АКАДЕМИЯ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР
Институт общего и политехнического образования

МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ГЕОМЕТРИИ В СТАРШИХ КЛАССАХ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

Под редакцией А. И. Фетисова

ПОСОБИЕ ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

ИЗДАТЕЛЬСТВО • ПРОСВЕЩЕНИЕ • МОСКВА — 1967

предварительно формулируется обычным языком, а потом это же предложение переводится на язык символов, то тем самым дается возможность постепенно овладеть символикой математической логики и привыкнуть к ней.

Необходимо заметить, что автор проверил методику такого изложения путем личного эксперимента, который показал, что учащиеся весьма охотно пользуются символическими записями и довольно легко усваивают их применение в геометрии.

Глава вторая (написана доцентом М. Н. Трубецким) содержит методические указания на решение проблемы использования геометрии в свете задач политехнического обучения. На многочисленных примерах автор показывает, каким путем нужно идти, чтобы наиболее естественным образом, не нарушая структуры курса, показать приложение геометрии к решению различных технических вопросов.

В третьей главе (написана старшим научным сотрудником А. И. Фетисовым) дана попытка разрешить совершенно новую проблему в методике обучения геометрии — проблему систематического использования понятия вектора. Известно, что в современной науке это понятие играет совершенно исключительную роль, и, по-видимому, пришло время, когда это понятие нужно в явном виде ввести в школьный курс. Однако при этом необходимо показать, что введение нового понятия не только не обременит изложения и не приведет к перегрузке, а, наоборот, даст возможность проще и доходчивее изложить ряд разделов геометрии. В этой же главе показано приложение вектора к решению задач координатной геометрии, элементы которой в ближайшее время будут введены в курс геометрии старших классов.

Четвертая глава (написана доцентом Л. М. Лоповок) посвящена очень важному вопросу методики подбора, классификации и способов решения геометрических задач. Известно, что вопрос о наиболее целесообразном подборе упражнений и задач, необходимых как для наилучшего закрепления теоретического материала, так и для подготовки к усвоению новых разделов курса, является весьма сложным и еще не решенным окончательно. Автору удалось найти довольно удачные способы его решения. Основное внимание автор сосредоточил на стереометрических задачах, при решении которых учащиеся испытывают затруднения, связанные и с большой сложностью теоретического материала, и с недостатком пространственных представлений.

В последней, пятой главе (написана ст. научным сотрудником А. И. Фетисовым) изложены вопросы, связанные с задачей измерения геометрических величин. В основу всей теории измерения геометрических величин положено учение о действительном числе, которое позволило сравнительно легко разрешить все вопросы измерения длин, площадей и объемов, не прибегая к теории пределов. Большая общность понятий позволила и здесь значительно сократить объем рассуждений и доказательств и обеспечить единство метода и более высокую степень научной корректности изложения.

Рассматривая книгу в целом, можно сказать, что авторы стремились, с одной стороны, взять в основу привычное содержание школьного курса геометрии, а с другой стороны, внести в это содержание идеи и методы, приближающие этот курс к современному состоянию науки.

ИЗЛОЖЕНИЕ СТЕРЕОМЕТРИИ В СТАРШИХ КЛАССАХ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

Введение

Изложение стереометрии в старших классах школы должно быть направлено на достижение следующих целей:

а) усвоение учащимися системы фактов, дальнейшее изучение геометрических свойств материального мира;

б) повышение логической культуры учащихся;

в) выработка у них пространственного воображения и умение применять свои теоретические знания в практике.

Приведенное ниже изложение геометрической теории в школе предполагает:

а) более четкую систематизацию учебного материала, чем в традиционном преподавании;

б) более высокий уровень строгости, чем в изложении планиметрии;

в) методически целесообразное сочетание моделей и чертежей как вспомогательных средств изложения.

Ввиду того что в стереометрии логический элемент приобретает большее значение, чем в планиметрии, где наглядность чертежа часто заменяет логику, особое внимание уделяется логическому аспекту изложения.

В приведенном ниже изложении наряду с словесными формулировками определений и теорем дается и их краткая запись с широким применением геометрической и логической символики.

Ознакомление учащихся с некоторыми логическими операциями и правилами вывода[1] делает возможным применение логической символики наряду с геометрической для выражения и уточнения определений понятий, формулировок теорем, для краткой записи доказательств.

---

[1] Подробнее с этим можно ознакомиться по книге А. А. Столяр, Логические проблемы преподавания математики, Минск, изд. «Высшая школа», 1965.

Это изложение, разумеется, может быть осуществлено в школьном преподавании и без применения логической символики и логических операций в явном виде. С этой целью во многих случаях приводятся две формы изложения: словесная и символическая. Символическая форма может быть успешно использована в школьном преподавании лишь в том случае, если учитель в достаточной мере знаком с аппаратом математической логики и при ознакомлении с ним учащихся придерживается содержательного, а не формального толкования логических операций.

Часто высказываются возражения против применения в обучении символики, в то время как математика все шире пользуется символическим языком.

Благодаря своей точности и ясности (однозначности смысла каждого символа) символический язык при условии его правильного понимания и применения имеет большое воспитательное воздействие, выходящее за рамки усвоения математических знаний.

По этому, как и по другим важным вопросам преподавания математики, можем найти интересное высказывание у нашего выдающегося математика и педагога А. Я. Хинчина.

Отмечая, что строгая правильность математической символики постепенно становится привычкой учащегося, он говорит, что «такого рода привычка, приобретенная в какой-либо о д н о й сфере мышления, неизбежно приводит к воспитанию и общего стиля мышления учащегося; он начинает точнее выражаться и в устной речи, и в письменном изложении»[1].

Сказанное полностью относится и к логической символике, обладающей всеми качествами математической символики. Если мы будем добиваться не формального оперирования символами, а правильного понимания точного смысла обозначенных ими объектов, а также правильного понимания тех отношений и операций, на которые указывает символ, то применение символики будет иметь большое значение.

Изложение разбито на параграфы и пункты, при этом методические комментарии в большинстве своем выделены в отдельные пункты[2].

Отметим, что ниже приводится изложение не всего курса стереометрии, а лишь отдельных его фрагментов в качестве иллюстрации определенного стиля, отвечающего перечисленным выше целям преподавания стереометрии в школе.

---

[1] А. Я. Хинчин, О воспитательном эффекте уроков математики. Педагогические статьи, М., изд. АПН РСФСР, 1963, стр. 145.

[2] В каждом параграфе применена сплошная нумерация пунктов (**01, 02, 03, ... 09, 10, ...**). Всякие отклонения от основного изложения стереометрии (методические комментарии, разного рода замечания) выделены внутри каждого пункта двумя номерами (**06.1**, где **06** — пункт, **1** — подпункт). Аксиомы имеют два номера (**I.4**): первый — номер группы аксиом — римская цифра, второй — номер аксиомы в данной группе — арабская цифра.

§ 1. Основные понятия и аксиомы

01. Для краткой записи и выяснения точного смысла высказываний о геометрических объектах и отношениях представляется целесообразным упорядочить и дополнить геометрическую символику.

Условимся обозначать:

точки — большими латинскими буквами — A, B, C, ...
прямые — малыми латинскими буквами — a, b, c ...
плоскости — греческими буквами — α, β, γ, ...

Кроме известных из планиметрии символов отношений параллельности, перпендикулярности, равенства, подобия, введем символы для обозначения отношений принадлежности, пересечения совпадения.

Высказывания «точка A принадлежит прямой a», «точка A лежит на прямой a», «прямая a проходит через точку A» надо понимать как выражение одного и того же отношения между точкой A и прямой a, которое мы обозначим символом $\subset$, а эти высказывания запишутся кратко так: $A \subset a$.

Аналогично, $A \subset \alpha$ — символическая запись высказывания «точка A принадлежит плоскости α (или «точка A лежит на плоскости α», или «плоскость α проходит через точку A»).

Отношение пересечения обозначим символом $\times$. Тогда высказывания «прямые a и b пересекаются», «прямая a и плоскость α пересекаются», «плоскости α и β пересекаются» запишутся соответственно так: $a \times b$, $a \times \alpha$, $\alpha \times \beta$.

Отношение совпадения обозначим символом «$\equiv$». Тогда высказывания «точки A и B совпадают», «прямые a и b совпадают», «плоскости α и β совпадают» запишутся соответственно так:

$$A \equiv B,\ a \equiv b,\ \alpha \equiv \beta.$$

Точки (прямые, плоскости), обозначенные различными буквами, будем считать различными, если только не утверждается, что какие-нибудь из них совпадают.

Кроме геометрической, мы применим и логическую символику для обозначения известных логических операций

Перечислим эти символы.

01. 1. Символом $\overline{X}$ обозначим отрицание высказывания X. Например, $\overline{a \parallel b}$ — отрицание высказывания $a \parallel b$, $\overline{A \subset \alpha}$ — отрицание высказывания $A \subset \alpha$.

2. Символом «$X \vee Y$» обозначим дизъюнкцию высказываний X и Y, т. е. знак «$\vee$» заменяет союз «или» в соединительном смысле. Высказывание «$(A \subset a) \vee (A \subset b)$» истинно, если истинно хотя бы одно из высказываний: $A \subset a$ или $A \subset b$.

3. Символом X & Y обозначим конъюнкцию высказываний X и

Y, т. е. знак & заменяет союз «и». Высказывание $(A \subset a)\&(A \subset b)$ истинно, если истинны оба высказывания: $A \subset a$ и $A \subset b$.

4. Символом $X \Rightarrow Y$ обозначим сложное высказывание «если X, то Y», понимаемое в смысле «из X следует Y». Оно удовлетворяет общему определению импликации, так как оно ложно в том и только в том случае, когда X истинно, а Y ложно.

5. Символами (A), (a), (α) обозначим выражения «для всякой точки A», «для всякой прямой a», «для всякой плоскости α» соответственно. Например, $(a)\ (\alpha)\ [(a \subset \alpha) \vee \overline{(a \subset \alpha)}]$ — символическое выражение высказывания «для всякой прямой a и плоскости α a принадлежит α или a не принадлежит α».

6. Символами $(\exists A)$, $(\exists a)$, $(\exists \alpha)$ обозначим соответственно выражения «существует точка A такая, что...», «существует прямая a такая, что...», «существует плоскость α такая, что ...». Например, $(\alpha)\ (\exists A)\ (A \subset \alpha)$ — символическое выражение высказывания «для всякой плоскости α существует точка A такая, что A принадлежит α».

02. Основные простейшие элементы, из которых геометрия строит свои образы, суть т о ч к и, п р я м ы е и п л о с к о с т и. Эти понятия принимаются за первоначальные, и поэтому они логически неопределяемы через другие, точно так же как аксиомы логически невыводимы из других предложений.

03. Неизбежность принятия некоторых понятий без определения можно разъяснить учащимся на конкретном материале, известном им из планиметрии.

Так как при определении нового понятия можно пользоваться только ранее известными понятиями, которые в свою очередь определяются с помощью ранее известных понятий, то должны существовать некоторые первоначальные понятия, которые не предшествуют никаким другим понятиям.

Для иллюстрации можно построить, например, такую последовательность определений:

квадрат — ромб с прямым углом;

ромб — параллелограмм с равными сторонами;

параллелограмм — четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны;

четырехугольник — многоугольник с четырьмя сторонами;

многоугольник — фигура, ограниченная замкнутой ломаной линией;

фигура — *множество точек и прямых*, определенным образом расположенных на плоскости.

На этом примере показываем, что процесс формально-логического определения есть процесс сведения одного понятия ко второму, второго к третьему и т. д. Естественно, что этот процесс не может продолжаться бесконечно. Поэтому должны быть некоторые первоначальные понятия, которые именно потому, что они первоначальные, неопределяемы через другие понятия. В нашем примере мы дошли до таких понятий (множество, точка, прямая), которые принимаются за первоначальные и поэтому не определяются.

В стереометрии к первоначальным отнесено и понятие «плоскость». Эти *первоначальные понятия и называются основными.*

04. Так же как мы не в состоянии изобразить прямую, ввиду того что она не имеет границ (бесконечна), и мы всегда изображаем конечный участок прямой (отрезок), мы не в состоянии изобразить плоскость, ввиду того что она не имеет границ, и мы изображаем всегда лишь какой-нибудь ограниченный участок плоскости.

В учебной литературе встречаются изображения куска плоскости прямоугольной формы в виде параллелограмма (рис. 1, *а*), или же куска плоскости, ограниченного двумя параллельными краями и двумя произвольными обрывами (рис. 1, *б*), или же куска плоскости произвольной формы в виде «лужи» (рис. 1, *в*).

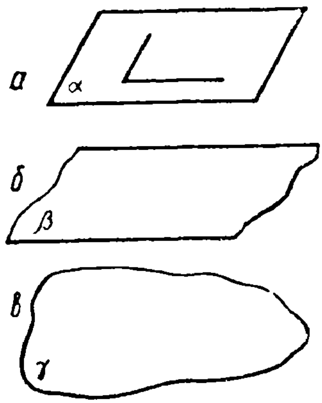


Рис. 1

Последние два изображения куска плоскости (рис. 1, *б*, *в*) предпочтительны, ибо не связывают нас ни с какими условиями при изображении фигур, расположенных в изображенной плоскости. Если пользоваться прямоугольным куском плоскости, учащиеся часто отождествляют плоскость с прямоугольником и говорят: «Проведем прямую, параллельную «краю» плоскости».

05. Перед тем как сформулировать пространственные аксиомы принадлежности, выражающие свойства отношения принадлежности точек, прямых и плоскостей, необходимо повторить аксиоматику планиметрии.

Для дальнейшего достаточно повторить аксиомы принадлежности, аксиомы порядка и аксиому параллельности.

Общеизвестно, что применяемая в школьном курсе планиметрии аксиоматика не обладает свойством минимальности. Кроме того, из педагогических соображений некоторые аксиомы даже не формулируются (аксиомы движения, или конгруэнтности, 2-я аксиома непрерывности), т. е. применяемая аксиоматика не является полной, и многие теоремы не доказываются (например, никто не станет доказывать в школе, что среди трех точек прямой только одна лежит между двумя другими).

Однако этими невысказанными предложениями (аксиомами и теоремами) мы пользуемся как интуитивно ясными в процессе дальнейшего развертывания теории, отчего наши школьные доказательства оказываются на весьма низком уровне строгости.

Изложить стереометрию на более высоком уровне строгости означает, в частности, что в процессе доказательства нужно меньше ссылаться на интуитивно ясные, но не доказанные ранее или не сформулированные даже ранее предложения стереометрии, как мы это делали при изложении планиметрии. (Полное исключение интуиции и на этом этапе обучения невозможно.) Если же будем вынуждены принять без доказательства какое-нибудь предложение, то не следует это скрывать от учащихся.

06. Принимаем следующие аксиомы принадлежности (некоторые из них уже знакомы учащимся из планиметрии, мы их здесь повторяем и уточняем).

> **I. 1.** *Существует одна и только одна прямая, проходящая через две произвольные точки.*

06. 1. Нетрудно заметить, что эта аксиома состоит из конъюнкции двух предложений: $(A, B)\ (\exists\ a)\ (A, B \subset a)$[1] «для любых двух точек A и B существует прямая a такая, что A и B принадлежат ей» и $(A, B)\ (\overline{\exists\ a, b})\ [(A, B \subset a)\ \&\ (A, B \subset b)\ \&\ \overline{a \equiv b}]$ «для любых двух точек A и B не существует таких двух различных прямых a и b, что точки A и B принадлежат им».

Первое из этих предложений выражает существование, второе — единственность прямой, проходящей через любые две точки.

Эту аксиому можно записать символически еще и следующим образом:

$$(A,B)\,(\exists a)\,(A,B\subset a)\ \&\ (b)\,[(A,B\subset b) \Longrightarrow (b \equiv a)].$$

В этой форме единственность выражается импликацией: «всякая прямая b, если точки A и B принадлежат ей, совпадает с прямой a».

Аксиома **I. 1** дает нам возможность обозначить символом AB прямую, проходящую через точки A и B, так как вследствие этой аксиомы такая прямая существует и единственна.

> **I. 2.** *На любой прямой имеется сколько угодно точек. Существуют по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой.*

06. 2. Эта аксиома содержит в первой своей части лишнее требование. Как известно, достаточно постулировать существование двух точек на каждой прямой, и в дальнейшем уже доказывается (после введения аксиом порядка), что их бесконечное множество. Однако вряд ли в школе целесообразно принимать такую неочевидную аксиому и доказывать такие очевидные теоремы.

Точный смысл второй части аксиомы состоит в том, что существуют по крайней мере три точки такие, что «не существует прямой, которой все три точки принадлежат» или «любая прямая не проходит через эти три точки».

---

[1] $A,\ B \subset a$ — сокращенное обозначение конъюнкции $(A \subset a)\ \&\ (B \subset a)$.

$$(\exists A)(\exists B)(\exists C)\overline{(\exists a)}[A,B,C\subset a], \text{ или } (\exists A)(\exists B)(\exists C)(a)\overline{[A,B,C\subset a]}.$$

Если три точки A, B и C не лежат на одной прямой, то точка C не лежит на прямой AB, точка B не лежит на прямой AC и точка A не лежит на прямой BC, иначе, если, например, $C \subset AB$, то $A, B, C \subset AB$, что противоречит условию.

Имеет место и обратное предложение, например:

$$\overline{C\subset AB} \Longrightarrow \overline{(\exists a)}[A,B,C \subset a][1].$$

Действительно, $\overline{C \subset AB \ \& (\exists a)\ (A,\ B,\ C \subset a) \Longrightarrow a \equiv AB}$, но по I. 1 $(A,\ B \subset a) \Longrightarrow (a \equiv AB)$.

Мы пришли к противоречию, следовательно, хотя бы один из членов конъюнкции $\overline{C \subset AB}\ \&\ (\exists a)\ (A,\ B,\ C \subset a)$ ложный и так как $\overline{C \subset AB}$ — посылка, т. е. истинна, то имеет место $\overline{(\exists a)}\ [A,\ B,\ C \subset a]$.

Это доказательство без чертежа может даваться учащимся как пример чисто логического вывода из аксиом. Чертеж, иллюстрирующий рассматриваемую геометрическую ситуацию, настолько убедителен своей наглядностью, что он этим самым не помогает в доказательстве.

Таким образом, вследствие доказанного высказывание $\overline{(\exists a)}[A,\ B,\ C \subset a]$ можно заменить равносильным ему высказыванием $\overline{C \subset AB}$ (или $\overline{B \subset AC}$, или $\overline{A \subset BC}$).

Разумеется, такой углубленный логический анализ предложений и связи между ними не может проводиться в школьной практике во всех возможных случаях.

Мы приводим здесь и дальше подобный анализ для использования его по необходимости.

Применение логической символики раскрывает большие возможности в этом отношении.

К аксиомам I.1 и I. 2 присоединяем новые аксиомы принадлежности.

> **I. 3.** *Существует одна и только одна плоскость, проходящая через три точки, не принадлежащие одной прямой*

Об. 3. Эта аксиома состоит из конъюнкции двух предложений, одно из которых выражает существование, а другое — единственность плоскости, проходящей через любые три точки, не лежащие на одной прямой (такие три точки существуют вследствие аксиомы **I. 2**):

$$(A)\,(B)\,(C)\,[\overline{C \subset AB} \Longrightarrow (\exists\alpha)\,(A,B,C \subset \alpha)]\ \&\ (\beta)\,[(A,B,C \subset \beta) \Longrightarrow (\beta \equiv \alpha)]$$

---

[1] Если точка C не принадлежит прямой AB, то не существует такой прямой a, что все три точки A, B, C принадлежат ей.

Аксиома I. 3 дает нам возможность обозначить символом ABC плоскость, проходящую через точки A, B и C, не лежащие на одной прямой, так как вследствие этой аксиомы такая плоскость существует и единственна.

I. 4. *Если две точки прямой принадлежат плоскости, то и прямая принадлежит этой плоскости.*

$$(A,B)(\alpha)[(A \subset \alpha) \& (B \subset \alpha) \Longrightarrow (AB \subset \alpha)].$$

I. 5. *Если две плоскости*[1] *имеют общую точку, то через эту точку проходит единственная прямая, являющаяся геометрическим местом точек, общих для обеих плоскостей.*

06. 4. Эта аксиома содержит слишком сильное требование. Достаточно постулировать лишь существование второй общей точки. Однако, из педагогических соображений, целесообразно принять такую избыточную аксиому.

Структура этой аксиомы сложнее, чем предыдущих, что наглядно усматривается из ее точного символического выражения:

$$(\alpha)(\beta)[(\exists A)(A \subset \alpha,\beta) \Longrightarrow (\exists a)(A \subset a) \& (B)((B \subset a) \Longrightarrow (B \subset \alpha,\beta)) \&$$
$$\& (C)((C \subset \alpha,\beta) \Longrightarrow (C \subset a))],$$

в котором детально раскрыто применяющееся в словесной формулировке аксиомы понятие геометрического места точек. («Если существует общая точка двух плоскостей, то существует прямая, проходящая через эту точку, такая, что всякая точка ее является общей точкой двух плоскостей и всякая общая точка этих плоскостей принадлежит этой прямой»).

I. 6. *Существуют по крайней мере четыре точки, не принадлежащие одной плоскости*:

$$(\exists A)(\exists B)(\exists C)(\exists D)(\overline{\exists \alpha})(A,B,C,D \subset \alpha).$$

07. Из принятых аксиом принадлежности (**I. 4 — I. 6**) непосредственно вытекают некоторые теоремы, также выражающие свойства отношения принадлежности.

Перед доказательством теорем целесообразно подвести учащихся к обнаруживанию этих теорем с помощью модели или чертежа, а потом показать, что они могут быть выведены из аксиом чисто логическим путем даже без использования чертежа.

Проведение некоторых доказательств без чертежа, после обнаруживания доказываемого предложения на модели или на чертеже или же с последующей иллюстрацией этого предложения на чертеже, разумеется в достаточно простых случаях, позволяет показать примеры чисто логических рассуждений, без всяких ссылок на

---

[1] Под выражениями «две точки», «две прямые», «две плоскости» имеем в виду «две различные точки (прямые, плоскости)».

наглядность чертежа, и этим самым уточняет вспомогательную роль чертежа в логическом доказательстве геометрической теоремы.

Приведем пример такого доказательства в словесной и символической форме.

07. 1. Теорема. *Существует единственная плоскость, проходящая через произвольную прямую и точку вне ее.*

$$(a)(C)\{\overline{C \subset a} \Longrightarrow (\exists\alpha)(C,a \subset \alpha) \& (\beta)[(C,a \subset \beta) \Longrightarrow (\beta \equiv \alpha)]\}.$$

При иллюстрации теоремы на модели «через одну прямую можно провести сколько угодно плоскостей (страницы книги, различные положения двери и т. п.)» естественно возникает вопрос: если заданы прямая и точка вне ее, сколько плоскостей пройдет через них? Учащиеся легко отвечают на этот вопрос, формулируя указанную выше теорему.

Приведем теперь доказательство этой теоремы.

Пусть дана прямая a и точка C вне ее. Так как по аксиоме **I. 2** на всякой прямой существует бесконечное множество точек, возьмем на прямой a две точки A и B. Так как точка C не принадлежит прямой AB, то точки A, B и C не лежат на одной прямой (**06. 2**) и согласно аксиоме **I. 3** существует единственная плоскость α, проходящая через эти точки, и так как точки A и B прямой a принадлежат этой плоскости, то согласно **I. 4** прямая a принадлежит этой плоскости. Всякая плоскость β, проходящая через a и C, пройдет и через A, B и C и по **I. 3** совпадет с плоскостью α. Следовательно, плоскость α — единственная плоскость, проходящая через прямую a и точку C. Приведенное доказательство символически запишется следующим образом:

$$(a)(C)[\overline{C \subset a} \Longrightarrow (\exists\alpha)(C,a \subset \alpha) \& (\beta)((C,a \subset \beta) \Longrightarrow (\beta \equiv \alpha))]$$

1. $(\exists A)(\exists B)(A,B \subset a)$; (I. 2)

2. $\overline{C \subset a} \& (A,B, \subset a) \Longrightarrow \overline{C \subset AB}$; (06. 2)

3. $\overline{C \subset AB} \Longrightarrow (\exists\alpha)[(A,B,C \subset \alpha) \& (\beta)((A,B,C \subset \beta) \Longrightarrow (\beta = \alpha))]$; (I.3)

4. $\overline{C \subset AB} \Longrightarrow (\exists\alpha)[(a,C \subset \alpha) \& (\beta)((a,C \subset \beta) \Longrightarrow (\beta \equiv \alpha))]$. (I. 4)

07. 2. После доказательства следующих двух теорем:

$$(a)(b)[(a \times b) \Longrightarrow (\exists\alpha)(a,b \subset \alpha) \& (\beta)((a,b \subset \beta) \Longrightarrow (\beta \equiv \alpha))];$$

$$(a)(b)[(a \parallel b) \Longrightarrow (\exists\alpha)(a,b \subset \alpha) \& (\beta)((a,b) \subset \beta) \Longrightarrow (\beta \equiv \alpha))].$$

приходим к выводу: положение плоскости в пространстве однозначно определяется:

1) тремя точками, не лежащими на одной прямой;
2) прямой и точкой вне ее;
3) двумя пересекающимися прямыми и
4) двумя параллельными прямыми.

Все эти случаи определения положения плоскости иллюстрируются на модели.

08. В планиметрии в связи с изучением геометрических преобразований учащиеся знакомятся с аксиомами порядка.

Наиболее наглядным отношением порядка точек на прямой является отношение, обозначаемое термином «предшествовать».

Мы рассматриваем прямую как упорядоченное множество точек, т. е. считаем, что относительно любых двух ее различных точек A и B известно, что одна из них предшествует другой. Предложение «точка A предшествует точке B» условимся записывать так: $A \prec B$.

Как всякое отношение порядка, отношение «предшествует» асимметрично и транзитивно. Оно характеризуется следующими аксиомами:

II. 1. *Для любых двух точек A и B имеет место $A \prec B$ или $B \prec A$.*

08. 1. В приведенной формулировке аксиомы **II. 1** подразумевается, что точки A и B различны. Если это выразить в явном виде, получим следующую формулировку этой аксиомы:

$$(A)\,(B)\,[\overline{A \equiv B} \Longrightarrow (A \prec B) \vee (B \prec A)].$$

II. 2. *Если A предшествует B, то B не предшествует A (асимметричность):*

$$(A)\,(B)\,[(A \prec B) \Longrightarrow \overline{B \prec A}].$$

II. 3. *Если A предшествует B и B предшествует C, то A предшествует C (транзитивность):*

$$(A)\,(B)\,(C)\,[(A \prec B) \& (B \prec C) \Longrightarrow (A \prec C)].$$

II. 4. *Для любых двух различных точек A и B существует на прямой AB точка C, такая, что A предшествует C и C предшествует B или B предшествует C и C предшествует A.*

08. 2. Конъюнкцию $(A \prec C)$ & $(C \prec B)$ будем писать сокращенно $A \prec C \prec B$. Тогда аксиома **II. 4** запишется символически следующим образом:

$$(A)\,(B)\,[\overline{A \equiv B} \Longrightarrow (\exists C)\,(C \subset AB) \,\&\, ((A \prec C \prec B) \vee (B \prec C \prec A))].$$

Если точка C удовлетворяет одному из соотношений $A \prec C \prec B$ или $B \prec C \prec A$, мы говорим, что «точка C лежит между точками A и B».

08. 3. Аксиомы **II. 1 — 4** характеризуют порядок точек на прямой. Порядок точек на плоскости характеризуется следующей аксиомой:

II. 5. *Всякая прямая a плоскости разбивает множество всех точек этой плоскости, не принадлежащих этой прямой, на два класса, обладающие следующим свойством: если две точки принадлежат различным классам, то отрезок, определяемый этими точками, пересекается прямой a, если же две точки принадлежат одному и тому же классу, то отрезок, определяемый ими, не пересекается прямой a.*

Два класса точек, определяемых прямой a на плоскости, называются полуплоскостями с ребром a.

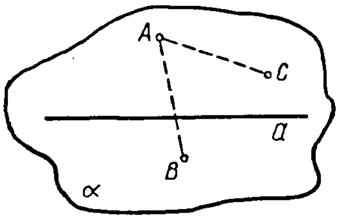


Рис. 2

О двух точках, принадлежащих одной и той же из этих полуплоскостей, говорят, что они «лежат по одну сторону от прямой a». О двух точках, принадлежащих различным полуплоскостям, говорят, что они «лежат по разные стороны от прямой a».

08. 4. Здесь уместно разъяснить, что значит какое-нибудь множество, например множество точек плоскости, не принадлежащих прямой a этой плоскости, разделено на два класса.

Это значит, что: 1) каждая точка данного множества принадлежит одному и только одному из этих классов и 2) каждый класс содержит точки данного множества (иначе, например, если один из классов был бы пуст, мы не получили бы разбиение на два класса).

На рисунке 2 видно, что разбиение, о котором идет речь в аксиоме **II. 5**, удовлетворяет этим условиям.

09. В качестве задачи на доказательство целесообразно рассмотреть с учащимися известное предложение Паша, эквивалентное предложению **II. 5.**

Теорема. *Пусть A, B, C — три точки, не лежащие на одной прямой. Любая прямая a плоскости ABC, не проходящая ни через одну из точек A, B, C, либо не пересекает ни один из отрезков AB, BC, AC, либо пересекает два и только два из этих отрезков.*

(Необходимо подчеркивать, что речь идет здесь об отрезках AB, BC, AC, а не об одноименных прямых.)

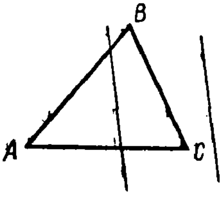


Рис. 3

На рисунке 3 истинность этого предложения очевидна.

Приведем логическое доказательство, совершенно не используя чертеж (разумеется, это доказательство может быть проведено и с использованием чертежа).

Прямая a либо не имеет общей точки ни с одним из отрезков AB, BC, AC, либо имеет общую точку с одним из этих отрезков. В первом случае теорема доказана. Докажем ее во втором случае, т. е. когда прямая a имеет общую точку с одним из отрезков AB, BC, AC.

Пусть, например, прямая a пересекает отрезок AB. Тогда согласно аксиоме II. 5 точки A и B принадлежат различным полуплоскостям, определенным прямой a на плоскости ABC. Так как по той же аксиоме (II. 5) точка C принадлежит либо той полуплоскости, в которой лежит точка A, либо другой, в которой лежит точка B, и только одной из них, то прямая a пересекает еще либо отрезок BC, либо отрезок AC и только один из них.

Таким образом, прямая a либо не пересекает ни один из отрезков AB, BC, AC, либо пересекает два и только два из них.

Теорема доказана.

09. 1. В этом доказательстве мы ссылались, в частности, на аксиому **II. 5.** Если утверждение, составляющее содержание доказанной теоремы, принять за аксиому, то предложение **II. 5** может быть доказано как теорема. Это доказательство может быть проведено на занятии математического кружка.

09. 2. В пространстве имеет место предложение, аналогичное аксиоме **II. 5**: *всякая плоскость α делит множество всех точек пространства, ей не принадлежащих, на два класса так, что если две точки принадлежат одному и тому же классу, то определяемый ими отрезок не пересекается этой плоскостью.*

Эти два класса точек называются полупространствами с общей гранью α.

Хотя это предложение является теоремой, оно может приниматься без доказательства, но об этом надо сказать учащимся. Иллюстрация этого предложения на модели весьма убедительна.

На занятии математического кружка можно доказать это предложение. Приведем доказательство (рис. 4).

Возьмем произвольную точку A вне плоскости α $\overline{(A \subset \alpha)}$ и произвольную точку O на плоскости α $(O \subset \alpha)$.

На прямой AO возьмем произвольную точку B так, чтобы точка O лежала между A и B. Так как отрезок AB пересекается плоскостью α, то, если теорема имеет место, точки A и B принадлежат различным классам точек, определяемым плоскостью α.

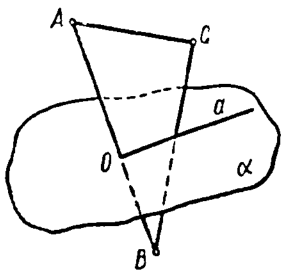


Рис. 4

Назовем класс точек, которому принадлежит точка A, для краткости классом $\{A\}$, а другой класс точек, которому принадлежит точка B, — классом $\{B\}$.

Теперь докажем, что произвольная точка C пространства, не принадлежащая плоскости α, принадлежит либо классу $\{A\}$, либо классу $\{B\}$, и только одному из них.

Различаем два случая: 1) $C \subset AB$ и 2) $\overline{C \subset AB}$.

1) Если $C \subset AB$, то C лежит на полупрямой OA или на полупрямой OB, и только на одной из этих полупрямых. В первом случае $C \in \{A\}$, во втором — $C \in \{B\}$, и так как эти случаи несовместны, то точка C принадлежит только одному из этих классов.

В первом случае $(C \in \{A\})\,\&\,\overline{C \in \{B\}}$,

во втором случае $(C \in \{B\})\,\&\,\overline{C \in \{A\}}$.

Следовательно, $(C \in \{A\})\,\&\,\overline{C \in \{B\}} \vee \overline{C \in \{A\}}\,\&\,(C \in \{B\})$.

2) Если $\overline{C \subset AB}$, то точки A, B, C определяют плоскость ABC, и так как $O \subset \alpha$ и $(O \subset AB)\ \&\ (AB \subset ABC) \Longrightarrow (O \subset ABC)$, то по **I. 5** через точку O проходит единственная прямая, являющаяся г.м.т.[1], общих для обеих плоскостей. Пусть это прямая a.

По **II. 5** прямая a определяет на плоскости ABC 2 полуплоскости. Так как $(a \subset \alpha)\ \&\ \overline{C \subset \alpha} \Longrightarrow \overline{C \subset a}$, то C лежит в одной и только в одной из этих полуплоскостей. Если она принадлежит той полуплоскости, в которой лежит точка A, то она принадлежит классу $\{A\}$ (так как в этом случае отрезок AC не пересекается прямой a, а следовательно, не пересекается и плоскостью α, ибо a — г.м.т., общих для плоскостей α и ABC), если же она принадлежит другой полуплоскости, в которой лежит точка B, то она принадлежит классу $\{B\}$. Так как эти случаи несовместимы, то C принадлежит только одному из этих классов. Теорема доказана.

10. Несмотря на то что в нашем распоряжении пока небольшой запас предложений, рассмотренных в этом параграфе, мы уже можем с их помощью решать ряд интересных з а д а ч:

1. *Определить г.м.т., принадлежащих прямым, пересекающим данную прямую a и проходящим через данную точку C вне ее.*

2. *Определить г.м.т., принадлежащих прямым, пересекающим данные две пересекающиеся прямые и не проходящим через их точку пересечения.*

3. *Определить г.м.т., принадлежащих прямым, пересекающим две параллельные прямые.*

4. *Доказать, что если n прямых расположены так, что всякие две пересекаются и никакие три не проходят через одну точку, то они все принадлежат одной плоскости.*

5. *На сколько областей разбивают плоскость n прямых, расположенных так, как в предыдущей задаче* (4)?

6. *На сколько областей разбивают пространство n плоскостей, расположенных так, что всякие две пересекаются и никакие три не проходят через одну и ту же прямую.*

---

[1] Г.м.т. — геометрическое место точек.

Опишем один из возможных способов решения задачи 5 (аналогично решается и задача 6).

Решим задачу индуктивным способом.

Обозначим число областей, на которое n прямых разбивают плоскость, через Q_n. Тогда $Q_1 = 2$, так как одна прямая разбивает плоскость на две полуплоскости. Если пересечь эту прямую второй прямой, то эта вторая прямая разобьет каждую из полуплоскостей на две области и, следовательно, $Q_2 = 4 = Q_1 + 2$.

Если третья прямая пересечет каждую из уже имеющихся двух прямых, то она пройдет через три области, разбивая каждую из них на две области, т. е. $Q_3 = Q_2 + 3$.

Допустим, что имеются $(n - 1)$ прямых, расположенных так, как указано в задаче. Проведем новую прямую так, чтобы она пересекала каждую из данных $(n - 1)$ прямых и не проходила ни через одну из точек их пересечения, тогда она пройдет через n областей, разбивая каждую из них на две области, т. е. число областей увеличится на n. Мы получили

$$Q_n = Q_{n-1} + n.$$

Таким образом, мы выразили число областей, образуемых на плоскости n прямыми, как функцию от числа прямых следующим образом:

$$Q_n = \begin{cases} 2, \text{ если } n = 1, \\ Q_{n-1} + n, \text{ если } n > 1. \end{cases}$$

Задача решена, так как для любого n мы можем определить Q_n с помощью данной функции, являющейся примером рекурсивной функции (от латинского recurso — бегу назад, возвращаюсь так как для определения по этой функции необходимо «возвращаться» от Q_n к Q_1).

Определим, для примера, Q_5:

$$Q_5 = Q_4 + 5 = Q_3 + 4 + 5 = Q_2 + 3 + 4 + 5 = Q_1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 2 + 2 + 3 + 4 + 5 = 16.$$

Можно, разумеется, Q_n выразить с помощью формулы, содержащей только n; сложим почленно равенства:

$$\begin{aligned} &Q_1 = 2 \\ &Q_2 = Q_1 + 2 \\ &Q_3 = Q_2 + 3 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &Q_{n-1} = Q_{n-2} + (n - 1) \\ &Q_n = Q_{n-1} + n \\ \hline &Q_n = 2 + 2 + 3 + \ldots + (n - 1) + n = 1 + \frac{n(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

Мы получим аналитическое выражение для Q_n:

$$Q_n = 1 + \frac{n(n+1)}{2}.$$

§ 2. Параллельность в пространстве

Параллельность геометрических элементов в пространстве рассмотрим в следующем порядке: A) параллельность двух прямых, B) параллельность прямой и плоскости, C) параллельность двух плоскостей.

A. Параллельность двух прямых

01. Прежде всего уточним определение параллельных прямых, известное из планиметрии.

Две прямые называются **параллельными**, если они лежат в одной плоскости и не имеют общей точки.

Целесообразно разъяснить точный смысл двух признаков, входящих в определение параллельности прямых.

Обычно, показывая учащимся две параллельные прямые в пространстве (две палочки), если спросить их, лежат ли эти прямые в одной плоскости, учащиеся отвечают отрицательно, так как не видят плоскости (материально реализованной).

Выражение «прямые a и b лежат в одной плоскости» надо понимать в смысле «существует плоскость, в которой лежат прямые a и b»:

$$(\exists\alpha)\,(a,b\subset\alpha).$$

Выражение «прямые a и b не имеют общей точки» надо понимать в смысле «не существует точки, принадлежащей прямой a и прямой b».

$$\overline{(\exists A)}\,(A\subset a,b).$$

Так как по определению прямые a и b параллельны тогда и только тогда, когда имеют место оба признака, то это определение может быть символически записано следующим образом:

$$(a\parallel b)\overset{Df}{\sim}(\exists\alpha)\,(a,b\subset\alpha)\,\&\,\overline{(\exists A)}\,(A\subset a,b),$$

Знак $\overset{Df}{\sim}$ читается так: «по определению означает...» и имеет такой же смысл, как и знак «$\sim$» логической равносильности, только буквы Df (от латинского Definitio — определение) указывают, что эта равносильность не подлежит доказательству, а установлено определением.

Каждый из двух признаков, входящих в определение параллельности, является необходимым условием параллельности

$$[(a\parallel b)\Longrightarrow(\exists\alpha)\,(a,b\subset\alpha)]\,\&\,[(a\parallel b)\Longrightarrow\overline{(\exists A)}\,(A\subset a,b)],$$

и только вместе (их конъюнкция) составляют достаточное условие:

$$(\exists\alpha)\,(a,b\subset\alpha)\,\&\,\overline{(\exists A)}\,(A\subset a,b)\Longrightarrow(a\parallel b).$$

На вопрос: «В каком случае прямые a и b непараллельны?» — часто следует неполный ответ: «Прямые непараллельны, если имеют общую точку».

Эта ошибка допускается из-за непонимания логической структуры определения параллельности. Так как параллельность определяется двумя признаками (их конъюнкцией), то непараллельность имеет место, когда отсутствует хотя бы один из этих признаков, т. е. две прямые непараллельны, если не существует плоскости, которой принадлежат эти прямые, или же если они имеют общую точку.

01. 1. Здесь применяется правило отрицания конъюнкции: отрицание конъюнкции двух высказываний равносильно дизъюнкции отрицаний этих высказываний:

$$\overline{a \parallel b} \sim \overline{(\exists\alpha)(a,b \subset \alpha) \,\&\, \overline{(\exists A)}(A \subset a,b)};$$

$$\overline{a \parallel b} \sim \overline{(\exists\alpha)}(a,b \subset \alpha) \vee (\exists A)(A \subset a,b).$$

01. 2. В учебной и научной литературе встречается и другая трактовка отношения параллельности (двух прямых, прямой и плоскости, двух плоскостей)[1]. Согласно этой трактовке совпадение элементов рассматривается как частный случай параллельности. Определяя сначала пересекающиеся прямые как такие, которые имеют одну и только одну общую точку, параллельными называют две прямые, которые лежат в одной плоскости и не пересекаются. Таким образом, параллельность во втором смысле включает параллельность в первом смысле и совпадение.

При таком более широком понимании параллельность оказывается видом общелогического отношения эквивалентности, ибо обладает свойствами рефлексивности ($a \parallel a$, так как $a \equiv a$), симметричности $[(a \parallel b) \Longrightarrow (b \parallel a)]$ и транзитивности $[(a \parallel b) \,\&\, (b \parallel c) \Longrightarrow (a \parallel c)]$. Параллельность в первом смысле, т. е. не включающая совпадение, не обладает свойством рефлексивности.

Понятие параллельности во втором смысле, как видно, логически более выдержано, кроме того, упрощает формулировки некоторых теорем.

Однако в планиметрии обычно (и вполне правомерно) параллельность трактуется в первом, более узком смысле, поэтому вряд ли стоит переучивать учащихся старших классов из-за упрощения формулировок некоторых теорем.

В дальнейшем будем придерживаться первого смысла отношения параллельности.

---

[1] Густав Шоке, О преподавании элементарной геометрии. Сб. «Преподавание математики», пер. с французского А. И. Фетисова, М., Учпедгиз, 1960. Günter Pickert, Ebene inzidenzgeometrie, Hamburg, 1958.

02. Существование двух прямых, не лежащих в одной плоскости, т. е. таких, для которых не существует плоскости, которой они принадлежат, непосредственно вытекает из аксиомы **I. 6.**

Действительно, пусть A, B, C, D такие точки, что $\overline{(\exists\alpha)}$ $(A, B, C, D \subset \alpha)$. Тогда $\overline{C \subset AB}$, иначе, если три точки A, B, C лежали бы на одной прямой, то все четыре точки лежали бы в одной плоскости (§ I. 07. 1). Поэтому три точки A, B, C определяют единственную плоскость (I. 3) ABC, причем $\overline{D \subset ABC}$ и, следовательно, $AB \subset$ $\subset ABC$, но $\overline{CD \subset ABC}$ и $\overline{(\exists\alpha)}$ $(AB, CD \subset \alpha)$.

Если для прямых a, b имеет место отношение $\overline{(\exists\alpha)}$ $(a, b \subset \alpha)$, то они называются скрещивающимися, что обозначим символом $a \,\dot{\setminus}\, b$, т. е. $(a \,\dot{\setminus}\, b) \underset{\sim}{Df} \overline{(\exists\alpha)}$ $(a, b \subset \alpha)$.

Так как имеет место предложение

$$(\exists A)\,(A \subset a,b) \Longrightarrow (\exists\alpha)\,(a,b \subset \alpha),$$

то по принципу контрапозиции получаем предложение:

$$\overline{(\exists\alpha)}\,(a,b \subset \alpha) \Longrightarrow \overline{(\exists A)}\,(A \subset a,b),$$

т. е. если прямые скрещиваются, то они не имеют общей точки.

Примеры скрещивающихся прямых показываем учащимся в классной комнате, на моделях различных геометрических тел, с помощью стереометрического ящика или других наглядных пособий.

03. При повторении аксиомы параллельных необходимо прежде всего уточнить ее формулировку, известную учащимся из курса планиметрии.

Легко доказать существование прямой, проходящей через точку C вне прямой a, в плоскости, определяемой прямой a и точкой C, и параллельной прямой a.

Достаточно опустить из точки C перпендикуляр к прямой a (рис. 5) и в плоскости, определяемой прямой a и точкой C, восставить перпендикуляр b к прямой CD. Два перпендикуляра a и b к прямой CD, лежащие в одной плоскости, параллельны:

$$(a \perp CD)\,\&\,(b \perp CD) \Longrightarrow (a \parallel b).$$

Возникает вопрос: сколько таких прямых, не пересекающих прямой a, проходит через точку C в плоскости, определяемой прямой a и точкой C: одна или более одной?

Указанным выше способом может быть построена только одна такая прямая, но остается открытым вопрос: нельзя ли построить такие прямые еще и другими способами?

Из принятых ранее аксиом не вытекает единственность такой прямой. В таком случае, очевидно, одинаково допустимы две возможности:

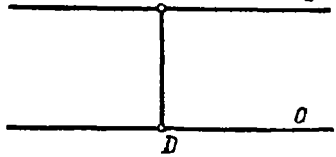


Рис. 5

а) либо проходит только одна прямая,

б) либо проходит более одной прямой.

Первая возможность и только она была учтена Евклидом, когда он принял свою аксиому параллельных. Таким образом, в формулировку аксиомы параллельных включается лишь требование единственности параллели:

Через точку вне данной прямой проходит не более одной прямой, параллельной данной:

$$(a)\,(C)\,[\overline{C \subset a} \Longrightarrow \overline{(\exists b)}\,(\exists c)\,((C \subset b,c)\,\&\,(b \parallel a)\,\&\,(c \parallel a)\,\&\,\overline{b \equiv c})]$$

(если вместо «параллельной» говорить «непересекающей», то необходимо добавить «в плоскости, определяемой данной прямой и точкой вне ее»).

04. Здесь уместно рассказать учащимся, что вторая возможность, состоящая в том, что через точку C вне прямой a в плоскости, определяемой прямой a и точкой C, проходит более одной прямой, не пересекающей данной прямой a, оставалась неисследованной более двух тысяч лет, от Евклида до Лобачевского. Более того, ученые этого периода были уверены, что этой второй возможности нет и стремились вывести евклидову аксиому параллельных как следствие из остальных аксиом, т. е. доказать ее как теорему.

Великий русский ученый Н. И. Лобачевский (1793 — 1856) обнаружил вторую, равноправную с первой возможность и, учитывая ее, присоединил к остальным аксиомам соответствующую этой возможности аксиому параллельных:

Через точку вне данной прямой в плоскости, определяемой этой точкой и прямой, проходит более одной прямой, не пересекающей данной.

На базе этой системы аксиом Лобачевский развил новую, неевклидову геометрию. Эта геометрия названа сейчас его именем — геометрией Лобачевского.

Ознакомлению учащихся с жизнью и деятельностью Н. И. Лобачевского и с некоторыми положениями его геометрии целесообразно посвятить несколько занятий математического кружка старших классов и математический вечер.

Ввиду того что этот материал достаточно широко освещается в различных изданиях научно-популярной литературы, а также в статьях из опыта внеклассной работы, мы не останавливаемся здесь на изложении содержания этих вопросов.

05. Необходимо показать, что в пространстве сохраняется та же аксиома параллельных, которая имела место на плоскости.

Действительно, если через точку C вне прямой a в пространстве необходимо провести прямую, параллельную a, то прежде всего эта прямая должна лежать в одной плоскости с прямой a, и поэтому мы должны провести ее в плоскости, определяемой прямой a и точкой C, а на плоскости имеет место известная аксиома параллельных.

Следовательно, и в пространстве через точку C вне прямой a проходит единственная прямая, параллельная a.

Здесь уместно задать и такой вопрос: сколько прямых, не пересекающих a, проходит через точку C вне прямой a, в пространстве?

06. После уточнения определения параллельности целесообразно составить классификацию взаимных положений двух прямых. Эта классификация должна быть четкой и обоснованной. Она производится по двум признакам: 1) существование плоскости, которой принадлежат прямые a и b:

$$(\exists\alpha)\,(a \subset \alpha)\ \&\ (b \subset \alpha) - (X),$$

и 2) существование общей точки двух прямых a и b:

$$(\exists A)\,(A \subset a)\ \&\ (A \subset b) - (Y).$$

Эту классификацию можно записать в виде следующей **схемы**:

Две прямые (a, b)

X (лежат в одной плоскости)

- Y (имеют общую точку) $a \times b$ (прямые a и b пересекаются)
- $\overline{Y}$ (не имеют общей точки) $a \parallel b$ (прямые a и b параллельны)

$\overline{X}$ (не лежат в одной плоскости) $a \setminus b$ (прямые a и b скрещиваются)

06. 1. Приведенная схема — одна из возможных форм записи логической схемы алгоритма распознания взаимного расположения двух прямых. Проверяется наличие признака X (принадлежность прямых одной плоскости). Если он не имеет место, то прямые a и b скрещиваются. Если он имеет место, то проверяется признак Y. Если Y имеет место, прямые пересекаются, если он не имеет места, то прямые параллельны.

В результате классификации взаимных расположений двух прямых мы получаем, что любые две прямые или скрещиваются, или пересекаются, или параллельны:

$$(a)\,(b)\,[(a \setminus b) \vee (a \times b) \vee (a \parallel b)].$$

07. Из определения параллельных прямых непосредственно следует симметричность отношения параллельности:

$$(a \parallel b) \Longrightarrow (b \parallel a).$$

Симметричностью обладает и отношение пересечения

$$(a \times b) \Longrightarrow (b \times a)$$

и отношение скрещивания $(a \setminus b) \Longrightarrow (b \setminus a)$.

В результате более глубокого исследования отношения параллельности обнаруживаем характеристическое свойство этого отношения, т. е. такое свойство, которым обладают параллельные прямые, но не обладают ни пересекающиеся, ни скрещивающиеся прямые. Это свойство представляет собой первый из многих встречающихся в курсе стереометрии необходимых и достаточных признаков, поэтому считаем, что его надо изучить сначала в виде двух отдельных теорем, одна из которых доказывает его необходимость, другая — его достаточность. Затем следует объединить эти две теоремы в одну с использованием выражения «необходимо и достаточно» или равносильного ему выражения «тогда и только тогда».

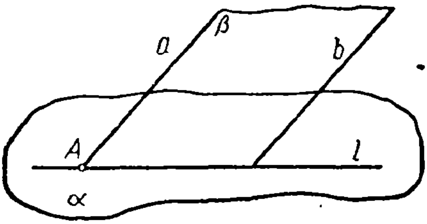


Рис. 6

В связи с изучением этого и других необходимых и достаточных признаков целесообразно также уточнить логические понятия «необходимо» и «достаточно».

Ниже приводится изучение признака параллельности двух прямых.

08. Теорема 1. *Если две прямые параллельны, то всякая плоскость, пересекающая одну из них, пересекает и другую:*

$$(a \parallel b) \Longrightarrow (\alpha)\,[(\alpha \times a) \Longrightarrow (\alpha \times b)].$$

Доказательство

1. Пусть имеем пару параллельных прямых a и b, которые по определению лежат в одной и той же плоскости β (рис. 6).

$$(a \parallel b) \Longrightarrow (\exists\beta)\,(a, b \subset \beta)$$

2. Положим, что некоторая плоскость α пересекает прямую a в точке A.

$$(\alpha \times a) \Longrightarrow (\exists A)\,(A \subset a, \alpha)$$

3. Плоскости α и β имеют общую точку A, следовательно, имеют и общую прямую l (1. 5), проходящую через эту точку.

$$(A \subset a)\ \&\ (a \subset \beta) \Longrightarrow (A \subset \beta)$$

4. Так как точка A принадлежит прямым a и l, то эти прямые пересекаются.

$$(A \subset a, l) \Longrightarrow (a \times l)$$

5. Так как три прямые a, b и l лежат в одной плоскости β и прямая l пересекает одну из двух параллельных прямых (a), то она пересекает и другую (b) по известной из планиметрии теореме.

$$(a, b, l \subset \beta)\ \&\ (l \times a)\ \&$$
$$\&\ (a \parallel b) \Longrightarrow (l \times b)$$
$$(l \times b) \Longrightarrow (\exists B)\,(B \subset l, b)$$

6. Так как точка B принадлежит прямой l, а прямая l лежит в плоскости α, то точка B лежит в плоскости α.

$$(B \subset l)\ \&\ (l \subset \alpha) \Longrightarrow (B \subset \alpha)$$

7. Так как точка B принадлежит плоскости α и прямой b, то плоскость α пересекает и прямую b.

$$(B \subset \alpha)\ \&\ (B \subset b) \Longrightarrow (\alpha \times b)$$

Так как мы взяли произвольную плоскость α, пересекающую прямую a, и доказали, что она пересекает и прямую b, то теорема доказана.

08. 1. Эта теорема выражает необходимый признак параллельности двух прямых. Более наглядно это обнаруживается, если заменить теорему равносильной ей противоположной обратной (т. е. если применить принцип контрапозиции)[1]:

$$\overline{(\alpha)}\,[(\alpha \times a) \Longrightarrow (\alpha \times b)] \Longrightarrow \overline{a \parallel b}$$

или

$$(\exists\alpha)\overline{[(\alpha \times a) \Longrightarrow (\alpha \times b)]} \Longrightarrow \overline{a \parallel b} \sim (\exists\alpha)\,[(\alpha \times a)\,\&\,\overline{(\alpha \times b)}] \Longrightarrow \overline{a \parallel b}.$$

09. Теорема 2 (обратная теореме 1). *Если всякая плоскость, пересекающая одну из двух прямых, пересекает и вторую, то эти прямые параллельны:*

$$(\alpha)\,[(\alpha \times a)] \Longrightarrow (\alpha \times b)] \Longrightarrow (a \parallel b).$$

Доказательство

1. Заменим доказываемую теорему равносильной ей противоположной обратной: «*Если прямые a и b непараллельны, то существует плоскость, пересекающая одну из этих прямых и не пересекающая другую*».

$$\overline{a \parallel b} \Longrightarrow \overline{(\alpha)\,[(\alpha \times a) \Longrightarrow (\alpha \times b)]}$$
$$\overline{a \parallel b} \Longrightarrow (\exists\alpha)\,[(\alpha \times a)\,\&\,\overline{(\alpha \times b)}]$$

2. Если прямые a и b непараллельны, то они либо пересекаются, либо скрещиваются.

$$\overline{a \parallel b} \Longrightarrow [(a \times b) \vee (a \leftthreetimes b)]$$

3. Если $a \times b$, то любая плоскость, проходящая через прямую b, отличная от плоскости, определяемой прямыми a и b, пересекает a, но не пересекает b.

$$(a \times b) \Longrightarrow (\exists\alpha)\,[(\alpha \times a)\,\&\,\overline{(\alpha \times b)}]$$

4. Если $a \leftthreetimes b$, то плоскость, проходящая через прямую b и произвольную точку A прямой a, пересекает прямую a и не пересекает b.

$$(a \leftthreetimes b) \Longrightarrow (\exists\alpha)\,[(\alpha \times a)\,\&\,\overline{(\alpha \times b)}]$$

5. Мы доказали, что если прямые a и b пересекаются или скрещиваются, то существует плоскость, пересекающая одну из них и не пересекающая другую, а это означает, если такой плоскости нет, т. е. если каждая плоскость, пересекающая одну из прямых, пересекает и другую, то эти прямые не пересекаются и не скрещиваются, т. е. параллельны.

$$\overline{(\exists\alpha)}\,[(\alpha \times a)\,\&\,\overline{(\alpha \times b)}] \Longrightarrow \overline{(a \times b)}\,\&\,\overline{(a \leftthreetimes b)}$$
$$(\alpha)\,\overline{[(\alpha \times a)\,\&\,\overline{(\alpha \times b)}} \Longrightarrow (a \parallel b)$$
$$(\alpha)\,[(\alpha \times a) \Longrightarrow (\alpha \times b)] \Longrightarrow (a \parallel b)$$

Эта теорема доказывает, что свойство двух прямых a и b, состоящее в том, что всякая плоскость, пересекающая одну из них, пересекает и другую, является достаточным условием (или признаком) параллельности этих прямых.

09. 1. Так как теоремы 1 и 2 (08 и 09) выражают соответственно необходимость и достаточность признака параллельности прямых, то они могут быть сформулированы объединенно следующим образом:

---

[1] *Если существует плоскость, пересекающая одну из прямых a или b и не пересекающая другую, то прямые непараллельны.*

Для того чтобы две прямые были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы всякая плоскость, пересекающая одну из них, пересекала и другую.

Так как этот признак необходим, то всякие параллельные прямые обладают им; так как он достаточен, то им не обладают никакие другие прямые (пересекающиеся, скрещивающиеся), т. е. им обладают только параллельные прямые. Иначе говоря, этот признак выражает характеристическое свойство параллельных прямых.

Если до изучения признака параллельности двух прямых не была еще разъяснена учащимся сущность необходимого условия и достаточного условия, это необходимо сделать в связи с изучением этого признака.

09. 2. Как известно, характеристическое свойство объекта или отношения может служить для определения этого объекта или отношения.

Можно предложить учащимся такую интересную задачу: *Две прямые будем считать по определению параллельными, если всякая плоскость, пересекающая одну из них, пересекает и другую. Исходя из этого определения, доказать, что всякие две параллельные прямые* 1) *лежат в одной плоскости и* 2) *не имеют общей точки, т. е., исходя из*

$$(a \parallel b) \overset{Df}{=} (\alpha)\,[(\alpha \times a) \Longrightarrow (\alpha \times b)],$$

доказать: 1) $(a \parallel b) \Longrightarrow (\exists\alpha)\,(a,b \subset \alpha)$;

2) $(a \parallel b) \Longrightarrow \overline{(\exists A)}\,(A \subset a,b)$.

10. Доказанный выше (08, 09) признак параллельности прямых позволяет весьма просто доказать свойство транзитивности параллелизма в пространстве.

Теорема 3. *Если прямая a параллельна прямой b и прямая b параллельна прямой c, то прямая a параллельна прямой c:*

$$(a \parallel b)\,\&\,(b \parallel c) \Longrightarrow (a \parallel c).$$

Доказательство. Возьмем произвольную плоскость α, пересекающую прямую a:

$$(a \parallel b)\,\&\,(\alpha \times a) \Longrightarrow (\alpha \times b) \qquad \text{(по Т. 1)},$$
$$(b \parallel c)\,\&\,(\alpha \times b) \Longrightarrow (\alpha \times c) \qquad \text{(по Т. 1)}.$$

Итак, мы доказали, что произвольная плоскость α, пересекающая прямую a, пересекает и c, т. е.

$$(\alpha)\,[(\alpha \times a) \Longrightarrow (\alpha \times c)].$$

Из этого предложения и Т. 2 по правилу заключения вытекает, что $a \parallel c$.

11. Понятие угла двух скрещивающихся прямых целесообразно ввести в связи с изучением взаимного расположения двух прямых, в начале курса. Это понятие значительно упрощает формулировки некоторых теорем и позволяет их изучать в более общем виде (теоремы о двух перпендикулярах и теоремы о трех перпендикулярах и др.).

Введение понятия угла двух скрещивающихся прямых требует для доказательства независимости величины угла от выбора вершины предварительного рассмотрения свойства углов с параллельными сторонами в пространстве. При доказательстве этого свойства мы ссылаемся на свойство транзитивности параллелизма прямых в пространстве.

Получаем стройную систему предложений: определение параллельных прямых, признак параллельности, свойство транзитивности, свойство углов с соответственно параллельными сторонами, определение угла двух скрещивающихся прямых, независимость величины угла двух скрещивающихся прямых от выбора вершины. Из определения угла двух скрещивающихся прямых непосредственно следует, что в пространстве также справедлива известная из планиметрии теорема $(c \perp a) \& (a \parallel b) \Longrightarrow (c \perp b)$ (прямая, перпендикулярная к одной из двух параллельных прямых, перпендикулярна и к другой).

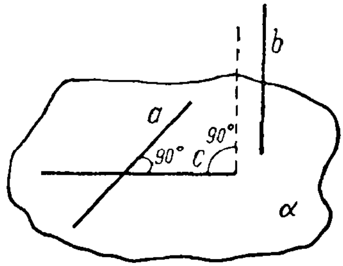


Рис. 7

Обратная же теорема $(c \perp a) \& (c \perp b) \Longrightarrow (a \parallel b)$ в пространстве не верна: прямые a и b, перпендикулярные к прямой c, могут быть и скрещивающимися (рис. 7).

12. В заключение темы о взаимном расположении прямых целесообразно решить следующую задачу на доказательство:

Если три плоскости попарно пересекаются, то линии пересечения или проходят все через одну точку, или все параллельны между собой.

Приведем это доказательство, которое целесообразно иллюстрировать на модели и на чертеже.

Пусть имеем три плоскости α, β, γ, причем $\alpha \times \beta$, $\beta \times \gamma$, $\gamma \times \alpha$.

$(\alpha \times \beta) \Longrightarrow (\exists c)(c \subset \alpha, \beta)$	c — линия пересечения плоскостей α и β,
$(\beta \times \gamma) \Longrightarrow (\exists a)(a \subset \beta, \gamma)$	a — линия пересечения плоскостей β и γ,
$(\gamma \times \alpha) \Longrightarrow (\exists b)(b \subset \gamma, \alpha)$	b — линия пересечения плоскостей γ и α.
$(a, c \subset \beta) \Longrightarrow [(a \times c) \vee (a \parallel c)]$	

Так как прямые a и c лежат в одной плоскости β, то либо они пересекаются, либо они параллельны. Рассмотрим оба случая.

1-й случай. Пусть $a \times c$.

$(a \times c) \Rightarrow (\exists O)(O \subset a, c)$

$(O \subset a) \,\&\, (a \subset \gamma) \Rightarrow (O \subset \gamma)$

$(O \subset c) \,\&\, (c \subset \alpha) \Rightarrow (O \subset \alpha)$

$(O \subset \alpha, \gamma) \,\&\, (b \subset \alpha, \gamma) \Rightarrow (O \subset b)$

Пусть O — точка пересечения прямых a и c. Точка O принадлежит плоскости γ, так как принадлежит прямой a этой плоскости, и принадлежит плоскости α, так как принадлежит прямой c этой плоскости. Следовательно, точка O принадлежит линии пересечения плоскостей γ и α, т. е. прямой b.

Мы доказали, что все три прямые a, b и c проходят через одну точку O.

2-й случай. Пусть $a \parallel c$.

Пусть $a \parallel c$, тогда и $b \parallel c$, ибо если $b \times c$, то по предыдущему все три прямые a, b и c пересекались бы в одной точке, что невозможно, так как $a \parallel c$.

В качестве **задачи** на доказательство здесь может быть предложена теорема Дезарга в следующей формулировке:

Если в двух различных плоскостях ABC и $A_1B_1C_1$ прямые AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, AC и A_1C_1 пересекаются в точках, лежащих на одной прямой, или параллельны, то прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке или параллельны между собой.

В. Параллельность прямой и плоскости.

13. Составим **классификацию** взаимных расположений прямой и плоскости в зависимости от наличия и числа общих точек.

Прямая и плоскость
(a, α)

- не имеют общей точки (прямая параллельна плоскости) $a \parallel \alpha$
- имеют общую точку
  - имеют только одну общую точку (прямая и плоскость пересекаются) $a \times \alpha$
  - имеют более одной общей точки (прямая принадлежит плоскости) $a \subset \alpha$

Мы получаем: $(a)(\alpha)[(a \parallel \alpha) \vee (a \times \alpha) \vee (a \subset \alpha)]$,

т. е. для любой прямой a и плоскости α, либо прямая параллельна плоскости, либо пересекается с ней, либо принадлежит ей.

Как видно, мы считаем прямую параллельной плоскости, если она не имеет с ней общих точек:

$$(a \parallel \alpha) \underset{\sim}{Df} \overline{(\exists A)} (A \subset a, \alpha).$$

Согласно другой трактовке параллельности прямая считается параллельной плоскости, если она не пересекает ее.

Эта трактовка более широкая, ибо включает в себя, кроме параллельности в смысле первой трактовки, еще и принадлежность прямой к плоскости. Мы будем понимать параллельность в узком смысле, соответствующем первой трактовке.

Из определения непосредственно вытекает симметричность отношения параллельности прямой и плоскости: $(a \parallel \alpha) \Rightarrow (\alpha \parallel a)$.

Из определения, однако, еще не вытекает, что такие прямая и плоскость существуют.

14. Существование прямой, параллельной плоскости, доказывается следующей теоремой, выражающей необходимое и достаточное условие параллельности прямой и плоскости.

Теорема 4. *Для того чтобы прямая вне плоскости была параллельна плоскости, необходимо и достаточно, чтобы она была параллельна какой-нибудь прямой, принадлежащей этой плоскости.*

Докажем, что сформулированное условие параллельности прямой и плоскости является д о с т а т о ч н ы м, т. е. что если прямая вне плоскости параллельна какой-нибудь прямой, принадлежащей этой плоскости, то она параллельна плоскости (рис. 8):

$$(a)\,(b)\,(\alpha)\,[\overline{a \subset \alpha}\ \&\ (a \parallel b)\ \&\ (b \subset \alpha) \Longrightarrow (a \parallel \alpha)].$$

Пусть $\overline{a \parallel \alpha}$.

1. $\overline{a \subset \alpha}\ \&\ \overline{a \parallel \alpha} \Longrightarrow (a \times \alpha)$	Так как $\overline{a \subset \alpha}$ и $\overline{a \parallel \alpha}$ (по допущению), то $a \times \alpha$.
2. $a \times \alpha \Longrightarrow \alpha \times a$	
3 $(a \times \alpha)\ \&\ (a \parallel b) \Longrightarrow (\alpha \times b)$	Так как $\alpha \times a$ и $a \parallel b$ (по условию), то
4 $(\alpha \times b) \Longrightarrow \overline{b \subset \alpha}$	$\alpha \times b$, т. е. $\overline{b \subset \alpha}$.

Мы получили: $\overline{a \subset \alpha}\ \&\ (a \parallel b)\ \&\ \overline{a \parallel \alpha} \Longrightarrow \overline{b \subset \alpha}$.

Отсюда по принципу расширенной контрапозиции получаем:

$$\overline{a \subset \alpha}\ \&\ (a \parallel b)\ \&\ (b \subset \alpha) \Longrightarrow (a \parallel \alpha),$$

т. е. то, что требовалось доказать.

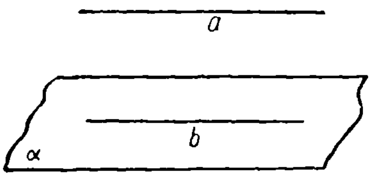


Рис. 8

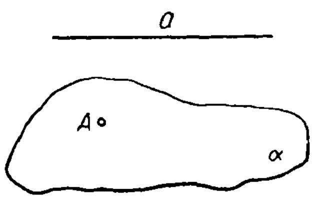


Рис. 9

Докажем н е о б х о д и м о с т ь сформулированного признака, т. е. если прямая параллельна плоскости, то в этой плоскости существует прямая, параллельная данной (рис. 9).

$$(a)\,(b)\,(\alpha)\,[(a \parallel \alpha) \Longrightarrow (\exists b)\,[(b \subset \alpha)\ \&\ (a \parallel b)].$$

Для доказательства достаточно построить такую прямую b.

1. $A \subset \alpha$	Возьмем на плоскости α произвольную точку A.
2. $(a \parallel \alpha)\ \&\ (A \subset \alpha)$	
3. $(A \subset b)\ \&\ (b \parallel a)$	Проводим через точку A прямую b, параллельную прямой a.
4. $(A \subset \alpha)\ \&\ (A \subset b) \sim (A \subset \alpha, b)$	
5. $(A \subset \alpha, b) \Longrightarrow [(b \times \alpha) \vee$ $\vee\ (b \subset \alpha)]$	Прямая b и плоскость α имеют общую точку, поэтому прямая b пересекает плоскость α или принадлежит ей.
6. $(\alpha \times b)\ \&\ (b \parallel a) \Longrightarrow (\alpha \times a)$	
7. $(\alpha)\,[(\alpha \times b)\ \&\ (b \parallel a)] \Longrightarrow (\alpha \times a)$	Но если плоскость α пересекает b, то пересекает и параллельную ей прямую a (т. 1)

По принципу расширенной контрапозиции получаем:

$$\overline{\alpha \times a} \,\&\, (b \parallel a) \Longrightarrow \overline{\alpha \times b}.$$

8. $[(b \times \alpha) \vee (b \subset \alpha)] \,\&\, \overline{b \times \alpha} \Longrightarrow (b \subset \alpha)$ — С одной стороны, мы доказали, что b пересекает α или принадлежит ей (5), с другой, что b не пересекает α. Следовательно, $b \subset \alpha$.

Итак, мы доказали, что $(a \parallel \alpha) \Longrightarrow (\exists b)\,(b \subset \alpha) \,\&\, (b \parallel a)$.

15. Приведем решение некоторых з а д а ч на доказательство, требующих применения признака параллельности прямой и плоскости.

1. *Если прямая параллельна плоскости, то этой же плоскости параллельна и всякая другая прямая, параллельная данной и не принадлежащая этой плоскости*:

$$(a \parallel \alpha) \Longrightarrow (b)\,[(b \parallel a) \,\&\, (\overline{b \subset \alpha}) \Longrightarrow (b \parallel \alpha)].$$

1. $(a \parallel \alpha) \Longrightarrow (\exists c)\,(c \subset \alpha) \,\&\, (c \parallel a)$ — Так как $a \parallel \alpha$, то по признаку параллельности (используя необходимость) существует прямая c плоскости α, параллельная a.

2. $(b \parallel a) \,\&\, (a \parallel c) \Longrightarrow (b \parallel c)$ — Так как $b \parallel a$ и $a \parallel c$, то по свойству транзитивности $b \parallel c$. Мы получили, что прямая b, не принадлежащая плоскости α, параллельна прямой c этой плоскости.

3. $\overline{b \subset \alpha} \,\&\, (b \parallel c) \,\&\, (c \subset \alpha) \Longrightarrow (b \parallel \alpha)$ — Следовательно, по признаку параллельности (используя достаточность признака) $b \parallel \alpha$.

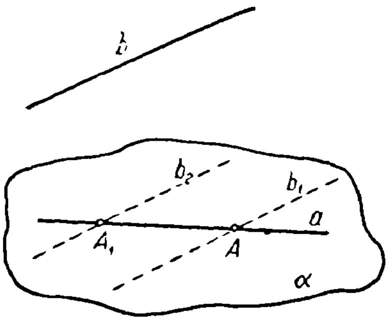


Рис. 10

2. *Если a и b — скрещивающиеся прямые, то существует единственная плоскость, проходящая через одну из них и параллельная другой* (рис. 10):

$$(a \setminus b) \Longrightarrow (\exists \alpha)\,[(a \subset \alpha) \,\&\, (b \parallel \alpha)] \,\&\, (\beta)\,[(a \subset \beta) \,\&\, (b \parallel \beta) \Longrightarrow (\beta \equiv \alpha)].$$

Пусть A — произвольная точка прямой a, т. е. $A \subset a$, следовательно, $\overline{A \subset b}$. Через точку A проводим $b_1 \parallel b$ (по аксиоме параллельных через A проходит только одна такая прямая).

1. $(a \times b_1) \Longrightarrow (\exists \alpha)\,(a, b_1 \subset \alpha) \,\&\, (\beta)\,[(a, b_1 \subset \beta) \Longrightarrow (\beta \equiv \alpha)]$ — Пересекающиеся прямые a и b_1 определяют единственную плоскость α.

2. $(a \subset \alpha) \,\&\, (b \setminus a) \Longrightarrow \overline{b \subset \alpha}$ — Так как $a \subset \alpha$ и $b \setminus a$, то b не принадлежит плоскости α.

3. $\overline{b \subset \alpha} \,\&\, (b \parallel b_1) \,\&\, (b_1 \subset \alpha) \Longrightarrow (b \parallel \alpha)$ — Так как прямая b не принадлежит плоскости α и параллельна прямой b_1 этой плоскости, то по признаку параллельности (используя его достаточность) $b \parallel \alpha$.

Если взять другую точку A_1 на прямой a и провести через нее прямую b_2, параллельную b ($b_2 \parallel b$), то плоскость α_1, проходящая через прямые a и b_2, совпадает с плоскостью α, так как параллельные прямые b_1 и b_2 определяют одну-единственную плоскость.

Эту задачу целесообразно иллюстрировать не только на чертеже, но и на модели, ибо изображение скрещивающихся прямых не обладает достаточной наглядностью.

С. Параллельность плоскостей

16. Пусть α и β — две различные плоскости. Взаимные расположения этих плоскостей мы классифицируем по признаку существования общей точки: $(\exists A)(A \subset \alpha, \beta)$ — X.

$$(\alpha, \beta)$$

$\overline{X}$	X
$\alpha \parallel \beta$	$\alpha \times \beta$

Если плоскости не имеют общей точки, мы говорим, что они п а р а л л е л ь н ы.

Если плоскости имеют общую точку, то по аксиоме **I. 5** они имеют общую прямую и называются п е р е с е к а ю щ и м и с я.

Из определения параллельности плоскостей непосредственно вытекает симметричность этого отношения:

$$(\alpha \parallel \beta) \Longrightarrow (\beta \parallel \alpha).$$

Из определения параллельности плоскостей также следует, что $(\alpha \parallel \beta) \Longrightarrow (a)\ [(a \subset \alpha) \Longrightarrow (a \parallel \beta)]$, так как прямая, лежащая в плоскости α, не может иметь общих точек с плоскостью β.

Необходимо обратить внимание учащихся на множество примеров параллельных плоскостей «вокруг нас».

Из определения параллельности еще, однако, не следует существование параллельных плоскостей. Существование таких плоскостей доказывается следующей теоремой.

17. Т е о р е м а. *Существует единственная плоскость, проходящая через точку, не принадлежащую данной плоскости, и параллельная этой плоскости.*

Как видно, эта теорема состоит из двух утверждений. Во-первых, утверждается существование плоскости, проходящей через точку вне данной плоскости и параллельной этой плоскости:

$$\overline{Q \subset \alpha} \Longrightarrow (\exists\beta)[(Q \subset \beta) \,\&\, (\beta \parallel \alpha)], \qquad (1)$$

во-вторых, утверждается единственность такой плоскости:

$$(\beta')[(Q \subset \beta') \,\&\, (\beta' \parallel \alpha) \Longrightarrow (\beta' \equiv \beta). \qquad (2)$$

Также четко необходимо разграни-

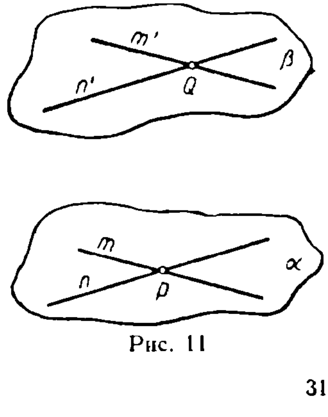


Рис. 11

чить доказательство существования от доказательства единственности (рис. 11).

Доказательство существования

Берем произвольную точку P на плоскости α и проводим через нее в этой плоскости две произвольные прямые m и n.

1. $(\exists\beta)(m'n' \subset \beta)$	Проводим через Q прямые m' и n' так, чтобы $(m' \parallel m) \& (n' \parallel n)$. Существует плоскость β, проходящая через пересекающиеся прямые m' и n' (§ 1. 07. 2).
2. $(\beta \times \alpha) \Rightarrow (\exists l)(l \subset \alpha, \beta)$	Докажем, что $\beta \parallel \alpha$. Если эти плоскости пересекаются, то они имеют общую прямую l.
3. $\overline{m \subset \beta} \& (m \parallel m') \& (m' \subset \beta) \Rightarrow (m \parallel \beta)$; $\overline{n \subset \beta} \& (n \parallel n') \& (n' \subset \beta) \Rightarrow (n \parallel \beta)$	Так как прямые m и n соответственно параллельны прямым m' и n' плоскости β, то по признаку параллельности прямой и плоскости они параллельны плоскости β.
4. $(m \parallel \beta) \& (l \subset \beta) \Rightarrow \overline{m \times l}$; $(n \parallel \beta) \& (l \subset \beta) \Rightarrow \overline{n \times l}$	Так как прямые m и n параллельны плоскости β, а прямая l лежит в этой плоскости, то m и n не пересекаются с прямой l.
5. $(m, l \subset \alpha) \& (\overline{m \times l}) \Rightarrow (m \parallel l)$ $(n, l \subset \alpha) \& (n \times l) \Rightarrow (n \parallel l)$	Так как прямые m и n не пересекаются с прямой l и лежат с ней в одной плоскости α, то они параллельны ей.

Мы получили, что в плоскости α две прямые m и n проходят через одну точку P и обе параллельны прямой l, что противоречит аксиоме параллельных. Следовательно, $\alpha \parallel \beta$.

Доказательство единственности

1. $(Q \subset \beta') \& (\beta' \parallel \alpha) \Rightarrow (m \parallel \beta') \& (n \parallel \beta')$	Пусть через точку Q проходит еще одна плоскость β', параллельная плоскости α. Тогда по предыдущему прямые m и n будут параллельны плоскости β'.
2. $(m' \parallel m) \& (Q \subset m') \& (Q \subset \beta') \Rightarrow (m' \subset \beta')$ $(n', n) \& (Q \subset n') \& (Q \subset \beta) \Rightarrow (n' \subset \beta')$	Так как m' и n' параллельны соответственно m и n, а эти прямые проходят через точку Q плоскости β', то прямые m' и n' лежат в плоскости β' (следствие из признака параллельности прямой и плоскости).
3. $(m' \times n') \& (m', n' \subset \beta) \& (m', n' \subset \beta') \Rightarrow (\beta' \equiv \beta)$	Отсюда следует (§ 1. 07. 2), что плоскость β' совпадает с плоскостью β.

18. Приведенное доказательство служит одновременно и доказательством достаточности основного признака параллельности плоскостей, выражающегося следующей теоремой.

Для того чтобы две плоскости были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы две пересекающиеся прямые одной плоскости были соответственно параллельны двум прямым другой плоскости.

Достаточность этого признака вытекает из доказательства предыдущей теоремы, так как в нем мы построили две пересекающиеся прямые одной плоскости, соответственно параллельные двум прямым другой плоскости, и доказали, что эти плоскости параллельны.

Необходимость этого признака очевидна. Действительно, если плоскости α и β параллельны, то всякая прямая одной из них параллельна другой: $(\alpha \parallel \beta) \Longrightarrow (a)\,[a \subset \alpha) \Longrightarrow (a \parallel \beta)]$.

Поэтому если взять две пересекающиеся прямые m и n плоскости α, то $(m \parallel \beta)\ \&\ (n \parallel \beta)$, и по признаку параллельности прямой и плоскости (используя его необходимость) получаем:

$$(\exists m')\,(\exists n')\,(m', n' \subset \beta)\ \&\ (m \parallel m')\ \&\ (n \parallel n').$$

При рассмотрении достаточности данного признака параллельности двух плоскостей естественно возникают такие вопросы:

1. *Недостаточно ли, чтобы одна прямая одной плоскости была параллельна прямой другой плоскости, чтобы эти плоскости были параллельны?*

2. *Существенно ли условие пересечения двух прямых?*

Чтобы ответить на первый вопрос, достаточно взять две пересекающиеся плоскости $(\alpha \times \beta)$ и в одной из них, например β, провести прямую m, параллельную линии пересечения l. Мы получили (рис. 12):

$$(\exists m)\,(m \subset \beta)\ \&\ (m \parallel l)\ \&\ (l \subset \alpha)\ \&\ (\overline{\alpha \parallel \beta}),$$

или, что то же:

$$\overline{(\exists m)\,(m \subset \beta)\ \&\ (m \parallel l)\ \&\ (l \subset \alpha) \Longrightarrow (\alpha \parallel \beta)}.$$

Чтобы ответить на второй вопрос, достаточно опустить условие пересечения двух прямых, т. е. потребовать лишь, чтобы две прямые (m, n) одной плоскости были соответственно параллельны двум прямым (m', n') другой плоскости. В этом случае если $m \parallel n$, то плоскости α и β не обязательно параллельны (рис. 13).

Действительно, взяв $\alpha \times \beta$ и проведя в плоскости β прямые m и n параллельно линии пересечения l: $(m \parallel l)\ \&\ (n \parallel l)$, а в плоскости α прямые m' и n' также параллельно l: $(m' \parallel l)\ \&\ (n' \parallel l)$, получаем:

$$(m,n \subset \beta)\ \&\ (m',n' \subset \alpha)\ \&\ (m \parallel m')\ \&\ (n \parallel n')\ \&\ \overline{\alpha \parallel \beta}.$$

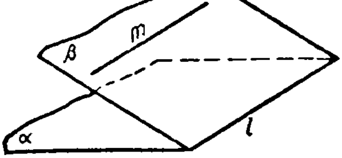


Рис. 12

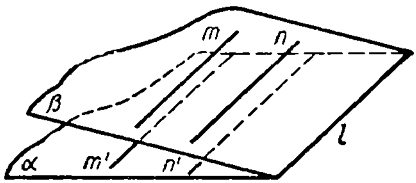


Рис. 13

Таким образом выясняем, что нельзя ослабить требование, содержащееся в признаке параллельности плоскостей. Это выяснение должно иллюстрироваться на моделях.

19. Из доказанной выше теоремы (17) вытекают важные следствия.

(1) Если α, β и γ — различные плоскости, то

$$(\alpha \parallel \beta) \& (\beta \parallel \gamma) \Longrightarrow (\alpha \parallel \gamma)$$

(свойство транзитивности параллельности плоскостей).

Действительно, пусть $\overline{\alpha \parallel \gamma}$. Тогда $(\exists C)$ $(C \subset \alpha, \gamma)$, и мы получили, что через точку C проходят две плоскости (α и γ), параллельные плоскости β, что противоречит указанной выше теореме (17) в той части, где она утверждает единственность такой плоскости.

$$(2) \quad (\alpha \parallel \beta) \Longrightarrow (\gamma)\,[(\gamma \times \alpha) \Longrightarrow (\gamma \times \beta)].$$

Действительно, если $\gamma \times \alpha$, то $\overline{\gamma \parallel \beta}$, ибо

$$(\gamma \parallel \beta) \& (\beta \parallel \alpha) \Longrightarrow (\gamma \parallel \alpha).$$

Нетрудно показать, что имеет место и обратное предложение:

$$(2') \quad (\gamma)\,[(\gamma \times \alpha) \Longrightarrow (\gamma \times \beta)] \Longrightarrow (\alpha \parallel \beta).$$

Докажем это предложение способом от противного, т. е. заменим его по принципу контрапозиции теоремой, противоположной обратной:

$$\overline{\alpha \parallel \beta} \Longrightarrow \overline{(\gamma)}\,[(\gamma \times \alpha) \Longrightarrow (\gamma \times \beta)] \sim (\alpha \times \beta) \Longrightarrow (\exists\gamma)(\gamma \times \alpha) \& \overline{(\gamma \times \beta)}.$$

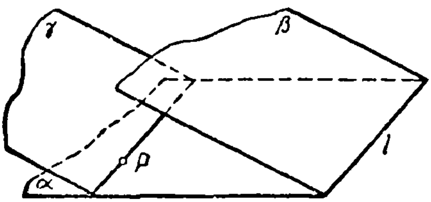


Рис. 14

Берем две пересекающиеся плоскости α и β (рис. 14). На одной из них, например α, берем произвольную точку P и через нее проводим плоскость γ, параллельную плоскости β. Мы получили:

$$(\alpha \times \beta) \Longrightarrow (\exists\gamma)\,[(\gamma \times \alpha) \& \overline{(\gamma \times \beta)}]$$

Таким образом, имеет место необходимый и достаточный признак параллельности плоскостей, аналогичный рассмотренному нами признаку параллельности прямых (§ **2. 09. 1**):

Для того чтобы две плоскости были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы всякая плоскость, пересекающая одну из них, пересекала и другую.

Этот признак необходим вследствие истинности предложения

$$(\alpha \parallel \beta) \Longrightarrow (\gamma)\,[(\gamma \times \alpha) \Longrightarrow (\gamma \times \beta)]$$

и достаточен вследствие истинности обратного предложения:

$$(\gamma)\,[(\gamma \times \alpha) \Longrightarrow (\gamma \times \beta)] \Longrightarrow (\alpha \parallel \beta)$$

Можно предложить учащимся самостоятельно доказать еще один необходимый и достаточный признак параллельности плоскостей:

$$(\alpha \parallel \beta) \rightleftarrows (a)\,[(a \times \alpha) \Longrightarrow (a \times \beta)]$$

20. В связи с изучением взаимного расположения двух плоскостей целесообразно рассмотреть и взаимное расположение трех плоскостей.

Все случаи взаимного расположения трех плоскостей могут быть получены в результате достаточно строго обоснованного исследования, вполне доступного учащимся, и иллюстрированы на моделях и на чертежах.

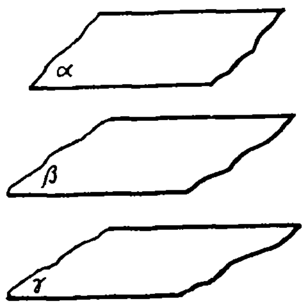


Рис. 15

Ниже приводится это исследование.

Пусть имеем три различные плоскости α, β и γ (рис. 15).

Различаем два случая: 1) какие-нибудь две из трех плоскостей параллельны или 2) никакие две плоскости не параллельны, т. е. данные три плоскости попарно пересекаются.

Рассмотрим отдельно каждый из этих случаев.

1-й случай. Пусть $\alpha \parallel \beta$. Тогда представляются следующие возможности:

1) $\gamma \parallel \beta$, и так как $\beta \parallel \alpha$, то $\gamma \parallel \alpha$ (свойство транзитивности).

В этом случае получаем три параллельные плоскости (рис. 15).

2) $\gamma \times \beta$, тогда $(\exists a)\,(a \subset \beta, \gamma)$; $(\gamma \times \beta)\ \&\ (\alpha \parallel \beta) \Longrightarrow (\gamma \times \alpha)$, т. е. $(\exists b)\,(b \subset \gamma, \alpha)$, причем $a \parallel b$ (по теореме о линиях пересечения двух параллельных плоскостей третьей, которую мы здесь не рассматривали).

В этом случае получаем две параллельные плоскости ($\alpha \parallel \beta$) и третью (γ), пересекающую их по параллельным прямым (рис. 16).

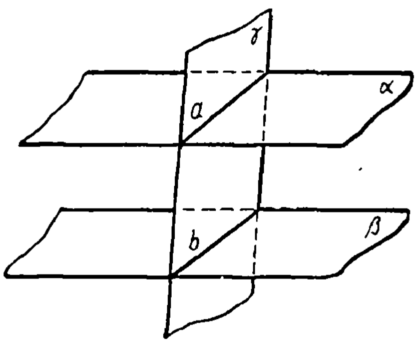


Рис. 16

2-й случай. Пусть никакие две из трех данных плоскостей не параллельны, т. е. $\alpha \times \beta$, $\gamma \times \beta$ и $\gamma \times \alpha$.

Тогда либо какие-нибудь две из трех линий пересечения совпадают, либо никакие две не совпадают.

1) Пусть $(a \subset \alpha, \beta)$ & $(a \subset \beta, \gamma)$, отсюда следует, что $(a \subset \alpha, \gamma)$, т. е. все три плоскости имеют общую прямую (рис. 17).

2) Пусть $a \subset \beta, \gamma$, $b \subset \gamma, \alpha$ и $c \subset \alpha, \beta$, причем a, b и c — различные прямые. Рассмотрим какие-нибудь две из них, например a и b:

$$(a,b \subset \gamma) \Longrightarrow [(a \times b) \vee (a \parallel b)]$$

а) Пусть $a \times b$.

$$(a \times b) \Longrightarrow (\exists A)\,(A \subset a,b)];$$

$$(A \subset a) \,\&\, (a \subset \beta) \Longrightarrow (A \subset \beta);$$

$$(A \subset b) \,\&\, (b \subset \alpha) \Longrightarrow (A \subset \alpha);$$

$$(A \subset \alpha,\beta) \,\&\, (c \subset \alpha,\beta) \Longrightarrow (A \subset c).$$

В этом случае все три плоскости имеют одну и только одну общую точку (рис. 18).

б) Пусть $a \parallel b$.

В этом случае имеем и $b \parallel c$. Действительно,

$$(b,c \subset \alpha) \Longrightarrow (b \parallel c) \,\&\, (\overline{b \times c}) \vee (b \times c) \,\&\, (\overline{b \parallel c}),$$

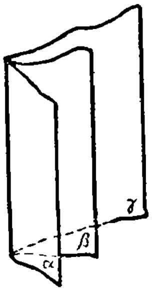


Рис. 17

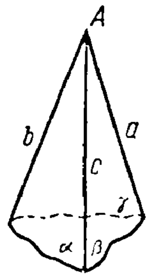


Рис. 18

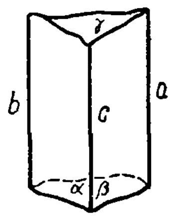


Рис. 19

но если $b \times c$, то по предыдущему имеет место и $a \times b$, что противоречит условию.

Таким образом, в этом случае три плоскости не имеют общей точки, попарно пересекаясь по параллельным прямым (рис. 19).

21. В связи с изучением параллельности плоскостей целесообразно решать задачи на отыскание г.м.т., как например:

1. *Определить г.м.т., принадлежащих прямым, проходящим через точку A вне плоскости α параллельно этой плоскости.*

2. *Определить г.м. середин отрезков лучей, проведенных из данной точки A вне плоскости α ко всем точкам этой плоскости.*

3. *Определить г.м.т., делящих (внутренним образом) в данном отношении отрезки лучей, проведенных из точки A вне плоскости α ко всем точкам этой плоскости.*

4. Определить г. м. середин отрезков прямых, пересекающих две данные параллельные плоскости и заключенные между этими плоскостями.

5. Определить г.м. центров тяжести треугольников, основания которых лежат в плоскости α, а вершины — в плоскости β, параллельной α.

§ 3. Построения на проекционном чертеже

01. Изучение свойств параллельной проекции важно как для правильного выполнения чертежей пространственных образов с помощью параллельного проектирования, так и для получения таких изображений, на которых можно было бы выполнить геометрические построения, отображающие построения в пространстве.

Рассматривая тень проволочной модели какой-нибудь пространственной фигуры, например куба, на стене, получаем наглядное представление о проекции данной фигуры на плоскости стены. Эта проекция является параллельной (солнечные лучи считаются параллельными между собой).

С помощью этого опыта обнаруживаются и некоторые свойства параллельной проекции. Затем переходят к определению параллельной проекции и доказательству ее свойств.

02. Пусть задана некоторая плоскость α и прямая MN, причем $MN \subset \alpha$. Возьмем произвольную точку A пространства и проведем через нее прямую $AA' \parallel MN$, где $A' \subset \alpha$ (рис. 20).

Точка A' называется параллельной проекцией точки A на плоскость α по направлению проектирования MN. Прямая AA' называется проектирующей прямой, плоскость α — плоскостью проекции.

Параллельной проекцией прямой или какой-нибудь фигуры называется совокупность параллельных проекций всех точек этой прямой или фигуры.

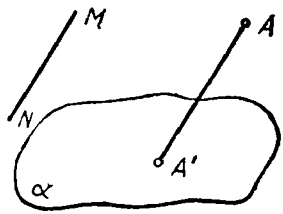


Рис. 20

Таким образом, параллельная проекция фигуры есть множество точек пересечения с плоскостью проекции проектирующих прямых, проходящих через все точки этой фигуры.

03. Процесс параллельного проектирования приводит к преобразованию данной фигуры в новую, ее проекцию. Самое существенное в изучении этого преобразования, так же как и в изучении других преобразований в планиметрии (движений, гомотетии), является выяснение инвариантов этого преобразования, т. е. тех свойств фигур и связанных с ними величин, которые остаются неизменными при параллельном проектировании. Это изучение сложнее, чем изучение геометрических преобразований в планиметрии, так как здесь имеем дело уже не с преобразованием плоскости в самой себе, а с преобразованием пространства в плоскость.

Важно выяснить, что параллельное проектирование сохраняет прямолинейность расположения точек, т. е. проекция прямой есть прямая (за исключением случая, когда прямая параллельна направлению проектирования и когда ее проекция вырождается в точку); параллельность (проекции параллельных прямых параллельны или совпадают) и отношение отрезков одной прямой или параллельных прямых.

Эти свойства легко доказываются.

Величины же углов, длины отрезков, т. е. форма и размеры фигур, при параллельном проектировании вообще искажаются. Лишь в случае, когда фигура лежит в плоскости, параллельной плоскости проекции, проекция этой фигуры равна самой фигуре. Это свойство достаточно строго устанавливается для треугольника и для многоугольника.

04. Изображение фигуры, полученное с помощью параллельного проектирования фигуры на плоскость чертежа, еще недостаточно для выполнения на нем различных построений, связанных с этой фигурой.

Например, имея такое изображение прямой и плоскости (рис. 21), мы не можем на этом изображении отыскать путем построения точку пересечения этой прямой и плоскости. Это изображение, хотя и правильное (может быть получено с помощью проектирования на плоскость чертежа данной прямой и плоскости), не является полным, т. е. не дает правильного представления о взаимном расположении прямой a и плоскости α в пространстве. Такое же изображение может получиться при параллельном проектировании на плоскость чертежа прямой a и плоскости α при любом их взаимном расположении (при $a \parallel \alpha$, или $a \times \alpha$, или $a \subset \alpha$).

Такой чертеж не может служить для выполнения на нем построений, связанных с изображенной на нем пространственной фигурой.

05. Чтобы получить проекционный чертеж, позволяющий конструктивным путем определить на нем общие элементы изображенных прямых и плоскостей, т. е. решить на изображении так называемые позиционные задачи, достаточно задать, кроме изображения точек, прямых, плоскостей и вообще пространственных фигур на плоскости чертежа, и изображения их проекций на некоторую плоскость, называемую основной.

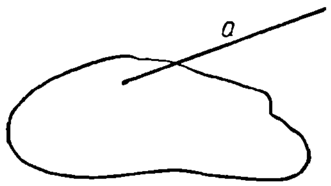


Рис. 21

Такой проекционный чертеж может быть описан следующим образом.

Выберем в пространстве некоторую плоскость α, которую назовем основной. Положение всякой точки A пространства определим с помощью параллельной проекции этой точки на основную плоскость по заданному направлению проектирования.

На проекционном чертеже мы получим: а) изображение основной плоскости α; б) изображение точки A (проекция точки A пространства на плоскость чертежа); в) изображение A' ее проекции на основную плоскость α (проекция на плоскость чертежа проекции точки A на основную плоскость) и г) изображение проектирующей прямой AA'.

Таким образом, точку пространства будем считать заданной на проекционном чертеже, если заданы изображение этой точки и изображение ее проекции на основную плоскость.

На рисунке 22 заданы точки A, B, C, D пространства. Этот рисунок дает нам наглядное представление о расположении этих точек в пространстве: точки A и B лежат над плоскостью α, C — под плоскостью, D — на плоскости α.

Такой проекционный чертеж получается в результате двойного проектирования: точки A, B, C, D пространства проектируются на основную плоскость α, затем вместе с этой плоскостью, со своими проекциями на ней A', B', C', D' и проектирующими прямыми (AA', BB', CC', DD') проектируются на плоскость чертежа.

Прямую будем считать заданной на проекционном чертеже, если заданы две ее точки.

Так, если заданы две точки A и B, то задана и прямая AB, при этом A' B' (рис. 23) — изображение проекции прямой AB на основную плоскость α. (Действительно, так как проекция прямой AB — прямая, являющаяся г.м. проекций всех точек этой прямой, A' и B' — проекции соответственно точек A и B этой прямой и через A' и B' проходит единственная прямая, то $A'B'$ — проекция AB.)

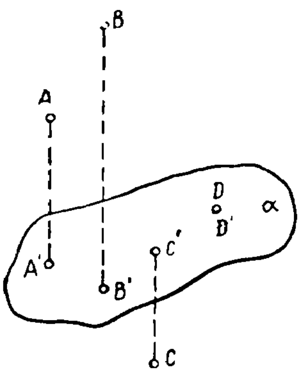


Рис. 22

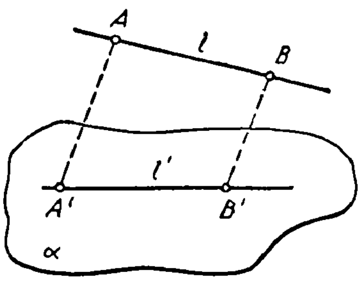


Рис. 23

Таким образом, прямую можно считать заданной на проекционном чертеже и в том случае, если заданы ее изображение и изображение ее проекции на основную плоскость.

Плоскость будем считать заданной на проекционном чертеже, если заданы три точки этой плоскости, не лежащие на одной прямой, или прямая и точка вне ее, или две пересекающиеся, или две параллельные прямые.

Если все точки, прямые и плоскости изображенной фигуры являются заданными на проекционном чертеже в указанном выше смысле, то такое изображение называется полным и можно на нем построением отыскать все существующие пересечения элементов изображенной фигуры, т. е. решать различные позиционные задачи.

06. Прежде всего необходимо решить три основные задачи. Эти задачи считаются основными потому, что часто встречаются в процессе решения более сложных позиционных задач, в частности задач на построение сечений многогранников плоскостями.

З а д а ч а 1. *Определить точку пересечения заданной прямой AB с основной плоскостью* α.

а) $A'B'$ — проекция прямой AB на плоскости α (рис. 24)[1].

б) Так как $AA' \parallel BB'$, то AB и $A'B'$ лежат в одной плоскости (проектирующей) и, следовательно, имеет место одно и только одно из двух соотношений $AB \parallel A'B'$ или $AB \times A'B'$. Рассмотрим каждый из этих случаев.

1) $(AB \parallel A'B') \Longrightarrow (AB \parallel \alpha)$ (по признаку параллельности прямой и плоскости). В этом случае не существует точки пересечения заданной прямой с основной плоскостью.

$$2)\ (AB \times A'B') \Longrightarrow (\exists C)\ (C \subset AB,\ A'B')$$

$$(C \subset A'B')\ \&\ (A'B' \subset \alpha) \Longrightarrow (C \subset \alpha);$$

$$C \subset AB, \alpha$$

В этом случае мы нашли точку C пересечения заданной прямой AB с основной плоскостью (рис. 24). Точка C называется **с л е д о м** прямой AB на основной плоскости.

З а д а ч а 2. *Определить линию пересечения заданной плоскости ABC с основной плоскостью* (рис. 25).

В процессе решения этой задачи мы дважды решаем задачу 1. (Так как задача 2 сводится к задаче 1, то ее можно было бы не включать в число основных. Мы это сделали из педагогических соображений, т. к. задача 2 часто встречается в более сложных задачах).

Плоскость ABC задана тремя точками A, B и C, не лежащими на одной прямой. Для определения линии пересечения этой плос-

[1] Предложение «$A'B'$ — проекция прямой AB на плоскости α» обозначим символом «$A'B \equiv \text{Пр}_\alpha\ (AB)$».

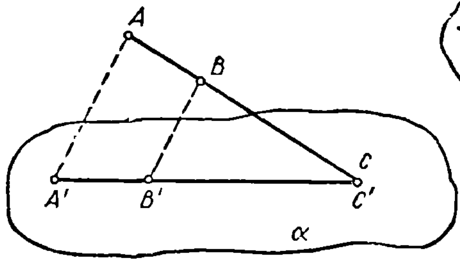


Рис. 24

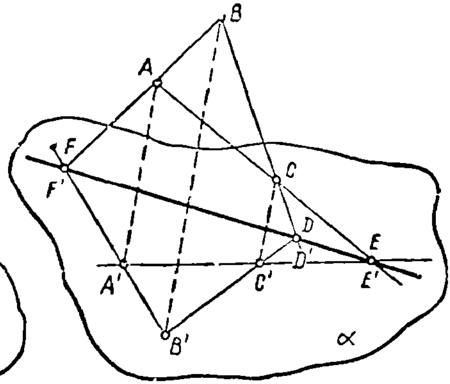


Рис. 25

кости с основной плоскостью α достаточно определить точки пересечения с основной плоскостью двух каких-либо прямых плоскости ABC (AB и AC, или AB и BC, или AC и BC).

$$(D \subset BC, B'C') \,\&\, (B'C' \subset \alpha) \Longrightarrow (D \subset BC, \alpha);$$
$$(E \subset AC, A'C') \,\&\, (A'C' \subset \alpha) \Longrightarrow (E \subset AC, \alpha);$$
$$(D \subset BC, \alpha) \,\&\, (E \subset AC, \alpha) \Longrightarrow (DE \subset ABC, \alpha);$$

DE — след плоскости ABC на основной плоскости.

Очевидно, что точка F ($F \subset AB$, $A'B'$) также лежит на прямой DE, так как D, E, $F \subset ABC$, α и все общие точки двух плоскостей лежат на одной прямой.

З а д а ч а 3. *Плоскость задана следом l на основной плоскости и точкой A. (Обозначим эту плоскость символом (l, A). Определить точку ее пересечения с проектирующей прямой, проходящей через данную точку B' основной плоскости.*

$AA'B'$ — проектирующая плоскость, в которой лежат проектирующие прямые, проходящие через точки A' и B' основной плоскости (рис. 26).

$$K' \subset AA'B', \ \alpha, \ (l, A);$$
$$\underline{A \subset (l, A), \ AA'B';}$$
$$AK' \subset AA'B', (l, A);$$
$$AK', BB' \subset AA'B';$$
$$B \subset AK', B'B; \ B \subset (lA), B'B$$

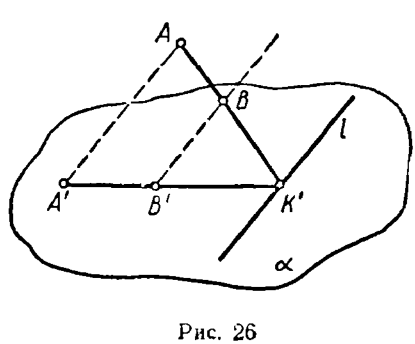


Рис. 26

В приведенных ниже примерах решения задач на построение сечений многогранников плоскостями будем ссылаться на задачи 1—3.

07. Приведем в качестве примера подробное решение двумя способами задачи на построение сечения призмы плоскостью.

З а д а ч а. *Построить сечение пятиугольной призмы плоскостью, заданной тремя точками, лежащими на боковых ребрах призмы.*

Пусть дана призма $ABCDEA'B'C'D'E'$ и три точки M, N и P, лежащие соответственно на ребрах AA', EE', DD' (рис. 27).

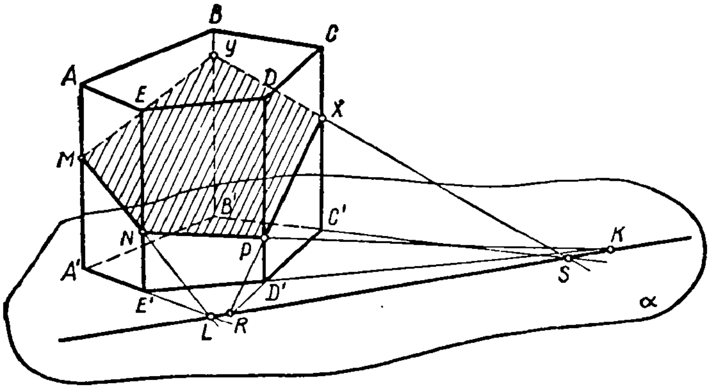


Рис. 27

Выберем плоскость ABC нижнего основания за основную плоскость, а направление боковых ребер за направление проектирования на основную плоскость. При таком выборе основной плоскости и направления проектирования изображение призмы является полным, т. е. все элементы призмы (грани, ребра и вершины) заданы на чертеже, что легко проверить. Так как изображение полное, то требуемое в задаче построение осуществимо на этом чертеже.

Задача построения сечения сводится в нашем случае к отысканию точек пересечения плоскости MNP с боковыми ребрами (проектирующими прямыми) BB' и CC'. Это наводит нас на мысль, что можно свести данную задачу к двум задачам типа 3, построив предварительно след плоскости MNP на основной плоскости, т. е. решив задачу типа 2.

Ниже приводится символическая запись хода решения задачи.

1. $(L \subset MN,\alpha) \& (K \subset NP,\alpha) \Longrightarrow (KL \subset MNP,\alpha)$;
2. $R \subset C'D', KL$;
3. $(R \subset C'D') \& (C'D' \subset C'CD) \Longrightarrow (R \subset C'CD)$;

4. $(R \subset KL) \& (KL \subset MNP) \Longrightarrow (R \subset MNP)$;

5. $(P \subset MNP, C'CD) \& (R \subset MNP, C'CD) \Longrightarrow (PR \subset MNP, C'CD)$;

6. $(X \subset C'C, PR) \Longrightarrow \underline{(X \subset MNP,\ C'C}$;);

7. $S \subset B'C', KL$;

8. $(S \subset B'C') \& (B'C' \subset B'BC) \Longrightarrow (S \subset B'BC)$;

9. $(S \subset KL) \& (KL \subset MNP) \Longrightarrow (S \subset MNP)$;

10. $(X \subset MNP, B'BC) \& (S \subset MNP, B'BC) \Longrightarrow (XS \subset MNP, B'BC)$;

11. $(Y \subset XS, B'B) \Longrightarrow (Y \subset MNP, B'B)$.

$MNPXY$ — искомое сечение.

При некотором расположении точек M, N, P (рис. 28) на боковых ребрах, когда отрезки MA, NE и PD мало отличаются по длине, след плоскости MNP на плоскости α может не получиться на чертеже (в рамках доски или листа бумаги), так как секущая плоскость в этом случае близка к параллельности с основной плоскостью. В этом случае задача может быть решена другим способом (способом внутреннего проектирования).

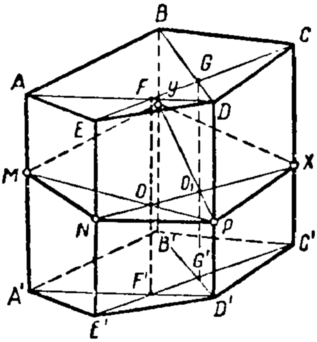


Рис. 28

Приведем и это решение.

1. $MP \subset AA'D'$; $FF' \subset AA'D', EE'C$; $O \subset MP, FF'$;

2. $(O \subset MNP,\ EE'C) \& (N \subset MNP, EE'C') \Longrightarrow (NO \subset MNP, EE'C')$;

3. $(X \subset NO, CC') \Longrightarrow (X \subset MNP, CC')$;

4. $NX \subset EE'C$; $GG' \subset EE'C', BB'D'$; $O_1 \subset NX, GG'$;

5. $(O_1 \subset MNP, BB'D') \& (P \subset MNP, BB'D') \Longrightarrow (O_1P \subset MNP, BB'D')$;

6. $(Y \subset PO_1, BB') \Longrightarrow (Y \subset MNP, BB')$

$MNPXY$ — искомое сечение.

08. Описанные выше два способа решения задачи построения сечения призмы плоскостью применимы и к аналогичной задаче, относящейся к пирамиде. Однако в этом случае целесообразно вместо параллельного проектирования на основную плоскость применить центральное проектирование с центром проекции в вершине пирамиды. Для этого достаточно знать лишь определение центральной проекции точки.

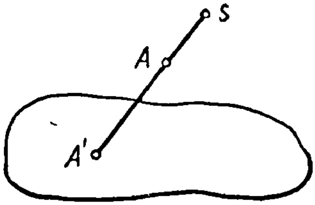


Рис. 29

Центральной проекцией какой-нибудь точки A пространства на плоскость α из центра S называется точка A' пересечения плоскости α с прямой SA (рис. 29).

09. Задача. *Построить сечение пятиугольной пирамиды плоскостью, заданной тремя точками, лежащими на боковых ребрах пирамиды* (рис. 30).

Выберем в качестве основной плоскости плоскость основания пирамиды, а в качестве центра проекции — вершину S пирамиды. Проекциями точек M, N, P на основную плоскость будут соответственно точки A, B, C.

1. $(K \subset MN,\alpha) \& (L \subset NP,\alpha) \Longrightarrow (KL \subset MNP,\alpha)$;
2. $R \subset CD,KL$;
3. $(R \subset KL) \& (KL \subset MNP) \Longrightarrow (R \subset MNP)$;
4. $(R \subset CD) \& (CD \subset SCD) \Longrightarrow (R \subset SCD)$;
5. $(P \subset MNP,SCD) \& (R \subset MNP,SCD) \Longrightarrow (PR \subset MNP,SCD)$;
6. $(X \subset PR,SD) \Longrightarrow (X \subset MNP,SD)$;

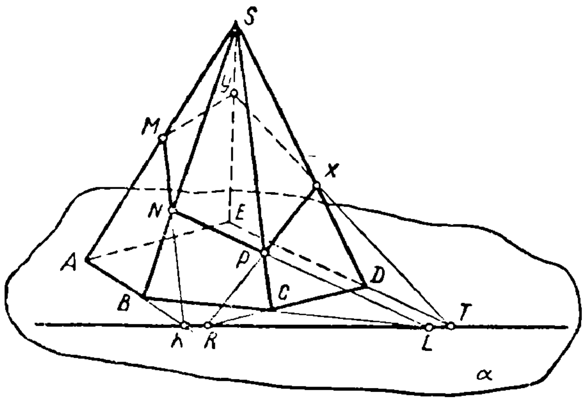


Рис. 30

7. $T \subset KL,DE$;
8. $(T \subset KL) \& (KL \subset MNP) \Longrightarrow (T \subset MNP)$;
9. $(T \subset DE) \& (DE \subset SDE) \Longrightarrow (T \subset SDE)$;
10. $(X \subset MNP,SDE) \& (T \subset MNP,SDE) \Longrightarrow (XT \subset MNP,SDE)$;
11. $(Y \subset XT,SE) \Longrightarrow (Y \subset MNP,SE)$.

Способом внутреннего проектирования задача решается совершенно аналогично задаче на построение сечения призмы плоскостью.

10. Мы рассмотрели несколько примеров решения позиционных задач на построение на проекционном чертеже.

Но на проекционном чертеже при определенных дополнительных условиях решаются и другие задачи, связанные с построением отрезков и углов наперед заданной величины, называемые м е т р и ч е с к и м и задачами.

Очевидно, целесообразно ознакомить учащихся и с решением некоторых простейших метрических задач на построение на проекционном чертеже, в частности задач, относящихся к плоским фигурам, расположенным в основной плоскости.

В связи с этим необходимо предварительно доказать две т е о р е м ы:

1) *Произвольный треугольник может служить параллельной проекцией треугольника любой наперед заданной формы.*

2) *Если даны изображения (с помощью параллельного проектирования) каких-нибудь трех точек плоской фигуры, не лежащих на одной прямой, то между точками плоскости фигуры и плоскости ее изображения (проекции) может быть установлено взаимно однозначное соответствие, позволяющее для любой точки плоскости фигуры найти ее изображение и, обратно, для любой точки плоскости изображения найти точку плоскости фигуры, изображением которой она является.*

Д о к а з а т е л ь с т в а этих теорем.

1) Пусть $A_1B_1C_1$ — произвольный треугольник. Докажем, что он может служить параллельной проекцией треугольника, подобного наперед заданному треугольнику ABC (именно это надо понимать под «проекцией треугольника наперед заданной формы»).

Построим треугольник $A_2B_2C_2$, подобный треугольнику ABC с коэффициентом подобия $k = \frac{A_1B_1}{AB}$ (рис. 31).

Отсюда получаем: $A_2B_2 = A_1B_1$.

Теперь докажем, что можно так расположить плоскость $A_2B_2C_2$ по отношению к плоскости $A_1B_1C_1$ и так выбрать направление проектирования, что $A_1B_1C_1$ будет параллельной проекции $A_2B_2C_2$.

Действительно, достаточно совместить A_2B_2 с A_1B_1 так, чтобы плоскости $A_2B_2C_2$ и $A_1B_1C_1$ не совпали, и если при этом выбрать направление C_2C_1 за направление проектирования, то треугольник $A_1B_1C_1$ окажется параллельной проекцией треугольника $A_2B_2C_2$.

Мы доказали, что произвольный треугольник ($A_1B_1C_1$) может служить параллельной проекцией треугольника наперед заданной формы.

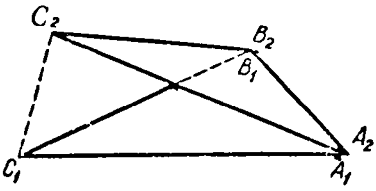


Рис. 31

2) Пусть заданы изображения A_1, B_1, C_1 точек A, B, C фигуры F плоскости α, не лежащих на одной прямой. Так как параллельное проектирование сохраняет прямолинейное расположение точек, то точки A_1, B_1, C_1 на плоскости изображения α_1 (рис. 32, *б*) также не лежат на одной п, імой, а в остальном, по первой теореме, мы можем их задать произвольно.

Пусть M — произвольная точка фигуры F (или вообще плоскости α). Найдем ее изображение на плоскости α_1 (в том параллельном проектировании, в котором точки A, B, C спроектировались в точки A_1, B_1, C_1, соответственно). Пусть N — точка пересечения MA и BC.

Для точки N находим на плоскости α_1 единственное изображение N_1, исходя из того, что:

а) $N_1 \subset B_1C_1$ (инвариантность прямолинейного расположения точек при параллельном проектировании),

б) $\frac{B_1N_1}{N_1C_1} = \frac{BN}{NC}$ (инвариантности отношения отрезков прямой).

Аналогично для точки M находим единственное изображение M_1 исходя из того, что: а) $M_1 \subset A_1N_1$ и б) $\frac{A_1N_1}{N_1M_1} = \frac{AN}{NM}$.

Обратная задача — по заданному изображению M_1 некоторой точки M плоскости α найти точку M — решается аналогично.

Мы доказали, что между точками плоскости α и точками плоскости α_1 с помощью параллельного проектирования устанавливается взаимно однозначное соответствие, которое вполне определяется

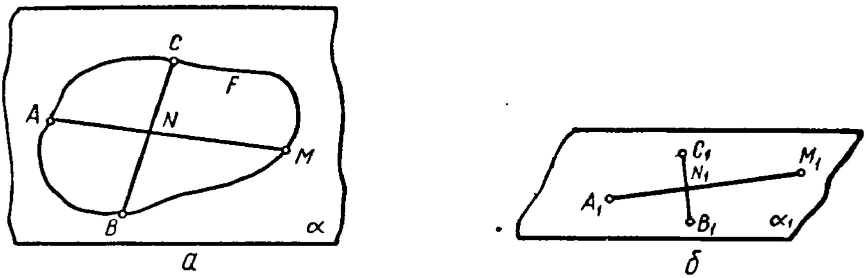


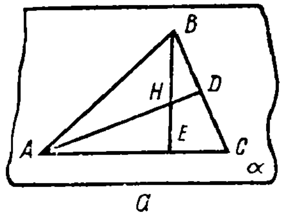
Рис. 32

заданием трех пар соответствующих точек при условии, что точки каждой тройки не лежат на одной прямой.

Это соответствие называется а ф ф и н н ы м.

Как уже известно из предыдущего, аффинное соответствие (или преобразование одной плоскости в другую) сохраняет инвариантными (неизменными): а) прямолинейное расположение точек, б) параллельность прямых, в) отношение отрезков одной прямой или параллельных прямых.

Используем эти свойства аффинного соответствия для решения некоторых метрических задач на плоскости изображения.



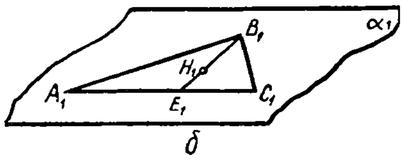


Рис. 33

11. Задача 1. *На изображении $A_1B_1C_1$ треугольника ABC найти изображение его ортоцентра* (рис. 33).

В качестве изображения треугольника ABC можно согласно доказанному выше взять произвольный треугольник $A_1B_1C_1$.

Проведем в треугольнике ABC две высоты, например AD и BE. Получим ортоцентр H. Изображение E_1 точки E найдем на A_1C_1, учитывая, что $\frac{A_1E_1}{E_1C_1} = \frac{AE}{EC}$. Изображение H_1 ортоцентра найдем на B_1E_1, учитывая, что $\frac{B_1H_1}{H_1E_1} = \frac{BH}{HE}$. (Можно найти изображение A_1D_1 второй высоты и H_1 как точку пересечения A_1D_1 и B_1E_1).

Задача 2. *Треугольник $A_1B_1C_1$ является изображением равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$). На плоскости изображения дана точка M_1. Изобразить перпендикуляр, опущенный из точки M (в плоскости ABC) на прямую AC.*

Так как треугольник ABC равнобедренный, то высота, опущенная на основание AC, является одновременно и медианой. Следовательно, основание высоты, как середина отрезка AC, переходит в середину отрезка A_1C_1, так как

$$\frac{A_1F_1}{F_1C_1} = \frac{AF}{FC} = 1.$$

Так как два перпендикуляра к одной прямой, лежащие с ней в одной плоскости, параллельны, а параллельность инвариантна относительно аффинного преобразования (или параллельного проектирования), то проводим $M_1N_1 \parallel B_1F_1$ и M_1N_1 — изображение перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую AC (рис. 34).

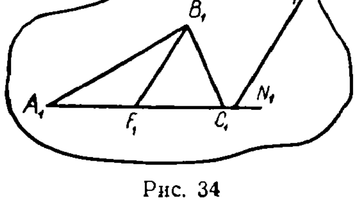


Рис. 34

Задача 3. *Точки A_1, B_1 и C_1 являются проекциями смежных вершин правильного шестиугольника на основную плоскость. Построить проекцию этого шестиугольника.*

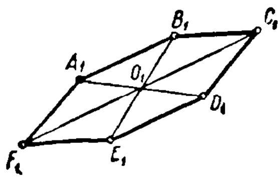


Рис. 35

Построим изображение O_1 центра O правильного шестиугольника (рис. 35). Так как $AO \parallel BC$ и $CO \parallel AB$, то и $A_1O_1 \parallel B_1C_1$ и $C_1O_1 \parallel A_1B_1$. Так как O — середина отрезков AD, BE, CF, то и O_1 будет серединой отрезков A_1D_1, B_1E_1 и C_1F_1.

Можно решать с учащимися метрические задачи на построение такого типа, как, например:

1. *Треугольник $A_1B_1C_1$ — изображение прямоугольного равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$). На плоскости изображения даны прямая M_1N_1 и вне ее точка P_1 (изображения прямой MN и точки P плоскости ABC оригинала). Построить изображение перпендикуляра, опущенного из точки P на прямую MN.*

2. *Параллелограмм $A_1B_1C_1D_1$ — изображение квадрата $ABCD$. Построить изображение прямоугольника, вписанного в этот квадрат и проходящего через данную точку на одной из его диагоналей.*

3. *Построение изображения окружности (эллипс) и свойство сопряженных диаметров.*

§ 4. Перпендикулярность в пространстве

а) Перпендикулярность двух прямых

01. Как известно, параллельность двух прямых в пространстве сводится к их параллельности на плоскости, так как всякие две параллельные прямые по самому определению параллельности лежат в одной плоскости.

Возникает вопрос: имеет ли место аналогичное положение в случае перпендикулярности двух прямых?

В планиметрии мы определяем перпендикулярные прямые как такие, которые образуют прямые углы. Если это же определение сохранить и в стереометрии, то из него не вытекает принадлежность этих прямых одной плоскости — скрещивающиеся прямые могут образовать прямые углы.

б) Перпендикулярность прямой и плоскости.

02. Определение. Прямая называется перпендикулярной к плоскости, если она перпендикулярна ко всем прямым, лежащим в этой плоскости.

Высказывание «прямая a перпендикулярна плоскости α» обозначим символом» «$a \perp \alpha$». Тогда наше определение может быть записано символически следующим образом:

$$(a \perp \alpha) \overset{Df}{\sim} (b) \, [(b \subset \alpha) \Longrightarrow (a \perp b)].$$

Если $a \perp \alpha$, то говорят также, что «плоскость α перпендикулярна прямой a» ($\alpha \perp a$).

Из определения перпендикулярности прямой и плоскости непосредственно вытекают следующие с в о й с т в а:

1. *Если прямая перпендикулярна плоскости, то она пересекает ее:* $(a \perp \alpha) \Longrightarrow (a \times \alpha)$

Действительно, $(a)\,(\alpha)\,[(a \subset \alpha) \vee (a \parallel \alpha) \vee (a \times \alpha)]$.

Но $[(a \subset \alpha) \vee (a \parallel \alpha)] \Longrightarrow (\exists b)\,[(b \subset \alpha) \,\&\, (b \parallel a)]$

или $[(a \subset \alpha) \vee (a \parallel \alpha)] \Longrightarrow (\exists b)\,[(b \subset \alpha) \,\&\, \overline{b \perp a}]$.

По принципу контрапозиции

$$\overline{(\exists b)}\,[(b \subset \alpha) \,\&\, \overline{b \perp a}] \Longrightarrow \overline{[(a \subset \alpha) \vee (a \parallel \alpha)]};$$

$$(b)\,\overline{[(b \subset \alpha) \,\&\, \overline{b \perp a}]} \Longrightarrow [\overline{a \subset \alpha} \,\&\, \overline{a \parallel \alpha}];$$

$$(b)\,[(b \subset \alpha) \Longrightarrow (b \perp a)] \Longrightarrow (a \times \alpha),\text{т. е. } (a \perp \alpha) \Longrightarrow (a \times \alpha).$$

2. *Если прямая параллельна перпендикуляру к плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости:*

$$(b \parallel a) \,\&\, (a \perp \alpha) \Longrightarrow (b \perp \alpha).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о: $(a \perp \alpha) \overset{Df}{\Longrightarrow} (c)\,[(c \subset \alpha) \Longrightarrow (a \perp c)]$;

$$(a \perp c) \,\&\, (b \parallel a) \Longrightarrow (b \perp c);$$

$$(c)\,[(c \subset \alpha) \Longrightarrow (a \perp c)] \Longrightarrow (c)\,[(c \subset \alpha) \Longrightarrow (b \perp c)];$$

$$(c)\,[(c \subset \alpha) \Longrightarrow (b \perp c)] \overset{Df}{\Longrightarrow} (b \perp \alpha).$$

3. *Если прямая перпендикулярна плоскости, то она перпендикулярна и всякой другой плоскости, параллельной первой:*

$$(a \perp \alpha) \,\&\, (\beta \parallel \alpha) \Longrightarrow (a \perp \beta).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о: $(a \perp \alpha) \overset{Df}{\Longrightarrow} (b)\,[(b \subset \alpha) \Longrightarrow (a \perp b)$;

$$(\beta \parallel \alpha) \,\&\, (b \subset \alpha) \Longrightarrow (\exists c)\,[(c \subset \beta) \,\&\, (c \parallel b)];$$

$$(a \perp b) \,\&\, (c \parallel b) \Longrightarrow (a \perp c);$$

$$(c)\,[(c \subset \beta) \Longrightarrow (a \perp c)] \overset{Df}{\Longrightarrow} (a \perp \beta).$$

03. Существование прямой, перпендикулярной плоскости в смысле данного выше определения, доказывается следующей т е о р е м о й:

Геометрическое место точек пространства, равноудаленных от двух данных точек, есть плоскость, перпендикулярная к прямой, проходящей через эти точки.

Приведем подробное д о к а з а т е л ь с т в о этой важной теоремы.

Пусть A и A' — данные точки, O — середина отрезка AA'. Так как $AO = OA'$, то точка O принадлежит искомому г.м.т.

Пусть β — произвольная плоскость, проходящая через AA'.

Приведем прямую m так, чтобы

$$(O \subset m) \& (m \subset \beta) \& (m \perp AA').$$

Пусть γ — произвольная плоскость, проходящая через AA' и отличная от β:

$$(AA' \subset \gamma) \& \overline{\gamma \equiv \beta}.$$

Проведем прямую n так, чтобы

$$(O \subset n) \& (n \subset \gamma) \& (n \perp AA').$$

Очевидно, все точки прямых m и n одинаково удалены от точек A и A', так как эти прямые — оси симметрии точек A и A' соответственно в плоскостях β и γ.

Таким образом, прямые m и n принадлежат искомому г.м.т. Прямые m и n определяют единственную плоскость:

$$(m \times n) \Longrightarrow (\exists \alpha)\ (m,\ n \subset \alpha).$$

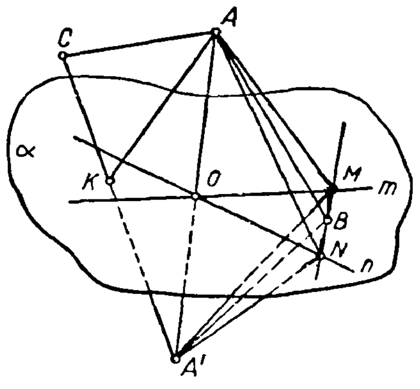


Рис. 36

Докажем, что плоскость α — искомое г.м.т. Для этого, очевидно, достаточно доказать, что: 1) всякая точка плоскости α одинаково удалена от точек A и A': $(B)\ [(B \subset \alpha) \Longrightarrow (BA = BA')]$ и 2) всякая точка, не принадлежащая плоскости α, неодинаково удалена от точек A и A':

1) Пусть B — произвольная точка плоскости α. Проведем через нее на плоскости α произвольную прямую, пересекающую прямые m и n соответственно в точках M и N. Соединим точки M, B и N с точками A и A' (рис. 36).

$$(AM = A'M) \& (AN = A'N) \& (MN = MN) \Longrightarrow (\triangle AMN = \triangle A'MN);$$

$$(\triangle AMN = \triangle A'MN) \Longrightarrow (\angle AMN = \angle A'MN);$$

$$(AM = A'M) \& (MB = MB) \& (\angle AMN = \angle A'MN) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (\triangle AMB = \triangle A'MB);$$

$$(\triangle AMB = \triangle A'MB) \Longrightarrow (AB = A'B).$$

2) Пусть C — произвольная точка пространства, не лежащая в плоскости α. Тогда точка C лежит или по той стороне от плоскости α, по какой лежит точка A, или по другой, т. е. по той, по которой лежит точка A', и только одно из двух (§ 1, 09. 2). В первом случае отрезок $A'C$ пересекает плоскость α, во втором—отрезок AC.

Докажем, что в первом случае $A'C > AC$ (аналогично доказывается, что во втором — $AC > A'C$).

Пусть отрезок $A'C$ пересекает плоскость α в точке K. Тогда $KA = KA'$:

$$(AK + KC > AC) \& (AK = A'K) \Longrightarrow (A'K + KC > AC),$$

$$\text{т.е. } A'C > AC.$$

Таким образом мы доказали, что плоскость α — искомое г.м.т. Остается доказать, что $\alpha \perp AA'$.

$$(B)\,[(B \subset \alpha) \Longrightarrow (BA = BA')]\,\&\,(OA = OA') \Longrightarrow (OB \perp AA'),$$

так как OB — ось симметрии точек A и A' в плоскости ABA'. Таким образом, прямая AA' перпендикулярна к любой прямой плоскости α, проходящей через точку O, но тогда она перпендикулярна вообще к любой прямой плоскости α. Действительно,

$$(a)\,[(a \subset \alpha) \Longrightarrow (\exists b)\,(b \subset \alpha)\,\&\,(O \subset b)\,\&\,(b \parallel a)];$$

$$(O \subset b)\,\&\,(b \subset \alpha) \Longrightarrow (AA' \perp b);$$

$$(AA' \perp b)\,\&\,(b \parallel a) \Longrightarrow (AA' \perp a);$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$(a)\,[(a \subset \alpha) \Longrightarrow AA' \perp a)] \overset{Df}{\Longrightarrow} (\alpha \perp AA').$$

Теорема доказана.

Полученная плоскость α — г.м.т., одинаково удаленных от точек A и A', называется плоскостью **симметрии** этих точек, а точки A и A' называются симметричными по отношению к этой плоскости.

03. 1. Здесь уместно обратить внимание учащихся на существующую аналогию между симметрией относительно прямой на плоскости (отражением) и симметрией относительно плоскости в пространстве.

На плоскости	В пространстве
Точки, симметричные относительно прямой (оси симметрии):	Точки, симметричные относительно плоскости (плоскости симметрии):
1) лежат на одном перпендикуляре к этой оси,	1) лежат на одном перпендикуляре к этой плоскости,
2) по разные стороны от нее и	2) по разные стороны от нее и
3) на равных расстояниях от нее.	3) на равных расстояниях от нее.

Легко устанавливается также, что плоскость симметрии есть г.м. прямых, перпендикулярных к данной прямой в данной ее точке.

04. Теорема 2. *Признак перпендикулярности прямой и плоскости.*

Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, принадлежащим некоторой плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости:

$$(m \times n) \& (m,n \subset \alpha) \& (l \perp m) \& (l \perp n) \Longrightarrow (l \perp \alpha).$$

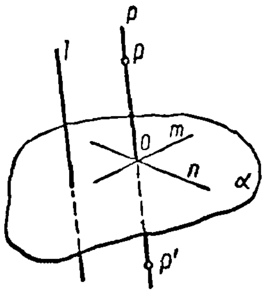


Рис. 37

Пусть $O \subset m,\ n$ (рис. 37).

Проводим прямую p так, чтобы:

$(O \subset p) \& (p \parallel l)$;

$(l \perp m) \& (l \perp n) \& (p \parallel l) \Longrightarrow (p \perp m) \& (p \perp n)$.

Пусть P и P' — точки прямой p такие, что $OP = OP'$. Тогда m и n — оси симметрии и по теореме 1α — плоскость симметрии этих точек, а, следовательно, $p \perp \alpha$:

$$(p \perp \alpha) \& (l \parallel p) \Longrightarrow (l \perp \alpha)$$

(2-е свойство перпендикуляра к плоскости, непосредственно вытекающее из определения).

04. 1. Мы доказали достаточный признак перпендикулярности прямой и плоскости. Этот признак является и необходимым.

Действительно, если прямая l перпендикулярна плоскости то, она по определению перпендикулярна к любой прямой этой плоскости и, следовательно, существуют две пересекающие прямые плоскости α, к которым она перпендикулярна.

05. Целесообразно решить несколько задач на доказательство, содействующих лучшему пониманию перпендикулярности прямой и плоскости.

Приведем два примера.

1. *Доказать, что прямая, перпендикулярная к двум сторонам треугольника, перпендикулярна и к третьей его стороне:*

$$(a \perp AB) \& (a \perp BC) \Longrightarrow (a \perp AC).$$

Доказательство: $(a \perp AB) \& (a \perp BC) \Longrightarrow \overline{a \subset ABC}$,

так как $(a \perp AB) \& (a \perp BC) \& (a \subset ABC) \Longrightarrow (AB \parallel BC)$,

но $(B \subset AB, BC) \Longrightarrow \overline{AB \nparallel BC}$,

$\overline{a \subset ABC} \& (a \perp AB) \& (a \perp BC) \Longrightarrow (a \perp ABC)$,

$(a \perp ABC) \& (AC \subset ABC) \Longrightarrow (a \perp AC)$.

2. *Если прямая a перпендикулярна прямой b, а прямая b перпендикулярна плоскости α, то прямая a параллельна или принадлежит плоскости α:*

$$(a \perp b) \& (b \perp \alpha) \Longrightarrow [(a \subset \alpha) \vee (a \parallel \alpha)].$$

Так как $(a)(\alpha)[(a \subset \alpha) \vee (a \parallel \alpha) \vee (a \times \alpha)]$,

то достаточно доказать, что $\overline{a \times \alpha}$.

Пусть $a \times \alpha$ и пусть $(a' \parallel a) \& (a' \times b)$.

Тогда $(a \times \alpha) \& (a' \parallel a) \Longrightarrow (a' \times \alpha)$.

Пусть $A \subset a', \alpha$, тогда $(b \perp \alpha) \& (AB \subset \alpha) \Longrightarrow (b \perp AB)$.

Мы получили в плоскости, определяемой прямыми a' и b, два перпендикуляра (a и AB) к одной и той же прямой b, проходящие через одну точку A.

06. Как мы видели выше, из перпендикулярности прямой и плоскости вытекает, что эта прямая пересекает плоскость; из того же, что прямая пересекает плоскость, не следует, что она перпендикулярна этой плоскости. Таким образом, прямая может пересекать плоскость и не быть к ней перпендикулярной:

$$(a \times \alpha) \& (\bar{b}) [(b \subset \alpha) \Longrightarrow (a \perp b)] \sim (a \times \alpha) \& \overline{(a \perp \alpha)}.$$

В таком случае прямая a называется н а к л о н н о й к плоскости α.

Если через произвольную точку пространства вне плоскости α провести всевозможные прямые, то в полученной связке прямых:

а) одна и только одна перпендикулярна к плоскости α,

б) бесконечно много прямых, параллельных плоскости α (эти прямые лежат в плоскости, параллельной α), и

в) бесконечно много прямых являются наклонными к этой плоскости.

Ввиду того что в последующих теоремах о перпендикулярах и наклонных идет речь об отрезках этих прямых, определяемых данной точкой и точкой пересечения с плоскостью, целесообразно в дальнейшем различить термин «перпендикуляр» от термина «перпендикулярная прямая», «наклонная» от «наклонная прямая», понимая под термином «перпендикуляр» («наклонная») отрезок перпендикулярной (наклонной) прямой от данной точки до точки пересечения ее с плоскостью.

Точка пересечения перпендикуляра (наклонной) с плоскостью называется о с н о в а н и е м перпендикуляра (наклонной).

Отрезок BC (рис. 38), соединяющий основание B перпендикуляра с основанием C наклонной, проведенных через одну и ту же точку A, является ортогональной проекцией наклонной AC на плоскость α и называется просто п р о е к ц и е й наклонной.

Высказывание «BC — проекция наклонной AC на плоскость α» обозначим символом $BC = \text{Пр}_\alpha (AC)$.

Относительно перпендикуляра и наклонных, проведенных из одной и той же точки к плоскости, доказывается теорема, аналогичная планиметрической теореме о перпендикуляре и наклонных, проведенных из данной точки к прямой.

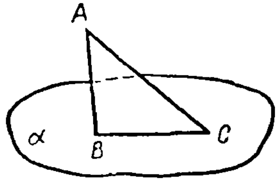


Рис. 38

07. Важную роль в приложении геометрической теории к решению задач играет теорема о трех перпендикулярах:

Прямая, принадлежащая плоскости и перпендикулярная к наклонной, перпендикулярна и к проекции наклонной на эту плоскость.

07. 1. В учебнике А. П. Киселева[1] в формулировку этой теоремы включалось лишнее условие, ограничивающее ее применимость, а именно требовалось, чтобы прямая, принадлежащая плоскости и перпендикулярная наклонной, проходила через основание наклонной. Изучая теорему в такой формулировке, учащиеся не видят возможности ее применения в тех ситуациях, где это лишнее условие не выполняется, а такие ситуации часто встречаются в задачах. Например, задачи:

1. *В правильной четырехугольной пирамиде боковое ребро перпендикулярно непересекающей ее диагонали основания. Доказать.*
2. *В основании призмы правильный треугольник. Одна из вершин верхнего основания проектируется в центр нижнего основания. Доказать, что одна из боковых граней этой призмы — прямоугольник и др.*

Эти задачи очень просто решаются применением теоремы о трех перпендикулярах. Однако опыт показывает, что учащиеся, знающие эту теорему в формулировке Киселева, затрудняются решить эти и другие аналогичные задачи именно потому, что в возникающих в этих задачах ситуациях не выполняется указанное выше лишнее, несущественное условие.

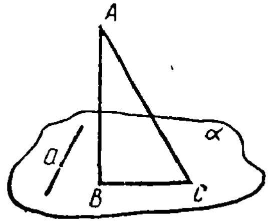


Рис. 39

07. 2. В учебнике А. П. Киселева дано искусственное доказательство теоремы о трех перпендикулярах, использующее некоторые теоремы из планиметрии. Анализ этой теоремы не приводит нас к этому доказательству.

С помощью анализа находим простой путь доказательства. Действительно, для того чтобы доказать, что $a \perp BC$ (рис. 39) очевидно, достаточно доказать, что $a \perp ABC$. По признаку перпендикулярности прямой и плоскости достаточно до-

[1] А. П. Киселев, Геометрия, ч. II, М., изд. «Просвещение», 1966.

казать, что прямая a перпендикулярна к двум пересекающимся прямым плоскости ABC. По условию $a \perp AC$, и так как $(AB \perp \perp \alpha) \& (a \subset \alpha) \Longrightarrow (AB \perp a)$, мы получаем, что прямая a перпендикулярна к двум пересекающимся прямым (AC и AB) плоскости ABC.

Ниже приводится символическая запись формулировки и доказательства теоремы:

$$(a \subset \alpha) \& (BC \equiv Пр_\alpha (AC)) \& (a \perp AC) \Longrightarrow (a \perp BC).$$

Доказательство:

(1) $(BC \equiv Пр_\alpha (AC)) \Longrightarrow (AB \perp \alpha)$;	(Определение перпендикулярности прямой и плоскости)
(2) $(AB \perp \alpha) \& (a \subset \alpha) \Rightarrow (a \perp AB)$;	
(3) $(a \perp AB) \& (a \perp AC) \Longrightarrow (a \perp ABC)$;	(Признак перпендикулярности прямой и плоскости)
(4) $(B \subset ABC) \& (C \subset ABC) \Longrightarrow (BC \subset ABC)$;	(Аксиома)
(5) $(a \perp ABC) \& (BC \subset ABC) \Longrightarrow (a \perp BC)$.	(Определение перпендикулярности прямой и плоскости)

Совершенно аналогично доказывается и **обратная теорема**:

Прямая, принадлежащая плоскости и перпендикулярная к проекции наклонной, перпендикулярна и к самой наклонной.

07. 3. Ввиду того что условие прямой теоремы представляет собой конъюнкцию элементарных высказываний, то возможны и другие обратные теоремы, отличные от сформулированной выше. Рассмотрим одну из них, представляющую особый интерес. Поменяем местами в формулировке прямой теоремы заключение и первый член конъюнкции, выражающей условие. Получим следующее высказывание: $(a \perp BC) \& (BC \equiv \text{Пр}_a (AC)) \& (a \perp AC) \Longrightarrow \Longrightarrow (a \subset \alpha)$. («Если прямая перпендикулярна наклонной и ее проекции, то она принадлежит плоскости проекции»). Это высказывание не выражает теоремы, т. е. не является истинным. Из условия полученной импликации вытекает более слабое следствие: $(a \parallel \alpha) \vee \vee (a \subset \alpha)$ (если понимать параллельность в более общем смысле, включающем и принадлежность, то это следствие запишется просто: $a \parallel \alpha$).

Действительно,

(1) $(a \perp BC) \& (a \perp AC) \Longrightarrow (a \perp ABC)$;

(2) $(a \perp ABC) \& (AB \subset ABC) \Longrightarrow (a \perp AB)$;

(3) $(a \perp AB) \& (AB \perp \alpha) \Longrightarrow [(a \parallel \alpha) \vee (a \subset \alpha)]$.

Эта теорема наводит нас на мысль, что и прямая теорема может быть обобщена. Условие $a \subset \alpha$ может быть заменено условием $(a \parallel \alpha) \vee (a \subset \alpha)$ (т. е. параллельностью в широком смысле).

07. 4. Из теоремы о трех перпендикулярах по принципу расширенной контрапозиции вытекают некоторые следствия:

1. $[(a \parallel \alpha) \vee (a \subset \alpha)] \,\&\, [BC \equiv \text{Пр}_\alpha (AC)] \,\&\, \overline{a \perp BC} \Longrightarrow \overline{a \perp AC}$;

2. $\overline{a \perp BC} \,\&\, [BC \equiv \text{Пр}_\alpha (AC)] \,\&\, (a \perp AC) \Longrightarrow \overline{(a \parallel \alpha) \vee (a \subset \alpha)}$

или $\overline{a \perp BC} \,\&\, [BC \equiv \text{Пр}_\alpha (AC)] \,\&\, (a \perp AC) \Longrightarrow (a \times \alpha)$;

3. $[(a \parallel \alpha) \vee (a \subset \alpha)] \,\&\, (a \perp AC) \,\&\, \overline{a \perp BC} \Longrightarrow \overline{BC \equiv \text{Пр}_\alpha (AC)}$.

08. Понятие угла между прямой и плоскостью может рассматриваться в следующем порядке:

1) прежде всего доказывается, что острый угол между наклонной и ее проекцией на плоскость меньше любого из углов, образуемых этой наклонной с прямыми, принадлежащими этой плоскости;

2) этот острый угол принимается, по определению, за угол наклонной с плоскостью;

3) понятие угла наклонной с плоскостью расширяется до понятия угла прямой с плоскостью:

$$\angle(a,\alpha) = \begin{cases} 0, \text{ если } (a \parallel \alpha) \vee (a \subset \alpha), \\ \dfrac{\pi}{2}, \text{ если } a \perp \alpha, \\ \angle(a\,a'), \text{ где } a' \equiv \text{Пр}_\alpha (a), \angle(aa') < \dfrac{\pi}{2}, \\ \text{если } (a \times \alpha) \,\&\, \overline{a \perp \alpha}. \end{cases}$$

09. При рассмотрении двух пересекающихся плоскостей может применяться аналогия с двумя пересекающимися прямыми.

Две пересекающиеся прямые a и b (рис. 40) делят плоскость (множество точек плоскости) на четыре области, каждая из которых называется углом (или плоским углом). Полупрямые, ограничивающие каждую область, называются сторонами угла, а их общее начало — вершиной угла.	Две пересекающиеся плоскости (рис. 41) делят пространство (множество точек пространства) на четыре области, каждая из которых называется двугранным углом. Полуплоскости, ограничивающие каждую область, называются гранями, а их общее ребро — ребром двугранного угла.
Угол, образованный полупрямыми a', b' с общим началом O, обозначим символом $\angle a'Ob'$. Если полупрямые, образованные точкой O на прямой a, обозначим через a' и a'', на прямой b — через b' и	Двугранный угол, образованный полуплоскостями α', β' с общим ребром l, обозначим символом $\angle \alpha' l \beta'$. Если полуплоскости, образованные прямой l на плоскости α обозначим через α' и α'', на пло-

b'', то четыре угла, образованные двумя пересекающимися прямыми a и b, обозначатся символами: $\angle a'Ob'$; $\angle a'Ob''$; $\angle a''Ob'$; $\angle a''Ob''$.

Если два угла имеют общую сторону, а две другие стороны являются полупрямыми одной прямой, то эти углы называются с м е ж н ы м и. Например, $\angle a'Ob'$ и $\angle a'Ob''$, $\angle a'Ob'$ и $\angle a''Ob'$ — смежные углы.

Равные смежные углы называются п р я м ы м и у г л а м и.

Прямые, образующие прямые углы, называются перпендикулярными.

скости β — через β' и β'', то четыре двугранных угла, образованные двумя пересекающимися плоскостями α и β, обозначатся символами: $\angle \alpha' l \beta'$; $\angle \alpha' l \beta''$; $\angle \alpha'' l \beta'$; $\angle \alpha'' l \beta$.

Если два двугранных угла имеют общую грань, а две другие грани являются полуплоскостями одной плоскости, то эти двугранные углы называются с м е ж н ы м и. Например, $\angle \alpha' l \beta'$ и $\angle \alpha' l \beta''$, $\angle \alpha'' l \beta'$ и $\angle \alpha'' l \beta''$ — с м е ж н ы е д в у г р а н н ы е у г л ы. Равные двугранные смежные углы называются п р я м ы м и д в у г р а н н ы м и у г л а м и. (Под равными углами понимают такие, которые совпадают, если совместить их ребра и одну пару граней так, чтобы вторые грани лежали по одну сторону от совмещенных.)

Плоскости, образующие прямые двугранные углы, называются перпендикулярными.

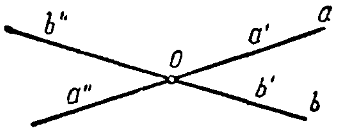


Рис. 40

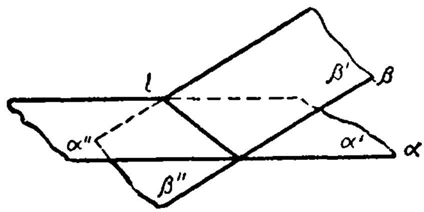


Рис. 41

Каждому двугранному углу сопоставляется угол, называемый линейным углом этого двугранного угла, следующим образом:

Л и н е й н ы м у г л о м д в у г р а н н о г о у г л а называется угол, получаемый пересечением данного двугранного угла плоскостью, перпендикулярной к ребру.

Иначе говоря, линейный угол двугранного угла образован двумя лучами, перпендикулярными к ребру двугранного угла в какой-нибудь его точке и лежащими в гранях этого двугранного угла.

Доказывается, что величина линейного угла не зависит от выбора его вершины на ребре двугранного угла.

Из определений линейного угла и равенства двугранных углов вытекает, что равным двугранным углам соответствуют равные линейные углы, смежным двугранным углам соответствуют смежные линейные углы (если они образованы пересечением смежных двугранных углов одной плоскостью, перпендикулярной к ребру). Следовательно, и прямым двугранным углам соответствуют прямые линейные углы, и обратно.

Это соответствие между двугранными и линейными углами позволяет свести сравнение двугранных углов к сравнению соответствующих им линейных углов.

в) Перпендикулярные плоскости

09. 1. В школьной практике встречаются два эквивалентных определения перпендикулярных плоскостей.

1. В одном определении исходят, как мы это сделали выше, из понятия равных смежных двугранных углов, причем это понятие определяется без использования понятия линейного угла. В описанном выше порядке изложения понятие линейного угла вводится после определения прямого двугранного угла, затем устанавливается, что прямому двугранному углу соответствует прямой линейный угол.

2. Возможен и иной порядок изложения, при котором понятие линейного угла вводится сразу же после определения двугранного угла, а затем определяются прямые двугранные углы как такие, линейные углы которых прямые.

Нетрудно убедиться в том, что и из этого определения вытекает как следствие данное выше определение прямого двугранного угла.

Таким образом, эти определение эквивалентны.

При любом порядке изложения до изучения признака перпендикулярности плоскостей учащиеся должны знать о перпендикулярных плоскостях следующее:

1) они образуют прямые двугранные углы;

2) соответствующие этим двугранным углам линейные углы также прямые.

10. Рассмотрим признак перпендикулярности двух плоскостей:

Для того чтобы две плоскости были перпендикулярны между собой, необходимо и достаточно, чтобы одна из них проходила через перпендикуляр к другой[1].

10. 1. Так как формулировка теоремы содержит выражение «необходимо и достаточно», ее логическая структура представляет собой конъюнкцию двух импликаций — типа $(X \Longrightarrow Y)$ & $(Y \Longrightarrow X)$, или, что то же, эквивалентность $X \sim Y$.

В нашем конкретном случае X обозначает высказывание $\alpha \perp \beta$,

$$aY — (\exists l)(l \subset \alpha) \& (l \perp \beta) \vee (\exists m)(m \subset \beta) \& (m \perp \alpha).$$

---

[1] Этот признак иногда принимается за определение, т. е. две плоскости считаются перпендикулярными, если одна проходит через перпендикуляр к другой.

Доказательство признака распадается на доказательство его необходимости, т. е. истинности импликации $X \Longrightarrow Y$, и его достаточности, т. е. истинности импликации $Y \Longrightarrow X$.

При доказательстве необходимости достаточно доказать, что одна какая-нибудь из двух плоскостей α или β проходит через перпендикуляр к другой, так как из истинности высказывания $(\exists l)\ (l \subset \alpha)\ \&\ (l \perp \beta)$ следует истинность и всей дизъюнкции Y.

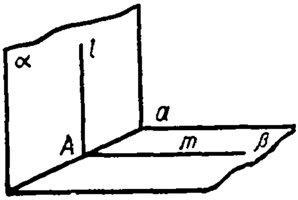


Рис. 42

На том же основании при доказательстве достаточности признака истинность импликации

$$[(\exists l)(l \subset \alpha)\ \&\ (l \perp \beta) \vee (\exists m)(m \subset \beta)\ \&\ (m \perp \alpha)] \Longrightarrow (\alpha \perp \beta)$$

вытекает из истинности одной из импликаций:

$$(\exists l)\ (l \subset \alpha)\ \&\ (l \perp \beta) \Longrightarrow (\alpha \perp \beta) \text{ или}$$

$$(\exists m)\ (m \subset \beta)\ \&\ (m \perp \alpha) \Longrightarrow (\alpha \perp \beta).$$

Поэтому достаточно доказать одну из этих импликаций.

10. 2. Доказательство (рис. 42).

необходимости

Дано: $\alpha \perp \beta$.

Доказать: $(\exists l)\ (l \subset \alpha)\ \&\ (l \perp \beta)$.

1. Проводим прямую l так, что $(l \subset \alpha)\ \&\ (l \perp a)$.

Пусть: $A \subset a,\ l$, где $a \subset \alpha\beta$.

2. Проводим прямую m так, что $(A \subset m)\ \&\ (m \subset \beta)\ \&\ (m \perp a)$.

3. $\angle lAm$ — линейный угол двугранного угла $\angle \alpha a \beta$, и так как $\alpha \perp \beta$, то

$\angle lAm = \dfrac{\pi}{2}$, т.е. $l \perp m$.

4. $(l \perp a)\ \&\ (l \perp m)\ \&\ (a, m \subset \beta)\ \&$
$\&\ (a \times m) \Longrightarrow l \perp \beta$

(по признаку перпендикулярности прямой и плоскости)

Мы доказали, что
$(\alpha \perp \beta) \Longrightarrow (\exists l)\ (l \subset \alpha)\ \&\ (l \perp \beta)$.

достаточности

Дано: $(\exists l)\ (l \subset \alpha)\ \&\ (l \perp \beta)$.

Доказать: $\alpha \perp \beta$.

1. $(l \perp \beta)\ \&\ (a \subset \beta) \Longrightarrow (l \perp a)$.

2. $(l, a \subset \alpha)\ \&\ \overline{l \parallel a} \Longrightarrow (l \times a)$.

Пусть $A \subset l, a$.

3. Проводим $m: (A \subset m)\ \&\ (m \subset \beta)\ \&$
$\&\ (m \perp a)$, $\angle lAm$ — линейный угол двугранного угла $\alpha a \beta$.

4. $(l \perp \beta)\ \&\ (m \subset \beta) \Longrightarrow (l \perp m)$

$$\angle lAm = \frac{\pi}{2}.$$

5. $\left(\angle lAm = \dfrac{\pi}{2}\right) \Longrightarrow (\alpha \perp \beta)$.

Мы доказали истинность импликации:
$(\exists l)\ (l \subset \alpha)\ \&\ (l \perp \beta) \Longrightarrow (\alpha \perp \beta)$.

10. 3. Рассмотрим отдельно теорему, выражающую необходимость признака: $(\alpha \perp \beta) \Longrightarrow (\exists l)\ (l \subset \alpha)\ \&\ (l \perp \beta)$.

Заключение этой теоремы представляет собой конъюнкцию двух элементарных высказываний. Если перенести одно какое-либо из этих элементарных высказываний в условие, получим ложные предложения:

$$(\alpha \perp \beta)\ \&\ (l \subset \alpha) \Longrightarrow (l \perp \beta), \tag{1}$$

$$(\alpha \perp \beta)\ \&\ (l \perp \beta) \Longrightarrow (l \subset \alpha). \tag{2}$$

Из $(\alpha \perp \beta)\ \&\ (l \perp \beta)$ следует $(l \subset \alpha) \vee (l \parallel \alpha)$, или же если понимать параллельность в широком смысле, включающем принадлежность, то имеет место теорема:

$$(\alpha \perp \beta)\ \&\ (l \perp \beta) \Longrightarrow (l \parallel \alpha).$$

Но само высказывание «$l \subset \alpha$» имеет сложную логическую структуру и может быть представлено в виде конъюнкции:

$$(\exists A)\ (\exists B)\ (A \subset l, \alpha)\ \&\ (B \subset l, \alpha).$$

Из теоремы $(\alpha \perp \beta) \Longrightarrow (\exists l)\ \ (l \subset \alpha)\ \&\ (l \perp \beta)$

вытекает следствие

$$(\alpha \perp \beta)\ \&\ (\exists l)\ \ (\exists A)\ \ (A \subset l, \alpha)\ \&\ (l \perp \beta) \Longrightarrow (\exists B)\ \ (B \subset l, \alpha)$$

или же, учитывая эквивалентность,

$$(\exists A)\ \ (\exists B)\ \ (A \subset l, \alpha)\ \&\ (B \subset l, \alpha) \sim (l \subset \alpha)$$

$$(\alpha \perp \beta)\ \&\ (\exists l)\ \ (\exists A)\ \ (A \subset l, \alpha)\ \&\ (l \perp \beta) \Longrightarrow (l \subset \alpha).$$

11. Рассмотрим вопрос о введении понятия многогранного угла.

При введении понятия двугранного угла мы исходили из того, что две пересекающиеся плоскости делят пространство на 4 области, каждую из которых мы называли двугранным углом.

Если пересечь две пересекающиеся плоскости третьей, то пространство (множество точек пространства) разделится на 8 областей, каждую из которых называют **т р е х г р а н н ы м** углом.

Рассмотрим один из трехгранных углов (рис. 43), образованных тремя плоскостями α, β и γ, попарно пересекающимися по прямым a, b и c: $a \subset \beta, \gamma$; $b \subset \alpha, \gamma$, $c \subset \alpha, \beta$. В этом случае три плоскости имеют одну-единственную общую точку O $(O \subset a, b, c)$ (§ 2. 20).

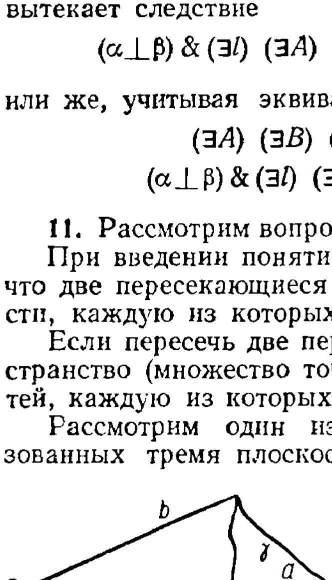


Рис. 43

Этот трехгранный угол обозначим символом $Oabc$. Точка O называется его **в е р ш и н о й**, полупрямые a, b, c — его **р е б р а м и**, а плоские углы $\angle aOb$, $\angle bOc$, $\angle cOa$ — его **г р а н я м и**.

Таким образом, приходим к определению трехгранного угла как области пространства (подмножества множества точек пространства), ограниченной тремя плоскими углами, имеющими общую вершину и попарно общие стороны.

От этого определения трехгранного угла переходим к аналогичному определению многогранного угла.

Определяя выпуклый и невыпуклый многогранные углы и показывая модели таких углов, необходимо подчеркнуть аналогию с выпуклыми и невыпуклыми многоугольниками. Эта аналогия становится более наглядной, если сопоставить каждому многогранному углу многоугольник, получаемый при пересечении этого многогранного угла плоскостью, не проходящей через его вершину и не параллельной ни одной грани. Выпуклому многогранному углу будет соответствовать выпуклый многоугольник.

Приведем весьма простое построение теории многогранных углов, состоящее из четырех предложений.

Лемма. *Если из точки P вне плоскости α проведены две наклонные PA и PB и перпендикуляр PP' к плоскости так, что углы при основании $\triangle APB$ ($\angle PAB$ и $\angle PBA$) острые, то $\angle AP'B > \angle APB$, т. е. ортогональная проекция ($\angle AP'B$) угла APB больше этого угла.*

Доказательство. Опустим $PK \perp AB$ (рис. 44), тогда и $P'K \perp AB$ (теорема о трех перпендикулярах).

Повернем треугольник APB вокруг AB до совмещения плоскости APB с плоскостью α, причем так, чтобы точка P упала по ту же сторону от AB, что и P'.

Так как $PK \perp AB$ и $P'K \perp AB$, то KP пройдет по KP', и, так как $PK > P'K$ (гипотенуза больше катета), точка P' окажется между точками K и P (рис. 45).

$\angle KP'A > \angle KPA$, $\angle KP'B > \angle KPB$ (внешний угол треугольника больше внутреннего, с ним не смежного).

Следовательно, $\angle AP'B > \angle APB$ ч. т. д.

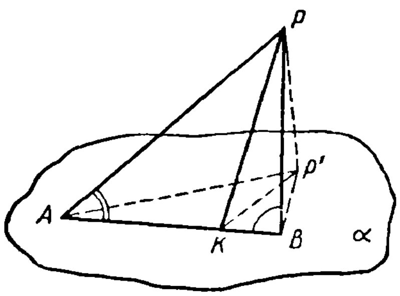


Рис. 44

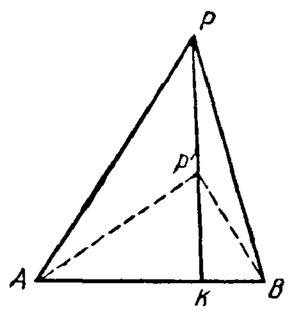


Рис. 45

Теорема 1. *Сумма плоских углов трехгранного угла меньше 2π.*

Доказательство.

Возьмем трехгранный угол $SABC$ (рис. 46), у которого все плоские углы тупые.

Если теорема верна для такого трехгранного угла, то она верна для любого трехгранного угла.

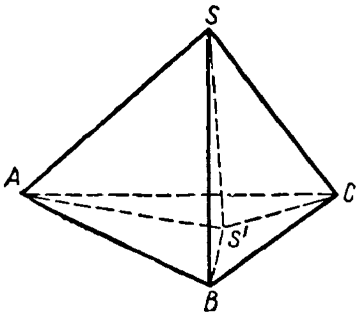


Рис. 46

Спроектируем ортогонально его вершину S на произвольную плоскость ABC, не проходящую через S и пересекающую все ребра трехгранного угла.

Так как все плоские углы трехгранного угла ($\angle ASB$, $\angle BSC$, $\angle ASC$) тупые, то углы при основаниях в треугольниках ASB, BSC, ASC острые и по доказанной лемме:

$\angle AS'B > \angle ASB$,

$\angle BS'C > \angle BSC$,

$\angle AS'C > \angle ASC$,

и, сложив почленно эти неравенства, получаем:

$\angle AS'B + \angle BS'C + \angle AS'C > \angle ASB + \angle BSC + \angle ACS$.

Но $\angle AS'B + \angle BS'C + \angle AS'C = 2\pi$,

следовательно,

$\angle ASB + \angle BSC + \angle ASC < 2\pi$.

Теорема доказана.

Теорема 2. *Сумма двух плоских углов трехгранного угла больше, а разность меньше третьего плоского угла.*

Доказательство. Эта теорема непосредственно следует из предыдущей.

Действительно, согласно теореме 1 имеем (рис. 47):

$\angle a'Sb + \angle bSc + \angle a'Sc < 2\pi$, (1)

$\angle aSb + \angle a'Sb = \pi$, (2)

$\angle aSc + \angle a'Sc = \pi$. (3)

Из (1), (2) и (3) получаем:

$\pi - \angle aSb + \angle bSc + \pi - \angle aSc < 2\pi$,

или $\angle bSc < \angle aSb + \angle aSc$,

или же $\angle aSb > \angle bSc - \angle aSc$.

Аналогичными рассуждениями можем получить такие же соотношения для любого из плоских углов трехгранного угла.

Теорема 3. *Сумма плоских углов выпуклого многогранного угла меньше 2π.*

Эту теорему докажем методом математической индукции.

Обозначим сумму плоских углов выпуклого n-гранного угла через S_n.

Тогда по теореме 1 имеем: $S_3 < 2\pi$.

Допустим, что $S_n < 2\pi$ (рис. 48).

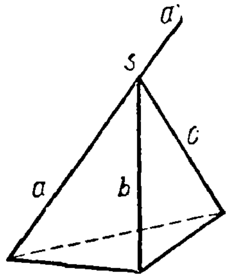


Рис. 47

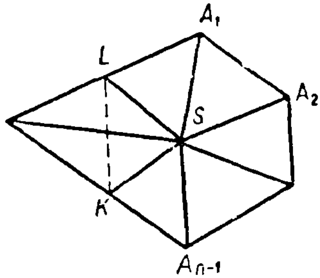


Рис. 48

Возьмем на двух смежных сторонах выпуклого n-угольника $A_1A_2 \ldots A_{n-1}A_n$, например на $A_{n-1}A_n$ и A_nA_1, две произвольные точки K и L проведем плоскость SKL.

Эта плоскость разбивает данный выпуклый n-гранный угол на трехгранный угол $SKLA_n$ и выпуклый $(n+1)$-гранный угол $SLA_1A_2 \ldots A_{n-1}K$.

Получаем:

$$S_{n+1} = S_n - \angle KSA_n - \angle A_nSL + \angle KSL = S_n -$$
$$-(\angle KSA_n + \angle A_nSL - \angle KSL)$$

по теореме 2 в трехгранном угле SKA_nL;
$\angle KSL < \angle KSA_n + \angle A_nSL$, т.е. $\angle KSA_n + \angle A_nSL - \angle KSL > 0$. Поэтому $S_{n+1} < S_n$, и так как по предположению $S_n < 2\pi$, то и $S_{n+1} < 2\pi$. Теорема доказана.

§ 5. Многогранники и круглые тела

01. Когда определяют какую-нибудь плоскую фигуру, говорят обычно, что она представляет собой «часть плоскости, ограниченную какой-то линией»; например, многоугольник — часть плоскости, ограниченная замкнутой линией.

Под «частью плоскости» надо понимать подмножество множества точек плоскости. Таким образом, всякая плоская геометрическая фигура понимается как подмножество множества точек плоскости, даже если это явно не высказывается.

Разумеется, в процессе преподавания несбходимо подчеркивать эту точку зрения.

Аналогично, под геометрическим телом надо понимать какое-то подмножество множества точек пространства, ограниченное некоторой поверхностью, и геометрические тела различаются именно по виду этой ограничивающей их поверхности.

Например, многогранник отличается от других геометрических тел тем, что его поверхность состоит из одних многоугольников.

В процессе обучения целесообразно разъяснить, в каком смысле можно говорить о многограннике как о пространственном аналоге многоугольника, в чем сходство и различие между ними.

М н о г о у г о л ь н и к — подмножество точек плоскости, ограниченное замкнутой ломаной линией.	М н о г о г р а н н и к — подмножество точек пространства, ограниченное замкнутой поверхностью из многоугольников.

Замкнутая поверхность, состоящая из многоугольников, представляет собой «ломаную» поверхность, напоминающую ломаную линию на плоскости.

Надо отметить и важное различие между многоугольником и многогранником.

Многоугольник — двумерный образ, у него имеются вершины и стороны (нульмерные и одномерные элементы); многогранник — трехмерный образ, у него имеются вершины, ребра и грани (нульмерные, одномерные и двумерные элементы).

Аналогия может быть использована и для определения выпуклого многогранника.

Многоугольник в ы п у к л ы й, если он лежит по одну сторону от прямой, которой принадлежит любая его сторона. («По одну сторону от прямой» означает «в одной полуплоскости относительно прямой».)	Многогранник в ы п у к л ы й, если он лежит по одну сторону от плоскости любой его грани. («По одну сторону от плоскости» означает «в одном полупространстве относительно плоскости».)

Весьма наглядно можно иллюстрировать выпуклость многогранника: надо показать, что выпуклый многогранник можно любой своей гранью поставить на стол (на плоскую поверхность), невыпуклый же многогранник нельзя любой своей гранью поставить на стол.

Возможно и другое определение выпуклости, причем одно и то же для многоугольника и для многогранника, однако менее наглядное, чем приведенное выше: многоугольник (многогранник) называется выпуклым, если отрезок, соединяющий любые две его точки, целиком лежит внутри него).

02. Виды многогранников, которые детально изучаются в школе (призмы и пирамиды), могут по-разному определяться.

Так, например, призма может определяться как выпуклый многогранник, у которого две грани (основания) — равные многоугольники с соответственно параллельными сторонами, а остальные грани (боковые) — параллелограммы, попарно пересекающиеся по параллельным прямым.

Известно, что в учебнике Киселева[1] дано ошибочное определение призмы. В нем отсутствует признак попарного пересечения боковых граней по параллельным прямым, в силу чего под это определение подходят и такие выпуклые многогранники, которые вовсе не являются призмами, например ромбоидальный додекаэдр (рис. 49).

П и р а м и д а может определяться как выпуклый многогранник, у которого одна грань (основание) — многоугольник, а другие (боковые) — треугольники, имеющие общую вершину.

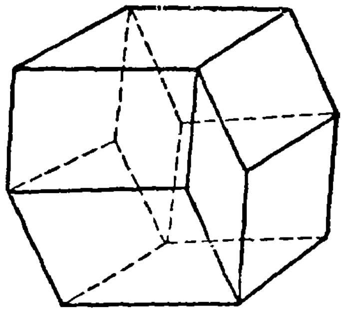


Рис. 49

Однако эти определения призмы и пирамиды не являются наилучшими. Возможен и методически целесообразнее совершенно иной подход к определению этих видов многогранников. Этот подход позволяет единым методом определять призму, пирамиду, цилиндр и конус.

Прежде всего дается генетическое определение одноименных поверхностей (призматической, пирамидальной, цилиндрической и конической).

Рассмотрим на плоскости α некоторую линию ($l \subset \alpha$) и прямую a, пересекающую эту плоскость ($a \times \alpha$).

Через произвольную точку M линии l проводим прямую m, параллельную прямой a ($m \parallel a$).

Если перемещать точку M (на линии l) вместе с прямой m так, чтобы в любом своем положении она оставалась параллельной прямой a, то, когда точка M описывает линию l, прямая m описывает некоторую поверхность, для которой линия l называется н а п р а в л я ю щ е й, а прямая m — о б р а з у ю щ е й (вместо того чтобы перемещать прямую m, можно провести через все точки линии прямые, параллельные прямой a, и г.м. т.,принадлежащих всем этим прямым, и есть та поверхность, которая описывается прямой m — образующей).

Вид этой поверхности зависит от вида направляющей l.

Линия l может быть: а) прямой, б) ломаной, в) кривой.

а) Если направляющая l — прямая (рис. 50, a), то образующая m описывает плоскость (определяемую двумя пересекающимися прямыми l и m).

б) Поверхность, описываемая образующей m, если направляю-

[1] А. П. К и с е л е в, Геометрия, ч. II. Стереометрия, М., изд. «Просвещение», 1966.

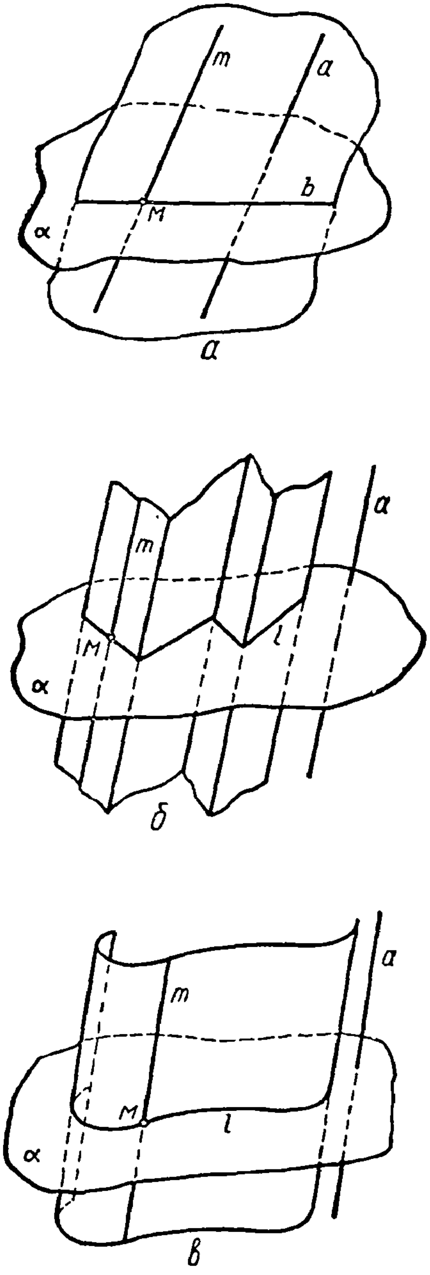


Рис. 50

щая l — ломаная линия, называется призматической (рис. 50,*б*).

Если направляющая — замкнутая ломаная, то и соответствующая призматическая поверхность называется замкнутой.

в) Поверхность, описываемая образующей m, если направляющая l — кривая линия, называется цилиндрической (рис. 50, *в*).

Если направляющая — замкнутая кривая, то и соответствующая цилиндрическая поверхность называется замкнутой.

Приведенные определения призматической и цилиндрической поверхностей позволяют дать одно и то же определение для призмы и для цилиндра.

Призмой (цилиндром) называется тело, ограниченное призматической (цилиндрической) поверхностью и двумя параллельными плоскостями, пересекающими образующие. Из этого определения следует, что призма — многогранник, причем выпуклый, если направляющая выпуклая ломаная.

Аналогично строится определение пирамидальной и конической поверхностей, пирамиды и конуса. Различие состоит в том, что образующая m перемещается, проходя все время через данную точку S, вне плоскости α (вместо параллельно заданной прямой a).

03. На материале темы «Многогранники» удобно показать учащимся, что процесс определения есть процесс сведения одного понятия к другому и что этот процесс не может быть

бесконечным, т. е. некоторые первоначальные понятия не могут уже быть определены через другие постольку, поскольку они первоначальные.

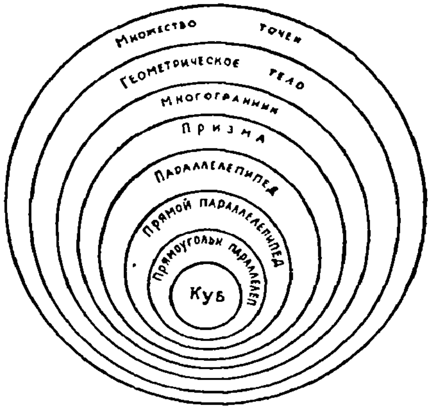


Рис. 51

Так получаем цепочку понятий (рис. 51), в которой каждое (начиная со второй) представляет собой родовое понятие для предыдущего (или последовательность множеств объектов, каждое из которых включается в следующее): куб — прямоугольный параллелепипед — прямой параллелепипед — параллелепипед — призма — многогранник — геометрическое тело — множество точек.

Мы дошли до понятия «множество точек», которое принимается за исходное, неопределяемое через другие, понятие.

Целесообразно решать некоторые упражнения по выяснению отношения между различными подмножествами многогранников.

Например, учащимся можно предложить такой вопрос: в каком отношении находятся множества правильных призм, параллелепипедов и кубов? Изобразить схему этого отношения, изображая эти множества множествами точек некоторых замкнутых фигур, например кругов.

В решении этого вопроса учащиеся часто допускают ошибку, отождествляя множество кубов с пересечением (т. е. общей частью) множеств правильных призм и параллелепипедов (рис. 52,*а*),

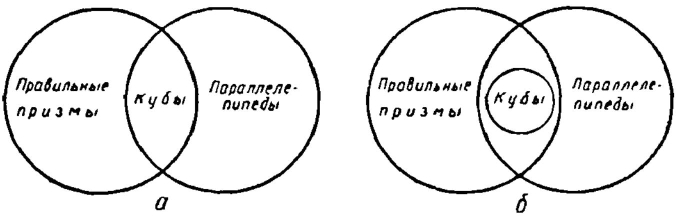


Рис. 52

в действительности же множество кубов заключается в это пересечение, представляющее собой множество прямых параллелепипедов с квадратными основаниями (рис. 52, *б*).

Подобные вопросы имеют важное значение для правильного усвоения учащимися отношений между различными видами многогранников.

04. Правильный многогранник определяется как многогранник, удовлетворяющий двум условиям:

а) все грани — правильные и равные между собой многоугольники;

б) все многогранные углы равны между собой. Из условия (а) непосредственно следует, что все грани правильного многогранника — одноименные многоугольники, так как, например, треугольник не может равняться четырехугольнику.

Аналогично из условия (б) следует, что все многогранные углы правильного многогранника одноименны. Необходимо разъяснить учащимся, что данное определение само по себе еще не гарантирует существование многогранников, удовлетворяющих условиям (а) и (б). Естественно возникает вопрос о существовании таких видов многогранников, хотя бы одного.

Учащиеся без затруднений указывают на куб, как на вид многогранника, удовлетворяющего условиям (а) и (б), т. е. куб—правильный многогранник.

Таким образом, данное определение не является противоречивым, так как правильные многогранники существуют.

Естественно возникает и второй вопрос: существуют ли другие виды правильных многогранников, кроме куба, а если существуют, то конечное или же бесконечное число видов?

Интуитивно учащиеся еще могут догадаться, что и треугольная пирамида с равными гранями в виде правильных треугольников есть правильный многогранник. Необходимо показать, что не существует правильный многогранник, грани которого — правильные многоугольники с числом сторон $n \geqslant 6$.

Действительно, если $n \geqslant 6$, то каждый плоский угол $\varphi \geqslant 120°$, и если даже многогранные углы правильного многогранника трехгранные, то получается, что сумма плоских углов $S \geqslant 360°$, что противоречит известному свойству выпуклых многогранных углов. (Хотя интуитивно ясно, что многогранные углы правильного многогранника выпуклые, это остается недоказанным.)

Таким образом, гранями правильного многогранника могут быть лишь правильные треугольники, четырехугольники и пятиугольники ($n < 6$).

Нетрудно убедиться в том, что если:

1) $n = 3$, т. е. грани — правильные треугольники, то имеются три вида правильных многогранников: с трехгранными, четырехгранными и пятигранными углами (шестигранные углы уже не могут быть образованы из 6 плоских углов по 60° каждый),

2) $n = 4$, т. е. грани —квадраты, то имеется один вид правильного многогранника: с трехгранными углами — куб (четырехгранные углы уже не могут быть образованы из 4 плоских углов по 90° каждый),

и 3) $n = 5$, т. е. грани — правильные пятиугольники, то имеется один вид правильного многогранника, с трехгранными углами (четырехгранные углы уже не могут быть образованы из 4 плоских углов по 108° каждый).

Описанный здесь способ определения видов правильных многогранников не является наилучшим. При этом способе учащимся сообщается без всякого обоснования, какое число граней имеет каждый из пяти видов правильных многогранников.

Возможен и методически целесообразен другой путь определения видов правильных многогранников, опирающийся на известную теорему Эйлера о соотношении между числом вершин, граней и ребер любого многогранника, ограниченного односвязной поверхностью.

Целесообразность ознакомления учащихся с теоремой Эйлера обосновывается тем, что:

1) эта теорема выражает топологическое свойство многогранника, т. е. дает интересный и вполне доступный пониманию учащихся пример такого свойства, которое инвариантно (сохраняется) при самых глубоких преобразованиях многогранника, исключающих лишь разрыв и склеивание;

2) доказательство этой теоремы может быть выполнено методом математической индукции, представляя собой интересный (необычный для учащихся) пример применения этого метода;

3) эта теорема служит основой для более строгого построения теории правильных многогранников.

05. Приведем один из возможных вариантов изучения теоремы Эйлера.

Прежде всего путем подсчета числа вершин (B), числа граней ($Г$) и числа ребер (P) конкретных видов многогранников (треугольной, четырехугольной, n-угольной призмы, пирамиды, многогранника, полученного из двух равных пирамид, сложенных основаниями (бипирамиды); многогранника, полученного из куба, если на каждой грани построить правильные четырехугольные пирамиды (пирамидального куба); многогранника, полученного из куба путем срезания всех трехгранных углов, и др.) во всех случаях получается:

$$B + Г - P = 2. \qquad (1)$$

Возникает предположение, что равенство (1) имеет место для всякого многогранника.

Однако если взять, например, многогранник, который получится, если вырезать из правильной усеченной пирамиды правильную призму, верхнее основание которой совпадает с верхним (меньшим) основанием усеченной пирамиды, то в этом многограннике $B = 12$, $Г = 8$, $P = 20$ и $B + Г - P = 1$.

Чем же отличается этот многогранник от всех названных выше, в которых $B + Г - P = 2$?

Это различие заключается в том, что любой замкнутый разрез (разрез по замкнутому контуру) поверхности первых многогранников разделяет ее на два отдельных куска, на поверхности же многогранника последнего можем провести такой замкнутый разрез (например, по контуру $ABCD$, или $A_1B_1C_1D_1$ или $A_2B_2C_2D_2$), что поверхность на два отдельных куска не распадается.

Если же, например, в кубе, призме или пирамиде произвести такой разрез по контуру какой-нибудь грани, то можем удалить эту грань и поверхность распадется на два отдельных куска.

Такая поверхность (распадающаяся на два отдельных куска при любом замкнутом разрезе) называется **односвязной**.

Оказывается, что равенство (1) имеет место только для многогранников, ограниченных односвязной поверхностью.

Теорема Эйлера. *Если многогранник ограничен односвязной поверхностью, то сумма чисел его вершин и граней на 2 больше числа его ребер, т. е.*

$$B + \Gamma - P = 2. \tag{1}$$

Приведем **доказательство** теоремы.

Рассмотрим какой-нибудь многогранник, ограниченный односвязной поверхностью, содержащей B вершин, Γ граней и P ребер.

Произведем замкнутый разрез поверхности по контуру какой-либо грани и удалим ее (это возможно, так как поверхность односвязная).

Представим себе теперь, что оставшаяся часть поверхности сделана из тонкой эластичной пленки, позволяющей растянуть ее на плоскости при сохранении числа ее вершин, ребер и граней (неважно, что при этом ребра могут искривляться).

Таким образом, на плоскости получается сетка, содержащая B вершин, P линий, соединяющих вершины (мы их по-прежнему назовем ребрами), и $\Gamma' = \Gamma - 1$ областей (которые мы по-прежнему назовем гранями).

Очевидно, что для этой сетки нам нужно доказать, что

$$B + \Gamma' - P = 1, \tag{2}$$

и тогда для данного многогранника будет иметь место равенство (1).

Докажем предварительно, что выражение $B + \Gamma' - P$ не меняет своего значения, если провести в любой грани диагональ.

Действительно, после проведения одной такой диагонали в сетке окажется B вершин, $\Gamma' + 1$ граней и $P + 1$ ребер, и, следовательно, выражение $B + (\Gamma' + 1) - (P + 1)$ для новой сетки равно соответствующему выражению для старой сетки:

$$B + (\Gamma' + 1) - (P + 1) = B + \Gamma' - P.$$

Пользуясь этим свойством, разобьем сетку на треугольники проведением диагоналей и докажем для триангулированной сетки (рис. 53) равенство (2) методом математической индукции.

Если сетка состоит из одного треугольника, то $B = 3$, $\Gamma' = 1$ и $P = 3$ и, следовательно, $B + \Gamma' - P = 3 + 1 - 3 = 1$.

Пусть равенство (2) имеет место для сетки, состоящей из n треугольников.

Присоединим к ней еще один, $(n + 1)$-й треугольник. Его можно присоединить двояко: (а) либо как $\triangle ABC$ (рис. 53) — одной стороной к контуру сетки; (б) либо как $\triangle MNL$ — одним углом к контуру.

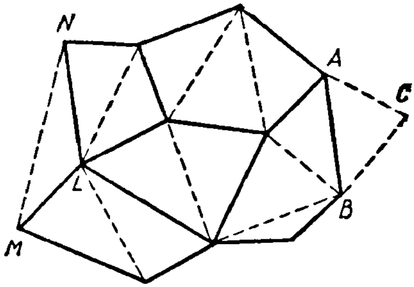


Рис. 53

В случае (а) новая сетка будет иметь $B + 1$ вершин, $\Gamma' + 1$ граней, $P + 2$ ребер и, следовательно,

$$(B + 1) + (\Gamma' + 1) - (P + 2) = B + \Gamma' - P.$$

В случае (б) новая сетка будет иметь B вершин, $\Gamma' + 1$ граней и $P + 1$ ребер и, следовательно,

$$B + (\Gamma' + 1) - (P + 1) = B + \Gamma' - P.$$

Таким образом, при любом присоединении $(n + 1)$-го треугольника выражение $B + \Gamma' - P$ не меняется, и, если оно равнялось 1 для сетки из n треугольников, оно равняется 1 и для сетки из $(n + 1)$-го треугольника.

Следовательно, равенство (2) имеет место для любой сетки из треугольников, значит, и вообще для любой сетки (первоначальной).

Поэтому для данного многогранника имеет место равенство (1): $B + \Gamma - P = 2$.

На основании теоремы Эйлера доказывается теорема о существовании 5 различных видов правильных многогранников и легко определяется число граней, вершин и ребер каждого из этих видов.

Пусть грани правильного многогранника, существование которого доказываем, — правильные m-угольники, а его многогранные углы n-гранные, причем, очевидно, должно быть $m \geqslant 3$ и $n \geqslant 3$. Если B — число его вершин, Γ — число граней, P — число ребер, то по теореме Эйлера $B + \Gamma - P = 2$.

Подсчитаем число ребер по числу граней. Так как в каждой грани m ребер, а всего граней Γ, то число ребер всех граней $m\Gamma$, и так как каждое из этих ребер принадлежит двум смежным граням, то число ребер многогранника в два раза меньше, т. е. $P = \frac{m\Gamma}{2}$, или $\Gamma = \frac{2p}{m}$.

Подсчитаем теперь число ребер другим способом, по числу вершин.

Так как в каждой вершине сходятся n ребер, а число вершин B, то число ребер, сходящихся во все вершины, nB, и так как каждое ребро проходит через две вершины, то число ребер многогранника в два раза меньше, т. е. $P = \frac{nB}{2}$, или $B = \frac{2P}{n}$.

Подставив найденные значения для $Г$ и B в формулу Эйлера, получаем:

$$\frac{2P}{n} + \frac{2P}{m} - P = 2, \text{ или } \left(\frac{2}{n} + \frac{2}{m} - 1\right)P = 2,$$

и так как $P > 0$, то должно быть и

$$\frac{2}{n} + \frac{2}{m} - 1 > 0.$$

Таким образом, задача сводится к отысканию двух чисел m и n, удовлетворяющих следующей системе (конъюнкции) условий:

$$(m \in N) \& (n \in N) \& \left(\frac{2}{n} + \frac{2}{m} > 1\right) \& (m \geqslant 3) \& (n \geqslant 3).$$

Так как m и n ограниченные снизу ($m \geqslant 3$ и $n \geqslant 3$), то используем неравенство $\frac{2}{n} + \frac{2}{m} > 1$, чтобы найти их верхние границы.

Это неравенство можно записать в виде $m + n > \frac{mn}{2}$. Сразу видно, что m и n должны быть меньше 6, иначе их сумма не будет больше их полупроизведения. Также исключается случай, когда $m = n = 5$, так как $5 + 5 < \frac{5 \cdot 5}{2}$ и когда $m = 5$ и $n = 4$ (или $m = 4$ и $n = 5$), так как $5 + 4 < \frac{5 \cdot 4}{2}$.

Таким образом, указанной выше системе условий удовлетворяют следующие пары чисел:

m	3	3	4	5	3
n	3	4	3	3	5

Таким образом, существует точно 5 видов правильных многогранников

Легко определить и число вершин, граней и ребер каждого из этих видов правильного многогранника. Запишем результаты в следующую таблицу:

Таблица

m	n	$P=\frac{2mn}{2m+2n-mn}$	$B=\frac{2P}{n}$	$\Gamma=\frac{2P}{m}$	Название правильного многогранника
3	3	6	4	4	Правильный тетраэдр
3	4	12	6	8	» октаэдр
4	3	12	8	6	» гексаэдр
3	5	30	12	20	» икосаэдр
5	3	30	20	12	» додекаэдр

06. При изучении сферы и шара целесообразно использовать знания учащихся об окружности и круге и с помощью аналогии подвести их к обнаруживанию свойств сферы и шара, исходя из сходства в определениях.

Окружность и круг	Сфера и шар
Определение. Г.м.т. плоскости, расстояние которых от данной точки равно данному отрезку, называется окружностью.	Определение. Г.м.т. пространства, расстояние которых от данной точки равно данному отрезку, называется сферой.
Данная точка называется центром окружности, расстояние от точки окружности до центра называется ее радиусом.	Данная точка называется центром сферы, расстояние от точки сферы до центра называется ее радиусом.
Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется хордой.	Отрезок, соединяющий две точки сферы, называется ее хордой.
Хорда, проходящая через центр, называется диаметром. Пусть радиус окружности — r.	Хорда, проходящая через центр, называется диаметром. Пусть радиус сферы — r.
Точки плоскости, отстоящие от центра на расстоянии, меньшем, чем r, называются внутренними по отношению к окружности; точки плоскости, расстояния которых от центра больше r, называются внешними по отношению к окружности.	Точки пространства, отстоящие от центра на расстоянии, меньшем, чем r, называются внутренними по отношению к сфере; точки пространства, расстояния которых от центра больше r, называются внешними по отношению к сфере.
Часть плоскости, ограниченная окружностью (т. е. подмножество точек плоскости, отстоящих от центра на расстоянии, не большем r), называется кругом.	Часть пространства, ограниченная сферой (т. е. подмножество точек пространства, отстоящих от центра на расстоянии, не большем r), называется шаром.

Сопоставление этих двух текстов имеет целью выявление соответствия (аналогии), и, исходя из него, можно выдвинуть предположение о наличии ряда свойств сферы, соответствующих уже известным учащимся свойствам окружности.

Например, известно, что прямая, перпендикулярная к радиусу[1]

[1] Здесь под словом «радиус» понимают отрезок, соединяющий точку окружности с центром. Когда же говорят, например, «окружность радиуса 5 *см*, под словом «радиус» имеют в виду расстояние точки окружности до центра.

окружности в конце его, лежащем на окружности, касательна к окружности.

Очевидно, что имеет место такое же свойство и для сферы: прямая, перпендикулярная к радиусу сферы в конце его, лежащем на сфере, касательна к сфере.

Однако здесь надо учитывать не только сходство, но и различие между окружностью и сферой.

В плоскости окружности, в конце радиуса, лежащем на окружности, можно провести единственный перпендикуляр к этому радиусу. В пространстве же, в конце радиуса, лежащем на сфере, можно провести сколько угодно перпендикуляров к этому радиусу и все эти перпендикуляры принадлежат плоскости, перпендикулярной к этому радиусу.

Таким образом, учитывая и сходство и различие между окружностью и сферой, мы подводим учащихся к выдвижению еще одной гипотезы: плоскость, перпендикулярная к радиусу сферы в конце его, лежащем на сфере, касательна к этой сфере.

К этому же мы приходим, если вращать окружность вместе с касательной вокруг диаметра, перпендикулярного к этой касательной.

* * *

В этом параграфе, разумеется, не рассмотрены все вопросы методики изучения многогранников и круглых тел.

В частности, методика измерения площадей поверхностей и объемов многогранников и круглых тел является предметом специальной главы (гл. V).

Заключение

В этой главе преследовались две цели:

1) иллюстрировать возможный и целесообразный стиль изложения стереометрии в школе, отличающийся от традиционного большей строгостью и применением в явном виде логических операций, 2) произвести логический и методический анализ учебного материала.

Необходимо различить применение логического аппарата для анализа учебного материала от его применения в самом изложении.

В первом случае это применение адресовано учителю, во втором — ученику.

Логический язык благодаря своей четкости, ясности и точности является важным средством анализа учебного материала в методическом исследовании и сильным средством воспитания четкого, ясного и точного мышления учащихся в процессе преподавания, разумеется при условии его разумного применения. При этом условии он способствует углублению понимания математического материала.

ПОЛИТЕХНИЧЕСКОЕ ОБУЧЕНИЕ И СВЯЗЬ С ЖИЗНЬЮ В ПРЕПОДАВАНИИ ГЕОМЕТРИИ

§ 1. Что следует понимать под политехническим обучением в школьном курсе геометрии

Геометрия, изучающая формы материального мира, охватывает все многообразие предметов в их всевозможных соотношениях. Это обусловливает весьма существенную связь геометрии с другими науками, и в первую очередь с науками, стимулирующими развитие общественного производства, представляющими научную основу техники.

В любой области производства, где приходится иметь дело с предметами реального мира, необходимо знание свойств пространственных форм, что является основной характеристики этих предметов. Поэтому ясно, что геометрии должна принадлежать исключительно большая роль в политехническом образовании учащихся.

1. Политехнический принцип требует прежде всего обучения основам современной индустрии. Это общее положение нередко ставит учителя математики перед серьезными трудностями: как показать основы современной индустрии в процессе преподавания геометрии? Какой геометрический материал может быть использован в этих целях?

Возникновение таких вопросов вполне естественно: если в процессе преподавания физики, химии и других учебных дисциплин учитель сравнительно легко вскрывает научные принципы современного производства и использует учебный материал для политехнической подготовки учащихся, то специфические особенности геометрии, как и всей математики, значительно усложняют эту работу.

Учитель математики должен иметь ясное представление о задачах политехнического обучения в процессе преподавания геометрии. Задачи политехнического обучения в геометрии четко сформулированы А. И. Фетисовым: «... для разрешения *задачи политехнического обучения* нужно, прежде всего, хорошо знать теорию геометрии. В то же время необходимо при изучении теоретического материала геометрии показать, как используются свойства пространственных форм в научной и практической деятельности человека. Раскрытие этих связей теории с практикой, выяснение многообразных применений геометрии в науке, технике, сельском хозяйстве, вместе с некоторыми трудовыми процессами (измерения в классе и на местности, применение чертежных инструментов, моделирование и так далее.) составляет основу политехнического обучения геометрии.

Помня, что целью изучения геометрии является познание пространственных свойств материального мира, мы должны рассматривать политехническое обучение не как расширение программы и не как случайный придаток к курсу, а как его принципиальную основу, способствующую наиболее полному и глубокому изучению предмета»[1].

Вместе с тем нужно помнить, что цели политехнического обучения требуют и ознакомления с такими общими принципами, усвоение которых облегчит в дальнейшем понимание любого конкретного производства, поможет быстрейшему овладению профессиональными навыками, подготовит к творческому труду на производстве.

2. Наша школа, на современном этапе своего развития, решает задачу осуществления связи обучения с жизнью, с трудом, с практикой коммунистического строительства. Обратим внимание, что в преподавании геометрии решение этой задачи связано с обеспечением прочного и сознательного усвоения основ науки геометрии; овладением умениями и навыками, необходимыми как для общего развития учащихся, так и для творческой работы в их последующей трудовой деятельности; с формированием таких понятий, которые отвечают нуждам и целям современной техники.

Таким образом, нетрудно убедиться, что задачи политехнического образования в преподавании геометрии и задачи преодоления отрыва теоретических знаний, получаемых в школе, от жизни, от практики, *ставят одни и те же цели.*

Из-за специфических особенностей геометрии, из-за чрезвычайно глубокого проникновения ее почти во все науки мы не можем рассматривать политехническое обучение в преподавании геометрии изолированно от принципа осуществления связи обучения с жизнью, с производством, с практикой коммунистического строительства.

Поэтому при дальнейшем изложении материала *мы не будем рассматривать эти понятия изолированно друг от друга и говоря об одном из них будем подразумевать и другое.*

---

[1] Сб. «Преподавание математики в свете задач политехнического обучения», М., изд. АПН РСФСР, 1954, стр. 108.

§ 2. Основные пути осуществления связи обучения геометрии с жизнью, с производством, с практикой коммунистического строительства

3. Академик А. Н. Несмеянов в статье «Наставник — увлеченность»[1] отмечает: «Думается повторение не мать, а мачеха учения. Мать учения — применение... Только то знание удерживается прочно и не требует постоянного и безнадежного повторения для удержания его «в чердаке», которое применялось». С этим положением нельзя не согласиться: только те знания, которые умеешь применить, приносят пользу. Поэтому невозможно плодотворно изучать геометрию в школе, отрывая теорию от ее практических приложений.

Вместе с тем связь теории с практикой способствует и более глубокому и осмысленному пониманию изучаемого материала, повышает интерес к теоретическим знаниям.

Отсюда ясно, что одним из основных путей осуществления связи обучения геометрии с жизнью, с производством, с практикой коммунистического строительства — является практическая реализация всего изучаемого теоретического материала, раскрытие связей геометрии с техникой, производством, с другими науками.

4. Традиционные формы практической реализации теоретического материала курса геометрии — решение задач и упражнения в геометрических построениях — уже не отвечают всем требованиям тенденции развития науки и техники, экономики и производства. Они не вскрывают непосредственного применения геометрии в конкретных областях производства, слабо способствуют развитию интереса к науке геометрии. Эти формы могут отвечать в основном лишь целям общего развития учащегося средней школы и его подготовки к продолжению образования.

5. Строительство коммунизма неразрывно связано с развитием творческой активности народа во всех сферах деятельности. Причем особое место принадлежит техническому творчеству широких масс трудящихся, являющемуся одним из важнейших стимулов технического прогресса в стране, условием ускоренного и всестороннего развития материального производства. В принятой XXII съездом КПСС Программе Коммунистической партии отмечается, что максимальное ускорение научно-технического прогресса в стране является важнейшей общенародной задачей. Понятно, что эта задача имеет прямое отношение и к нашей общеобразовательной школе, занимающей первостепенное место в подготовке кадров, способных не только правильно управлять современной техникой, но и постоянно улучшать ее.

В педагогической литературе, посвященной проблеме политехнического обучения в общеобразовательной школе, постоянно под-

[1] «Комсомольская правда» от 22 февраля 1962 года.

черкивается, что особое внимание должно быть обращено на развитие у школьников таких качеств, как умение критически анализировать и рационализировать труд, проявлять инициативу, творчество, изобретательность, решать несложные конструктивные задачи. Поэтому развитие способностей учащихся к техническому творчеству, подготовку их к рационализаторской и изобретательской деятельности также следует рассматривать как один из серьезных путей решения основной задачи, стоящей перед нашей школой, — задачи осуществления связи обучения с жизнью, с производством, с практикой коммунистического строительства.

6. Школьный курс геометрии располагает широкими возможностями в развитии способностей учащихся к техническому творчеству. В процессе обучения геометрии формируется логическое мышление, развиваются воображение, наблюдательность, сообразительность и другие психологические компоненты технического творчества; причем структура учебного материала курса геометрии позволяет добиваться достаточно высокого уровня их развития.

Изучение геометрии связано с использованием конструктивных приборов и инструментов, что открывает возможность развивать в процессе обучения геометрии техническое изобретательство и конструкторские способности учащихся.

7. Сформулированные в пунктах 3 — 6 § 2 положения позволяют наметить следующие основные пути осуществления связи обучения геометрии с жизнью, с производством, с практикой коммунистического строительства:

I. Раскрытие связи теории с практикой в преподавании геометрии на основе:

1) связи геометрии с другими науками;

2) связи геометрии с техникой, производством.

II. Подготовка учащихся к творческому труду на производстве, т. е. развитие способностей к техническому творчеству, что, в свою очередь, включает в себя:

1) развитие основных психологических компонентов творческого процесса: воображения, наблюдательности, логического мышления, смекалки;

2) развитие изобретательности и конструкторских способностей, воспитание инициативы, уверенности в свои способности к созданию нового;

3) умение выбирать наиболее рациональные пути к достижению поставленной цели; формирование критического образа мышления;

4) воспитание потребности к творческим исканиям, выработка необходимости творческого отношения к окружающей действительности.

Перейдем к конкретному рассмотрению средств реализации отмеченных выше путей осуществления связи обучения геометрии с жизнью.

§ 3. Связь теории с практикой в преподавании геометрии

8. Как отмечалось выше, геометрия имеет весьма прочные и многообразные связи с другими науками и техникой. На геометрию опираются цельные разделы физики, как например: механика, геометрическая оптика, теория электростатического и электромагнитного поля и др. Очень глубоко геометрия проникает в черчение, давая теоретическое обоснование всем чертежным приемам построений, как точным, так и приближенным. Весьма характерно использование геометрического аппарата в астрономии, позволившего установить способы определения размеров небесных тел и расстояний между ними. Поэтому преподавание геометрии должно осуществляться в постоянном взаимодействии с такими школьными дисциплинами, как физика, черчение, астрономия.

9. Раскрывая содержание геометрии, необходимо указывать на применение свойств пространственных форм в практической деятельности человека, в жизни. Знакомство с каждым новым геометрическим понятием, предложением необходимо сопровождать раскрытием их значения в технике, в повседневной жизни; изучение каждого теоретического раздела — решением задач практического содержания, выполнением построений. Это в значительной мере будет способствовать и повышению интереса у учащихся к изучению геометрии и сознательному усвоению теории. Так, например, изучая шар, нельзя ограничиваться лишь рассмотрением геометрических свойств его элементов. Нужно вскрыть причины широкого применения этой совершенной формы в технике и быту, обратить внимание на ее распространение в природе. Желательно познакомить учащихся с замечательным изопериметрическим свойством шара — важной причиной жизненности сферических форм.

Изучение симметрии необходимо увязать с чрезвычайно широким проникновением симметричных форм в промышленное производство, указать и на преобладание симметричных форм в природе. Вместе с тем очень важно установить причины такого широкого применения симметрии в практике (экономия времени при проектировании деталей машин, строительных сооружений, различных предметов обихода; равномерное распределение масс).

10. Перед изучением теоретического материала очередной программной темы целесообразно по мере возможности предлагать доступные учащимся практические вопросы и задачи, которые помогут им понять жизненную необходимость изучения этого материала. Например, перед изучением темы «Измерение объемов» можно поставить перед учащимися следующие задачи:

Как определить, сколько (по весу) стали потребуется на изготовление определенного количества шариков данного радиуса к велоподшипнику?

Как определить размеры цилиндрического бака для хранения данного количества определенной жидкости? И т. п.

11. Если постановка практической задачи может предшествовать изучению лишь отдельных тем школьной программы, то решением таких задач возможно завершить любой раздел курса геометрии. Поэтому связь теории с практикой в преподавании геометрии должна осуществляться прежде всего при решении задач — не только на вычисление и построение, но и при решении задач на доказательство, которые также можно облечь в практическую форму. Однако, предлагая задачи с практическим содержанием, необходимо учитывать, чтобы все понятия, которые влечет за собой практическая сторона содержания задачи, были достаточно ясны и доступны для понимания учащимся, ибо трудность восприятия новых понятий, а подчас непонимание их снижает интерес к решению задачи.

В то же время необходимо учитывать различия в отношении учащихся к практическому содержанию задачи: интерес именно там, где учащийся переживает реальную необходимость применения получаемых знаний для достижения стоящей перед ним практической цели. Следует предостеречь учителя от «надуманности» практического содержания задач, которая не только не приносит пользы, но и способствует возникновению безразличного отношения к их решению.

12. Задачи с практическим содержанием представляют ценность и в том отношении, что упражнения в решении таких задач способствуют формированию у учащихся умений вскрывать математическую сторону в окружающих явлениях, т. е. умений определять их геометрическую сущность.

Действительно, если в условии геометрической задачи речь идет о реальных предметах, то, прежде чем решать эту задачу, необходимо представить ее условие так, чтобы вместо реальных предметов выступали геометрические (абстрактные) объекты. Например:

В результате включения тормозного устройства колесо железнодорожного вагона некоторое время двигалось по рельсам без вращения. Вследствие трения на поверхности колеса появился плоский участок (так называемый «ползун») длиной 70 *мм.*

Определить, допустимо ли дальнейшее движение вагона, если предельная допускаемая высота ползуна не должна превышать 1 *мм? (Принимаемый диаметр колеса равен* 1036 *мм.)*

Понятно, что для решения данной задачи ее условие нужно представить в следующей геометрической (абстрактной) форме:

Определить высоту сегмента, основание которого равно 70 *мм, а радиус —* 518 *мм.*

Наряду с задачами практического содержания для формирования умений вскрывать геометрическую сущность в окружающих явлениях полезны вопросы следующего характера:

Почему формула вычисления объема конусной насыпи (конусного стога) содержит в себе не радиус основания и не высоту конуса, а длину окружности основания и «перекид»?

Выверка горизонтального положения плоскости производится на основании двойного наложения уровня по непараллельным направлениям.

Какое геометрическое свойство положено в основу такого способа проверки горизонтальности?

На основании какого геометрического свойства столяр, пользуясь двумя нитями, обрезает ножки четырехугольного стола так, что концы ножек находятся в одной плоскости? И т. п.

13. В процессе решения задач практического содержания необходимо не один раз поставить учащегося на место математика, выполняющего конкретное практическое или производственное задание, чтобы учащийся не только видел, как математика служит производству, но и получал навыки применения геометрического аппарата в своей дальнейшей производственной деятельности.

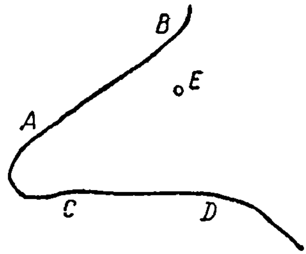


Рис. 1

Данное положение, видимо, нуждается в пояснениях на конкретных фактах. Приведем их:

Пароход должен курсировать между островом E и берегами залива (рис. 1).

Указать на берегах AB и CD точки, в которых нужно построить пристани так, чтобы пароход курсировал по кратчайшему пути[1].

Будем считать берега залива сторонами некоторого острого угла, а остров — точкой, лежащей внутри него.

Нетрудно обосновать тогда, что путь парохода должен лежать по треугольнику наименьшего периметра.

Таким образом, ответ на данную задачу должен дать математик, так как ее решение сводится к решению геометрической задачи следующего содержания:

Внутри острого угла дана точка. Построить треугольник наименьшего периметра так, чтобы его вершины лежали: одна — в данной точке, две другие — на сторонах данного угла.

Другой пример.

Указать способ (вывести формулу) измерения штангенциркулем диаметров круглых деталей, радиусы которых больше длины ножки штангенциркуля (рис. 2).

---

[1] Последнее условие (о курсировании по кратчайшему пути) можно учащимся и не сообщать, предоставляя им возможность самостоятельно выбрать наиболее рациональные условия организации движения.

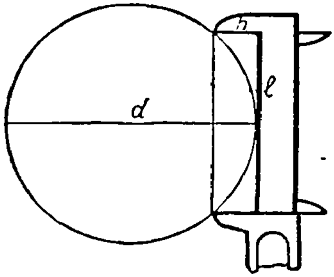


Рис. 2

Пусть длина ножки прибора — h, показание измерения — l (линейка прибора касается детали), диаметр детали — d.

Тогда

$$h(d-h)=\frac{l^2}{4}.$$

Откуда $$d=\frac{l^2}{4h}+h.$$

Еще пример. Поставим следующее задание:

Вывести формулу для вычисления объема призматической детали (рис. 3), *основание которой образовано двумя подобными равнобедренными треугольниками, вписанными в квадрат так, как показано на рисунке.*

Понятно, что, решая данную задачу, математик должен дать такую формулу, которая, во-первых, давала бы наиболее точный ре-

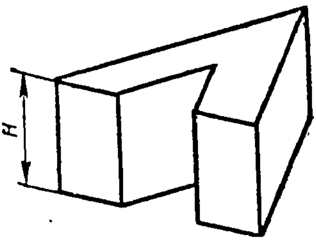


Рис. 3

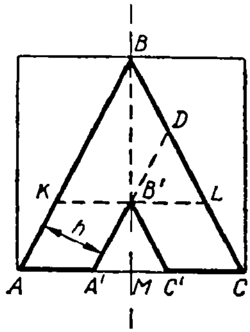


Рис. 4

зультат (а это будет тогда, когда число необходимых для подсчета измерений будет наименьшим, причем сами измерения должны быть простыми), во-вторых, требовала наименьшего числа вычислений.

Задача может быть решена несколькими способами. Разберем некоторые из них.

I способ. Выведем искомую формулу, не подвергая деталь мысленному разбиению на составные части, а как разность между объемами двух призм: призмы, в основании которой лежит треугольник ABC (рис. 4), и призмы, в основании которой лежит треугольник $A'B'C'$.

Обозначим через V искомый объем, через H (рис. 3) — высоту призмы, через a — сторону квадрата (рис. 4).

Тогда:

$$V=V_{ABC}-V_{A'B'C'}=\frac{a^2}{2}H-\frac{A'C'\cdot MB'}{2}H=\frac{a^2-(A'C')^2}{2}H.$$

Таким образом, данный способ привел к формуле, требующей 3 измерения (a, A' C', H) и 5 вычислений.

II способ. Разобьем фигуру на 2 одинаковые четырехугольные призмы с основаниями AA' $B'B$ и $BB'C'C$ (рис. 4) и определим искомый объем как сумму объемов этих призм:

$$V = 2V_{AA'B'B} = h(AB + A'B')H,$$

где h — высота трапеции AA' $B'B$.

Этот способ приводит к формуле, требующей 4 измерения (h, H, AB, A' B') и 3 вычисления.

III способ. Разобьем фигуру на 2 четырехугольные призмы с основаниями $AA'DB$ и CD $B'C'$ (рис. 4), сумма объемов которых дает искомый объем:

$$V = V_{AA'DB} + V_{CDB'C'} = \frac{AB + A'D}{2}h \cdot H + \frac{DC + C'B'}{2}h \cdot H =$$

$$= \frac{AB + 2DC + B'C'}{2}h \cdot H.$$

В этом случае мы пришли к формуле, требующей 5 измерений и 6 вычислений. И если трудно судить, какая из формул, полученных I и II способом, более рациональна, то можно смело сказать, что III способ приводит к формуле, менее рациональной, чем две предыдущие.

IV способ. Разобьем фигуру на 3 части: треугольную призму с основанием KLB (рис. 4) и 2 одинаковые четырехугольные призмы с основаниями $AA'B'K$ и $CLB'C'$, сумма объемов которых дает искомый объем:

$$V = V_{KLB} + 2V_{AA'B'K} = \frac{KL \cdot BB'}{2}H + 2AA' \cdot MB' \cdot H =$$

$$= \left[\frac{2AA' \cdot 2AA'}{2} + 2AA'(a - 2AA')\right]H = 2AA'(a - AA') \cdot H.$$

Как убеждаемся, последний способ приводит к наиболее рациональной формуле, так как она требует всего лишь 3 простых измерения (AA', a, H) и 4 вычисления. Именно последнюю формулу и должен дать математик производству. Поэтому при выполнении учащимися аналогичных заданий нужно добиваться от них получения наиболее эффективного результата. Понятно, что для этого применимы не только задания на вывод наиболее рациональной формулы для определения какой-либо величины, но и задачи на получение наиболее экономичной формы, на рациональный раскрой материалов и т. п.

14. В процессе обучения геометрии полезно знакомить учащихся с некоторыми распространенными геометрическими прибора-

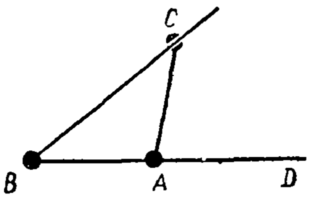


Рис. 5

ми, конструкции которых, как правило, основаны на известных учащимся свойствах, что также позволит иллюстрировать применение геометрии в нуждах практики.

Например, демонстрируют учащимся прибор для нахождения половины заданного угла (рис. 5). Прибор прикладывается к данному углу так, чтобы его планки AC и AD совпадали со сторонами угла. Тогда угол CBA — половина данного угла CAD. Можно учащимся предложить задание: указать геометрические свойства, на которых основана конструкция прибора.

Примечание. Конструкция данного прибора основана на свойстве внешнего угла треугольника. Угол CAD, как внешний, равен сумме углов CBA и BCA; и если длины планок BA и AC одинаковы, то угол CBA равен половине угла CAD.

Аналогичными заданиями можно сопровождать знакомство с такими приборами, как пантограф, механическая рейсшина, различные конструкции трисектора, и с другими приборами. Такие упражнения могут предлагаться и в виде задач на доказательство. Например:

В приборе для деления угла на 3 равные части (трисекторе, рис. 6) *планка AB равна радиусу полукруга, планка BD — касательная к окружности в точке B. Трисектор прикладывается к чертежу так, чтобы BD проходила через вершину O данного угла MON* (рис. 7), *конец A планки касался одной стороны угла, а полуокружность прибора — другой стороны угла. Доказать, что при этом угол BOA равен одной трети данного угла.*

Другой пример. *Чтобы при помощи трисектора, изображенного на рисунке 8 (длины планок AC и CD равны длине AB; шарниры C и D могут скользить вдоль BE и BA), разделить угол на 3 равные части, нужно наложить прибор на чертеж так, чтобы*

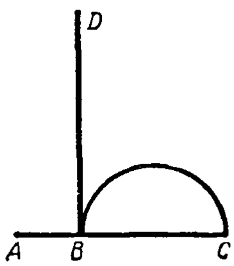


Рис. 6

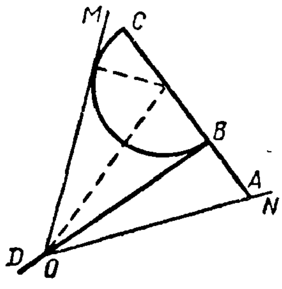


Рис. 7

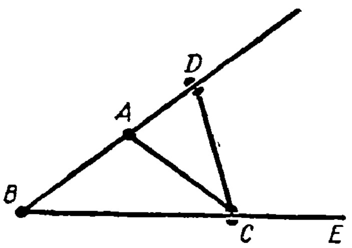


Рис. 8

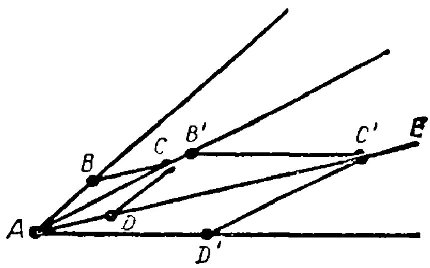


Рис. 9

планки DC и CE совпали со сторонами данного угла. Доказать, что при этом угол ABC будет равен одной трети данного угла.

Еще пример. *Трисектор* (рис. 9) *образован двумя шарнирными ромбами ABCD и AB'C'D' (шарниры C и C' могут скользить вдоль стержней AB' и AE). Доказать, что при наложении стержней AB и AD' на стороны данного угла стержни AB' и AC' разделят угол на 3 равные части.*

Важной формой осуществления связи теории с практикой в преподавании геометрии являются лабораторные и практические занятия, характер которых будет рассмотрен несколько ниже.

15. Если учащиеся старших классов сочетают свою учебную работу с трудом на конкретном производстве, в определенной области хозяйства, то такая постановка обучения требует в процессе преподавания геометрии учета производственной квалификации, осваиваемой учащимися. Необходимо установление связи с теми производственными процессами, с которыми приходится иметь дело учащимся, чтобы школьники видели, где и как применяются изучаемые теоретические знания по геометрии. Это важно, во-первых, потому, что именно такая постановка обучения пробуждает подлинный интерес к изучению теории.

Во-вторых, это важно потому, что учащемуся зачастую трудно самостоятельно усмотреть ту геометрическую зависимость, те геометрические расчеты, которые «скрыты» в конструкциях действующих механизмов, приборов.

16. Наиболее доступная форма организации работы с учащимися — выявление геометрической сущности конструкций тех простейших приборов и механизмов, которые применяются в различных отраслях промышленности и которые не требуют от учителя особых знаний в области техники и производства. Например, к числу таких приборов следует отнести измерительный инструмент. Действительно, одним и тем же измерительным инструментом (штангенциркулем, микрометром, угломером и т. п.) пользуются рабочие самых различных профессий. Даже если учащиеся в своей практике еще не встречались с некоторыми измерительными приборами, все равно полезно разобрать с ними геометрические свойства, обусловливающие конструкции этих приборов.

Приведем поясняющие примеры.

Принципиальная схема конструкций таких распространенных измерительных приборов, как штангенциркуль и мерная вилка, основана на следующем геометрическом свойстве: в прямоугольнике противоположные стороны равны. На рисунке 10 видно, что измеряемая такими приборами величина является всегда стороной прямоугольника $ABCD$.

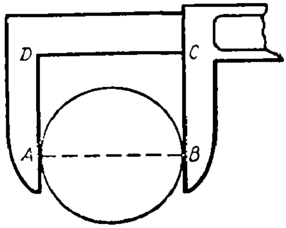


Рис. 10

В некоторых случаях вместо мерной вилки значительно целесообразнее пользоваться **мерным угольником** (рис. 11), конструкция которого основана на следующем геометрическом свойстве: если около окружности описать прямой угол, то отрезок его стороны, заключенный между вершиной и точкой касания, равен радиусу окружности.

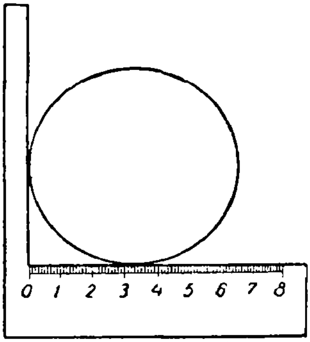


Рис. 11

Весьма оригинальное геометрическое обоснование имеет способ измерения недоступных диаметров при помощи прибора, называемого диаметромером (рис. 12), в основу которого положены свойства подобных треугольников. Разберем этот способ.

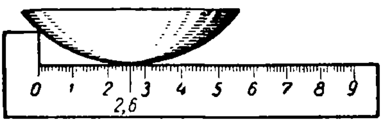


Рис. 12

Пусть требуется определить диаметр окружности, которая задана дугой AB (рис. 13). Построим на хорде AB как на гипотенузе прямоугольный треугольник с катетами a и b так, чтобы катет a лежал на касательной к окружности в точке B. Пусть d — искомый диаметр. Тогда из подобия треугольников ABD и ACB следует:

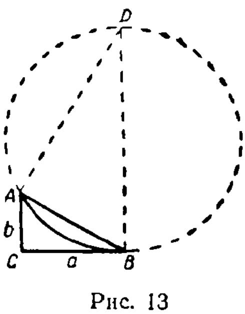


Рис. 13

$$\frac{d}{AB} = \frac{AB}{b}, \text{ или } d = \frac{AB^2}{b}; \text{ но } AB^2 = a^2 + b^2; \quad \text{тогда} \quad d = \frac{a^2 + b^2}{b}.$$

Как видим, неизвестный диаметр d удалось выразить через известные величины a и b (так как их можно измерить непосредственно). Упростим полученную формулу, выбрав $b = 1$. Тогда

$$d = a^2 + 1.$$

Таким образом, прибор будет представлять собой угольник, одна сторона которого равна 1 *см*, а другая — снабжена миллиметровой шкалой.

Чтобы при помощи диаметромера отыскать диаметр некоторой цилиндрической или сферической поверхности, прибор следует приложить к этой поверхности (рис. 12), найти квадрат числа, соответствующего точке касания, и прибавить к нему 1 *см*. В нашем случае (см. рис. 12) точка касания соответствует 2,6 *см*. Следовательно, искомый диаметр равен приблизительно 7,8 *см*.

Если миллиметровую шкалу заменить шкалой с уравнением $a^2 + 1$, то точка касания укажет (без выполнения вычислений) искомый диаметр.

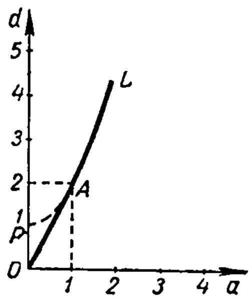


Рис. 14

В рассматриваемом примере заслуживает внимания и интересный случай функциональной зависимости между d и a, график которой (рис. 14) состоит из двух различных линий. Так как при $a \leqslant 1$ мы имеем дело с другим способом измерения (см. выше, измерение при помощи мерного угольника), то диаметр d находится в линейной зависимости с a и определяется из формулы $d = 2a$. Эта зависимость изображается на графике отрезком прямой OA. Если же $a \geqslant 1$, то графиком служит ветвь AL параболы с вершиной в точке P (0; 1).

17. Наряду с примерами, иллюстрирующими проникновение геометрии в измерительную технику, нужно, конечно, решать с учащимися задачи, содержание которых непосредственно отражает те конкретные производственные операции, которые осваивают учащиеся.

Так, учащимся, занятым в кузнечно-прессовых цехах, можно предлагать задачи на определение размеров заготовки, необходимых для изготовления из нее в результате поковки (прессовки, штамповки) детали определенной формы. Например:

Определить длину цилиндрической заготовки данного диаметра a, из которой нужно отковать ступенчатый вал заданных размеров (рис. 15).

Определить форму и размеры листовой заготовки, из которой нужно выштамповать деталь заданной формы. И т. п.

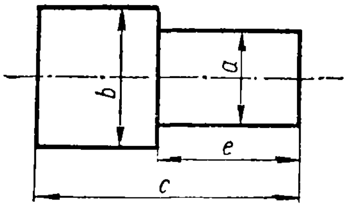


Рис. 15

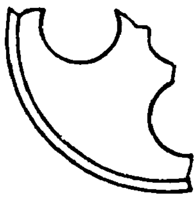


Рис. 16

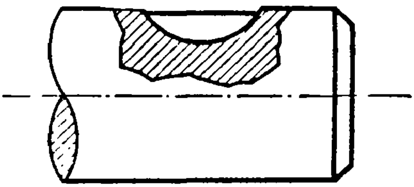


Рис. 17

Учащимся, занятым в ремонтных цехах, можно предлагать задачи на определение (восстановление) первоначальных размеров заменяемых в результате поломки или износа деталей и на определение размеров некоторого, необходимого для этого инструмента. Например:

Определить диаметр круглой детали по ее обломку (рис. 16).

Для изготовления по заменяемой детали новой потребовалось определить диаметр дисковой фрезы для фрезерования канавки под полукруглую шпонку[1] (рис. 17). *Как определить искомый диаметр и сколько измерений нужно сделать для этого?* И т. д.

Для учащихся, школы которых расположены в экономических районах, где большой удельный вес принадлежит нефтяной или газовой промышленности, весьма полезными будут задачи на проектирование нефтесборной или газосборной сети. Такая сеть состоит из основной трубы, называемой коллектором, которая соединена подводящими трубами меньшего диаметра с нефтяными или газовыми скважинами.

Если нефтяной или газовый промысел представить в виде плоскости, на которой в точках A, B, C, ..., K расположены скважины, то практическая задача проектирования сборной сети приобретает форму следующей геометрической задачи:

Каким образом нужно соединить скважины отрезками прямых, чтобы длина подводящих труб и коллектора оказалась наименьшей?

Весьма разнообразна тематика геометрических задач, отражающая сельскохозяйственное производство: разделение земельных

[1] Так называемая шпонка Вудруфа.

участков и определение их размеров; получение и применение эмпирических формул для вычисления объема сена в стогах и скирдах; определение объемов различных овощехранилищ; определение наиболее рационального пути движения на полях посевных и уборочных агрегатов; расчет оросительной системы и т. п.

18. Конечно, приведенные в пункте 17 § 3 примеры не исчерпывают всех тех задач, которые можно рассматривать с учащимися, занятыми на определенном производстве. Например, для учащихся, знакомых с работой в кузнечно-прессовых цехах (см. выше), не менее интересной окажется задача на обоснование зависимости между диаметром цилиндрической трубы, изготавливаемой на прокатном стане, и расстоянием между рабочими валиками стана. Для получения цилиндрической трубы из плоской листовой заготовки последняя пропускается между тремя параллельно расположенными вращающимися цилиндрическими валиками. Оси двух валиков закреплены неподвижно. Ось третьего валика может перемещаться в плоскости, являющейся плоскостью симметрии для первых двух валиков. Положение валика с подвижной осью и определяет диаметр изготовляемой трубы.

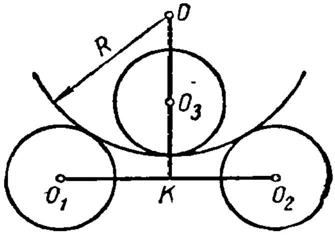


Рис. 18

Геометрическая сущность данной задачи такова:

Даны две окружности радиуса r с центрами в точках O_1 и O_2. Из точки K — середины отрезка O_1O_2 восставлен перпендикуляр к этому отрезку. На этом перпендикуляре нужно поместить центр O_3 окружности того же радиуса так, чтобы окружность, касающаяся окружностей с центрами O_1 и O_2 внешним образом, касалась внутренним образом окружности с центром O_3 и имела данный радиус R (рис. 18). *Определить расстояние O_3K.*

Применяя теорему Пифагора, находим искомое расстояние:

$$O_3K = OK - OO_3 = \sqrt{(R+r)^2 - O_1K^2} - (R-r).$$

19. Таким образом, осуществление связи теории с практикой в преподавании геометрии требует такой постановки учебного процесса, которая раскрывает перед учащимися жизненную необходимость изучения теоретического материала, показывает, где и как применяется этот материал в промышленном производстве, в технике и в повседневной жизни, как используется другими науками, в частности физикой, астрономией, черчением.

Основное место в этой работе принадлежит геометрической задаче с практическим содержанием, позволяющей установить связь с производственными процессами.

Вместе с тем упражнения в решении задач практического, жизненного содержания способствуют формированию умений вскрывать геометрическую сущность в окружающих явлениях, прививают школьнику навыки использования геометрического аппарата в его последующей трудовой деятельности.

Не следует оставлять в стороне и другие средства, иллюстрирующие применение геометрии в нуждах практики, как например: выдвижение несложных проблем, позволяющих поставить учащегося на место математика, выполняющего ту или иную практическую задачу; выявление геометрических свойств, обусловливающих принципиальные схемы устройства некоторых конструктивных и измерительных приборов; и т. п.

В настоящее время уже накоплен некоторый опыт использования геометрического материала для раскрытия связи геометрии с различными отраслями промышленного производства, сельским хозяйством, техникой, а также ее применение в других науках. Этот опыт достаточно широко освещается в педагогической литературе. Нужно только, чтобы он стал достоянием всех учителей геометрии.

§ 4. Воспитание умений отыскивать рациональные пути для достижения поставленной цели

20. Готовя школьника к участию в общественно полезном производительном труде, необходимо приучать его отыскивать рациональные пути решения практических задач, вырабатывать стремление творчески подходить к выполняемой работе. При этом особого внимания заслуживает такая организация учебной работы, когда учащиеся не только учатся выбирать наиболее эффективные средства достижения поставленной цели, но и понимают общественную значимость рационализации. К сожалению, в учебной и методической литературе пока еще очень немного практических задач по геометрии, содержание которых ставит учащегося перед необходимостью проявить творческие поиски. К тому же эти задачи чаще предлагаются в такой форме, которая исключает элементы творчества и тем самым не ста́вит школьника на место участника решения тех практических проблем, которые содержит в себе сама постановка задачи.

Поясним, что мы здесь имеем в виду. Рассмотрим следующую известную задачу:

По разные стороны канала расположены два населенных пункта. Указать место, в котором следует соорудить мост для сообщения между населенными пунктами так, чтобы сумма расстояний от каждого из них до моста была наименьшей[1].

---

[1] Подразумевается, что мост строится в направлении, перпендикулярном линии берега.

При подобной формулировке в задаче отсутствует элемент творческого подхода к ее решению: в условии сказано, где нужно строить мост, т. е. говорится о месте, в котором он должен сооружаться. Другое дело, если та же задача предстанет перед учащимися в следующем виде:

По разные стороны канала расположены два населенных пункта. Указать место, в котором следует соорудить мост для сообщения между ними.

При такой постановке задачи учащийся должен самостоятельно определить наиболее рациональные условия для выбора места под сооружение моста.

21. Опыт показывает, что учащиеся проявляют значительно больший интерес к решению практической задачи, содержание которой требует указать не только геометрическое решение, но и выбрать наиболее рациональные условия для достижения поставленной задачей практической цели. Но, как мы отмечали выше, в учебной литературе такие задачи встретить трудно.

Однако учитель может сам составлять подобные задачи. Существует правило наполнения отвлеченного условия геометрической задачи таким практическим содержанием, которое поможет учителю вызвать у учащихся творческие поиски, поставить перед необходимостью искать рациональный способ решения. Вместе с тем, решая такую преобразованную задачу, учащиеся смогут оценить значение рационализации в практической деятельности человека.

В чем же состоит это правило? Разберем его на конкретном примере. Рассмотрим следующую конструктивную задачу:

По одну сторону прямой даны две точки. Построить на прямой третью точку так, чтобы сумма расстояний от нее до заданных точек была наименьшей.

Сформулированная задача имеет отвлеченное содержание, причем искомый объект должен удовлетворять двум требованиям: первое — находиться на прямой, второе — иметь наименьшую сумму расстояний до данных точек. Заметим, что отвлеченный характер рассматриваемой задачи таков, что исключение одного из этих требований делает ее решение неопределенным. Но если вместо абстрактных геометрических объектов ввести в условие задачи некоторые реальные объекты, то это позволит не говорить о всех требованиях, которым должен удовлетворять искомый объект, и в то же время сохранить определенность задачи. Поэтому сущность разбираемого нами правила и состоит в подборе таких реальных объектов, замена которыми отвлеченных (геометрических) объектов позволит явно не сообщать хотя бы одно из требований, предъявляемых к искомому объекту: это требование должно явиться следствием рационального выбора условий для достижения поставленной задачей практической цели.

Так, если отвлеченное содержание задачи заменить следующим реальным: *построить на берегу канала водонасосную станцию для* *снабжения водой двух населенных пунктов, расположенных по одну сторону канала*[1], то в условии задачи требование наименьшего удаления станции от населенных пунктов явно не сообщается, оно должно явиться результатом рационального подхода к выбору места под водонасосную станцию: затрата времени и материалов на строительство водосистемы должна быть минимальной.

22. Конечно, не к каждой геометрической задаче можно применить данное правило. Для этого удобнее всего использовать геометрические задачи на максимум и минимум и задачи на геометрическое равновесие (равноудаленность), т. е. те задачи, которые чаще всего встают перед человеком в его практической деятельности.

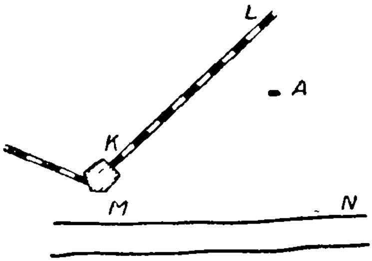


Рис. 19

Применяя правило к задаче на максимум и минимум, следует преобразовать ее содержание так, чтобы явно не сообщалось требование максимума или минимума. Преобразуя содержание задачи на геометрическое равновесие, абстрактные объекты следует заменить такими реальными, которые позволят не сообщать явно условие равноудаленности. Например:

Внутри острого угла дана точка. Построить треугольник наименьшего периметра так, чтобы его вершины лежали: одна — в данной точке, две другие — на сторонах данного угла.

Эта задача на минимум. Поэтому применение к ней правила связано с такой заменой геометрических объектов на реальные, которая позволит явно не сообщать условие минимума:

Пионеры, направляясь в поход из лагеря A (карта местности изображена на рис. 19), *должны дойти до полотна железной дороги KL и побывать на реке MN. Проложить на карте их путь.*

А в задаче:

Построить точку, равноотстоящую от вершин данного треугольника, — в результате преобразования не следует сообщать условие равноудаленности: эта задача на геометрическое равновесие. Последней задаче может соответствовать следующая:

Для трех построек A, B, C нужно соорудить общий колодец. Найти точку, в которой это следует делать[2].

23. Таким образом, правило наполнения условия геометрической задачи практическим содержанием, требующим поисков рационального решения, состоит в замене отвлеченного содержания задачи реальным так, чтобы хотя бы одно из требований

[1] Имеется в виду водоснабжение по замкнутому контуру.

[2] При таком условии точки *A*, *B* и *C* нужно располагать на чертеже так, чтобы треугольник *ABC* не был тупоугольным.

условия к искомому объекту явно не сообщалось, а вытекало из необходимости рационального решения поставленного задания.

24. Упражнения в решении специальных задач не единственное средство воспитания у учащихся рационального подхода к делу. Здесь возможно использование весьма разнообразного материала школьного курса геометрии.

Так с увеличением знаний учащихся по геометрии появляется возможность заменять изученные ранее приемы геометрических построений такими новыми, которые требуют меньшего числа операций, либо позволяют применить менее сложный конструктивный инструмент, т. е. появляется возможность рационализировать известные учащимся приемы построений.

Например, изучение сегмента, вмещающего данный угол, позволяет показать более простые построения на окружности с помощью только чертежного треугольника. Использование ученической двухсторонней линейки позволяет упростить приемы построения биссектрисы, параллельных прямых, деления отрезка в заданном отношении [1] [1].

Большую пользу в воспитании навыков рационального выбора средств может сказать и обычная геометрическая задача, решения которой, как правило, бывают весьма разнообразными. Сравнение этих решений и целенаправленный выбор наиболее рациональных из них поможет воспитать у учащихся правильное отношение к решению возникающих перед ними задач.

§ 5. Развитие изобретательности учащихся

25. Развитие изобретательности учащихся в первую очередь связано с воспитанием у них умений применять получаемые в процессе обучения теоретические знания в практических целях.

При сложившейся системе школьного образования развитие изобретательности имеет сугубо односторонний характер: учащийся хотя и применяет изучаемый теоретический материал, но не по собственной инициативе, а под руководством учителя. Точнее, он даже не применяет, а наблюдает, как и где находят применение эти теоретические знания. Поэтому традиционная система обучения слабо способствует развитию изобретательности учащегося, почти не развивает его инициативы, уверенности в свои способности к изобретательской работе.

Существовавшая длительное время точка зрения, выдвинутая буржуазными психологами, что изобретательская деятельность присуща лишь избранному кругу лиц с исключительными врожденными талантами, полностью еще не изжита. Нередко выпускник

---

[1] См. в конце главы дополнительную литературу.

школы, придя на производство, довольно длительное время работает, не проявляя тенденции к усовершенствованию процесса выполняемой им работы. А на вопрос: «Почему Вы не пытаетесь изобрести приспособление, позволяющее увеличить производительность?» — часто можно услышать ответ: «А разве я могу изобретать?»

Понятно, что такое положение является следствием недостаточного внимания, уделяемого школой проблеме развития изобретательности учащихся, особенно в области техники.

В настоящее время задача развития технического изобретательства учащихся ставится перед учебными предметами, непосредственно связанными с техникой, и перед техническими кружками, работа в которых протекает во внеклассное время. Однако эта же задача с неменьшим успехом может быть решена и в процессе обучения общеобразовательным предметам, в частности на уроках математики.

Особо благоприятными условиями в организации изобретательской деятельности учащихся располагает школьный курс геометрии, где имеется возможность предлагать учащимся конкретные задания на изобретение конструктивных приборов, знакомство с которыми не предусматривается школьной программой, но принципиальные схемы конструкций которых могут быть основаны на изучаемых в школе геометрических свойствах.

26. Следует сразу сказать, что задания на изобретение в процессе обучения геометрии выглядят пока несколько необычно. И вряд ли учитель-математик сочтет посильным для каждого учащегося задание на изобретение такого прибора, как, например, к о н и к о г р а ф. А между тем задания на изобретение конструктивных приборов и инструментов доступны нашим учащимся, и школа в состоянии развивать у своих воспитанников способности к такой изобретательской работе в процессе обучения геометрии.

Если проанализировать принципиальные схемы устройства конструктивных приборов, если попытаться определить геометрические свойства, лежащие в их основе, то нетрудно убедиться, насколько тесно связано конструирование этих приборов с геометрической задачей на построение.

Эта связь позволяет образовать определенную методическую схему решения изобретательской задачи, руководствуясь которой учащийся без особых трудностей сможет создавать конструкции заданных приборов.

Схема содержит 3 этапа: первый этап — это переложение условия задания по изобретению на математический язык, т. е. представление его в виде соответствующей геометрической задачи на построение; второй этап — это выполнение нескольких вариантов построения искомой фигуры; третий этап — это образование схемы, конструкции прибора, в большинстве случаев за счет указания подвижных элементов на полученном построении.

Поясним сущность каждого этапа схемы на следующем примере.

Пусть требуется изобрести прибор для механического деления отрезков в заданном отношении.

Понятно, что это задание представляется в виде следующей геометрической задачи на построение:

Дан отрезок. Найти точку, делящую отрезок[1] *в отношении* $m : n$.

Итак, задание на изобретение приняло вид конструктивной задачи (I этап). Теперь следует выполнить построение, т. е. решить задачу (II этап). Воспользуемся для этого обычным способом деления отрезка в заданном отношении.

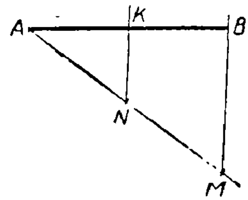


Рис. 20

Пусть AB — заданный отрезок (рис. 20). Отложим на произвольном луче с началом в точке A отрезок AM, содержащий $m + n$ равных частей. Соединим точку M с точкой B. Через точку N (AN содержит m частей) проведем прямую, параллельную MB, которая и пересечет AB в искомой точке K.

Чтобы теперь перейти к схеме конструкции создаваемого прибора (III этап), нужно указать в выполненном построении подвижные элементы (отрезки, углы и т. п.), т. е. элементы, которые должны изменять свою величину с изменением длины заданного отрезка, а также с изменением величины членов отношения.

Длина отрезков AN и AM зависит от чисел m и n. Поэтому точки Nи M должны быть подвижными вдоль луча с началом в точке A.

Величина угла BMA зависит как от длины заданного отрезка, так и от чисел m и n. Изменение величины этого угла связано с положением прямой MB. Поэтому прямая MB также должна быть подвижной, а именно вращающейся в плоскости чертежа около точки M.

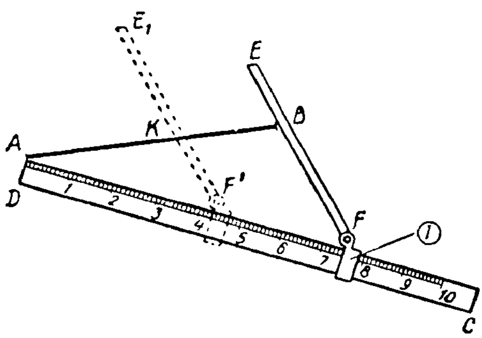


Рис. 21

Если за основу прибора взять прямолинейную планку DC (рис. 21), снабженную миллиметровой шкалой, то процесс откладывания равных частей можно осуществлять движением муфты 1 вдоль планки DC. Эта муфта будет выполнять функции подвижных точек M и N (рис. 20).

Прямолинейная планка FE (рис. 21), скреплен-

[1] Пусть внутренним образом.

ная посредством шарнира F с муфтой 1, будет овеществлять прямую MB.

Таким образом, чтобы при помощи сконструированного прибора разделить отрезок AB (рис. 21) в заданном отношении (например, 4,3 : 3,1), нужно муфту 1 установить против деления шкалы DC, соответствующего сумме членов отношения (в нашем случае против деления $7,4$), и наложить прибор на плоскость чертежа так, чтобы начало шкалы совместилось с концом A отрезка. Повернув планку FE так, чтобы ее кромка прошла через другой конец отрезка, перемещаем муфту 1 до деления 4,3 (один из членов отношения), сохраняя параллельность планки FE. Легко видеть, что FE пересечет тогда отрезок AB в искомой точке K.

27. Создавая конструкцию прибора, мы воспользовались обычным способом построения точки, делящей отрезок в заданном отношении. Однако мы могли воспользоваться и другими способами построения, которые привели бы и к другим конструкциям прибора.

Например, найдем искомую точку следующим образом:

Построим на заданном отрезке AB (рис. 22) как на основании треуголь-

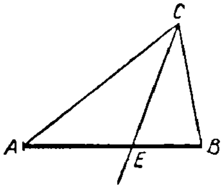


Рис. 22

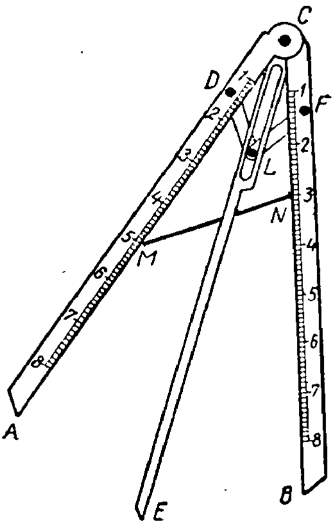


Рис. 23

ник ABC так, чтобы сторона AC содержала m единиц, а BC — n таких же единиц. Если в этом треугольнике построить биссектрису CE угла C, то на основании теоремы о биссектрисе угла треугольника точка E будет искомая.

Овеществление данного построения приводит к прибору, изображенному на рисунке 23.

Прибор состоит из двух прямолинейных планок AC и BC, снабженных равномерными шкалами, с началом отсчета в точке C, в которой планки скреплены посредством оси. Прибор снабжен шарнирным ромбом $CDLE$, шарнир которого L может свободно перемещаться вдоль CE. Диагональ CL ромба является его осью симметрии, служит одновременно и биссектрисой угла ACB.

Чтобы таким прибором выполнить деление отрезка MN (рис. 23) в отношении, например, 5 : 3, нужно совместить деление 5 шкалы AC с одним концом отрезка, а деление 3 шкалы BC — с другим. Тогда EC механически определит искомую точку.

28. Рассмотренные выше примеры показывают, что в процессе решения изобретательской задачи учащемуся приходится и абстрагировать (I этап), и схематизировать (II этап), и переходить от теории к практике (III этап).

Таким образом, для организации изобретательской деятельности учащихся в процессе обучения геометрии могут использоваться конкретные задания на изобретение конструктивных приборов. Причем, несмотря на указание конечной цели предмета изобретения, т. е. на его назначение, способы решения изобретательской задачи могут быть различными: за учащимися сохраняется инициатива в выборе принципиальной схемы конструкции прибора.

29. Как уже отмечалось, предметом изобретений преимущественно должны служить приборы, конструкции которых редко описываются в учебной литературе, т. е. такие, о существовании которых учащийся вряд ли знает. К таким приборам в настоящее время можно отнести: биссектор, симметрограф, агрометр, прибор для механического деления отрезков пополам, прибор для построения окружности без центра, прибор для механического построения различных линий, прибор для измерения двугранных углов и т. д. [2].

Однако это не исключает возможности предлагать задания и на изобретение приборов, известных учащимся и даже изучаемых в соответствии с учебной программой, ибо конструкции приборов одного и того же назначения могут основываться на различных геометрических свойствах.

Так, например, в школе изучается центроискатель, основанный на свойстве биссектрисы угла, описанного около окружности (рис. 24). Но в основу конструкции центроискателя можно положить и другие геометрические свойства: свойство оси симметрии хорды (рис. 25); свойство средней линии прямоугольного тре-

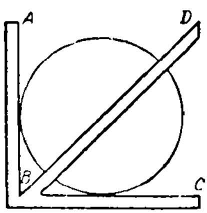


Рис. 24

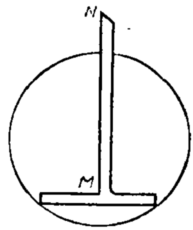


Рис. 25

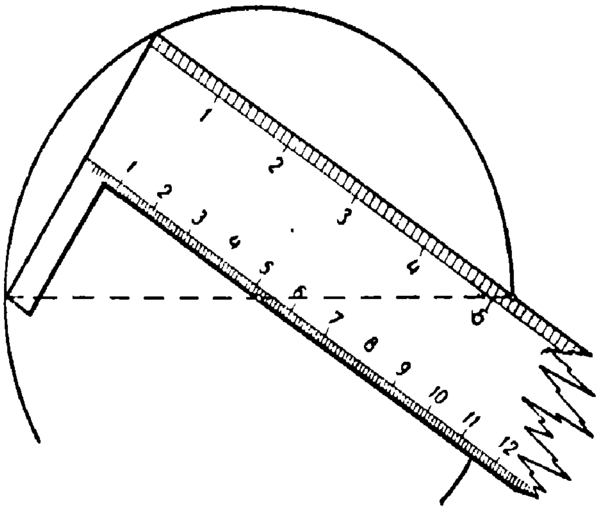


Рис. 26

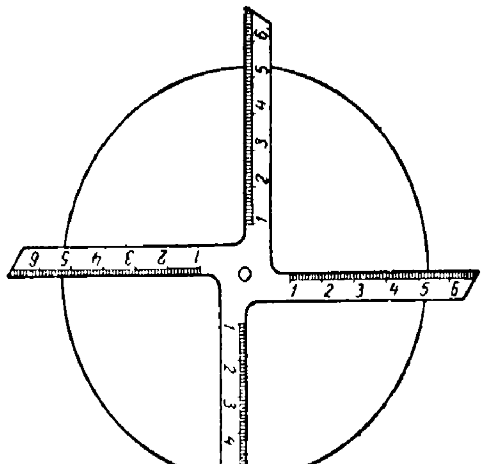


Рис 27

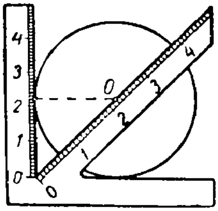


Рис 28

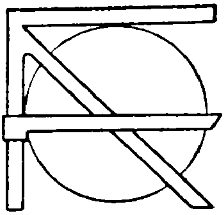


Рис. 29

угольника (рис. 26) [3]; равноудаленность центра окружности от всех ее точек (рис. 27) и т. п.

Если школьный центроискатель снабдить двумя шкалами с масштабами 1 и $\sqrt{2}$ (рис. 28) или подвижной, перпендикулярной к стороне угла планкой (рис. 29), то для отыскания центра окружности достаточно одного наложения прибора.

В качестве предмета изобретений, предлагаемых учащимся, могут выступать и приборы для измерения недоступных расстояний (высотомеры, дальномеры).

30. Важно, чтобы изобретаемые учащимися приборы по мере возможности находили практическое применение, чтобы учащиеся видели пользу, которую эти изобретения могут принести. Поэтому задания на изобретение желательно сопровождать не только изготовлением моделей изобретаемых приборов, но и изготовлением самих приборов, если конструкция последних удачна. Менее сложные приборы могут быть изготовлены учащимися дома, сложные — в учебных мастерских. На уроке достаточно ограничиться лишь получением принципиальной схемы конструкции прибора, а с накоплением у учащегося опыта в решении изобретательских задач задания на изобретения могут полностью предназначаться для домашних работ. Материалом для изготовления изобретаемых учащимися приборов (или их моделей) преимущественно служат плотная бумага, картон, жесть.

31. Следует полагать, что для полного решения изобретательской задачи учащемуся потребуется не один день. Поэтому нет необходимости предлагать их слишком часто. Достаточно, если каждый учащийся выполнит 3 — 4 задания на изобретение в течение одного учебного года, в установленные учителем сроки.

Такое незначительное число заданий не повлечет за собой перегрузки учебного процесса. В то же время общее число изобретений, которое выполнит каждый учащийся за период обучения геометрии в школе, сыграет важную роль в формировании способностей к техническому творчеству. Ценность подобных заданий состоит в том, что они способствуют воспитанию у учащихся уверенности в своих способностях к изобретению.

Со схемой решения изобретательской задачи учащиеся знакомятся на одном из первых занятий на изобретение (если соответствующая работа не проводилась с учащимися в период их обучения в восьмилетней школе) [4].

32. Конструктивные приборы, изучение которых предусмотрено школьной программой (а также некоторые из наиболее распространенных), можно использовать как подготовительное средство к организации изобретательской деятельности учащихся.

Знакомство с такими приборами следует сопровождать решением обратной задачи: после разбора устройства приборов ставить перед учащимися задачу на определение геометрических свойств, обусловливающих их конструкции (см. § 3).

33. Безусловно, значительная часть приборов, которые будут «изобретаться» учащимися в процессе их изобретательской деятельности, уже существует. Однако это не должно явиться поводом для сомнений в «изобретении» давно изобретенного. Именно школьные годы представляют такой период, когда в «открытии» или «изобретении» наибольшую ценность представляет элемент самостоятельности. Поэтому новизна таких изобретений может быть субъективной; важно лишь, чтобы изобретаемые приборы были новыми в практике учащегося.

§ 6. Развитие конструкторских способностей. Конструктивный характер практических работ по моделированию

34. В отличие от других видов расчетов конструктивный расчет состоит в обеспечении нормального взаимодействия между деталями создаваемого объекта за счет установления правильного взаимоотношения между их размерами. Поэтому развитие конструкторских способностей учащихся связано с воспитанием умений устанавливать такую зависимость между размерами отдельных частей предмета, которая обеспечит их нормальное взаимодействие.

35. Какой же учебный геометрический материал может служить предметом упражнений учащихся в конструктивных расчетах?

Прежде всего таким материалом являются изучаемые в школе конструктивные приборы и инструменты, знакомство учащихся с которыми можно сопровождать выявлением зависимости между размерами их частей и деталей. Так, установление конструктивной зависимости между размерами частей обычного учебного центроискателя (рис. 24) требует, чтобы длины сторон угла центроискателя были равными, а длина биссектрисы была в $\sqrt{2}$ раза более стороны.

Установление конструктивной зависимости между размерами деталей трисектора (рис. 8) требует равенства стержней AC, CD и расстояния AB.

Установление конструктивной зависимости между размерами трисектора, изображенного на рисунке 9, требует, чтобы длина AB^1 была не менее суммы $AB + BC$, а длина стержня AE — не менее суммы $AB' + B'C'$.

Еще бо́льшую пользу в развитии конструкторских способностей учащихся принесут конструктивные расчеты приборов, создаваемых самими учащимися (например, приборы, создаваемые в результате заданий на изобретение; см. предыдущий параграф). Ведь здесь потребуется установить конструктивную зависимость между частями не только готовых приборов, но и возникает необходимость придавать нужные размеры деталям приборов собственных конструкций.

36. Своеобразными упражнениями в конструктивных расчетах являются и задачи на определение формы калибра (пробки), решение которых требует установления определенной зависимости между размерами отверстий в пластине и формой калибра.

В общем виде эта задача формулируется следующим образом: *Из цельного куска материала нужно изготовить пробку, удовлетворяющую следующим двум требованиям*:

а) она должна закрывать заданные в пластине отверстия;

б) она должна проходить через каждое из них.

Так как форма пробки зависит от формы отверстий в пластине, то общая задача может быть разбита конкретными условиями на частные случаи. Это позволит предлагать учащимся подобные задачи при изучении каждого нового геометрического тела.

На рисунке 30 изображена пластина — пример условия задачи на определение формы калибра, на рисунке 31 — калибр, являющийся решением этой задачи. Калибр представляет собой цилиндр с диаметром и высотой, равными a, у которого отсечены две части плоскостями, проходящими через один из диаметров основания цилиндра и касающимися окружности другого основания. Круглое отверстие в пластине перекрывается основанием цилиндра; квадратное — по осевому сечению цилиндра вдоль диаметра, через ко-

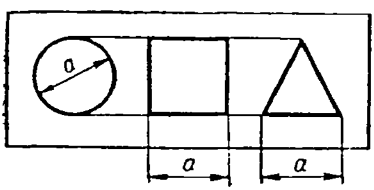


Рис. 30

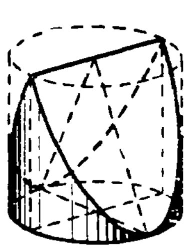


Рис. 31

торый проходят секущие плоскости; и треугольное отверстие перекрывается цилиндром по его осевому сечению, перпендикулярному к предыдущему сечению.

37. Особую роль в развитии конструкторских способностей учащихся играют геометрические задачи на построение, в процессе решения которых неизбежно приходится выполнять операции, почти тождественные операциям, лежащим в основе конструирования. Поэтому учитель должен уделять самое серьезное внимание решению задач на построение.

Следует отметить, что геометрическая задача на построение, как никакая другая геометрическая задача, способствует развитию творчества учащихся: «Задачи на построение развивают изобретательность, инициативу, конструктивные способности, столь необходимые будущим строителям нашей великой Родины»[1].

38. Развитию конструкторских способностей могут благоприятствовать и практикуемые в школе работы по моделированию геометрических тел, если учащиеся будут не просто «склеивать» модели по готовым чертежам, но и будут выполнять расчеты их разверток. Поэтому задания на моделирование следовало бы предлагать так, чтобы перед учащимися появлялась необходимость в установлении зависимости между размерами склеиваемых участков. Другими словами, практические работы по моделированию должны содержать в себе элементы простейших конструктивных расчетов.

Например, задание на изготовление, предположим, бумажной модели правильной четырехугольной пирамиды по ребру основания и апофеме не включает в себя расчета длины склеиваемых участков: они определяются непосредственно. Но если в этой же задаче предложить другие данные, например объем и высоту (или только объем), то учащемуся придется произвести расчет развертки пирамиды, а следовательно, установить необходимую зависимость между размерами склеиваемых (смежных) участков.

§ 7. Развитие наблюдательности и сообразительности. Формирование критического образа мышления

39. Формирование способностей к техническому творчеству связано с достаточно высоким уровнем развития воображения, логического мышления, наблюдательности, смекалки.

В практике нашей школы уделяется достаточно внимания развитию таких качеств, как воображение, логическое мышление; в школьных программах постоянно подчеркивается необходимость в

[1] Н. Ф. Четверухин, Методы геометрических построений, М., Учпедгиз, 1952, стр. 3.

этом. Однако того же самого нельзя сказать по поводу развития наблюдательности и смекалки (сообразительность, находчивость). По-видимому, подразумевается, что учебный процесс в целом сам по себе воспитывает у учащихся эти качества.

Поэтому, как правило, учитель, идя на урок, не ставит перед собой специальной задачей использование обучающего материала для развития наблюдательности и смекалки.

40. Значительную роль в развитии наблюдательности играют упражнения в решении геометрических задач на построение, причем особое место в этом принадлежит этапу ее исследования, где от решающего почти всегда требуется особая наблюдательность. Так, например, исследование решения сравнительно несложной задачи на построение треугольника по двум сторонам и углу, лежащему против меньшей из них, требует острой наблюдательности, чтобы усмотреть, что если заданный угол острый, то случай двух решений ограничивает длину противолежащей стороны не только снизу, но и сверху. Поэтому при решении конструктивных задач учителю следует обращать особое внимание на этап исследования и добиваться, чтобы учащиеся отчетливо представляли возможные случаи решения задачи. Иногда в этих целях полезно этап исследования задачи на построение рассматривать как самостоятельную геометрическую задачу. Например, до решения задачи на построение треугольника по двум сторонам и противолежащему углу можно предложить учащимся определить:

Сколько общих точек со сторонами острого угла может иметь окружность, центр которой находится на одной из его сторон?

Или:

В каких случаях дуга, из точек которой данный отрезок виден под данным углом, пересекается (касается) с окружностью, центр которой совпадает с серединой данного отрезка?

Вторая задача представляет собой изолированный элемент исследования конструктивной задачи, в которой при построении искомого приходится строить треугольник по основанию, медиане основания и углу при вершине.

41. Большие возможности в развитии наблюдательности заключают в себе и геометрические чертежи, сопровождающие решение большинства задач на доказательство, вычисление и построение. Чертеж позволяет ставить перед учащимся задачи на выделение фигур определенного вида, заданных в сочетании с другими фигурами. Особенно удобны такие задания в стереометрии, когда на чертеже заданы различные сочетания или комбинации нескольких тел. Можно даже предлагать учащимся специальные вопросы на наблюдательность по заранее заготовленному чертежу. Например: *в куб вписан правильный тетраэдр. Сколько при этом образовалось пирамид?*

Сколько осей симметрии имеет куб? Сколько он имеет плоскостей симметрии?

Вполне очевидно, что для ответа на подобные вопросы недостаточно одних знаний. Здесь потребуется и наблюдательность.

42. В последние годы школьные задачники по геометрии все более и более насыщаются задачами на сообразительность и находчивость, т. е. задачами на смекалку. Однако, несмотря на это, не всегда задачам на смекалку уделяется должное внимание: во многих школах учащиеся решают подобные задачи довольно редко. Такое положение нельзя считать правильным. Смекалка — очень важное качество, необходимое в любой профессии. Это отмечают и ученые-педагоги, и изобретатели, и рационализаторы. Поэтому задачи, развивающие сообразительность, смекалку, необходимо предлагать учащимся значительно чаще.

На уроке целесообразны такие упражнения на смекалку, решение которых не связано со значительной затратой времени.

В большинстве случаев это задачи-вопросы, преимущественно устного характера, как например:

Когда центры Земли, Солнца и Луны находятся в одной плоскости?

Могут ли в четырехугольной пирамиде противоположные грани быть перпендикулярными к основанию?

Может ли сечение куба иметь форму треугольника, четырехугольника, пятиугольника, шестиугольника?

Как при помощи только линейки измерить диагональ деревянного кубика?

Могут ли равносторонние треугольники образовывать боковые грани правильной шестиугольной пирамиды?

Можно ли построить прямой угол, имея под руками только кусок веревки?

Можно ли измерительной линейкой определить диаметр круга, если длина линейки меньше радиуса круга? И т. п.

На рисунке 32 дано обоснование одного из способов решений последней задачи.

AB и BC — равные хорды.

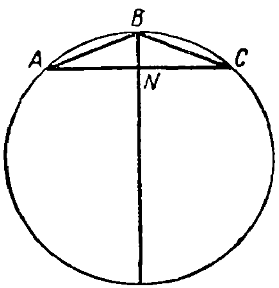


Рис. 32

Точка N — середина AC — позволяет измерить часть BN диаметра d.

Тогда $(d - BN)\,BN = AN^2$,

откуда $d = \frac{AN^2}{BN} + BN$.

Задачи на смекалку с громоздким условием, а также сложные задачи желательно предлагать учащимся для работы на досуге.

Задаваясь целью развивать сообразительность, нужно как можно шире использовать занимательную литературу, один из основных источников подбора задач на смекалку.

43. Творческий подход к решению задач, возникающих перед человеком в его практической деятельности, обусловливается тем, насколько он умеет критически проанализировать интересующие его явления, насколько он способен подмечать элементы несовершенства в окружающем. Для деятельности новатора, изобретателя всегда характерно умение увидеть недостатки, которые следует устранить. И успех работы новатора, рационализатора заключается не только в решении самой задачи, но и в умении отыскать эту задачу. Поэтому весьма важно вырабатывать у учащихся тенденцию присматриваться, ставить задачу изменения, улучшения. Нужно добиваться, чтобы вопросы: «А как бы это сделал я?», «А как это можно сделать лучше?» — стали постоянными спутниками учащихся. И чем больше на это будет мобилизовано средств, тем эффективней будет результат.

44. Наиболее доступным средством воспитания у учащихся критического отношения к техническому совершенству конструкций в процессе обучения геометрии следует признать сравнение конструктивных приборов и инструментов (как изучаемых согласно школьной программе, так и служащих предметом заданий на изобретение) путем выделения положительного и отрицательного. Для этого используются приборы одинакового назначения, основанные как на различных геометрических свойствах, так и на одних и тех же, но имеющих какие-либо конструктивные различия.

Например, учебный центроискатель (см. рис. 24) и центроискатель, изображенный на рисунке 25, — приборы, имеющие одинаковое назначение. Однако их конструкции основаны на различных геометрических свойствах: в основе конструкции первого прибора используется свойство биссектрисы прямого угла, описанного около окружности; в основе конструкции второго — свойство перпендикуляра к хорде, восставленного из ее середины.

Сравнивая между собой эти два прибора, следует выделить следующие преимущества прибора второй конструкции:

Во-первых, более высокую точность отыскания искомого центра, так как рабочая установка первого прибора определяется точками касания, положение которых установить значительно сложнее, чем положение точек пересечения, определяющих рабочую установку второго прибора.

Во-вторых, имея меньшие габариты, второй центроискатель обладает более широким диапазоном, так как даже при одинаковой длине планок BD и MN (рис. 24, 25) вторым центроискателем можно определить центр окружности большего диаметра.

В-третьих, установка второго центроискателя в рабочее положение требует меньше времени, чем установка первого.

В-четвертых, если на чертеже задана только часть окружности, то определение ее центра первым прибором возможно тогда, когда заданная дуга более четверти окружности; второй центроискатель может не требовать такого условия.

У учителя всегда имеется возможность специально готовить конструктивные приборы, отличающиеся между собой некоторым расположением частей (или размерами), и использовать сравнение этих приборов для формирования у учащихся критического отношения к техническому совершенству конструкций.

* * *

Изложенный в настоящей главе материал, конечно, не исчерпывает всех вопросов, связанных с проблемой политехнизации процесса обучения геометрии и установления ее связи с жизнью. В основном в главе приведены указания и советы, которые должны помочь учителю найти правильное решение главной задачи, стоящей перед нашей школой, — задачи обеспечения прочного и глубокого овладения учащимися геометрическими знаниями, умения применить эти знания в деле, подготовить учащегося к *творческому труду на производстве.*

Опыт широкой массы учителей, личная инициатива, творчество, вдумчивая и серьезная работа — вот основной залог успеха в достижении этой большой и важной цели.

Дополнительная литература

[1]. О рациональных приемах геометрических построений, «Математика в школе», 1961, № 6.

[2]. Как геометрическая задача помогает изобретать конструктивные приборы, сб. «Новые наглядные пособия по математике» под ред. И. Н. Шевченко, Вып. 1 М. Изд. АПН РСФСР, 1962.

[3]. «Математика в школе», 1963, № 3, стр. 44—45.

[4]. М. Н. Трубецкой, Развитие способностей учащихся к техническому творчеству на уроках геометрии, М., Учпедгиз, 1963.

ГЛАВА III

ВЕКТОРЫ В КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ

§ 1. Значение понятия вектора в современной науке

1. Одним из самых фундаментальных понятий современной математики является понятие вектора. Впервые это понятие нашло применение в механике: векторными величинами являются скорость, ускорение, сила, момент силы и т. д. Высокая степень наглядности и простота геометрических операций над векторами привели к тому, что понятие вектора нашло всеобщее признание и применение в кинематике, статике, динамике точки и динамике системы, а также в теории потенциала и в гидродинамике.

Дальнейшая эволюция понятия вектора осуществляется благодаря систематическому использованию этого понятия в различных разделах математики. Работы К. Весселя (K. Wessel, 1745 — 1818), Аргана (Argand J. R, 1768 — 1822) и Гаусса (K. F. Gauss, 1777 — 1855) по теории комплексных чисел установили связь между арифметическими операциями над комплексными числами и геометрическими операциями над векторами в двумерном пространстве — в плоскости.

В середине прошлого столетия в «Лекциях о кватернионах» В. Гамильтона (Hamilton W. R., 1805 — 1865), в «Методе эквиполленций» Беллавитиса (Bellavitis G, 1803 — 1880), в «Барицентрическом исчислении» Мёбиуса (Möbius A. F, 1790 — 1868), в «Учении о линейной протяженности» Г. Грассмана (Grassmann H. .G, 1809 — 1877) понятие вектора находит широчайшее применение при изучении свойств трехмерного и многомерного пространства. Кстати сказать, сам термин «вектор» (от латинского глагола vecto — тяну, влеку) был введен В. Гамильтоном в 1846 г.

Конец прошлого и начало текущего столетия ознаменовались широким развитием векторного исчисления и его приложений. Были созданы: векторная алгебра и векторный анализ, теория поля, тензорный анализ, общая теория многомерного векторного пространства. Эти теории были использованы при построении специальной и общей теории относительности, которые играют исключительно важную роль в современной физике.

В математике в настоящее время на векторной основе излагаются линейная алгебра, аналитическая и дифференциальная геометрия.

2. Какое же значение имеет понятие вектора в элементарной геометрии и в какой мере целесообразно введение этого понятия в программу средней школы?

Прежде всего нужно иметь в виду, что важнейшей задачей советской средней школы является ознакомление учащихся с основами современной науки. В силу этого такое простое и в то же время весьма важное понятие современной математики, как понятие вектора, должно быть безусловно включено в круг понятий, усваиваемых учащимися средней школы. С другой стороны, большая наглядность векторных операций и легкость обоснования получаемых отсюда свойств и закономерностей не могут вызывать каких-нибудь методических трудностей при изложении этих вопросов.

Вместе с тем бóльшая общность позволяет во многих случаях привести очень интересные примеры замены сложных и громоздких доказательств ряда теорем простыми и изящными доказательствами, построенными на свойствах векторов. Таковы, например, приводимые далее доказательства теоремы о пересечении медиан треугольника, теорема косинусов, теорема о сумме квадратов диагоналей параллелограмма и т. д.

Элементы векторной алгебры дадут возможность учащимся убедиться в том, что существуют такие объекты и такие операции над ними, которые существенным образом отличаются от объектов и операций элементарной алгебры и в то же время в ряде их свойств обнаруживают замечательные аналогии с привычными алгебраическими действиями. Преподаватель должен все время обращать внимание учащихся на то, что, например, операция сложения векторов существенно отличается от арифметического действия сложения чисел. В первом случае мы производим определенное геометрическое построение, во втором случае — считаем. Однако и та и другая операция подчиняется переместительному и сочетательному законам, и в той и в другой операции существует нулевой элемент, и в том и в другом случае по сумме и одному из двух слагаемых однозначно определяется другое слагаемое. Факты такого рода наряду с уже известными свойствами композиции геометрических преобразований дают возможность познакомить, хотя бы в самых общих чертах, с понятием группы — одним из наиболее важных понятий современной математики.

Одновременно с изучением свойств векторов необходимо систематически обращать внимание учащихся на практические применения этих свойств к решению различных задач из физики. Для этого преподаватель математики должен работать в тесном контакте с преподавателями физики и астрономии, чтобы вместе с ними организовать подбор упражнений и задач, решаемых с помощью векторных операций.

§ 2. Векторы и основные операции над ними

3. Определение вектора и первоначальные операции над векторами даются при изучении параллельного переноса. По поводу этого определения необходимо заметить следующее. Некоторые авторы считают, что нельзя определять вектор как направленный отрезок, так как такой отрезок является лишь геометрическим отображением абстрактного понятия вектора. Однако обзор весьма обширной литературы по векторному исчислению показывает, что в подавляющем большинстве случаев изложение вопроса начинается с определения вектора как направленного отрезка. Вместе с тем нельзя не признать и того, что абстрактное понятие вектора, если его взять в полном объеме, будет недоступно учащимся.

Для правильного формирования понятия вектора необходимо указать на ряд физических величин, для характеристики которых нужно знать их величину и направление и которые поэтому могут быть изображены при помощи отрезка соответствующей длины и направления. К таким величинам относятся скорости, ускорения, силы и т. д.

Что касается обозначения вектора, то опыт классного преподавания показывает, что целесообразнее всего вектор обозначать стрелочкой, поставленной над соответствующими буквами: $\overrightarrow{AB}$, $\vec{m}$, $\vec{r}$, ... При этом нужно предупредить, что при обозначении вектора двумя буквами первой буквой всегда обозначается начало, второй — конец вектора. Следует также указать, что в печатном тексте не существует единой символики: чаще всего вектор обозначается буквами жирного шрифта, но некоторые авторы употребляют готические буквы, некоторые ставят над буквами не стрелочку, а черточку и т. д.

4. Итак, мы определяем вектор как отрезок, на котором указано направление, т. е. установлено, какой из его концов является начальной точкой и какой — конечной. Поэтому для точного описания вектора мы должны знать: а) его величину и б) его направление.

А б с о л ю т н о й в е л и ч и н о й или м о д у л е м вектора называется действительное неотрицательное число, которым выражается длина данного вектора. Модуль обозначается либо двумя вертикальными чертами: $|\overrightarrow{AB}|$ — «модуль вектора AB», либо той же буквой, которой обозначен вектор, но без стрелочки сверху: $|\vec{a}| = a$.

Вторым признаком вектора служит его н а п р а в л е н и е. Для определения направления на прямой достаточно указать, какая из двух ее точек является предшествующей и какая — следующей. Пользуясь этим определением и аксиомами порядка, можно доказать, что этим однозначно определяется порядок следования для любой пары точек этой прямой. Прямая, на которой установлено направление, называется о р и е н т и р о в а н н о й   п р я м о й или о с ь ю. В частности, ориентированная прямая, которой принадлежит данный вектор и направление которой совпадает с направлением вектора, называется о с ь ю   э т о г о   в е к т о р а.

Два вектора называются к о л л и н е а р н ы м и, если параллельны между собой их оси (напоминаем, что совпадение прямых мы рассматриваем как частный случай параллельности).

Два коллинеарных вектора называются с о н а п р а в л е н н ы м и, если: а) они имеют общую ось или б) они лежат в одной

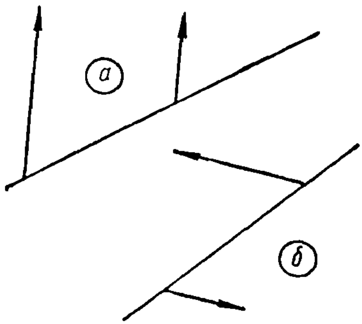


Рис. 1

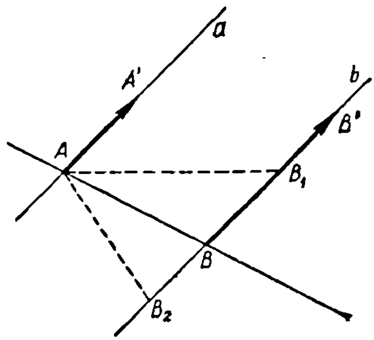


Рис. 2

и той же полуплоскости относительно прямой, проходящей через их начальные точки. Коллинеарные векторы, не удовлетворяющие этим условиям, называются п р о т и в о н а п р а в л е н н ы м и (на рис. 1,*а* показаны сонаправленные, на рисунке 1,*б* — противонаправленные векторы).

Если два вектора сонаправлены, то сонаправленными называются и оси этих векторов, так как при этом условии *каждый вектор первой оси сонаправлен с каждым вектором второй оси.*

Действительно, пусть $\overrightarrow{AA'}$ и $\overrightarrow{BB'}$ — сонаправленные векторы на различных прямых a и b (рис. 2). Это значит, что точки A' и B' лежат в одной и той же полуплоскости относительно прямой AB. Но в одной и той же полуплоскости относительно AB лежат и все векторы того же направления оси BB', имеющие начало в точке B, т. е. все эти векторы сонаправлены с вектором $\overrightarrow{AA'}$.

Проведя прямые AB_1 и AB_2, где точка B_1 находится между B и B', а точка B_2 предшествует точке B, мы получим, что точки A' и B' по-прежнему лежат в одной и той же полуплоскости относительно прямых AB_1 и AB_2. Но отсюда следует, что все векторы направления BB' с началом в точке B_1 или B_2 сонаправлены с AA', а это значит, что и все векторы оси b сонаправлены с AA'. Понятно, что такими же рассуждениями мы обнаружим, что и все векторы оси a сонаправлены с BB'.

Из доказанного предложения следует, что сонаправленность осей (а значит, и сонаправленность векторов) удовлетворяет условиям эквивалентности:

1) Если ось a сонаправлена с осью b, то и ось b сонаправлена с осью a. Это, очевидно, вытекает из доказательства предшествующего предложения.

2) Всякая ось сонаправлена сама с собой. Это следует из определения сонаправленности.

3) Если ось a сонаправлена с осью b, ось b сонаправлена с осью c, то ось a сонаправлена с осью c. Чтобы доказать это, рассмотрим оси a, b и c (рис. 3), удовлетворяющие указанным условиям. В силу определения сонаправленности $a \parallel b$, $b \parallel c$, поэтому $a \parallel c$. Прямая l, пересекающая a, пересекает b и пересекает c соответственно в точках A, B и C. Векторы $\overrightarrow{AA'}$ и $\overrightarrow{BB'}$ сонаправлены, и потому точки A' и B' лежат в одной и той же полуплоскости относительно прямой l. Векторы $\overrightarrow{BB'}$ и $\overrightarrow{CC'}$ тоже сонаправлены, и поэтому точки B' и C' лежат в той же полуплоскости относительно прямой l. Но это значит, что и точки A' и C' лежат в одной и той же полуплоскости относительно прямой l. Следовательно, векторы $\overrightarrow{AA'}$ и $\overrightarrow{CC'}$ сонаправлены и, значит, сонаправлены и оси a и c.

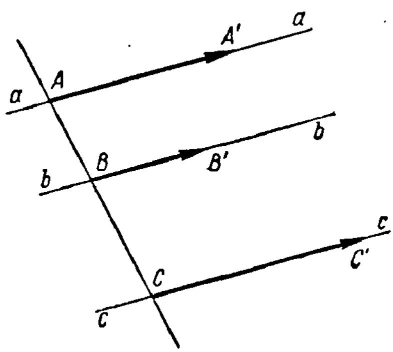


Рис. 3

Обратим внимание на то, что интуитивно ясное понятие направления нуждается в точном геометрическом определении и требует довольно серьезных рассуждений при выяснении его свойств. Поэтому при первоначальном ознакомлении учащихся с векторными операциями можно сначала опираться на непосредственную очевидность используемых свойств. Однако в дальнейшем было бы весьма желательно раскрыть геометрическую сущность этого понятия и доказать соответствующие предложения либо в классной обстановке (если позволит время), либо на кружковых занятиях.

5. Установив понятия абсолютной величины и сонаправленности векторов, переходим к определению их равенства.

Два вектора называются равными, если они сонаправлены и если равны их абсолютные величины.

Следует обратить внимание учащихся на то, что равенство векторов существенным образом отличается от равенства отрезков, для которого достаточно иметь только равенство длин.

Из определения равенства векторов следует, что за начальную точку данного вектора можно принять любую точку пространства при условии сохранения направления и абсолютной величины этого вектора. Поэтому векторы, удовлетворяющие этому определению равенства, называются свободными. Примером свободных векторов являются скорости точек твердого тела при поступательном движении его: каждая точка тела имеет одну и ту же скорость и по величине и по направлению.

С другой стороны, существуют физические величины, которые тоже изображаются векторами, но которые не допускают перенесения в любую точку пространства. Например, вектор, изображающий силу, можно переносить только вдоль его оси. Векторы такого рода называются скользящими.

И наконец, существуют физические величины, которые изображаются векторами, начало которых является постоянной точкой, — переносить такие векторы никуда нельзя. Поэтому они называются связанными векторами. Примером связанного вектора может служить скорость точки твердого тела при произвольном его движении. В этом случае скорость обусловлена только положением точки и этой точкой вполне определяется.

В математике изучаются по преимуществу свободные векторы, и в дальнейшем под словом «вектор» мы будем понимать свободный вектор в смысле вышеуказанного определения равенства.

Иногда мы будем пользоваться также векторами, начало которых связано с одной и той же фиксированной точкой. Такие связанные векторы называются радиусами-векторами. Конец радиуса-вектора служит для определения положения любой точки.

Если два противонаправленных вектора равны по абсолютной величине, то их называют противоположными по отношению друг к другу.

Из этого определения следует, что центральная симметрия преобразует каждый вектор в противоположный.

Пусть $\overrightarrow{AB}$ — данный вектор и центр симметрии O преобразует A в A' и B в B' (рис. 4). Отрезки AB и $A'B'$ равны и параллельны по свойству центральной симметрии. Если O не лежит на оси вектора AB (рис. 4,*а*), то точки B и B' лежат по разные стороны от прямой AA' (так как BB' пересекает AA') и, значит, векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A'B'}$ противоположны. Если же O лежит на прямой AB (рис. 4,*б*), то векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A'B'}$ противоположны, так как центральная симметрия на прямой изменяет ориентировку прямой на обратную.

Заметим еще, что из равенства векторов $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ следует равенство $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$. Если векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A'B'}$ имеют общую ось,

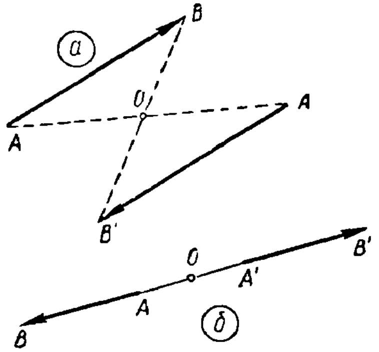


Рис. 4

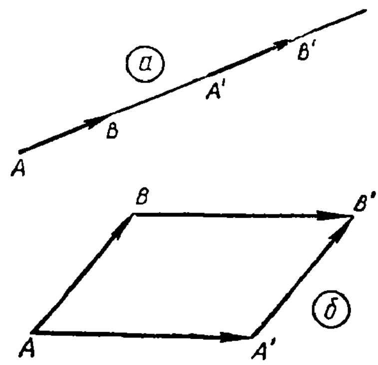


Рис. 5

то равенство $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$ легко получается из равенства соответствующих отрезков (рис. 5,*а*). Наглядным образом можно представить, что вектор $\overrightarrow{AB}$ переместился по оси на расстояние, определяемое вектором $\overrightarrow{AA'}$. При этом движении на такое же расстояние сместится и каждая точка этого вектора, в частности точка B. Итак, $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$. Если оси векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A'B'}$ не совпадают, то четырехугольник $ABB'A'$ — параллелограмм, в котором $\overline{AA'} = \overline{BB'}$. В то же время точки A' и B' лежат по одну сторону от прямой AB. Значит, $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$.

Наконец, важнейшим свойством равенства векторов является то, что это соотношение есть с о о т н о ш е н и е э к в и в а л е н т н о с т и:

1) Если $\vec{a} = \vec{b}$, то $\vec{b} = \vec{a}$ (симметрия).

2) $\vec{a} = \vec{a}$ (рефлективность).

3) Если $\vec{a} = \vec{b}$ и $\vec{b} = \vec{c}$, то $\vec{a} = \vec{c}$ (транзитивность).

Это объясняется тем, что равенство векторов обусловлено равенством их модулей и сонаправленностью. Но и равенство модулей и сонаправленность удовлетворяют условиям эквивалентности.

6. Операция сложения векторов излагается при изучении преобразования параллельного переноса.

При изложении этой темы учащимся необходимо подчеркивать, что вводимые нами новые операции являются обобщениями уже известных операций и что полученные преобразования в значительной степени имеют аналогии в алгебраических преобразованиях.

Одним из наиболее важных свойств сложения является равенство сумм при условии равенства слагаемых:

Если $\vec{a} = \vec{a}'$ и $\vec{b} = \vec{b}'$, то $\vec{a} + \vec{b} = \vec{a}' + \vec{b}'$.

Для доказательства этого свойства положим: $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{a}' = \overrightarrow{O'A'}$, $\vec{b}' = \overrightarrow{A'B'}$, где $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{O'A'}$ и $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$.

Как уже было доказано, $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{OO'}$ и $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$. Отсюда, в силу транзитивности равенства, получим: $\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{BB'}$, т. е. $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{O'B'}$.

Весьма важным следствием определения суммы векторов является предложение:

Если A, B и C — три произвольные точки, то всегда справедливо равенство:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Некоторые авторы называют это предложение «правилом трех точек».

Ассоциативный закон сложения доказывается весьма просто при помощи этого правила:

Если $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{CD}$, то

$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$,

$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$.

Итак, во всех случаях

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}.$$

Переместительный закон сложения векторов можно доказать, используя свойство центральной симметрии преобразовать вектор в противоположный. Пусть $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, тогда $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Примем произвольную точку O за центр симметрии. Тогда $O(A) \equiv A'$, $O(B) \equiv B'$ и $O(C) \equiv C'$. Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A'B'}$ противоположны, значит, $\vec{a} = \overrightarrow{B'A'}$, и аналогично $\vec{b} = \overrightarrow{C'B'}$ и $\vec{c} = \overrightarrow{C'A'}$. Поэтому получим:

$\vec{b} + \vec{a} = \overrightarrow{C'B'} + \overrightarrow{B'A'} = \overrightarrow{C'A'} = \vec{c}$.

И окончательно:

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

Сумма двух взаимно противоположных векторов дает **нуль-вектор** — точку: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = 0$.

Обратим внимание учащихся на то, что понятием нуль-вектора мы расширяем понятие вектора, так как к нему неприложимы ни понятие длины, ни понятие направления. Вместе с тем в операциях над векторами нуль-вектор играет ту же роль, что и число нуль в арифметике. Модуль нуль-вектора принимается равным нулю, а в отношении направления нуль-вектор считается сонаправленным со всеми векторами. Нетрудно убедиться в том, что при сложении с нуль-вектором данный вектор не изменяется:

$$\overrightarrow{AB} + 0 = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}.$$

Сочетательный и переместительный законы остаются в силе и в тех случаях, когда в числе слагаемых окажется нуль-вектор.

Вычитание векторов определяется как сложение данного вектора с вектором, противоположным вычитаемому. Если символом «$-\vec{b}$» обозначить вектор, противоположный вектору $\vec{b}$, то получим по определению:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$

Отсюда следует, что для векторов справедлива основная определяющая формула вычитания: $\vec{a} - \vec{b} + \vec{b} = \vec{a}$, т. е. разность, сложенная с вычитаемым, дает уменьшаемое. Поэтому равенства

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{c} \quad \text{и} \quad \vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$$

являются следствием друг друга. Но это значит, что, преобразуя векторные равенства, мы можем пользоваться известным правилом переноса:

Вектор, являющийся слагаемым в одной стороне равенства, может быть перенесен вычитаемым в другую часть равенства.

Обратно: *Вектор, являющийся вычитаемым в одной стороне равенства, может быть перенесен слагаемым в другую часть равенства.*

Из определения сложения и вычитания векторов можно получить еще правило параллелограмма, которое оказывается весьма полезным при различных операциях над векторами.

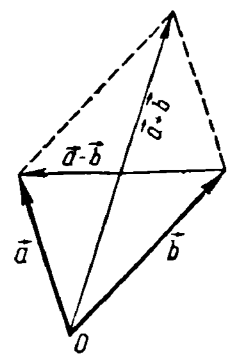


Рис. 6

Если два неколлинеарных вектора имеют общее начало и если через конец каждого из них провести прямую, параллельную другому, то в полученном параллелограмме диагональ, идущая от общего начала, определяет сумму векторов, а диагональ, соединяющая их концы, определяет их разность, при этом она направлена от вычитаемого к уменьшаемому (рис. 6).

При изучении правила параллелограмма следует обратить внимание учащихся на то, что сложение сил и сложение скоростей и ускорений в механике осуществляется по правилу параллелограмма.

7. Умножение вектора на действительное число рассматривается при изучении преобразования гомотетии. Там доказывается, что каждому данному вектору $\overrightarrow{SA} = \vec{a}$ и каждому данному действительному числу k однозначно соответствует вектор $k \cdot \overrightarrow{SA} = k\vec{a}$, сонаправленный с вектором $\vec{a}$ при $k > 0$ и противонаправленный при $k < 0$. Условимся, кроме того, принимать $k\vec{a} = 0$, если $k = 0$ или если $\vec{a} = 0$. Если $\vec{b} = k\vec{a}$, то это же равенство можно записать и так:

$$\frac{\vec{b}}{\vec{a}} = k.$$

Выражение $\frac{\vec{b}}{\vec{a}}$ называется о т н о ш е н и е м коллинеарных векторов. Доказывается также, что два коллинеарных вектора однозначно определяют действительное число, выражающее их отношение. Это число положительно при сонаправленных векторах и отрицательно при противонаправленных, и оно равно тому действительному числу, на которое нужно умножить вектор $\vec{a}$, чтобы получить вектор $\vec{b}$.

Непосредственно из определения умножения вектора на действительное число получаем выводы: если $\vec{a} = \vec{b}$, то $k\vec{a} = k\vec{b}$. Обратно: если $k\vec{a} = k\vec{b}$, то $\vec{a} = \vec{b}$.

И точно так же, если $k'\vec{a} = k\vec{a}$, то $k' = k$.

Далее в теории измерения отрезков доказывается (см. главу V § 3), что *при умножении отрезка на действительное число мера длины его умножается на это число.* В то же время меру длины отрезка можно рассматривать как число, на которое нужно умножить единичный отрезок, чтобы получить отрезок, равный данному. Имея это в виду, рассмотрим вектор $\vec{a}$ и положительные числа p и q. Обозначим через $\bar{a}$ отрезок, равный по абсолютной величине вектору $\vec{a}$, и примем его за единичный. Умножая $\bar{a}$ на число p, получим отрезок $\bar{b} = p\bar{a}$ с мерой длины p. Умножая $\bar{b}$ на q, получим:

$$q\bar{b} = q(p\bar{a}) = (qp)\,\bar{a}.$$

Отсюда сразу получаем сочетательный закон при умножении вектора на число:

$$q(p\vec{a}) = (qp)\vec{a}.$$

Если одно из этих чисел отрицательно, то вектор $q(p\vec{a})$ будет противонаправлен с вектором $\vec{a}$. А так как qp отрицательно, то и вектор $(qp)\vec{a}$ противонаправлен с $\vec{a}$. Поэтому будем иметь попрежнему

$$q(p\vec{a}) = (qp)\,\vec{a}.$$

Если же p и q оба отрицательны, то оба вектора будут сонаправлены с $\vec{a}$ и равенство сохранится. Итак, во всех случаях

$$q(p\vec{a}) = (qp)\vec{a}.$$

Умножение вектора на число подчиняется также распределительным законам:

правому: $(p + q)\,\vec{a} = p\vec{a} + q\vec{a}$ и

левому: $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$.

Для доказательства правого распределительного закона положим сначала, что числа p и q имеют одинаковые знаки. Тогда векторы $p\vec{a}$ и $q\vec{a}$ сонаправлены и их сложение приводится к сложению отрезков $p\bar{a}$ и $q\bar{a}$. Если через a обозначить меру длины отрезка $\bar{a}$, то меры длины полученных отрезков будут равны $|pa|$ и $|qa|$. Но из теории измерения отрезков нам известно, что мера длины суммы двух отрезков равна сумме их мер длины, т. е. равна $|p + q|a$, откуда следует, что

$$p\vec{a} + q\vec{a} = (p + q)\,\vec{a}.$$

Если числа p и q имеют разные знаки, то векторы $p\vec{a}$ и $q\vec{a}$ противонаправлены и сложение их приводится к вычитанию отрезков $p\bar{a}$ и $q\bar{a}$. Но тогда мера длины разности отрезков равна разности их мер длины. Следовательно, и в этом случае остается в силе формула:

$$p\vec{a} + q\vec{a} = (p + q)\,\vec{a}.$$

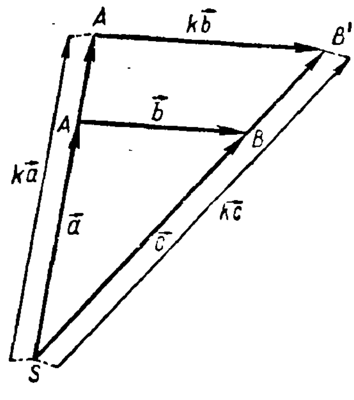


Рис. 7

Для доказательства **левого** распределительного закона рассмотрим векторы $\overrightarrow{SA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{SB} = \vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ (рис. 7).

Произведем гомотетию с центром S и с коэффициентом k. Тогда получим:

$$S_k(A) \equiv A', \quad S_k(B) \equiv B'.$$

При этом $\overrightarrow{SA'} = k\vec{a}$, $\overrightarrow{A'B'} = k\vec{b}$, $\overrightarrow{SB'} = k\vec{c}$.

Следовательно, $\overrightarrow{SA'} + \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{SB'}$, т. е. $k\vec{a} + k\vec{b} = k\vec{c}$, или

$$k\vec{a} + k\vec{b} = k(\vec{a} + \vec{b}).$$

Формулы распределительного закона дают правила раскрытия скобок и вынесения общего множителя за скобки в векторных выражениях.

8. С умножением вектора на число связаны еще два важных предложения, которыми довольно часто приходится пользоваться.

1) *Для того чтобы векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы удовлетворялось равенство*:

$$p\vec{a} + q\vec{a} = 0, \tag{1}$$

где p и q одновременно не равны нулю.

Условие необходимо: если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то существует число k — отношение этих векторов: $\frac{\vec{a}}{\vec{b}} = k$, откуда $\vec{a} = k\vec{b}$, или $\vec{a} - k\vec{b} = 0$. Полагая $p = 1$; $q = -k$, получим:

$$p\vec{a} + q\vec{b} = 0.$$

Условие достаточно: если имеем равенство (1), то из него получим: $p\vec{a} = -q\vec{b}$. В силу условия мы можем положить, что $p \neq 0$. Тогда обе части последнего равенства умножим на $\frac{1}{p}$ и получим: $\vec{a} = -\frac{q}{p}\vec{b}$, откуда непосредственно следует коллинеарность $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

2) Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны, то из условия

$$p\vec{a} + q\vec{b} = 0 \text{ следует, что } p = q = 0.$$

Действительно, если бы p и q не равнялись нулю одновременно, то из предыдущего предложения следовало бы, что $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, а это противоречит условию.

Итак, $p = q = 0$.

Из этого предложения непосредственно следует: *если векторы* $\vec{a}$ и $\vec{b}$ *неколлинеарны, то из равенства*

$$m\vec{a} + n\vec{b} = p\vec{a} + q\vec{b} \qquad (2)$$

следует, что $m = p$ и $n = q$.

Действительно, из равенства (2) мы имеем:

$$(m - p)\vec{a} + (n - q)\vec{b} = 0.$$

На основании же предыдущего предложения получим: $m - p = 0$, т. е. $m = p$, $n - q = 0$, т. е. $n = q$.

9. Операцией, в известном смысле обратной сложению векторов, является *разложение вектора по заданным направлениям*:

Эта операция основана на следующем предложении:

Если даны два неколлинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то любой вектор $\vec{r}$ может быть единственным образом представлен как сумма двух векторов, коллинеарных с векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ соответственно.

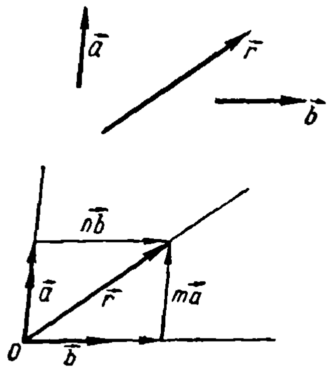


Рис. 8

Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{r}$ — данные векторы (рис. 8). Приведем все три вектора к общему началу в точке O и через конец вектора $\vec{r}$ проведем прямые, параллельные осям векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. В результате мы получим параллелограмм, диагональю которого служит вектор $\vec{r}$, а стороны определяют векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$. Так как $\overrightarrow{OA}$ коллинеарен с $\vec{a}$, а $\overrightarrow{OB}$ — с $\vec{b}$, то всегда можно найти отношения $\frac{\overrightarrow{OA}}{\vec{a}} = m$ и $\frac{\overrightarrow{OB}}{\vec{b}} = n$, т. е. $\overrightarrow{OA} = m\vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = n\vec{b}$. Вместе с тем $\vec{r} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ или $\vec{r} = m\vec{a} + n\vec{b}$.

Полученное разложение единственное, так как если мы допустим, что существует другое подобное же разложение. $\vec{r} = m'\vec{a} + n'\vec{b}$, то, сравнивая оба разложения, получили:

$$m\vec{a} + n\vec{b} = m'\vec{a} + n'\vec{b}.$$

Отсюда на основании выводов предыдущего пункта получаем: $m' = m$ и $n' = n$, т. е. разложение определяется однозначно.

Во многих вопросах приходится рассматривать разложение вектора по направлениям координатных осей. Для определения направления координатной оси и указания масштабной единицы на ней используется е д и н и ч н ы й вектор, или о р т (от латинского слова orientation — ориентация, — определение направления).

Декартова прямоугольная система координат определяется ортом $\vec{i}$, направленным по оси x, и ортом $\vec{j}$, направленным по оси

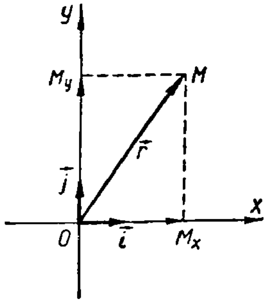


Рис. 9

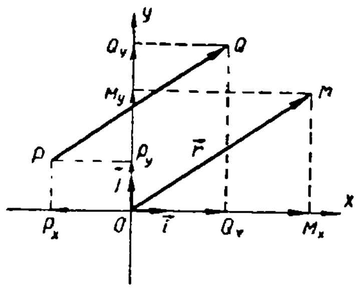


Рис. 10

y. Радиус-вектор $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ (рис. 9) разлагается на векторы $\overrightarrow{OM_x} = x\vec{i}$ и $\overrightarrow{OM_y} = y\vec{j}$. Векторы $x\vec{i}$ и $y\vec{j}$ называются к о м п о н е н т а м и вектора $\vec{r}$ по осям x и y, а числа x и y — к о о р д и н а т а м и вектора $\vec{r}$ по тем же осям. Очевидно, что эти же числа x и y являются координатами точки M — конца радиуса-вектора, так как точки M_x и M_y являются п р о е к ц и я м и точки M соответственно на ось x и на ось y. Отсюда следует, что компонент $\overrightarrow{OM_x} = x\vec{i}$ и компонент $\overrightarrow{OM_y} = x\vec{j}$ называются также г е о м е т р и ч е с к и м и п р о е к ц и я м и вектора $\vec{r}$ на оси, тогда как числа x и y называются а л г е б р а и ч е с к и м и п р о е к ц и я м и вектора $\vec{r}$ на те же оси. Из этого определения получаем, что алгебраическая проекция вектора на ось положительна, если направление геометрической проекции совпадает с направлением оси, определяемым ортом, и отрицательна — в противоположном случае.

Проекции (геометрическая и алгебраическая) обладают следующими важными с в о й с т в а м и:

1) *Равные векторы имеют и равные проекции.*

Рассмотрим вектор $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ и равный ему вектор $\overrightarrow{PQ}$ (рис. 10).

Разлагая и тот и другой векторы по ортам $\vec{i}$ и $\vec{j}$, получим:

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM}_x + \overrightarrow{OM}_y = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$$

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{P_xQ_x} + \overrightarrow{P_yQ_y} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}.$$

Но так как эти векторы равны между собой, то $x_1\vec{i} + y_1\vec{j} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$, откуда, как уже было доказано, получим:

$$x_1 = x_2 \text{ и } y_1 = y_2.$$

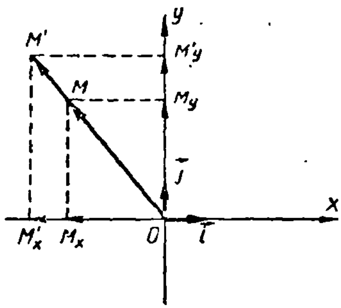


Рис. 11

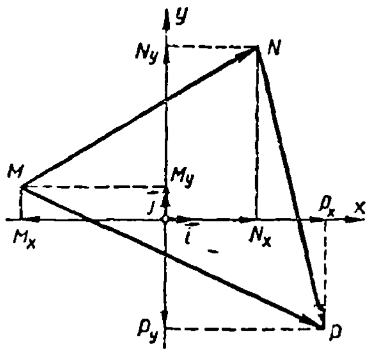


Рис. 12

2) *Если вектор умножить на число k, то и проекции его умножатся на то же число.* Имея в виду только что доказанное предложение, мы можем, не нарушая общности доказательства, ограничиться рассмотрением радиуса-вектора $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ (рис. 11). Примем начало координат O за центр гомотетии с коэффициентом k. Полагая, что $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}_x + \overrightarrow{OM}_y = x\vec{i} + y\vec{j}$, получим: $O_k(M) \equiv M'$, $O_k(M_x) = M'_x$, $O_k(M_y) = M'_y$. Следовательно, $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OM'_x} = k\overrightarrow{OM}_x$, $\overrightarrow{OM'_y} = k\overrightarrow{OM}_y$ или: $\overrightarrow{OM'} = kx\vec{i} + ky\vec{j}$. А это значит, что геометрические и алгебраические проекции вектора умножились на k.

3) *Проекция суммы векторов равна сумме проекций этих векторов.*

Пусть мы имеем: $\vec{r}_1 = \overrightarrow{MN}$, $\vec{r}_2 = \overrightarrow{NP}$, $\vec{r}_1 + \vec{r}_2 = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$. Обозначим через M_x, N_x, P_x, M_y, N_y, P_y проекции соответствующих точек на ось x и на ось y (рис. 12). Тогда получим:

$$\overrightarrow{M_xN_x} + \overrightarrow{N_xP_x} = x_1\vec{i} + x_2\vec{i} = (x_1 + x_2)\,\vec{i} = \overrightarrow{M_xP_x}.$$

И совершенно такое же равенство получим и для оси y:

$$\overrightarrow{M_yN_y} + \overrightarrow{N_yP_y} = y_1\vec{j} + y_2\vec{j} = (y_1 + y_2)\,\vec{j} = \overrightarrow{M_yP_y}.$$

Итак, проекция суммы двух векторов равна сумме проекций этих векторов. Нетрудно убедиться в том, что этот вывод легко распространить на сумму какого угодно числа слагаемых.

Заметим также, что все доказанные нами свойства проекций остаются в силе и для проекций вектора на любую ось, направление и метрика на которой заданы соответствующим ортом.

10. Рассмотренные нами свойства проекций векторов имеют непосредственную связь с определением и свойствами тригонометрических функций. Обратимся еще раз к рисунку 11. Обозначим через α угол, образуемый вектором $\vec{r}$ с осью x, понимая под этим углом в е р с о р (направленный угол), на который нужно повернуть орт $\vec{i}$, чтобы он стал сонаправленным с вектором $\vec{r}$. Тогда к о с и н у с о м угла α будет называться отношение алгебраической проекции вектора $\vec{r}$ на ось x, т. е. числа x, к модулю $\vec{r}$ этого вектора:

$$\cos\alpha = \frac{x}{r}.$$

С и н у с о м угла α называется отношение алгебраической проекции вектора $\vec{r}$ на ось y, т. е. числа y, к модулю r этого вектора:

$$\sin\alpha = \frac{y}{r}.$$

Нетрудно убедиться в том, что числа $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ определяются только углом α и не зависят от абсолютной величины радиуса вектора $\vec{r}$. Действительно, уже было доказано, что, умножая вектор $\vec{r}$ на число k, мы одновременно умножим на это же число и обе его проекции и мы получим:

$$\cos\alpha = \frac{kx}{kr} = \frac{x}{r} \quad \text{и} \quad \sin\alpha = \frac{ky}{kr} = \frac{y}{r},$$

т. е. значения тригонометрических функций не изменились.

Непосредственно из определения тригонометрических функций получаются выражения для алгебраических проекций вектора $\vec{r}$ на ось x и на ось y:

$$x = r\cos\alpha, \qquad y = r\sin\alpha.$$

Геометрические проекции того же вектора будут равны соответственно: $x\vec{i} = r\vec{i}\cos\alpha$ и $y\vec{j} = r\vec{j}\sin\alpha$.

Изменяя величину аргумента α и сохраняя неизменной величину модуля радиуса-вектора $\vec{r}$, мы можем проследить изменения тригонометрических функций в зависимости от изменений аргумента, установить их периодичность, вывести формулы приведения и т. д.

11. Рассмотренный в этом параграфе раздел векторного исчисления представляет собой основу всей векторной алгебры и векторного анализа. При изложении теории аффинного векторного пространства основные предложения этого параграфа принимаются за аксиомы. К ним относятся: свойства векторного равенства, законы сложения векторов, законы умножения вектора на действительное число (на с к а л я р).

При таком изложении вектор рассматривается как абстрактное понятие, определяемое теми взаимоотношениями, которые даются в аксиомах и которыми устанавливаются взаимосвязи как между векторами, так и между векторами и скалярами — вещественными числами.

Весь материал этого параграфа совершенно необходимо знать преподавателю, чтобы с достаточной ясностью и свободой производить все элементарные операции над векторами. Что же касается того, в какой мере этот материал может быть изложен учащимся, то здесь неизбежно приходится считаться с бюджетом времени, выделенным на эту тему. Во всяком случае учащимся массовой школы необходимо: 1) уметь производить сложение и вычитание векторов и доказать сочетательный и переместительный законы сложения; 2) уметь производить умножение вектора на число и знать законы этого действия; 3) уметь разложить вектор по двум заданным направлениям и знать, что это разложение определяется однозначно; 4) знать определение тригонометрических функций при помощи радиуса-вектора.

В то же время можно считать необязательным: 1) проводить доказательство транзитивности сонаправленности векторов; 2) доказывать независимость суммы векторов от выбора начальной точки; 3) доказывать ассоциативный и дистрибутивный законы умножения вектора на число.

Если позволит время, то некоторые из этих предложений можно дать в качестве упражнений для самостоятельной работы учащихся в классе или дома.

В условиях работы школ с математической специализацией, а также на кружковых занятиях с наиболее успевающими учащимися можно все изложение сделать более полным и не пропустить ни одного доказательства. Опыт показывает, что все эти доказательства хорошо усваиваются большинством учащихся.

12. Непременным условием правильного понимания учащимися законов и правил векторной алгебры является решение ими достаточного числа упражнений и задач. Однако при выборе таких упражнений преподавателю нужно соблюдать большую осторожность. Главная цель этих упражнений заключается в том, чтобы показать, как аппарат векторной алгебры облегчает, упрощает и делает более наглядным доказательства многих геометрических предложений. В то же время было бы большой ошибкой дать такую задачу, для решения которой потребуются длинные алгебраические выкладки, в то время как геометрическое решение выглядит более простым и очевидным. Задачами такого типа можно только дискредитировать метод и подавить интерес к нему со стороны учащихся. Точно так же совершенно нецелесообразно давать в качестве упражнения доказательство такого предложения, на которое приходилось опираться при выводе свойств векторов и операций над ними. В таких случаях вдумчивые учащиеся легко могут увидеть логический круг в доказательстве.

Нет смысла, например, выводить путем векторных операций те свойства параллелограмма, которыми мы пользовались для получения свойств вектора.

Первоначально упражнения в операциях над векторами проводятся перед изучением преобразования параллельного переноса (трансляции). Сначала предлагается производить операции сложения двух или нескольких векторов, попутно проверяя переместительный и сочетательный законы. Например, предлагается совершить переход от заданной точки M к точке N, двигаясь по ломаной $MABCN$. После этого изменяем порядок перехода и двигаемся по ломаной $MA'B'C'N$, где $\overrightarrow{MA'} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{CN}$, $\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{BC}$. Остается доказать, что последняя часть $\overrightarrow{C'N}$ равна $\overrightarrow{MA}$.

Далее напоминаем учащимся, что правило сложения сил в механике тождественно с правилом параллелограмма при сложении векторов. В связи с этим предлагается решить такую задачу:

Даны три неколлинеарные силы, лежащие в одной и той же плоскости, приложенные к одной и той же точке и находящиеся в состоянии равновесия. Доказать, что точка приложения сил есть центр тяжести треугольника, вершинами которого служат концы векторов.

После этого можно решить обратную задачу:

Найти точку приложения трех уравновешивающих друг друга сил, концы векторов которых должны находиться в трех данных точках.

На суммировании векторов основано также решение следующей интересной задачи:

Даны три центра симметрии: O_1, O_2, O_3. Берем произвольную точку A плоскости и производим последовательно 6 центральных симметрий: $O_1(A) \equiv A_1$, $O_2(A_1) \equiv A_2$, $O_3(A_2) \equiv A_3$, $O_1(A_3) \equiv A_4$, $O_2(A_4) \equiv A_5$, $O_3(A_5) \equiv A_6$. Доказать, что после этих шести преобразований точка A вернется в исходное положение, т. е. $A_6 \equiv A$.

Для решения этой задачи нужно припомнить, что две последовательные центральные симметрии эквивалентны одному параллельному переносу, вектор которого вдвое больше вектора, началом которого служит первый центр, а концом — второй. Таким образом, у нас получилось три параллельных переноса с векторами: $2\overrightarrow{O_1O_2}$, $2\overrightarrow{O_3O_1}$, $2\overrightarrow{O_2O_3}$. Далее мы припоминаем, что два последовательных переноса эквивалентны одному переносу, вектор которого равен сумме векторов первоначальных переносов. Итак, в результате трех последовательных переносов мы должны получить перенос с вектором, равным сумме трех векторов:

$$2\overrightarrow{O_1O_2} + 2\overrightarrow{O_2O_3} + 2\overrightarrow{O_3O_1} = 2(\overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2O_3} + \overrightarrow{O_3O_1}) =$$
$$= 2(\overrightarrow{O_1O_3} + \overrightarrow{O_3O_1}) = 0.$$

Мы получили трансляцию с нулевым вектором, т. е. тождественное преобразование, при котором все точки плоскости остаются неподвижными. Следовательно, для всякой точки A будем иметь: $A_6 \equiv A$.

13. Операция умножения вектора на число проходится в связи с изучением темы «Гомотетия» в теории преобразований. Рассматривая гомотетии с различными коэффициентами преобразования, учащиеся попутно знакомятся с умножением вектора на число и со свойствами этой операции. Сначала коэффициенты берутся целые, положительные и отрицательные, потом — дробные. Полезно показать также умножение на иррациональный коэффициент, например на $\sqrt{2}$. Для этого следует произвести гомотетию, в которой вектор, равный стороне квадрата, преобразуется в вектор, равный по абсолютной величине диагонали этого квадрата. Коэффициент преобразования можно также задать отношением двух произвольных коллинеарных векторов.

Дальнейшие упражнения с операцией умножения вектора на число производятся перед темой «Скалярное произведение векторов». Познакомив учащихся с определением положения точки посредством заданного начала и радиуса-вектора с концом в этой точке, естественно поставить вопрос о том, как при помощи переменного радиуса-вектора определить второй элементарный образ плоскости — прямую.

Для простейшего случая, когда прямая проходит через начало O, достаточно построить орт $\overrightarrow{OE} = \vec{e}$, тогда все точки прямой определяются переменным радиусом-вектором $\vec{r} = t\vec{e}$, где t — переменный параметр, принимающий значения, равные любому действительному числу. Выражение $\vec{r} = t\vec{e}$ есть уравнение прямой, проходящей через начало. После этого мы ставим задачу:

Найти уравнение прямой, проходящей через данную точку в заданном направлении.

Пусть точка P задана вектором $\overrightarrow{OP} = \vec{p}$, а направление задано ортом $\overrightarrow{OE} = \vec{e}$ (рис. 13). Строим вектор $\overrightarrow{PM} = t\vec{e}$, где параметр по-прежнему равняется произвольному действительному числу. Тогда вектор $\vec{r} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM}$ и будет искомым переменным радиусом-вектором, конец которого точка M будет при изменении t описывать искомую прямую, проходящую через точку P параллельно с осью орта $\vec{e}$. Уравнение искомої прямой будет: $\vec{r} = t\vec{e} + \vec{p}$.

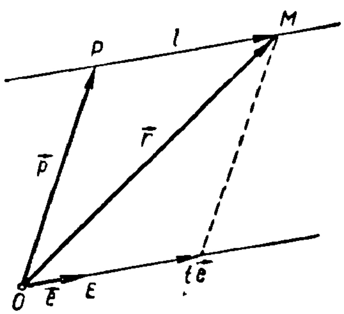


Рис. 13

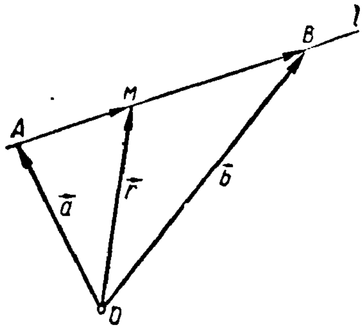


Рис. 14

Опыт показывает, что при надлежащей постановке вопроса и внимательном рассмотрении чертежа большинство учащихся самостоятельно находят уравнение прямой.

Подобным же образом можно предложить *найти уравнение прямой, проходящей через две данные точки.*

Пусть точки A и B являются концами радиусов-векторов: $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ (рис. 14), $l \equiv AB$ — прямая, уравнение которой нужно найти. Произвольная точка M этой прямой есть конец переменного радиуса-вектора $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$. По правилу сложения векторов имеем:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}, \quad \text{где} \quad \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}.$$

Так как векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{AB}$ коллинеарны, то можно положить:

$$\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}, \text{ но } \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}.$$

Поэтому получим:

$$\vec{r} = \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a}).$$

Окончательно:

$$\vec{r} = (1 - t)\vec{a} + t\vec{b}. \qquad (1)$$

Заметим, что переменный параметр t определяет отношение расстояния точки M от точки A к длине отрезка AB. В частности, при $t = \frac{1}{2}$ получим положение середины отрезка AB:

$$\vec{r} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}. \tag{2}$$

Из условия (1) можно получить условие расположения трех точек на одной и той же прямой:

Для того чтобы концы трех радиусов-векторов, имеющих общее начало, лежали на одной и той же прямой, необходимо и достаточно, чтобы в линейном векторном уравнении, связывающем эти векторы, суммы векторных коэффициентов в левой и правой частях уравнения были равны между собой.

Условие н е о б х о д и м о: если концы радиусов-векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{r}$ лежат на одной и той же прямой, то имеет место уравнение (1). В этом уравнении коэффициент в левой части равен 1, а в правой части сумма коэффициентов равна $1 - t + t = 1$. Итак, суммы коэффициентов и в той и в другой части равны единице.

Условие д о с т а т о ч н о. Положим, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{r}$ связаны уравнением:

$$m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{r} = m'\vec{a} + n'\vec{b} + p'\vec{r}, \text{ где } m + n + p = m' + n' + p'. \tag{3}$$

Из этого уравнения получаем:

$$(p - p')\,\vec{r} = (m' - m)\,\vec{a} + (n' - n)\,\vec{b}, \text{ т. е.}$$

$$\vec{r} = \frac{m' - m}{p - p'}\,\vec{a} + \frac{n' - n}{p - p'}\,\vec{b}.$$

Положим $\frac{n' - n}{p - p'} = t$, тогда получим на основании равенства (3):

$$\frac{m' - m}{p - p'} = \frac{p - p' + n - n'}{p - p'} = 1 - t.$$

Следовательно, векторное уравнение принимает вид: $\vec{r} = (1 - t)\,\vec{a} + t\vec{b}$, т. е. мы вновь получили уравнение (1), из которого следует, что концы векторов $\vec{r}$, $\vec{a}$ и $\vec{b}$ лежат на одной и той же прямой.

В качестве приложения этой теоремы можно дать следующие упражнения:

1. *На стороне $\overrightarrow{OA}$ параллелограмма $OABC$* (рис. 15) *взята точка M, удовлетворяющая условию: $\overrightarrow{OA} = n\overrightarrow{OM}$. Прямая CM пересекает диагональ $\overrightarrow{OB}$ в точке N. Доказать, что $\overrightarrow{OB} = (n+1)\overrightarrow{ON}$.*

Введем обозначения: $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$, $\overrightarrow{ON} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$. Тогда $\overrightarrow{OA} = n\vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = x\vec{b}$. Так как $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB}$, то получим: $n\vec{a} + \vec{c} = x\vec{b}$.

Но концы векторов $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$ и $\overrightarrow{OC}$ лежат на одной и той же прямой. Поэтому по доказанному будем иметь: $n+1 = x$, т. е. $\overrightarrow{OB} = (n+1)\overrightarrow{ON}$.

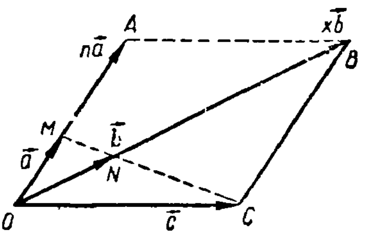


Рис. 15

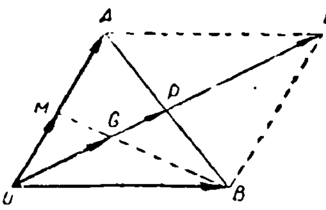


Рис. 16

2. *Доказать, что три медианы треугольника пересекаются в одной и той же точке.*

Рассмотрим треугольник OAB (рис. 16). M — середина $\overline{OA}$, P — середина $\overline{AB}$. Медианы $\overline{OP}$ и $\overline{BM}$ пересекаются в точке G. Дополняя треугольник до параллелограмма $OACB$, получим, что $\overline{OC} = 2\overline{OP}$. Согласно предыдущему упражнению находим:
$\overrightarrow{OA} = 2\overrightarrow{OM}$, поэтому $\overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$ или $\overrightarrow{OG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OP}$. Это значит, что точка G находится от вершины O на расстоянии, равном $\frac{2}{3}$ медианы $\overline{OP}$. Повторив то же построение для медианы из вершины A, убедимся, что и она пересечет $\overline{OP}$ на расстоянии от вершины O, равном $\frac{2}{3}\overrightarrow{OP}$. Итак, все три медианы пройдут через точку G.

Дадим второе доказательство того же предложения. Пусть ABC — данный треугольник, вершины которого определяются радиусами-векторами: $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$. Середины сторон $\overline{BC}$ и $\overline{CA}$ определяются соответственно концами радиусов-векторов $\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$ и $\frac{\vec{c}+\vec{a}}{2}$. Уравнение медианы, выходящей из вершины

A, будет: $\vec{r} = (1-t)\vec{a} + t\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$, а идущая из вершины B: $\vec{r} = (1-t)\vec{b} + t\dfrac{\vec{c}+\vec{a}}{2}$.

Положение точки пересечения этих прямых получим, приравняв друг другу правые части уравнения:

$$(1-t)\vec{a} + t\,\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2} = (1-t)\vec{b} + t\,\frac{\vec{c}+\vec{a}}{2}.$$

Выражения в левой и правой частях тождественны, поэтому должны быть равны между собой коэффициенты при одном и том же векторе в правой и левой частях. Отсюда получим:

$$1-t = \frac{t}{2}, \quad 2-2t = t, \quad t = \frac{2}{3}.$$

Подставляя это значение в одну из формул для $\vec{r}$, находим:

$$\vec{r} = \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}.$$

Это же выражение мы получим и для точки пересечения второй и третьей медианы. Итак, полученной формулой определяется центр тяжести треугольника ABC.

Подобными же рассуждениями решается и следующая задача.

3. *Доказать, что середины сторон произвольного четырехугольника являются вершинами параллелограмма.*

Пусть вершины четырехугольника $ABCD$ определяются радиусами-векторами: $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ и $\overrightarrow{OD} = \vec{d}$. Обозначим через M, N, P, Q середины сторон $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ и $\overline{DA}$. Тогда $\overrightarrow{OM} = \dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$, $\overrightarrow{ON} = \dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$, $\overrightarrow{OP} = \dfrac{\vec{c}+\vec{d}}{2}$ и $\overrightarrow{OQ} = \dfrac{\vec{d}+\vec{a}}{2}$.

Далее имеем: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = \dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2} - \dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2} = \dfrac{\vec{c}-\vec{a}}{2}$, $\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ} = \dfrac{\vec{c}+\vec{d}}{2} - \dfrac{\vec{d}+\vec{a}}{2} = \dfrac{\vec{c}-\vec{a}}{2}$.

Значит, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$, откуда следует, что $MNPQ$ — параллелограмм.

Этим же способом можно решить следующие две задачи:

4. *Даны два параллелограмма $ABCD$ и $A'B'C'D'$. Доказать, что середины отрезков $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$, $\overline{DD'}$ суть вершины параллелограмма.*

5. *Соединяя через одну середины сторон шестиугольника, получим два треугольника. Доказать, что центры тяжести этих треугольников совпадают.*

14. Разложение вектора по двум неколлинеарным направлениям целесообразно рассмотреть в связи с изучением свойств тригонометрических функций. При этом приходится систематически пользоваться формулой разложения вектора по осям координат:

$$\vec{r} = r\vec{i}\cos\alpha + r\vec{j}\sin\alpha.$$

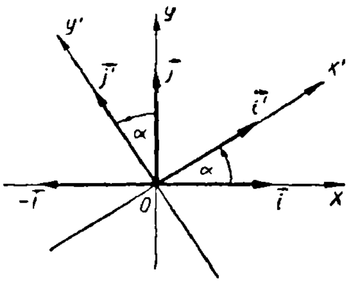


Рис. 17

Применим эту формулу к выводу соотношений между прежними и новыми ортами при повороте координатных осей на угол α около начала. При этом орт $\vec{i}$ перейдет в орт $\vec{i'}$, а орт $\vec{j}$ — в орт $\vec{j'}$ (рис. 17). Применяя предыдущую формулу, получим:

$$\vec{i'} = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\sin\alpha.$$

Заметим теперь, что орт $\vec{j'}$ занимает в системе координат с ортами $\vec{j}$ и $-\vec{i}$ такое же положение, как орт $\vec{i'}$ в системе координат с ортами $\vec{i}$ и $\vec{j}$. Поэтому получим:

$$\vec{j'} = \vec{j}\cos\alpha - \vec{i}\sin\alpha.$$

Положим теперь, что система координат с ортами $\vec{i'}$ и $\vec{j'}$ повернута еще на угол β и орты заняли новые положения $\vec{i''}$ и $\vec{j''}$. Пользуясь уже найденными формулами, находим:

$$\vec{i''} = \vec{i'}\cos\beta + \vec{j'}\sin\beta,$$

$$\vec{j''} = \vec{j'}\cos\beta - \vec{i'}\sin\beta.$$

Вместе с тем эти же орты $\vec{i''}$ и $\vec{j''}$ можно получить из первоначальной системы координат, повернув ее сразу на угол $\alpha + \beta$, и мы получим:

$$\vec{i''} = \vec{i}\cos(\alpha+\beta) + \vec{j}\sin(\alpha+\beta),$$

$$\vec{j''} = \vec{j}\cos(\alpha+\beta) - \vec{i}\sin(\alpha+\beta).$$

Отсюда получим для $\vec{i''}$:

$$\vec{i}\cos(\alpha+\beta) + \vec{j}\sin(\alpha+\beta) = \vec{i'}\cos\beta + \vec{j'}\sin\beta.$$

Подставим в правую часть выражения для $\vec{i}'$ и для $\vec{j}'$ через $\vec{i}$ и $\vec{j}$. Тогда получим:

$$\vec{i}\cos(\alpha+\beta)+\vec{j}\sin(\alpha+\beta)=(\vec{i}\cos\alpha+\vec{j}\sin\alpha)\cos\beta+$$
$$+(\vec{j}\cos\alpha-\vec{i}\sin\alpha)\sin\beta=\vec{i}(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)+$$
$$+\vec{j}(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta).$$

Сравнивая коэффициенты при $\vec{i}$ и $\vec{j}$ в левой и правой частях равенства, находим:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,$$
$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$$

Если сравнить полученный вывод формул для тригонометрических функций от суммы двух углов с традиционным выводом, то можно убедиться, насколько векторные методы облегчают все выкладки. Весьма существенно при этом заметить, что этот вывод не налагает никаких ограничений ни для величины, ни для знака углов α и β.

Формула тригонометрических функций от суммы двух углов содержит в сущности всю тригонометрию. Из этой формулы можно получить и формулы приведения, и взаимоотношения между тригонометрическими функциями, и формулы для двойного аргумента и т. д.

Разложение вектора по двум взаимно перпендикулярным направлениям дает также возможность, пользуясь таблицами тригонометрических функций, решать задачи на вычисление величины двух составляющих данной силы, зная угол, который данная сила образует с одной из составляющих. Такова, например, задача:

Шар, весом в p кг, находится на наклонной плоскости, образующей угол φ с горизонтальной плоскостью. Какую силу нужно приложить к этому шару, чтобы удержать его в равновесии?

§ 3. Скалярное произведение векторов

15. Прежде чем приступить к определению скалярного произведения векторов, необходимо повторить с учащимися свойства проекции вектора на ось и припомнить определение геометрической и алгебраической проекции, зависимость между модулем вектора и величиной проекции, свойство проекции суммы векторов.

Целесообразность введения понятия скалярного произведения может быть показана на примере определения работы силы.

Рассмотрим такую задачу:

Определить работу силы $\vec{F}$, которая производит перемещение точки P на расстояние $\overrightarrow{OP} = \vec{p}$.

Как известно из механики, в том случае, когда направление силы и направление перемещения совпадают, работа силы определяется произведением величины силы на длину пути:

$$A = pF,$$

причем все три величины, т. е. A, p и F являются действительными числами, т. е. скалярами.

Пусть теперь направление вектора $\vec{F}$ не совпадает с направлением вектора $\vec{p}$ (рис. 18). Тогда, разлагая силу $\vec{F}$ по направлению $\vec{p}$ и в перпендикулярном направлении на силы $\vec{F'}$ и $\vec{F''}$, мы убедимся, что сила F'' уравновешивается сопротивлением, заставляющим точку P оставаться на прямой OP. Таким образом, работает только составляющая F'. Итак, мы в этом случае для работы силы получаем выражение:

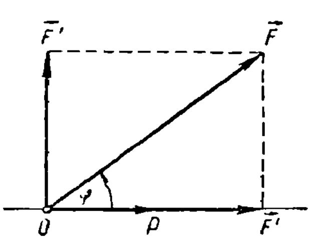


Рис. 18

$$A = pF',$$

где через F' обозначена алгебраическая проекция вектора $\vec{F'}$ на ось вектора $\vec{p}$. Здесь по-прежнему все величины A, p и F' являются скалярами.

Обобщая эту операцию на любую пару векторов, мы получаем общее определение скалярного произведения векторов.

Скалярным произведением двух векторов называется произведение модуля одного вектора на алгебраическую проекцию на его ось другого вектора.

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ мы будем обозначать символом $\vec{a}\vec{b}$.

Итак, в силу определения имеем:

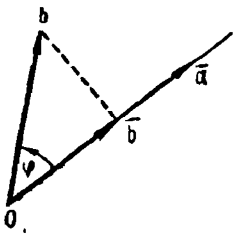


Рис 19

$$\vec{a}\,\vec{b} = ab',$$

где через a обозначен модуль вектора $\vec{a}$, а через b' — алгебраическая проекция вектора $\vec{b}$ на ось вектора $\vec{a}$ (рис. 19).

В предыдущем параграфе было установлено, что алгебраическая проекция вектора на ось равна модулю этого вектора, умноженному на косинус угла между вектором и осью. Поэтому можно писать, что $b' = b \cos \varphi$, где φ — угол между векторами. Следовательно,

$$\vec{a}\,\vec{b} = ab \cos \varphi.$$

Мы получили еще одно выражение скалярного произведения векторов.

Скалярным произведением двух векторов называется произведение модулей этих векторов на косинус угла между ними.

Из этих определений следует ряд свойств скалярного произведения.

1. *Если векторы сонаправлены* ($\varphi = 0$, $\cos \varphi = 1$), *то их скалярное произведение равно произведению их модулей.*

2. *Если угол между векторами острый, то скалярное произведение их положительно.*

3. *Если векторы перпендикулярны* ($\cos \frac{\pi}{2} = 0$), *то их скалярное произведение р а в н о н у л ю.*

На этот случай нужно обратить особое внимание учащихся. Дело в том, что здесь мы имеем существенное отличие произведения векторов от произведения скалярных величин: произведение может обратиться в нуль и в том случае, когда ни один из сомножителей не равен нулю.

Понятно, что здесь же нужно сказать и о том, что скалярное произведение векторов принимается равным нулю и тогда, когда какой-нибудь из сомножителей будет нуль-вектором.

4. *Если угол между векторами тупой, то скалярное произведение их отрицательно.*

5. *Если векторы противонаправлены* ($\varphi = \pi$), *то их скалярное произведение отрицательно и по абсолютной величине равно произведению их модулей.*

Из перечисленных свойств непосредственно следует условие перпендикулярности векторов:

Для того чтобы два ненулевых вектора были взаимно перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы их скалярное произведение было равно нулю.

Действительно, из полученных свойств скалярного произведения следует, что если векторы ненулевые, то оно обращается в нуль тогда и только тогда, когда векторы взаимно перпендикулярны.

16. Наиболее важными свойствами скалярного произведения являются его к о м м у т а т и в н о с т ь и д и с т р и б у т и в н о с т ь.

Скалярное произведение подчиняется переместительному закону:

$$\vec{a}\,\vec{b} = \vec{b}\,\vec{a}.$$

Согласно определению $\vec{a}\vec{b} = ab \cos \varphi$ и $\vec{b}\vec{a} = ab \cos(-\varphi)$. Но $ab = ba$, так как a и b — действительные числа, и $\cos \varphi = \cos(-\varphi)$, так как косинус — четная функция. Итак, получим:

$$\vec{a}\,\vec{b} = \vec{b}\,\vec{a}.$$

Скалярное произведение векторов подчиняется распределительному закону:

$$(\vec{a} + \vec{b})\,\vec{m} = \vec{a}\,\vec{m} + \vec{b}\,\vec{m}.$$

Для доказательства этой формулы рассмотрим сумму векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и получим:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}.$$

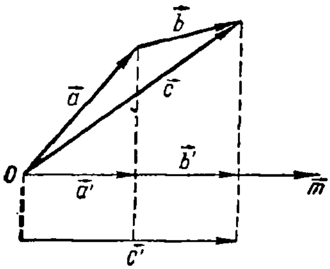


Рис. 20

Обозначим через a', b', c' соответственно алгебраические проекции векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ на ось вектора $\vec{m}$ (рис. 20). В предыдущем параграфе было доказано, что алгебраическая проекция суммы векторов равна сумме алгебраических проекций слагаемых. Поэтому мы имеем:

$$c' = a' + b'.$$

Найдем теперь скалярные произведения каждого из этих трех векторов на вектор $\vec{m}$.

Тогда получим:

$$\vec{a}\vec{m} = a'm, \quad \vec{b}\vec{m} = b'm, \quad \vec{c}\,\vec{m} = c'm.$$

Но $\quad \vec{a}\,\vec{m} + \vec{b}\vec{m} = a'm + b'm = (a' + b')\,m = c'm.$

Итак, $\vec{a}\vec{m} + \vec{b}\,\vec{m} = c'm = \vec{c}\,\vec{m}$ или $\vec{a}\,\vec{m} + \vec{b}\vec{m} = (\vec{a} + \vec{b})\,\vec{m}.$

Наличие распределительного закона позволяет производить алгебраические операции над выражениями, включающими действия первой ступени и скалярное умножение векторов.

Например, мы можем иметь:

$$(\vec{a} + \vec{b})\,(\vec{c} + \vec{d}) = \vec{a}\,\vec{c} + \vec{b}\,\vec{c} + \vec{a}\,\vec{d} + \vec{b}\,\vec{d}.$$

В связи с преобразованием векторных выражений следует предложить учащимся самостоятельно доказать формулу:

$(-\vec{a})\ \vec{b} = -\ \vec{a}\vec{b}$ и более общую: $(k\vec{a})\ \vec{b} = k\ (\vec{a}\vec{b})$ (k — скаляр). И та и другая формула основана на том, что при умножении вектора на действительное число проекция его умножается на то же число.

17. Свойства скалярного произведения векторов находят себе многочисленные приложения в геометрии. В первую очередь рассмотрим применение его к решению треугольников.

Теорема косинусов. *Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними.*

Возьмем треугольник ABC (рис. 21) и введем обозначения:

$$\angle BAC = \alpha, \quad \angle CBA = \beta, \quad \angle ACB = \gamma,$$

$$\overrightarrow{BC} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{AC} = \vec{b}, \quad \overrightarrow{AB} = \vec{c}.$$

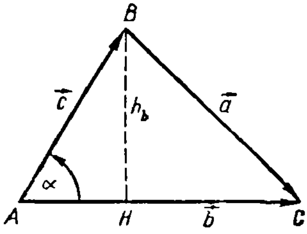


Рис. 21

Отсюда следует, что $\vec{a} = \vec{b} - \vec{c}$.

Умножим скалярно каждую часть равенства на саму себя и получим:

$$(\vec{a})^2 = (\vec{b} - \vec{c})^2 = (\vec{b})^2 - 2\vec{b}\,\vec{c} + (\vec{c})^2, \quad \text{т. е.}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha. \tag{1}$$

Аналогичным путем мы можем получить две новые формулы:

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab\cos\gamma$$

Обращаем внимание учащихся на то, что и эти три формулы и каждая из последующих формул, применяемых при решении треугольников, могут быть получены друг из друга при помощи так называемого «правила циклической замены». Сущность этого правила заключается в том, что в каждой из этих формул можно без нарушения истинности формулы заменить одновременно букву a буквой b, букву b буквой c и букву c буквой a. Одновременно с этим производится замена α на β, β на γ и γ на α.

Причина такой возможности объясняется той симметрией в обозначении сторон и углов, которая была введена вначале.

Заметим, что при $\gamma = 90°$ имеем косинус $\gamma = 0$ и теорема косинусов дает теорему Пифагора:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Из теоремы косинусов можно получить все формулы, какие необходимы для решения треугольников по данным его элементам.

Прежде всего из формулы (1) можно получить формулы для определения угла треугольника по трем его сторонам:

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}. \tag{2}$$

Прибавляя к единице и вычитая из единицы обе части формулы (2), получим:

$$1+\cos\alpha=\frac{b^2+2bc+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}=\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc},$$

$$1-\cos\alpha=\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc}=\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}=\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{2bc}.$$

Вводя обозначения:

$$a+b+c=2p;\ -a+b+c=2(p-a),\ a-b+c=2(p-b),$$
$$a+b-c=2(p-a),$$

получим:

$$1+\cos\alpha=\frac{2p(p-a)}{bc};\qquad 1-\cos\alpha=\frac{2(p-b)(p-c)}{bc}. \tag{2'}$$

Перемножая почленно равенства (2′), находим:

$$1-\cos^2\alpha=\sin^2\alpha=\frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{b^2c^2},\ \text{т. е.}$$

$$\sin\alpha=\frac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}. \tag{3}$$

Радикал в полученной формуле мы берем положительным, так как синус угла треугольника всегда положителен.

Если обозначить через S числовое значение радикала в формуле (3) и применить правила циклической замены, то получим:

$$\sin\alpha=\frac{2S}{bc},\ \sin\beta=\frac{2S}{ca},\ \sin\gamma=\frac{2S}{ab}. \tag{4}$$

Находя отношение синусов углов, из этих формул получим: $\sin\alpha : \sin\beta = a : b$; $\sin\beta : \sin\gamma = b : c$, откуда непосредственно находим т е о р е м у с и н у с о в:

Стороны треугольника пропорциональны синусам противоположных углов: $a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$ или

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}.$$

Наконец, для определения меры п л о щ а д и треугольника можно вывести несколько формул.

Из теории измерения площадей имеем: $S_\Delta=\frac{bh_b}{2}$, где через h_b обозначена высота, проведенная к стороне b (рис. 21). Из прямоугольного треугольника ABH имеем: $h_b=c\sin\alpha$, и, значит,

$$S_\Delta=\frac{bc}{2}\sin\alpha. \tag{5}$$

Но из формулы (4) имеем: $\sin\alpha=\frac{2S}{bc}$.

Значит, $S_{\triangle} = S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ мы получили известную формулу Герона для вычисления площади треугольника по трем сторонам.

Заметим еще, что из формул (2′) можно получить еще одну формулу для вычисления углов треугольника по его сторонам.

Мы имеем:

$$1-\cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{2(p-b)(p-c)}{bc};\quad 1+\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{2p(p-a)}{bc}.$$

Деля первое равенство на второе почленно, получим:

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)} \quad \text{или} \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{p-a}\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

Так как угол $\frac{a}{2}$ всегда острый, то радикал положителен.

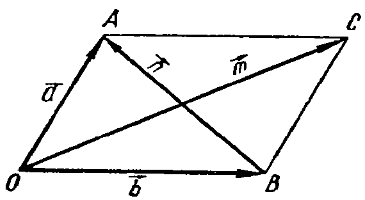


Рис. 22

Все приведенные формулы дают возможность вычислить элементы треугольника по заданным элементам в известных четырех случаях: 1) если даны a, β и γ; 2) если даны b, c и γ; 3) если даны a, b и c; 4) если даны a, b и α.

18. Весьма полезно показать учащимся применение скалярного произведения векторов к вычислению элементов некоторых фигур. Первым примером возьмем вывод зависимости между сторонами и диагоналями параллелограмма.

Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.

Рассмотрим параллелограмм $OACB$ (рис. 22), в котором

$$\overrightarrow{OC} = \vec{m} = \vec{a} + \vec{b},\quad \overrightarrow{AB} = \vec{n} = \vec{b} - \vec{a}.$$

Беря скалярные произведения самих на себя обеих частей этих равенств, получим:

$$\vec{m}^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a}\,\vec{b},$$
$$\vec{n}^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a}\,\vec{b}.$$

Складывая, получим требуемое равенство:

$$m^2 + n^2 = 2\,a^2 + 2\,b^2.$$

При помощи свойств скалярного произведения можно доказать более общее предложение:

Сумма квадратов диагоналей четырехугольника равна сумме квадратов всех его сторон минус учетверенный квадрат расстояния между серединами диагоналей.

Для доказательства рассмотрим четырехугольник $ABCD$, вершины которого определены радиусами-векторами $\vec{OA}=\vec{a}$, $\vec{OB}=\vec{b}$, $\vec{OC}=\vec{c}$, $\vec{OD}=\vec{d}$. Тогда стороны будут равны разностям:

$$\vec{AB}=\vec{b}-\vec{a},\ \vec{BC}=\vec{c}-\vec{b},\ \vec{CD}=\vec{d}-\vec{c},\ \vec{DA}=\vec{a}-\vec{d},$$

а диагонали равны разностям: $\vec{AC}=\vec{c}-\vec{a}$, $\vec{BD}=\vec{d}-\vec{b}$. Середины диагоналей определяются векторами

$$\frac{\vec{a}+\vec{c}}{2}\ \text{и}\ \frac{\vec{b}+\vec{d}}{2},$$

а расстояние между ними — вектором $\dfrac{\vec{a}+\vec{c}}{2}-\dfrac{\vec{b}+\vec{d}}{2}$.

Сумма квадратов сторон равна:

$$a^2+b^2-2\vec{a}\vec{b}+b^2+c^2-2\vec{b}\vec{c}+c^2+d^2-2\vec{c}\vec{d}+d^2+a^2-2\vec{a}\vec{d}.$$

Сумма квадратов диагоналей равна:

$$a^2+c^2-2\vec{a}\vec{c}+b^2+d^2-2\vec{b}\vec{d}.$$

Учетверенный квадрат расстояния между серединами диагоналей равен:

$$a^2+b^2+c^2+d^2+2\vec{a}\vec{c}+2\vec{b}\vec{d}-2\vec{a}\vec{b}-2\vec{a}\vec{d}-2\vec{b}\vec{c}-2\vec{c}\vec{d}.$$

Складывая два последних выражения, получим:

$$2a^2+2b^2+2c^2+2d^2-2\vec{a}\vec{b}-2\vec{a}\vec{d}-2\vec{b}\vec{c}-2\vec{c}\vec{d}.$$

Мы видим, что полученное выражение равно сумме квадратов сторон четырехугольника, и, значит, предложение доказано.

Очень полезной при отыскании числовых зависимостей между элементами треугольника является т е о р е м а С т ь ю а р т а:

Положим, что точки A, B и C лежат на одной и той же прямой, точка O — вне этой прямой (рис. 23). Обозначим:

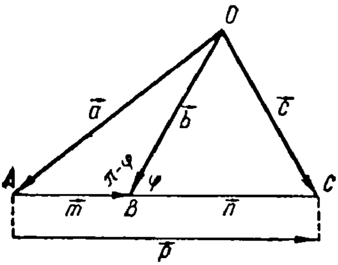


Рис. 23

$$\vec{OA}=\vec{a};\ \vec{OB}=\vec{b};\ \vec{OC}=\vec{c};\ \vec{AB}=\vec{m};$$
$\vec{BC}=\vec{n}$; $\vec{AC}=\vec{p}=\vec{m}+\vec{n}$. Тогда меж-

ду абсолютными величинами этих векторов существует зависимость:

$$a^2 n + c^2 m - b^2 p = mnp.$$

Для доказательства рассмотрим равенства:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + m^2 + 2bm\cos\varphi \,\big|\, n \\ c^2 &= b^2 + n^2 - 2bn\cos\varphi \,\big|\, m \end{aligned}$$

Умножая первое равенство на n, второе — на m и складывая, получим:

$$a^2 n + c^2 m = b^2 (m + n) + mn (m + n).$$

Предполагая, что B лежит между A и C, получим: $m + n = p$. И окончательно:

$$a^2 n + c^2 m - b^2 p = mnp.$$

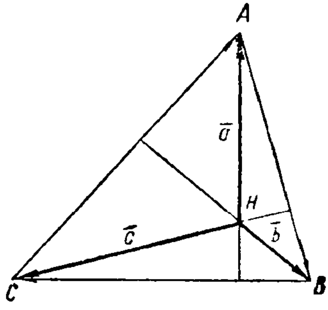


Рис. 24

Полученную формулу можно применить к вычислению медианы или биссектрисы треугольника через его стороны.

19. Приведем еще некоторые интересные приложения скалярного произведения.

Нетрудно проверить тождественное равенство нулю выражения:

$$\vec{a}(\vec{b} - \vec{c}) + \vec{b}(\vec{c} - \vec{a}) + \vec{c}(\vec{a} - \vec{b}) = 0 \qquad (1)$$

Положим теперь, что из точки H к вершинам треугольника ABC направлены векторы: $\overrightarrow{HA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{HB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{HC} = \vec{c}$ (рис. 24). Тогда имеем также, что $\overrightarrow{CB} = \vec{b} - c$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{a}$, $\overrightarrow{BA} = \vec{a} - \vec{b}$. Пусть далее нам дано, что AH и BH совпадают с высотами треугольника: $AH \perp BC$, $BH \perp CA$. Отсюда следует, что $\vec{a}(\vec{b} - \vec{c}) = 0$ и $\vec{b}(\vec{c} - \vec{a}) = 0$, но тогда в силу тождества (1) получим, что и $\vec{c}(\vec{a} - \vec{b}) = 0$, т. е. что $CH \perp AB$, и, значит, CH тоже высота треугольника. Итак, мы получили предложение о том, что три высоты треугольника пересекаются в одной и той же точке.

К интересным следствиям приводит и другое, легко проверяемое тождество:

$$\vec{a}\,\vec{b} = \left(\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\vec{a} - \vec{b}}{2}\right)^2. \qquad (2)$$

Из этого тождества получается предложение:

Скалярное произведение двух векторов, проведенных из данной точки плоскости к двум концам любого диаметра данной окружности, есть величина постоянная.

Пусть S — данная точка, A и B — концы диаметра окружности с центром O (рис. 25). Обозначим $\overrightarrow{SA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{SB} = \vec{b}$. Так как O — середина AB, то $\overrightarrow{SO} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$ и $\overrightarrow{OB} = \frac{\vec{b} - \vec{a}}{2}$.

Согласно тождеству (2) имеем:

$$\vec{a}\,\vec{b} = \left(\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}\right)^2 = (\overrightarrow{SO})^2 - (\overrightarrow{OB})^2 = p.$$

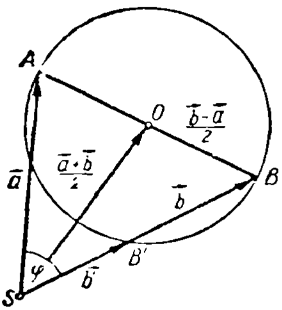


Рис. 25

Но $(\overrightarrow{SO})^2$ есть квадрат расстояния данной точки от вершины S, а $(\overrightarrow{OB})^2$ есть квадрат радиуса окружности. Итак, произведение $\vec{a}\vec{b}$ постоянно. Заметим, что это же произведение равно скалярному произведению двух коллинеарных векторов, соединяющих точку S с двумя точками окружности. На рисунке 25 имеем: $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}'\vec{b}$, где $\vec{b}'$ есть геометрическая проекция вектора $\vec{a}$ на ось вектора $\vec{b}$, так как $AB' \perp SB$. Полученное постоянное число p называется степенью точки S относительно окружности с центром O. Обозначая через φ угол ASB, получим, что

$$\vec{a}\,\vec{b} = ab\cos\varphi.$$

Если S — точка окружности, то $\overline{OS} = \overline{OA}$ и степень равна нулю, т. е. $\cos\varphi = 0$ и $\varphi = 90^\circ$. Если S — внешняя точка, то угол φ острый и степень положительна. Если S — внутренняя точка, то φ — тупой угол и степень отрицательна.

Учащимся можно предложить доказать, что в случае внешней точки степень ее равна квадрату касательной, проведенной из этой точки к окружности, а в случае внутренней точки степень ее равна квадрату наименьшей полухорды, проходящей через эту точку.

20. Полезно показать также применение скалярного произведения векторов в прямоугольной системе координат. Заметим прежде всего, что, применяя скалярное произведение к ортам $\vec{i}$ и $\vec{j}$, получим:

$$(\vec{i})^2 = (\vec{j})^2 = 1, \vec{i}\,\vec{j} = \vec{j}\,\vec{i} = 0, \text{ так как } \vec{i} \perp \vec{j}.$$

Поэтому, если, например, радиус-вектор $\vec{r}$ имеет координаты (x, y), то его длину r можно определить следующим образом: $(\vec{r})^2 = (x\vec{i} + y\vec{j})^2 = x^2 + y^2$, поэтому $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Если даны два вектора: $\vec{r}_1$ с координатами $(x_1;\ y_1)$ и $\vec{r}_2$ с координатами $(x_2;\ y_2)$, то угол φ между ними вычисляется так: $\vec{r}_1\vec{r}_2 = r_1 r_2 \cos\varphi$, и, значит, $\cos\varphi = \frac{\vec{r}_1\vec{r}_2}{r_1 r_2}$.

Но $\vec{r}_1\vec{r}_2 = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j})(x_2\vec{i} + y_2\vec{j}) = x_1x_2 + y_1y_2$.

Следовательно, $\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{r_1r_2}$.

Отсюда непосредственно получим условие перпендикулярности двух векторов:

$$x_1 x_2 + y_1y_2 = 0.$$

Если нужно найти р а с с т о я н и е a между концами радиусов-векторов $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$, то получим: $\vec{a} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, следовательно,

$$a^2 = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2 = [(x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}]^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Поэтому $a = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Рассмотрим теперь, как можно получить уравнение прямой в прямоугольной системе координат. Для определения положения прямой l опустим на нее перпендикуляр $\overrightarrow{OP}$ из начала координат и назовем через φ угол между осью x и этим вектором. Очевидно, вектором $\overrightarrow{OP} = \vec{p}$ и углом φ положение прямой вполне определено (рис. 26). Проведем вектор $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ к произвольной точке прямой. Вектор $\overrightarrow{PM} = \vec{r} - \vec{p}$ перпендикулярен к вектору $\vec{p}$, и потому мы получаем: $(\vec{r} - \vec{p})\vec{p} = 0$ — это и есть искомое уравнение прямой в векторной форме. Выразим его в координатах: $\vec{r}\vec{p} - (\vec{p})^2 = 0$, или $\vec{r}\vec{p} = p^2$, т. е. $(x\vec{i} + y\vec{j})\ (p\vec{i}\cos\varphi + p\vec{j}\sin\varphi) = p^2$.

Перемножая, получим: $px\cos\varphi + py\sin\varphi = p^2$ и окончательно: $x\cos\varphi + y\sin\varphi = p$ — это и есть так называемое н о р м а л ь н о е уравнение прямой.

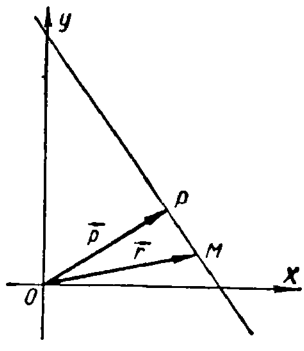


Рис. 26

Известно, что к нормальному виду можно привести любое линейное уравнение:
$Ax + By + C = 0.$ (1)

Действительно, рассмотрим вектор $\vec{n}$

с координатами A и B, тогда получим: $\vec{m} = A\vec{i} + B\vec{j}$, и уравнение (1) примет вид:

$$\vec{r}\vec{m} = -C.$$

Допустим, что число $(-C)$ положительно,так как если бы этого не оказалось, то мы могли бы в уравнении (1) изменить все знаки на обратные и вектор $\vec{m}$ заменить противоположным. Итак, положим, что $-C = k > 0$. Тогда получим:

$$\vec{r}\vec{m} = k.$$

Обозначая через m модуль вектора $\vec{m}$, находим: $\vec{r}\,\frac{\vec{m}}{m} = \frac{k}{m}$. Умножая обе части равенства на $\frac{k}{m}$, получим: $\vec{r}\,\frac{k\vec{m}}{m^2} = \left(\frac{k}{m}\right)^2$. Положим, наконец, $\frac{k}{m^2}\vec{m} = \vec{p}$ и получим: $\vec{r}\vec{p} = p^2$, т. е. нормальное уравнение прямой.

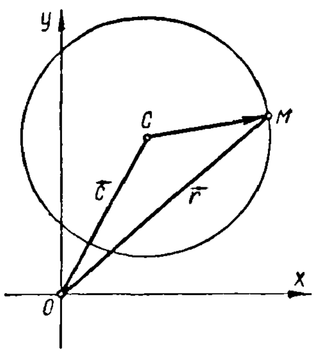


Рис. 27

Отсюда мы также получим, что *всякое линейное уравнение с одним переменным радиусом-вектором $\vec{r}$ является уравнением прямой.*

Посмотрим, наконец, как можно отобразить окружность при помощи векторного уравнения. Пусть окружность задана центром C, определяемым вектором $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ с координатами $(x_0;\ y_0)$ и радиусом с абсолютной величиной ρ (рис. 27). Произвольная точка M на этой окружности определяется переменным радиусом-вектором $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ с координатами $(x;\ y)$. Имея в виду, что длина вектора $\overrightarrow{CM} = \vec{r} - \vec{c}$ постоянна, мы сразу получаем искомое уравнение:

$$(\vec{r} - \vec{c})^2 = \rho^2, \text{ или } (\vec{r} - \vec{c})^2 - \rho^2 = 0. \tag{2}$$

Переходя к координатам векторов, мы получаем:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2.$$

Если в уравнение (2) подставить произвольное значение для $\vec{r}$, то левая часть, вообще говоря, не обратится в нуль, и мы получим:

$$(\vec{r} - \vec{c})^2 - \rho^2 = p.$$

Первый член в левой части есть квадрат расстояния от конца радиуса-вектора $\vec{r}$ до центра C, второй — квадрат радиуса окружности. Но выше уже нами было установлено, что разность этих квадратов есть **степень точки относительно окружности**, выражаемая числом p.

Полученный вывод позволит решить еще одну задачу:

Найти геометрическое место точек, степень которых относительно двух данных окружностей одна и та же.

Пусть окружности с центрами C_1 и C_2 и радиусами ρ_1 и ρ_2 определены уравнениями:

$$(\vec{r}-\vec{c}_1)^2-\rho_1^2=0,\ (\vec{r}-\vec{c}_2)^2-\rho_2^2=0.$$

Приравнивая друг другу степени точки, определяемой одним и тем же радиусом-вектором $\vec{r}$, мы получим:

$$(\vec{r}-\vec{c}_1)^2-\rho_1^2=(\vec{r}-\vec{c}_2)^2-\rho_2^2 \text{ или}$$

$$(\vec{r}-\vec{c}_1)^2-(\vec{r}-\vec{c}_2)^2=\rho_1^2-\rho_2^2, \text{ т. е. } (2\vec{r}-\vec{c}_1-\vec{c}_2)(\vec{c}_2-\vec{c}_1)=\rho_1^2-\rho_2^2.$$

Раскрывая скобки в левой части, получим:

$$(\vec{c}_2-\vec{c}_1)\,\vec{r}=\frac{c_2^2-c_1^2+\rho_1^2-\rho_2^2}{2}.$$

Но это есть нормальное уравнение прямой, из которого также следует, что эта прямая перпендикулярна к линии центров, определяемой разностью векторов $\vec{c}_2-\vec{c}_1$. Полученное геометрическое место называется **радикальной осью двух окружностей**.

21. В приведенных нами примерах даны выводы соответствующих уравнений в наиболее общей форме. В классной обстановке эти выводы нужно подкреплять примерами, в которых даются конкретные числовые значения, определяющие положение вектора, угол между векторами, уравнение прямой, уравнение окружности. Упражнения должны сопровождаться графическими построениями на клетчатой бумаге, а в некоторых случаях — и на миллиметровке.

Таковы, например, **упражнения**:

1) *Найти расстояние между концами радиусов-векторов с координатами* (5; 7) и (—7 ; 9).

2) *Найти угол между радиусами-векторами, координаты которых равны* (4; 9) и (3; — 8).

3) *Найти векторное уравнение прямой, которая проходит параллельно биссектрисе первого координатного угла на расстоянии, равном 5 от начала.*

4) *Написать нормальное уравнение прямой, заданной векторным уравнением:* $\vec{r}\vec{p} = p^2$, *где вектор* $\vec{p}$ *имеет координаты* (7; — 4).

5) *Написать векторное уравнение прямой, проходящей через точки* (— 5; 3); (3; 5).

6) *Каково будет нормальное уравнение прямой, проходящей через начало координат и образующей угол* φ *с осью* x?

7) *Написать векторное уравнение окружности с центром в начале координат.*

8) *Написать векторное уравнение окружности, проходящей через начало координат.*

9) *Какова степень начала координат относительно окружности с центром в точке* (9; 9) *и с радиусом, равным* 6?

10) *Если* $\vec{r}\vec{a} = m$ и $\vec{r}\vec{b} = n$ — *векторные уравнения двух прямых, то какой смысл имеют уравнения:* $\vec{r}(\vec{a} + \vec{b}) = m + n$ и $\vec{r}(\vec{a} - \vec{b}) = m - n$, *полученные путем почленного сложения и вычитания этих уравнений?*

§ 4. Косое векторное произведение

22. Вопрос о косом векторном произведении не включен в программу средней школы. Однако может случиться, что кто-нибудь из учащихся может обратиться к преподавателю с вопросом: если выражение $ab \cos \varphi$ мы называем скалярным произведением двух векторов, модули которых равны a и b, то имеет ли какой-либо смысл рассматривать произведение $ab \sin \varphi$?

Такая постановка вопроса тем более вероятна, что выражение $ab \sin \varphi$ имеет вполне конкретное значение — это есть площадь параллелограмма со сторонами a и b и с углом φ между ними.

Вопрос о косом векторном произведении может быть рассмотрен на внеклассных занятиях по математике, а также в классах, занимающихся по расширенной программе.

Поэтому мы сочли целесообразным хотя бы в самых общих чертах дать понятие о косом векторном произведении, его определении и свойствах.

Перейдем к определениям. П е р п е н д и к у л я р н о й о с ь ю данного вектора $\vec{a}$ называется ось, орт которой образует положительный прямой угол с этим вектором. Это значит, что если вектор $\vec{a}$ повернуть около его начала в положительном направлении (т. е. против направления движения часовой стрелки) на 90°, то вектор и орт оси станут сонаправлены.

К о с ы м в е к т о р н ы м п р о и з в е д е н и е м в е к т о р а $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется произведение модуля вектора $\vec{a}$ на алгебраическую проекцию вектора $\vec{b}$ на перпендикулярную ось вектора (рис. 28).

Косое векторное произведение вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ обозначается символом $[\vec{a}\vec{b}]$.

Если через b' обозначить алгебраическую проекцию вектора $\vec{b}$ на перпендикулярную ось вектора $\vec{a}$, то получим:

$$[\vec{a}\,\vec{b}\,] = ab'.$$

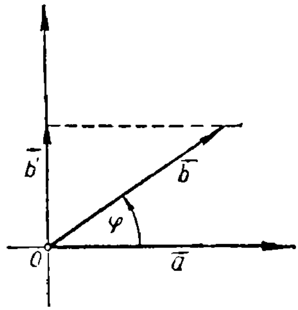


Рис. 28

С другой стороны, из определения синуса следует, что $b' = b \sin \varphi$, где через φ обозначен угол, на который надо повернуть вектор $\vec{a}$ около начала, чтобы он стал- сонаправленным с вектором $\vec{b}$.

Итак, мы получили: $[\vec{a}\vec{b}\,] = ab \sin \varphi$.

Отсюда получается новое определение:

Косым векторным произведением двух векторов называется произведение их модулей на синус угла между ними.

Из полученных определений находим непосредственно ряд свойств этого произведения.

1) *Косое векторное произведение $[\vec{a}\vec{b}\,]$ не изменяется, если при неизменном начале конец вектора $\vec{b}$ будет перемещаться по прямой, параллельной вектору $\vec{a}$.*

Это видно из того, что при таком перемещении алгебраическая проекция b' вектора $\vec{b}$ на перпендикулярную ось вектора $\vec{a}$ остается неизменной, и потому остается неизменным и произведение ab'.

2) *Косое векторное произведение $[\vec{a}\vec{b}\,]$ обращается в нуль тогда и только тогда, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.*

Это предложение совершенно очевидно для того случая, когда какой-нибудь из векторов $\vec{a}$ или $\vec{b}$ окажется нулевым (нулевой вектор сонаправлен с любым вектором). Если же оба вектора ненулевые, то в случае их коллинеарности обращается в нуль алгебраическая проекция b', а значит, и все произведение ab' обращается в нуль.

Во всех остальных случаях, когда $\varphi \neq 0$ и $\varphi \neq 180°$, произведение $ab \sin \varphi$ отлично от нуля. Оно положительно при φ положительном и отрицательно при φ отрицательном, принимая во внимание, что всегда $0 \leqslant |\varphi| \leqslant 180°$.

3) *От перемены места сомножителей косое векторное произведение меняет знак на обратный: $[\vec{a}\vec{b}] = -[\vec{b}\vec{a}]$, это значит, что косое векторное произведение не подчиняется переместительному закону.*

Объясняется это тем, что в произведении $[\vec{a}\vec{b}]$ угол φ определяется поворотом от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$, а в произведении $[\vec{b}\vec{a}]$ угол определяется поворотом от вектора $\vec{b}$ к вектору $\vec{a}$, и потому этот угол равен $-\varphi$. Но $\sin(-\varphi) = -\sin\varphi$, и потому $[\vec{a}\vec{b}] = ab\sin\varphi$, $[\vec{b}\vec{a}] = ab\sin(-\varphi) = -[\vec{a}\,\vec{b}]$.

Этим свойством произведения объясняется его название «косое» в отличие от «симметрического» скалярного произведения, не изменяющегося от перестановки сомножителей.

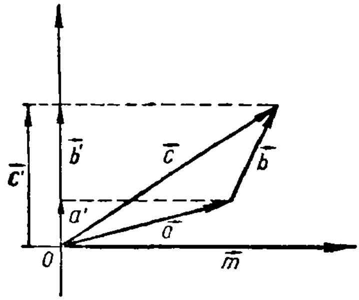


Рис. 29

4) *Для косого векторного произведения оказывается справедливым распределительный закон:*

$$[(\vec{a}+\vec{b})\,\vec{m}] = [\vec{a}\,\vec{m}] + [\vec{b}\,\vec{m}].$$

Пусть $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$; обозначим через a', b', c' соответственно алгебраические проекции этих векторов на ось, перпендикулярную к $\vec{m}$ (рис. 29). По уже доказанному свойству проекций суммы векторов получим:

$$a' + b' = c'.$$

Далее имеем:

$$[\vec{a}\,\vec{m}] + [\vec{b}\,\vec{m}] = a'm + b'm = (a' + b')\,m = c'm.$$

В то же время $[(\vec{a}+\vec{b})\,\vec{m}] = [\vec{c}\,\vec{m}] = c'm$.

Итак, $[(\vec{a}+\vec{b})\,\vec{m}] = [\vec{a}\,\vec{m}] + [\vec{b}\,\vec{m}]$.

Таким образом, производя умножение суммы векторов по правилам косого векторного произведения, мы можем пользоваться известными алгебраическими правилами раскрытия скобок, наблюдая, однако, при этом, чтобы не изменился порядок сомножителей.

23. Посмотрим, как выражается косое векторное произведение в прямоугольной системе координат с ортами $\vec{i}$ и $\vec{j}$. Заметим прежде всего, как перемножаются сами орты. Согласно определению косого векторного произведения получим:

$$[\vec{i}\,\vec{i}] = [\vec{j}\,\vec{j}] = 0, \quad [\vec{i}\,\vec{j}] = -[\vec{j}\,\vec{i}] = 1.$$

Приняв во внимание эти равенства, получим для радиусов-векторов $\vec{a}$ с координатами (x_1, y_1) и $\vec{b}$ с координатами (x_2, y_2):

$$[\vec{a}\,\vec{b}] = [(x_1\vec{i} + y_1\vec{j})\,(x_2\vec{i} + y_2\vec{j})] = x_1y_2 - x_2y_1.$$

Если воспользоваться символикой определителей, то получим:

$$[\vec{a}\,\vec{b}] = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = ab \sin \varphi.$$

Из этого равенства мы получим новую формулу для определения угла между радиусами-векторами:

$$\sin \varphi = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}}{ab}.$$

24. Одним из наиболее важных приложений косого векторного произведения является использование его для вычисления площадей многоугольников.

Известно, что площадь параллелограмма равна произведению двух сторон его на синус угла между ними. Но это значит, что площадь параллелограмма по абсолютной величине равна косому векторному произведению двух смежных сторон его. При этом только нужно учитывать, что косое векторное произведение дает значение о р и е н т и р о в а н н о й площади, так как в зависимости от порядка сомножителей, т. е. от направления угла между векторами, площадь может оказаться либо положительной, либо отрицательной.

Рассмотрим теперь площадь треугольника ABC, в котором $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CA} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$. Обозначим эту площадь символом S_{ABC}. Согласно известной формуле геометрии имеем:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} bc \sin \alpha.$$

От этой формулы перейдем к косому векторному произведению. Обозначив вершины треугольника так, чтобы обход контура ABC (рис. 30) совершался в положительном направлении, получим:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} [\vec{b}\,\vec{c}] = \frac{1}{2} bc \sin \alpha.$$

Действительно, помещая начало вектора $\vec{b}$ в точку A, получим: $\overrightarrow{AC'} = \vec{b}$. При этом мы имеем: $S_{ABC} = S_{ABC'}$, $\angle C'AB = \pi - \alpha$, и, значит, $S_{ABC'} = \frac{1}{2} [\vec{b}\,\vec{c}] = \frac{1}{2} bc \sin(\pi - \alpha)$. Но $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$. Итак, $S_{ABC} = \frac{1}{2} bc \sin \alpha = \frac{1}{2} [\vec{b}\,\vec{c}]$.

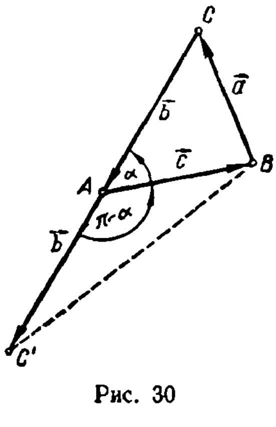


Рис. 30

Путем циклической замены получим аналогичные равенства:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}[\vec{c}\,\vec{a}], \quad S_{ABC} = \frac{1}{2}[\vec{a}\,\vec{b}].$$

Более симметричное выражение для площади треугольника получим, определив положение трех его вершин при помощи трех радиусов-векторов: $\overrightarrow{OA} = \vec{r}_1$, $\overrightarrow{OB} = \vec{r}_2$, $\overrightarrow{OC} = \vec{r}_3$.

Тогда получим: $\vec{a} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \vec{r}_3 - \vec{r}_2$. И аналогично: $\vec{b} = \vec{r}_1 - \vec{r}_3$, $\vec{c} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$. Поэтому для площади треугольника получим:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}[\vec{b}\,\vec{c}] = \frac{1}{2}[(\vec{r}_1 - \vec{r}_3)(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)] = \frac{1}{2}[\vec{r}_1\vec{r}_2] - \frac{1}{2}[\vec{r}_3\vec{r}_2] +$$
$$+ \frac{1}{2}[\vec{r}_3\vec{r}_1].$$

И окончательно:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}[\vec{r}_2\,\vec{r}_3] + \frac{1}{2}[\vec{r}_3\vec{r}_1] + \frac{1}{2}[\vec{r}_1\,\vec{r}_2]. \qquad (1)$$

Нетрудно убедиться в том, что ту же самую формулу мы получим, исходя из формулы $S_{ABC} = \frac{1}{2}[\vec{c}\,\vec{a}]$ или $S_{ABC} = \frac{1}{2}[\vec{a}\,\vec{b}]$.

Формула (1) есть частный случай общей формулы для площади n-угольника. Положим, что многоугольник $A_1A_2 \ldots A_{n-1}A_n$ ограничен ломаной линией без самопересечений, и нумерация вершин идет в положительном направлении (рис. 31). Пусть положение вершин определено радиусами-векторами:

$$\overrightarrow{OA_1} = \vec{r}_1, \overrightarrow{OA_2} = \vec{r}_2, \ldots, \overrightarrow{OA_{n-1}} = \vec{r}_{n-1}, \overrightarrow{OA_n} = \vec{r}_n.$$

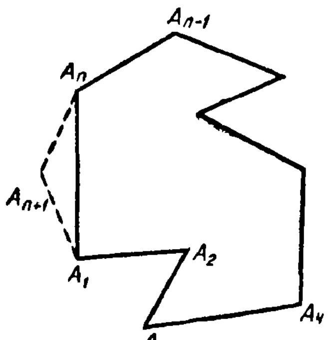


Рис. 31

Тогда площадь многоугольника выразится формулой:

$$S_{A_1A_2 \ldots A_n} = \frac{1}{2}\left\{[\vec{r}_1\vec{r}_2] + [\vec{r}_2\vec{r}_3] + \ldots + [\vec{r}_{n-1}\vec{r}_n] + [\vec{r}_n\vec{r}_1]\right\} \qquad (2)$$

Формулу (2) докажем методом полной индукции. Для $n = 3$ она доказана. Предполагая, что она справедлива для n-угольника, докажем, что она остается справедливой и для $(n+1)$-угольника. Добавим к многоугольнику еще одну вершину A_{n+1} (рис. 31), положение которой определяется радиусом-вектором $\vec{r}_{n+1} = \overrightarrow{OA}_{n+1}$. Для получения площади $(n+1)$-угольника нужно к площади n-угольника прибавить площадь треугольника $A_1A_nA_{n+1}$.

Тогда получим:

$$S_{A_1A_2 \ldots A_nA_{n+1}} = \frac{1}{2}[\vec{r}_1\vec{r}_2] + \frac{1}{2}[\vec{r}_2\vec{r}_3] + \ldots + \frac{1}{2}[\vec{r}_n\vec{r}_1] + $$
$$+ \frac{1}{2}[\vec{r}_1\vec{r}_n] + \frac{1}{2}[\vec{r}_n\vec{r}_{n+1}] + \frac{1}{2}[\vec{r}_{n+1}\vec{r}_1].$$

Но $[\vec{r}_n\vec{r}_1] = -[\vec{r}_1\vec{r}_n]$, и потому соответствующие члены взаимно уничтожаются, и мы получим:

$$S_{A_1A_2 \ldots A_nA_{n+1}} = \frac{1}{2}\left\{[\vec{r}_1\vec{r}_2] + [\vec{r}_2\vec{r}_3] + \cdots + [\vec{r}_n\vec{r}_{n+1}] + [\vec{r}_{n+1}\vec{r}_1]\right\}.$$

Формула осталась прежней, и, значит, условия математической индукции выполнены, т. е. формула (2) доказана.

25. Посмотрим теперь, как эти формулы записываются в координатах. Положим, что точка A_k определяется радиусом-вектором $\vec{r}_k = \overrightarrow{OA}_k$ с координатами $(x_k;\ y_k)$, тогда площадь треугольника $A_1A_2A_3$ выразится согласно формуле (1) равенством:

$$S_{A_1A_2A_3} = \frac{1}{2}[\vec{r}_2\vec{r}_3] + \frac{1}{2}[\vec{r}_3\vec{r}_1] + \frac{1}{2}[\vec{r}_1\vec{r}_2] = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} +$$
$$+ \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} + \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix},$$

или короче

$$S_{A_1A_2A_3} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}. \qquad (3)$$

Если определитель в формуле (3) обратится в нуль, то это укажет на то, что точки A_1, A_2, A_3 лежат на одной и той же прямой.

Площадь n-угольника по координатам его вершин вычисляется по аналогичной формуле:

$$S_{A_1A_2 \ldots A_n} = \frac{1}{2}\left\{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} x_{n-1} & x_n \\ y_{n-1} & y_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_n & x_1 \\ y_n & y_1 \end{vmatrix}\right\}. \qquad (4)$$

Формула (4) оказывается весьма полезной при обработке результатов измерений на местности. Если при измерении полигона на местности определены длины его сторон и измерены все внутренние углы, то, приняв на плане одну из вершин за начало координат, можно при помощи несложных вычислений последовательно найти координаты всех остальных его вершин. Тогда формула (4) дает возможность очень быстро найти площадь измеренного полигона.

Если преподаватель нашел возможным изложить учащимся свойства косого векторного произведения и вывести соответствующие формулы, то упражнения на приложения этих формул нужно приводить на числовых примерах, сопровождая их графическими построениями на клетчатой бумаге. Особенно полезными являются упражнения на вычисление площадей треугольников и многоугольников по координатам вершин.

§ 5. Векторы в пространстве

26. Тема «Векторы в пространстве», как и тема «Косое векторное произведение», не входит в программу средней школы. Поэтому вопрос о возможности включения этой темы в преподавание разрешается так же, как и в предыдущем случае: некоторые сведения по этой теме можно дать на внеклассных занятиях, некоторые можно включить в число упражнений по стереометрии, и, наконец, в специальных математических классах она может быть изложена с достаточной полнотой.

Первоначальные определения равенства векторов и операции сложения остаются теми же, как и для векторов в плоскости. В связи с этим нужно заметить, что композиция параллельных переносов в пространстве приводится к сложению определяющих их векторов. Две последовательные центральные симметрии в пространстве также эквивалентны параллельному переносу, вектор которого вдвое больше вектора, идущего от первого центра ко второму.

Операция умножения вектора на число по-прежнему связана с преобразованием гомотетии, и ее свойства остаются прежними. Остается в силе и необходимое и достаточное условие коллинеарности двух векторов:

$$m\vec{a} + n\vec{b} = 0$$

при m и n неравных нулю одновременно.

Наряду с понятием коллинеарности в пространстве появляется понятие к о м п л а н а р н о с т и векторов: векторы называются компланарными, если они параллельны одной и той же плоскости. Если компланарные векторы привести к общему началу, то их концы и их общее начало будут лежать в одной и той же плоскости.

Из определения суммы двух векторов непосредственно следует:

Два вектора и их сумма всегда компланарны.

Действительно, если $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, то все три вектора лежат в плоскости, определяемой точками A, B и C.

Отсюда мы получаем условия компланарности трех векторов.

Для компланарности векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ необходимо и достаточно, чтобы удовлетворялось равенство: $m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}=0$ при m, n и p неравных нулю одновременно.

Условие необходимо, так как если векторы компланарны, то каждый из них может быть разложен по направлениям двух других; например: $\vec{a}=k\vec{b}+k'\vec{c}$, или $\vec{a}-k\vec{b}-k'\vec{c}=0$. Условие достаточно, так как если оно выполнено, то получим: $m\vec{a}=-n\vec{b}-p\vec{c}$, т. е. вектор $m\vec{a}$ есть сумма векторов $n\vec{b}$ и $-p\vec{c}$, и, значит, все три вектора компланарны. Заметим еще, что если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ некомпланарны, то их сумма — вектор $\vec{r}$ есть

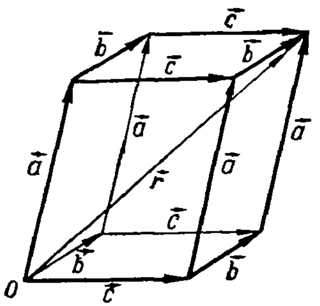


Рис. 32

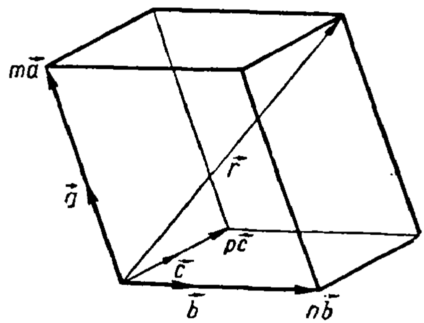


Рис. 33

диагональ параллелепипеда, ребрами которого служат слагаемые (рис. 32).

Далее в пространстве справедливо предложение о разложении вектора:

Каждый вектор может быть однозначно представлен как сумма трех векторов, соответственно коллинеарных с тремя некомпланарными векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$:

$$\vec{r}=m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}. \tag{1}$$

Для доказательства приведем все векторы к общему началу и построим параллелепипед с диагональю $\vec{r}$ и с ребрами, коллинеарными с векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (рис. 33). Тогда ребра параллелепипеда, будучи коллинеарны с $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, имеют величины $m\vec{a}$, $n\vec{b}$, $p\vec{c}$, и мы получим равенство (1).

Если бы существовало второе такое же разложение:

$\vec{r} = m'\vec{a} + n'\vec{b} + p'\vec{c}$, то мы получили бы: $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = m'\vec{a} + n'\vec{b} + p'\vec{c}$ или $(m - m')\,\vec{a} + (n - n')\,\vec{b} + (p - p')\,\vec{c} = 0$.

Но если бы коэффициенты при векторах не были равны нулю одновременно, то это значило бы, что векторы компланарны, а это противоречит условию. Следовательно, $m' = m$, $n' = n$, $p' = p$.

Особенно важным является разложение вектора по направлениям трех взаимно перпендикулярных координатных осей. Направления осей определяются ортами: $\vec{i}$ — по оси x, $\vec{j}$ — по оси y и $\vec{k}$ — по оси z. Разлагая вектор $\vec{r}$ по трем координатным осям, получим:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Здесь $x\vec{i}$, $y\vec{j}$, $z\vec{k}$ — геометрические проекции вектора $\vec{r}$ на оси — называются компонентами вектора по осям, а числа x, y, z — алгебраические проекции его — называются координатами вектора. Если начало вектора $\vec{r}$ совпадает с началом координат, то эти же числа являются и координатами точки — конца радиуса-вектора.

Из этих определений совершенно так же, как и на плоскости, получаются свойства проекции вектора на ось:

1. *Равные векторы имеют равные проекции.*

2. *Если вектор умножить на число, то и его проекция умножится на то же число.*

3. *Проекция суммы векторов равна сумме проекций составляющих.*

27. Скалярное произведение двух векторов в пространстве определяется так же, как и для плоскости, и потому все свойства скалярного произведения сохраняются и для векторов в пространстве. Покажем несколько приложений свойств этого произведения.

1) Применяя свойства скалярного произведения к ортам прямоугольной системы координат, получим:

$$(\vec{i})^2 = (\vec{j})^2 = (\vec{k})^2 = 1; \quad \vec{j}\,\vec{k} = \vec{k}\,\vec{i} = \vec{i}\,\vec{j} = 0.$$

2) Если вектор $\vec{r}$ имеет координаты x, y, z, то

$$(\vec{r})^2 = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})^2 = x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Так определяется модуль вектора через его координаты.

3) Определим угол φ между векторами $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ с координатами x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2.

Возьмем скалярное произведение: $\vec{r}_1\vec{r}_2 = r_1r_2\cos\varphi = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k})(x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

Поэтому

$$\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{r_1r_2}.$$

Скалярное произведение можно применить к выводу уравнения плоскости. Проведем из начала координат вектор $\overrightarrow{OP} = \vec{p}$, перпендикулярный к плоскости, причем длина его p равна расстоянию от начала до плоскости.

Всякая точка M на данной плоскости определяется переменным радиусом-вектором $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ с координатами (x, y, z). Так как $\overrightarrow{MP} \perp \vec{p}$, то $(\vec{r} - \vec{p})\,\vec{p} = 0$, или $\vec{r}\vec{p} = p^2$. (1)

Это и есть нормальное уравнение плоскости. Обозначая через (a, b, c) координаты вектора p, а через α, β, γ углы его с осями x, y, z, получим:

$$a = p\cos\alpha,\ b = p\cos\beta,\ c = p\cos\gamma.$$

Тогда уравнение (1) принимает вид:

$$\vec{r}\vec{p} = xa + yb + zc = xp\cos\alpha + yp\cos\beta + zp\cos\gamma = p^2.$$

Или:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p.$$

Таково нормальное уравнение плоскости в координатах. Величины $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ называются направляющими косинусами вектора $\vec{p}$.

Так как $p^2 = (p\vec{i}\cos\alpha + p\vec{j}\cos\beta + p\vec{k}\cos\gamma)^2$, то получим: $p^2 = p^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)$, т. е.

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ — такова связь между направляющими косинусами одного и того же вектора.

Так же как и для уравнения прямой, можно доказать, что всякое уравнение вида $\vec{r}\vec{a} = m$, где $\vec{r}$ — переменный вектор, тогда как a и m — постоянные, является уравнением плоскости. А отсюда следует, что всякое линейное уравнение вида $Ax + By + Cz + D = 0$ есть тоже уравнение плоскости.

Уравнение сферы получается так же, как и уравнение окружности.

Если центр сферы определяется радиусом-вектором $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$, радиус ее равен ρ, а M — ее произвольная точка, определяемая радиусом-вектором $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$, то мы получаем:

$$(\vec{r} - \vec{c})^2 = \rho^2.$$

Это уравнение выражает основное свойство сферы — расстояние любой ее точки от центра постоянно.

Если в выражение $(\vec{r} - \vec{c})^2 - \rho^2$ подставить вместо $\vec{r}$ произвольный вектор, то полученное число называется **с т е п е н ь ю т о ч к и** (конца радиуса-вектора) относительно сферы.

По аналогии с геометрией в плоскости можно доказать, что геометрическое место точек, имеющих одинаковую степень относительно двух сфер, есть плоскость, перпендикулярная к линии центров этих сфер. Она называется **р а д и к а л ь н о й п л о с к о с т ь ю** двух сфер.

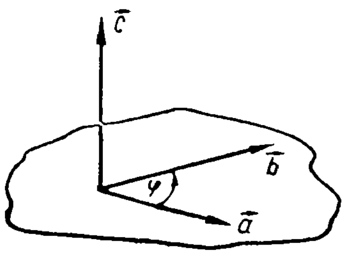


Рис. 34

28. **К о с о е в е к т о р н о е п р о и з в е д е н и е** в пространстве имеет несколько иную интерпретацию, чем в плоскости. В то время как в плоскости мы символом $[\vec{a}\,\vec{b}]$ называем число (скаляр), равное $ab\ \sin\varphi$, в пространстве этот же символ обозначает вектор m, перпендикулярный к $\vec{a}$ и $\vec{b}$, модуль которого равен $|ab \sin\varphi|$, а направление выбрано так, что три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{m}$ образуют **п р а в у ю** систему. Это значит, что для наблюдателя, стоящего на плоскости векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ по направлению вектора $\vec{m}$, переход от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ совершается в положительном направлении (рис. 34).

Все свойства косого векторного произведения сохраняются и для произведения $[\vec{a}\,\vec{b}]$, которое в данном случае называется просто **в е к т о р н ы м** (в отличие от **с к а л я р н о г о** $\vec{a}\,\vec{b}$).

В частности, при перемене порядка сомножителей направление вектора произведения $\vec{m}$ изменяется на обратное.

Векторные произведения ортов прямоугольной системы координат $\vec{i}$, $\vec{j}$; $\vec{k}$ определяются равенствами:

$$[\vec{i}\,\vec{i}] = [\vec{j}\,\vec{j}] = [\vec{k}\,\vec{k}] = 0, \quad [\vec{j}\,\vec{k}] = \vec{i}, \quad [\vec{k}\,\vec{i}] = \vec{j}, \quad [\vec{i}\,\vec{j}] = \vec{k}.$$

Поэтому векторное произведение $[\vec{a}\vec{b}] = m$ в координатах выражается следующим образом.

Пусть $\vec{a}$ имеет координаты (a_x, a_y, a_z); $\vec{b}$ — координаты (b_x, b_y, b_z); $\vec{m}$ — координаты (m_x, m_y, m_z).

Тогда получим:

$$[\vec{a}\vec{b}] = [(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k})(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k})] =$$
$$= (a_yb_z - a_zb_y)\,\vec{i} + (a_zb_x - a_xb_z)\,\vec{j} + (a_xb_y - a_yb_x)\,\vec{k} =$$
$$= m_x\vec{i} + m_y\vec{j} + m_z\vec{k}.$$

Вводя символику определителей, получим:

$$[\vec{a}\,\vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_s \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим теперь смешанное произведение $\vec{a}\,[\vec{b}\,\vec{c}]$. Смысл его заключается в том, что вектор $\vec{a}$ умножается скалярно на вектор $\vec{m} = [\vec{b}\,\vec{c}]$.

Чтобы уяснить себе геометрический смысл этого произведения, рассмотрим параллелепипед с ребрами $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ (рис. 35). Основанием его служит параллелограмм со сторонами $\vec{b}$ и $\vec{c}$, а высотой — геометрическая проекция $\vec{a}'$ вектора $\vec{a}$ на ось вектора $\vec{m}$. Вместе с тем число $m = bc \sin \varphi$ дает площадь основания параллелепипеда, а число $a'm = \vec{a}\vec{m}$ — его объем.

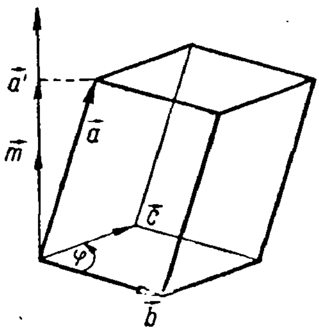


Рис. 35

Итак, скалярно-векторное произведение $\vec{a}\,[\vec{b}\,\vec{c}\,]$ равно объему параллелепипеда, построенного на данных векторах.

Выражая это уравнение в координатах

(a_x, a_y, a_z), (b_x, b_y, b_z), (c_x, c_y, c_z), получим:

$$\vec{a}[\vec{b}\,\vec{c}[\; = a_x(b_yc_z - b_zc_y) + a_y\,(b_zc_x - b_xc_z) + a_z\,(b_xc_y - b_yx_x).$$

Или, вводя символику определителей:

$$\vec{a}\,[\vec{b}\,\vec{c}] = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Так выражается объем параллелепипеда через координаты его ребер.

Посмотрим, наконец, как получить уравнение прямой в пространстве.

Прямая определяется точкой P (радиус-вектор $\overrightarrow{OP} = \vec{p}$) и направлением, определяемым ортом $\vec{e}$. Точка M этой прямой определяется радиусом-вектором $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ (рис. 36). Так как $MP \parallel \vec{l}$, то получим: $[(\vec{r} - \vec{p})\vec{l}] = 0$, или $[\vec{r}\,\vec{l}] = [\vec{p}\,\vec{l}]$.

Таково векторное уравнение прямой. Из этих уравнений нетрудно получить уравнение прямой в координатах. Пусть переменный радиус-вектор $\vec{r}$ имеет координаты (x, y, z), координаты точки P (радиуса-вектора $\vec{p}$) — (x_0, y_0, z_0), координаты орта $\vec{l}$ суть направляющие косинусы этого орта: $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, где α, β, γ — углы, образуемые ортом $\vec{l}$ с осями x, y и z.

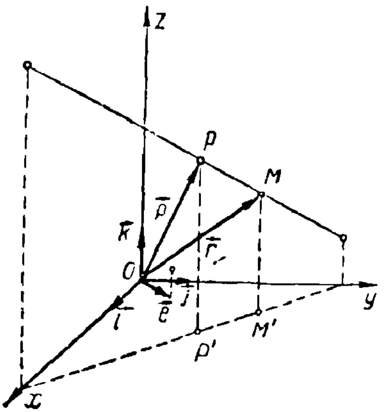


Рис. 36

Ввиду того что векторы $\vec{r} - \vec{p}$ и $\vec{l}$ коллинеарны, можно писать: $\vec{r} - \vec{p} = t\vec{l}$, где t — постоянное действительное число.

Отсюда следует равенство:

$$(x - x_0)\,\vec{i} + (y - y_0)\,\vec{j} + (z - z_0)\,\vec{k} = t\vec{i}\cos\alpha + t\vec{j}\cos\beta + t\vec{k}\cos\gamma.$$

Так как орты $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ некомпланарны, то это равенство может быть справедливо лишь при условии равенства коэффициентов при соответствующих ортах. Поэтому получим:

$$(x - x_0) = t\cos\alpha,\ (y - y_0) = t\cos\beta,\ (z - z_0) = t\cos\gamma,\ \text{или:}$$

$$\frac{x - x_0}{\cos\alpha} = \frac{y - y_0}{\cos\beta} = \frac{z - z_0}{\cos\gamma}$$ — таково уравнение прямой в координатах.

Если бы направление прямой было задано не ортом $\vec{l}$, а произвольным вектором $\vec{m}_x$, $\vec{m}_y$, $\vec{m}_z$, то таким же путем мы получили бы более общее уравнение:

$$\frac{x - x_0}{m_x} = \frac{y - y_0}{m_y} = \frac{z - z_0}{m_z}.$$

Как и во всех предыдущих случаях, эти общие формулы нужно иллюстрировать частными примерами с конкретными числовыми данными.

ГЛАВА IV

МЕТОДИКА ОТБОРА УПРАЖНЕНИЙ ПО ГЕОМЕТРИИ И ОБУЧЕНИЯ ИХ РЕШЕНИЮ

§ 1. Значение геометрических задач

Задачи являются неотъемлемой составной частью курса геометрии в средней школе. Действительно, лишенный задач курс элементарной геометрии представлял бы собой лишь группу теорем, размещенных более или менее последовательно. Пользы от изучения такого курса очень мало.

Во-первых, учащимся пришлось бы «вызубривать» содержание этих теорем, поскольку школьники не видели бы никакого применения изучаемого материала. Был бы нарушен известный дидактический принцип сознательности обучения.

Во-вторых, такой курс не был бы связан с другими дисциплинами, входящими в программу средней школы, в том числе и с другими математическими дисциплинами.

В-третьих, такой курс ни в малейшей степени не способствовал бы развитию пространственных представлений учеников.

В-четвертых, такой курс не дал бы школьникам подготовки к решению даже простейших практических задач.

Поэтому весь школьный курс геометрии должен быть насыщен различными упражнениями. Как бы ни менялись программа и количество часов, отводимых на изучение геометрии, решение задач остается важнейшей частью курса.

Разумеется, речь идет не о произвольном наборе задач. Задачи являются первой формой применения знаний, полученных школьниками в процессе изучения геометрии. Поэтому предлагаемые задачи должны соответствовать подготовке учеников, причем речь идет не только о соответствии общем (программе, учебнику), но и об учете знаний конкретного класса, особенностей производственного обучения и т. д.

Однако задачи играют не только вспомогательную роль — закреплять знания изученного теоретического материала, но и обучающую роль — в процессе решения задач школьники знакомятся с методами математического рассуждения, расширяют кругозор.

При подготовке к теме урока учитель особое внимание обращает на подбор упражнений. Основным источником для подбора задач является стабильный задачник. Однако он не может быть единственным источником. В одной книге нельзя поместить достаточного количества упражнений и для ведения индивидуальной работы как с теми учащимися, которые временно отстали в учебе, так и с теми, кто опередил своих товарищей, и для повторения материала (в конце темы, четверти, учебного года и для проведения контрольных работ).

Поэтому учителя используют, кроме стабильного задачника, другие сборники упражнений, отдельные статьи из опыта преподавания, содержащие подбор упражнений к отдельным темам курса, а также сами составляют геометрические задачи.

§ 2. Классификация геометрических задач[1]

Как известно, упражнения в геометрии в зависимости от условия и задания делят на три группы: задачи на вычисление, доказательство и на построение.

В задачах на вычисление требуется выразить неизвестные величины (отрезки, углы, площади, объемы) или их отношения через известные параметры. Если параметры даны в общем виде, то результат получается в буквах; если же условие содержит числовые значения параметров, ответ доводится до числа.

Иногда условие таково, что требуется сначала решить задачу в общем виде, а потом подставить в полученное выражение значения параметров. Но порой, независимо от требований условия, задачу целесообразно решить в общем виде. Таким образом, решения «в буквах» и «в числах» не противопоставляются одно другому, они являются лишь двумя формами представления неизвестных величин через известные.

В задачах на доказательство необходимо установить наличие определенных соотношений между элементами рассматриваемой фигуры: равенство или неравенство отрезков, углов, параллельность или перпендикулярность прямых, плоскостей и т. д. Иногда задачи этого типа могут быть оформлены и как задачи на вычисление; например, доказать, что некоторый угол равен 45°, что объем одной фигуры во столько-то раз больше объема другой фигуры и т. п.

[1] Д. Пойа, Как решать задачу, перевод с английского. М., Учпедгиз, 1959.

Абугова, Задачи к первым разделам стереометрии, «Математика в школе», 1955, № 5.

А. М. Астряб и Е. С. Дубинчук (ред.). Методика преподавания стереометрии, «Радянська школа», 1956.

Менее распространены задачи на и с с л е д о в а н и е. В таких упражнениях результат заранее не сообщается. Требуется в ы я с н и т ь, лежит ли некоторая точка на данной прямой (на данной плоскости), пересекаются ли данные окружности, параллельны ли данные прямые и т. п., о п р е д е л и т ь, какой из данных отрезков больше, к какой из сторон треугольника ближе данная точка. У с т а н о в и т ь зависимость между перечисленными в условии элементами фигуры.

Обе формы задач на доказательство важны.

В задачах на п о с т р о е н и е неизвестные величины определяются в результате выполнения ряда геометрических построений (с помощью допустимых геометрических инструментов или в обусловленной проекции). Как правило, речь идет о построении геометрической фигуры по некоторым данным о ней. В стереометрии нередко вместо отрезков и углов дается изображение (например, пирамиды), на котором требуется выполнить построение (например, найти сечение), т. е. элементы фигуры задаются их положением (на проекционном чертеже).

Помимо названных трех групп, в школах используют задачи н а м о д е л и р о в а н и е. На уроках или в качестве домашнего задания учащиеся должны из указанных материалов (дерево, фанера, стекло, проволока, резина, картон, нитки и т. д.) изготовить модель указанной фигуры. Приведем пример такого задания.

Изготовить стеклянную модель правильной четырехугольной пирамиды, в которой через диагональ основания проведено сечение, параллельное скрещивающемуся боковому ребру.

Иногда в условии задания приводятся некоторые размеры фигуры («Высота — 15—20 *см*»).

В процессе выполнения моделей учащимся приходится определять некоторые размеры или отношения элементов фигуры, т. е. решать задачи, относящиеся к одному из трех основных типов. Поэтому задачи на моделирование не являются новым типом задач, а представляют собой комбинированные упражнения разных типов, сочетающиеся с практической работой (обработка материала, соединение частей фигуры, отделка модели и т. п.).

Задачи на моделирование являются не единственным представителем так называемых комбинированных задач. Часто в условии одной задачи сочетаются элементы вычислений, доказательства и построений. Например, требуется п о с т р о и т ь сечение, о п р е д е л и т ь его форму и в ы ч и с л и т ь его площадь. Иногда п е р е д построением требуется путем вычислений определить положение отдельных точек или линий, п о с л е построения требуется проверить его правильность, т. е. выполнить доказательство.

Все это свидетельствует о том, что ограничиваться задачами лишь одного типа нельзя. Если не рассматривать задач на построение, не будут развиваться конструктивные способности учащихся;

если не решать задач на доказательство, не будет развиваться в должной мере логическое мышление учащихся.

Поэтому учителя стремятся, чтобы по ходу изучения **к а ж д о й** темы учащиеся решали задачи **в с е х** видов: на вычисление, на доказательство и на построение. При этом некоторое число задач должно иметь комбинированный характер. Например, *окружность радиуса R делит каждую сторону равностороннего треугольника на три равные части. Найти площадь части треугольника, находящейся внутри окружности.* Здесь до вычисления нужно показать, что искомая фигура представляет собой круг без трех сегментов, отсекающих дуги по 60°.

§ 3. Формы использования геометрических задач

По характеру использования геометрические задачи делятся на 4 группы:

1) Подготовительные упражнения.
2) Упражнения на раскрытие содержания новых понятий.
3) Упражнения на применение отдельной теоремы формулы.
4) Комбинированные упражнения.

Рассмотрим особенности каждой из этих групп.

П о д г о т о в и т е л ь н ы е   у п р а ж н е н и я

Целью подготовительных упражнений является подведение учащихся к новому материалу, облегчение восприятия нового теоретического материала или новых приемов решения задач. Частично эта цель достигается повторением соответствующих вопросов теории на предыдущих уроках или непосредственно перед изложением нового материала. Однако более действенным оказывается решение задач, которые опираются на изученное ранее, но содержат элементы, играющие существенную роль в последующем изложении.

Например, перед доказательством теоремы о величине угла прямой с плоскостью учащимся предлагают задачу:

Равнобедренные прямоугольные треугольники ABC и BCD размещены так, что катет DC перпендикулярен к плоскости BCD. Определить угол между гипотенузой AB и катетом BD ($\angle C = \angle D = 90°$).

По ходу решения учащиеся соединяют вершины A и D (рис. 1). Установив, по теореме о трех перпендикулярах, что треугольник ABD прямоугольный, они определяют косинус искомого угла.

$$\cos\varphi = \frac{BD}{AB} = \frac{\frac{BC}{\sqrt{2}}}{BC\sqrt{2}} = \frac{1}{2}.$$

При доказательстве названной теоремы (о величине угла между прямой и плоскостью) приходится строить прямоугольный треугольник ABM и определять величину угла ABM. Необходимость такого построения подсказывается учащимся их опытом, в том числе и решением рассмотренной выше задачи.

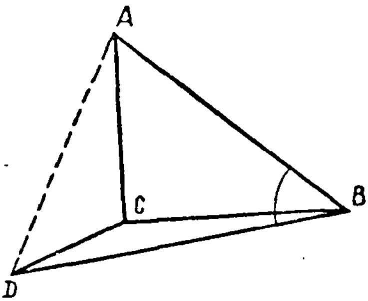


Рис. 1

Перед изложением теоремы об объеме шарового сегмента рассматривается задача:

Купол имеет форму шарового сегмента с радиусом основания R и высотой H. Для его строительства смонтированы подмостки, завершающиеся пятью цилиндрическими кольцами высоты h. Определить площадь поверхности этих колец.

При решении этой задачи приходится определять радиусы колец, т. е. радиусы сечений шарового сегмента плоскостями, параллельными плоскости его основания. Кроме того, учащиеся рассматривают ступенчатую цилиндрическую фигуру. Все это пригодится в ходе последующего рассмотрения теоремы.

Аналогичный подбор подготовительных упражнений может иметь место и перед решением сложной задачи.

К подготовительным упражнениям относятся и такие, при разборе которых выясняется необходимость знания некоторой теоремы или формулы. Пусть, например, требуется определить площадь треугольника по его сторонам. Учащимся предлагают обозначить один из отрезков, на которые высота делит сторону b, через x и с помощью теоремы Пифагора составить уравнение (определяя высоту из двух прямоугольных треугольников): $a^2-x^2 = c^2 - (b-x)^2$. Найдя x, вычисляют H и площадь. Сознавая, что такое решение слишком длинное, учащиеся отнесутся с большим вниманием к заданию: вывести общую формулу для вычисления площади треугольника по его сторонам.

Если учащимся рассказать о приеме проверки вертикальности кладки стен, то естественно возникают вопросы: на чем основан это прием? правилен ли он? Таким образом, подготовительные упражнения помогают осуществить математическую и психологическую подготовку учащихся к восприятию нового материала.

Упражнения на раскрытие содержания новых понятий

Большинство таких упражнений имеют форму вопросов, ответ на которые дается устно. После того как изложено новое определение или доказана новая теорема (формула), перед учащимися ставят вопросы, которые раскрывают общее содержание или отдельные стороны новых понятий.

Например, после разбора признака параллельности прямой и плоскости учащиеся должны ответить на следующие вопросы:

а) *Прямая l параллельна плоскости δ. Сколько прямых, параллельных прямой l, имеется в плоскости δ?*

б) *Точка M находится вне плоскости δ. Сколько существует прямых, которые параллельны плоскости δ и проходят через точку M?*

в) *Две прямые параллельны данной плоскости. Параллельны ли они между собой?*

Разбор таких упражнений дает возможность избежать создания у учащихся ошибочных представлений о взаимосвязи между прямой и параллельной плоскостью.

Аналогичные группы вопросов ставят перед учащимися и в связи с введением таких понятий, как скрещивающиеся прямые, правильный многогранник, цилиндрическая поверхность и т. п.

Среди этих упражнений уместны и задачи практического содержания.

Упражнения на применение отдельной теоремы (формулы)

К этой группе относятся задачи, которые в основном связаны только с одной теоремой или формулой. Решение этих задач имеет целью закрепление узкого круга вопросов, чаще всего только что изученного материала. Условия задач сформулированы так, что связи с пройденным ранее ограничены; это позволяет сосредоточить внимание на новом материале, облегчить изучение основного вопроса.

Например, после доказательства теоремы о транзитивности параллельности прямых можно предложить задачи из числа следующих:

$ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — правильная шестиугольная призма. Параллельны ли между собой отрезки, соединяющие: а) *середины сторон AB и CD; центры тяжестей граней DEE_1D_1 и E_1F_1FE?* б) *середины двух сторон основания; центры граней, содержащих эти стороны?* в) *вершины A и C; середины боковых ребер DD_1 и FF_1?* г) *вершины A_1 и E; середины ребер CD и A_1B_1?* д) *боковое ребро призмы и отрезок, соединяющий центры оснований призмы?* е) *AB и E_1D_1?* ж) *AC и F_1D_1?* з) *BC и A_1D_1? и т. д.*

Во всех этих случаях рассматривается одна и та же фигура — правильная шестиугольная призма. Таким образом, тратить время на припоминание свойств фигуры каждый раз не придется. Прием решения — выделение вспомогательной прямой, которая параллельна одной из рассматриваемых прямых и легко сравнима (по положению) с другой, — общий.

Такую же узкую цель — закрепление одной теоремы или формулы — имеет ряд задач на вычисление. Часто в ходе решения этих задач, кроме теоремы Пифагора, используется только одна теорема или формула.

Задачи этой группы играют особую роль в процессе индивидуальной работы с учащимися (в частности, с теми, кто, отстав, намерен быстро догнать одноклассников). Находят применение они и в классах ускоренного обучения, где изучению ряда тем отводится мало времени.

Комбинированные упражнения

В отличие от задач предыдущей группы при решении комбинированных задач используют ряд свойств рассматриваемой фигуры, несколько теорем и формул.

Пусть, например, дана задача: *Основанием пирамиды $MABCD$ является ромб с диагоналями $AC = 32$ см и $BD = 18$ см; боковое ребро MA перпендикулярно к плоскости основания и равно 24 см. Через точку A и середину ребра MC проведена плоскость, параллельная диагонали основания* (рис. 2). *Определить площадь сечения.*

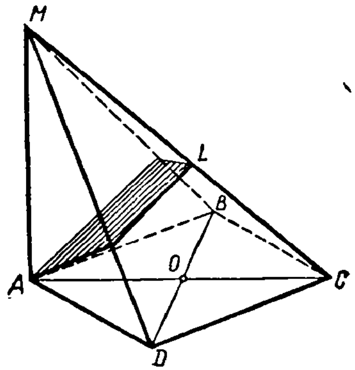


Рис. 2

Сперва нужно построить сечение. Поэтому раньше приходится установить, что одна из диагоналей сечения параллельна BD, т. е. устанавливается компланарность прямых MO и AC, используется признак параллельности прямой и плоскости. В ходе вычислений используется свойство медианы, проведенной к гипотенузе, свойство центра тяжести треугольника, лемма о подобии треугольников, теорема о трех перпендикулярах, формула площади треугольника.

Большое количество геометрических фактов, используемых при решении комбинированной задачи, создает для учащихся значительные трудности, но в то же время комплексный характер задания имеет большое значение для повторения пройденного и приведения полученных знаний в определенную систему.

§ 4. Работа с условием задачи

В процессе подготовки к ведению занятий по геометрии учителю приходится изменять условие задачи, делая ее приемлемой в конкретных условиях работы. Иногда эти изменения касаются лишь числовых данных, чаще вносятся изменения в фабулу.

Важным приемом является изменение формулировки условия задачи. Суть этого приема в том, что формулировка не изменяет математического содержания задачи, может не затрагивать числовых значений параметров (хотя это не обязательно), но задача предстает перед учащимися в новом варианте, причем тождество начального и нового вариантов скрыто.

Поясним это на примере.

Катеты прямоугольного треугольника относятся как 5 : 12, *а гипотенуза равна* 52 *см. Найти катеты.*

Чтобы завуалировать либо тип треугольника, либо величину гипотенузы, условие можно изложить по-иному:

а) *Катеты треугольника относятся как* 5 : 12. *Найти их, если медиана, проведенная к гипотенузе, равна* 26 *см.*

б) *Стороны прямоугольника относятся как* 5 : 12. *Найти их, если радиус описанной окружности равен* 26 *см.*

в) *Диагонали ромба относятся как* 5 : 12. *Найти их, зная, что периметр ромба равен 104 см.*

г) *Длина хорды относится к расстоянию хорды от центра как* 24 : 5. *Найти длину хорды, если радиус окружности равен* 52 *см.*

д) *Из точки М, удаленной от центра окружности на* 52 *см, проведена к этой окружности касательная. Зная, что длина касательной составляет* 2,4 *радиуса, определить радиус окружности.*

Легко видеть, что все эти задачи решаются таким же путем, что и начальная. Но они требуют от учащегося некоторых дополнительных рассуждений и знаний.

Чрезвычайно важно приучить школьников к разнообразию формулировок, выработать навыки разбираться в условии, каким бы необычным оно ни казалось. Если такие изменения формулировок делать систематически, учащиеся приучатся искать метод решения задачи не по внешним признакам условия, а по существу содержания.

Вторым приемом является такое изменение условия, при котором искомые и часть данных величин меняют местами. Например, вместо вписывания квадрата в данный треугольник предлагают около данного квадрата описать треугольник, подобный данному; вместо вычисления радиуса окружности, описанной около треугольника, стороны которого известны, предлагают найти стороны треугольника по их отношению и радиусу описанной окружности; вместо вычисления радиуса шара, описанного около правильной четырехугольной пирамиды, у которой известны сторона основания и боковое ребро, предлагают найти боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды по радиусу описанного шара и стороне основания (или объему пирамиды).

Третьим приемом является замена части данных условия условием вспомогательной задачи. Например, вместо стороны квадрата сообщают величину его диагонали или площади, вместо диагонали правильного шестиугольника — величину периметра или площади шестиугольника и т. д. Этот прием несколько увеличивает объем решения. Разумеется, увлекаться таким усложнением условия не следует, но данный прием дает возможность сочетать решение задач по определенной теме с систематическим повторением пройденного ранее.

Возможно и упрощение условия, сводящееся к замене одной или нескольких вспомогательных задач определенными параметрами, которые находят в результате решения указанных задач.

Однако к упрощению задач нужно подходить весьма осторожно, следя за тем, чтобы в результате переработки не была утрачена педагогическая ценность задачи.

Четвертым приемом является замена приведенной в условии фигуры или конфигурации аналогичной. Так, например, предлагая вместо разностороннего треугольника равнобедренный, прямоугольный или произвольный, мы существенно изменяем нахождение радиуса окружности, вписанной в треугольник. Изменяя основание призмы (например, вместо правильного шестиугольника — правильный двенадцатиугольник, вместо квадрата — правильный шестиугольник и т. п.), можно существенно изменить часть решения задачи. При этом изменения могут приводить как к усложнению, так и к упрощению решения.

Владея этими приемами, учитель имеет возможность обновить условие задачи, представить его в нескольких вариантах и т. д.

§ 5. Подбор числовых данных для условия задачи

При переработке задач на вычисление наиболее простым кажется изменение числовых данных условия. Действительно, в некоторых случаях изменение числовых значений параметров можно производить почти без всяких ограничений. Однако в большинстве случаев произвольный подбор числовых данных приводит к резкому увеличению объема вычислений. Конечно, в процессе решения геометрических задач на вычисление вычислительные навыки у учащихся должны улучшаться. Но было бы ошибкой создавать такую обстановку, в которой громоздкие вычисления отнимают слишком много времени и отвлекают внимание учащихся от геометрической части работы.

При подборе или изменениях числовых данных условия удобны специально составленные таблицы. Так как более 90% геометрических задач сводится к решению треугольника, в первую очередь используют таблицы, связанные с элементами треугольника. Но полезны и другие таблицы. Наиболее употребительны таблицы целочисленных прямоугольных треугольников, целочисленных косоугольных треугольников, параллелограммов, у которых стороны и диагонали соизмеримы, прямоугольных параллелепипедов, у которых стороны и диагонали соизмеримы.

Некоторые таблицы опубликованы, например, в статьях журнала «Математика в школе» (1951, № 1), сборника «Математическое просвещение» (вып. I, 1934), в книгах В. Серпинского «Пифагоровы треугольники» (Учпедгиз, 1959), Л. М. Лоповка «З досвіду викладання математики в середній школі» («Радянська школа», 1957) и др.

В указанных таблицах даны целые значения сторон, диагоналей, площадей. Но это не значит, что обязательно в условии задачи параметры (и ответы) должны быть целыми числами. Пропорционально изменяя значения данных величин, можно свести их к дробям. Наконец, время от времени рекомендуется подбирать числа так, чтобы ответ, а часто и промежуточные значения выражались иррациональными числами или могли быть найдены лишь приближенно (с определенной точностью).

Изменяя числовые значения параметров, следует иметь в виду, что иногда такие количественные изменения влекут за собой качественные.

Пусть стороны треугольника равны 9 *см*, 10 *см и* 17 *см*. *Точка* M *удалена от сторон треугольника или их продолжений на* a. *Требуется найти расстояние от точки* M *до плоскости треугольника*.

Оказывается, различным значениям a соответствует различное число решений. Если a менее 2 *см* (т. е. менее радиуса вписанной в треугольник окружности), то задача не имеет решений. При дальнейшем увеличении a количество решений возрастает до 4. Например, при $a = 4$ *см* решений 2, при $a = 5$ *см* решений 3, при $a = 36$ *см* решений 4.

Пусть площадь диагонального сечения правильной четырехугольной пирамиды равна M. *Требуется найти площадь сечения этой пирамиды плоскостью, которая перпендикулярна стороне основания и делит эту сторону в отношении* $1 : K$.

При $K = 1$ сечение имеет форму треугольника и его площадь находится устно. При $K = 3$ сечение имеет форму равнобедренной трапеции, при нахождении элементов используется свойство средней линии треугольника. При других значениях K элементы сечения определяются с использованием подобия треугольников.

Таким образом, иногда путем изменения числовых данных условия можно существенно изменить ход решения задачи.

§ 6. Обучение методам решения задач

Наряду с изучением программного теоретического материала учащиеся знакомятся с основными методами решения задач. Там, где такому ознакомлению не уделяется должного внимания, нередко учащиеся пытаются решать все задачи однообразно, причем делают это часто нерационально. Хуже того: часто школьники приступают к решению немедленно после того, как прочли или услышали условие, без всякого изучения условия. Это приводит к бесполезной трате времени.

Чтобы выработать у учащихся определенные навыки решения геометрических задач, нельзя ограничиваться эпизодической демонстрацией решения отдельных задач (хотя такие демонстрации также нужны). Нужно систематически разъяснять как общий подход к решению задач, так и отдельные частные приемы.

Особое внимание следует уделять анализу условия задачи. В процессе изучения условия должен быть намечен путь решения, т. е. определена последовательность рассуждений, построений и вычислений, приводящая к цели.

Иногда геометрические задачи решают алгебраически: вводят обозначения, составляют уравнения, решают эти уравнения и затем устанавливают пригодность или непригодность найденных корней. Например, *требуется найти диагональ прямоугольного параллелепипеда, зная, что она больше его измерений соответственно на* a, b, c.

Обозначив диагональ через x, обнаруживаем, что измерения выражаются в виде: $x - a$, $x - b$, $x - c$. Следовательно, можно составить уравнение: $x^2 = (x-a)^2 + (x-b)^2 + (x-c)^2$. В результате решения уравнения получаются два положительных корня, один из которых не отвечает условию задачи (слишком мал).

При таком подходе к решению задачи геометрическая сторона играет вспомогательную роль (на первый план выступает решение уравнения). Поэтому такие задачи рекомендуется решать главным образом в курсе алгебры. Но даже и в этом случае составлению уравнения предшествует анализ чертежа, определение соотношений между элементами рассматриваемой фигуры и т. д.

Поэтому учащимся следует почти во всех случаях начинать решение задачи с построения чертежа. Если речь идет о задаче на вычисление или на доказательство, чертеж может быть сделан без точного соблюдения масштаба (но все же верным принципиально, достаточно наглядным). При решении задач на построение требования к чертежу повышаются.

Во многих случаях решение задачи на вычисление идет в виде постепенного вычисления элементов фигуры. Если, например, требуется найти объем правильной треугольной усеченной пирамиды по сторонам оснований и боковому ребру, то учащиеся находят радиусы окружностей, описанных около оснований, разность этих радиусов, высоту усеченной пирамиды, площади оснований и, наконец, искомый объем.

Следует, однако, разъяснить учащимся, что при этом иногда выполняется лишняя работа. Некоторые величины, которые были найдены в процессе решения задачи, не входят в конечный результат (формулу). Например, *требуется определить объем пирамиды, у которой основание—треугольник со сторонами* 15 *см*, 16 *см* и 17 *см*, *а все боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом* 45°.

Напрашивается естественный путь: найти площадь основания пирамиды (по формуле Герона), определить радиус окружности, описанной около основания (так как вершина пирамиды проектируется в центр описанной около основания окружности); поскольку этот радиус равен высоте пирамиды, то искомый объем находится вычислением по известной формуле.

Однако если решить задачу в общем виде:

$$V = \frac{QH}{3} = \frac{QR}{3} = \frac{Q}{3} \cdot \frac{abc}{4Q} = \frac{abc}{12} = \frac{15 \cdot 16 \cdot 17}{12} = 340 \ (см^3),$$

то выясняется, что для определения объема вычисление площади основания и высоты пирамиды оказывается бесполезным.

Аналогичное «выпадение» промежуточных величин (введенных по ходу решения задачи) особенно часто имеет место при определении площадей поверхности или объемов тел вращения.

При решении геометрических задач с применением тригонометрии от учащихся требуют обязательно сперва решить задачу в общем виде. В других случаях такое категорическое требование не выдвигается, но время от времени решение задачи с буквенными параметрами должно иметь место.

При составлении плана решения во многих случаях используется восходящий анализ. Например, *требуется найти объем усеченного конуса по образующей, углу между образующей и плоскостью основания и площади среднего сечения.*

Вычисление производится по известной формуле: нужно знать радиусы оснований усеченного конуса и высоту. Высота может быть найдена из треугольника, у которого известны гипотенуза (она является образующей усеченного конуса) и острый угол (между образующей и плоскостью основания). По условию известна полусумма радиусов оснований. Разность этих радиусов можно определить, так как она является вторым катетом треугольника, с помощью которого находили высоту усеченного конуса. Зная сумму и разность радиусов, можно найти каждый из них в отдельности.

Такой анализ существенно облегчается продуманным чертежом. Важно, чтобы учащиеся, начертив фигуру, о которой идет речь в условии задачи, проводили некоторые линии не произвольно, а так, как это целесообразно для решения задачи. Например, в данном случае высоту усеченного конуса можно показать по-разному, в том числе и отрезком, соединяющим центры оснований. А для решения задачи нужно, чтобы высота проходила через конец образующей.

В некоторых случаях дополнительные линии не затрудняют учащихся, в других — нагромождение линий (в том числе ненужных, проведенных поспешно) мешает найти правильный путь решения. Поэтому учителю следует обратить внимание школьников на роль хорошего чертежа при отыскании плана решения задачи.

Нередко данные в условии задачи и искомые величины разъединены. Иногда их удается связать при помощи известных соотношений между элементами фигуры, но в тех случаях, когда соотношения не известны, заслуживает внимания попытка сближения разъединенных элементов фигуры. Наиболее приемлемым оказывается геометрическое преобразование фигуры (чаще всего — параллельный перенос, вращение или осевая симметрия).

Рассмотрим примеры.

Пусть требуется доказать, что разность между наибольшей и наименьшей диагоналями правильного девятиугольника равна его стороне.

Выберем для сравнения две диагонали девятиугольника $ABCDE$... так, чтобы они были параллельны между собой. Если это диагонали BD и AE, то сблизим их путем параллельного переноса BD, считая вектором смещения BA. Тогда BD перейдет в положение AM. Отрезок ME окажется равным разности диагоналей, его удобно сравнить со стороной DE девятиугольника.

Пусть требуется построить неравнобедренную трапецию по ее боковым сторонам, основанию и разности углов при этом основании. Пусть даны боковые стороны AB и CD, дано основание AD.

Чтобы сблизить боковые стороны, проведем перпендикуляр к AD через середину O этой стороны трапеции. Тогда отрезок, симметричный AB относительно указанного перпендикуляра, имеет одним концом вершину D, а другим — точку K на прямой BC. Полученный треугольник KCD можно построить, так как в нем известны две стороны (CD — по условию, $DK = AB$) и угол между ними (он равен разности углов A и D). После этого легко провести основание AD (оно параллельно KC) и найти положение вершины B.

Когда такого рода преобразование невозможно или явно нецелесообразно, прибегают к введению вспомогательных величин. Обычно полагают известным некоторый отрезок или угол. После этого решают задачу до конца и затем находят связь между введенной величиной и известными параметрами. Этот путь особенно часто применяется, если геометрическая задача решается с применением тригонометрии.

Задачи разных тем курса геометрии требуют различных приемов решения. Поэтому наряду с изложением геометрического материала темы нужно подчеркнуть и особенности решения задач.

§ 7. Некоторые особенности решения задач на доказательство

Геометрические задачи на доказательство представляют собой теоремы, знание которых не предусматривается программой. Однако для решения этих задач достаточно тех знаний, которые обеспечиваются усвоением программного материала.

С одной стороны, геометрические задачи на доказательство помогают расширению кругозора учащихся. В ходе решения таких задач школьники узнают, что фигуры имеют не только те свойства, которые описаны в стабильном учебнике. Этим подчеркивается, что основной курс геометрии создает лишь базу для дальнейшей работы, для более глубокого изучения фигур и их свойств.

Хотя от учащихся не требуется запоминать результаты решенных задач, некоторые из рассмотренных свойств удерживаются в памяти. Именно поэтому в качестве материала для задач на доказательство отбирают в первую очередь существенные свойства (если их доказательство осуществимо, доступно учащимся и не требует слишком много времени).

С другой стороны, в процессе решения задач на доказательство развивается логическое мышление учащихся. Они приучаются к последовательности рассуждения, узнают приемы геометрических доказательств, упражняются в записи условия теоремы и ходе рассуждения с помощью принятой символики. Разумеется, для развития логического мышления школьников полезно решать не только задачи на доказательство, но именно этот вид упражнений особенно способствует развитию учащихся в указанном направлении.

В школьных (да и не только в школьных!) учебниках доказательство теорем излагается кратко, по возможности без лишних слов. Доказательство представляет собой цепь рассуждений со ссылками на условие теоремы, на чертеж (если это необходимо), на аксиомы и на доказанные ранее теоремы. Такое (синтетическое) изложение не разъясняет, каким образом найдено доказательство, поэтому оно расширяет познания школьников, но не обучает их правильному мышлению.

В ходе решения задач на доказательство учащиеся анализируют условие и намечают порядок рассуждений, который приводит к доказательству данного утверждения. Этот процесс поисков решения играет особенно важную обучающую роль.

В некоторых случаях процесс доказательства допускает известную алгебраизацию. Удается установить вычислением, что данная точка действительно принадлежит указанной прямой или плоскости, что две точки совпадают, что между элементами фигуры действительно существует определенное соотношение и т. д. Объясним это на примерах.

а) *Через вершину A и центр грани BCC_1B_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведена прямая. Доказать, что точка встречи этой прямой с плоскостью $A_1B_1C_1D_1$ лежит в плоскости грани CDD_1C_1.*

Вычисления основываются на том, что точка A ровно вдвое дальше от грани CDD_1C_1, чем центр грани BCC_1B_1.

б) *Доказать, что суммы расстояний противоположных вершин параллелограмма от данной плоскости равны между собой.*

Равенство устанавливается вычислением, показывающим, что каждая из названных сумм вдвое больше расстояния от центра параллелограмма до той же плоскости.

в) *Основание полушара лежит в плоскости основания правильной четырехугольной пирамиды, поверхность полушара касается всех боковых граней. Доказать, что точки касания суть ортоцентры боковых граней.*

Точка касания лежит на апофеме. Вычисляют расстояние от этой точки до стороны основания и показывают, что оно равно расстоянию от ортоцентра до этой стороны.

Там, где по условию требуется установить некоторые метрические соотношения, применение алгебры более очевидно.

Однако не следует переоценивать доказательства геометрических предложений применением аппарата алгебры. В ряде случаев алгебраические вычисления достаточно громоздки. Кроме того, в процессе выкладок может потеряться геометрический смысл работы.

Объясним это на примере.

Пусть в треугольную пирамиду вписан куб так, что четыре вершины его находятся на основании пирамиды, а четыре — на боковых гранях. Доказать, что ребро куба a и радиус вписанного в пирамиду шара r связаны неравенствами: $\frac{2}{3}r\sqrt{3} < a < 2r$.

«Прямой» алгебраический путь состоит в том, чтобы вычислить ребро куба и радиус вписанного в пирамиду шара, одни и те же линейные и угловые элементы пирамиды. После этого приступают к доказательству соотношений между найденными выражениями.

Легко убедиться, что даже в случае правильной треугольной пирамиды выкладки окажутся слишком сложными. Если же производить вычисления для произвольной треугольной пирамиды, то трудности окажутся непреодолимыми для школьников.

Между тем, если сочетать алгебраический метод с геометрическими соображениями, задача оказывается довольно простой. Кроме двух названных в условии фигур — куба и вписанного шара, рассмотрим еще шары, непосредственно связанные с кубом.

Если шар вписан в куб, то его радиус равен $\frac{a}{2}$. Этот шар весь находится внутри пирамиды и касается лишь одной грани (основания). Следовательно, он меньше вписанного в пирамиду шара, т. е. $\frac{a}{2} < r$; $a < 2r$.

Если шар описан около куба, то его радиус равен $\frac{a}{2}\sqrt{3}$. Этот шар имеет общие точки со всеми гранями пирамиды и пересекает по крайней мере две грани (основание и одну боковую грань, на которой находятся две вершины куба). Следовательно, он больше вписанного в пирамиду шара, т. е.

$$r<\frac{a}{2}\sqrt{3}\ ;\quad a>\frac{2r}{\sqrt{3}};\quad a>\frac{2}{3}r\sqrt{3}.$$

Такое доказательство доступно учащимся.

В подборе упражнений нужна определенная система. В частности, задачи на доказательство подбираются таким образом, чтобы были охвачены и важные предложения, и важные методы решения задач на доказательство.

Источниками таких задач могут быть некоторые учебники (в частности, А. П. Киселева, Ж. Адамара и др.), а также специальные задачники (М. Г. Попруженко, Б. Н. Делоне и А. К. Житомирского, З. А. Скопеца и В. А. Жарова и др.). Много полезных задач публикуется в методических журналах (как советских, так и зарубежных). Наконец, часть упражнений может быть получена в результате самостоятельных исследований учителя по элементарной геометрии.

§ 8. Стереометрические задачи на построение

Базой для решения стереометрических задач на построение является разработанная действительным членом АПН РСФСР проф. Н. Ф. Четверухиным теория свободного параллельного проектирования. Она дает возможность получать достаточно быстро и просто верные и наглядные чертежи.

При этом весьма существенно, что свойства параллельного проектирования излагаются в рамках темы «Прямые и плоскости», не требуя дополнительных подготовительных материалов.

В стабильном учебнике А. П. Киселева «Геометрия» после переработки книги Н. А. Глаголевым появились параграфы с так называемыми основными задачами на построения. Однако изучение этих параграфов показывает, что на самом деле в них идет речь лишь о в о з м о ж н о с т и выполнения построений. Как в действительности в ы п о л н и т ь эти построения, из текста параграфов нельзя узнать. Поэтому в связи с изучением с самого начала курса стереометрии теории и практики параллельного проектирования необходимо знакомить учащихся с другими задачами на построение. Прежде всего речь идет о фактическом выполнении построений. Например, если требуется провести через точки A, B и C плоскость, то учащимся следует выполнить построение фактически, т. е. построить след плоскости, построить в плоскости ABC необходимые точки и линии. Все эти построения эффективно выполняются на проекционном чертеже.

В практике школьного преподавания принято выделять задачи на построение изображений пространственных фигур, основные задачи на построение, позиционные задачи на построение и метрические задачи на построение. Остановимся на каждой из этих групп.

Изображение пространственных фигур

Прежде всего на каждом чертеже должна быть изображена основная плоскость, относительно которой фиксируется положение всех остальных точек и линий. Так как плоскость бесконечна и безгранична, то изобразить всю плоскость невозможно, изображают некоторую ограниченную часть ее. Поскольку форма этой части может быть произвольной, нет никакой необходимости изображать кусок плоскости, имеющий форму прямоугольника.

Основная плоскость может и не изображаться в тех случаях, когда ее положение ясно видно из изображения других точек и линий. В частности, если изображается призма или пирамида, в качестве основной плоскости обычно принимается плоскость основания призмы или пирамиды. Если же в качестве основной плоскости принимается иная плоскость или, кроме многогранника, изображены точки, связанные с основной плоскостью вне многогранника, то изображение основной плоскости выполняется по обычным правилам.

Все остальные точки и линии изображаются в связи с основной плоскостью. Если говорится «дана точка A», то имеется в виду, что на чертеже показана не только точка A, но и ее проекция на основную плоскость. Если идет речь об изображении прямой, то должны быть даны проекции по крайней мере двух точек этой прямой.

Изображение фигуры на доске, на листе бумаги и т. д. представляет собой некоторую проекцию оригинала, полученную путем внешнего параллельного проектирования. На изображении показывается и проекция изображенной фигуры, построенная путем внутреннего проектирования, которое может быть как параллельным, так и центральным.

В частности, если изображена призма, то в качестве направления внутреннего параллельного проектирования обычно принимается боковое ребро призмы. Если изображается пирамида, то обычно внутреннее проектирование — центральное, причем центром оказывается вершина пирамиды.

Об изображении тел вращения (в частности, цилиндра, конуса, шара) будет сказано несколько позже.

При изображении призм и пирамид, а также некоторых других многогранников основание изображается в соответствии со свойствами свободного параллельного проектирования. В частности, треугольник любой формы изображается любым треугольником, параллелограмм любого вида (в том числе прямоугольник, ромб, квадрат) — произвольным параллелограммом, трапеция (в том числе равнобедренная или прямоугольная) — произвольной трапецией. Правильный шестиугольник изображается шестиугольником, у которого противоположные стороны попарно равны и параллельны, а три большие диагонали пересекаются в одной точке, причем каждая из этих диагоналей параллельна стороне шестиугольника и в два раза больше этой стороны.

Реже встречаются, но легко обосновываются построения правильного пятиугольника, правильного восьмиугольника и т. д. Построения основываются на сохранении параллельности прямых и простого отношения трех точек[1]. Примеры изображений таких фигур встречаются в работах Н. Ф. Четверухина, Л. М. Лоповка и других.

Основные задачи на построение

К таким задачам относится прежде всего *построение точки встречи прямой с плоскостью*. Пусть дана прямая AB и ее проекция A_1B_1 на основную плоскость. По построению прямые AA_1 и BB_1 параллельны. Значит, через них можно провести плоскость. Эта плоскость пересекает основную плоскость по прямой A_1B_1. Таким образом, точка пересечения прямой AB с плоскостью δ (если она существует) совпадает с точкой пересечения прямых AB и A_1B_1.

Второй основной задачей является *построение линии пересечения двух данных плоскостей*. Пусть некоторая плоскость задана тремя точками A, B и C, не лежащими на одной прямой, причем положение этих точек относительно основной плоскости определено. Требуется построить линию пересечения плоскости ABC с основной плоскостью (или, как говорят, след плоскости ABC на основной плоскости).

Построим точки встречи прямых AB и AC с основной плоскостью. Пусть это точки D и E. Так как эти точки принадлежат к основной плоскости и плоскости ABC, то прямая DE и есть общая прямая этих плоскостей. Из трех прямых AB, AC и BC берут те две, для которых построение точек встречи удобнее.

Задача может и не иметь решения, если плоскость ABC параллельна основной плоскости.

Третьей основной задачей является *построение сечения многогранника плоскостью, определенной надлежащим образом*.

Пусть, например, требуется построить сечение призмы плоскостью, заданной следом на основной плоскости (в плоскости нижнего основания призмы) и точкой на поверхности призмы. Проведем плоскость через данную точку A и одно из боковых ребер призмы. Эта плоскость пересекает след плоскости сечения в точке B. Поэтому прямая AB лежит в плоскости сечения и пересекает боковое ребро или его продолжение. Проделав подобное построение надлежащее число раз и соединив полученные на боковых ребрах призмы точки, определим искомое сечение.

---

[1] Изображение точки C делит изображение отрезка AB в таком же отношении, в каком точка C делит отрезок AB.

По ходу работы выясняются возможности некоторых упрощений. В частности, точка A и два боковых ребра лежат в одной грани. Поэтому прямая AB пересечет оба этих ребра и тем определит сразу две вершины сечения. Целесообразно в дальнейшем строить плоскости не только через точку A, но и через другую (построенную) вершину сечения.

Если плоскость сечения задана тремя точками, то сперва строят ее след, а затем — как описано выше. В данном случае построение пойдет (после построения следа) даже быстрее, если точки плоскости были заданы на поверхности призмы.

Построение сечения пирамиды плоскостью выполняется аналогично.

Следует сказать, что построение сечения многогранника плоскостью при помощи следов является не единственным способом решения поставленной задачи. Если плоскость сечения мало наклонена к плоскости основания пересекаемой призмы (пирамиды), то след окажется далеко от основной части чертежа. Это вынудит выполнять изображение многогранника (т. е. основную часть чертежа) менее крупной, что нежелательно.

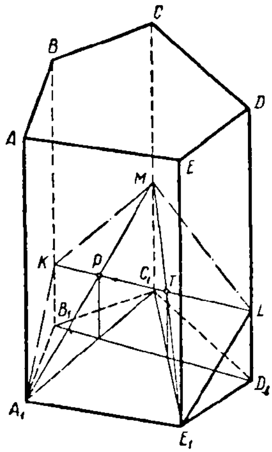


Рис. 3

Поэтому наряду с построением, описанным выше, применяется иное построение. Сущность его в том, что между точками основания призмы и точками сечения можно установить соответствие, причем прямые, проходящие через пару соответственных точек, параллельны боковому ребру. Например, *требуется построить сечение пятиугольной призмы $ABCDE$ $A_1B_1C_1D_1E_1$ плоскостью, которая проходит через сторону основания A_1E_1 и точку M на ребре CC_1* (рис. 3).

Диагоналям A_1M и E_1M сечения соответствуют диагонали A_1C_1 и E_1C_1 основания. Точки пересечения диагонали B_1D_1 основания с указанными диагоналями основания соответствуют точки P и T диагоналей сечения. Найдя точки P и T, проведем диагональ сечения и так получим две вершины сечения — K и L.

В учебнике А. П. Киселева к числу основных задач на построение отнесены и такие, как проведение через данную точку прямой, параллельной данной; проведение через данную точку прямой, параллельной данной плоскости; проведение через данную точку плоскости, параллельной данной плоскости; проведение через данную точку прямой, пересекающей две данные скрещивающиеся прямые; проведение через данную прямую плоскости, параллельной другой данной прямой; построение перпендикуляра к данной плоскости; построение плоскости, перпендикулярной данной прямой; построение общего перпендикуляра двух скрещивающихся прямых. Однако опыт показывает, что при правильной постановке преподавания в классе и дома рассматривается большое число разнообразных задач на построение, сформулированных более конкретно. Среди этих задач находят себе место и задачи, аналогичные перечисленным.

Поэтому можно ограничиться тремя основными задачами, отнеся все остальные к двум последующим группам упражнения[1].

Позиционные задачи на построение

Все эти задачи решаются на проекционных чертежах, не содержащих данных об углах или соотношениях между сторонами изображенных фигур. Известно лишь, что чертежи получены путем внешнего свободного параллельного проектирования.

Часть задач является просто вариантами основных задач на построение. Например, *требуется построить точку встречи прямой АВ с основной плоскостью, если точки А и В расположены определенным образом на поверхности данной призмы, пирамиды и т. д.* Затем рассматриваются варианты, в которых требуется найти точку встречи прямой *АВ* с плоскостью указанной грани или некоторого диагонального сечения, и т. д. Аналогично варьируется *задача о построении сечения данной призмы или пирамиды.*

Кроме указанных вариантов, сюда относятся и задачи, являющиеся развитием идей основных задач на построение. Назовем, в частности, *задачу о построении тени фигуры.* Пусть дано изображение некоторой призмы (пирамиды) и положение точечного источника света. Требуется построить тень призмы (пирамиды) на плоскость основания фигуры. Дело сводится к построению теней боковых ребер, т. е. в конечном счете к построению точек встречи прямых, проходящих через источник света и вершину верхнего основания призмы, с плоскостью основания фигуры.

Вариантом этой задачи является *задание положения источника света и направления лучей, которые считаются параллельными.*

Дальнейшим развитием темы является случай, когда даны два многогранника и определяется тень одного из них на поверхности другого.

Ряд задач, ранее относившихся к основным, здесь вступает в виде упражнений, допускающих фактическое построение. Приведем примеры:

а) *Прямая АВ лежит в основной плоскости, а прямая CD пересекает эту плоскость. Требуется через точку М провести прямую, пересекающую прямые АВ и CD.*

---

[1] В УССР был проделан другой опыт: излагали основные задачи по учебнику А. П. Киселева, сопровождая каждую задачу примерами фактического выполнения построения. Но это оказалось громоздким и затруднительным для учащихся, которым пришлось изучать построения с двух точек зрения.

По условию можно построить след плоскости MCD на основной плоскости. Если этот след параллелен AB, задача не имеет решений; если же он пересекает прямую AB в точке E, то линия ME искомая.

б) *Через точку M на боковом ребре данной призмы провести прямую, пересекающую другое боковое ребро и указанную диагональ призмы.*

Ход решения аналогичный.

в) *Даны плоскость и прямая AB. Через данную точку C требуется провести прямую, которая параллельна данной плоскости и пересекает прямую AB.*

И эта задача может быть связана с призмами и пирамидами.

г) *Через диагональ BD пирамиды $MABCDE$ провести плоскость, параллельную ребру MC.*

д) *Через точку M на основании пирамиды провести плоскость, параллельную плоскости указанной грани.*

Достаточно обширные наборы таких упражнений приведены в задачниках Л. М. Лоповка, Е. С. Кочетковой, Н. В. Наумович, И. Г. Польского, А. Д. Семушина[1] и др.

Метрические задачи на построение

Сюда относятся задачи, в которых учитываются не только метрические, но и позиционные свойства оригинала. В подавляющем большинстве это задачи на построение перпендикуляра или плоскости, перпендикулярной к данной плоскости. Однако с полным правом сюда можно включить и построение прямой или плоскости, наклоненной под данным углом к данной плоскости.

В качестве пропедевтических рассматривают построения, связанные с данными изображениями плоских фигур, в первую очередь правильных многоугольников. Например задача:

Дано изображение правильного шестиугольника. На его сторонах AB и BC даны две точки. Требуется опустить из точки B перпендикуляр на прямую, проходящую через две данные точки.

На примере этой задачи можно показать три основных способа решения метрических задач. Во-первых, способ **алгебраический**. Пусть сторона правильного шестиугольника равна a. Тогда можно определить размеры сторон BM и BK треугольника BMK и, учитывая, что угол B равен 120°, вычислить, в каком отношении перпендикуляр, опущенный из B на MK, делит отрезок MK[2]. Иногда этот способ значительно облегчает построение, но в данном случае он нерационален. Второй метод — метод **соответствия**. Построим на стороне AB правильный шестиуголь-

---

[1] А. Д. Семушин, Методика обучения решению задач на построение в стереометрии, М., изд. АПН РСФСР, 1959.

[2] $M \subset BC$; $K \subset AB$.

ник $ABC_1D_1E_1F_1$. Точке M будет соответствовать точка M_1, полученная проведением прямой MM_1 параллельно CC_1. Проведя в полученном треугольнике BKM_1 высоту BT_1, перенесем точку T_1 обратно на MK по направлению CC_1. Искомый перпендикуляр — BT. Этот метод применяется довольно часто и весьма успешно. Не случайно именно его рекомендует проф. Н. Ф. Четверухин[1].

Третий путь — непосредственный учет метрических особенностей оригинала. Проведем в треугольнике BMK высоты. Одна из них должна быть параллельна CE, другая — параллельна BD. Действительно, малая диагональ правильного шестиугольника перпендикулярна двум параллельным сторонам шестиугольника, которые пересекает. Проведенные высоты пересекаются в точке O. Так как O—отртоцентр треугольника BMK, то $BO \perp MK$. Иногда такой путь построения не очень удобен, но в большинстве случаев школьной практики он приемлем.

Следует сказать, что из-за недостатка времени метрические задачи на построение занимают в школьном курсе стереометрии более чем скромное место. Но все же опыт показал, что решение метрических задач на построение чрезвычайно полезно, так как позволяет систематизировать полученные школьниками знания, развивает их пространственное воображение и изобретательность.

§ 9. Задачи на построение тел вращения

Изображение тел вращения связано с тем, что проекция круга на плоскость, которая не параллельна и не перпендикулярна плоскости круга, есть эллипс. К сожалению, в условиях школьного преподавания стереометрии установить этот факт нелегко. Известно, например, доказательство, основанное на рассмотрении двух шаров, вписанных в цилиндрическую поверхность и касающихся плоскости, пересекающей эту поверхность (и не параллельную образующей). Другие доказательства демонстрируют, что при параллельном проектировании круга на плоскость один из диаметров и параллельные ему хорды проектируются в натуральную величину, а хорды и диаметр, перпендикулярные указанному диаметру, уменьшаются в постоянное число раз. Первое доказательство невозможно использовать, так как к моменту изучения правил построения изображений цилиндра и конуса учащиеся еще не знакомы со свойствами шара. Второе доказательство связано с методами рассуждений, привычными для изучающих аналитическую геометрию, а не стереометрию.

---

[1] Н. Ф. Четверухин, Стереометрические задачи на проекционном чертеже, Учпедгиз, М., 1952.

Учитывая все это, приходится сказать учащимся, что проекция круга на плоскость имеет форму эллипса. Доказательство этого факта будет дано позднее. Иногда учителя не обещают доказать правильность этого утверждения, а ограничиваются демонстрацией тени круга (на стену или на доску) или какого-либо наглядного пособия, показывающего форму проекции круга на плоскость. Не имея убедительной силы, эти демонстрации все же дают учащимся правильные указания, важные для изображения тел вращения.

Для получения правильных изображений цилиндра, конуса, усеченного конуса без лишней затраты времени рекомендуется употреблять шаблоны эллипсов. Учащиеся изготовляют эти шаблоны из дерева, фанеры, целлулоида, плотного картона и т. д. Имеется опыт изготовления шаблонов и в виде вырезов в пластинке из прозрачного материала.

Действительно, основания цилиндра изображаются в виде двух равных эллипсов, малые оси которых лежат на одной прямой. Имея шаблон с намеченной малой осью (или ее концами), легко осуществить изображение. Крайние видимые образующие параллельны оси цилиндра (и являются общими внешними касательными изображенных эллипсов).

Еще проще употребление шаблона при изображении конуса. Для усеченного конуса нужны шаблоны двух подобных эллипсов; изображение строится аналогично изображению цилиндра.

Задачи на построение комбинаций тел с цилиндром, конусом и усеченным конусом, построение осевых сечений этих тел под определенными углами между сечениями и т. п. требуют знакомства учащихся с сопряженными диаметрами. На практике в школе определяют сопряженные диаметры эллипса как такие, что каждый из них делит пополам хорды параллельно другому. Исходя из такого определения, легко строить сопряженные диаметры, находить центр эллипса (если он не отмечен на чертеже) и т. д. На основании свойств параллельной проекции можно показать, что взаимно перпендикулярные диаметры окружности изображаются сопряженными диаметрами эллипса.

После этого легко решать *задачи на построение изображений вписанных или описанных многоугольников* (в частности, правильных многоугольников, трапеций, прямоугольников или равнобедренных треугольников). Эти задачи являются вводными к большой группе задач: вписать в данный цилиндр правильную n-угольную призму; описать около данного цилиндра правильную n-угольную призму; вписать в данный цилиндр (или описать около него) прямую призму, у которой основание — равнобедренный прямоугольный треугольник; вписать в данный конус (или описать около него) правильную n-угольную пирамиду и т. п. Подробный разбор задач этого набора упражнений приводится в книге Л. М. Лоповка[1].

---

[1] Л. М. Лоповок, Изображение круглых тел, Киев, 1961.

При построении двух осевых сечений цилиндра или конуса, угол между которыми известен, приходится также учитывать изображение перпендикулярных диаметров окружности и величину угла между диаметрами основания цилиндра (конуса) по условию. Пусть, например, диаметры AB и CD эллипса сопряжены (центр O). Если провести хорду $EH \parallel CD$ через середину AO, то дуга AE содержит в оригинале 60°. Диаметр, перпендикулярный CE, проходит через ее середину. Поэтому, проведя диаметр через середину хорды CE, мы найдем дугу CM в 15°. Комбинируя такие построения, приходят к решению задачи.

Помимо указанных задач, на изображениях цилиндра и конуса решают ряд позиционных задач, аналогичных тем, которые решают в связи с изучением многогранников. Речь идет о з а д а ч а х такого типа:

а) *Точки A и B находятся на поверхности цилиндра. Построить точки встречи прямой AB с плоскостями оснований цилиндра и с плоскостью указанного осевого сечения.*

б) *Основания цилиндра и конуса лежат в одной плоскости. Прямая пересекает поверхность цилиндра в точке A и поверхность конуса в точке B. Построить другие точки пересечения прямой AB с поверхностями этих тел.*

в) *Плоскость задана тремя точками на поверхности цилиндра, не лежащими на одной образующей. Построить линию пересечения этой плоскости с поверхностью цилиндра.*

г) *AB — хорда основания конуса. Провести через AB плоскость, параллельную заданной образующей этого конуса.*

д) *Точка M находится на поверхности равностороннего конуса. Построить сечение, проходящее через точку M, перпедикулярно образующей, на которой находится точка M.*

Все эти задачи позволяют глубже представить себе свойства тел вращения и избежать некоторых ошибок. Там, где задачам на построение (в связи с изучением тел вращения) не уделяют внимания, нередко наблюдаются такие заблуждения: а) полагают, что крайние видимые образующие конуса MA и MB входят в одно осевое сечение; б) полагают, что из сечений конуса плоскостями, проходящими через его вершину, наибольшую площадь всегда имеет осевое сечение.

Еще больше трудностей ставят перед учащимися задачи, связанные с изображением шара и его комбинаций с другими телами. Опыт многих учителей показал необходимость всемерного упрощения таких изображений. Многочисленные рекомендации той или иной о п р е д е л е н н о й проекции на практике оказались неприемлемыми, так как требуют соблюдения размеров углов между осями и заданных масштабов по осям. Не могут быть успешными и попытки использования кабинетной проекции, так как на практике приходится изображать не шар, а одно из его больших сечений.

Чертеж теряет наглядный характер и выглядит так, как будто его части выполнены в разных проекциях.

Изображение шара должно строиться в ортогональной проекции. Однако не нужно задаваться какой-либо определенной проекцией. Известно, что по ортогональной проекции шара и точки его поверхности можно построить в ы с о т у точки, т. е. расстояние от плоскости большого сечения, параллельного плоскости проекций. На этом основано определение расстояния между двумя точками поверхности шара, а также построение изображений полюсов шара, т. е. точек его поверхности, наиболее удаленных от плоскости заданного экватора.

Поэтому обычно изображение шара строится в таком порядке: при помощи шаблона эллипса изображают экватор. Центр эллипса есть центр контура изображения шара, большая ось эллипса есть один из диаметров очертания изображения. После этого строят изображения полюсов шара.

Если требуется строить меридиан, то для этого можно воспользоваться любым шаблоном эллипса, большая ось которого равна большой оси шаблона, с помощью которого изображен экватор.

Если требуется изобразить шар и показать малое сечение, то можно и не строить изображение экватора. Строим окружность и проводим ее диаметр. Сечение изображается с помощью шаблона эллипса, помещаемого так, что его малая ось находится на проведенном ранее диаметре очертания. В ходе такого построения учащиеся убеждаются, что точки касания сечения и очертания шара не лежат на концах большой оси нарисованного эллипса.

Известно, как построить положение полюсов, если построено малое сечение.

Наиболее часто в школе приходится изображать *комбинации шара с призмами и пирамидами, цилиндром, конусом, усеченной пирамидой и усеченным конусом.* Часто такие изображения выступают как составной элемент задачи на вычисление или на доказательство.

Простейший путь получения таких изображений связан с использованием шаблонов эллипсов и применением вспомогательных фигур: цилиндра и конуса. Изобразить цилиндр, вписанный в шар, весьма просто. Достаточно построить два сечения шара параллельными плоскостями и равной величины. Это выполняется с помощью одного шаблона эллипса, помещаемого так, что в обоих положениях малая ось шаблона лежит на одном и том же диаметре очертания шара. После этого проводятся крайние видимые образующие.

Если в такой *цилиндр вписать прямую призму*, то она оказывается вписанной в шар. Следовательно, достаточно вписать основание призмы в одно из оснований цилиндра, провести боковые ребра призмы (параллельно диаметру очертания шара, проходящему через центр сечения) и соединить их концы. В этом случае проводить крайние видимые образующие цилиндра не обязательно.

Если требуется *описать цилиндр около шара*, то предварительно строится изображение экватора и полюсов шара. Основание цилиндра изображается с помощью того же шаблона, что и экватор. Центры оснований совпадают с полюсами, малые оси шаблонов лежат на прямой, проходящей через полюсы.

Прямая *призма, описанная около такого цилиндра*, описана и около шара. Поэтому в ходе ее построения можно использовать тот факт, что на изображении боковое ребро призмы равно отрезку, соединяющему полюсы шара. Около экватора описывается многоугольник, лежащий в основании призмы (по правилам параллельной проекции). Через его вершины проводят прямые, параллельные прямой, проходящей через полюсы шара; на них откладывают по обе стороны от вершин многоугольника половины бокового ребра призмы.

При таком построении изображение самого цилиндра излишне.

Чтобы *вписать в шар конус*, достаточно принять за его основание одно из малых сечений (если не оговорено, что основание конуса проходит через центр шара) шара и принять за вершину конуса полюс шара. *Пирамида* (с равными боковыми ребрами), вписанная в такой конус, является вписанной в шар. Отметим, что при таком построении не обязательно проводить образующие конуса.

Чтобы *описать около шара конус*, строят изображение шара с экватором и полюсами. Для изображения основания конуса берут шаблон эллипса, подобный изображению экватора, и помещают центр шаблона в один из полюсов изображения шара так, чтобы малая ось шаблона оказалась на прямой, проходящей через полюсы шара. Крайние видимые образующие конуса изображаются общими внешними касательными к изображению основания конуса и очертания шара.Если шар вписан в пирамиду, у которой двугранные углы при основании равны, то эта пирамида описывается около построенного таким образом конуса.

Аналогично изображаются и многие другие комбинации.

В тех случаях, когда вписывается или описывается фигура, между элементами которой даны метрические соотношения (например, правильная шестиугольная призма, у которой сторона основания вдвое меньше бокового ребра), требуется дополнительно строить сечение шара по точкам. Методика выполнения таких построений приведена в ряде работ, в том числе и в книге Н. Ф. Четверухина[1], и здесь не приводится, так как подобных случаев в школе почти не встречается.

Целесообразно выполнять изображения различными цветами; например: шар — одним цветом, вспомогательный конус — другим, пирамиду — третьим. Тогда каждое тело изображается с точки зрения видимости его элементов независимо от остальных тел.

---

[1] Н. Ф. Четверухин, Чертежи пространственных фигур в курсе геометрии, М., Учпедгиз, 1947.

§ 10. Задачи на геометрические места точек

Понятие о геометрическом месте — одно из важнейших в геометрии. «Оно, — писал Д. И. Перепелкин[1], — играет роль не только в таких вопросах, как геометрические задачи на построение. Не меньшее значение оно имеет, скажем, в аналитической геометрии (уже в высшей школе), где применение этого вопроса позволяет простым и доступным способом получить наглядное представление о различных кривых».

Это понятие имеет большое значение и для практики. Укажем, например, на применение геометрических мест при решении вопросов техники безопасности. Проблемы постановки защитных сеток, определения расстояния между станками и линиями станков, размещения проходов в цехе и т.п . решают с учетом геометрического места траекторий стружки, отлетающей в процессе обработки материала, и т. д. Благодаря такому научному подходу к вопросам техники безопасности в нашей стране наименьшее в мире количество несчастных случаев, производственных травм и т. п.

Учитывая значение геометрических мест, программа предусматривает изучение их на протяжении всего курса геометрии. До 1963/64 учебного года изучение геометрических мест точек на плоскости было сосредоточено в основном в VII классе. В VI классе учащиеся знакомились с некоторыми геометрическими местами, но применить их не могли, так как еще слишком мало знали геометрию. Да и в VII классе материал рассматривался в ограниченном объеме. В 1963/64 учебном году положение изменилось. Кроме того материала о геометрических местах точек, с которым учащиеся знакомились в восьмилетней школе, была внесена тема «Геометрические места точек» в программу IX класса. Здесь учащиеся более подготовлены к глубокому изучению материала.

В ходе изучения курса стереометрии также имеются возможности для ознакомления с геометрическими местами и использования этого понятия для развития пространственных представлений учащихся. Как будет показано ниже, задачи о пространственных геометрических местах могут быть органически включены в систему упражнений по курсу стереометрии.

После усвоения основных геометрических мест (*удаленных на a от данной точки*; *удаленных на равное расстояние от двух данных точек*, *равноудаленных от сторон угла*; *удаленных на a от данной прямой*; *точек, из которых данный отрезок виден под данным углом*) учащиеся запоминают, что в состав геометрического места точек входят в с е точки, имеющие данное свойство, и т о л ь к о т а к и е точки. Это позволяет решать ряд задач на геометрические места.

---

[1] Д. И. Перепелкин, Геометрические построения в средней школе, М., Учпедгиз, 1953, стр. 31.

Задачи на геометрические места точек тематически делятся на две группы. К первой относят задачи на определение формы и построение неосновных геометрических мест. Геометрических мест точек бесконечно много, и учитель выбирает те, которые не относятся к пяти основным.

Например, в связи с первым г.м.т. можно рассмотреть такие упражнения:

а) *Найти геометрическое место центров окружностей данного радиуса, проходящих через данную точку.*

б) *Найти геометрическое место центров окружностей радиуса a, касающихся данной окружности радиуса b.*

в) *Найти геометрическое место точек, обладающих тем свойством, что касательные к данной окружности, проведенные из каждой такой точки, взаимно перпендикулярны.*

г) *Найти геометрическое место середин радиусов данной окружности.*

д) *Найти геометрическое место точек, из которых касательные к данной окружности имеют данную длину.*

Аналогичные упражнения подбираются и к другим основным геометрическим местам точек. Среди этих задач могут быть и упражнения комбинированного характера.

Однако не обязательно подбирать задачи, сводящиеся к вариантам основных геометрических мест точек. Могут быть и упражнения другого вида. Например:

Найти геометрическое место центров окружностей, которые касаются данной прямой в данной точке.

Найти геометрическое место центров окружностей, которые касаются данной окружности в данной точке.

Найти геометрическое место точек, разность квадратов расстояний которых от двух данных точек данная.

Найти геометрическое место точек, из которых отрезки AB и BC прямой видны под равными углами.

Конкретный перечень упражнений этого вида устанавливается учителем в соответствии с уровнем подготовки того или иного класса, наличием времени и т. д. Часть таких задач рассматривается по мере прохождения отдельных тем курса.

Задачи второй группы связаны с применением геометрических мест точек для геометрических построений. Наиболее простые из этих задач формулируются как построение точек, отвечающих двум требованиям. Например,

построить точки, которые удалены от данной точки на a и от данной прямой на b.

В таких задачах легко формулировать эти условия отдельно и строить оба геометрических места в отдельности. Искомые точки находятся как общие точки двух геометрических мест, т. е. как точки пересечения соответствующих линий. Разбор таких задач показывает одну из важнейших особенностей подобных упражнений: необходимость исследования. Например, в приведенной задаче нельзя писать, что искомые точки определяются пересечением окружности с двумя параллельными прямыми. В зависимости от взаимного расположения данной точки и данной прямой, величины a и b искомых точек могут оказаться 0, 1, 2, 3, 4. Нужно, не ограничиваясь констатацией этого факта, показать схематически, как может получиться то или иное число точек.

Таким образом, задачи на построение отдельных точек с помощью геометрических мест играют в некотором смысле пропедевтическую роль.

Основное внимание уделяется геометрическим построениям методом геометрических мест. Это объясняется прежде всего тем, что в средней школе нет метода более мощного. Алгебраическому методу уделяется слишком мало внимания, а гомотетия, симметрия и т. п. методы охватывают сравнительно узкий круг задач.

Сущность метода геометрических мест разъясняется на примерах. Пусть требуется построить некоторую фигуру. По данным условия можно построить часть ее (например, несколько вершин, либо одну из сторон и т. д.). Затем выясняется, какие из точек искомой фигуры могут быть построены как отвечающие двум условиям. Постепенное построение точек приводит к завершению построения фигуры.

Разумеется, иногда приходится проводить дополнительные линии, о которых в условии задачи не говорится.

Пусть, например, *требуется построить треугольник по основанию, противолежащему углу и высоте, проведенной к боковой стороне*. Легко увидеть, что две вершины (концы основания) могут быть построены немедленно, и дело сведется к построению третьей вершины. Эта вершина определяется углом, под которым из этой точки видно основание. С другой стороны, можно построить треугольник BCD (BC — основание, CD — высота) по гипотенузе и катету. Тогда оказывается, что второе условие, определяющее положение точки A, — принадлежность стороне BD (т. е. точка A лежит на прямой BD).

В процессе решения задач на построение методом геометрических мест учащиеся знакомятся с основными этапами работы. Необходимо четко определить цели и содержание каждого этапа.

А н а л и з имеет своей целью установить порядок построения. По мере выяснения последовательности работы учащиеся записывают ее. Например, в рассмотренной выше задаче установили такой порядок: 1) прямая AB; 2) отрезок DC; 3) точка B; 4) сегмент BAC; 5) точка A.

Иногда в школе анализ не сопровождают никакими записями, и это затрудняет дальнейшую работу.

П о с т р о е н и е представляет собой реализацию плана, намеченного в процессе анализа. При этом учитываются конкретные размеры углов и отрезков, данных в условии задачи.

Доказательство состоит в том, что мы убеждаемся в правильности построения. Устанавливается, что построена фигура того вида, что требовалось по условию (равносторонний треугольник, параллелограмм и т. п.), а ее размеры (линейные и угловые) выдержаны.

Исследование состоит в выяснении того, всегда ли задача имеет решения, сколько может быть решений и т. д. Далеко не всегда удается в школе выполнить полный объем исследований, так как иногда для этого требуется применение тригонометрии в большем объеме, чем знают учащиеся.

Для проведения исследования используется запись плана построения, составленного в процессе анализа. Перечитывая эту запись, отмечают, какие пункты всегда выполнимы, а какие — не всегда. Так, в рассмотренном примере пункты 1, 2 и 4 можно выполнить всегда. Пункт 3 выполним лишь при условии $BC \geqslant CD$. Не всегда выполним и пункт 5: если дуга сегмента не выходит за пределы угла CBD (т. е. если угол A больше разности между $180°$ и удвоенным углом B треугольника BCD), решений нет.

Обширные наборы упражнений на геометрические места точек приведены в учебнике А. П. Киселева, в задачниках И. И. Александрова, А. А. Стражевского[1] и др.

При переходе к изучению пространственных геометрических мест трудности возрастают. Дело связано и с разнообразностью форм геометрических мест точек в пространстве, и со сложностью построения изображений этих геометрических мест. При решении задач на пространственные геометрические места требуется определенный уровень пространственного воображения учащихся.

Однако при правильном подходе к данной теме трудности преодолимы, и решение задач на пространственные геометрические места помогает не только закреплению пространственных представлений учащихся, но и расширению этих представлений.

Из бесконечного множества пространственных геометрических мест точек к числу основных обычно относят пять:

1) *Геометрическое место точек, равноудаленных от двух данных точек.*

2) *Геометрическое место точек, удаленных на а от данной плоскости.*

3) *Геометрическое место точек, равноудаленных от двух данных пересекающихся плоскостей.*

4) *Геометрическое место точек, удаленных на а от данной прямой.*

5) *Геометрическое место точек, удаленных на а от данной точки.*

Эти геометрические места проходят не в виде отдельной темы,

---

[1] А. А. Стражевский, Задачи на геометрические места точек в курсе геометрии средней школы, М., Учпедгиз, 1954.

а в соответствующих местах курса стереометрии. При этом каждый раз подчеркивается, что геометрическое место относится к числу основных.

Упражнения на пространственные геометрические места точек состоят из трех групп.

а) Задачи на определение формы неосновных геометрических мест точек.

б) Задачи, в которых требуется определить характер геометрического места точек, которым является заданная фигура.

в) Задачи на фактическое построение указанных геометрических мест.

Задачи первой группы рассматривают после изучения каждого из основных геометрических мест. В большинстве случаев рассматривают варианты основных геометрических мест. Например, после изучения ГМТ-I предлагают такие задачи:

а) *На данной прямой найти точки, равноудаленные от двух данных точек.*

б) *На данной плоскости найти точки, равноудаленные от двух данных точек.*

в) *Найти точки, которые равноудалены от точек А и В и равноудалены от точек С и D.*

г) *Найти точки, равноудаленные от точек А, В и С.*

д) *Найти точки, равноудаленные от всех вершин равнобедренной трапеции.*

е) *Найти точки, равноудаленные от всех вершин правильного многоугольника.*

Однако список упражнений не ограничивается вариантами основных пяти геометрических мест. Учащимся предлагают и задачи, не связанные непосредственно с основными местами. Таковы, например, требования: *найти геометрическое место точек, равноудаленных от двух данных параллельных прямых; найти геометрическое место точек, равноудаленных от двух параллельных плоскостей; найти геометрическое место точек, равноудаленных от двух пересекающихся прямых, и т. п.*

При решении всех таких задач особое внимание уделяется исследованию. Например, в задаче а) искомым решением может оказаться вся данная прямая, либо только одна из ее точек, либо таких точек нет совсем. Все эти случаи необходимо иллюстрировать схемами.

При решении подобных задач нередко возникают трудности, связанные с тем, что учащимся не хватает умения представить себе форму искомого геометрического места точек. Для облегчения поисков формы геометрического места рекомендуется следующий методический прием[1].

---

[1] См.: Л. М. Лоповок, Сборник стереометрических задач на построение, Учпедгиз, М., 1953, стр. 12—13.

Не меняя формулировки свойства точек, входящих в искомое геометрическое место, ищут форму этого геометрического места не в пространстве, а на плоскости (например, в той плоскости, которой принадлежат отдельные точки и линии, связанные по условию с искомыми точками). Эта задача значительно проще, так как учащиеся имеют некоторый опыт нахождения форм геометрических мест точек на плоскости.

Между формой геометрического места точек на плоскости и в пространстве в подавляющем большинстве случаев существует следующая связь (табл.).

Таблица

На плоскости	В пространстве
Точка	Прямая
Прямая	Плоскость
Две параллельные прямые	Цилиндрическая поверхность
Окружность	Сфера

Пусть, например, *требуется найти геометрическое место точек, равноудаленных от сторон треугольника.* На плоскости таких точек 4 (центры вписанной и вневписанных окружностей). Таблица показывает, что в пространстве искомое геометрическое место должно состоять из четырех прямых. Так оно и есть: эти прямые проходят через названные центры перпендикулярно к плоскости треугольника.

Пусть требуется найти геометрическое место точек, расстояния которых от двух данных параллельных прямых относятся как $a : b$ $(a \neq b)$. На плоскости искомое геометрическое место состоит из пары параллельных прямых. По таблице искомым геометрическим местом в пространстве должна оказаться некоторая цилиндрическая поверхность. Легко убедиться, что отвечающие условию задачи параллельные прямые оказываются диаметрально противоположными образующими искомой цилиндрической поверхности.

Опыт показывает, что учащиеся, установив форму геометрического места точек на плоскости, с помощью таблицы «прикидывают», какую форму имеет это геометрическое место в пространстве. Затем обосновывается результат и одновременно уточняется расположение искомого геометрического места относительно данных точек и линий.

Этот прием особенно полезен в начале изучения учащимися пространственных геометрических мест. По мере развития пространственных представлений и пространственного воображения учащихся этот прием применяется все реже. Впрочем, некоторые учащиеся продолжают пользоваться приемом и в дальнейшем.

Не следует, однако, думать, что сделанная на основании таблицы прикидка всегда верна. Таблица не устанавливает взаимно однозначного соответствия между формой геометрического места на плоскости и в пространстве, так как такого соответствия, вообще говоря, не существует. Есть такие геометрические места точек, которые не меняют форму в зависимости от того, рассматриваем мы их на плоскости или в пространстве. Приведем примеры.

а) *Геометрическое место центров тяжести треугольников, вершины которых лежат на трех данных параллельных прямых.*

В любом случае искомое г.м.т. — прямая, параллельная данным.

б) *Геометрическое место точек, сумма расстояний которых от двух данных параллельных прямых минимальна.*

В любом случае условию отвечают все точки полосы плоскости, ограниченной данными прямыми.

в) *Геометрическое место концов векторов, равных данному, началом которых являются точки данной окружности.*

В любом случае искомым геометрическим местом оказывается окружность.

Все это не снижает значения таблицы, так как она охватывает огромное количество геометрических мест точек и вполне достаточна для школьной практики. Кроме того, использование таблицы не исключает обоснования, так что неточности таблицы будут выявлены самими учащимися.

Задачи второй группы употребляются реже. Их решение ставит своей целью развитие способностей логического мышления, глубокого анализа данных условия. Например, *требуется установить, каким геометрическим местом можно считать высоту правильной треугольной пирамиды.*

Прежде всего выясняется, что в любом случае можно рассматривать ее как часть геометрического места точек, имеющего форму прямой. Эту прямую можно считать геометрическим местом точек, удаленных на одинаковое расстояние от вершин основания, либо геометрическим местом точек, равноудаленных от боковых ребер пирамиды, либо геометрическим местом точек, равноудаленных от плоскостей боковых граней, и т. д.

В ходе решения таких задач открываются большие возможности для повторения и систематизации изученного материала.

Наиболее важны упражнения третьей группы. Именно использование таких задач открывает дорогу пространственным геометрическим местам точек в школьный курс геометрии. Суть дела заключается в том, что упражнения первой группы решают на схематических чертежах, фактического построения не происходит, так что эти задачи не связываются с задачами на построение. Задачи третьей группы решаются на проекционных чертежах, таким образом, каждая точка прямой или плоскости строится с полным обоснованием.

Эти задачи формулируются так: «На поверхности (или внутри) данной фигуры найти точки, обладающие определенным свойством». При этом свойство формулируется так, что искомые точки оказываются связанными с точками или линиями данной фигуры.

Приведем примеры.

а) *На поверхности правильной треугольной призмы найти точки, равноудаленные от двух вершин основания.*

Все точки, равноудаленные от двух вершин основания, лежат в плоскости симметрии данных точек. Эта плоскость проходит через третью вершину и одну из высот основания перпендикулярно плоскости основания. Все искомые точки лежат на сторонах прямоугольника, две стороны которого суть высоты оснований призмы.

Рассматриваемая задача допускает ряд вариантов. Во-первых, можно брать правильную призму с другим основанием. При этом не обязательно брать смежные вершины. Наконец, можно независимо от формы основания в качестве данных точек брать две точки на одной из сторон, точку на стороне и центр основания и т. д.

б) *На поверхности данной прямой призмы найти точки, равноудаленные от двух точек A и B бокового ребра призмы.*

Искомые точки лежат на сторонах сечения, параллельного основанию и проходящего через середину отрезка AB.

в) *На поверхности данной пирамиды найти точки, равноудаленные от концов высоты пирамиды.*

На изображении пирамиды может и не быть изображения высоты. Искомые точки лежат на средних линиях боковых граней, параллельных соответственным сторонам основания.

Если вместо концов высоты дать две другие точки этой высоты, положение высоты должно быть задано на чертеже.

г) *Внутри правильной n-угольной пирамиды найти точки, равноудаленные от двух указанных точек основания пирамиды.*

Для n берут обычно значения 3, 4, 6. Искомые точки лежат внутри (не на сторонах) определенного сечения.

д) *На поверхности куба найти точки, равноудаленные от концов заданной диагонали куба.*

Пусть дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и дана диагональ AC_1. По условию требуется провести плоскость, перпендикулярную этой диагонали, через середину диагонали. Построение можно выполнить, если раньше установить, что плоскость BDA_1 перпендикулярна диагонали AC_1, т. е. параллельна искомой плоскости.

Однако возможен другой подход. Доказывают, что середины ребер куба DD_1, BB_1, CD, A_1B_1, BC и A_1D_1 равноудалены от точек A и C_1. Доказательство основано на равенстве треугольников. Соединив последовательно указанные точки, получим искомые отрезки.

е) *На поверхности куба найти точки, равноудаленные от двух параллельных сторон одной грани его.*

ж) *Боковая грань правильной шестиугольной призмы — квадрат. Найти на поверхности призмы точки, разноудаленные от двух несмежных вершин боковой грани.*

Наборы таких упражнений приводятся в работах Л. М. Лоповка, Н. В. Наумович[1], А. А. Стражевского.

Кроме геометрических мест точек, было бы полезно ознакомить учащихся с геометрическими местами линий, в частности прямых. Это весьма важно с точки зрения расширения кругозора и пространственных представлений учащихся.

Программа дает богатые возможности для введения геометрических мест прямых. Укажем на ряд упражнений курса стереометрии.

ГМП-I. *Найти геометрическое место прямых, которые пересекают две данные параллельные прямые.*

На основании первой аксиомы плоскости учащиеся заключают, что искомым геометрическим местом является плоскость.

ГМП-II. *Найти геометрическое место прямых, которые пересекают данную прямую и параллельны другой данной прямой.*

ГМП-III. *Найти геометрическое место прямых, которые проходят через данную точку и параллельны данной плоскости.*

ГМП-IV. *Найти геометрическое место прямых, которые пересекают данную прямую и перпендикулярны к данной плоскости.*

ГМП-V. *Найти геометрическое место прямых, удаленных на a от данной прямой и параллельных ей.*

Это геометрическое место прямых дает возможность рассмотреть цилиндрическую поверхность.

ГМП-VI. *Найти геометрическое место прямых, пересекающих данную прямую в данной точке под данным острым углом.*

Это геометрическое место весьма удобно для ознакомления с конической поверхностью. Менее удобен вариант геометрического места точек: *Найти геометрическое место точек, расстояния которых от плоскости и от точки M этой плоскости относятся как $a : b$ $(a < b)$.*

ГМП-VII. *Найти геометрическое место касательных к шару в данной точке M.*

ГМП-VIII. *Найти геометрическое место касательных к шару, параллельных данной прямой.*

ГМП-IX. *Найти геометрическое место касательных к шару, проходящих через данную точку M вне шара.*

Все эти геометрические места прямых допускают варьирование и могут быть связаны с многогранниками и круглыми телами (аналогично упражнениям на геометрические места точек).

---

[1] Н. В. Наумович, Геометрические места в пространстве и задачи на построение, М., Учпедгиз, 1956.

Высказывалось пожелание ознакомления учащихся с геометрическими формами типа тора. С этой целью могут быть использованы как геометрические места точек (например, *г.м.т., удаленных на а от данной окружности*), так и геометрические места окружностей. Примером может служить геометрическое место окружностей радиуса a, центры которых лежат на данной окружности.

Умелое использование геометрических мест точек и линий расширяет тематику задач и способствует улучшению усвоения курса геометрии.

§ 11. Задачи практического содержания

Школьный курс математики должен уделять внимание вопросам, связанным с будущей трудовой деятельностью учащихся. Математические расчеты приходится выполнять каждому рабочему, мастеру, но на различных рабочих местах основными являются не одни и те же теоремы и формулы. Так, разметчику нужно более глубоко знать свойства правильных многоугольников и систему координат, тригонометрическое решение прямоугольных треугольников; электрику нужно уметь быстро решать систему уравнений типа $x + y = a$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = b$; для строителя важны приложения теорем о параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей и т. д.

Следовательно, в каждом отдельном случае учителю нужно иметь набор упражнений, отражающих работу ближайших предприятий и работу мастерских школы. Поэтому тематика задач (а частично и цифровой материал) определяется в результате ознакомления с производственными процессами, изучения опыта передовых рабочих, а также из соответствующих книг, пособий и технических журналов.

Разумеется, одному учителю не под силу составить полный набор таких упражнений. Поэтому организуется обмен опытом составления и использования задач практического характера[1] (на страницах журналов, на педагогических чтениях и т. д.).

Отбор и составление задач практического характера не является простым делом. Для того чтобы задача имела основания именоваться п р а к т и ч е с к о й, недостаточно соответствующей фабулы, должны выполняться по крайней мере 3 следующих требования: 1) Данные условия должны быть реальными. Некоторое округление данных, частичное изменение числовых значений параметров могут иметь место, но лишь в такой мере, чтобы не ис-

---

[1] Л. М. Л о п о в о к, Методика использования задач практического содержания. Сб. «Преподавание математики в школе», вып. II, Киев, 1962.

кажалось истинное положение вещей. 2) В задаче должны определяться такие величины, которые определяются в действительности. 3) Методы решения таких задач должны иметь практическое значение, т. е. должны либо совпадать с применяемыми в действительности, либо быть приемлемыми при решении аналогичных задач на практике.

Помимо этих трех требований, нельзя забывать и о том, что задача должна иметь познавательную ценность и воспитательное значение, представлять интерес своим математическим содержанием.

В соответствии с содержанием и характером использования задачи практического характера могут быть разделены на четыре группы.

1. Задачи, иллюстрирующие применение теорем (формул).

Одна группа таких задач представляет собой вопросы, в которых требуется объяснить некоторое явление. Вот несколько примеров.

а) *Почему мотоцикл с коляской стоит на дороге устойчиво, а для мотоцикла без коляски необходима дополнительная опора?*

б) *Почему бетонные плиты, которыми мостят дорогу, изготовляют только в форме правильных шестиугольников или квадратов?*

в) *Почему в садовой калитке всегда прибивают диагональную планку?*

г) *Почему листы жести на крыше «сшивают» по направлениям, перпендикулярным к гребню крыши?*

Ответы на такие вопросы даются устно, учащиеся должны указать, на основании каких именно теорем или формул они могут объяснить указанный в условии факт.

Вторая группа задач аналогична, но вместо фактов приводятся теоремы. Требуется указать применение этих теорем в определенной области науки или техники. Вот примеры.

а) *Как используется свойство параллельных прямых при работе с рейсмусом?*

б) *Как используется признак параллельности плоскостей при строительстве пола комнаты?*

в) *Как используются аксиомы плоскости при разбивке котлована?*

Подбор таких вопросов в значительной мере определяется условиями работы школы (мастерские, производственное обучение; характер ближних или шефствующих предприятий и т. п.) и политехническим кругозором учащихся.

2. Упражнения на проверку правильности применяемых приемов работы.

В условиях этих задач дается описание определенного приема измерения или выполнения трудовых заданий. От учащихся требуется установить, правилен ли этот прием. Если прием правильный, то он сравнивается с описанным в учебнике (какой удобнее вообще или в определенных условиях). Если прием неверный, то ставится дополнительный вопрос: нет ли условий, при которых рассмотренный способ мог бы давать удовлетворительное приближение?

Если прием приближенный, учащиеся устанавливают степень его точности и границы применения.

Таким образом, задачи второй группы расширяют знакомство учащихся с приемами, используемыми на практике, приучают критически относиться к практическим приемам, анализировать эти приемы.

Приведем несколько приемов таких упражнений.

а) *Столяр проверяет, плоска ли грань бруска, на глаз, смотря, проходит ли луч через края бруска по поверхности грани. Правильно ли он поступает? Достаточна ли такая проверка?*

б) *На кирпичном заводе смесь глины с песком движется по желобу соответствующего сечения. Эта «лента» делится на части проволокой, которая движется перпендикулярно направлению «ленты». Получаются ли при этом грани кирпича плоскими? Перпендикулярна ли поверхность среза плоскостям прилежащих граней?*

в) *При вычислении объема железнодорожной насыпи длиной l пользуются одной из следующих формул:*

$$V = \frac{B_1 + B_2}{2} \cdot l \text{ и } V = B_0 \cdot l,$$

где B_1, B_2 и B_0 — площади поперечных сечений насыпи на концах и на середине участка.

Правильны ли эти формулы? Если нет, то какая из них более точна?

г) *Для вычисления объема конической кучи пользуются одной из двух формул: $V = \frac{a^3}{3}$ или $V = \frac{b^3}{20}$, где a — длина образующей конуса, а b — длина перекидки (т. е. ломаной, соединяющей через вершину конуса две диаметрально противоположные точки основания).*

Какая из этих формул точнее? Имея в виду, что угол естественного откоса у большинства сыпучих материалов лежит в пределах от 25 до 45°, определить размер ошибки в процентах.

Набор упражнений второй группы не является стандартным. В каждой школе он может быть несколько изменен. Но во всех случаях задачи этой группы дают материал для различных разделов геометрии, для выполнения тригонометрических выкладок и т. п.

3. Упражнения вычислительного характера.

Эти упражнения наиболее распространены. Чаще всего это задания на определение объема (веса) детали, насыпи и т. п., площади поверхности (например, побелки, укрепления канала и т. п.), расстояния.

К сожалению, условия часто формулируют так, что решение сводится к подстановке числовых данных в формулу. Чтобы этого избежать, следует рассматривать геометрические формы, которые являются сочетанием нескольких элементарных фигур. Например: вал блюминга представляет собой комбинацию цилиндров различного радиуса; бункерную батарею для силосования кукурузы можно рассматривать как комбинацию правильных шестиугольных призм и цилиндра; воронка самоходного комбайна является комбинацией цилиндров и усеченного конуса; в детали вакуум-насоса сочетаются усеченный конус и два шаровых сегмента, и т. д.

Наибольший интерес представляют задачи практического содержания с нешаблонным решением. Такие задачи надолго запоминаются и содействуют развитию математической инициативы учащихся. Вот три примера.

а) *План земельного участка выполнен на листе размером* 288 × × 407 *мм в масштабе* 1 : 200. *Можно ли выполнить на половине этого листа (т. е. на листе* 203 × 288 *мм) тот же план в масштабе* 1 : 250? 1 : 300?

б) *Барабан лебедки ССCM*-080 *имеет диаметр* 530 *мм и длину* 727 *мм. За время работы на барабан наматывается* 225 *м троса диаметром* 17 *мм. Во сколько слоев наматывается трос?*

Здесь нужно выяснить количество витков в одном слое. Оно равно целой части дроби $\frac{727}{17}$. Затем требуется определить диаметр витка. Для первого слоя он равен 530 *мм*+17 *мм*, для каждого последующего — на 34 *мм* больше предыдущего. Определив длину троса в первом и втором слоях, замечают, что, судя по остатку, третий слой — последний (он неполный).

в) *Железобетонная силосная полубашня из стандартных плит имеет форму правильной призмы. Расстояние от оси полубашни до стен равно* 2,52 *м. Зная, что объем стен составляет* 3,35% *полезного объема, определить толщину стен.*

Внутренняя часть и полубашня со стенами представляют собой две одноименные правильные призмы равной высоты. Поэтому объемы их относятся как площади оснований. Но основания подобны, поэтому площади их относятся как квадраты апофем. Обозначив апофему большого многоугольника через x, получим: $x^2 : 2{,}52^2 = 1{,}0335 : 1$. Отсюда $x \approx 2{,}562$, т. е. толщина стен равна 42 *мм*.

4. Упражнения на выполнение построений.

Сюда относятся различные задачи на применение тех или иных способов построения параллельных или перпендикулярных прямых, деления отрезков или дуг на равные части и т. д. Чрезвычайно полезны задачи на восстановление размеров или положения фигуры, например, такие:

а) *Кровельная плитка имеет форму трапеции. Требуется по обломку плитки восстановить ее размеры.*

Здесь много вариантов. Может быть отломан один уголок плитки или 2, 3, 4, может быть отломан кусок так, что не сохранилась середина стороны, и т. д.

В таком же духе могут быть составлены задачи на восстановление размеров плитки другой формы (например, прямоугольной, в виде правильного шестиугольника), на определение по обломку радиуса цилиндра или шара.

б) *Две прямоугольные дороги пересекаются за пределами листа карты. Требуется определить направление от данного на карте пункта к перекрестку дорог и расстояние до этого перекрестка.*

Задача решается как с использованием гомотетии (перекресток принимается за центр гомотетии двух треугольников, у одного из которых вершины лежат в указанном пункте и на данных дорогах, а у другого — две на данных дорогах), так и с использованием средней линии треугольника.

в) *Края земельной полосы параллельны между собой. Граница между двумя смежными частями полосы проведена по ломаной линии. Как, не изменяя размеров площадей этих частей, уменьшить длину границы между ними?*

Как видим, при правильном подходе к отбору и составлению задач практического характера имеется возможность сочетать изучение программного материала с подготовкой учащихся к труду, расширить их кругозор, знакомить с успехами науки и техники.

§ 12. Обучение рациональным методам решения задач

В ходе обучения учащихся решению задач обращается внимание на необходимость выбора в каждом отдельном случае наиболее подходящих способов решения. Во многих случаях одна и та же задача может быть решена различными путями, но это совсем не означает, что все эти пути равноценны. В одном способе решение связано с большим объемом вычислений, в другом — преобразования сложнее, в третьем — более трудными оказываются рассуждения, на которых основывается решение, и т. д.

Иногда упрощение решения может быть достигнуто за счет применения теорем или формул, не входящих в программу данного класса (или вообще средней школы). Такой подход может быть допустим в процессе кружковой работы, на математических олимпиадах и т. д. В классе же речь может идти либо о решении на основе программного материала, либо с использованием результатов только что решенной задачи на доказательство.

Таким образом, речь идет о поисках о т н о с и т е л ь н о более простого решения, отвечающего условиям работы класса. Не существует метода, который всегда оказывался бы наиболее рациональным. Учащиеся должны быть знакомы с различными путями решения. В каждом случае надлежит избрать наиболее удобный и простой путь решения.

Опыт показывает, что нерациональные (слишком длинные, громоздкие) решения, как правило, являются результатом попыток решать задачу по шаблону, без учета «индивидуальных особенностей» рассматриваемых фигур или конфигураций. Если принимать во внимание не только то, что относит данную фигуру (или конфигурацию) к определенному классу величин, но и то, что выделяет ее из этой группы, то в большинстве случаев можно определить наилучший путь решения.

Рассмотрим несколько примеров.

а) *Может ли сечение параллелепипеда плоскостью иметь форму правильного пятиугольника?*

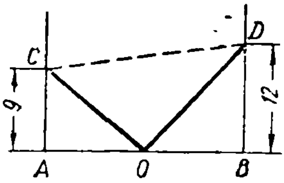


Рис. 4

Попытки ответить на этот вопрос на основании вычислений отношения стороны сечения и диагонали даже в частном случае (основание — квадрат) не всем учащимся доступны. В общем виде даже хорошие учащиеся затрудняются выполнить надлежащие выкладки.

Между тем никакие выкладки не требуются. Особенностью параллелепипеда является параллельность его противоположных граней. Чтобы в сечении получился пятиугольник, плоскость должна пересекать пять граней параллелепипеда. Среди этих граней наверняка найдутся две пары параллельных граней. Следовательно, в полученном сечении две пары сторон соответственно параллельны. Однако в правильном пятиугольнике никакие две стороны не параллельны. Следовательно, рассматриваемое сечение не может быть правильным пятиугольником.

б) *Лестница установлена так, что верхний конец ее упирается в стену здания на одной стороне улицы на высоте* 9 *м, а на другой стороне — на высоте* 12 *м, причем оба положения лестницы взаимно перпендикулярны, а низ ее неподвижен. Определить длину лестницы и ширину улицы* (рис. 4).

Эта задача предлагалась в одной из гимназий ПНР на экзамене по алгебре. Характер экзамена подсказывает необходимость введения одного или нескольких неизвестных. В результате получается либо система уравнений второй степени с тремя неизвестными: либо иррациональное уравнение.

$$x^2-y^2 = 81,\quad x^2-z^2 = 144,\quad 2x^2-(y+z)^2 = 9,$$

$$\sqrt{2x^2-9} = \sqrt{x^2-81} + \sqrt{x^2-144}.$$

Легко убедиться, что в обоих случаях объем вычислений велик.

Анализ конфигурации приводит к иному пути решения. Треугольники ACO и BOD прямоугольные, их гипотенузы равны (по условию). Учитывая перпендикулярность гипотенуз, можно показать, что углы ACO и BOD равны (как углы с соответственно перпендикулярными сторонами). Следовательно, треугольники равны. Поэтому $AO = BD$ и $BO = AC$, т. е. ширина улицы 21 *м*, а длина лестницы определяется по теореме Пифагора (15 *м*).

в) *Развертка пирамиды представляет собой квадрат со стороной a. Определить объем пирамиды.*

Искомая пирамида не может быть четырехугольной, так как в этом случае все плоские углы при ее вершине оказались бы прямыми, т. е. их сумма была бы равна 360°, что невозможно. В таком случае пирамида треугольная. Если одна из вершин основания совпадает с вершиной A развертки, то две другие могут лежать только на серединах сторон BC и CD. Таким образом, боковые ребра пирамиды a, $\frac{a}{2}$ и $\frac{a}{4}$. Плоские углы при вершине прямые. Приняв одну из боковых граней за основание, легко найдем и площадь этой грани и объем пирамиды.

Такое обучение рациональным методам нужно осуществлять на протяжении всего курса. Демонстрируя преимущество рациональных методов решения, учитель вместе с тем показывает пути, ведущие к нахождению такого решения[1].

Вместе с тем учащихся знакомят с некоторыми вспомогательными приемами решения задач. Выше было отмечено, что если элементы фигуры разъединены, их часто сближают путем геометрических преобразований. В ряде случаев целесообразно решить задачу в общем виде, а лишь затем подставить числовые значения параметров. Во многих случаях задачи удобно решать с помощью вспомогательных отрезков или углов: сперва находится искомая величина, а затем устанавливают связь между вспомогательными величинами и данными условия и исключают эти вспомогательные величины. Особенно часто это имеет место при решении стереометрических задач с применением тригонометрии.

При решении геометрических задач на доказательство в некоторых случаях целесообразно предварительно доказать вспомогательную теорему. Пусть, например, требуется доказать, что сумма расстояний от внутренней точки до сторон равноугольного выпуклого многоугольника постоянна. Если предварительно доказать эту теорему для правильного многоугольника, а затем построить на одной из сторон данного многоугольника одноименный правильный, то доказательство окажется довольно простым.

Неверно было бы думать, что отыскание рациональных путей решения задач посильно только лучшим учащимся. Красоту реше-

---

[1] Л. М. Лоповок, О рациональных способах решения задач (чехословацкий журнал «Математика в школе», 1959, № 2).

ния оценивают все учащиеся. Если систематически показывать учащимся, что отыскание рациональных решений посильно всем тем, кто усвоил учебный материал, то постепенно большинство из них приобретает навык выбора лучших путей выполнения поставленных заданий.

Но учитель должен позаботиться о том, чтобы среди предлагаемых задач были такие, на которых удобно показывать наличие решений различной трудности.

Решение задач рациональными путями имеет огромное воспитательное значение. Рациональные решения требуют меньшей затраты времени, простота решения позволяет не делать ошибок, имеющих место в случае сложных и утомительных выкладок. Наконец, в будущей трудовой деятельности учащимся неоднократно придется иметь дело с проблемами наилучшего использования имеющихся ресурсов, наилучшей расстановки людей и механизмов, рационального раскроя материала и т. д.

ИЗМЕРЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

§ 1. Сущность проблемы измерения

1. Вопрос об измерении геометрических величин является одним из наиболее трудных как в теоретическом, так и в методическом отношении. Трудность эта связана с тем, что в учебной литературе и в процессе изложения этой темы на уроках очень нечетко определяются основные объекты измерений — длина, площадь, объем, и вместе с тем совсем не дается определения общего понятия величины.

Например, в учебнике Киселева[1] площадью называется «величина части плоскости, заключенной внутри многоугольника или какой-нибудь другой плоской замкнутой фигуры». А на следующей странице мы читаем теорему: «Площадь прямоугольника равна произведению его основания на высоту». Правда, дальше мы читаем, что это предложение нужно понимать как краткую формулировку того, что «число, выражающее площадь прямоугольника в квадратных единицах, равно произведению чисел, выражающих основание и высоту его в соответствующих линейных единицах».

Однако опыт показывает, что в сознании учащихся остается только первая, краткая формулировка теоремы.

Буквально так же обстоит дело и с определением понятия объема в учебнике того же автора: объем определяется как величина части пространства, занимаемой геометрическим телом, а дальше дана теорема, в которой доказывается, что объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его измерений.

Наряду с этим обращает на себя внимание тот разнобой, который имеет место при отыскании числа, выражающего объемы различных тел. В самом деле, при определении объема п р я м о у г о л ь н о г о п а р а л л е л е п и п е д а мы, в сущности, представляем это тело как сумму элементарных кубов и частей этих кубов. При определении объема п р о и з в о л ь н о г о п а р а л л е л е п и п е д а мы пользуемся леммой о равновеликости прямой и наклон-

[1] А. П. К и с е л е в, Геометрия, ч. I, Планиметрия, М., Учпедгиз, 1962.

ной призм. При определении объема произвольной призмы мы опираемся на постулат о равновеликости равносоставленных тел. Совершенно новый подход мы имеем при определении объема пирамиды: здесь объем определяется как общий предел, к которому стремятся суммы объемов вписанных и описанных призм. Новые определения путем предельных переходов мы получаем при определении объемов цилиндра и конуса. Наконец, совершенно по-новому определяются объемы шарового сектора и шара.

Многолетняя привычка и глубоко укоренившиеся традиции приучили нас не обращать внимания на ряд логических дефектов в этом порядке изложения теории измерения объемов. Если же хорошенько вдуматься в эти определения, то возникает целый ряд вопросов.

Прежде всего нужно обратить внимание на то, что «число, выражающее объем тела» для параллелепипеда, призмы, пирамиды, цилиндра, конуса и шара, каждый раз определяется по-новому.

Естественно возникает ряд вопросов: на каком основании мы столь разнообразно определяем понятия, которые обозначаем одним и тем же термином? Каковы соотношения между числами, полученными столь разнообразными методами? Имеем ли мы право сравнивать эти числа друг с другом, складывать, вычитать и т. д.?

Еще вопрос: объемы цилиндра и конуса определяются как пределы последовательностей объемов вписанных правильных призм и пирамид: где гарантия того, что предел не зависит от выбора этих последовательностей? Аналогичный вопрос возникает и при определении объемов шарового сектора и шара.

Короче говоря, основным логическим недостатком всего этого изложения является отсутствие общего определения того понятия, которое авторы учебников называют «числом, выражающим объем тела». Этот недостаток, естественно, отражается и на усвоении всех этих вопросов учащимися, так как разнообразие подходов к обоснованию вывода той или другой формулы объема заставляет учащихся прибегать к механическому заучиванию различных способов доказательств, логически совершенно не связанных между собой.

Это же обстоятельство вызывает излишнюю громоздкость изложения, что в свою очередь ставит перед учащимися новые трудности в усвоении предмета.

Приведем пример. В учебнике Киселева, для того чтобы вывести формулу для объема произвольной призмы, нужно предварительно доказать следующие предложения: 1) теорему об объеме прямоугольного параллелепипеда (рассматриваются три случая); 2) лемму о равновеликости прямой и наклонной призм; 3) теорему об объеме произвольного параллелепипеда (рассматриваются два случая: прямой параллелепипед и косой параллелепипед); 4) теорему об объеме призмы (рассматриваются два случая: треугольная призма и многоугольная призма). По существу же учащиеся должны выучить и запомнить всего в о с е м ь самостоятельных предложений с доказательствами.

Для устранения всех этих недостатков нужно выделить вопрос об измерении геометрических величин в специальный раздел курса геометрии. Учащимся старших классов, у которых лучше математическая подготовка, можно изложить эту тему с более общих точек зрения и более корректно в научном отношении.

2. Прежде чем перейти к теории измерения геометрических величин, необходимо, чтобы учащиеся ясно осознали, какое содержание вкладываем мы в понятие величины. В школьном курсе геометрии изучаются длина, площадь и объем, которые являются скалярными аддитивными, непрерывными величинами. Эти величины характеризуются следующими свойствами:

I. Характеристика с к а л я р н о й в е л и ч и н ы

1. *Если дано некоторое множество объектов a, b, c, ..., то для любых двух из них возможны три и только три исключающих друг друга соотношения:*

или $a = b$ «a равно b» — соотношение р а в е н с т в а,

$$\left.\begin{array}{l}\text{или } a > b \text{ «}a\text{ больше } b\text{»}\\ \text{или } a < b \text{ «}a\text{ меньше } b\text{»}\end{array}\right\}\text{— соотношения неравенства.}$$

2. *Соотношения р а в е н с т в а удовлетворяют условиям:*
с и м м е т р и и: если $a = b$, то $b = a$;
р е ф л е к т и в н о с т и: $a = a$;
т р а н з и т и в н о с т и: если $a = b$, $b = c$, то $a = c$.

3. *Соотношения н е р а в е н с т в а удовлетворяют условиям:*
о б р а т и м о с т и: если $a > b$, то $b < a$;
т р а н з и т и в н о с т и: если $a > b$; $b > c$, то $a > c$.

К числу скалярных величин, помимо длины, площади и объема, относятся также температура тела, вес тела, плотность и т. д.

II. Характеристика а д д и т и в н о й в е л и ч и н ы

Для данного множества скалярных величин определена операция с л о ж е н и я, позволяющая по двум элементам a и b этого множества однозначно определить третий элемент c того же множества, называемый их с у м м о й, что символически обозначается так: $a + b = c$. Сумма должна подчиняться законам:

1) п е р е м е с т и т е л ь н о м у: $a + b = b + a$;
2) с о ч е т а т е л ь н о м у: $a + (b + c) = (a + b) + c$;
3) м о н о т о н н о с т и: если $a + b = c$, то $c > a$ и $c > b$.

Примером аддитивной величины может служить длина отрезка. С другой стороны, для лучшего усвоения идеи аддитивности нужно показать учащимся примеры скалярных неаддитивных величин.

Такими величинами, например, являются плотность тела, температура тела. Если, например, мы сольем вместе два стакана воды: один с температурой 30°, а другой — с температурой 70°, то в результате мы не получим воду с температурой 100°. Температура есть скалярная неаддитивная величина.

III. Характеристика скалярной аддитивной непрерывной величины

Для того чтобы скалярная аддитивная величина была непрерывной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

1. Аксиома Архимеда. *Если $a > b$, то всегда можно найти такое натуральное число n, для которого имеет место неравенство:*

$$nb > a,$$

$$\text{где } nb = \underbrace{b + b + \ldots + b}_{n \text{ раз}}.$$

2. *Для всякого элемента a данного множества и для данного натурального числа n однозначно определяется элемент b, удовлетворяющий равенству:* $b = \frac{a}{n}$.

Возможность неограниченного деления любого элемента на сколь угодно малые части.

3. Обобщенная аксиома Г. Кантора. *Если имеются две последовательности элементов данного множества* $a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots,$

$a'_1, a'_2, \ldots, a'_n \ldots,$ *удовлетворяющие условиям:*

1) $a_p < a'_q$ (*для любых p и q*),

2) $a_{n+1} > a_n$ и $a'_{n+1} < a'_n$,

3) *Для любого элемента k данного множества существует такое n, что $a'_n - a_n < k$, то существует единственный элемент a, больший всех членов первой последовательности и меньший всех членов второй последовательности.*

Простейшим примером непрерывной величины служит длина отрезка прямой. Нетрудно убедиться, что для длины выполняются все условия, определяющие непрерывность.

Вместе с тем необходимо заметить, что непрерывным множествам противопоставляются дискретные множества, состоящие из отдельных неделимых элементов. Скалярными аддитивными дискретными множествами являются: множество людей в данном городе, множество книг в библиотеке, множество солнц в Галактике и т. д.

Формирование понятия «величина» должно осуществляться на всем протяжении школьного курса математики и физики. Все характерные признаки этого понятия необходимо все время подчеркивать и останавливать на них внимание учащихся. Окончательное формирование этого понятия лучше всего дать перед изложением последней темы курса геометрии об измерении геометрических величин.

3. Так как в геометрии рассматриваются только скалярные аддитивные непрерывные величины, то мы в дальнейшем будем под термином «величина» подразумевать величины именно этого рода.

Процесс измерения величин заключается в следующем. Прежде всего мы из данного множества величин выбираем некоторый определенный элемент, который называем единицей измерения. Далее мы осуществляем операцию измерения, позволяющую при выбранной единице отнести к каждому элементу данного множества действительное число — меру этой величины. Найденная путем измерения мера должна удовлетворять двум условиям:

1) *Равным элементам множества соответствуют и равные меры.*

2) *Сумме двух элементов соответствует сумма их мер.*

Как мы увидим в дальнейшем изложении, при выполнении этих условий отношение двух элементов (т. е. частное от деления друг на друга их мер) оказывается независимым от выбора единичного элемента.

Выше нами уже указывалось на то, что и в учебной литературе, и в практике преподавания понятия «величина» и «мера» этой величины часто смешиваются между собой. В то же время нетрудно убедиться в том, что с точки зрения логики понятия «величина» и ее «мера» (или, как говорят авторы учебников, «число, выражающее эту величину») — вещи совершенно разные. Например, понятие «длина» (или, что все равно, «расстояние между двумя точками») возникло гораздо раньше того, как люди научились измерять отрезки. Ребенок дошкольного возраста, незнакомый с процессом счета и измерения, достаточно хорошо ориентируется в понятиях «больше», «меньше», «равно» (и также «ближе», «дальше»). Заметим еще, что «длина данного отрезка» есть величина постоянная, тогда как мера его длины («число, выражающее длину») может принять какое угодно числовое значение, в зависимости от выбора единицы длины. Поэтому, например, такое выражение, как «Площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту», нужно было бы сформулировать так: «Мера площади треугольника равна половине произведения меры длины его основания на меру длины его высоты».

Однако едва ли целесообразно добиваться того, чтобы учащиеся всегда пользовались столь длинными формулировками. Для правильного усвоения ими идеи измерения достаточно, чтобы они уяснили себе сущность понятий «величина» и «мера величины» и чтобы, высказывая сокращенную формулировку правила измерения, они могли точно пояснить, что именно эта формулировка означает.

§ 2. Действительные числа

4. Так как действительное число получается в результате измерения всякой скалярной аддитивной непрерывной величины, то отсюда следует, что теория действительных чисел должна явиться тем фундаментом, на котором строится вся теория измерения. Однако до сих пор среди некоторых педагогов и методистов существует убеждение, что более или менее корректно изложить теорию действительных чисел в школе невозможно ввиду чрезвычайной трудности такого изложения. Мы надеемся, что содержание настоящего параграфа поможет до некоторой степени рассеять это предубеждение.

Понятно, что эта тема должна излагаться на уроках алгебры. Помещая ее в теме, предназначенной для геометрии, мы намерены остановить внимание читателя на тех именно вопросах, которые будут непосредственно использованы в теории измерения.

Перед тем как перейти к определению действительного числа, необходимо припомнить определение и свойства рациональных чисел.

Первоначальное понятие о числе мы получаем в результате счета предметов. Таким образом, у нас получаются натуральные числа — 1, 2, 3, 4, 5, ... Применяя к натуральным числам операции сложения, вычитания, умножения и деления (исключая деление на нуль), мы получим все виды рациональных чисел, т. е. нуль, положительные, отрицательные, целые и дробные числа. Каждое нецелое рациональное число может быть изображено десятичной дробью, либо конечной, либо бесконечной периодической.

Множество всех рациональных чисел образует числовое поле. Это означает, что любое арифметическое действие, т. е. сложение, вычитание, умножение и деление (исключая деление на нуль), произведенное над двумя числами этого множества, дает в результате число того же множества.

Бесконечные десятичные дроби дают нам примеры бесконечных числовых последовательностей. Например, обращая в десятичную дробь $\frac{1}{3}$, мы получим периодическую дробь 0,3333... Числа 0,3, 0,33, 0,333, ... дают приближенное значение числа $\frac{1}{3}$ по недостатку.

Если в этих числах увеличить последний десятичный знак на единицу, то получим приближенные значения того же числа $\frac{1}{3}$ по избытку: 0,4; 0,34; 0,334,... Отсюда мы получаем неравенства: $0{,}3 < 0{,}33 < 0{,}333 < \ldots < 0{,}334 < 0{,}34 < 0{,}4$. И слева и справа мы имеем бесконечные последовательности, в каждой из

Итак, периодическая дробь 0, $(a_1a_2a_3 \ \dots \ a_{n-1}a_n)$ получается от обращения в десятичную обыкновенной дроби $\frac{a_1a_2 \ \dots \ a_n}{10^n-1}$.

Беря k цифр после запятой в этой периодической дроби, получим приближенное значение найденного числа по недостатку с точностью до $\frac{1}{10^k}$. Увеличив на единицу последнюю цифру этого приближения, получим приближенное значение того же числа по избытку. Мы получили члены a_k и a_k' последовательности $\{a_k; a_k'\}$, которая представляет собой число $\frac{a_1 \ a_2 \ . \ . \ . \ a_n}{10^n-1}$.

Тем же приемом можно доказать, что и любая смешанная периодическая дробь является рациональным числом.

Заметим еще, что частным случаем сходящихся последовательностей являются последовательности, в которых бесконечно повторяется одно и то же число. Таковы, например, последовательности:

1, 9	2		5 | 5
1, 99	2	или	5 | 5
1,999	2		5 | 5
.....			.....

Совершенно очевидно, что первая пара последовательностей определяет число 2, а вторая — число 5.

5. Весьма важным фактом является то, что существуют сходящиеся последовательности, которыми не определяется никакое рациональное число. Рассмотрим, например, последовательности приближенных значений, которые получаются при извлечении корня квадратного из 5. Тогда получаются следующие последовательности, удовлетворяющие всем условиям сходимости:

2	3
2,2	2,3
2,23	2,24
2,236	2,237
2,2360	2,2361
2,23606	2,23607
. . . .	. . . .

Числа первой последовательности при возведении в квадрат дают число, меньшее 5. Числа второй последовательности при возведении в квадрат дают число, большее 5.

Докажем, что не существует рациональное число, бо́льшее чисел первой последовательности и меньшее чисел второй последовательности. Допустим обратное: положим, что такое рациональное число существует. Так как оно лежит между 2 и 3, то целым оно быть не может. Поэтому допустим, что это число дробное и равно несократимой дроби $\frac{p}{q}$. Для любого числа a_n первой последовательности и соответствующего числа a'_n второй последовательности будем иметь неравенство: $a_n < \frac{p}{q} < a'_n$. Аналогичное неравенство получим и для квадратов этих чисел: $a^2 < \frac{p^2}{q^2} < a'^2_n$.

Последовательности $\left\{a_n^2;\ a'^2_n\right\}$ тоже сходящиеся, так как:

1) $a_n^2 < a'^2_n$; $\quad (a_n < a'_n)$;

2) $a_{n+1} > a_n$, значит, и $a^2_{n+1} > a_n^2$; $a'_{n+1} < a'_n$, значит, $a'^2_{n+1} < a'^2_n$;

3) $a'^2_n - a_n^2 = (a'_n - a_n)(a_n' + a_n)$. Но при любом n имеем: $a'_n < 3$ и $a_n < 3$, поэтому $a'_n + a_n < 6$, и мы можем взять для любого положительного числа ε число n таким, чтобы удовлетворялось неравенство: $a'_n - a_n < \frac{\varepsilon}{6}$, откуда получим: $a'^2_n - a_n^2 < 6(a'_n - a_n) < 6\frac{\varepsilon}{6} = \varepsilon$, т. е. $a'^2_n - a_n^2 < \varepsilon$.

Итак, сходящимися последовательностями $\left\{a_n^2;\ a'^2_n\right\}$ определяется единственное рациональное число $\frac{p^2}{q^2}$. Вместе с тем мы имеем, что $a_n^2 < 5 < a'^2_n$, т. е. этими же последовательностями определяется и число 5. В силу теоремы 1 это значит, что $\frac{p^2}{q^2} = 5$. Но дробь $\frac{p}{q}$ несократима по условию, а значит, несократима и дробь $\frac{p^2}{q^2}$. Мы пришли к противоречию: целое число 5 равно несократимой дроби. Полученное противоречие показывает, что не существует рационального числа, определяемого данными последовательностями.

В том случае, когда две сходящиеся последовательности рациональных чисел не определяют рациональное число, условились говорить, что они представляют собой *иррациональное число*.

Необходимо заметить, что иррациональность числа должна быть установлена специальным доказательством, как это и было сделано в предыдущем примере. В зависимости от происхождения данного иррационального числа оно получает специальное обозначение. Например, можно доказать, что последовательности приведенного примера определяют число, квадрат которого равен 5, а потому соответствующее иррациональное число обозначается символом $\sqrt{5}$.

Подобными же последовательностями определяют число π — отношение длины окружности к длине диаметра.

3	4
3,1	3,2
3,14	3,15
3,141	3,142
3,1415	3,1416
3,14159	3,14160
3,141592	3,141593
. . . . .	. . . . .

Ввиду того что всякое рациональное число обращается в конечную или бесконечную периодическую десятичную дробь и, обратно, всякая бесконечная периодическая десятичная дробь определяет единственное рациональное число, которое в эту дробь обращается, мы заключаем,

что *бесконечная непериодическая десятичная дробь есть иррациональное число.*

Рациональные и иррациональные числа вместе называются **действительными** числами.

6. Для сравнения двух чисел, заданных сходящимися двойными последовательностями, применяются правила:

1) *Число α, заданное последовательностями $\{a_n;\ a'_n\}$, меньше числа β, заданного последовательностями $\{b_n;\ b'_n\}$, если какое-нибудь приближенное значение числа α по избытку меньше приближенного значения числа β по недостатку: $\alpha < \beta$, если $a'_p < b_q$.*

2) *Если неравенства $\alpha < \beta$ и $\alpha > \beta$ не имеют места, то отсюда следует, что $\alpha = \beta$.*

Из этих определений выводится следующая основная теорема.

Теорема 2. *Если числа α и β, заданные последовательностями $\{a_n;\ a'_n\}$, $\{b_n;\ b'_n\}$, таковы, что всегда справедливы неравенства $a_p < b'_q$ и $a'_p > b_q$, то $\alpha = \beta$.*

Действительно, допустим, что $\alpha > \beta$, тогда получим, что $a_a > b'_q$, но это противоречит первому условию теоремы. Если же допустим, что $\alpha < \beta$, тогда получим, что $a'_p < b_q$, а это противоречит второму условию теоремы. Итак, на основании второго правила сравнения получим, что $\alpha = \beta$.

Приведем пример. Выше мы рассматривали сходящиеся последовательности десятичных дробей, в которых квадраты чисел первой последовательности меньше 5, а квадраты чисел второй последовательности больше 5. Построим сходящиеся последовательности недесятичных дробей, обладающих тем же самым свойством.

Число x, квадрат которого равен 5, должно удовлетворять равенству: $x^2 - 4 = 1$, или $(x-2)(x+2) = 1$, т. е. $x - 2 = \frac{1}{x+2}$ и наконец:

$$x = 2 + \frac{1}{x+2}. \qquad (1)$$

Если в правую часть этого равенства подставить вместо x число, квадрат которого меньше 5, то в левой части получим число, квадрат которого больше 5, так как при уменьшении знаменателя дробь увеличивается. Если же в правую часть подставить число, квадрат которого больше 5, то в левой части получим число, квадрат которого меньше 5, так как при увеличении знаменателя дробь уменьшается.

Примем за первое приближение число $b_1 = 2 < x$ (так как $b^2_1 < 5$). Подставим это значение в правую часть равенства (1), получим приближенное значение числа x по избытку: $b'_1 = \frac{9}{4}$. Это число вновь подставим в правую часть равенства (1) и получим новое приближенное значение по недостатку: $b_2 = \frac{38}{17}$. Новая подстановка дает приближенное значение по избытку: $b'_2 = \frac{161}{72}$.

Продолжая далее этот процесс, получим последовательности

2	$\frac{9}{4}$
$\frac{38}{17}$	$\frac{161}{72}$
$\frac{682}{305}$	$\frac{2889}{1292}$
$\frac{12238}{5473}$	$\frac{51841}{23184}$
. . . .	

Покажем, что последовательности $\{b_n;\ b'_n\}$ сходящиеся. Прежде всего в силу определения имеем: $b_n < b'_n$. Положим теперь, что

$$b_n = \frac{p_n}{q_n} \text{ и } b'_n = \frac{p'_n}{q'_n};\quad \frac{p'_n}{q'_n} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{p_n}{q_n}} = \frac{5q_n + 2p_n}{2q_n + p_n}.$$

Итак, мы получили:

$$\left.\begin{aligned} p'_n &= 5q_n + 2p_n \\ q'_n &= 2q_n + p_n \end{aligned}\right\} \quad \text{Аналогично:} \quad \left.\begin{aligned} p_n &= 5q'_{n-1} + 2p'_{n-1} \\ q_n &= 2q'_{n-1} + p'_{n-1} \end{aligned}\right\}$$

Подставив в первые равенства значения p_n и q_n из вторых равенств, получим:

$$p'_n = 10q'_{n-1} + 5p'_{n-1} + 2p_n = 2(5q'_{n-1} + 2p'_{n-1}) + 2p_n + p'_{n-1} = 4p_n + p'_{n-1};$$

$$q'_n = 2q_n + 5q'_{n-1} + 2p'_{n-1} = 2q_n + 2(2q'_n + p'_{n-1}) + q'_{n-1} = 4q_n + q'_{n-1}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} p'_n &= 4p_n + p'_{n-1} \\ q'_n &= 4q_n + q'_{n-1} \end{aligned} \quad \text{и аналогично:} \quad \begin{aligned} p_n &= 4p'_{n-1} + p_{n-1} \\ q_n &= 4q'_{n-1} + q_{n-1} \end{aligned}$$

Так как все целые числа p'_n, q'_n, p_n, q_n при любом n положительны, то из полученных формул следует, что при неограниченно возрастающем n эти числа неограниченно возрастают. Найдем разность:

$$\frac{p'_n}{q'_n} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{p'_n q_n - p_n q'_n}{q_n q'_n} = \frac{4p_n + p'_{n-1}}{4q_n + q'_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{p'_{n-1} q_n - q'_{n-1} p_n}{q_n q'_n}.$$

Следовательно, $p'_n q_n - p_n q'_n = p'_{n-1} q_n - q'_{n-1} p_n$. Но $p'_{n-1} q_n -$
$$- q'_{n-1} p_n = p'_{n-1}(4q'_{n-1} + q_{n-1}) - q'_{n-1}(4p'_{n-1} + p_{n-1}) = p'_{n-1} q_{n-1} - q'_{n-1} p_{n-1}.$$

Последнее выражение есть числитель разности $\frac{p'_{n-1}}{q'_{n-1}} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$, откуда мы заключаем, что у всех разностей $b'_n - b_n$ один и тот же числитель. А так как для b_1 и b_n мы имеем: $b_1' - b_1 = \frac{9}{4} - 2 = \frac{1}{4}$, то, значит, все разности равны дроби с числителем 1 и со знаменателем $q'_n q_n$.

Итак, $b'_n - b_n = \frac{1}{q'_n q_n}$.

Ввиду неограниченного возрастания q_n и q'_n разность может стать меньше любого положительного числа. Например, мы получили: $b'_1 - b_1 = \frac{1}{4}$; $b'_2 - b_2 = \frac{1}{1224}$; $b'_3 - b_3 = \frac{1}{394060}$; $b'_4 - b_4 = \frac{1}{126886032}$.

Эти разности очень быстро уменьшаются, и потому последовательности называются «быстро сходящимися». Сравнивая последовательности $\{b_n;\ b'_n\}$ с последовательностями $\{a_n;\ a'_n\}$, мы видим, что $a_n < b'_n$, так как $a'^2_n < 5$, $b^2_n > 5$ и $b_n < a'_n$, так как $b^2_n < 5$, $a'^2_n > 5$. Итак, обе последовательности удовлетворяют условиям основной теоремы и потому определяют одно и то же число.

Нетрудно убедиться в том, что из приведенных выше о п р е д е л е н и й равенства и неравенства действительных чисел следует:

1) Соотношения равенства подчиняются законам:
с и м м е т р и и: если $\alpha = \beta$, то и $\beta = \alpha$,
р е ф л е к т и в н о с т и: $\alpha = \alpha$;
т р а н з и т и в н о с т и: если $\alpha = \beta$, $\beta = \gamma$, то $\alpha = \gamma$.

2) Соотношения неравенства подчиняются законам: о б р а т и м о с т и: если $\alpha < \beta$, то $\beta > \alpha$;
т р а н з и т и в н о с т и: если $\alpha < \beta$, $\beta < \gamma$, то $\alpha < \gamma$.

7. Ввиду того что десятичные дроби являются более удобными при вычислении, для определения иррационального числа предпочитают пользоваться сходящимися последовательностями десятичных дробей. При этом обычно не выписывают обеих последовательностей, а берут одно приближенное значение по недостатку с достаточно большим числом десятичных знаков. Например, число π записывается так: $\pi = 3{,}14159\ 26535\ 89793\ldots$ Многоточие в конце указывает, что за последней цифрой следует бесконечное множество десятичных знаков. Из этой записи нетрудно получить обе сходящиеся последовательности в том виде, как они были приведены в примере п. 2.

Сколько десятичных знаков нужно взять в каждом отдельном случае, мы определяем по степени точности, требуемой постановкой задачи. Например, измерив диаметр окружности в метрах с точностью до сантиметра и получив 2,15 *м*, мы для получения длины окружности умножим это число на приближенное значение $\pi \approx 3,14$ и получим 6,75 *м*. Если бы мы умножили на более точное значение, например на 3,141592, то получили бы 6,754422230. Однако последние 6 цифр нам придется отбросить, так как нельзя узнать длину окружности с точностью большей, чем до 1 *см*, если при измерении диаметра мы могли допустить ошибку около сантиметра.

Поэтому, чтобы не делать бесполезных вычислений, мы в приближенном значении удерживаем лишь те цифры, которые могут повлиять на второй знак после запятой.

Напомним, как производятся операции над действительными числами.

Если действительное число α определяется последовательностями $\{a_n;\ a'_n\}$, а число β — последовательностями $\{b_n;\ b'_n\}$, то можно доказать, что последовательности $\{a_n + b_n;\ a'_n + b'_n\}$ тоже сходящиеся.

Действительно,

1) так как $a_n \leqslant a'_n$, $b_n \leqslant b'_n$, то $a_n + b_n \leqslant a'_n + b'_n$;

2) если $a_{n+1} \geqslant a_n$, $b_{n+1} \geqslant b_n$, то $a_{n+1} + b_{n+1} > a_n + b_n$ и также $a'_{n+1} + b'_{n+1} \leqslant a'_n + b'_n$;

3) если ε какое угодно положительное число, то при достаточно большом n будем иметь: $a'_n - a_n < \frac{\varepsilon}{2}$ и $b'_n - b_n < \frac{\varepsilon}{2}$, но тогда $(a'_n + b'_n) - (a_n + b_n) < \varepsilon$.

Число, определяемое последовательностями $\{a_n + b_n;\ a'_n + b'_n\}$, называется с у м м о й чисел α и β и обозначается $\alpha + \beta$. Иначе, для получения приближенного значения суммы мы должны сложить два приближенных значения чисел по недостатку и два соответствующих приближенных значения чисел по избытку.

Из самого определения суммы легко доказываются законы сложения: п е р е м е с т и т е л ь н ы й $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ и с о ч е т а т е л ь н ы й $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$, а также правило сложения с нулем: $\alpha + 0 = \alpha$.

Для определения о т р и ц а т е л ь н о г о ч и с л а поступаем следующим образом. Пусть число α определяется последовательностями с положительными членами $\{a_n;\ a'_n\}$. Изменим у всех этих чисел знаки на обратные и сами последовательности поменяем местами. Тогда получим последовательности $\{-a'_n;\ -a_n\}$, которые, как нетрудно убедиться, по-прежнему удовлетворяют условиям сходимости. Определяемое ими число назовем п р о т и в о п о л о ж н ы м по знаку числу α и обозначим $-\alpha$.

Два взаимно противоположных числа дают в сумме нуль.

Действительно, их сумма определяется последовательностями $\{a_n - a'_n;\ a'_n - a_n\}$. Но первая последовательность, очевидно, состоит из чисел отрицательных, а вторая — из чисел положительных. Такими последовательностями может определяться только нуль, поэтому $\alpha + (-\alpha) = 0$. Вычитание действительных чисел определяется как сложение уменьшаемого с числом, противоположным вычитаемому:

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta).$$

Отсюда непосредственно следует применимость основной формулы вычитания к действительным числам $\alpha - \beta + \beta = \alpha$, так как $\alpha - \beta + \beta = \alpha + (-\beta) + \beta = \alpha + 0 = \alpha$.

Таким образом, все законы действий 1-й ступени остаются в силе для действительных чисел.

8. Аналогично определяются действия 2-й ступени с действительными числами. Рассмотрим пока последовательности с положительными числами. Пусть α определяется последовательностями $\{a_n;\ a'_n\}$, β определяется последовательностями $\{b_n;\ b'_n\}$.

Последовательности $\{a_nb_n;\ a'_n b'_n\}$ удовлетворяют условиям сходимости:

1) $a_n \leqslant a'_n$, $b_n \leqslant b'_n$, поэтому $a_nb_n \leqslant a'_nb'_n$.

2) $a_{n+1} \geqslant a_n$, $b_{n+1} \geqslant b_n$, следовательно, $a_{n+1}b_{n+1} \geqslant a_nb_n$ и также $a'_{n+1}\ b'_{n+1} \leqslant a'_n b'_n$.

3) $a'_n b'_n - a_nb_n = a'_n b'_n - a'_nb_n + a'_nb_n - a_nb_n = a'_n\left(b'_n - b_n\right) + {}$ $+ b_n\left(a'_n - a_n\right)$.

Всегда существует число N, удовлетворяющее неравенствам $N > a'_n$, $N > b_n$. Если ε — любое положительное число, то при достаточно большом n мы можем получить:

$$a'_n - a_n < \frac{\varepsilon}{2N};\ b'_n - b_n < \frac{\varepsilon}{2N}.$$

Тогда найдем: $a'_n b'_n - a_nb_n < \dfrac{\varepsilon}{2N} N + \dfrac{\varepsilon}{2N} N = \varepsilon$,

$$\text{или } a'_n b'_n - a_nb_n < \varepsilon.$$

Число, определяемое последовательностями $\{a_nb_n;\ a'_n b'_n\}$, *называется* ***произведением*** *чисел* α *и* β *и записывается* $\alpha\beta$.

Из определения произведения легко доказываются формулы:

1) переместительного закона: $\alpha\beta = \beta\alpha$,
2) сочетательного закона: $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$,
3) распределительного закона: $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$,
4) умножения на единицу: $\alpha \cdot 1 = \alpha$.

При умножении положительных и отрицательных действительных чисел сохраняются те же правила знаков, как и при умножении рациональных чисел.

Пусть теперь мы имеем число α, определяемое последовательностями с положительными членами $\{a_n;\ a'_n\}$. Заменим в этих последовательностях каждое число обратным числом и сами последовательности поменяем местами. Тогда получим последовательности $\left\{\frac{1}{a'_n};\ \frac{1}{a_n}\right\}$, по-прежнему удовлетворяющие условиям сходимости:

1) $a'_n \geqslant a_n$, поэтому $\frac{1}{a'_n} \leqslant \frac{1}{a_n}$.

2) $a_{n+1} \geqslant a_n$; $\frac{1}{a_{n+1}} \leqslant \frac{1}{a_n}$; также $\frac{1}{a'_{n+1}} \geqslant \frac{1}{a'_n}$.

3) $\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a'_n} = \frac{a'_n - a_n}{a_n a'_n}$.

Возьмем число N, удовлетворяющее неравенству $N > \frac{1}{a_n a'_n}$ и пусть ε — любое положительное число; при достаточно большом n будем иметь: $a'_n - a_n < \frac{\varepsilon}{N}$; тогда $\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a'_n} < N \cdot \frac{\varepsilon}{N}$,

$$\text{т. е. } \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a'_n} < \varepsilon.$$

Число, определяемое последовательностями $\left\{\frac{1}{a'_n};\ \frac{1}{a_n}\right\}$, назовем обратным числу α и обозначим $\frac{1}{\alpha}$.

Произведение двух взаимнообратных чисел равно единице.

Рассмотрим последовательности, определяющие произведение $\alpha \cdot \frac{1}{\alpha}$. Это будут последовательности $\left\{\frac{a_n}{a'_n};\ \frac{a'_n}{a_n}\right\}$. Числа первой последовательности не больше единицы, числа второй — не меньше единицы. Поэтому последовательности определяют единицу: $\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1$. Деление действительных чисел мы определяем как умножение делимого на число, обратное делителю: $\alpha : \beta = \alpha \cdot \frac{1}{\beta}$.

Отсюда непосредственно следует справедливость основной формулы деления: $\alpha : \beta \cdot \beta = \alpha$, так как $\alpha : \beta \cdot \beta = \alpha \cdot \frac{1}{\beta} \cdot \beta = \alpha \times \times 1 = \alpha$.

Итак, все законы действий 2-й ступени остаются в силе для действительных чисел.

9. Мы не будем дальше останавливаться на изложении теории действительного числа (например, на определении действий 3-й ступени). Приведенные выводы дают нам достаточное представление о характере и методе изложения.

При проведении занятий в классе все эти теоретические положения должны быть разъяснены большим числом конкретных числовых примеров, сами учащиеся должны проделать достаточное число упражнений с действительными числами.

Особенное внимание нужно обратить на следующее:

1) Хотя последовательности, определяющие действительное число, могут состоять из каких угодно рациональных чисел, но удобнее всего пользоваться десятичными дробями. Всякое рациональное число можно представить в виде десятичной дроби, конечной или бесконечной (конечную десятичную дробь всегда можно рассматривать как периодическую с периодом нуль). Если в этой дроби сохранить лишь часть десятичных знаков, а остальные откинуть, то получим *приближенное значение числа по недостатку*, если мы в этом приближенном значении увеличим последнюю цифру на единицу, то получим *приближенное значение этого числа по избытку*.

2) Обратно, мы установили, что всегда можно найти, из какого рационального числа получилась данная периодическая дробь. Из этого мы заключаем, что последовательности, образуемые периодическими дробями, всегда определяют рациональное число. Наоборот, *десятичные дроби, определяющие иррациональное число, будут всегда непериодическими.*

3) Результатом действий сложения, вычитания, умножения и деления над иррациональными числами могут быть *какие угодно действительные числа, как иррациональные, так и рациональные.*

4) Произведя вычислительные операции с приближенными значениями действительных чисел, учащиеся должны уметь оценить *степень точности* полученных результатов. Это очень легко получить из формул, определяющих соответствующие действия. Например, при сложении степень точности суммы равна сумме степеней точности слагаемых:

$$(a'_n + b'_n) - (a_n + b_n) = (a'_n - a_n) + (b'_n - b_n).$$

При умножении точность произведения определяется формулой:

$$a'_n\ b'_n - a_n b_n = b'_n(a'_n - a_n) + a_n(b'_n - b_n) \text{ и т. д.}$$

10. Рассмотрим теперь последовательности *каких угодно* действительных чисел $\{\alpha_n;\ \alpha'_n\}$, удовлетворяющих условиям сходимости:

1) $\alpha_p \leqslant \alpha'_q$; 2) $\alpha_{n+1} \geqslant \alpha_n$; $\alpha'_{n+1} \leqslant \alpha'_n$.

3) Для любого положительного ε всегда найдется такое n, что будет удовлетворяться неравенство: $\alpha'_n - \alpha_n < \varepsilon$.

Докажем, что существует единственное действительное число α, удовлетворяющее неравенствам:

$$\alpha_n \leqslant \alpha \leqslant \alpha_{n+1} \text{ для любого } n.$$

Согласно определению неравенства действительных чисел между каждыми двумя различными действительными числами существует рациональное число. Обозначим через a_k рациональное число, удовлетворяющее неравенствам: $\alpha_k \leqslant a_k \leqslant \alpha_{k+1}$, а через a'_k — рациональное число, удовлетворяющее неравенствам: $\alpha'_k \geqslant a'_k \geqslant \alpha'_{k+1}$.

Поместим теперь между каждыми двумя числами последовательностей $\{\alpha_n; \alpha'_n\}$ рациональное число, удовлетворяющее этим неравенствам, и получим последовательности рациональных чисел $\{a_n; a'_n\}$. Полученные последовательности сходящиеся. Действительно, из наших неравенств и из свойств последовательностей $\{\alpha_n; \alpha'_n\}$ следует:

1) $a_p \leqslant a'_q$ для любых p и q.

2) $a_{n+1} \geqslant a_n$; $a'_{n+1} \leqslant a'_n$.

3) Положим теперь, что для данного положительного числа ε найдено такое n, для которого удовлетворяется неравенство: $\alpha'_n - \alpha_n < \varepsilon$. Вместе с тем мы имеем неравенства: $a'_n \leqslant \alpha'_n$ и $a_n \geqslant \alpha_n$. Вычитая второе неравенство из первого, получим:

$$a'_n - a_n \leqslant \alpha'_n - \alpha_n < \varepsilon.$$

Итак, последовательности $\{a_n; a'_n\}$ сходящиеся. Определяемое ими действительное число α удовлетворяет неравенствам $a_n \leqslant \alpha \leqslant a'_n$ при любом n. Но так как $a_n \geqslant \alpha_n$, $a'_n \leqslant \alpha'_n$, то это же число α удовлетворяет и неравенствам $\alpha_n \leqslant \alpha \leqslant \alpha'_n$, тоже для любого n.

Полученное число α единственное. Действительно, допустив, что существует другое число β (положим $\beta > \alpha$), удовлетворяющее тем же неравенствам: $\alpha_n \leqslant \beta \leqslant \alpha'_n$, получим путем почленного вычитания неравенств $\alpha'_n \geqslant \beta$ и $\alpha_n \leqslant \alpha$, что $\alpha'_n - \alpha > \beta - \alpha$ при любом n. Но это противоречит условию возможности найти такое n, при котором разность $\alpha'_n - \alpha_n$ будет меньше любого положительного числа.

Таким образом, *последовательности любых действительных чисел, удовлетворяющие условиям сходимости, определяют единственное действительное число.*

Доказанное предложение имеет весьма большое значение в теории измерения геометрических величин. Дело в том, что последовательности, которыми определяются меры этих величин, являются, вообще говоря, последовательностями произвольных действительных чисел, не обязательно рациональных. Таковы, например, последовательности периметров правильных вписанных и описанных многоугольников при определении длины окружности, когда эти периметры выражаются в частях радиуса.

11. Изучение теории действительных чисел должно сопровождаться решением достаточного числа примеров и задач. Прежде всего нужно, чтобы учащиеся хорошо справлялись с обращением обыкновенных дробей в периодические и обратно. При этом важно отметить следующее: довольно часто учащиеся, не замечая никакой закономерности в чередовании десятичных знаков, приходят к поспешному выводу, что данное число иррациональное. Надо сказать, что на такой ход мыслей наталкивали и упражнения, помещенные в старых изданиях стабильного задачника. Чтобы предотвратить подобные заблуждения, полезно показать учащимся периодические дроби с длинными периодами. Например, период дроби $\frac{1}{17}$ содержит 16 знаков, период дроби $\frac{1}{19}$ — 18 знаков и т. д.

Вместе с тем необходимо указать, что по внешнему виду десятичной дроби, хотя бы и с многоточием в конце ее, нельзя судить о природе числа, которое эта дробь изображает, и еще раз напомнить, что характер числа можно установить лишь специальным исследованием. Полезно также ставить специальные вопросы, подобные следующим:

1) *Может ли сумма двух иррациональных чисел быть числом рациональным?*

2) *Может ли произведение двух иррациональных чисел быть числом рациональным?*

3) *Каким числом будет сумма рационального и иррационального чисел?*

4) *Каким числом будет произведение рационального числа на иррациональное?*

Очень полезны упражнения такие, как доказательства некоторых предложений, приведённых в данном параграфе. Например, можно предложить самостоятельно доказать предложение о сходимости последовательностей, определяющих сумму или произведение действительных чисел.

Приведем еще несколько примеров упражнений.

5) *Последовательности* $\{a_n;\ a'_n\}$ *определяют число* α. *Удалим из этих последовательностей все члены, находящиеся на четных местах. Будут ли последовательности оставшихся членов сходящимися? Какое они определяют число?*

6) *Последовательности рациональных чисел* $\{a_n;\ a'_n\}$ *определяют число* α. *Какое число определяют последовательности* $\{ka_n;\ ka'_n\}$, *где* k *— рациональное число?*

7) *Доказать, что сходящиеся последовательности* $\{a_n;\ a'_n\}$, *где* $a_n^2 < 5$ и $a'^2_n > 5$, *определяют иррациональное число, квадрат которого равен* 5 *и которое поэтому можно обозначить символом* $\sqrt{5}$.

8) *Дана смешанная периодическая дробь, содержащая* m *десятичных знаков после запятой до периода и* n *десятичных знаков в периоде. Вывести и обосновать правило преобразования этой дроби в равную ей обыкновенную.*

9) *Доказать, что если целое число a не есть n-я степень другого целого числа, то $\sqrt[n]{a}$ есть число иррациональное.*

10) *Доказать, что десятичный логарифм числа 3 есть число иррациональное.*

§ 3. Измерение длины

12. Перед тем как перейти к вопросу об измерении длины отрезка, необходимо предварительно показать, что отрезки обладают всеми свойствами скалярной аддитивной непрерывной величины. Одновременно с этим припоминаем те элементарные операции, которые производятся над отрезками: сравнение отрезков, сложение и вычитание отрезков, умножение отрезка на целое число, деление отрезка на равные части. Последние две операции указывают на возможность умножения отрезка на любое рациональное число $\frac{m}{n}$.

Для выполнения этой операции делим отрезок на n равных частей и таких частей берем m.

Нетрудно также показать, что умножение отрезка на рациональное число подчиняется сочетательному закону и двум распределительным законам:

$$p(q\bar{a}) = (pq)\bar{a},$$
$$(p+q)\bar{a} = p\bar{a} + q\bar{a},$$
$$p(\bar{a}+\bar{b}) = p\bar{a} + p\bar{b}.$$

В этих формулах символами p и q обозначены рациональные числа, символами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ обозначены отрезки. Формулы эти доказываются сначала для целых чисел, а потом для дробных.

Наконец, припоминаем аксиомы непрерывности Архимеда и Г. Кантора для отрезков. Эти аксиомы в общем виде были уже сформулированы в параграфе 1. Аксиомы непрерывности для отрезков нужно проиллюстрировать простыми и наглядными примерами.

13. Для определения м е р ы д л и н ы отрезков выбираем прежде всего некоторый постоянный отрезок, мера длины которого принимается за единицу. Если нанести на линейке единичные деления, то получим м а с ш т а б н у ю л и н е й к у.

Для получения меры длины отрезка $\overline{MN}$ (рис. 1) накладываем на него масштабную линейку и считаем число единичных делений, которые всеми своими точками принадлежат отрезку. Полученное число дает приближенное значение меры длины п о н е д о с т а т к у (a_0). Одновременно считаем число единичных делений, которые

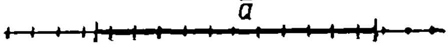


Рис. 1

хотя бы одной точкой принадлежат отрезку. Это число дает приближенное значение меры длины п о и з б ы т к у (a'_0).

После этого мы делим единичные деления на 10 равных частей и вновь производим такой же подсчет. В результате мы получим приближенные значения меры длины по недостатку и по избытку с большей степенью точности. Далее мы делим каждую десятую долю вновь на 10 равных частей и вновь производим такой подсчет. В результате мы получим последовательности $\{a_n; a'_n\}$, удовлетворяющие всем условиям сходимости. Действительно:

1) a_n не может быть больше a'_n в силу определения, так как деления a_n находятся внутри отрезка $\overline{MN}$, а деления a'_n его перекрывают.

2) При дроблении единичных отрезков на более мелкие доли a_n может только увеличиваться, а a'_n может только уменьшаться.

3) $a'_0 - a_0 \leqslant 2$; $a'_1 - a_1 \leqslant 0{,}2$; $a'_2 - a_2 \leqslant 0{,}02$, ... , так как каждый конец отрезка может оказаться между соседними делениями.

Полученное действительное число a и называется м е р о й д л и н ы о т р е з к а.

Это число не зависит от способа наложения масштабной линейки (или, что все равно, от способа наложения отрезка на линейку).

Положим, что при каком-нибудь другом способе наложения мы получим последовательности $\{b_n; b'_n\}$, определяющие число b. Так как a_n дает число отрезков, целиком помещающихся внутри данного, b'_n дает число таких же отрезков, покрывающих данный, то $a_n \leqslant b'_n$. И точно так же $b_n \leqslant a'_n$. Но тогда в силу основной теоремы $b = a$. Этим же доказывается и то, что равные отрезки имеют и равные меры длины.

Покажем теперь, что *мера длины суммы отрезков равна сумме мер их длин.*

14. Пусть мы имеем $\overline{a} + \overline{b} = \overline{c}$ (рис. 2), причем мера длин отрезков равна соответственно a, b и c. Наложим на них масштабную линейку и уже известным методом произведем подсчет делений.

В результате мы получим последовательности $\{a_n; a'_n\}$, $\{b_n; b'_n\}$, $\{c_n; c'_n\}$, определяющие числа a, b и c.

Обратим внимание, что для чисел последовательностей будут иметь место неравенства: $a_n + b_n \leqslant c_n \leqslant a'_n + b'_n$.

Такие неравенства могут получиться потому, что деление, на котором лежит общий конец отрезков, $\overline{a}$ и $\overline{b}$, в сумме $a_n + b_n$

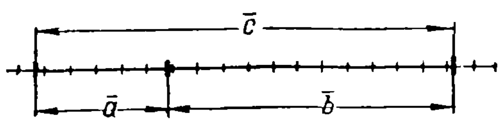


Рис. 2

не считается, а в сумме $a'_n + b'_n$ считается дважды, в числах же c_n и c'_n оно считается по одному разу. В силу этих неравенств мы можем к последовательностям $\{c_n; c'_n\}$ и $\{a_n + b_n; a'_n + b'_n\}$ применить основную теорему и получить $a + b = c$.

Таким образом, мы видим, что мера длины отрезка удовлетворяет всем условиям, каким должна удовлетворять мера величины.

15. Нужно также показать, что и обратно, если дано некоторое действительное число a и единица длины $\bar{l}$, то всегда можно найти отрезок $\bar{a}$, имеющий мерой длины данное число a. Если a — рациональное число, т. е. $a = \frac{m}{n}$, где m и n — натуральные числа, то достаточно разделить $\bar{l}$ на n равных частей и такую часть повторить слагаемым m раз.

Пусть теперь a есть иррациональное число, заданное десятичными последовательностями $\{a_n; a'_n\}$.

Будем тогда на некоторой прямой от данной точки 0 в одном и том же направлении откладывать отрезки длиной $a_0, a_1, \ldots a_n \ldots$ а также отрезки длиной $a'_0, a'_1, \ldots, a'_n, \ldots$.

Если концы этих отрезков обозначим соответственно буквами $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ и $A'_0, A'_1, A'_2, \ldots A'_n, \ldots$, то легко убедиться, что отрезки $\overline{A_0A'_0}, \overline{A_1A'_1}, \overline{A_2A'_2}, \ldots, \overline{A_nA'_n}, \ldots$ представляют собой систему вложенных стягивающихся отрезков, удовлетворяющих условиям аксиомы Кантора. Эта система определяет единственную точку A, являющуюся концом отрезка $\overline{OA} = \bar{a}$, имеющего меру длины a.

Действительно, если мы будем измерять длину $\overline{OA}$, совместив нулевую точку масштабной линейки с точкой 0, то в процессе измерения мы получим те же последовательности $\{a_n; a_n'\}$, определяющие число a. Но уже было указано, что это же число мы получим и при любом другом способе наложения масштабной линейки.

Этим доказано, что между точками числовой оси и действительными числами можно установить взаимно однозначное соответствие.

16. Операция получения из единичного отрезка $\bar{l}$ отрезка $\bar{a}$, имеющего данную меру длины — действительное число a, называется *умножением отрезка $\bar{l}$ на действительное число a*. А так как в качестве единицы длины можно взять любой отрезок, то этим же определена операция умножения всякого отрезка (а также и вектора) на действительное число.

Докажем теперь следующие предложения:

Теорема 1. *Если отрезок $\bar{a}$ с мерой длины a умножить на действительное число k, то получим новый отрезок $k\bar{a}$, мера длины которого будет равна ka.*

Другими словами, при умножении отрезка на действительное число мера длины его умножается на то же число.

Доказательство основано на том, что сумма отрезков соответствует сумме их мер длины. Поэтому если мы отрезок $\bar{a}$ умножим на натуральное число m, то получим:

$$\underbrace{m\bar{a}=\bar{a}+\bar{a}+\ldots+\bar{a}.}_{m \text{ раз}}$$

Но тогда и для меры длины получим:

$$\underbrace{a+a+\ldots+a}_{m \text{ раз}}=ma.$$

Если отрезок $\bar{a}$ разделить на n равных частей, то получим:

$$\underbrace{\frac{\bar{a}}{n}+\frac{\bar{a}}{n}+\ldots+\frac{\bar{a}}{n}}_{n \text{ раз}}=\bar{a}.$$

Значит, мера длины каждой части $\frac{\bar{a}}{n}$ такова, что, будучи повторена слагаемым n раз, дает число a. Следовательно, мера длины отрезка $\frac{\bar{a}}{n}$ равна $\frac{a}{n}$.

Непосредственно отсюда следует, что при умножении $\bar{a}$ на рациональное число $\frac{m}{n}$ (где m и n — натуральные числа) получим отрезок $\frac{m}{n}\bar{a}$ с мерой длины $\frac{m}{n}a$.

Пусть, наконец, иррациональное число k определено последовательностями рациональных чисел $\{k_n;\ k'_n\}$. Откладывая от постоянной точки 0 на прямой в одном и том же направлении отрезки $\overline{OA_0}, \overline{OA_0'}$ с мерой длины k_0a и k'_0a, далее отрезки $\overline{OA_1}$ и $\overline{OA'_1}$ с мерой длины k_1a и k'_1a, отрезки $\overline{OA_2}$ и $\overline{OA'_2}$ с мерой длины k_2a и $k'_2a, \ldots$, отрезки $\overline{OA}$ и $\overline{OA'_n}$ с мерой длины k_na и $k'_na, \ldots$ и т. д., мы вновь получим систему вложенных стягивающихся отрезков $\overline{A_0A_0'}, \overline{A_1A_1'}, \overline{A_2A_2'}, \overline{A_3A_3'}, \ldots, \overline{A_nA_n'}, \ldots$, которыми определяется единственная точка A. Отрезок $\overline{OA}$ есть результат умножения отрезка $\bar{a}$ на число k, и вместе с тем мера длины его определяется последовательностями $\{k_na;\ k_n'a\}$, которые дают число ka — меру длины полученного отрезка.

Положим теперь, что фигура рисунка 1, которой мы пользовались при определении меры длины отрезка, преобразуется в новую фигуру подобием с коэффициентом k. Тогда единица длины $\bar{l}$ преобразуется в отрезок $k\bar{l}$, а измеряемый отрезок a — в новый отрезок $k\bar{a}$. Вместе с тем если мы будем измерять отрезок $k\bar{a}$ новой единицей $k\bar{l}$, то мы, очевидно, получим те же последовательности $\{a_n;\ a_n'\}$, так как на рисунке 1 по существу ничего не изменится, и, значит, мера длины отрезка $k\bar{a}$ при единице длины $\overline{kl}$ будет равна a.

В то же время, как уже было доказано, при единице $\bar{l}$ длина этого же отрезка равна ka. Итак, мы получили предложение:

Теорема 2. *Если единицу длины $\bar{l}$ заменить новой единицей $\overline{kl}$, то меры длины всех отрезков умножатся на число* $\frac{1}{k}$.

Предложение это совершенно очевидно для простейших случаев: например, если расстояние между двумя точками в сантиметрах выражается числом 973, то это же расстояние в метрах выразится числом 9,73.

17. Определение. *Отношением двух скалярных непрерывных аддитивных величин называется частное от деления меры одной величины на меру другой.*

В частности, из этого определения следует, что мера длины отрезка есть ни что иное, как отношение этого отрезка к отрезку, принятому за единицу длины.

Из доказанных выше теорем 1 и 2 следует:

Отношение двух отрезков не зависит от выбора единицы длины.

Действительно, положим, что отрезки $\bar{a}$ и $\bar{b}$ при единице длины $\bar{l}$ имели соответственно меры a и b. Тогда отношение их выразится формулой: $\frac{\bar{a}}{\bar{b}} = \frac{a}{b}$.

При новой единице длины $\overline{kl}$ меры длины тех же отрезков выразятся числами $\frac{a}{k}$ и $\frac{b}{k}$, а потому отношение отрезков выразится формулой:

$$\frac{\bar{a}}{\bar{b}} = \frac{a}{k} : \frac{b}{k} = \frac{a}{b},$$

т. е. сохранилось прежнее числовое значение отношения.

Необходимо обратить внимание на то, что предложения, сформулированные в теоремах 1 и 2, остаются в силе не только для отрезков, но и для любых скалярных аддитивных непрерывных величин. Для доказательства этих теорем мы, в сущности, опирались только на следующие предпосылки:

1) При выбранной единице меры каждому элементу данного множества однозначно соответствует действительное число — мера этого элемента.

2) Сумме двух элементов соответствует сумма их мер.

Поэтому при дальнейшем изложении теории измерения площадей и объемов мы не будем повторять всех этих рассуждений и предполагать эти предложения доказанными. Впрочем, для упражнения учащихся им можно предложить, внося соответствующие изменения, доказать предложение о постоянстве отношения двух величин.

18. Применим теперь метод последовательных приближений к отысканию длины выпуклой и гладкой кривой. Кривая называется

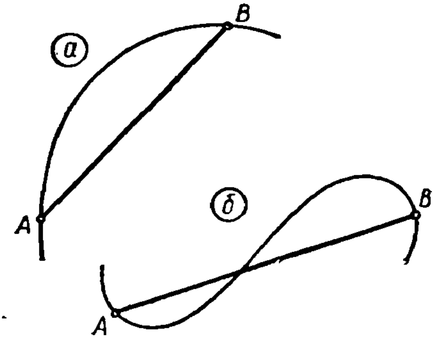


Рис. 3

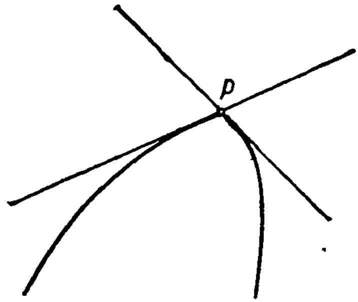


Рис. 4

выпуклой, если отрезок, соединяющий две ее любые точки, других общих точек с этой кривой не имеет. Например, на рисунке 3, a показана выпуклая, а на рисунке 3, b, — невыпуклая кривая.

Кривая называется гладкой, если в каждой ее точке существует единственная касательная. На рисунке 3 изображены гладкие кривые. На рисунке 4 изображена негладкая кривая, так как в точке P она имеет две касательные. Заметим, что известные нам из курса алгебры и геометрии кривые — окружность, парабола и гипербола являются выпуклыми и гладкими кривыми, и потому к ним применимы все дальнейшие выводы о длине кривой.

Рассмотрим дугу AB выпуклой гладкой кривой (рис. 5) и найдем ее длину. Для этого разделим дугу $\breve{AB}$ на n частей и, со-

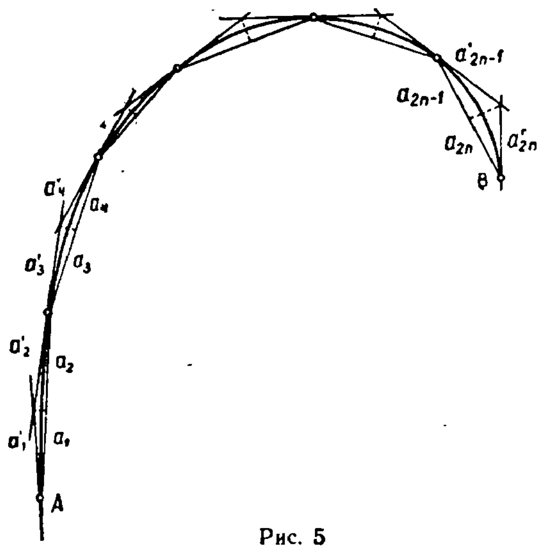


Рис. 5

единив последовательно точки деления, получим ломаную линию, вписанную в дугу AB. Если же через точки деления проведем касательные к дуге, то получим ломаную, описанную около дуги AB. Обозначим через a_1', a_2', ..., a_{2n}' длины отрезков касательных от вершин вписанной ломаной до точки касания, а через a_1, a_2, ..., a_{2n} — длины проекций отрезков этой ломаной на звенья вписанной ломаной. Тогда периметр P_n' описанной ломаной выразится формулой: $P_n' = a_1' + a_2' + \dots + a_{2n}'$, а периметр P_n вписанной — формулой $P_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{2n}$.

Если неограниченно увеличивать число n, вводя новые точки деления, притом так, чтобы длина каждого звена в обеих ломаных могла стать меньше длины любого данного отрезка, то последовательности $\{P_n;\ P_n'\}$ будут удовлетворять условиям сходимости.

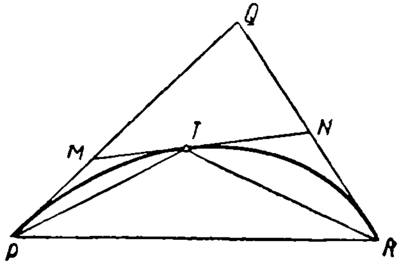


Рис. 6

Действительно, мы имеем:

1) $P_n < P_n'$, так как $a_k' + a_{k+1}' > a_k + a_{k+1}$ в силу того, что сумма двух сторон треугольника больше третьей стороны (см. рис. 6, на котором отдельно показана одна из дуг кривой вместе с соответствующими частями ломаных).

2) При увеличении n периметр P_n увеличивается (на рис. 6 вместо отрезка PR берется ломаная PTR), а периметр P_n' уменьшается (на рис. 6 ломаная MQN заменяется отрезком MN).

3) Для оценки разности $P_n' - P_n$ при неограниченном увеличении n заметим, что $a_k = a_k' \cos \alpha_k$, где α_k есть угол между касательной и хордой ($k = 1, 2, \dots, 2n$). Поэтому

$$P_n = a_1' \cos\alpha_1 + a_2' \cos\alpha_2 + \dots + a_{2n}' \cos\alpha_{2n}.$$

Заменяя в этом равенстве все углы α_k наибольшим из них, который обозначим через α (мы этим уменьшим правую часть равенства, так как при увеличении острого угла косинус его уменьшается), мы получим:

$P_n > (a_1' + a_2' + \dots + a_{2n}')\cos\alpha$, или $P_n < P_n' \cos\alpha$. Отсюда находим: $P_n' - P_n < P_n' - P_n' \cos\alpha$, или $P_n' - P_n < P_n'(1 - \cos\alpha)$, т. е.

$$P_n' - P_n < 2P_n' \sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Ввиду того что при увеличении n периметр P_n' уменьшается, угол α между касательной и хордой стремится к нулю, мы можем для данного положительного числа ε взять n настолько большим, чтобы одновременно выполнялись неравенства: $2P_n' < N$, $\sin^2\frac{\alpha}{2} < \frac{\varepsilon}{N}$. Тогда мы получим: $P_n' - P_n < N\frac{\varepsilon}{N}$, или $P_n' - P_n < \varepsilon$.

Итак, все условия сходимости выполнены и последовательности $\{P_n;\ P_n'\}$ определяют действительное число s, которое по определению принимают за меру длины дуги кривой.

Полученное число обладает следующими свойствами:

1) *Оно не зависит от способа разбиения дуги на части, лишь бы при неограниченном увеличении n длина каждого звена обеих ломаных стремилась к нулю.*

Действительно, положим, что при другом разбиении дуги получим последовательности $\{Q_n;\ Q_n'\}$, которые также будут сходящимися и которыми определится число s'. Имея в виду, что периметр объемлемой выпуклой ломаной линии всегда меньше периметра объемлющей, мы получим неравенства: $Q_n < P_n'$ и $Q_n' > P_n$. В силу основной теоремы отсюда следует, что $s' = s$.

2) *Равные дуги имеют равные меры длины.* Это утверждение справедливо потому, что в эти дуги можно вписать и около них описать соответственно равные ломаные.

3) *Если кривая состоит из нескольких выпуклых и гладких частей, то ее длина равна сумме длин составляющих ее частей.*

4) *Если две кривые подобны между собой, то отношение их длин равно коэффициенту подобия.* Действительно, если мера длины s первой кривой определяется последовательностями $\{P_n;\ P_n'\}$, то вписывая во вторую кривую и описывая около нее соответственно подобные ломаные, мы увидим, что мера длины этой кривой определяется последовательностями $\{kP_n;\ kP_n'\}$, где k — коэффициент подобия, следовательно, она равна ks. Отсюда, в частности, следует, что длины двух окружностей относятся друг к другу как их диаметры: $\frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$ или $\frac{C}{D} = \frac{C'}{D'}$,

т. е. отношение длины окружности к длине диаметра есть число постоянное. Таким образом мы получим определение числа π и известные формулы: $C = \pi D$, $C = 2\pi R$.

19. В качестве примера приложения теории измерения длины кривой можно предложить учащимся вычислить отношение длины окружности к длине диаметра. Обычно для этого пользуются так называемым методом Архимедовых периметров, который заключается в том, что в окружность вписывают и одновременно около нее описывают одноименные правильные многоугольники. Принимая диаметр окружности за единицу, вычисляют периметр вписанного и периметр описанного многоугольников, получая этим самым приближенное значение числа π по недостатку и по избытку. Далее, применяя формулу удвоения, находят периметры вписанного и описанного многоугольников с удвоенным числом сторон и вновь находят два приближенных значения этого же числа π с большей степенью точности. Продолжая далее этот процесс, мы можем получить число π с достаточно большим числом десятичных знаков. Метод Архимедовых периметров описан в большинстве учебников.

Гораздо менее известен другой метод вычисления π, известный под названием м е т о д а и з о п е р и м е т р о в. Заключается он в следующем.

Впишем в окружность правильный n-угольник и путем деления пополам каждой из полученных дуг построим правильный вписанный $2n$-угольник. Соединяя последовательно середины сторон этого $2n$-угольника, мы получим новый $2n$-угольник, *периметр которого равен периметру первоначального n-угольника.*

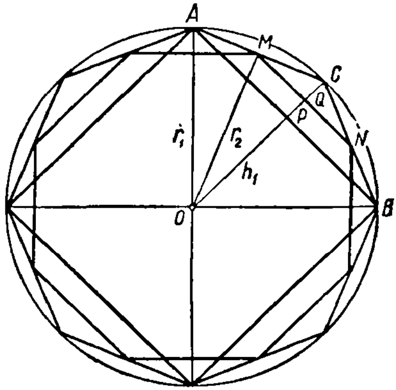


Рис. 7

Например, на рисунке 7 в окружность вписан квадрат со стороной $\overline{AB}$. Путем удвоения из него получен правильный восьмиугольник со стороной $\overline{AC}$. Наконец, соединяя середины сторон этого восьмиугольника, мы получим новый восьмиугольник со стороной $\overline{MN}$. Отрезок $\overline{MN}$ есть средняя линия в треугольнике ABC, поэтому $\overline{MN} = \frac{AB}{2}$. Итак, каждая сторона восьмиугольника равна половине стороны квадрата, но число сторон восьмиугольника вдвое больше числа сторон квадрата. Поэтому периметр квадрата равен периметру нового восьмиугольника. Очевидно, это же рассуждение мы можем применить к любому правильному n-угольнику.

Опишем теперь около нового $2n$-угольника окружность и путем деления дуг пополам построим вписанный $4n$-угольник. Соединяя последовательно середины его сторон, получим новый $4n$-угольник с периметром, равным периметру $2n$-угольника, а значит, и периметру первоначального n-угольника. Неограниченно продолжая этот процесс, мы можем получить правильный многоугольник со сколь угодно большим числом сторон, причем периметр этого многоугольника будет по-прежнему равен периметру первоначального n-угольника.

Найдем формулы для последовательного вычисления радиусов и апофем в полученных многоугольниках с одинаковыми периметрами.

Обозначим через k_1 и r_1 меры длины апофемы и радиуса первого многоугольника, через k_2, r_2 меры длины апофемы и радиуса следующего многоугольника, ... через k_m, r_m меры длины апофемы и радиуса m-го многоугольника.

На рисунке 7 имеем: $k_1 = \overline{OP}$, $r_1 = \overline{OC}$, $k_2 = \overline{OQ}$, $r_2 = \overline{OM}$.

Так как MN — средняя линия треугольника ABC, то Q есть середина отрезка $\overline{PC}$, и значит,

$$\overline{OQ} = \frac{\overline{OP} + \overline{OC}}{2}, \text{ т. е. } k_2 = \frac{k_1 + r_1}{2}.$$

Далее из прямоугольного треугольника OMC мы находим, что катет $\overline{OM}$ есть средняя пропорциональная между гипотенузой $\overline{OC}$ и своей проекцией $\overline{OQ}$ на гипотенузу: $\overline{OM} = \sqrt{\overline{OC} \cdot \overline{OQ}}$, т. е.

$$r_2 = \sqrt{r_1 k_2}.$$

Очевидно, что совершенно такие же взаимоотношения мы получим между радиусами и апофемами $(m-1)$-го и m-го многоугольников:

$$k_m = \frac{k_{m-1} + r_{m-1}}{2}; \; r_m = \sqrt{r_{m-1} \cdot k_m}.$$

Числа k_m и r_m определяют последовательности $\{k_m; r_m\}$, которые удовлетворяют условиям сходимости. Мы имеем:

1) $k_m < r_m$, так как апофема правильного многоугольника меньше его радиуса.

2) $k_m > k_{m-1}$, так как k_m есть среднее арифметическое между k_{m-1} и большим числом r_{m-1}.

$r_m < r_{m-1}$, так как r_m есть среднее геометрическое между r_{m-1} и меньшим числом k_m.

3) $r_m - k_m < \frac{a_m}{2}$ (где a_m есть мера длины стороны правильного многоугольника), так как разность двух сторон треугольника меньше третьей стороны (на рис. 7 $\overline{OM} - \overline{OQ} < \overline{MQ}$). Но так как периметр многоугольника постоянный, а число сторон его неограниченно возрастает, то число $\frac{a_m}{2}$ может стать меньше любого положительного числа.

Итак, последовательности $\{k_m; r_m\}$ определяют действительное число — радиус предельной окружности, длина которой равна общему периметру всех многоугольников нашей последовательности.

Ввиду того что периметр исходного многоугольника мы можем выбрать по произволу и, в частности, сделать его равным какому-нибудь целому числу, выгоднее находить этим методом не число π, а число, ему обратное, $\frac{1}{\pi}$. В качестве исходного многоугольника выгодно взять квадрат с периметром, равным двум единицам длины.

Тогда число $\frac{1}{\pi}$ будет равно отношению полупериметра к полудиаметру, т. е. к радиусу, который получится в результате вычислений последовательностей $\{k_m;\ r_m\}$.

Порядок работы можно предложить такой:

1) Сначала доказать самостоятельно предложение о равенстве периметров n-угольника и $2n$-угольника.

2) Вывести формулу $k_2 = \frac{k_1 + r_1}{2}$.

3) Вывести формулу $r_2 = \sqrt{r_1 k_2}$.

После этого разбиваем класс на 5—6 бригад. Первой бригаде предложим в качестве домашнего задания вычислить k_2 и r_2, исходя из данных $k_1 = \frac{1}{4}$ и $r_1 = \frac{1}{4}\sqrt{2}$ (имея в виду, что первый многоугольник — квадрат с периметром 2). Вычисление производит каждый член бригады с 6—7 десятичными знаками, и результаты сверяются друг с другом. Первая бригада передает результаты второй, которая вычисляет k_3, r_3 с тем же числом десятичных знаков, и т. д. В последней бригаде получится результат: $\frac{1}{\pi} = 0{,}3183098..$

Следует обратить внимание на то, что процесс получения последовательностей $\{k_m;\ r_m\}$ есть частный случай открытого К. Ф. Гаусом процесса получения «арифметически-геометрического среднего».

§ 4. Измерение площадей

20. В теории измерения площадей мы должны установить:

1) В той фигуре, меру площади которой мы хотим найти, необходимо уметь отличать точки, принадлежащие фигуре, от точек, не принадлежащих фигуре (внутренние и внешние точки). Точки, принадлежащие г р а н и ц е фигуры, характеризуются тем, что сколь угодно близко к ним находятся как внутренние, так и внешние точки. Для тех фигур, площади которых приходится измерять в элементарной геометрии, т. е. для многоугольников, ограниченных замкнутой ломаной линией без самопересечений, для окружности, для фигур, ограниченных кривой линией тоже без самопересечений, критерий для отличия внутренних точек от внешних весьма простой. Он формулируется следующим правилом: если любой луч, выходящий из данной точки, пересекает контур фигуры н е ч е т н о е число раз, то точка в н у т р е н н я я, если же число пересечений ч е т н о е, то точка в н е ш н я я.

2) Необходимо установить е д и н и ц у измерения. В качестве единицы измерения площадей принимается площадь квадрата, сторона которого равна линейной единице.

Если каждую сторону единичного квадрата разделить на 10 равных частей и через точки деления провести прямые, параллельные сторонам, то единичный квадрат разделится на 100 равных квадратов и мера площади каждого из них будет равна $\frac{1}{100}$ квадратной единицы. С каждым из полученных квадратов мы вновь производим такое же дробление на 100 равных частей и получаем квадраты с мерой площади, равной 0,0001 *кв. ед.*, и т. д.

Представим теперь себе, что вся плоскость разбита на полосы при помощи параллельных прямых, проведенных друг от друга на расстоянии, равном линейной единице. Проведя вторую систему таких же параллельных перпендикулярно к первым и на таком же расстоянии друг от друга, мы разобьем всю плоскость на квадраты и получим единичную квадратную масштабную сетку. Более густую масштабную сетку можно было бы получить, проведя параллельные на расстоянии, равном 0,1 ед. длины, и т. д.

Примером такой масштабной сетки может служить обычная клетчатая бумага, постоянно применяемая в школьной практике. Еще лучший пример, который обязательно стоит показать учащимся, дает миллиметровая бумага, на которой имеется масштабная сетка с единичными квадратами со стороной в 1 *см* и дальнейшее десятичное дробление сетки на квадратики со стороной в 1 *мм*.

Если квадратную масштабную сетку нанести на кальке, стекле, целлофане, плексигласе или каком-нибудь другом прозрачном материале, то получим так называемую палетку—инструмент, являющийся двумерным аналогом масштабной линейки.

Необходимо, чтобы палетка была изготовлена каждым учащимся для себя. Проще всего на палетку скопировать сетку обычной клетчатой бумаги.

Для определения меры площади какой-нибудь фигуры мы наложим на эту фигуру квадратную масштабную сетку (рис. 8) и сосчитаем число квадратов сетки, которые всеми точками принадлежат фигуре, это дает приближенное значение меры площади по недостатку (S_0). Сосчитав одновременно число квадратов, которые хотя бы одной своей точкой принадлежат фигуре, мы получим приближенное значение меры площади по избытку (S_0'). После этого мы производим десятичное дробление сетки и повторяем тот же подсчет, в результате чего получаем новые приближенные значения S_1 и S_1'. Продолжая дальше этот процесс, мы получим последовательности $\{S_n; S_n'\}$. Если мы установим, что они удовлетворяют условиям сходимости, то определяемое ими число и будет мерой площади данной фигуры.

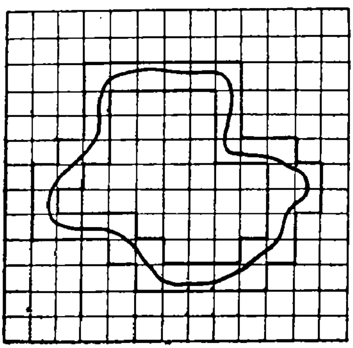


Рис. 8

Вслед за этим определением нужно познакомить учащихся с непосредственным измерением площади фигуры при помощи палетки. Предлагаем каждому учащемуся начертить фигуру, ограниченную произвольным криволинейным контуром, и, наложив на палетку, подсчитать число внутренних квадратов, т. е. определить число S_0. Для подсчета числа накрывающих квадратов достаточно к числу прибавить число квадратов, пересекаемых контуром фигуры, чем определяется число S_0'. Если мы хотим ограничиться этой степенью точности, то берем среднее арифметическое чисел S_0 и S_0', для чего достаточно к числу S_0 прибавить половину числа квадратов, пересекаемых контуром фигуры.

Подобные измерения стоит повторить несколько раз и взять среднее арифметическое всех полученных результатов.

Если бы возникла потребность произвести измерение с большей степенью точности, то для получения числа S_1 к числу S_0 пришлось бы прибавить число маленьких квадратиков, заполняющих промежуток между границей прежних внутренних квадратов и контуром фигуры, а для получения S_1' к числу S_1 нужно прибавить число маленьких квадратиков, пересекаемых контуром сетки, помня при этом, что площадь каждого из них равна $\frac{1}{100}$ *кв. ед.*

Такой способ измерения площадей иногда применяется при определении площади какого-нибудь участка на плане. Однако основной целью теории измерения площадей в элементарной геометрии является отыскание методов к о с в е н н о г о и з м е р е н и я и х, при котором измерение площадей приводится к измерению длин.

21. Рассмотрим прежде всего прямоугольник, стороны которого имеют меры длины a и b. Наложим на него масштабную сетку так, чтобы линии сетки были параллельны сторонам прямоугольника (рис. 9). Тогда число внутренних квадратов будет равно произведению a_0b_0, где a_0 и b_0 — приближенные значения a и b по недостатку, а число квадратов, накрывающих прямоугольник, будет $a_0' b_0'$, где a_0' и b_0' — приближенные значения по избытку.

Произведя десятичное дробление сетки, мы получим, что при n-ом приближении значение меры площади по недостатку будет $S_n = a_nb_n$, а по избытку $S_n' = a_n'b_n'$. Но по правилу умножения действительных чисел последовательности $\{a_nb_n, \quad a_n'b_n'\}$ определяют число ab, поэтому S — мера площади прямоугольника будет определяться формулой: $S = ab$.

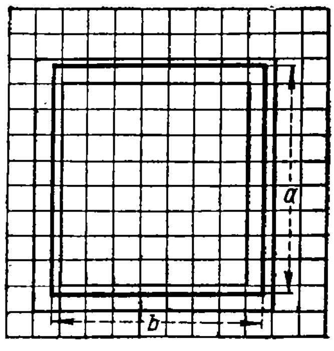


Рис. 9

При параллельном перенесении пря-

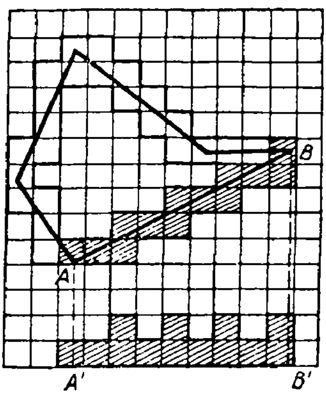


Рис. 10

моугольника по сетке это число не будет изменяться, так как меры длины a и b не изменяются от способа наложения масштабной линейки.

Рассмотрим теперь площадь произвольного многоугольника. Наложим на многоугольник масштабную сетку (рис. 10) и уже известным способом будем последовательно подсчитывать число квадратов S_n — внутренней и накрывающей области S_n'. Покажем, что последовательности $\{S_0; S_n'\}$ удовлетворяют условиям сходимости. Первые два условия: 1) $S_n \leqslant S_n'$ и 2) $S_{n+1} \geqslant S_n$, $S'_{n+1} \leqslant S_n'$ — проверяются очень легко на любой фигуре. Остается установить, что разность $S_n' - S_n$ при возрастании n может стать сколь угодно малой. Но эта разность есть мера площади полосы, состоящей из квадратов, по которым проходит контур многоугольника. Докажем это сначала для одного из отрезков контура. Возьмем отрезок, образующий угол, не больший 45°, с горизонтальными линиями сетки, например, отрезок $\overline{AB}$ на рисунке 10. Спроектируем его в отрезок $\overline{A'B'}$ на одну из горизонтальных линий сетки. Перенесем на отрезок $A'B'$ все квадраты, пересекаемые отрезком $\overline{AB}$ (на рис. 10 эти квадраты заштрихованы). Нетрудно убедиться в том, что сумма площадей всех этих квадратов не больше площади прямоугольника, основанием которого служит приближенная величина отрезка $A'B'$ по избытку, а высота равна двум единицам, так как при данном положении отрезка $\overline{AB}$ он не может в вертикальном направлении пересечь более двух квадратов. При n-том дроблении сетки площадь такого прямоугольника будет равна $a_n' \; \frac{2}{10^n}$, где a_n'— приближенное значение длины $\overline{A'B'}$ по избытку. Так как при увеличении n a_n' не увеличивается, а $\frac{2}{10^n}$ может стать сколь угодно малой, то и площадь прямоугольника, а значит, и площадь всех квадратов, пересекаемых отрезком $\overline{AB}$, может стать сколь угодно малой. Это относится ко всем сторонам многоугольника, образующим с горизонтальными линиями сетки угол не больше 45°. Остальные стороны многоугольника образуют с вертикальными линиями сетки угол не больший 45°, и потому к ним можно применить те же рассуждения.

Положим теперь, что наш многоугольник имеет k сторон. Возьмем n настолько большим, чтобы мера площади полосы, пересекаемой каждой стороной, стала меньше $\frac{\varepsilon}{k}$, где ε — любое положительное число. Тогда мера площади всей пограничной полосы станет меньше ε, чем и доказана сходимость последовательностей $\{S_n;\ S_n'\}$ и существование числа S — меры площади многоугольника. Это число не изменяется при параллельном переносе многоугольника по сетке, так как эти числа определяются прямоугольными областями, состоящими из квадратов, а площадь прямоугольника не меняется при параллельном переносе.

22. Докажем теперь, что если многоугольник состоит из двух многоугольников, то мера площади его равна сумме мер площадей составляющих многоугольников. Возьмем такой мно-

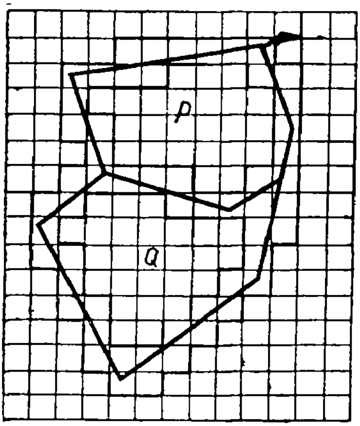


Рис. 11

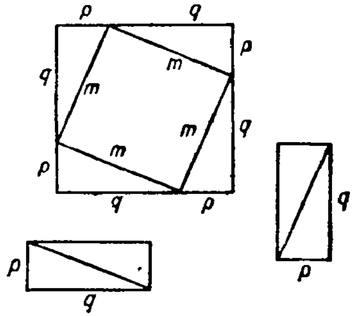


Рис. 12

гоугольник и наложим на него масштабную сетку (рис. 11). Пусть меры площадей составляющих многоугольников равны P и Q определяются последовательностями $\{P_n;\ P_n'\}$; $\{Q_n;\ Q_n'\}$, а меры площади всего многоугольника S определяются последовательностями $\{S_n;\ S'_n\}$.

Имея в виду квадраты, расположенные на границе составляющих многоугольников, получим неравенства:

$$P_n + Q_n \leqslant S_n \leqslant S_n' \leqslant Q_n + Q_n'.$$

В силу основной теоремы отсюда получим: $P + Q = S$.

Остается показать, что мера площади многоугольника не изменится, если сетку повернуть на некоторый угол. Для этого нужно показать, что меры площадей прямоугольных областей S_n и S_n', определенные при старом положении сетки, останутся теми же, если их находить при новом положении сетки. А для этого достаточно показать, что при повороте каждого квадрата, входящего в состав этих областей, мера площади его останется неизменной, если его измерять новой сеткой. Действительно, пусть квадрат старой сетки со стороной m (рис. 12) повернут на некоторый угол. Проведем через его вершины прямые, параллельные сторонам сетки. Этим мы его заключим внутрь квадрата со сторонами, равными p и q, и мерой площади

$(p+q)^2$. Для получения меры площади квадрата со стороной m нужно из этого числа вычесть меру площади четырех прямоугольных треугольников с катетами p и q. Так как при параллельном перенесении мера площади не изменится, то, совмещая гипотенузами эти треугольники попарно, мы их меры площади не изменим, но преобразуем их в два прямоугольника со сторонами длиной p и q, параллельными линиям сетки; поэтому меры площадей этих двух прямоугольников будут равны $2pq$, а мера площади квадрата будет равна:

$$(p+q)^2 - 2pq = p^2 + q^2 = m^2 \text{ (по теореме Пифагора).}$$

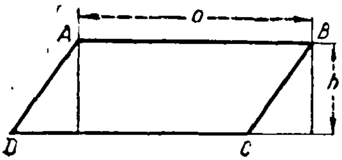


Рис. 13

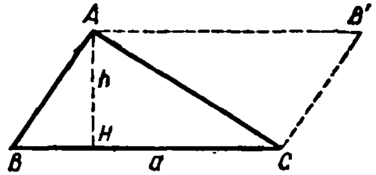


Рис. 14

Итак, и при новом наложении сетки мера площади всех квадратов прежней сетки будет той же, а следовательно, будет неизменной и мера площади прямоугольных областей S_n и S_n'. Поэтому останется неизменным и определяемое ими число.

Мы получили, что мера площади многоугольника останется неизменной, если произвести вращение его по отношению к сетке. А так как два конгруэнтных многоугольника можно всегда преобразовать друг в друга вращением или трансляцией, то мы получим, что *меры площадей конгруэнтных многоугольников равны.*

Отсюда также следует, что *мера площади многоугольника не зависит от способа наложения масштабной сетки*, так как перемещение многоугольника по сетке эквивалентно перемещению сетки по многоугольнику.

23. Установленные нами свойства площадей многоугольников позволяют получить все косвенные методы измерения площадей прямолинейных фигур.

Всякий параллелограмм можно разрезать на две части, из которых можно сложить прямоугольник (рис. 13). Таким путем мы получаем, что мера площади параллелограмма равна произведению меры длины основания на меру длины высоты:

$$S = ah.$$

Дополняя любой треугольник до параллелограмма (рис. 14), получим, что мера площади треугольника равна половине произведения меры длины основания на меру длины высоты: $S = \frac{ah}{2}$.

Наконец, разбивая многоугольник на треугольники, мы можем найти его площадь как сумму площадей составляющих треугольников. Таким путем, в частности, получаются формулы.

Мера площади трапеции: $S = \frac{a+b}{2} h$, где a и b — меры длины оснований, h — мера длины высоты.

Мера площади описанного многоугольника: $S = \frac{Pr}{2}$, где P — периметр, r — мера длины радиуса вписанной окружности.

24. Для определения меры площади фигуры, ограниченной произвольным контуром, можно использовать следующий метод.

Рассмотрим систему многоугольников с мерами площадей $S_1, S_2, \dots, \dots, S_n$, каждый из которых принадлежит фигуре всеми своими точками.

Одновременно рассмотрим другую систему многоугольников с мерами площадей $S_1', S_2', \dots, S_n'$, каждой из которых данная фигура принадлежит всеми своими точками. Если последовательности $\{S_n;\ S_n'\}$ сходящиеся, то определяемое ими число S и есть мера площади данной фигуры.

Для доказательства наложим на данную фигуру квадратную масштабную сетку и обозначим через Z_m меру площади квадратов, находящихся внутри многоугольника с мерой площади S_n, а через Z_m' обозначим меру площади квадратов того же разбиения сетки, покрывающих многоугольник с мерой площади S_n'. Докажем, что при одновременном возрастании m и n последовательности $\{Z_m;\ Z_m'\}$ будут сходящимися.

1) Очевидно, что $Z_m < Z_m'$. 2) При возрастании n и m Z_m увеличивается, так как увеличивается S_n; Z_m' уменьшается, так как уменьшается S_n'. 3) Возьмем n настолько большим, чтобы выполнялось неравенство $S_n' - S_n < \frac{\varepsilon}{3}$, где ε — любое положительное число. Одновременно можно взять m настолько большим, чтобы выполнялись неравенства: $S_n - Z_m < \frac{\varepsilon}{3}$ и $Z_m' - S_n' < \frac{\varepsilon}{3}$, так как Z_m есть приближенное значение меры площади многоугольника S_n, а Z_m' есть приближенное значение меры площади многоугольника S_n'.

Сложив все три неравенства, получим: $Z_m' - Z_m < \varepsilon$.

Итак, последовательности $\{Z_m;\ Z_m'\}$ сходящиеся и определяют действительное число Z. В то же время из неравенств $Z_m < S_n < S_n' < Z_m'$ мы имеем: $Z_m < S_n'$ и $S_n < Z_m'$, откуда по основной теореме следует, что $Z = S$. Значит, число, определяющее площадь данной фигуры, будет тем же и при общем способе измерения при помощи масштабной сетки.

При помощи той же основной теоремы нетрудно доказать, что число S, выражающее площадь данной фигуры, остается тем же, какие бы мы ни брали системы внутренних и накрывающих многоугольников, лишь бы последовательности мер их площадей были сходящимися.

Полученные выводы можно применить к определению меры площади круга. Если вписать в круг и одновременно описать около него правильные n-угольники, то при неограниченном удвоении числа их сторон меры площадей этих многоугольников дадут сходящиеся последовательности $\{S_n\ ;\ S_n'\}$. Действительно, как уже было установлено, мера площади вписанного многоугольника определяется формулой $S_n = \frac{1}{2} P_n k_n$, где P_n — периметр многоугольника, k_n — апофема. Площадь описанного многоугольника определяется формулой: $S_n' = \frac{1}{2} P_n' R$, где P_n' — периметр описанного многоугольника, R — радиус круга.

Таким образом, наши последовательности принимают вид:

$$\left\{ \frac{1}{2} P_n k_n; \quad \frac{1}{2} P_n' R \right\}.$$

Но последовательности $\{P_n;\ P_n'\}$ определяют меру длины окружности, т. е. число $2\pi R$, а последовательности $\{k_n;\ R\}$ определяют меру длины радиуса, т. е. число R. Поэтому по правилу умножения действительных чисел получим, что последовательности $\{S_n;\ S_n'\}$ определяют число $S = \frac{1}{2} \cdot 2\pi R R = \pi R^2$.

Окончательно получаем: $S = \pi R^2$.

Так же как и для многоугольника, нетрудно доказать, что в более общем случае, когда можно определить меру площади фигуры, равные фигуры имеют равные меры площади, и если фигура состоит из нескольких фигур, то мера ее площади равна сумме мер площадей всех составляющих ее частей.

На основании этого мы находим, что мера площади сектора, угол которого выражается в радианной мере числом α, равна:

$$S_\alpha = \frac{1}{2} R^2 \alpha.$$

Мера площади сегмента получается как разность между мерой площади сектора $\frac{1}{2} R^2 \alpha$ и мерой площади треугольника, ограниченного двумя радиусами и хордой, т. е. $\frac{1}{2} R^2 \sin\alpha$:

$$S_{\text{сегм}} = \frac{1}{2} R^2 (\alpha - \sin\alpha).$$

Заметим, что если фигура имеет меру площади S, то подобная ей фигура имеет меру площади $k^2 S$, где k — коэффициент подобия. Для доказательства наложим на данную фигуру квадратную масштабную сетку, а потом эту фигуру вместе с наложенной на нее сеткой подвергнем преобразованию подобия с коэффициентом k (рис. 15). Тогда на новую фигуру будет наложена квадратная масштабная сетка, причем сторона каждого единичного квадрата будет равна уже не единице, а k, и мера площади его будет равна не единице, а k^2.

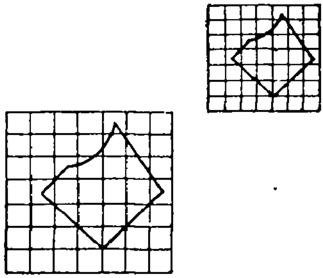


Рис. 15

Поэтому, если мера площади S прежней фигуры определялась последовательностями $\{S_n\ ;\ S_n'\}$, то мера площади новой фигуры будет определяться последовательностями $\{k^2 S_n;\ k^2\ S_n'\}$, значит, соответствующее число равно $k^2 S$.

Итак, при изменении линейных размеров фигуры в k раз, мера площади ее изменится в k^2 раз.

При решении многих задач бывает важно установить, как изменяется мера площади плоской фигуры при ортогональной проекции. Здесь имеет место т е о р е м а:

Мера площади ортогональной проекции плоской фигуры равна мере площади проектируемой фигуры, умноженной на косинус угла между плоскостью фигуры и плоскостью проекций.

Положим, что плоская фигура с мерой площади S проектируется на плоскость. Угол между плоскостями равен α. Наложим на проектируемую фигуру масштабную сетку так, чтобы одна система параллельных линий сетки была параллельна плоскости проекций. Нетрудно показать, что при этом квадраты сетки спроектируются в виде прямоугольников, одна сторона которых будет равна стороне a элементарного квадрата, а другая сторона будет равна $a\ \cos\alpha$. Таким образом, приближенные значения меры площади S, т. е. величины S_n и S_n', в проекции станут равны $S_n\ \cos\alpha$ и $S_n'\ \cos\alpha$, так как мера площади каждого элементарного прямоугольника будет равна $a^2 \cos\alpha$. Но тогда и мера всей площади проекции будет равна $S\ \cos\alpha$.

25. Вопрос о равновеликости и равносоставленности фигур обычно или совсем не затрагивается в курсе средней школы, или затрагивается очень поверхностно, и самый существенный вывод этого раздела — о равносоставленности равновеликих многоугольников, как правило, совсем не рассматривается. А между тем это одно из самых важных свойств многоугольников, не имеющее себе аналогии в трехмерном пространстве. Стоит отметить, что вопрос о составлении одной фигуры из некоторых частей другой всегда вызывает большой интерес учащихся, и они очень охотно занимаются разрешением различных частных проблем, связанных с этим вопросом. Мы начнем со следующего определения:

Фигуры, имеющие равные площади, называются **равновеликими**. Два многоугольника, которые можно разложить на одинаковое число попарно равных многоугольников, называются **равносоставленными**.

Непосредственно из определения следует, что равносоставленные многоугольники равновелики, так как сумма площадей составляющих многоугольников будет одна и та же в обоих случаях.

Две фигуры, равносоставленные с одной и той же третьей, равносоставлены и между собой.

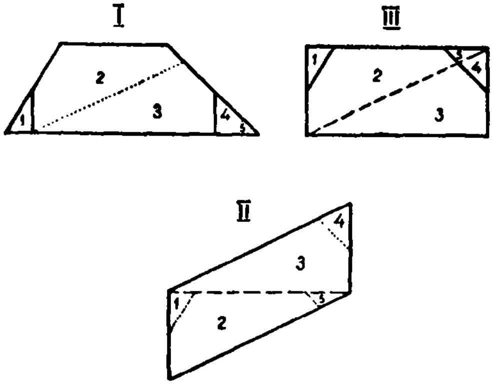


Рис. 16

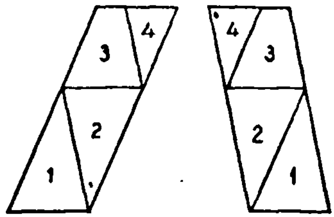


Рис. 17

Возьмем два многоугольника I и II (рис. 16), которые равносоставлены с многоугольником III. Нанесем на третий многоугольник одновременно разбиение, определяющее равносоставленность с первым многоугольником (сплошные линии) и определяющее равносоставленность со вторым многоугольником (штриховые линии). Обе системы линий определяют прямолинейную сетку, которую мы пунктирными отрезками разобьем на треугольники третьего разбиения. Тогда как первый, так и второй многоугольники будут составлены из одних и тех же треугольников третьего разбиения (на рис. 16 одинаковые треугольники помечены одинаковыми цифрами). Итак, равносоставленность обладает свойствами транзитивности.

Равновеликие многоугольники всегда также и равносоставлены.

Доказательство разделим на несколько частей:

1) *Равновеликие параллелограммы всегда равносоставлены.*

Возьмем сначала два параллелограмма с равными основаниями. Ввиду равновеликости у них будут равны и высоты. Тогда проведением внутри одного параллелограмма прямых, параллельных сторонам другого, как это показано на рисунке 17, мы обе фигуры разобьем на одинаковое число попарно равных треугольников. Если же два равновеликих параллелограмма не имеют равных сторон, то мы строим третий параллелограмм, имеющий с первым одинаковые основание и высоту. Так как при этом другую сторону третьего параллелограмма мы можем выбирать произвольной, то сделаем ее равной одной из сторон второго параллелограмма. Итак, третий параллелограмм равновелик и с первым, и со вторым и с каждым из них имеет по равной стороне. Поэтому он с каждым из первоначальных параллелограммов равносоставлен, и, значит, данные первоначально параллелограммы равносоставлены и между собой.

2) *Равновеликие треугольники равносоставлены.*

Прежде всего каждый треугольник при помощи проведения средней линии преобразуется в равносоставленный параллелограмм (рис. 18). Но тогда мы преобразуем каждый из двух равновеликих треугольников в два равновеликих между собой параллелограмма. Полученные параллелограммы по доказанному равносоставлены между собой и с одним из данных треугольников. В силу транзитивности равносоставленности это значит, что равносоставленными являются и равновеликие треугольники.

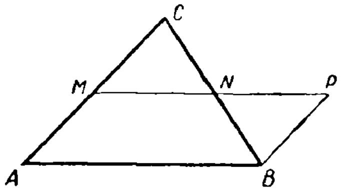


Рис. 18

3) *Равновеликие многоугольники равносоставлены.*

Возьмем один из данных многоугольников и, перенеся одну из его вершин параллельно диагонали на продолжение одной из сторон, мы этим самым преобразуем многоугольник в равновеликий и притом с числом сторон на единицу меньшим, чем у первоначального многоугольника. Имея в виду, что при этом мы один треугольник заменили другим — равновеликим, а остальная часть многоугольников осталась неизменной, мы получим, что прежний многоугольник будет равносоставлен с новым. Продолжая этот процесс, мы превратим данный многоугольник в равносоставленный с ним треугольник. Это же преобразование мы проделаем и с другим многоугольником, который тоже преобразуется в равносоставленный ему треугольник. Так как первоначальные многоугольники были равновелики, то равновелики будут и полученные треугольники. Но равновеликие треугольники равносоставлены. Следовательно, пользуясь свойством транзитивности для равносоставленных фигур, мы получим, что равносоставленными будут и первоначальные многоугольники. Теорема доказана вполне.

Попутно при изложении вопроса о равносоставленности многоугольников мы предлагаем учащимся ряд упражнений на разложение фигур. Как уже отмечалось выше, эти упражнения всегда вызывают большой интерес у учащихся и в сильной степени помогают им разобраться в изучаемом вопросе.

Приведем примеры таких упражнений:

1) *Данный параллелограмм разрезать на такие части, из которых можно было бы сложить другой данный параллелограмм с такими же основанием и высотой.*

2) *Данный параллелограмм разрезать на такие части, из которых можно было бы сложить другой данный параллелограмм, равновеликий первому.*

3) *Данный треугольник разрезать на такие части, из которых можно было бы сложить другой данный треугольник с такими же основанием и высотой.*

4) *Данный треугольник разрезать на такие части, из которых можно было бы сложить равновеликий треугольник с произвольным основанием.*

5) *Данный треугольник разрезать на такие части, из которых можно было бы сложить равновеликий прямоугольник с таким же основанием.*

6) *Данный прямоугольник разрезать на такие части, из которых можно было бы составить равновеликий квадрат.*

7) *Данный треугольник разрезать на такие части, из которых можно было бы сложить равновеликий квадрат.*

Хорошим примером такого рода упражнений может также служить доказательство теоремы Пифагора, основанное на установлении равносоставленности квадратов, построенных на катетах, с квадратом, построенным на гипотенузе. На рисунке 19 мы даем одно из таких доказательств.

Приведем еще несколько упражнений на применение теории измерения площадей.

1) *Доказать, что из всех треугольников с данным основанием и данным периметром наибольшую площадь имеет равнобедренный треугольник.*

2) *В данную окружность вписать треугольник наибольшей площади.*

3) *На сторонах прямоугольного треугольника как на диаметрах построены три круга. Доказать, что площадь круга, построенного на гипотенузе, равна сумме площадей кругов, построенных на катетах.*

4) *На гипотенузе прямоугольного треугольника* (рис. 20) *как на диаметре построена полуокружность, проходящая через вершину прямого угла. На катетах также построены полуокружности вне треугольника. Доказать, что сумма площадей двух получивших-*

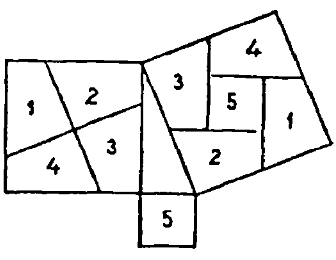


Рис. 19

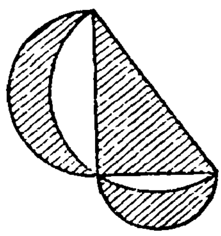


Рис. 20

ся луночек равна площади прямоугольного треугольника (на рис. 20 эти луночки заштрихованы).

5) *Вычислить площадь треугольника, одна из вершин которого находится в начале координат, а две другие имеют координаты* $(x_1;\ y_1)$ и $(x_2;\ y_2)$.

6) *Вычислить площадь треугольника, вершины которого заданы координатами* $(x_1;\ y_1)$; $(x_2;\ y_2)$; $(x_3;\ y_3)$.

7) *Вычислить площадь многоугольника по заданным координатам всех его вершин.*

8) *Рассматривая эллипс как ортогональную проекцию круга, доказать, что мера площади его выражается формулой:* $S = \pi ab$, *где* a — *длина большой полуоси,* b — *длина малой полуоси.*

9) *Через точку, данную на стороне треугольника, провести прямую, которая разделила бы треугольник на две равновеликие части.*

10) *На сторонах* $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, *и* $\overline{AB}$ *треугольника* ABC *отложены отрезки* $\overline{A'B} = \frac{1}{3}\overline{BC}$, $B'C = \frac{1}{3}\ \overline{CA}$ и $\overline{C'A} = \frac{1}{3}\ AB$. *Определить отношение площади треугольника, определяемого пересечением прямых* $A'A$, $B'B$, $C'C$, *к площади треугольника* ABC.

§ 5. Измерение объемов

26. Теория измерения объемов в своей общей части излагается аналогично теории измерения площадей. Поэтому многие предложения (например, теоремы об объеме многогранника, о сумме объемов многогранников) учащиеся могут доказать вполне самостоятельно, используя почти дословно текст соответствующих теорем об измерении площадей.

В то же время необходимо предупредить учащихся о том, что эти аналогии нужно использовать с большой осторожностью. В качестве примера можно привести проблему равновеликости и равносоставленности. В то время как равновеликие многоугольники в с е г д а равносоставлены, равновеликие многогранники, вообще говоря, не равносоставлены (теорема Дена-Кагана).

Мерой объема тела называется действительное число, которое приводится в соответствие с данным телом и которое должно удовлетворять условиям:

1) Существует тело, мера объема которого равна единице.

2) Равные тела имеют равные меры объема.

3) Если тело состоит из нескольких частей, то мера объема этого тела равна сумме мер объемов составляющих его частей.

За единицу при измерении объемов принимают куб, ребро которого равно единице длины. Если ребра единичного куба разделить на 10 равных частей и через точки деления провести плоскости, параллельные его граням, то единичный куб разобьется на

Итак, мы получаем, что во всех случаях *равные тела имеют равные меры объема, или, что все равно, мера объема тела не зависит от способа наложения масштабной сетки.*

30. Перейдем теперь к выводу формул для определения меры объемов различных тел.

Докажем прежде всего следующее предложение.

Теорема 1. *Пусть мы имеем систему тел с мерами объема V_0, V_1, V_2, ..., V_n, ..., находящихся внутри данного тела, и, с другой стороны, систему тел с мерами объема V_0', V_1', V_2',... V_n', ..., внутри которых содержится данное тело. Если последовательности $\{V_n, V_n'\}$ сходящиеся, то определяемое ими число V есть мера объема данного тела.*

Для доказательства наложим на тело кубическую масштабную сетку и обозначим через W_m число кубов m-го разбиения, находящихся внутри объема V_n, а через W_m' число кубов m-го разбиения, накрывающих объем V_n'. Пусть ε — данное положительное число. Возьмем n настолько большим, чтобы выполнялось неравенство: $V_n' - V_n < \frac{\varepsilon}{3}$.

Установив это, возьмем m настолько большим, чтобы выполнялись неравенства: $V_n - W_m < \frac{\varepsilon}{3}$; $W_m' - V_n' < \frac{\varepsilon}{3}$, что всегда возможно, так как W_m есть приближенное значение меры объема многогранника V_n по недостатку, а W_m' есть приближенное значение меры объема многогранника V_n' по избытку. Складывая почленно полученные неравенства, находим:

$$W_m' - W_m < \varepsilon.$$

А это значит, что последовательности $\{W_m;\ W_m'\}$ при неограниченном возрастании m и n сходящиеся.

Действительно: 1) $W_m < W_m'$, так как объем W_m составляет часть объема W_m'. 2) При увеличении m и n W_m увеличивается, так как увеличивается V_n, и при тех же условиях объем W_m' уменьшается, так как уменьшается V_n'. 3) Наконец, мы уже доказали, что для любого положительного ε можно найти такие m и n, что будет иметь место неравенство:

$$W_m' - W_m < \varepsilon.$$

Положим, что последовательности $\{W_m;\ W_m'\}$ определяют число W. Вместе с тем мы имеем неравенства: $W_m < V_n'$ и $W_m' > V_n$, так как объем W_m есть часть V_n', а объем V_n есть часть объема W_m'. Следовательно, по основной теореме $W = V$.

Опираясь на основную теорему, таким же путем нетрудно показать, что мера объема V не зависит от того, каковы будут последовательности тел внутренних и накрывающих данное тело, лишь бы последовательности их объемов были сходящимися.

31. Теорема 2 (Принцип Б. Кавальери[1]).

Если при пересечении двух тел плоскостями, параллельными одной и той же плоскости, в сечении получаются фигуры, равновеликие между собой, то меры объемов этих тел равны.

Допустим, что сечения, указанные в теореме, параллельны горизонтальной плоскости (рис. 22). Наложим на оба тела кубическую масштабную сетку так, чтобы одна из плоскостей сетки была горизонтальна. Положим, что мера объема первого тела равна V и определяется последовательностями $\{V_n, V'_n\}$, а мера объема второго тела равна W и определяется последовательностями $\{W_n; W'_n\}$.

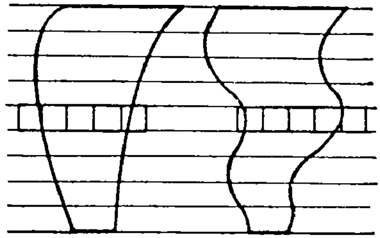


Рис. 22

Рассмотрим два сечения, определяемые горизонтальными плоскостями, расстояние между которыми равно единице. Пусть число единичных внутренних квадратов, помещающихся на площади первоначального сечения в первом теле, равно S_m, а число единичных квадратов, накрывающих ту же площадь, равно S'_m. Поэтому число единичных внутренних кубов, помещающихся на той же площади, не больше S_m, а число накрывающих кубов, пемещающихся на той же площади, не меньше S'_m. Обозначим через Z_m и Z'_m соответственно число внутренних и накрывающих квадратов на площади того сечения во втором теле. Так как меры площадей обоих сечений равны, то будем иметь неравенства: $S_m < Z'_m$; $S'_m > Z_m$.

Отсюда следует, что число внутренних кубов, помещающихся на данной площади в первом теле, меньше числа накрывающих кубов, помещающихся на этой же плоскости во втором теле. Число же накрывающих кубов на этом сечении в первом теле больше числа внутренних кубов того же сечения во втором теле. А так как это же рассуждение мы можем повторить для любого сечения, то будем иметь вообще: $V_1 < W'_1$; $V'_1 > W_1$.

Аналогично получим: $V_2 < W'_2$; $V'_2 > W_2$, ..., $V_n < W'_n$; $V_n' > W_n$.

[1] Бонавентура Кавальери (1598—1647) — выдающийся итальянский математик. Его «метод неделимых» весьма близок к открытым позднее методам анализа бесконечно малых.

Согласно основной теореме отсюда следует, что $V = W$, т. е. что меры объемов тел равны между собой.

Теорема 3 (Симпсона)[1].

Если площадь сечения тела плоскостью, перпендикулярной к высоте этого тела, есть функция не выше второй степени от расстояния сечения до постоянной точки на высоте, то мера объема тела выражается формулой: $V = \frac{h}{6}(S_0 + 4S_m + S_n)$, *где* h *— мера высоты тела,* S_0 *— мера площади нижнего основания,* S_n *— мера площади верхнего основания,* S_m *— мера площади среднего сечения.*

Положим, что мера площади S сечения, находящегося на расстоянии x от начальной точки, выражается формулой:

$$S(x) = ax^2 + bx + c.$$

При этом мы будем пока предполагать, что функция S монотонно возрастает от начальной точки до конечной.

Для вывода формулы Симпсона рассмотрим тело вращения, у которого площадь сечения, перпендикулярного к оси, равна $ax^2 + bx + c$. Очевидно, в сечении получится круг, радиус которого легко определить из уравнения:

$$\pi r^2 = ax^2 + bx + c, \text{ откуда } r = \sqrt{\frac{ax^2 + bx + c}{\pi}}.$$

Согласно принципу Кавальери мера объема этого тела вращения, будет равна мере объема любого тела, площадь перпендикулярного сечения которого выражается той же формулой:

$$S = ax^2 + bx + c.$$

Итак, рассмотрим тело вращения с высотой h (рис. 23). Разделим высоту на n равных частей и через точки деления проведем секущие плоскости перпендикулярно к высоте. На каждой из полученных площадок построим внутренние и накрывающие цилиндры с общей высотой $\frac{h}{n}$. Меры объемов внутренних цилиндров обозначим через v_0, v_1, v_2, ..., v_{n-1}, меры объемов накрывающих цилиндров обозначим v'_1, v'_2, ..., v'_n. Сумму мер объемов внутренних цилиндров обозначим через V_n, а сумму мер объемов на-

[1] Thomas Simpson (1710—1761) — английский математик. Был сначала ткачом и школьным учителем в Дерби, а потом профессором математики в военной школе в Вульвиче.

крывающих цилиндров — V'_n. Докажем, что при неограниченном увеличении n последовательности $\{V_n;\ V'_n\}$ будут сходящимися.

Действительно, из самого определения чисел V_n и V'_n мы имеем: 1) $V_n \leqslant V'_n$; 2) $V_{n+1} \geqslant V_n$; $V'_{n+1} \leqslant V'_n$; 3) Для оценки разности $V'_n - V_n$ заметим, что $V_n = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_{n-1}$; $V'_n = v'_1 + v'_2 + v'_3 + \ldots + v'_n$. Но $v_1 = v'_1$; $v_2 = v'_2 \ldots$;

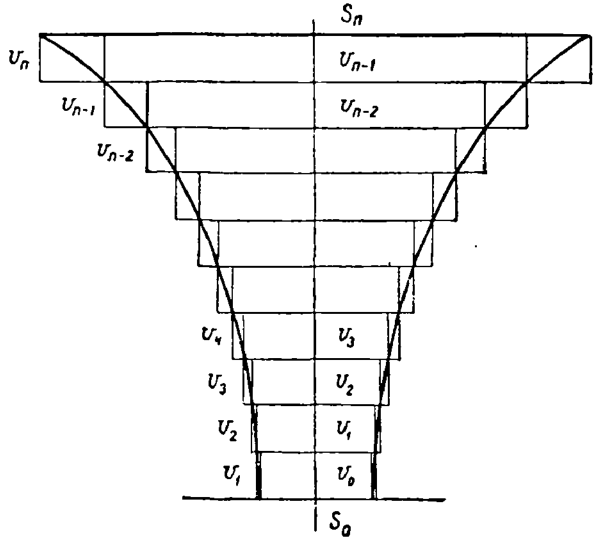


Рис. 23

$v_{n-1} = v'_{n-1}$, так как у каждой пары этих цилиндров общее основание и одинаковые высоты $\frac{h}{n}$. Поэтому $V_n' - V_n = v_n - v_0$, при этом $v_n > v_0$ ввиду предполагаемого монотонного возрастания функции $S(x)$.

Но $v_0 = S_0 \frac{h}{n}$; $v_n = S_n \frac{h}{n}$, где S_0 — мера площади начального, S_n — мера площади конечного сечения.

Итак, $V'_n - V_n = \frac{h(S_n - S_0)}{n}$.

Так как h, S_0, S_n — постоянные числа, а число n неограниченно возрастает, то разность $V_n' - V_n$ при достаточно большом значении n может стать меньше любого положительного числа.

Следовательно, последовательности $\{V_n;\ V_n'\}$ сходящиеся и определяют число V — меру объема данного тела. Отсюда следует, что число V можно рассматривать как общий предел чисел V_n и V_n' при неограниченном возрастании n.

Найдем число V, для чего выведем общую формулу для числа V_n'. По условию теоремы имеем:

$$v_1 = \frac{h}{n} s_1 = \frac{h}{n}\left(a\frac{h^2}{n^2} + b\frac{h}{n} + c\right),$$

$$v_2 = \frac{h}{n} s_2 = \frac{h}{n}\left(a\frac{2^2h^2}{n^2} + b\frac{2h}{n} + c\right),$$

$$v_3 = \frac{h}{n} s_3 = \frac{h}{n}\left(a\frac{3^2h^2}{n^2} + b\frac{3h}{n} + c\right),$$

. . . .

$$v_n = \frac{h}{n} s_n = \frac{h}{n}\left(a\frac{n^2h^2}{n^2} + b\frac{nh}{n} + c\right)$$

$$V_n' = \frac{h}{n}\left[\frac{ah^2}{n^2}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) + \right.$$

$$\left. + \frac{bh}{n}(1 + 2 + 3 + \ldots + n) + nc\right].$$

Суммируя все эти равенства, получим:

Но по формуле Архимеда имеем:

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, а по формуле арифметической прогрессии получим:

$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Поэтому

$$V_n' = \frac{ah^3}{n^3}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{bh^2}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} + ch, \text{ или}$$

$$V_n' = \frac{ah^3}{6}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right) + \frac{bh^2}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) + ch.$$

И наконец,

$$V = \lim_{n\to\infty} V_n' = \frac{ah^3}{3} + \frac{bh^2}{2} + ch.$$

Итак, мы получили для меры объема данного тела формулу:

$$V = \frac{ah^3}{3} + \frac{bh^2}{2} + ch.$$

Эта формула выведена в предположении, что функция $S(x)$ монотонно возрастает. Если бы оказалось, что на данном промежутке функция $S(x) = ax^2 + bx + c$ монотонно убывает, то достаточно верхнее основание принять за нижнее, а нижнее — за верхнее и повторить прежние рассуждения.

Если, наконец, функция $S(x)$ от 0 до h_1 изменяется в одном направлении, в точке h_1 достигает максимума или минимума, а от точки h_1 до h изменяется в другом направлении, то, вычисляя сначала объем от 0 до h_1, а потом от h_1 до h и суммируя оба объема, мы вновь получим ту же формулу:

$$V = \frac{ah^3}{3} + \frac{bh^2}{2} + ch.$$

Если теперь в формулу $ax^2 + bx + c$ подставить последовательно $x = 0$, $x = \frac{h}{2}$, $x = h$, то получим:

$$S_0 = c; \qquad S_m = \frac{ah^2}{4} + \frac{bh}{2} + c; \qquad S_n = ah^3 + bh + c.$$

Умножая первое из этих равенств на $\frac{h}{6}$, второе на $4\frac{h}{6}$, третье на $\frac{h}{6}$ и суммируя, получим:

$$\begin{aligned}
\frac{h}{6} S_0 &= \dots\dots\dots \frac{ch}{6} \\
4\frac{h}{6} S_m &= \frac{ah^3}{6} + \frac{bh^2}{6} + \frac{4ch}{6} \\
\frac{h}{6} S_m &= \frac{ah^3}{6} + \frac{bh^2}{6} + \frac{ch}{6} \\
\hline
\frac{h}{6}(S_0 + 4S_m + S_n) &= \frac{ah^3}{3} + \frac{bh^2}{2} + ch = V.
\end{aligned}$$

И окончательно: $V = \frac{h}{6}(S_0 + 4S_m + S_n)$.

32. Применим теперь доказанные теоремы к вычислению объемов различных тел.

I. *Мера объема всякого цилиндра и всякой призмы равна произведению меры площади основания на меру длины высоты.*

Согласно принципу Кавальери мера объема наклонного цилиндра равна мере объема прямого цилиндра, если равны площади их оснований и равны их высоты. Действительно, поставив оба тела на горизонтальную плоскость (рис. 24), нетрудно убедиться, что в сечении этих тел любой горизонтальной плоскостью получатся фигуры с равными основаниями, а потому равновеликие между собой.

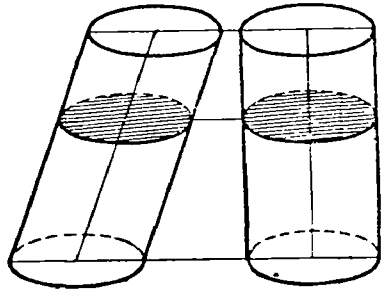


Рис. 24

Итак, такие два тела удовлетворяют условиям принципа Кавальери, и, значит, меры их объемов равны между собой. А для прямого цилиндра и прямой призмы была уже выведена формула:

$$V = Sh.$$

II. *Мера объема всякой пирамиды и всякого конуса равна одной трети произведения меры площади основания на меру длины высоты.*

Если конус или пирамиду пересечь плоскостью, параллельной основанию, то в сечении получается фигура, гомотетичная основанию, центром гомотетии служит вершина, а коэффициент гомотетии равен отношению расстояний этих фигур от вершины. А так как отношение мер площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия, то мы получим:

$$\frac{S}{Q} = \frac{x^2}{h^2}, \text{ или } S = \frac{Qx^2}{h^2}, \qquad (1)$$

где Q — мера площади основания, S — мера площади сечения, h — мера длины высоты, x — расстояние плоскости сечения от вершины. Мы видим, что мера площади сечения выражается квадратной функцией от расстояния x. Если расстояние брать не от вершины, а от основания, то формула меры площади сечения принимает другой вид:

$$S = \frac{Q(h-x)^2}{h^2}, \qquad (2)$$

но функция по-прежнему остается квадратной. Поэтому мы можем для определения меры объема использовать формулу Симпсона:

$V = \frac{h}{6}(S_0 + 4S_m + S_n)$. Здесь $S_0 = 0$, $S_m = \frac{Q}{4}$, $S_n = Q$ (по формуле 1). Поэтому получим:

$$V = \frac{h}{6}(0 + Q + Q) = \frac{Qh}{3}.$$

Итак, $V = \frac{Qh}{3}$.

Для конуса вращения с высотой h и радиусом основания R по этой формуле получим:

$$V = \frac{\pi R^2}{h}.$$

III. *Мера объема усеченного конуса и усеченной пирамиды выражается формулой:*

$$V = \frac{h}{3}(Q + \sqrt{Qq} + q),$$

где h — высота тела. Q — мера площади нижнего основания, q — мера площади верхнего основания.

Формула (2) показывает, что к этим телам применима формула Симпсона. Применяя ее, получим:

$$V = \frac{h}{6}(Q + 4S_m + q).$$

Для определения меры площади среднего сечения S_m заметим, что линейные размеры среднего сечения являются средним арифметическим линейных размеров площадей верхнего и нижнего оснований. В то же время эти размеры пропорциональны корням квадратным из мер соответствующих площадей. Поэтому имеем:

$$\frac{\sqrt{Q}+\sqrt{q}}{\sqrt{S_m}} = 2, \text{ или } 2\sqrt{S_m} = \sqrt{Q} + \sqrt{q},$$

и, наконец, $4S_m = Q + 2\sqrt{Qq} + q$.

Подставляя это значение в формулу меры объема, получим:

$$V = \frac{h}{6}\left(2Q + 2\sqrt{Qq} + 2q\right).$$

Окончательно:

$$V = \frac{h}{3}\left(Q + \sqrt{Qq} + q\right).$$

Для усеченного конуса вращения с высотой h, радиусом верхнего основания r и радиусом нижнего основания R получим:

$$V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2).$$

IV. *Мера объема шара с радиусом R выражается формулой:*

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3,$$

а если через D обозначить меру длины диаметра шара, то мера объема выражается формулой:

$$V = \frac{\pi D^3}{6}.$$

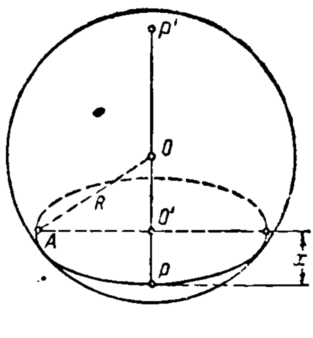


Рис. 25

Обозначим через r радиус сечения, находящегося на расстоянии x от конца диаметра P (рис. 25). Тогда из прямоугольного треугольника $OO'A$, в котором $\overline{OA} = R$, $\overline{OO'} = R - x$ $\overline{O'A}$, получим: $r^2 = R^2 - (R - x)^2 = 2Rx - x^2$.

Мера площади этого сечения равна:

$$\pi r^2 = 2\pi x - \pi x^2.$$

Мы видим, что эта величина есть квадратная функция от расстояния x. Поэтому меру объема шара можно вычислить по формуле Симпсона.

В данном случае мы имеем: $S_0 = 0$; $S_m = \pi R^2$; $S_n = 0$ и формула Симпсона нам дает:

$$V = \frac{2R}{6}(0 + 4\pi R^2 + 0) = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Подставляя вместо R равную ему величину $\frac{D}{2}$, получим:

$$V = \frac{\pi D^3}{6}.$$

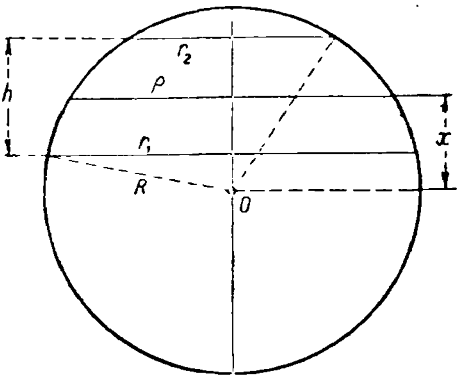


Рис. 26

33. Из частей шара вычислим сначала меру объема ш а р о в о г о с л о я, т. е. части шара между двумя параллельными плоскостями.

Пусть r_1 будет радиус верхнего сечения, r_2 — нижнего сечения, ρ — среднего сечения, h — высота слоя. Применимость формулы Симпсона к шару уже доказана, поэтому найдем:

$$V = \frac{h}{6}(\pi r_1^2 + 4\pi\rho^2 + \pi r_2^2).$$

Установим зависимости между радиусами сечения. Назовем x расстояние от центра сферы до среднего сечения (рис. 26)[1].

Тогда

$$\begin{array}{l} \quad r_1^2 = R^2 - \left(x - \frac{h}{2}\right)^2 \\ + \\ \quad r_2^2 = R^2 - \left(x + \frac{h}{2}\right)^2 \\ \hline r_1^2 + r_2^2 = 2(R^2 - x^2) - \frac{h^2}{2}. \end{array}$$

Складывая, получим:

[1] На рисунке 26 дана ортогональная проекция шара на плоскость, перпендикулярную к плоскости экватора.

С другой стороны, $\rho^2 = R^2 - x^2$, поэтому $r_1^2 + r_2^2 = 2\rho^2 - \frac{h^2}{2}$, или $4\rho^2 = 2r_1^2 + 2r_2^2 + h^2$. Подставляя эти значения в формулу объема, найдем окончательно:

$$V = \frac{\pi h}{6}(3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2) = \frac{\pi r_1^2 h}{2} + \frac{\pi r_2^2}{2} + \frac{\pi h^3}{6}.$$

Таким образом мы получили предложение, известное еще Архимеду:

Мера объема шарового слоя равна сумме мер объемов двух цилиндров вращения, основаниями которых служат основания слоя, а высотами — половина высоты слоя, и шара, диаметром которого служит высота слоя.

В частности, если одна из секущих плоскостей, определяющих шаровой слой, станет касательной к шару, то одно из оснований слоя стянется в точку, и мы получим шаровой сегмент. Для вычисления меры его объема достаточно в предыдущей формуле положить, что один из радиусов основания равен нулю. Тогда найдем:

$$V = \frac{\pi r^2 h}{2} + \frac{\pi h^3}{6}.$$

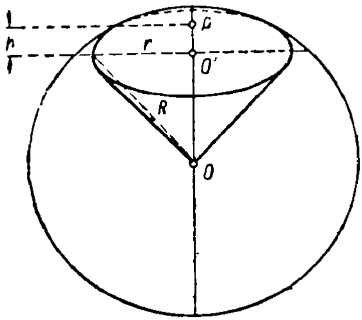


Рис. 27

Шаровой сектор можно получить, вращая круговой сектор около непересекающего его диаметра. Если этот диаметр совпадает с одной из сторон (радиусов) сектора, то сектор будет первого рода, если же не совпадает, то сектор будет второго рода. Объем сектора первого рода равен сумме объемов шарового сегмента и конуса с таким же основанием и с вершиной в центре шара (рис. 27):

$$V = \frac{\pi r^2 h}{2} + \frac{\pi h^3}{6} + \frac{\pi R^2 (R-h)}{3} = \pi \frac{3r^3 + h^3 + 2r^2 R - 2r^2 h}{6} =$$

$$= \pi \frac{r^2 h + 2r^2 R + h^3}{6} = \pi \frac{r^2(h + 2R) + h^3}{6}.$$

Но по теореме о произведении отрезков хорд, пересекающихся внутри окружности, $r^2 = (2R - h)\,h$, поэтому

$$V = \pi \frac{(2R-h)(2R+h)\,h + h^3}{6} = \pi \frac{4R^2 h - h^3 + h^3}{6}.$$

Окончательно:

$$V = \frac{2}{3} \pi R^2 h.$$

Этой формулой мера объема сектора первого рода выражается через длину радиуса шара и высоту соответствующего сегмента.

Сектор второго рода можно получить, удаляя из одного сектора первого рода другой сектор первого рода. Поэтому меру его объема можно получить как разность мер двух объемов:

$$V = V_2 - V_1 = \frac{2}{3} \pi R^2 h_2 - \frac{2}{3} \pi R^2 h_1 = \frac{2}{3} \pi R^2 (h_2 - h_1) = \frac{2}{3} \pi R^2 h.$$

Итак, по-прежнему: $V = \frac{2}{3} \pi R^2 h.$

Заметим в заключение, что формула Симпсона позволяет вычислить объемы целого рода других тел: призматоидов, эллипсоидов, параболоидов, гиперболоидов и т. д.

34. Знание принципа Кавальери и формулы Симпсона дает учащимся возможность вычислять меры объемов очень разнообразных тел.

Необходимо заметить, что формула Симпсона остается справедливой и для того случая, когда площадь сечения тела выражается функцией третьей степени от расстояния до постоянной точки на высоте тела. Однако для вывода формулы в этом случае пришлось бы пользоваться формулой суммирования третьих степеней натурального ряда чисел. Вместе с тем для потребностей элементарной геометрии вполне достаточно пользоваться этой формулой, когда площадь сечения выражается функцией не выше второй степени.

Формулой Симпсона можно пользоваться и для приближенного вычисления меры объема любого тела. Для этого тело разбивают на ряд сегментов параллельными сечениями на равных расстояниях и применяют формулу к каждому сечению. Как известно, этим способом формула Симпсона используется для вычисления определенных интегралов.

Для того чтобы по объему данного тела вычислить объем подобного ему тела, можно пользоваться следующим предложением:

Теорема 4. *Отношение мер объемов подобных тел равно кубу коэффициента подобия.*

Пусть мера объема V данного тела определяется последовательностями $\{V_n;\ V_n'\}$. Подвергнем эту фигуру вместе с наложенной на нее масштабной сеткой преобразованию подобия с коэффициентом k. Тогда мера объема каждого куба масштабной сетки будет равна k^3. Поэтому мера объема нового тела определится последовательностями $\{k^3 V_n;\ \ k^3 V_n'\}$ и потому будет равна $k^3 V$. Отсюда, в частности, следует, что *меры объемов двух шаров относятся друг к другу как кубы их радиусов или диаметров.*

Прежде чем перейти к самостоятельному решению задач учащимися, полезно предложить им решить предварительно несколько задач общего характера в порядке фронтальной работы в классе.

Приведем примеры таких упражнений.

1) *Доказать, что объем наклонной призмы (или цилиндра) равен объему такой прямой призмы (или цилиндра), у которой основанием служит перпендикулярное сечение наклонной призмы (цилиндра), а высотой — боковое ребро этой призмы (образующая цилиндра).*

2) *Доказать, что объем пирамиды или конуса не изменится, если их вершину переместить параллельно плоскости основания.*

3) *Доказать, что если трехгранный угол одного тетраэдра равен трехгранному углу другого тетраэдра, то меры объемов этих тетраэдров относятся как произведение ребер, принадлежащих этим трехгранным углам.*

4) *Доказать, что если тело можно разбить на несколько тел, имеющих общую высоту, и если каждое из этих тел удовлетворяет условиям теоремы Симпсона, то меру объема всего тела можно вычислить по формуле Симпсона.*

Приведем теперь ряд упражнений и задач, содержание которых может быть использовано как материал для домашних заданий и как материал для работы в классе.

Необходимо при этом заметить, что успех решения в значительной мере зависит от того, насколько правильный чертеж был использован в процессе решения.

1) *Доказать, что мера объема треугольной призмы равна половине произведения площади ее боковой грани на расстояние от этой грани до противоположного ребра.*

2) *Какие измерения нужно произвести на модели правильной четырехугольной пирамиды, чтобы вычислить меру ее объема? Тот же вопрос для правильной шестиугольной пирамиды.*

3) *Даны две скрещивающиеся прямые m и n. На первой даны точки A и B, на второй — точки C и D. Доказать, что объем тетраэдра $ABCD$ не изменится, если отрезки AB и CD будут перемещаться по прямой m и n, сохраняя свою длину.*

4) *Вычислить меру объема правильного тетраэдра, длина ребра которого равна a.*

5) *Найти меру объема правильного октаэдра, длина ребра которого равна a.*

6) *Тетраэдр срезан четырьмя секущими плоскостями, каждая из которых проходит через середины трех его ребер. Найти отношение объема оставшегося тела к объему тетраэдра.*

7) *Трехгранные углы куба срезаны восемью секущими плоскостями, проходящими через середины трех ребер, имеющих общую вершину. Определить отношение объема оставшегося тела к объему куба.*

8) *Определить меру объема четырехскатной крыши, основанием которой служит прямоугольник со сторонами, длина которых равна*

a и b, длина «конька» крыши равна c, а расстояние его от основания равно h.

9) *Вычислить меру объема тетраэдра, если известна мера площади параллелограмма, вершинами которого служат середины четырех ребер, и если дано расстояние между двумя другими ребрами.*

10) *Два различных многоугольника находятся в параллельных плоскостях. Соединяя вершины одного с вершинами другого, получим тело, называемое* п р и з м а т о и д о м *(рис. 28). Доказать, что меру объема призматоида можно вычислить по формуле Симпсона.*

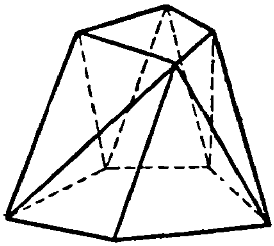


Рис. 28

11) *Деревянный цилиндр вращения плавает в воде так, что его ось вращения горизонтальна. На сколько он погрузится в воду, если удельный вес дерева равен 0,7, а диаметр равен 20 см?*

12) *Цилиндр вращения пересечен плоскостью, не параллельной основанию. Какие нужно произвести измерения, чтобы найти меру объема его части между основанием и плоскостью сечения?*

13) *Доказать, что мера объема тела, полученного от вращения прямоугольника около оси, параллельной одной из его сторон и не пересекающей его, равен произведению меры площади прямоугольника на длину окружности, описываемой его центром.*

14) *Две цилиндрические поверхности с одинаковым радиусом расположены так, что их оси пересекаются под прямым углом. Определить меру объема подушкообразного тела, ограниченного обеими поверхностями вращения.*

15) *Определить меру объема конуса вращения, если угол его развертки равен α, а длина образующей равна l.*

16) *Определить меру объема конуса вращения, вписанного в тетраэдр, длина ребра которого равна a.*

17) *Данную пирамиду (или конус) разделить на две равновеликие части плоскостью, параллельной основанию.*

18) *Вычислить отношение объема шара, вписанного в куб, к объему шара, описанного около куба. Такой же вопрос для октаэдра и тетраэдра (правильных).*

19) *Парабола, уравнение которой $y = ax^2$, вращается около оси Oy. Определить меру объема параболоида вращения от вершины до перпендикулярного сечения на расстоянии h от вершины.*

20) *Даны две скрещивающиеся прямые a и l, угол между которыми равен φ, а расстояние $\overline{OA} = a$ $(O \subset l;\ A \subset a)$. Прямая a, вращаясь около l, описывает поверхность, называемую* о д н о п о л о с т н ы м г и п е р б о л о и д о м в р а щ е н и я. *Определить меру объема части тела, ограниченного этой поверхностью и двумя плоскостями, проходящими на расстоянии h от точки O перпендикулярно к прямой l.*

§ 6. Измерение поверхностей

35. Измерение длины дуги кривой линии и площади поверхности представляет собой значительно большие трудности для обоснования общих положений, чем теория измерения длины отрезка, площади плоской фигуры и объема трехмерного тела. Поэтому при изложении этих вопросов в курсе средней школы приходится ограничиваться теми частными случаями, которые требуются программой.

Детальное исследование вопроса об определении длины кривой показывает, что для того, чтобы периметры последовательностей ломаных линий могли дать приближенное значение длины дуги кривой, необходимо, чтобы каждое звено ломаной по своему направлению приближалось (или совпало) к направлению касательной в соответствующей точке кривой. Именно этим принципом мы пользовались в параграфе 3 при определении длины выпуклой и гладкой кривой.

Если тело ограничено кривой поверхностью, то измерение площади такой поверхности вызывает трудности, еще бо́льшие, чем те, которые встречаются при измерении длины кривой линии.

При изложении этого вопроса в школе за число, выражающее площадь такой поверхности, принимают предел, к которому стремится мера суммы площадей граней некоторого вписанного многогранника при неограниченном увеличении числа его граней и при условии, что площадь каждой грани стремится к нулю.

Однако, как это было доказано Г. Шварцем (H. Schuarz— письмо к итальянскому математику Angelo Genocchi), такой предельный переход может иногда привести к совершенно неопределенным результатам. Приведем этот в высшей степени поучительный пример.

Возьмем цилиндр вращения с высотой h и радиусом R (рис. 29). Разделим высоту цилиндра на n равных частей и, проведя

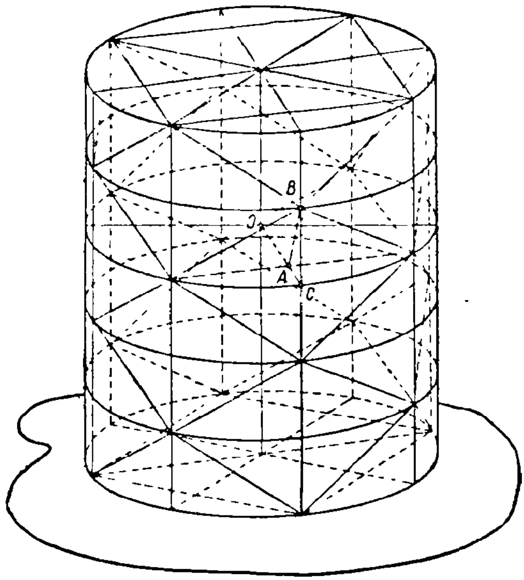


Рис. 29

через точки деления плоскости, параллельные основанию, разобьем боковую поверхность цилиндра на n равных поясов.

Разделим теперь окружность основания на $2m$ равных частей. Образующие, проходящие через полученные точки деления, разделяют также и все окружности сечений на $2m$ равных частей каждую. Соединяя точки деления на каждой окружности последовательно через одну, мы тем самым впишем в каждую правильный m-угольник. Однако эти многоугольники мы построим так, чтобы вершины двух соседних многоугольников находились не на одной и той же образующей, а попадали бы м е ж д у образующими, проходящими между вершинами соседнего многоугольника. Если, наконец, вершину каждого многоугольника соединить с ближайшими вершинами соседних многоугольников, то мы получим многогранник, вписанный в цилиндр, причем основаниями его будут служить два правильных m-угольника, а боковая поверхность его будет состоять из равнобедренных треугольников, которые все равны между собой и находятся в числе $2m$ в каждом поясе. Увеличивая неограниченно m и n, мы увидим, что грани многоугольника будут уменьшаться и величина их площади будет стремиться к нулю, а вся боковая поверхность многогранника будет неограниченно приближаться к боковой поверхности цилиндра.

Посмотрим, чему будет равен предел меры площади боковой поверхности многогранника. Для этого вычислим площадь каждого равнобедренного треугольника, являющегося гранью боковой поверхности. Основанием такого треугольника служит сторона правильного m-угольника, радиус которого равен R, поэтому длина этой стороны равна $2R\sin\frac{\pi}{m}$. Высотой равнобедренного треугольника служит гипотенуза AB прямоугольного треугольника ABC, у которого катет $\overline{BC} = \frac{h}{n}$, катет

$$\overline{AC} = \overline{OC} - \overline{OA} = R - R\cos\frac{\pi}{m} = 2R\sin^2\frac{\pi}{2m}.$$

Следовательно,

$$\overline{AB} = \sqrt{\frac{h^2}{n^2} + 4R^2\sin^4\frac{\pi}{2m}}.$$

Таким образом, мера площади каждого треугольника будет равна:

$$R\sin\frac{\pi}{m}\sqrt{\frac{h^2}{n^2} + 4R^2\sin^4\frac{\pi}{2m}}.$$

Так как в каждом поясе $2m$ таких треугольников, а всех поясов n, то мера площади всей боковой поверхности вписанного многогранника будет равна:

$$S_{mn} = 2mnR \sin\frac{\pi}{m} \sqrt{\frac{h^2}{n^2} + 4R^2 \sin^4 \frac{\pi}{2m}}.$$

Чтобы облегчить переход к пределу, полученное выражение преобразуем так:

$$S_{mn} = 2mnR \sin\frac{\pi}{m} \sqrt{\frac{h^2}{n^2} + 4R^2 \sin^4 \frac{\pi}{2m}} =$$

$$= 2\pi R \frac{\sin\frac{\pi}{m}}{\frac{\pi}{m}} \sqrt{h^2 + 4R^2 n^2 \sin^4 \frac{\pi}{2m}} =$$

$$= 2\pi R \frac{\sin\frac{\pi}{m}}{\frac{\pi}{m}} \sqrt{h^2 + 4\pi^4 R^2 \left[\frac{\sin\frac{\pi}{2m}}{\frac{\pi}{\sqrt{n}}}\right]^4}.$$

Имея теперь в виду, что $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, легко убедиться, что полученное выражение будет стремиться к различным пределам, в зависимости от того, по какому закону будут возрастать числа m и n. Положим, например, что $n = 4m^2$, тогда $\sqrt{n} = 2m$, и мы получим:

$$S = \lim_{m \to \infty} 2\pi R \frac{\sin\frac{\pi}{m}}{\frac{\pi}{m}} \sqrt{h^2 + 4\pi^4 R^2 \left[\frac{\sin\frac{\pi}{2m}}{\frac{\pi}{2m}}\right]^4} =$$

$$= 2\pi R \sqrt{h^2 + 4\pi^4 R^2}.$$

Если же положим $n = m^3$, то тогда при увеличении m боковая поверхность неограниченно возрастает, так как возрастает второе слагаемое под радикалом.

Действительно, при этом будем иметь:

$$\left[\frac{\sin\frac{\pi}{2m}}{\frac{\pi}{m\sqrt{m}}}\right]^4 = \frac{m^2}{16}\left[\frac{\sin\frac{\pi}{2m}}{\frac{\pi}{2m}}\right]^4.$$

При возрастании m первый множитель неограниченно возрастает, а второй стремится к 1.

Если, наконец, положить $n = m$, то это же слагаемое будет с возрастанием m стремиться к нулю, так как тогда получим:

$$\left[\frac{\sin\frac{\pi}{2m}}{\frac{\pi}{\sqrt{m}}}\right]^4 = \frac{16}{m^2}\left[\frac{\sin\frac{\pi}{2m}}{\frac{\pi}{2m}}\right]^4.$$

В этом случае искомый предел выразится числом $2\pi Rh$, т. е. будет равен обычно получаемому значению меры площади боковой поверхности.

Устанавливая новые взаимоотношения между m и n, мы будем получать все новые и новые значения искомого предела.

36. Пример с цилиндром Шварца наглядно показывает, что требование, предъявляемое нами к граням вписанного многоугольника, которое, по существу, заключается только в том, чтобы все точки этих граней сколь угодно близко подходили к точкам измеряемой поверхности, является совершенно недостаточным.

Подобно тому, как в случае плоской кривой мы требовали не только неограниченного приближения вписанной ломаной к точкам кривой, но также и того, чтобы каждое звено ломаной неограниченно приближалось по своему направлению к направлению касательной, мы и в случае поверхности должны требовать, чтобы при неограниченном приближении к поверхности каждая грань вписанного многогранника стремилась к совпадению с касательной плоскостью к поверхности.

Как это делается для кривых, и для поверхностей можно доказать, что именно при таком приближении к поверхности получающиеся предельные значения являются наименьшими из всех предельных значений, которые можно было бы получить, исходя из любых других произвольных вписанных многогранников.

Не имея возможности средствами элементарной геометрии рассмотреть этот вопрос во всей полноте, мы ограничимся рассмотрением поверхностей, обычно изучаемых в элементарной геометрии.

Рассмотрим прежде всего ц и л и н д р в р а щ е н и я с высотой h и радиусом R. Впишем в этот цилиндр n-угольную призму так, чтобы основанием ее был n-угольник, вписанный в окружность основания, а боковые ребра совпадали с образующими. Одновременно опишем около этого цилиндра n-угольную призму, основанием которой служили бы многоугольники, описанные около окружности основания путем проведения касательной в вершинах вписанных n-угольников, а боковые грани касались бы цилиндра по образующим. Неограниченно увеличивая n и притом так, чтобы длина каждой дуги окружности основания стремилась к нулю, мы убедимся, что меры площадей боковых поверхностей и вписанной и описанной призм удовлетворяют условиям сходимости.

Действительно, $S_n = P_n h$ и $S_n' = P_n' h$, где P_n и P_n' — периметры вписанного и описанного n-угольников. Так как последовательности $\{P_n; P'_n\}$ определяют число $2\pi R$, то последовательности $\{P_n h; P_n' h\}$, или, что все равно, $\{S_n; S_n'\}$, определяют число $2\pi R h$, которое и определяет величину меры площади боковой поверхности цилиндра вращения.

Полученный результат не зависит от выбора исходных призм, так как длина окружности не зависит от выбора исходных многоугольников.

Возьмем теперь к о н у с в р а щ е н и я с радиусом основания R и образующей l. Впишем в основание произвольный n-угольник и, соединяя его вершины с вершиной конуса, впишем в конус n-угольную пирамиду. Если одновременно провести касательные в точках деления оснований, то мы опишем около него n-угольник. Соединяя вершины его с вершинами конуса, получим описанную около конуса пирамиду, боковые грани которой будут касаться конуса по образующим.

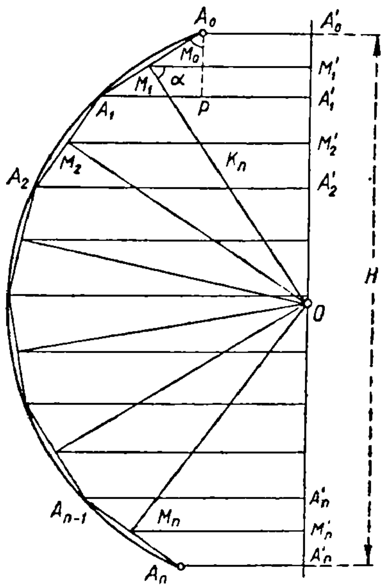


Рис. 30

Будем неограниченно увеличивать n, чтобы каждая дуга на окружности основания становилась сколь угодно малой.

Тогда меры площадей боковых поверхностей S_n и S_n' вписанной и описанной пирамид образуют числовые последовательности, удовлетворяющие условиям сходимости.

Действительно, $S_n = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} a_k l_k$, где a_k — длина k-й стороны n-угольника, а l_k — ее расстояние от вершины. $S_n' = \frac{1}{2} P_n' l$, где P_n' — периметр описанного n-угольника, образующая l служит высотой в каждой из боковых граней описанной пирамиды. Если все значения l_k заменить наименьшим из них — l_n, то получим: $S_n > \frac{1}{2} P_n l_n$, где P_n — периметр вписанного n-угольника.

Последовательности $\{P_n; P_n'\}$ определяют число $2\pi R$, последовательности $\{l_n, l\}$ определяют число l, так как $l - l_n < \varepsilon$, где ε —

расстояние от конца l_n (точка хорды) до конца l (точка касания), которое в условиях процесса может стать сколь угодно малым. Итак, $S_n < \frac{1}{2} 2\pi Rl < S'_n$, т. е. последовательности $\{S_n; S'_n\}$ определяют число πRl — меру площади боковой поверхности конуса вращения: $S = \pi Rl$. Если образующая наклонна к плоскости основания под углом α, то $\frac{R}{l} = \cos\alpha$, или $l = \frac{R}{\cos\alpha}$, поэтому $S = \frac{\pi R^2}{\cos\alpha}$.

Мера площади боковой поверхности усеченного конуса найдется как разность между мерой площади боковой поверхности полного конуса с радиусом R и образующей l' и дополнительного конуса с радиусом r и образующей l'': $S = \frac{\pi R^2}{\cos\alpha} - \frac{\pi r^2}{\cos\alpha}$ (α — общий угол наклона образующих). Отсюда получаем:

$$S = \frac{\pi}{\cos\alpha}(R^2 - r^2) = \frac{\pi(R+r)(R-r)}{\cos\alpha}.$$

Но $\frac{R-r}{\cos\alpha} = l' - l'' = l$ — образующей усеченного конуса.

Итак, $S = \pi(R+r)l$.

37. При определении меры площади поверхности сферы и ее частей мы будем пользоваться тем же способом последовательных приближений, каким пользовались для вычисления мер площадей боковых поверхностей цилиндра и конуса вращения.

Определение 3. *Сферическим поясом называется часть сферы, заключенная между двумя параллельными плоскостями, которые могут быть секущими и касательными. Расстояние между этими плоскостями называется высотой пояса.*

Теорема 5. *Мера площади поверхности сферического пояса равна произведению меры длины окружности большого круга на меру высоты пояса.*

Будем рассматривать сферу как поверхность, полученную вращением полуокружности с центром O около диаметральной прямой d.

Тогда сферический пояс можно рассматривать как поверхность вращения, описываемую дугой A_0A_n (рис. 30). Разделим эту дугу на n равных частей и, соединив точки деления, получим правильную ломаную линию $A_0A_1 \ldots A_{n-1}A_n$, все звенья которой равны между собой и имеют одну и ту же длину l. Ввиду того что равные хорды равноудалены от центра, расстояние каждого звена от центра обозначим через k_n. Обозначим через $M_1, M_2, \ldots, M_n$ середины звеньев, а через A_0', A_1', ..., A'_{n-1}, A_n', M_1', M_2', ..., M'_{n-1}, M_n' проекции соответствующих точек на ось d.

При вращении около оси d ломаная $A_0A_1 \dots A_n$ описывает поверхность вращения, которая тем ближе прилегает к поверхности сферы, чем меньше каждая из дуг A_0A_1, A_1A_2, ..., $A_{n-1}A_n$, т. е. чем больше число n.

Поэтому примем за меру площади поверхности шарового пояса предел, к которому стремится мера площади полученной поверхности вращения при неограниченном увеличении n.

Чтобы определить числовое значение этой меры, которую мы обозначим через S_n, заметим, что она есть сумма n мер поверхностей вращения, описываемых каждым звеном ломаной:

$$S_n = s_1 + s_2 + \dots + s_{n-1} + s_n.$$

Вычислим меру площади поверхности, описываемой первым звеном. По формуле для меры площади боковой поверхности усеченного конуса получим:

$$s_1 = \pi l\,(A_0A_0' + A_1A_1').$$

По свойству средней линии трапеции имеем:

$$\frac{A_0A_0' + A_1A_1'}{2} = M_1M_1' = r_1, \text{ или } A_0A_0' + A_1A_1' = 2r_1.$$

А из прямоугольного треугольника $OM_1M'_1$ имеем: $r_1 = k_n \cos\alpha$, где через α обозначена величина угла $OM_1M'_1$. Итак, мы получим:

$$s_1 = 2\pi k_n l_1 \cos\alpha.$$

Но угол $OM_1M'_1 = \angle A_1A_0P = \alpha$. Поэтому $l_1 \cos\alpha = h_1$, где через h_1 обозначена длина проекции первого звена на ось вращения. Итак, окончательно:

$$s_1 = 2\pi k_n h_1.$$

Подобным же образом для остальных звеньев получим:

$$s_2 = 2\pi k_n h_2;\ s_3 = 2\pi k_n h_3,\ \dots,\ s_{n-1} = 2\pi k_n h_{n-1};\ s_n = 2\pi k_n h_n.$$

Суммируя все эти равенства, получим:

$S_n = 2\pi k_n (h_1 + h_2 + \dots + h_{n-1} + h_n) = 2\pi k_n H$, где через H обозначена высота пояса.

Переходя к пределу, получим меру площади боковой поверхности сферического пояса:

$S_{сф.\,п} = \lim\limits_{n \to \infty} S_n = \lim\limits_{n \to \infty} 2\pi k_n H = 2\pi RH$, так как известно, что $\lim\limits_{n \to \infty} k_n = R$.

расстояние от конца l_n (точка хорды) до конца l (точка касания), которое в условиях процесса может стать сколь угодно малым. Итак, $S_n < \frac{1}{2} 2\pi R l < S'_n$, т. е. последовательности $\{S_n; S'_n\}$ определяют число $\pi R l$ — меру площади боковой поверхности конуса вращения: $S = \pi R l$. Если образующая наклонна к плоскости основания под углом α, то $\frac{R}{l} = \cos\alpha$, или $l = \frac{R}{\cos\alpha}$, поэтому $S = \frac{\pi R^2}{\cos\alpha}$.

Мера площади боковой поверхности усеченного конуса найдется как разность между мерой площади боковой поверхности полного конуса с радиусом R и образующей l' и дополнительного конуса с радиусом r и образующей l'': $S = \frac{\pi R^2}{\cos\alpha} - \frac{\pi r^2}{\cos\alpha}$ (α — общий угол наклона образующих). Отсюда получаем:

$$S = \frac{\pi}{\cos\alpha}(R^2 - r^2) = \frac{\pi(R+r)(R-r)}{\cos\alpha}.$$

Но $\frac{R-r}{\cos\alpha} = l' - l'' = l$ — образующей усеченного конуса.

Итак, $S = \pi(R+r)l$.

37. При определении меры площади поверхности сферы и ее частей мы будем пользоваться тем же способом последовательных приближений, каким пользовались для вычисления мер площадей боковых поверхностей цилиндра и конуса вращения.

Определение 3. *Сферическим поясом называется часть сферы, заключенная между двумя параллельными плоскостями, которые могут быть секущими и касательными. Расстояние между этими плоскостями называется высотой пояса.*

Теорема 5. *Мера площади поверхности сферического пояса равна произведению меры длины окружности большого круга на меру высоты пояса.*

Будем рассматривать сферу как поверхность, полученную вращением полуокружности с центром O около диаметральной прямой d.

Тогда сферический пояс можно рассматривать как поверхность вращения, описываемую дугой A_0A_n (рис. 30). Разделим эту дугу на n равных частей и, соединив точки деления, получим правильную ломаную линию $A_0A_1 \ldots A_{n-1}A_n$, все звенья которой равны между собой и имеют одну и ту же длину l. Ввиду того что равные хорды равноудалены от центра, расстояние каждого звена от центра обозначим через k_n. Обозначим через $M_1, M_2, \ldots, M_n$ середины звеньев, а через A_0', A_1', ..., A'_{n-1}, A_n', M_1', M_2', ..., M'_{n-1}, M_n' проекции соответствующих точек на ось d.

При вращении около оси d ломаная $A_0A_1... A_n$ описывает поверхность вращения, которая тем ближе прилегает к поверхности сферы, чем меньше каждая из дуг $A_0 A_1$, A_1A_2, ..., $A_{n-1} A_n$, т. е. чем больше число n.

Поэтому примем за меру площади поверхности шарового пояса предел, к которому стремится мера площади полученной поверхности вращения при неограниченном увеличении n.

Чтобы определить числовое значение этой меры, которую мы обозначим через S_n, заметим, что она есть сумма n мер поверхностей вращения, описываемых каждым звеном ломаной:

$$S_n = s_1 + s_2 + ... + s_{n-1} + s_n.$$

Вычислим меру площади поверхности, описываемой первым звеном. По формуле для меры площади боковой поверхности усеченного конуса получим:

$$s_1 = \pi l\,(A_0A_0' + A_1A'_1).$$

По свойству средней линии трапеции имеем:

$$\frac{A_0A_0' + A_1A_1'}{2} = M_1M_1' = r_1, \text{ или } A_0A_0' + A_1A_1' = 2r_1.$$

А из прямоугольного треугольника $OM_1M'_1$ имеем: $r_1 = k_n \cos\alpha$, где через α обозначена величина угла $OM_1M'_1$. Итак, мы получим:

$$s_1 = 2\pi\, k_n l_1 \cos\alpha.$$

Но угол $OM_1M'_1 = \angle A_1A_0P = \alpha$. Поэтому $l_1 \cos\alpha = h_1$, где через h_1 обозначена длина проекции первого звена на ось вращения. Итак, окончательно:

$$s_1 = 2\pi k_n h_1.$$

Подобным же образом для остальных звеньев получим:

$$s_2 = 2\pi k_n h_2;\ s_3 = 2\pi k_n h_3,\ \ldots,\ s_{n-1} = 2\pi k_n h_{n-1};\ s_n = 2\pi k_n h_n.$$

Суммируя все эти равенства, получим:

$S_n = 2\pi k_n (h_1 + h_2 + \ldots + h_{n-1} + h_n) = 2\pi k_n H$, где через H обозначена высота пояса.

Переходя к пределу, получим меру площади боковой поверхности сферического пояса:

$S_{\text{сф. п}} = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} 2\pi k_n H = 2\pi RH$, так как известно, что $\lim\limits_{n\to\infty} k_n = R$.

Следствие 1. *Мера полной площади поверхности сферы равна учетверенной мере площади большого круга:* $S_{сф} = 4\pi R^2$.

Для доказательства достаточно рассмотреть случай, когда две параллельные плоскости, определяющие сферический пояс, становятся касательными. Тогда в формуле $S_{сф.п} = 2\pi RH$ нужно будет положить $H = 2R$, и мы получим:

$$S_{сф} = 2\pi R \cdot 2R = 4\pi R^2.$$

Следствие 2. *Меры площадей поверхностей двух сфер относятся между собой как квадраты их мер радиусов.*

Пусть мы имеем сферы с радиусами R_1 и R_2.

Тогда для мер площадей их поверхностей получим:

$$S_1 = 4\pi R_1^2; \quad S_2 = 4\pi R_2^2.$$

Следовательно,

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{4\pi R_1^2}{4\pi R_2^2} = \frac{R_1^2}{R_2^2}.$$

38. В заключение посмотрим, как можно элементарным путем определить величину мер поверхности других частей сферы, обычно не определяемых в курсе средней школы.

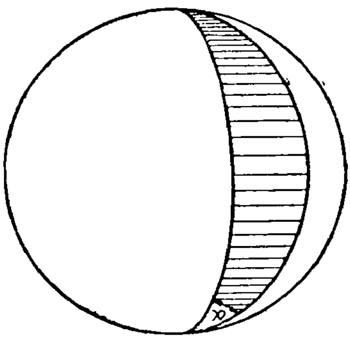


Рис. 31

Сферическим двуугольником называется часть сферы, заключенная между двумя диаметральными секущими плоскостями (рис. 31). Двугранный угол между этими плоскостями определяет угол двуугольника: линейный угол этого двугранного угла тождествен с углом между касательными к большим кругам в точке их пересечения на сфере. Чтобы определить числовое значение площади двуугольника, установим следующие его свойства (доказательства наличия этих свойств настолько элементарны, что мы предоставляем выполнить их учащимся):

1) Равным двуугольникам соответствуют и равные углы в них, и, обратно, *если равны углы двуугольников, то равны и сами двуугольники.*

2) *Если двуугольник состоит из двух двуугольников, то его угол равен сумме углов составляющих двуугольников.*

Из этих свойств следует, что численное значение поверхности двуугольника пропорционально величине его угла. Меру поверхности двугранника с углом, радианная мера которого равна α, мы будем обозначать S_α.

Рассматривая всю сферу как предельный случай двуугольника с углом, равным 2π, и сравнивая ее поверхность S с поверхностью двуугольника S_α, получим в силу пропорциональности:

$$\frac{S_\alpha}{S} = \frac{\alpha}{2\pi}, \text{ откуда } S_\alpha = \frac{\alpha S}{2\pi} = \frac{4\pi R^2\alpha}{2\pi} = 2R^2\alpha.$$

Итак, мера площади сферического двуугольника с углом α определяется формулой: $S_\alpha = 2R^2\alpha$.

Сферическим треугольником называется часть сферы, ограниченная тремя дугами окружностей больших кругов. Дуги эти называются сторонами треугольника, точки их пересечения — вершинами треугольника, углы между дугами, которые определяются как углы между касательными к дугам в вершинах, называются углами треугольника.

Определим меру площади сферического треугольника ABC с углами α, β, γ (рис. 32). Рассмотрим полусферу, ограниченную окружностью большого круга, на которой лежит сторона AB. Меру площади этой полусферы можно рассматривать как сумму мер площадей двуугольников S_α, S_β, S_γ, причем эти двуугольники дважды перекрывают друг друга на величину S_Δ — меру площади нашего сферического треугольника. Отсюда мы получаем равенство: $2\pi R^2 = S_\alpha + S_\beta + S_\gamma - 2S_\Delta$. Следовательно, $2S_\Delta = S_\alpha + S_\beta + S_\gamma - 2\pi R^2 = 2R^2\alpha + 2R^2\beta + 2R^2\gamma - 2\pi R^2$.

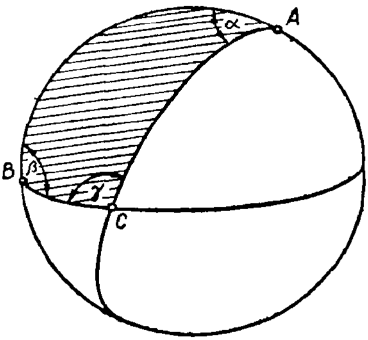


Рис. 32

Окончательно:

$$S_\Delta = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)R^2.$$

Величина $\alpha + \beta + \gamma - \pi = \sigma$ называется сферическим избытком или эксцессом треугольника. Она показывает, насколько сумма внутренних углов сферического треугольника больше суммы внутренних углов плоского треугольника. Таким образом, в наиболее краткой форме мера площади сферического треугольника определяется формулой: $S_\Delta = \sigma R^2$.

Зная меру площади сферического треугольника, легко определить меру площади любого сферического многоугольника, разбивая его на треугольники. А умея находить меру площади многоугольника, можно меру площади любой ограниченной фигуры на сфере определить, так же как в планиметрии, путем последовательного приближения при помощи площадей вписанных и описанных многоугольников.

Из формулы меры площади сферического треугольника следует, что на одной и той же сфере величина этой площади определяется только суммой внутренних углов этого треугольника. Поэтому треугольники с соответственно равными углами будут иметь и равные площади. В этом заключается одно из существенных отличий геометрии сферы от геометрии плоскости: на плоскости величина сторон треугольника не зависит от суммы его внутренних углов, и там мы имеем подобные треугольники с соответственно равными углами, размеры этих треугольников совершенно независимы один от другого. На сфере же размеры треугольника целиком определяются величиной их внутренних углов, и подобных треугольников, в обычном понимании этого слова, не существует.

Заключение

Глава об измерении геометрических величин отнесена к последнему разделу программы по геометрии для старших классов средней школы. Ввиду того что к этому времени учащиеся получают достаточную математическую подготовку, более глубокое изучение вопросов теории измерения не вызовет особых затруднений учащихся. Конечно, преподаватель в каждом отдельном случае может из предложенного учебного материала выбрать то, что он найдет наиболее необходимым и целесообразным в соответствии с уровнем математического развития данного состава учащихся.

Из рассмотренного нами материала мы считаем *безусловно необходимым* знание следующих разделов:

1) Определение понятия скалярной аддитивной непрерывной величины.

2) Знание аксиом непрерывности.

3) Определение действительного числа двумя сходящимися последовательностями и знание признаков сходимости.

4) Сравнение действительных чисел и основную теорему.

5) Измерение длины отрезка, инвариантность и аддитивность меры длины.

6) Общее определение меры площади. Существование меры площади прямоугольника и многоугольника. Аддитивность и инвариантность этих мер.

7) Общее определение меры объема. Существование меры объема прямого цилиндра. Следствие полученной формулы.

8) Вывод принципа Кавальери и формулы Симпсона. Приложение этих теорем к выводу формул для мер объема основных тел: произвольного цилиндра, конуса и шара.

9) Вывод формул для меры площади поверхности цилиндра, конуса, сферы.

Можно считать необязательным запоминание учащимися следующих выводов:

1) Сходимость последовательностей, определяющих произведение и частное действительных чисел.

2) Существование числа, определяемого последовательностями любых действительных чисел.

3) Вывод формулы для меры длины любой выпуклой и гладкой кривой можно заменить аналогичным выводом меры длины окружности.

4) Доказательство аддитивности и инвариантности меры объема многогранника можно заменить простым указанием на аналогичные предложения для многоугольников.

5) Вывод формулы для меры объема шарового сегмента и шарового сектора.

6) Вывод формулы для меры площади сферического двуугольника и сферического треугольника.

Вместе с тем следует иметь в виду, что отнесение теории измерения к последнему разделу курса геометрии вовсе не означает, что преподаватель не должен обращаться к решению вычислительных задач, заключающих вопросы определения мер длины, площади и объема. Нужно помнить, что еще в курсе восьмилетней школы учащиеся уже познакомились с формулами, определяющими меру площади и меру объема основных плоских фигур и пространственных тел. Поэтому, чтобы учащиеся не забыли эти формулы, нужно время от времени давать им вычислительные упражнения на применение этих формул, сообщая при этом, что более строгие выводы и обоснование их учащиеся получат в заключительном разделе курса.

ОГЛАВЛЕНИЕ

МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ГЕОМЕТРИИ

В старших классах средней школы

Редактор *Э. К. Викулина*
Переплет *И. А. Тарасов*
Художественный редактор *В. С. Эрденко*
Технический редактор *В. В. Новоселова*
Корректор *М. В. Голубева*

Сдано в набор 2/IX 1966 г. Подписано к печати 16/II 1967 г. 60×90 1/16. Типографская № 2. Печ. л. 17,0. Уч.-изд. л. 15,36. А04729. Тираж 125 тыс. экз. Заказ 576.

Издательство «Просвещение» Комитета по печати при Совете Министров РСФСР. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Саратовский полиграфический комбинат Росглавполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров РСФСР. Саратов, ул. Чернышевского, 59.

Цена без переплета 41 коп. переплет 10 коп.