 - 8{,}3| = |-0{,}06| = 0{,}06.$$

Точность приближенного значения числа определяется формулой $|x - a| \leqslant h$, где a приближенное значение числа x, и h — число, которого не превосходит абсолютная погрешность a.

Так 0,1 является точностью приближенных значений числа 8,24 с недостатком и с избытком:

$$0{,}04 < 0{,}1; \quad 0{,}06 < 0{,}1.$$

Совершенно очевидно, что в данном случае значение с недостатком 8,2 точнее определяет число 8,24, чем 8,3. Отсюда следует и правило округления приближенных значений: последняя из остающихся цифр сохраняется, когда первая из отбрасываемых меньше 5; она же увеличивается на 1, когда отбрасываются цифры большие 5. В случае, когда отбрасывается цифра 5 с последующими знаками, будет точнее нарастить единицу у остающейся цифры. При отбрасывании 5 с последующими значащими нулями вычислитель вправе или сохранить остающуюся цифру или увеличить ее на 1.

Относительная погрешность есть отношение (частное) абсолютной погрешности к значению точного числа, выражается она обычно в %. В данном примере получится:

$$\delta = \frac{\Delta}{x} = \frac{0{,}04}{8{,}24} = \frac{1}{206} \approx 0{,}5\ \%;$$

$$\delta = \frac{\Delta_1}{x} = \frac{0{,}06}{8{,}24} = \frac{1}{137} \approx 0{,}7\ \%.$$

Основным затруднением при определении погрешности является то, что нам известны лишь приближенные значения числа, а не само число. Поэтому вместо разностей $(x - a)$ и $(x - b)$, где a — значение числа, взятое с недостатком, а b — с избытком, берут $(b - a)$, которую называют «граница погрешности». При этом за относительную погрешность считают дробь:

$$\delta = \frac{b - a}{a}.$$

В основе такого способа вычисления погрешности лежит теорема:

Если для числа x известны его приближенные значения с недостатком (a) и с избытком (b), то погрешность каждого из них по абсолютной величине меньше разности между ними.

$$\left.\begin{array}{l} a \text{ — значение с недостатком} \\ b \text{ — \quad „ \quad „ избытком} \end{array}\right\} \text{числа } x$$

$$a < x < b.$$

Требуется доказать:

$$\left.\begin{array}{l} (x-a) < b-a \\ (x-b) < b-a \end{array}\right\} ?$$

Доказательство:

$$(x-a)+(b-x)=b-a; \quad \left.\begin{array}{r} x-a>0 \\ b-x>0 \end{array}\right\} \quad b-a>0, \text{ тогда:}$$

$$x-a<b-a;$$

$$b-x<b-a; \text{ но } (b-x)=-(x-b) \text{ или}$$

$$-(x-b)=(b-x)<b-a.$$

Пример 1.

В числе 2835 относительная погрешность $\delta=10\%$, т. е. равна 0,1. Абсолютная величина погрешности $\Delta=2835\cdot 0,1=$ $=283,5$. Таким образом, в числе 2835 надежной является цифра «2», а цифры «8», «3», «5» — сомнительными.

Пример 2.

$\pi_1=3,14$; $\pi_2=3,15$. Приближенные значения числа π. Граница погрешности $b-a=0,01$.

$$(\pi-\pi_1)=|\pi-3,14|<0,01;$$
$$(\pi-\pi_2)=|\pi-3,15|<0,01.$$

За относительную погрешность можно принять

$$0,01 \,|\, \underline{3,14} \quad \delta=0,3\%.$$
$$\quad 0,003$$

Пример 3 (из книги Е. Г. Ларченко «Техника вычислений», Геодезиздат, М., 1952).

Площадь земельного участка вычисляется по координатам его вершин. Для этого приходится брать произведение $S=x_2\cdot(y_3-y_1)$, например, $S=845,34\cdot 100,01$ *кв. м.*, т. е. $S=84\,542,4534$ *кв. м.* (1)

Известно, что координаты вершин определены с некоторой точностью; положим для данного случая 0,01 *м.* Это значит, что площадь может быть равна:

$S=845,33\cdot 100,02=84\,549,9066$ *кв. м.* (2)

Из сопоставлений (1) с (2) видно, что даже целые единицы

(2 и 9) не вызывают полного доверия. Следовательно, для данного случая произведение можно записать с точностью до целых единиц, т. е.:

$$S = x_2 \cdot (y_3 - y_1) - 84\,542 \text{ кв. м.}$$

Пример 4.

Пусть $Z = \dfrac{a}{1+b}$, где b — малое приращение, порядка сотых долей, тогда b^2 выразится в десятитысячных долях и по малости может быть опущено.

Тогда $Z = \dfrac{a}{1+b} = \dfrac{a\,(1-b)}{1-b^2}$,

отсюда: $Z \approx a \cdot (1-b)$.

Результаты действий над приближенными значениями чисел с недостатком и с избытком

1. При сложении приближенных значений чисел, взятых с недостатком, получается приближенное значение суммы, взятой тоже с недостатком.

При условии приближенных значений чисел с избытком сумма получается тоже с избытком.

Теорема. Если

$$\begin{array}{c} a < x < b \\ a_1 < y < b_1 \\ \hline \text{то } a + a_1 < x + y < b + b_1 \,?\end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} a < x & x < b \\ a_1 < y & y < b_1 \\ \hline a + a_1 < x + y & x + y < b + b_1 \,, \end{array}$$

следовательно $a + a_1 < b + b_1$

Пример 1.

$$\begin{array}{l} \sqrt{2} = 1{,}4142\ldots \\ \sqrt{3} = 1{,}732\ldots \\ 1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5 \\ 1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8 \\ \hline 3{,}1 < \sqrt{2} + \sqrt{3} < 3{,}3 \end{array}$$

Пример 2. $\sqrt{2} - \sqrt{3}$

$$\begin{array}{l} 1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5 \\ +1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8 \\ -1{,}7 > -\sqrt{3} > -1{,}8 \\ \hline 1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5 \\ -1{,}8 < -\sqrt{3} < -1{,}7 \\ \hline -0{,}4 < \sqrt{2} - \sqrt{3} < -0{,}2, \end{array}$$

т. е. разность приближенного значения уменьшаемого по недостатку и приближенного значения, вычитаемого по избытку, дает приближенное значение разности чисел по недостатку; а приближенное значение уменьшаемого по избытку и приближенное значение вычитаемого по недостатку дает приближенное значение разности по избытку.

2. Произведение **положительных** множителей, взятых с недостатком, является приближенным значением произведения, взятого также с недостатком. При условии приближенных значений чисел с избытком произведение получается также с избытком.

Теорема

Если $a < x < b$
$a_1 < y < b_1$

то $aa_1 < xy < bb_1$?

Доказательство

$$\begin{array}{c|c} a < x & x < b \\ a_1 < y & y < b_1 \\ \hline aa_1 < xy & xy < bb_1 \end{array}$$

Следовательно: $aa_1 < xy < bb_1$

Пример.

$$\begin{array}{ll} 1{,}4 < \sqrt{2} & \sqrt{2} < 1{,}5 \\ 1{,}7 < \sqrt{3} & \sqrt{3} < 1{,}8 \\ \hline 2{,}38 < \sqrt{6} & \sqrt{6} < 3{,}7 \\ 2{,}38 < 2{,}44\ldots & 2{,}44\ldots < 3{,}7 \end{array}$$

3. При делении приближенных значений положительных чисел делимое взято с **избытком**, а делитель — с недостатком; получается приближенное значение частного с избытком.

Если делимое взято с недостатком, а делитель с избытком, получается приближенное значение частного с недостатком.

Теорема

Если $a < x < b$ и $a_1 < y < b_1$, $\left.\begin{array}{l}\Delta \\ \text{и} \\ \Delta_1\end{array}\right\}$ символы избытка или недостатка,

то $\dfrac{x+\Delta}{y-\Delta_1} > \dfrac{x}{y}$ и $\dfrac{x-\Delta}{y+\Delta_1} < \dfrac{x}{y}$?

Доказательство:

$$\frac{x+\Delta}{y-\Delta_1} = \frac{x}{y-\Delta_1} + \frac{\Delta}{y-\Delta_1}\text{; но } \frac{x}{y-\Delta_1} > \frac{x}{y},$$

значит $\dfrac{x}{y-\Delta_1} + \dfrac{\Delta}{y-\Delta_1}$ и подавно больше $\dfrac{x}{y}$.

Подобным же образом получается и второе заключение.

Пример.

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}; \quad 1,4 < \sqrt{2} < 1,5$$

$$1,7 < \sqrt{3} < 1,8$$

$$\frac{1,5}{1,7} > \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}; \quad \frac{1,5}{1,7} > \sqrt{\frac{2}{3}}; \quad 1,88 \ldots > \sqrt{0,6667}$$

$$1,88 > 1,81 \ldots$$

Указание. Приведенные теоремы, помимо некоторого практического значения, полезны для развития навыков в доказательстве с приближенными значениями чисел.

Подсчет погрешностей

Приближенное значение числа отличается от него на некоторую величину, которую, как уже установлено, называют абсолютной погрешностью.

Решим вопрос относительно погрешности результата действий над приближенными значениями чисел.

1. Сложение. Пусть требуется найти сумму $x+y$, причем x и y связаны со своими приближенными значениями и погрешностями:

$$\begin{array}{l} x = a + \alpha \\ y = b + \beta \\ \hline \end{array} \quad (\alpha \text{ и } \beta \text{ могут быть отрицательными}).$$

Тогда $x + y = (a+b) + (\alpha + \beta)$, т. е. погрешность суммы равна сумме погрешностей слагаемых:

$\Delta = \alpha + \beta$; относительная погрешность:

$$\delta = \frac{\Delta}{a+b} = \frac{\alpha+\beta}{a+b}.$$

Пример. $S = \sqrt{2} + \sqrt{3}$; $S = 1,4 + 1,7 = 3,1$ $(\Delta = 0,05)$;

$$\Delta = 0,05 \cdot 2 = 0,1; \quad \delta = \frac{0,1}{3,1} \approx 0,03; \quad \delta = 3\%.$$

2. Вычитание.

По тем же соображениям получим:

$$\begin{array}{l|l|l} x = a + \alpha & \Delta = \alpha - \beta & \text{При } \beta < 0, \\ y = b + \beta & & \\ \cline{1-1} x - y = (a - b) + (\alpha - \beta) & S = \dfrac{\Delta}{a-b} = \dfrac{\alpha-\beta}{a-b} & \delta = \dfrac{\alpha+\beta}{a-b} \end{array}$$

3. Умножение.

$$\begin{array}{c} x = a + \alpha \\ y = b + \beta \\ \hline xy = ab + a\beta + b\alpha + \alpha\beta. \end{array}$$

Если произведение $\alpha\beta$ опустить ввиду его малости по сравнению с остальными членами равенства, то получим: $\Delta = a\beta + b\alpha$, $\delta = \frac{a\beta + b\alpha}{ab} = \frac{\beta}{b} + \frac{\alpha}{a}$. В случае одинаковой точности, т. е. $\alpha = \beta$, $\Delta = \alpha(a + b)$; $\delta = \frac{\alpha(a+b)}{ab} =$

$$= \alpha\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{a}\right).$$

4. Деление.

$$\begin{array}{l} x = a + \alpha \\ y = b + \beta \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{a+\alpha}{b+\beta}; \quad \frac{x}{y} - \frac{a}{b} = \frac{a+\alpha}{b+\beta} - \frac{a}{b} = \frac{b\alpha - a\beta}{b(b+\beta)}.$$

Правила действий над приближенными значениями чисел

Правило сложения (вычитания).

Пусть требуется найти сумму: $1{,}4142 + 3{,}5 - 2{,}748$.

1,4142	дано	с	точностью	0,0001
3,5	„	„	„	0,1
2,748	„	„	„	0,001

Обычный способ сложения приводит к следующему результату:

$$\begin{array}{r} 1{,}4142 \\ 3{,}5??? \\ -2{,}748? \\ \hline 2{,}1662 \\ ??? \end{array}$$

Таким образом, надежным в отношении точности следует признать только результат 2,1, где цифра «1» является не вполне надежной. Поэтому оперирование с цифрами, связанными со знаками (?), нерационально, а потому для сложения (вычитания) приближенных значений чисел разумно пользоваться правилом: при сложении (вычитании) приближенных значений чисел в результате следует сохранить столько десятичных знаков, сколько их имеется в приближенном заданном числе с наименьшим количеством десятичных знаков *.

Таким образом, приведенное действие будет иметь вид:

$$\begin{array}{r} 3{,}5 \\ 1{,}41 \\ -2{,}75 \\ \hline 2{,}1 \approx 2{,}2 \end{array}$$

* «Десятичные знаки» в смысле «знаки после запятой».

Наименее точным из слагаемых является число 3,5; поэтому только один десятичный знак и может быть сохранен в результате. При сотых долях лишний десятичный знак берется в запас и в результате действий в сумме опускается.

П р а в и л о у м н о ж е н и я. Обычно умножение чисел располагается так:

$$\begin{array}{r} 2{,}45 \\ 7{,}1 \\ \hline 245 \\ 1715 \\ \hline 17{,}395 \end{array}$$

Если множители будут приближенными значениями чисел, то в действие необходимо внести следующие поправки:

$$\begin{array}{r} 2{,}45? \\ 7{,}1? \\ \hline ????\\ 245? \\ 1715? \\ \hline 17{,}395?? \\ ?? \end{array}$$

Естественно, опустить сомнительные знаки, сделать округление и получить результат 17,4. Тогда и само действие разумно оформить, не фиксируя сомнительных цифр:

$$\begin{array}{r} 2{,}45 \\ 7{,}1 \\ \hline 245 \\ 1715 \\ \hline 17{,}4 \approx 17 \end{array}$$

При умножении (делении) приближенных значений чисел в результате следует сохранить столько значащих цифр, сколько их в приближенном данном с наименьшим количеством значащих цифр. П р и м е р: $1 : 0{,}064 \approx 16$.

П р а в и л о в о з в е д е н и я в к в а д р а т, в к у б.

Пусть требуется найти степень $5{,}4^2$.

$$\begin{array}{r} 5{,}4? \\ 5{,}4? \\ \hline ???\\ 216? \\ 270? \\ \hline 29{,}16?? \approx 29{,}2^{*} \approx 29. \\ (??) \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5{,}4 \\ 5{,}4 \\ \hline 29{,}16 \approx 29{,}2 \approx 29. \end{array}$$

При возведении в квадрат (в куб) в р е з у л ь т а т е следует сохранить столько значащих цифр, сколько их имеет о с н о в а н и е.

* Одна цифра запасная.

Правило извлечения квадратного и кубического корней.

При извлечении квадратного и кубического корней в результате следует брать столько значащих цифр, сколько их имеет подкоренное число ($\sqrt{0,51} \approx 0,71$).

О запасной цифре.

При округлении приближенных значений чисел — цифры, меньшие 5, просто опускаются; однако при действиях с такими округленными числами может накопиться значительная ошибка. В простейшем виде это скажется на примере сложения. Пусть требуется найти сумму чисел 5,84 и 3,13 с точностью до 0,1.

Обычными правилами сложение даст $5,8 + 3,1 = 8,9$; в то же время опущенные $0,04 + 0,03 = 0,07$ должны быть учтены наращением единицы в результате действия, т. е. суммой следует считать 9,0, а не 8,9. Ошибка при замене числа 8,97 его приближенным значением 9,0 равна 0,03, при значении 8,9 — ошибка выразится числом 0,07. Естественное стремление производить действия над приближенными значениями чисел с наименьшей погрешностью приводит к правилу введения запасной цифры.

При вычислении промежуточных результатов следует брать одной цифрой более, чем устанавливают обычные правила действий над приближенными значениями чисел. В окончательном же результате запасная цифра отбрасывается.

Числа с бóльшим количеством (чем этого требует точность заданного вычисления) десятичных знаков (при сложении, вычитании) или значащих цифр (при умножении, делении) следует округлять, оставляя в них одну запасную цифру.

Для получения результатов с n цифрами данные для вычисления надо брать с $(n + 1)$ цифрами.

Сокращенные приёмы вычислений

В практике вычислителя встречаются остроумные и рациональные упрощения в производстве действий над числами. Некоторые из них, разумеется, должны найти себе место в общеобразовательной школе.

Прием 1. Произведение двузначных чисел, у которых число десятков одинаково, а сумма единиц равна 10

Пример $53 \cdot 57$ $(5 = 5;\ 3 + 7 = 10)$.

Пусть требуется перемножить $(a10 + b)$ и $(a10 + b_1)$, причем $b + b_1 = 10$.

$a,\ b,\ b_1$ — цифры двузначного числа

$$
\begin{array}{l}
a\ 10+b \\
a\ 10+b_1 \\
\hline
a^2\cdot 10^2+a10\ (b+b_1)+bb_1= \\
=a^2 10^2+a10^2+bb_1= \\
=a\cdot(a+1)\cdot 10^2+bb_1,
\end{array}
$$

т. е. число десятков, увеличенное на 1, умножается на число десятков; это произведение образует высшие разряды результата $a\ (a+1)$; произведение единиц bb_1 определяет последние два разряда результата.

$$
\begin{array}{r}
53 \\
57 \\
\hline
3\,021
\end{array}
\qquad
\left.
\begin{array}{r}
5+1=6 \\
6\cdot 5=30 \\
\\
7\cdot 3=21
\end{array}
\right\}
\ 3021.
$$

Прием 2. Индусский способ умножения *(правило Фероля)*

В этом приеме промежуточное сложение результатов производится в уме, благодаря чему вычисление ускоряется и запись произведения ведется сразу, в одну строку.

Пример 1.

$$
\begin{array}{r}
34 \\
26 \\
\hline
6\cdot 4 \\
2\cdot 4+3\cdot 6 \\
2\cdot 3 \\
\hline
884
\end{array}
$$

Практическая запись:

$$
\begin{array}{r}
34 \\
26 \\
\hline
884
\end{array}
$$

В общем виде действие запишется:

$$
\begin{array}{c}
a\ 10+b \\
a_1 10+b_1 \\
\hline
aa_1 10^2+10\ (ab_1+a_1 b)+bb_1.
\end{array}
$$

Эта формула определяет указанный в примере порядок вычисления.

Пример 2. Пусть надо найти произведение чисел 25 и 34:

$25\cdot 34=(2\cdot 10+5)\ \ (3\cdot 10+4)=2\cdot 3\cdot 10^2+2\cdot 10\cdot 4+3\cdot 10\cdot 5+$
$+5\cdot 4=2\cdot 3\cdot 10^2+(2\cdot 4+3\cdot 5)\cdot 10+5\cdot 4.$

Действие располагается так:

$$
\begin{array}{r}
25 \\
34 \\
\hline
4\cdot 5 \\
3\cdot 5+2\cdot 4 \\
2\cdot 3 \\
\hline
850
\end{array}
$$

Практически запись ведется так:

$$
\begin{array}{r}
25 \\
34 \\
\hline
850
\end{array}
$$

Пример 3. Подтвердите справедливость приема на двузначных числах, записанных буквами $(a \cdot 10 + b)\ (c \cdot 10 + d)$.

Разберите и запомните индусский прием умножения трехзначных чисел:

$$\begin{array}{r} 315 \\ 242 \\ \hline 5\cdot 2 = 10 \\ 2\cdot 1 + 5\cdot 4 = 22 \\ 2\cdot 3 + 5\cdot 2 + 4\cdot 1 = 20 \\ 4\cdot 3 + 1\cdot 2 = 14 \\ 2\cdot 3 = 6 \\ \hline 76\,230 \end{array}$$

Действие располагается так:

$$\begin{array}{r} 315 \\ 242 \\ \hline 76\,230 \end{array}$$

(Для облегчения работы единицы высшего разряда, которые необходимо помнить, записываются мелким шрифтом и зачеркиваются тотчас после использования.)

Пример 4.

$$\begin{array}{r} 315 \\ 462 \\ \hline 5\cdot 2 = 10 = 0\ (1) \\ 5\cdot 6 + 2\cdot 1 + 1 = 33 = 3(3) \\ 5\cdot 4 + 3\cdot 2 + 1\cdot 6 + 3 = 35 = 5(3) \\ 1\cdot 4 + 6\cdot 3 + 3 = 25 = 5\ (2) \\ 3\cdot 4 + 2 = 14 \\ \hline 145\,530 \end{array}$$

Прием 3. Умножение приближенных значений чисел (*правило Утрехта*)

Пусть требуется перемножить числа с четырьмя значащими цифрами, например, $21{,}68 \cdot 34{,}72$.

Обычный метод приводит к результату:

$$\begin{array}{r} 21{,}68 \\ 34{,}72 \\ \hline 4336 \\ 15176 \\ 8672 \\ 6504 \\ \hline 752{,}7296 \approx 752{,}7, \end{array}$$

где получение трех последних знаков — излишний труд (всего в записи 30 знаков).

Выделение наиболее надежных четырех знаков высших разрядов легко определится при расположении действия, в котором множитель записан в обратном порядке: от высших разрядов (справа) к низшим (слева).

Пример 1.

```
  2168⋮
  2743⋮
 ─────────
  6 504⋮
    867⋮2
    151⋮76
      4⋮336
 ─────────
  7526⋮
   752,7
```

За пунктир отнесены знаки, которые выходят за границу заданной точности четырех значащих цифр.

Практически удобнее писать так:

```
                          2 168
                          2 743
                         ───────
(2 168 · 3) =             6 504
(  216 · 4) =               867
(   21 · 7) =               151
(    2 · 2) =                 4
─────────────────────────────────
                           7526
                          752,7
```

После отыскания частных произведений слегка зачеркиваются отработанная цифра множителя и стоящая над ней цифра множимого.

Последующие произведения отыскиваются только относительно незачеркнутых цифр множимого.

Вычислитель принимает во внимание единицы высшего разряда, которые получились бы от умножения на зачеркнутые цифры * (в обиходе про эти числа говорят «в уме»).

```
 2 168
 2 743
───────
 6504      Далее:  4 · 8 = 32;        „3" — запоминаем;
                   4 · 6 + 3 = 27     и т. д.
                   7 · 6 = 42;        „4" — запоминаем
                   7 · 1 + 4 = 11     и т. д.
```

Так как опущенные числа в сумме дают (это видно) более 5, то общее произведение увеличивается на 1, т. е. 7526 приводится к итогу 7527.

---

* Во всех случаях, где говорится о действиях над «цифрами», надо понимать: над числами, выраженными данными цифрами.

Пример 2. Произведение чисел с неравным количеством знаков 21,68 · 3,74.

$$\begin{array}{r} 2168 \\ 473 \\ \hline 6504 \\ 1518 \\ 86 \\ \hline 81,08 \approx 81,1 \end{array}$$

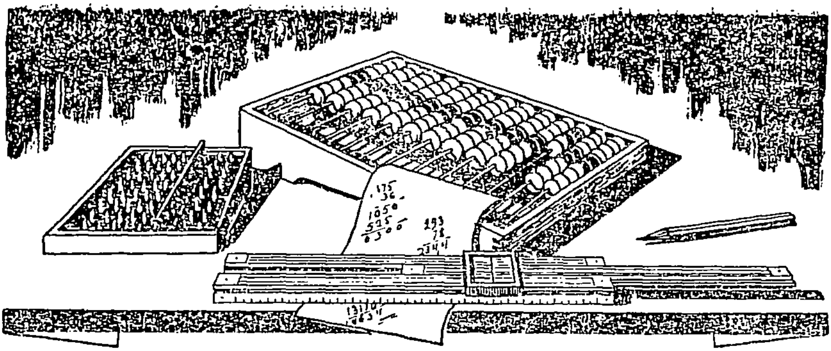
Указание. Целая часть произведения найдется умножением приближенных значений $20 \cdot 4 = 80$; результат — двузначное целое число.

Пример 3. Отыскание произведения с заданной точностью.

Найти произведение чисел 23,15 на 36,25 с одним десятичным знаком в результате после запятой.

$$\begin{array}{r} x\;\;\; \\ 23,15 \\ 52,63 \\ \hline 69\,45 \\ 13\,89 \\ 46 \\ 11 \\ \hline 839,1 \end{array}$$

Указание. Знак x соответствует заданию сохранить один знак после запятой; он же указывает место, куда должны быть подписаны единицы множителя.



ТЕХНИКА ВЫЧИСЛЕНИЙ

Количественный учет и вычисления сопровождают культурного человека во всей его производственной и бытовой практике. В то же время мы наблюдаем даже среди специалистов, как слабые навыки в вычислениях вызывают в их работе лишние усилия, ошибки и неуверенность. К сожалению, правильно, быстро и легко вычислять нельзя научиться сразу, единовременно (даже при большом желании и усилии воли), а для этого нужны длительные и систематические упражнения. Школьные годы в этом отношении — лучшее время, ибо процесс образования протекает систематично, длительно и позволяет связать вычисления с теоретическими данными и выработкой внимания, настойчивости и порядка.

В педагогике немало внимания уделялось анализу ошибок и предупреждению их. Основную трудность в борьбе с ошибками составляет их случайность. Так, например, известно, что при переписывании часто допускаются ошибки, вызванные или невнимательностью или небрежными записями в так называемых «черновиках». «Черновик», «начерно» наиболее ходовые термины, за которыми часто кроется ученическое «грязновик». Весь вред от торопливых вычислений на клочке бумаги, на парте, «промакашке» всем очевиден. Недаром в качестве основных методов борьбы с вычислительными ошибками выдвигаются требования вычислять тут же в чистовых тетрадях или, заменив даже термин «черновик», ввести особые «вспомогательные листы» и на них вычислять с максимальной тщательностью и осторожностью.

Следует решительно изменить отношение ученика к своей первичной творческой работе по составлению эскиза, проекта чертежа, пробного расчета и т. п. На этом пути все средства хороши, в частности, отказ от черновиков. Нам, однако, жаль простого русского слова, за которым отнюдь не кроются значения «кое-как», «наспех», а наоборот — «пробный», «проект», «вспомогательный» — служат его синонимами. Важно переубедить учащихся в их отношении к пробному чертежу, первичному расчету, тем самым и к «черновику», где в сущности и содержится главная часть работы.

Надо добиться, чтобы учащимся было понятно следующее:

1. При вычислении нет «неважных» действий, «пустяковых» ошибок, описок!

Ошибочно взято число из условия, спутаны два действия, в таблицах взяты не те строки, не тот столбец: выбраны данные из таблицы логарифмов, вместо антилогарифмов и т. д.— все это досадные, но грубые ошибки.

2. Только при неторопливой и аккуратной записи можно успеть просмотреть задание, его выполнение, заметить ошибку, исправить ее.

3. При утомлении, особенно переутомлении, трудно рассчитывать на правильные результаты от вычислений.

4. Вычисления следует вести сосредоточенно, не допуская каких-либо посторонних размышлений.

Все эти меры уменьшают вероятность ошибки, но не гарантируют от ее появления, поэтому в технике вычислений можно найти ряд приемов по оформлению действий, а, главное, по проверке их, которые необходимо твердо знать и применять на деле всякому вычислителю, каждому школьнику.

В связи с этим необходимо отметить:

1) вычислять надо на листах не более страницы из тетради, иначе записи трудно обозримы (малые листы приходится часто менять, переносить незаконченное действие с листа на лист). Удобнее всего пользоваться графленой бумагой (клетчатой), согнутой (или разделенной) пополам на колонки (столбцы) сверху — вниз.

Такая форма вычислительного листа заставляет направлять записи аккуратной вертикальной колонкой.

Писать следует только на одной стороне; страницы нумеровать. При этом будет удобно проверить действия и, благодаря пометке страницы вычислений, восстанавливать и находить нужные записи;

2) рекомендуется употребление полосок («движков»), с помощью которых можно отмечать (выделять) рабочую группу чисел;

3) при всякого рода считках текста и чисел копия должна находиться не у того, кто ее снимал;

4) размер цифр при вычислениях несколько уменьшается по сравнению с основными записями (75%);

5) затрата времени на проверку вычислений экономит время на все вычисление;

6) с помощью особых знаков, рамок полезно выделять необходимые группы чисел;

Примеры: $\boxed{\begin{array}{c}64\\64\\\hline 4096\end{array}}$, $\boxed{x = \pm\sqrt{2}}$; $\sqrt{49} = \pm 7$ и т. д.;

7) при сложных расчетах рекомендуется вычислять, проверять отдельные детали (части) задания;

8) излишняя осторожность, недоверие, неуверенность — вредны;

9) в начале работы следует выполнять наиболее сложные, трудные части ее;

10) записи с ошибочными результатами, ненужные записи следует уничтожать.

Проверка вычислений

Проверке вычислений необходимо уделять **не меньшее** внимание, чем самому вычислению результата. Только при этом условии можно нести ответственность за предлагаемые результаты, а не решать задачи «по ответу». Неумение школьников проверять свои результаты действий делает их беспомощными на практической работе.

Среди приемов проверки действий различаются:

1. Грубо-приближенная прикидка результата.

Опыт показывает, что наиболее часты грубые ошибки. Они легко открываются приближенной прикидкой.

Пример на правило Утрехта:

$$\begin{array}{r} 2168 \\ 374 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2168 \\ 473 \\ \hline 6504 \\ 1518 \\ 86 \\ \hline 8108 \end{array}$$

Тогда как $2 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 10^2 = 8 \cdot 10^5$, т. е. 800 000.

Явно, что вычислитель не принял во внимание «значности» числа и допустил грубый просчет. Действие над округленными числами укажет число цифр; в данном случае результат следует записать так: $8108 \cdot 10^2$, или 810 800.

2. Проверка прямым действием (в ином порядке)
3. Проверка обратным действием

} оба способа общеизвестны.

4. Проверка «в две руки».

Вычисления ведутся независимо двумя лицами. В местах, где получен законченный частный итог, вычислители сравнивают свои результаты, начиная с последних из них.

5. Применение счетных приборов (счетов, счетной линейки).

6. Применение контрольных формул.

Пример. Пусть требуется найти углы косоугольного треугольника по заданным трем сторонам. Одно вычисление ведется по теореме косинусов

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Другое по формуле

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}.$$

Полученная при этом невязка от приближенности значений чисел подсчитывается и служит критерием справедливости найденных результатов.

7. Легким, быстрым и изящным методом проверки результатов действий следует признать так называемый метод девятки.

Укажем основные теоремы, на которые опирается этот метод, и приведем примеры.

Правило «девятки»

Условимся относительно нового понятия «сравнимо».

Число a сравнимо с числом b по модулю m, значит разность $a - b$ делится на m нацело, без остатка. Обозначается эта так: «сравнимо» $\equiv$ «по модулю» (m).

Теорема I.

$$\begin{array}{rl} \text{Если } a \equiv b(m) & \\ c \equiv d(m) & \\ \hline \text{то } a + c \equiv b + d(m); & \end{array} \qquad \begin{array}{c} a - b = km \\ c - d = lm \\ \hline (a + c) - (b + d) = m(k + l), \end{array}$$

т. е. $a + c \equiv b + d(m)$.

Теорема II.

$$\begin{array}{rl} \text{Если } a \equiv b(m) & \\ c \equiv d(m) & \\ \hline \text{то } a - c \equiv b - d(m); & \end{array} \qquad \begin{array}{c} a - b = km \\ c - d = lm \\ \hline (a - c) - (b - d) = m(k - l), \end{array}$$

т. е. $a - c \equiv b - d$.

Теорема III.

$$\begin{array}{rl} \text{Если } a \equiv b(m) & \\ c \equiv d(m) & \\ \hline \text{то } ac \equiv bd(m); & \end{array} \qquad \begin{array}{c} a = b + km \\ c = d + lm \\ \hline ac = bd + m(bl + kd) + m^2lk; \end{array}$$

$ac - bd = mM$, т. е. $ac \equiv bd(m)$.

Теорема IV.

$$\frac{\text{Если } a \equiv b(m)}{\text{то } na \equiv nb(m)}; \qquad \frac{a - b = km}{na - nb = nkm,}$$

$$\text{т. е. } na \equiv nb(m).$$

Лемма. Всякое число сравнимо с суммой своих цифр по модулю 9.

$$357 \equiv 3 + 5 + 7 \ (9)$$

$$\begin{array}{rcl} 1 \equiv 1 \ (9) & \qquad & 7 \equiv 7 \ (9) \\ 10 \equiv 1 \ (9) & & 50 \equiv 5 \ (9) \\ 100 \equiv 1 \ (9) & & \underline{300 \equiv 3 \ (9)} \\ & & 357 \equiv 3 + 5 + 7 \ (9). \end{array}$$

Пример приложения этих теорем. Пусть требуется найти сумму чисел $S = 987 + 786 + 854$

$$\begin{array}{l} 987 \equiv 9 + 8 + 7 \equiv 24 \equiv 6 \ (9) \\ 786 \equiv 7 + 8 + 6 \equiv 21 \equiv 3 \ (9) \\ \underline{854 \equiv 8 + 5 + 4 \equiv 17 \equiv 8 \ (9)} \\ 2627 \equiv 2 + 6 + 2 + 7 \equiv 17 \equiv 8 \ (9) \end{array}$$

На практике поступают так:
987; сумма цифр $9 + 8 + 1 + 6 \equiv 6 \ (9)$.
786; сумма цифр $7 + 2 + 8 + 1 + 3 \equiv 3 \ (9)$.
854; сумма цифр $8 + 1 + 4 + 4 \equiv 8 \ (9)$.
Затем, $6 + 3 + 8 \equiv 8 \ (9)$ и $2\,627 \equiv 8 \ (9)$.

Сложение сделано верно, т. е. ведут сравнение каждого слагаемого $6 + 3 + 8 \equiv 8 \ (9)$ и всей суммы $2627 \equiv 8 \ (9)$.

Результаты одинаковы; действие проверено.

Упражнения

1. Припомните индусский способ умножения чисел.
2. Найдите произведения чисел.

$$\begin{array}{r}134\\ \underline{256}\end{array}; \quad \begin{array}{r}318\\ \underline{144}\end{array}; \quad \begin{array}{r}512\\ \underline{137}\end{array}; \quad \begin{array}{r}416\\ \underline{213}\end{array}; \quad \begin{array}{r}641\\ \underline{563}\end{array}$$

$$\begin{array}{r}305\\ \underline{470}\end{array}; \quad \begin{array}{r}285\\ \underline{601}\end{array}; \quad \begin{array}{r}407\\ \underline{513}\end{array}; \quad \begin{array}{r}643\\ \underline{309}\end{array}; \quad \begin{array}{r}141\\ \underline{108}\end{array}$$

$$\begin{array}{r}207\\ \underline{207}\end{array}; \quad \begin{array}{r}504\\ \underline{504}\end{array}; \quad \begin{array}{r}308\\ \underline{308}\end{array}; \quad \begin{array}{r}602\\ \underline{602}\end{array}; \quad \begin{array}{r}109\\ \underline{109}\end{array}$$

3. Обоснуйте прием умножения: $84 \cdot 101 = 8484$, т. е. действие сводится к двукратному написанию двузначного множимого ($56 \cdot 101 = 5656$).

Сокращенные приемы вычислений
(правило Утрехта)

Практическая работа № 1

Проделайте самостоятельно умножение чисел, придуманных вами, и сравните сокращенный прием с обычным; для этого определите относительную погрешность результата. Приведем образец:

Прием 1 (обычный)

```
      23,15
      36,25
    -------
      11575
      4630
    13890
    6945
    -----------
    839,1875≈839,2
    (25 знаков записи)
```

Прием 2 (сокращенный)

```
         23,15
         52,63
       -------
    (3)  6945
    (6)  1389
    (2)    46
    (5)    11
       -------
         839,2
    (16 знаков записи)
```

Указания к действию в приеме 2.

1. Множитель записывается в порядке, обратном принятому.

2. Произведение на 3 (единицы высшего разряда) записывается.

3. Зачеркиваются цифры 5 множимого и 3 множителя.

4. Производится умножение на 6, начиная с $6 \cdot 1$, из произведения $6 \cdot 5 = 30$ берется только три единицы высшего разряда и прибавляется к соответственному результату, т. е. $6 \cdot 1 + 3 = 9$ и т. д.

Практическая работа № 2

а) Применяя сокращенный прием умножения, найдите произведения чисел:

$$\left.\begin{array}{l} 28{,}63 \cdot 5{,}721 \\ 3{,}1416 \cdot 9{,}3649 \\ 63{,}02 \cdot 0{,}2714 \end{array}\right\}$$ (Проверьте результат приближенным устным подсчетом.)

б) Площадь прямоугольника вычисляется по формуле $S = ab$; объем параллелепипеда — $V = abc$; объем куба $V=a^3$; длина окружности $C = \pi \cdot D$; площадь круга $S = \frac{\pi D^2}{4}$.

Вычислите сокращенными способами умножения длину окружности, площади и объемы при следующих данных:

a	b	c	π	D
3,69	4,71	2,88	3,14	5,40

(Проверьте результаты приближенным устным подсчетом.)

Практическая работа № 3

1. Проделайте сами и сравните приемы деления приближенных значений чисел, придуманных вами. Ниже дан образец.

78,24	42,36	78,24	42,36
42 36	1,847	42 36	1,847
35 680		3588	
33 888		3388	
1 9920		200	
1 6944		169	
2 9760		31	
2 9652		29	
1080		2	

2. Укажите, в чем состоит облегчение деления во втором случае.

Практическая работа № 4

Применяя сокращенные приемы, найдите частные деления чисел: 4572 : 0,653; 93,04 : 153; 0,6831 : 0,0467; 7083 : 25,9; 35,64 : 426.

Практическая работа № 5

Определите отношение чисел: 19,75 и 8,7; 300 и 95,0; 44,6 и 5,39.

Практическая работа № 6

Вычислите результаты действий:

$$K_1 = \frac{0,284 \cdot 76,3}{81,4}\ ;\ K_2 = \frac{324 \cdot 670}{2935}\ ;\ K_3 = \frac{162,4 \cdot 15,6}{29,7}\,.$$

Проверьте вычисления приближенным подсчетом в уме.

Письменные вычисления

Постепенно в учебную практику начинают проникать рациональные приемы записей, употребляемых в технических расчетах. Так, классы многозначных чисел отделяются либо интервалами между цифрами, либо штрихами сверху — справа от цифры: 6 472 005 или 6’472’005. Этот способ страхует от возможности ошибочных толкований записи 6,472 как числа в шесть тысяч... или шесть целых...

Полезно в образовательном отношении употребление записи нулей на концах числа как степени с основанием 10. Так, приближенное расстояние от Земли до Солнца $D = 150\,000\,000$ *км* представится как: $D = 15 \cdot 10^7$ *км*, или

$D = 150 \cdot 10^6$ *км*; длина волны красного луча $\lambda = 0,8$ $m\mu = 0,0000008$ *мм* $= 8 \cdot 10^{-7}$ *мм*. В технике почти всегда расчеты ведутся на графленой (клетчатой) бумаге; вычисления располагаются в виде схем (таблиц).

Пусть требуется найти числовое значение функции $y = x^2 \cdot \sqrt{1,29 - x^5}$. Предлагаемая схема особенно целесообразна для случая нескольких значений аргумента (x):

$y = x^2 \cdot \sqrt{1,29 - x^5}$						
x	x^2	x^3	x^5	$1,29 - x^5$	$\sqrt{1,29 - x^5}$	$y = x^2 \sqrt{1,29 - x^5}$

Заданное число x необходимо возвести в квадрат. Для отыскания x^5 разумно подсчитать x^3 (что получается простым перемножением x^2 на x) и затем найти x^5 как произведение двух соседних колонок с x^2 и x^3.

Разность $1,29 - x^5$ в различных строках схемы можно вычислить так: написать уменьшаемое «1,29» на полоске бумаги, прикладывать ее над различными значениями x^5 и разность от вычитания записывать в соседнюю колонку.

Далее находится $\sqrt{1,29 - x^5}$ и окончательное значение функции y.

При составлении схемы все в н и м а н и е сосредоточено на анализе и установлении п о р я д к а действий, затем вычислитель занят только в ы б о р к о й необходимых данных из таблиц, затем только с ч е т о м и, наконец, проверкой и анализом полученного результата. В работе достигается единообразие: если найден x^2 для 0,2; 0,3; 0,5; 1,0; 2,0, то сосредоточенность на одной операции — возведения в квадрат — вырабатывает определенную уверенность в расчете, технику вычисления. В этих условиях получается наименьшая вероятность появления случайной ошибки и упрощение труда, ибо вся схема легко обозрима и удобна для проверки.

Высказанные соображения особенно подтверждаются при вычислениях с логарифмами.

Пусть находится площадь треугольника по формуле

$$S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}.$$

План вычисления можно представить в виде схемы:

a	56,4 *м*	lg a	1,7513	2lg$a$	3,5026
B	36°24′			lg Sin B	$\bar{1}$,7734
C	62°50′			lg Sin C	$\bar{1}$,9492
A	80°46′	lg Sin A	$\bar{1}$,9944	Co lg	0,0056
	2	lg 2	0,3010	Co lg	$\bar{1}$,6990
				lg S	2,9298
				S	850,7

В первой колонке проставляются числовые данные; lg Sin B и lg Sin C переносятся в правую колонку; lg a и lg Sin A записываются в среднюю колонку, ибо они подвергаются дополнительной обработке:

$$[(\lg a)\cdot 2 \text{ и } \mathrm{Colg} \sin A].$$

Под горизонтальной чертой выделяется место для lg$S$ и самого S.

Порядок действий продуман и оформлен в нужной последовательности.

Разделение работы на отдельные специальные виды помогает сосредоточиться и провести ее уверенно, без ошибок.

Остается порекомендовать равномерно располагать знаки на листе бумаги, выдерживать интервалы между действиями, выделять найденные результаты, отработанные записи прикрывать чистым листом, уничтожать ошибочные, писать цифры размером в 0,75 клетки тетради и т. д.

Вспомогательные, дополнительные записи можно располагать здесь же на основном листе, отделяя временные «поля». Эти действия, эскизы, пробные подсчеты следует писать мельче, чем остальные записи. Рабочий лист будет иметь вид:

. . . .   28 % от 25,4

. . . .   25,4

. . . .   0,28

1627,9 | 34

. . . .   1542,1

. . . .   85,8

. . . .   1627,9

Одновременно можно порекомендовать дополнительные записи, зарисовки, вычисления производить на особом вспомогательном листе клетчатой бумаги, на котором посередине вертикально проведена яркая прямая линия. Благодаря такому оформлению листа будет бо́льшая гарантия в том, что вычисления проведутся аккуратно, без ошибок.

Крайне желательно, чтобы такой рабочий лист (тетрадь) стали местом расчетов по математике, физике, химии.

Практическая работа. Подсчитайте суммы и заполните таблицу.

	a	b	c	Итог
m	487,39	196,09	7,56	$\Sigma\, m$
n	729,67	405,23	0,48	$\Sigma\, n$
p	27,30	666,75	3,23	$\Sigma\, p$
q	581,26	248,52	12,36	$\Sigma\, q$
r	988,74	400,25	10,97	$\Sigma\, r$
s	276,54	209,64	0,81	$\Sigma\, s$
Всего	$\Sigma\, a$	$\Sigma\, b$	$\Sigma\, c$	*

Указание. Считайте, не переписывая; проверьте результаты на счетах; клетка со знаком «*» заполнится одинаковой суммой, полученной от сложения последней строки и последней колонки. Σ — сумма.

Счеты

Изучение счетов и их применение предусмотрено программой по математики для средней школы. Главное управление технической промышленности Министерства просвещения выпускает для школ специальные учебные счеты. В то же время уроки со счетами чрезвычайно редки, ведутся они не во всех школах.

Ясно, что такое положение необходимо решительно изменить и сделать это ценное пособие общепринятым на уроках.

Так называемые «конторские» (торговые) счеты имеют, кроме проволок с десятью шашками, две проволоки с четырьмя шашками для обозначения долей: половин и четвертей. Эти доли малоупотребительны при метрической системе мер; на новых образцах конторских счетов, так же как и на учебных, можно откладывать десятые, сотые, тысячные доли, благодаря чему постановка чисел на приборе соответствует десятичной системе нумерации.

На счетах при сложении однозначных чисел, дающих в сумме более 10, употребляются два приема, которые мы разберем на примере $7+5=12$.

Кладутся сперва 7 шашек, затем одна единица высшего (следующего) разряда, а 5 шашек из 7 сбрасываются; в результате на счетах получается искомое число 12. Этим приемом, как правило, пользуются практики (товароведы, счетные работники, статистики).

Другой способ заключается в следующем: к 7 шашкам прибавляются имеющиеся на проволоке 3, полученные 10 шашек сбрасывают, заменяя одной шашкой следующего, высшего разряда, и добавляют еще 2 шашки на первой проволоке. При малейшем навыке в этот прием вносится следующее видоизменение: положено 7, требуется прибавить 5. Мысленно проводится весь процесс, т. е. добавляются 3 шашки, сбрасывается 10 шашек, кладутся 2 шашки (на приборе ставится единица высшего разряда и сбрасываются на первой проволоке все шашки, кроме двух).

Смысл последнего способа в том, что отсчитать и сбросить 5 шашек (I прием) труднее, чем сохранить на проволоке 2 шашки.

Очевидно, правильным следует признать абсолютное владение обоими приемами; тогда, если условие требует сбросить число шашек, меньшее 5 (1, 2, 3, 4), удобнее применять I прием практиков, в другом случае, когда приходится оставлять на проволоке число шашек, меньшее 5, рациональнее воспользоваться приемом II.

Практики сбрасывают шашки группами, т. е. $5=3+2$; $7=4+3$ и т. п.

В школах счетам обучают в тот момент, когда это указано программой, а затем счеты забываются. Лишь отдельные учителя время от времени возвращаются к этому прибору, ценному в методическом и практическом отношении. На деле счетами следует пользоваться на **каждом** уроке, на котором производится сложение — вычитание чисел. В частности, требование производить **проверку** действий легко выполнить, если на парте перед учеником лежат счеты: письменное сложение (вычитание) проверяется на приборе; действия на счетах следует проверить письменно. Это положение вытекает из методического требования к школе — привить **твердые** навыки в письменных приемах числовых действий и в производстве действий на счетах.

Время от времени (в зависимости от класса и темы курса) необходимо проводить практические вычислительные занятия с применением счетов.

Практическая работа № 1

1. Сложите на счетах и проверьте письменно:

$$2581 + 4739 + 6456 + 41 + 700.$$

2. Найдите сумму на счетах и проверьте результат вычитанием на счетах.

3. Заметьте время (и запишите его в таблице), которое вы потратите на отыскание суммы чисел $35,64 + 49,70 + 27,9 + + 80 + 51,57$ на счетах и письменно.

4. Найдите на счетах результат вычислений:

$$M = 0,6 + 29,81 - (48,16 - 1,24) + 96,36.$$

Проверьте на счетах его правильность. Повторите три раза ваши расчеты. Укажите время, потраченное вами на эту работу.

Практическая работа № 2

Просчитайте несколько раз итог одной страницы бухгалтерской книги вашей школы («Перенос»).

Заметьте время, потраченное на суммирование и проверку; запишите его в виде таблицы и обработайте по образцу предыдущего упражнения.

Практическая работа № 3

Указания 1. Среднее арифметическое чисел a_1, $a_2, a_3 \ldots a_n$ находится по формуле (1):

$$a_{ср.} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n}. \qquad (1)$$

2. Среднее арифметическое можно найти по другой формуле.

Пусть даны числа a_1, a_2, $a_3 \ldots a_n$, выберем $A_{ср.}$ приближенно, на глаз; назовем через α_1; α_2; α_3; $\ldots$ α_n отклонения $A_{ср.}$ от данных чисел, т. е. $a_1 - A_{ср.} = \alpha_1$ и т. д., тогда

$$a_{ср.} = A_{ср.} + \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n}{n}. \qquad (2)$$

Например,

$a_1 = 47$	Пусть $A_{ср.} = 47$	α_1	0
$a_2 = 49$		α_2	2
$a_3 = 48$		α_3	1
			$3 : 3 = 1.$

$$a_{ср.} = 47 + 1 = 48.$$

Найдите с помощью счетов среднее арифметическое чисел (с проверкой): 355,0; 359,1; 354,6; 352,8; 357,5, и, пользуясь формулой (1) и (2), сопоставьте время, которое уходит на отыскание среднего арифметического по каждой из этих формул. Данные наблюдения оформите в виде таблицы.

Практическая работа № 4

Примените счеты к вычислениям с логарифмами.

а) Найдите площадь треугольника по формуле

$$S = \frac{a^2 \sin B \cdot \sin C}{\sin A},$$

где:

$$a = 56{,}4\ м,$$
$$\angle B = 47^\circ 28',$$
$$\angle C = 36^\circ 52'.$$

б) Составьте схему, вычислите значение S и проверьте результат с помощью счетов.

Нужно ли, вычисляя счетами, брать кологарифмы?

Логарифмическая счетная линейка

В современной технике чрезвычайно распространены счетные машины и вычислительные приборы. Среди последних наиболее доступны и удобны логарифмические линейки. Следует отметить, что линейка должна найти максимальное приложение на уроках математики, ибо принципиальные основы разметки шкал и методы работы на линейке представляют большой интерес.

Приведем далее некоторые данные.

Линейка (рис. 212) состоит из деревянного корпуса, в пазу которого ходит особая пластина («движок»). На лицевой стороне корпуса имеются шкалы: шкала мантисс, основная шкала чисел (в нижней части), шкала квадратов и кубов чисел (в верхней части). Движок несет на себе шкалы, повторяющие шкалы корпуса. Лишь одна шкала на движке (посередине) размечена в обратном порядке. На обратной стороне движка находим тригонометрические функции, притом, для малых углов (до 6°, точнее 5°44′) посередине размечена одна шкала для синусов — тангенсов. Для остальных углов шкалы разделены: для синусов сверху, для тангенсов — снизу. (Подробные сведения о линейках можно найти в доступных руководствах: В. М. Брадис «Средства и способы элементарных вычислений», изд-во АПН, 1948; Г. М. Фихтенгольц «Математика для техников», Гиз, 1952; Е. Г. Ларченко «Техника вычислений», Геодезиздат, 1952; Д. И. Панов «Счетная линейка», Гос-

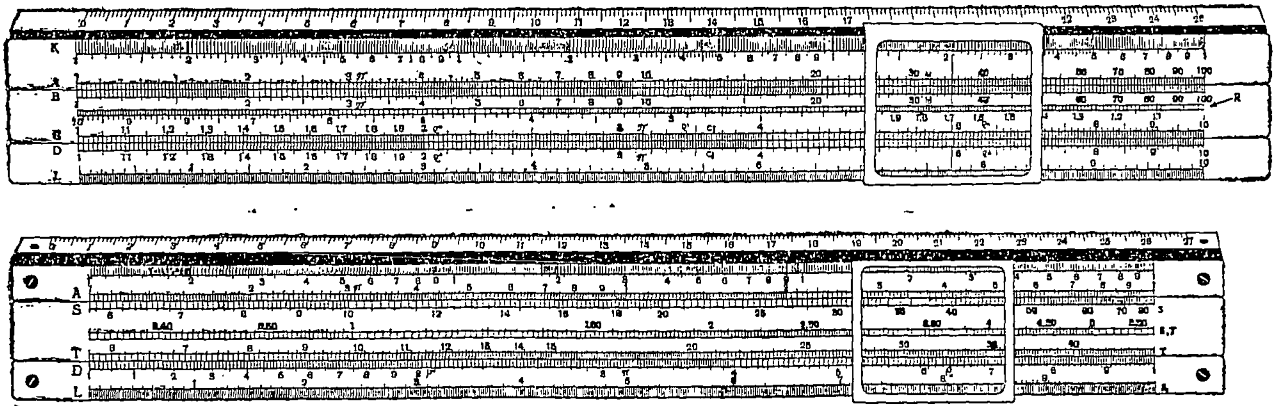


Рис. 212. Логарифмические линейки

техиздат, 1954; В. М. Семендяев «Счетная логарифмическая линейка», ГТТИ, 1955.)

С помощью логарифмической линейки можно вычислить произведения, частные, степени, корни (на линейке нельзя числа складывать и вычитать). Вычисления с помощью линейки сводятся к некоторой механической работе, исключающей умственное напряжение.

Необходимо учесть, что логарифмическая линейка имеет ограниченную точность, а именно: в начале линейки откладываются числа в 3—4 знака, в правом конце линейки — 2—3 знака. Но этого вполне достаточно для большинства расчетов технического характера, в том числе и для геодезии.

В частности, на линейке целесообразно производить предварительные расчеты, прикидку, проверку и т. п. В этих же направлениях следует использовать линейку в школьной практике. При помощи линейки следует решать задачи по геометрии, алгебре, тригонометрии, физике, химии, черчению, т. е. всякий раз, когда учащийся имеет дело с приближенными вычислениями.

В основу конструкции линейки положены следующие принципы:

1. На шкалах линейки нанесены не самые числа, а их логарифмы, даже не логарифмы, а только дробная часть их мантиссы. Поэтому действия умножения, деления, возведения в степень, извлечения корня сводятся к действиям на одну ступень ниже, т. е. к сложению, вычитанию или к переходу с одной шкалы на другую с новым модулем шкалы (характеристика отыскивается по соображению или по особым правилам).

2. Сложение — вычитание мантисс, выраженных отрезками, производится так же, как всякое геометрическое сложение отрезков с помощью двух линеек: одно слагаемое берется на одной линейке, другое — на второй, на движке.

3. На логарифмической шкале, как на всякой функциональной шкале, надписываются не значения функции, а их аргументы; так, не пишется lg1, lg2, lg3..., а ставится просто 1, 2, 3... Глядя на показание, например 257, следует понимать, что индекс указывает lg 257.

Разметка функциональных шкал строится так: пусть дана функция $y = f(x)$. По заданным значениям аргумента x_1, x_2, x_3... можно определить соответствующие значения функции y_1, y_2, y_3... Если теперь выбрать некоторый отрезок за единичный — масштаб шкалы или, как его называют, модуль шкалы — M, то геометрически значения функции изобразятся отрезками My_1, My_2, My_3... На такой шкале принято около штрихов, показывающих то или иное значение функции, надписывать соответствующие значения аргументов. Размеченная таким образом шкала носит название функциональной.

Для логарифмической функциональной шкалы расчет выглядит так: $y = \lg x$, при модуле $M = 250$ *мм* (наиболее распространенный размер линейки) будем иметь формулу для подсчета отрезков, изображающих значения функции $y = M \cdot \lg x$ или $y = 250 \lg x$.

В виде таблицы это запишется:

x	1	2	3	4	5
$\lg x$	0,000	0,301	0,477	0,502	0,699
$y = M \cdot y$	0,0	75,3	117,3	150,0	174,8

x	6	7	8	9	10
$\lg x$	0,778	0,845	0,903	0,954	1
$y = M \cdot y$	194,5	211,3	225,8	238,5	25,0 *мм*

Модуль рассчитывается следующим образом.

Пример: Пусть длина линейки (шкалы) равна $L = 250$ *мм*. Крайние значения функции $f(x)$ — правый конец $f(x_2) = \lg 10 = 1$ — левый конец $f(x_1) = \lg 1 = 0$.

$$M = \frac{L}{f(x_2) - f(x_1)} = \frac{250}{\lg 10 - \lg 1} = \frac{250}{1 - 0} = 250 \text{ мм}.$$

Из приведенной таблицы нетрудно заметить, что так как значения логарифмов растут непропорционально числам (0,301; 0,477; 0,602 ...), то отрезки на линейке, изображающие функции, образуют неравномерную шкалу.

Таблицы

Табличная форма задания функций стала наиболее распространенной в современной технике. При помощи таблиц работа по отыскиванию значений функций ускоряется, упрощается и отчасти автоматизируется. Создается бо́льшая гарантия безошибочности найденных результатов, чем при непосредственных вычислениях. Школа, в своих стремлениях подготовить учащихся к практической деятельности, не может пройти мимо столь совершенного приема получения необходимых величин и должна включить работу с таблицами в свои планы.

До сих пор обращение учащихся к таблицам сводилось к работе с логарифмами и натуральными тригонометрическими величинами. Без употребления оставались таблицы «постоянных величин» (Пржевальский) квадратов-кубов, корней из чисел и др.

Считаем, что в школе, после усвоения устных и письменных вычислений, полезно употреблять таблицы — иногда для проверки полученных результатов, а в старших классах, где вычислительный процесс не является самоцелью,— для облегчения и ускорения работы. Кроме того, с помощью табличной записи учащиеся знакомятся со свойствами неалгебраических функций $y = \alpha_x\, y = \lg x$; $y = \sin x$. Следя за изменением величин $y = kx$; $y = \frac{k}{x}$; $y = x^2$; $y = \operatorname{tg} x$, ученики отыскивают промежуточные значения их (интерполирование).

Некоторые осложнения в работе с таблицами возникают из-за того, что таблиц много, а в относительно точных таблицах большое количество страниц, и отыскание необходимых данных представляет известную трудность.

Далее мы остановимся на таблицах, недостаточно использованных в школе.

Таблицы О'Рурка

Среди таблиц, играющих роль вспомогательного средства вычислений, на первое место по своей простоте и эффективности следует поставить таблицы умножения ученого и техника О'Рурка.

В таблицах помещены произведения всех чисел до 1000 на все двузначные числа. Таблицы имеют три входа: сперва ищется множимое, его произведения на круглые десятки и на единицы. Четкая печать, удобное расположение исходных данных позволяют легко отыскивать нужные результаты.

Вместо напряженного вычислительного труда дело сводится к некоторому вниманию при отыскании заданных множителей.

Пример 1. $736 \cdot 58$.

В книге таблиц находим страницу, где помещено над таблицей «736», сверху берем колонку 50, слева строку 8; на пересечении находится их искомое произведение 42 688 (см. стр. 273).

Пример 2. $736 \cdot 582$.

Берем с помощью таблиц $736 \cdot 580 = 426\,880$ и откладываем найденный результат на счетах.

Затем находим в таблице $736 \cdot 2 = 1472$
(или считаем «в уме»). Искомое произведение получится на счетах как сумма 428 352.

Таблицами умножения О'Рурка следует пользоваться и при делении; действительно, делитель можно рассматривать как

(Из книги О'Рурка «Таблицы умножения», Госстатиздат, 1957)

734

100	200	300	400	500	600	700	800	900
73400	146800	220200	293600	367000	440400	513800	587200	660600

	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	
0	—	7340	14680	22020	29360	36700	44040	51380	58720	66060	0
1	734	8074	15414	22754	30094	37434	44774	52114	59454	66794	1
2	1468	8808	16148	23488	30828	38168	45508	52848	60188	67528	2
3	2202	9542	16882	24222	31562	38902	46242	53582	60922	68262	3
4	2936	10276	17616	24956	32296	39636	46976	54316	61656	68996	4
5	3670	11010	18350	25690	33030	40370	47710	55050	62390	69730	5
6	4404	11744	19084	26424	33764	41104	48444	55784	63124	70464	6
7	5138	12478	19818	27158	34498	41838	49178	56518	63858	71198	7
8	5872	13212	20552	27892	35232	42572	49912	57252	64592	71932	8
9	6606	13946	21286	28626	35966	43306	50646	57986	65326	72666	9

735

100	200	300	400	500	600	700	800	900
73500	147000	220500	294000	367500	441000	514500	588000	661500

	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	
0	—	7350	14700	22050	29400	36750	44100	51450	58800	66150	0
1	735	8085	15435	22785	30135	37485	44835	52185	59535	66885	1
2	1470	8820	16170	23520	30870	38220	45570	52920	60270	67620	2
3	2205	9555	16905	24255	31605	38955	46305	53655	61005	68355	3
4	2940	10290	17640	24990	32340	39690	47040	54390	61740	69090	4
5	3675	11025	18375	25725	33075	40425	47775	55125	62475	69825	5
6	4410	11760	19110	26460	33810	41160	48510	55860	63210	70560	6
7	5145	12495	19845	27195	34545	41895	49245	56595	63945	71295	7
8	5880	13230	20580	27930	35280	42630	49980	57330	64680	72030	8
9	6615	13965	21315	28665	36015	43365	50715	58065	65415	72765	9

736

100	200	300	400	500	600	700	800	900
73600	147200	220800	294400	368000	441600	515200	588800	662400

	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	
0	—	7360	14720	22080	29440	36800	44160	51520	58880	66240	0
1	736	8096	15456	22816	30176	37536	44896	52256	59616	66976	1
2	1472	8832	16192	23552	30912	38272	45632	52992	60352	67712	2
3	2208	9568	16928	24288	31648	39008	46368	53728	61088	68448	3
4	2944	10304	17664	25024	32384	39744	47104	54464	61824	69184	4
5	3680	11040	18400	25760	33120	40480	47840	55200	62560	69920	5
6	4416	11776	19136	26496	33856	41216	48576	55936	63296	70656	6
7	5152	12512	19872	27232	34592	41952	49312	56672	64032	71392	7
8	5888	13248	20608	27968	35328	42688	50048	57408	64768	72128	8
9	6624	13984	21344	28704	36064	43424	50784	58144	65504	72864	9

множитель; найдем его в заголовке таблицы; делимое найдется среди произведений; частное выберется из соответствующих колонки и строки.

В случае трехзначного или многозначного частного приходится поступать иначе:

1) с помощью таблицы подбирается цифра частного;

2) по таблице же находятся отдельные произведения, которые приходится последовательно вычитать из делимого и остатков.

Пример 1. 33 856 : 529.

По таблице 529 находится число 33 856, которому соответствуют 60 и 4. Ответ 64.

Пример 2. 693 527 : 849.

В таблице 849 находим для 6935 цифру частного 8 и произведение 6792. Остаток 1432 в частном 1 определен обычным способом. Новый остаток 5837 дает по таблице частное 6. В результате 816 (остаток 743) и точнее 817.

Практическая работа № 1

С помощью таблиц О'Рурка найти произведения чисел:

897·6
354·24
609·87
729·64
256·327

Результаты проверить умножением.

Практическая работа № 2

С помощью таблиц О'Рурка и счетов найдите произведения чисел:

739 и 648
8429 и 502

Указание. В последнем случае используйте распределительный закон $(8420+9)\cdot(500+2)$ и отдельные результаты просуммируйте на счетах.

Проверьте результаты обычным письменным приемом.

Практическая работа № 3

Вычислите площадь участка 436×267 *м*; проверьте результат также по таблицам, взяв произведение $267 \cdot 436$.

Практическая работа № 4

Вычислите вес деревянной модели параллелепипеда. Для этого найдите необходимые данные, расположите их по схеме, вычисления производите по таблицам и счетам.

Практическая работа № 5

Установите количество пятитонных машин, необходимое для перевозки грузов: 28 052, 35 724, 61 907, 29 084, 60 072, 98 744, 11 527, 28 406, 65 013, 88 056 (пудов).

Грузоподъемность машины — 305 пудов.

Указание. При отсутствии таблиц О'Рурка составьте самостоятельно таблицу произведений.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
305	610	915	1220	1525	1830	2135	2440	2745

При составлении учтите и используйте, что:

$$
\begin{aligned}
&305 \cdot 3 = 305 \cdot 3 = 305 \cdot 2 + 305 \\
&305 \cdot 4 = 610 \cdot 2 \\
&305 \cdot 5 = 610 + 915 \\
&305 \cdot 6 = 915 \cdot 2 = 610 + 1220 \\
&305 \cdot 7 = 1830 + 305 \\
&305 \cdot 9 = 915 \cdot 3
\end{aligned}
$$

или придумайте другие комбинации действий, упрощающих вычисления.

«Математические» таблицы

Так принято называть таблицы, в которых в одном столбце указываются значения аргумента, а в другом — функции.

Такого рода таблицы широко применяются при технических расчетах; они помещены в различных справочниках и карманных книжках, но в школах, как правило, не употребляются. Между тем обращение к ним значительно ускорило бы решение примеров и задач.

Значения n^2; n^3 могут быть использованы при отыскании площадей, объемов и веса тел; данные $\frac{1}{n}$ освобождают вычислителя от необходимости производить деление. Длина окружности, площадь круга определяются колонками под заголовками πn; $\pi\frac{n^2}{4}$ и т. д. (см. таблицу на стр. 276).

Указание. Отыскание значений функции по таблицам имеет свои преимущества и недостатки. Так, вычисление функций по формулам универсально: оно дает результат для любого значения аргумента, но зато связано с кропотливым трудом расчета. Табличные данные функций свободны от названной выше нагрузки — их не рассчитывают, а просто выбирают

Степени, корни, натуральные логарифмы, обратные величины, длины окружностей и площади кругов

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi}{4} n^2$	n
150	22 500	3 375 000	12,2474	5,3133	5,01064	6,66667	471,24	17 671,5	150
151	22 801	3 442 951	12,2882	5,3251	5,01728	6,62252	474,38	17 907,9	151
152	23 104	3 511 808	12,3288	5,3368	5,02388	6,57895	477,52	18 145,8	152
153	23 409	3 581 577	12,3693	5,3485	5,03044	6,53595	480,66	18 385,4	153
154	23 716	3 652 264	12,4097	5,3601	5,03695	6,49351	483,81	18 626,5	154
155	24 025	3 723 875	12,4499	5,3717	5,04343	6,45161	486,95	18 869,2	155
156	24 336	3 796 416	12,4900	5,3832	5,04986	6,41026	490,09	19 113,4	156
157	24 649	3 869 893	12,5300	5,3947	5,05625	6,36943	493,23	19 359,3	157
158	24 964	3 944 312	12,5698	5,4061	5,06260	6,32911	496,37	19 606,7	158
159	25 281	4 019 679	12,6095	5,4175	5,06890	6,28931	499,51	19 085,7	159
160	25 600	4 096 000	12,6491	5,4288	5,07517	6,25000	502,65	20 106,2	160
161	25 921	4 173 281	12,6886	5,4401	5,08140	6,21118	505,80	20 358,3	161
162	26 244	4 251 528	12,7279	5,4514	5,08760	6,17284	508,94	20 612,0	162
163	26 569	4 330 747	12,7671	5,4626	5,09375	6,13497	512,08	20 867,2	163
164	26 896	4 410 944	12,8062	5,4737	5,09987	6,09750	515,22	21 124,1	164
165	27 225	4 492 125	12,8452	5,4848	5,10595	6,06061	518,36	21 382,5	165
166	27 556	4 574 296	12,8841	5,4959	5,11199	6,02410	521,50	21 642,4	166
167	27 889	4 657 463	12,9228	5,5069	5,11799	5,98802	524,65	21 904,0	167
168	28 224	4 741 632	12,9615	5,5178	5,12396	5,95238	527,79	22 167,1	168
169	28 561	4 826 809	13,0000	5,5288	5,12990	5,91716	530,93	22 431,8	169
170	28 900	4 913 000	13,0384	5,5397	5,13580	5,88235	534,07	22 698,6	170
171	29 241	5 000 211	13,0767	5,5505	5,14166	5,84795	537,21	22 965,8	171
172	29 584	5 088 448	13,1149	5,5613	5,14749	5,81395	540,35	23 235,2	172
173	29 929	5 177 717	13,1529	5,5721	5,15329	5,78035	543,50	23 506,2	173

174	30 276	5 268 024	13,1909	5,5828	5,15906	5,74713	546,64	23 778,7	174
175	30 625	5 359 375	13,2288	5,5934	5,16479	5,71429	549,78	24 052,8	175
176	30 976	5 451 776	13,2665	5,6041	5,17048	5,68112	552,92	24 328,5	176
177	31 329	5 545 233	13,3041	5,6147	5,17615	5,64972	556,06	24 605,7	177
178	31 684	5 639 752	13,3417	5,6252	5,18178	5,61798	559,20	24 884,6	178
179	32 041	5 735 339	13,3791	5,6357	5,18739	5,58659	562,35	25 164,9	179
180	32 400	5 832 000	13,4164	5,6462	5,19296	5,55556	565,49	25 446,9	180
181	32 761	5 929 741	13,4536	5,6567	5,19850	5,52486	568,63	25 730,4	181
182	33 124	6 028 568	13,4907	5,6671	5,20401	5,49451	571,77	26 015,5	182
183	33 489	6 128 487	13,5277	5,6774	5,20949	5,46448	574,91	26 302,2	183
184	33 856	6 229 504	13,5647	5,6877	5,21494	5,43478	578,05	26 590,4	184
185	34 225	6 331 625	13,6015	5,6980	5,22036	5,40541	581,19	26 880,3	185
186	34 596	6 434 856	13,6382	5,7083	5,22575	5,37634	584,34	27 171,6	186
187	34 969	6 539 203	13,6748	5,7185	5,23111	5,34759	587,48	27 464,6	187
188	35 344	6 644 672	13,7113	5,7287	5,23644	5,31915	590,62	27 759,1	188
189	35 721	6 751 269	13,7477	5,7388	5,24175	5,29101	593,76	28 055,2	189
190	36 100	6 859 000	13,7840	5,7489	5,24702	5,26316	596,90	28 352,9	190
191	36 481	6 967 871	13,8203	5,7590	5,25227	5,23560	600,04	28 652,1	191
192	36 864	7 077 888	13,8564	5.7690	5,25750	5,20833	603,19	28 952,9	192
193	37 249	7 189 057	13,8924	5,7790	5,26269	5,18135	606,33	29 255,3	193
194	37 636	7 301 384	13,9284	5,7890	5,26786	5,15464	609,47	29 559,2	194
195	38 025	7 414 875	13,9642	5,7989	5,27300	5,12821	612,61	29 864,8	195
196	38 416	7 529 536	14,0000	5,8088	5,27811	5,10204	615,75	30 171,9	196
197	38 809	7 645 373	14,0357	5,8186	5,28320	5,07614	618,89	30 480,5	197
198	39 204	7 762 392	14,0712	5,8285	5,28827	5,05051	622,04	30 790,7	198
199	39 601	7 880 599	14,1067	5,8383	5,29330	5,02513	625,18	31 102,6	199

из колонок с записями искомых значений; таким образом, здесь человек затрачивает только внимание, а потому меньше утомляется и более застрахован от ошибок. В то же время в таблицах аргументы приводятся лишь через определенный интервал: например, значения тригонометрических функций в небольших таблицах даются лишь для углов через 1°, или через 10′, или через 15′, наконец, иногда через 20′.

Процесс определения промежуточных значений функции по имеющимся в таблице носит название интерполяции * (говорят и интерполирование). В том случае, когда функция изменяется пропорционально изменению аргумента, интерполирование сводится к решению пропорции (линейное интерполирование); для функций логарифмических, показательных, тригонометрических, вообще для более сложных зависимостей, подсчет промежуточных значений функций представляет значительные сложности. Однако установлено, что даже для названных более сложных функций, в условиях точности, ограниченной четырьмя десятичными знаками после запятой, спокойно можно применять линейную интерполяцию, т. е. вести расчет из пропорции. Этот вывод легко проверить по данным краткой таблицы значений тригонометрических функций (приложение 10), в которой данные приведены через 20′.

Пример. Найти $\sin 16°27'$.

В таблице помещены: $\sin 16°20' = 0{,}2812$ и $\sin 16°40' = 0{,}2868$.

Прирост угла на 20′ вызывает изменение функции на 56 единиц четвертого знака (0,0056), т. е.:

$$\begin{matrix} 20' - 56 \text{ единиц} \\ 7' - x \end{matrix}\;; \quad x = \frac{28 \cdot 7}{10} = 19{,}6;$$

$$\begin{array}{r} \sin 16°20' - \;\; 0{,}2812 \\ 7' - \;\;\;\;\; 19{,}6 \\ \hline \sin 16°27' = \;\; 0{,}2832 \end{array}.$$

Предостережение. Для функции тангенса, начиная с аргументов в 70°, поправка значений функции принимает настолько значительные размеры, что линейной интерполяцией пользоваться нельзя, ибо в этом случае погрешности выходят за рамки допустимых.

Для школьной практики удобны таблицы со степенью точности аргумента в единицу; более подробные таблицы помещены в сборниках Е. М. Пржевальского, В. М. Брадиса.

---

* interpolatio — изменение.

Техника применения таблиц чрезвычайно проста:

1. Бумага с записями кладется под правую руку.
2. Таблицы — налево.
3. Быстро отыскиваются нужная страница и строка; для этого предварительно наблюдают лишь за числами, помещенными сверху и снизу страницы.
4. Нужная строка выделяется «движком» — полоской плотной бумаги (целлулоида), а найденный результат фиксируется пальцем на движке.

Подобное приспособление помогает выделить искомое число из общей массы цифровых знаков.

Вообще же необходимо учесть, что применение таблиц рационально т о л ь к о при наличии твердых навыков и известной скорости в отыскании нужных данных.

Практическая работа № 1

Определить площади квадратов с размерами:

Сторона	127	764	543	869	73	683	49	325
Площадь								

Практическая работа № 2

Заполнить схему, пользуясь «математическими» таблицами:

Сторона квадрата	216			608	
Площадь		151 321	20 736		314 721

Практическая работа № 3

Найти по таблице приближенные значения до 1 *м* сторон квадратов, площади которых равны: 95 400 *м*²; 20 000 *м*²; 4700 *м*²; 3000 *м*²; 16 650 *м*².

У к а з а н и е. Результаты расположить в схему.

Практическая работа № 4

Определить гипотенузу треугольников с катетами 134 и 56; 118 и 235; 94 и 310.

У к а з а н и е. Точность 1.

Практическая работа № 5

Площадь круга вычисляется по формуле $S = \frac{\pi D^2}{4}$.

Заполните таблицу:

D	23,4	6,4	37,5
D^2			
πD^2			
$\frac{\pi D^2}{4}$			

Практическая работа № 6

Определить объем шара по формуле $V = \frac{\pi D^3}{6}$.

D	18 *мм*	56 *мм*	72 *мм*
D^3			
πD^3			
$\frac{\pi D^3}{6}$			

Практическая работа № 7

Путь при равномерно-ускоренном движении рассчитывается по формуле $s = \frac{at^2}{2}$, где a — коэффициент ускорения — примем равным 9,8 (для падающего тела). Заполните таблицу:

t	13,4*сек*	25,7*сек*	36,8*сек*
t^2			
at^2			
$s = \frac{1}{2} at^2$			

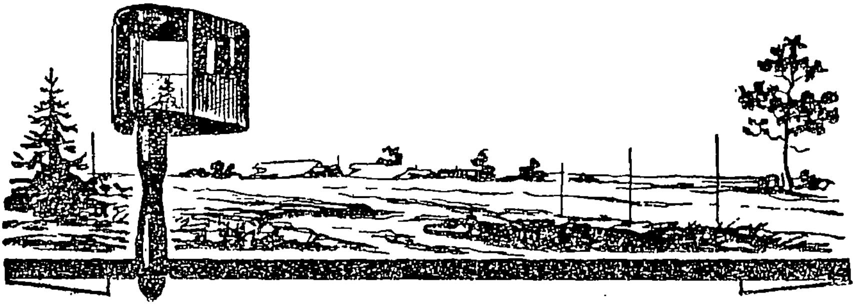
Часть III

ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ РАБОТЫ В КУРСЕ VIII—X КЛАССОВ

ЭЛЕМЕНТЫ АЭРОФОТОГЕОДЕЗИИ

Измерительные работы в курсе VIII—X классов

Элементы аэрофотогеодезии



СЪЕМКА УЧАСТКА ПО ХОДОВОЙ ЛИНИИ

(VIII класс)

Как известно, всякая точка на плоскости вполне определена двумя координатами — абсциссой и ординатой (в ортогональной Декартовой системе оси координат взаимно-перпендикулярны).

На этом принципе основана съемка по ходовой линии.

Пусть дан многоугольный участок $ABCDE$ (рис. 213).

Провешим ходовую линию (по возможности наибольшую диагональ участка, расположенную более или менее центрально). В этих условиях измерения получаются более однородными и точными, а проведение работы — более удобным.

Отметим затем проекции вершин многоугольника на ходовой линии: B_1; C_1; E_1;

Если теперь принять ходовую линию за ось абсцисс, а вершину A — за начало координат, направление от A к D считать положительным, выбрать единицу измерения на местности и масштаб для нанесения расстояний на план, то положение каждой из вершин на плане вполне определится двумя измерениями: B (AB_1; B_1B); C (AC_1; C_1C); E (AE_1; E_1E).

Отсюда устанавливается порядок этого вида съемки:

1. Наметить участок и его ориентиры: A; B; C; D; E.
2. Провешить ходовую линию AD и наметить ее колышками.
3. С помощью зеркального эккера отметить проекции вершины B_1, C_1, E_1 на ходовой линии.
4. Измерить расстояния: AB_1 и B_1B (если $BB_1 > 50$ *м*, то его следует предварительно провешить).
5. Для ориентировки плана измерить компасом или буссолью азимут ходовой линии.
6. Нанести результаты измерений (съемки) на бумагу.

Оборудование: 1. Линейные измерения следует вести рулеткой (мерной лентой). Расстояния 10—20 *м* длиной измеряются с точностью до 0,1 *м* (1 *дм*).

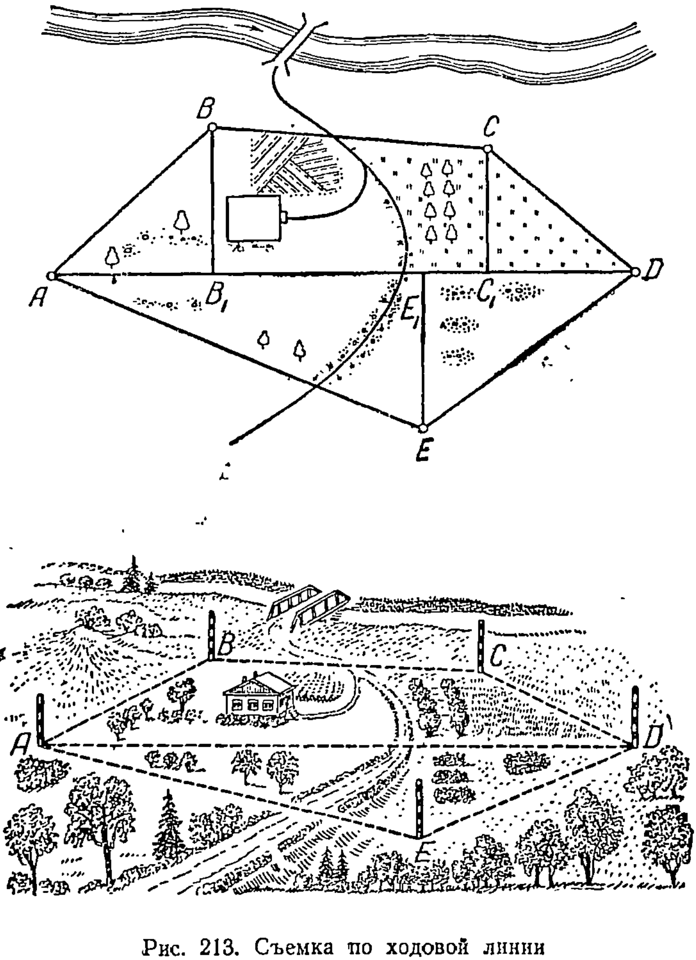


Рис. 213. Съемка по ходовой линии

Указание. Ленту следует защищать от загрязнения, после употребления тщательно вытирать. В сырую погоду, а также в том случае, если лента находится долгое время без употребления, ее надо слегка смазывать тавотом (употребляется для смазывания трущихся частей машин) или простым вазелином.

2. Угловые измерения проводятся зеркальным эккером.

Примечание. Примерные расстояния такого рода школьных работ колеблются в пределах 20—100 *м*. Округление до 0,1 *м* равносильно относительной ошибке $\frac{0,1\ м}{20\ м}$ до $\frac{0,1\ м}{100\ м}$, т. е. от $\frac{1}{200}$ до $\frac{1}{1000}$.

Зеркальный эккер, в свою очередь, дает точность порядка 30′ или в радианной мере $\frac{30'}{3438'} \approx \frac{30'}{3500'} \approx \frac{1}{100}$. Следовательно, относительные ошибки при округлении расстояния до 0,1 *м* $\left(\frac{1}{200} - \frac{1}{1000}\right)$ меньше, чем у зеркального эккера $\left(\frac{1}{100}\right)$. Округление линейного измерения до 0,01 *м* (1 *см*) привело бы к несоответствию точностей (рулетки и зеркального эккера).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ ТЕЧЕНИЯ РЕКИ

(VIII класс)

Оборудование: эккер, полевой циркуль, часы с секундной стрелкой.

При гидротехнических изысканиях бывает необходимо определить скорость течения реки. Гидротехники применяют для этого специальный прибор — «вертушку», которую опускают

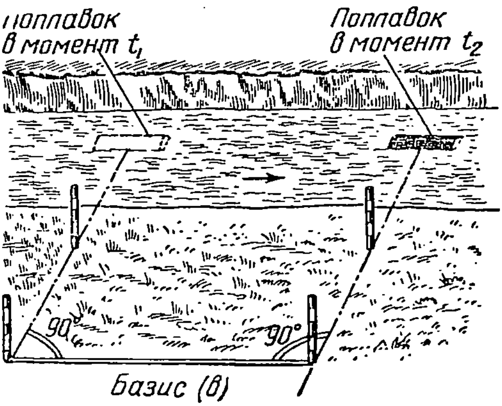


Рис. 214. Определение скорости течения

в воду, и на ее циферблате получают показания скорости. При отсутствии этого прибора скорость можно определить с помощью поплавка. Порядок работ при этом следующий:

1) на берегу, вдоль реки, измеряется базис B, из концов которого строят перпендикуляры, намечаемые небольшими вешками (рис. 214);

2) с лодки, находящейся выше створов, пускают поплавок — деревянный кружок, доску, полено;

3) по секундной стрелке берут отсчеты в момент прохода поплавка через створы (t_1 и t_2);

4) по формуле $v = \frac{B}{t_2 - t_1}$ определяют скорость течения.

Примечание. При отсутствии часов с секундной стрелкой следует изготовить «секундный маятник». Для этого следует подвесить отвес на бечевке длиною 1 *м*.

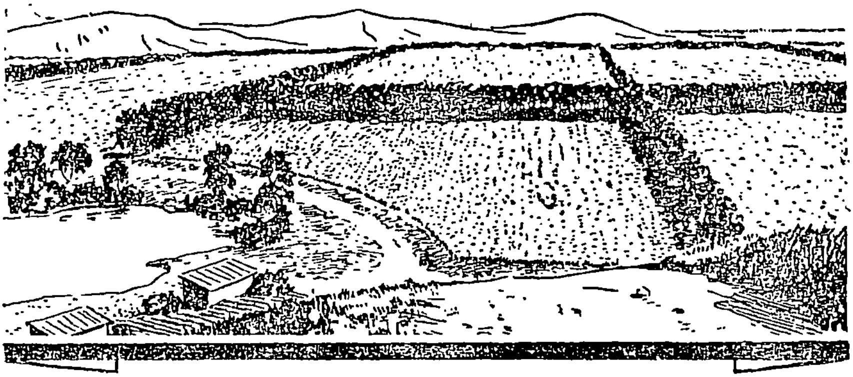
Действительно, по формуле математического маятника время качания, т. е. промежуток времени, в течение которого маятник доходит от одного крайнего положения до другого, равно:

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Отсюда,

$$\text{при } T = 1 \textit{ сек.}, \; g = 9{,}8 \textit{ м/сек}^2;$$

$$l = \frac{T^2 \cdot g}{\pi^2} = 0{,}99 \textit{ м} \approx 1 \textit{ м}.$$



ИЗМЕРЕНИЕ И ДЕЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ

(VIII класс)

На стр. 109 приведена таблица формул для вычисления площадей простейших геометрических фигур. В старших классах эту таблицу следует продолжить (рис. 215).

В условиях учебной работы для вычисления площади многоугольника достаточно пользоваться двумя приемами: разбивать многоугольник на трапеции, треугольники и прямоугольники, площади которых определяются по формулам, или применять приближенные методы — измерение палеткой или планиметром.

В практике измерений площади большое значение имеют работы по делению земельных участков на местности.

Такое деление необходимо при разбивке земельных участков на более мелкие, притом определенной площади. Разбивка участков ведется при введении севооборотов, при уборке урожая, улучшениях лугов и пастбищ, при выделении новых усадебных участков и пр.

Отметим, что эти работы имеют и большое образовательное значение, ибо для их решения приходится обращаться к идее равносоставленности фигур, преобразования фигур из одного вида в другой.

В качестве примера приведем задачу из сборника по политехническому обучению * (рис. 216 на стр. 292).

* «Преподавание математики в свете задач политехнического обучения», изд-во АПН РСФСР, М., 1954.

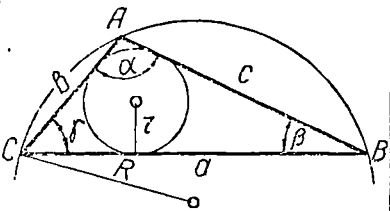
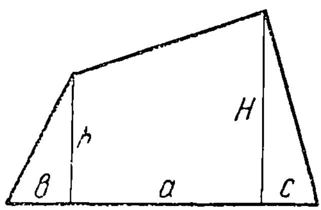
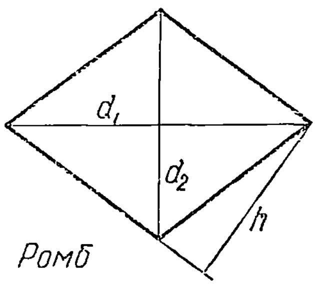
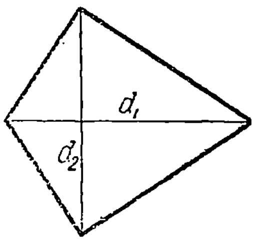
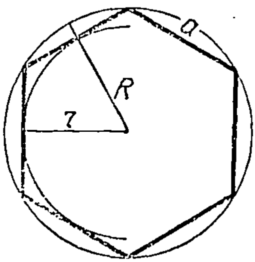
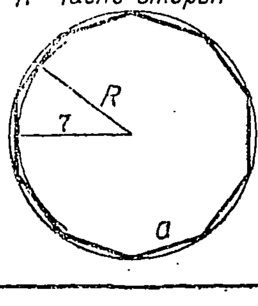
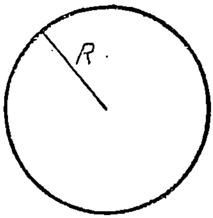
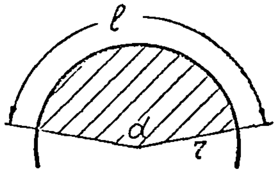
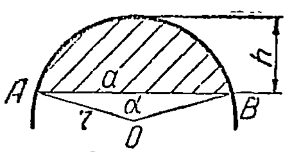
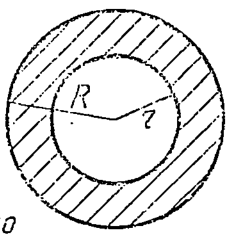
ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ	
Фигура	**Площадь**
 Треугольник ABC $p=\frac{a+b+c}{2}$	$S=\frac{ab\sin\gamma}{2}$ $S=\frac{a^2\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma}{2\sin\alpha}$ $S=2R^2\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma$ $S=pr$ $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$
 Четырехугольник	$S=\frac{(H+h)a+bh+cH}{2}$
 Ромб	$S=ah=\frac{d_1d_2}{2}$

Рис. 215. Таблицы формул площадей (продолжение см. стр. 290—291)

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ

Фигура	Площадь
Дельтоид 	$S=\frac{d_1 d_2}{2}$
Правильный шестиугольник 	$R=a=1{,}155\,r$ $S=3ar=3{,}464\,r^2$ $S=2{,}598a^2=2{,}598R^2$
Правильный многоугольник n - число сторон 	$R=\sqrt{r^2+\frac{a^2}{4}}$ $r=\sqrt{R^2-\frac{a^2}{4}}$ $S=\frac{nar}{2}$

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ	
Фигура	Площадь
 Круг	$C = \pi D = 2\pi R \approx 3{,}14D$ $S = \frac{\pi D^2}{4} = \pi R^2 \approx 0{,}79D^2$
 Сектор	$\ell = \frac{\pi r \alpha}{180} = \frac{25}{r} \approx 0{,}017 r\alpha$ $S = \frac{r\ell}{2}$
 Сегмент	$\ell = \frac{3{,}14\, r\alpha}{180}$ $S = \frac{1}{2}[r\ell - a(r-h)]$ $S_{сегм.} = S_{сект.} - S_{\Delta OAB}$
 Кольцо	$S = \pi(R^2 - r^2) =$ $= \pi(R-r)(R+r)$

Задача 1

Участок неправильной четырехугольной формы — $ABCD$ требуется разделить на **две** равновеликие части межой, проходящей через точку M, на стороне AB.

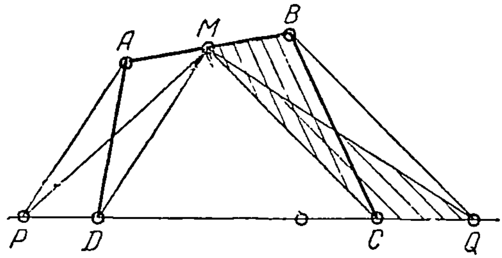


Рис. 216. Деление четырехугольника межой на две равновеликие части

Если к участку прилагается план, то деление производится сперва на плане, а затем с учетом масштаба размеры переносят на местность. Если же плана нет, то предварительно снимают план участка с нанесением заданной точки M, затем производят деление участка на плане с переносом полученных размеров на местность.

Ввиду того, что делить площадь треугольников более удобно, четырехугольник $ABCD$ преобразуется в равновеликий треугольник MPQ. Для равновеликости указанных фигур достаточно показать их равносоставленность. Действительно, треугольник MDC одновременно принадлежит четырехугольнику $ABCD$ и треугольнику PMQ; в то же время треугольник MDA равновелик треугольнику MDP, так как их вершины A и P лежат на параллели к основанию MD. По тем же соображениям треугольник $MCB \equiv$ треугольнику MCQ.

После этого можно заключить, что:

$$(ABCD)^{*}=(\triangle MDC)+(\triangle MDA)+(\triangle MBC)=(\triangle MDC)+(\triangle MPD)+(\triangle MCQ)=(\triangle MPQ),\ \text{т. е. } (ABCD)=(\triangle MPQ).$$

И тогда деление $(ABCD)$ межой через точку M сведется к делению $(\triangle MPQ)$, а это сделать легко при помощи медианы, проведенной из вершины M на сторону PQ.

Далее следует измерить расстояния DN и для контроля CN, а затем перенести их с учетом масштаба на местность, после чего положение межи MN будет определено.

---

* Для сокращения записи вводятся скобки, которые означают площадь фигуры. Например $(\triangle ABC)$ будет площадью треугольника ABC.

Практическая работа № 1

Разделить площадь неправильного четырехугольника межой, проведенной из некоторой точки, на две равновеликие части.

1. Состав группы: 3—5 учащихся.

2. Оборудование: все для съемки участка с магистрали.

3. Порядок работы:

1) разметить неправильный четырехугольник со сторонами примерно в 100 *м* — 250 *м;*

2) заснять его на план по ходовой линии;

3) провести требуемое деление участка на плане;

4) перенести на местность положение концов межи деления участка и провешить межу.

Задача 2 (рис. 217).

Разделить площадь треугольника MNP межами PS и PT так, чтобы площади полученных треугольников PMS и PMT находились к площади исходного треугольника PMN в заданных отношениях, т. е.:

$$\frac{(\Delta\, PMS)}{(\Delta PMN)} = \frac{m}{n}\ ;\ \frac{(\Delta\, PMT)}{(\Delta\, PMN)} = \frac{p}{q}\ .$$

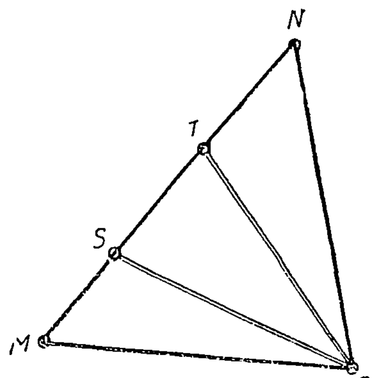


Рис. 217. Деление площади треугольного-участка двумя межами

Примем сторону треугольника MN за основание, а h за высоту из вершины P, опущенную на его основание. Примем во внимание, что h будет служить одновременно высотой для всех треугольников: MPS, MPT, MPN.

Тогда получим:

$$1)\ \frac{(\triangle MPS)}{(\triangle MPN)} = \frac{m}{n} \text{ (по условию), или:}$$

$$\frac{\frac{1}{2}\, MS \cdot h}{\frac{1}{2}\, MN \cdot h} = \frac{m}{n}, \text{ т. е. } MS = MN \cdot \frac{m}{n};$$

$$2)\ \frac{(\triangle MPT)}{(\triangle MPN)} = \frac{p}{q};\ \frac{\frac{1}{2}\, MT \cdot h}{\frac{1}{2}\, MN \cdot h} = \frac{p}{q}, \text{ т. е.}$$

$$MT = MN \cdot \frac{p}{q}.$$

Пример: $MN = 600$ *м*. Отрезать от треугольника с общей площадью F треугольник, площадь которого составила бы $\frac{2}{3}F$.

Назовем точку деления основания S, тогда: $MS = MN \cdot \frac{2}{3}$; т. е. $MS = 600 \cdot \frac{2}{3} = 400$ *м*.

Далее следует отметить эту точку на плане и в натуре.

Практическая работа № 2

Провести на треугольном участке из вершины P межи, которые делили бы площадь его в отношении $\frac{2}{5}$ и $\frac{3}{4}$.

Состав группы: 3—5 человек.

Оборудование: все для мензульной съемки участка из одного полюса.

Порядок работы:

1) разметить на местности треугольный участок с основанием 200 *м* и высотой $\approx$ 100 *м*;

2) провести мензульную съемку участка;

3) рассчитать деление участка на плане в заданных в условии отношениях;

4) провести разметку полученных результатов в натуре (см. предыдущую работу).

Задача 3

Из площади треугольника ABC выделить межой, проведенной из вершины треугольника B к противоположной стороне, треугольник с площадью Q (рис. 218).

Решать эту задачу следует, как и всякую задачу на построение, начиная с анализа. Для этого составим эскиз решения. Если известна площадь Q и основание треугольника BC, то тем самым из расчета и построения определяется высота треугольника BCD, т. е. h (из точки D на BC). Очевидно, точка D принадлежит геометрическому месту точек, удаленных от стороны BC на h. Поэтому строим в произвольной точке отрезка BC, например в C, перпендикуляр, величиной h, и проводим прямую, параллельную BC. Точка D, с одной стороны, находится на стороне AC, с другой — принадлежит параллели к BC, т. е. она является точкой пересечения двух прямых. Следовательно, треугольник BCD — искомый.

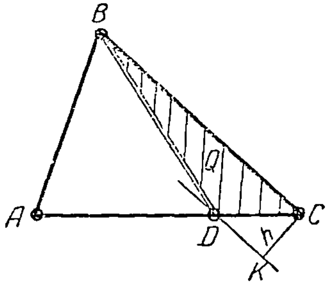


Рис. 218. Деление площади треугольного участка одной межой

Практическая работа № 3

1. В треугольнике, взятом из задачи 2 предыдущей практической работы, установить возможность выделения треугольника с площадью в 1 *га*.

2. Выделить площадь в 0,5 *га*.

Состав группы: 3 человека.

Оборудование: вехи, колышки, рулетка, чертежные принадлежности.

Порядок работы:

1) провести деление площади по плану участка, данного в предыдущей работе;

2) перенести полученные в решении данные (CD) на местность.

Искомый отрезок CD можно получить из расчета. Действительно, если известна вся площадь треугольника ABC и его сторона AC, то

$$\frac{(\triangle BCD)}{(\triangle ABC)} = \frac{CD}{AC}.$$

$$\text{Отсюда: } CD = AC \cdot \frac{(\triangle BCD)}{(\triangle ABC)}$$

Задача 4

Разделить площадь треугольного участка на пропорциональные части межами, параллельными основанию (рис. 219).

Пусть требуется разделить площадь треугольника параллелями к его основанию, например, на три равные части.

$$\frac{(\Delta\, BEF)}{(\Delta\, BAC)} = \frac{BE^2}{BA^2};$$

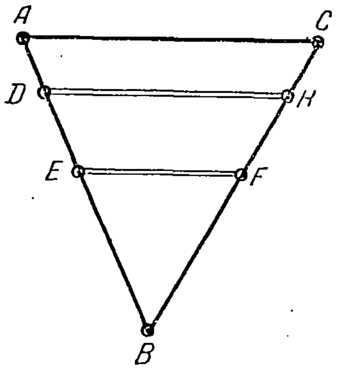


Рис. 219. Деление площади треугольного участка параллельными межами

отсюда:

$$BE = BA \cdot \sqrt{\frac{(\Delta\, BEF)}{(\Delta\, BAC)}}$$

$$\text{и } BF = BC \cdot \sqrt{\frac{(\Delta\, BEF)}{(\Delta\, BAC)}};$$

$$\frac{(\Delta\, BDH)}{(\Delta\, ABC)} = \frac{BD^2}{BA^2};$$

$$BD = BA \cdot \sqrt{\frac{(\Delta\, BDH)}{(\Delta\, BAC)}}$$

$$\text{и } BH = BC \cdot \sqrt{\frac{(\Delta\, BDH)}{(\Delta\, BAC)}}.$$

Практическая работа № 4

По образцу предыдущих работ самостоятельно разработать деление треугольного участка по условиям задачи 4, а именно: разметить участок, снять его план, провести расчет, составить рабочую группу, подготовить оборудование, выполнить работу.

Задача 5 (рис. 220)

Разделить площадь треугольного участка двумя межами из точки M на стороне AB так, чтобы при вершинах A и B образовались части площади размерами S_1 и S_2.

Если измерить высоты ME и MF, то из расчета легко определить AK и BL, а именно:

$$AK = \frac{2S_1}{ME} \quad \text{и} \quad BL = \frac{2S_2}{MF}.$$

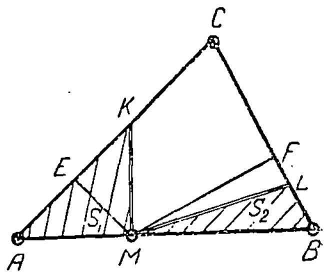


Рис. 220. Деление площади треугольного участка двумя межами из одной точки

Практическая работа № 5

По образцу условия задачи 5 разметить на местности треугольный участок и выполнить выделение площадей S_1 и S_2.

Для этого заснять план участка, произвести деление и разметку в натуре.

Схему работы (оборудования и проведения) учащиеся должны составить самостоятельно.

Указание: Кроме плана участка с нанесенными линиями деления площади, учащимся надлежит представить описание работы с обоснованием выводов.

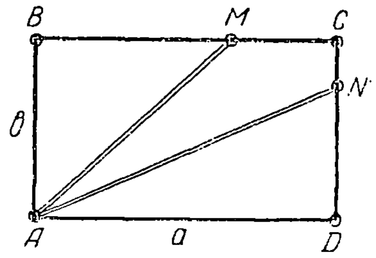


Рис. 221. Деление площади прямоугольника двумя межами из одной вершины

Задача 6

Разделить площадь прямоугольника на три равные части межами из одной вершины, например A (рис. 221).

Решение этой задачи естественно вытекает из следующих соображений: площадь прямоугольника $S = ab$, где $AD = a$; $AB = b$.

Тогда искомые части площади (по условию): площадь треугольника ABM равна $\frac{1}{3}ab$ и площадь треугольника ADN также равна $\frac{1}{3}ab$.

Однако из свойств произведения (переместительный и сочетательный законы) $\frac{1}{3}ab$ можно рассматривать как $\frac{1}{3}ab = (\frac{1}{3}a) \cdot b = a\ (\frac{1}{3}b)$. Иными словами, искомые части площади мы получим, если проведем межи так, что сохраним основание a, а от стороны b возьмем одну треть и, наоборот, сохраним сторону b, а от стороны a возьмем одну треть. Тогда намечается следующий план решения предлагаемой задачи:

1) на стороне CB отложить отрезок $CM = \frac{1}{3}CB$ и соединить точки A и M межой AM. Площадь треугольника $ABM = \frac{b \cdot 2a}{3 \cdot 2} = \frac{ab}{3} = \frac{S}{3}$;

2) на стороне CD отложим отрезок $CN = \frac{1}{3}CD$; соединим точки A и N межой AN.

Площадь треугольника $ADN = \frac{a \cdot 2b}{3 \cdot 2} = \frac{ab}{3} = \frac{S}{3}$;

3) третья часть — $AMCN$ — определится как разность $(AMCN) = S - (\triangle\ ABM) - (\triangle\ ADN) =$

$$= S - \frac{1}{3}S - \frac{1}{3}S = \frac{1}{3}S.$$

Практическая работа № 6

По образцу задачи 6 разметить на местности прямоугольный участок и разделить его межами из одной вершины на три равные части.

Схему работы (оборудование и проведение) учащимся следует составить и провести самостоятельно.

Задача 7 (рис. 222)

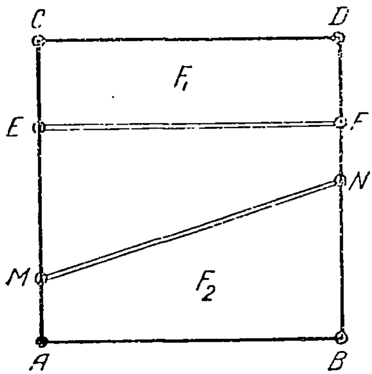


Рис. 222. Выделение площади из квадрата

Из площади F квадратного участка выделить межой, параллельной стороне квадрата, площадь, равную F_1, а из оставшейся части — площадь F_2 — межой через точку M.

Пусть квадрат $ABDC$ представляет план участка. Если CD — сторона квадрата — измерена, F_1 — дана, то:

$$CE = \frac{F_1}{CD}\ ;\ DF = CE\ .$$

Площадь F_2 представляет собой площадь трапеции, которая определяется формулой:

$$F_2 = \frac{BN + AM}{2} \cdot AB;\ \text{откуда:}\ \frac{BN + AM}{2} = \frac{F_2}{AB}\ .$$

Так как положение точки M на стороне AC задано, остается определить лишь положение точки N, а именно:

$$BN + AM = \frac{2F_2}{AB};\ \text{следовательно,}\ BN = \frac{2F_2}{AB} - AM.$$

Наконец, площадь четырехугольника $EFNM$ является разностью площади квадрата F и суммы $F_1 + F_2$, т. е.:

$$(EFNM) = F - (F_1 + F_2).$$

Практическая работа № 7

На квадратном участке площадью в 1 *га* выделить параллельной основанию межой площадь $F_1 = 3800\ м^2$, а затем из некоторой точки M наклонной межой—площадь F_2=2500 $м^2$.

Разметку участка на местности, съемку плана, состав группы, оборудование, порядок работы и ее проведение разработать учащимся самостоятельно.

Задача 8

На участке в виде трапеции отрезать межой, параллельной основанию, площадь F_1 (рис. 223).

Решение проводится через построение вспомогательного треугольника BOC, стороны которого BO и CO снимаются с плана.

Как известно:

$$\frac{(\Delta\, BOC)}{(\Delta\, BOC) + F_1} = \frac{BO^2}{EO^2}, \qquad (1)$$

или

$$\frac{(\Delta\, BOC)}{(\Delta\, BOC) + F_1} = \frac{OC^2}{OF^2}. \qquad (2)$$

Откуда,

из формулы (1):

$$EO = BO \cdot \sqrt{\frac{(\Delta\, BOC) + F_1}{(\Delta\, BOC)}},$$

или $EO = BO \cdot \sqrt{1 + \frac{F_1}{(\Delta\, BOC)}}$.

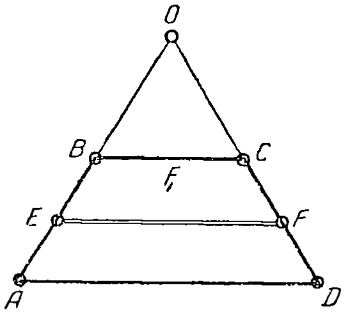


Рис. 223. Деление площади трапеции

Искомый отрезок BE определится как разность $EO - BO$. Получится:

$$BE = BO \cdot \sqrt{1 + \frac{F_1}{(\Delta\, BOC)}} - BO,$$

иначе:

$$BE = BO \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{F_1}{(\Delta\, BOC)}} - 1 \right);$$

$$CF = OF - OC.$$

Из формулы (2) находим:

$$OF = OC \cdot \sqrt{\frac{(\Delta\, BOC) + F_1}{(\Delta\, BOC)}},$$

или $OF = OC \cdot \sqrt{1 + \frac{F_1}{(\Delta\, BOC)}}$.

Тогда:

$$CF = OC \left(\sqrt{1 + \frac{F_1}{(\Delta\, BOC)}} - 1 \right).$$

Практическая работа № 8

(Разработать ее учащимися по образцу задачи 8)

Задача 9

Выделить из многоугольника $ABCDE$ межой из вершины A делянку с площадью S, расположенную влево от межи (рис. 224).

Решение задачи сведется к некоторым геометрическим построениям на плане участка и несложным расчетам.

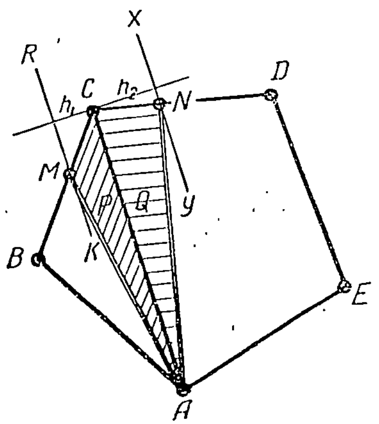


Рис. 224. Деление площади многоугольника

Проведем диагональ многоугольника AC. Тогда в решении представятся два случая: заданная площадь меньше площади вспомогательного треугольника или больше ее, т. е.:

1) $S <$ площади треугольника ABC и 2) $S >$ площади треугольника ABC.

Случай 1. $S < (\triangle ABC)$. Обозначим $(\triangle ABC) - S = P$.

Площадь P = площади треугольника $AMC = \frac{AC \cdot h_1}{2}$, где $h_1 \perp AC$.

Площадь вспомогательного треугольника ABC определяется из размеров его на плане, S — задано; следовательно, $P = (\triangle ABC) - S$ можно найти.

Зная P, определим $h_1 = \frac{2P}{AC}$.

Таким образом, если на плане провести перпендикуляр к диагонали AC в точке C, отложить на нем длину h_1 и через эту точку провести параллель основанию треугольника ABC, т. е. $RK \parallel CA$, то окажется, что $M \equiv BC \times RK$ и есть искомый конец межи AM. Положение точки M определится расстоянием CM.

Случай 2. Если $S > (\triangle ABC)$, то дополнительная площадь выразится $(\triangle ACN) = Q$.

Тогда

$$Q = \frac{AC \cdot h_2}{2}; \; h_2 \perp AC; \; xy \parallel CA;$$

$$\text{точка } N \equiv CD \times xy.$$

Практическая работа № 9

По образцу задачи 9 разметить на местности многоугольник и выделить из него влево от межи из вершины A площадь, равную S.

Схему работы (оборудование и проведение) составить и провести учащимся самостоятельно.

Деление площадей многоугольников рационально сводить к работе с площадями треугольников, четырехугольников (в частности, прямоугольников, квадратов, трапеций).

РАБОТЫ НА МЕНЗУЛЕ

(VIII класс)

Задача Потенота *. Способ Болотова **

В старших классах по сравнению с младшими мензульная съемка может быть поставлена с большей полнотой и учетом ряда вопросов точности. В частности, в качестве опорных пунктов геометрической сети можно использовать наложенные на планшет по координатам точки, полученные при съемке обходом с помощью теодолита ***.

В качестве новой задачи полезно применить решение так называемой задачи Потенота. Она, как известно, состоит в том, что по трем видимым ориентирам, их изображениям на плане и двум углам зрения из одной точки стояния можно определить положение самой точки стояния. Основанием для решения задачи является классическое построение геометрического места точек, из которых данная хорда видна под заданным углом, или иначе задача называется построением сегмента, вмещающего данный угол. Решение допускает различные способы построения (рис. 225).

Если из точки стояния S (рис. 226) взяты два угла зрения: α на предметы A — B и β на B—C (или A—C), то по предыдущему определяется два геометрических места, две окружности, которые своим пересечением укажут положение точки стояния.

Обычно решение проводится так:

1. Из точки стояния угломером измеряются два угла зрения: α на пункты A и B; β на пункты B и C.

---

* Л. Потенот (1660—1732) — французский математик.

** А. П. Болотов (1803—1853) — русский геодезист.

*** О геометрической сети см. стр. 306.

2. Затем на плане, где нанесены A, B, C, строят сегменты, вмещающие углы α и β. Точка их пересечения—искомая точка стояния.

Существует прибор п р о т р а к т о р, который состоит из трех шарнирно соединенных металлических планок; с помощью

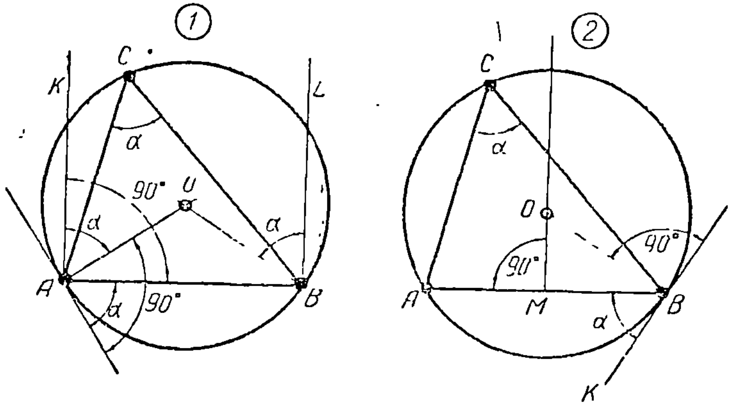


Рис. 225. Задача Потенота

размеченных дуг и верньеров протрактор позволяет с точностью до 1′ откладывать полученные измерением углы. Затем протрактор перемещают по плану до тех пор, пока все три

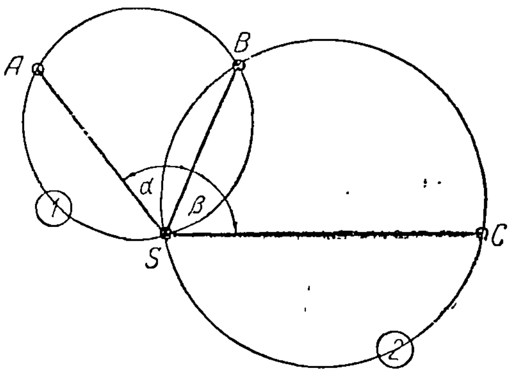


Рис. 226 Определение точки стояния

планки не пройдут через намеченные ориентиры. В этот момент через отверстие в шарнире накалывают точку на бумаге, которая и является искомой точкой стояния (рис. 185).

А. П. Болотов предложил простой способ графического решения задачи Потенота (хотя вообще графических способов решения этой задачи существует около ста).

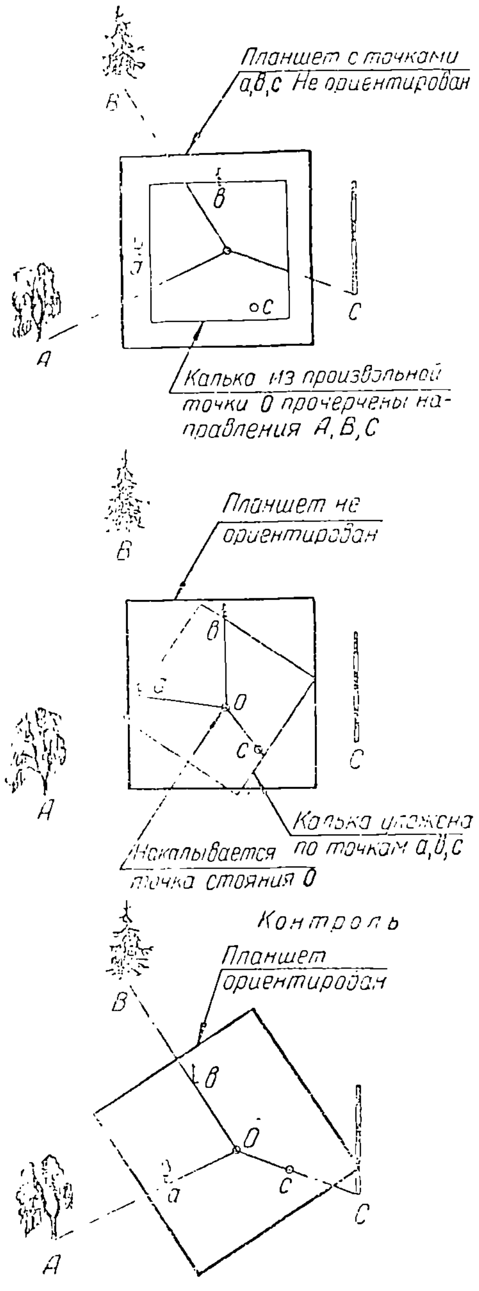


Рис. 227. Способ Болотова

Порядок работы по способу Болотова (рис. 227):

1) встать с мензулой на местности в точке, положение которой нужно нанести на план, закрепленный на планшете;

2) укрепить на планшете лист кальки. На глаз наметить на кальке некоторую точку *О*, которая будет изображать точку стояния на местности;

3) кипрегелем (или алидадой) превизировать и последовательно прочертить три направления *ОА*, *ОВ* и *ОС* на ориентиры местности *А*, *В*, *С* (планшет здесь будет играть роль чертежной доски);

4) открепить кальку и, передвигая ее по планшету, уложить так, чтобы все три луча проходили соответственно через точки *а*, *в*, *с* планшета;

5) в этом положении наколоть точку *О* на планшет, которая и отметит искомую точку стояния. Действительно, из этой точки заданные три предмета видны под заданными углами *;

6) ориентировать планшет по одному из направлений, например *ОА*, и проверить по другим (*ОВ* и *ОС*).

* Положение точки *О* на кальке надо выбирать с таким расчетом, чтобы лучи *ОА*, *ОВ*, *ОС* при наложении кальки на план доставали до изображений предметов *А*, *В*, *С*. В противном случае не удастся уложить кальку.

Геометрический анализ приведенного решения указывает:

1) что решение будет единственным, ибо вторая точка пересечения окружностей (рис. 226) есть намеченная точка B;

2) решение всегда возможно, кроме случая, когда точка стояния принадлежит окружности, проходящей через три заданные точки.

Практическая работа

Решить задачу Потенота на местности двумя способами: 1) измерением и построением, 2) по способу Болотова.

Схему работы и ее проведение составить и провести учащимся самостоятельно.

Съемка обходом

В части I разобраны мензульные съемки: полярная (из одного полюса) и засечками из двух полюсов. В том случае, если на полигоне имеются препятствия в виде зданий, холмов, т. е. местность закрытая, применяют обычную съемку обходом только с мензулой. Этим способом пользуются также и в тех случаях, если основной целью является съемка границ участка.

Работа складывается из следующих операций:

1. Установив планшет в некотором пункте полигона, например A, отмечают на бумаге точку a, соответствующую A.

2. Ориентируют планшет по мензульной буссоли (рис. 139).

3. Кипрегелем визируют направление из точки A на пункт B и чертят некоторый отрезок.

4. Измеряют мерной лентой расстояние от A до B и в выбранном масштабе откладывают отрезок ab.

5. Переходят с мензулой в пункте B. С помощью «вилки» (рис. 166) перемещают мензулу так, чтобы точка b проектировалась на колышек, отмечающий пункт B.

6. Снова ориентируют планшет: либо направлением из B в A (т. е. луч ba на бумаге совпадет с лучом BA на местности), либо снова по мензульной буссоли. (В школьных условиях, как тренировку, полезно применить одновременно оба способа, из которых один будет контрольным по отношению к другому).

7. Из точки b чертят отрезок bc, соответствующий направлению из B в C.

После этого измеряют расстояние BC и откладывают его в выбранном масштабе в виде отрезка bc.

8. Затем продолжают эту работу, переходя из вершины в вершину.

Как и следовало ожидать, последний отрезок EA (из-за различных погрешностей) не закончится в начальной точке A, а окажется в некоторой точке A'. Полученную линейную невязку (AA') следует распределить параллельным смещением вершин пропорционально расстоянию их от начальной точки (рис. 228).

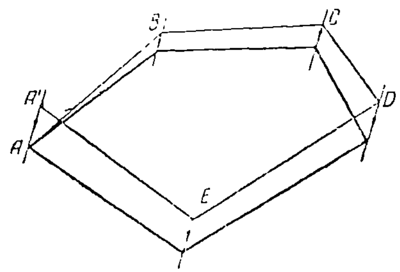


Рис. 228. Мензульная съемка обходом

Относительная невязка, т. е. $\frac{AA'}{P}$, где P — периметр контура, не должна превышать дроби от $\frac{1}{20}$ до $\frac{1}{150}$, иными словами, невязка не должна составлять более $\approx 0{,}5\%$. В противном случае налицо грубая ошибка, которую следует исправить повторным проведением работы.

Геометрическая сеть

При мензульных съемках участков значительных размеров (расстояние большее 200 *м*) принято намечать серию дополнительных опорных точек (рис. 229).

Пусть AB будет базисом.

Из точки A чертят направления в точки 1, 6, 7, 8. Из B — направления в точки 1, C, D, 5, 6. Пересечениями лучей из A и B определились точки 1 и 6. Эти точки, полученные дополнительно, могут служить опорными для дальнейших построений. Так, например, точка 8 определится пересечением лучей из точки A и точки 1.

Из опорных точек съемка ведется, как из одного полюса: визированием и промером расстояний, например дальномером. Кроме того, из опорных точек допустимы и построения засечками; в частности, отдельные второстепенные детали могут наноситься с определением их положения на глаз или эккером и рулеткой.

Такая комплексная съемка в практике имеет наибольшее значение и особенно богата образовательными элементами. Она представляет, однако, и наибольшие трудности.

Практическая работа

Провести комплексную съемку участка по типу работы, описанной выше.

Состав группы: 5—7 человек.

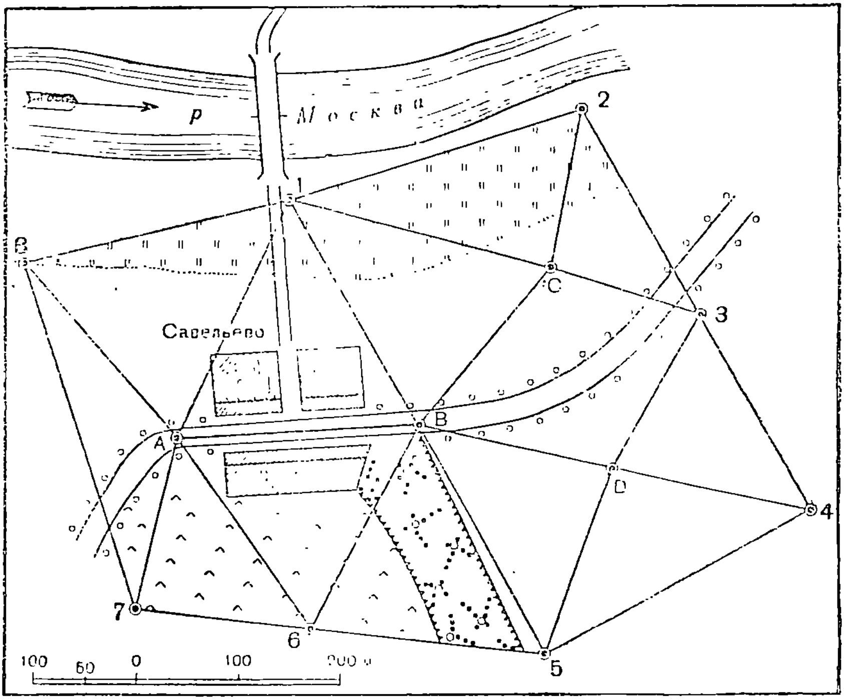
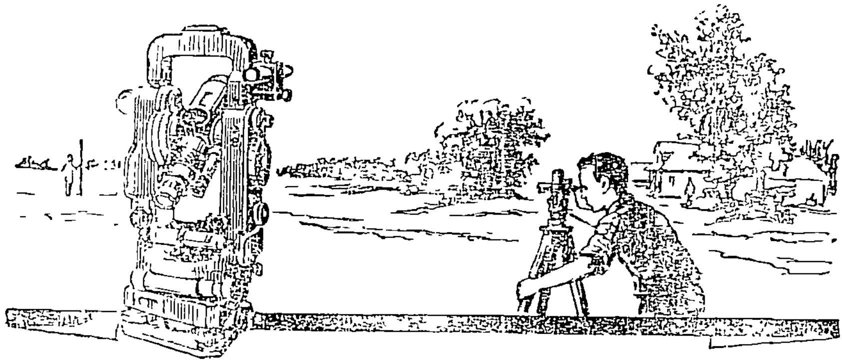


Рис. 229. Геометрическая сеть

Оборудование: мензула (штатив, подставка, кипрегель), рулетка, зеркальный эккер, мензульная буссоль.

Порядок работы учащимся разработать самостоятельно.



УГЛОМЕРНАЯ СЪЕМКА

(VIII класс)

В ряде случаев не удается заснять участок на план с магистрали (с ходовой линии), например, когда на участке (полигоне) имеются препятствия для проложения ходовой линии (рис. 230).

При составлении плана такого участка достаточно измерить стороны многоугольника, например $ABCDE$, и углы между ними, или азимуты (румбы) каждого из направлений: AB, BC, CD, DE, EA.

В простейшем виде эта работа описана в части I

Новое обращение к съемке обходом вызвано применением новых, более точных измерительных инструментов: мерной ленты (вместо веревки), буссоли или гониометра (вместо школьного угломера), теодолита.

Основные сведения

1. Соответствие точностей линейных и угловых измерений при съемках имеет решающее значение при выполнении топографических работ.

Поэтому, например, недопустимо производить измерения расстояний стальной рулеткой и школьным угломером с точностью до 1° или определять расстояния шагами, а углы измерять теодолитом с минутным отсчетом, однако следует признать естественным соответствие измерений мерной лентой с относительной ошибкой $\frac{1}{2000}$ и теодолитом с точностью $1'$, т. е. $\frac{1}{3500}$.

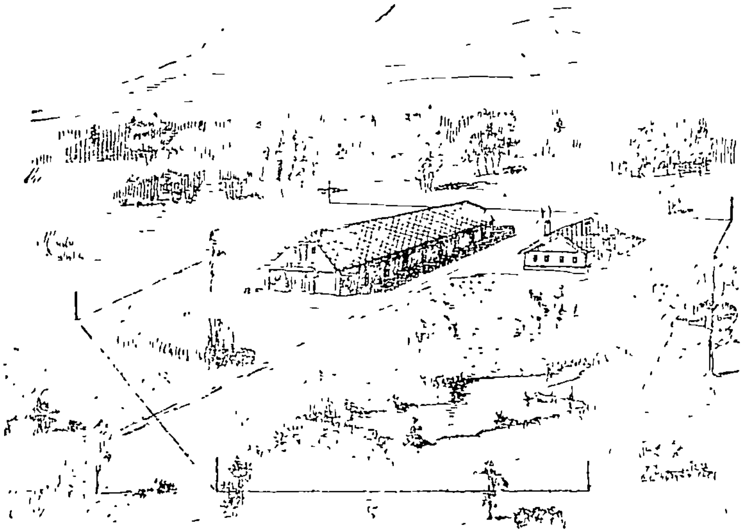


Рис. 230. Угломерная съемка

Подробнее об этом изложено в разделе об ошибках и точности измерений, вычислений и накладки плана (стр. 236).

2. При установлении невязки в размерах углов, полученной от несовпадения теоретических данных и данных измерения, вносится поправка к результатам измерения, а именно:

$$S_{\text{теор.}} = 2d\,(n-2)^{*};$$

невязка $\Delta S = S_{\text{теор.}} - S_{\text{изм.}}$, наконец, поправка на каждый угол $d = \frac{\Delta S}{n}$.

Иными словами, допускается, что погрешности распределяются на углы поровну, независимо от величины угла. И это правильно, ибо погрешность в измерении угла (не грубая ошибка наблюдателя, а отклонение от действительного размера, вызванное объективными факторами) будет одна и та же, как при измерении малого угла, так и большого. Действительно, такая погрешность вызывается неточностями визирования и отсчетов, причем первая из них зависит от расстояния до следующей вехи и учитывается при точных геодезических работах. Однако в условиях учебной работы эту погрешность можно не учитывать.

[1] Следует отметить, что эта формула справедлива и для невыпуклого многоугольника, на что в школах не всегда обращают внимание.

Угол в $n°$ при измерении теодолитом даст погрешность с границей в $1'$, то же произойдет и при угле в $2\,n°$ и др., ибо отклонение результата вызывается особенностью инструмента, которая не изменится от того, в какой части лимба берется отсчет *.

Итак, формула $d = \frac{\Delta S}{n}$ определяет наиболее вероятную погрешность измерения.

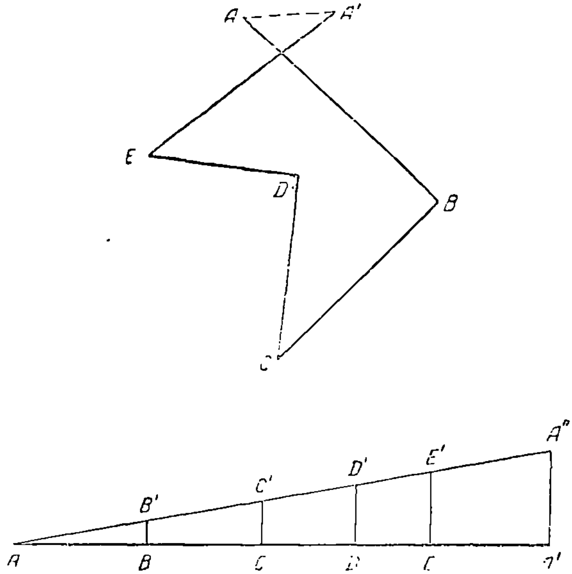


Рис. 231. Распределение линейной невязки шаблоном

Одновременно укажем, что разность $S_{\text{теор.}} - S_{\text{изм.}}$ может быть как положительной, так и отрицательной:

$$\Delta S > 0, \text{ если } S_{\text{теор.}} > S_{\text{изм.}} \text{ и наоборот,}$$

$$\Delta S < 0, \text{ если } S_{\text{теор.}} < S_{\text{изм.}}$$

Пример. Пусть $n = 7$, тогда $S_{\text{теор.}} = 180°(7-2) = 900°$ и пусть $S_{\text{изм.}} = 896°$, $\Delta S = 900° - 896° = 4°$; $d = \frac{4}{7} \approx 0°,5$, т. е. к величине каждого угла, полученной от измерения его, следует прибавить $\sim 0°,5$. В то же время, если окажется $S_{\text{теор.}} = 900°$, а $S_{\text{изм.}} = 907°$, то $\Delta S = -7°$; $d = -\frac{7}{7} =$

* В школьной практике такие установки допустимы.

$= -1^\circ$ и к величине измерения угла следует прибавить -1°, т. е. его величина уменьшится на 1°.

Следовательно, вполне достаточно пользоваться правилом: «поправку надо прибавить к $S_{изм.}$», тогда в первом случае получим:

$$S_{теор.} = S_{изм.} + \Delta S,$$

во втором случае:

$$S_{теор.} = S_{изм.} + (-\Delta S),$$

т. е. $S_{теор.} = S_{изм.} - \Delta S$.

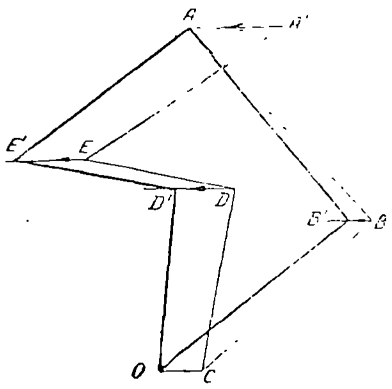


Рис. 232. Введение поправок

Совершенно к иному выводу приходим при анализе линейной невязки (см. ч. I стр. 90). Это невязка рассчитывается пропорционально расстоянию по контуру многоугольника от начальной точки последовательно до каждой следующей вершины.

Уровень знаний учащихся V—VII классов допускает лишь арифметический расчет деления общей невязки на пропорциональные части. Другое дело — проведение работы в VIII классе, где школьники изучают подобие фигур, в частности, треугольников. Здесь разумно использовать прием техников: применение «шаблона» («клина»); который размечен на основании свойств подобных треугольников (рис. 231).

На отрезке прямой отложены в некотором произвольном масштабе длины ломаных AB; $AB + BC$; $AB + BC + CD$; $AB + BC + CD + DE$; $AB + BC + CD + DE + EA'$, а на перпендикуляре — отрезок $A'A''$, равный графической невязке $A'A$; точки A и A'' соединим.

Тогда получим:

$$\triangle ABB' \sim \triangle ACC' \sim \triangle ADD' \sim \triangle AEE' \sim \triangle AA'A''.$$

Наклонная AA'' отсечет на перпендикулярах в точках B, C, D, E, A' искомые поправки, которые и следует отложить на параллелях отрезка $A'A$ ($AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD' \parallel EE'$: рис. 232).

Справедливость такого заключения с очевидностью следует из рассмотрения подобных треугольников $AB'B$, $AC'C$... $AA''A'$.

Следовательно, поправочное смещение каждой точки пропорционально расстоянию ее от точки A, по контуру многоугольника, сохраняя одно и то же направление.

Так как треугольники подобны, то основание шаблона можно взять в любом масштабе, а линейные невязки ($A'A$; $E'E$; $D'D$...), в силу подобия треугольников, не изменяются (рис. 233).

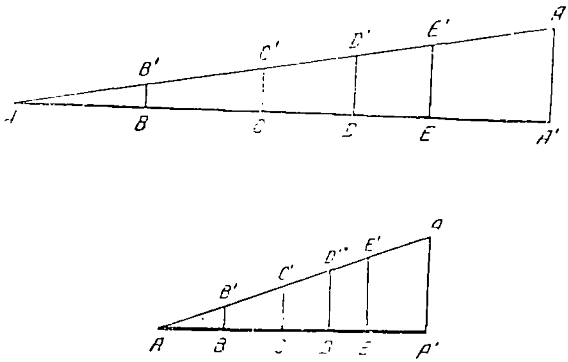


Рис. 233. Построение шаблона

В данном случае мы имеем технический прием практиков, который хорошо увязывается со школьными теоретическими сведениями.

Оборудование для угломерной съемки

1. Мерная лента: при ней 11 шпилек.
2. Штативная буссоль, или гониометр, или теодолит (точность 1').
3. Чертежные инструменты.

Описание работы

А. В поле

1. Выбрать и разметить полигон, осложненный дополнительными объектами съемки, «ситуацией».
2. Составить абрис.
3. Последовательно измерить углы * при вершинах и расстояния между ними.

---

* Чтобы не сбиться и не внести грубой ошибки, следует при измерениях держаться одного порядка, например, каждый раз брать отсчет на заднюю вершину (по ходу съемки), а затем на переднюю.

4. Полученные данные записать в журнал и на абрисе (см. ч. I, стр. 89 и 84).

5. Взять буссолью азимут (румб) одной из сторон многоугольника, рекомендуется более длинной.

Б. Накладка плана в камеральных условиях

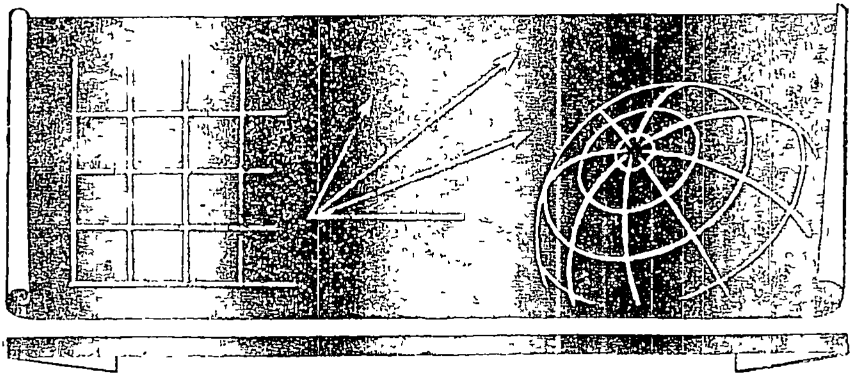
1. Выбрать масштаб.

2. С помощью чертежных инструментов нанести план участка на кальку; произвести увязку; указать направление на север (по азимуту) (см. ч. I, стр. 90).

3. Наложить план (кальку) на бумагу, чтобы направление на север было параллельно боковому ребру листа бумаги (иначе, перпендикулярно нижнему — верхнему ребру). Затем сдвинуть кальку так, чтобы план удобно и красиво расположился на листе. Сверху оставить место для заголовка, снизу — для подписей, с боков оставить поля.

4. Наколоть вершины и другие нужные пункты с кальки на бумагу; нанести контур участка и другие его детали.

Сделать надписи.



СИСТЕМА КООРДИНАТ

(IX класс)

Если в наборе геодезических инструментов имеется буссоль с точностью отсчетов, достаточной для проведения намеченной работы, то *угломерную съемку* можно вести, измеряя не внутренние углы многоугольника, а азимуты (или румбы) направлений сторон его. Действительно, в каждой вершине при измерении угла буссолью один луч всегда определяется направлением магнитной стрелки, показание которой не зависит от предыдущих измерений, а другой луч — направлением на следующую соседнюю вершину.

Порядок проведения работы с определением азимутов сложится так:

1) разметить участок;

2) составить абрис полигона;

3) измерить последовательно азимуты в каждой из вершин и расстояния между ними;

4) вычертить план участка, ориентировав его по одному из азимутов.

Указания. 1. На абрисе записи вести так, как показано на рис. 69.

2. Вместо азимутов можно пользоваться румбами.

3. Съемка буссолью по азимутам (или румбам) возможна только в такой местности, где нет каких-либо магнитных аномалий. Так, например, в некоторых частях Курской области такого рода съемка невозможна.

Накладка плана по азимутам (румбам)

В части I был указан порядок накладки плана по внутренним углам полигона.

Теперь рассмотрим порядок этой работы по азимутам (румбам).

На кальке выбираем начальную точку и проводим через нее направление на север. Затем по азимуту первого направления проведем луч, на котором отложим в масштабе вторую точку. Во второй точке снова проводим направление на север (параллельное первому), строим второй соответствующий луч по его азимуту, затем третью вершину и т. д. При построении последнего луча выявится невязка, которую исправляют известным нам способом (см. стр. 311).

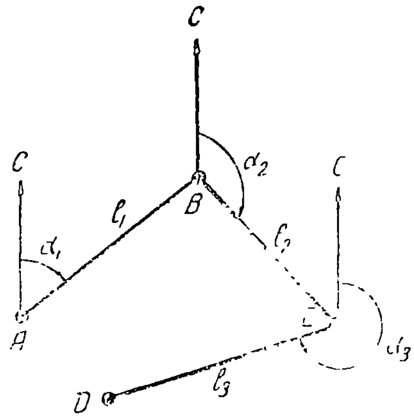


Рис 234 Накладка плана по азимутам

Этот прием обладает тем преимуществом, что направление каждого луча не зависит от возможных погрешностей предыдущих сторон полигона. Действительно, при построении любого угла (азимута) одна сторона его неизменно параллельна одному и тому же направлению на север, направлению меридиана (рис. 234).

Для повышения точности значений азимутов (румбов) направлений применяют комбинированный способ: стороны полигона строят по их азимутам, в силу чего избегают погрешностей предыдущих построений, а вычисляют азимуты с помощью измеренных внутренних углов многоугольника. Дело в том, что буссольное измерение азимутов дает точность отсчета до $\frac{1^\circ}{2}$, а измерение внутренних углов гониометром с верньером даст точность в пределах 5′, а теодолитом 1′.

Из чертежа (рис. 235) видна справедливость формулы

$$\alpha_i = \alpha_{i-1} + [180^\circ - \beta_i], \text{ где}$$

α_i — азимут искомого направления,

α_{i-1} — азимут предыдущего направления,

β_i — внутренний угол при соответствующей вершине.

Последнюю формулу иногда запоминают в словесной редакции: азимут искомого направления равен азимуту предшествующего плюс разность 180° и угла полигона, вправо лежащего. (При условии обхода по движению часовой стрелки.)

Накладка плана съемки по координатам вершин

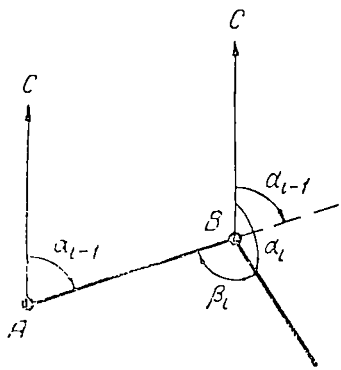


Рис. 235 Связь азимутов с внутренними углами

Выше было указано на преимущество накладки плана по азимутам (румбам) по сравнению с накладкой по углам.

Иногда пользуются еще более точным методом, методом координат.

Как известно, положение точки на плоскости вполне определяется расстояниями до двух прямых на ней, принятых за оси, ибо каждой точке соответствует только одна пара чисел и, наоборот, паре чисел — одна точка. Такая связь называется взаимоодно-значной.

В геодезии пользуются прямоугольной системой координат, но в отличие от аналитической геометрии за ось абсцисс (ось x) принимают вертикальную прямую, а за ось ординат (ось y) — горизонтальную прямую (рис. 236).

Кроме того, в геодезии четверти нумеруются по ходу часовой стрелки, т. е. в направлении, противоположном принятому в математике. Вызвано это тем, что основным, опорным направлением в геодезии принимается направление меридиана, которое на плане изображается вертикальным, а угол (азимут) откладывается по ходу часовой стрелки.

Однако расхождение в расположении осей и счете четвертей не вызывает противоречий ни в знаках, ни в абсолютных величинах координат или тригонометрических величин. Это ясно из сопоставлений на схеме (рис. 236).

Обобщим полученные сведения в таблицу:

Предмет	Ось	Четверть I	Четверть II	Четверть III	Четверть IV
Математика	абсцисс (x)	+	−	−	+
	ординат (y)	+	+	−	−
Геодезия	абсцисс (x)	+	−	−	+
	ординат (y)	+	+	−	−

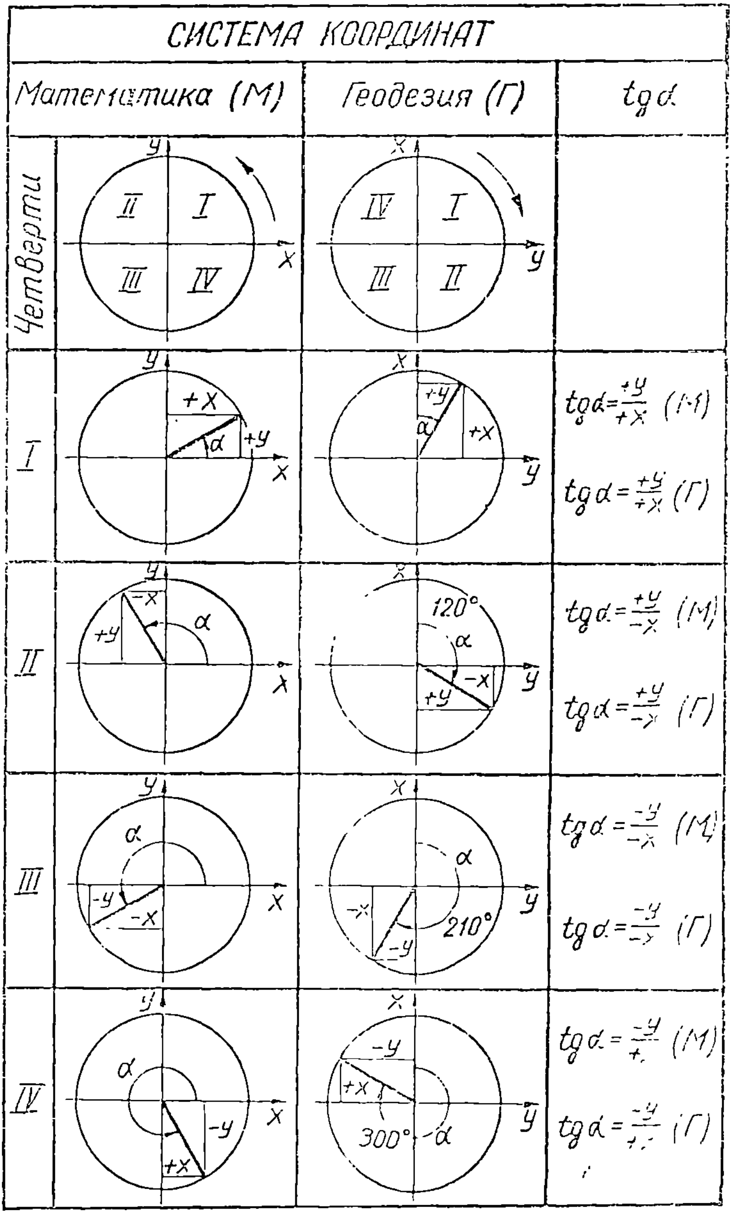


Рис. 236. Система координат

Умение разбираться и пользоваться координатной системой, отличной от общепринятой в математике, помимо практического значения (применение в геодезии), играет учебную роль: приучает отходить от шаблона и работать в новых непривычных условиях.

Проекция отрезка на ось и проектируемый отрезок связаны определенным соотношением (рис. 237).

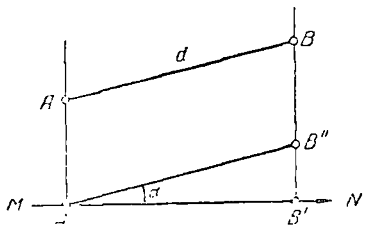


Рис. 237. Проекция отрезка

AB — проектируемый отрезок; за положительное направление примем направление от A к B.

MN — ось; положительное направление указано стрелкой.

$A'B'$ — проекция отрезка AB на ось MN.

Очевидно, что проекция $A'B'$ связывается с отрезком AB формулой:

$$A'B' = AB \cdot \cos \alpha$$

$$A'B' = d \cdot \cos \alpha,$$

где α — угол между положительными направлениями оси и проектируемого отрезка.

Эта формула справедлива для всех возможных взаимоположений проектируемого отрезка относительно оси (рис. 238).

Пример 1. Найти координаты точки по измеренным расстоянию и азимуту; построить точку (рис. 239).

Пусть расстояние до точки $M = OM = d$ (азимут) $\angle XOM = \alpha°$. Координаты точки M определяются как проекции OM на оси OX и OY, тогда:

$$x = d \cdot \cos \alpha,$$

$$y = d \cos (90° - \alpha), \qquad (1)$$

$$y = d \cdot \sin \alpha.$$

Таким образом, если измерить расстояние $OM = d$, азимут направления OM, то вычислением по формулам (1) можно найти координаты искомой точки M, которые в принятом масштабе откладываются на плане. Положение точки M определено.

Пример 2. Найти координаты точки M по измеренным расстоянию и азимуту, если начало координат не совпадает с точкой стояния; построить искомую точку (рис. 240).

Пусть A — есть точка стояния; ее координаты известны:

Расстояние искомой точки M от A равно d, азимут направления на точку M равен α.

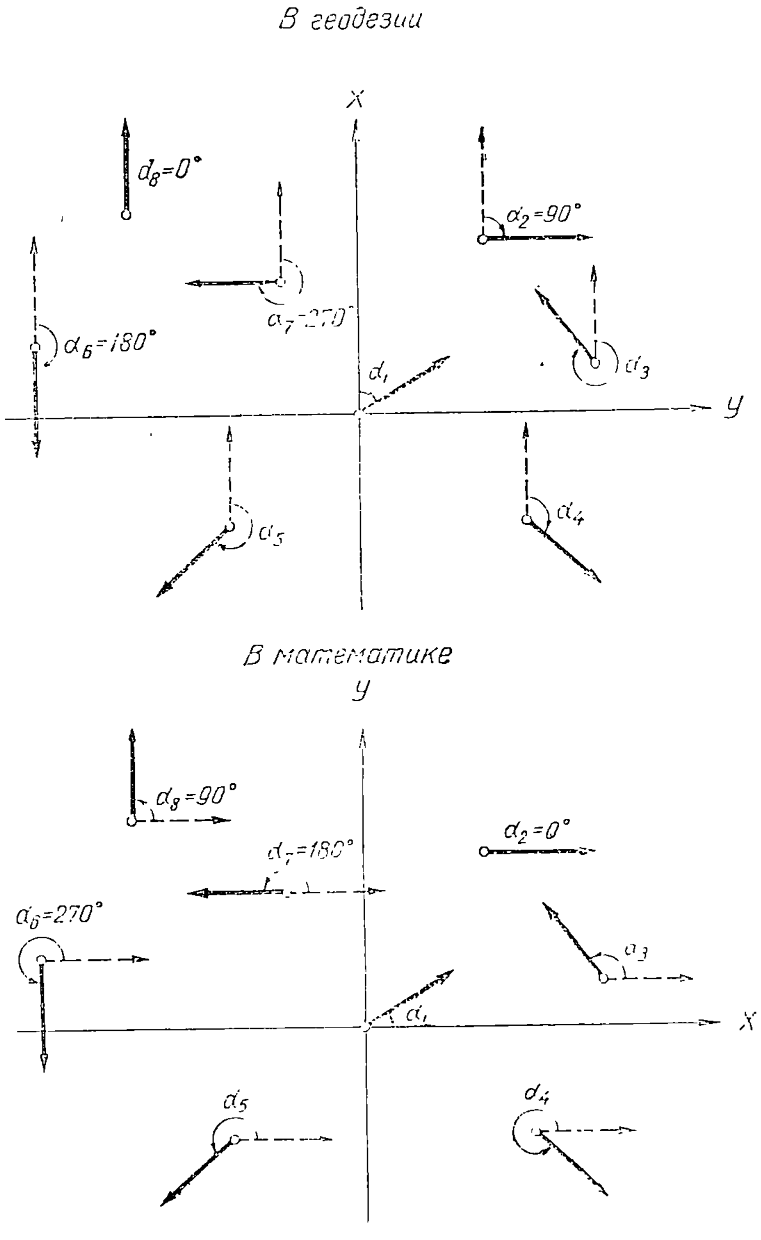


Рис. 238. Различные положения проектируемого отрезка

Тогда координаты точки M равны:

$$x_M = x_A + d \cdot \cos \alpha \qquad (2)$$

$$y_M = y_A + d \sin \alpha.$$

$d \cos \alpha$ и $d \sin \alpha$ называют в геодезии приращением координат и обозначают Δx и Δy, тогда:

$$x_M = x_A + \Delta x; \; y_M = y_A + \Delta y.$$

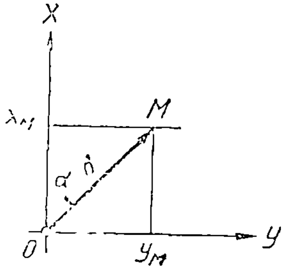


Рис 239. Нахождение координат точки (частный случай)

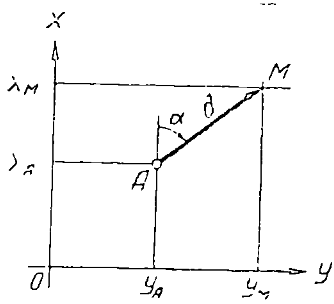


Рис 240. Нахождение координат точки (общий случай)

Пример 3 (рис. 241). Решить ту же задачу при следующем расположении точек:

$$90° < \alpha° < 180°;$$

По-прежнему $y_M = y_A + \Delta y$, а $x_M = x_A - \Delta x$, но $-\Delta x = +(-\Delta x)$, поэтому в формуле (2) приращения можно во всех случаях прибавлять алгебраически, а знак приращения будет вполне определяться знаком соответствующей тригонометрической функции $\sin \alpha$ или $\cos \alpha$.

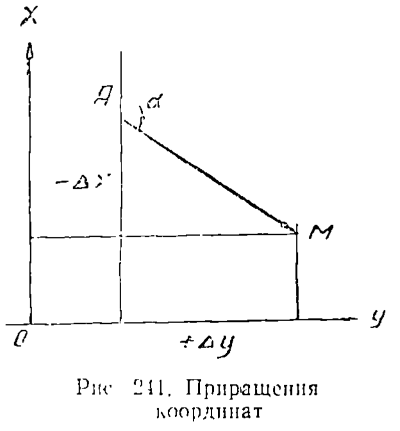


Рис 241. Приращения координат

Упражнение. Составить и решить задачи для азимутов в III и IV четвертях.

Пример 4 (рис. 242) Координаты точки стояния:

$$y_A = +500{,}0$$
$$x_A = +100{,}0.$$

Расстояние $d = AM = 500{,}0$ м.

Азимут направления $AM = 216°50'$.
Построить точку M по ее координатам.

Порядок работы:

1) Выписать рабочие формулы

$$x_M = x_A + \Delta x;$$

$$y_M = y_A + \Delta y;$$

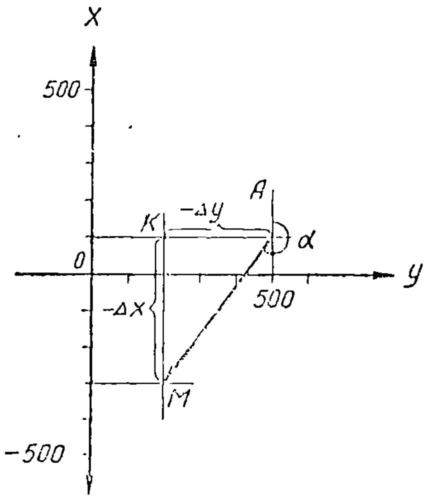


Рис. 242. Зависимость длины от приращении координат

2) Подставить числовые данные:

$$x_M = 100 + 500 \cdot \cos 216°50',$$

$$y_M = 500 + 500 \cdot \sin 216°50'; \text{ или:}$$

$$x_M = 100 + 500 \cdot (-\cos 36°50') = 100 - 500 \cdot 0{,}800,$$

$$y_M = 500 + 500 \cdot (-\sin 36°50') = 500 - 500 \cdot 0{,}600.$$

Тогда:

$$x_M = 100 - 400 = -300,$$

$$y_M = 500 - 300 = +200;$$

3) Построить точку M.

Проверка:

Полученный результат необходимо проверить, например, из прямоугольного треугольника:

$$AM^2 = AK^2 + KM^2, \text{ или:}$$

$$d^2 = (y_A - y_M)^2 + (x_A - x_M)^2, \text{ т. е.}$$

$$d^2 = (500 - 200)^2 + (100 + 300)^2, \text{ иначе:}$$

$$d^2 = 90\,000 + 160\,000 = 250\,000,$$

$$d = \sqrt{250\,000}, \quad d = 500 \text{ м};$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{200 - 500}{-300 - 100} = \frac{-3}{-4} = 0{,}75$$

Точка M расположена в III четверти, $\operatorname{tg} \alpha$ — положителен, а $\sin \alpha = -0{,}6$ и $\cos \alpha = -0{,}8$, соответствующие ему — отрицательны.

По таблице находится α:

$$\alpha = 236°50'.$$

Такое подробное решение следует сделать один раз; оно подтверждает общий вывод. В дальнейшем следует оперировать двумя основными формулами:

$$d = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Пусть требуется нанести на план четырехугольник $ABCD$ (рис. 243) так, чтобы положение его вершин не зависело от погрешностей графического построения предыдущих точек. Для этого применим метод координат.

Положим, что в поле были измерены расстояния между вершинами полигона (d_1; d_2; d_3; d_4), азимут стороны (α_1) и внутренние углы ($\angle A$; $\angle B$; $\angle C$; $\angle D$), по которым подсчитаны азимуты остальных сторон.

К чертежу:

A; B; C; D — вершины многоугольника;

A_1; B_1; C_1; D_1 — проекции их на ось абсцисс;

A_2; B_2; C_2; D_2 — проекции их на ось ординат;

α_1; α_2; α_3; α_4 — азимуты сторон

или

r_1; r_2; r_3; r_4: — их румбы,

причем $AB = d_1$; $BC = d_2$; $CD = d_3$; $DA = d_4$ и азимуты α_1; α_2; α_3; α_4 известны.

Требуется рассчитать координаты вершин:
A $(x_A; y_A)$; B $(x_B; y_B)$; C $(x_C; y_C)$; D $(x_D; y_D)$.

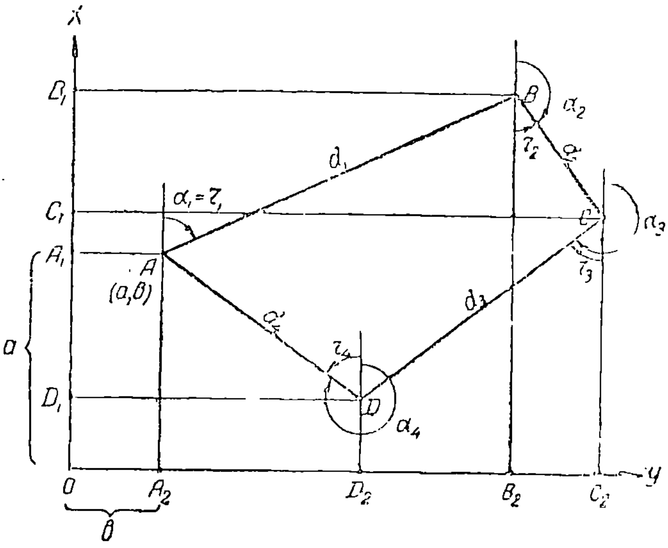


Рис. 243. Нанесение полигона по координатам

Для решения поставленной задачи следует опереться на основные формулы (стр. 320).

$$x_n = x_{n-1} + \Delta x; \quad x_n = x_{n-1} + d\cos\alpha.$$
$$y_n = y_{n-1} + \Delta y; \quad y_n = y_{n-1} + d\sin\alpha.$$

Тогда: $x_B = x_A + \Delta x_1$ или $x_B = x_A + d_1\cos\alpha_1$
$y_B = y_A + \Delta y_1$ $\quad y_B = y_A + d_1\sin\alpha_1$

$x_C = x_B + \Delta x_2$ $\quad x_C = x_B + d_2\cos\alpha_2$
$y_C = y_B + \Delta y_2$ $\quad y_C = y_B + d_2\sin\alpha_2$

$x_D = x_C + \Delta x_3$ или $x_D = x_C + d_3\cos\alpha_3$
$y_D = y_C + \Delta y_3$ $\quad y_D = y_C + d_3\sin\alpha_3$

Ввиду того, что азимуты принимают любые значения в пределах от 0° до 360°, приходится для расчетов по таблицам приводить азимуты к углам меньше 90°, а тогда рациональнее для вычислений перевести азимуты в румбы; которые, как известно, определяются величиной угла до 90°. Указание же четверти круга — С—В; Ю—В; Ю—З; С—З — определит знак тригонометрических функций $\sin r$ и $\cos r$, входящих в формулы.

Координаты точки A могут быть заданы предыдущей съемкой (координаты триангуляционного знака; столб окружной границы колхоза и т. п.) или выбраны произвольно, например $+100{,}0$; $+100{,}0$ (см. табл., стр. 362).

Таким образом, координаты вершин будут:

$$A\ [x_A = a;\ y_A = b];$$

$$B\ [x_B = a + d_1 \cos\alpha_1;\ y_B = b + d_1 \sin_1];$$

$$C\ [x_C = x_B + d_2 \cos\alpha_2;\ y_C = y_B + d_2 \sin\alpha_2];$$

$$D\ [x_D = x_C + d_3 \cos\alpha_3;\ y_D = y_C + d_3 \sin\alpha_3].$$

Их и следует строить в выбранном масштабе на координатной сетке.

Для n-ой вершины многоугольника формулы примут вид:

$$x_n = x_1 + \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 + \ldots + \Delta x_{n-1};$$

$$y_n = y_1 + \Delta y_1 + \Delta y_2 + \Delta y_3 + \ldots + \Delta y_{n-1};$$

или в иной записи:

$$x_n = x_1 + \sum_{i=1}^{i=n-1} \Delta x_i$$

$$y_n = y_1 + \sum_{i=1}^{i=n-1} \Delta y_i$$

При нахождении координат рекомендуется для проверки правильности вычислений к координатам последней точки (в данном случае — четвертой) прибавить их приращения с тем, чтобы получить координаты первой точки, следующей за последней.

$$A\,[x_A = x_D + d_4 \cos\alpha_4;\ y_A = y\ \ + d_4 \sin\alpha_4].$$

Расхождение не должно выходить за пределы точности для данного вида работы.

Указания. 1. Приращения Δx_i и Δy_i берутся с соответствующими знаками.

$\sum_{i=1}^{i=n} \Delta x_i = 0$; $\sum_{i=1}^{i=n} \Delta y_i = 0$, как суммы проекций замкнутой ломаной линии.

На практике, разумеется, нуля не получится, и требуется установить, не выходят ли полученные погрешности за пределы допусков. Итак, пусть:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \Delta x_i = f_x, \text{ вместо } \sum_{i=1}^{i=n} \Delta x_i = 0, \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} \Delta y_i = f_y, \quad \text{вместо} \quad \sum_{i=1}^{i=n} \Delta y_i = 0 \,;$$

f_x и f_y суть невязки в приращениях координат, которые должны быть разверстаны пропорционально длинам сторон многоугольника. Тогда абсолютная ошибка определится по формуле:

$$n = \sqrt{f_x^2 + f_y^2}$$

и относительная ошибка по формуле:

$$m = \frac{n}{p},$$

где p — периметр многоугольника.

Примеры допусков: при геодезических работах с теодолитом (1′) и мерной лентой, величина m не должна превосходить $\frac{1}{1000}$. В школьных условиях допустимы отклонения.

Формулы (1) могут служить контрольными.

2. На практике вычисления располагаются в виде схемы (см. пример на стр. 326).

Практическая работа

1. Наметить полигон.
2. Снять его обходом через внутренние углы многоугольника (угломером) и нанести на план, исправив невязки.
3. Снять этот же участок буссолью с помощью румбов.
4. Снять этот же участок гониометром (буссолью) и нанести план его по координатам вершин.

Пример расчета треугольного участка — $\triangle ABC$

Полевой журнал

	Угол изм.	Угол испр.	Азимут	Румб	Длина линии (м)	Примечание
A	68°0	68°				Допустимая угловая невязка:
			45°	СВ:45°	56,5	
B	67°5	68°				$f = 1{,}5t\sqrt{n} = 1{,}5\cdot 0°{,}5\cdot\sqrt{3} =$
			157°	ЮВ:23°	75,8	
C	44°0	44°				$= 1{,}5\cdot 0°{,}5\cdot 1{,}73 = \pm 1°{,}3$,
			293°	СЗ:67°	76,0	
A						где t — точность инструмента, n — число углов полигона

$S_{\text{изм.}} = 179°5 \quad S_{\text{теор.}} = 180° \qquad p = 208{,}3$ м

* Вывод см. В. М. Брадис «Теория и практика вычислений». 1937.

Координатная ведомость

Формулы: $\lg \Delta x = \lg d + \lg \cos r$; $\lg \Delta y = \lg d + \lg \sin r$ $x_n = x_{n-1} + \Delta x_n$; $y_n = y_{n-1} + \Delta y_n$								
	$\lg \cos r$ $\lg d$ $\lg \sin r$	$\lg \Delta x$ $\lg \Delta y$	Вычисл.		Исправл.		x	y
			Δx	Δy	Δx	Δy		
A	9,8495 1,7520 9,8495	1,6015 1,6015	+39,9	+1 +39,9	+39,9	+40,0	0	0
B	9,9640 1,8797 9,5919	1,8437 1,4716	+1 −69,8	+2 +29,6	−69,7	+29,8	+39,9	+40,0
C	9,5919 1,8808 9,9640	1,4727 1,8448	+1 +29,7	+2 −70,0	+29,8	−69,8	−29,8	+69,8
			−0,2	−0,5	0	0		

$$\Sigma \Delta x = -0{,}2; \quad \Sigma \Delta y = -0{,}5;$$

$$m = \pm \sqrt{(-0{,}2)^2 + (-0{,}5)^2} = \sqrt{0{,}04 + 0{,}25} = \pm 0{,}54 \text{ м};$$

$$n = \frac{m}{p} = \frac{0{,}54}{208{,}3} \approx \frac{1}{400} = 0{,}25\,\%.$$

Примечания. 1. Во второй колонке даны логарифмы основных элементов исходных формул, по которым находят Δx и Δy.

2. Отклонения суммы Δx и Δy от нуля внесены в виде поправок (+1, +2 и т. д. в колонках 4 и 5).

ИЗМЕРЕНИЕ НЕДОСТУПНОГО РАССТОЯНИЯ

(IX класс)

Определение ширины реки

Пусть требуется измерить расстояние AB, например, через реку, которое не может быть измерено непосредственно (рис. 244, a).

Провести эту работу построением на местности прямоугольного треугольника с измерением одной стороны и одного угла. Для решения задачи использовать тригонометрические функции, таблицы натуральных значений тригонометрических функций или таблицы логарифмов.

Оборудование: 1) угломерный инструмент (гониометр, буссоль, угломер); 2) инструмент для измерения расстояний (мерная лента, рулетка, циркуль); 3) вехи и колышки.

Выполнение:

1. Провешить из точки A прямую, перпендикулярную AB.
2. Отложить по этому направлению расстояние d и отметить колышком точку C. Точку C следует выбирать так, чтобы выполнить условие $20° < \alpha < 70°$ *.
3. Установить инструмент в C и измерить угол α.
4. Произвести расчет по формуле $AB = d \cdot \mathrm{tg}\,\alpha$.

---

* См. ниже о наивыгоднейшем угле засечки, стр. 329.

Указания: 1. На прямой, перпендикулярной AB (рис. 244, *б*), следует отметить ряд точек (C_1, C_2, C_3) и получить величину AB по различным данным α_1 и d_1; α_2 и d_2; α_3 и d_3. Окончательное значение AB принять равным среднему из n значений.

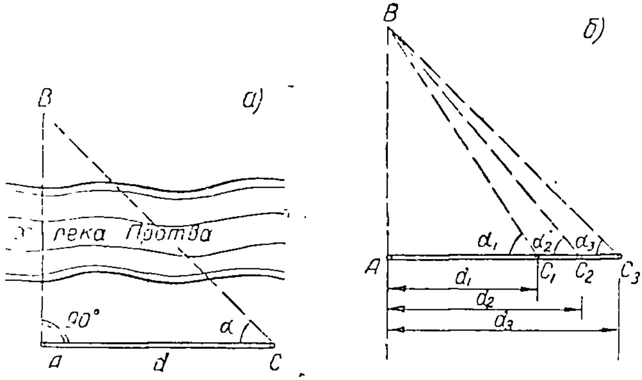


Рис. 244. Определение недоступного расстояния

Образец полевого журнала (применительно к гониометру)

Точка стояния	Точка наблюдения	Отсчеты	Угол		Метры	Примечание
			град.	мин.		
C_1	B	237°26′	64°	52′	50,0	
	A	172°34′			(AC_1)	
C_2	B	17°04′	54°	56′	75,0	
	A	322°08′			(AC_2)	
C_3	B	127°54′	46°	44′	100,0	
	A	81°10′			(AC_3)	

Вычисление по формуле $AB = d\,\mathrm{tg}\,\alpha$.

а) с использованием таблиц натуральных значений тригонометрических функций и счетной линейки:

Угол α	$\mathrm{tg}\,\alpha$	d	$d\,\mathrm{tg}\,\alpha$
64°52′	2,132	50,0	106,6
54°56′	1,425	75,0	106,9
46°44′	1,062	100,0	106,2

$$AB = \frac{106,6 + 106,9 + 106,2}{3} = 106,6 \text{ м}.$$

б) с использованием таблиц логарифмов:

α	64°52′	54°56′	46°44′
d	50,0	75,0	100,0
$\lg \mathrm{tg}\,\alpha$	0,3287	0,1537	0,0263
$\lg d$	1,6990	1,8751	2,0000
$\lg AB$	2,0277	2,0288	2,0268
AB	106,6	106,8	106,3

$$AB = \frac{106,6 + 106,8 + 106,3}{3} = 106,6 \text{ м}.$$

Ошибка определяемой стороны

В прямоугольном треугольнике ABC сторона $AB = x$, равна

$$x = d\,\mathrm{tg}\,\alpha, \tag{1}$$

где $d = AC$ (рис. 244).

Ошибка определения стороны x зависит от ошибок измерений величин d и α.

Пусть абсолютные ошибки величин d и α будут соответственно Δd и $\Delta\alpha$, а ошибка x есть Δx. Тогда можно написать, что:

$$x + \Delta x = (d + \Delta d)\cdot \mathrm{tg}(\alpha + \Delta\alpha). \tag{2}$$

Для определения ошибки Δx вычтем из равенства (2) первое. Тогда получим:

$$\Delta x = d\cdot \mathrm{tg}(\alpha + \Delta\alpha) + \Delta d\cdot \mathrm{tg}(\alpha + \Delta\alpha) - d\cdot \mathrm{tg}\,\alpha;$$

Относительная ошибка определится частным $\frac{\Delta x}{x}$. Учтем, что $x = d\,\mathrm{tg}\,\alpha$.

Будем иметь:

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{d\cdot \mathrm{tg}(\alpha+\Delta\alpha)}{d\cdot \mathrm{tg}\,\alpha} + \frac{\Delta d}{d}\cdot\frac{\mathrm{tg}(\alpha+\Delta\alpha)}{\mathrm{tg}\,\alpha} - \frac{d\cdot \mathrm{tg}\,\alpha}{d\cdot \mathrm{tg}\,\alpha};$$

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta d}{d}\cdot\frac{\mathrm{tg}\,(\alpha+\Delta\alpha)}{\mathrm{tg}\,\alpha} + \frac{\mathrm{tg}\,(\alpha+\Delta\alpha) - \mathrm{tg}\,\alpha}{\mathrm{tg}\,\alpha};$$

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta d}{d}\cdot\frac{\mathrm{tg}\,(\alpha+\Delta\alpha)}{\mathrm{tg}\,\alpha} + \frac{\dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\Delta\alpha}{1-\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\mathrm{tg}\,\Delta\alpha} - \mathrm{tg}\,\alpha}{\mathrm{tg}\,\alpha};$$

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta d}{d}\cdot\frac{\mathrm{tg}\,(\alpha+\Delta\alpha)}{\mathrm{tg}\,\alpha} + \frac{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\Delta\alpha - \mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}^2\alpha\cdot\mathrm{tg}\,\Delta\alpha}{\mathrm{tg}\,\alpha\,(1-\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\mathrm{tg}\,\Delta\alpha)};$$

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta d}{d}\cdot\frac{\mathrm{tg}\,(\alpha+\Delta\alpha)}{\mathrm{tg}\,\alpha} + \frac{\mathrm{tg}\,\Delta\alpha\,(1+\mathrm{tg}^2\alpha)}{\mathrm{tg}\,\alpha(1-\mathrm{tg}\cdot\alpha\mathrm{tg}\Delta\alpha)};$$

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta d}{d}\cdot\frac{\mathrm{tg}\,(\alpha+\Delta\alpha)}{\mathrm{tg}\,\alpha} + \frac{\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\sec^2\alpha}{\mathrm{tg}\,\alpha\,(1-\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\mathrm{tg}\,\Delta\alpha)};$$

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta d}{d}\cdot\frac{\mathrm{tg}\,(\alpha+\Delta\alpha)}{\mathrm{tg}\,\alpha} + \frac{\mathrm{tg}\,\Delta\alpha}{\cos^2\alpha\cdot\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot(1-\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\mathrm{tg}\,\Delta\alpha)};$$

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta d}{d}\cdot\frac{\mathrm{tg}\,(\alpha+\Delta\alpha)}{\mathrm{tg}\,\alpha} + \frac{\mathrm{tg}\,\Delta\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha\left(1-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\sin\Delta\alpha}{\cos\Delta\alpha}\right)};$$

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta d}{d}\cdot\frac{\mathrm{tg}\,(\alpha+\Delta\alpha)}{\mathrm{tg}\,\alpha} + \frac{\dfrac{\sin\Delta\alpha}{\cos\Delta\alpha}}{\sin\alpha\cos\alpha\cdot\dfrac{\cos\alpha\cos\Delta\alpha - \sin\alpha\cdot\sin\Delta\alpha}{\cos\alpha\cos\Delta\alpha}};$$

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta d}{d}\cdot\frac{\mathrm{tg}\,(\alpha+\Delta\alpha)}{\mathrm{tg}\,\alpha} + \frac{\sin\Delta\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\,(\alpha+\Delta\alpha)}.$$

Принимая по малости $\Delta\alpha$, что $\mathrm{tg}\,(\alpha+\Delta\alpha)\approx\mathrm{tg}\alpha$ в первом члене правой части равенства и что $\cos\,(\alpha+\Delta\alpha)\approx\cos\alpha$, во втором члене $\sin\Delta\alpha\approx\Delta\alpha$ в радианной мере напишем:

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta d}{d}\cdot\frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\mathrm{tg}\,\alpha} + \frac{\Delta\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha},$$

или

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta d}{d} + \frac{2\Delta\alpha}{\sin 2\alpha}.$$

До сих пор под величинами Δx, Δd и $\Delta\alpha$ предполагались истинные ошибки. Теперь от истинных ошибок, которые нам неизвестны, перейдем к средним квадратическим, обозначив их m_x, m_d и m_α. Согласно теории ошибок, при переходе к средним квадратическим ошибкам полученное выражение примет вид:

$$\left(\frac{m_x}{x}\right)^2 = \left(\frac{m_d}{d}\right)^2 + \left(\frac{2m'_\alpha}{\rho'\sin 2\alpha}\right)^2,$$

или

$$m_x = \pm x\sqrt{\left(\frac{m_d}{d}\right)^2 + \left(\frac{2m'_\alpha}{\rho'\sin 2\alpha}\right)^2},$$

где знак $'$ при m_α и ρ указывает, что значения m_α и ρ следует брать в минутах.

П р и м е р. Определить среднюю квадратическую ошибку m_x, если $x = 100$ *м*; $\frac{m_d}{d} = \frac{1}{100}$; $m_\alpha = 0^\circ{,}5$ (эти ошибки соответствуют измерениям с помощью полевого циркуля и угломера). Подставим данные в формулу:

$$m_x = \pm 100\sqrt{\left(\frac{1}{100}\right)^2 + \left(\frac{2\cdot 30'}{3438'\cdot\sin 2\alpha}\right)^2}$$

и, принимая различные значения α, составим таблицу и график $m_x = f(\alpha)$ (см. рис. 245).

α в градусах	m_x в метрах
10	5,2
20	2,8
30	2,2
45	2,0
60	2,2
70	2,8
80	5,2

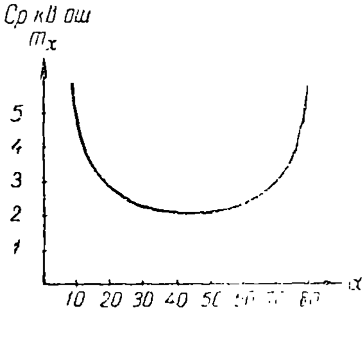


Рис. 245. Зависимость средней квадратической ошибки от величины угла

Из графика следует, что минимальная ошибка будет при угле $\alpha = 45°$, и в пределах $20° < \alpha < 70°$ величина ошибки не превышает минимальную более чем в 1,5 раза. При углах α меньше 20° и больше 70° величина ошибки m_x резко возрастает.

Опытная проверка наивыгоднейшего угла

Пусть для наблюдения выбран предмет высотой $h = 20$ *м* и пусть берутся на него углы зрения с расстояний 2, 5, 10, 20, 50, 100, 150, 200 и 500 *м* (рис. 246).

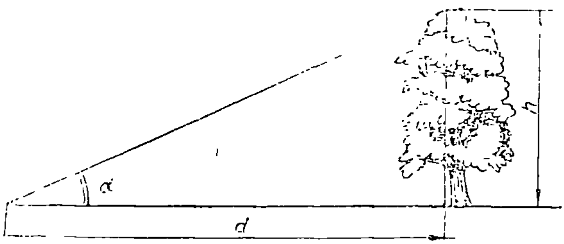


Рис. 246. Определение наивыгоднейшего угла

Рассчитаем, под каким углом будет виден предмет высотой h с различных расстояний:

$$\left(h = d\,\mathrm{tg}\,\alpha;\ \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{h}{d} \right):$$

Расстояние (*м*)	Угол в градусах (округлен до 1°)	Изменение тангенса на 1°	Ошибка определения высоты h, при ошибке в величине угла равной 1° (в *м*) (4) = (1)·(3)
1	2	3	4
2	$\alpha_2 = 84$	1,92	3,84
5	$\alpha_5 = 76$	0,320	1,60
10	$\alpha_{10} = 64$	0,095	0,95
20	$\alpha_{20} = 45$	0,035	0,70
50	$\alpha_{50} = 22$	0,022	1,10
100	$\alpha_{100} = 12$	0,018	1,80
150	$\alpha_{150} = 7$	0,018	2,70
200	$\alpha_{200} = 6$	0,018	3,60
500	$\alpha_{500} = 2$	0,017	8,50

Из таблицы следует, что наименьшая ошибка получается при угле 45°, что согласуется с графиком (рис. 245).

Определение высоты предмета

Оборудование: 1) инструмент для измерения угла в вертикальной плоскости (теодолит, кипрегель, эклиметр); 2) инструмент для измерения расстояния (дальномерная рейка, рулетка, циркуль).

а) Пример из части I.

Принципиальная схема этой работы описана в части I, на стр. 106. Решение найдено графическим методом.

Беря данные этой работы и применяя тригонометрию, получим:

$$BB_1 = AB_1 \operatorname{tg} \angle DMB + DB_1;$$

$AB_1 = l = 31$ *м*; $DB_1 = 1{,}4$ *м*; $\angle DMB = 27°$; $BB_1 = 31 \cdot 0{,}51 + 1{,}4 = 15{,}8 + 1{,}4 = 17{,}2$ *м*.

б) Комплексная работа по определению недоступных расстояний как в горизонтальной, так и в вертикальной плоскости.

Пусть требуется определить высоту триангуляционного знака, расположенного за рекой на холме (рис. 247). Измерение расстояния до знака затруднено из-за реки и рельефа местности на левом берегу. Правый берег ровный.

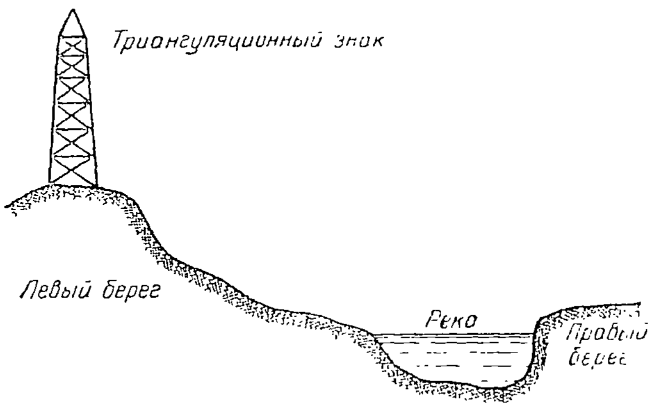


Рис. 247. Определение высоты триангуляционного знака

Схема решения задачи показана на рис. 248. Расстояние до знака определяется из прямоугольного треугольника ABC, как в работе на стр. 328:

$$AB = d \operatorname{tg} \alpha; \quad AC = \frac{d}{\cos \alpha}.$$

В точке B или C измеряют углы в вертикальной плоскости, визируя на основание и вершину триангуляционного знака.

Из чертежа следует, что:

$$A_1A_2 = A_0A_2 - A_0A_1 = A_0M \operatorname{tg}\gamma_2 - A_0M \operatorname{tg}\gamma_1 =$$

$$= A_0M \cdot (\operatorname{tg}\gamma_2 - \operatorname{tg}\gamma_1).$$

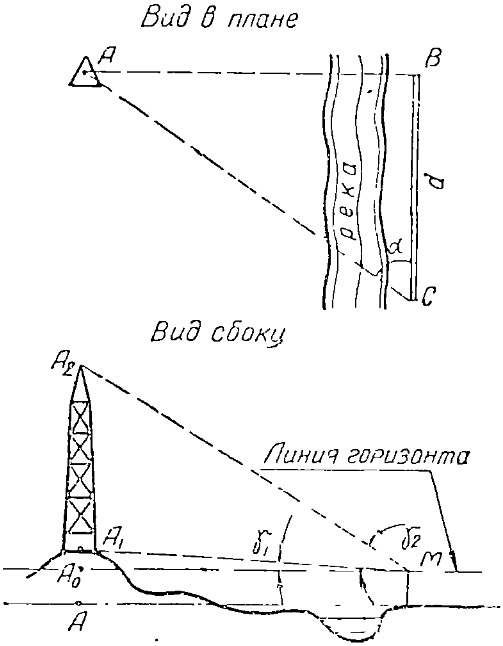


Рис. 248. Геометрическая схема работы

Так как $A_0M = AB$, то при измерении углов γ в точке B получим:

$$A_1A_2 = d \operatorname{tg}\alpha \cdot (\operatorname{tg}\gamma_2 - \operatorname{tg}\gamma_1);$$

при измерении углов γ в точке C получим:

$$A_1A_2 = \frac{d}{\cos\alpha} (\operatorname{tg}\gamma_2 - \operatorname{tg}\gamma_1).$$

Приводя эти формулы к виду, удобному для логарифмирования, будем иметь:

$$A_1A_2 = \frac{d \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin(\gamma_2 - \gamma_1)}{\cos \gamma_1 \cdot \cos \gamma_2} \text{ (для точки } B) ,$$

$$A_1A_2 = \frac{d \cdot \sin(\gamma_2 - \gamma_1)}{\cos \alpha \cdot \cos \gamma_1 \cdot \cos \gamma_2} \text{ (для точки } C) .$$

Пример. Решение с помощью логарифмов.

Данные, полученные измерениями на местности:

$d = 400,0$ *м*; $\alpha = 42°15'$; $\gamma_1 = 7°15'$; $\gamma_2 = 13°30'$ (в точке B).

$$\lg A_1A_2 = \lg d + \lg \operatorname{tg} \alpha + \lg \sin(\gamma_2 - \gamma_1) -$$
$$- (\lg \cos \gamma_1 + \lg \cos \gamma_2).$$

№ действий по порядку	Величины	Числовые значения
1	2	3
1	d	400,0 *м*
2	α	42°15′
3	γ_2	13°30′
4	γ_1	7°15′
5	$\gamma_2 - \gamma_1$	6°15′
6	$\lg d$	2,6021
7	$\lg \operatorname{tg} \alpha$	$\bar{1},9582$
8	$\lg \sin(\gamma_2 - \gamma_1)$	$\bar{1},0369$
9	(6) + (7) + (8)	1,5972
13	(12)	$\bar{1},9849$
14	$\lg A_1A_2 =$ (9) — (12)	1,6123
15	A_1A_2	41,0 *м*
10	$\lg \cos \gamma_1$	$\bar{1},9966$
11	$\lg \cos \gamma_2$	$\bar{1},9878$
12	(10) + (11)	$\bar{1},9844$

Контроль. Данные, полученные измерением на местности:

$d = 400,0$ *м*; $\alpha = 42°15'$; $\gamma_1 = 11°18'$; $\gamma_2 = 15°30'$ (в точке C).

$\lg A_1A_2 = \lg d + \lg \sin(\gamma_2 - \gamma_1) - (\lg \cos \alpha + \lg \cos \gamma_1 + \lg \cos \gamma_2)$.

1	2	3
1	d	400,0 *м*
2	α	42°15′
3	γ_2	15°30′
4	γ_1	11°15′
5	$\gamma_2 - \gamma_1$	4°15′
6	$\lg d$	2,6021
7	$\lg \sin (\gamma_2 - \gamma_1)$	$\overline{2},8699$
8	(6) + (7)	1,4720
13	(12)	$\overline{1},8449$
14	(8) — (13)	1,6271
15	A_1A_2	42,5 *м*
9	$\lg \cos \alpha$	$\overline{1},8694$
10	$\lg \cos \gamma_1$	$\overline{1},9916$
11	$\lg \cos \gamma_2$	$\overline{1},9839$
12	(9) + (10) + (11)	$\overline{1},8449$

$$\text{Высота знака} = \frac{41,0 + 42,5}{2} = 41,8 \text{ м}.$$

ПРОЕКТИРОВАНИЕ ДОРОГИ

(IX класс)

Разбивка кривых

В целом ряде инженерных работ появляется необходимость построения на местности дуги окружности значительного радиуса. При строительстве, например, железных дорог, радиусы составляют несколько сот метров, а дуги превышают километр.

Естественно, что построить такую дугу с помощью какого-либо циркуля или привязанного к колышку шнура невозможно. В этом случае используют метод прямоугольных координат, а все расчеты ведут с применением тригонометрических функций. В геодезии такая работа называется «разбивкой кривых».

Рассмотрим ее математическое содержание на конкретном примере.

На рис. 249 нанесено направление проектируемой железной дороги, заданное азимутами α_1 и α_2. Требуется рассчитать необходимые для построения на местности элементы кривой, если задан радиус $R = 500$ *м*. Сначала сделаем это построение на чертеже.

Обозначим угол ABC (вправо лежащий) через β и найдем, что $\beta = 180^\circ - (\alpha_2 - \alpha_1)$.

Для отыскания центра O окружности радиуса R найдем точку пересечения прямых, параллельных соответственно AB и BC и отстоящих от них на 500 *м*.

Из точки O опустим перпендикуляры на AB и BC (OD и OF), а также соединим точку O с точкой B.

Ясно, что угол φ, равный $180^\circ - \beta$, равен центральному углу DOF, а прямая OB есть его биссектриса. Такое построе-

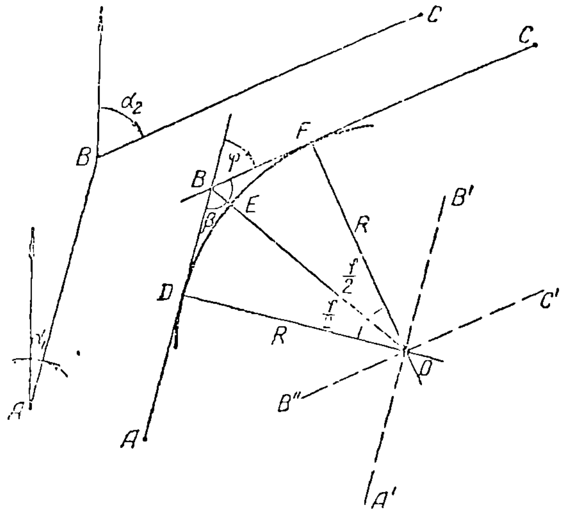


Рис. 249. Разбивка кривой

ние даст возможность рассчитать положение на местности точек D, E и F.

Действительно:

$$BD = BF = R \cdot \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2},$$

где

$$\varphi = 180^\circ - \beta = \alpha_2 - \alpha_1; \; BE = \frac{R}{\cos \frac{\varphi}{2}} - R = R\left(\sec \frac{\varphi}{2} - 1\right).$$

Отсюда работа на местности будет заключаться в следующем:

1. В створе линии BA на расстоянии BD, а в створе линии BC на расстоянии BF забиваются колышки, обозначающие точки D и F, т. е. начало и конец кривой.

2. На направлении, делящем угол ABC пополам, откладывается отрезок BE и намечается колышком точка E.

Так как расстояния между точками D, E и F при большом радиусе значительны, необходимо наметить ряд промежуточных точек.

Допустим, необходимо эти точки намечать через n метров по дуге. Для этого подсчитаем, какому центральному углу будет соответствовать эта дуга. Очевидно, что:

$$\frac{2\pi R}{360^\circ} = \frac{n}{\gamma}; \quad \text{откуда} \quad \gamma = \frac{180^\circ}{\pi R} \cdot n.$$

Если за оси координат принять касательную в точке D (рис. 250) и перпендикулярный к ней радиус, то по углу γ и радиусу R можно подсчитать координаты x и y всех промежуточных точек.

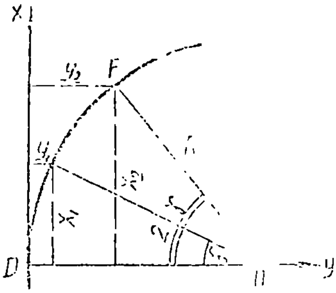


Рис. 250. Разбивка кривой по координатам

Из чертежа (рис. 250) следует, что:

$$x_1 = R \cdot \sin\gamma;$$

$$y_1 = R - R \cdot \cos\gamma =$$

$$= R\ (1 - \cos\gamma) = 2\,R \cdot \sin^2\frac{\gamma}{2};$$

$$x_2 = R \cdot \sin 2\gamma; \quad y_2 = R - R \cdot \cos 2\gamma = R\ (1 - \cos 2\gamma) = 2R \cdot \sin^2\gamma.$$

Произведем расчет при $R = 500$ *м* и $n = 50$ *м*.

1. Вычисление угла γ.

$$\gamma = \frac{180}{\pi \cdot 500} \cdot 50 = \frac{18}{\pi};\ \lg\gamma = \lg 18 - \lg\pi =$$

$$= 1{,}2553 - 0{,}1969 = 0{,}7584^{*};\ \gamma = 5^\circ 44'.$$

2. Вычисление координат.

Центр. угол	5°44′	11°28′	17°12′	22°56′	28°10′
$\frac{1}{2}$ центр. угла	2°52′	5°44′	8°36′	11°28′	14°20′
lg sin центр. угла	$\overline{2}$,9996	$\overline{1}$,2984	$\overline{1}$,4709	$\overline{1}$,5907	$\overline{1}$,6809
lg R	2,6990	2,6990	2,6990	2,6990	2,6990
lg x	1,6986	1,9974	2,1699	2,2897	2,3799
x	49,95	99,40	147,87	194,85	239,80
lg sin $\frac{1}{2}$ центр. угла	$\overline{2}$,6991	$\overline{2}$,9996	$\overline{1}$,1747	$\overline{1}$,2984	$\overline{1}$,3937
2lg sin $\frac{1}{2}$ центр. угла	$\overline{3}$,3982	$\overline{3}$,9992	$\overline{2}$,3494	$\overline{2}$,5968	$\overline{2}$,7874
lg 2 R	3,0000	3,0000	3,0000	3,0000	3,0000
lg y	0,3982	0,9992	1,3494	1,5968	1,7874
y	2,50	9,98	22,35	39,52	61,29

* В радианах $\gamma = \frac{\pi}{\pi 500} 50 = 0{,}1$, а это, как известно, соответствует 5°44′.

Работа на местности сведется теперь к следующим операциям:

1) отложить на линии DB абсциссы x ($x_1 = 49{,}95$ *м*; $x_2 = 99{,}40$ *м* и т. д.);

2) в полученных точках провести перпендикуляры к линии BD и отложить соответствующие ординаты ($y_1 = 2{,}50$ *м*; $y_2 = 9{,}98$ *м* и т. д.);

3) провести аналогичную работу на линии FB, откладывая абсциссы от F к B;

4) выставить во всех точках вехи и на глаз проверить правильность кривой.

Построение масштабов уклонов и заложений

В части I даны основные понятия о рельефе и разобрана задача на построение профиля по плану с горизонталями.

Рассмотрим более сложные задачи, которые могут быть решены на плане с горизонталями в условиях школы.

На имеющемся в приложении учебном плане видно, что расстояния между двумя смежными горизонталями, т. е. линиями равных высот, различны. В одном месте плана горизонтали идут близко друг к другу, в другом наоборот — далеко. Это вызвано различным уклоном местности (рис. 251). Чем чаще горизонтали на плане, тем круче скат.

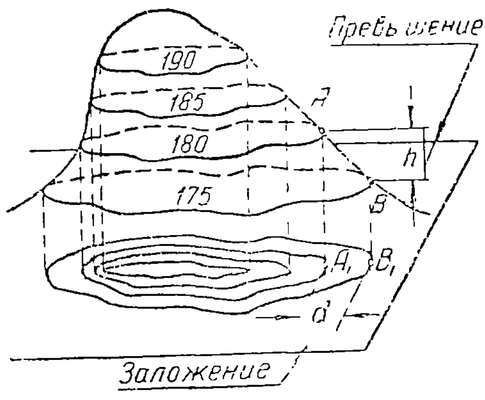


Рис. 251. Заложение и превышение

В геодезии расстояние на плане между соседними горизонталями, т. е. ортогональная проекция линии местности (d) в масштабе плана, называется «заложением».

Если взять отношение разности высот между двумя смежными горизонталями h к заложению d (на местности), то оно даст тангенс угла наклона, или, как принято называть, уклон i местности между точками A и B.

$$i = \operatorname{tg} \varphi = \frac{h}{d} = \frac{180 - 175}{75} = \frac{5}{75} = 0{,}067;$$

$$\varphi = 3^\circ 50'.$$

Можно построить номограмму зависимости углов наклона местности от заложения. Такая номограмма называется масштабом заложений. Она будет пригодна только для планов данного масштаба и с определенным сечением рельефа, т. е. разностью высот между соседними горизонталями.

П р и м е р. Построение масштаба заложений для плана масштаба 1 : 10 000 с сечением рельефа через 5 *м* *.

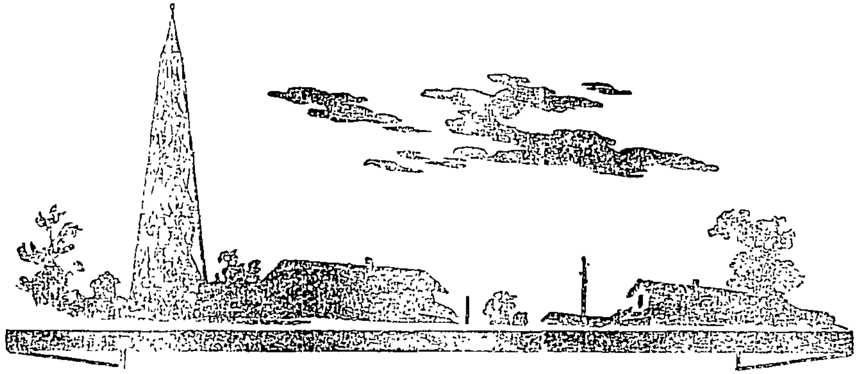
Исходная формула $\operatorname{tg} \varphi = \frac{h}{d}$, откуда $d = \frac{h}{\operatorname{tg} \varphi} = \frac{5}{\operatorname{tg} \varphi}$. Составим таблицу для графика, произведя подсчет d по формуле: $\lg d = \lg 5 - \lg \operatorname{tg} \varphi$.

φ	1°	2°	3°	4°	5°
lg 5 lg tg φ	0,6990 $\overline{2}$,2419	0,6990 $\overline{2}$,5131	0,6990 $\overline{2}$,7194	0,6990 $\overline{2}$,8446	0,6990 $\overline{2}$,9420
lg d d	2,4571 286,5	2,1559 143,2	1,9796 95,4	1,8544 71,5	1,7570 57,1

φ	6°	7°	8°	9°	10°
lg 5 lg tg φ	0,6990 $\overline{1}$,0216	0,6990 $\overline{1}$,0891	0,6990 $\overline{1}$,1478	0,6990 $\overline{1}$,1997	0,6990 $\overline{1}$,2463
lg d d	1,6774 47,6	1,6099 40,7	1,5512 35,6	1,4993 31,6	1,1527 28,1

Строим график, откладывая на оси ординат значения углов, а на оси абсцисс значения d в масштабе плана (рис. 252). По масштабу заложений легко получить значение угла наклона

* Иногда масштаб заложения строится в условиях: по оси абсцисс откладываются углы, по оси ординат — заложения.



ТРИАНГУЛЯЦИЯ

(X класс)

Изучение в X классе способов решения косоугольных треугольников даст возможность довольно полно ознакомить учащихся с методом триангуляции.

Этот метод служит для точного определения координат геодезических пунктов. Сущность метода заключается в том, что, измерив в треугольнике с большой точностью расстояние между двумя точками, так называемый базис, например, A, B и углы для них 1 и 2, можно путем вычислений определить расстояние AC и BC (рис. 255). Если теперь в точках B и C измерить углы, образованные стороной BC и сторонами CD и BD (4 и 5), то можно, не измеряя BC, так как оно вычислено из треугольника ABC, подсчитать расстояние BD и CD.

Продолжая цепь треугольников далее, можно вычислить расстояния, ограничиваясь только угловыми измерениями и не

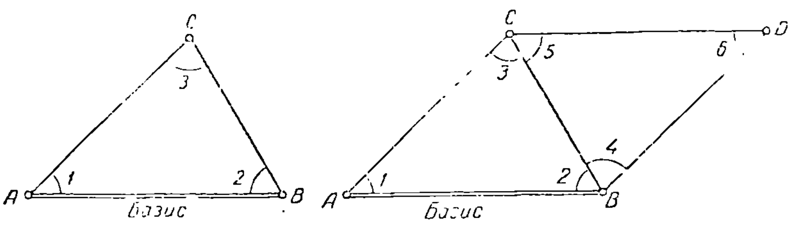


Рис. 255. Метод триангуляции

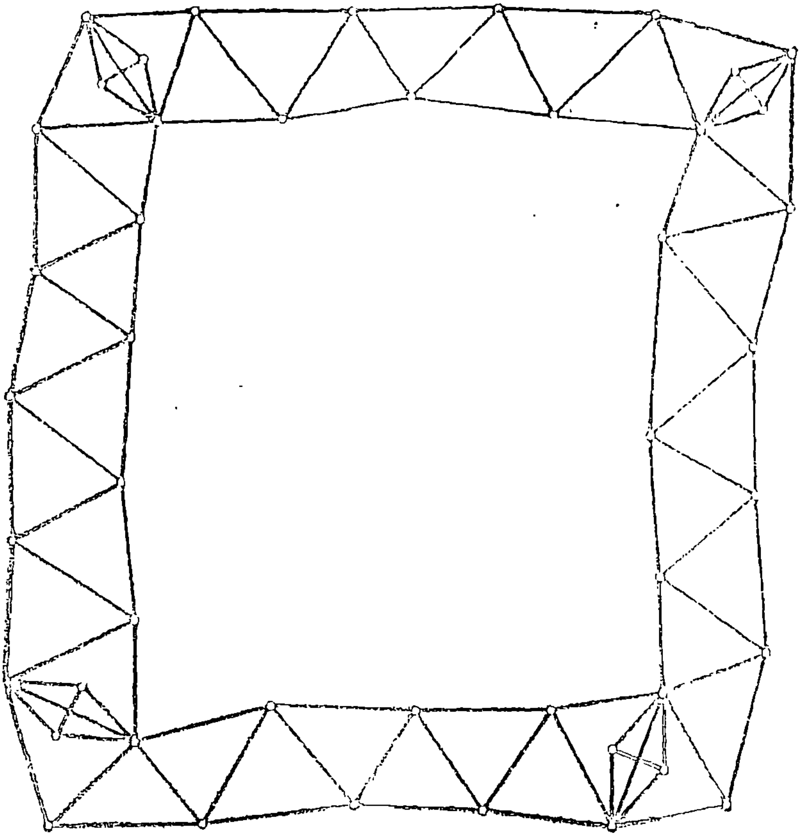


Рис. 256. Схема триангуляции I класса

производя уже измерений сторон. Это обстоятельство чрезвычайно упрощает работу, так как часто измерить расстояние из-за различных препятствий бывает невозможно, а углы можно измерять и с большой точностью.

Триангуляция делится на классы и прокладывается по определенной схеме. Так, например, триангуляция I класса прокладывается по меридианам и параллелям, образуя замкнутые цепи треугольников длиною около 1000 *км*. Стороны треугольников I класса составляют примерно 25—40 *км* (рис. 256)*.

На пересечениях рядов меридианов и параллелей производят астрономические определения широты, долготы и азимута.

* Сферичность поверхности земли при больших расстояниях (25—40 *км*) приводит к необходимости решать сферические треугольники. Такого рода треугольники, как известно, обладают рядом особых свойств, например, сумма углов в них не равна 180° (см. М. К. Вентцель, Курс сферической тригонометрии).

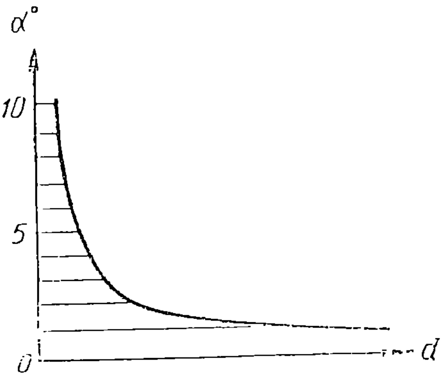


Рис. 252. Масштаб заложений

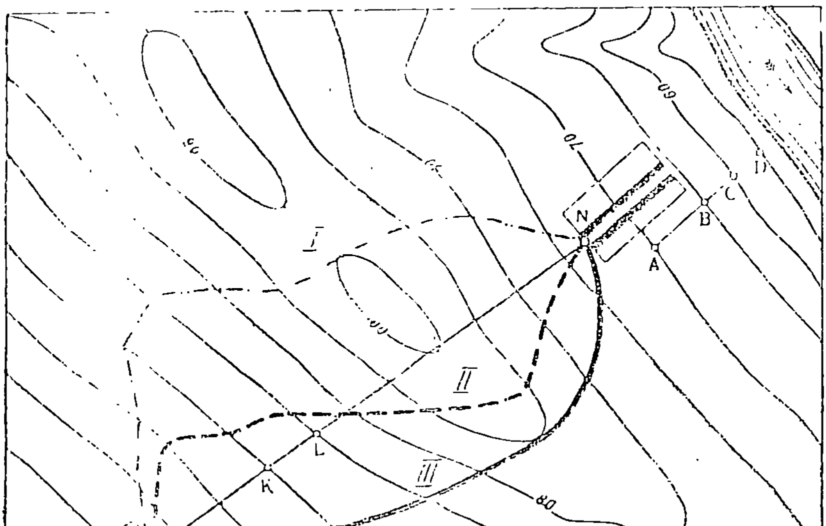


Рис. 253. Проектирование дороги

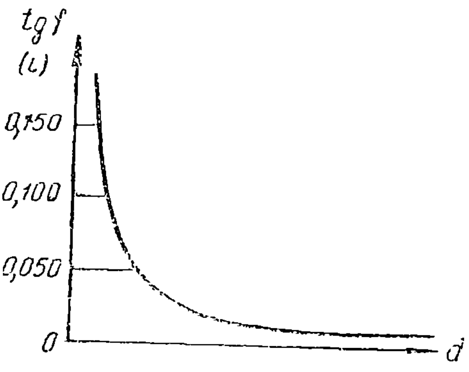


Рис. 254. Масштаб уклонов

по любому направлению. Например, подъем от реки вверх к селению (по линии DA) будет вначале круче (DC и $CB = 6°$,) а к концу более пологий ($BA = 3°$ (рис. 253; проверить эти отрезки на масштабе заложений).

Таким образом, по плану легко определить степень проходимости различного транспорта. Можно также, зная предельно допустимые углы наклона, спроектировать дорогу.

В дорожном строительстве принято уклоны выражать не в градусах, а в тангенсах углов наклона. Поэтому вместо масштаба заложений часто строят масштаб уклонов. Строится он аналогично масштабу заложения (рис. 254).

Выбор направления

(проведение линии, не превышающей заданного уклона).

Допустим, что дано задание спроектировать из пункта N в пункт P улучшенную грунтовую дорогу (рис. 253). Предельно допустимый уклон 0,05. Производить земляные работы, т. е. делать насыпи и выемки, чтобы выдержать допустимый уклон, в данном случае не разрешается в целях экономии средств строительства.

Выполнение

Соединяем точки N и P прямой и проверяем по масштабу уклонов возможность проведения прямолинейной дороги.

Пусть в данном случае мы убедились, что уклон превышает допустимый, так как минимальный уклон по линии NP (между точками K и L) составляет 0,06.

Берем измерителем с масштаба уклонов максимально допустимое заложение и наносим несколько вариантов дороги (I, II, III). Выбираем из них наилучший (кратчайший и имеющий меньше поворотов), в данном примере третий, и вычерчиваем профиль дороги, как указано на стр. 100.

Пункты, в которых производятся эти работы, называются пунктами Лапласа.

Сторона, расположенная между пунктами Лапласа, является исходной для дальнейших вычислений. Ее величина, вследствие трудности измерения такой длины линии, определяется большей частью при помощи специальной небольшой сети треугольников, в которой измерен на местности сравнительно небольшой базис B_1B_2 (рис. 257).

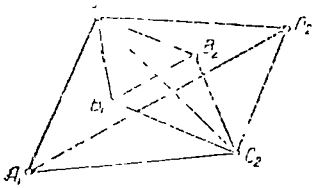


Рис. 257. Определение исходной стороны

В фигуре $B_1C_1B_2C_2$ измеряют диагональ B_1B_2 и углы, с помощью которых вычисляют диагональ C_1C_2. В четырехугольнике $A_1C_1A_2C_2$ по диагонали C_1C_2 и измеренным углам вычисляют диагональ A_1A_2.

На основе сети I класса строятся сети низших классов: II, III, IV и V.

Основные данные триангуляционных сетей

Класс	Длина стороны треугольника (*км*)	Точность измерения	
		средняя квадратическая ошибка измер. углов (сек.)	относительная ошибка исходной стороны
I	25 — 40	$\pm 0{,}7 - \pm 0{,}9$	1 : 300 000
II	20 — 25	$\pm 1{,}2 - \pm 1{,}5$	1 : 200 000
III	4 — 12	$\pm 4 - \pm 5$	1 : 50 000

В сетях IV и V класса средние квадратические ошибки измерения углов допускаются значительно большие, но не должны превосходить $\pm 10'' - \pm 15''$.

Закрепление на местности геодезических пунктов производится путем закладки в землю «центров» (рис. 258). Центр — это бетонный монолит, в который сверху вделана чугунная марка с крестообразной насечкой. Это перекрестие и есть та точка, координаты которой определяются.

На триангуляциях высших классов для надежности закладывают три центра: нижний, средний и верхний. Естественно, что перекрестия всех трех центров должны располагаться на одной вертикали.

На поверхности земли над центром устанавливаются пирамиды или сигналы. Высота этих сооружений должна обеспе-

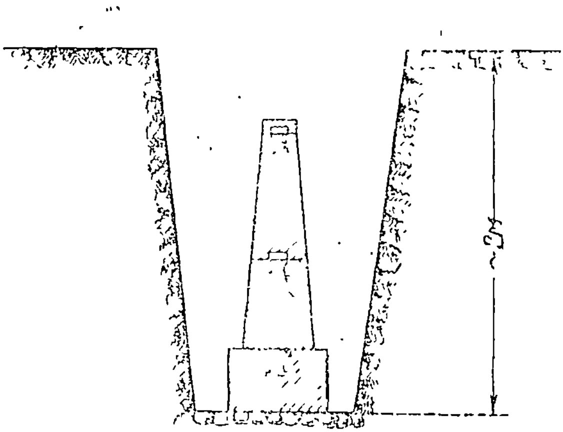


Рис. 258. Центр знака

чить взаимную видимость всех смежных пунктов, т. е. с точки O должны быть видны точки A, B, C, D, E, $Г$, а с точки, например A_1,—точки B, O и $Г$ (см. рис. 262).

На рис. 259 показана простая пирамида. Теодолит в этом случае устанавливается на земле. Если же видимости с этого пункта на смежные пункты нет, то строят сигнал (рис. 260) и теодолит для наблюдений поднимают наверх.

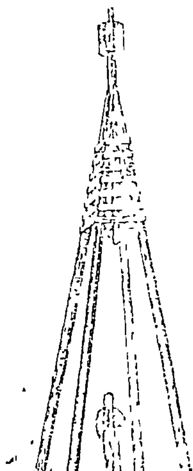


Рис. 259. Простая пирамида

Типичные схемы построения сетей

1. Геодезический четырехугольник используется при построении базисной сети. В нем по отрезку B_1B_2, измеренному на местности, и восьми измеренным углам вычисляется сторона A_1A_2.

Как видно из рис. 261, сторона A_1A_2 могла быть получена при меньшем числе измеренных углов. Действительно, при измерении только четырех углов, например, $\hat{1}$, $\hat{8}$, $\hat{3}$, $\hat{7}$, можно было бы получить величину A_1A_2.

Из треугольника $A_1B_1B_2$ следует, что

$$\frac{A_1B_1}{\sin\hat{3}} = \frac{B_1B_2}{\sin[180° - (\hat{3} + \hat{8})]}; \quad A_1B_1 = B_1B_2 \frac{\sin\hat{3}}{\sin(\hat{3} + \hat{8})},$$

откуда:

$$\frac{A_1A_2}{\sin(\hat{7} + \hat{8})} = \frac{A_1B_1}{\sin[180° - (\hat{1} + \hat{7} + \hat{8})]};$$

$$A_1A_2 = A_1B_1 \frac{\sin(\hat{7} + \hat{8})}{\sin(\hat{1} + \hat{7} + \hat{8})}.$$

Отсюда:

$$A_1A_2 = B_1B_2 \frac{\sin\hat{3} \cdot \sin(\hat{7} + \hat{8})}{\sin(\hat{3} + \hat{8}) \cdot \sin(\hat{1} + \hat{7} + \hat{8})}$$

Следовательно, углы $\hat{2}$, $\hat{4}$, $\hat{5}$ и $\hat{6}$ в этом случае не являются необходимыми. Однако в геодезии всегда стремятся получить так называемые избыточные измерения, которые позволяют произвести контроль и оценку точности.

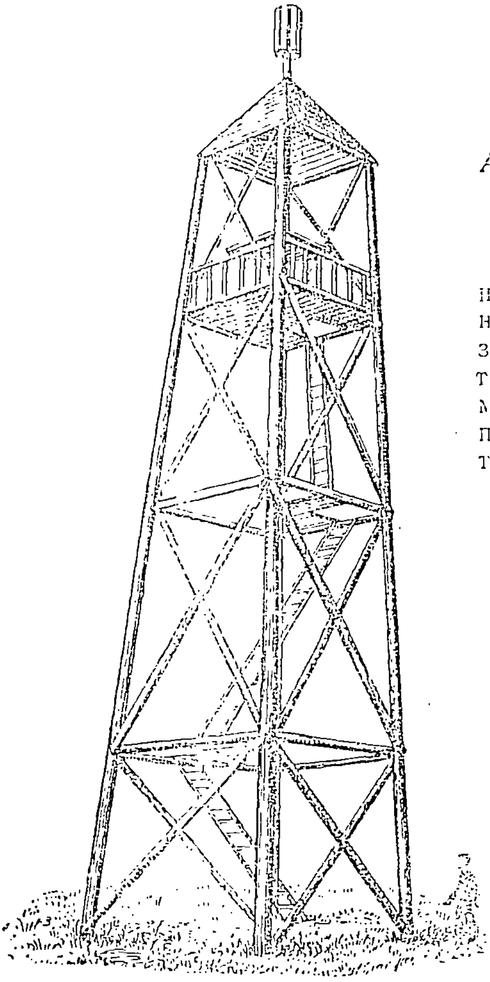


Рис. 260. Сигнал

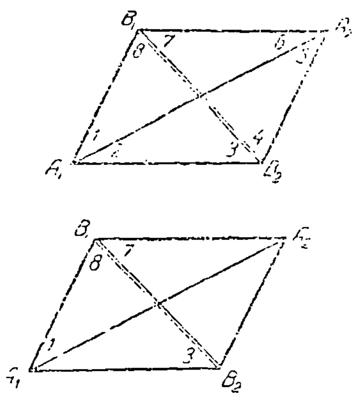


Рис. 261.
Схема геодезического четырехугольника

2. Центральная система — типичная схема для сетей низших классов (рис. 262).

Пусть сторона AB является стороной III класса, т. е. координаты точек A и B известны. Точки C, D, E, F и O являются пунктами IV класса, координаты которых нужно получить.

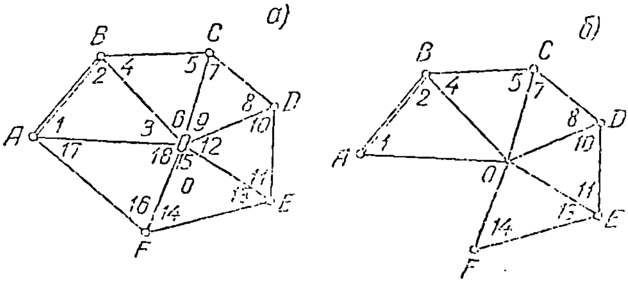


Рис. 262. Центральная система

Длина стороны AB и азимут AB могут быть получены по координатам. Минимально необходимое количество измеренных углов (два на каждый треугольник) показано на схеме (рис. 262,б).

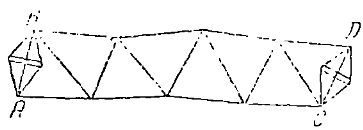
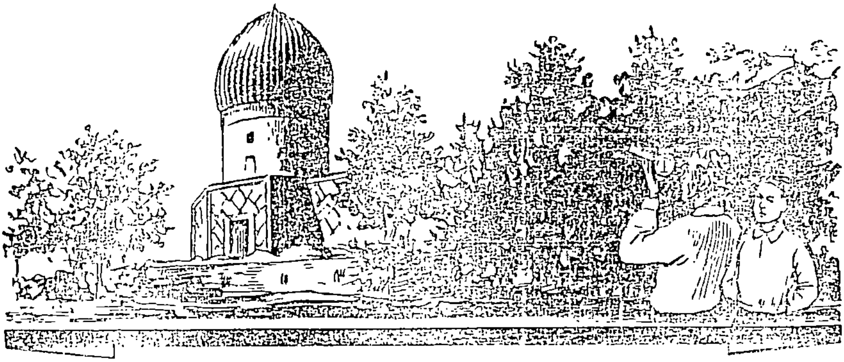


Рис. 263.
Цепь треугольников

В этом случае вычисления будут бесконтрольными и нельзя будет произвести оценку точности. Поэтому измеряют все 18 углов.

3. Цепь треугольников (рис. 263)—наиболее распространенная схема, особенно для сетей высших классов. Контроль обеспечивается измерением базисов о обоих концов цепи (AB и CD).

В X классе можно поставить ряд интересных работ типа триангуляции. Несколько примеров таких работ будет разобрано ниже.



ИЗМЕРЕНИЕ НЕДОСТУПНОГО РАССТОЯНИЯ

(X класс)

Способ косоугольного треугольника

Оборудование: угломерный инструмент (теодолит, гониометр, буссоль, угломер), стальная лента или стальная рулетка.

Допустим, что при съемке границ участка сторона 3—4 не может быть измерена непосредственно обходом из-за глубокого оврага, пересекаемого этой стороной (рис. 264). Тогда можно в точках 2 и 3 измерить углы 2 и 3 и вычислить величину стороны 3—4 из косоугольного треугольника 2—3—4, в котором измерена сторона 2—3, равная d.

Из теоремы синусов следует, что

$$\frac{x}{\sin\hat{2}} = \frac{d}{\sin\hat{4}}.$$

Отсюда: $x = d\,\dfrac{\sin\hat{2}}{\sin\hat{4}}$.

Угол 4 может быть получен двумя способами: либо измерением, либо как разность $180° - (\hat{2} + \hat{3}) = \hat{4}$. В случае измерения всех трех углов треугольника сумма измеренных углов может отличаться от теоретической суммы не более чем на утроенную точность верньера инструмента, т. е. при одноминутном теодолите $\pm 3'$, при измерении гониометром $\pm 6'$ — — $\pm 10'$. Невязку следует распределить поровну на три угла *.

* См. стр. 210.

Итак, дополнительная полевая работа сводится к измерению углов при точках 2 и 4 во время стояния в этих точках для измерения внутренних углов полигона.

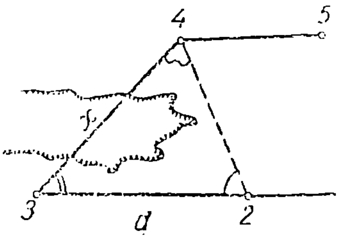


Рис. 264
Недоступное расстояние

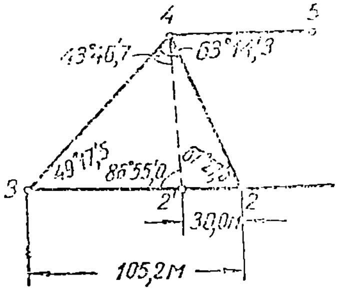


Рис. 265.
Схема углов

Пример. Схема и исходные данные полевой работы (рис. 265).

Вычисления

№ точек	Измеренные углы	Исправленные углы	Синусы углов	Стороны
2	67°27,0	67°27,4	0,9235	108,8 = x
3	49°17,5	49°17,9		
4	63°11,3	63°14,7	0,8930	105,2

$\Sigma\beta = 179°58,8$

Формулы для вычислений на счетной линейке с использованием натуральных значений тригонометрических функций:

$$x = d\,\frac{\sin\hat{2}}{\sin\hat{4}},\quad x = 105,2\,\frac{0,9235}{0,8930} = 108,8\ м.$$

Такой прием вычислений с помощью линейки экономичен и удобен, но ввиду того, что формула $x = d\,\frac{\sin\hat{2}}{\sin\hat{4}}$ может быть представлена как пропорция $\frac{x}{\sin\hat{2}} = \frac{d}{\sin\hat{4}}$, расчет на линейке для отыскания четвертого члена пропорции может быть еще упрощен.

Пример:

$$\frac{x}{\sin 67°27'} = \frac{105{,}2}{\sin 63°15'}\,.$$

Техника расчета: 1) движок с тригонометрическими данными устанавливается в корпусе между шкалами чисел и их квадратов, т. е. обратной стороной; 2) против 105,2 нижней шкалы устанавливается бегунком (визиром) шкала синусов в точке 63°15′; 3) против точки *sin* 67°27′ на нижней шкале читается искомое x, равное 108,9 *м*.

Формулы для вычислений с помощью таблиц логарифмов:

$$\lg x = \lg d + \lg \sin\hat{2} - \lg \sin\hat{4}\,.$$

Схема вычислений

1	$\lg d$	2,0220
2	$\lg \sin\hat{2}$	$\bar{1}{,}9655$
3	(1) + (2)	1,9875
4	$\lg \sin\hat{4}$	$\bar{1}{,}9507$
5	$\lg x$ = (3) — (4)	2,0368
6	x	108,8 *м*

Для контроля целесообразно в створе линии 2—3 забить, например, через 30 *м* колышек 2′ и, измерив углы в треугольнике 2′, 3, 1, получить второе значение величины x.

Пример. В поле получены следующие данные: $d_1 = 105{,}2 - 30{,}0 = 75{,}2$ *м*,

$$\Sigma\beta = 49°17'{,}5 + 43°46'{,}7 + 86°55'{,}0 = 179°59'{,}2.$$

Вычисления

$$\Sigma\beta_{теор.} - \Sigma\beta_{практ.} = 180°00'0 - 179°59'{,}2 = 0{,}'8.$$

Поправка на один угол равна $\frac{0'{,}8}{3}$.

Исправленные углы

$$\text{Угол } \hat{3} = 49°17'{,}8$$

$$\text{„ } \hat{4} = 43°47'{,}0$$

$$\text{„ } \hat{2} = 86°55'{,}2$$

$$x = 75{,}2\,\frac{\sin 86°55'{,}2}{\sin 43°47'{,}0} = 75{,}2\,\frac{0{,}9985}{0{,}6919} = 108{,}6 \text{ м}.$$

Определение координат вершин многоугольника

Допустим, в открытой местности требуется определить координаты вершин полигона. Измерение расстояния на местности невозможно, так как стороны полигона проходят, например, по строительной площадке через развалины сносящихся

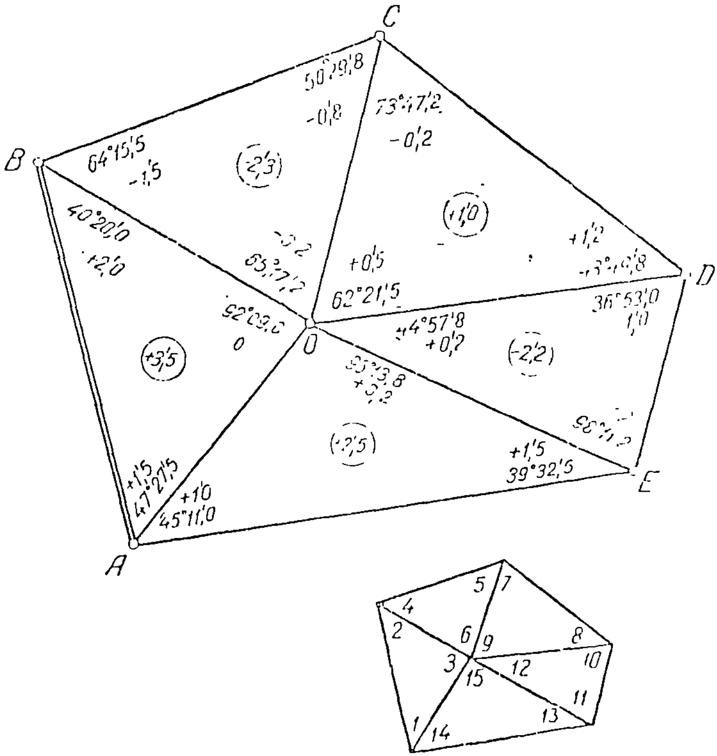


Рис. 266. Обработка угловых измерений

домов и т. д. В этом случае используют метод триангуляции, применяя схему «центральная система» (рис. 266).

Оборудование: 1) угломерный инструмент (теодолит, гониометр, буссоль, угломер); 2) инструмент для измерения расстояний (стальная лента, рулетка).

Выполнение

1. Наметить вершины участка (*A*, *B*, *C*, *D*, *E*) и центральную вспомогательную точку *O*, из которой должны быть видны все точки окружной границы.

2. Тщательно измерить (не менее двух раз) одну из сторон. Относительная ошибка должна соответствовать точности применяемого угломерного инструмента.

9 июня 1955 г.

Журнал измерения углов

№ точек: стояния	№ точек: наблюдения	Отсчеты по верньерам: I, град.	I, мин.	II, мин.	среднее	Углы: КП и КЛ, град.	КП и КЛ, мин.	среднее, град.	среднее, мин.	Прямые обратные магнитные азимуты или румбы	Мера линии 1-е изм. 2-е изм.	Углы наклона и расстояние до начала и конца наклона линии
1	2	3			4	5		6		7	8	9
A	E	271	36	36	36	45	11,5					
	O	226	25	24	24,5	47	27,0					
	B	178	57	58	57,5			45	11,0			
	E	52	23	22	22,5	45	10,5	47	27,5			
	O	7	12	12	12	47	28,0					
	B	319	44	44	44							
B	A	95	17	17	17	40	20,5			349 30	106,23 106,29 среднее 106,26 м	0°,5
	O	54	56	57	56,5	64	15,5					
	C	350	41	41	41							
	A	275	10	10	10			40 64	20,0 15,5			
	O	234	50	51	50,5	40	19,5					
	C	170	35	35	35	64	15,5					

	A	0	07	07	07	92	09,5	92	09,0			
	B	92	6	17	16,5	65	17,5	65	17,2			
	C	157	34	34	34	62	21,5	62	21,5			
	D	219	55	56	55,5	44	57	44	57,8			
	E	264	53	54	53,5	95	13	95	13,8			
	A	0	07	06	06,5							
O												
	A	90	01	01	01	93	11,5					
	E	354	46	47	46,5	44	57,5					
	D	309	49	49	49	62	21,5					
	C	247	28	27	27,5	65	17,0					
	B	182	10	11	10,5	92	08,5					
	A	90	02	02	02							

Примечания: 1. Средние значения углов (графа 6) и меры линий (графа 8) заполняются дома чернилами или тушью.

2. Вращение алидады при измерении углов в точке O производят: при „Кр. право" — по движению часовой стрелки, при „Кр. лево" — против движения часовой стрелки.

Например, сторона $\overset{\smile}{AB}$ измерена дважды и получены результаты 106,23 *м* и 106,29 *м*.

$AB_{ср.} = 106,26$ *м*,

$$\text{относительная ошибка} = \frac{106,26 - 106,23}{106,23} \approx \frac{0,03}{106} \approx \frac{1}{3500}.$$

Из угломерных инструментов соответствующую точность может дать только теодолит (см. ч. II, стр. 240). Поэтому в случае применения теодолита такая высокая точность линейных измерений необходима и оправдана. Получение столь высокой точности требует:

1) хорошего измерительного инструмента—стальной ленты;

2) относительно ровной поверхности, на которой ведут измерения (шоссейной или ровной грунтовой дороги), и

3) тщательного проведения работы.

Если невозможно измерить с такой точностью ни одну из сторон, в системе треугольников следует использовать косвенные приемы определения расстояния (см. стр. 327, 350, 360).

3. Измерить по два угла в точках A ($\hat{14}$ и $\hat{1}$), B ($\hat{2}$ и 4) и т. д. и все углы при точке O ($\hat{3}$, $\hat{6}$, $\hat{9}$ и т. д.).

4. Уравнять углы и произвести вычисления.

В связи с тем, что работа по уравниванию, которое проводится в упрощенном виде, в литературе для средней школы не освещена, приводим пример с подробным решением.

Пример. Схема полигона дана на рис. 266. Измеренная сторона $AB = 106,26$ *м*. Азимут (магнитный) стороны $AB = 349°30'$ (определен по буссоли).

На стр. 354 дан журнал измерения углов *.

После составления схемы углов ** приступают к уравниванию, т. е. устранению невязок между данными теоретическими и полученными в поле. Прежде всего устраняют невязку в углах при точке O так, чтобы сумма их составляла 360°. При этом углы следует округлить до целых минут, так как четырехзначные таблицы для синусов углов больше 30° дают точность, не превышающую минуты. Поправки с соответствующим знаком выписываются в схеме у каждого угла. В данном примере невязки f_β при точке O равна $f_\beta = \Sigma_{\beta\ теор.} - \Sigma_{\beta\ практ.} = 360°00' - 359°59',3 = 0',7$.

Ее распределение (с учетом округления) дано на схеме.

После распределения невязки при точке O подсчитывают невязки в каждом треугольнике (с учетом введенных при точке O поправок), выписывают их в середине треугольника и затем распределяют на два угла (см. схему).

* В журнале даны углы только при точках A, B и O; остальные выписаны на схеме.

** Схему рисуют на глаз.

Например, в треугольнике ODE угол 12 после уравнивания при точке O получает поправку $+0',2$ и будет равен $44°58'$. Невязка треугольника будет $f_\beta = 180°00' - 180°02',2 = -2',2$. Измеренный угол $\hat{10} = 36°53'$, а $\hat{11} = 98°11',2$. Поправка угла $\hat{10}$ будет равна $-1',0$, а $\hat{11} = -1',2$. Исправленые значения углов получатся: $44°58' + 36°52' + 98°10' = 180°00'$.

Исправленные значения углов выписывают в таблицу, приведенную на стр. 358.

Теперь имеются все данные для вычисления длины сторон полигона. Действительно, по теореме синусов:

$$AO = AB\,\frac{\sin\hat{2}}{\sin\hat{3}}\,;\quad BO = AB\,\frac{\sin\hat{1}}{\sin\hat{3}}\,;$$

$$BC = BO\,\frac{\sin\hat{6}}{\sin\hat{5}} = AB\,\frac{\sin\hat{1}\cdot\sin\hat{6}}{\sin\hat{3}\cdot\sin\hat{5}}\,;$$

$$CO = BO\,\frac{\sin\hat{4}}{\sin\hat{5}} = AB\,\frac{\sin\hat{1}\cdot\sin\hat{4}}{\sin\hat{3}\cdot\sin\hat{5}}\,;$$

$$CD = CO\,\frac{\sin\hat{9}}{\sin\hat{8}} = AB\,\frac{\sin\hat{1}\cdot\sin\hat{4}\cdot\sin\hat{9}}{\sin\hat{3}\cdot\sin\hat{5}\cdot\sin\hat{8}}\,;$$

$$DO = CO\,\frac{\sin\hat{7}}{\sin\hat{8}} = AB\,\frac{\sin\hat{1}\cdot\sin\hat{4}\cdot\sin\hat{7}}{\sin\hat{3}\cdot\sin\hat{5}\cdot\sin\hat{8}}\,;$$

$$DE = DO\,\frac{\sin\hat{12}}{\sin\hat{11}} = AB\,\frac{\sin\hat{1}\cdot\sin\hat{4}\cdot\sin\hat{7}\cdot\sin\hat{12}}{\sin\hat{3}\cdot\sin\hat{5}\cdot\sin\hat{8}\cdot\sin\hat{11}}\,;$$

$$EO = DO\,\frac{\sin\hat{10}}{\sin\hat{11}} = AB\,\frac{\sin\hat{1}\cdot\sin\hat{4}\cdot\sin\hat{7}\cdot\sin\hat{10}}{\sin\hat{3}\cdot\sin\hat{5}\cdot\sin\hat{8}\cdot\sin\hat{11}}\,;$$

$$EA = EO\,\frac{\sin\hat{15}}{\sin\hat{14}} = AB\,\frac{\sin\hat{1}\cdot\sin\hat{4}\cdot\sin\hat{7}\cdot\sin\hat{10}\cdot\sin\hat{15}}{\sin\hat{3}\cdot\sin\hat{5}\cdot\sin\hat{8}\cdot\sin\hat{11}\cdot\sin\hat{14}}\,;$$

$$AO = EO\,\frac{\sin\hat{13}}{\sin\hat{14}} = AB\,\frac{\sin\hat{1}\cdot\sin\hat{4}\cdot\sin\hat{7}\cdot\sin\hat{10}\cdot\sin\hat{13}}{\sin\hat{3}\cdot\sin\hat{5}\cdot\sin\hat{8}\cdot\sin\hat{11}\cdot\sin\hat{14}}\,;$$

$$AB = AO\frac{\sin\hat{3}}{\sin\hat{2}} = AB\frac{\sin\hat{1}\cdot\sin\hat{4}\cdot\sin\hat{7}\cdot\sin\hat{10}\cdot\sin\hat{13}\cdot\sin\hat{3}}{\sin\hat{3}\cdot\sin\hat{5}\cdot\sin\hat{8}\cdot\sin\hat{11}\cdot\sin\hat{14}\cdot\sin\hat{2}}.$$

Проведя сокращения, получим:

$$AB = AB\frac{\sin\hat{1}\cdot\sin\hat{4}\cdot\sin\hat{7}\cdot\sin\hat{10}\cdot\sin\hat{13}}{\sin\hat{2}\cdot\sin\hat{5}\cdot\sin\hat{8}\cdot\sin\hat{11}\cdot\sin\hat{14}},$$

т. е. теоретически должно быть выполнено условие:

$$\frac{\sin\hat{1}\cdot\sin\hat{4}\cdot\sin\hat{7}\cdot\sin\hat{10}\cdot\sin\hat{13}}{\sin\hat{2}\cdot\sin\hat{5}\cdot\sin\hat{8}\cdot\sin\hat{11}\cdot\sin\hat{14}} = 1. \qquad (1)$$

Ведомость вычислений длины сторон

№ углов	Исправленные углы β	$\lg\sin\beta$	Логарифм стороны	Длины сторон
1	2	3	4	5
1	47°29	$\bar{1}$,8655	1,8921	
2	40°22	$\bar{1}$,8114	1,8380	
3	92°09	$\bar{1}$,9997	2,0263	106,26
4	64°14	$\bar{1}$,9545	1,9593	
5	50°29	$\bar{1}$,8873	1,8921	
6	65°17	$\bar{1}$,9582	1,9630	91,84
7	73°47	$\bar{1}$,9824	2,1011	
8	43°51	$\bar{1}$,8406	1,9593	
9	62°22	$\bar{1}$,9474	2,0661	116,46
10	36°52	$\bar{1}$,7782	1,8838	
11	98°10	$\bar{1}$,9955	2,1011	
12	44°58	$\bar{1}$,8492	1,9548	90,12
13	39°34	$\bar{1}$,8041	1,8369	
14	45°12	$\bar{1}$,8510	1,8838	
15	95°14	$\bar{1}$,9982	2,0310	107,40

$\Sigma\beta = 900°00'$; $\quad Q = \bar{1},3847$; $\quad (AO)_5 = 1,8369$; $\quad p = 512,08$ *м*

$\Sigma\beta\,(\hat{3}, \hat{6}, \hat{9}, \hat{12}, \hat{15}) = 360°00'$; $\quad J = \bar{1},3858$; $\quad (AO)_1 = 1,8380$;

$Q - J = -0,0011$; $\quad \Delta = -0,0011$;

где Q — есть сумма логарифмов сомножителей числителя, а J — сумма логарифмов сомножителей знаменателя (1).

Указание к вычислениям

1. В колонку 2 выписаны исправленные углы, сгруппированные по треугольникам.

2. В колонку 3 вписаны логарифмы синусов углов, взятые из таблиц.

3. Длина исходной стороны $AB = 106{,}26$ *м* вписана в колонку 5 на 3-й строке, так как сторона AB лежит против угла $\hat{3}$.

4. По исходной стороне находится ее логарифм (2,0263), вписанный в колонку 4 на 3-й строке.

5. Далее, в первом треугольнике ABO вычисляются логарифмы сторон BO и AO и затем выписываются в соответствующей строке:

$$BO = AB\frac{\sin\hat{1}}{\sin\hat{3}};\ \lg BO = \lg AB - \lg\hat{3} + \lg\hat{1};$$

$$\text{и } AO = AB\frac{\sin\hat{2}}{\sin\hat{3}};\ \lg AO = \lg AB - \lg\hat{3} + \lg\hat{2};$$

$$\lg BO = 2{,}0263 - \bar{1}{,}9997 + \bar{1}{,}8655 = 1{,}8921;$$
$$\lg AO = 2{,}0263 - \bar{1}{,}9997 + \bar{1}{,}8114 = 1{,}8380.$$

Эти вычисления лучше всего вести на счетах.

6. В следующем треугольнике BOC логарифм стороны BO, лежащей против угла $\hat{5}$, уже известен из первого треугольника ($\lg BO = 1{,}8921$). Его вписывают одновременно в строки 5 и 1 и далее по соответствующим формулам вычисляют логарифмы других сторон.

7. Вычисляя последовательно все треугольники, приходят опять к стороне AO (лежит против углов $\hat{2}$ и $\hat{13}$). Разность логарифмов AO (т. е. одной и той же стороны) из 1-го и последнего — 5-го треугольников есть линейная невязка.

8. По логарифмам находят искомые длины сторон и вписывают их в соответствующей строке колонки 5.

Контролем вычислений служит:

1) сумма углов в каждом треугольнике равна 180°;

2) сумма углов при точке O (углы $\hat{3}$, $\hat{6}$, $\hat{9}$, $\hat{12}$, $\hat{15}$) равна 360°;

3) обозначая в первом треугольнике AO через $(AO)_1$, а в пятом — $(AO)_5$, можно написать:

$$(AO)_1 = AB\,\frac{\sin\widehat{2}}{\sin\widehat{3}};$$

$$(AO)_5 = AB\,\frac{\sin\widehat{1}\cdot\sin\widehat{4}\cdot\sin\widehat{7}\cdot\sin\widehat{10}\cdot\sin\widehat{13}}{\sin\widehat{3}\cdot\sin\widehat{5}\cdot\sin\widehat{8}\cdot\sin\widehat{11}\cdot\sin\widehat{14}}.$$

Разделив левые и правые части, получим:

$$\frac{(AO)_5}{(AO)_1} = \frac{\sin\widehat{1}\cdot\sin\widehat{4}\cdot\sin\widehat{7}\cdot\sin\widehat{10}\cdot\sin\widehat{13}}{\sin\widehat{2}\cdot\sin\widehat{5}\cdot\sin\widehat{8}\cdot\sin\widehat{11}\cdot\sin\widehat{14}};$$

или, логарифмируя:

$$\lg (AO)_5 - \lg (AO)_1 = (\lg\sin\widehat{1} + \lg\sin\widehat{4} + \lg\sin\widehat{7} + \lg\sin\widehat{10} + \lg\sin\widehat{13}) - (\lg\sin\widehat{2} + \lg\sin\widehat{5} + \lg\sin\widehat{8} + \lg\sin\widehat{11} + \lg\sin\widehat{14}).$$

Обозначим $\lg(AO)_5 - \lg(AO)_1$ через Δ, сумму первой скобки в правой части равенства через Q, а второй — через J.

Тогда: $\Delta = Q - J$.

Величины Q и J легко подсчитать на счетах и выписать внизу колонки 3.

Разность $\lg(AO)_5$ и $\lg(AO)_1$ выписывается внизу колонки 4.

Контролем является приближенное равенство соответственных величин. В данном случае это будет — 0,0011.

Методика вычислений по определению координат описана на стр. 324. (Вычисления сведены в таблицу на стр. 362).

Способ геодезического четырехугольника

В геодезической практике бывают случаи, когда не удается измерить недоступное расстояние построением на местности треугольника. Тогда для решения задачи используют схему так называемого «геодезического четырехугольника».

Допустим, необходимо измерить расстояние AB. Построить из точек A и B базис и измерить его нельзя вследствие препятствий в виде леса, построек, озера и болота (рис. 267).

По насыпи, проложенной через болото, проходит дорога, на которой можно разбить и измерить с высокой точностью базис. Если из точек C и D (рис. 268) измерить углы: 3, 5, 4 и 6, то расстояние $AB = x$ может быть легко получено.

Действительно,

$$CB = CD\,\frac{\sin\angle CDB}{\sin\angle CBD};\quad AC = CD\,\frac{\sin\angle CDA}{\sin\angle CAD}.$$

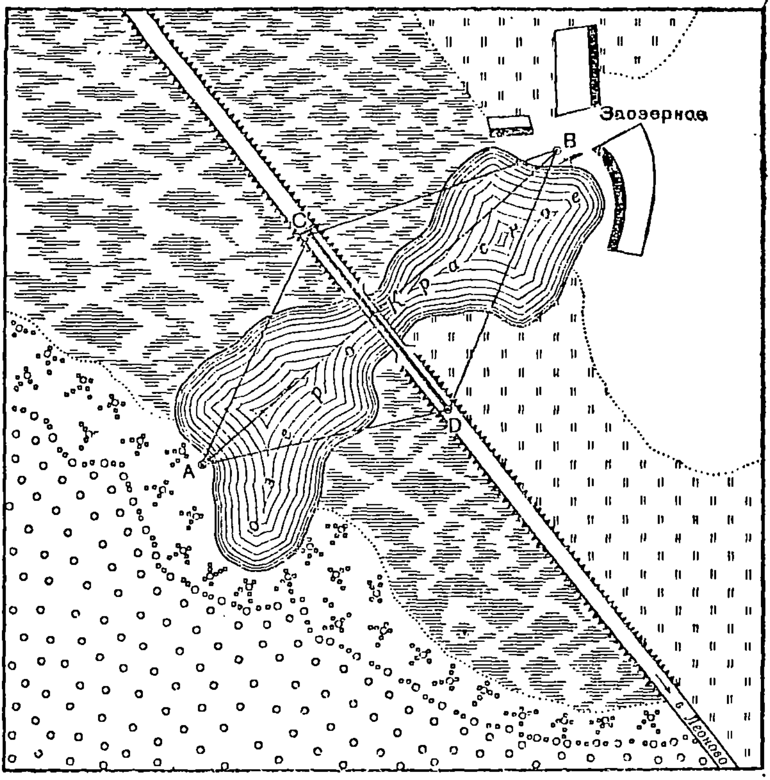


Рис. 267. Определение длины озера

Теперь в треугольнике ACB известны угол ACB и стороны AC и CB, откуда по теореме косинусов:

$$(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2 -$$
$$- 2AC \cdot BC \cdot \cos \angle ACB.$$

Такое решение принципиально правильно, но имеет ряд недостатков:

1) нет контроля угловых измерений;

2) вычисления, при отсутствии соответствующих таблиц и приборов, громоздки, так как выражение нельзя логарифмировать.

Для устранения этих недостатков в поле получают избыточные данные, а именно в точках A и B измеряют по два угла, дающих

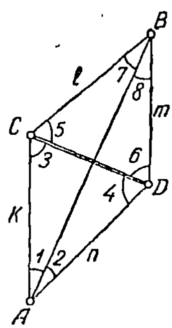


Рис. 268. Схема углов геодезического четырехугольника

Вычисление координат вершин

№ вершин	Углы	Исправл. угол	Азимут	Румб (r)	Длина линии (d) в *м*	lg cos r lg d lg sin r	lg Δx lg Δy
A	$\hat{1}+\hat{14}$	92°41′					
			349°30′	СЗ 10°30′	106,26	1,9927 2,0263 1,2606	2,0190 1,2869
B	$\hat{2}+\hat{4}$	104°36′					
			64°54′	СВ 64°54′	91,84	1,6276 1,9630 1,9569	1,5906 1,9199
C	$\hat{5}+\hat{7}$	124°16′					
			120°38′	ЮВ 59°22′	116,46	1,7072 2,0661 1,9348	1,7733 2,0009
D	$\hat{8}+\hat{10}$	180°43′					
			219°55′	ЮЗ 39°55′	90,12	1,8848 1,9548 1,8074	1,8396 1,7622
E	$\hat{11}+\hat{13}$	137°44′					
			262°11′	ЮЗ 82°11′	107,40	1,1336 2,0310 1,9960	1,1646 2,0270
A							

$\Sigma\beta = 540°00'$ $\qquad\qquad$ $p = 512{,}08$

$$m = \pm \sqrt{(+0{,}37)^2 + (-0{,}27)^2} = \pm\, 0{,}46 \text{ м}.$$

многоугольника *ABCDE*

Приращения вычисл.		Приращения исправл.		Координаты		Примечание
Δx	Δy	Δx	Δy	x	y	
				+100,00	+100,0	1) Исправленные углы колонки 3 взять из схемы стр. 353 или стр 358
−8 +104,48	+6 −19,36	+104,40	−19,30			
				+204,40	+80,70	2) Азимут линии *AB*, равный 349°30′, измерен в поле. Остальные подсчитаны по формуле $\alpha_n = \alpha_{n-1} + 180° - \beta_n$
−6 +38,95	+4 +83,15	+38,89	+83,19			
				+243,29	+163,89	
−9 −59,33	+7 +100,20	−59,42	+100,27			
				+183,87	+264,16	3) Длины линий и их логарифмы взяты из ведомости стр. 358
−6 −69,12	+4 −57,84	−69,18	−57,80			
				+114,69	+206,36	4) Точке *A* условно присвоены координаты: $x = +100,00$ *м* $y = +100,00$ »
−8 −14,61	+6 −106,42	−14,69	−106,36			
+0,37	−0,27	0,0	0,0			

$$\Sigma\Delta x = +0,37; \quad \Sigma\Delta y = -0,27;$$

$$n = \frac{m}{p} = \frac{0,46}{512,08} \approx \frac{1}{1100} \approx 0,1\ \%.$$

возможность сравнения суммы углов в нескольких треугольниках.

Введем обозначения: искомое расстояние $AB = x$; базис $CD = b$; остальные обозначения сторон и углов даны на схеме рис. 269.

Контроль угловых измерений может быть получен по допустимым расхождениям (f_β) суммы углов в треугольниках, например:

$$1)\ \Sigma\beta_{\Delta ACD} = \hat{1} + \hat{2} + \hat{3} + \hat{4} = 180^\circ + f_\beta^{\mathrm{I}};$$

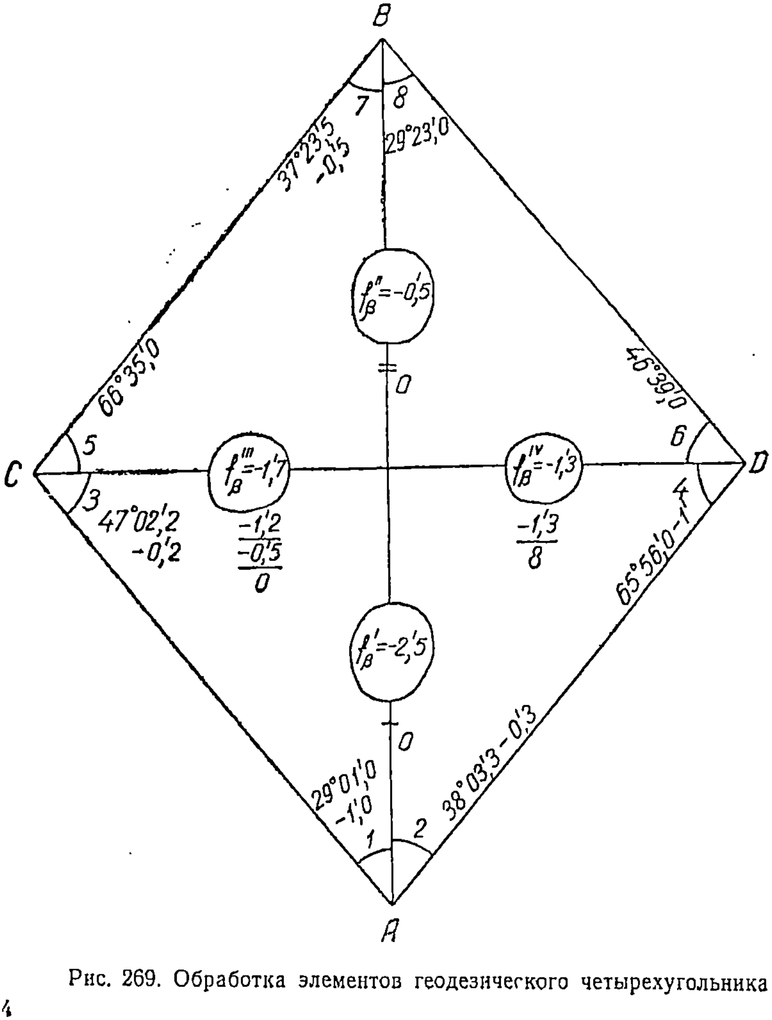


Рис. 269. Обработка элементов геодезического четырехугольника

$$2)\ \Sigma\beta_{\triangle CBD} = \hat{5} + \hat{6} + \hat{7} + \hat{8} = 180^\circ + f_\beta^{II};$$

$$3)\ \Sigma\beta_{\triangle ABC} = \hat{1} + \hat{3} + \hat{5} + \hat{7} = 180^\circ + f_\beta^{III}.$$

Ошибка f_β^{IV} в четвертом треугольнике ABD является функцией ошибок в первых трех треугольниках и служит только контролем вычислений ошибок $f_\beta^{I}, f_\beta^{II}$ и f_β^{III}.

Действительно, с одной стороны $\Sigma\beta_{\triangle ABD} = \hat{2} + \hat{4} + \hat{6} + \hat{8} = 180^\circ + f_\beta^{IV}$; с другой стороны, суммируя первые два равенства и вычитая из суммы третье, будем иметь:

$$\hat{1} + \hat{2} + \hat{3} + \hat{4} + \hat{5} + \hat{6} + \hat{7} + \hat{8} - \hat{1} - \hat{3} - \hat{5} - \hat{7} = 180^\circ + f_\beta^{I} + 180^\circ + f_\beta^{II} - 180^\circ - f_\beta^{III}$$

или:

$$\hat{2} + \hat{4} + \hat{6} + \hat{8} = 180^\circ + f_\beta^{I} + f_\beta^{II} - f_\beta^{III},$$

откуда:

$$f_\beta^{IV} = f_\beta^{I} + f_\beta^{II} - f_\beta^{III},$$

$$\text{т. е. } f_\beta^{I} + f_\beta^{II} = f_\beta^{III} + f_\beta^{IV}.$$

Полученные невязки, распределяют на все углы, затем по теореме синусов подсчитывают значение AB.

Уравнивание углов. Значения углов, полученные полевыми измерениями, а также невязки по треугольникам вписаны в схему, рис. 269.

Контроль:

$$(-2',5) + (-0',5) = (-1',7) + (-1',3).$$

При распределении невязки следует округлять величины углов до целых минут. Например, в первом треугольнике угол 3 и угол 2 следует уменьшить соответственно на 0',2 и 0',3, а углы $\hat{1}$ и $\hat{4}$ — на 1',0, после чего f_β^{I} будет равно нулю.

Теперь невязка в третьем треугольнике будет: $f_\beta^{III} = (-1',7) - (-1',0 - 0',2) = -0',5$, а в четвертом: $f_\beta^{IV} = (-1',3) - (-1',0 - 0',3) = 0$. Промежуточный контроль дает: $(0) + (-0',5) = (-0',5) + (0)$.

Новые невязки в треугольниках получаются как разность между первичной невязкой и поправкой. Использованные числовые значения следует подчеркивать во избежание повторного использования.

Остается распределить невязку во втором и третьем треугольниках. Это достигается уменьшением угла $\widehat{7}$ на 0',5. Таким образом, окончательное значение каждого угла будет равно измеренному углу плюс его поправка.

Контроль: сумма исправленных углов в первом, втором и третьем треугольниках должна равняться 180°.

№ углов		Измеренные углы	Поправки	Исправленные углы	
	→ 1	29°01',	– 1',0	29°00' ←	
1-й	→ 2	38°03',3	– 0',3	38°03'	
тр-к	→ 3	47°02',2	– 0',2	47°02' ←	
	→ 4	65°56',0	– 1',0	65°55'	3-й
	→ 5	66°35',0	0'	66°35' ←	тр-к
2-й	→ 6	46°39',0	0'	46°39'	
тр-к	→ 7	37°23',5	– 0',5	37°23' ←	
	→ 8	29°23',0	0'	29°23'	

Формулы для вычисления диагонали $AB = x$ (рис. 268).

$$CB = b\frac{\sin\widehat{6}}{\sin(\widehat{7}+\widehat{8})}; \quad x_1 = b\frac{\sin\widehat{6}}{\sin(\widehat{7}+\widehat{8})}\cdot\frac{\sin(\widehat{3}+\widehat{5})}{\sin\widehat{1}};$$

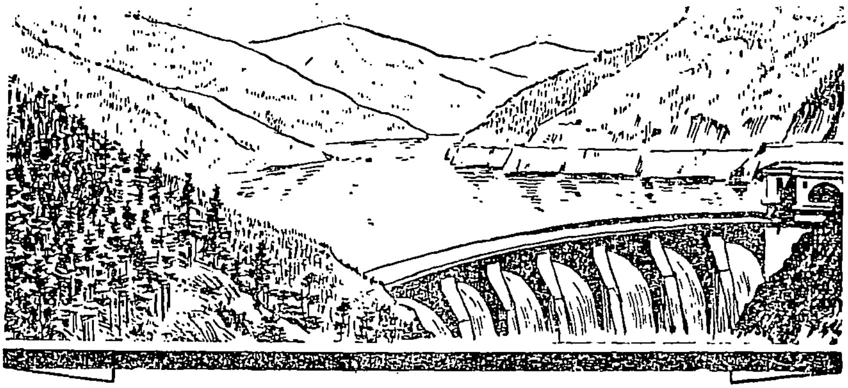
$$BD = b\frac{\sin\widehat{5}}{\sin(\widehat{7}+\widehat{8})}; \quad x_2 = b\frac{\sin\widehat{5}}{\sin(\widehat{7}+\widehat{8})}\cdot\frac{\sin(\widehat{4}+\widehat{6})}{\sin\widehat{2}};$$

$$AD = b\frac{\sin\widehat{3}}{\sin(\widehat{1}+\widehat{2})}; \quad x_3 = b\frac{\sin\widehat{3}}{\sin(\widehat{1}+\widehat{2})}\cdot\frac{\sin(\widehat{4}+\widehat{6})}{\sin\widehat{8}};$$

$$AC = b\frac{\sin\widehat{4}}{\sin(\widehat{1}+\widehat{2})}; \quad x_4 = b\frac{\sin\widehat{4}}{\sin(\widehat{1}+\widehat{2})}\cdot\frac{\sin(\widehat{3}+\widehat{5})}{\sin\widehat{7}}.$$

Таблица исходных данных $b = 100,0$ *м*, $\lg b = 2,0000$ (вычисления вести на счетах).

№ углов	Углы	Логарифмы синусов	Логарифм x
1	29°00′	$\bar{1},6856$	$\lg x_1 = 2,1748$
2	38°03′	$\bar{1},7893$	
3	47°02′	$\bar{1},8643$	$\lg x_2 = 2,1752$
4	65°55′	$\bar{1},9605$	
5	66°35′	$\bar{1},9626$	
6	46°39′	$\bar{1},8617$	$\lg x_3 = 2,1751$
7	37°23′	$\bar{1},7833$	
8	29°23′	$\bar{1},6908$	$\lg x_4 = 2,1751$
1 + 2	67°03′	$\bar{1},9641$	
3 + 5	113°37′	$\bar{1},9620$	
4 + 6	112°34′	$\bar{1},9657$	$\lg x_{ср.} = \dfrac{\lg x_1 + \lg x_2 + \lg x_3 + \lg x_4}{4} = 2,17505$
7 + 8	66°46′	$\bar{1},9633$	$x_{ср.} = 149,64$ *м*



ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЪЕМА ВОДОХРАНИЛИЩА

(X класс)

Оборудование: план с горизонталями, планиметр-топорик, палетка.

При проектировании гидротехнических сооружений инженеру-проектировщику бывает необходимо определить объем проектируемого водохранилища или, наоборот, по заданному объему спроектировать плотину.

В упрощенном виде эту работу можно провести в X классе на основе курса стереометрии.

Допустим, что в овраге «Лужки» (рис. 270) проектируется строительство колхозного пруда. Имеется план масштаба 1 : 2000 с сечением рельефа (т. е. расстоянием по высоте между смежными горизонталями) через 1 *м*. Строительство плотины предполагают провести в наиболее узкой части оврага— по линии AB. Проект плотины показан на рис. 271. По проекту можно установить, что поверхность воды в пруду («зеркало» пруда) будет находиться на отметке (т. е. высоте от уровня моря) 183,5 *м*. Выше этой отметки вода подняться не сможет, так как будет стекать через водоотвод, спускающий излишнюю воду.

Поэтому линию затопления, или уреза воды, т. е. линию соприкосновения поверхности воды пруда с сушей, следует нанести по дополнительной горизонтали 183,5 *м*.

На рис. 270 дана схема горизонталей в месте проектирования пруда и расположение проектируемой плотины.

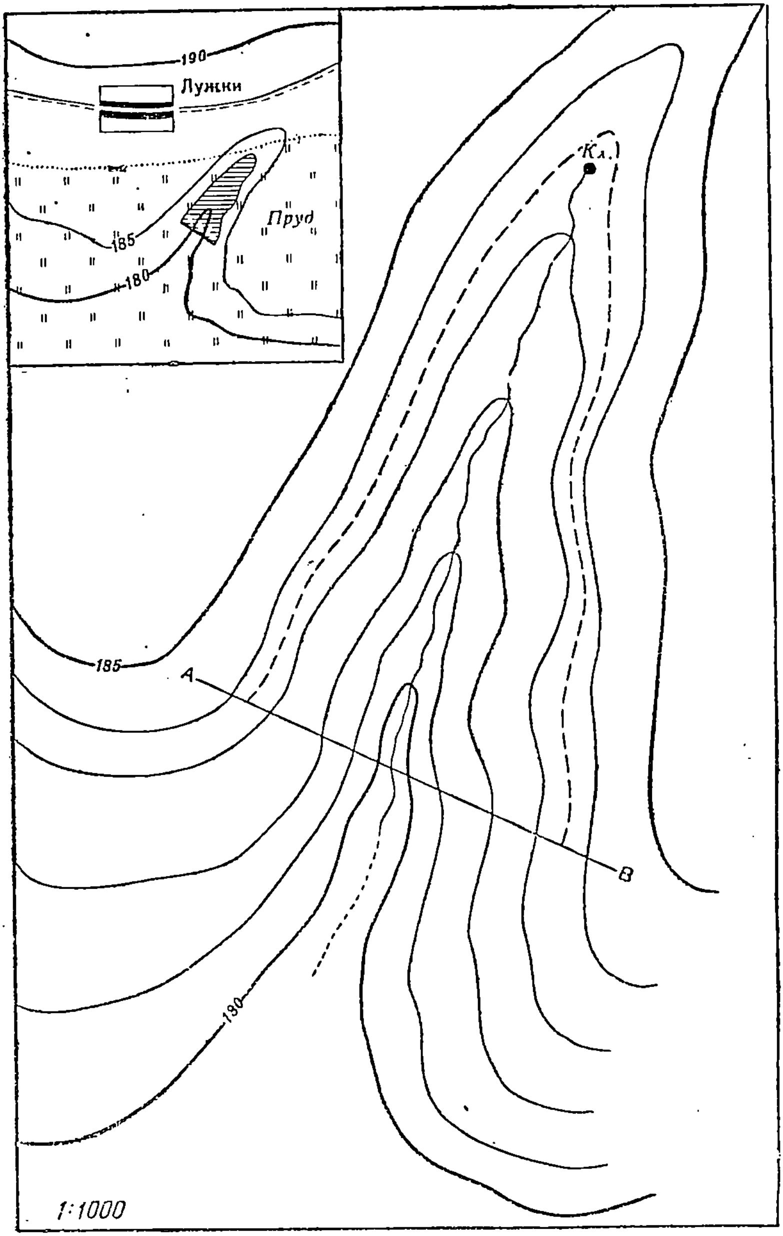


Рис. 270. План оврага

Для расчета будем рассматривать объем пруда как сумму объемов отдельных слоев, заключенных между горизонтальными плоскостями, проходящими через отметки 180 *м*, 181 *м*, 182 *м*, 183 *м* и 183,5 *м*.

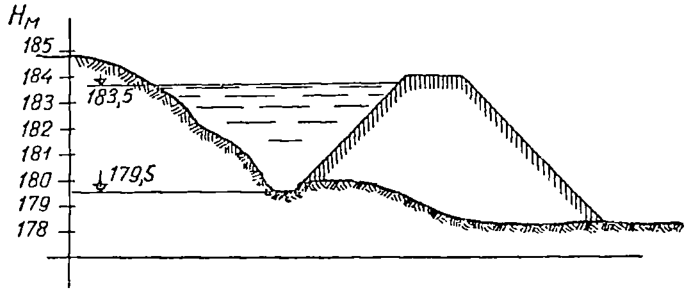


Рис. 271. Проект плотины

В ч. I при рассмотрении вопроса о горизонталях, приводилась в качестве примера детская пирамидка. Воспользуемся ею вновь для уяснения методики подсчета объема.

Понятно, что объем пирамидки равен сумме объемов отдельных кружков, которые представляют как бы слои, заключенные между двумя горизонтальными плоскостями, проходящими через две смежные горизонтали.

Аналогично и объем пруда равен сумме объемов отдельных слоев и, следовательно, задача сводится к определению объема каждого слоя. Выделим какой-либо один слой, например между горизонталями 181 *м* и 182 *м*, и посмотрим, как можно будет определить его объем с достаточной для практических целей точностью (рис. 272).

Наиболее просто провести подсчет объема по формуле параллелепипеда:

$$V = S_{\text{осн.}} \cdot h. \tag{1}$$

С достаточной точностью за площадь основания можно принять полусумму верхнего и нижнего оснований, т .е.

$$S_{\text{осн.}} = \frac{S_{181} + S_{182}}{2},$$

где индексы 181 и 182 при S показывают, что площади подсчитаны в пределах горизонталей 181 *м* и 182 *м*.

Более точно, с точки зрения теории, но бессмысленно практически (из-за усложнения в вычислениях и только кажущегося повышения точности) определять объем по формуле усеченной пирамиды

$$V = \frac{1}{3} h \left(S_в + S_н + \sqrt{S_в \cdot S_н}\right) \ldots \quad (2),$$

где $S_в$ — площадь верхнего основания, а $S_н$ — площадь нижнего основания (сравнить в таблице результаты подсчета по формулам (1) и (2).

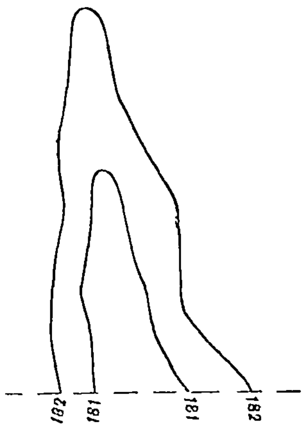


Рис. 272. Определение объема пруда

Следовательно, работа по определению объема пруда будет состоять в следующем:

1. Определить линию затопления и нанести ее на план.

2. Планиметром-топориком или палеткой подсчитать площади в пределах каждой горизонтали и данные вписать в таблицу (см. таблицу на стр. 372).

3. Подсчитать объемы отдельных слоев по формуле

$$V = \frac{S_в + S_н}{2} \cdot h$$

и суммированием их получить объем пруда.

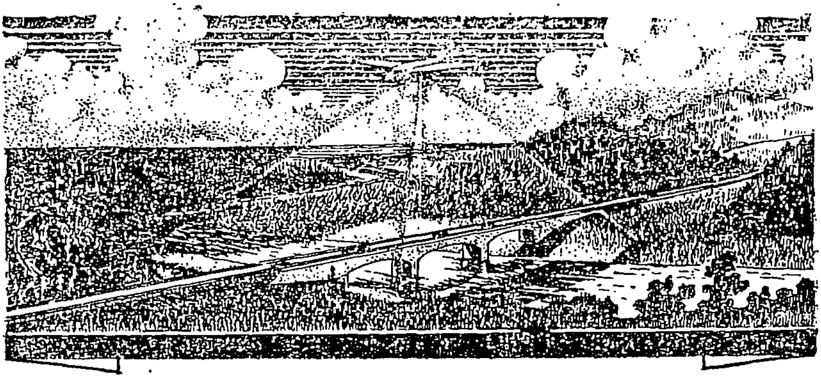
Примечание. При вычислении объема нижнего слоя площадь нижнего основания считать равной нулю и вести расчет по формуле объема пирамиды, т. е. $V = \frac{1}{3} Sh$. Для определения высоты слоя отметку нижней точки получить интерполированием (на глаз). В приведенном примере это точка *C*, которой присвоена отметка 179,5 *м* (рис. 271).

Подсчет объема пруда

Отметки горизонталей (*м*)	h (*м*)	S (*м*^{2})	V по формуле (1) (*м*^{3})	V по формуле (2) (*м*^{3})	Относительная ошибка объема по формуле (1) (в проц.)
183,5		23[illegible]0			
	0,5		980	975	~ 0,5
183,0		1600			
	1,0		1125	1090	~ 3
182,0		650			
	1,0		430	4[illegible]0	~ 5
181,0		210			
	1,0		125	114	~ 10
180,0		40			
	0,5		7	7	0
179,5		0			
		Объем пруда $V =$	2667 *м*^{3}	2596 *м*^{3}	~ 2,5 %

Из таблицы следует, что ошибка объема, подсчитанного по формуле (1), равна 2,5%, причем с увеличением площади она уменьшается.

Планиметр-топорик дает примерно такую же точность (~ 2%), но ошибка нанесения горизонталей и обобщения рельефа значительно больше. Поэтому следует пользоваться первой формулой как более простой.



АЭРОФОТОСЪЕМКА

В настоящее время при съемках обширных территорий наземные методы съемки, описанные выше, уступили место новому, исключительно производительному методу — аэрофотосъемке, т. е. фотографированию местности с самолета. Как известно, изобретение фотографии относится к середине XIX в., а авиации — к началу XX в., так что аэрофотосъемка существует только около 50 лет.

Уже первые работы в этой области, сделанные с воздушных шаров на фотоматериалах низкого качества, показали, что метод составления планов местности путем фотографирования ее с воздуха имеет большие преимущества перед другими. К ним относятся: скорость съемки, детальность отображения объектов и ряд других.

Действительно, при скорости самолета, равной 250 *км/час*, площадь сфотографированной в масштабе 1 : 20 000 территории за день (примерно за 5 часов полета) может составить 3000 *кв. км*, причем детали не будут упущены. Однако снимок не может непосредственно явиться планом местности и требует ряда дополнительных работ, в том числе и наземных геодезических.

На современных снимках можно производить измерения с точностью до сотых долей миллиметра. При масштабе снимка, равном 1 : 20 000, одна сотая миллиметра равна 0,2 *м* на местности.

Наряду с аэрофотосъемкой развивалась и другая, близкая к ней отрасль — наземная фотосъемка, элементы которой могут быть использованы в школьной практике.

Следует отметить, что строгое обоснование различных геометрических преобразований, производимых при обработке материалов аэросъемки, требует применения проективной геометрии. В данной работе некоторые положения проективной геометрии принимаются без доказательств. В основном в работе используются школьные сведения по геометрии и тригонометрии.

Некоторые данные из оптики

Для понимания геометрической сущности процесса фотографирования с самолета необходимо вспомнить основную формулу оптики, известную из курса физики X класса (рис. 273).

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F} \qquad (1),$$

где d — расстояние от предмета до оптического центра линзы,
f — расстояние от оптического центра до изображения,
F — главное фокусное расстояние.

Преобразуем формулу (1) относительно f и получим:

$$f=\frac{Fd}{d-F}.$$

При аэрофотосъемке расстояние d, равное высоте полета исчисляется тысячами метров, тогда как главное фокусное расстояние объектива (линзы) F составляет 100—200 *мм*.

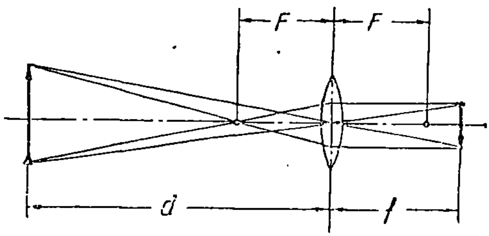


Рис. 273. Построение изображения

В этих условиях можно отбросить по малости F в знаменателе. Окончательно будем иметь:

$$f \approx F.$$

Отсюда следует, что при аэрофотосъемке изображение всегда получается в плоскости, отстоящей от оптического центра на расстоянии, равном F.

Действительно, если высота полета $H = 3500$ *м*, т. е. $d = 3500$ *м*, а $F = 200$ *мм*, то

$$f = \frac{Fd}{d-F} = \frac{200 \cdot 3500 \cdot 10^3}{3500 \cdot 10^3 - 200} = 200{,}01 \text{ мм}.$$

Установка фотоаппарата на самолете

Обычно для аэрофотосъемки специальный фотоаппарат устанавливается на самолете так, чтобы плоскость изображения при горизонтальном полете была параллельна поверхности земли. Ход лучей от точек A и B земной поверхности показан на рис. 274. Если плоскость изображения параллельна поверхности земли, то треугольники ASB и aSb подобны, причем величина H, т. е. высота полета над землей, есть высота треугольника ASB, а величина F, т. е. главное фокусное расстояние аппарата, есть соответственная высота треугольника aSb.

Так как ab есть изображение на снимке отрезка AB местности, то $\frac{ab}{AB} = \frac{1}{m}$, где — $\frac{1}{m}$ числовой масштаб фотоснимка. Но $\frac{ab}{AB} = \frac{F}{H}$, откуда $\frac{1}{m} = \frac{F}{H}$.

Из подобия тех же треугольников легко показать, что масштаб в любой точке снимка * будет один и тот же.

Например, масштаб в точке a будет равен отношению отрезков aS и AS, т. е. $\frac{1}{m_a} = \frac{aS}{AS}$. Но $\frac{aS}{AS} = \frac{F}{H} = \frac{1}{m}$.

Аналогично для точки b получим: $\frac{1}{m_b} = \frac{bS}{BS} = \frac{F}{H} = \frac{1}{m}$.

Следовательно, $\frac{1}{m_a} = \frac{1}{m_b} = \frac{1}{m}$, т. е. снимок может быть использован как план.

При современных технических средствах выдержать параллельность плоскостей или, иначе говоря, отвесное положение главной оптической оси фотоаппарата, не возможно. Самолет в полете имеет отклонения в продольном и поперечном направлениях порядка до 3°. Естественно, на этот же угол отклоняется от вертикали главная оптическая ось, подо-

---

* «Масштаб в точке» следует понимать как отношение сколь угодно малого отрезка изображения к соответствующему отрезку на местности.

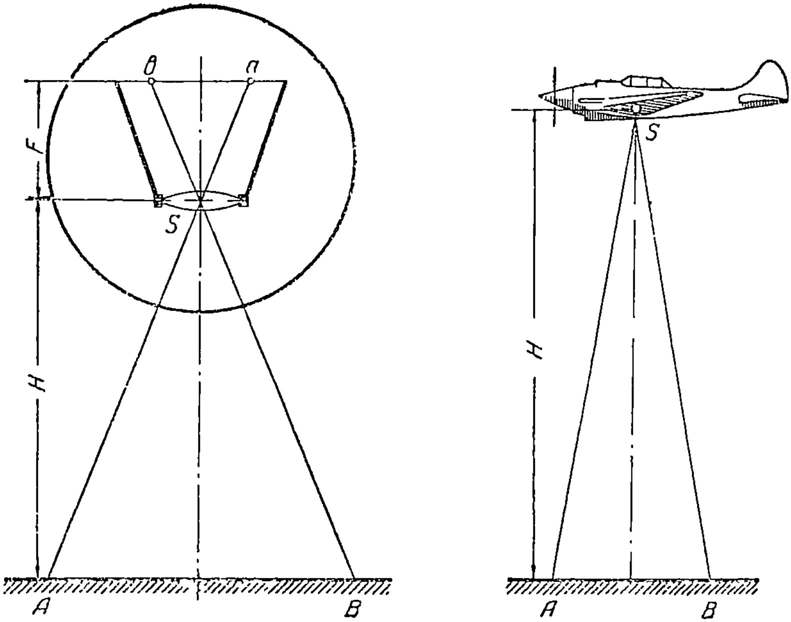


Рис. 274. Аэрофотосъемка при отвесном положении главной оптической оси

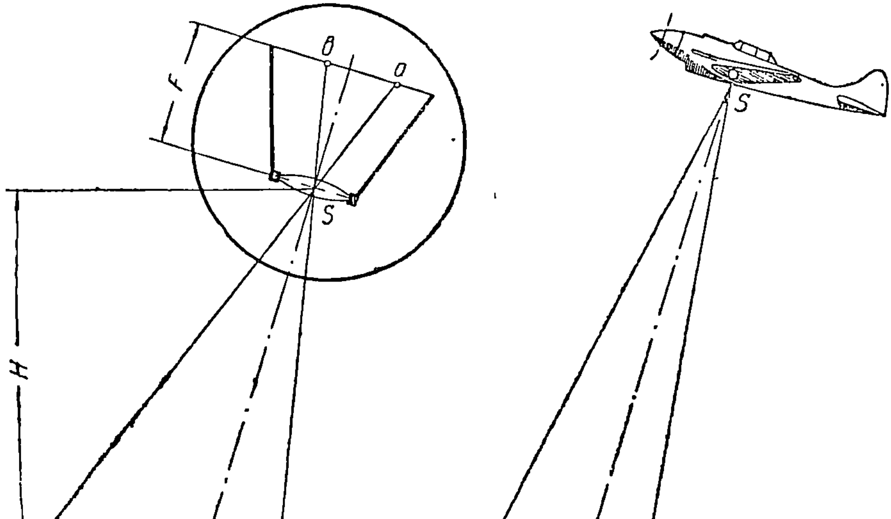


Рис. 275. Аэрофотосъемка при наклонном положении главной оптической оси

бие треугольников нарушается и формула $\frac{1}{m} = \frac{F}{H}$ уже не имеет места.

Не выводя довольно сложной зависимости, получающейся при этом, что будет выходить за рамки данной работы, сделаем на основании чертежа рис. 275 некоторые заключения.

Получим масштабы для точек a и b:

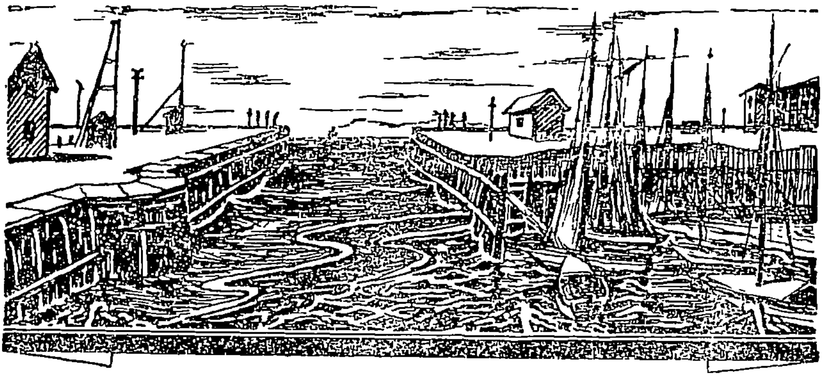
$$\frac{1}{m_a} = \frac{aS}{AS}; \quad \frac{1}{m_b} = \frac{bS}{BS}.$$

Так как треугольники aSb и ASB не подобны ($ab \nparallel AB$), то $\frac{aS}{AS} \neq \frac{bS}{BS}$ и, следовательно, $\frac{1}{m_a} \neq \frac{1}{m_b}$, т. е. масштабы в разных частях снимка различны.

$AS > BS$ и масштаб в точке a будет мельче, чем в точке b.

Для использования такого снимка в качестве плана его необходимо привести к одному масштабу или, как принято говорить в технике, трансформировать (преобразовать).

Элементарное изложение вопросов трансформирования будет дано ниже, но для понимания их необходимо предварительно ознакомиться с методом центральной проекции и, в частности, с линейной перспективой.



МЕТОД ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРОЕКЦИИ

Изображение пространственного объекта на той или иной поверхности получается путем проектирования этого объекта на данную поверхность по какому-либо принципу. В машиностроительном черчении, например, проектирование производится на плоскость параллельными прямыми, идущими перпендикулярно плоскости проекции. Такая проекция называется ортогональной. Топографические планы, как известно, также строятся в ортогональной проекции, так как она обладает ценным свойством — единым масштабом в любой точке.

Фотографическое же изображение, так же как и изображение на сетчатке человеческого глаза, получается в центральной проекции, в которой проектирующие лучи идут не параллельно друг другу, а пучком из одной точки, называемой **центром проекции***. Центральное проектирование на плоскость является частным случаем центральной проекции и называется **линейной перспективой**.

В общем случае, как было показано выше, фотоизображение не имеет единого масштаба и требует трансформирования, которое заключается в преобразовании центральной проекции. Подробное изложение теории центрального проектирования и, в частности, линейной перспективы дано в специальных работах**.

---

* Ортогональную проекцию можно рассматривать как частный случай центральной при центре проекции, расположенном в бесконечности.

** В. Ф. Дейнеко. Теория перспективы, Геодезиздат, 1949; Г. А. Владимирский, Перспектива, Учпедгиз, 1952.

Основные понятия, приведенные здесь, необходимы для понимания геометрических построений при составлении планов по фотоснимкам. Кратко рассмотрим их.

Пусть даны: центр проекции S, через который проходят все проектирующие лучи, точка A в пространстве и плоскость проектирования P (рис. 276). Тогда проекцией точки A на плоскости P, называемой картинной плоскостью, или просто картинной, будет точка a, полученная пересечением проектирующего луча SA с плоскостью P.

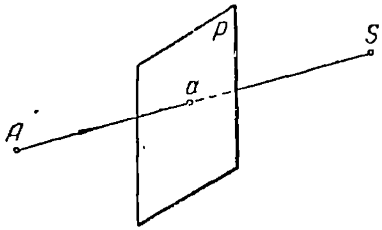


Рис. 276. Построение перспективы объекта

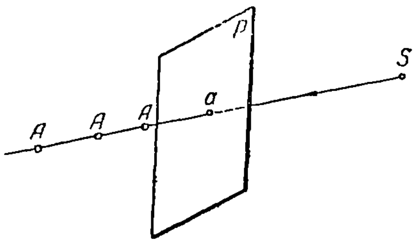


Рис. 277. Построение объекта по его перспективе

Как видно, при данном взаимном расположении трех элементов S, P и A точка a находится однозначно. Обратная же задача является неопределенной и имеет множество решений.

Действительно, пусть даны S, P и a и требуется найти точку A в пространстве (рис. 277). Очевидно, что точка A может быть в любом месте пространства на продолжении прямой Sa. Для однозначного решения обратной задачи требуется знание еще ряда элементов центральной проекции.

Следует отметить, что если картинная плоскость находится между объектом и центром проекции, то изображение будет прямым — позитивным, если же центр проекции находится между объектом и плоскостью, то изображение будет обратным — негативным (рис. 278). В аэрофотогеодезии применяют как негативное (негатив), так и позитивное изображение (снимок).

Искажение на перспективном изображении

Многие свойства, характерные для объектов на местности, не присущи им в проекции. Например, одинаковые отрезки на местности изображаются различными отрезками на снимке, прямые углы объектов на местности имеют различные углы на рисунке. Но ряд свойств объектов присущ и их проекциям. Например, точка в проекции всегда будет изображаться точкой, так же как прямая — прямой *; точки, лежащие на прямой в проекции, будут также лежать на проекции той же прямой. Эти свойства, а также ряд других, называются **проективными**. При изготовлении планов по фотоснимкам для ряда построений используются их проективные свойства **.

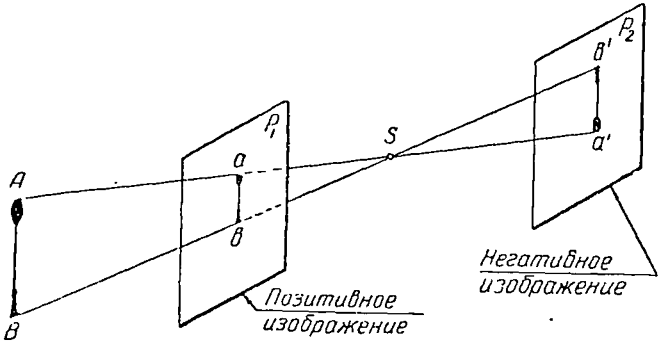


Рис. 278. Негативное и позитивное изображения

Основные элементы центральной проекции

На рис. 279 S — центр проекции (оптический центр объектива), P — картинная плоскость (негативная), A — точка пространства. Применительно к задачам аэрофотогеодезии будем рассматривать точку A принадлежащей земной поверхности и проведем через нее горизонтальную плоскость E, называемую предметной. Проекцией точки A в картинной плоскости будет точка a. Проведем еще два луча перпендикулярных плоскостям P и E, получим точки O, o и N, n.

Рассмотрим масштаб изображения в точках o и n при угле отклонения главной оптической оси от вертикали на угол α.

Имеем:

$$\frac{1}{m_o} = \frac{So}{SO} = \frac{F}{H}\cos\alpha; \frac{1}{m_n} = \frac{Sn}{SN} = \frac{F}{H\cdot\cos\alpha}.$$

Если теперь проектирующий луч cSC провести по биссектрисе угла OSN, то в точке c масштаб окажется равным $\frac{F}{H}$ т. е. масштабу горизонтального снимка.

* Исключением являются прямые, проходящие через центр проекции, так как они обращаются в точку.

** См. способ сеток, стр. 389.

Действительно,

$$\frac{1}{m_c} = \frac{Sc}{SC} = \frac{F \cdot \cos\frac{\alpha}{2}}{H \cdot \cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{F}{H}.$$

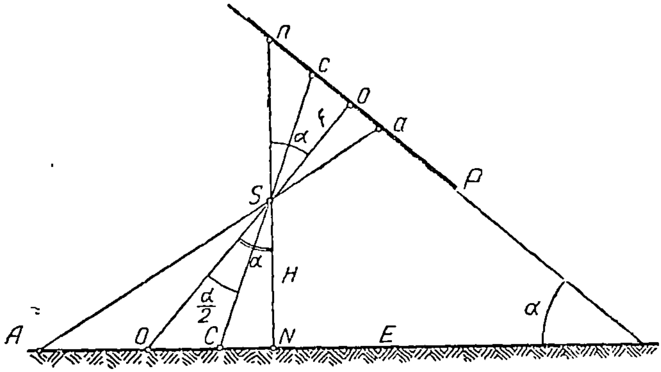


Рис. 279. Основные точки на фотоснимке

Таким образом, если принять масштаб в точке c за единицу, то в точке n он будет больше единицы, так как $\frac{1}{m_n} = \frac{F}{H \cdot \cos\alpha}$, а $\cos\alpha < 1$. Аналогично в точке o масштаб будет меньше 1, так как $\frac{1}{m_o} = \frac{F}{H} \cdot \cos\alpha$.

Точки o, c и n играют большую роль при обработке снимков, так как обладают особыми свойствами.

Точка o, называемая главной точкой, есть пересечение главной оптической оси с плоскостью негатива. Она принимается за начало координат. На негативе или снимке точка o находится по особым меткам, автоматически получающимся при фотографировании (рис. 283). В школьной практике, при наземной фотосъемке, эту точку можно получить при пересечении диагоналей прямоугольного снимка. Точки c и n на практике находятся сложными способами, поэтому не будем приводить эти способы, а только укажем на особенности данных точек.

Как показано выше, масштаб в точке c равен масштабу горизонтального снимка и, кроме того, углы при вершине в точке c на снимке равны углам на те же ориентиры на местности *. Это свойство точки c дает возможность измерять углы

---

* При условии, что все ориентиры лежат в одной плоскости E.

по перспективным снимкам, а следовательно, и строить план, так как при наличии двух снимков, снятых с различных точек, и перекрывающих друг друга, можно путем засечки (как на мензуле) получить плановое положение объекта*. (Точка c называется точкой нулевых искажений.)

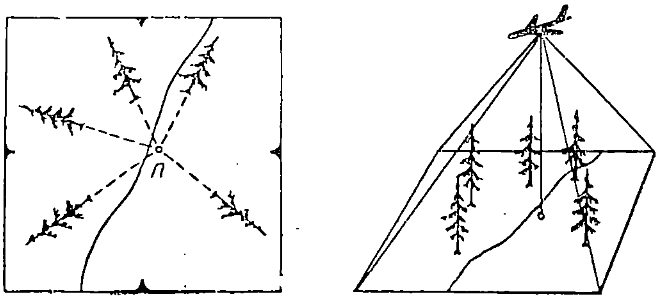


Рис. 280. Свойство точки надира

Наконец, точка n, которую называют точкой надира, замечательна тем, что в ней сходятся направления всех прямых, перпендикулярных плоскости E (рис. 280).

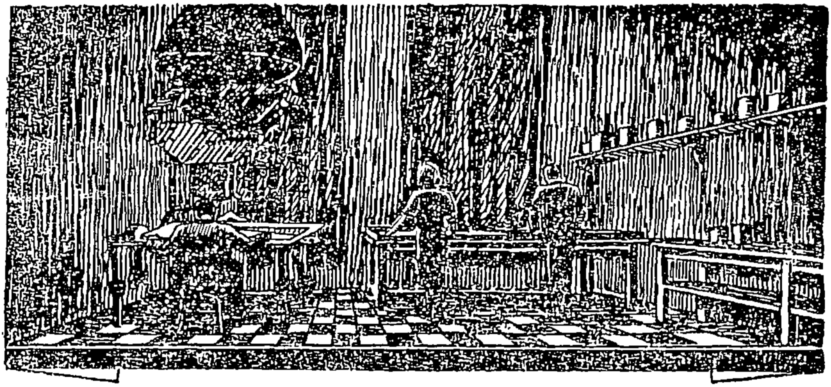
Точки o, c и n лежат на одной прямой, называемой главной вертикалью, ибо проектирующие лучи So, Sc и Sn принадлежат одной вертикальной плоскости, а две плоскости, как известно, пересекаются по прямой.

Как видно на рис. 279, расстояние точек c и n от главной точки может быть вычислено, если известно фокусное расстояние и угол наклона α.

Действительно, $oc = F \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$; $on = F \cdot \operatorname{tg} \alpha$ Не зная направления главной вертикали, нельзя найти точки c и n. В частном случае, когда $\alpha = 90^\circ$, положение главной вертикали определяется достаточно просто**.

* См. ниже — «Наземная фотосъемка».

** То же.



ПОРЯДОК РАБОТ

Процесс составления плана методом аэрофотосъемки состоит из следующих самостоятельных видов работ: летносъемочных, наземных геодезических и фотограмметрических *.

Летносъемочные работы заключаются в фотографировании местности с самолета, получении негативов и отпечатков с них. Работа производится в следующем порядке: фотоаппарат, установленный на самолете, заряжается катушкой со светочувствительной пленкой. Самолет производит полеты над снимаемой местностью, пролетая над ней параллельными маршрутами в направлении запад — восток и восток — запад. Расстояние между маршрутами выбирается так, чтобы часть местности, расположенная между маршрутами, вышла на краях снимков обоих маршрутов. По направлению каждого маршрута снимки производятся также с перекрытием, т. е. так, чтобы каждый последующий снимок захватывал часть местности, снятой на предыдущем. Перекрытие по маршруту (продольное) составляет обычно 60% (рис. 281), между маршрутами (поперечное) — 30% (рис. 282). Перемотка пленки после каждого снимка и открытие затвора производятся автоматически.

После проявления пленки с негативов делают отпечатки — аэрофотоснимки, из которых можно примерным наложением

* Фотограмметрия — наука, занимающаяся изучением геометрических свойств, изображений на фотоснимках и способов измерения по ним.

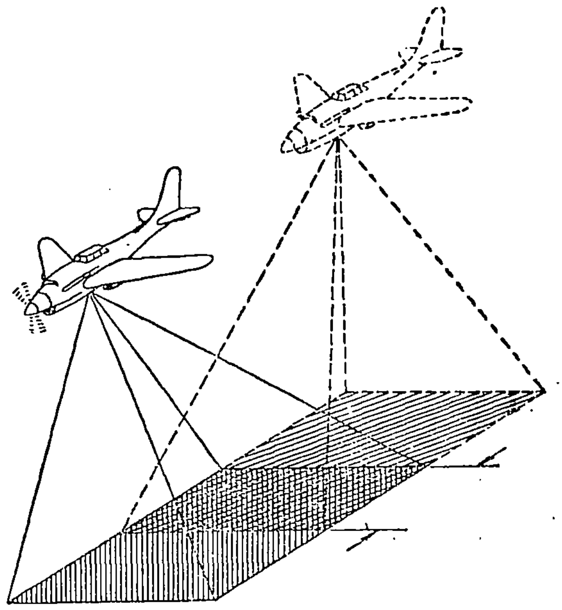


Рис. 281. Продольное перекрытие

получить общую картину местности. Сложенные таким образом снимки называют накидным монтажом. Однако эти снимки

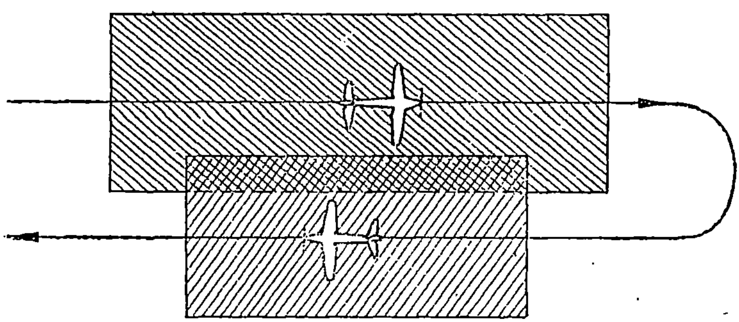


Рис. 282. Поперечное перекрытие

еще не являются планом местности, так как имеют перспективные искажения и требуют дальнейшей обработки.

Наземные геодезические работы необходимы для дальнейшей обработки снимков, преобразуемых в план.

Они заключаются в определении координат ряда точек местности, четко изобразившихся на снимках. В геодезии это называется «привязкой».

Допустим, на снимке (рис. 283) тонкой иголкой наколоты точки *a*, *b*, *c* и *d*. Точка *a* является пересечением двух полевых дорог, *b* — углом мостика через ручей, *c* — углом сарая и *d* — центром триангуляционного знака.

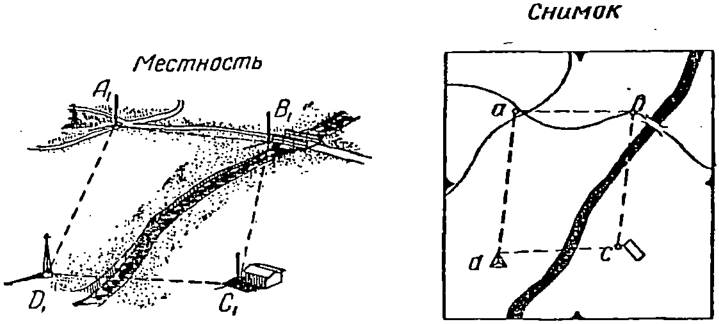


Рис. 283. Привязка фотоснимков

Найти, или, как говорят, отождествить, опознать данные точки на снимке и местности не представляет большого труда и это может быть сделано с большой точностью. Координаты точек местности *A*, *B*, *C*, *D* можно определить, например, способом обхода и получить их положение на плане в желаемом масштабе. Фигура *abcd* не будет подобна фигуре *ABCD*, но будет ей проективна, так как первая является центральной проекцией местности, а вторая — ортогональной. Преобразование фигуры *abcd* в *ABCD* является третьим видом работ.

Помимо определения координат ряда точек местности, необходимо сделать еще одну полевую работу, так называемое д е ш и ф р и р о в а н и е*. Оно заключается в определении характера и качества объектов, изобразившихся на снимках, путем сравнения снимков с местностью (рис. 284). При полевом дешифрировании уточняются, например, такие качества, как порода и возраст леса, глубина рек, проходимость болот и т. д.**.

Кроме того, ряд объектов не изобразится на снимке, например, телефонная линия (при мелком масштабе съемки), подземный газопровод и т. д. Эти объекты следует нанести на

* От французского dechiffrer — разгадывать.

** Дешифрирование может производиться в камеральных условиях по эталонным снимкам и косвенным признакам.

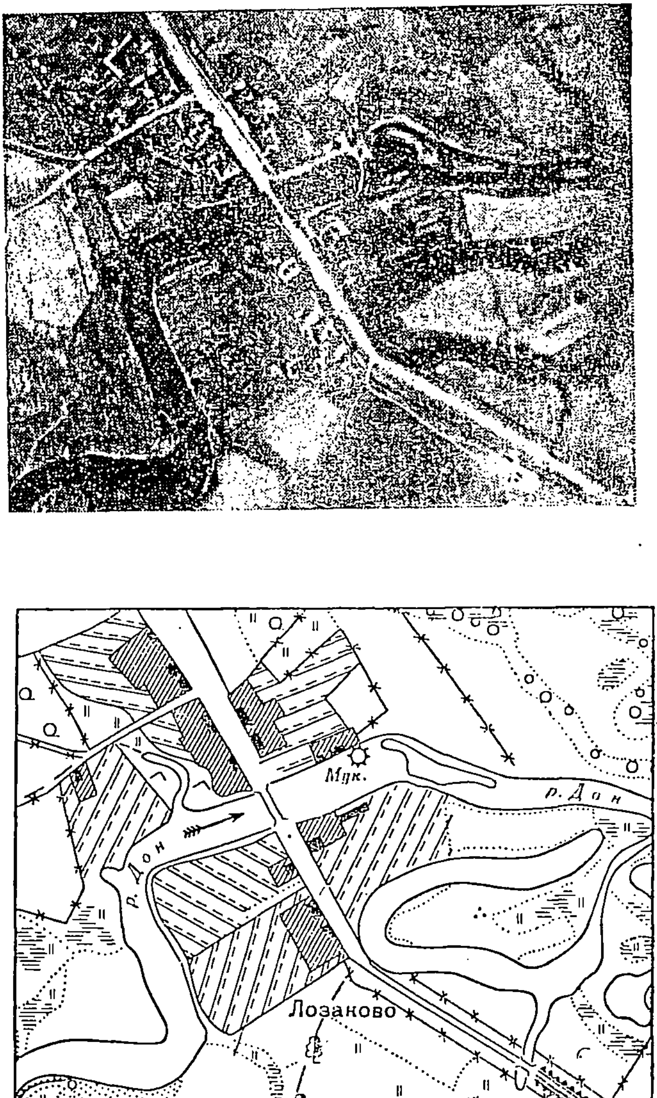


Рис. 284. Аэрофотоснимок и план

снимок каким-либо из известных геодезических способов. Весь комплекс наземных работ называется **привязкой** и **дешифрированием аэрофотоснимков**.

Фотограмметрические работы представляют наибольший интерес с математической точки зрения. Как было

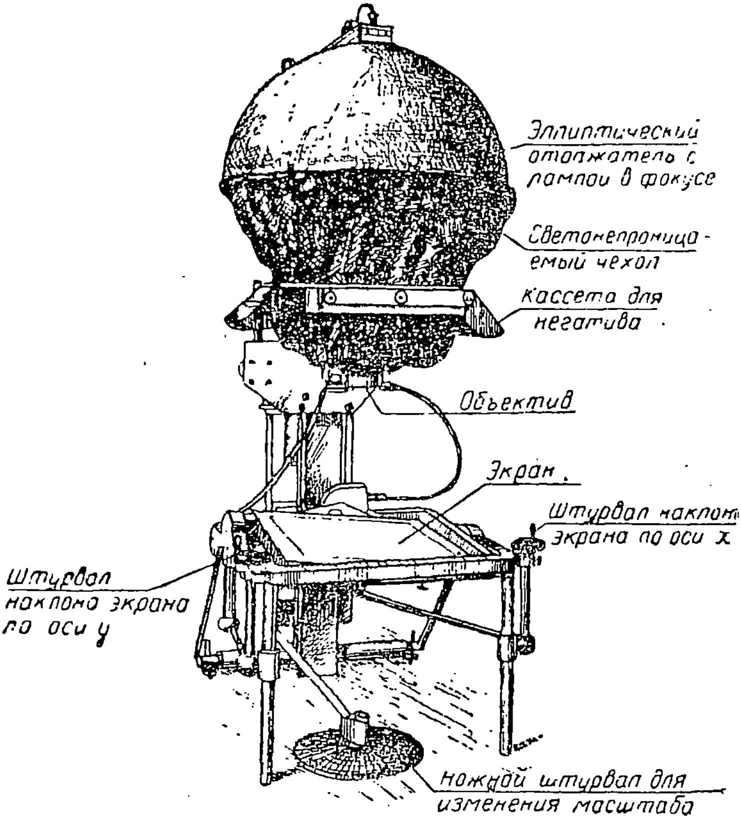


Рис. 285. Фототрансформатор малый (ФТМ)

указано выше, использование снимка в качестве плана требует преобразования центральной проекции в ортогональную с приведением всех снимков к одному масштабу. Эту работу можно производить на различных сложных оптических приборах, одним из которых является трансформатор (рис. 285).

Основные части трансформатора: кассета для установки негатива, объектив, экран и лампа. С помощью специальных механических передач взаимное расположение негатива, объектива и экрана, заменяющего поверхность земли, может быть создано таким, как оно было при съемке. Только вместо расстояния H, равного высоте полета, будет расстояние d от объектива до экрана, и масштаб изображения будет равен отношению $\frac{d}{H}$.

На рис. 286 схематично показано взаимное расположение местности, экрана, объектива и негатива.

Понятно, что при параллельности поверхности земли и экрана на экране будет получено в уменьшенном масштабе подобное изображение местности.

Практически величины H и α бывают неизвестны, и установка трансформатора производится по четырем точкам. В проективной геометрии доказывается, что при наличии че-

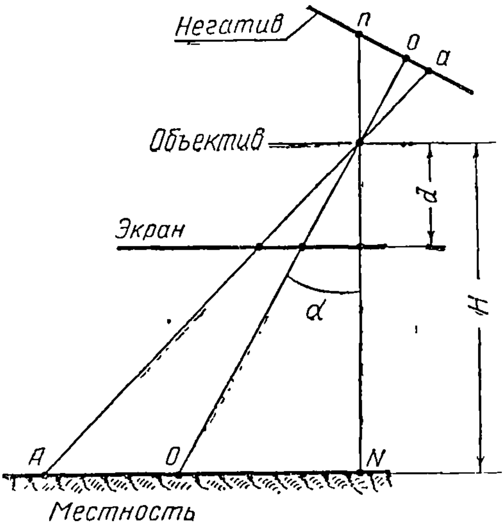


Рис. 286. Схема трансформирования

тырех точек (из которых любые три не лежат на одной прямой) в одной плоскости и соответственных им четырех точек в другой плоскости эти плоскости являются сопряженными. Это значит, что любые соответственные точки находятся однозначно.

При трансформировании оптико-механическим путем это осуществляется следующим образом: на экран укладывается лист белой бумаги с нанесенными по координатам точками A, B, C, и D. На негативе точки a, b, c и d, соответствующие точкам местности A_1, B_1, C_1 и D_1, накалываются иглой. Негатив укладывается в кассету и освещается лампой. Тогда на экране получается светящееся изображение четырех наколов, которые нужно совместить с точками A, B, C и D на бумаге.

Совмещения добиваются перемещениями негатива, объектива и экрана, после чего на экран укладывают фотобумагу и изготовляют отпечаток. Этот отпечаток уже не имеет перспективных искажений, приведен к требуемому масштабу плана и поэтому может быть использован как план.

Помимо оптико-механического способа, имеется еще ряд других, среди которых рассмотрим графический.

Графический способ трансформирования. Пусть на снимке (рис. 287) имеется четыре точки: *a, b, c* и *d*, взаимное положение которых на плане получено в результате наземных геодезических работ. Тогда фигура *abcd* проективна фигуре *ABCD*.

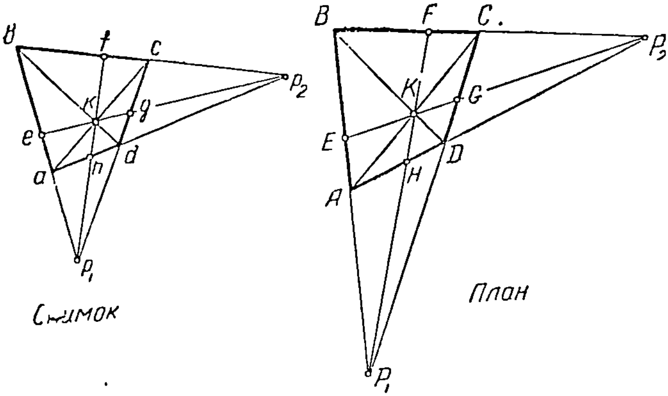


Рис. 287. Построение проективных сеток с помощью двух полюсов

На основании проективных свойств можно утверждать, что точкам *k*, p_1 и p_2 на снимке, полученным пересечением диагоналей и противоположных сторон, будут соответствовать точки *K*, P_1 и P_2, полученные на плане тем же путем. Далее, из точек p_1 и p_2, называемых плюсами, можно провести прямые через точку *k*, разделив тем самым фигуру *abcd* на четыре части. Точкам снимка *e*, *f*, *g*, *h* будут соответствовать точки *E*, *F*, *G* и *H* плана. Каждую клетку снимка и плана можно вновь разделить на четыре части, найдя точку пересечения диагоналей и проведя через нее прямую из полюсов.

Полученные в результате этой работы сетки на снимке и на плане будут взаимно проективны, и останется только в пределах каждой клетки плана нарисовать на глаз контуры, имеющиеся в соответствующей клетке снимка. На практике стороны клеток доводят до 5—8 *мм*, так как в этом случае ошибка нанесения контуров не превышает 1 *мм*, т. е. не выходит за пределы допустимой точности.

Обратим внимание на то обстоятельство, что нахождение полюса, в пределах снимка и плана не всегда возможно. Тогда задача сведется к определению направления на полюс.

Решим эту задачу в общем виде (рис. 288). Пусть в плоскости даны две прямые AB и DC и точка K, лежащая между ними. Требуется провести прямую через точку K, идущую в точку пересечения P прямых AB и DC.

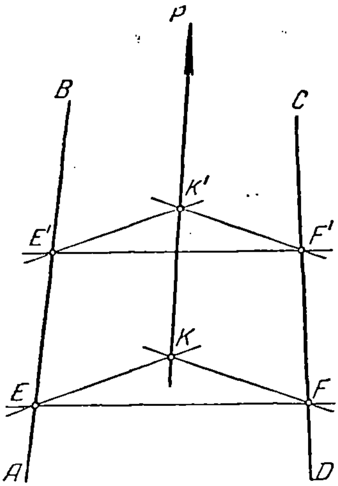


Рис. 288. Проведение направления в недоступную точку схода

П о с т р о е н и е: из точки K проводим две произвольные прямые до пересечения одной из них с прямой AB и другой — с прямой DC. Полученные точки E и F соединяем прямой и получаем треугольник EKF. Затем строим треугольник $E'K'F'$, подобный треугольнику EKF так, чтобы соответственные стороны были параллельны и точки E' и F' лежали на прямых AB и DC. Соединяем точки K и K' и получаем прямую, идущую в точку P.

Д о к а з а т е л ь с т в о: так как в треугольниках EKF и $E'K'F'$ соответственные стороны параллельны и треугольники подобны, то прямые, соединяющие соответственные точки этих треугольников, пересекаются в одной точке — центре подобия.

На практике, для контроля, таким же построением находят еще третью точку. Если все три точки лежат на одной прямой, то, очевидно, графическое построение сделано правильно. На рис. 289 показано построение сетки на фигуре $ABCD$.

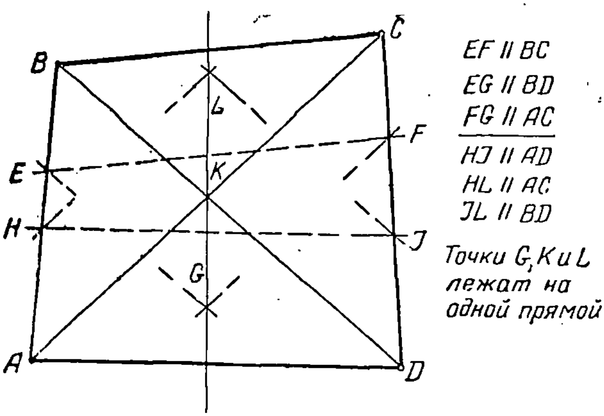
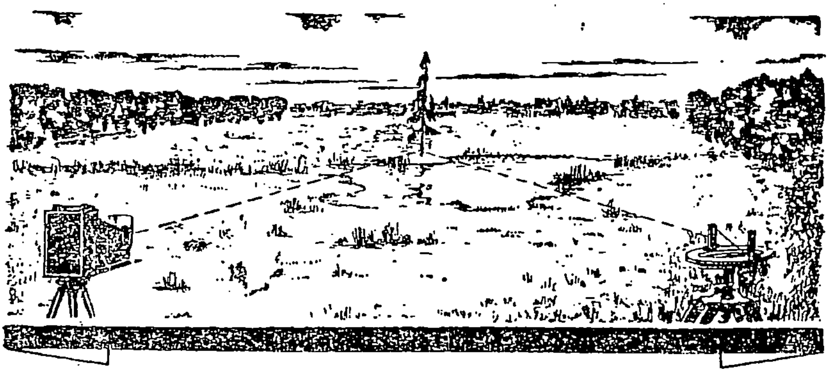


Рис. 289. Построение проективной сетки



НАЗЕМНАЯ ФОТОСЪЕМКА

Наземная фотосъемка применяется при различных инженерных изысканиях сравнительно небольшого объема. Обладая рядом недостатков, не свойственных аэрофотосъемке, она имеет также и ряд преимуществ. Основными недостатками являются малая производительность и невозможность проводить работу в закрытой местности. К числу преимуществ относятся более простые технические средства съемки и возможность точного определения различных элементов центральной проекции: угла наклона картинной плоскости α, координат центра проекции S и других.

Например, при отвесном положении плоскости изображения, т. е. при угле $\alpha = 90°$, легко найти положение точки нулевых искажений (рис. 290). Действительно, расстояние точки c от главной точки o равно, как было показано выше, произведению главного фокусного расстояния F на тангенс половины угла α.

$$oc = F \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \text{ при } \alpha = 90°, \ \frac{\alpha}{2} = 45°, \ \operatorname{tg} 45° = 1$$

и, следовательно,

$$oc = F.$$

Главная вертикаль, являющаяся следом вертикальной плоскости, проходящей через точку O, в этом случае находится просто. При обычной установке фотоаппарата, когда одна сторона снимка горизонтальна, главная вертикаль будет параллельна вертикальной стороне. Расстояние до точки надира n принимается бесконечным, так как

$$on = F \cdot \operatorname{tg}\alpha = F \operatorname{tg} 90°, \text{ а } \operatorname{tg} 90° \to \infty.$$

Это очевидно и геометрически. Отвесный луч из точки S идет параллельно плоскости P. Так как точка n, являющаяся

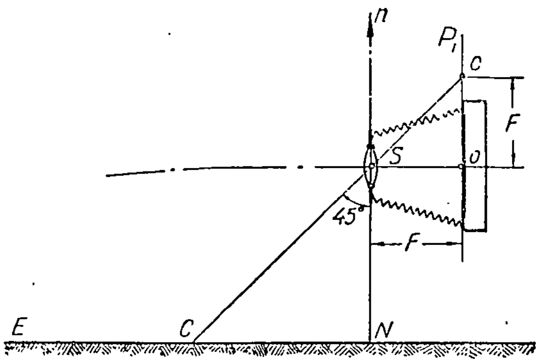


Рис. 290. Установка фотоаппарата при наземной съемке

точкой схода всех прямых, перпендикулярных плоскости P, находится в бесконечности, то на снимке все вертикали параллельны.

Нахождение точки c показано на рис. 290.

Основным инструментом при наземной фотосъемке является фототеодолит (рис. 291), который представляет соединение фотоаппарата с теодолитом.

Соединение угломерного инструмента с фотоаппаратом дает возможность с большой точностью произвести установку фотоаппарата и определить необходимые элементы центральной проекции. В школе фототеодолит можно заменить двумя приборами: фотоаппаратом и угломером.

В зависимости от способа обработки снимков к технике фотосъемки будут предъявляться различные требования. При использовании проективных сеток фотосъемку можно производить без штатива, не добиваясь отвесного положения плоскости изображения (пленки, пластинки). При способе засечек выполнение этого условия необходимо.

Желательно применять фотоаппарат типа «Фотокор» размером 9×12 *см*, с главным фокусным расстоянием $F=135$ *мм*.

При работе фотоаппаратом снимок меньшего размера перед фотограмметрической обработкой необходимо увеличить до размера 9×12 *см* (минимально). При этом, главное фокусное расстояние увеличенного снимка также следует считать пропорционально увеличенным.

Например, снимок сделан камерой «ФЭД». Размер снимка 24×36 *мм*, $F = 50$ *мм*. Пусть размер увеличенного снимка 12×18 *см*. Следовательно, линейные размеры увеличены в 5 раз: $\frac{12\ см}{24\ мм} = \frac{18\ см}{36\ мм} = 5$, откуда главное фокусное расстояние увеличенного снимка $F = 50 \cdot 5 = 250$ *мм*.

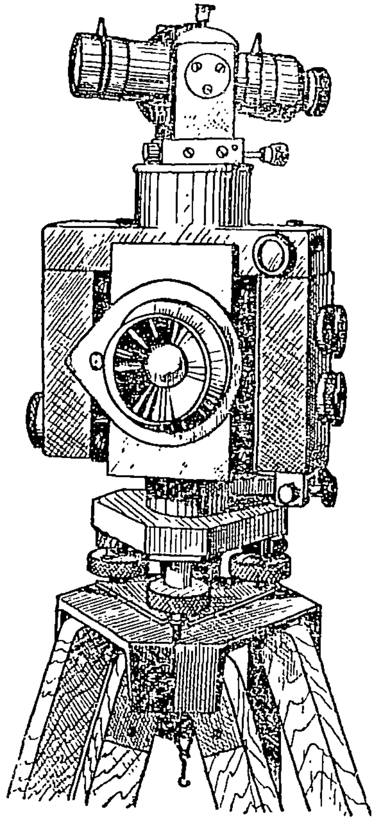


Рис. 291. Фототеодолит

Практические работы

1. Составление плана по проективным сеткам

Оборудование: 1) фотоаппарат, 2) угломер, 3) 4—6 вех, 4) колышки, 5) рулетка, 6) компас.

Выполнение:

1. Выбрать на местности четыре точки A_1, B_1, C_1 и D_1 так, чтобы вехи, установленные в этих точках, были хорошо видны на снимке. Забить колышки. Установить вехи.

2. Любым геодезическим способом получить данные, необходимые для нанесения этих точек на план в выбранном масштабе.

3. Сфотографировать участок местности так, чтобы все четыре вехи были в пределах фотоснимка.

4. Наколоть основания вех на снимке тонкой иглой и, соединив прямыми, прочерченными тушью, получить четырехугольник *abcd*.

5. Построить на плане соответственный четырехугольник *ABCD*, вычертив его карандашом.

6. Построить на снимке и плане проективные сетки.

7. Произвести тушью дешифрирование снимка.

8. Перенести ситуацию со снимка на план по клеткам.

9. Вычертить и оформить план тушью.

2. Составление плана способом засечек

Оборудование: 1) фотоаппарат со штативом, 2) угломер, 3) 3 вехи, 4) 3 колышка, 5) рулетка, 6) компас.

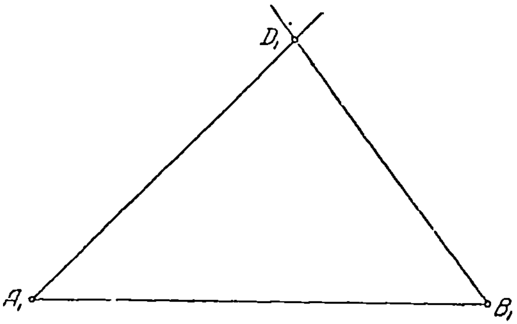


Рис. 292. Расположение основных опорных точек

Выполнение:

1. Выбрать на местности линию базиса, с концов которого A_1 и B_1 будет производиться фотосъемка (рис. 292).

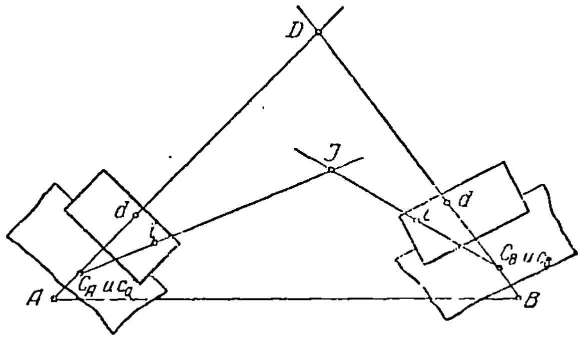


Рис. 293. Построение плана засечками

2. Забить на концах базиса A_1 и B_1 колышки и измерить его.

3. Выставить на местности веху D_1 так, чтобы с концами базиса A_1 и B_1 она образовала примерно равносторонний треугольник.

4. Измерить угломером углы $B_1A_1D_1$ и $A_1B_1D_1$ и компасом направление (азимут) базиса A_1B_1.

5. Нанести на план в выбранном масштабе базис AB и получить засечкой положение точки D (рис. 293).

6. Установить фотоаппарат в точке A_1 так, чтобы плоскость снимка была перпендикулярна поверхности земли и направлению A_1D_1. Произвести фотосъемку. Замерить высоту объектива над землей.

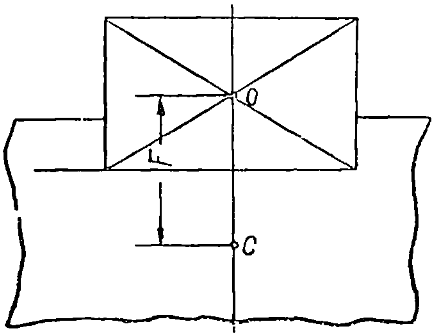


Рис. 294. Нанесение точки C.

7. Провести ту же работу в точке B_1.

8. Проявить и высушить снимки. В случае необходимости увеличить.

9. Найти на снимках точки O_a, O_b и C_a, C_b. Точка O — на пересечении диагоналей; точка C — на расстоянии F от точки O по прямой, идущей отвесно вниз от точки O (рис. 294). Если точка c будет лежать вне формата снимка, то следует подклеить лист белой бумаги.

10. Нанести на плане точки C_A и C , т. е. отложить на прямых AD и BD в масштабе плана расстояние CN, равное высоте объектива над землей (рис. 290).

11. Совместить точки C_A и C_a, ориентировав снимки по прочерченному направлению $C_a\,d$ и $C_A\ D$ (рис. 293).

12. Провести ту же работу со снимком B.

13. Получить плановое положение любой точки местности I пересечением лучей $c_a i$ и $c_b\, i$, где i—любая точка местности, ясно отобразившаяся на обоих снимках.

14. Оформить план тушью.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данное пособие не является систематическим курсом геодезии и многие специальные вопросы в нем совершенно не отражены. Поэтому авторам представляется целесообразным сказать в заключение несколько слов о новых путях развития геодезии.

Можно смело утверждать, что одним из важнейших направлений в дальнейшем техническом прогрессе геодезических работ является разработка методов измерений, основанных на учете времени распространения электромагнитных волн, т. е. методов радиолокации и светолокации.

Эти работы уже вышли за рамки лабораторных исследований и дали хорошие результаты.

В аэрофотосъемке, например, широко применяется прибор, называемый радиовысотомером. С его помощью можно регистрировать с большой точностью высоту полета самолета над поверхностью земли в любой заданный момент

Однако техническая сторона данных вопросов больше связана с курсом физики и поэтому здесь не освещена.

ПРИЛОЖЕНИЯ

САМОДЕЛЬНЫЕ ПРИБОРЫ ДЛЯ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ РАБОТ НА МЕСТНОСТИ В V—X КЛАССАХ

Указание к приложению 8

Номенклатуру учебного планшета принять условно: *М* —42—16 — *Л* — *б* —2.

Исходя из этого, рассчитать географические координаты юго-западного угла планшета (широту φ и долготу λ).

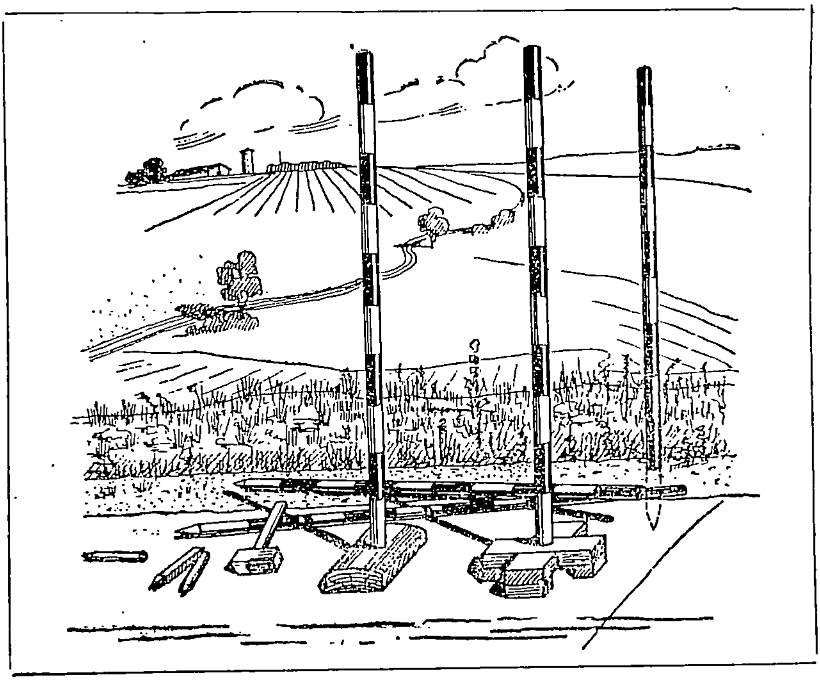
Надписать координатную сетку, если известно, что прямоугольные координаты (геодезические) юго-западного угла планшета $x = 5727\,382$ *м*, $y = 12\,394\,473$ *м* (см. стр. 33—36).

Ответ: $\lambda = 67°\,41'\,15''$ (долгота), $\varphi = 51°\,37'\,30''$ (широта).

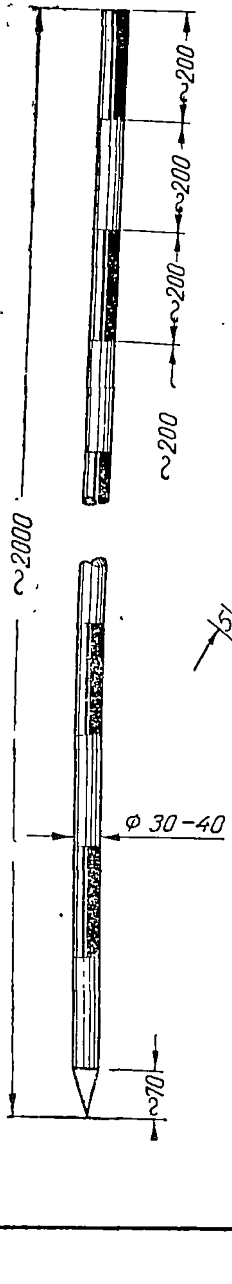
Подпись километровой сетки: от экватора (по оси x) 5728 *км*, 5729 *км*, 5730 *км*; от осевого меридиана (69°) влево 105 *км* и 104 *км* или 395 *км* и 396 *км*, поскольку осевой меридиан имеет ординату $+500$ *км*. Трапеция *М*-42 находится в двенадцатой зоне к востоку от Гринвича; следовательно, окончательно имеем 12395 *км* и 12396 *км* (см. стр. 37).

Приложение 1

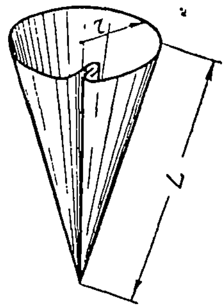
ВЕХИ, КОЛЫШКИ, КОЛОТУШКА



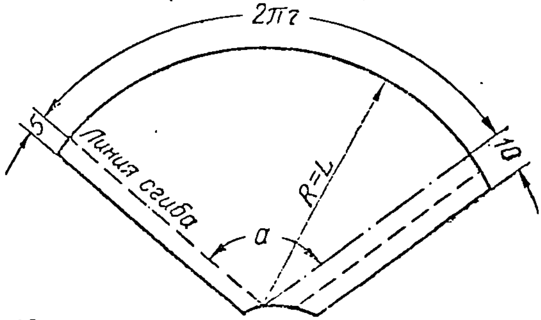
ВЕХА



НАКОНЕЧНИК



ЗАГОТОВКА НАКОНЕЧНИКА
(Развертка конуса)



ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕЛИЧИНЫ УГЛА α ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ЗАГОТОВКИ

$\frac{2\pi R}{360^\circ}=\frac{2\pi r}{\alpha^\circ}$; отсюда

$\alpha^\circ=360^\circ\frac{r}{R}$, но т к $R=L$, то

$$\boxed{\alpha^\circ=360^\circ\frac{r}{L}}$$

1. Вехи из доски

Отпилить от доски рейку сечением 40×40 *мм*. Рейку обстругать сперва на восемь граней, а затем, сострогав ребра, придать ей круглое сечение.

Для придания вехе гладкости поверхность тщательно шкурят наждачной бумагой или циклюют (скоблят, сглаживают) обломком стекла.

Для лучшей видимости вехи раскрашивают в два цвета.

Конец заострить под наконечник (см. ниже, п. 3).

2. Вехи из свежесрезанного дерева

Удалить все сучки, стараясь не повредить коры. Затем разметить веху, как показано на рисунке, и ободрать кору. Это избавит от необходимости производить раскраску. Чтобы веха была прямая, нужно, срезав ее, подвесить за один конец, а к другому привязать тяжелый груз и дать высохнуть в подвешенном положении. Можно также веху прибить гвоздями к ровной доске.

Вехи лучше вырезать весной во время движения соков; тогда дерево легче будет выпрямить.

Конец заострить под наконечник.

3. Наконечник

Наконечник можно сделать из жести. Взять консервную банку, вырезать второе дно и разрезать банку около бокового шва.

Вычертить на плотной бумаге выкройку и, вырезав, сложить в виде наконечника.

Примерить бумажную выкройку на веху. Если выкройка окажется впору, то по бумаге вырезать заготовку из жести и согнуть из нее наконечник. Последовательность операций показана на стр. 400. Выкройка имеет вид кругового сектора, радиус которого R равен образующей конуса L. Угол сектора α нужно вычислить по формуле $\alpha = 360^\circ \cdot \frac{r}{L}$, где r — половина поперечника вехи (на рисунке поперечник отмечен знаком $\varnothing$)

Наконечник прикрепить к вехе двумя-тремя тонкими гвоздями.

4. Колышки

Колышки, как и вехи, можно делать из бруска и из круглого материала. Примерные размеры колышков даны на рисунке.

Для ношения колышков сделать сумку.

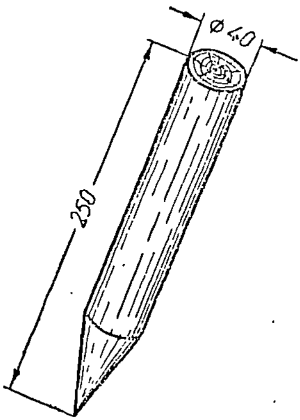
5. Колотушка

Колотушку следует делать из твердого дерева (дуб, береза).

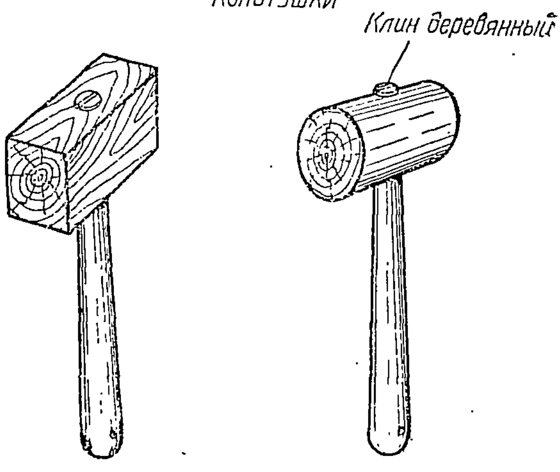
От сухого кругляка отрезать брусок размером $60 \times 60 \times 120$ *мм* (площадь торца $60 \cdot 60$ *мм*^{2}), затем его обработать и просверлить дырку для рукоятки.

Сделать рукоятку и клин. Забить рукоятку в дырку, расколоть и расклинить верхний конец рукоятки. В нижнем конце рукоятки просверлить отверстие и завязать петлю, чтобы носить колотушку на руке.

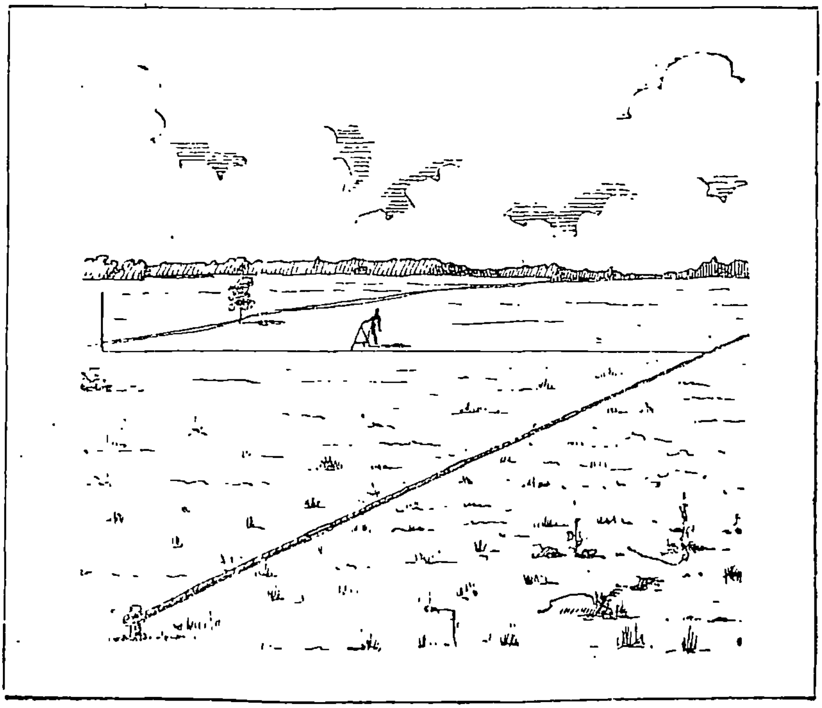
КОЛЫШКИ



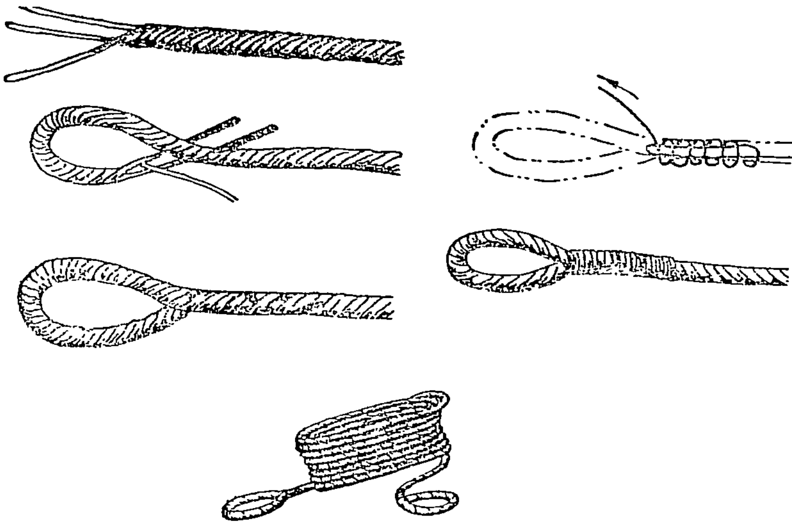
КОЛОТУШКИ

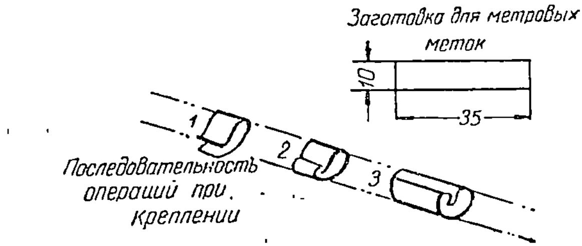


МЕРНАЯ ВЕРЕВКА И ПОЛЕВОЙ ЦИРКУЛЬ



Заделка конца веревки





1. Мерная веревка

Взять веревку длиной 10,5 *м*, толщиной 10 *мм*. Расплести конец на 60—70 *мм*. Сделать петлю и вплести концы в веревку. Конец заделать шпагатом, как указано дальше.

1. Наложить шпагат петлей на место заделки и довольно плотно обмотать веревку; аккуратно укладывая виток к витку.

2. Конец шпагата пропустить в петлю и затем втянуть петлю под витки.

3. Концы шпагата срезать.

Разметку веревки на метры провести так:

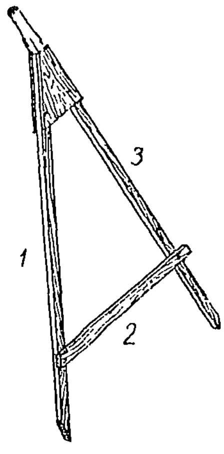
а) заготовить девять меток;

б) надеть веревку на вбитый в землю колышек, натянуть ее и рулеткой отмерить на веревке расстояния 1, 2, 3 . . . 9 *м*;

в) прикрепить жестяные метровые метки и обжать концы их плоскогубцами так, чтобы они не сдвигались.

После этого, вбив второй колышек на расстоянии 10 *м* от первого, обернуть вокруг него веревку и заделать второй конец по образцу первого.

Указания. 1. Разметку метров следует всегда производить от начала (т. е. от 0 до 1, от 0 до 2, от 0 до 3 и т. д.), а не 0—1; 1—2; 2—3 и т. д., иначе ошибка будет накапливаться.



2. Можно на ровном полу вбить два гвоздя, отмерив рулеткой возможно точнее 10 *м*, и пользоваться этими метками для проверки длины мерной веревки. Длина веревки будет меняться вследствие вытягивания, намокания и высыхания. Чтобы длина веревки меньше изменялась от сырости, ее следует до заделки концов и разметки на метры проварить в олифе. Сравнение длины веревки с отмеченным на полу шаблоном дает возможность ввести поправку. Это особенно важно будет при измерении расстояний в несколько сот метров.

2. Полевой циркуль

Подобрать три сухие палки или планки: две (1) и (2) длиной 1 *м* и одну (3) — 1,2 *м*.

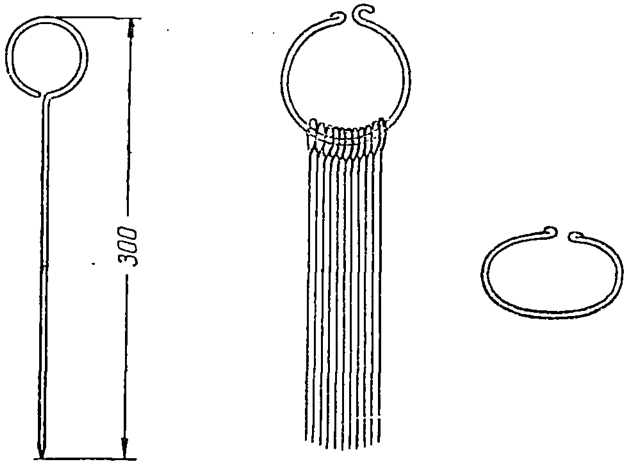
Один конец палок (1) и (3) заострить; другой конец палки (3) обстрогать накругло и прошкурить.

К палке (3) на расстоянии ≈ 1 *м* от нижнего конца прикрепить верхний конец палки (1) тонким гвоздем. На расстоянии ≈ 150 *мм* от нижних заостренных концов палок (1) и (3) прибить поперечную палку (2), раздвинув предварительно заостренные концы на расстояние ровно в 1 *м*.

Излишек палки (2) обрезать. Размер между заостренными концами (1000 *мм*) выдержать как можно точнее.

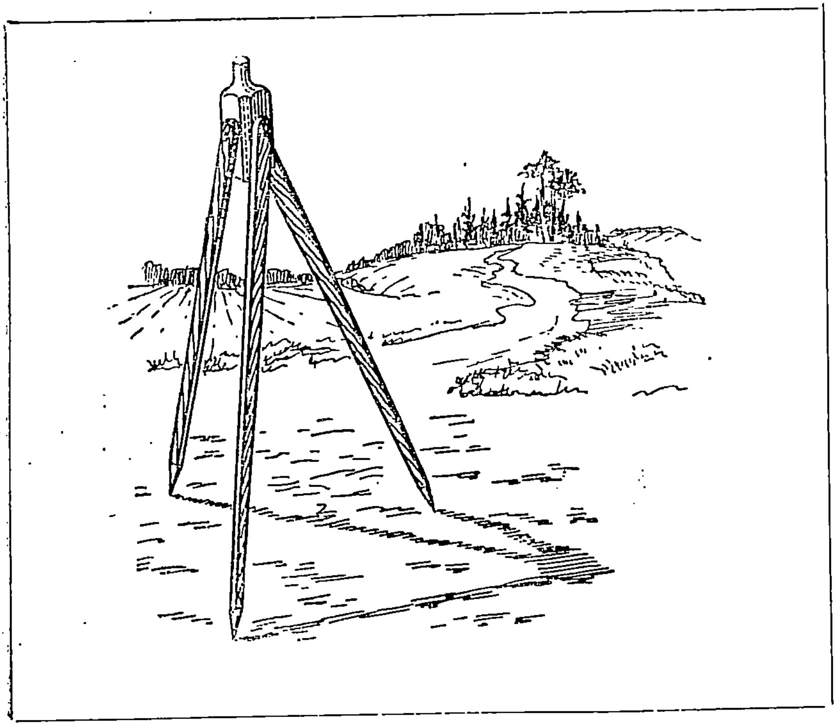
3. Шпильки

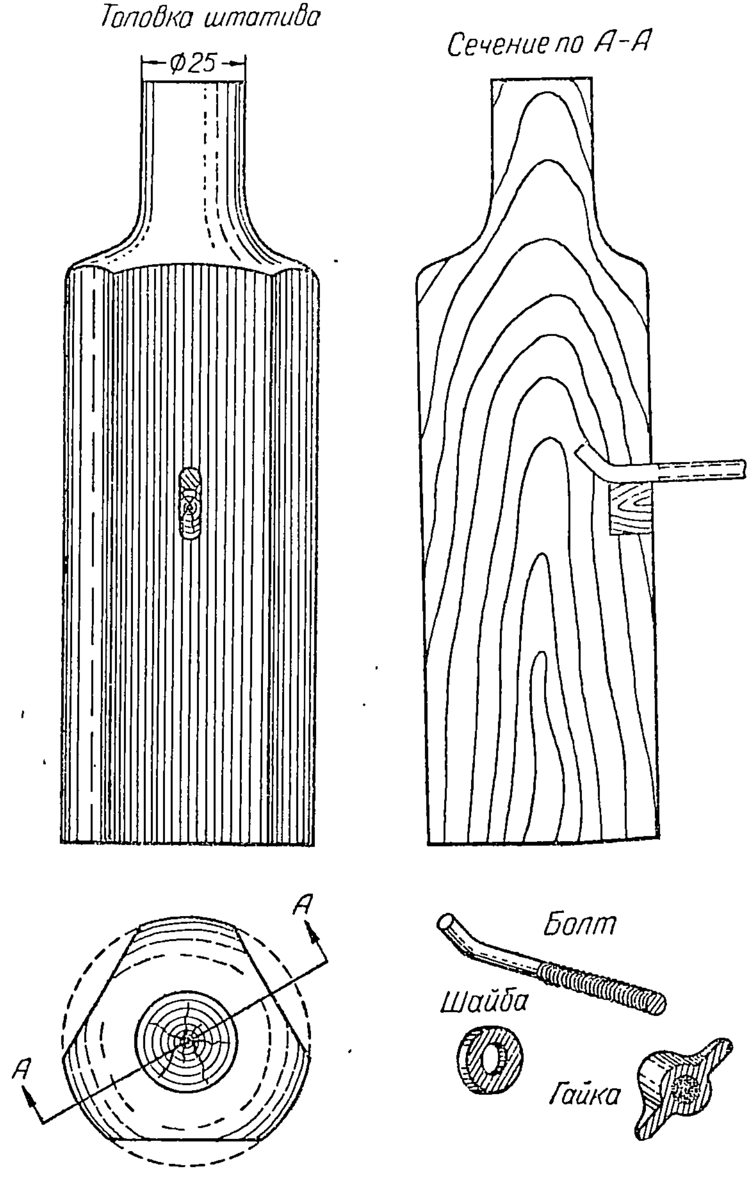
Шпильки изготовить из железной проволоки. Размеры показаны на рисунке. Комплект состоит из 11 шпилек и двух колец. Диаметр проволоки 4—6 *мм*.

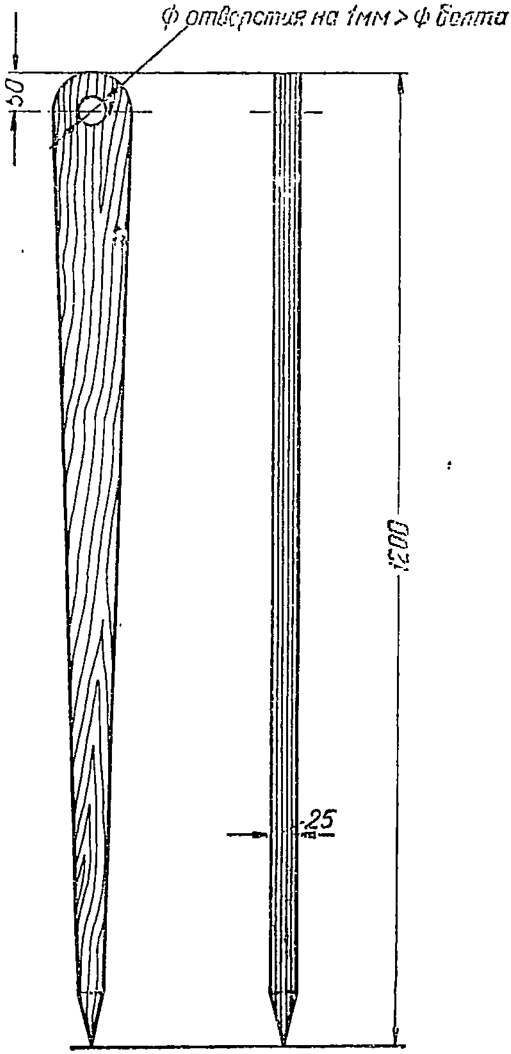


Приложение 3

ШТАТИВ




Головка штатива
Ø25
Сечение по А-А
А
А
Болт
Шайба
Гайка



ф отверстия на 1мм > ф болта
50
1200
25

Штатив является вспомогательным инструментом, но без него невозможна работа с эккером, угломером и мензулой. Поэтому изготовление штатива совершенно необходимо, несмотря на то, что это представляет некоторые трудности. Головку штатива хорошо изготовить из круглого сухого полена диаметром 60—70 *мм*. От полена отпилить по возможности ровный, без сучков, кусок длиной 180—200 *мм*. На одном из оснований найти центр и карандашом сделать разметку. Затем топором сколоть с трех сторон излишки, оставляя запас для более точной отделки рубанком или ножом.

Примечание. Следует добиваться получения ровных плоскостей на гранях, не стремясь особенно к тому, чтобы они были параллельны осевой линии, и допуская их наклон книзу.

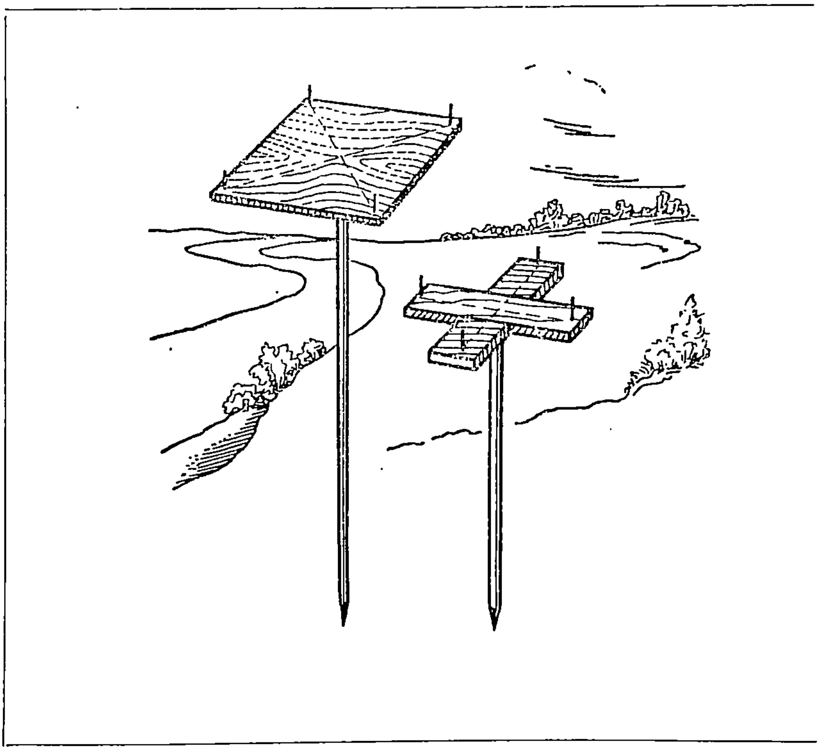
На расстоянии 50—60 *мм* от верха головки сделать пропил в трех местах на 15 *мм* и сколоть верхнюю часть, после чего ножом обработать штырь штатива.

Болты и гайки (лучше барашковые) изготовить по рисунку в мастерской МТС или на шефствующем заводе. Заделку болтов осуществить следующим образом: на каждой грани сделать разметку для сверления или прожигания отверстий. Произвести сверление и завести болты в отверстия. Затем изготовить деревянные пробки и забить их под болты.

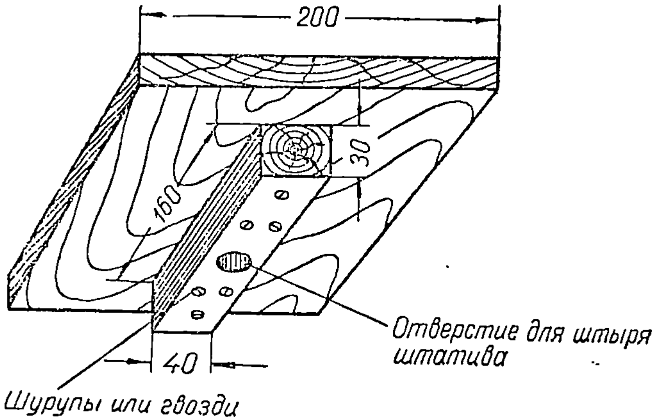
Примечание. Если имеются готовые болты, но нет возможности обработать их и концы загнуть, то можно сверлить головку штатива насквозь, а болты расположить на разной высоте и при этом соответственно просверлить отверстия в ножках.

Ножки штатива сделать из доски толщиной 15—20 *мм* по размерам, указанным на рисунке.

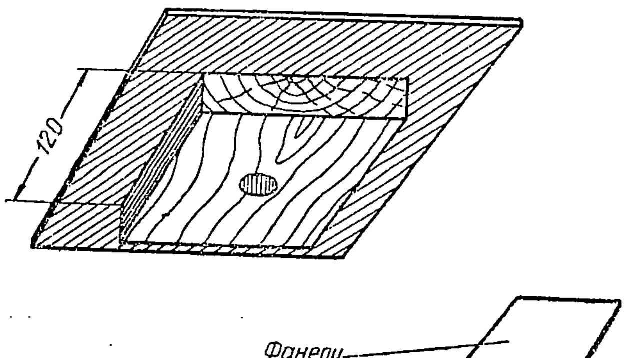
ЭККЕР

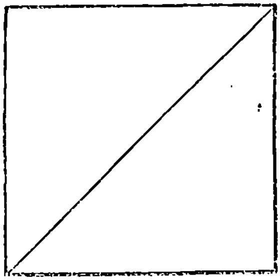


Эккер из доски

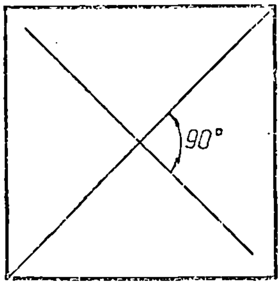


Эккер из фанеры

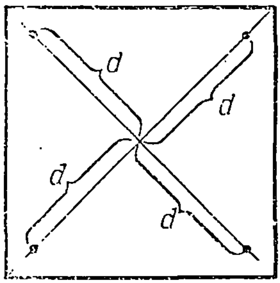




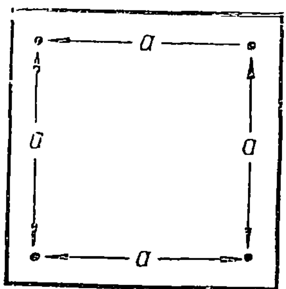
1



2



3



4

Вырезать из доски толщиной 15—20 *мм* или фанеры квадрат размером 200×200 *мм*^{2}.

Снизу к доске прибить планку с отверстием под штырь штатива (см. приложение 3).

Размеры доски и планки — приблизительны.

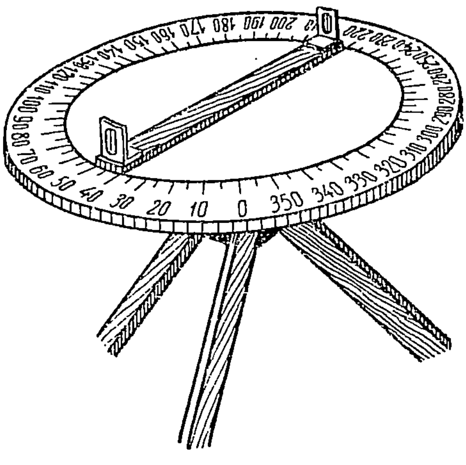
Разметку точек для установки булавок провести с максимальной точностью.

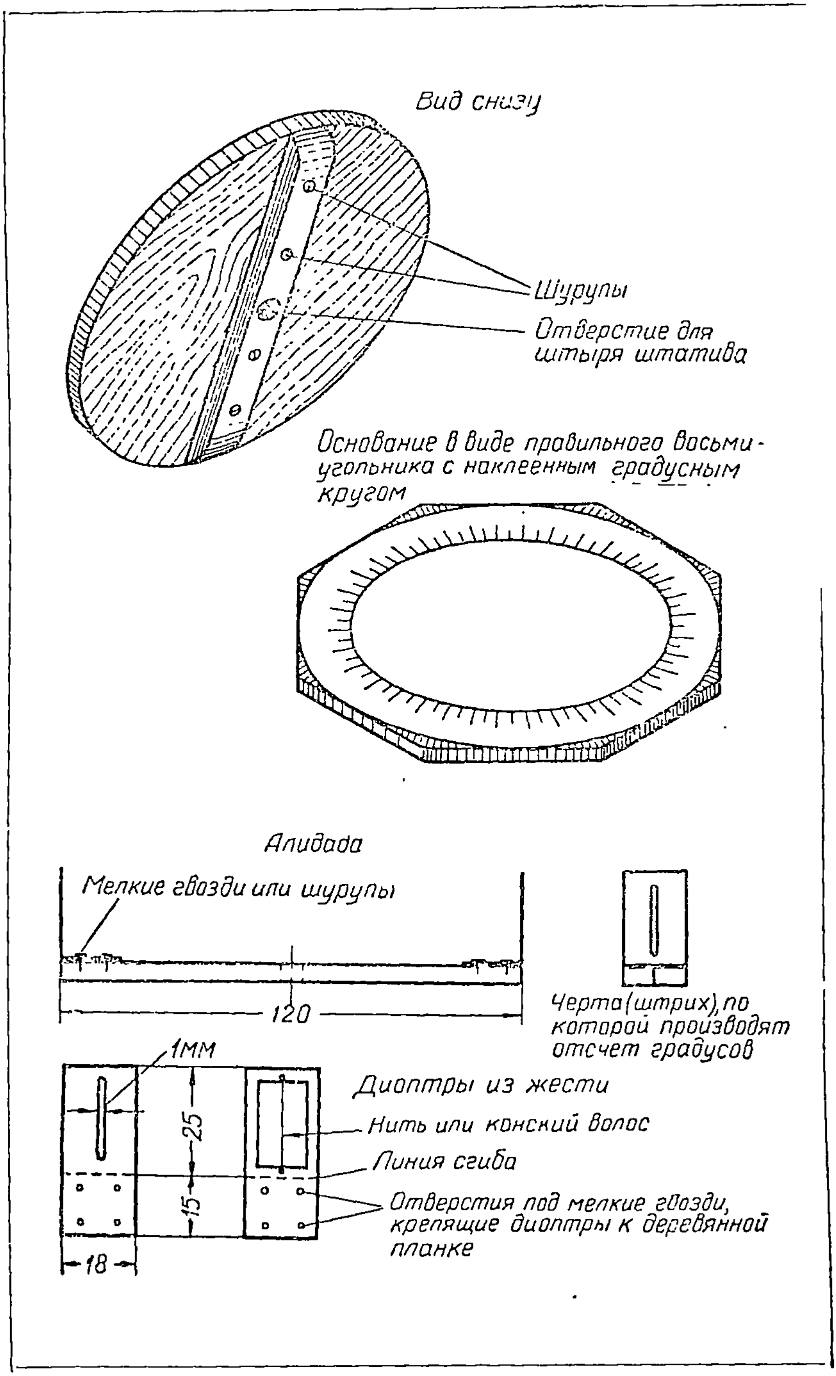
Порядок разметки:

1. Прочертить диагональ на доске.
2. Из середины диагонали провести в обе стороны перпендикуляр.
3. От точки пересечения отложить по всем четырем направлениям равные отрезки (130—135 *мм*).
4. Проверить равенство сторон полученного квадрата. Отклонение может быть допущено не больше 0,5 *мм*.

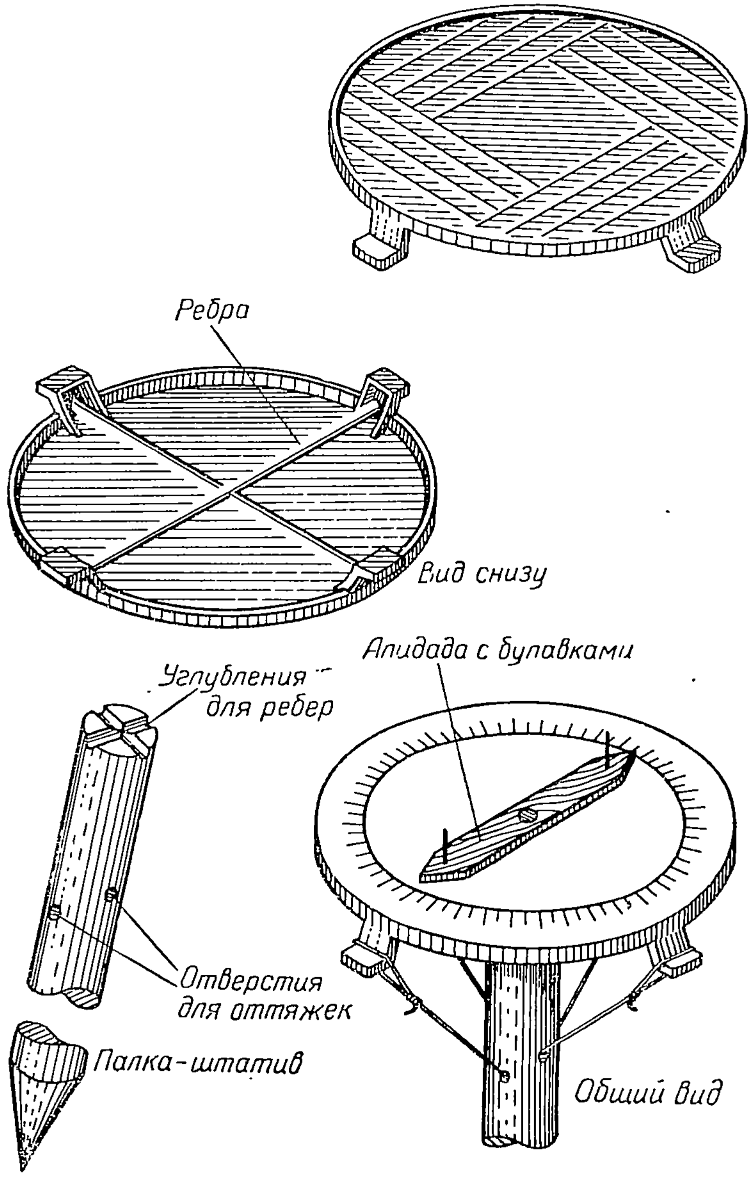
Забить в намеченные точки булавки с т р о г о вертикально.

УГЛОМЕР


0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
110
120
130
140
150
160
170
180
190
200
220
230
240
250
260
270
280
290
300
310
320
330
340
350


Вид снизу
Шурупы
Отверстие для штыря штатива
Основание в виде правильного восьмиугольника с наклеенным градусным кругом
Алидада
Мелкие гвозди или шурупы
120
Черта (штрих), по которой производят отсчет градусов
1мм
Диоптры из жести
25
15
18
Нить или конский волос
Линия сгиба
Отверстия под мелкие гвозди, крепящие диоптры к деревянной планке

Угломер из пластмассовой подставки



Угломер

Выстрогать небольшую доску толщиной 15 *мм* и выпилить из нее круг диаметром 145 *мм.*

С одной стороны круга, как показано на рисунке, прибить гвоздями (лучше привернуть шурупами) планку с отверстием под штырь штатива. Отверстие в планке должно совпадать с центром круга. С другой стороны наклеить бумажный круг из «Приложения». Алидаду изготовить по размерам, указанным на рисунке. При креплении диоптров к деревянной планке обратить внимание на то, чтобы отверстие под болт, прорезь в глазном диоптре и нить в предметном диоптре лежали на одной прямой, так как иначе при неравенстве сторон измеряемого угла может получиться значительная ошибка. Алидаду с кругом скрепить болтом (желательно проложить между алидадой и кругом пружинящую шайбу).

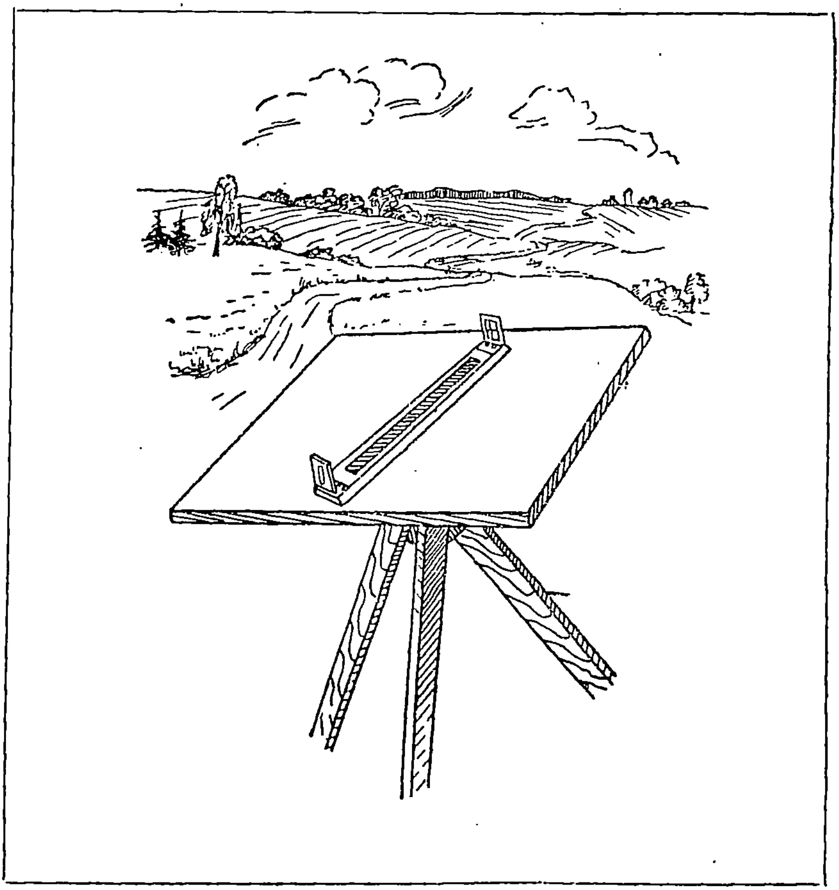
Примечания. 1. Круг можно сделать также из фанеры от 4 *мм* и толще, но нижнюю планку следует заменить доской в форме, близкой к правильному 6—8-угольнику.

2. Если недостает инструментов и круг выпилить трудно, то основание для наклейки градусного круга можно сделать в виде правильного 6—8-угольника с расчетом, чтобы бумажный круг был вписан в выбранный многоугольник.

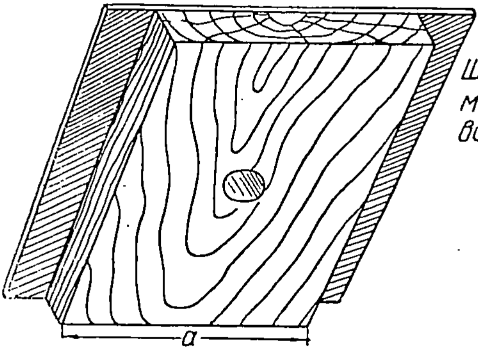
Угломер из пластмассовой подставки для посуды

1. Острым ножом срезать ребра и зачистить поверхность.
2. Просверлить или прожечь раскаленным гвоздем отверстие через точку пересечения нижних ребер.
3. Наклеить сверху бумажный круг.
4. Сделать алидаду с булавками.
5. На круглой палке выжечь крестообразно углубления под ребра нижней стороны подставки.
6. Вбить в палку два-три гвоздя или просверлить отверстия для завязки шпагата, крепящего подставку.

МЕНЗУЛА, АЛИДАДА, ПЛАНШЕТ

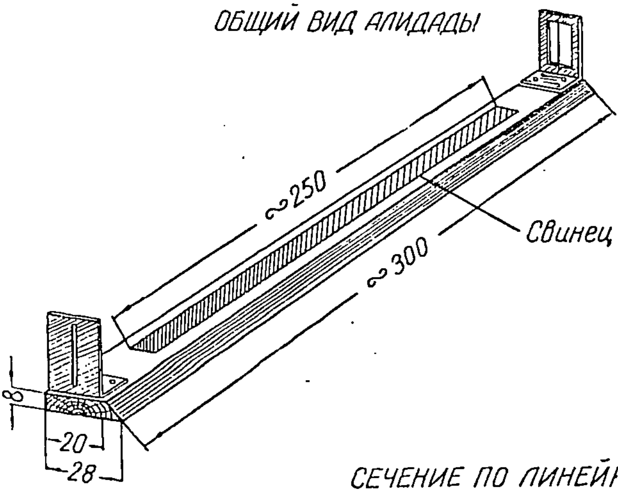


ВИД СНИЗУ НА МЕНЗУЛЬНУЮ ДОСКУ ИЗ ФАНЕРЫ

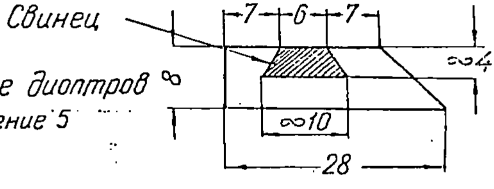


Ширину доски **a** брать максимально возможную

ОБЩИЙ ВИД АЛИДАДЫ



СЕЧЕНИЕ ПО ЛИНЕЙКЕ



Изготовление диоптров см приложение 5

Мензула

Мензула, которой пользуются в геодезических работах, состоит из квадратной доски (планшета), штатива и подставки, соединяющей доску со штативом.

Для учебных целей конструкцию можно упростить и укрепить доску без подставки, прямо на штативе, воспользовавшись тем же штативом, который употребляется для эккера и угломера.

Мензульная доска

Доску размером 350$\times$350 *мм²* и толщиной 15—20 *мм* следует делать из сухого дерева (желательно из липы). Так как доску такого размера достать нелегко, а делать склеенную трудно, то можно применить фанеру от 4 *мм* и толще. Фанеру нужно набить на предварительно выстроганную доску для получения плоской поверхности.

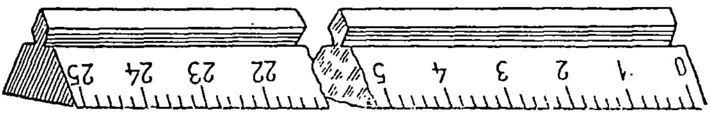
Ширина нижней доски должна быть близкой к размеру планшета.

В точке пересечения диагоналей должно быть отверстие под штырь штатива.

Алидада

Общий вид алидады показан на рисунке. Линейку со скошенным краем для устойчивости следует сделать более тяжелой, залив в углубление свинец или прикрепив металлическую пластинку.

Диоптры следует делать так же, как для угломера.



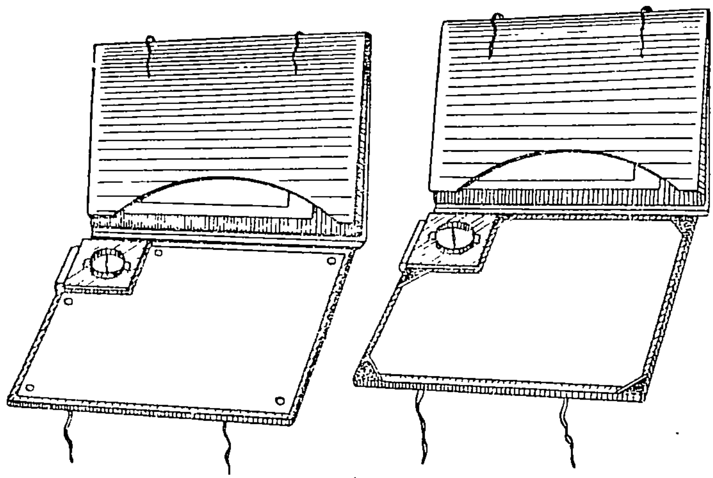
При креплении диоптров обратить внимание на то, чтобы плоскость, проходящая через прорезь в глазном диоптре, и нить в предметном диоптре были параллельны скошенному краю линейки.

Примечание. В качестве алидады можно использовать трехгранную масштабную линейку, визируя по верхнему ребру.

Планшет

(для глазомерной съемки и ведения абриса)

Планшет — обычная папка с карманом для хранения запасной бумаги. Он может быть сделан из фанеры или картона. Изготовить его нетрудно, а конструкция ясна из приведенных рисунков. Крепление бумаги к планшету во время съемки можно делать кнопками или вставкой углов бумаги в особые кармашки.



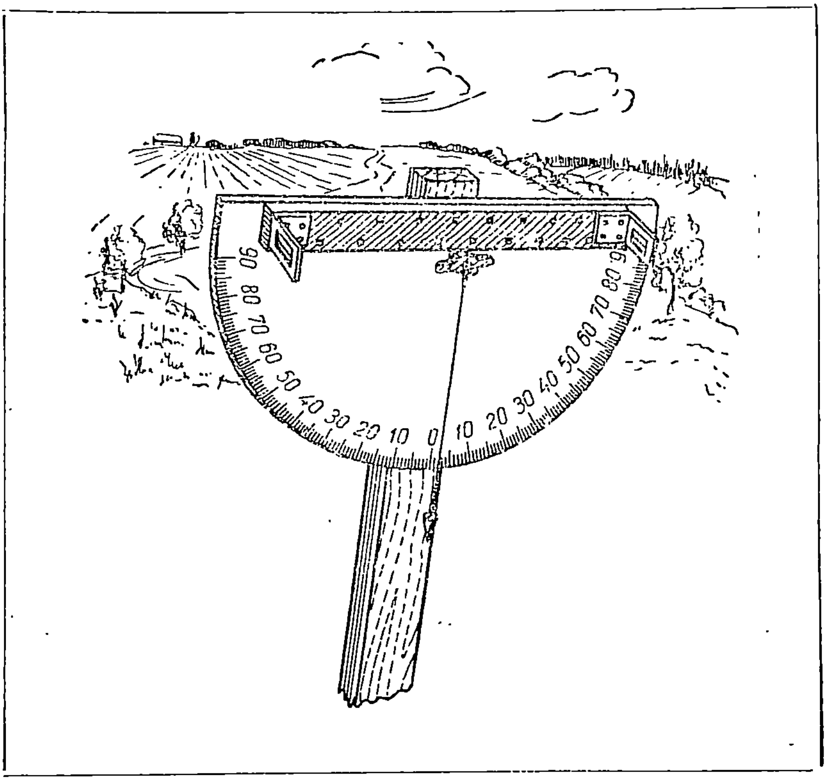
Компас следует крепить к планшету достаточно жестко. Способ крепления зависит от конструкции компаса.

Нужно помнить, что на планшете большей частью приходится работать с компасом, и в конструкции планшета не должно быть железных или стальных деталей, иначе стрелка компаса будет отклоняться и ориентировка нарушится. По этой же причине нельзя пользоваться при работе на местности стальной линейкой.

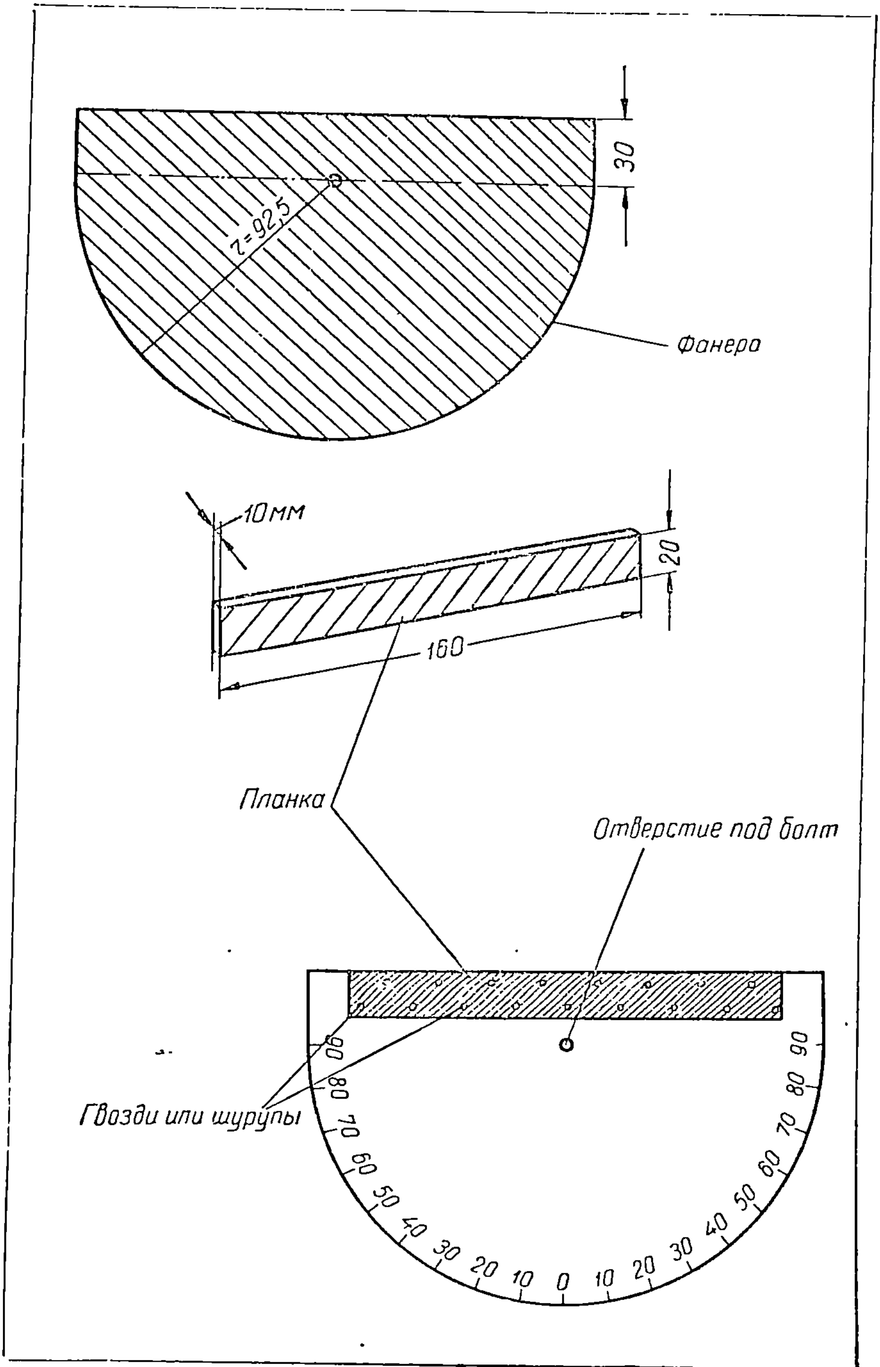
Удобно работать с трехгранной масштабной линейкой.

Приложение 7*

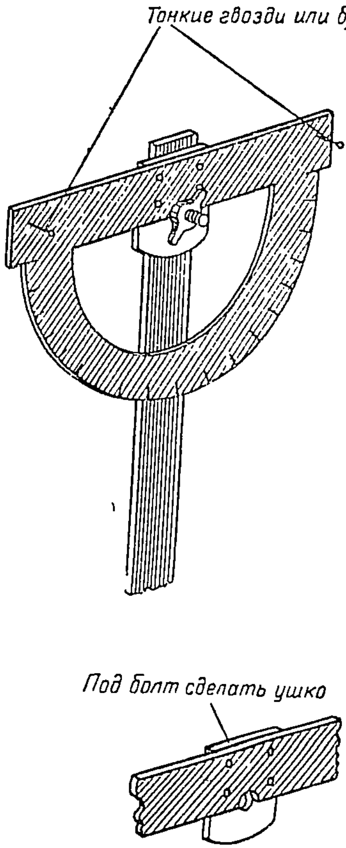
НИВЕЛИР-ЭКЛИМЕТР

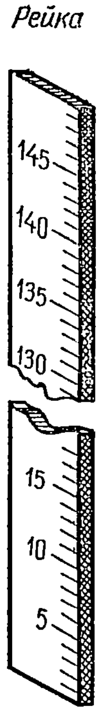


* Приложения № 8—14 даны в конце книги вкладкой.


30
r=92,5
Фанера
10мм
20
160
Планка
Отверстие под болт
Гвозди или шурупы
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90

Эклиметр из школьного транспортира





Разметить сантиметровые деления и подписать через 5 *см* черной тушью так, чтобы штрих шкалы был осью симметрии цифры

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

Арманд Д., Как измерили землю, Детиздат, 1941.

Большая Советская энциклопедия, изд. 2-е.

Брадис В. М., Теория и практика вычислений, Учпедгиз, 1935.

Брадис В. М., Средства и способы элементарных вычислений, Учпедгиз, 1953.

Бубнов И. А., Кремп А. И., Фолимонов С. И., Военная топография, Воениздат, 1953.

Виноградский И. И. и Порцанко И. Ф., Памятка реечника на топографической съемке, Геодезиздат, 1953.

Вировец А. М. и Кутузов М. Н., Геодезия, Геодезиздат, 1948.

Витковский В. В., Топография, Спб., 1904.

Владимирский Г. А., Практические работы по геодезии, изд-во «Работник просвещения», 1930.

Гедымин А. В., Картография, Учпедгиз, 1946.

Дейнеко В. Ф., Аэрофотогеодезия, Геодезиздат, 1955.

Дитц О. Г., Геодезия для гидротехников и строителей. ч. I, ГТТИ, 1932.

Дорф П. Я. и Румер А. О., Измерение на местности, изд-во АПН РСФСР, 1953.

Знаменский М. А. и Попов Н. А., Введение в геодезию, Учпедгиз, 1934.

Знаменский М. А., Беседы по геодезии с учителями, Учпедгиз, 1931.

Красовский Ф. Н., Избранные произведения, т. IV, Геодезиздат, 1955.

Крельштейн Б. Н., Геодезические работы в школе, Л., 1948.

Крылов А. Н., Лекции о приближенных вычислениях, изд-во АН СССР, 1933.

Ларченко Е. Г., Техника вычислений, Геодезиздат, 1952.

Любочский Н. А., Измерительные работы в средней школе, Учпедгиз, сб. «Математика в школе», 1943.

Маслов А. В., Способы и точность определения площадей, Геодезиздат, 1955.

Орлов П. М., Землемерие, Сельхозгиз, 1953

Паша П. С., Корнилюк Ф. Г., Петров А. В., Военная топография, Воениздат, 1952.

Рабинович Б. И., Основы построения опорных геодезических сетей, Геодезиздат, 1948.

Раздымаха Г. С., Установление длины метра, Геодезиздат, 1951.

Свенцинский В., Михеев С., Геометрия в поле, Гиз, 1929.

Смычников Д. М., Измерительные работы на местности в курсе математики средней школы, Учпедгиз, 1953.

Старостин И. И., Бируля А. Л., Практические занятия по картоведению с основами топографии, Учпедгиз, 1950.

Трунов И. П., Измерительные работы на местности в курсе математики средней школы, Учпедгиз, 1954.

Условные знаки для топографических планов и масштабов, Геодезиздат, 1956.

Федоров Н. В., Геодезия, Дориздат, 1952.

Чеботарев А. С., Курс геодезии, т. I, Геодезиздат, 1955.

Шебалин Д. В., Военная топография, Воениздат, 1939.

Шилов П. И., Геодезия, Геодезиздат, 1953.

Шилов П. И., Способ наименьших квадратов, Геодезиздат, 1941.

Яковлев К. П., Математическая обработка результатов измерений, ГТТИ, 1953.

СОДЕРЖАНИЕ

Часть III

Измерительные работы в курсе VIII—X классов

Нивелир-эклиметр

Из 3—5-миллиметровой фанеры вырезать фигуру, показанную на стр. 424. Наклеить с одной стороны бумажный полукруг с градусными делениями (см. приложение 13). Выстрогать планку размером 10×20×160 *мм*. Прибить планку сверху бумажного полукруга. С обратной стороны просверлить отверстие в центре окружности под болт. В качестве штатива можно использовать шест круглого или квадратного сечения длиной 1,5 *м* с заостренным концом. На расстоянии 5 *см* от верхнего конца шеста просверлить отверстие под болт и, пропустив болт, надеть на него полукруг, затянув его гайкой. Желательно, чтобы гайка была с ушками. При работе с прибором на конец болта надевать шпагат, завязанный с одной стороны петлей; к другому концу шпагата привязать небольшой груз. Длина от петли до груза 150 *мм*. Диоптры с нитями сделать по типу угломерных* и прибить к планке. При креплении диоптров выдержать параллельность линии, соединяющей нити, с линией, проходящей через отсчет 90°—90°.

Другой вариант, показанный на стр. 425, можно сделать из школьного транспортира, наклеив, если нужно, такую оцифровку, как на рисунках.

Рейки

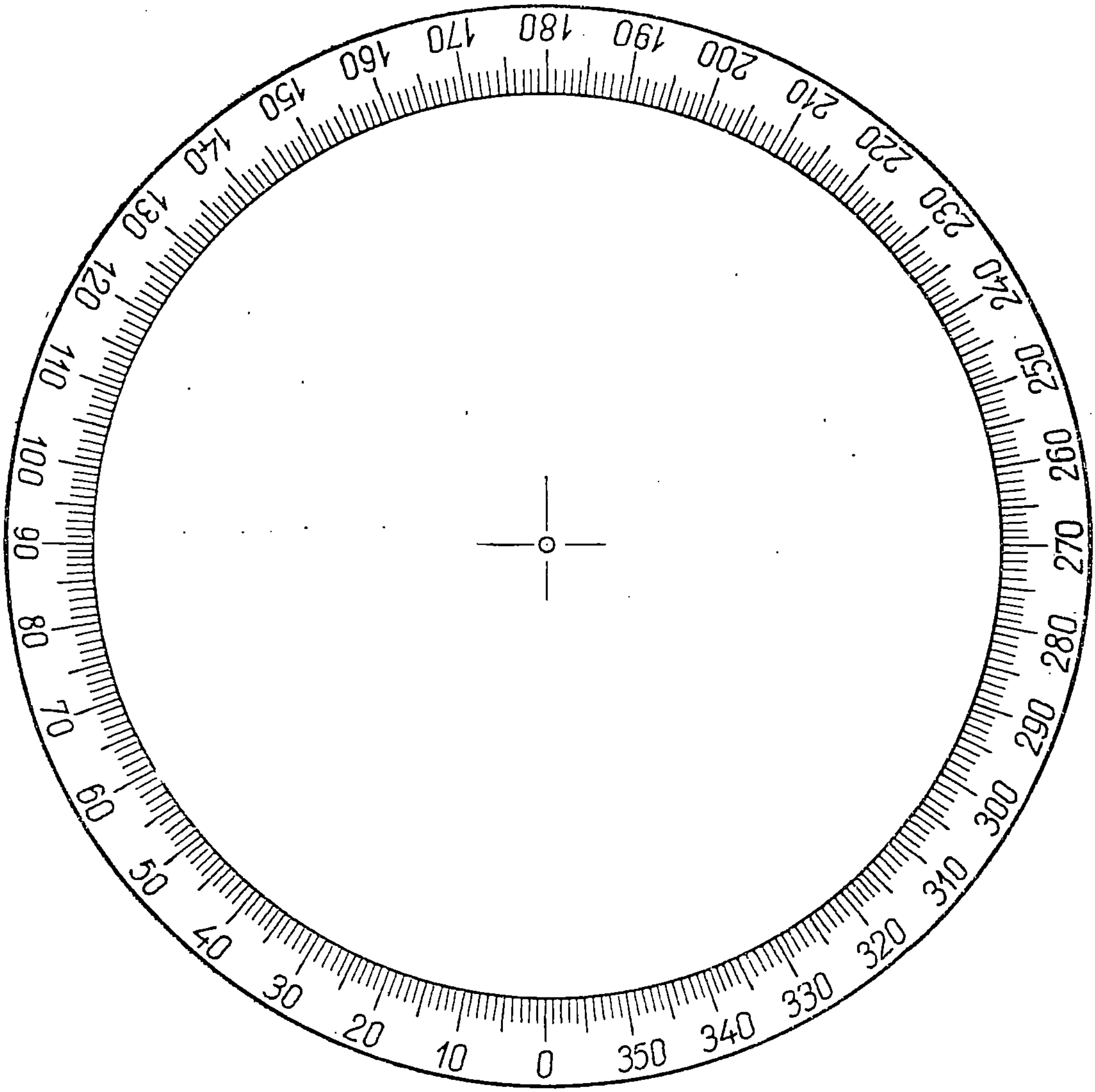
Рейки изготовляются из доски шириной 100 *мм* и толщиной 10—15 *мм*. Длина ее 1,5—2,0 *м*. Разметку рейки произвести до сантиметров, а отсчет при работе на местности брать на глаз с точностью до 1 миллиметра.

---

* См. стр. 416. Оба диоптра делать по типу предметного, т. е. с нитями.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ШКАЛА ДЛЯ ЛИМБА УГЛОМЕРА



Контангенсы малых углов

A	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′	10′
0°	3438	1719	1146	859,4	687,5	573,0	491,1	429,7	382,0	343,8

Значения синусов, косинусов и тангенсов могут быть найдены с произвольно высокой точностью по приведенным ниже рядам:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \frac{x^7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} + \frac{x^9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9} - \ldots;$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \frac{x^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \frac{x^8}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8} - \ldots;$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \ldots,$$

где x — радианная мера угла.

Радиан содержит: $\rho = \frac{180^\circ}{\pi} = 57^\circ 17' 44'',8$;

в градусах $\rho^\circ = 57^\circ,3$,
в минутах $\rho' = 3438'$,
в секундах $\rho'' = 206\,265''$.

Для углов до 10° $\sin\alpha \approx \alpha$ (в радианах) с относительной ошибкой $< \frac{1}{100}$. Отсюда для приближенных расчетов с углами до 10° $\sin\alpha = \frac{\alpha^\circ}{\rho^\circ}$ и $\alpha^\circ = \rho^\circ \cdot \sin\alpha$.

Примеры: $\sin 3^\circ 35' = \sin 215' = \frac{215'}{3438'} \approx 0{,}0624$;

$\sin\alpha = 0{,}1478$, $\alpha' = 3438' \cdot 0{,}1478 \approx 509'$, $\alpha = 8^\circ 29'$.

Таблица различаемости предметов

Видимые предметы	С какого расстояния видны, км	С какого расстояния видны, м	Видимые предметы	С какого расстояния видны, км	С какого расстояния видны, м
Ветряные мельницы	15		Стволы деревьев		850
Деревни и большие дома	8		Переплеты оконных рам		500
Группа отдельных домов	5		Цвет и части одежды		250
Окна в домах	4		Лица людей		150
Трубы на крышах	3		Выражение лица		100
Отдельные деревья	2		Глаза		60
Километровые столбы	1		Белки глаз		20

Приложение 10

СПРАВОЧНАЯ ТАБЛИЦА

НОМОГРАММА ДЛЯ ПЕРЕХОДА ОТ АЗИМУТОВ К РУМБАМ, ОТ РУМБОВ К АЗИМУТАМ

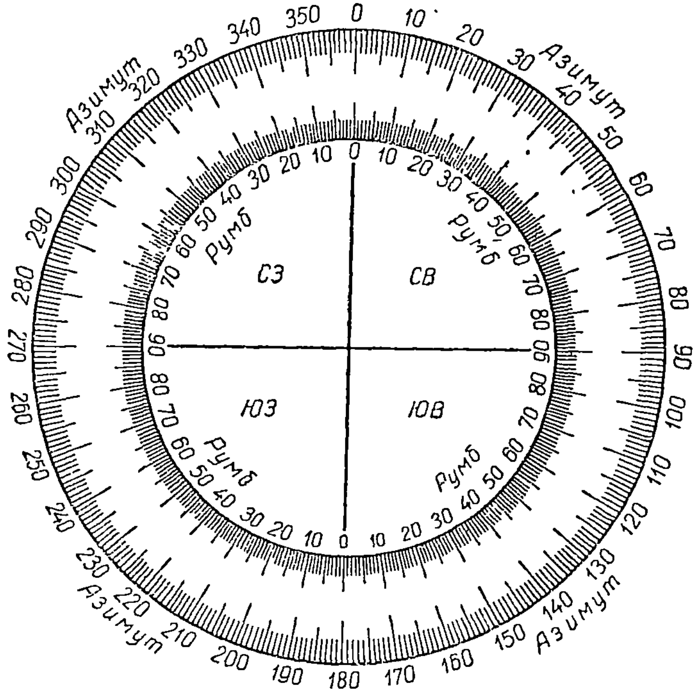


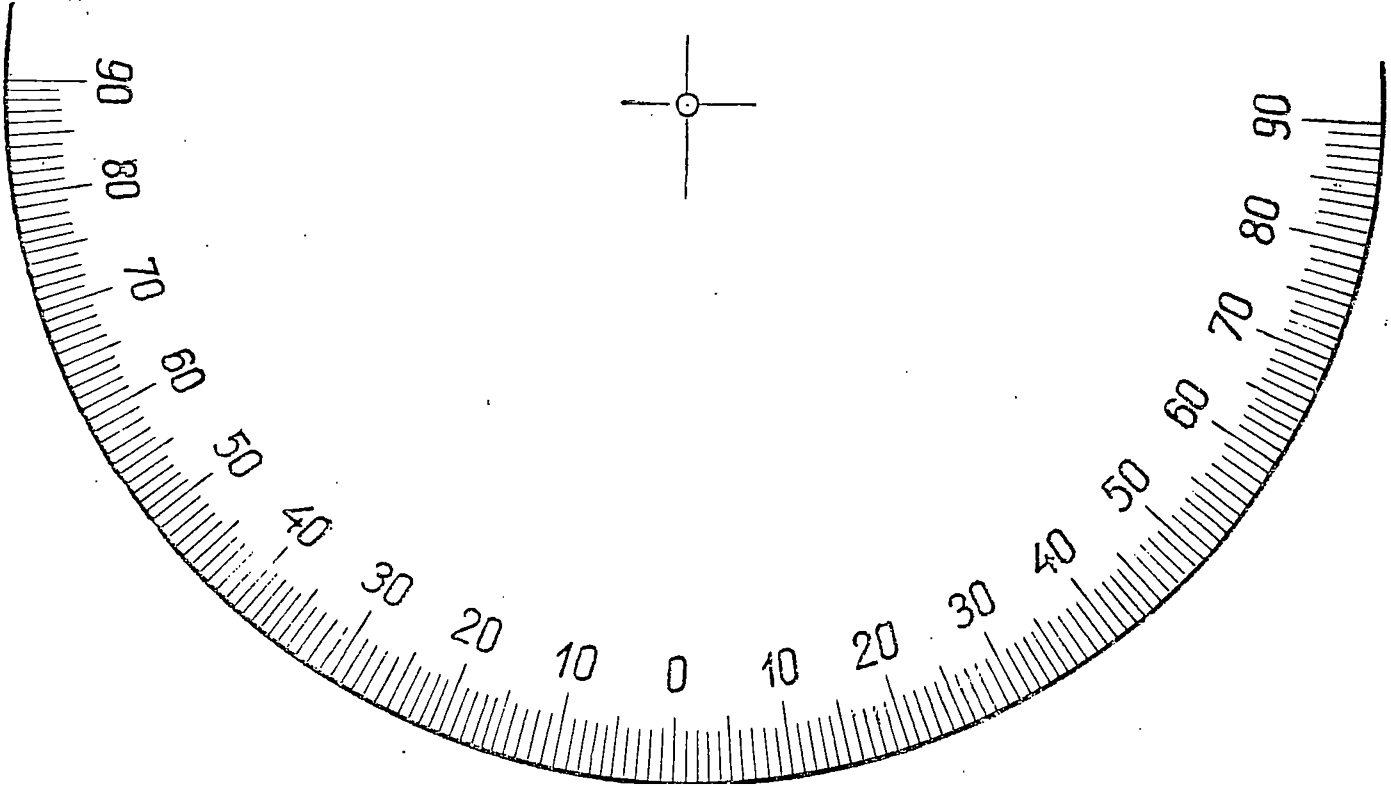
Таблица двузначных логарифмов чисел от 1 до 100

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	00	04	08	11	15	18	20	23	26	28
2	30	32	34	36	38	40	41	43	45	46
3	48	49	51	52	53	54	56	57	58	59
4	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
5	70	71	72	71	73	74	75	76	76	77
6	78	79	79	80	81	81	82	83	83	84
7	85	85	86	86	87	88	88	89	89	90
8	90	91	91	92	92	93	98	94	94	95
9	95	96	96	97	97	98	98	99	99	00

Пример. Найти $0{,}55^{1,5}$. По таблице $\lg 0{,}55 = \bar{1}{,}74$, следовательно, $\lg 0{,}55^{1,5} = 1{,}5 \times \bar{1}{,}74 = \bar{1}{,}61$. Мантиссе 61 соответствует по таблице число 41. Искомое число ~ 0,41.

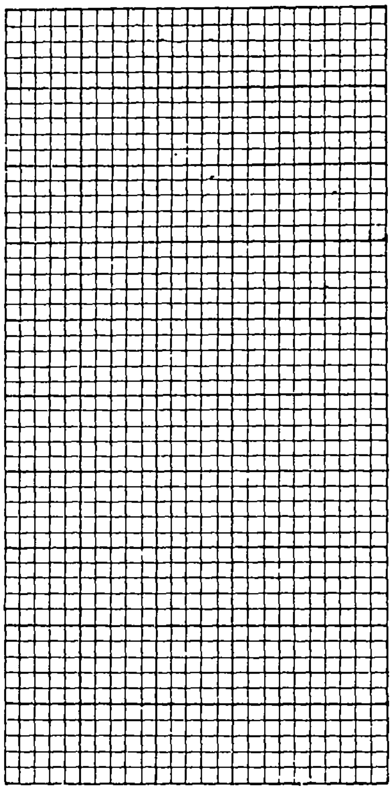
Приложение 13

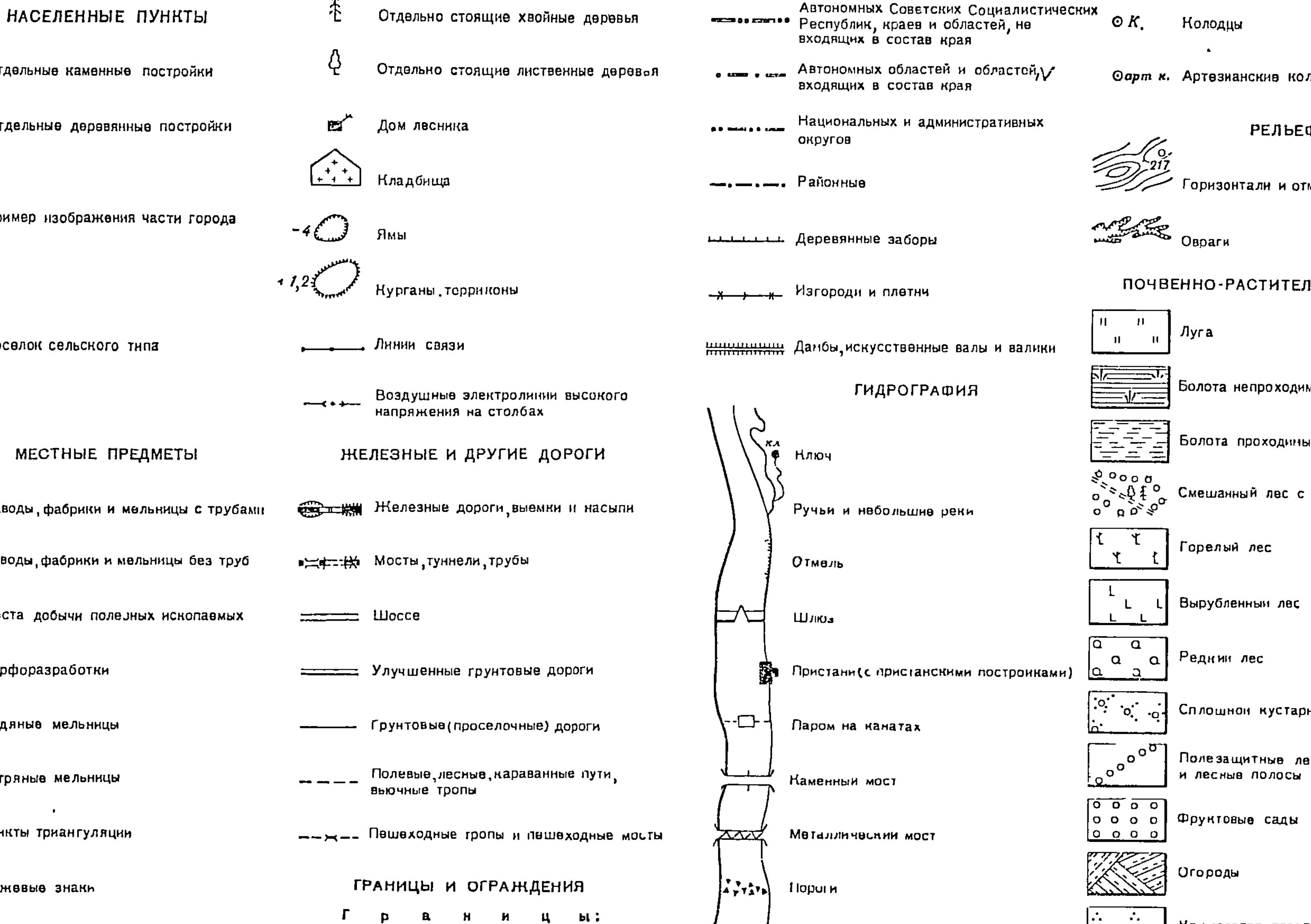
ШКАЛА ДЛЯ НИВЕЛИРА-ЭКЛИМЕТРА



Приложение 14

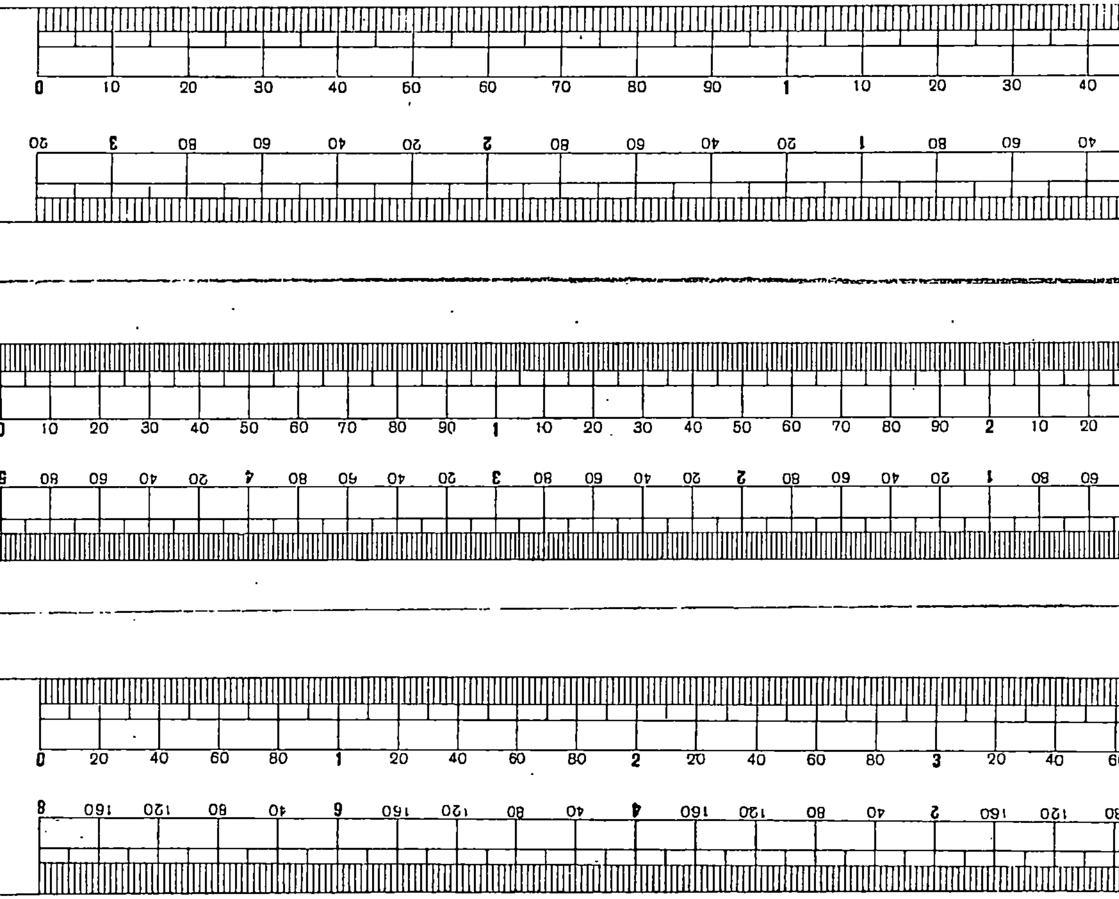
ПАЛЕТКА

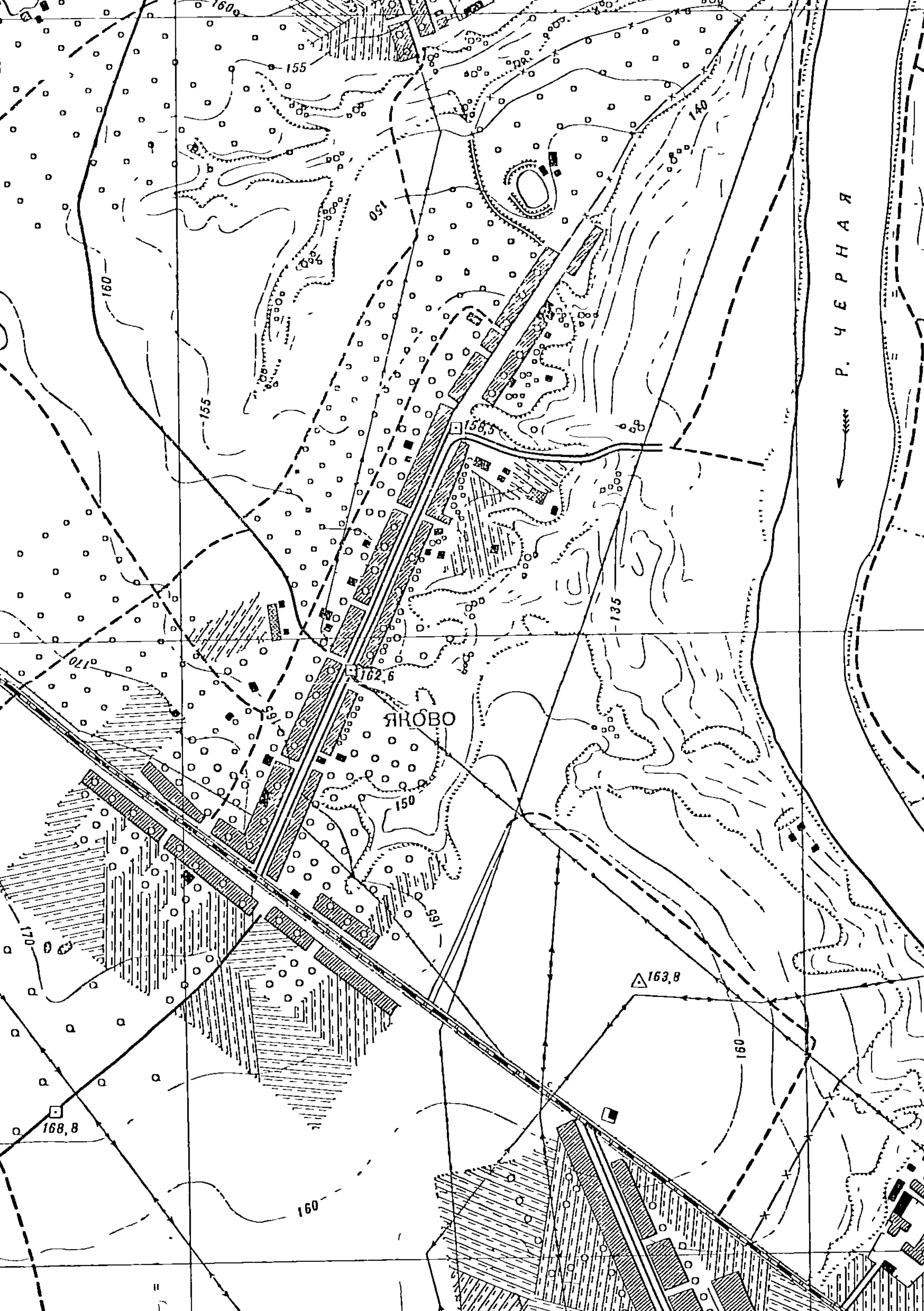



НАСЕЛЕННЫЕ ПУНКТЫ
тдельные каменные постройки
тдельные деревянные постройки
имер изображения части города
селок сельского типа
МЕСТНЫЕ ПРЕДМЕТЫ
воды, фабрики и мельницы с трубами
воды, фабрики и мельницы без труб
ста добычи полезных ископаемых
рфоразработки
дяные мельницы
тряные мельницы
нкты триангуляции
жевые знаки
Отдельно стоящие хвойные деревья
Отдельно стоящие лиственные деревья
Дом лесника
Кладбища
-4
Ямы
1,2
Курганы, терриконы
Линии связи
Воздушные электролинии высокого напряжения на столбах
ЖЕЛЕЗНЫЕ И ДРУГИЕ ДОРОГИ
Железные дороги, выемки и насыпи
Мосты, туннели, трубы
Шоссе
Улучшенные грунтовые дороги
Грунтовые (проселочные) дороги
Полевые, лесные, караванные пути, вьючные тропы
Пешеходные тропы и пешеходные мосты
ГРАНИЦЫ И ОГРАЖДЕНИЯ
Г р а н и ц ы:
Автономных Советских Социалистических Республик, краев и областей, не входящих в состав края
Автономных областей и областей, входящих в состав края
Национальных и административных округов
Районные
Деревянные заборы
Изгороди и плетни
Дамбы, искусственные валы и валики
ГИДРОГРАФИЯ
кл
Ключ
Ручьи и небольшие реки
Отмель
Шлюз
Пристани (с пристанскими постройками)
Паром на канатах
Каменный мост
Металлический мост
Пороги
К.
Колодцы
арт к.
Артезианские кол
РЕЛЬЕФ
217
Горизонтали и отм
Овраги
ПОЧВЕННО-РАСТИТЕЛ
Луга
Болота непроходим
Болота проходимы
Смешанный лес с
Горелый лес
Вырубленный лес
Редкий лес
Сплошной кустарн
Полезащитные ле
и лесные полосы
Фруктовые сады
Огороды

Прило

МАСШТАБНЫЕ ЛИНЕЙКИ




ЯКОВО
Р. ЧЕРНАЯ
158,5
162,6
163,8
168,8
160
155
150
140
135
170
165